

Analyse numérique de quelques problèmes relatifs aux ondes longues en eau peu profonde

Abdallah Chalabi

▶ **To cite this version:**

Abdallah Chalabi. Analyse numérique de quelques problèmes relatifs aux ondes longues en eau peu profonde. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1980. Français. NNT : . tel-00292424

HAL Id: tel-00292424

https://theses.hal.science/tel-00292424

Submitted on 1 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème cycle
Mathématiques appliquées
option «analyse numérique»

par

CHALABI Abdallah



ANALYSE NUMERIQUE DE QUELQUES PROBLEMES RELATIFS AUX ONDES LONGUES EN EAU PEU PROFONDE.



Thèse soutenue le 11 juin 1980 devant la commission d'examen

N. GASTINEL	Président
C. LE PROVOST	
A. PONCET	Examinateurs
F. ROBERT	

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD
M. René PAUTHENET

PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahïm	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique) E.N.S.E.E.G.

MM.	ALLIBERT Michel	
	BERNARD Claude	
	CAILLET Marcel	
Mme	CHATILLON Catherine	
MM.	COULON Michel	
	HAMMOU Abdelkader	
	JOUD Jean-Charles	
	RAVAINE Denis	
	SAINFORT	C.E.N.G.

.../...

MM. SARRAZIN Pierre
SOUQUET Jean-Louis
TOUZAIN Philippe
URBAIN Georges — Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

E.N.S.M.E.E.

MM. BISCONDI Michel
BOOS Jean-Yves
GUILHOT Bernard
KOBILANSKI André
LALAUZE René
LANCELOT Françis
LE COZE Jean
LESBATS Pierre
SOUSTELLE Michel
THEVENOT François
THOMAS Gérard
TRAN MINH Canh
DRIVER Julian
RIEU Jean

E.N.S.E.R.G.

MM. BOREL Joseph
CHEHIKIAN Alain
VIKTOROVITCH Pierre

E.N.S.I.E.G.

MM. BORNARD Guy
DESCHIZEAUX Pierre
GLANGEAUD François
JAUSSAUD Pierre
Mme JOURDAIN Geneviève
MM. LEJEUNE Gérard
PERARD Jacques

E.N.S.H.G.

M. DELHAYE Jean-Marc

E.N.S.I.M.A.G.

MM. COURTIN Jacques
LATOMBE Jean-Claude
LUCAS Michel
VERDILLON André

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

.../...

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

.../...

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	SUNIER Jules	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

.../...

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

.../...

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

.../...

MM.	SCHAERER René	Cancérologie
Mme	SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM.	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	STUTZ Pierre	Mécanique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro Physique
	KANEKO Akira	Mathématiques pures
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M.	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

Ce travail a été préparé au Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur N. GASTINEL pour m'avoir accepté dans son équipe. Ses conseils et ses encouragements m'ont été précieux dans l'accomplissement de ce travail.

Que Monsieur A. PONCET soit sincèrement remercié pour la collaboration et la disponibilité dont il a fait preuve au cours de ce travail.

Je remercie vivement Messieurs C. LE PROVOST et F. ROBERT d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à toutes les personnes qui ont participé à la dactylographie de ce document, ainsi qu'à tout le personnel du service de reprographie.

إهداء

إلى والديّ

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE_I - PHYSIQUE DU PROBLEME DES ONDES LONGUES --- 1

§ 0 - Bref historique ---------- 2
§ 1 - Position du problème ---------- 3
§ 2 - Déduction des équations ---------- 6
§ 3 - Conditions aux limites ---------- 10

CHAPITRE_II - RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME DE SAINT-VENANT DANS UN DOMAINE A FRONTIERE VARIABLE - -CAS UNIDIMENSIONNEL - ---------- 14

§ 1 - Calcul de la solution analytique de Ball ---------- 16
§ 2 - Etude du cas unidimensionnel ---------- 19
§ 3 - Algorithme de résolution ---------- 21
§ 4 - Résultats numériques ---------- 25

CHAPITRE_III - RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME DE SAINT-VENANT DANS UN DOMAINE A FRONTIÈRE VARIABLE - - CAS BIDIMENSIONNEL - ---------- 34

§ 1 - Présentation de la méthode des résidus pondérés ------ 36
§ 2 - Application au problème de Ball ---------- 37
§ 3 - Conditions aux limites et déplacement de la frontière 42
§ 4 - Résultats numériques ---------- 43

CHAPITRE_IV - RESOLUTION DU PROBLEME DES ONDES LONGUES DANS UN FLUIDE VISQUEUX ---------- 53

§ 1 - Existence de la solution ---------- 55
§ 2 - Unicité de la solution ---------- 74
§ 3 - Problème approché et schéma de résolution ---------- 78

CHAPITRE_V - RESOLUTION DU PROBLEME DES ONDES LONGUES DANS UN FLUIDE PARFAIT ---------- 102

§ 1 - Formulation du problème ---------- 104
§ 2 - Existence et unicité de la solution ---------- 108
§ 3 - Régularité de la solution ---------- 116

ANNEXE_I - RESOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE DANS UN DOMAINE A FRONTIERE LIBRE ---------- 124

ANNEXE_II - CODE DELTA ---------- 132

INTRODUCTION

Le problème des ondes longues est l'un des problèmes de mécanique des fluides qui ont bénéficié des motivations à la fois pratiques et théoriques, notamment après l'évènement des calculateurs électroniques.

L'objet de ce travail est la résolution de quelques problèmes liés aux ondes longues et correspondant à différentes situations réelles.

Le chapitre I est consacré à l'étude physique des ondes longues, où on montre l'origine du système de St Venant, régissant le phénomène et les hypothèses physiques admises pour la formulation adoptée.

Au chapitre II on donne une résolution purement numérique du système de St Venant dans le cas unidimensionnel et pour un domaine parabolique, on y utilise une condition aux limites compatible avec le déplacement de la frontière. L'approximation utilisée étant basée sur la méthode des différences finies.

Le traitement numérique du cas bidimensionnel fait l'objet du chapitre III, où on a utilisé une méthode d'éléments finis pour les variables d'espace et de différences finies pour la variable temps. Des résultats numériques sont donnés à la fin du chapitre.

Dans le chapitre IV on développe une étude théorique et pratique du problème dans le cas d'un fluide visqueux. On établit l'existence et l'unicité de la solution du problème continu légèrement modifié ; on examine à la fin de ce chapitre la stabilité du schéma proposé et la convergence de la solution approchée.

Au chapitre V on s'intéresse à l'aspect théorique du problème des ondes longues "semi-linéarisé" dans un fluide parfait. L'outil employé dans cette étude étant la théorie des opérateurs dissipatifs.

Dans l'annexe I, on aborde l'étude théorique du problème linéaire dans un domaine à frontière libre, où on ramène le problème à un problème unilatéral "classique", moyennant l'introduction d'une fonction de potentiel.

L'outil informatique dont on s'est servi pour le calcul était le code DELTA mis au point par A. PONCET et dont nous avons donné une brève description à l'annexe II.

CHAPITRE I

PHYSIQUE DU PROBLEME DES ONDES LONGUES

§ 0 - Bref historique

§ 1 - Position du problème

§ 2 - Déduction des équations

§ 3 - Conditions aux limites

0 - BREF HISTORIQUE

L'étude des ondes liquides est depuis toujours l'une des préoccupations importantes des mathématiciens (Laplace (1775), Lagrange (1781), etc...). Mais la première étude théorique de la propagation des ondes des marées est due à Barre de Saint-Venant (1871), qui donna une première approximation de ces ondes. Depuis l'avènement des calculatrices électroniques, les équations de Barre de Saint Venant ont connu une large utilisation pour l'étude d'un bon nombre d'écoulements à surface libre, non permanents.

En 1877 Boussinesq a voulu améliorer l'approximation de Saint Venant, en proposant une approximation des ondes longues, dans laquelle il a tenu compte de l'accélération verticale qu'il a supposée faible mais non nulle, contrairement à Saint Venant qui avait basé sa théorie sur l'hypothèse d'un écoulement avec une distribution hydrostatique de la pression. Mais la solution de Saint Venant qui suffisait pour expliquer les phénomènes observés fut préférée à celle de Boussinesq en raison de sa relative simplicité.

Korteweg et De Vries (1895) confirmèrent les conclusions des travaux de Stokes (1847) sur les ondes de surface en profondeur finie. Les résultats expérimentaux sur l'onde solitaire, obtenus par Scott Russel (1844) furent complétés par Boussinesq (1871) et Rayleigh (1876).

En 1948 Friederichs proposa une théorie qui est une approche très originale du problème des ondes longues et qui est la première formulation des ondes longues qui soit faite par une méthode mathématique rigoureuse. Toutefois, cette théorie nécessite trop d'hypothèses (périodicité, irrotation,...) restreignant son application à des cas bien précis.

1 - POSITION DU PROBLEME :

Le phénomène des ondes longues est l'une des disciplines les plus importantes en hydrodynamique en raison de ses nombreuses applications pratiques :

- prédiction des marées et des tempêtes,
- dérive et concentration des polluants dans les mers,
- construction des digues et des chenaux de navigation (génie maritime)
- écoulement dans les estuaires et crues des rivières.

1.1. Ondes longues dans les eaux peu-profondes

1.1.1. Mer littorale :

On appelle mer littorale toute portion de l'océan limitée par le continent - et éventuellement celle des îles voisines - d'une part et une surface frontière verticale tracée arbitrairement dans l'océan et qu'on appelle frontière marine ou ouverte.

1.1.2. Marée littorale :

La théorie classique montre que la marée littorale est constituée de plusieurs composantes. Une composante peut avoir plusieurs origines : soit induite par les conditions aux limites, imposées le long de la frontière ouverte, car l'océan agit comme un batteur sur la masse des eaux du bassin, soit engendrée sur place par les effets non linéaires ou des petits fonds. On note que l'effet du potentiel générateur (de la marée océanique) est négligeable dans le cas des marées littorales, car la masse d'eau contenue dans un bassin littoral est insuffisante pour être influencée par les forces astrales.

1.1.3. Quelques hypothèses simplificatrices :

Dans l'étude des ondes longues, on suppose vérifiées les hypothèses suivantes :

(1) - le vecteur vitesse $\vec{V}$ est horizontal, de plus on a : $\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = 0$. z étant la direction verticale.

(2) - le bassin marin doit être de faible étendue horizontale de façon à ce que l'on puisse :

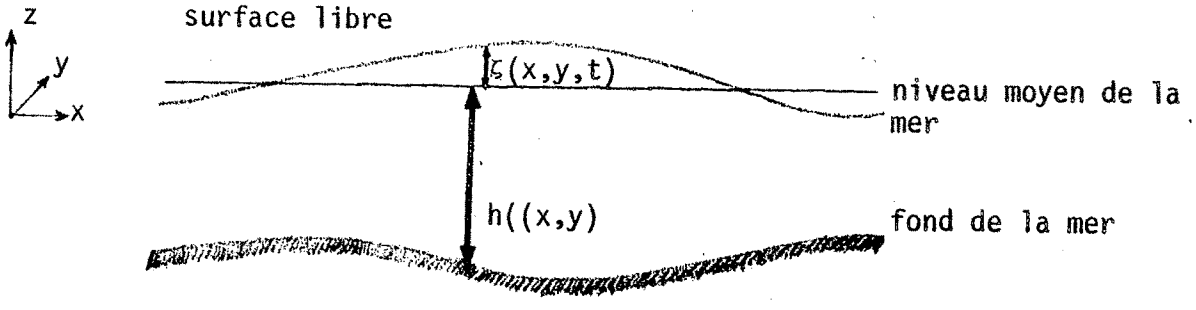
(i) négliger l'influence du potentiel générateur sur le mouvement de la marée dans le cas des marées

(ii) considérer comme constante la latitude ϕ; d'où un coefficient de Coriolis constant

(iii) supposer constante l'accélération de la pesanteur g.

(3) - le bassin est assez étendu pour tenir compte de l'effet de Coriolis

(4) - le gradient de la profondeur h est supposé petit.



Corollaires de l'hypothèse (1) :

(a) - La répartition des pressions est approximativement hydrostatique, donnée par :

$$P = \rho g(\zeta(x,y,t)-z) + P_0$$

avec les notations :

ρ : la densité du fluide

g : l'accélération de la pesanteur

ζ : la dénivellation (élévation de la surface libre)

P_0 : la pression atmosphérique.

(b) - la pente de la surface libre est faible (i.e. $\vec{\text{grad}}\zeta$ est petit)

(c) - si le fond n'est pas horizontal il est clair qu'une telle propriété ((1)) ne peut être vérifiée que dans le cas des mouvements assez lents.

1.1.4. Nature des mouvements des eaux littorales :

On admet que les eaux se comportent comme un fluide incompressible ($\rho = C^{te}$). Et que la couche limite avoisinant le fond est de faible épaisseur en dehors de laquelle les eaux peuvent être assimilées à un fluide parfait (non visqueux). D'autre part, l'écoulement est supposé advectif (par blocs) contrairement à l'écoulement convectif qui s'accompagne de remous.

1.1.5. Modélisation mathématique :

L'établissement d'un modèle mathématique fidèle pour la résolution des problèmes des ondes longues et en particulier celui de la marée, se heurte à deux difficultés majeures :

1 - La forme très irrégulière des frontières des bassins marins, constituées par le fond de la mer d'une part et les côtes continentales d'autre part.

2 - Les conditions aux limites à imposer sur les frontières, sont loin d'être évidentes notamment sur la frontière ouverte.

Jusqu'ici les nombreux modèles mathématiques proposés pour décrire la marée littorale - par exemple - ont toujours été limités à des frontières solides (côtes) fixes. C'est-à-dire que la surface mouillée (le fond) a été supposée indépendante du temps, celà revient à négliger les variations relatives de celle-ci au cours du mouvement du flux et reflux de la mer, d'où la condition aux limites : $V_n = 0$ (V_n étant la composante normale de la vitesse) sur la côte. Cette condition paraît très naturelle dans le cas d'une falaise à la côte ou un mur vertical d'un canal, mais elle l'est moins lorsqu'il s'agit d'une plage ou d'un mur incliné d'un canal. Et la condition $H = 0$ où $H = h+\zeta$ (h : la profondeur moyenne et ζ : la dénivellation) semble plus réaliste.

Pour illustrer la remarque précédente on peut citer comme exemple le cas de Saint Michel où la marée avance de quelques kilomètres dans le continent et avec une vitesse loin d'être nulle, le même phénomène se produit dans la baie de Morecambe sur la côte anglaise.

C'est à ce niveau en particulier qu'on pense apporter une contribution personnelle à l'étude du phénomène en considérant un modèle tenant compte du déplacement de la côte.

2.- DEDUCTION DES EQUATIONS DES ONDES LONGUES

Les équations des ondes longues peuvent être déduites des équations de Navier-Stokes de la manière suivante :

Les équations de base, régissant l'écoulement d'un fluide incompressible et parfait (non visqueux), s'écrivent dans le cas évolutif :

équations du mouvement :

$$(2.1.) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = F_1$$

$$(2.2.) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = F_2$$

$$(2.3.) \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = F_3$$

équation de continuité :

$$(2.4.) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec :

(x,y,z) : les variables d'espace

t : le paramètre temps .

$(u,v,w)^t$: le vecteur vitesse

ρ : la densité

P : la pression

$(F_1,F_2,F_3)^t$: le vecteur des forces.

On suppose que les axes des x et y sont pris dans le plan horizontal de la surface non perturbée de l'eau.

Si on note par ζ l'élévation de la surface libre et par h la profondeur moyenne de l'eau.

On pose :

(2.5.) $$U = \frac{1}{(h+\zeta)} \int_{-h}^{\zeta} u \, dz$$

(2.6.) $$V = \frac{1}{(h+\zeta)} \int_{-h}^{\zeta} v \, dz$$

Soient u' et v' tels que :

(2.7.) $$u = U(1+u'(z))$$

(2.8.) $$v = V(1+v'(z))$$

u' et v' vérifient les relations :

(2.9.) $$\int_{-h}^{\zeta} u' \, dz = 0$$

(2.10.) $$\int_{-h}^{\zeta} v' \, dz = 0$$

Si on dérive l'expression de la pression donnée dans le corollaire (a) par rapport à x et y on obtient :

(2.11.) $$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial P_0}{\partial x}$$

(2.12.) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial P_0}{\partial y}$$

par intégration des deux premières équations (2.1.), (2.2.) par rapport à z entre -h et ζ et en divisant le résultat par $(\zeta+h)$. Tenant compte de (2.11.), (2.12.) on aura :

(2.13.) $$\frac{\partial U}{t} + U \frac{\partial U}{x} + V \frac{\partial U}{y} - f V + \frac{C(U^2+V^2)^{1/2} U}{(h+\zeta)} + g \frac{\partial \zeta}{x} + C' \frac{(\tau_x^2+\tau_y^2)^{\tau_x}}{(h+\zeta)} = 0$$

(2.14.) $$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + f U + \frac{C(U^2+V^2)^{1/2} V}{(h+\zeta)} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + C' \frac{(\tau_x^2+\tau_y^2)^{\tau_y}}{(h+\zeta)} = 0$$

où :

f : est le paramètre de Coriolis

C : la constante de Chézy du frottement de frond

C' : la constante de friction pour la force du vent ($\simeq 3.2 \times 10^{-6}$)

$(\tau_x, \tau_y)^t$: le vecteur vitesse du vent.

Remarque : Dans l'écriture des équations (2.13.) et (2.14.) on a négligé certains termes provenant du changement de variable, en vertu des considérations numériques [8].

Si on utilise les "conditions aux limites" on aura :

$$W = \frac{d\zeta}{dt} \qquad \text{pour} \quad z = \zeta$$

$$(2.15.) \qquad W = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$W = \frac{d(-h)}{dt} \qquad \text{pour } z = -h$$

$$= - \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$(2.16.) \qquad W = - u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} \quad (\text{car } h = h(x,y))$$

par intégration par rapport à la variable z de l'équation de continuité entre (-h) et ζ on obtient :

$$(2.17.) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [(h+\zeta)U]}{\partial x} + \frac{\partial [(h+\zeta)V]}{\partial y} = 0$$

Si on remplace les lettres majuscules par des lettres minuscules et si on pose $H = h + \zeta$ on aura le système des équations des ondes longues sous sa forme usuelle :

$$(2.18.) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (Hu)}{\partial x} + \frac{\partial (Hv)}{\partial y} = 0$$

$$(2.19.) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} fv + \frac{C\sqrt{u^2+v^2}}{H} u + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = f_x$$

$$(2.20.) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} fu + \frac{C\sqrt{u^2+v^2}}{H} v + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = f_y$$

où $(f_x, f_y)^t$ représente la force du vent qu'on suppose souvent nulle.

On a donc un système hyperbolique non linéaire. Et les inconnues sont u,v et ζ. Les équations (2.18.), (2.19.) et (2.20.) constituent le système de Saint Venan

Dans le cas des marées océaniques le système ci-dessus s'écrit sous une forme linéarisée :

$$(2.21.) \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0$$

$$(2.22.) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + Ru = 0$$

$$(2.3.) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + Rv = 0$$

où R est une fonction de frottement du fond.

Si on tient compte de la viscosité on obtient un système couplé (hyperbolique - parabolique).

2.1. Interprétation des différents termes

a) - Termes d'advection : $(u \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x}$ et $v \frac{\partial v}{\partial y})$ sont assez importants dans les régions caractérisées par une faible profondeur de l'eau.

b) - Terme de Coriolis : le paramètre f qui intervient dans la force de Coriolis peut être considéré comme constante si les dimensions du domaine sont faibles en vertu de l'hypothèse, et on a :

$$f = 2\Omega \sin\phi$$

Ω : la vitesse de rotation de la terre

ϕ : la laitude

c) - Terme de viscosité : il est souvent négligeable devant les autres forces, dans le cas de la marée.

d) - Terme du frottement de fond : par son expression compliquée (non linéaire et non analytique au voisinage de l'origine) pose des problèmes devant l'application de la méthode du petit paramètre [2]; le coefficient de Chézy n'est connu que de manière approchée. Dans [1] on a estimé sa valeur moyennant l'application de la théorie du contrôle optimal au système unidimensionnel.

3 - CONDITIONS AUX LIMITES

Dans l'étude de la marée littorale par exemple, on rencontre deux types de frontières :

a) - frontière fermée (solide) : correspondant à la côte

b) - frontière ouverte (marine) : correspondant à la ligne de séparation des deux régions liquides (océan et bassin littoral).

3.1. Conditions aux limites sur la frontière fermée

Une seule condition aux limites suffit en général pour avoir un problème bien posé. Cette condition peut traduire l'absence de flux d'eau à travers cett frontière, en faisant $V_n = 0$; (V_n étant la composante normale de la vitesse) comme dans le cas d'une falaise à la côte ou un mur vertical dans un (bassin) canal, ceci découle de la remarque suivante :

(3.1.) si : $F(x,y,z,t) = 0$

désigne l'équation de la surface contenant un fluide, alors :

$$(3.2.) \qquad V_n = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\overrightarrow{\text{grad}F}|}$$

si $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$ c'est-à-dire si on considère le déplacement de la frontière - tout en supposant que les particules se trouvant sur la frontière restent toujours sur la frontière (conséquence du principe des milieux continus) - on ne peut en aucun cas mettre : $V_n = 0$. Par contre, on peut caractériser les frontières des bassins à fond incliné ou les plages par la condition : $h + \zeta = 0$ (profondeur totale nulle). Dans le cas d'une résolution numérique par différences finies on a besoin des conditions supplémentaires.

3.2. Conditions aux limites sur la frontière ouverte

Ces conditions constituent la difficulté majeure de la théorie des marée littorales. Car le nombre des conditions aux limites à imposer dépend du signe de la vitesse sur la frontière et de la nature de l'écoulement (subsonique ou supersonique) dans les problèmes des ondes longues en général. Dans la plus par

des cas on fait intervenir la valeur de la profondeur totale $(\zeta+h)$ dans les conditions car celle-ci est plus facile à évaluer expérimentalement que la vitesse.

Certes le cas bidimensionnel est plus fréquent dans la nature, mais l'étude du problème unidimensionnel ne manque pas d'intérêt car beaucoup d'écoulements dans les canaux et les rivières peuvent être considérés comme étant unidirectionnels. On montre dans ce cas (moyennant des techniques d'approximation) que pour un domaine à fond horizontal, le phénomène des ondes dans les eaux relativement profondes peut être modélisé par l'équation de Korteweg - De Vries (1895) :

$$(*) \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + (C_0+C_1\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \eta}{\partial \eta^3} = 0$$

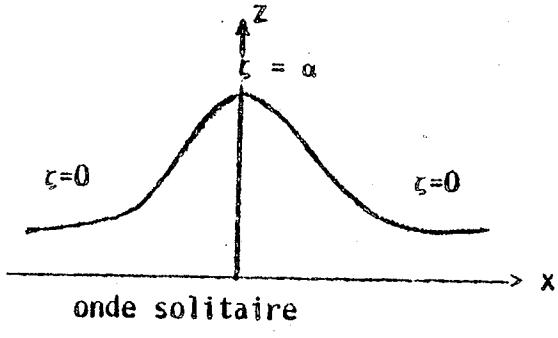
où :

C_0, C_1 et ν sont des constantes

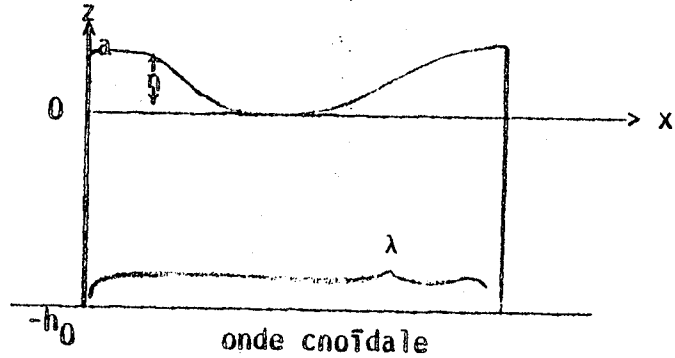
η : élévation de la surface libre.

l'équation (*) a été déduite avec l'hypothèse $\frac{\eta}{h} << 1$ (h : la profondeur) comme solutions de l'équation de KDV, on trouve des ondes de forme et de vitesse constantes, périodiques (ondes cnoïdales) et non périodiques (ondes solitaires).

Pour ce type d'écoulement on ne suppose pas que $\frac{a}{\lambda}$ est nécessairement petit (a étant l'amplitude et λ la longueur d'onde) comme dans le cas des ondes longues dans les eaux peu profondes.



onde solitaire



onde cnoïdale

Parfois, on rajoute aux équations du mouvement un terme de viscosité afin de tenir compte de la dissipation de l'énergie due au frottement interne du liquide pour ne pas fausser l'équilibre énergétique.

La connaissance parfaite de la quantité d'énergie effective fournie par la marée est indispensable pour le fonctionnement des usines marémotrices par exemple.

Dans tous ces problèmes d'ondes ; l'écoulement est à surface libre et le nombre de Froude ($\frac{|V|}{C}$) joue un rôle important (V : la vitesse, C : la vitesse de propagation).

BIBLIOGRAPHE DU CHAPITRE I

[1] BENAHMED M.

Thèse ; Paris IX (1978)

[2] BEREZIN I.S. and ZHIDKOV N.P.

Computing methods ; volume 2 - Pergamon press (1965)

[3] DRONKERS J.J.

Tidal Computations in rivers and Coastral waters

North Holland ; Amsterdam (1964)

[4] FRIEDRICHS J.J.

On the derivation of the shallow water theory

Comm. Appl. Meth. 1 - pp 81-85 (1948)

[5] HYDINTHE J.L. et KRAVTCHENKO J.

Modèle mathématique de marées littorales, calcul numérique sur l'exemple de la Manche. La Houille Blanche n° 6, pp 639-650 (1967)

[6] KRAVTCHENKO J. et LE PROVOT C.

Théorie des marées littorales, cours professé au C.I.S.M.E., Udine (1976)

[7] LAMB H.

Hydrodynamics ; Cambridge University Press (1932)

[8] LEENDERTSE J.J.

Aspects of a Computational model for long-period wave propagation

RAND Memerandum ; RM-5294-PR ; Santa-Monica, California (1967)

[9] LE PROVOT C.

Thèse, Grenoble (1974)

[10] RONDAY F.

Thèse, Liège (1976)

[11] STOKER J.J.

Water waves - the mathematical theory with applications

Interscience publishers (1957)

[12] WHITHAM G.B.

Linear and non linear waves - Wiley - Interscience (1973)

CHAPITRE II

RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME DE SAINT-VENANT DANS UN DOMAINE A FRONTIERE VARIABLE

- CAS UNIDIMENTIONNEL -

§ 1 - Calcul de la solution analytique de BALL

§ 2 - Etude du cas unidimensionnel

§ 3 - Algorithme de résolution

§ 4 - Résultats numériques

Introduction

On expose dans ce chapitre la résolution numérique par différences finies des équations de St Venant dans le cas unidimensionnel pour un domaine parabolique, contenant un liquide muni d'un mouvement oscillatoire. Il s'agit donc d'un problème à frontière variable. Le choix du domaine est justifié par l'existence d'une solution analytique. Une telle solution nous permet d'une part de déduire la condition aux limites qu'on doit imposer sur la frontière pour retrouver numériquement la solution du système, et d'autre part de tester l'efficacité de l'algorithme proposé.

Après un bref rappel du calcul de la solution analytique on expose le traitement de la frontière variable, qu'on illustre par des expériences numériques à la fin de ce chapitre.

Pour avoir une description précise du phénomène des ondes longues il faut prendre des conditions initiales cohérentes avec la géométrie du domaine afin de satisfaire l'hypothèse des ondes longues.

0 - NOTATIONS

A : constante arbitraire

b : abscisse du point de profondeur maximale

f : paramètre de Coriolis

g : accélération de la pesanteur

H : profondeur du liquide au centre de la surface libre à la position d'équilibre

h : profondeur du liquide

L : moitié de la largeur de la surface libre à la position d'équilibre

u, v : composantes de la vitesse horizontale

V : vitesse géostrophique d'équilibre le long de l'axe du creuset

X, Y : composantes du déplacement

z : équation de la surface contenant le liquide

α, β : constantes déterminant la forme du paraboloïde contenant le liquide

ω : $(g\alpha + f^2)^{1/2}$ fréquence des oscillations

x_b : abscisse du bord

u_b : vitesse au bord

u_0 : vitesse initiale

Dans ce qui va suivre on rappelle brièvement la méthode de BALL[1] pour l'obtention d'une solution analytique du système des équations des ondes longues non amorties (sans frottement) dans un domaine à fond parabolique.

1 - CALCUL DE LA SOLUTION ANALYTIQUE [1] :

Au lieu d'essayer de trouver la solution exacte des équations de Saint Venant dans un domaine de forme donnée, on se donne une forme simple de la solution et on cherche la forme du domaine nécessaire pour une telle solution.

1.1. Cas du déplacement pur

Le liquide est déplacé latéralement sans distorsion du profil de la profondeur et la vitesse horizontale dépend uniquement du temps. On considère le système de Saint-Venant :

$$(1.1.) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial x}(h+z) = fv$$

$$(1.2.) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial y}(h+z) = -fu$$

$$(1.3.) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

où h est la profondeur du liquide et z est la hauteur de la base du liquide au-dessus d'un certain niveau fixé. La hauteur de la surface du liquide au-dessus de ce niveau est égale à h+z. Les composantes de la vitesse (u,v) sont supposées indépendantes de la hauteur (hypothèses des ondes longues). On remarque que dans le système (1.1.)-(1.3.) on n'a tenu compte ni de la force de frottement, ni de la force de viscosité.
Dans le cas d'un déplacement pur, la solution du système (1.1.)-(1.3.) aura la forme suivante :

$$(1.4.) \qquad h = h(x-X,\ y-Y)$$

$$(1.5.) \qquad u = \frac{dX}{dt}$$

$$(1.6.) \qquad v = \frac{dY}{dt}$$

h est une fonction de x-X et y-Y, X et Y sont des fonctions du temps seulement et elles représentent les deux composantes du déplacement transversal du profil du liquide. On a supposé aussi que le déplacement des particules liquides est le même que le déplacement du profil du liquide, on a donc affaire à un mouvement quasi-rigide.

L'équation de continuité est automatiquement vérifiée par la forme de la solution suggérée (physiquement et formellement par substitution dans (1.3.)).

En remplaçant h, u et v dans (1.1.) et (1.2.), on obtient :

$$(1.7.) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} + g\frac{\partial}{\partial x}(h+z) = f\frac{dY}{dt}$$

$$(1.8.) \qquad \frac{d^2Y}{dt^2} + g\frac{\partial}{\partial y}(h+z) = -f\frac{dX}{dt}$$

Si on dérive (7) par rapport à x, on aura :

$$(1.9.) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$

h étant une fonction de x-X et y-Y tandis que z est une fonction de x et y si l'équation (1.9.) est satisfaite pour tout x,y et t alors ces dérivées doivent être constantes. Et de manière similaire, on obtient une relation analogue pour y. D'où, pour un choix convenable des axes de référence, on déduit :

$$(1.10.) \qquad z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2)$$

on a aussi :

$$(1.11.) \qquad h = H - \frac{1}{2}\{\alpha(x-X)^2 + \beta(y-Y)^2\}$$

où α et β sont des constantes donnant la forme du bassin et H est une constante caractéristique de la profondeur.

Il découle que pour un déplacement pur, la forme du bassin est nécessairement un parboloïde.

De plus, on a :

$$(1.12.) \qquad h+z = H - \frac{1}{2}(\alpha X^2 + \beta Y^2) + \alpha x X + \beta y Y$$

Ceci montre que la surface libre est toujours plane. Si on remplace dans les équations (1.7.) et (1.8.) (h+z) par son expression donnée en (1.12.) on trouve:

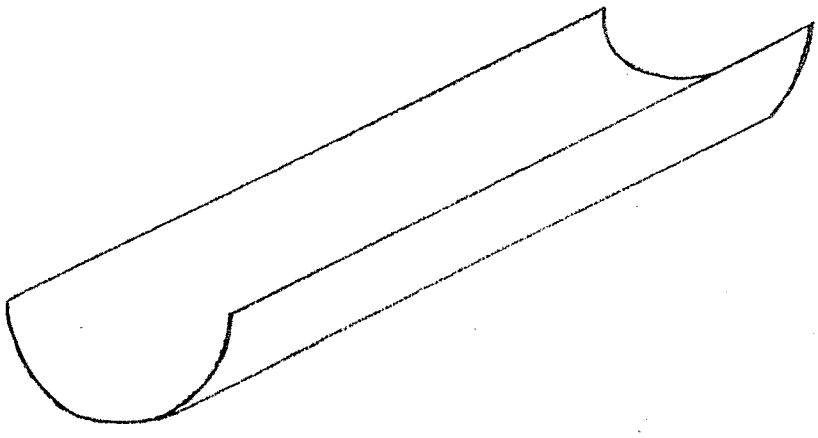
$$(1.13.) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} + g\alpha X = f\frac{dY}{dt}$$

$$(1.14.) \qquad \frac{d^2Y}{dt^2} + g\beta Y = -f\frac{dX}{dt}$$

1.2. Cas des oscillations dans un creuset parabolique :

Comme illustration de la théorie précédente, on considère un creuset parabolique contenant un liquide profondeur H au centre, avec une surface libre de demi-largeur L. Dans ce cas $\beta = 0$ et

$$(1.15.) \qquad \alpha = 2H/L^2$$



Creuset parabolique (gouttière)

l'équation (1.14.) donne :

$$(1.16.) \qquad \frac{dY}{dt} = V - fX$$

où V est une constante arbitraire qu'on interprète par la vitesse géostrophiqu
Par substitution dans (1.13.), on trouve :

$$(1.17.) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = -(g\alpha + f^2)X + fV$$

si les zéros de X(t) et Y(t) sont choisis convenablement, la solution générale peut être écrite :

$$(1.18.) \qquad X(t) = A \sin \omega t + fV/\omega^2$$

$$(1.19.) \qquad Y(t) = A \frac{f}{\omega} \cos \omega t + Vt$$

$$(1.20) \qquad h(x,t) = H\{1 - (\frac{x - A \sin \omega t - f V/\omega^2}{L})^2\}$$

ici A est une constante arbitraire représentant l'amplitude, et la fréquence ω est donnée par :

$$\omega^2 = \alpha g + f^2$$

2 - ETUDE DU CAS UNIDIMENSIONNEL

Le système de Saint-Venant s'écrit dans le cas unidimensionnel et pour un domaine à fond parabolique.

$$(2.1.) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g\alpha x = 0$$

$$(2.2.) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

La solution générale calculée en 1. devient :

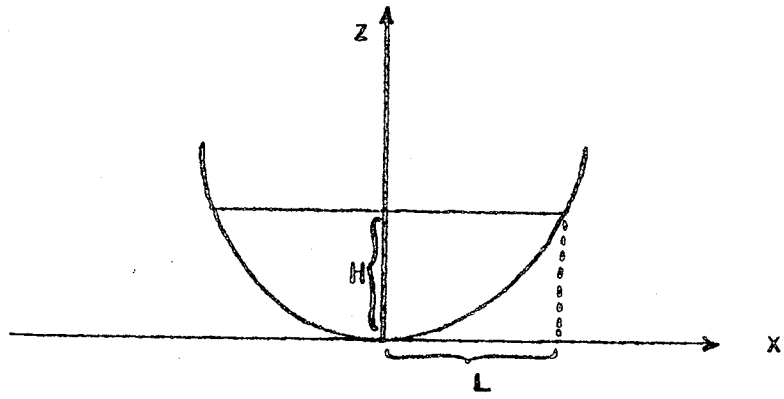
$$(2.3.) \qquad X = A \sin \omega t$$

$$(2.4.) \qquad h = H\{1 - (\frac{x-X}{L})^2\}$$

$$= H\{1 - (\frac{x - A \sin \omega t}{L})^2\}$$

par hypothèse $u = \frac{dX}{dt}$ d'où :

$$(2.5.) \qquad u = A\omega \cos \omega t$$



Coupe transversale d'un creuset parabolique

2.1. Recherche des conditions aux limites

La frontière du domaine d'intégration correspond aux points du domaine vérifiant $h = 0$.

Or d'après (2.4.) : $h = 0$ nous donne :

$$(2.6.) \qquad x - X = \pm L$$

Notons par x_b et X_b l'abscisse et le déplacement du bord (qui vérifient (2.6.)) on aura donc :

(2.6.)' $x_b - X_b = \pm L$

si on dérive (2.6.)' par rapport au temps, on obtient :

(2.7.) $$\frac{dx_b}{dt} - \frac{dX_b}{dt} = 0$$

d'où :

(2.8.) $$u_b = \frac{dx_b}{dt}$$

où u_b est la vitesse au bord, car par hypothèse $u = \frac{dX}{dt}$.

L'abscisse du bord x_b peut être déterminée à chaque fois que l'on a $h = 0$. L'utilisation de u_b comme condition aux limites dans le calcul de u pendant la résolution numérique nécessite le découplage du système (2.1.)-(2.2.) c'est-à-dire qu'on calcule h à l'instant t en utilisant les valeurs de u à l'instant $(t-\Delta t)$, et puis on détermine l'abscisse x_b du bord à l'instant t, et c'est dans le calcul de u à l'instant t que l'on utilise h et u_b qu'on vient de calculer.

3 - ALGORITHME DE RESOLUTION DU SYSTEME (2.1.)-(2.2.)

Pour traiter le problème dans la demi-droite $x > 0$ on fait une translation horizontale du domaine parabolique d'amplitude b.

Le système (2.1.)-(2.2.) devient :

(3.1.) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g\alpha(x-b) = 0$$

(3.2.) $$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

La solution générale aura la forme :

(3.3.) $$X = A \sin \omega t$$

(3.4.) $$h = H\{1-(\frac{x-b-X}{L})^2\}$$

La conditions aux limites reste inchangée.
La constante A peut être déterminée à partir de la vitesse initiale car d'après (3.3.) la vitesse initiale u_0 vérifie : $u_0 = \omega A$. A l'extérieur du domaine on pose : $u = h = 0$.

3.1. Traitement de la frontière

a) L'abscisse x_b du bord est déterminée par interpolation en utilisant soit les valeurs h_i et h_{i+1} vérifiant : $h_i \leq \varepsilon$ et $h_{i+1} > \varepsilon$ pour le premier bord. soit les valeurs h_{i-1} et h_i pour lesquelles $h_{i-1} > \varepsilon$ et $h_i \leq \varepsilon$ pour le deuxième bord. ($\varepsilon = 10^{-6}$ dans les expériences numériques).

b) La vitesse au bord u_b est calculée à chaque pas de temps par discrétisation de la relation (2.8.) c'est-à-dire : $u_b = \frac{\Delta x_b}{\Delta t}$, et comme le point d'abscisse x_b n'est pas nécessairement un noeud d'intégration, on détermine u_i au noeud voisin au bord, et appartenant au domaine liquide ($h_i \geq 0$). Mais comme par hypothèse, le mouvement est quasi-rigide et que la vitesse ne dépend que du temps, on peut poser : $u_i = u_b$; avec cette condition le schéma conserve son caractère explicite. Une autre condition aux limites ne faisant pas intervenir la nature de la solution serait de calculer u_i par interpolation en utilisant u_b et $u_{i\pm1}$ ($\pm$ selon qu'on est au premier ou au deuxième bord) cette condition rend le schéma aux différences implicite, mais elle est plus générale que la précédente.

c) Pour calculer h en un point à l'instant t on doit distinguer selon que le point était sec ou mouillé à l'instant $(t - \Delta t)$; si le point était mouillé il n'y a pas de problèmes ; si le point était sec, c'est-à-dire si l'eau monte, on a besoin de la valeur de h en ce point à l'instant $(t- \Delta t)$; on a calculé cette valeur par extrapolation linéaire à partir des deux points qui le précèdent et qui se trouvent à l'intérieur du domaine liquide. Et la formule qui donne h au point i à l'instant t sera :

$$(3.9.)\quad h_i(t) = [h_i(t-\Delta t)]_{extrap.} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\{[h_i(t-\Delta t)u_i(t-\Delta t)]_{extrap.} - h_{i-1}(t-\Delta t)u_{i-1}(t-\Delta t)\}$$

On remet à zéro les valeurs de h en tout point hors du domaine liquide à chaque pas de temps, et ceci moyennant un test pour déterminer si le point appartien au domaine ou non.

3.2. Schéma utilisé

Pour résoudre numériquement le système (3.1.) et (3.2.) on a utilisé une variante d'un algorithme proposé par FLATHER et HEAPS [2], il s'agit d'un algo-

rithme basé sur un schéma aux différences explicite que les auteurs ont appliqué au calcul de la marée dans la baie de Morecambe, où ils avaient pris en compte le mouvement de la frontière solide (la côte), mais ils ont utilisé comme condition aux limites u = 0 sur la frontière solide, ce qui ne correspond pas à la réalité physique en général. Dans l'algorithme proposé, on a découplé les équations (on a utilisé la valeur de h dans le calcul de u).

Propriétés du schéma :

a) Les termes advectifs ont été traités par la méthode de la dérivée angulaire [6], il s'agit d'une approximation de la dérivée spatiale dans les termes advectifs par une différence centrée dans l'espace et dans le temps. Le sens d'intégration est inversé à chaque pas de temps.

b) Les coefficients variables des dérivées sont calculés en utilisant les valeurs obtenues au pas précédent.

c) La stabilité du schéma est contrôlable par le critère de CFL [3], [5].

$$\Delta T \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2gh_{max}}} \qquad (3.10.)$$

d) Calcul de h :

$$h_i(t+\Delta t) = h_i(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h_i(t)u_i(t) - h_{i-1}(t)\,u_{i-1}(t)\right) \qquad (3.11.)$$

La formule (3.11.) est utilisée pour les points qui étaient mouillés à l'instant $(t-\Delta t)$ et qui sont dans le domaine liquide, pour les autres points du domaine liquide, on les traite selon 1-c).

Après l'évaluation de h, on détermine le nouveau domaine liquide en calculant les abscisses des nouveaux bords, le premier bord peut être déterminé dès qu'on a ($h_i \leq \varepsilon$ et $h_{i+1} > \varepsilon$) et le 2ème bord se détermine quand le test ($h_{i-1} > \varepsilon$ et $h_i \leq \varepsilon$) est satisfait.

e) Calcul de u

Pour les points qui ne constituent pas les noeuds extrêmes du domaine, on utilise les formules suivantes :

(i) pour les pas de temps pairs et pour i croissant.

$$(3.12.)\quad \{u_i(t+\Delta t)-u_i(t)\}/\Delta t = \frac{1}{2\Delta x}\,\overline{u_i}(t)\{u_{i+1}(t)-u_i(t)+u_i(t+\Delta t)-u_{i-1}(t+\Delta t)\} - g\{h_{i+1}(t+\Delta t)-h_i(t+\Delta t)\}/\Delta x - g\alpha(x_i-b)$$

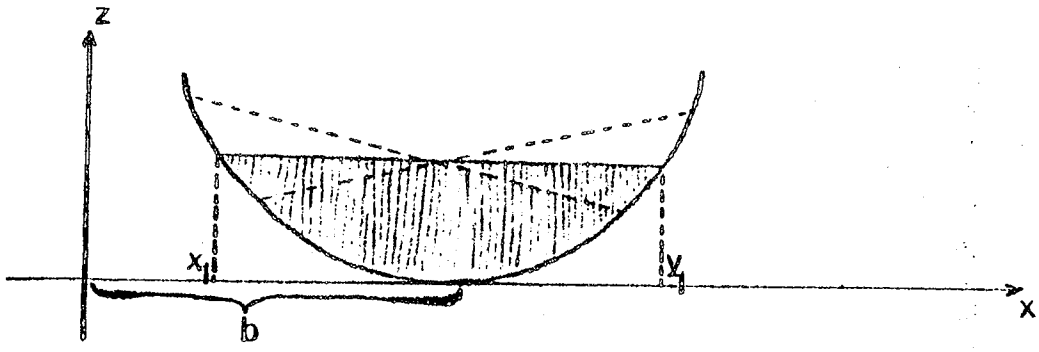
où

$$(3.13.)\quad \overline{u_i}(t) = \frac{1}{4}(u_{i+1}(t)+2u_i(t)+u_{i-1}(t))$$

(ii) pour les pas de temps impairs et pour i décroissant.

$$(3.14.)\quad \{u_i(t+\Delta t)-u_i(t)\}/\Delta t = -\frac{\overline{u_i}(t)}{2\Delta x}\{u_i(t)+u_{i+1}(t+\Delta t)-u_{i-1}(t)-u_i(t+\Delta t)\} - g\{h_{i+1}(t+\Delta t)-h_i(t+\Delta t)\}/\Delta x - g\alpha(x_i-b)$$

Les noeuds extrêmes, on les traite selon le procédé qu'on a expliqué en 3.1.B.



Domaine liquide - positions extrêmes

Remarque 1 :

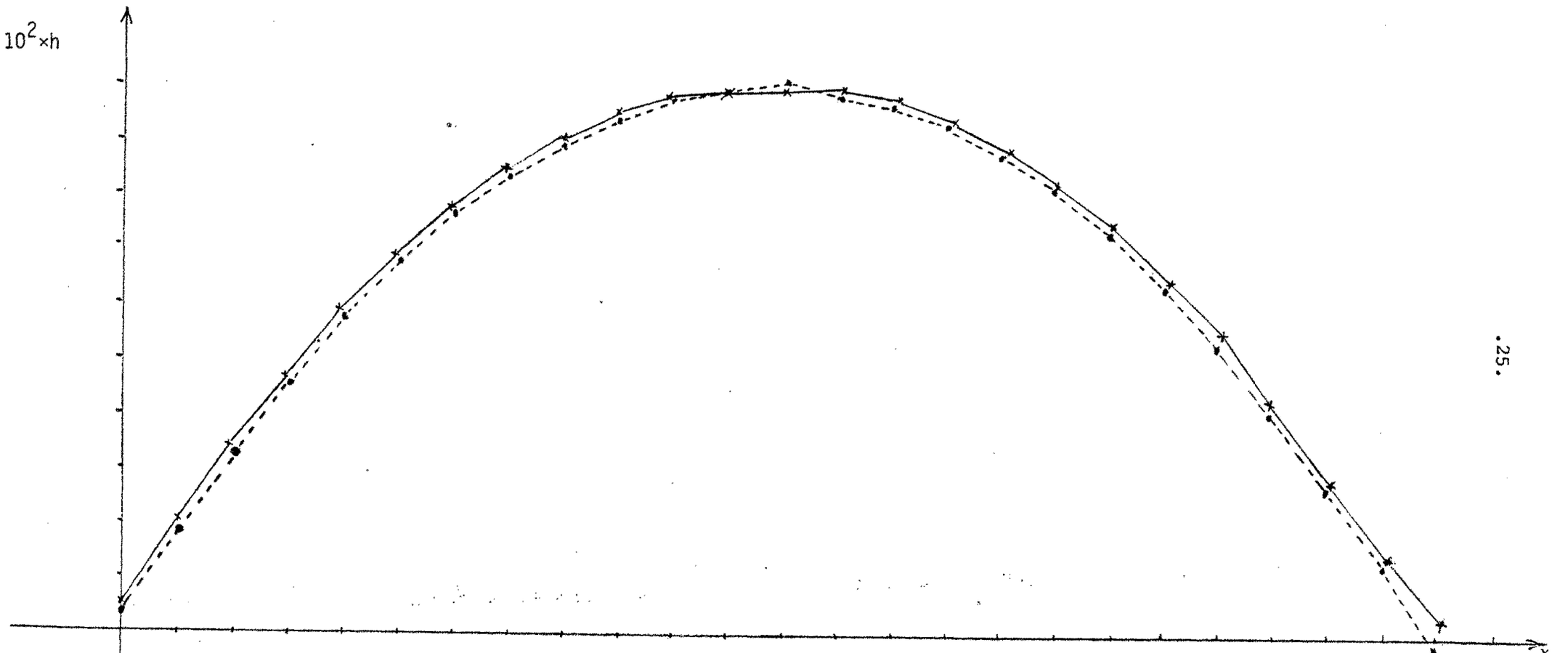
A chaque pas de temps, on pose u = 0 pour les points qui se trouvent à l'extérieur du domaine liquide.

Remarque 2 :

C'est pour avoir la stabilité du schéma lors du traitement des termes non linéaires qu'on a dû inverser le sens d'intégration.

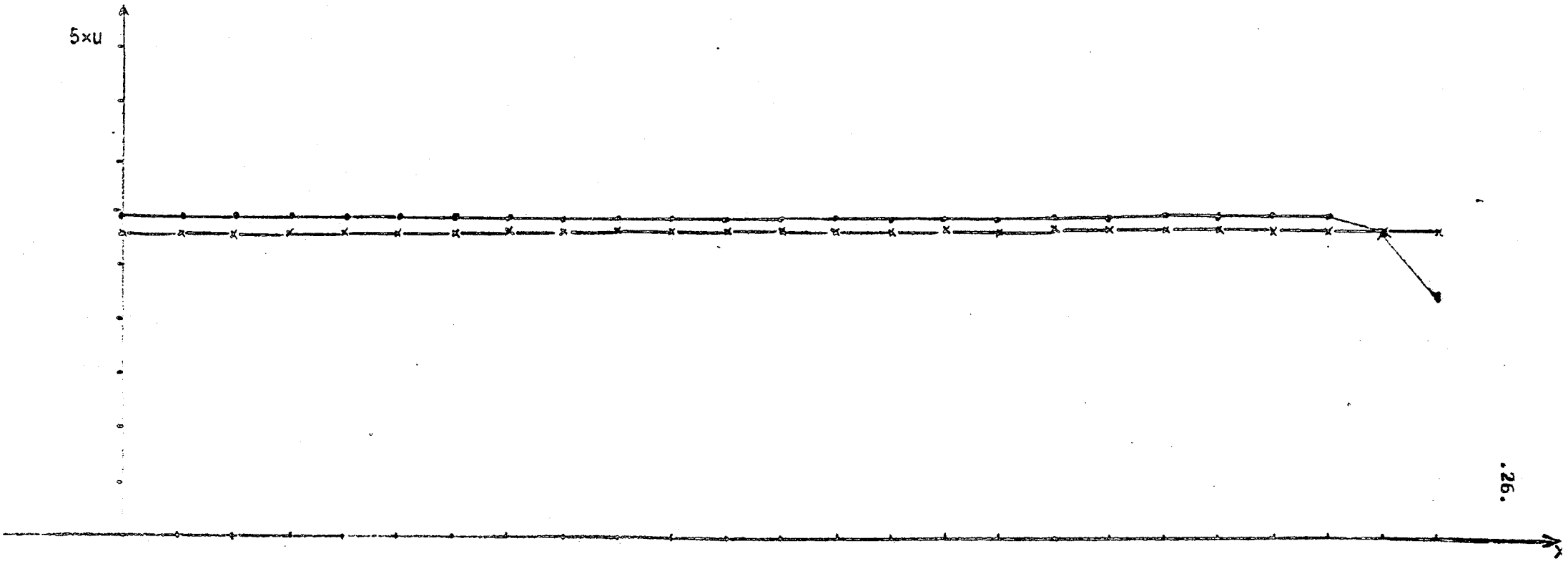
4. RESULTATS NUMERIQUES

Exemples 1 : figure 1



nombre de noeuds d'intégration = 48
H = 0.1 mètre
A = 1 mètre
t = 50 Δt

valeur exacte
valeur calculée



Nombres de noeuds d'intégration = 48

H = 0.1 mètre

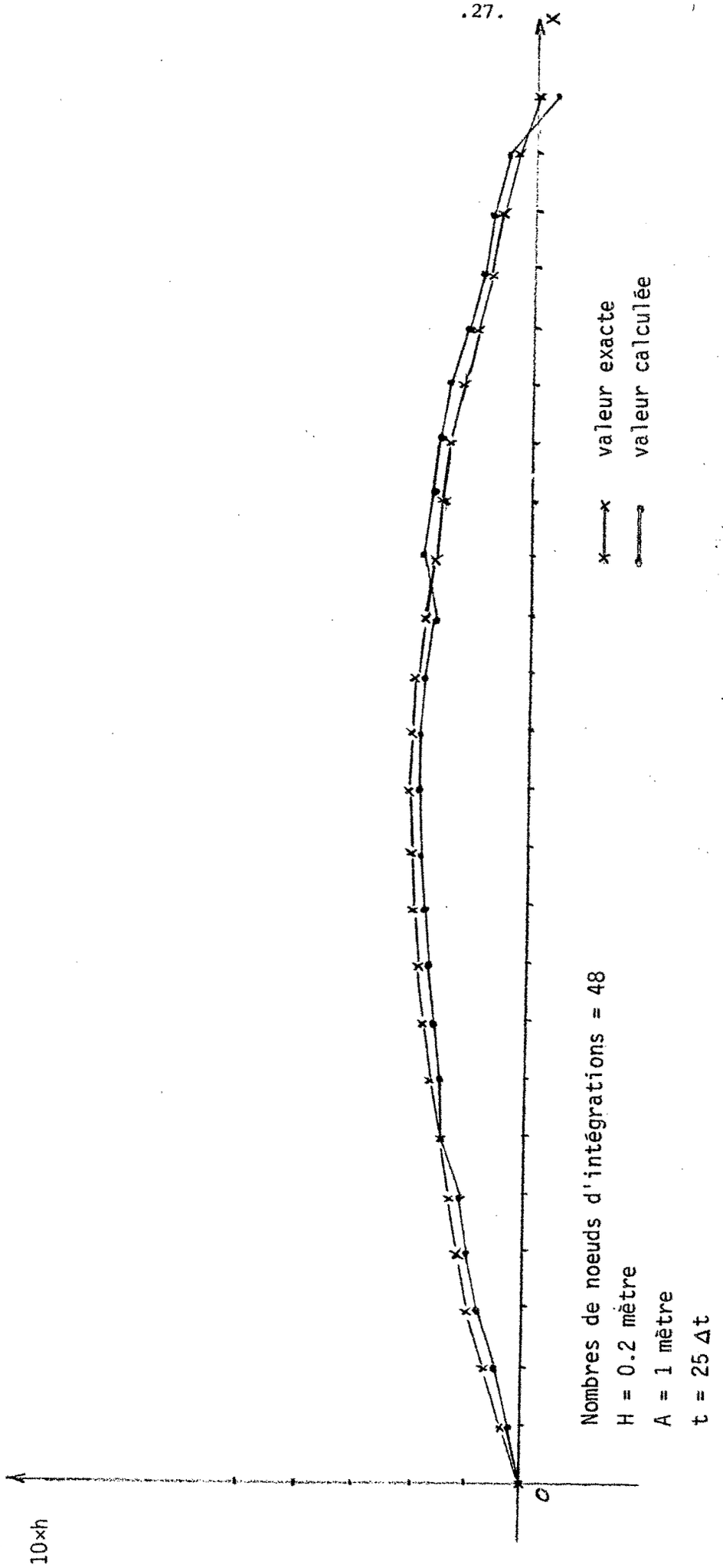
A = 1 mètre

t = 50 Δt

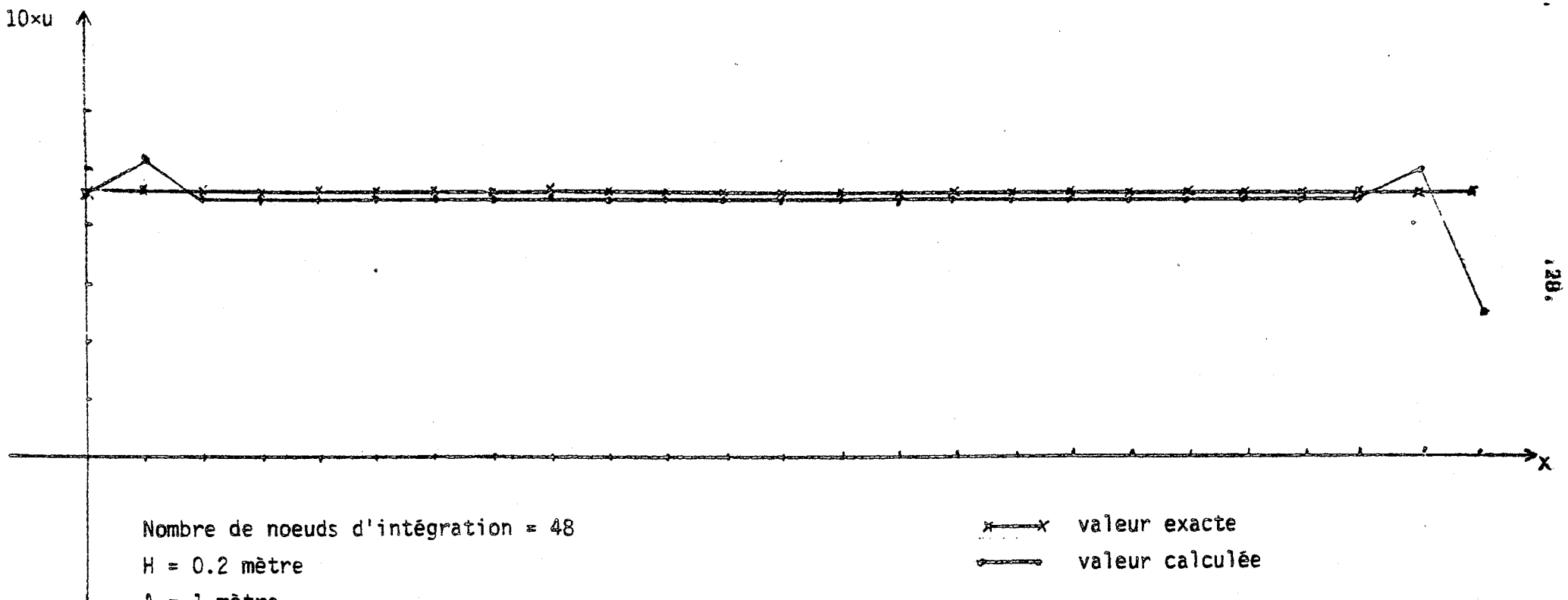
valeur exacte

valeur calculée

Exemple 2 - figure 1



Exemple 2 : figure 2



Nombre de noeuds d'intégration = 48

H = 0.2 mètre

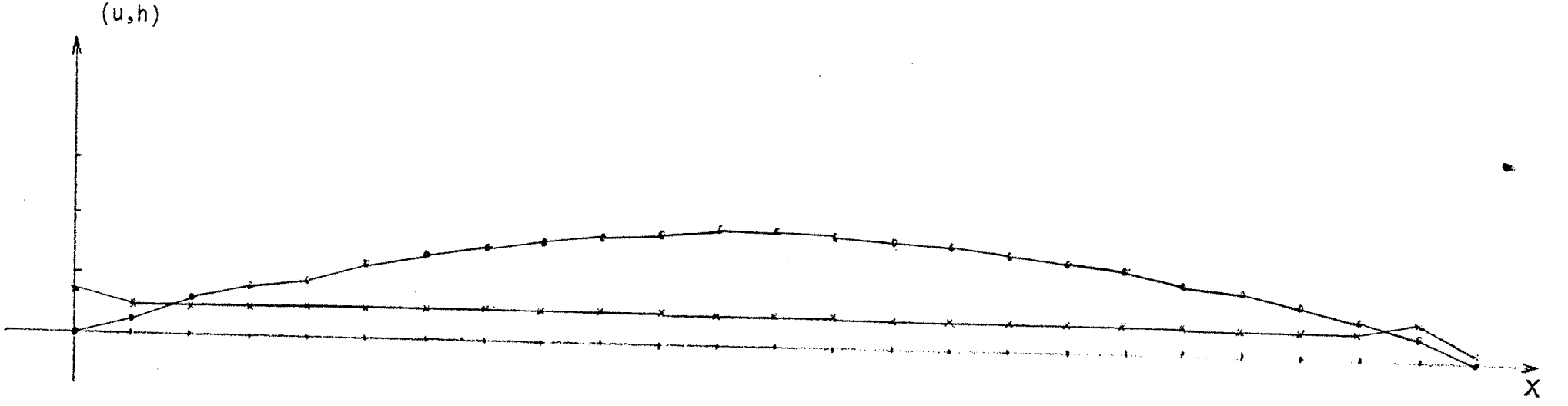
A = 1 mètre

t = 25 Δt

valeur exacte

valeur calculée

Exemple 3



H = 2 mètres

Δt = 0.5 secondes

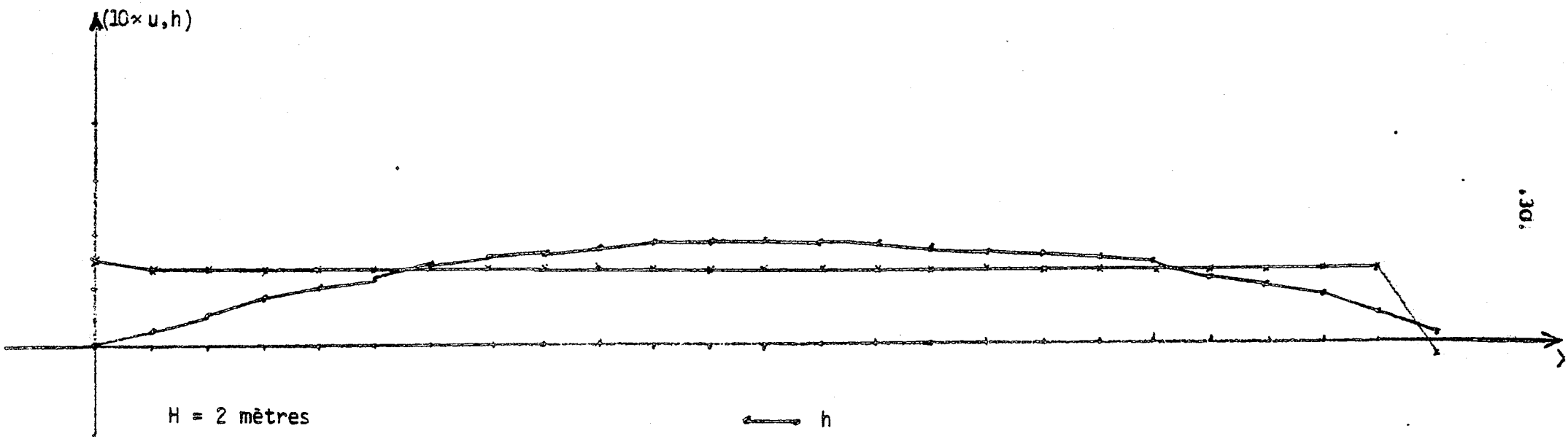
A = 1 mètre

t = 50 Δt

h

u

Exemple 4



H = 2 mètres

A = 1.5 mètres

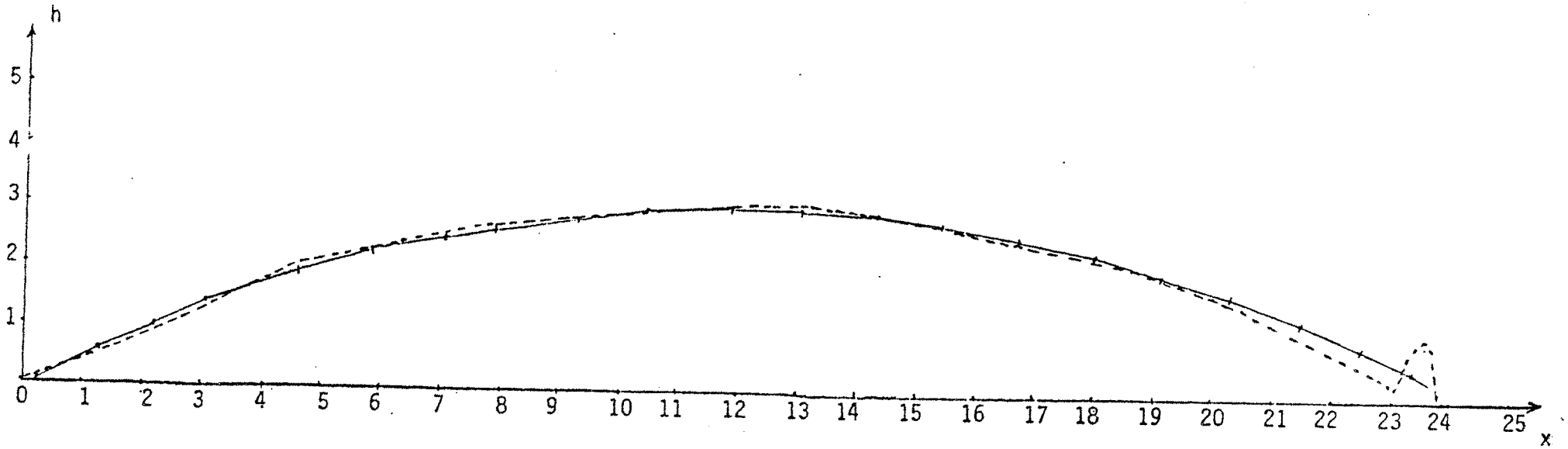
Δt = 0.5 secondes

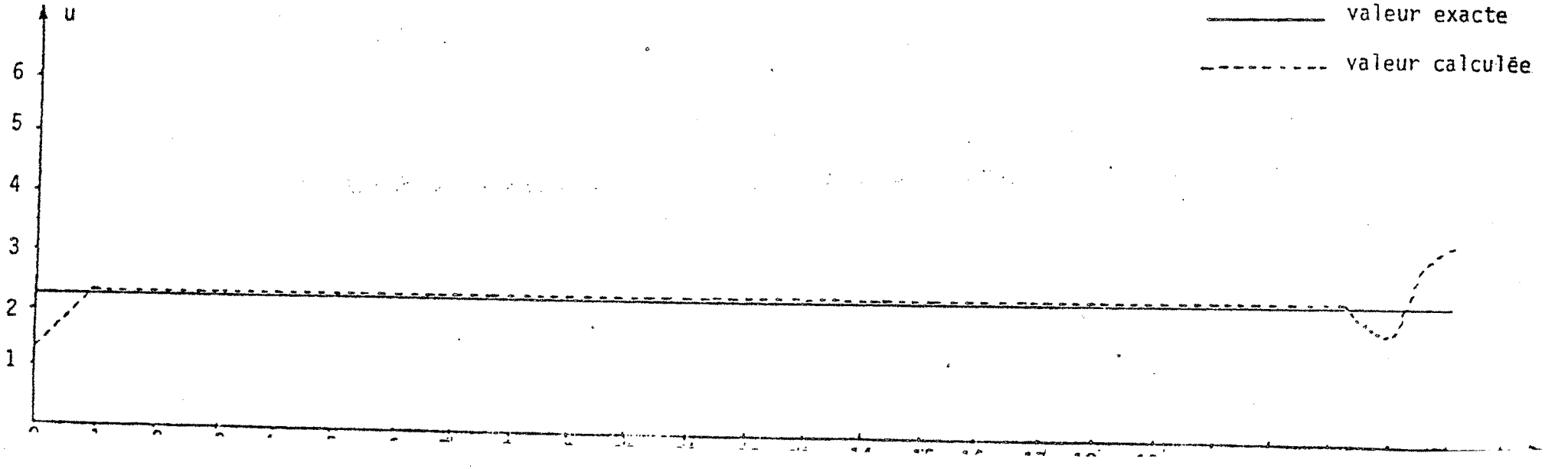
t = 50 Δt

h

10×u

Exemple 5


h
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
x


u
valeur exacte
valeur calculée
6
5
4
3
2
1

CONCLUSION

Comme dans chaque problème réel, pour décrire avec précision le phénomène des ondes longues, il faut se placer dans les conditions de validité du modèle. C'est-à-dire il faut que les données utilisées lors du calcul soient cohérentes avec les hypothèses physiques; à savoir une vitesse initiale relativement petite et une profondeur d'eau suffisamment petite de façon que la relation :

$$\frac{\lambda}{h} >> 1$$

(λ : la longueur de l'onde, h : la profondeur du liquide) soit satisfaite.

Les résultats numériques nous montrent l'existence de quelques fluctuations aux voisinages des bords, dues principalement au traitement des termes non linéaires (advectifs), car ces derniers deviennent importants dans les régions caractérisées par une faible profondeur de l'eau.

La description de la frontière variable nécessite un traitement rigoureux, car toute mauvaise détermination de la frontière, fausse complètement la conservation de la matière ce qui conduit à de faux résultats.

Tel qu'on procède ici, le problème semble beaucoup plus compliqué dans le cas bidimensionnel ; d'où la nécessité de l'utilisation de la méthode des éléments finis dans le chapitre III.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

[1] F.K. BALL

An exact theory of simple finite shallow water oscillations on a rotating earth.

Proc. 1st Austral. Conf. Hydraulics and fluid mech., 1962, Pergamon, 196

[2] R.A. FLATHER and N.S. HEAPS

Tidal computations for Morecambe bay.

Geophys. J.R. Astr. Soc. 42, (1975), 489-517

[3] N. GASTINEL

Introduction élémentaire aux méthodes numériques pour la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Cours INPG-USMG, Grenoble (1978)

[4] S.H. LAMB

Hydrodynamics

Cambridge University Press, (1932)

[5] T.D. RICHTMYER and K.W. MORTON

Difference methods for initial value problems.

John Wiley and Sons, New-York (1967)

[6] K.V. ROBERTS and WEISS

Convective difference schemes

Math. Comp. 20, (1966), 272-299

[7] A. SIELECKI and M.G. WURTELE

The numerical integration of the nonlinear shallow water equations with sloping boundaries

J. of Comp. Physics 6, (1970), 219-236.

CHAPITRE III

RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME DE SAINT-VENANT DANS UN DOMAINE A FRONTIERE VARIABLE - CAS BIDIMENSIONNEL -

§ 1 - Présentation de la méthode des résidus pondérés

§ 2 - Application au problème de BALL

§ 3 - Conditions aux limites et déplacement de la frontière

§ 4 - Résultats numériques

Introduction

Plusieurs méthodes de calcul ont été utilisées pour la résolution du problème des ondes longues. La plus part des modèles proposés étaient basés sur la méthode des différences finies. Après la naissance des éléments finis, quelques auteurs [3], [5], [8], [9] se sont intéressés à son application au calcul des ondes longues, afin de contourner la difficulté due à la géométrie irrégulière des domaines réels. Mais-à notre connaissance- aucun de ces modèles n'a pris en considération le mouvement de la frontière, bien que cette situation soit réalisable physiquement ; l'exemple de Saint Michel sur la côte française et celui de Morecambe sur la côte anglaise illustrent bien le déplacement de la frontière terrestre de quelques kilomètres, sous l'effet de la marée.

Dans ce chapitre, on a essayé de tenir compte de la variabilité du domaine, d'où l'utilisation d'une condition aux limites "adéquate" différente de $V_n = 0$ (V_n, étant la composante normale de la vitesse) sur la frontière solide. Pour la résolution numérique, on a utilisé une méthode des éléments finis où la formulation faible est basée sur la méthode des résidus pondérés de Galerkin qu'on va rappeler brièvement dans ce papier.

L'utilisation de la méthode des éléments finis semble être justifée par :

1) La géométrie irrégulière des côtes et des estuaires ce qu'on peut approcher mieux par des triangles ou des éléments finis courbes (en utilisant des transformations isoparamétriques).

2) Variabilité du domaine ce qui est plus compliqué à traiter par la méthode des différences finies.

3) Le phénomène des ondes longues est un phénomène qui évolue lentement. On peut donc utiliser un pas de temps assez grand sans nuire à la précision des résultats. Ce qui n'est pas possible en différences finies en raison de la stabilité du schéma utilisé.

4) Possibilité du raffinement du maillage dans les régions d'intérêt particulier.

1 - PRESENTATION DE LA METHODE DES RESIDUS PONDERES DE GALERKIN

Soit V un espace fonctionnal donné ($\subset L^2(\Omega)$), on cherche à résoudre numériquement l'équation (ou le système d'équations) aux dérivées partielles : trouver $u \in V$, vérifiant :

(1.1.) $A(u) = 0$ dans Ω

(1.2.) $C(u) = 0$ sur $\partial\Omega$

Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\partial\Omega$ sa frontière, A opérateur différentiel. On suppose que la solution approchée s'écrit sous la forme :

$$(1.3.) \quad U_h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W_i$$

où les α_i sont les valeurs approchées de la solution aux noeuds de la triangulation (le domaine triangulé) Ω_h, et les W_i sont les fonctions de base de V_h approchant V.

Si on remplace (1.3.) dans (1.1.) on a en général :

$$(1.4.) \quad A(U_h) = R$$

La meilleure solution serait celle qui, en un certain sens, abaisserait le résidu R à une valeur minimale en tous les points de Ω_h. Une manière de réaliser cette condition consiste à utiliser le fait que si R est identiquement nul, alors :

$$(1.5.) \quad \int_{\Omega_h} \phi . R \, d\Omega_h = 0$$

où ϕ est une fonction (poids) dépendante des coordonnées. Si on choisit m fonctions $(\phi_i)_{i=1,m}$ linéairement indépendantes on peut alors écrire le nombre convenable d'équations simultanées de la forme :

$$(1.6.) \quad \int_{\Omega_h} \phi_i R d\Omega_h = \int_{\Omega} \phi_i \, A(U_h) \, d\Omega_h = 0$$

et le problème à résoudre sera de déterminer les α_i en résolvant le système :

$$(1.7.) \quad \int_{\Omega_h} \phi_i \, A(U_h) \, d\Omega_h = 0 \qquad i = 1,\ldots,m$$

Cette méthode s'appelle la méthode des résidus pondérés et les fonctions ϕ_i sont les fonctions de pondération. Et suivant le choix des ϕ_i on peut découvrir diverses approches.

1.1. Méthode de Galerkin

Elle correspond au cas :

$$\phi_i = W_i$$

c'est-à-dire que la fonction de pondération coïncide avec celle de base. Ce processus conduit en général à une bonne approximation. On retrouve dans cette méthode les caractéristiques typiques de la méthode des éléments finis à savoir,les équations simultanées sont de type bande puisque l'influence de chacun des paramètres ne s'étend qu'aux éléments adjacents à un point nodal, les intégrales peuvent être calculées séparément sur chaque élément et sommées ensuite pour obtenir la valeur totale.

Remarque :

L'un des inconvénients de la formulation ci-dessus apparaît immédiatement si l'opérateur A contient des dérivées d'ordre élevé car ceci nécessite la continuité jusqu'à un ordre élevé des fonctions de base afin d'éviter toute contribution des zônes inter-éléments. Cette difficulté peut être surmontée parfois en effectuant des intégrations par parties (ou leur formule générale : Green, Stokes, ...). Pour le système des ondes longues ce problème ne se pose pas car ou bien on ne considère par le terme de viscosité, et dans ce cas seules les dérivées partielles premières interviennent dans la fomulation, ou bien on considère le terme de viscosité et à l'aide de la formule de Green on peut réduire l'ordre de dérivation d'une unité, dans la formulation précédente et on n'aura que des dérivées premières.

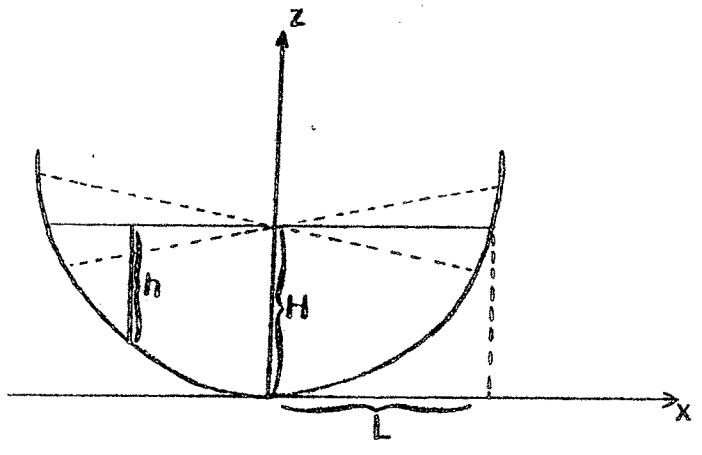
2 - APPLICATION AU PROBLEME DU "BOL" DE BALL

Les équations des ondes longues dans l'exemple de BALL [2] s'écrivent :

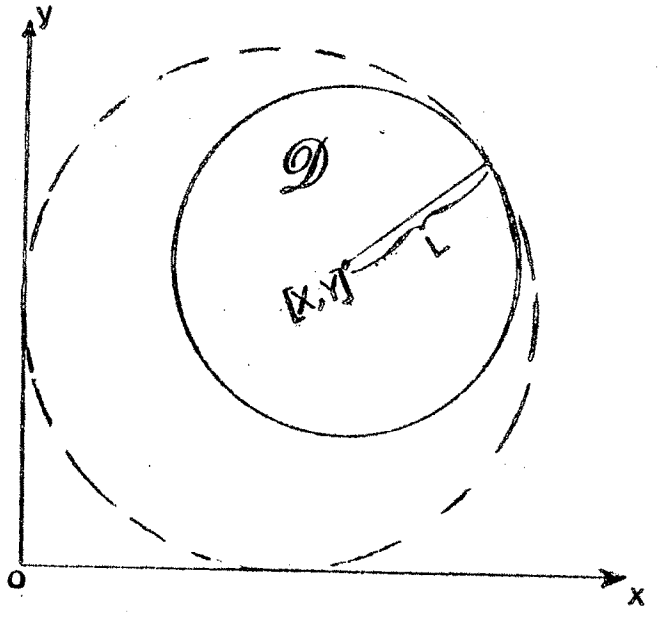
$$(2.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{y} + g\dfrac{\partial h}{x} - fv = -g\alpha x \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + g\dfrac{\partial h}{\partial y} + fu = -g\beta y \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + v\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

où u et v représentent les composantes de la vitesse d'une particule liquide, h la profondeur totale, f le paramètre de Coriolis et g l'accéleration de la posenteur - le Domaine étant un paraboloïde de révolution.

On connait pour ce cas, une solution analytique (profondeur et vitesse) des oscillations à faible amplitude d'un liquide, dans un paraboloïde de révolution - sous l'effet des conditions initiales et aux limites et la force de Coriolis.



Coupe transversale du paraboloïde de révolution



$\mathscr{D}$: la projection de la surface libre sur le plan xoy.

La projection de la surface libre sur le plan xoy est un disque de centre (X(t), Y(t)) avec :

$$(2.2.)\quad \begin{cases} X(t) = A \sin\omega t \,.\, \cos\theta t - B \sin\omega t \,.\, \sin\theta t \\ Y(t) = A \sin\omega t \,.\, \sin\theta t + B \sin\omega t \,.\, \cos\theta t \end{cases}$$

A et B des constantes liées aux conditions initiales sur les composantes de la vitesse :

$$\omega = \sqrt{\alpha g + 1/4\ f^2}\ , \qquad \alpha = 2H/L^2\ , \qquad \theta = -\frac{1}{2} f$$

H : la profondeur maximale à la position d'équilibre. L = le rayon de la surface libre à la position d'équilibre, c'est aussi le rayon à chaque instant t, de la projection de la surface libre sur xoy.

La solution analytique dans ce cas est donnée par :

$$(2.3.)\quad \begin{aligned} u &= A\omega\cos\omega t \,.\, \cos\theta t - A\,\theta\sin\omega t \sin\theta t - B\omega\cos\omega t \sin\theta t - B\theta\sin\omega t \cos\theta t \\ v &= B\omega\cos\omega t \,.\, \cos\theta t - B\,\theta\sin\omega t \sin\theta t + A\omega\cos\omega t \sin\theta t + A\theta\sin\omega t \cos\theta t. \\ h &= H\left[1 - \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{L^2}\right] \text{où X et Y sont donnés ci-dessus.} \end{aligned}$$

Il s'agit ici d'un problème dans un Domaine à bord incliné (contrairement aux Domaines à bord vertical). La condition aux limites, naturelle pour ce genre de Domaines est : h = 0, c'est-à-dire que la profondeur est nulle au bord. Et dans ce cas on admet que le déplacement du bord se produit avec la même vitesse que celle des particules liquides se trouvant sur cette frontière (conséquence du principe des milieux continus).

2.1. Discrétisation des équations par rapport à la variable temps

Comme dans tous les problèmes évolutifs qu'on résoud par la méthode des éléments finis, la dérivée par rapport au temps se traite de plusieurs façons :

a) - Eléments finis espace-temps : où on pose $U_h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W_i(x,y,t)$. Cette méthode fait intervenir des éléments à 3 dimensions. Aucune condition de stabilité n'est imposée sur le pas de temps Δt.

b) - Eléments finis espace - temps séparables : dans ce cas on pose :

$u_h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t)\, W_i(x,y)$, en remplaçant cette dernière expression dans l'équation (ou le système) du départ on aura un système d'équations différentielles ordinaires linéaires ou non linéaires suivant la nature du système du départ. Ce nouveau système n'est résolvable en général que par une méthode approchée.

c) - Discrétisation par différences finies : Dans cette méthode on approche la $\frac{\partial u}{\partial t}$ par $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$ où u^{n+1} est la valeur approchée de la solution au pas courant du temps et u^n est celle du pas précédent. Dans ce cas on peut avoir soit une méthode explicite (système diagonal) en prenant comme points d'intégration numérique les sommets des triangles soit une méthode implicite en prenant des points autres que les sommets des triangles. C'est cette dernière méthode qu'on va appliquer - sous plusieurs formes - aux équations des ondes longues dans un premier temps, afin d'éviter une condition trop restrictive sur le pas de temps.

2.1.1. Schéma I : implicite :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u}{\partial x}^{n+1} + v^n \frac{\partial u}{\partial y}^{n+1} + g \frac{\partial h}{\partial x}^{n+1} - f v^{n+1} = -g\alpha x$$

(2.4.)
$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial v}{\partial x}^{n+1} + v^n \frac{\partial v}{\partial y}^{n+1} + g \frac{\partial h}{\partial y}^{n+1} + f u^{n+1} = -g\beta y$$

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial h}{\partial x}^{n+1} + v^n \frac{\partial h}{\partial y}^{n+1} + h^n \left(\frac{\partial u}{\partial x}^{n+1} + \frac{\partial v}{\partial y}^{n+1}\right) = 0$$

- où les inconnues sont u^{n+1}, v^{n+1} et h^{n+1} les valeurs u^n, v^n et h^n sont les valeurs des "inconnues" au pas du temps précédent. Le système précédent est un système linéaire (à chaque pas de temps) à 3 inconnus d'où une matrice de "régidité" 3m × 3m, m étant le nombre total des noeuds de la triangulation.

2.1.2. Schéma II : Cranck - Nicolson

Le schéma de Cranck-Nicolson a été utilisé sous la forme suivante :

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right) + v^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right) + g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^{n+1}+h^n}{2}\right) - f\left(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\right) = -g\alpha x \tag{2.5}$$

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\right) + v^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\right) + g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^{n+1}+h^n}{2}\right) + f\left(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right) =$$

$$\frac{h^{n+1}-h^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^{n+1}+h^u}{2}\right) + v^u \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^{n+1}+h^n}{2}\right) + h^n\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)\right)$$

Dans les deux schémas précédents on a linéarisé les équations au niveau des termes advectifs tout en gardant le couplage du système.

2.2. formulation faible et problème approché :

Dans ce qui va suivre on remplace "l'exposant" n par ✱ et on omet (n+1) on note par (u_m, v_m, h_m) la solution approchée définie par :

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W_i$$

$$v_m = \sum_{i=1}^{m} \beta_i W_i$$

$$h_m = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i w_i$$

où les α_i β_i et γ_i sont les valeurs approchées de la solution exacte au noeud n° i.

w_i est la fonction de base (polynôme) vérifiant :

$$w_i(a_j) = \delta_{ij} \; ; \; a_j : \text{étant le noeud n° j}$$

et le système approché final sera :

$$\left(\frac{u_m - u_m^*}{\Delta t} + u_m^* \frac{\partial u_m}{\partial x} + u_m^* \frac{\partial u_m}{\partial y} + g \frac{\partial h_m}{\partial x} - fv, wi\right) = \left(- g\alpha x, wi\right) \quad i=1,\ldots,m$$

$$\left(\frac{v_m - v_m^*}{\Delta t} + u_m^* \frac{\partial v_m}{\partial x} + v_m^* \frac{\partial v_m}{\partial y} + g \frac{\partial h_m}{\partial y} + fu, w_i\right) = \left(- g\beta y, w_i\right) \; i=1,..,m$$

$$\left(\frac{h_m - h_m^*}{\Delta t} + u_m^* \frac{\partial h_m}{x} + v_m^* \frac{\partial h_m}{\partial y} + h_m^* \left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial u_m}{\partial y}\right), w_i \right) = o \; i = 1,..,m$$

Si on fait varier i de 1 jusqu'à m (= dimension de l'espace Vm engendré par les w_i) on obtient un système 3m x 3m.

La "consistence" entre le système approché ci-dessus et le système du départ peut être justifiée par le principe de la méthode des résidus pondérés de Galerkin qu'on a résumé au départ de ce papier.

3. Conditions aux limites et déplacement de la frontière :

Les fonds inclinés au bord peuvent être caractérisés par la condition aux limites :

$$h = o \quad \text{sur la frontière}$$

la loi discrète du déplacement de la frontière libre sera donnée par :

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} x^{(n+1)} &= x^{(n)} + \Delta t * u^{(n)} \\ y^{(n+1)} &= y^{(n)} + \Delta t * v^{(n)} \end{aligned}$$

où

$(x^{n+1}, y^{(n+1)})$ est un point frontière présent

$(x^{(n)}, y^{(n)})$ est un point frontière au pas précédent

Δt : le pas de temps

$(u^{(n)}, v^{(n)})$: le vecteur vitesse au pas précédent

Pour discrétiser le nouveau domaine obtenu à chaque pas de temps ; trois possibilités se présentent suivant la répartition des vitesses dans le domaine

a) reprise totale de la triangulation, dans le cas d'un écoulement où la variation de la vitesse d'un point à l'autre est importante.

b) reprise de la triangulation seulement au voisinage de la frontière qui bouge si le reste du domaine ne se déplace pas de manière sensible.

C) Translation de l'ancienne triangulation suivant la loi (3.1), ceci correspond au cas où la vitesse est uniforme par rapport aux variables d'espace.

4. Résultats numériques

4.1. Quelques considérations numériques

1) Dans les deux schémas précédents on a gardé le couplage du système lors de la résolution numérique afin d'éviter un stockage assez considérable.

2) A chaque itération dans le temps, on active un programme qui calcule les valeurs aux pas précédents aux points d'intégration numérique moyennant une interpolation des valeurs aux noeuds de la triangulation, d'où la nécessité de la sauvegarde de l'ancienne triangulation.

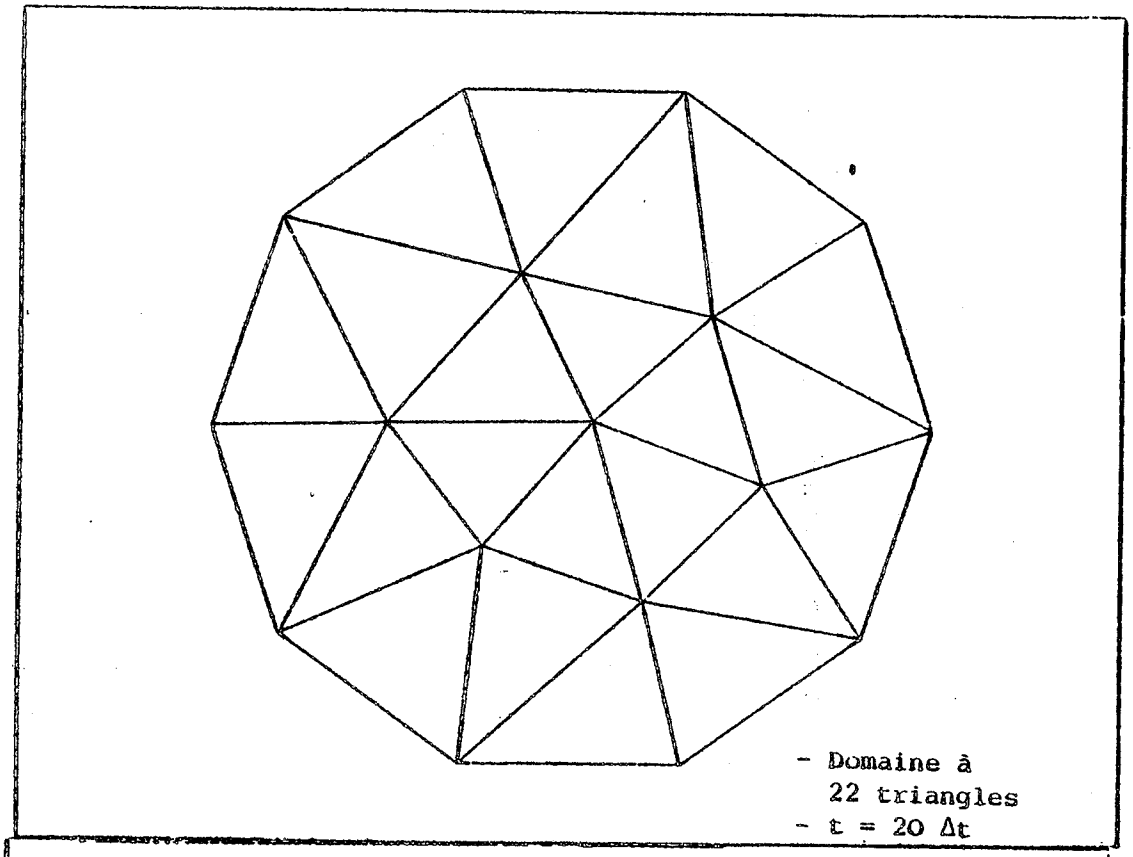
3) Pour l'intégration numérique on a utilisé une formule de quadrature d'ordre deux. Car dans la formulation "faible" on a des polynômes de degré deux au maximum.

4) Dans tous nos calculs on a utilisé comme fonctions de base des polynômes de degré 1. Autrement dit un procédé d'interpolation de Lagrange, de degré un.

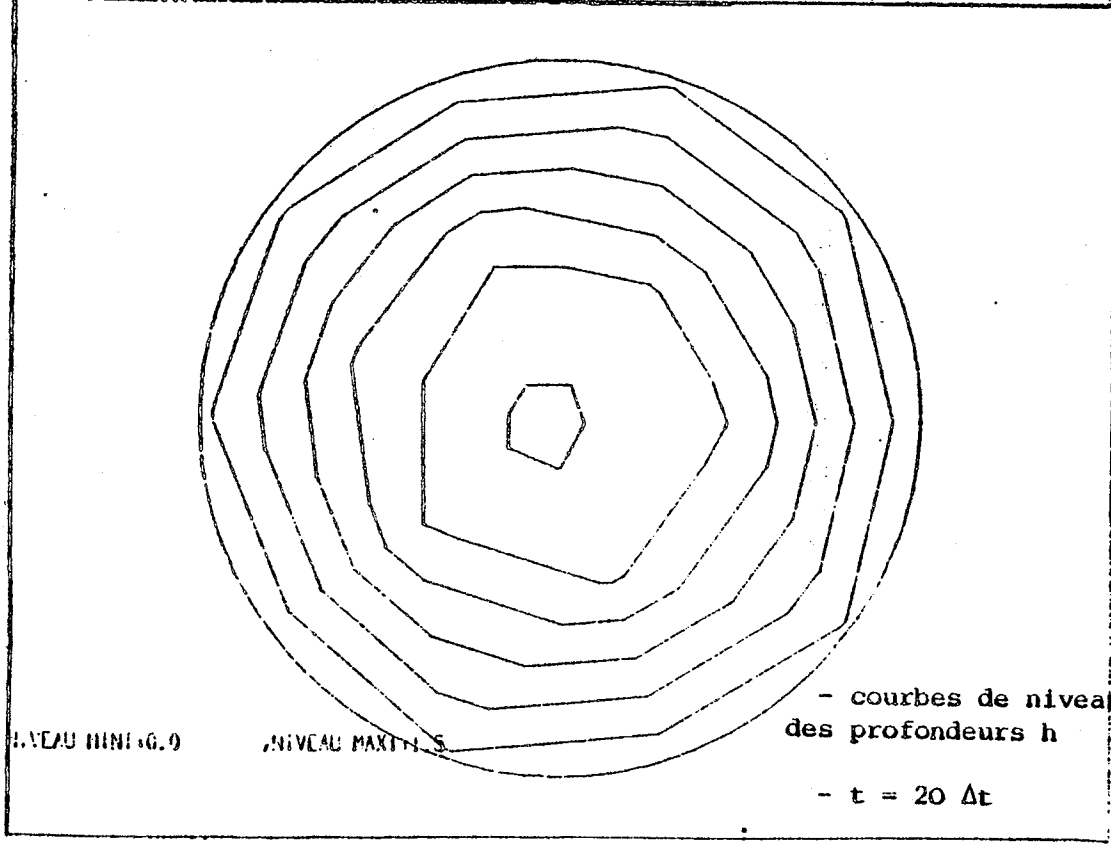
5) Lors de la résolution numérique on n'a remarqué aucun problème de stabilité, par contre on a constaté une grande sensibilité à la formule d'intégration numérique utilisée.

6) Dans le schéma de Cranck-Nicolson on sauvegarde en plus des valeurs des fonctions, les valeurs des dérivées premières, au pas précédent.

Figure 1

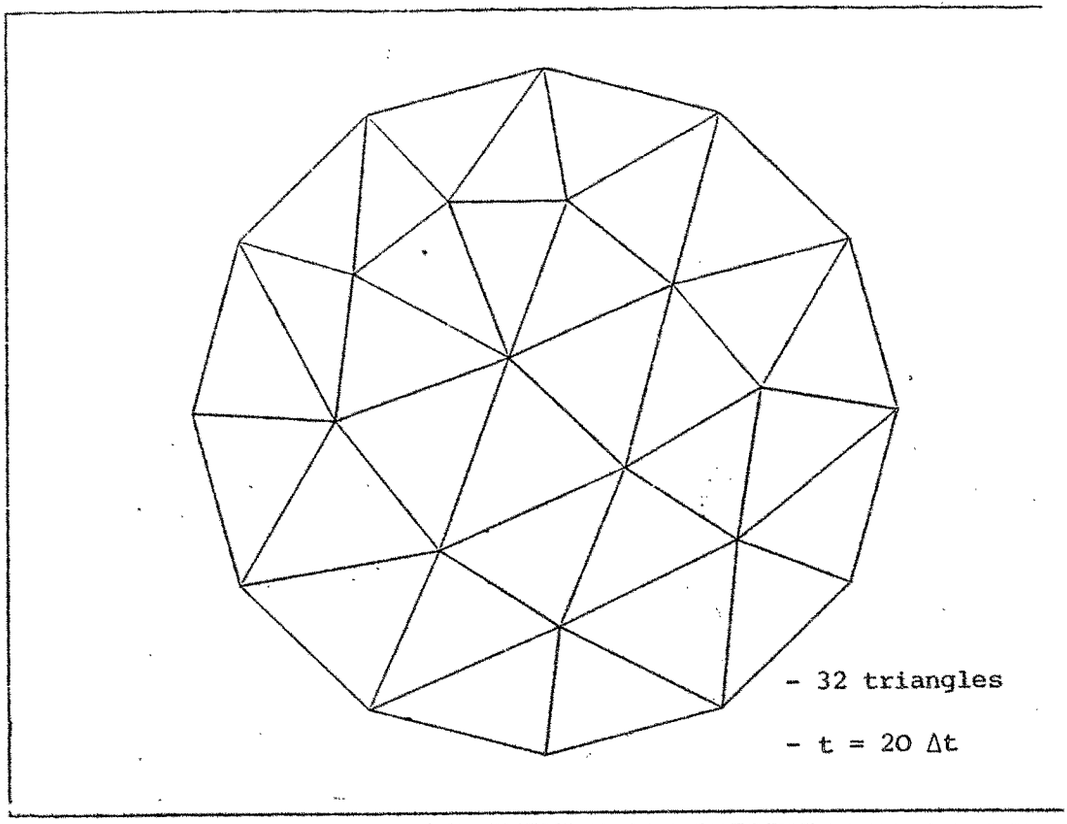


- Domaine à 22 triangles
- $t = 20\ \Delta t$



- courbes de niveau des profondeurs h
- $t = 20\ \Delta t$

Figure 2


- 32 triangles
- t = 20 Δt

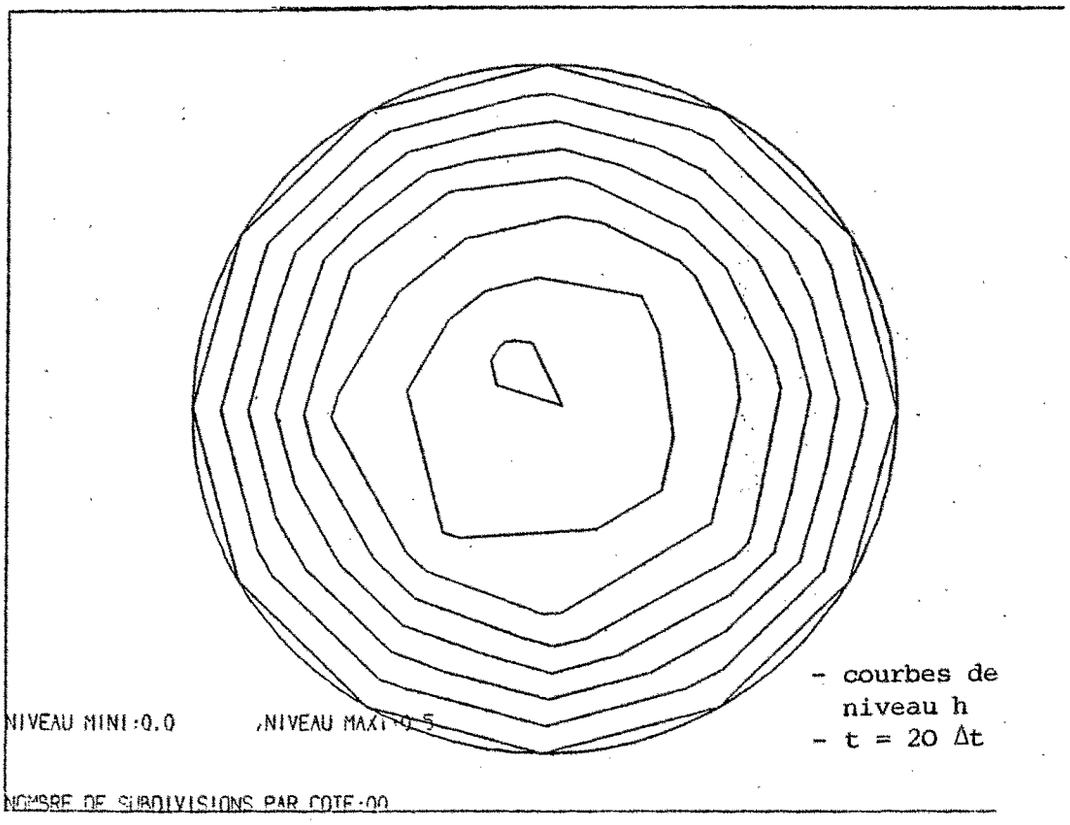
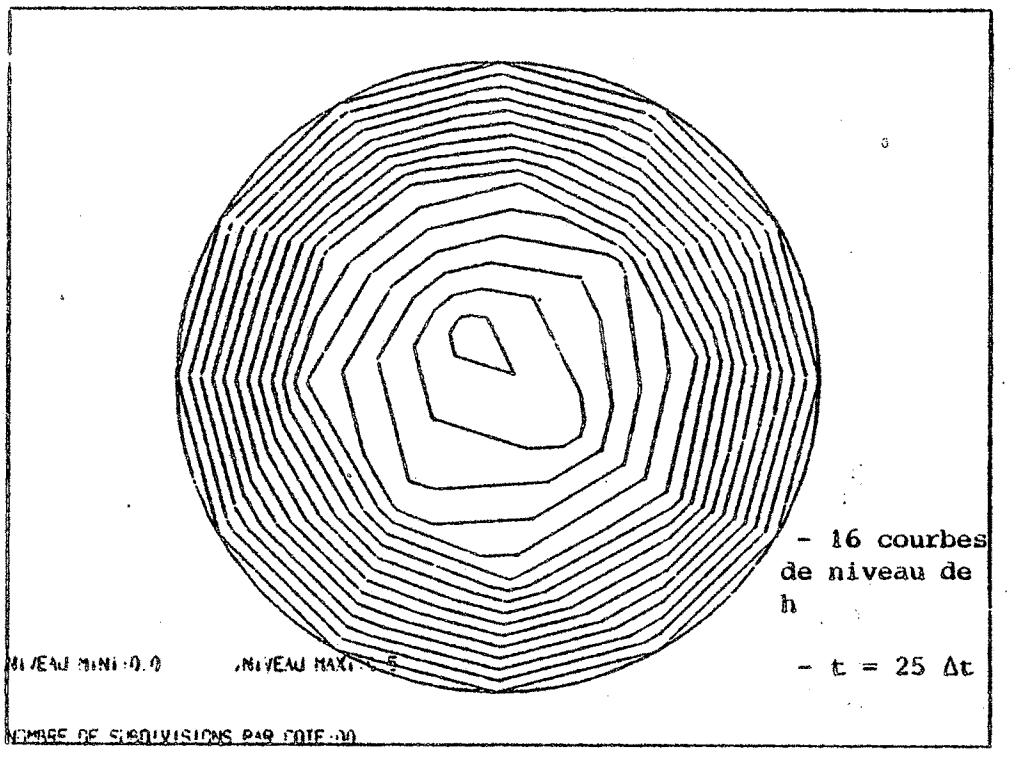

NIVEAU MINI:0.0
,NIVEAU MAXI:0.5
NOMBRE DE SUBDIVISIONS PAR COTE:00
- courbes de niveau h
- t = 20 Δt

Figure 3



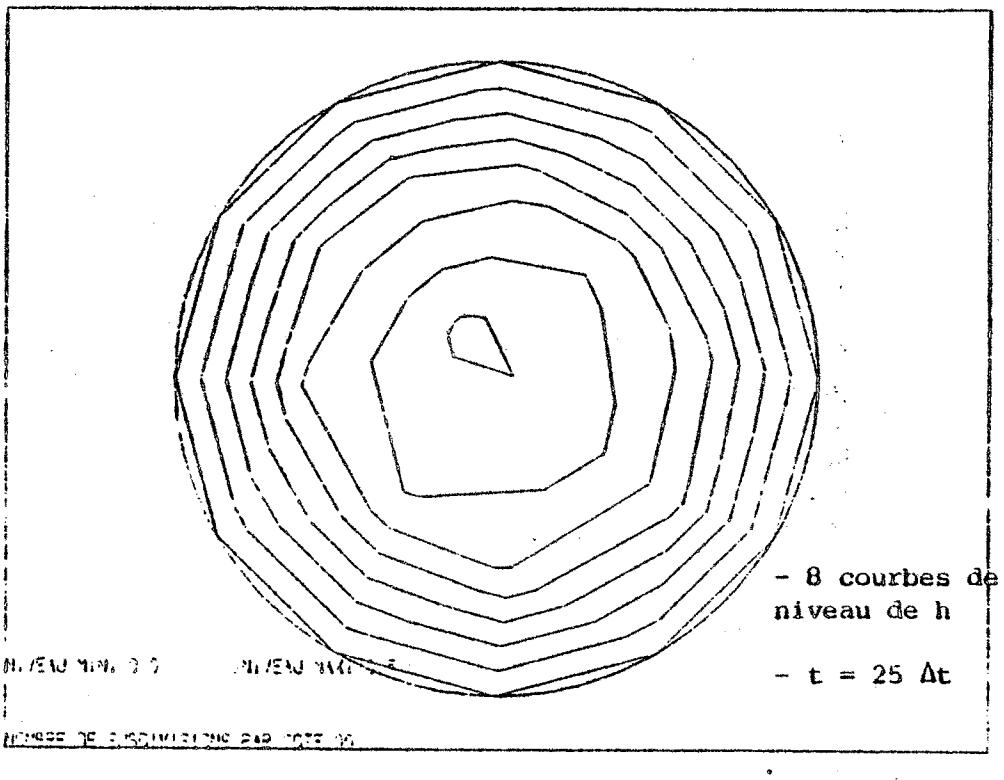
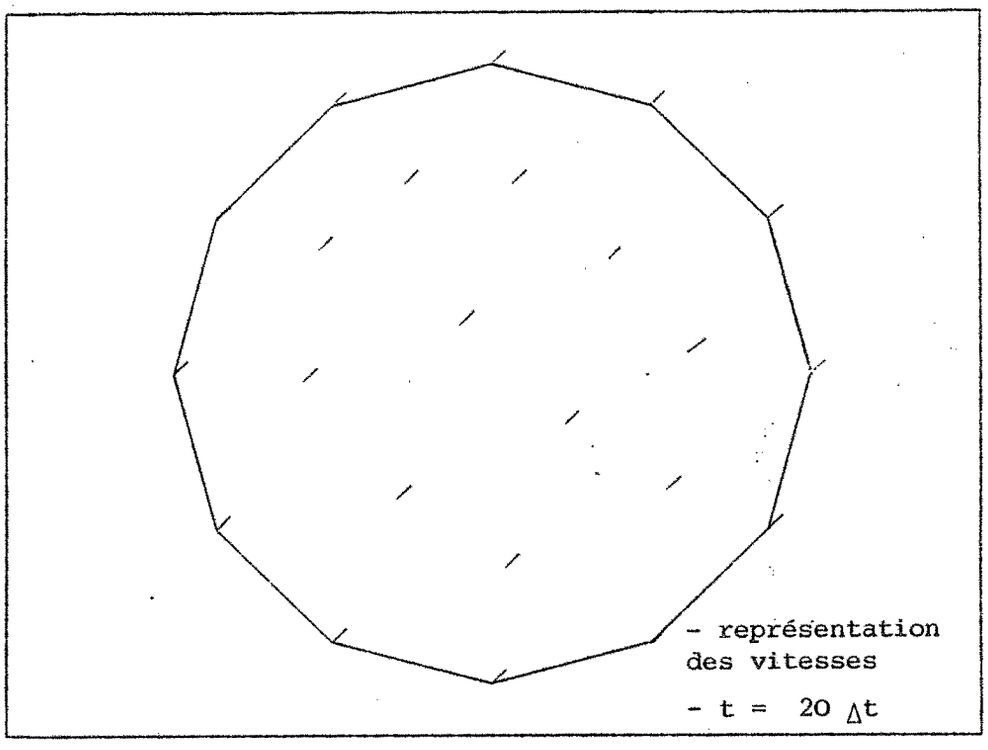


Figure 4


- représentation
des vitesses
- t = 20 Δt

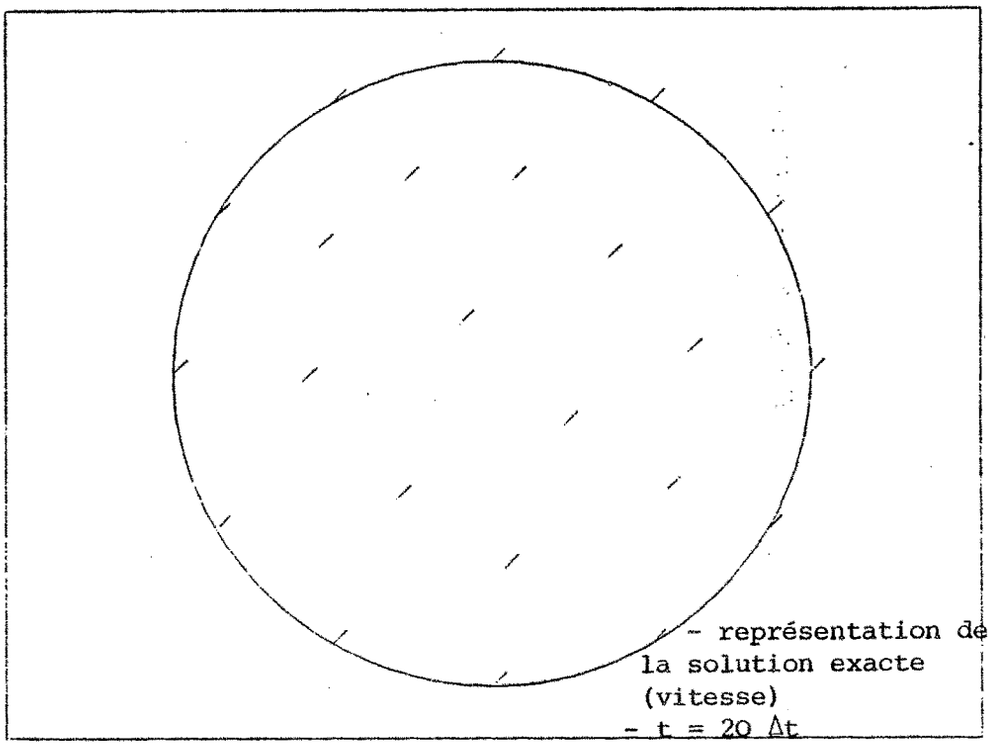
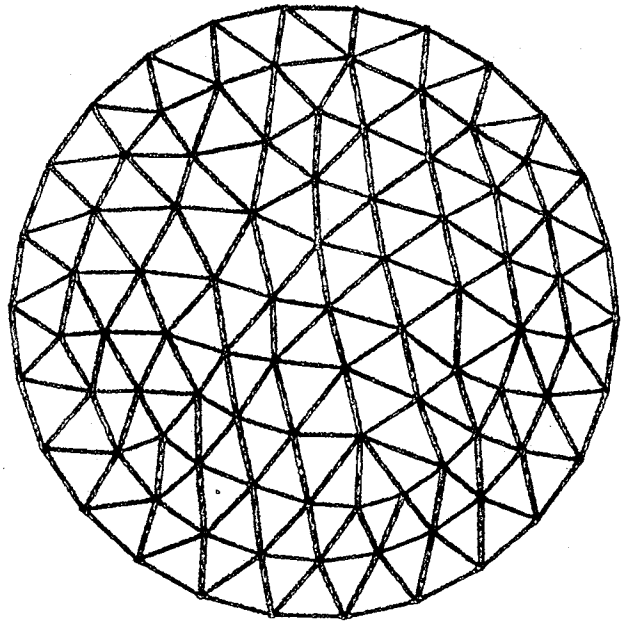
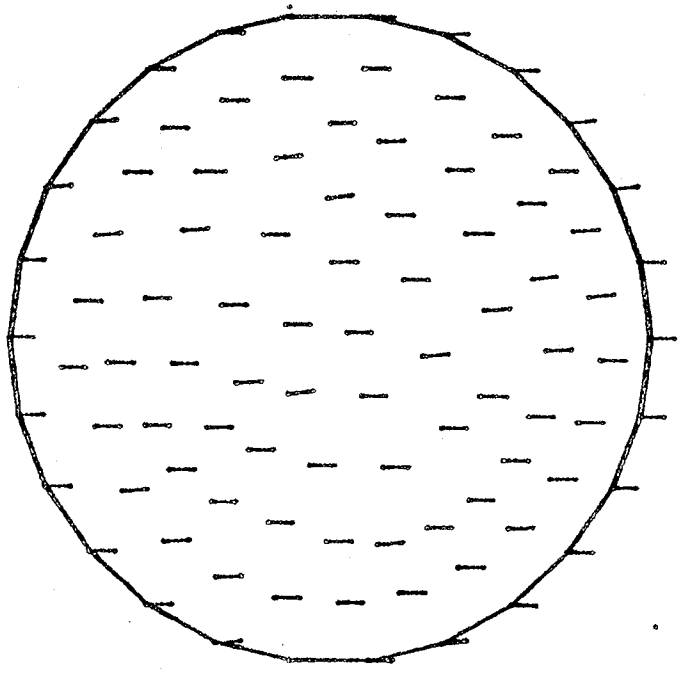

- représentation de
la solution exacte
(vitesse)
- t = 20 Δt

Figure 5



Domaine à 158 triangles



Représentation des vitesses à l'instant t = 30Δt

Figure 6

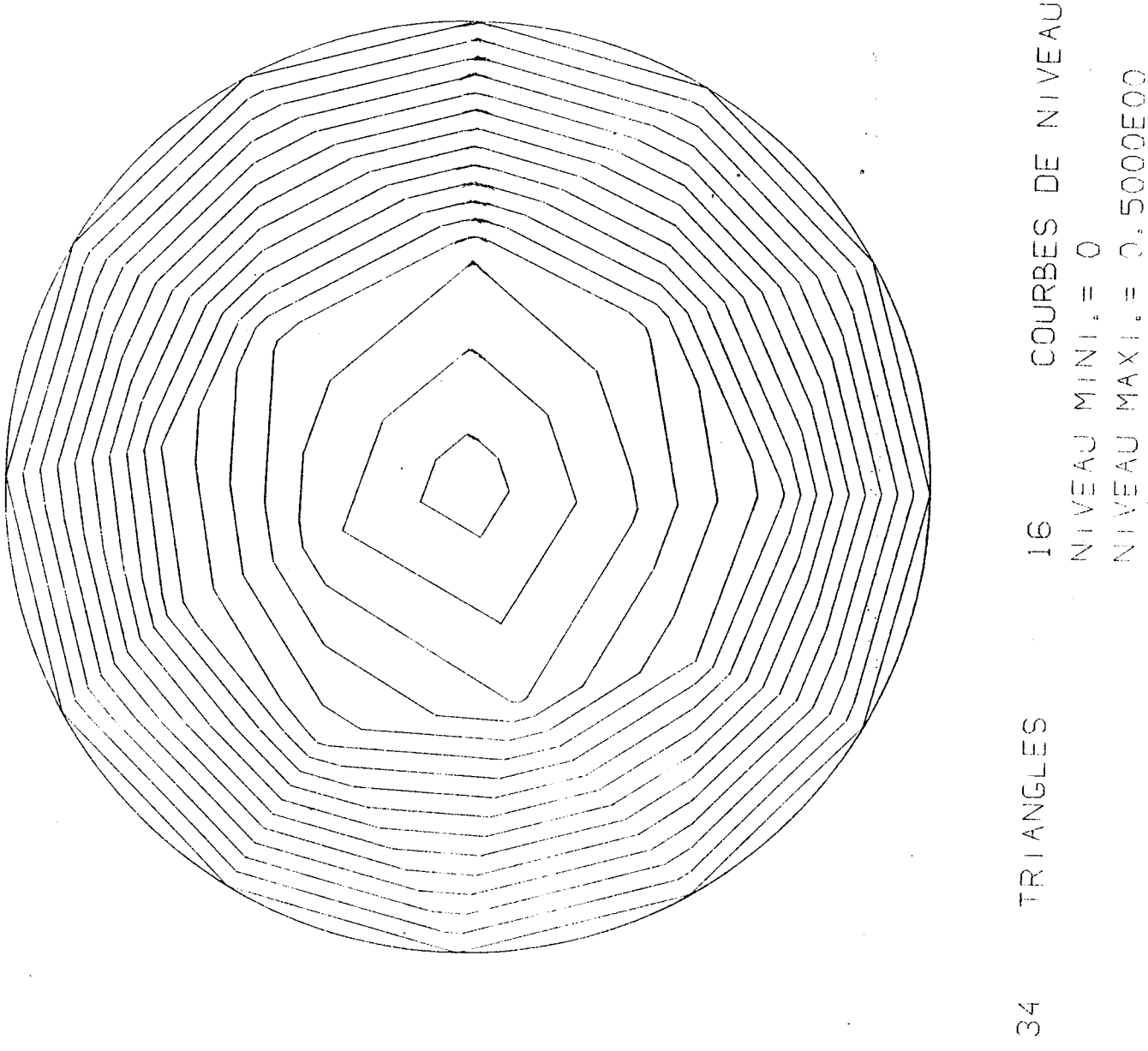
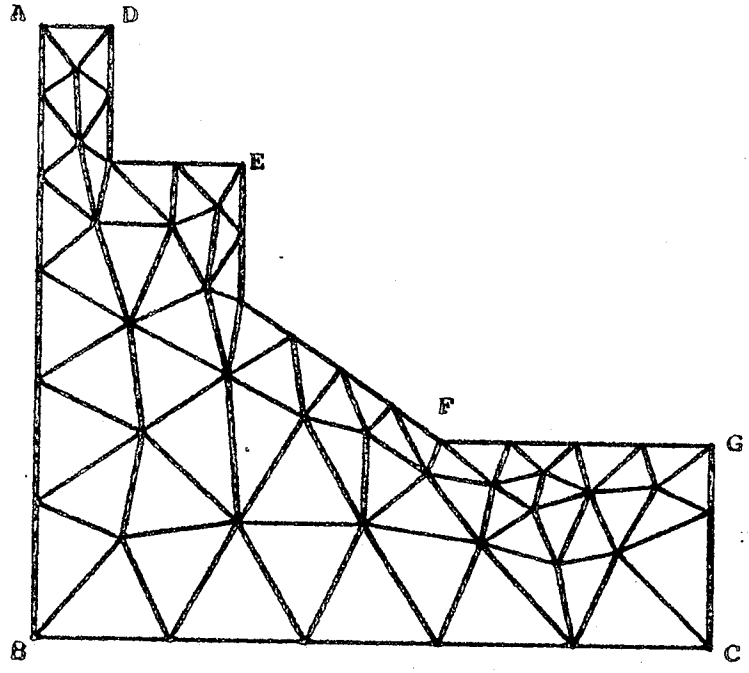
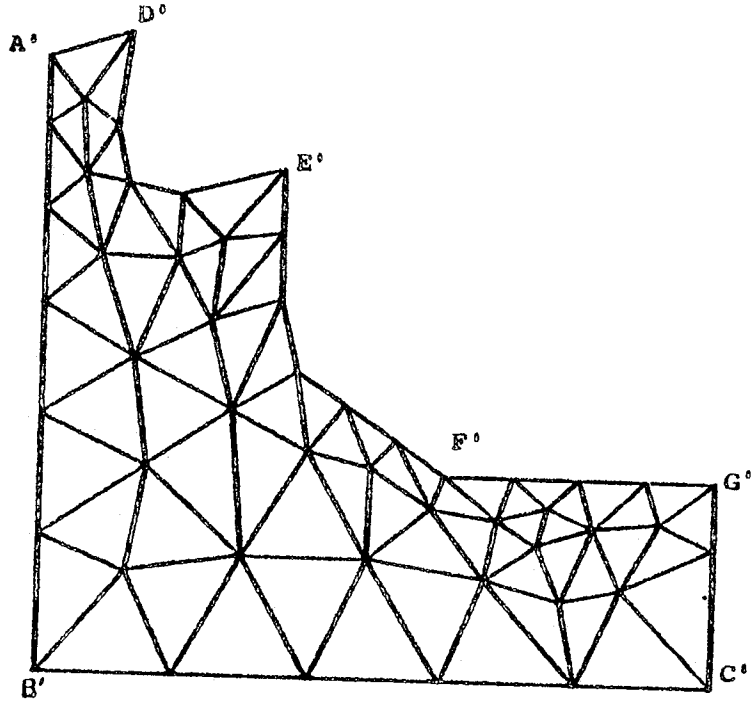

34 TRIANGLES
16 COURBES DE NIVEAU
NIVEAU MINI. = 0
NIVEAU MAXI. = 0.500E00

Figure 7



Domaine à 72 triangles où ABC représente une frontière ouverte et ADEFGC une frontière fermée.



Evolution de la frontière solide à l'instant 15 Δt.

Le domaine ci-dessus représente une portion de la baie de Morecambe

CONCLUSION :

Une méthode de résolution numérique utilisant des éléments finis a été proposée, pour une description du phénomène des ondes longues dans un domaine variable.

L'efficacité de la méthode elle même et des conditions aux limites utilisées, a été testée moyennant une application au problème du bol pour lequel on connait une solution analytique.

Les résultats obtenus sont satisfaisants en dépit du nombre de triangles si petit qu'on a utilisé, et le degré (=1) des fonctions de base.

On remarque que la triangulation (le Domaine triangulé) ne se déforme pas de manière notable le long du temps car dans l'exemple qu'on a pris les composantes de la vitesse u et v ne dépendent que du temps, d'où un déplacement identique de tous les noeuds de la triangulation à chaque pas de temps.

Mais le centre du "disque" change de position avec le temps.

Les courbes de niveau de la profondeur nous montrent un fort gradient des profondeurs aux voisinages de la frontière à cause de la géométrie choisie du domaine (les paramètres du paraboloïde). La dégérescence des courbes de niveau au voisinage du centre dans le cas d'un maillage raffiné est due à l'utilisation des éléments linéaires dans chaque triangle et au fait que le centre n'était pas un noeud du maillage ; dans la figure (6), on a pû éviter cette situation en introduisant une frontière fictive qui nous a permis de prendre le centre du disque comme un noeud de la triangulation. Les résultats sont pratiquement identiques pour les deux schémas utilisés. Lors des expériences numériques on a constaté un coût de calcul assez important.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III

[1] ARGYRIS J.H. and SCHARPF D.W.
finite elements in time and space
the Aero.J. of the Royal Aero. society, 73, 1041 - 1044 (1969)

[2] BALL F.K.
An exact theory of simple finite schallow water oscillations in a rotating earth.
Hydraulics and fluid mech. proced of the 1st Australasian Conf. December 62.

[3] GROTKOP G.
finite element analysis of long period water waves
Comp. meth. appl. mech. eng. 2, 147 - 157 (1973)

[4] ODEN J.T., REDDY J.N.
An introduction to mathematical theory of finite elements,
John wiley & Sons (1976)

[5] PONCET A.
Autour de l'écriture d'un code d'éléments finis
thèse, Grenoble (1979)

[6] STOKER J.J.
water waves, the mathematical theory with applications
Interscience Publischers (1957)

[7] STRANG G. FIX G.I.
An analysis of the finite element method
Prentice Hall (1973)

[8] TAYLOR C. and DAVIS J.M.
Tidal propagation and dispersion in estuaries
finite elements in fluids - volume 1

[9] WEARE T.J.
finite element or finite difference methods for the two dimensional schallow water equations
Comp. meth. appl. mech.eng. 7 , 351 - 357 (1976)

[10] ZIENKIEWICZ O.C.
la méthode des éléments finis

CHAPITRE IV

RESOLUTION DU PROBLEME DES ONDES LONGUES DANS UN FLUIDE VISQUEUX

§ 1 - Existence de la solution

§ 2 - Unicité de la solution

§ 3 - Problème approché et schéma de résolution

INTRODUCTION

On donne dans ce chapitre un résultat d'existence et d'unicité ; pour le problème des ondes longues dans un fluide visqueux peu profond. On étend ainsi au cas bidimensionnel un résultat établi par BENAHMED [2] en dimension 1.

Le cadre fonctionnel proposé nous a permis d'utiliser la méthode de compacité grâce à l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Faute de connaissance des hypothèses de régularité des données du problème pour que la profondeur soit bornée, une troncature a été introduite au niveau de la profondeur dans l'équation de continuité, ceci n'est pas en contradiction avec les considérations physiques et les termes modifiés coïncident à la limite avec les termes de départ.

Le terme de viscosité qu'on rajoute dans l'équation de continuité peut être jusitifié par la "viscosité numérique" induite par l'approximation utilisée lors de la résolution numérique du problème.

On a retenu pour le terme de frottement la forme quadratique ; les conditions aux limites homogènes pour les composantes de la vitesse sont conformes à la réalité physique en raison de la couche limite avoisinant la frontière. La condition aux limites sur la profondeur totale peut être non homogène (cas des fonds non inclinés).

L'étude du problème approché est faite à la fin de ce chapitre, où on a abordé la stabilité d'un schéma implicite proposé et la convergence de la solution approchée.

1. EXISTENCE DE LA SOLUTION

Notations et définitions :

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$

Γ : frontière de Ω

$Q = \Omega \times]0,T[\qquad T > 0$

$\Sigma = \Gamma \times]0,T[$

(u,v) : vecteur-vitesse

h : la profondeur totale du liquide

C : la constante de Chézy

D : une profondeur moyenne constante

g : l'accélération de la pesanteur

f : coefficient de Coriolis

ν : coefficient de viscosité cinématique

ν' : coefficient de viscosité "artificielle"

$(f_i)_{i=1,2}$: composantes de la force extérieure

f_3 : une fonction liée aux conditions initiales

Si V est un banach muni de la norme $\|.\|_V$ et H est un Hilbert on définit :

$$L^2(0,T;V) = \{u \mid u \text{ mesurable de } [0,T] \to V ; \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt < +\infty\},$$

$$\|u\|_{L^2(0,T,V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \right)^{1/2}$$

$$L^\infty(0,T;H) = \{u \mid u \text{ mesurable de } [0,T] \to H \ ; \ \operatorname{ess.sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H < +\infty\},$$

$$\text{normé par : } \|u\|_{L^\infty(0,T;H)} = \operatorname{ess.sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H$$

$$L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(Q) \qquad \forall p \qquad 1 \le p \le \infty$$

On considère le problème (régularisé) suivant :

trouver u,v et h vérifiant :

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \dfrac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}\,u - fv + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = f_1 \text{ dans } Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \dfrac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}\,v + fu + g\dfrac{\partial h}{\partial y} = f_2 \text{ dans } Q \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} - \nu'\Delta h + u\dfrac{\partial h}{\partial x} + v\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = f_3 \text{ dans } Q \end{cases}$$

avec

$$(1.2)\qquad \begin{cases} u = v = h = 0 \text{ sur } \Sigma \\ u(x,y,0) = u_o(x,y) \text{ dans } \Omega \\ v(x,y,0) = v_o(x,y) \text{ dans } \Omega \\ h(x,y,0) = h_o(x,y) \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Cadre fonctionnel et formulation variationnelle

On pose :

$$V = H_o^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega) \text{ et } V' = H^{-1}(\Omega) \quad \text{(dual de V)}$$

H sera identifié à son dual.

On note par :

$\|\ \|$ et $((,))$ la norme et le produit scalaire dans V

$|\ |$ et $(,)$ la norme et le produit scalaire dans H

$\|\ \|_*$ et $((,))_*$ " " " V'

On pose :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, d\Omega \qquad \forall u,v \in V$$

où ∇ désigne le gradient.

et

$$b_1(u,v,w) = \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x} w\, d\Omega \qquad \forall u,v,w \in V$$

$$b_2(u,v,w) = \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial y} w\, d\Omega \qquad \forall u,v,w \in V$$

On a le problème suivant :

En supposant que :

$$f_i \in L^2(0,T;H) \qquad i = 1,2,3$$

$$u_o, v_o \text{ et } h_o \in V$$

Trouver $(u,v,h) \in (L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H))^3$ vérifiant le système :

$$(1.3)\quad \begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial t},\phi)+\nu a(u,\phi)+(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}u,\phi)+(-fv,\phi)+g(\frac{\partial h}{\partial x},\phi) = (f_1,\phi) & \forall \phi \in V \\ (\frac{\partial v}{\partial t},\Psi)+\nu a(v,\Psi)+(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}v,\Psi)+f(u,\Psi)+g(\frac{\partial h}{\partial y},\Psi) = (f_2,\Psi) & \forall \Psi \in V \\ (\frac{\partial h}{\partial t},\delta)+\nu' a(h,\delta)+(\frac{\partial (uh)}{\partial x}),\delta)+(\frac{\partial (vh)}{\partial y},\delta) = (f_3,\delta) & \forall \delta \in V \end{cases}$$

$$(1.4)\quad \begin{cases} u(x,y,0) = u_o(x,y) \\ v(x,y,0) = v_o(x,y) \\ h(x,y,0) = h_o(x,y) \end{cases}$$

Pour donner un sens aux conditions (1.4) nous allons nous servir des lemmes suivants :

LEMME 1.1

Si $(u,v,h) \in (L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H))^3$

alors :

$$(u,v,h) \in (L^4(Q))^3$$

Démonstration :

Il suffit de démontrer le lemme pour la fonction u.

$u(t) \in H_o^1(\Omega) \Rightarrow \bar{u}(t) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ (prolongement de u par 0).

Or on sait que ([8], [10]) :

$$\|\phi\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq C\|\phi\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^2)} |\phi|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \qquad \forall\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$$

d'où

$$\|u(t)\|_{L^4(\Omega)} \leq C(\Omega)\|u(t)\|^{1/2}|u(t)|^{1/2}$$

On a donc le résultat.

LEMME 1.2

Sous les hypothèse du lemme 1.1 on a :

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial(vh)}{\partial y} \in L^2(0,T;V')$$

Démonstration :

Soit $\phi \in V$;

$$\left|\left(\frac{\partial(uh)}{\partial x}\ ,\phi\right)\right| = \left|\left(uh,\ \frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right|$$

$$= \left| \int_\Omega uh\ \frac{\partial\phi}{\partial x}\ d\Omega\right|$$

$$\leq \left(\int_\Omega |uh|^2 d\Omega\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|^2 d\Omega\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_\Omega |u|^4 d\Omega\right)^{1/4}\left(\int_\Omega |h|^4 d\Omega\right)^{1/4}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|^2 d\Omega\right)^{1,}$$

$$\leq \|u\|_{L^4(\Omega)}.\|h\|_{L^4(\Omega)}\|\phi\|$$

$$\leq c\|u\|^{1/2}|u|^{1/2}\|h\|^{1/2}|h|^{1/2}\|\phi\|$$

D'où :

$$\left\|\frac{\partial(uh)}{\partial x}\right\|_{V'} \leq c\|u\|^{1/2}|u|^{1/2}\|h\|^{1/2}|h|^{1/2}$$

et

$$\left\|\frac{\partial(uh)}{\partial x}\right\|^2_{V'} \leq C(\|u\|\ |u|+\|h\|\ |h|).$$

en tenant compte des hypothèses on obtient :

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} \in L^2(0,T;V')$$

de même on démontre que :

$$\frac{\partial(vh)}{\partial x} \in L^2(0,T;V')$$

LEMME D'INJECTION DE SOBOLEV [11]

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ alors :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(q,\Omega)\|u\| \qquad \forall q,\ 1 \leq q < \infty$$

LEMME 1.3

Si $u,v \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$

alors

$$\sqrt{u^2+v^2}\,u \in L^2(0,T;V') \text{ et } \sqrt{u^2+v^2}\,v \in L^2(0,T\ ;\ V')$$

Démonstration :

Montrons d'abord que :

$$\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\,u(t) \in L^{3/2}(\Omega)$$

$$\int_\Omega (\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\,|u(t)|)^{3/2}d\Omega = \int_\Omega (u^2(t)+v^2(t))^{3/4}|u(t)|^{3/2}d\Omega$$

$$\leq \int_\Omega (|u(t)|^{3/2}+|v(t)|^{3/2})\,|u(t)|^{3/2}d\Omega$$

$$\leq 2\int_\Omega |u(t)|^3 d\Omega + \int_\Omega |v(t)|^3 d\Omega$$

le lemme d'injection de Sobolev nous donne :

$$\int_\Omega (\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\,|u(t)|)^{3/2}d\Omega \leq C(\|u(t)\|^3 + \|v(t)\|^3)$$

on a donc pour tout $\phi \in V$,

$$|(\sqrt{u^2+v^2}u, \phi)| \leq c_1 \|\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}u(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{L^3(\Omega)}$$

$$\leq c_2 (\|u\|^2_{L^3(\Omega)} + \|v\|_{L^3(\Omega)}) \|\phi\|_{L^3(\Omega)}$$

$$\leq c_3 (\|u\|^2_{L^4(\Omega)} + \|v\|_{L^4(\Omega)}) \|\phi\|_{L^3(\Omega)}$$

et d'après le lemme 1.1 et le théorème d'injection de Sobolev, on a :

$$|(\sqrt{u^2+v^2}u, \phi)| \leq c_4 (\|u\| . |u| + \|v\| . |v|) \|\phi\|$$

d'où

$$\|\sqrt{u^2+v^2}u\|_{V'} \leq c_4 (\|u\| . |u| + \|v\| . |v|)$$

en tenant compte de l'hypothèse on a bien le résultat.

Utilisant les résultats des lemmes 1.2 et 1.3 on peut conclure que si $(u,v,h) \in (L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H))^3$, alors $(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}) \in (L^2(0,T;V'))^3$ et que la solution (u,v,h) du problème (1.3)-(1.4) est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0,T]^3 \to (H)^3$ d'où l'écriture (1.4) a un sens.

Remarque 1.1

$u \in L^2(0,T;V) \Rightarrow \Delta u \in L^2(0,T;V')$ (Δ est un isomorphisme de $H^1_0(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$).

Faute de connaissance des hypothèses de régularité qui nous permet de démontrer que h est borné dans $L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$, on introduit comme dans [2] une troncature de h au niveau des termes non linéaires dans l'équation de continuité , et le problème qu'on résout sera :

Si on suppose vérifiées les hypothèses ;

trouver $(u(t),\ v(t),h(t)) \in (L^2(O,T;V) \cap L^\infty(O,T;H))^3$

vérifiant le système :

$$(1.5)\begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial t},\phi)+\nu a(u,\phi)+(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}u,\phi)-f(v,\phi)+g(\frac{\partial h}{\partial x},\phi) = (f_1,\phi) & \forall\phi \in V \\ (\frac{\partial v}{\partial t},\Psi)+\nu a(v,\Psi)+(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}v,\Psi)+f(u,\Psi)+g(\frac{\partial h}{\partial y},\Psi) = (f_2,\Psi) & \forall\Psi \in V \\ (\frac{\partial h}{\partial t},\delta)+\nu' a(h,\delta)+b_1(\alpha_K(h),u,\delta)+b_1(u,\alpha_K(h),\delta)+b_2(\alpha_K(h),v,\delta) & \\ \qquad +b_2(v,\alpha_K(h),\delta) = (f_3,\delta) & \forall\delta \in V \end{cases}$$

$$(1.6)\begin{cases} u(x,y,O) = u_o(x,y) \\ v(x,y,O) = v_o(x,y) \\ h(x,y,O) = h_o(x,y) \end{cases}$$

Remarque 1.2

$$\alpha_K(h) = \begin{cases} h \text{ si } |h| \le K \\ K \text{ si } h > K \\ -K \text{ si } h < -K \end{cases}$$

on vérifie facilement que :

$$\alpha_K(h) \to h \text{ dans } V,$$

$$b_1(\alpha_K(h),u,h) \xrightarrow[K \to +\infty]{} b_1(h,u,h)$$

$$b_1(u,\alpha_K(h),v) \xrightarrow[K \to +\infty]{} b_1(u,h,v)$$

on a des propriétés analogues pour le forme b_2.

Pour être dans les conditions physiques du problème il suffit de prendre ; $K > h_{max}$.

Nous rappelons un théorème d'existence de solution du problème de type

$$(E) \quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

dans un rectangle $\mathscr{D}$: $|x-x_o| \leq a$, $|y-y_o| \leq b$; $a,b > 0$

THEOREME DE CARATHEODORY [3]

Soit f définie dans $\mathscr{D}$, on suppose qu'elle est mesurable en x pour tout y fixé, continue en y pour tout x fixé. S'il existe une fonctio
m Lebesgue intégrable sur l'intervalle $|x-x_o| < \alpha$ tel que

$$|f(x,y)| \leq m(x) \qquad (x,y) \in \mathscr{D}$$

alors il existe une solution ϕ de (E) dans un certain intervalle

$$|x-x_o| \leq \beta \qquad (\beta > 0).$$

Remarque :

Le théorème de Carathéodory reste valable dans le cas d'un système d'équations différentielles ordinatiers (avec certaines adaptations

THEOREME 1.1

Si on suppose que $f_i \in L^2(0,T;H)$, $i = 1,2,3$ et $u_o, v_o, h_o \in V$, alors le problème (1.5) – (1.6) admet au moins une solution.

Démonstration

Solution approchée :

$V = H_o^1(\Omega)$ étant séparable, il existe une suite $w_1,\ldots,w_n,\ldots$ libre et totale dans V. Soit V_m le sous-espace de V engendré par $w_1,\ldots,w_m$. On définit une solution approchée (u_m, v_m, h_m) du problème (1.5) – (1.6) comme suit :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t) w_i$$

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{im}(t) w_i$$

$$h_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{im}(t) w_i$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} (\frac{\partial u_m}{\partial t}, w_j) + \nu a(u_m, w_j) + (\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,u_m, w_j) - f(v_m, w_j) + g(\frac{\partial h_m}{\partial x}, w_j) = (f_1, w_j) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,m \\ (\frac{\partial v_m}{\partial t}, w_j) + \nu a(v_m, w_j) + (\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,v_m, w_j) \\ \qquad + f(u_m, w_j) + g(\frac{\partial h_m}{\partial t}, w_j) = (f_2, w_j) \qquad j = 1,m \\ (\frac{\partial h_m}{\partial t}, w_j) + \nu' a(h_m, w_j) + b_1(\alpha_K(h_m), u_m, w_j) + b_1(u_m, \alpha_K(h_m), w_j) \\ \qquad + b_2(\alpha_K(h_m), v_m, w_j) + b_2(v_m, \alpha_K(h_m), w_j) = (f_3, w_j) \qquad j=1,\ldots,m \end{array}\right. \tag{1.7}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_m(0) = u_{0m} \\ v_m(0) = v_{0m} \\ h_m(0) = h_{0m} \end{array}\right. \tag{1.8}$$

où u_{om}, v_{om} et h_{om} sont respectivement les projections orthogonales dans H de u_o, v_o et h_o sur le sous-espace V_m. On a donc : $(u_{om}, v_{om}, h_{om}) \to (u_o, v$ dans H lorsque $m \to +\infty$.

Le déterminant de la matrice (w_i, w_j) est non nul grâce à la linéaire indépendance de $w_1, \ldots, w_m$, d'où on peut écrire le système d'équations différentielles ordinaires (1.7) sous la forme résolue. Par utilisation du théorème d'existence de Caractheodory, on obtient une solution $u_m(t)$ dans un intervalle $[0, t_m] \subset [0,T]$. Les estimations à priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

Estimations à priori (I) :

En multipliant les équations de (1.7) respectivement par $\alpha_{im}(t)$, $\beta_{im}(t)$ et $\gamma_{im}(t)$ et en prenant la somme sur i on aura :

$$(1.8)\quad \begin{cases} (\frac{\partial u_m}{\partial t}, u_m) + \nu a(u_m, u_m) + (\frac{C}{H}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,u_m, u_m) - f(v_m, u_m) + g(\frac{\partial h_m}{\partial x}, u_m) = (f_1, u_m) \\ (\frac{\partial v_m}{\partial t}, v_m) + \nu a(v_m, v_m) + (\frac{C}{H}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,v_m, v_m) + f(u_m, v_m) + g(\frac{\partial h_m}{\partial y}, v_m) = (f_2, v_m) \\ (\frac{\partial h_m}{\partial t}, h_m) + \nu' a(h_m, h_m) + b_1(\alpha_K(h_m), u_m, h_m) + b_1(u_m, \alpha_K(h_m), h_m) \\ \qquad + b_2(\alpha_K(h_m), v_m, h_m) + b_2(v_m, \alpha_K(h_m), h_m) = (f_3, h_m) \end{cases}$$

en additionnant membre à membre de (1.8) on obtient :

$$(1.9)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|h_m|^2 + \nu\|u_m\|^2 + \nu\|v_m\|^2 + \nu'\|h_m\|^2 \\ \qquad + (\frac{C}{H}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,u_m, u_m) + (\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,v_m, v_m) = (f_1, u_m) + (f_2, v_m) \\ + (f_3, h_m) + g(\frac{\partial h_m}{\partial x}, u_m) + g(\frac{\partial h_m}{\partial y}, v_m) - b_1(\alpha_K(h_m), u_m, h_m) - b_1(u_m, \alpha_K(h_m), h_m) \\ \qquad - b_2(v_m, \alpha_K(h_m), h_m) - b_2(\alpha_K(h_m), v_m, h_m) \end{cases}$$

Or on a :

$$|g(\frac{h_m}{x}, u_m)| \leq g|\frac{\partial h_m}{\partial x}| \cdot |u_m|$$

Inégalité de Young [10]

$$ab \leq \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{p-1}{p}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$\forall a,b,\varepsilon,p$ positifs avec $p > 1$.

Par application de l'inégalité de Young on aura :

$$\left|g\left(\frac{\partial h_m}{\partial x}, u_m\right)\right| \leq \frac{\nu'}{8}\|h_m\|^2 + c_1|u_m|^2$$

de même

$$\left|g\left(\frac{\partial h_m}{\partial y}, v_1\right)\right| \leq \frac{\nu'}{8}\|h_m\|^2 + c_2|v_m|^2$$

et

$$\left|b_1(\alpha_K(h_m), u_m, h_m)\right| \leq K|h_m|\,\|u_m\|\,\frac{\nu}{2}\|u_m\|^2 + c_3|h_m|^2$$

$$\left|b_1(u_m, \alpha_K(h_m), h_m)\right| \leq \frac{\nu'}{8}\|h_m\|^2 + c_4|u_m|^2$$

$$\left|b_2(\alpha_K(h_m), v_m, h_m)\right| \leq \frac{\nu}{2}\|v_m\|^2 + c_5|h_m|^2$$

$$\left|b_2(v_m, \alpha_K(h_m), h_m)\right| \leq \frac{\nu'}{8}\|h_m\|^2 + c_6|v_m|^2$$

On a donc :

$$(1.10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|h_m|^2 + \nu\|u_m\|^2 + \nu\|v_m\|^2 + \nu'\|h_m\|^2 \\ &\qquad + \left(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,u_m, u_m\right) + \left(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}\,v_m, v_m\right) \quad |f_1|^2 + |f_2|^2 + |f_3|^2 \\ &\qquad + \frac{\nu}{2}\|u_m\|^2 + \frac{\nu}{2}\|v_m\|^2 + \frac{\nu'}{2}\|h_m\|^2 + c_8|u_m|^2 + c_9|v_m|^2 + c_{10}|h_m|^2 \end{aligned}\right.$$

$\frac{C}{D} > 0$, on a en particulier de (1.10) :

$$(1.11)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|h_m|^2+\frac{\nu}{2}\|u_m\|^2+\frac{\nu}{2}\|v_m\|^2+\frac{\nu'}{2}\|h_m\|^2 \leq \\ \\ |f_1|^2+|f_2|^2+|f_3|^2+c_8|u_m|^2+c_9|v_m|^2+c_{10}|h_m|^2 \end{cases}$$

en intégrant de O à t l'inégalité (1.11) on obtient moyennant :

LEMME DE GRONWALL

Soient $\beta \in L^1(0,T)$; $\beta(t) \geq 0$ p.p.

$\phi \in C([0,T])$; $\phi(t) \geq 0$

si

$$(**)\qquad \phi(t) \leq A + \int_0^t \beta(s)\phi(s)ds \qquad A \geq 0$$

alors

$$(*)\qquad A+\int_0^t \beta(s)\phi(s)\,ds \leq A\, e^{\int_0^t \beta(s)ds}$$

Démonstration :

La fonction : $F = A + \int_0^t \beta(s)\phi(s)\,ds$, est absolument continue, elle est donc dérivable presque partout et sa dérivée vérifie :

$$F' = \beta\phi \quad \text{p.p.}$$

utilisant l'inégalité (**) on obtient :

$$\frac{\phi}{A+\int_0^t \beta(s)\phi(s)ds} \leq 1$$

d'où :

$$\frac{\beta\phi}{A+\int_0^t \beta(s)\phi(s)ds} \leq \beta$$

par intégration de O à t on aura :

$$\log\left(\frac{A+\int_0^t \beta(s)\phi(s)ds}{A}\right) \leq \int_0^t \beta(s)ds$$

on a donc :

$$A + \int_0^t \beta(s)\phi(s)ds \leq Ae^{\int_0^t \beta(s)ds}$$

d'où le résultat.

L'inégalité (*) est donc vraie $\forall A > 0$, elle est donc vraie aussi pour $A = 0$ et on aura dans ce cas :

$$\phi \equiv 0.$$

$$(1.12)\quad \begin{cases} |u_m(t)|^2+|v_m(t)|^2+|h_m(t)|^2+\nu\nu \int_0^t \|u_m(t)\|^2dt+ \nu \int_0^t \|v_m(t)\|^2dt + \\ \qquad +\nu' \int_0^t \|h_m(t)\|^2dt \leq \\ |u_{om}|^2+|v_{om}|^2+|h_{om}|^2+2 \int_0^t |f_1(t)|^2dt+2 \int_0^t |f_2(t)|^2dt+2 \int_0^t |f_3(t)|^2dt \\ + c_{11} \int_0^t (|u_m(t)|^2+|v_m(t)|^2+|h_m(t)|^2)dt. \quad \text{où } c_{11} = 2 \sup(c_8,c_9,c_{10}) \end{cases}$$

De (1.12) on a en particulier :

$$(1.13)\quad \begin{cases} |u_m(t)|^2+|v_m(t)|^2+|h_m(t)|^2 \leq |u_{om}|^2+|v_{om}|^2+|h_{om}|^2 \\ \qquad + 2 \int_0^t (|f_1(t)|^2+|f_2(t)|^2+|f_3(t)|^2)dt \\ \qquad + c_{11} \int_0^t (|u_m(t)|^2+|v_m(t)|^2+|h_m(t)|^2)dt \end{cases}$$

des hypothèses faites sur f_1, f_2 et f_3 et du lemme de Gronwall il en résulte :

$$(1.14)\quad |u_m(t)|^2+|v_m(t)|^2+|h_m(t)|^2 \leq \text{constante indépendante de m et t)}$$

car $$\int_0^t (|u_m(t)|^2+|v_m(t)|^2+|h_m(t)|^2)dt \leq \int_0^T (|u_m(t)|^2+|v_m(t)|^2+|h_m(t)|^2)dt$$

$$= \text{Cte}$$

reprenant (1.12) on en déduit que

$$(1.15)\qquad \int_0^t \|u_m(t)\|^2 dt + \int_0^t \|v_m(t)\|^2 dt + \int_0^t \|h_m(t)\|^2 dt \leq \text{constante}$$

(indépendante de m et t). Pour la même raison que dans (1.14).

De (1.14) et (1.15) on déduit que $t_m = T$ et que u_m, v_m et h_m sont bornés dans $L^2(0,T ; V) \cap L^\infty(0,T,H)$.

Estimations à priori (II) :

Soit P_m l'opérateur de projection de H sur $\{w_1,\ldots,w_n\}$ dans H
(i.e. $\forall u \in H$, $P_m u = \sum_{i=1}^{m} (u,w_i)w_i$).
On remarque d'abord que

$$P_m^* = P_m \quad \text{et} \quad P_m \circ P_m = P_m$$

On sait [10] qu'il existe une base "spéciale" (w_j) orthonormale dans $H = L^2(\Omega)$ telle que :

$$((u,w_j)) = \lambda_j (u,w_j) \qquad \forall u \in V, \qquad \lambda_j > 0$$

$(\lambda_j^{-1/2} w_j)$ une base orthonormale dans V.
On a :

$$\|P_m u\|^2 = ((P_m u, P_m u)) = ((P_m^2 u, u)) = ((P_m u, u))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (u,w_j)((w_j,u))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{-1} ((u,w_j))^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} ((u,w_j)) = \|u\|^2$$

d'où :

$$\|P_m u\| \leq \|u\| \qquad \forall u \in V.$$

on a donc :

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq 1$$

et donc par transposition comme $P_m^* = P_m$

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V',V')} \leq 1$$

Si on pose

$$a(u,v) = \langle A(u),v\rangle \qquad \forall u,v \in V \text{ ; avec } A \in \mathcal{L}(V,V')$$

$$b_i(u,v,w) = \langle B_i(u,v),w\rangle \quad \forall u,v,w \in V \text{ avec } B(u,v) \in V' \qquad i=1,2$$

De (1.8) on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial t},P_m\phi\right)+\nu(A(u_m),P_m\phi)+\left(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}u_m,P_m\phi\right)+f(v_m,P_m\phi)+g\left(\frac{\partial h_m}{\partial x},P_m\phi\right)$$

$$= (f_1,P_m\phi) \qquad \forall\phi \in V$$

$$\left(\frac{\partial v_m}{\partial t},P_m\psi\right)+\nu(A(v_m),P_m\psi)+\left(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}v_m,P_m\psi\right)+f(u_m,P_m\psi)+g\left(\frac{\partial h_m}{\partial y},P_m\psi\right)$$

$$= (f_2,P_m\psi) \qquad \forall\psi \in V$$

$$\left(\frac{\partial h_m}{\partial t},P_m\zeta\right)+\nu'(A(h_m),P_m\zeta)+(B_1(u_m,\alpha_K(h_m)),P_m\zeta)+(B_1(\alpha_K(h_m),u_m),P_m\zeta)$$

$$+(B_2(v_m,\alpha_K(h_m)),P_m\alpha)+(B_2(\alpha_K(h_m),v_m),P_m\zeta) = (f_3,P_m\zeta) \quad \forall\zeta \in V$$

On en déduit par transposition :

$$P_m\frac{\partial u_m}{\partial t}+\nu P_m A(u_m)+P_m\left(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}u_m\right)+fP_m v_m+gP_m\frac{\partial h_m}{\partial x} = P_m f_1 \qquad \text{dans } V'$$

$$P_m\frac{\partial v_m}{\partial t}+\nu P_m A(v_m)+P_m\left(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}v_m\right)+fP_m u_m+gP_m\frac{\partial h_m}{\partial y} = P_m f_2 \qquad \text{dans } V'$$

$$P_m\frac{\partial h_m}{\partial t}+\nu' P_m A(h_m)+P_m B_1(u_m,\alpha_K(h_m))+P_m B_1(\alpha_K(h_m),u_m)$$

$$+P_m B_2(v_m,\alpha_K(h_m))+P_m B_2(\alpha_K(h_m),v_m) = P_m f_3 \qquad \text{dans } V'$$

or $\frac{\partial u_m}{\partial t}$, $\frac{\partial v_m}{\partial t}$ et $\frac{\partial h_m}{\partial t}$ appartiennent à $V_m \subset V'$ on a donc :

$$P_m \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial u_m}{\partial t}$$

$$P_m \frac{\partial v_m}{\partial t} = \frac{\partial v_m}{\partial t}$$

$$P_m \frac{\partial h_m}{\partial t} = \frac{\partial h_m}{\partial t}$$

D'autre part :

$$\|P_m A(u_m)\|_{V'} \leq \|A(u_m)\|_{V'}$$

$$\leq C\|u_m\|$$

$$\|P_m(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}u_m)\|_{V'} \leq C_1\|\sqrt{u_m^2+v_m^2}u_m\|_{L^{3/2}(\Omega)}$$

$$\leq C_2(\|u_m\|^2_{L^3(\Omega)}+\|v_m\|^2_{L^3(\Omega)})$$

d'où

$$\|P_m(\frac{C}{D}\sqrt{u_m^2+v_m^2}u_m)\|_{V'} \leq C_3(\|u_m\| \cdot |u_m|+\|v_m\||v_m|)$$

en vertu de l'inégalité : $\|\phi\|^2_{L^3(\Omega)} \leq C\|\phi\|^2_{L^4(\Omega)} \leq C'\|\phi\|\|\phi\|$

$$\forall \phi \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$$

$$\|P_m \frac{\partial h_m}{\partial x}\|_{V'} \leq \|\frac{\partial h_m}{\partial x}\|_{V'} \leq C\|h_m\|$$

$$\|P_m B_1(u_m, \frac{\partial \alpha_K(h_m)}{\partial x})\|_{V'} \leq C\|u_m\|\,|h_m|$$

On aura donc grâce aux estimations à priori (I) :

$$\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\|_{L^2(0,T;V')} \leq \text{constante}$$

$$\|\frac{\partial v_m}{\partial t}\|_{L^2(0,T;V')} \leq \text{constante}$$

$$\|\frac{\partial h_m}{\partial t}\|_{L^2(0,T;V')} \leq \text{constante}$$

Passage à la limite :

Des estimations à priori (I) et (II) on déduit qu'on peut extraire trois sous-suites u_μ , v_μ et h_μ des suites u_m, v_m et h_m telles que :

(1.16) $u_\mu \to u$ dans $L^2(0,T;V)$ faible

(1.17) $v_\mu \to v$ " " "

(1.18) $h_\mu \to h$ " " "

(1.19) $\frac{du_\mu}{dt} \to \frac{du}{dt}$ dans $L^2(0,T,V')$ faible

(1.20) $\frac{dv_\mu}{dt} \to \frac{dv}{dt}$ " " "

(1.21) $\frac{dh_\mu}{dt} \to \frac{dh}{dt}$ " " "

Le lemme suivant [8] sera utile par la suite

LEMME DE COMPACITE 1.4

Soient X_o, X, X_1 trois espaces de Banach vérifiant :

(i) $X_o \subset X \subset X_1$ (inclusion algébrique et topologique)

(ii) X_o et X_1 sont réflexifs

(iii) l'injection de $X_o \to X$ est compact.

Si α_o, α_1 sont deux nombres finis tels que $\alpha_i > 1$, $i = 0,1$ alors l'injection de $\mathcal{Y} = \{u \in L^{\alpha_0}(0,T;X_o),\ u' = \frac{du}{dt} \in L^{\alpha_1}(0,T;X_1)\}$ dans $L^{\alpha_0}(0,T,X)$ est compact.

Démonstration (cf. [8])

Grâce à l'injection compacte de $H_o^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ et au lemme 1.4 on a :

(1.22) $u_\mu \to u$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ $(=L^2(Q))$. fort et p.p.

(1.23) $v_\mu \to v$ " " " " "

(1.24) $h_\mu \to h$ " " " " "

THEOREME DE TRACE [5]

Soient V, H deux espaces de Hilbert vérifiant :

$V \subset H \subset V'$ (injections continues avec densité)

Si on pose :

$$w(0,T) = \{u \in L^2(0,T,V) \; ; \; \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V')\}$$

alors toute fonction $u \in w(0,T)$ est égale p.p. a une fonction continue de $[0,T]$ dans H.

et l'application $w(0,T) \to H$

$u \to u(0)$ est continue et surjective.

On déduit de (1.16) et (1.19) et du théorème de Trace qu'on vient de citer que $u_\mu(0) \to u(0)$ dans V' faible et que $u(0) = u_o$ de même pour v_μ et h_μ.

LEMME 1.5

Soit Q un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^p(Q)$; $1 < p < \infty$, telles que :

$$\|g_\mu\|_{L^p(Q)} \leq C, \quad \text{et } g_\mu \to g \quad \text{p.p. dans } Q$$

alors $g_\mu \to g$ dans $L^p(Q)$ faible. (cf. [8]).

$\sqrt{u_m^2+v_m^2}u_m$ est borné dans $L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega))$ on peut donc supposer que

(1.25) $\quad \sqrt{u_\mu^2+v_\mu^2}u_\mu \to w$ dans $L^\infty(0,T;L^{3/2}(\Omega))$ faible

d'après (1.22) et (1.23) $\sqrt{u_\mu^2+v_\mu^2}u_\mu \to \sqrt{u^2+v^2}u$ p.p.
et $\sqrt{u_\mu^2+v_\mu^2}u_\mu \to w$ dans $L^{3/2}(Q)$ d'après (1.25) d'où d'après le lemme 1.5 :

(1.26) $\quad W = \sqrt{u^2+v^2}u$

de même pour $\sqrt{u_\mu^2+v_\mu^2}v_\mu$

D'autre part on déduit de (1.22), (1.24) que

$$b_1(u_\mu,\alpha_K(h_\mu),w_j) \to b_1(u,\alpha_K(h),w_j) \quad \text{dans } L^2(0,T) \text{ faible}$$

$$b_1(\alpha_K(h_\mu),u_\mu,w_j) \quad b_1(\alpha_K(h),u,w_j) \qquad " \qquad "$$

de même pour b_2.
Mais d'après (1.22)

$$a(u_\mu,w_j) \to a(u,w_j) \quad \text{dans } L^2(0,T) \text{ faible}$$

$$(\frac{\partial u_\mu}{\partial t},w_j) \to (\frac{\partial u}{\partial t},w_j) \quad \text{dans } \mathscr{D}(0,T)$$

De même pour les termes de v_μ et h_μ et de (1.25) et (1.26) :

$$(\frac{C}{D}\sqrt{u_\mu^2+v_\mu^2}u_\mu,w_j) \to (\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}u,w_j) \text{ dans } L^2(0,T) \text{ faible}$$

de même pour $\frac{C}{D}\sqrt{u_\mu^2+v_\mu^2}v_\mu$.

On déduit donc de (1.7) que :

$$(1.27)\quad \begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial t},w_j)+\nu a(u,w_j)+(\frac{C}{D}(\sqrt{u^2+v^2}u,w_j)-f(v,w_j)+g(\frac{\partial h}{\partial x},w_j) = (f_1,w_j) & j=1 \\ (\frac{\partial v}{\partial t},w_j)+\nu a(v,w_j)+(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}v,w_j)+f(u,w_j)+g(\frac{\partial h}{\partial y},w_j) = (f_2,w_j) & j=1 \\ (\frac{\partial h}{\partial t},w_j)+\nu' a(h,w_j)+b_1(\alpha_K(h),u,w_j)+b_1(u,\alpha_K(h),w_j)+b_2(\alpha_K(h),v,w_j) & \\ \qquad +b_2(v,\alpha_K(h),w_j) = (f_3,w_j) \qquad j=1,\ldots,m. & \end{cases}$$

Avec :

$$(1.28)\quad \begin{cases} u(0) = u_o \\ v(0) = v_o \\ h(0) = h_o \end{cases}$$

D'où le problème (1.5) — (1.6) admet au moins une solution.

2 - UNICITE DE LA SOLUTION

THEOREME 2.1

Sous les hypothèses du théorème 1.1., le problème (1.1)-(1.2) admet au plus une solution.

Démonstration

Soient (u_1,v_1,h_1) et (u_2,v_2,h_2) deux solutions du problème.
On pose :

$$w_1 = u_1-u_2$$

$$w_2 = v_1-v_2$$

$$w_3 = h_1-h_2$$

utilisant le système (1.1)-(1.2) on obtient :

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} - \nu\Delta w_1 + \dfrac{C}{D}\left(\sqrt{u_1^2+v_1^2}\,u_1 - \sqrt{u_2^2+v_2^2}\,u_2\right) - f w_2 + g\dfrac{\partial w_3}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} - \nu\Delta w_2 + \dfrac{C}{D}\left(\sqrt{u_1^2+v_1^2}\,v_1 - \sqrt{u_2^2+v_2^2}\,v_2\right) + f w_2 + g\dfrac{\partial w_3}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial t} - \nu'\Delta w_3 + u_1\dfrac{\partial h_1}{\partial x} - u_2\dfrac{\partial h_2}{\partial x} + v_1\dfrac{\partial h_1}{\partial y} - v_2\dfrac{\partial h_2}{\partial y} + h_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + h_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} \\ \qquad + h_1\dfrac{\partial v_1}{\partial u} + h_2\dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Par multiplication de (2.1), respectivement par w_1, w_2 et w_3 il vient :

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w_1|^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w_2|^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w_3|^2 + \nu\|w_1\|^2 + \nu\|w_2\|^2 + \nu'\|w_3\|^2 \le \\ \left|\dfrac{C}{D}\right|\left|\left(\sqrt{u_1^2+v_1^2}\,u_1 - \sqrt{u_2^2+v_2^2}\,u_2, w_1\right)\right| + \left|\left(\sqrt{u_1^2+v_1^2}\,v_1 - \sqrt{u_2^2+v_2^2}\,v_2, w_2\right)\right| \\ + g\left|\left(\dfrac{\partial w_3}{\partial y}, w_2\right) + \left(u_1\dfrac{\partial h_1}{\partial x} - u_2\dfrac{\partial h_2}{\partial x} + v_1\dfrac{\partial h_1}{\partial y} - v_2\dfrac{\partial h_2}{\partial y} + h_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right.\right. \\ \left.\left. - h_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + h_1\dfrac{\partial v_1}{\partial y} - h_2\dfrac{\partial v_2}{\partial y}, w_3\right)\right| \end{cases}$$

On remarque que :

$$\left(u_1\frac{\partial h_1}{\partial x} - u_2\frac{\partial h_2}{\partial x}, w_3\right) = \left(u_1\frac{\partial h_1}{\partial x} - u_1\frac{\partial h_2}{\partial x}, w_3\right) + \left(u_1\frac{\partial h_2}{\partial x} - u_2\frac{\partial h_2}{\partial x}, w_3\right)$$

$$= \left(u_1\frac{\partial w_3}{\partial x}, w_3\right) + \left(w_1\frac{\partial h_2}{\partial x}, w_3\right)$$

$$= b_1(u_1, w_3, w_3) + b_1(w_1, h_2, w_3)$$

on a donc :

$$\left(u_1\frac{\partial h_1}{\partial x} - u_2\frac{\partial h_2}{\partial x}, w_3\right) = b_1(u_1, w_3, w_3) - b_1(w_1, w_3, h_2) - b_1(w_3, w_1, h_2)$$

or :

$$(2.3)\qquad |b_1(u_1, w_3, w_3)| \le \alpha_1 |u_1|^{1/2}\|u_1\|^{1/2}|w_3|^{1/2}\|w_3\|^{1/2}\|w_3\|$$

$$\le \alpha_2\|w_3\|^2 + \alpha_3|u_1|\,\|u_1\|\,\|w_3\|\,|w_3|$$

$$\le \alpha_4\|w_3\|^2 + \alpha_5|u_1\|^2\|u_1\|^2 \cdot |w_3|^2$$

la constante α_4 peut être prise aussi petite que l'on veut (inégalité de Young).

$$(2.4)\qquad \begin{cases} |b_1(w_1,w_3,h_2)| \le \alpha_6\|w_3\|.\|w_1\|^{1/2}|w_1|^{1/2}\|h_2\|^{1/2}|h_2|^{1/2} \\ \le \alpha_7\|w_3\|^2+\alpha_8\|w_1\|\ |w_1|\ \|h_2\|\ |h_2| \\ \le \alpha_7\|w_3\|^2+\alpha_9\|w_1\|^2+\alpha_{10}|w_1|^2\|h_2\|^2|h_2|^2 \end{cases}$$

Les constantes α_7 et α_9 sont aussi petites que l'on veut

$$(2.5)\qquad \begin{cases} |b_1(w_3,w_1,h_2)| \le \alpha_{11}\|w_1\|\ \|w_3\|^{1/2}|w_3|^{1/2}\|h_2\|^{1/2}|h_2|^{1/2} \\ \le \alpha_{12}\|w_1\|^2+\alpha_{13}\|w_3\|.|w_3|\ \|h_2\|\ |h_2| \\ \le \alpha_{12}\|w_1\|^2+\alpha_{14}\|w_3\|^2+\alpha_{15}|h_2|^2\|h_2\|^2|w_3|^2 \end{cases}$$

Les constantes α_{12} et α_{14} sont aussi petites que l'on veut.
De (2.3) et (2.5) il vient :

$$|(u_1\frac{\partial h_1}{\partial x}-u_2\frac{\partial h_2}{\partial x},w_3)| \le \alpha_{16}\|w_1\|^2+\alpha_{17}\|w_3\|^2+\alpha_5|u_1|^2\|u_1\|^2|w_3|^2$$

$$+\alpha_{10}|h_2|^2\|h_2\|^2.|w_1|^2+\alpha_{15}|h_2|^2\|h_2\|^2|w_3|^2$$

où les constantes α_{16} $(=\alpha_9+\alpha_{12})$ et $\alpha_{17}(=\alpha_4+\alpha_7+\alpha_{14})$ sont aussi petites que l'on veut.
De même on peut écrire :

$$(v_1\frac{\partial h_1}{\partial y}-v_2\frac{\partial h_2}{\partial y},w_3) = b_2(v_1,w_3,w_3)-b_2(h_2,w_2,w_3)-b_2(h_2,w_3,w_2)$$

$$|(v_1\frac{\partial h_1}{\partial y}-v_2\frac{\partial h_2}{\partial y},w_3)| \le \beta_{16}\|w_2\|^2+\beta_{17}\|w_3\|^2+\beta_5|v_1|^2\ \|v_1\|^2|w_3|^2$$

$$+\beta_{10}|h_2|^2\|h_2\|^2|w_2|^2+\beta_{15}|h_2|^2\|h_2\|^2|w_3|^2$$

β_{16} et β_{17} sont des constantes aussi petites que l'on veut.

$$(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, w_3) = b_1(h_1, w_1, w_3) - 2b_1(w_3, w_3, u_2)$$

$$|(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, w_3)| \leq \gamma_{16}\|w_1\|^2 + \gamma_{17}\|w_3\|^2 + \gamma_5 |u_2|^2 \|u_2\|^2 |w_3|^2$$

$$+ \gamma_{10} |h_1|^2 \|h_1\|^2 |w_3|^2$$

γ_{16} et γ_{17} sont des constantes aussi petites que l'on veut.

$$(h_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - h_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}, w_3) = b_2(h_1, w_2, w_3) - 2b_2(w_3, w_3, v_2)$$

$$|(h_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - h_2 \frac{\partial v_2}{\partial y}, w_3)| \leq \delta_{16}\|w_2\|^2 + \delta_{17}\|w_3\|^2 + \delta_5 |v_2|^2 \|v_2\|^2 |w_3|^2$$

$$+ \delta_{10} |h_1|^2 \|h_1\|^2 |w_3|^2$$

$$|g(\frac{\partial w_3}{\partial x}, w_1)| \leq C_1 |w_1|^2 + C_2 \|w_3\|^2$$

$$|g(\frac{\partial w_3}{\partial x}, w_2)| \leq C_3 |w_2|^2 + C_4 \|w_3\|^2$$

Les constantes C_2 et C_4 sont aussi petites que l'on veut.

$$\left|\frac{C}{D}\right| \left|(\sqrt{u_1^2+v_1^2}u_1 - \sqrt{u_2^2+v_2^2}u_2, w_1)\right| \leq \left|\frac{C}{D}\right| \times \int_\Omega \sup(\sqrt{u_1^2+v_1^2}, \sqrt{u_2^2+v_2^2}) |w_1|^2 dx$$

$$\leq K_0(|u_1|+|v_1|+|u_2|+|v_2|)\|w_1\|^2_{L^4(\Omega)}$$

$$\leq K_1(|u_1|+|v_1|+|u_2|+|v_2|)\|w_1\| \, |w_1|$$

$$\leq K_2\|w_1\|^2 + K_3(|u_1|^2+|v_1|^2+|u_2|^2+|v_2|^2)|w_1|^2$$

et de même on a :

$$\left|\frac{C}{D}\right| \left|(\sqrt{u_1^2+v_1^2}v_1 - \sqrt{u_2^2+v_2^2}v_2, w_2)\right| \leq K_4\|w_2\|^2 + K_5(|u_1|^2+|v_1|^2+|u_2|^2+|v_2|^2)|w_2|^2$$

les constantes K_2 et K_4 sont aussi petites que l'on veut.

En prenant : $\alpha_{16} = \gamma_{16} = K_2 = \frac{\nu}{3}$, $\beta_{16} = \delta_{16} = K_4 = \frac{\nu}{3}$ et

$$\alpha_{17} = \beta_{17} = \gamma_{17} = \delta_{17} = C_2 = C_4 = \frac{\nu'}{6}$$

et en remplaçant dans (2.2) on trouve après intégration de O à t :

$$|w_1(t)|^2+|w_2(t)|^2+|w_3(t)|^2 \leq 2\int_0^t [\alpha_{10}|h_2|^2\|h_2\|^2+K_3(|u_1|^2+|v_1|^2+|u_2|^2+|v_2|^2)+C_1 |w_1(t)|^2 dt$$

$$+ 2\int_0^t [\beta_{10}|h_2|^2\|h_2\|^2+K_5(|u_1|^2+|v_1|^2+|u_2|^2+|v_2|^2) |w_2(t)|^2 dt$$

$$+2\int_0^t [\alpha_5|u_1|^2\|u_1\|^2+\beta_5|v_1|^2\|v_1\|^2+\delta_5|v_2|^2\|v_2\|^2+\delta_{10}|h_1|^2\|h_1\|^2+(\alpha_{15}+\beta_{15})|h_2|^2| |w_3(t)|^2 dt$$

grâce au lemme de Gronwall on a :

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2,\ v_1 = v_2 \text{ et } h_1 = h_2$$

d'où l'unicité de la solution du problème.

3 - Problème approché et schéma de résolution

L'approximation qu'on va étudier utilise les éléments finis pour les variab espace et les différences finies pour la variable temps.

Description du schéma d'approximation

Soit V_h l'espace des fonctions continues s'annulant à l'extérieur de $\Omega(h)$

$$\Omega(h) = \bigcup_{s \in \mathcal{T}_h} s \quad (\mathcal{T}_h \text{ la triangulation de } \Omega)$$

et dont la restriction à chaque s $\in \mathcal{T}_h$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Cet espace est un sous-espace de dimension finie de $H_o^1(\Omega)$, ($V_h \subset H_o^1(\Omega)$).

L'espace V_h peut être muni de deux normes :

$$\|u_h\|_h = \|u_h\| \quad \forall u_h \in V_h \text{ ; norme induite par celle de } H_o^1(\Omega)$$

$$|u_h|_h = |u_h| \quad \forall u_h \in V_h \text{ ; norme induite par celle de } L^2(\Omega).$$

Inégalité de Poincaré [11] :

Si Ω est un ouvert borné dans une certaine direction ; alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|Du\|_{L^2(\Omega)} \quad ; \quad \forall u \in H_o^1(\Omega)$$

où D est la dérivée suivant cette direction, et $C(\Omega)$ est une constante dépendant uniquement de Ω ,

$$C(\Omega) \leq 2\ell$$

ℓ = le diamètre de Ω , ou l'épaisseur de Ω suivant n'importe quelle direction.

En vertu de cette inégalité, on peut écrire :

$$(3.1) \qquad |u_h| \leq d_o\|u_h\|_h \qquad d_o = 2\ell$$

ℓ étant la plus petite largeur de Ω suivant les directions x et y.

Par définition V_h étant de dimension finie d'où l'équivalence des normes $\|.\|_h$ et $|.|_h$, il existe donc une constante S(h) telle que :

$$(3.2) \qquad \|u_h\|_h \leq S(h)|u_h|_h \qquad \forall u_h \in V_h$$

la constante S(h) qui dépend souvent de h, joue un rôle important dans l'étude de la stabilité.

On suppose que :

$$(3.3) \qquad |b_i(u_h, v_h, w_h)| \leq d_1\|u_h\|_h\|v_h\|_h\|w_h\|_h \quad , \quad \forall u_h, v_h, w_h \in V_h \text{ ; } i=1,2.$$

La discrétisation en temps sera faite de la manière suivante :
On divise l'intervalle [O,T] en N intervalles de longueur identique k ;

$$k = \frac{T}{N}$$

à chaque fonction f_i : i = 1,2,3 on associe les éléments $f_i^1,\ldots,f_i^N$ avec :

$$f_i^m = \frac{1}{k}\int_{(m-1)k}^{mk} f(t)dt \qquad m = 1,\ldots,N \; ; \; f_i^m \in L^2(\Omega)$$

à partir du schéma qu'on considère, on définit par récurrence la famille
(u_h^0,v_h^0,z_h^0) ,..., $(u_h^N,v_h^N,z_h^N) \in V_h^3$

u_h^0,v_h^0,z_h^0 sont respectivement les projections orthogonales de u_o,v_o,z_o (données initiales) sur V_h dans $L^2(\Omega)$.
A remarquer que :

$$\begin{cases} |u_h^0| \leq |u_o| & \forall h \\ |v_h^0| \leq |v_o| & \forall h \\ |z_h^0| \leq |z_o| & \forall h \end{cases}$$

Schéma de résolution (implicite) :

On suppose que $u_h^0,v_h^0,z_h^0,\ldots,u_h^{m-1},v_h^{m-1},z_h^{m-1}$ sont connus et on cherche (u_h^m,v_h^m,z_h^m) solution dans $V_h \times V_h \times V_h$ de

$$
(3.4)\quad
\begin{cases}
\frac{1}{k}(u_h^m-u_h^{m-1},\phi_h)+\nu((u_h^m,\phi_h))_h+\frac{C}{D}(\sqrt{(u_h^{m-1})^2+(v_h^{m-1})^2}\,u_h^m,\phi_h)-f(v_h^m,\phi_h) \\
\qquad\qquad +g(\frac{\partial z_h^m}{\partial x},\phi_h) = (f_1^m,\phi_h) \qquad\qquad \forall\phi_h\in V_h \\
\frac{1}{k}(v_h^m-v_h^{m-1},\psi_h)+\nu((v_h^m,\psi_h))_h+\frac{C}{D}(\sqrt{(u_h^{m-1})^2+(v_h^{m-1})^2}\,v_h^m,\psi_h)+f(u_h^m,\psi_h) \\
\qquad\qquad +g(\frac{\partial z_h^m}{\partial y},\psi_h) = (f_2^m,\psi_h) \qquad\qquad \forall\psi_h\in V_h \\
\frac{1}{k}(z_h^m-z_h^{m-1},\delta_h)+\nu'((z_h^m,\delta_h))_h+b_{1h}(u_h^{m-1},z_h^m,\delta_h)+b_{1h}(z_h^{m-1},u_h^m,\delta_h) \\
\qquad\qquad +b_{2h}(v_h^{m-1},z_h^m,\delta_h)+b_{2h}(z_h^{m-1},v_h^m,\delta_h) = (f_3^m,\delta_h) \qquad \forall\delta_h\in V_h
\end{cases}
$$

Stabilité du schéma :

Si on prend dans (3.4) :

$$\phi_h = u_h^m$$

$$\psi_h = v_h^m$$

$$\delta_h = z_h^m$$

l'identité :

$$2(a-b,a) = |a|^2-|b|^2+|a-b|^2 \qquad \forall a,b\in L^2(\Omega)$$

nous permet d'écrire :

$$
(3.5)\quad
\begin{cases}
|u_h^m|^2-|u_h^{m-1}|^2+|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+2k\nu\|u_h^m\|^2+2k\frac{C}{D}(\sqrt{(u_h^{m-1})^2+(v_h^{m-1})^2}\,u_h^m,u_h^m \\
\qquad -2kf(v_h^m,u_h^m)+2kg(\frac{\partial z_h^m}{\partial x},u_h^m) = 2k(f_1^m,u_h^m) \\
|v_h^m|^2-|v_h^{m-1}|^2+|v_h^m-v_h^{m-1}|^2+2k\nu\|v_h^m\|^2+2k\frac{C}{D}(\sqrt{(u_h^{m-1})^2+(v_h^{m-1})^2}\,v_h^m,v_h^m) \\
\qquad +2kf(u_h^m,v_h^m)+2kg(\frac{\partial z_h^m}{\partial y},v_h^m) = 2k(f_2^m,v_h^m) \\
|z_h^m|^2-|z_h^{m-1}|^2+|z_h^m-z_h^{m-1}|^2+2k\nu'\|z_h^m\|^2+2kb_{1h}(u_h^{m-1},z_h^m,z_h^m)+2kb_{1h}(z_h^{m-1},u_h^m,z_h^m) \\
\qquad +2kb_{2h}(v_h^{m-1},z_h^m,z_h^m)+2kb_{2h}(z_h^m,v_h^m,z^m)=2k(f_3^m,z_h^m)
\end{cases}
$$

$$(3.6)\qquad -2k\,\frac{C}{D}\left(\sqrt{(u_h^{m-1})^2+(v_h^{m-1})^2}\,u_h^m,u_h^m\right) \le -2k\,\frac{C}{D}\left(|u_h^m|u_h^m,u_h^m\right)$$

$$(3.7)\qquad \frac{2kc}{D}\left(|u_h^{m-1}|u_h^m,u_h^m\right) \le 2^{1/4}\,\frac{kc}{D}\varepsilon\,|u_h^{m-1}|^2\|u_h^m\|_h^2+2^{1/4}\,\frac{kc}{D\varepsilon}\,|u_h^m|^2$$

ε aussi petit que l'on veut.

$$(3.8)\qquad 2k|b_{1h}(u_h^{m-1},z_h^m,z_h^m)| \le 2k\,d_1\,S(h)\|z_h^m\|^2|u_h^{m-1}|$$

$$\le \frac{k\nu'}{5}\|z_h^m\|_h^2+\frac{5kd_1^2S^2(h)}{\nu'}\,|u_h^{m-1}|^2\|z_h^m\|_h^2$$

$$(3.9)\qquad 2k|b_{1h}(z_h^{m-1},u_h^m,z_h^m)| \le 2k\,d_1\,S(h)\,|z_h^{m-1}|\,\|u_h^{m-1}\|\,\|z_h^m\|$$

$$\le \frac{k\nu}{2}\|u_h^m\|_h^2+\frac{2kd_1^2S^2(h)}{\nu}\,|z_h^{m-1}|^2\|z_h^m\|_h^2$$

$$(3.10)\qquad \frac{2kc}{D}\left(|v_h^{m-1}|v_h^m,v_h^m\right) \le 2^{1/4}\,\frac{kc\varepsilon}{D}|v_h^{m-1}|^2\|v_h^m\|_h^2+2^{1/4}\,\frac{kc}{D\varepsilon}\,|v_h^m|^2$$

$$(3.11)\qquad 2k|b_{2h}(v^{m-1},z^m,z^m)| \le \frac{k\nu'}{5}\|z_h^m\|_h^2+\frac{5kd_1^2S^2(h)}{\nu'}\,|v^{m-1}|^2\|z_h^m\|_h^2$$

$$(3.12)\qquad 2k|b_{2h}(z_h^{m-1},v_h^m,z_h^m)| \le \frac{k\nu'}{5}\|v_h^m\|_h^2+\frac{5kd_1^2S^2(h)}{\nu'}\,|z_h^{m-1}|^2\|z_h^m\|_h^2$$

par addition membre à membre, on obtient :

$$
(3.13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&|u_h^m|^2-|u_h^{m-1}|^2+|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+2k\nu\|u_h^m\|_h^2+|v_h^m|^2-|v_h^{m-1}|^2+|v_h^m-v_h^{m-1}|^2+2k\nu\|v_h^m\|_h^2\\
&+|z_h^m|^2-|z_h^{m-1}|^2+|z_h^m-z_h^{m-1}|^2+2k\nu'\|z_h^m\|_h^2 \le \frac{k\nu'}{5}\|z_h^m\|_h^2+\frac{5g^2k}{\nu'}|u_h^m|^2\\
&+\frac{k\nu}{2}\|u_h^m\|_h^2+\frac{2k}{\nu}d_o^2|f_1^m|^2+\frac{2^{1/2}k}{\varepsilon}\frac{C}{D}|u_h^m|^2+\varepsilon k\frac{C}{C}|u_h^{m-1}|^2\|u_h^m\|^2+\frac{k\nu'}{5}\|z_h^m\|_h^2\\
&+\frac{5g^2k}{\nu'}|v_h^m|^2+\frac{k\nu}{2}\|v_h^m\|_h^2+\frac{2k}{\nu}d_o^2|f_2^m|^2+\frac{2^{1/2}kc}{\varepsilon D}|v_h^m|^2+\frac{\varepsilon kc}{D}|v_h^{m-1}|^2\|v_h^m\|_h^2\\
&+\frac{k\nu'}{5}\|z_h^m\|_h+\frac{5kd_1^2S^2(h)}{\nu'}|u_h^{m-1}|^2\|z_h^m\|_h^2+\frac{k\nu}{2}\|u_h^m\|_h^2+\frac{2kd_1^2S^2(h)}{\nu}|z_h^{m-1}|^2\|z_h\|_h^2\\
&+\frac{k\nu'}{5}\|z_h^m\|_h^2+\frac{5kd_1^2S^2(h)}{\nu'}|v_h^{m-1}|^2\|z_h^m\|_h^2+\frac{k\nu'}{5}\|z_h^m\|_h^2+\frac{5kd_o^2}{\nu'}|f_3^m|^2
\end{aligned}
\right.
$$

d'où :

$$
(3.14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&|u_h^m|^2-|u_h^{m-1}|^2+|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+k\nu\|u_h^m\|_h^2+|v_h^m|^2-|v_h^{m-1}|^2+|v_h^m-v_h^{m-1}|^2+k\nu\|v_h^m\|_h^2\\
&+|z_h^m|^2-|z_h^{m-1}|^2+|z_h^m-z_h^{m-1}|^2+k\nu'\|z_h^m\|_h^2 \le \frac{2kd_o}{\nu}(|f_1^m|^2+|f_2^m|^2)+\frac{5kd_o}{\nu'}|f_3^m|^2\\
&+\frac{\varepsilon kc}{D}|u_h^{m-1}|^2\|u_h^m\|_h^2+(\frac{\sqrt{2}kc}{\varepsilon D}+\frac{5kg^2}{\nu'})|u_h^m|^2+\frac{\varepsilon kc}{D}|v_h^{m-1}|^2\|v_h^m\|_h^2\\
&+(\frac{\sqrt{2}kc}{\varepsilon D}+\frac{5kg^2}{\nu'})|v_h^m|^2+(\frac{5}{\nu'}|u_h^{m-1}|^2+\frac{5}{\nu'}|v_h^{m-1}|^2+\frac{4}{\nu}|z_h^{m-1}|^2)kd_1^2S^2(h)\|z_h^m\|_h^2
\end{aligned}
\right.
$$

En additionnant les inégalités pour m = 1,...,r on aura :

$$
(3.15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&|u_h^r|^2+\sum_{m=1}^{r}|u_h^m-u_h^{m-1}|^2+k\sum_{m=1}^{r}(\nu-\frac{\varepsilon c}{D}|u_h^{m-1}|^2)\|u_h^m\|_h^2+|v_h^r|^2+\sum_{m=1}^{r}|v_h^m-v_h^{m-1}|^2\\
&+k\sum_{m=1}^{r}(\nu-\frac{\varepsilon c}{D}|v_h^{m-1}|^2)\|v_h^m\|_h^2+|z_h^r|^2+\sum_{m=1}^{r}|z_h^m-z_h^{m-1}|^2+k\sum_{m=1}^{r}(\nu'-\frac{5}{\nu'}\alpha|u_h^{m-1}|^2-\frac{5}{\nu'}\alpha|v_h^{m-1}|^2\\
&-\frac{4}{\nu}\alpha|z_h^{m-1}|^2)\|z_h^m\|_h^2 \le \mu_r+k\sum_{m=1}^{r}(\frac{\sqrt{2}c}{\varepsilon D}+\frac{5g^2}{\nu'})(|u_h^m|^2+|v_h^m|^2)
\end{aligned}
\right.
$$

où :

$\alpha = d_1^2 S^2(h)$

$$\mu_r = |u_h^0|^2+|v_h^0|^2+|z_h^0|^2+ \frac{2kd_o^2}{\nu} \sum_{m=1}^{r} (|f_1^m|^2+|f_2^m|^2)+ \frac{5kd_o^2}{\nu'} \sum_{m=1}^{r} |f_3^m|^2$$

$$\leq \mu_N= |u_h^0|^2+|v_h^0|^2+|z_h^0|^2+ \frac{2kd_o^2}{\nu} \sum_{m=1}^{N} (|f_1^m|^2+|f_2^m|^2)+ \frac{5kd_o^2}{\nu'} \sum_{m=1}^{N} |f_3^m|^2$$

$$\leq |u_h^0|^2+|v_h^0|^2+|z_h^0|^2+ \frac{d_o^2}{\nu} \int_0^T (|f_1(t)|^2+|f_2(t)|^2)dt+ \frac{5d_o^2}{\nu'} \int_0^T |f_3(t)|^2 dt$$

On va démontrer par récurrence que :

$$(3.16) \begin{cases} |u_h^r|^2+ \sum_{m=1}^{r} |u_h^m-u_h^{m-1}|^2+ \frac{k\nu}{2} \sum_{m=1}^{r} \|u_h^m\|_h^2+|v_h^r|^2+ \sum_{m=1}^{r} |v_h^m-v_h^{m-1}|^2 \\ + \frac{k\nu}{2} \sum_{m=1}^{r} \|v_h^m\|_h^2+|z_h^r|^2+ \sum_{m=1}^{r} |z_h^m-z_h^{m-1}|^2+ \frac{k\nu'}{2} \sum \|z_h^m\|_h^2 \\ \leq \mu_r+k(\frac{\sqrt{2}c}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'}) \sum_{m=1}^{r} (|u_h^m|^2+|v_h^m|^2) \end{cases}$$

Lemme de Gronwall discret 3.1

Soit ϕ_n une suite telle que :

$$\phi_n \leq \delta \sum_{k=0}^{n-1} m_k \phi_k + C, \qquad n = 1,\ldots,N$$

avec :

$$C > 0,\ \delta \geq 0 \text{ et } \phi_o \leq C$$

on a :

$$\phi_n \leq C \exp (\delta \sum_{k=0}^{n-1} m_k)$$

grâce au lemme de Gronwall. on démontre le lemme suivant :

LEMME 3.2.

Soient $\alpha_s > 0$, $0 \le s \le S$ tels que $\alpha_s \le C + k \sum_{j=0}^{s} \alpha_s$ $\quad 0 < k < \frac{1}{2}$

alors :

$$\alpha_s \le C \exp(2ks).$$

En appliquant le lemme 3.2 à l'inégalité (3.16) à condition que l'on ait : $(\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'}) \le \frac{1}{2}$, on obtient :

$$|u_h^r|^2 \le \mu_r \exp[2k(\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'})r] = \lambda_r$$

avec :

$$\lambda_r \le \lambda_N = \mu_N \exp[2k(\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'})N]$$

$$= \mu_N \exp[2T(\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'})] = d_2 \tag{3.17}$$

Montrons que l'inégalité (3.16) est vraie pour $r = 1$.

Si on fait $r = 1$ dans (3.15) on aura :

$$\begin{cases} |u_h^1|^2 + |u_h^1 - u_h^0|^2 + k(\nu - \frac{\varepsilon C}{D}|u_h^0|^2)\|u_h^2\|_h^2 + |v_h^1|^2 + |v_h^1 - v_h^0|^2 \\ \quad + h(\nu - \frac{\varepsilon C}{D}|v_h^0|^2)\|v_h^1\|_h^2 + |z_h^1|^2 + |z_h^1 - z_h^0|^2 + k(\nu' - \frac{5}{\nu'}\alpha|u_h^0|^2 - \frac{5}{\nu'}\alpha|v_h^0|^2 \\ \quad - \frac{4}{\nu}\alpha|z_h^0|^2)\|z_h^1\|_h^2 \le \mu_1 + k(\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'})(|u_h^1|^2 + |v_h^1|^2) \end{cases} \tag{3.18}$$

ε étant un nombre positif arbitraire, on peut donc supposer :

$$(\nu - \frac{\varepsilon C}{D} d_2) \ge \frac{\nu}{2}$$

en posant :

$$\nu' - \frac{5}{\nu'}\alpha d_2 - \frac{5}{\nu'}\alpha d_2 - \frac{4}{\nu}\alpha d_2 \ge \frac{\nu'}{2}$$

i.e.

$$\frac{\nu'}{2d_2} \ge d_1^2 S^2(h)(\frac{10}{\nu'} + \frac{4}{\nu}) \tag{3.19}$$

on déduite de (3.18) l'inégalité

$$(3.20)\quad \begin{cases} |u_h^1|^2+|u_h^1-u_h^0| + \frac{k\nu}{2}\|u_h^1\|_h^2+|v_h^1|^2+|v_h^1-v_h^0|^2+ \frac{k\nu}{2}\|v_h^1\|_h^2 \\ +|z_h^1|^2+|z_h^1-z_h^0|^2+ \frac{k\nu'}{2}\|z_h^1\|_h^2 \le \mu_1+k(\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'})(|u_h^1|^2+|v_h^1|^2) \end{cases}$$

en supposant que l'inégalité (3.16) est vraie pour l'ordre (r-1) on aura :

$$(3.21)\quad \begin{cases} |u_h^{r-1}| \le \lambda_{r-1} \le \lambda_r \le d_2 \\ |v_h^{r-1}| \le d_2 \\ |v_h^{r-1}| \le d_2 \end{cases}$$

par utilisation de l'inégalité (3.15) et grâce à (3.21) on obtient :

$$(3.22)\quad \begin{cases} |u_h^r|^2+ \sum_{m=1}^{r} |u_h^m-u_h^{m-1}|^2+ \frac{k\nu}{2} \sum_{m=1}^{r}\|u_h^m\|_h^2+|v_h^r|^2+ \sum_{m=1}^{r} |v_h^m-v_h^{m-1}|^2 \\ + \frac{k\nu}{2} \sum_{m=1}^{r}\|v_h^m\|_h^2+|z_h^r|^2+ \sum_{m=1}^{r} |z_h^m-z_h^{m-1}|^2+ \frac{k\nu'}{2} \sum_{m=1}^{r}\|z_h^m\|_h^2 \\ \le \mu_r+k(\frac{\sqrt{2}C}{\varepsilon D} + \frac{5g^2}{\nu'}) \sum_{m=1}^{r}(|u_h^m|^2+|v_h^m|^2) \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration de (3.16).

On est donc en mesure d'énoncer le résultat suivant :

THEOREME 3.1

Si on suppose que la condition (3.19) est vérifiée, alors la solution (u_h^m, v_h^m, z_h^m) de (3.4) reste bornée dans le sens suivant :

$$(3.23)\quad \begin{cases} |u_h^m|^2 \le d_2 \ , \quad |v_h^m|^2 \le d_2 \ , \quad |z_h^m|^2 \le d_2 & m = 1,\dots,N \\ k \sum_{m=1}^{N} \|u_h^m\|_h^2 \le \dfrac{2d_2}{\nu} \ , \quad k \sum_{m=1}^{N} \|v_h^m\|_h^2 \le \dfrac{2d_2}{\varkappa} \ , \quad k \sum_{m=1}^{N} \|z_h^m\|_h^2 \le \dfrac{2d_2}{\nu'} \\ \sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2 \le d_2 \ , \quad \sum_{m=1}^{N} |v_h^m - v_h^{m-1}|^2 \le d_2 \ , \quad \sum_{m=1}^{N} |z_h^m - z_h^{m-1}|^2 \le d_2 \end{cases}$$

où d_2 est donné par (3.17).

RESULTAT DE STABILITE

DEFINITION 3.1

Un ensemble infini de fonctions ξ est dit $L^p(0,T;X)$-stable si et seulement si ξ est un sous-ensemble borné de $L^p(0,T;X)$.

On va se servir des estimations précédentes pour déduire un résultat de stabilité.

On introduit les fonctions approchées u_h (resp. v_h, z_h) :

$$u_h : [0,T] \to V_h$$

avec

$$u_h(t) = u_h^m \quad (m-1)k \le t < mk \qquad m = 1,\dots,N$$

si la condition (3.19) est satisfaite le théorème 3.1 nous donne :

$$\sup_{t\in[0,T]} |u_h(t)| \le \sqrt{d_2} \ , \quad \sup_{t\in[0,T]} |v_h(t)| \le \sqrt{d_2} \ , \quad \sup_{t\in[0,T]} |z_h(t)| \le \sqrt{d_2}$$

$$(3.24)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \|u_h(t)\|_h^2 dt \le \frac{2d_2}{\nu} \\ \displaystyle\int_0^T \|v_h(t)\|_h^2 dt \le \frac{2d_2}{\nu} \\ \displaystyle\int_0^T \|z_h(t)\|_h^2 dt \le \frac{2d_2}{\nu} \end{cases}$$

l'opérateur de prolongement $P_h : V_h \to H_o^1(\Omega)$ étant stable, on a donc

$$\|P_h u_h\|_{H_o^1(\Omega)} \leq d_3 \|u_h\|_h \quad \forall u_h \in V_h \tag{3.25}$$

de même pour v_h et z_h
d_3 étant indépendant de h, $P_h = Id$; car $V_h \subset H_o^1(\Omega)$
d'où en utilisant (3.24) :

$$\begin{cases} \int_o^T \|u_h(t)\|^2_{H_o^1(\Omega)} \leq \dfrac{2d_2 d_3}{\nu} \\ \int_o^T \|v_h(t)\|^2_{H_o^1(\Omega)} dt \leq \dfrac{2d_o d_3}{\nu} \\ \int_o^T \|z_h(t)\|^2_{H_o^1(\Omega)} dt \leq \dfrac{2d_o d_3}{\nu'} \end{cases} \tag{3.26}$$

De ce qui précède on peut déduire :

THEOREME 3.2

Les fonctions u_h, v_h, z_h, $\forall h \in \mathcal{H}$ correspondant au schéma (3.4) sont $L^\infty(O,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(O,T;H_o(\Omega))$-stables ($\mathcal{H}$: ensemble de triangulations

Remarque 3.1

La condition (3.19) ne dépend que de h, et par conséquent, elle ne doit pas être trop restrictive.

Remarque 3.2

On démontre dans [11] qu'on peut prendre :

$$d_1 = 2\sqrt{2}\ell \qquad (\ell : \text{le plus petite largeur de } \Omega \text{ dans les directions x et y}).$$

et

$$S(h) = \frac{C_q}{\rho'(h)} \quad ; \quad C_q = \sqrt{\bar{\mu}_q}\ \rho_{\underline{s}}$$

où $\rho'(h)$: est le diamètre de la plus grande boule contenue dans un triangle s de la triangulation $\mathcal{T}_h$.

$\bar{s}$: le triangle de référence

$\rho_{\bar{s}}$: est le diamètre de la plus petite boule contenant le triangle $\bar{s}$

$\bar{\mu}_q$: constante dépendant du degré des fonctions de base ; q et de $\bar{s}$ telle que :

$$\int_{\bar{s}} |\text{grad}\Psi(\bar{x})|^2 d\bar{x} \leq \bar{\mu}_q \int_{\bar{s}} |\Psi(\bar{x})|^2 d\bar{x}$$

$\forall \Psi \in \mathbb{P}_{\bar{s}}$ = ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leq q$ sur $\bar{s}$.

CONVERGENCE DE LA SOLUTION APPROCHEE

Pour chaque k (ou N) on considère les fonctions $(w_{ih})_{i=1,2,3}$ continues, affines par morceaux de $[0,T]$ dans V_h et définies par :

$$w_{1h}(t) = u_h^m + \frac{t-mk}{k}(u_h^{m+1}-u_h^m)$$

$$w_{2h}(t) = v_h^m + \frac{t-mk}{k}(v_h^{m+1}-v_h^m)$$

$$w_{3h}(t) = z_h^m + \frac{t-mk}{k}(z_h^{m+1}-z_h^m)$$

pour $t \in [(mk,(m+1)k]$; $m = 0,\ldots,N-1$

On définit :

$$f_{ik} : [0,T] \to V'$$

$$t \to f_{ik}(t) = f_i^m \quad \text{pour } t \in [(m-1)k,mk[\quad m=1,\ldots,N \quad i=1,2,3$$

Lemme 3.3

$$k \sum_{m=1}^{N} \|f_i^m\|_{V'}^2 \leq \int_0^T \|f_i(t)\|_{V'}^2 dt \qquad i = 1,2,3$$

Démonstration :

$$\|f_i^m\|_{V'}^2 = \frac{1}{k}\left\|\int_{(m-1)k}^{mk} f_i(t)dt\right\|_{V'}^2 \leq \frac{1}{k}\int_{(m-1)k}^{mk} \|f_i(t)\|_{V'}^2 dt$$

en sommant ces inégalités pour m = 1,...,N, on obtient

$$k \sum_{m=1}^{N} \|f_i^m\|_{V'}^2 \leq \int_0^T \|f_i(t)\|_{V'}^2 dt$$

PROPOSITION 3.1

Les fonctions $(w_{ih})_{i=1,2,3}$ vérifient les estimations à priori, suivantes :

(i) $\|w_{ih}\|_{L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,L^2(\Omega)} \leq C_i \qquad i = 1,2,3$

(ii) $\|\frac{\partial w_{ih}}{\partial t}\|_{L^2(0,T,V')} \leq C_i' \qquad i = 1,2,3$

où $(C_i)_{i=1,2,3}$ et $(C_i')_{i=1,2,3}$ sont des constantes indépendantes de h et de k

Démonstration :

point (i) : découle immédiatement de la définition des $(w_{ih})_{i=1,2,3}$ et des estimations (3.23)

point (ii) : si on introduit le projection P (noté P_m dans le pagraphe 1) de H dans V_h par la même analyse que dans le paragraphe 1, on obtient :

$$(3.27)\quad \begin{cases} \frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{k} + \nu Pa(u_h^m) + P(\frac{C}{D}\sqrt{(u_h^{m-1})^2+(v_h^{m-1})^2}\,u_h^m) - fPv_h^m + gP\frac{\partial z_h^m}{\partial x} = P f_{1k} \\ \frac{v_h^m - v_h^{m-1}}{k} + \nu PA(v_h^m) + P(\frac{C}{D}\sqrt{(u_h^{m-1})^2+(v_h^{m-1})^2}\,v_h^m) + fPu_h^m + gP\frac{\partial z_h^m}{\partial y} = Pf_{2k} \\ \frac{z_h^m - z_h^{m-1}}{k} + \nu' PA(z_h^m) + PB_1(u_h^{m-1}\alpha_K(z_k^m)) + PB_1(\alpha_K(z_h^m), u_h^{m-1}) \\ \qquad + PB_2(v_h^{m-1}, \alpha_K(z_h^m)) + PB_2(\alpha_K(z_h^m), v_h^{m-1}) = P f_{3k} \end{cases}$$

Des estimations (3.23) et du lemme 3.3, on aura :

$$(3.28)\qquad \begin{cases} k \left\| \dfrac{u_h^m - u_h^{m-1}}{k} \right\|_{V'} \leq \text{Cte} \\ k \left\| \dfrac{v_h^m - v_h^{m-1}}{k} \right\|_{V'} \leq \text{Cte} \\ k \left\| \dfrac{z_h^m - z_h^{m-1}}{k} \right\|_{V'} \leq \text{Cte} \end{cases}$$

de la définition des $(w_{ih})_{i=1,2,3}$ on obtient :

$$(3.29)\qquad \begin{cases} \left\| \dfrac{\partial w_{1h}}{\partial t} \right\|_{L^2(O,T,V')} \leq \text{Cte} \\ \left\| \dfrac{\partial w_{2h}}{\partial t} \right\|_{L^2(O,T,V')} \leq \text{Cte} \\ \left\| \dfrac{\partial w_{3h}}{\partial t} \right\|_{L^2(O,T,V')} \leq \text{Cte} \end{cases}$$

COROLLAIRE 3.1

Il existe des sous-suites $u_{h'}$ et $(w_{ih'})_{i=1,2,3}$ telles que :

$u_{h'} \to u$ dans $L^2(O,T,V)$ faible

$w_{ih'} \to w_i$ dans $L^2(O,T,V)$ fort $\quad i = 1,2,3$

($u_{h'}$ est une sous-suite de la suite u_h définie en début de ce chapitre).

Démonstration :

Utilisant les estimations (3.23) on montre aisément que :

$$\|u_h\|_{L^2(O,T,V)} \leq \text{Cte}$$

il existe donc une sous-suite $u_{h'}$ telle que :

$u_{h'} \longrightarrow u$ dans $L^2(O,T,V)$ faible

L'existence des sous-suites $(w_{ih'})_{i=1,2,3}$ telles que

$w_{ih'} \to w_i$ fort dans $L^2(O,T,V)$

est assurée grâce à la proposition 3.1 et au lemme de compacité 1.4

LEMME 3.4

$$|u_h - w_{1h}|_{L^2(O,T,H)} = \frac{k}{3}\Big(\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2\Big)^{1/2}$$

$$|v_h - w_{2h}|_{L^2(O,T,H)} = \frac{k}{3}\Big(\sum_{m=1}^{N} |v_h^m - v_h^{m-1}|^2\Big)^{1/2}$$

$$|z_h - w_{3h}|_{L^2(O,T,H)} = \frac{k}{3}\Big(\sum_{m=1}^{N} |z_h^m - z_h^{m-1}|^2\Big)^{1/2}$$

Démonstration :

$$w_{1h} - u_h = \frac{t-mk}{k}\,(u_h^m - u_h^{m-1}) \qquad (m-1)k \le t \le mk$$

$$\int_{(m-1)k}^{mk} |w_h(t) - u_h(t)|^2 dt = \frac{k}{3}|u_h^m - u_h^{m-1}|^2$$

par sommation de $m = 1$ à $m = N$ on a le résultat de même pour les autres égalités en v_h et en z_h.

LEMME 3.5

$u_h - w_{1h} \to 0$ dans $L^2(O,T,H)$ fort quand h et $k \to 0$, d'où

$$w_1 = \lim w_{1h'} = \lim u_{h'} = u$$

et il existe une sous-suite $u_{h'}$ telle que :

$u_{h'} \to u$ dans $L^2(O,T,H)$ fort quand h' et $k' \to 0$

(de même pour $(w_{ih})_{i=2,3}$, on pose $v = \lim w_{2h}$ et $z = \lim w_{3h}$)

Démonstration :

On vérifie (comme dans le lemme 3.4) que :

$$|w_{1h} - u_h|_{L^2(O,T,H)} = \frac{k}{3}\Big(\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2\Big)^{1/2}$$

or d'après (3.23) :

$$\Big(\sum_{m=1}^{N} |u_h^m - u_h^{m-1}|^2\Big)^{1/2} \le \text{Cte}$$

d'où :

$$w_{1h}-u_h \to 0 \text{ dans } L^2(0,T,H) \text{ fort quand } h \text{ et } k \to 0$$

utilisant le corollaire 3.1, on peut écrire :

$$|u_{h'}-w| \leq |u_{h'}-w_{1h'}| + |w_{1h'}-w|$$

d'où :

$$u_{h'} \to u = w \quad \text{dans } L^2(0,T,H) \text{ fort quand } h \text{ et } k \to 0$$

car

$$w_{1h'} \to w \text{ fort dans } L^2(0,T,H) \text{ quand } h \text{ et } k \to 0$$

et

$$u_{h'}-w_{1h} \to 0 \text{ fort dans } L^2(0,T,H) \text{ quand } h \text{ et } k \to 0$$

LEMME 3.6

$$f_{ik} \to f_i \text{ dans } L^2(0,T,V') \text{ quand } k \to 0 \; ; \qquad i = 1,2,3$$

Démonstration :

On remarque que l'application :

$$f_i \to f_{ik}$$

est une application linéaire dans $L^2(0,T;V')$; cette application est continue car d'après le lemme3.3

$$\|f_{ik}\|_{L^2(0,T;V')} \leq \|f_i\|_{L^2(0,T;V')} \; ; \qquad i = 1,2,3$$

et par conséquent il suffit de prouver le lemme pour f_i dans un sous-espace dense de $L^2(0,T,V')$ pour f dans $C([0,T];V')$ le résultat est élémentaire. De la même manière on montre l'existence des autres sous-suites $w_{2h'}$ et $w_{3h'}$.

PROPOSITION 3.2

Les fonctions u,v, et z définies dans le lemme 3.5 sont solution du problème (1.5)-(1.6).

Démonstration

Le schéma (3.4) peut être interprété de la manière suivante :

$$
(3.30)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}(w_{1h}(t),\phi_h)+\nu((u_h(t),\phi_h))_h+\dfrac{C}{D}\left(\sqrt{(u_h(t-k)^2+(v_h(t-k))^2}\,u_h(t),\phi_h\right) \\
-f(v_h(t),\phi_h)+g\left(\dfrac{\partial z_h(t)}{\partial x},\phi_h\right) = (f_{1k}(t),\phi_h), \quad \forall t\in[0,T],\ \forall\phi_h\in V_h \\
\\
\dfrac{d}{dt}(w_{2h}(t),\Psi_h)+\nu((v_h(t),\Psi_h))_h+\dfrac{C}{D}\left(\sqrt{(u_h(t-k))^2+(v_h(t-k))^2}\,v_h(t),\Psi_h\right) \\
+f(u_h(t),\Psi_h)+g\left(\dfrac{\partial z_h(t)}{\partial y},\Psi_h\right) = (f_{2k}(t),\Psi_h), \quad \forall t\in[0,T],\ \forall\Psi_h\in V_h \\
\\
\dfrac{d}{dt}(w_{3h}(t),\delta_h)+\nu'((z_h(t),\delta_h))_h+b_1(u_h(t-k),\alpha_K(z_h(t)),\delta_h) \\
+b_1(\alpha_K(z_h(t-k),u_h(t),\delta_h)+b_2(v_h(t-k),\alpha_K(z_h(t),\delta_h) \\
+b_2(\alpha_K z_h(t-k)),v_h(t),\delta_h) = (f_{3k}(t),\delta_h) \quad \forall t\in[0,T],\ \forall\delta_h\in V_h
\end{cases}
$$

On suppose que ϕ_h, Ψ_h et δ_h représentent respectivement les projections de ϕ, Ψ et δ qui sont des éléments de V.

Soit $\gamma \in C^1([0,T])$ avec $\gamma(T) = 0$. En multipliant (3.30) par $\gamma(t)$ et en intégrant par rapport à t on obtient :

$$
\begin{cases}
-\int_0^T (w_{1h}(t), \gamma'(t) r_h \phi)\, dt + \nu \int_0^T ((u_h(t), \gamma(t) r_h \phi))_h\, dt \\
+ \frac{C}{D} \int_0^T (\sqrt{(u_h(t-k))^2 + (v_h(t-k))^2}\, u_h(t), \gamma(t) r_h \phi)\, dt \\
-f \int_0^T (v_h(t), \gamma(t) r_h \phi)\, dt + g \int_0^T (\frac{\partial z_h(t)}{\partial x}, \gamma(t) r_h \theta)\, dt \\
= \int_0^T (f_{1k}(t), \gamma(t) r_h \phi)\, dt + (u_h^0, r_h \phi) \gamma(0)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-\int_0^T (w_{2h}(t), \gamma'(t) r_h \Psi)\, dt + \nu \int_0^T ((v_h(t), \gamma(t) r_h \Psi))_h\, dt \\
+ \frac{C}{D} \int_0^T (\sqrt{(u_h(t-k))^2 + (v_h(t-k))^2}\, v_h(t), \gamma(t) r_h \Psi)\, dt \\
+f \int_0^T (u_h(t), \gamma(t) t_h \Psi)\, dt + g \int_0^T (\frac{\partial z_h(t)}{\partial y}, \gamma(t) r_h \Psi)\, dt \\
= \int_0^T (f_{2k}(t), \gamma(t) r_h \Psi)\, dt + (v_h^0, r_h \Psi) \gamma(0)
\end{cases}
\tag{3.31}
$$

$$
\begin{cases}
-\int_0^T (w_{3h}(t), \gamma'(t) r_h \delta)\, dt + \nu' \int_0^T ((z_h(t), \gamma(t) r_h \delta))\, dt + \\
+ \int_0^T b_1(u_h(t-k), \alpha_K(z_h(t), \gamma(t) r_h \delta)\, dt + \int_0^T b_1(\alpha_K(z_h(t-k)), u_h(t), \gamma(t) r_h \delta)\, dt \\
+ \int_0^T b_2(v_h(t-k), \alpha_K(z_h(t)), \gamma(t) r_h \delta)\, dt + \int_0^T b_2(\alpha_K(z_h(t-k)), v_h(t), \gamma(t) r_h \delta)\, dt \\
= \int_0^T (f_{3k}(t), \gamma(t) r_h \delta)\, dt + (z_h^0, r_h \delta) \gamma(0)
\end{cases}
$$

$w_{ih'} \to w_i$ dans $L^2(O,T,V)$ fort d'après le corollaire (3.1), i=1,2.

(3.32)
$$\begin{cases} u_{h'} \to u & \text{dans } L^2(O,T,H) \text{ fort d'après le lemme 3.5} \\ v_{h'} \to v & " \quad " \quad " \\ z_{h'} \to z & " \quad " \quad " \end{cases}$$

D'autre part

(3.33)
$$\begin{cases} r_h\phi \to \phi & \text{dans V fort} \\ r_h\Psi \to \Psi & " \quad " \\ r_h\delta \to \delta & " \quad " \end{cases}$$

et

(3.34)
$$\begin{cases} u_h^0 \to u_o & \text{dans H fort} \\ v_h^0 \to v_o & " \quad " \\ z_h^0 \to z_o & " \quad " \end{cases}$$

(3.35) $f_{ik} \to f_i$ dans $L^2(O,T,H)$ fort (Lemme 3.6) $i = 1,2,3$

En passant à la limite dans (3.31) on trouve :

$$-\int_0^T (u(t),\gamma'(t)\phi)dt+\nu\int_0^T ((u(t),\gamma(t)\phi))dt+\frac{C}{D}\int_0^T (\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\,u(t),\gamma(t)\phi)dt$$

$$-f\int_0^T (v(t),\gamma(t)\phi)dt+g\int_0^T (\frac{\partial z(t)}{\partial x},\gamma(t)\phi)dt = \int_0^T (f_{1k}(t),\gamma(t)\phi)dt+(u_o,\phi)\gamma(0)$$

$$-\int_0^T (v(t),\gamma'(t)\Psi)dt+\nu\int_0^T ((v(t),\gamma(t)\Psi))dt+\frac{C}{D}\int_0^T (\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}\,v(t),\gamma(t)\Psi)dt$$

$$+f\int_0^T (u(t),\gamma(t)\Psi)dt+g\int_0^T (\frac{\partial z(t)}{\partial y},\gamma(t)\Psi)dt = \int_0^T (f_{2k}(t),\gamma(t)\Psi)dt+(v_o,\Psi)\gamma(0) \quad (3.36)$$

$$-\int_0^T (z(t),\nu'(t)\delta)dt+\nu'\int_0^T ((z(t),\gamma(t)\nu))dt+\int_0^T b_1(u(t),\alpha_K(z(t)),\gamma(t)\delta)dt$$

$$+\int_0^T b_1\alpha_K(z(t)),u(t),\gamma(t)\delta)dt+\int_0^T b_2(v(t),\alpha_K(z(t)),\gamma(t)\delta)dt$$

$$+\int_0^T b_2(\alpha_K(z(t)),v(t),\gamma(t)\delta)dt = \int_0^T (f_3(t),\gamma(t)\delta)dt+(z_o,\delta)\gamma(0)$$

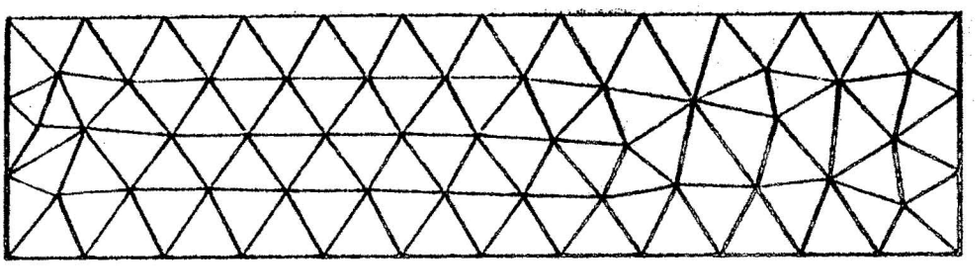
Si on prend γ dans $\mathscr{D}(0,T)$ on retrouve (1.5) au sens des distributions, en multipliant (1.5) par $\gamma(t)$ et en intégrant

Par comparaison, avec (3.36) on obtient :

$$(3.37)\qquad \begin{cases} (u_o-u(0),\phi)\gamma(0) = 0 & \forall\phi \in V \\ (v_o-v(0),\Psi)\gamma(0) = 0 & \forall\Psi \in V \\ (z_o-z(0),\delta)\gamma(0) = 0 & \forall\delta \in V \end{cases}$$

si on choisit γ telle que $\gamma(0) \neq 0$ on obtient (1.6) d'où (u,v,z) est solution de (1.5)-(1.6).

Et comme le problème (1.5)-(1.6) admet une solution unique, toute la famille (u_h, v_h, z_h) converge vers la solution, lorsque $h,k \to 0$.

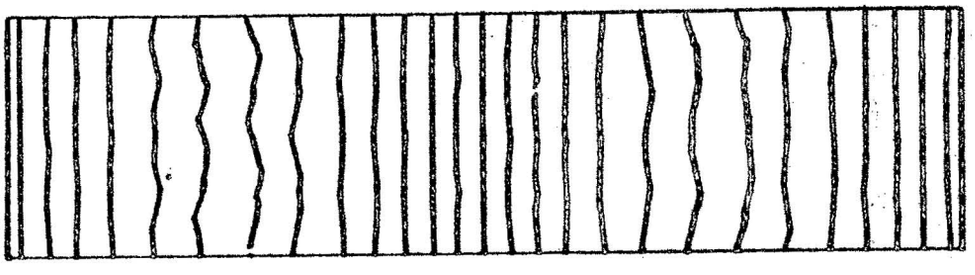


Domaine à 98 triangles où on résout le système (3.4)

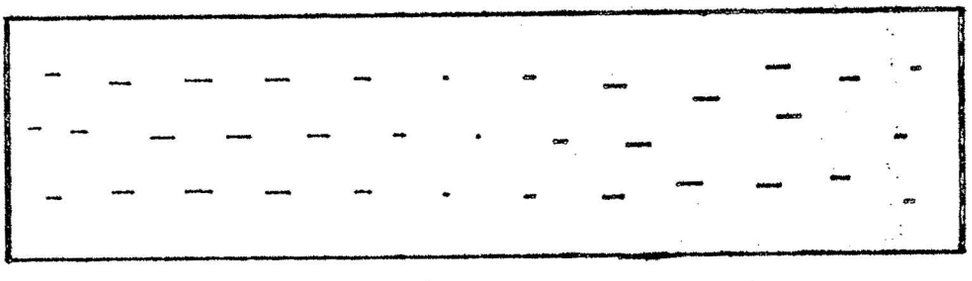
avec : $\nu = 0.012$ $\quad g = 9.81$

$\nu' = 0.010$ $\quad t = 10\Delta t$

$f = 0.0001$ $\quad u_{|\Gamma} = v_{|\Gamma} = 0$



27 courbes de niveau de la profondeur h



Représentation des vitesses aux sommets des triangles

Remarque - L'exemple ci-dessus représente la propagation d'une onde progressive due au vent dans un canal fermé.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IV

[1] ARNOLD V.
Equationd différentielles ordinaires
Editions MIR-MOSCOU (1974)

[2] BENAHMED M.
Thèse - Paris IV (1978)

[3] CODDINGTON E.A. and LEVINSON N.
Theory of ordinary differential equation
Mc Graw Hill (1955)

[4] GASTINEL N.
Mathématiques pour l'informatique T2- Equations différentielles
A. Colin (1970).

[5] GIRAULT V. and RAVIART P.A.
Finite elements approximation fo the Navier-Stokes equations
Springer-Verlag (1979).

[6] HARTMAN P.
Ordinary differential equations ;
John Wiley & Sons, Inc (1964)

[7] LEES M.
A priori estimates for the solution of difference approximations to parabolic partial differential equations
Duke Math. J. 27 (1960) 297-311.

[8] LIONS J.L.
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod - Paris (1969)

[9] LIONS J.L., MAGENESE
Problèmes aux limites non homogènes et applications
Vol. I, Dunod, Paris (1968).

[10] TARTAR L.

Tropics on non linear analysis.

Publications mathématiques d'Orsay (1978)

[11] TEMAM R.

On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations.

Lectures notes # 9, Département of Mathematics, University of Maryland (1973).

CHAPITRE V

RESOLUTION DU PROBLEME DES ONDES LONGUES DANS UN FLUIDE PARFAIT

§ 1 - Formulation du problème

§ 2 - Existence et unicité de la solution

§ 3 - Régularité de la solution

INTRODUCTION

On donne dans ce chapitre une étude théorique des équations des ondes longues amorties (par l'effet du frottement de fond) dans un fluide parfait (non visqueux). On a procédé par Linéarisation au niveau des termes advectifs, ce qui n'altère pas de manière notable le système à résoudre en raison de la petitesse de ces termes devant les dérivées par rapport au temps (cas des écoulements lents).

Après le choix du cadre fonctionnel approprié pour une formulation du problème. On a montré que pour une condition aux limites vérifiant certaines hypothèses, le problème admet une solution unique ; pour cette fin on a utilisé une méthode de monotonie pour traiter la partie non linéaire et quelques résultats de la théorie des opérateurs dissipatifs pour traiter la partie linéaire ; l'introduction de ce dernier outil nous semble naturelle étant donné le lien entre la notion d'opérateur dissipatif et la mesure de la dissipation de l'énergie de l'onde.
On s'est servi principalement des résultats de Bardos-Breziz [2] et de Lax-Phillips [6].

La fin du chapitre est consacrée au problème de régularité de la solution vitesse et à l'existence de solution faible. On a montré pour le cas unidimensionnel l'existence de solution forte (dans un sens bien précis) dans le cas périodique et non périodique.

1 - FORMULATION DU PROBLEME

On considère le problème des ondes longues sous sa forme "semi-linéarisée". Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ assez régulière. On pose :

$$Q = \Omega \times]0,T[\ ; \ T > 0 \text{ et } \Sigma = \Gamma \times]0,T[$$

le problème est de trouver (u,v,h) tels que :

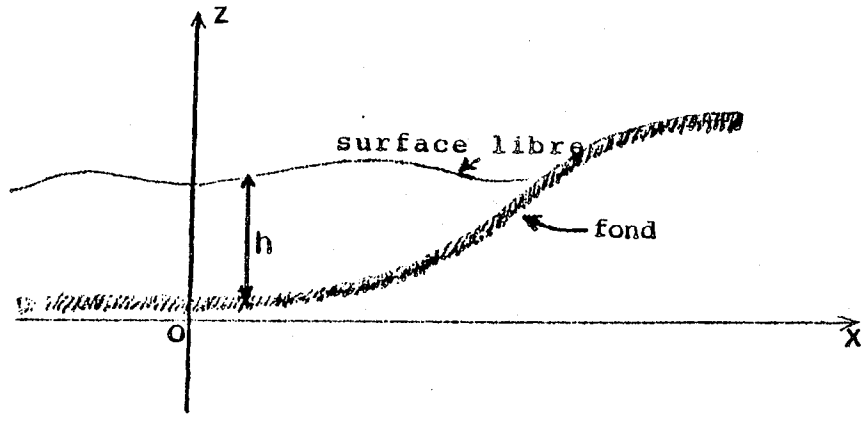
$$(1.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}\,u - fv + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = f_1 & \text{dans } Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + a\dfrac{\partial v}{\partial x} + b\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}\,v + fu + g\dfrac{\partial h}{\partial y} = f_2 & \text{"} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + a\dfrac{\partial h}{\partial x} + b\dfrac{\partial h}{\partial y} + g\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + \alpha h = g\alpha & \text{"} \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$(1.2)\qquad \beta(u,v,h)^t = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

β étant une matrice $(3 \times q)$, $(q \leq 3)$ dépendant de x,y et t et les conditions initiales :

$$(1.3)\quad \begin{cases} u(x,y,0) = u_0(x,y) & \text{dans } \Omega \\ v(x,y,0) = v_0(x,y) & \text{"} \\ h(x,y,0) = h_0(x,y) & \text{"} \end{cases}$$



Les notations sont :

(x,y) : les variables-espaces

t : la variable temps

(u,v) : la vitesse de la particule fluide

h : la profondeur totale

$\vec{q} = (a,b)$: vecteur vitesse moyenne

f : paramètre de Coriolis ($\simeq 10^{-4}$)

g : accélération de la pesanteur

c : la constante de Chézy

D : profondeur à l'état d'équilibre (donc > 0 dans Ω).

α : représente une divergence moyenne de la vitesse

u_o, v_o, h_o : fonctions données

Si on se place dans l'espace :

$$V = L^3(Q) \times L^3(Q) \times L^2(Q)$$

où

$L^P(Q)$ espace des fonctions P-ième sommables sur Q pour la mesur

$dQ = dt.dx.dy$

$$\|f\|_{L^P(Q)} = \left(\int_Q |f|^P dQ \right)^{1/p}$$

Le problème précédent s'écrit sous forme condensée comme suit :

Trouver $w \in V$ tel que :

$$(1.1)' \qquad \frac{\partial w}{\partial t} + Lw + Aw = F \qquad \text{dans } Q$$

$$(1.2)' \qquad \beta w = 0 \qquad \text{sur } \Sigma$$

$$(1.3)' \qquad w(x,y,0) = w_o \qquad \text{dans } \Omega$$

avec

$$L = A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + B$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & o & g \\ o & a & o \\ g & o & a \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} b & o & o \\ o & b & g \\ o & g & b \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} o & -f & o \\ f & o & o \\ o & o & \alpha \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ h \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \alpha_g \end{bmatrix} \quad w_o = \begin{bmatrix} u_o \\ v_o \\ h_o \end{bmatrix}$$

A étant un opérateur défini par :

$$A : L^3(Q) \times L^3(Q) \times L^2(Q) \to L^{3/2}(Q) \times L^{3/2}(Q) \times L^2(Q)$$

$$(u,v,h) \mapsto \left(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}u,\ \frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}v,\ \alpha h\right)$$

où

$D \in L^{\infty}(Q)$ et $D \geq d > 0$ d : étant une constante.

Pour donner un sens à la définition de A, il suffit de montrer que :

$$\forall u,v \in L^3(Q) \Rightarrow \frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}u \in L^{3/2}(Q)$$

en effet :

$$\int_Q \left(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}|u|\right)^{3/2} dQ \leq \int_Q \frac{C}{D}\left(|u|+|v|\right)^{3/2}.|u|^{3/2} dQ$$

$$\leq \frac{c}{d}\left(\int_Q (|u|+|v|)^3 dQ\right)^{1/2}.\left(\int_Q |u|^3 dQ\right)^{1/2}$$

$$< +\infty \quad \text{car } u,v \in L^3(Q).$$

β est définie sur Σ telle que :

$$\beta = \beta(x,y,t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^q), \quad q \leq 3$$

rang de $\beta(x,y,t) = q$; les coefficients de β étant dans $C^1(\bar{\Sigma})$.

On désigne par $B(x,y,t)$ le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$B(x,y,t) = \{v,\ v \in \mathbb{R} \ ;\ \text{tel que } \beta(x,y,t)v = 0\}$$

et on définit le sous-espace $\overset{*}{B}(x,y,t)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\overset{*}{B}(x,y,t) = \{w,\ w \in \mathbb{R}^3 \ ;\ \text{tel que } v.A_n w = 0 \quad \forall v \in B(x,y,t)\}$$

avec : $A_n = \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2$

ou $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ est le vecteur unitaire normal à la frontière Γ de Ω au point (x,y).

On suppose le long du problème que la divergence du vecteur (a,b) est nulle (i.e. $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0$) et on pose : $\gamma_n = \nu_1 a + \nu_2 b$

LEMME 1.1.

Si on suppose que $\alpha > 0$; alors l'opérateur L est formellement dissipatif [6] i.e.

$$((B+B^* - \frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial y})u,u) \geq 0 \qquad \forall u \in (L^2(\Omega))^3$$

Démonstration :

$$((-\frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial y})u,u) = -\int_\Omega (\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y})(u_1^2+u_2^2+u_3^2)\,d\Omega$$

$$= 0 \qquad \forall u = (u_1,u_2,u_3) \in (L^2(\Omega))^3$$

$$((B+B^*)u,u) = \int_\Omega 2\alpha u_3^2\,d\Omega \geq 0$$

d'où :

$$((B+B^* - \frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{\partial A_2}{\partial y})u,u) = \int_\Omega 2\alpha\, u_3^2\,d\Omega \geq 0 \qquad \text{car } \alpha > 0.$$

LEMME 1.2

Si on suppose que $0 < -\gamma_n < g$; alors la matrice A_n est non singulière i.e. la frontière Γ de Ω est non caractéristique

Démonstration :

$$\det A_n = \begin{vmatrix} \gamma_n & 0 & \nu_1 g \\ 0 & \gamma_n & \nu_2 g \\ \nu_1 g & \nu_2 g & \gamma_n \end{vmatrix}$$

$$= \gamma_n(\gamma_n^2 - g^2) \neq 0 \qquad \text{car} \quad \gamma_n \neq 0 \text{ et } \gamma_n^2 \neq g^2$$

donc A_n est inversible.

On admet dans ce qui va suivre que la condition aux limites (1.2) est positive maximale c'est-à-dire vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) $(A_n v, v) \geq 0 \qquad \forall v \in B(x,y,t)$;

(2) Dans tout sous-espace de $\mathbb{R}^3$ contenant strictement $B(x,y,t)$ il existe un vecteur w tel que :

$$(A_n w, w) < 0.$$

Remarque -

Les frontières caractéristiques (vérifiant det $A_n = 0$) constituent en général un problème délicat dans l'étude des systèmes hyperboliques. Sous certaines hypothèses les problèmes à frontières uniformément caractéristiques (rang $A_n = c^{te}$) deviennent plus commode.

2. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION

DEFINITION [9]

Soit E un espace de Banach. On appelle semi-groupe dans E une famille d'opérateurs G(t) ; $t \geq 0$ vérifiant :

(i) $G(t) \in \mathscr{L}(E,E)$ (l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans E).

(ii) $G(0) = I$ (identité)

(iii) $G(t)G(s) = G(t+s)$ pour tout $t, s \geq 0$.

Le semi-groupe G(t) est dit fortement continu G(t) converge fortement vers $G(t_o)$ lorsque t tend vers t_o ; $t_o > 0$.

G(t) est un semi-groupe de contractions sur E si :

$$\|G(t)\| \leq 1 \quad ; \quad \forall t \geq 0.$$

On appelle générateur infinitésimal de G(t) l'opérateur linéaire Λ défini par :

$$\Lambda = \lim_{h \to o} \frac{(G(h)-I)}{h}$$

la limite étant prise au sens fort.

Cadre fonctionnel

Considérons les espaces fonctionnels suivants :

$L^P(\Omega)$ = espace de fonctions de puissance p-ième sommable sur Ω pour la mesure $d\Omega$.

$\mathscr{H} = (L^2(\Omega))^3$; $\|u\| = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L^2(\Omega)}$; $u = (u_1,u_2,u_3) \in (L^2(\Omega))^3$

$H = (L^2(Q))^3$; $\|u\|_H = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L^2(Q)}$; $u = (u_1,u_2,u_3) \in (L^2(Q))^3$

$V = (L^3(Q))^2 \times L^2(Q)$; $\|u\|_V = \sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{L^3(Q)} + \|u_3\|_{L^2(Q)}$

$u = (u_1,u_2,u_3) \in (L^3(Q))^2 \times L^2(Q$

$H^1(\Omega) = \{u,\ u \in L^2(\Omega)\ ;\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)\}$.

PROPOSITION [8]

Soit X un espace de Banach ; si $f \in L^P(O,T;X)$ et $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^P(O,T;X)$ $(1 \leq P \leq \infty)$ alors f est après une modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $[O,T]$, continue de $[O,T] \to X$.

$D(L(t))$ désigne le domaine de l'opérateur L(t). On pose :

$$D(L(t)) = \{u(t) \in (H^1(\Omega))^3 \ ;\ u(x,y,t) \in B(x,y,t) \text{ p.p. sur } \Gamma\}$$

on note par $D(L^*(t))$ le domaine de l'opérateur $L^*(t)$ adjoint de L(t) ;

$$D(L^*(t)) = \{u(t) \in (H^1(\Omega))^3 \ ; \ u(x,y,t) \in \overset{*}{B}(x,y,t) \ \text{ p.p. sur } \Gamma \}$$

on désigne par $w(\Lambda)$ (resp. $w(\Lambda^*)$) l'espace des $u \in H$ tels que pour presque tout t ; $u(t) \in D(L(t))$ (resp. $u(t) \in D(L^*(t))$ et tels que les fonctions : $t \to L(t)\,u(t)$ (resp. $t \to L^*(t)u(t)$) et $t \to \frac{\partial u}{\partial t}$ appartiennent à H ; donc d'après la proposition les éléments de $w(\Lambda)$ et $w(\Lambda^*)$ appartiennent à $\mathscr{C}(0,T\ ;\mathscr{H})$.

On désigne par $D(\overset{0}{\Lambda})$ (resp. $D(\overset{0}{\Lambda^*})$) l'espace des $u \in w(\Lambda)$ (resp. $u \in w(\Lambda^*)$) tels que $u(0) = 0$ (resp. $u(T) = 0$).

L'opérateur de domaine $D(\overset{0}{\Lambda})$ défini par :

$$u \to \frac{\partial u}{\partial t} + L(t)u$$

est positif de domaine dense dans H, il est donc fermable [5] . On note par Λ sa fermeture et par Λ^* l'adjoint de Λ . Λ^* est égal à la fermeture de l'opérateur : $-\frac{\partial}{\partial t} + L^*(t)$ défini sur $D(\overset{0}{\Lambda^*})$.

DEFINITION

On dit que Λ et V-régulier si :

(i) $D(\Lambda^*) \cap V$ est dense dans V

(ii) pour tout couple $(u,f) \in V \times V'$ vérifiant :

$$(u,\Lambda^* v) = (f,v) \qquad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap V$$

il existe une suite $\{u_n\} \subset D(\Lambda) \cap V$ telle que $\lim u_n = u$ dans V et $\lim \Lambda u_n = f$ dans V'.

On démontre dans [2] que l'opérateur Λ défini ci-dessus est $L^3(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$-régulier.

Nous rappelons un résultat qui nous sera utile dans la suite.

On note par $G(H)$ l'ensemble des générateurs infinitésimaux de semi-groupes de contractions fortement continus sur H.

THEOREME 2.1.

Soient $\Lambda \in G(H)$ un opérateur V-régulier et A un opérateur pseudo monotone et coercif de V dans V', alors pour tout couple $(u_o, f) \in \mathscr{H} \times V'$, il existe un (unique) $u \in V$ tel que :

$$(u, \Lambda^* v) + (Au, v) = (f, v) + (u_o, v(0)) \qquad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap V$$

de plus $u \in \mathscr{C}(0,T ; \mathscr{H})$ et $u(0) = u_o$.

Démonstration [2]

Remarques :

(1) l'unicité de la solution est démontrée dans le cas de la stricte monotonie de A.

(2) au sens des distributions u est solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu + Au = f$$

PROPOSITION 2.1

L'opérateur $A : L^3(Q) \times L^3(Q) \times L^2(Q) \to L^{3/2}(Q) \times L^{3/2}(Q) \times L^2(Q)$

$$(u, v, h) \to (w_1, w_2, w_3)$$

avec

$$w_1 = \frac{C}{D} \sqrt{u^2+v^2}\, u$$

$$w_1 = \frac{C}{D} \sqrt{u^2+ v^2}\, v$$

$$w_3 = \alpha h \qquad \alpha , D \in L^{\infty}(Q) \text{ et } \alpha, D > 0$$

est strictement monotone, borné, hémicontinu et coercif.

Démonstration

- Monotonie stricte : soient $X = (u_1, v_1, h_1)$, $Y = (u_2, v_2, h_2) \in (L^3(Q) \times L^2(Q)$

on pose : $a_1 = \sqrt{u_1^2+v_1^2}$, $b_1 = \sqrt{u_2^2+v_2^2}$

$$(2.1) \qquad (AX-AY,X-Y)_{V\times V'} = \int_Q \frac{C}{D}\left[(a_1u_1-b_1u_2)(u_1-u_2)+(a_1v_1-b_1v_2)(v_1-v_2)\right]dQ + \int_Q \alpha(h_1-h_2)^2 dQ$$

par simplification et utilisation des inégalités :

$$-u_1u_2 \geq -\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)$$

$$-v_1v_2 \geq -\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)$$

on aura :

$$(2.2) \qquad (AX-AY,X-Y) \geq \frac{1}{2}\int_Q\left[\frac{C}{D}(a_1-b_1)(a_1^2-b_1^2)+\alpha(h_1-h_2)^2\right]dQ$$

$$(a_1-b_1)(a_1^2-b_1^2) = (a_1-b_1)^2(a+b) \geq 0$$

on a donc :

$$(AX-AY,\ X-Y) \geq 0$$ d'où la monotonie de A.

Si on avait $(AX-AY,X-Y) = 0$ on aura d'après (2.2) :

$$a_1 = b_1 \quad \text{et} \quad h_1 = h_2$$

Si on remplace a_1 par b_1 dans (2.1) on obtient :

$$u_1 = u_2 \text{ et } v_1 = v_2$$

d'où :

$$(u_1,v_1,h_1) = (u_2,v_2,h_2) \qquad \text{(i.e. } X = Y\text{)}$$

et A est strictement monotone.

- Majoration de A :

Si on pose : $W = (u,v,h) \in (L^3(Q))^2 \times L^2(Q)$

avec :

$$\|W\| = \|W\|_{(L^3(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^3(\Omega)} + \|v\|_{L^3(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|AW\|_{(L^{3/2}(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)} = \left\|\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}\,u\right\|_{L^{3/2}(\Omega)} + \left\|\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}\,v\right\|_{L^{3/2}(\Omega)} + \|\alpha h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$= \left(\int_\Omega \left(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}|u|\right)^{3/2} d\Omega\right)^{2/3}$$

$$+ \left(\int_\Omega \left(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}|v|\right)^{3/2} d\Omega\right)^{2/3} + \left(\int_\Omega |\alpha h|^2 d\Omega\right)^{1/2}$$

On a :

$$\int_\Omega \left(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}|u|\right)^{3/2} d\Omega \le K^{3/2} \int_\Omega \left(|u|^{1/2}+|v|^{1/2}\right)^3 |u|^{3/2} d\Omega \quad ; \quad \left(K = \frac{C}{d}\right)$$

$$\le K^{3/2} \int_\Omega \left(|u|^3 + |v|^{3/2}|u|^{3/2} + 3|u|^{5/2}|u|^{1/2} + 3|u|^2|v|\right) d\Omega$$

$$\le K^{3/2}\left(\|W\|^3 + \|W\|^{3/2}.\|W\|^{3/2} + 3\|W\|^{5/2}.\|W\|^{1/2} + 3\|W\|^2\|W\|\right)$$

$$\le 8K^{3/2}\|W\|^3$$

On montre de même que :

$$\int_\Omega \left(\frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}|v|\right)^{3/2} d\Omega \le 8K^{3/2}\|W\|^3$$

et

$$\int_\Omega |\alpha h|^2 d\Omega \le M^2 \int_\Omega |h|^2 d\Omega$$

$$\le M^2\|W\|^2$$

On a donc :

$$\|AW\|_{(L^{3/2}(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)} \le \left(8K^{3/2}\|W\|^3\right)^{2/3} + \left(8K^{3/2}\|W\|^3\right)^{2/3} + \left(M^2\|W\|^2\right)^{1/2}$$

$$\le 8K\|W\|^2 + M\|W\|$$

Si $\|W\| \leq C_1$ alors :

$$\|AW\|_{(L^{3/2}(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)} \leq C(=8KC_1^2+MC_1) = C^{te}$$

d'où : A est borné sur les parties bornées.

- Hémicontinuité de A :

On montre facilement que : $\forall x,y,z \in V = (L^3(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$ l'application :

$$\lambda \to (A(x+\lambda y),z)_{V\times V'} \quad ; \ V' \text{ dual de } V$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Coercivité de A :

Soit $W = (u,v,h) \in V$

$$(AW,W)_{V\times V'} = \int_\Omega \frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}u^2 d\Omega + \int_\Omega \frac{C}{D}\sqrt{u^2+v^2}v^2 d\Omega + \int_\Omega \alpha h^2 d\Omega$$

$$\geq k\int_\Omega |u|^3 d\Omega + k\int_\Omega |v|^3 d\Omega + m\int_\Omega |h|^2 d\Omega$$

d'où

$$(AW,W)_{V\times V'} \geq \inf(k,m)\left(\int_\Omega |u|^3 d\Omega + \int_\Omega |v|^3 d\Omega + \int_\Omega |h|^2 d\Omega\right)$$

si on prend :

$$\|W\|_V = \sup\left(\|u\|_{L^3(\Omega)}, \|v\|_{L^3(\Omega)}, \|h\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

Comme $\|W\|_V$ est destiné à tendre vers $+\infty$ on peut supposer que $\|W\|_V \geq 1$ d'où

$$\int_\Omega |u|^3 d\Omega + \int_\Omega |v|^3 d\Omega + \int_\Omega |h|^2 d\Omega \geq \left[\sup\left(\|u\|_{L^3(\Omega)}, \|v\|_{L^3(\Omega)}, \|h\|_{L^2(\Omega)}\right)\right]^2$$

On a donc :

$$(A_W,W)_{V\times V'} \geq C_1\|W\|_V^2$$

et

$$\frac{(AW,W)_{V\times V'}}{\|W\|} \xrightarrow[\|W\| \to +\infty]{} +\infty$$

ce qui montre la coercivité de l'opérareur A.

DEFINITION

Un opérateur A de $V \to V'$ est dit pseudo-monotone si :

(i) A est borné

(ii) lorsque $u_j \to u$ dans V faible et $\limsup (A(u_j), u_j - u) \leq 0$ alors

$$\liminf (A(u_j), u_j - v) \geq (A(u), u - v) \qquad \forall v \in V$$

PROPOSITION 2.2

On a l'implication :

"A borné, hémicontinu ; monotone" => "A pseudo-monotone".

Démonstration (cf.[8])

PROPOSTIION 2.3

Si les hypothèses des lemmes (1.1)et (1.2) sont vérifiées et si $(W_o, F) \in \mathcal{H} \times V'$ alors il existe un unique $w \in V$ tel que :

$$(w, \Lambda^* v) + (Aw, v) = (F, v) + (w_o, v_o) \qquad \forall v \in D(\Lambda^*) \cap V$$

d'autre part $w \in \mathcal{C}(0,T;\mathcal{H})$ et vérifie $w(0) = w_o$
et on a au sens des distributions :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Lw + Aw = F$$

et formellement :

$$\beta w = 0 \text{ sur } \Sigma$$

Démonstration :

Sous les hypothèses des lemmes (1) et (2) l'opérateur Λ est V-régulier $(V = (L^3(Q))^2 \times L^2(Q))$.

A est borné, monotone et hémicontinu dans V dans V' d'après la proposition 2.1 ; il est donc pseudo-monotone (proposition 2.2). D'autre part A est strictement monotone et coercif d'où le résultat énoncé, en vertu du théorème 2.1.

Remarque

Si l'ouvert Ω est non borné, on reprend le même raisonnement que dans le cas borné avec :

$$V = [L^2(Q) \cap L^3(Q)]^3$$

3 - REGULARITE DE LA SOLUTION

Dans le paragraphe suivant on va aborder le problème de la régularité de la solution vitesse (u,v). On découple le système et on suppose que h est une fonction connue.

On montre l'existence et l'unicité d'une solution faible pour le cas non périodique.

L'existence de solution forte est montrée uniquement dans le cas unidimensionnel où l'opérateur A représente la dérivée (sous différentiel) d'une fonction convexe vérifiant certaines conditions.

On note par :

$$W^{1,p}(0,T;X) = \{\text{l'espace des fonctions u, absolument continues sur } [0,T] \text{ et } \frac{du}{dt} \in L^p(0,T;X)\}.$$

DEFINITION :

Un opérateur A d'un Hilbert H, est dit maximal monotone s'il est monotone et si $\forall x,y \in H$ tels que :

$$(y-Az,\ x-z) \geq 0 \quad \forall z \in D(A) \ ; \text{ alors } x \in D(A) \text{ et } y = Ax.$$

Notions de solutions faible et solution forte :

Si A est un opérateur de H et $f \in L^1(0,T;H)$ on appelle solution forte de l'équation : $\frac{du}{dt} + Au = f$ toute fonction $u \in C([0,T],H)$ absolument continue sur tout compact de $]0,T[$ vérifiant :

* $u(t) \in D(A)$

* $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$ p.p. sur $[0,T]$

On dit que $u \in C([0,T];H)$ est solution faible de l'équation $\frac{du}{dt} + Au = f$, s'il existe une suite $f_n \in L^1(0,T;H)$ et $u_n \in C([0,T];H)$ telles que u_n soit une solution forte de l'équation : $\frac{du_n}{dt} + Au_n = f_n$ et $f_n \to f$ dans $L^1(0,T;H)$ et $u_n \to u$ uniformément sur $[0,T]$.

THEOREME 3.1

Si A est un opérateur maximal monotone de H, pour tout $f \in L^1(0,T;H)$ et tout $u_o \in \overline{D(A)}$, il existe une solution faible unique u de l'équation :

$$\frac{du}{dt} + Au = f \quad \text{telle que } u(0) = u_o$$

Si de plus A est coercif et si on remplace u_o par $u(T)$ alors le problème (périodique) obtenu admet une solution faible.

Démonstration : cf [3]

Si X est un espace de Banach de norme $\| \quad \|$ et f un élément de $L^1(0,T;X)$ on dit qu'un point $t \in]0,T[$ (resp. $t \in [0,T[$) est un point de Lebesgue (resp. point de Lebesgue à droite) de f, s'il existe $x \in X$ tel que :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| f(x) - x \| \, ds = 0$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| f(s) - x \| \, ds = 0\right).$$

Pour le cas non périodique on a un résultat de régularité assez fort [3]. qu'on énonce dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1

Soit A un opérateur monotone ; on suppose que $F(A)$ est fermé et que A est borné sur les compacts de $D(A)$. Soient $f \in L^p(0,T;H)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $u_o \in \overline{D(A)} (=D(A))$. Alors il existe une fonction $u \in W^{1,p}(0,T;H)$ unique telle que : $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f$ p.p. sur $]0,T[$ et $u(0) = u_o$, de plus u est dérivable à droite en tout point de Lebesgue à droite de f et $\frac{du}{dt}(t_o) = f(t_o+0)-Au(t_o)$.

En vue de ses applications au cas unidimensionnel, on rappelle le résultat suivant [3].

THEOREME 3.2.

Soit $f \in L^2(0,T;H)$, si A est le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. propre ϕ telle que Min $\phi = 0$, alors toute solution faible de $\frac{du}{dt} + Au = f$ est une solution forte.

Si de plus A est coercif alors il existe une solution forte du problème périodique :

$$\frac{du}{dt} + Au = f \quad ; \quad u(0) = u(T)$$

et $$\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H).$$

Régularité de la vitesse $V = (u,v)^t$:

On suppose que h est connu dans $L^3(\Omega)$ et $\nabla h \in L^{3/2}(\Omega)$

1 - Cas non périodique :

On considère le problème suivant :

$$(P_o) \qquad \begin{aligned} &\frac{du}{dt} + \frac{C}{H}\sqrt{u^2+v^2}u - fv = -g\frac{\partial h}{\partial x} \\ &\frac{dv}{dt} + \frac{C}{H}\sqrt{u^2+v^2}v + fu = -g\frac{\partial h}{\partial y} \\ &u(0) = v(0) = 0 \end{aligned}$$

L'écriture donne :

$$(P_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{dt} + AV = F \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

avec

$F = (F_1, F_2)^t$; tel que $F_1 = -g\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $F_2 = -g\dfrac{\partial h}{\partial y}$

$V = (u,v)^t$;

$AV = \dfrac{C}{H}(|V|)V + MV$; $M = \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix}$

On a la proposition suivante (cf.[3]).

PROPOSITION 3.2

Soit V un espace de Banach reflexif de dual V' tel que $V \subset H \subset V'$ avec injections continues et denses. Soit $A : V \to V'$ un opérateur univoque partout défini sur V, hémicontinu et coercif i.e. $\lim_{\|u\|\to+\infty} \dfrac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} = +\infty$ où $\|\ \|$ désigne la norme de V et $\langle,\rangle$ le produit scalaire dans la dualité entre V et V', alors l'opérateur A_H, restriction de A à H défini par $D(A_H) = \{x \in V,\ Ax \in H\}$ et $A_H = A$ est maximal monotone dans H.

PROPOSITION 3.3

L'opérateur univoque $A : (L^3(Q))^2 \to (L^{3/2}(Q))^2$

$$V \to AV = \frac{C}{H}(|V|) + MV$$

est monotone, coercif et hémicontinu.

Démonstration :

Si on pose $A = A_1 + A_2$ tel que :

$$A_1 V = \frac{C}{H}(|V|)V \quad \text{et} \quad A_2 V = MV$$

A_1 est monotone, coercif et hémicontinu de $(L^3(Q))^2$ dans $(L^{3/2}(Q))^2$ d'après la proposition 2.1.

Soient $V_1 = (u_1, v_1)^t$, $V_2 = (u_2, v_2)^t$ et $V = (u,v)^t$

$$\langle A_2 V, V\rangle = (-fv, fu)(u,v)^t$$

$$= -fvu + fuv$$

$$= 0$$

d'où

$$\langle A_2 V_1 - A_2 V_2, V_1 - V_2\rangle = \langle A_2(V_1 - V_2), (V_1 - V_2)\rangle = 0$$

Donc A_2 est monotone.

A_2 vérifie la relation : $\lim_{\|V\| \to +\infty} \frac{\langle A_2 V, V\rangle}{\|V\|} = 0$

A_2 est hémicontinu car il est linéaire.

De ce qui précède, on déduit que $A = A_1 + A_2$ est monotone, coercif et hémicontinu.

Remarque

On a les injections continues et denses suivantes :

$$(L^3(Q))^2 \subset (L^2(Q))^2 \subset (L^{3/2}(Q))^2$$

SOLUTIONS FAIBLES DE (P_1) :

THEOREME 3.3

Si on suppose que $F \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^2)$; Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ (représentant le domaine mouillé). Et si V_o vérifie $AV_o \in (L^2(\Omega))^2$; alors le problème (P_1) admet une solution faible unique.
Si on remplace V_o par $V(T)$ dans le problème (P_1), le problème (périodique) obtenu admet une solution faible.

Démonstration :

D'après la proposition 3.3, l'opérateur A est monotone, hémicontinu et coercif de $(L^3(Q))^2$ dans $(L^{3/2}(Q))^2$, de plus on a les injections continues et denses :

$$(L^3(Q))^2 \subset (L^2(Q))^2 \subset (L^{3/2}(Q))^2$$

d'où d'après la proposition 3.2, l'opérateur A_H restriction de A à $(L^2(Q))^2$ défini par :

$$D(A_H) = \{u \in (L^3(Q))^2,\ Au \in (L^2(Q))^2\} \quad \text{et } A = A_H$$

est maximal monotone dans $(L^2(Q))^2$.
Par application du théorème 3.1 on obtient le résultat.

La nature de l'opérateur A ne nous permet d'établir des résultats sur l'existence des solutions fortes dans le cas bidimensionnel par contre celà parait possible dans le cas unidimensionnel où l'opérateur A est le sous-différentiel d'une fonction convexe ϕ

Dans le cas unidimensionnel l'opérateur A prend la forme :

$$A : L^3(Q) \to L^{3/2}(Q)$$

$$u \to |u|u$$

Solutions fortes du problème (P1)

Soit le problème :

$$(P_1') \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F \\ u(0) = u_o \end{cases}$$

THEOREME 3.4

Si $F \in L^2(0,T ; L^2(\Omega))$ et $Au_o \in L^2(\Omega)$, alors toute solution faible du problème (P_1') est une solution forte.
Si on remplace u_o par $u(T)$ le problème (périodique) obtenu admet une solution forte et $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T ; L^2(\Omega))$.

Démonstration :

L'opérateur $A : L^3(\Omega) \to L^{3/2}(\Omega)$

$$u \mapsto |u|u$$

vérifié : $A = \partial\phi$ (sous différentiel)
avec : $\phi : u \mapsto \dfrac{|u|^3}{3}$

est convexe, s.c.i. propose sur $L^3(\Omega)$ avec Min $\phi = 0$.
D'autre part, A est coercif, en effet :

$$\lim_{\|u\|_{L^3(\Omega)} \to +\infty} \frac{(Au,u)}{\|u\|_{L^3(\Omega)}} = \lim_{\|u\|_{L^3(\Omega)} \to +\infty} \frac{\int_\Omega |u|^3 d\phi}{\left(\int_\Omega |u|^3 d\phi\right)^{1/3}}$$

$$= \lim_{\|u\|_{L^3(\Omega)} \to +\infty} \|u\|^2_{L^3(\Omega)} = +\infty$$

donc les hypothèses du théorème 3.2 sont vérifiées d'où le résultat énoncé.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE V

[1] BARDOS C.
Thèse ; Paris ; (1969).

[2] BARDOS C. et BREZIS H.
Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires.
J.of Differential equations 6 (1969) p. 345-395

[3] BREZIS H.
Opérateurs maximaux monotones
North-Holland publishing Company - Amsterdam - 1973

[4] FRIEDRICHS K. et LAX P.
Boundary value problems for first order operations.
Comm. pure Appl. Math. 18 (1965), 355-388.

[5] KATO T.
Perturbation theory for linear operators
t. 132 Springer Verlag, Berlin

[6] LAX P. et PHILLIPS R.S.
Local boundary conditions for dissipative symmetric operators
Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 427-455

[7] LIONS J.L.
Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles
Université de Montréal - 1962

[8] LIONS J.L.
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
Dunod et Gauthier-Villars - Paris 1969

[9] YOSIDA K.
Functional Analysis
Springer.

ANNEXE I

Résolution du problème linéaire dans un domaine à frontière libre

1 - Linéarisation du problème

On sait que dans les régions caractérisées par une grande profondeur de l'eau, les termes advectifs deviennent négligeables. C'est le cas des océans et des bassins suffisamment profonds.

Dans ce cas le système des ondes longues devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{h}\sqrt{u^2+v^2}\,u - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c}{h}\sqrt{u^2+v^2}\,v + fu + g\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0$$

Sous les mêmes hypothèses, les termes de la force de frottement sur le fond peuvent être considérés négligeables (ils sont inversement proportionnels à la profondeur totale).

Si on se place dans le cas des bassins de faible étendue, afin d'éliminer l'effet de Coriolis et en posant $h = H = C^{te}$ dans les termes non linéaires qui restent on aura le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Si on suppose que l'écoulement est irrotationnel ; il existe une fonction de potentiel $-\phi = -\phi(x,y,t)$ telle que

$$u = \frac{-\partial\phi}{\partial x}\ , \quad v = \frac{-\partial\phi}{\partial y}\ , \quad h = +\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

par substitution dans (1.2) on aura :

$$(1.3) \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - g\,H\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = 0$$

on retrouve ainsi l'équation classique des ondes :

$$(1.4) \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - C^2\Delta\phi = 0$$

où C est la vitesse locale de propagation de l'onde, avec $C^2 = gH$ et Δ désigne l'opérateur Laplacien.

2 - Formulation du problème à frontière libre

Si on suppose que le domaine $\Omega_1(t)$ où on cherche à résoudre (1.2) est caractérisé par :

$$h = \frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} > 0 \quad (\text{i.e.} \quad \frac{\partial\phi}{\partial t} > 0)$$

En prenant comme condition aux limites :

$$h = \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \text{ sur } \Gamma_1(t) \text{ frontière de } \Omega_1(t).$$

on aura à résoudre le problème unilatéral suivant :

Trouver ϕ tel que :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - C^2\Delta\phi = 0 & \text{dans } [o,T] \times \Omega_1(t) \\ \phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1(t) & \\ \phi(x,y,o) = \phi_0(x,y) \ , \ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}(x,y,o) = \phi_1(x,y) & \end{cases}$$

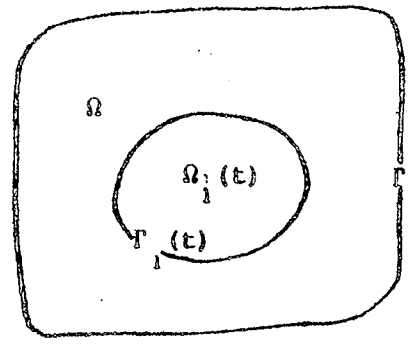
Le problème (2.1) peut être formulé autrement en considérant un ouvert fixe Ω contenant strictement $\Omega_1(t)$, on note par Γ sa frontière, $\Sigma = [o,T] \times \Gamma$ Si on fait :

$$h = o \text{ sur } \Omega \backslash \Omega_1(t) \iff \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{sur } \Omega \backslash \Omega_1(t)$$

le problème à résoudre peut être ramené à :

Trouver ϕ tel que :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - C^2 \Delta \phi = 0 \quad \text{dans } [o,T] \times \Omega_1(t) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } [o,T] \times \Omega \backslash \Omega_1(t) \\ \phi = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \phi(x,y,o) = \phi_0(x,y) \text{ p. p. sur } \Omega \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(x,y,o) = \phi_1(x,y) \text{ p. p. sur } \Omega \end{cases}$$



3 - Cadre fonctionnel

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ on rappelle la définition des espaces suivants :

$$H^1(\Omega) = \{u \; ; \; u \in L^2(\Omega), \; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i = 1,2\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \; ; \; u \in H^1(\Omega), \; \gamma_0 u = u|_\Gamma = 0\}$$

$$H^2(\Omega) = \{u \; ; \; u \in L^2(\Omega), \; \frac{\partial u}{\partial x_i}, \; \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad i,j = 1,2\}$$

Thèorème [1] 3.1

Si on fait les hypothèses suivantes :

$$\psi \in H^2(\Omega) \; ; \quad \psi \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$f \in L^2(o,T \; ; \; L^2(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(o,T \; ; \; L^2(\Omega))$$

$$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \; ; \quad v_0 \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad v_0 \geq \psi \text{ p. p. sur } \Omega$$

Alors il existe une fonction unique u vérifiant :

$$u \in C(o,T \; ; \; H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty(o,T \; ; \; H^2(\Omega))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(o,T \; ; \; H_0^1(\Omega)) \; , \; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad L^\infty(o,T \; ; \; L^2(\Omega))$$

1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} \geq \psi$ dans Q ; $Q = [o,T] \times \Omega$

2) $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f$ dans $[o,T] \times \Omega(t)$

3) $\dfrac{\partial^+}{\partial t}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \text{Max}(\Delta u + f, \; o)$ dans $[\dfrac{\partial u}{\partial t} = \psi]$

4) $u(x,t) = 0$ sur Σ

5) $u(x,o) = u_o \; , \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,o) = v_o$ p. p. sur Ω

En utilisant le théorème 3.1 on démontre le résultat suivant :

Théorème 3.2

Si $\phi_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \; ; \; \phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ avec $\phi_1 > 0$ p. p. sur Ω

Alors, le problème (2.2) admet une solution unique ϕ vérifiant :

$$\phi \in C(o,T ; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(o,T ; H^2(\Omega))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^\infty(o,T ; H_0^1(\Omega)) \quad , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \in L^\infty(o,T ; L^2(\Omega))$$

(d'où l'existence et l'unicité à une constante additive près du problème (1.2)).

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème 3.1, car le problème (2.2) tel qu'on l'a formulé vérifie bien les conditions du théorème de Brézis. En particulier l'égalité (3) est automatiquement satisfaite-en faisant :

$$f = \psi = 0$$

on a directement le résultat.

Remarque 3.1

La démonstration du théorème de Brézis est basée sur la résolution de l'inéquation variationnelle suivante :

Trouver u vérifiant :

$$(3.1) \qquad \left(\frac{d^+}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) , W - \frac{du}{dt}\right) + a\left(u, W - \frac{du}{dt}\right) + \phi(W) - \phi\left(\frac{du}{dt}\right) \geq \left(f, W - \frac{du}{dt}\right)$$

$$W \in D(\phi),$$

$$u(o) = u_o$$

$$\frac{du}{dt}(o) = v_o$$

avec :

$$D(\phi) = \{u \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \phi(u) < +\infty\}$$

$$a(u,v) = \sum_i^2 \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$\phi(u) = \psi_K(u)$$

ψ_K est la fonction indicatrice du convexe :

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \ ; \ v \geq \psi \text{ p. p. sur } \Omega \right\}$$

L'existence et l'unicité de la solution de cette inéquation ont été démontrées moyennant des techniques des semi-groupes.

Remarque 3.2

Le problème non homogène (i.e. en tenant compte des forces extérieures) peut être traité de la même manière si on fait les hypothèses nécessaires sur le second membre afin de satisfaire aux conditions du théorème de Brézis.

Remarque 3.3

Il est clair que le théorème ne donne aucune idée de la façon dont évolue la frontière, mais il montre que le problème reste bien posé tout le temp

4 - Résolution du problème (2.1) dans un domaine fixe

Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; on rappelle le résultat de Brézis suivant :

Théorème 4.1

Si $f \in L^2(o,T ; L^2(\Omega))$ avec $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(o,T ; L^2(\Omega))$

$\phi_0 \in H^2(\Omega)$; $\phi_1 \in H^1(\Omega)$ avec $-\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \in \beta(\phi_1)$

Alors il existe une fonction unique $\phi \in C([o,T], H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(o,T ; H^2(\Omega))$ vérifiant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^\infty(o,T ; H_0^1(\Omega)) \; ; \; \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \in L^\infty(o,T ; L^2(\Omega))$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \Delta\phi = f \quad \text{dans } Q$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} \in \beta\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \quad \text{sur } \Sigma$$

$$\phi(x,y,o) = \phi_0(x,y) \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,y,o) = \phi(x,y) \quad \text{sur } \Omega$$

Remarque :

La démonstration utilise l'inégalité (3.1) avec :

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \; d\Omega$$

$$\psi(u) = \int_\Gamma j(u)\, d\Gamma$$

où j est une fonction convexe s.c.i. propre telle que $\partial j = \beta$

I Cas d'une reflexion totale sur la frontière ($V_u = 0$)

Il suffit de prendre dans le théorème précédent :

$$\beta \equiv 0$$

pour avoir comme condition aux limites :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

où V_n est la composante normale de la vitesse.

On a donc d'après le théorème 4.1 l'existence et l'unicité de la soluti dans les espaces considérés.

Cette situation correspond physiquement à un canal fermé de tous les côtés où l'onde peut être crée par le vent - par exemple -

II Cas d'un débit constant à travers la frontière ($V_n h = C^{te}$)

On considère :

$$\beta : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longmapsto \frac{-\alpha}{h} \qquad (\alpha > 0)$$

à cette fonction correspond la condition aux limites :

$$V_n h = \alpha \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

on peut prendre comme $j(x)$ la fonction définie par :

$$j(x) = \begin{cases} -\alpha \log x & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

[1] H. BREZIS

Thèse - Paris VI (1971)

ANNEXE II

CODE DELTA

Il se présente sous forme d'un ensemble de programmes FORTRAN écrits par A. PONCET [1], [2], pour la résolution numérique d'une classe assez large de problèmes aux dérivées partielles par éléments finis triangulaires.

Les problèmes de type évolutif, non linéaire ou à frontière libre, peuvent être traités moyennant l'écriture des procédures de sauvegarde nécessaires pour le calcul itératif.

Contexte informatique

Le code DELTA est conçu pour être utilisé dans un environnement conversationnel avec utilisation possible des techniques graphiques interactives. L'utilisation d'un système conversationnel permet le dialogue utilisateur/ordinateur au cours duquel le problème à traiter se formule pas à pas avec la possibilité d'accés aux résultats partiels et de reprendre en partie ou en totalité les étapes n'ayant pas donné satisfaction.

Déroulement du code

L'activation du code en mode interactif permet la formulation et la résolution du problème posé en plusieurs étapes "COMMANDES".

I - Formulation du problème

La formulation du problème peut être scindée en 3 commandes :

1) Commande "DOMAINE" :
Elle permet la description et la triangulation du domaine de R^2 dans lequel on résout le problème. Le raffinement du maillage et l'applatissement des triangles peuvent être contrôlés. Si on travaille avec un terminal graphique on peut afficher la triangulation sur l'écran.

2) Commande "ELEMENT" :

Elle décrit le procédé d'interpolation sur les triangles et calcule les fonctions de base pour l'interpolation en vue. Plusieurs éléments sont prévus en particulier, les éléments de Lagrange de degré 1 et 2, qu'on a utilisés dans nos calculs.

3) Commande "EQUATION"

Elle décrit la formulation variationnelle du problème et les conditions aux limites sur la frontière du domaine.Pour les pro blèmes elleptiques deux formulations sont possibles :

a) formulation "énergie" dans le cas d'un problème symétrique on se ramène à trouver le minimum d'une fonctionnelle.

b) formulation "faible" dans le cas non symétrique.

Les coefficients dépendant des variables d'espace doivent être précisés et tous les paramètres doivent être déclarés. Au nive de cette commande on fait appel aux procédures de sauvegarde nécessaires pour les problèmes évolutifs, non linéaires et à frontière variable.

II - Résolution du problème formulé

Deux "commandes" sont disponibles suivant la nature du problème à traiter.

1) Commande "RESULTAT"

C'est à ce niveau que se fait à la fois la résolution (proprem dit) et l'accés aux résultats du calcul après avoir précisé le domaine, l'élément et l'équation.

a) Résolution : on précise l'ordre d'intégration numérique sui le degré des fonctions de base précisées dans "ELEMENT" considéré. On choisit également les points d'intégrations numériques. La résolution du système linéaire obtenu est fa par la méthode de Gauss frontale. L'application d'autres méthodes est en cours.

b) accés aux résultats.

L'accés aux résultats se fait par diverses formes :

1- Forme numérique pure : résultats dans tous les noeuds du maillage ou en des points que l'on précise.

2- Forme graphique : Pour celle-ci on dispose (en ce moment) de trois logiciels :

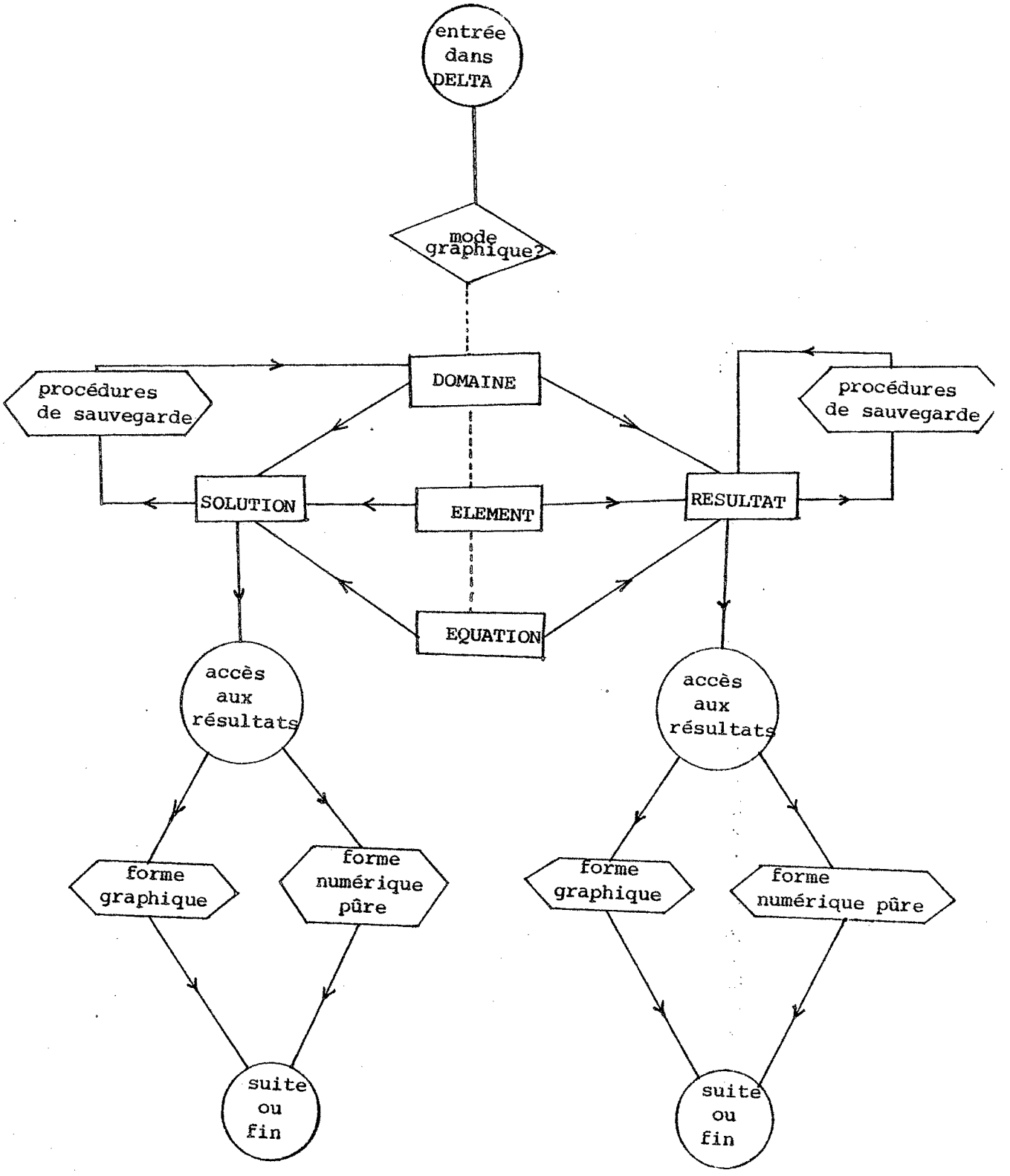
- logiciel GRIGRI (de l'IMAG) : visualisation sur écran
- logiciel PLOT 10 : visualisation sur écran et sur table traçante (en direct)
- logiciel SOFTBEN : visualisation sur table traçante en différé.

L'objet de toutes ces visualisations peut être :

- les courbes de niveaux des fonctions calculées
- tracés des vecteurs (vitesse par exemple) connaissant les deux composantes.
- domaine triangulé.

2) Commande "SOLUTION"

Elle permet une résolution complète avec retour possible au niveau de la modification de la triangulation si celle-ci s'avère indispensable comme dans le cas des problèmes à géométrie variable.



[1] A. PONCET

Thèse, Grenoble ; (1979) .

[2] A. PONCET

Delta ; notice d'utilisation (1980)

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 27 mai 1980

Le Président de la thèse

N. GASTINEL

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 2 - JUIN 1980

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

Dr G. Cau

ERRATA

page	ligne	expression correcte
7	21	la constante de frottement du fond
8	8	$-\frac{\partial h}{\partial t} - u\frac{\partial h}{\partial x}$
8	17	$v\frac{\partial u}{\partial y} - fv$
8	18	$v\frac{\partial v}{\partial y} + fu$
9	4	$= f_1$
9	5	$= f_2$
11	11	$\nu \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$
17	25	si on dérive (1.7.)
17	26	$= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
37	25	$v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial x}$
55	9	la constante de frottement
126	7	dans $[0,T] \times \Omega$
128	4	près de la solution du problème (1.2)
129	2	$= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\Omega$