



Stratégies de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles. Mise en oeuvre d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt et d'adaptation de maillage.

Josselin Delmas

► To cite this version:

Josselin Delmas. Stratégies de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles. Mise en oeuvre d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt et d'adaptation de maillage.. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Picardie Jules Verne, 2008. Français. NNT: . tel-00311947

HAL Id: tel-00311947

<https://theses.hal.science/tel-00311947>

Submitted on 22 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stratégies de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles.

**Mise en œuvre d'estimation
d'erreur en quantité d'intérêt
et d'adaptation de maillage.**

Josselin DELMAS

Stratégies de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles.

Mise en œuvre d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt et d'adaptation de maillage.

Thèse de doctorat présentée pour obtenir le titre de :

Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

Spécialité Mécanique

Par :

Josselin DELMAS

Soutenue le 17 avril 2008 devant le jury composé de MM. :

Président et rapporteur :

Antonio HUERTA

Professor of Applied Mathematics (LaCàN, UPC) ;

Rapporteur :

Serge PRUDHOMME

Research Scientist (ICES, The University of Texas at Austin) ;

Examineurs :

Pierre-Bernard BADEL

Docteur Ingénieur (LaMSID et Dépt. AMA, EDF R&D) ;

Patrice COOREVITS

Professeur des Universités (LTI, UPJV) ;

Mohamed GUESSASMA

Maître de Conférence (LTI, UPJV) ;

Patrick HILD

Professeur des Universités (LMB, Université de Franche-Comté) ;

Jean-Marc ROELANDT

Professeur des Universités (Laboratoire Roberval, UTC) ;

Dirigée par P. COOREVITS, Laboratoire des Technologies Innovantes (EA 3899) ;

Co-encadrée par M. GUESSASMA, Laboratoire des Technologies Innovantes (EA 3899) ;

Co-encadrée par P.-B. BADEL, Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles

Durables (UMR EDF/CNRS 2832) et Département AMA, EDF R&D.

Stratégies de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles. Mise en œuvre d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt et d'adaptation de maillage.

Résumé

Pour les problèmes linéaires, différentes démarches existent pour estimer la qualité de la solution éléments finis. Elles conduisent généralement à l'estimation d'une norme de l'erreur globale. Mais le choix d'une précision globale fondée sur une norme du déplacement est souvent délicat car il n'y a pas de lien direct quantitatif avec une erreur sur des quantités mécaniques locales (appelées quantités d'intérêt) ayant un intérêt pour l'ingénieur. L'objectif de ce travail est de développer et de mettre en œuvre dans *Code_Aster* une méthode d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt pour le calcul de structures industrielles.

Une étude bibliographique a permis de situer l'état de l'art et de faire le point sur les méthodes d'estimation d'erreur globale et locale et sur les techniques d'adaptation de maillages afin de déterminer celles qui sont les plus adaptées pour le calcul de structures en milieu industriel.

Ensuite, une comparaison a été faite afin de déterminer la pertinence de l'utilisation de l'erreur en quantité d'intérêt dans un processus adaptatif par rapport à l'utilisation de l'erreur en norme de l'énergie, d'un raffinement uniforme ou d'un raffinement local dans la zone d'intérêt. L'étude a montré que l'utilisation de l'erreur en quantités d'intérêt est la stratégie qui permet toujours d'obtenir la meilleure précision pour un nombre d'éléments donné : cette stratégie est la plus pertinente dans un contexte de calcul de structures industrielles.

Compte tenu des résultats précédents, une méthode d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt a été développée et implémentée dans *Code_Aster*. Elle est basée sur la relation fondamentale de l'erreur en quantité d'intérêt et sur un estimateur d'erreur globale en norme de l'énergie de type résidus explicites. Cet estimateur ne permettant pas d'accéder à des bornes de l'erreur mais à une valeur approchée, il s'apparente donc à un indicateur d'erreur. Pour réaliser cette estimation, la résolution d'un problème dual est nécessaire. Les chargements de ce problème, particulier pour chaque quantité d'intérêt considérée, sont fournis pour de nombreuses quantités d'intérêt (notamment pour la contrainte de Von Mises). Le calcul final de l'erreur en quantité d'intérêt, à partir du calcul primal et du calcul dual est automatique. Une quantité d'intérêt pour l'estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité des contraintes a également été développée en 2D et 3D. Des exemples numériques ont montré le bon comportement de cet indicateur pour guider un processus d'adaptation de maillage pour les différentes quantités d'intérêt.

Enfin, la stratégie de contrôle d'erreur développée a été utilisée, avec *Code_Aster*, dans le cadre d'études de structures industrielles. Deux études effectuées au département AMA, à EDF R&D sont présentées. La première consiste à étudier la contrainte de Von Mises dans un rotor HP, la seconde s'intéresse à la contrainte verticale dans les goujons d'un assemblage boulonné.

Mots-Clés : méthode des éléments finis - élasticité linéaire - erreur *a posteriori* - erreur en quantité d'intérêt - résidus explicites - stratégie d'adaptation - contrainte de Von Mises - facteur d'intensité des contraintes - *Code_Aster* - structures industrielles.

Strategies of error control in industrial structural analysis. Implementation of error estimators in quantity of interest and mesh adaptation.

Abstract

For linear problems, various methods exist to estimate the quality of the finite element solution. They generally lead to estimate a norm of the global error. But the choice of a global precision founded on a norm of the displacement is often complex because there is no quantitative direct link with an error on local mechanical quantities (called quantities of interest) having an interest for the engineer. The objective of this work is to develop and implement in *Code_Aster* a method of error estimation in quantity of interest for the industrial structural analysis.

A bibliographical study was conducted to draw up the state of the art in global and local error estimation methods and mesh adaptation techniques. The most relevant methods for industrial structural analysis were then selected.

Then, a comparison was lead in order to determine the relevance of the error in quantity of interest in an adaptive process compared to the error in the energy norm, a uniform refinement or a local refinement in the zone of interest. This study pointed out that the use of the error in quantities of interest provides the best precision for a given number of elements: this strategy is the most relevant in a context of industrial structural analysis.

Taking into account the previous results, a method of error estimation in quantity of interest was developed and implemented in *Code_Aster*. This method is based on the fundamental relation of the error in quantity of interest and on a global explicit residual based error estimator. This estimator does not provide bounds of the error but an approached value, thus it is an error indicator. To estimate the error in quantity of interest, the resolution of a dual problem is necessary. The loadings of this problem, different for each quantity of interest considered, are produced for many quantities of interest (in particular for the Von Mises stress). The final computation of the error in quantity of interest, from primal computation and of dual computation is automatic. A quantity of interest for the estimation of the error on the stress intensity factors was also developed in 2D and 3D. Numerical examples showed the good behavior of this indicator to guide a process of mesh adaptation with various quantities of interest.

Lastly, the developed error control strategy was used, with *Code_Aster*, within the framework of studies of industrial structures. Two studies carried out at department AMA, EDF R&D are presented. The first consists in studying the Von Mises stress in a HP rotor, the second is interested in the vertical stress in the pins of a bolted assembly.

Keywords: finite element method - linear élasticity - *a posteriori* error - error in quantity of interest - explicit residual - strategy of adaptation - Von Mises stress - stress intensity factors - *Code_Aster* - industrial structural analysis.

Remerciements

Mener une thèse à son terme est indéniablement une expérience inoubliable. La durée de la thèse (trois ans et demi pour moi) constitue une vraie tranche de vie avec des rencontres, des joies, des déceptions et surtout des doutes. Quand j'ai accepté ce sujet, je ne savais pas exactement où je mettais les pieds. J'ai compris les choses au fur et à mesure et ce n'est qu'à la rédaction du mémoire que j'ai eu une vision globale du sujet. Je tenais donc à remercier tous les acteurs de cette tranche de vie. Bien que ces quelques lignes soient un exercice relativement convenu, je vais me prêter à l'expérience de la manière la plus sincère possible.

Le premier acteur que je dois remercier est Olivier Nicolas. Il m'a fait confiance en me proposant un stage de DEA qui, par la même occasion, m'a entrouvert les portes de EDF R&D. La deuxième personne (et pas des moindres quant à la réussite de cette aventure !) est Pierre Badel. Il proposait ce sujet de thèse à EDF R&D au département *Analyses Mécaniques et Acoustiques* et m'a fait confiance pour le mener à bien (enfin j'aime à le croire...) ; il a également co-encadré cette thèse côté industriel. Je te remercie donc Pierre. Merci de m'avoir fait confiance, de m'avoir suivi avec autant d'intérêt, de m'avoir appris tant de choses sur la Mécanique et sur *Code_Aster*, de ne m'avoir jamais laissé tomber dans les moments où les doutes étaient les plus grands..., d'avoir effectué une relecture du mémoire aussi efficace et rapide. J'espère très sincèrement que nous aurons encore la possibilité de travailler ensemble sur ce passionnant sujet !

Dans l'encadrement bicéphale (tricéphale dans mon cas) d'une thèse industrielle, il faut un laboratoire universitaire. C'est en Picardie que le Laboratoire des Technologies Innovantes se trouvait et plus précisément à Saint-Quentin dans l'Aisne. Je tiens donc à remercier Patrice Coorevits qui a dirigé cette thèse et Mohamed Guessasma qui l'a co-encadrée. Merci à toi Patrice pour m'avoir fait partager ta grande expérience du contrôle d'erreur et pour tes remarques très pertinentes pour chaque résultat que je te présentais. Merci à toi Mohamed pour avoir assuré la hot-line pour tous les problèmes en tout genre et pour les relectures en catastrophe des résumés pour les congrès.

Quand le mémoire de thèse est terminé, il faut qu'il soit évalué avant de pouvoir soutenir la thèse. C'est en ces circonstances qu'apparaissent les deux personnes suivantes. Je remercie vivement Antonio Huerta et Serge Prudhomme qui m'ont fait le très grand honneur d'accepter la lourde et fastidieuse tâche de rapporter mes travaux de thèse. Il faut comprendre qu'une grande partie de ce que j'ai compris de ce domaine de recherche vient de leurs différentes publications. Pour risquer la comparaison, je dirais que pour un rockeur débutant, ce serait avoir les Rolling Stones à la première de son concert ! Antonio Huerta m'a également fait le très grand honneur de présider mon jury de thèse. J'exprime toute ma gratitude à Patrick Hild et à Jean-Marc Roelandt de s'être intéressés à mes travaux et d'avoir participé à mon jury. Enfin je remercie Pierre Beckers qui avait accepté de participer au jury mais qui était déjà occupé aux dates proposées.

Cette thèse s'est déroulée principalement à EDF R&D au sein de deux unités : le département *Analyses Mécaniques et Acoustique* et au LaMSID, Unité Mixte de Recherche EDF/CNRS. Je remercie donc François Waeckel et Stéphane Andrieux, respectivement chef du département AMA et chef du LaMSID, de m'avoir accueilli et donné les moyens pour mener cette recherche à son terme.

Un grand merci à toute l'équipe de développement de Code_Aster qui m'a permis d'effectuer mes développements dans de bonnes conditions (dans le désordre) :

```
MERCI=CODE_ASTER(reuse=MERCI,
                  EQUIPE=_F(NOM=JACQUES_PELLET, ),
                      _F(NOM=MATHIEU_COURTOIS, ),
                      _F(NOM=NICOLAS_TARDIEU, ),
                      _F(NOM=AIMERY_ASSIRE, ),
                      _F(NOM=JEAN_PIERRE_LEFEVBRE, ),
                      _F(NOM=JEAN_MICHEL_PROIX),
                      _F(NOM=CHRISTOPHE_DURAND),
                      _F(NOM=ET_LES_AUTRES),
                  INFO=2, );
```

Ils m'ont été d'un grand secours quand il s'agissait d'installer, d'utiliser ou de développer *Code_Aster*. Un grand merci à Monsieur HOMARD® (mieux connu sous le nom de GERALD® NICOLAS®) qui a toujours été là pour assurer le support et qui à travers le projet « Qualité et Sensibilité en Mécanique » m'a permis de voyager pour présenter mes travaux en congrès. Je remercie Valérie Cano qui m'a fait partager son expérience sur les questions de qualité des études en mécanique. Elle m'a également donné l'idée de l'étude du rotor du chapitre 7 et Frédéric Hasnaoui m'a fourni le maillage et le fichier de commande pour la réaliser.

Je remercie globalement tous les membres du département AMA et du LaMSID qui par le biais de remarques ou au cours de discussions ont fait avancer ma thèse. Je remercie particulièrement Géraldine Fassassi et Sylvie Rouaix, respectivement assistante du LaMSID et du groupe T64 du département AMA.

Je remercie tous les copains qui m'ont supporté au quotidien au LaMSID : Samuel, Philou, Benji, Amine, Pierre-Emmanuel, Thomas, Khaled, Minh, Renaud, Trinh, Mohamed, Anas, Brice, Bassem, Fred, Ophélie, Marion, Karima.

Merci aussi aux copains de toujours, avec qui j'ai usé le fond de mon pantalon sur les bancs du lycée : Floflo et Odys. Merci aussi à Ralph et Marion. Vous n'avez rien compris mais vous êtes quand même venus !. Les autres copains rencontrés plus tard : Loulou, Vince, Aurel, NicoDL, Sylvain, Emelyne et les autres qui se reconnaîtront !

Je tenais à remercier Andrée et Alain. Merci d'être venu et surtout de vous être montré aussi impliqués dans cet événement. Merci à Vivi d'avoir traversé une partie de la Picardie pour venir à Saint-Quentin.

Un petit mot pour mes parents. Merci de m'avoir toujours soutenu, de m'avoir laissé la liberté de faire ce que je voulais et surtout d'avoir toujours cru en moi ! Une pensée pour ma sœur Marie-Laure, ma grand-mère Mamée, mon frère Nicolas et Daphné. Merci d'être là.

Un très grand merci à celle qui partage ma vie. Tu as suivi au jour le jour l'avancée de cette aventure. Je sais que ça n'a pas toujours été facile, surtout à la fin en période de rédaction. Mais tu étais là, tu croyais en moi. Grâce à toi, ma sœur et Vivi, vous étiez tellement stressées à la soutenance que vous avez absorbé tout le stress à des kilomètres à la ronde.

J'ai essayé de n'oublier personne. Si c'était le cas ou si quelqu'un ne se sentait pas assez remercié, je vous invite donc à me contacter au plus vite afin que je vous remercie en particulier.

Pour terminer, une dernière petite pensée pour la route :

Tout le monde fait des erreurs, l'important c'est de les contrôler.

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte et motivations	3
2 Objectifs de la thèse.....	6
3 Plan de la thèse.....	7
Partie 1 : Etat de l'art	
Chapitre 1 - Estimateurs d'erreur globale	13
1 Problème modèle et notations	13
1.1 Equations.....	13
1.2 Formulation variationnelle	15
1.3 Discrétisation par éléments finis	16
1.4 Erreur de discrétisation	16
1.5 Estimation d'erreur <i>a priori</i>	17
2 Estimateurs d'erreurs <i>a posteriori</i>	18
2.1 Définition des estimateurs <i>a posteriori</i>	18
2.2 Qualité des estimateurs	19
2.2.1 Indice d'efficacité.....	19
2.2.2 Indice de robustesse.....	20
3 Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre	20
3.1 L'équation des résidus.....	20
3.2 Estimateurs explicites	21
3.3 Estimateurs implicites	24
3.3.1 Estimateurs par patchs d'éléments.....	25
3.3.2 Estimateurs par éléments	25
3.3.3 Borne supérieure de l'erreur	26
3.3.4 Borne inférieure de l'erreur.....	27
4 Estimateurs d'erreurs basés sur le lissage des contraintes	27
4.1 Méthode globale.....	27
4.2 Méthode de recouvrement.....	28
5 Estimateurs d'erreur en relation de comportement.....	29
6 Autres démarches	32
6.1 Estimateurs basés sur les bases hiérarchiques	32
6.2 Estimateurs basés sur l'analyse duale	33
7 Estimateurs d'erreur pour les problèmes non linéaires	35
7.1 Problèmes non linéaires indépendants du temps	35
7.2 Problèmes non linéaires dépendants du temps.....	35
Chapitre 2 - Estimateur d'erreur locale.....	38
1 Erreur de pollution	38
1.1 Définition de l'erreur de pollution	38
1.2 Estimation de l'erreur de pollution.....	41
2 Erreur en quantité d'intérêt	41
2.1 Quantités d'intérêt	41
2.2 Problème dual et relation fondamentale	42
2.3 Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt	43

3	Bornes de l'erreur	45
3.1	Une nouvelle expression pour l'erreur	45
3.2	Borne supérieure de l'erreur.....	45
3.3	Borne inférieure de l'erreur	47

Chapitre 3 - Techniques d'adaptation de maillages 50

1	Intérêt industriel	50
2	Méthodes d'adaptation de maillages	51
2.1	Repositionnement des nœuds (r-adaptation)	51
2.2	Découpage et regroupement des mailles (h-adaptation)	51
2.2.1	Méthode locale de h-raffinement/déraffinement	51
2.2.2	Méthode globale de h-remailage	52
2.3	Modification des fonctions d'interpolation (p-adaptation)	53
2.4	hp-adaptation	54
2.5	Homard, un outil de h-adaptation.....	54
2.6	Critères d'adaptation	56
3	Maillage optimal.....	58
3.1	Définition de l'optimalité	58
3.2	Construction du maillage optimal	59
3.2.1	Cas régulier	60
3.2.2	Cas singulier	61
3.3	D'autres critères d'optimalité	64

Partie 2 : Estimation d'erreur en quantités d'intérêt et adaptation

Chapitre 4 - Intérêt industriel de l'erreur en quantités d'intérêt 69

1	Introduction.....	69
2	Cas des structures saines	71
3	Cas des structures fissurées	73
3.1	Fissure hors de la zone d'intérêt	73
3.2	Fissure dans la zone d'intérêt	76
4	Conclusion	78

Chapitre 5 - Estimation de l'erreur en quantités d'intérêt 81

1	Estimateur d'erreur en quantité d'intérêt basé sur les résidus d'équilibre explicites.....	82
2	Estimateur en quantité d'intérêt basé sur le lissage des contraintes	83
3	Estimateur en quantité d'intérêt basé sur les bases hiérarchiques	84
4	Forme générale des quantités d'intérêt.....	85
5	Grandeurs associées aux déplacements	85
5.1	Composante du déplacement dans un domaine.....	85
5.2	Composante du déplacement sur un bord	86
5.3	Déplacement normal à un bord	87
6	Grandeurs associées aux contraintes	87
6.1	Composante des contraintes dans un domaine	87
6.2	Contrainte normale à un bord.....	88
6.3	Contrainte de Von Mises dans un domaine.....	89
7	Exemples numériques.....	91
7.1	Estimateurs basés sur les résidus.....	92
7.1.1	Maillages triangles	92

7.1.2	Maillages quadrangles.....	96
7.1.3	Maillages quadratiques.....	97
7.1.4	Maillages 3D.....	98
7.2	Estimateurs basés sur les bases hiérarchiques	103
7.3	Estimateurs basés sur le lissage de champs	105
8	Conclusion	107
 Chapitre 6 - Une quantité d'intérêt pour la mécanique de la rupture		109
1	Éléments de mécanique de la rupture	109
1.1	Introduction	109
1.2	Modes de sollicitation.....	110
1.3	Facteurs d'intensité de contraintes	110
2	Une méthode d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes	111
3	Apport des éléments de Barsoum	112
4	De la quantité mécanique au chargement du problème dual.....	114
5	Applications numériques	115
5.1	Plaque en traction avec fissure droite avec éléments quadratiques	119
5.2	Plaque en traction avec fissure droite avec de Barsoum	119
5.3	Plaque en cisaillement avec fissure droite avec éléments quadratiques.....	120
5.4	Plaque en cisaillement avec fissure droite avec de Barsoum	121
5.5	Plaque en traction avec fissure inclinée avec éléments quadratiques.....	122
5.6	Plaque en traction avec fissure inclinée avec de Barsoum.....	123
6	Conclusion	124
 Partie 3 : Applications industrielles		
 Chapitre 7 – Rotor HP		127
1	Structure envisagée	127
2	Modélisation, chargement et maillage initial	128
3	Adaptation de maillage.....	130
4	Éléments de comparaison	137
5	Conclusion	138
 Chapitre 8 – Assemblage boulonné.....		141
1	Structure envisagée	141
2	Modélisation	144
3	Stratégie de calcul et maillage initial	145
4	Chargement	148
5	Adaptation de maillage.....	149
6	Éléments de comparaison	157
7	Conclusion	158

Conclusion	161
1 Conclusion	163
2 Perspectives	164
 Annexes	
Annexe A - Extension aux quantités d'intérêt non linéaires, exemple de l'intégrale J	171
1 Définitions	171
2 Première démarche : séparation des termes.....	172
3 Seconde démarche : linéarisation	173
 Annexe B - Extension de l'erreur en quantité d'intérêt aux problèmes non linéaires	175
1 Approche générale	175
2 Application au problème d'élasticité linéaire statique.....	177
 Annexe C - Commande Code_Aster	179
1 Mise en œuvre et utilisation dans <i>Code_Aster</i>	179
2 Exemple d'un fichier de commande Code_Aster	181
 Bibliographie.....	187

Introduction

1 Contexte et motivations

Au cours des trente dernières années, grâce à l'évolution constante de l'informatique, la simulation numérique est devenue une étape incontournable dans le processus industriel. En effet, il est ainsi devenu possible de faire évoluer un système mécanique dans son environnement (interactions avec l'extérieur) sans avoir recours à l'expérimentation qui, parfois, peut être inaccessible pour des raisons de temps, de coût ou de difficultés de mise en œuvre.

Afin de garantir la sûreté de ses installations et d'estimer leur durée de vie, Electricité de France réalise des études mécaniques qui s'appuient en grande partie sur la simulation numérique. Dans ce but, EDF développe un code de calcul de thermo-mécanique par éléments finis *open source* diffusé librement sous licence GNU-GPL, *Code_Aster* (Code_Aster, 2007). Ce code est l'outil de capitalisation de la R&D d'Electricité de France en matière de modélisation des phénomènes mécaniques, de leurs traitements numériques et des méthodes d'analyses associées.

Lors de ces simulations numériques, la modélisation des phénomènes physiques mis en jeu aboutit à un ensemble d'équations aux dérivées partielles en espace et en temps, représentant le modèle mathématique du problème à résoudre. De manière générale, une solution analytique de ces équations n'existe pas ; des méthodes d'approximation sont alors utilisées. Dans le domaine du calcul de structures industrielles, la méthode la plus répandue est la méthode des éléments finis, du fait de sa robustesse et de sa flexibilité. Mais quelques soient les précautions prises pour le choix du modèle mathématique ou la précision de la méthode numérique, un certain nombre d'erreurs intervient nécessairement.

Pour la méthode des éléments finis ou toute autre méthode numérique, la première source d'erreur provient des hypothèses faites sur le problème physique pour le traduire en termes mathématiques : choix d'une modélisation (poutre, plaque, coque, 2D ou 3D), choix de la loi de comportement, choix des caractéristiques matériaux. Ce type d'erreur est connu sous le nom d'erreur de modèle. Hormis l'erreur due aux arrondis et à l'intégration numérique qui est généralement très petite, l'autre source principale d'erreur, celle à laquelle nous allons nous intéresser, provient de la discrétisation. Elle se traduit de trois manières distinctes :

- la discrétisation spatiale, qui consiste à approcher la géométrie du système étudié par un assemblage de formes géométriques élémentaires (mailles) ;
- la discrétisation fonctionnelle, qui consiste à approcher la forme de la solution en fixant a priori une forme paramétrique simple de la solution (fonctions de forme) ;
- la discrétisation temporelle, qui consiste à considérer la période d'évolution comme une succession de périodes élémentaires (pas de temps).

Compte tenu des erreurs induites par la méthode d'approximation employée, il convient de se demander dans quelle mesure la solution trouvée est suffisamment fiable pour être

utilisée dans un processus de décision. De manière générale, tout utilisateur de la méthode des éléments finis doit se poser les deux questions suivantes :

- Quelle est la qualité de la solution approchée obtenue ?
- Comment optimiser les paramètres de la discrétisation qui conditionne cette qualité ?

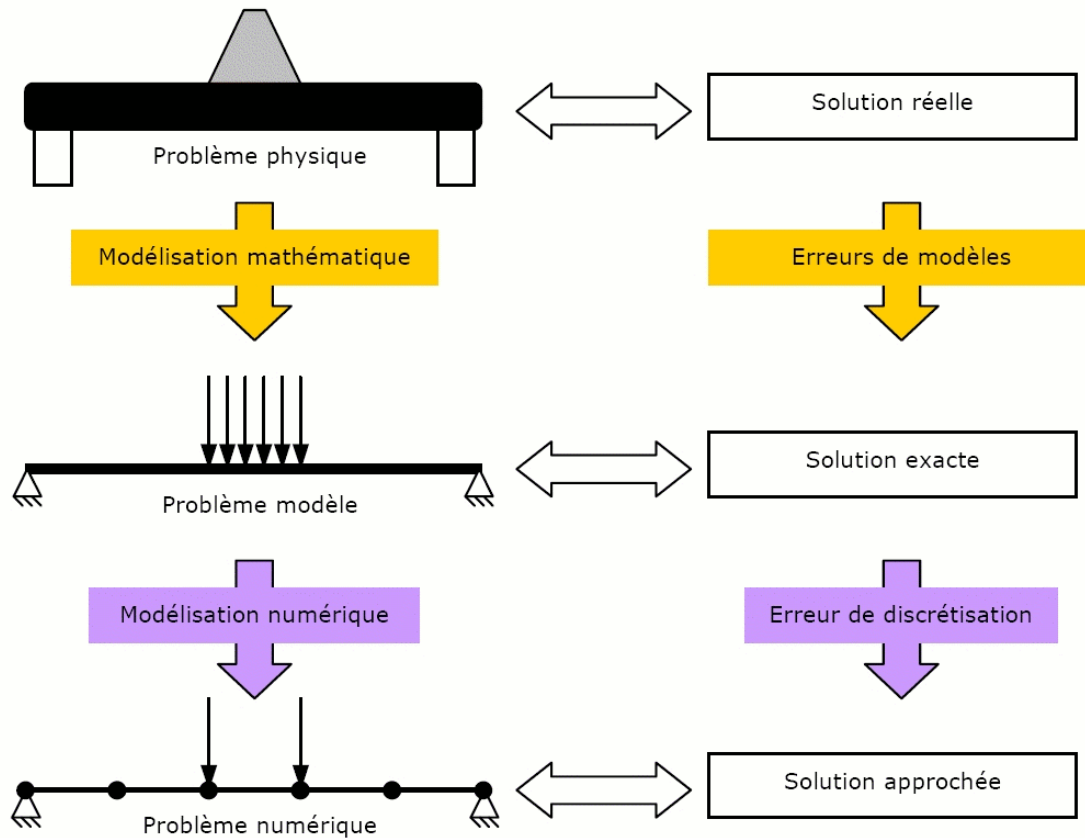


Figure 0.1.1 : Du problème physique au problème numérique (Ladevèze & Pelle, 2004).

Pour les problèmes linéaires, on distingue trois démarches principales pour estimer la qualité de la solution éléments finis. Les travaux de Babuška et Rheinboldt (Babuška & Rheinboldt, 1978) proposent des estimateurs d'erreur basés sur la notion de défauts d'équilibre ; les indicateurs de Zienkiewicz et Zhu (Zienkiewicz & Zhu, 1987) utilisent un lissage de contraintes ; enfin, l'évaluation d'erreur basée sur les travaux de Ladevèze (Ladevèze, 1975) repose sur le concept de l'erreur en relation de comportement. Elles conduisent toutes à l'estimation d'une erreur globale (norme L^2 , H^1 ou semi- H^1 ou encore norme en énergie du déplacement). Des techniques d'adaptation de maillage ont été mises au point à partir de ces estimateurs (Coorevits *et al.*, 1994) ; elles consistent à minimiser le coût de calcul en obtenant une précision globale. Ces méthodes d'estimation d'erreur se sont révélées fiables et sont aujourd'hui bien maîtrisées mais elles ont également montré leurs limites pour l'ingénieur. En effet, l'objet d'une étude mécanique est d'étudier la valeur ou l'évolution de la valeur de certaines quantités mécaniques, telles qu'un déplacement, un effort, une contrainte ou un facteur d'intensité des contraintes en mécanique de la rupture,

qui ont une importance en terme de dimensionnement ou de sûreté. Garantir la qualité de l'évaluation de ces quantités d'intérêt est alors primordial. Or le choix d'une précision globale fondée sur une norme du déplacement est souvent délicat car il n'y a pas de lien quantitatif direct avec une erreur sur des quantités mécaniques locales. En effet, une valeur faible de la norme en énergie de l'erreur globale n'implique pas nécessairement que l'erreur sur une quantité mécanique est faible dans la zone d'intérêt et réciproquement.

Les quantités d'intérêt sont décrites par des fonctionnelles Q du champ de déplacement u . En utilisant la méthode des éléments finis, une approximation u_h du champ de déplacement u et donc une approximation $Q(u_h)$ de la quantité d'intérêt $Q(u)$ sont obtenues. Afin de décider si l'approximation $Q(u_h)$ est suffisamment précise, il faut évaluer l'erreur en quantité d'intérêt $\mathcal{E}^Q$, définie par $\mathcal{E}^Q = Q(u) - Q(u_h)$. Si elle ne l'est pas il faut être capable d'obtenir des informations quantitatives pertinentes sur la manière d'améliorer l'approximation u_h afin d'obtenir la précision désirée sur la quantité d'intérêt. Cette information peut être fournie par les contributions élémentaires de l'erreur $\mathcal{E}^Q$.

De nombreux travaux ont été publiés sur l'estimation d'une erreur locale (erreur sur une quantité mécanique dans une zone précise), selon deux démarches. Le premier type d'estimation est basé sur le concept d'erreur de pollution, qui est l'erreur transmise jusqu'à la zone d'intérêt, occasionnée par la discrétisation dans le reste du domaine (Babuška *et al.*, 1995), (Huerta & Díez, 2000). Le second type d'estimation est basé sur la résolution d'un problème adjoint dont le chargement en effort est la quantité d'intérêt afin de se ramener à une estimation globale (Rannacher & Suttmeier, 1997), (Ladevèze *et al.*, 1999), (Prudhomme & Oden, 1999), (Becker & Rannacher, 2001). L'application de cette dernière démarche avec un estimateur d'erreur de type résidus implicite est très séduisante pour l'ingénieur. En effet, cette technique, très performante, permet d'accéder directement à l'erreur commise sur une quantité mécanique précise mais également à l'encadrement de cette erreur : des bornes strictes voire garanties de l'erreur peuvent être obtenues à partir du maillage initial. L'information quantitative ainsi obtenue peut nourrir un processus d'adaptation de maillage (raffinement ou remaillage avec la notion de maillage optimal) jusqu'à l'obtention d'une précision désirée.

Mais dans un contexte industriel et plus particulièrement à Electricité de France au travers de *Code_Aster*, un tel estimateur peut s'avérer difficile à utiliser pour plusieurs raisons. La première est le coût de calcul. Les estimateurs de type résidus implicites sont basés sur la résolution de l'équation de l'erreur sur chaque élément ou sur un patch d'éléments connecté au même nœud. Ainsi le coût de résolution de ces problèmes (autant que le nombre d'éléments ou de nœuds du maillage initial) peut devenir important, notamment pour des modèles 3D comportant beaucoup de degré de liberté. L'autre (et principale) raison est la difficulté d'implémentation dans un code industriel généraliste, notamment à cause de l'architecture et des structures de données qui ne sont pas adaptées.

2 Objectifs de la thèse

Dans ce travail, seules les erreurs de discrétisation dans la méthode des éléments finis seront considérées, c'est-à-dire les erreurs issues de l'opération de passage du modèle mathématique au modèle numérique. Le but est d'estimer et de contrôler l'erreur de discrétisation, différence entre la solution exacte u du problème mathématique et la solution u_h de l'approximation éléments finis, mais surtout de le faire pour une quantité mécanique qui présente un intérêt pour l'utilisateur.

L'objectif de cette thèse est de proposer une stratégie (utilisable de manière industrielle) permettant de s'assurer de la qualité de l'approximation éléments finis d'une quantité mécanique. La stratégie proposée consiste, à partir d'un premier maillage raisonnablement grossier, d'estimer l'erreur sur une quantité d'intérêt, d'utiliser cette information pour adapter le maillage et de réaliser une nouvelle approximation éléments finis. Les deux dernières étapes pouvant être renouvelées jusqu'à obtention d'une précision voulue. Pour mettre en œuvre cette stratégie et répondre à l'objectif de la thèse, quatre objectifs partiels peuvent être définis.

- ❖ **Étudier le comportement de l'erreur en quantité d'intérêt en présence de singularités :** les estimateurs globaux en norme de l'énergie montrent une valeur importante dans les zones où les contraintes présentent de forts gradients (congé par exemple) et où les contraintes sont singulières (encastrement ou pointe de fissure par exemple). Ainsi lors d'un processus d'adaptation, le maillage deviendra plus fin d'abord à proximité de la singularité alors que pour une quantité d'intérêt hors de la zone singulière, la discrétisation aurait dû potentiellement être améliorée ailleurs pour augmenter la précision sur la quantité d'intérêt. De la même manière, pour une quantité d'intérêt dans la zone singulière, à cause de l'erreur de pollution, la précision n'est pas nécessairement améliorée même si le maillage est plus fin dans cette zone. Les estimateurs d'erreur en quantités d'intérêt prenant en compte l'erreur sur toute la structure grâce au problème dual, une étude cherchera à déterminer dans quelle mesure ces estimateurs sont une alternative aux estimateurs globaux pour les structures présentant des singularités et donc s'ils présentent un réel intérêt industriel.
- ❖ **Développer et implémenter dans *Code_Aster* un estimateur d'erreur en quantités d'intérêt de type résidus explicites :** basé sur la résolution d'un problème adjoint (ou problème dual), cet estimateur permet d'avoir une indication fiable de l'erreur sur une quantité mécanique pour contrôler une adaptation de maillage. Bien qu'il existe de nombreux estimateurs *a posteriori* de type résidus implicites, fournissant des bornes de l'erreur, cet estimateur plus simple à mettre en œuvre et moins coûteux (pas de résolution, seulement du post-traitement) est préféré.

- ❖ **Développer une quantité d'intérêt pour la mécanique de la rupture :** en mécanique de la rupture, les fissures peuvent être caractérisées par des grandeurs telles que le taux de restitution de l'énergie G , l'intégrale J ou les facteurs d'intensité des contraintes K . De telles quantités ne sont pas utilisables directement comme chargement en effort du problème adjoint car soit elles ne sont pas linéaires par rapport au déplacement (l'expression $Q(u) - Q(u_h) = Q(e)$ n'étant plus valable) soit leur définition n'est pas adaptée (le chargement ne se déduit pas trivialement). Une formulation originale des facteurs d'intensité des contraintes basée sur une extrapolation du saut des déplacements entre les lèvres de la fissure par une méthode des moindres carrés permet d'utiliser un chargement linéaire pour le problème adjoint donnant ainsi accès à l'erreur sur les facteurs d'intensité de contraintes.
- ❖ **Appliquer la stratégie proposée à des structures industrielles :** la finalité de la thèse est, rappelons le, d'utiliser l'estimateur d'erreur dans un processus adaptatif sur des structures industrielles. Il s'agit de montrer que l'estimateur d'erreur et l'adaptation (raffinement ou remaillage) peut être mis en place pour des maillages de très grandes tailles, contenant de nombreuses entités et dont la géométrie comporte des singularités. Des études qui ont été menées à EDF R&D, au département AMA permettront d'illustrer la pertinence de la stratégie proposée.

3 Plan de la thèse

La thèse est divisée en trois parties abordant les trois thèmes suivants : l'état de l'art, la mise en œuvre et la vérification de l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt et des applications sur des structures industrielles des méthodes développées.

La première partie, consacrée à l'état de l'art présente un panorama de l'estimation d'erreur et des techniques d'adaptation de maillages. Le but de cette partie est de montrer l'intérêt des méthodes connues mais aussi leurs limites dans un contexte tel que celui décrit précédemment, permettant de fournir des pistes pour répondre aux problématiques d'EDF. Dans le premier chapitre de cette partie, les différentes techniques d'estimation d'erreur globale seront détaillées. Les trois démarches principales seront présentées mais aussi les méthodes basées sur les bases hiérarchiques et celles basées sur l'analyse duale. Le deuxième chapitre présente le cadre général de l'erreur en quantité d'intérêt qui nous permettra de construire notre estimateur. Nous montrerons également comment il est possible avec certains estimateurs de borner l'erreur en quantité d'intérêt. Enfin le troisième chapitre présente les différentes techniques d'adaptation de maillage et une stratégie d'adaptation de maillage basée sur le concept de maillage optimal.

La deuxième partie est consacrée à la mise en œuvre et à la vérification de notre estimateur d'erreur en quantité d'intérêt de type résidus explicites. Le quatrième chapitre, consacré à l'étude de l'intérêt industriel de l'erreur en quantité d'intérêt, permettra de répondre au deuxième objectif partiel. L'objectif est de déterminer, avant toute estimation, si l'erreur en quantité d'intérêt fournit une information plus pertinente que l'erreur en norme de l'énergie pour les structures industrielles. Ensuite, le chapitre 5 répondra à l'objectif partiel numéro

un, en présentant différentes méthodes d'estimation de cette erreur, implémentées dans *Code_Aster*, et quelques expériences numériques permettant de vérifier le bon comportement des estimateurs. La formulation des quantités d'intérêt en terme de chargement du problème dual sera détaillée pour différentes quantités linéaires et le traitement d'une quantité non linéaire, la contrainte de Von Mises, sera également présentée. Enfin une estimation originale de l'erreur sur les facteurs d'intensité des contraintes à partir d'une méthode d'extrapolation du saut des déplacements sur les lèvres de la fissure est présentée dans le chapitre 6. La pertinence de cette méthode d'estimation sera également vérifiée sur quelques exemples numériques. Ce chapitre répondra au troisième objectif partiel.

La troisième et dernière partie est consacrée à l'application des techniques développées à des structures industrielles. Deux études effectuées au département AMA, à EDF R&D sont présentées. Le chapitre 7 est consacré à l'étude du rotor HP d'une turbine. Il s'agit d'évaluer numériquement le niveau de contrainte pour de localiser les zones de contraintes maximales afin de vérifier s'il existe un risque d'amorçage de fissure par corrosion sous contraintes. Le chapitre 8 est quant à lui consacré à l'étude d'un assemblage boulonné. Le but dans cette étude est d'évaluer la composante verticale des contraintes dans les goujons.

Une grande partie des résultats de la partie 2 ont été présentés dans diverses conférences nationales et internationales (Delmas *et al.*, 2006a), (Delmas *et al.*, 2006b), (Delmas *et al.*, 2007a), (Delmas *et al.*, 2007b), (Delmas *et al.*, 2007c).

Partie 1

État de l'art

Chapitre 1

Estimateurs d'erreur globale

1	Problème modèle et notations
1.1	Equations
1.2	Formulation variationnelle
1.3	Discretisation par éléments finis
1.4	Estimation d'erreur <i>a priori</i>
2	Estimateurs d'erreurs <i>a posteriori</i>
2.1	Définition des estimateurs <i>a posteriori</i>
2.2	Qualité des estimateurs
2.2.1	Indice d'efficacité
2.2.2	Indice de robustesse
3	Estimateurs basés sur les résidus d'équilibre
3.1	Équation des résidus
3.2	Estimateurs explicites
3.3	Estimateurs implicites
3.3.1	Par éléments
3.3.2	Par patches d'éléments
3.3.3	Borne supérieure de l'erreur
3.3.4	Borne inférieure de l'erreur
4	Estimateurs d'erreurs basés sur le lissage des contraintes
4.1	Méthode globale
4.2	Méthode de recouvrement
5	Estimateurs d'erreur en relation de comportement
6	Autres démarches
6.1	Estimateurs basés sur les bases hiérarchiques
6.2	Estimateurs basés sur l'analyse duale
7	Estimateurs d'erreur pour les problèmes non linéaires
7.1	Problèmes non linéaires indépendants du temps
7.2	Problèmes non linéaires dépendants du temps

1 Problème modèle et notations

1.1 Équations

Un solide élastique, lié à un repère cartésien de $\mathbb{R}^3$, occupe, dans son état naturel et avant déformation, un domaine ouvert borné connexe Ω de $\mathbb{R}^3$ de frontière régulière $\partial\Omega$ de normale sortante $\vec{n}$. Ce contour est l'union de deux parties disjointes Γ_U et Γ_F telles que $\Gamma_U \cup \Gamma_F = \partial\Omega$ et $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset$.

Soit $\vec{u}(x) = u_1(x)\vec{e}_1 + u_2(x)\vec{e}_2 + u_3(x)\vec{e}_3$ le déplacement d'un point M de Ω de coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$. Sur le contour Γ_U , un déplacement $\vec{u}(x) = \vec{0}$ est imposé et un effort

surfacique $\vec{F}(x)$ est imposé sur Γ_F . Le solide est également soumis à un effort volumique $\vec{f}(x)$. L'étude est placée dans le cadre de l'élasticité linéaire et de l'hypothèse des petites perturbations, sans amortissement visqueux.

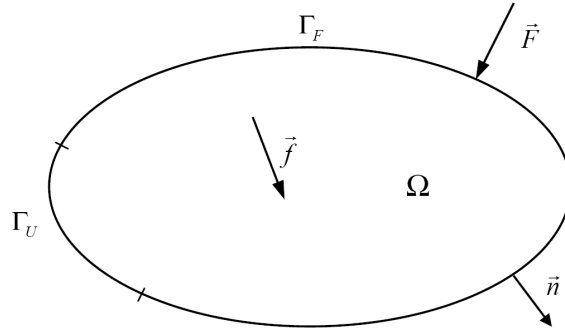


Figure 1.1.1 : Configuration non déformée.

Dans la suite, nous adoptons la notation indicielle pour les vecteurs et les tenseurs, ainsi que la règle de sommation d'Einstein sur les indices muets répétés. Ainsi, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad [1.1.1]$$

peut s'écrire :

$$a_{ij}x_j = b_i \quad [1.1.2]$$

La dérivée de la $i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur $\vec{v}$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ composante des coordonnées de l'espace s'écrira $v_{i,j}$.

Le tenseur symétrique des contraintes σ_{ij} est relié au tenseur symétrique linéarisé des déformations ε_{ij} par la relation :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad [1.1.3]$$

où a_{ijkl} est le tenseur des coefficients d'élasticité. Il satisfait les relations de :

- symétrie : $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij}$;
- positivité de la forme quadratique associée : pour tout tenseur réel symétrique du second ordre X_{ij} , $\begin{cases} \exists \alpha_0 > 0, & \text{tel que } X_{ij} a_{ijkl}(x) X_{kl} \geq \alpha_0 X_{ij} X_{ij} \\ \forall X_{ij} = X_{ji}, & \forall x \in \Omega \end{cases}$.

Le tenseur des déformations est relié au déplacement par la relation :

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u)) \quad [1.1.4]$$

Pour un matériau homogène et isotrope, la loi de comportement est la loi de Hooke :

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon)I + 2\mu \varepsilon \quad [1.1.5]$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Les équations d'équilibre, avec l'hypothèse des petites perturbations, s'écrivent :

$$\operatorname{div} \sigma + \vec{f} = \vec{0} \quad [1.1.6]$$

Les conditions aux limites définies précédemment s'écrivent :

$$\vec{u}(x) = \vec{0} \quad \text{sur } \Gamma_U \quad [1.1.7]$$

$$\sigma(x) \vec{n}(x) = \vec{F}(x) \quad \text{sur } \Gamma_F \quad [1.1.8]$$

L'ensemble des équations [1.1.4] à [1.1.8] constitue le problème (P₁) :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh} & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ u_i(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma_{ij} n_j(x) = F_i(x) & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad [1.1.9]$$

1.2 Formulation variationnelle

L'espace V est défini comme l'espace des fonctions v admissibles, suffisamment régulières définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_U\}$$

Les normes qui lui sont liées sont les suivantes :

Norme L^2	$\ v\ _{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v \cdot v \, d\Omega$
Norme H^1	$\ v\ _{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (v \cdot v + \nabla v : \nabla v) \, d\Omega$
Semi-norme H^1	$ v _{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, d\Omega$
Norme en énergie	$\ v\ _e^2 = \int_{\Omega} \sigma(v) : \varepsilon(v) \, d\Omega$

L'équation d'équilibre est multipliée par une fonction $v \in V$ suffisamment régulière puis intégrée sur le domaine Ω :

$$0 = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} v_i \, d\Omega + \int_{\Omega} f_i v_i \, d\Omega \quad [1.1.10]$$

$$0 = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} \, d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} \, d\Omega + \int_{\Omega} f_i v_i \, d\Omega \quad [1.1.11]$$

L'application de la formule de Green donne :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i \, d\Gamma \quad [1.1.12]$$

Les propriétés de symétrie du tenseur des contraintes impliquent :

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(v) \quad [1.1.13]$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma - \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega = 0 \quad [1.1.14]$$

Le premier terme du second membre est nul sur Γ_U et il reste :

$$\int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma - \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega = 0 \quad [1.1.15]$$

La formulation variationnelle du problème (P₁) s'écrit (Ciarlet, 1978) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v) \end{cases} \quad \forall v \in V \quad [1.1.16]$$

avec :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \quad [1.1.17]$$

$$l(v) = \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega \quad [1.1.18]$$

1.3 Discrétisation par éléments finis

Soit Ω^h une partition de Ω en N éléments. Un espace éléments finis $V^h \subset V$ est construit à partir de fonctions continues, polynomiales par morceaux, et de degré p_E sur chaque élément E . La discrétisation du problème (P₁) par la méthode de Galerkin fournit le problème (P_h) (Ciarlet, 1978) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h \in V^h \text{ tel que} \\ a(u^h, v^h) = l(v^h) \end{cases} \quad \forall v^h \in V^h \quad [1.1.19]$$

1.4 Erreur de discrétisation

L'erreur numérique e de l'approximation éléments finis u^h est définie par :

$$e = u - u^h \quad [1.1.20]$$

Comme u et u^h sont des éléments de V alors $e \in V$. L'erreur satisfait l'équation du résidu obtenue en remplaçant u par $u^h + e$ dans la formulation variationnelle du problème (P_h) :

$$a(e, v) = l(v) - a(u^h, v) = R_h^u(v) \quad \forall v \in V \quad [1.1.21]$$

Comme la forme bilinéaire est définie positive, le résidu R_h^u est une forme linéaire bornée sur V qui appartient à son dual V' . La norme du résidu est telle que :

$$\|R_h^u\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|R_h^u(v)|}{\|v\|_e} \quad [1.1.22]$$

Le résidu mesure la non-vérification de certaines propriétés des équations du problème et caractérise les défauts d'équilibre et donc l'erreur de discrétisation. Il est aisé de déduire de l'équation [1.1.21] une nouvelle propriété. La fonction v^h est utilisée comme fonction test :

$$R_h''(v^h) = l(v^h) - a(u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V^h \quad [1.1.23]$$

Puis en utilisant la forme discrétisée de la formulation variationnelle, la propriété d'orthogonalité ou propriété de Galerkin est obtenue :

$$a(e, v^h) = R_h''(v^h) = 0 \quad \forall v^h \in V^h \quad [1.1.24]$$

L'équation [1.1.21] indique que l'erreur est solution d'un problème d'élasticité dont le chargement en effort est le résidu d'équilibre. Ce problème est aussi compliqué à résoudre et coûteux que le problème initial. Ainsi, au lieu de déterminer l'erreur elle-même, ce sont des estimations qui seront cherchées.

1.5 Estimation d'erreur *a priori*

Comme son nom l'indique, l'estimation *a priori* se fait avant le calcul éléments finis car elle ne fait pas intervenir l'approximation éléments finis u^h . Ainsi l'analyse fonctionnelle et l'analyse numérique permettent, dans de nombreux cas et sous certaines hypothèses de régularité, d'obtenir des résultats d'estimation *a priori* ; c'est à dire la prédiction du taux de convergence asymptotique de l'erreur éléments finis. Pour plus de détails, les ouvrages de Ciarlet (Ciarlet, 1978) ou de Strang et Fix (Strang & Fix, 1973) pourront être consultés.

Une fonction $\tilde{\eta}(h, d, u)$ est une estimation d'erreur *a priori* si :

$$\|u - u^h\| \leq \tilde{\eta}(h, d, u) \quad [1.1.25]$$

où $\|\bullet\|$ est une norme sur les champs de déplacements, h la taille des éléments, d un ensemble de données du problème et u la solution exacte.

La convergence de la méthode éléments finis utilisée peut être obtenue si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\eta}(h, d, u) = 0 \quad [1.1.26]$$

et le taux de convergence, s'il existe un réel $q > 0$ tel que :

$$\|u - u^h\| \leq h^q \bar{\eta}(d, u) \quad [1.1.27]$$

Les estimateurs d'erreur *a priori* ne permettent pas de quantifier les erreurs sur la solution éléments finis car ils font intervenir la solution exacte qui n'est généralement pas connue. D'autre part, ces estimations ne sont valables que dans le régime asymptotique, régime qui est difficilement atteignable pour les calculs 3D. Pour les formulations utilisant des éléments de type isoparamétrique (Strang & Fix, 1973), dans le cas d'une solution régulière et pour la norme en énergie de l'erreur, $q = p$, où p est le degré d'interpolation des éléments finis. Par contre, dans le cas d'une solution singulière, $q = \min(p, \alpha)$ où α est l'ordre de la singularité de la solution du problème (pour une fissure, par exemple, $\alpha = \frac{1}{2}$).

2 Estimateurs d’erreurs *a posteriori*

2.1 Définition des estimateurs *a posteriori*

En estimation *a posteriori*, l’objectif n’est pas de trouver une estimation de la fonction erreur e mais de déterminer une estimation d’une mesure de l’erreur. Ainsi les estimateurs qui ont été développés ces trente dernières années fournissent une estimation fiable et précise de l’erreur dans des normes globales, telles que les normes H^1 , normes L^2 ou encore normes en énergie, en post-traitement de la solution éléments finis. Ce choix de normes globales est imposé par la forme bilinéaire. Quand la forme est définie positive et symétrique, comme c’est le cas ici, cela induit un produit scalaire pour lequel la norme associée est la norme en énergie ; il est ainsi naturel d’estimer l’erreur dans cette norme.

Le principe de base de ce type d’estimation est d’utiliser la solution approchée pour estimer l’erreur de discrétisation. Par opposition à l’estimation *a priori*, les estimations *a posteriori* ne peuvent se faire qu’une fois la solution approchée calculée.

Une fonction $\eta(h, u^h, d)$ est une estimation d’erreur *a posteriori* si :

$$\|u - u^h\| \leq \eta(h, u^h, d) \quad [1.2.1]$$

où $\|\bullet\|$ est une norme sur les champs de déplacements, h la taille des éléments, d un ensemble de données du problème et u^h la solution approchée. De plus, si $\eta(h, d, u^h)$ peut être localisée sous la forme :

$$\eta(h, u^h, d) = \left(\sum_E \eta_E(u^h, d)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad [1.2.2]$$

alors les quantités $\eta_E(u^h, d)$, contributions élémentaires de l’estimation de l’erreur globale $\eta(h, u^h, d)$, sont appelées indicateurs locaux d’erreur. Ils fournissent une base pour l’adaptation de maillages.

De nombreux estimateurs existent et peuvent être classés en trois catégories :

- Les estimateurs d’erreurs basés sur les défauts d’équilibre issus des travaux de Babuška et Rheinboldt (Babuška & Rheinboldt, 1978) ;
- Les indicateurs d’erreurs construits à partir de contraintes lissées issus des travaux de Zienkiewicz et Zhu (Zienkiewicz & Zhu, 1987) ;
- Les mesures d’erreurs fondées sur le concept d’erreur en relation de comportement issues des travaux de Ladevèze (Ladevèze, 1975).

Ces différents estimateurs, aujourd’hui bien maîtrisés, seront présentés de manière plus ou moins détaillée. Une revue plus détaillée pourra être trouvée dans (Verfürth, 1999),

(Ainsworth & Oden, 1997), (Ladevèze & Pelle, 2004), (Ramm *et al.*, 2003), (Grätsch & Bathe, 2005).

2.2 Qualité des estimateurs

Lorsqu'un estimateur est défini, il faut s'interroger sur les critères et les moyens permettant de juger des performances de cet estimateur. De manière générale, il faut chercher à construire un estimateur dont le comportement asymptotique (quand la taille h des éléments tend vers zéro) suit celui de l'erreur. Ce comportement se traduit par l'existence de deux constantes C_1 et C_2 , dépendant des données du problème et de la discrétisation mais pas de la taille des éléments, vérifiant la relation suivante (Ladevèze & Pelle, 2004) :

$$C_1\eta \leq \|e\| \leq C_2\eta \text{ lorsque } h \text{ tend vers zéro} \quad [1.2.3]$$

où η représente l'estimation de la mesure $\|e\|$ de l'erreur e sur le domaine considéré. Ainsi pour juger des performances des estimateurs, il existe différents critères intrinsèques.

2.2.1 Indice d'efficacité

L'indice d'efficacité γ est défini comme le rapport entre l'erreur calculée par un estimateur $e_{\text{estimée}}$ et l'erreur vraie e_{vraie} :

$$\gamma = \frac{e_{\text{estimée}}}{e_{\text{vraie}}} \quad [1.2.4]$$

A moins de disposer d'une solution analytique, l'erreur vraie est calculée comme la différence entre une solution obtenue sur un maillage très fin (solution *overkill*) et la solution obtenue sur un maillage donné. Un indice d'efficacité proche de l'unité caractérise un bon estimateur. Si cette propriété est atteinte quand la taille des éléments tend vers zéro, l'estimateur est dit asymptotiquement exact. Néanmoins, l'estimation doit être suffisamment précise (γ proche de 1) pour des maillages assez grossiers afin d'être utilisable pour les discrétisations courantes en ingénierie. Enfin, il est souhaitable de surestimer l'erreur ($\gamma > 1$) pour pouvoir être utilisable comme critère d'arrêt dans un processus adaptatif.

Des études systématiques ont été effectuées par Strouboulis et Haque (Strouboulis & Haque, 1992) et par Babuška (Babuška *et al.*, 1994) sur différents cas-tests ayant une solution analytique ou pour lesquels une solution de référence peut être déterminée sur un maillage très fin. Globalement, il en ressort que la qualité d'un estimateur dépend de la topologie du maillage, de la régularité de la solution et de la régularité (aplatissement) des éléments.

Le seul indice global γ ne permet pas de rendre compte de la manière dont l'erreur locale se comporte : il se peut, que dans quelques cas, l'estimateur soit satisfaisant pour ce critère sans qu'il ne réussisse à localiser les zones où l'erreur en énergie est importante (Wiberg & Abdulwahab, 1993).

2.2.2 Indice de robustesse

Afin de s’affranchir du comportement local de l’estimateur, un autre critère a été défini par Babuška et Rodriguez (Babuška & Rodriguez, 1993). Pour une triangulation donnée T , l’indice d’efficacité local γ_ω relatif au sous-domaine ω est défini par :

$$\gamma_\omega = \frac{e_{\text{estimée}}^\omega}{e_{\text{vraie}}^\omega} \quad [1.2.5]$$

Babuška et Strouboulis ont montré que l’on pouvait accéder numériquement à la plage de variation asymptotique de γ_ω (Babuška *et al.*, 1994) :

$$0 < C_{\text{inf}}^\omega \leq \gamma_\omega \leq C_{\text{sup}}^\omega < \infty \quad [1.2.6]$$

L’écart à 1 de γ_ω est mesuré par l’indice R_ω défini par :

$$R_\omega = \max \left\{ \left| 1 - C_{\text{sup}}^\omega \right| + \left| 1 - C_{\text{inf}}^\omega \right| ; \left| 1 - \frac{1}{C_{\text{sup}}^\omega} \right| + \left| 1 - \frac{1}{C_{\text{inf}}^\omega} \right| \right\} \quad [1.2.7]$$

L’indice de robustesse R est le plus grand R_ω obtenu en variant la position de la cellule ω de son voisinage sur les maillages appartenant à une classe de triangulation. Cette approche permet de mettre en évidence l’erreur de discrétisation sur un sous-domaine mais également la distorsion des éléments du maillage et la régularité de la solution. Bien que possédant des bases mathématiques, cette technique semble compliquée à mettre en œuvre pour des maillages complexes utilisés en ingénierie.

3 Estimateurs basés sur les résidus d’équilibre

3.1 L’équation des résidus

Les estimateurs basés sur les résidus d’équilibre ont été introduits par Babuška et Rheinboldt (Babuška & Rheinboldt, 1978). Le résidu global, représentant la source de l’erreur, est noté $R_h^u(v) = l(v) - a(u^h, v)$. Au niveau élémentaire, il peut être décomposé en plusieurs parties.

On définit le résidu intérieur r_E , pour chaque élément E du maillage, par :

$$\vec{r}_E = \text{div} \sigma_E^h + \vec{f} \quad [1.3.1]$$

Il mesure la non-vérification de l’équation d’équilibre intérieure.

Le résidu de bord t_Γ , sur chaque face Γ d’un élément, non incluse dans Γ_U est défini,

- si Γ n’est pas une face de Γ_F , où $\tilde{E}$ est l’élément adjacent à l’élément E suivant la face Γ , par :

$$\vec{t}_\Gamma = \sigma_E^h \vec{n}_E + \sigma_{\tilde{E}}^h \vec{n}_{\tilde{E}} \quad [1.3.2]$$

- si Γ est une face de Γ_F , par :

$$\vec{t}_\Gamma = \vec{F} - \sigma_E^h \vec{n}_E \quad [1.3.3]$$

Le résidu t_Γ mesure la discontinuité du vecteur contraintes dans la direction $\vec{n}_E$ à l'interface entre deux éléments et la non-vérification des conditions d'équilibre sur le bord Γ_F .

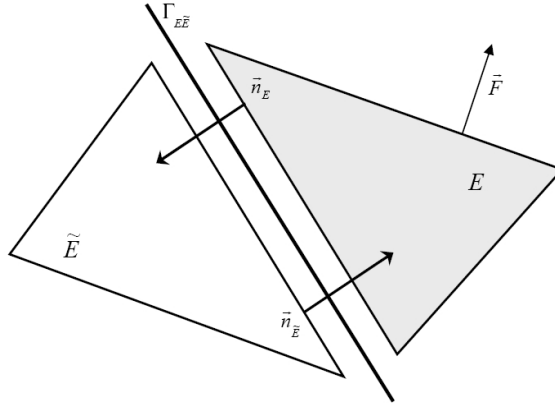


Figure 1.3.1 : Interface entre deux éléments.

L'utilisation de ces définitions permet de réécrire l'équation des résidus [1.1.21] sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} Tr[\varepsilon(e) K \varepsilon(v)] d\Omega = \sum_E \int_E r_E v dE + \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} t_{\Gamma} v d\Gamma \quad \forall v \in V \quad [1.3.4]$$

et le problème d'élasticité dont l'erreur $e = u - u^h$ est solution :

$$\begin{cases} \text{Trouver } e \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(e) K \varepsilon(v)] d\Omega = \sum_E \int_E r_E v dE + \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} t_{\Gamma} v d\Gamma \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [1.3.5]$$

Deux types d'estimateurs basés sur les résidus d'équilibre se distinguent :

- Les estimateurs explicites qui utilisent directement l'équation des résidus, liant l'erreur au résidu, pour obtenir une estimation globale de certaines normes de l'erreur e .
- Les estimateurs implicites qui utilisent des approximations de l'erreur en résolvant des problèmes locaux élément par élément ou par patch d'éléments.

3.2 Estimateurs explicites

Les estimateurs explicites, appelés *Global Explicit Residual Based Error Estimator* (Babuška & Rheinboldt, 1978), utilisent directement l'équation [1.3.4]. Ils impliquent de calculer les résidus intérieurs et les résidus de bords pour chaque élément afin d'estimer une norme en énergie de l'erreur. Dans ce but, la propriété d'orthogonalité est utilisée dans la relation liant l'erreur au résidu :

$$a(e, v) = \sum_E \int_E r_E (v - v^h) dE + \sum_\Gamma \int_\Gamma t_\Gamma (v - v^h) d\Gamma \quad [1.3.6]$$

L'opérateur d'interpolation de Clément est défini par $I_h : V \mapsto V^h$, (Clément, 1975). La fonction v^h étant l'image de v par l'opérateur I_h :

$$a(e, v) = \sum_E \int_E r_E (v - I_h v) dE + \sum_\Gamma \int_\Gamma t_\Gamma (v - I_h v) d\Gamma \quad [1.3.7]$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$a(e, v) \leq \sum_E \|r_E\|_{L^2(E)} \|v - I_h v\|_{L^2(E)} + \sum_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \|v - I_h v\|_{L^2(\Gamma)} \quad [1.3.8]$$

En prenant pour I_h , un opérateur d'interpolation local, on démontre (Clément, 1975) qu'il existe une constante c qui dépend de la forme des éléments, telle que :

$$\|v - I_h v\|_{L^2(E)} \leq c h_E |v|_{H^1(E^*)} \quad [1.3.9]$$

$$\|v - I_h v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c l_\Gamma^{\frac{1}{2}} |v|_{H^1(\Gamma^*)} \quad [1.3.10]$$

où h_E désigne la taille de l'élément E et l_Γ la taille de la face Γ définies par :

$$h_E = \sup_{M, N \in \Omega} \|\overline{MN}\| \text{ et } l_\Gamma = \sup_{M, N \in \Gamma} \|\overline{MN}\|$$

et où E^* est l'ensemble des éléments dont l'intersection avec E est non vide et Γ^* est l'ensemble des éléments dont l'intersection avec Γ est non vide.

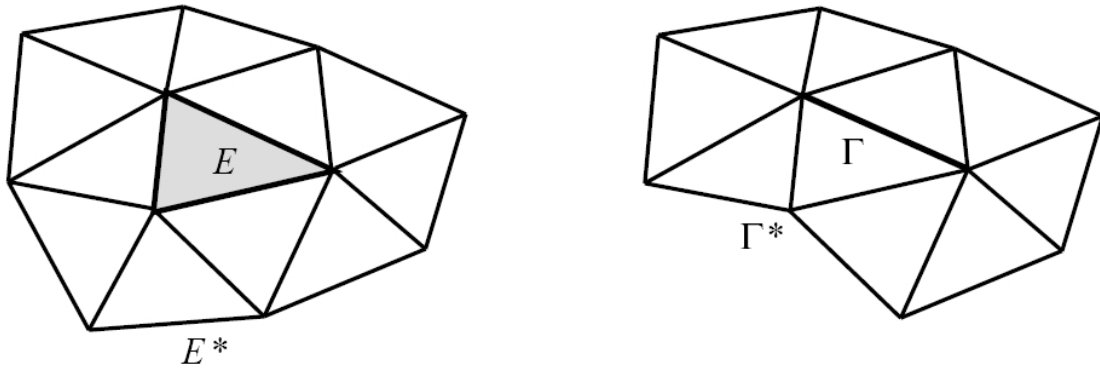


Figure 1.3.2 : Ensemble E^* et Γ^*

Dans la suite, c est une constante générique qui peut prendre des valeurs différentes, éventuellement dans la même équation.

En utilisant ces estimations de l'interpolation et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité suivante est obtenue (Verfürth, 1999) :

$$a(e, v) \leq c |v|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_E h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \sum_E \sum_{\Gamma \subset E} \beta_\Gamma l_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad [1.3.11]$$

avec : $\beta_\Gamma = \frac{1}{2}$ si $\Gamma \not\subset \partial\Omega$, $\beta_\Gamma = 1$ si $\Gamma \subset \Gamma_F$, $\beta_\Gamma = 0$ si $\Gamma \subset \Gamma_U$.

Finalement, grâce à la coercivité de la forme bilinéaire sur l'espace V , la relation entre la semi-norme H^1 et la norme en énergie s'écrit :

$$|v|_{H^1(\Omega)} \leq c \|v\|_e \quad [1.3.12]$$

et en choisissant $v = e$:

$$\|e\|_e^2 \leq c \left(\sum_E h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \sum_E \sum_{\Gamma \subset E} \beta_\Gamma l_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \quad [1.3.13]$$

Hormis la constante c , le second membre peut se calculer explicitement en fonction des données et de la solution éléments finis. Alors sur chaque élément E l'estimateur d'erreur local η_E est défini par :

$$\eta_E^2 = h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{\Gamma \subset E} \beta_\Gamma l_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad [1.3.14]$$

Ou encore :

$$\eta_E^2 = h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_E} l_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{\Gamma \in \Gamma_E} l_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad [1.3.15]$$

L'estimateur global η associé est défini par :

$$\|e\|_e \leq \tilde{c} \left(\sum_E \eta_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad [1.3.16]$$

Cet estimateur est programmé dans *Code_Aster*, il est disponible pour tous les types d'éléments 2D et 3D (sauf les pyramides) ainsi que pour les éléments linéaires et quadratiques.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, la constante $\tilde{c}$ est inconnue et ne peut pas être calculée sans un effort de calcul non négligeable. En réalité, cette constante est le produit de trois constantes (constante d'interpolation, constante de régularité, constante de stabilité) dont les origines sont différentes et donc le moyen de les déterminer aussi. Dans (Ramm *et al.*, 2003), des pistes sont fournies pour calculer ces constantes. Kelly et ses collaborateurs ont donné une valeur de la constante dans le cas de l'élasticité linéaire en contraintes planes (Kelly *et al.*, 1983). Cette valeur, faisant intervenir le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν et le degré d'interpolation p de l'élément fini, est celle implémentée dans *Code_Aster* :

$$\tilde{c} = \sqrt{\frac{1-\nu}{24Ep}} \quad \text{avec } p \geq 1 \quad [1.3.17]$$

La même constante est utilisée quelque soit la modélisation choisie (déformation plane, axisymétrique, 3D).

Cet estimateur est peu répandu dans les codes de calculs industriels bien qu'il a l'avantage d'avoir une forte base mathématique (des détails pourront être trouvés dans (Verfürth, 1996), (Ainsworth & Oden, 2000)) et d'être très simple à mettre en œuvre. Cependant, l'inconvénient majeur reste la constante : l'indice d'efficacité est directement relié à la constante choisie. Comme elle est difficile à calculer (valeur approchée), l'estimation peut

être peu précise. En pratique, la valeur de la constante est souvent dictée par des critères de sécurité ce qui peut fournir des estimations assez pessimistes de l'erreur vraie.

La quantité η_E , contribution de l'élément E à la borne η de l'erreur global $\|e\|$, ne fournit pas nécessairement une bonne estimation de la véritable erreur locale $\|e\|_E$ dans l'élément E . Ceci est dû aux erreurs de pollution, transportées jusqu'à l'élément depuis une zone éloignée, comme une zone singulière par exemple, où la solution n'est pas résolue de manière suffisamment précise. Toutefois il est habituel de supposer que la contribution η_E est une indication suffisante de l'erreur $\|e\|_E$ pour être utilisée comme indicateur de raffinement dans un processus adaptatif.

3.3 Estimateurs implicites

Le principe de ce type d'estimateur est de chercher localement des approximations de l'erreur e comme solutions de problèmes locaux posés sur un petit nombre d'éléments. Ensuite, ces approximations sont utilisées comme composante élémentaire pour construire l'estimateur d'erreur.

3.3.1 Estimateurs par patch d'éléments

Introduites sous le nom de *Subdomain Residual Method* par Babuška (Babuška & Rheinboldt, 1978), ces méthodes sont basées sur la résolution de problèmes locaux définis sur un ensemble d'éléments (ou patch). De nombreux auteurs ont travaillé sur ce type d'estimateur à partir de la pondération des formes bilinéaires locales par des partitions de l'unité (Carstensen & Funken, 2000), (Morin *et al.*, 2002), (Prudhomme *et al.*, 2004). La version présentée ici est issue des travaux du laboratoire LaCàN à Barcelone. Appelée *Flux-free error estimate*, cette méthode est détaillée dans la thèse de Parés (Parés, 2005) et dans (Parés, 2006a).

La première idée est d'utiliser une partition de l'unité, en utilisant des fonctions chapeaux linéaires φ^i qui valent 1 sur le noeud i et 0 partout ailleurs, qui forment une partition de l'unité :

$$\sum_i \varphi^i \equiv 1 \quad [1.3.18]$$

Par linéarité de tous les opérateurs du problème, $a(e, v) = R_h^u(v)$ peut alors se décomposer en une somme de problèmes (noter que ces problèmes sont globaux à l'échelle de la structure et de complexité égale à la complexité du problème initial) :

$$e = \sum_i \varphi^i e = \sum_i e^i \text{ où } e^i = \varphi^i e \quad ; \quad a(e^i, v) = R_h^u(\varphi^i v) \quad \forall v \in V \quad [1.3.19]$$

La seconde idée est d'approximer les problèmes globaux précédents par des problèmes locaux, en prenant la restriction de $a(\bullet, \bullet)$ sur le support de φ^i (ce support sera appelé « patch » ω^i) :

$$\hat{e} = \sum_i \hat{e}^i \quad ; \quad a_{\omega^i}(\hat{e}^i, v) = R_h^u(\varphi^i v) \quad \forall v \in V_{\omega^i} \quad [1.3.20]$$

On notera que, ce faisant, tous les termes de pollution sont négligés, ce qui constitue l'interprétation de cette approximation. On notera aussi que $\hat{e}$ appartient au « broken space » (espace qui vérifie la régularité locale et les conditions aux limites, mais qui est discontinu en un nombre fini de frontières intérieures).

Les problèmes locaux définis précédemment ne sont solubles que dans certains cas particuliers (assez nombreux, mais qui restent des cas particuliers, c'est le cas par exemple des éléments finis quadratiques à bord droit). Pour avoir des problèmes locaux solubles en toute généralité et de façon simple, il faut amender ces problèmes locaux à partir de deux idées :

- la première vient de l'orthogonalité de Galerkin, qui permet d'écrire que $R_h^u(v) = R_h^u(v - \Pi^H v)$ (cette transformation assure d'obtenir un problème soluble) ;
- la seconde vient de la remarque – triviale écrite comme cela – $R_h^u(v) = R_h^u(\Pi^h v) \quad \forall v \in V^h$ (cette transformation permet de simplifier le calcul du résidu en restant dans les espaces éléments finis habituels et donc de faciliter son implémentation).

Les problèmes locaux peuvent alors s'écrire (Parés, 2006a) :

$$a_{\omega^i}(\hat{e}^i, v) = R_h^u(\Pi^h(\varphi^i(v - \Pi^H v))) \quad \forall v \in V_{\omega^i} \quad [1.3.21]$$

3.3.2 Estimateurs par éléments

Cette méthode a été introduite par Demkowicz *et al.* (Demkowicz *et al.*, 1984) sous le nom d'*Element Residual Method* (ERM). Sur chaque élément E , une approximation e_E de e est cherchée comme solution d'un problème local avec des conditions aux limites de type Neumann :

$$\begin{cases} \text{Trouver } e_E \in V_E \text{ tel que} \\ a(e_E, v)_E = \int_E r_E v dE - \int_{\Gamma} R v d\Gamma \quad \forall v \in V_E \end{cases} \quad [1.3.22]$$

où $a(\bullet, \bullet)_E$ est la restriction de la forme bilinéaire à l'élément E et l'espace V_E est défini tel que $V_E = \{v \in H^1(E) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \Gamma_U^E\}$. R est une densité d'efforts surfaciques donnée sur les faces de E non-incluses dans Γ_U^E . La densité d'efforts surfacique peut alors être choisie telle que :

$$R = \begin{cases} \frac{1}{2} n_E (\nabla u_E^h + \nabla u_{E*}^h) & \text{sur } \partial E \cap \partial E^* \\ n_E \cdot \nabla u_E^h & \text{sur } \partial E \cap \Gamma_U \\ F & \text{sur } \partial E \cap \Gamma_F \end{cases}$$

L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le fait que le problème élémentaire à résoudre n'a pas toujours de solution si la densité R n'est pas correctement choisie. Une

première solution est de reformuler le problème élémentaire sur un sous espace $\tilde{V}_E \subset V_E$ dans lequel la forme bilinéaire sera coercive.

Une autre manière de procéder consiste à choisir des conditions aux limites telles que le problème soit bien posé, c'est-à-dire que la densité R soit construite de manière à assurer l'équilibre des efforts appliqués sur chaque élément. Cette dernière méthode, connue sous le nom d'*Equilibrated Residual Method*, est détaillée dans l'ouvrage d'Ainsworth et Oden (Ainsworth & Oden, 2000). Le principe est de calculer ces flux équilibrés en résolvant des problèmes locaux sur des patches d'éléments centrés sur les nœuds par la méthode de *flux splitting*.

3.3.3 Borne supérieure de l'erreur

Parés a énoncé une propriété sur l'existence d'une borne supérieure de l'erreur (Parés, 2005). Cette propriété est une condition suffisante pour qu'une estimation fournisse une borne supérieure de l'erreur en norme de l'énergie et ce quelque soit la méthode utilisée pour estimer l'erreur. Elle est donc valable aussi bien pour la méthode par élément (*equilibrated residual method*) que pour la méthode par patch (*flux-free error estimate*).

La propriété est la suivante :

Toute estimation $\hat{e} \in W$ de la fonction $e \in V$ vérifiant la forme faible de l'équation de l'erreur

$$a(\hat{e}, v) = a(e, v) = R_h^u(v) \quad \forall v \in V \quad [1.3.23]$$

où W est un espace d'interpolation adapté à l'estimation de $\hat{e}$, est telle que sa norme en énergie est une borne supérieure de la norme en énergie de e :

$$\|e\|_e \leq \|\hat{e}\|_e \quad [1.3.24]$$

Cette propriété se démontre facilement en choisissant $v = e$ dans l'équation [1.3.23] :

$$a(e, e) = \|e\|_e^2 = R_h^u(e) = a(\hat{e}, e) \quad [1.3.25]$$

La borne supérieure apparaît en appliquant le théorème de Cauchy-Schwartz :

$$\|e\|_e^2 = a(\hat{e}, e) \leq \|\hat{e}\|_e \|e\|_e \quad [1.3.26]$$

La borne supérieure η_{sup} de l'erreur en norme de l'énergie pourra donc être calculée :

$$\eta_{sup}^2 = \sum_E a_E(\psi_E, \psi_E) \quad [1.3.27]$$

où ψ_E est l'approximation de la solution du problème par élément ou par sous domaine dans lesquels l'espace des solutions a été enrichi par rapport à l'espace V^h .

3.3.4 Borne inférieure de l'erreur

L'obtention d'une borne inférieure repose sur l'observation suivante :

$$\|e\|_e = \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|R_h^u(v)|}{\|v\|_e} \quad [1.3.28]$$

Ainsi toute fonction $\chi \in V$ fournit une borne inférieure η_{inf} à l'erreur car :

$$\eta_{inf} = \frac{|R_h^u(\chi)|}{\|\chi\|_e} \leq \|e\|_e \quad [1.3.29]$$

En pratique, certains auteurs (Parés, 2006a), (Prudhomme *et al.*, 2003) ont choisi de construire une fonction continue χ à partir des fonctions locales ψ_E , lesquelles sont discontinues à l'interface des éléments puisqu'elles sont calculées indépendamment les unes des autres.

4 Estimateurs d'erreurs basés sur le lissage des contraintes

Ces méthodes sont basées sur le constat que, contrairement aux contraintes exactes σ , l'approximation éléments finis des contraintes σ^h présente des discontinuités aux interfaces entre éléments. Dans leur principe, ces estimateurs sont extrêmement simples. La démarche consiste donc à construire à partir de la solution éléments finis u_h un champ de contraintes continues $\tilde{\sigma}$ le plus proche possible de la solution exacte. La norme en énergie de l'erreur est donnée par :

$$\|e\|_e^2 = \int_{\Omega} Tr[\varepsilon(e) K \varepsilon(e)] d\Omega = \int_{\Omega} Tr[\tau(\sigma - \sigma^h) K^{-1} (\sigma - \sigma^h)] d\Omega \quad [1.4.1]$$

En remplaçant l'approximation éléments finis du champ de contraintes par le champ lissé, on obtient l'estimateur global :

$$\eta^2 = \int_{\Omega} Tr[\tau(\tilde{\sigma} - \sigma^h) K^{-1} (\tilde{\sigma} - \sigma^h)] d\Omega \quad [1.4.2]$$

Cette démarche repose sur le fait que le champ lissé $\tilde{\sigma}$ peut être considéré comme une bonne approximation de la contrainte exacte σ . La difficulté de cette technique est de construire un champ $\tilde{\sigma}$ donnant un indicateur fiable. Une technique de lissage du champ de contraintes σ_h permet d'obtenir le champ de contraintes $\tilde{\sigma}$. La pertinence de cet estimateur repose donc sur la méthode de lissage et de fait, la manière dont le champ de contraintes continues $\tilde{\sigma}$ représente le champ de contraintes exactes σ .

4.1 Méthode globale

Dans la méthode proposée par Zienkiewicz et Zhu (Zienkiewicz & Zhu, 1987), le champ lissé est obtenu en minimisant au sens des moindres carrés la distance entre le champ continu $\tilde{\sigma}$ et le champ éléments finis σ . Le champ de contraintes lissées $\tilde{\sigma}$ est exprimé sous la forme :

$$\tilde{\sigma} = N \bar{\sigma}^h \quad [1.4.3]$$

où N représente la matrice des fonctions de base utilisées dans l'analyse éléments finis et $\bar{\sigma}^h$ les valeurs nodales qui sont déterminées par la minimisation de la fonctionnelle :

$$J(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr \left[{}^T (\tilde{\sigma} - \sigma^h) K^{-1} (\tilde{\sigma} - \sigma^h) \right] d\Omega \quad [1.4.4]$$

Ce qui conduit à résoudre le système linéaire :

$$\int_{\Omega} {}^T N (\tilde{\sigma} - \sigma^h) d\Omega = 0 \quad [1.4.5]$$

En utilisant l'équation définissant $\tilde{\sigma}$, nous aboutissons au système matriciel :

$$M \bar{\sigma}^h = b \quad [1.4.6]$$

avec :

$$M = \int_{\Omega} {}^T N N d\Omega \text{ et } b = \int_{\Omega} {}^T N \sigma^h d\Omega \quad [1.4.7]$$

Ce système global, analogue à celui du calcul éléments finis, est à résoudre sur chacune des composantes du tenseur des contraintes (Zienkiewicz & Zhu, 1987) ; la matrice M est calculée et inversée une seule fois.

En pratique, une simplification du procédé de lissage conduisant à des calculs plus locaux est généralement utilisée. Diverses versions ont ainsi été proposées : (Ainsworth *et al.*, 1989), (Zienkiewicz & Zhu, 1991), (Zhong, 1991), (Le Dain, 1991), (Fourment, 1992), (Strouboulis & Haque, 1992), (Boussetta, 2005).

4.2 Méthode de recouvrement

D'autres améliorations ont été proposées par Zienkiewicz et Zhu (Zienkiewicz & Zhu, 1992a,b) en utilisant la notion de « super-convergence » des points d'intégration. La méthode de recouvrement, appelée *Super-convergent Patch Recovery* (SPR), consiste à faire un lissage sur deux niveaux. Dans un premier temps, une approximation où $\tilde{\sigma}_s$ est polynomiale du même degré que les déplacements est construite sur un patch d'éléments S_E puis dans un second temps une moyenne de $\tilde{\sigma}_s$ précédemment obtenue sur les parties des patches se recouvrant. L'approximation polynomiale est de la forme suivante :

$$\tilde{\sigma}_s = P a_s \quad [1.4.8]$$

où P contient les termes polynomiaux appropriés et a_s les coefficients inconnus des monômes correspondants. Par exemple, pour les triangles à 3 nœuds :

$$P = [1, x, y] \text{ et } a_s = {}^T [a_1, a_2, a_3] \quad [1.4.9]$$

La détermination des coefficients du polynôme a_s se fait en minimisant la fonctionnelle :

$$J(a_s) = \sum_{i=1}^N (\sigma^h(x_i, y_i) - \tilde{\sigma}_s(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^N (\sigma^h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i) a_s)^2 \quad [1.4.10]$$

où N est le nombre total de points d'intégration des éléments du patch et (x_i, y_i) leurs coordonnées.

Ce qui conduit à résoudre le système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^N {}^T P(x_i, y_i) P(x_i, y_i) a_s = \sum_{i=1}^N {}^T P(x_i, y_i) \sigma^h(x_i, y_i) \quad [1.4.11]$$

soit le système matriciel :

$$A a_s = b \quad [1.4.12]$$

avec :

$$A = \sum_{i=1}^N {}^T P(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \text{ et } b = \sum_{i=1}^N {}^T P(x_i, y_i) \sigma^h(x_i, y_i) \quad [1.4.13]$$

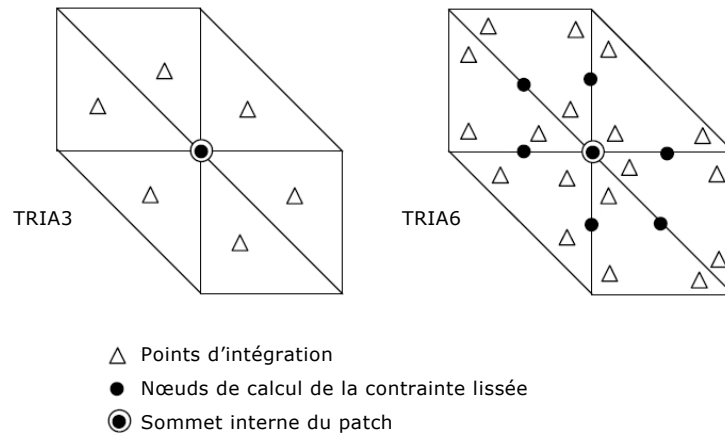


Figure 1.4.1 : Exemple de patches.

Ce système est résolu dans chaque patch, autant de fois qu'il existe de composante du champ de contraintes. La matrice A peut être très mal conditionnée (notamment sur les éléments de haut degré) voire impossible à inverser. Une normalisation des coordonnées sur chaque patch est alors utilisée (Zienkiewicz *et al.*, 1993). Enfin les valeurs nodales sont moyennées sur les parties des patches se recouvrant.

Cette dernière méthode est plus coûteuse que la méthode globale mais elle donne de très bons résultats. Grâce à la facilité de sa mise en œuvre et à son efficacité, cette méthode est la plus répandue, voire la seule, dans les codes de calculs industriels.

D'autres améliorations ont été proposées (Wiberg & Abdulwahab, 1993), (Blacker & Belytschko, 1994), (Wiberg *et al.*, 1995) mais la méthode proposée originellement reste la plus efficace.

Enfin, il faut noter que Zhu a démontré que les estimateurs d'erreur basés sur les résidus d'équilibre peuvent être dérivés des estimateurs basés sur le lissage de champs (Zhu, 1997).

5 Estimateurs d'erreur en loi de comportement

Ces estimateurs ont été introduits par Ladevèze (Ladevèze, 1975). L'erreur en déplacement est définie comme la différence entre le déplacement exact et le déplacement approché :

$$e = u - u^h \quad [1.5.1]$$

De manière analogue, une erreur sur les contraintes peut être définie :

$$\sigma - \sigma^h = K \varepsilon(e) \quad [1.5.2]$$

L'inconvénient de cette démarche est d'utiliser comme approximation du couple exact (u, σ) un couple (u^h, σ^h) dont la partie contrainte ne vérifie pas les équations d'équilibre. Afin de surmonter ce problème, les équations du problème sont scindées en deux :

- les conditions d'admissibilités (équations d'équilibre, équations de liaison, conditions initiales) ;
- la relation de comportement.

Ce choix conduit à considérer que le couple déplacement-contrainte vérifie les conditions d'admissibilités. Cette solution approchée vérifie une certaine loi de comportement qui en général diffère de la loi de comportement du matériau. Ainsi la qualité de l'approximation peut être appréciée en comparant les deux lois de comportement. Pour cela, à partir de la solution éléments finis et des données, un couple $(\hat{u}, \hat{\sigma})$ admissible est construit. Si ce couple vérifie la loi de comportement :

$$\hat{\sigma} - K \varepsilon(\hat{u}) = 0 \quad [1.5.3]$$

alors ce couple est la solution exacte du problème. Si ce couple ne vérifie pas la loi de comportement alors ce couple est une approximation de la solution exacte. La manière dont le couple ne vérifie pas la loi de comportement permet de juger de la qualité de la solution. Ceci mène à introduire l'erreur en loi de comportement définie par :

$$\hat{e}_{RdC} = \hat{\sigma} - K \varepsilon(\hat{u}) \quad [1.5.4]$$

Pour mesurer cette erreur, la norme en énergie est utilisée :

$$e_{RdC} = \left(\int_{\Omega} (\hat{\sigma} - K \varepsilon(\hat{u}))^T K^{-1} (\hat{\sigma} - K \varepsilon(\hat{u})) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad [1.5.5]$$

La qualité du couple $(\hat{u}, \hat{\sigma})$ construit conditionne la qualité de la mesure de l'erreur. La construction du champ de déplacements est simple. En effet, dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacements de type conforme, le champ de déplacements u^h est admissible. En général, $\hat{u} = u^h$ est choisi.

Par contre, le champ de contraintes σ^h calculé n'est pas statiquement admissible. Il est nécessaire de construire un champ $\hat{\sigma}$ qui vérifie les équations d'équilibre. Le principe de base consiste à chercher le champ $\hat{\sigma}$ comme un prolongement de la solution éléments finis tel que (Ladevèze & Pelle, 2004):

$$\int_E (\hat{\sigma} - \sigma^h) \text{grad} \varphi_i dE = 0 \quad \begin{array}{l} \forall E \in \Omega \\ \forall i \in I \end{array} \quad [1.5.6]$$

où I est l'ensemble des nœuds du maillage et φ_i est la fonction de forme associée au nœud i . Cette condition de prolongement impose au champ de contraintes $\hat{\sigma}$ cherché, sur tout élément et pour tout champ de déplacements, le même travail que la contrainte éléments finis σ^h calculée. Sur le bord ∂E de chaque élément E , une fonction α_E constante est définie sur chaque face de E et valant $+1$ ou -1 de manière à ce que, sur la face commune de deux éléments E_1 et E_2 :

$$\alpha_{E_1} + \alpha_{E_2} = 0 \quad [1.5.7]$$

Pour construire le champ de contraintes, des densités d'effort $\hat{F}$ sont construites sur les faces des éléments. Elles sont destinées à représenter les vecteurs contraintes sur les faces des éléments :

$$\hat{\sigma}|_E n_E = \alpha_E \hat{F} \quad [1.5.8]$$

Ainsi la continuité du vecteur contraintes dans la direction n_E est assurée à travers une interface. Sur les faces incluses dans Γ_F , on impose :

$$\alpha_E \hat{F} = F \quad [1.5.9]$$

Enfin ces densités sont construites de manière qu'elles soient en équilibre avec les charges intérieures données f sur chaque élément :

$$\int_E f v_s dE = \int_{\partial E} \alpha_E \hat{F} v_s ds \quad \forall v_s \text{ champ de déplacements solide} \quad [1.5.10]$$

Il suffit ensuite de construire une solution simple du problème local sur chaque élément :

$$\begin{cases} \text{div} \hat{\sigma} + f = 0 & \text{dans } E \\ \hat{\sigma} n_E = \alpha_E \hat{F} & \text{sur } \partial E \end{cases} \quad [1.5.11]$$

Des améliorations de la technique de construction du champ de contraintes admissible ont été apportées (*méthode optimisée*), la condition de prolongement a été affaiblie :

$$\int_E (\hat{\sigma} - \sigma^h) \text{grad} \varphi_i dE = 0 \quad \begin{array}{l} \forall E \in \Omega \\ \forall \tilde{I} \subset I \end{array} \quad [1.5.12]$$

où $\tilde{I}$ est l'ensemble des nœuds non sommet du maillage.

La méthode *flux splitting* utilisée pour l'*equilibrated residual method* peut être vue comme une variante particulière des méthodes décrites précédemment, permettant de construire la densité $\hat{F}$.

Cet estimateur donne de bons résultats et assure, en théorie, de ne jamais sous estimer l'erreur (en pratique le problème [1.5.11] doit être approximé dans un espace éléments finis auquel cas la borne n'est plus garantie). Cependant, il est peu implanté dans les codes de calculs industriels (le code SAMCEF (SAMCEF, 2006) semble être le seul exemple) du fait des difficultés de mise en oeuvre. En effet, l'implémentation nécessite une architecture adaptée (formulation du code en contraintes) et un effort de développement très important.

Un certain nombre de travaux autour de cet estimateur doivent être cités : utilisation pour les problèmes de thermique et en élasticité 2D (Ladevèze, 1995), extension à l'élasticité incompressible (Ladevèze *et al.*, 1992) et 3D (Coorevits *et al.*, 1997), sur la construction de champ CA (Ladevèze, 1975), (Ladevèze & Leguillon, 1983), sur la construction de champ CA optimisé en 2D (Ladevèze, 1994), en 3D (Florentin, 2002).

6 Autres démarches

6.1 Estimateurs basés sur les bases hiérarchiques

L'utilisation de bases hiérarchiques comme moyen de déterminer une erreur *a posteriori* a été présenté par Bank et Smith (Bank & Smith, 1993). Cet estimateur est basé sur le principe simple de comparer deux solutions du même problème obtenues en utilisant deux schémas de discrétisation de précision différente.

Considérons le problème modèle défini précédemment et supposons que l'approximation éléments finis $u^h \in V^h$ est connue. Le sous-espace de dimension finie $V^{h+} \subset V$ est un enrichissement du sous espace original V^h , tel que $V^h \cap V^{h+} = \{0\}$. Une approximation éléments finis améliorée est déterminée dans l'espace $V^* = V^h \oplus V^{h+}$ à partir du problème suivant :

$$a(u^*, v^*) = l(v^*) \quad \forall v^* \in V^* \quad [1.6.1]$$

L'espace enrichi V^* peut être construit en augmentant l'espace original V^h en utilisant des fonctions d'interpolation d'ordre plus élevé avec des bases hiérarchiques ou encore, en effectuant un raffinement uniforme du maillage utilisé pour construire l'espace original V^h .

En considérant que l'approximation u^* est plus précise que l'approximation originale u^h alors l'erreur globale est donnée par :

$$\|e\| = \|u - u^h\| \approx \|u^* - u^h\| = \|e^*\| \quad [1.6.2]$$

La différence entre les deux approximations u^* et u^h fournit donc une estimation de l'erreur. La validité de l'approximation $\|e\| \approx \|e^*\|$ est dictée par la manière dont u^* représente une solution améliorée de l'approximation éléments finie u^h . Ceci est traduit par l'hypothèse de saturation (Bank & Smith, 1993) :

Il existe une constante $\beta \in [0,1)$ telle que

$$\|u - u^*\| \leq \beta \|u - u^h\| \quad [1.6.3]$$

Dans le cas où l'espace enrichi est construit à partir du raffinement uniforme du maillage utilisé pour construire l'espace original, l'estimation *a priori* nous indique que pour des problèmes réguliers, $\beta \approx \frac{1}{2}$ pour des maillages linéaires et $\beta \approx \frac{1}{4}$ pour des maillages quadratiques. Dans la pratique, pour des solutions u suffisamment régulière, l'hypothèse de saturation est vérifiée.

Cette technique est très attractive sous plusieurs aspects : elle est applicable à une large classe de problèmes ; elle est simple et la plus facile à implémenter. D'un point de vue industriel, elle est facilement utilisable mais son inconvénient majeur reste le coût de calcul supplémentaire pour résoudre un problème de taille ou de complexité supérieure ; ce qui explique qu'elle n'existe dans aucun code industriel. Toutefois pour des problèmes de taille raisonnable et pour lesquels un estimateur n'est pas disponible, cette méthode reste intéressante.

6.2 Estimateurs basés sur l'analyse duale

Issue des travaux de Fraeys de Veubeke (Fraeys de Veubeke, 1965) sur l'analyse duale, cette méthode est basée sur la comparaison de deux solutions éléments finis du même problème, obtenues suivant deux approches différentes : une approche cinématiquement admissible (formulation en déplacements) et une approche statiquement admissible (formulation en contraintes). Les relations fondamentales permettant d'accéder à l'erreur ont été introduites par Debongnie (Debongnie *et al.*, 1995) et mises en œuvre dans SAMCEF par Kempeneers (Kempeneers, 2005).

Si la norme en énergie de l'erreur sur la solution cinématiquement admissible est notée $\|e_u\|_e$ et l'énergie potentielle totale associée à la solution exacte est notée $EP(u)$, alors il est montré que :

$$\|e_u\|_e^2 = 2[EP(u) - EP(u^h)] \quad [1.6.4]$$

De la même manière, si la norme en énergie de l'erreur sur la solution statiquement admissible est notée $\|e_\sigma\|_e$ et l'énergie cinétique totale associée à la solution exacte est notée $EC(\sigma)$, alors il est montré que :

$$\|e_\sigma\|_e^2 = 2[EC(\sigma) - EC(\sigma^h)] \quad [1.6.5]$$

De plus, on montre aussi que :

$$EP(u) + EC(\sigma) = 0 \quad [1.6.6]$$

Les trois relations précédentes conduisent à la relation fondamentale de l'analyse duale fournissant une borne de l'erreur globale de chacune des deux solutions approchées et définissant l'erreur basée sur l'analyse duale e^{ad} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|e_u\|_e \\ \|e_\sigma\|_e \end{array} \right\} \leq \left[\|e_u\|_e^2 + \|e_\sigma\|_e^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2EP(u^h) - 2EC(\sigma^h) \right]^{\frac{1}{2}} = e^{ad} \quad [1.6.7]$$

Au niveau global, la solution exacte est bornée par les deux solutions approchées, ce qui n'est plus vrai au niveau local. Toutefois il est possible d'obtenir une bonne indication de l'erreur locale par la plus grande distance entre les deux solutions approchées. Ainsi, l'estimation de l'erreur locale absolue e_E^{ad} est donnée par :

$$e_E^{ad} = \left(\int_E (\sigma^h - K \varepsilon(u^h))^T K^{-1} (\sigma^h - K \varepsilon(u^h)) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad [1.6.8]$$

La somme au carré de ces contributions élémentaires, redonne l'erreur globale absolue :

$$e^{ad} = \left(\sum_E (e_E^{ad})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad [1.6.9]$$

$$\text{avec } e^{ad} = \left(\int_{\Omega} (\sigma^h - K \varepsilon(u^h))^T K^{-1} (\sigma^h - K \varepsilon(u^h)) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = [2EP(u^h) - 2EC(\sigma^h)]^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux mesures de l'erreur précédentes sont totalement équivalentes à l'erreur en loi de comportement. La seule différence réside dans la manière d'obtenir la solution statiquement admissible. Contrairement à l'approche duale, l'approche en loi de comportement ne nécessite pas de calcul éléments finis obtenu par une formulation en contraintes mais un post-traitement de la solution éléments finis.

Ces estimateurs n'existent quasiment pas dans les codes industriels, ceci pour plusieurs raisons. Bien que la puissance des calculs augmentent sans cesse, il reste toujours très coûteux de mener en parallèle les deux analyses. Mais surtout les modèles équilibres sont très peu répandus dans les codes industriels du fait de leur complexité. Ainsi cette méthode demande beaucoup de développement pour être intégrée notamment pour assurer la robustesse de la méthode.

7 Estimateurs d'erreur pour les problèmes non linéaires

7.1 Problèmes non linéaires indépendants du temps

Les méthodes décrites pour les problèmes de statique linéaire sont étendues aux problèmes non linéaires même si l'on se sert de propriétés valides qu'en linéaire. Pour les méthodes basées sur les résidus, l'extension a été faite par Babuška et Rheinboldt (Babuška & Rheinboldt, 1982) et pour les grandes déformations, les travaux de Brink et Stein (Brink & Stein, 1998) peuvent être cités. Dans les différents travaux qui existent sur le sujet, la loi de comportement est linéarisée en supposant que l'erreur est petite afin de se ramener au cas linéaire.

7.2 Problèmes non linéaires dépendants du temps

La difficulté supplémentaire pour ce type de problème est que l'erreur se propage dans le temps. L'extension des estimateurs basés sur le lissage de champ aux problèmes non linéaires a été proposée par Zienkiewicz dans le cadre d'une formulation en vitesse pour des problèmes de mise en forme (Zienkiewicz *et al.*, 1988) mais également pour les problèmes d'élastoplasticité avec Boroomand (Boroomand & Zienkiewicz, 1999). Les travaux d'Aubry et Tie (Aubry *et al.*, 1991, 1992), (Tie, 1993) étendent aux problèmes d'élastoplasticité une technique basée sur une conservation locale de l'équilibre. Enfin des travaux ont été réalisés pour les problèmes de plasticité, pour un modèle de Prandtl-Reuss (Johnson *et al.*, 1991) et pour la viscoplasticité (Bass *et al.*, 1987), (Rannacher & Suttmeier, 1998).

Ces techniques consistent à prendre comme problème de référence, le problème discrétisé en temps. Chaque pas de temps est considéré comme un problème de statique en considérant que les conditions initiales à chaque pas de temps sont exactes. Les estimateurs définis pour les problèmes indépendants du temps peuvent être alors utilisés. Ainsi, pour les problèmes non linéaires, cette technique est utilisée dans *Code_Aster*. Dans ce cas, le maillage ne pourra être que raffiné et ne sera pas optimal (au sens minimum d'éléments pour une précision donnée).

Des méthodes basées sur l'erreur en relation de comportement ont été développées pour les problèmes non linéaires dépendants du temps. L'erreur au sens de Drucker e_{dru} (Ladevèze, 1985), (Ladevèze *et al.*, 1986), basée sur la condition de stabilité de Drucker, est définie par :

$$e_{dru}^2(\varepsilon_{CA}, \sigma_{SA}) = \sup_t \int_{\Omega} \eta(M, t) d\Omega \quad [1.7.1]$$

$$\text{avec } \eta(M, t) = \int_0^t \text{Tr}(\sigma_{SA} - \sigma_{CA})(\dot{\varepsilon}_{SA} - \dot{\varepsilon}_{CA}) d\tau$$

Un autre type d'erreur, l'erreur en dissipation (Ladevèze, 1989, 1995) est basée sur la formulation du comportement en variables internes. L'erreur en dissipation e_{diss} , mesure du non respect des équations d'évolution, est définie par :

$$e_{diss}^2(\dot{\hat{x}}, \hat{y}) = \sup_t \int_0^T \eta_T(\dot{\hat{x}}, \hat{y}) dt \quad [1.7.2]$$

avec $\eta_T(\dot{\hat{x}}, \hat{y}) = \int_{\Omega} [\varphi(\dot{\hat{x}}) + \varphi^*(\hat{y}) - \hat{y} \cdot \dot{\hat{x}}] d\Omega$, où $(\hat{x}, \hat{y})$ est une solution admissible qui vérifie toutes les équations sauf les équations d'évolution.

Chapitre 2

Estimateur d'erreur locale

1	Erreur de pollution
1.1	Définition de l'erreur de pollution
1.2	Estimation de l'erreur de pollution
2	Erreur en quantité d'intérêt
2.1	Quantités d'intérêt
2.2	Problème dual et relation fondamentale
2.3	Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt
3	Bornes de l'erreur
3.1	Une nouvelle expression pour l'erreur
3.2	Estimation des bornes de l'erreur

1 Erreur de pollution

1.1 Définition de l'erreur de pollution

Pour définir l'erreur de pollution, nous allons fournir une définition pragmatique en essayant de comprendre quel peut être son comportement et donc son influence au cours d'un processus adaptatif. Pour cela, nous allons étudier la convergence de l'erreur en norme de l'énergie dans différentes situations :

- Convergence de l'erreur globale pour un raffinement uniforme global ;
- Convergence de l'erreur dans la zone d'intérêt pour un raffinement global ;
- Convergence de l'erreur globale pour un raffinement local ;
- Convergence de l'erreur dans la zone d'intérêt pour un raffinement local.

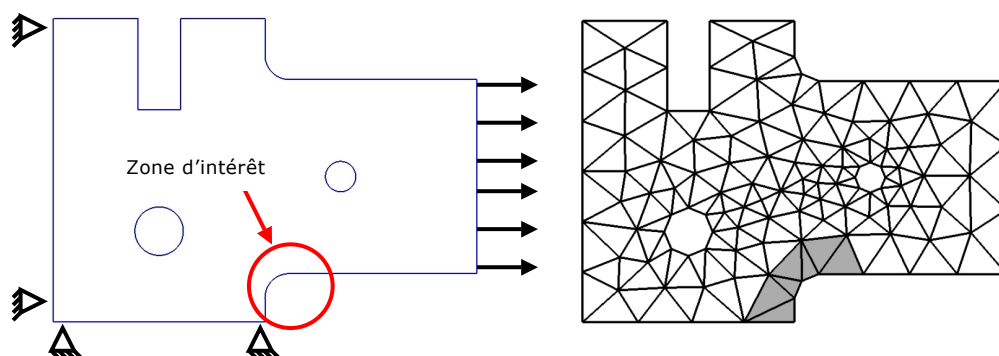


Figure 2.1.1 : Géométrie et maillage (192 éléments).

Le problème à résoudre est le problème dont la géométrie et le maillage sont donnés par la figure 2.1.1. L'effort imposé est unitaire, le module d'Young est égal à $E = 1.0$ Pa et le coefficient de Poisson vaut $\nu = 0.3$. Enfin la modélisation employée est une modélisation en

contraintes planes. Une série d'approximations éléments finis sera déterminée sur une succession de maillages linéaires obtenus par raffinement uniforme de la structure ou par raffinement uniforme de la zone d'intérêt ω . L'erreur en norme de l'énergie est alors calculée (donc sans estimation) à partir d'une solution obtenue sur un maillage très fin (solution *overkill*) qui sera notre solution de référence. Enfin l'erreur absolue est normée par la norme en énergie de la solution sur la structure ou sur la zone d'intérêt selon le cas. Les résultats sont présentés dans la figure 2.1.2.

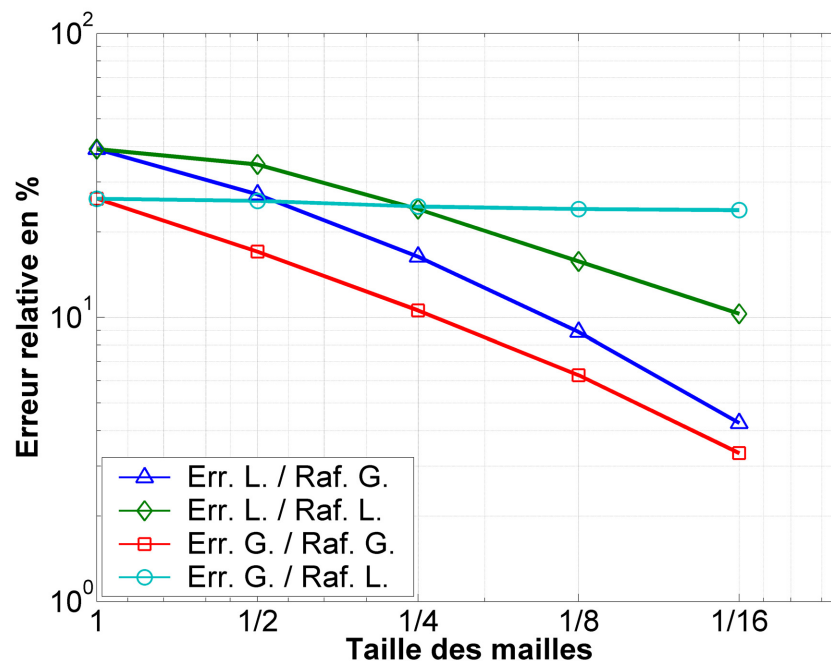


Figure 2.1.2 : Mise en évidence de l'erreur de pollution : convergence de l'erreur.

Pour un raffinement global, l'erreur globale converge « un peu moins vite » que $p=1$; en divisant la taille des mailles par 10, l'erreur n'est pas divisée par 10 (même en divisant la taille par 16 l'erreur n'est pas divisée par 10) (marqueurs carrés). Toutefois cette vitesse de convergence n'est atteinte qu'asymptotiquement. Il faut noter que la courbe représentée semble se rapprocher de la convergence théorique à partir du dernier segment (pour des tailles mailles entre 1/8 et 1/16). Ce n'est donc que la première partie d'une courbe de convergence qui est tracée, quand la convergence en $p=1$ n'est pas encore atteinte (régime pré-asymptotique).

Lorsque seule la zone d'intérêt est raffinée, la solution n'est pas améliorée dans le reste de la structure. L'erreur globale reste pratiquement inchangée (marqueurs ronds). Ceci indique que l'erreur dans la zone d'intérêt contribue très peu à l'erreur globale.

Par contre en étudiant les courbes relatives à l'erreur dans la zone d'intérêt, il est visible que pour améliorer de manière significative la solution dans cette zone il ne suffit pas de raffiner uniquement cette zone. En effet les deux courbes (marqueurs losanges et marqueurs triangulaires) montrent une décroissance de l'erreur locale mais celle obtenue par le

raffinement local montre une décroissance plus lente : les deux courbes s'écartent. Il semble donc que l'erreur dans le reste de la structure a aussi une influence sur la qualité de la solution dans la zone d'intérêt. Ce qui signifie que la somme des contributions locales des estimateurs globaux sur le sous domaine ω ne représente pas exactement l'erreur locale. Il semble donc que l'erreur locale vraie est composée de deux parties : une composante locale et une composante complémentaire issue du reste de la structure. La conséquence de ceci est qu'en ne raffinant que la zone d'intérêt, l'erreur dans le reste de la structure ne diminue pas (i.e. la composante complémentaire reste constante). On peut alors imaginer que la courbe représentant l'erreur locale avec un raffinement local (marqueurs losanges) converge vers une valeur non nulle si le raffinement est poursuivi : cette valeur non nulle représentera la composante complémentaire (la composante locale tendant vers zéro). La valeur de la composante complémentaire est alors appelée « erreur de pollution ».

Une définition plus formelle peut être donnée. L'erreur de pollution a été introduite par Babuška *et al.* (Babuška *et al.*, 1994a), (Babuška *et al.*, 1995), (Babuška *et al.*, 1997). Ils présument que l'erreur de discrétisation dans un sous domaine ω de la structure est composée :

- d'une erreur locale sur ω , faisant abstraction du reste de la structure ;
- d'une erreur de pollution ou transportée, issue de la discrétisation dans le reste de la structure.

La relation fondamentale entre l'erreur globale e et la solution ϕ_E du problème local de l'erreur (solution issue de l'*Equilibrated Residual Method* par exemple) est rappelée :

$$a(e, v) = \sum_{E \in \Omega} a_E(\phi_E, v) \quad \forall v \in V \quad [2.1.1]$$

Un erreur locale e_ω^{loc} sur un sous-domaine ω peut être définie par :

$$a(e_\omega^{loc}, v) = \sum_{E \subset \omega} a_E(\phi_E, v) \quad \forall v \in V \quad [2.1.2]$$

Comme la fonction indicatrice d'erreur locale ϕ_E ne dépend que des résidus locaux de l'approximation éléments finis évaluée sur le patch d'éléments E^* (figure 1.3.2), l'erreur locale e_ω^{loc} ne dépend que des résidus locaux sur le patch $\tilde{\omega}$, constitué des éléments de ω et des éléments voisins. La composante complémentaire de l'erreur vraie est l'erreur de pollution e_ω^{pol} :

$$a(e_\omega^{pol}, v) = \sum_{E \notin \omega} a_E(\phi_E, v) \quad \forall v \in V \quad [2.1.3]$$

Cette partie de l'erreur vraie provient des résidus situés en dehors du sous domaine et est transportée jusqu'au sous domaine, affectant ainsi la précision. L'erreur e_ω dans un sous-domaine ω est donc la somme des deux composantes définies précédemment :

$$e_\omega = e_\omega^{loc} + e_\omega^{pol} \quad [2.1.4]$$

Au vu de la figure 2.1.2 et de la définition précédente, il devient évident que la maîtrise de l'erreur de pollution est primordiale. En effet, en dehors de la zone d'intérêt, lorsque le maillage est grossier, il peut-être une source importante d'erreur de pollution. En

conséquence, un raffinement local sur un sous domaine doit être contrebalancé par un raffinement adéquat en dehors du sous domaine afin de contrôler l’erreur de pollution. Nous verrons dans la suite que les estimateurs d’erreur en quantité d’intérêt permettent d’assurer cette équilibre entre raffinement local et raffinement en dehors du sous domaine.

1.2 Estimation de l’erreur de pollution

Pour estimer l’erreur de pollution, différentes méthodes ont été proposées. La méthode proposée par Babuška (Babuška *et al.*, 1995) est liée aux fonctions de Green qui décrivent l’interaction entre différents points du domaine. L’erreur de pollution est estimée avec l’erreur d’approximation de la fonction de Green associée à certains points. Une autre méthode a été utilisée par Huerta et Díez (Huerta & Díez, 2000) et consiste à trouver une approximation de e_{ω}^{pol} par résolution du problème définissant cette erreur. D’autres travaux peuvent être également cités (Ainsworth, 1999), (Oden & Feng, 1996). L’intérêt industriel de l’évaluation de cette erreur étant limité, nous ne développerons pas davantage ces méthodes d’estimation. Les nombreux travaux sur le calcul de bornes de l’erreur rendent inutiles l’estimation de l’erreur de pollution car elle est comprise dans les bornes. De plus, pour l’estimation d’une erreur locale, comme nous l’avons déjà indiqué, les estimateurs en quantité d’intérêt permettent de s’affranchir de l’erreur de pollution grâce au problème dual.

2 Erreur en quantité d’intérêt

2.1 Quantités d’intérêt

Les estimations d’erreurs en norme de l’énergie sont trop abstraites pour fournir aux utilisateurs de codes de calculs suffisamment d’informations sur les différents aspects de la solution cherchée. Il est alors plus utile d’estimer une erreur en termes de quantités d’intérêt ; quantités ayant un sens physique (une moyenne de déplacements dans une sous-région du domaine physique ou une moyenne de contraintes sur une interface ou bien encore, dans le cas de vibrations, l’une des fréquences propres). Mathématiquement, elles sont caractérisées par des fonctionnelles linéaires ou non dans l’espace de fonctions auxquelles appartiennent les solutions.

Plusieurs exemples sont donnés : la moyenne d’une composante du déplacement sur un domaine ω :

$$Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} v_x d\Omega \quad [2.2.1]$$

la moyenne d’une composante du tenseur des contraintes sur un domaine ω :

$$Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{xx} d\Omega \quad [2.2.2]$$

On cherche alors à calculer la quantité ε^Q qui peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\varepsilon^Q = Q(u) - Q(u^h) \quad [2.2.3]$$

Dans le cas où Q est linéaire, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\varepsilon^Q = Q(u - u^h) = Q(e) \quad [2.2.4]$$

Dans la suite, seul le cas des fonctionnelles linéaires sera considéré car cela correspond au cadre de l'approche simplifiée présentée dans la suite. De manière générale, le traitement utilisé pour les quantités non linéaires (comme la contrainte de Von Mises ou l'intégrale J en mécanique de la rupture) est la linéarisation (Becker & Rannacher, 2001), (Oden & Prudhomme, 2002). En annexe A, le cas d'une quantité non linéaire est donné, l'intégrale J .

2.2 Problème dual et relation fondamentale

L'erreur en quantité d'intérêt peut être estimée en utilisant des propriétés de dualité des opérateurs intervenant dans la formulation faible du problème de référence. D'un point de vue mécanique, cela correspond à l'existence d'une fonction solution d'un problème dual, dite fonction d'influence, représentant l'influence des efforts du problème de référence sur l'énergie totale. La fonction d'influence est ensuite utilisée comme pondération des résidus d'équilibre du problème de référence.

Une approche simplifiée est présentée, dans la mesure où le cadre est limité à l'élasticité linéaire et aux quantités d'intérêt linéaires. Ceci se traduit par le fait que $Q(\bullet)$ est une forme linéaire et que $a(\bullet, \bullet)$ est une forme bilinéaire. Cette approche permet de mieux comprendre la nécessité d'utiliser l'erreur sur la fonction d'influence et pas seulement la fonction d'influence.

La relation entre l'erreur en quantité d'intérêt et le résidu peut être exprimée par l'introduction d'une fonction inconnue ω , appelée fonction d'influence :

$$Q(e) = \omega(R_h^u) \quad [2.2.5]$$

De plus, on montre dans (Oden & Prudhomme, 2001) que la relation précédente devient :

$$Q(e) = R_h^u(\omega) \quad [2.2.6]$$

En combinant la relation précédente avec l'équation des résidus :

$$a(e, v) = R_h^u(v) \quad [2.2.7]$$

une relation entre l'erreur sur le problème de référence, la fonction d'influence et l'erreur en quantité d'intérêt est obtenue :

$$a(e, \omega) = Q(e) \quad [2.2.8]$$

Cette égalité est nécessairement vérifiée lorsque $\omega \in V$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in V \text{ tel que} \\ a(v, \omega) = Q(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [2.2.9]$$

Ce problème est appelé problème dual ou adjoint. On remarque ω pouvait être calculée de manière exacte, alors $Q(u)$ pourrait être déterminée directement à partir des données du problème car :

$$Q(u) = a(u, \omega) = l(\omega) \quad [2.2.10]$$

Mais malheureusement, il est aussi difficile de déterminer la fonction d'influence ω que de déterminer u dans le problème primal. C'est pourquoi une approximation éléments finis $\omega^h \in V^h$ de ω qui satisfait

$$a(v^h, \omega^h) = Q(v^h) \quad \forall v^h \in V^h \quad [2.2.11]$$

est introduite. On note également qu'en substituant e à v^h dans le problème dual, on obtient :

$$Q(e) = a(e, \omega) \quad [2.2.12]$$

Remplacer ω par ω^h dans la relation précédente n'est pas suffisant pour obtenir une estimation de $Q(e)$ car $a(e, \omega^h) = 0$ (propriété d'orthogonalité). C'est pourquoi il faut évaluer l'erreur sur la fonction d'influence notée $\varepsilon = \omega - \omega^h$. En introduisant cette erreur dans la relation précédente, une représentation de l'erreur est obtenue :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) \quad [2.2.13]$$

Dans le cas des problèmes non linéaires et/ou des quantités d'intérêt non linéaires, ce qui précède ne s'applique pas. Dans ce cas, le problème primal s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ A(u; v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [2.2.14]$$

où $A(\bullet, \bullet)$ est une forme semi-linéaire telle que les arguments qui suivent le point-virgule sont linéaires et $L(\bullet)$ une forme linéaire continue sur V .

La démarche consiste à considérer le problème primal comme un problème de minimisation sous contrainte (Becker & Rannacher, 2001), (Oden & Prudhomme, 2002) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ Q(u) = \inf_{z \in S} Q(z) \\ \text{où} \\ S = \{z \in V; A(z; v) = L(v), \forall v \in V\} \end{cases} \quad [2.2.15]$$

Pour résoudre le problème de minimisation, le couple $(u, \omega) \in V \times V$ est cherché tel qu'il satisfait le problème primal et le problème dual :

$$\begin{cases} A(u; \tilde{v}) = L(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in V \\ A'(u; v, \omega) = Q'(u; v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [2.2.16]$$

Finalement, la relation entre l'erreur en quantité d'intérêt ε^Q et le résidu est donnée par :

$$\varepsilon^Q = Q(u) - Q(u^h) = R(u^h; \omega) + \Delta A + \Delta Q \quad [2.2.17]$$

où ΔA et ΔQ font intervenir les dérivées secondes et troisièmes de A et Q . Une démonstration est donnée dans l'annexe B.

2.3 Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt

A partir de la relation fondamentale [2.2.13], différentes techniques ont été développées afin d'estimer l'erreur en quantité d'intérêt.

La technique la plus simple et la plus directe est d'utiliser les estimateurs globaux en norme de l'énergie. En appliquant le théorème de Cauchy-Schwartz, une relation entre l'erreur en quantité d'intérêt et les normes en énergie des erreurs sur le problème primal et le problème dual peut être trouvée (Ainsworth & Oden, 2000) :

$$|Q(e)| \leq \|e\|_e \|\varepsilon\|_e \quad [2.2.18]$$

Cette expression nous permet ainsi d'estimer facilement l'erreur en quantité d'intérêt en utilisant n'importe quel estimateur d'erreur en norme en énergie, ceci sans développement supplémentaire dans un code de calcul disposant d'estimateurs globaux. Bien que cette estimation est la plus simple, elle est aussi la plus grossière : elle ne prend pas en compte les interactions locales entre l'erreur primale et l'erreur duale (schématiquement cela veut dire qu'une erreur sur le déplacement ne se traduit pas par une erreur en quantité d'intérêt). Ceci peut mener à de lourdes surestimations de l'erreur en quantité d'intérêt.

Une approche un peu différente, appelée *Dual Weighted Residual* (DWR) (Becker & Rannacher, 2001), consiste à considérer l'expression exacte de l'erreur en quantité d'intérêt :

$$Q(e) = a(e, \omega - \omega^h) = R_h^u(\omega - \omega^h) \quad [2.2.19]$$

Le problème dual est résolu en utilisant une méthode d'approximation d'ordre élevée. Une autre méthode, moins coûteuse, consiste à utiliser des fonctions d'interpolation d'ordre élevées définies sur des patchs élémentaires du domaine. Cette approche conduit à une borne supérieure garantie de l'erreur.

Une approche « bornes exactes » (*exact bounds approach*) (Sauer-Budge *et al.*, 2004) utilise les propriétés de l'estimation basée sur l'analyse duale. Ainsi grâce à une formulation en déplacements de la méthode des éléments finis, une borne inférieure de l'énergie de déformation exacte est obtenue ; grâce à une formulation en contraintes, une borne supérieure de l'énergie complémentaire exacte est obtenue. D'un point de vue pratique, cette méthode est très coûteuse puisqu'elle implique de résoudre deux fois le problème primal et le problème dual.

D'autres méthodes existent pour estimer l'erreur en quantité d'intérêt mais d'un point de vue industriel, seule l'approche utilisant des estimateurs globaux en norme de l'énergie semble être convaincante. Elle ne nécessite pas de développement supplémentaire pour accéder à une indication de l'erreur et elle est aussi beaucoup moins coûteuse. Cette approche sera donc développée dans la suite.

3 Bornes de l'erreur

3.1 Une nouvelle expression pour l'erreur

Bien que très simple à obtenir, la relation [2.2.18] produit une surestimation conséquente de l'erreur. Différentes techniques ont été proposées pour remédier à ce problème. Prudhomme et Oden emploient la relation du parallélogramme pour les problèmes avec des formes bilinéaires symétriques donnant accès à une borne supérieure et une borne inférieure de l'erreur (Prudhomme & Oden, 1999), (Oden & Prudhomme, 2001).

Si e et ε sont les erreurs des approximations éléments finis, respectivement des solutions des problèmes primal et dual alors :

$$\mathcal{Q}(e) = a(e, \varepsilon) = \frac{1}{4} \|e + \varepsilon\|_e^2 - \frac{1}{4} \|e - \varepsilon\|_e^2 \quad [2.3.1]$$

On introduit le facteur scalaire $s \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{Q}(e) = a(e, \varepsilon) = \frac{1}{4} \|se + s^{-1}\varepsilon\|_e^2 - \frac{1}{4} \|se - s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \quad [2.3.2]$$

Le scalaire s est choisi de manière à ce que les quantités $\|se\|_e$ et $\|s^{-1}\varepsilon\|_e$ aient la même amplitude, ce qui implique de choisir $s = \sqrt{\|\varepsilon\|_e / \|e\|_e}$.

En effet e et ε peuvent être d'ordre de grandeur très différent. Le scalaire s vise à « normer » les deux termes, afin d'éviter de faire une différence de deux termes très voisins car cela peut induire une erreur numérique importante.

Formellement, n'importe quel estimateur d'erreurs existant peut être utilisé pour évaluer les normes en énergie de la relation du parallélogramme ; plus cette estimation sera « juste » meilleure sera la qualité de l'estimateur d'erreur en quantité d'intérêt.

3.2 Construction des bornes

Les estimateurs globaux η_{inf}^+ , η_{sup}^+ , η_{inf}^- et η_{sup}^- sont définis tels que :

$$\eta_{inf}^+ \leq \|se + s^{-1}\varepsilon\|_e \leq \eta_{sup}^+ \quad [2.3.3]$$

$$\eta_{inf}^- \leq \|se - s^{-1}\varepsilon\|_e \leq \eta_{sup}^- \quad [2.3.4]$$

En réécrivant les deux inégalités précédentes ainsi :

$$\frac{1}{4} (\eta_{inf}^+)^2 \leq \frac{1}{4} \|se + s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \leq \frac{1}{4} (\eta_{sup}^+)^2 \quad [2.3.5]$$

$$\frac{1}{4}(\eta_{inf}^-)^2 \leq \frac{1}{4}\|se - s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \leq \frac{1}{4}(\eta_{sup}^-)^2 \quad [2.3.6]$$

et en les additionnant :

$$\frac{1}{4}(\eta_{inf}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{sup}^-)^2 \leq \frac{1}{4}\|se + s^{-1}\varepsilon\|_e^2 - \frac{1}{4}\|se - s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \leq \frac{1}{4}(\eta_{sup}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{inf}^-)^2 \quad [2.3.7]$$

un encadrement de l'erreur en quantité d'intérêt est obtenu.

Ensuite les bornes η_{inf}^Q , η_{sup}^Q sont introduites telles que :

$$\eta_{inf}^Q = \frac{1}{4}(\eta_{inf}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{sup}^-)^2 \quad [2.3.8]$$

$$\eta_{sup}^Q = \frac{1}{4}(\eta_{sup}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{inf}^-)^2 \quad [2.3.9]$$

L'erreur en quantité d'intérêt $Q(e)$ est bornée par η_{inf}^Q et η_{sup}^Q :

$$\eta_{inf}^Q \leq Q(e) \leq \eta_{sup}^Q \quad [2.3.10]$$

Il est également possible d'utiliser les estimations η_{eei}^Q et η_{ees}^Q définies telles que :

$$\eta_{eei}^Q = \frac{1}{4}(\eta_{inf}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{inf}^-)^2 \quad [2.3.11]$$

$$\eta_{ees}^Q = \frac{1}{4}(\eta_{sup}^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_{sup}^-)^2$$

comme estimation de l'erreur en quantité d'intérêt $Q(e)$.

Enfin, une dernière estimation peut être obtenue, en moyennant les bornes η_{inf}^Q et η_{sup}^Q ou les estimations η_{eei}^Q et η_{ees}^Q , notée η_{moy}^Q :

$$\begin{aligned} \eta_{moy}^Q &= \frac{1}{2}(\eta_{eei}^Q + \eta_{ees}^Q) \\ &= \frac{1}{2}(\eta_{inf}^Q + \eta_{sup}^Q) \\ &= \frac{1}{8}((\eta_{inf}^+)^2 + (\eta_{sup}^+)^2) - \frac{1}{8}((\eta_{inf}^-)^2 + (\eta_{sup}^-)^2) \end{aligned} \quad [2.3.12]$$

La figure 2.3.1 résume les différentes combinaisons possibles de l'estimation d'erreur en norme de l'énergie pour obtenir une estimation ou des bornes de l'erreur en quantité d'intérêt. Ceci montre que si l'on dispose de bornes pour un estimateur en norme de l'énergie alors on dispose de bornes pour l'erreur en quantité d'intérêt.

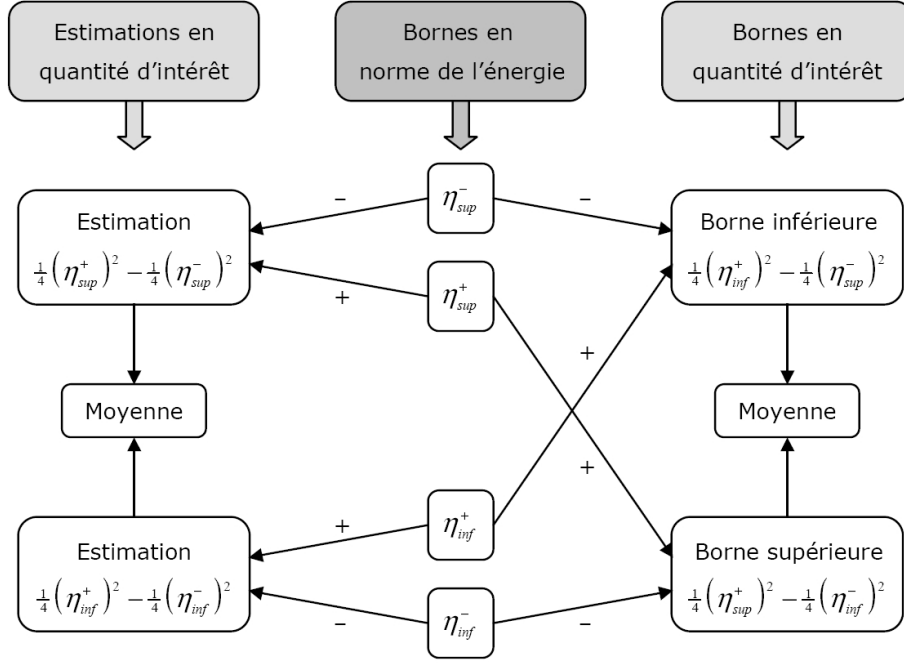


Figure 2.3.1 : Estimations et bornes de l'erreur en quantité d'intérêt (Prudhomme *et al.*, 2003).

3.3 Estimations des bornes de l'erreur

Dans le chapitre précédent, il a été montré que des bornes de l'erreur globale étaient accessibles en utilisant des estimateurs en résidus implicites. Les grandes lignes sont données ici pour obtenir des bornes de l'erreur en quantité d'intérêt en utilisant les estimateurs implicites. Il faut noter que ceci n'est qu'un exemple et que d'autres méthodes d'estimation peuvent fournir des bornes de l'erreur en quantité d'intérêt.

Dans le but d'obtenir les bornes supérieures précédemment définies, les fonctions ψ_E^u et ψ_E^ω , correspondant respectivement aux erreurs e et ε , sont calculées en introduisant les problèmes locaux relatifs aux problèmes primal et dual. Les estimations suivantes sont alors obtenues :

$$\eta_{sup}^+ = \|s\psi_E^u + s^{-1}\psi_E^\omega\|_e \text{ et } \eta_{sup}^- = \|s\psi_E^u - s^{-1}\psi_E^\omega\|_e \quad [2.3.13]$$

Pour l'estimation des bornes inférieures, il faut procéder de manière analogue que pour l'estimation des bornes supérieures en construisant des fonctions continues aux interfaces à partir de ψ_E^u et ψ_E^ω :

$$\eta_{inf}^+ = \frac{\left| (sR_h^u + s^{-1}R_h^\omega)(s\chi^u + s^{-1}\chi^\omega) \right|}{\|s\chi_E^u + s^{-1}\chi_E^\omega\|_e} \text{ et } \eta_{inf}^- = \frac{\left| (sR_h^u - s^{-1}R_h^\omega)(s\chi^u - s^{-1}\chi^\omega) \right|}{\|s\chi_E^u - s^{-1}\chi_E^\omega\|_e} \quad [2.3.14]$$

Chapitre 3

Techniques d'adaptation de maillages

- 1 Intérêt industriel**
- 2 Méthodes d'adaptation de maillages**
 - 2.1 Repositionnement des nœuds (r-adaptation)
 - 2.2 Découpage et regroupement des mailles (h-adaptation)
 - 2.2.1 *Méthode locale*
 - 2.2.2 *Méthode globale*
 - 2.3 Modification des fonctions d'interpolation (p-adaptation)
 - 2.4 hp-adaptation
 - 2.5 Homard, un outil de h-adaptation
 - 2.6 Critères d'adaptation
- 3 Maillage optimal**
 - 3.1 Définition de l'optimalité
 - 3.2 Construction du maillage optimal
 - 3.2.1 *Cas régulier*
 - 3.2.2 *Cas singulier*
 - 3.3 Un autre critère d'optimalité

1 Intérêt industriel

Afin d'améliorer la précision d'une solution éléments finis d'un problème d'élasticité linéaire, la modification des paramètres de la discrétisation est nécessaire. Ainsi le maillage peut être raffiné, le degré d'interpolation utilisé sur les éléments peut être augmenté, soit les deux simultanément.

Raffiner de manière uniforme en dimension 2 est envisageable mais cela devient vite illusoire en dimension 3. La capacité maximum des serveurs de calcul peut être vite atteinte, surtout sur des modèles industriels comportant déjà des nombreux éléments, nécessaires à leur description. La plupart des codes industriels ne possédant pas d'élément de degré supérieur à 2, l'intérêt d'élever le degré d'interpolation est vite limité.

D'un point de vue industriel et particulièrement à EDF, l'intérêt de ces techniques d'adaptation de maillages est d'accroître la confiance dans les résultats mais aussi d'obtenir une solution dont la précision est connue à moindre coût. Outre les gains de temps et d'argent, cela permet également d'accéder à des simulations qui, jusque là, étaient inaccessibles.

2 Méthodes d'adaptation de maillages

2.1 Relocalisation des nœuds (r-adaptation)

Apparue dans les années 70 (Carrol & Barker, 1973), (Turcke & McNeice, 1974), cette méthode consiste à optimiser la position des nœuds du maillage afin de minimiser l'erreur entre la solution exacte et la solution éléments finis en conservant la topologie du maillage (nombre de nœuds et connectivité) ainsi que le type d'interpolation.

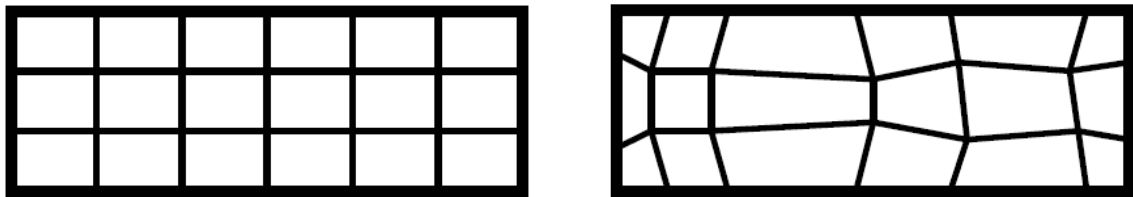


Figure 3.2.1 : Principe de la r-adaptation.

Son application conduit donc à résoudre un problème d'optimisation sur la structure dont les variables d'optimisation sont les coordonnées des nœuds. Outre le coût de calcul, l'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le fait que l'amélioration de la précision est limitée par le nombre de degrés de liberté disponibles. Enfin, depuis l'apparition des mailleurs automatiques, ces méthodes sont très peu utilisées en calcul de structures.

2.2 Découpage et regroupement des mailles (h-adaptation)

Cette méthode consiste à modifier la taille des éléments en conservant le type d'interpolation. Mais contrairement à la méthode précédente, la h-adaptation ne conserve pas la topologie du maillage (position et nombre des nœuds, connectivité, etc.). La mise en œuvre de cette méthode peut se faire de deux manières différentes :

- par découpage du maillage initial (méthode locale de h-raffinement/déraffinement) ;
- par régénération complète du maillage (méthode globale de h-remailage).

2.2.1 La méthode locale de h-raffinement/déraffinement

Cette méthode consiste, à partir d'un maillage initial, à découper (pour améliorer la précision) les éléments où l'erreur est la plus importante ou regrouper ceux où l'erreur est la plus faible (pour diminuer le nombre de degrés de liberté).

Facile à mettre en œuvre, cette méthode a été très utilisée avec les estimateurs d'erreur par différents auteurs (Babuška *et al.*, 1982), (Kelly *et al.*, 1983), (Díez *et al.*, 1999). En particulier lorsqu'on se limite à des raffinements locaux, elle peut être facilement utilisée avec un mailleur relativement rudimentaire puisque le maillage initial est conservé.

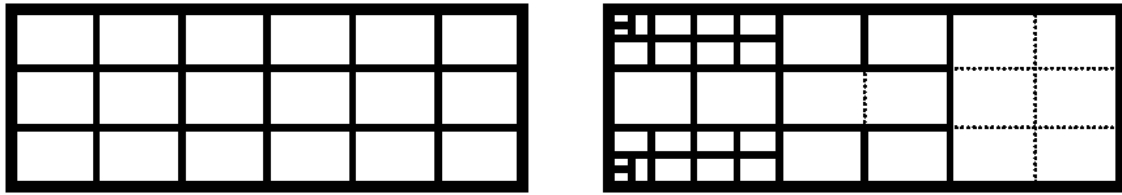


Figure 3.2.2 : Principe du h-raffinement/déraffinement local non conforme.

Cette méthode présente néanmoins quelques difficultés pratiques de mise en œuvre. Pour un maillage réglé, lorsqu'un raffinement local est réalisé, des nœuds dits « pendants » sont créés ; le maillage n'est pas conforme.

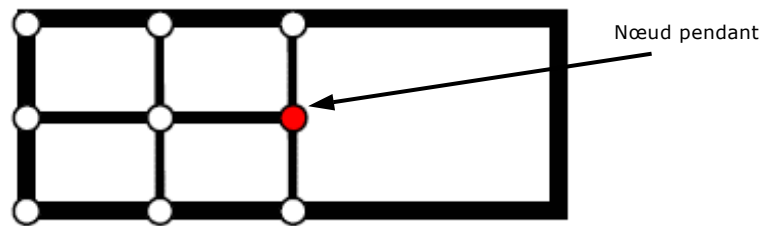


Figure 3.2.3 : Nœud « pendant ».

Afin d'assurer la continuité du champ de déplacements entre les éléments, il est nécessaire d'introduire des relations linéaires entre les degrés de liberté des éléments subdivisés et de ses voisins. Toutefois, cette difficulté n'existe pas dans le cas des maillages libres : avec un mélange d'élément dans une zone de transition, la conformité du maillage est assurée.

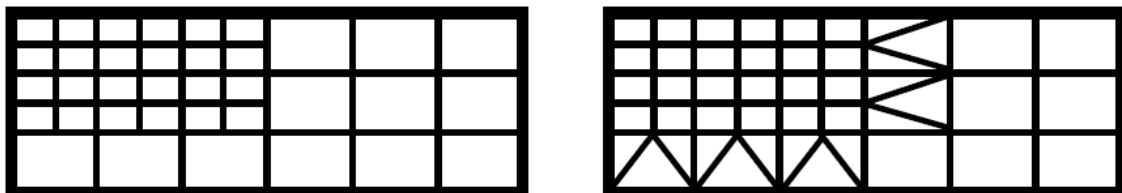


Figure 3.2.4 : Comparaison entre le h-raffinement/déraffinement local non-conforme (à gauche) et conforme (à droite).

2.2.2 La méthode globale de h-remailage

A partir d'une carte de taille dont le maillage initial est le support, un nouveau maillage est généré. Cette méthode, utilisée plus tardivement, nécessite l'utilisation de mailleurs automatiques capables de respecter correctement des consignes de tailles. Pour des problèmes de thermique 2D, les premières utilisations ont été faites par Carnet (Carnet *et al.*, 1981) et Ladevèze (Ladevèze & Leguillon, 1983) en utilisant un mailleur frontal développé par Carnet (Carnet, 1978). Pour des problèmes d'élasticité et de plasticité 2D, les premiers travaux ont été proposés par Coffignal (Coffignal & Ladevèze, 1983) en utilisant le mailleur automatique Araignée développé par Coffignal (Coffignal, 1987).

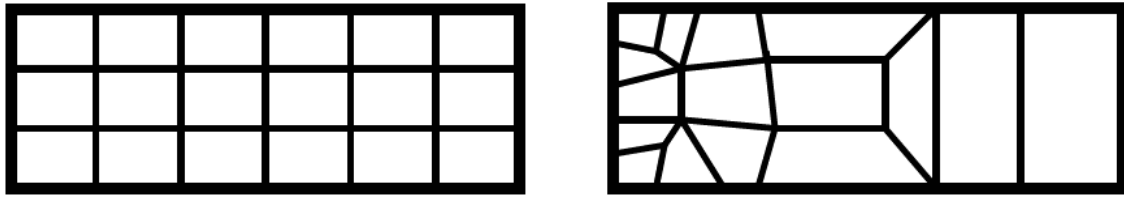


Figure 3.2.5 : Principe du h-remailage global.

L’avantage de cette méthode est de pouvoir uniformiser efficacement la distribution de l’erreur ; pour une précision donnée, cela conduit à minimiser le coût de calcul. Pour les problèmes 2D, il s’agit de la méthode d’adaptation de maillages la plus utilisée car de nombreux mailleurs automatiques 2D, respectant une carte de taille, ont été développés (George, 1991). En dimension 3, cette méthode pose encore des difficultés pour sa mise en œuvre, même si des progrès ont été réalisés (Coorevits *et al.*, 1995a,b), (Dumeau, 1995), (Coorevits *et al.*, 1996).

La méthode de h-adaptation est bien adaptée pour capturer les singularités. En effet, dans le cas d’une solution singulière, la convergence est d’ordre $q = \min(p, \alpha)$ où α est l’ordre de la singularité de la solution du problème (pour une fissure, par exemple, $\alpha = \frac{1}{2}$). Ainsi la seule solution pour augmenter la précision de la solution est le découpage du maillage.

2.3 Augmentation du degré d’interpolation (p-adaptation)

Cette méthode est issue des travaux de Babuška (Babuška *et al.*, 1981) (Babuška & Suri, 1990) et Szabó (Szabó, 1986, 1990). Elle consiste, en conservant le maillage initial, à introduire de nouveaux degrés de liberté en augmentant dans certaines zones le degré de l’interpolation des fonctions de forme.

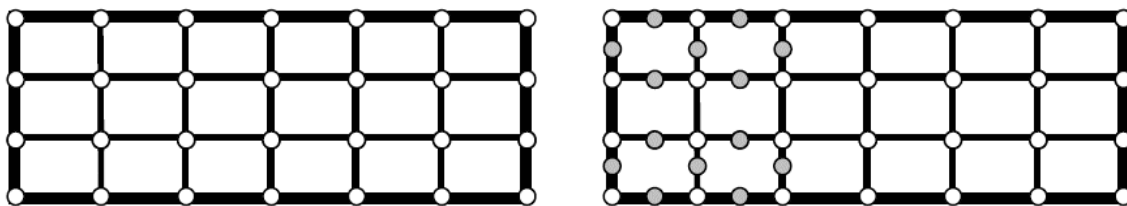


Figure 3.2.6 : Principe de la p-adaptation.

En terme de coûts de réalisation de maillage, cette méthode est très séduisante car un seul maillage est nécessaire. De plus le maillage utilisé comporte toujours très peu d’éléments ; il est donc facile à réaliser. Sous certaines conditions (Babuška & Szabo, 1982), le taux de convergence peuvent être exponentiel et même lorsqu’il est algébrique, il est toujours supérieur ou égal au taux observé dans le cadre d’une méthode-h. Mais, de la même manière que la méthode locale de h-raffinement/déraffinement, en cas d’utilisation locale, cette méthode introduit des nœuds pendants. Mais là encore, cette difficulté peut être levée par l’utilisation de bases hiérarchiques comme l’a montré Zienkiewicz (Zienkiewicz *et al.*, 1988). Une autre difficulté, qui n’est pas correctement résolue, est de prévoir le degré

d'interpolation à utiliser pour respecter une qualité donnée tout en minimisant le coût des calculs.

Les codes industriels possédant rarement des éléments de degré supérieur à 2, cette méthode est très peu utilisée. Il existe cependant quelques codes comme le code MSC/Probe (Szabó, 1985) ou le code FIESTA (Fiesta, 1986) (Angeloni *et al.*, 1986) par exemple conçu spécifiquement pour utiliser cette méthode.

2.4 Méthode mixte (hp-adaptation)

Cette méthode est une combinaison entre la h-adaptation et la p-adaptation et consiste donc à modifier le maillage et à augmenter le degré d'interpolation des fonctions de forme. L'objectif est d'améliorer la précision des calculs en profitant des avantages des deux méthodes (taux de convergence élevé, exponentiel pour les solutions régulières pour la p-adaptation ; bonne capture des singularités pour la h-adaptation). Il existe différentes façons de combiner les deux méthodes ; une étude systématique a été menée (Cugnon & Beckers, 1997).

Une première manière de procéder consiste à obtenir un maillage ciblé par une h-adaptation suivie d'une p-adaptation uniforme. Le maillage est adapté afin d'atteindre une précision intermédiaire, l'erreur est ensuite contrôlée par l'augmentation du degré des éléments (Zienkiewicz *et al.*, 1989). Une seconde approche consiste à déterminer la meilleure combinaison entre le raffinement et l'augmentation du degré d'interpolation telle que la vitesse de convergence soit maximisée, l'objectif étant que le taux de convergence soit exponentiel (Rank & Babuška 1987), (Georges & Shephard 1991), (Rachowicz *et al.* 1989). Cette dernière approche est celle utilisée dans le code HP90 (Demkowicz *et al.*, 1998) développé à l'ICES (anciennement TICAM).

2.5 Homard, un outil de h-adaptation

Développé à EDF R&D, HOMARD® (Homard, 2008) est un logiciel de raffinement/déraffinement couplé à *Code_Aster*. Cet outil fonctionne avec les éléments triangulaires et quadrangulaires en dimension 2 et avec les tétraèdres et hexaèdres en dimension 3 (Nicolas, 2005).

Le découpage des mailles est fait tel qu'une maille est découpée en quatre mailles en dimension 2 et en huit mailles en dimension 3 (Nicolas *et al.*, 1995). Dans les zones de transition (liaison entre les mailles découpées en quatre et les mailles non découpées), les mailles sont découpées en deux (triangles et tétraèdres), trois (quadrangles) ou quatre (tétraèdres) afin d'assurer la conformité du maillage (pas de nœuds pendants). La conformité n'est pas assurée pour le découpage local des hexaèdres. Homard conserve l'historique des mailles découpées. Ainsi le déraffinement permet de rassembler des mailles issues du découpage d'une maille. Le logiciel ne déraffine que les mailles qu'il a découpé : le maillage final ne peut donc être plus grossier que le maillage initial. Lors d'un processus itératif de

raffinement, les zones de transition sont toujours déraffinées avant que le maillage subisse un nouveau découpage. Ceci permet de ne pas créer d'élément aplatis et donc de garantir la qualité « géométrique » (aplatissement) du maillage : hormis les zones de transition, les mailles du maillage final sont d'aussi bonne qualité que les mailles du maillage initial. Le raffinement/déraffinement peut être local (définition de boîtes) ou global, uniforme ou guidé par un estimateur d'erreur (ou tout autre champ qui peut avoir un sens pour l'utilisateur).

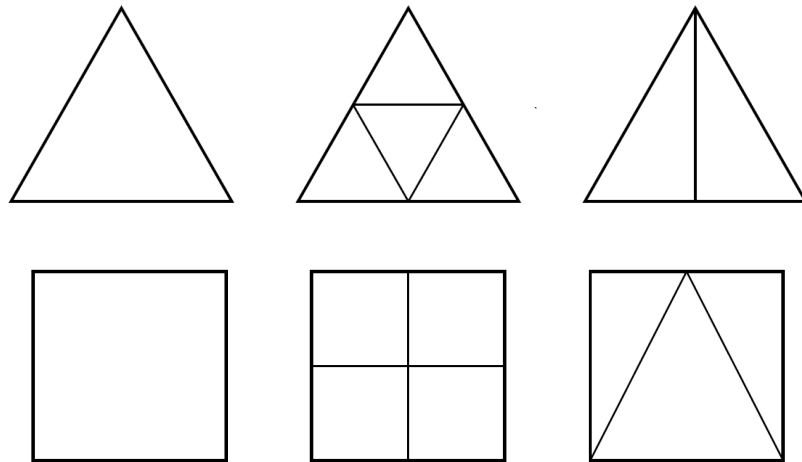


Figure 3.2.7 : Découpage des mailles pour les zones cibles et les zones de transition.

Des exemples de raffinements sont donnés. Sur un maillage carré, les éléments contenus dans un cercle centré dans le coin haut droit sont raffinés une fois.

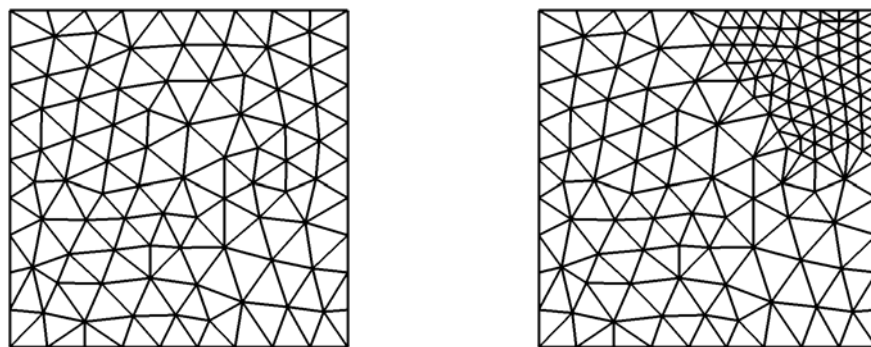


Figure 3.2.8 : Exemple de raffinement sur des éléments triangulaires.

A l'issue de la revue des différentes techniques d'adaptation de maillages, on peut se poser la question sur la pertinence d'un outil basé sur la h-adaptation locale. Cette méthode n'est peut-être pas la meilleure mais dans un contexte industriel elle est celle qui présente le plus d'avantages. Pour différentes raisons, les autres méthodes sont peu utilisées :

- La r-adaptation n'assure qu'un gain limité pour la précision de la solution car le nombre d'éléments reste le même.
- La p-adaptation donne de bons résultats mais demande une architecture de code spécifique et peut n'assurer qu'un gain limité pour les codes classiques dont les éléments dépassent rarement le degré 2.

Qu'en est-il de la h-adaptation globale ? Même si cette technique présente l'énorme avantage de pouvoir obtenir un maillage optimal et donc une précision voulue à moindre coût, elle n'est pas toujours utilisable dans un contexte industriel. Le calcul d'une carte de taille ne pose pas de problème mais son strict respect par le mailleur automatique est difficile à obtenir. De plus un couplage suffisamment fin entre un tel mailleur et *Code_Aster* présente des difficultés importantes. Enfin le mailleur a besoin de la géométrie (support du maillage) afin de générer le nouveau maillage. Il arrive bien souvent que des analyses éléments finis soient effectuées sur des « maillages morts », maillages pour lesquels la CAO n'est plus disponible (ce qui est toujours le cas du point de vue *Code_Aster* qui n'a jamais directement la connaissance de la CAO).

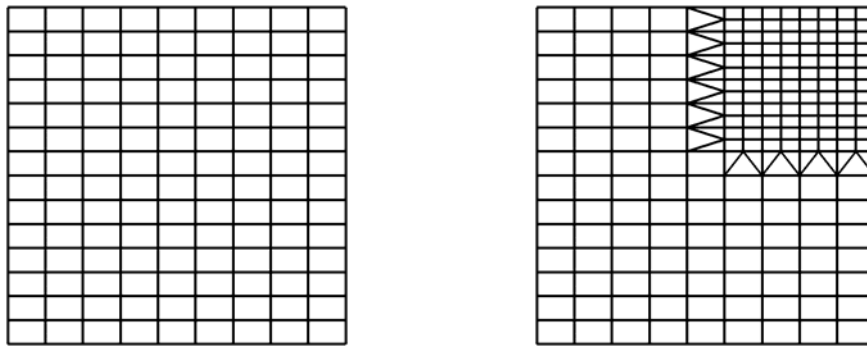


Figure 3.2.9 : Exemple de raffinement sur des éléments quadrangulaires.

Enfin la gestion des entités du maillage (groupes de mailles par exemple) n'est pas toujours assurée or ce sont ces entités qui permettent, lors de l'analyse, d'appliquer les chargements et conditions aux limites. Pour toutes ces raisons, nous proposerons une stratégie d'adaptation de maillage utilisant l'estimateur développé et la h-adaptation locale d'Homard.

2.6 Critères d'adaptation

Les différentes méthodes d'adaptation de maillage ayant été passées en revue, il convient de se demander selon quel critère elles peuvent être utilisées. En d'autres termes, quels critères existent pour savoir où modifier le maillage.

En premier lieu, le critère d'adaptation le plus simple est le raffinement uniforme. En d'autres termes, tous les éléments du maillage sont traités de la même manière, sans tenir compte d'un champ (d'erreur) servant de critère pour (dé)raffiner. Ce critère, de loin le plus simple car il n'y a pas de conformité à gérer, aboutit à un nombre de degrés de liberté très important et est donc à réserver à la recherche de solution de référence obtenue sur un maillage très fin.

En second lieu, la modification du maillage peut se faire dans des zones géométriques définies par des boîtes ou des groupes de mailles. Toutes les mailles dont un des nœuds est, par exemple, présent dans l'une de ces boîtes ou appartenant au groupe de mailles seront

raffinées. Cela permet de faire des modifications *a priori*, sans avoir fait de calcul. Dans ce cas, il faut savoir gérer la conformité (éliminer les nœuds pendants par l’utilisation d’éléments de transition). Ce critère d’adaptation peut être dangereux sans connaissance d’un minimum de théorie sur l’erreur de discrétisation. En effet, comme cela a été montré précédemment dans le chapitre consacré à l’estimation d’erreur locale, augmenter la discrétisation localement n’améliore pas nécessairement la solution (globale ou locale) à cause de l’erreur de pollution.

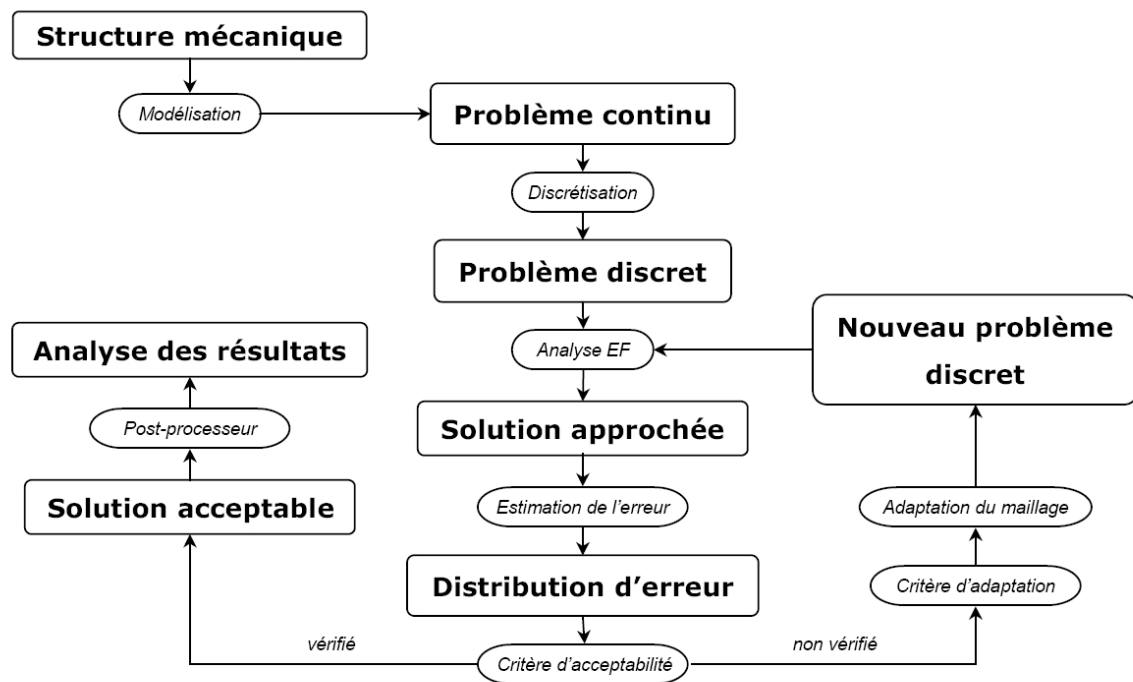


Figure 3.2.10 : Processus d’adaptation de maillage.

Enfin, le dernier critère de modification du maillage est la valeur issue d’un champ. En d’autres termes, la décision de (dé)raffiner une maille se prend en fonction de la valeur du champ calculé auparavant sur cette maille. Le choix des seuils peut se faire sous trois formes :

- une valeur seuil absolue du champ : tous les éléments dont la valeur du champ est supérieure à cette valeur seuil seront modifiés.
- une valeur seuil relative du champ : tous les éléments dont la valeur du champ est supérieure à x% de la valeur maximale seront modifiés.
- une fraction d’éléments : les x% d’éléments dont la valeur du champ est la plus importante seront modifiés.

Selon les types de problèmes, l’une ou l’autre des stratégies est préférable ; c’est le savoir-faire propre à chaque utilisateur qui permet de définir des bonnes pratiques. Pour assurer la conformité, il y aura nécessairement des raffinements supplémentaires pour relier les zones de différents niveaux. Au final, dans le cas de la conformité, il y aura toujours plus d’éléments modifiés que ceux qui avaient été demandés initialement.

Ces différents critères couplés aux différentes techniques d'adaptation de maillage permettent d'améliorer la précision de la solution et sont utilisés dans une série de calculs jusqu'à l'obtention de la précision désirée. Le processus adaptatif peut être résumé par la figure 3.2.10. Si le critère d'adaptation est mal choisi (enrichissement de la discrétisation trop faible à chaque boucle) alors cela peut engendrer un nombre important de boucle d'adaptation et autant d'analyses éléments finis. Il est alors nécessaire de définir un critère d'adaptation prenant compte de la précision souhaitée permettant de limiter voire minimiser le nombre d'éléments.

3 Maillage optimal

3.1 Définition du maillage optimal

Dans toute la suite de ce document, seule la h-adaptation sera considérée.

L'objectif d'une procédure d'adaptation est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision ε_0 en minimisant les coûts de calcul. Pour définir un maillage optimal, plusieurs définitions existent. Une première définition est celle introduite dans (Pelle, 1985) et (Ladevèze *et al.*, 1986) :

Un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur ε si

$$\begin{cases} \varepsilon^* = \varepsilon_0 & \text{précision demandée} \\ N^* & \text{nombre d'éléments minimum dans } T^* \end{cases} \quad [3.3.1]$$

Ce critère d'optimisation conduit naturellement à minimiser les coûts de calcul. Une autre définition est également souvent utilisée (Ladevèze & Leguillon, 1981), (Gago *et al.*, 1983), (Oden *et al.*, 1989), (Strouboulis *et al.*, 1992), (Li & Bettess, 1995) :

Un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur ε si

$$\begin{cases} \varepsilon^* = \varepsilon_0 & \text{précision demandée} \\ \varepsilon_E^* & \text{uniforme sur } T^* \end{cases} \quad [3.3.2]$$

La définition précédente signifie que le meilleur maillage correspond à une répartition uniforme des erreurs de discrétisation. Contrairement à la première définition, il n'est pas du tout évident que ce choix conduise à minimiser les coûts de calcul. Pour des problèmes dont la solution est régulière, ces deux définitions sont équivalentes. Par contre, ceci n'est plus vrai pour des solutions qui présentent des singularités (Coorevits *et al.*, 1995b).

D'autres critères ont été définis mais ils ne tendent pas nécessairement à minimiser le nombre d'éléments. Zienkiewicz et Zhu ont proposé un critère, qui peut être vu comme une version simplifiée du précédent, qui consiste à rendre la nouvelle distribution d'erreur uniforme sur les éléments de l'ancien maillage (Zienkiewicz & Zhu, 1987). Le critère proposé par Oñate et Bugeda tend à rendre uniforme la densité d'erreur (soit l'erreur ramenée à la surface de l'élément) sur le nouveau maillage (Oñate & Bugeda, 1993).

Pour obtenir ce maillage optimal, il faut au préalable effectuer une première analyse éléments finis sur un maillage T assez grossier. La détermination des nouvelles caractéristiques du maillage se fait à partir de l'erreur estimée. Enfin, un mailleur automatique, capable de respecter la carte de taille ainsi construite, génère le maillage optimal.

Pour juger de l'efficacité de la procédure il faut contrôler l'optimalité du maillage. Une première vérification consiste, après un calcul éléments finis sur le maillage supposé optimal T^* , à vérifier que l'erreur globale ε^* de discrétisation est voisine de la précision désirée ε_0 . Mais cela ne suffit pas à montrer l'optimalité. Une technique simple consiste à déterminer une nouvelle carte de tailles pour une précision égale à celle obtenue ε^* . Si le maillage est parfaitement optimal, la carte des coefficients de modification de taille (définis comme le rapport entre l'ancienne et la nouvelle taille de maille) doit être uniforme et les valeurs égales à l'unité. Dans la pratique ce n'est jamais le cas pour plusieurs raisons :

- l'élément de référence doit être un triangle équilatéral parfait ;
- les mailleurs ne respectent pas strictement les cartes de taille, en particulier dans les zones où la variation de taille est importante ;
- dans certaines zones, pour respecter l'optimalité, le maillage devrait dépasser les dimensions de la pièce à mailler.

En pratique on estime que la taille des mailles est acceptable partout où le rapport r_E entre la nouvelle et l'ancienne taille est tel que :

$$\frac{2}{3} \leq r_E \leq \frac{3}{2} \quad [3.3.3]$$

3.2 Détermination du maillage optimal

La méthode consiste à calculer sur chaque élément E du maillage T un coefficient de modification de taille défini par :

$$r_E = \frac{h_E^*}{h_E} \quad [3.3.4]$$

où h_E est la taille actuelle de l'élément E et h_E^* la taille (à déterminer) qu'il faut imposer aux éléments de T^* dans la zone de E pour assurer l'optimalité. Un choix possible pour définir la taille d'un élément h_E est de prendre la plus grande longueur de cet élément.

Le calcul des coefficients de modification de taille r_E est basé sur le taux de convergence de l'erreur :

$$\mathcal{E} = O(h^q) \quad [3.3.5]$$

où q dépend du type d'élément utilisé mais également de la régularité de la solution.

3.2.1 Cas de la solution régulière

Dans un premier temps, nous supposons que la solution exacte est suffisamment régulière pour que la valeur de q ne dépende que du type d'élément fini utilisé et soit égale au degré d'interpolation p utilisé. Le lien entre le rapport des tailles et le rapport des contributions à l'erreur s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\mathcal{E}_E^*}{\mathcal{E}_E} = \left[\frac{h_E^*}{h_E} \right]^p = r_E^p \quad [3.3.6]$$

$\mathcal{E}_E^*$ représente la contribution des éléments de T^* situés dans la zone E , c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_E^* = \left[\sum_{E^* \subset E} \mathcal{E}_{E^*}^2 \right]^{1/2} \quad [3.3.7]$$

$\mathcal{E}_{E^*}$ est l'erreur de l'élément E^* calculée sur le maillage T . L'erreur sur le maillage T^* peut donc être évaluée par :

$$\sum_E (\mathcal{E}_E^*)^2 = \sum_E r_E^{2p} \mathcal{E}_E^2 \quad [3.3.8]$$

et le nombre d'éléments de T^* par :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^d} \quad [3.3.9]$$

où d est la dimension de l'espace (en pratique, $d = 2$ ou 3).

Le problème à résoudre revient donc à un problème de minimisation sous contrainte des variables d'optimisation :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^d} \text{ avec } \sum_E r_E^{2p} \mathcal{E}_E^2 = \mathcal{E}_0^2 \quad [3.3.10]$$

La résolution de ce problème fournit l'expression du rapport de modification de taille pour les solutions régulières :

$$r_E = \frac{\mathcal{E}_0^{1/p}}{\mathcal{E}_E^{2/(2p+d)} \left[\sum_E \mathcal{E}_E^{2d/(2p+d)} \right]^{1/2p}} \quad [3.3.11]$$

Cette expression est valable pour les deux critères définis précédemment. Bien que différents, ces critères sont équivalents pour une solution régulière.

3.2.2 Cas de la solution singulière

Lorsque la solution exacte du problème étudié présente des singularités, l'ordre de convergence de la solution éléments finis est modifié et donc aussi celui de l'erreur (Strang & Fix, 1976). Considérons, par exemple, un problème d'élasticité plane discrétisé avec des éléments triangulaires de degré p . Si la solution exacte U_{ex} est régulière alors l'erreur est majorée :

$$\|u - u^h\|_e \leq Ch^p$$

En revanche, si la solution exacte présente une singularité, par exemple si, localement au voisinage d'un point M_0 , le champ de déplacements est de la forme (avec r et θ coordonnées polaires au voisinage du point M_0) :

$$U_{ex} = r^\alpha V(\theta) + W \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad [3.3.12]$$

Alors, on montre dans (Strang & Fix, 1976) :

$$\|e\|_e \leq Ch^\alpha \quad [3.3.13]$$

Il en résulte que le taux de convergence de l'erreur globale en énergie devient indépendant du degré des éléments finis utilisés et il en est de même de celui de la mesure de l'erreur. Afin d'obtenir une bonne prédiction des maillages optimisés, les constatations précédentes nous conduisent à utiliser un taux de convergence q_E par élément tel que :

$$\mathcal{E}_E = O(h^{q_E}) \quad [3.3.14]$$

Une façon simple de définir ces coefficients locaux consiste à prendre :

- $q_E = \alpha$ si l'élément E est connecté à une singularité d'ordre α ;
- $q_E = p$ pour tous les autres éléments finis où p est le degré de l'interpolation utilisée.

La méthode de calcul des coefficients de modification de taille, dans le cas de la solution singulière, se décompose en trois phases :

- détection des zones singulières, en l'occurrence les nœuds singuliers du maillage ;
- évaluation numérique du coefficient q_E pour les éléments connectés aux nœuds considérés comme singuliers (pour les autres éléments, on fixe alors $q_E = p$) ;
- calcul des coefficients de modification de taille r_E .

3.2.2.1 Détection des zones singulières

Le point de départ de la technique de détection des nœuds singuliers est d'utiliser l'erreur locale. En effet, les expériences montrent que l'erreur locale présente un pic au voisinage d'une singularité. Pour chaque nœud i du maillage, on compare l'erreur moyenne $\bar{m}^i$ des éléments connectés au nœud i à l'erreur moyenne $\bar{M}$ sur l'ensemble de la structure. Le nœud i est considéré comme singulier si :

$$\bar{m}^i \geq \beta \bar{M}$$

où :

$$\bar{m}^i = \sqrt{\frac{\sum_{E \text{ connecté à } i} \mathcal{E}_E^2}{\sum_{E \text{ connecté à } i} \text{mes}(E)}} \text{ et } \bar{M} = \sqrt{\frac{\sum_{E \in \text{structure}} \mathcal{E}_E^2}{\sum_{E \in \text{structure}} \text{mes}(E)}} \quad [3.3.15]$$

Le coefficient β est plus grand que 1 et $\text{mes}(E)$ est la surface en 2D ou le volume en 3D de l'élément E . Les expériences numériques (Coorevits *et al.*, 1995b) ont montré que les nœuds singuliers sont bien détectés en fixant $\beta = 2$ en dimension 2, $\beta = 3$ en dimension 3 pour des éléments finis linéaires et $\beta = 2$ en dimension 3 pour des éléments finis quadratiques.

3.2.2.2 Évaluation de l'ordre de la singularité

Pour chaque nœud singulier i détecté, l'ordre de la singularité (la valeur du coefficient q_E) est déterminé en identifiant la valeur de la densité d'énergie de la solution éléments finis au voisinage du nœud i avec la valeur théorique au voisinage d'un point singulier.

Dans le cas de la dimension 2, on calcule l'énergie éléments finis moyenne $\bar{e}(r)$, dans des disques A de centre i et de rayon r :

$$\bar{e}(r) = \frac{1}{\text{mes}(A)} \int_A \text{Tr}[\sigma_h K^{-1} \sigma_h] dA \quad [3.3.16]$$

La valeur théorique est donnée par :

$$e(r) = kr^{2(\alpha-1)} + c \quad [3.3.17]$$

En identifiant, par une méthode de moindres carrés, cette énergie moyenne avec la valeur théorique au voisinage d'une singularité d'ordre α , on obtient numériquement une valeur $\bar{\alpha}$ proche de α .

Dans le cas de la dimension 3 la situation est plus complexe. Le plus souvent, les points singuliers ne sont pas isolés et il est donc fréquent d'être en présence d'arêtes singulières. Considérons, par exemple, le cas d'un cube encastré sur une face et soumis à des efforts de traction : tous les points des arêtes de la face encastrée sont singuliers. Dans cette situation, l'évaluation de l'énergie moyenne dans des boules A de rayon croissant et centrées sur un nœud singulier ne permet pas d'identifier q_E . En effet, au fur et à mesure que le rayon augmente, l'étendue de la zone singulière contenue dans la boule A augmente et l'on n'obtient pas une décroissance rapide de $\bar{e}$.

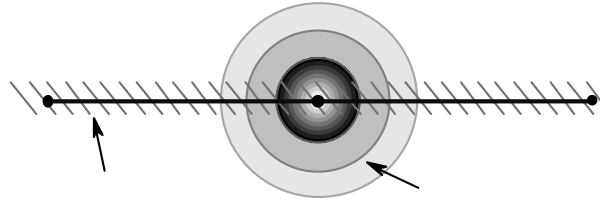


Figure 3.3.1 : Énergie dans les boules concentriques sur une arête.

Lorsque les points singuliers ne sont pas isolés, il faut identifier le coefficient q_E en calculant la densité d'énergie dans des cylindres coaxiaux construits sur les arêtes dont les extrémités ont été considérées comme singulières.

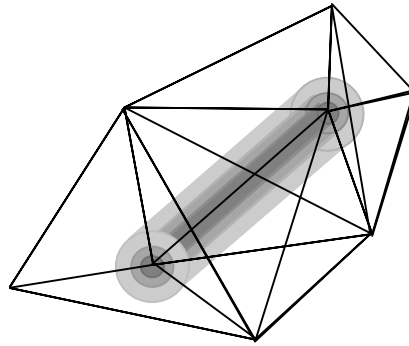


Figure 3.3.2 : Énergie dans les cylindres concentriques sur une arête.

En pratique, la méthode précédente, mise au point sur des cas présentant des singularités permet aussi de prendre en compte correctement les zones à forts gradients de contraintes même si mathématiquement ces zones ne correspondent pas à des singularités.

3.2.2.3 Calcul des tailles optimales

Le lien entre le rapport des tailles et le rapport des contributions à l'erreur s'écrit maintenant de la manière suivante :

$$\frac{\mathcal{E}_E^*}{\mathcal{E}_E} = \left[\frac{h_E^*}{h_E} \right]^{q_E} = r_E^{q_E} \quad [3.3.18]$$

L'erreur sur le maillage T^* peut donc être évaluée par :

$$\sum_E (\mathcal{E}_E^*)^2 = \sum_E r_E^{2q_E} \mathcal{E}_E^2 \quad [3.3.19]$$

et le nombre d'éléments de T^* est toujours évalué par :

$$N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^d} \quad [3.3.20]$$

Le nouveau problème à résoudre revient donc à un problème de minimisation sous contrainte des variables d'optimisation :

$$\text{Minimiser } N^* = \sum_E \frac{1}{r_E^d} \text{ avec } \sum_E r_E^{2q_E} \mathcal{E}_E^2 = \mathcal{E}_0^2 \quad [3.3.21]$$

Pour résoudre le problème précédent, le multiplicateur de Lagrange A est introduit. Il doit satisfaire l'équation suivante :

$$\mathcal{L}(\{r_E\}_{E \in T}; A) = \sum_E \frac{1}{r_E^d} + A \left(\sum_E r_E^{2q_E} \mathcal{E}_E^2 - \mathcal{E}_0^2 \right) \quad [3.3.22]$$

Les conditions d'extrémalité donnent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_E} = -\frac{d}{r_E^{d+1}} + 2Aq_E \mathcal{E}_E^2 r_E^{2q_E-1} = 0 \quad \forall E \in T \quad [3.3.23]$$

On en déduit que :

$$r_E = \left[\frac{d}{2Aq_E \mathcal{E}_E^2} \right]^{1/(2q_E+d)} \quad [3.3.24]$$

En reportant dans l'équation « contrainte » du problème, on obtient une équation non linéaire en A :

$$\sum_E \left[\left[\frac{d}{2Aq_E} \right]^{2q_E/(2q_E+d)} \mathcal{E}_E^{2d/(2q_E+d)} \right] - \mathcal{E}_0^2 = 0 \quad [3.3.25]$$

Elle est résolue par la méthode de Newton (le multiplicateur de Lagrange est initialisé en prenant le multiplicateur de Lagrange de la solution régulière). Une fois A calculé, on en déduit r_E .

3.3 D'autres critères d'optimalité

Le critère du choix de la précision désirée est parfois délicat pour l'utilisateur : pourquoi demander 5% plutôt que 2%. Afin de résoudre cette difficulté, d'autres critères plus abordables ont été proposés (Coorevits & Bellenger, 2004).

Un autre critère consiste à optimiser le maillage par rapport à un nombre d'éléments fixé :

Un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur $\mathcal{E}$ si

$$\begin{cases} N^* = N_0 & \text{nombre d'éléments demandé} \\ \mathcal{E}^* & \text{erreur minimale} \end{cases} \quad [3.3.26]$$

Par un raisonnement analogue au critère présenté précédemment, on montre que le problème à résoudre revient à un problème de minimisation sous contrainte des variables d'optimisation :

$$\text{Minimiser } \mathcal{E}^* = \left[\sum_E r_E^{2p} \mathcal{E}_E^2 \right]^{1/2} \text{ avec } \sum_E \frac{1}{r_E^d} = N_0 \quad [3.3.27]$$

Pour résoudre le problème précédent, le multiplicateur de Lagrange A est introduit. Il doit satisfaire l'équation suivante :

$$\sum_E \left[\left[\frac{A}{p_E \varepsilon_E^2} \right]^{-1/(p_E+1)} \right] - N_0 = 0 \quad [3.3.28]$$

Une résolution de l'équation précédente par la méthode de Newton permet de calculer A , puis de calculer les coefficients r_E .

D'autres critères ont été proposés, permettant d'adapter le calcul à la machine utilisée. Par exemple, le temps de calcul t peut être imposé :

Un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur ε si

$$\begin{cases} t^* = t_0 & \text{temps CPU demandé} \\ \varepsilon^* & \text{erreur minimale} \end{cases} \quad [3.3.29]$$

Pour ce critère, le temps de calcul t doit être exprimé comme une fonction du nombre d'éléments N . Cette fonction peut être cherchée sous la forme suivante :

$$t = a N^b \quad [3.3.30]$$

Les paramètres a et b sont déterminés à partir de calculs permettant de tracer le temps de calcul en fonction du nombre d'éléments. L'inversion de cette loi donne le nombre d'élément à imposer :

$$N_0 = \alpha t^\beta \quad [3.3.31]$$

où α et β sont des paramètres qui dépendent du type d'éléments, du problème et de l'ordinateur utilisé.

De la même manière, la taille mémoire R du calcul peut être imposée pour qu'elle soit adaptée à la mémoire de l'ordinateur :

Un maillage T^* est optimal relativement à une mesure d'erreur ε si

$$\begin{cases} R^* = R_0 & \text{taille mémoire demandé} \\ \varepsilon^* & \text{erreur minimale} \end{cases} \quad [3.3.32]$$

Pour ce critère, la taille mémoire R doit être exprimée comme une fonction du nombre d'éléments N . Cette fonction peut être cherchée sous la forme suivante :

$$R = c N^d \quad [3.3.33]$$

Les paramètres c et d sont déterminés à partir de calculs permettant de tracer la taille mémoire en fonction du nombre d'éléments. L'inversion de cette loi donne le nombre d'élément à imposer :

$$N_0 = \gamma R^\delta \quad [3.3.34]$$

où γ et δ sont des paramètres qui dépendent du type des éléments et du problème.

Le détail du calcul des coefficients de modification de taille ainsi que des exemples d’illustration peuvent être trouvés dans (Coorevits & Bellenger, 2004) ou (Bellenger & Coorevits, 2004). Des illustrations de la mise en œuvre de ces critères peuvent être trouvées dans (Bellenger & Coorevits, 2005) et notamment dans le cas pratique d’une analyse 3D (Bellenger & Coorevits, 2007).

Partie 2

Estimation d'erreur en quantités d'intérêt et adaptation

Chapitre 4

Intérêt industriel de l'erreur en quantités d'intérêt

1	Introduction
2	Cas des structures saines
3	Cas des structures fissurées
3.1	Fissure hors de la zone d'intérêt
3.2	Fissure dans la zone d'intérêt
4	Conclusion

1 Introduction

Les structures industrielles étudiées à EDF R&D sont des structures complexes, comportant de nombreux détails géométriques, imposant souvent la topologie du maillage et induisant ainsi la présence de singularités. Au voisinage de ces singularités, le champ de contrainte présente une singularité en r^α . Dans le cas des fissures, cas où la singularité est la plus importante, l'ordre de la singularité α vaut $-\frac{1}{2}$.

Pour un angle ϕ quelconque, l'ordre de la singularité peut être obtenu en résolvant l'équation suivante (Eymard, 1994) :

$$\alpha \sin(2\phi) + \sin(2\alpha\phi) = 0 \quad [4.1.1]$$

La figure 4.1.1 donne, l'ordre de la singularité α pour certaines géométries et donc pour différents angles ϕ .

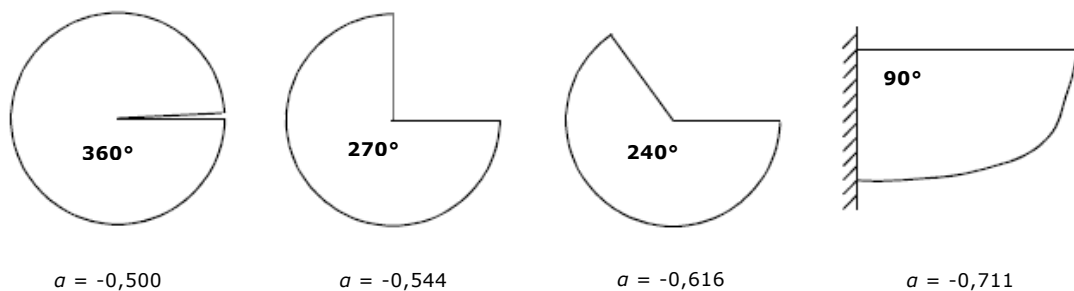


Figure 4.1.1 : Valeurs de l'ordre de singularité pour différentes géométries.

Les estimateurs globaux en norme de l'énergie prennent une valeur importante dans les zones où les contraintes présentent de forts gradients (congé par exemple) et où les contraintes sont singulières (encastrement ou pointe de fissure par exemple). Ainsi lors d'un processus d'adaptation, le maillage sera raffiné d'abord et longtemps à proximité de la singularité avant d'être raffiné ailleurs alors que, pour une quantité d'intérêt hors de la zone

singulière, la discrétisation aurait dû potentiellement être améliorée ailleurs pour augmenter la précision sur la quantité d'intérêt. De la même manière, pour une quantité d'intérêt dans la zone singulière, à cause de l'erreur de pollution, la précision n'est pas nécessairement améliorée même si le maillage est plus fin dans cette zone. L'erreur en quantités d'intérêt prenant en compte l'erreur sur toute la structure grâce au problème dual, il est judicieux de se demander dans quelle mesure ce type d'erreur peut être une alternative à l'erreur globale pour les structures industrielles et, au-delà du type d'information fourni, si l'erreur en quantité d'intérêt présente un réel intérêt industriel. Afin de répondre de manière qualitative et quantitative à cette question, nous allons étudier l'évolution de l'erreur sur une quantité d'intérêt pour différentes stratégies de raffinement de maillage et pour différents problèmes.

Afin d'utiliser l'erreur comme critère d'adaptation, il faut déterminer la distribution de l'erreur sur toute la structure. Pour cela nous allons calculer explicitement l'erreur ou plus exactement les contributions locales de l'erreur. Ainsi deux solutions de référence (u^{ref} pour le problème primal et ω^{ref} pour le problème dual) sont déterminées sur un maillage très fin (obtenu par raffinements uniformes du maillage courant). Pour le maillage courant, deux solutions u^h et ω^h correspondant respectivement au problème primal et au problème dual sont déterminées. Ces solutions permettent de calculer l'erreur primale e et l'erreur duale ε telles que :

- $e = u^{ref} - u^h$;
- $\varepsilon = \omega^{ref} - \omega^h$.

A partir de ces erreurs, nous pouvons calculer explicitement :

- l'erreur en norme de l'énergie définie telle que $\|e\|_e^2 = \sum_E \int_E \sigma(e) : \varepsilon(e) d\Omega$;
- l'erreur en quantité d'intérêt définie par l'équation [2.2.13] telle que $Q(e) = a(e, \varepsilon) = \sum_E \int_E \varepsilon(e) : \sigma(\varepsilon) d\Omega$.

Ce sont donc ces contributions élémentaires qui seront utilisées pour guider le processus de raffinement de maillage.

Pour l'étude qualitative, le maillage est raffiné selon l'erreur en norme de l'énergie et selon l'erreur en quantité d'intérêt (11% des éléments avec l'erreur la plus importante sont raffinés) dans différentes situations. L'objectif est d'étudier le maillage obtenu en utilisant l'une et l'autre erreur comme critère de raffinement pour une précision donnée sur la quantité d'intérêt et pour un nombre d'élément donné. La quantité d'intérêt est la moyenne de la composante du déplacement v_y dans la zone d'intérêt.

Pour l'étude quantitative, le maillage est raffiné de quatre manières différentes : selon l'erreur en norme de l'énergie (11% des éléments sont découpés), selon l'erreur en quantité d'intérêt (11% des éléments sont découpés), uniformément (tous les éléments sont découpés), localement dans la zone d'intérêt (seuls les éléments de la zone d'intérêt sont découpés). Ceci nous permet de tracer l'évolution de l'erreur sur la quantité d'intérêt définie précédemment en fonction du nombre d'éléments pour les quatre stratégies employées.

Il faut noter que dans la suite, pour les trois problèmes considérés, les chargements sont faits en effort.

2 Cas des structures saines

Dans un premier temps, le cas des structures saines (sans fissures mais éventuellement comportant une singularité faible) est considéré. Le problème, dont la géométrie et le maillage initial sont donnés par la figure 4.2.1, est résolu, pour l'étude qualitative, sur une succession de maillages adaptés avec le logiciel HOMARD (à chaque adaptation, 11% des éléments sont raffinés) à partir des erreurs calculées. Sur le premier maillage, qui comporte 38 éléments, la précision obtenue sur la quantité d'intérêt avec le maillage initial est de 3,13%. Pour l'étude quantitative, le problème sera résolu sur une série de maillage adapté selon les différentes stratégies décrites.

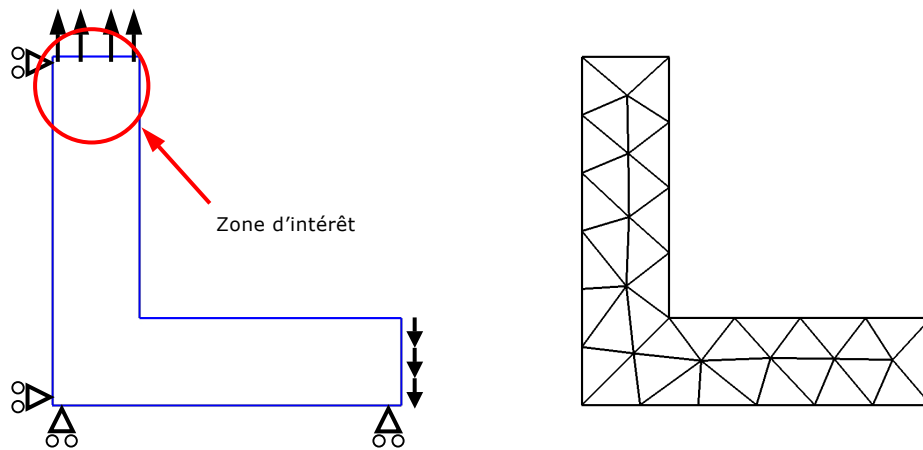
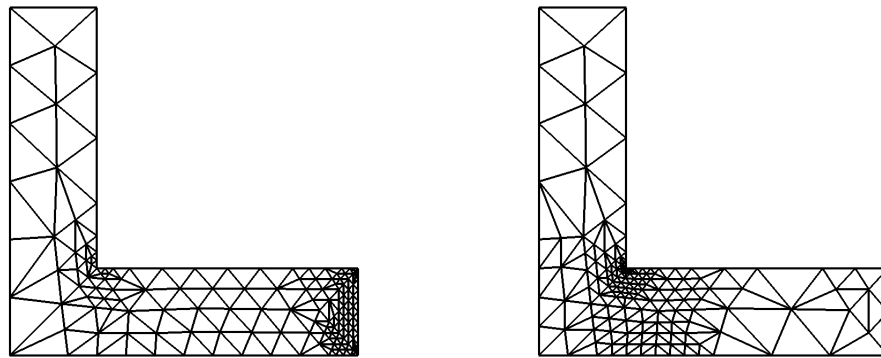


Figure 4.2.1 : Géométrie et maillage initial (38 éléments) pour la première étude.

Le premier critère cible est un nombre d'éléments fixé à 250. Pour le maillage adapté à partir de l'erreur en norme de l'énergie (figure 4.2.2a), la précision obtenue est de 0,82% pour 255 éléments et pour le maillage adapté à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (figure 4.2.2b), la précision obtenue est de 0,32% pour 271 éléments.

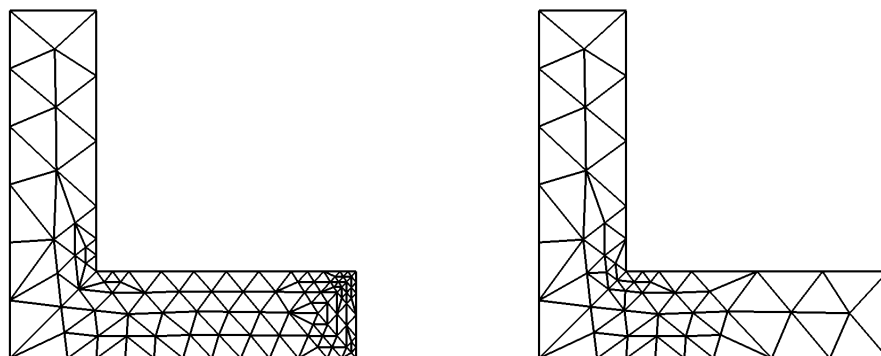
Les deux maillages sont très différents : les zones fortement raffinées ne sont pas localisées aux mêmes endroits. L'erreur en norme de l'énergie conduit à raffiner fortement où le gradient des contraintes est important (résultant du chargement en cisaillement sur la branche droite de la structure) et dans le coin. L'erreur en quantité d'intérêt conduit à raffiner dans le coin de la structure, sans influence du fort gradient de contrainte. En effet, les raffinements utilisés pour obtenir ces deux maillages ne répondent pas au même objectif. L'erreur globale en norme de l'énergie répond à l'attente d'améliorer la solution éléments finis partout alors que l'erreur en quantité d'intérêt répond à l'objectif d'améliorer la quantité d'intérêt dans la zone d'intérêt.



Figures 4.2.2a et 4.2.2b : Maillage raffiné à partir de l'erreur en énergie (à gauche) et maillage raffiné à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (à droite) pour un nombre fixé d'éléments dans le cas d'une structure saine.

Le second critère cible est une précision sur la quantité d'intérêt à 1,5%. Pour le maillage adapté à partir l'erreur en norme de l'énergie (figure 4.2.3a), la précision obtenue est de 1,12% pour 175 éléments et pour le maillage adapté à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (figure 4.2.3b), la précision obtenue est de 1,15% pour 83 éléments.

L'intérêt industriel de l'erreur en quantité est alors assez évident : pour obtenir la même précision sur une quantité d'intérêt, il suffit de 83 éléments avec l'erreur en quantité d'intérêt alors qu'avec l'erreur en norme de l'énergie il en faut plus du double.



Figures 4.2.3a et 4.2.3b : Maillage raffiné à partir de l'erreur en énergie (à gauche) et maillage raffiné à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (à droite) pour une précision fixée dans le cas d'une structure saine.

Quantitativement, comme le montre la figure 4.2.4, l'utilisation de l'erreur en quantité d'intérêt est la stratégie qui permet de réduire le plus rapidement et le plus efficacement l'erreur sur la quantité d'intérêt considérée.

Le raffinement local dans la zone d'intérêt ne permet pas de réduire l'erreur. Ce comportement correspond à ce que nous avons montré dans la première partie : l'erreur locale est réduite mais pas l'erreur de pollution qui devient ici prépondérante. La valeur vers laquelle l'erreur converge avec cette stratégie correspond à la valeur de l'erreur de pollution. Le raffinement uniforme montre une convergence uniforme de l'erreur mais ne permet pas de

réduire efficacement l'erreur dans le sens où il faut beaucoup plus d'éléments pour atteindre le même niveau d'erreur que pour les stratégies où l'erreur est calculée.

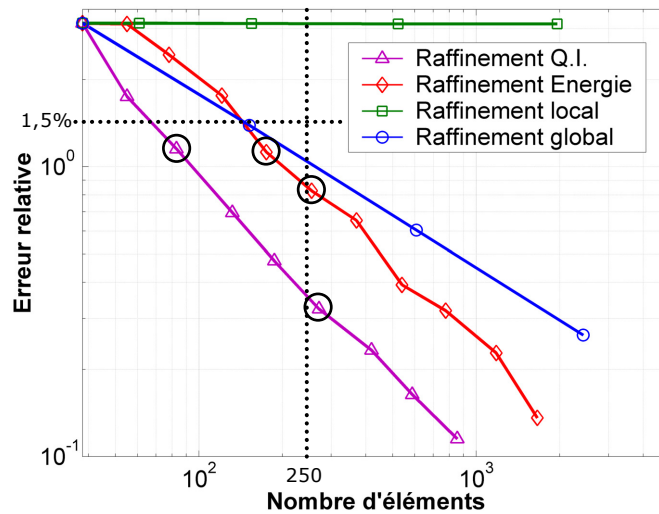


Figure 4.2.4 : Convergence de l'erreur pour différentes stratégies de raffinement dans le cas d'une structure saine.

Les différents maillages obtenus précédemment correspondent à différents points des courbes (entourés). Le premier critère (nombre d'éléments fixé) correspond à l'intersection d'une droite verticale avec les différentes courbes. Le second critère (précision fixée) correspond à l'intersection d'une droite horizontale avec les courbes. De manière générale, la figure 4.2.4 indique que la stratégie utilisant l'erreur en quantité d'intérêt fournira toujours, pour un nombre d'éléments fixé, la meilleure précision et réciproquement pour une précision fixée, le nombre d'éléments le plus faible. Enfin il faut noter que l'utilisation de la norme en énergie permet d'obtenir une précision plus importante qu'avec le raffinement global.

3 Cas des structures fissurées

Deux cas vont être distingués : le cas où la fissure est hors de la zone d'intérêt et le cas où la fissure est dans la zone d'intérêt. Dans la pratique, le premier cas arrive rarement : si un calcul de structure fissurée est mis en œuvre, la zone d'intérêt est bien la zone autour de la fissure. C'est pourquoi, il faut voir ce premier cas comme le cas limite de la singularité car cela correspond au cas où la singularité est la plus forte (cf. figure 4.1.1).

3.1 Fissure hors de la zone d'intérêt

Ce cas représente donc le cas extrême des singularités. L'erreur en norme de l'énergie présente de fortes valeurs en présence de singularités. Il est donc attendu que la stratégie basée sur l'erreur en norme de l'énergie aboutira à un raffinement qui aura lieu d'abord autour de la fissure sans nécessairement améliorer l'erreur sur la quantité d'intérêt. Pour illustrer ce comportement et étudier celui de l'erreur en quantité d'intérêt, une étude similaire à la précédente sera menée, la différence sera la présence d'une fissure

(figure 4.3.1). Sur le premier maillage, qui comporte 37 éléments, la précision obtenue sur la quantité d'intérêt avec le maillage initial est de 3,46%. De la même manière que le cas précédent, une étude qualitative précédera une étude quantitative.

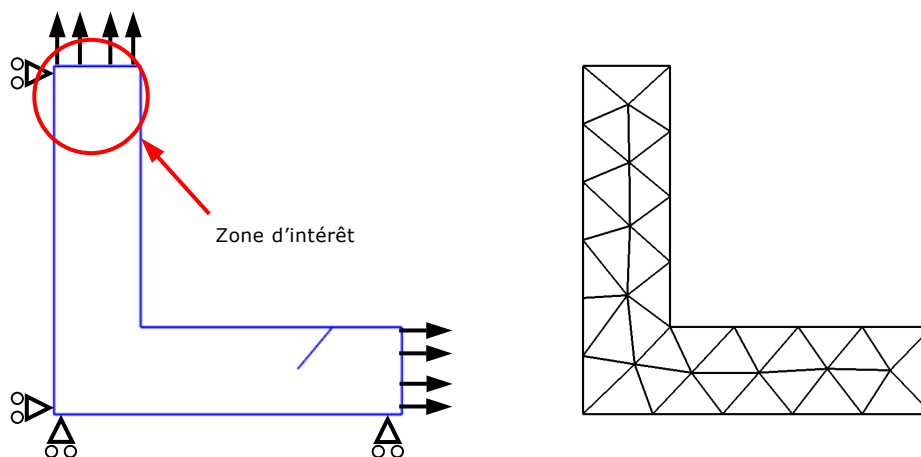
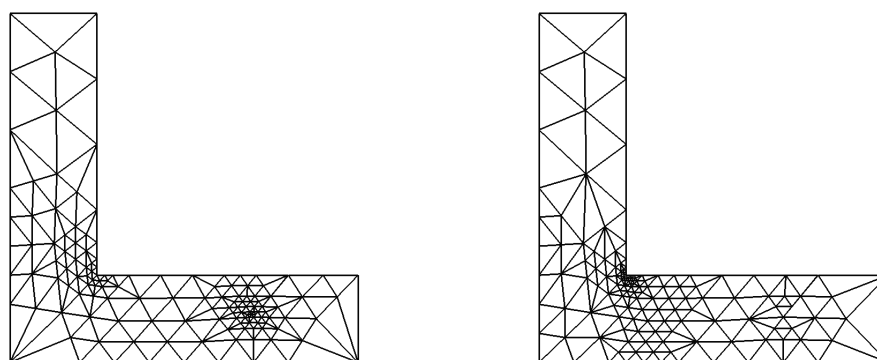


Figure 4.3.1 : Géométrie et maillage initial fissuré (37 éléments) pour la seconde étude.

Le premier critère cible est un nombre d'éléments fixé à 230. Pour le maillage adapté à partir de l'erreur en norme de l'énergie (figure 4.3.2a), la précision obtenue est de 0,84% pour 239 éléments et pour le maillage adapté à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (figure 4.3.2b), la précision obtenue est de 0,38% pour 240 éléments.

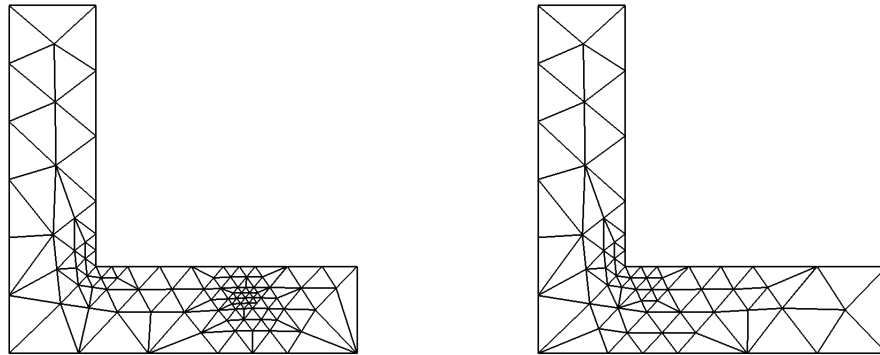
L'erreur en norme de l'énergie conduit à raffiner fortement autour de la fissure et dans le coin : il y a compétition entre les deux singularités. Le maillage obtenu à partir de l'erreur en quantité d'intérêt n'est pas du tout influencé par la fissure et permet d'améliorer franchement la précision sur la quantité d'intérêt. Pour un nombre de mailles comparable, l'erreur est deux fois plus petite lorsque le raffinement est guidé par l'erreur en quantité d'intérêt.



Figures 4.3.2a et 4.3.2b : Maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en énergie (à gauche) et maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (à droite) pour un nombre fixé d'éléments dans le cas d'une structure fissurée hors de la zone d'intérêt.

Le second critère cible est une précision sur la quantité d'intérêt à 1,5%. Pour le maillage adapté à partir de l'erreur en norme de l'énergie (figure 4.3.3a), la précision obtenue est de 1,42% pour 159 éléments et pour le maillage adapté à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (figure 4.3.3b), la précision obtenue est de 0,96% pour 97 éléments. Avec l'erreur en

quantité d'intérêt, la précision est améliorée de manière significative pour un nombre d'éléments réduit.



Figures 4.3.3a et 4.3.3b : Maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en énergie (à gauche) et maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (à droite) pour une précision fixée dans le cas d'une structure fissurée hors de la zone d'intérêt.

Sur un plan quantitatif, pour ce type de structures, l'utilisation de l'erreur en quantité d'intérêt est encore la meilleure stratégie pour réduire l'erreur dans la zone d'intérêt. Comme prévu, l'erreur en norme de l'énergie a guidé un raffinement de maillage autour de la fissure et du coin. La conséquence est que la précision n'a pas été autant améliorée que pour le raffinement à partir de l'erreur en quantité d'intérêt. Toutefois, l'utilisation de l'erreur en norme de l'énergie permet d'obtenir une précision nettement meilleure qu'avec un raffinement global (trois fois plus petite).

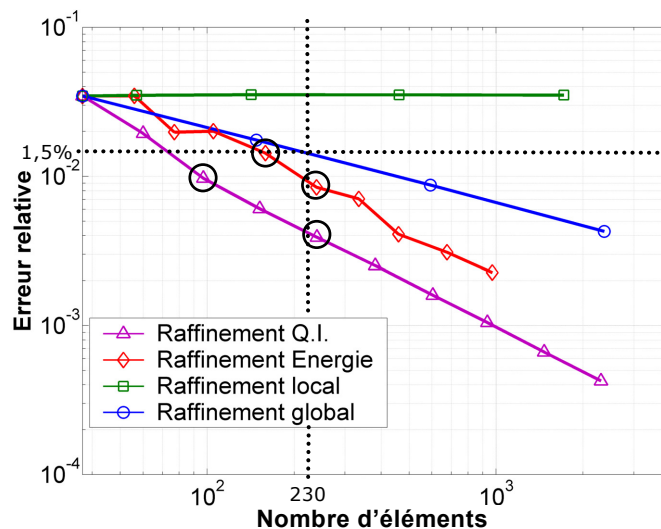


Figure 4.3.4 : Convergence de l'erreur pour différentes stratégies de raffinement dans le cas d'une structure fissurée hors de la zone d'intérêt.

Comme pour le cas précédent, les différents maillages correspondent à des « photos » de l'évolution des maillages lorsque les courbes de la figure 4.3.4 sont parcourues.

3.2 Fissure dans la zone d'intérêt

Dans ce dernier cas, est considéré le cas où la fissure est dans la zone d'intérêt. Cette situation correspond aux problèmes de fissuration traités à EDF R&D.

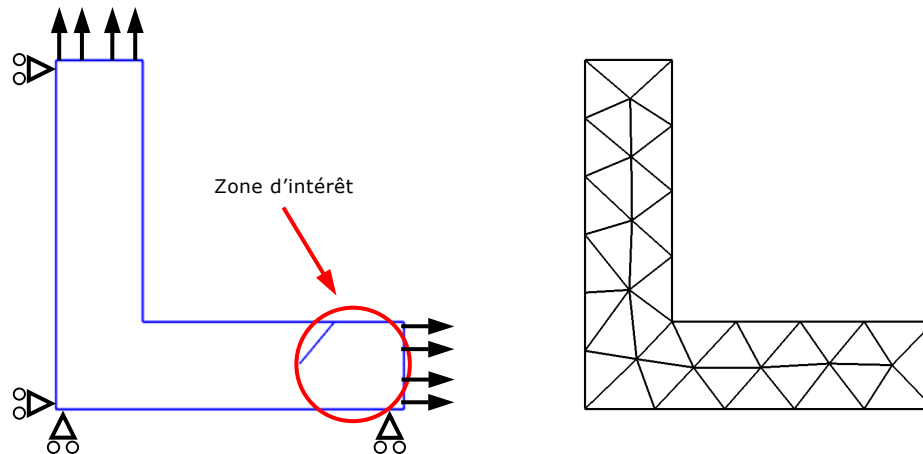
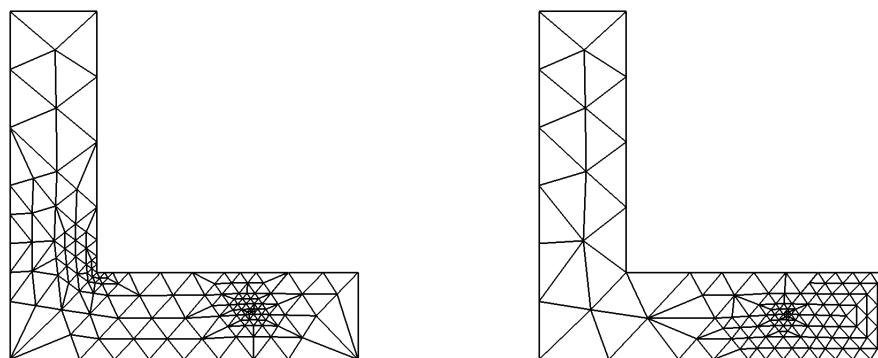


Figure 4.3.5 : Géométrie et maillage initial fissuré (37 éléments) pour la troisième étude.

Le maillage est le même que pour le cas précédent (37 éléments), la précision pour le premier maillage (Figure 4.3.5) est de 16,0%. Cette valeur rappelle que les éléments linéaires sont particulièrement mal adaptés pour décrire correctement le champ de déplacement au voisinage des fissures. Toutefois le comportement de l'erreur pour les différentes stratégies reste intéressant.

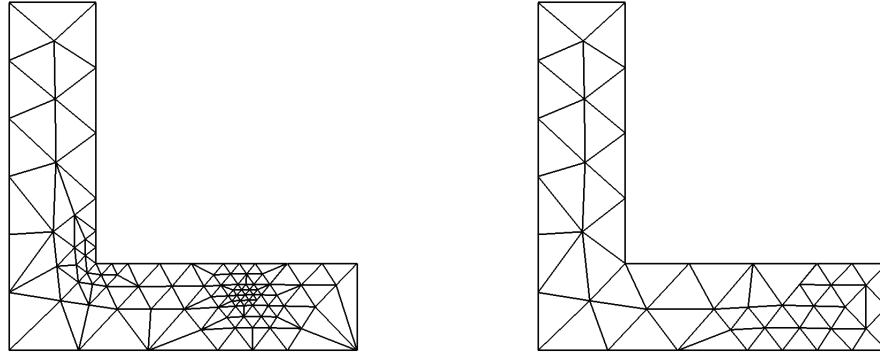
Le premier critère cible est un nombre d'éléments fixé à 200. Pour le maillage adapté à partir de l'erreur en norme de l'énergie (figure 4.3.6a), la précision obtenue est de 9,88% pour 239 éléments et pour le maillage adapté à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (figure 4.3.6b), la précision obtenue est de 2,05% pour 204 éléments.



Figures 4.3.6a et 4.3.6b : Maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en énergie (à gauche) et maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (à droite) pour un nombre fixé d'éléments dans le cas d'une structure fissurée dans la zone d'intérêt.

Il est très clair que l'erreur en norme de l'énergie conduit à raffiner uniquement en pointe fissure et dans le coin alors que l'erreur en quantité d'intérêt conduit à raffiner en pointe de

fissure (qui appartient à la zone d'intérêt) mais surtout pas au voisinage du coin. Il faut noter que le maillage des figures 4.3.2a et 4.3.6a sont identiques ainsi que les maillages des figures 4.3.3a et 4.3.7a. Ce qui est normal car ils sont raffinés selon le même critère (erreur en norme de l'énergie) qui ne tient pas compte de la zone d'intérêt.



Figures 4.3.7a et 4.3.7b : Maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en énergie (à gauche) et maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (à droite) pour une précision fixée dans le cas d'une structure fissurée dans la zone d'intérêt.

Le second critère cible est une précision sur la quantité d'intérêt à 11%. Pour le maillage adapté à partir de l'erreur en norme de l'énergie (figure 4.3.7a), la précision obtenue est de 10,6% pour 159 éléments et pour le maillage adapté à partir de l'erreur en quantité d'intérêt (figure 4.3.7b), la précision obtenue est de 7,2% pour 60 éléments. C'est encore avec l'erreur en quantité d'intérêt que la précision a été le plus améliorée pour le nombre d'éléments le plus bas et ce, de manière très nette.

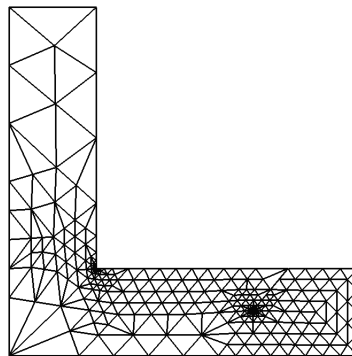


Figure 4.3.8 : Maillage fissuré raffiné à partir de l'erreur en énergie après 7 raffinements : après avoir raffiné les singularités, la stratégie raffine le reste du domaine.

La figure 4.3.9 montre une convergence uniforme pour les stratégies de raffinement global et local. La convergence pour les stratégies basées sur l'erreur est plus chaotique. On remarque d'ailleurs un net décrochement pour le raffinement à partir de la norme en énergie. Ceci s'explique par le fait que la stratégie a commencé par « neutraliser » les singularités (fissure et coin) puis, après le décrochement, a raffiné le reste du domaine (cf. figure 4.3.8).

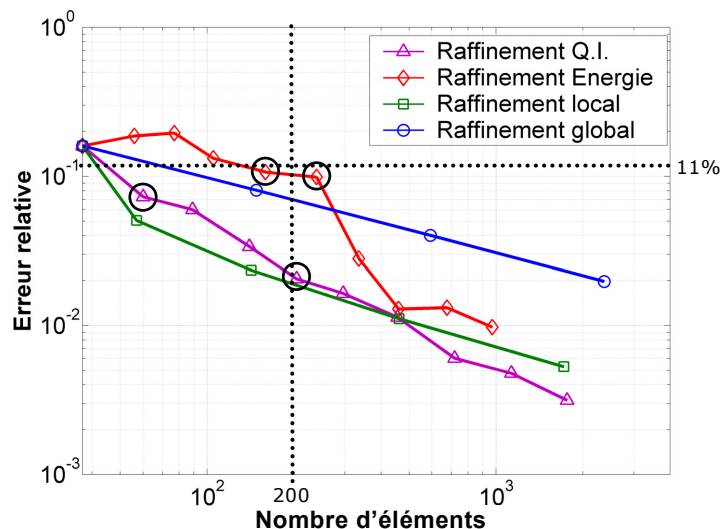


Figure 4.3.9 : Convergence de l’erreur pour différentes stratégies de raffinement dans le cas d’une structure fissurée dans la zone d’intérêt.

Il faut enfin noter que la stratégie basée sur l’erreur en quantité d’intérêt n’est pas toujours la meilleure ; elle l’est à partir de 450 éléments mais l’écart avec la stratégie basée sur l’erreur en norme de l’énergie reste très faible. En effet dans cette configuration, le raffinement local est très adapté : l’erreur vient presque exclusivement de cette zone puisque la singularité est incluse dans cette zone qui est aussi la zone d’intérêt.

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons travaillé avec l’erreur elle-même et non une estimation de celle-ci. De cette manière les résultats étaient les meilleurs possibles, ils n’ont pas été entachés de l’erreur issue d’une estimation (dont la précision dépend de la méthode employée).

Nous avons vu, que l’erreur globale en norme de l’énergie conduit à raffiner le maillage, longtemps pendant le processus d’adaptation, à proximité de la singularité alors que pour une quantité d’intérêt hors de la zone singulière, la discrétisation aurait dû potentiellement être améliorée ailleurs pour augmenter la précision sur la quantité d’intérêt. De la même manière, pour une quantité d’intérêt dans la zone singulière, comme nous l’avons mis en évidence dans la partie précédente, à cause de l’erreur de pollution, la précision n’est pas nécessairement améliorée même si le maillage est plus fin dans cette zone. L’erreur en quantité d’intérêt prend en compte l’erreur sur toute la structure. Ceci permet, pour les structures industrielles étudiées à EDF R&D comportant de forts gradients de contraintes et des singularités telles que des fissures, d’utiliser des stratégies d’adaptation de maillages performantes et plus ciblées pour la quantité d’intérêt. Toutefois il faut noter que l’adaptation suivant une quantité d’intérêt fournit un maillage très spécifique ; si une autre quantité présente un intérêt, le maillage ne sera plus optimisé pour celle-ci. Il faut alors prendre en compte les différentes quantités d’intérêt en même temps pour que le maillage soit optimisé pour plusieurs quantités d’intérêt.

Enfin nous pouvons donner un classement des quatre stratégies mises en œuvre.

En toutes généralités, le raffinement local est la stratégie la moins universelle et donc la moins performante. Dans la situation très particulière où une très forte singularité se trouve dans la zone d'intérêt (presque toute l'erreur est dans cette zone) elle se montre très efficace mais montre ses limites quand une erreur importante se trouve hors de la zone d'intérêt.

Le raffinement global est un moyen très sûr d'améliorer la précision mais nécessite des moyens de calculs importants pour améliorer de manière significative la précision. Cette stratégie est souvent inutilisable pour l'étude de structures industrielles.

Le raffinement guidé par la norme en énergie permet dans de nombreux cas d'améliorer efficacement la précision. Mais en présence de singularités, l'amélioration de la précision sur une quantité d'intérêt peut être lente. Enfin si le nombre de raffinement est réduit (avant le décrochement de la figure 4.3.9) la valeur de la quantité d'intérêt peut sembler ne pas converger.

Enfin le raffinement suivant l'erreur en quantité d'intérêt semble la meilleure stratégie : c'est celle qui permet toujours d'améliorer le plus la précision à moindre coût.

Ce chapitre permet de répondre au premier objectif partiel de la thèse : l'erreur en quantités d'intérêt est *a priori*, sous réserve de pouvoir être approximée correctement, très pertinente dans un contexte de calcul de structures industrielles.

Chapitre 5

Estimation de l'erreur en quantité d'intérêt

1	Estimateur d'erreur en quantité d'intérêt basé sur les résidus explicite
2	Estimateur en quantité d'intérêt basé sur le lissage des contraintes
3	Estimateur en quantité d'intérêt basé sur les bases hiérarchiques
4	Forme générale des quantités d'intérêt
5	Grandeurs associées aux déplacements
5.1	Composante du déplacement dans un domaine
5.2	Composante du déplacement sur un bord
5.3	Déplacement normal à un bord
6	Grandeurs associées aux contraintes
6.1	Composante des contraintes dans un domaine
6.2	Contrainte normale à un bord
6.3	Contrainte de Von Mises dans un domaine
7	Exemples numériques
7.1	Estimateurs basés sur les résidus
7.1.1	<i>Maillages triangles</i>
7.1.2	<i>Maillages quadrangles</i>
7.1.3	<i>Maillages quadratiques</i>
7.1.4	<i>Maillages 3D</i>
7.2	Estimateurs basés sur les bases hiérarchiques
7.3	Estimateurs basés sur le lissage de champs
8	Conclusion

1 Estimateur d'erreur en quantité d'intérêt basé sur les résidus explicites

Comme nous l'avons vu dans la partie 1, l'erreur en quantité d'intérêt peut être estimée à partir de n'importe quel estimateur de l'erreur globale. Ainsi, un estimateur d'erreur en quantité d'intérêt est construit à partir de la relation du parallélogramme et de l'estimateur d'erreur basé sur les résidus explicites η dont l'expression sur chaque élément η_E , donnée dans la partie 1, est :

$$\eta_E^2 = h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_F} l_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{\Gamma \in \Gamma_F} l_\Gamma \|t_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad [5.1.1]$$

L'utilisation de l'expression donnée par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|Q(e)| \leq \|e\|_e \|\varepsilon\|_e \quad [5.1.2]$$

avec l'estimateur de type résidu explicite donne facilement une estimation de l'erreur en quantité d'intérêt en estimant $\|e\|_e$ et $\|\varepsilon\|_e$ mais cette estimation est grossière.

La relation du parallélogramme donnée par :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) = \frac{1}{4} \|e + \varepsilon\|_e^2 - \frac{1}{4} \|e - \varepsilon\|_e^2 = \frac{1}{4} \|se + s^{-1}\varepsilon\|_e^2 - \frac{1}{4} \|se - s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \quad [5.1.3]$$

fournit une estimation plus précise car elle permet un réel couplage entre l'erreur primale et l'erreur duale. L'utilisation de l'estimation de l'erreur de chacun des deux problèmes n'est pas possible, la norme d'une somme n'est pas égale à la somme des normes :

$$\|e + \varepsilon\|_e^2 = a(e + \varepsilon, e + \varepsilon) = \|e\|_e^2 + \|\varepsilon\|_e^2 + 2a(e, \varepsilon) \quad [5.1.4]$$

$$\|e - \varepsilon\|_e^2 = a(e - \varepsilon, e - \varepsilon) = \|e\|_e^2 + \|\varepsilon\|_e^2 - 2a(e, \varepsilon) \quad [5.1.5]$$

C'est pourquoi il faut repartir de la définition de l'estimateur d'erreur en résidu afin d'évaluer directement $\|se + s^{-1}\varepsilon\|_e^2$ et $\|se - s^{-1}\varepsilon\|_e^2$. L'erreur en solution $e = u - u_h$ étant solution d'un problème d'élasticité dont les données en effort sont les résidus d'équilibre, il s'agit donc de formuler les problèmes dont $(se + s^{-1}\varepsilon)$ et $(se - s^{-1}\varepsilon)$ sont solutions.

Le problème primal et le problème dual sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a(u, v) = l(v) & \forall v \in V \\ a(v, \omega) = Q(v) & \forall v \in V \end{cases} \quad [5.1.6]$$

Les résidus associés à ces problèmes sont respectivement donnés par :

$$\begin{cases} R_h^u(v) = l(v) - a(u^h, v) \\ R_h^\omega(v) = Q(v) - a(v, \omega^h) \end{cases} \quad [5.1.7]$$

En remplaçant u par $u^h + e$ et ω par $\omega^h + \varepsilon$ et en utilisant la symétrie de $a(\bullet, \bullet)$, on obtient les équations gouvernant les erreurs e et ε :

$$\begin{cases} a(e, v) = R_h^u(v) \\ a(\varepsilon, v) = R_h^\omega(v) \end{cases} \quad [5.1.8]$$

Par combinaison linéaire, on a les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} a(se + s^{-1}\varepsilon, v) = (sR_h^u + s^{-1}R_h^\omega)(v) \\ a(se - s^{-1}\varepsilon, v) = (sR_h^u - s^{-1}R_h^\omega)(v) \end{cases} \quad [5.1.9]$$

Ainsi l'erreur numérique $(se + s^{-1}\varepsilon)$ (et $(se - s^{-1}\varepsilon)$) est générée par le résidu total $(sR_h^u + s^{-1}R_h^\omega)$ (respectivement $(sR_h^u - s^{-1}R_h^\omega)$). De manière analogue à l'estimateur en résidu, il existe une constante C^+ (et C^-), indépendante de la taille des éléments, telle que :

$$\|se + s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \leq C^+ \left[\sum_E h_E^2 \|sr_E^u + s^{-1}r_E^\omega\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{\Gamma \in \Gamma_U} l_\Gamma \|st_\Gamma^u + s^{-1}t_\Gamma^\omega\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right] \quad [5.1.10]$$

$$\|se - s^{-1}\varepsilon\|_e^2 \leq C^- \left[\sum_E h_E^2 \|sr_E^u - s^{-1}r_E^\omega\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{\Gamma \in \Gamma_U} l_\Gamma \|st_\Gamma^u - s^{-1}t_\Gamma^\omega\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right] \quad [5.1.11]$$

Enfin l'estimateur d'erreur en quantité d'intérêt $^{REQI}\eta_E$ est défini tel que :

$$^{REQI}\eta_E = \frac{1}{4}(\eta_E^+)^2 - \frac{1}{4}(\eta_E^-)^2 \quad [5.1.12]$$

avec η_E^+ et η_E^- définit par :

$$(\eta_E^+)^2 = c^+ \left[h_E^2 \|s r_E^u + s^{-1} r_E^\omega\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_F} l_\Gamma \|s t_\Gamma^u + s^{-1} t_\Gamma^\omega\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{\Gamma \subset \Gamma_F} l_\Gamma \|s t_\Gamma^u + s^{-1} t_\Gamma^\omega\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right] \quad [5.1.13]$$

$$(\eta_E^-)^2 = c^- \left[h_E^2 \|s r_E^u - s^{-1} r_E^\omega\|_{L^2(E)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_F} l_\Gamma \|s t_\Gamma^u - s^{-1} t_\Gamma^\omega\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{\Gamma \subset \Gamma_F} l_\Gamma \|s t_\Gamma^u - s^{-1} t_\Gamma^\omega\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right] \quad [5.1.14]$$

Compte tenu des définitions des bornes de l'erreur en quantité d'intérêt données dans la partie 1, l'estimateur que nous venons de définir ne borne pas l'erreur mais en donne une valeur approchée :

$$\mathcal{Q}(e) \approx \sum_E ^{REQI}\eta_E \quad [5.1.15]$$

L'estimateur ainsi défini s'apparente donc davantage à un indicateur d'erreur permettant de guider une stratégie de maillage. Cet indicateur est programmé dans *Code_Aster*, il est disponible pour tous les types d'éléments 2D et 3D (sauf les pyramides) ainsi que pour les éléments linéaires et quadratiques. En annexe C, les différentes commandes permettant de calculer cet estimateur sont présentées ainsi qu'un exemple de fichier de commande.

2 Estimateur en quantité d'intérêt basé sur le lissages de champ

Un estimateur d'erreur est construit directement à partir des techniques de lissage et de la relation fondamentale entre l'erreur en quantité d'intérêt, l'erreur sur la solution du problème primal et celle sur la solution du problème dual :

$$\mathcal{Q}(e) = a(e, \varepsilon) = \int_\Omega Tr \left[{}^T (\sigma(u) - \sigma(u^h)) K^{-1} (\sigma(\omega) - \sigma(\omega^h)) \right] d\Omega \quad [5.2.1]$$

La démarche consiste à construire à partir des solutions éléments finis u^h et ω^h des champs de contraintes continues $\tilde{\sigma}(u^h)$ et $\tilde{\sigma}(\omega^h)$ le plus proche possible des solutions exactes. Cette opération de lissage est réalisée par les différentes techniques décrites dans la première partie. Une borne supérieure est ainsi obtenue (Ramm *et al.*, 2001) :

$$a(e, \varepsilon) \leq C \int_\Omega Tr \left[(\tilde{\varepsilon}(u) - \varepsilon(u^h)) K (\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon(\omega^h)) \right] d\Omega \quad [5.2.2]$$

Les contributions locales de d'erreur en quantité d'intérêt peuvent être définies ainsi :

$$^{ZZOI}\eta_E = \int_E Tr \left[(\tilde{\varepsilon}(u) - \varepsilon(u^h)) K (\tilde{\varepsilon}(\omega) - \varepsilon(\omega^h)) \right] dE \quad [5.2.3]$$

L'estimateur est la somme sur les éléments des contributions et s'écrit :

$$^{ZZOI}\eta = \sum_E ^{ZZOI}\eta_E \quad [5.2.4]$$

Cet estimateur est très simple à mettre en œuvre et ne nécessite pratiquement pas de développement pour un code pourvu de techniques de lissage. Bien qu'implémenté dans

Code_Aster à des fins de tests dans le cadre de la thèse, nous n'utiliserons pas cet estimateur dans la suite. En effet les techniques de lissage développées dans *Code_Aster* sont limitées au 2D et ne fonctionnent que pour des maillages simples, inutilisables pour les études industrielles menées à EDF R&D.

3 Estimateur en quantité d'intérêt basé sur les bases hiérarchiques

Le point de départ pour construire cet estimateur est encore la relation fondamentale de l'erreur en quantité d'intérêt :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) \quad [5.3.1]$$

La résolution du problème primal et du problème dual avec des maillages plus « riches » (pratiquement ce sont des maillages raffinés uniformément) permet d'obtenir la solution améliorée u^* du problème primal et la solution améliorée du problème dual ω^* .

En considérant que les approximations u^* et ω^* sont suffisamment précises par rapport aux approximations originales u^h et ω^h alors l'erreur en quantité d'intérêt est donnée par :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) = a(u - u^h, \omega - \omega^h) \approx a(u^* - u^h, \omega^* - \omega^h) = Q(e^*) \quad [5.3.2]$$

Un estimateur local d'erreur en quantité d'intérêt peut être défini ainsi :

$${}^{BHQI} \eta_E = \int_E Tr[(\varepsilon(u^*) - \varepsilon(u^h))K(\varepsilon(\omega^*) - \varepsilon(\omega^h))] dE \quad [5.3.3]$$

L'estimateur global est la somme sur les éléments et s'écrit ainsi :

$${}^{BHQI} \eta = \sum_E {}^{BHQI} \eta_E$$

Cet estimateur peut être d'un intérêt limité pour une utilisation industrielle compte tenu du coût de calcul engendré. En effet le problème primal et le problème dual devront être chacun résolus deux fois : une fois sur le maillage initial et une fois sur un maillage plus fin donc avec un surcoût de calcul. Toutefois cet estimateur peut rendre l'erreur en quantité d'intérêt disponible pour des classes de problèmes pour lesquels aucun estimateur n'est disponible ou implémenté (problèmes aux valeurs propres ou de dynamique dans *Code_Aster* par exemple).

4 Forme générale

Comme nous l'avons déjà vu dans la première partie, au lieu d'évaluer une mesure de l'erreur telle que la norme en énergie par exemple, il est plus utile d'estimer l'erreur sur une quantité d'intérêt ayant un sens physique. Cette quantité d'intérêt (*quantity of interest* ou *output*) peut être représentée par une fonctionnelle linéaire $Q(\bullet)$ définie sur l'espace des fonctions tests. Le but de l'estimation en quantité d'intérêt est donc de s'assurer de la qualité de $Q(u^h)$ en estimant la quantité :

$$\varepsilon^Q = Q(u - u^h) = Q(e) \quad [5.4.1]$$

Pour obtenir l'estimation, il faut utiliser la fonctionnelle $Q(\bullet)$ comme le chargement du problème dual défini par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in V \text{ tel que} \\ a(v, \omega) = Q(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [5.4.2]$$

De nombreuses quantités physiques sont utilisées en conception et doivent être contrôlées. Ces grandeurs peuvent être, par exemples, la moyenne d'une composante du déplacement ou la moyenne d'une composante des contraintes sur un sous-domaine (zone d'intérêt) :

$$Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} v_x d\Omega \quad [5.4.3]$$

$$Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{xx} d\Omega \quad [5.4.4]$$

Ces quantités ne sont pas utilisables directement comme chargement du problème dual. Il faut les exprimer de manière adéquate afin de retrouver le chargement à imposer sur le problème local. La forme générale de ces quantités est la suivante (Parés, 2006b) :

$$Q(v) = \int_{\Omega} f^{\varrho} \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} F^{\varrho} \cdot v d\Gamma - a(u^{\varrho}, v) \quad [5.4.5]$$

où f^{ϱ} , F^{ϱ} et u^{ϱ} sont données. Dans la suite, nous verrons que des quantités d'intérêt simples se déduisent directement de cette forme générale pour en constituer des cas particuliers dans lesquels un ou plusieurs termes sont nuls.

5 Grandeurs associées aux déplacements

5.1 Composante du déplacement dans un domaine

La première quantité liée au déplacement est la valeur moyenne d'une composante du déplacement dans un sous-domaine ω :

$$Q^{depl}(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} v_i d\Omega \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad [5.5.1]$$

$Q^{depl}(v)$ peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} f^{\varrho} \cdot v d\Omega \quad [5.5.2]$$

qui correspond au cas particulier où $F^{\varrho} = 0$ et $u^{\varrho} = 0$ et où f^{ϱ} est un vecteur constant sur ω et nul ailleurs.

Le problème dual à résoudre s'écrit de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(\omega) d\Omega = \int_{\Omega} f_i^{\varrho} v_i d\Omega \quad \forall v \in V \quad [5.5.3]$$

En utilisant la propriété de symétrie du tenseur des contraintes et en dérivant, on obtient :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij}(\omega) v_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(\omega) v_i d\Omega = \int_{\Omega} f_i^Q v_i d\Omega \quad [5.5.4]$$

Enfin en utilisant la formule de Stokes, on a :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}(\omega) + f_i^Q) v_i d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\omega) n_j v_i d\Omega = 0 \quad [5.5.5]$$

Ceci nous permet d'écrire le problème dual local :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\omega) + f_i^Q &= 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i(x) &= 0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma_{ij}(\omega) n_j(x) &= 0 & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad [5.5.6]$$

On note ainsi qu'imposer $Q^{depl}(v)$ comme chargement du problème dual revient à imposer un chargement volumique. Il faut noter que si on recherche l'erreur sur le vecteur déplacement complet, il faudra résoudre autant de problème dual que de composantes (2 en dimension 2 et 3 en dimension 3).

5.2 Composante du déplacement sur un bord

Une autre quantité utile liée au déplacement est la valeur moyenne d'une composante du déplacement sur un bord $\gamma \subset \Gamma_F$:

$$Q^{depl}(v) = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} v_i d\Gamma \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad [5.5.7]$$

$Q^{depl}(v)$ peut s'écrire :

$$\int_{\Gamma_F} F^Q \cdot v d\Gamma \quad [5.5.8]$$

qui correspond au cas particulier où $f^Q = 0$ et $u^Q = 0$ et où F^Q est un vecteur constant sur γ et nul ailleurs et avec pour chaque v_i , $F_i^Q = \frac{1}{|\gamma|}$; les autres composantes de F^Q étant nulles.

Le problème dual local s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\omega) &= 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i(x) &= 0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma_{ij}(\omega) n_j(x) &= F_i^Q & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad [5.5.9]$$

Imposer $Q^{depl}(v)$ comme chargement du problème dual revient à imposer un chargement linéique en dimension 2 et surfacique en dimension 3.

5.3 Déplacement normal à un bord

Enfin la dernière quantité liée au déplacement est la moyenne du déplacement normal à un bord $\gamma \subset \Gamma_F$:

$$Q^{depl}(v) = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} v_n d\Gamma \quad [5.5.10]$$

$Q^{depl}(v)$ peut s'écrire :

$$\int_{\Gamma_F} pn \cdot v \, d\Gamma \quad [5.5.11]$$

où n est le vecteur normal au bord γ et $p = \frac{1}{|\gamma|}$ sur γ et nul ailleurs.

Le problème dual local s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i(x) &= 0 & \text{sur } \Gamma_U \\ \sigma_{ij}(\omega) n_j(x) &= pn_i & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad [5.5.12]$$

Imposer $Q^{depl}(v)$ comme chargement du problème dual revient à imposer un chargement linéique en dimension 2 et surfacique en dimension 3.

6 Grandeurs associées aux contraintes

6.1 Composante des contraintes dans un domaine

Nous nous intéressons maintenant à l'estimation de l'erreur sur la valeur moyenne d'une composante des contraintes dans un sous-domaine ω :

$$Q^{sigma}(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{ij} \, d\Omega \quad i, j = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad [5.6.1]$$

Pour déterminer $Q^{sigma}(v)$, il suffit de déterminer :

$$-a(u^Q, v) = \int_{\Omega} \sigma(v) : \Sigma(u^Q) \, d\Omega \quad [5.6.2]$$

qui correspond au cas particulier où $f^Q = 0$ et $F^Q = 0$ et où $\Sigma(u^Q)$ est un opérateur symétrique constant sur ω et nul ailleurs.

Pour cela, il suffit d'écrire que la composante des contraintes est égale à la trace du produit entre des opérateurs dont l'un est non nul dans ω :

$$Q^{sigma}(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{ij} \, d\Omega = \int_{\omega} \sigma : \Sigma \, d\Omega + \underbrace{\int_{\Omega \setminus \omega} \sigma : \Sigma \, d\Omega}_{=0} = \int_{\Omega} \sigma : \Sigma \, d\Omega \quad i, j = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad [5.6.3]$$

avec pour chaque σ_{ij} , $\Sigma_{ij} = \frac{1}{|\omega|}$ pour $i = j$; $\Sigma_{ij} = \frac{1}{2|\omega|}$ pour $i \neq j$.

Le problème dual à résoudre s'écrit de la manière suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(\omega) \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(v) \Sigma_{ij} \, d\Omega \quad [5.6.4]$$

En dérivant, on obtient :

$$\int_{\Omega} \left((\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl}) v_i \right)_{,j} \, d\Omega - \int_{\Omega} \left((\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl})_{,j} v_i \right) \, d\Omega = 0 \quad [5.6.5]$$

Enfin en utilisant la formule de Stokes, on a :

$$\int_{\Omega} \left((\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl}) v_i \right)_{,j} d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl}) n_j v_i d\Omega = 0 \quad [5.6.6]$$

Ceci nous permet d'écrire le problème dual local :

$$\begin{cases} (\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl})_{,j} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i(x) &= 0 & \text{sur } \Gamma_U \\ (\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl}) n_j(x) &= 0 & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad [5.6.7]$$

On note ainsi qu'imposer $Q^{\text{sigma}}(v)$ comme chargement du problème dual revient à imposer une déformation initiale. Il faut noter que si on recherche l'erreur sur le tenseur des contraintes complet, il faudra résoudre autant de problème dual que de composantes (3 en dimension 2 et 6 en dimension 3).

6.2 Contrainte normale sur un bord

Il peut être intéressant de considérer l'erreur sur la contrainte normale sur un bord γ :

$$Q^{\text{sigma}}(v) = \int_{\gamma} n \cdot \sigma(v) n d\Omega \quad [5.6.8]$$

Cette quantité ne se présente pas sous la forme générale. L'introduction d'une fonction auxiliaire est nécessaire (Parés *et al.*, 2006b). Cette fonction χ est définie telle que $\chi|_{\gamma} = 1$ et égale à zéro sur le reste de $\partial\Omega$.

Si $n^{\gamma} = n|_{\gamma}$, la fonction χ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} a(u, \chi n^{\gamma}) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\chi n^{\gamma}) d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(u) n_j (\chi n^{\gamma})_i d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega} (\sigma_{ij}(u))_{,j} (\chi n^{\gamma})_i d\Omega}_{=0} \\ &= \int_{\gamma} \sigma_{ij}(u) n_j (\chi n^{\gamma})_i d\Omega \end{aligned} \quad [5.6.9]$$

Ce qui montre que la quantité d'intérêt peut s'écrire de manière équivalente :

$$Q^{\text{sigma}}(u) = \int_{\gamma} n \cdot \sigma(u) n d\Omega = a(u, \chi n^{\gamma}) =: \tilde{Q}(u) \quad [5.6.10]$$

Mais comme l'égalité précédente n'est vraie que pour un u particulier, il faut noter que :

$$Q^{\text{sigma}}(v) = \int_{\gamma} n \cdot \sigma(v) n d\Omega \neq a(v, \chi n^{\gamma}) =: \tilde{Q}(v) \quad [5.6.11]$$

Pour plus de facilité, la quantité $\tilde{Q}(v)$ sera utilisée à la place de la quantité $Q^{\text{sigma}}(v)$. En effet elle correspond à utiliser $u^Q = -\chi n^{\gamma}$.

La quantité d'intérêt à utiliser s'écrit donc de la manière suivante :

$$\tilde{Q}(v) = -a(u^Q, v) = \int_{\Omega} \sigma(v) : \Sigma(-\chi n_{\gamma}) d\Omega \quad [5.6.12]$$

qui correspond au cas particulier où $f^Q = 0$ et $F^Q = 0$.

De manière analogue au cas de la moyenne des contraintes, le problème dual local s'écrit :

$$\begin{cases} (\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl})_{,j} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_i(x) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_U \\ (\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl}) n_j(x) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad [5.6.13]$$

Imposer $\tilde{Q}(v)$ comme chargement du problème dual revient à imposer un champ de déformation initiale calculée à partir du champ de déplacement $u^0 = -\chi n_\gamma$. Cette quantité d'intérêt n'a pas été implémentée dans *Code_Aster*.

6.3 Contrainte de Von Mises dans un domaine

La contrainte de Von Mises est une quantité mécanique très utile en terme de dimensionnement pour l'ingénieur. La difficulté pour estimer l'erreur sur cette quantité réside dans le fait que son expression n'est pas linéaire par rapport au déplacement et donc inutilisable avec la technique présentée. La difficulté est levée grâce à une linéarisation de l'expression et sous certaines hypothèses (Oden *et al.*, 2001).

Le tenseur des contraintes σ peut se décomposer en la somme d'un tenseur déviatorique σ^d (dont la trace est nulle) et d'un tenseur sphérique σ^s (dont les termes extra diagonaux sont nuls) :

$$\sigma = \sigma^d + \sigma^s \quad [5.6.14]$$

où σ^d et σ^s sont définis par :

$$\sigma^d = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) II \quad \sigma^s = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) II \quad [5.6.15]$$

La contrainte de Von Mises, notée σ_{vm} , est définie par :

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^d : \sigma^d} \quad [5.6.16]$$

En élasticité linéaire, la contrainte dépend linéairement du déplacement, ce qui nous permet d'écrire :

$$\sigma^d(u) = \sigma^d(u^h) + \sigma^d(e) \quad [5.6.17]$$

En utilisant ceci dans la définition de la contrainte de Von Mises, on obtient :

$$\sigma_{vm}(u) = \sqrt{\frac{3}{2} ((\sigma^d(u^h) + \sigma^d(e)) : (\sigma^d(u^h) + \sigma^d(e)))}$$

L'expression précédente est réécrite afin de faire apparaître une fonction dont le développement limité est connu :

$$\begin{aligned} \sigma_{vm}(u) &= \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma^d(u^h) : \sigma^d(u^h) + 2\sigma^d(u^h) : \sigma^d(e) + \sigma^d(e) : \sigma^d(e))} \\ &= \sigma_{vm}(u^h) \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{2\sigma^d(u^h) : \sigma^d(e) + \sigma^d(e) : \sigma^d(e)}{\sigma_{vm}^2(u^h)}} \end{aligned} \quad [5.6.18]$$

Le développement limité à l'ordre 1 quand e tend vers zéro permet d'obtenir l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}\sigma_{vm}(u) &\approx \sigma_{vm}(u^h) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\sigma^d(u^h) : \sigma^d(e)}{\sigma_{vm}^2(u^h)} \right) \\ &\approx \sigma_{vm}(u^h) + \frac{3}{2} \frac{\sigma^d(u^h) : \sigma^d(e)}{\sigma_{vm}(u^h)}\end{aligned}\quad [5.6.19]$$

Finalement, une approximation de l'erreur sur la contrainte de Von Mises est déterminée :

$$\sigma_{vm}(u) - \sigma_{vm}(u^h) \approx \frac{3}{2} \frac{\sigma^d(u^h) : \sigma^d(e)}{\sigma_{vm}(u^h)} \quad [5.6.20]$$

Ainsi, pour estimer l'erreur sur la moyenne de la contrainte de Von Mises dans un domaine :

$$\mathcal{E}^Q = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} (\sigma_{vm}(u) - \sigma_{vm}(u^h)) d\Omega \quad [5.6.21]$$

la fonctionnelle suivante peut-être utilisée :

$$\mathcal{Q}^{vm}(v) = \frac{3}{2|\omega|} \int_{\omega} \frac{\sigma^d(u^h) : \sigma^d(v)}{\sigma_{vm}(u^h)} d\Omega \quad [5.6.22]$$

Comme pour la composante des contraintes sur un domaine, pour déterminer $\mathcal{Q}^{vm}(v)$, il suffit de déterminer :

$$-a(u^Q, v) = \int_{\Omega} \Sigma(u^Q) : \sigma(v) d\Omega \quad [5.6.23]$$

Ce qui correspond au cas particulier où $f^Q = 0$ et $F^Q = 0$ et où $\Sigma(u^Q)$ est un opérateur symétrique constant par élément sur ω et nul ailleurs. Le fait que dans l'équation [5.6.22] apparaisse $\sigma^d(v)$ et non $\sigma(v)$ nécessite de réécrire la fonctionnelle $\mathcal{Q}^{vm}(v)$ pour faire apparaître $\sigma(v)$:

$$\mathcal{Q}^{vm}(v) = \frac{3}{2|\omega|} \int_{\omega} \frac{\sigma^d(u^h) : (\sigma(v) - \sigma^s(v))}{\sigma_{vm}(u^h)} d\Omega \quad [5.6.24]$$

$$\mathcal{Q}^{vm}(v) = \frac{3}{2|\omega|} \int_{\omega} \frac{\sigma^d(u^h) : \sigma(v) - \sigma^d(u^h) : \sigma^s(v)}{\sigma_{vm}(u^h)} d\Omega \quad [5.6.25]$$

Enfin, la double contraction entre un tenseur déviatorique et un tenseur sphérique étant nulle, la fonctionnelle s'écrit :

$$\mathcal{Q}^{vm}(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \left(\frac{3}{2\sigma_{vm}(u^h)} \sigma^d(u^h) \right) : \sigma(v) d\Omega \quad [5.6.26]$$

avec $\Sigma(u^Q) = \frac{3}{2\sigma_{vm}(u^Q)} \sigma^d(u^Q)$ et $u^Q = u^h$.

De manière analogue au cas de la moyenne des contraintes, le problème dual local s'écrit :

$$\begin{cases} (\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl})_{,j} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_i(x) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_U \\ (\sigma_{ij}(\omega) - a_{ijkl} \Sigma_{kl}) n_j(x) &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad [5.6.27]$$

Imposer $Q^m(v)$ comme chargement du problème dual revient à imposer un champ de déformation initiale.

7 Exemples numériques

Le but de ces exemples numériques est d'évaluer le comportement des différents estimateurs pour l'estimation de l'erreur globale en norme de l'énergie et pour l'estimation de différentes quantités d'intérêt. Pour être utilisable dans un processus d'adaptation, il faut qu'un estimateur suive le même comportement que l'erreur vraie (même convergence). Schématiquement cela signifie que, dans le cas contraire, l'estimateur peut fournir une distribution d'erreur erronée. En effet, lors d'un processus adaptatif, l'estimateur peut montrer une distribution d'erreur correcte pour un maillage uniforme mais dès la première adaptation, quand il y aura coexistence d'éléments de tailles différentes, l'estimateur pourra montrer une distribution d'erreur qui ne correspondra pas à la distribution de l'erreur vraie car l'estimation d'erreur dépend alors de la taille des éléments

Pour mener cette étude, le problème donné par la figure 5.7.1 est résolu sur une succession de maillages raffinés uniformément avec HOMARD. L'erreur vraie est calculée à partir d'une solution *overkill* obtenue sur un maillage comportant près de 35000 éléments et de la solution éléments finis projetée sur le même maillage. Les dimensions de la structures sont de 10 pour le grand coté et de 2,5 pour le petit coté. L'effort imposé est de 200 N, les caractéristiques matériaux sont de 200000 Pa pour le module d'Young et de 0,3 pour le coefficient de Poisson.

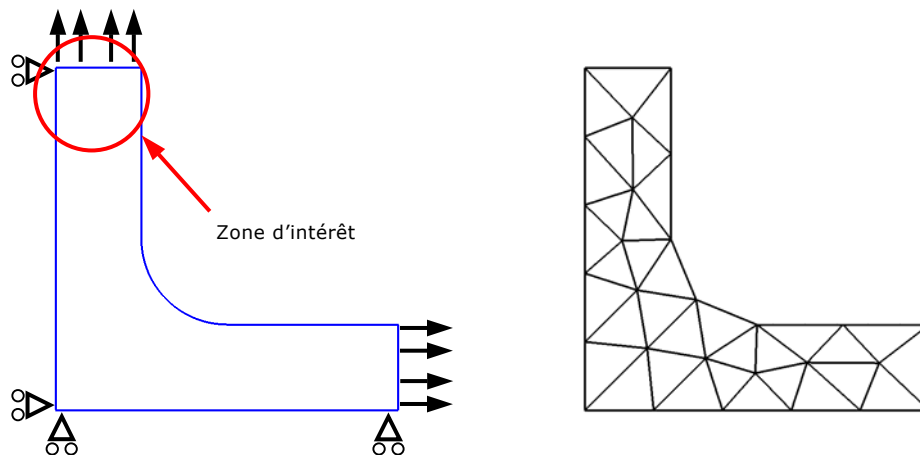


Figure 5.7.1 : Géométrie et maillage initial (34 éléments).

7.1 Estimateurs basés sur les résidus

7.1.1 Maillages triangles

Les premiers exemples numériques illustrent le comportement des estimateurs basés sur les résidus. La figure 5.7.2 montre le comportement de l'estimateur d'erreur globale en

norme de l'énergie. La convergence asymptotique obtenue pour l'estimateur est la même que pour l'erreur vraie et correspond à la théorie. L'indice d'efficacité converge asymptotiquement vers l'unité. Ces deux courbes montrent un très bon comportement de l'estimateur malgré la présence de la constante dont il a été question dans la première partie qui ne permet pas d'avoir une réelle estimation de l'erreur mais une indication.

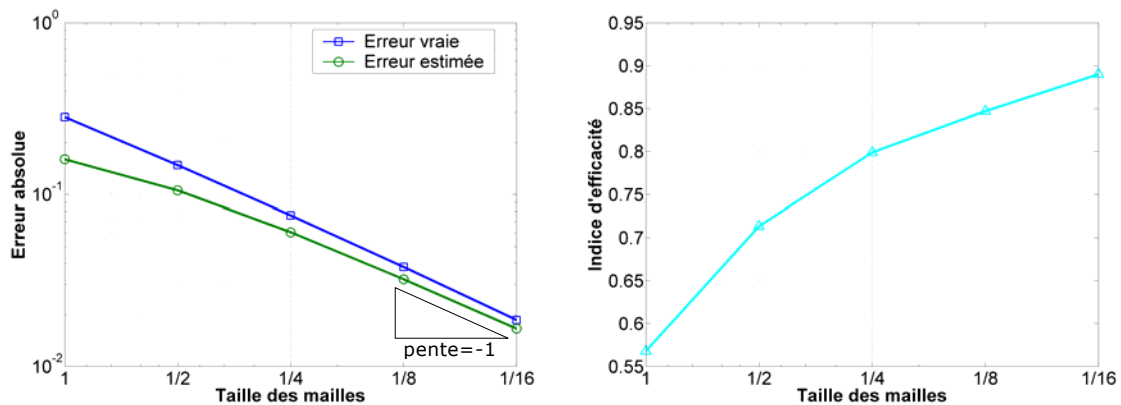


Figure 5.7.2 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale en norme de l'énergie estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus.

Les courbes suivantes présentent le comportement de l'estimateur d'erreur en quantité d'intérêt qui a été développé (noté erreur estimée) mais également celui d'un estimateur basé sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz (notée erreur estimée C-S).

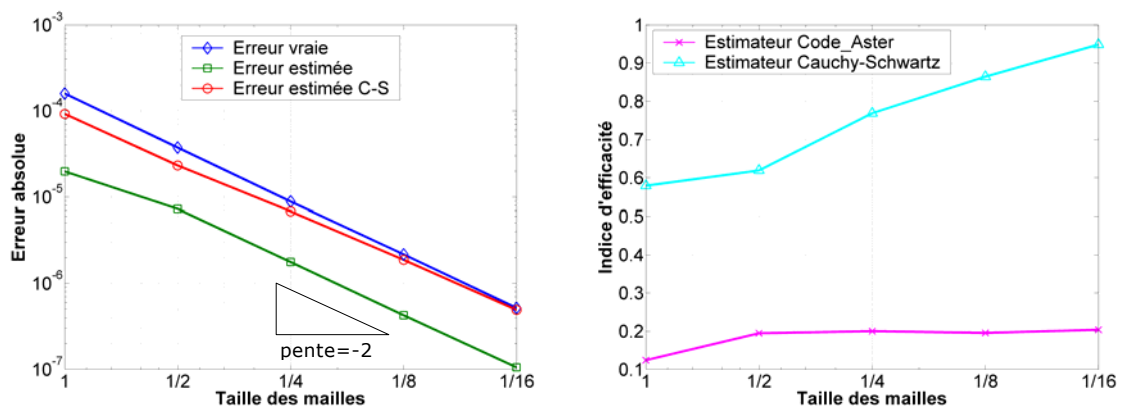


Figure 5.7.3 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon x estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus.

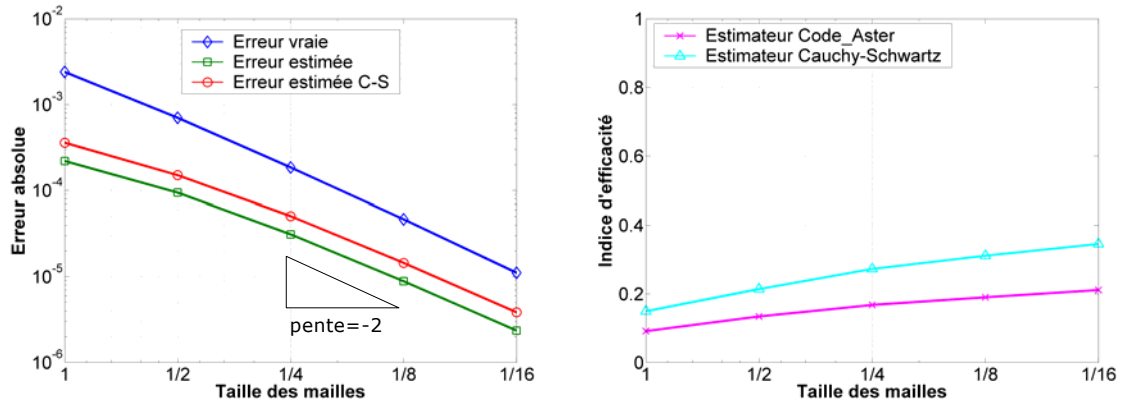


Figure 5.7.4 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon y estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus.

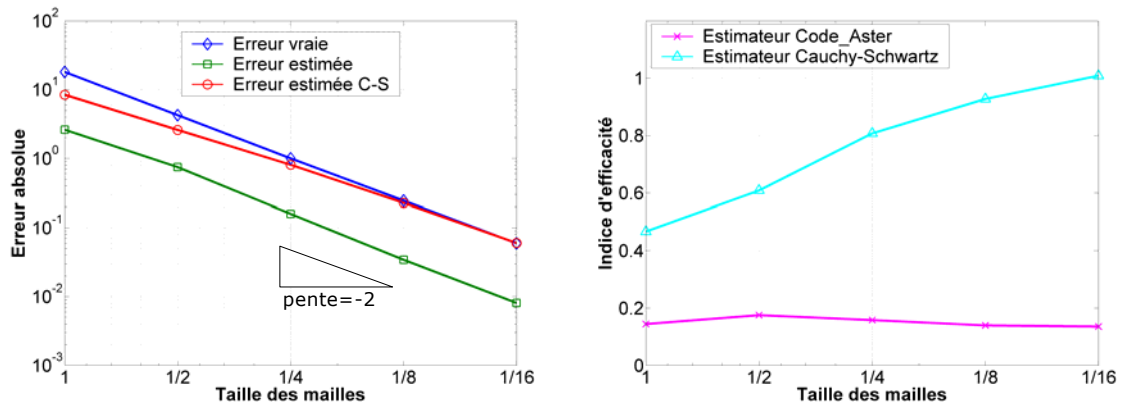


Figure 5.7.5 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xx estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus.

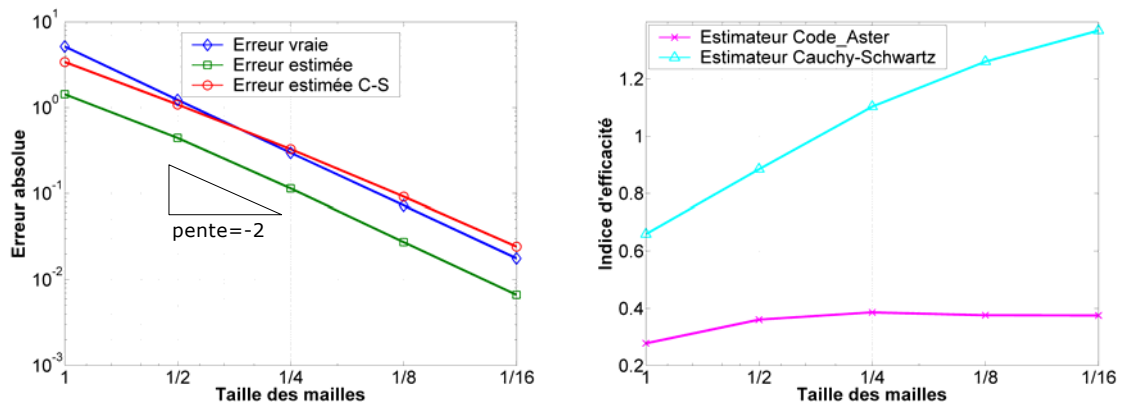


Figure 5.7.6 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte yy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus.

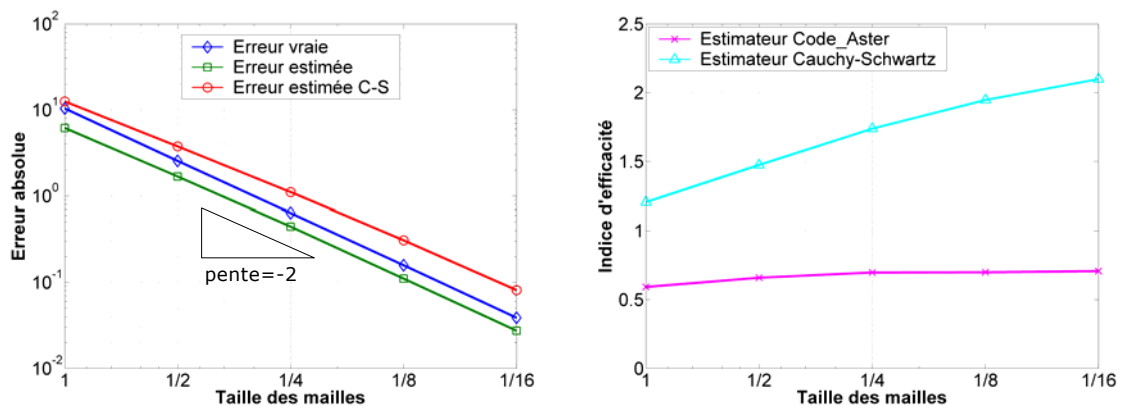


Figure 5.7.7 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus.

Pour les différentes quantité d'intérêt proposées, l'estimateur en quantité d'intérêt basé sur les résidus présente un très bon comportement en terme de convergence. Il converge comme l'erreur vraie (pour toutes les quantités d'intérêt) en $o(h^2)$ contrairement à l'estimateur basé sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz dont la convergence semble plus faible que l'erreur vraie. Outre la surestimation, ce dernier estimateur présente des indices d'efficacité instables, alors que les indices d'efficacité pour l'estimateur développé sont très stables même s'ils ne sont pas toujours proches de l'unité.

Une dernière application permet de valider l'estimation de l'erreur sur une quantité non linéaire, la contrainte de Von Mises. Comme nous l'avons montré précédemment, pour être utilisable comme chargement pour le problème dual, cette quantité doit être linéarisée. Les courbes suivantes présentent les résultats (figure 5.7.8). Elles permettent de conclure à un bon comportement de l'estimateur.

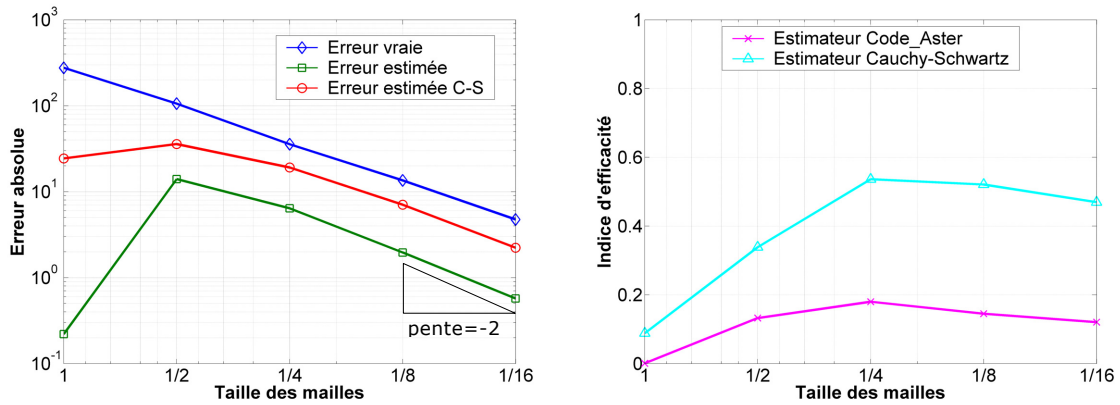


Figure 5.7.8 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte de Von Mises estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage à 34 éléments.

7.1.2 Maillages quadrangles

Dans *Code_Aster*, les estimateurs en quantité d'intérêt sont développés également pour les éléments quadrangles. Un exemple est donné pour l'estimateur en quantité d'intérêt basé sur les résidus. Le maillage utilisé est présenté par la figure 5.7.9.

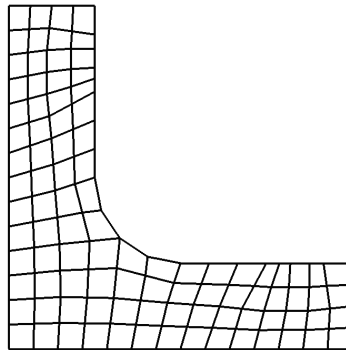


Figure 5.7.9 : Maillage quadrangle initial (96 éléments).

La figure suivante présente la convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale estimée ainsi que l'indice d'efficacité de l'estimateur en norme de l'énergie. L'erreur estimée converge comme l'erreur vraie en $o(h)$, en accord avec la théorie. Etant donné les résultats fournis pour l'estimateur en norme de l'énergie, le comportement pour les différentes quantités d'intérêt est le même que celui exhibé précédemment. De plus ce type d'élément n'est pas particulièrement bien adapté pour l'adaptation de maillage. C'est pourquoi nous ne donnerons pas davantage d'exemples pour ce type d'éléments.

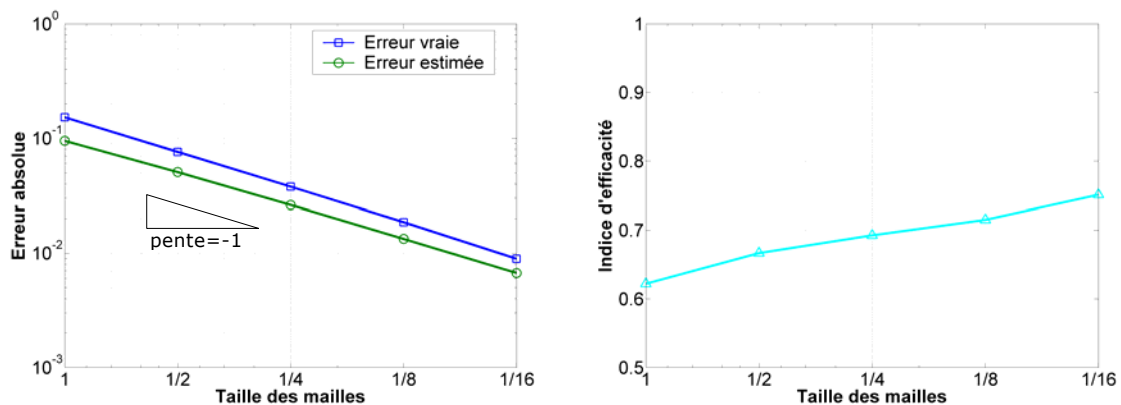


Figure 5.7.10 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale en norme de l'énergie estimée et indice d'efficacité pour des éléments quadrangulaires.

7.1.3 Maillages quadratiques

Tous les éléments 2D et 3D existent en linéaire et en quadratique dans *Code_Aster*. L'exemple suivant présente le cas d'éléments triangulaires quadratiques. Le maillage est le même que pour les exemples précédents à la différence que les fonctions d'interpolation sont quadratiques. La figure suivante montre la convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale estimée. Les deux erreurs convergent en $o(h^{1.5})$ alors que selon la théorie, elles devraient converger en $o(h^2)$ avec les éléments quadratiques. Ce désaccord avec la théorie se manifeste de la même manière (pente de -1,5) mais a deux origines différentes.

En ce qui concerne l'erreur vraie, le défaut provient du raffinement du maillage dans le congé. En effet dans le congé, à chaque raffinement, l'option « suivi de frontière » d'Homard est activée. Pour des maillages linéaires, elle permet, à partir d'un maillage de bord très fin, de positionner les nœuds des nouveaux éléments de manière à ce que le nouveau maillage décrive au mieux la géométrie. En revanche, pour des maillages quadratiques, seuls les nouveaux nœuds sommets sont placés sur la frontière réelle tandis que les nœuds milieux sont placés au milieu des arêtes (et non sur la frontière réelle). Ceci produit donc une erreur qui fait chuter la vitesse de convergence de l'erreur de 2 à 1,5.

En ce qui concerne l'erreur estimée le défaut de convergence a une toute autre origine qui est la technique de projection utilisée pour faire passer la solution du maillage courant vers le maillage de la solution de référence. Bien que la solution éléments finis converge en $o(h^2)$, la technique de projection dégrade la convergence en $o(h^{1.5})$. En effet cette technique consiste à se ramener à des triangles linéaires. A cause de l'interpolation linéaire l'erreur converge alors en $o(h^{1.5})$ (Strang & Fix, 1976).

Ainsi ceci ne remet pas en cause la qualité de notre estimateur car ce sont les moyens d'exhiber le comportement qui sont limités. Pour cette raison, nous ne donnerons pas d'avantage d'exemple pour les éléments quadratiques car il nous est impossible, dans ce cas, de montrer le bon comportement de l'estimateur pour les différentes quantités d'intérêt.

Un exemple dont la géométrie possède une frontière polygonale aurait sûrement permis d'exhiber des résultats plus démonstratifs, en mettant de côté les problèmes de projection dus à la courbure.

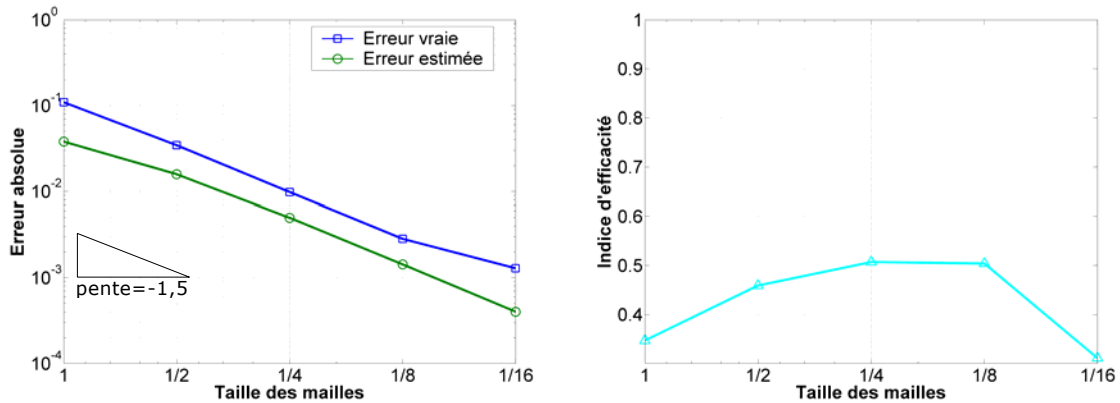


Figure 5.7.11 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale estimée et indice d'efficacité pour des éléments triangulaires quadratiques.

7.1.4 Maillages 3D

Quelques exemples sont maintenant donnés pour des maillages 3D. Le maillage utilisé (figure 5.7.12) est constitué d'éléments tétraédriques linéaires. Les dimensions sont les mêmes que pour le cas 2D, la côte valant l'unité. Les figures suivantes présentent les résultats pour l'estimateur d'erreur globale en norme de l'énergie et pour l'estimateur d'erreur en quantité d'intérêt pour différentes quantités.

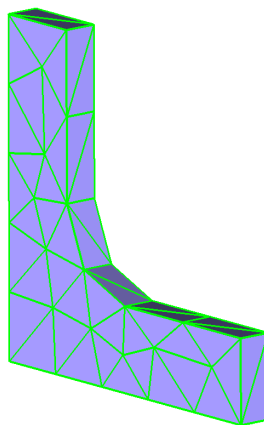


Figure 5.7.12 : Maillage initial (223 éléments).

Globalement, le comportement des estimateurs semble être moins bon que pour des maillages 2D. En réalité il est difficile de conclure seulement avec ces courbes. En effet, la

courbe de convergence de l'estimateur en norme de l'énergie semble, sur le dernier segment, commencer à prendre une pente de -1 (en accord avec la théorie). Ceci indique donc que pour obtenir des courbes avec une pente de -1 il faut sûrement aller plus loin en terme de raffinement de maillage. Pour ces différents exemples, la maillage n'a pu être raffiné que 2 fois compte tenu des performances de la machine sur laquelle les calculs ont été effectués. Pour les mêmes raisons de performances informatiques, la solution de référence peut ne pas être très bonne car elle est obtenue sur un maillage qui n'est pas suffisamment fin.

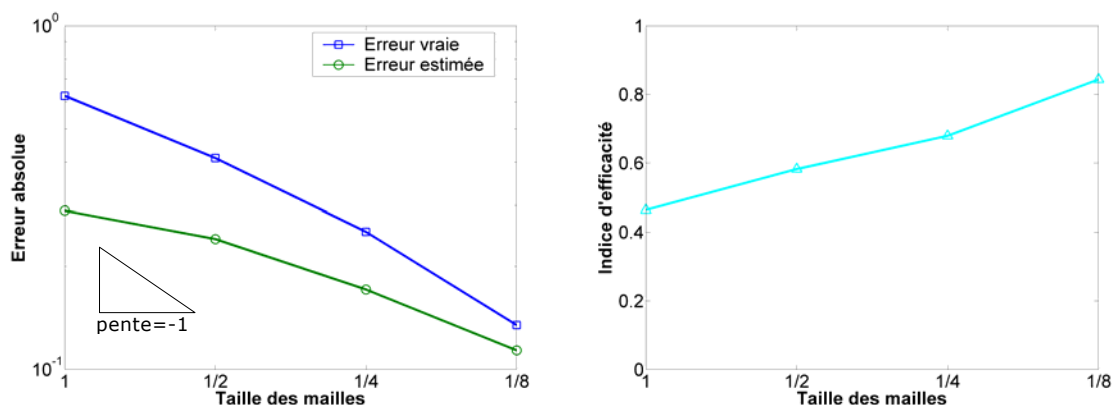


Figure 5.7.13 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

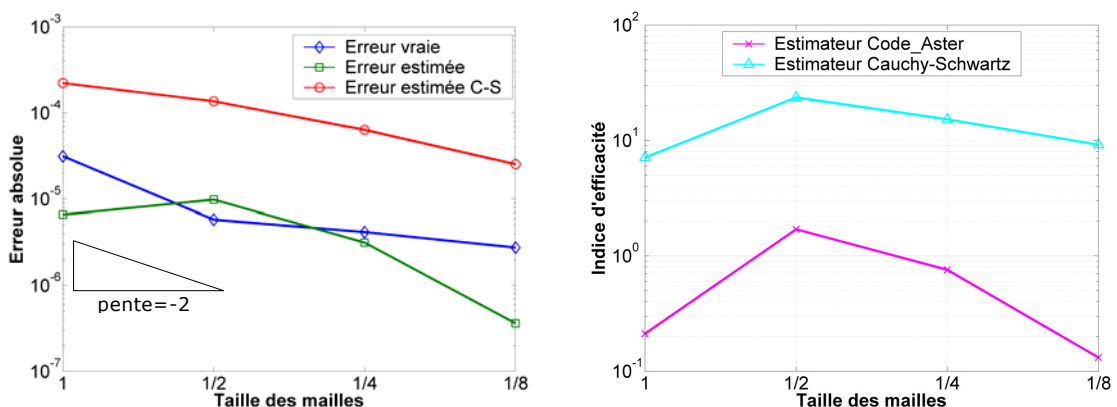


Figure 5.7.14 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon x estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

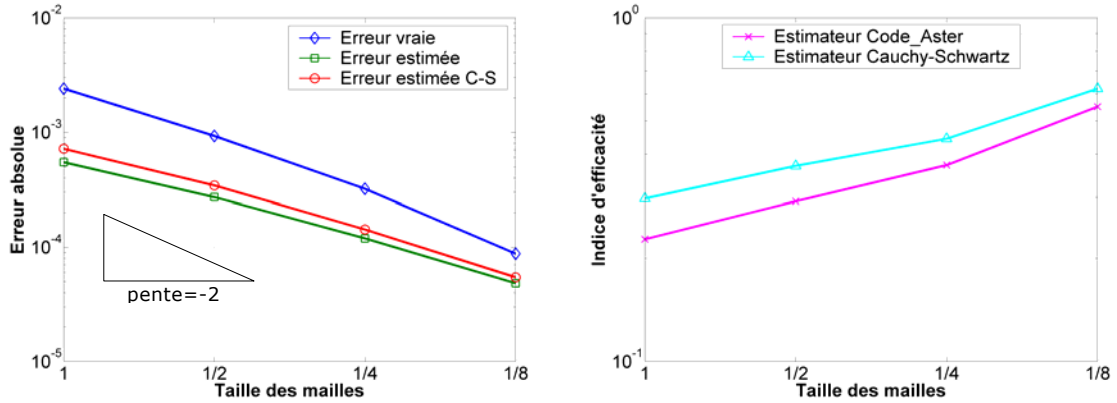


Figure 5.7.15 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon y estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

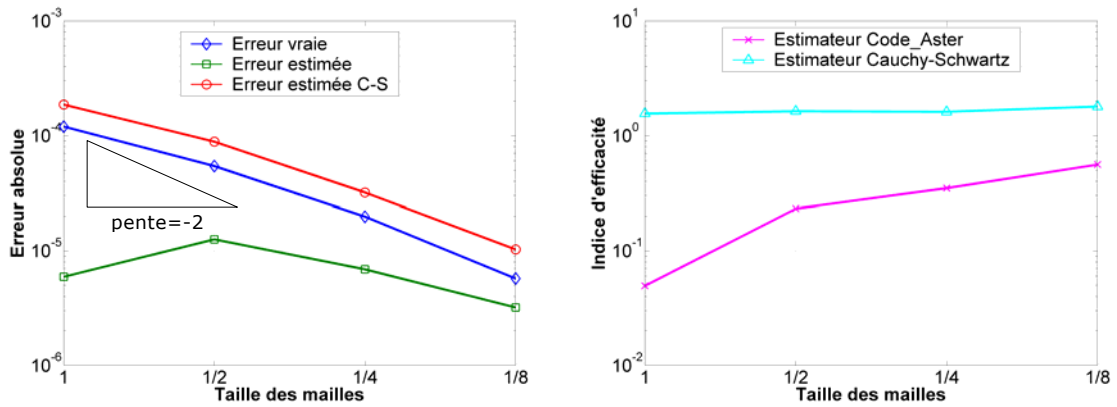


Figure 5.7.16 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon z estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

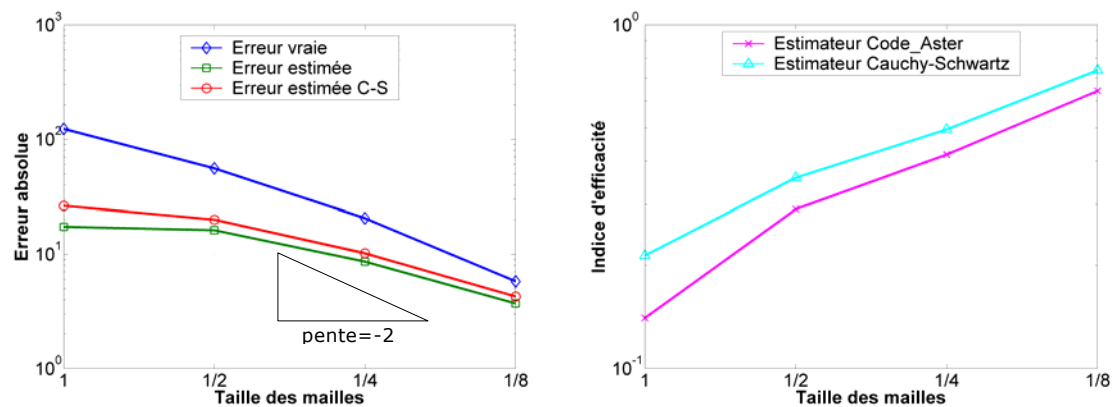


Figure 5.7.17 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xx estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

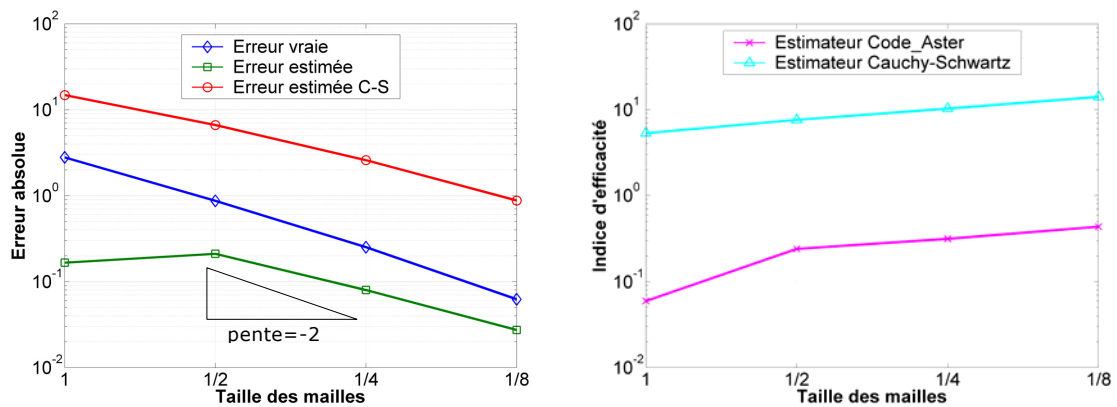


Figure 5.7.18 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte yy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

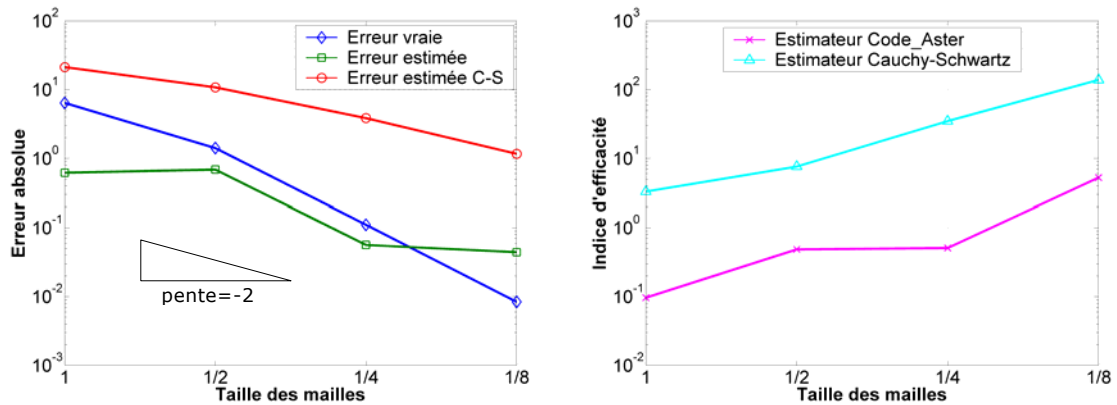


Figure 5.7.19 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte zz estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

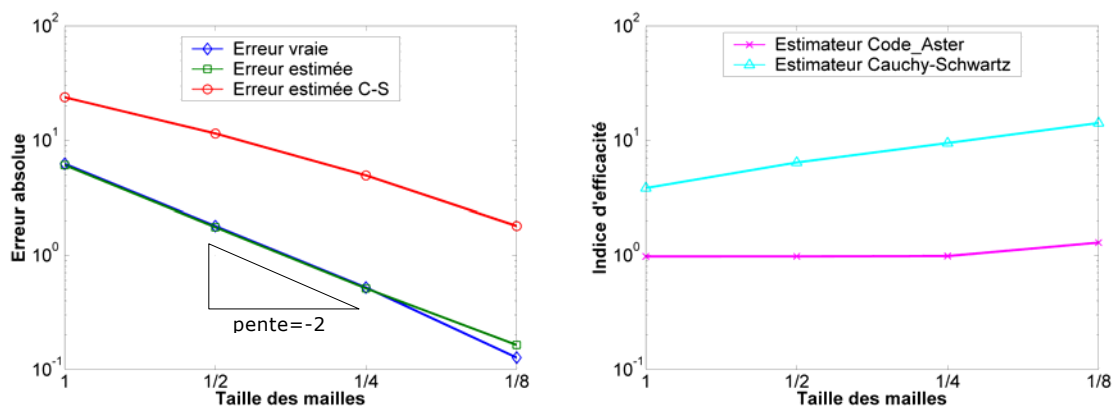


Figure 5.7.20 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

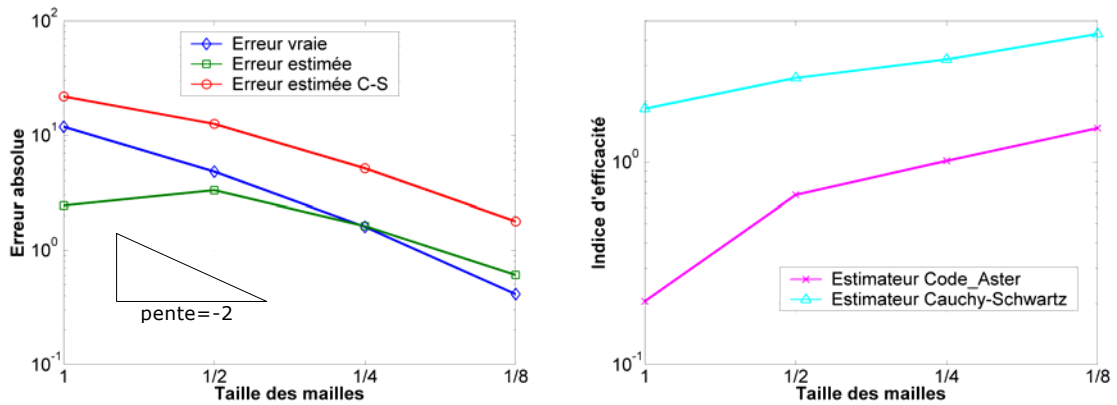


Figure 5.7.21 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xz estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

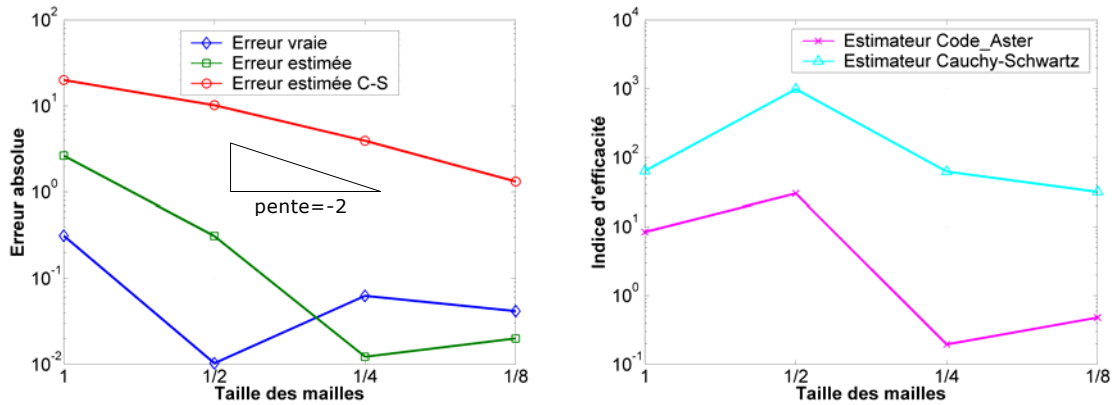


Figure 5.7.22 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte yz estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les résidus pour un maillage 3D.

7.2 Estimateurs basés sur les bases hiérarchiques

Quelques résultats sont montrés pour les estimateurs basés sur les bases hiérarchiques : pour l'estimation de l'erreur globale en norme de l'énergie et pour l'estimation de l'erreur en quantité d'intérêt. Le maillage utilisé est celui de la figure 5.7.1, soit des éléments triangulaires linéaires.

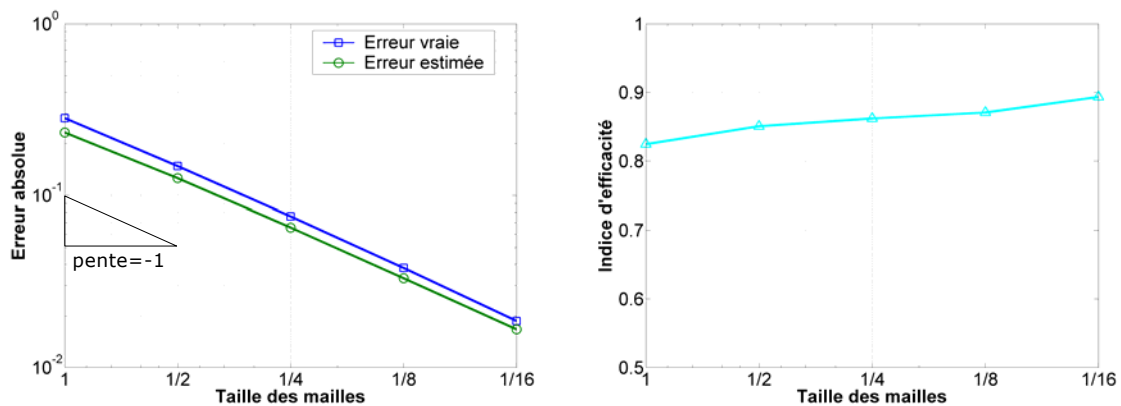


Figure 5.7.23 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les bases hiérarchiques.

L'erreur estimée suit la même convergence que l'erreur vraie en $o(h)$. L'indice d'efficacité est très bon même s'il montre que l'erreur estimée sous-estime l'erreur vraie. Nous montrons ensuite des résultats pour les quantités d'intérêt liées au déplacement et à la contrainte.

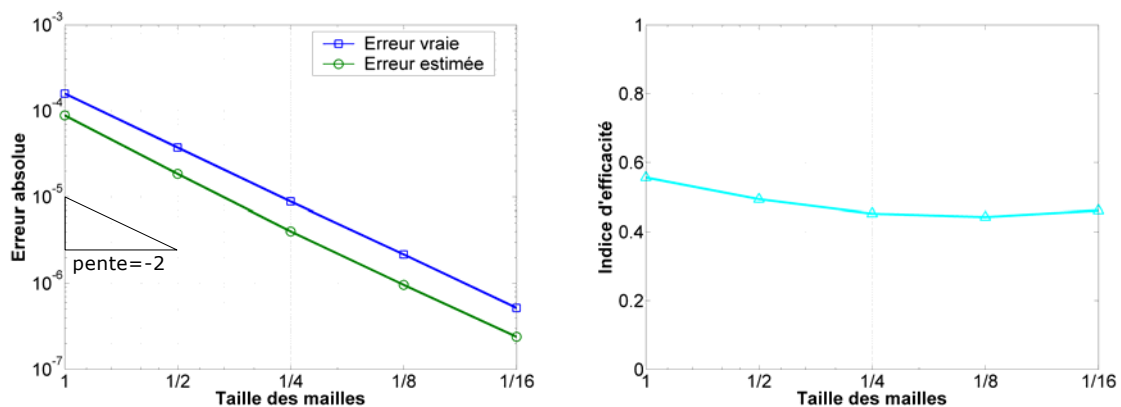


Figure 5.7.24 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon x estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les bases hiérarchiques.

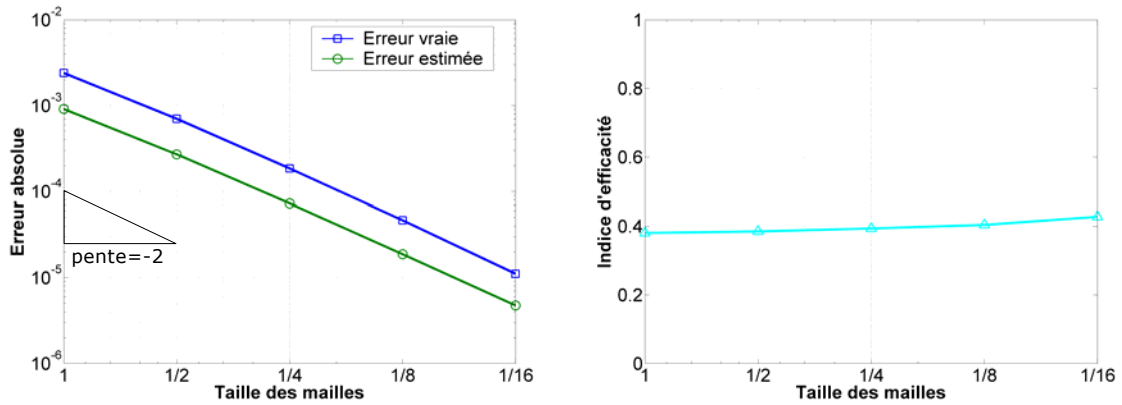


Figure 5.7.25 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon y estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les bases hiérarchiques.

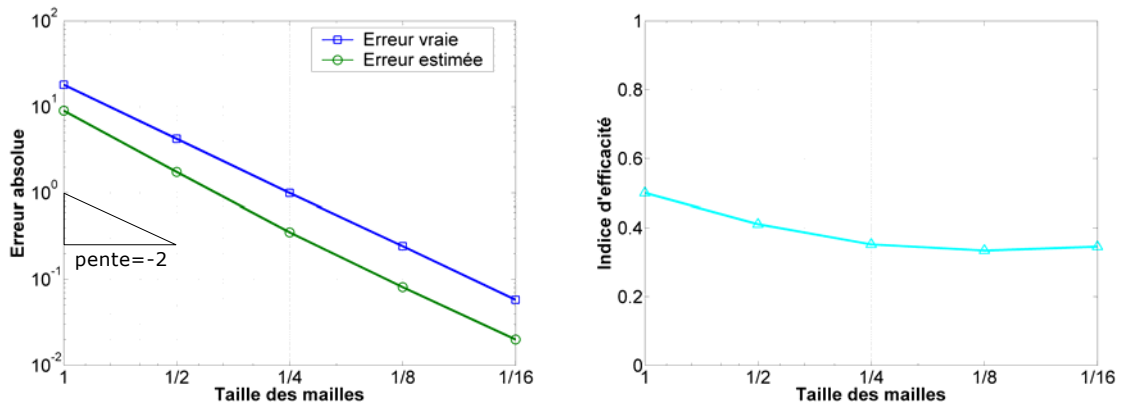


Figure 5.7.26 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xx estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les bases hiérarchiques.

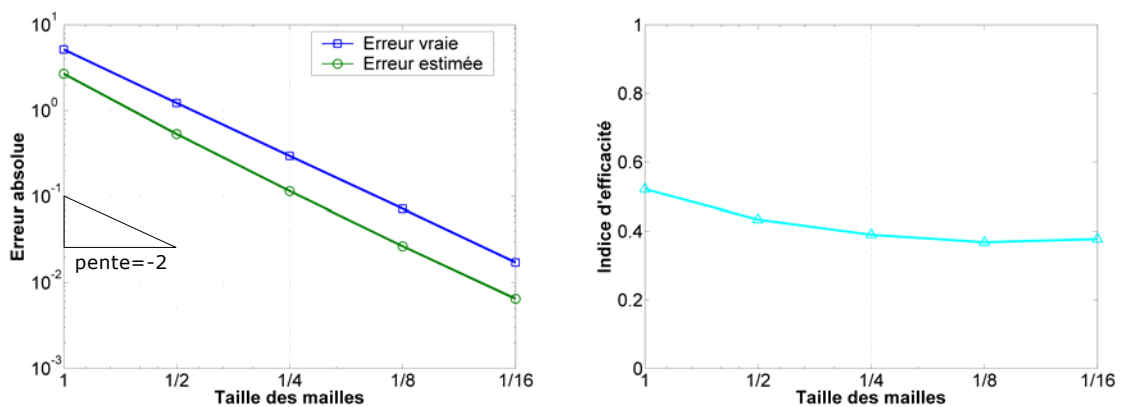


Figure 5.7.27 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte yy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les bases hiérarchiques.

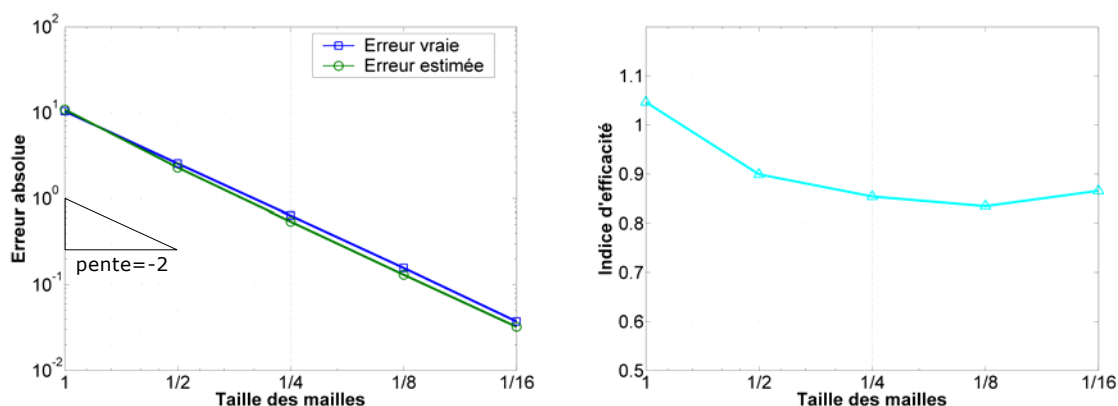


Figure 5.7.28 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur basé sur les bases hiérarchiques.

Les courbes précédentes montrent un excellent comportement de l'estimateur basé sur les bases hiérarchiques. Même si les indices d'efficacité sont un peu éloignés de l'unité, ils ont le mérite de très peu varier. Cet estimateur peut être utilisé sans problème dans un processus adaptatif. Toutefois il faut noter que cet estimateur a un coût de calcul non négligeable.

7.3 Estimateurs basés sur le lissage de champs

Pour finir cette série d'exemple, des résultats sont donnés pour les estimateurs de type lissage de champs : lissage global (noté ZZ1) et *superconvergent patch recovery* (noté ZZ2). Le problème est toujours le même mais le maillage initial est plus fin, il comporte 86 éléments. Les exemples donnés sont l'estimation de l'erreur globale en norme de l'énergie, l'estimation de l'erreur sur le déplacement selon y et l'estimation de l'erreur sur la contrainte xy dans la zone d'intérêt.

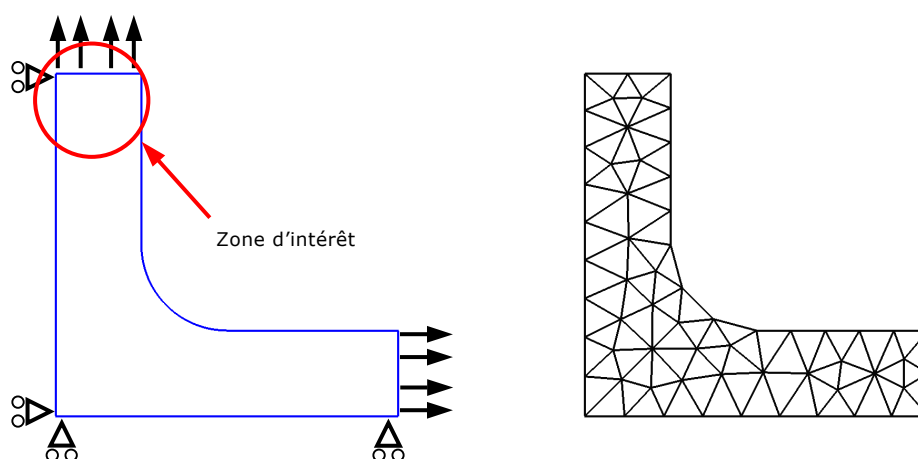


Figure 5.7.29 : Géométrie et maillage initial (86 éléments).

Comme le montrent les figures suivantes, ce type d'estimateur donne de très bons résultats. La convergence est la même que pour l'erreur vraie et les indices d'efficacité sont très stables contrairement aux indices d'efficacité de l'erreur basée sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz qui divergent dans certains cas. Bien que donnant de bons résultats, ces estimateurs ne seront pas utilisés dans la suite car ils ne sont développés dans *Code_Aster* que pour les maillages

2D et que les estimateurs en résidus sont jugés plus fiables que ces versions des estimateurs ZZ, basés sur le lissage de champ.

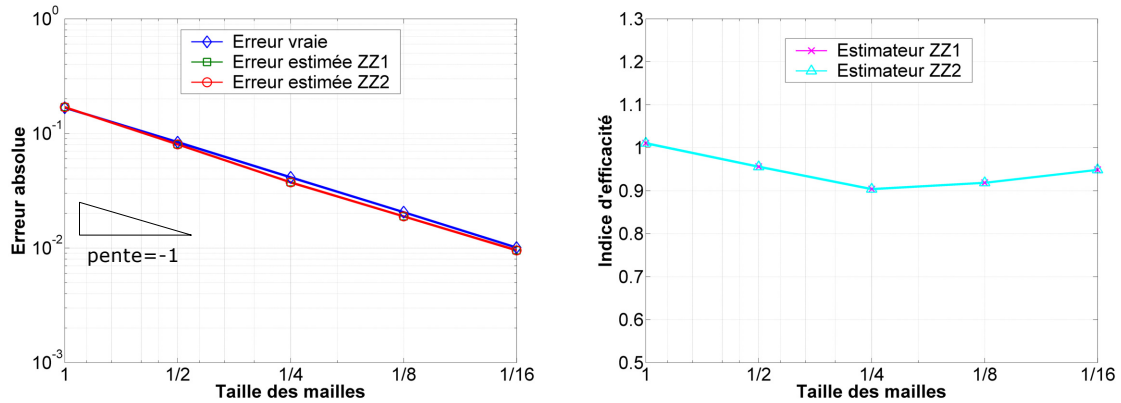


Figure 5.7.30 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur globale en norme de l'énergie estimée et indice d'efficacité pour les estimateurs basé sur le lissage de champs.

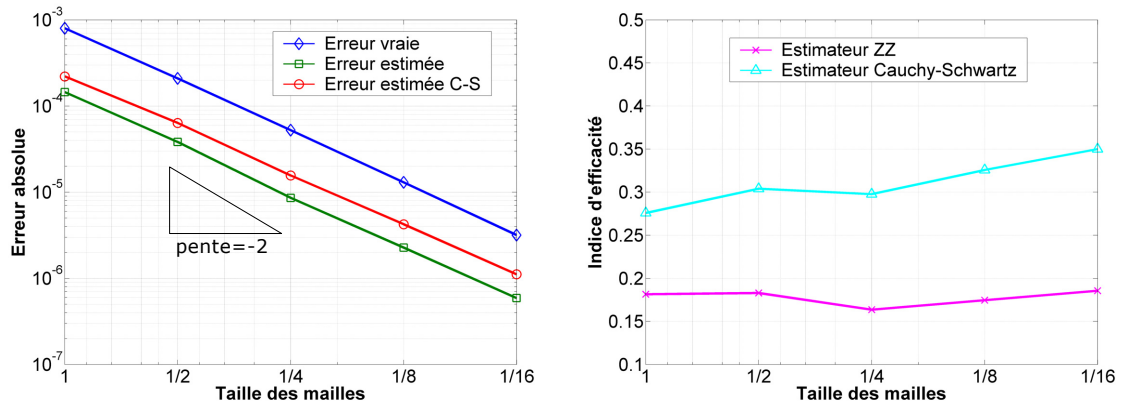


Figure 5.7.31 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon y estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur de type ZZ1.

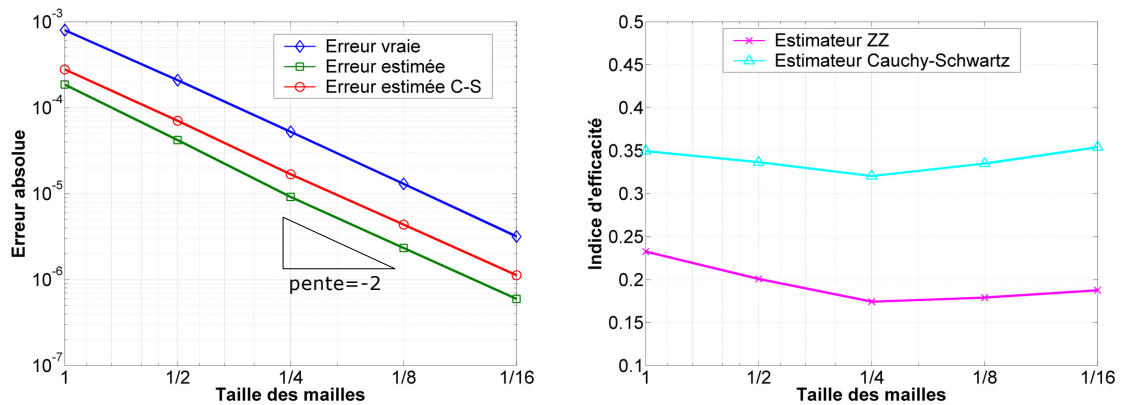


Figure 5.7.32 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur le déplacement selon y estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur de type ZZ2.

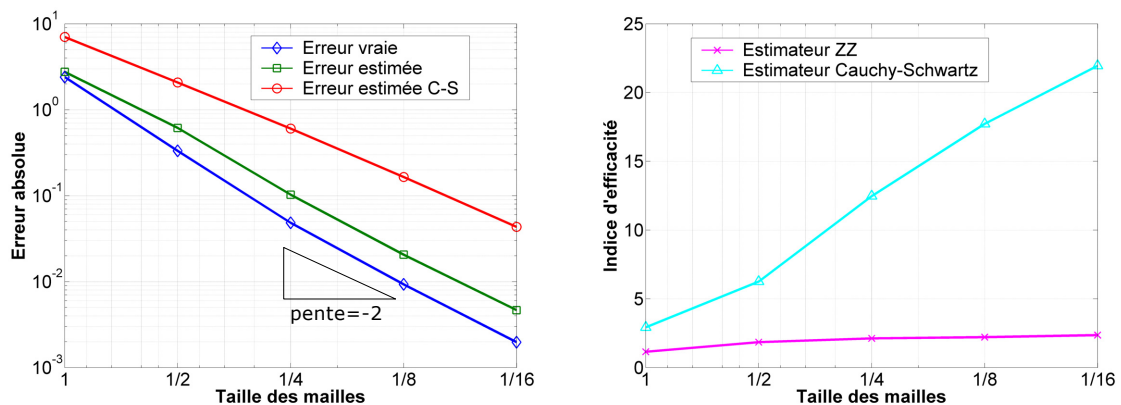


Figure 5.7.33 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur de type ZZ1.

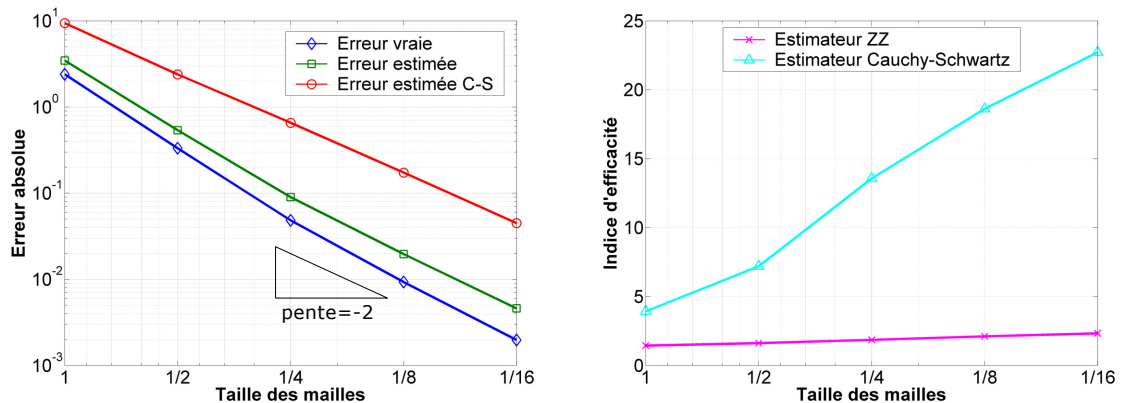


Figure 5.7.34 : Convergence de l'erreur vraie et de l'erreur sur la contrainte xy estimée et indice d'efficacité pour l'estimateur de type ZZ2.

8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé différentes méthodes pour estimer l'erreur en quantité d'intérêt. La première est basée sur un estimateur en norme de l'énergie de type résidus explicites. Elle est implémentée dans *Code_Aster* pour tout les types d'éléments 2D et 3D. Deux autres méthodes ont été présentées et programmées à des fins de tests. Il s'agit d'une méthode basée sur le lissage de champs et une méthode basée sur les bases hiérarchiques. Il ressort que ces estimateurs s'apparentent d'avantage à des indicateurs d'erreur dans la mesure où ils ne permettent de connaître l'erreur qu'à une constante près.

Un des points importants de l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt par les méthodes que nous avons présentées est d'exprimer la quantité d'intérêt en terme de chargement pour le problème dual. Une liste assez exhaustive de quantités d'intérêt et de chargements dérivés pour le problème dual a été établie.

L’estimation de l’erreur pour les différentes quantités d’intérêt a été vérifiée de manière assez exhaustive par une série d’exemples numériques. Ces exemples ont permis d’étudier et de vérifier le comportement de l’erreur estimée. Il a été montré notamment que l’erreur estimée converge à la même vitesse que l’erreur vraie. Ces résultats montrent ainsi que nos indicateurs sont utilisables dans un processus adaptatif.

L’ensemble de ce chapitre permet donc de répondre au deuxième objectif partiel de la thèse qui était de développer et d’implémenter une méthode d’estimation d’erreur dans *Code_Aster* permettant de nourrir un processus d’adaptation de maillage.

Enfin, les explications données concernant les estimateurs basés sur le lissage de champs et les estimateurs hiérarchiques éliminent leur usage dans la suite de la thèse. De la même manière, l’estimateur en quantité d’intérêt déduit de l’inégalité de Cauchy-Schwartz (noté C-S) ne sera pas utilisé dans la suite compte tenu de son comportement insatisfaisant.

Chapitre 6

Une quantité d'intérêt pour la mécanique de la rupture

1	Eléments de mécanique de la rupture
1.1	Cadre de la mécanique de la rupture
1.2	Modes de sollicitation
1.3	Facteurs d'intensité de contraintes
2	Une méthode d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes
3	Apport des éléments de Barsoum
4	De la quantité mécanique au chargement du problème dual
5	Applications numériques
5.1	Plaque en traction avec fissure droite avec éléments quadratiques
5.2	Plaque en traction avec fissure droite avec éléments de Barsoum
5.3	Plaque en cisaillement avec fissure droite avec éléments quadratiques
5.4	Plaque en cisaillement avec fissure droite avec éléments de Barsoum
5.5	Plaque en traction avec fissure inclinée avec éléments quadratiques
5.6	Plaque en traction avec fissure inclinée avec éléments de Barsoum
6	Conclusion

1 Eléments de mécanique de la rupture

1.1 Cadre de la mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture étudie principalement le comportement des fissures existantes au sein du matériau en déterminant leur évolution en fonction des conditions aux limites et des caractéristiques mécaniques du matériau. Lorsqu'il y a présence de déformations plastiques importantes, le matériau présente une rupture dite rupture ductile. Au contraire, en l'absence de déformation plastique appréciable, le matériau présente une rupture dite rupture fragile. Dans la suite, ne sont présentés que quelques éléments de rupture fragile pour des matériaux élastiques linéaires (mécanique linéaire de la rupture).

1.2 Modes de sollicitations

Dans un matériau, les fissures peuvent être considérées comme des surfaces de discontinuité du champ de déplacement. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

- le mode I est un mode de traction, appelé aussi mode d'ouverture ;
- le mode II est un mode de cisaillement, ce mode est aussi appelé mode de glissement ;
- le mode III est également un mode de cisaillement, appelé aussi mode de déchirure.

Un mode mixte qualifie l'existence simultanée de plusieurs modes.

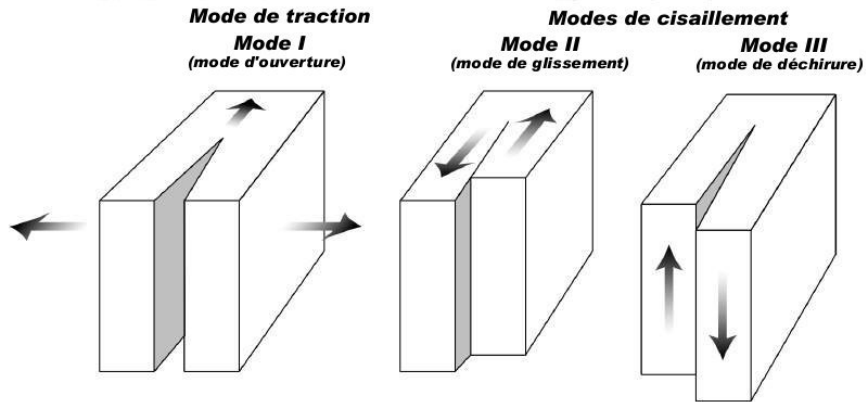


Figure 6.1.1 : Les différents modes de sollicitations d'une fissure.

1.3 Facteurs d'intensité de contraintes

Dans la zone singulière, le champ de contraintes présente une singularité en $r^{-1/2}$ à la pointe de la fissure. L'intensité de la singularité est caractérisée par des paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes, notés K_I , K_{II} et K_{III} correspondants à chacun des modes de sollicitation de la fissure. Irwin (Irwin, 1957) a montré que les déplacements et les contraintes dans la zone singulière peuvent s'exprimer en fonction des facteurs d'intensité de contraintes.

Les facteurs d'intensité de contraintes ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs d'un solide donné et de la géométrie de la fissure. Ils sont proportionnels à la discontinuité des déplacements des lèvres de la fissure. Pour les milieux fissurés, ils sont définis par :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8C} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_1] \right) \quad [6.1.1]$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8C} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_2] \right) \quad [6.1.2]$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_3] \right) \quad [6.1.3]$$

avec $C=1$ en contraintes planes et $C=1-\nu^2$ en déformations planes et en 3D ; où r est la distance à la pointe de la fissure, E est le module d'Young, ν est le coefficient de Poisson et $[u_i]$ sont les sauts de déplacements des lèvres de la fissure correspondant à chacun des trois modes.

Plusieurs ouvrages tels que celui de Murakami (Murakami, 1987) donnent l'expression des facteurs d'intensité de contraintes pour des géométries et chargements variés. Pour des structures réelles et complexes, les solutions exactes sont difficiles à obtenir. Les problèmes sont alors souvent résolus en employant des modélisations numériques. Ainsi, il existe dans la littérature des méthodes numériques pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte.

2 Une méthode d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes

Une méthode de calcul de K_I , K_{II} et K_{III} en 2D (plan et axisymétrique) et 3D est présentée ; elle est basée sur l'extrapolation des sauts de déplacements sur les lèvres de la fissure. Cette méthode n'est applicable qu'au cas des fissures planes, dans des matériaux homogènes et isotropes.

Les facteurs d'intensité de contraintes sont identifiés à partir du saut des déplacements $[U]$ par une méthode des moindres carrés sur un segment de longueur r_{max} . Ceci s'exprime par le problème de minimisation suivant :

$$K \text{ minimise } F(k) = \frac{1}{2} \int_0^{r_{max}} (C[U(r)] - k\sqrt{r})^2 dr \quad [6.2.1]$$

Pour résoudre ce problème, une valeur de k est cherchée telle que la dérivée de F s'annule :

$$F'(K) = \int_0^{r_{max}} \sqrt{r} (K\sqrt{r} - C[U(r)]) dr = 0 \quad [6.2.3]$$

La séparation de l'intégrale donne :

$$\int_0^{r_{max}} r K dr = \int_0^{r_{max}} \sqrt{r} C[U(r)] dr \quad [6.2.4]$$

$$K \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{r_{max}} = \int_0^{r_{max}} \sqrt{r} C[U(r)] dr \quad [6.2.5]$$

La formule explicite pour calculer K se déduit directement :

$$K = \frac{2C}{r_{max}^2} \int_0^{r_{max}} \sqrt{r} [U(r)] dr \quad [6.2.6]$$

En réalisant l'intégration par une méthode des trapèzes, la relation précédente devient :

$$K = \frac{C}{r_{max}^2} \sum_{i=1}^N ([U]_{i-1} \sqrt{r_{i-1}} + [U]_i \sqrt{r_i}) (r_i - r_{i-1}) \quad [6.2.7]$$

où N est le nombre de nœuds sur le segment $[0, r_{max}]$. On note que K est une forme linéaire du champ de déplacement pour un r_{max} fixé, typiquement cela correspond à 4 ou 5 éléments.

Cette méthode n'est pas la plus précise par rapport aux autres méthodes disponibles dans *Code_Aster* telle que la méthode G-théta (Code_Aster, 2007) qui consiste à utiliser une intégrale de volume pour calculer le taux de restitution de l'énergie G de laquelle on peut

déduire K . Mais elle permet cependant d'obtenir facilement des valeurs approchées des facteurs d'intensité des contraintes et de déduire simplement la quantité d'intérêt. La précision des résultats est nettement améliorée si les éléments touchant la pointe de fissure (éléments quadratiques) ont des nœuds milieux situés au quart des arêtes (éléments de Barsoum ou *quarter-point elements*).

3 Apport des éléments de Barsoum

Les éléments finis classiques ne tiennent pas compte du problème de la singularité dans la zone qui est au voisinage de la pointe de fissure. Différentes techniques ont été proposées pour prendre compte de cette difficulté. La technique la plus utilisée, permettant d'avoir de bons résultats sans utiliser de maillages fortement raffinés, est l'utilisation d'éléments singuliers connus sous le nom de *quarter-point elements* ou éléments de Barsoum. Proposés simultanément par Henshell et Shaw (Henshell & Shaw, 1975) et par Barsoum (Barsoum, 1976, 1977), ce sont des éléments quadratiques dont les nœuds milieux des arêtes correspondant à la pointe de fissure sont déplacés au quart de la longueur. L'élément proposé par Henshell et Shaw (Figure 6.3.1a) est un élément quadrilatère alors que celui proposé par Barsoum (Figure 6.3.1b) est un élément quadrilatère dégénéré où une arête est « collapsée » en pointe de fissure. Ceci impose donc aux nœuds 1, 4 et 8 de se déplacer ensemble.

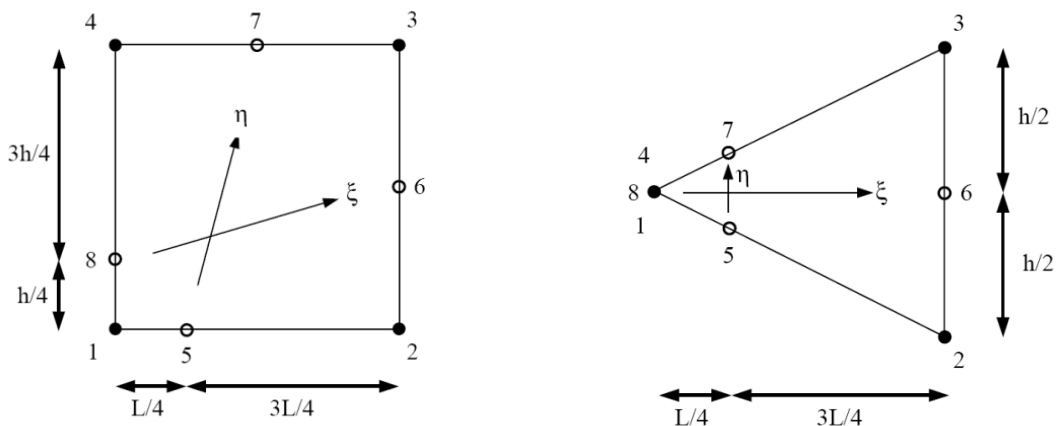


Figure 6.3.1a et 6.3.1b : Quadrilatère (à droite) et quadrilatère dégénéré (à gauche) dont les nœuds milieux sont rapportés au quart.

Le déplacement au quart des nœuds milieux introduit une singularité dans la transformation entre l'espace des coordonnées paramétriques de l'élément et celui des coordonnées cartésiennes et permet de représenter les champs de déplacement singulier d'ordre $r^{1/2}$.

L'effet du déplacement des nœuds milieux peut être illustré par un exemple unidimensionnel dont l'algèbre est plus simple que pour des cas bi ou tridimensionnel. Un élément quadratique 1D est utilisé ; le rayon r est introduit, distance à la pointe de fissure et le coefficient α , paramètre contrôlant la position du nœud milieu.

Le déplacement en chaque point de l'élément est obtenu par interpolation des déplacements nodaux u_i en utilisant les fonctions de forme quadratiques N_i :

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) u_i = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) u_1 + (1-\xi^2) u_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi) u_3 \quad [6.3.1]$$



Figure 6.3.2a et 6.3.2b : Éléments quadratiques 1D dans l'espace paramétrique (à gauche) et dans l'espace cartésien (à droite).

De la même manière, en utilisant une formulation isoparamétrique, les coordonnées de l'éléments peuvent être interpolées :

$$r = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) r_i = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) r_1 + (1-\xi^2) r_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi) r_3 \quad [6.3.2]$$

Soit :

$$r = \alpha l + \frac{1}{2}l\xi + l\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\xi^2 \quad [6.3.3]$$

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas où le nœud milieu est au centre de l'arête. Dans ce cas, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\xi = \frac{2r}{l} - 1$ et donc l'expression du déplacement est :

$$u = u_1 + (-3u_1 + 4u_2 - u_3)\frac{r}{l} + 2(u_1 - 2u_2 + u_3)\frac{r^2}{l^2} \quad [6.3.4]$$

Et les déformations sont données par :

$$\varepsilon = \frac{du}{dr} = (-3u_1 + 4u_2 - u_3)\frac{1}{l} + 4(u_1 - 2u_2 + u_3)\frac{r}{l^2} \quad [6.3.5]$$

L'expression est bien linéaire en r , tout comme l'expression des contraintes pour un comportement élastique linéaire.

Maintenant nous considérons le cas où le nœud milieu est rapporté au quart de la longueur de l'arête. Dans ce cas, $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\xi = \frac{2\sqrt{lr}}{l} - 1$ et donc l'expression du déplacement est :

$$u = u_1 + 2(u_1 - 2u_2 + u_3)\frac{r}{l} + (-3u_1 + 4u_2 + u_3)\frac{\sqrt{lr}}{l} \quad [6.3.6]$$

Et les déformations sont données par :

$$\varepsilon = \frac{du}{dr} = 2(u_1 - 2u_2 + u_3)\frac{1}{l} + \frac{1}{2}(-3u_1 + 4u_2 + u_3)\frac{1}{\sqrt{lr}} \quad [6.3.7]$$

L'expression du déplacement exhibe un terme en $r^{1/2}$ qui correspond bien à la forme du champ de déplacement à proximité de la fissure. De même pour l'expression des déformations qui exhibe un terme en $r^{-1/2}$. La démonstration est ainsi faite que pour

représenter correctement les champs de déplacement et des contraintes à proximité de la fissure, il est intéressant d'utiliser de tels éléments. Une démonstration complète pour le cas à 3 dimensions pourra être trouvée dans l'article original de Barsoum (Barsoum, 1976).

4 De la quantité mécanique au chargement dual

Comme nous l'avons vu précédemment, pour pouvoir estimer l'erreur sur une quantité d'intérêt, il faut savoir exprimer celle-ci en terme de chargement pour le problème dual. Pour cela, nous proposons d'utiliser la relation introduite précédemment, liant les facteurs d'intensité de contraintes au saut des déplacements :

$$K = \frac{2C}{r_{max}^2} \int_{\Gamma} \sqrt{r} [U(r)] dr \quad [6.4.1]$$

En faisant apparaître les composantes du déplacement sur la lèvres supérieure $U_i^{sup}(r)$ et les composantes du déplacement sur la lèvres inférieure $U_i^{inf}(r)$, on obtient :

$$K_i = \frac{2C}{r_{max}^2} \int_{\Gamma} (U_i^{sup}(r) - U_i^{inf}(r)) \sqrt{r} dr \quad [6.4.2]$$

Le contour Γ est constitué des deux lèvres de la fissure ; Γ^{sup} est la lèvres supérieure et Γ^{inf} est la lèvres inférieure. Ceci permet de séparer l'intégrale précédente en deux parties :

$$K_i = \frac{2C}{r_{max}^2} \left[\int_{\Gamma^{sup}} U_i(r) \sqrt{r} dr - \int_{\Gamma^{inf}} U_i(r) \sqrt{r} dr \right] \quad [6.4.3]$$

Afin de faire apparaître la fonction test v , les composantes des déplacements sont écrites comme le produit scalaire de deux vecteurs :

$$K_i = \frac{2C}{r_{max}^2} \left[\int_{\Gamma^{sup}} v \cdot g_i(r) \sqrt{r} dr - \int_{\Gamma^{inf}} v \cdot g_i(r) \sqrt{r} dr \right] \quad [6.4.4]$$

Avec $i = I, II, III$; g_I le vecteur normal au plan de fissure, g_{II} le vecteur normal au fond de fissure et g_{III} le vecteur tangent au fond de fissure. Ceci signifie donc que l'expression de la quantité d'intérêt est valide en dimension 3 et permet donc l'estimation d'erreur des facteurs d'intensité des contraintes pour les problèmes en dimension 3.

Enfin en regroupant tous les termes, l'expression suivante est obtenue :

$$Q(v) = K_i(v) = \int_{\Gamma^{sup}} f^{sup} \cdot v dr + \int_{\Gamma^{inf}} f^{inf} \cdot v dr \quad [6.4.5]$$

$$\text{avec } f^{sup} = \frac{2C}{r_{max}^2} g_i(r) \sqrt{r} \text{ et } f^{inf} = -\frac{2C}{r_{max}^2} g_i(r) \sqrt{r}$$

Cette expression correspond à un chargement linéique en dimension 2 (surfacique en dimension 3) à imposer sur une partition des lèvres de la fissure partant de la pointe et de longueur r_{max} . Le choix du rayon r_{max} doit être fait de manière à ce qu'il soit dans la zone singulière.

Une autre méthode d'estimation d'erreur des facteurs d'intensité des contraintes a été développée par Gallimard et Panetier (Gallimard & Panetier, 2006). Basée sur une intégrale

de contour et sur l'erreur en loi de comportement, cette méthode n'est présentée que pour les problèmes plans. Elle ne semble pas limitée à ce type de problème cependant la difficulté à l'étendre aux problèmes 3D vient certainement de l'erreur en loi de comportement.

5 Applications numériques

Le but de ces exemples numériques est principalement d'étudier la convergence de l'erreur estimée par l'estimateur en quantité d'intérêt basé sur les résidus et de la comparer avec l'erreur vraie. Le premier problème (Figure 6.5.1a) est une plaque fissurée soumise à un effort de traction uniforme (solicitation en mode I). Le deuxième problème (Figure 6.5.1b) est une poutre cantilever soumise à un effort de cisaillement (solicitation en mode I et en mode II). Enfin le troisième problème (Figure 6.5.1c) est une plaque avec une fissure inclinée, soumise à un effort de traction (solicitation en mode I et en mode II).

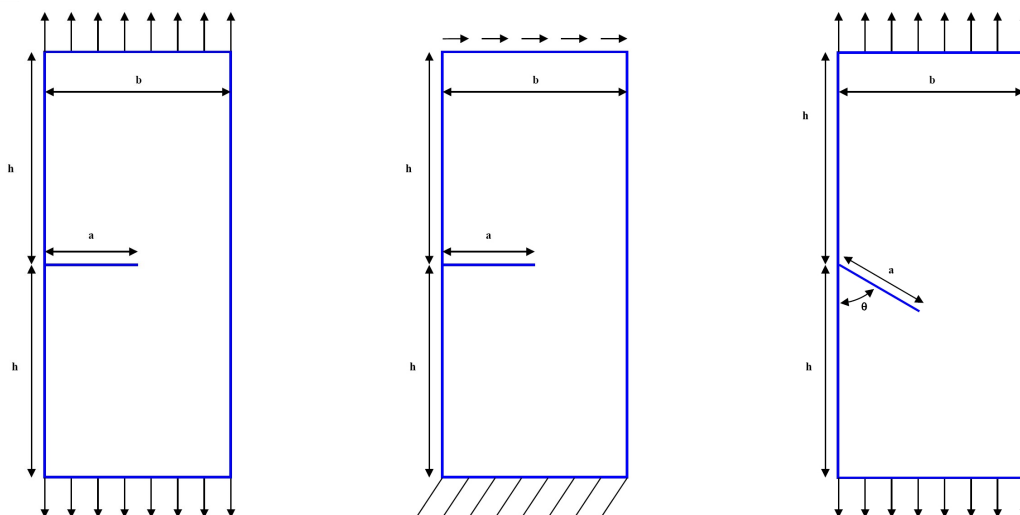


Figure 6.5.1a, 6.5.1b et 6.5.1c : Problème 1 (gauche), problème 2 (centre) et problème 3 (droite).

Les paramètres géométriques sont $L/b=16/7$, $h=L/2$, $a/b=1/2$, $L=16$ et $\theta=60^\circ$; le module d'Young est $E=200000$ MPa et le coefficient de Poisson est $\nu=0,3$. Les résultats numériques ont été obtenus sur des maillages, comportant des éléments triangulaires à six nœuds (éléments quadratiques classiques et éléments de Barsoum), issus des maillages des figures 6.5.2a, 6.5.2b et 6.5.2c par raffinement uniforme. Il faut noter que les maillages sont totalement quelconques, c'est à dire que ce ne sont pas des maillages rayonnant en pointe de fissure bien que ce type de maillage ait naturellement tendance à améliorer les résultats étant donnée la forme du champ solution.

L'erreur vraie est calculée comme la différence entre les valeurs de K obtenues pour un maillage donné et une valeur de référence. Cette valeur de référence est soit obtenue sur le maillage de référence (maillage très fin comportant plus de 10000 éléments) notée « erreur vraie référence » ; l'erreur induite par la méthode de calcul de K n'est alors pas prise en compte ; soit issue d'une valeur analytique (Murakami, 1987) notée « erreur vraie globale » ; l'erreur sur la méthode est alors aussi prise en compte. Une comparaison sera faite entre les

deux valeurs pour confirmer la pertinence de la méthode de calcul des facteur d'intensité des contraintes. A partir de ces deux erreurs définies, deux indices d'efficacité sont également calculés. Le premier, noté « indice référence », est le rapport entre l'erreur estimée et « l'erreur vraie référence » ; le second, noté « indice analytique », est le rapport entre l'erreur estimée et « l'erreur vraie globale ». Si un indice d'efficacité est supérieur à un alors l'estimation surestime l'erreur, s'il est inférieur à un alors l'estimateur sous-estime l'erreur.

L'étude de la convergence de l'erreur estimée permettra de vérifier notre estimateur. En effet si la convergence de l'erreur estimée est la même que l'erreur vraie alors l'estimateur est utilisable comme critère de raffinement dans un processus adaptatif, l'erreur est connue à une constante près.

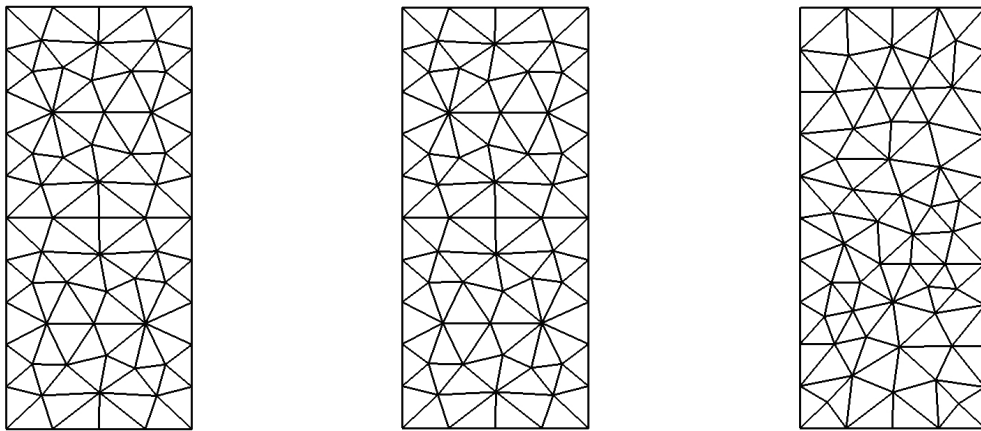


Figure 6.5.2a, 6.5.2b et 6.5.2c : Maillages initiaux pour les problème 1 (gauche), problème 2 (centre) et problème 3 (droite).

Dans le premier problème, la fissure n'est sollicitée qu'en mode I. La valeur de référence donnée par Murakami est $K_I^{Mur} = 9,37$, la valeur de référence obtenue sur le maillage de référence avec des éléments quadratiques est $K_I^{qref} = 8,84$ et celle obtenue avec des éléments de Barsoum sur le même maillage est $K_I^{bref} = 9,30$. Les valeurs relatives des différences entre ces valeurs et la valeur analytique sont respectivement de 5,65% et de 0,74%.

Dans le deuxième problème, la fissure est sollicitée en mode I et en mode II. Les valeurs analytiques sont $K_I^{Mur} = 33,93$ et $K_{II}^{Mur} = 4,53$; les valeurs de référence obtenues sur le maillage de référence avec des éléments quadratiques sont $K_I^{qref} = 32,4$ et $K_{II}^{qref} = 4,12$ et celles obtenues avec des éléments de Barsoum sur le même maillage sont $K_I^{bref} = 34,1$ et $K_{II}^{bref} = 4,44$. Les différences relatives pour K_I sont respectivement de 4,50% et de 0,50% et pour K_{II} sont respectivement de 9,05% et de 1,98%.

Dans le troisième problème, la fissure est sollicitée en mode I et en mode II. Les valeurs analytiques sont $K_I^{Mur} = 6,33$ et $K_{II}^{Mur} = 1,86$; les valeurs de référence obtenues le maillage de référence avec des éléments quadratiques sont $K_I^{qref} = 6,51$ et $K_{II}^{qref} = 1,78$ et celles obtenues avec des éléments de Barsoum avec le même maillage sont $K_I^{bref} = 6,43$ et $K_{II}^{bref} = 1,83$.

L'erreur commise par rapport à la valeur analytique de K_I est de 2,84% pour les éléments quadratiques et de 1,57% pour les éléments de Barsoum. Pour K_{II} , cette erreur est respectivement de 4,30% et de 1,61%.

Les différentes valeurs de l'erreur relative par rapport à la valeur analytique montrent que la méthode d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes donne de très bons résultats mais qu'il est intéressant d'utiliser des éléments de Barsoum pour obtenir des valeurs précises. La formulation de la quantité d'intérêt étant basée sur la méthode de calcul des facteurs d'intensité des contraintes, il est aisé d'imaginer que la précision de l'estimation sera améliorée avec l'utilisation d'éléments de Barsoum. Ceci est confirmé par l'analyse des figures 6.5.3 à 6.5.13. Elles montrent que la convergence de l'erreur estimée suit le même comportement que l'erreur vraie. La convergence est la même, les pentes sont identiques ; elles vérifient la valeur théorique de $\alpha = -\frac{1}{2}$. De plus cet ordre de convergence est constant, la pente est régulière ; les courbes d'indice d'efficacité relativement plates. Ceci assure que la qualité de l'estimation d'erreur ne dépendra pas de la taille des éléments.

Ces expériences numériques ont été menées en utilisant, pour l'estimation des facteurs d'intensité des contraintes et pour l'imposition du chargement dual, un même paramètre $r_{\max}$. Schématiquement, cette longueur correspond à la longueur sur laquelle on considère que le champ solution est singulier. Or il est aisé d'imaginer que ce paramètre ne sera pas optimum à la fois pour les éléments quadratiques et à la fois pour les éléments de Barsoum. Ainsi il convient donc de considérer l'utilisation d'éléments de type différents comme deux méthodes différentes.

Il faut noter que la méthode proposée permet d'accéder sans aucune difficulté théorique ni d'implémentation supplémentaire à l'estimation d'erreur pour des problèmes à trois dimensions pouvant utiliser des éléments de Barsoum et faisant intervenir éventuellement les trois modes de sollicitation de la fissure. Il est important de préciser aussi que les résultats ont été obtenus sur des maillages uniformes quelconques, qui ne sont pas rayonnant en pointe de fissure (contrairement à ceux utilisés dans (Gallimard & Panetier, 2006)), montrant ainsi la robustesse de la procédure utilisée.

5.1 Plaque en traction avec fissure droite avec éléments quadratiques

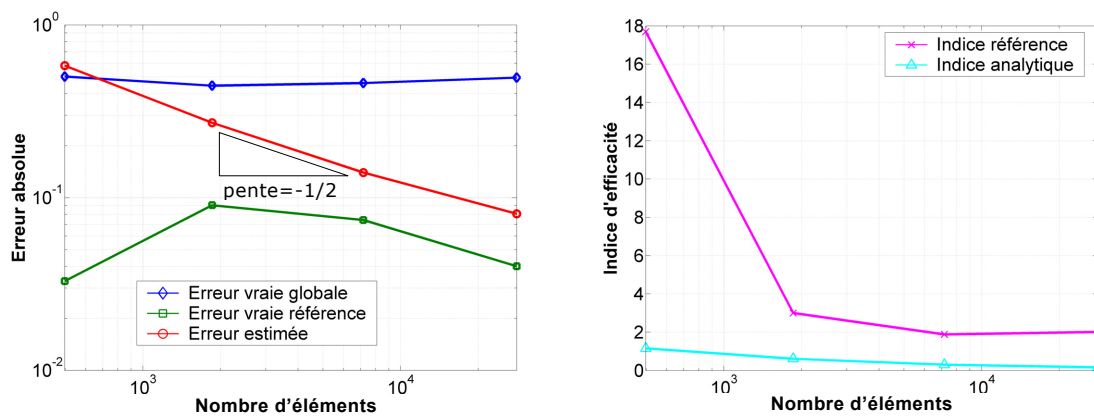


Figure 6.5.3 : Convergence de l'erreur sur K_I et indice d'efficacité pour une plaque en traction avec une fissure droite modélisée par des éléments quadratiques.

5.2 Plaque en traction avec fissure droite avec éléments de Barsoum

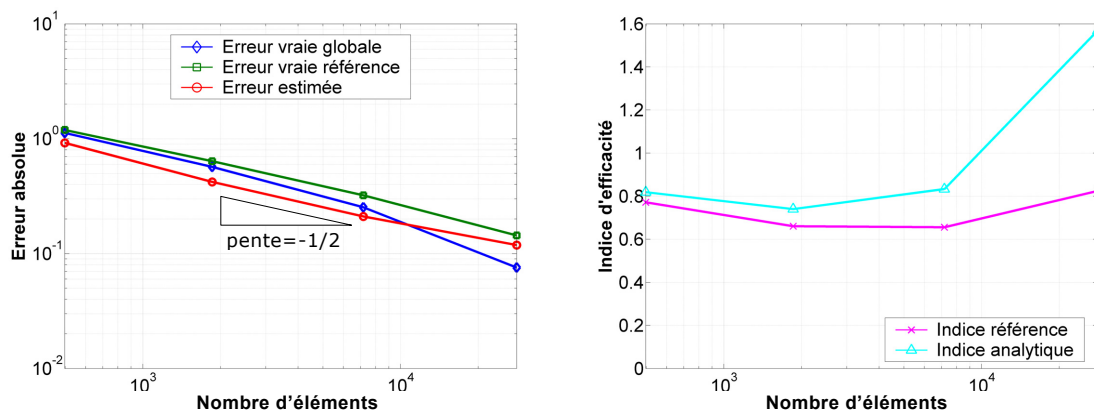


Figure 6.5.4 : Convergence de l'erreur sur K_I et indice d'efficacité pour une plaque en traction avec une fissure droite modélisée par des éléments de Barsoum.

5.3 Plaque en cisaillement avec fissure droite avec éléments quadratiques

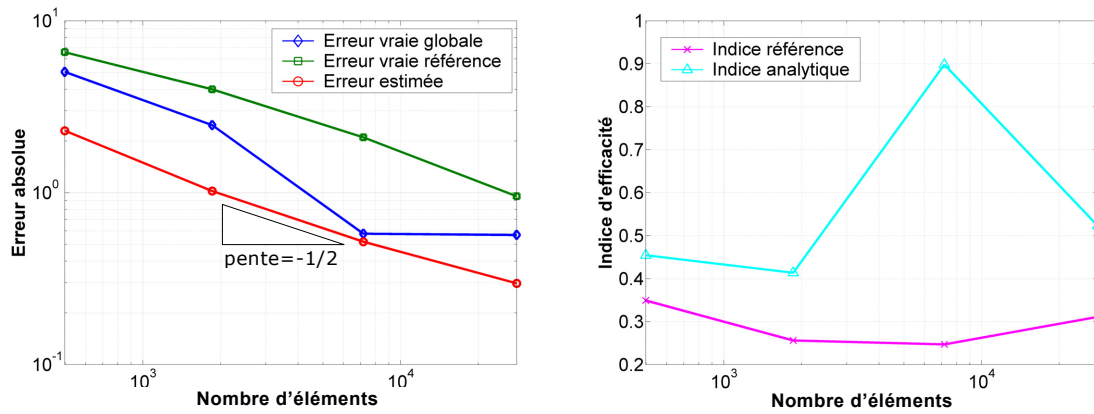


Figure 6.5.5 : Convergence de l'erreur sur K_I et indice d'efficacité pour une plaque en cisaillement avec une fissure droite modélisée par des éléments quadratiques.

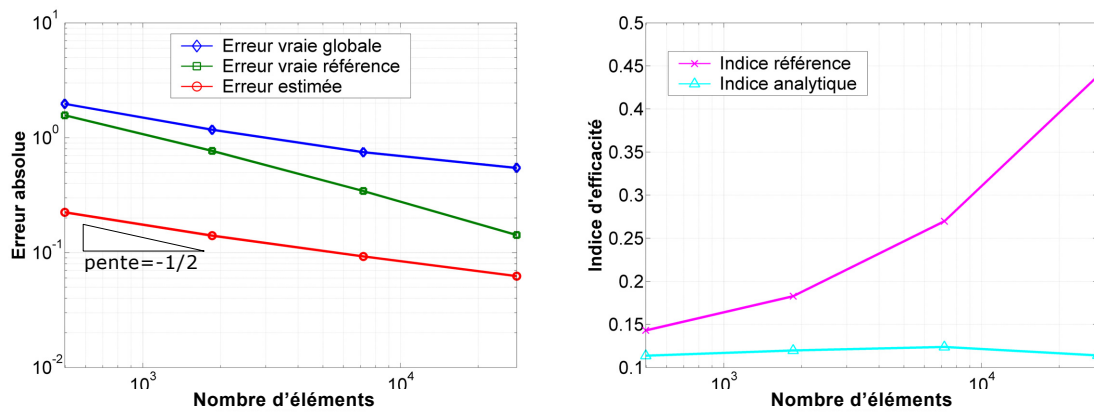


Figure 6.5.7 : Convergence de l'erreur sur K_{II} et indice d'efficacité pour une plaque en cisaillement avec une fissure droite modélisée par des éléments quadratiques.

5.4 Plaque en cisaillement avec fissure droite avec éléments de Barsoum

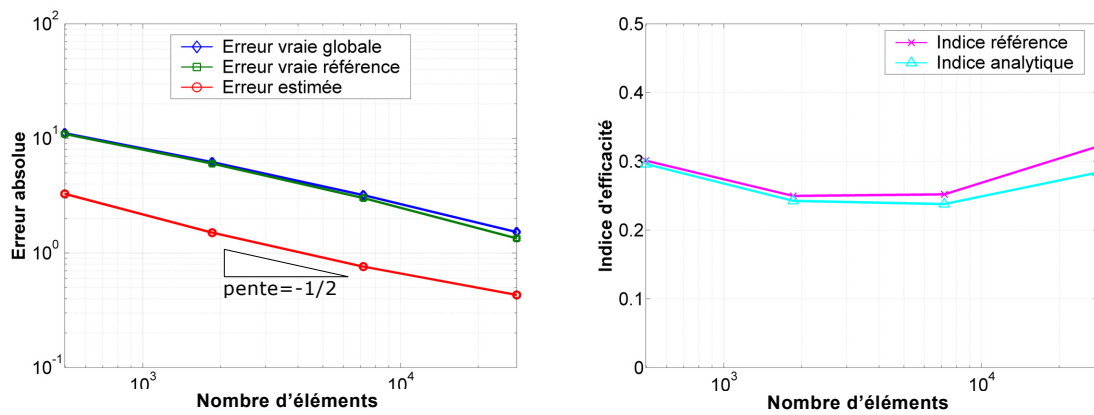


Figure 6.5.8 : Convergence de l'erreur sur K_I et indice d'efficacité pour une plaque en cisaillement avec une fissure droite modélisée par des éléments de Barsoum.

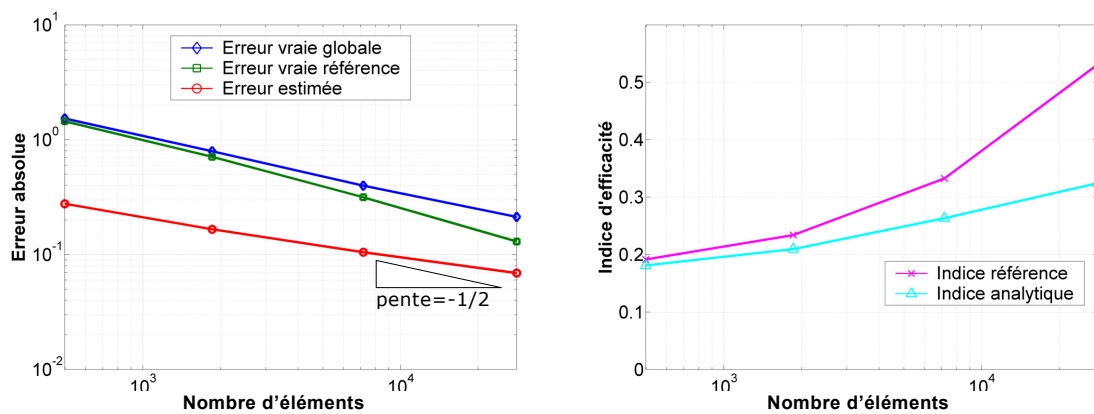


Figure 6.5.9 : Convergence de l'erreur sur K_{II} et indice d'efficacité pour une plaque en cisaillement avec une fissure droite modélisée par des éléments de Barsoum.

5.5 Plaque en traction avec fissure inclinée avec éléments quadratiques

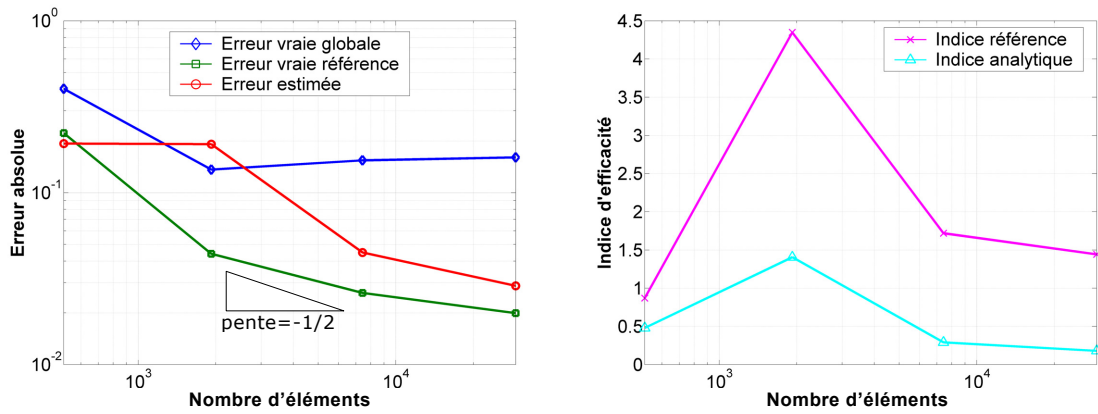


Figure 6.5.10 : Convergence de l'erreur sur K_I et indice d'efficacité pour une plaque en traction avec une fissure inclinée modélisée par des éléments quadratiques.

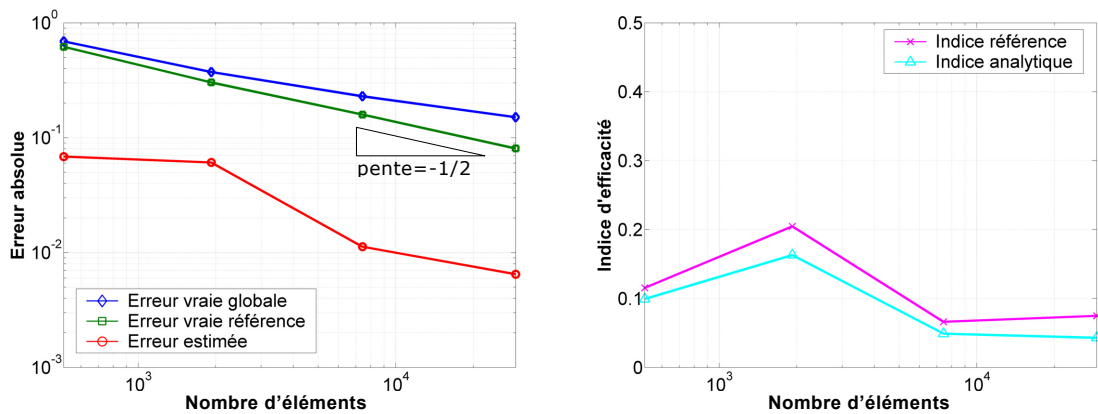


Figure 6.5.11 : Convergence de l'erreur sur K_{II} et indice d'efficacité pour une plaque en traction avec une fissure inclinée modélisée par des éléments quadratiques.

5.6 Plaque en traction avec fissure inclinée avec éléments de Barsoum

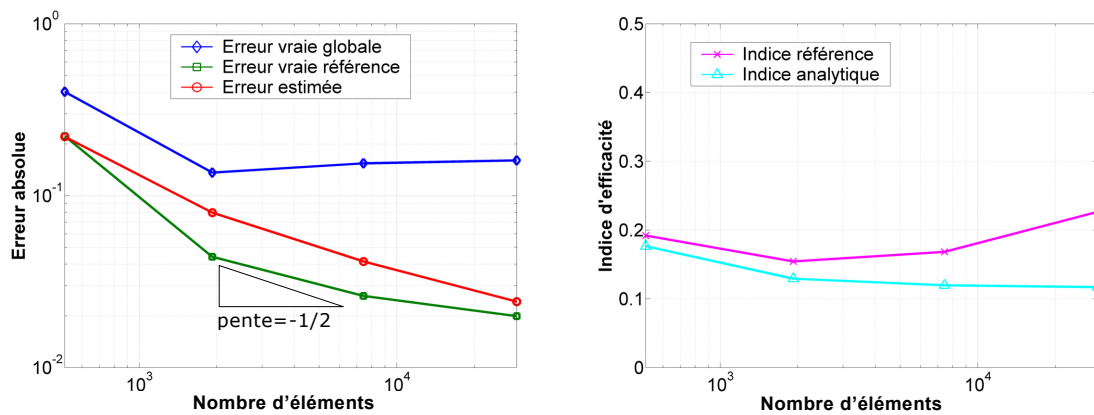


Figure 6.5.12 : Convergence de l'erreur sur K_I et indice d'efficacité pour une plaque en traction avec une fissure inclinée modélisée par des éléments de Barsoum.

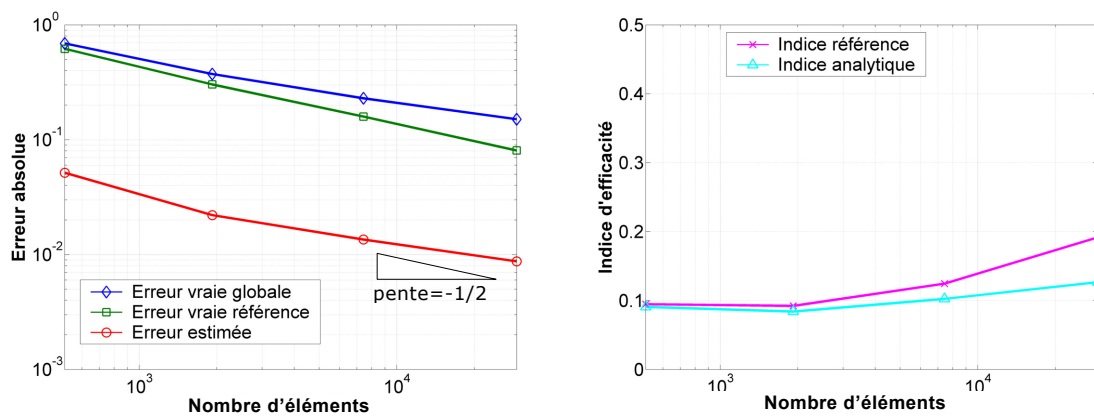


Figure 6.5.13 : Convergence de l'erreur sur K_{II} et indice d'efficacité pour une plaque en traction avec une fissure inclinée modélisée par des éléments de Barsoum.

6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé une quantité d'intérêt pour la mécanique de la rupture : les facteurs d'intensité des contraintes. A partir d'une méthode de calcul de ces facteurs d'intensité des contraintes basée sur l'extrapolation des sauts de déplacement sur les lèvres de la fissure, une fonctionnelle linéaire a été déduite. Elle est parfaitement adaptée pour en déduire le chargement du problème dual.

Une introduction aux éléments de Barsoum a été faite car ce type d'éléments permet une très bonne représentation du champ solution à proximité de la fissure et peuvent donc améliorer l'estimation de l'erreur avec notre méthode.

Des exemples numériques ont permis de valider l'estimateur ainsi que la quantité d'intérêt définie pour des fissures sollicitées en mode I et en mode II. Ces indicateurs montrent un très bon comportement du point de vue de la convergence et permettent de guider le raffinement de maillage dans un processus adaptatif. Ce chapitre répond ainsi au troisième objectif partiel de la thèse.

Partie 3

Applications industrielles

Chapitre 7

Rotor HP

- 1 Structure envisagée**
- 2 Modélisation, chargement et maillage initial**
- 3 Adaptation du maillage**
- 4 Eléments de comparaison**
- 5 Conclusion**

1 Structure envisagée

Cette étude a été réalisée au département AMA en 2006 dans le cadre du Projet « Durée de Vie des Turbines à Vapeurs du parc nucléaire ». Très brièvement, il s'agit de localiser les zones de contraintes maximales rencontrées sur le rotor HP (figure 7.1.1. et figure 7.1.2) d'une turbine et d'en évaluer numériquement le niveau de contraintes afin de vérifier s'il existe un risque d'amorçage de fissure par corrosion sous contraintes (CSC). Le rotor est constitué d'un arbre qui mesure environ 8 mètres de long et de 14 rangées d'ailettes mesurant au maximum 2 mètres de diamètre.



Figure 7.1.1 : Rotor et directrices HP de la centrale de Bugey.

Afin de statuer sur le risque de fissuration par CSC, plusieurs modélisations ont été effectuées, dont l'une en 2D axisymétrique du rotor complet.

Cette étude s'intéresse aux contraintes maximales obtenues numériquement afin de les comparer à des contraintes seuil issues d'essais expérimentaux. L'analyse des contraintes de

Von Mises est en premier lieu requise car ce type de contrainte est toujours majorant vis à vis des composantes pertinentes du tenseur des contraintes. Ainsi, lorsque les contraintes de Von Mises sont inférieures aux contraintes seuil, il est considéré que le risque de fissuration par CSC est peu probable en l'absence d'impuretés. Cependant, lorsque les contraintes de Von Mises sont supérieures au seuil de fissuration par CSC, il devient nécessaire d'analyser plus finement les valeurs maximales du tenseur des contraintes, ainsi que les contraintes principales afin d'évaluer les marges par rapport au risque de fissuration par CSC.

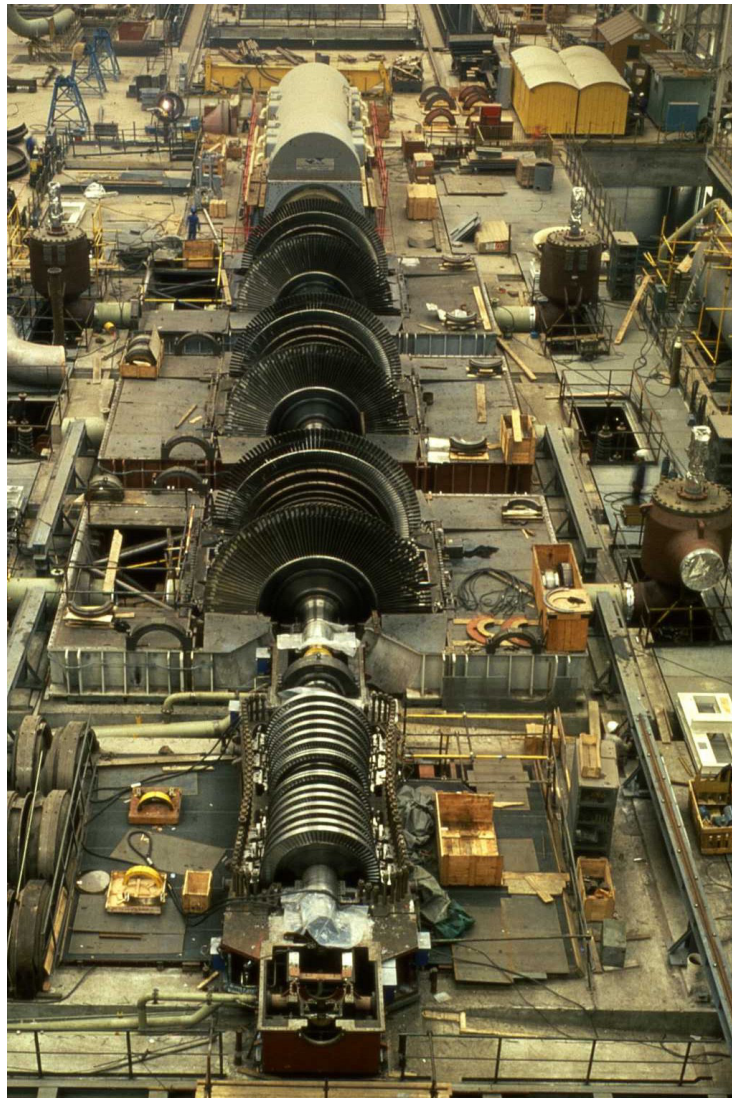


Figure 7.1.2 : Salle des machines de la centrale du Blayais, avec de bas en haut le rotor HP, les trois rotors BP et l'alternateur.

Dans la suite, nous nous limiterons à la détermination des contraintes de Von Mises, sans considération pour l'aspect fissuration par CSC de l'étude.

2 Modélisation, chargement et maillage initial

Compte tenu de la symétrie axiale de la structure, celle-ci est modélisée en éléments 2D axisymétrique. Le comportement du matériau est élastique, les caractéristiques matériaux

sont pour le module d'Young de 210000 MPa et pour le coefficient de Poisson de 0,3. Le matériel est soumis à un chargement de type force centrifuge dû à la rotation. Le chargement est appliqué pour une vitesse de rotation de 1500 tr/mn. La quantité d'intérêt que nous allons considérer est la contrainte de Von Mises. Trois zones d'intérêt ont été déterminées, dans lesquelles (figure 7.2.1) se trouvent les valeurs les plus importantes de la contrainte de Von Mises.

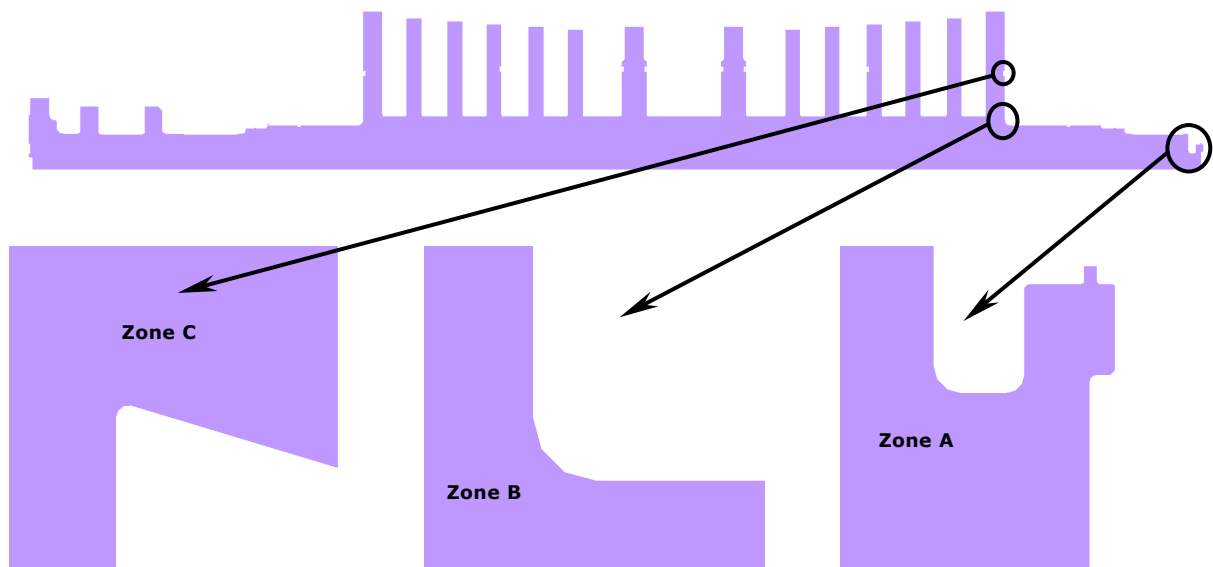


Figure 7.2.1 : Modèle CAO du rotor et détail des zones d'intérêt.

La stratégie de calcul envisagée est de considérer un maillage raisonnablement grossier pour effectuer une première analyse puis de raffiner ce maillage par un processus d'adaptation basé sur l'indicateur en quantité d'intérêt. Le maillage utilisé est présenté sur la figure 7.2.2. Il comporte 10477 triangles linéaires et 6067 nœuds.

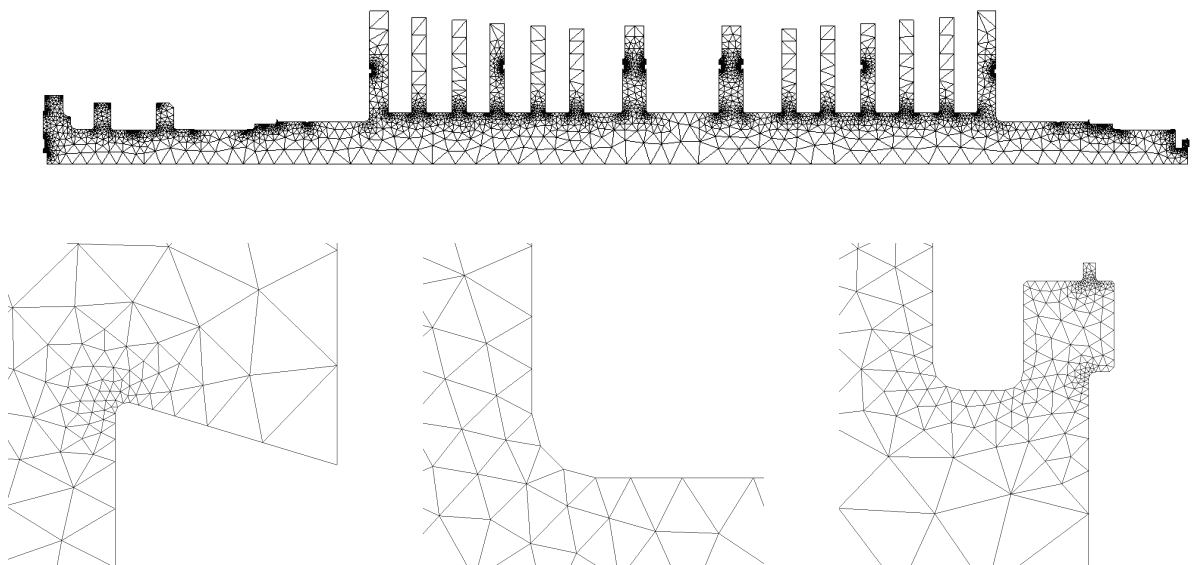


Figure 7.2.2 : Maillage initial du rotor et détail des trois zones d'intérêt.

3 Adaptation du maillage

Les maillages adaptés sont réalisés par raffinement du maillage initial en utilisant la quantité d'intérêt moyenne de la contrainte de Von Mises dans les zones A, B et C ainsi que sur l'union de ces zones. Les paramètres de Homard sont fixés comme suit : 5% des éléments, qui représentent la plus grande erreur au sens de la quantité d'intérêt sont raffinés à chaque itération, sans déraffinement au sens HOMARD.

Dans les tableaux 7.3.1 à 7.3.4 sont donnés les évolutions de la quantité d'intérêt et du nombre de degrés de liberté jusqu'à huit raffinements du maillage. Le temps nécessaire pour réaliser ces calculs est de 1500 secondes sur une station DELL Precision 470 avec 2Go de RAM. Les figures 7.3.1 à 7.3.3 fournissent les différents maillages pour les différentes zones considérées. La figure 7.3.4 donnent la déformée sur le maillage initial. Enfin la figure 7.3.5 donne les isovaleurs de la contrainte de Von Mises pour chacune des zones d'intérêt lorsque la quantité d'intérêt est définie sur l'une des zones sur le maillage initial et sur le troisième maillage raffiné.

Les résultats sont donnés pour huit maillages raffinés mais il faut noter que les résultats se stabilisent dès le troisième raffinement (environ 10 000 nœuds) : les valeurs de la quantité d'intérêt convergent. Bien que la moyenne de Von Mises puisse être également améliorée dans une autre zone que celle où la quantité d'intérêt est définie, il est préférable de faire un calcul par zone d'intérêt. De plus si l'on considère l'union des trois zones comme zone d'intérêt, il faut noter que les moyennes dans toutes ces zones ne sont pas améliorées de la même manière, la valeur dans la zone C converge plus lentement. Ceci s'explique par le fait que la taille de la zone C est faible par rapport à la taille des zones A et B. Ainsi comme la quantité d'intérêt est une moyenne sur l'union des trois zones, le poids de la contribution à l'erreur de la zone C est petit.

Enfin, il faut noter que les différentes valeurs ne varient que de quelques pourcents. Ceci signifie que le maillage initial était déjà raisonnablement « bon ». Mais ceci ne remet pas en cause l'intérêt de l'étude comme illustration ni l'intérêt de l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt comme critère de raffinement. En effet le processus mis en œuvre est le même pour un gain de précision de quelques pourcents que pour un gain de quelques dizaines de pourcents.

Maillage	Moyenne de Von Mises (MPa)			Nombre de nœuds
	Zone A	Zone B	Zone C	
Initial	77,6403	54,3228	81,3793	6 208
Raffiné 1	78,5130	54,8830	80,0037	7 301
Raffiné 2	78,8277	55,2908	79,9381	8 576
Raffiné 3	78,9062	55,3168	79,9535	10 263
Raffiné 4	78,8895	55,3010	80,2548	12 729
Raffiné 5	78,8817	55,3137	79,9479	16 007
Raffiné 6	78,8668	55,2740	80,0849	20 403
Raffiné 7	78,8566	55,2820	80,2611	25 894
Raffiné 8	78,8572	55,2792	80,7249	32 922

Tableau 7.3.1 : Résultats obtenus par adaptation de maillage suivant l'erreur sur la moyenne de la contrainte de Von Mises dans la zone A.

Maillage	Moyenne de Von Mises (MPa)			Nombre de nœuds
	Zone A	Zone B	Zone C	
Initial	77,6403	54,3228	81,3793	6 208
Raffiné 1	78,4747	54,8954	81,5721	7 208
Raffiné 2	78,4567	55,1667	81,3469	8 370
Raffiné 3	78,4516	55,2585	81,2825	9 828
Raffiné 4	78,5312	55,2645	81,0212	11 825
Raffiné 5	78,6750	55,2585	83,3653	14 642
Raffiné 6	78,8048	55,2559	83,5984	18 245
Raffiné 7	78,8646	55,2534	84,0215	22 920
Raffiné 8	78,8261	55,2522	83,1490	28 933

Tableau 7.3.2 : Résultats obtenus par adaptation de maillage suivant l'erreur sur la moyenne de la contrainte de Von Mises dans la zone B.

Maillage	Moyenne de Von Mises (MPa)			Nombre de nœuds
	Zone A	Zone B	Zone C	
Initial	77,6403	54,3228	81,3793	6 208
Raffiné 1	77,5846	54,9183	82,9748	7 107
Raffiné 2	77,5746	54,9826	83,6529	8 341
Raffiné 3	77,5701	55,0895	83,6752	9 907
Raffiné 4	77,5652	55,1877	83,7052	12 054
Raffiné 5	77,6201	55,2234	83,6921	14 931
Raffiné 6	78,0466	55,2164	83,6721	18 510
Raffiné 7	78,2496	55,2307	83,6777	22 951
Raffiné 8	78,3672	55,2310	83,6786	28 593

Tableau 7.3.3 : Résultats obtenus par adaptation de maillage suivant l'erreur sur la moyenne de la contrainte de Von Mises dans la zone C.

Maillage	Moyenne de Von Mises (MPa)			Nombre de nœuds
	Zone A	Zone B	Zone C	
Initial	77,6403	54,3228	81,3793	6 208
Raffiné 1	78,6544	54,8948	82,6453	7 202
Raffiné 2	79,0208	55,1759	82,3415	8 412
Raffiné 3	79,0309	55,2557	81,8114	10 022
Raffiné 4	78,9569	55,2611	81,7641	12 360
Raffiné 5	78,9273	55,2531	82,1231	15 467
Raffiné 6	78,8979	55,2532	82,6606	19 434
Raffiné 7	78,8788	55,2516	82,9972	24 529
Raffiné 8	78,8762	55,2500	83,1068	31 256

Tableau 7.3.4 : Résultats obtenus par adaptation de maillage suivant l'erreur sur la moyenne de la contrainte de Von Mises dans l'union des trois zones.

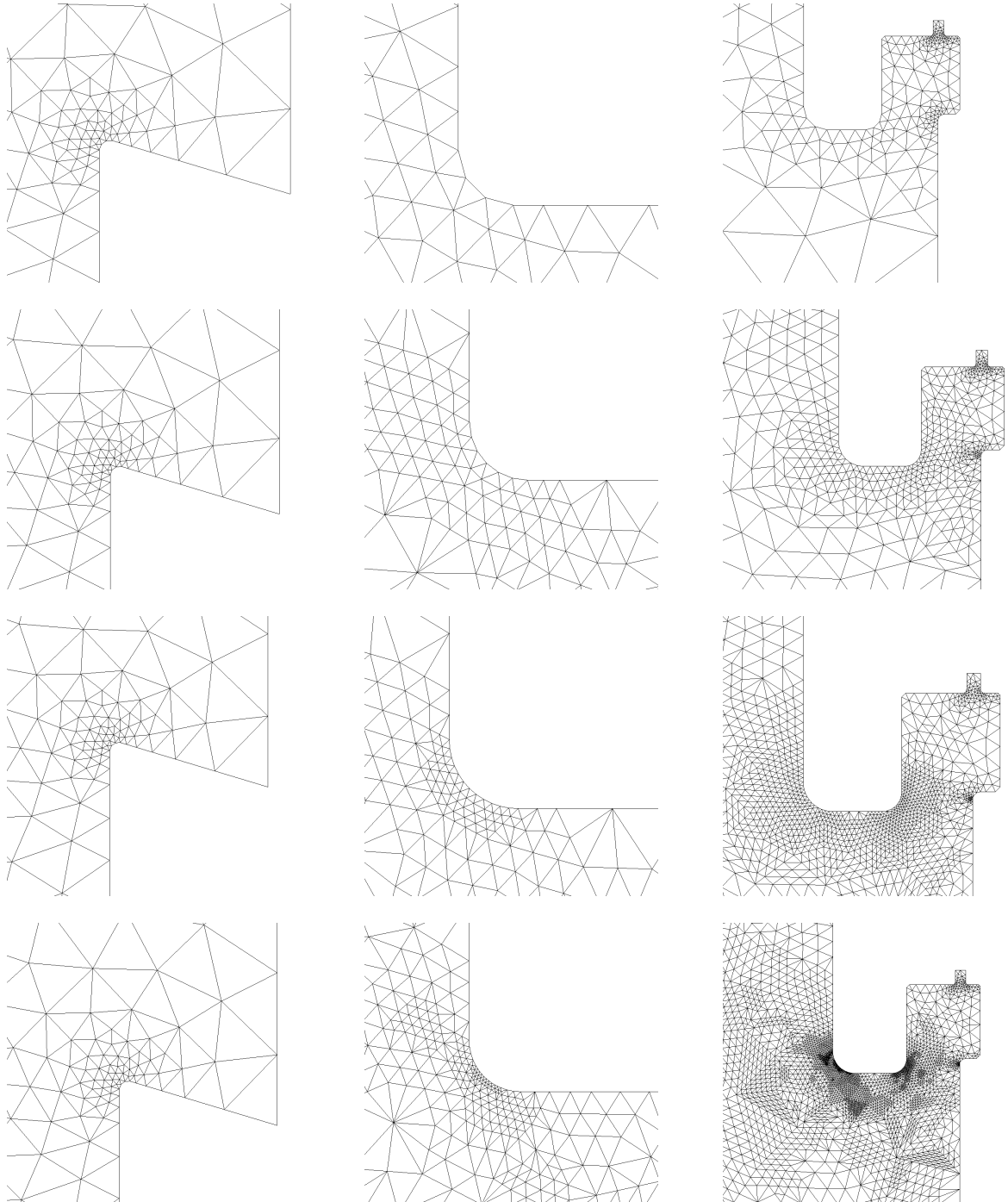


Figure 7.3.1 : Détail du maillage des différentes zones pour un raffinement guidé par l'erreur sur la contrainte de Von Mises dans la zone A (du maillage initial au troisième maillage raffiné).

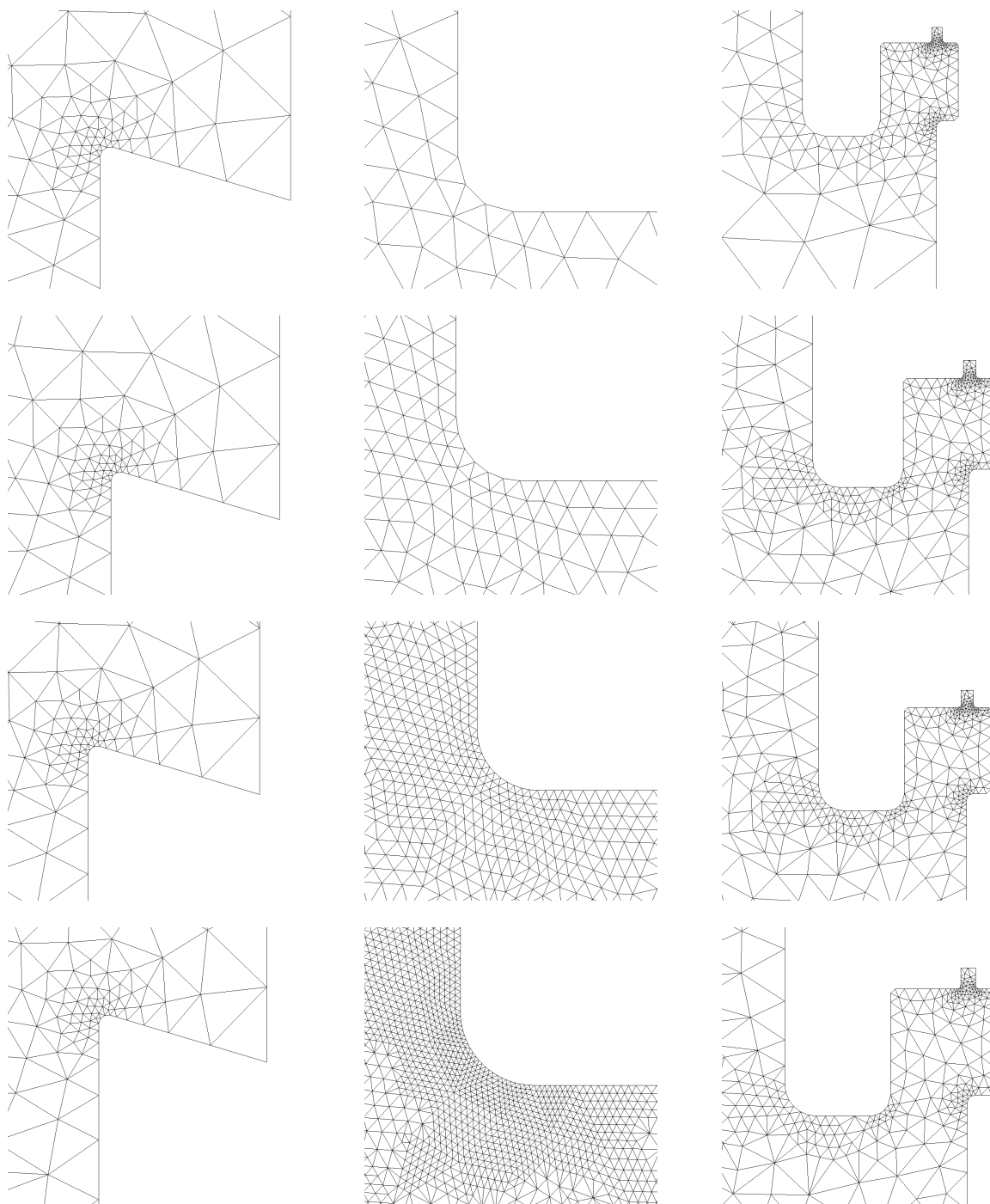


Figure 7.3.2 : Détail du maillage des différentes zones pour un raffinement guidé par l'erreur sur la contrainte de Von Mises dans la zone B (du maillage initial au troisième maillage raffiné).

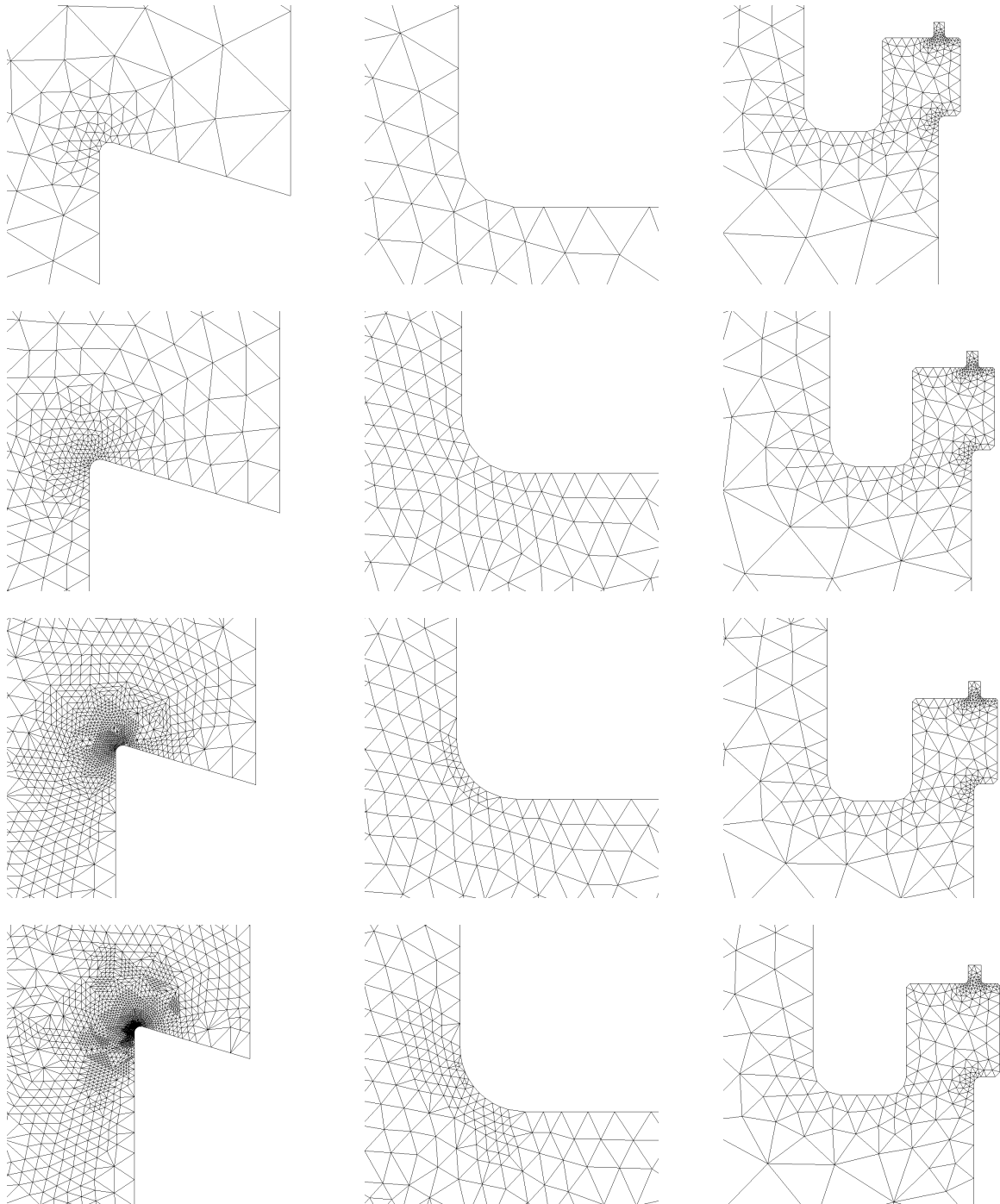


Figure 7.3.3 : Détail du maillage des différentes zones pour un raffinement guidé par l'erreur sur la contrainte de Von Mises dans la zone C (du maillage initial au troisième maillage raffiné).

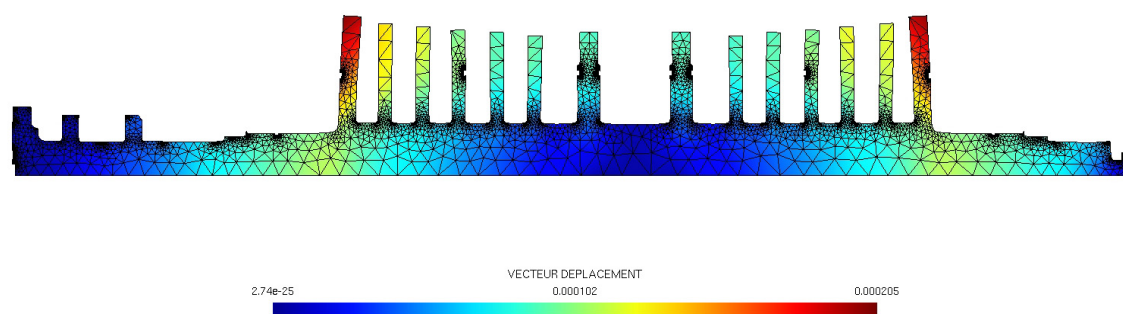


Figure 7.3.4 : Déformée (facteur d'amplification de 582), maillage initial.

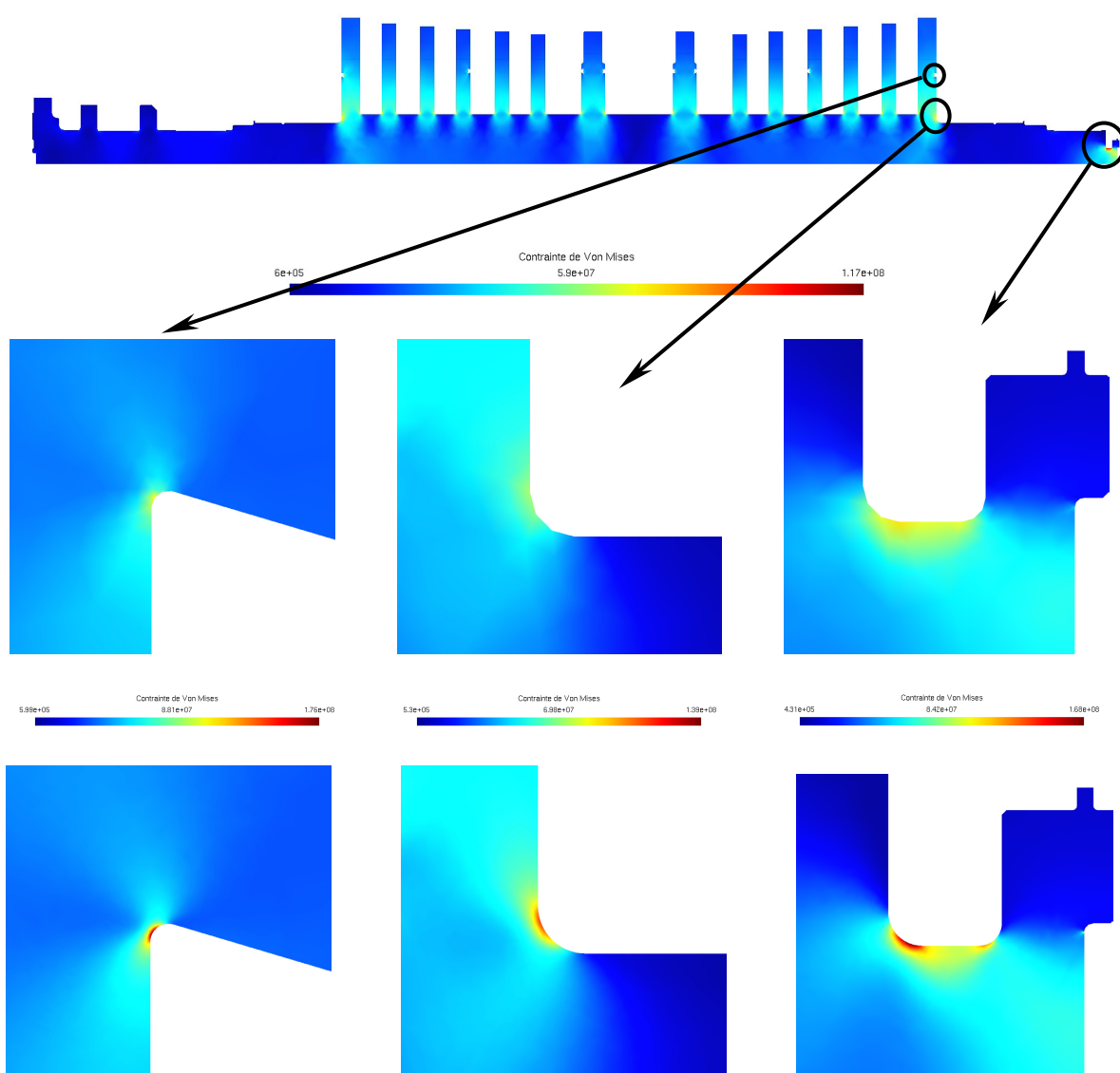


Figure 7.3.5 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises obtenues sur le maillage initial et sur le troisième maillage raffiné pour un raffinement effectué par rapport à la quantité d'intérêt dans chacune des zones.

4 Éléments de comparaison

Habituellement, pour une telle étude industrielle, il n'est pas possible d'obtenir de solution de référence sur un maillage très fin, compte tenu des délais pour fournir un résultat ou des moyens de calculs à disposition. Toutefois, il a été possible de déterminer une solution de référence obtenue par raffinements uniformes car le problème est modélisé en 2 dimension et qu'il est linéaire. Les résultats sont donnés dans le tableau 7.4.1. Pour ces résultats, le temps de calcul nécessaire est d'environ 10000 secondes.

Maillage	Moyenne de Von Mises (MPa)			Nombre de nœuds
	Zone A	Zone B	Zone C	
Initial	77,6403	54,3228	81,3793	6 208
Raffiné 1	78,4986	54,8859	82,9696	22 874
Raffiné 2	78,7497	55,1395	83,4518	87 637
Raffiné 3	78,8244	55,2195	83,6043	342 887
Raffiné 4	78,8439	55,2407	83,6513	1 356 283

Tableau 7.4.1 : Résultats obtenus par adaptation uniforme.

On note que les résultats obtenus par raffinement guidé par la quantité d'intérêt sont similaires à ceux déterminés sur un maillage très fin. Ceci rassure sur la pertinence des résultats obtenus par raffinement suivant l'erreur sur la quantité d'intérêt. Il est même possible d'espérer un meilleur comportement car la convergence est plus rapide. Dit autrement, on observe d'une part une convergence assez rapide de la valeur de la quantité d'intérêt lorsqu'on utilise un raffinement guidé par l'erreur sur cette quantité d'intérêt et d'autre part que la valeur convergée est parfaitement cohérente avec ce que l'on observe par raffinement uniforme (même si la convergence avec raffinement uniforme n'est pas aussi aboutie qu'avec le raffinement en quantité d'intérêt).

Le tableau 7.4.2 donne les résultats obtenus dans chacune des zones pour un raffinement guidé par l'erreur en norme de l'énergie. On peut remarquer que les résultats pour le huitième maillage raffiné suivant l'erreur en norme de l'énergie (tableau 7.4.2) sont presque aussi bon que les résultats pour le troisième maillage raffiné uniformément (tableau 7.4.1) comportant 10 fois plus de nœuds. Par contre ces résultats sont beaucoup moins bons que les résultats pour le troisième maillage raffiné suivant l'erreur en quantité d'intérêt (tableau 7.3.1 à 7.3.4) avec le nombre de nœuds. Il est visible ici que la quantité d'intérêt dans chacune des zones converge moins vite avec le raffinement guidé par la norme en énergie : les maillages sont moins optimisés.

Ces observations permettent de classer les solutions par ordre de précision. Ainsi la plus précise est celle obtenue par un raffinement guidé par l'erreur en quantité d'intérêt. Dès le

troisième ou quatrième maillage raffiné, la solution a convergé à une voire deux décimales près. Ensuite la solution fournie par le raffinement uniforme semble aussi précise que celle fournie par le raffinement guidé par la norme en énergie mais elle nécessite beaucoup plus de nœuds (dix fois plus) pour obtenir des valeurs similaires.

Maillage	Moyenne de Von Mises (MPa)			Nombre de nœuds
	Zone A	Zone B	Zone C	
Initial	77,6403	54,3228	81,3793	6 208
Raffiné 1	78,1186	55,0630	80,3202	7 358
Raffiné 2	78,0875	55,1424	80,1970	8 782
Raffiné 3	78,3080	55,1776	80,2469	10 848
Raffiné 4	78,5599	55,2171	80,7009	13 359
Raffiné 5	78,6011	55,2006	80,9658	16 634
Raffiné 6	78,7487	55,1895	81,0167	20 946
Raffiné 7	78,7975	55,2050	81,1937	26 313
Raffiné 8	78,8243	55,2127	83,5498	33 221

Tableau 7.4.2 : Résultats obtenus par adaptation de maillage suivant l'erreur en norme de l'énergie.

5 Conclusion

A travers cette étude, l'intérêt des quantités d'intérêt en tant que critère d'adaptation a été démontré sur une étude industrielle de taille raisonnable. L'adaptation de maillage guidée par la quantité d'intérêt semble tout à fait pertinente et adaptée : le processus présente la caractéristique d'être assez rapide et convergent, vers une valeur qui semble raisonnable. Dans notre cas, le maillage était déjà de bonne qualité et le raffinement guidé par la quantité d'intérêt permet de se rassurer sur la qualité du résultat obtenu.

Chapitre 8

Assemblage boulonné

1	Structure envisagée
2	Modélisation
3	Stratégie de calcul et maillage initial
4	Chargement
5	Adaptation du maillage
6	Éléments de comparaison
7	Conclusion

1 Structure envisagée

La structure envisagée est un assemblage boulonné entre 3 pièces (figure 8.1.1 pour une vision « assemblée »). Seule une demi-structure est présentée (et modélisée), la structure complète se déduisant par symétrie :

- une calotte hémisphérique munie d'une bride (figure 8.1.2), d'environ un mètre de diamètre ;
- une plaque venant se positionner au dessus de cette bride (figure 8.1.3) ;
- un cylindre muni lui aussi d'une bride (le cylindre n'est pas modélisé sur toute sa hauteur mais coupé à une hauteur raisonnable) (figure 8.1.4).

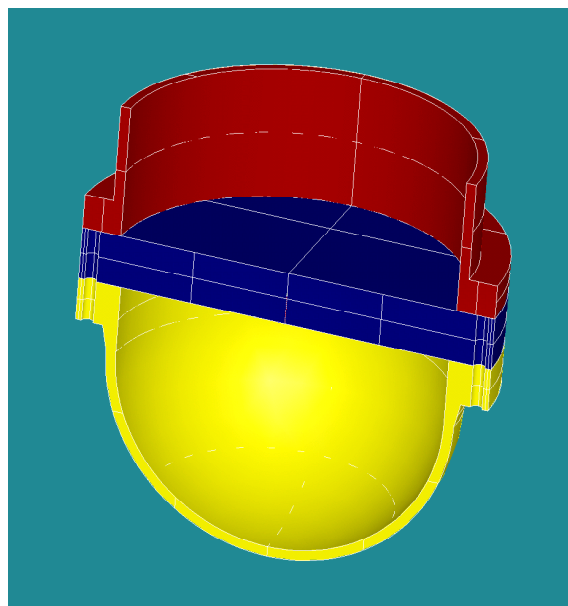


Figure 8.1.1 : Assemblage complet.

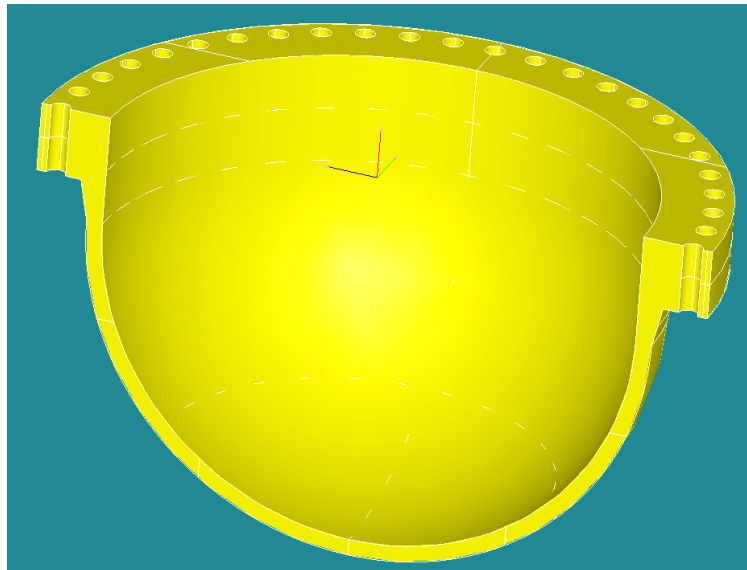


Figure 8.1.2 : Calotte hémisphérique et sa bride.

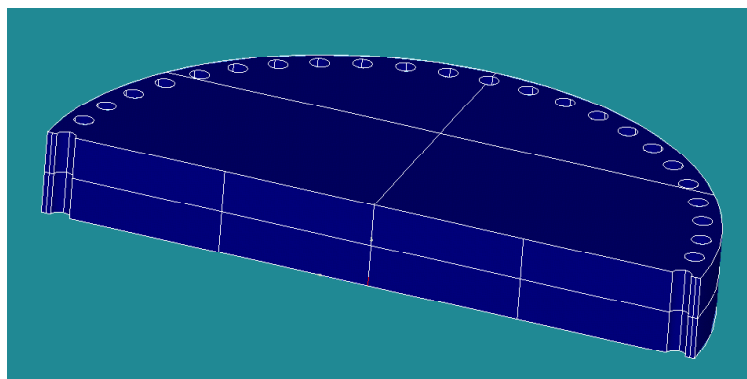


Figure 8.1.3 : Plaque.

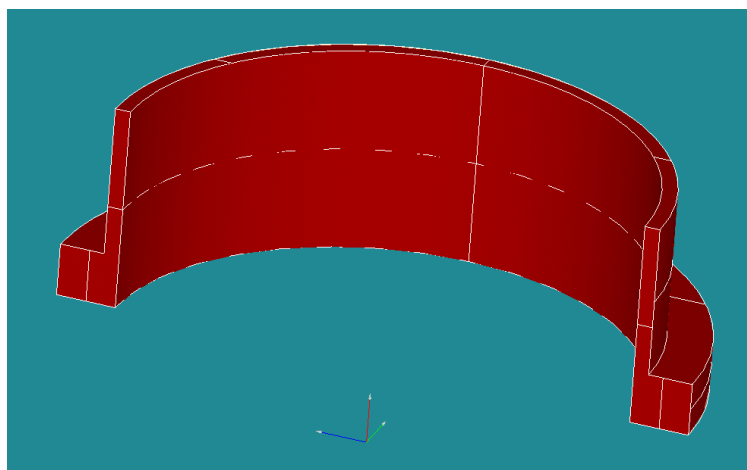


Figure 8.1.4 : Cylindre et bride.

Les trois pièces sont assemblées par 48 goujons vissés dans leur partie supérieure (dans la totalité de la bride du cylindre et environ la moitié de la hauteur de la plaque), lisse dans les

trous de la bride de la calotte hémisphérique. Les goujons sont serrés avec un effort global (pour les 48 goujons) de 5000 kN (soit un peu plus de 100 kN par goujon) par un boulon à leur extrémité inférieure (sous la bride de la calotte hémisphérique). On considère les goujons parfaitement ancrés dans la bride du cylindre, on trouvera sur la figure 8.1.5 la représentation du cylindre, de la bride et des goujons (avec les boulons à leurs extrémités) et sur les figures 8.1.6 et 8.1.7 la représentation de l'assemblage incluant les goujons (et leurs boulons).

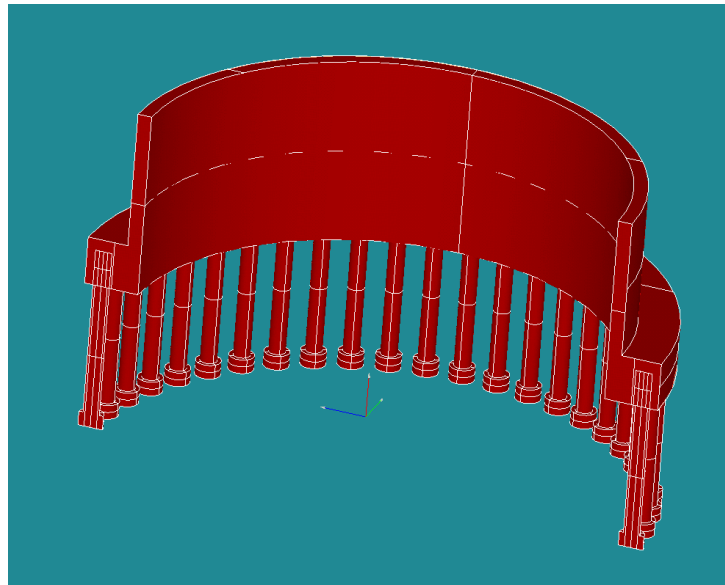


Figure 8.1.5 : Cylindre, bride et goujons.

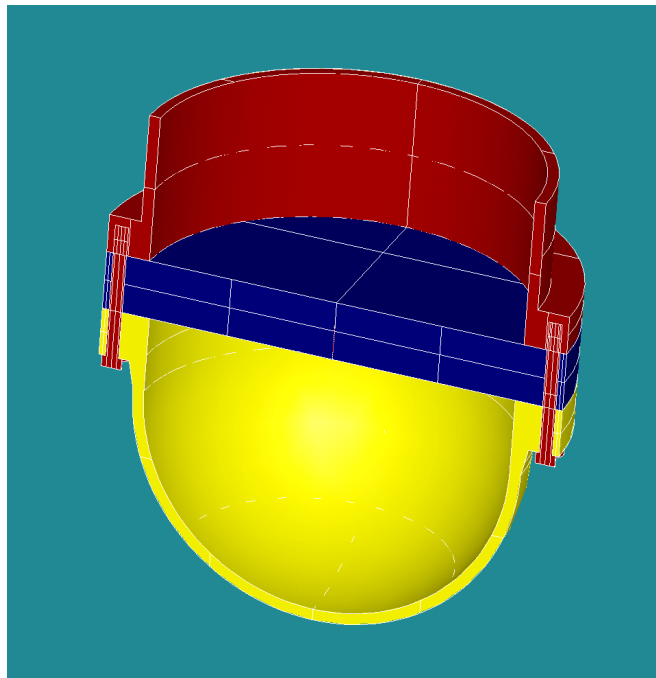


Figure 8.1.6 : Assemblage complet avec les goujons (vue de l'intérieur).

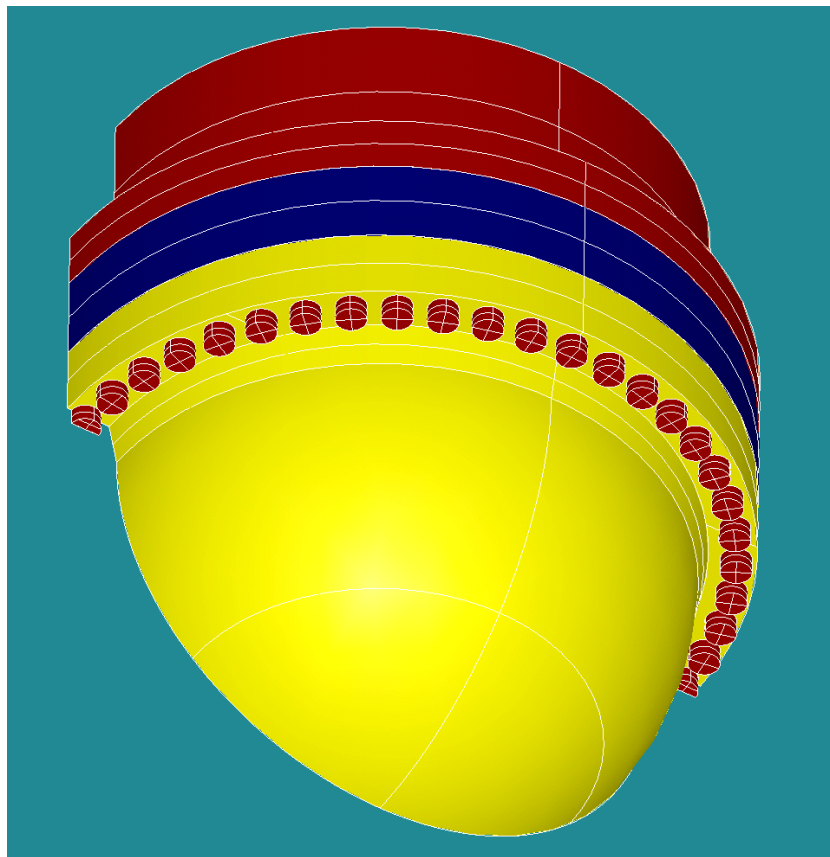


Figure 8.1.7 : Assemblage complet avec les goujons (vue de l'extérieur).

Le but de cette simulation est d'obtenir les efforts vus par les goujons lorsque la structure est soumise au préserrage des boulons et à une pression interne (dans la cavité constituée de la calotte hémisphérique et de la plaque) de 40 bars.

2 Modélisation

L'ensemble de la structure est modélisé en éléments volumiques linéaires et la symétrie est prise en compte (comme présentée sur les figures). On notera qu'on aurait pu se contenter de modéliser 1/48ème de la structure (répétitivité cyclique), mais une étude qui suit celle décrite ici (et qui n'est pas présentée dans ce mémoire) exige d'avoir modélisé une moitié de structure.

Le contact est modélisé entre la bride de la calotte hémisphérique et la plaque (à l'interface jaune/bleu sur les figures), par la méthode CONTRAINTES du mot-clé CONTACT d'AFFE_CHAR_MECA dans *Code_Aster*, en revanche on considère que la plaque et le fût sont adhérents : les maillages incompatibles sont recollés (mot clé LIAISON_MAIL d'AFFE_CHAR_MECA dans *Code_Aster*) à l'interface plaque/fût (rouge/bleu sur les figures).

La partie fileté des goujons dans la plaque, ainsi que la surface des boulons serrant les goujons qui viennent s'appuyer sur la bride de la calotte hémisphérique (interface

rouge/jaune sur la partie inférieure de la bride bien visible sur la figure 8.1.6) sont aussi modélisées par un recollement (mot clé `LIAISON_MAIL` d'`AFFE_CHAR_MECA` dans *Code_Aster*).

La tension induite par le serrage des boulons dans les goujons est modélisée par une contraction volumique dans la partie lisse des goujons résultante d'un incrément de température négative. L'incrément de température nécessaire à l'obtention de la bonne tension dans les goujons est recalé par un calcul préliminaire.

La quantité qui intéresse ici l'ingénieur est la contrainte dans les goujons, plus particulièrement la contrainte dans la partie lisse des goujons. Pour éviter de prendre en compte les singularités nécessairement présentes en haut (bord du filetage dans la plaque) et en bas (bord du filetage dans le boulon), seule la moitié centrale de la partie lisse des goujons est considérée. La quantité d'intérêt est donc la moyenne de la contrainte verticale dans cette partie centrale des 48 goujons (tous les goujons étant par ailleurs interchangeables par répétitivité cyclique de la structure).

3 Stratégie de calcul et maillage initial

La complexité du calcul provient de deux éléments : le contact bride/plaque d'une part et l'aspect assez massif de la structure (combiné à la présence de détails comme les trous) qui va engendrer un nombre d'éléments potentiellement important dans le maillage. Bien évidemment, une modélisation éventuellement plus raffinée (on pourrait essayer de supprimer les trous dans le modèle par exemple) pourrait permettre d'éviter ce problème de taille du modèle. Néanmoins, une telle modélisation plus raffinée ne peut pas toujours être mise en oeuvre pour des questions de temps et de validation principalement. Dès lors, il y a schématiquement deux « écoles » pour traiter le problème :

- la première vise à réaliser le maillage le plus fin possible, compte tenu des capacités de calcul dont on dispose ;
- la seconde va utiliser un maillage raisonnablement grossier comme première base du calcul et va chercher à affiner ce maillage par un processus itératif utilisant un remaillage basé sur l'indicateur en quantité d'intérêt ad hoc.

Evidemment, on s'intéresse ici à la deuxième école, même si, à titre de comparaison la première façon de faire a aussi été mise en oeuvre.

Le maillage initial est présenté sur les figures 8.3.1 à 8.3.4. Il comporte 80 000 tétraèdres linéaires et 22 000 nœuds.

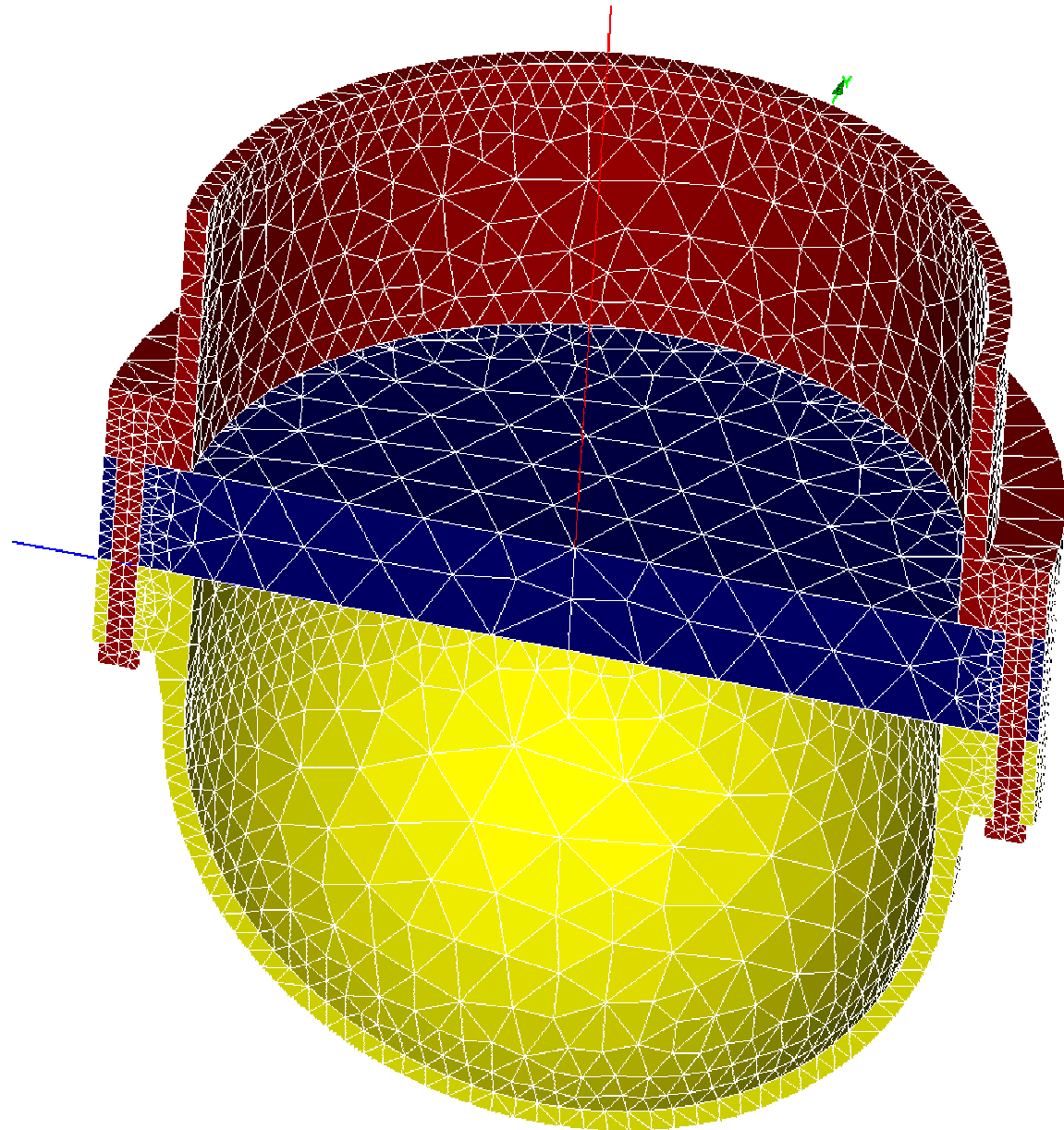


Figure 8.3.1 : Maillage complet.

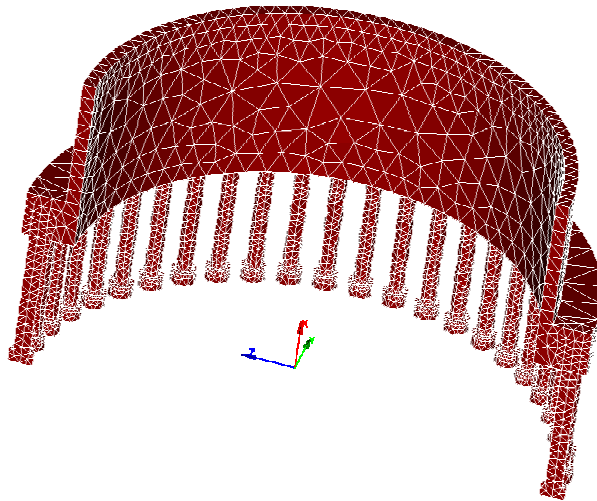


Figure 8.3.2 : Maillage de la plaque.

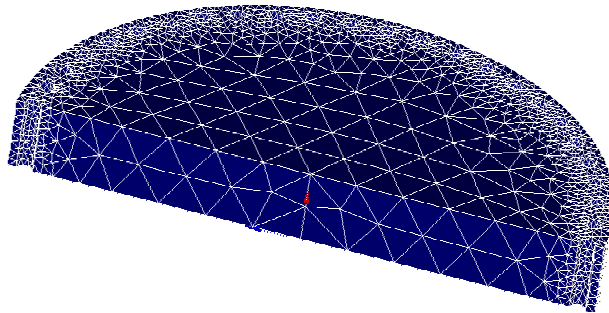


Figure 8.3.3 : Maillage de la plaque.

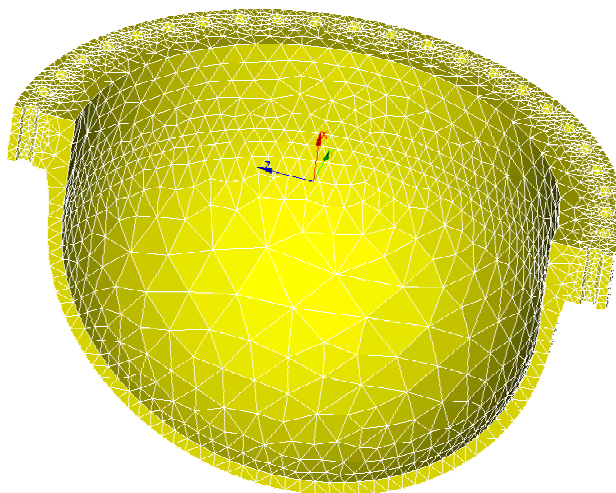


Figure 8.3.4 : Maillage de la calotte hémisphérique.

4 Chargement

Les chargements sont constitués :

- des blocages : verticaux en haut du cylindre (surface bleue de la figure 8.4.1), normaux à toutes les faces de symétrie (surface orange de la figure 8.4.1) et dans le dernier axe suivant la ligne verticale en bas de la calotte hémisphérique (entouré dans la figure 8.4.1) ;
- de la pression de 40 bars à l'intérieur de la cavité constituée de l'intérieur de la calotte hémisphérique et du bord inférieur de la plaque ;
- des conditions de contact décrites précédemment.

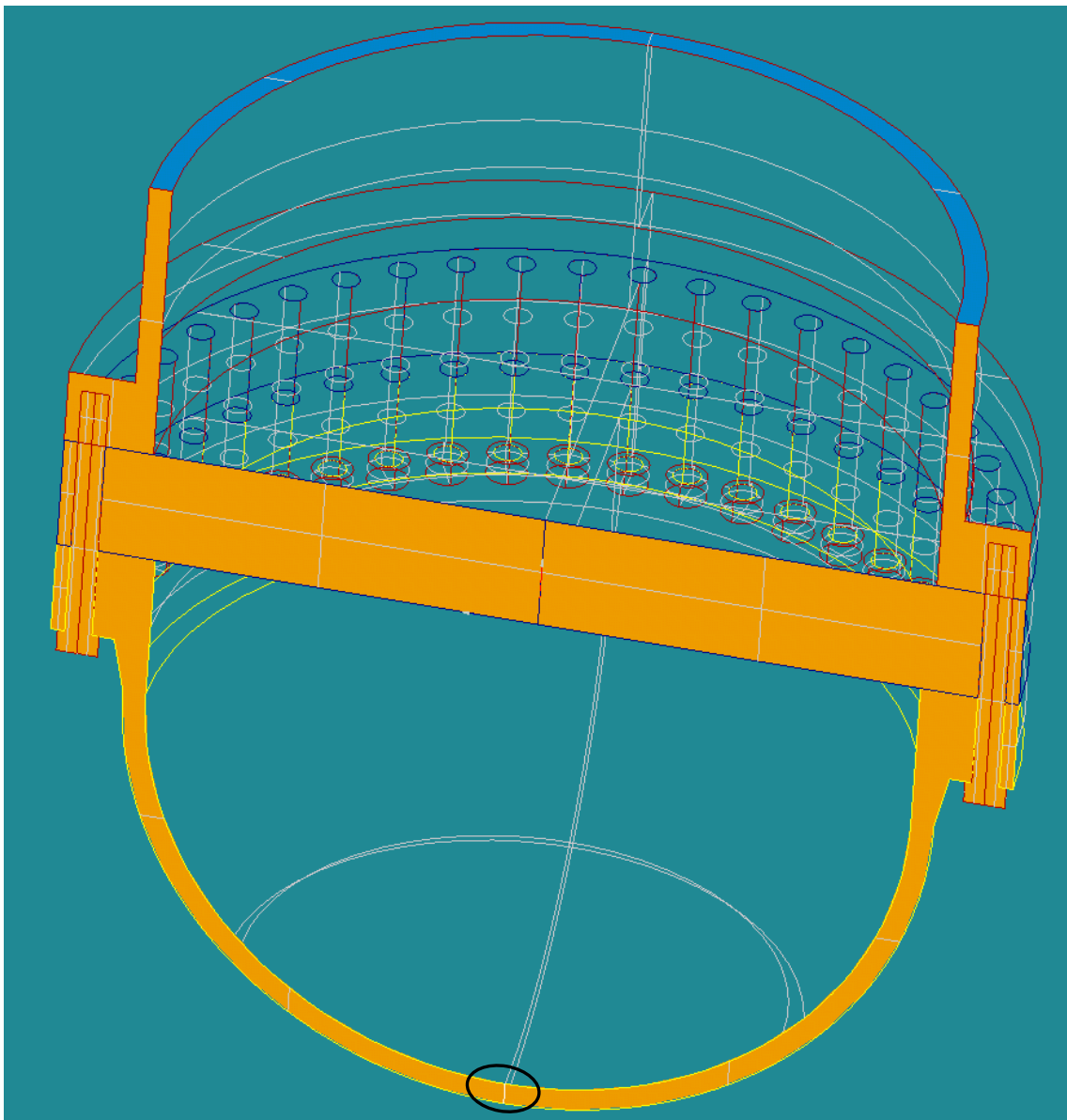


Figure 8.4.1 : Représentation des lieux de blocage.

5 Adaptation du maillage

La non-linéarité engendrée par la présence de contact empêche d'utiliser directement les indicateurs en quantité d'intérêt qui ont été présentés. Néanmoins, on peut linéariser le problème autour de la solution trouvée assez facilement en fixant la situation de contact (i.e. les nœuds en contact et ceux qui ne le sont pas). Pour cela, dans *Code_Aster*, on propose de faire comme suit :

- un premier calcul avec contact ;
- à l'issu de ce calcul, on récupère les nœuds en contact et ceux qui ne le sont pas (cette information est stockée dans une composante d'un champ aux nœuds. 'VALE_CONT', que l'on peut récupérer en python)
- on fait alors un calcul avec un contact « imposé » par la méthode 'GLISSIERE' du mot clé CONTACT (avec cette méthode, c'est l'utilisateur qui indique quels sont les nœuds en contact), en excluant les nœuds trouvés non contactant (utilisation de SANS_GROUP_NO), ce qui constitue le calcul primal (qui est exactement similaire en terme de résultat au premier calcul avec contact)
- le calcul dual est fait avec les mêmes hypothèses que le calcul primal (contact GLISSIERE).

Avec ces hypothèses de contact glissière et de petits déplacement, on a alors affaire à un calcul élastique qui permet d'utiliser les indicateurs en quantité d'intérêt. On notera que cette méthodologie revient à négliger l'évolution du contact pour calculer l'erreur.

En utilisant la quantité d'intérêt « moyenne de la contrainte verticale » dans la partie utile des goujons, on réalise une série de maillages adaptés. Les paramètres de Homard sont fixés comme suit : 2% des éléments, qui représentent la plus grande erreur au sens de la quantité d'intérêt sont raffinés à chaque itération ; pas de déraffinement.

On trouvera dans le tableau 8.5.1 l'évolution de la quantité d'intérêt, du nombre de degrés de liberté et les temps de calcul nécessaires, sur les figures 8.5.1 à 8.5.5 les différents maillages et sur la figure 8.5.6 les isovaleurs de contraintes verticales pour le maillage final (les isovaleurs restent très similaires au cours du processus de raffinement). Enfin la figure 8.5.7 présente la déformée sur le maillage final (la déformée reste aussi très similaire au cours du processus de remaillage).

Maillage	initial	raffiné 1	raffiné 2	raffiné 3	raffiné 4
Nombre de nœuds.	22 000	27 000	36 000	55 000	86 000
Temps calcul (minutes) (1 ^{er} calcul avec contact)	5	7	11	20	86
Contrainte dans les goujons (MPa)	140,4	142,9	143,6	144,0	144,1

Tableau 8.5.1 : Résultats obtenus par adaptation de maillage.

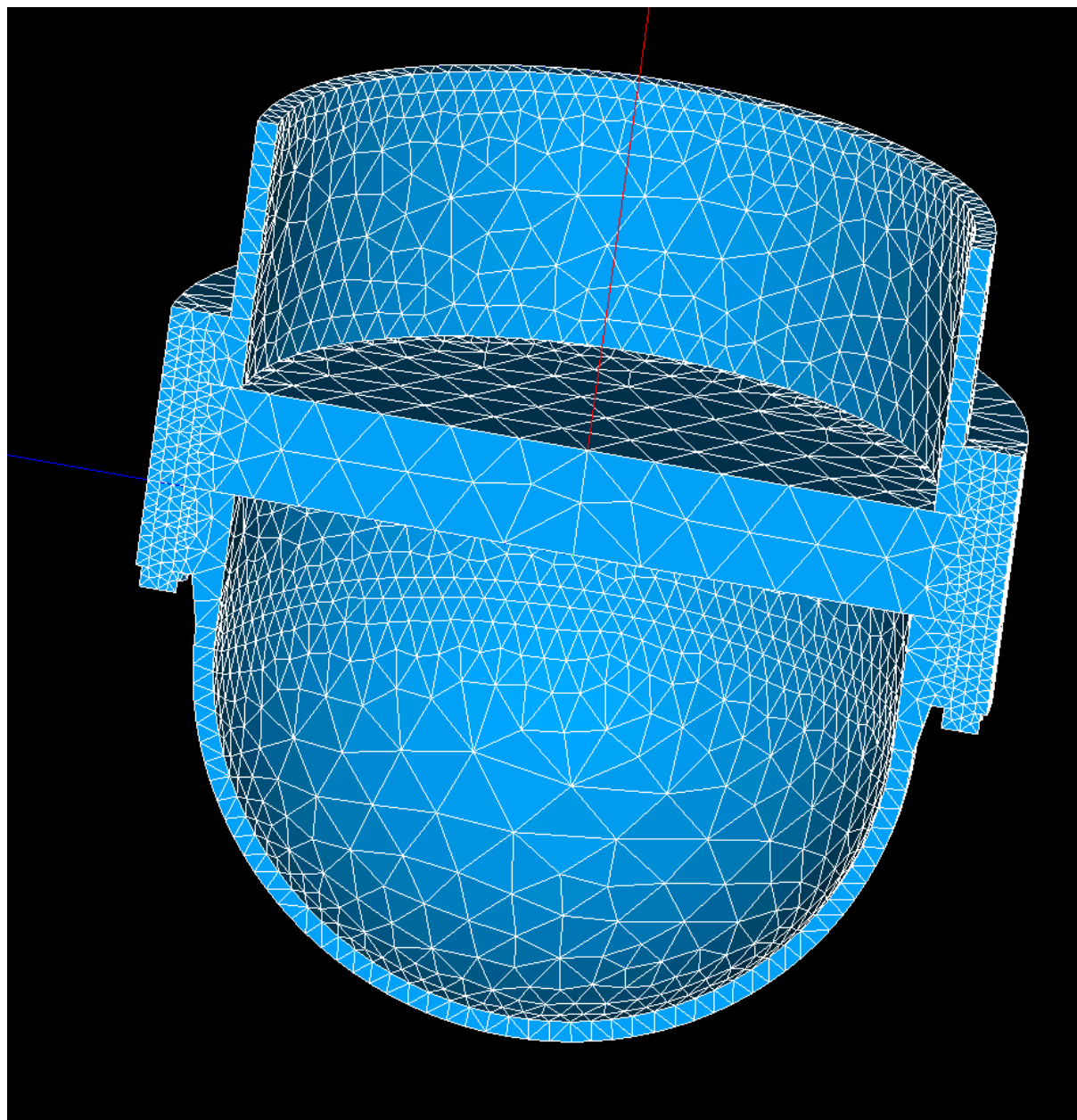


Figure 8.5.1 : Maillage initial.

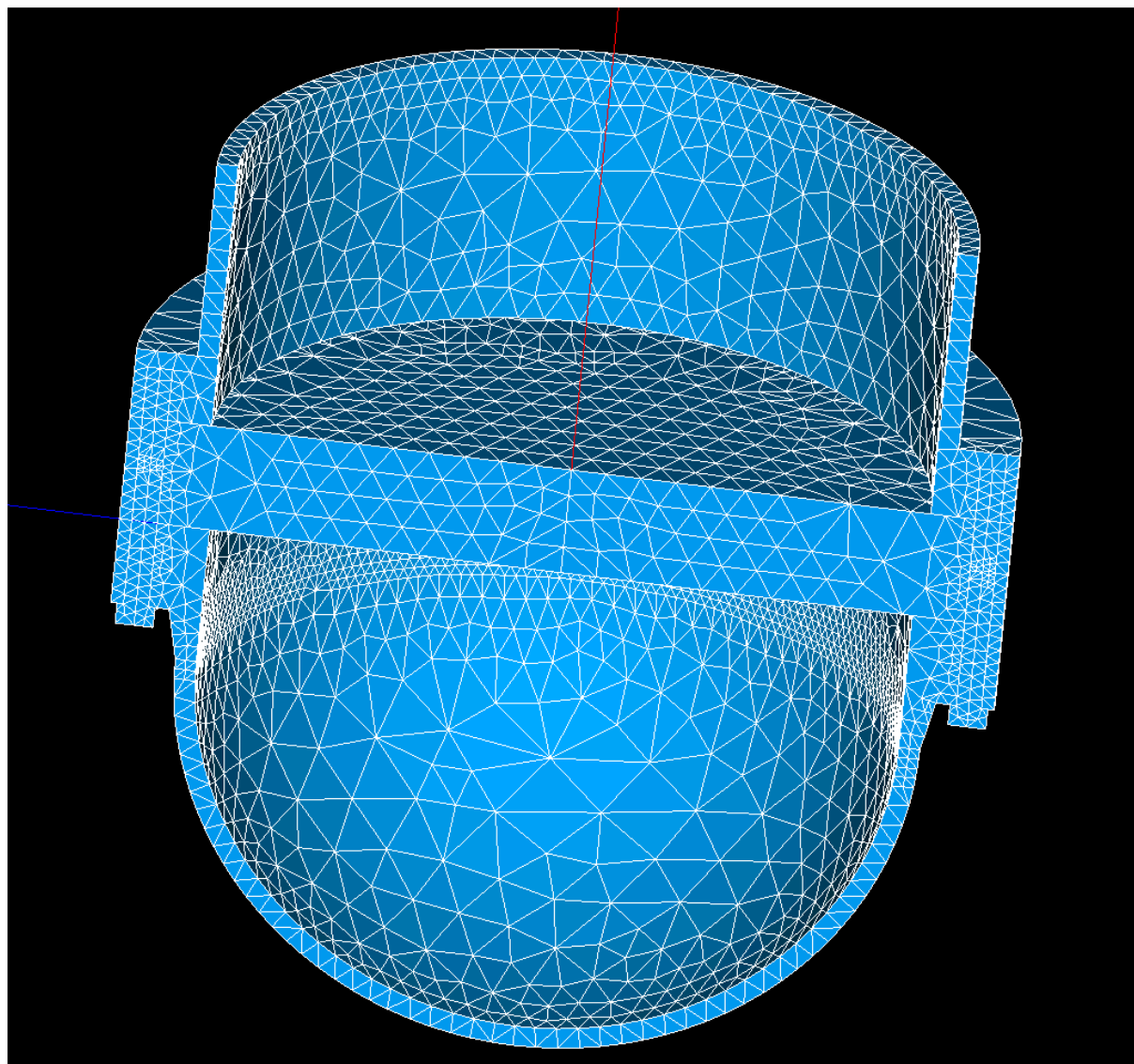


Figure 8.5.2 : Maillage après un raffinement.

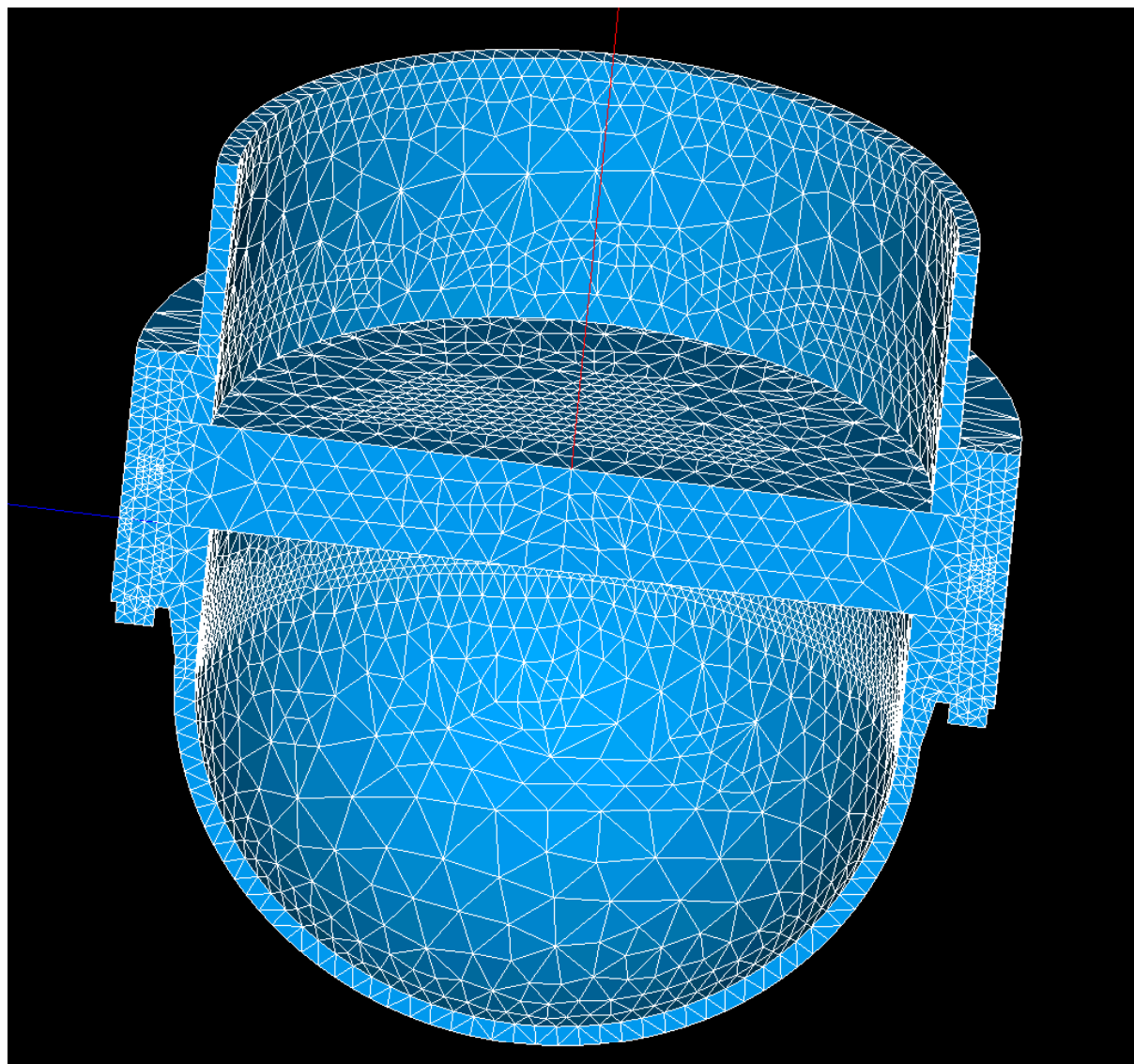


Figure 8.5.3 : Maillage après deux raffinements.

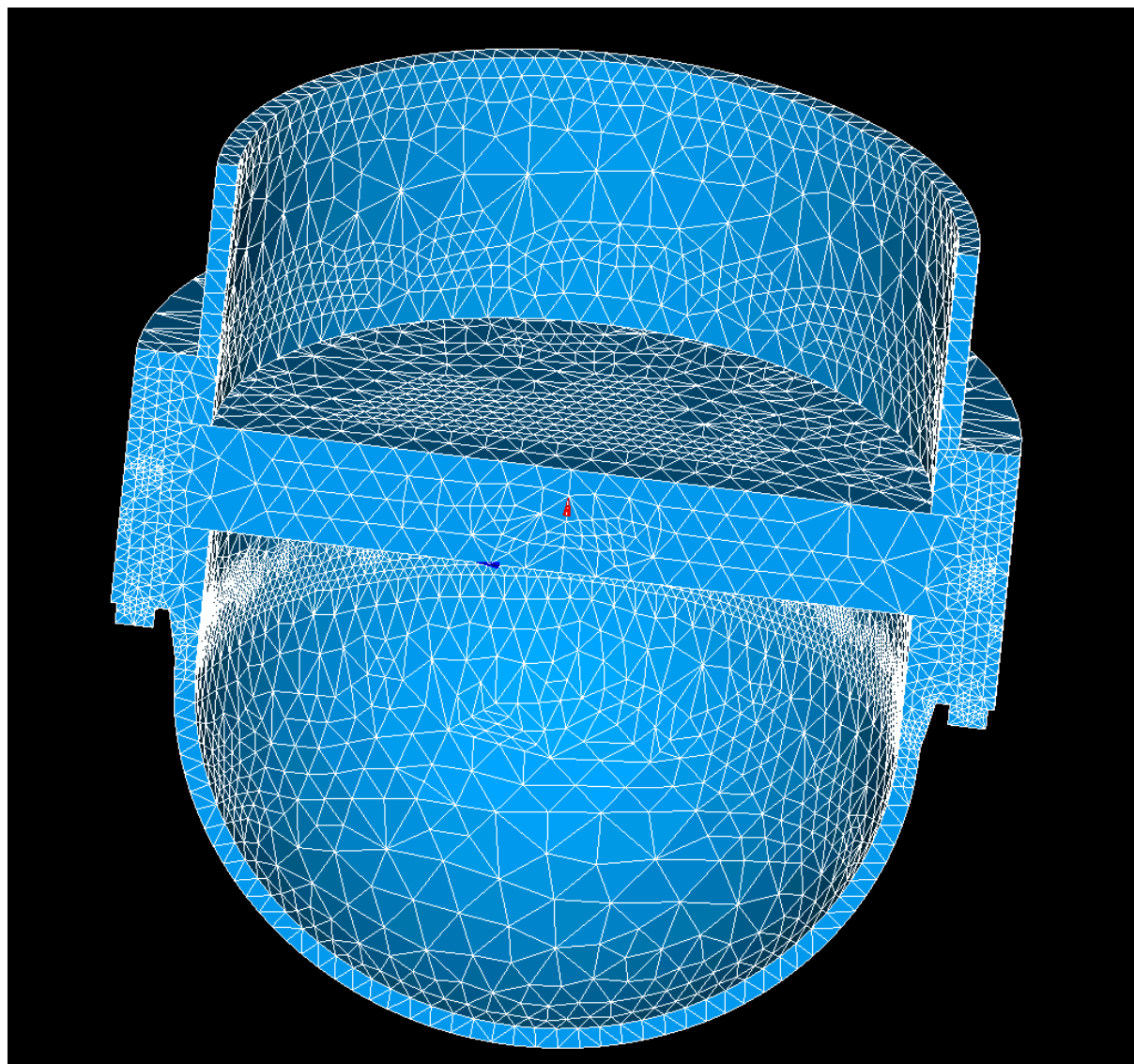


Figure 8.5.4 : Maillage après trois raffinements.

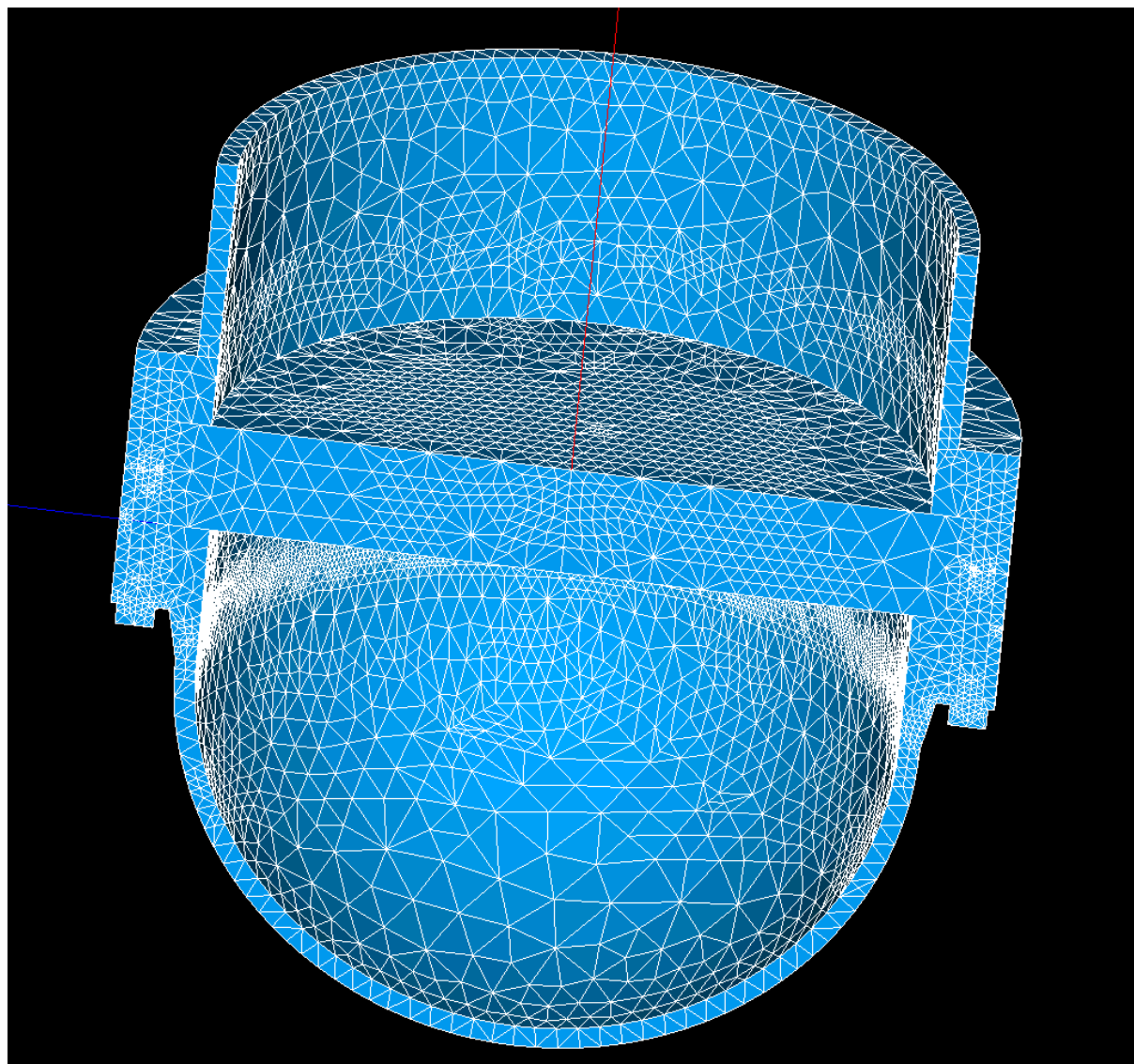


Figure 8.5.5 : Maillage après quatre raffinements.

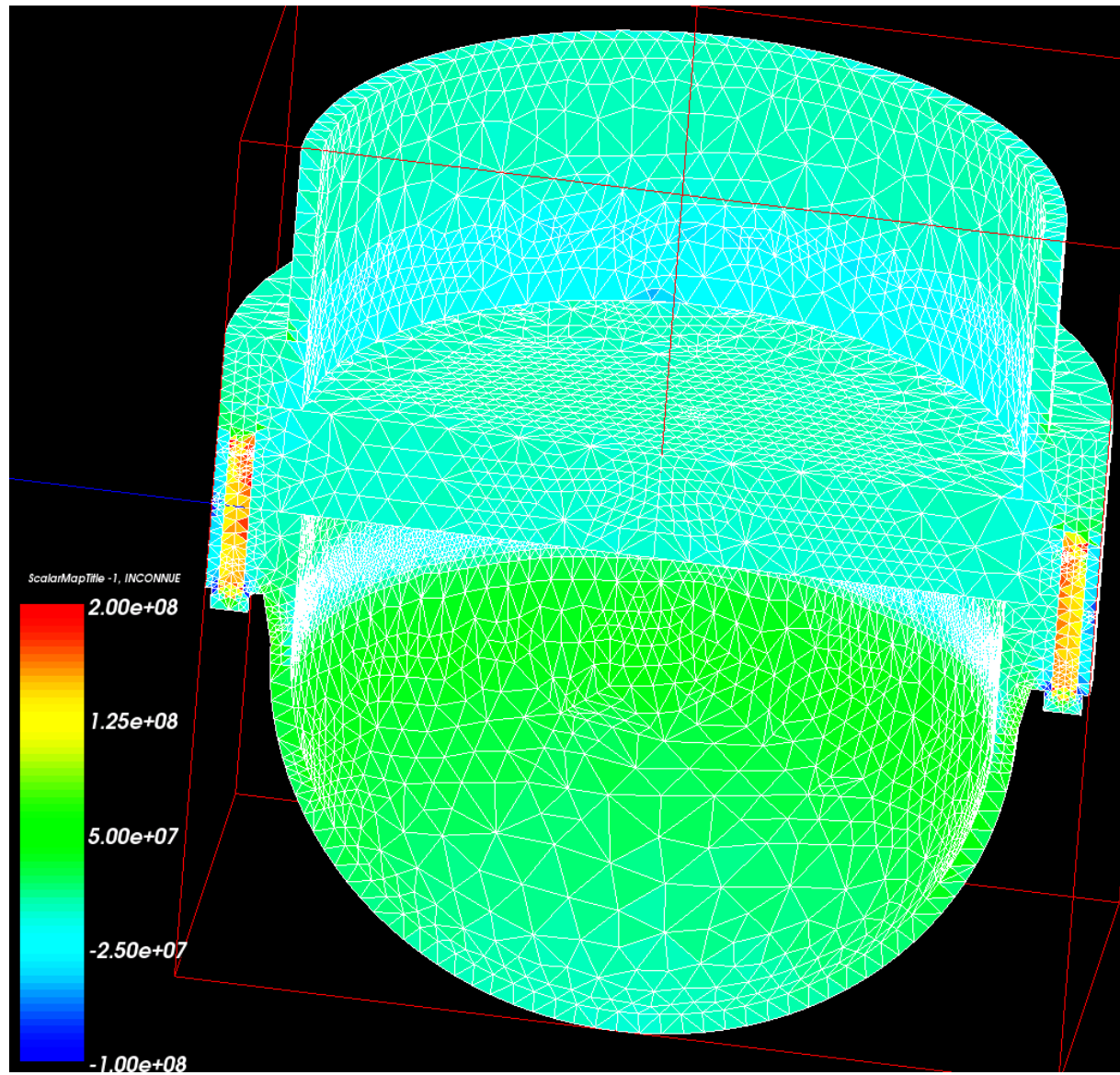


Figure 8.5.6 : Isovaleur de contrainte verticale, maillage final.

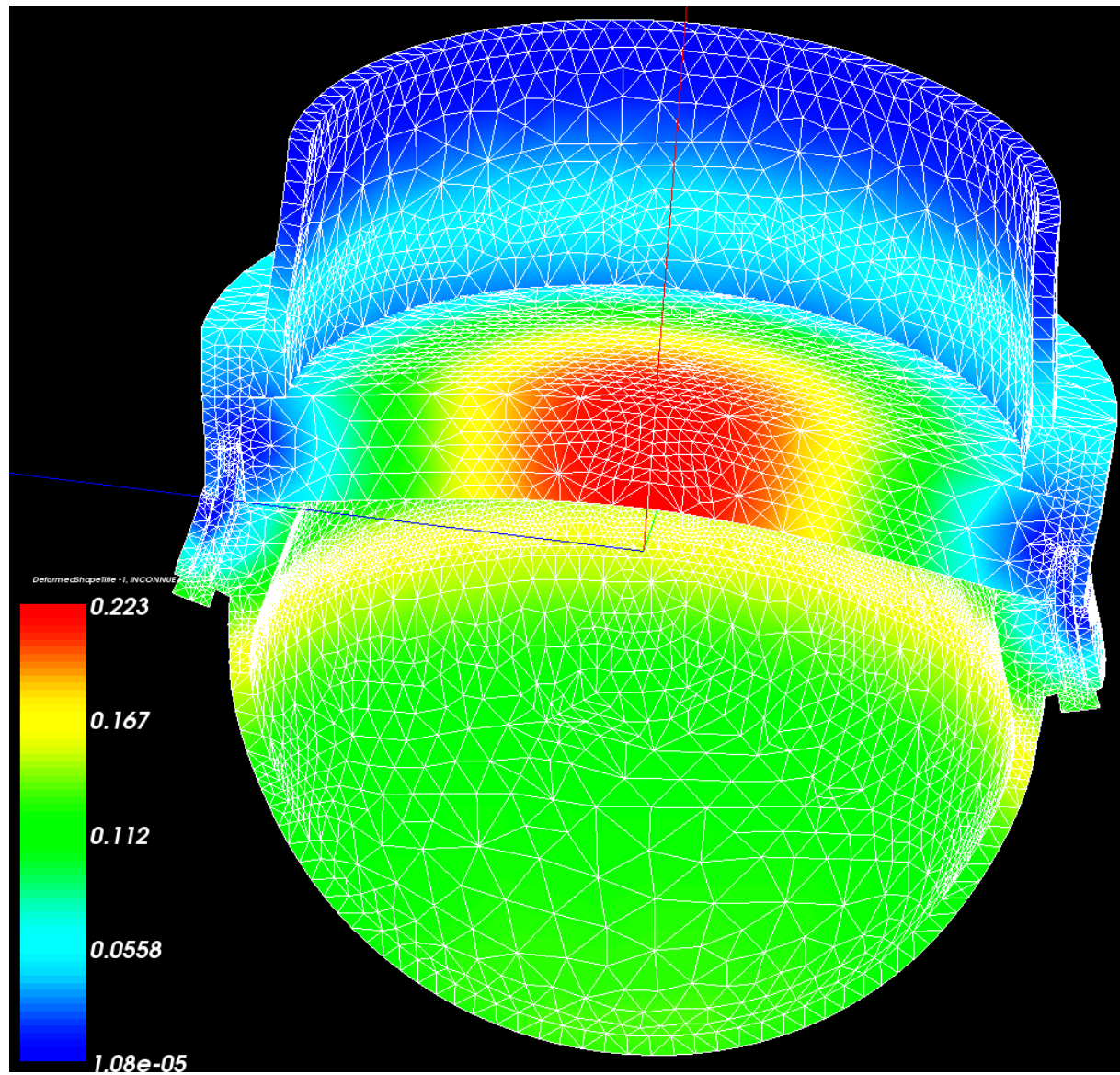


Figure 8.5.7 : Déformée (facteur d'amplification : 300), maillage final.

6 Éléments de comparaison

Comme il est impossible, dans une telle étude industrielle d'obtenir une solution de référence (sur un maillage extrêmement fin), on ne présente ici que deux éléments de comparaison. D'une part la solution obtenue sur un maillage issu du maillage initial raffiné uniformément (une fois), ce qui produit un maillage de 140 000 nœuds. Le maillage deux fois raffiné uniformément dépassant les capacités standard de calcul actuel (plus d'un million de nœuds et présence de contact). D'autre part la solution obtenue selon la « première voie » du paragraphe précédent « stratégie de calcul ». On construit alors un maillage directement à la taille de la puissance de calcul dont on dispose : on trouvera le maillage (190 000 nœuds.) sur la figure 8.6.1.

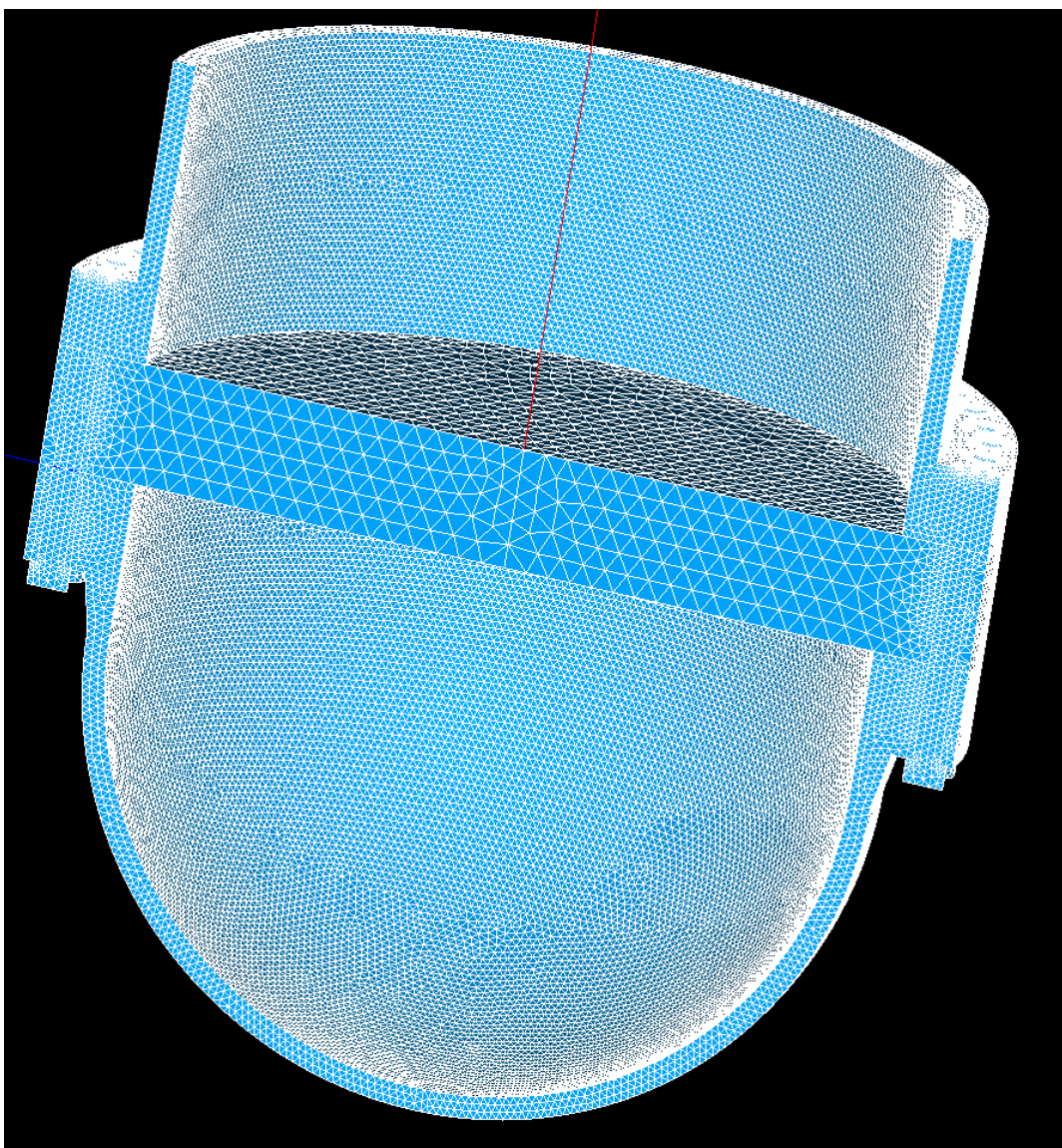


Figure 8.6.1 : Maillage à 190 000 nœuds.

Concernant la quantité d'intérêt, on obtient pour le premier maillage 142.0 MPa et pour le second maillage 138.6 MPa. Ceci semble cohérent avec ce que l'on obtient par raffinement

de maillage suivant la quantité d'intérêt : concernant le premier maillage et les 142 MPa obtenus, ceci conforte le fait que d'une part l'erreur est faible (passage de 140,5 à 142,0 MPa par un raffinement uniforme) et que d'autre part le raffinement guidé par la quantité d'intérêt va « dans le bon sens » (i.e. une augmentation de la contrainte) comme semble l'indiquer le raffinement uniforme. Concernant le second maillage et les 138,6 MPa obtenus, cela semble aussi conforter le fait que l'erreur est faible. Quant à l'obtention d'une valeur de contrainte plus faible, cela ne semble pas contradictoire avec ce que l'on trouve par raffinement guidé par la contrainte : sur le maillage à 190 000 nœuds, les éléments constituant les goujons sont beaucoup plus petits que sur le maillage grossier, donc la géométrie est beaucoup mieux respectée (par raffinement de maillage, la CAO n'est pas prise en compte, donc la géométrie est la géométrie du maillage initial). En particulier, si l'on s'intéresse au volume de la partie utile des goujons (sur laquelle on calcule la quantité d'intérêt), on s'aperçoit que le maillage initial étant plus grossier que le maillage à 190 000 nœuds, le volume sur lequel est calculé la quantité d'intérêt est légèrement plus faible (les cylindres étant discrétisés assez grossièrement). Les 138,6 Mpa nous semblent dès lors plus dus au changement de CAO qu'à une précision plus importante sur la quantité d'intérêt.

7 Conclusion

Dans cette étude, on a montré l'intérêt des quantités d'intérêt en tant que critère de remaillage à double titre :

- d'une part, le remaillage guidé par la quantité d'intérêt semble, avec les éléments de comparaison dont on dispose, tout à fait pertinent et adapté : même s'il ne fait varier la quantité d'intérêt que de quelques pourcents, le processus présente la caractéristique d'être assez rapide et convergent, vers une valeur qui semble raisonnable ;
- d'autre part, ce processus de remaillage a permis d'asseoir la crédibilité de la valeur obtenue (autour de 140 MPa), sachant que les principales sources d'erreur risquent à ce niveau là (quelques pourcents d'erreur) de se trouver ailleurs : dans la fidélité de la CAO à la pièce, dans les hypothèses concernant les conditions aux limites, etc...

Enfin, ce chapitre permet de répondre au dernier objectif partiel de la thèse : l'indicateur d'erreur en quantité d'intérêt programmé dans *Code_Aster*, est utilisable et utilisé dans un processus d'adaptation de maillage dans le cadre d'études de structures industrielles.

Conclusion

1 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt pour le calcul de structures industrielles. Une étude bibliographique a permis de situer l'état de l'art et de faire le point sur les méthodes d'estimation d'erreur globale et locale et sur les techniques d'adaptation de maillages afin de déterminer celles qui sont les plus adaptées pour le calcul de structures en milieu industriel. Pour arriver au terme de ce travail, nous avons dû répondre à quatre objectifs partiels.

Une étude du comportement de l'erreur en quantité d'intérêt en présence de singularité a été menée. Le but de cette étude était de juger si l'utilisation de l'erreur en quantité d'intérêt dans un processus adaptatif fournit des maillages plus pertinents que ceux fournis par l'utilisation de l'erreur en norme de l'énergie. L'originalité de cette étude repose sur le fait que l'erreur (en norme de l'énergie ou en quantité d'intérêt) elle-même est utilisée et non une estimation. Ceci dans le but de s'affranchir de l'approximation de l'erreur fournie par l'estimation. Il a été montré que l'erreur en quantité permettait toujours d'obtenir la meilleure précision à nombre d'éléments fixé. Ceci est particulièrement intéressant dans un cadre industriel où la taille des problèmes permet une marge de manœuvre limitée en terme d'adaptation. Cette étude a permis de répondre au **premier objectif partiel : l'erreur en quantités d'intérêt est *a priori*, sous réserve de pouvoir être approximée correctement, très pertinente dans un contexte de calcul de structures industrielles.**

Pour répondre au **deuxième objectif partiel, une méthode d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt a été développée et implémentée dans *Code_Aster***. Elle est basée sur la relation fondamentale de l'erreur en quantité d'intérêt et sur un estimateur d'erreur globale en norme de l'énergie de type résidus explicites. Cet estimateur ne permet pas d'accéder à des bornes de l'erreur mais à une valeur approchée, contrairement à des estimateurs plus complexes de type implicite. Notre estimateur s'apparente donc à un indicateur d'erreur. De nombreuses quantités d'intérêt ont été introduites ainsi que leur expression en terme de chargement pour le problème dual. La contrainte de Von Mises, quantité mécanique non linéaire particulièrement intéressante en dimensionnement des structures, a notamment été développée. Des exemples numériques ont montré que cet indicateur est suffisant pour guider un processus d'adaptation de maillage, même s'il ne garantit pas de bornes. Ceci permet d'atteindre notre objectif d'obtenir un maillage adapté pour une quantité d'intérêt, différent de l'objectif de mesurer ou d'encadrer l'erreur.

Le **troisième objectif partiel** consistait à **développer une quantité d'intérêt pour la mécanique de la rupture**. Bien souvent, les quantités mécaniques pour les problèmes de fissuration sont soit non linéaires soit leur définition est mal adaptée pour être utilisée comme chargement du problème dual. Une quantité d'intérêt pour l'estimation de l'erreur sur les facteurs d'intensité des contraintes a été développée. Elle est basée sur l'extrapolation des sauts de déplacement sur les lèvres de la fissure par une méthode des moindres carrés. Des exemples numériques, pour diverses configurations de fissure, ont permis de montrer le bon comportement de l'estimateur. Dans *Code_Aster*, l'utilisateur

dispose d'une quantité d'intérêt pour les facteurs d'intensité des contraintes validée utilisable en 2D et 3D pour adapter le maillage dans les études de mécanique de la rupture.

Afin d'évaluer la pertinence pour des structures industrielles des développements réalisés dans ce travail, deux études industrielles ont été mises en œuvre. Elles permettent de répondre au **dernier objectif partiel : utiliser l'indicateur d'erreur en quantité d'intérêt dans un processus d'adaptation de maillage dans le cadre d'études de structures industrielles**. Dans la première étude, il s'agit d'étudier la contrainte de Von Mises sur un rotor HP. La structure est modélisée en deux dimensions axisymétriques. Il résulte de cette étude qu'au cours du processus d'adaptation, la valeur de la quantité d'intérêt (contrainte de Von Mises) converge. La comparaison des valeurs obtenues par un raffinement uniforme montre que celles obtenues par le raffinement guidé par la quantité d'intérêt sont raisonnables. La seconde étude mettait en œuvre un assemblage boulonné. La quantité d'intérêt était la contrainte verticale dans les goujons. La difficulté de cette étude était la modélisation 3D conjuguée à du contact. De nouveau, la valeur de la quantité d'intérêt a convergé vers une valeur qui, au vu d'éléments de comparaison, semble cohérente. A travers ces deux études nous avons montré que la stratégie employée était adaptée au calcul de structures industrielles mais surtout que cette stratégie est utilisable dès à présent dans *Code_Aster*.

2 Perspectives

Les perspectives à donner à ce travail sont nombreuses.

Dans un avenir proche, comme prolongement du travail effectué, il pourrait être pertinent de quantifier l'erreur avant le processus d'adaptation. En effet, si la précision désirée sur une quantité d'intérêt est de quelques pourcents et que le maillage initial est suffisant pour fournir cette précision, il est alors inutile de mettre en œuvre un processus d'adaptation. Ainsi, l'utilisation de véritables estimateurs d'erreur devient indispensable. Comme nous l'avons exposé dans l'état de l'art, un certain nombre d'estimateurs capables de fournir des bornes de l'erreur existent. Certains d'entre eux, les estimateurs implicites semblent les plus adaptés pour l'implémentation dans un code de calcul industriel même s'ils demandent un effort de développement important.

Que l'on dispose ou non d'un véritable estimateur, lors d'un processus d'adaptation, la question de savoir quand arrêter le processus se pose. Plusieurs solutions sont alors possibles. La première, celle que nous avons utilisée dans les applications industrielles, est empirique. Le processus est arrêté lorsque la quantité d'intérêt a « suffisamment » convergé. Une seconde démarche consisterait à utiliser la notion de maillage optimal par rapport à un nombre d'élément (correspondant aux capacités de calcul de la machine) et donc d'étendre le concept présenté dans la partie 1 à l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt. Enfin, la dernière solution, sûrement la plus élégante consisterait à évaluer l'erreur à chaque étape de raffinement et pourquoi pas la coupler avec la notion de maillage optimal (pour une précision donnée par exemple). Il n'existe pas de bonne ou de mauvaise solution : dans un contexte industriel tel que celui d'EDF, c'est le rapport intérêt/coût qui permet de trancher.

Enfin, il pourrait être intéressant d'étudier l'intérêt d'utiliser la méthode d'estimation d'erreur sur les facteurs d'intensité des contraintes issue de la méthode d'extraction basée sur les sauts de déplacement avec une méthode de calcul de ces facteurs d'intensité des contraintes *a priori* plus performante (méthode G-théta par exemple). Ainsi le maillage sera optimisé comme décrit dans le chapitre 6 tandis que les calculs effectifs des facteurs d'intensité des contraintes seront menés avec une méthode G-théta. Il n'est *a priori* pas évident que la solution obtenue sur le maillage optimisé pour une méthode de calcul des facteurs d'intensité des contraintes soit optimisée pour une autre méthode de calcul, néanmoins il est légitime de penser que ce n'est pas complètement décorrélé.

A plus long terme, d'autres questions semblent cruciales pour généraliser l'utilisation de l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt. Nous avons vu à travers une des applications industrielles, qu'il était possible de linéariser un calcul non linéaire (ici à cause du contact) mais cela reste exceptionnel. Un réel approfondissement semble donc nécessaire pour traiter les problèmes de mécanique non linéaire. Bien que nous n'en ayons pas parlé précédemment car éloignées de notre objectif, les pistes sont nombreuses et l'une d'elle semble particulièrement intéressante. Il s'agit des travaux menés par Chamoin (Chamoin, 2007), (Chamoin & Ladevèze, 2008) basés sur l'erreur en dissipation. Mais cela implique de considérer l'erreur en relation de comportement, qui pour les problèmes linéaires de calcul de structures industrielles posent déjà des difficultés de mise en œuvre dans un code industriel.

Dans l'une des applications industrielles présentées, la quantité d'intérêt mise en jeu, la contrainte de Von Mises, est une quantité non linéaire par rapport à la solution. Pour rendre cette quantité utilisable en terme de chargement pour le problème dual, nous l'avons linéarisé autour de l'erreur. En effet, la linéarisation est le traitement généralement employé dans la littérature pour des quantités non linéaires. Or, utiliser la linéarisation suppose que l'erreur est petite. On peut donc se demander si c'est toujours le cas. Un travail à mener est alors d'estimer l'erreur que l'on commet en linéarisant la quantité d'intérêt en comparant l'erreur obtenue par linéarisation et l'erreur obtenue par la méthode adaptée aux quantités non linéaires (Cf. annexe B).

D'un point de vue industriel, il est important qu'une démarche systématique de contrôle d'erreur devienne un standard pour toute mise en œuvre d'étude. Il faut donc se demander comment rendre le calcul d'erreur plus accessible à l'ingénieur de bureau d'étude. Quel niveau d'automatisation faut-il mettre en œuvre dans un code de calcul et plus précisément dans *Code_Aster* ou que faut-il faire pour rendre le code plus ergonomique et plus utilisable ? Seule l'automatisation du problème dual est-elle souhaitable ou faut-il cacher le processus complet d'estimation d'erreur en quantité d'intérêt voire le processus complet d'adaptation de maillage ?

Enfin, dans de nombreux cas, si l'on se contente de raffinement de maillage plutôt que du remaillage complet de la structure, il se peut, comme l'a montré notre deuxième étude

industrielle, que la précision soit limitée par la représentation de la structure par le maillage et non par les capacités de calcul. Ainsi pour rendre le processus d'adaptation plus robuste et efficace, il est souhaitable que le code de calcul soit couplé de manière fine à un mailleur automatique qui dispose de la CAO de la structure. Pour *Code_Aster*, ce n'est pas encore le cas mais grâce à la plate-forme d'intégration Salomé (Salomé, 2008), il semble qu'il ne manque que la prise en compte d'une carte de taille pour que ce soit envisageable. En effet, il faudrait alors considérer le couplage, dans la plate-forme, de *Code_Aster*, de la CAO et du mailleur. Tous les éléments existent, il ne reste qu'à les coupler !

Annexes

Annexe A

Extension aux quantités d'intérêt non linéaires, exemple de l'intégrale J

- 1 Définitions
- 2 Première démarche : séparation des termes
- 3 Seconde démarche : linéarisation

1 Définitions

Dans le cas où Q est non linéaire, l'erreur en quantité d'intérêt est définie par :

$$\mathcal{E}^Q = Q(u) - Q(u^h) \quad [\text{A.1.1}]$$

La théorie développée dans le chapitre 2 ne s'applique plus. Il est donc nécessaire d'appliquer un traitement particulier à la quantité d'intérêt afin de pouvoir l'utiliser comme chargement du problème dual.

Dans le cas où la quantité étudiée ne dépend pas linéairement de la solution du problème, des auteurs (Becker & Rannacher, 2001), (Oden & Prudhomme, 2002) proposent de linéariser la quantité d'intérêt. Plus particulièrement, l'estimation de l'erreur sur l'intégrale J , quantité non linéaire très utile en mécanique de la rupture, a été étudiée par de nombreux auteurs (Heintz & Samuelsson, 2004), (Heintz *et al.*, 2004), (Rüter & Stein, 2004, 2006), (Stein & Rüter, 2004), (Xuan *et al.*, 2006).

Introduite par Rice (Rice, 1968), l'intégrale J permet de caractériser la singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe de fissure. Dédue de la loi de conservation de l'énergie, dans un milieu élastique fissuré plan, l'intégrale J est définie par :

$$J(u) = \int_{\Gamma} \left(W^e n_1 - T \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad [\text{A.1.2}]$$

où Γ est un contour commençant à la lèvres inférieure de la fissure et terminant à la lèvres supérieure de la fissure, $W^e = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon$ est la densité d'énergie de déformation, T est la traction donnée par $T = \sigma \cdot n$ et $n = (n_1, n_2)$ est la normale sortante du contour Γ .

Cette intégrale peut être également être exprimée sur un domaine :

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\nabla \chi \cdot \sigma(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} - W^e \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right) d\Omega \quad [\text{A.1.3}]$$

où $\chi \in H^1(\Omega)$ est une fonction de pondération qui est égale à un en pointe de fissure et s'annule sur Γ . Pour un χ donné, $J(u)$ est une fonctionnelle quadratique bornée de u .

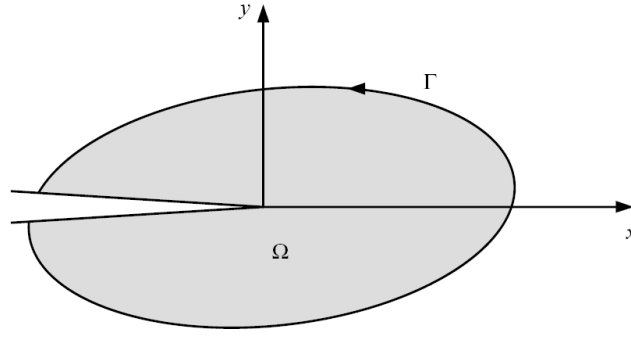


Figure A.1 : Fissure avec le contour et le domaine de l'intégrale J (Xuan *et al.*, 2006).

Deux démarches différentes sont employées pour utiliser cette quantité non linéaire : la première est basée sur la séparation du terme linéaire et du terme quadratique, l'autre est basée sur la linéarisation de l'intégrale.

2 Première démarche : séparation des termes

Cette démarche, présentée dans (Xuan *et al.*, 2006), consiste à séparer le terme linéaire et le terme quadratique puis de les traiter séparément.

Afin d'estimer l'erreur sur J , il est intéressant de rendre la dépendance quadratique de $J(u)$ plus explicite. Dans ce but, la forme bilinéaire $\bar{q}(w, v): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie telle que :

$$\bar{q}(w, v) = \int_{\Omega} \nabla \chi \cdot \sigma(w) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma(w) : \varepsilon(v) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_1} d\Omega \quad [\text{A.2.1}]$$

ainsi que sa partie symétrique $q(w, v): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$q(w, v) = \frac{1}{2} (\bar{q}(w, v) + \bar{q}(v, w)) \quad [\text{A.2.2}]$$

Avec ces définitions, il est clair que $J(u) = q(u, u)$ et il existe une constante η telle que :

$$|q(v, v)| \leq c \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad [\text{A.2.3}]$$

Pour des raisons pratiques, χ est choisie linéaire par morceau sur l'ensemble des éléments E . En exploitant la bilinéarité et la symétrie de $q(w, v)$, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} J(u) - J(u^h) &= q(u, u) - q(u^h, u^h) \\ &= q(u - u^h, u - u^h) + 2q(u, u) - 2q(u^h, u^h) \\ &= q(e, e) + 2q(e, u^h) \end{aligned} \quad [\text{A.2.4}]$$

Ces deux termes peuvent être bornés :

$$L^- \leq q(e, u^h) \leq L^+ \quad \text{et} \quad |q(e, e)| \leq Q \quad [\text{A.2.5}]$$

Ceci fournit les bornes J^+ et J^- pour $J(u)$:

$$J^- \equiv J(u^h) - Q + 2L^- \leq J(u) \leq J(u^h) + Q + 2L^+ \equiv J^+ \quad [\text{A.2.6}]$$

La forme bilinéaire $q(e, u^h)$ étant linéaire en e , la procédure pour obtenir les bornes L^+ et L^- revient à obtenir des bornes pour l'erreur sur une quantité linéaire. Ainsi les techniques exposées dans le chapitre 2 et le chapitre 5 sont adaptées.

Enfin l'obtention de la borne Q est encore plus simple. En effet, en utilisant $v = e$ et en choisissant χ linéaire par morceau, l'équation [A.2.3] devient :

$$|q(e, e)| \leq c_\chi \|e\|^2 \quad [\text{A.2.7}]$$

Pour l'élasticité linéaire, Xuan *et al.* (Xuan *et al.*, 2006) ont montré qu'une valeur c_χ adaptée de la constante de continuité c est donné par :

$$c_\chi = \max_E \frac{(3\kappa + 4\mu) |\nabla \chi|^2}{4 \sqrt{(3\kappa + \mu) \left(3\mu \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right)^2 + (3\kappa + 4\mu) \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_2} \right)^2 \right)}} \quad [\text{A.2.8}]$$

où μ est un coefficient de Lamé et $3\kappa = 3\lambda + 2\mu$ est le module de rigidité à la compression.

Ainsi la détermination de Q est directe dès lors qu'une borne de la norme en énergie de l'erreur a été déterminée.

3 Seconde démarche : linéarisation

Cette démarche repose sur la linéarisation de l'intégrale J . La fonctionnelle linéaire $J_\tau(v)$, dans le cas où l'intégrale J est définie comme une intégrale de contour [A.1.2], est donnée par (Stein & Rüter, 2004) :

$$J_\tau(v) = \int_\Gamma \sigma(u^h) : \varepsilon(v) \cdot n_1 d\Gamma - \int_\Gamma T(v) \frac{\partial u^h}{\partial x_1} d\Gamma - \int_\Gamma T(u^h) \frac{\partial v}{\partial x_1} d\Gamma \quad [\text{A.3.1}]$$

Dans le cas où l'intégrale J est définie comme une intégrale de domaine [A.1.3], la fonctionnelle linéaire est donnée par :

$$J_\tau(v) = \int_\Omega \nabla \chi \left(\sigma(v) \cdot \frac{\partial u^h}{\partial x_1} + \sigma(u^h) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) d\Omega - \int_\Omega \sigma(u^h) : \varepsilon(v) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x_1} d\Omega \quad [\text{A.3.2}]$$

La fonctionnelle $J_\tau(v)$ étant linéaire, la procédure pour obtenir des bornes est celle décrite dans le chapitre 5.

Il faut noter que ces deux expressions peuvent être obtenues en utilisant la démarche décrite précédemment, en omettant le terme quadratique.

Annexe B

Extension de l'erreur en quantités d'intérêt aux problèmes non linéaires

- 1 Approche générale
- 2 Application au problème d'élasticité linéaire statique

1 Approche générale

Pour les problèmes non linéaires, les simplifications utilisées dans le chapitre 2 ne sont plus valables. Il faut alors repartir des équations du problème primal.

Le point de départ de l'estimation d'erreur en quantités d'intérêt consiste à trouver une relation directe entre le résidu $R_h^u(v)$ et l'erreur $\mathcal{E}^Q$. Dans ce but, le problème suivant est introduit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ A(u;v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad [\text{B.1.1}]$$

où $A(\cdot; \cdot)$ est une forme semi-linéaire et $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V . La convention selon laquelle les formes semi-linéaires telles que $A(u;v)$ sont linéaires pour les arguments qui suivent le point-virgule sera utilisée.

Afin de mesurer l'erreur $\mathcal{E}^Q$, suivant l'approche de Becker et Rannacher (Becker & Rannacher, 2001) et (Oden & Prudhomme, 2002), le problème de minimisation suivant est considéré :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ Q(u) = \inf_{z \in S} Q(z) \\ \text{où} \\ S = \{z \in V; A(z;v) = L(v), \forall v \in V\} \end{cases} \quad [\text{B.1.2}]$$

Il faut noter que si le problème initial admet une solution unique alors l'ensemble S se réduit à un singleton et le problème de minimisation est trivial.

Le minima u correspond à un point selle $(u, \omega) \in V \times V$ du lagrangien

$$\mathcal{L}(u, \omega) = Q(u) + L(\omega) - A(u; \omega) \quad [\text{B.1.3}]$$

où ω est la fonction d'influence (ou multiplicateur de Lagrange ou variable adjointe) correspondant au choix de la quantité d'intérêt Q .

Les points critiques (u, ω) de $\mathcal{L}$ sont tels que :

$$\mathcal{L}'((u, \omega); (v, \tilde{v})) = 0 \quad \forall (v, \tilde{v}) \in V \times V \quad [\text{B.1.4}]$$

Puisque pour tout $(v, \tilde{v}) \in V \times V$,

$$\mathcal{L}'((u, \omega); (v, \tilde{v})) = \mathcal{Q}'(u; v) - A'(u; v, \omega) + L(\tilde{v}) - A(u; \tilde{v}) \quad \forall (v, \tilde{v}) \in V \times V \quad [\text{B.1.5}]$$

Pour résoudre le problème de minimisation, le couple $(u, \omega) \in V \times V$ est cherché tel que :

$$\begin{cases} A(u; \tilde{v}) = L(\tilde{v}) & \forall \tilde{v} \in V \\ A'(u; v, \omega) = \mathcal{Q}'(u; v) & \forall v \in V \end{cases} \quad [\text{B.1.6}]$$

La première équation du système précédent est le problème primal pour u , la seconde équation est le problème adjoint ou dual pour ω , et pour u donné, elle est une équation variationnelle linéaire pour la fonction d'influence ω correspondant au choix $\mathcal{Q}$ de la quantité d'intérêt.

On suppose maintenant que, pour des raisons pratiques, le problème initial est insurmontable. et on considère alors un problème simplifié en utilisant une autre forme bilinéaire $A_0(\cdot; \cdot)$ définie sur un sous-espace $V_0 \subseteq V$. Le nouveau problème de minimisation est considéré :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in V_0 \text{ tel que} \\ \mathcal{Q}(u_0) = \inf_{z \in S_0} \mathcal{Q}(z) \\ \text{où} \\ S_0 = \{z \in V_0; A_0(z; \tilde{v}) = L(\tilde{v}), \forall \tilde{v} \in V_0\} \end{cases} \quad [\text{B.1.7}]$$

Pour résoudre ce problème, le couple $(u_0, \omega_0) \in V_0 \times V_0$ est cherché tel que :

$$\begin{cases} A_0(u_0; \tilde{v}) = L(\tilde{v}) & \forall \tilde{v} \in V_0 \\ A'_0(u_0; v, \omega_0) = \mathcal{Q}'(u_0; v) & \forall v \in V_0 \end{cases} \quad [\text{B.1.8}]$$

Si $V_0 = V$, alors u_0 pourrait correspondre à une approximation de u à partir d'un modèle simplifié. Si $V_0 = V^h$, sous-espace éléments finis de V , alors $u_0 = u^h$, approximation éléments finis de u . En supposant que (u, ω) et (u_0, ω_0) existent, l'erreur primal e_0 et l'erreur duale ε_0 sont définies telles que :

$$e_0 = u - u_0 \text{ et } \varepsilon_0 = \omega - \omega_0 \quad [\text{B.1.9}]$$

Le résidu qui caractérise la manière dont le couple (u_0, ω_0) ne satisfait pas le problème, est également défini :

$$\begin{cases} R(u_0; \tilde{v}) = L(\tilde{v}) - A_0(u_0; \tilde{v}) & \forall \tilde{v} \in V_0 \\ \bar{R}(u_0; \omega_0, v) = \mathcal{Q}'(u_0; v) - A'_0(u_0; v, \omega_0) & \forall v \in V_0 \end{cases} \quad [\text{B.1.10}]$$

On rappelle que notre but est de relier l'erreur en quantité d'intérêt ε^Q et le résidu. Ceci est assuré par la relation suivante :

$$\varepsilon^Q = \mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(u_0) = R(u_0; \omega) + \Delta A + \Delta Q \quad [\text{B.1.11}]$$

où ΔA et ΔQ font intervenir les dérivées secondes et troisièmes de A et $\mathcal{Q}$. Pour une démonstration détaillée, il faudra se reporter à (Oden & Prudhomme, 2002) mais les grandes lignes sont données ici.

Le lagrangien est défini par :

$$\mathcal{Q}(u) = \mathcal{L}(u, \omega) - (L(\omega) - A(u; \omega)) = \mathcal{L}(u, \omega) \quad [\text{B.1.12}]$$

Pour (u_0, ω_0) solution de [B.1.7], le lagrangien devient :

$$\mathcal{Q}(u_0) = \mathcal{L}(u_0, \omega_0) - (L(\omega_0) - A(u_0; \omega_0)) = \mathcal{L}(u_0, \omega_0) - R(u_0; \omega_0) \quad [\text{B.1.13}]$$

Donc :

$$\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(u_0) = R(u_0; \omega_0) + \mathcal{L}(u, \omega) - \mathcal{L}(u_0, \omega_0) \quad [\text{B.1.14}]$$

On rappelle l'expression du développement de Taylor avec reste intégral pour une fonctionnelle F :

$$F(u+v) - F(u) = \frac{1}{2}F'(u; v) + \frac{1}{2}F'(u+v; v) + \frac{1}{2}\int_0^1 F'''(u+sv; v, v, v)(s-1)s ds \quad [\text{B.1.15}]$$

En utilisant ce développement pour $\mathcal{L}$ avec $u = (u_0, \omega_0)$ et $v = (e_0, \varepsilon_0)$:

$$\mathcal{L}(u, \omega) - \mathcal{L}(u_0, \omega_0) = \frac{1}{2}\mathcal{L}'((u_0, \omega_0); (e_0, \varepsilon_0)) + \frac{1}{2}\mathcal{L}'((u, \omega); (e_0, \varepsilon_0)) + \Delta\mathcal{L} \quad [\text{B.1.16}]$$

où $\Delta\mathcal{L}$ fait intervenir la dérivée troisième de $\mathcal{L}$. Puisque (u, ω) est un point critique de L alors $\mathcal{L}'((u, \omega); (e_0, \varepsilon_0)) = 0$.

(e_0, ε_0) étant un élément de $V \times V$ et par définition de $\mathcal{L}'$:

$$\mathcal{L}'((u_0, \omega_0); (e_0, \varepsilon_0)) = \underbrace{\mathcal{Q}'(u_0; e_0) - A'(u_0; e_0, \omega_0)}_{\bar{R}(u_0; \omega_0, e_0)} + \underbrace{L'(\varepsilon_0) - A(u_0; \varepsilon_0)}_{R(u_0; \varepsilon_0)} \quad [\text{B.1.17}]$$

On montre également (Oden & Prudhomme, 2002) que $\Delta\mathcal{L}$ peut s'exprimer par la somme de ΔA et ΔQ , termes faisant intervenir des dérivées secondes et troisièmes de A et Q .

Finalement on obtient :

$$\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(u_0) = R(u_0; \omega_0) + \frac{1}{2}R(u_0; \varepsilon_0) + \frac{1}{2}\bar{R}(u_0; \omega_0, e_0) + \Delta A + \Delta Q \quad [\text{B.1.18}]$$

Le résidu $\bar{R}$ peut se réécrire en fonction de R :

$$\bar{R}(u_0; \omega_0, e_0) = R(u_0; \varepsilon_0) + \Delta R \quad [\text{B.1.19}]$$

où ΔR fait intervenir des dérivées secondes de A et Q .

Ce qui démontre la relation liant l'erreur en quantité d'intérêt au résidu :

$$\varepsilon^Q = \mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(u_0) = R(u_0; \omega) + \Delta A + \Delta Q \quad [\text{B.1.20}]$$

avec ΔA et ΔQ , termes faisant intervenir des dérivées secondes et troisièmes de A et Q .

2 Application au problème d'élasticité linéaire statique

Dans le cas de l'élasticité linéaire statique, $A(u; v) = a(u, v)$. Comme $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire, nous avons également $A'(u; v, \omega) = a(v, \omega)$ et $\Delta A = 0$. De plus, si $\mathcal{Q}(\cdot)$ est une forme linéaire alors $\mathcal{Q}'(u; v) = \mathcal{Q}(v)$ et $\Delta Q = 0$. On considère que $V_0 = V^h$, sous-espace éléments finis

de V , alors $(u_0, \omega_0) = (u^h, \omega^h)$, approximation éléments finis de (u, ω) . Ainsi, le problème primal et le problème dual deviennent :

$$\begin{cases} a(u, v) = l(v) & \forall v \in V \\ a(v, \omega) = Q(v) & \forall v \in V \end{cases} \quad [\text{B.2.1}]$$

et la relation liant l'erreur en quantité d'intérêt au résidu :

$$\varepsilon^Q = Q(u) - Q(u_0) = Q(e) = R_h^u(\omega) \quad [\text{B.2.2}]$$

En remplaçant ω par $\varepsilon + \omega^h$ et en vertu de la propriété d'orthogonalité :

$$Q(e) = R_h^u(\varepsilon) \quad [\text{B.2.3}]$$

Enfin la nouvelle représentation de l'erreur est donné par :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) \quad [\text{B.2.4}]$$

L'expression donnée dans le chapitre 2 est ainsi retrouvée.

Annexe C

Commandes Code_Aster

1 Mise en œuvre et utilisation dans Code_Aster

2 Utilisation

1 Mise en œuvre et utilisation dans Code_Aster

L'estimateur d'erreur en quantité d'intérêt est implémenté dans *Code_Aster* en mécanique pour tous les éléments, pour les modélisations C_PLAN, D_PLAN, AXIS, 3D. On notera que *Code_Aster* est le seul code industriel dans lequel un estimateur en quantité d'intérêt est disponible.

	$Q(v)$	Mot clé de AFFE_CHAR_MECA	Composante
Moyenne d'une composante du déplacement sur un contour	$\frac{1}{ \gamma } \int_{\gamma} v_x d\Gamma$	FORCE_CONTOUR	FX=1 .
	$\frac{1}{ \gamma } \int_{\gamma} v_y d\Gamma$	FORCE_CONTOUR	FY=1 .
Moyenne d'une composante du déplacement sur un sous-domaine	$\frac{1}{ \omega } \int_{\omega} v_x d\Omega$	FORCE_INTERNE	FX=1 .
	$\frac{1}{ \omega } \int_{\omega} v_y d\Omega$	FORCE_INTERNE	FY=1 .
Moyenne du déplacement normal sur un contour	$\frac{1}{ \gamma } \int_{\gamma} v_n d\Gamma$	PRES_REP	PRES=1 .
Moyenne d'une composante des contraintes sur un sous-domaine	$\frac{1}{ \omega } \int_{\omega} \sigma_{xx} d\Omega$	EPSI_INIT	EPXX=1 .
	$\frac{1}{ \omega } \int_{\omega} \sigma_{yy} d\Omega$	EPSI_INIT	EPYY=1 .
	$\frac{1}{ \omega } \int_{\omega} \sigma_{xy} d\Omega$	EPSI_INIT	EPXY=0 . 5

Tableau C.1.1 : Quantités d'intérêt mises en œuvre dans AFFE_CHAR_MECA.

Pour estimer l'erreur en quantité d'intérêt, nous avons vu qu'il fallait résoudre un problème adjoint dont le chargement en effort est la quantité d'intérêt. Le tableau 1 résume et regroupe les chargements à imposer dans *Code_Aster*, par le biais de la commande AFFE_CHAR_MECA, pour chacune des quantités d'intérêt. Le tableau est donné pour du 2D mais le 3D se déduit facilement. Pour les quantités composantes des contraintes, la valeur à indiquer est 1. pour les termes diagonaux et 0.5 pour les autres.

Lorsque les quantités d'intérêt ne sont pas linéaires ou lorsque leur expression ne permet pas de les exprimer facilement en terme de chargement un traitement particulier est nécessaire. Pour les quantités non-linéaires, la théorie ne s'applique pas ; c'est pourquoi il faut les linéariser. La contrainte de Von Mises en est l'exemple typique. La linéarisation nous amène à la formule suivante :

$$Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \left(\frac{3}{2\sigma_{vm}(u^h)} \sigma^d(u^h) \right) : \sigma(v) d\Omega \quad [C.1.1]$$

Ainsi on approche la quantité d'intérêt Von Mises par une autre quantité linéaire. Le chargement à imposer dans *Code_Aster* est un champ de contrainte composé :

$$\frac{3K}{2} \frac{\sigma^d(u^h)}{\sigma_{vm}(u^h)} \quad [C.1.2]$$

Lorsque la définition de la quantité n'est pas adaptée à l'expression d'un chargement, il faut, là aussi, utiliser un traitement qui sera propre à chaque quantité d'intérêt. Pour nos applications, les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) sont des grandeurs intéressantes. En utilisant une méthode basée sur l'extrapolation des sauts des déplacements sur les lèvres de la fissure, on peut exprimer les FIC de la manière suivante, avec $C=1$ en contrainte plane et $C=1-\nu^2$ en déformation plane :

$$K = \frac{2C}{r_{max}^2} \int_{\Gamma} \sqrt{r} [U(r)] dr \quad [C.1.3]$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression suivante :

$$Q(v) = K_i(v) = \int_{\Gamma^{sup}} f^{sup} \cdot v dr + \int_{\Gamma^{inf}} f^{inf} \cdot v dr \quad [C.1.4]$$

avec $f^{sup} = \frac{2C}{r_{max}^2} g(r) \sqrt{r}$ et $f^{inf} = -\frac{2C}{r_{max}^2} g(r) \sqrt{r}$; $g(r)$ est le vecteur qui oriente la fissure.

Dans *Code_Aster*, ce vecteur est connu sous le nom de `VECT_K1`. On voit ainsi qu'il faut imposer un effort sur chacune des lèvres de la fissure (f^{sup} et f^{inf}). Le tableau C.1.2 reprend ces deux résultats.

	$Q(v)$	Mot clé de AFFE_CHAR_MECA_F	Composante
Moyenne de la contrainte de Von Mises	$\frac{1}{ \omega } \int_{\omega} \sigma_{vm} d\Omega$	SIGMA_INTERNE	Champ composé
Facteur d'intensité de contrainte	$K_I \ K_{II} \ K_{III}$	FORCE_CONTOUR	F+ sur lèvre sup. F- sur lèvre inf.

Tableau C.1.2 : Quantités d'intérêt mises en œuvre dans `AFFE_CHAR_MECA_F`.

2 Exemple d'un fichier de commande Code_Aster

On présente un exemple de fichier de commande pour un problème d'élasticité linéaire pour la quantité d'intérêt moyenne de déplacement dans un sous domaine. Il est important de noter qu'un groupe de maille (ici nommé GRMAQI) doit exister. Pour une souplesse d'utilisation, on conseille de créer ce groupe au niveau du fichier de commande par le biais de la commande `DEFI_GROUPE`. Il est également conseillé de définir les conditions de Dirichlet indépendamment des autres chargements, l'espace de solutions du problème primal et du problème dual étant le même.

```
# RESOLUTION DU PROBLEME

BLOC=AFFE_CHAR_MECA (
    MODELE=MO,
    FACE_IMPO=( _F (GROUP_MA='GRMA1', DY=0.0, ),
                _F (GROUP_MA='GRMA2', DY=0.91333, ), ), );

CHARG=AFFE_CHAR_MECA (MODELE=MO,
    FORCE_CONTOUR=( _F (GROUP_MA='GRMA3', FX=1.0, ),
                  _F (GROUP_MA='GRMA4', FX=-2.0, ), ), );

RESU=MECA_STATIQUE (MODELE=MO,
    CHAM_MATER=CM,
    EXCIT=( _F (CHARGE=BLOC, ),
           _F (CHARGE=CHARG, ), ), );

# CALCUL DE L'ESTIMATEUR D'ERREUR GLOBAL

RESU=CALC_ELEM(reuse =RESU,
    RESULTAT=RESU,
    TOUT_ORDRE='OUI',
    OPTION=('SIGM_ELNO_DEPL', 'ERRE_ELEM_SIGM', ), );

# RESOLUTION DU PROBLEME DUAL
# LE CHARGEMENT EST DEFINI SUR LE GROUPE DE MAILLES GRMAQI

CHARQ=AFFE_CHAR_MECA (MODELE=MO,
    FORCE_INTERNE=_F (GROUP_MA='GRMAQI', FX=1.0, ), );

RESUQ=MECA_STATIQUE (MODELE=MO,
    CHAM_MATER=CM,
    EXCIT=( _F (CHARGE=BLOC, ),
           _F (CHARGE=CHARQ, ), ), );
```

```
#  CALCUL DE L'ESTIMATEUR D'ERREUR GLOBAL DU PROBLEME DUAL

RESUQ=CALC_ELEM(reuse =RESUQ,
                RESULTAT=RESUQ,
                TOUT_ORDRE='OUI',
                OPTION=('SIGM_ELNO_DEPL','ERRE_ELEM_SIGM',),);

#  CALCUL DE L'ESTIMATEUR D'ERREUR EN QUANTITE D'INTERET

RESU=CALC_ELEM(reuse =RESU,
               RESULTAT=RESU,
               OPTION=('QIRE_ELEM_SIGM'),
               RESU_DUAL=RESUQ,);
```

Un morceau de fichier de commande permettant le calcul du champ à imposer de contrainte à imposer comme chargement du problème dual est également donné.

```
# -----
# Calcul du champ à imposer comme chargement du probleme dual
# -----
# debut-----
# -----
# Extraction des champs-----
#
CHSIG=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_SIEF_R',
                 OPERATION='EXTR',
                 RESULTAT=RESU[num_calc],
                 NUME_ORDRE=1,
                 NOM_CHAM='SIEF_ELGA',);
#
CHVM=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_SIEF_R',
                 OPERATION='EXTR',
                 RESULTAT=RESU[num_calc],
                 NUME_ORDRE=1,
                 NOM_CHAM='EQUI_ELGA_SIGM',);
#
# Operation entre les deux champs-----
#   Construction du premier champ a partir du vonmises et du deviateur
#
#                               0.5 car 2d sinon 1/3 en 3d
FCHXX=FORMULE(VALE='(3./(2.*VMIS))*(SIXX-
0.5*(SIXX+SIYY))',NOM_PARA=('SIXX','SIYY','VMIS',),);
FCHYY=FORMULE(VALE='(3./(2.*VMIS))*(SIYY-
0.5*(SIXX+SIYY))',NOM_PARA=('SIXX','SIYY','VMIS',),);
FCHXY=FORMULE(VALE='(3./(2.*VMIS))*SIXY',NOM_PARA=('SIXY','VMIS',),);
#
```

```

CHF1=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_NEUT_F',
                OPERATION='AFFE',
                OPTION='TOU_INI_ELGA',
                MODELE=MODELE[num_calc],
                PROL_ZERO='OUI',
                AFFE=_F(GROUP_MA='DOMAINE',
                      NOM_CMP=('X1','X2','X3',),,
                      VALE_F=(FCHXX,FCHYY,FCHXY,),),);

CHAUYN1=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_NEUT_R',
                  OPERATION='EVAL',
                  CHAM_F=CHF1,
                  CHAM_PARA=(CHSIG,CHVM,),);

#
# Construction du second champ produit CH*K-----
#
FSIXX=FORMULE(VALE='2*MU*X1+LAMBDA*(X1+X2)',NOM_PARA=('X1','X2',),);
FSIYY=FORMULE(VALE='2*MU*X2+LAMBDA*(X1+X2)',NOM_PARA=('X1','X2',),);
FSIXY=FORMULE(VALE='2*MU*X3',NOM_PARA=('X3',),);

#

CHF2=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_NEUT_F',
                OPERATION='AFFE',
                MODELE=MODELE[num_calc],
                PROL_ZERO='OUI',
                AFFE=_F(GROUP_MA='QI',
                      NOM_CMP=('X1','X2','X3',),,
                      VALE_F=(FSIXX,FSIYY,FSIXY,),),);

CHAUYN2=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_NEUT_R',
                  OPERATION='EVAL',
                  CHAM_F=CHF2,
                  CHAM_PARA=(CHAUYN1,));

#
# Transforamtion des cham_elem_NEUT_R EN cham_elem_SIEF_R
#
SIGMIN=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='ELGA_SIEF_R',
                  OPERATION='ASSE',
                  PROL_ZERO='OUI',
                  MODELE=MODELE[num_calc],
                  ASSE=_F(GROUP_MA='QI',
                        CHAM_GD=CHAUYN2,
                        NOM_CMP=('X1','X2','X3',),,
                        NOM_CMP_RESU=('SIXX','SIYY','SIXY',),),);

```

```
INDIRESU=CREA_RESU(OPERATION='AFFE',
                   TYPE_RESU='EVOL_ELAS',
                   NOM_CHAM='SIEF_ELGA_DEPL',
                   AFFE=_F(CHAM_GD=SIGMIN,
                           MODELE=MODELE[num_calc],
                           CHAM_MATER=CHMAT[num_calc],
                           INST=1.0,)),);

#
# fin-----
# Calcul du champ à imposer comme chargement du probleme dual
# -----
```


Bibliographie

(Ainsworth, 1999)

M. Ainsworth : Identification and a posteriori estimation of transported errors in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176, pp. 3-18, 1999.

(Ainsworth & Oden, 2000)

M. Ainsworth & J. T. Oden : A posteriori error estimation in finite element analysis. Wiley-Interscience, 2000.

(Ainsworth & Oden, 1997)

M. Ainsworth & J. T. Oden : A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142, pp. 1-88, 1997.

(Ainsworth *et al.*, 1989)

M. Ainsworth, J. Zhu, A. Craig & O. Zienkiewicz : Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, pp. 2161-2174, 1989.

(Angeloni, 1986)

P. Angeloni : FIESTA: The p-version approach in finite element analysis. In *Structural Analysis Systems*, Niku-Lari (eds.), Pergamon Press, pp. 113-140, 1986.

(Aubry & Tie, 1992)

D. Aubry & B. Tie : Error estimates, h-adaptive strategy and hierarchical concept for nonlinear finite element method. *Proceedings of the First European Conference on Numerical Methods in Engineering*, Bruxelles, Belgique, 1992.

(Aubry & Tie, 1991)

D. Aubry & B. Tie : A posteriori error analysis and h-adaptive refinement for the f.e.m in nonlinear structural computations. *Proceedings of the European Conference on New Advances in Computational Structural Mechanics*, 1991.

(Babuška & Rheinboldt, 1982)

I. Babuška & W. Rheinboldt : Computational error estimates and adaptive processes for some nonlinear structural problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 34, pp. 895-937, 1982.

(Babuška & Rheinboldt, 1978)

I. Babuška & W. Rheinboldt : A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, pp. 1597-1615, 1978.

(Babuška & Rodriguez, 1993)

I. Babuška & R. Rodriguez : Problem of the selection of an a posteriori error indicator based on smoothening techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, pp. 539-567, 1993.

(Babuška *et al.*, 1997)

I. Babuška, T. Strouboulis, S. Gangaraj & C. Upadhyay : Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140, pp. 1-37, 1997.

(Babuška *et al.*, 1994)

I. Babuška, T. Strouboulis, A. Mathur & C. Upadhyay : Pollution-error in the h-version of the finite-element method and the local quality of a-posteriori error estimators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17, pp. 273-321, 1994.

(Babuška *et al.*, 1995)

I. Babuška, T. Strouboulis, C. S. Upadhyay & S. K. Gangaraj : A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp. 4207-4235, 1995.

(Babuška *et al.*, 1994)

I. Babuška, T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, S. K. Gangaraj & K. Copps : Validation of a posterior error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 37, pp. 1073-1123, 1994.

(Babuška & Suri, 1990)

I. Babuška & M. Suri : The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80, pp. 5-26, 1990.

(Babuška & Szabó, 1982)

I. Babuška & B. Szabó : On the rates of convergence of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18, pp. 323-341, 1982.

(Babuška *et al.*, 1981)

I. Babuška, B. Szabó & I. Katz : The p-version of the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18, pp. 515-45, 1981.

(Bank & Smith, 1993)

R. E. Bank & R. K. Smith : A posteriori error estimates based on hierarchical bases. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 30, pp. 921-935, 1993.

(Barsoum, 1977)

R. Barsoum : Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, pp. 85-98, 1977.

(Barsoum, 1976)

R. Barsoum : On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10, pp. 25-37, 1976.

(Bass & Oden., 1987)

J. M. Bass & J. T. Oden. : Adaptive finite element methods for a class of evolution problems in viscoplasticity. *International Journal of Engineering Science*, 25, pp. 623-653, 1987.

(Baudron & Trompette, 1986)

A. M. Baudron & P. Trompette : Simple judgment criterion for a finite element mesh. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5, pp. 731-746, 1986.

(Becker & Rannacher, 2001)

R. Becker & R. Rannacher : An optimal control approach to shape a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica*, 10, pp. 1-120, 2001.

(Bellenger & Coorevits, 2007)

E. Bellenger & P. Coorevits : Controlled cost of adaptive mesh refinement in practical 3D finite element analysis. *Advances in Engineering Software*, 38, pp. 846-859, 2007.

(Bellenger & Coorevits, 2005)

E. Bellenger & P. Coorevits : Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41, pp. 1413-1440, 2005.

(Blacker & Belytschko, 1994)

T. Blacker & T. Belytschko : Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolant enhancements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 517-536, 1994.

(Boussetta, 2005)

R. Boussetta : Estimateurs d'erreur et remaillage adaptatif : application à la simulation 3D des procédés de mise en forme des matériaux. *Thèse de doctorat*, Ecole des Mines de Paris, 2005.

(Brink & Stein, 1998)

U. Brink & E. Stein : A posteriori error estimation in large-strain elasticity using equilibrated local Neumann problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 161, pp. 77-101, 1998.

(Carnet, 1978)

J. Carnet : Une méthode heuristique de maillage dans le plan pour la mise en oeuvre des éléments finis. *Thèse de 3ème cycle*, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1978.

(Carnet *et al.*, 1981)

J. Carnet, P. Ladevèze & D. Leguillon : An optimal mesh procedure in the finite element method. *Proceedings Of The Third Conference on Mathematics of Finite Element and Application*, Uxbridge, Angleterre, 1981.

(Carroll & Barker, 1973)

W. E. Carroll & R. M. Barker : A theorem for optimum finite-element idealizations. *International Journal of Solids and Structures*, 9, pp. 883-895, 1973.

(Carstensen & Funken, 2000)

C. Carstensen & S. A. Funken : Fully reliable localized error control in the FEM. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 21, pp. 1465-1484, 2000.

(Chamoin, 2007)

L. Chamoin : Encadrement a posteriori de quantités locales dans les problèmes de viscoélasticité linéaire résolus par la Méthode des Éléments Finis. *Thèse de doctorat*, École Normale Supérieure de Cachan, 2007.

(Chamoin & Ladevèze, 2008)

L. Chamoin & P. Ladevèze : A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, pp. 994-1014, 2008.

(Chamoin & Ladevèze, 2007)

L. Chamoin & P. Ladevèze : Bounds on history-dependent or independent local quantities in viscoelasticity problems solved by approximate methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71, pp. 1387-1411, 2007.

(Ciarlet, 1978)

P. G. Ciarlet : The finite element methods for elliptic problems. North-Holland, 1978.

(Clément, 1975)

P. Clément : Approximation by finite element functions using local regularization. *Revue Francaise d'Automatique Informatique Recherche Operationnelle*, 9, pp. 77-84, 1975.

(Code_Aster, 2008)

Code_Aster : Analyse des Structures et Thermo-mécanique pour des Etudes et des Recherches. EDF R&D, (<http://www.code-aster.org/>), 2008.

(Coorevits & Bellenger, 2004)

P. Coorevits & E. Bellenger : Alternative mesh optimality criteria for h-adaptive finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, pp. 1195-1215, 2004.

(Coorevits *et al.*, 1997)

P. Coorevits, J. P. Dumeau & J. P. Pelle : Error estimator and adaptativity for threedimensional finite element analyses. In *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, Ladevèze & Oden (eds.), Elsevier, pp. 443-458, 1997.

(Coorevits *et al.*, 1996)

P. Coorevits, J. P. Dumeau & J. P. Pelle : Analyses éléments finis adaptatives pour les structures tridimensionnelles en élasticité. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 3, pp. 341-373, 1996.

(Coorevits *et al.*, 1994)

P. Coorevits, P. Ladevèze & J. Pelle : Mesh optimization for problems with steep gradients. *Engineering Computations*, 11, pp. 129-144, 1994.

(Coorevits *et al.*, 1995)

P. Coorevits, P. Ladevèze & J. P. Pelle : Automatic adaptive meshing for a prescribed accuracy in 2d elasticity. *Thin Walled Structures*, 21, pp. 241-252, 1995.

(Coorevits *et al.*, 1995)

P. Coorevits, P. Ladevèze & J. P. Pelle : An automatic procedure with a control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121, pp. 91-120, 1995.

(Cugnon & Beckers, 1997)

F. Cugnon & P. Beckers : Comparison between the p- and h-version of the finite element method and their combination to achieve an efficient hp-version. *Proceedings of the 4th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, 22-23 Mai, Leuven, Belgique, 1997.

(Debongnie *et al.*, 1995)

J. Debongnie, H. Zhong & P. Beckers : Dual analysis with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122, pp. 183-192, 1995.

(Delmas *et al.*, 2007)

J. Delmas, P. Coorevits, P. B. Badel & M. Guessasma : Estimation d'erreur en quantités d'intérêt dans un code de calcul industriel. *Actes de Giens 2007 - Huitième Colloque National en Mécanique des Structures*, 21-25 mai, Giens, France, 2007.

(Delmas *et al.*, 2007)

J. Delmas, P. Coorevits, P. B. Badel & M. Guessasma : Estimation d'erreur pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes. *18e Congrès Français de Mécanique*, 27-31 août, Grenoble, France, 2007.

(Delmas *et al.*, 2007)

J. Delmas, P. Coorevits, P. B. Badel & M. Guessasma : An explicit estimator for goal oriented h-adaptivity with mesh optimality criteria. *Proceedings of ADMOS 2007 - International Conference on Adaptive Modeling and Simulation*, 22-24 octobre, Göteborg, Suède, 2007.

(Delmas *et al.*, 2006)

J. Delmas, P. Coorevits, P. B. Badel & M. Guessasma : Estimateurs d'erreur en quantités d'intérêt dans Code_Aster. *38e Congrès National d'Analyse Numérique*, 29 mai-2 juin, Guidel, France, 2006.

(Delmas *et al.*, 2006)

J. Delmas, P. Coorevits, P. B. Badel & M. Guessasma : Error estimators in quantities of interest in Code_Aster. *12e International Congress on Computational and Applied Mathematics*, 10-14 juillet, Leuven, Belgique, 2006.

(Demkowicz *et al.*, 1998)

L. Demkowicz, K. Gerdes, C. Schwab, A. Bajer & T. Walsh : HP90: a general and flexible Fortran 90 hp-FE code. *Computing and Visualization in Science*, 1, pp. 145-63, 1998.

(Demkowicz *et al.*, 1984)

L. Demkowicz, J. T. Oden & T. Strouboulis : Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. part I: Variational principles & a posteriori estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46, pp. 217-251, 1984.

(Dumeau, 1995)

J. P. Dumeau : Contrôle et adaptation des maillages 3D : application à l'automatisation des calculs,. *Thèse de doctorat*, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1995.

(Díez & Huerta, 1999)

P. Díez & A. Huerta : A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176, pp. 215-229, 1999.

(Eymard, 1994)

I. Eymard : Singularités de contraintes élastiques à la jonction de deux matériaux. *Rapport interne, EDF R&D, Département Mécanique et Modèles Numériques*, 1994.

(FIESTA, 1986)

FIESTA : Theoretical literature. *Instituto Sperimentale Modelli e Strutture*, 1986.

(Florentin, 2002)

E. Florentin : Sur l'évaluation de la qualité locale des contraintes éléments finis en élasticité tridimensionnelle. *Thèse de doctorat*, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2002.

(Fourment, 1992)

L. Fourment : Estimateurs d'erreur et maillage adaptatif pour la simulation numérique des procédés de mise en forme. *Thèse de doctorat*, Ecole des Mines de Paris, 1992.

(Fraeij de Veubeke, 1965)

B. Fraeij de Veubeke : Displacements and equilibrium models in the finite elements method. In *Stress analysis*, O. C. Zienkiewicz & G. S. Holister (eds.), London John Wiley & Sons, 1965.

(Gago *et al.*, 1983)

J. P. Gago, D. W. Kelly, O. C. Zienkiewicz & I. Babuška : A posteriori error analysis and adaptative processes in the finite element method. Part II : Adaptive mesh refinement. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 19, pp. 1621-1656, 1983.

(Gallimard & Panetier, 2006)

L. Gallimard & J. Panetier : Error estimation of stress intensity factors for mixed-mode cracks. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 68, pp. 299-316, 2006.

(George, 1991)

P. L. George : Génération automatique de maillages : applications aux méthodes d'éléments finis. Masson Paris, 1991.

(Georges & Shephard, 1991)

M. K. Georges & M. S. Shephard : Automated adaptive two-dimensional system for the hp-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, pp. 867-893, 1991.

(Grätsch & Bathe, 2005)

T. Grätsch & K. Bathe : A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers and Structures*, 83, pp. 235-265, 2005.

(Heintz *et al.*, 2004)

P. Heintz, F. Larsson, P. Hansbo & K. Runesson : Adaptive strategies and error control for computing material forces in fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, pp. 1287-1299, 2004.

(Heintz & Samuelsson, 2004)

P. Heintz & K. Samuelsson : On adaptive strategies and error control in fracture mechanics. *Computers and Structures*, 82, pp. 485-497, 2004.

(Henshell & Shaw, 1975)

R. Henshell & K. Shaw : Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9, pp. 495-507, 1975.

(HOMARD, 2008)

HOMARD® : Logiciel de raffinement/déraffinement 2D et 3D. *EDF R&D*, (<http://www.code-aster.org/outils/homard/>), 2008.

(Huerta & Díez, 2000)

A. Huerta & P. Díez : Error estimation including pollution assessment for nonlinear finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181, pp. 21-41, 2000.

(Irwin, 1957)

G. R. Irwin : Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24, pp. 361-364, 1957.

(Johnson & Hansbo, 1991)

C. Johnson & P. Hansbo : Adaptive finite element methods for small strain elastoplasticity. *Proceedings of IUTAM Conference on Finite Inelastic Deformations Theory and Applications*, Hannover, Allemagne, 1991.

(Kelly *et al.*, 1983)

D. Kelly, J. Gago & O. C. Zienkiewicz : A posteriori error analysis and adaptative processes in the finite element method : Part 1 - error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19, pp. 1593-1619, 1983.

(Kempeneers, 2005)

M. Kempeneers : Eléments finis statiquement admissibles et estimation d'erreur par analyse duale. *Thèse de doctorat*, Université de Liège, 2005.

(Ladevèze, 1995)

P. Ladevèze : Les bases de la méthode des erreurs en relation de comportement pour le contrôle adaptatif des calculs éléments finis : les travaux des années 1975.. *Rapport interne, LMT Cachan*, 1995.

(Ladevèze, 1994)

P. Ladevèze : La méthode d'évaluation d'erreur en relation de comportement appliquée à la m.e.f. : qualité et amélioration. *Rapport interne, LMT Cachan*, 1994.

(Ladevèze, 1989)

P. Ladevèze : The large time increments method for analysis of structures with nonlinear behavior described by internal variables (in french).. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 300(II), pp. 1095-1099, 1989.

(Ladevèze, 1985)

P. Ladevèze : Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique*, 20, pp. 41-44, 1985.

(Ladevèze, 1975)

P. Ladevèze : Comparaison de modèles de milieux continus. *Thèse de doctorat d'Etat*, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1975.

(Ladevèze *et al.*, 1986)

P. Ladevèze, G. Coffignal & J. Pelle : Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis. In *Accuracy estimates and adaptative refinements in finite element computations*, Babuška, Gago, Oliveira and Zienkiewicz (eds.), Wiley London, pp. 181-203, 1986.

(Ladevèze & Leguillon, 1983)

P. Ladevèze & D. Leguillon : Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20, pp. 485-509, 1983.

(Ladevèze & Leguillon, 1981)

P. Ladevèze & D. Leguillon : Error computation in finite element method and application. *Proceedings of the GAMNI*, 1981.

(Ladevèze *et al.*, 1992)

P. Ladevèze, P. Marin, J. P. Pelle & J. L. Gastine : Accuracy and optimal meshes in finite element computation for nearly incompressible materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94, pp. 303-315, 1992.

(Ladevèze & Pelle, 2004)

P. Ladevèze & J. P. Pelle : Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics. Springer NY, 2004.

(Ladevèze *et al.*, 1999)

P. Ladevèze, P. Rougeot, P. Blanchard & J. P. Moreau : Local error estimators for finite element linear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176, pp. 231-246, 1999.

(Le Dain, 1991)

M. A. Le Dain : Multigrilles et h-adaptation : application au calcul de structures élastiques bidimensionnelles. *Thèse de doctorat*, Ecole des Mines de Paris, 1991.

(Li & Bettess, 1995)

L. Li & P. Bettess : Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11, pp. 911-915, 1995.

(Morin *et al.*, 2002)

P. Morin, R. H. Nochetto & K. G. Siebert : Convergence of Adaptive Finite Element Methods. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 44, pp. 631-658, 2002.

(Murakami, 1987)

Y. Murakami : Stress Intensity Factors Handbook. Pergamon Press Oxford, 1987.

(Nicolas, 2005)

G. Nicolas : Logiciel HOMARD - Volume 1 - Présentation générale. *Rapport interne, EDF R&D*, 2005.

(Nicolas *et al.*, 1995)

G. Nicolas, F. Arnoux-Guisse & O. Bonnin : Adaptive meshing for 3D finite element software. *Proceedings of the IXth International Conference on Finite Elements in Fluids*, 15-21 octobre, Venise, Italie, 1995.

(Oden *et al.*, 1989)

J. T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz & T. A. Westermann : Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, part 2. A posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77, pp. 113-180, 1989.

(Oden & Feng, 1996)

J. T. Oden & Y. Feng : Local and pollution error estimation for finite element approximations of elliptic boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74, pp. 245-293, 1996.

(Oden & Prudhomme, 2002)

J. T. Oden & S. Prudhomme : Estimation of modeling error in computational mechanics. *Journal of Computational Physics*, 182, pp. 496-515, 2002.

(Oden & Prudhomme, 2001)

J. T. Oden & S. Prudhomme : Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers and Mathematics with Applications*, 41, pp. 735-56, 2001.

(Oden *et al.*, 2001)

J. T. Oden, S. Prudhomme, J. Bass & T. Westermann : Development of a post-processor for a posteriori error estimation of quantities of interest. *Rapport interne, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics*, 2001.

(Oñate & Bugada, 1993)

E. Oñate & G. Bugada : A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. *Engineering Computations*, 10, pp. 307-21, 1993.

(Parés, 2005)

N. Parés : Error assessment for functional outputs of PDEs : bounds and goal-oriented adaptivity. *Doctoral thesis*, Universita Politècnica de Catalunya, 2005.

(Parés *et al.*, 2006)

N. Parés, J. Bonet, A. Huerta & J. Peraire : The computation of bounds for linear-functional outputs of weak solutions to the two-dimensional elasticity equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp. 406-429, 2006.

(Parés *et al.*, 2006)

N. Parés, P. Díez & A. Huerta : Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp. 297-323, 2006.

(Pelle, 1985)

J. P. Pelle : Fiabilité et optimisation des calculs de fréquences propres par éléments finis. *Thèse de doctorat d'Etat*, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1985.

(Prudhomme *et al.*, 2004)

S. Prudhomme, F. Nobile, L. Chamoin & J. T. Oden : Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20, pp. 165-92, 2004.

(Prudhomme & Oden, 1999)

S. Prudhomme & J. T. Oden : On goal-oriented error estimation for elliptics problems: application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176, pp. 313-331, 1999.

(Prudhomme *et al.*, 2003)

S. Prudhomme, J. T. Oden, T. Westermann, J. Bass & M. E. Botkin : Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, pp. 1193-1224, 2003.

(Rachowicz *et al.*, 1989)

W. Rachowicz, J. T. Oden & L. Demkowicz : Toward a universal h-p adaptive finite element strategy part 3. design of h-p meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77, pp. 181-212, 1989.

(Ramm *et al.*, 2003)

E. Ramm, E. Rank, R. Rannacher, S. K., E. Stein, G. Wendland, W. Wittum, P. Wriggers & W. Wunderlich : Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics. Stein (eds.), Wiley, 2003.

(Rank & Babuška, 1987)

E. Rank & I. Babuška : An expert system for the optimal mesh design in the hp-version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 2087-2106, 1987.

(Rannacher & Suttmeier, 1998)

R. Rannacher & F. Suttmeier : A posteriori error control in finite element methods via duality techniques: Application to perfect plasticity. *Computational Mechanics*, 21, pp. 123-133, 1998.

(Rannacher & Suttmeier, 1997)

R. Rannacher & F. Suttmeier : A feed-back approach to error control in finite element methods: application to linear elasticity. *Computational Mechanics*, 19, pp. 434-446, 1997.

(Rüter & Stein, 2006)

M. Rüter & E. Stein : Goal-oriented a posteriori error estimates in linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp. 251-278, 2006.

(Rüter & Stein, 2004)

M. Rüter & E. Stein : Adaptive finite element analysis of crack propagation in elastic fracture mechanics based on averaging techniques. *Computational Materials Science*, 31, pp. 247-257, 2004.

(SALOME, 2008)

SALOME : The Open Source Integration Platform for Numerical Simulation. (<http://www.salome-platform.org/>), 2008.

(SAMCEF, 2006)

SAMCEF : User manual. (<http://www.samcef.com/>), 2006.

(Sauer-Budge *et al.*, 2004)

A. Sauer-Budge, J. Bonet, A. Huerta & J. Peraire : Computing bounds for linear functionals of exact weak solutions to poisson's equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42, pp. 1610-1630, 2004.

(Stein & Rüter, 2004)

E. Stein & M. Rüter : Computational mechanics with model adaptivity in analysis and design: current research and perspectives. *Multi-physics and Multi-scale Computer Models in Non-linear Analysis and Optimal Design of Engineering Structures Under Extreme Conditions*, June 13 -17, Bled, Slovenia, 2004.

(Strang & Fix, 1973)

G. Strang & G. J. Fix : An analysis of the finite element method. Prentice-Hall, 1973.

(Strouboulis & Haque, 1992)

T. Strouboulis & K. A. Haque : Recent experiences with error estimation and adaptivity, Part II: Error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100, pp. 359-430, 1992.

(Szabó, 1990)

B. Szabó : The p- and h-p versions of the finite element method in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80, pp. 185-95, 1990.

(Szabó, 1986)

B. Szabó : Estimation and control of error based on p convergence. In *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, Babuška Gago Oliveira Zienkiewicz (eds.), Wiley, pp. 61-78, 1986.

(Szabó, 1985)

B. Szabó : MSC/Probe : Theoretical Manual. *Noetic Technologies Corporation*, 1985.

(Tie, 1993)

B. Tie : Eléments finis adaptatifs et hiérarchiques en élastoplasticité, localisation des déformations. *Thèse de doctorat*, Ecole Centrale de Paris, 1993.

(Turcke & McNeice, 1974)

D. J. Turcke & G. M. McNeice : Guidelines for selecting finite element grids based on an optimization study. *Computers and Structures*, 4, pp. 499-519, 1974.

(Verfürth, 1999)

R. Verfürth : A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176, pp. 419-440, 1999.

(Wiberg & Abdulwahab, 1993)

N. Wiberg & F. Abdulwahab : Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, pp. 2703-2724, 1993.

(Wiberg et al., 1995)

N. Wiberg, F. Abdulwahab & S. Ziukas : Improved element stresses for node and element patches using superconvergent patch recovery. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11, pp. 619-627, 1995.

(Xuan et al., 2006)

Z. Xuan, P. N. & J. Peraire : Computing upper and lower bounds for the J-integral in two-dimensional linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp. 430-443, 2006.

(Zhong, 1991)

H. Zhong : Estimateurs d'erreur a posteriori et adaptation de maillages dans la méthode des éléments finis. *Thèse de doctorat*, Université de Liège, 1991.

(Zhu, 1997)

J. Z. Zhu : A posteriori error estimation--the relationship between different procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150, pp. 411-422, 1997.

(Zienkiewicz *et al.*, 1988)

O. C. Zienkiewicz, Y. Liu & G. Huang : Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25, pp. 23-42, 1988.

(Zienkiewicz & Zhu, 1992)

O. C. Zienkiewicz & J. Z. Zhu : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, pp. 1331-1364, 1992.

(Zienkiewicz & Zhu, 1992)

O. C. Zienkiewicz & J. Z. Zhu : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, pp. 1365-1382, 1992.

(Zienkiewicz & Zhu, 1991)

O. C. Zienkiewicz & J. Z. Zhu : Adaptivity and mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, pp. 783-810, 1991.

(Zienkiewicz & Zhu, 1987)

O. C. Zienkiewicz & J. Z. Zhu : A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 337-357, 1987.

(Zienkiewicz *et al.*, 1989)

O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu & N. G. Gong : Effective and practical hp-version adaptive analysis procedures for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, pp. 879-891, 1989.

(Zienkiewicz *et al.*, 1993)

O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu & J. Wu : Superconvergent patch recovery techniques - some further tests. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9, pp. 251-258, 1993.

