



**HAL**  
open science

# Étude numérique du cisaillement des géomatériaux granulaires cohésifs : passage micro-macro, microstructure, et application à la modélisation de glissements de terrain

Nicolás Estrada Mejía

► **To cite this version:**

Nicolás Estrada Mejía. Étude numérique du cisaillement des géomatériaux granulaires cohésifs : passage micro-macro, microstructure, et application à la modélisation de glissements de terrain. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2008. Français. NNT: . tel-00311303

**HAL Id: tel-00311303**

**<https://theses.hal.science/tel-00311303>**

Submitted on 13 Aug 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER  
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER II  
— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

**THÈSE**

Présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc pour obtenir le  
diplôme de DOCTORAT

Spécialité : Géosciences

École Doctorale : SIBAGHE (Systèmes Intégrés en Biologie, Agronomie, Géosciences,  
Hydrosciences, Environnement)

**Etude numérique du cisaillement des géomatériaux granulaires  
cohésifs : relation micro-macro, microstructure, et application à  
la modélisation de glissements de terrain**

par

Nicolás ESTRADA MEJIA

Soutenue publiquement le 25 juin 2008 devant le jury composé de :

M. Bernardo Caicedo	Professeur, Universidad de los Andes (Colombie)	Rapporteur
M. Etienne Guyon	Professeur émérite, ESPCI	Président
M. Jacques Malavieille	Directeur de recherche, Université de Montpellier II	Examinateur
M. Farhang Radjaï	Directeur de recherche, LMGC	Examinateur
M. Jean-Noël Roux	Chercheur, Institut Navier, LMSGC	Rapporteur
Mlle. Lydie Staron	Chargée de recherche, Université Paris VI	Invitée
M. Alfredo Taboada	Maître de conférences, Université de Montpellier II	Directeur de thèse

Laboratoire Géosciences Montpellier, UMR CNRS-UM2 5243  
c.c. 60, Place E. Bataillon, 34095 Montpellier cedex 05



*à mes parents*



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus sincères remerciements à tous les membres du jury. Merci à Monsieur Étienne Guyon qui m'a fait le grand honneur de présider le jury de cette thèse. Merci également à Messieurs Bernardo Caicedo et Jean-Noël Roux, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail, à Monsieur Jacques Malavieille, qui a accepté d'en être examinateur, et à Mademoiselle Lydie Staron qui a accepté de participer au jury en tant que membre invitée. Je leur en suis très reconnaissant.

J'adresse aussi ma plus sincère gratitude envers les deux personnes qui ont encadré mon travail pendant ces quatre années. Merci à Alfredo Taboada pour son enthousiasme, pour savoir toujours remonter l'esprit lorsque ça ne marche pas, pour avoir toujours un grand sourire, et pour m'avoir offert, en plus de son encadrement, son amitié. Merci aussi à Farhang Radjaï, qui a contribué de manière cruciale à ce travail ainsi qu'à ma formation professionnelle et personnelle ; merci pour son amitié, sa sympathie, sa patience, et ses conseils si précis et précieux.

Je tiens à remercier “de todo corazón” à tous les autres membres de la famille Taboada qui m'ont accueilli si gentille et chaleureusement dans leur maison et qui m'ont offert l'opportunité de partager un “climat” familial dans ces quatre années que j'ai passées loin de chez moi. J'espère sincèrement qu'on gardera le contact et qu'on aura l'opportunité de se revoir en France et en Colombie.

Merci aussi à toutes les personnes, du labo et d'ailleurs, qui ont contribué à faire de mon séjour à Montpellier une expérience si agréable et enrichissante. À la fac, merci à Anne, Jacques, Michel et l'équipe bassins, Yves, et à tous les autres membres du laboratoire Géosciences Montpellier. Merci aussi (par ordre alphabétique) à Adrien, Anna, Anne, Cécile et sa famille, Fabien, Flo, Julie, Kuo-Jen, Laia, Laralai, Lucía, Lyderic, Marta María, Mathieu, Max, Mike, Mimi, Mitch, Nono, Oliveira, Pierre, Rémi, Rock, et Santi. Tambien un abrazo fuerte para los amigos sudakas (y casis) : a Camila y Boris, Bibi y Jean-Mi., la Ceci y el Ratón, Émilien, Momo, Pascalina, y por último, pero no con menos ganas, a Maria Jose, Henry, y a las tres samarias.



# Table des matières

Introduction générale	11
<b>1 Cadre de l'étude : Plasticité et relations micro-macro dans les milieux granulaires cisailés</b>	<b>15</b>
1.1 Le cisaillement et les matériaux Mohr-Coulomb . . . . .	16
1.1.1 Matériaux de Coulomb . . . . .	16
1.1.2 La représentation des contraintes de Mohr . . . . .	17
1.2 Caractérisation du comportement macroscopique : essais expérimentaux . . . . .	19
1.2.1 Essais de cisaillement direct et annulaire . . . . .	19
1.2.2 L'essai triaxial de révolution . . . . .	21
1.3 Relations micro-macro . . . . .	23
1.3.1 L'angle de frottement interne . . . . .	23
1.3.2 L'adhésion macroscopique et la cohésion . . . . .	27
1.3.3 La compacité et la microstructure . . . . .	28
1.4 Quelle approche choisir : expérimentale ou théorique? . . . . .	29
<b>2 Modélisation numérique des milieux granulaires par la méthode de la Dynamique des Contacts</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Différentes échelles dans un milieu granulaire . . . . .	33
2.3 Approches régulière et non régulière . . . . .	34
2.3.1 L'approche régulière . . . . .	34
2.3.2 L'approche non régulière . . . . .	36
2.3.3 Pourquoi choisir une approche non régulière? . . . . .	39
2.4 La Dynamique des Contacts . . . . .	39
2.4.1 Idée générale de la Dynamique des Contacts . . . . .	40
2.4.2 Équations de la dynamique . . . . .	41
2.4.3 Projection des équations de la dynamique sur un repère local . . . . .	42
2.4.4 Lois de contact . . . . .	46



2.4.5	Algorithme de résolution . . . . .	51
2.5	Prise en compte de la résistance au roulement dans la Dynamique des Contacts . . . . .	55
2.5.1	Modifications des équations de la dynamique . . . . .	55
2.5.2	Loi de contact pour le roulement . . . . .	59
2.6	Prise en compte de l'adhésion dans la Dynamique des Contacts : modèle de cimentation . . . . .	62
2.6.1	Loi de contact normale dans un contact adhésif . . . . .	62
2.6.2	Création et rupture des liens cohésifs . . . . .	63
2.7	Conclusion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Rôle des propriétés microscopiques dans la résistance au cisaillement et la dilatance d'un milieu granulaire cohésif</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction . . . . .	67
3.2	Description des simulations . . . . .	68
3.2.1	Matériau granulaire utilisé . . . . .	68
3.2.2	Construction des échantillons . . . . .	70
3.2.3	Compression biaxial . . . . .	72
3.2.4	Espace paramétrique étudié . . . . .	77
3.2.5	Paramètres d'exécution . . . . .	77
3.3	Résultats obtenus . . . . .	77
3.3.1	Les angles de frottement interne . . . . .	77
3.3.2	Frottement interne et déformation volumique . . . . .	79
3.3.3	Décomposition additive de l'angle de frottement au pic	81
3.3.4	L'adhésion macroscopique . . . . .	81
3.4	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Rôle des propriétés de frottement locales dans la résistance au cisaillement et la microstructure</b>	<b>85</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Description des simulations . . . . .	86
4.2.1	Matériau granulaire utilisé . . . . .	86
4.2.2	Construction des échantillons . . . . .	87
4.2.3	L'essai de cisaillement simple . . . . .	88
4.2.4	Espace paramétrique étudié . . . . .	91
4.2.5	Paramètres d'exécution . . . . .	91
4.3	Résultats obtenus . . . . .	91
4.3.1	La résistance au cisaillement . . . . .	91
4.3.2	Modes de mouvement relatif (glissement et roulement) au niveau des contacts . . . . .	95
4.3.3	La compacité et les colonnes de particules . . . . .	98

---

4.3.4	Transmission des forces . . . . .	103
4.4	Conclusion . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Application des méthodes d'éléments discrets à la simulation de glissements de terrain</b>	<b>117</b>
5.1	Introduction . . . . .	117
5.2	Description de la méthodologie . . . . .	119
5.2.1	Résistance des matériaux granulaires . . . . .	121
5.2.2	Résistance des frontières du modèle . . . . .	123
5.2.3	Prise en compte d'une nappe d'eau . . . . .	124
5.3	Exemple : Simulation d'un glissement de terrain déclenché par la montée du niveau d'une nappe d'eau . . . . .	125
5.3.1	Morphologie initiale . . . . .	126
5.3.2	Résistance des matériaux granulaires . . . . .	126
5.3.3	Résistance aux frontières du modèle . . . . .	126
5.3.4	La pression des pores . . . . .	130
5.3.5	Déclenchement et propagation de l'avalanche . . . . .	130
5.4	Conclusion : avantages et limitations de la méthodologie . . . . .	135
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>137</b>
<b>7</b>	<b>Annexe A : Récapitulatif des notations principales</b>	<b>141</b>
7.1	Paramètres de résistance au niveau des contacts . . . . .	141
7.1.1	Milieus cohésifs . . . . .	141
7.1.2	Milieus pulvérulents (non cohésifs) . . . . .	143
7.2	Chapitre 3 . . . . .	143
7.2.1	Angles de frottement interne . . . . .	145
7.2.2	Angle de dilatance . . . . .	147
7.3	Chapitre 4 . . . . .	148
7.4	Chapitre 5 . . . . .	148
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>

## Table de matières

---

# Introduction générale

Sur la quasi-totalité de la surface terrestre, les géomatériaux se présentent comme des collections des grains (grains d’argile, grains de sable, graviers, etc.). Ces grains peuvent être de nature (taille, forme, composition, etc.) très diverse, mais dans tous les cas ils présentent deux caractéristiques qui leur confèrent un comportement particulier : (1) ils sont trop grands pour que les agitations thermiques aient un effet important dans leur comportement (i.e., leur diamètre est supérieur à  $1 \mu m$ ), et (2) les interactions au niveau des contacts (collisions inélastiques et frottement) sont essentiellement dissipatives. On appelle ces matériaux, les *matériaux granulaires* [37, 23].

L’étude du comportement des matériaux granulaires a mobilisé, depuis des nombreuses années, un important effort de recherche dans des disciplines diverses telles que la géologie, la mécanique des sols et des roches, le génie des procédés, et la physique de la matière condensée. Cependant, la compréhension de leur comportement est une tâche qui est loin d’être achevée. En fait, ces travaux ont permis de montrer que, même si chaque grain est un objet assez simple, l’ensemble de grains est un système très complexe, dans lequel le désordre et le caractère divisé du milieu jouent un rôle capital.

Un des nombreux problèmes intéressants dans l’étude des milieux granulaires est celui du cisaillement. C’est aussi un problème avec des implications pratiques très importantes, car la résistance au cisaillement des géomatériaux détermine la stabilité de nombreux systèmes naturels et anthropiques tels que les glissements de terrain, les failles géologiques, les fondations, et les ouvrages de soutènement. Le “fonctionnement” mécanique des ces systèmes est habituellement *décrit* à l’aide d’un ensemble de “lois de comportement” macroscopiques. Cependant, même si ces lois s’avèrent très utiles dans la pratique, elles font souvent intervenir des variables dont le sens physique n’est pas facile à préciser. Pour cette raison, ces lois restent un outil limité pour *comprendre*, du point de vue physique, le comportement du système à l’échelle macroscopique. Au contraire, lorsqu’on étudie le milieu à l’échelle des grains, le sens physique des variables qui interviennent est beaucoup plus clair ; ces

variables “microscopiques” sont, par exemple, les propriétés géométriques de l’arrangement de grains, les propriétés physiques des grains, les forces et les orientations des contacts, etc. Une question fondamentale se pose : quelle est la relation entre les propriétés du milieu à l’échelle microscopique et sa réponse macroscopique lors du cisaillement ?

Le passage *micro-macro* dans les milieux granulaires cisailés est un problème très ancien, mais aussi un problème dont l’étude présente des nombreuses difficultés expérimentales. Lors des 40 dernières années, le progrès de l’informatique a rendu possible l’utilisation d’un outil permettant de contourner beaucoup de ces difficultés : la simulation numérique discrète. Actuellement, les différentes méthodes de simulation numérique discrète constituent un cadre d’analyse essentiel dans l’étude du comportement des milieux granulaires ; c’est dans cette dynamique que s’inscrit ce travail de thèse.

Le but principal de ce travail est d’étudier l’influence des propriétés de résistance au niveau des contacts dans les paramètres qui décrivent la plasticité des milieux granulaires cisailés (i.e., la résistance au cisaillement et la déformation volumique) ainsi que dans la microstructure que le milieu développe lors du cisaillement. Pour aborder ces questions, nous avons utilisé la méthode de simulation numérique discrète de la Dynamique des Contacts. Dans le cadre de cette méthode, traditionnellement utilisée pour étudier les milieux frictionnels, nous avons introduit un modèle de cohésion qui cherche à imiter la cohésion par cimentation. Nous avons fait varier systématiquement les propriétés de résistance aux contacts, et nous avons étudié leur effet dans la résistance au cisaillement, la dilatance, et la microstructure du milieu. Nos résultats montrent qu’il est possible, en utilisant un milieu granulaire modèle, d’identifier clairement l’influence de chacune des propriétés de résistance microscopiques dans la résistance au cisaillement et dans l’angle de dilatance du milieu. Cependant, nous observons aussi que l’effet des propriétés de résistance locales et l’effet de la microstructure ne peuvent pas être étudiés de manière indépendante. La raison en est que la microstructure développée par le milieu lors du cisaillement est, en bonne partie, déterminée par les propriétés de résistance entre les particules. Par exemple, nous trouvons que certaines combinaisons de paramètres locaux peuvent provoquer des changements majeurs dans le rôle mécanique des contacts portant les plus faibles forces, et que ceci résulte de l’apparition d’une nouvelle structure dans le milieu : les colonnes de particules.

En deuxième lieu, nous avons voulu appliquer la même méthode de simulation numérique à l’étude d’un processus naturel. Nous avons donc développé une méthodologie permettant de modéliser les glissements de terrain. Cette méthodologie permet d’intégrer dans le même modèle les phases d’initiation et de propagation du glissement, et elle tient compte de la géométrie

initiale du système, de la résistance des géomatériaux, et d'un mécanisme de déclenchement du glissement (e.g., le changement de niveau d'une nappe phréatique, un séisme, ou l'érosion d'une rivière). Cette approche constitue un outil complémentaire aux approches traditionnelles (i.e., continues) abordant le problème des glissements de terrain avec une nouvelle "optique" : l'optique granulaire.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans les deux premiers chapitres, nous présenterons quelques aspects généraux sur le comportement macroscopique des milieux granulaires, et nous donnerons un aperçu des principes de base de la méthode de la Dynamique des Contacts. Dans le troisième chapitre, nous étudierons la résistance au cisaillement, à l'état pic et à l'état résiduel, et l'angle de dilatance d'un milieu granulaire cohésif à l'aide d'un essai de compression biaxial. Dans le quatrième chapitre, nous étudierons la résistance au cisaillement et la microstructure d'un milieu granulaire cisailé à l'état stationnaire, aussi appelé "l'état critique" en mécanique des sols, à l'aide d'un essai de cisaillement simple. Dans le cinquième chapitre, nous montrerons comment la méthode de la Dynamique des Contacts peut être appliquée à l'étude des glissements de terrain, et, finalement, dans le sixième chapitre, nous concluons.

## Introduction

---

# Chapitre 1

## Cadre de l'étude : Plasticité et relations micro-macro dans les milieux granulaires cisailés

Le but de ce chapitre est de présenter le cadre de notre étude. Dans un premier temps, nous introduirons le problème du cisaillement d'un matériau granulaire, et nous présenterons le modèle de Mohr - Coulomb, qui est le modèle que nous avons employé pour caractériser la résistance au cisaillement du milieu. Ensuite, nous décrirons brièvement le comportement macroscopique des milieux granulaires cisailés. Ceci, en faisant référence aux essais expérimentaux les plus utilisés : les essais de cisaillement direct et annulaire, et l'essai triaxial de révolution. C'est aussi de ces essais que s'inspirent les expériences numériques que nous présenterons dans les chapitres 3 et 4.

Dans un deuxième temps, nous ferons une bref synthèse historique des travaux qui ont été consacrés au rôle des propriétés de résistance à l'échelle des contacts (que nous appellerons aussi "propriétés locales" ou "propriétés micro") dans les paramètres qui décrivent la plasticité des milieux granulaires cisailés (i.e., la résistance au cisaillement et la déformation volumique); ces paramètres seront aussi appelés "propriétés globales" ou "propriétés macro". Notre propos n'est pas de faire une révision exhaustive de ces travaux. Nous voulons plutôt montrer que, bien qu'un important effort de recherche a été consacré à ce sujet, il y a encore un certain nombre de problèmes fondamentaux qui n'ont pas été résolus. A la lumière de cette synthèse, nous voulons aussi introduire les questions qui ont motivé ce travail de thèse.

A la fin du chapitre, nous présenterons les raisons qui nous ont conduit à choisir une méthode de simulation numérique discrète (i.e., la Dynamique des Contacts) plutôt qu'une approche expérimentale. Nous verrons que cette méthode constitue un cadre d'analyse privilégié pour étudier les relations



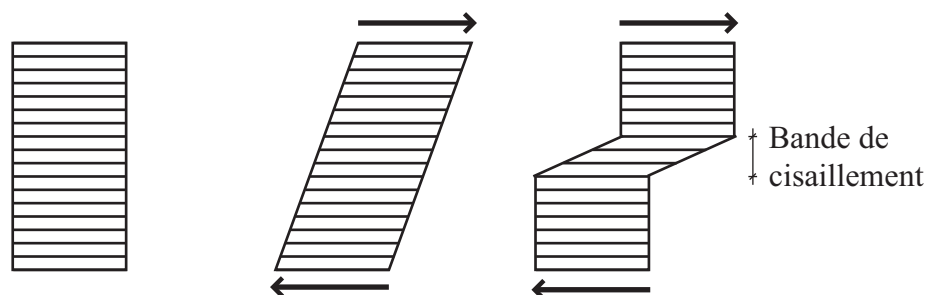


FIG. 1.1 – *Cisaillement d'un matériau; (a) glissement distribué et (b) glissement localisé dans une "bande de cisaillement"*.

micro-macro, car elle donne accès à un grand nombre d'essais qui ne seraient pas, à l'heure actuelle, réalisables expérimentalement.

## 1.1 Le cisaillement et les matériaux Mohr-Coulomb

Le *cisaillement* est le glissement relatif entre deux sections d'un matériau (Figure 1.1). Dans un matériau granulaire, ceci n'est possible que si la contrainte tangentielle appliquée dans un plan donné atteint une valeur seuil appelée la *résistance au cisaillement* du matériau. Le modèle classique et couramment utilisé pour caractériser la résistance au cisaillement des milieux granulaires est celui de Mohr-Coulomb. On l'appelle ainsi, car on suppose que le matériau vérifie la loi de Coulomb, et que, grâce au caractère tensoriel des contraintes, elles peuvent être représentées à l'aide de la représentation graphique proposée par Otto Mohr.

### 1.1.1 Matériaux de Coulomb

En mécanique des milieux granulaires, la loi de Coulomb permet de calculer la résistance au cisaillement le long d'un plan situé à l'intérieur du milieu. Cette loi considère le matériau comme étant rigide-plastique. En d'autres termes, si la contrainte tangentielle  $\tau$  dans un plan donné est inférieure à la résistance au cisaillement  $\tau_{max}$ , alors aucun glissement dans ce plan n'est possible; en revanche, si la contrainte tangentielle  $\tau$  dans un plan est égale à  $\tau_{max}$ , alors un glissement va s'initier le long de ce plan, et cette déformation continuera tant que l'état des contraintes global n'est pas modifié. De plus, le modèle de Coulomb stipule que la résistance au cisaillement  $\tau_{max}$  sur un

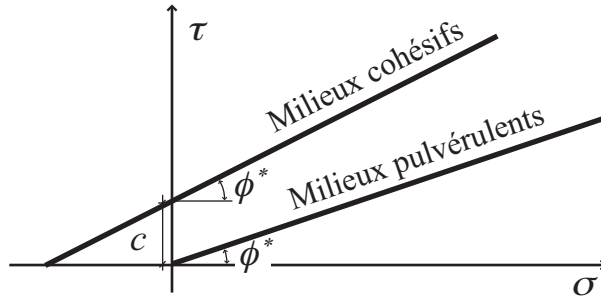


FIG. 1.2 – Surface limite de charge d'un matériau granulaire pulvérulent et d'un matériau granulaire cohésif.

plan est donnée par

$$\tau_{max} = \sigma \tan \phi^*, \quad (1.1)$$

où  $\sigma$  est la contrainte normale dans le plan et  $\phi^*$  est l'angle de frottement interne du matériau (dans ce qui suit, nous utiliserons l'indice \* pour les angles et les coefficients de frottement macroscopiques). L'expression 1.1 est valable pour les matériaux granulaires pulvérulents (i.e., non-cohésifs) ; pour les milieux cohésifs, il faut rajouter un terme dénommé la cohésion  $c$  du matériau :

$$\tau_{max} = \sigma \tan \phi^* + c, \quad (1.2)$$

Les équations 1.1 et 1.2 définissent  $\tau_{max}$  comme une fonction linéaire de  $\sigma$ . Ces droites représentent des surfaces limites de charge du matériau (Figure 1.2). Il est important de signaler que, dans la loi de Coulomb, la surface limite de charge d'un matériau n'est pas unique, mais elle dépend de compacité du milieu.

### 1.1.2 La représentation des contraintes de Mohr

Imaginons un élément de matériau granulaire en équilibre auquel on applique des contraintes normales et tangentielles (Figure 1.3(a)) ; les contraintes normales  $\sigma$  et tangentielles  $\tau$  sont définies positives selon la convention de signes montrée sur la Figure 1.3(a). Intéressons nous aux contraintes appliquées sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale (Figure 1.3(b)). Il est facile de montrer que les contraintes  $\sigma_\theta$  et  $\tau_\theta$  appliquées sur le plan incliné sont données par les expressions

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta), \end{aligned} \quad (1.3)$$

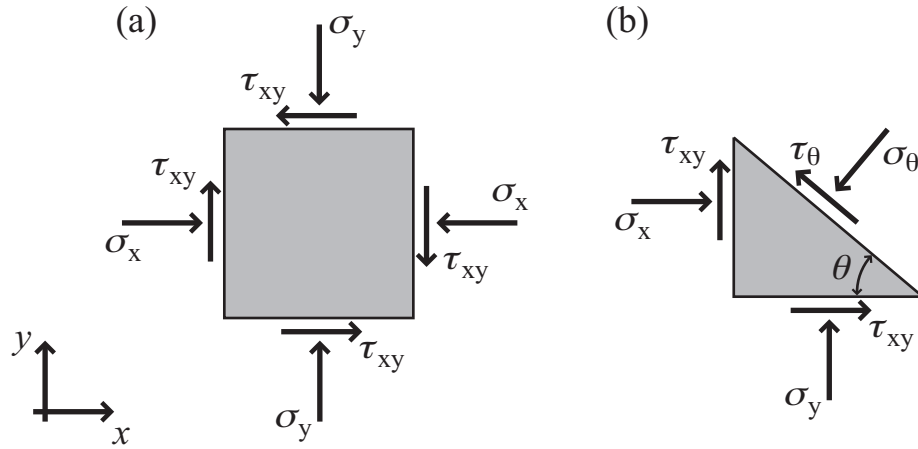


FIG. 1.3 – (a) Élément de matériau granulaire soumis à des contraintes normales et tangentielles; (b) contraintes normale et tangentielle dans un plan incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale.

où  $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ . Les valeurs de  $\sigma_\theta$  et  $\tau_\theta$  décrivent un cercle dans l'espace  $(\sigma, \tau)$  dont l'équation est

$$\left[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (1.4)$$

Ce cercle est appelé le cercle de Mohr, et il correspond à la représentation graphique des contraintes en deux dimensions proposée par Otto Mohr en 1882.

Il est utile de tracer en même temps le cercle de Mohr et les surfaces limites de charge du matériau (i.e., une pour les contraintes tangentielles positives et une autre pour les contraintes tangentielles négatives). Si le cercle de Mohr ne touche pas les surfaces limites de charge, alors aucun plan dans le milieu ne glisse. En revanche, si le cercle de Mohr est tangent aux surfaces limites de charge, alors il y a deux plans dans le milieu sur lesquels la contrainte tangentielle est égale à la résistance au cisaillement du matériau (i.e.,  $\tau = \tau_{max}$ ). A priori, ces deux plans peuvent glisser, et leurs orientations sont données par les points du cercle qui sont tangents aux surfaces limites de charge (Figure 1.4).

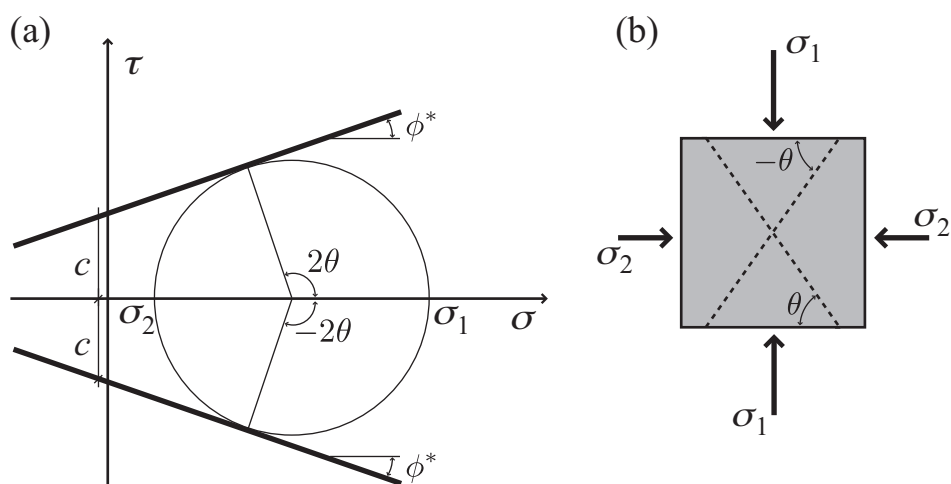


FIG. 1.4 – (a) Surface limite de charge et Cercle de Mohr d'un matériau granulaire cohésif au moment de la rupture; (b) Plans de glissement (en pointillés).  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales majeure et mineure en 2D, respectivement

## 1.2 Caractérisation du comportement macroscopique : essais expérimentaux

Des nombreux essais expérimentaux ont été conçus pour étudier la plasticité des matériaux granulaires cisailés. Ici, nous ne présentons que les plus utilisés : l'essai de cisaillement direct, l'essai de cisaillement annulaire, et l'essai triaxial de révolution.

### 1.2.1 Essais de cisaillement direct et annulaire

Dans un essai de cisaillement direct, un échantillon de matériau granulaire est placé dans une boîte séparée en deux compartiments pouvant glisser l'un par rapport à l'autre (Figure 1.5). Une force verticale  $F_v$  est appliquée sur l'échantillon, et le compartiment supérieur est déplacé par rapport au compartiment inférieur, ce qui provoque le cisaillement de l'échantillon. Lors du cisaillement, on mesure la force horizontale  $F_h$ , et les contraintes normale  $\sigma$  et tangentielle  $\tau$  le long du plan cisailé sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma &= F_v/S \\ \tau &= F_h/S,\end{aligned}\tag{1.5}$$

où  $S$  est l'aire du plan, qui change le long de l'essai. Cette procédure est répétée pour différentes valeurs de  $F_v$ , rajoutant à chaque fois un nouveau

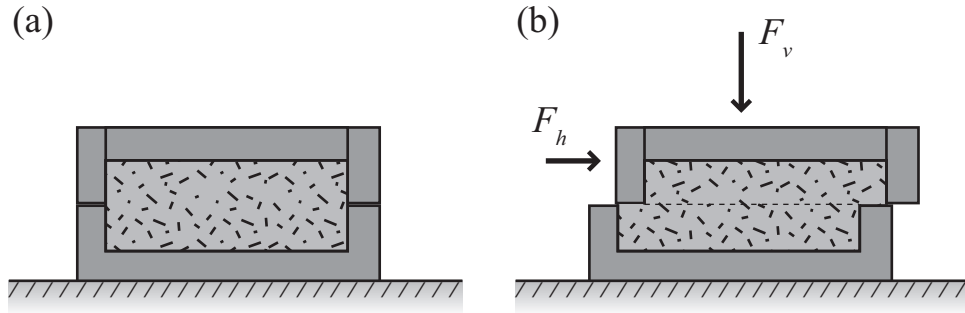


FIG. 1.5 – *Essai de cisaillement direct. (a) Etat initial; (b) échantillon cisailé.*

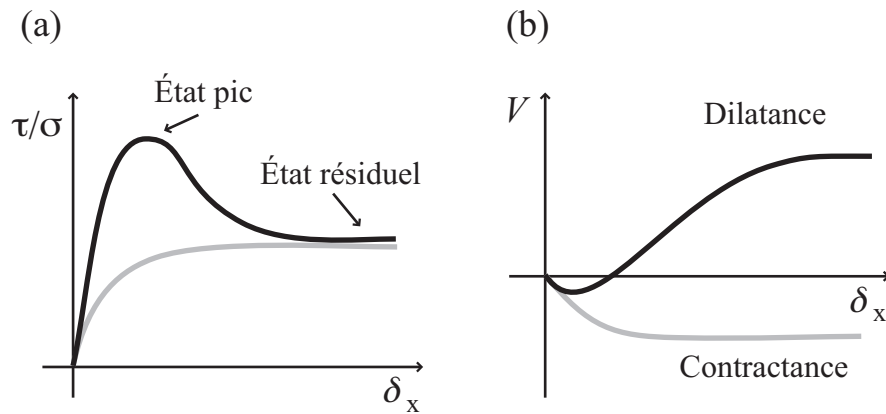


FIG. 1.6 – (a) *Évolution de la contrainte tangentielle normalisée,  $\tau/\sigma$ , et (b) évolution du volume de l'échantillon, lors du cisaillement pour un échantillon initialement dense et un échantillon initialement lâche.*

point sur la surface limite de charge. Ceci permet de calculer l'angle de frottement interne et la cohésion du matériau.

On obtient deux types de réponses, suivant la densité initiale du milieu. Si le milieu est dense, la courbe contraintes-déformation présente un *pic* de résistance pour des déformations très faibles. Lorsqu'on continue à cisailier, la résistance du matériau diminue et se stabilise à une valeur plus faible appelée la *résistance résiduelle* du matériau (Figure 1.6(a)). Dans les phases initiales de l'essai, le volume de l'échantillon  $V$  augmente; ce phénomène est connu sous le nom de *dilatance* (Figure 1.6(b)).

En revanche, si le milieu est lâche, on n'observe pas un pic de résistance, mais uniquement une résistance résiduelle (Figure 1.6(a)). Dans les phases initiales de l'essai, le volume de l'échantillon diminue; ce phénomène correspond à une dilatance négative ou *contractance* (Figure 1.6(b)).

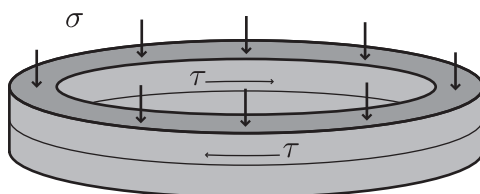


FIG. 1.7 – *Essai de cisaillement annulaire.*

Une des limitations principales d'un essai de cisaillement direct est que le taux de cisaillement ne peut pas être très élevé, car l'aire du plan cisailé diminue le long de l'essai. Un essai qui permet de contourner cette difficulté est l'essai de cisaillement annulaire. Dans cet essai, un échantillon de matériau granulaire en forme d'anneau est placé dans une boîte, aussi de forme annulaire, séparé en deux compartiments pouvant tourner l'un par rapport à l'autre (Figure 1.7) Comme dans l'essai de cisaillement direct, le glissement a lieu le long d'un plan prédéterminé, qui correspond au contact entre les deux compartiments de la boîte. L'avantage de l'essai annulaire est que l'échantillon peut être cisailé indéfiniment, ce qui permet l'étude des propriétés résiduelles du matériau.

### 1.2.2 L'essai triaxial de révolution

Dans un essai triaxial de révolution, un échantillon cylindrique de matériau granulaire est placé entre deux plaques et enveloppé d'une membrane flexible et imperméable. Un fluide environnant permet d'appliquer une pression de confinement  $\sigma_3$  (Figure 1.8(a)). Pour cisailier l'échantillon, la plaque supérieure est déplacée vers le bas, ce qui entraîne la rupture du milieu et la localisation de la déformation le long d'une bande de cisaillement (Figure 1.8(b)). Lors du cisaillement, on mesure la force verticale  $F_v$ . Cette force permet de calculer la contrainte normale verticale  $\sigma_v$  comme suit :

$$\sigma_v = F_v/S, \quad (1.6)$$

où  $S$  est l'aire transversale de l'échantillon, qui peut changer le long de l'essai. Si l'on suppose qu'il n'y a pas des contraintes tangentielles entre les plaques et l'échantillon, alors la contrainte  $\sigma_v$  peut être considérée comme la contrainte principale majeur  $\sigma_1$ , et un cercle de Mohr peut être tracé. Cette procédure est répétée pour différentes valeurs de  $\sigma_3$ , permettant de tracer à chaque fois un nouveau cercle de Mohr. La droite tangente à ces cercles est la surface limite de charge du matériau, et elle permet de calculer son angle de frottement interne et sa cohésion.

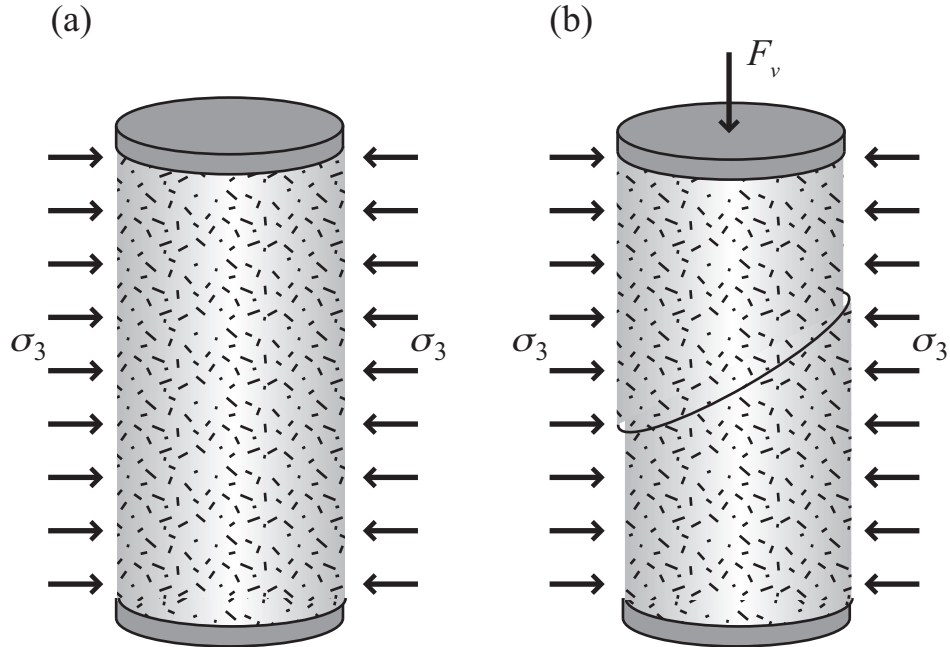


FIG. 1.8 – Essai triaxial de révolution. (a) État initial; (b) échantillon cisailé.

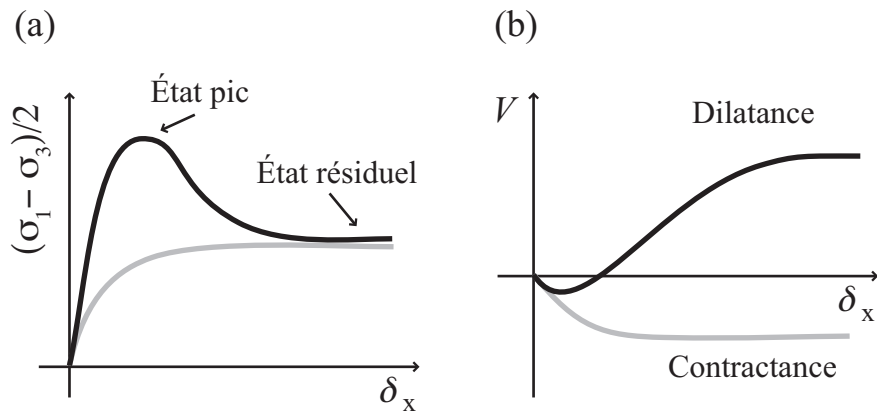


FIG. 1.9 – (a) Évolution de la contrainte déviatorique  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , et (b) évolution du volume de l'échantillon, lors du cisaillement pour un échantillon initialement dense et un échantillon initialement lâche.

Comme dans un essai de cisaillement direct, on obtient typiquement deux types de réponse, suivant la densité initiale du milieu. La figure 1.9 montre l'évolution de la contrainte déviatorique  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  et du volume  $V$  de l'échantillon lors du cisaillement ; ceci pour un échantillon initialement dense et un échantillon initialement lâche.

## 1.3 Relations micro-macro

### 1.3.1 L'angle de frottement interne

Comme nous l'avons vu dans la section 4.3.1, un des paramètres qui caractérisent la résistance au cisaillement d'un milieu granulaire est l'angle de frottement interne. En 1934, Caquot a été l'un des premiers à s'intéresser au rôle des propriétés de résistance locales dans ce paramètre macroscopique [12]. Il a considéré un milieu isotrope, et il a supposé que, lors du cisaillement, la force tangentielle appliquée sur tous les contacts du milieu prend la valeur limite imposée par la loi de frottement de Coulomb. En d'autres termes, il a supposé que, lors du glissement, le frottement dans tous les contacts du milieu est complètement mobilisé. Il a obtenu l'expression suivante :

$$\tan\phi^* = \frac{\pi}{2} \tan\phi_s, \quad (1.7)$$

où  $\phi^*$  est l'angle de frottement interne et  $\phi_s$  est l'angle de frottement entre les grains, qui peut aussi être exprimé comme un coefficient de frottement de glissement  $\mu_s = \tan\phi_s$ .

En 1954, Bishop, à partir de considérations énergétiques, a proposé deux expressions qui permettent de calculer l'angle de frottement interne en fonction de l'angle de frottement micro [4] ; ceci pour un essai en compression triaxial

$$\sin\phi^* = \frac{15 \tan\phi_s}{10 + 3 \tan\phi_s}, \quad (1.8)$$

et pour un essai en déformation plane

$$\sin\phi^* = \frac{3}{2} \tan\phi_s. \quad (1.9)$$

Plus tard, en 1962, Rowe s'est intéressé au cisaillement d'un arrangement monodisperse de sphères [72], et il a obtenu l'expression suivante :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \tan\theta_a \tan(\phi_s + \theta_b) \quad (1.10)$$



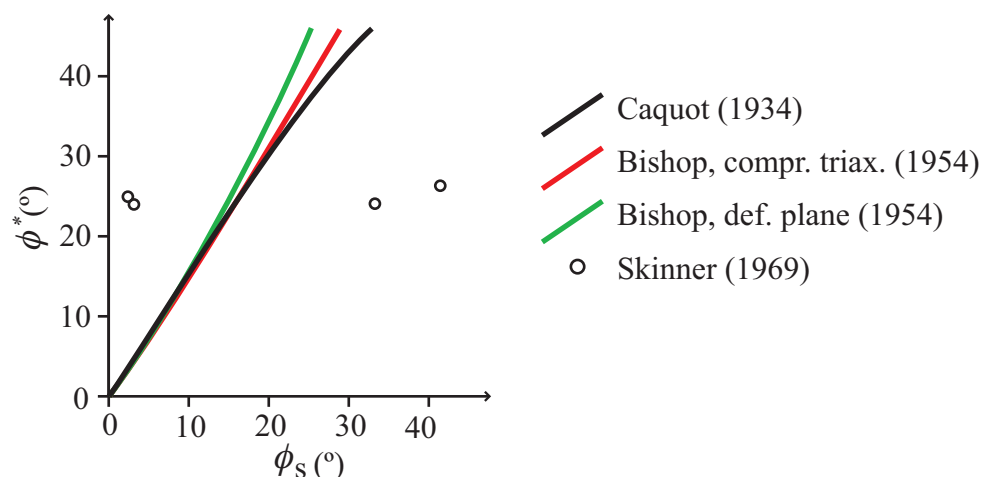


FIG. 1.10 – Angle de frottement interne en fonction de l’angle de frottement local. Relations théoriques proposées par Caquot et Bishop, et résultats expérimentaux obtenus par Skinner.

où  $\theta_a$  et  $\theta_b$  sont deux angles qui dépendent du type d’arrangement et de la direction dans laquelle le milieu est cisailé. Une expression similaire a été développée par Horne en 1965 [31].

Les expressions 1.8, 1.9, et 1.10, bien que plus élaborées, gardent la même logique que l’expression proposée par Caquot : le mode de mouvement relatif entre les particules est le glissement au niveau des contacts, et, en conséquence, il doit y avoir une relation directe entre l’angle de frottement aux contacts et l’angle de frottement interne.

En 1969, les ingénieurs travaux expérimentaux de Skinner ont montré que les relations théoriques proposées par Caquot, Bishop, Rowe, et Horne (i.e., les équations 1.7, 1.8, 1.9, et 1.10) étaient fausses [78]. Skinner a remarqué que les billes de verre offrent une opportunité exceptionnelle de faire varier l’angle de frottement microscopique. En fait, l’angle de frottement entre deux billes de verre sèches est très faible (i.e.,  $\phi_s \simeq 5^\circ$ ), mais, si les billes sont mouillées, l’angle de frottement est à peu près 7 fois plus élevé (i.e.,  $\phi_s \simeq 35^\circ$ ). Skinner a cisailé un milieu composé de billes de verre lisses (i.e., sèches) et un milieu composé de billes de verre frottantes (i.e., mouillées), et il a montré que l’angle de frottement interne à l’état résiduel des deux milieu est le même. Or, les relations théoriques proposées par Caquot, Bishop, Rowe, et Horne affirmaient que si l’angle de frottement local augmentait, alors l’angle de frottement interne devait aussi augmenter. La figure 1.10 montre les relations théoriques 1.7, 1.8, et 1.9 ainsi que les valeurs d’angle de frottement interne obtenues expérimentalement par Skinner pour les billes de verre.

---

Skinner a argumenté que la différence entre ses expériences et les prédictions théoriques était due au fait que ces prédictions théoriques négligeaient le roulement au niveau des contacts. Il a expliqué son argument de la manière suivante : si l'angle de frottement interne des deux expériences (i.e., celle avec les billes lisses et celle avec les billes frottantes) est le même, alors l'énergie dissipée dans les deux expériences est la même. Or, cette énergie est principalement dissipée par frottement aux contacts, et l'angle de frottement micro dans les deux expériences diffère par un facteur de  $\simeq 7$ . Ceci implique que, pour que l'énergie dissipée dans les deux expériences soit la même, le nombre de contacts glissants doit diminuer lorsqu'on augmente l'angle de frottement entre les billes. Si le nombre de contacts glissants diminue, alors le mouvement relatif entre les particules doit avoir lieu en utilisant un mode différent de glissement. Skinner a suggéré que ce mode est le roulement au niveau des contacts.

Dans les années 70, les expériences de Oda avec des matériaux photo-élastiques [56, 58, 59] ont confirmé la supposition de Skinner. Ces expériences ont montré que le pourcentage des contacts glissants peut être très faible lors du cisaillement, et que le roulement au niveau des contacts est très actif, en particulier lorsque  $\phi_s$  est élevé.

Quelques années plus tard, grâce au rapide développement des ordinateurs, un nouvel outil de travail a été développé : les méthodes de simulation numérique discrète (e.g., la Dynamique Moléculaire en 1979 [21] et la Dynamique des contacts en 1994 [51, 39, 40]). Ces méthodes ont constitué, et constituent encore, un cadre d'analyse privilégié pour étudier les relations micro-macro, car elles permettent de contourner des nombreuses difficultés expérimentales ainsi que d'étudier précisément l'évolution du système à l'échelle des grains et des contacts.

Très rapidement, plusieurs travaux de simulation numérique [88, 3, 47, 60, 87, 9, 83, 44] ont permis de montrer que la relation entre l'angle de frottement entre les grains et l'angle de frottement interne était différente de celle qui proposaient les modèles théoriques de Caquot, Bishop, Rowe, et Horne. Ces travaux ont aussi montré que l'angle de frottement interne dépend de l'angle de frottement aux contacts, contrairement à ce que les expériences de Skinner suggéraient. Actuellement, on sait bien que l'angle de frottement interne dépend de l'angle de frottement aux contacts si ce dernier est faible, et que l'angle de frottement interne sature si l'angle de frottement aux contacts est élevé. Une courbe typique de la relation entre l'angle de frottement interne à l'état résiduel et l'angle de frottement micro est illustrée sur la figure 1.11.

Les travaux de simulation numérique ont aussi confirmé le rôle majeur joué par les rotations dans la résistance et la déformation des milieux gra-

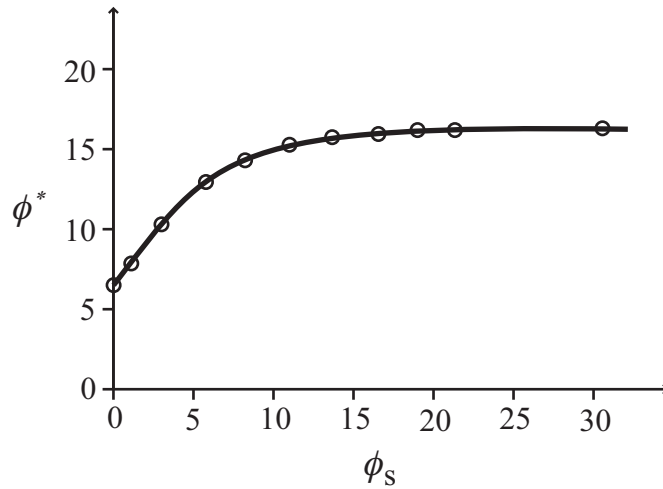


FIG. 1.11 – Courbe typique de l'angle de frottement interne en fonction de l'angle de frottement micro. Résultats obtenus avec une simulation numérique discrète.

nulaires. Ces études ont permis de montrer que le comportement du milieu est fortement affecté par la restriction, totale ou partielle, du roulement relatif des particules en contact. Ceci a permis d'expliquer pourquoi il est difficile d'obtenir des valeurs réalistes d'angle de frottement interne en utilisant des milieux granulaires modèles composés des particules sphériques (ou circulaires en 2D). La raison en est que, dans un tel milieu, la rotation relative des particules en contact n'est pas restreinte. Ceci représente une grande différence avec les milieux réels, dans lesquels les contacts peuvent souvent résister au roulement. Ceci peut avoir différentes origines microscopiques telles que la présence d'un ciment, la déformation plastique de la région de contact, et la forme non-convexe des grains.

Plusieurs modèles théoriques ont été développés prenant en compte la résistance au roulement au niveau des contacts [35, 92, 6, 24, 42]. Ces modèles permettent d'étudier le rôle de la résistance au roulement dans la réponse macroscopique du milieu, ainsi que d'obtenir des valeurs d'angle de frottement interne et de déformation volumique plus réalistes que celles obtenues lorsque la rotation relative des particules n'est pas restreinte [57, 36, 93, 94]. D'autres chercheurs ont aussi étudié des milieux dans lesquels la rotation des particules est complètement restreinte [45, 7, 8, 2]. Cependant, cet artifice paraît difficile à justifier du point de vue physique.

Il n'est pas encore clair comment l'angle de frottement local et la résistance au roulement se combinent pour construire l'angle de frottement interne. Il reste aussi à vérifier si les dépendances observées dans les milieux pulvérulents

restent valables pour les milieux cohésifs.

### 1.3.2 L’adhésion macroscopique et la cohésion

Dans un milieu granulaire cohésif, les particules adhèrent entre elles. Cette adhésion microscopique peut avoir différentes origines telles que la cimentation, la capillarité, et les interactions électromagnétiques entre les grains de très petite taille (i.e., forces de van der Waals) [74, 50]. Grâce à l’adhésion entre les grains, les milieux granulaires cohésifs peuvent résister à la traction. La contrainte maximale qu’un milieu cohésif peut supporter en traction est appelée la résistance à la traction du milieu. Ici, nous appellerons cette résistance l’adhésion macroscopique  $A$ .

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la relation entre l’adhésion locale et l’adhésion macroscopique. Dans les années 60, Ingles [33, 50] et Rumpf [73] ont développé une expression permettant de calculer  $A$  en fonction de l’adhésion locale dans un milieu cohésif composé de sphères de la même taille :

$$A = \nu \frac{Z f_a}{\pi d^2}, \quad (1.11)$$

où  $\nu$  est la compacité du milieu (i.e., la proportion du volume occupé par les particules),  $Z$  est le nombre de coordination (i.e., le nombre moyen de contacts par particule),  $f_a$  est la force d’adhésion au niveau des contacts, et  $d$  est le diamètre des sphères. D’autres chercheurs ont aussi trouvé, cette fois-ci expérimentalement, une relation linéaire entre l’adhésion au niveau des contacts et l’adhésion macroscopique [63, 43, 19]. Ces travaux ont profité d’une possibilité expérimentale exceptionnelle de faire varier l’adhésion micro : la capillarité dans les milieux partiellement saturés.

Lorsqu’un milieu granulaire est cisailé, la propriété macroscopique qui résulte de l’adhérence entre les particules est la cohésion  $c$ . La cohésion  $c$  peut être reliée à une valeur d’adhésion “théorique”  $A^*$  à l’aide de l’expression suivante [30] :

$$c \simeq A^* \tan \phi^*. \quad (1.12)$$

Ceci revient à associer l’adhésion macroscopique à l’intersection de la surface limite de charge avec l’axe des contraintes normales (Figure 1.12).

Récemment, plusieurs travaux ont été consacrés à l’étude de la cohésion en utilisant des simulations numériques discrètes [46, 64, 24, 41, 42, 70]. Ces travaux ont permis de montrer que la cohésion augmente avec l’adhésion entre les grains. Ceci n’est pas surprenant, car le cisaillement du milieu implique l’ouverture (i.e., la rupture en traction) de certains contacts. Néanmoins, le cisaillement implique, surtout, le glissement et le roulement de beaucoup

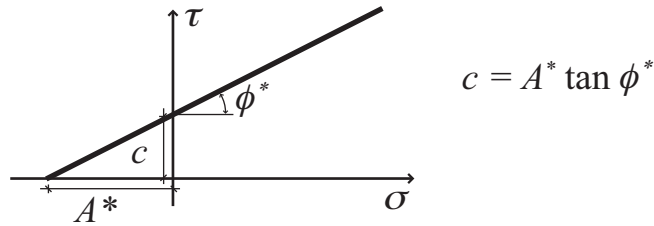


FIG. 1.12 – Surface limite de charge d'un milieu granulaire cohésif. L'adhésion théorique  $A^*$  peut être calculée à partir de la cohésion  $c$  et l'angle de frottement interne  $\phi^*$

d'autres contacts. Il est donc intéressant de se demander comment l'angle de frottement local, et la résistance au roulement affectent la cohésion du milieu.

En conclusion, la résistance au cisaillement d'un milieu granulaire cohésif fait intervenir plusieurs propriétés de résistance à l'échelle des contacts (e.g., l'adhésion, l'angle de frottement, et la résistance au roulement entre les grains). La relation entre ces propriétés de résistance au niveau des contacts et la réponse macroscopique du milieu n'est, a priori, pas triviale. L'étude de cette relation constitue une des motivations principales de ce travail de thèse ; elle sera abordée dans les chapitres 3 et 4 de ce mémoire.

### 1.3.3 La compacité et la microstructure

La compacité est définie comme la proportion du volume d'un milieu granulaire qui est occupée par les particules. Il est intéressant de l'étudier, car elle constitue un descripteur de premier ordre de la géométrie de l'arrangement de grains. Plus précisément, elle nous informe sur le volume du milieu, qui est, comme nous l'avons vu dans la section 1.2, généralement affecté par le cisaillement. Les premières observations à ce propos ont été faites par Reynolds en 1885 [69], qui a montré que le cisaillement d'un milieu initialement dense produit une augmentation du volume du milieu, et que le cisaillement d'un milieu initialement lâche produit une diminution du volume du milieu. Ces deux phénomènes sont appelés, respectivement, dilatance et contractance.

Probablement, les premiers travaux à suggérer le rôle des propriétés de résistance locales dans la compacité d'un milieu granulaire cisailé ont été ceux de Skinner [78]. Il a observé qu'un échantillon composé de billes lisses était moins dilatant qu'un échantillon composé de billes frottantes. Ce résultat suggère que la compacité du milieu cisailé diminue lorsqu'on augmente l'angle

---

de frottement entre les grains. Ceci a été confirmé ultérieurement par des nombreux travaux de simulation numérique [95, 47, 9, 65, 5, 44]. Il a aussi été montré qu'un milieu composé de particules sans frottement peut être cisailé sans se dilater, tout en ayant un angle de frottement interne non nul [62]. D'autres chercheurs ont montré que la compacité du milieu est aussi une fonction décroissante de la résistance au roulement au niveau des contacts [35, 36, 57]. Pour ce faire, ils ont comparé des échantillons composés de particules circulaires avec des échantillons composés de particules elliptiques.

La compacité offre une description plutôt pauvre de l'“état géométrique” du système. Cependant, la relation entre les propriétés de résistance locales et la compacité soulève une question très intéressante dans l'étude des relations micro-macro : celle du rôle des paramètres de résistance locaux dans la construction de cet état géométrique, aussi appelé la microstructure du milieu. Ce point est intéressant, car la réponse macroscopique du milieu n'est pas uniquement fonction des propriétés de résistance aux contacts, mais elle est, en grande partie, déterminée par la microstructure de l'arrangement. Cette microstructure constitue donc un élément additionnel à prendre en compte dans l'étude des relations micro-macro. Cependant, un nouveau problème se pose : le lien entre les propriétés de résistance locales et la microstructure du milieu n'est pas évident. On peut même se demander dans quelle mesure les propriétés de résistance locales ont un effet direct sur le comportement de l'ensemble, et dans quelle mesure leur effet dans le comportement global passe, plutôt, par une modification de la microstructure (Figure 1.13). Cette question constitue une des motivations centrales de ce travail de thèse ; elle sera abordée dans le chapitre 4 de ce mémoire.

## 1.4 Quelle approche choisir : expérimentale ou théorique ?

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction générale, le but central de cette thèse est d'étudier l'influence des propriétés de résistance au niveau des contacts sur les paramètres qui décrivent la plasticité des milieux granulaires cisailés (i.e., la résistance au cisaillement et la dilatance) ainsi que dans la microstructure développée par le milieu lors du cisaillement. Ces questions peuvent être étudiées avec différentes approches ; par exemple avec des modèles expérimentaux ou avec des modèles théoriques tels qu'une simulation numérique discrète.

Les modèles expérimentaux ont l'avantage d'être plus “réalistes” que les modèles théoriques. Cependant, pour l'étude que nous avons réalisée, l'ap-

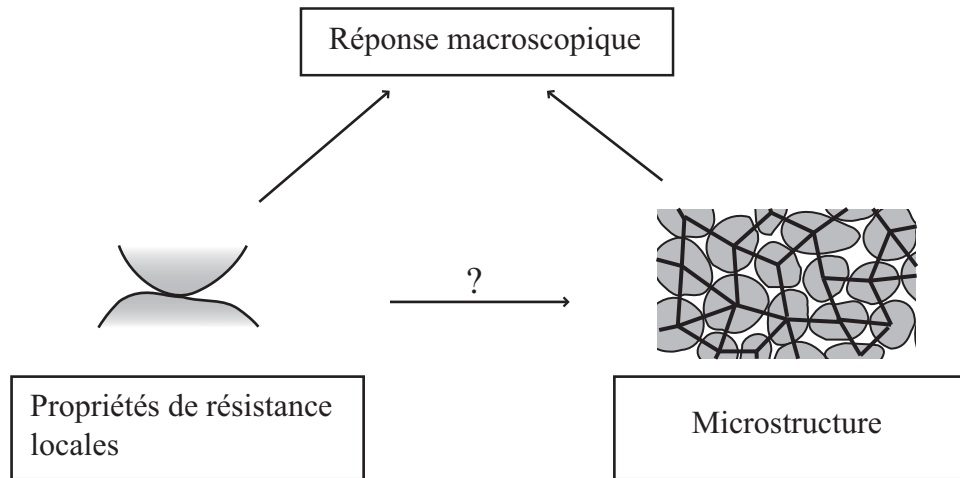


FIG. 1.13 – *La réponse macroscopique est déterminée par les propriétés de résistance au niveau des contacts et par la microstructure de l’arrangement de grains. Cependant, le lien entre les propriétés de résistance locales et la microstructure du milieu n’est pas évident.*

proche expérimentale présente aussi quelques difficultés :

- Il est difficile (voire impossible) de varier systématiquement une propriété des grains sans devoir changer de matériau.
- Il est difficile d’avoir le même état initial dans plusieurs expériences.
- Il est difficile d’avoir accès aux variables à l’échelle des grains et des contacts (e.g., les positions et les vitesses des grains, les orientations et les forces de contact, etc.), ce qui constitue une limitation dans l’étude détaillée de la microstructure du milieu.

En revanche, une méthode de simulation numérique discrète permet de contourner facilement ces difficultés :

- Les propriétés du matériau peuvent être variées systématiquement et de manière indépendante.
- Le même échantillon peut être utilisé dans plusieurs expériences, ayant donc le même état initial.
- On a accès direct aux variables à l’échelle des grains et des contacts, ce qui rend possible l’étude détaillée de la microstructure du milieu.

Cependant, une simulation numérique discrète est moins “réaliste” qu’un modèle expérimental, car le système doit être simplifié pour pouvoir calculer son évolution ; par exemple, il est habituel de simuler un milieu en deux dimensions, ou de supposer que les grains ont une forme circulaire. Ces simplifications peuvent être vues comme une limitation, mais elles peuvent aussi être vues comme un grand avantage. Dans certains cas, elles peuvent même

être souhaitables, car elles permettent d'écarter l'effet de certains paramètres et d'étudier le comportement du système dans leur absence. Par exemple, si l'on veut écarter l'effet de la forme anguleuse des particules, on peut utiliser des particules circulaires, ou si l'on veut écarter l'effet de la gravité, on peut l'enlever.

Les simulations numériques discrètes représentent donc un cadre d'analyse privilégié pour l'étude des relations micro-macro, car elles nous permettent d'accéder à un grand éventail d'essais "de rêve", qui ne seraient pas réalisables expérimentalement. La variation systématique des propriétés de résistance micro, qui constitue la partie la plus importante de ce travail de thèse, est justement un de ces essais "de rêve".

Dans ce travail de thèse, nous avons utilisé une méthode de simulation numérique discrète appelée la *Dynamique des Contacts*. Un aperçu des principes de base de cette méthode sera présenté dans le chapitre suivant.





# Chapitre 2

## Modélisation numérique des milieux granulaires par la méthode de la Dynamique des Contacts

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation numérique des milieux granulaires en utilisant des méthodes d'éléments distincts. Plus précisément, nous nous proposons de donner un aperçu des principes de base de la Dynamique des Contacts, qui est la méthode que nous avons utilisée le long de ce travail. D'abord, nous montrerons que plusieurs échelles peuvent être identifiées dans un milieu granulaire, et nous expliquerons comment le traitement qu'on donne à ces échelles mène à deux approches de modélisation très différentes : l'approche régulière et l'approche non régulière. Ensuite, nous présenterons les équations de la Dynamique des Contacts pour un ensemble de disques pouvant exercer des forces normales et tangentielles aux contacts. A la fin du chapitre, nous montrerons comment introduire deux nouveaux éléments dans cette méthode. Ces éléments sont la résistance au roulement et l'adhésion.

### 2.2 Différentes échelles dans un milieu granulaire

Dans les milieux granulaires, on peut identifier plusieurs échelles de longueur et de temps. Par exemple, à l'échelle des contacts, on peut considérer

comme échelle de longueur  $l_c$  le diamètre de la zone de contact lors d'une collision, et comme échelle de temps  $t_c$  la durée de la collision. A l'échelle des grains, on peut considérer comme échelle de longueur  $l_g$  le diamètre d'un grain, et comme échelle de temps  $t_g$  le temps caractéristique entre deux collisions. On peut identifier aussi des échelles supérieures. Par exemple, une échelle de longueur mésoscopique qui serait donnée par l'épaisseur des bandes de cisaillement, ou une échelle de longueur macroscopique qui serait donnée par la taille d'un échantillon dans lequel le comportement mécanique est bien défini (i.e., un volume élémentaire représentatif).

Certains phénomènes macroscopiques relèvent de l'échelle des contacts. C'est le cas de la transmission d'ondes sonores dans le milieu, qui résulte des petites déformations élastiques dans les zones de contact entre les grains. Par contre, d'autres phénomènes macroscopiques relèvent de l'échelle des grains. C'est le cas de la dilatance et des grandes déformations plastiques, qui résultent du réarrangement des grains lorsque le milieu se déforme. Lorsqu'on veut modéliser un milieu granulaire, il est important de bien identifier le type de phénomène macroscopique auquel on s'intéresse, ainsi que les processus qui se trouvent à son origine. La raison en est que, comme nous le verrons dans la section qui suit, les échelles typiques de ces processus vont déterminer l'approche de modélisation qu'on doit adopter.

## 2.3 Approches régulière et non régulière

En mécanique classique, le mouvement des corps est *régulier*, c'est-à-dire qu'il peut être décrit par une fonction continue et deux fois différentiable dans le temps. Ainsi, si l'on pouvait suivre précisément l'évolution des forces, des positions, et des vitesses lors d'une collision entre deux particules, on obtiendrait des fonctions "douces" dans le temps (i.e., elles ne présenteraient pas des discontinuités). Cependant, une collision est un processus très rapide, et, souvent, les échelles du contact,  $l_c$  et  $t_c$ , peuvent être beaucoup plus petites que celles du grain,  $l_g$  et  $t_g$ . A cause de ce grand écart entre les échelles du contact et celles du grain, la modélisation numérique d'un milieu granulaire peut être abordée suivant deux approches : l'approche régulière (appelée aussi *smooth*), et l'approche non régulière (appelée aussi *non smooth*).

### 2.3.1 L'approche régulière

Dans l'approche *régulière*, on cherche à modéliser précisément les forces et les déplacements aux contacts lors des collisions. Pour cette raison, on considère les grains comme étant déformables, et ces déformations sont reliées

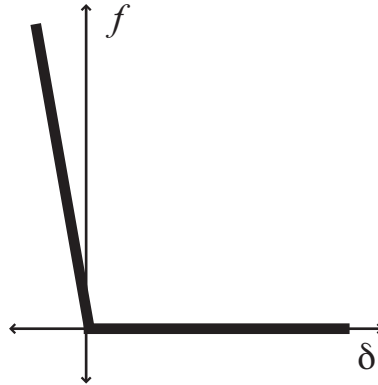


FIG. 2.1 – Graphe représentant l'ensemble de valeurs de force de contact  $f$  et d'interstice  $\delta$  que le contact peut prendre lors de la collision dans une approche régulière.

aux forces de contact à l'aide d'une relation constitutive. Le mouvement des grains est calculé à l'aide du principe fondamental de la dynamique (i.e., la deuxième loi de Newton), à partir des forces  $\mathbf{f}$  et des moments  $\mathbf{M}$  appliqués sur les grains :

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \mathbf{M} &= I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $m$  est la masse du grain,  $d\mathbf{v}/dt$  est son accélération,  $I$  est son moment d'inertie, et  $d\boldsymbol{\omega}/dt$  est son accélération angulaire. Dans cette approche, les forces, les déplacements, et les vitesses des grains évoluent de manière continue, et le mouvement des grains est régulier. Les échelles d'intérêt étant celles du contact,  $l_c$  et  $t_c$ , cette approche nécessite une discrétisation très fine du temps. Une des méthodes d'éléments distincts qui utilisent l'approche régulière est la *Dynamique Moléculaire*, appliquée la première fois par Cundall à la simulation des géomatériaux en 1979 [21].

Pour illustrer cette approche, considérons une collision frontale entre une particule circulaire sans frottement et un mur fixe. Comme il est habituel dans les approches régulières, imaginons que la déformation de la zone de contact peut être simulée en permettant que les deux corps s'interpénètrent, et que la force de contact peut être calculée en fonction de cette interpénétration. La figure 2.1 montre la force de contact  $f$  en fonction de la distance interstitielle entre la particule et le mur (i.e., l'interstice  $\delta$ ). Ainsi, si la particule et le mur sont en contact, alors l'interstice  $\delta$  est inférieur ou égale à zéro (notons qu'une valeur négative de  $\delta$  indique que la zone de contact est déformée),

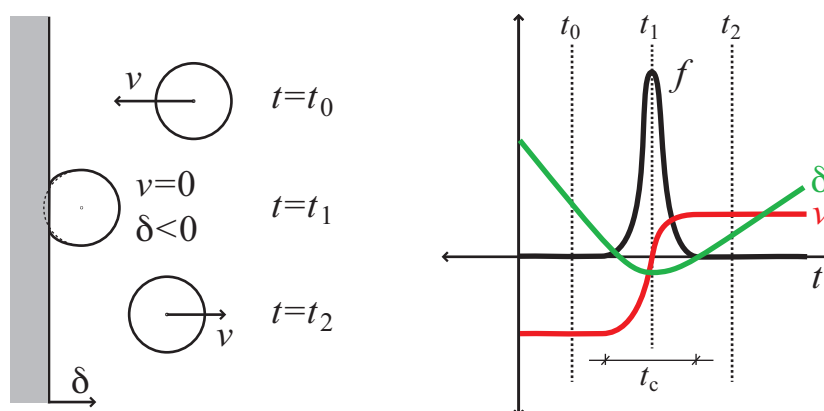


FIG. 2.2 – Interstice  $\delta$ , vitesse  $v$ , et force de contact  $f$  qu'on obtiendrait en modélisant la collision avec une approche régulière.

et la magnitude de la force  $f$  peut être calculée en fonction de  $\delta$  (ici, une fonction linéaire :  $f = -k\delta$ ). En revanche, si la particule et le mur ne sont pas en contact, alors l'interstice  $\delta$  est supérieur à zéro, et la force de contact  $f$  est nulle. La figure 2.2 montre schématiquement l'évolution de l'interstice  $\delta$ , de la vitesse  $v$ , et de la force de contact  $f$  lors de la collision. Notons que ces trois quantités varient de manière douce (i.e., continue) dans le temps, même si cette variation est très rapide lors de la collision.

### 2.3.2 L'approche non régulière

Dans l'approche *non régulière*, on s'intéresse à des échelles très supérieures à celles du contact. En d'autres termes, on ne cherche pas à modéliser en détail les forces et les déplacements aux contacts lors des collisions, mais on s'intéresse plutôt à l'effet net de ces collisions. Cet effet est de changer brusquement les vitesses des grains comme résultat de la transmission de quantité de mouvement au niveau des contacts. On cherche donc une description plus grossière des collisions, qui néglige les échelles du contact ( $l_c$  et  $t_c$ ) et ne conserve que celles du grain ( $l_g$  et  $t_g$ ). Ceci revient à considérer les grains comme étant rigides (i.e.,  $l_c \simeq 0$ ) et les collisions comme étant instantanées (i.e.,  $t_c \simeq 0$ ).

Dans cette approche, nous ne sommes pas obligés d'introduire une relation constitutive au niveau des contacts, mais, plutôt, une loi de contact qui tient compte de l'énergie dissipée lors des collisions. Ensuite, les impulsions linéaires  $\mathbf{R}$  et angulaires  $\mathbf{S}$  appliquées sur les grains pendant un certain intervalle de temps peuvent être calculées à partir de leurs changements de vitesse

à l'aide du principe fondamental de la dynamique intégré dans le temps :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{f} dt &= \int m \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt & (2.2) \\ \mathbf{R} &= m \Delta \mathbf{v} \\ \int \mathbf{M} dt &= \int I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} dt \\ \mathbf{S} &= I \Delta \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Ici, les forces, les déplacements, et les vitesses des grains lors des collisions n'évoluent pas de manière régulière, mais plutôt par une série de "sauts", le mouvement des grains étant donc non-régulier. La méthode d'éléments distincts qui utilise l'approche non régulière est la *Dynamique des Contacts*, introduite par Moreau et Jean dans les années 90 [51, 39, 40].

Pour illustrer cette approche, considérons à nouveau la collision frontale entre une particule circulaire sans frottement et un mur fixe, mais, cette fois-ci, modélisée avec une approche non régulière. Nous devons donc introduire une loi de contact, qui relie la vitesse de la particule avant et après la collision. Dans ces but, il est habituel d'employer la définition du coefficient de restitution normal  $\rho$  de Newton :

$$\rho = -\frac{v^+}{v^-}, \quad (2.3)$$

où  $v^-$  et  $v^+$  sont les vitesses de la particule avant et après la collision et  $\rho \in [0, 1]$ . Cette relation stipule que la vitesse de la particule s'inverse lors de la collision. Elle nous informe aussi sur la quantité d'énergie cinétique dissipée lors de la collision, qui est proportionnelle à  $(1 - \rho^2)$ . Ainsi,  $\rho = 0$  correspond à une collision parfaitement inélastique (la vitesse de la particule après la collision est nulle, et elle reste "scotchée" au mur), et  $\rho = 1$  correspond à une collision parfaitement élastique (il n'y a pas d'énergie cinétique dissipée, et la magnitude de la vitesse de la particule, avant et après la collision, est la même). La solution au problème est la suivante :

$$\begin{cases} v^+ = -\rho v^- \\ R = -mv^-(1 + \rho). \end{cases} \quad (2.4)$$

La figure 2.3 montre schématiquement l'évolution de l'interstice  $\delta$ , de la vitesse  $v$ , et de la force de contact  $f$  lors de la collision. Notons que ces trois quantités varient de manière non régulière dans le temps.

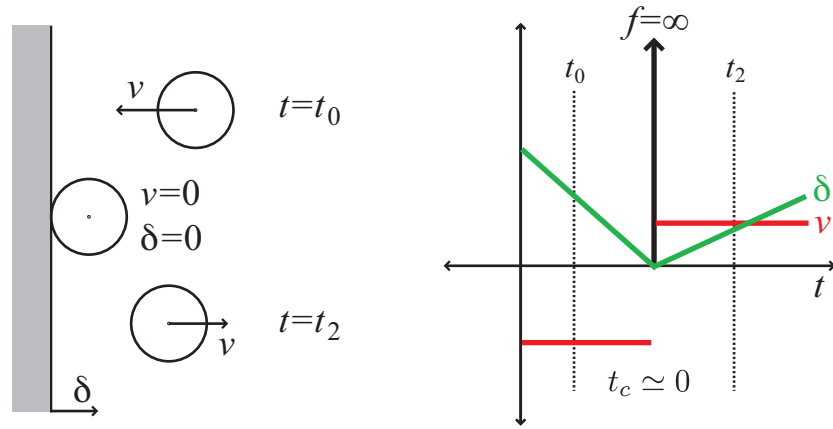


FIG. 2.3 – Interstice  $\delta$ , vitesse  $v$ , et force de contact  $f$  qu'on obtiendrait en modélisant la collision avec une approche non régulière.

Cet exemple nous offre deux remarques intéressantes :

1. Le traitement de la collision avec une approche non régulière nous a permis d'étudier la collision sans avoir besoin d'une relation constitutive au niveau des contacts. L'effet d'une telle relation est pris en compte à travers une discontinuité de vitesses, qui résulte du fait que, quel que soit le comportement du contact, les particules qui rentrent en collision ne peuvent pas s'interpénétrer ; autrement dit, elles ne peuvent pas occuper le même espace. L'impénétrabilité des particules réduit l'espace des solutions possibles du problème, et, en ce sens, elle constitue une *contrainte cinématique*. Le traitement non-régulier d'une collision suppose donc que, à l'échelle des grains, le résultat de la collision est davantage déterminé par la contrainte cinématique de l'impénétrabilité que par le choix d'une certaine relation entre les forces et les déplacements à l'échelle du contact.
2. Dans le cas d'une collision simple, les équations de la dynamique et la définition du coefficient de restitution de Newton ont suffi pour résoudre le problème (calculer le changement de vitesse et l'impulsion appliquée sur la particule pendant la collision). La raison en est que, dans une collision simple, il n'y a qu'un contact, et nous n'avons à respecter que les contraintes cinématiques imposées par ce contact. Dans les sections qui suivent, nous verrons que ces équations ne suffisent pas pour résoudre le problème des *collisions multiples* (i.e., des collisions faisant intervenir plusieurs contacts au même temps) dans un système *multicontacts*. Dans une collision multiple, les contraintes cinématiques imposées par tous les contacts doivent être respectées simultanément, ce qui exige

un traitement plus élaboré des interactions aux contacts.

### 2.3.3 Pourquoi choisir une approche non régulière ?

Nous avons vu que la régularité, ou la non-régularité, du mouvement est une question d'échelle d'observation. En d'autres termes, si l'on s'intéresse à des phénomènes qui relèvent de l'échelle du contact il est nécessaire d'avoir une relation constitutive au niveau des contacts et, donc, d'adopter une approche régulière ; en revanche, si l'on ne s'intéresse pas à ces phénomènes, il est raisonnable, et même souhaitable, d'utiliser une approche qui ne requiert pas une telle relation constitutive ; c'est le cas des approches non régulières. Ces approches peuvent paraître moins intuitives que les approches régulières. Cependant, elles présentent aussi de grands avantages ; par exemple :

- En négligeant l'échelle du contact, les approches non régulières requièrent une discrétisation du temps beaucoup moins fine que celle des approches régulières. Pour cette raison, ces approches sont, en principe, plus rapides.
- Les interactions aux contacts font intervenir des phénomènes physico-chimiques complexes, qui ne sont pas toujours bien connus. Dans les approches régulières, ces phénomènes doivent être représentés par une relation constitutive au niveau des contacts. Or, l'écriture de cette relation n'est pas toujours un exercice facile, et, souvent, elle implique l'introduction de nouveaux paramètres dont le sens n'est pas forcément clair. Les approches non régulières, s'intéressant à des échelles supérieures à celle du contact, ne présentent pas cette difficulté.

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à des phénomènes plastiques, dont la modélisation ne requiert pas une relation constitutive au niveau des contacts (e.g., la résistance au cisaillement, la dilatance, et la microstructure du milieu). Pour cette raison, nous avons adopté une méthode développée avec une approche non régulière, à savoir, la Dynamique des Contacts.

## 2.4 La Dynamique des Contacts

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode de la Dynamique de Contacts. Cette méthode a été proposée par Moreau [51] et Jean [39, 40] en utilisant des concepts de la mécanique non régulière, d'où son nom en anglais : *Non-Smooth Contact Dynamics*. Dans ce qui suit, nous présentons l'idée générale de cette méthode, ainsi que les équations et l'algorithme de résolution que nous avons utilisé.



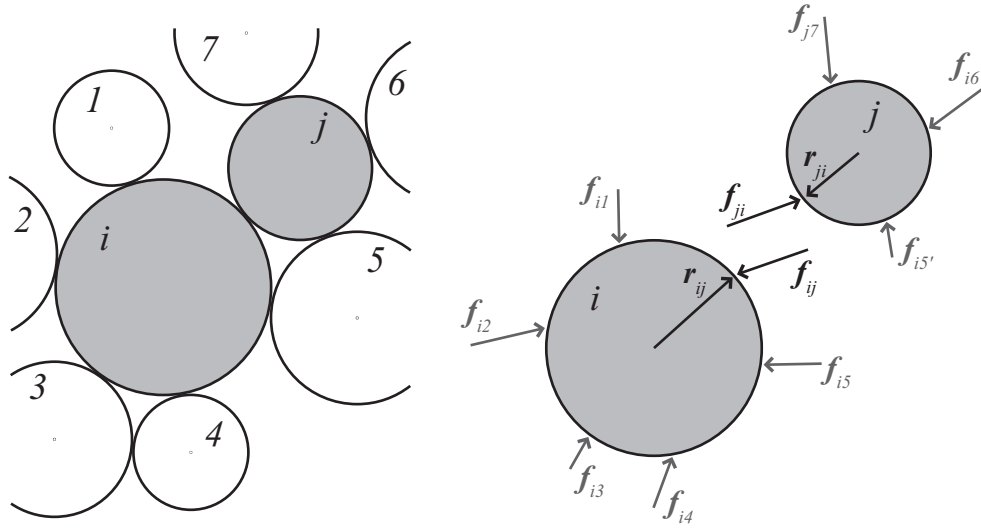


FIG. 2.4 – Particules  $i$  et  $j$  en contact au sein d'un milieu granulaire. Les  $\mathbf{f}$  sont les forces de contact et Les  $\mathbf{r}$  sont les vecteurs qui vont du centre de la particule aux points de contact.

### 2.4.1 Idée générale de la Dynamique des Contacts

Le but de la Dynamique des Contacts est de simuler l'évolution dans le temps (i.e., les positions des particules, leurs vitesses, et les forces aux contacts) d'un système composé de plusieurs particules rigides. Typiquement, ces particules sont en contact entre elles formant un système multicontacts. Le temps est discrétisé en pas de temps, et la méthode permet de calculer les impulsions exercées sur chaque particule pendant chaque pas de temps ainsi que les vitesses des particules à la fin de chaque pas.

La méthode de la Dynamique des Contacts peut être vue comme la superposition de trois ingrédients :

1. Les équations de la dynamique de chaque particule intégrées pour un pas de temps  $\Delta t$  (dans cette forme, les équations de la dynamique relient l'impulsion et le changement de quantité de mouvement).
2. Un ensemble de lois de contact qui définissent l'ensemble de valeurs admissibles d'impulsion et de vitesse relative aux contacts (i.e., les contraintes cinématiques).
3. Un algorithme de résolution.

## 2.4.2 Équations de la dynamique

Considérons deux particules  $i$  et  $j$  en contact au sein d'un milieu granulaire (Figure 2.4). Soit  $\{k\}$  l'ensemble de particules en contact avec  $i$  et  $\{l\}$  l'ensemble de particules en contact avec  $j$ . La force totale  $\mathbf{f}_i$  appliquée sur la particule  $i$  est donné par

$$\mathbf{f}_i = \sum_k \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{f}_i^{ext}, \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{f}_{ik}$  sont les forces appliqués sur la particule  $i$  aux contacts  $\{ik\}$ , et  $\mathbf{f}_i^{ext}$  est la résultante des forces externes agissant sur la particule  $i$  (e.g., le poids de la particule) appliquée au centre de masse de la particule. Le moment total  $\mathbf{M}_i$  des forces de contact autour du centre de la particule  $i$  est donné par

$$\mathbf{M}_i = \sum_k \mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{f}_{ik}, \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{r}_{ik}$  sont les vecteurs qui vont du centre de la particule  $i$  aux points de contact  $\{ik\}$ , et nous considérons qu'il n'y a pas de moments externes. Les équations de la dynamique pour la particule  $i$  s'écrivent

$$\mathbf{f}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{M}_i = I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}, \quad (2.8)$$

où  $m_i$  est la masse de la particule  $i$ ,  $\mathbf{v}_i$  est sa vitesse,  $I_i$  est son moment d'inertie, et  $\boldsymbol{\omega}_i$  est sa vitesse angulaire. En introduisant les équations 2.5 et 2.6 dans les équations 2.7 et 2.8, on obtient

$$\sum_k \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{f}_i^{ext} = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}, \quad (2.9)$$

$$\sum_k \mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{f}_{ik} = I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}. \quad (2.10)$$

Considérons maintenant un pas de temps  $\Delta t$ . En intégrant les équations 2.9 et 2.10 dans le pas de temps  $\Delta t$ , on obtient

$$\int_{\Delta t} \left( \sum_k \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{f}_i^{ext} \right) dt = \int_{\Delta t} m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} dt \quad (2.11)$$

$$\sum_k \mathbf{R}_{ik} + \mathbf{R}_i^{ext} = m_i \Delta \mathbf{v}_i,$$



FIG. 2.5 – Repères locaux attachés à la particule  $i$  ( $\mathbf{n}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}$ ) et à la particule  $j$  ( $\mathbf{n}_{ji}, \mathbf{t}_{ji}$ ).  $P_i$  et  $P_j$  sont les points matériels des particules  $i$  et  $j$  en contact

$$\int_{\Delta t} \left( \sum_k \mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{f}_{ik} \right) dt = \int_{\Delta t} I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} dt \quad (2.12)$$

$$\sum_k \mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{R}_{ik} = I_i \Delta \boldsymbol{\omega}_i,$$

où  $\mathbf{R}_{ik}$  sont les impulsions résultantes des forces de contact  $\mathbf{f}_{ik}$  appliqués sur la particule  $i$  pendant  $\Delta t$ ,  $\mathbf{R}_i^{ext}$  est l'impulsion résultante des forces externes  $\mathbf{f}_i^{ext}$ ,  $\Delta \mathbf{v}_i$  est le changement de vitesse de la particule  $i$  entre le début et la fin de  $\Delta t$ , et  $\Delta \boldsymbol{\omega}_i$  est le changement de vitesse angulaire de la particule  $i$  entre le début et la fin de  $\Delta t$ .

En réordonnant, les équations 2.11 et 2.12 peuvent être écrites comme suit :

$$\Delta \mathbf{v}_i = \frac{1}{m_i} \left( \sum_k \mathbf{R}_{ik} + \mathbf{R}_i^{ext} \right), \quad (2.13)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{I_i} \sum_k \mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{R}_{ik}. \quad (2.14)$$

Deux équations analogues peuvent être écrites pour la particule  $j$  :

$$\Delta \mathbf{v}_j = \frac{1}{m_j} \left( \sum_l \mathbf{R}_{jl} + \mathbf{R}_j^{ext} \right), \quad (2.15)$$

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_j = \frac{1}{I_j} \sum_l \mathbf{r}_{jl} \times \mathbf{R}_{jl}. \quad (2.16)$$

### 2.4.3 Projection des équations de la dynamique sur un repère local

Imaginons que les particules  $i$  et  $j$  sont en contact en un point  $P$  (ceci a un sens car les particules sont parfaitement rigides), et appelons  $P_i$  et  $P_j$  les

points matériels des particules  $i$  et  $j$  en contact (Figure 2.5). Au point  $P_i$ , définissons le repère local orthonormé  $(\mathbf{n}_{ij}, \mathbf{t}_{ij})$  attaché à la particule  $i$ , où  $\mathbf{n}_{ij}$  est le vecteur unitaire dans la direction normale au contact, orienté de la particule  $j$  à la particule  $i$ , et  $\mathbf{t}_{ij}$  est le vecteur unitaire dans la direction tangentielle au contact, défini positif selon la convention de signes montrée sur la figure 2.5. De manière analogue, au point  $P_j$ , définissons le repère local  $(\mathbf{n}_{ji}, \mathbf{t}_{ji})$  attaché à la particule  $j$ . Nous avons les symétries suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji} \\ \mathbf{t}_{ij} = -\mathbf{t}_{ji} \\ \mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{t}_{ij} = \mathbf{n}_{ji} \times \mathbf{t}_{ji} \\ \mathbf{R}_{ij} = -\mathbf{R}_{ji}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Les vitesses  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_j$  des points matériels  $P_i$  et  $P_j$ , respectivement, s'écrivent

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \times \mathbf{r}_{ij}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{v}_j + \mathbf{w}_j \times \mathbf{r}_{ji}, \quad (2.19)$$

ou, exprimées dans le repère local :

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})\mathbf{n}_{ij} + (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t}_{ij} + \omega_i r_i)\mathbf{t}_{ij}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u}_j = (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_{ji})\mathbf{n}_{ji} + (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{t}_{ji} + \omega_j r_j)\mathbf{t}_{ji}, \quad (2.21)$$

où  $r_i$  et  $r_j$  sont les rayons des deux particules. La vitesse relative  $\mathbf{u}_{ij}$  de  $P_i$  par rapport à  $P_j$  s'écrit

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j. \quad (2.22)$$

Considérons maintenant un pas de temps  $\Delta t$ . Les changements des vitesses  $\Delta \mathbf{u}_i$  et  $\Delta \mathbf{u}_j$ , ainsi que le changement de vitesse relative  $\Delta \mathbf{u}_{ij}$  sont donnés par

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^+ - \mathbf{u}_i^-, \quad (2.23)$$

$$\Delta \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^+ - \mathbf{u}_j^-,$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{ij} &= \mathbf{u}_{ij}^+ - \mathbf{u}_{ij}^- \\ &= \mathbf{u}_i^+ - \mathbf{u}_j^+ - \mathbf{u}_i^- + \mathbf{u}_j^- \\ &= \Delta \mathbf{u}_i - \Delta \mathbf{u}_j, \end{aligned} \quad (2.24)$$

où l'indice  $(-)$  désigne les vitesses au début de  $\Delta t$  et l'indice  $(+)$  désigne les vitesses à la fin de  $\Delta t$ . Dans le repère local, le changement de vitesse relative  $\Delta \mathbf{u}_{ij}$  s'écrit

$$\Delta \mathbf{u}_{ij} = \Delta u_{ij}^n \mathbf{n}_{ij} + \Delta u_{ij}^t \mathbf{t}_{ij}, \quad (2.25)$$

où :

$$\Delta u_{ij}^n = (\Delta \mathbf{v}_i - \Delta \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad \text{et} \quad (2.26)$$

$$\Delta u_{ij}^t = (\Delta \mathbf{v}_i - \Delta \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{t}_{ij} + \Delta \omega_i r_i + \Delta \omega_j r_j. \quad (2.27)$$

Les équations de la dynamique 2.13, 2.14, 2.15, et 2.16 peuvent aussi s'écrire dans le repère local comme suit :

$$\Delta \mathbf{v}_i = \frac{1}{m_i} \left( \sum_k (N_{ik} \mathbf{n}_{ik} + T_{ik} \mathbf{t}_{ik}) + \mathbf{R}_i^{ext} \right), \quad (2.28)$$

$$\Delta \mathbf{v}_j = \frac{1}{m_j} \left( \sum_l (N_{jl} \mathbf{n}_{jl} + T_{jl} \mathbf{t}_{jl}) + \mathbf{R}_j^{ext} \right), \quad (2.29)$$

$$\Delta \omega_i = \frac{1}{I_i} \sum_k r_{ik} T_{ik}, \quad (2.30)$$

$$\Delta \omega_j = \frac{1}{I_j} \sum_l r_{jl} T_{jl}, \quad (2.31)$$

où l'impulsion  $\mathbf{R} = N\mathbf{n} + T\mathbf{t}$  est décomposée en une partie normale au contact  $N$  et une partie tangentielle au contact  $T$ . De la même façon, en introduisant les équations 2.28 et 2.29 dans l'équation 2.26, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta u_{ij}^n &= \frac{1}{m_i} \left( \sum_k (N_{ik} \mathbf{n}_{ik} + T_{ik} \mathbf{t}_{ik}) + \mathbf{R}_i^{ext} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij} \quad (2.32) \\ &\quad - \frac{1}{m_j} \left( \sum_l (N_{jl} \mathbf{n}_{jl} + T_{jl} \mathbf{t}_{jl}) + \mathbf{R}_j^{ext} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij} \end{aligned}$$

En isolant les termes du contact  $ij$ , et en simplifiant l'écriture, on obtient

$$\boxed{N_{ij} = m_{ij}^n \Delta u_{ij}^n + K_{ij}^n}. \quad (2.33)$$

où

$$\begin{aligned} m_{ij}^n &= \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right)^{-1} \quad \text{et} \\ K_{ij}^n &= -\frac{m_{ij}^n}{m_i} \left( \sum_{k \neq j} (N_{ik} \mathbf{n}_{ik} + T_{ik} \mathbf{t}_{ik}) + \mathbf{R}_i^{ext} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij} \\ &\quad + \frac{m_{ij}^n}{m_j} \left( \sum_{l \neq i} (N_{jl} \mathbf{n}_{jl} + T_{jl} \mathbf{t}_{jl}) + \mathbf{R}_j^{ext} \right) \cdot \mathbf{n}_{ij}, \end{aligned}$$

En introduisant les équations 2.28, 2.29, 2.30, et 2.31 dans l'équation 2.27, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta u_{ij}^t &= \frac{1}{m_i} \left( \sum_k (N_{ik} \mathbf{n}_{ik} + T_{ik} \mathbf{t}_{ik}) + \mathbf{R}_i^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{m_j} \left( \sum_l (N_{jl} \mathbf{n}_{jl} + T_{jl} \mathbf{t}_{jl}) + \mathbf{R}_j^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \\ &\quad + \frac{r_i}{I_i} \sum_k r_{ik} T_{ik} + \frac{r_j}{I_j} \sum_l r_{jl} T_{jl}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En isolant les termes du contact  $ij$ , et en simplifiant l'écriture, on obtient

$$\boxed{T_{ij} = m_{ij}^t \Delta u_{ij}^t + K_{ij}^t}, \quad (2.35)$$

où

$$\begin{aligned} m_{ij}^t &= \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{r_i^2}{I_i} + \frac{r_j^2}{I_j} \right)^{-1} \quad \text{et} \\ K_{ij}^t &= -\frac{m_{ij}^t}{m_i} \left( \sum_{k \neq j} (N_{ik} \mathbf{n}_{ik} + T_{ik} \mathbf{t}_{ik}) + \mathbf{R}_i^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \\ &\quad + \frac{m_{ij}^t}{m_j} \left( \sum_{l \neq i} (N_{jl} \mathbf{n}_{jl} + T_{jl} \mathbf{t}_{jl}) + \mathbf{R}_j^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \\ &\quad - \frac{m_{ij}^t r_i}{I_i} \sum_{k \neq j} r_{ik} T_{ik} - \frac{m_{ij}^t r_j}{I_j} \sum_{l \neq i} r_{jl} T_{jl}. \end{aligned}$$

Les équations 2.33 et 2.35 peuvent être interprétées comme les équations de la dynamique projetées sur le repère local. Elles relient l'impulsion appliquée à un contact pendant le pas de temps  $\Delta t$ , avec le changement de vitesse relative qui a lieu entre le début et la fin du pas. Dans ce sens, ces équations ressemblent à celle que nous avons trouvée pour le problème d'une collision simple (i.e., Eqns. 2.2 ). Néanmoins, il y a une différence majeure entre les équations 2.2 et les équations 2.33 et 2.35. Dans les équations 2.33 et 2.35 il ne suffit pas de connaître les changements de vitesse relative (i.e.,  $\Delta u_{ij}^n$  et  $\Delta u_{ij}^t$ ) pour calculer les impulsions (i.e.,  $N_{ij}$  et  $T_{ij}$ ), mais il faut aussi prendre en compte les impulsions exercées sur tous les contacts avec les particules environnant  $i$  et  $j$  (i.e.,  $\{k\} \neq j$  et  $\{l\} \neq i$ ), qui sont prises en compte dans les termes  $K_{ij}^n$  et  $K_{ij}^t$ . Si l'on ne prenait pas en compte ces impulsions, la quantité de mouvement se propagerait dans le milieu sous la forme

d'ondes. Ceci n'est pas réaliste, car les particules sont complètement rigides, et la quantité de mouvement doit donc se propager de manière instantanée. Comme nous le verrons dans la section 2.4.5, ceci implique que la solution de ces équations doit être trouvée de manière itérative, car, rigoureusement parlant, ce qui se passe dans un contact donné dépend de ce qui se passe dans tous les autres contacts du milieu pendant le même pas de temps. Ce point est important, car il montre qu'une collision multiple (i.e., une collision faisant intervenir plusieurs contacts au même temps) est un processus collectif, qui ne peut pas être considéré comme un ensemble de collisions simples.

### 2.4.4 Lois de contact

Les équations de la dynamique, développées dans la section précédente, permettent de calculer le mouvement des particules sous l'action des forces et des moments de qui leur sont appliqués. Or, elles ne donnent pas d'information sur les interactions aux contacts. Par exemple, elles ne disent pas si les particules peuvent s'interpénétrer ou non, ou si la force tangentielle appliquée sur un contact est ou non suffisamment grande pour le faire glisser. Il est donc nécessaire de rajouter un deuxième ingrédient à la méthode : les lois de contact. Ces lois jouent, dans un système multicontact, le rôle de la loi de restitution de Newton dans le problème d'une collision simple (Sec. 2.3.2), mais elles permettent de prendre en compte les contraintes cinématiques dans tous les contacts du milieu simultanément.

Dans un milieu composé de disques rigides, les contacts sont ponctuels, et dans chaque contact il y a trois degrés de liberté : l'écartement, le glissement, et le roulement. Ainsi, l'interaction entre deux particules peut être vue comme la superposition de trois interactions : une dans la direction normale, une dans la direction tangentielle, et une concernant les rotations. Ces interactions peuvent être représentées par un ensemble d'états admissibles du contact. Cet ensemble d'états admissibles est appelé une loi de contact.

Imaginons le contact entre deux particules  $i$  et  $j$ . Dans la direction normale, la loi de contact est illustrée par un graphe connu comme le graphe de Signorini (Figure 2.6). Cette loi stipule que, lors d'une collision, un contact doit vérifier une des deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \Rightarrow & f_{ij}^n \geq 0 \\ \delta_{ij} > 0 & \Rightarrow & f_{ij}^n = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

En d'autres termes, si l'interstice  $\delta_{ij}$  entre les deux particules est nul (i.e., les particules sont en contact), alors la force normale  $f_{ij}^n$  est supérieure ou égale à zéro ; en revanche, si l'interstice est supérieur à zéro (i.e., il n'y a pas de contact), alors la force normale doit être nulle.

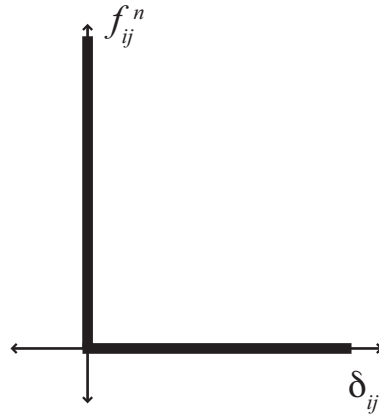


FIG. 2.6 – Loi de contact dans la direction normale : Graphe de Signorini.

Dans la direction tangentielle, la loi de contact est la loi de frottement de Coulomb (Figure 2.7). Cette loi stipule que, lors d'une collision, un contact doit vérifier une des trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_{ij}^t > 0 & \Rightarrow & f_{ij}^t = -f_{max}^t \\ u_{ij}^t = 0 & \Rightarrow & -f_{max}^t \leq f_{ij}^t \leq f_{max}^t \\ u_{ij}^t < 0 & \Rightarrow & f_{ij}^t = f_{max}^t. \end{cases} \quad (2.37)$$

En d'autres termes, si la vitesse relative tangentielle au contact  $u_{ij}^t$  est nulle (i.e., le contact ne glisse pas), alors la force tangentielle  $f_{ij}^t$  est dans les limites imposées par la loi de frottement de Coulomb (i.e.,  $-f_{max}^t \leq f_{ij}^t \leq f_{max}^t$ ); en revanche, si la vitesse relative tangentielle au contact est non nulle (i.e., le contact glisse), alors la force tangentielle au contact est égale à la valeur seuil imposée par la loi de frottement de Coulomb (i.e.,  $f_{max}^t$  ou  $-f_{max}^t$ ). Dans la loi de frottement de Coulomb, la valeur seuil  $f_{max}^t$  est proportionnelle à la force normale  $f_{ij}^n$ , et le coefficient de proportionnalité est appelé le coefficient de frottement de glissement  $\mu_s$  :

$$f_{max}^t = \mu_s f_{ij}^n. \quad (2.38)$$

Dans un milieu composé de disques, le roulement n'est pas restreint, et il n'est pas nécessaire d'avoir une loi de contact pour les rotations. Dans la section 2.5, nous montrerons qu'il est possible, si on le souhaite, d'introduire la résistance au roulement aux contacts en utilisant une loi de contact analogue à la loi de frottement de Coulomb.



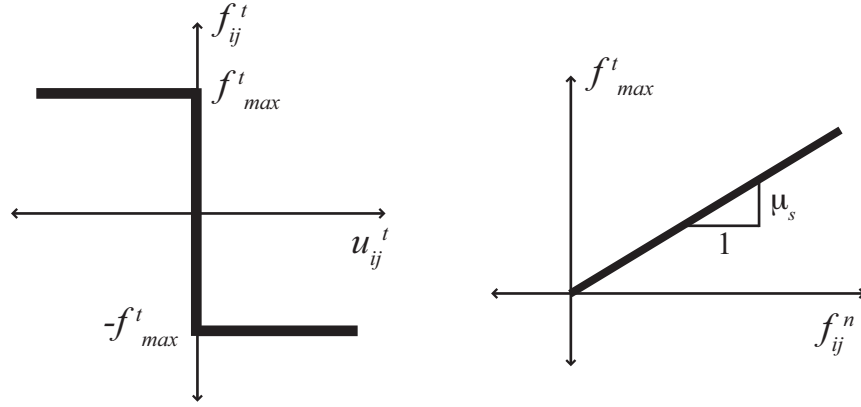


FIG. 2.7 – Loi de contact dans la direction tangentielle : Loi de frottement de Coulomb.

### Lois de contact complètes

Tous les contacts dans le milieu doivent vérifier le graphe de Signorini et la loi de frottement de Coulomb. Néanmoins, ces lois de contact ne peuvent pas encore être intégrées à la méthode pour la raison suivante : elles nous informent sur l'état du contact à un instant précis lors d'une collision ; or, nous cherchons plutôt à connaître l'effet de cette collision (ou même de plusieurs collisions) pendant un certain intervalle de temps (i.e., un pas de temps  $\Delta t$ ). Il nous faut donc réécrire les lois de contact en termes de quantités qui soient représentatives des processus qui ont eu lieu pendant ce pas de temps. Une possibilité est de choisir, comme dans les équations de la dynamique, l'impulsion aux contacts et une certaine vitesse relative qui soit représentative du pas de temps.

C'est ainsi que, pour transformer les lois de contact en lois de contact "complètes", on remplace les forces de contact  $f_{ij}^n$  et  $f_{ij}^t$  appliquées à un instant donné par leurs intégrales dans le pas de temps ; c'est-à-dire par les impulsions  $N_{ij}$  et  $T_{ij}$ . On doit aussi choisir une vitesse relative qui soit représentative du pas de temps, mais laquelle ? La vitesse relative au début de  $\Delta t$  ? La vitesse relative à la fin de  $\Delta t$  ? Une vitesse moyenne ? L'approche utilisée dans la Dynamique de Contacts consiste à définir une vitesse qui tient compte de la vitesse relative au début de  $\Delta t$ , de la vitesse relative à la fin de  $\Delta t$ , et d'un coefficient de restitution. Cette vitesse est appelée la *vitesse formelle*, et, dans les directions normale et tangentielle, elle est définie par

$$\begin{aligned}\bar{u}_{ij}^n &= u_{ij}^{n+} + \rho_n u_{ij}^{n-} \\ \bar{u}_{ij}^t &= u_{ij}^{t+} + \rho_t u_{ij}^{t-},\end{aligned}\tag{2.39}$$

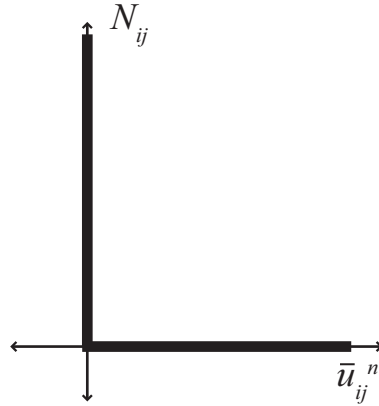


FIG. 2.8 – Loi de contact complète dans la direction normale : Graphe de Signorini écrite en termes de l'impulsion et la vitesse formelle normales.

où  $\rho_n$  est le coefficient de restitution normale et  $\rho_t$  est le coefficient de restitution tangentiel.

Les lois de contact complètes, dans les directions normale et tangentielle, sont représentées sur les figures 2.8 et 2.9. Ces lois représentent l'ensemble de valeurs admissibles d'impulsion et de vitesse formelle qu'un contact peut avoir dans un pas de temps. Chacune de ces lois peut être écrite comme un ensemble de conditions complémentaires.

Dans la direction normale :

$$\begin{cases} \bar{u}_{ij}^n = 0 & \Rightarrow & N_{ij} \geq 0 \\ \bar{u}_{ij}^n > 0 & \Rightarrow & N_{ij} = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

En d'autres termes, si la vitesse formelle normale  $\bar{u}_{ij}^n$  dans un pas de temps est nulle, alors l'impulsion normale  $N_{ij}$  est positive (i.e., il y a transmission de quantité de mouvement dans la direction normale); en revanche, si la vitesse formelle normale dans un pas de temps est supérieure à zéro, alors l'impulsion normale est nulle. Une vitesse formelle normale supérieure à zéro implique que la vitesse relative à la fin du pas  $u_{ij}^{n+}$  est supérieure à  $-\rho_n u_{ij}^{n-}$ ; ceci a lieu, par exemple, lorsqu'un contact persistant s'ouvre.

Dans la direction tangentielle :

$$\begin{cases} \bar{u}_{ij}^t > 0 & \Rightarrow & T_{ij} = -T_{max} \\ \bar{u}_{ij}^t = 0 & \Rightarrow & -T_{max} \leq T_{ij} \leq T_{max} \\ \bar{u}_{ij}^t < 0 & \Rightarrow & T_{ij} = T_{max}. \end{cases} \quad (2.41)$$

En d'autres termes, si la vitesse formelle tangentielle  $\bar{u}_{ij}^t$  dans un pas de temps est nulle (i.e., le contact ne glisse pas), alors l'impulsion tangentielle  $T_{ij}$  est

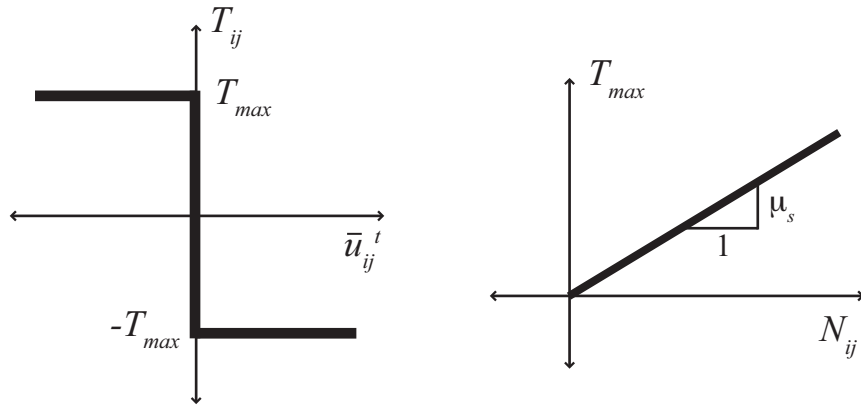


FIG. 2.9 – Loi de contact complète dans la direction tangentielle : Loi de frottement de Coulomb écrite en termes de l'impulsion et la vitesse formelle tangentielles.

dans les limites imposées par la loi de frottement de Coulomb (i.e.,  $-T_{max} \leq T_{ij} \leq T_{max}$ ); en revanche, si la vitesse formelle tangentielle dans un pas de temps est non nulle (i.e., le contact glisse), alors l'impulsion tangentielle est égale à la valeur seuil imposée par la loi de frottement de Coulomb (i.e.,  $T_{max}$  ou  $-T_{max}$ ). La valeur seuil  $T_{max}$  es proportionnelle à l'impulsion normale  $N_{ij}$ , et elle est donné par la loi de frottement de Coulomb :

$$T_{max} = \mu_s N_{ij}. \quad (2.42)$$

### Remarques sur le coefficient de restitution

Il est important de préciser que le coefficient de restitution n'a pas le même sens dans les collisions simples et dans les collisions multiples. La raison est la suivante : dans un système multicontacts, le mouvement des particules est un résultat de la dynamique de l'ensemble, et non pas de la dynamique du contact. D'ailleurs, si tous les contacts d'un système multicontacts devaient respecter la loi de restitution de Newton, on obtiendrait des comportements étranges. Pour s'en convaincre, analysons la collision multiple illustrée sur la figure 2.10. Supposons que le coefficients de frottement et de restitution sont nuls. Comme résultat de la collision, le contact entre les particules 3 et 4 s'ouvre. Pourtant, cette situation, en apparence banale, serait impossible si tous les contacts devait respecter la loi de restitution de Newton. Selon cette loi, si la vitesse relative normale entre ces deux particules est nulle avant la collision, elle doit aussi être nulle après la collision.

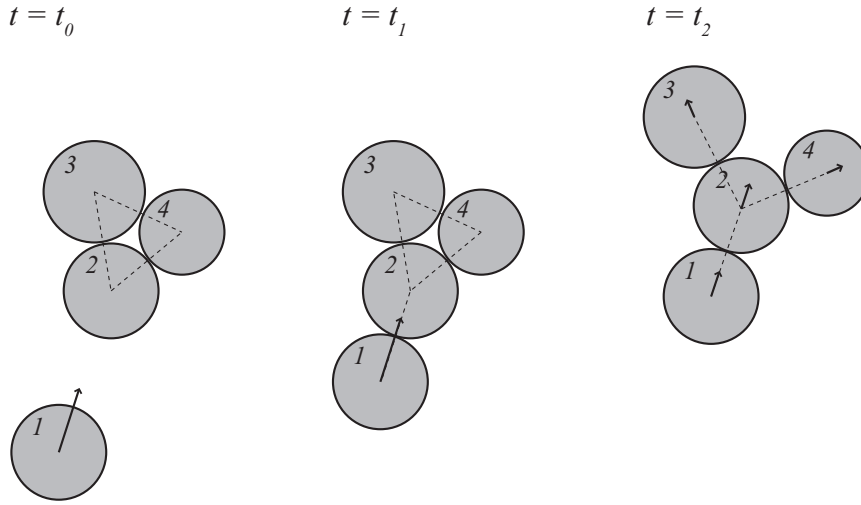


FIG. 2.10 – Exemple d’une collision multiple entre quatre particules avec des coefficients de frottement et de restitution nuls. Le réseau de contacts est indiqué par les lignes en pointillés.

On remarque aussi que bien que la collision soit globalement dissipative, à l’échelle des particules 3 et 4 elle est non dissipative (i.e., l’énergie cinétique des particules 3 et 4 augmente avec la collision). En faite, le coefficient de restitution est une mesure de la capacité du système à dissiper de l’énergie, mais il ne nous dit rien sur la dissipation à l’échelle des contacts. Cet exemple montre, encore une fois, qu’une collision multiple est un processus collectif, qui ne peut pas être considéré comme un ensemble de collisions simples.

### 2.4.5 Algorithme de résolution

Pour chaque contact, nous avons deux équations de la dynamique (i.e., Eqns. 2.33 et 2.35), qui, écrites en termes de la vitesse formelle, donnent

$$\boxed{N_{ij} = m_{ij}^n \bar{u}_{ij}^n + (K_{ij}^n - m_{ij}^n (1 + \rho_n) u_{ij}^{n-})} \quad (2.43)$$

$$\boxed{T_{ij} = m_{ij}^t \bar{u}_{ij}^t + (K_{ij}^t - m_{ij}^t (1 + \rho_t) u_{ij}^{t-})}, \quad (2.44)$$

et deux lois de contact (i.e., le graphe de Signorini et la loi de frottement de Coulomb) :

$$\begin{cases} \bar{u}_{ij}^n = 0 \text{ et } N_{ij} \geq 0 \\ \bar{u}_{ij}^n > 0 \text{ et } N_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{ij}^t > 0 & \Rightarrow & T_{ij} = -T_{max} \\ \bar{u}_{ij}^t = 0 & \Rightarrow & -T_{max} \leq T_{ij} \leq T_{max} \\ \bar{u}_{ij}^t < 0 & \Rightarrow & T_{ij} = T_{max}. \end{cases}$$

Pour un contact, ces quatre expressions constituent le système à résoudre dans chaque pas de temps. Les inconnus du système sont les impulsions  $N_{ij}$  et  $T_{ij}$  exercées pendant  $\Delta t$  et les vitesses formelles  $\bar{u}_{ij}^n$  et  $\bar{u}_{ij}^t$  à partir desquelles on peut calculer les vitesses relatives à la fin de  $\Delta t$ ,  $u_{ij}^{n+}$  et  $u_{ij}^{t+}$ . La solution consiste à trouver l'intersection entre chacune des équations de la dynamique et la loi de contact correspondante. Ceci est très facile, car les équations de la dynamique 2.43 et 2.44 sont des fonctions linéaires de la vitesse formelle, et la pente de ces droites est toujours positive. Donc, il n'y a qu'un point d'intersection possible, et pour chaque direction (normale et tangentielle) ce point d'intersection nous donne une impulsion (i.e.,  $N_{ij}$  ou  $T_{ij}$ ) et une vitesse formelle (i.e.,  $\bar{u}_{ij}^n$  ou  $\bar{u}_{ij}^t$ ). Il y a deux scénarios de solution possibles pour la direction normale et trois pour la direction tangentielle. Ces scénarios sont représentés sur la figure 2.11.

Cependant, la solution ne peut pas être trouvée pour chaque contact de manière indépendante. La raison est que les termes  $K_{ij}^n$  et  $K_{ij}^t$  font intervenir les contacts avec toutes les particules voisines de  $i$  et de  $j$  (i.e., l'ensemble de particules  $\{k\} \neq j$  et  $\{l\} \neq i$ ). Or, ces impulsions sont aussi des inconnus. Pour cette raison, la solution ne peut être trouvée que par un processus itératif, dans lequel on ajuste graduellement les valeurs des termes  $K_{ij}^n$  et  $K_{ij}^t$ . Dans la Dynamique des Contacts, il est usuel d'utiliser un algorithme de type Gauss-Seidel pour trouver l'ensemble des impulsions et les changements de vitesse dans chaque pas de temps. Cet algorithme peut être résumé de la manière suivante :

- En utilisant les positions des particules au début de  $\Delta t$ , on construit une liste de contacts pour le milieu.
- On initialise la valeur des termes  $K_{ij}^n$  et  $K_{ij}^t$  pour chaque contact dans la liste (typiquement, on assigne aux termes  $K_{ij}^n$  et  $K_{ij}^t$  la valeur qu'ils avaient dans le pas de temps précédent, s'il s'agit d'un contact persistant, et l'on les initialise à zéro s'il s'agit des nouveaux contacts).
- Pour tous les contacts dans cette liste :
  - On calcule les impulsions  $N_{ij}$  et  $T_{ij}$  en supposant que les vitesses formelles  $\bar{u}_{ij}^n$  et  $\bar{u}_{ij}^t$  sont nulles.
  - Les impulsions calculées,  $N_{ij}$  et  $T_{ij}$ , sont utilisées pour ajuster les termes  $K_{ij}^n$  et  $K_{ij}^t$  dans tous les contacts avec les particules voisines de  $i$  et de  $j$  (i.e., l'ensemble de particules  $\{k\} \neq j$  et  $\{l\} \neq i$ ).
- Une fois parcourue la liste de contacts, on vérifie si un critère de convergence est satisfait.

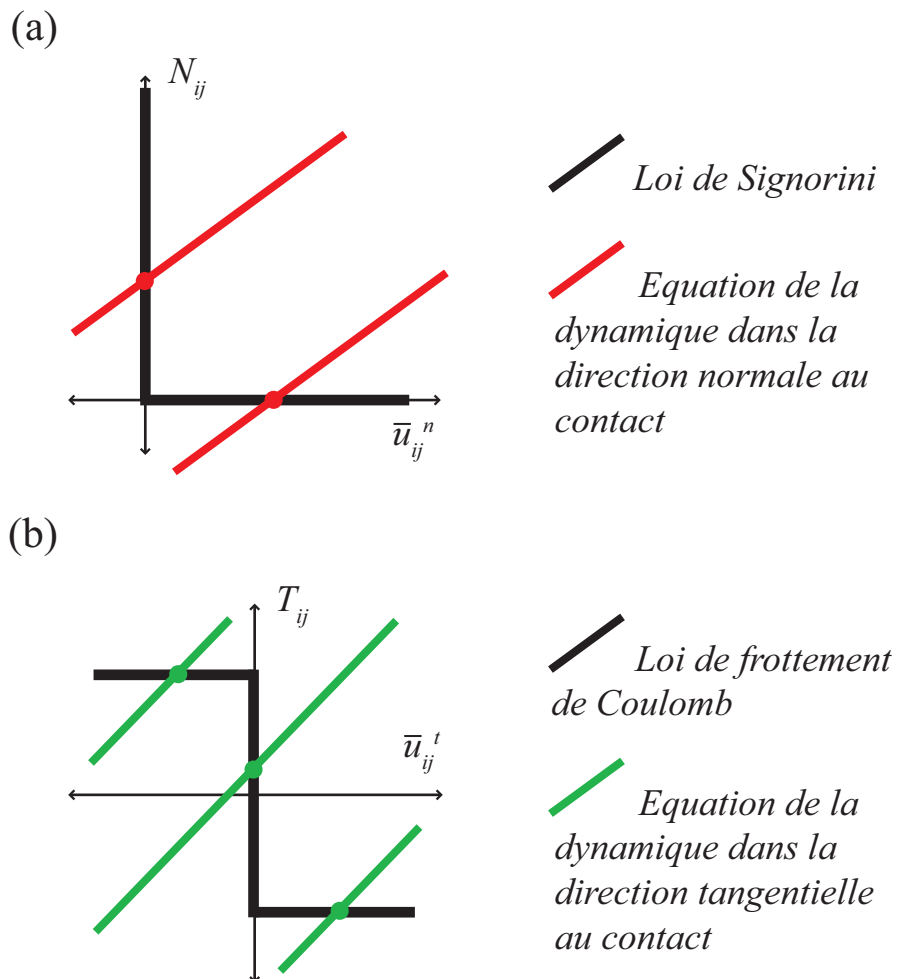


FIG. 2.11 – Scénarios de solution possibles (a) dans la direction normale et (b) dans la direction tangentielle.

- Si ce n'est pas le cas, on fait une autre itération. Si c'est le cas, on considère qu'on a trouvé la solution, et l'on utilise les impulsions trouvées pour calculer les positions et les vitesses des particules à la fin du pas de temps.

Il est habituel d'utiliser comme critère de convergence la différence de la somme des impulsions normales entre une itération et l'itération précédente, donné par

$$\left| \frac{\sum N_{ij} - \sum N_{ij}^-}{\sum N_{ij}} \right| \quad (2.45)$$

où  $N_{ij}^-$  sont les impulsions normales calculées dans l'itération précédente. Si cette valeur est inférieure à une certaine valeur seuil  $\epsilon$ , on considère que le critère de convergence est vérifié, et l'on sort du processus itératif.

A partir de chaque impulsion trouvée dans le processus itératif, il est possible de calculer une "force effective"  $\mathbf{f}^{eff}$ . Cette force effective correspond à la force constante qu'on aurait dû appliquer pendant le pas de temps  $\Delta t$  pour avoir la même impulsion  $\mathbf{R}$ . A partir de  $\mathbf{f}^{eff}$ , nous calculons les vitesses  $\mathbf{v}_i^+$  et les positions  $\mathbf{x}_i^+$  des particules à la fin de  $\Delta t$ . Par exemple, pour la particule  $i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ik}^{eff} &= \frac{\mathbf{R}_{ik}}{\Delta t} \\ \mathbf{v}_i^+ &= \mathbf{v}_i^- + \frac{\sum_k \mathbf{f}_{ik}^{eff} + \mathbf{f}^{ext}}{m_i} \Delta t \\ \mathbf{x}_i^+ &= \mathbf{x}_i^- + \mathbf{v}_i^- \Delta t, \end{aligned} \quad (2.46)$$

où  $\mathbf{v}_i^-$  et  $\mathbf{x}_i^-$  sont les vecteurs vitesse et position de la particule  $i$  au début de  $\Delta t$ .

Il est important de noter que, dans d'un pas de temps, les contacts peuvent être collisionnels, persistants, ou encore avoir subi plusieurs collisions (i.e., collisions séquentielles). Dans la Dynamique des Contacts, on ne distingue pas entre ces trois types de contacts. En fait, ayant abandonné l'échelle des contacts, la distinction d'un type de contact fondée sur sa durée n'est plus pertinente.

Dans certains cas, en particulier lorsqu'on déforme le milieu en conditions quasi-statiques, il est important de connaître les forces de contact à la fin de  $\Delta t$ . Une possibilité est de supposer que la force de contact à la fin de  $\Delta t$ ,  $\mathbf{f}_{ik}$ , est égale à la force effective  $\mathbf{f}_{ik}^{eff}$ . Ceci revient à considérer tous les contacts comme étant des contacts persistants pendant toute la durée du pas de temps, et à supposer que la force de contact est constante, ce qui évidemment n'est pas toujours le cas. Cette supposition est raisonnable dans les systèmes qui se déforment très lentement (i.e. en conditions quasi-statiques), car la plupart

des contacts sont effectivement des contacts persistants. En revanche, elle a moins de sens dans un système qui se déforme très rapidement (i.e., en conditions dynamiques), car, dans un tel système, la proportion des contacts collisionnels peut être très élevée. Dans tous les cas, la solution du système ne se voit pas affectée par cette supposition, car elle ne dépend pas des forces de contact mais des positions des particules et des vitesses relatives entre elles. Les forces de contact n'interviennent que dans l'initialisation des termes  $K_{ij}^n$  et  $K_{ij}^t$ ; elles peuvent donc avoir une influence sur le nombre d'itérations dont on a besoin pour trouver la solution, mais pas sur la solution même.

## 2.5 Prise en compte de la résistance au roulement dans la Dynamique des Contacts

Dans la section précédente, nous avons présenté la méthode de la Dynamique de Contacts pour le cas des disques pouvant exercer des forces normales et tangentielles aux contacts. Or, comme nous l'avons mentionné dans la section 1.3, dans les milieux granulaires réels il est courant que les contacts puissent aussi exercer des moments et résister ainsi au roulement. Ceci peut avoir différentes origines microscopiques telles que la présence d'un ciment, la déformation plastique de la région de contact, et la forme non convexe des grains. Dans cette section, nous montrons comment cet effet peut être introduit dans la Dynamique des Contacts en modifiant légèrement les équations de la dynamique, ainsi qu'en rajoutant une nouvelle loi de contact qui contrôle la résistance au roulement.

### 2.5.1 Modifications des équations de la dynamique

Considérons à nouveau deux particules  $i$  et  $j$  en contact au sein d'un milieu granulaire, mais cette fois-ci les contacts pouvant exercer des moments (Figure 2.12). Soit  $\{k\}$  l'ensemble de particules en contact avec  $i$  et  $\{l\}$  l'ensemble de particules en contact avec  $j$ . Le moment total  $\mathbf{M}_i$  issu des forces de contact et des moments de contact autour du centre de la particule  $i$  est donné par

$$\mathbf{M}_i = \sum_k (\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{M}_{ik}), \quad (2.47)$$

où  $\mathbf{M}_{ik}$  sont les moments de contact exercés aux contacts  $\{ik\}$ , et nous considérons qu'il n'y a pas de moments externes. L'équation de la dynamique 2.10 se réécrit

$$\sum_k (\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{M}_{ik}) = I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt}. \quad (2.48)$$



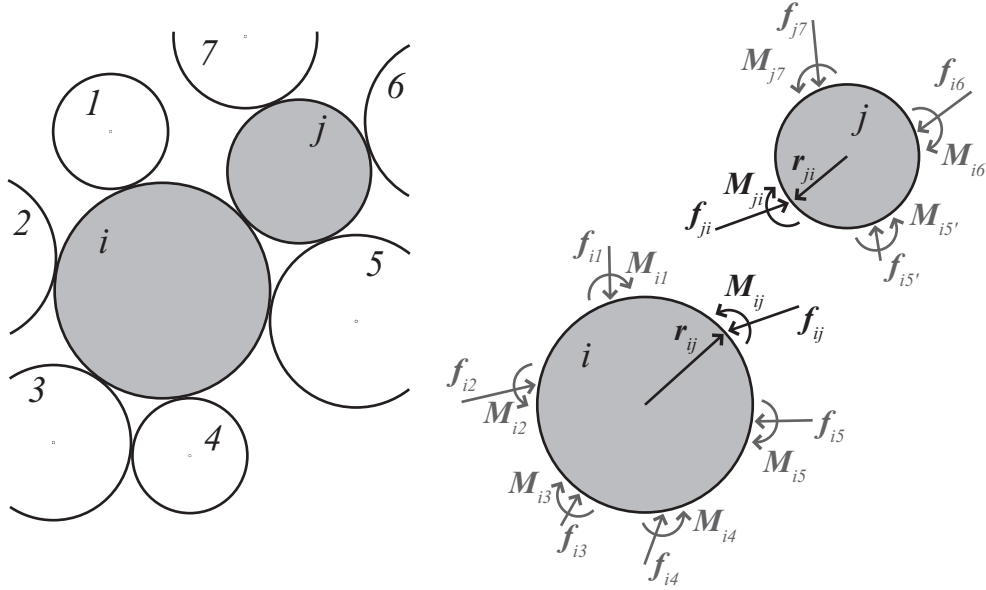


FIG. 2.12 – Particules  $i$  et  $j$  en contact au sein d'un milieu granulaire. Les  $\mathbf{f}$  sont les forces de contact, les  $\mathbf{M}$  sont les moments exercés aux contacts, et les  $\mathbf{r}$  sont les vecteurs qui vont du centre de la particule aux points de contact.

En intégrant cette équation dans le pas de temps  $\Delta t$ , on obtient

$$\int_{\Delta t} \left( \sum_k (\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{M}_{ik}) \right) dt = \int_{\Delta t} I_i \frac{d\mathbf{w}_i}{dt} dt \quad (2.49)$$

$$\sum_k (\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{R}_{ik} + \mathbf{S}_{ik}) = I_i \Delta \omega_i,$$

où  $\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{R}_{ik}$  sont les impulsions angulaires résultantes des forces de contact  $\mathbf{f}_{ik}$ , et  $\mathbf{S}_{ik}$  sont les impulsions angulaires résultantes des moments de contact  $\mathbf{M}_{ik}$ . En réordonnant, l'équation 2.49 peut s'écrire comme suit :

$$\Delta \mathbf{w}_i = \frac{1}{I_i} \sum_k (\mathbf{r}_{ik} \times \mathbf{R}_{ik} + \mathbf{S}_{ik}). \quad (2.50)$$

Une équation analogue peut être écrite pour la particule  $j$  :

$$\Delta \mathbf{w}_j = \frac{1}{I_j} \sum_l (\mathbf{r}_{jl} \times \mathbf{R}_{jl} + \mathbf{S}_{jl}). \quad (2.51)$$

Les équations de la dynamique 2.50 et 2.51 peuvent aussi être écrites comme suit :

$$\Delta\omega_i = \frac{1}{I_i} \sum_k (r_i T_{ik} + S_{ik}) \quad (2.52)$$

$$\Delta\omega_j = \frac{1}{I_j} \sum_l (r_j T_{jl} + S_{jl}) \quad (2.53)$$

### Équation de la dynamique dans la direction tangentielle

En introduisant les équations 2.28, 2.29, 2.52, et 2.53 dans l'équation 2.27, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta u_{ij}^t &= \frac{1}{m_i} \left( \sum_k (N_{ik} \mathbf{n}_{ik} + T_{ik} \mathbf{t}_{ik}) + \mathbf{R}_i^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \quad (2.54) \\ &\quad - \frac{1}{m_j} \left( \sum_l (N_{jl} \mathbf{n}_{jl} + T_{jl} \mathbf{t}_{jl}) + \mathbf{R}_j^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \\ &\quad + \frac{r_i}{I_i} \left( \sum_k (r_i T_{ik} + S_{ik}) \right) \\ &\quad + \frac{r_j}{I_j} \left( \sum_l (r_j T_{jl} + S_{jl}) \right). \end{aligned}$$

En isolant les termes du contact  $ij$ , et en simplifiant l'écriture, on obtient

$$\boxed{T_{ij} = m_{ij}^t \Delta u_{ij}^t + K_{ij}^t}, \quad (2.55)$$

où

$$\begin{aligned} m_{ij}^t &= \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{r_i^2}{I_i} + \frac{r_j^2}{I_j} \right)^{-1} \quad \text{et} \\ K_{ij}^t &= -\frac{m_{ij}^t}{m_i} \left( \sum_{k \neq j} (N_{ik} \mathbf{n}_{ik} + T_{ik} \mathbf{t}_{ik}) + \mathbf{R}_i^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \\ &\quad + \frac{m_{ij}^t}{m_j} \left( \sum_{l \neq i} (N_{jl} \mathbf{n}_{jl} + T_{jl} \mathbf{t}_{jl}) + \mathbf{R}_j^{ext} \right) \cdot \mathbf{t}_{ij} \\ &\quad - \frac{m_{ij}^t r_i}{I_i} \left( \sum_{k \neq j} (r_i T_{ik} + S_{ik}) \right) \\ &\quad - \frac{m_{ij}^t r_j}{I_j} \left( \sum_{l \neq i} (r_j T_{jl} + S_{jl}) \right). \end{aligned}$$

L'équation 2.55, écrite en termes de la vitesse formelle tangentielle, donne

$$\boxed{T_{ij} = m_{ij}^t \bar{u}_{ij}^t + (K_{ij}^t - m_{ij}^t (1 + \rho_t) u_{ij}^{t-})}. \quad (2.56)$$

### Équation de la dynamique pour les rotations

La vitesse angulaire relative entre les deux particules  $\omega_{ij}$  s'écrit

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j. \quad (2.57)$$

Le changement des vitesses angulaire  $\Delta\omega_i$  et  $\Delta\omega_j$ , ainsi que le changement de vitesse angulaire relative  $\Delta\omega_{ij}$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \Delta\omega_i &= \omega_i^+ - \omega_i^- \\ \Delta\omega_j &= \omega_j^+ - \omega_j^- \quad \text{et} \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{ij} &= \omega_{ij}^+ - \omega_{ij}^- \\ &= \omega_i^+ - \omega_j^+ - \omega_i^- + \omega_j^- \\ &= \Delta\omega_i - \Delta\omega_j, \end{aligned} \quad (2.59)$$

où l'indice  $(-)$  désigne les vitesses au début du pas de temps et l'indice  $(+)$  désigne les vitesses à la fin du pas.

En introduisant les équations 2.52, et 2.53 dans l'équation 2.59, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{ij} &= \frac{1}{I_i} \sum_k (r_i T_{ik} + S_{ik}) \\ &\quad - \frac{1}{I_j} \sum_l (r_j T_{jl} + S_{jl}). \end{aligned} \quad (2.60)$$

En isolant les termes du contact  $ij$ , et en simplifiant l'écriture, on obtient

$$\boxed{S_{ij} = m_{ij}^r \Delta\omega_{ij}^t + K_{ij}^r}, \quad (2.61)$$

où

$$\begin{aligned} m_{ij}^r &= \left( \frac{1}{I_i} + \frac{1}{I_j} \right)^{-1} \quad \text{et} \\ K_{ij}^r &= -\frac{1}{I_i} \sum_{k \neq j} (r_i T_{ik} + S_{ik}) \\ &\quad + \frac{1}{I_j} \sum_{l \neq i} (r_j T_{jl} + S_{jl}). \end{aligned}$$

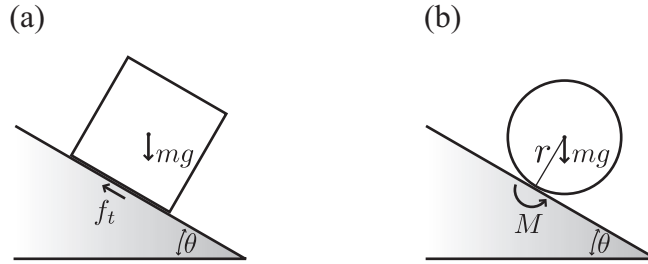


FIG. 2.13 – Comparaison entre l'équilibre d'un bloc et d'un disque de rayon  $r$  placés sur un plan incliné d'un angle  $\theta$ .

Comme dans la section 2.4.3, les équations 2.55 et 2.61 peuvent être interprétées comme les équations de la dynamique projetées sur le repère local. Elles relient l'impulsion tangentielle  $T_{ij}$  et l'impulsion angulaire  $S_{ij}$  exercées sur un contact pendant le pas de temps  $\Delta t$  avec les changements de vitesse relative  $\Delta u_{ij}^t$  et  $\Delta \omega_{ij}$  entre le début et la fin de  $\Delta t$ .

## 2.5.2 Loi de contact pour le roulement

La possibilité d'exercer des moments donne au contact la faculté de résister au roulement. Dans la Dynamique des Contacts, ceci peut être pris en compte en rajoutant une loi de contact analogue à la loi de frottement de Coulomb.

Pour illustrer la loi de frottement de roulement, considérons l'équilibre d'un bloc et d'un disque de rayon  $r$  placés sur un plan incliné d'un angle  $\theta$  (Figure 2.13). La stabilité du bloc est assurée par la force tangentielle  $f^t = mg \sin \theta < \mu_s f^n$ , et le glissement a lieu si  $\theta = \phi_s$ . La stabilité du disque, par rapport au roulement, est assurée par le moment de contact  $M$ , qui est égal au moment exercé par le poids du disque autour du point de contact  $mgr \sin \theta$ , et qui doit être inférieur au moment maximal  $M_{max}$ . Si l'on suppose que, comme pour le glissement, le roulement a lieu une fois que l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$  atteint une valeur limite  $\phi_r$ , on obtient :

$$\begin{aligned} M_{max} &= \mu_r r m g \cos \theta \\ &= \mu_r r f^n, \end{aligned} \quad (2.62)$$

où  $\mu_r = \tan \phi_r$  est le coefficient de frottement de roulement.

Pour un contact entre deux particules, la loi de frottement de roulement stipule que, lors d'une collision, un contact doit vérifier une des trois condi-

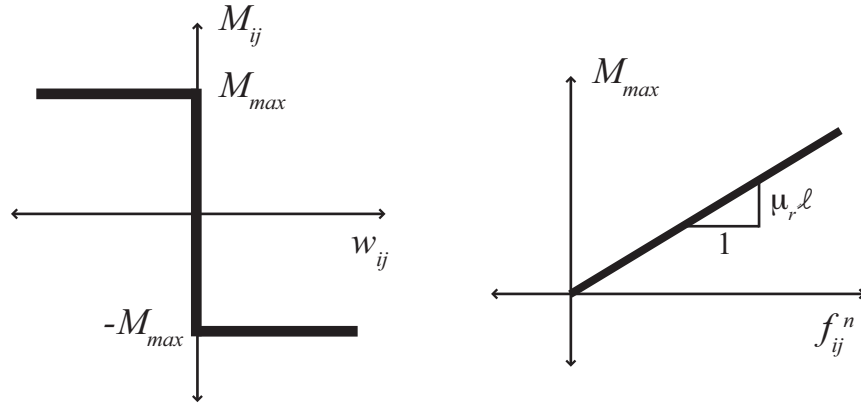


FIG. 2.14 – Loi de contact pour le roulement. Cette loi est analogue à la loi de frottement de Coulomb, et elle est appelé loi de frottement de roulement.

tions suivantes :

$$\begin{cases} \omega_{ij} > 0 & \Rightarrow & M_{ij} = -M_{max} \\ \omega_{ij} = 0 & \Rightarrow & -M_{max} \leq M_{ij} \leq M_{max} \\ \omega_{ij} < 0 & \Rightarrow & M_{ij} = M_{max}, \end{cases} \quad (2.63)$$

En d'autres termes, si la vitesse angulaire relative  $\omega_{ij}$  est nulle (i.e., le contact ne roule pas), alors le moment  $M_{ij}$  est dans les limites imposées par la loi de frottement de roulement (i.e.,  $-M_{max} \leq M_{ij} \leq M_{max}$ ); en revanche, si la vitesse angulaire relative est non nulle (i.e., le contact roule), alors le moment est égale à la valeur seuil imposée par la loi de frottement de roulement (i.e.,  $M_{max}$  ou  $-M_{max}$ ). Cette loi est illustrée sur la figure 2.14. La valeur seuil  $M_{max}$  est donné par

$$M_{max} = \mu_r \ell f_{ij}^n, \quad (2.64)$$

où  $\ell$  est le diamètre moyen des deux particules en contact, et la longueur  $\mu_r \ell$  peut être interprétée comme une longueur proportionnelle au bras de levier du moment  $M_{max}$ .

De la même manière que pour les directions normale et tangentielle, on peut introduire une *vitesse formelle angulaire* définie par

$$\bar{w}_{ij} = \omega_{ij}^+ + \rho_r \omega_{ij}^-. \quad (2.65)$$

La loi de contact complète pour le roulement, est représentée sur la figure 2.15. Cette loi représente l'ensemble de valeurs admissibles d'impulsion angulaire et de vitesse formelle angulaire sur un contact dans un pas de temps ;

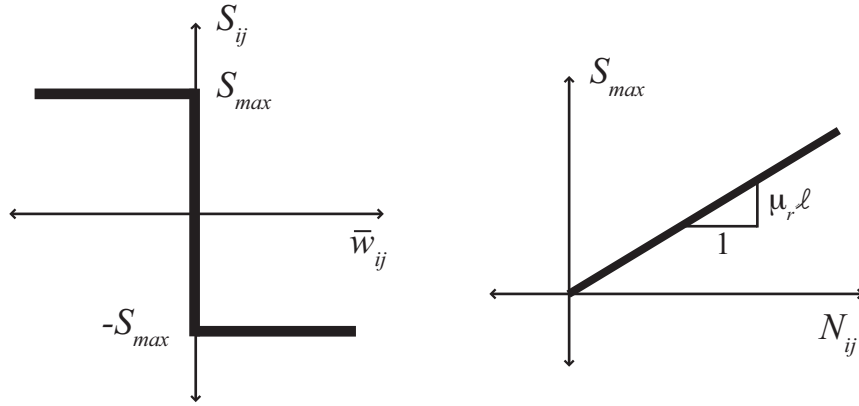


FIG. 2.15 – Loi de contact complète pour le roulement

elle peut être écrite comme un ensemble de conditions complémentaires :

$$\begin{cases} \bar{w}_{ij} > 0 & \Rightarrow & S_{ij} = -S_{max} \\ \bar{w}_{ij} = 0 & \Rightarrow & -S_{max} \leq S_{ij} \leq S_{max} \\ \bar{w}_{ij} < 0 & \Rightarrow & S_{ij} = S_{max}. \end{cases} \quad (2.66)$$

En d'autres termes, si la vitesse formelle angulaire  $\bar{w}_{ij}$  dans un pas de temps est nulle (i.e., le contact ne roule pas), alors l'impulsion angulaire  $S_{ij}$  est dans les limites imposées par la loi de frottement de roulement (i.e.,  $-S_{max} \leq S_{ij} \leq S_{max}$ ); en revanche, si la vitesse formelle angulaire est non nulle (i.e., le contact roule), alors l'impulsion angulaire est égale à la valeur seuil imposée par la loi de frottement de roulement (i.e.,  $S_{max}$  ou  $-S_{max}$ ). La valeur seuil  $S_{max}$  est proportionnelle à l'impulsion normale  $N_{ij}$ , et elle est donné par

$$S_{max} = \mu_r \ell N_{ij}. \quad (2.67)$$

L'équation 2.61, écrite en termes de la vitesse formelle tangentielle, donne

$$\boxed{S_{ij} = m_{ij}^r \bar{w}_{ij} + (K_{ij}^r - m_{ij}^r (1 + \rho_r) \omega_{ij}^-)}. \quad (2.68)$$

Ainsi, l'introduction de la résistance au roulement requiert la réécriture de l'équation de la dynamique dans la direction tangentielle (i.e., Eqn. 2.56), l'introduction d'une équation de la dynamique additionnelle (i.e., Eqn. 2.68), et l'introduction d'une loi de contact additionnelle (i.e., la loi de frottement de roulement). L'algorithme de résolution, présenté dans la section 2.4.5, reste le même.

## 2.6 Prise en compte de l'adhésion dans la Dynamique des Contacts : modèle de cimentation

Dans des nombreux milieux granulaires réels tels que les sols partiellement saturés, les sols cimentés, et les roches, les contacts peuvent résister, jusqu'à un certain seuil, des forces de traction. Dans ces milieux, la résistance à la traction peut avoir différentes origines telles que la capillarité, la cimentation, et les forces de van der Waals.

Dans cette section, nous montrons comment l'adhésion au niveau des contacts peut être introduite dans la Dynamique des Contacts en modifiant légèrement la loi de contact dans la direction normale, ainsi qu'en rajoutant un modèle de création et de rupture des liens cohésifs. Notre modèle de cohésion local cherche à imiter la cohésion par cimentation, comme celle qu'on peut observer dans les sols cimentés et les roches tendres. Ce processus de cimentation résulte de la précipitation de certains minéraux dans la zone de contact entre les grains ou entre des grains qui sont très proches mais qui ne se touchent pas. Une fois que le ciment est cassé, nous supposons que les liens cohésifs sont détruits et le contact devient non cohésif.

### 2.6.1 Loi de contact normale dans un contact adhésif

Dans la section 2.4.4, nous avons parlé du graphe de Signorini, qui illustre la loi de contact dans la direction normale. Le graphe de Signorini stipule que si la distance qui sépare les deux particules (i.e., l'interstice  $\delta$ ) est nulle, alors les particules sont en contact, et la force normale est supérieure ou égale à zéro ; en revanche, si l'interstice  $\delta$  est supérieur à zéro, alors il n'y a pas de contact, et la force normale doit être nulle.

L'introduction de l'adhésion consiste à décaler vers le bas le graphe de Signorini, et, de cette manière, donner au contact la faculté de résister à une certaine force de traction. La loi de contact et la loi de contact complète, dans le cas de contacts adhésifs, sont illustrées sur la figure 2.16.

La loi de contact adhésif stipule que, lors d'une collision, un contact doit vérifier une des deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \Rightarrow & f_{ij}^n \geq -f_a \\ \delta_{ij} > 0 & \Rightarrow & f_{ij}^n = 0, \end{cases} \quad (2.69)$$

En d'autres termes, si l'interstice  $\delta_{ij}$  entre les deux particules est nul, alors les particules sont en contact, et la force normale  $f_{ij}^n$  est supérieure ou égale

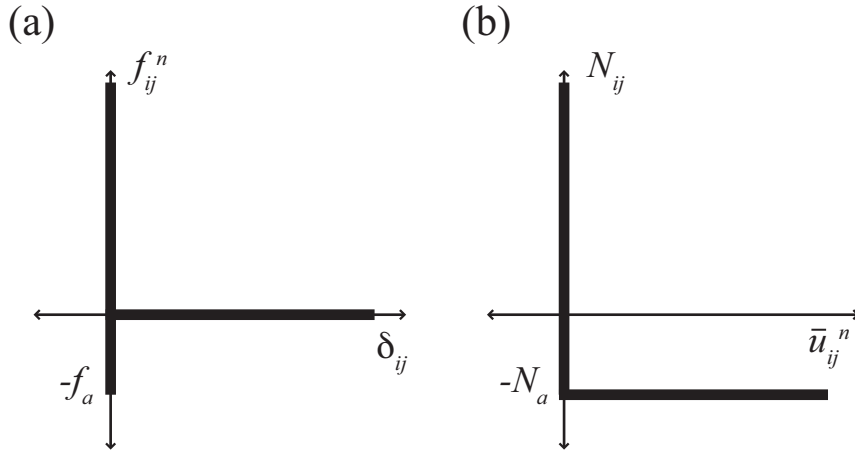


FIG. 2.16 – (a) Loi de contact et (b) Loi de contact complète pour un contact adhésif.

à la résistance à la traction  $-f_a$  ; en revanche, si l’interstice est supérieur à zéro, alors il n’y a pas de contact, et la force normale doit être nulle.

La loi de contact complète pour les contacts adhésifs s’écrit

$$\begin{cases} \bar{u}_{ij}^n = 0 & \Rightarrow & N_{ij} \geq -N_a \\ \bar{u}_{ij}^n > 0 & \Rightarrow & N_{ij} = -N_a, \end{cases} \quad (2.70)$$

où  $N_a = f_a \Delta t$ . En d’autres termes, si la vitesse formelle normale  $\bar{u}_{ij}^n$  dans un pas de temps est nulle, alors l’impulsion normale  $N_{ij}$  est supérieure à  $-N_a$  ; en revanche, si la vitesse formelle normale dans un pas de temps est supérieure à zéro (i.e., le contact s’est ouvert), alors l’impulsion normale est égale à  $-N_a$ .

Dans un contact adhésif, les valeurs seuil de force tangentielle et de moment imposées par la loi de frottement de glissement (i.e., la loi de Coulomb) et la loi de frottement de roulement,  $T_{max}$  et  $M_{max}$ , sont calculées en prenant en compte l’impulsion ( $N_{ij} + N_a$ ). Ces modèles locaux sont donc équivalents à décaler les surfaces limites de charge (au niveau du contact) d’une “distance”  $-N_a$  vers la gauche. Dans un lien cimenté, si l’impulsion normale est  $N = 0$ , nous considérons que le contact résiste encore au glissement et au roulement parce que le ciment n’a pas encore été brisé.

## 2.6.2 Création et rupture des liens cohésifs

La modification de la loi de contact décrite dans la section précédente est suffisante pour rendre les contacts adhésifs. Cependant, étant donné que les



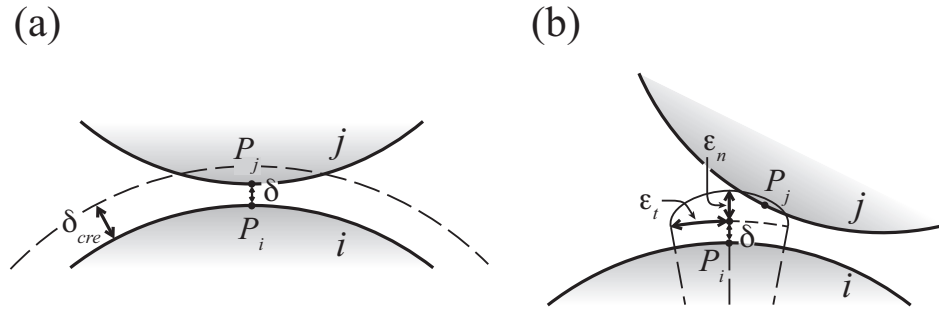


FIG. 2.17 – *Modèle de création et de rupture des liens cohésifs.*

particules sont complètement rigides, un tel milieu serait trop fragile et perdrait sa consistance très facilement. Une manière de contourner ce problème est de rajouter un modèle de création et de rupture des liens cohésifs. Comme son nom l’indique, c’est ce modèle qui va décider quand un lien cohésif est créé, et quand il est brisé.

La création d’un lien cohésif dépend de l’interstice  $\delta$  entre chaque particule et ses particules voisines. Si l’interstice est inférieur à une distance seuil  $\delta_{cre}$ , alors un lien cohésif est créé. De l’autre côté, la rupture d’un lien cohésif dépend d’une petite zone elliptique définie au voisinage de chaque contact. Les liens cohésifs persistent à l’intérieur de cette zone, et ils se brisent lorsque, suite à la déformation, un des points initiaux de contact sort de cette zone (Figure 2.17).

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation numérique des milieux granulaires en utilisant des méthodes d’éléments distincts. Nous avons montré que plusieurs échelles de longueur et de temps peuvent être identifiées dans un milieu granulaire, et que le traitement qu’on donne à ces échelles mène à deux approches de modélisation très différentes : l’approche régulière et l’approche non-régulière. Ceci est important car les deux méthodes les plus utilisées pour simuler numériquement des milieux granulaires (i.e., la Dynamique Moléculaire et la Dynamique des Contacts) ont été développées suivant des approches différentes (i.e., régulière et non régulière, respectivement). Le premier point important qu’il faudrait retenir de ce chapitre est que la régularité ou la non-régularité du mouvement est une question d’échelle d’observation. Ainsi, il n’est pas rigoureux de dire qu’une de ces approches est “meilleure” que l’autre, sans faire référence au problème qu’on veut étudier. Si l’on s’intéresse à des phénomènes qui relèvent de l’échelle du

---

contact, (e.g., l'élasticité ou la transmission d'ondes sonores dans le milieu) il est nécessaire d'avoir une relation constitutive au niveau des contacts et, donc, d'adopter une approche régulière. En revanche, si l'on ne s'intéresse pas à ces phénomènes, il est raisonnable, et même souhaitable, d'utiliser une approche qui ne requiert pas d'une telle relation constitutive; c'est le cas des approches non régulières. Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à des phénomènes plastiques dont la modélisation ne requiert pas une relation constitutive au niveau des contacts (e.g., la résistance au cisaillement, la dilatance, et la microstructure du milieu). Pour cette raison, nous avons adopté une méthode développée avec une approche non régulière, à savoir, la Dynamique des Contacts.

Nous avons donné un aperçu des principes de base de la Dynamique des Contacts dans le cas des disques pouvant exercer des forces normales et tangentielles aux contacts. Nous avons aussi montré comment cette méthode combine les équations de la dynamique intégrées dans le temps avec un ensemble de lois de contact, qui définissent l'ensemble d'interactions admissibles au niveau des contacts (i.e., les contraintes cinématiques). A plusieurs reprises, nous avons comparé le problème d'une collision simple avec celui des collisions multiples. Cette comparaison a servi à illustrer un deuxième point important de ce chapitre : une collision multiple est un processus collectif, qui ne peut pas être vu comme un ensemble de collisions simples.

A la fin du chapitre, nous avons montré comment deux nouveaux éléments, très importants dans les géomatériaux, peuvent être introduits dans la Dynamique des Contacts. Ces éléments sont la résistance au roulement et l'adhésion au niveau des contacts. Nous avons montré que l'introduction de la résistance au roulement requiert une légère modification des équations de la dynamique, et qu'elle implique l'introduction d'une nouvelle loi de contact. De l'autre côté, l'adhésion peut être introduite en modifiant la loi de contact en direction normale, ainsi qu'en introduisant un modèle de création et de rupture des contacts adhésifs.



# Chapitre 3

## Rôle des propriétés microscopiques dans la résistance au cisaillement et la dilatance d'un milieu granulaire cohésif

### 3.1 Introduction

Dans la section 1.3, nous avons signalé que la résistance au cisaillement d'un milieu granulaire fait intervenir plusieurs propriétés au niveau des contacts, et que la relation entre ces propriétés locales et la réponse macroscopique constitue une question fondamentale dans l'étude des milieux granulaires. Cette relation micro-macro a été étudiée principalement pour les milieux pulvérulents, alors que les études sur les milieux cohésifs, étant beaucoup plus récentes, sont considérablement moins nombreuses. Ceci, malgré l'importance de ces milieux dans des nombreuses disciplines, tels que la géologie, la géotechnique, et la physique des poudres.

Le but de ce chapitre est d'utiliser un milieu granulaire modèle pour étudier la sensibilité des propriétés de résistance au cisaillement d'un milieu cohésif, telles que l'angle de frottement interne, la dilatance, et la cohésion, vis-à-vis des propriétés de résistance locales. Notre milieu modèle cherche à simuler le comportement des géomatériaux cimentés, et il fait intervenir trois paramètres locaux : l'adhésion microscopique  $\sigma_a$  (i.e.,  $\sigma_a = f_a/\ell$ , voir section 2.6), l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ , et le coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ . Nous avons réalisé une étude paramétrique, dans

laquelle nous avons fait varier les propriétés de résistance aux contacts, et nous avons mesuré la réponse macroscopique du matériau granulaire à l'aide d'un essai numérique de compression biaxial en deux dimensions. Cette étude nous a permis de mettre en évidence des relations micro-macro très simples. En particulier, nous observons que les propriétés de frottement locales sont à l'origine des angles de frottement interne (au pic et résiduel) et de la dilataance, alors que l'adhésion  $\sigma_a$  est le seul paramètre de résistance local à l'origine de l'adhésion macroscopique. A partir d'une analyse détaillée des angles de frottement et de la dilataance, nous trouvons aussi que l'angle de frottement interne au pic peut être décomposé additivement en trois termes avec des origines différentes : un terme d'origine géométrique, un terme d'origine frictionnel, et un terme associé à la dilataance.

Ce chapitre est organisé en trois parties. Dans un premier temps, nous décrivons le matériau granulaire modèle que nous avons étudié ainsi que le protocole que nous avons utilisé pour construire l'échantillon. Nous présenterons également le test de compression biaxial et les plages de paramètres utilisées dans l'étude paramétrique. Dans un deuxième temps, nous présenterons et nous analyserons les résultats de l'étude paramétrique. A la fin du chapitre, nous concluons et nous introduisons les questions soulevées par cette étude.

## 3.2 Description des simulations

### 3.2.1 Matériau granulaire utilisé

Nous utilisons un matériau granulaire en deux dimensions composé de particules circulaires. La densité des particules est  $\rho = 2600 \text{ Kg/m}^2$ , et leur diamètre moyen est  $\langle d \rangle = 1.67 \text{ m}$ . Le diamètre  $d$  des particules varie entre 1 et 4 m, et la distribution est uniforme par fraction volumique (Figure 3.1).

Notre matériau granulaire modèle cherche à imiter un milieu granulaire cimenté. Pour cette raison, les contacts sont cohésifs au début du cisaillement, et leur rupture entraîne la perte irréversible de la résistance à la traction (Figure 3.2). La résistance d'un lien cohésif est donc contrôlée par trois paramètres : l'adhésion  $\sigma_a$ , l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ , et le coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ ; la résistance d'un contact non cohésif est contrôlée par deux paramètres :  $\phi_s$  et  $\mu_r$ .

Comme nous l'avons vu dans la section 2.6, notre modèle de cohésion nécessite l'inclusion d'un critère de création et de rupture de liens cohésifs. La création de ces liens est contrôlée par une distance intergranulaire  $\delta_{cre}$ , normalisée par la distance inter-centres des particules en contact, et leur

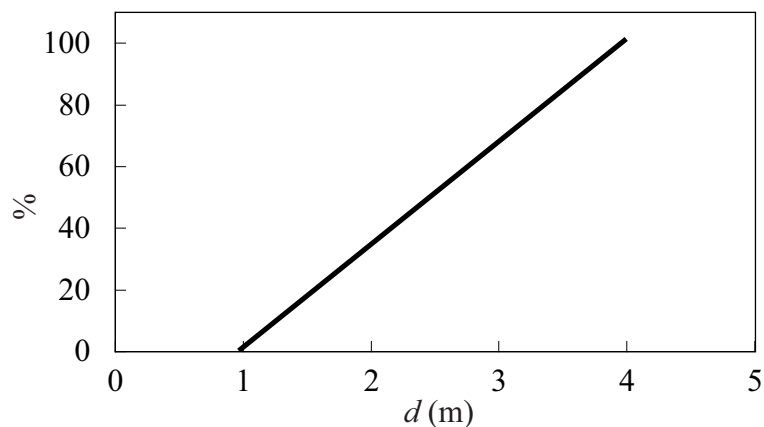


FIG. 3.1 – Courbe granulométrique.  $d$  est le diamètre des particules, et % est le pourcentage du volume occupé par les particules de diamètre inférieur à  $d$ .

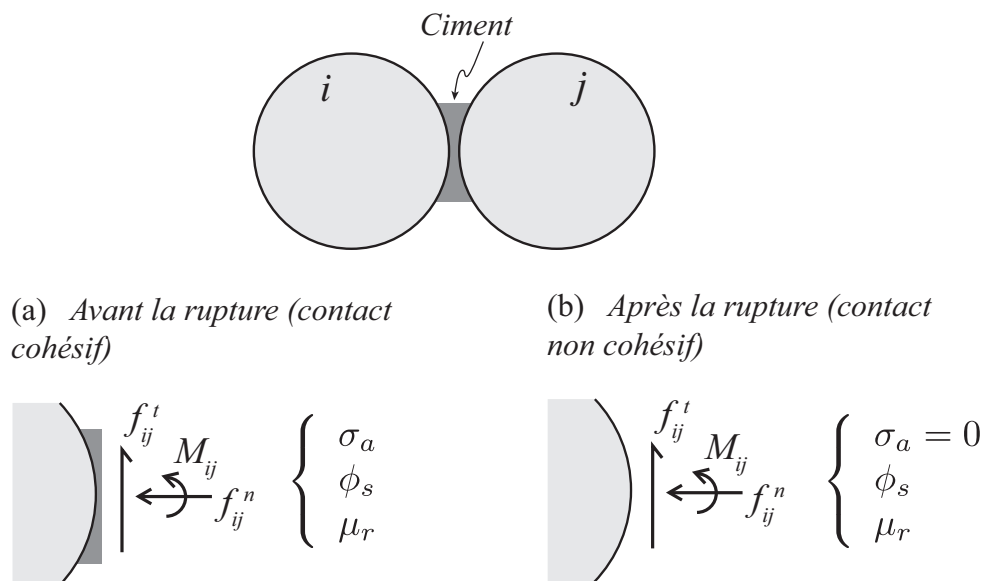


FIG. 3.2 – Notre matériau granulaire modèle cherche à imiter un milieu granulaire cimenté. (a) Au début du cisaillement les contacts sont cohésifs. (b) Après leur rupture, les contacts deviennent non cohésifs.

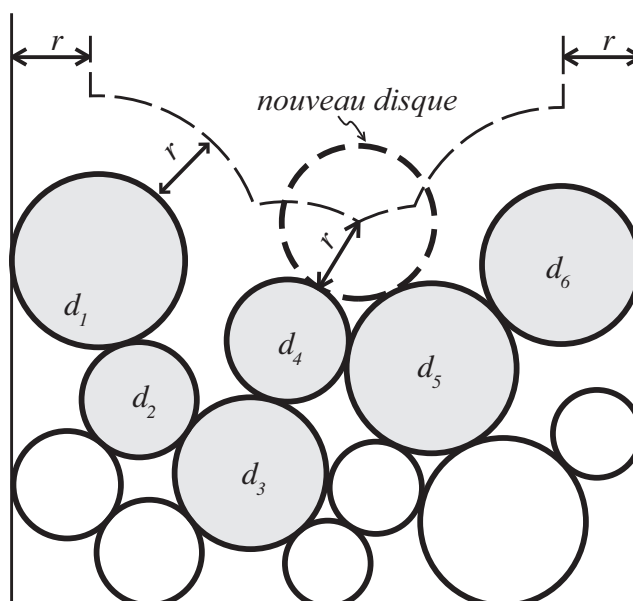


FIG. 3.3 – Les particules sont déposées suivant un critère géométrique. Chaque particule est placée à l’endroit où son énergie potentielle soit minimisée.

rupture est contrôlée par deux distances  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_t$ , aussi normalisées par la distance inter-centres. Dans toutes nos simulations  $\delta_{cre}$ ,  $\epsilon_n$ , et  $\epsilon_t$  sont égales à 0.02. Pour une explication détaillée de ces paramètres, voir la section 2.6.

Les coefficients de restitution  $\rho_n$ ,  $\rho_t$ , et  $\rho_w$  sont égaux à zéro, comme c’est le cas pour la plupart des géomatériaux, et les essais sont faits en conditions de pesanteur nulle.

### 3.2.2 Construction des échantillons

L’échantillon granulaire est composé de 5000 disques placés dans une boîte rectangulaire d’environ  $50\langle d \rangle \times 125\langle d \rangle$ . Le protocole de construction de l’échantillon comporte trois étapes :

Initialement, les particules sont déposées dans la boîte suivant un critère géométrique, qui consiste à placer chaque particule à l’endroit où son énergie potentielle soit minimale (i.e., l’énergie potentielle étant fonction de la hauteur de la particule) (Figure 3.3). Cette méthode de construction permet de fabriquer des échantillons très denses, mais dont les particules ne sont pas à l’équilibre.

La deuxième étape consiste donc à “stabiliser” l’échantillon, et elle est habituellement appelée “relaxation”. Pour relaxer l’échantillon, nous appli-

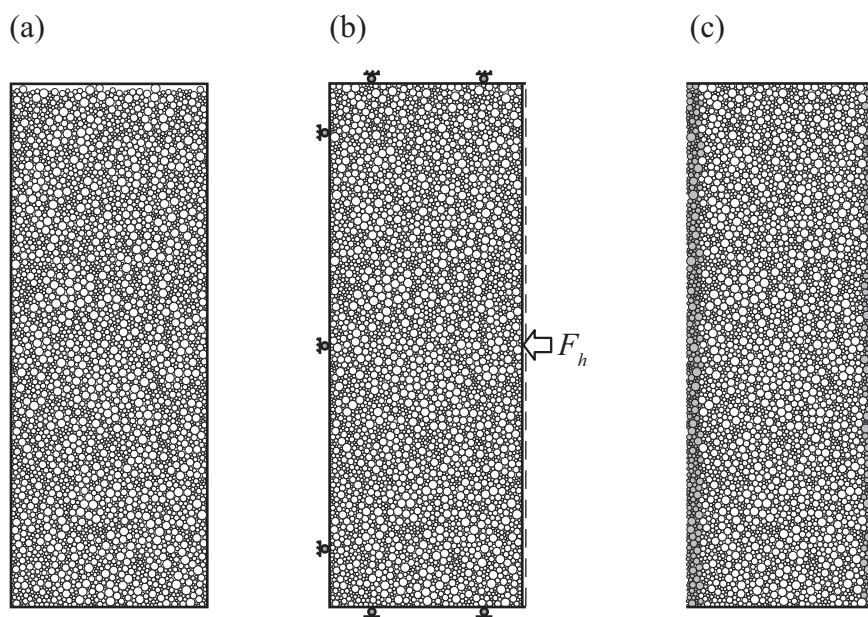


FIG. 3.4 – *Protocole utilisé pour construire l'échantillon : (a) l'échantillon déposé géométriquement, (b) l'échantillon relaxé, et (c) l'échantillon une fois que les murs latéraux ont été remplacés par des membranes de particules.*

quons une force  $F_h$  sur un des murs latéraux, ce qui provoque une légère compaction de l'arrangement déposé géométriquement. Nous avons cherché à produire un arrangement désordonné le plus dense possible ; pour cette raison, l'échantillon est relaxé avec des particules sans frottement. A la fin de la relaxation, la compacité du milieu est  $\nu = 0.84$ , son nombre de coordination est  $Z = 3.9$ , et les orientations des contacts sont presque isotropes.

La troisième étape consiste à enlever les murs latéraux et à les remplacer par deux “membranes” de particules. C'est sur ces membranes que la pression de confinement  $p$  sera appliquée. Pour ce faire, nous appliquons une force externe horizontale sur toutes les particules qui composent la membrane, de telle sorte que la contrainte appliquée (i.e., la somme de ces forces externes divisée par la hauteur de l'échantillon) est égale à  $p$ .

La figure 3.4 montre les trois étapes du protocole utilisé pour construire l'échantillon : (a) l'échantillon déposé géométriquement, (b) l'échantillon relaxé, et (c) l'échantillon une fois que les murs latéraux ont été remplacés par des membranes de particules.



### 3.2.3 Compression biaxial

Le cisaillement de l'échantillon se fait en deux étapes. Premièrement, la pression de confinement  $p$  est appliquée sur les membranes de particules ainsi que sur le mur supérieur. Deuxièmement, le mur supérieur est déplacé vers le bas à vitesse contrôlée. La vitesse du mur est incrémentée linéairement de zéro jusqu'à sa valeur maximale  $v_{wall} = 0.25$  m/s (i.e.,  $v_{wall} = 0.15\langle d \rangle/s$ ) dans un intervalle de temps de 1 s (Figure 3.5(a)). Le raccourcissement vertical de l'échantillon provoque l'apparition de deux bandes de cisaillement conjuguées (Figure 3.5(b)). L'épaisseur de ces bandes à la fin de l'essai est de  $\simeq 10\langle d \rangle$ .

Lors du cisaillement, la force verticale  $F_v$ , appliquée par les particules sur le mur supérieur, est mesurée. A partir de cette force, la contrainte normale verticale  $\sigma_v$  est calculée comme suit :

$$\sigma_v = \frac{F_v}{\langle L \rangle}, \quad (3.1)$$

où  $\langle L \rangle$  est la largeur moyenne de l'échantillon. Lors du cisaillement, le coefficient de frottement entre les particules et les murs est nul. Pour cette raison, il n'y a pas des contraintes tangentielles entre l'échantillon et les murs, et la contrainte verticale  $\sigma_v$  et la pression de confinement  $p$  peuvent être assimilées aux contraintes principales majeure et mineure en 2D,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , respectivement :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_v \\ \sigma_2 &= p \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les déformations principales majeure et mineure en 2D sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{-(H - H_0)}{H_0} \\ \varepsilon_2 &= \frac{-\langle L \rangle - L_0}{L_0}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $H$  est la hauteur de l'échantillon, et  $H_0$  et  $L_0$  sont sa hauteur et sa largeur initiales. Les déformations déviatorique  $\varepsilon_q$  et volumique  $\varepsilon_p$  sont données par

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_p &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\varepsilon_p > 0$  si l'échantillon est contractant et  $\varepsilon_p < 0$  si l'échantillon est dilatant.

L'échantillon est cisailé pour 5 pressions de confinement différentes :

$$p \in [1, 2, 4, 8, 16] \text{ MN/m},$$

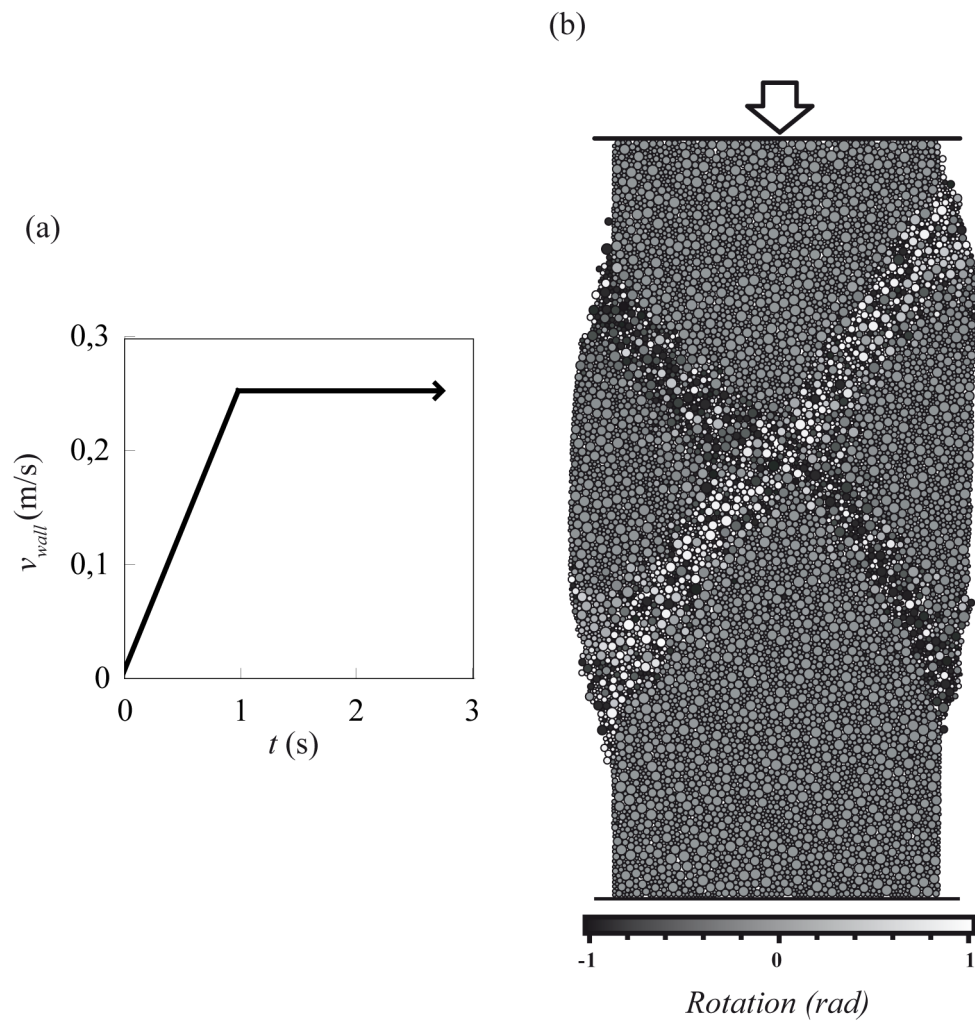


FIG. 3.5 – (a) La vitesse du mur est incrémentée linéairement de zéro jusqu'à sa valeur maximale  $v_{wall} = 0.25$  m/s dans un intervalle de temps de 1 s. (b) Echantillon cisailé. les rotations anti-horaires sont considérées positives.

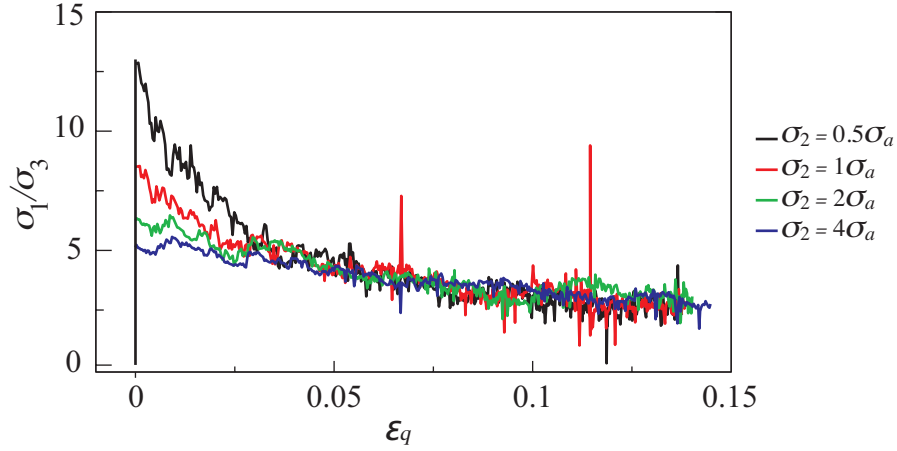


FIG. 3.6 – Courbes contrainte déformation obtenues pour un échantillon avec  $\sigma_a = 4\text{MN/m}$ ,  $\mu_s = 0.3$ , et  $\mu_r = 0.1$ , cisailé pour 4 différents niveaux de confinement.

ce qui permet de tracer la surface limite de charge du matériau. La figure 3.6 montre les courbes contrainte déformation obtenues pour un de nos échantillons, cisailé pour 4 différents niveaux de confinement. On observe un comportement similaire à celui des sols et des roches. Initialement, la résistance de l'échantillon est très élevée (i.e., la résistance au pic), et, lorsque la déformation déviatorique  $\varepsilon_q$  augmente, la résistance du milieu diminue et se stabilise autour d'une valeur de résistance appelée la résistance résiduelle. La figure 3.7(a et b) montre les enveloppes de rupture, au pic et résiduelle, obtenues à partir des courbes contrainte déformation illustrées sur la figure 3.6. L'enveloppe de rupture pour l'état pic est celle d'un matériau cohésif, et l'enveloppe de rupture à l'état résiduel est celle d'un matériau pulvérulent (i.e., la cohésion résiduelle est nulle).

Mise-à-part la résistance au cisaillement, la réponse macroscopique de l'échantillon est aussi caractérisée par sa déformation volumique. La figure 3.8 montre les courbes de déformation volumique des 4 essais illustrés sur la figure 3.6. On constate que le cisaillement induit une dilatance de l'échantillon (i.e.,  $\varepsilon_p < 0$ ), ce qui n'est pas surprenant car l'échantillon est initialement très dense. La pente de ces courbes est appelée l'angle de dilatance  $\psi$  du milieu. Cet angle est une des variables utilisées pour décrire la plasticité du milieu à l'état pic, et, dans un essai biaxial, il est défini par

$$\psi = \sin^{-1} \left( \frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon_q} \right). \quad (3.5)$$

Sur la figure 3.8, on constate que l'angle de dilatance au début de l'essai est

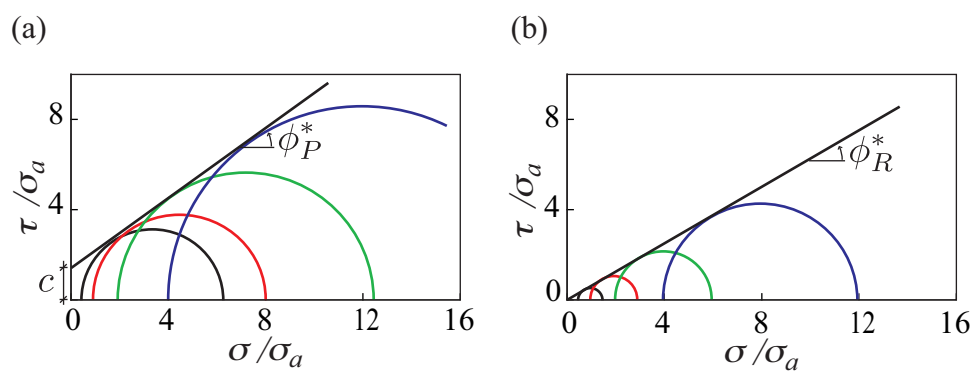


FIG. 3.7 – Enveloppes de rupture, au pic (a) et résiduelle (b), obtenues pour les courbes contrainte déformation illustrées sur la figure 3.6.

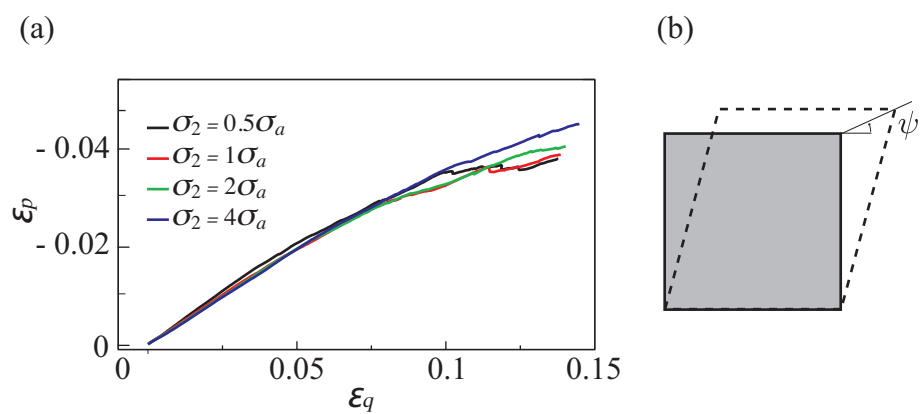


FIG. 3.8 – Courbes de déformation volumique - déformation déviatorique des 4 essais illustrés sur la figure 3.6.

indépendant de la pression de confinement.

En conclusion, à l'état pic, la réponse globale du matériau est caractérisée par un angle de frottement interne  $\phi_P^*$ , une cohésion  $c$ , et un angle de dilatance  $\psi$ ; à l'état résiduel, la réponse du matériau est uniquement caractérisée par un angle de frottement interne  $\phi_R^*$ .

### Vérification de la quasi-staticité de l'essai

Le comportement d'un matériau granulaire dépend fortement de la vitesse à laquelle il est cisailé [86, 68, 49, 11]. Dans ce chapitre, nous avons cherché à étudier le comportement du matériau à l'état quasi-statique; c'est-à-dire lorsqu'il est cisailé très lentement. Plusieurs travaux récents ont permis de montrer que la quasi-staticité d'un milieu granulaire cisailé peut être évaluée en comparant deux échelles de temps [49, 22]. La première échelle de temps  $T_{macro}$  est une échelle macroscopique, et elle est associée au taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  :

$$T_{macro} = \frac{1}{\dot{\gamma}} = \frac{H_{shear}}{v_{shear}}, \quad (3.6)$$

où  $v_{shear}$  est la vitesse de cisaillement et  $H_{shear}$  est l'épaisseur de la bande de cisaillement. La deuxième échelle de temps  $T_{micro}$  est une échelle microscopique, et elle représente le temps typique de réarrangement des grains dans le milieu. L'échelle de temps  $T_{micro}$  est calculée comme le temps qu'un grain de densité  $\rho$  requiert pour se déplacer une distance égale à son diamètre  $d$  sous l'action d'une force égale à la pression de confinement  $p$  multiplié par l'aire transversal du grain :

$$T_{micro} = d\sqrt{\frac{\rho}{p}}. \quad (3.7)$$

Le rapport entre ces deux temps donne un paramètre adimensionnel appelé le "nombre inertiel"  $I$  :

$$I = \frac{T_{micro}}{T_{macro}} = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{p/\rho}}. \quad (3.8)$$

Si le nombre inertiel est très petit (i.e.,  $I \ll 1$ ), alors le temps macroscopique est beaucoup plus élevé que le temps microscopique, et l'on considère que le milieu est cisailé en conditions quasi-statiques. Si le nombre inertiel est très grand (i.e.,  $I \simeq 1$ ), alors le temps macroscopique se rapproche du temps microscopique, et l'on considère que le milieu est cisailé en conditions dynamiques.

Dans nos essais biaxiaux, la vitesse de raccourcissement maximale est  $v_{wall} = 1.5\langle d \rangle/s$ , l'orientation des bandes de cisaillement est  $\simeq 60^\circ$ , et leur

épaisseur à la fin de l'essai est  $\simeq 10\langle d \rangle$ . Nous pouvons donc calculer un taux de cisaillement comme suit :

$$\dot{\gamma} = \frac{v_{cis}}{h_{cis}} = \frac{v_{wall}}{10\langle d \rangle} \frac{1}{\sin 60^\circ} = 0.17/\text{s}. \quad (3.9)$$

La pression de confinement varie entre 1 et 16 MN/m, et on peut utiliser comme diamètre typique des grains le diamètre moyen  $\langle d \rangle$ . A partir de cela, on obtient un nombre inertiel  $I$  est entre  $3.5 \times 10^{-3}$  et  $1.5 \times 10^{-2}$ .

### 3.2.4 Espace paramétrique étudié

Le but de ce chapitre est d'étudier la sensibilité des propriétés de résistance globales vis-à-vis des propriétés de résistance au niveau des contacts. Pour ce faire, nous avons fait varier les propriétés aux contacts et nous avons mesuré  $\phi_P^*$ ,  $\phi_R^*$ , et  $\psi$  pour chaque combinaison de  $\sigma_a$ ,  $\phi_s$ , et  $\mu_r$ . Les plages de paramètres utilisées dans cette étude paramétrique sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_s &= \tan \phi_s \in [0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6] \\ \mu_r &\in [0, 0.1, 0.25] \\ \sigma_a &\in [0, 1, 2, 4, 10, 20] \text{ (MN/m)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc effectué 630 essais au total.

### 3.2.5 Paramètres d'exécution

Dans toutes les simulations présentées dans ce chapitre, le pas de temps est  $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ s, et le critère de convergence est  $\epsilon = 0.0005$  (pour une explication détaillée de ces deux paramètres, voir la section 2.4).

## 3.3 Résultats obtenus

### 3.3.1 Les angles de frottement interne

La figure 3.9 montre la relation entre les angles de frottement interne, au pic et résiduel, et l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ , pour les trois valeurs de coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ . Chaque point sur cette figure, et l'intervalle associé, représente la moyenne et les valeurs extrêmes pour les six valeurs d'adhésion microscopique  $\sigma_a$ .

On constate que les angles de frottement interne sont indépendants de l'adhésion  $\sigma_a$ . Ceci veut dire que les seuls paramètres de résistance locaux

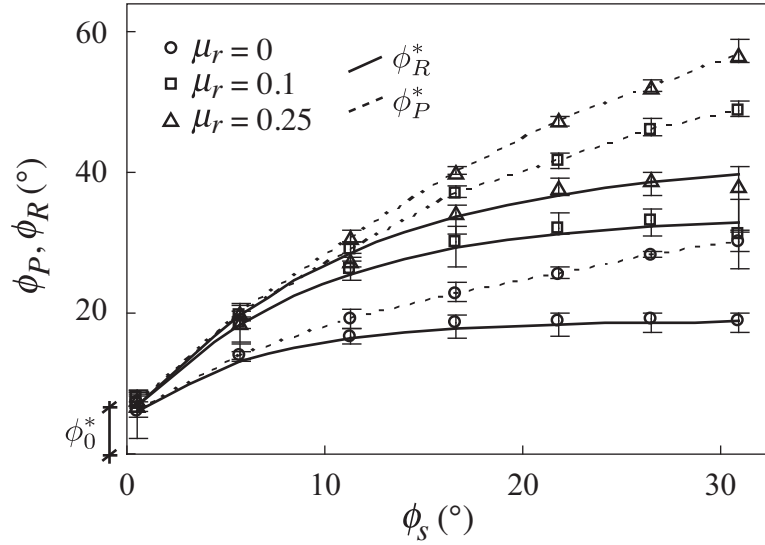


FIG. 3.9 – Relation entre les angles de frottement interne, au pic et résiduel, et l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ , pour les trois valeurs de coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ . Les traits noirs représentent la fonction exponentielle 3.10

à l'origine du frottement macroscopique sont l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$  et le coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ .

On observe aussi que toutes les courbes convergent vers le même point lorsque l'angle de frottement  $\phi_s$  tend vers zéro. Nous appellerons cette valeur  $\phi_0^*$ . L'angle  $\phi_0^*$  est l'angle de frottement interne dans la limite des particules sans-frottement, et le fait qu'il soit non nul montre que le frottement local (de glissement et de roulement) n'est pas la seule source de frottement global. En fait, l'angle  $\phi_0^*$  résulte de la forme rugueuse de la surface de glissement. A cause de cette rugosité, les surfaces de glissement à l'échelle des contacts ne sont pas orientées dans la direction du plan de glissement macroscopique, et les forces normales exercées aux contacts ont une composante qui s'oppose au cisaillement global. La magnitude des forces normales étant proportionnelle à la pression de confinement, cet effet apparaît à l'échelle macroscopique comme un angle de frottement interne.

On constate aussi que l'angle de frottement résiduel  $\phi_R^*$  dépend de l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$  lorsque ce dernier est faible (i.e.,  $\phi_s \leq 20^\circ$ ). En revanche, lorsque  $\phi_s$  est élevé, l'angle de frottement résiduel sature à une valeur  $\phi_\infty^*$  qui dépend uniquement du frottement de roulement. Donc, les courbes illustrées sur la figure 3.9 montrent que, lorsque l'angle de frottement  $\phi_s$  augmente, le milieu passe graduellement d'un état où la résistance est

principalement contrôlée par  $\phi_s$  (i.e., par le frottement de glissement) à un état où la résistance est contrôlée par  $\mu_r$  (i.e., par le frottement de roulement). Cette transition est bien approximée par une forme exponentielle :

$$\phi_R^* = \phi_0^* + (\phi_\infty^* - \phi_0^*)(1 - e^{-\alpha\phi_s}), \quad (3.10)$$

où  $\alpha \simeq 0.1$ .

En dernier lieu, on observe aussi que l'angle de frottement interne à l'état pic est toujours plus élevé que l'angle de frottement interne à l'état résiduel. Nous analyserons cette différence dans la section suivante.

### 3.3.2 Frottement interne et déformation volumique

#### La relation “contrainte-dilatance” de Taylor

En 1948, les travaux de Taylor ont permis de montrer que les changements de volume d'un milieu granulaire pulvérulent sont étroitement liés à sa résistance au cisaillement. A partir de considérations énergétiques, Taylor a montré que l'angle de frottement interne à l'état pic peut être vu comme la somme de deux angles :

$$\phi_P^* = \psi + \phi_C^*. \quad (3.11)$$

Le premier de ces angles,  $\psi$ , est l'angle de dilatance du milieu, qui peut être calculé à l'aide de l'expression 3.5. Le deuxième de ces angles,  $\phi_C^*$ , est l'angle de frottement qu'on mesure dans un état où le volume du milieu est constant. Cet état stationnaire est connu en mécanique de sols comme l' “état critique”. L'équation 3.11 est appelée la relation “contrainte-dilatance” de Taylor, et elle explique la différence entre les angles de frottement interne au pic et résiduel. Par exemple, elle explique qu'un milieu initialement dense a un angle de frottement au pic élevé, car il doit se dilater pour atteindre l'état critique. Dès lors, la relation contrainte-dilatance a été largement vérifiée pour les sols pulvérulents (e.g., voir [91]).

#### Les angles de frottement interne et l'angle de dilatance

Nous avons voulu vérifier si la relation contrainte-dilatance de Taylor explique aussi la différence entre  $\phi_P^*$  et  $\phi_R^*$  dans notre milieu granulaire cohésif. Cependant, un problème se pose : nous connaissons l'angle de dilatance du milieu, mais nous ne connaissons pas l'angle de frottement interne à l'état critique, car, à la fin de nos expériences, le volume du milieu est encore en train d'augmenter. Pour contourner ce problème, nous avons supposé que l'angle de frottement à l'état critique est très proche de l'angle de frottement à l'état



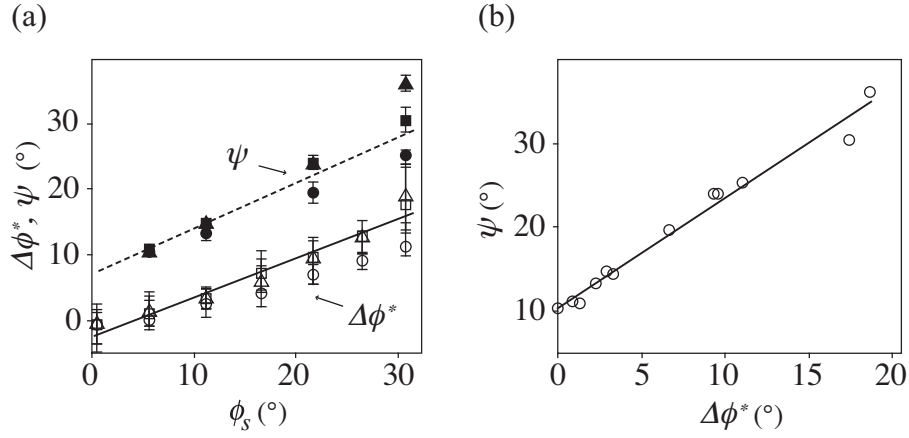


FIG. 3.10 – Différence entre les angles de frottement interne  $\Delta\phi^*$  et l'angle de dilatance  $\psi$  en fonction de l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ .

résiduel que nous avons mesuré. Cette supposition est justifiée par une observation expérimentale classique de la mécanique de sols : la résistance du milieu se stabilise bien avant la déformation volumique de l'échantillon.

Nous avons donc calculé la différence entre les angles de frottement interne :

$$\Delta\phi^* = \phi_P^* - \phi_R^*, \quad (3.12)$$

ainsi que l'angle de dilatance  $\psi$  du milieu au début de l'essai. Ces deux quantités sont illustrées sur la figure 3.10(a) en fonction de l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ . Chaque point sur cette figure, et l'intervalle associé, représente la moyenne et les valeurs extrêmes pour les six valeurs d'adhésion microscopique  $\sigma_a$ .

On constate que la différence entre les angles de frottement interne  $\Delta\phi^*$  et l'angle de dilatance  $\psi$  sont indépendants de l'adhésion microscopique, et qu'ils ne dépendent que légèrement du coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ . Donc, le principal paramètre de résistance local à l'origine de la dilatance est l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ .

Sur la figure 3.10(a), on observe aussi que les relations  $\phi_s - \Delta\phi^*$  et  $\phi_s - \psi$  sont presque parallèles, mais décalées d'un angle de  $7^\circ$ . Cet angle est, à nouveau,  $\phi_0^*$ , l'angle de frottement interne dans la limite des particules sans frottement ou, ce qui revient au même, l'angle de dilatance du milieu dans la limite des particules sans frottement.

La figure 3.10(b) montre l'angle de dilatance  $\psi$  en fonction de  $\Delta\phi^*$ . On observe que les points s'alignent avec bonne précision autour d'une droite de pente égale à 1. Ceci montre que, comme dans les sols pulvérulents,  $\psi$

et  $\Delta\phi^*$  sont corrélés, et que l'angle de dilataance  $\psi$  explique la différence entre les angles de frottement internes  $\phi_P^*$  et  $\phi_R^*$ . En conclusion, une relation contrainte-dilataance analogue à la relation de Taylor est vérifiée dans notre milieu cohésif.

A partir des relations illustrées sur la figure 3.10(a et b), l'angle de dilataance peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\psi &\simeq \phi_0^* + \Delta\phi^* \\ &\simeq \phi_0^* + k\phi_s,\end{aligned}\tag{3.13}$$

où  $k \simeq 0.5$ .

### 3.3.3 Décomposition additive de l'angle de frottement au pic

Les relations entre les paramètres de résistance locaux et les angles de frottement internes constituent le premier résultat important de cette étude. Les équations 3.10, 3.12, et 3.13 suggèrent que l'angle de frottement au pic peut être vu comme la somme de trois contributions :

$$\begin{aligned}\phi_P^* &= \phi_0^* + \phi_\mu^* + \Delta\phi^* \\ &\simeq \phi_\mu^* + \psi.\end{aligned}\tag{3.14}$$

- Une contribution géométrique  $\phi_0^*$ , qui représente l'angle de frottement interne dans la limite des particules sans frottement.
- Une contribution frictionnelle  $\phi_\mu^*$ , qui représente la contribution des paramètres de frottement locaux ( $\phi_s$  et  $\mu_r$ ) à l'angle de frottement interne.
- Une contribution associée à la dilataance  $\Delta\phi^*$ , qui reflète la densité initiale du milieu.

La figure 3.11 montre la décomposition de l'angle de frottement au pic dans ces trois contributions en fonction de l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ .

### 3.3.4 L'adhésion macroscopique

Comme nous l'avons vu dans la section 1.3.2, on a plusieurs choix pour étudier l'effet de l'adhésion aux contacts sur la résistance au cisaillement du matériau. Une option est de s'intéresser à la cohésion  $c$ , et une autre option est de s'intéresser à une valeur appelé l'adhésion théorique  $A^*$ , définie comme l'intersection de l'enveloppe de rupture avec l'axe des contraintes normales

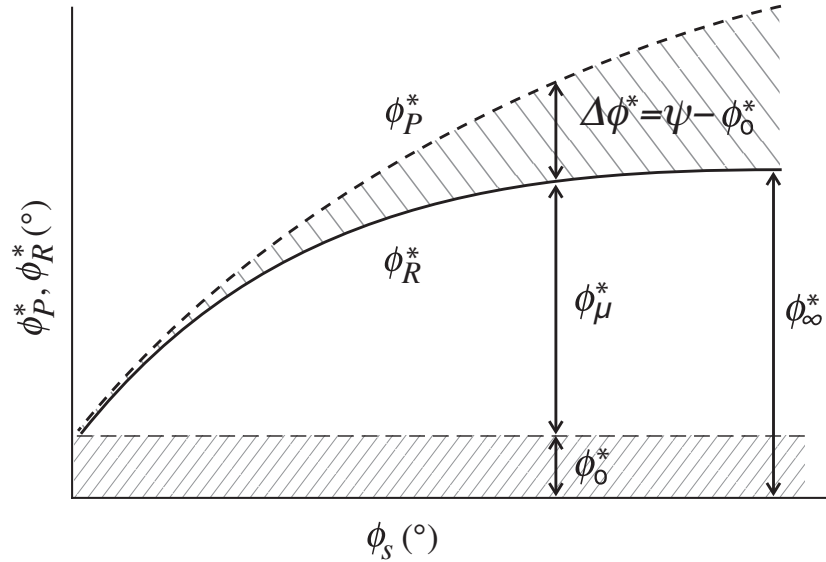


FIG. 3.11 – Décomposition de l'angle de frottement interne au pic en trois contributions avec des origines différentes : une contribution d'origine géométrique  $\phi_0^*$ , une contribution d'origine frictionnelle  $\phi_\mu^*$ , et une contribution associée à la dilatance  $\Delta\phi^*$ .

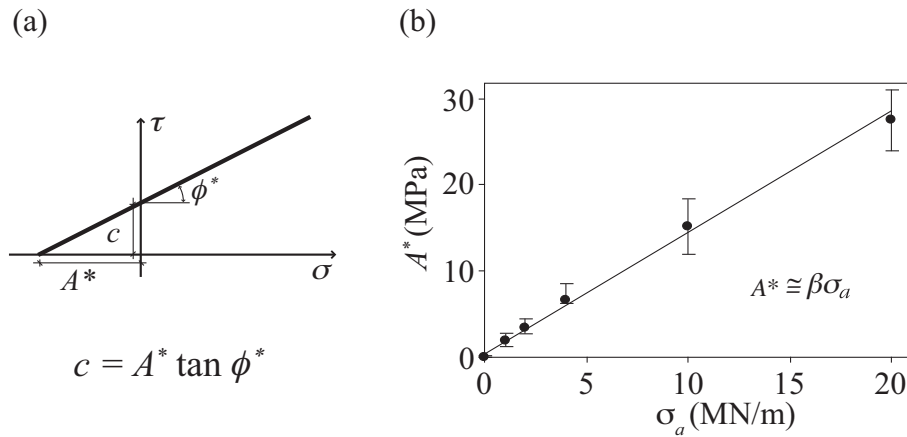


FIG. 3.12 – (a) Pour étudier l'effet de l'adhésion microscopique  $\sigma_a$  sur la résistance au cisaillement, on peut s'intéresser à la cohésion  $c$  ou à l'adhésion théorique  $A^*$ , définie comme l'intersection de l'enveloppe de rupture avec l'axe des contraintes normales  $\sigma$ . (b) Relation entre  $\sigma_a$  et  $A^*$

$\sigma$  (Figure 3.12(a)). L'adhésion  $A^*$  est “théorique”, car elle n'est pas mesurée dans un essai en traction.

Dans notre modèle de cohésion, nous avons imposé une adhésion aux contacts, et non pas une cohésion aux contacts (voir section 2.6). Pour cette raison, on s'attend à ce que la relation entre l'adhésion microscopique et l'adhésion théorique soit plus simple que la relation entre l'adhésion microscopique et la cohésion. Nous avons donc décidé d'analyser d'abord le lien entre l'adhésion locale  $\sigma_a$  et l'adhésion théorique  $A^*$ .

La relation entre  $\sigma_a$  et  $A^*$  est illustrée sur la figure 3.12(b). Chaque point sur cette figure, et l'intervalle associé, représente la valeur moyenne et les valeurs extrêmes pour les 7 valeurs de  $\phi_s$  et pour les 3 valeurs de  $\mu_r$ . On observe que l'adhésion  $A^*$  est indépendante des propriétés de frottement locales ( $\phi_s$  et  $\mu_r$ ), et qu'elle peut être exprimée comme une fonction linéaire de  $\sigma_a$  :

$$A^* = \beta\sigma_a, \quad (3.15)$$

où  $\beta \simeq 1.4$ . Ces résultats montrent que l'adhésion  $\sigma_a$  est le seul paramètre de résistance local à l'origine de l'adhésion macroscopique  $A^*$ . L'équation 3.15 ressemble à celles proposées par Ingles [33, 50] et Rumpf [73] pour calculer la résistance à la traction du milieu. Comme dans ces deux relations, le coefficient de proportionnalité  $\beta$  de l'équation 3.15 doit dépendre fortement de la densité initiale du milieu.

La cohésion du milieu peut être calculé à l'aide de l'expression suivante :

$$c = A^* \tan \phi_P^* \quad (3.16)$$

## 3.4 Conclusion

Le but de ce chapitre était d'étudier la sensibilité des propriétés de résistance au cisaillement d'un milieu granulaire cohésif, telles que l'angle de frottement interne, la cohésion, et la dilatance, vis-à-vis des propriétés de résistance locales (i.e., l'adhésion microscopique  $\sigma_a$ , l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ , et le coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ ). Pour ce faire, nous avons réalisé une étude paramétrique, dans laquelle nous avons fait varier les propriétés de résistance aux contacts, et nous avons mesuré la réponse macroscopique du matériau à l'aide d'un essai numérique de cisaillement biaxial en deux dimensions.

Nos résultats montrent qu'il est possible, en utilisant un milieu granulaire modèle, d'identifier clairement l'influence de chacune des propriétés de résistance au niveau des contacts dans la résistance au cisaillement et dans

l'angle de dilatance du milieu. En particulier, nous observons que les propriétés de frottement locales ( $\phi_s$  et  $\mu_r$ ) sont à l'origine des angles de frottement interne et de la dilatance, alors que l'adhésion  $\sigma_a$  est le seul paramètre de résistance local à l'origine de l'adhésion macroscopique.

Nous observons aussi qu'une relation contrainte-dilatance analogue à la relation de Taylor est vérifiée dans notre milieu cohésif, et que l'angle de frottement interne au pic peut être décomposé additivement en trois contributions avec des origines différentes : une contribution d'origine géométrique associée à la forme rugueuse du plan de cisaillement, une contribution d'origine frictionnelle associée aux paramètres de frottement locaux, et une contribution associée à la dilatance.

D'autre part, l'analyse des angles de frottement interne nous a permis de montrer que, lorsque l'angle de frottement de glissement augmente, le milieu passe graduellement d'un état où la résistance est principalement contrôlée par  $\phi_s$  (i.e., par le frottement de glissement) à un état où la résistance est contrôlée par  $\mu_r$  (i.e., par le frottement de roulement). Ceci suggère que le mode de mouvement relatif (i.e., glissement ou roulement) au niveau des contacts dépend de la valeur relative de  $\phi_s$  et  $\mu_r$ . De plus, cette transition soulève la question de la contribution relative de  $\phi_s$  et  $\mu_r$  dans la construction de l'angle de frottement interne. Une deuxième question très intéressante, que nous n'avons pas traitée dans ce chapitre, est celle de la microstructure de l'arrangement et de sa relation avec les propriétés de résistance locales. Cette question est importante car la réponse macroscopique ne dépend pas uniquement des propriétés de résistance au niveau des contacts, mais aussi, et très fortement, de la microstructure du milieu. Ces deux points seront abordés dans le chapitre suivant.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [85] :

***Additive Decomposition of Shear Strength in Cohesive Granular Media from Grain-Scale Interactions.***

*A. Taboada, N. Estrada, and F. Radjai.*

*Physical Review Letters. Vol. 97 No. 09*

*Publié le 1 septembre 2006.*

# Chapitre 4

## Rôle des propriétés de frottement locales dans la résistance au cisaillement et la microstructure

### 4.1 Introduction

L'étude paramétrique présentée dans le chapitre précédent nous a permis de montrer que les deux paramètres locaux à l'origine de l'angle de frottement interne  $\phi^*$  et de la dilatance  $\psi$  du milieu sont l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$  (qui peut aussi s'exprimer comme un coefficient de frottement de glissement  $\mu_s = \tan \phi_s$ ) et le coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ . Cependant, nous avons vu qu'il n'est pas facile de distinguer l'effet de chacun de ces paramètres dans la réponse macroscopique. En particulier, nous avons vu que, lorsque  $\mu_s$  augmente, une transition a lieu entre deux types de comportement : pour des valeurs faibles de  $\mu_s$ , l'angle de frottement interne est principalement contrôlé par  $\mu_s$ , alors que, pour des valeurs élevées de  $\mu_s$ , il est uniquement contrôlé par  $\mu_r$ . Cette transition suggère que l'augmentation de  $\mu_s$  provoque un changement dans le mode de mouvement relatif (i.e., glissement ou roulement) que le milieu privilégie en fonction de la valeur relative des paramètres de frottement locaux. Nous avons vu aussi qu'une question très intéressante que nous n'avons pas encore abordée est celle de la microstructure de l'arrangement et de sa relation avec les propriétés de frottement locales.

Le but de ce chapitre est d'étudier plus finement le rôle des deux paramètres de frottement locaux,  $\mu_s$  et  $\mu_r$ , dans l'angle de frottement interne  $\phi^*$

et dans la microstructure développée par le milieu lors du cisaillement. Pour aborder ces questions, nous avons étudié un milieu granulaire non cohésif à l'aide d'un essai de cisaillement simple en deux dimensions. Le choix d'utiliser un milieu granulaire non cohésif est justifié par un des résultats du chapitre précédent : dans un milieu cimenté, l'angle de frottement interne et l'angle de dilataance sont indépendants de l'adhésion entre les particules. Nous avons étudié ce milieu dans un état stationnaire qui est indépendant de l'état initial. Cet état "sans mémoire" est traditionnellement connu en mécanique des sols comme "l'état critique", et il est caractérisé par une résistance constante et un angle de dilataance nul. L'état critique est intéressant car, étant indépendant de l'état initial, les propriétés mesurées à l'état critique peuvent être considérées comme des propriétés intrinsèques du milieu. Nous avons fait varier les deux coefficients de frottement locaux, et nous avons analysé le comportement du milieu en termes de résistance au cisaillement, texture, et transmission des forces.

Nous trouvons que les effets de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  dans la réponse macroscopique du milieu sont presque symétriques. En particulier, nous observons que l'augmentation de  $\mu_r$  provoque aussi une transition entre un comportement contrôlé par  $\mu_r$  et un comportement contrôlé par  $\mu_s$ . Ceci fait apparaître deux régimes distincts, dans lesquels la résistance du milieu est contrôlée soit par  $\mu_s$  soit par  $\mu_r$ . Nous trouvons aussi que le fait de contraindre simultanément le glissement et le roulement au niveau des contacts a d'importantes répercussions dans la microstructure du milieu. Plus précisément, l'utilisation de valeurs élevées de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  provoque l'apparition de colonnes de particules (i.e., chaînes de particules avec uniquement 2 contacts), ce qui modifie fortement le rôle mécanique des contacts qui portent les plus faibles forces.

Ce chapitre est organisé en trois parties. Dans un premier temps, nous décrivons le matériau modèle ainsi que le protocole que nous avons utilisé pour construire l'échantillon granulaire. Nous présenterons également l'expérience de cisaillement simple et les plages de paramètres utilisées dans l'étude paramétrique. Dans un deuxième temps, nous présenterons et nous analyserons les résultats de l'étude paramétrique, et à la fin du chapitre, nous concluons.

## 4.2 Description des simulations

### 4.2.1 Matériau granulaire utilisé

Nous utilisons un matériau granulaire en deux dimensions composé de particules circulaires. La densité des particules est  $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$ , et leur

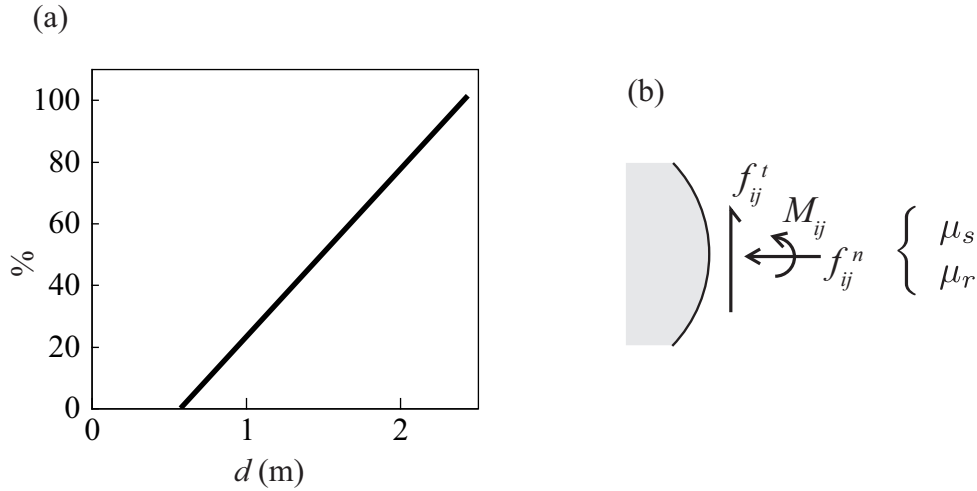


FIG. 4.1 – (a) Courbe granulométrique ;  $d$  est le diamètre des particules, et % est le pourcentage du volume occupé par les particules de diamètre inférieur à  $d$ . (b) Dans notre matériau granulaire modèle, la résistance aux contacts est contrôlée par deux paramètres : le coefficient de frottement de glissement  $\mu_s$  et le coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$ .

diamètre moyen est  $\langle d \rangle = 1$  m. Le diamètre  $d$  des particules varie entre 0.6 et 2.4 m, et la distribution est uniforme par fraction volumique (Figure 4.1(a)).

Il s'agit d'un matériau granulaire non cohésif avec la possibilité de résister au glissement et au roulement aux contacts. La résistance aux contacts est donc contrôlée par deux paramètres : le coefficient de frottement de glissement  $\mu_s$  et le coefficient de frottement de roulement  $\mu_r$  (Figure 4.1(b)).

Comme dans le chapitre précédent, les coefficients de restitution  $\rho_n$ ,  $\rho_t$ , et  $\rho_w$  sont égaux à zéro, et les essais sont faits en conditions de pesanteur nulle.

### 4.2.2 Construction des échantillons

L'échantillon granulaire est composé d'environ 7000 disques placés dans une boîte carrée d'environ  $100\langle d \rangle$  de côté, avec des conditions aux limites semi-périodiques. Cette condition permet d'enlever les limites latérales, de telle sorte que les grains de la frontière gauche soient en contact avec les grains de la frontière droite. L'avantage de cette condition est qu'elle rend possible l'application d'une déformation de cisaillement illimitée.

Les particules sont déposées dans la boîte à l'aide du critère géométrique présenté dans la section 3.2.2, et l'échantillon est relaxé en appliquant une



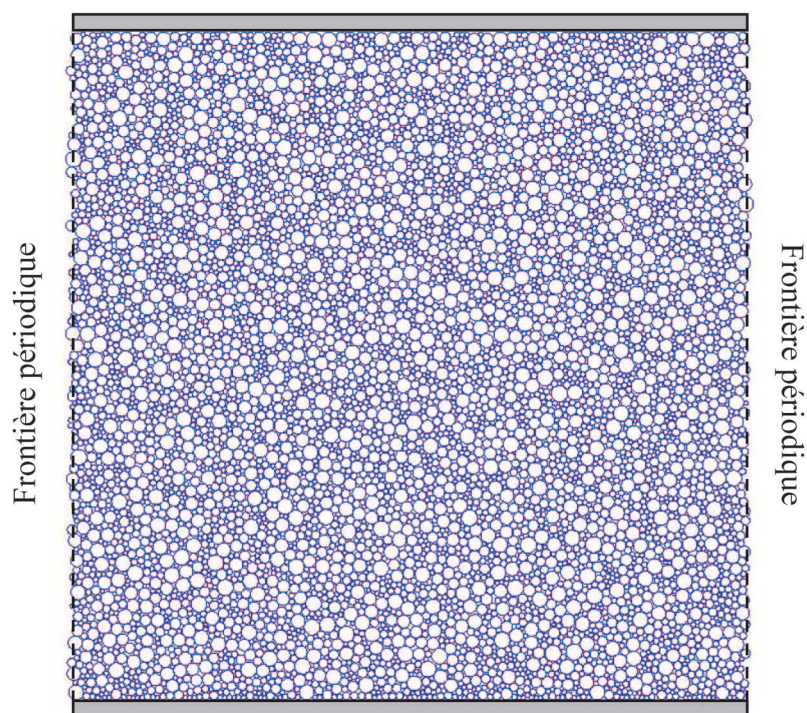


FIG. 4.2 – *État initial de l'échantillon granulaire.*

force verticale sur le mur supérieur en considérant des paramètres de frottement nuls entre les particules. La figure 4.2 montre l'état initial de l'échantillon.

### 4.2.3 L'essai de cisaillement simple

Pour cisailer l'échantillon une pression de confinement  $\sigma_{wall} = 1$  MN/m et une vitesse horizontale  $v_{wall} = 0.2$  m/s (i.e.,  $v_{wall} = 0.2\langle d \rangle/s$ ) sont imposées au mur supérieur (Figure 4.3). Pour éviter que le glissement ait lieu à l'interface entre les particules et les murs, un coefficient de frottement de glissement  $\mu_s = 1$  et un coefficient de frottement de roulement  $\mu_r = 1$  sont assignés à ces interfaces.

Notre but est de caractériser le comportement du matériau à l'état critique. Nous avons imposé une déformation de cisaillement cumulée  $\gamma = x_{wall}/h = 5$ , où  $x_{wall}$  est le déplacement horizontal du mur et  $h$  est la hauteur de l'échantillon, ce qui assure que l'échantillon se trouve dans cet état. La figure 4.4 montre le rapport des contraintes  $\tau_{wall}/\sigma_{wall}$  et le volume normalisé  $V/\langle d \rangle^2$  du milieu en fonction de la déformation cumulée  $\gamma$  pour trois différentes combinaisons de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . On remarque que ces échantillons se trouvent à l'état critique car  $\tau_{wall}/\sigma_{wall}$  et  $V/\langle d \rangle^2$  fluctuent autour d'une

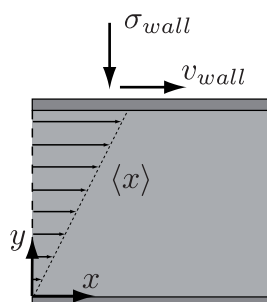


FIG. 4.3 – Représentation schématique de l’essai de cisaillement simple ; les lignes en pointillés représentent des frontières périodiques.  $v_{wall}$  est la vitesse horizontale du mur supérieur,  $\sigma_{wall}$  est la contrainte de confinement, et  $\langle x \rangle$  est le déplacement horizontale moyen des particules.

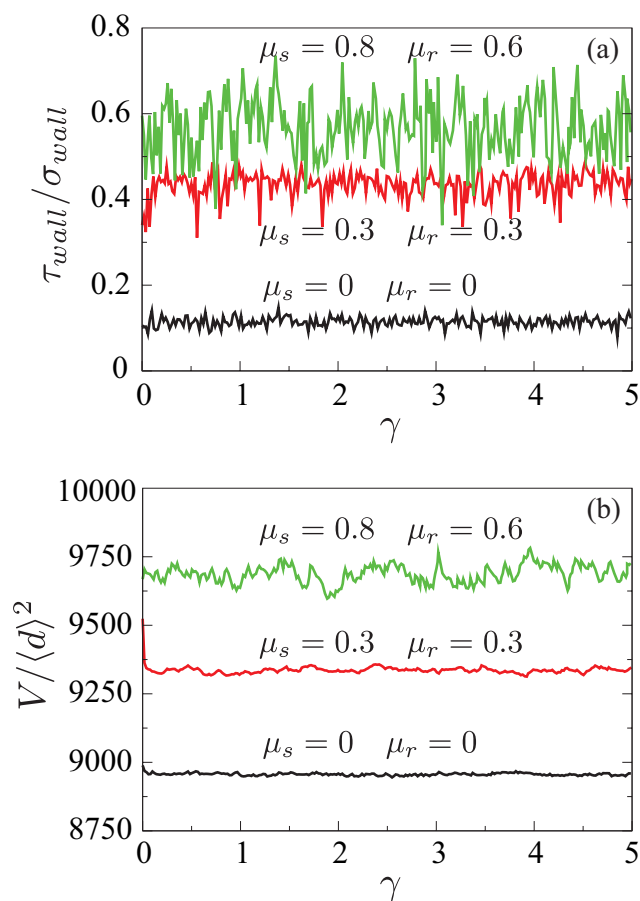


FIG. 4.4 – Rapport des contraintes  $\tau_{wall}/\sigma_{wall}$  et volume normalisé  $V/\langle d \rangle^2$  du milieu en fonction de la déformation cumulée  $\gamma$  pour trois différentes combinaisons de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ .

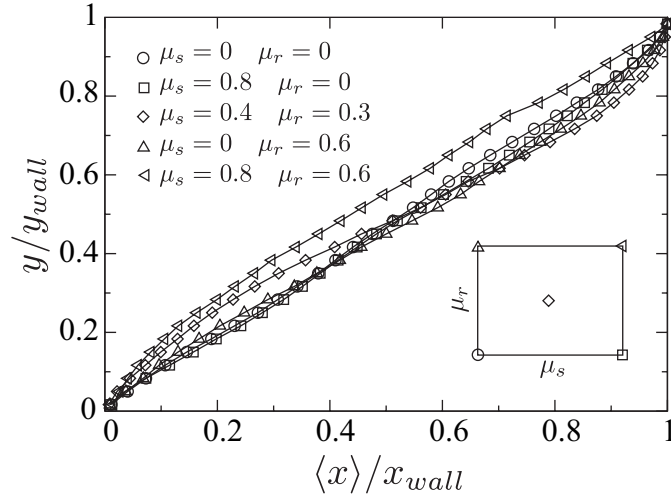


FIG. 4.5 – Profiles du déplacement horizontal moyen  $\langle x \rangle$  des particules en fonction de leur position verticale  $y$  dans l'échantillon, pour 5 combinaisons extrêmes de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ .

valeur moyenne. La figure 4.5 montre les profils de déplacement horizontal moyen  $\langle x \rangle$  des particules en fonction de leur position verticale  $y$  dans l'échantillon. Ces profils sont presque linéaires, ce qui montre que le cisaillement est distribué de manière uniforme dans l'échantillon (i.e., il n'y a pas localisation de la déformation dans une bande de cisaillement).

Pour caractériser le comportement du milieu à l'état critique, nous avons calculé la moyenne des certaines variables macroscopique (e.g., le coefficient de frottement interne, la compacité, etc.) sur le dernier 60% de déformation cumulée.

### Vérification de la quasi-staticité de l'essai

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent, le comportement d'un matériau granulaire dépend fortement de la vitesse à laquelle il est cisailé. La quasi-staticité de l'essai peut être quantifiée à l'aide du paramètre inertiel  $I$  défini par l'équation 3.8. Dans nos essais de cisaillement simple, la vitesse de cisaillement est  $v_{wall} = 0.2$  m/s, et la hauteur de l'échantillon est  $h \simeq 100$  m. On peut donc calculer un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  comme suit :

$$\dot{\gamma} = \frac{v_{wall}}{h} = 0.002/\text{s} \quad (4.1)$$

La pression de confinement est de 1 MN/m, et on peut utiliser comme diamètre typique des grains le diamètre moyen  $\langle d \rangle = 1$  m. A partir de cela,

on obtient un nombre inertiel de l'ordre de  $10^{-4}$ , ce qui veut dire que le milieu est cisailé en conditions quasi-statiques (voir section 3.2.3).

#### 4.2.4 Espace paramétrique étudié

Le but de ce chapitre est d'étudier le rôle des deux coefficients de frottement locaux (i.e.,  $\mu_s$  et  $\mu_r$ ) dans l'angle de frottement interne et la microstructure du milieu. Pour ce faire, nous avons fait varier  $\mu_s$  et  $\mu_r$ , et nous avons étudié la réponse macroscopique et la microstructure du milieu pour chaque combinaison de ces deux coefficients. Les plages de paramètres utilisées dans cette étude paramétrique sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\mu_s &\in [0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8] \\ \mu_r &\in [0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.5, 0.6].\end{aligned}$$

Nous avons donc effectué 168 essais au total.

#### 4.2.5 Paramètres d'exécution

Dans toutes les simulations présentées dans ce chapitre, le pas de temps est  $\Delta t = 0.0005$  s, et le critère de convergence est  $\epsilon = 0,005$  (pour une explication détaillée de ces deux paramètres, voir la section 2.4)

### 4.3 Résultats obtenus

#### 4.3.1 La résistance au cisaillement

Comme nous l'avons signalé dans la section , la résistance au cisaillement d'un matériau granulaire non cohésif peut être caractérisée avec un angle de frottement interne  $\phi^*$ , ou, ce qui est équivalent, avec un coefficient de frottement interne  $\mu^* = \tan \phi^*$ . Ce paramètre de résistance peut être calculé à partir du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  du milieu, qui, lui, peut être calculé à partir des orientations et des forces de contact entre les particules. Pour ce faire, nous calculons d'abord le tenseur de moments internes  $\mathbf{M}^p$  de chaque particule [52, 82], défini par :

$$M_{\alpha\beta}^p = \sum_{c \in p} f_{\alpha}^c r_{\beta}^c, \quad (4.2)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les composantes dans le système de référence,  $\mathbf{f}^c$  est la force exercée sur la particule  $p$  au contact  $c$ ,  $\mathbf{r}^c$  est le vecteur position du

même contact, et la somme porte sur tous les contacts  $c$  de la particule  $p$ . Ensuite, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  d'un ensemble de grains contenus dans un volume  $V$  peut être évalué à partir de la somme des moments internes des grains :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{p \in V} M_{\alpha\beta}^p. \quad (4.3)$$

A partir du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  nous pouvons calculer la contrainte normale moyenne  $\sigma = \sigma_{xx} \simeq \sigma_{yy}$ , la contrainte tangentielle maximale  $\tau = \sigma_{xy} \simeq \sigma_{yx}$ , et, finalement, le coefficient de frottement interne  $\mu_c^*$  à l'état critique défini par

$$\mu_c^* = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\sigma_{xy} + \sigma_{yx}}{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}} \quad (4.4)$$

La figure 4.6(a) montre  $\mu_c^*$  en fonction de  $\mu_s$  pour quatre différentes valeurs de  $\mu_r$ . Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent,  $\mu_c^*$  augmente avec  $\mu_s$  mais sature à une valeur qui augmente avec  $\mu_r$ . La figure 4.6(b) montre  $\mu_c^*$  en fonction de  $\mu_r$  pour quatre différentes valeurs de  $\mu_s$ . On observe que, symétriquement,  $\mu_c^*$  augmente avec  $\mu_r$  mais sature à une valeur qui augmente avec  $\mu_s$ . Ces figures montrent également que le coefficient de frottement interne ne peut pas dépasser 0.3 en absence de résistance au roulement (i.e., lorsque  $\mu_r = 0$ ), et qu'il est constant et égal à 0.15 en absence de frottement de glissement (i.e., lorsque  $\mu_s = 0$ ). La figure 4.7 montre les courbes d'isovaleurs de  $\mu_c^*$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . On observe à nouveau le même effet de saturation avec les deux coefficients de frottement locaux de telle sorte que deux phases peuvent être identifiées dans l'espace paramétrique formé par  $\mu_s$  et  $\mu_r$  :

1. une “*phase de glissement*”, dans laquelle  $\mu_c^*$  est uniquement contrôlé par  $\mu_s$  ; et
2. une “*phase de roulement*”, dans laquelle  $\mu_c^*$  est uniquement contrôlé par  $\mu_r$ .

La transition entre ces deux phases est indiquée par la région grise dans la figure 4.7.

La division de l'espace paramétrique en ces deux phases suggère que, pour une combinaison donnée de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ , le milieu s'organise pour privilégier l'un des deux modes de mouvement relatif à l'échelle des contacts (i.e., le glissement ou le roulement). Nous aborderons ce point dans la section suivante.

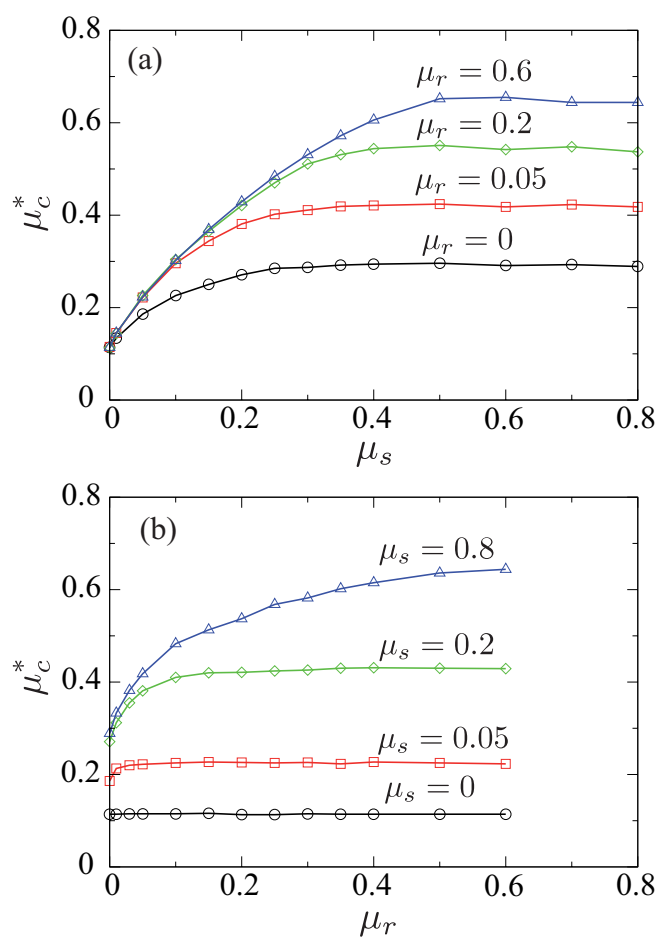


FIG. 4.6 – (a) Coefficient de frottement interne à l'état critique  $\mu_c^*$  en fonction de  $\mu_s$  pour quatre différentes valeurs de  $\mu_r$ . (b)  $\mu_c^*$  en fonction de  $\mu_r$  pour quatre différentes valeurs de  $\mu_s$ .

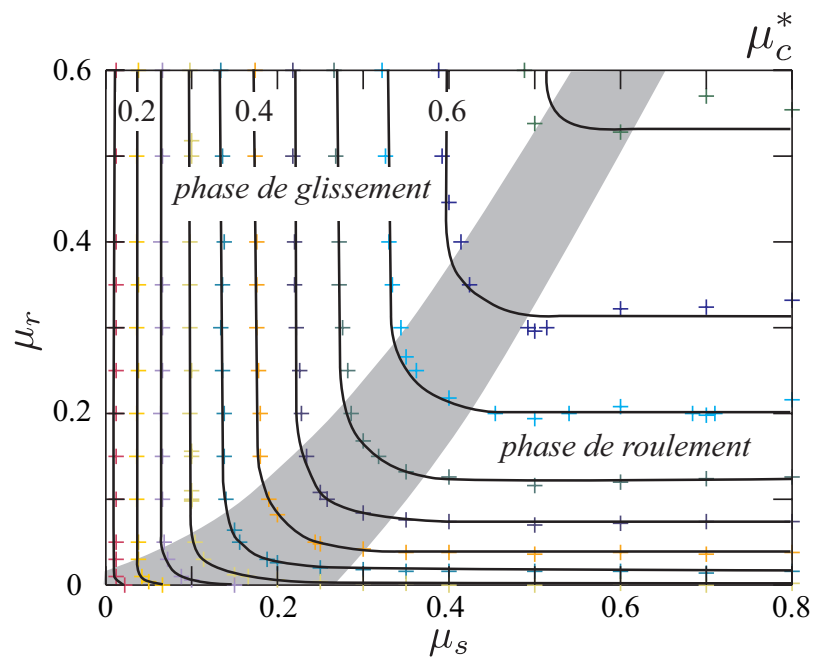


FIG. 4.7 – Courbes d'isovaleurs de  $\mu_c^*$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . On observe deux phases : une “phase de glissement”, dans laquelle  $\mu_c^*$  est uniquement contrôlé par  $\mu_s$ , et une “phase de roulement”, dans laquelle  $\mu_c^*$  est uniquement contrôlé par  $\mu_r$ .

### 4.3.2 Modes de mouvement relatif (glissement et roulement) au niveau des contacts

Pour analyser les modes de mouvement relatif dominants dans chacune des phases identifiées dans la section précédente, nous avons classifié les contacts en plusieurs populations :

1. contacts “glissants et non-roulants” ( $s-nr$ )
2. contacts “non-glissants et roulants” ( $ns-r$ )
3. contacts “glissants et roulants” ( $s-r$ )
4. contacts “non-glissants et non-roulants” ( $ns-nr$ )

Les lettres  $s$  et  $r$  correspondent aux termes en anglais “sliding” et “rolling”. Les trois premières populations correspondent aux contacts “mobilisés”, et la quatrième population correspond aux contacts “bloqués”. La contribution de chaque population à la résistance au cisaillement du milieu peut être calculée à partir de l’expression du tenseur des contraintes (i.e., à partir des équations 4.3 et 4.4) en considérant les contacts qui appartiennent à cette population. Pour illustrer la façon dont nous avons calculé ces contributions, considérons un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de contacts. La contribution  $\mu^*(\mathcal{A})$  du sous-ensemble  $\mathcal{A}$  au coefficient de frottement interne peut être calculée à partir de la définition du tenseur de moments internes des particules, en limitant la somme aux contacts qui appartiennent à  $\mathcal{A}$  :

$$M_{\alpha\beta}^{p,\mathcal{A}} = \sum_{c \in p \wedge c \in \mathcal{A}} f_{\alpha}^c r_{\beta}^c, \quad (4.5)$$

où la somme porte sur tous les contacts  $c$  de la particule  $p$  qui appartiennent au sous-ensemble  $\mathcal{A}$ . Ensuite, le tenseur des contraintes  $\sigma(\mathcal{A})$  est donné par

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathcal{A}) = \frac{1}{V} \sum_{p \in V} M_{\alpha\beta}^{p,\mathcal{A}}. \quad (4.6)$$

La contribution  $\mu^*(\mathcal{A})$  est définie par

$$\mu^*(\mathcal{A}) = \frac{\tau(\mathcal{A})}{\sigma}, \quad (4.7)$$

où  $\tau(\mathcal{A})$  est la contrainte tangentielle associée au sous-ensemble  $\mathcal{A}$  (i.e.,  $\tau(\mathcal{A}) = (\sigma_{xy}(\mathcal{A}) + \sigma_{yx}(\mathcal{A}))/2$ ) et  $\sigma$  est la contrainte normale en considérant tous les contacts (i.e.,  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$ ). De la même façon, quatre coefficients de frottement partiels  $\mu_{s-nr}^*$ ,  $\mu_{ns-r}^*$ ,  $\mu_{s-r}^*$ , et  $\mu_{ns-nr}^*$  peuvent être définis de telle sorte que

$$\mu_c^* = \mu_{s-nr}^* + \mu_{ns-r}^* + \mu_{s-r}^* + \mu_{ns-nr}^* \quad (4.8)$$



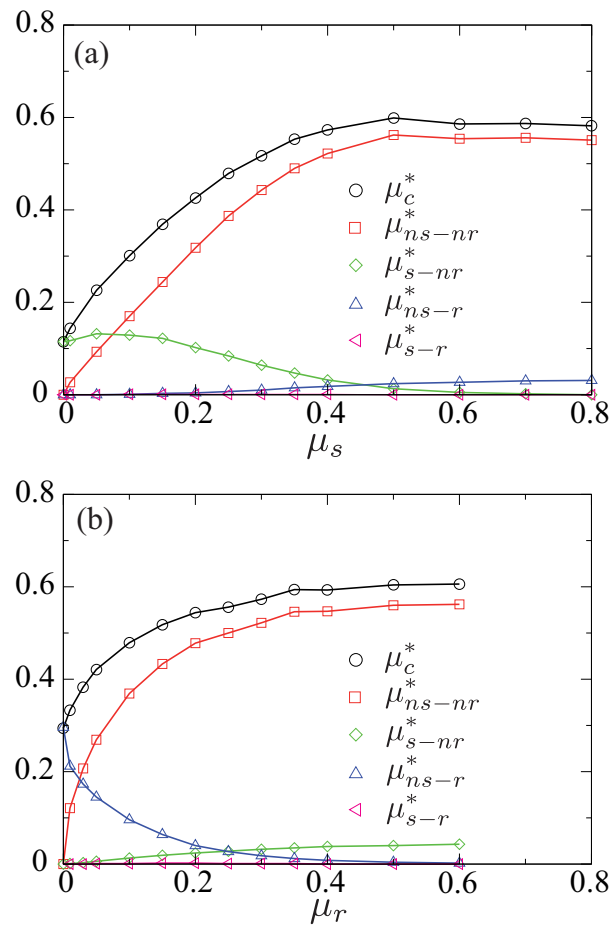


FIG. 4.8 – Coefficients de frottement partiels (a) en fonction de  $\mu_s$  pour  $\mu_r = 0.3$  et (b) en fonction de  $\mu_r$  pour  $\mu_s = 0.4$ .

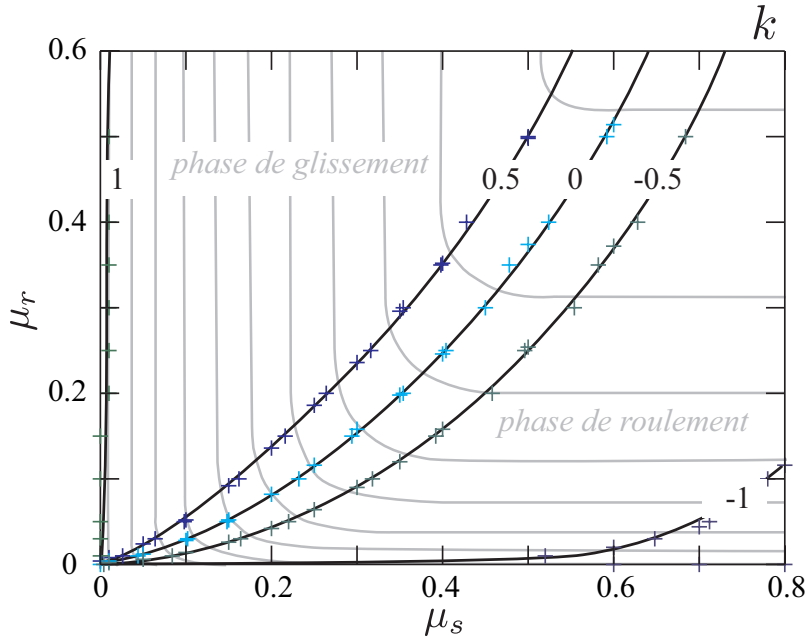


FIG. 4.9 – Courbes d’isovaleurs de  $k$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  ; en gris clair, courbes d’isovaleurs pour  $\mu_c^*$ .

La figure 4.8 montre l’évolution de  $\mu_c^*$  ainsi que des quatre coefficients de frottement partiels en fonction de  $\mu_s$  pour  $\mu_r = 0.3$  et en fonction de  $\mu_r$  pour  $\mu_s = 0.4$ . On observe que la contribution  $\mu_{s-r}^*$  des contacts glissants et roulants est négligeable. Au contraire, la contribution  $\mu_{ns-nr}^*$  des contacts bloqués est dominante, sauf pour des valeurs très faibles de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  (i.e., pour  $\mu_s < 0.1$  et  $\mu_r < 0.05$ ) où la contribution dominante est celle des contacts glissants ou roulants, respectivement. On observe aussi que, lorsque  $\mu_s$  augmente, la contribution  $\mu_{s-nr}^*$  décline en faveur de  $\mu_{ns-r}^*$  qui augmente au même temps. Symétriquement, lorsque  $\mu_r$  augmente, la contribution  $\mu_{ns-r}^*$  décline en faveur de  $\mu_{s-nr}^*$  qui augmente au même temps.

Pour caractériser le mode dominant, nous considérons ces deux dernières populations, et nous définissons le paramètre  $k$  par

$$k = \frac{\mu_{s-nr}^* - \mu_{ns-r}^*}{\mu_{s-nr}^* + \mu_{ns-r}^*}. \quad (4.9)$$

Ce paramètre varie dans l’intervalle  $[-1, 1]$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . Le mode dominant est le glissement si  $k > 0$  et le roulement si  $k < 0$ . La figure 4.9 montre les courbes d’isovaleurs de  $k$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  au même temps que les courbes d’isovaleurs pour  $\mu_c^*$ . On remarque que la courbe de niveau pour  $k = 0$  coïncide assez bien avec la zone de transition entre la “phase de

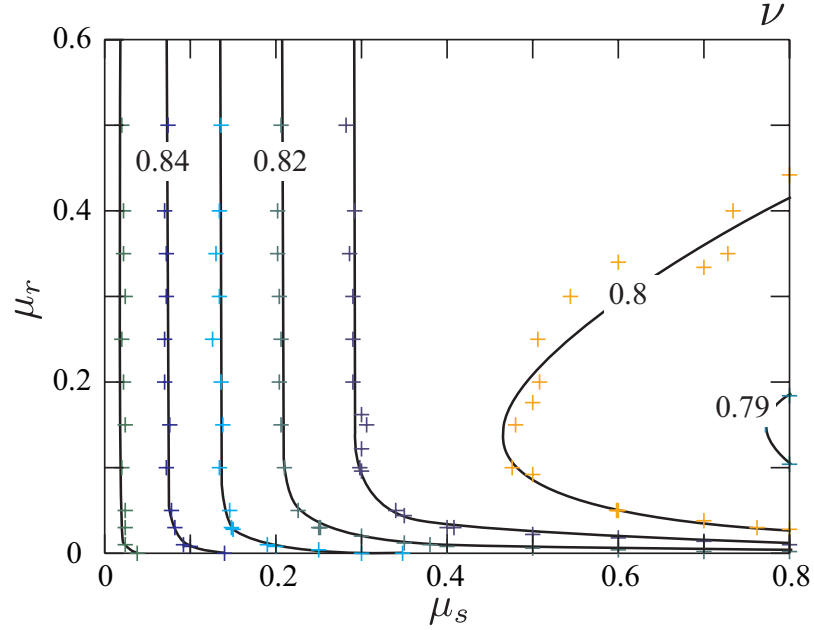


FIG. 4.10 – courbes d'isovaleurs de la compacité  $\nu$  en fonction  $\mu_s$  et  $\mu_r$ .

glissement” et la “phase de roulement”. En d’autres termes, les deux phases identifiées dans la section précédente coïncident avec les deux régions dans lesquelles *le glissement* ou *le roulement* sont le mode dominant de mouvement relatif au niveau des contacts.

### 4.3.3 La compacité et les colonnes de particules

Dans cette section, nous étudions la structure du milieu en fonction des paramètres de frottement  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . La densité volumique du milieu peut être représentée à l’aide de la compacité  $\nu$  définie par

$$\nu = \frac{V_p}{V}, \quad (4.10)$$

où  $V_p$  est le volume occupé par les particules et  $V$  est le volume total de l’arrangement (i.e., particules et vides). La figure 4.10 montre les courbes d’isovaleurs de  $\nu$  en fonction  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . On observe que, pour des valeurs faibles de  $\mu_s$ , la compacité du milieu sature avec  $\mu_r$ . Cependant, l’allure de cette carte est différente pour des valeurs élevées de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ , ce qui n’est pas cohérent avec la symétrie observée dans la carte de courbes d’isovaleurs de  $\mu_c^*$  (Figure 4.7).

En fait, contrairement à  $\mu_c^*$ , la compacité définie par l’équation 4.10 tient compte de toutes les particules, celles qui portent des forces et celles qui

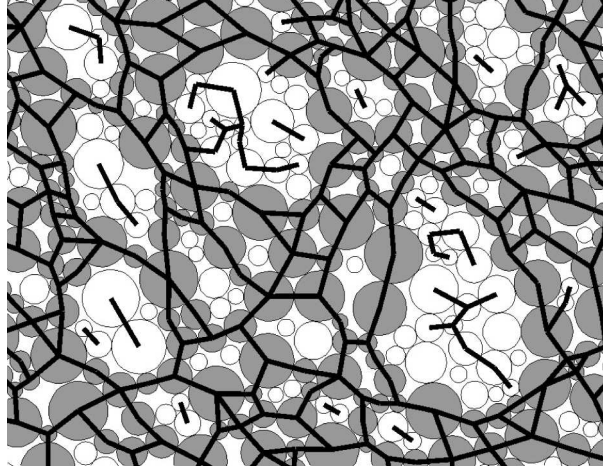


FIG. 4.11 – Les particules peuvent être classifiées en : (1) particules portant des forces (*squelette portant*) en gris et (2) particules “flottantes” en blanc. Le réseau de contacts est indiqué par les traits noirs.

“flottent”. Les particules flottantes sont celles qui ont zéro ou un contacts ainsi que celles qui appartiennent à des branches “mortes” (i.e., qui ne percolent pas) du réseau de contacts (Figure 4.11). La proportion de particules flottantes est faible pour des valeurs faibles de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ , mais elle augmente lorsque la valeur de ces deux coefficients est élevée. Nous calculons donc la compacité  $\nu'$  de l'ensemble des particules qui portent des forces non nulles ; nous appellerons cet ensemble de particules le *squelette portant*. La compacité  $\nu'$  du squelette portant est définie par

$$\nu' = \frac{V'_p}{V}, \quad (4.11)$$

où  $V'_p$  est le volume occupé par les particules portant des forces. La figure 4.12 montre les courbes d'isovaleurs de  $\nu'$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . On constate que, globalement, cette carte est maintenant symétrique par rapport aux deux coefficients de frottement locaux. Par comparaison avec la figure 4.7, nous observons aussi que les valeurs les plus élevées de résistance au cisaillement correspondent aux structures le moins compactes.

Curieusement, la compacité du squelette portant peut être très faible (e.g., 30%). Ceci coïncide avec la formation de structures en forme de colonne (i.e., des longues chaînes de particules avec uniquement deux contacts). Pour analyser cet effet, comparons deux milieux que nous appellerons  $S1$  et  $S2$ . Dans le milieu  $S1$ , les coefficients de frottement aux contacts sont  $\mu_s = 0.4$  et  $\mu_r = 0$  ; donc, les contacts dans ce milieu ne peuvent pas résister au

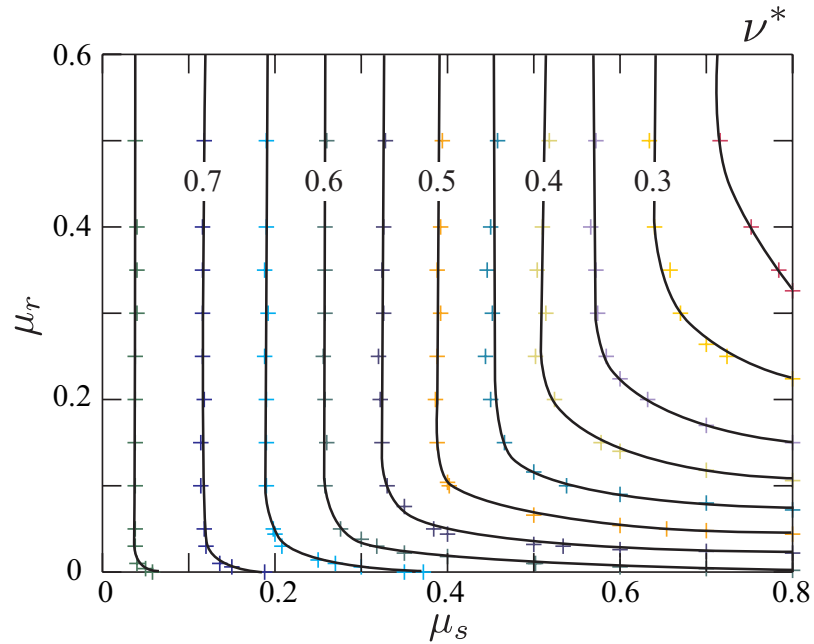


FIG. 4.12 – Courbes d'isovaleurs de  $\nu'$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ .

roulement. Dans le milieu  $S2$ , les coefficients de frottement sont  $\mu_s = 0.7$  et  $\mu_r = 0.5$ ; donc, les contacts dans ce milieu peuvent résister au glissement et au roulement. La figure 4.13 montre une image instantanée du réseau de contacts dans les milieux  $S1$  et  $S2$ , et la figure 4.14 montre une image instantanée du réseau de forces normales dans le mêmes deux milieux. On observe deux différences majeurs entre ces deux milieux :

1. Dans le milieu  $S1$ , presque toutes les particules appartiennent au squelette portant. En revanche, dans le milieu  $S2$ , la plupart des particules sont des particules flottantes, et celles qui portent des forces forment des colonnes.
2. Dans le milieu  $S1$ , les contacts qui portent les forces normales au dessus de la moyenne (i.e., les contacts forts) forment des structures en forme de chaînes, et les contacts qui portent les forces en dessous de la moyenne (i.e., les contacts faibles) supportent latéralement ces chaînes de force. En revanche, dans le milieu  $S2$ , les chaînes de forces ne sont pas supportées latéralement. Cet effet sera analysé de façon plus détaillée dans la section suivante.

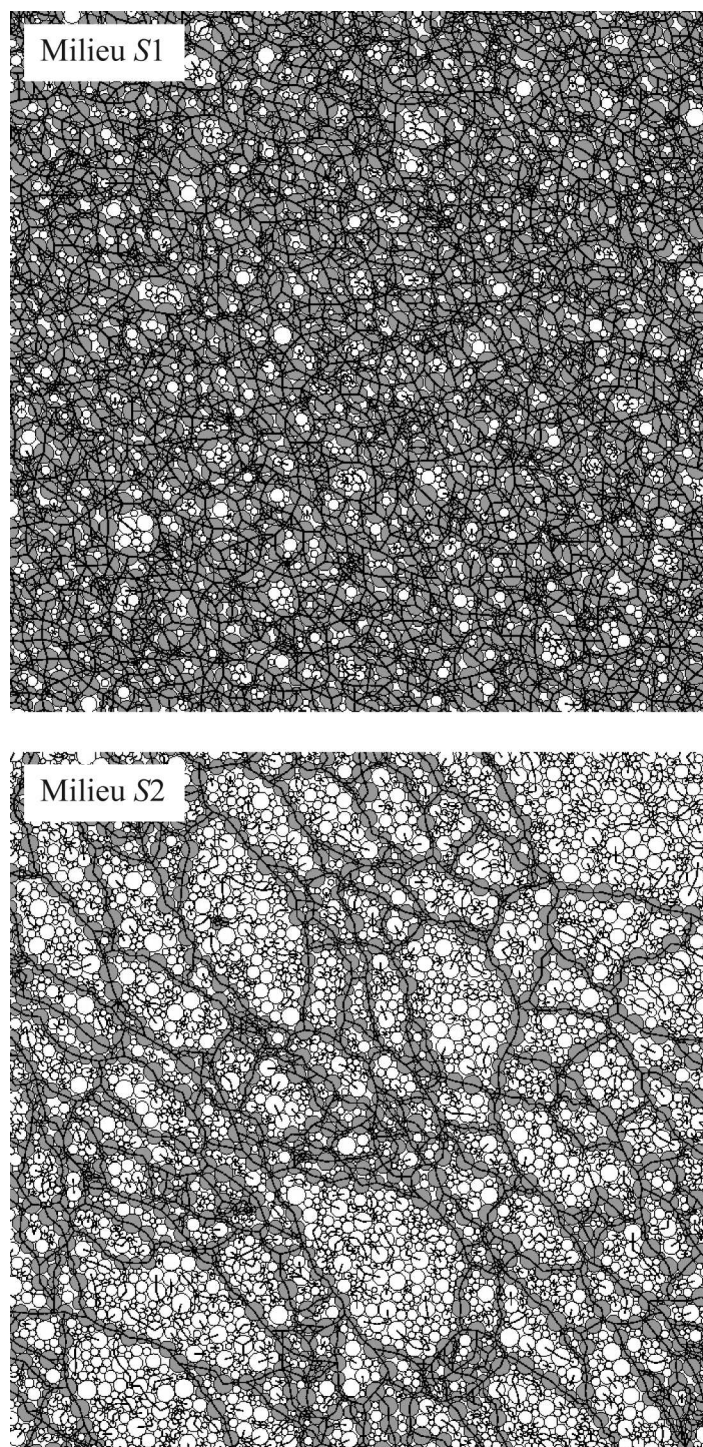


FIG. 4.13 – Image instantanée du réseau de contacts (traits noirs) dans les milieux  $S1$  et  $S2$ . Les coefficients de frottement aux contacts sont  $\mu_s = 0.4$  et  $\mu_r = 0$  en  $S1$ , et  $\mu_s = 0.7$  et  $\mu_r = 0.5$  en  $S2$ .



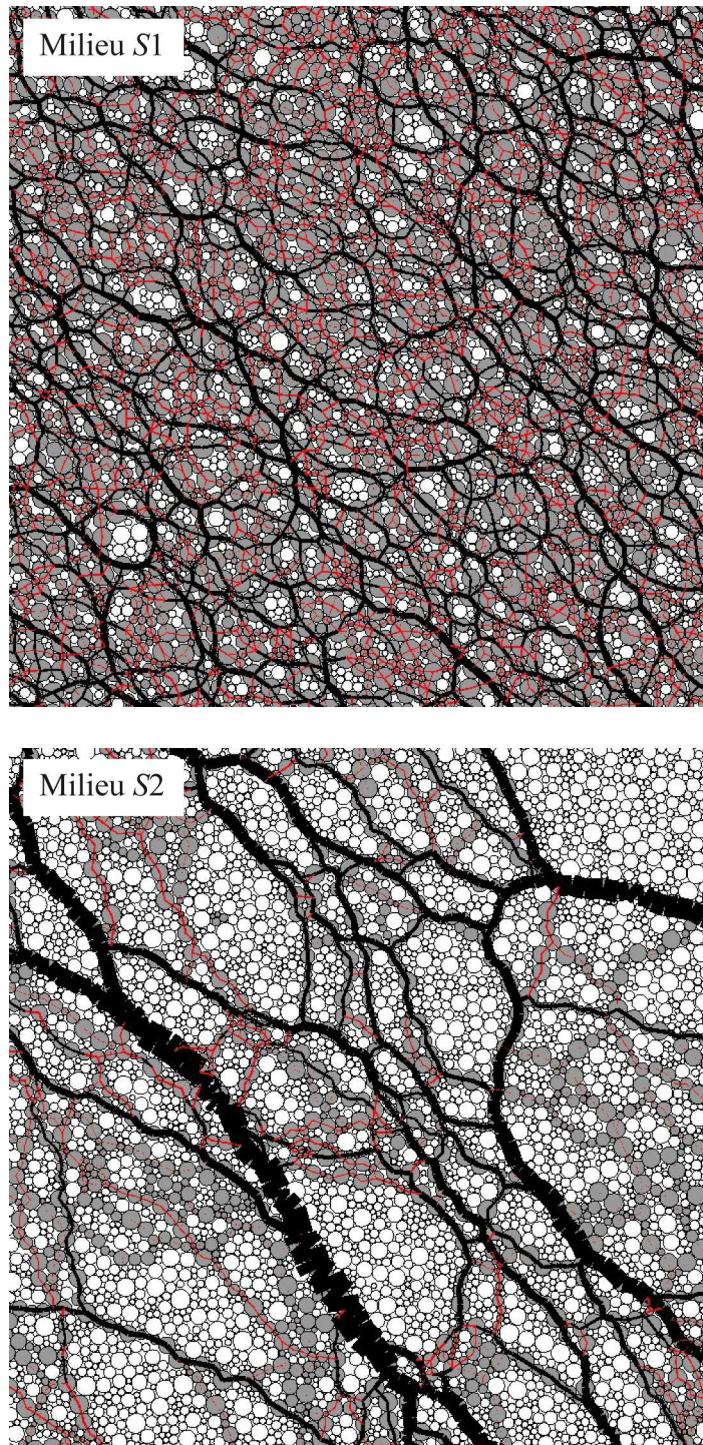


FIG. 4.14 – Image instantanée du réseau de forces normales dans les milieux  $S1$  et  $S2$ . Les forces au dessus de la moyenne sont représentées par des traits noirs, et les forces en dessous de la moyenne sont représentées par des traits rouges.

### 4.3.4 Transmission des forces

#### Fonctions de densité de probabilité

En corrélation avec la résistance au cisaillement et la compacité, la transmission des forces est aussi fortement influencée par les coefficients de frottement de glissement et de roulement. La figure 4.15 montre les fonctions de densité de probabilité  $P_n$  des forces normales  $f_n$  dans les milieux  $S1$  et  $S2$ . Les données représentent plusieurs instants le long de l'essai, tous à l'état stationnaire, cumulant un total de  $1.3 \times 10^6$  forces de contact pour le milieu  $S1$  et de  $0.4 \times 10^6$  forces de contact pour le milieu  $S2$ . Comme il est habituel dans les milieux granulaires [67, 55], on observe que la fonction  $P_n$  est caractérisée par une décroissance exponentielle pour les forces au dessus de la force normale moyenne  $\langle f_n \rangle$  et par une loi de puissance pour les forces au dessous de  $\langle f_n \rangle$  :

$$P_n(f_n) \propto \begin{cases} \left(\frac{f_n}{\langle f_n \rangle}\right)^{-\alpha_n} & f_n < \langle f_n \rangle, \\ e^{\beta_n(1-\frac{f_n}{\langle f_n \rangle})} & f_n > \langle f_n \rangle, \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $\alpha_n \simeq -0.17$  et  $\beta_n \simeq 1.64$  dans le milieu  $S1$ , et  $\alpha_n \simeq 0.36$  et  $\beta_n \simeq 0.78$  dans le milieu  $S2$ . Donc, la distribution des forces normales  $P_n$  dans le milieu  $S2$  (avec  $\mu_r = 0.5$ ) est considérablement plus large dans le domaine des forces fortes, et la densité de probabilité des contacts faibles diverge lorsque  $f_n$  tend vers 0.

La figure 4.16 montre la fonction de densité de probabilité  $P_t$  des forces tangentielles  $f_t$ , laquelle est aussi caractérisée par une décroissance exponentielle pour les forces au dessus de la force tangentielle moyenne  $\langle |f_t| \rangle$  et par une loi de puissance pour les forces au dessous de  $\langle |f_t| \rangle$  :

$$P_t(f_t) \propto \begin{cases} \left(\frac{|f_t|}{\langle |f_t| \rangle}\right)^{-\alpha_t} & |f_t| < \langle |f_t| \rangle, \\ e^{\beta_t(1-\frac{|f_t|}{\langle |f_t| \rangle})} & |f_t| > \langle |f_t| \rangle, \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $\alpha_t \simeq 0.16$  et  $\beta_t \simeq 1.04$  dans le milieu  $S1$ , et  $\alpha_t \simeq 0.52$  et  $\beta_t \simeq 0.62$  dans le milieu  $S2$ .

La fonction de densité de probabilité  $P_M$  des moments de contact est uniquement définie dans le milieu  $S2$  avec un coefficient de frottement de roulement non nul. Comme le montre la figure 4.17, cette fonction peut aussi être décrite par

$$P_M(M) \propto \begin{cases} \left(\frac{|M|}{\langle |M| \rangle}\right)^{-\alpha_M} & |M| < \langle |M| \rangle, \\ e^{\beta_M(1-\frac{|M|}{\langle |M| \rangle})} & |M| > \langle |M| \rangle, \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $\alpha_M \simeq 0.58$  et  $\beta_M \simeq 0.65$ .



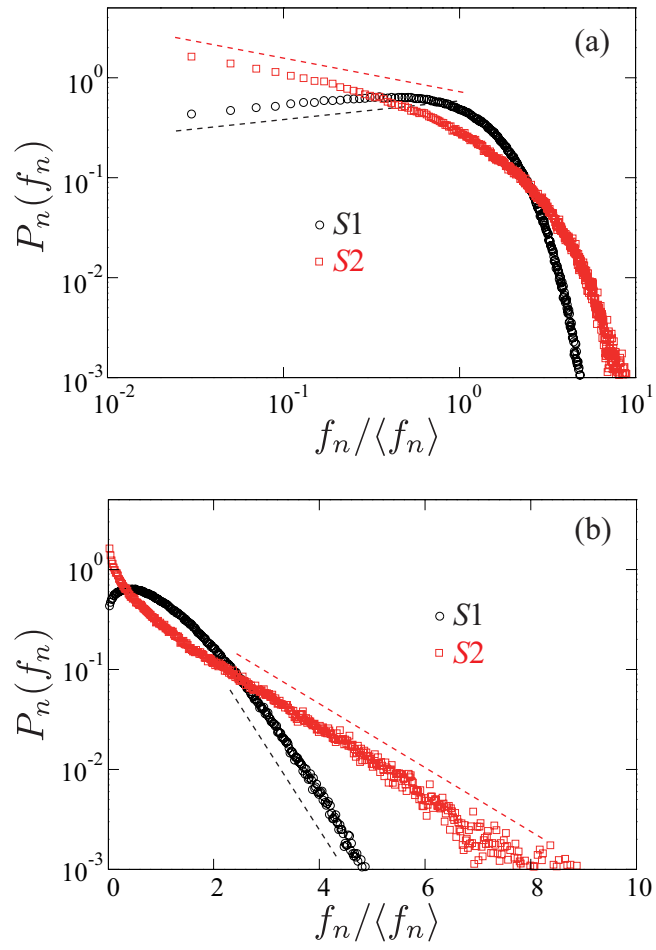


FIG. 4.15 – Fonctions de densité de probabilité  $P_n$  des forces normales  $f_n$  dans les milieux S1 et S2. Les lignes en pointillés sont des guides pour les yeux.

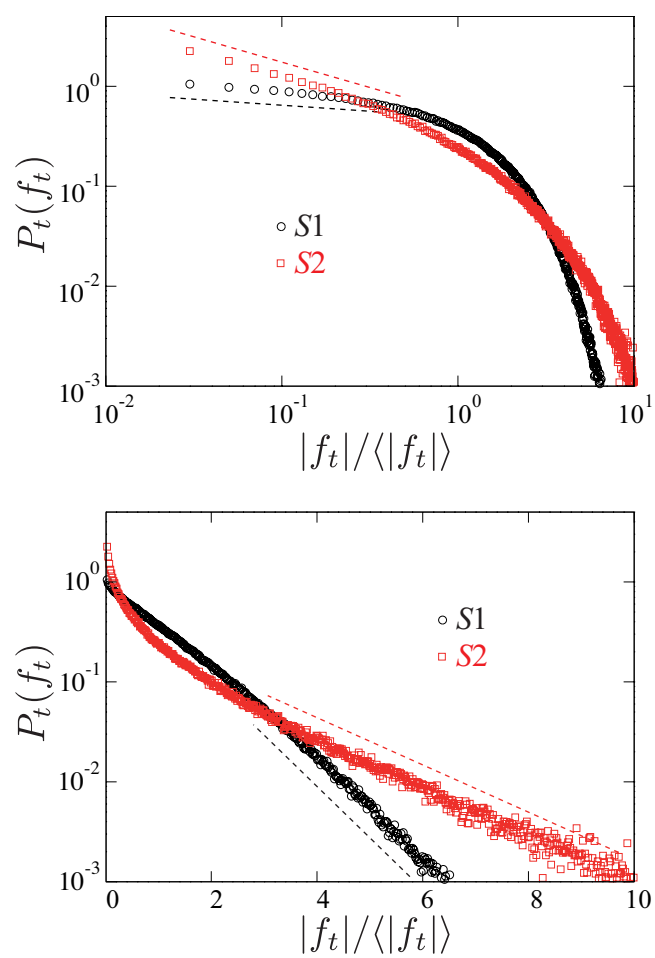


FIG. 4.16 – Fonctions de densité de probabilité  $P_t$  des forces tangentielles  $f_t$  dans les milieux S1 et S2. Les lignes en pointillés sont des guides pour les yeux.

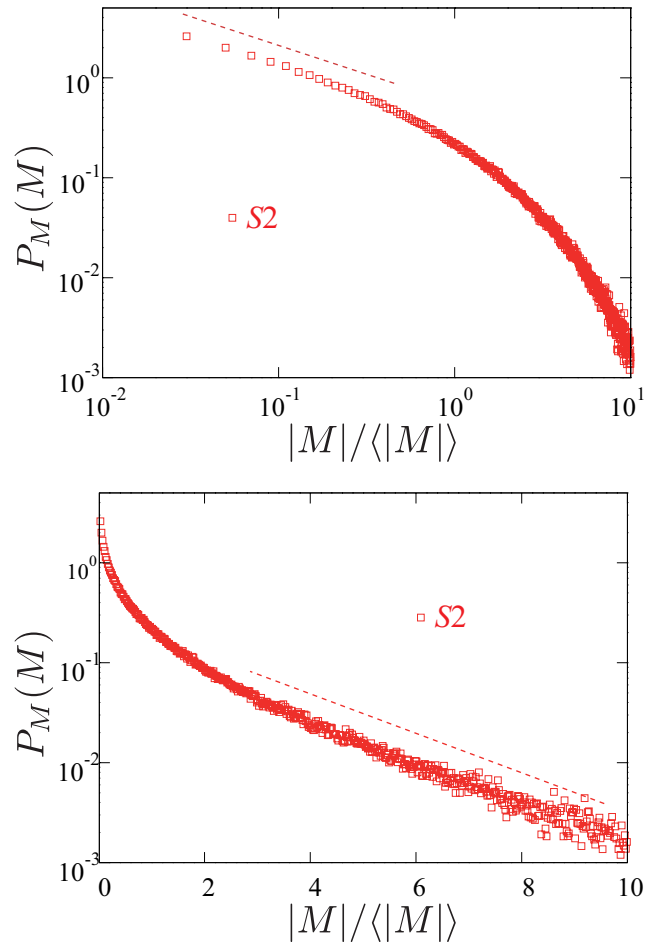


FIG. 4.17 – Fonctions de densité de probabilité  $P_M$  des moments de contact. Cette fonction est uniquement définie dans le milieu S2 avec un coefficient de frottement de roulement non nul. Les lignes en pointillés sont des guides pour les yeux.

---

La figure 4.18 montre les cartes de courbes d'isovaleurs des coefficients  $\alpha_n$ ,  $\alpha_t$ , et  $\alpha_M$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . Dans les trois cartes, on observe que la valeur de ces trois coefficients augmente avec  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . Ces cartes généralisent donc le comportement observé pour les milieux  $S1$  et  $S2$  dans les figures 4.15, 4.16, et 4.17, montrant que le fait de contraindre le glissement et le roulement au niveau des contacts a pour effet d'augmenter l'importance relative des contacts portant les forces et les moments les plus faibles.

La figure 4.19 montre les cartes de courbes d'isovaleurs des coefficients  $\beta_n$ ,  $\beta_t$ , et  $\beta_M$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . Dans les trois cartes, on observe que les valeurs de ces trois coefficients sont des fonctions décroissantes de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . Ceci montre que, comme nous l'avions vu pour les milieux  $S1$  et  $S2$ , la distribution des forces et des moments de contact devient de plus en plus large (i.e., de plus en plus hétérogène) lorsque le glissement et le roulement se voient bloqués.

Les fonctions de densité de probabilité présentées dans cette section montrent que, indépendamment des coefficients de frottement microscopiques, les contacts du milieu peuvent être classifiés en deux sous-ensembles suivant que la force (ou le moment) qu'ils portent est supérieure ou inférieure à la moyenne. Ces deux sous-ensembles sont caractérisés par des distributions de forces de forme différente (i.e., exponentielle ou en loi de puissance, respectivement), et ils permettent de définir deux réseaux des contacts appelés “*le réseau fort*” et “*le réseau faible*”. Nous analyserons l'effet de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  sur la nature de ces deux réseaux dans la section suivante.

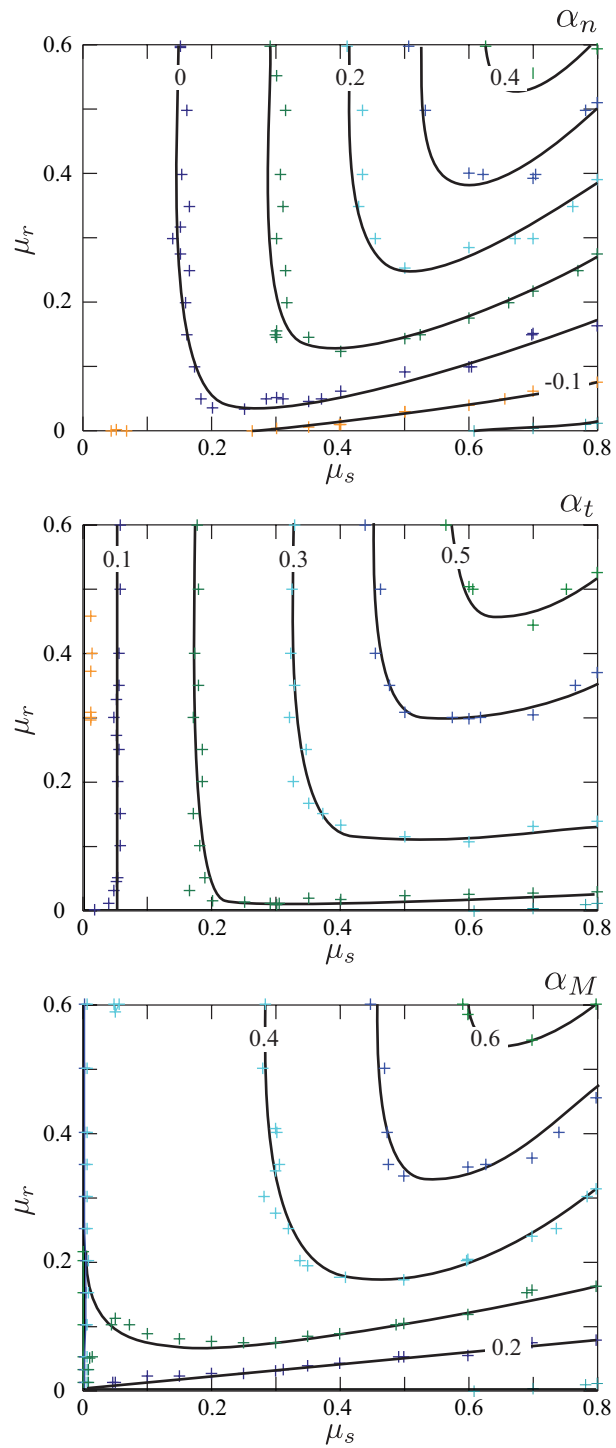


FIG. 4.18 – Courbes d'isovaleurs des coefficients  $\alpha_n$ ,  $\alpha_t$ , et  $\alpha_M$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ .

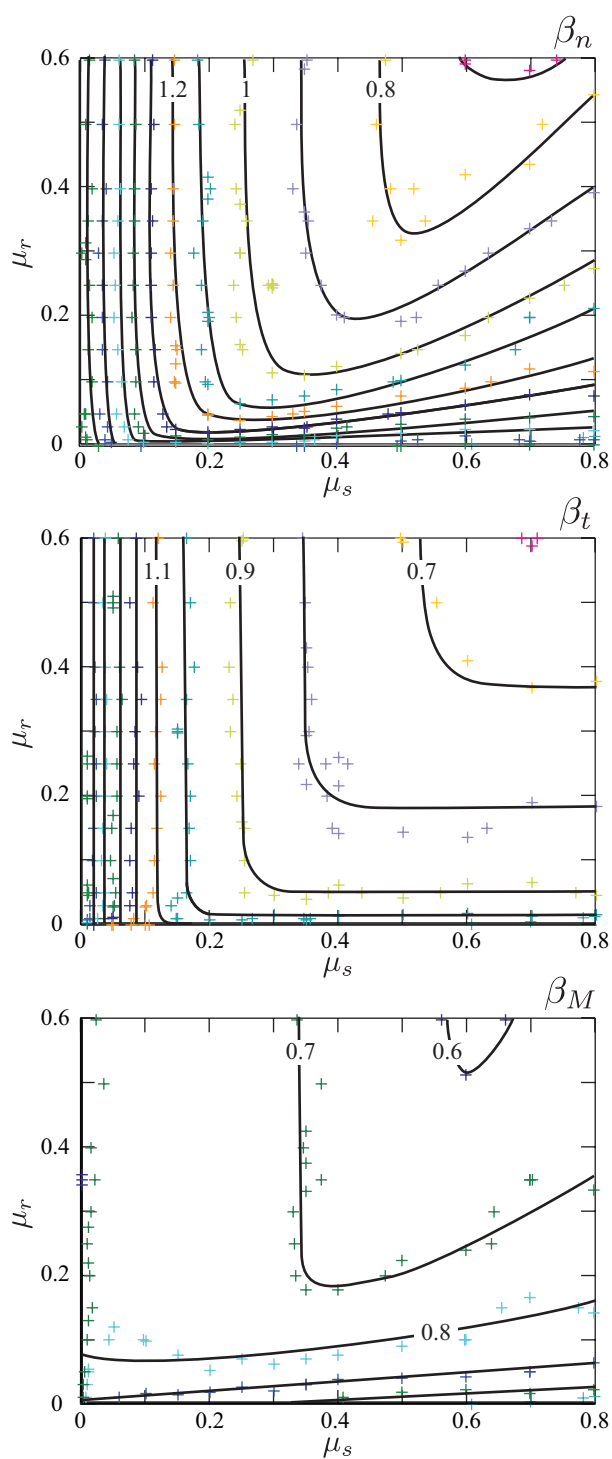


FIG. 4.19 – Courbes d'isovaleurs des coefficients  $\beta_n$ ,  $\beta_t$ , et  $\beta_M$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ .

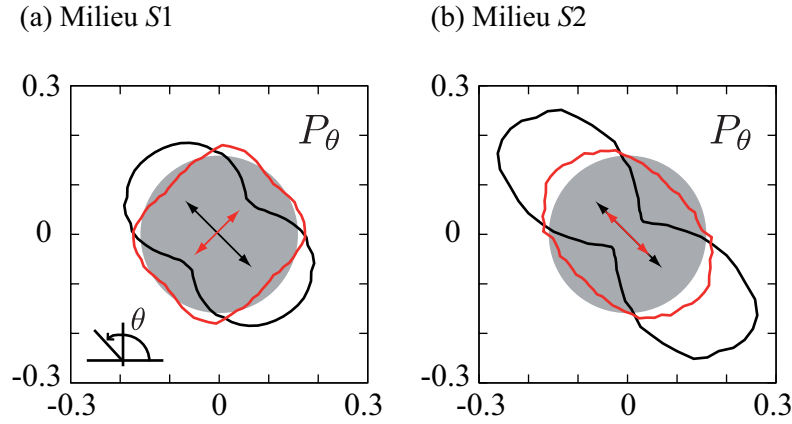


FIG. 4.20 – Distribution  $P_\theta(\theta)$  des orientations des contacts pour les réseaux fort (en noir) et faible (en rouge) dans les milieux  $S1$  et  $S2$ . Le cercle gris représente une distribution isotropique de référence.

### le réseau “fort” et le réseau “faible”

Comme nous l’avons mentionné dans la section précédente, les contacts dans un milieu granulaire appartiennent à deux réseaux coexistants appelés les réseaux fort et faible suivant les travaux de Radjaï et al. en 1998 [66]. En plus d’une distribution de forces de forme différente, ces deux réseaux présentent différentes morphologies et jouent des rôles mécaniques différents dans le milieu. Les contacts dans le réseau fort forment des structures en forme de chaîne, observées clairement dans des images photoélastiques et appelées “chaînes de force”. La fonction des chaînes de force est de supporter la charge déviatorique appliquée au système granulaire. Le réseau faible est moins visible, mais ses contacts sont plus importants en nombre, et ils ont la fonction essentielle de supporter latéralement les chaînes de force. Cette propriété peut être mise en évidence en considérant l’anisotropie des orientations des contacts. Les contacts du réseau fort sont principalement orientés dans la direction de la contrainte principale majeure, alors que les contacts du réseau faible sont, en moyenne, perpendiculaires.

Considérons la distribution  $P_\theta(\theta)$  des orientations des contacts, où  $\theta \in [0, \pi[$ . La figure 4.20 montre la distribution  $P_\theta$  des réseaux fort et faible dans les milieux  $S1$ , avec  $\mu_s = 0.4$  et  $\mu_r = 0$ , et  $S2$ , avec  $\mu_s = 0.7$  et  $\mu_r = 0.5$ . On observe que, dans le milieu  $S1$ , dans lequel les contacts ne peuvent pas résister au roulement, le réseau fort est effectivement plus anisotrope que le réseau faible, et les directions privilégiées de ces deux réseaux (i.e., l’axe le plus long de la distribution) sont orthogonales. En revanche, dans le milieu  $S2$ , dans lequel  $\mu_s$  et  $\mu_r$  sont élevés, la direction privilégiée des deux réseaux est la

même, et elle coïncide avec la direction de la contrainte principale majeur  $\theta_\sigma = 3\pi/4$ . Cette observation suggère que la fonction du réseau faible dans le milieu  $S2$  n'est plus celle de supporter latéralement les chaînes de forces, ce qui voudrait dire que la nature du réseau faible est fondamentalement différente dans les deux milieux. Dans ce qui suit, nous analysons ce point en termes des anisotropies des distributions des orientations des contacts.

L'anisotropie des distributions  $P_\theta$  peut être calculée à l'aide de leur développement de Fourier. Etant donné que  $P_\theta$  est  $\pi$ -périodique, on a

$$P(\theta) = \frac{1}{\pi} \{1 + a \cos 2(\theta - \theta_a) + b \cos 4(\theta - \theta_b) + \dots\}, \quad (4.15)$$

où les coefficients  $a, b, \dots$  sont les paramètres d'anisotropie d'ordre croissant et  $\theta_a, \theta_b, \dots$  sont les phases.

En général, l'anisotropie de premier ordre  $a$  capture la tendance dominante. Cette anisotropie peut être calculée à partir du tenseur de texture  $\mathbf{F}$  d'ordre le plus bas défini par

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{N_c} \sum_{c \in V} n_\alpha^c n_\beta^c, \quad (4.16)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les composantes dans le système de référence,  $\mathbf{n}^c$  est le vecteur unitaire normal au contact  $c$ , et la somme porte sur tous les contacts  $c$  dans un volume de référence  $V$ . L'anisotropie  $a$  du milieu est donnée par

$$a = 2(F_1 - F_2), \quad (4.17)$$

où  $F_1$  et  $F_2$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{F}$ . Par définition, l'anisotropie  $a$  est nulle ou positive.

Pour faciliter l'analyse de l'anisotropie dans les réseaux de contacts fort et faible, ou dans d'autres sous-ensembles de contacts dans lesquels la direction  $\theta_a$  peut varier, il convient d'introduire le facteur de phase en multipliant  $a$  par  $\cos 2(\theta_a - \theta_\sigma)$ , où  $\theta_\sigma$  est la direction de la contrainte principale majeure. On peut donc définir une anisotropie signée  $a'$  donnée par

$$a' = 2(F_1 - F_2) \cos 2(\theta_a - \theta_\sigma). \quad (4.18)$$

Cette anisotropie est positive lorsque les deux directions principales majeures, celle des contraintes et celle des orientations des contacts, sont en phase (i.e., lorsque  $|\theta_a - \theta_\sigma| < \pi/4$ ), et elle est négative si ce n'est pas le cas. Dans notre essai de cisaillement simple, nous avons  $\theta_\sigma = 3\pi/4$ .

Pour analyser l'anisotropie des réseaux de forces, considérons les sous-ensembles des contacts  $\mathcal{S}(\xi)$  portant un niveau de force normale  $\xi = f_n / \langle f_n \rangle$  tel que

$$\xi \in [\xi - \Delta\xi, \xi + \Delta\xi], \quad (4.19)$$



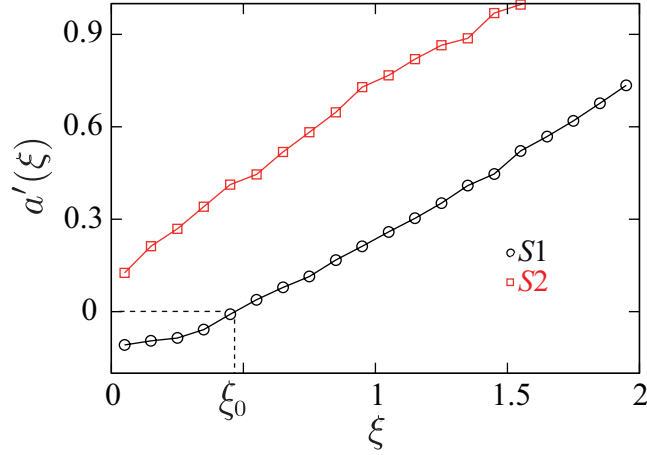


FIG. 4.21 – Anisotropie signée  $a'(\xi)$  en fonction du sous-ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$  considéré, dans les milieux  $S1$  et  $S2$ .

et chaque contact appartient à un seul sous-ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$ . Les réseaux fort et faible correspondent à

$$\bigcup_{\xi > 1} \mathcal{S}(\xi) \quad \text{et} \quad \bigcup_{\xi < 1} \mathcal{S}(\xi), \quad (4.20)$$

respectivement. L'anisotropie  $a'(\xi)$  de chaque sous-ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$  peut être calculée à partir de la définition du tenseur de texture en limitant la somme aux contacts qui appartiennent à ce sous-ensemble :

$$F_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{N_c(\xi)} \sum_{c \in \mathcal{S}(\xi)} n_\alpha^c n_\beta^c, \quad (4.21)$$

où  $N_c^\xi$  est le nombre de contacts dans le sous-ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$ .

La figure 4.21 montre  $a'(\xi)$  dans les milieux  $S1$  et  $S2$ . On remarque que, dans le milieu  $S1$ , dans lequel les contacts ne peuvent pas résister au roulement, les anisotropies des sous-ensembles de contacts portant des très faibles forces sont négatives (i.e., ces sous-ensembles sont orientés dans la même direction que la contrainte principale mineure) jusqu'à un certain niveau de force  $\xi_0$  ou  $a'(\xi)$  change de signe et devient positive. Ceci montre que tous les contacts du réseau faible ne jouent pas le même rôle dans le milieu. Au contraire, le support latéral des chaînes de force semble être le rôle uniquement d'un sous-réseau de contacts à l'intérieur du réseau faible, portant des forces normales en dessous d'une valeur caractéristique  $\xi_0 \langle f_n \rangle$ . Nous appellerons ce sous-réseau le “réseau de support”. De l'autre côté, on remarque que, dans le milieu  $S2$ , dans lequel  $\mu_s$  et  $\mu_r$  sont élevés, les anisotropies de tous les

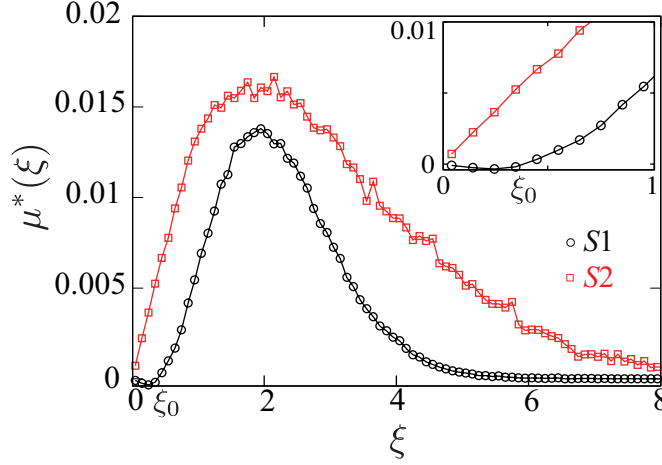


FIG. 4.22 – Contribution  $\mu_c^*(\xi)$  au coefficient de frottement interne  $\mu_c^*$  en fonction du sous-ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$  considéré, dans les milieux  $S1$  et  $S2$ .

sous-ensembles de contacts, indépendamment de leur niveau de force, sont positives. Ceci veut dire que, en moyenne, la direction privilégiée de tous les sous-ensembles de contacts est la même (i.e., la direction de la contrainte principale majeure). Un fait remarquable est que le réseau de support est complètement absent dans le milieu  $S2$ .

Pour compléter cette analyse, considérons la contribution  $\mu^*(\xi)$  de chaque sous-ensemble de contacts  $\mathcal{S}(\xi)$  au coefficient de frottement interne  $\mu_c^*$ . Cette contribution peut être calculée à partir de la définition du tenseur des contraintes en considérant les contacts qui appartiennent au sous-ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$ . La contribution  $\mu^*(\xi)$  est définie par

$$\mu^*(\xi) = \frac{\tau(\xi)}{\sigma}, \quad (4.22)$$

où  $\tau(\xi)$  est la contrainte tangentielle apportée par le sous-ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$  (i.e.,  $\tau(\xi) = (\sigma_{xy}(\xi) + \sigma_{yx}(\xi))/2$ ),  $\sigma$  est la contrainte normale en considérant tous les contacts (i.e.,  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$ ), et

$$\sum_{\mathcal{S}(\xi)} \mu^*(\xi) = \mu_c^*. \quad (4.23)$$

La figure 4.22 montre  $\mu^*(\xi)$  en fonction de  $\xi$  dans les milieux  $S1$  et  $S2$ . On observe que, dans le milieu  $S1$ , la contribution  $\mu^*(\xi)$  des sous-ensembles avec des niveaux de force  $\xi < \xi_0$  est presque nulle, alors que la contribution  $\mu^*(\xi)$  des sous-ensembles avec des niveaux de force  $\xi > \xi_0$  est positive. Ceci veut dire que la charge déviatorique appliquée au milieu granulaire est

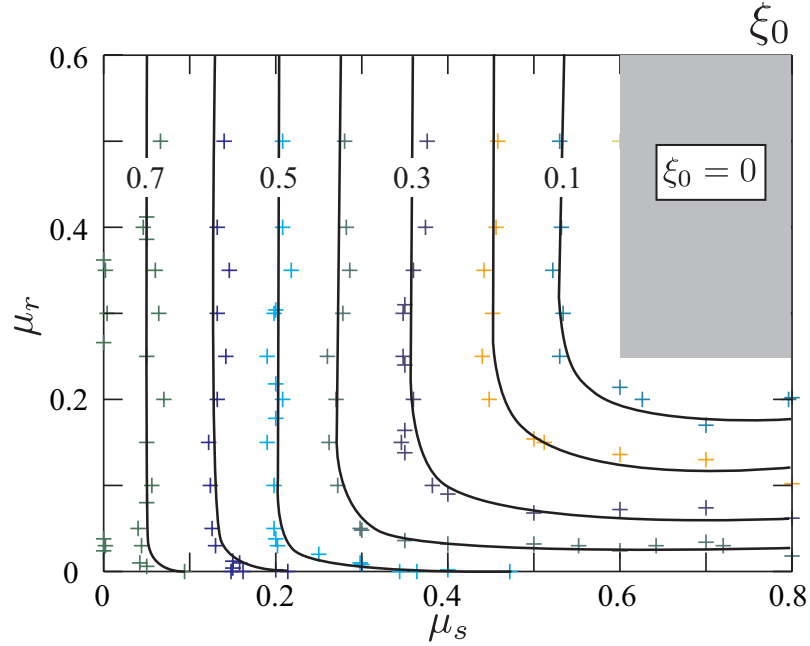


FIG. 4.23 – Courbes d'isovaleurs de la valeur caractéristique  $\xi_0$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ .

complètement supportée par les contacts portant des forces supérieures à  $\xi_0 \langle f_n \rangle$ . En revanche, dans le milieu  $S2$ , la contribution de tous les sous-ensembles de contacts, indépendamment de leur niveau de force, à  $\mu_c^*$  est positive. Ceci veut dire que, dans le milieu  $S2$ , la fonction du réseau faible est, comme celle du réseau fort, de résister la charge déviatorique imposée au milieu granulaire.

La figure 4.23 montre les courbes d'isovaleurs de la valeur caractéristique  $\xi_0$  en fonction de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ . On observe qu'au fur et à mesure que  $\mu_s$  et  $\mu_r$  augmentent,  $\xi_0$  diminue et éventuellement devient zéro. Ceci est cohérent avec le fait que les chaînes de forces sont graduellement remplacées par des colonnes de particules qui n'ont pas besoin d'être supportées latéralement. Cependant, la disparition totale du réseau de support (i.e.,  $\xi_0 = 0$ ) a lieu pour  $\mu_s = 0.6$  et  $\mu_r = 0.25$ , et, en conséquence, elle n'est possible que si les contacts du milieu peuvent résister au roulement. Cette transition reflète un changement qualitatif dans les conditions locales d'équilibre lorsque les contacts peuvent transmettre des moments.

## 4.4 Conclusion

Le but de ce chapitre était d'étudier plus finement le rôle des deux paramètres de frottement locaux  $\mu_s$  et  $\mu_r$  dans la résistance au cisaillement  $\mu_c^*$  et dans la microstructure du milieu à l'état stationnaire, traditionnellement connu comme "l'état critique". Pour ce faire, nous avons réalisé une étude paramétrique, dans laquelle nous avons fait varier les deux coefficients de frottement entre les particules et nous avons analysé le comportement du milieu en termes de résistance au cisaillement, texture, et transmission des forces à l'aide d'un essai de cisaillement simple.

Nous trouvons que les effets de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  dans la réponse macroscopique du milieu sont presque symétriques. En particulier, le coefficient de frottement interne  $\mu_c^*$  sature lorsque  $\mu_s$  augmente, avec une valeur de saturation qui augmente avec  $\mu_r$ ; symétriquement,  $\mu_c^*$  sature lorsque  $\mu_r$  augmente, avec une valeur de saturation qui augmente avec  $\mu_s$ . Comme résultat de cette symétrie, deux phases peuvent être identifiées dans l'espace paramétrique étudié dans lesquelles  $\mu_c^*$  est contrôlé soit par  $\mu_s$  soit par  $\mu_r$ . Ces deux phases coïncident avec deux régions dans lesquelles le mode de mouvement dominant au niveau des contacts est le glissement ou le roulement, ceci en termes des contributions relatives des contacts glissants et roulants à  $\mu_c^*$ .

Ces résultats sont en accord avec ceux reportés dans [59, 3, 2] (entre autres), qui postulent que le roulement au niveau des contacts joue un rôle majeur dans la résistance au cisaillement des milieux granulaires. Cependant, nos résultats montrent, quantitativement, que ceci n'est pas toujours le cas dans un milieu granulaire avec du frottement de roulement aux contacts. En fait, le roulement est le mode dominant si  $\mu_s$  est grand comparé à  $\mu_r$ ; en revanche, le glissement est le mode dominant si  $\mu_r$  est grand comparé à  $\mu_s$ . La raison en est que, lorsque l'un des deux coefficients de frottement microscopiques prend une valeur élevée, le degré de liberté correspondant se voit bloqué, et le milieu se voit obligé à activer le mode de mouvement relatif au niveau des contacts qui est moins contraint.

Nous trouvons aussi le fait de contraindre simultanément le glissement et le roulement au niveau des contacts a des importantes répercussions dans la microstructure du milieu. Plus précisément, l'utilisation de valeurs élevées de  $\mu_s$  et  $\mu_r$  favorise l'effet de voûte et, en conséquence, fait que le squelette de particules portant des forces non nulles développe un aspect colonnaire. L'analyse de la texture du milieu montre bien que la formation de ces colonnes affecte aussi le rôle mécanique joué par le réseau faible. Une transition a lieu, pour des valeurs particulières de  $\mu_s$  et  $\mu_r$ , vers une phase où le sous-ensemble de contacts qui supportent les chaînes de forces (*le réseau de support*) est complètement absent, et les deux réseaux, fort et faible, contribuent à résister

la charge déviatorique imposée au milieu granulaire. Dans cette phase, les colonnes de particules sont la structure de transmission de forces dominante, et, comme résultat de l'effet de voûte, la densité volumique du squelette de particules portant des forces non nulles peut être extrêmement faible (e.g., 0.3).

Nous avons aussi présenté les distributions des forces et des moments de contact. Nous avons vu que ces distributions obéissent à une loi de puissance dans le domaine des forces faibles et à une relation exponentielle dans le domaine des forces fortes. Ces distributions nous ont permis de montrer que, curieusement, la disparition du réseau de support n'implique pas une diminution dans la proportion des contacts qui portent les plus faibles forces. En fait, la proportion de contacts faibles augmente, même si leur rôle mécanique n'est plus le même. Ceci résulte d'un important changement dans les conditions d'équilibre des particules lorsque les contacts ont la possibilité de résister au roulement.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [28] :

***Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance.***

*N. Estrada, A. Taboada, and F. Radjaï.*

*Soumis le 8 mai 2008 à Physical Review E.*

# Chapitre 5

## Application des méthodes d'éléments discrets à la simulation de glissements de terrain

### 5.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction générale, les géomatériaux “granulaires” sont présents dans presque tout système géologique de surface et dans presque tout ouvrage construit par l'homme. Un des phénomènes de surface, qui intéresse beaucoup les ingénieurs et géologues, est l'instabilité gravitaire des pentes [20]. Ces instabilités constituent un problème avec d'importantes implications pratiques, autant dans la prévention des risques naturels que dans l'évolution morphologique du paysage [27, 29]. Dans le langage courant, ces instabilités sont aussi appelées *glissements de terrain*.

De manière schématique, un glissement de terrain peut être vu comme la mobilisation d'une certaine quantité de matériau instable sur une couche de très faible épaisseur (i.e., par rapport à l'épaisseur de la masse instable) dans laquelle se concentre la majeure part de la déformation de cisaillement. Cette couche de matériau est habituellement idéalisée par une surface appelée la *surface de glissement*, qui est composée de deux surfaces : la *surface de rupture* et la *surface de séparation*, qui est la partie du terrain originel qui est chevauchée par le matériau instable (Figure 5.1).

Dans un glissement de terrain, on peut identifier deux phases : la déstabilisation du matériau et son déplacement jusqu'à une nouvelle position d'équilibre ; cette dernière phase est aussi appelée la “propagation” du glissement.

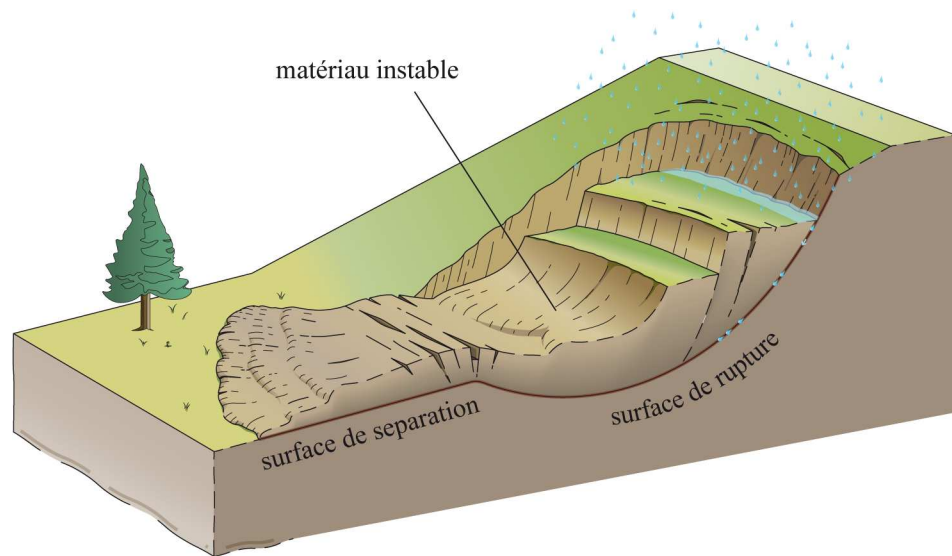


FIG. 5.1 – Représentation schématique d'un glissement de terrain

Deux questions intéressantes se posent :

1. A quel moment le système devient-il instable ?
2. Comment, et jusqu'où, la masse instable se propage-t-elle ?

La première de ces questions concerne la phase statique du problème, et elle est traditionnellement étudiée à l'aide de méthodes d'équilibre limite. Dans ces méthodes, on suppose une surface de rupture, et on calcule le rapport entre les forces nécessaires pour provoquer la rupture et les forces nécessaires pour garantir l'équilibre statique du système. Ce rapport est appelé le "facteur de sécurité", et il permet de quantifier dans quelle mesure le système est proche de l'état de rupture, dans le cas où celle-ci aurait lieu le long de la surface de rupture supposée. La deuxième question concerne la phase dynamique du problème, et elle est traditionnellement étudiée à l'aide de deux types d'approche : l'approche continue et l'approche discontinue.

Comme son nom l'indique, l'approche continue ignore l'aspect hétérogène du matériau, en le remplaçant par un milieu équivalent continu et homogène ; elle est fondée sur le formalisme introduit par Saint-Venant en 1850, établi à partir des équations de Navier-Stokes moyennées sur la hauteur de l'écoulement [75, 76, 32, 34]. En plus des équations de conservation de la masse et du moment, cette approche requiert l'adoption d'une rhéologie macroscopique du matériau, qui contrôle le comportement mécanique et la dissipation d'énergie dans le système. Par exemple, il est habituel d'associer à la base de l'écoulement un coefficient de frottement de type coulombien, qui contrôle la dissipation ainsi que la mise en mouvement du matériau.

---

De manière générale, les modèles développés avec l’approche continue constituent un outil pratique pour prédire les distances de voyage des écoulements [61, 48, 26, 25]. Cependant, des grandes incertitudes persistent quant à la rhéologie et au modèle de dissipation qui doivent être utilisés. Ces deux éléments influencent fortement les résultats obtenus, mais, pour la plupart des géomatériaux, il n’est pas possible de les mesurer sur le terrain, et leur choix reste difficile [10].

De l’autre côté, l’approche discontinue considère le matériau comme un ensemble de particules distinctes qui interagissent à travers des forces de contact, et elle modélise l’évolution du système à l’aide d’une méthode de simulation numérique discrète (e.g., Dynamique Moléculaire [21], Dynamique des Contacts [51, 38, 39, 40], etc.). Cette approche permet de prendre en compte le caractère hétérogène du milieu, et elle n’implique pas l’adoption d’une rhéologie macroscopique du matériau. Elle nécessite, plutôt, l’adoption d’une loi de comportement au niveau des contacts, et la rhéologie macroscopique résulte naturellement des interactions à cette échelle.

L’approche discontinue constitue donc un outil complémentaire aux approches continues, car elle permet d’aborder le problème des glissements de terrain avec une nouvelle “optique”, qui cherche à comprendre le comportement macroscopique du système à partir des processus qui ont lieu à l’échelle des contacts et des particules (e.g., voir [10, 71, 81, 80]). Pour quelques exemples d’application des approches discontinues à l’étude de cas réels d’instabilité gravitaire, voir [1, 90, 79].

Le but de ce chapitre est de présenter une méthodologie permettant de simuler l’initiation et la propagation de glissements de terrain, développée avec une approche discontinue. Cette méthodologie a été conçue dans le cadre de la Dynamique des Contacts, et elle tient compte de la géométrie initiale du système, de la résistance mécanique des géomatériaux, et d’un mécanisme de déclenchement du glissement. Dans un premier temps, nous décrirons la méthodologie, et, dans un deuxième temps, nous l’appliquerons à la modélisation de l’exemple hypothétique d’un glissement de terrain provoqué par la montée du niveau d’une nappe d’eau. A la fin du chapitre, nous concluons sur les avantages et les limitations de la méthodologie.

## 5.2 Description de la méthodologie

Dans notre méthodologie, un modèle de pente est construit à partir d’une coupe géologique faite dans la direction de glissement du matériau instable. A partir de cette coupe, les formations géologiques sont approximées par des domaines de matériau granulaire, construits à l’intérieur d’une boîte com-



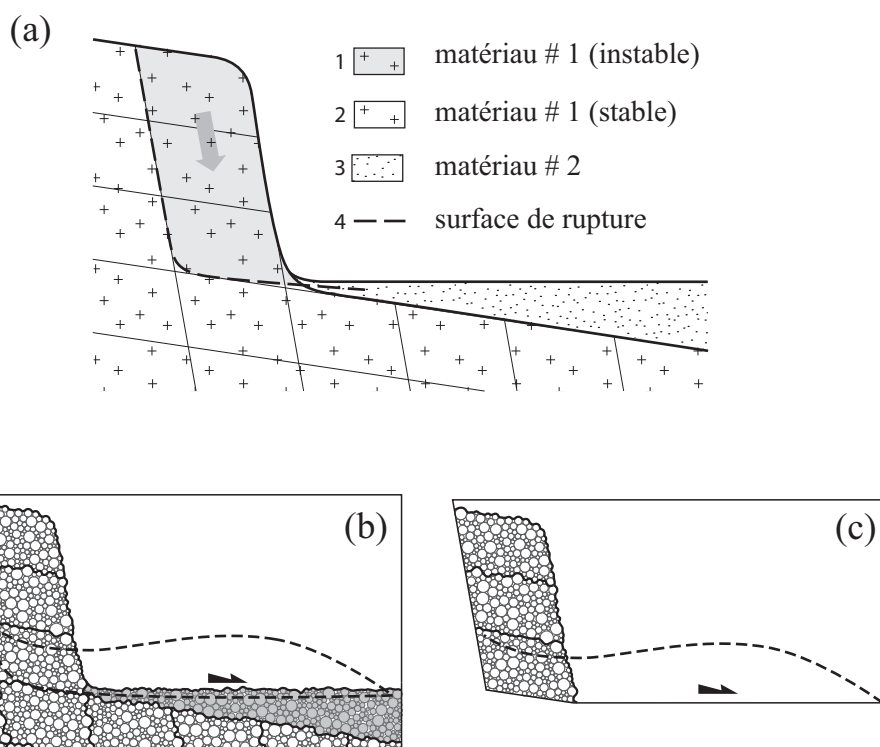


FIG. 5.2 – (a) Coupe géologique; (b) les lignes qui composent la boîte ne correspondent pas à la surface de glissement; (c) quelques-unes des lignes qui composent la boîte correspondent à la surface de glissement.

posée de plusieurs lignes. Le dépôt des particules est fait à l'aide du critère géométrique décrit dans la section 3.2.2, et la relaxation de l'arrangement est faite en activant les forces de volume associées à la pesanteur et en attendant que le système soit en équilibre statique. Une fois le modèle préparé, un facteur déclenchant est appliqué au système, ce qui peut, ou non, le rendre instable et générer un glissement de terrain. Ensuite, l'évolution du matériau instable est modélisée, jusqu'à ce qu'il trouve sa nouvelle position d'équilibre.

Les frontières du modèle (i.e., les lignes qui composent la boîte) peuvent, ou non, correspondre à la surface de glissement. La figure 5.2 montre deux modèles construits à partir d'une coupe géologique. Dans le modèle illustré sur la figure 5.2(b), les frontières de la boîte ne correspondent pas à la surface de glissement, et le matériau instable glisse sur une surface rugueuse composée de particules. Dans le modèle illustré sur la figure 5.2(c), quelques-unes des lignes qui composent la boîte correspondent à la surface de glissement, et le matériau instable glisse sur une surface plane. Cette dernière technique est très utile lorsqu'on souhaite imposer les propriétés mécaniques de la surface

de glissement. Par exemple, comme nous le verrons dans la section 5.3.3, certains processus qui ont lieu au sein de la surface de rupture peuvent réduire l'angle de frottement de cette interface jusqu'à des valeurs presque nuls ; en 2D, il n'est pas possible d'avoir un angle de frottement macroscopique nul le long d'une interface rugueuse (i.e., composée de particules), mais il est facile d'imposer n'importe quelle valeur de résistance à une interface plane (i.e., au contact entre les particules et une ligne).

Plusieurs facteurs déclenchants peuvent être intégrés facilement à cette méthodologie. Par exemple, un accélérogramme peut être utilisé pour imposer une secousse sismique à la boîte, ou, pour simuler l'érosion d'une rivière, les particules à l'intérieur d'une fenêtre mobile peuvent être supprimées du modèle. Ici, nous traiterons uniquement le cas de la montée du niveau d'une nappe d'eau.

### 5.2.1 Résistance des matériaux granulaires

Comme nous l'avons dit dans la section précédente, dans notre modèle, la structure du système géologique est approximée par un ensemble de domaines de matériau granulaire. La résistance mécanique de ces matériaux dépend des propriétés de résistance au niveau des contacts, comme nous l'avons montré dans les deux chapitres précédents. La figure 5.3 montre les résultats d'angle de frottement interne à l'état pic  $\phi_P^*$  et de cohésion  $c$  obtenues dans l'étude paramétrique présentée dans le chapitre 3. Sur cette figure, sont aussi illustrées quatre régions qui correspondent aux valeurs approximatives de  $\phi_P^*$  et de  $c$  de plusieurs types de roches [77] :

- (A) Roches magmatiques : granite, basalte, porphyre, etc.
- (B) Roches métamorphiques : quartzite, gneiss, ardoise, etc.
- (C) Roches sédimentaires dures : roches calcaires, etc.
- (D) Roches sédimentaires tendres : grès, houille, craie, schiste, etc.

On observe que, avec les plages de paramètres microscopiques utilisées dans l'étude paramétrique, nous obtenons des valeurs de  $\phi_P^*$  et de  $c$  qui sont tout à fait compatibles avec celles des roches. En particulier, les valeurs de résistance macroscopique que nous avons mesurées dans nos simulations sont du même ordre de grandeur que celles des roches sédimentaires.

Lorsqu'on définit plusieurs domaines granulaires, il est important de considérer également les propriétés mécaniques des interfaces entre ces domaines. La résistance de ces interfaces dépend aussi des propriétés de résistance au niveau des contacts, mais, cette fois-ci, entre particules de deux domaines différents. Etant donné que les interfaces entre différents domaines sont des interfaces granulaires, leur angle de frottement ne pourra pas être inférieur à l'angle de frottement interne dans la limite de particules sans frottement

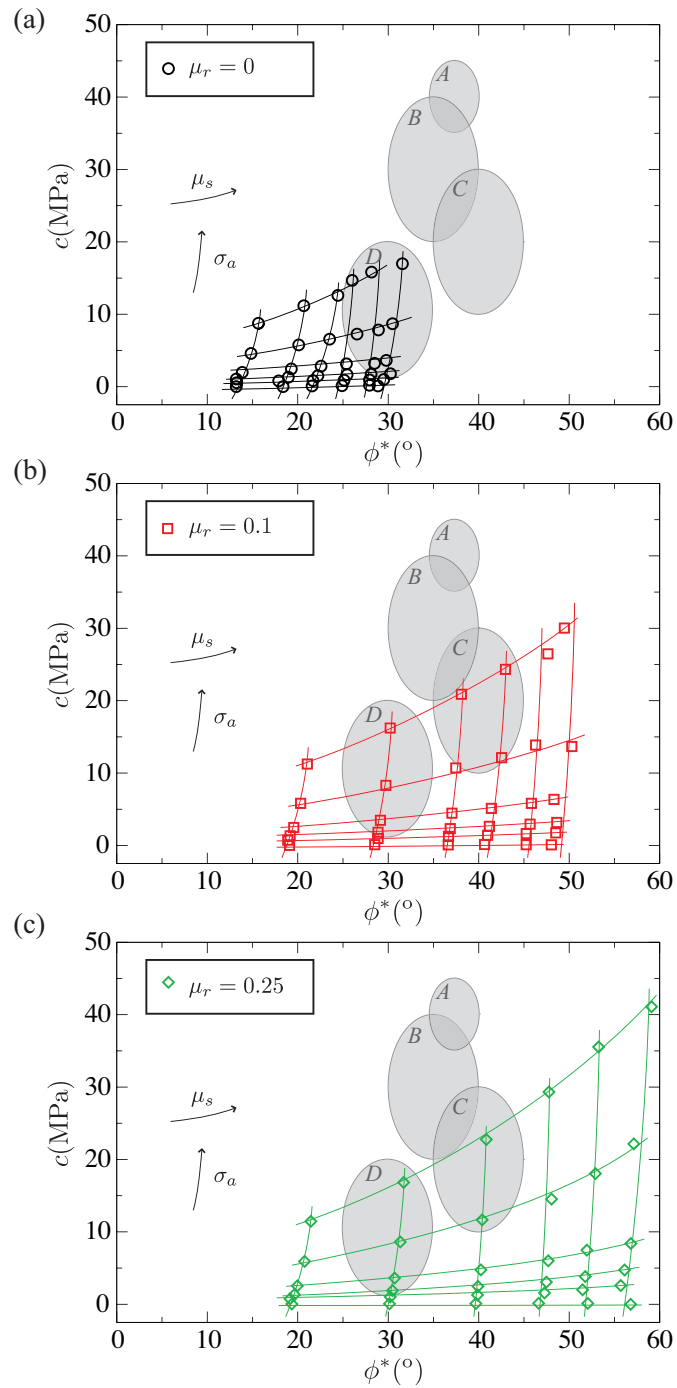


FIG. 5.3 – Résultats d'angle de frottement interne à l'état pic  $\phi_P^*$  et de cohésion  $c$  obtenues dans l'étude paramétrique présentée dans le chapitre 3 (a) pour  $\mu_r = 0$ , (b) pour  $\mu_r = 0.1$ , et (c) pour  $\mu_r = 0.25$ . Les régions A, B, C, et D correspondent aux valeurs approximatives de  $\phi_P^*$  et de  $c$  de plusieurs types de roches [77]

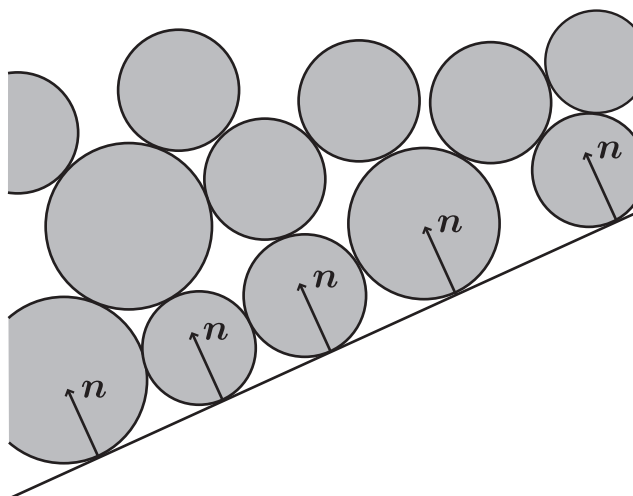


FIG. 5.4 – Tous les contacts entre les particules du milieu et une ligne ont la même direction normale (i.e., orthogonal à la ligne).

(i.e., angle  $\phi_0^*$ , section 3.3.1).

### 5.2.2 Résistance des frontières du modèle

La relation micro-macro le long des frontières est plus simple que la relation micro-macro au sein du matériau granulaire. La raison en est que les frontières constituent des interfaces planes, en contraste avec les plans de glissement au sein du matériau granulaire, qui sont des interfaces rugueuses. Pour cette raison, tous les contacts entre les particules du milieu ont la même direction normale (i.e., orthogonal à la ligne; voir figure 5.4). L'angle de frottement et l'adhésion macroscopique d'une frontière peuvent donc être calculés comme suit :

$$\phi^* \simeq \phi_s \quad (5.1)$$

$$A^* \simeq \sigma_a \frac{\sum_i d_i}{L}, \quad (5.2)$$

où  $\sum_i d_i/L$  est la somme des diamètres des particules en contact avec la ligne par unité de longueur. Dans un milieu dense, le facteur  $\sum_i d_i/L$  est proche de 1, et on peut dire :

$$A^* \simeq \sigma_a. \quad (5.3)$$

Comme nous l'avons précisé dans la section 3.3.4, la cohésion du milieu peut être calculée à partir de l'angle de frottement interne et l'adhésion macro :

$$c \simeq A^* \tan \phi^*. \quad (5.4)$$

### 5.2.3 Prise en compte d'une nappe d'eau

Un des facteurs qui peuvent influencer fortement la stabilité des pentes est la présence d'eau interstitielle dans le milieu. Lorsqu'un milieu granulaire est saturé, l'eau dans les pores peut appliquer aux grains deux types de forces. Une première force est la force de poussée d'Archimède, qui représente l'effet net de la pression de l'eau appliquée sur toute la surface du grain. Cette force a pour effet de réduire les forces normales aux contacts et, en conséquence, de réduire aussi la résistance au cisaillement du milieu. Ce phénomène a été mis en évidence par Terzaghi en 1936, qui a montré que la résistance au cisaillement d'un milieu granulaire saturé dépend d'une contrainte "effective"  $\sigma'$  définie comme suit :

$$\sigma' = \sigma - u, \quad (5.5)$$

où  $\sigma$  est la contrainte normale totale (i.e., l'ensemble des forces appliquées sur un plan divisé par son aire) et  $u$  est la pression d'eau dans les pores. La résistance au cisaillement dans le plan considéré est donc donnée par :

$$\tau_{max} = \sigma' \tan \phi^* + c. \quad (5.6)$$

Une deuxième force est la force de traînée, qui résulte des forces de cisaillement appliqués par l'eau sur les grains lorsque cette première s'écoule dans le milieu poreux. L'effet des forces de traînée dans la stabilité du milieu est souvent négligé. La raison en est que, souvent, elles sont plus faibles que les forces de poussée. Cependant, dans certains contextes, les forces de traînée peuvent modifier fortement l'état des contraintes dans le milieu (en particulier la direction des contraintes principales) et avoir un effet important sur la stabilité du système [17, 53, 54, 18].

Pour prendre en compte l'effet de la pression de pores dans une simulation numérique discrète, il est nécessaire de coupler un modèle du fluide au modèle granulaire. Une manière simple de faire ce couplage est de superposer au modèle granulaire une distribution de pressions de pores et, à partir de cette distribution, d'appliquer aux particules une force de poussée  $F_p$  calculée comme suit :

$$F_p = -V\nabla p, \quad (5.7)$$

où  $\nabla p$  est le gradient de la pression de pores et  $V$  est le volume de la particule. Cette force est appliquée au centre de masse de la particule, et elle est prise en compte dans le modèle granulaire comme une force externe appliquée sur chacune des particules immergées (Figure 5.5).

Dans notre méthodologie, nous appliquons la technique décrite dans le paragraphe précédent pour prendre en compte l'effet de la pression de pores. Cependant, nous ne considérons cet effet que lorsque le milieu se trouve à

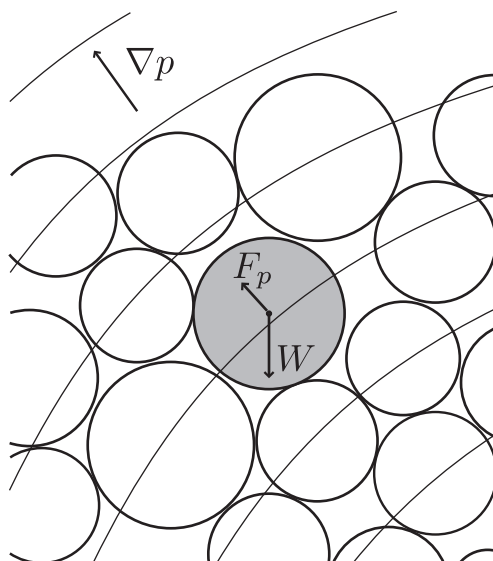


FIG. 5.5 – Force de poussée  $F_p$  calculée à partir d'une distribution de pression de pores superposée au modèle granulaire.

l'état statique ou quasi-statique, et nous désactivons la force  $F_p$  lorsque le milieu se déforme dynamiquement. En d'autres termes, en conditions dynamiques, nous supposons que le matériau se comporte comme un écoulement granulaire sec. Ceci constitue, évidemment, une simplification très importante. Elle est justifiée dans la mesure où la déformation qui a lieu lors d'un glissement de terrain est, en général, dilatante. Ceci implique que le volume de vides augmente considérablement lors de la déformation, et que ces vides ne sont pas complètement remplis d'eau. Dans ces conditions, le milieu se trouve dans des conditions de saturation partielle, et l'eau dans les pores ne réduit plus la résistance au cisaillement du matériau.

### 5.3 Exemple : Simulation d'un glissement de terrain déclenché par la montée du niveau d'une nappe d'eau

Pour illustrer la méthodologie, nous avons choisi de simuler un glissement de terrain déclenché par la montée du niveau d'une nappe d'eau. Dans les sections qui suivent, nous présentons l'état initial du système ainsi que la description du processus de glissement en termes des forces appliquées aux frontières du modèle et de la morphologie de la masse instable.

### 5.3.1 Morphologie initiale

La morphologie initiale du système est illustrée sur la figure 5.6. La coupe géologique (i.e., figure 5.6(a)) correspond au glissement de Jiufengershan, qui a été déclenché par le séisme de Chi-Chi, à Taiwan, en 1999 [13]. Ce glissement a déstabilisé un monoclinale de  $\simeq 50$  m d'épaisseur,  $\simeq 500$  m de largeur, et  $\simeq 1.5$  km de longueur sur une pente d'environ  $21^\circ$ . A partir de cette coupe, nous avons construit le modèle granulaire illustré sur la figure 5.6(b). Le modèle comporte  $\simeq 20000$  particules circulaires, et leur diamètre varie entre 1 et 4 m avec une distribution uniforme par fraction volumique. Le matériau granulaire est composé de 5 couches d'environ 13.5 m d'épaisseur, qui reposent sur un ensemble de lignes dénommées comme suit :

- (SR) surface de rupture,
- (BF) butée frontale,
- (SS) surface de séparation.

### 5.3.2 Résistance des matériaux granulaires

Nous avons choisi d'utiliser, comme résistance macroscopique du milieu, la résistance mesurée dans les matériaux déstabilisés par le glissement de Jiufengershan [15, 16]. L'angle de frottement interne et la cohésion, ainsi que les propriétés de contact qui permettent de créer un matériau modèle avec la même résistance macroscopique, sont présentés dans le tableau 5.1. Les valeurs de résistance au cisaillement macroscopique ont été mesurées à l'aide d'essais biaxiaux numériques (voir section 3.2.3). La figure 5.7 montre les courbes contrainte déformation ainsi que les courbes de déformation volumique d'un échantillon cisailé pour quatre différentes pressions de confinement. On observe un comportement classique pour un milieu granulaire cohésif : la résistance est caractérisée par une valeur initiale très élevée (i.e., la résistance au pic) qui diminue avec la déformation et qui se stabilise à une valeur de résistance résiduelle considérablement plus faible. On constate aussi que le volume du milieu augmente avec la déformation, ce qui n'est pas surprenant car le milieu est initialement très compact.

Dans les contacts entre particules de différentes couches, les coefficients de frottement de glissement et de roulement restent les mêmes, alors que l'adhésion  $\sigma_a$  est nulle.

### 5.3.3 Résistance aux frontières du modèle

Dans notre exemple, nous avons voulu simuler l'effet d'un mécanisme d'affaiblissement dynamique de la surface de rupture. Ces mécanismes peuvent

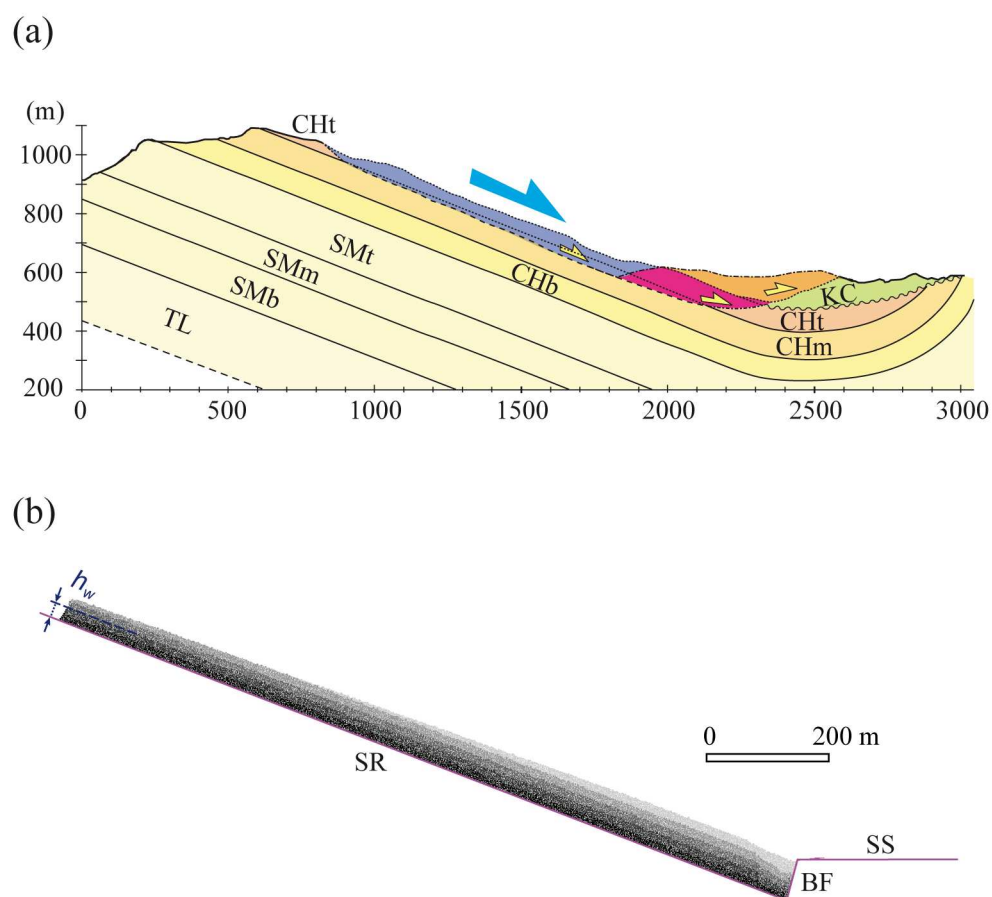


FIG. 5.6 – Morphologie initiale du système. (a) Coupe géologique du glissement de Jiufengershan, déclenché par le séisme de Chi-Chi, à Taiwan, en 1999. TL : Schiste de Tanliaoti; SM(b, m, et t) : Formations Shihmen inférieure, moyenne, et supérieure; CH(b, m, et t) : Schistes de Changhukeng inférieurs, moyens, et supérieurs; KC : Formation Kueichulin. (b) Modèle granulaire construit à partir de la coupe géologique.



TAB. 5.1 – Résistance au cisaillement macroscopique et propriétés de contact des matériaux granulaires utilisées dans la simulation.

Propriétés macroscopiques	
$\phi_P^*$ (°)	38.5
$\phi_R^*$ (°)	26.2
$c_P$ (kN/m)	88
$c_R$ (kN/m)	13
Propriétés de contact	
$\mu_s$	0.3
$\mu_r$	0.1
$\sigma_a$ (pic) (kN/m)	100
$\sigma_a$ (résiduelle) (kN/m)	25
$\epsilon_n, \epsilon_t$	0.02

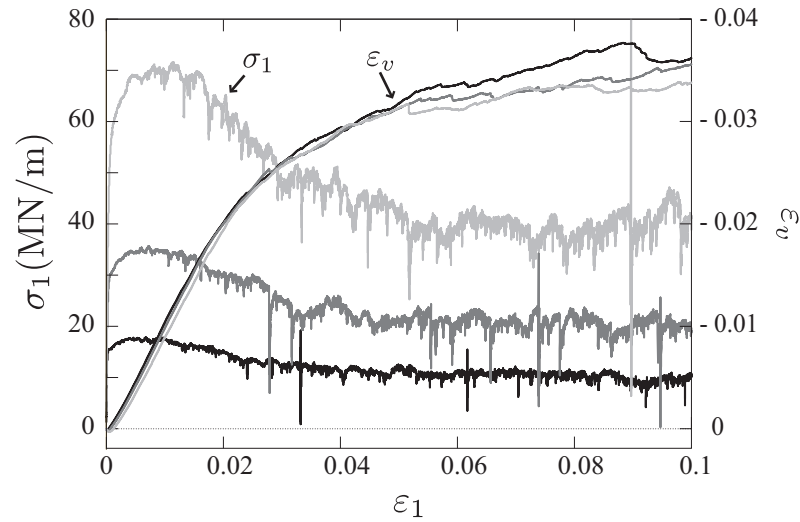


FIG. 5.7 – Courbes contrainte déformation et courbes de déformation volumique d'un échantillon cisailé pour trois différentes pressions de confinement (*i.e.*, 4, 8, et 16 MN/m).

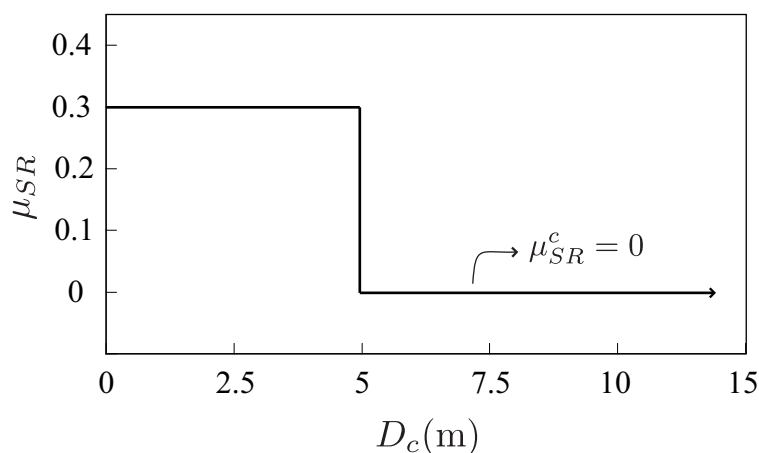


FIG. 5.8 – Diminution du coefficient de frottement de la surface de rupture  $\mu_{SR}$  en fonction du déplacement  $D$  des particules en contact avec cette surface.

diminuer considérablement l’angle de frottement de cette interface, et ils sont considérés comme l’un des facteurs responsables de la transformation d’un glissement de terrain lent dans une avalanche. La diminution de la résistance associée à ces mécanismes peut être fonction de la déformation cumulée, du taux de déformation, et/ou de la température, d’où leurs noms en anglais : “slip weakening”, “strain weakening”, et “thermal weakening”, respectivement. Pour une synthèse des mécanismes d’affaiblissement dynamique de la surface de rupture, se référer à [84].

Dans notre exemple, nous supposons que le coefficient de frottement de la surface de rupture  $\mu_{SR}$  diminue en fonction de la déformation cumulée, ou, autrement dit, en fonction du déplacement  $D$  des particules en contact avec cette surface (Figure 5.8). Si  $D$  est inférieur à une distance critique  $D_c = 5$  m, nous considérons que le cisaillement cumulé dans la surface de rupture n’est pas suffisant pour activer le mécanisme d’affaiblissement dynamique, et la résistance au cisaillement reste inchangée ; en revanche, si  $D$  est supérieur à  $D_c$ , nous considérons que le mécanisme d’affaiblissement dynamique est actif, et la résistance au cisaillement est  $\mu_{SR}^c = 0$ . Une distance  $D_c$  égale à 5 m est compatible avec les distances typiques d’affaiblissement dynamique calculées pour des glissements de terrain dans les cas où le mécanisme d’affaiblissement est la pressurisation thermique de l’eau interstitielle [14, 89].

Le tableau 5.2 montre les valeurs résistance au cisaillement macroscopique des frontières du modèle en conditions de déformation quasi-statique et dynamique.

TAB. 5.2 – *Résistance au cisaillement, initiale et affaiblie, des frontières du modèle.*

Comportement à l'état pic			
	SR	BF	
$\phi_P^*$ (°)	16.7	35	
$c_P$ (kPa)	30	70	
Comportement à l'état résiduel			
	SR	BF	SS
$\phi_R^*$ (°)	16.7	26.6	11.3
$c_R$ (kPa)	0	0	0
Comportement affaibli			
	SR		SS
$\phi_R^*$ (°)	0		11.3
$c_R$ (kPa)	0		0

### 5.3.4 La pression des pores

Initialement, nous supposons que la nappe d'eau est parallèle au plan de stratification. Dans cette situation, le gradient de la pression de pores  $\nabla p$  peut être calculé comme suit :

$$\nabla p = \gamma_w \cos \theta, \quad (5.8)$$

où  $\gamma_w = 9.81 \text{ kN/m}^3$  est le poids volumique de l'eau et  $\theta$  est l'angle d'inclinaison de la surface de rupture. La force de poussée  $F_p$  appliquée aux particules est calculée, à l'aide de l'expression 5.7, comme :

$$F_p = V \gamma_w \cos \theta, \quad (5.9)$$

et elle est perpendiculaire au plan de stratification (Figure 5.9).

En conditions dynamiques, l'effet de l'eau est négligé (voir section 5.2.3). Pour ce faire, la force  $F_v$  appliqué aux particules immergées est désactivée une fois que la particule s'est déplacée d'une distance supérieure à la distance critique  $D_c = 5 \text{ m}$ .

### 5.3.5 Déclenchement et propagation de l'avalanche

L'augmentation graduelle du niveau de la nappe d'eau a pour effet de diminuer les forces normales entre les particules et la surface de rupture. En conséquence, la force tangentielle maximale qui peut être supportée par cette interface diminue. Pour une hauteur de la nappe de 22.5 m, cette force

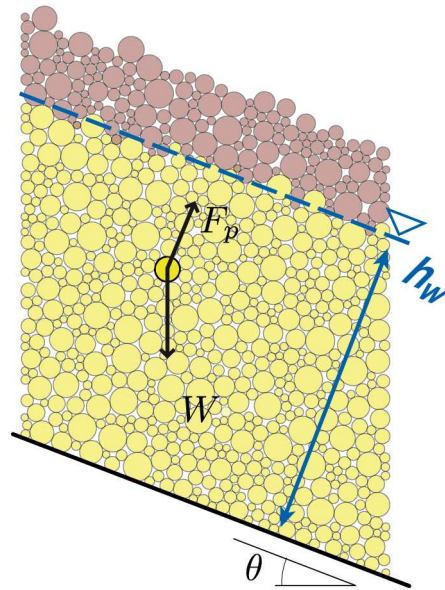


FIG. 5.9 – Force de poussée  $F_p$  pour une nappe d'eau parallèle au plan de stratification.

tangentielle n'est plus suffisante pour assurer la stabilité du monoclin, et le système devient instable. A cause du mécanisme d'affaiblissement dynamique de la surface de rupture, le glissement de terrain, qui est initialement lent, s'accélère considérablement (i.e., se transforme en avalanche) et se propage jusqu'à trouver une nouvelle position d'équilibre sur la surface de séparation (Figure 5.10).

En complément de l'analyse de la morphologie de la masse instable, une manière intéressante d'étudier l'évolution du glissement est de s'intéresser aux forces appliquées sur la surface de glissement. A partir de cette étude, il est possible d'identifier clairement les différents processus qui se succèdent lors de l'initiation et la propagation de l'instabilité. La figure 5.11 montre les forces appliquées sur la surface de rupture ainsi que sur la butée frontale en fonction du temps. Les forces normales effectives appliquées sur ces deux interfaces sont appelées, respectivement,  $N'_{SR}$  et  $N'_{BF}$ , et la force tangentielle appliquée sur la surface de rupture est appelée  $T_{SR}$ . On distingue quatre phases différentes :

### (1) Phase statique

Dans l'intervalle  $[t_0, t_1]$ , la hauteur de la nappe d'eau augmente lentement de 0 à 22.5 m. Les particules qui se trouvent sous la nappe d'eau sont colorées

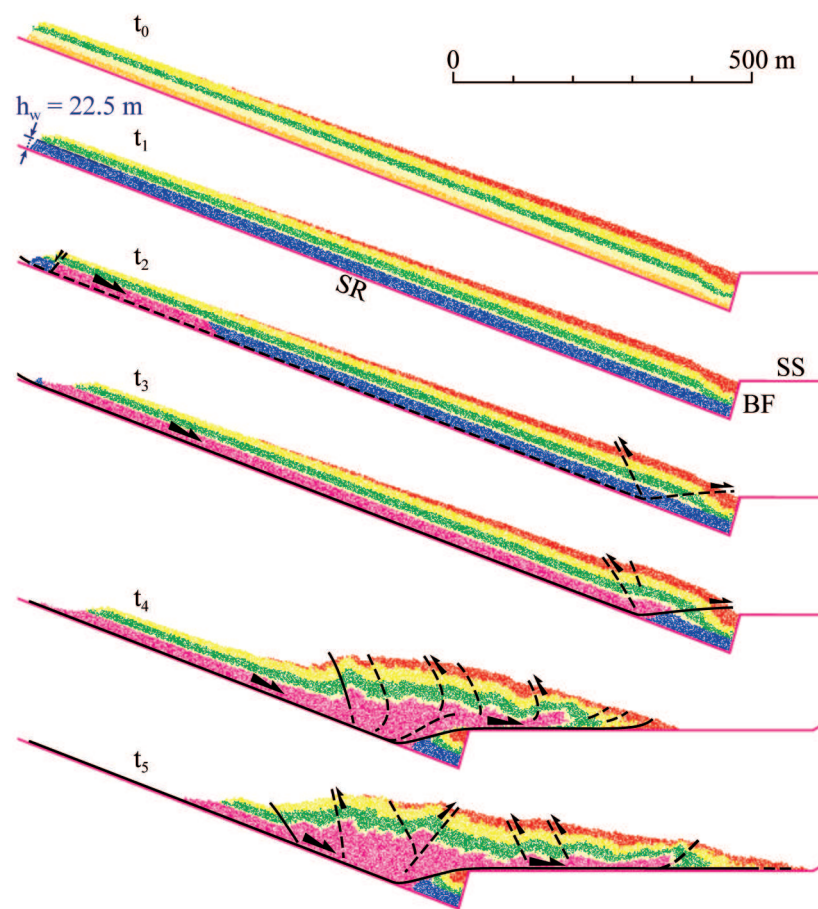


FIG. 5.10 – Propagation de la masse instable depuis sa position initial jusqu'à sa nouvelle position d'équilibre sur la surface de séparation.

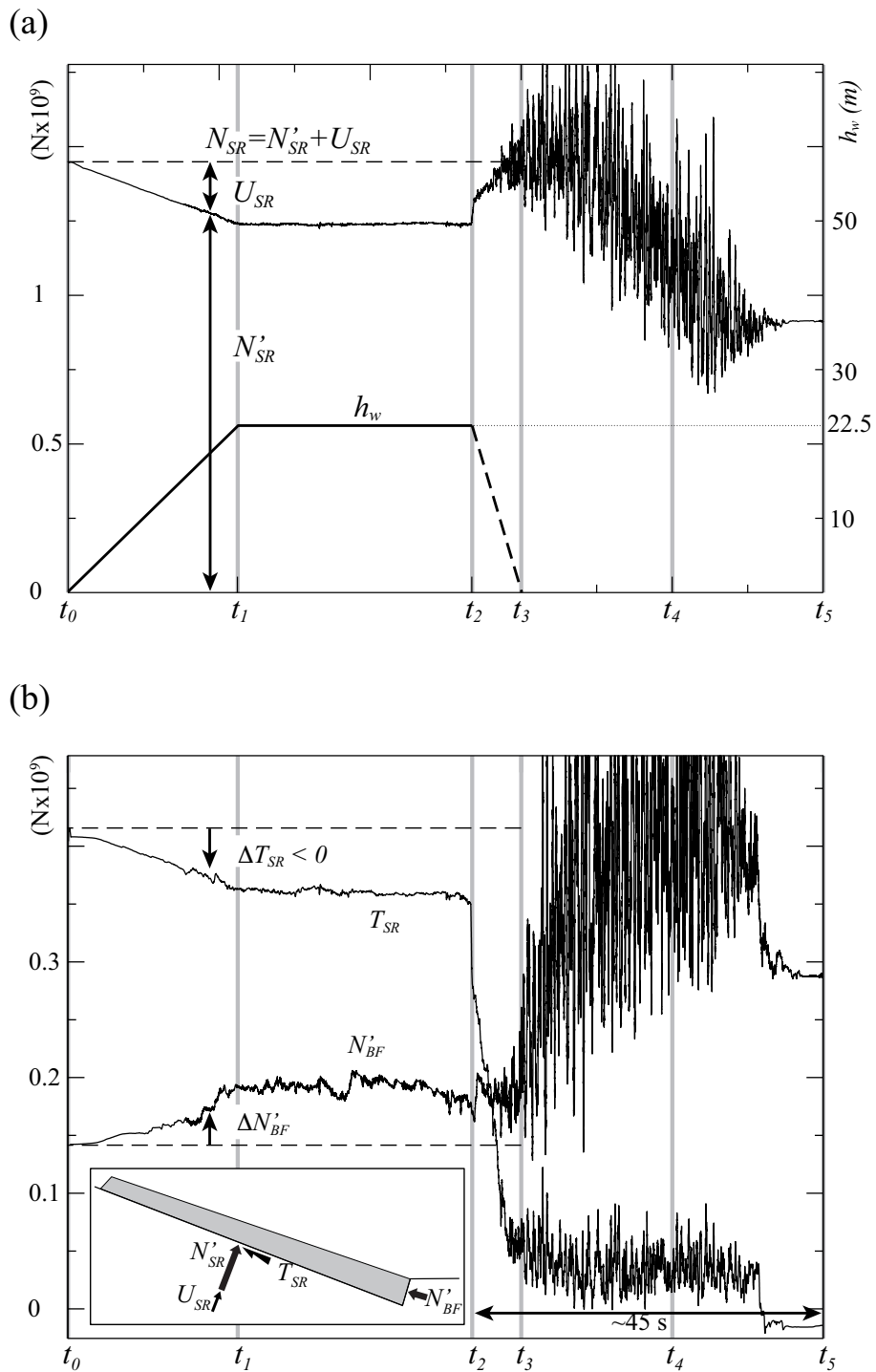


FIG. 5.11 – Forces appliquées sur la surface de rupture et sur la butée frontale en fonction du temps.

en bleu sur la figure 5.10. Pour assurer l'équilibre, la force normale appliquée sur la surface de rupture doit être constante. Cette force,  $N_{SR}$ , peut être décomposée en deux termes : la force normale effective  $N'_{SR}$  et la force  $U_{SR}$  résultante de la pression de pores. Lorsque la hauteur de la nappe augmente, la pression de pores au niveau de la surface de rupture augmente, ce qui provoque une diminution de  $N'_{SR}$  et une augmentation de  $U_{SR}$ . On observe aussi une diminution de la force tangentielle  $\Delta T_{SR}$ , qui peut être approximée par l'expression suivante :

$$\Delta T_{SR} \simeq \mu_{SR} \Delta N'_{SR}, \quad (5.10)$$

où  $\mu_{SR}^*$  est le coefficient de frottement au niveau de la surface de rupture et  $\Delta N'_{SR}$  est la variation de la contrainte normale effective  $N'_{SR}$ . L'expression 5.10 suggère que la force tangentielle  $T_{SR}$  se trouve dans la limite imposée par la loi de frottement de Coulomb (i.e.,  $T_{SR} = \mu_{SR} N'_{SR}$ ). Ceci n'est pas surprenant, car la pente de la surface de rupture est supérieure à son angle de frottement interne (i.e.,  $\theta = 21^\circ > 16.7^\circ$ ).

Pendant cette phase, la stabilité du monoclinal est assurée par la butée frontale et par la résistance en compression du monoclinal. D'ailleurs, le changement de la force normale appliquée à la butée frontale est égal au changement de la force tangentielle sur la surface de rupture :

$$\Delta N'_{BF} \simeq -\Delta T_{SR}. \quad (5.11)$$

## (2) Phase de déstabilisation

Dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , la hauteur de la nappe d'eau  $h_w$  atteint sa hauteur critique, pour laquelle la force  $N_{FB}$  est égale à la résistance en compression du monoclinal et la déstabilisation du milieu est imminente. Pendant cette phase, le matériau instable se déforme lentement, et cette déformation est initialement concentrée dans le pied du monoclinal. Ceci n'est pas surprenant, car c'est dans cette partie du monoclinal où les forces de contact sont les plus élevées.

## (3) Phase de déclenchement de l'avalanche

Dans l'intervalle  $[t_2, t_3]$ , le matériau instable est accéléré et le glissement se transforme en avalanche. Cette transition est due à la diminution de la résistance dans la surface de rupture, au fur et à mesure que de plus en plus de particules en contact avec la surface de rupture dépassent la distance critique  $D_c$ . Les particules dont le déplacement a dépassé la distance critique  $D_c$  sont colorées en magenta sur la figure 5.10.

#### (4) Phase de propagation de l'avalanche

Dans l'intervalle  $[t_3, t_5]$ , l'avalanche se propage jusqu'à trouver un nouvel état d'équilibre et former le dépôt final sur la surface de séparation. Dans cette phase, le matériau est intensément cisailé et plié, et il se déplace à des vitesses très élevées (i.e., 125 km/h). On observe des fortes fluctuations dans les forces appliquées sur la surface de rupture et sur la butée frontale, ce qui montre que pendant cette phase le milieu se déforme dynamiquement. Un état intermédiaire lors de l'avalanche ainsi que le dépôt final sont illustrés sur la figure 5.10.

## 5.4 Conclusion : avantages et limitations de la méthodologie

Nous avons développé, dans le cadre de la Dynamique des Contacts, une méthodologie permettant de simuler l'initiation et la propagation de glissements de terrain. Cette méthodologie permet de construire un modèle de pente à partir d'une coupe géologique, ainsi que d'étudier sa stabilité face à des facteurs déclenchants tels que le changement de niveau d'une nappe d'eau. Les formations géologiques sont approximées par un ensemble de domaines granulaires, cohésifs ou non-cohésifs, dont la résistance mécanique peut être caractérisée par un angle de frottement interne et une cohésion. Ces régions sont construites à l'intérieur d'une boîte composée de plusieurs lignes (en 2D), qui peuvent, si on le souhaite, constituer la surface de glissement.

Nous avons décrit la méthodologie, et nous l'avons appliqué à la modélisation d'un exemple hypothétique de glissement de terrain généré par l'augmentation du niveau d'une nappe d'eau. A l'aide de cet exemple, nous avons vu que cette méthodologie tient compte du caractère hétérogène des formations géologiques, et que, en conséquence, elle donne accès à la structure du dépôt final (Figure 5.10). Nous avons aussi montré que cette méthodologie permet d'étudier en détail l'évolution spatio-temporelle du glissement ; ceci en termes des forces appliquées aux frontières et de la morphologie de la masse instable. De plus, en modélisant les géomatériaux comme un milieu discret, cette méthodologie tient compte du caractère essentiellement discontinu des processus d'instabilité gravitaire et permet de contourner le problème du choix d'une rhéologie macroscopique, qui, comme nous l'avons signalé plus haut, n'est pas trivial. Dans cette méthodologie, la rhéologie macroscopique résulte naturellement des interactions au niveau des contacts.

Cependant, l'application de cette méthodologie à des exemples réels présente aussi quelques limitations. La plus marquée est le nombre de parti-



cules qui peuvent être utilisées dans une simulation, qui est fortement limité par le temps de calcul. Ce nombre doit être très élevé si l'on veut que le comportement du système soit indépendant de la taille des particules, d'autant plus s'il s'agit d'une simulation en trois dimensions. L'utilisateur se voit donc confronté à une difficulté incontournable : la simulation d'un système avec un nombre suffisamment grand de particules nécessite souvent des longues périodes de calcul (e.g., plusieurs jours, ou plusieurs semaines). Evidemment, cette difficulté devient de moins en moins importante avec le rapide développement des outils de calcul.

Malgré les limitations, nous croyons que la simulation des glissements de terrain à l'aide des approches discontinues est de grande valeur, car elle permet d'aborder le problème des instabilités de pente sous une nouvelle "optique", qui cherche à comprendre le comportement macroscopique du système à partir de processus qui ont lieu à une échelle beaucoup plus fine (i.e., celle des contacts et des particules, même si ces particules "numériques" sont de taille très supérieure aux particules réels de sol et de roche). Dans ce sens, ces approches constituent donc un outil intéressant et tout à fait complémentaire aux méthodes d'analyse traditionnelles telles que l'équilibre limite et les approches continues, qui cherchent à faire une description du phénomène basée uniquement sur des grandeurs macroscopiques.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [84] :

***Discrete element simulation of rock-and-soil avalanches : 1. Theory and computation.***

*Alfredo Taboada and Nicolas Estrada.*

*Soumis le 3 avril 2008 à Quaternary Science Reviews, special issue "Natural Hazards, Extreme Events, and Mountain Topography".*

# Chapitre 6

## Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'influence des propriétés de résistance au niveau des contacts sur les paramètres qui décrivent la plasticité des milieux granulaires cisailés (i.e., la résistance au cisaillement et la dilatance) ainsi que sur la microstructure développée par le milieu lors du cisaillement. Pour aborder ces questions, nous avons utilisé une méthode de simulation numérique discrète : la Dynamique des Contacts, dans le cadre de laquelle nous avons introduit un modèle de cohésion qui cherche à imiter la cohésion par cimentation. Dans notre modèle, la résistance initiale des liens cohésifs est contrôlée par trois paramètres de résistance au niveau des contacts (i.e., une adhésion microscopique, un coefficient de frottement de glissement, et un coefficient de frottement de roulement) ainsi que par un critère de création et de rupture des liens cohésifs. La rupture des liens, lors de la déformation du milieu, entraîne la perte irréversible de l'adhésion, et la résistance des nouveaux contacts est contrôlée uniquement par les coefficients de frottement de glissement et de roulement. Nous avons construit des échantillons comportant plusieurs milliers de particules, et nous les avons cisailés à l'aide d'un essai biaxial et d'un essai de cisaillement simple.

Une première étude paramétrique nous a permis de montrer que l'angle de frottement interne et l'adhésion macroscopique ont des origines différentes à l'échelle des contacts. Plus précisément, nous observons que les propriétés de frottement locales (i.e., les coefficients de frottement de glissement et de roulement) sont à l'origine de l'angle de frottement interne, alors que l'adhésion aux contacts est le seul paramètre de résistance local à l'origine de l'adhésion macroscopique. D'autre part, l'analyse des angles de frottement interne, au pic et résiduel, et de la dilatance du milieu nous a permis de montrer que, comme dans les milieux pulvérulents, la différence entre les angles de frottement interne est corrélée à l'angle de dilatance du milieu. Nous trouvons, pour notre milieu cohésif, une relation analogue à la relation

contrainte-dilatance de Taylor, largement vérifiée pour les sols pulvérulents (e.g., voir [91]). Nous observons également que l'angle de frottement interne à l'état pic peut être décomposé additivement en trois contributions dont l'origine est différente : (1) une contribution géométrique donnée par l'angle de frottement interne dans la limite des particules sans frottement, (2) une contribution frictionnelle associée aux coefficients de frottement locaux, et (3) une contribution associée à la dilatance du milieu.

Les résultats de cette première étude nous ont permis d'identifier un point important : il n'est pas facile de distinguer l'effet de chacun des coefficients de frottement microscopiques sur l'angle de frottement interne du milieu. En particulier, nous avons vu que, lorsque le coefficient de frottement au glissement augmente, une transition a lieu entre deux types de comportements : un dans lequel l'angle de frottement interne est principalement contrôlé par le frottement de glissement, et un autre dans lequel l'angle de frottement interne est contrôlé par le frottement de roulement. Nous nous sommes posé aussi la question de l'effet des deux coefficients de frottement locaux dans la microstructure du milieu. Ces questions nous ont motivé à entreprendre une deuxième étude paramétrique, dédiée à étudier plus finement la réponse du milieu en fonction de la valeur relative des deux coefficients de frottement aux contacts.

Dans cette deuxième étude, nous avons étudié un milieu granulaire non cohésif cisailé à l'état stationnaire (état critique). Ceci nous a permis de mettre en évidence que l'effet des deux paramètres de frottement locaux est presque symétrique. En particulier, nous trouvons que l'augmentation du coefficient de frottement de roulement provoque aussi une transition entre deux types de comportements : un dans lequel l'angle de frottement interne est contrôlé par le frottement de roulement, et un autre dans lequel l'angle de frottement interne est contrôlé par le frottement de glissement. Cette symétrie fait apparaître deux régimes distincts dans lesquels l'angle de frottement interne est contrôlé soit par le coefficient de frottement de glissement soit par le coefficient de frottement de roulement. Nous observons qu'il existe une relation entre ces deux régimes et la prédominance de chacun des modes de mouvement relatif (i.e., le glissement ou le roulement) au niveau des contacts, évaluée en termes des contributions relatives des populations des contacts glissants et roulants à l'angle de frottement interne. Ces résultats montrent, quantitativement, pour quelles combinaisons des deux coefficients de frottement locaux l'un des modes de mouvement relatif au niveau des contacts est le mode dominant.

L'étude détaillée de la texture du milieu, ainsi que des distributions des forces et des moments de contact, nous a permis de montrer que le fait de contraindre simultanément le glissement et le roulement au niveau des

contacts a des importantes répercussions dans la microstructure du milieu. Plus précisément, nous observons que l'utilisation de valeurs élevées de ces deux coefficients favorise l'effet de voûte et, en conséquence, provoque une modification de la morphologie du squelette des particules portant des forces non nulles, qui développe un aspect colonnaire. Nous trouvons que la formation des colonnes affecte fortement le rôle mécanique joué par le réseau des contacts faibles. En particulier, une transition a lieu, pour des valeurs précises de frottement de glissement et de roulement, vers un régime où le sous-ensemble de contacts qui supportent latéralement les chaînes de forces (le réseau de support) est complètement absent, et les deux réseaux de contacts, fort et faible, contribuent à résister la charge déviatorique imposée au milieu granulaire. Dans ce régime, les colonnes de particules sont la structure de transmission de forces dominante, et la densité volumique du squelette des particules portant des forces non nulles est extrêmement faible (e.g., 30%). Curieusement, la disparition du réseau de support n'implique pas une diminution dans la proportion de contacts portant des faibles forces. Au contraire, la proportion de ces contacts augmente, même si leur rôle mécanique n'est plus le même. Ceci résulte d'un important changement dans les conditions d'équilibre des particules lorsque les contacts ont la possibilité de résister au roulement.

Nous voyons donc que l'utilisation d'un modèle de contact très simple nous a permis de mettre en évidence plusieurs aspects caractéristiques du comportement des milieux granulaires cimentés ainsi que des milieux granulaires pouvant résister au roulement au niveau des contacts. Ces deux éléments sont communs à des nombreux géomatériaux et, par conséquent, leur étude est d'une importance majeure dans des nombreuses disciplines telles que la géologie, la mécanique des sols, et la physique de la matière condensée. Nous croyons que, bien que quelques-unes des corrélations quantitatives présentées dans ce travail puissent varier suivant le modèle de contact utilisé, certains de nos résultats représentent des traits de comportement robustes des géomatériaux, et, dans ce sens, ils sont pertinents pour une meilleure compréhension du rôle joué par les paramètres locaux dans le problème extrêmement riche du cisaillement des milieux granulaires.

A la fin de ce travail, nous avons appliqué la même méthode de simulation numérique discrète à l'étude d'un processus naturel : les glissements de terrain. Nous avons développé une méthodologie qui permet de modéliser numériquement ces processus en tenant compte de la géométrie initiale du système, de la résistance des géomatériaux impliqués, et d'un mécanisme de déclenchement. Ceci permet d'intégrer, dans le même modèle, les phases d'initiation et de propagation de l'instabilité. Cette méthodologie constitue un outil complémentaire aux approches traditionnelles (e.g., continues), car

## Conclusion

---

elle permet d'aborder le problème des glissements de terrain avec une nouvelle "optique", qui cherche à expliquer les comportements macroscopiques en fonction des interactions qui ont lieu à l'échelle des particules. Ceci, tout en étant conscients de que ces particules ne représentent pas les particules réelles de sol et de roche. Cette approche offre des grandes opportunités de développement et d'application à l'étude des instabilités gravitaires, rendant possible l'étude détaillée des questions telles que la morphologie des dépôts et la mobilité extrême des avalanches. Par exemple, la simulation d'un exemple hypothétique de glissement de terrain dans un monoclinal déstabilisé par la montée progressive d'une nappe d'eau nous a permis d'estimer les ordres de grandeur des vitesses de propagation du glissement ainsi que d'observer les structures de déformation présentes dans le dépôt final.

# Chapitre 7

## Annexe A : Récapitulatif des notations principales

### 7.1 Paramètres de résistance au niveau des contacts

#### 7.1.1 Milieux cohésifs

Notre modèle de cohésion local cherche à imiter la cohésion par cimentation, comme celle qu'on observe dans les sols cimentés et les roches. Trois modes de rupture des liens cohésifs sont possibles (la traction, le glissement, et la flexion), qui correspondent aux trois degrés de liberté relatifs au niveau des contacts (l'écartement, le glissement, et le roulement) (Figure 7.1).

La résistance des liens cohésifs dépend de trois paramètres :

- a)  $\sigma_a$  : Adhésion microscopique. L'adhésion  $\sigma_a$  a la dimension d'une contrainte, et, multipliée par la distance inter centre  $\ell$  des particules en contact, elle nous donne la force de traction  $f_a$  nécessaire pour briser un lien cohésif en traction :

$$f_a = \ell \sigma_a. \quad (7.1)$$

- b)  $\phi_s$  : Angle de frottement de glissement. Cet angle peut aussi être exprimé comme un coefficient adimensionnel appelé le coefficient de frottement de glissement  $\mu_s = \tan \phi_s$ . Dans la loi de frottement de Coulomb, ce paramètre permet de relier la force normale  $f^n$  dans un contact avec la force tangentielle  $f_{max}^t$  qui doit être appliquée pour provoquer le glissement du contact (Figure 7.2a) :

$$f_{max}^t = \mu_s (f_a + f^n). \quad (7.2)$$

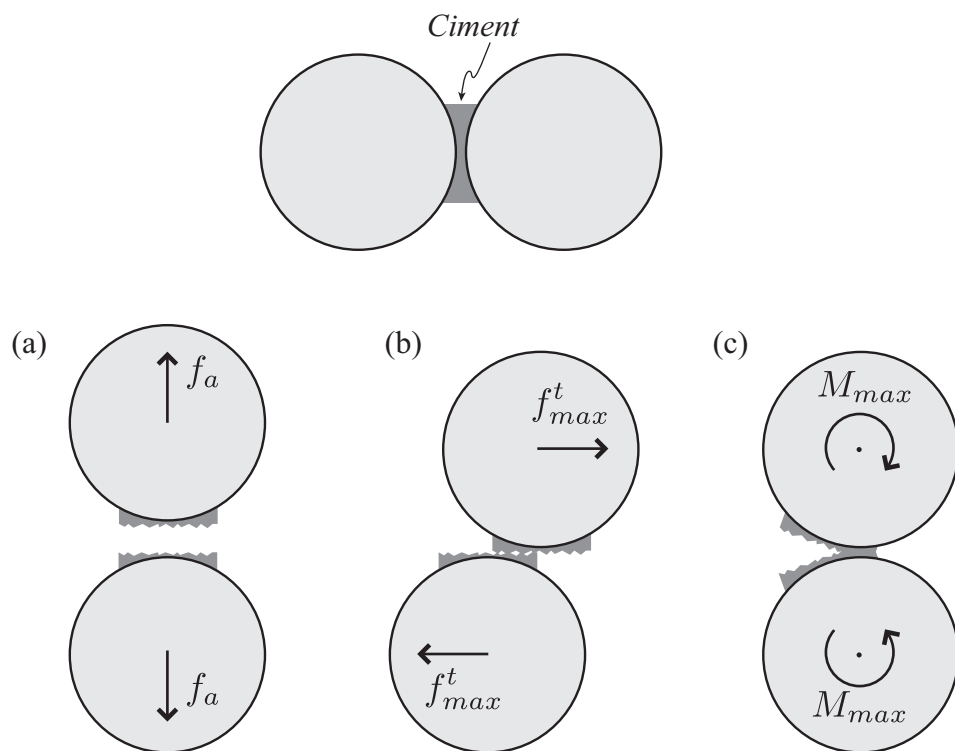


FIG. 7.1 – Modes de rupture d'un lien cohésif : (a) traction, (b) cisaillement, (c) flexion.

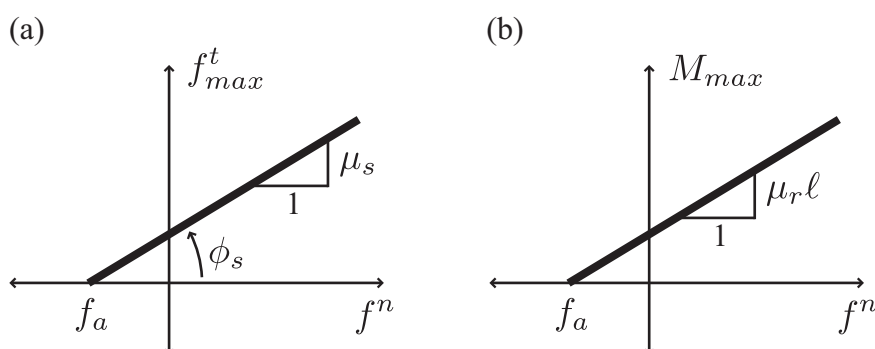


FIG. 7.2 – (a) Loi de frottement de Coulomb. (b) Loi de frottement de roulement.

- c)  $\mu_r$  : Coefficient de frottement de roulement. Dans la loi de frottement de roulement (qui est analogue à la loi de frottement de Coulomb), ce paramètre permet de relier la force normale  $f^n$  dans un contact avec le moment  $M_{max}$  qui doit être appliqué pour provoquer le roulement du contact (Figure 7.2b) :

$$M_{max} = \mu_r \ell (f_a + f^n). \quad (7.3)$$

La longueur  $\mu_r \ell$  peut être interprétée comme une longueur proportionnelle au bras de levier du moment  $M_{max}$ .

### 7.1.2 Milieux pulvérulents (non cohésifs)

Une fois qu'un lien cohésif a été brisé, nous considérons que la résistance à la traction disparaît, et le contact devient non cohésif. La résistance d'un contact non cohésif ne dépend donc que de deux paramètres : les coefficients de frottement de glissement et de roulement. Les expressions 7.2 et 7.3 deviennent

$$f_{max}^t = \mu_s f^n \quad \text{et} \quad (7.4)$$

$$M_{max} = \mu_r \ell f^n. \quad (7.5)$$

## 7.2 Chapitre 3

Nos échantillons granulaires vérifient le critère de rupture de Mohr-Coulomb. Dans ce critère de rupture, la résistance au cisaillement d'un matériau



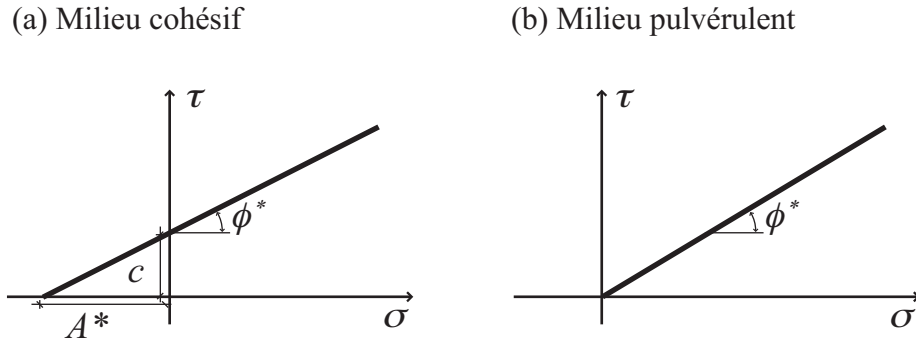


FIG. 7.3 – (a) Dans les matériaux cohésifs la surface limite de charge est définie à l'aide de deux paramètres : un angle de frottement  $\phi^*$  et une cohésion  $c$ . (b) Dans les matériaux pulvérulents, la surface limite de charge est uniquement définie par l'angle de frottement interne  $\phi^*$ .

cohésif est caractérisée à l'aide de deux paramètres, un angle de frottement interne  $\phi^*$  et une cohésion  $c$ , et la résistance au cisaillement d'un matériau pulvérulent est uniquement caractérisée par l'angle de frottement interne  $\phi^*$  (Figure 7.3). Nous utilisons l'indice  $*$  pour distinguer les angles de frottement macroscopiques de leur analogue local.

- a)  $\phi^*$  : Angle de frottement interne. Cet angle peut aussi être exprimé comme un coefficient adimensionnel appelé le coefficient de frottement interne  $\mu^* = \tan \phi^*$ . Ce paramètre relie la contrainte normale  $\sigma$  appliquée sur un plan avec la contrainte tangentielle  $\tau_{max}$  nécessaire pour provoquer le glissement le long de ce plan ( $\tau_{max} \propto \tan \phi^* \sigma$ ). Il correspond aussi à la pente de la surface limite de charge du matériau.
- b)  $c$  : Cohésion. La cohésion est une propriété qui résulte de l'adhérence entre les particules. Elle correspond à l'intersection de la surface limite de charge du matériau avec l'axe des contraintes tangentielles  $\tau$ .

Une deuxième alternative pour caractériser le comportement cohésif du matériau est de considérer l'intersection de la surface limite de charge avec l'axe des contraintes normales  $\sigma$ . Ce paramètre est appelé l'adhésion macroscopique  $A^*$  (Figure 7.3, à nouveau, nous utilisons l'indice  $*$  pour distinguer l'adhésion macroscopique de son analogue microscopique). L'adhésion  $A^*$  peut être reliée à la cohésion  $c$  par l'expression suivante

$$A^* = \frac{c}{\mu^*} \tag{7.6}$$

Dans la thèse, nous avons étudié  $A^*$  et non pas  $c$ . La raison en est que, au niveau des contacts, nous avons imposé une adhésion et non pas une

cohésion. On s'attend à ce que les relations entre  $\sigma_a$  et  $A^*$  soient plus simples que les relations entre  $\sigma_a$  et  $c$ .

### 7.2.1 Angles de frottement interne

Dans le chapitre 3, nous avons vu que, lorsqu'on cisaille un milieu cohésif, la déformation se concentre dans des bandes de cisaillement. A l'intérieur de ces bandes, le milieu granulaire est non cohésif, et le comportement macroscopique de l'échantillon est celui d'un matériau pulvérulent. Pour cette raison, la cohésion  $c$  et l'adhésion macroscopique  $A^*$  n'ont un sens qu'à l'état initial de l'essai.

En revanche, l'angle de frottement interne est bien défini tout le long de l'essai, de telle sorte que plusieurs angles de frottement peuvent être calculés suivant l'état du milieu auquel on s'intéresse (Figure 7.4) :

- a)  $\phi_P^*$  : Angle de frottement au pic. C'est l'angle de frottement du matériau au pic de résistance.
- b)  $\phi_R^*$  : Angle de frottement résiduel. C'est l'angle de frottement du matériau après le pic, une fois que la résistance du matériau ne change plus avec la déformation. Dans cet état, le milieu peut encore être en train de changer son volume.
- c)  $\phi_C^*$  : Angle de frottement du matériau à l'état stationnaire. Cet état est caractérisé par une résistance constante et une déformation volumique nulle. En mécanique des sols, cet état est appelé *l'état critique*.

Dans le chapitre 3, nous avons aussi défini plusieurs angles de frottement macroscopiques en fonction de l'angle de frottement de glissement (Figure 7.5) :

- d)  $\phi_0^*$  : Angle de frottement dans la limite des particules sans-frottement (pour  $\mu_s = 0$ ).
- e)  $\phi_\infty^*$  : Valeur de saturation de l'angle de frottement résiduel  $\phi_R^*$  avec l'angle de frottement de glissement  $\phi_s$ . Cet angle dépend uniquement de  $\mu_r$ .
- f)  $\phi_\mu^*$  : C'est la partie de l'angle de frottement résiduel  $\phi_R^*$  qui reste, une fois qu'on a enlevé la contribution "géométrique"  $\phi_0^*$ . Nous l'avons appelé  $\phi_\mu^*$  car il dépend principalement des coefficients de frottement locaux.

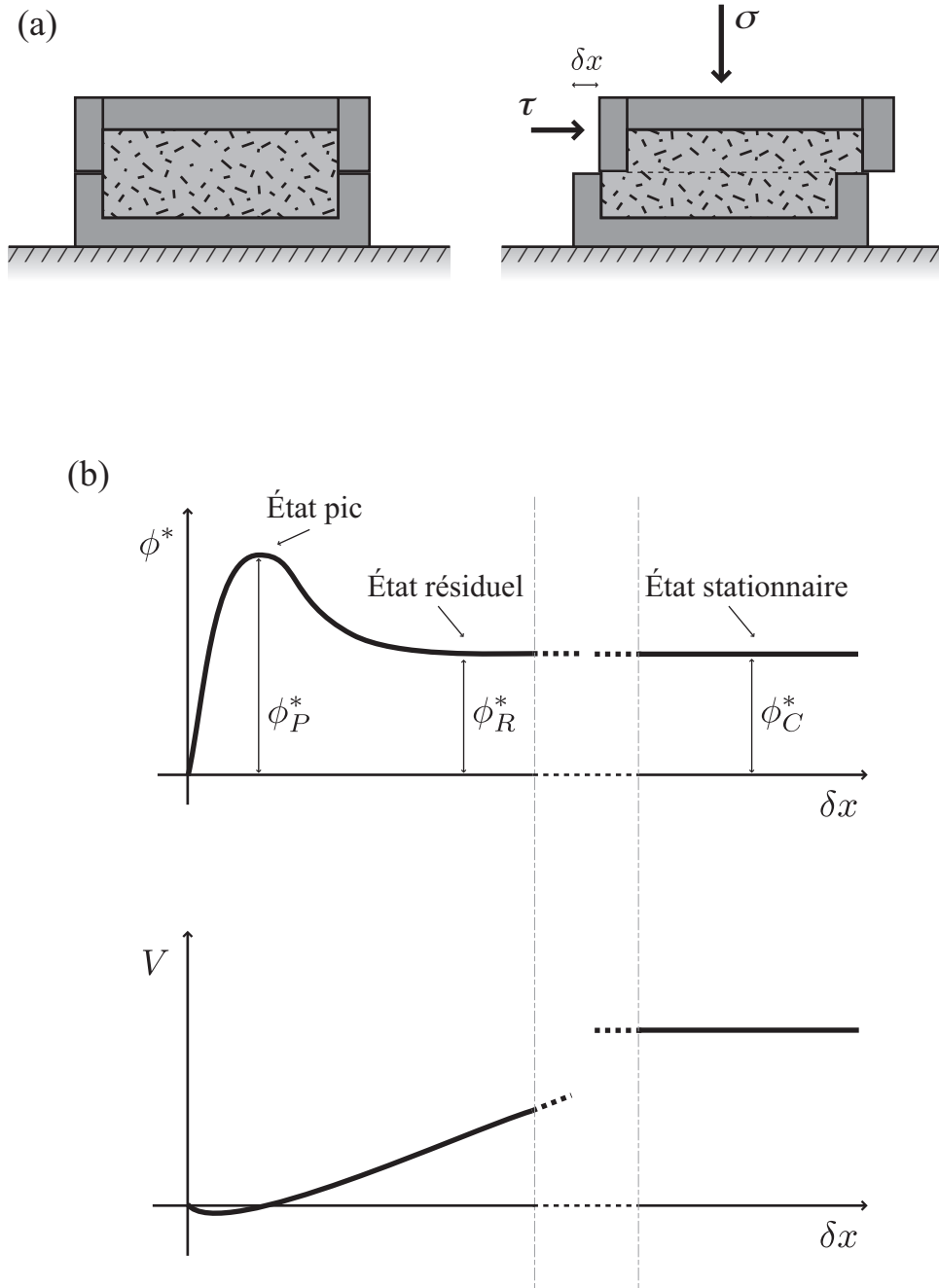


FIG. 7.4 – (a) Représentation schématique d'un essai de cisaillement direct. (b) Evolution de l'angle de frottement interne  $\phi^* = \tan^{-1}(\tau/\sigma)$  et du volume  $V$  de l'échantillon en fonction du cisaillement  $\delta x$ .

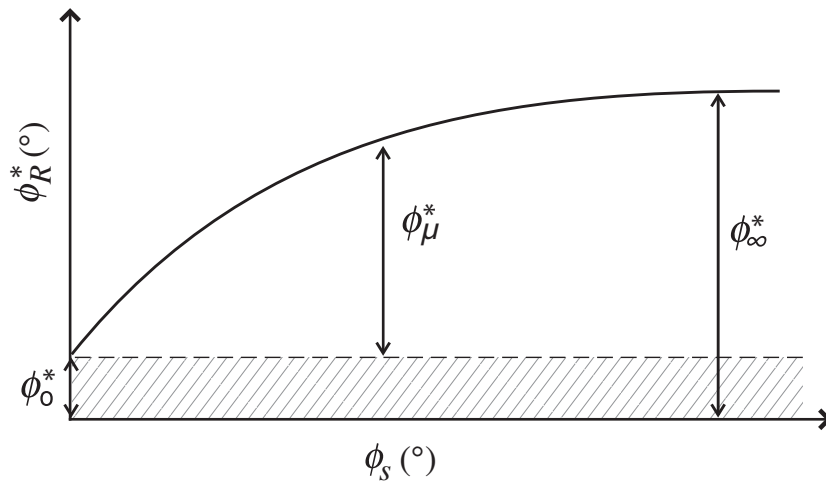


FIG. 7.5 – Angle de frottement interne résiduel  $\phi_R^*$  en fonction de l'angle de frottement local  $\phi_s$ .

## 7.2.2 Angle de dilatance

L'angle de dilatance  $\psi$  représente la tendance du milieu à changer son volume lorsqu'il est cisailé (Figure 7.6).

Dans un essai biaxial en 2D, comme celui que nous avons analysé dans le chapitre 3, l'angle de dilatance  $\psi$  peut être calculé à l'aide de l'expression suivante

$$\sin \psi = \frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon_q}, \quad (7.7)$$

où les déformations volumique  $\varepsilon_p$  et déviatorique  $\varepsilon_q$  sont données par

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_q &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (7.8)$$

où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_3$  sont les déformations principales majeure et mineure.

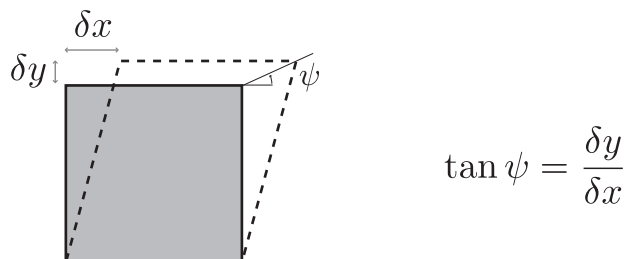


FIG. 7.6 – Définition de l'angle de dilatance  $\psi$ .

## 7.3 Chapitre 4

Dans ce chapitre, nous avons étudié un milieu granulaire à l'état stationnaire. Nous avons caractérisé la résistance au cisaillement de ce matériau à l'aide du coefficient de frottement à l'état stationnaire  $\mu_C^* = \tan \phi_C^*$ . Nous avons aussi analysé la contribution de différents sous ensembles de contacts au coefficient  $\mu_C^*$  :

- a)  $\mu_{s-nr}^*$ ,  $\mu_{ns-r}^*$ ,  $\mu_{s-r}^*$ , et  $\mu_{ns-nr}^*$  : Coefficients de frottement partiels. Ces quatre coefficients représentent les contributions de quatre différentes populations de contacts à  $\mu_C^*$ . Ces quatre populations de contacts sont
- contacts “glissants et non roulants” ( $s-nr$ )
  - contacts “non-glissants et roulants” ( $ns-r$ )
  - contacts “glissants et roulants” ( $s-r$ )
  - contacts “non-glissants et non-roulants” ( $ns-nr$ )
- Les indices “ $s$ ” et “ $r$ ” correspondent aux termes en anglais “*sliding*” et “*rolling*”.
- b)  $\mu^*(\xi)$  : Contribution du sous ensemble de contacts  $\mathcal{S}(\xi)$  à  $\mu_C^*$ . Le sous ensemble  $\mathcal{S}(\xi)$  est composé par tous les contacts portant un niveau de force normale  $\xi = f_n / \langle f_n \rangle$  tel que

$$\xi \in [\xi - \Delta\xi, \xi + \Delta\xi], \quad (7.9)$$

où  $f_n / \langle f_n \rangle$  est la force normale moyenne dans le système.

## 7.4 Chapitre 5

En plus des paramètres de résistance décrits plus haut, à la fin du chapitre 5, nous avons introduit un coefficient de frottement qui varie le long de la simulation. Il s'agit du coefficient de frottement  $\mu_{SR}$  entre les particules et la surface de rupture. Nous avons fait varier ce coefficient dans le but de simuler un mécanisme d'affaiblissement dynamique le long de cette surface. Pour ce faire, nous avons supposé que le coefficient  $\mu_{SR}$  diminue en fonction du déplacement des particules en contact avec cette surface  $D$ . Si  $D$  est inférieur à une distance critique  $D_c = 5\text{m}$ , nous considérons que le cisaillement cumulé dans la surface de rupture n'est pas suffisant pour activer le mécanisme d'affaiblissement dynamique, et le coefficient  $\mu_{SR}$  est égal à 0.3 ; en revanche, si  $D$  est supérieur à  $D_c$ , nous considérons que le mécanisme d'affaiblissement dynamique est actif, et le coefficient de frottement est  $\mu_{SR}^c = 0$ .

# Bibliographie

- [1] P. Alfonsi, J. L. Durville, and X. Rachez. Quelques applications de la méthode des éléments distincts en mécanique des roches. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 214 :31–43, 1998.
- [2] F. Alonso-Marroquín, I. Vardoulakis, H. J. Herrmann, D. Weatherley, and P. Mora. Effect of rolling on dissipation in fault gouges. *Phys. Rev. E*, 74 :031306, 2006.
- [3] J. P. Bardet. Observations on the effects of particle rotations on the failure of idealized granular materials. *Mechanics of materials*, 18 :159–182, 1994.
- [4] A. W. Bishop. Correspondence on “shear characteristics of a saturated silt measured in triaxial compression”. *Géotechnique*, 4 :43–45, 1954.
- [5] R. Olivera Bonilla and L. Rothenburg. Effects of interparticle friction on the undrained response of granular media. In H.J. Herrmann R. García Rojo and S. McNamara, editors, *Powders and Grains, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart*, volume 2, pages 1097–1100. A.A. Balkema, 2005.
- [6] I. Bratberg, F. Radjai, and A. Hansen. Dynamic rearrangements and packing regimes in randomly deposited two-dimensional granular beds. *Phys. Rev. E*, 66 :031303–1, 2002.
- [7] F. Calvetti and R. Nova. Micro-macro relationships from dem simulated element and in-situ tests. In H.J. Herrmann R. García Rojo and S. McNamara, editors, *Powders and Grains, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart*, volume 1, pages 245–249. A.A. Balkema, 2005.
- [8] F. Calvetti, R. Nova, and S. Utili. On modeling rock slope retreat by the discrete element method. In H.J. Herrmann R. García Rojo and S. McNamara, editors, *Powders and Grains, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart*, volume 1, pages 671–675. A.A. Balkema, 2005.

- [9] B. Cambou, Ph. Dubujet, and C. Nouguier-Lehon. Anisotropy in granular materials at different scales. *Mechanics of materials*, 36 :1185–1194, 2004.
- [10] C. S. Campbell, P. Cleary, and M. Hopkins. Large-scale landslide simulations : Global deformation, velocities, and basal friction. *J. Geophys. Res.*, 100(B5) :8267–8283, 1995.
- [11] Ch. S. Campbell. Granular material flows - an overview. *Powder Technology*, 162(3) :208–229, 2006.
- [12] A. Caquot. *Équilibre des massifs à frottement interne - Stabilité des terres pulvérentes ou cohérentes*. Gauthier - Villars, Éditeur, Paris, 1934.
- [13] K-J Chang, A. Taboada, and Y-C Chan. Geological and morphological study of the jiufengershan landslide triggered by the chi-chi taiwan earthquake. *Geomorphology*, 71(3-4), 2005a.
- [14] K-J Chang, A. Taboada, M-L Lin, and R-F Chen. Analysis of landsliding by earthquake shaking using a block-on-slope thermo-mechanical model : Example of jiufengershan landslide, central taiwan. *Eng. Geol.*, 80(1-2) :151–163, 2005b.
- [15] Chindao. Borehole investigations in the jiufengershan landslide, internal report presented to the school of forestry and resource conservation. Technical report, Chindao Engineering Consultants Ltd. and College of Agriculture, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 2001. in chinese.
- [16] Chindao. Borehole investigations in the jiufengershan landslide, internal report presented to the school of forestry and resource conservation. Technical report, Chindao Engineering Consultants Ltd., and College of Agriculture, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 2002. in chinese.
- [17] P. R. Cobbold and L. Castro. Fluid pressure and effective stress in sandbox models. *Tectonophysics*, 301(1-2) :1–19, 1999.
- [18] P. R. Cobbold, R. Mourgues, and K. Boyd. Mechanism of thin-skinned detachment in the amazon fan : assessing the importance of fluid overpressure and hydrocarbon generation. *Marine and petroleum geology*, 21(8) :013–1025, 2004.
- [19] R. Condotta and A. de Ryck. Dilatancy and yield stress of dry and wet beads. In H.J. Herrmann R. García Rojo and S. McNamara, editors, *Powders and Grains, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart*, volume 1, pages 611–615. A.A. Balkema, 2005.

- 
- [20] D. M. Cruden and D. J. Varnes. Landslide types and processes. In A. K. Turner and R. L. Schuster, editors, *Landslides : Investigation and Mitigation*, special report 247, chapter 3, pages 36–75. Transportation Research Board, 1996.
- [21] P. A. Cundall and O. D. L. Stack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- [22] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnov, J. N. Roux, and F. Chevoir. Rheo-physics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72 :021309, 2005.
- [23] P. G. de Gennes. Granular matter : a tentative view. *Reviews of Modern Physics*, 71(2) :S374–S382, 1999.
- [24] J.-Y. Delenne, M. S. El Youssoufi, F. Cherblanc, and J.-C. Bénéat. Mechanical behaviour and failure of cohesive granular materials. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 28 :1577–1594, 2004.
- [25] R. P. Denlinger and R. M. Iverson. Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain : 1. experimental tests. *J. Geophys. Res.*, 109(F1) :F01015.1–F01015.16, 2004.
- [26] R. P. Denlinger and R. M. Iverson. Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain : 1. theory and computation. *J. Geophys. Res.*, 109(F1) :F01014.1–F01014.14, 2004.
- [27] A. L. Densmore, R. S. Anderson, B. G. McAdoo, and M. A. Ellis. Hills-lope evolution by bedrock landslides. *Science*, 275(5298) :369–372, 1997.
- [28] N. Estrada, A. Taboada, and F. Radjaï. Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance. *Soumis le 8 mai 2008 à Phys. Rev. E*.
- [29] S. G. Evans, G. Scarascia, A. Strom, and R; L. Hermanns, editors. *Landslides from massive rock slope failure. IV : Earth and environmental sciences - vol. 302*. NATO Science Series, 2006.
- [30] T. Gröger, U. Tüzün, and D. M. Heyes. Modelling and measuring of cohesion in wet granular materials. *Powder Technology*, 133 :203–215, 2003.
- [31] M. R. Horne. The behaviour of an assambley of rotound, rigid, cohesionless particles. i. In *Proc. R. Soc. A*, volume 286, pages 62–78. The Royal Society, 1965.
- [32] K. Hutter, T. Koch, C. Plüs, and S. B. Savage. The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. *Acta Mechanica*, 109(1-4) :127–165, 1995.



- [33] O. G. Ingles. Bonding forces in soils, part 3 : A theory of tensile strength for stabilized and naturally coherent soils. In *Proceedings of the first conference of the Australian road research board*, volume I, pages 1025–1047, 1962.
- [34] R. M. Iverson. The physics of debris flows. *Reviews of Geophysics*, 35(3) :245–296, 1997.
- [35] K. Iwashita and M. Oda. Rolling resistance at contacts in simulation of shear band development by dem. *Journal of engineering mechanics*, 124(3) :285–292, 1998.
- [36] K. Iwashita and M. Oda. Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Powder Technology*, 109(1-3) :192–205, 2000.
- [37] H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68(4) :1259–1273, 1996.
- [38] M. Jean. *Mechanics of Geometrical Interfaces*, pages 463–486. Elsevier, New York, 1995.
- [39] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. In *Special issue on modeling contact and friction*. 1999.
- [40] M Jean. *Micromécanique des matériaux granulaires*, chapter Simulation numérique discrète, pages 199–324. Hermes, Paris, 2001.
- [41] M. Jiang, S. Leroueil, M. ASCE, and J-M. Konrad. Yield of micro-structured geomaterial by distinct element method analysis. *Journal of engineering mechanics, ASCE*, 131(11) :1209–1213, 2005.
- [42] M. J. Jiang, H. S. Yu, and D. Harris. Bond rolling resistance and its effect on yielding of bonded granulates by dem analyses. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 30(8) :723–761, 2006.
- [43] T.H. Kim and C. Hwang. Modeling of tensile strength on moist granular earth material at low water content. *Engineering Geology*, 69 :233–244, 2003.
- [44] N. P. Kruyt and L. Rothenburg. Shear strength, dilatancy, energy and dissipation in quasi-static deformation of granular materials. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, (P07021), 2006.
- [45] S. Latham, S. Abe, and P. Mora. Microscopic friction response of rotational and non-rotational lattice solid gouge in 2d and 3d. In H.J. Herrmann R. García Rojo and S. McNamara, editors, *Powders and Grains, 5th. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Stuttgart*, volume 1, pages 213–217. A.A. Balkema, 2005.

- 
- [46] S. Luding. *Zur Beschreibung komplexen Materialverhaltens*. 2001.
- [47] A. Mahboubi, A. Ghaouti, and B. Cambou. La simulation numérique discrète du comportement des matériaux granulaires. *Revue Française de Géotechnique*, 76 :45–61, 1996.
- [48] A. Mangeney-Castelnau, J.P. Vilotte, M. O. Bristeau, B. Perthame, F. Bouchut, C. Simeoni, and S. Yerneni. Numerical modeling of avalanches based on saint venant equations using a kinetic scheme. *J. Geophys. Res.*, 108(B11) :EPM9.1–EPM9.18, 2003.
- [49] GDR MiDi. On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 14(4) :341–365, 2004.
- [50] J. K. Mitchell and K. Soga. *Fundamentals of Soil Behavior, third edition*. Wiley, 2005.
- [51] J. J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 13 (Suppl.) (4) :93–114, 1994.
- [52] J. J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Singapore, 1997. World Scientific.
- [53] R. Mourgues. *Suppression de fluide et décollements : modélisations analogique et numérique*. PhD thesis, Université de Rennes 1, Rennes, France, december 2003.
- [54] R. Mourgues and P. R. Cobbold. Some tectonic consequences of fluid overpressures and seepage forces as demonstrated by sandbox modelling. *Tectonophysics*, 376(1-2) :75–97, 2003.
- [55] D. M. Mueth, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E*, 57 :3164, 1998.
- [56] M. Oda. The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand. *Soils and foundations*, 12(2) :1–18, 1972.
- [57] M. Oda and K. Iwashita. Study on couple stress and shear band development in granular media based on numerical simulation analyses. *International Journal of Engineering Science*, 38(15) :1713–1740, 2000.
- [58] M. Oda and J. Konishi. Microscopic deformation mechanism of granular material in simple shear. *Soils and foundations*, 14(4) :25–38, 1974.
- [59] M. Oda, J. Konishi, and S. Nemat-Nasser. Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials : effects of particle rolling. *Mechanics of materials*, 1 :269–283, 1982.

- [60] L. Oger, S. B. Savage, D. Corriveau, and M. Sayed. Yield and deformation of an assembly of disks subjected to a deviatoric stress loading. *Mechanics of materials*, 27 :189–210, 1998.
- [61] M. Pastor, J. A. Fernández Merodo, M. Quecedo, M. I. Herreros, E. González, and P. Mira. Modelling of debris flows and flow slides. *Revue française de génie civil*, 6(6) :1213–1232, 2002.
- [62] P. E. Peyneau and J. N. Roux. Frictionless bead packs have macroscopic friction, but no dilatancy. 2008. Unpublished - available on <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00250364/fr/>.
- [63] P. Pierrat. Tensile strength of wet granular materials. *Powder Technology*, 91(2) :83–93, 1997.
- [64] D. O. Potyondy and P. A. Cundall. A bonded-particle model for rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 41(8) :1329–1364, 2004.
- [65] W. Powrie, Q. Ni, R. M. Harkness, and X. Zang. Numerical modelling of plane strain tests on sands using a particulate approach. *Géotechnique*, 55(4) :297–306, 2005.
- [66] F. Radjaï, D. E. Wolf, M. Jean, and J. J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1) :61–64, 1998.
- [67] Farhang Radjai, Michel Jean, Jean-Jacques Moreau, and Stéphane Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(2) :274–, July 1996.
- [68] J. Rajchenbach. Granular flows. *Advances in Physics*, 49(2) :229–256, 2000.
- [69] O. Reynolds. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, with experimental illustrations. *Philosophical Magazine, Series 5*, 20 :469–481, 1885.
- [70] V. Richefeu, M. S. El Youssoufi, and F. Radjaï. Shear strength properties of wet granular materials. *Physical Review E*, 73 :051304, 2006.
- [71] P. G. Rognon, J. N. Roux, D. Wolf, M. Naaim, and F. Chevoir. Rheo-physics of cohesive granular materials. *Europhys. Lett.*, 74(4) :644–650, 2006.
- [72] P. W. Rowe. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. In *Proc. R. Soc. A*, volume 269, pages 500–527. The Royal Society, 1962.
- [73] H. Rumpf. Zur theorie der zugfestigkeit von agglomeraten bei kraftue-bertragung an kontaktpunkten. *Chemie Ingenieur Technik*, 42(8) :538–540, 1970.

- 
- [74] J. C. Santamarina. Soil behavior at the microscale : particle forces. In *Soil Behavior and Soil Ground Construction, A symposium in honor of Charles C. Ladd Ladd Symposium, MIT, Boston, 2001*.
- [75] S. B. Savage and K. Hutter. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *Journal of fluid mechanics*, 199 :177–215, 1989.
- [76] S. B. Savage and K. Hutter. The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. part i : Analysis. *Acta Mechanica*, 86(1-4) :201–223, 1991.
- [77] M. J. Selby, editor. *Hillslope Materials and Processes, second edition*. Oxford University Press, USA, 1993.
- [78] A. E. Skinner. A note on the influence of interparticle friction on the shearing strength of a random assembly of spherical particles. *Géotechnique*, 19(1) :150–157, 1969.
- [79] S. A. Sørensen and B. Bauer. On the dynamics of the köfels sturzstrom. *Geomorphology*, 54(1-2) :11–19, 2003.
- [80] L. Staron. Mobility of long-runout rock flows : a discrete numerical investigation. *Geophysical Journal International*, 172 :455–463, 2008.
- [81] L. Staron and E. J. Hinch. The spreading of a granular mass : role of grain properties and initial conditions. *Granular Matter*, 9 :205–217, 2007.
- [82] L. Staron, F. Radjaï, and J.-P. Vilotte. Multi-scale analysis of the stress state in a granular slope in transition to failure. *Eur. Phys. J. E*, 18(3) :311–320, 2005.
- [83] A. Taboada, K.-J. Chang, F. Radjaï, and F. Bouchette. Rheology, force transmission, and shear instabilities in frictional granular media from biaxial numerical tests using the contact dynamics method. *Journal of Geophysical Research*, 110(9) :B09202, 2005.
- [84] A. Taboada and N. Estrada. Discrete element simulation of rock-and-soil avalanches : 1. theory and computation. *Soumis le 31 mars 2008 à Quaternary Science Reviews, special issue “Natural Hazards, Extreme Events, and Mountain Topography”*.
- [85] A. Taboada, N. Estrada, and F. Radjaï. Additive decomposition of shear strength in cohesive granular media from grain-scale interactions. *Physical Review Letters*, 97(09) :098302, 2006.
- [86] P. A. Thompson and G. S. Grest. Granular flow : friction and the dilatancy transition. *Physical Review Letters*, 67(13) :1751–1754, 1991.

- [87] C. Thornton. Numerical simulations of deviatoric shear deformation of granular media. *Géotechnique*, 50(1) :43–53, 2000.
- [88] C. Thornton and G. Sun. Axisymmetric compression of 3d polydisperse systems of spheres. In C. Thornton, editor, *Powders and Grains, 2nd. International Conference on Micromechanics of Granular Media, Aston*, pages 129–134. A.A. Balkema, 1993.
- [89] E. Veveakis, I. Vardoulakis, and Giulio Di Toro. Thermoporoelasticity of creeping landslides : the 1963 vaiont slide, northern italy. *J. Geophys. Res.*, 112(F3) :F03026, 2007.
- [90] C. Wang, D. D. Tannant, and P. A. Lilly. Numerical analysis of the stability of heavily jointed rock slopes using pfc2d. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 40(3) :415–424, 2003.
- [91] D. M. Wood. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge, England, 1990.
- [92] Y. C. Zhou, B. D. Wright, R. Y. Yang, B. H. Xu, and A. B. Yu. Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation. *Physica A*, 269(2) :536–553, 1999.
- [93] Y. C. Zhou, B. H. Xu, A. B. Yu, and P. Zulli. Numerical investigation of the angle of repose of monosized spheres. *Phys. Rev. E*, 64 :021301, 2001.
- [94] Y. C. Zhou, B. H. Xu, A. B. Yu, and P. Zulli. An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. *Powder Technology*, 125(1) :45–54, 2002.
- [95] X. Zhuang, A. K. Didwania, and J. D. Goddard. Simulation of the quasi-static mechanics and scalar transport properties of ideal granular assemblages. *Journal of Computational physics*, 121(2) :331–346, 1995.



## **Étude numérique du cisaillement des géomatériaux granulaires cohésifs : passage micro-macro, microstructure, et application à la modélisation de glissements de terrain**

**Résumé :** Ce travail de thèse porte sur la modélisation numérique et l'analyse du cisaillement dans les milieux granulaires cohésifs. Dans le cadre de la méthode de la Dynamique des Contacts, nous avons développé un modèle de cohésion qui cherche à imiter la cohésion par cimentation. Ce modèle fait intervenir trois paramètres de résistance au niveau des contacts (une résistance à la traction, un coefficient de frottement de glissement, et un coefficient de frottement de roulement) ainsi qu'un critère de création et de rupture des liens cohésifs. Les contacts sont cohésifs au début des simulations et leur rupture entraîne la perte irréversible de la résistance à la traction. Nous avons fait varier les trois paramètres microscopiques et nous avons étudié leur influence dans la résistance au cisaillement, la dilatance, et la microstructure du milieu. Nos résultats montrent que le frottement interne et l'adhésion macroscopiques ont des origines microscopiques différentes. Nous observons aussi que la microstructure du milieu cisailé à l'état stationnaire (aussi connu comme "l'état critique") est fortement affectée par l'angle de frottement et la résistance au roulement au niveau des contacts. En particulier, le rôle mécanique du réseau faible change avec ces deux paramètres microscopiques, ce qui résulte de la formation d'une nouvelle structure de transmission de forces. D'autre part, nous avons appliqué cette méthode de simulation numérique à l'étude d'un processus naturel : les glissements de terrain. Nous avons développé une méthodologie qui tient compte de la morphologie initiale du système, de la résistance des géomatériaux, et d'un mécanisme de déclenchement, ce qui permet d'intégrer dans le même modèle les phases d'initiation et de propagation du glissement. Pour illustrer cette méthodologie, nous l'avons appliquée à la modélisation d'un exemple hypothétique d'avalanche déclenchée par la montée progressive du niveau d'une nappe d'eau.

**Mots clefs :** Matériaux granulaires, cisaillement, cohésion, résistance au roulement, Dynamique des Contacts, méthodes d'éléments distincts, glissements de terrain.

---

## **Numerical study of shear on cohesive granular geomaterials : micro-macro relations, microstructure, and application to the simulation of landslides**

**Summary :** The present PhD thesis is devoted to the numerical simulation and analysis of shear on cohesive granular materials. In the framework of the Contact Dynamics method, we developed a model of cohesive bonding, which mimics cohesion by cementation. This model involves three contact strength parameters (a tensile strength, a coefficient of sliding friction, and a coefficient of rolling friction) as well as a local criterion, which controls the creation and the breaking of cohesive bonds. All contacts are cohesive at the beginning of the numerical simulations, and contact rupture leads to an irreversible loss of tensile strength (debonding). We varied systematically the three contact strength parameters and studied their influence on the shear strength, the dilatancy, and the microstructure of the granular media. Our results show that internal friction and macroscopic tensile strength have different origins at the contact scale. We also find that the microstructure of the granular media, when sheared at the steady state (also known as the 'critical state'), is strongly affected by the local coefficients of sliding and rolling friction. In particular, the mechanical role of the weak network changes with these two contact parameters, which results from the formation of a new structure of force transmission. On the other hand, we also applied the same numerical simulation method to the simulation of landslides. We developed a methodology, which takes into account the initial morphology of the hillslope, the strength of geomaterials, and a triggering factor, integrating in the same model the initiation and propagation phases of the landslide. To illustrate this methodology, we applied it to the simulation of a hypothetical example of avalanche triggered by the progressive rise of a water table.

**Keywords :** Granular materials, shear, cohesion, rolling resistance, Contact Dynamics, discrete element methods, landslides.