



**HAL**  
open science

## Les Invariants du n- cube

Michel Mollard

► **To cite this version:**

Michel Mollard. Les Invariants du n- cube. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1981. Français. NNT : . tel-00295196

**HAL Id: tel-00295196**

**<https://theses.hal.science/tel-00295196>**

Submitted on 11 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble**  
*et à*  
**l' Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE**

*par*

**Michel MOLLARD**



**Les invariants du n-cube.**



soutenue le 12 novembre 1981 devant la Commission d'Examen :

Monsieur	C. BENZAKEN	: Président
Messieurs	J.-C. BERMOND	
	P. CAMION	Examineurs
	J.-M. LABORDE	
	C. PAYAN	



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

**PROFESSEURS ASSOCIES**

MM. CRABBE Pierre  
SUNIER Jules

CERMO  
Physique

**PROFESSEURS SANS CHAIRE**

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEUBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

#### MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
-------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD

M. René PAUTHENET

---

## PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

**CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)**

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

**Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)**

**E.N.S.E.E.G.**

MM.	ALLIBERT Michel
	BERNARD Claude
	CAILLET Marcel
Mme	CHATILLON Catherine
MM.	COULON Michel
	HAMMOU Abdelkader
	JOUD Jean-Charles
	RAVAINE Denis
	SAINFORT

**C.E.N.G.**

MM. SARRAZIN Pierre  
SOUQUET Jean-Louis  
TOUZAIN Philippe  
URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

**E.N.S.M.E.E.**

MM. BISCONDI Michel  
BOOS Jean-Yves  
GUILHOT Bernard  
KOBILANSKI André  
LALAUZE René  
LANCELOT François  
LE COZE Jean  
LESBATS Pierre  
SOUSTELLE Michel  
THEVENOT François  
THOMAS Gérard  
TRAN MINH Canh  
DRIVER Julian  
RIEU Jean

**E.N.S.E.R.G.**

MM. BOREL Joseph  
CHEHIKIAN Alain  
VIKTOROVITCH Pierre

**E.N.S.I.E.G.**

MM. BORNARD Guy  
DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
JAUSSAUD Pierre  
Mme JOURDAIN Geneviève  
MM. LEJEUNE Gérard  
PERARD Jacques

**E.N.S.H.G.**

M. DELHAYE Jean-Marc

**E.N.S.I.M.A.G.**

MM. COURTIN Jacques  
LATOMBE Jean-Claude  
LUCAS Michel  
VERDILLON André



*Je remercie les membres de mon jury :*

*C. BENZAKEN, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, qui a accepté de le présider.*

*J.C. BERMOND, Maître de Recherche au C.N.R.S., qui a bien voulu corriger les épreuves.*

*P. CAMION, Directeur de Recherche au C.N.R.S. .*

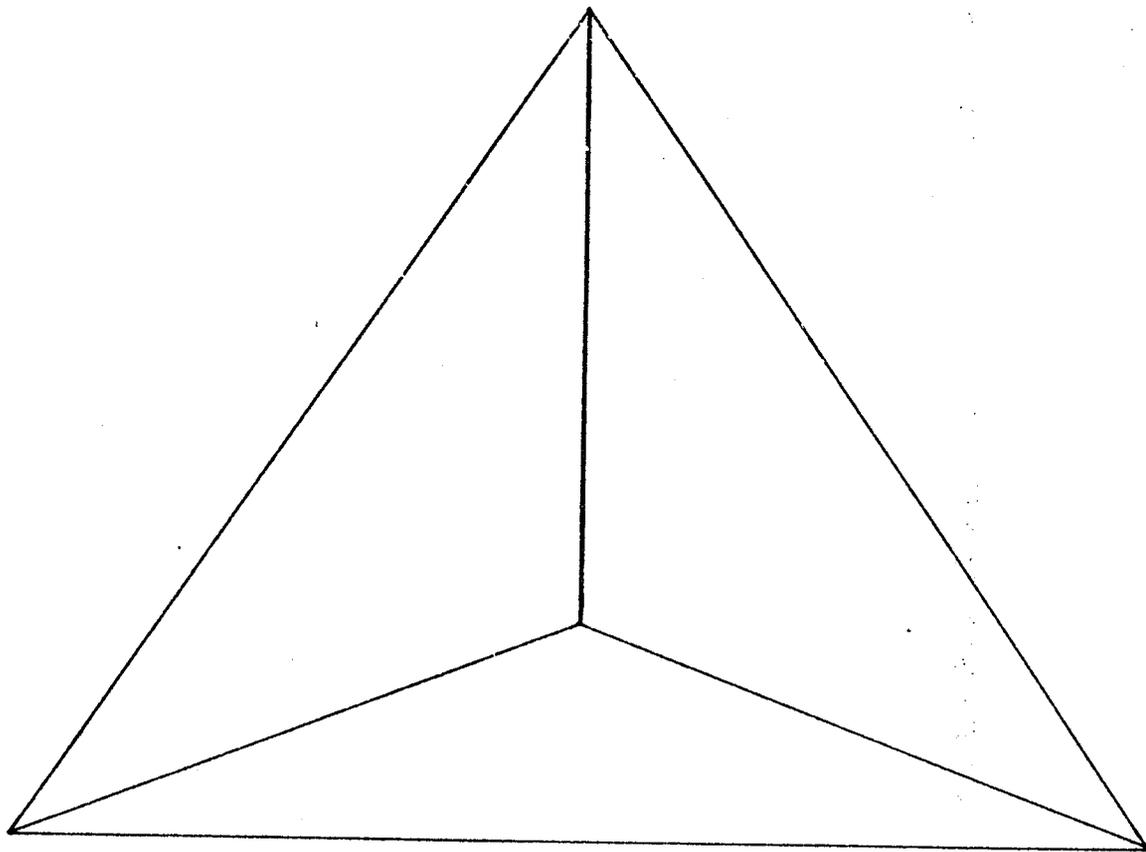
*J.M. LABORDE, Chargé de Recherche au C.N.R.S., qui a su guider mes premiers pas de chercheur, sans jamais étouffer ma personnalité.*

*C. PAYAN, Maître de Recherche au C.N.R.S. .*

*Je remercie également Mme NEUMANN pour la frappe de cette thèse, et le Service de Reprographie pour la qualité du tirage qui, j'en suis sûr, sera excellente.*



INTRODUCTION





Nous nous intéressons ici à divers problèmes concernant le n-cube. Les définitions générales utilisées dans les différents chapitres de cette thèse et dans l'introduction ont été regroupées dans le paragraphe "Définitions et notations" .

On vérifie facilement que le n-cube possède la propriété suivante : Entre toute paire  $\{x,y\}$  de sommets distincts de  $C_n$  il existe soit exactement 2 chemins de longueur 2 , soit pas de chemin de longueur 2 (on dit que  $C_n$  est un  $(0,2)$  graphe) .

De tels graphes sont réguliers .

J.M Laborde et M.Mulder ont prouvés que le n-cube était maximal (pour son ordre par rapport à son degré )pour cette propriété .

M.Mulder c'est également intéressé aux  $(0,2)$  graphes minimaux (pour l'ordre  $|V|$  par rapport au degré  $d$ ) en étudiant les  $(0,2)$  graphes bipartis tels que  $|V| = 2+d(d-1)$  .

Après avoir rappelé les résultats de J.M.Laborde nous montrons que dans un  $(0,2)$  graphe il existe au moins  $p!$  géodésiques entre toute paire de sommets à distance  $p$  .

Au §2 nous décrivons les exemples connus de  $(0,2)$  graphes (bipartis de diamètre 2 ou 3 ) .

Le §3 est consacré à diverses constuctions de  $(0,2)$  graphes (notamment à partir du n-cube en utilisant la notion de code correcteurs d'erreurs ) .

Dans le §5 nous étudions les  $(0,2)$  graphes avec des triangles .

On obtient le théorème suivant :

Un  $(0,2)$  graphe avec triangle doit contenir comme sous graphe engendré soit le tétraèdre soit l'icosaèdre soit une roue ayant au moins 6 rayons .

Enfin au paragraphe 6 nous montrons comment reconstruire certains des  $(0,2)$  graphes commes graphes de Cayley de groupes .

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des invariants immédiats du n-cube .

Le n-cube étant un graphe biparti il est parfait on a donc :

$$\alpha(C_n) = \theta(C_n) = 2^{n-1} \text{ et } \omega(C_n) = \gamma(C_n) = 2$$

D'autre part les stables de cardinal maximum sont trivialement les clefs de parité .

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux autres invariants  $\alpha', \beta, \beta'$ .

Dans le §1 nous prouvons que  $\beta'(C_n) = 2^{n-1}$  et nous caractérisons les absorbants minimaux de cardinal maximum .

Dans les paragraphes 2 et 3 nous étudions les liens existant entre le nombre d'absorption  $\beta(C_n)$  et les codes correcteurs d'erreurs .

On prouve au passage que la conjecture de Vizing [7] est vérifiée pour des hypercubes :

$$\forall p \forall q \quad \beta(C_p + C_q) \geq \beta(C_p) \cdot \beta(C_q)$$

Le paragraphe 4 est consacré à  $\alpha'$  problème très lié à  $\beta$  .

En parallèle avec la théorie des codes le dernier paragraphe étudie une généralisation de  $\beta$  .

Nous nous intéressons dans le 3<sup>ième</sup> chapitre au problème suivant : pour n pair est il possible de trouver  $\frac{n}{2}$  cycles hamiltoniens disjoints sur le n-cube ? Un tel ensemble forme une partition de l'ensemble des arêtes de  $C_n$  .

En fait comme il est expliqué en tête du chapitre ce problème a été récemment complètement résolu , et la partie exposée ici par Ringel en 1954 .

De petits résultats dont la démonstration est souvent fastidieuse ont été regroupés en annexe .

DEFINITIONS ET NOTATIONS



Commençons par donner quelques notions classiques :

Soient  $X=(V,E)$  et  $Y=(V',E')$  deux graphes simples. On désigne par somme cartésienne de  $X$  et  $Y$  le graphe  $X+Y$  dont l'ensemble des sommets est  $V \times V'$  et dont l'ensemble des arêtes  $E''$  vérifie :

$$\begin{aligned} \{xy, x'y'\} \in E'' & \text{ si et seulement si :} \\ & x=x' \text{ et } \{y, y'\} \in E \quad \text{ou} \\ & y=y' \text{ et } \{x, x'\} \in E' \end{aligned}$$

On désigne par  $n.X$  le graphe  $X+X+\dots+X$  (n fois)

Le produit cartésien de  $X$  et  $Y$  est le graphe  $X \times Y$  dont l'ensemble des sommets est  $V \times V'$  et dont l'ensemble des arêtes  $E'''$  vérifie :

$$\begin{aligned} \{xy, x'y'\} \in E''' & \text{ si et seulement si :} \\ & \{x, x'\} \in E \text{ et } \{y, y'\} \in E' \end{aligned}$$

Nous dirons que 2 sommets  $x$  et  $y$  d'un graphe connexe sont à distance  $d$  si et seulement si le plus court chemin entre  $x$  et  $y$  comporte  $d$  arêtes .

Mulder [6] a introduit la terminologie suivante :

Soit  $\lambda$  un nombre entier ( $\lambda \geq 2$ ) . Un graphe simple connexe  $G$  est dit  $(0,2)$  graphe si et seulement si pour toute paire  $\{x,y\}$  de sommets de  $G$  telle que  $x \neq y$  ,  $x$  et  $y$  ont soit exactement 2 voisins communs soit pas de voisins communs .

Pour tout entier  $n$  soit  $X_n$  un ensemble de sommets isomorphe à  $\{0,1\}^n$ . On désigne par codage d'un sommet de  $X_n$  le mot binaire de longueur  $n$  qui lui est associé par cet isomorphisme. On notera  $\bar{x}$  le codage de  $x$

Le  $n$ -cube est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $X_n$  et où  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête si et seulement si les codages de  $x$  et  $y$  diffèrent d'une seule composante binaire .

La structure du  $n$ -cube  $C_n$  est canonique en ce sens que deux codages différents de  $X_n$  donnent des graphes isomorphes .

Il est facile de vérifier que  $C_n$  ( $n \geq 1$ ) est isomorphe au graphe  $n.C_1$  où  $C_1$  est la clique à deux sommets .

Il est également facile de vérifier que 2 sommets  $x$  et  $y$  du  $n$ -cube sont à distance  $d$  si et seulement si les mots associés diffèrent d'exactly  $d$  bits .

On désignera par boule de centre  $x$  et de rayon  $d$  l'ensemble des sommets à distance au plus  $d$  de  $x$  .

Une telle boule comporte pour le  $n$ -cube  $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^d$  sommets .

Une origine  $0$  étant fixée dans le  $n$ -cube , le poids d'un sommet  $x$  est par définition sa distance à l'origine . En général  $0$  est le sommet dont le codage est  $(00\dots 0)$ ; le poids de  $x$  est alors le nombre de bits non nuls dans son codage .

On désigne par  $B^{(n)}$  l'espace vectoriel de dimension  $n$  sur le corps à deux éléments .

Si  $x$  et  $y$  sont 2 sommets du  $n$ -cube , on notera  $x+y$  le sommet dont le codage est  $(\bar{x}+\bar{y})$  (dans  $B^{(n)}$ ) .

Un absorbant d'un graphe  $G=(V,E)$  est un ensemble  $A \subset V$  tel que pour tout sommet  $x$  de  $G$  non dans  $A$  il existe un  $y$  de  $A$  tel que  $\{x,y\}$  soit dans  $E$

Un stable  $B$  de  $G$  est un ensemble de sommets tel que pour tout couple  $(x,y)$  d'éléments de  $B$  l'arête  $\{x,y\}$  n'est pas dans  $E$ .

On désigne par :

- $\alpha(G)$  le cardinal maximum d'un stable de  $G$
- $\beta(G)$  le cardinal minimum d'un absorbant de  $G$
- $\theta(G)$  le nombre minimum de cliques qui partitionnent  $V$
- $\omega(G)$  le cardinal maximum d'une clique de  $G$
- $\gamma(G)$  le nombre chromatique de  $G$
- $\alpha'(G)$  le cardinal minimum d'un stable maximal de  $G$
- $\beta'(G)$  le cardinal maximum d'un absorbant minimal de  $G$

Un cycle d'un graphe  $G$  est dit hamiltonien si il passe par chaque sommet du graphe une et une seule fois .

Un graphe qui possède un tel cycle est dit hamiltonien .

Le  $n$ -cube est hamiltonien .

Soit  $G$  un graphe connexe  $G=(V,E)$ ; un sommet  $x$  de  $G$  étant fixé, la décomposition en couches de  $G$  à partir de  $x$  est la partition de  $V$  en  $V_0, V_1, \dots, V_p$  telle que  $y \in V_i$  si et seulement si  $d(x,y)=i$

Une  $(v,k,\lambda)$  configuration est la donnée d'un ensemble  $X$  et d'une famille de parties de  $X$   $\{E_i \ i \in I\}$  dites arêtes, tels que

(i)  $|X|=v$

(ii) toute arête à  $k$  éléments  $|E_i|=k$

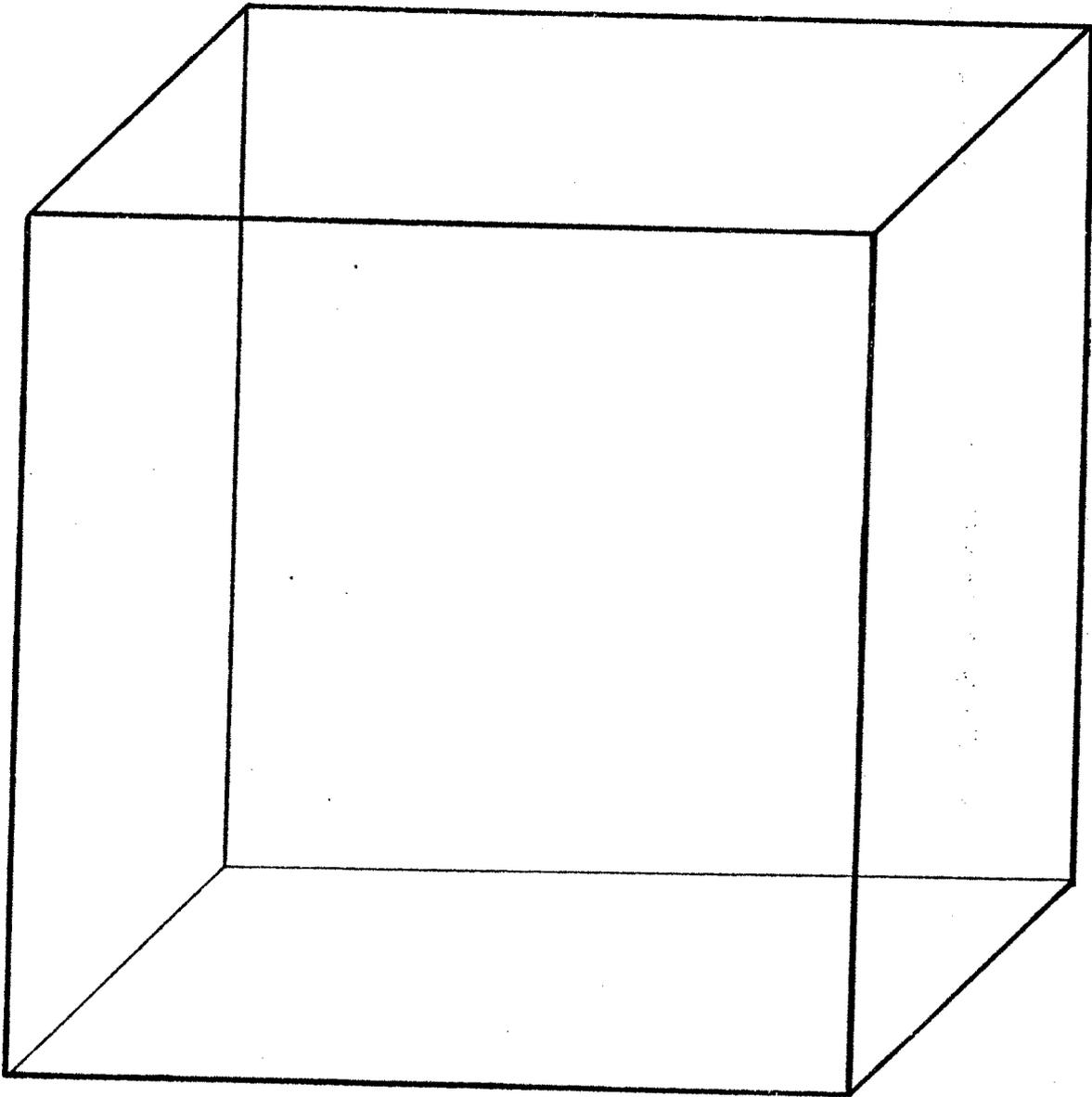
(iii) toute paire de sommets appartient à  $\lambda$  arêtes .

Elle est dite symétrique si son nombre d'arêtes est égal à  $v$



CHAPITRE I

(0,2) GRAPHS





§1 - (0,2) GRAPHERS

Définition 1 :

Nous dirons qu'un graphe simple connexe  $G$  est un (0,2) graphe si et seulement si toute paire d'arêtes adjacentes de  $G$  appartient à exactement un cycle de longueur 4.

La même définition peut se formuler de manière équivalente en termes de sommets et de chemins :

Définition 2 :

Nous dirons qu'un graphe simple connexe  $G$  est un (0,2) graphe si et seulement si pour toute paire  $\{x,y\}$  de sommets distincts de  $G$  il existe soit exactement 2 chemins de longueur 2 reliant  $x$  à  $y$ , soit aucun chemin de longueur 2 reliant  $x$  et  $y$ .

On doit à Foldès [ 4 ] la caractérisation suivante du n-cube :

Un graphe simple connexe biparti est un hypercube si et seulement si entre toute paire de sommets à distance  $d$  il existe exactement  $d!$  chemins de  $d$  arêtes.

J.M. Laborde - Rao Hebbare [ 5 ] et H.M. Mulder [ 6 ] ont indépendamment montré le théorème suivant qui constitue une caractérisation beaucoup plus fine de l'hypercube.

Théorème 1 =

Soit  $G$  un (0,2) graphe. Alors

- 1)  $G$  est régulier (notons  $n$  son degré)
- 2)  $|V(G)| \leq 2^n$
- 3)  $|V(G)| = 2^n$  si et seulement si  $G$  est un n-cube.

La démonstration de J.M. Laborde utilise les lemmes suivants :

Lemme 1 :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe de degré  $n$ .

Soit  $C_i$  l'ensemble des sommets de  $G$  à distance  $i$  d'un sommet fixé.

Pour  $x$  élément de  $C_i$  notons  $d_{i-1}(x)$  le nombre d'arêtes entre  $x$  et  $C_{i-1}$ .

Soit  $\delta_{i,i-1} = \min_{x \in C_i} d_{i-1}(x)$

$$D_{i,i-1} = \frac{\sum_{x \in C_i} d_{i-1}(x)}{|C_i|}$$

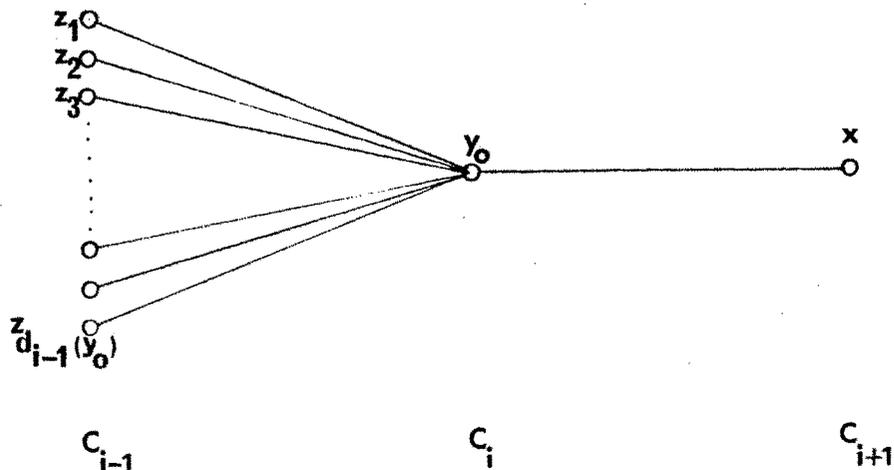
Nous avons :

- (1)  $\delta_{i+1,i} \geq \delta_{i,i-1} + 1$
- (2)  $|C_{i+1}| \leq |C_i| \frac{(n - D_{i,i-1})}{D_{i+1,i}}$

Démonstration :

(1) Soient  $x$  dans  $C_{i+1}$   $y_0$  dans  $C_i$  tels que  $\{x, y_0\}$  soit une arête de  $G$ .

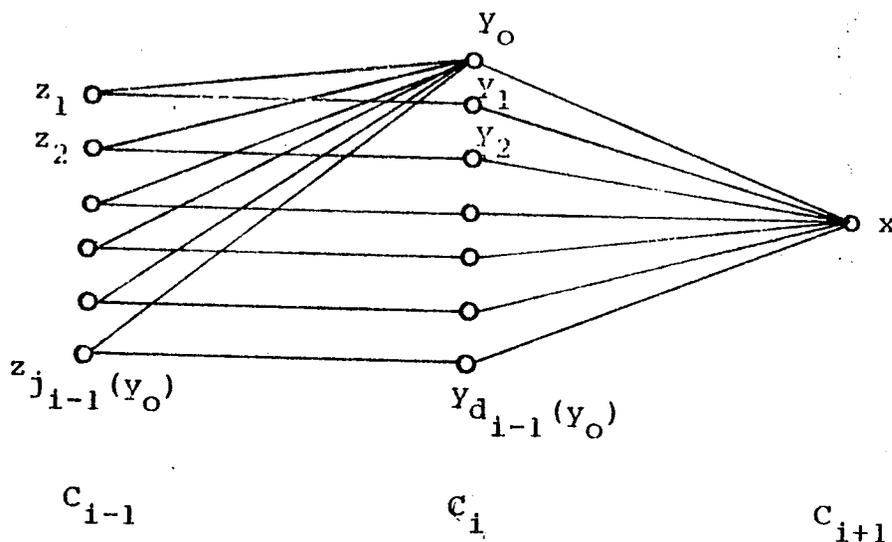
Il existe  $d_{i-1}(y_0)$  sommets de  $C_{i-1}$  :  $z_1, z_2, \dots, z_{d_{i-1}(y_0)}$  adjacents à  $y_0$ .



$z_j y_0 x$  étant un chemin de longueur 2 il existe un sommet  $y_j$  de  $C_j$  tel que :

$$\{z_j, y_j\} \in E(G) \quad \{y_j, x\} \in E(G) \quad y_j \neq y_0$$

Si  $j \neq k$   $y_j$  est différent de  $y_k$  car si  $y_j = y_k$  on a 3 chemins de longueur 2 entre  $y_0$  et  $y_j$  :  $(y_0 x y_j)$   $(y_0 z_j y_j)$   $(y_0 z_k y_j)$ .



Nous avons montré que  $d_i(x) \geq d_{i-1}(y_0) + 1$ .

Si  $x$  est choisi tel que  $d_i(x) = \delta_{i+1,i}$  nous obtenons :

$$\delta_{i+1,i} \geq d_{i-1}(y_0) + 1 \geq \delta_{i,i-1} + 1$$

(2) Il y a  $\sum_{x \in C_{i+1}} d_i(x)$  arêtes entre  $C_i$  et  $C_{i+1}$ . D'autre

part, il y en a au plus :  $|C_i|n - \sum_{x \in C_i} d_{i-1}(x)$ .

Puisque  $\sum_{x \in C_j} d_{j-1}(x) = |C_j| D_{j,j-1}$  nous obtenons :

$$D_{i+1,i} |C_{i+1}| \leq |C_i| (n - D_{i,i-1}).$$

D'où (2).

Lemme 2 :

Sous les mêmes hypothèses que le lemme 1 nous avons

$$(1) |C_i| \leq C_n^i \quad i \in \mathbb{N}$$

$$(2) D_{i,i-1} \geq \delta_{i,i-1} \geq i$$

Démonstration

Elle se fait par récurrence sur la valeur de  $i$

$$|C_1| = n \quad D_{1,0} = \delta_{1,0} = 1$$

Supposons la propriété vraie pour  $j = i-1$  et montrons la pour  $j+1$ .

$$(2) D_{i,i-1} \geq \delta_{i,i-1} \geq \delta_{i-1,i-2} + 1 \quad \text{d'après le lemme 1}$$

Or par hypothèse de récurrence

$$\delta_{i-1,i-2} \geq i-1$$

D'où

$$D_{i,i-1} \geq \delta_{i,i-1} \geq i$$

1) D'après le lemme 1

$$|C_i| \leq |C_{i-1}| \frac{(n-D_{i-1,i-2})}{D_{i,i-1}}$$

Or par hypothèse de récurrence  $|C_{i-1}| \leq C_n^{i-1}$   $D_{i-1,i-2} \geq i-1$ .

De plus nous venons de montrer que  $D_{i,i-1} \geq i$ .

$$|C_i| \leq C_n^{i-1} \frac{(n-i+1)}{i}$$

Donc  $|C_i| \leq C_n^i$ .

Proposition :

Supposons de plus que  $G$  est biparti.

Soit  $\Delta_{i,i-1} = \text{Max}_{x \in C_i} d_{i-1}(x)$  nous avons alors :

(1) Si  $\Delta_{i,i-1} < n$  alors  $\Delta_{i+1,i} \geq \Delta_{i,i-1} + 1$

(2)  $|C_{i+1}| D_{i+1,i} = (n - D_{i,i-1}) |C_i|$

Démonstration

(1) Soit  $y_0$  élément de  $C_i$  tel que  $d_{i-1}(y_0) = \Delta_{i,i-1}$  puisque  $G$  est biparti et que  $\Delta_{i,i-1} < n$  il existe au moins un sommet  $x$  de  $C_{i+1}$  relié à  $y_0$  par une arête. Comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 1,  $d_i(x) \geq d_{i-1}(y_0) + 1$  et  $\Delta_{i+1,i} \geq d_i(x)$ .

(2) Le nombre d'arêtes entre  $C_i$  et  $C_{i+1}$  est d'une part  $\sum_{x \in C_{i+1}} d_i(x)$  et d'autre part puisque  $G$  est biparti  $\sum_{x \in C_i} (n - d_{i-1}(x))$  d'où (2)  $\Delta$ .

Nous allons utiliser ces résultats pour donner de façon directe une 3<sup>ème</sup> caractérisation de l'hypercube que l'on peut déduire aussi de la juxtaposition de 2 résultats de Mulder [6]

Définition :

Le diamètre d'un graphe  $G$  est par définition :

$$d = \max d(x,y) \quad x \in V(G) \quad y \in V(G).$$

Théorème :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe de degré  $n$ . Alors :

(1)  $G$  est de diamètre au plus  $n$ .

(2)  $G$  est de diamètre  $n$  si et seulement si  $G$  est le  $n$ -cube.

Démonstration

(1) Puisque  $\delta_{1,0} = 1$  et que d'après le lemme 1

$\delta_{i+1,i} \geq \delta_{i,i-1} + 1$  il existe un entier  $p$  tel que  $p \leq n$

et  $\delta_{p,p-1} = n$ . Donc si  $x$  est le sommet à partir duquel on

fait la décomposition par couches  $C_0 C_1 \dots$

$$n \leq \max d(x,y) \quad y \in V(G).$$

Comme nous avons la même propriété pour tous les sommets  $x$  nous obtenons (1).

(2) Nous allons montrer que  $|V(G)| = 2^n$  ce qui conduira au résultat cherché en utilisant le théorème 1.

Supposons  $G$  différent du  $n$ -cube. Nous avons alors  $|V(G)| < 2^n$  donc il existe un indice  $i$  tel que  $|C_i| < C_n^i$ .

$$|C_{i+1}| \leq |C_i| \frac{(n-D_{i,i-1})}{D_{i+1,i}}$$

Or  $D_{i,i-1} \geq i$  (lemme 2) donc  $|C_{i+1}| < C_n^i \frac{(n-i)}{i+1}$ .

D'où  $|C_{i+1}| < C_n^{i+1}$ , par suite pour tout  $j > i$  nous avons  $|C_j| < C_n^j$ , donc  $C_n = 0$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que  $G$  est de diamètre  $n$ .

Proposition :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe, entre toute paire de sommets à distance  $p$  il existe au moins  $p!$  chemins de longueur  $p$ .

Démonstration

Ceci est vrai pour  $p = 1$  et  $p = 2$ .

Supposons la propriété vraie pour  $q$  ( $q \geq 2$ ) et montrons la pour  $q+1$ .

Soient  $(x,y)$  tels que  $d(x,y) = q+1$ .

Décomposons  $G$  en couches à partir de  $x$ .

Nous savons que  $D_{q+1,q}$  est au moins  $q+1$ .  $y$  a donc au moins  $q+1$  voisins dans  $C_q$ . Pour chacun de ces voisins, il y a au moins  $q!$  chemins de longueur  $q$  vers  $x$ . Il y a donc au moins  $(q+1)!$  chemins de longueur  $q$  entre  $x$  et  $y$ .

§2 - QUELQUES EXEMPLES DE (0,2) GRAPHES

Propriété 1 :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe, alors pour tout sommet  $x$  de  $C_2$  dans une décomposition en couches  $C_0 C_1 C_2 \dots$  il existe exactement deux arêtes reliant  $x$  à des sommets de  $C_1$ .

Propriété 2 :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe sans triangle de degré  $n$  ; alors :

$$|C_2| = C_n^2 .$$

En effet  $|C_1| = n$  le degré de  $C_1$  vers  $C_0$  est 1 puisque  $|C_0| = 0$ .

Le degré de  $C_p$  vers  $C_1$  est 0 puisque  $G$  est sans triangle donc :

Le degré de  $C_1$  vers  $C_2$  est  $n-1$ , il y a donc  $n(n-1)$  arêtes de  $C_1$  vers  $C_2$ .

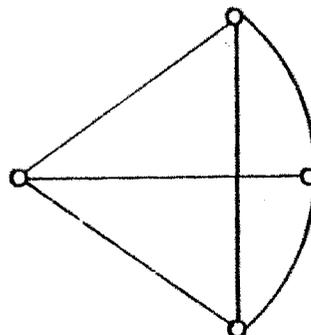
Le degré de  $C_2$  vers  $C_1$  est égal à 2. Il y a donc  $\frac{n(n-1)}{2}$  sommets dans  $C_2$ .

Propriété 3 :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe de diamètre 1, alors  $G$  est  $K_2$  ou  $K_4$



$K_2$



$K_4$

Puisque  $|C_1| = n$  et que  $G$  est de degré  $n$ , les sommets de  $C_1$  sont tous reliés entre eux et au sommet de  $C_0$  par construction. Donc  $G$  est un graphe complet.  $K_2$  convient supposons donc  $n \geq 2$ .

Soit  $y_1 \dots y_n$  les sommets de  $C_1$ .  $y_1$  et  $y_2$  sont reliés par  $n-1$  chemins de longueur 2 :

$$(y_1 \times y_2) (y_1 y_3 y_2) (y_1 y_4 y_2) \dots (y_1 y_n y_2)$$

Donc  $n-1 = 2$  et  $G$  est  $K_4$ .

Propriété 4 :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe de diamètre 2, alors 2 sommets non adjacents quelconques de  $G$  sont reliés par exactement 2 chemins de longueur 2.

Trivial.

Propriété 5 :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe sans triangle tel qu'il existe un sommet  $x$  tel que  $\max_{y \in V(G)} d(x,y) = 2$ . Alors  $G$  est de

diamètre 2.

Démonstration

En effet représentons  $G$  "en couche" à partir de  $x$ .

$|C_0| = 1$   $|C_1| = n$ .  $G$  étant sans triangle  $|C_2| = C_n^2$ ,

le nombre d'arêtes du graphe est  $(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}) \frac{n}{2} = \frac{n(n^2+n+2)}{4}$ .

Le nombre de chemins de longueur 2 est donc :

$$\frac{n(n-1)}{4} (n^2+n+2)$$

Le nombre de paires de sommets reliés par un chemin de longueur 2 est donc :

$$\frac{n(n-1)}{8} (n^2+n+2)$$

Calculons le nombre de paires de sommets de  $G$  :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) \left( \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right) = \frac{1}{8} n(n+1) (n^2+n+2)$$

Nombre de paires de sommets adjacents : le nombre d'arêtes soit :

$$\frac{n(n^2+n+2)}{4}$$

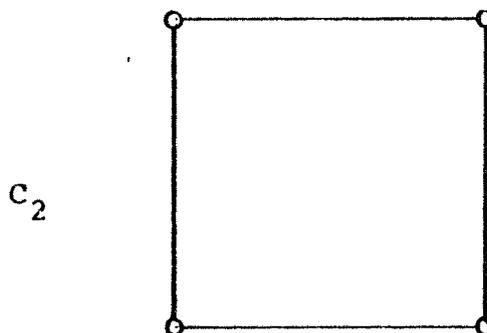
Le nombre de paires de sommets non adjacents de  $G$  est donc :

$$\frac{n(n^2+n+2)}{8} (n-1)$$

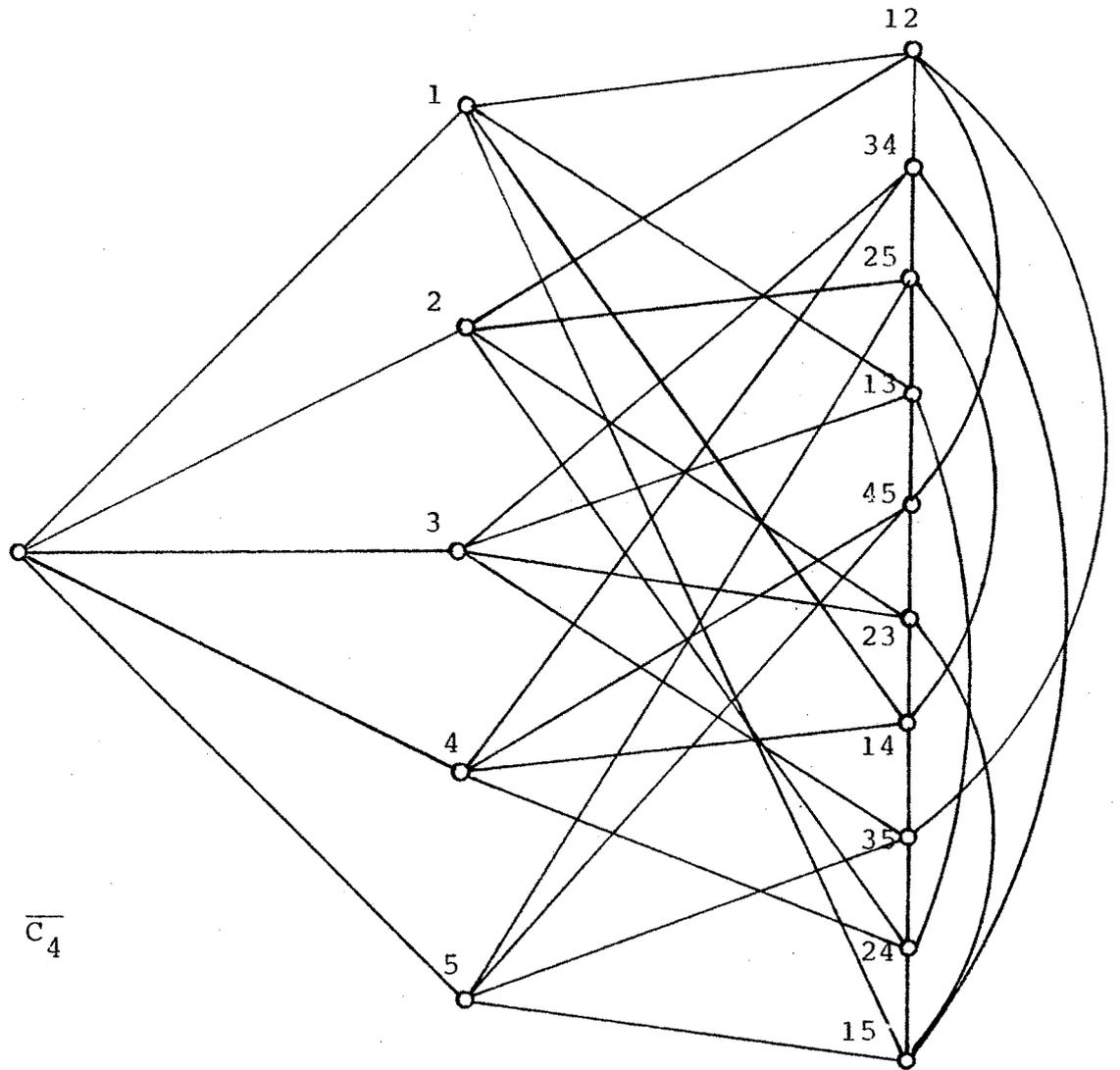
Donc tous les sommets non adjacents sont reliés par exactement 2 chemins de longueur 2 puisque les sommets adjacents ne peuvent être reliés par des chemins de longueur 2 sans créer de triangles.  $G$  est donc de diamètre 2.

Bondy [ 1 ] a étudié les graphes sans triangle tels que deux sommets non adjacents sont reliés par exactement deux chemins de longueur 2 et a montré qu'une condition nécessaire d'existence de tels graphes est que :  $n = 1+r^2$  pour un certain entier  $r$  non divisible par 4.

Pour  $r = 1$  nous obtenons le 2-cube



et pour  $r = 2$  le graphe suivant dont nous reparlerons plus bas.



$\overline{C_4}$

Remarquons que  $C_2$  est le seul  $(0,2)$  graphe biparti de diamètre 2 car il y a  $n(n-1)$  arêtes entre  $C_1$  et  $C_2$  donc le degré de  $C_2$  vers  $C_1$  est 2, donc si  $n \neq 2$  il y a des arêtes de  $C_2$  vers  $C_2$  donc des cycles impairs.

Etude des  $(0,2)$  graphes bipartis de diamètre 3

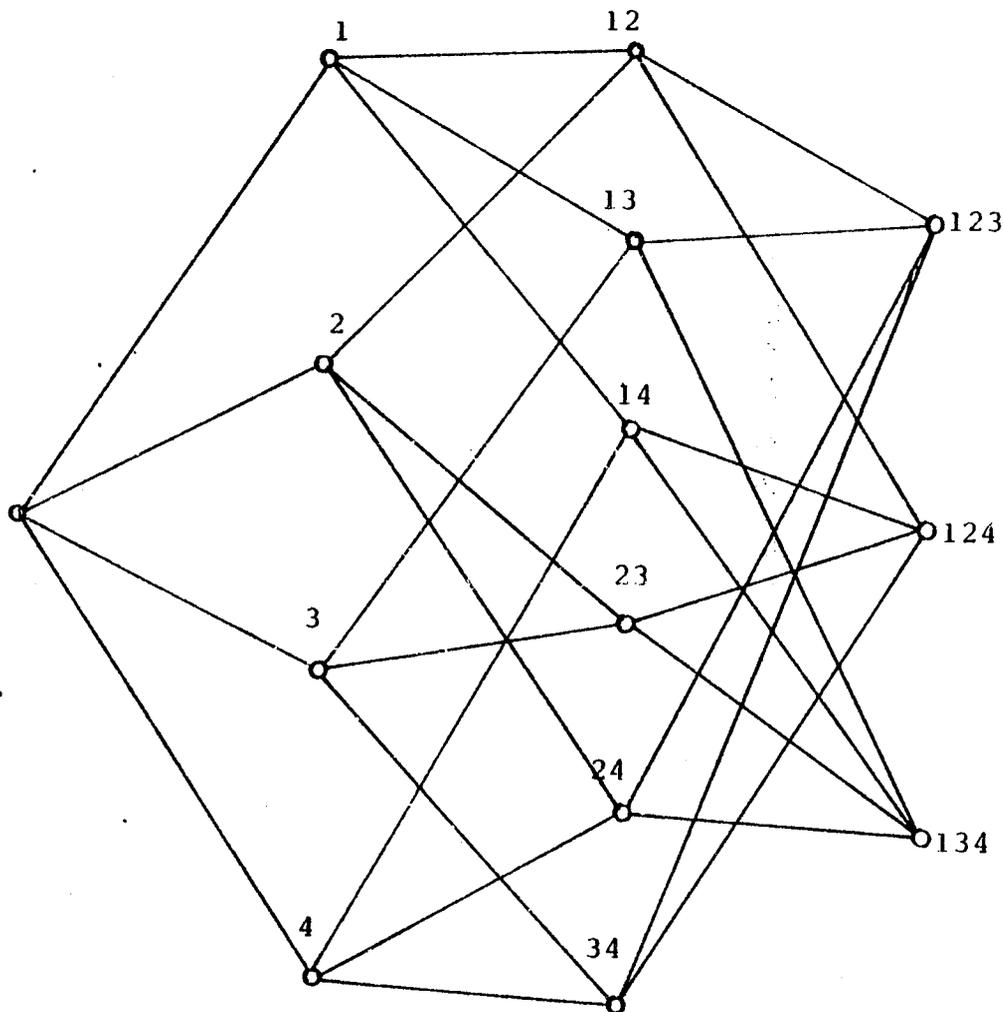
Nous savons que pour un tel graphe  $|C_1| = n$ ,  $|C_2| = \frac{n(n-1)}{2}$  et le degré de  $C_2$  vers  $C_1$  est exactement 2.

Le graphe étant biparti, le degré de  $C_2$  vers  $C_3$  est donc  $n-2$ , il y a donc  $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$  arêtes de  $C_2$  vers  $C_3$ . Le degré des sommets de  $C_3$  étant  $n$ ,  $|C_3| = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

Donc pour un tel graphe  $|V| = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2 + n(n-1)$ .

Pour  $n = 3$  nous obtenons le cube  $C_3$ .

Pour  $n = 4$  nous obtenons  $|V| = 14$ . On montre facilement l'existence d'un graphe unique : H.



Pour  $n = 5$  on montre également l'existence d'un graphe unique  $G$  sur 22 sommets (figure 1).

Pour  $n = 6$  il existe trois graphes non isomorphes d'ordre 32. Le premier est  $\overline{C_5}$  dont nous donnerons la construction à partir du 5-cube plus bas (figure 2).

Un 2ème graphe est  $K$  représenté sur la figure 3.

En fait ce problème a été relié à des questions classiques grâce au théorème suivant :

Théorème (Mulder)

$G$  est un  $(0,2)$  graphe biparti de diamètre 3 si et seulement si  $G$  est le graphe d'incidence d'une configuration symétrique de paramètres  $(1 + \frac{n(n-1)}{2}, n, 2)$ .

L'étude des  $(1 + \frac{n(n-1)}{2}, n, 2)$  configurations symétriques (connues sous le nom de biplans) est un problème ouvert. Il existe exactement 1 biplan pour  $n = 3, 4$  ou  $5$  (qui donnent respectivement  $C_3, H, G$ ).

Il y en a 3 pour  $n = 6$  et 4 pour  $n = 9$ .

On connaît 4 pour  $n = 11$  et 2 pour  $n = 13$ .

Il n'en existe pas pour  $n = 7, 8, 10, 12, 14, 15$  en vertu du théorème suivant :

Théorème (Bruck - Ryser - Chowla)

Une condition nécessaire d'existence de biplans pour  $n$  est que :

Si  $n \equiv 2(4)$  ou  $n \equiv 3(4)$  alors  $n = u^2 + 2$  pour un certain entier  $u$ .

Si  $n \equiv 0(4)$  ou  $n \equiv 1(4)$  alors l'équation

$$x^2 = (n-2) y^2 + (-1)^{\frac{n(n-1)}{4}} 2z^2$$

admet une solution entière  $(x, y, z)$  autre que  $(0, 0, 0)$ .

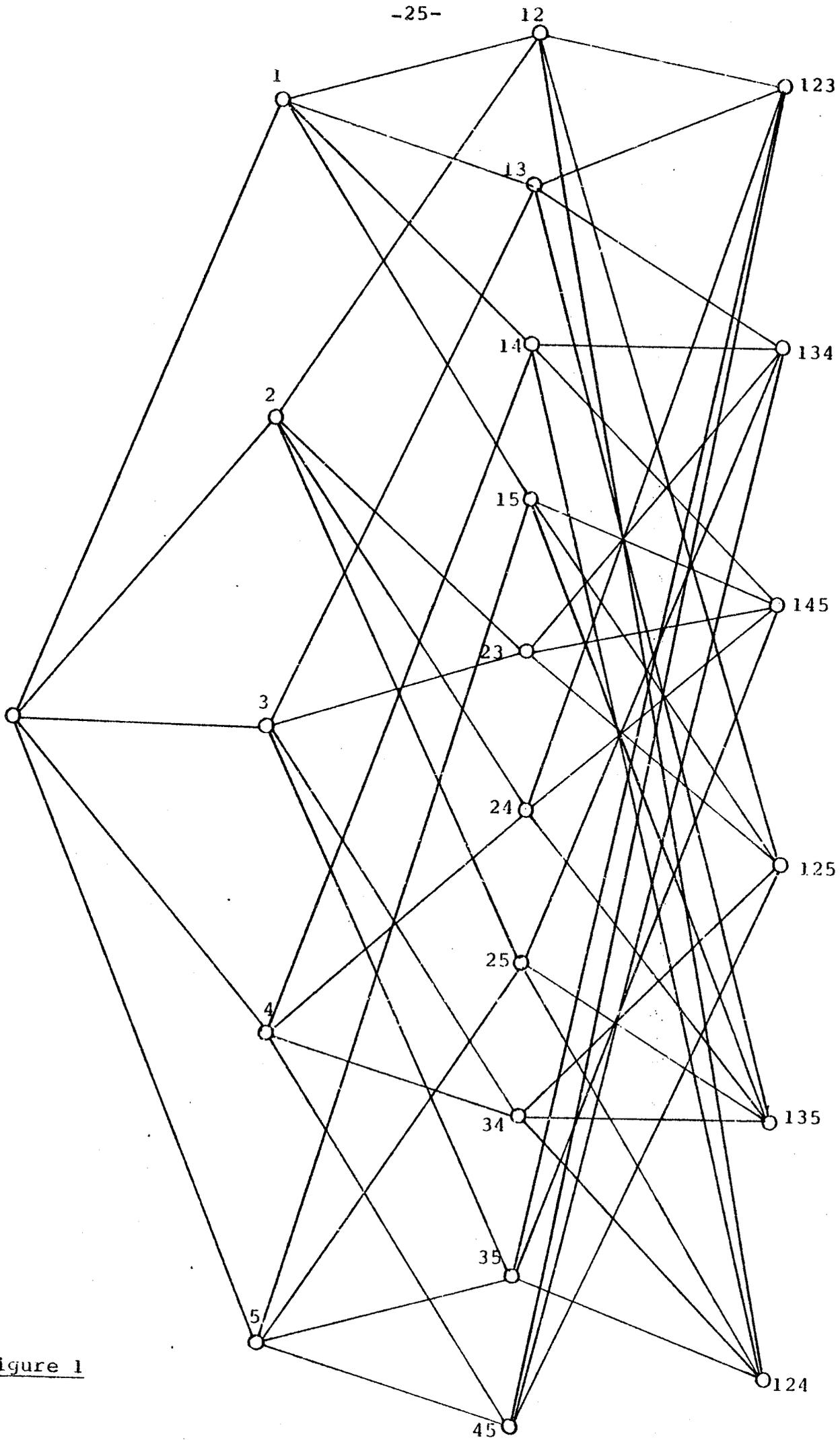
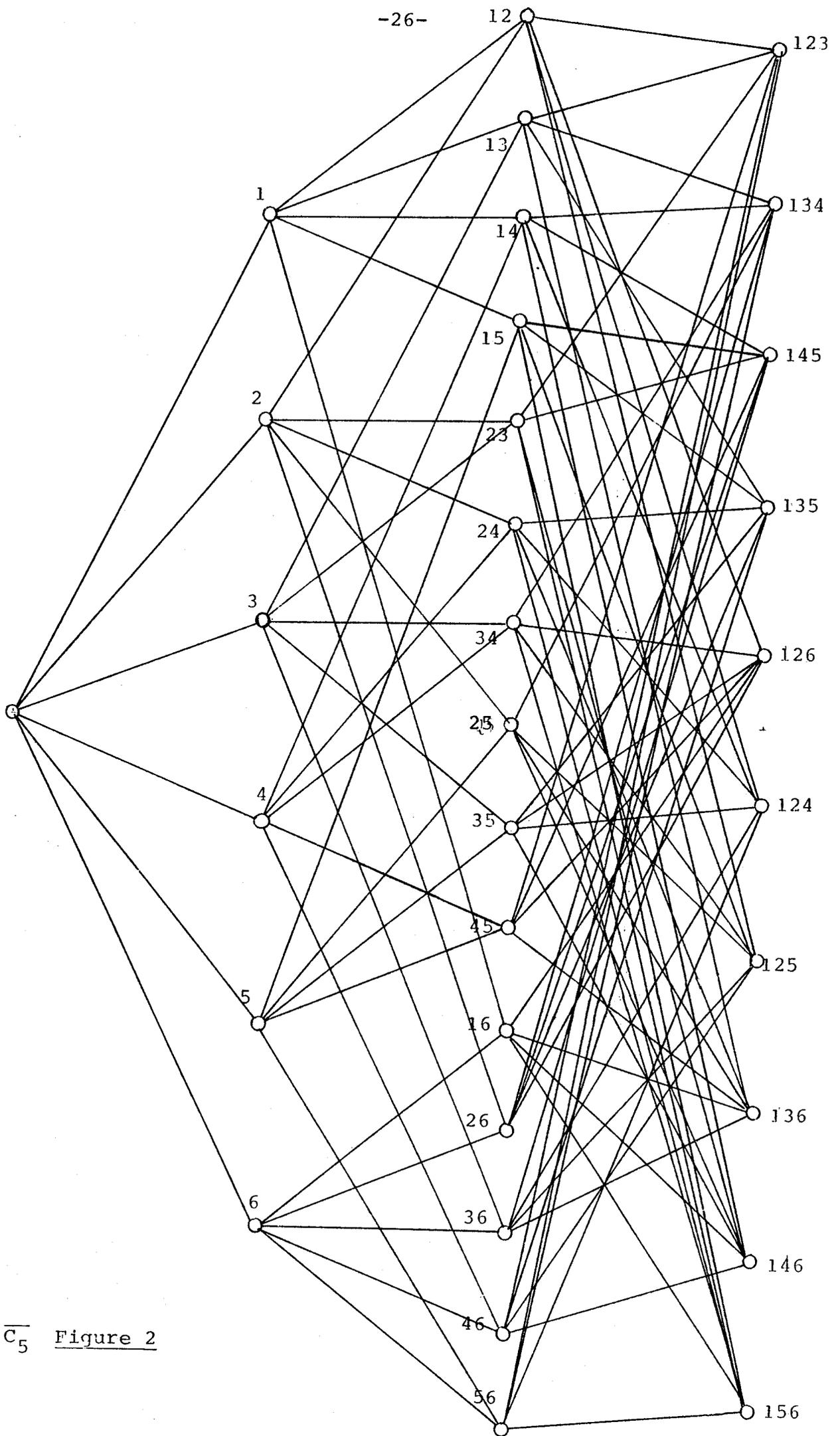


Figure 1



$\overline{C}_5$  Figure 2

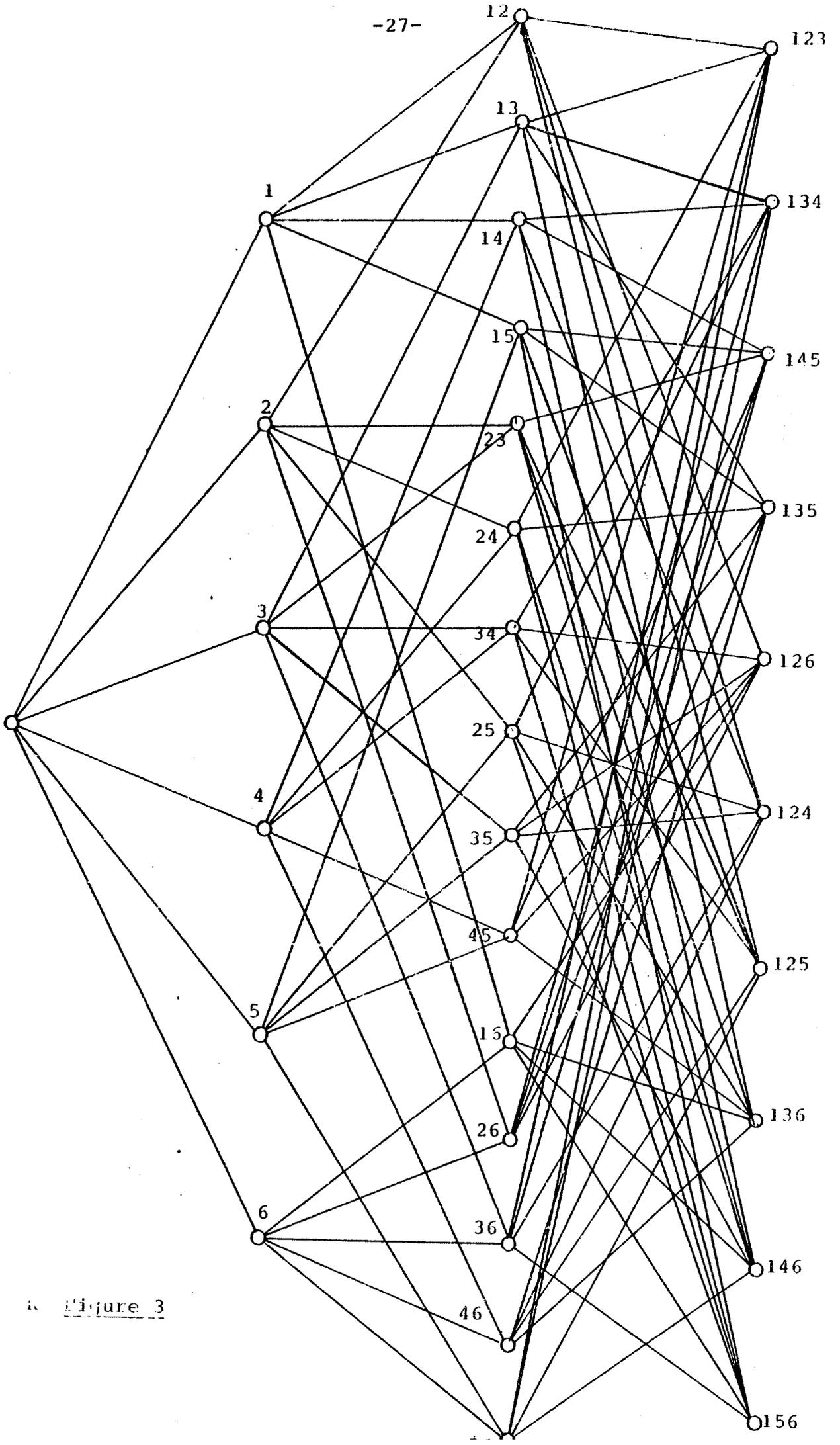


Figure 3



§3 - CONSTRUCTIONS DE (0,2) GRAPHS

Propriété 1 :

Soit  $C_n$  ( $n \geq 4$ ) un n-cube. Alors le graphe  $\overline{C_n}$  obtenu en reliant dans  $C_n$  les sommets opposés est un (0,2) graphe (biparti si  $n$  est impair) de degré  $n+1$  et de diamètre  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  (partie entière supérieure).

Propriété 2 :

Soit  $x$  un sommet du n-cube de poids au moins 4. Alors le graphe  $C_n^{(0,x)}$  dont l'ensemble des sommets est celui du n cube et tel que :

$$\{y,z\} \in E \iff w(y+z) = 1 \text{ ou } y+z = x$$

est un (0,2) graphe de degré  $(n+1)$ .

On obtient par cette construction le graphe  $C_5^{(0,(11110))}$  représenté figure 4.

Définition :

Soit  $C$  un ensemble de sommets du n-cube contenant l'origine. Nous nommerons  $C_n^C$  le graphe dont l'ensemble des sommets est celui du n-cube et tel que :

$$\{y,z\} \in E \iff w(y+z) = 1 \text{ ou } y+z \in C^* \quad (C = C^* \cup \{0\}).$$

Théorème :

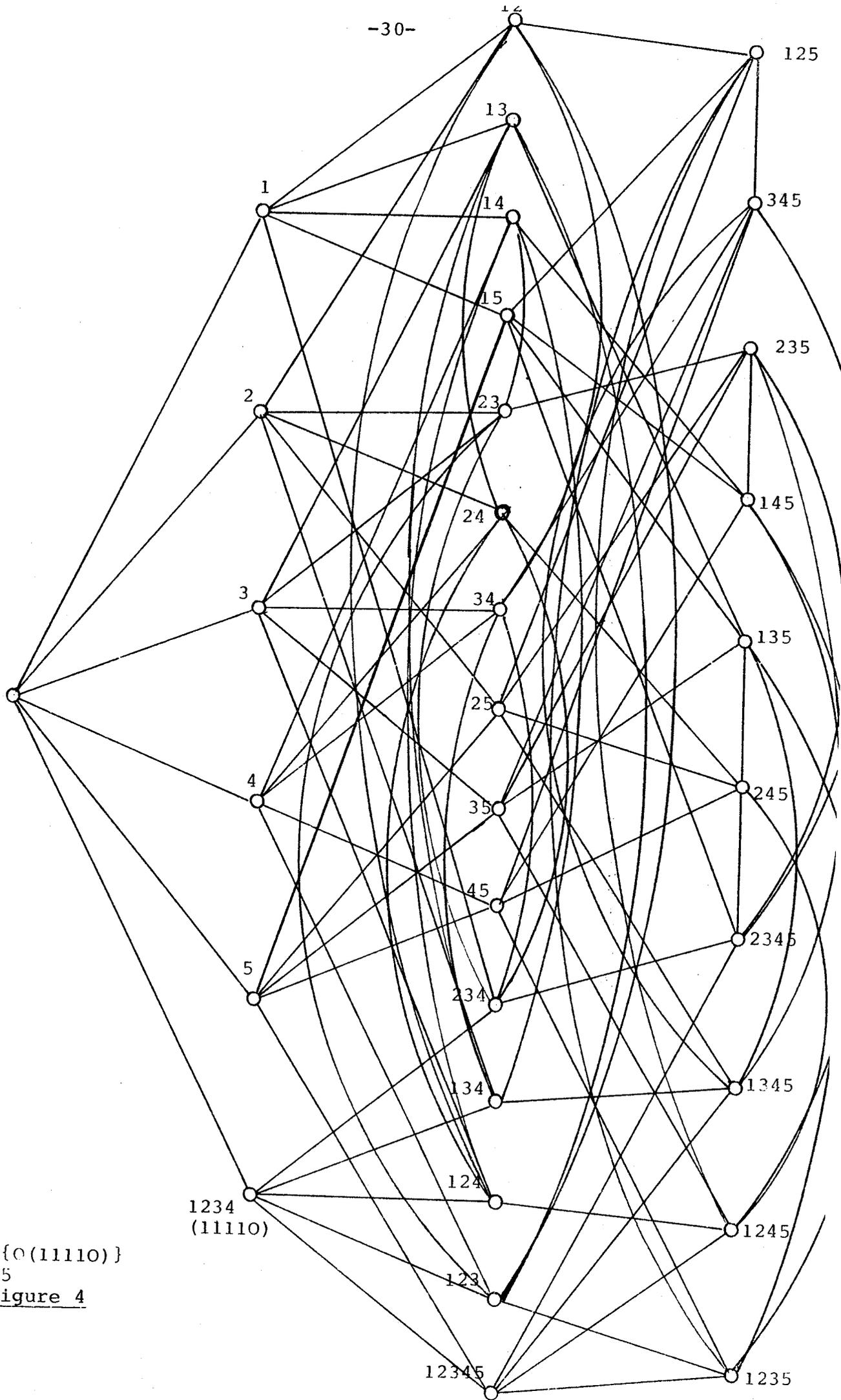
Soit  $C$  un 3 code de  $C_n$  tel que :

\*  $C$  contient l'origine (on pose  $C = C^* \cup \{0\}$ ).

\*  $\forall c \in C^* \quad w(c) \geq 4$ .

$\forall c \quad \forall c' \quad \forall c'' \quad \forall c'''$  éléments de  $C$  tous différents,  $c+c'$  et  $c''+c'''$  sont au moins à distance 2.

Alors  $C_n^C$  est un (0,2) graphe de degré  $n+|C^*|$ .



$C_5$  {0(11110)}  
Figure 4

Démonstration

Il est clair que les propositions 1 et 2 sont des corollaires du théorème. Nous allons montrer ce dernier

Désignons par  $E$  l'ensemble des arêtes de  $C_n$  et par  $E'$  l'ensemble des arêtes de  $C_n^C$  non dans  $C_n$ .

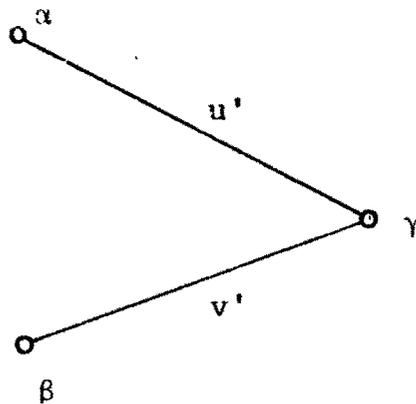
Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux sommets reliés par un chemin  $(u,v)$  de longueur 2 dans  $C_n^C$ . Montrons qu'il existe un et un seul autre chemin de longueur 2 entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

1er cas :  $u \in E$   $v \in E$

Il existe un 2ème chemin dans  $C_n$  donc dans  $C_n^C$ , montrons qu'il ne peut en exister un troisième.

Soit  $(u',v')$  un troisième chemin. Il est clair que l'on ne peut avoir  $u' \in E$  et  $v' \in E$ .

\*  $u' \in E'$  et  $v' \in E$



$$\alpha + \gamma \in C^* \text{ donc } w(\alpha + \gamma) \geq 4.$$

Or  $w(\beta + \gamma) = 1$  donc  $w(\alpha + \beta) \geq 3$  ce qui est impossible car  $w(\alpha + \beta) = 2$ .

\*  $u' \in E'$  et  $v' \in E'$

$$\alpha + \gamma = c \in C^*$$

$$\beta + \gamma = c' \in C^*$$

$c \neq c'$  puisque  $\alpha \neq \beta$

$w(\alpha+\beta) = w(c+c') \geq 3$  ce qui est impossible.

2ème cas :  $u \in E'$   $v \in E'$

$$\alpha + \gamma = c \in C^*$$

$$\beta + \gamma = c' \in C^*$$

et nécessairement  $c \neq c'$ .

Posons  $\gamma' = c' + \alpha$ . Nous avons :

$$\gamma' \neq \gamma$$

$$\alpha + \gamma' = c' \in C^*$$

$$\beta + \gamma' = c' + \alpha + \beta = c' + c + c' = c \in C^*.$$

Donc  $\alpha$  et  $\beta$  sont reliés par un deuxième chemin dans  $C_n^C$ .

Supposons l'existence d'un 3ème  $(u', v')$ . Il ne peut être du type  $E \times E$  puisqu'il a déjà été étudié.

\*  $u' \in E'$  et  $v' \in E$

Nous avons  $\alpha + \beta = c + c'$ .

Soit  $\alpha\gamma''\beta$  le 3ème chemin de longueur 2.

$$\gamma'' + \alpha = c'' \in C^* \quad \gamma'' + \beta = \alpha + \beta + \gamma'' + \alpha$$

$$w(\gamma''+\beta) = 1 = w(c+c'+c'')$$

Or par hypothèse sur  $C$   $c + c'$  et  $c''$  sont au moins à distance 2 ( $c'' = c''+0$ ).

\*  $u' \in E'$  et  $v' \in E'$

$$\alpha + \gamma'' = c'' \in C^*$$

$$\beta + \gamma'' = c''' \in C^*$$

$c, c', c'', c'''$  sont nécessairement tous différents. Or on a  $\alpha + \beta = c + c' = c'' + c'''$  ce qui est impossible.

3ème cas :  $u \in E' \quad v \in E$

$$\alpha + \gamma = c \in C^*$$

$$w(\gamma + \beta) = 1$$

Posons  $\gamma' = \beta + \gamma + \alpha$ .  $\gamma' \neq \gamma$  car  $\beta + \alpha$  est au moins de poids 3.

$$\beta + \gamma' = \gamma + \alpha = c \in C^*$$

$$w(\gamma' + \alpha) = w(\beta + \alpha) = 1$$

Donc il existe un deuxième chemin de longueur 2 entre  $\alpha$  et  $\beta$  passant par  $\gamma'$ .

Supposons l'existence d'un 3ème chemin passant par  $\gamma''$ . Il ne peut être des types  $E \times E$  ou  $E' \times E'$  puisqu'ils ont déjà été étudiés. Il est donc du type  $E' \times E$  (le type  $E \times E'$  se ramène au même cas par symétrie du problème).

$$\alpha + \gamma'' = c' \in C^* \quad \gamma'' \neq \gamma \text{ donc } c \neq c'$$

$$w(\gamma'' + \beta) = 1.$$

$$c + c' = \alpha + \gamma + \alpha + \gamma'' = \gamma + \gamma'' = (\gamma + \beta) + (\gamma'' + \beta)$$

donc  $c + c'$  est de poids 2 ce qui est impossible puisque  $C^*$  est un 3 code.

Remarque 1 : Si tous les éléments de  $C^*$  sont de poids impair, le graphe est biparti.

Remarque 2 : Des 3-codes non triviaux possédant les propriétés nécessaires existent :

Par exemple sur  $C_6$  :  $C = ((000000), (111100), (001111))$

ou sur  $C_7$  le code suivant conduisant à un graphe biparti :

$$C = ((0000000), (1111100), (0011111))$$

Remarque 3 : Si  $n$  est impair, on peut donner une autre interprétation à  $C_n$ .

Posons  $n = 2p + 1$ . Donnons à  $C_{2(p+1)}$  sa représentation comme graphe des différences de cardinalité 1 sur l'ensemble des des parties d'un ensemble à  $2(p+1)$  éléments. Soit le sous graphe de  $C_{2(p+1)}$  induit par  $\{A \subset \{1, 2, \dots, 2(p+1)\} \mid |A| \leq p+1\}$ . Si nous identifions les sommets complémentaires dans la  $(p+1)^{\text{ème}}$  couche nous obtenons le graphe  $C_{2p+1}$ .

D'autre part, la condition  $n \geq 4$  est nécessaire.

$\overline{C_3}$  est le graphe biparti  $K_{4,4}$  qui n'est pas un  $(0,2)$  graphe.

Propriété 4 :

Soient  $x$  et  $y$  deux sommets d'un  $C_n^C$ . Alors il existe une bijection  $f$  de  $V(C_n^C)$  dans  $V(C_n^C)$  telle que :

$$a) f(x) = y$$

$$b) \forall z \quad \forall t \in V(C_n^C)$$

$$\{z, t\} \in E(C_n^C) \iff \{f(z), f(t)\} \in E(C_n^C).$$

Nous dirons que le graphe  $C_n^C$  est sommet transitif ou est une "parure".

Démonstration :

Soit  $u = x+y$ . Posons  $\forall z \in V(C_n^C) \quad f(z) = z+u$

Nous avons bien une bijection et  $f(x) = y$ .

Soit  $T = C^* \cup \{z/w(z) = 1\}$ .

$$\{z, t\} \in E(C_n^C) \iff z+t \in T$$

$$z+t \in T \iff f(z) + f(t) \in T$$

puisque

$$f(z) + f(t) = z + u + t + u = z + t.$$

$$f(z) + f(t) \in T \iff \{f(z), f(t)\} \in E(C_n^C)$$

C.Q.F.D.

Puisque  $C_n^C$  est une parure nous avons :

Propriété 5 :

Soit  $\Delta(C_n^C) = \max_{x,y \in V(C_n^C)} d(x,y)$  alors  $\Delta(C_n^C) = \max_{x \in V(C_n^C)} d(o,x)$

Propriété 6 :

$\Delta(C_n^{\{o,x\}}) = \lceil n - \frac{w(x)}{2} \rceil$  (partie entière supérieure)

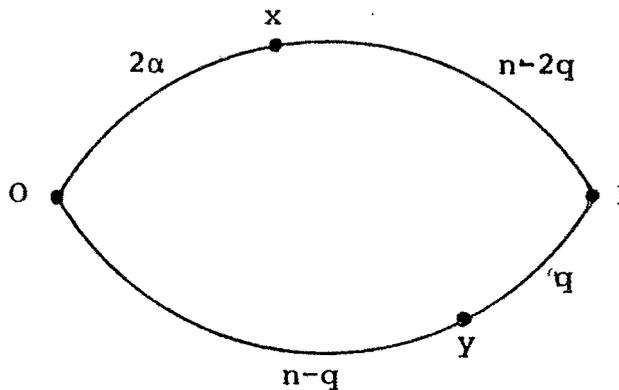
De plus, si  $w(x)$  est impair alors  $C_n^{\{o,x\}}$  est biparti.

Démonstration

$\Delta(C_n^{\{o,x\}}) = \max_{y \in C_n} d(o,y) = \max_{y \in C_n} \min(w(y), w(x+y)+1)$

(car un plus court chemin utilise au plus une arête non dans  $C_n$ ).

$\forall y \in C_n \quad w(x+y) + w(x) + w(y) \leq 2n$  car il existe un chemin entre  $x$  et  $y$  passant par  $l$  et de longueur  $2n-w(x)-w(y)$ .



Si  $w(x) = 2q$   $\min(w(y), w(x+y)+1)$  vaut donc au plus  $n-q$ .

Un sommet  $y$  sur un cycle de longueur  $2n$  passant par  $o, l, x$  et  $\bar{x}$ ; et tel que  $w(y) = n-q$  vérifie  $w(x+y)+1 = n-q+1$ .

Donc  $\Delta(C_n^{\{o,x\}}) = n-q$ .

Si  $w(x) = 2q+1 \min(w(y), w(x+y)+1)$  vaut au plus  $n-q$ .

Un sommet  $y$  de poids  $n-q$  sur un cycle de longueur  $2n$  passant par  $0, 1, x$  et  $\bar{x}$  vérifie  $w(x+y) + 1 = n-q$ .

Donc  $\Delta(C_n^{\{0,x\}}) = n-q$ .

Remarquons que l'on ne peut espérer obtenir par cette construction des  $(0,2)$  graphes bipartis de diamètre 3 autres que  $\overline{C_5}$ .

$$w(x) = 2q + 1$$

pour que  $C_n^{\{0,x\}}$  soit biparti avec  $q \geq 2$ .

D'où  $\lfloor n - (\frac{2q+1}{2}) \rfloor = n-q = 3$  d'où  $n=3+q$   $3+q \geq 2q+1$

donc  $q = 2, n = 5$  et  $x = (11111)$

Théorème :

Soit  $G$  un  $(0,2)$  graphe.

Supposons l'existence d'une involution  $f$  de  $V(G)$  telle que :

$$a) \{x,y\} \in E(G) \iff \{f(x), f(y)\} \in E(G).$$

$$b) \forall x \in V(G) \quad d(x, f(x)) \geq 4.$$

Soit  $\overline{G}$  le graphe tel que  $V(\overline{G}) = V(G)$  et :

$$\{x,y\} \in E(\overline{G}) \iff \begin{array}{l} \{x,y\} \in E(G) \\ \text{ou} \\ f(x) = y \end{array}$$

Alors  $\overline{G}$  est un  $(0,2)$  graphe.

Démonstration

Soit  $(u,v)$  un chemin de longueur 2 dans  $\overline{G}$  de  $x$  à  $y$  passant par  $z$ .

Remarquons qu'il n'existe pas de chemin de type  $u \notin E(G)$   $v \notin E(G)$  puisque exactement une arête de  $E(\overline{G})$  non dans  $E(G)$  est adjacente en chaque sommet.

1er cas :  $u \in E(G) \quad v \in E(G)$

Il existe alors un 2ème chemin dans  $G$  donc dans  $\bar{G}$ .

Supposons l'existence d'un 3ème  $(u',v')$  passant par  $t$ .

On a nécessairement une et une seule arête dans  $E(G)$ .

Posons par exemple  $u' \in E(G)$  et  $u' \notin E(G)$ .

$$t = f(y) \quad \text{donc} \quad d_G(t,y) \geq 4$$

ce qui est impossible car

$$d_G(x,y) = 2 \quad \text{et} \quad d_G(x,t) = 1.$$

2ème cas :  $u \notin E(G) \quad v \in E(G)$

Nous avons alors  $f(x) = z$  et  $d_G(z,y) = 1$ .

Posons  $t = f(y)$ . On a  $t \neq z \quad \{t,y\} \in E(\bar{G})$ .

$$d_G(t,x) = d_G(f(t), f(x)) = d_G(y,z) = 1$$

donc  $\{t,x\} \in E(G)$ .

On a donc existence d'un 2ème chemin de longueur 2 entre  $x$  et  $y$ .

Si il existe un 3ème chemin  $(u',v')$  il ne peut être que du type  $u' \in E(G) \quad v' \notin E(G)$  (ou son symétrique) car le cas  $E(G) \times E(G)$  a été déjà complètement étudié.

Or de  $x$  et de  $y$  il part déjà une arête de  $E(\bar{G})$  non dans  $E(G)$ , il ne peut donc en partir d'autres, donc il n'existe pas de troisième chemin.

Remarque : Ceci est une généralisation de la proposition 2 du même paragraphe. Dans le cas de  $C_n$  si  $x$  est un sommet de poids au moins 4, l'application  $f(y) = x+y$  convient.

Proposition 7 :

Soient  $G$  et  $H$  deux  $(0,2)$  graphes alors la somme cartésienne  $G+H$  est un  $(0,2)$  graphe.

Démonstration

Soit un chemin de longueur 2 dans  $G+H$  :  $(x,y)(\alpha,\beta)(z,t)$   
 montrons qu'il existe un 2ème chemin unique de longueur 2  
 entre  $(x,y)$  et  $(z,t)$ .

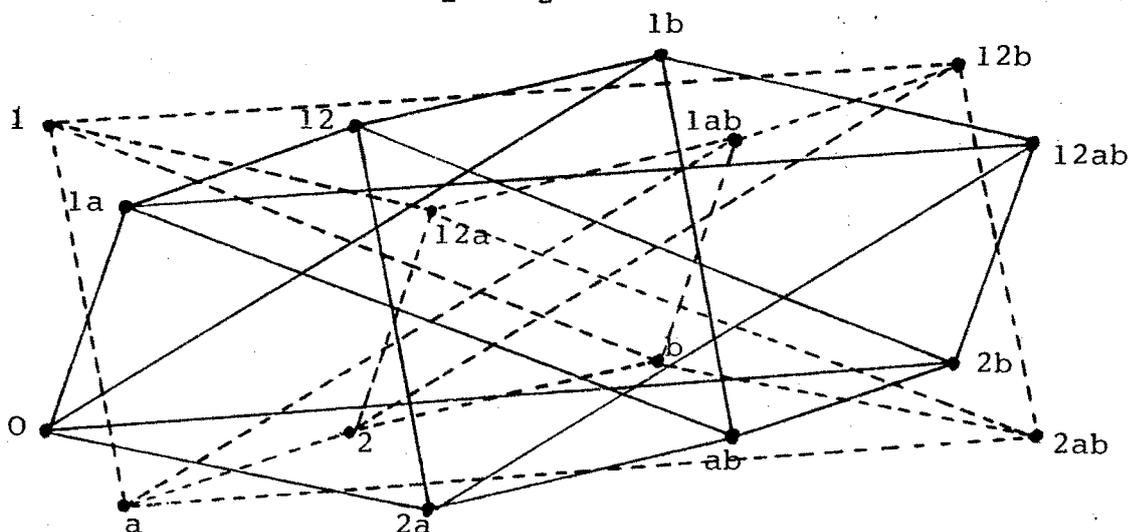
Nous avons  $\alpha = x$  ou  $\beta = y$  supposons  $x = \alpha$  (on complé-  
 tera la preuve par symétrie des hypothèses).

a)  $z = \alpha = x$  donc  $\{\beta,t\} \in E(H)$ . Il existe un 2ème  
 chemin de longueur 2 entre  $y$  et  $t$  dans  $H$  donc entre  
 $(x,y)$  et  $(x,t)$  dans  $G+H$ . Si il existait un 3ème chemin  
 dans  $G+H$  il devrait en exister un 3ème dans  $H$  ce qui  
 est impossible.

b)  $t = \beta$  donc  $\{x,z\} \in E(G)$ . On a existence d'un  
 2ème chemin entre  $(x,y)$  et  $(z,t)$  passant par  $(z,y)$ .  
 Si il existe un 3ème chemin passant par  $(\gamma,\delta)$  on doit avoir  
 avoir  $\gamma \neq x$  et  $\delta \neq y$  ce qui est impossible.

Remarque : Cette construction est intéressante puisque si  
 on suppose  $G$  et  $H$  connexes  $G+H$  est aussi connexe.

L'équivalent de la précédente proposition n'existe pas pour  
 le produit cartésien :  $C_2 \times C_2$  est le graphe suivant :



Grphe formé de 2 composantes connexes qui ne sont pas des  
 $(0,2)$  graphes.

§4 - GENERALISATION DU PROBLEME DE BONDY

Nous avons étudié au §2 les graphes sans triangle tels que deux sommets non adjacents sont reliés par exactement deux chemins de longueur 2.

Nous nous proposons d'étudier les graphes possédant les propriétés suivantes :

---

\* G est un graphe connexe sans triangle et il existe un sommet x de  $V(G)$  tel que la représentation en couches à partir de x :  $C_0 C_1 \dots C_p$  vérifie :

$\forall i \in \{0, \dots, p\}$ ,  $\forall y \in C_i$   $\forall z \in C_i / z \neq y$   $\exists$  exactement 2 chemins de longueur 2 entre y et z.

$\forall j \in \{0, \dots, p-2\}$ ,  $\forall y \in C_j$   $\forall z \in C_{j+2}$  il existe exactement deux chemins de longueur 2 entre y et z.

---

Proposition 1 :

G est un graphe biparti.

Supposons G non biparti ; il existe alors une couche  $C_i$  telle qu'il existe un couple (z t) de sommets de  $C_i$  adjacents ; or z et t sont reliés par deux chemins de longueur 2, on a donc 2 triangles ce qui est impossible.

Proposition 2 :

G est un (0,2) graphe de diamètre 3 ou est  $C_2$ .

Il est clair que si dans G 2 sommets y,z sont reliés par un chemin de longueur 2 alors  $y \in C_i$  et ( $z \in C_i$  ou  $z \in C_{i+1}$  ou  $z \in C_{i+2}$ ), on ne peut avoir  $z \in C_{i+1}$  car on aurait alors un cycle impair.

Si  $z \in C_i$  ou si  $z \in C_{i+2}$  alors par définition de G il existe exactement deux chemins de longueur 2 entre y et z. G est donc un (0,2) graphe.

Supposons  $n \geq 3$  et montrons que le diamètre de  $G$  est 3.

Il y a  $|C_2|n$  arêtes qui partent de  $C_2$ .  $2|C_2|$  sont dirigées vers  $C_1$ , il y en a donc  $|C_2|(n-2)$  entre  $C_2$  et  $C_3$ .

Le nombre de chemins de longueur 2 entre  $C_1$  et  $C_3$  est donc  $2|C_2|(n-2)$ .

Il y a donc  $|C_2|(n-2)$  paires de points reliés par des chemins de longueur 2 entre  $C_1$  et  $C_3$ .

Or il y a  $|C_1||C_3| = n|C_3|$  couples de points de  $(C_1 \times C_3)$  d'où

$$n|C_3| = |C_2|(n-2) \quad |C_3| = \frac{n(n-1)(n-2)}{2n} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Or il y a  $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$  arêtes entre  $C_3$  et  $C_2$  et ce nombre est  $n|C_3|$  donc de chaque sommet de  $C_3$  partent  $n$  arêtes vers  $C_2$  donc  $C_4 = \emptyset$ .

D'autre part, nous savons que les  $(0,2)$  graphes bipartis de diamètre 3 vérifient les propriétés caractéristiques de  $G$

Remarque : Le fait que  $G$  soit nécessairement biparti provient de la condition trop restrictive:

$$\forall y \in C_i \quad \forall z \in C_i / z \neq y$$

$\exists$  exactement 2 chemins de longueur 2 entre  $y$  et  $z$ .

On est donc conduit à étudier les graphes  $H$  vérifiant :

$H$  est un graphe connexe sans triangle et il existe une représentation en couches de  $G$  telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \forall y \in C_i \\ \forall z \in C_j \\ \{y, z\} \notin E(G) \\ y \neq z \end{array} \right\} |i-j| < 3 \iff \exists \text{ exactement 2 chemins de longueur 2 reliant } z \text{ à } y$$

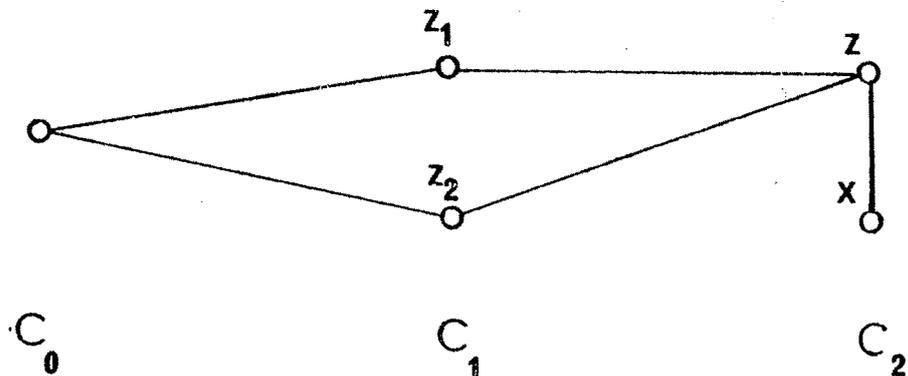
Proposition :

H est un  $(0,2)$  graphe de diamètre 2.

Soit  $x$  un sommet de  $C_2$  il a 2 voisins dans  $C_1$  donc  $(n-2)$  sommets de  $C_1$  sont non adjacents à  $x$ , il doit donc exister  $2(n-2)$  chemins de longueur 2 entre  $x$  et  $C_1$ .

Soit  $A$  l'ensemble des arêtes entre  $x$  et  $C_2$ .

Chaque arête  $\{x,z\}$  de  $A$  conduit à 2 chemins entre  $x$  et  $C_1$



On obtient ainsi  $2|A|$  chemins de longueur 2 entre  $x$  et  $C_1$ . Tous les chemins de longueur 2 entre  $x$  et  $C_1$  sont formés ainsi puisque H est sans triangle. Donc :  
 $2|A| = 2(n-2)$  d'où  $|A| = n-2$ . Toutes les arêtes adjacentes à  $x$  vont donc soit vers  $C_1$  soit vers  $C_2$ .  $C_3$  est donc vide.

Réciproquement les  $(0,2)$  graphes de diamètre 2 sans triangles conviennent

On va maintenant étudier l'hypothèse moins restrictive suivante :

---

\* K est un  $(0,2)$  graphe sans triangle pour lequel il existe une représentation en couches  $C_0 C_1 \dots C_p$  telle que :

$\forall i \in \{0, \dots, p-2\} \quad \forall x \in C_i \quad \forall y \in C_{i+2}$

il existe exactement 2 chemins de longueur 2 entre  $x$  et  $y$ .

---

Proposition :

$K$  est un  $(0,2)$  graphe de diamètre au plus 3.

Soit  $N$  le nombre d'arêtes entre  $C_2$  et  $C_3$ . Il y a donc  $2N$  chemins de longueur 2 entre  $C_1$  et  $C_3$ . Par hypothèse, il doit en exister  $2nC_3$  donc  $N = n C_3$ .  $C_4$  est donc vide.

Remarquons que l'on a utilisé l'hypothèse que pour  $i = 1$  et 0

Réciproquement tous les  $(0,2)$  graphes de diamètre au plus 3 conviennent.

§5 - LES (0,2) GRAPHES AVEC DES TRIANGLES

Définition : Nous dirons qu'il existe  $p$  triangles adjacents centrés sur un sommet  $x$  de  $G$  si et seulement si il existe  $p+1$  arêtes  $\{xy_1\}\{xy_2\}\dots\{xy_{p+1}\}$  telles que :

$$\forall i \in \{1,2,\dots,p\} \quad \{y_i y_{i+1}\} \in E(G).$$

Nous dirons qu'il existe un cycle de  $p$  triangles centrés sur  $x$  si et seulement si il existe  $p$  arêtes  $\{xy_1\}\{xy_2\}\dots\{xy_p\}$  telles que :

$$\forall i \in \{1,2,\dots,p-1\} \quad \{y_i y_{i+1}\} \in E(G) \quad \text{et} \quad \{y_p, y_1\} \in E(G).$$

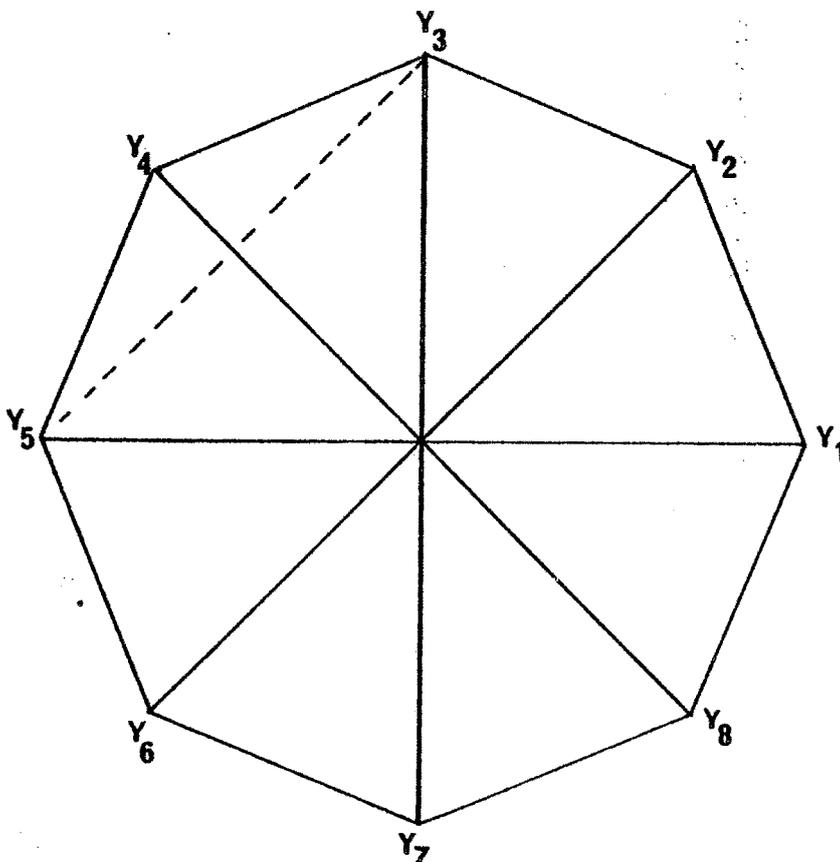
Ce cycle sera dit élémentaire si

$$\{y_i y_j\} \in E(G) \iff j = i+1 \quad \text{où} \quad (i = p \quad \text{et} \quad j = 1)$$

On nomme alors "Roue" le graphe engendré par  $\{x y_1 y_2 \dots y_p\}$ .

Proposition 1 :

Tous les cycles de triangles d'un (0,2) graphe sont élémentaires.



Si une arête existe entre  $y_i$  et  $y_j$  avec  $j \not\equiv i+1 \pmod{p}$  alors  $y_i$  est lié à  $x$  par au moins 3 chemins de longueur 2 :  $y_i y_{i+1} x$ ,  $y_i y_{i-1} x$ ,  $y_i y_j x$  ce qui est impossible. Un tel cycle sera donc un sous graphe de  $G$  engendré par  $\{x, y_1, \dots, y_p\}$ .

De la même façon on montre que :

Proposition 2 :

Si  $x, y_1, y_2, \dots, y_{p+1}$  définissent  $p$  triangles adjacents centrés sur un sommet  $x$  d'un  $(0,2)$  graphe alors le sous graphe de  $G$  engendré par  $\{x, y_1, \dots, y_{p+1}\}$  contient au plus une nouvelle arête  $\{y_{p+1}, y_1\}$ .

Proposition 3 :

Si il existe  $p$  triangles adjacents centrés sur un sommet  $x$  dans un  $(0,2)$  graphe ( $p \geq 1$ ), alors ces  $p$  triangles font partie d'un cycle d'au moins  $p+1$  triangles centrés sur  $x$ .

En effet soit  $\{x, y_1, \dots, y_{p+1}\}$  qui forment ces  $p$  triangles.  $y_{p+1}$  est lié à  $x$  par un chemin de longueur 2 :  $y_{p+1} y_p x$  donc il en existe un deuxième  $y_{p+1} y_{p+2} x$ .

Si  $y_{p+2} = y_1$  alors on obtient un cycle de  $p+1$  triangles.

Si  $y_{p+2} \neq y_1$  alors  $\forall i, y_{p+2} \neq y_i$  (d'après la proposition précédente)  $y_{p+2}$  est donc un nouveau sommet et on obtient ainsi  $p+1$  triangles adjacents.

Puisque le degré  $n$  de  $G$  est fini une telle procédure conduira soit à un cycle de  $q$  triangles ( $p \leq q+1 < n$ ) soit à  $n-1$  triangles adjacents.

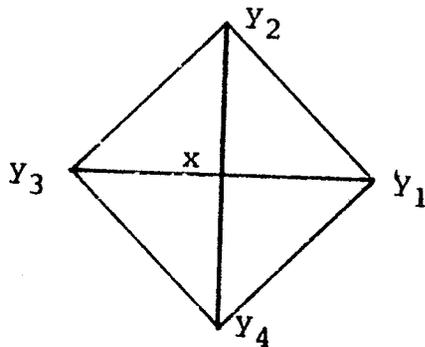
Soit  $\{x, y_1, \dots, y_n\}$  qui forment ces  $n-1$  triangles.

$x$  et  $y_n$  sont liés par un chemin de longueur 2  $y_n y_{n-1} x$ .  
Il en existe un 2ème :  $x y_{n+1} y_n$

$y_{n+1}$  ne peut être un nouveau point puisque le degré de  $G$  est  $n$ .

Donc  $y_{n+1} = y_1$  et on obtient un cycle de  $n$  triangles.

Remarque : Il ne peut exister dans un  $(0,2)$  graphes de cycles de 2 ou 4 triangles.



$y_1$  et  $y_3$  sont reliés par 3 chemins de longueur 2, donc les cycles de 4 triangles sont impossibles.

Un cycle de 2 triangles est impossible puisque  $G$  est supposé être simple.

Théorème :

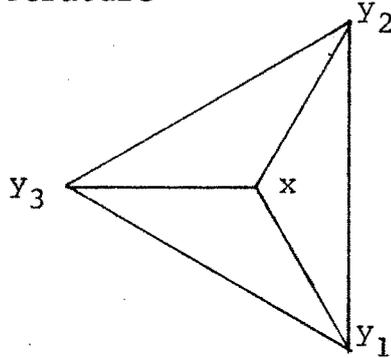
Si  $G$  est un  $(0,2)$  graphe contenant un triangle alors  $G$  vérifie (1), (2) ou (3).

- (1)  $G$  possède un cycle d'au moins 6 triangles.
- (2)  $G$  contient comme sous-graphe engendré le tétraèdre  $K_4$ .
- (3)  $G$  contient comme sous-graphe engendré l'icosaèdre.

Démonstration :

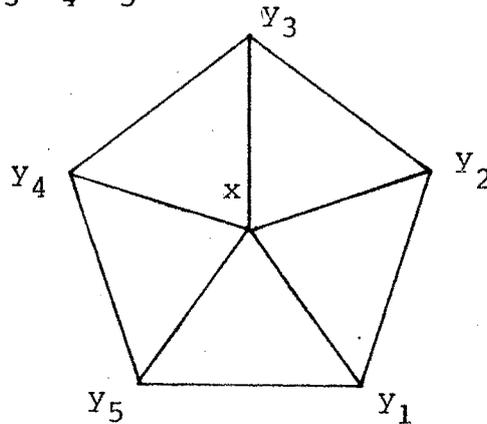
Si  $G$  possède un triangle celui-ci doit appartenir à un cycle de 3, 5 ou au moins 6 triangles. Plaçons nous dans le cas où il n'y a pas de cycle de 6 triangles.

\* Si c'est un cycle de 3 triangles, on obtient le graphe  $K_4$  du tétraèdre



Ce cycle étant élémentaire c'est le sous graphe de  $G$  engendré par  $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ .

\* Si c'est un cycle de 5 triangles, baptisons le  $\{x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ .



$y_1$  et  $y_2$  sont reliés par un chemin de longueur 2 d'où l'existence d'une 2ème chemin :  $y_1 w_1 y_2$ .  $w_1$  est différent des  $y_i$  d'après la proposition 1 donc c'est un nouveau point.

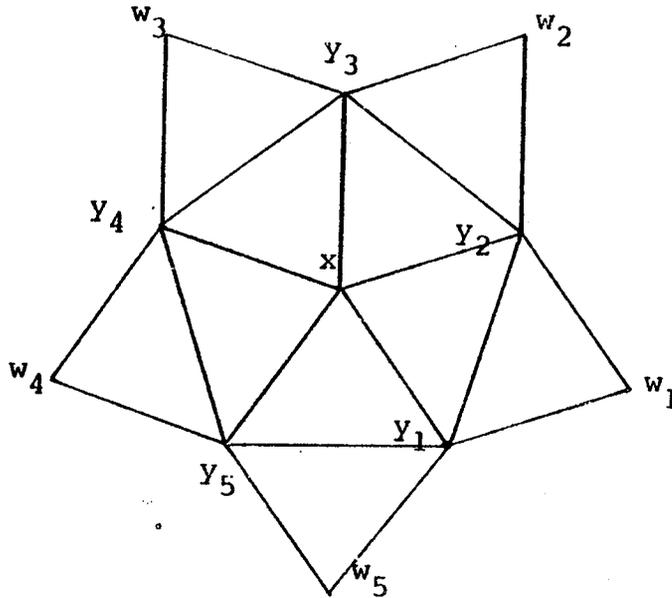
De même il existe  $w_2$  pour relier par un 2ème chemin de longueur 2  $y_2$  à  $y_3$ .

De même il existe  $w_3$  pour relier par un 2ème chemin de longueur 2  $y_3$  à  $y_4$ .

De même il existe  $w_4$  pour relier par un 2ème chemin de longueur 2  $y_4$  à  $y_5$ .

De même il existe  $w_5$  pour relier par un 2ème chemin de longueur 2  $y_5$  à  $y_1$ .

Montrons que les  $w_i$  sont tous différents.



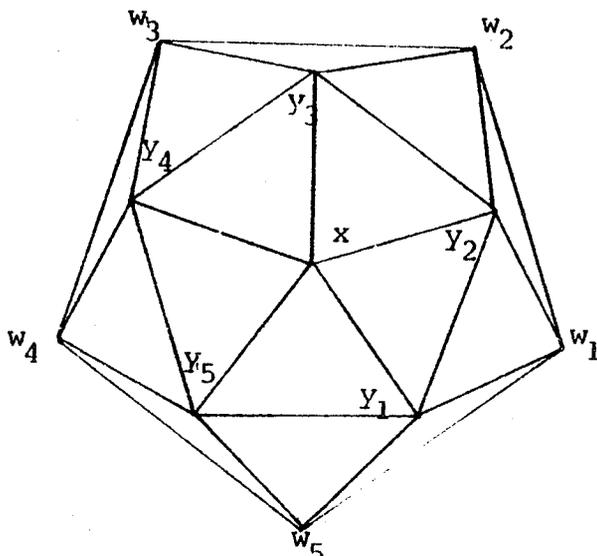
$w_1 \neq w_2$  cas on aurait 3 chemins de  $w_1$  à  $x$  :  $w_1 y_1 x$ ,  $w_1 y_2 x$ ,  $w_1 y_3 x$ .

$w_1 \neq w_3$  cas on aurait 4 chemins de  $w_1$  à  $x$  :  $w_1 y_1 x$ ,  $w_1 y_2 x$ ,  $w_1 y_3 x$ ,  $w_1 y_4 x$ . De même par symétrie  $w_1 \neq w_5$  et  $w_1 \neq w_4$ .

Les  $w_i$  jouant tous le même rôle, on a  $w_i \neq w_j$ .

Il y a 4 triangles adjacents centrés en  $y_2$ , comme  $G$  est supposé sans cycle de plus de 5 triangles, ces 4 triangles se ferment en un cycle de 5 triangles.

Donc  $\{w_1 w_2\} \in E(G)$  de même  $\{w_2 w_3\} \in E(G)$   $\{w_3 w_4\} \in E(G)$  et  $\{w_4 w_5\} \in E(G)$  et  $w_5 w_1 \in E(G)$ .



Nous avons 3 triangles adjacents centrés en  $w_1$  ; ils appartiennent donc à un cycle de 5 triangles :  $w_1 w_2 Y_2 Y_1 w_5 z$ .

Montrons que  $z$  est un nouveau sommet. Nous savons déjà que  $z \neq w_1$   $z \neq w_2$   $z \neq Y_2$   $z \neq Y_1$   $z \neq w_5$ .

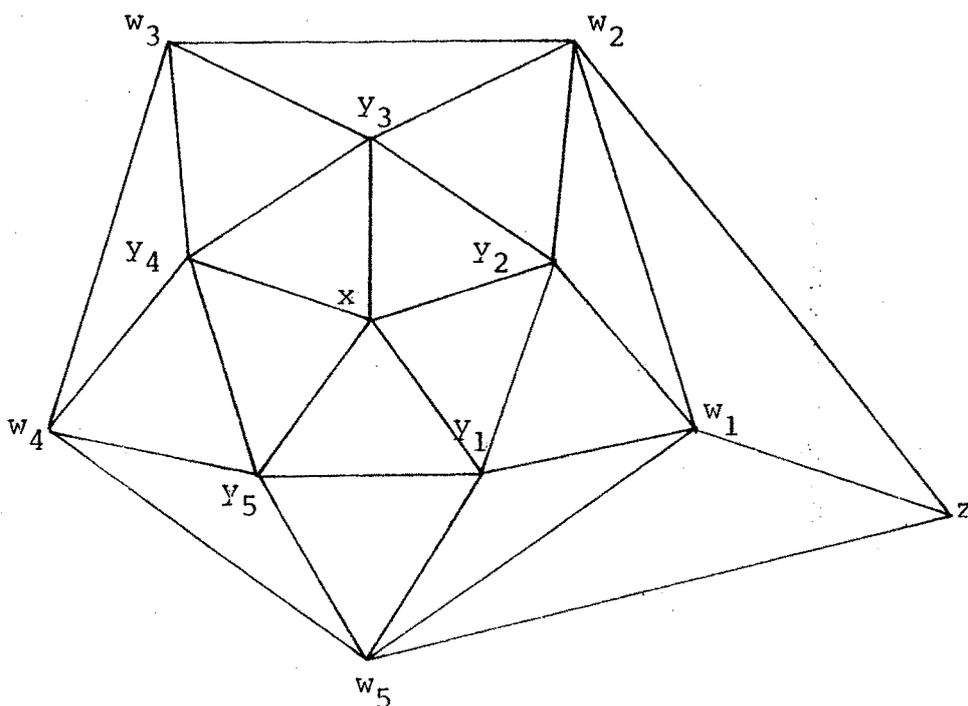
$z \neq x$  car on aurait 3 chemins de  $x$  à  $Y_2$ .

$z \neq Y_3$  car on aurait 3 chemins de  $x$  à  $w_1$  (donc  $z \neq Y_5$  par symétrie).

$z \neq Y_4$  car on aurait 3 chemins de  $x$  à  $w_1$ .

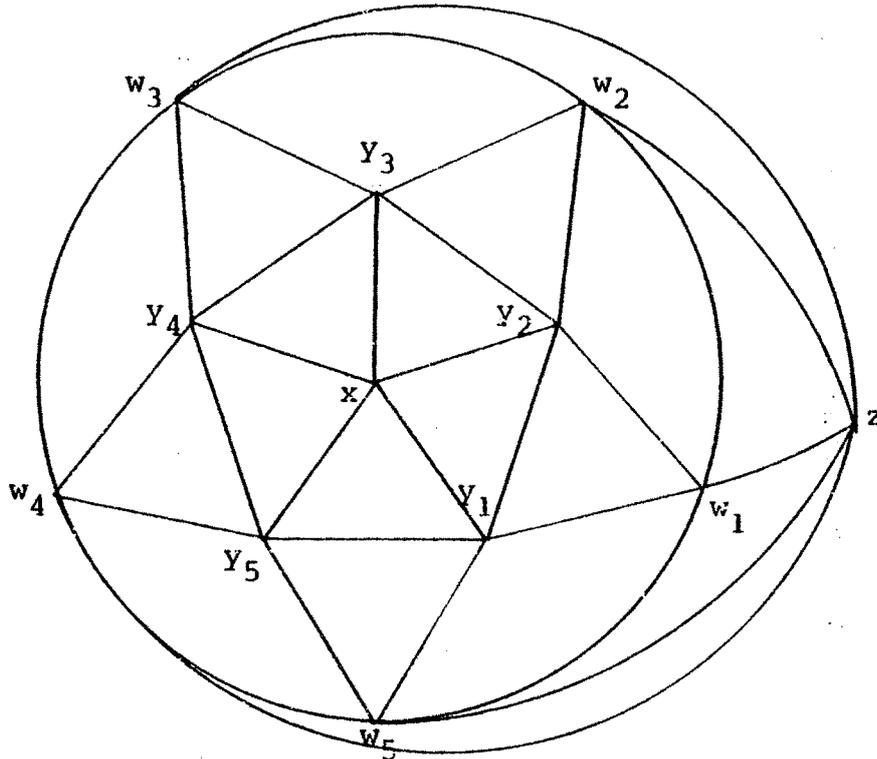
$z \neq w_3$  car on aurait 3 chemins entre  $w_3$  et  $Y_5$  (donc  $z \neq w_4$  par symétrie).

$z$  est donc un nouveau sommet.



On a 4 triangles adjacents centrés sur  $w_2$  donc ils se ferment en un cycle de 5 triangles donc  $w_3$  est adjacent à  $z$ . De même  $w_4$  est adjacent à  $z$ .

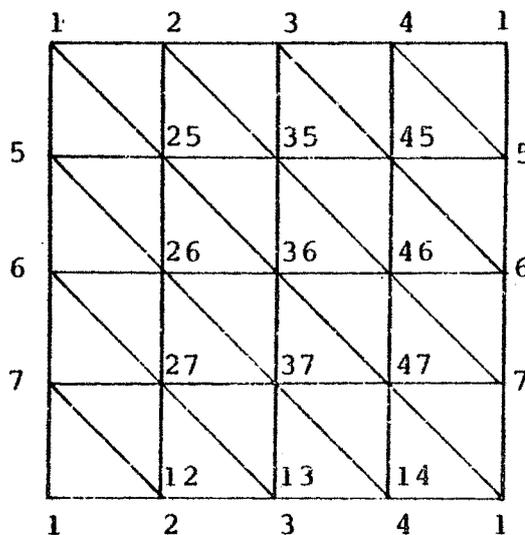
G admet donc comme sous-graphe partiel l'icosaèdre :



C'est même un sous-graphe de G car on ne peut rajouter d'arêtes.

Remarque :

$K_4$  et l'icosaèdre sont des graphes tel qu'en chaque sommet il existe un cycle de 3 (respectivement 5) triangles. On peut construire un tel graphe du même type pour des cycles de 6 triangles, graphe dit de Shrikhande, obtenu à partir du graphe suivant en identifiant les sommets de même étiquette.





§6 - GRAPHES DE CAYLEY (non orientés)

Définition

Soient  $G$  un groupe et  $\Omega \subseteq G$  tels que :

- (i)  $\Omega$  engendre  $G$ .
- (ii)  $1 \notin \Omega$ .
- (iii)  $\omega \in \Omega \Rightarrow \omega^{-1} \in \Omega$

Le graphe de Cayley  $\Gamma = \Gamma(G, \Omega)$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est celui des éléments de  $G$  et tel que pour  $g, h$  éléments de  $G$   $\{g, h\}$  est une arête si et seulement si  $g^{-1}h \in \Omega$

Prop.

Ce graphe est simple et connexe, régulier de degré  $|\Omega|$ .

Soient  $g, h \in V$  et choisissons  $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_k \in \Omega$  tels que :

$$g^{-1}h = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_k.$$

Posons

$$g_0 = g \quad g_{i+1} = g_i \omega_{i+1} \quad 1 \leq i \leq k-1$$

$g_0, g_1, \dots, g_n$  constitue une chaîne entre  $g$  et  $h$  ( $g_k = h$ ).

Proposition

Un graphe de Cayley  $\Gamma = \Gamma(G, \Omega)$  est sommet transitif

Dem.

Soient  $g, h \in \Omega$  tels que  $\{g, h\} \in E(\Gamma)$ .  $g^{-1}h = \omega$  avec  $\omega \in \Omega$ .

Posons  $\forall x \in G \quad f(x) = \omega x$

$f$  est une bijection de  $\Omega$  dans  $\Omega$  puisque :  $\forall y \in \Omega$ .  
 $f(\omega^{-1}y) = y$ .

f conserve l'adjacence :

$$\{k, \ell\} \in E(\Gamma) \iff k^{-1}\ell = \omega' \in \Omega.$$

$$\{f(k), f(\ell)\} \in E(\Gamma) \iff (f(\ell))^{-1} f(k) \in \Omega$$

Or  $(f(\ell))^{-1} f(k) = (\omega\ell)^{-1}f(k) = \ell^{-1} \omega^{-1} \omega k = \ell^{-1}k = \omega'^{-1}$

et on a par définition  $\omega' \in \Omega \iff \omega'^{-1} \in \Omega.$

A quelles conditions un graphe de Cayley est-il un (0,2) graphe ?

Théorème

Soit G un groupe et  $\Omega$  tel que :

- (i)  $\Omega$  engendre G.
- (ii)  $1 \notin \Omega.$
- (iii)  $\omega \in \Omega \implies \omega^{-1} \in \Omega$
- (iv)  $\forall \omega \in \Omega \ \forall \omega' \in \Omega$  ( $\omega$  et  $\omega'$  non forcément distinct).  $\omega' \neq \omega^{-1}$
- $\exists! (\omega'' \omega''') \in \Omega \times \Omega / \omega'\omega = \omega'' \omega'''.$

Alors le graphe de Cayley  $\Gamma = \Gamma(G, \Omega)$  est un (0,2) graphe.

Dem.

Soit (g h k) un chemin de longueur 2 dans  $\Gamma.$

$$h^{-1}g = \omega \in \Omega.$$

$$k^{-1}h = \omega' \in \Omega. \quad \omega' \neq \omega^{-1} \text{ sinon on aurait } g = k.$$

Soit  $(\omega'' \omega''')$  le couple unique tel que  $\omega'\omega = \omega'' \omega'''.$

Posons  $h' = g \omega'''^{-1}$

$$h'^{-1}g = \omega''' g^{-1}g = \omega''' \in \Omega \text{ donc } \{g, h'\} \in E(\Gamma).$$

$$\begin{aligned} k^{-1}h' &= k^{-1}g \omega'''^{-1} = k^{-1}h h^{-1}g \omega'''^{-1} = \omega' \omega \omega'''^{-1} \\ &= (\omega'' \omega''') \omega'''^{-1} = \omega'' \in \Omega. \end{aligned}$$

Donc  $\{h'k\} \in E(\Gamma)$ .

Il existe donc un 2ème chemin de longueur 2 entre  $g$  et  $k$ .

Montrons qu'il ne peut en exister un troisième  $g h'' k$ .

Posons

$$\alpha = h''^{-1}g \text{ nous avons donc } \alpha \in \Omega$$

$$\beta = k^{-1}h'' \qquad \beta \in \Omega$$

$$\beta\alpha = k^{-1}h'' h''^{-1}g = k^{-1}g = k^{-1}h h^{-1}g = \omega' \omega.$$

Donc

$$\beta = \omega''$$

$$\alpha = \omega''' \text{ et } h'' = h'.$$

Donc  $\Gamma$  est un  $(0,2)$  graphe.

Rem.

Si  $G$  est un groupe abélien la condition (iv) est équivalente à :

$$(v) \forall \omega \in \Omega \quad \exists ! \omega' \in \Omega \quad \omega^2 = \omega'^2 \\ \omega^2 \neq 1$$

$$(vi) \forall \omega \in \Omega \quad \forall \omega' \in \Omega \quad (\omega \neq \omega') \quad \forall \omega'' \in \Omega \quad \forall \omega''' \in \Omega. \\ \omega' \neq \omega^{-1} \text{ avec } \{\omega, \omega'\} \neq \{\omega'', \omega'''\} \\ \omega \omega' \neq \omega'' \omega''' .$$

Applications

1) Soit le groupe d'ordre 4 de présentation  $\langle a, b, a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle$ .

Posons  $\Omega = \{a, b, ab\}$ .

$\Omega$  vérifie les hypothèses du théorème.  $\Gamma(G, \Omega)$  est le tétraèdre  $K_4$ .

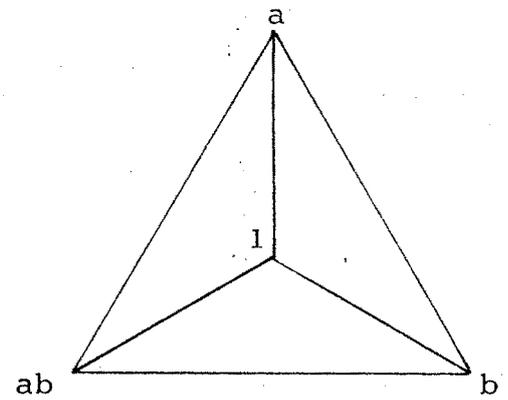
2) Soit le groupe d'ordre 12  $\{a, b, c, a^3 = b^3 = c^2 = abc = 1\}$ .

Posons  $\Omega = \{a, b, c, a^2, b^2\}$ .

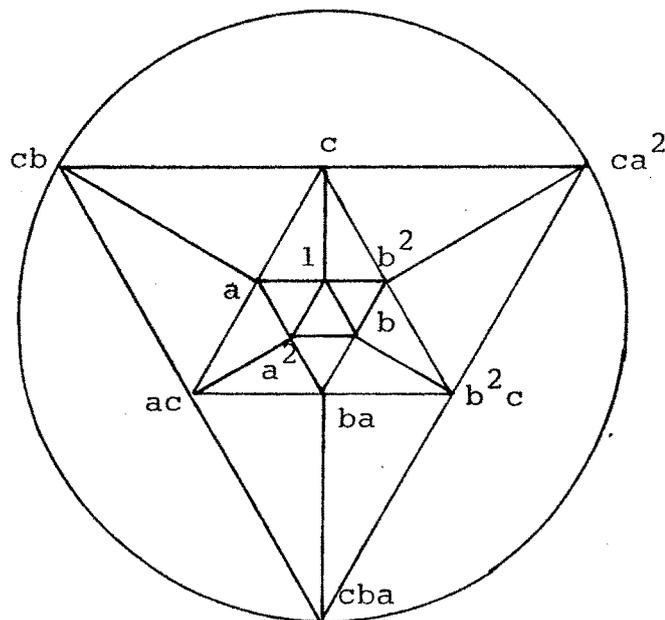
$G$  n'est pas abélien.

On vérifie facilement les hypothèses du théorème à partir de la table suivante où on a inscrit au croisement de la colonne  $x$  et de la ligne  $y$  le produit  $xy$ .

	a	b	c	$a^2$	$b^2$
a	$a^2$	ba	$b^2$	1	$ca^2$
b	c	$b^2$	cb	ac	1
c	ac	$a^2$	1	b	$b^2c$
$a^2$	1	$b^2c$	$ca^2$	a	c
$b^2$	cb	1	a	ba	b



On obtient ainsi le graphe de l'icosaèdre:



3) Soit le groupe abélien d'ordre  $2^n$   $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1^2 = \dots = a_n^2 = 1, a_i a_j = a_j a_i \rangle$

Posons  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . On obtient ainsi le n-cube.

Posons  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 a_2 \dots a_n\}$ . La table de composition des éléments de  $\Omega$  est alors la suivante :

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_i$	$\dots$	$a_n$	$a_1 a_2 \dots a_n$
$a_1$	1	$a_1 a_2$	$a_1 a_3$		$a_1 a_i$			$\bar{a}_1$
$a_2$	$a_1 a_2$	1	$a_2 a_3$		$a_2 a_i$			$\bar{a}_2$
$a_3$	$a_1 a_3$	$a_2 a_3$	1		$a_3 a_i$			$\bar{a}_3$
$\vdots$					$\vdots$			$\vdots$
$a_j$	$a_1 a_j$	$a_2 a_j$	$a_3 a_j$	$\dots$	$a_i a_j$	$\dots$	$a_n a_j$	$\bar{a}_j$
$\vdots$					$\vdots$			$\vdots$
$a_n$					$a_i a_n$		1	$\bar{a}_n$
$a_1 \dots a_n$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\dots$	$\bar{a}_i$	$\dots$	$\bar{a}_n$	1

où  $\bar{a}_j$  désigne l'élément  $a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_{j+1} \dots a_n$ .

Si  $n \geq 4$   $a_i a_j$  figure 2 fois dans cette table et  $\bar{a}_1$  aussi, on vérifie donc les hypothèses du théorème. On obtient ainsi le graphe  $\bar{C}_n$ .

De la même façon, si  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \omega\}$  où  $\omega$  est le produit d'au moins 4 éléments de  $\Omega - \{\omega\}$  le graphe obtenu est  $C_n^{(0,x)}$  où  $x$  est le sommet du  $n$  cube correspondant à  $\omega$ .

Si  $C$  est un 3 code de  $C_n$  tel que :

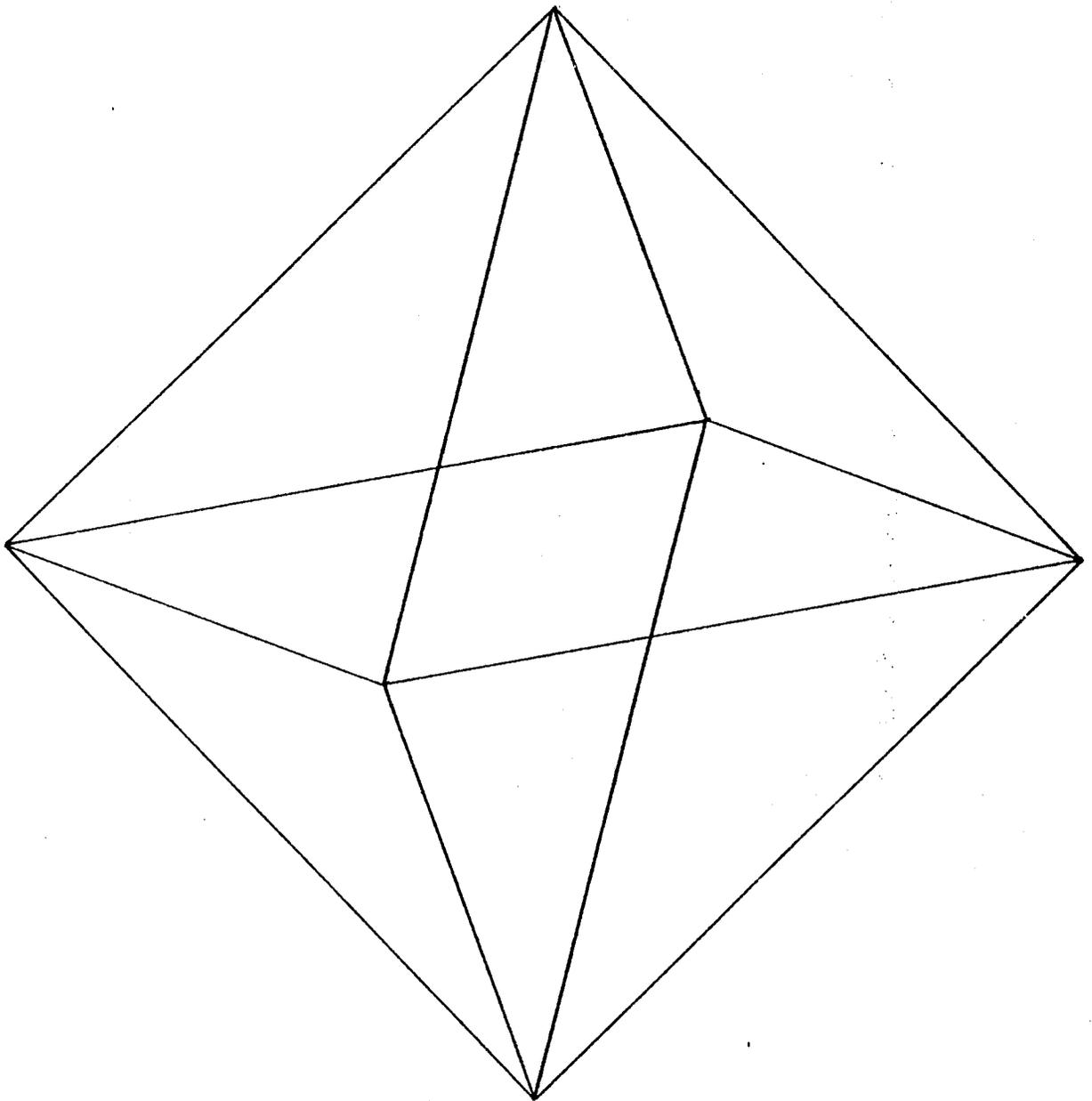
- (i)  $0 \in C$ .
- (ii)  $\forall c \in C^* \quad w(c) \geq 4$ .
- (iii)  $\forall c \quad \forall c' \quad \forall c'' \quad \forall c''' \quad$  élément de  $C$  tous différents :  
 $(c+c')$  et  $(c''+c''')$  sont au moins à distance 2.

Désignons par  $\theta$  le sous-ensemble de  $G$  correspondant à  $C$ .

Posons  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cup \theta$ .

On vérifie facilement que les conditions (i), (ii) et (iii) impliquent dans la table de composition des éléments de  $\Omega$ , les éléments de  $G$  figurent soit exactement 2 fois, soit pas du tout. On obtient ainsi le graphe noté  $C_n^C$ , et par le premier théorème de ce paragraphe le fait qu'il est sommet transitif

CHAPITRE II  
INVARIANTS DU N-CUBE





§1- LE PROBLEME DE  $\beta'$

L'ensemble des sommets de  $C_n$  dont le poids est pair constitue un absorbant minimal de cardinal  $2^{n-1}$ .

Nous avons donc  $\beta'(C_n) \geq 2^{n-1}$ .

Proposition :  $\beta'(C_n) = 2^{n-1}$  ( $n \geq 1$ )

En effet soit  $A$  un absorbant minimal de  $C_n$ .

Soit  $X$  (respectivement  $Y$ ) l'ensemble des sommets dont le codage se termine par 0 (respectivement 1).

Ceci revient à décomposer  $C_n$  comme somme directe de  $C_{n-1}$  et de  $C_1$  puisque  $X$  et  $Y$  sont isomorphes à  $C_{n-1}$  et qu'à tout sommet  $x$  de  $X$  on peut associer un sommet unique  $\bar{x}$  de  $Y$  tel que l'arête  $\{x, \bar{x}\}$  existe dans  $C_n$ .

On a donc  $2^{n-1}$  couples  $(x, \bar{x})$  pour  $x$  élément de  $X$ . Répartissons ces couples dans les classes suivantes :

$$H_0 : x \notin A \text{ et } \bar{x} \notin A$$

$$H_1 : \begin{cases} x \notin A \text{ et } \bar{x} \in A \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ et } \bar{x} \notin A \end{cases}$$

$$H_2 : x \in A \text{ et } \bar{x} \in A$$

On a alors :

$$|A| = |H_1| + 2|H_2| \text{ et } |H_0| + |H_1| + |H_2| = 2^{n-1}$$

Si  $(x, \bar{x})$  est dans  $H_2$  alors il existe  $y$  dans  $X$  tel que  $d(x, y) = 1$  et tel que  $y$  n'est absorbé que par  $x$  (sinon  $A$  ne serait pas minimal car on pourrait lui enlever  $x$ ).

On a donc  $(y\bar{y})$  dans  $H_0$ . Comme  $y$  n'est absorbé que par  $x$  un tel procédé appliqué à un autre couple de  $H_2$  ne peut donner  $(y\bar{y})$ .

Donc il existe une injection de  $H_2$  dans  $H_0$  et ainsi  $|H_2| \leq |H_0|$ .

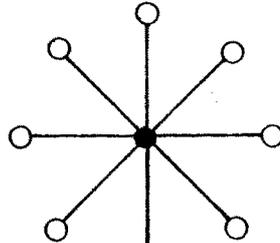
D'où  $|A| \leq 2^{n-1}$ .

Nous allons maintenant déterminer les absorbants réalisant  $\beta'(C_n)$  pour  $n \geq 1$ .

Lemme : Soit  $C$  un absorbant minimal de cardinal  $2^{n-1}$  alors les boules de rayon 1 centrées sur un sommet de  $C$  sont

\* soit toutes du type

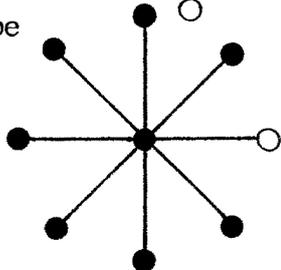
(A)



$(x \in C \text{ et } \forall y / d(x,y) = 1, y \notin C)$

\* soit toutes du type

(B<sub>n</sub>)

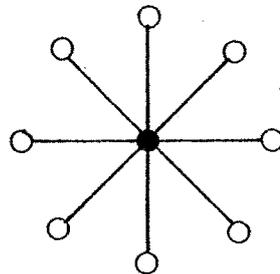


$(x \in C \quad \exists y / d(x,y) = 1 \text{ et } y \notin C$   
 et  $\forall z / d(x,z) = 1 \text{ et } z \neq y$   
 on a  $z \in C)$

Démonstration : Les boules centrées sur un sommet  $x$  de  $C$  sont

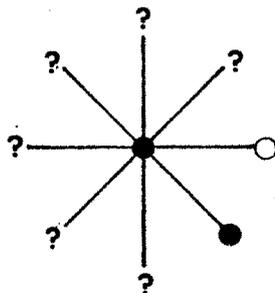
- soit du type

(A)



- soit du type

(B)

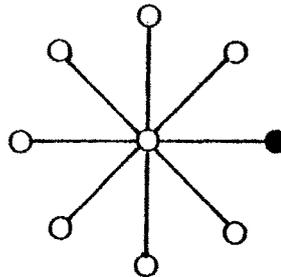


$x \in C \quad \exists y / d(x,y) = 1 \text{ et } y \notin C$   
 et  $\exists z / d(x,z) = 1 \text{ et } z \in C$

A chaque sommet  $x$  centre d'une boule du type (B) nous pouvons associer de manière bijective un sommet  $f(x)$  qui n'est pas dans  $C$  et tel que :

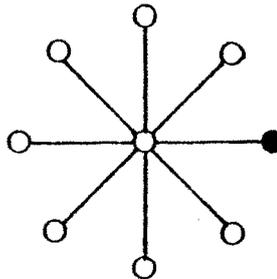
$$\forall y : d(f(x), y) = 1 \text{ et } y \neq x \Rightarrow y \notin C$$

Nous pouvons donc associer à  $B$  un ensemble  $C$  de boules de type



Nous désignerons par  $D$  l'ensemble des boules non centrées sur un sommet de  $C$  et qui ne sont pas dans  $C$ .

Remarquons que pour obtenir une bijection nous avons choisi de manière arbitraire  $f(x)$ , il peut donc y avoir dans  $D$  des boules non centrées du type :



Nous avons

$$|A| + |B| = 2^{n-1} \quad |B| = |C| \text{ donc } |A| = |D|$$

$$|C| + |D| = 2^{n-1}$$

D'autre part, associons à chaque boule  $b$  le nombre de sommets de  $C$  présents dans cette boule :  $g(b)$ .

On a

$$\sum_{b \in A} g(b) = |A|$$

$$\sum_{b \in B} g(b) = |B| x \text{ avec } 2 \leq x \leq n$$

$$\sum_{b \in C} g(b) = |C|$$

$$\sum_{b \in D} g(b) = |D| y \text{ avec } 1 \leq y \leq n$$

D'où :

$$(n+1) |C| = |A| + |B| x + |C| + |D| y$$

$$(n+1) 2^{n-1} = |A| + |B| x + |B| + |A| y$$

$$(n+1) 2^{n-1} = |A| (1+y) + |B| (1+x)$$

D'où :

$$(1) \quad |A| (y-x) = 2^{n-1} (n-x)$$

comme  $|A| \leq 2^{n-1}$  et  $y \leq n$  on a 3 solutions pour (1)

a)  $|A| = 2^{n-1}$  et  $y = n$

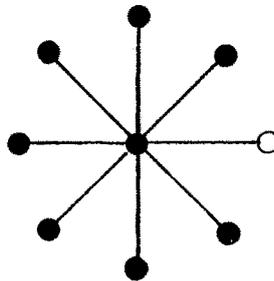
b)  $|A| = 0$  et  $n = x$

c)  $y = x$  et  $n = x$

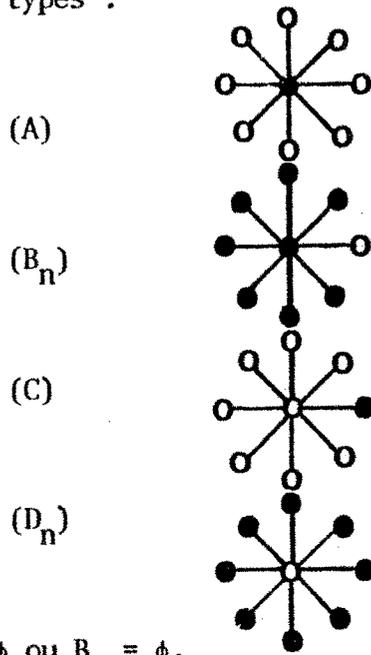
Nous allons étudier séparément chaque cas :

(a) Puisque  $|A| = 2^{n-1}$  nous avons  $|B| = 0$  donc toutes les boules centrées sur un sommet de  $C$  sont du type (A)

(b) Puisque  $|A| = 0$  toutes les boules centrées sont du type (B) et comme  $x = n$  nous avons  $\forall b \in B \quad g_{(b)} = n$  donc toutes les boules centrées sont du type  $(B_n)$



(c) Nous avons donc  $x = y = n$  donc toutes les boules sont des types :



montrons que  $A = \emptyset$  ou  $B_n = \emptyset$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $C$  tels que :

$x$  soit le centre d'une boule de  $A$

$y$  soit le centre d'une boule de  $B_n$

et  $d(x,y)$  soit minimale.

- On ne peut avoir  $d(x,y) = 1$  puisque  $x$  est le centre d'une boule de  $(A)$  ;

- Supposons  $d(x,y) = 2$ . Deux sommets du  $n$  cube à distance 2 sont reliés par exactement deux chemins de longueur 2.

Soient  $xzy$  et  $xty$  ces deux chemins.

Comme  $x$  est le centre d'une boule de  $A$   $z \notin C$  et  $t \notin C$ .

Comme  $y$  est le centre d'une boule de  $B_n$   $z \in C$  ou  $t \in C$ .

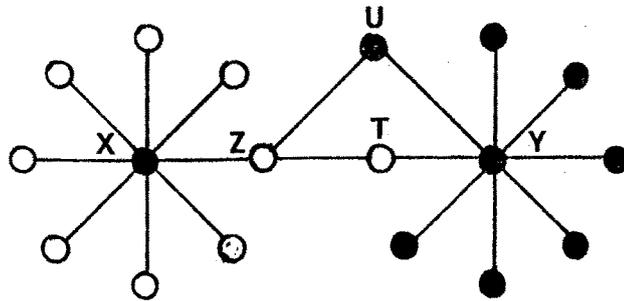
Ce qui est impossible.

- Supposons  $d(x,y) = 3$ .

Soit  $xzty$  un chemin de longueur 3 on a  $z \notin C$  et  $t \notin C$ .

$d(z,y) = 2$  donc il existe un deuxième chemin de longueur 2  $zuy$

avec  $u \neq t$  et  $d(u,y) = 1$  donc  $u \in C$ .



Mais u doit être le centre d'une boule de type  $B_n$  or  $d(x,u) = 2$  ce qui contredit la minimalité de  $d(x,y)$ .

- Supposons  $d(x,y) = \ell$  avec  $\ell \geq 4$ . Il existe donc un chemin  $x u_1 \dots u_{\ell-1} y$  de longueur  $\ell$  avec  $\forall i u_i \notin C$ .

Soit  $u_2$ ,  $u_2$  doit être absorbé par un nouveau point  $z$  avec  $z \in C$ .

On a  $d(x,z) = 3$  et  $d(z,y) = \ell-1$  or la boule centrée sur  $z$  est soit du type (A) soit du type  $(B_n)$  ce qui contredit la minimalité de  $d(x,y)$ .

Donc les boules centrées sur un sommet de  $C$  sont soit toutes du type (A), soit toutes du type  $(B_n)$ .

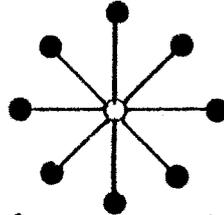
Théorème :

Soit  $C$  un absorbant minimal maximum de  $C_n$  alors  $C$  est d'un des deux types suivants :

- $C$  est une des deux clefs de parité, c'est-à-dire l'ensemble des sommets de poids de même parité.
- $C$  est isomorphe à un des sous-cubes de dimension  $n-1$  de  $C_n$ .

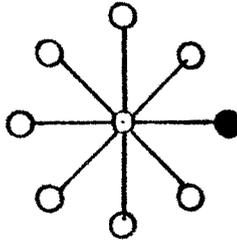
Démonstration :

- Si les boules centrées sont toutes du type (A) alors les boules non centrées sont toutes du type  $(D_n)$



Donc les sommets de  $C$  ont tous la même parité et on sait qu'il y en a  $2^{n-1}$

- les boules centrées sont toutes du type  $(B_n)$  alors les boules non centrées sont toutes du type (C)



Soit  $x \in C$  de poids minimum.  $x$  est alors le centre d'une boule de type  $B_n$  ce qui définit de manière unique  $y \notin C$  tel que  $d(x,y) = 1$ . Les codages de  $x$  et  $y$  diffèrent donc d'un bit. Supposons que ce soit le  $i^{\text{ème}}$

Soit  $H$  le  $(n-1)$  cube des points de  $C_n$  dont le codage à son  $i^{\text{ème}}$  bit nul, il est aisé de vérifier par récurrence sur le poids de  $z$  que l'on a :

soit :  $z \in C$  si et seulement si  $z \in H$

soit :  $z \in C$  si et seulement si  $z \notin H$ .

Remarque

On peut démontrer que  $\beta'(C_n)$  est égal à  $2^{n-1}$  en utilisant le résultat obtenu dans [2] :

Pour tout graphe biparti  $G$  ,  $\beta'(G) = \alpha(G)$

Or nous avons déjà vu que  $\alpha(C_n)$  vaut  $2^{n-1}$



§2 RAPPELS DE THEORIE DES CODES

Définition

On désigne par code binaire un ensemble  $C$  de sommets du  $n$ -cube, la distance du code étant par définition :

$$d = \min_{x,y} d(x,y) \text{ pour } x \in C, y \in C \text{ et } x \neq y (C \text{ est dit } d\text{-code})$$

$A(n,d)$  est le cardinal maximum d'un code de distance  $d$  sur  $C_n$ .  
Puisqu'une boule de rayon  $d$  de  $C_n$  contient  $1 + C_n^1 + \dots + C_n^d$  sommets on a la relation suivante :

$$(1) \quad A(n,2d+1) \leq \frac{2^n}{1+C_n^1+\dots+C_n^d}$$

Proposition

$$A(n,2d) = A(n-1,2d-1) .$$

En effet soit  $C$  un  $2d$  code sur  $C_n$ , la projection de  $C$  sur  $C_{n-1}$  selon la décomposition  $C_n = C_{n-1} + C_1$  fournit un  $2d-1$  code sur  $C_{n-1}$  d'où l'inégalité :

$$A(n-1,2d-1) \geq A(n,2d)$$

Soit  $C$  un  $2d-1$  code sur  $C_{n-1}$

Désignons par  $A$  l'ensemble des sommets de  $C_n$  dont le codage est un mot de  $n$  bits de la forme  $\ell 0$ , où  $\ell$  est le codage d'un sommet de  $C$  de poids pair .

Désignons par  $B$  l'ensemble des sommets de  $C_n$  dont le codage est un mot de  $n$  bits de la forme  $\ell 1$ , où  $\ell$  est le codage d'un sommet de poids impair .

$A \cup B$  est un  $2d$  code sur  $C_n$  de cardinal  $|C|$  d'où :

$$A(n,2d) \geq A(n-1,2d-1) .$$

Définition

Un  $2d+1$  code  $C$  est dit parfait si  $|C| = \frac{2^n}{1+C_n^1+\dots+C_n^d}$

Une condition nécessaire d'existence d'un tel code est que

$$1 + C_n^1 + \dots + C_n^d$$

Dans le cas  $d=1$  celà se traduit par l'existence d'un entier  $p$  tel que  $n=2^p-1$ .

Définition

Un sous espace vectoriel de  $C_n$  est dit code linéaire sur  $GF(2)$ .

Proposition

La distance minimale d'un code linéaire  $C$  est égale au poids minimum des éléments non nuls de  $C$ .

$$d = \min_{\substack{x,y \in C \\ x \neq y}} d(x,y) = \min_{\substack{x,y \in C \\ x \neq y}} w(x+y)$$

Or  $x+y$  est un élément de  $C$  non nul car  $x \neq y$ .

$$\text{D'où} \quad \min_{\substack{x,y \in C \\ x \neq y}} w(x+y) \geq \min_{\substack{z \in C \\ z \neq 0}} w(z)$$

Or  $z$  est à distance  $w(z)$  de l'origine d'où l'égalité.

Nous allons montrer que si  $n=2^p-1$  il existe des 3 codes parfaits sur  $C_n$ .

Soit  $H_p$  la matrice dont les colonnes sont formées de tous les vecteurs non nuls de  $B^{(n)}$ .  $H_p$  est une matrice  $p \times (2^p-1)$ .

par exemple pour  $n=7$  nous avons  $p=3$  et

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit  $C$  l'ensemble des vecteurs de  $B^{(n)}$  tels que :

$$H_p \cdot x = \vec{0}$$

$C$  est appelé code de Hamming.

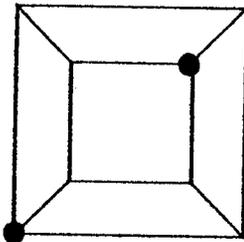
$H_p$  est une matrice de rang  $p$  donc  $C$  est de dimension  $n-p$ .

2 colonnes de  $H_p$  sont toujours indépendantes donc tout élément non nul de  $C$  est de poids au moins 3 .

D'où le théorème suivant :

Théorème 1

Les codes de Hamming sont des 3 codes parfaits de  $C_n$  .



Nous avons représenté à titre d'exemple le code de Hamming correspondant à  $n=3$  .

Proposition

Soit  $C$  un 3 code sur  $C_n$  .

Soit  $\pi$  une permutation de  $\{1 \dots n\}$  .

Soit  $v$  un vecteur de  $B^{(n)}$  .

Soit  $C_\pi$  le code obtenu à partir de  $C$  par la permutation  $\pi$  des coordonnées .

Soit  $C_v$  le code obtenu à partir de  $C$  par addition du vecteur  $v$  .

$C_\pi$  et  $C_v$  sont des 3 codes sur  $C_n$  de cardinal  $|C|$  . Nous dirons qu'ils sont équivalents à  $C$  .

Pendant longtemps on a cru que tous les 3 codes parfaits étaient équivalents aux codes de Hamming . Vasiliev [8] a montré la fausseté de cette hypothèse en prouvant le théorème suivant :

Théorème 2

Si  $n=2^p-1$  ,  $p \geq 4$  , il existe un 3-code parfait sur  $C_n$  non équivalent à un code linéaire .

Démonstration

Posons  $m=2^{p-1}-1$  . Soit  $V$  un 3-code parfait sur  $C_m$  (linéaire) .

$f : V \rightarrow \{0,1\}$  telle que  $f(0) = 0$  .

Soit  $p$  la fonction parité de  $B^{(m)}$  dans  $\{0,1\}$  .

$p(v) = 0$  si  $w(v)$  est pair

$p(v) = 1$  si  $w(v)$  est impair

Soit  $V^* = \{(\bar{v}, \bar{v}+\bar{c}, p(v) + f(c)) / v \in B^{(m)} \quad c \in V\}$

$$|V^*| = 2^m \quad |V| = 2^m \cdot \frac{2^m}{m+1} = \frac{2^{2m}}{m+1} = \frac{2^{2m+1}}{2(m+1)} = \frac{2^n}{n+1}$$

Donc si  $V^*$  est un 3-code il sera parfait . Montrons que c'est un 3-co

Posons  $u = (\bar{v}, \bar{c}+\bar{v}, p(v)+f(c))$

$u' = (\bar{v}', \bar{c}'+\bar{v}', p(v')+f(c'))$

Et montrons que  $d(u, u') \geq 3$  (on suppose que  $u \neq u'$  donc que  $(v, c) \neq (v', c)$

\*  $v=v'$   $d(u, u') = d(c, c') + d(f(c), f(c')) \geq 3$

\*  $c=c'$   $d(u, u') = 2d(v, v') + d(p(v), p(v'))$

Si  $d(v, v')=1$  alors  $d(p(v), p(v'))=1$  donc  $d(u, u')=3$  .

Si  $d(v, v') \geq 2$  alors  $d(u, u') \geq 4$

\*  $v \neq v', c \neq c'$  .

Si  $d(v, v')=1$  alors  $d(p(v), p(v'))=1$  et  $d(c+v, c'+v') \geq 2$   
donc  $d(u, u') \geq 3$

Si  $d(v, v')=2$  alors  $d(c+v, c'+v') \geq 1$  donc  $d(u, u') \geq 3$

Donc  $V^*$  est un 3-code parfait .

$V^*$  n'est pas équivalent à un 3 code parfait linéaire pour certains choix de  $f$  .

Nous avons en effet le résultat suivant :

Proposition

Soit  $C$  un 3-code linéaire et  $D$  un code équivalent à  $C$  tel que  $0 \in D$

Alors :

(i) il existe une permutation  $\sigma$  de  $\{0, \dots, n\}$  telle que  $D = \sigma(C)$

(ii)  $\forall u \in D \quad \forall v \in D \quad u+v \in D$

Supposons que l'on obtienne  $D$  par une translation  $\pi$  à partir de  $C$   
 Puisque  $0 \in D$ ,  $0$  étant l'image de  $\pi$  par une translation de vecteur  $\pi$   
 nous avons  $\pi \in C$ . D'où :

$$\forall u \in C \quad u + \pi \in C. \text{ D'où } C = D \quad \sigma = \text{Id}$$

D'autre part puisque (i) est vérifié,  $D = \sigma(C)$  or  $\sigma(u+v) = \sigma(u) + \sigma(v)$   
 d'où (ii)

Si  $f$  est choisie non linéaire c'est à dire telle que :

$$\exists u \in V, \exists v \in V \quad \text{avec } f(u+v) \neq f(u) + f(v) \quad (\text{puisque } f(0) = 0)$$

Nous avons alors :

$$\alpha = (0, \bar{u}, f(u)) \in D$$

$$\beta = (0, \bar{v}, f(v)) \in D$$

$$\gamma = (0, \bar{u} + \bar{v}, f(u+v)) \in D$$

On ne peut avoir  $\alpha + \beta \in D$  puisque  $d(\alpha + \beta, \gamma) = 1$

On peut choisir  $f$  linéaire pour  $p \geq 4$  (pour  $p = 3$   $|V| = 2$  toutes les applications sont linéaires)

La recherche de  $(2d+1)$ -code parfaits débouche sur le théorème suivant [9]

### Théorème 3

Il existe un  $(2d+1)$ -code parfait  $C$  de  $C_n$  si et seulement si :

$$n = 2^m - 1 \quad d = 1 \quad C \text{ est par exemple le code de Hamming .}$$

$$n = 2d + 1 \quad d \quad C \text{ est formé de deux sommets de } C_{2d+1} \text{ à distance } 2d + 1$$

$$n = 23 \quad d = 3 \quad C \text{ est le code de Golay}$$



§3 - PROBLEME DE  $\beta$

Proposition 1

$$\beta(C_n) \geq \frac{2^n}{n+1}$$

ceci car chaque point de  $C_n$  absorbe  $n+1$  points donc si B est un absorbant

$$|B| (n+1) \geq 2^n$$

En analogie avec la théorie des codes, un absorbant B est dit parfait si et seulement si  $|B| = \frac{2^n}{n+1}$  ce qui revient à dire que chaque point de  $C_n$  est "absorbé" par un seul point de B.

Remarquons qu'une condition nécessaire à l'existence d'un absorbant parfait est que  $\frac{2^n}{n+1}$  soit un entier, donc que n soit de la forme  $2^p - 1$ .

Proposition 2

Un ensemble B de sommets de  $C_n$  est un absorbant parfait si et seulement si c'est un 3-code parfait.

EN effet, si B est un absorbant parfait, il y a  $\frac{2^n}{n+1}$  boules centrées sur des sommets de  $C_n$ , donc ces boules sont disjointes et B est un 3-code.

Si B est un 3-code parfait, il y a  $\frac{2^n}{n+1}$  boules centrées sur des sommets de  $C_n$ , ces boules sont disjointes donc elles recouvrent  $C_n$  et B est donc un absorbant.

Proposition 3

$C_n$  admet un absorbant parfait si et seulement si  $n = 2^p - 1$

Ceci car les codes de Hamming sont des absorbants parfaits et existent pour ces valeurs de  $n$ .

Proposition 4

$$(1) \beta(C_{n-1}) \leq \beta(C_n)$$

$$(2) \beta(C_n) \leq 2\beta(C_{n-1})$$

(1) En effet, soit  $B$  un absorbant minimum de  $C_n$  alors la projection de  $B$  suivant  $C_1$  sur  $C_{n-1}$  selon la décomposition  $C_n = C_{n-1} + C_1$  fournit un absorbant de  $C_{n-1}$  d'où l'inégalité (1).

(2) Soit  $B$  un absorbant minimum de  $C_{n-1}$ .

Soit  $B'$  l'ensemble des sommets de  $C_n$  dont le codage est un mot de  $n$  bit de la forme  $\ell 0$  ou  $\ell 1$  où  $\ell$  est le codage d'un sommet de  $B$

$$|B'| = 2B \text{ et } B' \text{ absorbe } C_n.$$

Proposition 5

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \beta(C_n) \leq \frac{2^n}{2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}}$$

En effet, soit  $p = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ .

$$\text{On a : } p \leq \log_2(n+1) < p + 1$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } 2^p &\leq n + 1 < 2^{p+1} \\ 2^p - 1 &\leq n < 2^{p+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\beta(C_{2^p-1}) = \frac{2^{2^p-1}}{2^p} = 2^{2^p-p-1}$$

$$n = (2^p-1) + (n-2^p+1)$$

donc par (2)

$$\beta(C_n) \leq \beta(C_{2^p-1}) \times 2^{n-2^p+1}$$

D'où :

$$\beta(C_n) \leq 2^{n-p}$$

### Proposition 6

Une conséquence de la proposition précédente est que

$$\forall p \forall q \quad \beta(C_p + C_q) \geq \beta(C_p) \beta(C_q)$$

Ce qui répond positivement dans le cas des hypercubes à la conjecture de Vizing [ 7 ] qui s'énonce : pour toute paire G, H de graphes simples  $\beta(G+H) \geq \beta(G) \beta(H)$ .

Démonstration :

Etablissons d'abord la proposition :

(1) Si  $p+q \geq 14$  et  $p \geq 5$ ,  $q \geq 5$  alors  $pq \geq 3(p+q+1)$

Pour cela, remarquons que en posant  $p+q = n$  on obtient :

(2)  $pq \geq 3(p+q+1) \iff p(n-p) - 3(n+1) \geq 0$

Soit :

$$-p^2 + np - 3(n+1) \geq 0$$

Pour résoudre cette inéquation calculons son discriminant :

$$\Delta = n^2 - 12(n+1)$$

Puisque  $n \geq 14$  on a  $\Delta \geq n^2 - 20n + 100$ .

Or  $n^2 - 20n + 100 = (n-10)^2$  donc  $\Delta \geq 16$ .

Le binôme du second degré  $-p^2 + np - 3(n+1)$  admet donc deux racines  $p'$  et  $p''$  :

$$p' = \frac{n - \sqrt{\Delta'}}{2} \qquad p'' = \frac{n + \sqrt{\Delta'}}{2}$$

Or nous avons vu que  $\sqrt{\Delta'} \geq n-10$ , et le binôme doit être positif entre les racines. D'où :

$$\left. \begin{array}{l} p \geq 5 \\ q \geq 5 \end{array} \right\} \implies p' \leq 5 \leq p \leq n-5 \leq p'' \implies pq - 3(p+q+1) \geq 0.$$

Nous avons donc obtenu la proposition (1).

Supposons que  $p+q \geq 14$   $p \geq 5$   $q \geq 5$  nous avons alors :

$$4(p+q+1) \leq (p+1)(q+1)$$

$$\log_2(p+q+1) \leq \log_2(p+1) + \log_2(q+1) - 2$$

Donc  $\log_2(p+q+1) \leq [\log_2(p+1)] + [\log_2(q+1)]$

$$\text{D'où } \frac{2^{p+q}}{p+q+1} \geq 2^{p+q} 2^{-[\log_2(p+1)]} 2^{-[\log_2(q+1)]}$$

D'après la Proposition 5, on peut écrire :

$$\beta(C_{p+q}) \geq \frac{2^{p+q}}{p+q+1} \geq \frac{2^p}{2^{\lceil \log_2(p+1) \rceil}} \cdot \frac{2^q}{2^{\lceil \log_2(q+1) \rceil}} \geq \beta(C_p) \beta(C_q)$$

Il nous reste à étudier les deux cas (3) et (4) :

$$(3) \quad p + q < 14 \quad p \geq 5 \quad \text{et} \quad q \geq 5$$

$$(4) \quad p < 5 \quad \text{ou} \quad q < 5.$$

On vérifie encore facilement la proposition en utilisant les résultats suivants :

$$\beta(C_1) = 1$$

$$\beta(C_2) = 2$$

$$\beta(C_3) = 2$$

$$\beta(C_4) = 4$$

$$\beta(C_5) = 7 \quad (\text{voir annexe})$$

$$\beta(C_6) = 12 \quad (\text{voir annexe})$$

$$\beta(C_7) = 16$$

$$\beta(C_8) \leq 32$$

Proposition 7

$$(1) A(n,3) + n \beta(C_n) \geq 2^n$$

$$(2) nA(n,3) + \beta(C_n) \leq 2^n$$

Cette proposition est un cas particulier de deux relations démontrées dans le paragraphe 5 (Proposition 4).

Proposition 8

On a le résultat suivant plus fort que (1) de la proposition 7 :

$$2A(n,3) + (n-1) \beta(C_n) \geq 2^n$$

Soit B un absorbant de cardinal  $\beta(C_n)$ .

Soit A le plus grand 3-code contenu dans B  $|A| \leq A(n,3)$

Les points de A absorbent  $|A|(n+1)$  points puisqu'ils forment un 3-code.

Nous allons montrer que les points de B qui ne sont pas dans A, absorbent au plus  $(n-1)$  points non absorbés par A.

Soit  $x \in B$  avec  $x \notin A$  on a donc  $\exists y \in A / d(x,y) < 3$ .

1er cas :  $d(x,y) = 1$

Alors x et y sont déjà absorbés par y donc x absorbe au plus  $(n-1)$  sommets nouveaux.

2ème cas :  $d(x,y) = 2$

Dans ce cas, une propriété du n-cube est qu'il existe exactement deux chemins de longueur 2 reliant x à y :  $xty$  et  $xt'y$ .

Donc  $t$  et  $t'$  sont déjà absorbés par  $y$  donc  $x$  absorbe au plus  $(n-1)$  sommets nouveaux.

Les sommets de  $B$  non dans  $A$  absorbent donc au plus  $(|B|-|A|)$   $(n-1)$  sommets non absorbés par  $A$ . Or  $B$  absorbe  $C_n$  donc :

$$|A| (n+1) + (|B|-|A|) (n-1) \geq 2^n$$

d'où

$$2|A| + |B| (n-1) \geq 2^n \quad \text{et} \quad |A| \leq A(n,3)$$

### Définition

Un absorbant  $A$  de  $C_n$  sera dit absorbant linéaire si et seulement si il existe une matrice à coefficient dans  $\{0,1\}$  telle que

$$A = \{x \in C_n / Hx = 0\} \quad (\text{ceci dans le corps à 2 éléments})$$

On désignera par  $\beta^*(C_n)$  le cardinal de l'absorbant linéaire minimum de  $C_n$ .

### Proposition 9

$$\beta^*(C_n) = 2^{n - [\log_2(n+1)]}$$

En effet, les absorbants de Hamming sont linéaires donc :

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \beta^*(C_n) \leq \frac{2^n}{2^{[\log_2(n+1)]}}$$

et de plus un absorbant linéaire est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel de dimension  $n$  sur le corps à 2 éléments, donc possède  $2^m$  éléments où  $m \in \mathbb{N}$ . Or  $2^{n - [\log_2(n+1)]}$  est la plus petite puissance de 2 qui soit supérieure ou égale à  $\frac{2^n}{n+1}$ .

Théorème :

$$\beta(C_{2n+1}) \leq 2^n \beta(C_n) \quad (n \geq 0)$$

Démonstration

Soit  $C$  un absorbant de  $C_n$  de cardinal  $\beta(C_n)$ .

Soit  $C^*$  l'ensemble des sommets du  $(2n+1)$ -cube défini par :

$$C^* = \{(\bar{u}, \bar{c} + \bar{u}, p(u)) / c \in C \quad u \in B^{(n)}\}.$$

où  $p$  est la fonction parité définie par :

$$\begin{aligned} p(u) &= 0 & \text{si } w(u) & \text{est pair} \\ p(u) &= 1 & \text{si } w(u) & \text{est impair} \end{aligned}$$

Montrons que  $C^*$  est un absorbant de  $C_{2n+1}$ .

Soit  $v$  un sommet du  $2n+1$ -cube, écrivons le sous la forme  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  où :

$$x \in B^{(n)} \quad y \in B^{(n)} \quad z \in B^{(1)}$$

et montrons que  $v$  est absorbé par  $C^*$ .

1er cas :  $\bar{z} = p(x)$

Soit  $c$  un élément de  $C$  qui absorbe le sommet  $x+y$  de  $C_n$ .

$$(\bar{x}, \bar{c} + \bar{x}, p(x)) \in C^*$$

$$d((\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (\bar{x}, \bar{c} + \bar{x}, p(x))) = d(y, c+x) = d(x+y, c)$$

Donc  $v$  est absorbé par  $(\bar{x}, \bar{c} + \bar{x}, p(x))$ .

2ème cas :  $\bar{z} = p(x) + 1$

Soient  $u_1 \dots u_n$  les  $n$  vecteurs de poids  $(1)$  de  $B^{(n)}$ ,  $u_0$  le vecteur nul.

Puisque  $x+y$  doit être absorbé par  $C$ , c'est qu'il existe un indice  $i$  et un élément  $c$  de  $C$  tel que :

$$x + y + u_i = c \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$(\bar{x}+\bar{u}_1, \bar{c}+\bar{x}+\bar{u}_1, p(x+u_1))$  est un élément de  $C^*$ .

$$d((\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (\bar{x}+\bar{u}_1, \bar{c}+\bar{x}+\bar{u}_1, p(x+u_1))) = w(u_1) + d(z, p(x+u_1))$$

Or  $\bar{z} = p(x)+1$  donc  $d(z, p(x)+p(u_1)) = 1-w(u_1)$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est donc absorbé par  $(\bar{x}+\bar{u}_1, \bar{c}+\bar{x}+\bar{u}_1, p(x+u_1))$

$C^*$  est donc un absorbant de  $C_{2n+1}$

$$|C^*| = 2^n |C| = 2^n \beta(C_n)$$

Remarque :

Nous avons vu (Proposition 5) que  $\beta(C_n)$  était encadré de la façon suivante :

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \beta(C_n) \leq \frac{2^n}{2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}}$$

Le rapport des 2 bornes est toujours dans l'intervalle  $[1, 2[$ .

Trouver un équivalent asymptotique à  $\beta(C_n)$  est plus difficile.

Une conséquence de la proposition 10 est que  $\beta(C_n)$  n'est pas

équivalent au majorant  $\frac{2^n}{2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}}$ .

En effet soit la suite définie par :

$$U_n = \frac{\beta(C_{3 \times 2^{n+1} - 1})}{\frac{2^{(3 \times 2^{n+1} - 1)}}{2^{\lceil \log_2 3 \times 2^{n+1} \rceil}}} \quad n \geq 0$$

Remarquons que  $\lceil \log_2 3 \times 2^{n+1} \rceil = n+2$ . D'où :

$$U_n = \frac{\beta(C_{3 \times 2^{n+1} - 1})}{2^{(3 \times 2^{n+1} - n - 3)}}$$

On a

$$U_0 = \frac{\beta(C_5)}{2^3} = \frac{7}{8}$$

Si  $\beta(C_n)$  est équivalent asymptotiquement à sa borne supérieure, la suite  $U_n$  doit converger vers 1.

Or

$$3 \times 2^{n+2} - 1 = 2(3 \times 2^{n+1} - 1) + 1$$

donc d'après la proposition précédente

$$\beta(C_{3 \times 2^{n+2} - 1}) \leq 2^{(3 \times 2^{n+1} - 1)} \beta(C_{3 \times 2^{n+1} - 1})$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\beta(C_{3 \times 2^{n+2} - 1})}{\beta(C_{3 \times 2^{n+1} - 1})} \times \frac{2^{(3 \times 2^{n+1} - n - 3)}}{2^{(3 \times 2^{n+2} - n - 4)}}$$

D'où

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 2^{(3 \times 2^{n+1} - 1)} \times 2^{(-2^{n+3} + 2^{n+1} + 1)}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$$

La suite  $U_n$  est donc décroissante, puisque  $U_0 = \frac{7}{8}$ , elle ne peut converger vers 1 ;  $\beta$  ne peut être équivalent à sa borne supérieure.

§4- PROBLEME DE  $\alpha'$

Un stable maximal est un absorbant, on a donc la relation :

$$\alpha'(C_n) \geq \beta(C_n) \geq \frac{2^n}{n+1}$$

Les codes de Hamming sont des absorbants et des stables, ce sont donc des stables maximaux ; d'où

$$\alpha'(C_n) = \frac{2^n}{n+1} \text{ si et seulement si } n = 2^p - 1$$

Proposition 1

$$\alpha'(C_{n+1}) \leq 2\alpha'(C_n)$$

En effet soit A un stable maximal de  $C_n$ .

Si x est un sommet de  $C_n$  désignons par  $\bar{x}$  le sommet de  $C_n$  dont le codage est obtenu à partir de celui de x en changeant le premier bit.

Désignons par x' (respectivement x'') le sommet de  $C_{n+1}$ , dont le codage est obtenu à partir de celui de x en rajoutant un (n+1)<sup>ème</sup> bit valant 0 (respectivement 1).

Posons  $A' = \{\bar{u}', u \in A\} \cup \{u'', u \in A\}$ .

Par construction A' est un stable de  $C_{n+1}$ .

$\{u'', u \in A\}$  absorbe les sommets de  $C_{n+1}$  dont le codage se termine par 1.

Soit  $x \in C_{n+1}$  dont le codage se termine par 0.

$$\exists y \in C_n \text{ tel que } x = y'$$

$\bar{y}$  est absorbé par A donc

$\exists u \in A$  tel que  $d(\bar{y}, u) \leq 1$

$d(\bar{y}, u) = d(y, \bar{u}) = d(y', \bar{u}')$  et  $u' \in A'$

d'où  $x$  est absorbé par  $A'$ ,  $A'$  est donc un stable maximal de  $C_{n+1}$  et est de cardinalité  $2|A|$ .

Une conséquence de la Proposition 1 est que

Proposition 2

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \alpha'(C_n) \leq \frac{2^n}{2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}}$$

Proposition 3

$$\alpha'(C_n) \geq \alpha'(C_{n-1})$$

ceci car :

$$\alpha'(C_n) \geq \frac{2^n}{n+1} \geq \frac{2^{n-1}}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}} \geq \alpha'(C_{n-1})$$

Remarque

Peter Ablanczy m'a communiqué une démonstration purement combinatoire de ce résultat :

soit  $C$  un stable maximal de  $C_n$  de cardinal  $\alpha'(C_n)$  .

Posons :

$$H = \{ x \in C_{n-1} / \exists u \in C \quad u = (x, 0) \}$$

$$H' = \{ x \in C_{n-1} / \exists u \in C \quad u = (x, 1) \}$$

H est un stable de  $C_{n-1}$  .

Complétons le par des éléments de  $H'$  pour obtenir un stable maximal  $C^*$  inclu dans  $H \cup H'$  .

$$|C^*| \leq |C|$$

montrons que  $C^*$  est aussi un absorbant .

Soit  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1})$  un sommet de  $C_n$  et soit

$x' = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-1} \ 0)$  .  $x'$  est dans  $C_n$  donc doit être absorbé par un sommet  $y$  de  $C$  .

Soit  $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{n-1})$  .

Si  $y_n = 0$  alors  $y' = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{n-1})$  est un sommet de  $C^*$  qui absorbe  $x$  .

Si  $y_n = 1$  alors  $y' = x$  , soit  $y'$  est dans  $C^*$  , soit  $y'$  n'est pas dans  $C^*$  donc est à distance 1 d'un sommet  $z$  de  $H$  (à cause de la maximalité de  $C^*$ ) ,  $z$  absorbera  $x$  ,  $C^*$  est donc un stable maximal et est de cardinal au plus  $\alpha'(C_n)$  .

Proposition 4

$$\alpha'(C_n) \leq 2^n \cdot \alpha'(C_n)$$

En effet soit  $C$  un stable maximal de  $C_n$  de cardinal  $\alpha'(C_n)$  .

Soit  $C^*$  l'ensemble des sommets du  $(2n+1)$ -cube défini par :

$C^* = \{ (\bar{u}, \bar{c} + \bar{u}, p(u)) / c \in C \text{ u } \in B^{(n)} \}$  où  $p(u)$  est la fonction parité .

Nous avons vu au chapitre précédent que  $C^*$  était un absorbant ; montrons que  $C^*$  est un stable .

Soient  $x = (\bar{u}, \bar{c} + \bar{u}, p(u))$  et  $y = (\bar{u}', \bar{c}' + \bar{u}', p(u'))$  deux sommets de  $C^*$  tels que  $d(x, y) = 1$  .

1<sup>er</sup> cas :  $u \neq u'$  Nous avons alors nécessairement  $d(u, u') = 1$  donc  $p(u) \neq p(u')$  et  $d(x, y) = 2$  ce qui contredit l'hypothèse

2<sup>eme</sup> cas :  $u = u'$   $d(x, y) = d(c, c')$

Or  $c \neq c'$  donc  $d(c, c') \geq 2$  ce qui est impossible donc  $C^*$  est un stable donc un stable maximal .

#### Remarque

De la même façon que pour la proposition ci-dessus permet de montrer que  $\alpha'(C_n)$  n'est pas équivalent asymptotiquement à son majorant :

$$\frac{2^n}{2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}}$$

#### Remarque

on a pas en général  $\alpha'(C_n) = \beta(C_n)$  . Pour  $n=5$  par exemple  $\beta(C_5) = 7$  et  $\alpha'(C_5) = 8$  (voir annexe) .

§5 - GENERALISATION DU PROBLEME DE  $\beta$

Définition :

Soit  $X$  un ensemble de sommets de  $C_n$ . On dit que  $X$  est un  $d$ -absorbant de  $C_n$  si et seulement si :

$$\forall x \in C_n \quad \exists y \in X / d(x,y) \leq d$$

On désignera par  $B(n,d)$  le cardinal du plus petit absorbant de  $C_n$ . On a donc  $\beta(C_n) = B(n,1)$ .

Proposition 1 :

$$A(n, 2d+1) \leq \frac{2^n}{1+C_n^1+\dots+C_n^d} \leq B(n,d) \quad (n \geq 2d+1 \geq 1)$$

En effet les boules de rayon  $d$  contiennent  $1+C_n^1+\dots+C_n^d$  sommets.

Il en faut donc au moins  $\frac{2^n}{1+C_n^1+\dots+C_n^d}$  pour recouvrir  $C_n$

et il y en a au plus  $\frac{2^n}{1+C_n^1+\dots+C_n^d}$  disjointes.

Définition :

Un ensemble de sommets  $A$  est dit  $d$ -absorbant parfait si et seulement si :  $A$  est un  $d$ -absorbant et

$$|A| = \frac{2^n}{1+C_n^1+\dots+C_n^d}$$

Ce qui revient à dire que chaque sommet de  $C_n$  est à distance au plus  $d$  d'exactly un seul élément de  $A$ .

Proposition 2 :

Un ensemble de sommets de  $C_n$  est un  $d$ -absorbant parfait si et seulement si c'est un  $(2d+1)$ -code parfait.

En effet si  $B$  est un  $d$ -absorbant parfait, toutes les boules de rayon  $d$  centrées sur  $B$  sont disjointes, donc  $B$  est un  $(2d+1)$ -code parfait.

Réciproquement si  $B$  est un  $(2d+1)$ -code parfait, les boules de rayon  $d$  étant disjointes, elles recouvrent  $|B|(1+C_n^1+\dots+C_n^d)$  sommets donc  $C_n$  tout entier.

En utilisant le théorème 3 du paragraphe 2 nous obtenons le résultat suivant :

Théorème :

- $C$  est un  $d$ -absorbant parfait de  $C_n$  si et seulement si :
- \*  $n = 2^m - 1$ ,  $d = 1$  et  $C$  est par exemple un code de Hamming.
  - \*  $n = 2d+1$ ,  $d$  et  $C$  est le code répétition (2 sommets à distance  $2d+1$  sur  $C_n$ )
  - \*  $n = 23$ ,  $d = 3$  et  $C$  est le code de Golay.
  - \*  $n = d$  et  $C$  est un singleton.

Remarque :

On peut se demander si  $C_n$  admet un absorbant parfait si et seulement

si  $\frac{2^n}{1+C_n^1+\dots+C_n^d}$  est un entier.

Ceci est vrai pour  $d = 1$  et  $d = 3$  (voir Annexe) mais pas dans le cas général,  $d = 2$  et  $n = 90$  fournissant un contre-

exemple  $(\frac{2^{90}}{1+C_{90}^1+C_{90}^2} = 2^{78})$ .

Proposition 3 :

$$B(n-1, d) \leq B(n, d) \leq 2B(n-1, d)$$

Même démonstration que pour la proposition 4 du paragraphe 3.

Proposition 4 :

$$(1) B(n,d) + A(n,2d+1) (C_n^1 + \dots + C_n^d) \leq 2^n$$

$$(2) A(n,2d+1) + B(n,d) (C_n^1 + \dots + C_n^d) \geq 2^n$$

Démonstration

(1) Soit A un  $(2d+1)$ -code de cardinal  $A(n,2d+1)$

A d-absorbe  $A(n,2d+1) (1+C_n^1 + \dots + C_n^d)$  sommets.

Soit A' l'ensemble des sommets non d-absorbés par A.

$A \cup A'$  est un d-absorbant de  $C_n$ .

$$|A \cup A'| = A(n,2d+1) + 2^n - A(n,2d+1) (1+C_n^1 + \dots + C_n^d)$$

D'où

$$B(n,d) \leq 2^n - A(n,2d+1) (C_n^1 + \dots + C_n^d)$$

(2) Soit B un d-absorbant tel que  $|B| = B(n,d)$ .

Soit  $X(p)$  le nombre de points d-absorbés par B p fois.

$$\text{On a } \sum_{p=1}^n X(p) = 2^n.$$

Si x est un sommet d-absorbé p fois, en enlevant au plus  $(p-1)$  sommets de B, il n'est plus absorbé qu'une fois.

Donc il existe un  $(2d+1)$ -code ayant au moins

$$B(n,d) - \sum_{p=2}^n X(p) (p-1) \text{ éléments.}$$

D'où :

$$B(n,d) - \sum_{p=1}^n X(p) p + \sum_{p=1}^n X(p) \leq A(n,2d+1)$$

Or

$$\sum_{p=1}^n X(p) p = B(n,d) (1+C_n^1 + \dots + C_n^d)$$

d'où

$$A(n,2d+1) + B(n,d) (C_n^1 + \dots + C_n^d) \geq 2^n$$

Remarque

Les relations de la proposition 4 sont intéressantes puisque des bornes inférieures et supérieures précises sont connues sur  $A(n, 2d+1)$  tabulées dans [S-MW] par exemple.

Proposition 5 :

$$\forall p \in \{1, n-1\} \quad B(n, 2) \leq B(p, 1) B(n-p, 1)$$

Soit  $B$  un absorbant de  $C_p$  de cardinal  $B(p, 1)$

Soit  $B'$  un absorbant de  $C_{n-p}$  de cardinal  $B(n-p, 1)$ .

$$C^n = C^p + C^{n-p}$$

$\{uv / u \in B, v \in B'\}$  est un 2-absorbant de  $C_n$ .

De la même façon on a :

Proposition 6 :

$$\forall p \in \{1, n-1\} \quad \forall q \quad \forall r \text{ avec } r < q.$$

$$B(n, q) \leq B(p, r) B(n-p, q-r)$$

Proposition 7 :

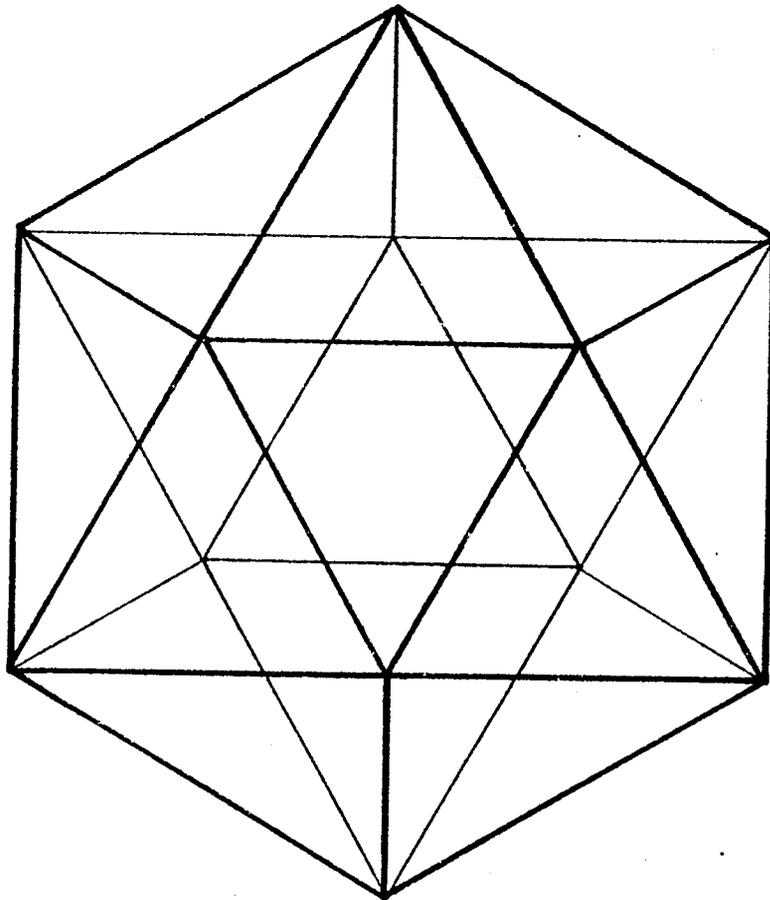
Pour tous  $p_1 p_2 \dots p_\ell$  et tous  $q_1 q_2 \dots q_\ell$  avec

$$\sum_{i=1}^{\ell} p_i = n \quad \sum_{i=1}^{\ell} q_i = q \quad q_i < p_i$$

$$B(n, q) \leq \prod_{i=1}^{\ell} B(p_i, q_i)$$

CHAPITRE III

PARTITION DU N-CUBE PAR DES CYCLES HAMILTONIENS





Remarque concernant ce chapitre

Je viens d'apprendre juste avant l'impression de ce travail que ce problème a déjà tout une histoire et qu'il a été complètement résolu .

Ringel a conjecturé l'existence d'une décomposition du  $n$ -cube ( $n$  pair) en cycles hamiltoniens et l'a prouvé lorsque  $n$  est une puissance de 2 .

Koester a prouvé que le 6-cube était décomposable en 3 cycles hamiltoniens .

Le cas général est un corollaire d'un théorème de Aubert et Schneider démontré très récemment .

Références :

G.Ringel , Über drei kombinatorische Probleme am  $n$ -dimensionalen Würfel und Würfelgitter , Abh.Math.Sem. Hamburg 20(1954) 10-19

Koester , communication personnelle à J.C.Bermond

J.Aubert - B.Schneider , a paraître dans Discrete Maths



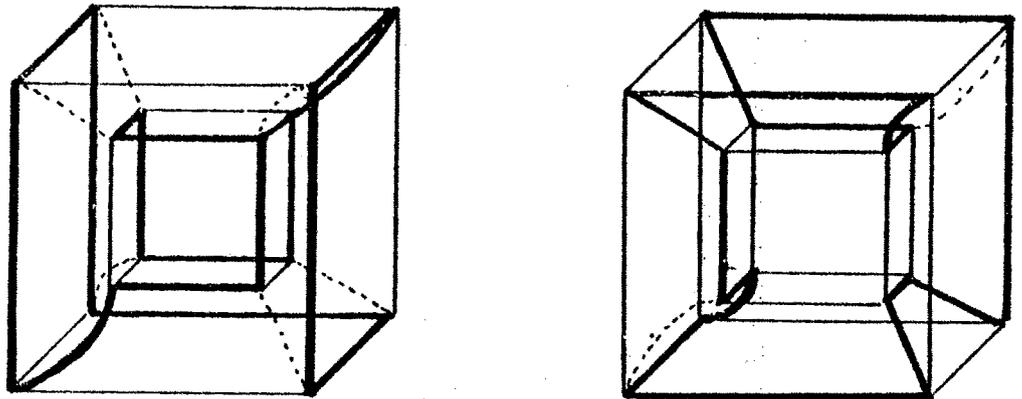
Le n-cube est un graphe hamiltonien. Un certain nombre de résultats sont connus sur le nombre de cycles hamiltoniens différents du graphe du n-cube.

(Bornes supérieures et inférieures dans [ 3 ]) je me propose de m'intéresser ici à un nouveau problème concernant les cycles hamiltoniens :

Le n-cube étant un graphe régulier de degré n, il existe au plus  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  cycles hamiltoniens disjoints (c'est à dire sans arêtes communes).

Est-il vrai que si n est pair, il existe exactement  $\frac{n}{2}$  cycles hamiltoniens disjoints. (On aurait donc une partition de l'ensemble des arêtes du n-cube en cycles hamiltoniens).

Pour  $n = 4$  il existe bien 2 tels cycles :



Nous allons montrer que la réponse au problème est oui dans le cas particulier où n est une puissance de 2 ; en prouvant les théorèmes suivants :

Théorème 1 :

Soit  $G$  un graphe hamiltonien, alors le carré cartésien de  $G$ ,  $G^2$  possède au moins 2 cycles hamiltoniens disjoints.

Démonstration

Posons  $\ell = |V(G)|$  et soit  $C = (x_1 x_2 \dots x_\ell)$  un cycle hamiltonien de  $G$ .

Nous allons définir  $C_1$  et  $C_2$  2 cycles hamiltoniens de  $G^2$  de la manière suivante :

\*  $C_1$  est défini par la succession de sommets :

$(x_1, x_1) (x_1, x_2) \dots (x_1, x_\ell)$   
 $(x_2, x_\ell) (x_2, x_1) \dots (x_2, x_{\ell-1})$   
 $(x_3, x_{\ell-1}) (x_3, x_\ell) (x_3, x_1) \dots (x_3, x_{\ell-2})$   
 $\dots$   
 $(x_i, x_{\ell-i+2}) (x_i, x_{\ell-i+3}) \dots (x_i, x_\ell) (x_i, x_1) \dots (x_i, x_{\ell-i+1})$   
 $\dots$   
 $(x_\ell, x_2) (x_\ell, x_3) \dots (x_\ell, x_\ell) (x_\ell, x_1).$

\*  $C_2$  est défini par la succession de sommets :

$(x_1, x_1) (x_2, x_1) \dots (x_\ell, x_1)$   
 $(x_\ell, x_2) (x_1, x_2) \dots (x_{\ell-1}, x_2)$   
 $(x_{\ell-1}, x_3) (x_\ell, x_3) (x_1, x_3) \dots (x_{\ell-2}, x_3)$   
 $\dots$   
 $(x_{\ell-i+2}, x_i) (x_{\ell-i+3}, x_i) \dots (x_\ell, x_i) (x_1, x_i) \dots (x_{\ell-i+1}, x_i)$   
 $\dots$   
 $(x_2, x_\ell) (x_3, x_\ell) \dots (x_\ell, x_\ell) (x_1, x_\ell)$

Montrons que  $C_1$  est un cycle.

Tous les sommets sont différents. 2 sommets consécutifs sont soit de la forme  $(x_i, x_j) (x_i, x_k)$  où  $k \equiv j+1 \pmod{\ell}$  soit de la forme  $(x_j, x_i) (x_k, x_i)$  où  $k \equiv j+1 \pmod{\ell}$

Or les arêtes  $\{(x_i, x_j), (x_i, x_k)\}$ , et  $\{(x_j, x_i), (x_k, x_i)\}$  où  $k \equiv j+1 \pmod{\ell}$  sont dans  $E(G^2)$  car  $\{x_j, x_k\}$  est dans  $E(G)$ .

Donc 2 sommets consécutifs sont adjacents dans  $G^2$ .

$(x_\ell, x_1)$  est adjacent à  $(x_1, x_1)$ ,  $C_1$  est donc un cycle, comme il passe par  $\ell^2$  sommets et que  $|V(G^2)| = \ell^2$ , ce cycle est hamiltonien.

De même par symétrie de construction,  $C_2$  est aussi un cycle hamiltonien.

Soit  $\{(x_i, x_j), (x_m, x_n)\}$  une arête de  $C_1$  montrons qu'elle ne peut être dans  $C_2$ .

1er cas :  $m = i_n \equiv j+1 \pmod{\ell}$

Nous avons alors nécessairement  $j \not\equiv i-1 \pmod{\ell}$

Donc dans  $C_2$   $(x_i, x_j)$  est adjacent à  $(x_{i+1}, x_j)$  et  $(x_{i-1}, x_j)$  ou  $(x_i, x_{j-1})$  donc  $\{(x_i, x_j), (x_m, x_n)\}$  ne peut être une arête de  $C_2$ .

2ème cas :  $m \equiv i+1 \pmod{j}$   $n = j$

Nous avons alors nécessairement  $j \equiv i-1 \pmod{\ell}$

Donc dans  $C_2$   $(x_i, x_j)$  est adjacent à  $(x_{i-1}, x_j)$  et  $(x_i, x_{j+1})$  donc  $\{(x_i, x_j), (x_m, x_n)\}$  ne peut être une arête de  $C_2$ .

$C_1$  et  $C_2$  sont deux cycles disjoints .

#### Remarque

On obtient ainsi les 2 cycles hamiltoniens de  $C_4$  représentés plus haut.

#### Théorème 2 :

Soit  $G$  un graphe hamiltonien qui possède  $p$  cycles hamiltoniens disjoints, alors le carré cartésien de  $G$ ,  $G^2$  possède au moins  $2p$  cycles hamiltoniens disjoints.

Démonstration

Soit  $C$  un cycle hamiltonien de  $G$ . Nous avons vu que l'on peut à partir de  $C$  construire 2 cycles hamiltoniens disjoints de  $G^2$  :  $C_1$  et  $C_2$ .

Soit  $C^*$  l'ensemble des arêtes de  $G^2$  défini par

$$\{(x,y)(z,t)\} \in C^* \iff \begin{cases} x = z \text{ et } \{y,t\} \in C \\ y = t \text{ et } \{x,z\} \in C \end{cases}$$

Remarquons que  $C^*$  est l'union disjointe des arêtes de  $C_1$  et de celles de  $C_2$ .

Soient  $A_1 A_2 \dots A_p$   $p$  cycles hamiltoniens disjoints de  $G$ .

$A_1^* A_2^* \dots A_p^*$  sont des sous-ensembles disjoints de  $E(G)$ .

Si on applique la construction de  $C_1$  et  $C_2$  à partir de  $C^*$  à chaque cycle  $A_i$  de  $G$  on obtient  $2p$  cycles hamiltoniens de  $G_2$ ,  $A_i^1$  et  $A_i^2$   $i \in \{1, \dots, p\}$ .

$A_i^1$  est disjoint de  $A_i^2$  par construction et puisque les  $A_i$  sont disjoints, les  $A_i^1, A_i^2$   $i \in \{1, p\}$  sont tous disjoints.

Corollaire :

Si  $n = 2^p$  alors le  $n$ -cube est un graphe possédant  $\frac{n}{2}$  cycles hamiltoniens disjoints.

L'existence pour  $C_6$  de 3 cycles hamiltoniens disjoints est donc une question ouverte. Plus généralement on peut se poser le problème suivant :

Problème :

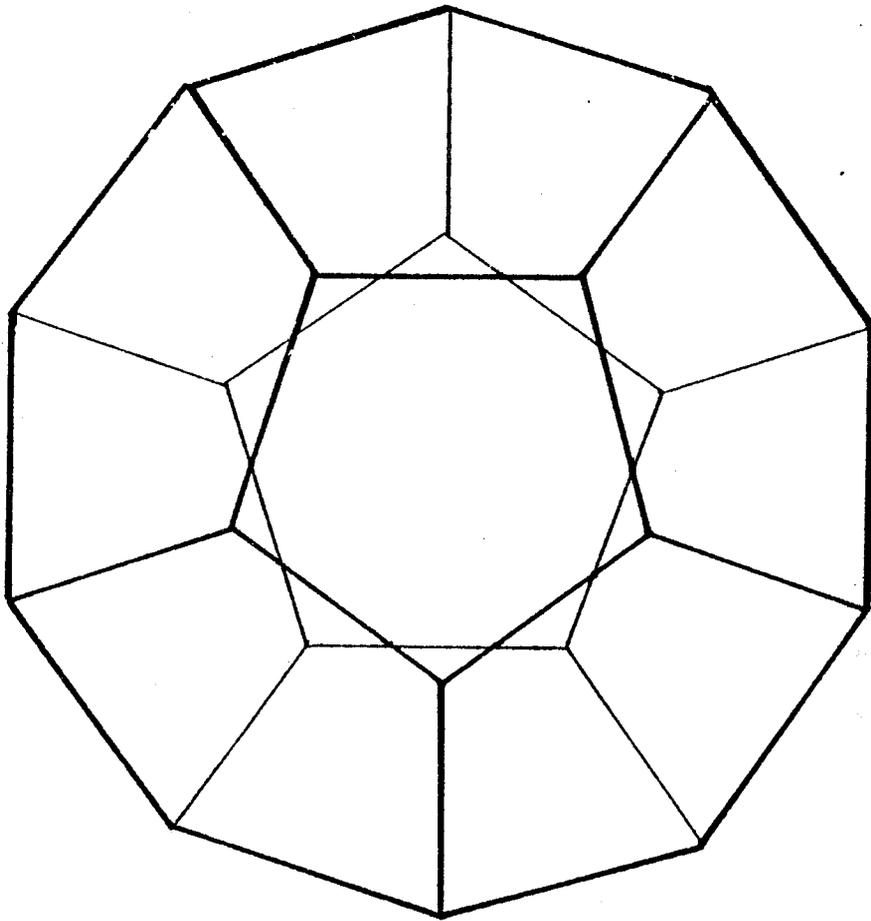
Si  $G$  est un graphe hamiltonien, est-il vrai que  $G^n$  possède  $n$  cycles hamiltoniens disjoints ?

Remarque

La réponse au problème est oui dans le cas particulier où  $n$  est une puissance de 2, par application répétée du théorème 2.



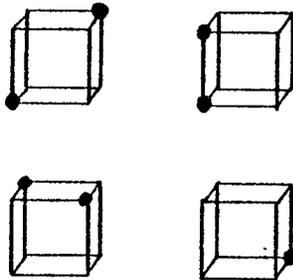
ANNEXE





$$\beta(C_5) = 7$$

L'absorbant suivant de  $C_5$  est de cardinal 7 :



Montrons qu'il ne peut exister d'absorbant de cardinal 6 .

Décomposons  $C_5$  suivant  $C_1$  :  $C_5 = C_4 + C_1$

Soit  $p$  le nombre de sommets de  $A$  dans un des 4-cubes .

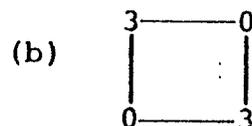
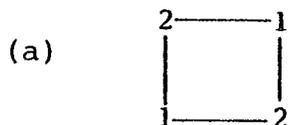
Pour absorber chaque 4-cube il faut nécessairement :

$$5p + 6 - p \geq 16$$

$$5(6-p) + p \geq 16$$

Donc  $p=3$  et il y a exactement 3 sommets de  $A$  dans chaque 4-cube .

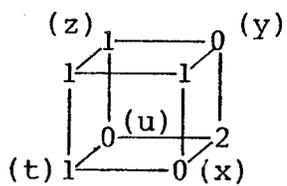
Décomposons  $C_5$  suivant  $C_2$  ; d'après ci-dessus les seules répartitions possibles des éléments de  $A$  sont :



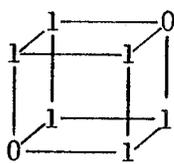
La répartition (b) est impossible car 2 des 3-cubes ne peuvent être absorbés .

Donc (a) est la seule possibilité .

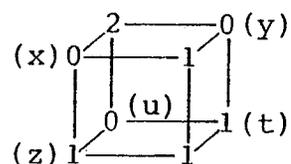
Décomposons  $C_5$  suivant  $C_3$  . Pour respecter (a) dans toutes les décompositions possibles suivant  $C_2$  on est conduit aux possibilités suivantes :



(c)



(d)



(e)

(d) est impossible car il existe un 2-cube sans sommet de A avec seulement 3 voisins dans A .

(c) et (e) sont impossibles car pour absorber x et y il faut que les sommets de A de z et t soient les mêmes ,et u ne peut alors être recouvert .

$$\underline{\alpha'(C_5) = 8}$$

L'absorbant de Hamming généralisé fournit un stable maximal de  $C_5$  de cardinal 8 .

Montrons qu'il ne peut exister de stable maximal A de cardinal 7 .  
(il ne peut en exister de cardinal inférieur à 7 car cela contredirait  $\beta(C_5) = 7$ ) .

Décomposons  $C_5$  suivant  $C_1$  :  $C_5 = C_4 + C_1$

Soit p le nombre de sommets de A dans un des 4-cubes, nous devons avoir :

$$5p + 7 - p \geq 16$$

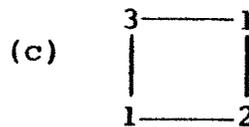
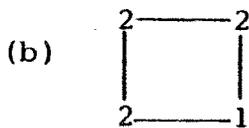
$$5(7 - p) + p \geq 16$$

D'où  $3 \leq p \leq 4$

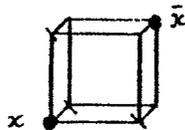
La seule répartition possible de A est donc :

$$(a) \quad 4 \text{ --- } 3$$

Décomposons  $C_5$  suivant  $C_2$  pour respecter (a) les seules répartitions possibles des sommets de A dans les 3-cubes sont :



Or remarquons que dans un 3-cube les 4 sommets non absorbés par un sommet x forment une boule centrée sur  $\bar{x}$



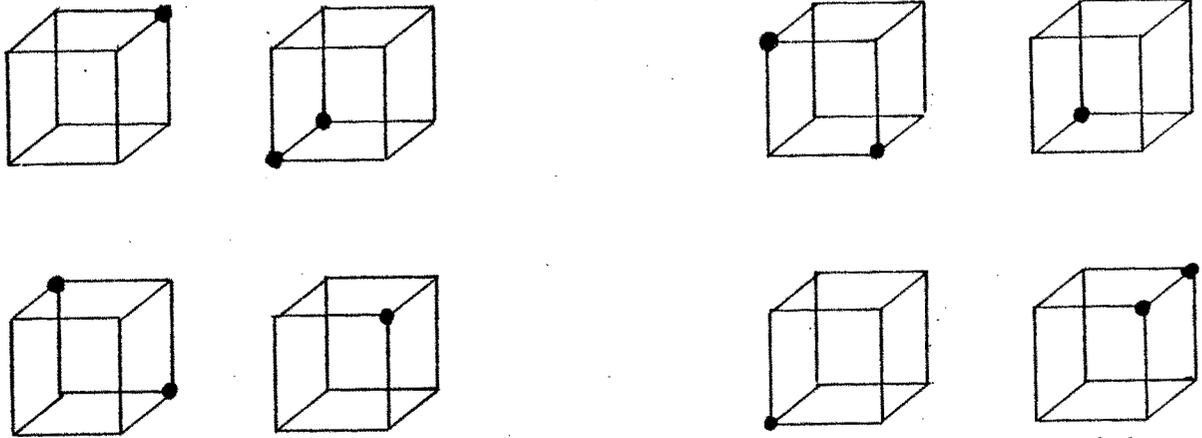
On ne peut extraire d'une telle boule 2 stables disjoints de cardinal 2 .

Donc la répartition (b) est impossible .

On ne peut avoir  $\bar{x}$  dans un stable à 2 ou 3 éléments donc (c) est aussi impossible et  $\alpha'(C_5) > 7$

$\beta(C_6) = 12$

L'absorbant suivant de  $C_6$  est de cardinal 12



Montrons que  $\beta(C_6) > 11$  en prouvant qu'il ne peut exister d'absorbant A de  $C_6$  de cardinal 11

\* Décomposons  $C_6$  suivant  $C_1$   $C_6 = C_5 + C_1$  .

Soit p le nombre de sommets de A dans un des 5-cubes . Nous avons :

$$6p + 11 - p \geq 2^5$$

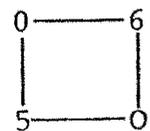
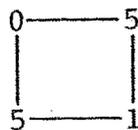
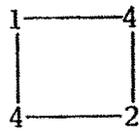
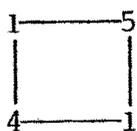
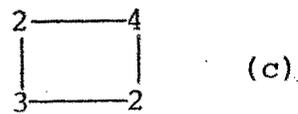
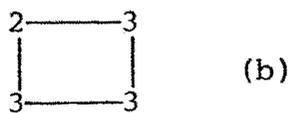
$$6(11 - p) + p \geq 2^5$$

D'où  $6 \geq p \geq 5$

Nous avons donc une seule décomposition possible :

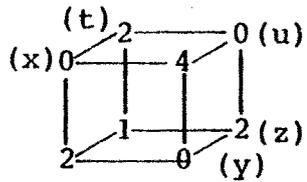
(a)  $5 \text{---} 6$

\*Décomposons  $C_6$  suivant  $C_2$  .Pour respecter (a) les seules décompositio possibles sont :

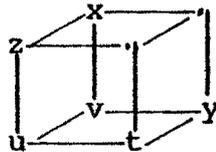
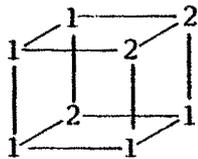
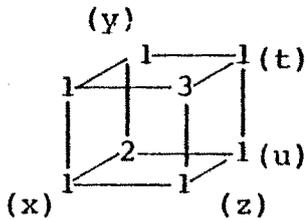


Les 4 dernières décompositions sont impossibles car les 4-cubes possédant 0 ou 1 sommet de A ne peuvent être absorbés .

\* Supposons que A admette une décomposition du type (c) et décomposons  $C_6$  suivant  $C_3$  .les seules possibilités non trivialement fausses sont :



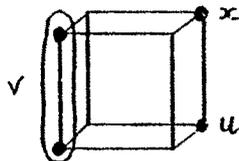
Impossibles car pour absorber x et y il faut que t et z soient identiques donc u ne peut être recouvert .



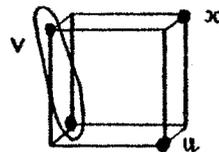
Remarquons que pour absorber z et t ,les sommets de A de x et y doivent être les mêmes .

Pour absorber u , il faut que les 4 sommets forment une étoile donc v ne peut être formé de 2 sommets à distance 3 .

Si v est formé de 2 sommets à distance 1 ou 2 ,alors les projections de u,x et v sur un même cube sont de la forme :



ou

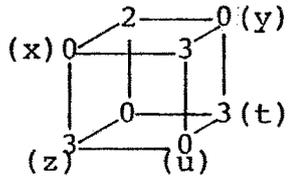


Pour que z soit absorbé il faut que la projection de z soit un des sommets de la projection de v .

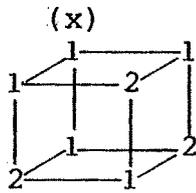
u ne peut alors être absorbé .

Donc A ne peut admettre de décomposition de type (c) .

\*Décomposons  $C_6$  suivant  $C_3$  ; puisque toutes les  $C_2$  décompositions sont du type (b) les seules possibilités pour A sont :



Impossible car pour absorber x et y il faut que z et t soient identiques .On ne peut alors recouvrir u



Impossible car le 3-cube x n'est pas recouvert .

Une étude fastidieuse des cas possibles permet de prouver que  $\beta(C_8)=32$ .

$\frac{2^n}{1+n+C_n^2+C_n^3}$  est entier si et seulement si  $n = 1, 2, 3, 7$ , ou 23

$$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3 = (1+n) \cdot \left(1 + \frac{n(n-1)}{6}\right)$$

ce nombre doit être de la forme  $2^m$ .

$$* n \equiv 0(3) \quad \text{ou} \quad n \equiv 1(3)$$

Nous avons alors 6 divise  $n(n-1)$  donc nécessairement il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2^p - 1$ .

$$\frac{(2^p-1)(2^p-2)}{6} + 1 = \frac{2^{2p} - 3 \cdot 2^p + 8}{6} = \frac{2^{2p-1} + 4}{3} - 2^{p-1}$$

$$\text{Donc } 2^{p-1} \text{ divise } \frac{2^{2p-1} + 4}{3}$$

D'où  $2^{p-1}$  divise  $2^{2p-1} + 4$  ce qui est impossible pour  $p > 3$

$p = 1, 2, 3$  conduisent aux solutions  $n = 1, 3, 7$

$$* n \equiv 2(3) \quad \text{posons } n = 3p + 2$$

$$(3p+3) \cdot \left(\frac{(3p+2)(3p+1)}{6} + 1\right) = 2^m \quad \text{d'où :}$$

$$(p+1) \cdot \left(\frac{9}{2} p^2 + \frac{9}{2} p + 4\right) = 2^m$$

$$(p+1) \cdot (9p^2 + 9p + 8) = 2^{m+1}$$

Donc  $p$  est de la forme  $2^q - 1$ .

$$9p^2 + 9p + 8 = 9p(p+1) + 8$$

Si  $q > 3$  nous pouvons écrire :

$$9 \cdot 2^q (2^q - 1) + 8 = 8(9 \cdot 2^{q-3} (2^q - 1) + 1)$$

Ce nombre doit être une puissance de 2 ce qui est impossible car  $9 \cdot 2^{q-3} (2^q - 1)$  est pair.

On vérifie facilement que les cas  $q=1$  et  $q=2$  ne conduisent pas à des solutions.

Pour  $q=0$  et  $q=3$  nous obtenons les solutions  $n=2$  et  $n=23$ .



REFERENCES

- [1] J.A.Bondy                      communication privée
- [2] E.J.Cockayne-O.Favaron-C.Payan-A.G.Thomason  
    Contribution to the theory of domination, independence and  
    irredundance in graphs  
    Discrete Maths 33(1981) 249-258
- [3] R.J.Douglas  
    Bounds on the number of Hamiltonian Circuits in the n-cube  
    Discrete Maths. 17 (1977) 143-146
- [4] S.Foldes  
    A characterization of hypercubes  
    Discrete Maths 17 (1977) 155-159
- [5] J.M.Laborde - Rao Hebbare :  
    Another characterization of hypercubes .  
    A paraitre dans Discrete Maths . 31 (1982)
- [6] H.M.Mulder  
    (0,  $\lambda$ ) Graphs and n-cubes  
    Discrete Maths 28(1979) 179-188  
    ou plus généralement :  
    The interval function of a graph  
    Mathematical Centre Tracts 132 Amsterdam 1980
- [7] Vizing  
    Produit cartésien de graphes  
    Vytchislitelnye Systemy (9) 1963,30-43
- Sur la théorie des codes en général :  
    Sloane - Mac Williams  
    The theory of Error correctings Codes      North Holland

- [8] Vasiliev  
On nongroup close-packed codes  
Probl. Kibernet. 8(1962)
- [9] Van Lint  
Non existence theorems for perfect error correcting codes  
Computer in Algebra and Number Theory vol 4 (SIAM-AMS Proceedings  
1971 )



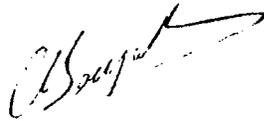


Dernière page de la thèse

Vu

Grenoble , le

Le président de la thèse



Vu et permis d'imprimer ,

Grenoble, le 11.11.84

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale



Le Président,

J.J. PAYAN