



# Amélioration de maillages par des méthodes de sous-gradient

Charles Cua

## ► To cite this version:

Charles Cua. Amélioration de maillages par des méthodes de sous-gradient. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I; Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1985. Français. NNT: . tel-00318480

**HAL Id: tel-00318480**

**<https://theses.hal.science/tel-00318480>**

Submitted on 4 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **THESE**

présentée à

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

et à

**l'Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de 3ème Cycle**

**Mathématiques appliquées**

**option recherche opérationnelle**

par

**Charles Cua**

**Amélioration de Maillages**

par

**des Méthodes de Sous-Gradient**

Thèse soutenue le 23 Octobre 1985 devant la Commission d'Examen

|              |            |
|--------------|------------|
| J. FONLUPT   | Président  |
| J.L. COULOMB | Examineurs |
| P. GENOUX    |            |
| P.J. LAURENT |            |
| J. PERIAUX   |            |
| P. PERRIER   |            |



# THESE

présentée à

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

et à

**l'Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de 3ème Cycle**

**Mathématiques appliquées**

**option recherche opérationnelle**

par

**Charles Cua**

**Amélioration de Maillages**

par

**des Méthodes de Sous-Gradient**

Thèse soutenue le 23 Octobre 1985 devant la Commission d'Examen

|              |            |
|--------------|------------|
| J. FONLUPT   | Président  |
| J.L. COULOMB | Examineurs |
| P. GENOUX    |            |
| P.J. LAURENT |            |
| J. PERIAUX   |            |
| P. PERRIER   |            |



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

### PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

|                         |                                                         |
|-------------------------|---------------------------------------------------------|
| ARNAUD Paul             | Chimie organique                                        |
| ARVIEU Robert           | Physique nucléaire I.S.N.                               |
| AUBERT Guy              | Physique C.N.R.S.                                       |
| AYANT Yves              | Physique approfondie                                    |
| BARBIER Marie-Jeanne    | Electrochimie                                           |
| BARBIER Jean-Claude     | Physique expérimentale C.N.R.S.<br>(labo de magnétisme) |
| BARJON Robert           | Physique nucléaire I.S.N.                               |
| BARNOUD Fernand         | Biosynthèse de la cellulose-Biologie                    |
| BARRA Jean-René         | Statistiques - Mathématiques appliquées                 |
| BELORISKY Elie          | Physique                                                |
| BENZAKEN Claude (M.)    | Mathématiques pures                                     |
| BERNARD Alain           | Mathématiques pures                                     |
| BERTRANDIAS Françoise   | Mathématiques pures                                     |
| BERTRANDIAS Jean-Paul   | Mathématiques pures                                     |
| BILLET Jean             | Géographie                                              |
| BONNIER Jean-Marie      | Chimie générale                                         |
| BOUCHEZ Robert          | Physique nucléaire I.S.N.                               |
| BRAVARD Yves            | Géographie                                              |
| CARLIER Georges         | Biologie végétale                                       |
| CAUQUIS Georges         | Chimie organique                                        |
| CHIBON Pierre           | Biologie animale                                        |
| COLIN DE VERDIERE Yves  | Mathématiques pures                                     |
| CRABBE Pierre (détaché) | C.E.R.M.O.                                              |
| CYROT Michel            | Physique du solide                                      |
| DAUMAS Max              | Géographie                                              |
| DEBELMAS Jacques        | Géologie générale                                       |
| DEGRANGE Charles        | Zoologie                                                |
| DELOBEL Claude (M.)     | M.I.A.G. Mathématiques appliquées                       |
| DEPORTES Charles        | Chimie minérale                                         |
| DESRE Pierre            | Electrochimie                                           |
| DOLIQUE Jean-Michel     | Physique des plasmas                                    |
| DUCROS Pierre           | Cristallographie                                        |
| FONTAINE Jean-Marc      | Mathématiques pures                                     |
| GAGNAIRE Didier         | Chimie physique                                         |

.../...

|                              |                                              |
|------------------------------|----------------------------------------------|
| GASTINEL Noël                | Analyse numérique - Mathématiques appliquées |
| GERBER Robert                | Mathématiques pures                          |
| GERMAIN Jean-Pierre          | Mécanique                                    |
| GIRAUD Pierre                | Géologie                                     |
| IDELMAN Simon                | Physiologie animale                          |
| JANIN Bernard                | Géographie                                   |
| JOLY Jean-René               | Mathématiques pures                          |
| JULLIEN Pierre               | Mathématiques appliquées                     |
| KAHANE André (détaché DAFCO) | Physique                                     |
| KAHANE Josette               | Physique                                     |
| KOSZUL Jean-Louis            | Mathématiques pures                          |
| KRAKOWIAK Sacha              | Mathématiques appliquées                     |
| KUPTA Yvon                   | Mathématiques pures                          |
| LACAZE Albert                | Thermodynamique                              |
| LAJZEROWICZ Jeannine         | Physique                                     |
| LAJZEROWICZ Joseph           | Physique                                     |
| LAURENT Pierre               | Mathématiques appliquées                     |
| DE LEIRIS Joël               | Biologie                                     |
| LLIBOUTRY Louis              | Géophysique                                  |
| LOISEAUX Jean-Marie          | Sciences nucléaires I.S.N.                   |
| LOUP Jean                    | Géographie                                   |
| MACHE Régis                  | Physiologie végétale                         |
| MAYNARD Roger                | Physique du solide                           |
| MICHEL Robert                | Minéralogie et pétrographie (géologie)       |
| MOZIERES Philippe            | Spectrométrie - Physique                     |
| OMONT Alain                  | Astrophysique                                |
| OZENDA Paul                  | Botanique (biologie végétale)                |
| PAYAN Jean-Jacques (détaché) | Mathématiques pures                          |
| PEBAY PEYROULA Jean-Claude   | Physique                                     |
| PERRIAUX Jacques             | Géologie                                     |
| PERRIER Guy                  | Géophysique                                  |
| PIERRARD Jean-Marie          | Mécanique                                    |
| RASSAT André                 | Chimie systématique                          |
| RENARD Michel                | Thermodynamique                              |
| RICHARD Lucien               | Biologie végétale                            |
| RINAUDO Marguerite           | Chimie CERMAV                                |
| SENGEL Philippe              | Biologie animale                             |
| SERGERAERT Francis           | Mathématiques pures                          |
| SOUTIF Michel                | Physique                                     |
| VAILLANT François            | Zoologie                                     |
| VALENTIN Jacques             | Physique nucléaire I.S.N.                    |
| VAN CUTSEN Bernard           | Mathématiques appliquées                     |
| VAUQUOIS Bernard             | Mathématiques appliquées                     |
| VIALON Pierre                | Géologie                                     |

#### PROFESSEURS DE 2<sup>ème</sup> CLASSE

|                |                     |
|----------------|---------------------|
| ADIBA Michel   | Mathématiques pures |
| ARMAND Gilbert | Géographie          |

.../...

|                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| AURIAULT Jean-Louis           | Mécanique                      |
| BEGUIN Claude (M.)            | Chimie organique               |
| BOEHLER Jean-Paul             | Mécanique                      |
| BOITET Christian              | Mathématiques appliquées       |
| BORNAREL Jean                 | Physique                       |
| BRUN Gilbert                  | Biologie                       |
| CASTAING Bernard              | Physique                       |
| CHARDON Michel                | Géographie                     |
| COHENADDAD Jean-Pierre        | Physique                       |
| DENEUVILLE Alain              | Physique                       |
| DEPASSEL Roger                | Mécanique des fluides          |
| DOUCE Roland                  | Physiologie végétale           |
| DUFRESNOY Alain               | Mathématiques pures            |
| GASPARD François              | Physique                       |
| GAUTRON René                  | Chimie                         |
| GIDON Maurice                 | Géologie                       |
| GIGNOUX Claude (M.)           | Sciences nucléaires I.S.N.     |
| GUITTON Jacques               | Chimie                         |
| HACQUES Gérard                | Mathématiques appliquées       |
| HERBIN Jacky                  | Géographie                     |
| HICTER Pierre                 | Chimie                         |
| JOSELEAU Jean-Paul            | Biochimie                      |
| KERCKOVE Claude (M.)          | Géologie                       |
| LE BRETON Alain               | Mathématiques appliquées       |
| LONGEQUEUE Nicole             | Sciences nucléaires I.S.N.     |
| LUCAS Robert                  | Physiques                      |
| LUNA Domingo                  | Mathématiques pures            |
| MASCLE Georges                | Géologie                       |
| NEMOZ Alain                   | Thermodynamique (CNRS - CRTBT) |
| OUDET Bruno                   | Mathématiques appliquées       |
| PELMONT Jean                  | Biochimie                      |
| PERRIN Claude (M.)            | Sciences nucléaires I.S.N.     |
| PFISTER Jean-Claude (détaché) | Physique du solide             |
| PIBOULE Michel                | Géologie                       |
| PIERRE Jean-Louis             | Chimie organique               |
| RAYNAUD Hervé                 | Mathématiques appliquées       |
| ROBERT Gilles                 | Mathématiques pures            |
| ROBERT Jean-Bernard           | Chimie physique                |
| ROSSI André                   | Physiologie végétale           |
| SAKAROVITCH Michel            | Mathématiques appliquées       |
| SARROT REYNAUD Jean           | Géologie                       |
| SAXOD Raymond                 | Biologie animale               |
| SOUTIF Jeanne                 | Physique                       |
| SCHOOL Pierre-Claude          | Mathématiques appliquées       |
| STUTZ Pierre                  | Mécanique                      |
| SUBRA Robert                  | Chimie                         |
| VIDAL Michel                  | Chimie organique               |
| VIVIAN Robert                 | Géographie                     |



**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

**Année universitaire 1982-1983**

**Président de l'Université : D. BLOCH**

**Vice-Président : René CARRE**

**Hervé CHERADAME**

**Marcel IVANES**

**PROFESSEURS DES UNIVERSITES :**

|                         |                |
|-------------------------|----------------|
| ANCEAU François         | E.N.S.I.M.A.G. |
| BARRAUD Alain           | E.N.S.I.E.G.   |
| BAUDELET Bernard        | E.N.S.I.E.G.   |
| BESSON Jean             | E.N.S.E.E.G.   |
| BLIMAN Samuel           | E.N.S.E.R.G.   |
| BLOCH Daniel            | E.N.S.I.E.G.   |
| BOIS Philippe           | E.N.S.H.G.     |
| BONNETAIN Lucien        | E.N.S.E.E.G.   |
| BONNIER Etienne         | E.N.S.E.E.G.   |
| BOUVARD Maurice         | E.N.S.H.G.     |
| BRISSENEAU Pierre       | E.N.S.I.E.G.   |
| BUYLE BODIN Maurice     | E.N.S.E.R.G.   |
| CAVAIGNAC Jean-François | E.N.S.I.E.G.   |
| CHARTIER Germain        | E.N.S.I.E.G.   |
| CHENEVIER Pierre        | E.N.S.E.R.G.   |
| CHERADAME Hervé         | U.E.R.M.C.P.P. |
| CHERUY Arlette          | E.N.S.I.E.G.   |
| CHIAVERINA Jean         | U.E.R.M.C.P.P. |
| COHEN Joseph            | E.N.S.E.R.G.   |
| COUMES André            | E.N.S.E.R.G.   |
| DURAND Francis          | E.N.S.E.E.G.   |
| DURAND Jean-Louis       | E.N.S.I.E.G.   |
| FELICI Noël             | E.N.S.I.E.G.   |
| FOULARD Claude          | E.N.S.I.E.G.   |
| GENTIL Pierre           | E.N.S.E.R.G.   |
| GUERIN Bernard          | E.N.S.E.R.G.   |
| GUYOT Pierre            | E.N.S.E.E.G.   |
| IVANES Marcel           | E.N.S.I.E.G.   |
| JAUSSAUD Pierre         | E.N.S.I.E.G.   |
| JOUBERT Jean-Claude     | E.N.S.I.E.G.   |
| JOURDAIN Geneviève      | E.N.S.I.E.G.   |
| LACOUME Jean-Louis      | E.N.S.I.E.G.   |
| LATOMBE Jean-Claude     | E.N.S.I.M.A.G. |

|                          |                |
|--------------------------|----------------|
| LESSIEUR Marcel          | E.N.S.H.G.     |
| LESPINARD Georges        | E.N.S.H.G.     |
| LONGEQUEUE Jean-Pierre   | E.N.S.I.E.G.   |
| MAZARE Guy               | E.N.S.I.M.A.G. |
| MOREAU René              | E.N.S.H.G.     |
| MORET Roger              | E.N.S.I.E.G.   |
| MOSSIERE Jacques         | E.N.S.I.M.A.G. |
| PARIAUD Jean-Charles     | E.N.S.E.E.G.   |
| PAUTHENET René           | E.N.S.I.E.G.   |
| PERRET René              | E.N.S.I.E.G.   |
| PERRET Robert            | E.N.S.I.E.G.   |
| PIAU Jean-Michel         | E.N.S.H.G.     |
| POLOUJADOFF Michel       | E.N.S.I.E.G.   |
| POUPOT Christian         | E.N.S.E.R.G.   |
| RAMEAU Jean-Jacques      | E.N.S.E.E.G.   |
| RENAUD Maurice           | U.E.R.M.C.P.P. |
| ROBERT André             | U.E.R.M.C.P.P. |
| ROBERT François          | E.N.S.I.M.A.G. |
| SABONNADIÈRE Jean-Claude | E.N.S.I.E.G.   |
| SAUCIER Gabrielle        | E.N.S.I.M.A.G. |
| SCHLENKER Claire         | E.N.S.I.E.G.   |
| SCHLENKER Michel         | E.N.S.I.E.G.   |
| SERMET Pierre            | E.N.S.E.R.G.   |
| SILVY Jacques            | U.E.R.M.C.P.P. |
| SOHM Jean-Claude         | E.N.S.E.E.G.   |
| SOUQUET Jean-Louis       | E.N.S.E.E.G.   |
| VEILLON Gérard           | E.N.S.I.M.A.G. |
| ZADWORNY François        | E.N.S.E.R.G.   |

#### **PROFESSEURS ASSOCIES**

|                    |                |
|--------------------|----------------|
| BASTIN Georges     | E.N.S.H.G.     |
| BERRIL John        | E.N.S.H.G.     |
| CARREAU Pierre     | E.N.S.H.G.     |
| GANDINI Alessandro | U.E.R.M.C.P.P. |
| HAYASHI Hirashi    | E.N.S.I.E.G.   |

#### **PROFESSEURS UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES (Grenoble II)**

BOLLIET Louis  
Chatelin Françoise

#### **PROFESSEURS E.N.S. Mines de Saint-Etienne**

RIEU Jean  
SOUSTELLE Michel

#### **CHERCHEURS DU C.N.R.S.**

FRUCHART Robert  
VACHAUD Georges

Directeur de Recherche  
Directeur de Recherche

.../...

|                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| ALLIBERT Michel      | Maître de Recherche |
| ANSARA Ibrahim       | Maître de Recherche |
| ARMAND Michel        | Maître de Recherche |
| BINDER Gilbert       |                     |
| CARRE René           | Maître de Recherche |
| DAVID René           | Maître de Recherche |
| DEPORTES Jacques     |                     |
| DRIOLE Jean          | Maître de Recherche |
| GIGNOUX Damien       |                     |
| GIVORD Dominique     |                     |
| GUELIN Pierre        |                     |
| HOPFINGER Emil       | Maître de Recherche |
| JOUD Jean-Charles    | Maître de Recherche |
| KAMARINOS Georges    | Maître de Recherche |
| KLEITZ Michel        | Maître de Recherche |
| LANDAU Ioan-Dore     | Maître de Recherche |
| LASJAUNIAS J.C.      |                     |
| MERMET Jean          | Maître de Recherche |
| MUNIER Jacques       | Maître de Recherche |
| PIAU Monique         |                     |
| PORTESEIL Jean-Louis |                     |
| THOLENCE Jean-Louis  |                     |
| VERDILLON André      |                     |

**CHERCHEURS du MINISTERE de la RECHERCHE et de la TECHNOLOGIE (Directeurs et Maîtres de Recherches, ENS Mines de St. Etienne)**

|                   |                        |
|-------------------|------------------------|
| LESBATS Pierre    | Directeur de Recherche |
| BISCONDI Michel   | Maître de Recherche    |
| KOBYLANSKI André  | Maître de Recherche    |
| LE COZE Jean      | Maître de Recherche    |
| LALAUZE René      | Maître de Recherche    |
| LANCELOT Francis  | Maître de Recherche    |
| THEVENOT François | Maître de Recherche    |
| TRAN MINH Canh    | Maître de Recherche    |

**PERSONNALITES HABILITEES à DIRIGER des TRAVAUX de RECHERCHE (Décision du Conseil Scientifique)**

|                       |              |
|-----------------------|--------------|
| ALLIBERT Colette      | E.N.S.E.E.G. |
| BERNARD Claude        | E.N.S.E.E.G. |
| BONNET Rolland        | E.N.S.E.E.G. |
| CAILLET Marcel        | E.N.S.E.E.G. |
| CHATILLON Catherine   | E.N.S.E.E.G. |
| CHATILLON Christian   | E.N.S.E.E.G. |
| COULON Michel         | E.N.S.E.E.G. |
| DIARD Jean-Paul       | E.N.S.E.E.G. |
| EUSTAPOPOULOS Nicolas | E.N.S.E.E.G. |
| FOSTER Panayotis      | E.N.S.E.E.G. |

.../...

**GALERIE Alain**  
**HAMMOU Abdelkader**  
**MALMEJAC Yves**  
**MARTIN GARIN Régina**  
**NGUYEN TRUONG Bernadette**  
**RAVAINE Denis**  
**SAINFORT**  
**SARRAZIN Pierre**  
**SIMON Jean-Paul**  
**TOUZAIN Philippe**  
**URBAIN Georges**

**GUILHOT Bernard**  
**THOMAS Gérard**  
**DRIVER Julien**  
**BARIBAUD Michel**  
**BOREL Joseph**  
**CHOVET Alain**  
**CHEHIKIAN Alain**  
**DOLMAZON Jean-Marc**  
**HERAULT Jeanny**  
**MONLLOR Christian**  
**BORNARD Guy**  
**DESCHIZEAU Pierre**  
**GLANGEAUD François**  
**KOFMAN Walter**  
**LEJEUNE Gérard**  
**MAZUER Jean**  
**PERARD Jacques**  
**REINISCH Raymond**  
**ALEMANY Antoine**  
**BOIS Daniel**  
**DARVE Félix**  
**MICHEL Jean-Marie**  
**OBLED Charles**  
**ROWE Alain**  
**VAUCLIN Michel**  
**WACK Bernard**  
**BERT Didier**  
**CALMET Jacques**  
**COURTIN Jacques**  
**COURTOIS Bernard**  
**DELLA DORA Jean**  
**FONLUPT Jean**  
**SIFAKIS Joseph**  
**CHARUEL Robert**  
**CADET Jean**  
**COEURE Philippe**

[illegible]

...../.....

DELHAYE Jean-Marc  
DUPUY Michel  
JOUVE Hubert  
NICOLAU Yvan  
NIFENECKER Hervé  
PERROUD Paul  
PEUZIN Jean-Claude  
TAIEB Maurice  
VINCENDON Marc

C.E.N.G. (STT)  
C.E.N.G. (LETI)  
C.E.N.G. (LETI)  
C.E.N.G. (LETI)  
C.E.N.G.  
C.E.N.G.  
C.E.N.G. (LETI)  
C.E.N.G.  
C.E.N.G.

#### **LABORATOIRES EXTERIEURS**

DEMOULIN Eric  
DEVINE  
GERBER Roland  
MERCKEL Gérard  
PAULEAU Yves  
GAUBERT C.

C.N.E.T.  
C.N.E.T. (R.A.B.)  
C.N.E.T.  
C.N.E.T.  
C.N.E.T.  
I.N.S.A. Lyon



J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. FONLUPT qui a dirigé mes recherches pour cette thèse. Son attention, ses conseils et sa patience ont contribué énormément à l'accomplissement de ce travail. Je le remercie aussi pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Que Messieurs P. PERRIER et J. PERIAUX soient vivement remerciés pour l'intérêt qu'ils ont apporté à ce travail, pour leurs conseils et leur accueil chaleureux durant les stages que j'ai effectués à AVIONS MARCEL DASSAULT/ BREGUET AVIATION. Ces stages m'ont permis de me familiariser avec le problème et certains des logiciels le concernant. Monsieur PERRIER est chef de département de l'aérodynamique théorique; Monsieur PERIAUX est chef de service, analyse numérique.

Je remercie aussi Messieurs P.J. LAURENT, professeur à l'USMG, J.L. COULOMB, maître de conférence à l'ENSIEG, et P. GENOUX, ingénieur principal de l'armement, pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Tout mes remerciements également aux membres de l'équipe de Recherche Operationnelle et de l'ARTEMIS et, de manière particulière, à Y. PAILLET, D. CHEVROLET, A. ZEMERLINE, M. BURLET, J.C. LACOTE, G. KUNTZ, A. ELNACHEF et à l'équipe DGT/DEA d'AVIONS MARCEL DASSAULT/ BREGUET AVIATION notamment C. POULETTY, pour les divers conseils et qu'ils m'ont donné.

Que soient remerciés Mr. D. IGLESIAS et le service de reprographie de l'IMAG qui ont assuré la réalisation matérielle de ce travail.

Que trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude tous ceux qui m'ont apporté un soutien moral indispensable pour faire mes études en France, notamment Mr. G. DE NALE, Mr. D. PHILIPPE, M. et Mme. P. FOUILLET, Mme. G. VELLOTT, et mes chers amis du groupe DJ Grenoble.



## TABLE DES MATIERES

|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. INTRODUCTION                                                                                                    | 1  |
| 2. RAPPELS                                                                                                         | 4  |
| 2.1 Rappels sur la Nature des Maillages Eléments Finis                                                             | 4  |
| 2.2 Rappels sur les Méthodes des Maillages Eléments Finis                                                          | 4  |
| 2.2.1 Méthodes de Génération de Maillage                                                                           | 4  |
| 2.2.2 Méthodes de l'Amélioration de Maillage                                                                       | 12 |
| 2.3 Rappels sur les Méthodes de Gradient et de Sous-Gradient<br>en Optimisation                                    | 14 |
| 3. SPECIFICATION DU PROBLEME ET<br>DE LA METHODE DE RESOLUTION                                                     | 15 |
| 3.1 Présentation Sommaire du Problème                                                                              | 15 |
| 3.2 Etude des Contraintes du Problème                                                                              | 15 |
| 3.3 Etude des Critères d'Amélioration                                                                              | 16 |
| 3.4 Formulation Mathématique du Problème                                                                           | 17 |
| 3.5 Représentation de $V_i(P_0)$ , le Volume du $i^{\text{ème}}$ Tétraèdre<br>Entourant $P_0$                      | 18 |
| 3.6 Présentation Sommaire de la Méthode de Sous-Gradient<br>Utilisée en tant que Méthode de Résolution du Problème | 19 |
| 4. PRESENTATION DETAILLEE DES ALGORITHMES -<br>ALGO1 ET ALGOTOUT                                                   | 20 |
| 4.1 ALGO1 - Algorithme pour Bouger un Seul Noeud $P_0$                                                             | 20 |
| 4.1.1 Le Choix de la Direction de Descente en tant que<br>Direction d'Amélioration                                 | 20 |
| 4.1.2 Le Choix du Pas à Prendre<br>dans la Direction d'Amélioration                                                | 21 |
| 4.1.3 Résumé de la Méthode de Résolution                                                                           | 24 |
| 4.1.4 Un Exemple de l'Exécution de l'ALGO1                                                                         | 25 |
| 4.1.5 Trois Exemples de l'Exécution de l'ALGO1<br>en Faisant Varier la Fonction Objective                          | 28 |

|       |                                                                                                                                                                               |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2   | ALGOTOUT - Algorithme pour Bouger un Ensemble de Noeuds<br>en les Bougeant Un par Un                                                                                          | 29  |
| 4.2.1 | Le Choix de la Fonction Objective à Minimiser                                                                                                                                 | 29  |
| 4.2.2 | Le Choix du Nombre d'Itérations Successives<br>pour Bouger un Noeud et du Nombre de Balayages<br>pour Bouger un Ensemble de Noeuds                                            | 30  |
| 4.2.3 | Le Choix des Noeuds à Bouger,<br>et de l'Ordre dans Lequel Ils Seront Bougés                                                                                                  | 39  |
| 5.    | RESULTATS NUMERIQUES                                                                                                                                                          | 43  |
| 5.1   | Résultats sur Quatre Cas d'Ecole et Trois Cas Réels                                                                                                                           | 43  |
| 5.1.1 | Quelques Résultats en Dimensions 2 et 3 sur<br>l'Ordinateur HB-68 (Système d'Exploitation MULTICS)                                                                            | 43  |
| 5.1.2 | Courbes de Convergences de POURAME,<br>le Pourcentage d'Amélioration Par Rapport<br>au Nombre de Balayages de l'Ensemble de Noeuds                                            | 64  |
| 5.2   | Autres Résultats                                                                                                                                                              | 68  |
| 6.    | CONCLUSIONS                                                                                                                                                                   | 83  |
|       | ANNEXES INFORMATIQUES                                                                                                                                                         | 85  |
|       | Annexe 1 : Description des Variables et Programmes Principaux<br>Utilisés dans les Programmes Informatiques<br>de l'ALGO1 et de l'ALGOTOUT<br>en dimension 3 (en dimension 2) | 85  |
|       | Annexe 2.1 : Programmes de l'ALGO1 en dimension 2                                                                                                                             | 87  |
|       | Annexe 2.2 : Programmes de l'ALGOTOUT en dimension 2                                                                                                                          | 95  |
|       | Annexe 3 : Programmes de l'ALGOTOUT en dimension 3                                                                                                                            | 100 |
|       | Annexe 4.1 : La Déroulement de l'ALGO1 en Bougeant<br>Une Fois le Noeud 6                                                                                                     | 111 |
|       | Annexe 4.2 : Bouger le Noeud 10 Une Fois par $C_1(P_0)$                                                                                                                       | 112 |
|       | Annexe 4.3 : Bouger le Noeud 10 Une Fois par $C_2(P_0)$                                                                                                                       | 114 |

|                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Annexe 5.1 : Bouger le Noeud 6 en 5 Itérations                                                       | 118 |
| Annexe 5.2 : Bouger le Noeud 10 en 5 Itérations                                                      | 120 |
| Annexe 5.3 : Bouger le Noeud 10 en 5 Itérations par $C_3(P_0)$<br>avec une Itération Non-Améliorante | 122 |
| Annexe 6 : Bouger 12 Noeuds avec 3 Itérations par Noeud<br>et 3 Tours pour l'Ensemble de Noeuds      | 123 |
| Annexe 7 : Maillage à Trois Etapes                                                                   | 124 |

|               |     |
|---------------|-----|
| BIBLIOGRAPHIE | 127 |
|---------------|-----|



## 1. INTRODUCTION

Un grand nombre de phénomènes physiques en mécanique, en électrodynamique, en thermodynamique, par exemple, peuvent s'étudier par la résolution d'équations aux dérivées partielles. Cette résolution se fait, en général, par des méthodes d'éléments finis, c'est à dire à partir d'un découpage de l'espace étudié en tétraèdres en dimension 3 ou triangles en dimension 2. Ainsi, dans l'aéronautique, le problème de l'écoulement d'air autour des parois d'un avion peut-il s'aborder de cette manière. L'obtention d'un bon découpage de l'espace autour d'une forme d'avion que nous appellerons également maillage de l'espace est un problème difficile pour lequel aucune méthodologie systématique n'existe réellement, même si en pratique un grand nombre de méthodes plus ou moins adaptées au type de problème étudié permet de répondre à ces questions mais d'une manière qui n'est pas toujours satisfaisante.

C'est à partir d'une question soulevée par la DGT/DEA, Avions Marcel Dassault/ Breguet Aviation que nous avons abordé cette recherche. Résumons les problèmes soulevés par le maillage de l'espace autour d'une forme d'avion.

On peut distinguer deux grandes questions à poser sur les maillages :

- 1) la création d'un maillage
- 2) l'amélioration d'un maillage.

Le problème de la création d'un maillage initial peut être excessivement complexe surtout quand les formes autour desquelles s'effectue ce maillage sont complexes, ce qui est le cas en aéronautique. Nous n'avons pas abordé ici ce problème.

Un bon maillage doit satisfaire certaines conditions liées au problème étudié, par exemple,

- des conditions géométriques du genre: les tétraèdres ne doivent pas être trop aplatis, deux tétraèdres voisins doivent avoir des volumes aussi proches que possible,
- des conditions liées au problème physique étudié: dans le cas d'avions, des phénomènes physiques se produiront à des endroits bien connus (à l'avant du fuselage, au bord des ailes), et dans ces endroits il faut une forte densité de points, tandis que dans d'autres endroits loin de la surface de l'avion, on peut avoir une plus faible densité de points.

Quand on s'intéresse au problème d'amélioration d'un maillage, on peut se poser deux types de questions :

- 1) D'abord, comment améliorer le maillage par changement de topologie actuelle. Cette question facile dans le cadre de deux dimensions est plus délicate en trois dimensions, car il n'est pas facile de passer d'une structure de tétraèdres à une structure voisine.

2) Sans changer la structure actuelle de tétraèdres, comment bouger les points afin d'obtenir une meilleure tétraèdrisation à partir d'un critère géométrique ou physique qu'on se fixe.

C'est ce dernier problème qui est abordé dans cette thèse. Il s'agit donc d'une étape dans le cadre du problème général d'obtention d'un maillage. Dans la littérature, on peut trouver des méthodes spécifiques adaptées à tel ou tel type de problème, mais qui ne peuvent se généraliser.

Notre travail propose une méthode générale et algorithmique fondée sur des méthodes d'optimisation classique en recherche opérationnelle qui permet d'englober un grand nombre des méthodes actuelles et d'en proposer de nouvelles. Nos méthodes ont été testées sur des exemples d'école qui ont permis de bien ajuster les algorithmes choisis. Elles ont aussi été testées sur des cas réels, en collaboration avec la DGT/DEA, Avions Marcel Dassault/ Breguet Aviation.

Notre effort a porté sur la réalisation d'algorithmes efficaces, c'est à dire que nous avons essayé de trouver un compromis entre l'utilisation des méthodes puissantes de l'analyse numérique qui souvent ne sont pas applicables car trop lourdes et le désir d'obtenir un bon maillage à partir d'un maillage donné.

Les algorithmes proposés sont connus sous le nom de méthodes de sous-gradient (cf l'article de Held et Crowder [22]). Leur avantage est d'être rapide au moins dans les premières itérations, c'est à dire de donner rapidement une bonne solution, contrairement aux méthodes classiques, mais elles ne permettent pas d'obtenir une solution optimale pour un problème de minimisation donné. Ceci semble bien adapté dans notre problème car les critères d'optimisation choisis sont toujours plus ou moins subjectifs et chercher la meilleure solution suivant tel ou tel critère n'a pas de véritable intérêt.

On trouve dans le deuxième chapitre de brefs rappels sur la nature des maillages de type éléments finis, sur les méthodes connues de génération et d'amélioration des maillages, et sur la nature du sous-gradient en tant qu'outil pour la résolution des problèmes d'optimisation.

Le chapitre 3 présente le problème en définissant ses contraintes et les objectifs à atteindre. Il propose ensuite des méthodes de résolution connues sous le nom de méthodes de sous-gradient en décrivant les étapes principales à effectuer en utilisant ces méthodes pour résoudre le problème.

Le chapitre 4 décrit en détail les méthodes de résolution proposées au chapitre 3. Ce chapitre peut se diviser en deux parties :

1) On cherche à fixer tous les noeuds du maillage sauf un, et on crée un algorithme qui consiste à replacer ce noeud et à améliorer le critère d'amélioration choisi. Nous appellerons cet algorithme ALGO1.

2) On applique ALGO1 itérativement en balayant tous les noeuds internes, et ce balayage est refait un certain nombre de fois. Nous appellerons ALGOTOUT l'algorithme qui effectue cette application itérative de l'ALGO1 .

On trouve aussi dans le chapitre 4 des applications des algorithmes ALGO1 et ALGOTOUT sur des cas d'école pour montrer le comportement de ces deux algorithmes.

Le chapitre 5 présente l'application de l'ALGOTOUT sur quatre cas d'école et trois cas réels proposés par la DGT/DEA, Avions Marcel Dassault/ Breguet Aviation. On calcule le temps moyen pour bouger une seule fois un noeud dans chacun de ces sept cas. On mesure le degré d'amélioration du maillage résultant par rapport au maillage initial. On trouve aussi d'autres applications de l'ALGO1 par DGT/DEA, Avions Marcel Dassault/ Breguet Aviation en conjonction avec certains de leurs algorithmes.

Dans le chapitre 6 sont données les conclusions de cette étude.

Enfin, en annexes, sont donnés les listings des programmes informatiques de l'ALGO1 et l'ALGOTOUT, précédés par une description préliminaire des variables et des sous-programmes principaux présents dans les programmes informatiques. On trouve aussi une présentation informatique détaillée du déroulement de l'exécution des deux algorithmes sur des cas d'école du chapitre 4.

## 2. RAPPELS

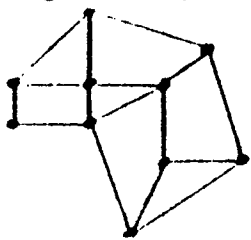
### 2.1 Rappels sur la Nature des Maillages Eléments Finis

Un maillage de type éléments finis peut se définir de la manière suivante :

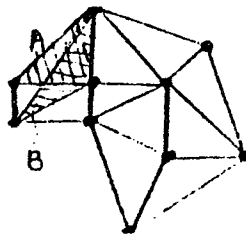
La zone étudiée est découpée uniquement en tétraèdres; chaque tétraèdre est défini par quatre sommets; l'intersection de deux tétraèdres est limitée à un seul sommet, ou à une seule arête (une arête est définie par deux sommets), ou à la seule face commune possible aux deux tétraèdres (une face est définie par trois sommets), ou est vide; chaque face de tétraèdre appartient à deux tétraèdres, à l'exception des faces sur la frontière de la zone étudiée qui appartient à un seul tétraèdre. En dimension 2, la zone est découpée en triangles.

Voici trois exemples en dimension 2 d'une décomposition de l'espace qui n'est pas un maillage de type éléments finis.

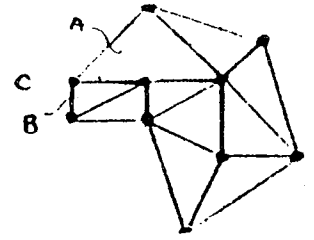
Figure 2.1 (maillage dimension 2)



une décomposition de l'espace mais pas uniquement en triangles



l'intersection des triangles A et B n'est ni un seul sommet ni une seule arête



l'arête C du triangle B n'est pas une arête du triangle A

### 2.2 Rappels sur les Méthodes des Maillages Eléments Finis

#### 2.2.1 Méthodes de Génération de Maillage

Diverses méthodes existent dans le domaine de génération des maillages éléments finis, c'est à dire, la tétraèdrisation initiale de l'espace à mailler. Un panorama de ces méthodes se trouve dans l'article [18] de W.C.Thacker. Voici une description sommaire de certaines de ces méthodes :

- (1) Parmi les méthodes qui se basent sur la construction d'un par un des tétraèdres, l'article [13] de Nguyen-van-Phai et l'article [12] de McInnis utilisent des critères géométriques pour le choix du noeud  $D$  parmi les noeuds définis sur l'espace à mailler afin de construire le tétraèdre  $ABCD$  à partir du triangle  $ABC$  qui fait partie du maillage actuel. Ces méthodes sont limitées aux espaces convexes ou presque convexes, et, même dans ces cas, la possibilité d'avoir un maillage non réalisable existe.

En partant d'un maillage qui contient des quadrilatères non maillés (en dimension 2), l'article [10] de Kleinstreuer et Holdeman donne le choix de la diagonale du quadrilatère qui découpe le quadrilatère en deux triangles les plus équilatéraux possibles, comme c'est illustré par la figure 2.2. Il utilise la mesure d'angles de ces triangles pour faire son choix.

Figure 2.2 (en dimension 2)



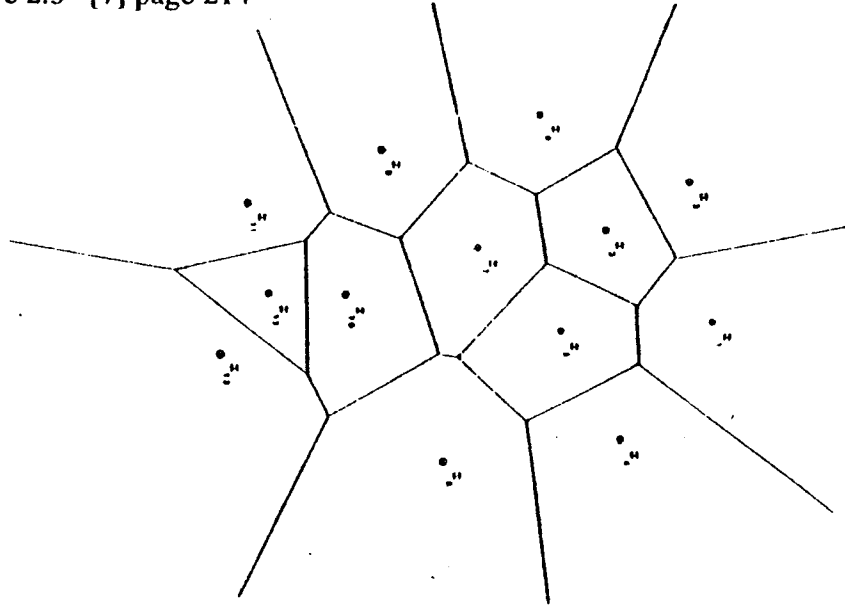
On préfère la diagonale  $D$  à la diagonale  $D'$ .

- (2) On trouve des méthodes de découpage de l'espace en polyèdres convexes ou presque convexes dans les articles de Bykat [2] et de Kamel et Eisenstein [9] (en dimension 2) et dans l'article de Zienkiewicz et Phillips [21] (en dimension 3). Un article qui présente plus d'intérêt que les autres car il utilise comme seul outil de génération de maillage des découpages successifs de l'espace en polyèdres est l'article [11] de Lewis et Robinson. Il donne un algorithme récursif sans se soucier de la convexité des régions intermédiaires. Dans le cas de dimension 2, cet algorithme choisit une droite, qui sépare la région en 2, et 2 seulement, parties de superficies égales. La frontière qui va définitivement découper la région en deux est formée par des noeuds choisis à proximité de cette droite, de plus, deux noeuds consécutifs de cette frontière ne sont pas dans le même demi-plan défini par cette droite. L'algorithme est appliqué récursivement sur les nouvelles régions. Preparata et Hong dans l'article [15] utilise un algorithme semblable à celui de Lewis et Robinson.
- (3) Hermeline dans l'article [7] donne un algorithme (en dimension 2) qui permet de construire une triangulation de Delaunay qui, en fait, est le dual des polygones de Voronoi.
- Voici la définition d'un polygone de Voronoi :

Soient  $n$  points:  $x_1, \dots, x_n$  de l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Le polygone de Voronoi associé au point  $x_i$  est l'ensemble des points  $x \in \mathbb{R}^2$  tel que  $d(x, x_i) \leq d(x, x_j)$  pour tout  $x_j, j=1, \dots, n; j \neq i$  ( $d(x, y)$  désigne la distance euclidienne de  $x$  à  $y$ ).

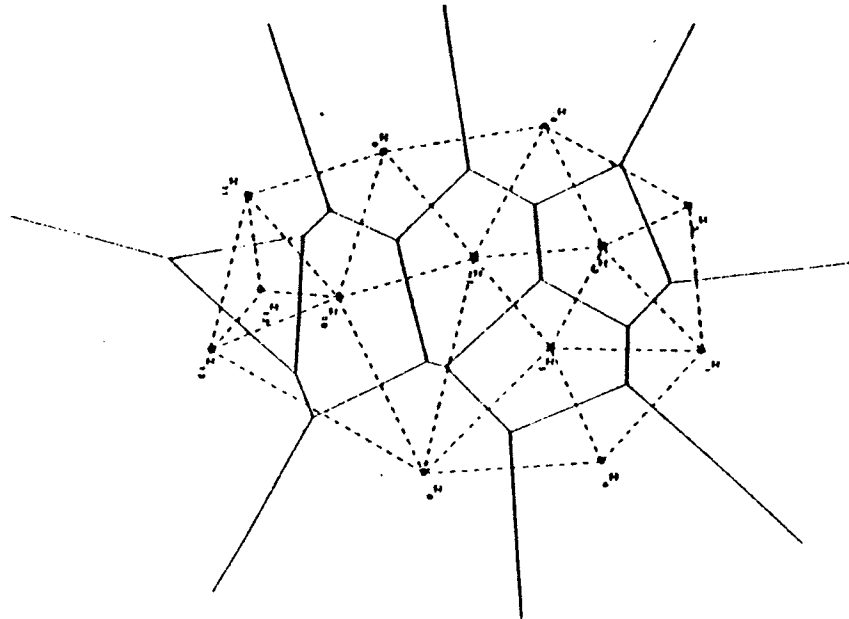
Voici un exemple d'un polygone de Voronoi associé à l'ensemble  $E=\{x_1, \dots, x_{13}\}$ .

Figure 2.3 [7] page 214



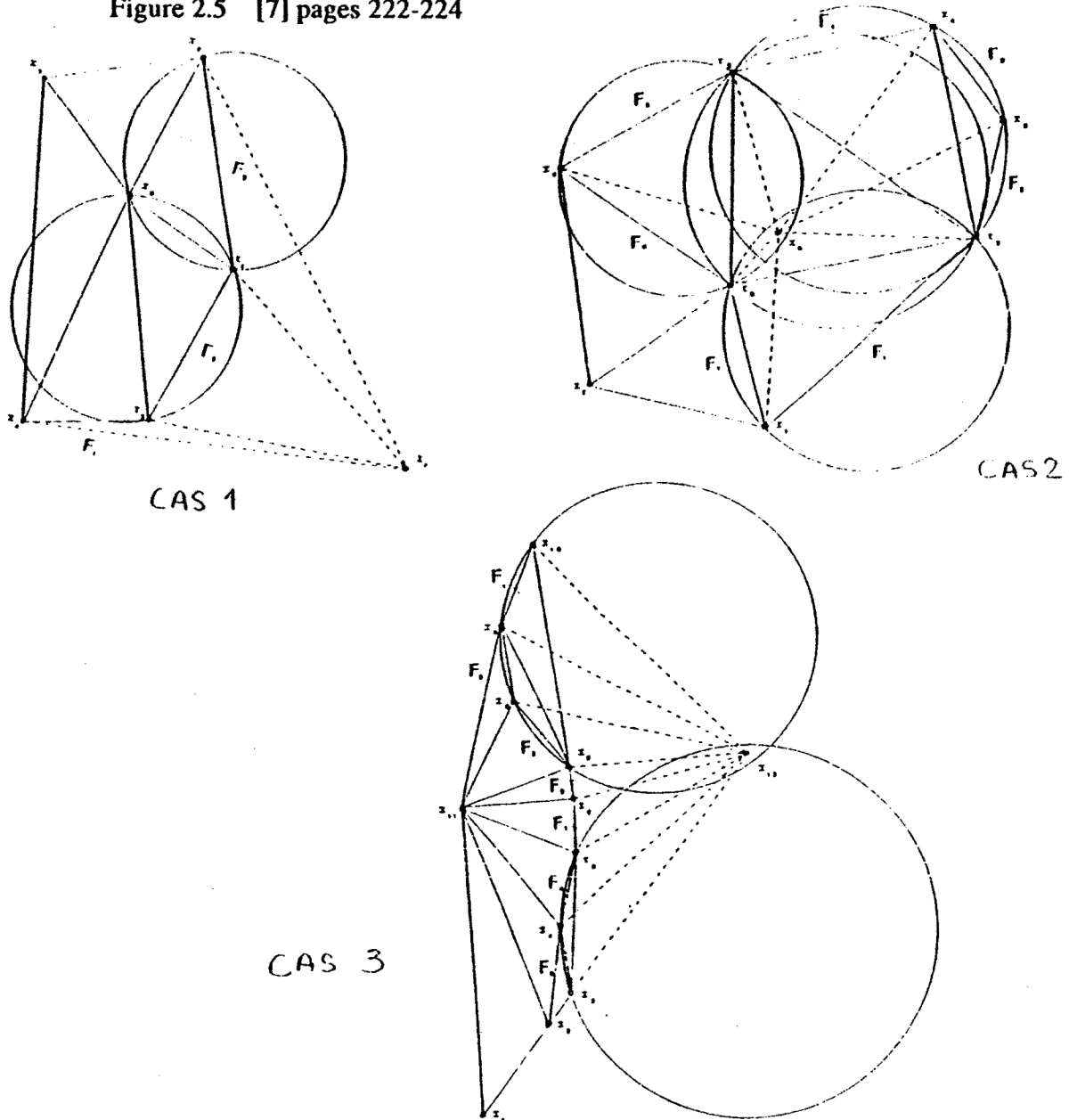
Voici la triangulation de Delaunay associée à l'exemple ci-dessus :

Figure 2.4 [7] page 215



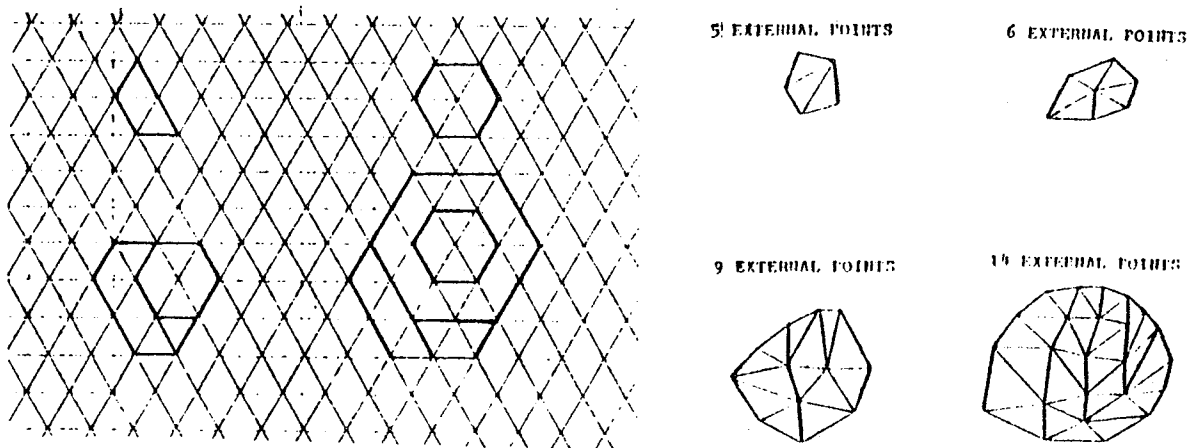
L'algorithme d'Hermeline permet de trianguler un espace non-convexe (en dimension 2) en triangulant d'abord l'enveloppe convexe de cet espace. Ensuite, il effectue la triangulation frontalière et la triangulation des faces singulières en faisant entrer noeud par noeud les noeuds de la frontière et des faces singulières. Pour faire entrer un noeud déjà placé à l'avance dans un maillage connu, il réutilise la triangulation de Delaunay pour la nouvelle triangulation comprenant ce noeud. Voici les trois cas possibles qu'on peut avoir pour remailler avec ce nouveau noeud. Dans le premier cas, aucun triangle actuel (en trait plein) n'a été modifié, et trois nouveaux triangles ont été créés (en pointillé). Dans le second cas, quatre triangles sont remplacés par sept nouveaux, tandis que, dans le troisième, trois triangles sont remplacés par sept nouveaux.

Figure 2.5 [7] pages 222-224



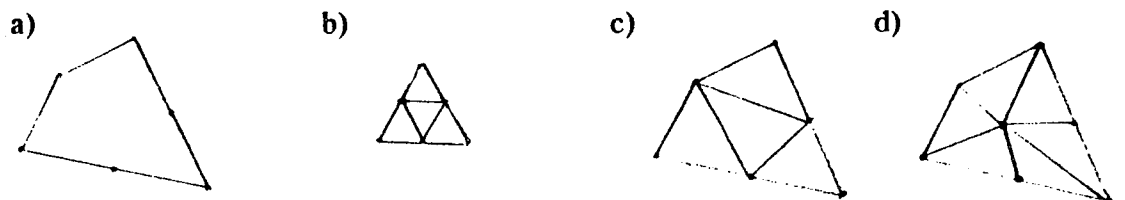
(4) Ayant le souci d'avoir une triangulation telle que les triangles soient le plus équilatéraux possible (en dimension 2), Kamel et Eisenstein dans l'article [9] donne des maillages intéressants en fonction uniquement du nombre de noeuds frontaliers et de la forme de la figure à mailler. Voici un exemple des quatre configurations de base ayant comme nombre de noeuds frontaliers 5; 6; 9 et 14 (cf grille de gauche de la figure 2.6). Ces quatre configurations de base donnent les maillages pour les quatre figures de droite :

Figure 2.6 [9] page 461



S'il veut mailler une figure ayant six noeuds frontaliers comme a) dans la figure 2.7, au lieu d'utiliser la configuration de base donnée dans la grille pour six noeuds frontaliers, il choisirait plutôt la configuration qu'on propose ici en b) qui donne alors comme maillage c) au lieu de d).

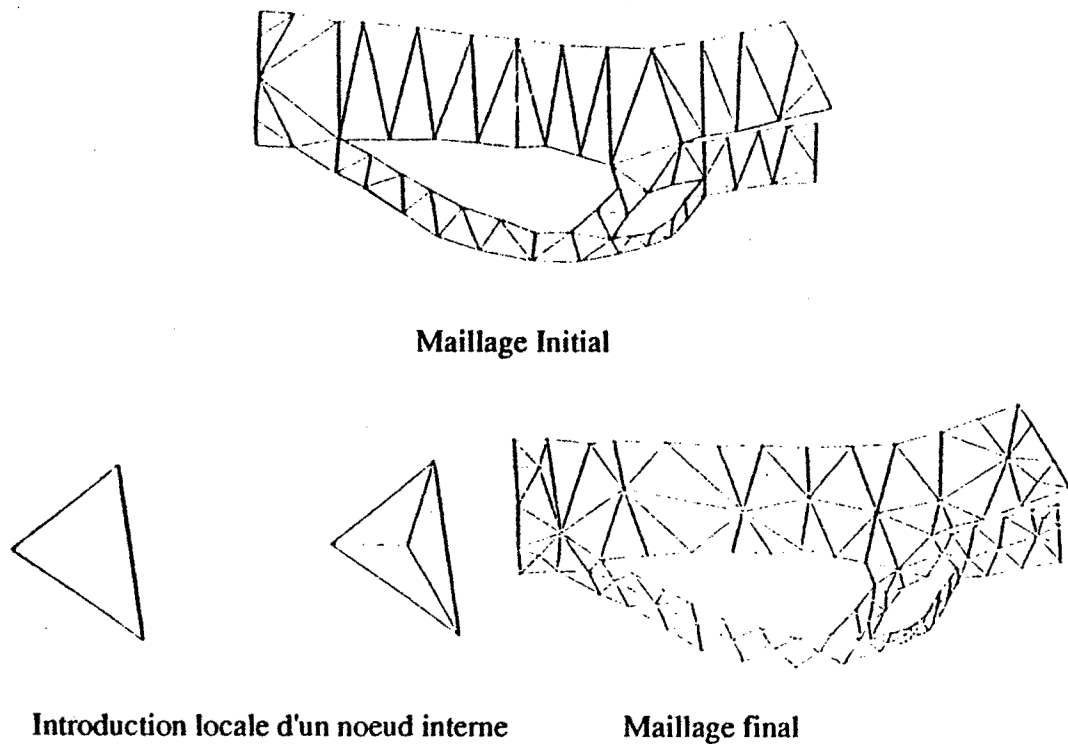
Figure 2.7



Kleinstreuer et Holdeman dans son article [10] présente un algorithme (en deux dimensions) d'un maillage initial des noeuds frontaliers, suivi par l'introduction des noeuds internes. Le maillage initial commence par mailler le plus petit quadrilatère formé

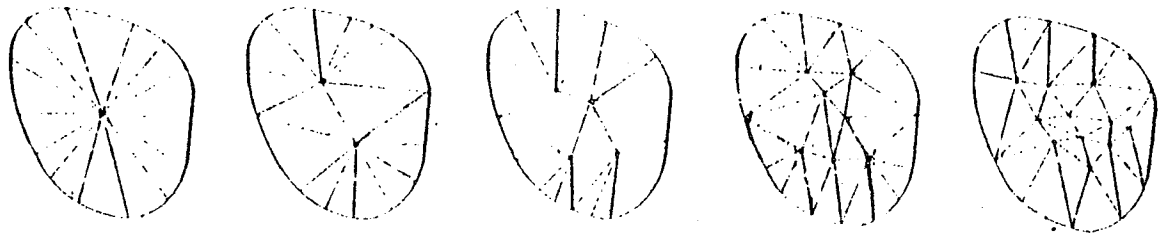
par quatre noeuds frontaliers, en choisissant la diagonale qui forme deux triangles réalisables et les plus équilatéraux possible. En respectant le maillage partiel réalisé à chaque étape, on réitère le processus décrit ci-dessus sur la partie non-maillée de l'espace. A partir de ce maillage initial, un processus d'introduction des noeuds internes et d'un changement de diagonale du quadrilatère affine le maillage de l'étape précédente. pour faire entrer des noeuds dans un maillage en dimension 2 qui ne contient que des noeuds frontaliers.

Figure 2.8 [10] pages 1328-29



L'article de Kamel et Eisenstein [9] donne aussi une technique, celle qu'on appellera "mini-tétraèdrisation" (en dimensions 2 et 3) pour obtenir un maillage simple et facile à construire dans les cas des espaces convexes ou presque convexes. A partir de maillage de la frontière, on crée successivement des noeuds internes en dédoublant le noeud ayant le plus grand nombre de voisins, et en redistribuant ses voisins plus ou moins équitablement entre les deux. Voici un exemple en dimension 2 où le barycentre est le premier noeud interne, suivi par le dédoublement de celui-ci. Ensuite, on dédouble ces deux noeuds internes car ils ont chacun 9 voisins, et ainsi de suite.

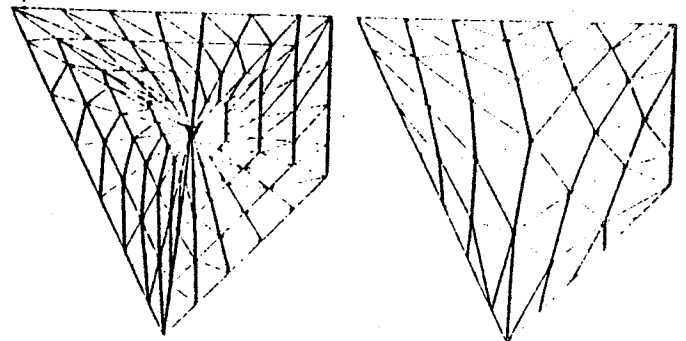
Figure 2.9 [9] page 468



La technique de "mini-tétraèdrisation"

(5) A partir d'un espace à mailler formé entre une surface externe déjà maillée, et une surface interne déjà maillée, la construction des couches se fait en créant des formes entre ces deux qui se déforment progressivement de l'une vers l'autre. La non existence d'une surface interne est un cas particulier. Les maillages s'appuieront sur deux couches voisines. L'utilisation de couches peut beaucoup simplifier la génération initiale d'un maillage. Il n'empêche que cette tétraèdrisation initiale n'est pas acceptable à cause du nombre important de noeuds internes. L'article [9] de Kamel et Eisenstein donne un algorithme assez simple à implémenter dans le cas des espaces convexes ou presque convexes, qu'on appellera "maxi-tétraèdrisation". Il choisit le nombre de couches selon le nombre de noeuds frontaliers, et la valeur proposée = partie entière  $((\text{nombre de noeuds frontaliers} + 3)/6)$  en dimension 2. A partir du maillage de la frontière, on relie le barycentre à tous les noeuds frontaliers par des arêtes, et des noeuds internes sont créés par l'intersection de ces arêtes et des couches formée entre le barycentre et le maillage frontalier. Ensuite, on fait une triangulation en choisissant la diagonale de chaque quadrilatère formé (en deux dimensions) et une tétraèdrisation des pentaèdres formés (dimension trois). Pour diminuer le nombre de noeuds internes créés, on confond deux noeuds voisins internes s'ils ont peu de voisins chacun. Voici un exemple en deux dimensions de la "maxi-tétraèdrisation".

Figure 2.10 [9] pages 467,469



La technique de "maxi-tétraèdrisation"

(6) Imafuku, Kodera, Sayawaki et Kono dans l'article [8] présente une méthode pour trianguler une surface en deux dimensions en connaissant seulement les segments frontaliers. Il transforme homomorphiquement la frontière d'une région convexe ou presque convexe en un quadrilatère, et selon le nombre de noeuds sur chaque côté de ce quadrilatère, on génère les noeuds internes et, ensuite, le maillage.

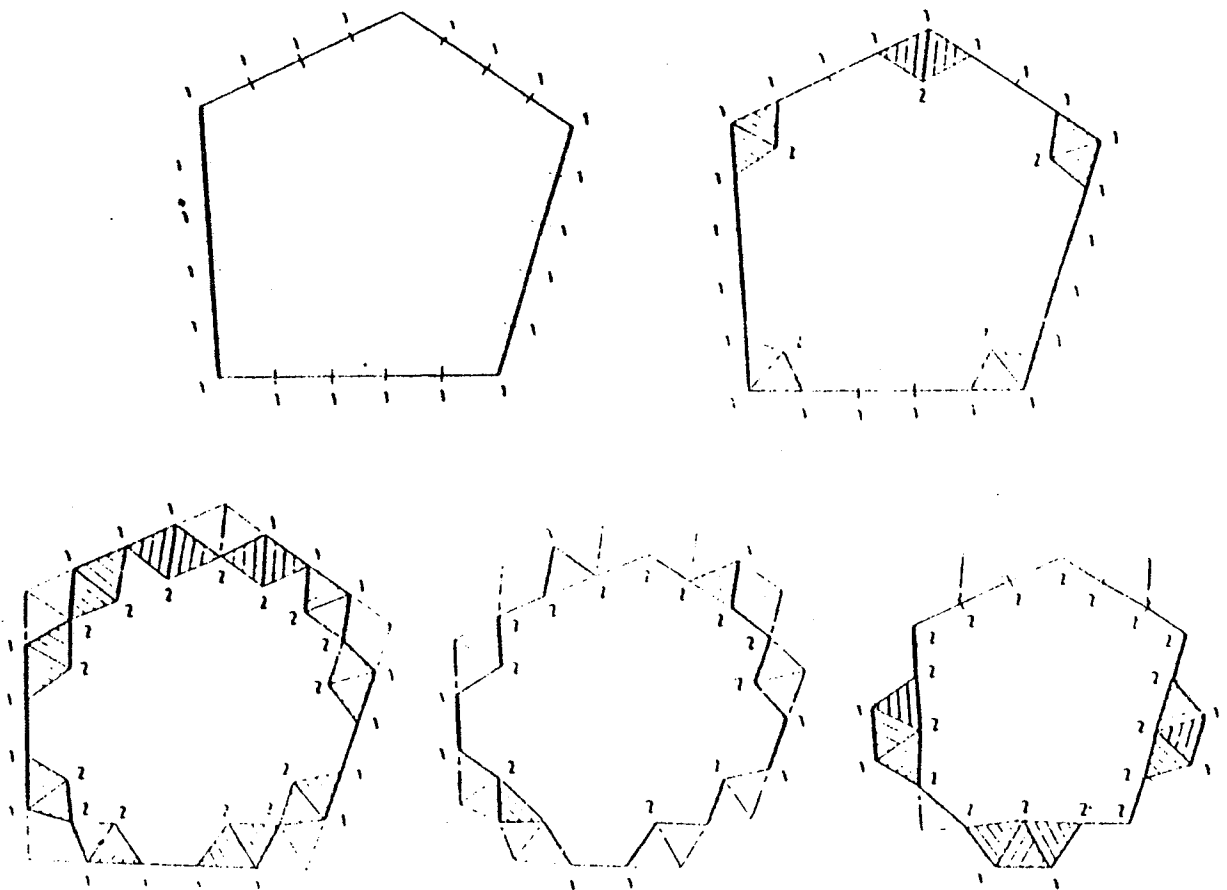
Sadek dans son article [16] part du contour extérieur et en créant des noeuds internes un par un, la région non tétraèdrisée diminue en taille au fur et à mesure que des éléments finis sont créés. En dimension 2, il crée des noeuds internes en utilisant trois noeuds de la frontière de la région non triangulée ayant une de ces deux configurations :

-  qui est maillée de la façon suivante  ;
-  qui est maillée de la façon suivante .

L'idée de Sadek est illustrée dans la figure suivante :

Figure 2.11 [16] page 1814

(la partie hachurée représente les triangles créés à chaque étape)



### 2.2.2 Méthodes de l'Amélioration de Maillage

Dans la réalité, on ne peut pas séparer le problème de génération du maillage et celui de l'amélioration du maillage. Ceci se voit surtout dans le domaine de l'amélioration du maillage avec changement de topologie car l'idée de changer de topologie dans une certaine région de l'espace à mailler implique une certaine création de nouveaux éléments, des nouveaux noeuds.

L'amélioration du maillage dépend de ce que doit être un bon maillage. Ce dernier doit satisfaire certaines conditions géométriques, par exemple, les tétraèdres doivent être les plus réguliers possible, comme c'est le cas dans les articles de Kleinstreuer et Holdeman [10], Sadek [16], Nguyen-Van-Phai [13], Mclain [12], Kamel et Eisenstein [9]. Ou bien deux tétraèdres voisins doivent avoir des volumes aussi proches que possible, comme le souhaitent Kleinstreuer et Holdeman [10] et Kamel et Eisenstein [9]. Un bon maillage doit satisfaire aussi certaines conditions liées au problème physique étudié, par exemple on peut souhaiter une forte ou une faible densité de points en des endroits bien précis, ce qui est une condition soulevée par Kleinstreuer et Holdeman [10] et Imafuku, et. al. [8]. Voici quelques méthodes proposées dans le domaine de l'amélioration du maillage.

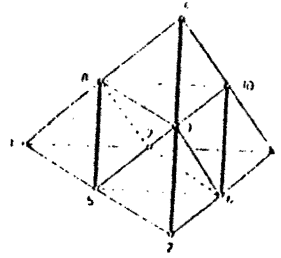
- (1) Si on peut augmenter le nombre de noeuds internes, les deux questions qui se posent sont combien de noeuds à ajouter, et où faut-il les situer.

Kamel et Eisenstein dans l'article [9] utilise une procédure itérative pour faire entrer des noeuds internes, en se basant surtout sur le dédoubleage de noeuds entourés par un nombre important de voisins, en limitant, s'il est possible, le nombre de voisins d'un noeud donné à 6 (en dimension 2) et à 10 (en dimension 3).

Kleinstreuer et Holdeman dans l'article [10] propose d'autres règles pour ajouter des noeuds internes afin de mieux restructurer nos éléments dans le maillage.

Nguyen-Van-Phai dans son article [13] propose des choix simples pour l'emplacement des nouveaux noeuds internes. Sur le tétraèdre à modifier, en prenant le milieu de chaque arête du tétraèdre, il construit huit nouveaux tétraèdres à la place de l'ancien. Voici un exemple où l'ancien tétraèdre est décrit par les sommets 1-2-3-4, où 5; 6; 7; 8; 9; 10 sont les milieux de ses arêtes, où les nouveaux tétraèdres sont 8-9-10-7; 1-5-7-8; 2-6-5-9; 3-7-6-10; 5-9-6-7; 8-9-5-7; 6-9-10-7; 9-8-10-7. On peut remarquer que la création de ces nouveaux noeuds entraîne des modifications sur les tétraèdres voisins de l'ancien tétraèdre.

Figure 2.12 [13] page 284



On a déjà vu la méthode proposée par Hermeline dans son article [7] qui propose le voisinage du nouveau noeud à ajouter en utilisant la triangulation de Delaunay. Cf. figure 2.5 page 7.

- (2) On peut aussi vouloir diminuer le nombre de noeuds internes, dans le cas où on se trouve avec un nombre de noeuds internes supérieur à celui qu'on souhaite avoir.

La technique de "maxi-tétraèdrisation" de Kamel et Eisenstein fournit une règle simple pour éliminer certains noeuds internes. Notons que pour trouver l'emplacement du nouveau noeud qui remplace les deux anciens, on doit vérifier si on a toujours un maillage de type éléments finis.

- (3) Pour détecter les anomalies dans un maillage, Frey, Hall et Porsching dans l'article [5] utilise des plans bien spécifiés qui coupent l'espace maillé (en dimension 3).

- (4) La déformation de la forme d'un espace à mailler est utilisé par Kamel dans l'article [9], Imafuku, et. al. dans l'article [8] et Afzali dans l'article [1].

- (5) Finalement, il faut aussi noter que certaines méthodes de génération du maillage initial donnent des bons maillages dès le départ, par exemple,

Bykat, [2] pages 1330-35

Kamel et Eisenstein, [9] pages 459-63, 467-71

Mclain, [12] pages 178-81

Kleinstreuer et Holdeman, [10] pages 1325-34

Zienkiewicz et Phillips, [21] pages 522-24

Sadek, [16] pages 1813-22

Enfin, l'étude de toutes ces méthodes montre qu'en général, elles s'appliquent à des cas particuliers et ne permettent pas souvent d'assurer l'obtention de maillage quelle que soit la zone à mailler, en particulier, dans le cas de maillage de l'extérieur d'une forme d'avion. C'est avec le souci de trouver une méthode d'amélioration de maillage applicable à tous les maillages

existants que ce travail a été réalisé, mais rappelons que nous simplifions considérablement le problème en n'autorisant pas de changement de topologie du maillage initial.

### 2.3 Rappels sur les Méthodes de Gradient et de Sous-Gradient en Optimisation

Les méthodes utilisées pour minimiser une fonction  $f$  définie dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  sont en général des méthodes de descente qui peuvent sommairement se décrire dans la manière suivante:

- A partir d'une solution  $v^i \in \mathbb{R}^n$ , trouver une direction de descente  $d^i$ , c'est à dire, une direction telle que  $f(v^i + \lambda d^i) < f(v^i)$  pour  $\lambda$  scalaire positif suffisamment petit.
- Trouver un pas  $\lambda^*$  positif tel que  $f(v^i + \lambda^* d^i) < f(v^i)$
- Remplacer  $v^i$  par  $v^i + \lambda^* d^i$  et itérer ce procédé jusqu'à ce qu'on ne puisse plus améliorer significativement la fonction  $f$ .

En général, la direction de descente choisie est l'opposé du gradient ou le gradient conjugué, quand  $f$  est dérivable.

Ces méthodes convergent en un nombre infini d'itérations vers l'optimum global dans le cas où la fonction est convexe sous certaines conditions de régularité, sinon on obtient simplement un optimum local de la fonction.

Ces méthodes sont difficiles à mettre en oeuvre dans le cas où la fonction n'est pas différentiable et où le domaine de réalisabilité n'est pas l'espace tout entier. C'est, donc, dans ce cas que la méthode générale connue sous le nom de méthode de sous-gradient donne des résultats rapides et intéressants, si on s'intéresse non pas à trouver l'optimum (global ou local) mais simplement à trouver une solution meilleure que la solution initiale.

Nous ne décrivons pas ici la méthode générale de sous-gradient. Nous décrivons son application dans le cas précis du chapitre 3.

### 3. SPECIFICATION DU PROBLEME ET DE LA METHODE DE RESOLUTION

#### 3.1 Présentation Sommaire du Problème

Considérons une tétraèdrisation donnée de l'espace. En fixant tous les noeuds sauf un, on veut trouver une position nouvelle pour le noeud libre de manière à :

- ne pas remettre en cause la structure de la tétraèdrisation actuelle, c'est à dire, obliger le noeud libre à rester dans un certain domaine afin que la structure de la tétraèdrisation actuelle soit conservée.
- améliorer la tétraèdrisation locale, et, si possible, la tétraèdrisation globale selon certains critères d'optimisation.

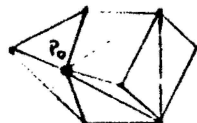
#### 3.2 Etude des Contraintes du Problème

Soit  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  le noeud qu'on désire bouger, en laissant les autres fixes. Les contraintes que nous imposons sont destinées à ne pas changer la structure de la tétraèdrisation existante, c'est à dire que chaque tétraèdre de la tétraèdrisation actuelle devra rester comme tétraèdre dans la tétraèdrisation améliorée. Ceci impose, bien évidemment, que le noeud reste à l'intérieur du domaine  $D$  défini par ses voisins, mais il peut imposer aussi des conditions plus restrictives, comme le montrent les exemples suivants (en dimension 2) :

Si le point n'est plus dans le domaine  $D$  défini par ses voisins, alors il faut définir une nouvelle tétraèdrisation pour le domaine  $D$  auquel appartenait  $P_0$ .

Figure 3.1

- la triangulation initiale



- en déplaçant  $P_0$  hors du domaine  $D$ , on trouve



qui n'est pas une triangulation

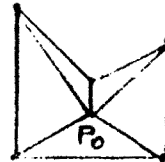


- on peut alors définir une nouvelle triangulation  
mais celle ci sera nécessairement distinct  
de la triangulation initiale

Si  $P_O$  reste dans le domaine  $D$ , il se peut qu'on ne puisse pas garder la même tétraèdrisation pour le domaine  $D$ .

Figure 3.2

- la triangulation initiale



- Bien que  $P_O$  reste dans  $D$ , la triangulation initiale n'est pas réalisable



qui n'est pas une triangulation, même si  $P_O$  est dans  $D$

Si on fait bouger  $P_O$ , on peut montrer que la tétraèdrisation initiale n'est plus valable à partir du moment où le volume d'un tétraèdre devient égal à 0.

### 3.3 Etude des Critères d'Amélioration

Les critères d'amélioration consisteront à maximiser ou minimiser une fonction objective qui dépend entièrement de la position de  $P_O$ , et on note cette fonction  $C(P_O)$ . Bien entendu, les critères de choix sont purement expérimentaux; il n'y a aucun moyen rigoureux de montrer qu'un critère est meilleur qu'un autre.

Nous nous sommes restraints ici à des critères relatifs aux volumes des tétraèdres entourant  $P_O$ . Néanmoins, la méthode peut être adaptée à n'importe quel type de critère. Il suffit de changer certaines parties précises de nos programmes.

Soient  $T_i(P_O)$ ,  $i=1, \dots, m$ , les  $m$  tétraèdres entourant  $P_O$ , et  $V_i(P_O)$ ,  $i=1, \dots, m$ , leurs volumes respectifs. Soient  $T_{\max}(P_O)$ ,  $T_{\min}(P_O)$  les tétraèdres parmi le  $T_i(P_O)$  ayant les volumes max et min, respectivement, et leurs volumes respectifs,  $V_{\max}(P_O)$  et  $V_{\min}(P_O)$ .

Considérons les critères suivant :

(1) minimiser  $C_1(P_O) = V_{\max}(P_O) - V_{\min}(P_O)$

(2) minimiser  $C_2(P_O) = 1 - (V_{\min}(P_O)/V_{\max}(P_O))$

(3) minimiser  $C_3(P_O) = \sum_{i=1}^m |V_i - \bar{V}|$  où  $\bar{V} = \sum_{i=1}^m V_i / m$

(4) minimiser  $C_4(P_O) = V_{\max}(P_O)$

Ces quatre critères correspondent à la même idée d'essayer d'égaliser tous les volumes des tétraèdres entourant  $P_O$ . Cependant, on peut envisager dans les premier, troisième et quatrième critères quelques cas pathologiques où l'un des volumes devient nul. D'autre part, le troisième critère donne une description plus précise de l'idée "d'égaliser tous les volumes des tétraèdres entourant  $P_O$ " que les autres critères, mais a-t-on besoin d'une telle précision? L'utilisation du premier et du quatrième critère permet plus de facilité au niveau du calcul de la nouvelle position du  $P_O$  car leurs fonctions objectives sont, comme nous le verrons dans 3.5, affines par rapport aux coordonnées de  $P_O$ , tandis que le deuxième critère sera une fonction hyperbolique des coordonnées de  $P_O$ .

### 3.4 Formulation Mathématique du Problème

A présent, on peut poser mathématiquement le problème dans la façon suivante:

Trouver  $P_O$  tel que  $V_i(P_O) \geq 0 \quad i=1, \dots, m$  et minimiser  $C(P_O)$ .

En utilisant le quatrième critère, la formulation mathématique du problème serait un programme linéaire:

Trouver  $P_O$  tel que  $0 \leq V_i(P_O) \leq U \quad i=1, \dots, m$  et minimiser  $U$ .

De la même façon, pour le premier critère, on aura le programme linéaire:

Trouver  $P_O$  tel que  $U \geq V_i(P_O) \geq L \geq 0 \quad i=1, \dots, m$  et minimiser  $U - L$ .

Remarque que le volume d'un tétraèdre ne doit pas être nul, donc  $V_i(P_O) > 0$  pour  $i=1, \dots, m$ .

### 3.5 Représentation de $V_i(P_O)$ , le Volume du $i^{\text{ème}}$ Tétraèdre entourant $P_O$

Le volume  $V_i(P_O)$  dépend paramétriquement des coordonnées de  $P_O(x_O, y_O, z_O)$ . Soient  $P_1, P_2, P_3$  les trois autres noeuds qui sont fixes du tétraèdre  $T_i(P_O)$ , ayant, respectivement, comme coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$ . On peut représenter  $V_i(P_O)$  de la manière suivante :

$$V_i(P_O) = (1/3!) \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_O & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_O & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_O & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad \text{à une permutation de colonnes près.} \quad 31$$

Soient

$$\begin{aligned} r_i &= \det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ a_i &= -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ b_i &= \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ c_i &= -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On a donc  $V_i(P_O) = r_i + a_i x_O + b_i y_O + c_i z_O$  qui est une fonction linéaire en  $x_O, y_O, z_O$ .

On voit que, pour l'intérêt du calcul, on peut calculer une fois pour toutes les mineurs  $r_i, a_i, b_i, c_i$  et les stocker pour ne pas les recalculer à chaque fois que l'on a besoin d'eux.

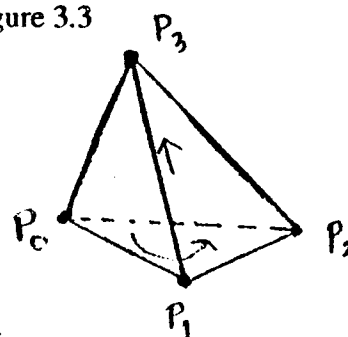
$V_i(P_O)$  est la valeur absolue du déterminant. En dimension 2, en choisissant l'ordre des noeuds du triangle dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, en commençant par  $P_O$ , on est assuré de la valeur positive du déterminant.

En dimension 3, l'ordre des noeuds est pris en sens direct en commençant par  $P_O$ ,

(cf figure 3.3). On peut donc énoncer les contraintes du problème énoncé dans 3.4 comme:

$$V_i(P_O) = r_i + a_i x_O + b_i y_O + c_i z_O \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Figure 3.3



### 3.6 Présentation Sommaire de la Méthode de Sous-Gradient Utilisée en tant que Méthode de Résolution du Problème

On va utiliser une méthode connue sous le nom de sous-gradient qui est rapide mais, qui, en contre partie, même dans le cas de programmation linéaire, ne conduit jamais à une solution optimale en un nombre fini d'itérations.

Cette méthode consiste à trouver une direction d'amélioration  $\delta$ , c'est à dire, soit  $P_0$  positionné en  $(x_0, y_0, z_0)$ , une direction  $\delta$  sera appelée une direction d'amélioration pour le critère  $C(P_0)$ , s'il existe un  $\rho$  scalaire positif suffisamment petit tel que  $C(P_0 + \rho\delta) < C(P_0)$ . Ceci veut dire qu'un petit déplacement du point  $P_0$  dans la direction  $\delta$  assure une amélioration de la valeur du critère d'amélioration.

Prenons le premier critère comme notre critère d'amélioration,  $\delta$  est une direction d'amélioration au point  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , s'il existe un  $\rho$  scalaire positif suffisamment petit tel que

$$C_1(P_0 + \rho\delta) < C_1(P_0) \quad \text{c'est à dire}$$

$$V_{\max}(P_0 + \rho\delta) - V_{\min}(P_0 + \rho\delta) < V_{\max}(P_0) - V_{\min}(P_0).$$

Dans notre méthode, on se placera toujours aux point où la fonction critère est différentiable, et, par conséquent, la direction d'amélioration sera fournie par l'opposé du gradient de la fonction objective.

Ayant trouvé la direction d'amélioration  $\delta$  au point  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , nous prenons un pas  $\rho$  scalaire dans la direction  $\delta$ , telle que le point  $P_0^* = P_0 + \rho\delta$  est, d'une part, dans le domaine défini par les contraintes, et, d'autre part, vérifie la relation  $C(P_0^*) \leq C(P_0)$  quand la fonction objective est à minimiser.

#### 4. PRESENTATION DETAILLEE DES ALGORITHMES ALGO1 ET ALGOTOUT

##### 4.1 ALGO1 - Algorithme pour Bouger un Seul Noeud $P_O$

###### 4.1.1 Le Choix de la Direction de Descente en tant que Direction d'Amélioration

Supposons qu'à une certaine itération, un des tétraèdres, par exemple,  $T_1(P_O)$ , soit le seul tétraèdre ayant le volume minimum, et un autre, par exemple,  $T_2(P_O)$ , soit le seul tétraèdre ayant le volume maximum. Alors on a

$$V_{\max}(P_O) = V_2(P_O) \text{ et } V_{\min}(P_O) = V_1(P_O)$$

$$\text{où } V_1(P_O) = r_1 + a_1x_O + b_1y_O + c_1z_O \text{ et } V_2(P_O) = r_2 + a_2x_O + b_2y_O + c_2z_O.$$

Prenons le premier critère, minimiser  $C_1(P_O) = V_{\max}(P_O) - V_{\min}(P_O)$ ,

$$C_1(P_O) = r_2 - r_1 + (a_2 - a_1)x_O + (b_2 - b_1)y_O + (c_2 - c_1)z_O.$$

On a la direction d'amélioration  $\delta = (\delta x_O \ \delta y_O \ \delta z_O)$  donné par le gradient, c'est à dire,  $\delta = -(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$ .

Prenons le deuxième critère, minimiser  $C_2(P_O) = 1 - (V_{\min}(P_O)/V_{\max}(P_O))$ ,

$$C_2(P_O) = 1 - ((r_1 + a_1x_O + b_1y_O + c_1z_O)/(r_2 + a_2x_O + b_2y_O + c_2z_O))$$

qui nous donne comme direction d'amélioration  $\delta = (\delta x_O \ \delta y_O \ \delta z_O)$  le gradient, c'est à dire,

$$\delta x_O = \frac{r_1 a_2 - r_2 a_1 + (b_1 a_2 - b_2 a_1)y_O + (c_1 a_2 - c_2 a_1)z_O}{(r_2 + a_2x_O + b_2y_O + c_2z_O)^2}$$

$$\delta y_O = \frac{r_1 b_2 - r_2 b_1 + (b_2 a_1 - b_1 a_2)x_O + (c_1 b_2 - c_2 b_1)z_O}{(r_2 + a_2x_O + b_2y_O + c_2z_O)^2}$$

$$\delta z_0 = \frac{r_1 c_2 - r_2 c_1 + (c_2 a_1 - c_1 a_2)x_0 + (c_2 b_1 - c_1 b_2)y_0}{(r_2 + a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0)^2}$$

Une autre direction d'amélioration  $\delta$  est plus simplement:  $\delta = (\delta x_0 \ \delta y_0 \ \delta z_0)$  avec  $\delta x_0 = -(a_2 - a_1)$ ,  $\delta y_0 = -(b_2 - b_1)$ ,  $\delta z_0 = -(c_2 - c_1)$ , car il existe un  $\rho$  scalaire positif suffisamment petit qui donne

$$C_2(P_0 + \rho \delta) - C_2(P_0) = \frac{\rho (\delta x_0(a_2 - a_1) + \delta y_0(b_2 - b_1) + \delta z_0(c_2 - c_1))}{r_2 + a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0} \leq 0.$$

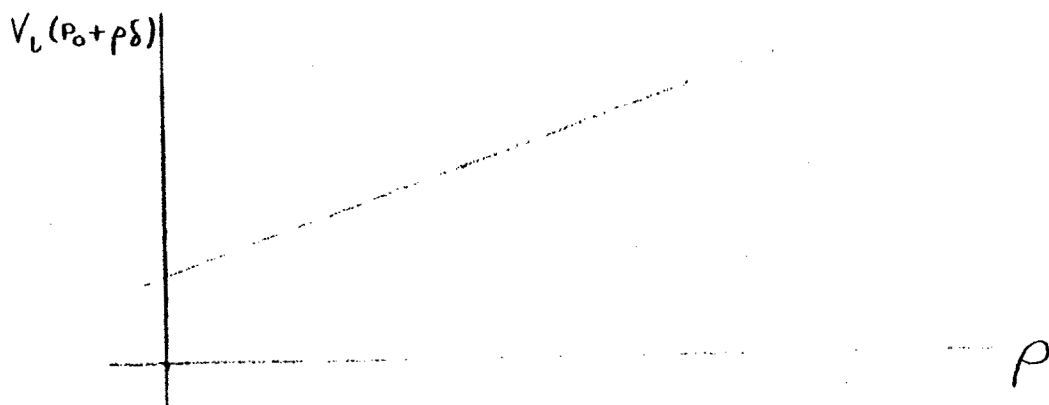
#### 4.1.2 Le Choix du Pas à Prendre dans la Direction d'Amélioration

Soit la direction d'amélioration  $\delta = (\delta x \ \delta y \ \delta z)$  trouvée dans 4.1.1. Le choix du pas  $\rho$  à prendre dans la direction d'amélioration  $\delta$  donnée peut se représenter graphiquement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{On sait que } V_i(P_0 + \rho(\delta x \ \delta y \ \delta z)) &= V_i(x_0 + \rho \delta x \ y_0 + \rho \delta y \ z_0 + \rho \delta z) \\ &= r_i + (x_0 + \rho \delta x)a_i + (y_0 + \rho \delta y)b_i + (z_0 + \rho \delta z)c_i \\ &= (r_i + a_i x_0 + b_i y_0 + c_i z_0) + \rho(a_i \delta x + b_i \delta y + c_i \delta z) \text{ est affine en } \rho. \end{aligned}$$

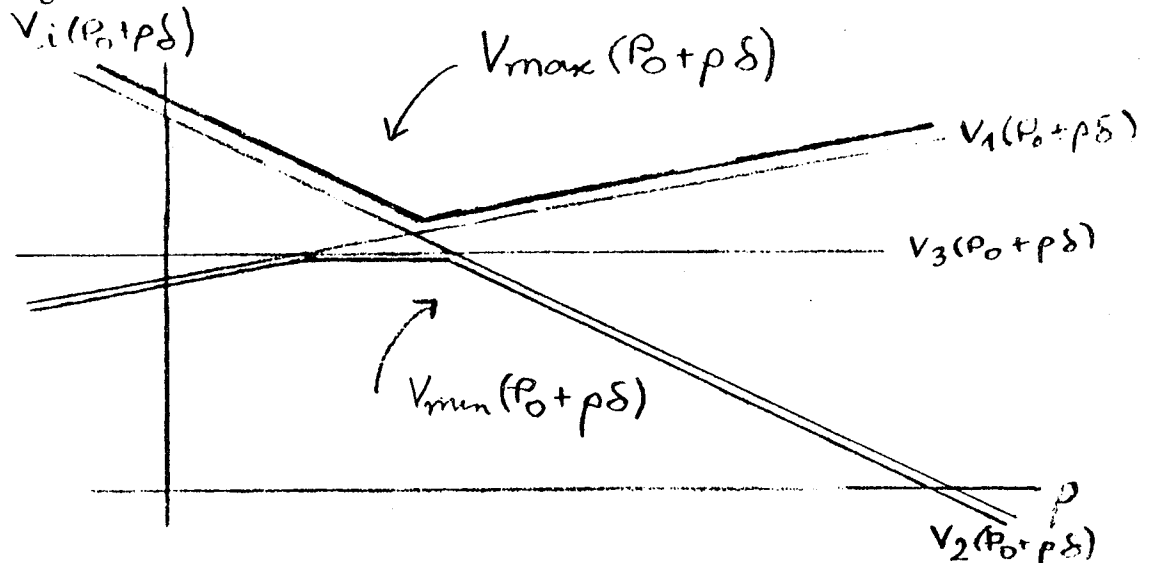
Représentons la fonction  $\rho \mapsto V_i(P_0 + \rho \delta)$  sur le diagramme suivant :

Figure 4.1



Représentons tous les  $V_i(P_0 + \rho\delta)$  de cette manière sur un seul repère, comme dans la figure suivante où il y a trois tétraèdres qui entourent  $P_0$ .

Figure 4.2

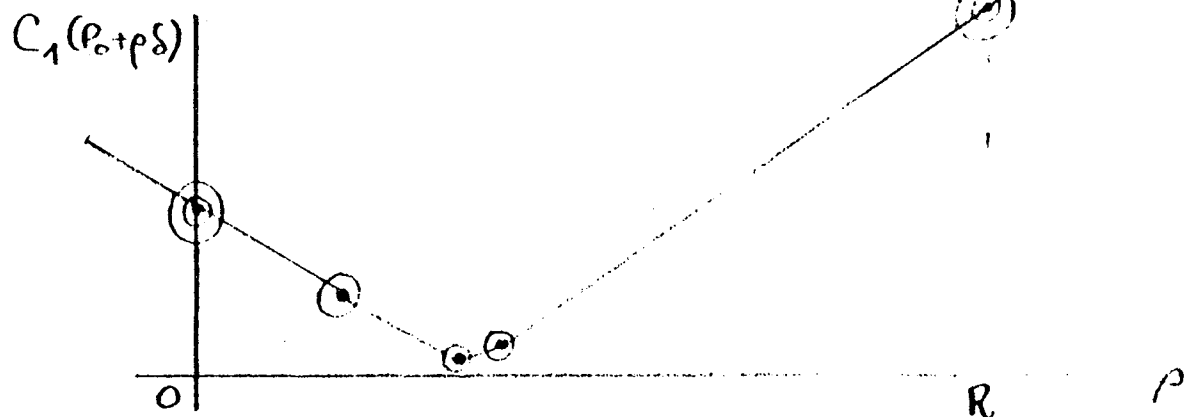


On voit que  $V_{\max}(P_0 + \rho\delta)$  et  $V_{\min}(P_0 + \rho\delta)$  sont des fonctions continues affines par morceaux. On voit dans la figure 4.2 que les fonction  $\rho \mapsto V_{\max}(P_0 + \rho\delta)$  et  $\rho \mapsto V_{\min}(P_0 + \rho\delta)$  sont les enveloppes supérieure et inférieure respectivement d'un nombre fini de fonctions affines.

Pour le critère  $C_1(P_0)$ ,  $C_1(P_0 + \rho\delta) = V_{\max}(P_0 + \rho\delta) - V_{\min}(P_0 + \rho\delta)$ .

Représentons la fonction  $\rho \mapsto C_1(P_0 + \rho\delta)$  de l'exemple de la figure 4.2 :

Figure 4.3



On voit que  $C_1(P_0 + \rho\delta)$  est aussi une fonction continue affine par morceaux (car c'est la différence de deux fonctions continues affines par morceaux) et elle se déduit comme l'écart entre les deux enveloppes mentionnés ci-dessus.  $C_1(P_0)$  est une fonction différentiable presque partout. Elle est non dérivable en un nombre fini de points et ces points de cassure sont encadrés une fois dans la figure 4.3. En plus, le domaine de réalisabilité n'est pas l'espace tout entier car  $\rho \geq 0$  et  $V_{\max}(P_0 + \rho\delta), V_{\min}(P_0 + \rho\delta) > 0$ , donc le domaine de définition pour  $\rho$  est  $[0, R[$  où  $R$  est un nombre réel positif. Notons que les méthodes de gradient ne sont pas applicables pour les points de "cassure" c'est à dire pour les points où la fonction est non différentiable. C'est donc pour cette raison qu'on emploie des méthodes de sous-gradient.

Dans les méthodes de sous-gradient, le choix du pas est crucial. Des résultats théoriques existent (voir l'article [22] de Held et Crowder) garantissant la convergence en un nombre infini d'itérations mais en pratique ces résultats ne s'appliquent guère.

Comment, donc, choisir le pas  $\rho$  pour un  $\delta$  donné?

On doit faire un bon choix du pas  $\rho$ , et une manière de le faire nous est tout à fait évidente :

Soit  $\rho = \rho_0$ , la valeur du  $\rho$  qui optimise le critère d'amélioration. En général, pour  $\rho = \rho_0$ , on tombe dans la situation où il y a plusieurs tétraèdres dont le volume est minimum (ou maximum). Si notre fonction critère est en fonction de  $V_{\max}(P_0)$  et  $V_{\min}(P_0)$ , il est nécessaire d'avoir un seul tétraèdre ayant le volume maximum et un seul ayant le volume minimum. Cette condition n'est pas satisfaite pour le pas  $\rho_0$ ; on suggère une manière pour remédier cette situation : on va chercher une valeur pour  $\rho$  à proximité de  $\rho_0$ . Cette valeur va nous permettre d'avoir la valeur de la fonction critère à proximité de la valeur optimale de la fonction critère qui correspond à  $\rho_0$ . Afin d'éviter que cette valeur de  $\rho$  retombe dans la situation décrite précédemment, on va la situer entre  $\rho_0$  et la première valeur de  $\rho > \rho_0$  pour laquelle cette situation se renouvelle. Soit  $\rho = \rho^*$  la première valeur de  $\rho > \rho_0$  pour laquelle cette situation se renouvelle. Comme on veut que la valeur du pas  $\rho$  à prendre dans la direction d'amélioration est

à proximité de  $\rho_0$ , notre choix du pas  $\rho$  sera :

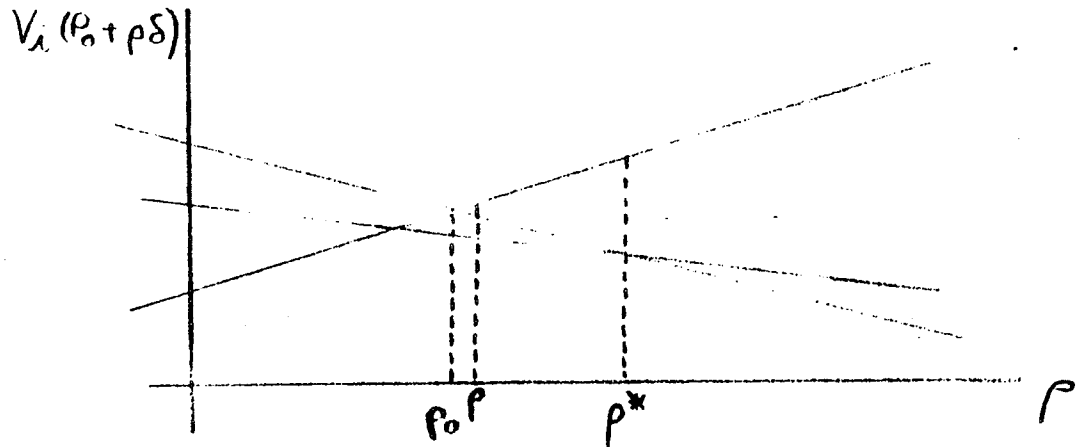
$$\rho = \rho_0 + \varepsilon(\rho^* - \rho_0) \quad \text{où } \varepsilon \text{ est un scalaire positif entre 0 et 1;}$$

dans le cas où  $\rho^*$  n'existe pas,  $\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_0$ .

Le choix de  $\varepsilon$  est arbitraire; une petite valeur est souhaitée, par exemple, 0,01.

Voici une illustration graphique de choix du pas  $\rho$ .

Figure 4.5



On peut déduire que pour cette valeur de  $\rho$ ,  $C_1(P_0 + \rho\delta)$  est continue et dérivable car ce n'est pas un point de "cassure" pour  $C_1(P_0 + \rho\delta)$ . L'utilisation de la direction de plus forte descente, c'est à dire du gradient comme direction d'amélioration est justifiable.

#### 4.1.3 Résumé de la Méthode de Résolution

Préliminaires :

- choisir le noeud  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  à bouger.
- chercher les tétraèdres  $T_i(P_0)$  qui entourent  $P_0$ .
- calculer les mineurs  $r_i, a_i, b_i, c_i$  du déterminant qui représentent le volume  $V_i(P_0)$  pour chacun de ces tétraèdres.
- calculer les volumes initiaux pour chacun de ces tétraèdres.
- chercher les tétraèdres ayant le plus grand volume et le plus petit volume.

Appellons ces volumes, respectivement,  $V_{\max}(P_0)$  et  $V_{\min}(P_0)$ .

Déroulement d'une Itération :

- trouver la direction d'amélioration  $\delta = (\delta x_0 \ \delta y_0 \ \delta z_0)$ .
  - trouver le pas  $\rho$  à prendre dans cette direction :
    - chercher  $\rho_0$ .
    - si  $\rho_0 = 0$  ou  $V_{\min}(P_0 + \rho_0 \delta) \leq 0$ , s'arrêter ou aller au prochain noeud à bouger.
    - sinon, calculer la nouvelle position de  $P_0$ , c'est à dire,  $(x_0 + \rho \delta x_0; y_0 + \rho \delta y_0; z_0 + \rho \delta z_0)$  et la valeur de la fonction critère pour  $P_0$ .
    - calculer les nouveaux volumes  $V_i(P_0)$ .
  - notons que  $T_{\max}(P_0)$ ,  $T_{\min}(P_0)$  sont connus à la fin de l'itération, et que les mineurs  $r_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  du déterminant qui représentent le volume  $V_i(P_0)$  sont constantes.
- On va appeler le programme informatique de la méthode de résolution proposée ici ALGO1.

#### 4.1.4 Un Exemple de l'Exécution de l'ALGO1 (en dimension 2) (pour les détails informatique, cf Annexe 4.1)

On désire bouger le noeud  $P_0=6$

Figure 4.6 Figure Initiale

dont les coordonnées  $(x_0, y_0)$  sont  $(1;1)$ .

Ce noeud est entourés par les triangles

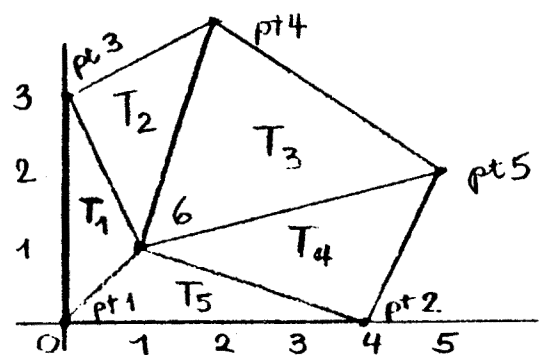
$T_1, T_2, \dots, T_5$ , comme on le voit sur la

figure 4.6. La fonction objective est

à minimiser  $C_1(P_0) = V_{\max}(P_0) - V_{\min}(P_0)$ ,

la valeur de  $\epsilon$  utilisée pour

trouver le pas  $\rho$  est 0,01.



Pour calculer  $V_1(P_0)$ , le volume de  $T_1(P_0)$ , le triangle ayant les sommets  $(1;3;6)$ , on a

$$V_1(P_0) = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & 0 & 0 \\ y_0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{dont les mineurs sont}$$

$$r_1 = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad a_1 = -\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad b_1 = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{On a } V_1(P_0) = 1 \times 0 + -3 x_0 + 0 y_0 = -3 x_0$$

Car  $x_0 = 1$ , pour que  $V_1(P_0) > 0$ , il faut changer les signes de  $r_1, a_1, b_1$ . On a donc  $r_1=0, a_1=3, b_1=0$  et  $V_1(P_0) = 3x_0$ . De la même manière, on trouve  $V_2(P_0) = 6+x_0-2y_0$ ,  $V_3(P_0) = 16-2x_0-3y_0$ ,  $V_4(P_0) = 8-2x_0+y_0$ ,  $V_5(P_0) = 4y_0$  et pour  $P_0(1;1)$ ,  $V_1(P_0)=3$ ,  $V_2(P_0)=5$ ,  $V_3(P_0)=9$ ,  $V_4(P_0)=7$ ,  $V_5(P_0)=4$ . Le  $V_{\max}(P_0)$  initial est 11 pour le triangle  $T_3$ ; le  $V_{\min}(P_0)$  initial est 3 pour le triangle  $T_1$ , et la valeur initiale de  $C_1(P_0) = V_{\max}(P_0) - V_{\min}(P_0)$  est  $11 - 3 = 8$ . La direction de descente, donnée par le gradient de  $C_1(P_0)$ ,  $\delta = -(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$ , est  $-((-2) - 3; (-3) - 0) = (5; 3)$ . Les applications  $V_i(P_0 + \rho\delta)$

affines en  $\rho$  sont trouvées de la façon suivante:

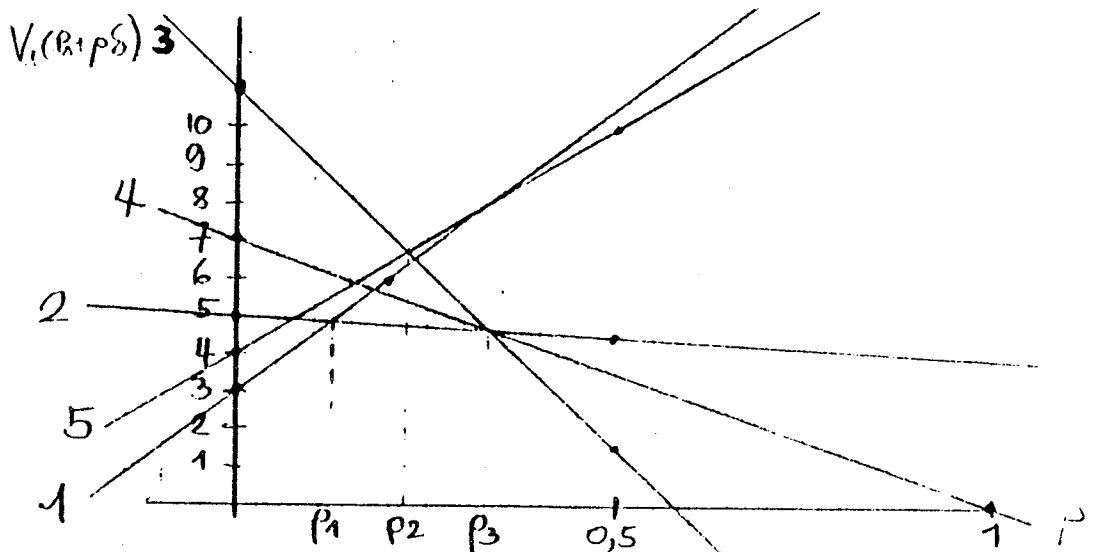
$$\text{Pour } V_1(P_0 + \rho\delta), \text{ on a } V_1(1 + 5\rho; 1 + 3\rho) = 0 + 3(1+5\rho) + 0(1+3\rho) = 3 + 15\rho.$$

$$\text{De la même manière, } V_2(P_0 + \rho\delta) = 5 - \rho, V_3(P_0 + \rho\delta) = -11 + 19\rho, V_4(P_0 + \rho\delta) = 7 - 7\rho,$$

$$V_5(P_0 + \rho\delta) = 4 + 12\rho.$$

Voici la représentation graphique de  $V_i(P_0 + \rho\delta)$  en  $\rho$ :

Figure 4.7

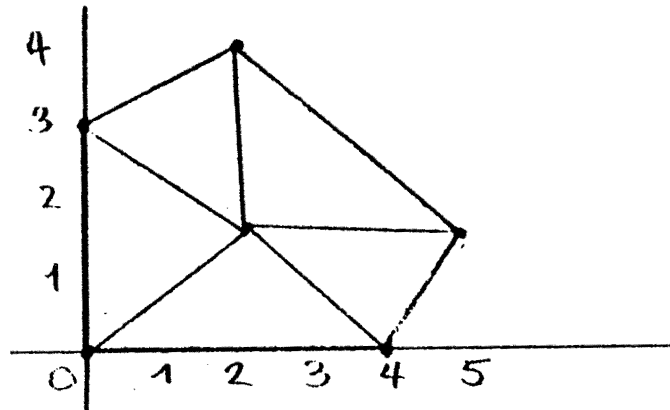


Les pas intermédiaires à la recherche du pas  $\rho$  à prendre dans la direction d'amélioration  $\delta=(5;3)$  sont  $\rho_1=0,125$ ;  $\rho_2=0,22580645$ ;  $\rho_3=1/3$ .

Pour arriver à  $\rho_1$  on a  $T_{\max}=T_3$ ,  $T_{\min}=T_1$ ; à  $\rho_2$  on a  $T_{\max}=T_3$ ,  $T_{\min}=T_2$ ; à  $\rho_3$  on a  $T_{\max}=T_5$ ,  $T_{\min}=T_2$ . Le pas optimal  $\rho_0$  est  $\rho_2$ ;  $\rho^*$  est  $\rho_3$ ; et, en prenant pour valeur de  $\epsilon=0,01$ ,  $\rho = \rho_0 + 0,01 \times (\rho^* - \rho_0) = 0,2258... + 0,01(0,1075) = 0,2268...$  Le nouveau plus grand triangle  $T_{\max}$  est  $T_5$ , et le plus petit  $T_{\min}$  est  $T_2$ . On trouve les nouvelles superficies des triangles en en substituant la valeur de  $\rho$  trouvé dans les  $V_i(P_0 + \rho\delta)$  :  $V_1(P_0 + \rho\delta) = 3 + 15\rho = 3 + 15(0,2268...) = 6,4032$ ,  $V_2(P_0 + \rho\delta) = 4,7731$ ,  $V_3(P_0 + \rho\delta) = 6,689$ ,  $V_4(P_0 + \rho\delta) = 5,4118$ ,  $V_5(P_0 + \rho\delta) = 6,7225$ , et on trouve  $V_{\max} - V_{\min} = 6,7225 - 4,7731 = 1,9494$  comme nouvelle valeur de notre fonction critère  $C_1(P_0)$ . L'ancienne valeur de  $C_1(P_0)$  était 8, donc on voit qu'il y a une amélioration de la fonction critère  $C_1(P_0)$ . La nouvelle position du noeud 6 est trouvée de la manière suivante :  $P_0 + \rho\delta = (1 + 5\rho; 1 + 3\rho) = (2,1344; 1,6806)$ .

Voici la figure finale:

Figure 4.8



#### 4.1.5 Trois Exemples de l'Exécution de l'ALGO1 en Faisant Varier la Fonction Objective

La figure initiale qui correspond au noeud à bouger numeroté 10 et à ses voisins numerotés 4;6;9;11;14;15;17 est figure 4.9. Les figure finales sont les figures 4.10, 4.11, 4.12 pour les fonctions objectives  $C_1(P_0)$ ,  $C_2(P_0)$  et  $C_3(P_0)$ , respectivement (cf 3.3). Les détails de l'exécution de l'ALGO1 se trouve dans les Annexes 4.2, 4.3, et 4.4, respectivement.

Figure 4.9

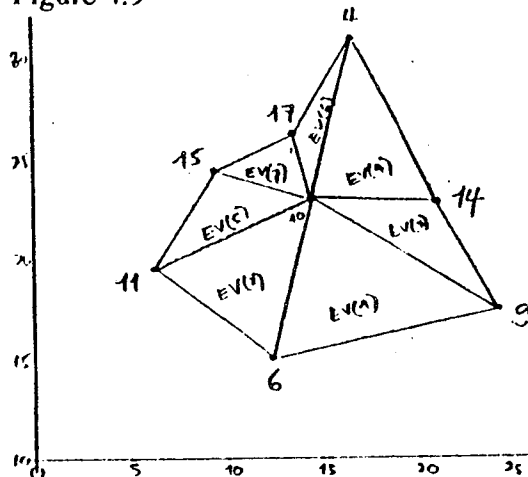


Figure 4.11

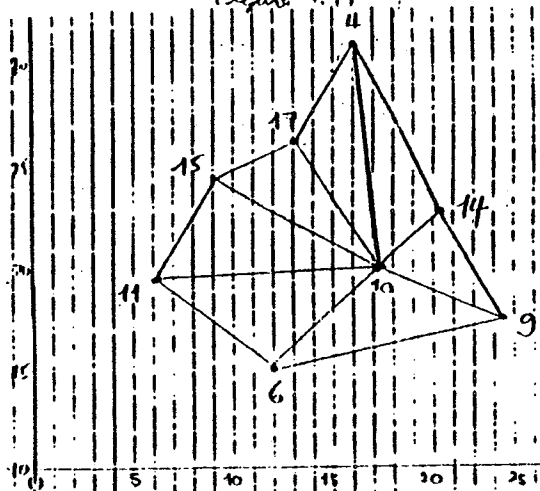


Figure 4.10

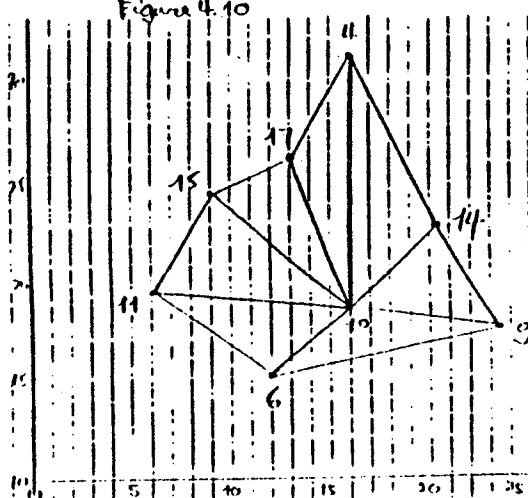
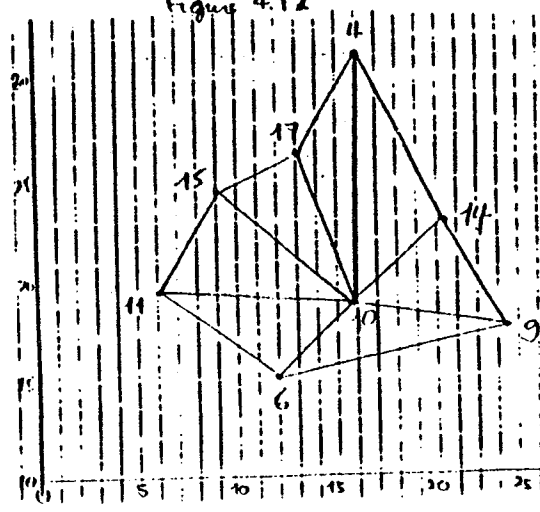


Figure 4.12



Voici les valeurs initiales et finales de la fonction critère utilisée :

- $C_1(P_0)$ , initiale=80,75, finale=16,58
- $C_2(P_0)$ , initiale=0,85, finale=0,40
- $C_3(P_0)$ , initiale=22,07, finale=6,15

#### 4.2 ALGOTOUT - Algorithme pour Bouger un Ensemble de Noeuds en les Bougeant Un par Un

On a utilisé la méthode de résolution proposée dans un autre cadre plus général pour tenter d'améliorer localement et globalement le maillage par un processus itératif qui applique un certain nombre de fois l'ALGO1, l'algorithme qui bouge un seul noeud une seule fois. Ceci comporte deux parties :

- on désire bouger un seul noeud plusieurs fois et on appelle ce nombre de fois ITERATION. Sachant que les méthodes de sous-gradient sont rapides dans les premières itérations, plusieurs itérations successives de l'ALGO1 sont à appliquer à un noeud  $P_0$  pour avoir une meilleure amélioration locale;

- on désire bouger un ensemble de noeuds plusieurs fois (en bougeant les noeuds un par un selon un certain ordre) et on appelle ce nombre de fois TOUR. Cette partie nous apportera-t-elle une amélioration globale au niveau de la qualité du maillage de l'ensemble des noeuds?

Appelons l'algorithme qui bouge un ensemble de noeuds un certain nombre de fois en les bougeant un par un et chacun plusieurs fois de suite ALGOTOUT.

##### 4.2.1 Le Choix de la Fonction Objective à Minimiser

La recherche du pas à prendre dans la direction d'amélioration va dépendre uniquement de la fonction objective  $C_1(P_0) = V_{\max}(P_0) - V_{\min}(P_0)$  à cause de la facilité d'obtenir les pas intermédiaires et le pas optimal par  $C_1(P_0)$ . Ceci ne nous empêche pas de tester si la nouvelle position du noeud  $P_0$  améliore aussi d'autres fonctions objectives telles que

$$(1) \text{ minimiser } C_2(P_0) = 1 - (V_{\min}(P_0)/V_{\max}(P_0)),$$

$$(2) \text{ minimiser } C_3(P_0) = \sum_{i=1}^m |V_i - V| \quad \text{où } V = \sum_{i=1}^m V_i / m$$

$$(3) \text{ minimiser } C_4(P_0) = V_{\max}(P_0)$$

ou certains autres critères, par exemple, la régularité des tétraèdres.

Deux exemples ont été donnés en utilisant  $C_2(P_0)$  et  $C_3(P_0)$  (cf 4.1.5), où, pour  $C_2(P_0)$ , la figure finale est la figure 4.11; et, pour  $C_3(P_0)$ , la figure finale est la figure 4.12.

#### 4.2.2 Le Choix du Nombre d'itérations Successives pour Bouger un Noeud et du Nombre de Balayages pour Bouger un Ensemble de Noeuds

Souhaitant que le nombre d'itérations successives pour bouger un seul noeud ne soit pas trop élevé, on peut imposer une valeur fixe, par exemple 2; 3; 4 ou 5. Un travail préliminaire effectué montre que la grande part de l'amélioration est due à la première itération, les autres servent plutôt à raffiner la première. Dans ce cas, le choix de la valeur 3 pour le nombre d'itérations semble assez suffisant. Voici deux exemples en dimension 2 qui confirment l'importance de la première itération :

Figure 4.13 Bouger le noeud 6 avec ITERATION = 5 et la fonction objective

$$C_1(P_0) = V_{\max} - V_{\min} \quad (\text{pour les détails informatiques, cf Annexe 5.1})$$

(Les fleches indiquent la direction d'amélioration pour l'itération suivante)

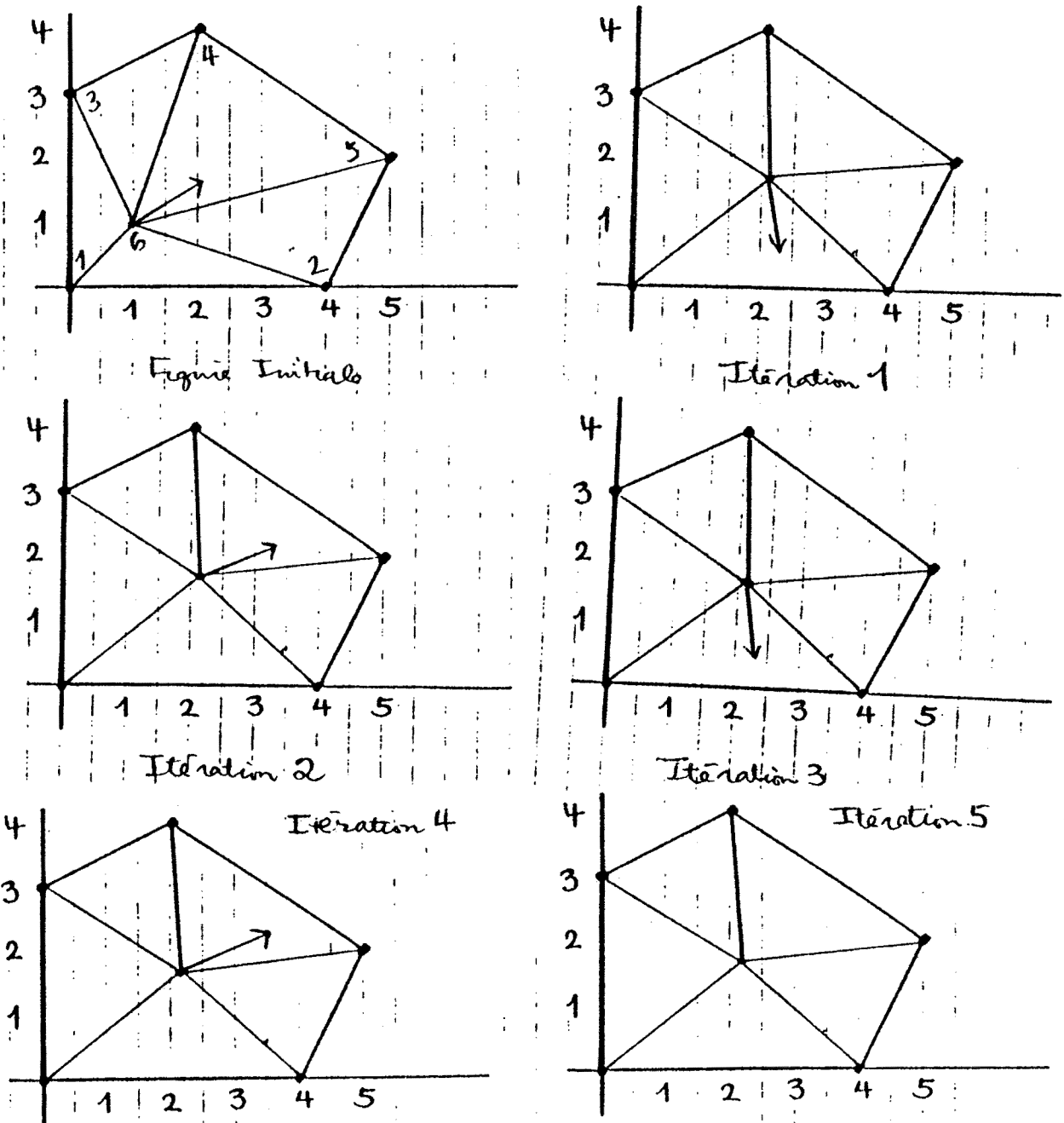
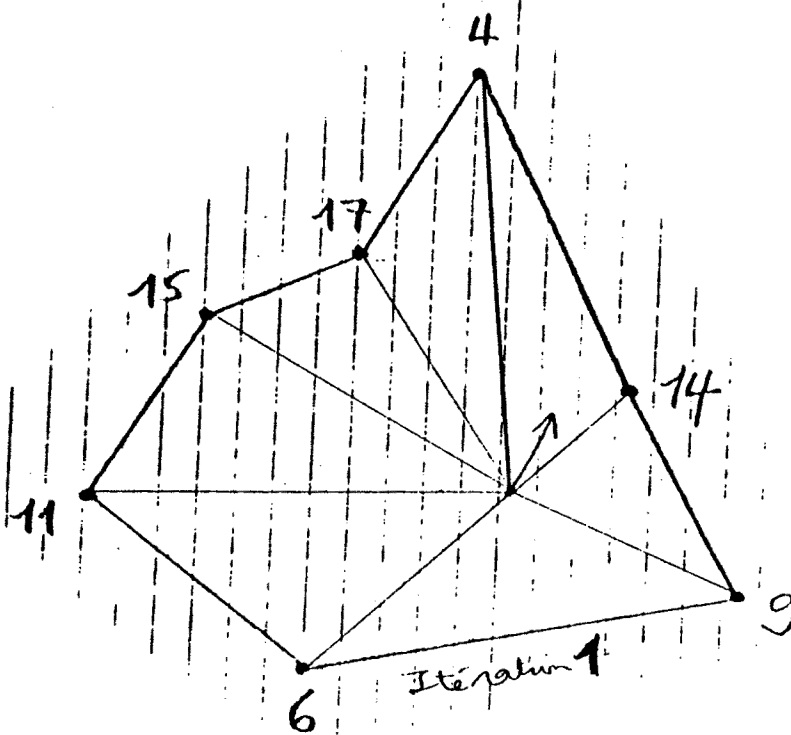
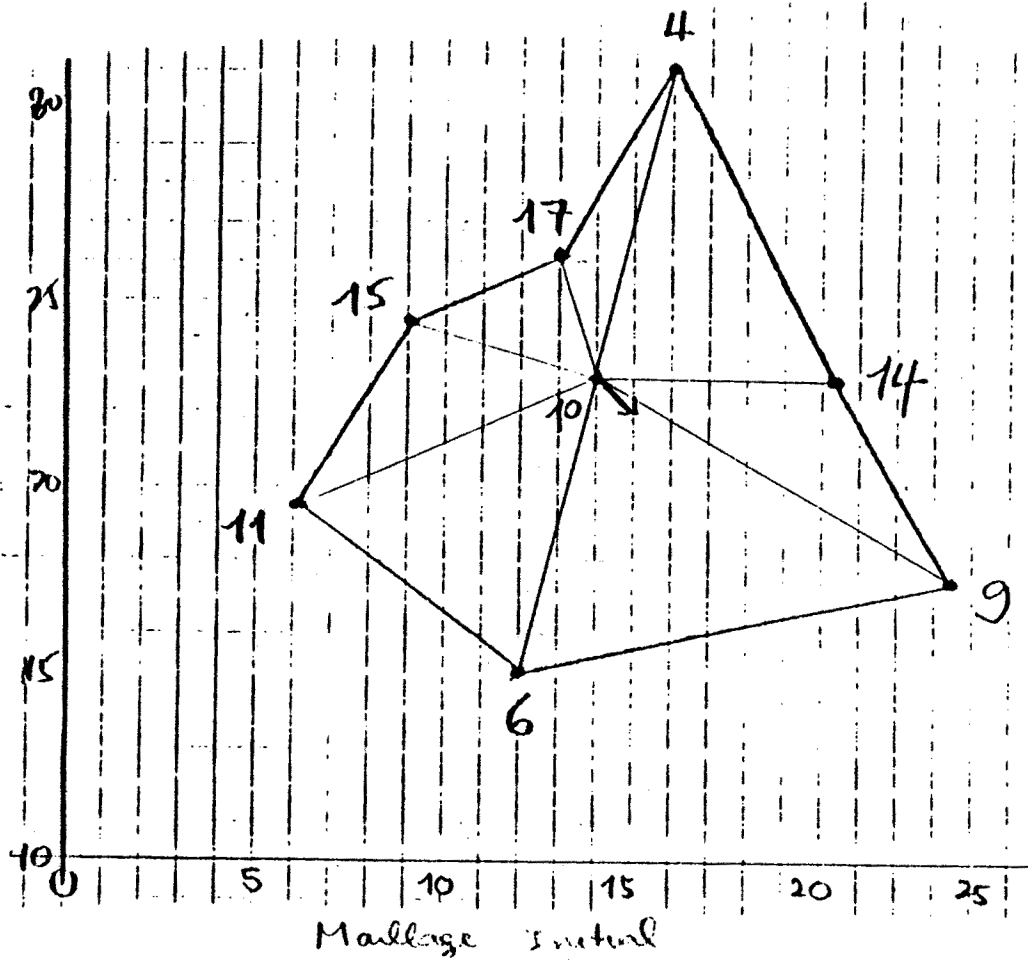


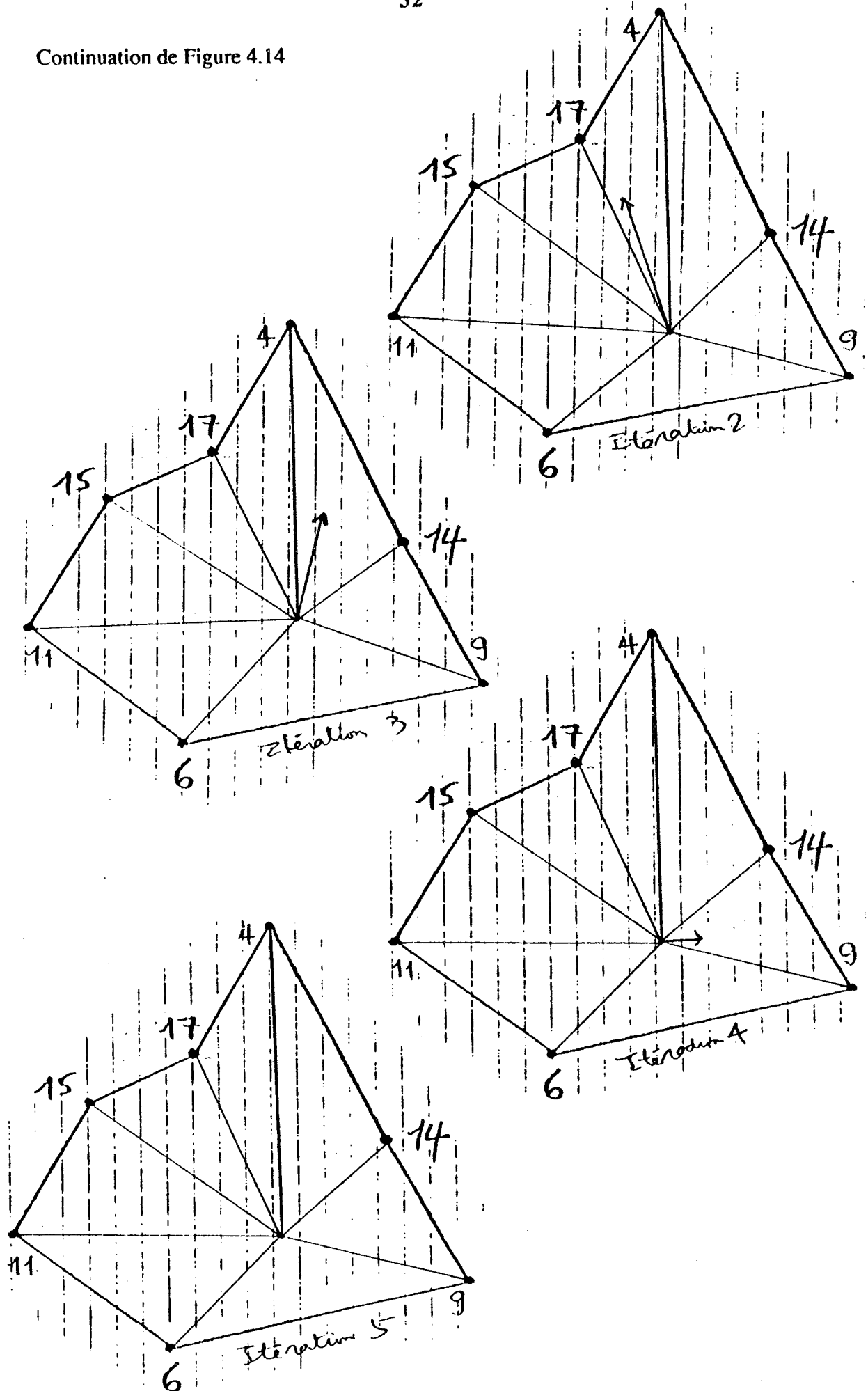
Figure 4.14 Bouger le noeud 10 avec ITERATION = 5 et la fonction objective

$$C_2(P_0) = 1 - (V_{\min}/V_{\max}) \quad (\text{pour les détails informatiques, cf Annexe 5.2})$$

(Les fleches indiquent la direction d'amélioration pour l'itération suivante)



Continuation de Figure 4.14



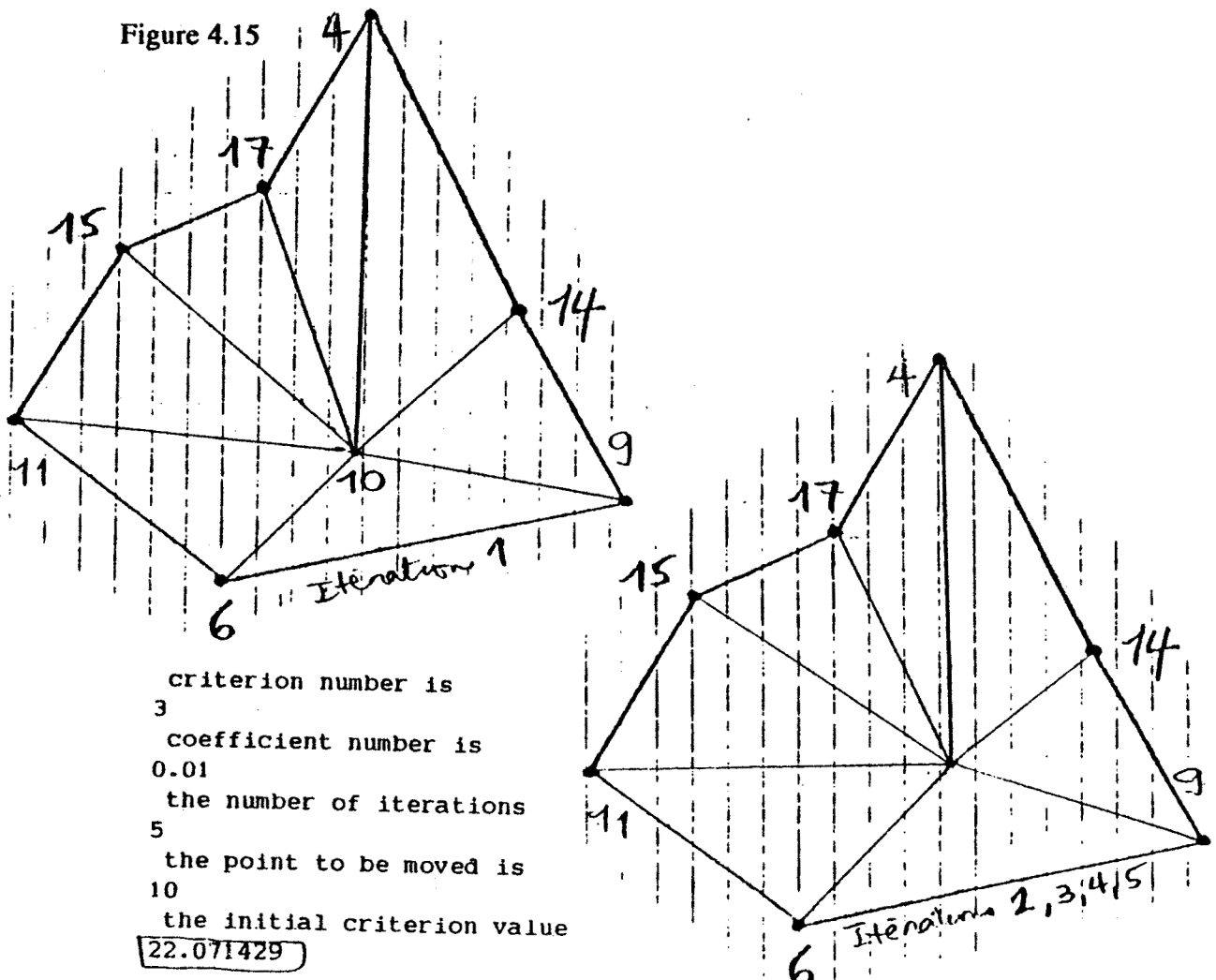
Voici les valeurs de la fonction objective respectivement à chaque itération:

|                                    |       |                  |       |
|------------------------------------|-------|------------------|-------|
| Pour bouger le noeud 6 - initiale: | 8,0   | et le noeud 10 : | 0,85  |
| itération 1:                       | 1,95  |                  | 0,4   |
| 2:                                 | 1,92  |                  | 0,32  |
| 3:                                 | 1,912 |                  | 0,30  |
| 4:                                 | 1,906 |                  | 0,284 |
| 5:                                 | 1,898 |                  | 0,280 |

Dans tous les deux cas, il y a une très forte amélioration à la suite de la première itération, et de très faibles améliorations pour les quatre autres. On peut voir ceci sur les figures 4.13 et 4.14 par un très faible déplacement du noeud à bouger pour les 4 dernières itérations.

Puisque la méthode de sous-gradient utilisée donne rapidement une bonne solution, on se permet de temps en temps une itération non améliorante. Un exemple d'un tel cas se trouve en bougeant le noeud 10 dans la figure suivante avec 5 itérations par  $C_3(P_0)$  (pour les détails informatiques, cf Annexe 5.13; Figure 4.14 pour la figure initiale; Figure 4.15 pour les figures intermédiaires). Les valeurs de la fonction objective sont - Initiale : 22,07; Itération 1: 6,15; Itération 2: 6,59; Itération 3: 6,56; Itération 4: 6,54; Itération 5: 6,52. La deuxième itération n'est pas améliorante; cependant, la valeur 6,59 n'est pas très éloignée de 6,15. Donc on l'accepte et on continue de faire encore quatre itérations. Notons que la position du noeud pour les quatre dernières itérations n'a pas vraiment changé.

Figure 4.15



On désire bouger l'ensemble des noeuds internes en les bougeant un par un. Sur un exemple donné ci-dessous, on a bougé 12 noeuds internes un par un, où chaque noeud a été bougé trois fois de suite (ITERATION=3). On aperçoit qu'il y a globalement un meilleur maillage. Mais, localement, certains noeuds ne sont pas très bien placés. Ceci nous amène à réitérer ce processus plusieurs fois de suite. On se limite à un nombre de fois pas trop grand, par exemple TOUR = 2; 3; 4 ou 5. En fait, la valeur 3 nous est largement suffisante.

Voici l'exemple où on bouge les 12 noeuds internes, avec ITERATION = 3, et TOUR = 3. Le maillage initial se trouve sur la page 35 (Figure 4.16).

Les resultats sur les trois tours sont -----

TOUR 1 :

l'ordre des noeuds à bouger est 9; 10; 8; 13; 11; 6; 15; 7; 16; 12; 14; 17

Le maillage après le premier tour est celui de la page 36 (Figure 4.17).

TOUR 2 :

l'ordre des noeuds à bouger est 10; 15; 9; 11; 16; 7; 8; 13; 14; 12; 6; 17

Le maillage après le deuxième tour est celui de la page 37 (Figure 4.18).

TOUR 3 :

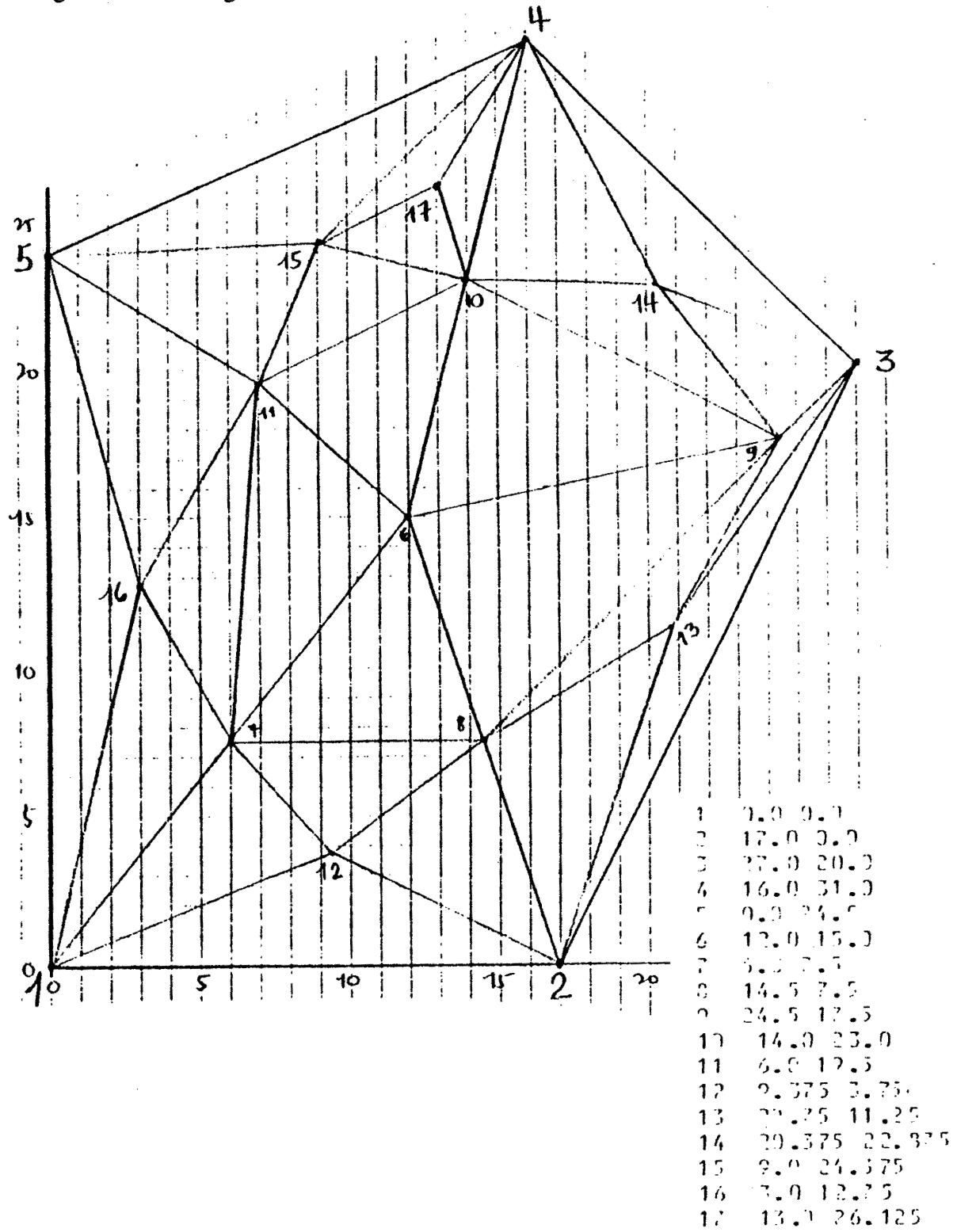
l'ordre des noeuds à bouger est 11; 15; 10; 9; 16; 14; 7; 13; 8; 12; 6; 17

Le maillage après le troisième tour est celui de la page 38 (Figure 4.19). C'est aussi le maillage final.

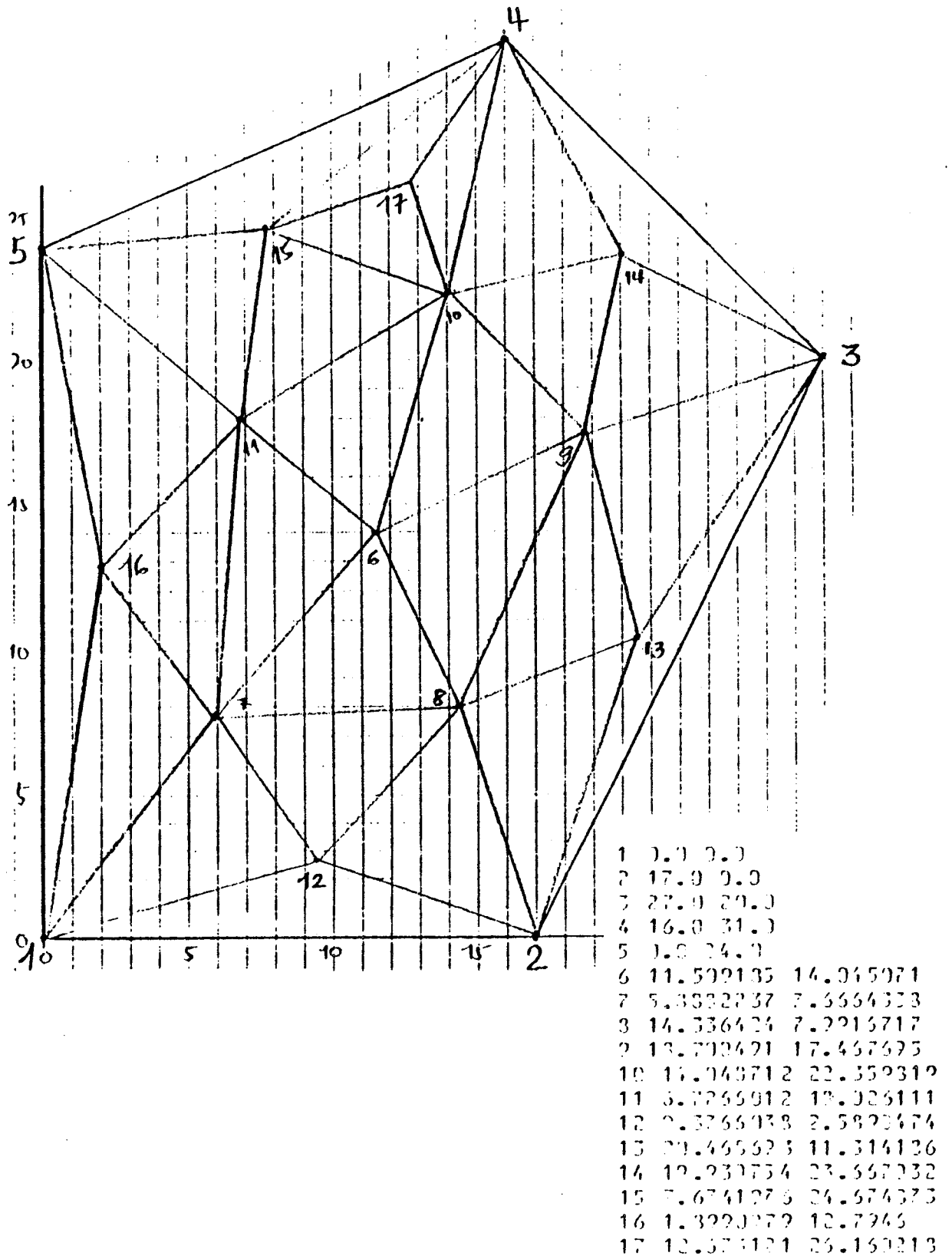
(Pour des détails informatiques, cf. Annexe 6)

Néanmoins, on peut toujours augmenter le nombre de fois qu'on va bouger un noeud successivement au cas où les améliorations résultantes des trois premières itérations ne nous satisfont pas; cette modification peut être appliquée aussi sur le nombre de tours.

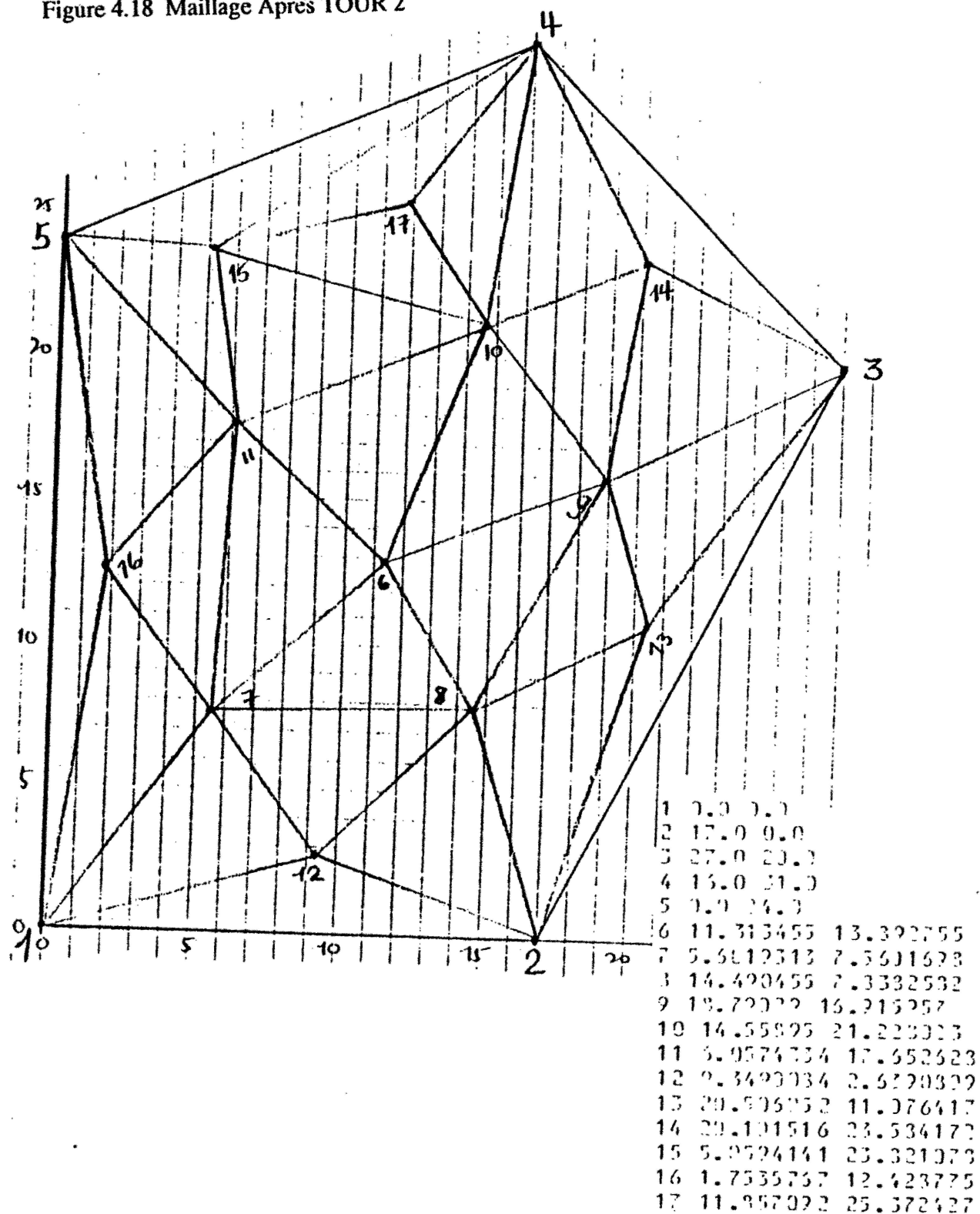
Bouger 12 noeuds avec 3 ITERATIONS par noeud et 3 TOURS pour l'ensemble de noeuds  
Figure 4.16 Maillage Initial



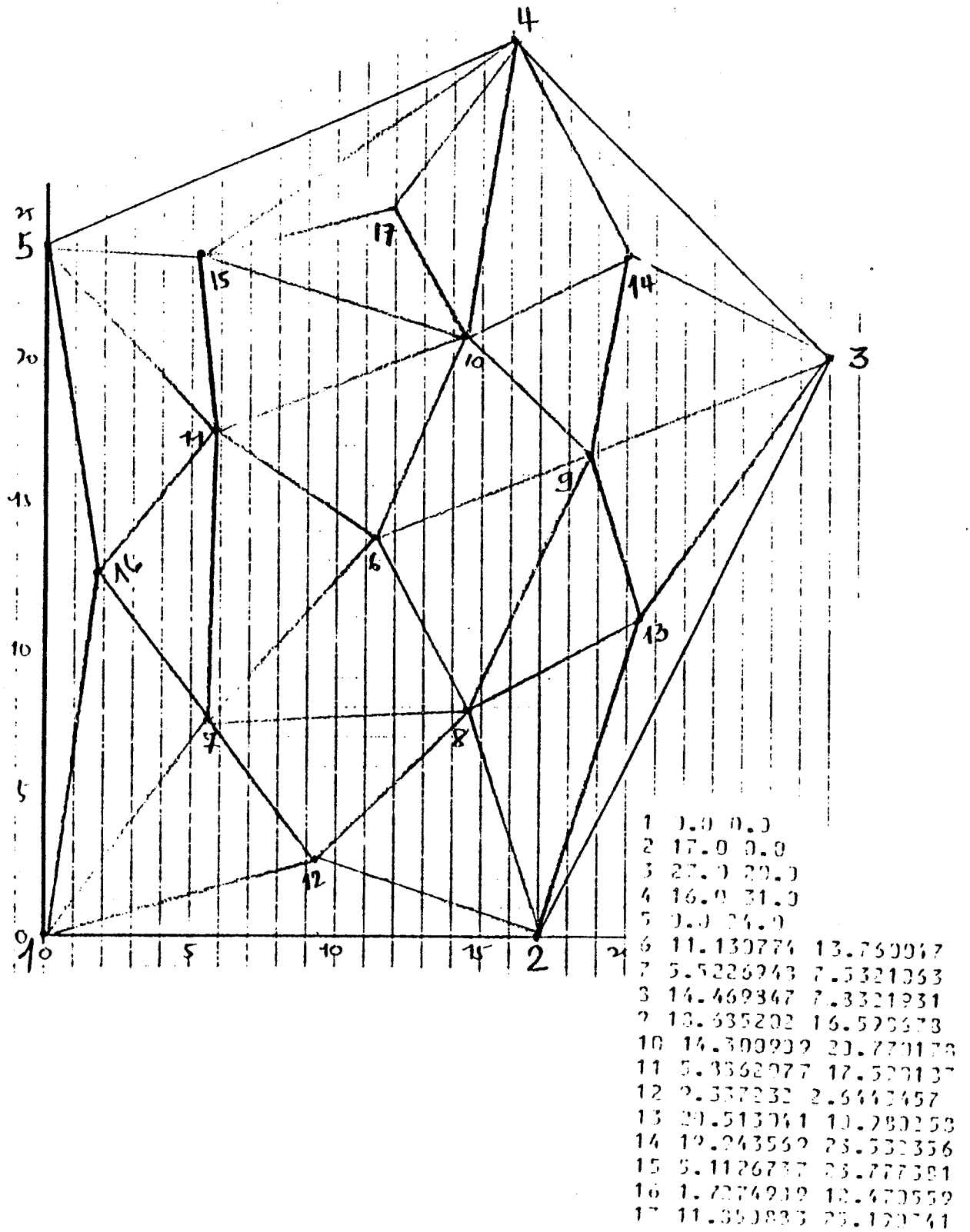
Bouger 12 noeuds avec 3 ITERATIONS par noeud et 3 TOURS pour l'ensemble de noeuds  
Figure 4.17 Maillage Après TOUR 1



Bouger 12 noeuds avec 3 ITERATIONS par noeud et 3 TOURS pour l'ensemble de noeuds  
Figure 4.18 Maillage Après TOUR 2



Bouger 12 noeuds avec 3 ITERATIONS par noeud et 3 TOURS pour l'ensemble de noeuds  
Figure 4.19 Maillage Après TOUR 3 et Maillage Final



#### 4.2.3 Le Choix des Noeuds à Bouger, et de l'Ordre dans Lequel Ils Seront Bougés

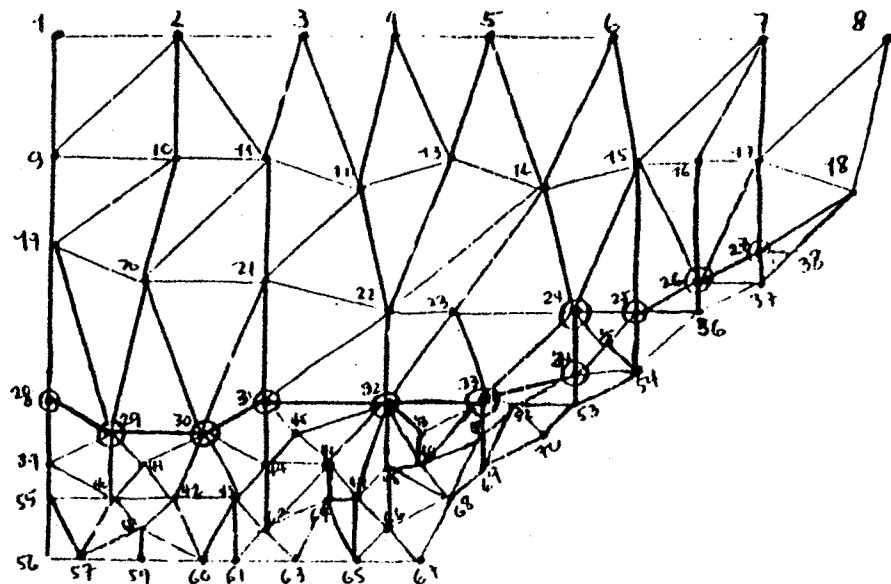
Pour un tour donné, il nous faut choisir les noeuds à bouger, et l'ordre dans lequel ils seront bougés. Si on voit qu'il y a certaines régions qui sont déjà assez bien maillées, on peut se limiter à celles qui ne le sont pas.

Si, sur une certaine région, on souhaite avoir des petits éléments bien réguliers, tandis qu'aux autres régions, on préfère avoir des éléments bien réguliers de taille plus grandes, alors on peut faire notre travail en deux étapes :

- d'abord, améliorer le maillage de l'ensemble des petits éléments, et, ensuite, l'ensemble des grands éléments.
- remailler la frontière entre ces deux ensembles pour que la différence des volumes de tétraèdres voisins ne soit pas trop grande

Voici un exemple en dimension 2, où les noeuds frontaliers (noeuds encerclés et numérotés 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 24; 25; 26; 27; 18) entre les deux régions décrites ci-dessus séparent la région en deux ensembles d'éléments: les grands éléments se trouvent au-dessus de ces noeuds frontaliers, et les petits éléments se trouvent au-dessous de ces noeuds frontaliers.

Figure 4.20



Ayant bougé l'ensemble de noeuds internes de la figure 4.20 dans l'ordre décrit ci-dessus avec ITERATION = 3, et TOUR = 3, et la fonction objective  $C_1(P_0) = V_{\max} - V_{\min}$ , on trouve les maillages suivants: (pour les détails informatiques, cf. Annexe 7)

Figure 4.21 Le maillage sur l'ensemble de petits éléments

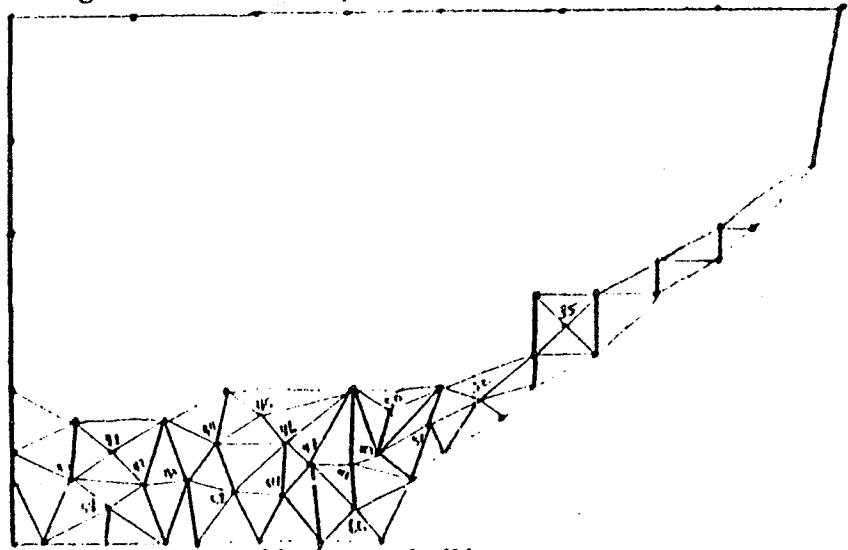


Figure 4.22 Le maillage sur l'ensemble de grands éléments

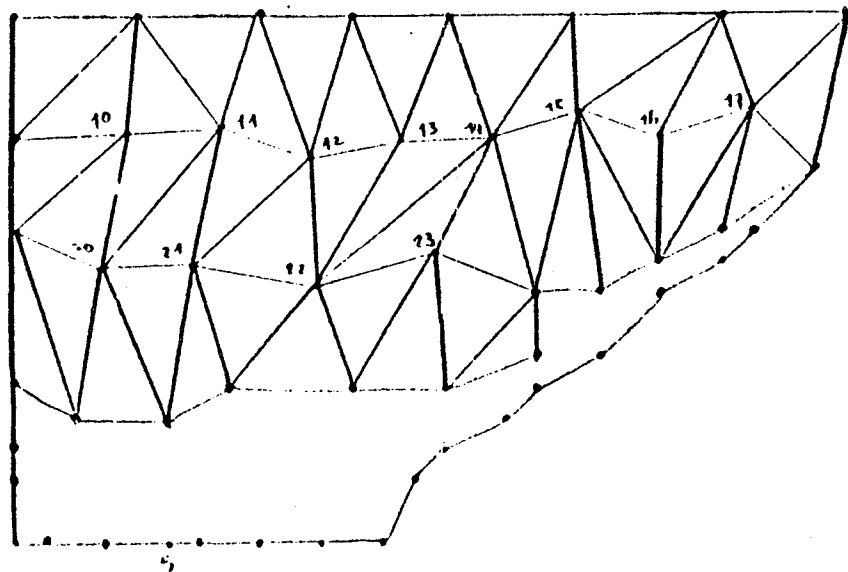
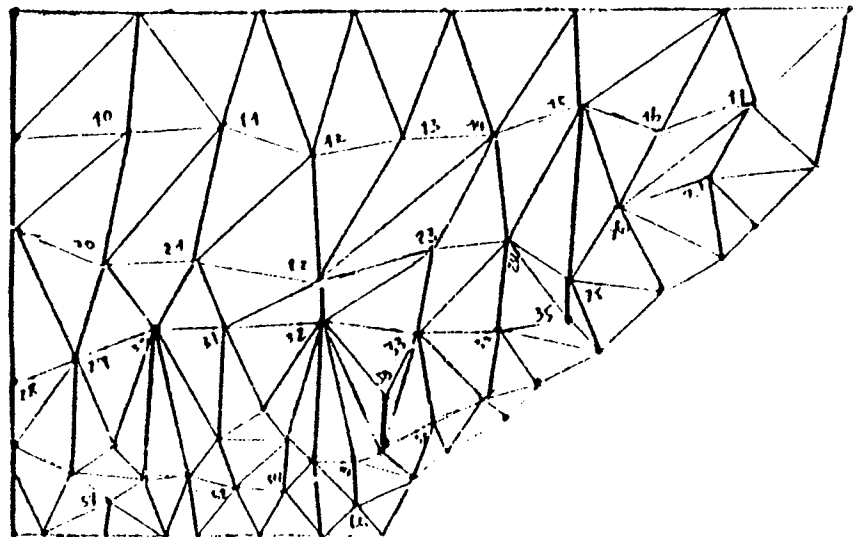


Figure 4.23 Le maillage sur l'ensemble des éléments autour des noeuds frontaliers



Des choix divers existent pour l'ordre dans lequel on va bouger un ensemble des noeuds. On peut penser à améliorer d'abord la position des noeuds de plus mauvaise qualité, selon un certain critère, bien entendu. On peut aussi penser à améliorer d'abord la position des noeuds près de la frontière de la région dont le maillage est à améliorer, et, ensuite, progressivement, aller vers l'intérieur.

Un critère de qualité qui rend les tétraèdres les plus réguliers possible est défini ci-dessous:

En dimension 3 (en dimension 2), soit  $S_T$  = le volume (la superficie) d'un tétraèdre (triangle);  $S_C$  = le volume (superficie) de la plus grande sphère (cercle) inscrite dans le tétraèdre (triangle);  $S_R = S_C/S_T$ , et  $S_{RE}$  la valeur de  $S_R$  pour un tétraèdre régulier (triangle équilatéral). Notre critère de qualité est de minimiser  $C_5(T_0) = \max \{ T \in \Delta \} (1 - S_R/S_{RE})$  où  $\Delta$  est l'ensemble des tétraèdres (triangles) dans la région à étudier.

Puisqu'on désire bouger un ensemble des noeuds plusieurs fois, on peut choisir un ordre, par exemple, des noeuds les plus mal placés aux mieux placés, en utilisant des critères différents chaque fois qu'on veut rebouger l'ensemble des noeuds. On peut aussi prendre comme critère un mélange de ces critères. Par exemple, en prenant  $C_5(T_0)$  comme critère de qualité d'un tétraèdre  $T_0$ , et minimiser  $C_6(T_0)$  comme critère de qualité de voisinage d'un élément  $T_0$ , où  $C_6(T_0)$  est défini ci-dessous:

Soit  $T_1, T_2, T_3, T_4$  les tétraèdres voisins de  $T_0$  (en dimension 3),  
soit  $V_M = \max(V_0, \dots, V_4)$  et  $V_m = \min(V_0, \dots, V_4)$ ,  
alors  $C_6(T_0) = 1 - V_m/V_M$ .

Dans Figure 4.24 (en dimension 2),  $T_1, T_2, T_3$  sont les triangles voisins de  $T_0$ , et  $V_M = V_3$  et  $V_m = V_1$

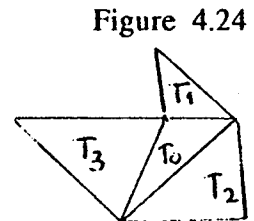


Figure 4.24

Un mélange de ces deux critères qui sont deux fonctions objectives à minimiser, telles que

$0 \leq C_5(T_0), C_6(T_0) \leq 1$  peut être exprimé comme:  $C_7(T_0) = \alpha C_5(T_0) + \beta C_6(T_0)$  à

minimiser où  $\alpha + \beta = 1$ , et  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ .

On peut aussi appliquer en sens inverse l'ordre de traitement précédent, par exemple, au lieu de prendre l'ordre allant du noeud le plus mal placé au noeud le mieux placé, on peut choisir d'aller du noeud le mieux placé au noeud le plus mal placé; ou, au lieu d'aller de la frontière vers l'intérieur, on peut commencer avec les noeuds à l'intérieur vers les noeuds frontaliers.

L'amélioration globale du maillage par ALGOTOUT, l'algorithme qui bouge un ensemble des noeuds, peut être définie de plusieurs façons. L'idée utilisée ici est la valeur moyenne de toutes les améliorations locales, c'est à dire l'amélioration de chaque noeud par rapport au critère utilisé. Regardons l'exemple de la page 34, ayant comme maillage initial la Figure 4.16 de la page 35. Le maillage final après un tour est la Figure 4.17 de la page 36. Le tableau ci-dessous donne le numéro de noeud, la valeur de la fonction objective (ici  $V_{\max} - V_{\min}$ ) pour le noeud dans le maillage initial, celle dans le maillage final, et la différence de ces deux dernières, c'est à dire, la valeur initiale moins la valeur finale car on veut minimiser.

|    | the points,                  | the initial             | and present     | criterion values |
|----|------------------------------|-------------------------|-----------------|------------------|
|    | at each point,               | and the difference      | of the 2 values |                  |
| 1  | 24.1875                      | 16.765045               | 7.4224553       |                  |
| 2  | 26.25                        | 14.088861               | 12.161139       |                  |
| 3  | 35.0                         | 18.124385               | 16.875615       |                  |
| 4  | 42.75                        | 29.019019               | 13.730981       |                  |
| 5  | 29.25                        | 21.108376               | 8.1416245       |                  |
| 6  | 43.0                         | 3.3324785               | 39.667521       |                  |
| 7  | 40.125                       | 16.749521               | 23.375479       |                  |
| 8  | 75.0                         | 14.246999               | 60.753001       |                  |
| 9  | 93.75                        | 20.692186               | 73.057814       |                  |
| 10 | 80.75                        | 31.801026               | 48.948975       |                  |
| 11 | 43.5                         | 19.453426               | 24.046574       |                  |
| 12 | 31.875                       | 12.626416               | 19.248584       |                  |
| 13 | 50.0                         | 14.246998               | 35.753002       |                  |
| 14 | 27.5                         | 13.479509               | 14.020491       |                  |
| 15 | 42.75                        | 31.13227                | 11.61773        |                  |
| 16 | 36.0                         | 18.453603               | 17.546397       |                  |
| 17 | 0.0                          | 1.7889946               | -1.7889946      |                  |
|    | the initial and intermediate | global criterion values |                 |                  |
|    | and the global improvement   | at this moment          |                 |                  |
|    | 721.6875                     | 424.57839               | 0.58831335      |                  |

Cette différence est l'amélioration locale du noeud. Par exemple, pour le noeud 1, la valeur initiale est 24,1875; la valeur finale est 16,765045; donc l'amélioration pour le noeud 1 est 7,4224553. On aperçoit qu'il y a une amélioration locale supérieure à 50% de la valeur initiale pour les noeuds 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14 et 16; à 25% pour les noeuds 1; 2; 3; 4; 5 et 15. Seul le noeud 17 a été détérioré mais de très peu. La dernière ligne donne la somme des valeurs de la deuxième et de la quatrième colonne respectivement, c'est à dire la valeur globale initiale de la fonction objective (721,6875) et la somme des améliorations locales (424,57839), ensuite elle donne le rapport du second sur le premier multiplié par 100 (58,83%) qui est notre formule pour déterminer le pourcentage d'amélioration globale. De la même façon, après deux tours, on a 59,68% d'amélioration globale (cf Figure 4.18, page 37, et le tableau correspondant, cf Annexe 6), et, après trois tours, on a 60,77% d'amélioration globale (cf Figure 4.19, page 38, et le tableau correspondant, cf Annexe 6).

## 5. RESULTATS NUMERIQUES

### 5.1 Résultats sur Quatre Cas d'Ecole et Trois Cas Réels

#### 5.1.1 Quelques Résultats en dimension 2 et en dimension 3 sur l'Ordinateur HB-68 (Système d'Exploitation Multics)

Voici les données communes à l'ensemble des exemples de dimension 2 et de dimension 3 sur lesquels on a appliqué ALGOTOUT, l'algorithme qui bouge un ensemble des noeuds :

- chaque noeud est bougé successivement par un certain nombre d'itérations et ce nombre d'itérations est ITERATION; ici, ITERATION=3
- le processus de bouger un ensemble des noeuds est réitéré un certain nombre de fois, et ce nombre est TOUR; ici TOUR=3
- la valeur pour utilisée pour déterminer le pas  $\rho$ , on appelle XCOEF; ici XCOEF= 0,01
- l'ordre dans lequel on bouge les noeuds pour chaque tour est le même pour tous et il est décrit par le mot ORDRE;

Nous avons abrégé les intitulés des colonnes des tableaux dans ce chapitre de la façon suivante:

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NOM     | le nom de l'exemple                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| PTFILE  | nom du fichier contenant les coordonnées initiales de chaque noeud                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| TRFILE  | nom du fichier contenant la description de chaque élément par ses sommets                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| NBNF    | nombre de noeuds frontaliers                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| NBNI    | nombre de noeuds internes                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| NBCRI   | la fonction objective utilisée, soit $C_1(P_0)$ , $C_2(P_0)$ , $C_3(P_0)$ (cf. page 17)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| ORDRE   | si on bouge d'abord les noeuds les plus mal placés, on désigne ORDRE par MB; si on bouge d'abord les noeuds les mieux placés, on désigne ORDRE par BM; si on bouge d'abord l'ensemble des noeuds contenus dans les petits éléments, ensuite l'ensemble des noeuds contenus dans les grands éléments, et, finalement, les noeuds internes frontaliers par rapport aux deux ensembles décrits ci-dessus, on désigne ORDRE par SB |
| POURAME | le pourcentage d'amélioration globale de la fonction objective                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| TGEXC   | le temps global d'exécution de du programme informatique (en secondes)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| TMEXC   | le temps moyen d'exécution de l'ALGO1, c'est à dire le temps moyen pour bouger un seul noeud une seule fois                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

|        |                                                                                                    |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NEWPTF | nom du fichier contenant les coordonnées finales de chaque noeud; aussi le nom de la figure finale |
| PGINF  | la page où se trouve la figure initiale                                                            |
| PGFIF  | la page où se trouve la figure finale                                                              |

Pour les tableaux des trois pages suivantes, vous devez consulter la liste ci-dessus. Pour trouver les figures qui correspondent à chaque maillage initial et à chaque maillage final, consultez les deux dernières colonnes.

#### Résultats en dimension 2

(les deux premiers cas sont des cas d'école et les cas derniers sont des cas réels proposés par la DGT/DEA, Avions Marcel Dassault/ Breguet Avion)

NOM PTFIL TRFILE NBNF NBNI NBCRI ORDRE POURAME TGEXC NEWPTF PGINF PGFIF

|         |       |      |    |    |        |       |        |        |       |    |    |
|---------|-------|------|----|----|--------|-------|--------|--------|-------|----|----|
| Essai1  | tpt   | ttr  | 5  | 12 | C1(Po) | MB    | 60,77  | 1,4984 | tpt3  | 47 | 48 |
| Essai1  | tpt   | ttr  | 5  | 12 | C1(Po) | BM    | 64,38  | 1,47   | tpt12 | 47 | 48 |
| Essai1  | tpt   | ttr  | 5  | 12 | C2(Po) | MB    | 48,47  | 1,4905 | tpt6  | 47 | 49 |
| Essai1  | tpt   | ttr  | 5  | 12 | C2(Po) | BM    | 52,24  | 1,4587 | tpt15 | 47 | 49 |
| Essai1  | tpt   | ttr  | 5  | 12 | C3(Po) | MB    | 53,25  | 1,4931 | tpt9  | 47 | 50 |
| Essai1  | tpt   | ttr  | 5  | 12 | C3(Po) | BM    | 58,49  | 1,4795 | tpt18 | 47 | 50 |
| Essai2  | sbpt  | sbtr | 30 | 40 | C1(Po) | SB-MB | 19,46  |        | sbpt2 | 51 |    |
| étape 1 | sbpt  |      |    | 30 |        |       | 25,43  | 4,485  | sbpt1 |    | 52 |
| étape 2 | sbpt1 |      |    | 10 |        |       | -13,48 | 3,5925 | sbpt2 |    | 52 |
| Essai2  | sbpt  | sbtr | 30 | 40 | C1(Po) | SB-BM | 20,57  |        | sbpt4 | 51 |    |
| étape 1 | sbpt  |      |    | 30 |        |       | 21,72  | 4,413  | sbpt3 |    | 53 |
| étape 2 | sbpt3 |      |    | 10 |        |       | -5,31  | 3,554  | sbpt4 |    | 53 |
| Essai2  | sbpt  | sbtr | 30 | 40 | C1(Po) | MB    | 36,30  | 4,94   | sbpt5 | 51 | 54 |
| Essai2  | sbpt  | sbtr | 30 | 40 | C1(Po) | BM    | 29,73  | 4,89   | sbpt6 | 51 | 54 |
| Essai3  | smrp  | smrt | 32 | 53 | C1(Po) | MB    | 38,55  | 6,93   | smrp1 | 55 | 55 |
| Essai3  | smrp  | smrt | 32 | 53 | C1(Po) | BM    | 29,07  | 6,831  | smrp3 | 55 | 55 |
| Essai3  | smrp  | smrt | 32 | 53 | C3(Po) | MB    | 46,22  | 7,13   | smrp2 | 55 | 55 |
| Essai3  | smrp  | smrt | 32 | 53 | C3(Po) | BM    | 37,30  | 7,097  | smrp4 | 55 | 55 |

| NOM    | PTFILE | TRFILE | NBNF | NBNI | NBCRI   | ORDRE  | POURAME | TGEXC | NEWPTF | PGINF  | PGFIF |    |
|--------|--------|--------|------|------|---------|--------|---------|-------|--------|--------|-------|----|
| Essai4 | mncp   | mnct   | 17   | 58   | C1(Po)  | MB     | 36,73   | 6,58  | mncp1  | 56     | 57    |    |
| Essai4 | mncp   | mnct   | 17   | 58   | C1(Po)  | BM     | 34,55   | 6,66  | mncp4  | 56     | 58    |    |
| Essai4 | mncp   | mnct   | 17   | 58   | C2(Po)  | MB     | 11,69   | 6,60  | mncp2  | 56     | 57    |    |
| Essai4 | mncp   | mnct   | 17   | 58   | C2(Po)  | BM     | -0,148  | 6,76  | mncp5  | 56     | 59    |    |
| Essai4 | mncp   | mnct   | 17   | 58   | C3(Po)  | MB     | 38,95   | 6,83  | mncp3  | 56     | 58    |    |
| Essai4 | mncp   | mnct   | 17   | 58   | C3(Po)  | BM     | 28,24   | 6,97  | mncp6  | 56     | 59    |    |
|        |        |        |      |      |         |        |         |       |        |        |       |    |
| Essai5 | patpt  | patt   | 39   | 81   | patsurf | C1(Po) | MB      | 33,54 | 12,08  | patpt1 | 60    | 61 |
| Essai5 | patpt  | patt   | 39   | 81   | patsurf | C1(Po) | BM      | 29,12 | 11,81  | patpt4 | 60    | 62 |
| Essai5 | patpt  | patt   | 39   | 81   | patsurf | C2(Po) | MB      | 31,61 | 12,02  | patpt2 | 60    | 61 |
| Essai5 | patpt  | patt   | 39   | 81   | patsurf | C2(Po) | BM      | 27,97 | 12,08  | patpt5 | 60    | 63 |
| Essai5 | patpt  | patt   | 39   | 81   | patsurf | C3(Po) | MB      | 37,09 | 12,43  | patpt3 | 60    | 62 |
| Essai5 | patpt  | patt   | 39   | 81   | patsurf | C3(Po) | BM      | 35,54 | 12,27  | patpt6 | 60    | 63 |

Résultats en dimension 3 (tous les deux sont des cas d'école)

| NOM    | PTFILE | TRFILE | NBNF | NBNI | FRONT  | NBCRI  | ORDRE | POURAME | TGEXC  | NEWPTF |
|--------|--------|--------|------|------|--------|--------|-------|---------|--------|--------|
| Essai6 | dapt   | datet  | 13   | 2    | ptdata | C1(Po) | MB    | 8,57    | 1,4927 | dapt1  |
| Essai6 | dapt   | datet  | 13   | 2    | ptdata | C1(Po) | BM    | 8,94    | 1,4904 | dapt2  |
| Essai6 | dapt   | datet  | 13   | 2    | ptdata | C2(Po) | MB    | 14,05   | 1,4993 | dapt3  |
| Essai6 | dapt   | datet  | 13   | 2    | ptdata | C2(Po) | BM    | 14,05   | 1,4858 | dapt4  |
| Essai6 | dapt   | datet  | 13   | 2    | ptdata | C3(Po) | MB    | 1,58    | 1,5767 | dapt5  |
| Essai6 | dapt   | datet  | 13   | 2    | ptdata | C3(Po) | BM    | 1,68    | 1,51   | dapt6  |
| Essai7 | inp    | intt   | 13   | 137  | ptdata | C1(Po) | MB    | 40,13   | 69,99  | inp1   |
| Essai7 | inp    | intt   | 13   | 137  | ptdata | C1(Po) | BM    | 36,81   | 69,67  | inp2   |
| Essai7 | inp    | intt   | 13   | 137  | ptdata | C2(Po) | MB    | 13,55   | 70,57  | inp3   |
| Essai7 | inp    | intt   | 13   | 137  | ptdata | C2(Po) | BM    | 9,22    | 70,41  | inp4   |
| Essai7 | inp    | intt   | 13   | 137  | ptdata | C3(Po) | MB    | 20,15   | 70,34  | inp5   |
| Essai7 | inp    | intt   | 13   | 137  | ptdata | C3(Po) | BM    | 19,21   | 70,73  | inp6   |

Le programme informatique comporte trois grandes parties: la première partie est la partie initialisation; la deuxième partie est l'application proprement dite de l'ALGOTOUT qui bouge un ensemble des noeuds en les bougeant un par un; la troisième partie est la mise à jour des coordonnées des noeuds après chaque tour et le choix de l'ordre dans lequel les noeuds seront bougés. Voici les temps moyens d'exécution du programme informatique et de chacune de trois

parties sur chacun de nos exemples :

(Résultats en dimension 2)

| NOM<br>(nombre total de noeuds; nombre<br>total d'éléments; NBNI) | TGEXC<br>(secondes)<br>(TOUR=3) | 1e partie<br>(secondes) | 2e partie<br>(secondes)<br>(TOUR=1) | 3e partie<br>(secondes)<br>(TOUR=1) |
|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Essai1 ( 17; 27; 12)                                              | 1,485                           | 0,537                   | 0,088                               | 0,217                               |
| Essai2 ( 70; 108; 30)                                             | 4,450                           | 1,106                   | 0,343                               | 0,781                               |
| Essai2 ( 70; 108; 10)                                             | 3,570                           | 1,115                   | 0,120                               | 0,725                               |
| Essai2 ( 70; 108; 40)                                             | 4,915                           | 1,117                   | 0,407                               | 0,900                               |
| Essai3 ( 85; 136; 53)                                             | 7,000                           | 1,437                   | 0,573                               | 1,221                               |
| Essai4 ( 75; 131; 58)                                             | 6,732                           | 1,307                   | 0,610                               | 1,195                               |
| Essai5 ( 120; 199; 81)                                            | 12,117                          | 2,075                   | 1,018                               | 2,130                               |

(Résultats en dimension 3)

| NOM<br>(nombre total de noeuds; nombre<br>total des éléments; NBNI) | TGEXC<br>(secondes)<br>(TOUR=3) | 1e partie<br>(secondes) | 2e partie<br>(secondes)<br>(TOUR=1) | 3e partie<br>(secondes)<br>(TOUR=1) |
|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Essai6 ( 15; 25; 2)                                                 | 1,5091                          | 0,5375                  | 0,0619                              | 0,2547                              |
| Essai7 ( 150; 638; 137)                                             | 70,285                          | 8,7051                  | 7,4112                              | 13,1212                             |

Les première et troisième parties dépendent de la structure des données, du choix de la fonction critère ( $C(P_0)$ ), du choix de l'ordre dans lequel on bouge les noeuds, et tous ceux-ci dépendent de l'utilisateur. Calculons maintenant le temps moyen pris pour bouger un noeud une seule fois sur chaque exemple.

(Résultats en dimension 2)

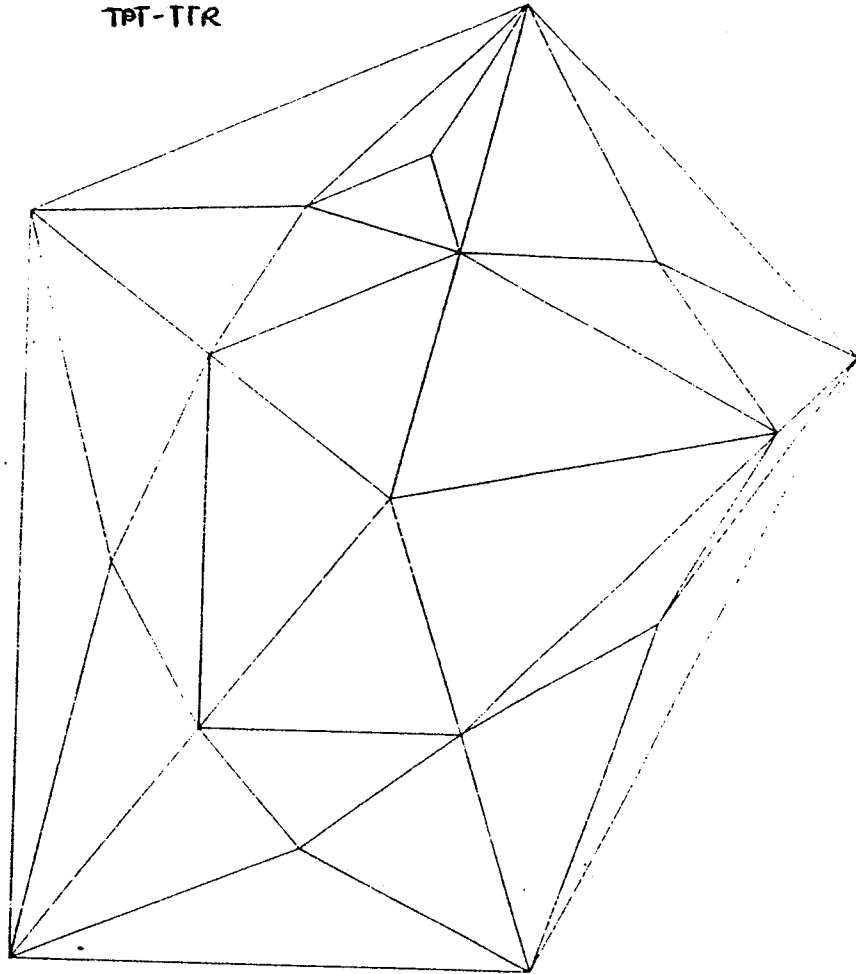
| NOM    | NBNI | 2e partie<br>(secondes) | NBNI×CNT<br>(où CNT=3) | TMEXC<br>(sec/noeud/ITERATION/TOUR) |
|--------|------|-------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| Essai1 | 12   | 0,088                   | 36                     | 0,002444                            |
| Essai2 | 30   | 0,343                   | 90                     | 0,003811                            |
| Essai2 | 10   | 0,120                   | 30                     | 0,004                               |
| Essai2 | 40   | 0,407                   | 120                    | 0,003391                            |
| Essai3 | 53   | 0,573                   | 159                    | 0,003603                            |
| Essai4 | 58   | 0,610                   | 174                    | 0,003505                            |
| Essai5 | 81   | 1,018                   | 243                    | 0,004189                            |

(Résultats en dimension 3)

| NOM    | NBNI | 2e partie<br>(secondes) | NBNI×CNT<br>(où CNT=3) | TMEXC<br>(sec/noeud/ITERATION/TOUR) |
|--------|------|-------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| Essai6 | 2    | 0,0619                  | 6                      | 0,010316                            |
| Essai7 | 137  | 7,4112                  | 411                    | 0,018032                            |

ESSAI 1  
(CAS D'ECOLE)

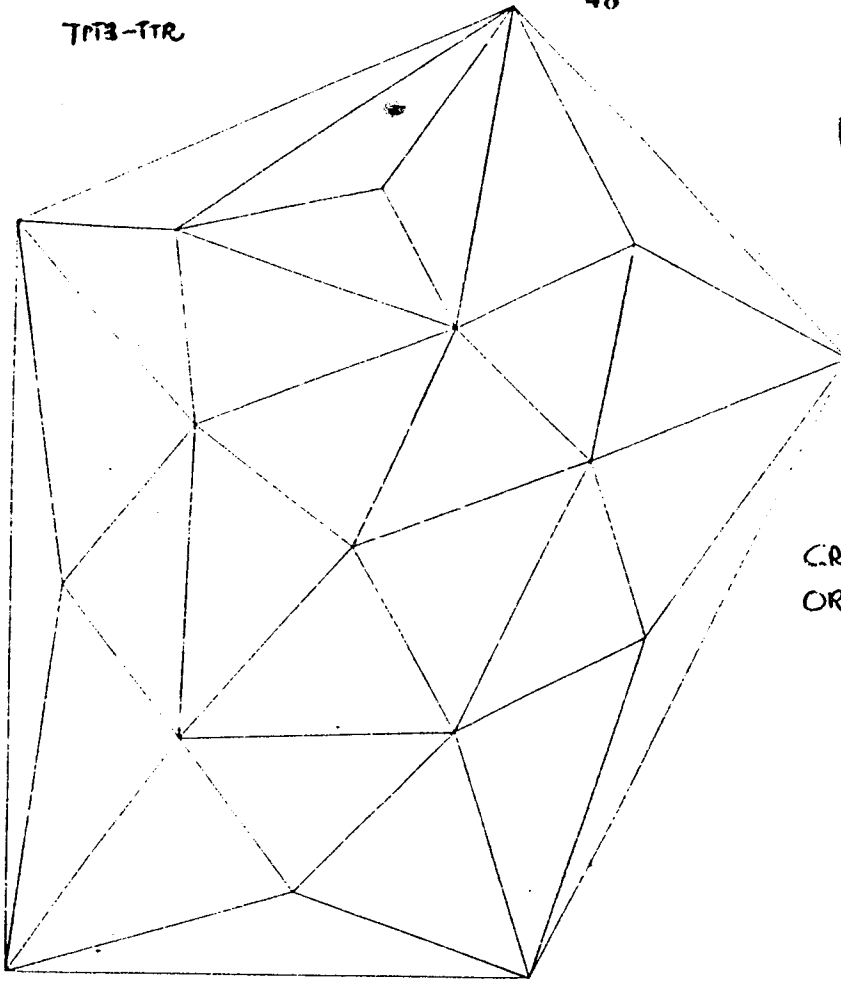
TPT-TTR



MAILLAGE INITIAL

48

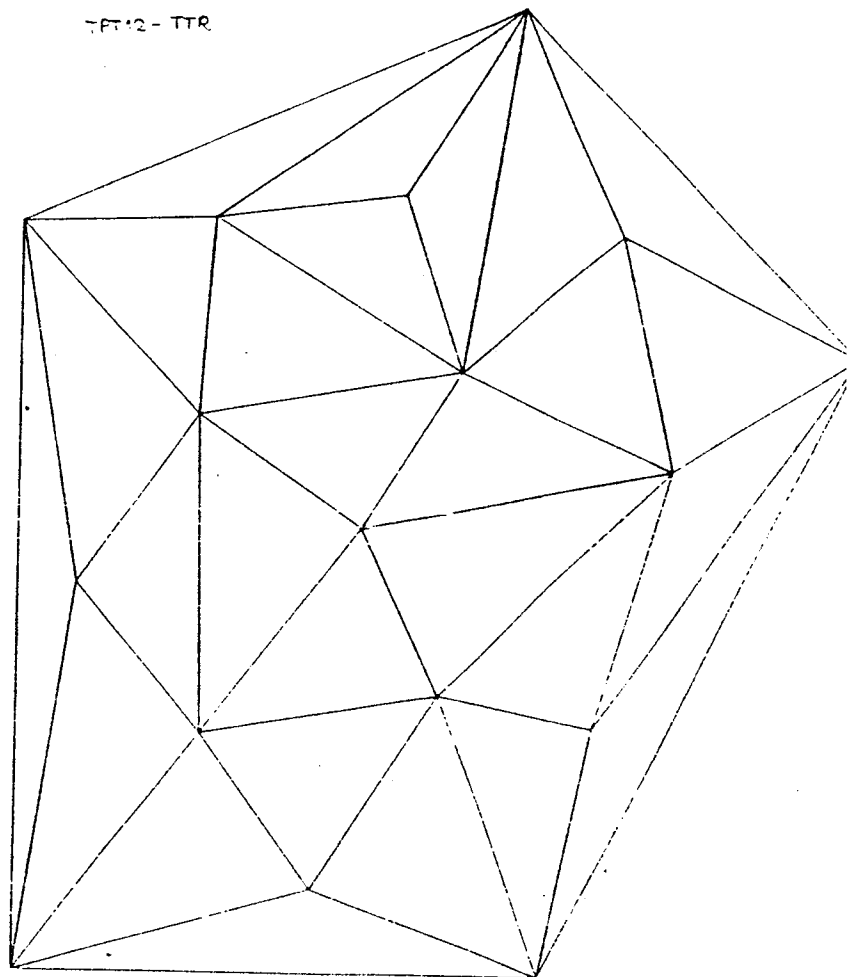
TPT3-TTR



ESSAI 1  
MAILLAGES FINALS

CRITERE :  $C_1(P_0)$   
ORDRE : MEILLEUR AU  
PIRE

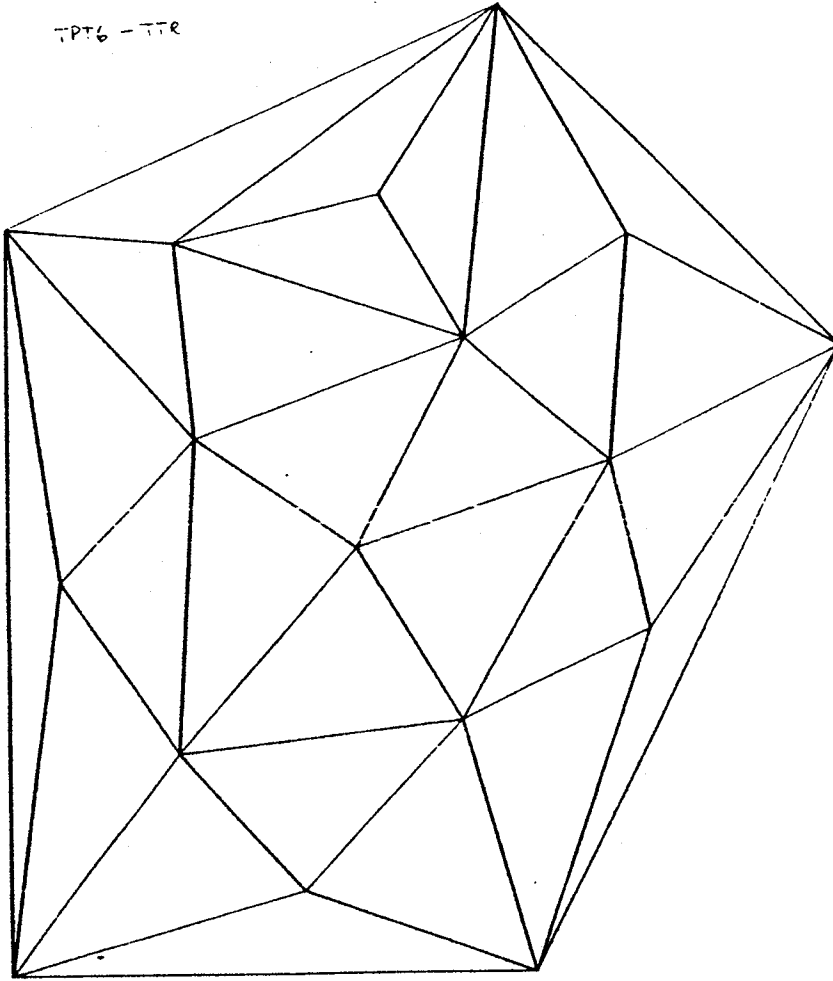
TPT12-TTR



CRITERE :  
 $C_1(P_0)$   
ORDRE :  
PIRE AU  
MEILLEUR

49

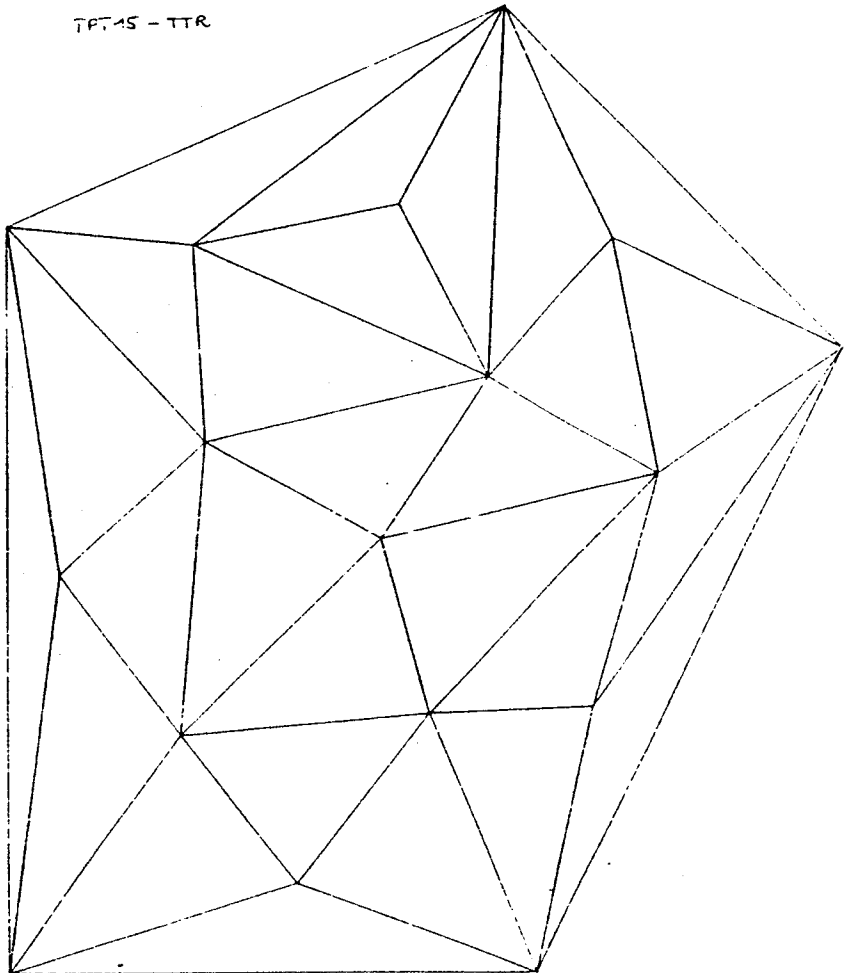
TPT6 - TTR



ESSAI 1  
MAILLAGES  
FINALS  
CRITERE:  $C_2(P)$

ORDRE:  
MEILLEUR  
AU PIRE

TPT45 - TTR

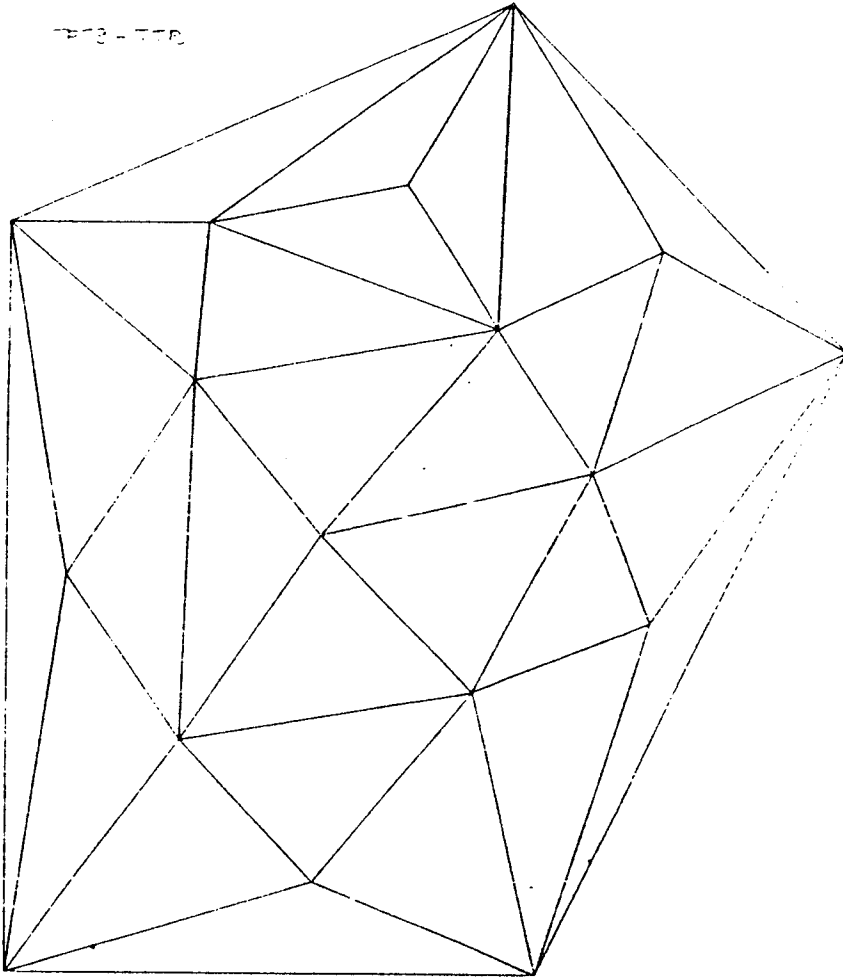


ORDRE:  
PIRE  
AU  
MEILLEUR

50

TET3 - TTR

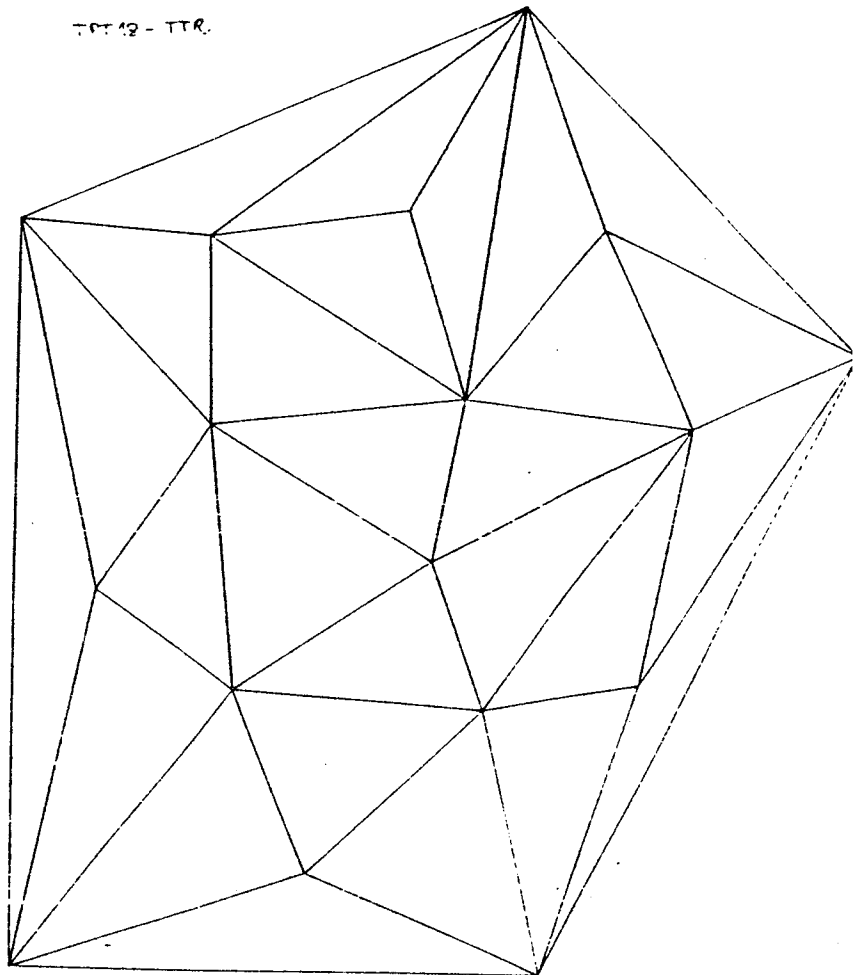
ESSAI 1  
MAILLAGES FIN  
CRITÈRE :  $C_3(P_0)$

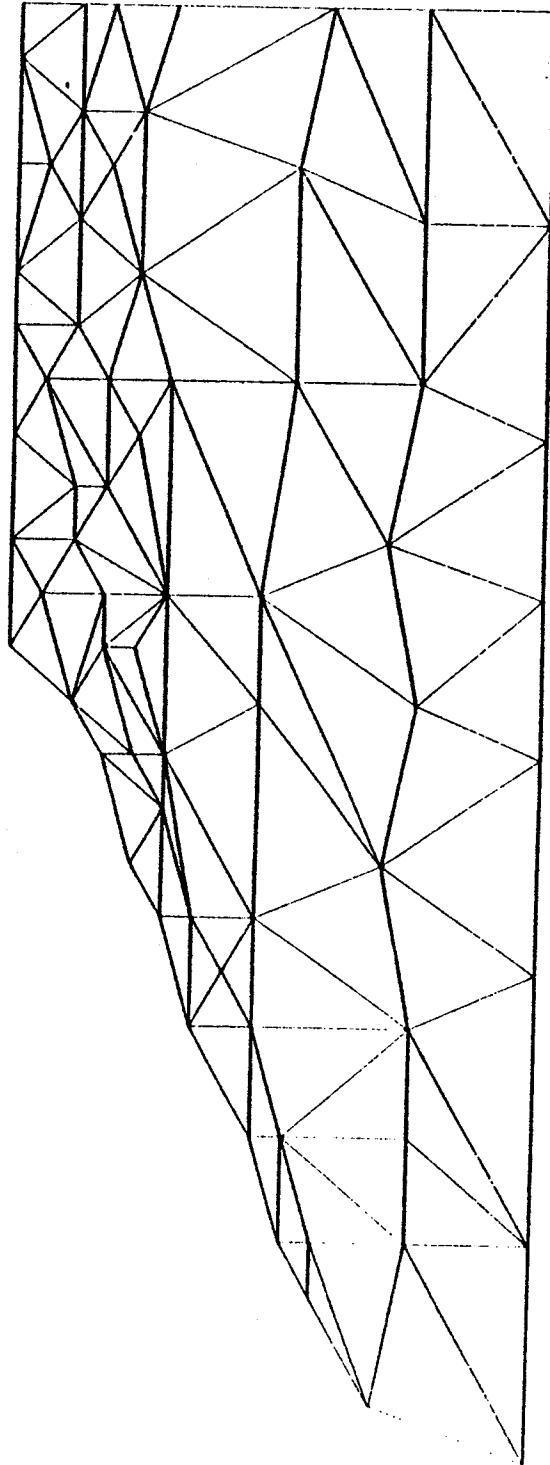


TET12 - TTR

ORDRE :  
MEILLEUR  
AU PIRE

ORDRE :  
PIRE AU  
MEILLEUR



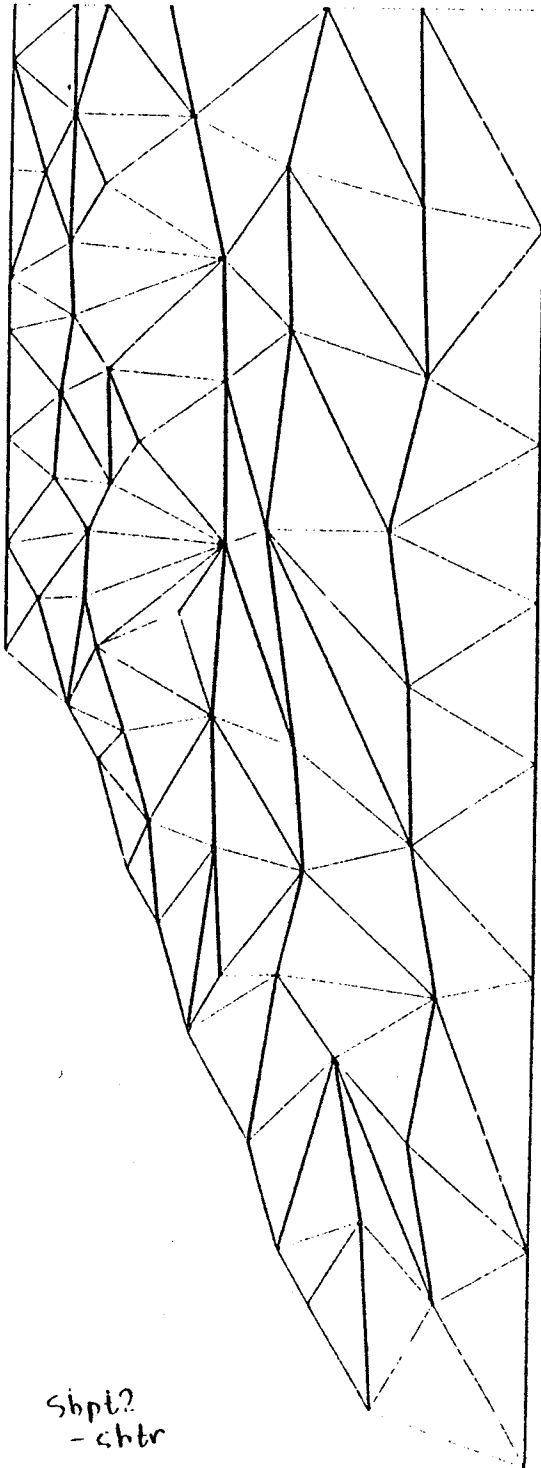


ESSAI 2  
(CAS D'ECOLE)  
MAILLAGE  
INITIAL

sbpt-sbtr

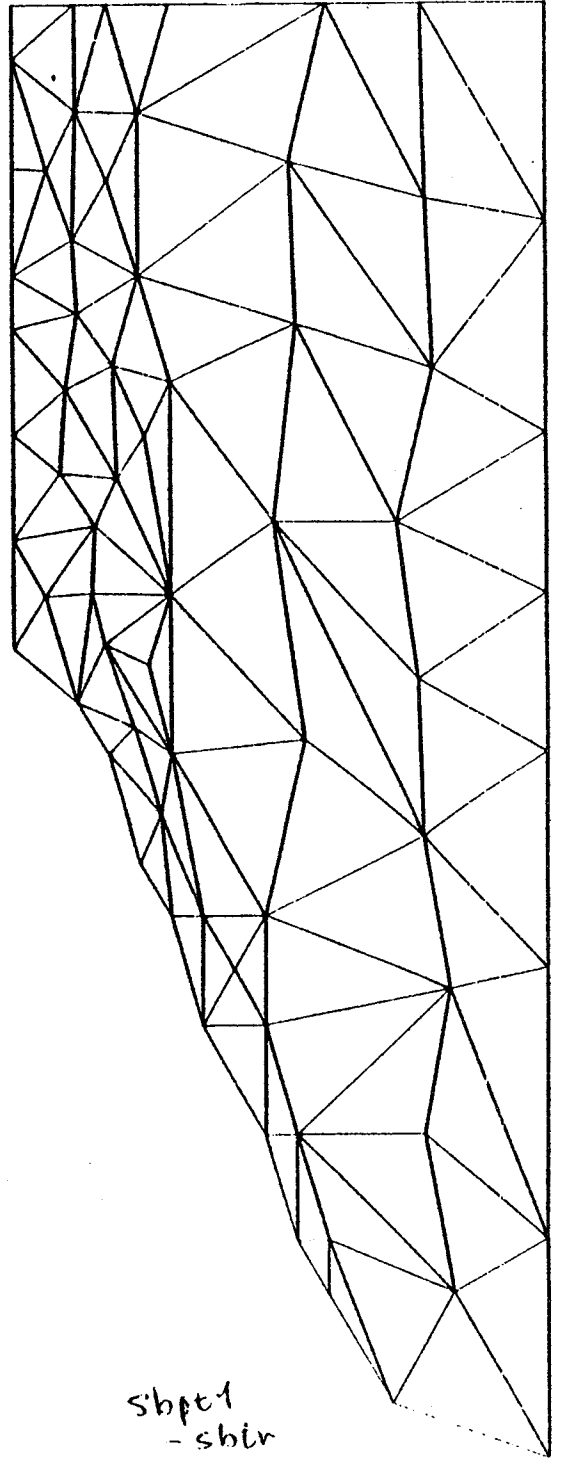
ESSAI 2  
 CRITERE:  $C_1(F_0)$   
 ORDRE: MEILLEUR AU PIRE

MAILLAGE FINAL:  
 - MAILLER LES NOEUDS FRONTALIERS  
 ENTRE LES DEUX ENSEMBLES



sbpt2  
 - chtr

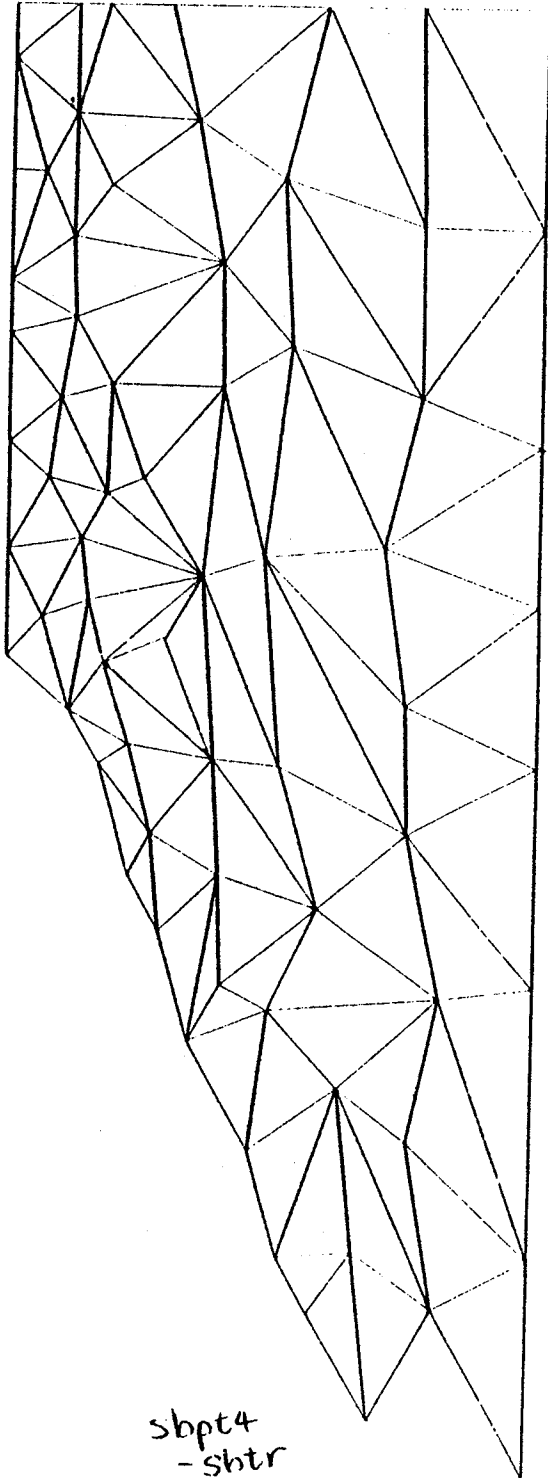
MAILLAGE INTERMEDIAIRE :  
 MAILLER SEPAREMENT L'ENSEMBLE  
 DES PETITS ELEMENTS ET L'ENSEMBLE  
 DES GRANDS ELEMENTS



sbpt1  
 - sbir

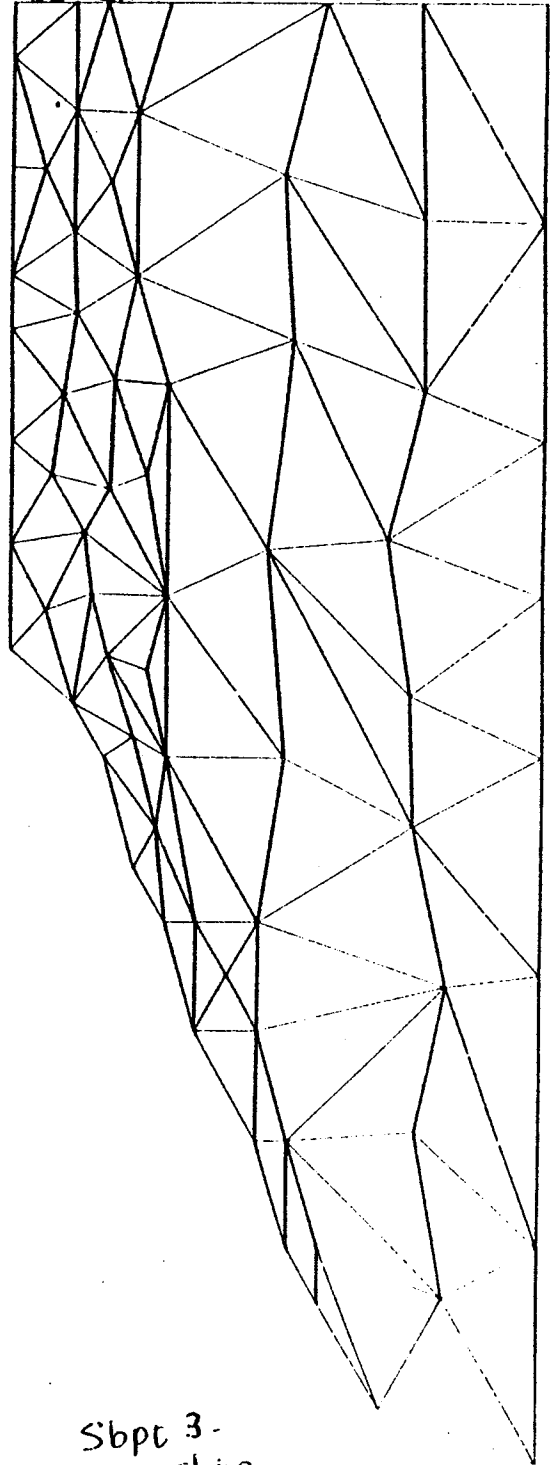
ESSAI 2  
 CRITERE :  $C_1(P_2)$   
 ORDRE : PIRE AU MEILLEUR

MAILLAGE FINAL :  
 MAILLER LES NOEUDS FRONTALIERS  
 ENTRE LES DEUX ELEMENTS



Sbpt4  
 - Sbtr

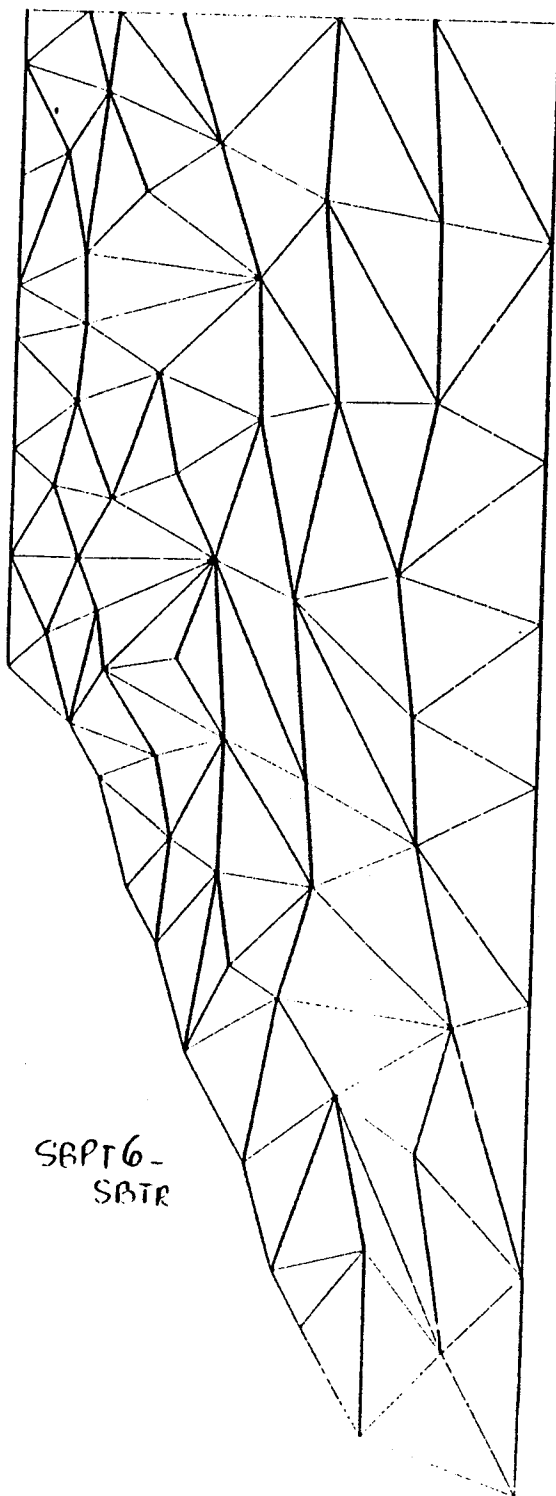
MAILLAGE INTERMEDIAIRE :  
 MAILLER SEPAREMENT L'ENSEMBLE  
 DES PETITS ELEMENTS ET L'ENSEMBLE  
 DES GRANDS ELEMENTS



Sbpt 3-  
 Sbtr

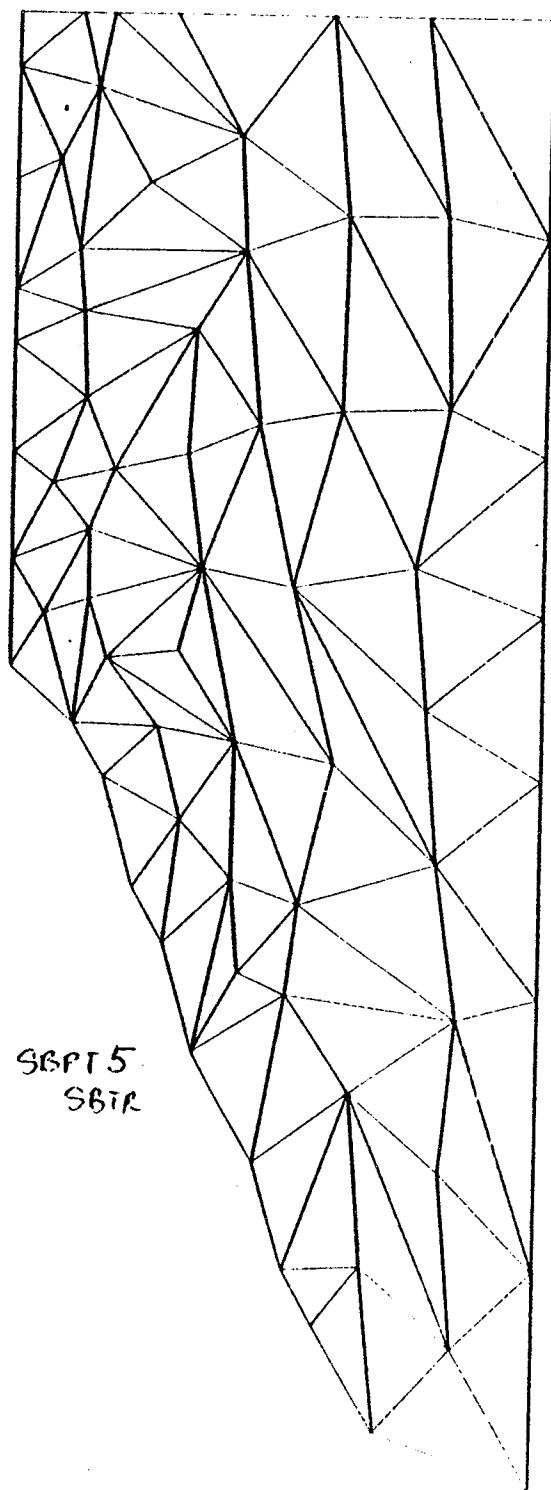
ESSAI 3  
MAILLAGES FINALS  
CRITERE :  $C_1(P_0)$

ORDRE : PIRE AU  
MEILLEUR



SBPT6-  
SBTR

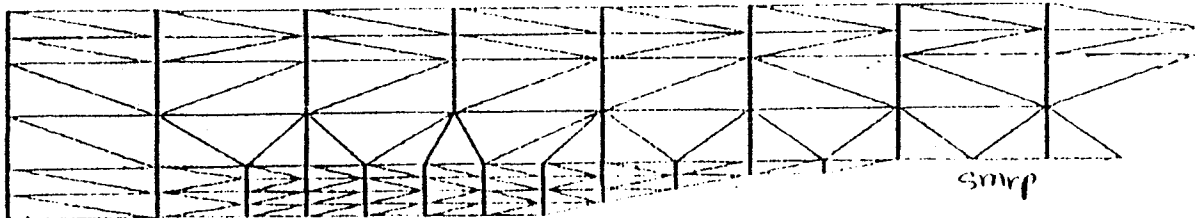
ORDRE : MEILLEUR  
AU PIRE



SBPT5  
SBTR

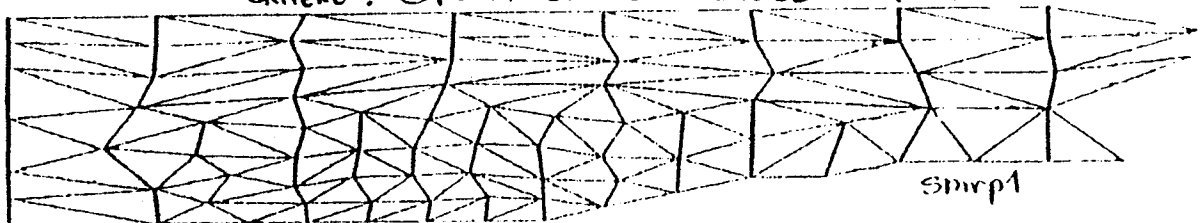
# ESSAI 3 (CAS REEL)

## MAILLAGE INITIAL

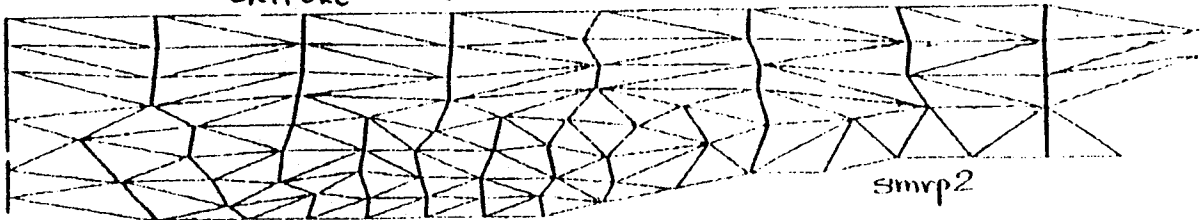


## MAILLAGES FINALS

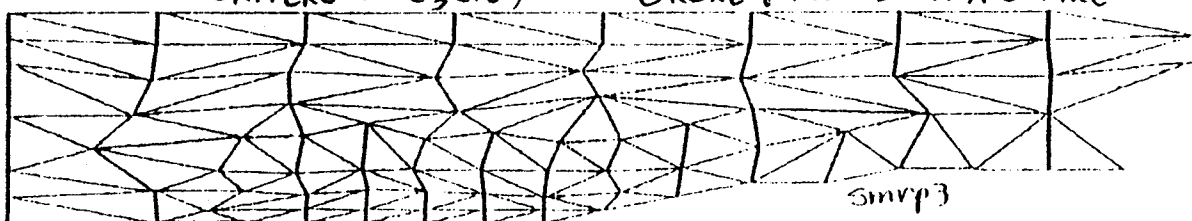
CRITERE :  $C_1(P_0)$  ORDRE : MEILLEUR AU PIRE



## CRITERE : $C_1(P_0)$ ORDRE : PIRE AU MEILLEUR



## CRITERE : $C_3(P_0)$ ORDRE : MEILLEUR AU PIRE

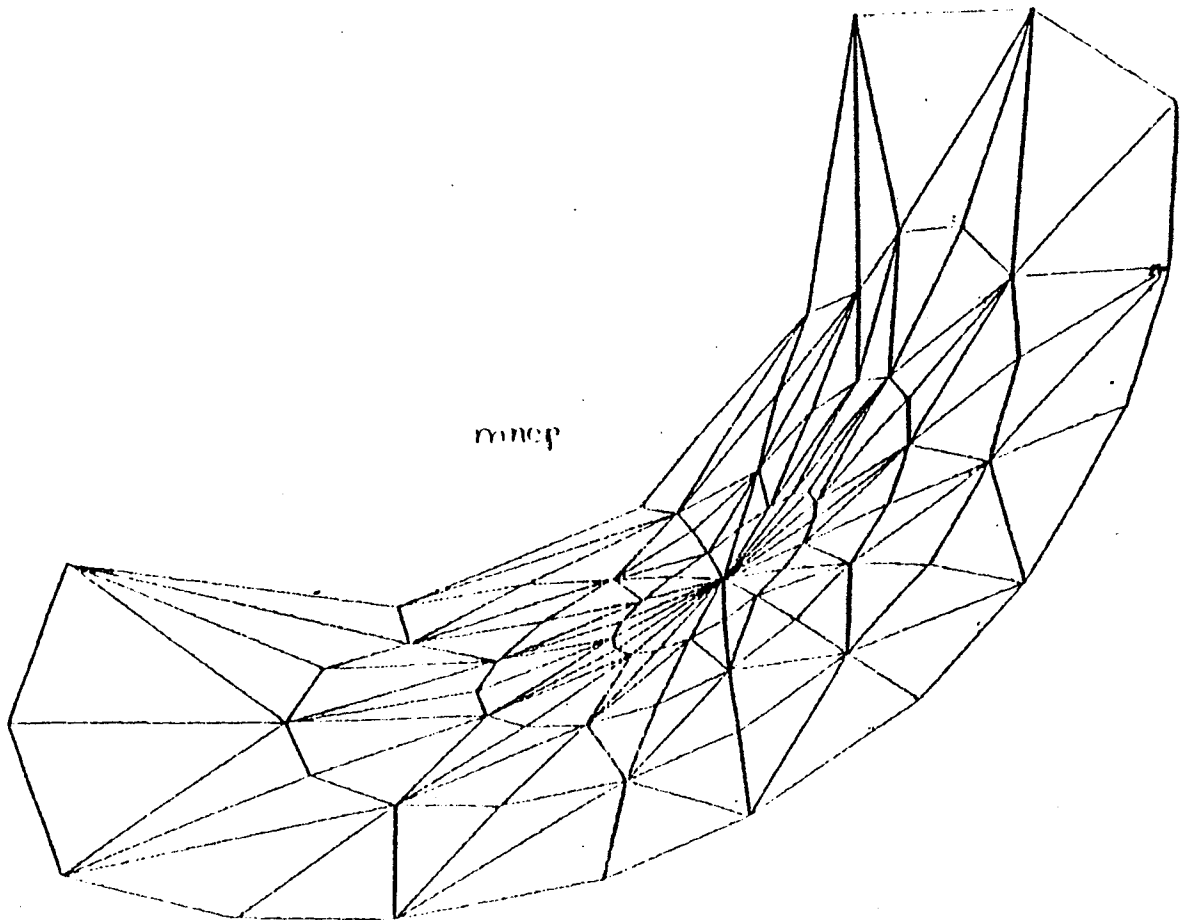


## CRITERE : $C_3(P_0)$ ORDRE : PIRE AU MEILLEUR

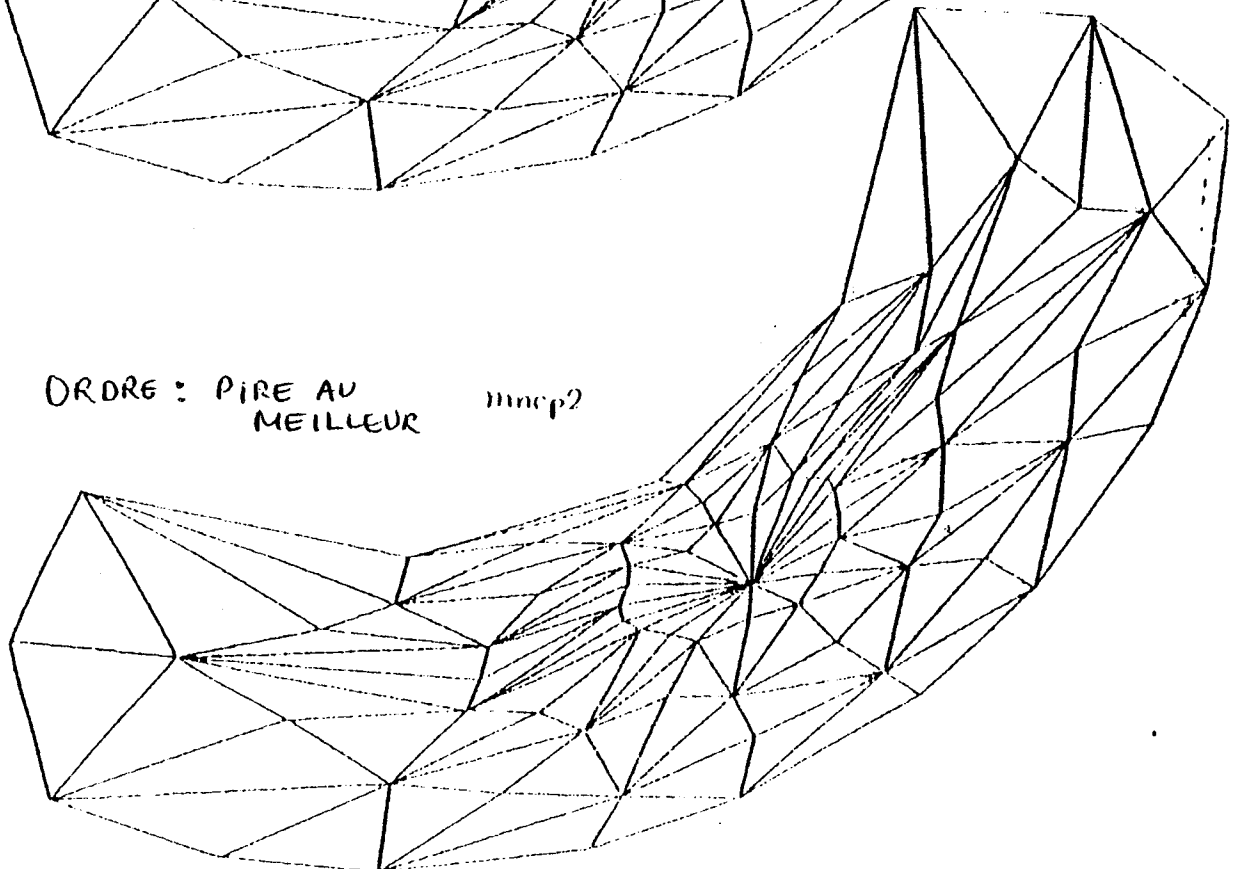
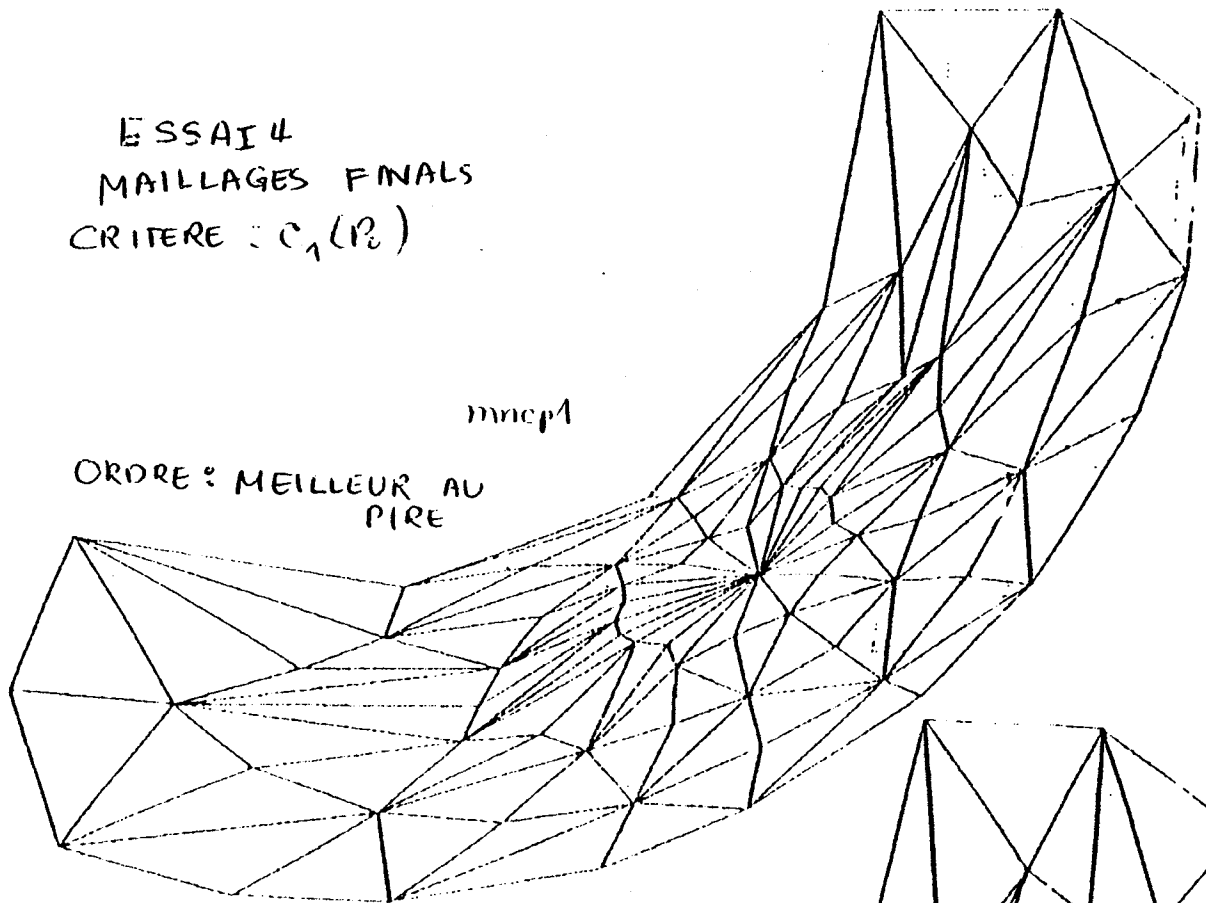


ESSAI 4  
(CAS REEL)

MAILLAGE INITIAL



ESSAI 4  
MAILLAGES FINALS  
CRITERE :  $C_1(P_2)$

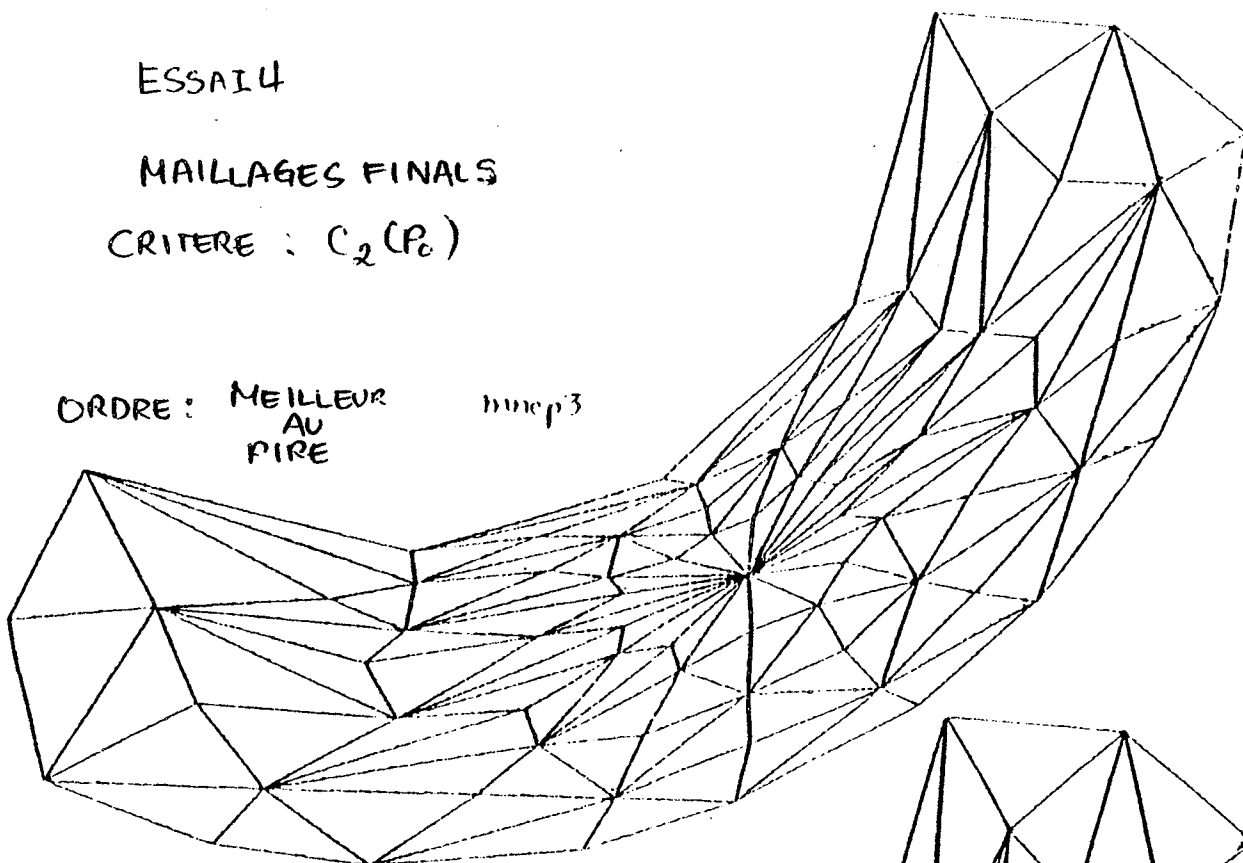


ESSAI 4

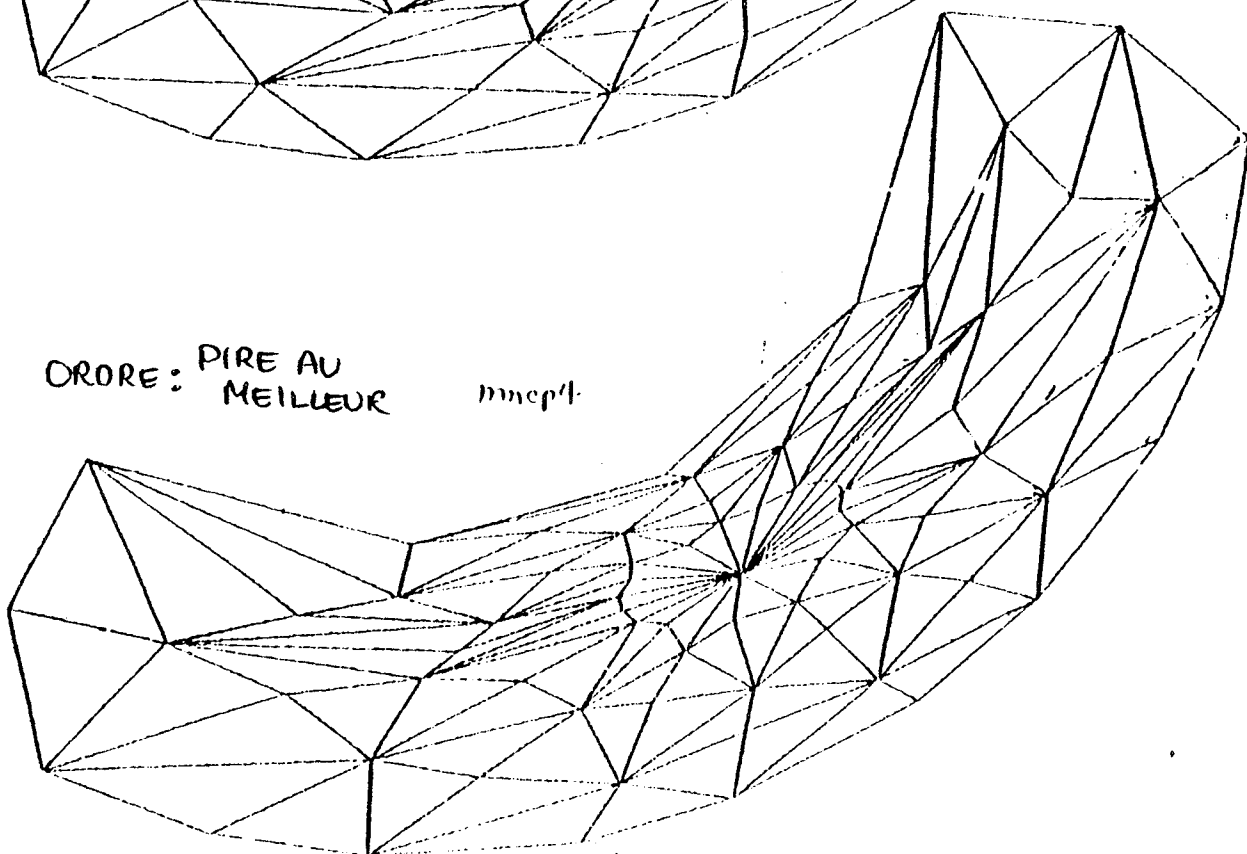
MAILLAGES FINALS

CRITERE :  $C_2(P_0)$ ORDRE : MEILLEUR  
AU  
PIRE

mmep3

ORDRE : PIRE AU  
MEILLEUR

mmep4

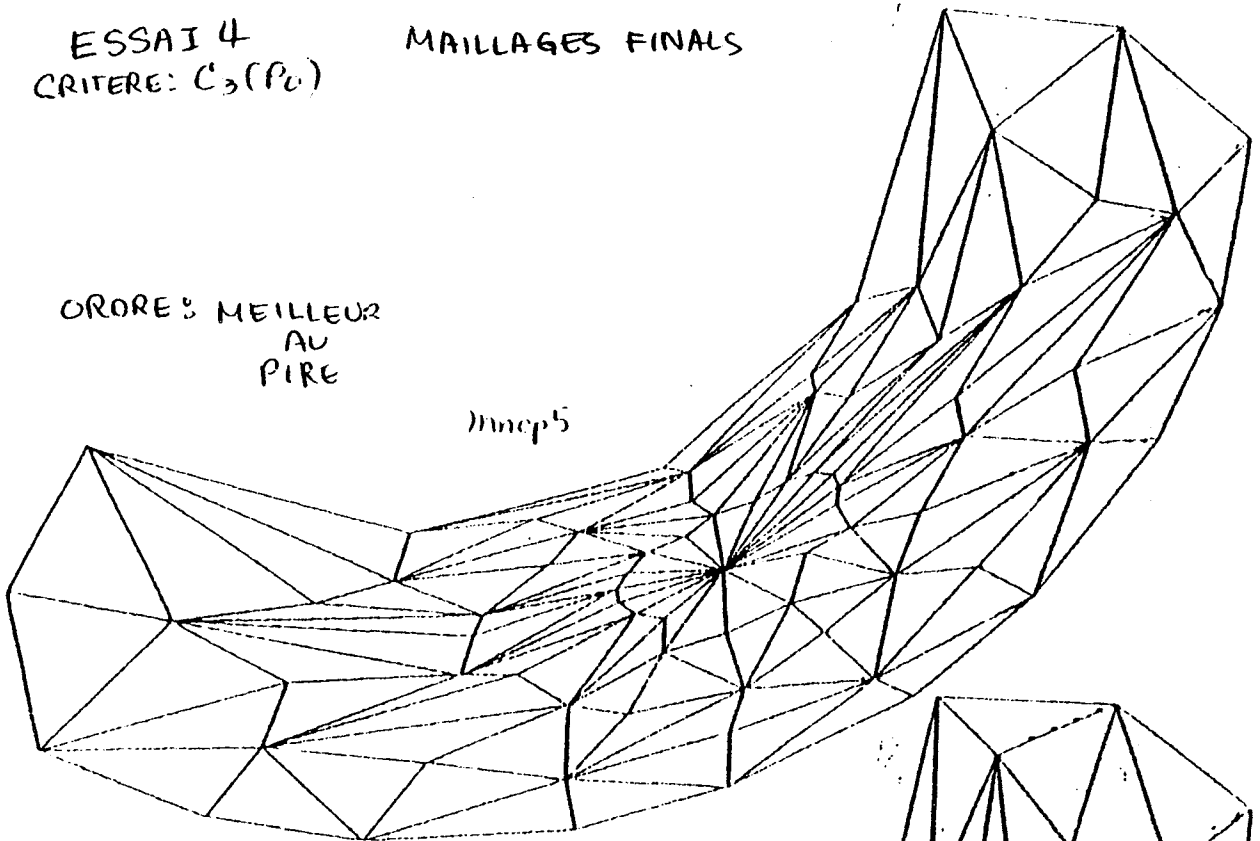


ESSAI 4  
CRITERE:  $C_3(P_0)$

MAILLAGES FINALS

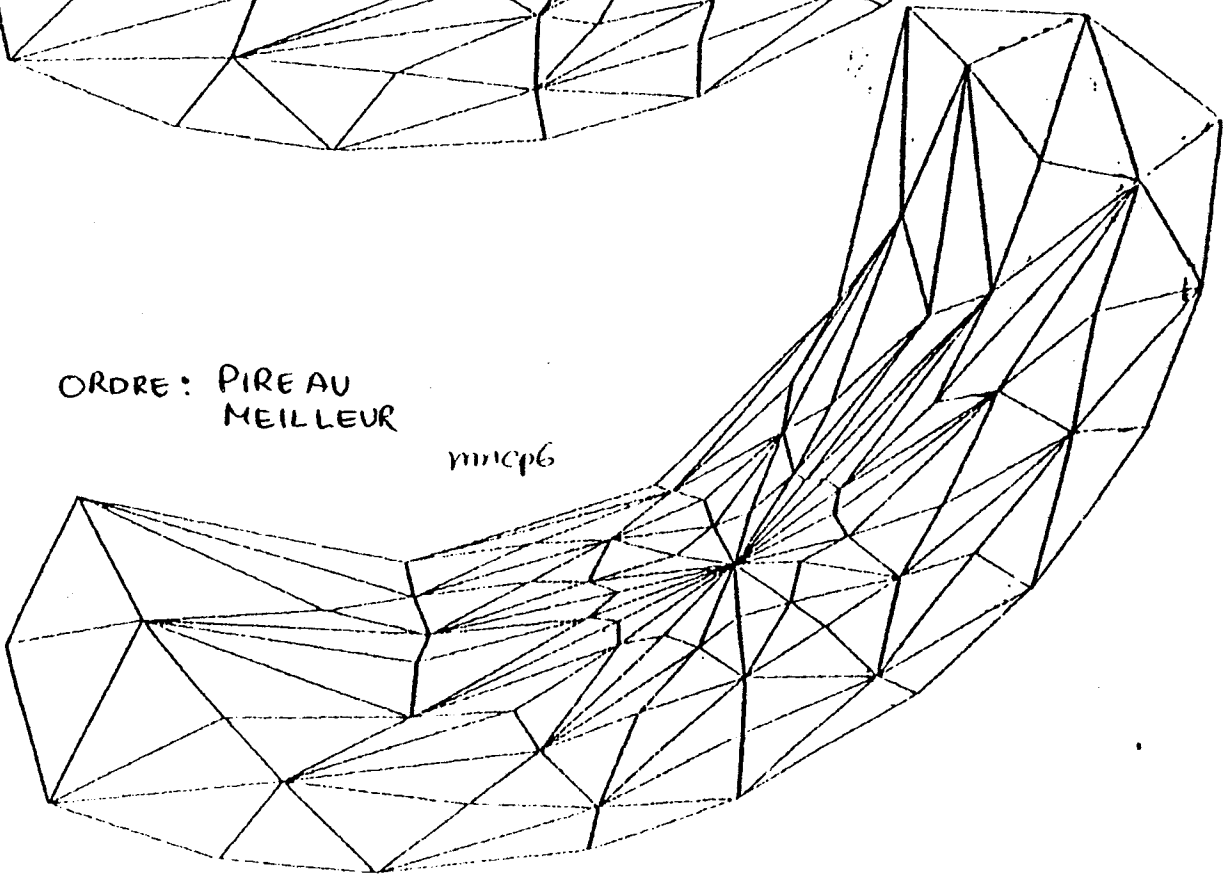
ORDRE: MEILLEUR  
AU  
PIRE

mncp5

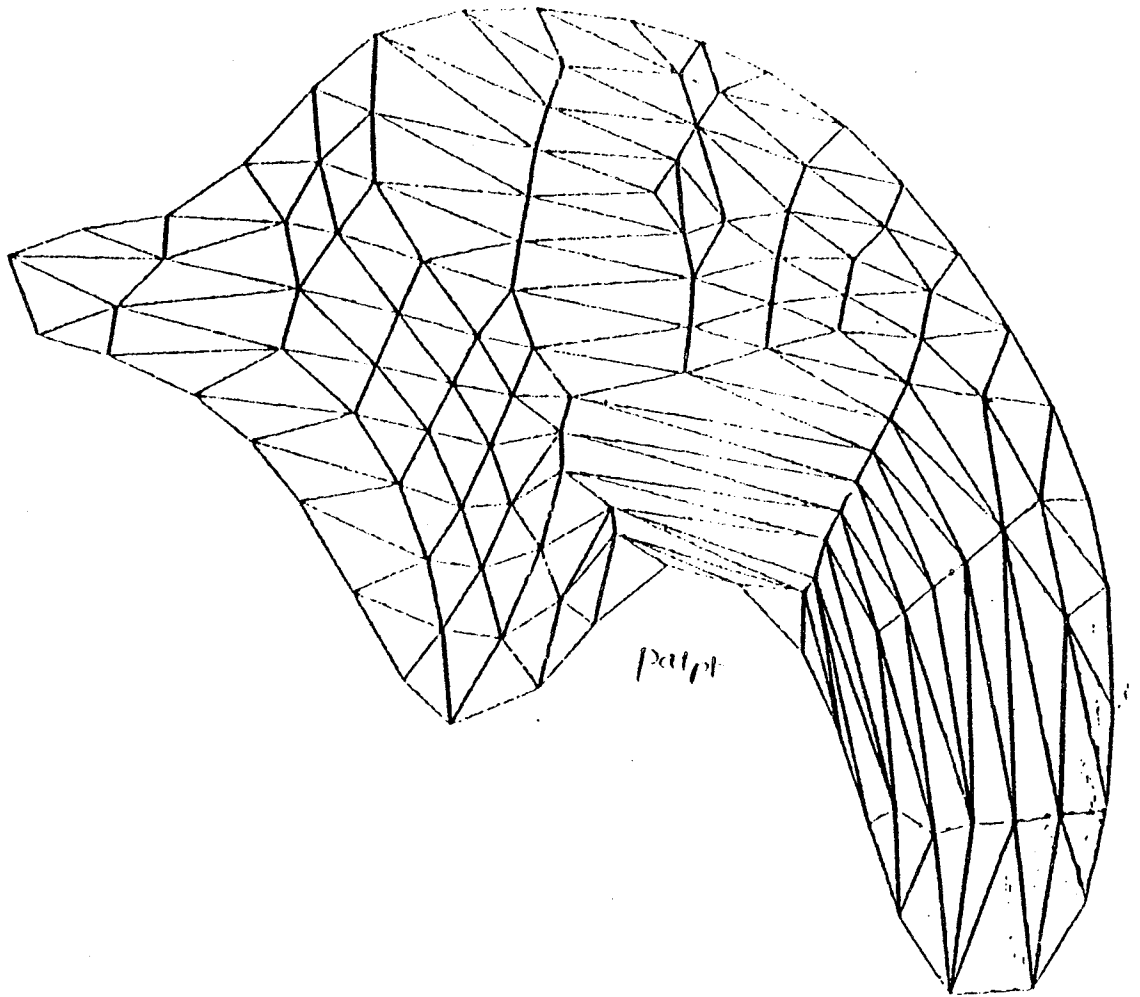


ORDRE: PIRE AU  
MEILLEUR

mncp6

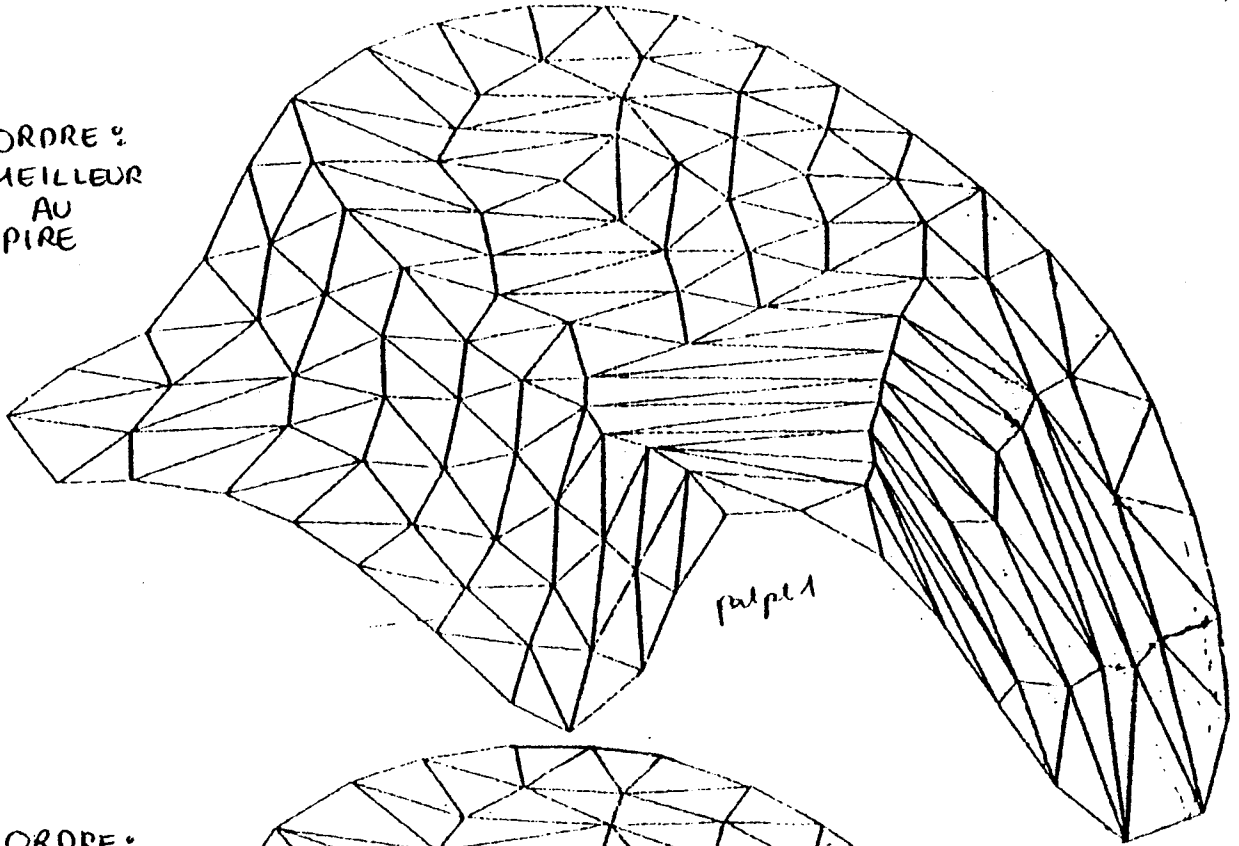


ESSAIS (CAS REEL)  
MAILLAGE INITIAL

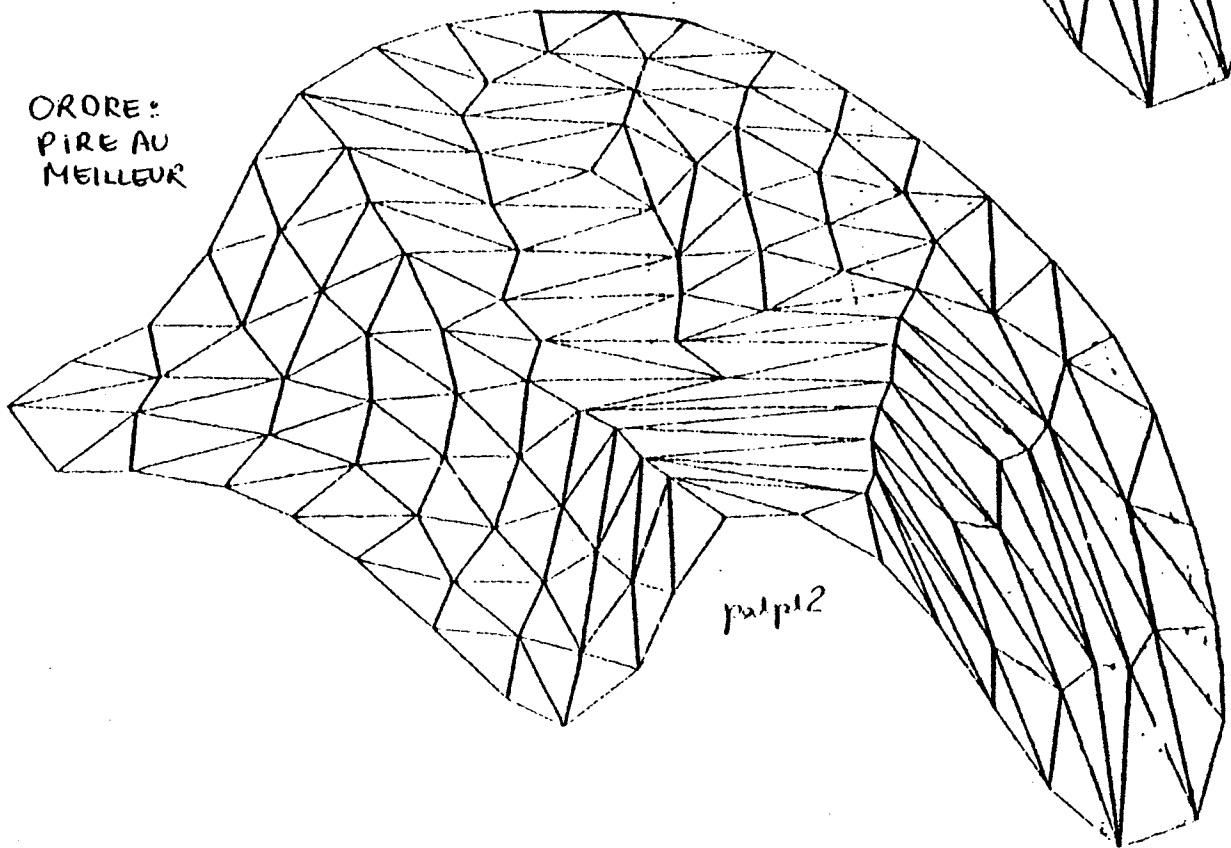


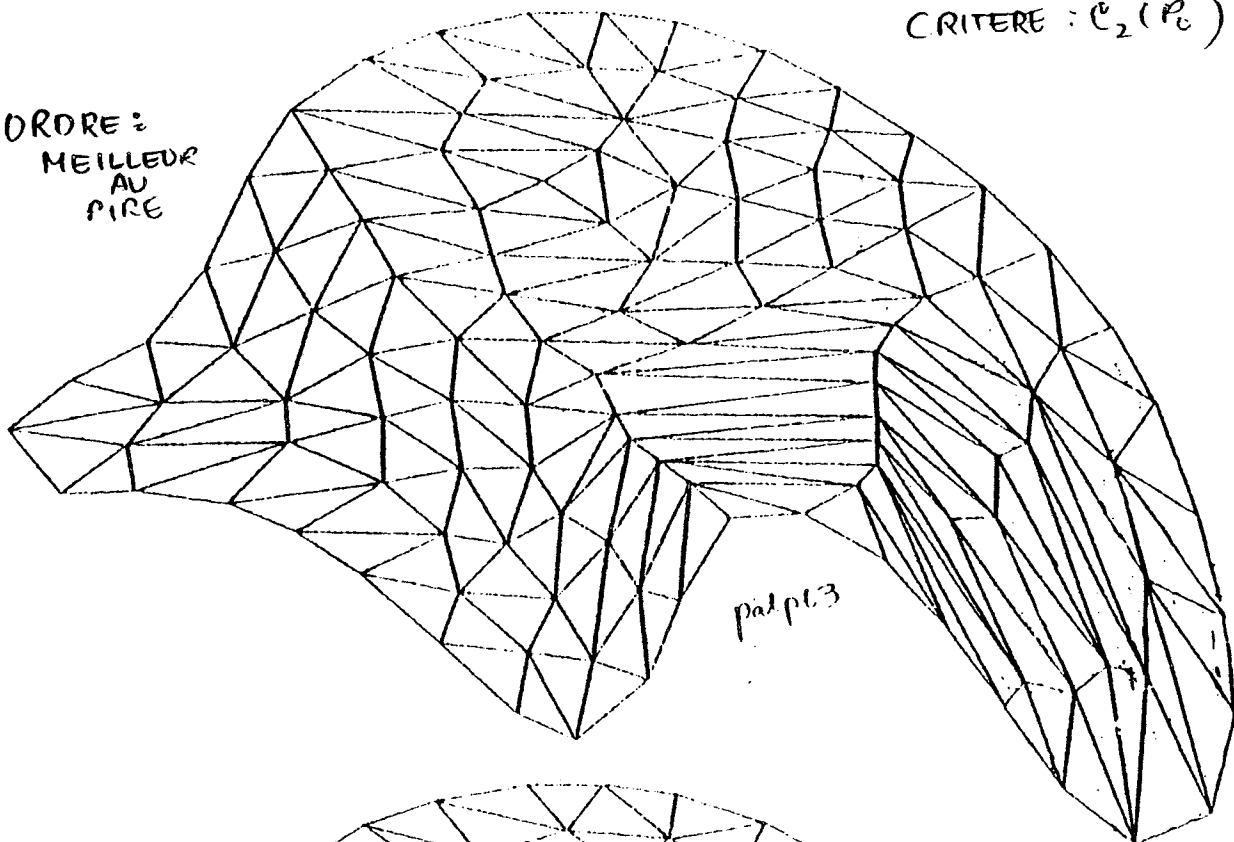
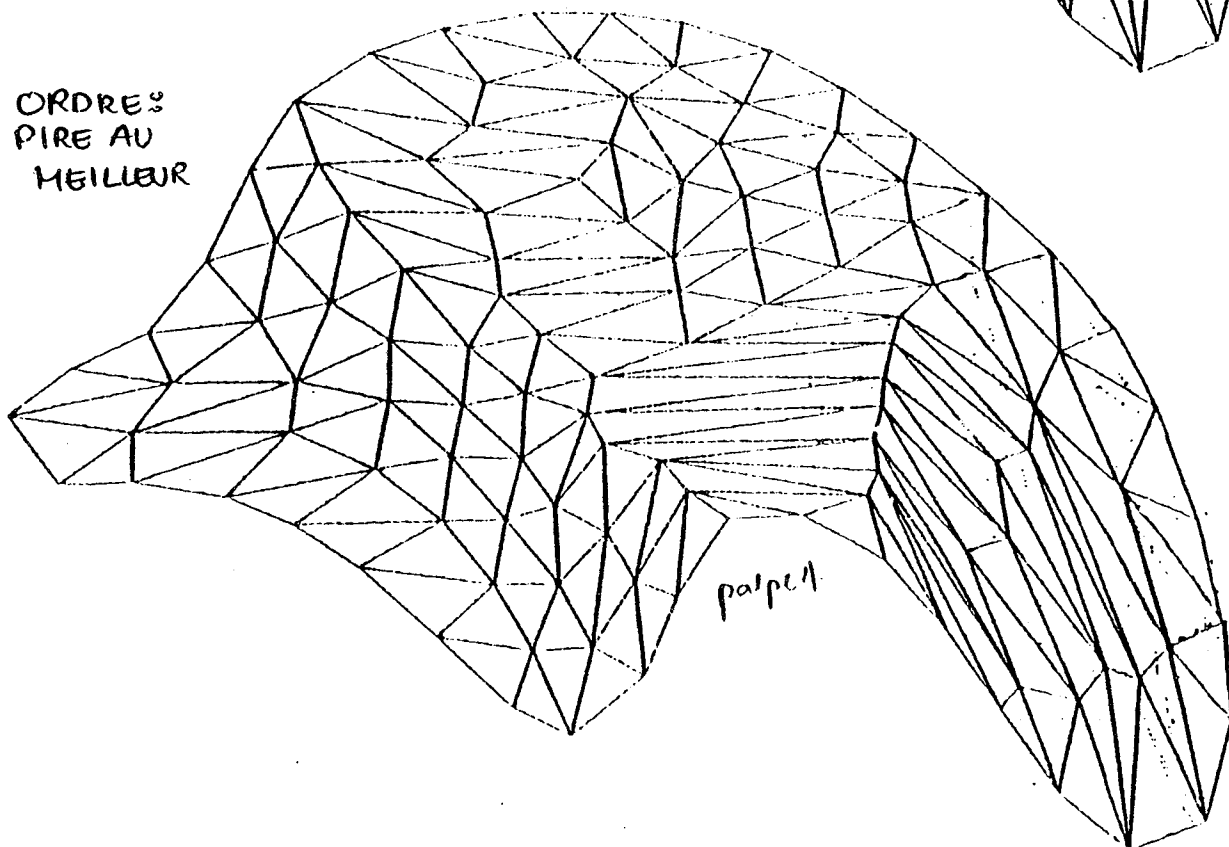
ESSAI 5  
MAILLAGES FINALS  
CRITERE :  $C_1(P_0)$

ORDRE :  
MEILLEUR  
AU  
PIRE

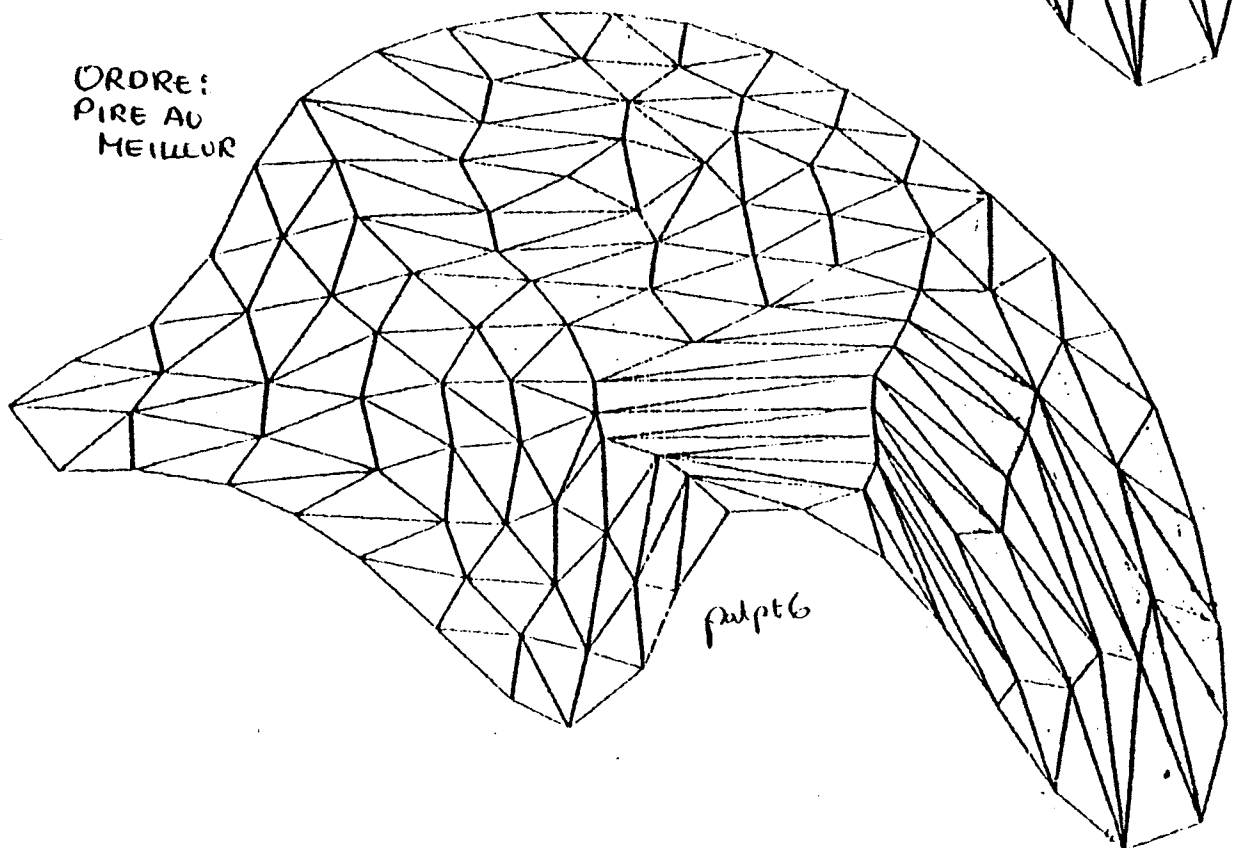
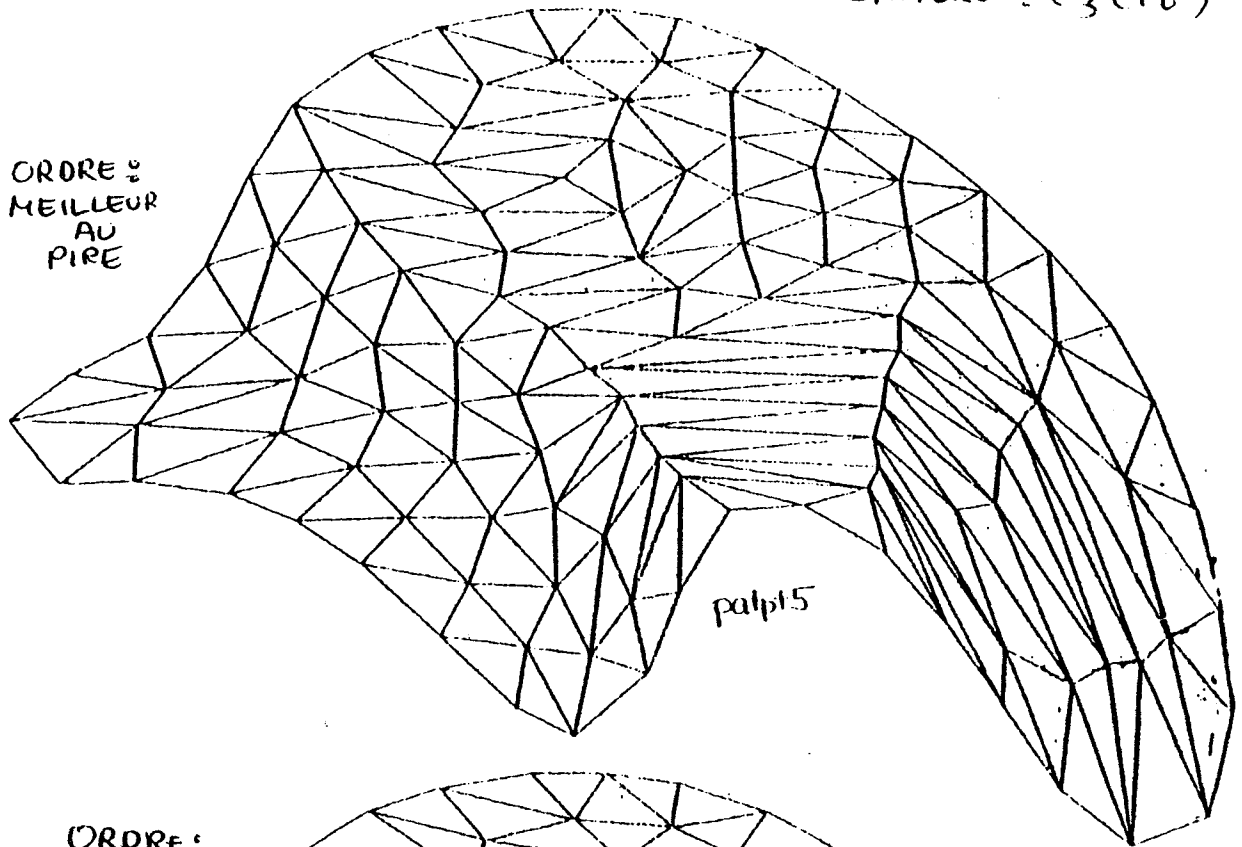


ORDRE :  
PIRE AU  
MEILLEUR



ESSAI 5  
MAILLAGES FINALSCRITERE :  $C_2(P_0)$ ORDRE :  
MEILLEUR  
AU  
PIREORDRE :  
PIRE AU  
MEILLEUR

ESSAI 5  
MAILLAGES FINALS  
CRITERE :  $C_3(P_0)$



### 5.1.2 Courbes de Convergence de POURAME, le Pourcentage d'Amélioration du Maillage Par Rapport au Nombre de Balayages de l'Ensemble de Noeuds

Nous rappelons ici la définition de POURAME :

$$\text{POURAME} = 100 \times \frac{\text{la somme des améliorations locales pour chaque noeud}}{\text{la somme des valeurs initiales de la fonction critère pour chaque noeud}}$$

On a calculé les valeurs de POURAME pour certains de nos exemples de 5.1.1.

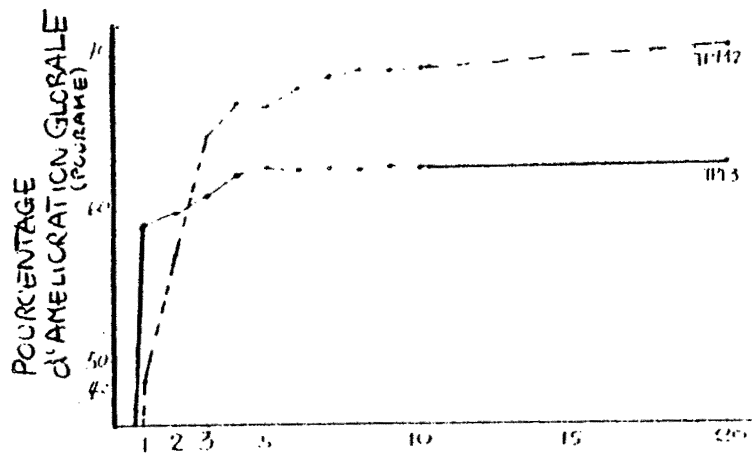
Voici les valeurs de POURAME pour les TOUR=1,...,10 et celles pour TOUR=20:

(NOM est le nom de l'exemple; NEWPTF désigne le nom de la figure finale.)

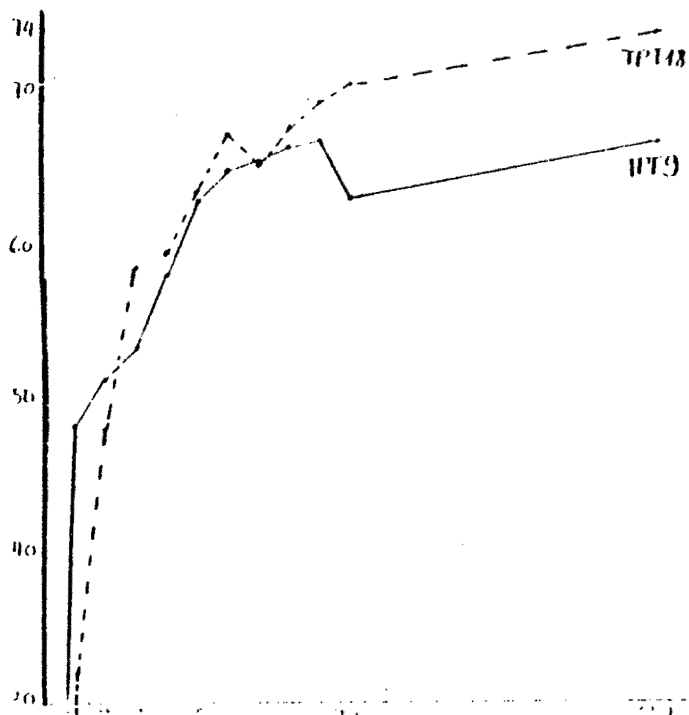
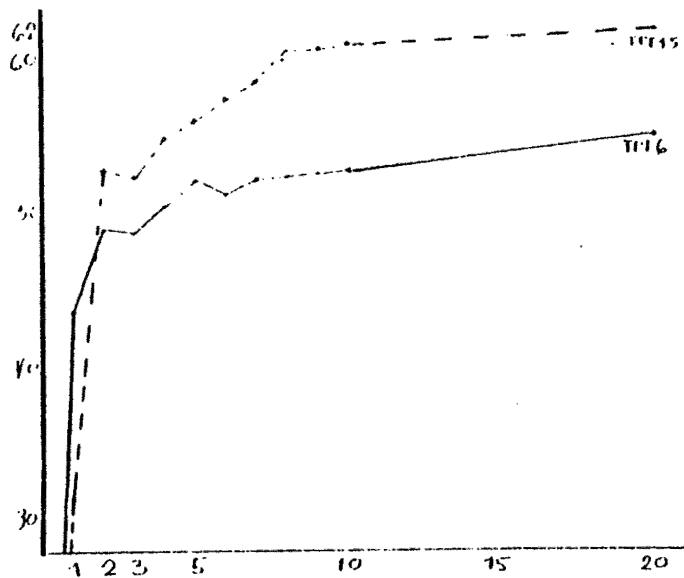
| NOM     |    | Essai1 | Essai1 | Essai1 | Essai1 | Essai1 | Essai1 | Essai5 |
|---------|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| NEWPTF  |    | tpt3   | tpt12  | tpt6   | tpt15  | tpt9   | tpt18  | patpt3 |
| POURAME | 1  | 58,83  | 48,86  | 43,41  | 31,25  | 48,15  | 31,89  | 24,31  |
|         | 2  | 59,68  | 56,92  | 48,85  | 52,87  | 51,32  | 47,91  | 30,91  |
|         | 3  | 60,77  | 64,38  | 48,47  | 52,24  | 53,25  | 58,49  | 37,09  |
|         | 4  | 62,03  | 66,58  | 50,26  | 54,61  | 57,98  | 59,32  | 39,81  |
|         | 5  | 62,47  | 66,43  | 52,01  | 55,92  | 63,08  | 63,69  | 40,83  |
|         | 6  | 62,34  | 67,60  | 51,21  | 57,42  | 64,88  | 67,27  | 41,80  |
|         | 7  | 62,39  | 68,17  | 52,10  | 58,50  | 65,46  | 65,36  | 44,67  |
|         | 8  | 62,28  | 68,66  | 52,37  | 60,85  | 66,31  | 67,50  | 45,56  |
|         | 9  | 62,36  | 68,60  | 52,58  | 60,88  | 66,69  | 69,19  | 46,24  |
|         | 10 | 62,38  | 68,78  | 52,84  | 61,15  | 62,97  | 70,37  | 47,56  |
|         | 20 | 62,80  | 70,13  | 55,23  | 62,17  | 66,62  | 73,52  | 51,44  |
| NOM     |    | Essai2 | Essai2 | Essai3 | Essai3 | Essai4 | Essai4 | Essai5 |
| NEWPTF  |    | sbpt5  | sbpt6  | smrp1  | smrp2  | mncp1  | mncp3  | patpt1 |
| POURAME | 1  | 20,71  | 8,49   | 11,85  | 20,60  | 29,45  | 18,55  | 19,04  |
|         | 2  | 32,52  | 25,71  | 31,92  | 34,44  | 34,67  | 32,17  | 29,74  |
|         | 3  | 36,30  | 29,73  | 38,55  | 46,22  | 36,73  | 38,95  | 33,54  |
|         | 4  | 36,31  | 32,02  | 42,88  | 51,61  | 38,70  | 39,56  | 37,03  |
|         | 5  | 36,17  | 32,60  | 47,04  | 53,66  | 39,91  | 41,99  | 39,02  |
|         | 6  | 36,30  | 34,91  | 48,81  | 58,32  | 37,85  | 45,81  | 40,24  |
|         | 7  | 36,38  | 35,94  | 51,67  | 59,32  | 40,04  | 46,60  | 40,91  |
|         | 8  | 40,01  | 37,89  | 52,95  | 61,87  | 41,94  | 48,28  | 41,71  |
|         | 9  | 40,44  | 37,86  | 54,82  | 62,76  | 43,10  | 49,95  | 42,10  |
|         | 10 | 40,67  | 39,14  | 55,10  | 63,71  | 43,61  | 50,37  | 42,56  |
|         | 20 | 41,86  | 41,04  | 58,22  | 65,06  | 48,01  | 51,25  | 45,39  |

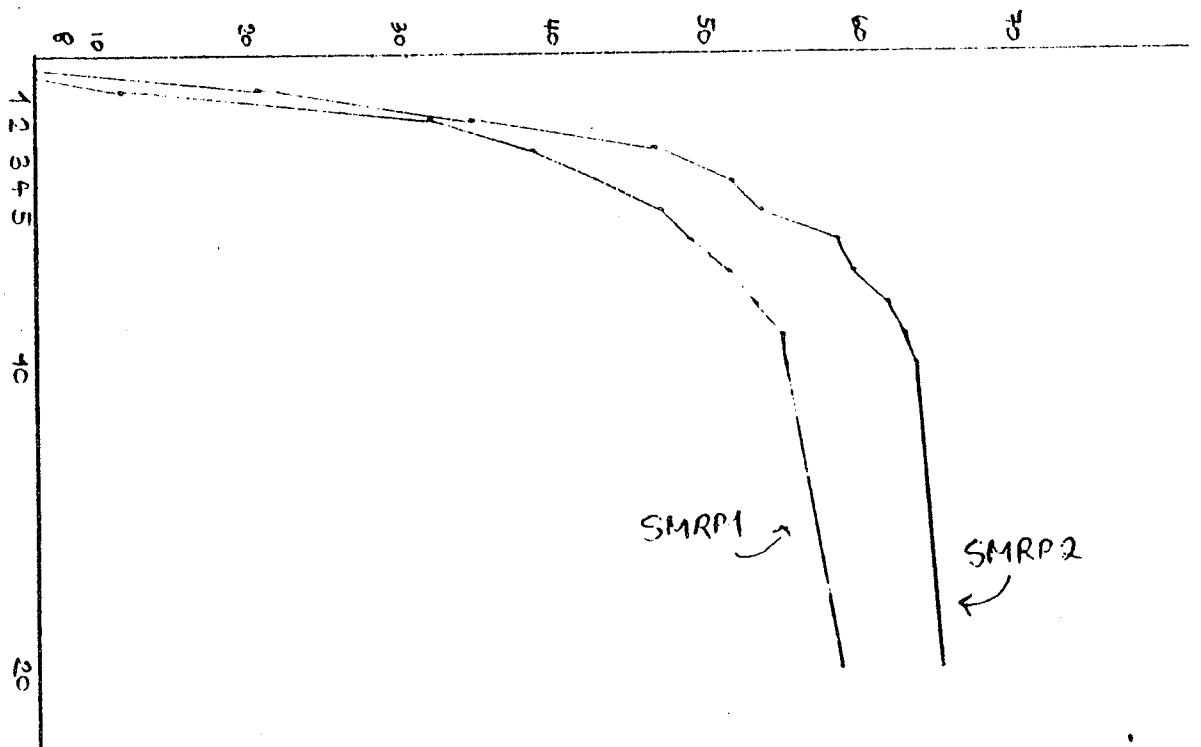
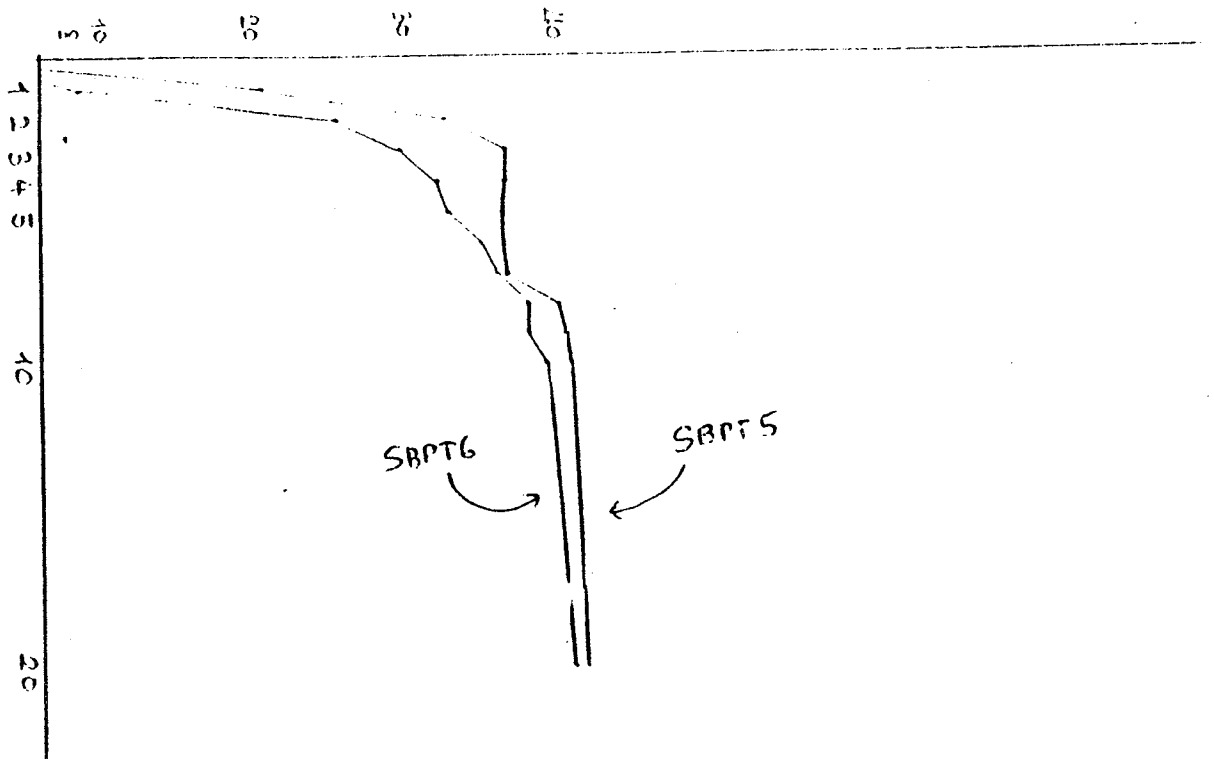
Remarque que POURAME = 0% pour TOUR=0! Dans les pages suivantes, on va tracer les courbes de convergence du pourcentage d'amélioration globale qui correspondent au tableau

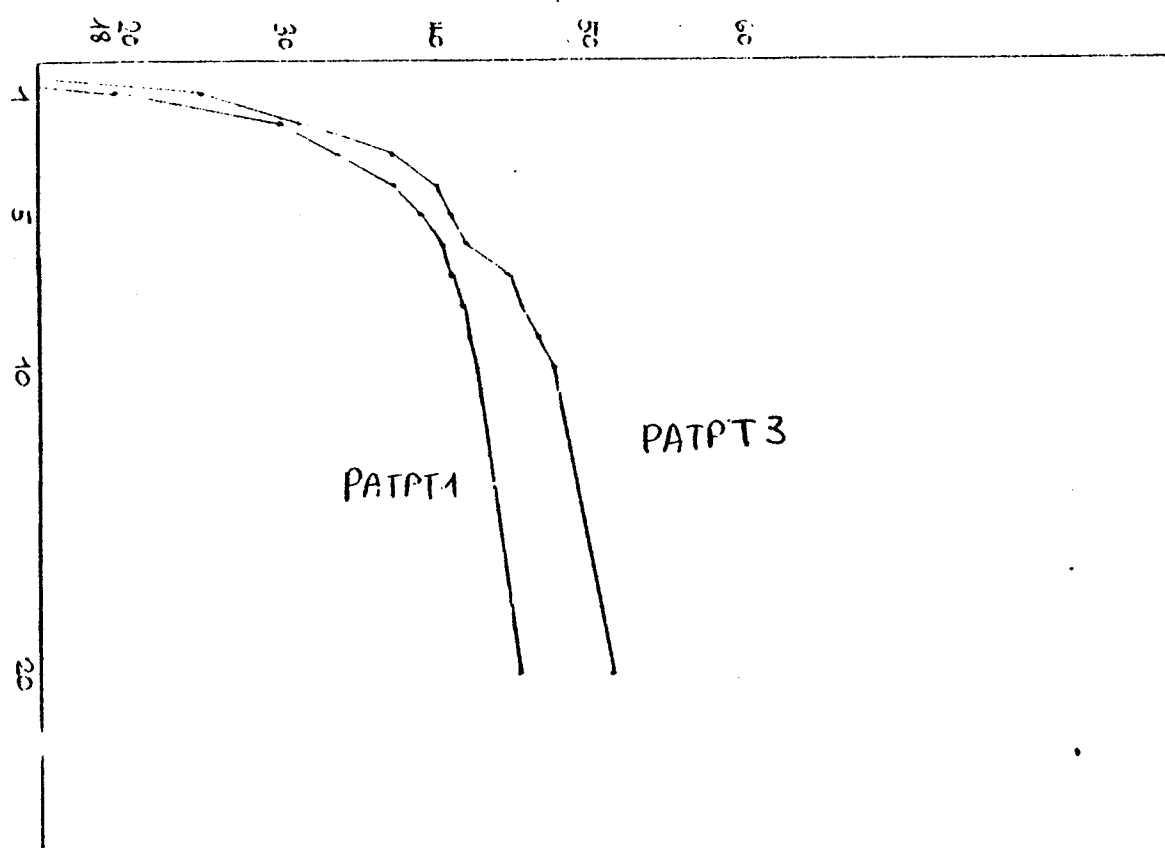
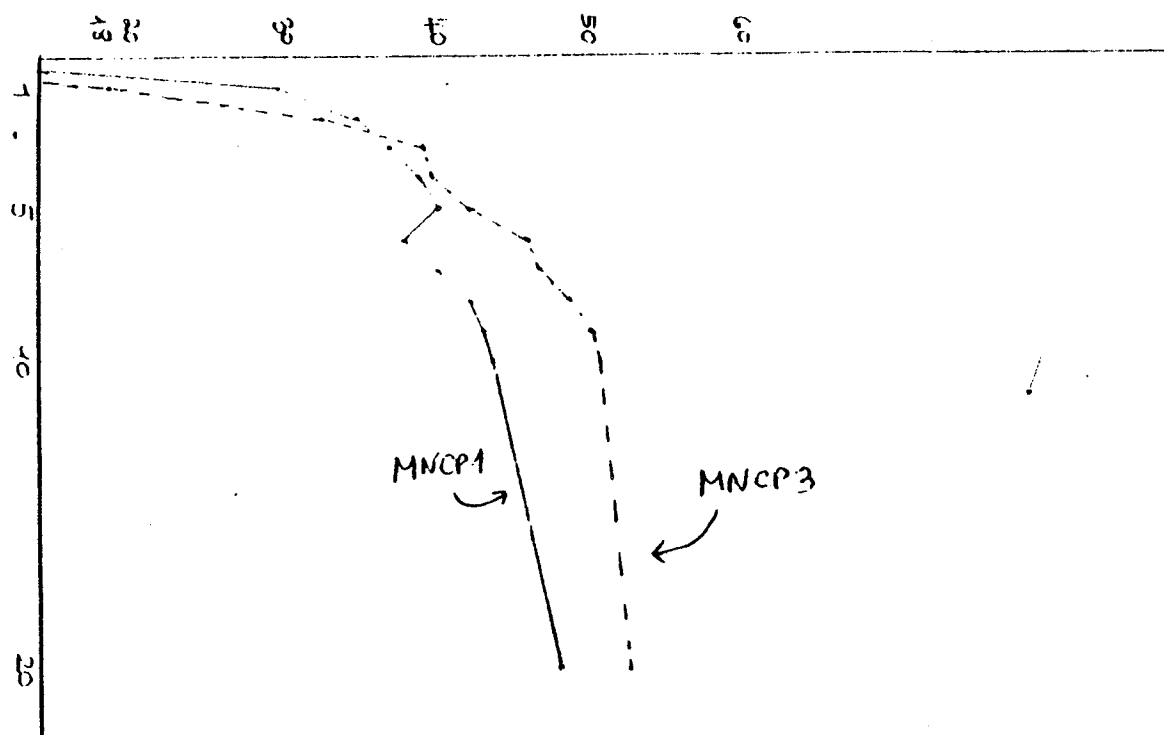
Voici les courbes de convergence tracées :



NOMBRE de  
BALAYAGES de l'ensemble  
de nœuds







On a tracé les courbes de convergence afin de connaître l'amélioration possible en augmentant le nombre de tours. Sachant qu'on ne peut pas obtenir une solution optimale, on peut observer le comportement de l'amélioration globale en fonction du nombre de tours.

On aperçoit que pour toutes les courbes tracées, la progression du pourcentage d'amélioration devient négligeable à partir du 7<sup>e</sup> tour. C'est pour cette raison qu'on analyse la progression moyenne du pourcentage d'amélioration de chaque tour entre le 1<sup>e</sup> et le 7<sup>e</sup>; le 2<sup>e</sup> et le 7<sup>e</sup>; le 3<sup>e</sup> et le 7<sup>e</sup>. Voici les valeurs recueillies :

- entre 1<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> : 6,5; 5,5; 4,8; 4,7; 4,5; 4,5; 3,5; 3,5; 3,2; 2,9; 2,5; 1,8; 1,3; 0,6.
- entre 2<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> : 4,1; 3,0; 2,9; 2,8; 2,4; 2,2; 2,0; 1,9; 1,7; 1,0; 1,0; 0,6; 0,6; 0,5.
- entre 3<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> : 2,2; 2,2; 2,0; 1,3; 1,3; 1,3; 1,1; 1,0; 1,0; 0,7; 0,6; 0,6; 0,3; 0,0.

Les résultats obtenus montrent que la progression est très rapide entre les trois premiers tours et peu sensible par la suite.

Afin de donner support à cette supposition, on compte combien de fois dans les quatorze exemples, il y a une progression supérieure à 2,5% entre le 1<sup>e</sup> tour et le 2<sup>e</sup> tour, entre le 2<sup>e</sup> tour et le 3<sup>e</sup> tour, entre le 3<sup>e</sup> tour et le 4<sup>e</sup> tour, et, ainsi de suite, jusqu'au 7<sup>e</sup> tour.

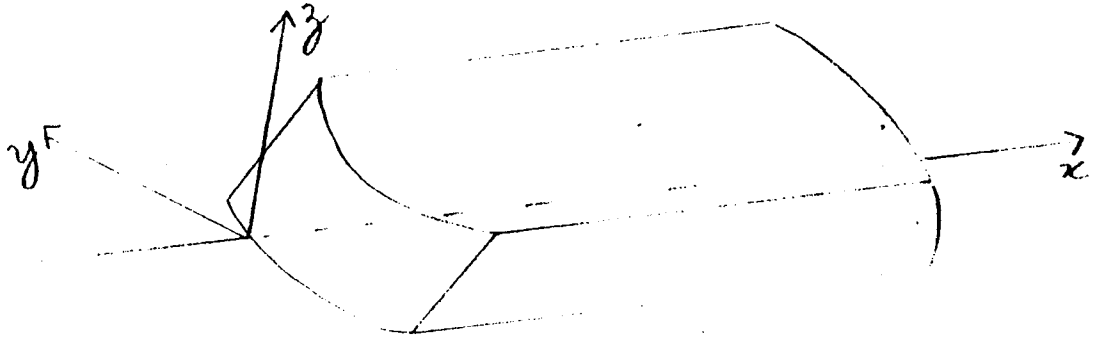
- entre 1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> : 13;      - entre 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> : 9
- entre 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> : 5;      - entre 4<sup>e</sup> et 5<sup>e</sup> : 3
- entre 5<sup>e</sup> et 6<sup>e</sup> : 2;      - entre 6<sup>e</sup> et 7<sup>e</sup> : 3.

Ces résultats confirment notre supposition car il y a une large majorité de cas où une progression était assez sensible (supérieure à 2,5%) entre 2 tours parmi les trois premiers tours, et il y a une toute petite minorité de tels cas parmi les 4 derniers. On remarque, quand même, que 5 fois sur 14 entre le 3<sup>e</sup> et le 4<sup>e</sup> cette progression dépassait 2,5%. Aussi est-il peut-être intéressant de temps en temps d'appliquer l'ALGOTOUT pour TOUR = 4?

## 5.2 Autres Résultats

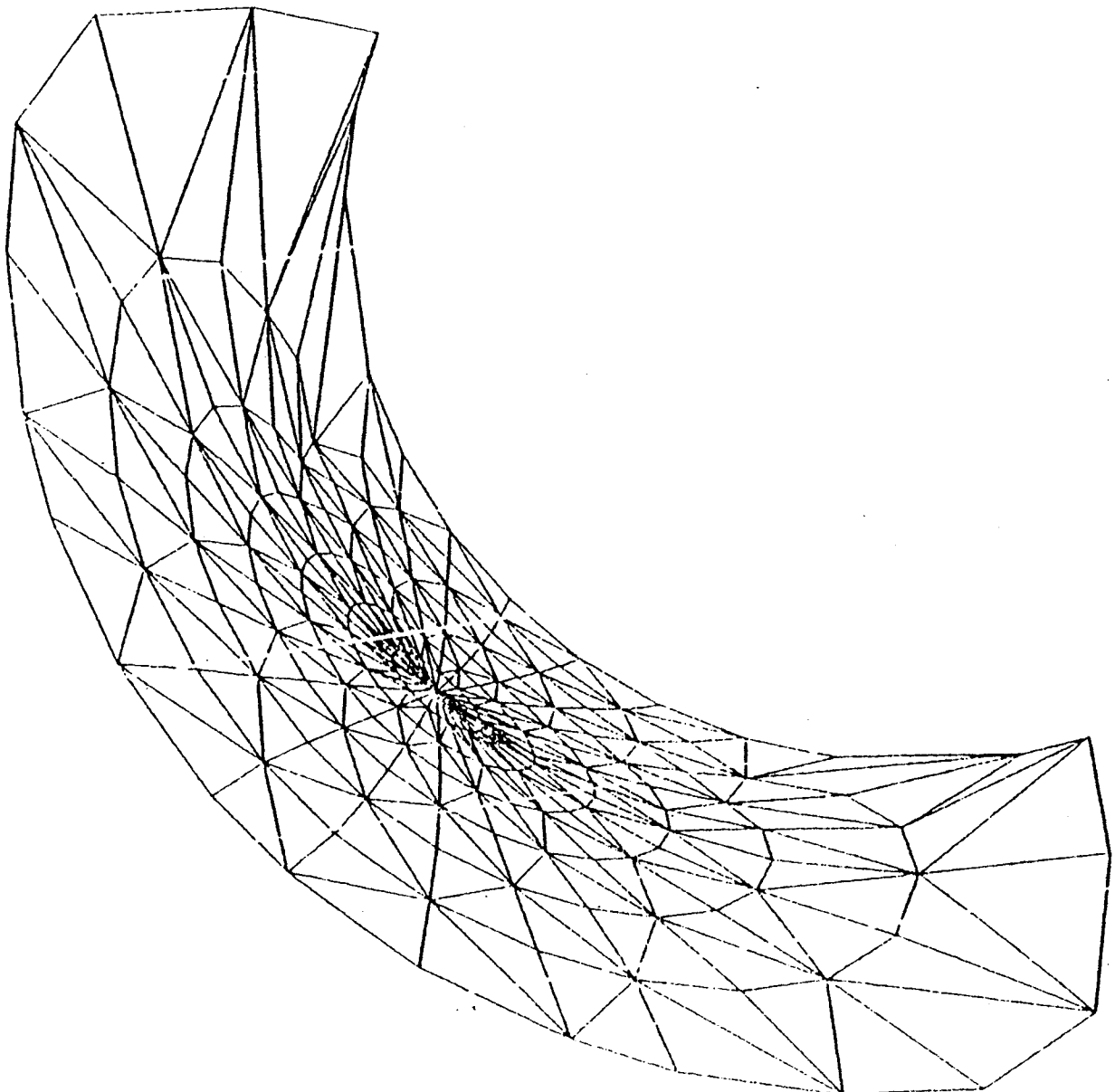
Comme le travail effectué pour aboutir à cette thèse était à la suite d'une demande du DGT/DEA, Avions Marcel Dassault, Breguet Aviation, l'application de notre algorithme sur des cas réels a été effectuée en collaboration avec Mlle C. POULETTY, ingénieur stagiaire, Avions Marcel Dassault/ Breguet Aviation qui cite également ces résultats dans sa thèse [23]. Cette intégration de l'algorithme dans un contexte industriel a permis effectivement dans certains cas d'obtenir un maillage réel alors que d'autres méthodes s'étaient révélées infructueuses. Notre algorithme a été utilisé dans ce cadre en dimension 2. Ces essais en vraie grandeur ont permis de montrer l'intérêt de méthodes, en particulier en comparaison avec d'autres algorithmes de logiciel de programmation convexe (logiciel de l'INRIA).

Voici deux exemples pris sur des entrées d'air d'un avion où on montre ici une partie avec les trois axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

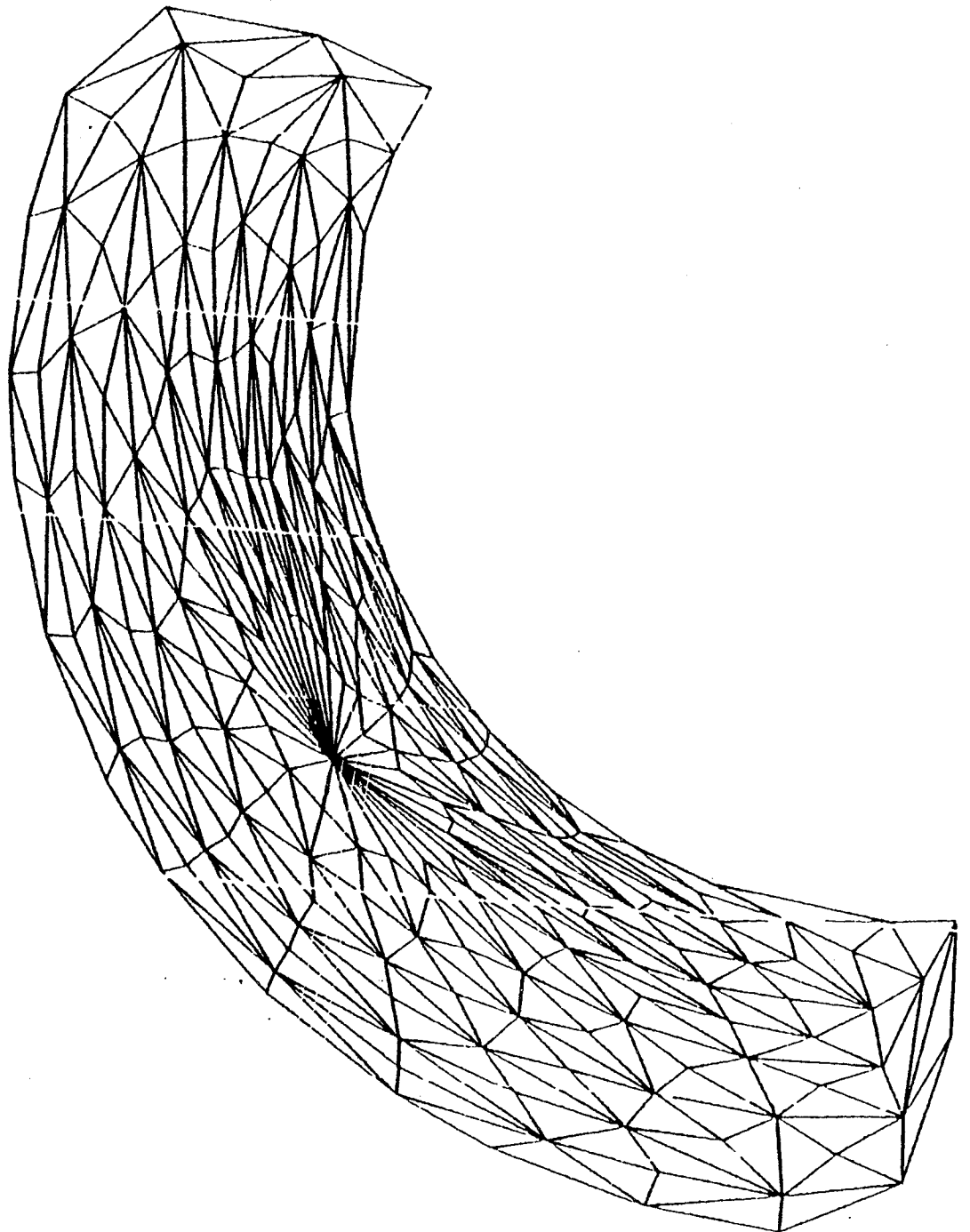


L'une est une coupe en  $x$  et l'autre en  $z$ . Le critère utilisé est minimiser  $C_2(P_0) = 1 - (V_{\min}(P_0)/V_{\max}(P_0))$ . L'ordre dans lequel on bouge les noeuds suit la numérotation usuelle des noeuds; trois tours ont été effectués; dans chaque tour, chaque noeud a été bougé une seule fois. Le maillage initial a été obtenu par Mlle C. POULETTY à partir de MODULEF [24].

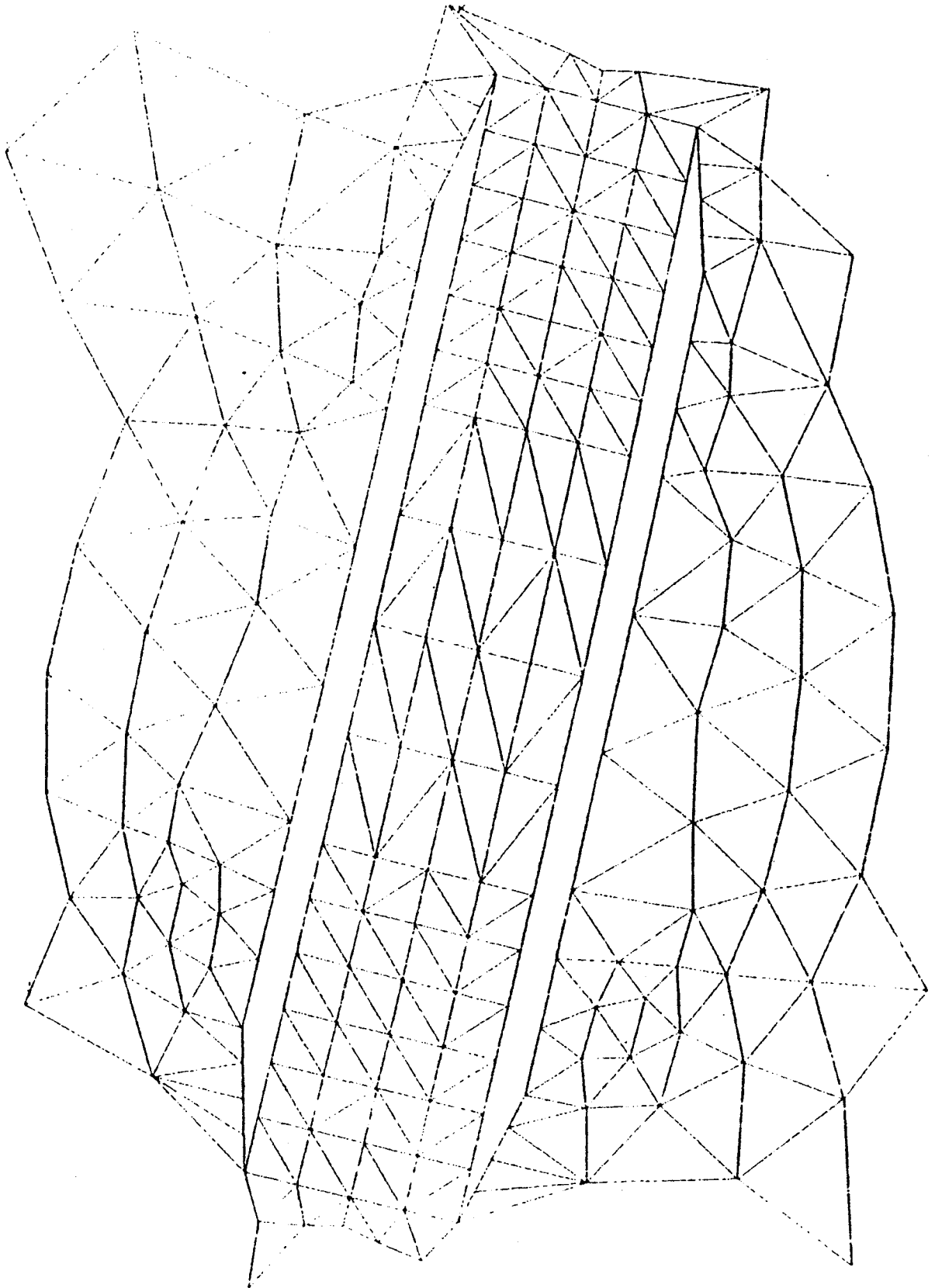
La coupe en  $z$  (maillage initial)



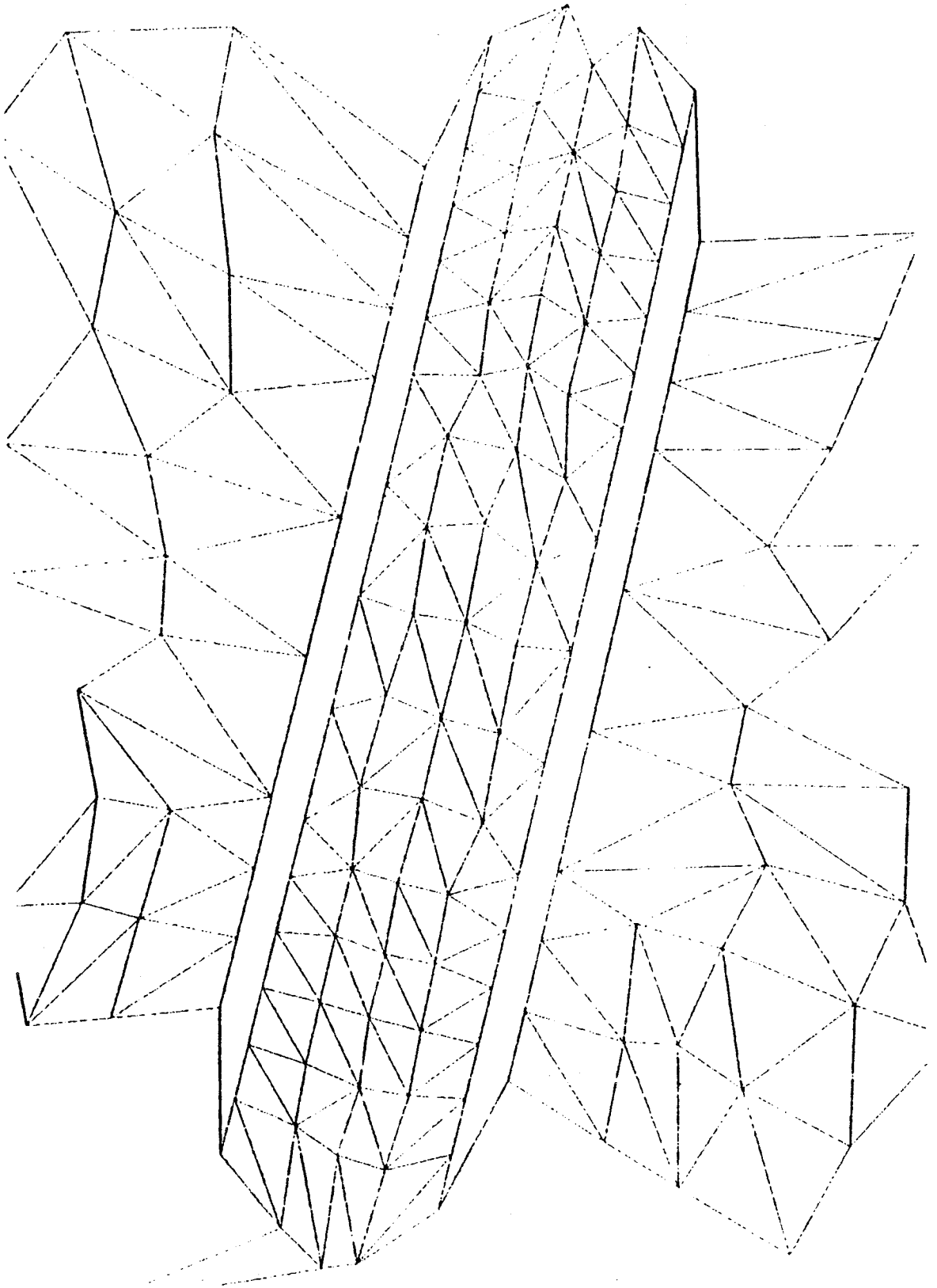
La coupe en z (maillage final)



La coupe en x (maillage initial)

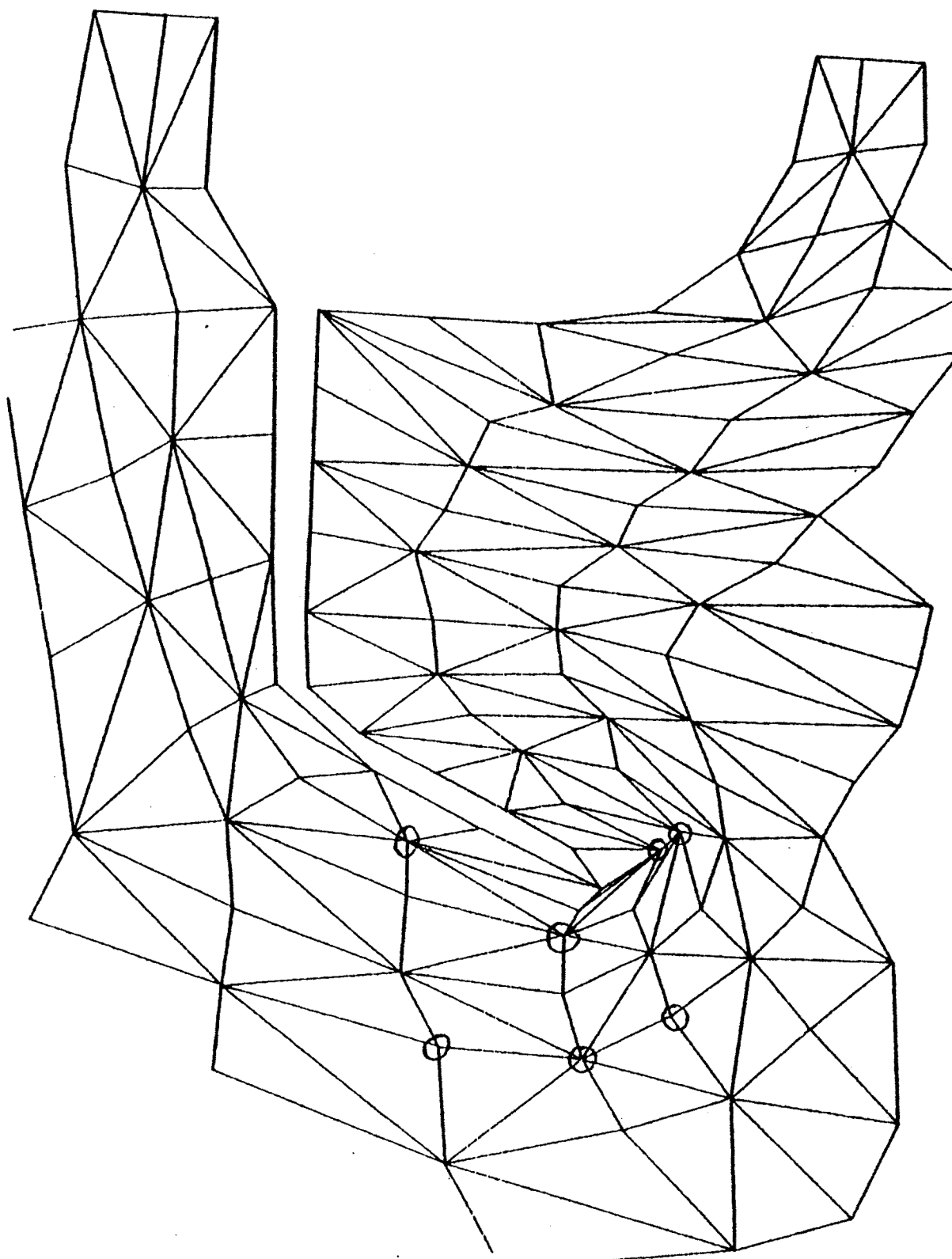


## La coupe en x (maillage final)

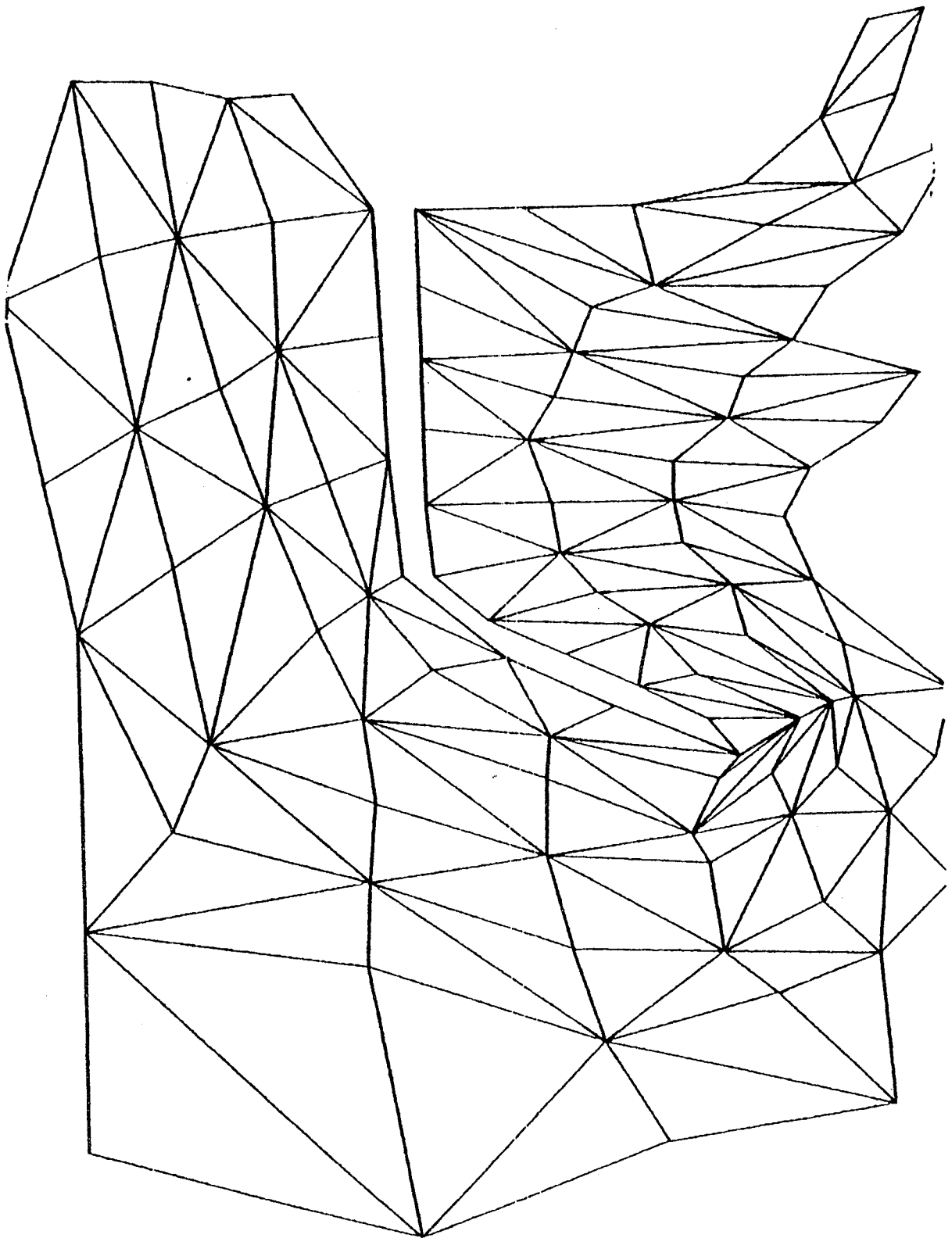


Voici un exemple où les noeuds qui ont bougé dans le maillage final sont encerclés dans le maillage initial. Un agrandissement de cette région est aussi donné. Le maillage initial a été généré par Mlle C. POULETTY à partir de MODULEF [24].

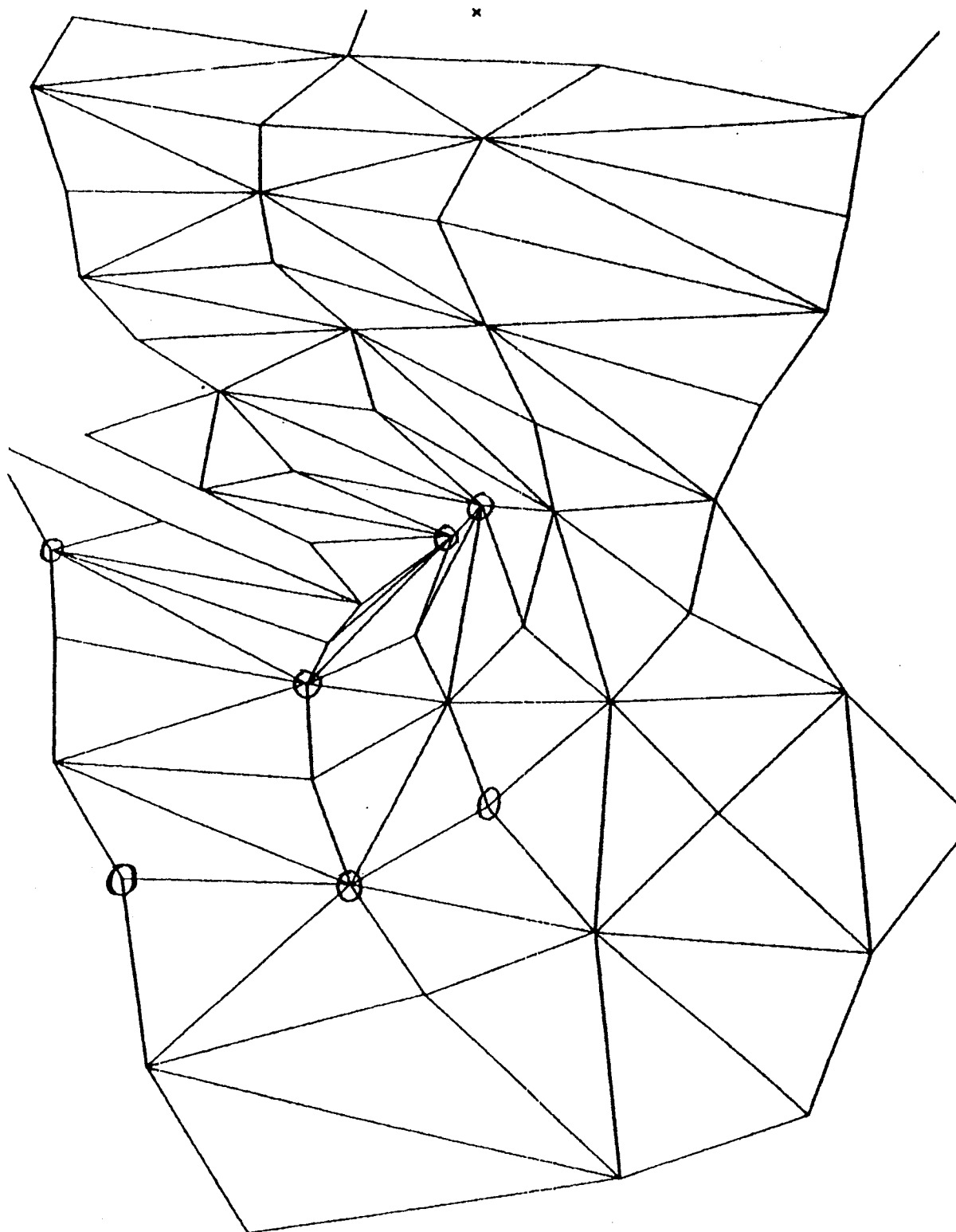
Maillage Initial



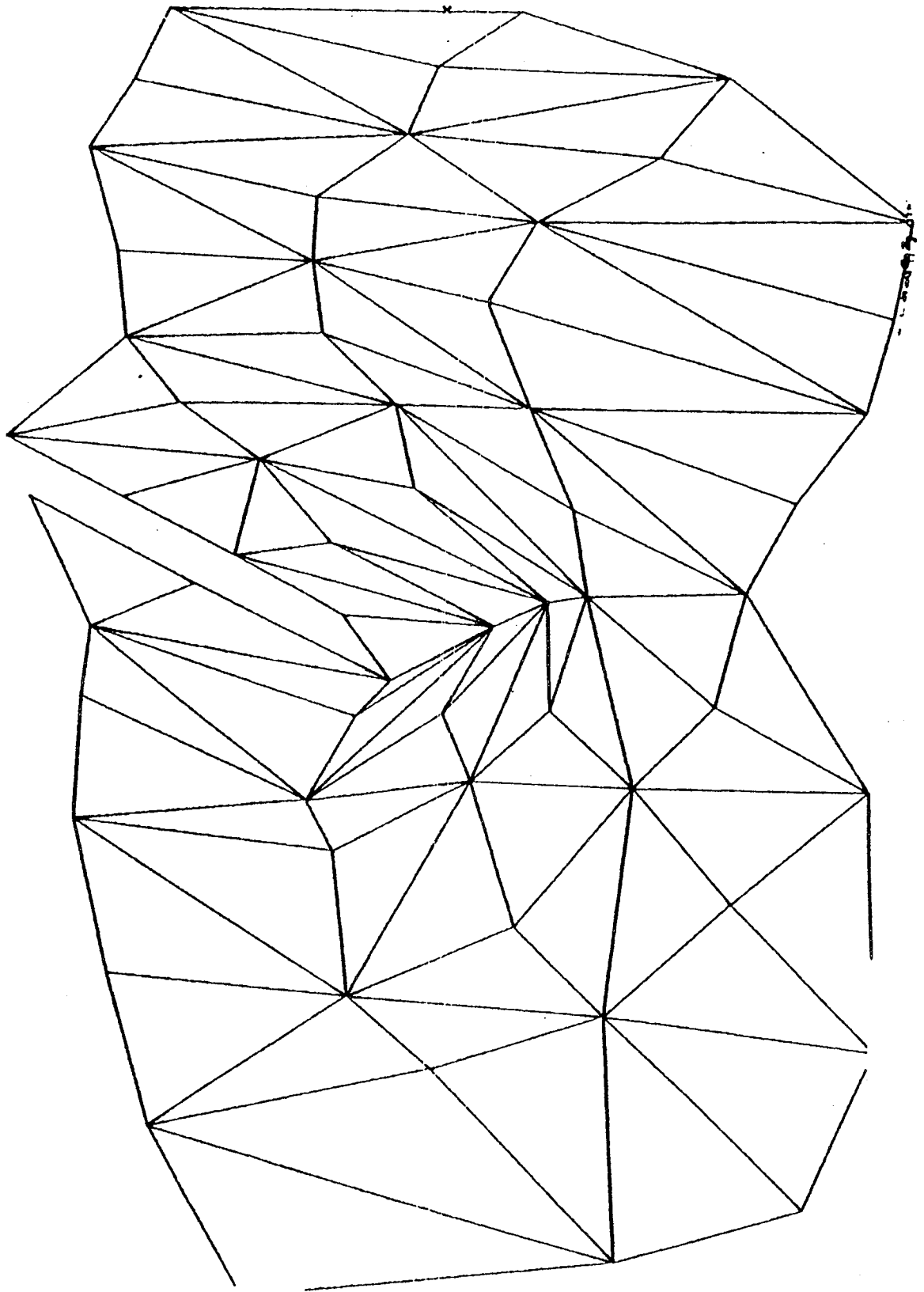
## Maillage Final



## Agrandissement du maillage initial

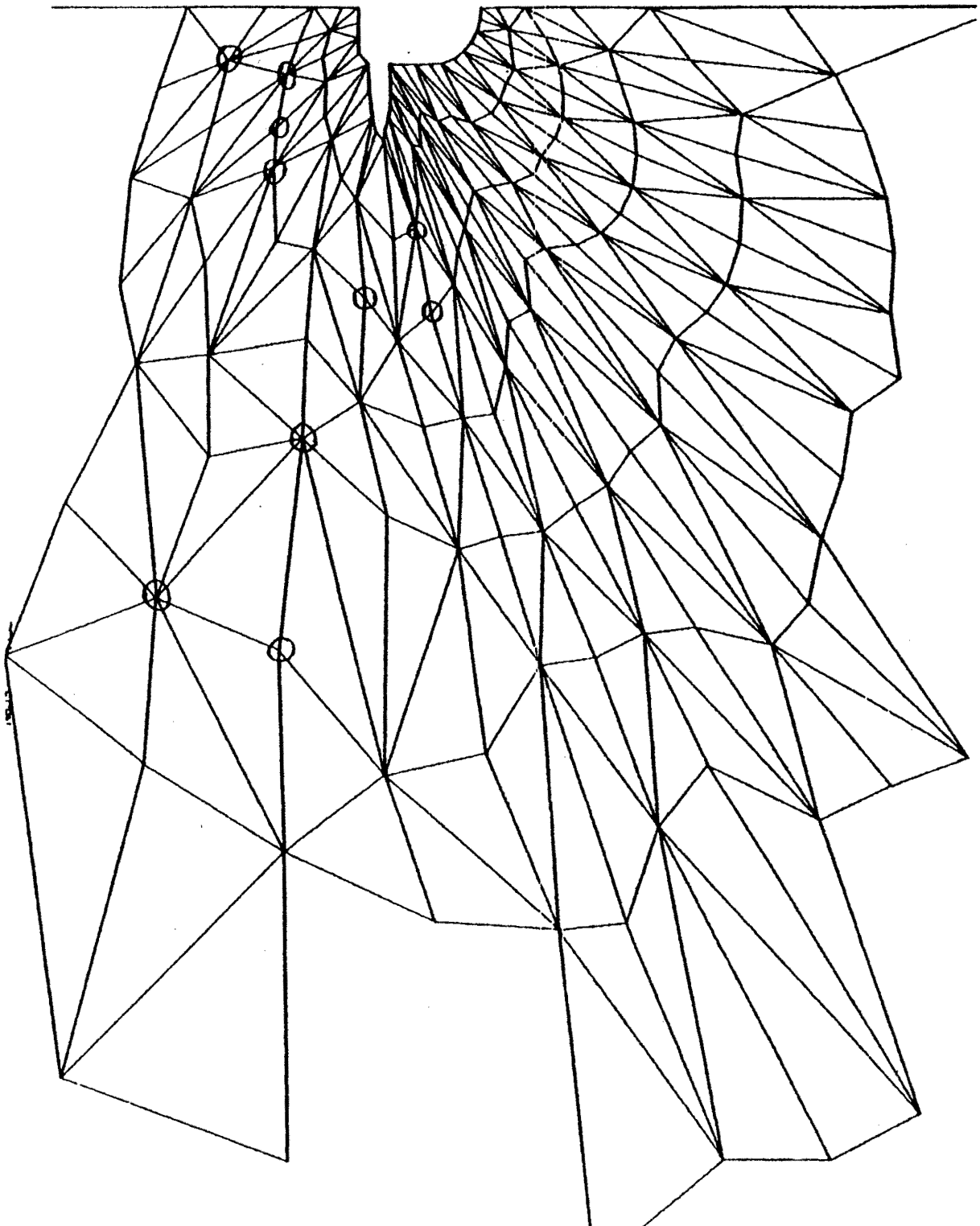


## Agrandissement du maillage final

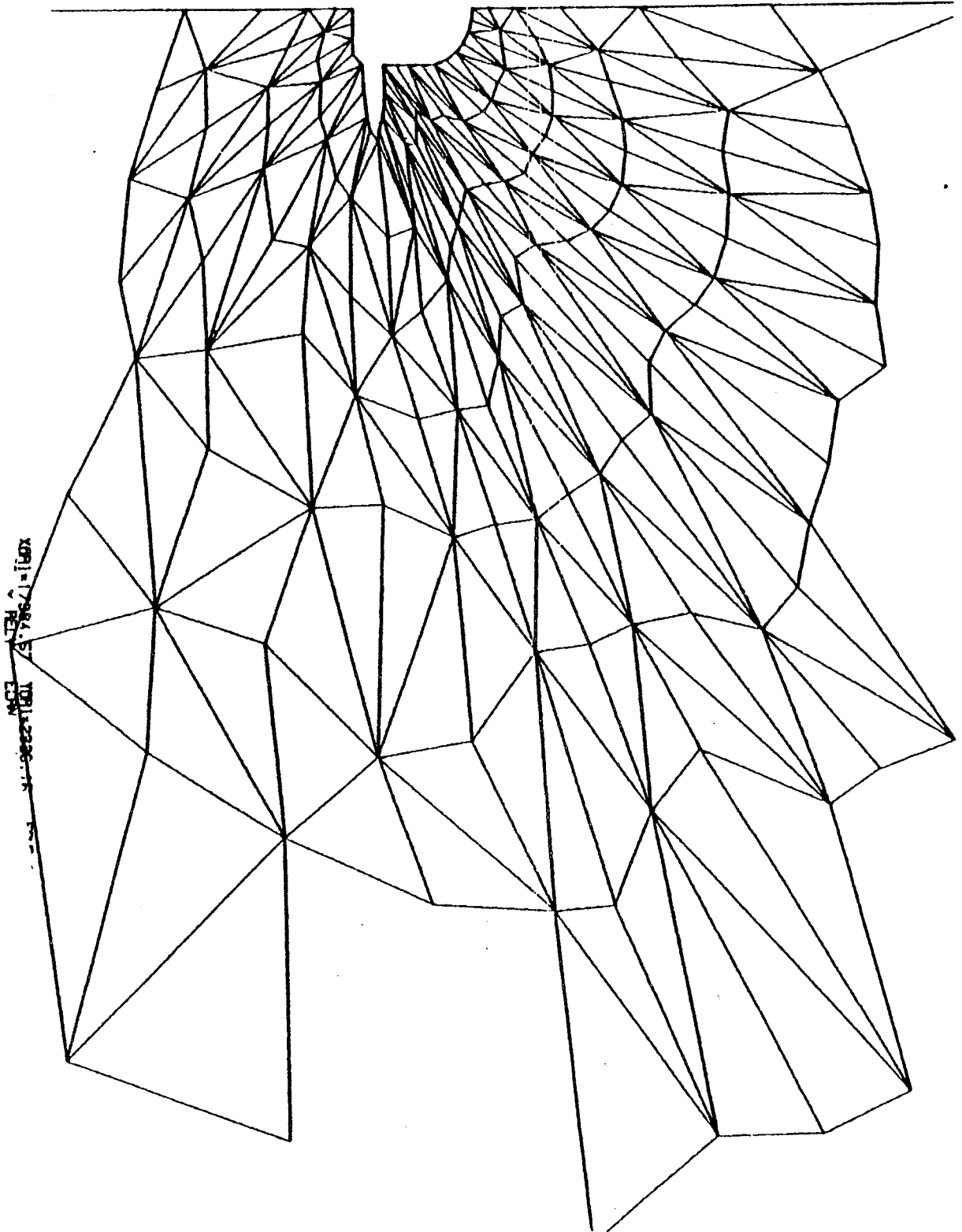


Voici un autre exemple où les noeuds qui ont bougé dans le maillage final sont encerclés dans le maillage initial. Deux agrandissements successifs de cette région sont aussi donnés. Remarque qu'il y a trois noeuds qui ont bougé qu'on n'a pas déceler que dans les agrandissements. Le maillage initial a été généré par Mlle C. POULETTY à partir de MODULEF [24].

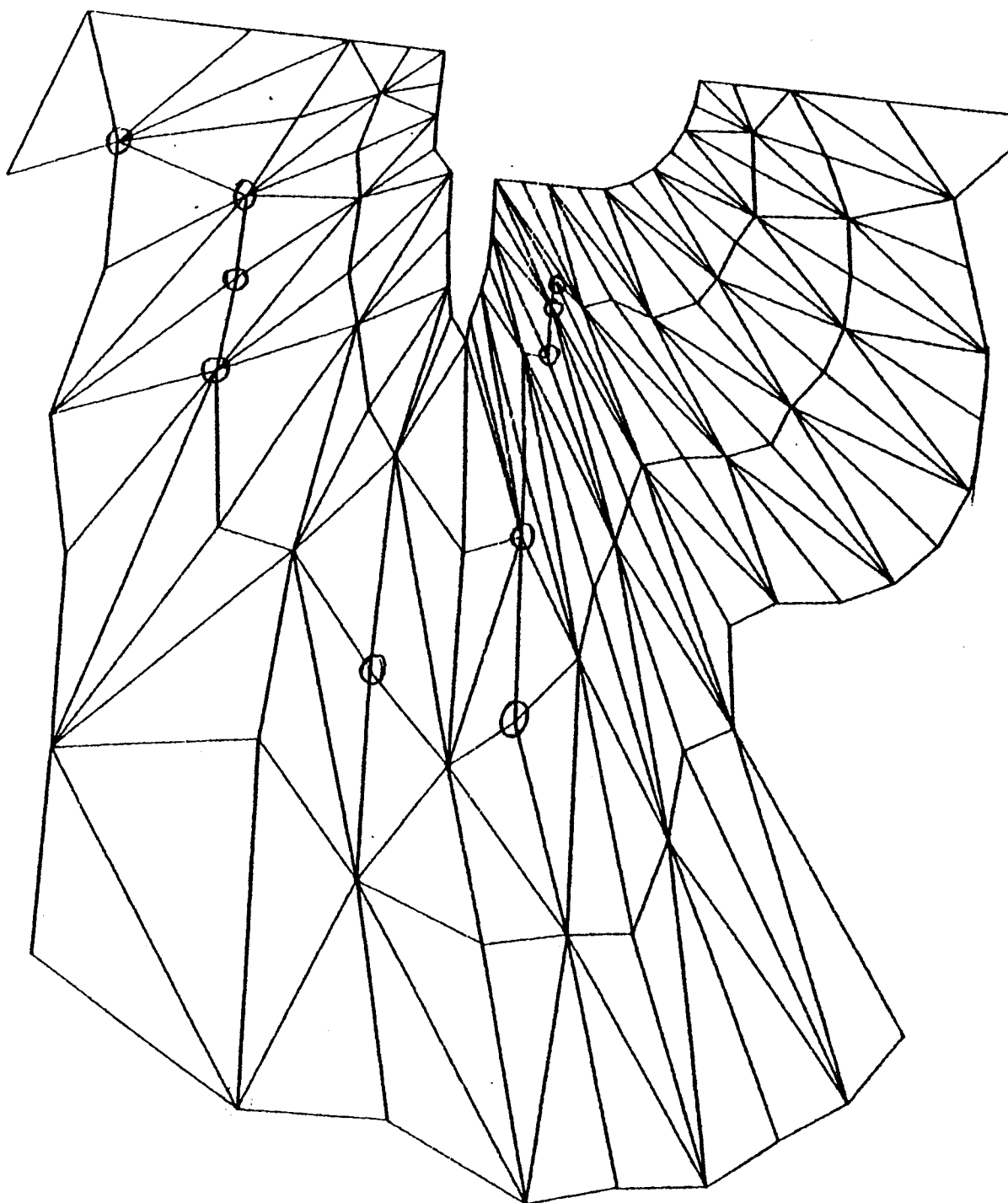
Maillage Initial



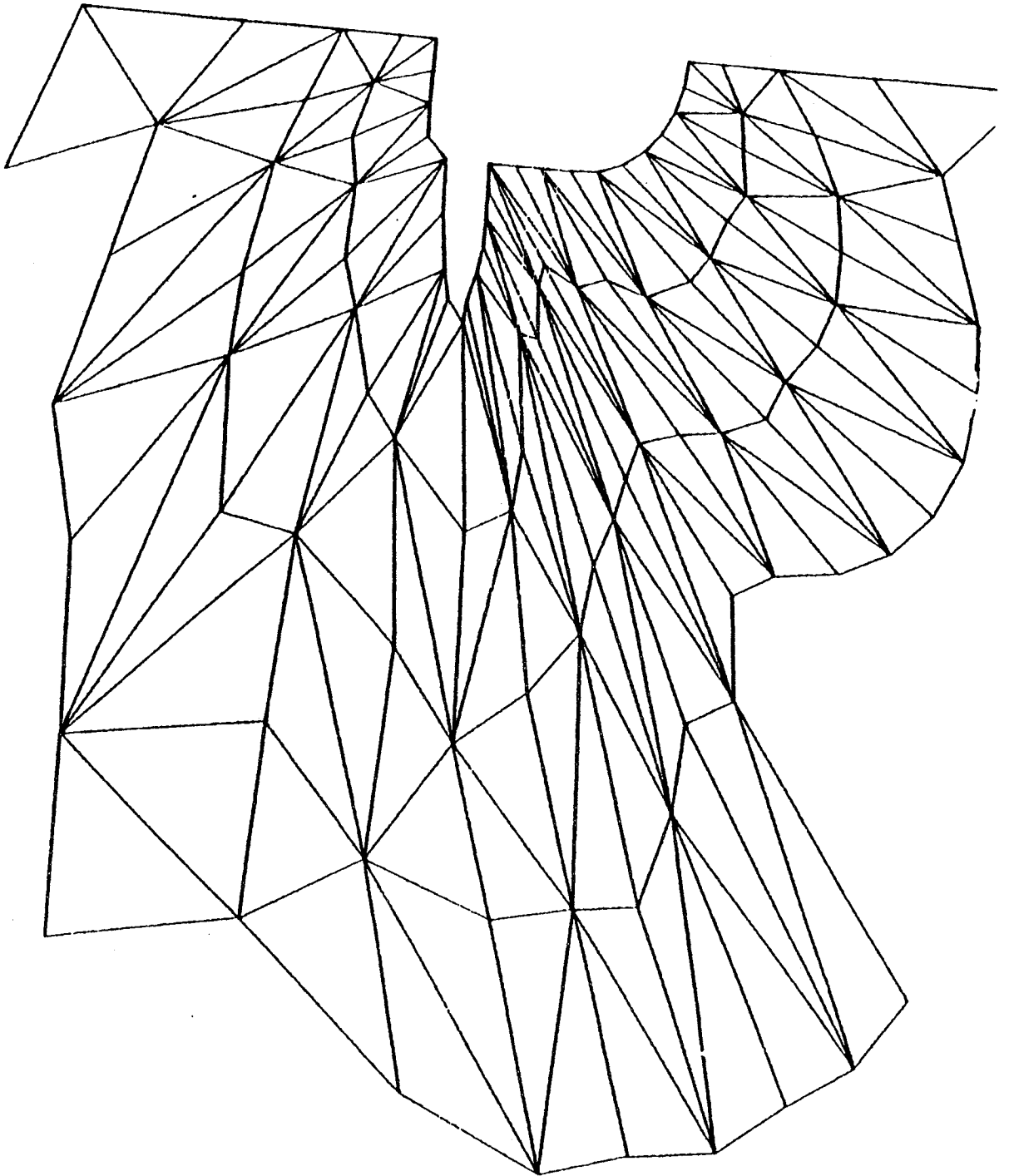
## Maillage Final



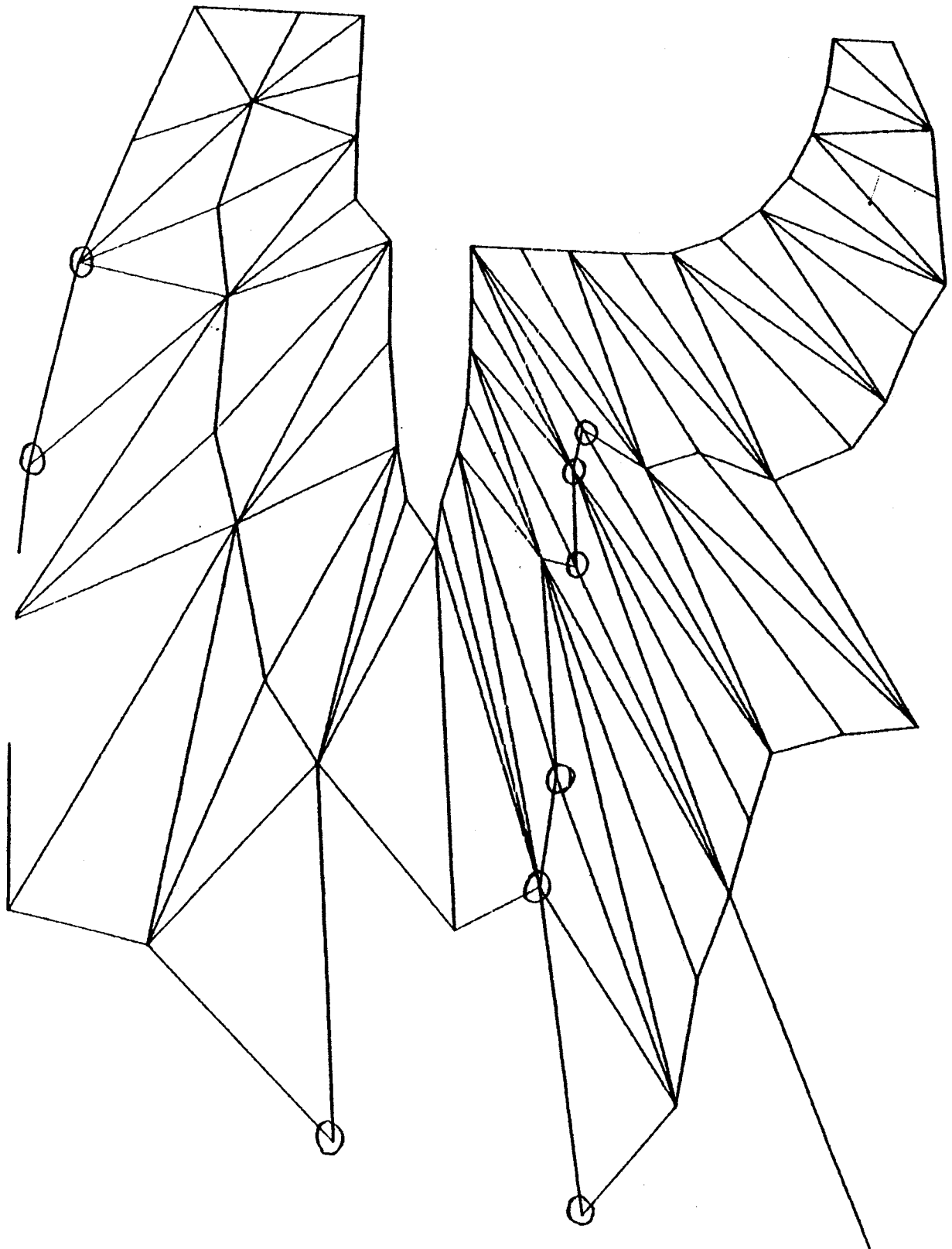
## Premier agrandissement du maillage initial



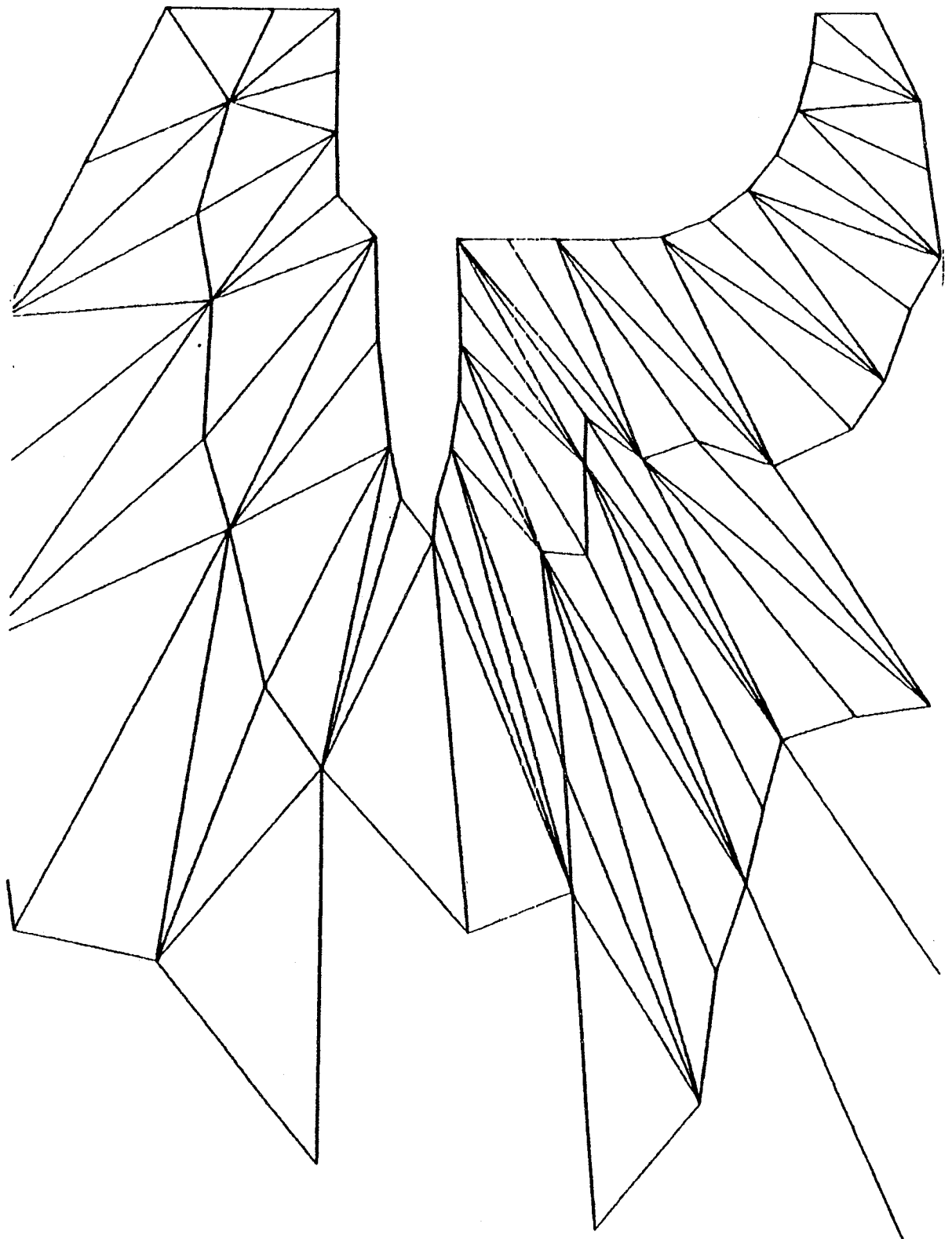
## Premier agrandissement du maillage final



## Deuxième agrandissement du maillage initial



## Deuxième agrandissement du maillage final



## 6. CONCLUSIONS

L'objectif de ce travail a été d'établir une méthode systématique et algorithmique qui peut servir comme une étape dans le cadre du problème général d'obtention d'un maillage de types éléments finis et qui permet d'englober un certain nombre des méthodes connues pour résoudre ce problème.

Nous avons traité le problème de l'amélioration de maillage par des méthodes d'optimisation classiques en recherche opérationnelle connues sous le nom des méthodes de sous-gradient. Nos algorithmes consistent à trouver une position nouvelle pour un noeud, en fixant tous les autres, sans remettre en cause la topologie existante, afin d'améliorer le maillage local, et si possible, global selon certains critères d'optimisation liés aux volumes. On déplace le noeud libre dans la direction d'amélioration fournie par l'opposé du gradient de la fonction critère avec un pas bien choisi.

Nous avons constaté que les algorithmes proposés ont l'avantage d'être rapide au moins dans les premières itérations, c'est à dire de donner rapidement une bonne solution, même s'ils ne permettent pas d'obtenir une solution optimale pour le problème de minimisation d'un critère donné.

Notre souci était d'établir un outil efficace à partir de ces méthodes et aussi de trouver un compromis entre la théorie et les applications industrielles. Ce travail montre donc la possibilité d'appliquer des méthodes d'optimisation pour répondre au problème de maillage.

Dans le même esprit, nous pouvons envisager deux directions possibles pour de futures recherches :

- (1) la prise en compte dans nos méthodes d'autres critères géométriques et de critères physiques en relation avec le problème étudié,
- (2) une variation des méthodes proposées qui permettrait de bouger plusieurs noeuds simultanément.



## ANNEXES INFORMATIQUES

Annexe 1 : Description des Variables et Programmes Principaux Utilisés dans les Programmes Informatiques de l'ALGO1 et de l'ALGOTOUT en dimension 3 (en dimension 2)

Les coordonnées de tous les noeuds de la région considérée sont stockées dans XYZ (XY).

Les éléments de maillage décrits par leurs sommets sont stockés dans SOMET (SOMRI).

Le noeud à bouger est stocké dans SPPT (SPPT).

La fonction objective à minimiser est stockée dans NBCRI (NBCRI).

Le valeur de  $\epsilon$  pour trouver le pas est stockée dans XCOEF (XCOEF).

Le programme pour bouger le noeud SPPT est MOVEPT (MVPT2).

Le sous-programme pour trouver les éléments entourant le noeud SPPT, leurs volumes (superficies) initiales, et les premiers élément ayant le volume (superficie) max et min, respectivement, est AREA (AREA2).

Le sous-programme pour trouver la valeur des mineurs du déterminant utilisé pour trouver les volumes (superficies) initiales des éléments est XNOR (XNOR2).

Le sous-programme qui décrit la fonction objective choisie est XCRIT (XCRIT2). Ce sous-programme a besoin de NBCRI.

Le sous-programme qui calcule la direction d'amélioration est DIREC (DIREC2). Ce sous-programme a besoin de NBCRI.

Le sous-programme pour calculer les coefficients de  $\rho$  dans l'application  $V_i(P_0 + \rho\delta)$  affine en  $\rho$  est XFIVE (XFIVE2).

Le sous-programme pour trouver le pas à prendre dans la direction d'amélioration est NEWEPS (NEWEPS2). Ce sous-programme a besoin de XCOEF.

AMETRI est le programme de l'ALGO1 en dimension 2. Ce programme appelle directement MVPT2 et dépend de NBCRI, XCOEF, ET SPPT.

Les descriptions qui suivent ne concernent que l'ALGOTOUT.

Le nombre d'itérations successives pour bouger un noeud est CNT, et, ici, CNT=3.

Le nombre de fois qu'on bouge tout l'ensemble des noeuds est TOUR, et, ici, TOUR=3.

Le choix de l'ordre dans lequel on bouge les noeuds se trouve dans BWST; BWST = 0 si on choisit le sens "pire au meilleur", et 1 si on choisit le sens "meilleur au pire". On peut aussi

décider si on suit le même sens ou si on alterne le sens à chaque tour, et on peut construire d'autres sous-programmes pour d'autres ordres possibles dans lesquels on désire bouger nos noeuds à chaque tour.

Le calcul des valeurs initiales et finales de la fonction objective et du pourcentage d'amélioration est faite dans un sous-programme CRIT (CRIT2).

AMTETCHX (ATRCHX) est le programme de l'ALGOTOUT en dimension 3 (en dimension 2). Ce programme appelle directement MOVEPT (MVPT2) et CRIT(CRIT2) et dépend de NBCRI, et BWST.

## Annexe 2.1 Programmes de l'ALGO1 en dimension 2

```

      subroutine movept2(sppt)
%include data2
c
      call area2(sppt)
      abc=4
      xd1=xcrit2(abc)
      print, "the initial criterion value"
      write(6,*) xd1
      call direc2
      call xfive2
      call neweps2
      do 20 i=1,nvoit
      xtri(i,6)=xtri(i,4)+xeps1*xtri(i,5)
20    continue
      do 50 i=1,2
50    xspt(i)=xeps1*xspt(i)
      do 60 i=1,2
60    xy(sppt,i)=xy(sppt,i)+xspt(i)
      print, "the new criterion value"
      abc=6
      xd2=xcrit2(abc)
      write(6,*) xd2
      print, "the new areas of the triangles"
      write(6,*) (xtri(i,6),i=1,nvoit)
      print, "the new coordinates of our point"
      write(6,*) (xy(sppt,i),i=1,2)
130   return
      end

      subroutine area2(sppt)
c
c      we want to find the triangles surrounding a point, their initial
c      areas; we fill in the first 2 columns of tri with the vertices of
c      the opposite edge, the 3rd is the triangle number.
c
%include data2
c
      print, "the three minors and the initial area"
      j=0
      do 80 i=1,nbt
      do 5 k=1,3
      if (somri(i,k).eq.sppt) go to 10
5    continue
      go to 80
10   j=j+1
      m=1
      l=1
12   if (m.eq.4) go to 20
      if (m.eq.k) go to 15
      tri(j,l)=somri(i,m)
      l=l+1
15   m=m+1
      go to 12
20   tri(j,3)=i
c
c      the area of triangle pqr is defined as the determinant
c      of the 3*3 matrix shown below; we use xab to store the determi-
c      nant minors of this matrix

```

```

c          1   1   1      where p(x,y) and edge qr form our triangle
c          x q1 r1      we'll put in advance the proper sign of each
c          y q2 r2      minor, i.e., +--, (respectively for 1,x,y)
c      stored in xtri(i,1-3); note that we have a subroutine xnor2 to
c      find the determinant of a 2*2 matrix (here,xab)
c
      do 30 k=1,2
      do 25 l=1,2
      xab(l,k)=xy(tri(j,k),l)
25      continue
30      continue
      xtri(j,1)=xnor2(xab)
      do 40 l=1,2
40      xab(l,1)=1.0
      xtri(j,2)=-xnor2(xab)
      do 50 l=1,2
50      xab(2,l)=xy(tri(j,l),l)
      xtri(j,3)=xnor2(xab)
c
c      xtri(j,4) contains the present area of the jth triangle,
c      and there are nvoit triangles.
c      if xtri(j,4) is negative, we change all the signs of all minors
c      as well as that of xtri(j,4).
c
      xtri(j,4)=xtri(j,1)
      do 70 k=1,2
70      xtri(j,4)=xtri(j,4)+(xy(sppt,k)*xtri(j,k+1))
      if (xtri(j,4).lt.0.0) then
      do 75 k=1,4
75      xtri(j,k)=-xtri(j,k)
      end if
      do 77 k=1,4
77      write(6,*) (xtri(j,k),k=1,4)
80      continue
      nvoit=j
c
c      among our nvoit triangles, we'll choose that with maximum
c      area(vmax) and that with minimum area(vmin)
c
      if (xtri(1,4).ge.xtri(2,4)) then
      vmax=1
      vmin=2
      else
      vmax=2
      vmin=1
      end if
      do 90 i=3,nvoit
      if (xtri(i,4).gt.xtri(vmax,4)) then
      vmax=i
      else
      if (xtri(i,4).lt.xtri(vmin,4)) vmin=i
      end if
90      continue
      print, "the initial vmax and vmin"
      write(6,*) vmax,vmin
      return
      end

```

```

      function xnor2(xba)
c      this function finds the value of a 2*2 determinant
c
      dimension xba(2,2)
c
      xnor2=xba(1,1)*xba(2,2)-xba(1,2)*xba(2,1)
      return
      end

      function xcrit2(cab)
c      this function is the criterion to be used
%include data2
c
      if (nbcrit.eq.1) then
        xcrit2=1.0-xtri(vmin,cab)/xtri(vmax,cab)
      else
        if (nbcrit.eq.2) then
          xcrit2=xtri(vmax,cab)-xtri(vmin,cab)
          print, "the criterion used is vmax-vmin"
        else
          if (nbcrit.eq.3) then
            xv=0.0
            do 10 i=1,nvoit
10          xv=xv+xtri(i,cab)
            xv=xv/nvoit
            xcrit2=0.0
            do 20 i=1,nvoit
              yv=xtri(i,cab)-xv
              if (yv.lt.0.0) yv=-yv
20          xcrit2=xcrit2+yv
            xcrit2=xcrit2/nvoit
            end if
          end if
        end if
      return
      end

      subroutine xfive2
c      we compute xtri(i,5) in this subroutine
c
%include data2
      do 20 i=1,nvoit
        xtri(i,5)=0.0
        do 10 j=1,2
10        xtri(i,5)=xtri(i,5)+xspt(j)*xtri(i,j+1)
20        continue
        print, "the area linear equations as a function of the step"
        print, "the constant and the slope"
        do 30 i=1,nvoit
30        write(6,*) (xtri(i,j),j=4,5)
        return
      end

```

```

      subroutine direc2
c      this subroutine determines the direction vector using the subgradient
c      method
c
%include data2
c
      if (nbcrit.eq.1) then
      do 10 k=2,3
10      xspt(k-1)=-((xtri(vmin,4)*xtri(vmax,k)-xtri(vmax,4)*xtri(vmin,k))/
      &      (xtri(vmax,4))*2)
      else
      if (nbcrit.eq.2) then
      do 20 k=2,3
20      xspt(k-1)=-((xtri(vmax,k)-xtri(vmin,k))
      else
      if (nbcrit.eq.3) then
      xv=0.0
      yv=0.0
      zv=0.0
      do 30 i=1,nvoit
      xv=xv+xtri(i,2)
      yv=yv+xtri(i,3)
30      zv=zv+xtri(i,4)
      xv=xv/nvoit
      yv=yv/nvoit
      zv=zv/nvoit
      xspt(1)=0.0
      xspt(2)=0.0
      do 40 i=1,nvoit
      xvl=xtri(i,2)-xv
      yvl=xtri(i,3)-yv
      if ((xtri(i,4)-zv).lt.0.0) then
      xvl=-xvl
      yvl=-yvl
      end if
      xspt(1)=xspt(1) - xvl
40      xspt(2)=xspt(2) - yvl
      end if
      end if
      end if
      print, "the gradient vector to be used"
      write(6,*) (xspt(k),k=1,2)
      return
      end

```

```

      subroutine neweps2
c      we look for the (xeps,min(vmax-vmin)) and the xeps1 a function of
c      of xeps and xcoef
%include data2
c      we look for the intersections at max and min, and the increasing
c      values of xeps at these intersections
c
      print, "the intermediate step values with corresponding vmax,vmin"
      xdif=xtri(vmax,4)-xtri(vmin,4)
      xeps=0.0
      vmax1=vmax
      vmin1=vmin
      vmax3=vmax
      vmin3=vmin
      first=0
8      if (first.eq.2) go to 12
      xmx=1.e15
      do 10 i=1,nvoit
      ya=xtri(i,4)-xtri(vmax1,4)
      yb=xtri(vmax1,5)-xtri(i,5)
      if ((ya*yb).le.0.0) go to 10
      yab=ya/yb
      if ((xeps.lt.yab).and.(yab.lt.xmx)) then
      xmx=yab
      vmax2=i
      end if
10     continue
12     if (first.eq.1) go to 17
      xmn=1.e15
      do 15 i=1,nvoit
      za=xtri(i,4)-xtri(vmin1,4)
      zb=xtri(vmin1,5)-xtri(i,5)
      if ((za*zb).le.0.0) go to 15
      zab=za/zb
      if ((xeps.lt.zab).and.(zab.lt.xmn)) then
      xmn=zab
      vmin2=i
      end if
15     continue
17     if ((xmx.eq.1.e15).and.(xmn.eq.1.e15)) go to 70
      vmax3=vmax1
      vmin3=vmin1
      if (xmx-xmn) 20,20,30
20     vmax1=vmax2
      first=1
      if (xmx.lt.xmn) go to 35
      first=0
30     vmin1=vmin2
      if (xmx.gt.xmn) first=2
35     if (xmx.ge.xmn) then
      xeps1=xmn

```

```

      else
      xeps1=xmx
      end if
      write(6,*) xeps1,vmax3,vmin3
c      when smallest volume is negative
      if (xtri(vmin1,4)+xeps1*xtri(vmin1,5).le.0.0) go to 75
      xdif1=xtri(vmax1,4)-xtri(vmin1,4)+xeps1*(xtri(vmax1,5)-xtri(vmin1,5))
      if (xdif1.gt.xdif) go to 60
      xdif=xdif1
      xeps=xeps1
      go to 8
60      print, "this is the optimal step taken"
      write(6,*) xeps
      print, "this is the next step"
      write(6,*) xeps1
      xeps1=xeps+(xcoef)*(xeps1-xeps)
      ginsid=.false.
      go to 80
70      vmax3=vmax1
      vmin3=vmin1
75      if (xeps.eq.0.0) ginsid=.true.
      print, "the optimal step taken with no next step"
      write(6,*) xeps
      xeps1=xeps*(1+0.1*xcoef)
80      vmax=vmax3
      vmin=vmin3
      xdif2=xtri(vmax,4)-xtri(vmin,4)+xeps1*(xtri(vmax,5)-xtri(vmin,5))
      print, "this is the real step taken"
      write(6,*) xeps1
      print, "the new vmax,vmin"
      write(6,*) vmax,vmin
      return
      end

```

```

      subroutine ametri
%include data2
      call stri2
      print, "criterion number is"
      read(5,*) nbcri
      print, "coefficient number is"
      read(5,*) xcoef
      spct=6
      print, "the point to be moved is"
      read(5,*) spct
      call mvpt2(spct)
      return
      end

```

```

        subroutine stri2
c        structure of input files (point,triangle)
c
c        %include data2
c
c        character*12 efipt,efitet
c
c        read into xy data from entry point file
c        print, "entry point file is"
c        read(5,*) efipt
c        open(10,file=efipt,form='formatted')
10      read(10,*,end=20) nbp,(xy(nbp,i),i=1,2)
c        write(6,*) nbp,(xy(nbp,i),i=1,2)
c        go to 10
20      close(10)
c
c        read into somri data from entry triangle file
c        print, "entry triangle file is"
c        read(5,*) efitet
c        open(10,file=efitet,form='formatted')
50      read(10,*,end=60) nbt,(somri(nbt,i),i=1,3)
c        write(6,*) nbt,(somri(nbt,i),i=1,3)
c        go to 50
60      close(10)
c        return
c        end

        subroutine stro2
c        structure of output(point,criterion value)
c
c        %include data2
c        write into exit point file data from xy with pt number indicated
c        print, "exit point file"
c        do 10 i=1,nbp
c        write(6,*) i,(xy(i,j),j=1,2)
10      continue
c        return
c        end

```

## data2.incl.fortran

```

c      the letters xyz for real, g for logical, the rest integer
c      implicit integer (a-f,h-w),logical (g)
c      coordinates of a pt
c      common/point2/xy(100,2),nbp,nbpmax,nbi,nsp,xy2(100,5),ixy(100,2)
c      vertices of a boundary edge
c      common/edge2/someg(50,2),nbe,nbemax
c      vertices of a triangle
c      common/tri2/somri(150,3),nbt,nbtmax
c      coordinates of a special point
c      vertices of a special edge
c      vertices of a special triangle
c      a logical indicating whether it's inside or not
c      common/spec2/xspt(2),speg(2),spri(3),ginsid
c      for use in programs included in ametri.fortran and amtrchoix.fortran
c      common/mpt2/tri(80,3),xab(2,2),xtri(80,7),nvoit,nbcrit,xeps1,count,
&      xnbl,coef,vmin,vmax,xcoef,col,ptset,ptnb(100),nptnb,cnt,xquo,xsum

```

## Annexe 2.2 Programmes de l'ALGOTOUT en dimension 2

(cf Annexe 2.1 pour les sous-programmes AREA2, DIREC2, NEWEPS2, STRI2, XCRIT2, XFIVE2, XNOR2)

```

      subroutine atrchx
%include data2
      call stri2
      print, "criterion number is"
      read(5,*) nbcri
      write(6,*) nbcri
      print, "best to worst?"
      read(5,*) bwst
      write(6,*) bwst
      xcoef=0.01
      cnt=3
      tour=3
      col=1
      xquo=0.0
      do 10 i=1,nbp
      spct=i
      call crit2(spct)
      xquo=xquo+xy2(i,1)
10      continue
      call prepsurf2
      do 15 i=1,nbi
15      xy2(i,4)=xy2(ixy(i,2),1)
      call tricrit2
      if (bwst.eq.1) then
      fst=nbi
      sec=1
      thd=-1
      else
      fst=1
      sec=nbi
      thd=1
      end if
17      do 30 j=1,tour
      do 20 i=fst,sec,thd
      spct=ixy(i,2)
      call movept2(spct)
20      continue
      do 25 i=1,nbi
      spct=ixy(i,2)
      col=5
      call crit2(spct)
      xy2(i,4)=xy2(spct,5)
25      continue
      call tricrit2
      col=2
      xsum=0.0
      do 45 i=1,nbp
      spct=i
      call crit2(spct)
      xy2(i,3)=xy2(i,1)-xy2(i,2)
      xsum=xsum+xy2(i,3)
45      continue
      xsum=xsum/xquo
      call stro2
30      continue
      return
      end

```

```
subroutine crit2(sppt)
```

```
c
c we want to find the triangles surrounding a point and their
c areas; we fill in the first 2 columns of tri with the vertices of
c the opposite edge, the 3rd is the triangle number.
c we're also interested in the criterion value depending on nbcri.
```

```
c
%include data2
```

```
c
    call area2(sppt)
    abc=4
    xd1=xcrit2(abc)
    xy2(sppt,col)=xd1
    return
end
```

```
data2.incl.fortran
```

```
c
    the letters xyz for real, g for logical, the rest integer
    implicit integer (a-f,h-w),logical (g)
c
    coordinates of a pt
    common/point2/xy(200,2),nbp,nbpmax,nbi,nsp,xy2(200,5),ixy(200,2)
c
    vertices of a boundary edge
    common/edge2/someg(50,2),nbe,nbemax
c
    vertices of a triangle
    common/tri2/somri(250,3),nbt,nbtmax
c
    coordinates of a special point
c
    vertices of a special edge
c
    vertices of a special triangle
c
    a logical indicating whether it's inside or not
    common/spec2/xspt(2),speg(2),spri(3),ginsid
c
    for use in programs included in ametri.fortran and amtrchoix.fortran
    common/mpt2/tri(80,3),xab(2,2),xtri(80,7),nvoit,nbcri,xeps1,count,
&    xnbl,coef,vmin,vmax,xcoef,col,ptset,ptnb(100),nptnb,cnt,xquo,xsum
```

```

subroutine movept2(sppt)
c
c      we want to reposition a point without changing its neighbors;
c      in order to optimize a certain criterion (nbcrit) by using the
c      subgradient method.
c
%include data2
c
      call area2(sppt)
      abc=4
      xd1=xcrit2(abc)
c      we want to reduce the gap between the areas ;
c      the direction vector xspt is used in v(i,xspt,xeps)=xtri(i,4)
c      +xeps*(xspt(1)*xtri(i,2)+xspt(2)*xtri(i,3))
c      and xspt is found in the subroutine direc.
c
      do 80 jj=1,cnt
10      call direc2
c
c      volume is now simply xtri(i,4)+xeps*xtri(i,5) and xtri(i,5) will
c      be computed in the subroutine xfive
      call xfive2
c
c      on r*r, we plot the functions f(xeps)=a+b*xeps for each triangle
c      and we find the xeps value giving the minimum difference between
c      vmax and vmin in the subroutine eps; moreover, we look for the xeps1
c      value depending on the xcoef.
c
      call neweps2
c
      if (ginsid) go to 130
      xtri(vmin,6)=xtri(vmin,4)+xeps1*xtri(vmin,5)
      if (xtri(vmin,6).le.0.0) go to 130
      do 20 i=1,nvoit
      xtri(i,6)=xtri(i,4)+xeps1*xtri(i,5)
20      continue
      abc=6
      xd3=xcrit2(abc)
c      xspt will now contain our real gradient vector
      do 50 i=1,2
50      xspt(i)=xeps1*xspt(i)
c      we'll move our pt in the direction of xspt
      do 60 i=1,2
60      xy(sppt,i)=xy(sppt,i)+xspt(i)
c      we'll revise the new areas in xtri(i,4)
      do 70 i=1,nvoit
70      xtri(i,4)=xtri(i,6)
80      continue
130     return
      end

```

```

      subroutine prepsurf2
c      prepares the use of the file of boundary points in ametri
%include data2
      character*12 bndpt
c
      do 10 i=1,nbp
10      ixy(i,1)=0
      print, "boundary point file is"
      read(5,*) bndpt
      write(6,*) bndpt
      open(10,file=bndpt,form='formatted')
20      read(10,*,end=30) i
      ixy(i,1)=1
      go to 20
30      close(10)
      j=0
      do 40 i=1,nbp
      if (ixy(i,1).eq.0) then
      j=j+1
      ixy(j,2)=1
      end if
40      continue
      nbi=j
      return
      end

      subroutine stro2
c      structure of output(point,criterion value)
c
%include data2
      character*12 sfipt,sfitet
c
c      write into exit point file data from xy with pt number indicated
      read(5,*) sfipt
      open(10,file=sfipt,form='formatted')
      do 10 i=1,nbp
      write(10,*) i,(xy(i,j),j=1,2)
10      continue
      close(10)
      print, "the initial and intermediate global criterion values"
      print, "and the global improvement at this moment"
      write(6,*) xquo,xquo*xsum,xsum
      return
      end

```

```

      subroutine tricrit2
c      arranges xy2(*,2) in decreasing order and subsequently ixy(*,2)
%include data2
c
      5      fini=0
            do 10 i=1,nbi-1
              x=xy2(i,4)
              y=xy2(i+1,4)
              if (x.lt.y) then
                xy2(i,4)=y
                xy2(i+1,4)=x
                j=ixy(i,2)
                ixy(i,2)=ixy(i+1,2)
                ixy(i+1,2)=j
                fini=1
              end if
      10      continue
            if (fini.eq.1) go to 5
            return
      end

```

## Annexe 3 Programmes de l'ALGOTOUT en dimension 3

```

      subroutine area(sppt)
c
c      we want to find the tetrahedrons surrounding a point, their initial
c      areas; we fill in the first 3 columns of tat with the vertices of
c      the opposite triangle, the 4th is the tet nb.
c
%include data3
c
      j=0
      do 80 i=1,nbtet
      do 5 k=1,4
      if (sometet(i,k).eq.sppt) go to 10
5      continue
      go to 80
10     j=j+1
      m=1
      l=1
12     if (m.ne.5) go to 20
      if (m.eq.k) go to 15
      tat(j,l)=sometet(i,m)
      l=l+1
15     m=m+1
      go to 12
20     tat(j,4)=i
c
c      the volume of tetrahedron pqrs is defined as the determinant
c      of the 4*4 matrix shown below; we use xa to store the determi-
c      nant minors of this matrix
c      1   1   1   1   where p(x,y,z) and triangle qrs form
c      x q1 r1 s1   our tetrahedron; we'll put in advance
c      y q2 r2 s2   the proper sign of each minor, i.e., +---,
c      z q3 r3 s3   (respectively, for 1,x,y,z) stored in
c      xtat(i,1-4); note that we have a special subroutine xnor to
c      find the determinant of a 3*3 matrix (here,xa)
c
      do 30 k=1,3
      do 25 l=1,3
      xa(1,k)=xyz(tat(j,k),1)
25     continue
30     continue
      xtat(j,1)=xnor(xa)
      do 40 l=1,3
40     xa(1,l)=1.0
      xtat(j,2)=-xnor(xa)
      do 50 l=1,3
50     xa(2,l)=xyz(tat(j,1),1)
      xtat(j,3)=xnor(xa)
      do 60 l=1,3
60     xa(3,l)=xyz(tat(j,1),2)
      xtat(j,4)=-xnor(xa)
c

```

```

c      xtat(j,5) contains the present volume of the jth tetrahedron,
c      and there are nvoit tetrahedrons.
c      if xtat(j,5) is negative, we change all the signs of all minors
c      as well as that of xtat(j,5).
c
      xtat(j,5)=xtat(j,1)
      do 70 k=1,3
70      xtat(j,5)=xtat(j,5)+(xyz(sppz,k)*xtat(j,k+1))
      if (xtat(j,5).lt.0.0) then
      do 75 k=1,5
75      xtat(j,k)=-xtat(j,k)
      end if
80      continue
      nvoit=j
c
c      among our nvoit tetrahedrons, we'll choose that with maximum
c      volume(vmax) and that with minimum volume(vmin)
c
      if (xtat(1,5).ge.xtat(2,5)) then
      vmax=1
      vmin=2
      else
      vmax=2
      vmin=1
      end if
      do 90 i=3,nvoit
      if (xtat(i,5).gt.xtat(vmax,5)) then
      vmax=i
      else
      if (xtat(i,5).lt.xtat(vmin,5)) vmin=i
      end if
90      continue
      return
      end

      subroutine crit(sppt)
c
c      we want to find the tetrahedrons surrounding a point, their initial
c      areas; we fill in the first 3 columns of tat with the vertices of
c      the opposite triangle, the 4th is the tet nb.
c      we're also interested in the criterion value dependent on nbcri.
c
%include data3
c
      call area(sppt)
      abc=5
      xd1=xcrit(abc)
      xyz2(sppt,col)=xd1
      return
      end

```

## data3.incl.fortran

```

c      the letters xyz for real, g for logical, the rest for integer
c      implicit integer (a-f,h-w),logical (g)
c      three coordinates of a point
c      common/point/xyz(200,3),nbp,nbpmax,nsp,nbi,xyz2(200,5),ixyz(200,2)
c      the three vertices of a triangle
c      common/tria/somtri(100,3),nbt,nbtmax
c      the four vertices of a tetrahedron
c      common/tetra/somtet(800,4),nbtet,ntetmx
c      3 coordinates of one single special point
c      3 vertices of one single special triangle
c      4 vertices of one single special tetrahedron
c      a logical indicating whether it's inside or not
c      common/spec/xsppt(3),sptri(3),sptet(4),ginsid
c      for use in programs included in ametet.fortran and amtetchx.fortran
&      common/mpt/tat(100,4),xa(3,3),xtat(100,8),nvoit,nbcrit,xeps1,count
&      xnb1,coef,vmin,vmax,xcoef,col,ptset,ptnb(150),nptnb,cnt,xquo,xsum

```

```

c      function xnor(xb)
c      this function finds the value of a 3 by 3 determinant
c      dimension xb(3,3),xpha(3)
c      m=1
c      k=2
c      l=3
5      xpha(m)=xb(m,1)*(xb(k,2)*xb(l,3)-xb(l,2)*xb(k,3))
c      if (m.eq.3) go to 30
c      if (k.eq.2) go to 10
c      if (k.eq.1) go to 20
10     k=1
c      m=2
c      go to 5
20     l=2
c      m=3
c      go to 5
30     xnor=(xpha(1)-xpha(2))+xpha(3)
c      return
c      end

```

```

      subroutine direc
c      this subroutine determines the direction vector using the subgradient
c      method
c
%include data3
c
      if (nbcrit.eq.1) then
      do 10 k=2,4
10      xsppt(k-1)=-((xtat(vmin,5)*xtat(vmax,k)-xtat(vmax,5)*xtat(vmin,k))/
      &      (xtat(vmax,5)**2)
      else
      if (nbcrit.eq.2) then
      do 20 k=2,4
20      xsppt(k-1)=- (xtat(vmax,k)-xtat(vmin,k))
      else
      if (nbcrit.eq.3) then
      xv=0.0
      yv=0.0
      zv=0.0
      xyv=0.0
      do 30 i=1,nvoit
      xv=xv+xtat(i,2)
      yv=yv+xtat(i,3)
      zv=zv+xtat(i,4)
30      xyv=xyv+xtat(i,5)
      xv=xv/nvoit
      yv=yv/nvoit
      zv=zv/nvoit
      xyv=xyv/nvoit
      xsppt(1)=0.0
      xsppt(2)=0.0
      xsppt(3)=0.0
      do 40 i=1,nvoit
      xv1=xtat(i,2)-xv
      yv1=xtat(i,3)-yv
      zv1=xtat(i,4)-zv
      if ((xtat(i,5)-xyv).lt.0.0) then
      xv1=-xv1
      yv1=-yv1
      zv1=-zv1
      end if
      xsppt(1)=xsppt(1) - xv1
40      xsppt(2)=xsppt(2) - yv1
      xsppt(3)=xsppt(3) - zv1
      end if
      end if
      end if
      return
      end

```

```

subroutine movept(sppt)
c
c      we want to reposition a point without changing its neighbors;
c      in order to optimize a certain criterion (nbcrit) by using the
c      subgradient method.
c
%include data3
c
c      call area(sppt)
c      abc=5
c      xd1=xcrit(abc)
c      we want to reduce the gap between the volumes ;
c      the direction vector xsppt is used in v(i,xsppt,xeps)=xtat(i,5)
c      +xeps*(xsppt(1)*xtat(i,2)+xsppt(2)*xtat(i,3)+xsppt(3)*xtat(i,4))
c      and xsppt is found in the subroutine direc.
c
c      do 80 jj=1,cnt
10      call direc
c
c      volume is now simply xtat(i,5)+xeps*xtat(i,6) and xtat(i,6) will
c      be computed in the subroutine xfive
c      call xfive
c
c      on r*r, we plot the functions f(xeps)=a+b*xeps for each tetrahedron
c      and we find the xeps value giving the minimum difference between
c      vmax and vmin in the subroutine neweps; moreover, we look for the
c      xeps1 value depending on the xcoef.
c
c      call neweps
c
c      if (ginsid) go to 130
c      xtat(vmin,7)=xtat(vmin,5)+xeps1*xtat(vmin,6)
c      if (xtat(vmin,7).le.0.0) go to 130
c      do 20 i=1,nvoit
c      xtat(i,7)=xtat(i,5)+xeps1*xtat(i,6)
20      continue
c      abc=7
c      xd3=xcrit(abc)
c      xsppt will now contain our real gradient vector
c      do 50 i=1,3
50      xsppt(i)=xeps1*xsppt(i)
c      we'll move our pt in the direction of xsppt
c      do 60 i=1,3
60      xyz(sppt,i)=xyz(sppt,i)+xsppt(i)
c      we'll revise the new volumes in xtat(i,5)
c      do 70 i=1,nvoit
70      xtat(i,5)=xtat(i,7)
80      continue
130     return
end

```

```

      subroutine stri
c      structure of input files (point,tetrahedron)
c
c      %include data3
c
c      character*12 efipt,efitet
c
c      read into xyz data from entry point file
c      print, "name of entry point file is"
c      read(5,*) efipt
c      write(6,*) efipt
c      open(10,file=efipt,form='formatted')
10      read(10,*,end=20) nbp,(xyz(nbp,i),i=1,3)
c      go to 10
20      close(10)
c
c      read into somtet data from entry tetrahedron file
c      print,"name of entry tetrahedron file is"
c      read(5,*) efitet
c      write(6,*) efitet
c      open(10,file=efitet,form='formatted')
50      read(10,*,end=60) nbtet,(sometet(nbtet,i),i=1,4)
c      go to 50
60      close(10)
c
c      return
c      end

      subroutine stro
c      structure of output(point,criterion value)
c
c      %include data3
c
c      character*12 sfipt,sfitet
c
c      write into exit point file data from xyz with pt number indicated
c      read(5,*) sfipt
c      open(10,file=sfipt,form='formatted')
c      do 10 i=1,nbp
c      write(10,*) i,(xyz(i,j),j=1,3)
10      continue
c      close(10)
c
c      print, "the initial and intermediate global criterion values"
c      print, "and the global improvement value at this moment"
c      write(6,*) xquo,xquo*xsum,xsum
c
c      return
c      end

```

```

      function xcrit(cab)
c      this function is the criterion to be used
%include data3
c
      if (nbcrit.eq.1) then
      xcrit=1.0-xtat(vmin,cab)/xtat(vmax,cab)
      else
      if (nbcrit.eq.2) then
      xcrit=xtat(vmax,cab)-xtat(vmin,cab)
      else
      if (nbcrit.eq.3) then
      xv=0.0
      do 10 i=1,nvoit
. 10  xv=xv+xtat(i,cab)
      xv=xv/nvoit
      xcrit=0.0
      do 20 i=1,nvoit
      yv=xtat(i,cab)-xv
      if (yv.lt.0.0) yv=-yv
      20  xcrit=xcrit+yv
      xcrit=xcrit/nvoit
      end if
      end if
      end if
      return
      end

```

```

      subroutine xfive
c      we compute xtat(i,6) in this subroutine
c
%include data3
      do 20 i=1,nvoit
      xtat(i,6)=0.0
      do 10 j=1,3
      10  xtat(i,6)=xtat(i,6)+xsppt(j)*xtat(i,j+1)
      20  continue
      return
      end

```

```

      subroutine neweps
c      we look for the (xeps,min(vmax-vmin)) and the xeps1 a function of
c      of xeps and xcoef
%include data3
c      the initial vmax and vmin may have others at the max and min values,
c      so we have to choose that for which the slope is biggest for the max,
c      and the smallest for the min
c
      if (count.eq.0) then
      do 7 i=1,nvoit
      if (xtat(i,5).lt.xtat(vmax,5)) go to 3
      if (xtat(i,6).gt.xtat(vmax,6)) vmax=i
      go to 7
3      if (xtat(i,5).gt.xtat(vmin,5)) go to 7
      if (xtat(i,6).lt.xtat(vmin,6)) vmin=i
7      continue
      end if
c
c      we now look for the intersections at max and min, and the increasing
c      values of xeps at these intersections
c
      xdif=xtat(vmax,5)-xtat(vmin,5)
      xeps=0.0
      vmax1=vmax
      vmin1=vmin
      vmax3=vmax
      vmin3=vmin
      first=0
8      if (first.eq.2) go to 12
      xmx=1.e15
      do 10 i=1,nvoit
      ya=xtat(i,5)-xtat(vmax1,5)
      yb=xtat(vmax1,6)-xtat(i,6)
      if ((ya*yb).le.0.0) go to 10
      yab=ya/yb
      if ((xeps.lt.yab).and.(yab.lt.xmx)) then
      xmx=yab
      vmax2=i
      end if
10     continue
12     if (first.eq.1) go to 17
      xmn=1.e15
      do 15 i=1,nvoit
      za=xtat(i,5)-xtat(vmin1,5)
      zb=xtat(vmin1,6)-xtat(i,6)
      if ((za*zb).le.0.0) go to 15
      zab=za/zb
      if ((xeps.lt.zab).and.(zab.lt.xmn)) then
      xmn=zab
      vmin2=i
      end if

```

```

15      continue
17      if ((xmx.eq.1.e15).and.(xmn.eq.1.e15)) go to 70
      vmax3=vmax1
      vmin3=vmin1
      if (xmx-xmn) 20,20,30
20      vmax1=vmax2
      first=1
      if (xmx.lt.xmn) go to 35
      first=0
30      vmin1=vmin2
      if (xmx.gt.xmn) first=2
35      if (xmx.ge.xmn) then
      xeps1=xmn
      else
      xeps1=xmx
      end if
c      when smallest volume is negative
      if (xtat(vmin1,5)+xeps1*xtat(vmin1,6).le.0.0) go to 75
      xdif1=xtat(vmax1,5)-xtat(vmin1,5)+xeps1*(xtat(vmax1,6)-xtat(vmin1,6))
      if (xdif1.gt.xdif) go to 60
      xdif=xdif1
      xeps=xeps1
      go to 8
60      xeps1=xeps+(xcoef)*(xeps1-xeps)
      ginsid=.false.
      go to 80
70      vmax3=vmax1
      vmin3=vmin1
75      if (xeps.eq.0.0) ginsid=.true.
      xeps1=xeps*(1+0.1*xcoef)
80      vmax=vmax3
      vmin=vmin3
      xdif2=xtat(vmax,5)-xtat(vmin,5)+xeps1*(xtat(vmax,6)-xtat(vmin,6))
      return
      end

```

```

      subroutine amtetchx
%include data3
      call stri
      print, "criterion number is"
      read(5,*) nbcrit
      write(6,*) nbcrit
      print, "best to worst?"
      read(5,*) bwst
      write(6,*) bwst
      xcoef=0.01
      cnt=3
      tour=3
      col=1
      xquo=0.0
      do 10 i=1,nbp
        spct=i
        call crit(spct)
        xquo=xquo+xyz2(i,1)
10      continue
        call prepsurf
        do 15 i=1,nbi
15      xyz2(i,4)=xyz2(ixyz(i,2),1)
        call tricrit
        if (bwst.eq.1) then
          fst=nbi
          sec=1
          thd=-1
        else
          fst=1
          sec=nbi
          thd=1
        end if
17      do 30 j=1,tour
        do 20 i=fst,sec,thd
          spct=ixyz(i,2)
          call movept(spct)
20      continue
          do 25 i=1,nbi
            spct=ixyz(i,2)
            col=5
            call crit(spct)
            xyz2(i,4)=xyz2(spct,5)
25      continue
            call tricrit
            col=2
            xsum=0.0
            do 45 i=1,nbp
              spct=i
              call crit(spct)
              xyz2(i,3)=xyz2(i,1)-xyz2(i,2)
              xsum=xsum+xyz2(i,3)
45      continue
            xsum=xsum/xquo
            call stro
30      continue
      return
      end

```

```

      subroutine tricrit
c      arranges xyz2(*,2) in decreasing order and subsequently ixyz(*,2)
%include data3
c
      5      fini=0
            do 10 i=1,nbi-1
              x=xyz2(i,4)
              y=xyz2(i+1,4)
              if (x.lt.y) then
                xyz2(i,4)=y
                xyz2(i+1,4)=x
                j=ixyz(i,2)
                ixyz(i,2)=ixyz(i+1,2)
                ixyz(i+1,2)=j
                fini=1
              end if
      10      continue
            if (fini.eq.1) go to 5
            return
      end

```

```

      subroutine prepsurf
c      prepares the use of the file of boundary points in amtetchx
%include data3
      character*12 bndpt
c
      do 10 i=1,nbp
      10      ixyz(i,1)=0
            print, "boundary point file is"
            read(5,*) bndpt
            write(6,*) bndpt
            open(10,file=bndpt,form='formatted')
      20      read(10,*,end=30) i
            ixyz(i,1)=1
            go to 20
      30      close(10)
            j=0
            do 40 i=1,nbp
              if (ixyz(i,1).eq.0) then
                j=j+1
                ixyz(j,2)=i
              end if
      40      continue
            nbi=j
            return
      end

```

## Annexe 4.1 :

## La Déroulement de l'ALGO 1 en Bougeant Une Foix le Noeud 6:

## COMMENTAIRES

entry point file is **PTS**

|   |               |               |
|---|---------------|---------------|
| 1 | .00000000E+00 | .00000000E+00 |
| 2 | .40000000E+01 | .00000000E+00 |
| 3 | .00000000E+00 | .30000000E+01 |
| 4 | .20000000E+01 | .40000000E+01 |
| 5 | .50000000E+01 | .20000000E+01 |
| 6 | .10000000E+01 | .10000000E+01 |

Fichier de coordonnées  
des noeudsentry triangle file is **TRS**

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 5 |
| 4 | 5 | 2 |
| 5 | 2 | 1 |

Fichier de sommets  
des trianglescriterion number is  $C_1(P_0)$   $v_{max} - v_{min}$ coefficient number is  $0,01$ the point to be moved is **6**

the three minors and the initial area

|               |                |                |               |
|---------------|----------------|----------------|---------------|
| .00000000E+00 | .30000000E+01  | .00000000E+00  | .30000000E+01 |
| .60000000E+01 | .10000000E+01  | -.20000000E+01 | .50000000E+01 |
| .16000000E+02 | -.20000000E+01 | -.30000000E+01 | .11000000E+02 |
| .80000000E+01 | -.20000000E+01 | .10000000E+01  | .70000000E+01 |
| .00000000E+00 | .00000000E+00  | .40000000E+01  | .40000000E+01 |

Fonction objective  
- le  $\varepsilon$  pour le pas  
- le noeud à bougerLes Mineurs du  
déterminant  
représentant  $V_i(P_0)$  avec  
les superficies initialesthe initial  $v_{max}$  and  $v_{min}$ 

|   |   |
|---|---|
| 3 | 1 |
|---|---|

 $T_{max}$  initiale;  $T_{min}$  initialethe criterion used is  $v_{max} - v_{min}$ 

the initial criterion value

[.80000000E+01]

La valeur initiale de la  
fonction objective

the gradient vector to be used

[.50000000E+01 | .30000000E+01]

La direction de descente

the area linear equations as a function of the step

the constant and the slope

|               |                |
|---------------|----------------|
| .30000000E+01 | .15000000E+02  |
| .50000000E+01 | -.10000000E+01 |
| .11000000E+02 | -.19000000E+02 |
| .70000000E+01 | -.70000000E+01 |
| .40000000E+01 | .12000000E+02  |

Les applications affines en  $p$ ,  
 $V_i(P_0 + \delta \delta)$ , ayant  $p$  donné,  
où la première valeur est la  
constante, et la seconde estle coefficient de  $p$ the intermediate step values with corresponding  $v_{max}, v_{min}$ 

|               |   |   |
|---------------|---|---|
| .12500000E+00 | 3 | 1 |
| .22580645E+00 | 3 | 2 |
| .33333333E+00 | 5 | 2 |

Les pas intermédiaires dans

la recherche de  $p$  optimal etles  $T_{max}$  et  $T_{min}$  respectives

this is the optimal step taken

[.22580645E+00]

Le pas optimal

this is the next step

[.33333333E+00]

Le pas suivant

this is the real step taken

[.22688172E+00]

Le pas à prendre

the new  $v_{max}, v_{min}$ 

|   |   |
|---|---|
| 5 | 2 |
|---|---|

the new criterion value

the criterion used is  $v_{max} - v_{min}$ 

[.19494624E+01]

Les nouveaux  $T_{max}$  et  $T_{min}$ La valeur finale de  
la fonction objective

the new areas of the triangles

[.64032258E+01 | .47731183E+01 | .66892473E+01 | .54118279E+01 | .67225807E+01]

Les nouvelles superficies des triangles

the new coordinates of our point

[.21344086E+01 | .16806452E+01]

La nouvelle emplacement de  $P_0$ 

R 0.3303 15.824 1653.4

## Annexe 4.2 :

Bouger le noeud 10 une fois par  $C_1(P_0)$ entry point file is  $tp$ 

1 0.0 0.0  
 2 17.0 0.0  
 3 27.0 20.0  
 4 16.0 31.0  
 5 0.0 24.0  
 6 12.0 15.0  
 7 6.0 7.5  
 8 14.5 7.5  
 9 24.5 17.5  
 10 14.0 23.0  
 11 6.0 19.5  
 12 9.375 3.75  
 13 20.75 11.25  
 14 20.375 22.875  
 15 9.0 24.375  
 16 3.0 12.75  
 17 13.0 26.125

entry triangle file is  $tn$ 

1 6 7 8  
 2 6 8 9  
 $EV(1) = 3 6 9 10$   
 $EV(2) = 4 6 10 11$   
 5 6 7 11  
 6 1 7 12  
 7 7 8 12  
 8 2 8 12  
 9 1 2 12  
 10 8 9 13  
 11 2 8 13  
 12 2 3 13  
 13 3 9 13  
 $EV(3) = 14 9 10 14$   
 15 3 9 14  
 16 3 4 14  
 $EV(4) = 17 4 10 14$   
 $EV(5) = 18 10 11 15$   
 $EV(6) = 19 17 4 10$   
 20 4 5 15  
 21 5 11 15  
 22 7 11 16  
 23 1 7 16  
 24 1 5 16  
 25 5 11 16  
 $EV(7) = 26 10 15 17$   
 27 4 15 17

criterion number is 2 ( $C_1(P_0)$ )

coefficient number is 0.01

the point to be moved is 10

the three minors and the initial area

-157.5 -2.5 12.5 95.0

-144.0 4.5 6.0 57.0

203.875 -5.375 -4.125 33.75

265.625 -8.125 -4.375 51.25

29.25 4.875 -3.0 28.5

15.0 4.875 -3.0 14.25

81.75 1.75 -4.0 14.25

the initial vmax and vmin

 $V_{max} - V_{min}$

Bouger le noeud 10 une fois par  $C_1(P_0)$  (continuation) avec la figure finale Figure 4.10

```

1 6
  the criterion used is vmax-vmin
  the initial criterion value
80.75
  the gradient vector to be used
7.375 -15.5
  the area linear equations as a function of the step
  the constant and the slope
95.0 -212.1875
57.0 -59.8125
33.75 24.296875
51.25 7.890625
28.5 82.453125
14.25 82.453125
14.25 74.90625
  the intermediate step values with corresponding vmax,vmin
0.19879304 1 6
0.27406268 4 6
0.28126701 4 1
  this is the optimal step taken
0.27406268
  this is the next step
0.28126701
  this is the real step taken
0.27413473
  the new vmax,vmin
4 1
  the new criterion value
16.581056
  the new areas of the triangles
36.832038 40.603317 40.410617 53.413095 51.103265 36.853265 34.784404
  the new coordinates of our point
16.021744 18.750912
.r 18:46 0.373 1

```

## Annexe 4.3 :

Bouger le noeud 10 une fois par  $C_2(P_0)$ entry point file is  $tpf$ 

1 0.0 0.0  
 2 17.0 0.0  
 3 27.0 20.0  
 4 16.0 31.0  
 5 0.0 24.0  
 6 12.0 15.0  
 7 6.0 7.5  
 8 14.5 7.5  
 9 24.5 17.5  
 10 14.0 23.0  
 11 6.0 19.5  
 12 9.375 3.75  
 13 20.75 11.25  
 14 20.375 22.875  
 15 9.0 24.375  
 16 3.0 12.75  
 17 13.0 26.125

entry triangle file is  $tr$ 

1 6 7 8  
 2 6 8 9  
 $EV(1) =$  3 6 9 10  
 $EV(2) =$  4 6 10 11  
 5 6 7 11  
 6 1 7 12  
 7 7 8 12  
 8 2 8 12  
 9 1 2 12  
 10 8 9 13  
 11 2 8 13  
 12 2 3 13  
 13 3 9 13  
 $EV(3) =$  14 9 10 14  
 15 3 9 14  
 16 3 4 14  
 $EV(4) =$  17 4 10 14  
 $EV(5) =$  18 10 11 15  
 $EV(6) =$  19 17 4 10  
 20 4 5 15  
 21 5 11 15  
 22 7 11 16  
 23 1 7 16  
 24 1 5 16  
 25 5 11 16  
 $EV(7) =$  26 10 15 17  
 27 4 15 17

criterion number is 1  $(C_2(P_0))$   $1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}$ 

coefficient number is 0.01

the point to be moved is 10

the three minors and the initial area

-157.5 -2.5 12.5 95.0  
 -144.0 4.5 6.0 57.0  
 203.875 -5.375 -4.125 33.75  
 265.625 -8.125 -4.375 51.25  
 29.25 4.875 -3.0 28.5  
 15.0 4.875 -3.0 14.25  
 81.75 1.75 -4.0 14.25  
 the initial  $v_{max}$  and  $v_{min}$

Bouger le noeud 10 une fois par  $C_2(P_0)$  (continuation) avec la figure finale Figure 4.11

```

1 6
  the initial criterion value
0.85
  the gradient vector to be used
0.055263158 -0.05131579
  the area linear equations as a function of the step
  the constant and the slope
95.0 -0.77960526
57.0 -0.059210527
33.75 -0.085361843
51.25 -0.22450658
28.5 0.42335526
14.25 0.42335526
14.25 0.30197369
  the intermediate step values with corresponding vmax,vmin
38.331717 1 6
50.343949 1 3
52.748858 1 7
59.059305 2 7
70.278038 5 7
  this is the optimal step taken
59.059305
  this is the next step
70.278038
  this is the real step taken
59.171492
  the new vmax,vmin
5 7
  the new criterion value
0.40022602
  the new areas of the triangles
48.869594 53.496425 28.699012 37.965611 53.550562 39.300562 32.118234
  the new coordinates of our point
17.270004 19.963568

```

Annexe 4.4 :

Bouger le noeud 10 une fois par  $C_3(P_0)$

```

    entry point file is lpt
    1 0.0 0.0
    2 17.0 0.0
    3 27.0 20.0
    4 16.0 31.0
    5 0.0 24.0
    6 12.0 15.0
    7 6.0 7.5
    8 14.5 7.5
    9 24.5 17.5
    10 14.0 23.0
    11 6.0 19.5
    12 9.375 3.75
    13 20.75 11.25
    14 20.375 22.875
    15 9.0 24.375
    16 3.0 12.75
    17 13.0 26.125
    entry triangle file is H/cv
    1 6 7 8
    2 6 8 9
    EV(1)= 3 6 9 10
    EV(2)= 4 6 10 11
    5 6 7 11
    6 1 7 12
    7 7 8 12
    8 2 8 12
    9 1 2 12
    10 8 9 13
    11 2 8 13
    12 2 3 13
    13 3 9 13
    EV(3)= 14 9 10 14
    15 3 9 14
    16 3 4 14
    EV(4)= 17 4 10 14
    EV(5)= 18 10 11 15
    EV(6)= 19 17 4 10
    20 4 5 15
    21 5 11 15
    22 7 11 16
    23 1 7 16
    24 1 5 16
    25 5 11 16
    EV(7)= 26 10 15 17
    27 4 15 17
    criterion number is 3 (C3(P0))
    coefficient number is 0.01
    the point to be moved is 10
    the three minors and the initial area
    -157.5 -2.5 12.5 95.0
    -144.0 4.5 6.0 57.0
    203.875 -5.375 -4.125 33.75
    265.625 -8.125 -4.375 51.25
    29.25 4.875 -3.0 28.5
    15.0 4.875 -3.0 14.25
    81.75 1.75 -4.0 14.25
    the initial vmax and vmin

```

Bouger le noeud 10 une fois par  $C_3(P_0)$  (continuation) avec la figure finale Figure 4.12

```

1 6
  the initial criterion value
22.071429
  the gradient vector to be used
12.25 -28.25
  the area linear equations as a function of the step
  the constant and the slope
95.0 -383.75
57.0 -114.375
33.75 50.6875
51.25 24.0625
28.5 144.46875
14.25 144.46875
14.25 134.4375
  the intermediate step values with corresponding vmax,vmin
0.10727969 1 6
0.15287227 4 6
0.15583162 4 1
  this is the optimal step taken
0.15287227
  this is the next step
0.15583162
  this is the real step taken
0.15290187
  the new vmax,vmin
4 1
  the new criterion value
6.1482121
  the new areas of the triangles
36.323909 39.511849 41.500213 54.929201 50.589541 36.339541 34.805745
  the new coordinates of our point
15.873048 18.680522

```

## Annexe 5.1 :

Bouger le Noeud 6 en 5 ITERATIONS (cf Figure 4.13)

```

entry point file is
pts
1 0.0 0.0
2 4.0 0.0
3 0.0 3.0
4 2.0 4.0
5 5.0 2.0
6 1.0 1.0
entry triangle file is
trs
1 1 3 6
2 3 4 6
3 4 5 6
4 5 2 6
5 2 1 6
criterion number is 2 Vmax-Vmin
coefficient number is 0.01
the number of iterations 5
the point to be moved is 6
the criterion used is vmax-vmin
the initial criterion value

```

Iteration I

```

8.0
the gradient vector to be used
5.0 3.0
this is the real step taken
0.22688172
the new vmax,vmin
5 2
the new criterion value
the criterion used is vmax-vmin
1.9494624
the new areas of the triangles
6.4032258 4.7731183 6.6892473 5.4118279 6.7225807
the new coordinates of our point

```

Iteration II

```

2.1344086 1.6806452
the gradient vector to be used
1.0 -6.0
this is the real step taken
0.0011291481
the new vmax,vmin
3 2
the new criterion value
the criterion used is vmax-vmin
1.9195164
the new areas of the triangles
6.4066133 4.7877972 6.7073137 5.4027947 6.6954811
the new coordinates of our point

```

Iteration III

```

2.1355378 1.6738703
the gradient vector to be used
3.0 1.0
this is the real step taken
0.0014788287
the new vmax,vmin
5 2

```

Bouger le Noeud 6 en 5 ITERATIONS (continuation) (cf Figure 4.13)

```

the new criterion value
the criterion used is vmax-vmin
1.9121204
the new areas of the triangles
6.4199228 4.7892761 6.6940042 5.3954006 6.7013965
the new coordinates of our point
2.1399743 1.6753491
Iteration IV the gradient vector to be used
1.0 -6.0
this is the real step taken
0.00047158983
the new vmax,vmin
3 2
the new criterion value
the criterion used is vmax-vmin
1.9061428
the new areas of the triangles
6.4213375 4.7954068 6.7015496 5.3916278 6.6900783
the new coordinates of our point
2.1404459 1.6725196
Iteration V the gradient vector to be used
3.0 1.0
this is the real step taken
0.001411063
the new vmax,vmin
5 2
the new criterion value
the criterion used is vmax-vmin
1.8989047
the new areas of the triangles
6.4340371 4.7968178 6.68885 5.3845725 6.6957226
the new coordinates of our point
2.144679 1.6739306
r 15:13 0.323 1

```

## Annexe 5.2 :

Bouger le Noeud 10 en 5 ITERATIONS (cf Figure 4.14)

entry point file is

tpt

```

1 0.0 0.0
2 17.0 0.0
3 27.0 20.0
4 16.0 31.0
5 0.0 24.0
6 12.0 15.0
7 6.0 7.5
8 14.5 7.5
9 24.5 17.5
10 14.0 23.0
11 6.0 19.5
12 9.375 3.75
13 20.75 11.25
14 20.375 22.875
15 9.0 24.375
16 3.0 12.75
17 13.0 26.125

```

entry triangle file is

ttr

```

1 6 7 8
2 6 8 9
3 6 9 10
4 6 10 11
5 6 7 11
6 1 7 12
7 7 8 12
8 2 8 12
9 1 2 12
10 8 9 13
11 2 8 13
12 2 3 13
13 3 9 13
14 9 10 14
15 3 9 14
16 3 4 14
17 4 10 14
18 10 11 15
19 17 4 10
20 4 5 15
21 5 11 15
22 7 11 16
23 1 7 16
24 1 5 16
25 5 11 16
26 10 15 17
27 4 15 17

```

criterion number is

1

coefficient number is

0.01

the number of iterations

5

the point to be moved is

10

I. the initial criterion value

[0.85]

$$1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \quad C_2(P_0)$$

## Bouger le Noeud 10 en 5 ITERATIONS (continuation) (cf Figure 4.14)

the gradient vector to be used

0.055263158 -0.05131579

this is the real step taken

59.171492

the new vmax,vmin

5 7

the new criterion value

0.40022602

the new areas of the triangles

48.869594 53.496425 28.699012 37.965611 53.550562 39.300562 32.118234

the new coordinates of our point

17.270004 19.963568

II the gradient vector to be used

-0.021921303 -0.04109533

this is the real step taken

27.045943

the new vmax,vmin

5 1

the new criterion value

0.3247752

the new areas of the triangles

36.458525 44.159682 36.470535 47.645426 53.994647 39.744647 35.526537

the new coordinates of our point

16.677121 18.852106

III the gradient vector to be used

-0.10726472 0.26902064

this is the real step taken

3.5406104

the new vmax,vmin

1 3

the new criterion value

0.29872496

the new areas of the triangles

49.314197 48.165644 34.582816 46.563984 49.285715 35.035715 31.051929

the new coordinates of our point

16.297338 19.804604

IV the gradient vector to be used

-0.073443604 -0.26140419

this is the real step taken

2.0909891

the new vmax,vmin

4 6

the new criterion value

0.28436982

the new areas of the triangles

42.865705 44.19502 37.662951 50.203084 50.176842 35.926842 32.969555

the new coordinates of our point

16.143769 19.25801

V the gradient vector to be used

0.21292507 0.0026070523

this is the real step taken

0.81739283

the new vmax,vmin

5 3

the new criterion value

0.28029282

the new areas of the triangles

42.457234 44.991002 36.718677 48.779658 51.018911 36.768911 33.265607

the new coordinates of our point

16.317812 19.260141

## Annexe 5.3 :

Bouger Noeud 10 en 5 Itérations par  $C_3(P_0)$  avec une Itération Non-Améliorante

- I. the gradient vector to be used  
 12.25 -28.25  
 this is the real step taken  
 0.15290187  
 the new vmax,vmin  
 4 1  
 the new criterion value  
6.1482121  
 the new areas of the triangles  
 36.323909 39.511849 41.500213 54.929201 50.589541 36.339541 34.805745  
 the new coordinates of our point  
 15.873048 18.680522
- II. the gradient vector to be used  
 6.5 14.75  
 this is the real step taken  
 0.062182715  
 the new vmax,vmin  
 5 3  
 the new criterion value  
6.586589  
 the new areas of the triangles  
 46.778378 46.833864 35.544275 47.632448 49.808371 35.558371 31.844293  
 the new coordinates of our point  
 16.277236 19.597718
- III. the gradient vector to be used  
 2.5 -22.25  
 this is the real step taken  
 0.00030971941  
 the new vmax,vmin  
 5 3  
 the new criterion value  
6.5644079  
 the new areas of the triangles  
 46.690302 46.796 35.56854 47.656306 49.832819 35.582819 31.873213  
 the new coordinates of our point  
 16.27801 19.590826
- IV. the gradient vector to be used  
 2.5 -22.25  
 this is the real step taken  
 0.00030662221  
 the new vmax,vmin  
 5 3  
 the new criterion value  
6.5424489  
 the new areas of the triangles  
 46.603106 46.758516 35.592562 47.679926 49.857023 35.607023 31.901844  
 the new coordinates of our point  
 16.278776 19.584004
- V. the gradient vector to be used  
 2.5 -22.25  
 this is the real step taken  
 0.00030355597  
 the new vmax,vmin  
 5 3  
 the new criterion value  
6.5207094  
 the new areas of the triangles  
 46.516782 46.721406 35.616343 47.703309 49.880985 35.630985 31.930188  
 the new coordinates of our point 16.279535 19.57725

## Annexe 6 :

Bouger 12 noeuds avec 3 ITERATIONS par noeud et 3 TOURS pour l'ensemble de noeuds

TOUR 1 (cf page 42)

TOUR 2

```

the points, the initial and present criterion values
at each point, and the difference of the 2 values
1 24.1875 14.281962 9.9055376
2 26.25 14.634966 11.615034
3 35.0 16.774974 18.225026
4 42.75 18.939167 23.810833
5 29.25 27.93115 1.31885
6 43.0 9.8403893 33.159611
7 40.125 15.310784 24.814216
8 75.0 14.593881 60.406119
9 93.75 21.003619 72.746382
10 80.75 23.645636 57.104364
11 43.5 27.931149 15.568851
12 31.875 11.112908 20.762092
13 50.0 14.634967 35.365033
14 27.5 16.896925 10.603075
15 42.75 24.97932 17.77068
16 36.0 17.904305 18.095695
17 0.0 0.54745388 -0.54745388
the initial and intermediate global criterion values
and the global improvement at this moment
721.6875 430.72395 0.59682889

```

TOUR 3

```

the points, the initial and present criterion values
at each point, and the difference of the 2 values
1 24.1875 14.399665 9.7878351
2 26.25 15.754794 10.495206
3 35.0 14.607202 20.392798
4 42.75 20.455956 22.294044
5 29.25 25.330893 3.919107
6 43.0 10.301254 32.698746
7 40.125 15.891786 24.233214
8 75.0 15.589186 59.410814
9 93.75 18.611383 75.138618
10 80.75 21.948954 58.801046
11 43.5 25.330892 18.169108
12 31.875 10.848876 21.026124
13 50.0 15.754791 34.245209
14 27.5 17.723465 9.7765346
15 42.75 23.062318 19.687682
16 36.0 16.824133 19.175867
17 0.0 0.70554352 -0.70554352
the initial and intermediate global criterion values
and the global improvement at this moment
721.6875 438.54641 0.60766802

```

## Annexe 7 : Maillage à Trois Etapes

Les Données du Maillage Initial (Cf figure 4.20) et les Etapes du Maillage en Maillant

Séparément les Petits Eléments et les Grands Eléments (Cf figures 4.21; figure 4.22)

| entry point file is<br>sbpt |              | entry triangle file is<br>sbtr |             |              |
|-----------------------------|--------------|--------------------------------|-------------|--------------|
| 1 0.0 17.0                  | 31 7.0 5.0   | 1 1 9 2                        | 37 20 30 21 | 72 32 31 45  |
| 2 4.0 17.0                  | 32 11.0 5.0  | 2 2 9 10                       | 38 21 30 31 | 73 32 45 46  |
| 3 8.0 17.0                  | 33 14.0 5.0  | 3 2 10 11                      | 39 21 31 22 | 74 32 46 47  |
| 4 11.0 17.0                 | 34 17.0 6.0  | 4 2 11 3                       | 40 22 31 32 | 75 46 64 47  |
| 5 14.0 17.0                 | 35 18.0 7.0  | 5 3 11 12                      | 41 22 32 23 | 76 47 64 65  |
| 6 18.0 17.0                 | 36 21.0 8.0  | 6 3 12 4                       | 42 23 32 33 | 77 64 63 65  |
| 7 23.0 17.0                 | 37 23.0 9.0  | 7 4 12 13                      | 43 23 33 24 | 78 47 65 66  |
| 8 27.0 17.0                 | 38 24.0 10.0 | 8 4 13 5                       | 44 24 33 34 | 79 66 65 67  |
| 9 0.0 13.0                  | 39 0.0 3.0   | 9 5 13 14                      |             | 80 66 67 68  |
| 10 4.0 13.0                 | 40 2.0 2.0   | 10 5 14 6                      | 45 41 40 42 | 81 48 47 66  |
| 11 7.0 13.0                 | 41 3.0 3.0   | 11 6 14 15                     | 46 42 40 58 | 82 48 66 68  |
| 12 10.0 12.0                | 42 4.0 2.0   | 12 6 15 7                      | 47 42 58 60 | 83 32 47 48  |
| 13 13.0 13.0                | 43 6.0 2.0   | 13 7 15 16                     | 48 58 59 60 | 84 32 48 49  |
| 14 16.0 12.0                | 44 7.0 3.0   | 14 7 16 17                     | 49 43 42 60 | 85 49 48 68  |
| 15 19.0 13.0                | 45 8.0 4.0   | 15 7 17 8                      | 50 43 60 61 | 86 51 68 69  |
| 16 21.0 13.0                | 46 9.0 3.0   | 16 8 17 18                     | 51 28 39 29 | 87 51 49 68  |
| 17 23.0 13.0                | 47 10.0 2.0  | 17 9 19 10                     | 52 39 40 29 | 88 33 49 51  |
| 18 26.0 12.0                | 48 11.0 3.0  | 18 10 19 20                    | 53 39 55 40 | 89 33 50 49  |
| 19 0.0 10.0                 | 49 12.0 3.0  | 19 10 20 11                    | 54 55 56 57 | 90 32 49 50  |
| 20 3.0 9.0                  | 50 12.0 4.0  | 20 11 20 21                    | 55 55 57 40 | 91 33 32 50  |
| 21 7.0 9.0                  | 51 14.0 4.0  | 21 11 21 12                    | 56 57 58 40 | 92 52 33 51  |
| 22 11.0 8.0                 | 52 15.0 5.0  | 22 12 21 22                    | 57 57 59 58 | 93 52 51 69  |
| 23 13.0 8.0                 | 53 17.0 5.0  | 23 12 22 13                    | 58 29 40 41 | 94 70 52 69  |
| 24 17.0 8.0                 | 54 19.0 6.0  | 24 13 22 14                    | 59 30 29 41 | 95 53 52 70  |
| 25 19.0 8.0                 | 55 0.0 2.0   | 25 14 22 23                    | 60 30 41 42 | 96 34 52 53  |
| 26 21.0 9.0                 | 56 0.0 0.0   | 26 14 23 24                    | 61 30 42 43 | 97 34 33 52  |
| 27 23.0 10.0                | 57 1.0 0.0   | 27 14 24 15                    | 62 30 43 44 | 98 54 34 53  |
| 28 0.0 5.0                  | 58 3.0 1.0   | 28 15 24 25                    | 63 44 43 62 | 99 54 35 34  |
| 29 2.0 4.0                  | 59 3.0 0.0   | 29 15 25 26                    | 64 43 61 62 | 100 35 24 34 |
| 30 5.0 4.0                  | 60 5.0 0.0   | 30 15 26 16                    | 65 62 61 63 | 101 25 24 35 |
|                             | 61 6.0 0.0   | 31 16 26 17                    | 66 62 63 64 | 102 36 25 54 |
|                             | 62 7.0 1.0   | 32 17 26 27                    | 67 46 62 64 | 103 37 26 36 |
|                             | 63 8.0 0.0   | 33 17 27 18                    | 68 46 44 62 | 104 38 27 37 |
|                             | 64 9.0 2.0   | 34 19 28 29                    | 69 45 44 46 | 105 25 35 54 |
|                             | 65 10.0 0.0  | 35 19 29 20                    | 70 45 31 44 | 106 26 25 36 |
|                             | 66 11.0 1.0  | 36 20 29 30                    | 71 31 30 44 | 107 27 26 37 |
|                             | 67 12.0 0.0  |                                |             | 108 18 27 38 |
|                             | 68 13.0 2.0  |                                |             |              |
|                             | 69 14.0 3.0  |                                |             |              |
|                             | 70 16.0 4.0  |                                |             |              |

criterion number is  
 2  
 best to worst?  
 0  
 boundary point file is  
 the initial and intermediate global criterion values  
 and the global improvement at this moment  
 .35649392E+03 .65840820E+02 .18468988E+00  
 the initial and intermediate global criterion values  
 and the global improvement at this moment  
 .35649392E+03 .86482026E+02 .24259046E+00  
 the initial and intermediate global criterion values  
 and the global improvement at this moment  
 .35649392E+03 .90654933E+02 .25429587E+00  
 R 4.4076 84.111 1709.3

Les Coordonnées de Noeuds après avoir Mailler Séparément les Petits Eléments  
et les Grands Eléments (cf. figures 4.21; 4.22) et les Etapes du Maillage en  
Maillant le Frontier (Cf figures 4.23)

```

entry point file is
sbpt1
1 0.0 17.0
2 4.0 17.0
3 8.0 17.0
4 11.0 17.0
5 14.0 17.0
6 18.0 17.0
7 23.0 17.0
8 27.0 17.0
9 0.0 13.0
10 3.5941024 13.141349
11 6.7792336 13.377212
12 9.7130737 12.191992
13 12.592204 12.872693
14 15.543045 13.047782
15 18.371752 13.887089
16 21.015757 13.064598
17 23.967857 13.991859
18 26.0 12.0
19 0.0 10.0
20 2.8986697 8.8270448
21 5.9312255 9.0232998
22 9.6874131 8.263752
23 13.750476 9.2572303
24 17.0 8.0
25 19.0 8.0
26 21.0 9.0
27 23.0 10.0
28 0.0 5.0
29 2.0 4.0
30 5.0 4.0
31 7.0 5.0
32 11.0 5.0
33 14.0 5.0
34 17.0 6.0
35 18.0 7.0
36 21.0 8.0
37 23.0 9.0
38 24.0 10.0
39 0.0 3.0
40 1.9509481 2.0202287
41 3.2291155 2.9981999
42 4.3165899 1.9209197
43 5.715973 2.0476134
44 6.6944651 3.1727193
45 8.0321015 4.1802766
46 8.842486 3.2979761
47 9.7504975 2.5985341
48 10.971449 2.5004078
49 11.929812 2.8814226
50 12.309928 4.2938037
51 13.484187 3.826897
52 15.145567 4.6516445
53 17.0 5.0
54 19.0 6.0
55 0.0 2.0
56 0.0 0.0
57 1.0 0.0
58 3.0393627 1.0761773
59 3.0 0.0
60 5.0 0.0
61 6.0 0.0
62 7.1475797 1.6619686
63 8.0 0.0
64 8.7408139 1.4830897
65 10.0 0.0
66 11.019548 1.0183131
67 12.0 0.0
68 13.0 2.0
69 14.0 3.0
70 16.0 4.0

criterion number is
2
best to worst?
0
boundary point file is
the initial and intermediate global criterion values
and the global improvement at this moment
.26633293E+03 -.22894849E+02 -.85963267E-01
the initial and intermediate global criterion values
and the global improvement at this moment
.26633293E+03 -.24533412E+02 -.92115577E-01
the initial and intermediate global criterion values
and the global improvement at this moment
.26633293E+03 -.35897019E+02 -.13478251E+00
R 3.5925 88.489 1710.9

```

Les Coordonnées de Noeuds du Maillage Final (après avoir mailler les éléments entourant les noeuds frontaliers) (Cf. figure 4.23)

|    |           |           |  |  |
|----|-----------|-----------|--|--|
| 1  | 0.0       | 17.0      |  |  |
| 2  | 4.0       | 17.0      |  |  |
| 3  | 3.0       | 17.0      |  |  |
| 4  | 11.0      | 17.0      |  |  |
| 5  | 14.0      | 17.0      |  |  |
| 6  | 13.0      | 17.0      |  |  |
| 7  | 23.0      | 17.0      |  |  |
| 8  | 27.0      | 17.0      |  |  |
| 9  | 0.0       | 15.0      |  |  |
| 10 | 3.5941024 | 13.141549 |  |  |
| 11 | 6.7722336 | 13.377212 |  |  |
| 12 | 9.7139737 | 12.191922 |  |  |
| 13 | 12.592204 | 12.872593 |  |  |
| 14 | 15.543045 | 13.047732 |  |  |
| 15 | 18.371752 | 13.937089 |  |  |
| 16 | 21.015757 | 13.064593 |  |  |
| 17 | 23.967857 | 13.221852 |  |  |
| 18 | 26.0      | 12.0      |  |  |
| 19 | 0.0       | 10.0      |  |  |
| 20 | 2.8936697 | 8.8270443 |  |  |
| 21 | 5.9312255 | 9.0232928 |  |  |
| 22 | 9.6874131 | 8.233752  |  |  |
| 23 | 13.750476 | 9.2572303 |  |  |
| 24 | 16.009334 | 9.6024004 |  |  |
| 25 | 17.958756 | 3.8225107 |  |  |
| 26 | 19.456142 | 10.637001 |  |  |
| 27 | 22.451177 | 11.642315 |  |  |
| 28 | 0.0       | 5.0       |  |  |
| 29 | 1.23317   | 5.7205231 |  |  |
| 30 | 4.5874405 | 6.8147208 |  |  |
| 31 | 6.8302677 | 6.2141527 |  |  |
| 32 | 9.9664414 | 6.273455  |  |  |
| 33 | 13.178504 | 6.6384425 |  |  |
| 34 | 15.590594 | 6.7734057 |  |  |
| 35 | 13.0      | 7.0       |  |  |
| 36 | 21.0      | 8.0       |  |  |
| 37 | 23.0      | 9.0       |  |  |
| 38 | 24.0      | 10.0      |  |  |
| 39 | 0.0       | 3.0       |  |  |
| 40 | 1.2509431 | 2.0202237 |  |  |
| 41 | 3.2291155 | 2.2231222 |  |  |
| 42 | 4.3165399 | 1.9209197 |  |  |
| 43 | 5.715973  | 2.0476134 |  |  |
| 44 | 6.6244651 | 3.1727193 |  |  |
| 45 | 8.0321015 | 4.1302766 |  |  |
| 46 | 8.842486  | 3.2972761 |  |  |
| 47 | 9.7304975 | 2.5235341 |  |  |
| 48 | 10.971449 | 2.5004073 |  |  |
| 49 | 11.922812 | 2.8314226 |  |  |
| 50 | 12.309223 | 4.2933037 |  |  |
| 51 | 13.484137 | 3.326327  |  |  |
| 52 | 15.145567 | 4.6516445 |  |  |
| 53 | 17.0      | 5.0       |  |  |
| 54 | 19.0      | 6.0       |  |  |
| 55 | 0.0       | 2.0       |  |  |
| 56 | 0.0       | 0.0       |  |  |
| 57 | 1.0       | 0.0       |  |  |
| 58 | 3.0393627 | 1.0761773 |  |  |
| 59 | 3.0       | 0.0       |  |  |
| 60 | 5.0       | 0.0       |  |  |
| 61 | 6.0       | 0.0       |  |  |
| 62 | 7.1475727 | 1.6618636 |  |  |
| 63 | 2.0       | 0.0       |  |  |
| 64 | 3.7408139 | 1.4330327 |  |  |
| 65 | 10.0      | 0.0       |  |  |
| 66 | 11.019543 | 1.0123131 |  |  |
| 67 | 12.0      | 0.0       |  |  |
| 68 | 13.0      | 2.0       |  |  |
| 69 | 14.0      | 3.0       |  |  |
| 70 | 16.0      | 4.0       |  |  |

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AFZALI, M., Plane Intersections of a Three-Dimensional Mesh;  
Short Communications, January 1982, pages 1253-1259.
- [2] BYKAT, A., Automatic Generation of Triangular Grid :  
I. Subdivision of a General Polygon into Convex Subregions  
II. Triangulation of Convex Polygons;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976,  
Volume 10, pages 1329-1342.
- [3] CIARLET, P.G., Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle  
et à l'Optimisation;  
Masson, Paris, 1982.
- [4] EDDY, W. F., A New Convex Hull Algorithm for Planar Sets;  
ACM Transactions on Mathematical Software, Volume 3, Number 4,  
December 1977, pages 398-403.
- [5] FREY, A.E., C.A. Hall, and T.A. Porsching, An Application  
of Computer Graphics to Three Dimensional Finite Element Analysis;  
Computers & Structures, Volume 10, May 1978, pages 149-154.
- [6] GREEN, P.J., and R. Sibson, Computing Dirichlet Tessellations in the Plane;  
The Computer Journal, Volume 21, Number 2, March 1977, pages 168-173.
- [7] HERMELINE, F., Triangulation Automatique d'un Polyèdre en Dimension N;  
R.A.I.R.O. Analyse Numérique / Numerical Analysis, Volume 16, Numero 3,  
1982, pages 211-242.
- [8] IMAFUKU, I., Y. Kodera, M. Sayawaki and M. Kono, A Generalized  
Automatic Mesh Generation Scheme for Finite Element Method;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 15, 1980,  
pages 713-731.
- [9] KAMEL, H.A., and H.K. Eisenstein, Automatic Mesh Generation in Two  
and Three Dimensional Inter-Connected Domains;  
High Speed Computing of Elastic Structures, Proc. Symp. Int. Union  
of Theoretical and Applied Mechanics, Liège, August 23-28, 1970  
(Ed. B. Fraeijis de Veubeke), Les Congrès et Colloques de l'Université de Liège,  
1971, Volume 61, pages 455-475.
- [10] KLEINSTREUER C. and J.T. Holdeman, A Triangular Finite Element Mesh  
Generator for Fluid Dynamic Systems of Arbitrary Geometry;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 15, 1980,  
pages 1325-1334.
- [11] LEWIS B.A. and J.S. Robinson,  
Triangulation of Planar Regions with Applications;  
The Computer Journal, Volume 21, Number 4, November 1976,  
pages 324-332.

- [12] MCLAIN, D.H., Two Dimensional Interpolation from Random Data;  
The Computer Journal, Volume 19, Number 2, March 1974, pages 178-181.
- [13] NGUYEN-Van-Phai, Automatic Mesh Generation with Tetrahedron Elements;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 18, 1982,  
pages 273-289.
- [14] PISSANETZKY, S., KUBIK: An Automatic Three-Dimensional  
Finite Element Mesh Generator;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 17, 1981,  
pages 255-269.
- [15] PREPARATA, F.P. and S.J. Hong, Convex Hulls of Finite Sets  
of Points in Two and Three Dimensions;  
Communications of the ACM, February 1977, Volume 20, Number 2,  
pages 87-93.
- [16] SADEK, E.A., A Scheme for the Automatic Generation  
of Triangular Finite Elements;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 15, 1980,  
pages 1813-1822.
- [17] SIBSON, R., Locally Equiangular Triangulations;  
The Computer Journal, Volume 21, Number 3, March 1977, pages 243-245.
- [18] THACKER, W.C., A Brief Review of Techniques  
for Generating Irregular Computational Grids;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 15, 1980,  
pages 1335-1341.
- [19] WEGSTEIN, H.J., Algorithm 113 Treesort, Algorithm 271 Quicksort;  
Communications of the ACM, Volume 8, Number 11, October 1965,  
pages 434, 669-670.
- [20] YERRY, M.A. and M.S. Shephard, A Modified Quadtree Approach  
to Finite Element Mesh Generation; IEEE CG & A, January-February 1983,  
pages 39-46.
- [21] ZIENKIEWICZ, O.C. and D.V. Phillips, An Automatic Mesh Generation  
Scheme for Plane and Curved Surfaces by "Isoparametric" Coordinates;  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 3, 1971,  
pages 519-528.
- [22] HELD, M. and H.P. Crowder, Validation of Subgradient Optimization;  
Mathematical Programming, Volume 6, 1974, pages 62-88.
- [23] POULETTY, C., Génération et Optimisation de Maillages en Eléments Finis -  
Application à la Résolution de quelques Equations en Mécanique des Fluides;  
thèse de 3ème cycle (à paraître).
- [24] PERONNET, A., A Library of Subroutines for Finite Element Analysis  
(MODULEF); Proceedings of the third INRIA Symposium on Computing.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USMG

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M. ....F.O.N.C.U.P.T.....g.....

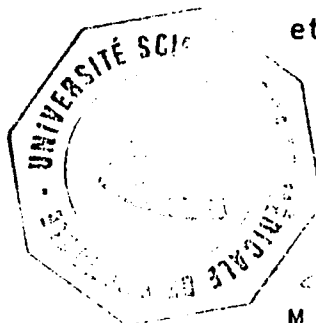
M. ....

M. ....CHARLES.....COA..... est autorisé  
à présenter une thèse en vue de l'obtention du ...doctnat. de.....3<sup>e</sup> cycle.....

Grenoble, le 08 OCT. 1984

Le Président de l'Université Scientifique

et Médicale



M. TANCHE



## **RESUME**

Dans cette thèse, on étudie un aspect du problème général d'obtention des maillages de type éléments finis. C'est celui d'amélioration d'un maillage existant sans changer la topologie actuelle de tétraèdres. On propose des méthodes générales et algorithmiques d'optimisation classique en recherche opérationnelle connues sous le nom de méthodes de sous-graadiant. On applique ces méthode sur des cas d'école et sur des cas réels proposés par la DGT/DEA, AVIONS MARCEL DASSAULT/ BREGUET AVIATION.

## **MOTS CLES**

MAILLAGES DE TYPE ELEMENTS FINIS, TETRAEDRISATION, TRIANGULATION, METHODES DE SOUS-GRADIENT.