



HAL
open science

Fonctions spline cardinales tronquées

Rekha Panditra Kulkarni

► **To cite this version:**

Rekha Panditra Kulkarni. Fonctions spline cardinales tronquées. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1985. Français. NNT: . tel-00318472

HAL Id: tel-00318472

<https://theses.hal.science/tel-00318472>

Submitted on 4 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR de l'Université
Scientifique et Médicale de Grenoble.

par

KULKARNI Rekha Panditrao



FONCTIONS SPLINE CARDINALES TRONQUEES.



Thèse soutenue le 29 novembre 1985 devant la commission d'examen

M. ATTEIA	Président
P. CHENIN	
M. DUC-JACQUET	Examineurs
P.J. LAURENT	
F. ROBERT	



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BEHORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2^{ème} CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

C'est avec un profond sentiments de reconnaissance, d'admiration et de respect que je voudrais exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur Pierre Jean LAURENT pour ses conseils pertinents et ses encouragements constants et généreux. Il a été fascinant pour moi de travailler avec lui pendant ces trois années.

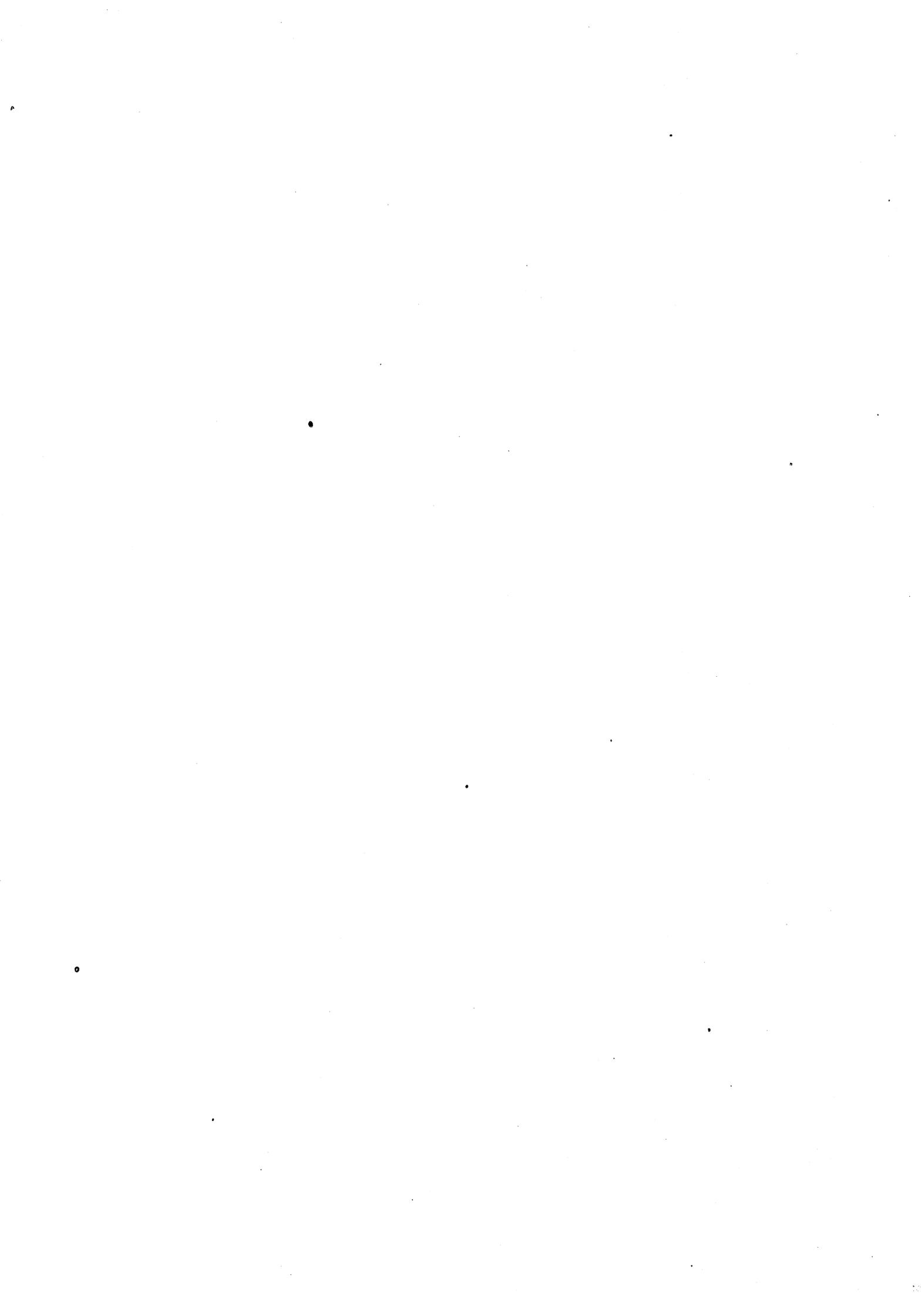
Je suis sensible à l'honneur que me fait Monsieur Marc ATTEIA Professeur à Toulouse, en acceptant de présider ce jury.

Je remercie Monsieur Marc DUC-JACQUET pour avoir accepté de juger mon travail ainsi que la sympathie qu'il m'a toujours témoignée.

Mes vifs remerciements vont également à Messieurs Patrick CHENIN et François ROBERT pour avoir eu l'amabilité de participer au jury.

Je tiens à remercier Madame Geneviève BICAIS pour sa compétence et sa patience dans la frappe de ce manuscrit et à Messieurs Claude ANGUILLE et Daniel IGLESIAS, du service Reprographie, pour l'excellente qualité de leur travail.

J'ai beaucoup apprécié l'ambiance amicale de l'équipe Algorithmique Mathématique. Pendant mon séjour en France, j'ai eu la chance de vivre une amitié profonde avec Guizou LAURENT. Je garderai un très beau souvenir de sa gentillesse et des moments de bonheur passés ensemble.



TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION -----	1
<u>CHAPITRE 1</u> FONCTIONS SPLINE CUBIQUES D'INTERPOLATION	7
1.1. INTRODUCTION -----	9
1.2. CONDITIONS DE BOUT -----	12
1.3. RESOLUTION DU SYSTEME TRIDIAGONAL -----	13
1.4. INVERSE DE LA MATRICE TRIDIAGONALE -----	16
1.5. FONCTIONS SPLINE CUBIQUES CARDINALES -----	18
1.6. FONCTIONS SPLINE CUBIQUES CARDINALES TRONQUEES -----	23
1.7. MAJORATION DE L'ERREUR -----	25
1.8. EXEMPLES NUMERIQUES -----	29
<u>CHAPITRE 2</u> FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES D'INTERPOLATION	31
2.1. INTRODUCTION -----	33
2.2. RELATIONS VERIFIEES PAR LES DERIVEES PREMIERES ET LES DERIVEES SECONDES -----	34
2.3. INVERSE DE LA MATRICE TRIDIAGONALE PAR BLOC -----	36
2.4. RESOLUTION D'UNE EQUATION QUADRATIQUE MATRICIELLE ---	38
2.5. CONDITIONS DE BOUT -----	41
2.6. FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES CARDINALES -----	43
2.7. FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES CARDINALES TRONQUEES -----	47
2.8. MAJORATIONS DE L'ERREUR -----	52

CHAPITRE 3	FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES D'HERMITE, PARABOLIQUES ET CUBIQUES PERIODIQUES	59
3.1.	INTRODUCTION -----	61
3.2.	FONCTIONS SPLINE CARDINALES QUINTIQUES D'HERMITE ---	61
3.3.	FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES D'HERMITE SUR [a,b] ----	64
3.4.	FONCTIONS SPLINE PARABOLIQUES -----	66
3.5.	FONCTIONS SPLINE CUBIQUES PERIODIQUES -----	69
3.6.	INVERSE DE LA MATRICE CIRCULANTE -----	72
CHAPITRE 4	FONCTIONS SPLINE D'INTERPOLATION DE DEGRE p , $p \geq 2$	75
4.1.	INTRODUCTION -----	77
4.2.	RELATIONS VERIFIEES PAR LES VALEURS AUX ABSCISSES t_j DE LA k ième DERIVEE (pour p impair) -----	78
4.3.	RESOLUTION DU SYSTEME p -DIAGONALE -----	81
4.4.	INVERSE DE LA MATRICE DE TOPLITZ p -DIAGONALE -----	84
4.5.	EXPRESSION POUR LA k ième DERIVEE AUX ABSCISSES t_j (p impair) -----	90
4.6.	FONCTIONS SPLINE CARDINALES TRONQUEES DE DEGRE IMPAIR	93
4.7.	FONCTIONS SPLINE DE DEGRE PAIR -----	95
4.8.	EXPRESSION POUR LA k -ième DERIVEE AUX ABSCISSES t_j (p pair) -----	100
CHAPITRE 5	FONCTIONS SPLINE CUBIQUES DE LISSAGE	103
5.1.	INTRODUCTION -----	105
5.2.	SYSTEME LINEAIRE TRIDIAGONAL PAR BLOC -----	106
5.3.	CONSTRUCTION DE G_1 . SOLUTION D'UNE EQUATION MATRICIEL LE QUADRATIQUE -----	109
5.4.	EXPRESSIONS POUR LES VALEURS DE LA FONCTION ET DE LA DERIVEE PREMIERE EN t_j -----	112

5.5. DETERMINATION DES COEFFICIENTS -----	114
5.6. FONCTIONS SPLINE CARDINALES DE LISSAGE -----	123
CHAPITRE 6 FONCTIONS SPLINE SOUS TENSION	127
6.1. INTRODUCTION -----	129
6.2. CONDITIONS DE BOUT -----	130
6.3. FONCTIONS SPLINE CARDINALES SOUS TENSION -----	134
6.4. FONCTIONS SPLINE SOUS TENSION CARDINALES TRONQUEES -	137
6.5. MAJORATION DE L'ERREUR -----	138
6.6. CONVERGENCE UNIFORME EN h^4 -----	145
6.7. CONCLUSION -----	153
BIBLIOGRAPHIE	157



INTRODUCTION

Le problème de la recherche de procédures efficaces pour calculer des fonctions spline est traité par divers auteurs, et particulièrement par L. PAIHUA dans la première partie de sa thèse.

Dans le présent travail nous montrons qu'il est possible de choisir des conditions de bout qui permettent d'écrire un algorithme optimal (en coût et en encombrement de mémoire) et en même temps qui permettent d'obtenir un ordre de convergence le plus élevé possible. Nous supposons toujours que les abscisses sont équidistantes.

Le premier chapitre est consacré au cas de la fonction spline cubique étudié par P.J. LAURENT. Soit $[a,b]$ un intervalle de \mathbb{R} et considérons une subdivision de $[a,b]$ par des abscisses équidistantes de pas h : $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Soit $f \in H^2[a,b]$ et supposons que l'on connaisse les valeurs de f aux n abscisses : $f(t_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. On se propose de déterminer une fonction spline σ ($\sigma \in C^2[a,b]$ et dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ σ est un polynôme de degré 3, $i = 1, \dots, n-1$) vérifiant $\sigma(t_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Afin de déterminer σ de la façon unique, il faut ajouter deux conditions supplémentaires.

Les conditions de bout dites "naturelles"

$$\sigma''(a) = \sigma''(b) = 0$$

conduisent à un ordre de convergence médiocre en h^2 . Par contre les conditions de bout

$$\sigma'(a) = f'(a), \quad \sigma'(b) = f'(b)$$

entraînent l'ordre de convergence optimal en h^4 mais elles utilisent les valeurs de la dérivée première aux bouts qui ne sont pas toujours disponibles.

Prenons les valeurs λ_i de la dérivée première aux abscisses t_i , $i = 1, \dots, n$ comme inconnues. La continuité de la dérivée seconde aux t_2, \dots, t_{n-1} entraîne les $n-2$ relations suivantes :

$$\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} = \frac{3}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}) = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Les conditions de bout proposées par P.J. LAURENT sont de la forme suivante :

$$\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = d_1,$$

$$\beta\lambda_{n-1} + \alpha\lambda_n = d_n.$$

Les termes d_1 et d_n sont choisis sous la forme de combinaisons linéaires des y_j et des y_{n+1-j} , $j = 1, \dots, 5$ respectivement, de telle sorte que les deux équations ci-dessus correspondent à une identité pour les polynômes de degré 4.

La résolution du système ci-dessus de n équations par la méthode d'élimination de Gauss conduit à des relations du type

$$\alpha_i \lambda_i + \beta_i \lambda_{i+1} = \gamma_i$$

pour lesquelles rapport β_i/α_i converge assez vite vers $2-\sqrt{3}$. Donc si l'on choisit α et β tels que $\beta/\alpha = 2-\sqrt{3}$ (point fixe), on peut écrire un algorithme performant qui coûte seulement $3n$ multiplications/divisions et $3n$ additions/soustractions.

L'encombrement de mémoire est d'ordre $2n$ ce qui est minimal.

La matrice associée est tridiagonale. Si l'on choisit $\alpha = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ et $\beta = 1$, alors son inverse a une forme simple. En utilisant cet inverse, on peut écrire un autre algorithme aussi efficace que le précédent. A partir de cette formule on peut aussi établir un lien avec la fonction spline cardinale associée à l'ensemble bi-infini d'abscisses

de pas h . Dans le cas de la fonction spline cardinale on peut exprimer λ_j sous forme d'une série sur des ordonnées y_j . Par la troncature de la somme infinie on définit une fonction spline 'cardinale tronquée' sur $[a,b]$. L'erreur de troncature est compensée en remplaçant de chaque côté la somme correspondant aux abscisses extérieures à $[a,b]$ par une combinaison linéaire de 5 ordonnées à chaque bout de l'intervalle de telle sorte que l'on ait exactitude pour les polynômes de degré 4. Il est démontré que la fonction spline vérifiant les conditions de bout définies plus haut, est en fait identique à la fonction spline cardinale tronquée. La majoration d'erreur est donnée en utilisant les formules de type Peano et il est démontré que l'ordre de convergence est en h^4 , ce qui est optimal.

Ainsi les conditions de bout proposées par P.J. LAURENT nous permettent d'optimiser le calcul et en même temps assurent l'ordre de convergence optimal en h^4 .

Dans le chapitre 2 nous considérons le cas de la fonction spline quintique. Nous prenons les valeurs de la dérivée première λ_j et de la dérivée seconde μ_j comme inconnues. Nous obtenons un système tri-diagonal par bloc. Les deux premières et les deux dernières lignes peuvent être modifiées pour avoir un inverse simple. Les termes de droite de ces 4 relations sont choisis de façon à avoir l'exactitude pour les polynômes de degré cinq. Afin d'inverser la matrice associée, il faut résoudre une équation matricielle

$$X^2A + XB + C = 0$$

où A, B, C, X sont des matrices 2×2 . Il y a six solutions. Pour des raisons de stabilité, on choisit la solution X qui a les valeurs propres de module inférieures à 1. On montre que comme dans le cas de la fonction spline cubique, cette spline peut être interprétée comme une fonction spline cardinale tronquée. Il est démontré que l'ordre de convergence est en h^6 . On peut écrire un algorithme simple qui coûte $9n$ multiplications/divisions et $11n$ additions/soustractions et qui occupe seulement $3n$ mémoires.

Dans le chapitre 3 nous examinons les cas de la fonction spline quintique d'Hermite (les valeurs de la fonction et de sa dérivée première sont données), de la fonction spline parabolique et de la fonction spline cubique périodique. Dans le cas de la fonction spline quintique d'Hermite on obtient un système tridiagonal, mais les termes de droite des équations sont un peu plus compliqués par rapport au cas de la fonction spline cubique. Pour les fonctions spline paraboliques il est préférable d'interpoler au milieu des intervalles. Le système tridiagonal qu'on obtient dans ce cas est similaire à celui de la fonction spline cubique. Le cas de la fonction spline cubique périodique est traité par P.J. LAURENT. Dans ce cas la matrice associée n'est pas tridiagonale, mais circulante. Il est intéressant de voir comment, en utilisant la périodicité et l'inverse d'une matrice tridiagonale de Töplitz, on peut obtenir un inverse simple de la matrice circulante.

Le cas général de la fonction spline de degré p quelconque, $p \geq 2$ étant un entier pair ou impair, est étudié dans le Chapitre 4. Dans le cas où p est impair (resp. p est pair) nous donnons des relations linéaires entre les valeurs de la k -ième dérivée en p (resp. $p+1$) abscisses successives, k fixé, $k = 1, \dots, p-1$ (resp. $k = 0, 1, \dots, p-1$) et les valeurs de la spline en ces p abscisses (resp. aux milieux des p intervalles). Matriciellement dans le cas de la fonction spline cardinale on a

$$A_{\Sigma}^k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} B^k \gamma$$

où A , B^k sont des matrices p -diagonales (resp. A est $p+1$ diagonale, B^k est p -diagonale) de Töplitz et Σ_k et γ sont les vecteurs infinis formés par les $\sigma^{(k)}(t_i)$ et les $\sigma(t_i)$ (resp. les $\sigma(t_{i+1/2})$). Il faut noter que les éléments de A ne dépendent pas de k .

Nous pouvons écrire l'inverse d'une matrice tridiagonale de Töplitz. Donc nous exprimons A comme un produit de $\frac{p-1}{2}$ (resp. $\frac{p}{2}$) matrices tridiagonales de Töplitz. Ces matrices tridiagonales sont telles que les éléments surdiagonaux et sousdiagonaux sont égaux à 1.

Ce fait nous permet d'écrire l'inverse de A comme une combinaison linéaire des inverses de $\frac{p-1}{2}$ (resp. $\frac{p}{2}$) matrices tridiagonales. En utilisant le fait que deux matrices de Töplitz quelconques commutent entre elles, nous avons exprimé $\sigma^{(k)}(t_j)$ sous la forme de séries en fonction de $\sigma(t_j)$ (resp. $\sigma(t_{j+1/2})$).

En tronquant convenablement les sommes infinies, nous définissons une fonction spline sur un intervalle $[a,b]$ et nous obtenons l'ordre de convergence en h^{p+1} qui est optimal. On a aussi gardé la simplicité du calcul.

Ainsi la technique utilisée pour les fonctions spline cubiques et quintiques d'interpolation est applicable pour des fonctions spline polynomiales d'interpolation de degré quelconque.

Dans le chapitre 5 nous considérons le cas de la fonction spline cubique de lissage. Soient z_i , $i \in Z$ les valeurs erronées d'une fonction en des abscisses équidistantes t_j données. Nous définissons une fonction spline cubique cardinale de lissage σ de la forme suivante : $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$ et la discontinuité de la dérivée troisième au t_j est proportionnelle à $z_j - \sigma(t_j)$, où la constante de proportionnalité est égale au paramètre de lissage ξ . Nous prenons les valeurs de σ aux t_j et de la dérivée première σ' aux t_j comme inconnues. La continuité de la dérivée seconde et la condition imposée sur la discontinuité de la dérivée troisième conduisent à un système tridiagonal par bloc similaire à celui de la fonction spline quintique cardinale d'interpolation. Pour résoudre ce système il est nécessaire de résoudre l'équation matricielle de la forme suivante :

$$X^2A + XB + C = 0$$

où A, B, C, X sont des matrices 2×2 mais où B dépend du paramètre de lissage ξ . En simplifiant on obtient $\sigma(t_j)$ et $\sigma'(t_j)$ sous la forme de sommes de 2 séries qui font intervenir α et β vérifiant

$$\frac{\alpha(\alpha^2+4\alpha+1)}{(1-\alpha)^4} = \frac{\beta(\beta^2+4\beta+1)}{(1-\beta)^4} = \frac{-3!}{\xi h^2} .$$

Donc α et β dépendent de ξ et de h et ne sont pas toujours réels. Nous démontrons que même quand α et β sont complexes, les expressions finales pour $\sigma(t_i)$ et $\sigma'(t_i)$ sont réelles. Le cas $\alpha = \beta$ doit être traité séparément.

Néanmoins, on ne peut pas définir comme dans le cas des fonctions spline d'interpolation une fonction spline de lissage sur $[a,b]$ par troncature. La troncature nous permet d'écrire un algorithme efficace, mais les expériences numériques mettent en évidence un comportement oscillatoire. Il est probable que cela provient du fait que l'on essaye de déterminer la dérivée à partir d'un petit nombre de valeurs erronées de la fonction.

Dans le dernier chapitre nous étudions le cas de la fonction spline sous tension qui est le cas particulier des 'L-Spline'. La méthode utilisée dans le cas des fonctions spline d'interpolation est aussi applicable dans ce cas.

CHAPITRE - 1

FONCTIONS SPLINE CUBIQUES D'INTERPOLATION



1.1 - INTRODUCTION

Considérons un intervalle $[a,b]$ de \mathbb{R} et une subdivision de $[a,b]$ par des abscisses équidistantes $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ ($n \geq 2$). Soit $h = t_{i+1} - t_i = (t_n - t_1)/(n-1)$ le pas. Notons S_n l'espace vectoriel des splines cubiques définies sur $[a,b]$. Une fonction σ appartient à S_n si

1°) La restriction de σ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré 3, $i = 1, \dots, n-1$,

2°) $\sigma \in C^2[a,b]$, c'est-à-dire, la fonction σ , la dérivée première σ' et la dérivée seconde σ'' sont continues sur $[a,b]$.

La dimension de S_n est égale à $n+2$. On sait que l'ordre de convergence uniforme le plus élevé que l'on puisse obtenir pour l'interpolation aux abscisses t_i d'une fonction f par un élément de S_n est h^4 .

Supposons que l'on connaisse les valeurs d'une fonction f aux abscisses t_i :

$$f(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

On se propose de déterminer une fonction spline σ appartenant à S_n qui vérifie les n conditions

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Pour déterminer de façon unique la fonction σ , il faut ajouter deux conditions supplémentaires. Dans la pratique ces conditions sont placées aux deux bouts de l'intervalle $[a,b]$.

Si la fonction f admet une dérivée 4^e continue sur $[a,b]$, les conditions de bout

$$\sigma'(t_1) = f'(t_1), \quad \sigma'(t_n) = f'(t_n) \quad (2)$$

entraînent une convergence uniforme en h^4 . Mais dans la pratique, les dérivées premières aux bouts ne sont pas toujours disponibles.

Notons $H^2[a,b]$ l'ensemble des fonctions ayant une dérivée première absolument continue sur $[a,b]$ et dont la dérivée seconde est de carré sommable sur cet intervalle.

Définissons :

$$I = \{f \in H^2[a,b] \mid f(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

On sait qu'il existe une fonction $\sigma \in I$ unique qui vérifie

$$\int_a^b (\sigma''(t))^2 dt = \min_{f \in I} \int_a^b (f''(t))^2 dt.$$

Cette fonction est caractérisée par les conditions suivantes :

- (a) $\sigma \in S_n$,
- (b) $\sigma''(t_1) = \sigma''(t_n) = 0$,
- (c) $\sigma(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$.

Les conditions de bout

$$\sigma''(t_1) = \sigma''(t_n) = 0 \tag{3}$$

sont appelées "conditions de bout naturelles". Dans ce cas on n'a pas besoin d'information supplémentaire. Mais si la fonction que l'on désire interpoler ne vérifie pas elle-même la condition (3), alors on a une convergence médiocre en h^2 de la spline vers la fonction sous-jacente interpolée.

De nombreux auteurs ont proposé des conditions de bout plus élaborées qui entraînent une convergence uniforme en h^4 (BEHF000Z et PAPAMICHAEL [4], [5], BIRKHOFF et de BOOR [7], de BOOR [9], HALL [14], HALL et MEYER [15], KERSHAW [16], LUCAS [22], PAPAMICHAEL et WORSEY [27], SHARMA et MEIR[36]).

Dans [19] P.J. LAURENT a proposé des conditions de bout qui dépendent seulement des valeurs de la fonction aux abscisses, qui simplifient considérablement la résolution du système linéaire tridiagonal auquel on est conduit pour calculer la spline et en même temps qui entraînent un ordre de convergence uniforme en h^4 .

Cette fonction spline peut être interprétée comme une fonction spline cardinale tronquée avec une correction convenable.

Le cas de la fonction spline quintique et aussi le cas des autres fonctions spline qu'on étudiera plus tard sont basés sur celui de la fonction spline cubique. Pour cette raison nous développons ici ce dernier en détails.

1.2 - CONDITIONS DE BOUT

Prenons

$$\lambda_i = \sigma'(t_i), \quad i = 1, \dots, n$$

comme inconnues. Si l'on peut déterminer les λ_i , et comme on connaît $y_i = \sigma(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, en utilisant la formule d'interpolation d'Hermite basée sur deux points, on peut calculer $\sigma(t)$ pour t quelconque de $[a, b]$.

La continuité de la dérivée seconde σ'' en t_i , $i = 2, \dots, n-1$ donne les relations suivantes :

$$\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} = \frac{3}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}), \quad (4)$$

$$i = 2, \dots, n-1.$$

Posons :

$$d_i = \frac{3}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (5).$$

Aux équations (4) on ajoute des conditions de bout de la forme

$$\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = d_1, \quad (6)$$

$$\beta\lambda_{n-1} + \alpha\lambda_n = d_n$$

où on précisera plus tard les d_1 et d_n comme des combinaisons des y_i . Il est clair qu'il n'est pas nécessaire de considérer des conditions de bout qui feraient intervenir davantage de λ_i , car en utilisant les équations (4) on peut toujours se ramener à des conditions de bout de la forme (6).

Notons que les équations (4) correspondent à une identité pour les polynômes de degré 4.

$$p'(t_{i-1}) + 4p'(t_i) + p'(t_{i+1}) = \frac{3}{h} (p(t_{i+1}) - p(t_{i-1})) \quad (7)$$

pour tout $p \in P_4$.

où P_4 est l'ensemble des polynômes de degré 4. En fait, c'est la formule

de Simpson pour calculer $\int_{t_{j-1}}^{t_{i+1}} p'(t)dt$. Il est donc logique de choisir d_1 et d_n de la forme suivante

$$d_1 = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^k c_j y_j, \quad d_n = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^k c_j y_{n+1-j} \quad (8)$$

où les coefficients c_j sont tels que

$$\alpha p'(t_1) + \beta p'(t_2) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^k c_j p(t_j) \quad (9)$$

pour tout $p \in P_4$.

Si l'on choisit le rapport β/α convenablement, précisément si l'on choisit $\beta/\alpha = 3$ (cf. LUCAS [22]), on peut obtenir une telle formule pour $k = 4$. Mais pour faciliter le calcul du système tridiagonal (4)-(6) on veut pouvoir choisir α et β librement. Donc la plus petite valeur de k qui permet d'avoir (9) est 5.

1.3 - RESOLUTION DU SYSTEME TRIDIAGONAL

Considérons maintenant la résolution du système linéaire tridiagonal

$$\begin{aligned} \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 &= d_1 \\ \lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} &= d_i, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \beta\lambda_{n-1} + \alpha\lambda_n &= d_n \end{aligned} \quad (10)$$

Pour chaque n , il existe deux valeurs du rapport $r = \beta/\alpha$ pour lesquelles le déterminant est nul. Ces deux valeurs convergent assez vite vers $2+\sqrt{3}$. Ainsi pour $n \geq 5$, si r n'appartient pas à l'intervalle $[3.5, 4]$, alors le déterminant est non nul (Cf. BEHFOROZ et PAPAMICHAEL [4]). C'est ce que l'on supposera dorénavant.

On résout le système (10) par la méthode d'élimination de Gauss. Supposons que l'on ait une relation de la forme

$$\alpha_i \lambda_i + \beta_i \lambda_{i+1} = \gamma_i, \quad (11)$$

c'est-à-dire que la triangularisation soit effectuée jusqu'à l'indice i . Pour $i = 1$, on a

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta \text{ et } \gamma_1 = d_1.$$

En utilisant (4) on obtient

$$\alpha_{i+1} = -4\alpha_i + \beta_i$$

$$\beta_{i+1} = -\alpha_i$$

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i - \alpha_i d_{i+1}$$

à un facteur multiplicatif près. Ainsi on obtient le vecteur $\begin{bmatrix} \alpha_{i+1} \\ \beta_{i+1} \end{bmatrix}$ du vecteur $\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$ en appliquant la transformation linéaire définie par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -4 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation

$$\gamma^2 + 4\gamma + 1 = 0 \quad (12)$$

qui sont

$$\gamma = -2 + \sqrt{3} \text{ et } \gamma' = -2 - \sqrt{3}. \quad (13)$$

Donc le rapport β_i/α_i converge vers le rapport x_2/x_1 des composants du vecteur propre $[x_1, x_2]$ de A associé à la valeur propre de plus grand module.

On a

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{1}{\gamma} = -\gamma = 2-\sqrt{3}.$$

Si $\beta_i/\alpha_i = -\gamma$, alors $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\gamma} \alpha_i$, $\beta_{i+1} = -\alpha_i = \frac{1}{\gamma} \beta_i$.

Ainsi $\beta_{i+1}/\alpha_{i+1} = \beta_i/\alpha_i = -\gamma$.

L'idée de base consiste à choisir α et β telles que $\beta/\alpha = -\gamma$ ce qui permet d'économiser le calcul de α_i et β_i . Plus précisément, si l'on prend

$$(-1/\gamma)\lambda_1 + \lambda_2 = d_1 \quad (14)$$

alors

$$(-1/\gamma)\lambda_i + \lambda_{i+1} = \gamma_i \quad (15)$$

où les γ_i vérifient la relation de récurrence ci-dessous :

$$\gamma_{i+1} = \gamma * \gamma_i + d_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2 \quad (16)$$

avec $\gamma_1 = d_1$ et les c_j égaux à

$$\begin{aligned} c_1 &= -(53+25\sqrt{3})/12, \\ c_2 &= (86+48\sqrt{3})/12, \\ c_3 &= -(54+36\sqrt{3})/12, \\ c_4 &= (26+16\sqrt{3})/12, \\ c_5 &= -(5+3\sqrt{3})/12. \end{aligned} \quad (17)$$

On arrive ainsi à

$$(-1/\gamma)\lambda_{n-1} + \lambda_n = \gamma_{n-1} \quad (18)$$

Alors avec la dernière équation du système (10)

$$\lambda_{n-1} + (-1/\gamma)\lambda_n = d_n \quad (19)$$

On a donc

$$\lambda_i = \frac{-\gamma}{1-\gamma^2} \left[d_i + \sum_{k=1}^{n-i} \gamma^k d_{i+k} + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma^k d_{i-k} \right] \quad (25)$$

En remplaçant d_i par sa valeur et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_i = & \frac{-3\gamma}{h} \left[\sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k} + \gamma^{n-i} \sum_{j=1}^5 w_j y_{n+1-j} \right] \\ & + \frac{3\gamma}{h} \left[\sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k} + \gamma^{i-1} \sum_{j=1}^5 w_j y_j \right] \end{aligned} \quad (26)$$

avec

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\gamma}{1-\gamma^2} - \frac{1}{3(1-\gamma^2)} C_1 = (309+145\sqrt{3})/216, \\ w_2 &= \frac{1}{1-\gamma^2} - \frac{1}{3(1-\gamma^2)} C_2 = -(438+244\sqrt{3})/216, \\ w_3 &= -\frac{1}{3(1-\gamma^2)} C_3 = (378+216\sqrt{3})/216, \\ w_4 &= -\frac{1}{3(1-\gamma^2)} C_4 = -(174+100\sqrt{3})/216, \\ w_5 &= -\frac{1}{3(1-\gamma^2)} C_5 = (33+19\sqrt{3})/216. \end{aligned} \quad (27)$$

En utilisant les formules (26) et (27) on peut calculer les λ_i par un schéma de type Hörner en $3n+14$ additions et $3n+21$ multiplications. L'encombrement mémoire est $2n+15$.

1.5 - FONCTIONS SPLINE CUBIQUES CARDINALES

Maintenant considérons le cas où on a des abscisses t_i équidistantes en nombre infini. On note le pas $h = t_{i+1} - t_i$. Appelons S l'espace des fonctions spline cubiques cardinales ayant pour abscisses les t_i . Une fonction σ appartient à S si :

- 1°) La restriction de σ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré 3.
- 2°) La fonction σ , la dérivée première σ' et la dérivée seconde σ'' sont continues sur \mathbb{R} .

Posons $y_i = \sigma(t_i)$, $\lambda_i = \sigma'(t_i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

A nouveau la continuité de la dérivée seconde aux abscisses t_i conduit à :

$$\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} = \frac{3}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}), \quad i \in \mathbb{Z} \quad (28)$$

Notons

$$\tilde{d}_i = \frac{3}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}).$$

Notons que la matrice associée au système (28) est de Töplitz. Il est clair qu'il existe toujours un σ appartenant à S qui vérifie $\sigma(t_i) = y_i$, $i \in \mathbb{Z}$, mais il n'y a pas unicité. On peut choisir deux λ_i successifs arbitrairement et ensuite déduire les autres λ_i qui vérifie (28). Par contre on a le résultat suivant dû à I.J. Schoenberg [31], Lecture 4.

THEOREME 1

Soit $\tau \geq 0$ fixé. Définissons

$$Y^\tau = \{y = (y_i) \mid y_i = O(|i|^\tau), i \rightarrow \pm\infty\}$$

et

$$S^\tau = \{\sigma \in S \mid \sigma(t) = O(|t|^\tau), t \rightarrow \pm\infty\}.$$

Alors, pour tout $y \in Y^\tau$, il existe $\sigma \in S^\tau$ unique telle que $\sigma(t_i) = y_i$, $i \in \mathbb{Z}$.

On définit les fonctions suivantes dont on a besoin dans la suite :

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} k^j, \quad |x| < 1, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

La fonction F_j est dérivable et satisfait la relation de récurrence suivante :

$$F_{j+1}(x) = F_j(x) + x F_j'(x). \quad (30)$$

On a

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \frac{1}{1-x}, \\ F_1(x) &= \frac{1}{(1-x)^2}, \\ F_2(x) &= \frac{x+1}{(1-x)^3}, \\ F_3(x) &= \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4}, \\ F_4(x) &= \frac{x^3+11x^2+11x+1}{(1-x)^5}, \\ F_5(x) &= \frac{x^4+26x^3+66x^2+26x+1}{(1-x)^6}, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Il s'est révélé a posteriori qu'il existe une relation entre les fonctions F_j et les polynômes d'Euler-Frobenius.

En fait,

$$F_j(x) = \frac{\pi_j(x)}{(1-x)^{j+1}} \quad (32)$$

où $\pi_j(x)$ est le polynôme d'Euler-Frobenius défini par la fonction génératrice :

$$\frac{x-1}{x-e^z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j(x)}{(x-1)^j} \frac{z^j}{j!}, \quad \pi_0(x) = 1. \quad (33)$$

Les polynômes $\pi_j(x)$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\pi_{j+1}(x) = (1+jx)\pi_j(x) + x(1-x)\pi_j'(x) \quad (34)$$

(Schoenberg [31], Lecture 3).

THEOREME 2

Soit $\tau \geq 0$ fixé. Pour tout $y \in Y^\tau$, la fonction $\sigma \in S^\tau$ unique qui vérifie $\sigma(t_i) = y_i$, $i \in \mathbb{Z}$ est définie par

$$\lambda_i = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) \quad (35)$$

avec $\gamma = \sqrt{3}-2$ et $\delta = \frac{-3\gamma}{h}$.

Démonstration

Puisque la matrice associée au système (28) est tridiagonale et de Töplitz on cherche une solution de la forme

$$\lambda_i = \theta \left[\tilde{d}_i + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k (\tilde{d}_{i+k} + \tilde{d}_{i-k}) \right]. \quad (36)$$

Posons

$$l_i = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \tilde{d}_{i-1-k} \quad \text{et} \quad r_i = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \tilde{d}_{i+1+k}$$

on obtient donc :

$$\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} = \theta \left[(4+2\gamma)\tilde{d}_i + (\gamma^2+4\gamma+1)(\tilde{d}_{i+1} + \tilde{d}_{i-1} + r_i + l_i) \right]$$

Si l'on choisit γ et θ tels que

$$\gamma^2+4\gamma+1 = 0 \quad (37)$$

et

$$\theta(4+2\gamma) = 1 \quad (38)$$

alors les équations (28) sont vérifiées. Pour des raisons de convergence on prend γ comme la racine de l'équation (37) de module inférieur à 1. Précisément on prend $\gamma = \sqrt{3}-2$. Donc d'après (38), on obtient $\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

En remplaçant \tilde{d}_i par sa valeur $\frac{3}{h} (y_{i+1} - y_{i-1})$ dans (36), et en réarrangeant les termes, on obtient l'expression (35).

Il reste à montrer que la somme définie en (35) converge et que la fonction spline associée à ces λ_i appartient à S^τ . On considère d'abord le cas où τ est un entier positif.

Puisque $y \in Y^\tau$, il existe une constante A telle que

$$|y_{i+k} - y_{i-k}| \leq A |i+k|^\tau, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Or il existe des coefficients p_ℓ tels que

$$|i+k|^\tau \leq \sum_{\ell=0}^{\tau} p_\ell k^\ell |i|^{\tau-\ell}.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_i| &\leq |\delta| \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma|^{k-1} |y_{i+k} - y_{i-k}| \\ &\leq 2|\delta| A \sum_{\ell=0}^{\tau} p_\ell |i|^{\tau-\ell} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma|^{k-1} k^\ell \right) \\ &= 2|\delta| A \sum_{\ell=0}^{\tau} p_\ell F_\ell(|\gamma|) |i|^{\tau-\ell}, \end{aligned}$$

d'après (29).

Ainsi il existe une constante B telle que

$$|\lambda_i| \leq B |i|^\tau.$$

En utilisant la formule d'interpolation d'Hermite dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on voit facilement que $\sigma \in S^\tau$.

Maintenant, soit τ un réel positif. On choisit un entier τ' tel que $\tau \leq \tau'$. Donc $Y^\tau \subset Y^{\tau'}$ et $S^\tau \subset S^{\tau'}$.

Considérons $y \in Y^T$. D'après le théorème de Schoenberg il existe $\sigma \in S^T$ unique qui vérifie $\sigma(t_i) = y_i$. Puisque $Y^T \subset Y^{T'}$, on peut aussi considérer y comme un élément de $Y^{T'}$. En utilisant l'expression (35) on peut donc construire $\tilde{\sigma}$ appartenant à $S^{T'}$ et vérifiant $\tilde{\sigma}(t_i) = y_i$. L'unicité dans le théorème de Schoenberg entraîne $\sigma = \tilde{\sigma}$. Ainsi, pour τ réel positif, la fonction spline σ en S^T qui vérifie $\sigma(t_i) = y_i$ est définie par l'expression (35).

Remarque

Considérons l'équation (35) avec $i = 0$ et $h = 1$.

$$\lambda_0 = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_k - y_{-k}) . \quad (39)$$

Par symétrie, l'équation ci-dessus est vérifiée pour $f(t) = 1, t^2$ et t^4 . Pour $f(t) = t$, on obtient

$$1 = \delta \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma^{k-1} .$$

Soit

$$1 = 2 \delta / (1-\gamma)^2 . \quad (40)$$

De la même façon pour $f(t) = t^3$ on a d'après (39)

$$0 = \delta \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \gamma^{k-1} .$$

Soit :

$$0 = \frac{2\delta(\gamma^2+4\gamma+1)}{(1-\gamma)^4} . \quad (41)$$

On choisit γ pour que (41) soit vérifié :

$$\gamma^2+4\gamma+1 = 0 . \quad (42)$$

Ensuite on choisit δ pour que (40) soit satisfait :

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{(1-\gamma)^2}{2} \\ &= \frac{\gamma^2 - 2\gamma + 1}{2}.\end{aligned}$$

Soit, d'après (42) :

$$\delta = -3\gamma.$$

Ainsi on voit que l'équation (39) correspond à une identité pour les polynômes de degré 4.

1.6 - FONCTIONS SPLINE CUBIQUE CARDINALES TRONQUEES

Par troncature des sommes infinies de (35) on peut exprimer λ_i , $i = 1, \dots, n$ en fonction des y_j , $i = 1, \dots, n$ et ainsi obtenir une fonction spline cubique sur $[a, b] = [t_1, t_n]$.

Plus précisément, on a d'après (35)

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \delta \left[\sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k} + \gamma^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{n+k} \right] \\ &\quad - \delta \left[\sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k} + \gamma^{i-1} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k} \right].\end{aligned}$$

On remplace $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{n+k}$ par $\sum_{j=1}^5 v_j y_{n+1-j}$ où les coefficients v_j sont choisis tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} p(t_{n+k}) = \sum_{j=1}^5 v_j p(t_{n+1-j}) \quad (43)$$

pour tout $p \in P_4$.

Soient $t_n = 0$ et $h = 1$. La condition ci-dessus s'écrit alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} k^\ell = F_\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^5 v_j (1-j)^\ell \quad (44)$$

$\ell = 0, \dots, 4$.

Précisément

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{24} (F_4(\gamma) - 10F_3(\gamma) + 35F_2(\gamma) - 46F_1(\gamma) + 24F_0(\gamma)), \\
 v_2 &= -\frac{1}{24} (4F_4(\gamma) - 36F_3(\gamma) + 104F_2(\gamma) - 80F_1(\gamma)), \\
 v_3 &= \frac{1}{24} (6F_4(\gamma) - 48F_3(\gamma) + 114F_2(\gamma) - 48F_1(\gamma)), \\
 v_4 &= -\frac{1}{24} (4F_4(\gamma) - 28F_3(\gamma) + 56F_2(\gamma) - 16F_1(\gamma)), \\
 v_5 &= \frac{1}{24} (F_4(\gamma) - 6F_3(\gamma) + 11F_2(\gamma) - 2F_1(\gamma)). \tag{45}
 \end{aligned}$$

De la même façon, on remplace $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k}$ par $\sum_{j=1}^5 v_j y_j$, les deux expressions étant égales pour les polynômes de degré 4.

Ainsi, on a pour $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 \lambda_i &= \delta \left[\sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k} + \gamma^{n-i} \sum_{j=1}^5 v_j y_{n+1-j} \right] \\
 &\quad - \delta \left[\sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k} + \gamma^{i-1} \sum_{j=1}^5 v_j y_j \right] \tag{46}
 \end{aligned}$$

Maintenant on va démontrer que la fonction spline définie par (26) dans la section (1.4) est la même que la fonction spline cardinale tronquée décrite ci-dessus.

D'après (35) on a :

$$\lambda_i = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k})$$

ce qui correspond à une identité pour les polynômes de degré 4. Donc

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{1+k} - y_{1-k}), \\
 \lambda_2 &= \frac{\delta}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1+k} - \delta \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k} - \left(\frac{\delta}{\gamma} y_2 + \delta y_1 \right).
 \end{aligned}$$

Considérons

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{\gamma}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} &= \delta \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k}\right) - \delta \left(\frac{1}{\gamma} y_2 + y_1\right) \\ &= \frac{-3(1-\gamma^2)}{h} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k}\right) + \frac{3\gamma}{h} \left(\frac{1}{\gamma} y_2 + y_1\right), \\ &\text{puisque } \delta = \frac{-3\gamma}{h}. \end{aligned}$$

Si l'on remplace $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k}$ par $\sum_{j=1}^5 v_j y_j$, on obtient

$$\left(\frac{-1}{\gamma}\right)^{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{-3(1-\gamma^2)}{h} \sum_{j=1}^5 v_j y_j + \frac{3\gamma}{h} \left(\frac{1}{\gamma} y_2 + y_1\right).$$

Notons que l'on a toujours l'exactitude pour les polynômes de degré 4.

Donc l'expression de droite de l'équation ci-dessus est égale à $\sum_{j=1}^5 c_j v_j$.

De la même façon, en remplaçant $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{n+k}$ par $\sum_{j=1}^5 v_j y_{n+1-j}$, on retrouve la condition

$$\lambda_{n-1} + \left(\frac{-1}{\gamma}\right)^{\lambda_n} = \sum_{j=1}^5 c_j y_{n+1-j}.$$

Par conséquent $v_j = w_j$, $j = 1, \dots, 5$ où les v_j et w_j sont donnés par (45) et (27) respectivement.

1.7 - MAJORATION DE L'ERREUR

D'abord on considère le cas de la fonction spline cubique cardinale. Pour une fonction $f \in C^5$ telle que $y_i = f(t_i) \in Y^T$, l'erreur d'évaluation de la dérivée première en 0 (on prend $t_i = 0$ et $h = 1$) s'écrit :

$$H(f) = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (f(k) - f(-k)) - f'(0) \quad (47)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) f^{(5)}(\xi) d\xi \quad (48)$$

où Ψ est une fonction paire définie comme :

$$\Psi(\xi) = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \frac{(k-\xi)_+^4}{4!}, \text{ pour } \xi \geq 0. \quad (49)$$

Il est facile à voir que :

$$\Psi(\xi+\ell) = \gamma^\ell \Psi(\xi)$$

pour tout $\xi > 0$ et tout entier positif ℓ .

Il suffit donc d'étudier Ψ sur l'intervalle $[0,1]$. Pour $\xi \in [0,1]$, on a d'après (49)

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \frac{(k-\xi)_+^4}{4!} \\ &= \delta \sum_{j=0}^4 (-1)^j \frac{\xi^j}{j!} \frac{F_{4-j}(\gamma)}{(4-j)!}. \end{aligned} \quad (50)$$

On a aussi

$$\Psi'''(0^+) - \Psi'''(0^-) = 1. \quad (51)$$

On obtient l'estimation suivante :

$$\int_0^1 |\Psi(\xi)| d\xi \sim 0.005\ 1182 \dots \quad (52)$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi)| d\xi = \frac{2}{1-|\gamma|} \int_0^1 |\Psi(\xi)| d\xi \sim 0.013\ 983. \quad (53)$$

Donc l'erreur d'évaluation de la dérivée première à l'abscisse t_i dans le cas de la fonction spline cardinale avec pas h est majorée par

$$A h^4 \|f^{(5)}\|_{\infty}, \text{ avec } A \sim 0.013\ 983. \quad (54)$$

Pour la fonction spline cardinale tronquée on a :

$$\lambda_i = \delta \left[\sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} \cdot y_{i+k} + \gamma^{n-i} \sum_{j=1}^5 v_j y_{n+1-j} \right] \\ - \delta \left[\sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k} + \gamma^{i-1} \sum_{j=1}^5 v_j y_j \right]$$

qui peut s'écrire comme

$$\lambda_i = \delta \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) \right] \\ - \delta \gamma^{n-i} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{n+k} - \sum_{j=1}^5 v_j y_{n+1-j} \right] \\ + \delta \gamma^{i-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k} - \sum_{j=1}^5 v_j y_j \right].$$

Donc pour majorer l'erreur il faut considérer la fonctionnelle

$$K(f) = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} f(k) - \delta \sum_{j=1}^5 v_j f(1-j) \quad (55)$$

D'après (43) on sait que

$$K(p) = 0 \quad \text{pour } p \in P_4.$$

Ainsi on a

$$K(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) f^{(5)}(\xi) d\xi \quad (56)$$

où

$$\chi(\xi) = \begin{cases} \psi(\xi) & , \text{si } \xi \geq 0 \\ \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \frac{(k-\xi)_+^4}{4!} - \delta \sum_{j=1}^5 v_j \frac{(1-j-\xi)_+^4}{4!}, & \text{si } \xi \in [-4, 0] \\ 0 & , \text{si } \xi \leq -4. \end{cases} \quad (57)$$

On a alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\xi)| d\xi \sim 0.20907 = B. \quad (58)$$

Ainsi

$$|\lambda_i - f'(t_i)| \leq h^4 [A + B(|\gamma|^{n-i} + |\gamma|^{i-1})] \|f^{(5)}\|_{\infty}. \quad (59)$$

Il faut noter que

$$B|\gamma|^2 \sim 0.015010.$$

La comparaison de (54) et (59) montre que si l'on se trouve à 2 intervalles d'une extrémité, l'erreur due aux effets de bout est du même ordre que l'erreur de la fonction spline cardinale.

Aux extrémités on peut donner une majoration plus fine de l'erreur.

On a

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \delta \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1+k} - \sum_{j=1}^5 v_j y_j \right] \\ & + \delta \gamma^{n-1} \left[\sum_{j=1}^5 v_j y_{n+1-j} - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{n+k} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Considérons la fonctionnelle

$$L(f) = \delta \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} f(k) - \sum_{j=1}^5 v_j f(j-1) \right) - f'(0) \quad (61)$$

Or

$$L(p) = 0 \quad \text{pour tout } p \in P_4.$$

$$\text{Donc on a} \quad L(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\xi) f^{(5)}(\xi) d\xi \quad (62)$$

où

$$\Lambda(\xi) = \begin{cases} \Psi(\xi) - \delta \sum_{j=1}^5 v_j \frac{(j-1-\xi)_+^4}{4!}, & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0, & \text{si } \xi \leq 0. \end{cases} \quad (63)$$

On obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(\xi)| d\xi \sim 0.199024 = C \quad (64)$$

Donc

$$|\lambda_1 - f'(t_1)| \leq h^4 (C + B|\gamma|^{n-1}) \|f^{(5)}\|_{\infty} \quad (65)$$

On considère l'approximation suivante de la dérivée première en t_1 basée sur les 5 points qui est exacte P_4 .

$$\mu_1 = \frac{1}{12h} (-25 y_1 + 48y_2 - 36y_3 + 16y_4 - 3y_5). \quad (66)$$

Alors on obtient

$$|\mu_1 - f'(t_1)| \leq 0.2 h^4 \|f^{(5)}\|_{\infty}. \quad (67)$$

On voit que l'erreur est du même ordre ce qui est normal. La fonction spline cubique ne peut pas donner une approximation plus précise de la dérivée première que l'approximation locale exacte P_4 .

1.8 - EXEMPLES NUMERIQUES

Toutes les fonctions sont définies sur l'intervalle $[0,2]$.
On prend les pas successifs

$$h_k = 0.2/2^{k-1}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

Si l'on suppose que l'erreur est de la forme $A h^\alpha$, alors on a estimé l'exposant α sur deux pas successifs par la formule

$$\alpha_k \sim \log(E_k/E_{k+1})/\log 2$$

où E_k est l'erreur correspondant aux pas h_k . On donne les résultats à l'extrémité gauche (0) et au milieu (1) de l'intervalle.

$$f(t) = \exp(t)$$

k	erreur en 0	α_k en 0	erreur en 1	α_k en 1
1	4.469 10^{-4}	4.247	2.118 10^{-5}	3.812
2	2.353 10^{-5}	4.122	1.508 10^{-6}	3.998
3	1.352 10^{-6}	4.035	9.441 10^{-8}	4.144
4	8.246 10^{-8}	4.071	5.340 10^{-9}	3.360
5	4.905 10^{-9}	5.441	5.200 10^{-10}	-5.475
6	3.364 10^{-9}		7.600 10^{-10}	

$$f(t) = \sin(\pi t)$$

k	erreur en 0	α_k en 0	erreur en 1	α_k en 1
1	4.603 10^{-2}	3.147	2.970 10^{-3}	4.110
2	5.195 10^{-3}	3.826	1.720 10^{-4}	4.013
3	3.662 10^{-4}	3.958	1.065 10^{-5}	4.003
4	2.356 10^{-5}	3.990	6.646 10^{-7}	4.001
5	1.483 10^{-6}	3.996	4.151 10^{-8}	3.386
6	9.294 10^{-8}		3.970 10^{-9}	

$$f(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$$

k	erreur en 0	α_k en 0	erreur en 1	α_k en 1
1	6.483 10^{-1}	2.014	3.055 10^{-2}	4.249
2	1.605 10^{-1}	3.823	1.606 10^{-3}	4.066
3	1.134 10^{-2}	4.079	9.595 10^{-5}	4.016
4	6.714 10^{-4}	4.091	5.929 10^{-6}	4.004
5	3.941 10^{-5}	4.061	3.695 10^{-7}	3.998
6	2.361 10^{-6}		2.312 10^{-8}	

On voit que l'erreur d'évaluation de la dérivée première est bien d'ordre h^α avec α voisin de 4, sauf lorsque pour h trop petit, l'erreur devient proche de la précision machine.

CHAPITRE - 2
=====

FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES D'INTERPOLATION

2.1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre on considère la fonction spline quintique d'interpolation définie sur un intervalle fini $[a,b]$ de \mathbb{R} . L'intervalle $[a,b]$ est subdivisé par n abscisses équidistantes, le pas étant noté h :
 $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Il est connu que l'ordre de convergence le plus élevé possible en utilisant les fonctions splines quintiques est la convergence uniforme en h^6 .

Les conditions de bout naturelles

$$\sigma'''(t_1) = \sigma^{IV}(t_1) = \sigma'''(t_n) = \sigma^{IV}(t_n) = 0$$

que l'on obtient en minimisant $\int_a^b f'''(t) dt$ parmi les fonctions $f \in H^3[a,b]$ vérifiant $f(t_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$, n'entraînent pas la convergence en h^6 .

Les conditions de bout

$$\sigma'(t_i) = f'(t_i), \quad \sigma'(t_{n+1-i}) = f'(t_{n+1-i}), \quad i = 1, 2$$

impliquent par contre la convergence uniforme en h^6 , mais nécessitent la connaissance des valeurs de la dérivée première en 4 abscisses.

De nombreux auteurs ont proposé des conditions de bout plus élaborées qui entraînent une convergence uniforme en h^6 . (BEHFOROZ et PAPAMICHAEL [6], BIRKHOFF et PRIVER [8], HALL [14], SHARMA et MEIR [36]).

On propose ici des conditions de bout qui utilisent seulement les valeurs de la fonction aux abscisses, qui entraînent la convergence uniforme en h^6 et qui en même temps simplifient considérablement la résolution du système tridiagonal par bloc auquel on est conduit pour déterminer la fonction spline quintique. L'algorithme correspondant coûte $11.n$ additions et $9.n$ multiplications et l'encombrement mémoire est $3n$, ce qui est minimal.

Comme dans le cas de la fonction spline cubique, cette fonction spline peut être interprétée comme une fonction spline cardinale tronquée. L'erreur de troncature est compensée par une correction utilisant les valeurs de la fonction aux 6 abscisses à chaque extrémité de l'intervalle.

A la fin on donne des majorations d'erreur basées sur des formules de type Peano et aussi les résultats numériques.

2.2 - RELATIONS VERIFIEES PAR LES DERIVEES PREMIERES ET LES DERIVEES SECONDES

Soit S_n l'espace des fonctions splines quintiques définies sur $[a,b]$ associées aux abscisses équidistantes : $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Une fonction σ appartient à S_n si

1°) La restriction de σ à $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré 5,
 $i = 1, \dots, n-1,$

2°) $\sigma \in C^4[a,b]$.

On se propose de déterminer σ appartenant à S_n qui vérifie

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Comme la dimension de S_n est égale à $n+4$, il faut ajouter 4 conditions supplémentaires. Prenons

$$\lambda_i = \sigma'(t_i) \text{ et } \mu_i = \sigma''(t_i)$$

comme inconnues. La continuité des dérivées troisième et quatrième en t_i , $i = 2, \dots, n-1$ donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
8(\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}) - h(u_{i+1} - 6\mu_i + \mu_{i-1}) &= \frac{20}{h} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \\
(7\lambda_{i+1} + 16\lambda_i + 7\lambda_{i-1}) - h(\mu_{i+1} - \mu_{i-1}) &= \frac{15}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}) \\
i &= 2, \dots, n-1. \quad (2)
\end{aligned}$$

On écrit les équations ci-dessus matriciellement de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -1/8 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h \mu_{i-1} \\ \lambda_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h \mu_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} -1/8 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} h \mu_{i+1} \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{10}{4h} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \\ \frac{15}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}) \end{bmatrix}, \\
i &= 2, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -1/8 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad C = A^t, \\
\Lambda_i &= \begin{bmatrix} h \mu_i \\ \lambda_i \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} \frac{10}{4h} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \\ \frac{15}{h} (y_{i+1} - y_{i-1}) \end{bmatrix}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$A\Lambda_{i-1} + B\Lambda_i + C\Lambda_{i+1} = D_i, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (4)$$

A ces équations on ajoute des conditions de bout de la forme

$$\begin{aligned}
B^1 \Lambda_1 + C \Lambda_2 &= D_1 \\
\text{et} \\
A \Lambda_{n-1} + B^2 \Lambda_n &= D_n \quad (5)
\end{aligned}$$

où B' et B'' sont des matrices 2 × 2. On écrit les n équations (4) et (5) matriciellement :

$$\begin{bmatrix} B' & C & & & & & \\ A & B & C & & & & 0 \\ & A & B & C & & & \\ & & \dots & & & & \\ & 0 & & A & B & C & \\ & & & & A & B'' & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \vdots \\ \Lambda_{n-1} \\ \Lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

On cherche les matrices 2 × 2 B' et B'' de sorte que la matrice associée P de ce système admette un inverse Q d'expression simple. Ensuite on choisit les vecteurs D₁ et D_n en fonction des y_i afin d'avoir une identité P₅.

2.3 - INVERSE DE LA MATRICE TRIDIAGONALE PAR BLOC

La matrice P est tridiagonale par bloc. Comme dans le cas de la matrice tridiagonale (cf. LAURENT [19]), on cherche un inverse à gauche de P de la forme suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} K' & & & & & & \\ & K & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & K & & & \\ 0 & & & & & & K'' \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I & G_1 & G_1^2 & \dots & & & \\ G_2 & I & G_1 & \dots & & & \\ & & \dots & & & & \\ & & \dots & G_2 & I & G_1 & \\ & & \dots & G_2 & G_2 & I & \\ & & & & & & I \end{bmatrix}$$

Les G₁, G₂, K, K', K'' sont des matrices 2 × 2. En identifiant (par bloc) pour avoir Q * P = I, on obtient

$$G_1^2 A + G_1 B + C = 0 \quad (7)$$

$$G_2^2 C + G_2 B + A = 0 \quad (8)$$

$$G_2 B' + A = 0$$

$$G_1 B'' + C = 0$$

$$K(G_2 C + B + G_1 A) = I$$

$$K'(B' + G_1 A) = I$$

$$K''(B'' + G_2 C) = I.$$

Si l'on prend G_1 et G_2 solutions des deux équations (7) et (8), on en déduit :

$$B' = -G_2^{-1} A,$$

$$B'' = -G_1^{-1} C,$$

$$K = (G_2 C + B + G_1 A)^{-1},$$

$$K' = (B' + G_1 A)^{-1},$$

$$K'' = (B'' + G_2 C)^{-1},$$

pourvu que ces inverses existent.

On a

$$\begin{aligned} K' &= (B' + G_1 A)^{-1} \\ &= (-G_2^{-1} A + G_1 A)^{-1} \\ &= (B + G_2 C + G_1 A)^{-1} = K \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K'' &= (B'' + G_2 C)^{-1} \\ &= (-G_1^{-1} C + G_2 C)^{-1} \\ &= (B + G_1 A + G_2 C)^{-1} = K. \end{aligned}$$

Il reste à résoudre les équations (7) et (8).

2.4 - RESOLUTION D'UNE EQUATION QUADRATIQUE MATRICIELLE

On indique maintenant comment trouver les solutions diagonalisables de l'équation ci-dessous :

$$G_1^2 A + G_1 B + C = 0 \quad (7)$$

(DAVIS [11], DENNIS, TRAUB et WEBER [12]).

Soit λ une valeur propre de la matrice G_1 vérifiant (7) et $X = [x_1, x_2]$ un vecteur propre associé à gauche de G_1 . On a

$$XG_1 = \lambda X, \quad XG_1^2 = \lambda^2 X.$$

Donc d'après (7)

$$X(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0 \quad (9)$$

d'où

$$\det(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0.$$

En remplaçant A, B et C par leurs valeurs, on obtient

$$\lambda^4 + 26\lambda^3 + 66\lambda^2 + 26\lambda + 1 = 0. \quad (10)$$

Ainsi les valeurs propres possibles de G_1 qui vérifie (7) sont les solutions de (10). Pour les vecteurs propres associés on a d'après (9)

$$((-\lambda^2 + 6\lambda - 1)/8)x_1 + (\lambda^2 - 1)x_2 = 0$$

$$(1 - \lambda^2)x_1 + (7\lambda^2 + 16\lambda + 7)x_2 = 0.$$

Donc on peut prendre pour x_1 et x_2 , par exemple

$$x_1 = 1 - \lambda^2, \quad x_2 = (-\lambda^2 + 6\lambda - 1)/8. \quad (11)$$

La matrice G_1 peut être construite comme ci-dessous.

Prenons

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} .$$

Supposons que l'on puisse trouver deux vecteurs propres à gauche linéairement indépendants $[x_1, x_2]$ et $[y_1, y_2]$ associés respectivement aux valeurs propres α et β . Alors on a

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \alpha [x_1, x_2]$$

et

$$[y_1, y_2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \beta [y_1, y_2].$$

On peut écrire ces deux équations comme

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} .$$

Du fait que les vecteurs $[x_1, x_2]$ et $[y_1, y_2]$ sont linéairement indépendants, la matrice $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ est inversible.

Donc

$$G_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} . \quad (12)$$

Notons qu'il n'est pas obligatoire d'avoir α et β distinctes, mais il est nécessaire de trouver deux vecteurs propres linéairement indépendants.

Dans le cas présent le polynôme

$$\lambda^4 + 26\lambda^3 + 66\lambda^2 + 26\lambda + 1$$

a quatre racines distinctes. Donc deux vecteurs propres quelconques sont linéairement indépendants et ainsi il y a six solutions différentes G_1 qui vérifient (7). Pour des raisons de stabilité nous choisissons G_1 associée aux 2 racines α et β de module inférieur à 1.

Remarque

Considérons les deux équations vérifiées par G_1 et G_2 :

$$G_1 A + B + G_1^{-1} C = 0, \quad (7)$$

$$G_2 C + B + G_2^{-1} A = 0. \quad (8)$$

On passe de A à C en changeant les signes des éléments hors diagonaux. On voit facilement que si l'on passe de la matrice X à la matrice Y en changeant les signes des éléments hors diagonaux, on peut passer de X^{-1} à Y^{-1} par le même changement. Cette propriété est aussi valable pour la multiplication des matrices.

Or en utilisant le fait que B est une matrice diagonale, on passe d'une solution G_1 de (7) à une solution G_2 de (8) en changeant les signes des termes hors diagonaux. Donc :

$$K = K' = K'' = (G_2 C + B + G_1 A)^{-1} \quad (13)$$

est une matrice diagonale. On a

$$B' = G_2^{-1} A \text{ et } B'' = -G_1^{-1} C.$$

Ainsi on peut passer de B' à B'' en changeant les signes des termes hors diagonaux. La matrice B' est symétrique et donc P est aussi une matrice symétrique.

On a construit un inverse à gauche Q de P : $Q * P = I$. Les matrices Q et P sont symétriques. Donc

$$(Q * P)^t = P^t * Q^t = P * Q = I.$$

En identifiant par bloc dans $P * Q = I$, on obtient :

$$\begin{aligned} AKG_1^2 + BKG_1 + CK &= 0 \\ CKG_2^2 + BKG_2 + AK &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} B'KG_1 + CK &= 0 \\ B''KG_2 + AK &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} AKG_1 + BK + CKG_2 &= I \\ B'K + CKG_2 &= I \\ B''K + AKG_1 &= I. \end{aligned} \tag{16}$$

2.5 - CONDITIONS DE BOUT

On remarque que les équations (4) correspondent à une identité pour l'ensemble P_5 des polynômes de degré 5. Il est donc cohérent de choisir les composantes de D_1 comme des combinaisons linéaires des y_j , $j = 1, \dots, 6$ et les composantes de D_n comme des combinaisons linéaires des y_{n+1-j} , $j = 1, \dots, 6$ afin d'avoir une identité P_5 pour les équations suivantes :

$$\begin{aligned} B'\Lambda_1 + C\Lambda_2 &= D_1, \\ A\Lambda_{n-1} + B''\Lambda_n &= D_n. \end{aligned}$$

Notons

$$B' = \begin{bmatrix} s & r \\ r & u \end{bmatrix}.$$

Alors on choisit des coefficients e_j et \hat{e}_j , $j = 1, \dots, 6$ de sorte que

$$sh p''(t_1) + rp'(t_1) + (-1/8)hp''(t_2) + p'(t_2) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^6 e_j p(t_j),$$

$$rh p''(t_1) + up'(t_1) - hp''(t_2) + 7p'(t_2) = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^6 \hat{e}_j p(t_j)$$

pour tout $p \in P_5$.

On a

$$e_1 = (1800 * s - 1096 * r - 146)/480,$$

$$e_2 = (-6160 * s + 2400 * r - 445)/480,$$

$$e_3 = (8560 * s - 2400 * r + 980)/480,$$

$$e_4 = (-6240 * s + 1600 * r - 550)/480,$$

$$e_5 = (2440 * s - 600 * r + 190)/480,$$

$$e_6 = (-400 * s + 96 * r - 29)/480$$

et

$$\hat{e}_1 = (225 * r - 137 * u - 134)/60,$$

$$\hat{e}_2 = (-770 * r + 300 * u - 380)/60,$$

$$\hat{e}_3 = (1070 * r - 300 * u + 860)/60,$$

$$\hat{e}_4 = (-780 * r + 200 * u - 490)/60,$$

$$\hat{e}_5 = (305 * r - 75 * u + 170)/60,$$

$$\hat{e}_6 = (-50 * r + 12 * u - 26)/60.$$

On pose

$$D_1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 6 \\ \sum_{j=1}^6 e_j y_j \\ 6 \\ \sum_{j=1}^6 \hat{e}_j y_j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 6 \\ \sum_{j=1}^6 e_j y_{n+1-j} \\ 6 \\ \sum_{j=1}^6 \hat{e}_j y_{n+1-j} \end{bmatrix}.$$

Maintenant la solution de (6) est donnée par

$$\Lambda_i = K[D_i + \sum_{k=1}^{n-i} G_1^k D_{i+k} + \sum_{k=1}^{i-1} G_2^k D_{i-k}]. \quad (17)$$

La fonction spline quintique associée à (17) appartient à un sous-espace vectoriel \tilde{S}_n contenu dans S_n qui a été défini dans la section 2.2.

Précisément

$$\tilde{S}_n = \left\{ s \in S_n/B' \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} h s''(t_1) \\ s'(t_1) \end{array} \right] + C \left[\begin{array}{l} h s''(t_2) \\ s'(t_2) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} h s''(t_{n-1}) \\ s'(t_{n-1}) \end{array} \right] + B'' \left[\begin{array}{l} h s''(t_n) \\ s'(t_n) \end{array} \right] \end{array} = \frac{1}{h} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^6 e_j s(t_j) \\ \sum_{j=1}^6 \hat{e}_j s(t_j) \\ \sum_{j=1}^6 e_j s(t_{n+1-j}) \\ \sum_{j=1}^6 \hat{e}_j s(t_{n+1-j}) \end{array} \right\} \right\}.$$

La dimension de \tilde{S}_n est égale à n .

2.6 - FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES CARDINALES

Supposons que l'on ait des abscisses t_i équidistantes de pas h en nombre infini : $t_{i+1} - t_i = h$, $i \in \mathbb{Z}$. Appelons S l'espace des fonctions spline quintiques cardinales de classe C^4 ayant pour abscisses les t_i . Si l'on pose encore

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad \sigma'(t_i) = \lambda_i, \quad \sigma''(t_i) = \mu_i$$

et

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} h\mu_i \\ \lambda_i \end{bmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}, \text{ alors on a à nouveau les relations qui}$$

traduisent la continuité des dérivées troisième et quatrième de 6 :

$$A\Lambda_{i-1} + B\Lambda_i + C\Lambda_{i+1} = \tilde{D}_i, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

dans lequel A, B, C sont définies par (3) et

$$\tilde{D}_i = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{10}{4} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \\ 15(y_{i+1} - y_{i-1}) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Formellement on écrit

$$\Lambda_i = K[\tilde{D}_i + \sum_{k=1}^{\infty} G_1^k \tilde{D}_{i+k} + \sum_{k=1}^{\infty} G_2^k \tilde{D}_{i-k}]. \quad (20)$$

Donc

$$\begin{aligned} A\Lambda_{i-1} + B\Lambda_i + C\Lambda_{i+1} &= (AKG_1 + BK + CKG_2)\tilde{D}_i + \\ & (AKG_1^2 + BKG_1 + CK) * \sum_{k=1}^{\infty} G_1^{k-1} \tilde{D}_{i+k} \\ & + (CKG_2^2 + BKG_2 + AK) * \sum_{k=1}^{\infty} G_2^{k-1} \tilde{D}_{i-k} \\ & = \tilde{D}_i, \quad \text{d'après (14) et (16).} \end{aligned}$$

Si (20) converge, on voit que (20) sera la solution de (18).

On écrit

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & v \\ w & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & v \\ w & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

où $(1, v)$ est un vecteur propre à gauche associé à α et $(w, 1)$ est un vecteur propre à gauche associé à β . Donc

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -w & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -w & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

En remplaçant K, G_1 , G_2 et \tilde{D}_i par leurs valeurs données par les expressions (13), (21), (22) et (19) respectivement et en simplifiant, on obtient :

$$\lambda_i = \frac{1}{h} \left[C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) \right] \quad (23)$$

$$\mu_i = \frac{1}{h^2} \left[C_3 y_i + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}) + C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}) \right] \quad (24)$$

où C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont des constantes. Les équations (23) et (24) correspondent à une identité pour les polynômes de degré cinq. En utilisant ce fait on peut donner les expressions explicites pour les constantes.

Rappelons la définition des fonctions $F_j, j \in \mathbf{N}$ donnée dans la section (1.5) :

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} k^j, \quad j \in \mathbf{N}, \quad |x| < 1.$$

On a la relation de récurrence :

$$F_{j+1}(x) = F_j(x) + xF'_j(x).$$

Considérons l'équation (23). L'exactitude pour $f(t) = 1, t^2$ et t^4 est automatique. En prenant $t_i = 0$ et $h = 1$, l'équation (23) implique pour $f(t) = t, t^3$ et t^5 les relations suivantes :

$$C_1 F_1(\alpha) + C_2 F_1(\beta) = 1/2 \quad (25)$$

$$C_1 F_3(\alpha) + C_2 F_3(\beta) = 0 \quad (26)$$

$$C_1 F_5(\alpha) + C_2 F_5(\beta) = 0 \quad (27)$$

On choisit α et β vérifiant

$$F_5(\alpha) = 0, \quad F_5(\beta) = 0, \quad (28)$$

c'est-à-dire, racines de l'équation

$$\lambda^4 + 26\lambda^3 + 66\lambda^2 + 26\lambda + 1 = 0.$$

Pour des raisons de convergence on prend les racines α et β de module inférieur à 1. On obtient d'après (25) et (26)

$$C_1 = \frac{F_3(\beta)}{2(F_1(\alpha)F_3(\beta) - F_1(\beta)F_3(\alpha))}, \quad (29)$$

$$C_2 = - \frac{F_3(\alpha)}{2(F_1(\alpha)F_3(\beta) - F_1(\beta)F_3(\alpha))}. \quad (30)$$

Par symétrie l'équation (24) est vérifiée pour $f(t) = t, t^3$ et t^5 . Pour les fonctions $f(t) = 1, t^2$ et t^4 on a :

$$C_3 + 2C_4 F_0(\alpha) + 2C_5 F_0(\beta) = 0, \quad (31)$$

$$C_4 F_2(\alpha) + C_5 F_2(\beta) = 1, \quad (32)$$

$$C_4 F_4(\alpha) + C_5 F_4(\beta) = 0, \quad (33)$$

ce qui donne

$$C_4 = \frac{F_4(\beta)}{F_2(\alpha)F_4(\beta) - F_2(\beta)F_4(\alpha)}, \quad (34)$$

$$C_5 = - \frac{F_4(\alpha)}{F_2(\alpha)F_4(\beta) - F_2(\beta)F_4(\alpha)}, \quad (35)$$

$$C_3 = -2(C_4 F_0(\alpha) + C_5 F_0(\beta)). \quad (36)$$

Pour la convergence de (23) et (24), il faut faire des hypothèses sur y_i . Par exemple, soit $\tau \geq 0$ fixé. Définissons

$$Y^\tau = \{y = (y_i) \mid y_i = O(|i|^\tau), i \rightarrow \pm\infty\}.$$

Il n'existe pas toujours une fonction spline unique σ appartenant à S et vérifiant $\sigma(t_i) = y_i, i \in \mathbf{Z}$, mais grâce au théorème de Schoenberg ([31], lecture 4) on a l'unicité, si l'on considère l'espace

$$S^\tau = \{\sigma \in S \mid \sigma(t) = O(|t|^\tau), t \rightarrow \pm\infty\}.$$

Ainsi on a le résultat suivant analogue au Théorème 2 dans la section 1.5.

THEOREME 1

Pour tout $y \in Y^T$, la fonction spline $\sigma \in S^T$ vérifiant $\sigma(t_i) = y_i$, $i \in Z$ est définie par :

$$\lambda_i = \frac{1}{h} [C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k})],$$

$$\mu_i = \frac{1}{h^2} [C_3 y_i + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}) + C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k})],$$

$$i \in Z.$$

La démonstration est exactement analogue à celle du théorème 2 dans la section 1.5

2.7 - FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES CARDINALES TRONQUEES

Par la troncature des sommes infinies en (23) et (24), on peut écrire λ_i et μ_i , $i = 1, \dots, n$ en fonction des y_i , $i = 1, \dots, n$ et donc on obtient une fonction spline définie sur $[a, b] = [t_1, t_n]$.

Précisément on a

$$\lambda_i = \frac{C_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) + \frac{C_2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k})$$

$$= \frac{C_1}{h} \left[\sum_{k=1}^{n-i} \alpha^{k-1} y_{i+k} + \alpha^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{n+k} \right]$$

$$- \frac{C_1}{h} \left[\sum_{k=1}^{i-1} \alpha^{k-1} y_{i-k} + \alpha^{i-1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{1-k} \right]$$

$$+ \frac{C_2}{h} \left[\sum_{k=1}^{n-i} \beta^{k-1} y_{i+k} + \beta^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{n+k} \right]$$

$$- \frac{C_2}{h} \left[\sum_{k=1}^{i-1} \beta^{k-1} y_{i-k} + \beta^{i-1} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{1-k} \right].$$

On remplace $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{n+k}$ par $\sum_{j=1}^6 v_j y_{n+1-j}$ où les coefficients v_j sont tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} p(t_{n+k}) = \sum_{j=1}^6 v_j p(t_{n+1-j}) \quad (37)$$

pour tout $p \in P_5$.

Prenons $t_n = 0$ et $h = 1$. On peut alors écrire la condition (37) de la forme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} k^\ell = F_\ell(\alpha) = \sum_{j=1}^6 v_j (1-j)^\ell, \quad \ell = 0, \dots, 5.$$

Explicitement

$$v_1 = (120 F_0(\alpha) + 274 F_1(\alpha) + 225 F_2(\alpha) + 85 F_3(\alpha) + 15 F_4(\alpha))/120,$$

$$v_2 = -(600 * F_1(\alpha) + 770 * F_2(\alpha) + 355 * F_3(\alpha) + 70 * F_4(\alpha))/120,$$

$$v_3 = (600 * F_1(\alpha) + 1070 * F_2(\alpha) + 590 * F_3(\alpha) + 130 * F_4(\alpha))/120,$$

$$v_4 = -(400 * F_1(\alpha) + 780 * F_2(\alpha) + 490 * F_3(\alpha) + 120 * F_4(\alpha))/120,$$

$$v_5 = (150 * F_1(\alpha) + 305 * F_2(\alpha) + 205 * F_3(\alpha) + 55 * F_4(\alpha))/120,$$

$$v_6 = -(24 * F_1(\alpha) + 50 * F_2(\alpha) + 35 * F_3(\alpha) + 10 * F_4(\alpha))/120.$$

(38)

Aussi, on remplace $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{1-k}$ par $\sum_{j=1}^6 v_j y_j$, la relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} p(t_{1-k}) = \sum_{j=1}^6 v_j p(t_j) \text{ étant une identité pour les polynômes de}$$

degré 5.

De la même façon on remplace $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{n+k}$ par $\sum_{j=1}^6 w_j y_{n+1-j}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{1-k}$ par $\sum_{j=1}^6 w_j y_j$ où les coefficients w_j sont choisis tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} p(t_{n+k}) = \sum_{j=1}^6 w_j p(t_{n+1-j}) \quad (39)$$

pour tout $p \in P_5$.

Les w_j sont définis par une formule analogue à (38) avec α remplacé par β .

Donc on a pour $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i = \frac{1}{h} [& C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-i} \alpha^{k-1} y_{i+k} + \alpha^{n-i} \sum_{j=1}^6 v_j y_{n+1-j} \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha^{k-1} y_{i-k} - \alpha^{i-1} \sum_{j=1}^6 v_j y_j \right) \\ & + C_2 \left(\sum_{k=1}^{n-i} \beta^{k-1} y_{i+k} + \beta^{n-i} \sum_{j=1}^6 w_j y_{n+1-j} \right) \\ & \left. - \sum_{k=1}^{i-1} \beta^{k-1} y_{i-k} - \beta^{i-1} \sum_{j=1}^6 w_j y_j \right] \quad (40) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i = \frac{1}{h^2} [& C_3 y_i + C_4 \left(\sum_{k=1}^{n-i} \alpha^{k-1} y_{i+k} + \alpha^{n-i} \sum_{j=1}^6 v_j y_{n+1-j} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha^{k-1} y_{i-k} + \alpha^{i-1} \sum_{j=1}^6 v_j y_j \right) \\ & + C_5 \left(\sum_{k=1}^{n-i} \beta^{k-1} y_{i+k} + \beta^{n-i} \sum_{j=1}^6 w_j y_{n+1-j} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{i-1} \beta^{k-1} y_{i-k} + \beta^{i-1} \sum_{j=1}^6 w_j y_j \right)]. \quad (41) \end{aligned}$$

On définit \tilde{S}_n l'espace des fonctions spline quintiques cardinales tronquées.

$$\hat{S}_n = \{s|_{[t_1, t_n]} / s \in S,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} s(t_{1-k}) = \sum_{j=1}^6 v_j s(t_j),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} s(t_{n+k}) = \sum_{j=1}^6 v_j s(t_{n+1-j}),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} s(t_{1-k}) = \sum_{j=1}^6 w_j s(t_j), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} s(t_{n+k}) = \sum_{j=1}^6 w_j s(t_{n+1-j})$$

Notons que \hat{S}_n est un sous-espace de S_n et sa dimension est égale à n .
 Maintenant nous allons montrer qu'en fait $\hat{S}_n = \tilde{S}_n$ où \tilde{S}_n est défini dans la section 2.5.

D'après (20) on a

$$\Lambda_i = K[\tilde{D}_i + \sum_{k=1}^{\infty} G_1^k \tilde{D}_{i+k} + \sum_{k=1}^{\infty} G_2^k \tilde{D}_{i-k}]$$

qui correspond à une identité pour les polynômes de degré cinq.

Considérons

$$\begin{aligned} B' \Lambda_1 + C \Lambda_2 &= (B'K + CKG_1^{-1}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} G_1^k \tilde{D}_{1+k} \right) \\ &+ (B'K + CKG_2) \left(\tilde{D}_1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_2^k \tilde{D}_{1-k} \right) \\ &= \tilde{D}_1 + \sum_{k=1}^{\infty} G_2^k \tilde{D}_{1-k}, \text{ en utilisant} \\ &B'K + CKG_1^{-1} = 0, \quad B'K + CKG_2 = I, \end{aligned}$$

d'après (15) et (16).

En remplaçant

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -w & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -v \\ -w & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \tilde{D}_i = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{10}{4} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \\ 15(y_{i+1} - y_{i-1}) \end{bmatrix}$$

on obtient

$$B'_{\Lambda_1 + C\Lambda_2} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} f_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{1-k} + f_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{1-k} + f_3 y_1 + f_4 y_2 \\ g_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{1+k} + g_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{1-k} + g_3 y_1 + g_4 y_2 \end{bmatrix}.$$

Maintenant en remplaçant $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{1-k}$ par $\sum_{j=1}^6 v_j y_j$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{1-k}$ par $\sum_{j=1}^6 w_j y_j$, on a

$$B'_{\Lambda_1 + C\Lambda_2} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} f_1 \sum_{j=1}^6 v_j y_j + f_2 \sum_{j=1}^6 w_j y_j + f_3 y_1 + f_4 y_2 \\ g_1 \sum_{j=1}^6 v_j y_j + g_2 \sum_{j=1}^6 w_j y_j + g_3 y_1 + g_4 y_2 \end{bmatrix}$$

et il y a toujours exactitude pour les polynômes de degré cinq. Ainsi, l'expression de droite dans l'équation ci-dessus n'est rien d'autre que D_1 . De la même façon à l'autre bout en remplaçant $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{n+k}$ par $\sum_{j=1}^6 v_j y_{n+1-j}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{n+k}$ par $\sum_{j=1}^6 w_j y_{n+1-j}$ on retrouve la condition

$$A\Lambda_{n-1} + B''\Lambda_n = D_n.$$

Ainsi $\hat{S}_n = \tilde{S}_n$, c'est-à-dire, la fonction spline définie dans la section 2.5 se présente comme une fonction spline cardinale tronquée. Maintenant dans la section suivante nous allons montrer que la troncature est effectuée de façon à obtenir l'ordre de convergence uniforme en h^6 , ce qui est optimal.

En utilisant les formules (40) et (41) on peut écrire un algorithme efficace qui coûte seulement $11n$ additions et $9n$ multiplications, avec un encombrement mémoire minimal de $3n$.

2.8 - MAJORATION DE L'ERREUR

D'abord on considère le cas de la fonction spline cardinale. Soit f une fonction qui appartient à C^6 et telle que $y_i = f(t_i) \in Y^T$. Donc l'erreur d'évaluation de la dérivée première en 0 (on prend $t_i = 0$ et $h = 1$) est donnée par

$$\begin{aligned} H(f) &= C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (f(k) - f(-k)) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (f(k) - f(-k)) - f'(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) f^{(6)}(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) f^{(6)}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (42)$$

où ψ et ϕ sont les fonctions impaires définies par

$$\psi(\xi) = C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} ((k-\xi)_+^5 / 5!), \quad \xi \geq 0, \quad (43)$$

$$\phi(\xi) = C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} ((k-\xi)_+^5 / 5!), \quad \xi \geq 0, \quad (44)$$

On voit facilement que

$$\psi(\xi + \ell) = \alpha^\ell \psi(\xi), \quad \phi(\xi + \ell) = \beta^\ell \phi(\xi) \quad (45)$$

pour tout $\xi \geq 0$ et tout entier positif ℓ .

Il suffit donc de considérer la restriction de ψ et ϕ à $[0,1]$. Pour $\xi \in [0,1]$ on a

$$\psi(\xi) = C_1 \sum_{j=1}^5 (-1)^j (\xi^j F_{5-j}(\alpha) / j! (5-j)!), \quad (46)$$

$$\phi(\xi) = C_2 \sum_{j=1}^5 (-1)^j (\xi^j F_{5-j}(\beta) / j! (5-j)!). \quad (47)$$

On obtient les estimations suivantes :

$$\int_0^1 |\psi(\xi)| d\xi \sim 0.001366, \quad \int_0^1 |\phi(\xi)| d\xi \sim 0.000138.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi)| d\xi = \frac{2}{1-|\alpha|} \int_0^1 |\Psi(\xi)| d\xi \sim 0.004801, \quad (48)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\xi)| d\xi = \frac{2}{1-|\beta|} \int_0^1 |\Phi(\xi)| d\xi \sim 0.000289. \quad (49)$$

Ainsi l'erreur sur la dérivée première en une abscisse t_i pour la fonction spline cardinale de pas h est majorée par

$$A h^5 \|f^{(6)}\|_{\infty} \quad (50)$$

avec $A \sim 0.005090$.

De la même façon l'erreur d'évaluation de la dérivée seconde en 0 s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{H}(f) &= C_3 f(0) + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (f(k)+f(-k)) \\ &\quad + C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (f(k)+f(-k)) - f''(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{\Psi}(\xi) + \tilde{\Phi}(\xi)) f^{(6)}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (51)$$

où $\tilde{\Psi}$ et $\tilde{\Phi}$ sont les fonctions paires données par

$$\tilde{\Psi}(\xi) = C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(k-\xi)_+^5}{5!}, \quad \xi \geq 0, \quad (52)$$

$$\tilde{\Phi}(\xi) = C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} \frac{(k-\xi)_+^5}{5!}, \quad \xi \geq 0. \quad (53)$$

Donc l'erreur sur la dérivée seconde en une abscisse t_i est majorée par

$$\tilde{A} h^4 \|f^{(6)}\|_{\infty} \quad (54)$$

avec $\tilde{A} \sim 0.010132$.

Dans le cas de la fonction spline cardinale tronquée on a

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_i &= \frac{C_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) + \frac{C_2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) \\ &+ \frac{C_1}{h} \alpha^{n-i} \left[\sum_{j=1}^6 v_j y_{n+1-j} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{n+k} \right] \\ &- \frac{C_1}{h} \alpha^{i-1} \left[\sum_{j=1}^6 v_j y_j - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} y_{1-k} \right] \\ &+ \frac{C_2}{h} \beta^{n-i} \left[\sum_{j=1}^6 w_j y_{n+1-j} - \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{n+k} \right] \\ &- \frac{C_2}{h} \beta^{i-1} \left[\sum_{j=1}^6 w_j y_j - \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} y_{1-k} \right]. \end{aligned}$$

Considérons les fonctionnelles

$$K(f) = C_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} f(k) - \sum_{j=1}^6 v_j f(1-j) \right) \quad (55)$$

et

$$\tilde{K}(f) = C_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} f(k) - \sum_{j=1}^6 w_j f(1-j) \right). \quad (56)$$

On sait que

$$K(p) = 0, \quad \tilde{K}(p) = 0 \quad \text{pour tout } p \in P_5.$$

Donc

$$K(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) f^{(6)}(\xi) d\xi$$

où

$$\chi(\xi) = \begin{cases} \psi(\xi) & , \quad \xi \geq 0 \\ C_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(k-\xi)_+^5}{5!} - \sum_{j=1}^6 v_j \frac{(1-j-\xi)_+^5}{5!} \right) & , \quad \xi \in [-5, 0] \\ 0 & , \quad \xi \leq -5 \end{cases} \quad (57)$$

et

$$\tilde{K}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}(\xi) f^{(6)}(\xi) d\xi$$

où

$$\tilde{\chi}(\xi) = \begin{cases} \phi(\xi) & , \xi \geq 0 \\ C_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} \frac{(k-\xi)_+^5}{5!} - \sum_{j=1}^6 \frac{w_j (1-j-\xi)_+^5}{5!} \right) & , \xi \in [-5, 0] \\ 0 & , \xi \leq -5. \end{cases} \quad (58)$$

Donc on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\xi)| d\xi \sim 0.173634 = B, \quad (59)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\chi}(\xi)| d\xi \sim 0.104162 = C. \quad (60)$$

Ainsi

$$|\lambda_i - f'(t_i)| \leq [A+B(|\alpha|^{n-i} + |\alpha|^{i-1}) + C(|\beta|^{n-i} + |\beta|^{i-1})] h^5 \|f^{(6)}\|_{\infty}. \quad (61)$$

On peut montrer de la même façon que

$$|\mu_i - f''(t_i)| \leq [\tilde{A} + \tilde{B}(|\alpha|^{n-i} + |\alpha|^{i-1}) + \tilde{C}(|\beta|^{n-i} + |\beta|^{i-1})] h^4 \|f^{(6)}\|_{\infty} \quad (62)$$

avec

$$\tilde{A} \sim 0.010132, \quad \tilde{B} \sim 0.300237, \quad \tilde{C} \sim 0.689894.$$

Donc

$$\|6-f\|_{\infty} \leq C h^6$$

où C est une constante.

Notons que

$$B|\alpha|^4 \sim 0.005968, \quad C|\beta|^4 \sim 0.004489$$

et

$$\tilde{B}|\alpha|^4 \sim 0.010319, \quad \tilde{C}|\beta|^4 \sim 0.028438.$$

On voit que l'erreur due aux effets de bout est du même ordre que l'erreur de la fonction spline cardinale dès que l'on se trouve à 4 intervalles d'une extrémité.

2.9 - EXEMPLES NUMERIQUES

Toutes les fonctions sont définies sur l'intervalle [0,1].
On a pris les pas successifs

$$h_k = \frac{0.2}{2^{k-1}}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Si l'on suppose que l'erreur est de la forme $A h^\alpha$, on estime l'exposant α sur deux pas successifs par la formule

$$\alpha_k \sim (\log E_k / E_{k+1}) / \log 2.$$

où E_k est l'erreur d'évaluation de la dérivée première correspondant au pas h_k . On donne les résultats à l'extrémité gauche (0), au milieu (1) et à l'extrémité droite (2) de l'intervalle.

$$f(t) = (t^4 + 1) / (t + 0.1)$$

k	erreur en 0	α_k en 0	erreur en 1	α_k en 1	erreur en 2	α_k en 2
1	36.92	1.149	$4.613 \cdot 10^{-2}$	6.480	$5.637 \cdot 10^{-4}$	5.289
2	16.65	1.808	$5.167 \cdot 10^{-4}$		$1.441 \cdot 10^{-5}$	5.56
3	4.753		$4.116 \cdot 10^{-8}$		$3.044 \cdot 10^{-7}$	

$$f(t) = \exp(t)$$

1	$8.201 \cdot 10^{-5}$	5.317	$9.445 \cdot 10^{-7}$	12.62	$2.557 \cdot 10^{-4}$	4.700
2	$2.057 \cdot 10^{-6}$	5.152	$1.500 \cdot 10^{-10}$		$9.910 \cdot 10^{-6}$	4.825
3	$5.736 \cdot 10^{-8}$		$2.000 \cdot 10^{-10}$		$3.496 \cdot 10^{-7}$	

$$f(t) = \sin(t)$$

1	$4.582 \cdot 10^{-2}$	5.559	$5.715 \cdot 10^{-4}$	10.33	$4.582 \cdot 10^{-2}$	5.559
2	$9.723 \cdot 10^{-4}$	5.895	$4.428 \cdot 10^{-7}$	5.550	$9.723 \cdot 10^{-4}$	5.895
3	$1.634 \cdot 10^{-5}$		$9.450 \cdot 10^{-9}$		$1.634 \cdot 10^{-5}$	

$$f(t) = t^5$$

k	erreur en 0	α_k en 0	erreur en 1	α_k en 1	erreur en 2	α_k en 2
1	$1.723 \cdot 10^{-12}$		$3.000 \cdot 10^{-11}$		$2.400 \cdot 10^{-9}$	
2	$2.790 \cdot 10^{-13}$		$5.000 \cdot 10^{-11}$		$5.300 \cdot 10^{-9}$	
3	$3.561 \cdot 10^{-51}$		$5.000 \cdot 10^{-11}$		$3.700 \cdot 10^{-9}$	

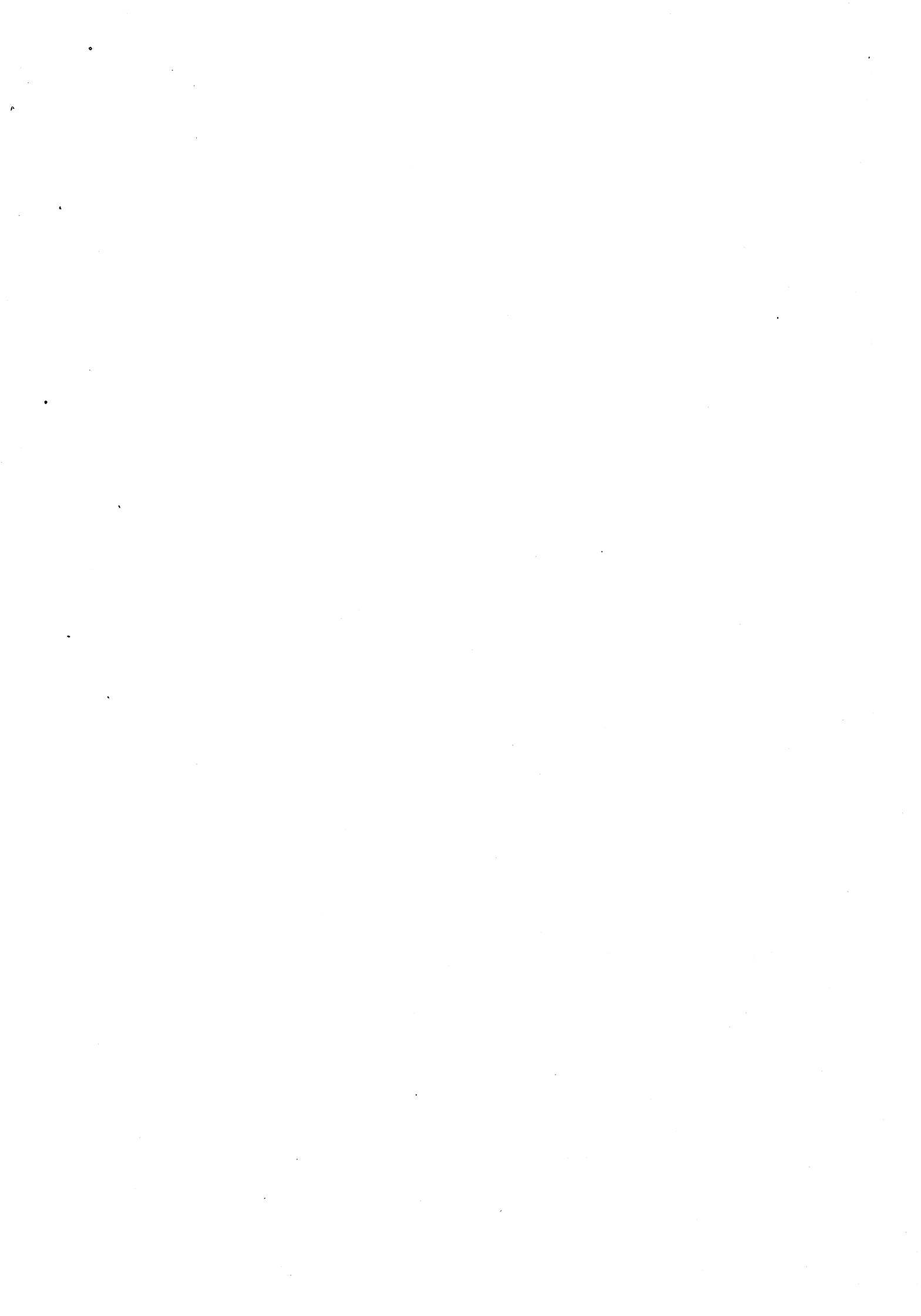
$$f(t) = e^{-t} \cos(2t)$$

1	1.562	4.896	$4.299 \cdot 10^{-3}$	6.874	$1.380 \cdot 10^{-1}$	3.152
2	$5.248 \cdot 10^{-2}$	8.695	$3.666 \cdot 10^{-5}$	6.376	$1.593 \cdot 10^{-2}$	4.989
3	$1.266 \cdot 10^{-4}$		$4.413 \cdot 10^{-7}$		$4.891 \cdot 10^{-4}$	

$$f(t) = e^{-t^2/2}$$

1	$3.383 \cdot 10^{-4}$	4.029	$3.575 \cdot 10^{-6}$	12.79	$2.984 \cdot 10^{-4}$	4.802
2	$2.073 \cdot 10^{-5}$	4.082	$5.04 \cdot 10^{-10}$	4.518	$2.880 \cdot 10^{-6}$	10.36
3	$7.430 \cdot 10^{-7}$		$2.200 \cdot 10^{-11}$		$2.193 \cdot 10^{-9}$	

On constate que l'erreur sur la dérivée première est bien en h^α avec α voisin de 5. Quand l'erreur devient proche de la précision machine, on ne calcule pas l'exposant α_k .



CHAPITRE - 3
=====

FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES D'HERMITE, PARABOLIQUES
ET CUBIQUES PERIODIQUES

3 - FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES D'HERMITE, PARABOLIQUES ET CUBIQUES PERIODIQUES

3.1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre on considère les fonctions spline quintiques d'Hermite, les fonctions spline paraboliques et les fonctions spline cubiques périodiques. Dans les deux premiers cas on doit résoudre un système tridiagonal. On utilise la même technique que dans le chapitre I. Dans le cas de la fonction spline périodique la matrice du système est circulante.

3.2 - FONCTIONS SPLINE CARDINALES QUINTIQUES D'HERMITE

Supposons que l'on ait des abscisses t_i équidistantes de pas h en nombre infini. On se propose de déterminer une fonction σ qui vérifie

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad \sigma'(t_i) = \lambda_i, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

et qui est telle que sa restriction à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré 5. Si l'on compare le cas présent avec le cas de la fonction spline quintique cardinale, on voit qu'ici on a une condition supplémentaire qui est :

$$\sigma'(t_i) = \lambda_i, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Il faut donc relâcher les conditions de continuité par rapport à celles de la fonction spline quintique. Dans le cas de la fonction spline quintique on avait $\sigma \in C^4$, mais dans le cas présent on peut seulement exiger $\sigma \in C^3$.

Soit $\tau \geq 0$ fixé. Définissons

$$Y^\tau = \{y = (y_i) \mid y_i = 0 (|i|^\tau), i \rightarrow \pm \infty\}$$

et

$$S_{5,2}^\tau = \{\sigma \mid \sigma \in C^3, \sigma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ est un polynôme de degré 5,}$$

$$\sigma(t) = 0(|t|^\tau), t \rightarrow \pm \infty\}.$$

Alors on a le résultat suivant de Lipow et Schoenberg [21] :

Si $y = (y_i) \in Y^\tau$, $\lambda = (\lambda_i) \in Y^\tau$, alors il existe $\sigma \in S_{5,2}^\tau$ unique telle que

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad \sigma'(t_i) = \lambda_i, \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Afin de donner une solution explicite, on prend $\mu_i = \sigma''(t_i)$ comme inconnus. La continuité de la dérivée troisième en t_i , $i \in \mathbf{Z}$, entraîne les relations suivantes :

$$\mu_{i-1} - 6\mu_i + \mu_{i+1} = \frac{8}{h} (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}) - \frac{20}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \quad (2)$$

Pour résoudre le système ci-dessus, on essaye une formule de la forme suivante :

$$\mu_i = C_0 y_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (\lambda_{i+k} - \lambda_{i-k}) \quad (3)$$

où il reste à préciser C_0 , C_1 , C_2 et γ . En remplaçant μ_i dans (2) par l'expression ci-dessus et en identifiant les coefficients, on obtient :

$$\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0, \quad (4)$$

$$C_2(\gamma - 6) = 8, \quad (5)$$

$$C_0 + C_1(\gamma - 6) = -20, \quad (6)$$

$$-6C_0 + 2C_1 = -40. \quad (7)$$

Pour des raisons de convergence on choisit

$$\gamma = 3 - 2\sqrt{2} \quad (8)$$

la racine de (4) inférieure à 1 en module. Donc

$$C_0 \sim -5.857\ 864\ 376 \ , \quad (9)$$

$$C_1 \sim 2.426\ 406\ 871 \ , \quad (10)$$

$$C_2 \sim -1.372\ 583\ 002 \ . \quad (11)$$

On peut aussi déterminer les coefficients C_0, C_1, C_2 par l'exactitude P_5 . Notons que la vérification de (3) pour les fonctions $f(t) = t$ et t^3 est automatique. L'exactitude pour les fonctions $f(t) = 1, t^2, t^4$ entraîne les relations suivantes :

$$C_0 + 2C_1 F_0(\gamma) = 0 \ , \quad (12)$$

$$C_1 F_2(\gamma) + 2C_2 F_1(\gamma) = 1 \ , \quad (13)$$

$$C_1 F_4(\gamma) + 4C_2 F_3(\gamma) = 0 \ . \quad (14)$$

où les fonctions F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont définies dans la section 1.5.

Il est facile à vérifier que les équations (5)-(7) et (12)-(14) sont compatibles si γ est une racine de (4). A partir des équations (12)-(14) on obtient :

$$C_1 = \frac{4 F_3(\gamma)}{4F_2(\gamma)F_3(\gamma) - 2F_1(\gamma)F_4(\gamma)} \ , \quad (15)$$

$$C_2 = \frac{-F_4(\gamma)}{4F_2(\gamma)F_3(\gamma) - 2F_1(\gamma)F_4(\gamma)} \ , \quad (16)$$

$$C_0 = -2C_1 F_0(\gamma) . \quad (17)$$

Il faut remarquer que l'exactitude P_5 ne détermine pas γ .

3.3 - FONCTIONS SPLINE QUINTIQUES D'HERMITE SUR [a,b]

Considérons un intervalle $[a,b]$ qui est subdivisé par des abscisses équidistantes $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ de pas h . On se propose de déterminer une fonction σ qui vérifie

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad \sigma'(t_i) = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (18),$$

qui est un polynôme de degré 5 sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ et qui appartient à $C^3[a,b]$. La continuité de la dérivée troisième aux t_i , $i = 2, \dots, n-1$ s'exprime de la façon suivante :

$$\mu_{i-1} - 6\mu_i + \mu_{i+1} = \frac{8}{h} (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}) - \frac{20}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),$$

$$i = 2, \dots, n-1. \quad (19)$$

Il faut ajouter deux conditions de bout. Comme dans le cas de la fonction spline cubique, on va ajouter ces conditions de telle manière que l'inverse de la matrice associée ait une forme simple.

Soit γ la racine de $\gamma^2 - 6\gamma + 1 = 0$ de module inférieur à 1. A (19) on ajoute les conditions de bout suivantes :

$$\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^3 f_j \lambda_j + \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 g_j y_j \quad (20)$$

et

$$\mu_{n-1} + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\mu_n = \frac{-1}{h} \sum_{j=1}^3 f_j \lambda_{n+1-j} + \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 g_j y_{n+1-j} \quad (21)$$

où les coefficients $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ sont choisis tels que (20) et (21) correspondent à une identité pour les polynômes de degré 5. Plus précisément, d'après

$$\delta^5[t_1 \ t_1 \ t_1 \ t_2 \ t_2 \ t_3]p = \delta^5[t_1 \ t_1 \ t_2 \ t_2 \ t_3 \ t_3]p \quad \text{pour tout } p \in P_5$$

où δ^5 est la différence divisée on obtient :

$$p''(t_1) = \frac{1}{2h^2} [-23y_1 + 16y_2 + 7y_3] + \frac{1}{2h} [-12\lambda_1 - 16\lambda_2 - 2\lambda_3] \quad (22)$$

pour tout $p \in P_5$ vérifiant $p(t_i) = y_i$, $p'(t_i) = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.

De la même façon d'après

$\delta^5[t_1 \ t_1 \ t_2 \ t_2 \ t_3 \ t_3]p = \delta^5[t_1 \ t_2 \ t_2 \ t_2 \ t_3 \ t_3]p$ pour tout $p \in P_5$,
on a

$$p''(t_2) = \frac{1}{2h^2} [4y_1 - 8y_2 + 4y_3] + \frac{1}{2h} [\lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 - \lambda_3] \quad (23)$$

pour tout $p \in P_5$ vérifiant $p(t_i) = y_i$, $p'(t_i) = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.

Donc d'après (22) et (23) on obtient

$$\begin{aligned} f_1 &= (1+12/\gamma)/2 & , & & g_1 &= (4+23/\gamma)/2 , \\ f_2 &= (0+16/\gamma)/2 & , & & g_2 &= (-8-16/\gamma)/2, \\ f_3 &= (-1+2/\gamma)/2 & , & & g_3 &= (4-7/\gamma)/2, \end{aligned} \quad (24)$$

et finalement

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{h} \sum_{j=1}^3 f_j \lambda_j + \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^3 g_j y_j, \\ d_n &= -\frac{1}{h} \sum_{j=1}^3 f_j \lambda_{n+1-j} + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^3 g_j y_{n+1-j}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le système tridiagonal

$$\begin{aligned} (-1/\gamma)\mu_1 + \mu_2 &= d_1 \\ \mu_{i-1} - 6\mu_i + \mu_{i+1} &= d_i, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ \mu_{n-1} + (-1/\gamma)\mu_n &= d_n. \end{aligned} \quad (25)$$

qui est similaire au système (22) défini dans la section (1.4).

Soient

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= d_1 \\ \gamma_{i+1} &= \gamma * \gamma_i + d_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (26)$$

La solution de (25) est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \mu_n &= -\gamma^2 * (d_n / \gamma + \gamma_{n-1}) / (1 - \gamma^2) \\ \text{et} \\ \mu_i &= \gamma * (\mu_{i+1} - \gamma_i), \quad i = n-1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (27)$$

3.4 - FONCTIONS SPLINE PARABOLIQUES

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et soit $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ par des abscisses équidistantes de pas h . On désigne S_n l'espace des fonctions spline paraboliques définies sur $[a, b]$. Une fonction $\sigma \in S_n$ si

1°) La restriction de σ à $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme quadratique,
 $i = 1, \dots, n-1,$

2°) $\sigma \in C^1[a, b]$.

Il est clair que la dimension de S_n est égale à $n+1$.

On considère la spline qui interpole au milieu des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. Ces splines ont été introduites par Marsden [23].

Soient $\tau_i = \frac{t_{i+1} + t_i}{2}$, $i = 1, \dots, n-1$. Supposons que les quantités y_i , $i = 1, \dots, n-1$ soient données. On se propose de déterminer une fonction σ appartenant à S_n qui vérifie

$$\sigma(\tau_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Comme la dimension de S_n est égale à $n+1$, afin de déterminer une telle fonction de façon unique, il faut ajouter deux conditions supplémentaires. On procède exactement comme dans le cas de la fonction spline cubique.

Prenons $v_i = \sigma(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ comme inconnues. Une fois qu'on connaît les v_i , on peut déterminer σ comme un polynôme quadratique dans un intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ qui vérifie

$$\sigma(t_i) = v_i, \sigma\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right) = y_i, \sigma(t_{i+1}) = v_{i+1}.$$

La continuité de la dérivée première en t_i , $i = 2, \dots, n-1$ entraîne les relations suivantes :

$$v_{i-1} + 6v_i + v_{i+1} = 4(y_{i-1} + y_i), \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (28)$$

On sait que si l'on ajoute des conditions de bout de la forme

$$(-1/\gamma)v_1 + v_2 = \sum_{j=1}^3 c_j y_j \quad (29)$$

et

$$v_{n-1} + (-1/\gamma)v_n = \sum_{j=1}^3 c_j y_{n+1-j} \quad (30)$$

au système (28) avec γ qui vérifie

$$\gamma^2 + 6\gamma + 1 = 0, \quad (31)$$

alors la matrice associée a un inverse simple. Pour des raisons de stabilité on prend γ de module inférieur à 1. Précisément $\gamma = -3 + \sqrt{8}$.

Comme avant, on choisit les coefficients C_1, C_2, C_3 tels que les équations (29) et (30) correspondent à une identité pour les polynômes de degré 2.

On obtient

$$C_1 = \frac{3\gamma-15}{8\gamma}, \quad C_2 = \frac{3\gamma+5}{4\gamma}, \quad C_3 = \frac{-3-\gamma}{8\gamma}.$$

Soient

$$d_1 = \sum_{j=1}^3 c_j y_j,$$

$$d_i = 4(y_{i-1} + y_i), \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$d_n = \sum_{j=1}^3 c_j y_{n+1-j}. \quad (32)$$

La solution du système (28)-(30) est :

$$v_i = \frac{-\gamma}{1-\gamma^2} [d_i + \sum_{k=1}^{n-i} \gamma^k d_{i+k} + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma^k d_{i-k}].$$

En remplaçant d_i par leurs valeurs et en simplifiant, on obtient :

$$v_i = \frac{-4\gamma}{1-\gamma^2} [y_i + \sum_{k=1}^{n-i-1} \gamma^k y_{i+k} + \gamma^{n-i} \sum_{j=1}^3 w_j y_{n-j} + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k} + \gamma^{i-1} \sum_{j=1}^3 w_j y_j] \quad (33)$$

où

$$w_1 = \frac{c_1 - 4}{4(1+\gamma)}, \quad w_2 = \frac{c_2}{4(1+\gamma)}, \quad w_3 = \frac{c_3}{4(1+\gamma)}.$$

On ne va pas décrire la fonction spline parabolique cardinale en détails. On donne seulement l'expression pour v_i qui est la suivante :

$$v_i = \frac{-4\gamma}{1-\gamma} [y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k y_{i+k} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{i-k}]. \quad (34)'$$

Par la troncature des sommes infinies afin d'avoir l'exactitude P_2 , on retrouve l'équation (33). Ainsi la fonction spline définie par (33) est la fonction spline cardinale tronquée. Donc on peut montrer que les conditions de bout (29) et (30) entraînent une convergence uniforme en h^3 . La formule (33) permet d'écrire un algorithme efficace pour calculer les v_i .

3.5 - FONCTIONS SPLINE CUBIQUES PERIODIQUES

Dans le cas des fonctions splines cubiques et quintiques d'interpolation, on a ajouté les conditions de bout de telle sorte que l'inverse de la matrice associée ait une forme simple. Ainsi on pouvait économiser certains calculs.

Le cas des fonctions splines périodiques est traité par P.J. LAURENT [20]. La matrice associée est circulante et il a montré que son inverse a une expression simple. On décrit brièvement ce cas maintenant.

A nouveau, soit $[a, b]$ un intervalle fini de \mathbb{R} et soient $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = b$ des abscisses équidistantes de pas h . Supposons que l'on ait des ordonnées y_1, \dots, y_{n+1} tels que $y_1 = y_{n+1}$.

Soit

$$I = \{f \in H^2[a, b] / f(t_i) = y_i, i = 1, \dots, n+1, f'(a^+) = f'(b^-)\} \quad (35).$$

Alors la solution σ qui vérifie

$$\int_a^b \sigma''(t)^2 dt = \min_{f \in I} \int_a^b f''(t)^2 dt \quad (36)$$

est caractérisée par les conditions suivantes.

1°) La restriction de σ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré 3, $i = 1, \dots, n$,

2°) $\sigma \in C^2[a, b]$,

3°) $\sigma''(a^+) = \sigma''(b^-)$,

4°) $\sigma(t_i) = y_i, i = 1, \dots, n+1,$
 $\sigma'(a^+) = \sigma'(b^-).$ (37)

Notons que l'on a $\sigma'(a^+) = \sigma'(b^-)$, $\sigma''(a^+) = \sigma''(b^-)$.

Comme on a en outre $\sigma(a^+) = \sigma(b^-)$ ($y_1 = y_{n+1}$), on peut prolonger σ à \mathbb{R} par périodicité et l'on obtient une fonction σ appartenant à l'espace des fonctions de classes C^2 définies sur \mathbb{R} qui sont formées de polynômes de degré 3 par morceaux.

Inversement, soit XP l'espace des fonctions réelles définies sur \mathbb{R} qui sont périodiques de période $p = b-a$ et qui sont telles que la restriction à $[a, b]$ appartient à $H^2[a, b]$. Maintenant si l'on minimise $\int_a^b (f''(t))^2 dt$ parmi les fonctions $f \in XP$ vérifiant $f(t_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$, alors on obtiendra la même solution.

Pour déterminer la solution σ , on prend $\lambda_i = \sigma'(t_i)$ comme inconnues. La continuité de la dérivée seconde en t_i , $i = 2, \dots, n$ et $\sigma''(a^+) = \sigma''(b^-)$ entraînent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_n &= \frac{3(y_2 - y_n)}{h} = d_1, \\ \lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} &= \frac{3(y_{i+1} - y_{i-1})}{h} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \lambda_1 + \lambda_{n-1} + 4\lambda_n &= \frac{3(y_1 - y_{n-1})}{h} = d_n. \end{aligned} \quad (38)$$

Notons que la matrice associée A du système ci-dessus est circulante. Pour résoudre (38) on écrit

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{3(y_2 - y_n)}{h} - \lambda_n, \\ \lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} &= \frac{3(y_{i+1} - y_{i-1})}{h}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \lambda_{n-1} + 4\lambda_n &= \frac{3(y_1 - y_{n-1})}{h} - \lambda_1. \end{aligned} \quad (39)$$

Maintenant on utilise la méthode d'élimination de Gauss. On obtient les équations de la forme

$$4\lambda_i + \beta_i \lambda_{i+1} = \gamma_i - \delta_i \cdot \lambda_n, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (40)$$

où

$$\beta_1 = 1, \gamma_1 = d_1, \delta_1 = 1$$

et

$$\begin{aligned} \beta_{i+1} &= \frac{-16}{\beta_i - 16}, \\ \gamma_{i+1} &= \frac{4(\gamma_i - 4d_{i+1})}{\beta_i - 16}, \\ \delta_{i+1} &= \frac{4\delta_i}{\beta_i - 16}. \end{aligned} \quad (41)$$

On a donc

$$4\lambda_{n-1} + \beta_{n-1} \lambda_n = \gamma_{n-1} - \delta_{n-1} \cdot \lambda_n. \quad (42)$$

La dernière équation de (39) est

$$\lambda_{n-1} + 4\lambda_n = d_n - \lambda_1. \quad (43)$$

On élimine λ_{n-1} de (42) et (43) et on obtient :

$$(\beta_{n-1} + \delta_{n-1} - 16)\lambda_n - 4\lambda_1 = \gamma_{n-1} - 4d_n. \quad (44)$$

En procédant de la même manière en sens inverse

$$(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\delta}_2 - 16)\lambda_1 - 4\lambda_n = \tilde{\gamma}_2 - 4d_1 \quad (45)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{i-1} &= \frac{-16}{\tilde{\beta}_i - 16} = \beta_{i+1}, \\ \tilde{\gamma}_{i-1} &= \frac{4(\tilde{\gamma}_i - 4d_{i-1})}{\tilde{\beta}_i - 16}, \\ \tilde{\delta}_{i-1} &= \frac{4\tilde{\delta}_i}{\tilde{\beta}_i - 16} = \delta_{i+1} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \tilde{\beta}_n = 1, \tilde{\gamma}_n = d_n, \tilde{\delta}_n = 1. \quad (46)$$

Les deux équations (44) et (45) déterminent ensuite λ_1 et λ_n . En utilisant (40) on peut déterminer $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$.

Il faut noter que pour n grand le système 2×2 formé par (44) et (45) est non-singulier. En fait, β_i converge vers $4(2-\sqrt{3})$, point fixe attractif de $F(\beta) = \frac{-16}{\beta-16}$. En posant $\beta = 4(2-\sqrt{3})$ ce système devient

$$\begin{aligned} -4\lambda_1 + (\beta-4)\lambda_n &= \gamma_{n-1}^{-4} d_n, \\ (\beta-4)\lambda_1 - 4\lambda_n &= \tilde{\gamma}_2 - 4 d_1 \end{aligned} \quad (47)$$

dont le déterminant est $16(2\sqrt{3}-3)$.

3.6 - INVERSE DE LA MATRICE CIRCULANTE

Maintenant considérons le cas de la fonction spline cardinale périodique. Supposons que l'on ait une infinité d'abscisses t_i , $i \in \mathbf{Z}$ de pas h . Considérons une fonction spline cubique cardinale périodique σ qui vérifie $\sigma(t_i) = y_i$, $i \in \mathbf{Z}$.

Supposons que les y_i soient périodiques : $y_{i+kn} = y_i$.

Donc y est borné.

On sait qu'il existe une fonction spline cubique cardinale 6 unique vérifiant $\sigma(t_i) = y_i$ et σ est une fonction continue et bornée (SCHOENBERG [31, lecture 4]).

Posons $\lambda_i = \sigma'(t_i)$, $i \in \mathbf{Z}$. Alors cette solution s'écrit

$$\lambda_i = \delta \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k})$$

avec $\gamma = \sqrt{3}-2$ et $\delta = -\frac{3\gamma}{h}$ (cf. Théorème 2 du chapitre I, section 1.5).

En tenant compte de la périodicité, l'expression ci-dessus devient :

$$\lambda_j = \delta \left(\sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k} + \gamma^{n-i} z_n \right) - \delta \left(\sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k} + \gamma^{i-1} z_1 \right) \quad (48)$$

avec

$$z_1 = \sum_{k=1}^n \gamma^{k-1} y_{n+1-k} / (1-\gamma^n),$$

$$z_n = \sum_{k=1}^n \gamma^{k-1} y_k / (1-\gamma^n). \quad (49)$$

En comparant ces dernières formules avec les formules (26) et (27) de 1.4, on voit que seules les expressions de z_1 et z_n sont différentes.

On connaît explicitement l'inverse de la matrice associée à la fonction spline cubique cardinale qui est de Töplitz et tridiagonale. Dans le cas présent le système est en fait de dimension fini.

En utilisant la périodicité, dans (20) P.J. LAURENT a précisé l'inverse de la matrice A associée au système (38) qui a une forme très simple et très compacte:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{-\gamma}{1-\gamma^2} \frac{1}{1-\gamma^n} (\gamma^{|i-j|} + \gamma^{n-|i-j|}). \quad (50)$$

En utilisant cette formule on retrouve bien les formules (48)-(49).



CHAPITRE - 4
=====

FONCTIONS SPLINE D'INTERPOLATION DE DEGRE p

$$p \geq 2$$

4.1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre on va montrer qu'en utilisant la technique des chapitres précédents, on peut traiter la fonction spline de degré p , p étant un entier, supérieur ou égal à 2, pair ou impair.

B-spline de degré p

Soit p un entier positif. La B-spline de degré p associée aux abscisses $0, 1, \dots, p+1$ est définie par

$$Q_{p+1}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \binom{p+1}{j} (t-j)_+^p. \quad (1)$$

On sait que

$$1^\circ) \quad Q_{p+1}(t) > 0, \text{ si } 0 < t < p+1, \\ = 0, \text{ sinon.}$$

$$2^\circ) \quad Q_{p+1}(t) \text{ est une fonction symétrique par rapport au point } t = \frac{p+1}{2} :$$

$$Q_{p+1}(t) = Q_{p+1}(p+1-t). \quad (2)$$

Considérons la dérivée k -ième de $Q_{p+1}(t)$, pour $k = 1, \dots, p-1$:

$$Q_{p+1}^{(k)}(t) = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{p!} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \binom{p+1}{j} (t-j)_+^{p-k}. \quad (3)$$

Ainsi

$$Q_{p+1}^{(k)}(t) = (-1)^k Q_{p+1}^{(k)}(p+1-t). \quad (4)$$

4.2 - RELATIONS VERIFIEES PAR LES VALEURS AUX ABSCISSES t_i DE LA k^e DERIVEE (pour p impair).

D'abord on considère le cas où p est impair. On désigne par S l'espace des fonctions spline cardinales de degré p associées à un ensemble bi-infini d'abscisses équidistantes t_i de pas h . Une fonction σ appartient à S si et seulement si

1°) La restriction de σ à $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré p , $i \in \mathbb{Z}$,

2°) $\sigma \in C^{p-1}(\mathbb{R})$.

Selon Schoenberg [31] on sait que si $y = (y_i) \in Y^\tau = \{y = (y_i) \mid y_i = 0 (|i|^\tau), i \rightarrow \pm \infty\}$, τ étant un entier positif ou nul, alors il existe

$\sigma \in S^\tau = \{\sigma \in S \mid \sigma(t) = 0 (|t|^\tau), t \rightarrow \pm \infty\}$ unique telle que $\sigma(t_i) = y_i$, $i \in \mathbb{Z}$.

On note que la B-spline de degré p associée aux abscisses équidistantes de pas h $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+(p+1)}$ peut être définie par

$$B_{i,p+1}(t) = Q_{p+1} \left(\frac{t-t_i}{h} \right). \quad (5)$$

Proposition 1

Soit σ une fonction spline cardinale de degré p , p impair, associée aux abscisses $t_i = (t_0 + ih)_{i=-\infty}^{\infty}$. Alors pour $k = 1, \dots, \frac{p-1}{2}$ et pour $i \in \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned} & a_1 \sigma^{(k)} \left(t_{i - \frac{p-1}{2}} \right) + a_2 \sigma^{(k)} \left(t_{i - \frac{p+1}{2}} \right) + \dots + a_{\frac{p+1}{2}} \sigma^{(k)} (t_i) \\ & \quad + \dots + a_p \sigma^{(k)} \left(t_{i + \frac{p-1}{2}} \right) \\ & = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{h^k} [b_1^k \sigma \left(t_{i - \frac{p-1}{2}} \right) + b_2^k \sigma \left(t_{i - \frac{p+1}{2}} \right) + \dots + \\ & \quad b_p^k \sigma \left(t_{i + \frac{p-1}{2}} \right)] \quad (6) \end{aligned}$$

où

$$a_j = p! Q_{p+1}(p+1-j), \quad (7)$$

$$b_j^k = \frac{p!}{p(p-1)\dots(p-k+1)} Q_{p+1}^{(k)}(p+1-j), \quad (8)$$

$$j = 1, \dots, p,$$

$$k = 1, \dots, p-1.$$

Démonstration

Notons que dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ on peut écrire $\sigma(t)$ sous la forme

$$\sigma(t) = \sum_{j=i-p}^i \tilde{\alpha}_j Q_{p+1}((t-t_j)/h)$$

où les coefficients $\tilde{\alpha}_j$ sont indéterminés.

Donc il suffit de démontrer les relations (6) pour σ de la forme suivante :

$$\sigma(t) = \sum_{j=-p}^0 \tilde{\alpha}_j Q_{p+1}((t-t_j)/h), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Puisque $Q_{p+1}(x) \equiv 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq p+1$, on a $a_j = 0$, $b_j^k = 0$, si

$j \leq 0$ ou $j \geq p+1$. En substituant (9) dans (6), on obtient le coefficient de $\tilde{\alpha}_j$ à gauche

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^k} \sum_{m=1}^p a_m Q_{p+1}^{(k)}(i+m-j-\frac{p-1}{2}) \\ &= \frac{1}{h^k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p! Q_{p+1}(p+1-m) Q_{p+1}^{(k)}(i+m-j-\frac{p-1}{2}) \\ &= \frac{1}{h^k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} p! Q_{p+1}(i+m-j-\frac{p-1}{2}) Q_{p+1}^{(k)}(p+1-m), \end{aligned}$$

en changeant l'indice de la sommation.

Le coefficient de $\tilde{\alpha}_j$ à droite de (6) est

$$\frac{1}{h^k} p! \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_{p+1}^{(k)}(p+1-m) Q_{p+1}(i+m-j-\frac{p-1}{2}).$$

Ainsi on a démontré (6).

q.e.d.

Remarque :

On déduit de (2) et (4)

$$a_j = a_{p+1-j}, \quad b_j^k = (-1)^k b_{p+1-j}^k. \quad (10)$$

On peut aussi vérifier facilement que

$$a_1 = a_p = 1, \quad b_1^k = (-1)^k b_p^k = 1. \quad (11)$$

Notons que les a_j ne dépendent pas de k .

Matriciellement on peut écrire le système (6) de la façon suivante :

$$A \Sigma_k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} B^k Y \quad (12)$$

où Σ_k est le vecteur bi-infini des $\sigma^{(k)}(t_i)$, $i \in \mathbf{Z}$, et Y est le vecteur des $\sigma(t_i)$, $i \in \mathbf{Z}$. Les matrices A et B^k sont de Töplitz. On a

$$A(i,i) = a_{\frac{p+1}{2}}, \quad A(i,i+j) = A(i,i-j) = a_{\frac{p+1}{2} + j} \\ j = 1, \dots, \frac{p-1}{2} \quad (13)$$

et les autres éléments en i -ième ligne sont égaux à zéro.

On a aussi :

$$B^k(i,i) = b_{\frac{p+1}{2}}^k, \quad B^k(i,i+j) = (-1)^k B^k(i,i-j) = b_{\frac{p+1}{2} + j}^k \quad (14) \\ j = 1, \dots, \frac{p-1}{2},$$

et les autres éléments en i -ième ligne sont égaux à zéro.

4.3 - RESOLUTION DU SYSTEME p-DIAGONALE

Afin de résoudre le système (12), on a besoin d'inverser la matrice A. Or on sait écrire l'inverse d'une matrice de Töplitz tri-diagonale. On essaye donc d'écrire A comme un produit de $\frac{p-1}{2}$ matrices de Töplitz tridiagonales. Dans ce but, considérons l'équation :

$$\begin{aligned} & a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \dots + a_p \\ &= p! \sum_{j=0}^{p-1} Q_{p+1}(j+1) x^j \\ &= \pi_p(x) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Rappelons que $\pi_p(x)$ est un polynôme de Euler-Frobenius défini par (33) dans la section 1.5. Les zéros de $\pi_p(x)$ sont simples, négatifs et inverses l'un de l'autre par paires. D'après (11), on a $a_1 = a_p = 1$. Alors on écrit

$$\begin{aligned} & a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \dots + a_p \\ &= (x^2 + C_1 x + 1)(x^2 + C_2 x + 1) \dots (x^2 + C_{\frac{p-1}{2}} x + 1). \end{aligned} \tag{16}$$

Donc on a

$$A = A_1 \cdot A_2 \dots A_{\frac{p-1}{2}} \tag{17}$$

où A_j est une matrice de Töplitz tridiagonale telle que

$$A_j(i, i) = C_j, A_j(i, i+1) = A_j(i, i-1) = 1, \tag{18}$$

$$j = 1, \dots, \frac{p-1}{2}.$$

Maintenant on considère la matrice B^k .

Cas I : k est pair

Considérons l'équation associée à B^k :

$$b_1^k x^{p-1} + b_2^k x^{p-2} + \dots + b_p^k = 0 \quad (19)$$

On a d'après (10) et (11)

$$b_j^k = b_{p+1-j}^k \text{ et } b_1^k = b_p^k = 1.$$

Donc l'équation (19) s'écrit

$$(x^2 + d_1^k x + 1) (x^2 + d_2^k x + 1) \dots (x^2 + d_{\frac{p-1}{2}}^k x + 1) = 0 \quad (20)$$

Alors

$$B^k = B_1^k \cdot B_2^k \dots B_{\frac{p-1}{2}}^k \quad (21)$$

où B_j^k est une matrice de Töplitz tridiagonale telle que

$$B_j^k(i, i) = d_j^k, B_j^k(i, i+1) = B_j^k(i, i-1) = 1, \quad (22)$$

$$j = 1, \dots, \frac{p-1}{2}.$$

Cas 2 : k est impair

Dans ce cas l'équation associée à B^k est

$$b_1^k x^{p-1} + b_2^k x^{p-2} + \dots + b_p^k = 0 \quad (23)$$

où d'après (10) et (11) on a

$$b_j^k = -b_{p+1-j}^k, b_1^k = -b_p^k = 1 \text{ et } b_{\frac{p-1}{2}}^k = 0. \quad (24)$$

L'équation (23) s'écrit alors :

$$(x^2 - 1)(x^{p-3} + \tilde{b}_1^k x^{p-4} + \dots + \tilde{b}_{\frac{p-4}{2}}^k x + 1) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\text{où } \tilde{b}_1^k &= b_2^k, \\
\tilde{b}_2^k &= b_3^k + 1, \\
\tilde{b}_3^k &= b_4^k + b_2^k, \\
\vdots & \\
\tilde{b}_j^k &= \begin{cases} b_{j+1}^k + b_{j-1}^k + \dots + 1, & \text{si } j \text{ est pair,} \\ b_{j+1}^k + b_{j-1}^k + \dots + b_2^k, & \text{si } j \text{ est impair.} \end{cases} \quad (26)
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$\tilde{b}_j^k = \tilde{b}_{p-3-j}^k \quad j = 1, \dots, p-4 \quad (27)$$

On peut alors écrire l'équation (25) sous la forme :

$$(x^2-1)(x^2+\tilde{d}_1^k x+1)(x^2+\tilde{d}_2^k x+1)\dots(x^2+\tilde{d}_{\frac{p-3}{2}}^k x+1) = 0. \quad (28)$$

Ainsi

$$B^k = P \cdot B_1^k \cdot B_2^k \dots B_{\frac{p-3}{2}}^k \quad (29)$$

où P est une matrice de Töplitz tridiagonale avec $P(i,i) = 0$,
 $P(i,i+1) = 1$, $P(i,i-1) = -1$ (30)

et $B_1^k, \dots, B_{\frac{p-3}{2}}^k$ sont des matrices de Töplitz tridiagonales telles que

$$B_j^k(i,i) = \tilde{d}_j^k, \quad B_j^k(i,i+1) = B_j^k(i,i-1) = 1, \quad (31)$$

$$j = 1, \dots, \frac{p-3}{2}.$$

4.4 - INVERSE DE LA MATRICE DE TOPLITZ p-DIAGONALE

Maintenant on montre comment inverser la matrice A. Rappelons de (17) que :

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdots A_{\frac{p-1}{2}}$$

où les matrices A_j sont de Töplitz et tridiagonales. Considérons l'équation associée à la matrice A_ℓ :

$$x^2 + C_\ell x + 1 = 0. \quad (32)$$

Soit α_ℓ une racine de (32) qui vérifie $|\alpha_\ell| < 1$. Alors l'inverse de A_ℓ est donnée par :

$$A_\ell^{-1}(i,j) = \frac{-\alpha_\ell}{1-\alpha_\ell^2} \alpha_\ell^{|i-j|}. \quad (33)$$

Notons que les matrices $A_1, \dots, A_{\frac{p-1}{2}}$ commutent entre elles.

Dans le cas $p = 5$, on a

$$A = A_1 \cdot A_2.$$

Afin de trouver l'inverse de la matrice A, il faut résoudre l'équation

$$AX = Y \quad (34)$$

ou encore

$$A_1 A_2 X = Y \quad (35)$$

d'où

$$A_2 X = A_1^{-1} Y \quad (36)$$

et

$$A_1 X = A_2^{-1} Y. \quad (37)$$

Si l'on soustrait l'équation (37) de (36), on obtient :

$$(A_2 - A_1)X = (A_1^{-1} - A_2^{-1})Y \quad (38)$$

Mais la matrice $A_2 - A_1$ est une matrice diagonale avec tous les éléments égaux à $C_2 - C_1$.

Donc

$$X = \frac{1}{C_2 - C_1} (A_1^{-1} - A_2^{-1})Y \quad (39)$$

On a ainsi :

$$A^{-1} = \frac{1}{C_2 - C_1} (A_1^{-1} - A_2^{-1}) \quad (40)$$

On montre par induction le résultat suivant :

Proposition 2

Soit p un entier impair. Si $p \geq 5$, l'inverse de la matrice

$$A = A_1 \cdots A_{\frac{p-1}{2}}$$

est

$$A^{-1} = f_1 A_1^{-1} + \cdots + f_{\frac{p-1}{2}} A_{\frac{p-1}{2}}^{-1} \quad (41)$$

où

$$f_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\frac{p-1}{2}} (C_i - C_j)} \quad (42)$$

(Pour être plus précis, il faudrait écrire $f_1^{(p)}, \dots, f_{\frac{p-1}{2}}^{(p)}$, car les f_j dépendent aussi de p).

Démonstration

Soit $n = \frac{p-1}{2}$. D'après (40) le résultat est valable pour $n = 2$.

Supposons que le résultat soit valable jusqu'à n . Considérons

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdots A_{n+1}$$

Il est important de remarquer que puisque les matrices A_1, \dots, A_{n+1} commutent entre elles, l'ordre dans lequel elles sont écrites n'est pas important.

On considère

$$AX = Y,$$

ou encore

$$A_1 \cdot A_2 \dots A_{n+1} X = Y.$$

Alors

$$A_{n+1} X = (A_1 \cdot A_2 \dots A_n)^{-1} Y \quad (43)$$

et

$$A_n X = (A_1 \dots A_{n-1} A_{n+1})^{-1} Y. \quad (44)$$

Par l'hypothèse d'induction on a

$$(A_1 \cdot A_2 \dots A_n)^{-1} = f_1 A_1^{-1} + \dots + f_n A_n^{-1} \quad (45)$$

où

$$f_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (C_i - C_j)}.$$

Aussi

$$(A_1 \dots A_{n-1} A_{n+1})^{-1} = \tilde{f}_1 A_1^{-1} + \dots + \tilde{f}_{n-1} A_{n-1}^{-1} + \tilde{f}_{n+1} A_{n+1}^{-1}$$

où

$$\tilde{f}_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n, j \neq n \\ i \neq j}}^{n+1} (C_i - C_j)}.$$

D'après (43) et (44) on obtient

$$\begin{aligned} (A_{n+1}^{-1} A_n) X &= [(A_1 \cdot A_2 \dots A_n)^{-1} - (A_1 \dots A_{n-1} A_{n+1})^{-1}] Y \\ &= [(f_1 - \tilde{f}_1) A_1^{-1} + \dots + (f_{n-1} - \tilde{f}_{n-1}) A_{n-1}^{-1} + f_n A_n^{-1} - \tilde{f}_{n+1} A_{n+1}^{-1}] Y. \end{aligned}$$

Pour $j = 1, \dots, n-1$

$$f_j - \tilde{f}_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (C_i - C_j)} - \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n, j \neq n \\ i \neq j}}^{n+1} (C_i - C_j)} = \frac{C_{n+1} - C_n}{\prod_{i=1}^{n+1} (C_i - C_j)}.$$

On a aussi

$$f_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} (C_i - C_n)},$$

$$\tilde{f}_{n+1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (C_i - C_{n+1})}.$$

Puisque $A_{n+1} - A_n$ est une matrice diagonale avec tous les éléments diagonaux égaux à $C_{n+1} - C_n$, on a

$$X = \frac{1}{(C_{n+1} - C_n)} [(f_1 - \tilde{f}_1)A_1^{-1} + \dots + (f_{n-1} - \tilde{f}_{n-1})A_{n-1}^{-1} + f_n A_n^{-1} + \tilde{f}_{n+1} A_{n+1}^{-1}] Y.$$

Donc

$$A^{-1} = f_1 A_1^{-1} + \dots + f_{n+1} A_{n+1}^{-1}$$

où

$$f_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n+1} (C_i - C_j)}.$$

Ainsi le résultat est valable pour $n+1$.

q.e.d.

Proposition 3

Les constantes f_1, \dots, f_n ($n \geq 2$) vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 + \dots + f_n &= 0 \\ C_1 f_1 + \dots + C_n f_n &= 0 \\ \vdots \\ C_1^{n-2} f_1 + \dots + C_n^{n-2} f_n &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Démonstration

Considérons les polynômes de Lagrange

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{(C_i - x)}{(C_i - C_j)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

On a

$$l_j(C_j) = 1, \quad l_j(C_i) = 0, \quad i \neq j.$$

On définit

$$L(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x).$$

Ainsi $L(x)$ est un polynôme de degré $n-1$ et $L(C_j) = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Donc L est une constante égale à 1.

Or

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{(C_i - x)}{(C_i - C_j)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n f_j \left[(-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n C_i x^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-3} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{k=i+1 \\ k \neq j}}^n C_i C_k x^{n-3} + \dots + C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_{j-1} C_{j+1} \cdot \dots \cdot C_n \right]. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^{n-1} : $\sum_{j=1}^n f_j = 0$ (47)

Le coefficient de x^{n-2} : $\sum_{j=1}^n f_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n C_i = 0.$

Donc

$$\sum_{j=1}^n C_j f_j = \sum_{j=1}^n f_j \sum_{i=1}^n C_i - \sum_{j=1}^n f_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n C_i = 0. \quad (48)$$

Le coefficient de x^{n-3} ; $\sum_{j=1}^n f_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{k=i+1}^n C_i C_k = 0.$

D'après (48) on obtient :

$$\sum_{j=1}^n f_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{k=i+1}^n C_i C_k + (C_1 \dots C_n) \sum_{j=1}^n f_j C_j = 0,$$

ou

$$\sum_{j=1}^n f_j \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n C_i C_k + \sum_{j=1}^n f_j C_j^2 = 0.$$

Or

$$\sum_{j=1}^n f_j = 0.$$

Donc

$$\sum_{j=1}^n f_j C_j^2 = 0. \quad (49)$$

De la même façon en considérant les coefficients de x^k , $k = n-4, \dots, 1$ et en réarrangeant les termes on obtient :

$$\begin{aligned} & C_1^3 f_1 + \dots + C_n^3 f_n = 0, \\ & \vdots \\ & C_1^{n-2} f_1 + \dots + C_n^{n-2} f_n = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

4.5 - EXPRESSION POUR LA k-ième DERIVEE AUX ABSCISSES t_i
(p impair)

La solution de (12) est donc

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} A^{-1} B^k \gamma \\ &= \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} (f_1 A_1^{-1} + \dots + f_{\frac{p-1}{2}} A_{\frac{p-1}{2}}^{-1}) B^k \gamma \end{aligned}$$

d'après (17) et (41).

On considère d'abord le cas où k est pair. Alors d'après (21)

$$\Sigma_k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} (f_1 A_1^{-1} + \dots + f_{\frac{p-1}{2}} A_{\frac{p-1}{2}}^{-1}) B_1^k \dots B_{\frac{p-1}{2}}^k \gamma.$$

Notons que les matrices $A_1^{-1}, \dots, A_{\frac{p-1}{2}}^{-1}, B_1^k, \dots, B_{\frac{p-1}{2}}^k$ commutent entre elles. On a

$$B_1^k A_1^{-1} = \frac{-(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1)}{1 - \alpha_1^2} S_1^k \quad (50)$$

$$\text{où } S_1^k(i, j) = \begin{cases} \alpha_1^{|i-j|} & , & \text{si } i \neq j, \\ \frac{2\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1}{\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1} & , & \text{si } i = j \end{cases} \quad (51)$$

d'après (22) et (33).

Posons

$$s_1^k = S_1^k(i, i) = \frac{2\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1}{\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} B_2^k \cdot B_1^k A_1^{-1} &= \frac{-(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1)(\alpha_1^2 + d_2^k \alpha_1 + 1)}{\alpha_1(1 - \alpha_1^2)} S_2^k \\ &\quad - \frac{(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1)(s_1^k - 1)}{(1 - \alpha_1^2)} N \end{aligned} \quad (52)$$

où

$$S_2^k(i,j) = \begin{cases} \alpha_1^{|i-j|} & , \text{ si } i \neq j \\ \frac{2\alpha_1^2 + d_2^k s_1^k \alpha_1}{\alpha_1^2 + d_2^k \alpha_1 + 1} & , \text{ si } i = j \end{cases} \quad (53)$$

d'après (33) et (50)

et

$$N(i,i+1) = N(i,i-1) = 1 \quad (54)$$

et les autres éléments en i -ième ligne sont égaux à zéro.

Finalement

$$\begin{aligned} B^k A_1^{-1} &= B_{\frac{p-1}{2}}^k \dots B_1^k A_1^{-1} \\ &= \frac{-1}{\frac{p-3}{2}} \frac{(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1)(\alpha_1^2 + d_2^k \alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1^2 + d_{\frac{p-1}{2}}^k \alpha_1 + 1) s_{\frac{p-1}{2}}^k}{(1-\alpha_1^2) \alpha_1} \\ &\quad - \left[\frac{(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1)(s_1^k - 1)}{(1-\alpha_1^2)} B_{\frac{p-1}{2}}^k \dots B_3^k + \frac{(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1)(\alpha_1^2 + d_2^k \alpha_1 + 1)(s_2^k - 1)}{(1-\alpha_1^2) \alpha_1} B_{\frac{p-1}{2}}^k \dots B_4^k \right. \\ &\quad + \dots + \\ &\quad \frac{(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1^2 + d_{\frac{p-5}{2}}^k \alpha_1 + 1)(s_{\frac{p-5}{2}}^k - 1) B_{\frac{p-1}{2}}^k}{\frac{p-7}{2} (1-\alpha_1^2) \alpha_1} + \\ &\quad \left. \frac{(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1^2 + d_{\frac{p-3}{2}}^k \alpha_1 + 1)(s_{\frac{p-3}{2}}^k - 1)}{\frac{p-5}{2} (1-\alpha_1^2) \alpha_1} \right] N \end{aligned} \quad (55)$$

où

$$S_{\frac{p-1}{2}}^k(i,j) = \begin{cases} \alpha_1^{|i-j|} & , \text{ si } i \neq j \\ \frac{2\alpha_1^2 + d_{\frac{p-1}{2}}^k s_{\frac{p-3}{2}}^k \alpha_1}{\alpha_1^2 + d_{\frac{p-1}{2}}^k \alpha_1 + 1} & , \text{ si } i = j \end{cases} \quad (56)$$

et

$$s_\ell^k = \frac{2\alpha_1^2 + d_\ell^k s_{\ell-1}^k \alpha_1}{\alpha_1^2 + d_\ell^k \alpha_1 + 1}, \quad \ell = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \quad (57)$$

avec $s_0^k = 1$.

En utilisant le fait que

$$\alpha_1^2 + C_1 \alpha_1 + 1 = 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} s_{\ell-1}^k &= ((\alpha_1^2 - 1)[(-1)^{\ell-1} C_1^{\ell-1} + (-1)^{\ell-2} (d_1^k + \dots + d_\ell^k) C_1^{\ell-2} \\ &+ (-1)^{\ell-3} \left(\sum_{j_1=1}^{\ell} \sum_{j_2=j_1+1}^{\ell} d_{j_1}^k d_{j_2}^k \right) C_1^{\ell-3} + \dots + \\ &+ \frac{\sum_{j_1=1}^{\ell} \sum_{j_2=j_1+1}^{\ell} \dots \sum_{j_{\ell-1}=j_{\ell-2}+1}^{\ell} d_{j_1}^k \dots d_{j_{\ell-1}}^k \alpha_1^{\ell-1}}{(\alpha_1^2 + d_1^k \alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1^2 + d_\ell^k \alpha_1 + 1)}, \end{aligned}$$

$\ell = 1, \dots, \frac{p-3}{2}$.

On a pour k pair

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)}(t_j) &= \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} A^{-1} B^k \gamma(i) \\ &= \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} (f_1 B^k A_1^{-1} + f_2 B^k A_2^{-1} + \dots + f_{\frac{p-1}{2}} B^k A_{\frac{p-1}{2}}^{-1}) \gamma(i) \end{aligned}$$

D'après la proposition 3 on sait que

$$\begin{aligned} f_1 + \dots + f_{\frac{p-1}{2}} &= 0 \\ C_1 f_1 + \dots + C_{\frac{p-1}{2}} f_{\frac{p-1}{2}} &= 0 \\ \vdots \\ C_1^{\frac{p-5}{2}} f_1 + \dots + C_{\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-5}{2}} f_{\frac{p-1}{2}} &= 0. \end{aligned}$$

Donc le coefficient de N dans $A^{-1}B^k$ devient nul et on obtient pour k pair :

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)}(t_i) = & \frac{1}{h^k} [r y_i + u_1 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j (y_{i+j} + y_{i-j}) \\ & + u_2 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_2^j (y_{i+j} + y_{i-j}) + \dots + u_{\frac{p-1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{\frac{p-1}{2}}^j (y_{i+j} + y_{i-j})] \quad (58) \end{aligned}$$

où les constantes $r, u_1, \dots, u_{\frac{p-1}{2}}$ dépendent de k et de p .

De la même façon si k est impair on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)}(t_i) = & \frac{1}{h^k} [\tilde{u}_1 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j (y_{i+j} - y_{i-j}) \\ & + \tilde{u}_2 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_2^j (y_{i+j} - y_{i-j}) + \dots + \tilde{u}_{\frac{p-1}{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{\frac{p-1}{2}}^j (y_{i+j} - y_{i-j})] \quad (59) \end{aligned}$$

où les constantes dépendent de k et de p .

Remarquons que l'on peut aussi obtenir les constantes en (58) et (59) par l'exactitude pour les polynômes de degré p . La technique est la même que dans la section (2.6).

4.6 - FONCTIONS SPLINE CARDINALES TRONQUEES DE DEGRE IMPAIR

On peut définir une fonction spline sur un intervalle fini $[a, b]$ par la troncature des sommes infinies en (58) et (59).

Précisément on écrit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j y_{i+j} = \sum_{j=1}^{n-i} \alpha_1^j y_{i+j} + \alpha_1^{n-i+1} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^{j-1} y_{n+j}$$

et on remplace

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^{j-1} y_{n+j} \quad \text{par} \quad \sum_{\ell=1}^{p+1} v_{\ell} y_{n+1-\ell} \quad (60)$$

où les v_ℓ sont choisis de façon à avoir l'exactitude pour les polynômes de degré p . Les polynômes de Euler-Frobenius jouent un rôle important [31]. De la même façon, on effectue la troncature des autres sommes. On peut majorer l'erreur en utilisant la technique de la section 1.7.

On obtient pour $f \in C^{p+1}[t_1, t_n]$

$$|f^{(k)}(t_i) - \sigma^{(k)}(t_i)| = O(h^{p+1-k}), \quad k = 1, \dots, p-1. \quad (61)$$

On en déduit que la spline cardinale tronquée a un ordre de convergence uniforme en h^{p+1} , ce qui est optimal. Par ailleurs son calcul devient très simple.

Remarque

On a traité le cas général de la fonction spline cardinale en utilisant les relations entre $\sigma^{(k)}(t_i)$ pour k fixé. Ensuite on définit la fonction spline sur un intervalle fini par la troncature des sommes infinies avec une correction convenable.

Bien sûr ces résultats sont valables pour les fonctions splines quintiques. Plus précisément, on a pour $i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \sigma'(t_{i-2}) + 26 \sigma'(t_{i-1}) + 66 \sigma'(t_i) + 26 \sigma'(t_{i+1}) + \sigma'(t_{i+2}) \\ &= \frac{5}{h} (-\sigma(t_{i-2}) - 10 \sigma(t_{i-1}) + 10 \sigma(t_{i+1}) + \sigma(t_{i+2})); \\ & \sigma''(t_{i-1}) + 26 \sigma''(t_i) + 66 \sigma''(t_{i+1}) + 26 \sigma''(t_{i+2}) + \sigma''(t_{i+3}) \\ &= \frac{20}{h^2} (\sigma(t_{i-2}) + 2 \sigma(t_{i-1}) - 6 \sigma(t_i) + 2 \sigma(t_{i+1}) + \sigma(t_{i+2})). \end{aligned} \quad (63)$$

A partir de ces relations on retrouve les relations :

$$\lambda_i = \frac{1}{h} \left[C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) \right],$$

$$\mu_i = \frac{1}{h^2} \left[C_3 y_i + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}) + C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}) \right]$$

où

$$y_i = \sigma(t_i), \quad \lambda_i = \sigma'(t_i), \quad \mu_i = \sigma''(t_i)$$

et α et β vérifient l'équation suivante :

$$x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1 = 0.$$

Dans le chapitre 2, au lieu des relations ci-dessus, on a utilisé les relations (18) de la section 2.6 qui font intervenir $\sigma'(t_i)$ et $\sigma''(t_i)$, ce qui nous permet de préciser les conditions de bout explicitement.

4.7 - FONCTIONS SPLINE DE DEGRE PAIR

Maintenant on considère une fonction spline cardinale d'interpolation de degré pair p . Supposons que l'on ait des abscisses t_i équidistantes de pas h en nombre infini, $t_{i+1} - t_i = h$, $i \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas au lieu d'interpoler aux abscisses t_i , il est préférable d'interpoler au milieu $t_{i+1/2}$ des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$. Ainsi σ est un polynôme de degré p dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ et il vérifie la condition

$$\sigma(t_{i+1/2}) = y_i \tag{64}$$

Soit σ appartenant à $C^{p-1}(\mathbb{R})$.

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & a_1 \sigma^{(k)}(t_{i-p/2}) + a_2 \sigma^{(k)}(t_{i-\frac{p-2}{2}}) + \dots + a_{\frac{p}{2}+1} \sigma^{(k)}(t_i) + \dots + a_{p+1} \sigma^{(k)}(t_{i+\frac{p}{2}}) \\
 &= \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} [b_1^k \sigma(t_{i-\frac{p-1}{2}}) + b_2^k \sigma(t_{i-\frac{p-3}{2}}) + \dots + b_{\frac{p}{2}}^k \sigma(t_{i-\frac{1}{2}}) + \\
 & \quad \dots + b_p^k \sigma(t_{i+\frac{p-1}{2}})] \tag{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{où } a_j &= p! Q_{p+1}(p+\frac{3}{2}-j), & j &= 1, \dots, p+1, \\
 b_j^k &= \frac{p!}{p(p-1)\dots(p-k+1)} Q_{p+1}^{(k)}(p+1-j), \\
 & & k &= 0, 1, \dots, p-1, \\
 & & j &= 1, \dots, p \tag{66}
 \end{aligned}$$

(Sakai [30]).

On déduit de (2) et (4)

$$a_j = a_{p+2-j} \quad \text{et} \quad b_j^k = (-1)^k b_{p+1-j}^k \tag{67}$$

Matriciellement, on écrit (65) :

$$A_{\Sigma}^k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} B^k Y \tag{68}$$

où A est une matrice de Töplitz symétrique telle que

$$\begin{aligned}
 A(i,i) &= a_{\frac{p}{2}+1}, \quad A(i,i+j) = A(i,i-j) \\
 &= a_{\frac{p}{2}+j+1}, \\
 & \quad j = 1, \dots, \frac{p}{2} \tag{69}
 \end{aligned}$$

et les autres éléments en i-ième ligne sont nuls ; B^k est une matrice de Töplitz telle que

$$B^k(i,i) = b_{\frac{p}{2}+1}^k, \quad B^k(i,i+j) = b_{\frac{p}{2}+j+1}^k, \quad j = 1, \dots, \frac{p}{2}-1,$$

$$B^k(i,i-j) = b_{\frac{p}{2}-j+1}^k, \quad j = 1, \dots, \frac{p}{2}, \quad (70)$$

Σ_k et Y sont les vecteurs infinis formés avec $6^{(k)}(t_i)$ et y_i respectivement.

La matrice A est similaire à la matrice donnée par (13). L'équation associée est

$$a_1 x^p + a_2 x^{p-1} + \dots + a_{p+1}$$

$$= p! \sum_{j=0}^p Q_{p+1}(j+1/2) x^j$$

$$= \frac{1}{2^p} \tilde{\pi}_p(x) = 0 \quad (71)$$

où $\tilde{\pi}_p(x)$ est le polynôme d'Euler-Frobenius. Les zéros de $\tilde{\pi}_p(x)$ sont simples, négatifs et inverses l'un de l'autre par paires (Schoenberg [31]). On écrit

$$a_1 x^p + a_2 x^{p-1} + \dots + a_{p+1} = (x^2 + C_1 x + 1) \dots (x^2 + C_{\frac{p}{2}} x + 1) = 0.$$

Donc, comme dans le cas de la fonction spline de degré impair, on peut écrire A comme un produit des matrices de Töplitz tridiagonales

$A_1, \dots, A_{p/2}$. Les matrices $A_1, \dots, A_{p/2}$ sont telles que

$$A_j(i,i) = C_j, \quad A_j(i,i-1) = A_j(i,i+1) = 1,$$

$$j = 1, \dots, p/2. \quad (72)$$

Donc l'inverse de A s'écrit comme une combinaison linéaire de $A_1^{-1}, \dots, A_{p/2}^{-1}$:

$$A^{-1} = f_1 A_1^{-1} + \dots + f_{p/2} A_{p/2}^{-1} \quad (73)$$

où

$$f_j = \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p/2} (C_i - C_j)}, \quad j = 1, \dots, p/2. \quad (74)$$

On a aussi

$$A_{\ell}^{-1}(i,j) = \frac{-\alpha_{\ell}}{1-\alpha_{\ell}^2} \alpha_{\ell}^{|i-j|}, \quad \ell = 1, \dots, p/2 \quad (75)$$

où α_{ℓ} est la racine de

$$x^2 + C_{\ell}x + 1 = 0$$

de module inférieur à 1.

Considérons maintenant la matrice B^k .

Cas 1 : k est pair.

L'équation associée à B^k est

$$b_1^k x^{p-1} + b_2^k x^{p-2} + \dots + b_p^k = 0 \quad (76)$$

Notons que d'après (67)

$$b_j^k = b_{p+1-j}^k, \quad j = 1, \dots, p.$$

On a aussi $b_1^k = b_p^k = 1$.

Donc l'équation (76) s'écrit :

$$(x+1) \tilde{b}_0^k x^{p-2} + \tilde{b}_1^k x^{p-3} + \dots + \tilde{b}_{p-3}^k x + 1 = 0 \quad (77)$$

où

$$b_j^k = \tilde{b}_{j-1}^k + \tilde{b}_{j-2}^k, \quad j = 2, \dots, p-1$$

avec

$$\tilde{b}_0^k = \tilde{b}_{p-2}^k = 1.$$

On peut vérifier facilement que

$$\tilde{b}_j^k = \tilde{b}_{p-2-j}^k, \quad j = 2, \dots, p-3.$$

On peut donc écrire (77) sous la forme

$$(x+1)(x^2 + d_1^k x + 1) \dots (x^2 + d_{\frac{p-2}{2}}^k x + 1) = 0.$$

Ainsi

$$B^k = P \cdot B_1^k \dots B_{\frac{p-2}{2}}^k \quad (78)$$

où B_j^k sont des matrices de Töplitz tridiagonales telles que

$$B_j^k(i, i) = d_j^k, \quad B_j^k(i, i+1) = B_j^k(i, i-1) = 1 \quad (79)$$

et P est une matrice de Töplitz telle que

$$P(i, i-1) = 1, \quad P(i, i) = 1 \quad (80)$$

et les autres éléments en i -ième ligne sont nuls.

Cas 2 : k est impair

Dans ce cas l'équation associée à B est

$$b_1^k x^{p-1} + b_2^k x^{p-2} + \dots + b_p^k = 0 \quad (81)$$

où

$$b_j^k = -b_{p+1-j}^k, \quad j = 1, \dots, p$$

et

$$b_1^k = -b_p^k = 1. \quad (82)$$

L'équation (81) s'écrit donc

$$(x-1)(x^{p-2} + \tilde{b}_1^k x^{p-3} + \dots + \tilde{b}_{p-3}^k + 1) = 0 \quad (83)$$

où

$$b_j^k = \tilde{b}_{j-1}^k - \tilde{b}_{j-2}^k, \quad j = 2, \dots, p-1 \quad (84)$$

avec

$$\tilde{b}_0^k = \tilde{b}_{p-2}^k = 1.$$

Par ailleurs :

$$\tilde{b}_j^k = \sum_{i=1}^{j+1} b_j^k, \quad j = 2, \dots, p-3. \quad (85)$$

Il est facile de vérifier que

$$\tilde{b}_j^k = \tilde{b}_{p-2-j}^k, \quad j = 1, \dots, p-3. \quad (86)$$

On peut donc écrire l'équation (83) sous la forme

$$(x-1)(x^2+d_1^k x+1)\dots(x^2+d_{\frac{p-2}{2}}^k x+1) = 0 \quad (87)$$

Ainsi

$$B^k = Q \cdot B_1^k \dots B_{\frac{p-2}{2}}^k \quad (88)$$

où B_j^k sont des matrices de Töplitz tridiagonales telles que

$$B_j^k(i,i) = d_j^k, B_j^k(i,i+1) = B_j^k(i,i-1) = 1 \quad (89)$$

et Q est une matrice de Töplitz telle que

$$Q(i,i) = -1, Q(i,i-1) = 1 \quad (90)$$

et les autres éléments en i -ième ligne sont nuls.

4.8 - EXPRESSION POUR LA k -ième DERIVEE AUX ABSCISSES t_i (p pair)

D'après (68) on a

$$\Sigma_k = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{h^k} A^{-1} B^k \gamma.$$

En remplaçant A^{-1} d'après (73) et B^k d'après (78) et (88) selon le cas et en simplifiant on obtient

1) Si k est pair, alors

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(k)}(t_i) &= u_1 \left[y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^k y_{i+k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^{k-1} y_{i-k} \right] \\
 &+ u_2 \left[y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_2^k y_{i+k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_2^{k-1} y_{i-k} \right] \\
 &+ \dots + \\
 &+ u_{p/2} \left[y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{p/2}^k y_{i+k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{p/2}^{k-1} y_{i-k} \right]. \quad (91)
 \end{aligned}$$

2) Si k est impair, alors

$$\begin{aligned}
 \sigma^{(k)}(t_i) &= \tilde{u}_1 \left[y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^k y_{i+k} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^{k-1} y_{i-k} \right] \\
 &+ \tilde{u}_2 \left[y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_2^k y_{i+k} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_2^{k-1} y_{i-k} \right] \\
 &+ \dots + \\
 &+ \tilde{u}_{p/2} \left[y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{p/2}^k y_{i+k} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{p/2}^{k-1} y_{i-k} \right]. \quad (92)
 \end{aligned}$$

Par l'exactitude pour des polynômes de degré p on peut obtenir l'équation vérifiée par $\alpha_1, \dots, \alpha_{p/2}$ et aussi des expressions simples pour $u_1, \dots, u_{p/2}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{p/2}$.

Par la troncature des sommes infinies en (91) et (92) on définit comme précédemment une fonction spline sur un intervalle fini $[a, b]$. La troncature est effectuée de manière à obtenir l'exactitude pour les polynômes de degré p . Cette fonction spline cardinale tronquée entraîne une convergence uniforme d'ordre h^{p+1} qui est optimale.

CHAPITRE - 5
=====

FONCTIONS SPLINE CUBIQUES DE LISSAGE

5.1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre, en utilisant l'analogie entre les fonctions splines d'interpolation et les fonctions splines de lissage définies sur un intervalle fini de \mathbb{R} on définit une fonction spline cubique cardinale de lissage.

Soit $[a,b]$ un intervalle de \mathbb{R} et soit $[a,b]$ divisé en $(n-1)$ sous-intervalles par des abscisses équidistantes $a = t_1 < \dots < t_n = b$ de pas h . Supposons que les quantités z_i , $i = 1, \dots, n$ soient données. On fixe le paramètre de lissage $\xi > 0$. Considérons le problème suivant :

$$\min_{f \in H^2[a,b]} \int_a^b f''(t)^2 dt + \xi \sum_{i=1}^n (f(t_i) - z_i)^2.$$

On sait que la solution est une fonction spline cubique σ qui vérifie les conditions de bout naturelles. Précisément

1°) σ est un polynôme de degré 3 sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i=1, \dots, n-1$,

2°) $\sigma \in C^2[a,b]$,

3°) $\sigma''(t_1) = \sigma''(t_n) = 0$.

En plus

$$\sigma'''(t_i^+) - \sigma'''(t_i^-) + \xi (\sigma(t_i) - z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

où on suppose que $\sigma'''(t_1^-) = \sigma'''(t_n^+) = 0$.

Supposons que l'on ait une infinité des abscisses t_i , $i \in \mathbb{Z}$ équidistantes de pas h . Les quantités z_i , $i \in \mathbb{Z}$ sont données. On se propose de déterminer une fonction σ qui vérifie les conditions suivantes :

1°) σ est un polynôme de degré 3 sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z}$,

2°) σ , σ' et σ'' sont continues en t_i , $i \in \mathbb{Z}$,

$$3°) \sigma'''(t_i^+) - \sigma'''(t_i^-) + \xi(\sigma(t_i) - z_i) = 0, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Soit τ un entier positif ou nul fixé. Si $z = (z_i)$ appartient à $Y^\tau = \{y = (y_i) \mid y_i = 0(|i|^\tau), i \rightarrow \pm \infty\}$, alors on démontre qu'il existe une fonction spline cubique cardinale 6 unique qui vérifie (1) et qui appartient à $S^\tau = \{\sigma \mid \sigma(t) = 0(|t|^\tau), t \rightarrow \pm \infty\}$.

On prend $y_i = \sigma(t_i)$, $\lambda_i = \sigma'(t_i)$ comme inconnues. Alors comme dans le cas de la fonction spline quintique, on est conduit à un système tridiagonal par bloc. Le système dépend du paramètre de lissage. On donne les expressions explicites pour y_i et λ_i en fonction des z_i .

5.2 - SYSTEME LINEAIRE TRIDIAGONAL PAR BLOC

La condition (1) s'écrit

$$\frac{6}{h^2}(\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1} - \frac{2}{h}y_{i+1} + \frac{4}{h}y_i - \frac{2}{h}y_{i-1}) + \xi(y_i - z_i) = 0 \quad (2)$$

La continuité de la dérivée seconde en t_i donne les relations suivantes :

$$\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} - \frac{3}{h}(y_{i+1} - y_{i-1}) = 0. \quad (3)$$

Soit

$$w = \frac{\xi h^2}{2}.$$

On écrit les équations (2) et (3) matriciellement de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ h\lambda_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12+w & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_i \\ h\lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ h\lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wz_i \\ 0 \end{bmatrix} .$$

On pose

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12+w & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = A^t,$$

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} y_i \\ h\lambda_i \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} wz_i \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ainsi on a

$$A\Lambda_{i-1} + B\Lambda_i + C\Lambda_{i+1} = D_i, \quad i \in Z. \quad (4)$$

On remarque que ce système est analogue au système (18) dans le cas de fonction spline quintique cardinale d'interpolation. La matrice B dépend du paramètre de lissage ξ alors que les matrices A et C n'en dépendent pas.

Formellement on écrit la solution

$$\Lambda_i = K \left[D_i + \sum_{k=1}^{\infty} G_1^k D_{i+k} + \sum_{k=1}^{\infty} G_2^k D_{i-k} \right] \quad (5)$$

où K, G_1 , G_2 sont les matrices 2×2 qui vérifient

$$G_1^2 A + G_1 B + C = 0, \quad (6)$$

$$G_2^2 C + G_2 B + A = 0, \quad (7)$$

$$K(G_2 C + B + G_1 A) = I.$$

Comme dans le cas de la fonction spline quintique d'interpolation, on passe de A à C en changeant les signes des éléments hors diagonaux. B est encore une matrice diagonale. On passe alors de G_1 à G_2 en changeant les signes des éléments hors diagonaux. Par conséquent K est une matrice diagonale.

Les valeurs propres possibles de G_1 sont les racines du polynôme défini par le déterminant $(\lambda^2 A + \lambda B + C) = 0$.

En remplaçant A, B, C par leurs valeurs, on obtient :

$$\lambda^4 + \left(\frac{\omega-12}{3}\right)\lambda^3 + \left(\frac{18+4\omega}{3}\right)\lambda^2 + \left(\frac{\omega-12}{3}\right)\lambda + 1 = 0. \quad (8)$$

L'équation ci-dessus s'écrit encore :

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 + \frac{\omega}{3} \lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0,$$

d'où

$$\frac{3}{\omega} + \frac{\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 1)}{(1-\lambda)^4} = 0,$$

ou encore

$$\lambda F_3(\lambda) = -\frac{3}{\omega} \quad (9)$$

où la fonction F_3 est définie par (31) dans la section 1.5.

Pour des raisons de convergence, on s'intéresse aux racines α et β de (8) de module inférieur à 1. On écrit l'équation (8) comme

$$(\lambda^2 + a\lambda + 1)(\lambda^2 + b\lambda + 1) = 0$$

où

$$a+b = \frac{\omega-12}{3}, \quad ab = \frac{18+4\omega}{3} - 2 = \frac{12+4\omega}{3}.$$

Donc

$$a = \frac{\omega-12}{3} - \frac{\sqrt{\omega(\omega-72)}}{3}, \quad b = \frac{\omega-12}{3} + \frac{\sqrt{\omega(\omega-72)}}{3} \quad (10)$$

et

$$\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}. \quad (11)$$

Il y a 3 cas différents :

1°) $\omega > 72$, α et β sont réelles et distinctes.

2°) $\omega = 72$, $\alpha = \beta = -5+2\sqrt{6}$.

3°) $\omega < 72$, α et β sont complexes conjuguées.

Il est clair d'après (9) que si ω tend vers 0, alors α et β tendent vers 1 et si $\omega \rightarrow \infty$, alors α tend vers 0 et β tend vers $-2+\sqrt{3}$.

5.3 - CONSTRUCTION DE G_1 SOLUTION D'UNE EQUATION MATRICIELLE QUADRATIQUE

Si $\omega \neq 72$, alors les vecteurs propres $X = [x_1, x_2]$ et $Y = [y_1, y_2]$ de G_1 associés respectivement aux valeurs propres α et β sont donnés par

$$3(1-\alpha^2)x_1 + (\alpha^2 + 4\alpha + 1)x_2 = 0$$

et

$$3(1-\beta^2)y_1 + (\beta^2 + 4\beta + 1)y_2 = 0.$$

Posons

$$u = \frac{3(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 + 4\alpha + 1}, \quad v = \frac{\beta^2 + 4\beta + 1}{3(\beta^2 - 1)}.$$

Donc

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

et

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & -u \\ -v & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -u \\ -v & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(cf. section 2.4).

Si $\omega = 72$, on a $\alpha = \beta$. On peut trouver un vecteur propre $X = [x_1, x_2]$ de G_1 associé à α . Il vérifie

$$3(1-\alpha^2)x_1 + (\alpha^2 + 4\alpha + 1)x_2 = 0. \quad (14)$$

Dans le cas présent on ne peut pas trouver un deuxième vecteur propre linéairement indépendant. Donc on ne peut pas construire G_1 en utilisant la méthode décrite ci-dessus. On va donner une autre méthode pour construire G_1 .

On choisit α et β qui vérifient

$$\alpha F_3(\alpha) = \beta F_3(\beta) = -\frac{3}{\omega}$$

et qui sont inférieurs à 1 en module. Comme la matrice satisfait son équation caractéristique, on a

$$(G_1 - \alpha)(G_1 - \beta) = 0,$$

d'où

$$G_1^2 - (\alpha + \beta)G_1 + \alpha\beta = 0.$$

En substituant $G_1^2 = (\alpha + \beta)G_1 - \alpha\beta$ en (6) on obtient

$$G_1[(\alpha + \beta)A + B] = \alpha\beta A - C,$$

soit

$$G_1 = (\alpha\beta A - C)[(\alpha + \beta)A + B]^{-1}. \quad (15)$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire d'avoir $\alpha \neq \beta$. On remarque que même dans le cas où $\omega < 72$, quand les racines α et β sont complexes conjuguées, la matrice G_1 est réelle. On obtient G_2 en changeant les signes des éléments hors diagonaux.

Pour $\omega = 72$, d'après (15) on a

$$G_1 = (\alpha^2 A - C) (2\alpha A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8\alpha+1}{3} & 8\alpha \\ -\frac{\alpha}{3} & -\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Donc on écrit

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ -\alpha/3 & \alpha \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

$$u = \frac{3(\alpha^2 - 1)}{\alpha^2 + 4\alpha + 1}$$

Ou encore

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ -\alpha/3 & \alpha \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

et

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha/3 & \alpha \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Il y aura toujours les deux cas différents : $\omega \neq 72$ et $\omega = 72$. Il n'est pas nécessaire de distinguer entre les cas $\omega < 72$ et $\omega > 72$, l'expression pour G_1 étant donnée par la même équation (12).

5.4 - EXPRESSIONS POUR LES VALEURS DE LA FONCTION ET DE LA DERIVEE PREMIERE EN t_i

Cas I : $\omega \neq 72$

En substituant G_1 et G_2 par les valeurs de (12) et de (13) dans l'équation (5) on obtient :

$$\Lambda_i = K \left\{ \begin{bmatrix} \omega z_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u \\ v & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega z_{i+k} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -u \\ -v & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -u \\ -v & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega z_{i-k} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soit

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

En simplifiant on a

$$y_i = k_1 \omega \left[z_i + \frac{1}{1-uv} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k (z_{i+k} + z_{i-k}) - uv \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k (z_{i+k} + z_{i-k}) \right) \right], \quad (19)$$

$$h\lambda_i = \frac{k_2 \omega (-v)}{1-uv} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k (z_{i+k} - z_{i-k}) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k (z_{i+k} - z_{i-k}) \right]. \quad (20)$$

Posons

$$\begin{aligned} C_0 &= k_1 \omega, & C_1 &= \frac{k_1 \omega \alpha}{1-uv}, & C_2 &= \frac{-k_1 \omega \beta uv}{1-uv}, \\ C_3 &= \frac{-k_2 \omega \alpha v}{1-uv}, & C_4 &= \frac{k_2 \omega \beta v}{1-uv}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ainsi

$$y_i = C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}), \quad (22)$$

$$h\lambda_i = C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}) + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}). \quad (23)$$

Notons que

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta} \quad (24)$$

et

$$\frac{C_3}{\alpha} + \frac{C_4}{\beta} = 0. \quad (25)$$

Cas II : $\omega = 72$.

En remplaçant G_1 et G_2 par les valeurs de (17) et de (18) dans (5), on obtient :

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \omega z_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega z_{i+k} \\ 0 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k}{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \omega z_{i-k} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

En simplifiant on a

$$y_i = k_1 \omega \left[z_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \left(1 + \frac{k}{3} u \right) (z_{i+k} + z_{i-k}) \right] \quad (26)$$

et

$$h\lambda_i = k_2 \omega \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \frac{k}{3} (z_{i+k} - z_{i-k}). \quad (27)$$

Soient

$$C_0 = k_1 \omega, \quad C_1 = k_1 \omega \alpha, \quad C_2 = \frac{k_1 \omega \alpha u}{3} \quad \text{et} \quad C_3 = \frac{k_2 \omega \alpha}{3}. \quad (28)$$

On a donc

$$y_i = C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}), \quad (29)$$

$$h \lambda_i = C_3 \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}). \quad (30)$$

On remarque que

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha}. \quad (31)$$

5.5 - DETERMINATION DES COEFFICIENTS

Comme dans le cas des fonctions spline quintiques d'interpolation de la section 2.5, on donne maintenant une autre méthode pour déterminer les constantes dans les équations (22)-(23) et (29)-(30).

Pour le cas $\omega \neq 72$ on a

$$y_i = C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}), \quad (22)$$

$$h \lambda_i = C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}) + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}). \quad (23)$$

Exactitude P_3

Prenons $t_i = 0$, $h = 1$, $y_i = z_i$.

Grâce à la symétrie, l'équation (22) est vérifiée automatiquement pour $f(t) = t$ et t^3 . L'exactitude pour $f(t) = 1$ et t^2 donne les expressions suivantes :

$$C_0 + 2C_1 F_0(\alpha) + 2C_2 F_0(\beta) = 1 \quad (32)$$

$$C_1 F_2(\alpha) + C_2 F_2(\beta) = 0 \quad (33)$$

De la même façon l'exactitude pour $f(t) = t$ et t^3 pour (23) implique

$$C_3 F_1(\alpha) + C_4 F_1(\beta) = 1/2 \quad (34)$$

$$C_3 F_3(\alpha) + C_4 F_3(\beta) = 0 \quad (35)$$

L'exactitude pour $f(t) = 1$ et t^2 est automatique.

Ainsi en prenant α et β arbitraires mais inférieure à 1 en module, on peut choisir les constantes C_0, C_1, C_2, C_3 et C_4 pour avoir l'exactitude pour les polynômes de degré 3. Il reste un degré de liberté.

Continuité de la dérivée seconde :

La continuité de la dérivée seconde est exprimée par l'équation suivante :

$$h(\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1}) = 3(y_{i+1} - y_{i-1}).$$

Posons

$$R_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} z_{i+1+k}, \quad R_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} z_{i+1+k},$$

$$L_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} z_{i-1-k}, \quad L_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} z_{i-1-k}.$$

Donc

$$h\lambda_{i-1} = C_3[z_i + \alpha z_{i+1} + \alpha^2 R_1] - C_3 L_1 + C_4[z_i + \beta z_{i+1} + \beta^2 R_2] - C_4 L_2,$$

$$h\lambda_i = C_3[z_{i+1} + \alpha R_1] - C_3[z_{i-1} + \alpha L_1] + C_4[z_{i+1} + \beta R_2] - C_4[z_{i-1} + \beta L_2],$$

$$h\lambda_{i+1} = C_3 R_1 - C_3[z_i + \alpha z_{i-1} + \alpha^2 L_1] + C_4 R_2 - C_4[z_i + \beta z_{i-1} + \beta^2 L_2],$$

$$y_{i-1} = C_0 z_{i-1} + C_1[z_i + \alpha z_{i+1} + \alpha^2 R_1] + C_1 L_1 + C_2[z_i + \beta z_{i+1} + \beta^2 R_2] + C_2 L_2,$$

$$y_i = C_0 z_i + C_1[z_{i+1} + \alpha R_1] + C_1[z_{i-1} + \alpha L_1] + C_2[z_{i+1} + \beta R_2] + C_2[z_{i-1} + \beta L_2],$$

$$y_{i+1} = C_0 z_{i+1} + C_1 R_1 + C_1[z_i + \alpha z_{i-1} + \alpha^2 L_1] + C_2 R_2 + C_2[z_i + \beta z_{i-1} + \beta^2 L_2].$$

On identifie les coefficients divers dans

$$h(\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1}) = 3(y_{i+1} - y_{i-1}).$$

Coefficient de R_1 :

$$C_3(\alpha^2 + 4\alpha + 1) + 3C_1(\alpha^2 - 1) = 0.$$

Coefficient de L_1 :

$$-C_3(\alpha^2 + 4\alpha + 1) - 3C_1(\alpha^2 - 1) = 0.$$

Coefficient de R_2 :

$$C_4(\beta^2 + 4\beta + 1) + 3C_2(\beta^2 - 1) = 0.$$

Coefficient de L_2 :

$$-C_4(\beta^2 + 4\beta + 1) - 3C_2(\beta^2 - 1) = 0.$$

Coefficient de z_{i+1} :

$$C_3\alpha + C_4\beta + 4C_3 + 4C_4 + 3C_1\alpha + 3C_2\beta - 3C_0 = 0.$$

Coefficient de z_{i-1} :

$$-C_3\alpha - C_4\beta - 4C_3 - 4C_4 - 3C_1\alpha - 3C_2\beta + 3C_0 = 0.$$

Coefficient de z_i :

$$C_3 + C_4 - C_3 - C_4 + 3C_1 + 3C_2 - 3C_1 - 3C_2 = 0.$$

Ainsi

$$C_3(\alpha^2+4\alpha+1)+3C_1(\alpha^2-1) = 0 \quad , \quad (36)$$

$$C_4(\beta^2+4\beta+1)+3C_2(\beta^2-1) = 0 \quad , \quad (37)$$

$$-3C_0+3C_1\alpha+3C_2\beta+C_3(\alpha+4)+C_4(\beta+4) = 0 \quad . \quad (38)$$

Par exactitude pour les polynômes de degré 3, on a :

$$C_0+2C_1F_0(\alpha)+2C_2F_0(\beta) = 1 \quad , \quad (32)$$

$$C_1F_2(\alpha)+C_2F_2(\beta) = 0 \quad , \quad (33)$$

$$C_3F_1(\alpha)+C_4F_1(\beta) = 1/2 \quad , \quad (34)$$

$$C_3F_3(\alpha)+C_4F_3(\beta) = 0. \quad (35)$$

Les équations (36) et (37) nous donnent

$$C_3 = \frac{3C_1F_2(\alpha)}{F_3(\alpha)} \quad (39)$$

et

$$C_4 = \frac{3C_2F_2(\beta)}{F_3(\beta)} \quad . \quad (40)$$

Ainsi on voit que les équations (33), (35), (36), (37) sont compatibles. Les équations (34) et (35) déterminent C_3 et C_4 , et par suite déterminent C_1 et C_2 . Précisément :

$$C_3 = \frac{1}{2} \frac{F_3(\beta)}{F_1(\alpha)F_3(\beta)-F_3(\alpha)F_1(\beta)} \quad , \quad (41)$$

$$C_4 = -\frac{1}{2} \frac{F_3(\alpha)}{F_1(\alpha)F_3(\beta)-F_3(\alpha)F_1(\beta)} \quad . \quad (42)$$

D'après (39) et (40), on a

$$C_1 = \frac{1}{3} C_3 \frac{F_3(\alpha)}{F_2(\alpha)} \quad , \quad (43)$$

$$C_2 = \frac{1}{3} C_4 \frac{F_3(\beta)}{F_2(\beta)} \quad . \quad (44)$$

Il y a deux équations (32) et (38) pour déterminer C_0 . Maintenant on montre qu'elles sont en fait compatibles. En utilisant les équations (36) et (37) l'équation (38) s'écrit :

$$3C_0 = \frac{-C_3}{\alpha} + \frac{3C_1}{\alpha} - \frac{C_4}{\beta} + \frac{3C_2}{\beta}$$

ou

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta} - \frac{C_3}{3\alpha} - \frac{C_4}{3\beta}. \quad (45)$$

Si dans (32) on remplace C_0 par son expression ci-dessus, on obtient :

$$\frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta} - \frac{C_3}{3\alpha} - \frac{C_4}{3\beta} + \frac{2C_1}{1-\alpha} + \frac{2C_2}{1-\beta} = 1$$

ou encore

$$\frac{C_1}{\alpha} \cdot \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{C_2}{\beta} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{C_3}{3\alpha} - \frac{C_4}{3\beta} = 1.$$

Maintenant on remplace C_1 , C_2 , C_3 et C_4 par leurs valeurs données par (41)-(44). On a :

$$\begin{aligned} & C_0 + 2C_1F_0(\alpha) + 2C_2F_0(\beta) \\ &= \frac{C_1}{\alpha} \cdot \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{C_2}{\beta} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{C_3}{3\alpha} - \frac{C_4}{3\beta} \\ &= \frac{1}{6\alpha} \cdot \frac{F_3(\alpha)F_3(\beta)}{F_1(\alpha)(F_1(\alpha)F_3(\beta) - F_3(\alpha)F_1(\beta))} - \frac{1}{6\beta} \frac{F_3(\alpha)F_3(\beta)}{F_1(\beta)(F_1(\alpha)F_3(\beta) - F_3(\alpha)F_1(\beta))} \\ &\quad - \frac{1}{6\alpha} \cdot \frac{F_3(\beta)}{F_1(\alpha)F_3(\beta) - F_3(\alpha)F_1(\beta)} + \frac{1}{6\beta} \cdot \frac{F_3(\alpha)}{F_1(\alpha)F_3(\beta) - F_3(\alpha)F_1(\beta)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Les deux équations (32) et (38) sont donc compatibles.

On a ainsi montré comment on peut choisir les constantes C_0 , C_1 , C_2 , C_3 et C_4 pour avoir l'exactitude pour les polynômes de degré 3 et la continuité de la fonction ainsi que des dérivées première et seconde en t_i . Il n'y a pas de restriction aux α et β sauf qu'ils soient de module inférieur à 1.

Il est facile à voir que les constantes C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 définies par (21) vérifient les équations (32)-(38).

Si en plus de l'exactitude P_3 et la continuité de la dérivée seconde on impose la condition

$$\sigma'''(t_i^+) - \sigma'''(t_i^-) + 3(\sigma(t_i) - z_i) = 0, \quad i \in Z,$$

alors il faut choisir α et β d'une façon particulière, ce que nous allons expliquer maintenant.

La condition ci-dessus s'écrit

$$3[h(\lambda_{i+1}^{-\lambda_{i-1}}) - 2y_{i-1} + 4y_i - 2y_{i+1}] + \omega(y_i - z_i) = 0, \quad i \in Z.$$

En remplaçant λ_i et y_i par leurs valeurs et en identifiant les coefficients de $R_1, R_2, L_1, L_2, z_{i-1}, z_i$ et z_{i+1} , on obtient

$$C_1[6(\alpha^2+1) - (12+\omega)\alpha] + C_3(3)(\alpha^2-1) = 0, \quad (46)$$

$$C_2[6(\beta^2+1) - (12+\omega)\beta] + C_4(3)(\beta^2-1) = 0, \quad (47)$$

$$6C_0 + 3C_3\alpha + 3C_4\beta + 6C_1\alpha + 6C_2\beta - (12+\omega)(C_1+C_2) = 0, \quad (48)$$

$$(12+\omega)C_0 - 6(C_3+C_4) - 12(C_1+C_2) - \omega = 0. \quad (49)$$

Les équations (36) et (46) sont compatibles si et seulement si

$$(\alpha^2+4\alpha+1)[6(\alpha^2+1) - (12+\omega)\alpha] - 9(\alpha^2-1)^2 = 0,$$

ou :

$$\alpha^4 + \left(\frac{\omega-12}{3}\right)\alpha^3 + \left(\frac{18+4\omega}{3}\right)\alpha^2 + \left(\frac{\omega-12}{3}\right)\alpha + 1 = 0,$$

c'est-à-dire α est une racine de (8). De la même façon les équations (37) et (47) sont compatibles si et seulement si β est une racine de (8).

Autrement dit :

$$\alpha F_3(\alpha) = \beta F_3(\beta) = -\frac{3}{\omega}. \quad (50)$$

On déduit de l'équation (35)

$$\frac{C_3}{\alpha} = \frac{-C_4}{\beta},$$

ainsi on obtient de l'équation (45)

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta}.$$

En utilisant les équations (46) et (47), on obtient à partir de l'équation (48)

$$6C_0 + \frac{3C_3}{\alpha} + \frac{3C_4}{\beta} - \frac{6C_1}{\alpha} - \frac{6C_2}{\beta} = 0$$

d'où

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta}.$$

Les équations (32) et (48) sont ainsi compatibles. On peut aussi vérifier que (48) et (49) sont compatibles. On a ainsi retrouvé les coefficients (21)

Finallement les expressions de C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 deviennent

$$\alpha F_3(\alpha) = \beta F_3(\beta) = -\frac{3}{\omega}, \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1.$$

$$\frac{C_3}{\alpha} = \left(-\frac{3}{\omega}\right) \frac{1}{2\alpha\beta} \frac{1}{(F_1(\alpha)F_3(\beta) - F_3(\alpha)F_1(\beta))}, \quad (51)$$

$$\frac{C_4}{\beta} = -\frac{C_3}{\alpha}, \quad (52)$$

$$C_1 = \left(-\frac{1}{\omega}\right) \frac{C_3}{\alpha} \cdot \frac{1}{F_2(\alpha)}, \quad (53)$$

$$C_2 = \left(-\frac{1}{\omega}\right) \frac{C_4}{\beta} \cdot \frac{1}{F_2(\beta)}, \quad (54)$$

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta}. \quad (55)$$

Considérons maintenant le cas $\omega = 72$.

On a

$$y_i = C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}), \quad (29)$$

$$h \lambda_i = C_3 \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}). \quad (30)$$

On prend $t_i = 0$, $h = 1$ et on évalue (29) pour $f(t) = 1$ et t^2 .

$$C_0 + 2C_1 F_0(\alpha) + 2C_2 F_1(\alpha) = 1, \quad (56)$$

$$C_1 F_2(\alpha) + C_2 F_3(\alpha) = 0. \quad (57)$$

Par symétrie l'équation (29) est vérifiée pour $f(t) = t$ et t^3 .
L'exactitude de $f(t) = t$ et t^3 pour (30) donne :

$$2C_3 F_2(\alpha) = 1, \quad (58)$$

$$C_3 F_4(\alpha) = 0. \quad (59)$$

L'exactitude de $f(t) = 1$ et t^2 est automatique.

On prend α qui vérifie l'équation

$$F_4(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 11\alpha^2 + 11\alpha + 1}{(1-\alpha)^5} = \frac{(\alpha+1)(\alpha^2 + 10\alpha + 1)}{(1-\alpha)^5} = 0$$

et de module inférieur à 1.

Précisément on prend

$$\alpha = -5 + 2\sqrt{6}.$$

On choisit

$$C_3 = \frac{1}{2F_2(\alpha)}. \quad (60)$$

Le coefficient C_0 est choisi arbitrairement et les équations (56) et (57) déterminent C_1 et C_2 .

Ensuite on impose la condition

$$\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} = \frac{3}{h} (y_{i+1} - y_{i-1})$$

qui garantit la continuité de la dérivée seconde aux abscisses t_i .
En identifiant les coefficients on obtient

$$C_3(\alpha^2+4\alpha+1)+3C_2(\alpha^2-1) = 0 , \quad (61)$$

$$C_3(2\alpha^2+4\alpha)+3C_2(2\alpha^2)+3C_1(\alpha^2-1) = 0 , \quad (62)$$

$$C_3(2\alpha+4)+3C_2(2\alpha)+3C_1\alpha-3C_0 = 0 . \quad (63)$$

On déduit de l'équation (61)

$$C_2 = \frac{1}{3} C_3 \frac{F_3(\alpha)}{F_2(\alpha)}$$

d'où en utilisant (60)

$$C_2 = \frac{1}{6} \frac{F_3(\alpha)}{(F_2(\alpha))^2} . \quad (64)$$

On a alors à partir de l'équation (57)

$$C_1 = -\frac{1}{6} \frac{(F_3(\alpha))^2}{(F_2(\alpha))^3} . \quad (65)$$

En remplaçant C_1 , C_2 , C_3 dans (62) on peut voir facilement la compatibilité des équations (58)-(62).

En utilisant l'équation (62) on a par l'équation (63)

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha} .$$

On peut vérifier facilement que les équations (56) et (63) sont compatibles.

Ainsi l'exactitude pour les polynômes de degré 3 et la continuité de la dérivée seconde précisent toutes les constantes qui apparaissent dans les expressions (29) et (30).

La vérification de l'équation $(\sigma'''(t_i^+) - \sigma'''(t_i^-)) + \mathcal{G}(\sigma(t_i) - z_i) = 0$ avec ces constantes est facile.

5.6 - FONCTIONS SPLINE CUBIQUES CARDINALES DE LISSAGE

Maintenant on montre que même quand α et β sont complexes, les expressions pour y_i et λ_i sont réelles.

Pour $\omega \neq 72$ on a les équations suivantes pour la fonction spline cardinale de lissage :

$$y_i = C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}),$$

$$h\lambda_i = C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}) + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}),$$

$$\alpha F_3(\alpha) = \beta F_3(\beta) = -\frac{3}{\omega}.$$

et les coefficients C_0, C_1, C_2, C_3 et C_4 dépendent de α et β . Soient

$$a = \frac{\omega-12}{6} - \frac{\sqrt{\omega(\omega-72)}}{6},$$

$$b = \frac{\omega-12}{6} + \frac{\sqrt{\omega(\omega-72)}}{6}.$$

Alors

$$\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}.$$

Si $\omega > 72$, alors α et β sont réelles et distinctes.

Si $\omega < 72$, α et β sont complexes conjuguées.

On rappelle de (51)-(55) que :

$$\frac{C_3}{\alpha} = \frac{-C_4}{\beta} = \left(\frac{-3}{\omega}\right) \frac{1}{2\alpha\beta} \cdot \frac{1}{(F_3(\beta)F_1(\alpha) - F_3(\alpha)F_1(\beta))},$$

$$\frac{C_1}{\alpha} = \left(\frac{-1}{\omega}\right) \frac{C_3}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha F_2(\alpha)},$$

$$\frac{C_2}{\beta} = \left(\frac{-1}{\omega}\right) \frac{C_4}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta F_2(\beta)},$$

$$C_0 = \frac{C_1}{\alpha} + \frac{C_2}{\beta}.$$

Si $\omega < 72$, alors $\frac{C_3}{\alpha}$ est imaginaire et $\frac{C_4}{\beta}$ qui est égal à $-\frac{C_3}{\alpha}$ est conjuguée de $\frac{C_3}{\alpha}$. Aussi, $\frac{C_1}{\alpha}$ et $\frac{C_2}{\beta}$ sont complexes conjuguées et par conséquent C_0 est réel. Soit $\frac{C_1}{\alpha} = \tilde{a} + i\tilde{b}$.

Ainsi :

$$y_i = C_0 z_i + \tilde{a} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{k+\beta^k})(z_{i+k} + z_{i-k}) + i\tilde{b} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{k-\beta^k})(z_{i+k} + z_{i-k}),$$

$$h\lambda_i = \frac{C_3}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{k-\beta^k})(z_{i+k} - z_{i-k}).$$

On voit donc que même si α et β sont complexes, les expressions finales pour y_i et λ_i sont réelles.

THEOREME

Soient $\tau > 0$ et τ un entier positif et soit $z = (z_i)$ appartient à $Y^\tau = \{y = (y_i) \mid y_i = O(|i|^\tau), i \rightarrow +\infty\}$.

Alors il existe une fonction spline cubique cardinal 6 unique appartenant à

$$S^\tau = \{\sigma \mid \sigma(t) = O(|t|^\tau), t \rightarrow +\infty\} \text{ qui vérifie}$$

$$\sigma'''(t_i^+) - \sigma'''(t_i^-) + \xi(\sigma(t_i) - z_i) = 0, \quad i \in Z.$$

Démonstration

Soit $z = (z_i) \in Y^\tau$ et soit $A(\omega)$ la fonction définie par l'équation (22).
 $y = A(\omega)z$ où

$$y_i = C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}).$$

On a déjà vu que si z est réel, $y = A(\omega)z$ est aussi réel. Maintenant on montre que l'image de Y^τ appartient à Y^τ .

Puisque $z \in Y^\tau$, il existe une constante C telle que

$$|z_{i \pm k}|^\tau \leq C |i+k|^\tau, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs on peut trouver des coefficients d_ℓ tels que

$$|i+k|^\tau \leq \sum_{\ell=0}^{\tau} d_\ell k^\ell |i|^{\tau-\ell}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq |C_0| |z_i| + |C_1| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^{k-1} |z_{i+k} + z_{i-k}| \\ &\quad + |C_2| \sum_{k=1}^{\infty} |\beta|^{k-1} |z_{i+k} + z_{i-k}| \\ &\leq |C_0| |i|^\tau + 2|C_1| \sum_{\ell=0}^{\tau} d_\ell |i|^{\tau-\ell} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^{k-1} k^\ell \right) \\ &\quad + 2|C_2| \sum_{\ell=0}^{\tau} d_\ell |i|^{\tau-\ell} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta|^{k-1} k^\ell \right) \\ &\leq |C_0| |i|^\tau + 2|C_1| \sum_{\ell=0}^{\tau} d_\ell F_\ell(|\alpha|) |i|^{\tau-\ell} \\ &\quad + 2|C_2| \sum_{\ell=0}^{\tau} d_\ell F_\ell(|\beta|) |i|^{\tau-\ell} \\ &\leq K |i|^\tau \text{ où } K \text{ est une constante.} \end{aligned}$$

Donc $y \in Y^\tau$. Le cas $\omega = 72$ est similaire.

Ainsi à partir de la suite $z = (z_i)$ appartenant à Y^τ , on construit une nouvelle suite $y = (y_i)$ qui appartient aussi à Y^τ . Ensuite on détermine la fonction spline cubique cardinale 6 qui vérifie $\sigma(t_i) = y_i$ et qui appartient à $S = \{\sigma \mid \sigma(t) = 0(|t|^\tau), t \rightarrow \pm \infty\}$.

Remarque 1

Comme dans le cas de la fonction spline d'interpolation, on a essayé de définir une fonction spline de lissage sur $[t_1, t_n]$ par la troncature des sommes infinies afin d'avoir l'exactitude P_3 . On peut écrire un algorithme efficace. Mais on observe un comportement oscillatoire dans les expériences numériques. Il est probable que cela provient du fait que l'on essaye de déterminer la dérivée à partir de valeurs de la fonction qui sont entachées d'erreurs.

Remarque 2

On veut faire remarquer que dans le cas de la fonction spline de lissage on obtient :

$$\sigma(t_i) = \frac{\alpha \cdot \xi h}{1 - 2h^2} \left[z_i + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k (z_{i+k} + z_{i-k}) \right]$$

où α vérifie

$$\alpha F_1(\alpha) = \frac{1}{\xi h} .$$

Dans le cas de la fonction spline cubique de lissage on a vu que

$$\sigma(t_i) = C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}),$$

$$h\sigma'(t_i) = C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}) + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k})$$

où

$$\alpha F_3(\alpha) = \beta F_3(\beta) = -\frac{3!}{\xi h^2} .$$

Finalement dans le cas de la fonction spline quintique de lissage on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(t_i) = & C_0 z_i + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) \\ & + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'(t_i) = & C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}) \\ & + C_5 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}) + C_6 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (z_{i+k} - z_{i-k}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma''(t_i) = & C_7 z_i + C_8 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) \\ & + C_9 \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) + C_{10} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (z_{i+k} + z_{i-k}) \end{aligned}$$

où

$$\alpha F_5(\alpha) = \beta F_5(\beta) = \gamma F_5(\gamma) = \frac{5!}{\xi h^3} .$$

CHAPITRE - 6

FONCTIONS SPLINE SOUS TENSION

6.1 - INTRODUCTION

Les fonctions spline sous tension ont été introduites par Schweikert [35] pour traiter le problème des points d'inflexion indésirables.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et considérons une subdivision $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$ par des abscisses équidistantes de pas $h = \frac{t_n - t_1}{n-1}$. On désigne par S_n l'espace des fonctions σ qui vérifient les conditions suivantes :

(i) Dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, σ vérifie l'équation différentielle

$$(D^4 - p^2 D^2)\sigma = 0, \quad (1)$$

(ii) $\sigma \in C^2[a,b]$. (2)

Ici p désigne le paramètre de tension.

Pour $p = 0$, σ est une fonction spline cubique. Pour $p > 0$, dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, σ est une combinaison linéaire des fonctions 1 , t , e^{pt} et e^{-pt} .

Puisque σ vérifie $(\frac{1}{p^2} D^4 - D^2)\sigma = 0$ dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, pour p grand, σ tend vers une fonction spline linéaire.

La dimension de l'espace des fonctions spline sous tension S_n est $n+2$. Supposons que l'on connaisse les valeurs d'une fonction f aux abscisses t_i :

$$y_i = f(t_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

On se propose de déterminer une fonction σ appartenant à S_n qui vérifie

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Pour déterminer de façon unique la fonction σ , il faut ajouter deux conditions supplémentaires :

Des conditions de bout de la forme

$$(i) \quad \sigma'(a) = f'(a), \quad \sigma'(b) = f'(b)$$

$$(ii) \quad \sigma'''(a) = \sigma'''(b) = 0$$

$$(iii) \quad \sigma''(a) = \sigma''(a), \quad \sigma''(b) = \sigma''(b)$$

ont été étudiées par de nombreux auteurs (citons BAUM [2], DUBE [13], PRENTER [28], PRUESS [29], SCHULTZ et VARGA [33], SPATH [37]). CLINE [10] a écrit des procédés pour calculer les fonctions spline sous tension avec les conditions de bout de la forme (i).

Notre but est de donner les conditions de bout qui dépendent seulement des valeurs de la fonction aux abscisses et qui entraînent un ordre de convergence uniforme en h^4 . En même temps on souhaite préserver la simplicité de calcul.

6.2 - CONDITIONS DE BOUT

Prenons $\mu_i = \sigma''(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ comme inconnues. D'après (1) dans $[t_i, t_{i+1}]$ la fonction spline σ vérifie :

$$(D^4 - p^2 D^2)\sigma = 0, \quad \sigma(t_i) = y_i, \quad \sigma(t_{i+1}) = y_{i+1},$$

$$\sigma''(t_i) = \mu_i, \quad \sigma''(t_{i+1}) = \mu_{i+1}. \quad (4)$$

On définit

$$\psi(t) = \left(\frac{\sinh(pht)}{\sinh(ph)} - t \right) / (ph)^2. \quad (5)$$

$$\text{Soit } v = \frac{t-t_i}{h}.$$

Pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$ la solution de (4) est alors donnée par :

$$\sigma(t) = v y_{i+1} + (1-v) y_i + h^2 \psi(v) \mu_{i+1} + h^2 \psi(1-v) \mu_i. \quad (6)$$

Si l'on peut calculer les μ_i , $i = 1, \dots, n$, en utilisant la formule ci-dessus, on peut donc calculer $\sigma(t)$ pour t quelconque de $[a, b]$.

D'après (2) on sait que $\sigma \in C^2[a, b]$. La continuité de la dérivée première en t_i , $i = 2, \dots, n-1$ entraîne les relations suivantes :

$$q \mu_{i-1} + r \mu_i + q \mu_{i+1} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (7)$$

où

$$q = \frac{1}{p^2 h^2} \left(1 - \frac{ph}{\sinh(ph)} \right) \quad (8)$$

et

$$r = \frac{2}{p^2 h^2} \left(ph \frac{\cosh(ph)}{\sinh(ph)} - 1 \right). \quad (9)$$

On écrit les équations (7) comme

$$\begin{aligned} \mu_{i-1} + \frac{r}{q} \mu_i + \mu_{i+1} &= \frac{1}{q} \left(\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \right) \\ &= d_i, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (10)$$

A l'équation (10), on va ajouter des conditions de bout de telle façon que l'inverse de la matrice associée ait une forme simple.

Considérons l'équation

$$\gamma^2 + \frac{r}{q} \gamma + 1 = 0. \quad (11)$$

Cette équation a 2 racines réelles. Pour des raisons de stabilité on choisit γ la racine de (11) de module inférieur à 1. Précisément :

$$\gamma = \frac{-(ph \cosh(ph) - \sinh(ph)) + \sqrt{ph(1 - \cosh(ph)) * (2\sinh(ph) - ph - ph \cosh(ph))}}{\sinh(ph) - ph}. \quad (12)$$

Il faut noter que dans le cas présent γ dépend de h , ou plus précisément, de ph , alors que dans le cas des fonctions spline polynomiales γ était toujours indépendant de h .

On a

$$\sqrt{3}-2 \leq \gamma < 0.$$

Maintenant on choisit les conditions de bout de la forme

$$\text{et} \quad \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^4 C_j y_j = d_1 \quad (13)$$

$$\mu_{n-1} + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\mu_n = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^4 C_j y_{n+1-j} = d_n \quad (14)$$

qui préservent la symétrie de (10).

Puisque les équations (10) correspondent à une identité pour les fonctions $f(t) = 1, t, e^{pt}$ et e^{-pt} , on choisit les coefficients C_1, C_2, C_3, C_4 de sorte que les équations (13) et (14) correspondent à une identité pour $f(t) = 1, t, e^{pt}$ et e^{-pt} . Précisément

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-p^2 h^2}{\gamma(x-1)^2} (x^2 - x\gamma + 1), \\ C_2 &= \frac{p^2 h^2}{\gamma(x-1)^2} (2(x^2 - x\gamma + 1) + x), \\ C_3 &= \frac{-p^2 h^2}{\gamma(x-1)^2} (x^2 - x\gamma + 1 + 2x), \\ C_4 &= \frac{p^2 h^2 x}{\gamma(x-1)^2} \quad \text{où } x = e^{ph}. \end{aligned} \quad (15)$$

Ainsi la solution de

$$\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\mu_1 + \mu_2 = d_1,$$

$$\mu_{i-1} + \frac{br}{aq} \mu_i + \mu_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$\mu_{n-1} + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\mu_n = d_n \tag{16}$$

est

$$\mu_i = \frac{-\gamma}{1-\gamma^2} \left(d_i + \sum_{k=1}^{n-i} \gamma^k d_{i+k} + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma^k d_{i-k} \right).$$

En remplaçant d_i par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_i = \frac{-\gamma(1-\gamma)}{h^2(1+\gamma)q} \left[\frac{-2}{(1-\gamma)} y_i + \sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k} + \gamma^{n-i} \sum_{j=1}^4 \tilde{C}_j y_{n+1-j} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k} + \gamma^{i-1} \sum_{j=1}^4 \tilde{C}_j y_j \right] \tag{17} \end{aligned}$$

où

$$\tilde{C}_1 = \frac{(\gamma + qc_1 - 2)}{(1-\gamma^2)},$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{(1 - qc_2)}{(1-\gamma^2)},$$

$$\tilde{C}_3 = \frac{-qc_3}{1-\gamma^2},$$

$$\tilde{C}_4 = \frac{-qc_4}{1-\gamma^2}. \tag{18}$$

6.3 - FONCTIONS SPLINE CARDINALES SOUS TENSION

Maintenant on considère le cas de la fonction spline sous tension associée aux abscisses équidistantes t_i de nombre infini et de pas h . Soit S l'espace des fonctions spline sous tension cardinales, pour le paramètre de tension p . Une fonction σ appartient à S si et seulement si :

(i) dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$,

$$(D^4 - p^2 D^2)\sigma = 0, \quad i \in Z,$$

(ii) $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$.

Soient $\mu_i = \sigma''(t_i)$, $i \in Z$. A nouveau la continuité de la dérivée première en t_i entraîne les relations suivantes :

$$q\mu_{i-1} + r\mu_i + q\mu_{i+1} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad i \in Z \quad (19)$$

où q et r sont définis par (8) et (9).

Soit γ une racine de l'équation

$$\gamma^2 + \frac{r}{q}\gamma + 1 = 0$$

telle que $|\gamma| < 1$. Il est facile de voir que :

$$\mu_i = \frac{-\gamma(1-\gamma)}{h^2(1+\gamma)q} \left[\frac{-2}{(1-\gamma)} y_i + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}) \right] \quad (20)$$

vérifie (19). Soit $\tau \geq 0$. Si

$$y = (y_i) \in Y^\tau = \{y = (y_i) \mid y_i = o(|i|^\tau), i \rightarrow \pm\infty\},$$

alors, puisque $|\gamma| < 1$, les séries à droites de (20) convergent.

Par contre, si l'on prend $\lambda_i = \sigma'(t_i)$ comme inconnues, alors la continuité de la dérivée seconde implique les relations suivantes :

$$\lambda_{i-1} + \tilde{r}\lambda_i + \lambda_{i+1} = (\tilde{r}+2) \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{2h} \quad (21)$$

où

$$\tilde{r} = \frac{2(\text{ph} \cosh(\text{ph}) - \sinh(\text{ph}))}{(\sinh(\text{ph}) - \text{ph})} = \frac{r}{q} \quad (22)$$

Donc

$$\lambda_i = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) \quad (23)$$

(avec γ la racine de l'équation

$$\gamma^2 + \tilde{r}\gamma + 1 = \gamma^2 + \frac{r}{q}\gamma + 1 = 0$$

de module inférieur à 1) est une solution de (21), la série en (23) étant convergente pour $y = (y_i) \in Y^T$.

Considérons la formule

$$\lambda_i = \delta_1 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k}) .$$

L'exactitude pour les fonctions constantes est automatique, alors que l'exactitude pour $f(t) = t$ implique que (prenons $t_i = 0$)

$$1 = \frac{2\delta_1 h}{(1-\gamma)^2} ,$$

soit :

$$\delta_1 = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} .$$

L'exactitude pour $f(t) = e^{pt}$ entraîne

$$\gamma^2(e^{\text{ph}} - e^{-\text{ph}} - 2\text{ph}) - 2\gamma(e^{\text{ph}} - e^{-\text{ph}} - \text{ph}e^{\text{ph}} - \text{ph}e^{-\text{ph}}) + (e^{\text{ph}} - e^{-\text{ph}} - 2\text{ph}) = 0$$

Soit :

$$\gamma^2 + \frac{2(\text{ph} \cosh(\text{ph}) - \sinh(\text{ph}))}{(\sinh(\text{ph}) - \text{ph})} \gamma + 1 = 0$$

qui est l'équation (11).

L'exactitude pour $f(t) = e^{-pt}$ redonne l'équation ci-dessus.

Si l'on considère la formule

$$\mu_i = \delta_2 y_i + \delta_3 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} + y_{i-k}),$$

l'exactitude pour $f(t) = 1$ implique

$$\delta_2 + \frac{2\delta_3}{(1-\gamma)} = 0. \quad (24)$$

On a l'exactitude pour $f(t) = t$ par symétrie.

Par l'exactitude pour $f(t) = e^{pt}$ on obtient :

$$p^2 = \delta_2 + \delta_3 \left[\frac{e^{ph}}{1-\gamma e^{ph}} + \frac{e^{-ph}}{1-\gamma e^{-ph}} \right].$$

L'exactitude pour $f(t) = e^{-pt}$ redonne l'équation ci-dessus.

Si l'on choisit γ racine de l'équation (11), alors on obtient

$$\delta_3 = \frac{\gamma(\gamma-1)}{(1+\gamma)q \cdot h^2} \quad (25)$$

et donc d'après (24)

$$\delta_2 = \frac{2\gamma}{(1+\gamma)q \cdot h^2} \quad (26)$$

Ainsi on retrouve la formule (20).

6.4 - FONCTIONS SPLINE SOUS TENSION CARDINALES TRONQUEES

Par la troncature des sommes en (20) et (23), on peut définir une fonction spline sur un intervalle fini de \mathbb{R} . On choisit les coefficients v_1, v_2, v_3, v_4 tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} f(k) = \sum_{j=1}^4 v_j f(1-j) \quad (27)$$

pour $f(t) = 1, t, e^{pt}$ et e^{-pt} .

Maintenant on définit l'espace des fonctions spline sous tension cardinales tronquées :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n &= \{ \sigma \mid [t_1, t_n] / \sigma \in S, \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \sigma(t_{1-k}) = \sum_{j=1}^4 v_j \sigma(t_j), \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \sigma(t_{n+k}) = \sum_{j=1}^4 v_j \sigma(t_{n+1-j}) \}. \end{aligned}$$

Il faut noter que la dimension de \tilde{S}_n est égale à n .

Ainsi d'après (20) et (23) on a pour la fonction spline cardinale tronquée :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \frac{-\gamma(1-\gamma)}{h^2(1+\gamma)q} \left[\frac{-2y_i}{(1-\gamma)} + \sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k+\gamma}^{n-i} \sum_{j=1}^4 v_j y_{n+1-j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k+\gamma}^{i-1} \sum_{j=1}^4 v_j y_j \right], \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \left[\sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k+\gamma}^{n-i} \sum_{j=1}^4 v_j y_{n+1-j} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k-\gamma}^{i-1} \sum_{j=1}^4 v_j y_j \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

Comme dans la section 1.6, on peut montrer que la fonction spline définie par (17) n'est rien d'autre que la fonction spline cardinale tronquée. Ainsi $v_j = \tilde{C}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ où les \tilde{C}_j sont définis par (18).

Pour la majoration de l'erreur on utilisera la formule (29), alors que pour calculer la fonction spline la formule (28) est plus pratique.

6.5 - MAJORATION DE L'ERREUR

D'abord on considère le cas de la fonction spline cardinale. D'après (23) on a

$$\lambda_i = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k})$$

qui correspond à une identité pour $f(t) = 1, t, e^{pt}$ et e^{-pt} . L'erreur d'évaluation de la dérivée première en 0 s'écrit :

$$H(f) = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_k - y_{-k}) - f'(0). \quad (30)$$

Soit

$$L(f) = (D^4 - p^2 D^2)f.$$

L'espace nul de L est donc $N(L) = \text{Lin}(1, t, e^{pt}, e^{-pt})$.

On sait que

$$H(p) = 0 \quad \text{pour } p \in N(L).$$

Donc, on a d'après (30)

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \quad (31)$$

où Ψ est une fonction impaire définie par

$$\Psi(\xi) = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} h_+(kh - \xi), \quad \xi \geq 0 \quad (32)$$

avec

$$h_+(t) = \begin{cases} \frac{1}{p^3} \left(\frac{e^{pt} - e^{-pt}}{2} - pt \right) & , \text{ si } t \geq 0 , \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (33)$$

On va écrire dorénavant

$$h_+(t) = \frac{1}{p^3} \left(\frac{e^{pt} - e^{-pt}}{2} - pt \right)_+ .$$

Ainsi pour $\xi \geq 0$

$$\Psi(\xi) = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \cdot \frac{1}{p^3} \left(\frac{e^{p(kh-\xi)} - e^{-p(kh-\xi)}}{2} - p(kh-\xi) \right)_+ . \quad (34)$$

Il est facile de vérifier que

$$\Psi(\xi + \ell h) = \gamma^\ell \Psi(\xi) \quad (35)$$

pour $\xi \geq 0$ et pour ℓ entier positif.

Il suffit donc de considérer $\Psi|_{[0,h]}$.

Considérons

$$\Psi|_{[0,h]} = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \cdot \frac{1}{p^3} \left(\frac{e^{p(kh-\xi)} - e^{-p(kh-\xi)}}{2} - p(kh-\xi) \right)_+ .$$

On a

$$\begin{aligned} & \int_0^h \Psi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \\ &= \int_0^1 \frac{(1-\gamma)^2}{2p^3} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} \left(\frac{e^{ph(k-\xi)} - e^{-ph(k-\xi)}}{2} - ph(k-\xi) \right) \\ & \quad (\tilde{f}^{(4)}(\xi) - p^2 \tilde{f}''(\xi)) d\xi \text{ avec } \tilde{f}(\xi) = f(\xi h) . \\ &= \frac{(1-\gamma)^2}{2p^3} \int_0^1 \left[\frac{e^{ph(1-\xi)}}{2(1-\gamma e^{ph})} - \frac{e^{-ph(1-\xi)}}{2(1-\gamma e^{-ph})} - \frac{ph}{(1-\gamma)^2} + \frac{ph\xi}{(1-\gamma)} \right] \\ & \quad (\tilde{f}^{(4)}(\xi) - p^2 \tilde{f}''(\xi)) d\xi \\ &= \frac{(1-\gamma)^2}{2p^3} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{e^{ph(1-\xi)} - e^{-ph(1-\xi)} + \gamma e^{ph\xi} - \gamma e^{-ph\xi}}{1 + \gamma^2 - \gamma e^{ph} - \gamma e^{-ph}} \right) - \frac{ph}{(1-\gamma)^2} + \frac{ph\xi}{(1-\gamma)} \right] \\ & \quad (\tilde{f}^{(4)}(\xi) - p^2 \tilde{f}''(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^h \Psi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
 & \leq \frac{(1-\gamma)^2}{2p^3} \cdot \max_{\xi \in [0,1]} |\tilde{f}^{(4)}(\xi) - p^2 \tilde{f}''(\xi)| \\
 & \int_0^1 \left| \frac{e^{ph(1-\xi)} - e^{-ph(1-\xi)} + \gamma(e^{ph\xi} - e^{-ph\xi})}{2(1+\gamma^2 - \gamma e^{ph} - \gamma e^{-ph})} - \frac{ph}{(1-\gamma)^2} + \frac{ph\xi}{(1-\gamma)} \right| d\xi \\
 & \leq \frac{(1-\gamma)^2}{2p^3} [h^4 \max_{\xi \in [0,h]} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 h^2 \max_{\xi \in [0,h]} |f''(\xi)|] \\
 & \left[\frac{(1-\gamma)(e^{ph} + e^{-ph} - 2)}{2ph(1+\gamma^2 - \gamma e^{ph} - \gamma e^{-ph})} + \frac{ph}{(1-\gamma)^2} + \frac{ph}{2(1-\gamma)} \right] \\
 & = M(ph) [h^5 \max_{\xi \in [0,h]} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 h^3 \max_{\xi \in [0,h]} |f''(\xi)|] \quad (36)
 \end{aligned}$$

où

$$M(ph) = \frac{(1-\gamma)^2}{2p^3} \left[\frac{(1-\gamma)(\frac{1}{2} + \frac{p^2 h^2}{4!} + \frac{p^4 h^4}{6!} + \dots)}{(1+\gamma^2 - \gamma e^{ph} - \gamma e^{-ph})} + \frac{3-\gamma}{2(1-\gamma)^2} \right] \quad (37)$$

En utilisant le fait que Ψ est une fonction impaire et d'après (35) on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
 & = 2 \left| \int_0^{\infty} \Psi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
 & \leq \frac{2M(ph)}{(1-\gamma)} h^3 (h^2 \|f^{(4)}\|_{\infty} + p^2 \|f^{(2)}\|_{\infty}). \quad (38)
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\sqrt{3}-2 \leq \gamma < 0$, pour $h \in [0, h']$ on peut majorer $\frac{M(ph)}{1-\gamma}$ par une constante indépendante de h .

Donc pour $h \in [0, h']$ on obtient :

$$|\lambda_i - f'(t_i)| \leq \frac{2M(ph)}{1-\gamma} h^3 (h^2 \|f^{(4)}\|_{\infty} + p^2 \|f^{(2)}\|_{\infty}) \leq Kh^3 \quad (39)$$

où K ne dépend pas de h .

Maintenant on considère le cas de la fonction spline cardinale tronquée.

On a d'après (29)

$$\lambda_i = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \left[\sum_{k=1}^{n-i} \gamma^{k-1} y_{i+k+\gamma}^{n-i} \sum_{j=1}^4 v_j y_{n+1-j} \right] - \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \left[\sum_{k=1}^{i-1} \gamma^{k-1} y_{i-k+\gamma}^{i-1} \sum_{j=1}^4 v_j y_j \right]$$

qui s'écrit

$$\lambda_i = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} (y_{i+k} - y_{i-k})^{-\gamma} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{n+k} - \sum_{j=1}^4 v_j y_{n+1-j} \right) + \gamma^{i-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} y_{1-k} - \sum_{j=1}^4 v_j y_j \right) \right].$$

Considérons

$$K(f) = \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} f(k) - \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{j=1}^4 v_j f(1-j). \quad (40)$$

On a choisi v_j tels que

$$K(p) = 0 \text{ pour } p \in \text{Lin}(1, t, e^{pt}, e^{-pt}).$$

Donc

$$K(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \quad (41)$$

où

$$\chi(\xi) = \begin{cases} \psi(\xi) & , \text{ si } \xi \geq 0 , \\ \psi(\xi) - \frac{(1-\gamma)^2}{2h} \sum_{j=1}^4 \frac{v_j}{p^3} \left(\frac{e^{p((1-j)h-\xi)} - e^{-p((1-j)h-\xi)} - p((1-j)h-\xi)}{2} \right)_+ & , \text{ si } \xi \in [-3h, 0] \\ 0 & , \text{ si } \xi \leq -3h. \end{cases} \quad (42)$$

D'après (36) on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\infty} \chi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\ &= \left| \int_0^{\infty} \psi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\ &\leq \frac{M(ph)}{1-\gamma} h^3 [h^2 \max_{\xi \geq 0} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 \max_{\xi \geq 0} |f''(\xi)|] \end{aligned} \quad (43)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-3h}^0 \psi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\ &\leq M(ph)(1+\gamma+\gamma^2) h^3 [h^2 \max_{\xi \in [-3h, 0]} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 \max_{\xi \in [-3h, 0]} |f''(\xi)|] . \end{aligned} \quad (44)$$

Pour $\xi \in [-h, 0]$ on a

$$\chi(\xi) = \psi(\xi) - \frac{(1-\gamma)^2}{2hp^3} \left(\frac{e^{-p\xi} - e^{p\xi}}{2} + p\xi \right) v_1 .$$

Considérons

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-h}^0 \frac{v_1(1-\gamma)^2}{2hp^3} \left(\frac{e^{-p\xi} - e^{p\xi}}{2} + p\xi \right) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
 &= \left| \frac{v_1(1-\gamma)^2}{2p^3} \int_0^1 \left(\frac{e^{ph\xi} - e^{-ph\xi}}{2} - ph\xi \right) (f^{(4)}(-\xi h) - p^2 f''(-\xi h)) d\xi \right| \\
 &= \left| \frac{v_1(1-\gamma)^2}{2p^3} \int_0^1 p^3 h^3 \xi^3 \left[\frac{1}{3!} + \frac{p^2 h^2 \xi^2}{5!} + \dots \right] (f^{(4)}(-\xi h) - p^2 f''(-\xi h)) d\xi \right| \\
 &\leq \frac{|v_1|(1-\gamma)^2 h^3}{2} \left[\frac{1}{3!4} + \frac{p^2 h^2}{5!6} + \dots \right] \left[h^4 \max_{\xi \in [-h, 0]} |f^{(4)}(\xi)| \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + p^2 h^2 \max_{\xi \in [-h, 0]} |f''(\xi)| \right].
 \end{aligned}$$

Or en utilisant le fait que $\sqrt{3}-2 \leq \gamma < 0$, on a d'après les formules (15) et (18) : pour $h \in [0, h']$

$$|v_j| = |\tilde{C}_j| \leq K_j, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

où les K_j sont des constantes indépendantes de h .

Donc

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-h}^0 \frac{v_1(1-\gamma)^2}{2p^3 h} \left(\frac{e^{-p\xi} - e^{p\xi}}{2} + p\xi \right) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
 &\leq \tilde{K}_1 h^5 \left(h^2 \max_{\xi \in [-h, 0]} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 \max_{\xi \in [-h, 0]} |f''(\xi)| \right) \tag{45}
 \end{aligned}$$

où \tilde{K}_1 est une constante indépendante de h .

En procédant de la même façon

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-3h}^{-h} \frac{v_1(1-\gamma)^2}{2p^3h} \left(\frac{e^{-p\xi} - p\xi}{2} + p\xi \right) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
& \leq \tilde{K}_2 h^5 \left(h^2 \max_{\xi \in [-3h, -h]} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 \max_{\xi \in [-3h, -h]} |f''(\xi)| \right), \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-3h}^{-h} \frac{v_2(1-\gamma)^2}{2p^3h} \left(\frac{e^{-p(\xi+h)} - e^{p(\xi+h)}}{2} + p(\xi+h) \right) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
& \leq \tilde{K}_3 h^5 \left(h^2 \max_{\xi \in [-3h, -h]} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 \max_{\xi \in [-3h, -h]} |f''(\xi)| \right) \quad (47)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-3h}^{-2h} \frac{v_3(1-\gamma)^2}{2p^3h} \left(\frac{e^{-p(\xi+2h)} - e^{p(\xi+2h)}}{2} + p(\xi+2h) \right) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
& \leq \tilde{K}_4 h^5 \left(h^2 \max_{\xi \in [-3h, -2h]} |f^{(4)}(\xi)| + p^2 \max_{\xi \in [-3h, -2h]} |f''(\xi)| \right) \quad (48)
\end{aligned}$$

où \tilde{K}_2 , \tilde{K}_3 et \tilde{K}_4 sont des constantes.

On obtient d'après (43)-(48)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \right| \\
& \leq \tilde{K} h^3 \left(h^2 \|f^{(4)}\|_{\infty} + p^2 \|f''\|_{\infty} \right), \quad h \in [0, h']
\end{aligned}$$

où \tilde{K} est une constante.

Ainsi dans le cas de la fonction spline cardinale tronquée on obtient pour $h \in [0, h']$

$$|\lambda_j - f'(t_j)| \leq \tilde{K} h^3 \quad (49)$$

où \tilde{K} est une constante indépendante de h .

6.6 - CONVERGENCE UNIFORME EN h^4

D'abord on va montrer que la fonction spline cardinale (resp. cardinale tronquée), converge vers la fonction spline sous tension σ vérifiant $\tilde{\sigma}(t_i) = y_i$, $\tilde{\sigma}'(t_i) = f'(t_i)$, $i \in Z$ (resp. $i = 1, \dots, n$ dans le cas cardinale tronquée) avec l'ordre de convergence uniforme h^4 pour $h \in [0, h']$.

Notons que dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la fonction spline sous tension σ qui vérifie

$$\sigma(t_i) = y_i, \quad \sigma(t_{i+1}) = y_{i+1},$$

$$\sigma'(t_i) = \lambda_i, \quad \sigma'(t_{i+1}) = \lambda_{i+1}$$

est définie par

$$\sigma(t) = a_i + b_i \frac{(t-t_i)}{h} + c_i e^{\frac{ph(t-t_i)}{h}} + d_i e^{-\frac{ph(t-t_{i+1})}{h}} \quad (50)$$

où

$$a_i = \frac{[y_{i+1} * ph(e^{ph}-1)^2 - y_i * ph(e^{ph}-1)(1+ph-e^{ph}+phe^{ph}) + h\lambda_{i+1} * (1+2phe^{ph}-e^{2ph}) - h\lambda_i * (1+ph-e^{2ph}+phe^{2ph})]}{ph(e^{ph}-1)(-2-ph+2e^{ph}-phe^{ph})},$$

$$b_i = \frac{(y_i - y_{i+1}) * ph(e^{ph}-1)(e^{ph}+1) + h(\lambda_i + \lambda_{i+1})(e^{ph}-1)^2}{(e^{ph}-1)(-2-ph+2e^{ph}-phe^{ph})},$$

$$c_i = \frac{(y_{i+1} - y_i) * ph(e^{ph}-1) + h\lambda_i * (1+ph-e^{ph}) - h\lambda_{i+1}(1-e^{ph}+phe^{ph})}{ph(e^{ph}-1)(-2-ph+2e^{ph}-phe^{ph})},$$

$$d_i = \frac{(y_i - y_{i+1}) * ph(e^{ph}-1) + h\lambda_i * (1-e^{ph}+phe^{ph}) - h\lambda_{i+1}(1+ph-e^{ph})}{ph(e^{ph}-1)(-2-ph+2e^{ph}-phe^{ph})}.$$

(51)

D'après (50) on a

$$\sigma'(t) = \frac{b_i}{h} + c_i \cdot p e^{\frac{ph(t-t_i)}{h}} - d_i \cdot p e^{-\frac{ph(t-t_{i+1})}{h}}. \quad (52)$$

Soit $\tilde{\sigma}$ la fonction qui vérifie dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (D^4 - p^2 D^2)\tilde{\sigma} &= 0 \\ \tilde{\sigma}(t_i) &= y_i, \quad \tilde{\sigma}(t_{i+1}) = y_{i+1}, \\ \tilde{\sigma}'(t_i) &= f'(t_i), \quad \tilde{\sigma}'(t_{i+1}) = f'(t_{i+1}). \end{aligned} \quad (53)$$

Alors en utilisant (39) ou (49) selon le cas on a d'après (52) :

$$|\sigma'(t) - \tilde{\sigma}'(t)| \leq K_1 h^3, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad h \in [0, h']$$

où K_1 est une constante indépendante de h .

Donc

$$|\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)| \leq K_2 h^4, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad h \in [0, h']$$

où K_2 est une constante.

Il est donc facile de voir que

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{\infty} \leq K_3 h^4, \quad h \in [0, h'] \quad (54)$$

où K_3 est une constante.

Maintenant on va montrer que

$$\|\tilde{\sigma} - f\|_{\infty} = O(h^4).$$

Notons que l'espace nul de $D^4 - p^2 D^2$ qui est égal à $\text{Lin}(1, t, e^{pt}, e^{-pt}) = \mathcal{U}_4$ est un système de Tchebycheff complet généralisé (Extended Complete Tchebycheff = ECT) sur l'intervalle $[c, d]$ quelconque de \mathbb{R} . Soient

$$\omega_1(t) = 1 ,$$

$$\omega_2(t) = e^{pt} ,$$

$$\omega_3(t) = e^{-2pt} ,$$

$$\omega_4(t) = e^{pt} ,$$

$$\omega_5(t) = 1. \quad (55)$$

On définit

$$u_1(t) = \omega_1(t) ,$$

$$u_2(t) = \omega_1(t) \int_c^t \omega_2(s_2) ds_2 ,$$

$$\vdots$$

$$u_5(t) = \omega_1(t) \int_c^t \omega_2(s_2) \int_c^{s_2} \dots \int_c^{s_4} \omega_5(s_5) ds_5 \dots ds_2. \quad (56)$$

Donc $U_4 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base canonique ECT pour \mathcal{U}_4 et u_5 est la prolongation naturelle à un système ECT U_5 .

Si pour la simplicité on prend $c = 0$, alors on obtient :

$$u_1(t) = 1 ,$$

$$u_2(t) = \frac{e^{pt} - 1}{p} ,$$

$$u_3(t) = \frac{1}{2p^2} (e^{pt} + e^{-pt} - 2) ,$$

$$u_4(t) = \frac{1}{2p^3} (e^{pt} - e^{-pt} - 2pt) ,$$

$$u_5(t) = \frac{1}{2p^4} (e^{pt} + e^{-pt} - 2 - p^2 t^2). \quad (57)$$

On définit la différence divisée d'ordre 4 par rapport à U_5 d'une fonction de classe C^4 :

$$[s_1, s_2, \dots, s_5]_{U_5} f = \frac{D(s_1, \dots, s_5; u_1, \dots, u_4, f)}{D(s_1, \dots, s_5; u_1, \dots, u_5)} \quad (58)$$

où $D \begin{pmatrix} s_1, \dots, s_5 \\ u_1, \dots, u_5 \end{pmatrix} = \det(D^d_{i,j} u_j(s_i))_{i,j=1}^5$

avec

$$d_i = \max \{j : s_i = \dots = s_{i-j}\}, \quad i = 1, \dots, 5$$

et

$D \begin{pmatrix} s_1, \dots, s_5 \\ u_1, \dots, u_4, f \end{pmatrix}$ est défini de la même façon en remplaçant U_5 par f .

On a le résultat suivant pour l'erreur dans l'interpolation d'Hermite avec \mathcal{U}_4 (SCHUMAKER [34 , Thm. 9.9 p. 370]).

THEOREME 1

Soit $f \in C^4[c,d]$. Il existe une fonction unique u appartenant à \mathcal{U}_4 telle que

$$f(c) = u(c), \quad f(d) = u(d),$$

$$f'(c) = u'(c), \quad f'(d) = u'(d)$$

et pour $t \in [c,d]$ on a

$$f(t) - u(t) = Q(t)[c, c, d, d, t]_{U_5} f \quad (59)$$

où
$$Q(t) = \frac{D \begin{pmatrix} c, c, d, d, t \\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} c, c, d, d \\ u_1, u_2, u_3, u_4 \end{pmatrix}}$$

En utilisant le résultat suivant on peut donner une majoration pour $Q(t)$, $t \in [c,d]$. (SCHUMAKER [34 , Lemma 9.6, p. 367]).

THEOREME 2

$$\begin{aligned} \text{Soient } \underline{M}_i &= \min_{c \leq t \leq d} \omega_i(t), & i = 1, \dots, 5. \\ \overline{M}_i &= \max_{c \leq t \leq d} \omega_i(t), \end{aligned} \quad (60)$$

Alors pour $c \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_m \leq d$, $m = 1, \dots, 5$, on a

$$C_1 V(s_1, \dots, s_m) \leq D \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_m \\ u_1, \dots, u_m \end{matrix} \right) \leq C_2 V(s_1, \dots, s_m) \quad (61)$$

où V est le déterminant de Vander Monde

$$V(s_1, \dots, s_m) = D \left(\begin{matrix} s_1, \dots, s_m \\ 1, \dots, t^{m-1} \end{matrix} \right)$$

et C_1 et C_2 sont des constantes qui dépendent de m ainsi que de M_i et \overline{M}_i .

On déduit de (61)

$$|Q(t)| \leq \frac{\tilde{C}_2 V(c, c, d, d, t)}{\tilde{C}_1 V(c, c, d, d, d)} = \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{C}_1} (t-c)^2 (d-t)^2. \quad (62)$$

Maintenant pour majorer la seconde quantité $[c, c, d, d, t]_U f$ dans (59) on considère le développement généralisé de Taylor pour $f \in C^4[c, d]$:

$$f(s) = u_f(s) + \int_c^d G(s, \xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi \quad (63)$$

où $u_f(s)$ est la fonction unique dans \mathcal{U}_4 telle que

$$D^{j-1} f(c) = D^{j-1} u_f(c), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

et G est la fonction de Green associée à l'opérateur différentiel $D^4 - p^2 D^2$:

$$G(s, \xi) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } c \leq s \leq \xi , \\ \frac{1}{p^3} \left(\frac{e^{p(s-\xi)} - e^{-p(s-\xi)}}{2} - p(s-\xi) \right) , & \text{ si } \xi \leq s \leq d . \end{cases} \quad (64)$$

En appliquant la différence divisée au (63) on obtient :

$$[c, c, d, d, t]_{U_5} f = \int_c^d [c, c, d, d, t]_{U_5} G(s, \xi) (f^{(4)}(\xi) - p^2 f''(\xi)) d\xi$$

Donc

$$|[c, c, d, d, t]_{U_5} f| \leq \max(|f^{(4)}(\xi)| + p^2 |f''(\xi)|) \int_c^d |[c, c, d, d, t]_{U_5} G(s, \xi)| d\xi . \quad (65)$$

Ainsi on a d'après (62) et (65)

$$|f(t) - u(t)| \leq K(t-c)^2(d-t)^2 \quad (66)$$

où K est une constante.

En appliquant le résultat ci-dessus à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ on obtient :

$$|f(t) - \tilde{\sigma}(t)| \leq K h^4 , \quad t \in \mathbb{R}$$

dans le cas cardinal ou $t \in [a, b]$ dans le cas fini, où $\tilde{\sigma}$ est la fonction spline sous tension vérifiant

$$\tilde{\sigma}(t_i) = f(t_i), \quad \tilde{\sigma}'(t_i) = f'(t_i)$$

et K est une constante.

Ainsi en utilisant (54) on déduit

$$\|f - \sigma\|_{\infty} = O(h^4) , h \in [0, h']$$

σ étant une fonction spline cardinale ou cardinale tronquée.



CONCLUSION

La fonction spline sous tension traitée dans ce chapitre est un cas particulier de L-spline, la spline associée à un opérateur différentiel L. Dans [24] Michelli a défini l'espace LS (L,h) des fonctions spline cardinales associées à L et au pas h de la façon suivante :

Une fonction σ appartient à S(L,h) si

(1) dans chaque intervalle $[ih, (i+1)h]$ σ vérifie l'équation différentielle :

$$L\sigma(t) = D \prod_{j=1}^n (D-p_j) \sigma(t) = 0$$

pour $i \in \mathbb{Z}$ et les $p_j, j = 1, \dots, n$ sont réels,

(2) $\sigma \in C^{n-1}(\mathbb{R})$.

Si tous les p_j sont égaux à zéro alors on retrouve le cas des fonctions spline polynomiales. Dans le cas des fonctions spline sous tension on a $p_1 = 0, p_2 = p, p_3 = -p$. Les fonctions spline hyperboliques peuvent être aussi considérées comme un cas particulier de L-spline.

La restriction que les p_j soient réels implique que le système de solutions de L est un système de Tchebycheff complet généralisé (ECT). Dans le cas des fonctions spline trigonométriques d'ordre impair, les p_j sont complexes. Or dans ce cas là, si l'on prend h tel que $\frac{m}{2} h < \pi$, alors les solutions de L constituent encore un système ECT.

Dans le cas présent des L-spline, on peut définir la β -spline correspondante, Q(t) telle que

$$\begin{aligned} Q(t) &> 0 & , & \text{ si } 0 < t < (n+1)h, \\ &= 0 & , & \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On peut exprimer $\sigma(t)$ appartenant à $S(L, h)$ de façon unique sous la forme

$$\sigma(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_j Q(t-jh).$$

On définit la L-spline d'Euler par :

$$E(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^j Q(t-jh).$$

Micchelli a démontré qu'il existe ξ unique tel que

$$E(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi < h.$$

Il a aussi démontré le Théorème suivant :

Théorème :

Soit $\tau \geq 0$ fixé. Définissons

$$Y^\tau = \{y = (y_j) \mid y_j = O(|j|^\tau), j \rightarrow \pm\infty\}$$

et

$$S^\tau(L, h) = \{\sigma \in S(L, h) \mid \sigma(t) = O(|t|^\tau), t \rightarrow \pm\infty\}.$$

Soit $0 \leq \alpha < h$ et $\alpha \neq \xi$.

Alors, pour tout $y \in Y^\tau$, il existe $\sigma \in S^\tau(L, h)$ unique telle que

$$\sigma(\alpha+jh) = y_j, \quad i \in Z.$$

Il serait intéressant de voir si l'on peut trouver des relations entre $\sigma^{(k)}(jh)$, et $\sigma(\alpha+jh)$, $k = 1, \dots, n$ analogues aux relations (6) dans le Chapitre 4.

Micchelli a démontré que les racines de

$$Q(h)\lambda^{n-1} + Q(2h)\lambda^{n-2} + \dots + Q(nh) = 0$$

sont simples et négatives. En utilisant ce fait il sera peut être possible d'écrire $\sigma^{(k)}(jh)$ (sous forme des séries de) $\sigma(\alpha+jh)$. La forme de la solution étant connue, on pourra alors déterminer les constantes par l'exactitude pour les fonctions appartenant à l'espace nul de L. Ainsi il ne sera pas nécessaire d'écrire Q(t) explicitement. En tronquant convenablement on pourra alors définir une L-spline sur un intervalle fini de \mathbb{R} .

BIBLIOGRAPHIE
=====

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AHLBERG J.H., NILSON E.N., WALSH J.L.
The Theory of Splines and their Applications.
Academic Press, New York (1967).

- [2] BAUM A.M.
An Algebraic Approach to Simple Hyperbolic Splines on the
Real Line.
J. of Approximation Theory 17 (1976), 189-199.

- [3] BAUM A.M.
Double Hyperbolic Splines on the Real Line
J. of Approximation Theory 18 (1976), 174-188.

- [4] BEHFOROZ G.H. et PAPAMICHAEL N.
Improved Order of Approximation Derived from Interpolatory
Cubic Splines.
BIT 19 (1979), 19-26.

- [5] BEHFOROZ G.H. et PAPAMICHAEL N.
End Conditions for Cubic Spline Interpolation
J. Inst. Math. Applic. 23 (1979), 355-366.

- [6] BEHFOROZ G.H. et PAPAMICHAEL N.
End Conditions for Interpolatory Quintic Splines.
IMA Journal of Numerical Analysis 1 (1981), 81-93.

- [7] BIRKHOFF G. et de BOOR C.
Error Bounds for Spline Interpolation
J. Math. Mech. 13 (1964), 827-836.

- [8] BIRKHOFF G. et PRIVER A.
Hermite Interpolation Error for Derivatives.
J. Math. and Phys. 46 (1967), 440-447.

- [9] de BOOR C.
A Practical Guide to Splines.
Springer Verlag, Applied Math. Sciences 27 (1978).

- [10] CLINE A.
Crube Fitting in One and Two Dimensional Spaces Using Splines
under Tension.
Comm. ACM 17 (1974), 218-223.

- [11] DAVIS G.J.
Numerical Solution of a Quadratic Matrix Equation.
SIAM J. Sci. Stat. Comput. 2, 2(1981), 164-175.

- [12] DENNIS J.E.Jr., TRAUB J.F. et WEBER R.P.
The Algebraic Theory of Matrix Polynomials.
SIAM J. Numer. Anal. 13, 6(1976), 831-845.

- [13] DUBE R.P.
Univariate Blending Functions and Alternatives.
Computer Graphics and Image Processing 6 (1977), 394-408.

- [14] HALL C.A.
On Error Bounds for Spline Interpolation
J. of Approximation Theory 1 (1968), 209-218.

- [15] HALL C.A. et MEYER W.W.
Optimal Error Bounds for Cubic Spline Interpolation.
J. of Approximation Theory 16 (1976), 105-122.

- [16] KERSHAW D.
Two Interpolation Cubic Splines.
J. Inst. Math. Applic. 11 (1973), 329-333.

- [17] KULKARNI R. et LAURENT P.J.
Truncated Cardinal Quintic Spline.
RR IMAG. Université de Grenoble (1985)

- [18] LAURENT P.J.
Approximation et Optimisation.
Hermann, Paris (1972)

- [19] LAURENT P.J.
Fonctions-Spline Cardinales Tronquées.
RR IMAG, Université de Grenoble (1985)

- [20] LAURENT P.J.
Fonctions-Spline Périodiques.
RR IMAG, Université de Grenoble (1985)

- [21] LIPOW P.R. et SCHOENBERG I.J.
Cardinal Interpolation and Spline Functions III. Cardinal
Hermite Interpolation.
Linear Algebra and its Applications, 6(1973), 273-304.

- [22] LUCAS T.R.
Error Bounds for Interpolating Cubic Splines under Various End
Conditions.
SIAM J. Numer. Anal. 11, n° 3 (1974), 569-584

- [23] MARSDEN M.J.
Quadratic Spline Interpolation
Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 903-906

- [24] MICHELLI C.A.
Oscillation Matrices and Cardinal Spline Interpolation.
Studies in Spline Functions and Approximation Theory, Academic
Press (1976).

- [25] MICHELLI C.A.
Cardinal L-Splines.
Studies in Spline Functions and Approximation Theory, Academic Press (1976).
- [26] PAIHUA A.
Quelques Méthodes Numériques pour les Fonctions Spline à Une et Plusieurs Variables.
Thèse Grenoble, Mai 1978.
- [27] PAPAMICHAEL N et WORSEY A.J.
End Conditions for Improved Cubic Spline Derivative Approximations.
J. of Comput. and Applied Math., 7, n° 2 (1981), 101-109.
- [28] PRENTER P.
Piecewise L-Splines.
Numer. Math. 10 (1971), 243-253
- [29] PRUESS S.
Properties of Splines in Tension.
J. of Approximation Theory 17 (1976), 86-96.
- [30] SAKAI M.
On consistency Relations for Polynomial Spline at Mesh and Mid-points.
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (1983), n° 2, 63-65.
- [31] SCHOENBERG I.J.
Cardinal Spline Interpolation.
Regional Conference Series in Applied Mathematics, n° 12, SIAM, Philadelphia (1973).
- [32] SCHOENBERG I.J.
On Michelli's Theory of Cardinal L-Splines.
Studies in Spline Functions and Approximation Theory, Academic Press (1976), 251-276.

- [33] SCHULTZ M. et R. VARGA
L-Splines.
Numer. Math. 10 (1967), 319-345.

- [34] SCHUMAKER L.L.
Spline Functions Basic Theory.
Wiley-Interscience (1981)

- [35] SCHWEIKERT D.G.
An Interpolating Curve Using a Spline in Tension.
J. Math. Physics, 45 (1966), 759-768.

- [36] SHARMA A. et A. MEIR
Degree of Approximation of Spline Interpolation.
J. of Mathematics and Mechanics, 15, n° 5 (1966), 759-767.

- [37] SPATH H.
Exponential Spline Interpolation.
Computing 4 (1969), 225-233.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USMG

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M_r... M... ATTEIA.....

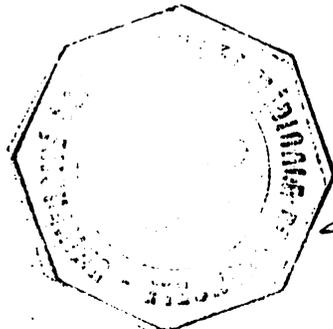
M_r... M... DUCJACQUET.....

Mlle..... Rekha..... KULKARNI..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du .DOCTORAT... U.S.M.G... en..
..Mathématiques..... Appliquées.....

19 NOV. 1985

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale



A handwritten signature in black ink, appearing to read 'M. Tanche', is written over a horizontal line.

M. TANCHE

RESUME :

Dans ce travail on propose des conditions de bout pour les fonctions spline polynomiales d'interpolation de degré p , $p \geq 2$ associées aux abscisses équidistantes qui économisent le calcul et entraînent un ordre de convergence optimal. On démontre que cette fonction spline peut être interprétée comme une fonction spline cardinale tronquée avec une correction convenable. Il est montré que la technique utilisée pour les fonctions spline polynomiales est applicable dans le cas des fonctions spline sous tension. Quelques résultats pour les fonctions spline cubiques de lissage sont aussi donnés.

Mots clés : *Fonction Spline Cardinale Tronquée, Matrice de Töplitz, Exactitude, Polynômes d'Euler-Frobenius.*