Analyse et modèles dynamiques non commutatifs sur l'espace de q-Minkowski

Antoine Dutriaux

Université de Valenciennes et du Hainaut Cambresis
Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Valenciennes

Thèse

présentée en première version en vu d'obtenir le grade de Docteur, spécialité « Mathématiques »

par

DUTRIAUX Antoine

Analyse et modèles dynamiques non commutatifs sur l'espace de q-Minkowski

Thèse soutenue le Vendredi 13 Juin 2008 devant le jury composé de :

M.	BARRE Raymond	UVHC	
M.	GOUREVITCH Dimitri	UVHC	(Directeur de thèse)
M.	KERNER Richard	Université de Pierre et Marie Curie (Paris VI)	(Rapporteur)
M.	ROUBTSOV Vladimir	Université d'Angers	
M.	SAPONOV Pavel	Institut de la physique des hautes énergies (Protvino, Russie)	(Rapporteur)

À ma famille.

Résumé et mots clés

Résumé

Cette thèse se place dans le cadre du vaste domaine s'intitulant géométrie non commutative, domaine dont l'étude est motivée par l'opinion courante des mathématiciens et physiciens selon laquelle les méthodes de la géométrie non commutative peuvent être utiles pour décrire certains processus dynamiques à l'échelle de Planck. Aussi l'objectif principal de cette thèse est de généraliser quelques modèles dynamiques définis sur l'espace de Minkowski sur son q-analogue. Des tentatives d'introduire des modèles dynamiques qui seraient covariants par rapport à l'action de groupes quantiques ont été entrepris juste après la création de la théorie sur les groupes quantiques par Drinfeld. Les modèles les plus intéressants sont ceux qui sont liés au q-analogue de l'espace de Minkowski. C'est P. Kulish qui définit cette algèbre comme étant un cas particulier d'une algèbre appelée *modified Reflection Equation Algebra* (mREA) elle-même liée à un opérateur appelé *symétrie de Hecke*. Nous définissons donc certains modèles dynamiques qui sont des déformations de modèles classiques, l'espace des phases de nos modèles déformés n'est autre alors que notre espace de q-Minkowski. Nous recherchons par la suite des intégrales de mouvement de ces dynamiques, ce qui nous amène à définir des analogues de l'énergie et du vecteur de Runge-Lenz. Nous généralisons pour terminer les équations aux dérivées partielles de la théorie des champs et en particulier l'opérateur de Maxwell.

Mots clés

1 symétrie de Hecke
2 (modified) Reflection Equation Algebra
3 espace de q-Minkowski
4 Identité de Cayley-Hamilton
5 intégrales de mouvement
6 champs de vecteurs tressés
7 opérateur de Laplace
8 opérateur de Maxwell

Analysis and Noncommutative Dynamical Models on q-Minkowski Space Algebra

Abstract

The present thesis deals with the large field of noncommutative geometry. This field is extensively studied because of mathematicians and physicists' common opinion that noncommutative geometry methods are useful tools to describe dynamical processes at Planck length. So the main purpose of this thesis is to provide a generalization of some dynamical models defined on Minkowski space on its q-analog. Since the creation of the Quantum Group theory by Drinfeld, numerous attempts have been made to introduce dynamical models which are covariant under quantum groups. Most interesting are models built on the q-Minkowski space algebra. P. Kulish showed that this algebra is a particular case of the so-called *modified Reflection Equation Algebra* which is linked to an operator called *Hecke symmetry*. So we are defining here dynamical models which are deformations of their classical counterparts. Then we are looking for integrals of dynamics, which leads us to define analogs of energy and the Runge-Lenz vector. At the end of this work, we will generalize the partial differential equations of field theory and particularly Maxwell's operator.

Keywords

1 Hecke symmetry
2 (modified) Reflection Equation Algebra
3 q-Minkowski space algebra
4 Cayley-Hamilton identity
5 integrals of dynamics
6 braided vector fields
7 Laplace operator
8 Maxwell operator

Adresse du Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Valenciennes :

LAMAV
UVHC - LAMAV-ISTV2
Mont Houy
59313 Valenciennes cedex 9

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements au professeur GOUREVITCH qui a accepté d'être mon directeur de thèse, en particulier pour l'intérêt du sujet qu'il m'a proposé et pour sa très grande disponibilité tout au long de ces quatre années de thèse. Il m'a accompagné dans mes premiers pas de chercheurs, ses remarques étaient toujours judicieuses et m'ont beaucoup aidé.

Je remercie également les professeurs Raymond BARRE, Richard KERNER, Vladimir ROUBTSOV et Pavel SAPONOV d'avoir accepté d'être membres de mon jury de soutenance, leurs différentes remarques et questions lors de ma soutenance ont toutes été pertinentes et intéressantes. Je suis particulièrement reconnaissant pour la lecture minutieuse des deux rapporteurs Richard KERNER et Pavel SAPONOV de ce texte qui m'a permis de corriger un certain nombre de coquilles.

Je salue tous les membres du laboratoire LAMAV même si du fait de mon travail d'enseignement au lycée, j'étais un peu éloigné de la vie du laboratoire, j'ai beaucoup apprécié les quelques séminaires auxquels j'ai pu assisté quand mon emploi du temps et mon travail de recherche me laissaient un peu de temps libre.

Je n'oublie pas mes collègues du lycée Pierre Forest à Maubeuge qui ne m'ont pas tous aidé directement dans mon travail de recherche mais qui ont participé à une ambiance de travail très agréable qui m'a été très profitable. Je remercie plus particulièrement les collègues d'anglais qui m'ont aidé à rédiger le résumé en anglais de ce manuscrit et mon collègue de français Pierre SZAJKOWSKI qui a relu mon manuscrit et corrigé un nombre non négligeable de fautes d'orthographe et de syntaxe.

Cette thèse marque la fin de mes études, aussi je tiens à remercier tous les enseignants qui ont participé à ma formation de la maternelle à l'université. Je mesure aujourd'hui avec gratitude la qualité de leur travail.

Je tiens pour finir à remercier de tout coeur mes parents qui ont su m'accompagner et m'encourager tout au long de ma scolarité, ainsi que mon frère Stéphane et ma soeur Claire, leur présence bienveillante m'a toujours été d'un très grand secours. Qu'ils sachent que sans eux, ce texte n'aurait probablement pas vu le jour.

Maubeuge, le 17 juin 2008.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

L'objectif principal de cette thèse est de généraliser certains modèles dynamiques définis sur l'espace de Minkowski sur son q-analogue. Des tentatives d'introduire des modèles dynamiques qui seraient covariants par rapport à l'action de groupes quantiques ont été entrepris juste après la création de la théorie sur les groupes quantiques par Drinfeld [Dr].

Le modèle le plus simple qui peut être muni d'une action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ est le q-analogue de l'oscillateur harmonique. Il est défini par la relation :

$$qxy - yx = 1 \ \text{ avec } \ q \in \mathbb{C}. \tag{0.0.1}$$

Les générateurs x et y peuvent être représentés respectivement par :

$$\widehat{x} : f(x) \longmapsto xf(x)$$

appelé opérateur de création et par :

$$\widehat{y} : f(x) \longmapsto \partial_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

appelé opérateur d'annihilation qui n'est autre que le q-analogue de la dérivée.
En considérant l'analogue "q-commutatif" de la relation (0.0.1) à savoir :

$$qxy - yx = 0$$

nous obtenons le plan de Manin également muni d'une action du groupe $U_q(sl(2))$. En traitant les générateurs x et y comme opérateurs de création et les dérivées introduites dans [WZ] comme opérateurs d'annihilation, nous obtenons un q-analogue de l'espace de Fock.

Plus intéressants sont les modèles qui sont liés au q-analogue de l'espace de Minkowski.
Initialement, l'espace de q-Minkowski a été défini comme un espace homogène du groupe quantique de Lorentz par plusieurs auteurs au début des années 90 (Cf. [LWW] et les références inclues dans cet article). Par la suite, P. Kulish et d'autres ont défini l'algèbre de cet espace comme étant un cas particulier d'une algèbre appelée *Reflection Equation Algebra* (REA) que nous notons $\mathcal{L}_q$ (Cf. [Ku], [Me] et [MM]).
Cette algèbre est définie grâce à un opérateur R appelé tressage :

$$R : V^{\otimes 2} \longrightarrow V^{\otimes 2}$$

où V est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ sur le corps de base $\mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ vérifiant l'équation de Yang-Baxter :

$$(R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R)$$

où I est la matrice unité.
Nous utiliserons dans cette thèse des tressages particuliers appelées symétries de Hecke qui vérifient en plus l'équation de Hecke suivante :

$$(R - qI)\left(R + q^{-1}I\right) = 0$$

sachant que le paramètre non nul $q \in \mathbb{K}$ est considéré comme étant *générique*. Cela signifie qu'une famille dénombrable de valeurs de q est interdite et entre autre que q n'est pas une racine k-ième de l'unité (k étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) ce qui implique que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, [k]_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0 \text{ si } q \neq 1$$

$[k]_q$ étant appelé nombre quantique.
Nous pouvons alors définir les algèbres REA associées à une symétrie de Hecke R engendrées par les n^2 indéterminées $\left(l_i^j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ constituant les coefficients de la matrice de taille $n \times n$: L satisfaisant ainsi la relation :

$$R\,(L \otimes I)\,R\,(L \otimes I) - (L \otimes I)\,R\,(L \otimes I)\,R = 0.$$

Nous nous intéressons en particulier aux algèbres REA que nous appelons standards définies par des symétries de Hecke R_q particulières issues du groupe quantique $U_q\,(sl(n))$. Ces symétries de Hecke sont appelées tressages de Drinfeld-Jimbo (elles sont aussi appelées standards) :

$$R_q = \sum_{i,j=1}^{m} q^{\delta_{i,j}} h_i^j \otimes h_j^i + \sum_{i<j}^{m} \left(q - q^{-1}\right) h_i^i \otimes h_j^j$$

où les éléments h_i^j forment une base naturelle dans l'espace des endomorphismes de V. Ils sont définis dans une base fixée $\{x_k\}$ par les égalités $h_i^j\,(x_k) = \delta_k^j x_i$.
Les algèbres REA $\mathcal{L}_q$ standards possèdent beaucoup de propriétés remarquables :

1. L'algèbre $\mathcal{L}_q$ est une déformation de l'algèbre $Sym\,(gl(n)) \cong \mathbb{K}\,[gl(n)^*]$ car R_q est une déformation de la volte P habituelle (i.e. $R_1 = P$).
   Cela implique, entre autres, que nous retrouvons les dimensions des composantes homogènes du cas classique, autrement dit :

   $$dim\left(\mathcal{L}_q^{(k)}\right) = dim\left(Sym^{(k)}\,(gl\,(n))\right) \text{ pour } q \text{ générique.}$$

   Soulignons que notre algèbre $\mathcal{L}_q$ étant quadratique et graduée, les composantes homogènes $\mathcal{L}_q^{(k)}$ sont parfaitement définies.
   Remarquons que si R_q est une déformation de la super-volte de type $(m|n)$ définie sur $V = V_0 \oplus V_1$ avec $dim\,(V_0) = m$ et $dim\,(V_1) = n$ alors $\mathcal{L}_q$ est une déformation de $U\,(gl\,(m|n))$. Nous avons alors naturellement :

   $$dim\left(\mathcal{L}_q^{(k)}\right) = dim\left(Sym^{(k)}\,(gl\,(m|n))\right) \text{ pour } q \text{ générique.}$$

   Pour une démonstration, on peut se référer à [GPS4].

2. L'algèbre $\mathcal{L}_q$ peut être déformée par des termes linéaires. Définissons l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ qui est le résultat de cette déformation. Nous appelons mREA (*modified* Reflection Equation Algebra) associées à une symétrie de Hecke R, les algèbres engendrées par les n^2 indéterminées $\left(l_i^j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ constituant les coefficients de la matrice de taille $n \times n$: L qui satisfont la relation :

   $$R\,(L \otimes I)\,R\,(L \otimes I) - (L \otimes I)\,R\,(L \otimes I)\,R = \hbar\,(R\,(L \otimes I) - (L \otimes I)\,R)\,.$$

   L'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ associée à R_q est filtrée de telle manière que l'algèbre graduée associée $Gr\ \mathcal{L}_{\hbar,q}$ est isomorphe à celle de $\mathcal{L}_q$ (pour q générique). Ce fait est la conséquence d'un théorème du type Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) qui est discuté dans [GPS4].
   L'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ peut être déduite de l'algèbre $\mathcal{L}_q$ par un changement de générateur :

   $$l_i^j \mapsto l_i^j - \frac{\hbar}{q - q^{-1}} \delta_i^j \text{ avec } q \neq 1. \qquad (0.0.2)$$

Nous en déduisons donc que les algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ et $\mathcal{L}_q$ sont isomorphes si $q \neq 1$. Néanmoins pour $q = 1$, cet isomorphisme n'existe pas.
Si R_q est une déformation de la volte habituelle, quand $q \to 1$, l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ devient l'algèbre $U\left(gl(n)_\hbar\right)$. Sachant que si nous considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ muni du crochet $[\ ,\ ]$ alors nous notons $\mathcal{G}_\hbar$ l'algèbre de Lie munie du crochet $\hbar\,[\ ,\ ]$. Nous récupérons donc l'algèbre $U\left(gl(n)\right)$ si nous passons aux limites $q \to 1$ et $\hbar \to 1$. De la même manière naturellement, nous récupérons l'algèbre $U\left(gl\left(m|n\right)\right)$ si R_q est une déformation de la super-volte de type $(m|n)$.

C'est pourquoi, nous nous intéressons aux représentations de l'algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ qui sont des déformations de celles de $U\left(gl(n)\right)$ ou de $U\left(gl\left(m|n\right)\right)$ en fonction de la volte initiale. (Notons que nous pouvons déduire une représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ d'une représentation de $\mathcal{L}_q$ et inversement pour $q \neq 1$ grâce à notre changement de générateurs précédent.)
Remarquons au passage qu'il existe des représentations de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ qui ne sont pas des déformations du cas classique (Cf. [Mu1]). Mais ces représentations ne sont pas "équivariantes". Nous définirons explicitement cette propriété dans le chapitre 1 ainsi que les propriétés générales des algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.

Présentons d'autres propriétés remarquables des algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ liées à certaines symétries de Hecke. Parmi toutes les symétries de Hecke, nous nous intéressons à celles qui sont dites *anti-inversibles*, ce qui signifie qu'il existe une matrice Ψ de taille $n^2 \times n^2$ ayant la propriété suivante :

$$R_{ia}^{jb}\Psi_{bk}^{as} = \delta_i^s\delta_k^j = \Psi_{ia}^{jb}R_{bk}^{as}.$$

Nous définissons alors à partir de Ψ les matrices de taille $n \times n$ B et C ainsi :

$$B_i^j := \Psi_{ki}^{kj} \ \text{ et } \ C_i^j := \Psi_{ik}^{jk}.$$

Ces deux matrices nous permettent de définir deux choses :

1. Une représentation ρ de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ sur V définie ainsi $\rho\left(l_i^j\right) \triangleright x_k = \hbar B_k^j x_i$ sachant que $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base de V.
2. La *trace quantique* sur les puissance de L définie ainsi : $Tr_q\left(L^k\right) := Tr\left(CL^k\right)$. Nous démontrons dans le chapitre 1 que les traces quantiques des puissances de L sont au centre de notre algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.

Nous pouvons de plus traiter les algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ comme algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie tressée. En effet, nous pouvons réécrire les relations définissant cette algèbre sous la forme suivante :

$$l_k^m l_p^r - Q\left(l_k^m l_p^r\right) = \hbar\left[l_k^m ; l_p^r\right].$$

$Q : \mathcal{L}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes 2}$ étant une application linéaire en notant $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel engendré par les coefficients de la matrice L : $\mathcal{L} = vect\left(\left(l_i^j\right)_{1\leq i,j\leq n}\right)$.
$[\ ;\ ] : \mathcal{L}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}$ étant une application linéaire.
Nous pouvons alors finalement définir *l'action adjointe* de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\hbar,q}$:

$$\rho\left(l_i^j\right) \triangleright l_k^l = \left[l_i^j ; l_k^l\right].$$

Comme c'est indiqué dans [GPS4] (sans démonstration), cette action définit une représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.

Citons une dernière propriété très importante : la matrice L associée à ces algèbres vérifie une équation du type Cayley-Hamilton avec ses coefficients appartenant au centre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$. Nous pouvons alors envisager les zéros de ces polynômes, appelées aussi valeurs propres de L, qui sont des éléments de l'extension algébrique du centre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$, ou de son corps de fraction en fonction du tressage R_q initial. La nécessité d'utiliser le corps de fraction est motivée par le fait que dans le "q-super-cas" le coefficient principal du polynôme de Cayley-Hamilton n'est pas un nombre.

Si $R_q(2) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ avec $q \in \mathbb{K}$ et $\zeta = q - q^{-1}$ alors notre algèbre REA associée $\mathcal{L}_q$ est appelée algèbre de q-Minkowski (notons que cette symétrie de Hecke est issue du groupe quantique $U_q(sl(2))$ et est par conséquent standard pour notre terminologie). Mais par analogie avec le cas classique, nous appelons $\mathcal{L}_q$ l'algèbre de l'espace de q-Minkowski (ou pour simplifier l'espace de q-Minkowski). Nous consacrons à cette algèbre et à son super-analogue, le chapitre 2. Notons que le plan de Manin n'est autre que l'algèbre $R_q\left(2\right)$-symétrique correspondant à cette symétrie de Hecke. La symétrie de Hecke correspondant au super-analogue étudiée dans le chapitre 2 est $R_q\left(1|1\right) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$.

Nous explicitons dans ce chapitre les deux algèbres mREA associées à nos deux symétries de Hecke précédentes, que nous notons respectivement $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ et $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(1|1\right)$, en décrivant les équations qui définissent ces deux algèbres et les représentations de bases issus de la théorie générale de la représentation des algèbres mREA travaillées dans le chapitre 1. Même si nous nous intéressons dans le cadre de cette thèse davantage à l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$, nous étudions également $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(1|1\right)$ afin de comparer les deux structures issues de la déformation classique de l'algèbre classique "paire" pour l'une et de la super-algèbre pour l'autre.

Notons que, dans ces deux algèbres, nous pouvons travailler une théorie de la représentation plus riche que dans le cas général, puisque nous pouvons définir pour elles des modules de Verma. Ces modules de Verma sont générés par un vecteur de plus haut poids. Le poids de ce vecteur nous servira de paramètre pour les différentes représentations que nous pouvons définir. Il en est de même pour nos modèles dynamiques.

Nous pouvons expliciter les trinômes de Cayley-Hamilton sur nos deux algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ et $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(1|1\right)$. Nous en profitons pour démontrer, à partir des équations définissant nos deux algèbres, que les coefficients de nos trinômes sont au centre de nos algèbres respectives. Cela nous permet de définir les valeurs propres associées à ces trinômes, qui deviennent numériques si nous représentons les algèbres dans les modules de Verma.

En utilisant, dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ notre trace quantique sur la matrice L, nous pouvons exprimer les quantités $Tr_q\left(L^k\right)$ via les valeurs propres de L. Nous pouvons de plus quotienter $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ par cette trace quantique et définir ainsi l'algèbre $S\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ et l'hyperboloïde quantique (que nous pouvons aussi bien appeler sphère quantique si le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Notons que nous pouvons également définir l'hyperboloïde quantique ainsi que d'autre objets que nous introduisons dans cette thèse grâce à l'approche de Lyubashenko-Sudbery [LS]. Nous comparons cette approche avec la notre dans le chapitre 2. Nous appliquons cette approche en particulier à la construction de modules de Verma de $S\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$, ce qui nous permet de construire des représentations finies de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ et $S\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$.

Pour résumer, nous étudions donc les propriétés générales des algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ dans le chapitre 1 et nous consacrons le chapitre 2 à une étude plus fine sur les cas particuliers que sont les algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ et $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(1|1\right)$.

Dans le chapitre 3, nous définissons certains modèles dynamiques, qui sont des déformations de modèles classiques invariants par rapport à l'action d'un groupe G. Nous voulons naturellement que ces déformations soient des modèles covariants par rapport au groupe quantique correspondant à G. L'espace des phases de nos modèles déformés n'est autre, alors, que notre espace de q-Minkowski $\mathcal{L}_q$ ou son analogue "q-non commutatif" $\mathcal{L}_{\hbar,q}$. Expliquons pourquoi nous considérons que $\mathcal{L}_q\left(2\right)$ associée à la symétrie de Hecke $R_q\left(2\right)$ est le q-analogue de l'espace de Minkowski.
Considérons l'application usuelle d'un espace de Minkowski, dans l'espace des matrices hermitiennes définies ainsi :

$$\overrightarrow{x} = \left(x_0; x_1; x_2; x_3\right) \longmapsto L = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \qquad (0.0.3)$$

de telle sorte que $det\left(L\right) = \|\overrightarrow{x}\|$ où $\|\ \|$ est la norme de Minkowski. En posant :

$$a = x_0 + x_3,\ b = x_1 + ix_2,\ c = x_1 - ix_2,\ d = x_0 - x_3$$

nous pouvons réécrire L ainsi :

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors en supposant que a, b, c, d sont générateurs de l'algèbre $Sym\,(gl(2))$ nous pouvons les munir d'une action du groupe $GL\,(2, \mathbb{C})$. Dés lors l'algèbre $\mathcal{L}_q\,(2)$ peut à son tour être munie d'une action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ qui est une déformation du groupe $SL\,(2) \subset GL\,(2)$. (Notons que la matrices (0.0.3) est munie de l'action du groupe $U\,(2)$ dont la complexification est $GL\,(2, \mathbb{C})$. Donc nous considérons plutôt l'analogue quantique de la complexification de l'algèbre de l'espace de Minkowski et de même pour le groupe de symétrie de cet espace.) Notons aussi que dans [Ku], une involution de $\mathcal{L}_q\,(2)$ est introduite. Elle est utilisée pour définir la "forme compacte" de $\mathcal{L}_q\,(2)$. Nous ne regardons pas cette "forme compacte" car elle ne peut pas être traitée comme une algèbre réelle.

Sur cette dernière algèbre à savoir $\mathcal{L}_q\,(2)$ (aussi bien que sur son analogue "q-non commutatif" $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$), nous considérons des modèles de deux types.
D'abord nous introduisons quelques modèles dans l'esprit de la mécanique classique. Nous envisageons ainsi le mouvement d'un point massique dans un champ à force centrale. La dynamique d'un tel point est décrite par l'équation :

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = -\overrightarrow{r} f(r)$$

où $\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{r} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant la représentation matricielle (0.0.3) où $x_0 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$, nous pouvons reformuler cette dynamique en utilisant la matrice L. De cette réalisation matricielle, nous pouvons transférer cette équation sur les algèbres $\mathcal{L}_q\,(2)$ et $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$. Il nous faut néanmoins définir un analogue de la composante radiale $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En tant que tel, nous utilisons alors la quantité $\rho = \sqrt{\frac{Tr_q(L^2)}{2}}$. Cette analogie est motivée par le fait que la quantité ρ intervient dans l'équation de Cayley-Hamilton dans le cas déformé, de la même manière que r intervient dans l'équation de Cayley-Hamilton dans le cas classique.
En exploitant cette idée (ou son analogue dans le cas de la dimension 4), nous cherchons des intégrales de mouvement des modèles dynamiques en question. Aussi, nous définissons un analogue quantique de l'énergie et de la quantité $r^2\dot{\varphi}$ où $(r; \varphi)$ sont les coordonnées polaires dans le plan de mouvement. C'est ainsi, dans ce dernier cas, que nous trouvons un analogue quantique du vecteur de Runge-Lenz.
Nous étudions, de plus, des analogues non commutatifs des dynamiques dans les espaces-temps courbés. Notons que en regardant les modèles ci-dessus sur les algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ et $\mathcal{SL}_{\hbar,q}\,(2)$, nous pouvons nous imaginer les éléments de ces algèbres représentés dans une famille (intégrale continue) de modules de Verma M_λ. La relation entre le plus haut poids λ de tels modules et les valeurs propres μ_1 et μ_2 issues de la relation de Cayley-Hamilton (ou la quantité ρ ci-dessus) est calculée dans le chapitre 2. Aussi, toutes les intégrales de mouvement qui sont écrites en termes de quantités μ_i ou $Tr_q\left(L^2\right)$ peuvent être présentés en fonction du poids λ. Notre présentation est donc un peu différente de ce que l'on appelle les "observables" de la Mécanique Quantique habituelle où celles-ci sont traitées comme des opérateurs dans un espace de Hilbert, chez nous ce sont des opérateurs dans une famille de modules de Verma.

Le deuxième problème que nous considérons dans le chapitre 3 consiste à écrire les équations aux dérivées partielles de la théorie des champs (nous pensons en particulier aux équations de Maxwell), et à se demander comment les généraliser au cas non commutatif. C'est pourquoi nous abordons également, dans notre chapitre 3, la définition de q-analogues d'opérateurs de Maxwell sur nos algèbres de l'espace de q-Minkowski et certains de ses quotients. Ces algèbres sont des déformations des algèbres classiques $\mathbb{K}\left[\mathbb{R}^3\right]$, $\mathbb{K}\left[\mathbb{R}^4\right]$et $\mathbb{K}\,[\mathcal{H}]$. Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et sachant que la notation $\mathbb{K}\,[\mathcal{M}]$ signifie l'algèbre coordonnée d'une variété affine régulière $\mathcal{M}$ et que :

$$\mathcal{H} = \left\{(u; v; w) \in \mathbb{R}^3 | 4uw + v^2 = \rho^2; \rho \neq 0\right\}$$

est une hyperboloïde. Nous pouvons de plus définir une action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ sur ces algèbres déformées compatibles avec leur produit.

De manière général, notre problème est le suivant : étant donné un opérateur différentiel $\mathcal{D}$ sur une variété affine $\mathcal{M}$ ou sur un fibré sur $\mathcal{M}$, quel est son analogue sur l'algèbre qui est une déformation de $\mathbb{K}\,[\mathcal{M}]$ ou de l'algèbre total du fibré sur $\mathcal{M}$? Naturellement, si notre opérateur $\mathcal{D}$ est covariant par rapport à un groupe G, nous voulons que son analogue déformé soit covariant par rapport au groupe quantique correspondant.

Comme l'opérateur de Maxwell est défini sur l'espace des formes différentielles, nous discutons d'abord le problème des définitions possibles de son analogue sur les algèbres non commutatives.
Nous connaissons plusieurs approches pour définir des analogues des formes différentiels et de l'opérateur de De Rham sur une algèbre non commutative donnée $\mathcal{A}$.
Une première approche consiste à définir des *forme différentielles universelles* sans aucune relation de commutation entre des "fonctions" $a \in \mathcal{A}$ et des "différentielles" db. Néanmoins, la règle de Leibniz est préservé dans cette approche. Mais même pour les algèbres commutatives l'algèbre différentielle correspondante est beaucoup plus grande que celle usuelle des formes différentielles.
Si cette algèbre est de plus liée à un tressage (que nous définisson dans le chapitre 1), on peut chercher une extension de ce tressage sur l'espace des formes différentiels (Cf. [Ku, IP, FP]). Cette extension peut alors permettre de réduire l'espace des formes différentielles universelles à une "taille classique". Même si cette approche nous amène à de bonnes déformations de plusieurs algèbres différentielles sur un espace vectoriel, elle ne permet pas de restrictions compatibles à une sous-variété comme l'hyperboloïde quantique.
Une troisième approche définie par A.Connes repose sur la notion de triplets spectrals. Dans cette approche, le rôle des formes différentiels est joué par les classes des cycles de Hochschild [C1, C2].

Toutes ces approches ne permettent pas de définir de bonnes déformations des espaces des formes différentielles sur une variété et par conséquent ne conduisent pas à des objets déformés de manière lisse. C'est pourquoi notre approche est différente. Nous nous inspirons en effet de l'approche de Serre-Swan, qui exploite le fait que tout fibré tangent sur une variété affine régulière peut-être réalisé en tant que module projectif (Cf. [A, AG]). En effet, nous pouvons écrire un tel $\mathcal{A}$-module pour une algèbre $\mathcal{A}$ donnée sous la forme $e\mathcal{A}^{\oplus n}$, avec l'idempotent $e \in Mat_n(\mathcal{A})$. $Mat_n(\mathcal{A})$ est l'ensemble des matrices carrés de taille n à coefficients dans $\mathcal{A}$. De plus, il est démontré dans [R] que si $\mathcal{A}_\hbar$ est une déformation formelle de $\mathcal{A}$, alors n'importe quel idempotent $e \in Mat(\mathcal{A})$ peut être déformé en un idempotent $e_\hbar \in Mat(\mathcal{A}_h)$. (Nous avons même désormais une formule explicite pour établir $e_\hbar$ (Cf. [BB])). Notons que les polynômes de Cayley-Hamilton dont nous avons parlé précédemment permettent de construire de tels idempotents sur l'hyperboloïde quantique.

Nous avons besoin des analogues des champs de vecteurs (en particulier des dérivées partielles) pour définir les opérateurs différentiels sur une algèbre quantique ou un analogue quantique d'un fibré vectoriel. Discutons donc des candidats possibles au rôle de champs de vecteurs sur les algèbres en question.
Regardons d'abord les rotations infinitésimales X, Y, Z sur la sphère S^2 : $x^2+y^2+z^2=r^2$:

$$\begin{cases} X = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z} \\ Y = x\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial x} \\ Z = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Nos trois rotations infinitésimales vérifient l'égalité :

$$xX + yY + zZ = 0.$$

Nous regardons de même trois rotations hyperboliques infinitésimales U, V, W sur l'hyperboloïde $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} U = -2u\dfrac{\partial}{\partial v} + v\dfrac{\partial}{\partial w} \\ V = 2u\dfrac{\partial}{\partial u} - 2w\dfrac{\partial}{\partial w} \\ W = -v\dfrac{\partial}{\partial u} + 2w\dfrac{\partial}{\partial v} \end{cases}$$

Nos trois rotations hyperboliques infinitésimales vérifient l'égalité :

$$2wU + vV + 2uW = 0.$$

Qu'en est-il de la généralisation sur l'hyperboloïde quantique des champs de vecteurs ?
La tentation est forte d'utiliser le groupe quantique $U_q(sl(2))$ et ses trois générateurs H, X, Y ainsi qu'un de ses coproduits Δ nous permettant de généraliser la formule de Leibniz. Néanmoins, cette généralisation n'est pas satisfaisante, car nos générateurs H, X, Y ne vérifient aucune égalité du type précédent. Nous devons donc nous y prendre autrement. Nous définissons l'analogue tressé du crochet de Lie de $sl(2)$, ce qui nous permet de définir les champs de vecteurs tressés U^q, V^q, W^q sur l'hyperboloïde quantique qui vérifient alors l'égalité suivante :

$$q\,[2]_q\, wU^q + vV^q + q^{-1}\,[2]_q\, uW^q = 0$$

qui est une déformation de la relation précédente.

Ces champs de vecteurs tressés sont les q-analogues des champs de vecteurs U, V, W qui sont tangents aux orbites dans $sl\,(2)^*$ par rapport à l'action coadjointe du groupe $SL\,(2)$. Soulignons aussi que les champs de vecteurs U, V, W sont poissonniens par rapport au crochet de Poisson-Lie linéaire défini sur $sl\,(2)^*$.
Des analogues tressés des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}$ sont plus difficiles à définir. Pour le faire, nous introduisons d'abord le q-analogue de la dérivée $\frac{\partial}{\partial r}$ où r est la composante radiale dans $\mathbb{R}^3$ et après nous exprimons les q-analogues des dérivées $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}$ en fonction de cette dérivée et nos champs de vecteurs tressés U^q, V^q, W^q.
Finalement, les opérateurs U^q, V^q, W^q ainsi que les dérivées partielles par les générateurs de notre algèbre nous permettent d'écrire explicitement l'analogue quantique de l'opérateur de Laplace sur toutes les algèbres quantiques en question.
Quand à l'opérateur de Maxwell, rappelons que dans le cas classique il est défini sur une variété donnée $\mathcal{M}$ ainsi :

$$\omega \mapsto \delta d\omega, \quad \delta = -\ast^{-1} d\ast$$

où $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ est une 1-forme différentielle sur $\mathcal{M}$, d est l'opérateur de De Rham et $\ast$ est l'étoile de Hodge. (Remarquons que sur l'espace classique de Minkowski, l'opérateur de Maxwell est défini sur les 2-formes différentielles $\Omega^2\left(\mathbb{R}^4\right)$ mais nous pouvons facilement revenir à la forme précédente.)

Finalement, en réalisant l'espace des formes différentielles quantiques en tant que module projectif en utilisant les champs de vecteurs et les dérivées partielles tressés, nous arrivons à définir le q-analogue de l'opérateur de Maxwell pour toutes les algèbres quantiques en question.

Notre dernière étape consiste à montrer qu'en munissant les ingrédients des opérateurs de Maxwell tressés de l'action appropriée du groupe quantique $U_q(sl(2))$, nous arrivons à un opérateur $U_q(sl(2))$-invariant.

Soulignons que les champs de vecteurs tressés peuvent être utilisés pour définir un analogue de l'opérateur de Dirac mais nous ne considérons pas cet opérateur dans cette thèse.

Pour conclure, nous voudrions situer notre étude dans le vaste domaine que constitue la "géométrie non commutative". Ce terme est largement utilisé depuis les années 80 quand il est apparu dans les publications de A. Connes. L'intérêt de ce domaine est motivée par l'idée qu'à l'échelle de Planck, la géométrie de l'espace temps devient non commutative. Notons que les effets non commutatifs apparaissent dans le procédé de quantification de la dynamique des cordes (Cf. [SW]). Nous ne donnons pas ici la liste exhaustive des références à ce sujet mais nous pouvons néanmoins citer quelques monographies et aperçus de ce sujet, à savoir [GVF, C1, C2].

Plus précisément, nous pouvons appeler notre domaine de recherche "géométrie tressée" qui est un cas particulier de la géométrie non commutative au sens large. Nous employons le terme "tressé" pour souligner le fait que tous les objets que nous travaillons sont liés à un tressage. Nous avons expliqué dans le chapitre 1 que ces tressages peuvent être de type suffisamment général. Ce qui différencie notre domaine de recherche de la géométrie non commutative au sens plus conventionnel consiste dans le fait que les outils habituels de l'analyse et de la géométrie tels que la permutation et la trace sont remplacés par leur analogue "tressé". La nécessité de ce remplacement est motivé par la structure spécifique des algèbres que nous travaillons. Ces algèbres ressemblent en quelque sorte aux super-algèbres pour lesquelles la volte et la trace deviennent respectivement super-volte et super-trace. Mais contrairement aux super-algèbres, l'algèbre de l'espace de q-Minkowski apparaît dans la quantification du crochet de Poisson (appelé de Semenov-Tian-Shansky dans [GPS4]).

L'objectif général de cette thèse est donc double. D'un côté, nous développons certains aspects de la géométrie tressé liés aux tressages de type de Hecke. D'un autre côté, nous étudions les objets et modèles "tressés" qui sont issus de la déformation des objets et des modèles classiques sur l'espace de Minkowski. Dans ce dernier cas, notre souci principal est d'assurer de bonnes propriétés "déformationnelles" des objets tressés ; ce qui distingue notre étude de la plupart des publications sur la géométrie non commutative.

Mentionnons également une série d'articles (Cf. [Si, BLT] et leurs références) consacrés à l'espace de κ-Minkowski. Cet espace est défini en tant qu'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble. Cette algèbre est différente de la notre et son étude ne nécessite pas les méthodes de la géométrie tressé même si on la munit souvent de l'action d'une algèbre de Hopf.

Chapitre 1

Reflection Equation Algebra : Propriétés générales

1.1 R-matrices de type de Hecke (Eléments de classification, collage)

1.1.1 Le tressage R

Nous travaillons dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Notons $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ une base de V.
Nous considérons une application linéaire R (appelée tressage) :

$$R : V^{\otimes 2} \longrightarrow V^{\otimes 2}$$

qui satisfait l'équation de Yang-Baxter suivante :

$$(R\otimes I)(I\otimes R)(R\otimes I) = (I\otimes R)(R\otimes I)(I\otimes R). \tag{1.1.1}$$

Cette équation peut aussi se noter ainsi :

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$$

avec $R_{12} = R\otimes I$ et $R_{23} = I\otimes R$.
A partir de notre base $\{x_i\}_{1\le i\le n} \subset V$, nous définissons la base correspondante dans $V^{\otimes 2}$: $\{x_i\otimes x_j\}_{1\le i,j\le n} \subset V^{\otimes 2}$, nous pouvons identifier l'opérateur R et sa matrice de taille $n^2\times n^2$ dans cette base grâce à la formule :

$$R\,(x_i\otimes x_j) = R_{ij}^{kl} x_k\otimes x_l$$

sachant qu'ici l'indice inférieur numérote les lignes de la matrice et l'indice supérieur numérote les colonnes.

1.1.2 L'équation de Hecke

Les tressages R que nous allons étudier et utiliser vérifient de plus l'équation de Hecke :

$$(R - qI)\left(R + q^{-1}I\right) = 0 \tag{1.1.2}$$

avec $q \in \mathbb{K}$ qui est supposé être *générique*. Ce qui signifie entre autres que q n'est pas une racine nième de l'unité ; autrement dit :

$$\forall m \ge 2, \quad q^m \ne 1.$$

Cette contrainte a pour conséquence que :

$$\forall m \in \mathbb{Z}^*, \quad [m]_q \ne 0.$$

Tout cela nous amène naturellement à la définition suivante :

Définition :

Une symétrie de Hecke est un tressage vérifiant l'équation de Hecke.
Autrement dit, R est une symétrie de Hecke si et seulement si R vérifie les deux équations de Yang-Baxter (1.1.1) et de Hecke (1.1.2).

Remarque :

Dans le cas particulier où $q = 1$, notre symétrie de Hecke est dite involutive car elle vérifie l'équation $R^2 = I$.

1.1.3 Eléments de classification de tressages de Hecke

Nous considérons dans ce paragraphe une symétrie de Hecke R vérifiant donc les équations de Yang-Baxter (1.1.1) et l'équation de Hecke (1.1.2).

Définitions :

Nous notons :

$$\begin{aligned} I_+ =& Im\left(q^{-1}I + R\right) \subset V^{\otimes 2} \\ I_- =& Im\left(qI - R\right) \subset V^{\otimes 2} \end{aligned}$$

respectivement les sous-espaces R-symétriques et R-anti-symétriques de $V^{\otimes 2}$.
L'algèbre quotient $T\left(V\right) / \left\langle I_-\right\rangle$, où $T\left(V\right)$ est l'algèbre tensorielle libre sur V et $\left\langle I_-\right\rangle$ est l'idéal de $T\left(V\right)$ engendré par l'espace I_-, est appelée algèbre symétrique de l'espace V. Nous la notons $\Lambda_+\left(V\right)$.
De la même manière l'algèbre quotient $T\left(V\right) / \left\langle I_+\right\rangle$ est appelée algèbre anti-symétrique de l'espace V. Nous la notons $\Lambda_-\left(V\right)$.
Nous pouvons alors introduire les séries de Hilbert-Poincaré :

$$\mathcal{P}_+\left(t\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} dim\ \Lambda_+^k\left(V\right) t^k, \quad \mathcal{P}_-\left(t\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} dim\ \Lambda_-^k\left(V\right) t^k$$

où $\Lambda_+^k\left(V\right)$ et $\Lambda_-^k\left(V\right)$ sont les composantes homogènes de degré k.

Le théorème suivant est démontré dans [G2] :

Théorème :

Pour q générique la relation suivante est vérifiée :

$$\mathcal{P}_+\left(t\right) \mathcal{P}_-\left(-t\right) = 1.$$

Exemples :

- Si $R = P$ où P est la volte usuelle alors $\mathcal{P}_-\left(t\right) = \left(1+t\right)^n$, avec $n = dim\left(V\right)$.

- Si $V = V_0 \oplus V_1$, $sdim\ V = \left(m|n\right)$ (ce qui signifie que $dim\left(V_0\right) = m$ et $dim\left(V_1\right) = n$) et R est la super-volte correspondante alors $\mathcal{P}_-\left(t\right) = \frac{(1+t)^m}{(1-t)^n}$.

Définition :

R et l'espace V sont dits *pairs* si $\mathcal{P}_-$ est un polynôme unitaire et *impairs* si $\mathcal{P}_+$ est un polynôme unitaire.
Si R est une symétrie de Hecke paire, le degré $p = deg\left(\mathcal{P}_-\right)$ est appelé *rang* de R.
R et l'espace V sont de type $(p|r)$ (ou de bi-rang $(p|r)$) si $\mathcal{P}_-$ est une fonction rationnelle irréductible dont le degré du numérateur est p et le degré du dénominateur est r.

1.1.4 Collage

Théorème :

Soient $R_1 : V_1^{\otimes 2} \longrightarrow V_1^{\otimes 2}$ et $R_2 : V_2^{\otimes 2} \longrightarrow V_2^{\otimes 2}$ deux symétries de Hecke.
Nous notons $V = V_1 \oplus V_2$.
Nous définissons l'opérateur $R : V \to V$ tel que $R_{|V_i^{\otimes 2}} = R_i$ pour $i = 1, 2$ et :

$$\forall x \in V_1,\ \forall y \in V_2 : \quad R\left(x \otimes y\right) = y \otimes x + \zeta x \otimes y \quad \text{et} \quad R\left(y \otimes x\right) = x \otimes y \quad \text{avec} \quad \zeta = q - q^{-1}.$$

Alors R est une symétrie de Hecke.

Preuve :

Montrons pour commencer que R vérifie l'équation de Yang-Baxter (1.1.1) sur $V^{\otimes 3}$.

De manière évidente l'équation (1.1.1) est vérifiée sur $V_1^{\otimes 3}$ et $V_2^{\otimes 3}$.

Nous notons pour $x, y \in V_i^{\otimes 2}$ $\ i = 1, 2 : R\left(x \otimes y\right) = x' \otimes y'$.

Sur $V_1^{\otimes 2} \otimes V_2$:
Soit $x \otimes y \otimes z \in V_1^{\otimes 2} \otimes V_2$:

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{12}R_{23}\left(x' \otimes y' \otimes z\right) \\
&= R_{12}\left(x' \otimes z \otimes y' + \zeta x' \otimes y' \otimes z\right) \\
&= z \otimes x' \otimes y' + \zeta x' \otimes z \otimes y' + \zeta R\left(x' \otimes y'\right) \otimes z \\
&= z \otimes x' \otimes y' + \zeta x' \otimes z \otimes y' + \zeta x \otimes y \otimes z + \zeta^2 x' \otimes y' \otimes z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{23}R_{12}R_{23}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{23}R_{12}\left(x \otimes z \otimes y + \zeta x \otimes y \otimes z\right) \\
&= R_{23}\left(z \otimes x \otimes y + \zeta x \otimes z \otimes y + \zeta x' \otimes y' \otimes z\right) \\
&= z \otimes x' \otimes y' + \zeta x \otimes y \otimes z + \zeta x' \otimes z \otimes y' + \zeta^2 x' \otimes y' \otimes z \\
&= R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right)
\end{aligned}$$

Sur $V_1 \otimes V_2 \otimes V_1$:
Soit $x \otimes y \otimes z \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_1$:

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{12}R_{23}\left(y \otimes x \otimes z + \zeta x \otimes y \otimes z\right) \\
&= R_{12}\left(y \otimes x' \otimes z' + \zeta x \otimes z \otimes y\right) \\
&= x' \otimes y \otimes z' + \zeta x' \otimes z' \otimes y \\
R_{23}R_{12}R_{23}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{23}R_{12}\left(x \otimes z \otimes y\right) \\
&= R_{23}\left(x' \otimes z' \otimes y\right) \\
&= x' \otimes y \otimes z' + \zeta x' \otimes z' \otimes y \\
&= R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right)
\end{aligned}$$

Sur $V_2 \otimes V_1^{\otimes 2}$:
Soit $x \otimes y \otimes z \in V_2 \otimes V_1^{\otimes 2}$:

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{12}R_{23}\left(y \otimes x \otimes z\right) \\
&= R_{12}\left(y \otimes z \otimes x\right) \\
&= y' \otimes z' \otimes x \\
R_{23}R_{12}R_{23}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{23}R_{12}\left(x \otimes y' \otimes z'\right) \\
&= R_{23}\left(y' \otimes x \otimes z'\right) \\
&= y' \otimes z' \otimes x \\
&= R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right)
\end{aligned}$$

Sur $V_2^{\otimes 2} \otimes V_1$:
Soit $x \otimes y \otimes z \in V_2^{\otimes 2} \otimes V_1$:

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{12}R_{23}\left(x' \otimes y' \otimes z\right) \\
&= R_{12}\left(x' \otimes z \otimes y'\right) \\
&= z \otimes x' \otimes y' \\
R_{23}R_{12}R_{23}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{23}R_{12}\left(x \otimes z \otimes y\right) \\
&= R_{23}\left(z \otimes x \otimes y\right) \\
&= z \otimes x' \otimes y' \\
&= R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right)
\end{aligned}$$

Sur $V_2 \otimes V_1 \otimes V_2$:
Soit $x \otimes y \otimes z \in V_2 \otimes V_1 \otimes V_2$:

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{12}R_{23}\left(y \otimes x \otimes z\right) \\
&= R_{12}\left(y \otimes x' \otimes z'\right) \\
&= x' \otimes y \otimes z' + \zeta y \otimes x' \otimes z' \\
R_{23}R_{12}R_{23}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{23}R_{12}\left(x \otimes z \otimes y + \zeta x \otimes y \otimes z\right) \\
&= R_{23}\left(x' \otimes z' \otimes y + \zeta y \otimes x \otimes z\right) \\
&= x' \otimes y \otimes z' + \zeta y \otimes x' \otimes z' \\
&= R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right)
\end{aligned}$$

Sur $V_1 \otimes V_2^{\otimes 2}$:
Soit $x \otimes y \otimes z \in V_1 \otimes V_2^{\otimes 2}$:

$$\begin{aligned}
R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{12}R_{23}\left(y \otimes x \otimes z + \zeta x \otimes y \otimes z\right) \\
&= R_{12}\left(y \otimes z \otimes x + \zeta y \otimes x \otimes z + \zeta x \otimes y' \otimes z'\right) \\
&= y' \otimes z' \otimes x + \zeta x \otimes y \otimes z + \zeta y' \otimes x \otimes z' + \zeta^2 x \otimes y' \otimes z' \\
R_{23}R_{12}R_{23}\left(x \otimes y \otimes z\right) &= R_{23}R_{12}\left(x \otimes y' \otimes z'\right) \\
&= R_{23}\left(y' \otimes x \otimes z' + \zeta x \otimes y' \otimes z'\right) \\
&= y' \otimes z' \otimes x + \zeta y' \otimes x \otimes z' + \zeta x \otimes R\left(y' \otimes z'\right) \\
&= y' \otimes z' \otimes x + \zeta y' \otimes x \otimes z' + \zeta x \otimes y \otimes z + \zeta^2 x \otimes y' \otimes z' \\
&= R_{12}R_{23}R_{12}\left(x \otimes y \otimes z\right)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons facilement que R vérifie l'équation de Yang-Baxter (1.1.1) sur $V^{\otimes 3}$.

Montrons maintenant que R vérifie l'équation de Hecke sur $V^{\otimes 2}$.

De manière évidente, R vérifie l'équation de Hecke sur $V_1^{\otimes 2}$ et $V_2^{\otimes 2}$.

Sur $V_1 \otimes V_2$
Soit $x \otimes y \in V_1 \otimes V_2$:

$$\begin{aligned} R^2 (x \otimes y) &= R (y \otimes x + \zeta x \otimes y) \\ &= x \otimes y + \zeta y \otimes x + \zeta^2 x \otimes y \\ &= (I + \zeta R) (x \otimes y) \end{aligned}$$

Sur $V_2 \otimes V_1$
Soit $x \otimes y \in V_2 \otimes V_1$:

$$\begin{aligned} R^2 (y \otimes x) &= R (x \otimes y) \\ &= y \otimes x + \zeta x \otimes y \\ &= (I + \zeta R) (y \otimes x) \end{aligned}$$

Nous en déduisons facilement que R vérifie l'équation de Hecke (1.1.2) sur $V^{\otimes 2}$. ■

Exemples :

1. Nous démontrons que l'opérateur sur l'espace vectoriel $V = \langle x_1; x_2 \rangle$ de dimension 2 suivant vérifie l'équation de Yang-Baxter (1.1.1) et de Hecke (1.1.2) grâce au théorème de collage :

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^{11} & R_{11}^{12} & R_{11}^{21} & R_{11}^{22} \\ R_{12}^{11} & R_{12}^{12} & R_{12}^{21} & R_{12}^{22} \\ R_{21}^{11} & R_{21}^{12} & R_{21}^{21} & R_{21}^{22} \\ R_{22}^{11} & R_{22}^{12} & R_{22}^{21} & R_{22}^{22} \end{pmatrix} \text{ avec } q \in \mathbb{K} \text{ et } \zeta = q - q^{-1}.$$

   En effet, si nous considérons les opérateurs R_1 et R_2 qui opèrent respectivement sur $\langle x_1 \rangle$ et $\langle x_2 \rangle$ ainsi :

$$R_1 (x_1 \otimes x_1) = q x_1 \otimes x_1; \quad R_2 (x_2 \otimes x_2) = q x_2 \otimes x_2.$$

   R_1 et R_2 vérifient trivialement les équations de Yang-Baxter et de Hecke.
   Nous en déduisons donc d'après le théorème de collage que R vérifie les équations de Yang-Baxter et de Hecke.
   Notons que pour $q = 1$, nous retrouvons la volte habituelle $R = P$.

2. Nous déduisons du théorème de collage et de l'exemple précédent en raisonnant par récurrence sur la dimension $n = dim (V) \in \mathbb{N}^*$, la définition explicite de symétries de Hecke R pour tout $n = dim (V) \in \mathbb{N}^*$:

$$R_{ij}^{kl} = q^{\delta_k^l} \delta_i^l \delta_j^k + \zeta \Theta (j - i) \delta_i^k \delta_j^l$$

   avec $\Theta(i) = 1$ pour $i > 0$ et $\Theta(i) = 0$ pour $i \leq 0$.
   Ces symétries de Hecke très spéciales s'appellent symétries de Hecke de type de Drinfeld-Jimbo.
   Elles sont également des déformations des voltes classiques.

3. Nous démontrons que l'opérateur sur l'espace vectoriel $V = \langle x_1; x_2 \rangle$ de dimension 2 suivant vérifie l'équation de Yang-Baxter (1.1.1) et de Hecke (1.1.2) grâce au théorème de collage :

$$R = R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } q \in \mathbb{K} \text{ et } \zeta = q - q^{-1}.$$

   En effet si nous considérons les opérateurs R_1 et R_2 qui opèrent respectivement sur $\langle x_1 \rangle$ et $\langle x_2 \rangle$ ainsi :

$$R_1 (x_1 \otimes x_1) = q x_1 \otimes x_1; \quad R_2 (x_2 \otimes x_2) = -q^{-1} x_2 \otimes x_2.$$

   R_1 et R_2 vérifient trivialement les équations de Yang-Baxter et de Hecke.
   Nous en déduisons donc d'après le théorème de collage que R vérifie les équations de Yang-Baxter et de Hecke.
   Notons que pour $q = 1$, nous retrouvons une super-volte.

Théorème :

Avec les notations du théorème précédent, nous avons de plus l'égalité :

$$\mathcal{P}_{\pm}\left(V;t\right)=\mathcal{P}_{\pm}\left(V_1;t\right)\times\mathcal{P}_{\pm}\left(V_2;t\right).$$

Preuve :

Montrons cette relation pour $\mathcal{P}_+$:
Nous savons que :

$$\forall x\otimes y\in V_1\otimes V_2 : \quad R\left(x\otimes y\right)=y\otimes x+\zeta x\otimes y \;\text{ et }\; R\left(y\otimes x\right)=x\otimes y.$$

Mais alors :

$$\left(qI-R\right)\left(x\otimes y\right)=0\Leftrightarrow qx\otimes y=y\otimes x+\zeta x\otimes y\Leftrightarrow y\otimes x=q^{-1}x\otimes y.$$

Ce qui signifie que tous les éléments de l'algèbre quotient $\Lambda_+\left(V\right)$ admettent un représentant de la forme $e\otimes f$ avec $e\in\Lambda_+\left(V_1\right)$ et $f\in\Lambda_+\left(V_2\right)$.
Donc si nous notons $e_k^{(i)}$ et $f_l^{(j)}$ les bases respectives de $\Lambda_+^i\left(V_1\right)$ et $\Lambda_+^j\left(V_2\right)$, nous pouvons construire une base de $\Lambda_+^n\left(V\right)$ sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n}e_k^{(i)}\otimes f_{n-k}^{(j)}.$$

Mais alors :

$$\forall n\in\mathbb{N} : \quad dim\left(\Lambda_+^n\left(V\right)\right)=\sum_{i=0}^{n}dim\left(\Lambda_+^i\left(V_1\right)\right)\times dim\left(\Lambda_+^{n-i}\left(V_2\right)\right).$$

Nous en déduisons donc facilement l'égalité :

$$\mathcal{P}_{+}\left(V;t\right)=\mathcal{P}_{+}\left(V_1;t\right)\times\mathcal{P}_{+}\left(V_2;t\right).$$

On fait exactement le même raisonnement avec $\mathcal{P}_-$. ■

Applications

Déterminons les polynômes de Hilbert-Poincaré liés aux tressages des trois exemples précédents :

1. Nous notons $V_1=\langle x_1\rangle$ et $V_2=\langle x_2\rangle$.
   De manière évidente :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{+}\left(V_1;t\right)=\mathcal{P}_{+}\left(V_2;t\right)=&\sum_{k=0}^{+\infty}t^k=\frac{1}{1-t}\\ \mathcal{P}_{-}\left(V_1;t\right)=\mathcal{P}_{-}\left(V_2;t\right)=&1+t\end{aligned}$$

   Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{+}\left(V;t\right)=&\sum_{k=0}^{+\infty}\left(k+1\right)t^k\\ \mathcal{P}_{-}\left(V;t\right)=&\left(1+t\right)^2=1+2t+t^2\end{aligned}$$

$$R=\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0\\ 0 & \zeta & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q\end{pmatrix} \text{ est donc pair de rang 2.}$$

2. Nous déduisons du théorème de collage et de l'exemple précédent en raisonnant par récurrence sur $n = dim\,(V) \in \mathbb{N}^*$ que les tressages de Drinfeld-Jimbo indexés par n admettent les opérateurs de Hilbert-Poincaré suivant :
$$\mathcal{P}_+\,(V;t) = \frac{1}{(1-t)^n}$$
$$\mathcal{P}_-\,(V;t) = (1+t)^n$$
Les tressages de Drinfeld-Jimbo sont donc pairs de rang n.
3. Nous notons $V_1 = \langle x_1 \rangle$ et $V_2 = \langle x_2 \rangle$.
De manière évidente :
$$\begin{aligned}\mathcal{P}_+\,(V_1;t) =& \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}\\ \mathcal{P}_+\,(V_2;t) =& 1+t\\ \mathcal{P}_-\,(V_1;t) =& 1+t\\ \mathcal{P}_-\,(V_2;t) =& \sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}\end{aligned}$$
Par conséquent :
$$\begin{aligned}\mathcal{P}_+\,(V;t) =& \frac{1+t}{1-t}\\ \mathcal{P}_-\,(V;t) =& \frac{1+t}{1-t}\end{aligned}$$
$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$ est donc de type $(1|1)$.

1.1.5 Tressage anti-inversible

Définition :

Un tressage R est dit *anti-inversible* s'il existe une matrice Ψ de taille $n^2 \times n^2$ ayant la propriété suivante :
$$R_{ia}^{jb} \Psi_{bk}^{as} = \delta_i^s \delta_k^j = \Psi_{ia}^{jb} R_{bk}^{as}. \tag{1.1.3}$$

Avec des notations plus compactes, la formule précédente peut s'écrire sous la forme :
$$Tr_{(2)} R_{12} \Psi_{23} = P_{13} = Tr_{(2)} \Psi_{12} R_{23}. \tag{1.1.4}$$
où le symbole $Tr_{(2)}$ signifie que nous calculons la trace dans le second espace et P est la matrice de permutation (la volte habituelle).
Nous pouvons alors définir les deux matrices de taille $n \times n$ B et C par :
$$B = Tr_{(1)} \Psi \;\text{ et }\; C = Tr_{(2)} \Psi.$$
Ce qui revient à dire si nous notons $B\,(x_i) = B_i^j x_j$ et $C\,(x_i) = C_i^j x_j$:
$$B_i^j = \Psi_{ki}^{kj} \;\text{ et }\; C_i^j = \Psi_{ik}^{jk}.$$
Nous déduisons alors de (1.1.4) les égalités :
$$Tr_{(1)} B_1 R_{12} = I_2 \;\text{ et }\; Tr_{(2)} C_2 R_{12} = I_1.$$

Exemples :

Considérons à nouveau nos deux symétries de Hecke du paragraphe précédent respectivement paire de rang 2 et de type $(1|1)$. Nous vérifions par calcul direct que les matrices Ψ conviennent à chacun de ces deux exemples pour démontrer que celles-ci sont anti-inversibles.

1. Notre symétrie de Hecke pair de rang 2 est anti-inversible avec :

$$\Psi = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2}\zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{11}^{11} & \Psi_{11}^{12} & \Psi_{11}^{21} & \Psi_{11}^{22} \\ \Psi_{12}^{11} & \Psi_{12}^{12} & \Psi_{12}^{21} & \Psi_{12}^{22} \\ \Psi_{21}^{11} & \Psi_{21}^{12} & \Psi_{21}^{21} & \Psi_{21}^{22} \\ \Psi_{22}^{11} & \Psi_{22}^{12} & \Psi_{22}^{21} & \Psi_{22}^{22} \end{pmatrix}.$$

   Rappelons que $\zeta = q - q^{-1}$.
   Nous en déduisons les matrices B et C :

$$B = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_1^2 \\ B_2^1 & B_2^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} q^{-3} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Notre symétrie de Hecke de type $(1|1)$ est anti-inversible avec :

$$\Psi = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}.$$

   Nous en déduisons les matrices B et C :

$$B = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}.$$

Proposition : [GPS4]

1. Si R est pair de rang p alors :
$$BC = CB = q^{-2p} I.$$
2. Si R est de type $(m|n)$:
$$BC = CB = q^{2(n-m)} I.$$

Exemples :

Considérons nos deux exemples précédents :

1. $$BC = CB = q^{-4} I = q^{-2\times 2} I.$$
2. $$BC = CB = I = q^{2(1-1)} I.$$

1.2 Eléments de techniques avec les R-matrices

Nous allons maintenant énoncer un lemme relevé dans [S] qui nous sera très utile par la suite :

Lemme :

Nous considérons un tressage anti-inversible R
Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (i.e. M est une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$) et $\epsilon = \pm 1$:

$$Tr_{(2)}\left(C_2 R_{12}^{-\epsilon} M_1 R_{12}^{\epsilon}\right) = Tr\,(CM)\, I. \qquad (1.2.1)$$

Preuve :

R vérifie l'équation de Yang-Baxter (1.1.1). Nous avons donc l'égalité :

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}.$$

Mais alors nous avons aussi les égalités :

$$R_{23}R_{34}R_{23} = R_{34}R_{23}R_{34} \Leftrightarrow R_{34}R_{23}R_{34}^{-1} = R_{23}^{-1}R_{34}R_{23} \Leftrightarrow R_{34}^{-1}R_{23}R_{34} = R_{23}R_{34}R_{23}^{-1}.$$

Ce que nous résumons avec la formule suivante :

$$R_{23}^{\epsilon}R_{34}R_{23}^{-\epsilon} = R_{34}^{-\epsilon}R_{23}R_{34}^{\epsilon}.$$

Nous en déduisons donc que :

$$\Psi_{12}\Psi_{45}R_{23}^{\epsilon}R_{34}R_{23}^{-\epsilon} = \Psi_{12}\Psi_{45}R_{34}^{-\epsilon}R_{23}R_{34}^{\epsilon}.$$

Nous allons calculer les traces sur les espaces 2 et 4 des deux membres de cette égalité. D'après (1.1.4) :

$$\begin{aligned} Tr_{(4)}\left(\Psi_{12}\Psi_{45}R_{23}^{\epsilon}R_{34}R_{23}^{-\epsilon}\right) &= Tr_{(4)}\left(\Psi_{12}R_{23}^{\epsilon}\Psi_{45}R_{34}R_{23}^{-\epsilon}\right) = \Psi_{12}R_{23}^{\epsilon}P_{35}R_{23}^{-\epsilon} \\ Tr_{(2)}\left(\Psi_{12}\Psi_{45}R_{34}^{-\epsilon}R_{23}R_{34}^{\epsilon}\right) &= Tr_{(2)}\left(\Psi_{45}R_{34}^{-\epsilon}\Psi_{12}R_{23}R_{34}^{\epsilon}\right) = \Psi_{45}R_{34}^{-\epsilon}P_{13}R_{34}^{\epsilon} \end{aligned}$$

Nous démontrons alors l'égalité :

$$Tr_{(2)}\left(\Psi_{12}R_{23}^{\epsilon}P_{35}R_{23}^{-\epsilon}\right) = Tr_{(4)}\left(\Psi_{45}R_{34}^{-\epsilon}P_{13}R_{34}^{\epsilon}\right).$$

Nous allons calculer la trace sur l'espaces 1 des deux membres de cette égalité.

$$Tr_{(1)}\left(\Psi_{12}R_{23}^{\epsilon}P_{35}R_{23}^{-\epsilon}\right) = C_1R_{12}^{\epsilon}P_{24}R_{12}^{-\epsilon}$$

$$Tr_{(1)}\left(\Psi_{45}R_{34}^{-\epsilon}P_{13}R_{34}^{-\epsilon}\right) = Tr_{(1)}\left(\Psi_{45}R_{34}^{-\epsilon}P_{12}P_{23}R_{34}^{-\epsilon}\right) = \Psi_{34}R_{23}^{-\epsilon}P_{12}R_{23}^{\epsilon}$$

Or :

$$\begin{aligned} Tr_{(4)}\left(\Psi_{34}R_{23}^{-\epsilon}P_{12}R_{23}^{\epsilon}\right) &= Tr_{(3)}\left(C_3R_{23}^{-\epsilon}P_{12}R_{23}^{\epsilon}\right) \\ Tr_{(2)}\left(C_1R_{12}^{\epsilon}P_{24}R_{12}^{-\epsilon}\right) &= C_1I_2 \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré l'égalité :

$$Tr_{(3)}\left(C_3R_{23}^{-\epsilon}P_{12}R_{23}^{\epsilon}\right) = C_1I_2.$$

Nous multiplions les deux membres par M_1 à droite et nous calculons la trace sur le premier espace. Or $Tr_{(3)}\left(C_3R_{23}^{-\epsilon}P_{12}R_{23}^{\epsilon}\right)M_1 = Tr_{(3)}\left(C_3R_{23}^{-\epsilon}M_2R_{23}^{\epsilon}\right)$ et :

$$\begin{aligned} Tr_{(1)}\left(C_3R_{23}^{-\epsilon}M_2R_{23}^{\epsilon}\right) &= C_2R_{12}^{-\epsilon}M_1R_{12}^{\epsilon} \\ Tr_{(1)}\left(C_1M_1I_2\right) &= I_1Tr\left(CM\right) \end{aligned}$$

Nous avons démontré l'égalité :

$$Tr_{(2)}\left(C_2R_{12}^{-\epsilon}M_1R_{12}^{\epsilon}\right) = Tr\left(CM\right)I. \quad \blacksquare$$

1.3 Définition de l'algèbre Reflection Equation Algebra (REA) et modified Reflection Equation Algebra (mREA)

Nous considérons une symétrie de Hecke anti-inversible R :

Définition :

Nous appelons mREA (modified reflection equation algebra) l'algèbre engendrée par l'unité $e_{\mathcal{L}}$ et les coefficients de la matrice L vérifiant l'équation mRE (modified reflection equation) suivante :

$$RL_1RL_1 - L_1RL_1R = \hbar\,(RL_1 - L_1R) \text{ avec } L_1 = L \otimes I,\ \hbar \in \mathbb{K},\ \hbar \neq 0. \tag{1.3.1}$$

Ici $L = \left(l_i^j\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $L_1 = L \otimes I$.
Sous forme plus explicite, l'équation précédente est équivalente aux équations :

$$R_{ij}^{kl} l_k^m R_{ml}^{pq} l_p^r - l_i^a R_{aj}^{bc} l_b^d R_{dc}^{rq} - \hbar\left(R_{ij}^{aq} l_a^r - l_i^b R_{bj}^{rq}\right) = 0. \tag{1.3.2}$$

Nous notons cette algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.
Dans le cas particulier où $\hbar = 0$, nous appelons REA (reflection equation algebra) l'algèbre engendrée par l'unité $e_{\mathcal{L}}$ et les coefficients de la matrice L vérifiant l'équation RE (reflection equation) suivante :

$$RL_1RL_1 - L_1RL_1R = 0 \text{ avec } L_1 = L \otimes I. \tag{1.3.3}$$

Nous notons cette algèbre $\mathcal{L}_q$.

Remarques :

1. Notons que l'algèbre $\mathcal{L}_q$ est graduée et quadratique. (Ce qui signifie qu'elle est engendrée en tant qu'algèbre par un nombre finie d'éléments vérifiant des équations quadratiques).
2. L'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ est filtrée définie par des relations quadratiques-linéaires. (En ce sens, elle ressemble à une algèbre enveloppante.)
3. Si $q \neq 1$ (ce qui signifie que R n'est pas involutive), les algèbres REA $\mathcal{L}_q$ et mREA $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ correspondantes sont isomorphes. En effet, nous avons le lemme suivant :

Lemme : Passage de l'équation RE à l'équation mRE

Sachant que $q \neq 1$, si nous posons $L = \widehat{L} + \frac{\hbar}{\zeta}I$, alors :
L est solution de l'équation mRE (1.3.3) si et seulement si $\widehat{L}$ vérifie l'équation RE :

$$R\widehat{L}_1R\widehat{L}_1 - \widehat{L}_1R\widehat{L}_1R = 0.$$

Preuve :

$\widehat{L}$ vérifie l'équation RE si et seulement si :

$$R\widehat{L}_1R\widehat{L}_1 - \widehat{L}_1R\widehat{L}_1R = 0.$$

Nous avons $\widehat{L}_1 = L_1 - \frac{\hbar}{\zeta}I$, l'équation précédente est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} &R\left(L_1 - \frac{\hbar}{\zeta}I\right)R\left(L_1 - \frac{\hbar}{\zeta}I\right) - \left(L_1 - \frac{\hbar}{\zeta}I\right)R\left(L_1 - \frac{\hbar}{\zeta}I\right)R = 0 \\ \Leftrightarrow &RL_1RL_1 - L_1RL_1R - \frac{\hbar}{\zeta}R^2L_1 + \frac{\hbar}{\zeta}L_1R^2 = 0 \end{aligned}$$

Mais R vérifie l'équation de Hecke (1.1.2) :

$$(R - qI)\left(R + q^{-1}I\right) = 0 \Leftrightarrow R^2 = \zeta R + I.$$

Notre équation précédente est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} &RL_1RL_1 - L_1RL_1R - \hbar RL_1 + \hbar L_1R = 0 \\ \Leftrightarrow &RL_1Rl_1 - L_1RL_1R = \hbar\,(RL_1 - L_1R) \end{aligned}$$

Nous avons démontré que $\widehat{L}$ vérifie l'équation RE si et seulement si L vérifie mRE (1.3.3). ■

Remarque :

Notre lemme implique donc entre autres que si $q \neq 1$, les algèbres $\mathcal{L}_q$ et $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ sont isomorphes.
Or si R est une symétrie de Hecke de Drinfeld-Jimbo, en passant à la limite $q \to 1$, on a $R_1 = P$ où P est la volte usuelle. On peut donc vérifier que mREA devient l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $gl\,(n)_\hbar$ à savoir $U\,(gl(n)_\hbar)$ déformée classiquement avec le paramètre $\hbar$ (cf. introduction) et que de la même manière REA devient $Sym\,(gl(n))$.

Définition :

Soit $M = L^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ ou une combinaison linéaire de telles matrices.
Alors nous appelons trace quantique de M :

$$Tr_q\,(M) = Tr\,(CM)\,.$$

Théorème :

Notons $Z\,(\mathcal{L}_q)$ le centre de l'algèbre $\mathcal{L}_q$.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ Tr_q\left(L^k\right) \in Z\,(\mathcal{L}_q)$$

Preuve :

L vérifie l'équation suivante :

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 = L_1R_{12}L_1R_{12}$$

Nous en déduisons que :

$$\forall k \in \mathbb{N} : RL_1RL_1^k = L_1^kRL_1R \Leftrightarrow L_1R_{12}L_1^kR_{12}^{-1} = R_{12}^{-1}L_1^kR_{12}L_1$$

$$\begin{aligned}
&Tr_{q(2)}\left(L_1R_{12}L_1^kR_{12}^{-1}\right) = Tr_{q(2)}\left(R_{12}^{-1}L_1^kR_{12}L_1\right)\\
\Leftrightarrow &Tr_{(2)}\left(C_2L_1R_{12}L_1^kR_{12}^{-1}\right) = Tr_{(2)}\left(C_2R_{12}^{-1}L_1^kR_{12}L_1\right)\\
\Leftrightarrow &Tr_{(2)}\left(L_1C_2R_{12}L_1^kR_{12}^{-1}\right) = Tr_{(2)}\left(C_2R_{12}^{-1}L_1^kR_{12}L_1\right)\\
\Leftrightarrow &LTr_{(2)}\left(C_2R_{12}L_1^kR_{12}^{-1}\right) = Tr_{(2)}\left(C_2R_{12}^{-1}L_1^kR_{12}\right)L\\
\Leftrightarrow &LTr_q\left(L^k\right) = Tr_q\left(L^k\right)L
\end{aligned}$$

Nous déduisons la dernière égalité grâce à notre lemme du paragraphe précédent. Nous avons démontré :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ Tr_q\left(L^k\right) \in Z\,(\mathcal{L}_q)\,. \qquad \blacksquare$$

Nous généralisons ce théorème valable pour REA à mREA grâce à notre lemme précédent, ainsi :

Théorème :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ Tr_q\left(L^k\right) \in Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q})$$

Preuve :

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}$.
Cette propriété est vérifiée trivialement au rang $k = 0$.
Supposons notre propriété vérifiée jusqu'au rang $k \in \mathbb{N}$, et vérifions la au rang $k + 1$.
Nous savons d'après le théorème précédent que :

$$\widehat{L}Tr_q\left(\widehat{L}^{k+1}\right) = Tr_q\left(\widehat{L}^{k+1}\right)\widehat{L} \Leftrightarrow \left(L - \frac{\hbar}{\zeta}I\right)Tr_q\left(\left(L - \frac{\hbar}{\zeta}I\right)^{k+1}\right) = Tr_q\left(\left(L - \frac{\hbar}{\zeta}I\right)^{k+1}\right)\left(L - \frac{\hbar}{\zeta}I\right)$$

Par hypothèse de récurrence, nous en déduisons que l'équation précédente est équivalente à :

$$LTr_q\left(L^{k+1}\right) = Tr_q\left(L^{k+1}\right)L$$

La récurrence est établie.
Le théorème est démontré. ■

1.4 Eléments de théorie de la représentation de mREA

Nous considérons une symétrie de Hecke anti-inversible R.

1.4.1 Extensions de R

Nous introduisons pour commencer l'espace dual V^* et nous choisissons une base $\left\{x^i\right\}_{1\leq i\leq N}$ de V^* duale de celle de V par rapport à la forme bilinéaire non dégénérée :

$$\langle\ ,\ \rangle_r : V \otimes V^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \left\langle x_i, x^j\right\rangle_r = \delta_i^j$$

L'indice r signifiant que dans notre forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_r$ les vecteurs de l'espace dual V^* sont à droite (right) des vecteurs de V.
La seule extension de R sur $V^* \otimes V^*$ qui respecte notre forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_r$ est définie par la formule :

$$R\left(x^i \otimes x^j\right) = R_{sr}^{ji} x^r \otimes x^s$$

Proposition :

Si on note Ψ l'opérateur anti-inverse de notre symétrie de Hecke R. Considérons alors l'extension de R à l'opérateur linéaire suivant :

$$\mathcal{R} : (V \oplus V^*)^{\otimes 2} \longrightarrow (V \oplus V^*)^{\otimes 2}$$

$$V \otimes V \longrightarrow V \otimes V : \mathcal{R}\left(x_i \otimes x_j\right) = R_{ij}^{kl} x_k \otimes x_l$$
$$V \otimes V^* \longrightarrow V^* \otimes V : \mathcal{R}\left(x_i \otimes x^j\right) = \left(R^{-1}\right)_{ki}^{lj} x^k \otimes x_l$$
$$V^* \otimes V \longrightarrow V \otimes V^* : \mathcal{R}\left(x^j \otimes x_i\right) = \Psi_{li}^{kj} x_k \otimes x^l$$
$$V^* \otimes V^* \longrightarrow V^* \otimes V^* : \mathcal{R}\left(x^i \otimes x^j\right) = R_{lk}^{ji} x^k \otimes x^l$$

Alors, notre extension $\mathcal{R}$ est un tressage. Autrement dit, $\mathcal{R}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter (1.1.1).

Preuve :

Il suffit de vérifier Yang-Baxter (1.1.1) sur une base de l'espace $(V \oplus V^*)^{\otimes 3}$ qui est la somme directe de 8 sous espaces allant de $V \otimes V \otimes V$ à $V^* \otimes V^* \otimes V^*$.
La vérification est alors directe. ■

Cette extension est motivée par la propriété suivante que nous pouvons vérifier par calcul direct :

Proposition :

Notons W l'espace vectoriel tel que $W = V$ ou bien $W = V^*$.
Considérons notre couplage $\langle \ ; \ \rangle_r$, alors sur l'espace vectoriel $V \otimes V^* \otimes W$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\langle \ ; \ \rangle_{12} = \langle \ ; \ \rangle_{23} \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}.$$

De même sur l'espace vectoriel $W \otimes V \otimes V^*$, nous avons :

$$\langle \ ; \ \rangle_{23} = \langle \ ; \ \rangle_{12} \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}.$$

L'espace vectoriel engendré par les éléments l_i^j de notre algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ peut-être identifié avec l'espace vectoriel $End\,(V)$. En effet $End\,(V) \cong V \otimes V^*$, nous pouvons maintenant définir une extension de manière naturelle :

$$R_{End} : End\,(V)^{\otimes 2} \longrightarrow End\,(V)^{\otimes 2}.$$

En effet :

$$R_{End} : (V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*) \longrightarrow (V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*).$$

Aussi :

$$R_{End} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{34}\mathcal{R}_{23}.$$

Nous pouvons expliciter cette formule dans la base $l_j^i \cong x_j \otimes x^i$ et nous en déduisons :

$$R_{End}\left(l_j^i \otimes l_s^k\right) = l_{b_1}^{a_1} \otimes l_{b_2}^{a_2} \left(R^{-1}\right)_{a_1 c_2}^{b_2 c_1} R_{j r_1}^{b_1 c_2} \Psi_{r_2 s}^{r_1 i}.$$

Nous avons besoin de définir l'analogue de $\langle \ ; \ \rangle_r$ à gauche à savoir :

$$\langle \ ; \ \rangle_l : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Nous voulons que notre forme bilinéaire rende le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} V^* \otimes V \arrow[r, "\mathcal{R}"] \arrow[d, "\langle\,;\,\rangle_l"] & V \otimes V^* \arrow[d, "\langle\,;\,\rangle_r"] \\ \mathbb{K} \arrow[r, "id"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Nous en déduisons alors la formule explicite définissant $\langle \ ; \ \rangle_l$:

$$\left\langle x^i ; x_j \right\rangle_l = B_j^i.$$

En notant $l_i^j = x_i \otimes x^j \in V \otimes V^*$, nous en arrivons à la définition suivante :

Définition :

Nous définissons sur $\mathcal{L}$, l'espace vectoriel engendré par les coefficients de la matrice L, le couplage suivant $\langle \ ; \ \rangle : \mathcal{L}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{K}$ défini explicitement par la formule suivante :

$$\left\langle l_i^j ; l_a^b \right\rangle = B_a^j \delta_i^b.$$

1.4.2 Utilisation d'une structure de bigèbre

Nous considérons que notre symétrie de Hecke anti-inversible R est de plus de type $(m|n)$.
Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cadre de la catégorie des quasitenseurs de Schur-Weyl $SW\left(V_{(m|n)}\right)$ (Cf. [GPS4] pour une description complète de cette catégorie).
Dans cette catégorie, nous étudions les représentations finies de mREA $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.
Cela nous permet de définir une propriété importante de certaines de ces représentations, à savoir l'équivariance.

Définition :

Une représentation $\rho_W : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow End\,(W)$ est *équivariante* si et seulement si pour tout objet U de la catégorie $SW\left(V_{(m|n)}\right)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
U \otimes \left(\mathcal{L}_{\hbar,q} \otimes W\right) \arrow[r, leftrightarrow, "\overline{R}"] \arrow[d, "id\otimes\rho_W"] & \left(\mathcal{L}_{\hbar,q} \otimes W\right) \otimes U \arrow[d, "\rho_W\otimes id"] \\
U \otimes W \arrow[r, leftrightarrow, "\overline{R}"] & W \otimes U
\end{tikzcd}$$

L'opérateur $\overline{R}$ étant appelé tressage de la catégorie $SW\left(V_{(m|n)}\right)$.
Autrement dit une représentation ρ_U de mREA dans l'espace vectoriel U est équivariante si et seulement si :

$$End\,(V) \longrightarrow End\,(U) : \quad l_i^j \longmapsto \rho_U\left(l_i^j\right)$$

est un morphisme de la catégorie $SW\left(V_{(m|n)}\right)$.

Définitions :

Notons $\mathbb{L}_{\hbar,q} = \mathcal{L}_{\hbar,q} \otimes \mathcal{L}_{\hbar,q}$ l'algèbre sur le corps $\mathbb{K}$ muni du produit : $\star : \mathbb{L}_{\hbar,q}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{L}_{\hbar,q}$ défini par :

$$(a_1 \otimes b_1) \star (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2' \otimes b_1' b_2 \quad a_i \otimes b_i \in \mathbb{L}_{\hbar,q} \text{ avec } a_2' \otimes b_1' := R_{End}\,(b_1 \otimes a_2)\,.$$

Nous définissons alors le coproduit $\Delta : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow \mathbb{L}_{\hbar,q}$ comme suit :

$$\Delta\,(e_{\mathcal{L}}) := e_{\mathcal{L}} \otimes e_{\mathcal{L}}$$

$$\Delta\left(l_i^j\right) := l_i^j \otimes e_{\mathcal{L}} + e_{\mathcal{L}} \otimes l_i^j - \zeta l_i^k \otimes l_k^j, \quad \zeta = q - q^{-1}$$

$$\forall a, b \in \mathcal{L}_{\hbar,q}, \quad \Delta\,(ab) := \Delta(a) \star \Delta(b)$$

Nous définissons maintenant la counité $\epsilon : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow \mathbb{K}$ par les formules :

$$\epsilon\,(e_{\mathcal{L}}) := 1$$

$$\epsilon\left(l_i^j\right) := 0$$

$$\forall a, b \in \mathcal{L}_{\hbar,q}, \quad \epsilon\,(ab) := \epsilon(a)\epsilon(b)$$

Théorème :[GPS4]

Les applications Δ et ϵ munissent l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ d'une structure de bigèbre tressée.
Ce qui signifie que $\Delta : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow \mathbb{L}_{\hbar,q}$ est un morphisme d'algèbres et que l'égalité :
$(I \otimes \epsilon)\,\Delta = I = (\epsilon \otimes I)\,\Delta$ est vérifiée.

Remarque :

Considérons une matrice L vérifiant l'équation RE. Autrement dit $RL_1RL_1 = L_1RL_1R$.
Alors si nous posons $L_{\overline{1}} = L_1$ et $L_{\overline{2}} = R_{12}L_{\overline{1}}R_{12}^{-1}$ nous pouvons réécrire l'équation RE sous la forme suivante :

$$RL_{\overline{1}}L_{\overline{2}} = L_{\overline{1}}L_{\overline{2}}R.$$

Nous avons également l'égalité :

$$R_{End}\,(L_{\overline{1}} \otimes L_{\overline{2}}) = L_{\overline{2}} \otimes L_{\overline{1}}.$$

Théorème :[GPS4]

Nous considérons deux représentations équivariantes $\rho_U : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow End\,(U)$ et $\rho_W : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow End\,(W)$.
Soit l'application $\rho_{U\otimes W} : \mathbb{L}_{\hbar,q} \longrightarrow End\,(U \otimes W)$ définie par la formule :

$$\rho_{U\otimes W}\,(a \otimes b) \triangleright (u \otimes w) = \left(\rho_U\,(a) \triangleright u'\right) \otimes \left(\rho_W\,(b') \triangleright w\right), \quad a \otimes b \in \mathbb{L}_{\hbar,q} \text{ et } u' \otimes b' := \overline{R}\,(b \otimes u)\,.$$

Alors $\rho_{U\otimes W}$ est une représentation de l'algèbre $\mathbb{L}_{\hbar,q}$.

Nous en déduisons alors le corollaire suivant qui nous sera fort utile par la suite :

Corollaire :

Nous considérons deux représentations équivariantes $\rho_U : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow End\,(U)$ et $\rho_W : \mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow End\,(W)$.
Nous pouvons alors définir une représentation équivariante $\mathcal{L}_{\hbar,q} \longrightarrow End\,(U \otimes W)$ définie explicitement par :

$$a \longmapsto \rho_{U\otimes W}\,(\Delta\,(a))\,, \quad \forall a \in \mathcal{L}_{\hbar,q}.$$

Théorème :

Soit $\hbar \neq 0$:

1. Introduisons l'action de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ sur V :

$$\rho_1\left(l_i^j\right) \triangleright x_k = \hbar B_k^j x_i.$$

   Cette action définit une représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.
2. Considérons maintenant l'action de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ sur V^* :

$$\rho_1^*\left(l_i^j\right) \triangleright x^k = -\hbar x^r R_{ri}^{kj}.$$

   Cette action définit une représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.
3. Constatons pour terminer que nous pouvons reformuler (1.3.2) sous la forme suivante :

$$l_k^m l_p^r - Q_{kp}^{mr}\,(L) = \hbar\left[l_k^m; l_p^r\right].$$

   $Q : \mathcal{L}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{L}^{\otimes 2}$ étant une application linéaire sachant que $\mathcal{L}$ est l'espace vectoriel engendré par les coefficients de la matrice L.
   $[l_k^m; .]$ étant un endomorphisme de $\mathcal{L}$.
   Nous pouvons alors finalement définir *l'action adjointe* de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\hbar,q}$:

$$\rho\left(l_i^j\right) \triangleright l_k^l = \hbar\left[l_i^j; l_k^l\right].$$

   Cette action définit une représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.
   (Toutes les représentations définies dans ce théorème sont à gauche).

Preuve :

Il nous suffit de vérifier que nos deux représentations de base respectent l'équation (1.3.2).
Nous pouvons nous limiter au cas où $\hbar = 1$. L'extension au cas plus général où $\hbar \in \mathbb{K}$ avec $\hbar \neq 0$ étant facile.

1. Nous utilisons dans ces calculs l'égalité : $B^j_l R^{lk}_{ji} = \delta^k_i$.

$$\begin{aligned}
R^{kl}_{ij} l^m_k R^{pq}_{ml} l^r_p \triangleright x_\alpha &= R^{kl}_{ij} l^m_k R^{pq}_{ml} B^r_\alpha x_p \\
&= R^{kl}_{ij} B^m_p R^{pq}_{ml} B^r_\alpha x_k \\
&= R^{kl}_{ij} \delta^q_l B^r_\alpha x_k \\
&= R^{kl}_{ij} B^r_\alpha x_k \text{ car nous posons } l = q \\
l^a_i R^{bc}_{aj} l^d_b R^{rq}_{dc} \triangleright x_\alpha &= l^a_i R^{bc}_{aj} B^d_\alpha R^{rq}_{dc} x_b \\
&= B^a_b R^{bc}_{aj} B^d_\alpha R^{rq}_{dc} x_i \\
&= \delta^c_j B^d_\alpha R^{rq}_{dc} x_i \\
&= B^d_\alpha R^{rq}_{dc} x_i \text{ car nous posons } j = c
\end{aligned}$$

$$R^{aq}_{ij} l^r_a \triangleright x_\alpha = R^{aq}_{ij} B^r_\alpha x_a = R^{kl}_{ij} B^r_\alpha x_k \text{ car nous avons posé } l = q$$

$$l^b_i R^{rq}_{bj} \triangleright x_\alpha = B^b_\alpha R^{rq}_{bj} x_i = B^d_\alpha R^{rq}_{dc} x_i \text{ car nous avons posé } j = c$$

Au final, nous avons bien :

$$\left(R^{kl}_{ij} l^m_k R^{pq}_{ml} l^r_p - l^a_i R^{bc}_{aj} l^d_b R^{rq}_{dc} - \left(R^{aq}_{ij} l^r_a - l^b_i R^{rq}_{bj} \right) \right) \triangleright x_\alpha = 0.$$

2.

$$\begin{aligned}
R^{kl}_{ij} l^m_k R^{pq}_{ml} l^r_p \triangleright x^\alpha &= -R^{kl}_{ij} l^m_k R^{pq}_{ml} R^{\alpha r}_{\beta p} x^\beta \\
&= R^{kl}_{ij} R^{\beta m}_{\gamma k} R^{pq}_{ml} R^{\alpha r}_{\beta p} x^\gamma \\
l^a_i R^{bc}_{aj} l^d_b R^{rq}_{dc} \triangleright x^\alpha &= -l^a_i R^{bc}_{aj} R^{\alpha d}_{\beta b} R^{rq}_{dc} x^\beta \\
&= R^{\beta a}_{\gamma i} R^{bc}_{aj} R^{\alpha d}_{\beta b} R^{rq}_{dc} x^\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{aq}_{ij} l^r_a \triangleright x^\alpha &= -R^{aq}_{ij} R^{\alpha r}_{\beta a} x^\beta \\
l^b_i R^{rq}_{bj} \triangleright x^\alpha &= -R^{\alpha b}_{\beta i} R^{rq}_{bj} x^\beta
\end{aligned}$$

Nous allons utiliser la formule de Yang-Baxter que nous donnons pour la première fois sous forme explicite :

$$R^{lm}_{ij} R^{no}_{mk} R^{pq}_{ln} = R^{pn}_{il} R^{lm}_{jk} R^{qo}_{nm}.$$

Nous utilisons également par la suite la formule de Hecke qui peut s'écrire sous la forme :

$$R^2 = I + \zeta R$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
R^{kl}_{ij} \left(R^{\beta m}_{\gamma k} R^{pq}_{ml} R^{\alpha r}_{\beta p} \right) &= R^{kl}_{ij} \left(R^{\alpha p}_{\gamma \beta} R^{\beta m}_{kl} R^{rq}_{pm} \right) \\
&= \left(R^{kl}_{ij} R^{\beta m}_{kl} \right) R^{\alpha p}_{\gamma \beta} R^{rq}_{pm} \\
&= R^{\alpha p}_{\gamma i} R^{rq}_{pj} + \zeta R^{\beta m}_{ij} R^{\alpha p}_{\gamma \beta} R^{rq}_{pm}
\end{aligned}$$

Si nous posons $\gamma = \beta$ et $p = b$ nous avons alors :

$$R^{\alpha p}_{\gamma i} R^{rq}_{pj} x^\gamma = R^{\alpha b}_{\beta i} R^{rq}_{bj} x^\beta.$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
R^{\beta a}_{\gamma i} \left(R^{bc}_{aj} R^{\alpha d}_{\beta b} R^{rq}_{dc} \right) &= R^{\beta a}_{\gamma i} \left(R^{\alpha d}_{\beta b} R^{bc}_{aj} R^{rq}_{dc} \right) \\
&= R^{\beta a}_{\gamma i} \left(R^{bc}_{\beta a} R^{dq}_{cj} R^{\alpha r}_{bd} \right) \\
&= \left(R^{\beta a}_{\gamma i} R^{bc}_{\beta a} \right) R^{dq}_{cj} R^{\alpha r}_{bd} \\
&= R^{dq}_{ij} R^{\alpha r}_{\gamma d} + \zeta R^{bc}_{\gamma i} R^{dq}_{cj} R^{\alpha r}_{bd}
\end{aligned}$$

Si nous posons $\gamma = \beta$ et $d = a$ nous avons alors :

$$R^{dq}_{ij} R^{\alpha r}_{\gamma d} x^{\gamma} = R^{aq}_{ij} R^{\alpha r}_{\beta a} x^{\beta}.$$

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que :

$$\zeta R^{\beta m}_{ij} R^{\alpha p}_{\gamma\beta} R^{rq}_{pm} = \zeta R^{bc}_{\gamma i} R^{dq}_{cj} R^{\alpha r}_{bd}.$$

Nous appliquons de nouveau la formule de Yang-Baxter au second membre :

$$\begin{aligned} R^{bc}_{\gamma i} R^{dq}_{cj} R^{\alpha r}_{bd} &= R^{\alpha d}_{\gamma b} R^{bc}_{ij} R^{rq}_{dc} \\ &= R^{bc}_{ij} R^{\alpha d}_{\gamma b} R^{rq}_{dc} \\ &= R^{\beta m}_{ij} R^{\alpha p}_{\gamma\beta} R^{rq}_{pm} \end{aligned}$$

Au final, nous avons démontré grâce en particulier aux équations de Yang-Baxter et de Hecke l'égalité :

$$\left(R^{kl}_{ij} l^m_k R^{pq}_{ml} l^r_p - l^a_i R^{bc}_{aj} l^d_b R^{rq}_{dc} - \left(R^{aq}_{ij} l^r_a - l^b_i R^{rq}_{bj} \right) \right) \triangleright x^{\alpha} = 0.$$

3. Considérons notre équation (1.3.2), si nous multiplions à gauche par $\left(R^{-1}\right)^{ij}_{\alpha\beta}$, nous avons :

$$\delta^k_\alpha \delta^l_\beta l^m_k R^{pq}_{ml} l^r_p - \left(R^{-1}\right)^{ij}_{\alpha\beta} l^a_i R^{bc}_{aj} l^d_b R^{rq}_{dc} = \hbar \left(l^r_a - \left(R^{-1}\right)^{ij}_{\alpha\beta} l^b_i R^{rq}_{bj} \right)$$

Et donc :

$$l^m_k R^{pq}_{ml} l^r_p - \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} l^a_i R^{bc}_{aj} l^d_b R^{rq}_{dc} = \hbar \left(l^r_a - \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} l^b_i R^{rq}_{bj} \right)$$

Mais alors :

$$\Psi^{q\delta}_{l\gamma} l^m_k R^{pq}_{ml} l^r_p - \Psi^{q\delta}_{l\gamma} \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} l^a_i R^{bc}_{aj} l^d_b R^{rq}_{dc} = \hbar \left(\Psi^{q\delta}_{l\gamma} l^r_a - \Psi^{q\delta}_{l\gamma} \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} R^{rq}_{bj} l^b_i \right)$$

Nous en déduisons donc l'égalité :

$$l^m_k l^r_p - \Psi^{qm}_{lp} \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} R^{bc}_{aj} R^{rq}_{dc} l^a_i l^d_b = \hbar \left(\Psi^{qm}_{lp} l^r_a - \Psi^{qm}_{lp} \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} R^{rq}_{bj} l^b_i \right)$$

Nous retrouvons bien nos égalités :

$$l^m_k l^r_p - Q^{mr}_{kp}(L) = \hbar \left[l^m_k ; l^r_p \right]$$

avec :

$$Q^{mr}_{kp} = \Psi^{qm}_{lp} \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} R^{bc}_{aj} R^{rq}_{dc} l^a_i l^d_b$$

$$\left[l^m_k ; l^r_p \right] = \Psi^{qm}_{lp} l^r_a - \Psi^{qm}_{lp} \left(R^{-1}\right)^{ij}_{kl} R^{rq}_{bj} l^b_i$$

Montrer que l'action adjointe est alors une représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ est plus difficile.
Nous nous contenterons de l'établir dans le chapitre 2 pour $n = 2$ avec deux symétries de Hecke différentes. ∎

1.5 L'équation de Cayley-Hamilton

Le théorème suivant a été démontré dans [GPS1] :

Théorème :

Soit L une matrice vérifiant l'équation mRE (1.3.3) pour R vérifiant l'équation de Yang-Baxter (1.1.1), l'équation de Hecke (1.1.2), R étant de plus anti-inversible.

1. Si R est paire alors si nous notons $p = rg\,(R)$, L vérifie l'équation de Cayley-Hamilton suivante :

$$L^p + \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i\,(L)\,L^i = 0 \tag{1.5.1}$$

avec $\sigma_i\,(L) \in Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q})$, $Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q})$ étant le centre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.

2. Si R est de type $(p|r)$, L vérifie l'équation de Cayley-Hamilton suivante :

$$\sum_{i=0}^{p+r} \sigma_i\,(L)\,L^i = 0 \tag{1.5.2}$$

avec $\sigma_i\,(L) \in Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q})$.
Ce cas diffère du précédent par le fait que le polynôme de Cayley-Hamilton n'est pas unitaire.

Nous considérons alors dans les deux situations un caractère :

$$\chi : Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Nous notons $\mathcal{I}^\chi$ l'idéal engendré par les éléments $z - \chi(z)$ avec $z \in Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q})$.
Nous considérons alors l'algèbre ${\mathcal{L}_{\hbar,q}}^\chi = \mathcal{L}_{\hbar,q}/\mathcal{I}^\chi$
L'équation de Cayley-Hamilton devient alors dans ${\mathcal{L}_{\hbar,q}}^\chi$:

$$L^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i L^i = 0 \;\text{ avec }\; a_i = \chi\,(\sigma_i(L)) \tag{1.5.3}$$

$$\text{ou bien }\; \sum_{i=0}^{p+r} a_i L^i = 0 \;\text{ avec }\; a_i = \chi\,(\sigma_i(L))\,. \tag{1.5.4}$$

Définition :

Nous appelons valeurs propres de L correspondant au caractère χ les solutions de l'équation (1.5.3) ou (1.5.4).

Remarque :

Revenons aux équations (1.5.1) et (1.5.2), les racines des équations :

$$\mu^p + \sum_{i=0}^{p-1} \sigma_i\,(L)\,\mu^i = 0 \;\text{ et }\; \sum_{i=0}^{p+r} \sigma_i\,(L)\,\mu^i = 0$$

sont éléments de l'extension algébrique du centre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ que nous notons $\overline{Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q})}$ dans le premier cas ou du corps de fraction de celui-ci dans le deuxième cas. Nous les appelons également valeurs propres de L.

1.6 sl-réduction de REA et mREA

Pour terminer ce chapitre, nous discutons de la notion de sl-réduction.

Nous savons déjà que $l := Tr_q(L) \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q})$.
Nous pouvons alors définir les algèbres :

$$\mathcal{SL}_{\hbar,q} = \mathcal{L}_{\hbar,q} / \langle l \rangle$$

Nous supposons dans ce qui suit que $Tr(C) \neq 0$.
Nous définissons un nouvel ensemble de générateurs de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ que nous notons $\left\{ f_i^j, l \right\}$ tels que $Tr_q\left(f_i^j\right) = 0$. Par cette condition, nous interdisons les super-symétries de type $(n|n)$.
Précisons que $Tr_q\left(l_i^j\right) = \delta_i^j$. Cette propriété est motivée par l'identification $l_i^j \cong x_i \otimes x^j$ et le couplage équivariant $\left\langle x_i ; x^j \right\rangle = \delta_i^j$.
Notons que $Tr_q(l) = Tr(C)$. En effet $Tr_q(l) = Tr_q(Tr(CL)) = Tr(C)$. Aussi, la notation Tr_q a deux sens :

1. C'est l'application $L^k \longmapsto Tr_q\left(L^k\right) = Tr\left(CL^k\right) \in \mathcal{L}_{\hbar,q}$. Ici la trace quantique est donc appliquée à une matrice.
2. C'est l'application que nous venons de définir $Tr_q : \left\langle l_i^j \right\rangle_{1 \leq i,j \leq n} \longrightarrow \mathbb{K}$. Par contre ici la trace quantique est appliquée aux éléments de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$.

Chaque fois que nous utiliserons la notation Tr_q, le contexte lèvera toute éventuelle confusion quand au sens de cette notation.
Revenons à la construction des éléments f_i^j de trace nulle.

Si nous notons F la matrice définie par les coefficients f_i^j, i.e. $F = \left(f_i^j\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, nous avons la relation :

$$L = F + (Tr(C))^{-1} Il.$$

Nous pouvons alors reformuler l'équation mRE (1.3.3) en utilisant ces nouveaux générateurs grâce en particulier à l'équation de Hecke (1.1.2) :

$$R_{12}F_1R_{12}F_1 - F_1R_{12}F_1R_{12} = \left(\hbar e_{\mathcal{L}} - \frac{\zeta}{Tr(C)} l\right)(R_{12}F_1 - F_1R_{12}), \quad lF = Fl, \quad Tr_q(F) = 0.$$

Nous pouvons alors décrire notre algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}$ grâce aux équations :

$$R_{12}F_1R_{12}F_1 - F_1R_{12}F_1R_{12} = \hbar (R_{12}F_1 - F_1R_{12}), \quad Tr_q(F) = 0.$$

Soulignons que la dernière relation signifie que les générateurs f_i^j sont linéairement dépendants.

Terminons ce paragraphe en faisant le lien entre représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ et représentation de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}$.

Proposition :[S]

Considérons une représentation $\rho : \mathcal{L}_{\hbar,q} \rightarrow End(U)$ telle que $l = Tr_q(L)$ est un multiple de l'opérateur unité (comme dans une représentation irréductible par exemple) :

$$\text{i.e} \quad \rho(l) = \chi I_U \quad \text{avec} \quad \chi \in \mathbb{K}.$$

Alors l'application :

$$\widetilde{\rho}\left(f_i^j\right) = \frac{1}{\xi}\left(\rho\left(l_i^j\right) - (\hbar Tr(C))^{-1} \rho(l) \delta_i^j\right), \quad \xi = 1 - \zeta (Tr(C))^{-1} \chi$$

est une représentation de l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}$.

Preuve :

Nous savons que :

$$
\begin{aligned}
R_{12}F_1R_{12}F_1 - F_1R_{12}F_1R_{12} =& \left(\hbar e_{\mathcal{L}} - \frac{\zeta}{Tr\left(C\right)}l\right)\left(R_{12}F_1 - F_1R_{12}\right) \\
=&\hbar\left(e_{\mathcal{L}} - \frac{\zeta l}{\hbar Tr\left(C\right)}\right)\left(R_{12}F_1 - F_1R_{12}\right)
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons alors que la représentation ci-dessous convient :

$$
\widetilde{\rho}\left(f_i^j\right) = \frac{\rho\left(l_i^j\right) - \left(Tr\left(C\right)\right)^{-1}\rho\left(l\right)\delta_i^j}{1 - \zeta\left(\hbar Tr\left(C\right)\right)^{-1}\chi} \qquad \blacksquare
$$

Chapitre 2

Espace de q-Minkowski et son super-analogue

2.1 Espace de q-Minkowski et son super-analogue

Dans ce paragraphe, nous étudions deux cas particuliers des algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ définies de manière générale dans le chapitre 1. Nous travaillons ici sur les algèbres mREA correspondant aux R-matrices de taille 4×4 présentées en exemples dans le chapitre précédent à savoir la R-matrice de Drinfeld-Jimbo paire de rang 2 et la symétrie de Hecke de type $(1|1)$. Suivant P. Kulish [Ku], nous appelons l'espace correspondant à la première symétrie de Hecke espace de q-Minkowski. Notons, néanmoins que l'espace de q-Minkowski de Kulish est l'algèbre $\mathcal{L}_q$ ($\hbar = 0$). Cependant, nous avons établi dans le chapitre précédent que pour $q \neq 1$, les algèbres $\mathcal{L}_q$ et $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ sont isomorphes. Aussi, nous préférons travailler cette algèbre sous la forme $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ ($\hbar \neq 0$) ce qui nous permet de la traiter comme un q-analogue de l'algèbre enveloppante $U\left(gl(2)\right)$ et de développer une théorie de la représentation différente de celle construite dans [Ku]. Ici, nous utilisons les résultats du chapitre 1, en particulier les méthodes de construction de la théorie de la représentation de mREA. Nous appliquons dans un deuxième temps, la même méthode à l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}$ correspondant à la symétrie de Hecke de type $(1|1)$, le q-super analogue de l'espace de Minkowski.

2.1.1 Espace de q-Minkowski

Définition de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$

Nous considérons l'algèbre mREA dans le cas particulier où V est un espace-vectoriel de dimension 2 :

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Explicitons la matrice $L_1 = L \otimes I$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Regardons de nouveau la symétrie de Hecke paire anti-inversible de degré 2 R définie par la matrice :

$$R = R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \text{ avec } q \in \mathbb{K} \text{ et } \zeta = q - q^{-1}.$$

qui est une déformation de la volte classique P :

$$\forall i, j : \quad P\left(x_i \otimes x_j\right) = x_j \otimes x_i.$$

Plus précisément $R_1 = P$.
Après un calcul direct, nous arrivons au système d'équations suivants pour les générateurs $\{a; b; c; d\}$ de l'algèbre mREA $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ dans ce cas particulier :

$$\begin{cases} qab - q^{-1}ba - \hbar b = 0 \\ q\,(bc - cb) - (\zeta a - \hbar)\,(d - a) = 0 \\ qca - q^{-1}ac - \hbar c = 0 \\ q\,(db - bd) - (\zeta a - \hbar)\,b = 0 \\ ad - da = 0 \\ q\,(cd - dc) - c\,(\zeta a - \hbar) = 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Donc l'algèbre en question est quotient de l'algèbre tensorielle libre $T\,[a, b, c, d]$ par l'idéal $\mathcal{I}$ engendré par les éléments de la partie gauche du système (2.1.1) :

$$\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2) = T\,[a, b, c, d]\,/\mathcal{I}.$$

Représentations fondamentales et adjointe

Connaissant explicitement les matrices R et B pour notre algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$, nous pouvons appliquer les résultats du chapitre 1 pour déterminer certaines représentations de base de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$:

Proposition :

1. La première représentation fondamentale (vectorielle) sur V de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ est la suivante :

$$\rho_1(a) = \hbar\begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho_1(b) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & q^{-3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho_1(c) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-1} & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho_1(d) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^{-3} \end{pmatrix}$$

2. La deuxième représentation fondamentale (covectorielle) sur V^* de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ est la suivante :

$$\rho_1^*(a) = \hbar\begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho_1^*(b) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho_1^*(c) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho_1^*(d) = \hbar\begin{pmatrix} -\zeta & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}$$

3. La représentation adjointe est la suivante :

$$\rho\,(a) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho\,(b) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & q^{-1} & 0 \\ -q^{-1} & 0 & 0 & q^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho\,(c) = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & -q^{-1} \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \rho\,(d) = \hbar\begin{pmatrix} -\zeta & 0 & 0 & q^{-2}\zeta \\ 0 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-3} - \zeta & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & -q^{-2}\zeta \end{pmatrix}$$

Preuve :

En ce qui concerne les deux premières représentations, c'est une application directe des formules démontrées dans le chapitre 1.
Voici les éléments de calculs qui permettent d'établir la troisième représentation :

$$L_1 R L_1 = \begin{pmatrix} qa^2 & ba & qab & b^2 \\ ac & \zeta a^2 + qbc & ad & \zeta ab + qbd \\ qca & da & qcb & db \\ c^2 & \zeta ca + qdc & cd & \zeta cb + qd^2 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons alors :

$$\Psi \triangleright (L_1 R L_1) = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ab & b^2 \\ ac & bc & ad & bd \\ ca & da & cb & db \\ c^2 & dc & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

Or :

$$L_1 - R^{-1} L_1 R = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1}b & b & 0 \\ -qc & a-d & 0 & b \\ q^2 c & \zeta(d-a) & d-a & -qb \\ 0 & q^{-2}c & -q^{-1}c & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc :

$$\Psi \triangleright \left(L_1 - R^{-1} L_1 R\right) = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1}b & q^{-1}b & 0 \\ -qc & q^{-1}(a-d) & 0 & q^{-3}b \\ qc & \zeta(d-a) & q^{-1}(d-a) & -qb \\ 0 & \left(q^{-3}-\zeta\right)c & -q^{-1}c & q^{-2}\zeta(a-d) \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons alors facilement notre représentation.
La vérification que nos matrices sont compatibles avec les équations (2.1.1) est alors directe. ■

Trace quantique

Définition :

Nous avons établi dans le chapitre précédent que :

$$C = \begin{pmatrix} q^{-3} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

Nous définissons alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} : Tr_q\left(L^k\right) = Tr\left(CL^k\right).$$

Remarque :

Notons que $Tr_q(I) = Tr(C) = q^{-2}[2]_q$.
Souvent, on utilise une autre normalisation de la trace :

$$\overline{Tr}_q\left(L^k\right) = q^2 Tr_q\left(L^k\right).$$

Pour cette normalisation, nous avons $\overline{Tr}_q(I) = [2]_q$.
C'est cette normalisation que nous utiliserons par la suite.

La sphère quantique

Définition

Avec la normalisation définie précédemment la trace quantique de L devient :

$$Tr_q(L) = q^{-1}a + qd = l.$$

(Par la suite, nous utiliserons donc toujours cette trace normalisée mais nous omettrons la barre.)
Nous savons d'après un théorème du chapitre précédent que $Tr_q(L) = l \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2))$.
Nous pouvons donc considérer l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2) = \mathcal{L}_{\hbar,q}(2)/\langle l\rangle$.
Autrement dit dans cette algèbre nous imposons la relation :

$$q^{-1}a + qd = 0.$$

Introduisons un élément $g = a - d$.
Notons que $Tr_q(g) = 0$ car $Tr_q(a) = Tr_q(d) = 1$ sachant que $Tr_q\left(l_i^j\right) = \delta_i^j$.
Les éléments g, b, c sont donc de trace nulle.

Théorème :

Réécrivons le système déterminant l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ dans la base $\{l; g; b; c\}$. Nous avons :

$$\begin{cases} q^2gb - bg = \hbar\,[2]_q\, b - \zeta lb \\ gc - q^2cg = -\hbar\,[2]_q\, c + \zeta lc \\ \left(q^2+1\right)(bc-cb) + \left(q^2-1\right)g^2 \quad = \hbar\,[2]_q\, g - \zeta lg \\ bl = lb \\ cl = lc \\ gl = lg \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Preuve :

Nous avons :

$$q^{-1}a + qd = l \Leftrightarrow a = ql - q^2d \Leftrightarrow d = q^{-1}l - q^{-2}a.$$

Sachant que $g = a - d$, nous en déduisons donc que :

$$d = \frac{l}{[2]_q} - \frac{q^{-1}}{[2]_q}g \text{ et } a = \frac{l}{[2]_q} + \frac{q}{[2]_q}g.$$

Il ne nous reste plus qu'à travailler sur les équations de l'algèbre mREA (2.1.1) :

$$\begin{aligned} qab - q^{-1}ba = \hbar b &\Leftrightarrow \frac{q^2}{[2]_q}gb - \frac{1}{[2]_q}bg = \hbar b - \frac{\zeta}{[2]_q}lb \\ &\Leftrightarrow q^2gb - bg = \hbar\,[2]_q\, b - \zeta lb \\ qca - q^{-1}ac = \hbar c &\Leftrightarrow \frac{q^2}{[2]_q}cg - \frac{1}{[2]_q}gc = \hbar c - \frac{\zeta}{[2]_q}lc \\ &\Leftrightarrow q^2cg - gc = \hbar\,[2]_q\, c - \zeta lc \end{aligned}$$

$$ad - ad = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{l}{[2]_q} + \frac{q}{[2]_q}g\right)\left(\frac{l}{[2]_q} - \frac{q^{-1}}{[2]_q}g\right) - \left(\frac{l}{[2]_q} - \frac{q^{-1}}{[2]_q}g\right)\left(\frac{l}{[2]_q} + \frac{q}{[2]_q}g\right) \Leftrightarrow lg - gl = 0$$

$$\begin{aligned} q(bc-cb) = (\zeta a - \hbar)(d-a) &\Leftrightarrow q(bc-cb) = \left(\frac{q\zeta}{[2]_q}g + \zeta\frac{l}{[2]_q} - \hbar\right)\left(\frac{-q^{-1}}{[2]_q} - \frac{q}{[2]_q}\right)g \\ &\Leftrightarrow q(bc-cb) = \left(\frac{q^2-1}{[2]_q}g + \zeta\frac{l}{[2]_q} - \hbar\right)\left(\frac{-[2]_q\, g}{[2]_q}\right) \\ &\Leftrightarrow q(bc-cb) = \frac{-q^2+1}{[2]_q}g^2 - \frac{\zeta}{[2]_q}lg + \hbar g \\ &\Leftrightarrow q\,[2]_q\,(bc-cb) = -\left(q^2-1\right)g^2 + \hbar\,[2]_q\, g - \zeta lg \\ &\Leftrightarrow \left(q^2+1\right)(bc-cb) + \left(q^2-1\right)g^2 = \hbar\,[2]_q\, g - \zeta lg \\ q(cd-dc) = c(\zeta a - \hbar) &\Leftrightarrow \frac{-1}{[2]_q}cg + \frac{1}{[2]_q}gc = \frac{q^2-1}{[2]_q}cg + \frac{\zeta}{[2]_q}lc - \hbar c \\ &\Leftrightarrow gc - cg = \left(q^2-1\right)cg - \hbar\,[2]_q\, c + \zeta lc \\ &\Leftrightarrow gc - q^2cg = -\hbar\,[2]_q\, c + \zeta lc \\ q(db-bd) = (\zeta a - \hbar)b &\Leftrightarrow \frac{-1}{[2]_q}gb + \frac{1}{[2]_q}bg = \left(\frac{q^2-1}{[2]_q}g + \frac{\zeta}{[2]_q}l - \hbar\right)b \\ &\Leftrightarrow bg - gb = \left(q^2-1\right)gb + \zeta lb - \hbar\,[2]_q\, b \\ &\Leftrightarrow q^2gb - bg = \hbar\,[2]_q\, b - \zeta lb \end{aligned}$$

Les trois dernières équations se déduisent du fait que l'élément l est central. ■

Nous en déduisons alors facilement le corollaire :

Corollaire :

L'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ admet pour base $\{b; c; g\}$ et elle est définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} q^2 gb - bg = \hbar \left[2\right]_q b \\ gc - q^2 cg = -\hbar \left[2\right]_q c \\ \left(q^2+1\right)(bc-cb) + \left(q^2-1\right) g^2 = \hbar \left[2\right]_q g \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Remarque 1 :

Contrairement au cas classique ($q = 1$ qui correspond aux algèbres $sl(2)$ et $gl(2)$), l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$.

Remarque 2 :

Disons quelques mots sur la terminologie.
Dans le cas classique, la sphère S^2 est définie dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ par l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ avec } r > 0.$$

Son algèbre coordonnée est alors :

$$\mathbb{R}\left[S^2\right] = \mathbb{R}\left[x, y, z\right] / \left\langle x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \right\rangle.$$

Etudions la complexification de cette algèbre à savoir : $\mathbb{R}\left[S^2\right] \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\left[S^2\right]$
En effectuant le changement de base suivant :

$$h = \sqrt{2}x, \qquad b = \frac{y + iz}{\sqrt{2}}, \qquad c = \frac{y - iz}{\sqrt{2}}$$

nous obtenons l'algèbre :

$$\mathbb{C}\left[S^2\right] = \mathbb{C}\left[h, b, c\right] / \left\langle \frac{h^2}{2} + 2bc - r^2 \right\rangle.$$

Cette algèbre est également une complexification de la $\mathbb{R}$-algèbre suivante :

$$\mathbb{R}\left[\mathcal{H}\right] = \mathbb{R}\left[h, b, c\right] / \left\langle \frac{h^2}{2} + 2bc - r^2 \right\rangle$$

qui est l'algèbre coordonnée de l'hyperboloïde à une nappe $\mathcal{H}$ définie dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$ par l'équation :

$$\frac{h^2}{2} + 2bc = r^2 \text{ avec } r > 0.$$

Notre algèbre quantique $\mathcal{SL}_{\hbar,q}$ regardée sur le corps $\mathbb{R}$ est plutôt une déformation (quantification) de l'algèbre coordonnée de l'hyperboloïde classique.
Quand nous l'appelons sphère quantique, nous nous plaçons implicitement sur le corps $\mathbb{C}$ où elle est effectivement une déformation (quantification) de l'algèbre $\mathbb{C}\left[S^2\right]$.
En effet si nous effectuons le changement de base inverse pour passer de l'hyperboloïde quantique à la sphère quantique, le changement de base est le suivant :

$$x = \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{b + c}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{i(b - c)}{\sqrt{2}}$$

2.1.2 Le q super-analogue de l'espace de q-Minkowski

Définition de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$

Nous considérons l'algèbre mREA toujours dans le cas particulier où V est un espace-vectoriel de dimension 2 :

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Explicitons la matrice $L_1 = L \otimes I$ comme :

$$L_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

La seule différence avec l'exemple précédent est que nous utilisons cette fois la R-matrice :

$$R = R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } q \in \mathbb{K} \text{ et } \zeta = q - q^{-1}.$$

Nous avons démontré dans le chapitre 1 que R vérifie l'équation de Yang-Baxter, l'équation de Hecke, est de type $(1|1)$ et anti-inversible.
Nous notons $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ l'algèbre engendré par $a; b; c; d$.
Après un calcul direct, nous arrivons au système d'équations suivants pour les générateurs $\{a; b; c; d\}$ de l'algèbre mREA $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ dans ce cas particulier :

$$\begin{cases} qab - q^{-1}ba - \hbar b = 0 \\ qcb + q^{-1}bc - (\zeta a - \hbar)(a - d) = 0 \\ qca - q^{-1}ac - \hbar c = 0 \\ q^{-1}(bd - db) - (\zeta a - \hbar) b = 0 \\ ad - da = 0 \\ q^{-1}(dc - cd) - c(\zeta a - \hbar) = 0 \\ b^2 = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Donc comme précédemment l'algèbre en question est quotient de l'algèbre tensorielle libre $T[a, b, c, d]$ par l'idéal $\mathcal{J}$ engendré par les éléments de la partie gauche du système (2.1.4) :

$$\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1) = T[a, b, c, d] / \mathcal{J}.$$

Représentations fondamentales et adjointe

Connaissant explicitement les matrices R et B pour notre algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$, nous pouvons appliquer les résultats du chapitre 1 pour déterminer certaines représentations de base de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$:

Proposition :

1. La première représentation fondamentale (vectorielle) sur V de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ est la suivante :

$$\rho_1(a) = \hbar \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(c) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(d) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}$$

2. La deuxième représentation fondamentale (covectorielle) sur V^* de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ est la suivante :

$$\rho_1^*(a) = \hbar \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1^*(b) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1^*(c) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1^*(d) = \hbar \begin{pmatrix} -\zeta & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

3. La représentation adjointe est la suivante :

$$\rho(a) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -q & 0 \\ -q^{-1} & 0 & 0 & -q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(c) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & q \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(d) = \hbar \begin{pmatrix} -\zeta & 0 & 0 & -\zeta \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

Preuve :

En ce qui concerne les deux premières représentations, c'est une application directe des formules démontrées dans le chapitre 1.
Voici les éléments de calculs qui permettent d'établir la troisième représentation :

$$L_1RL_1 = \begin{pmatrix} qa^2 & ba & qab & b^2 \\ ac & \zeta a^2 - q^{-1}bc & ad & \zeta ab - q^{-1}bd \\ qca & da & qcb & db \\ c^2 & \zeta ca - q^{-1}dc & cd & \zeta cb - q^{-1}d^2 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons alors :

$$\Psi \triangleright (L_1RL_1) = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ab & b^2 \\ ac & bc & ad & bd \\ ca & da & cb & db \\ c^2 & dc & cd & d^2 \end{pmatrix}$$

Or :

$$L_1 - R^{-1}L_1R = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1}b & b & 0 \\ -qc & a-d & 0 & b \\ q^2c & \zeta(d-a) & d-a & q^{-1}b \\ 0 & q^2c & qc & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc :

$$\Psi \triangleright \left(L_1 - R^{-1}L_1R\right) = \begin{pmatrix} 0 & -q^{-1}b & q^{-1}b & 0 \\ -qc & q(d-a) & 0 & -q^{-1}b \\ qc & \zeta(d-a) & q^{-1}(d-a) & q^{-1}b \\ 0 & -qc & qc & \zeta(d-a) \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons alors facilement notre représentation.
La vérification que nos matrices sont compatibles avec les équations (2.1.4) est alors directe. ■

Trace quantique

Définition :

Nous avons établi dans le chapitre précédent que :

$$C = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}.$$

Nous définissons alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} : Tr_q\left(L^k\right) = Tr\left(CL^k\right).$$

Remarques :

1. L'élément $Tr_q(L) = qa - qd$ est central. Néanmoins, contrairement à l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$, dans notre algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ nous avons $Tr_q(l) = 0$. Aussi, nous ne pouvons pas construire une base analogue du type " $\{g; l; b; c\}$ " dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$.
   C'est pourquoi, nous ne pouvons pas donner une définition satisfaisante de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(1|1)$.
2. Là encore, nous pourrions renormaliser la trace de sorte que $Tr_q(L) = a - d$.
   Ce que nous ne ferons pas dans ce cas précis.
   Aussi par la suite, nous utiliserons dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ la définition précédente de la trace quantique.
   Cela dit, par commodité, nous utiliserons plutôt l'élément central $l = a - d = q^{-1}Tr_q(L)$ plutôt que $Tr_q(L)$.

2.2 L'identité de Cayley-Hamilton

2.2.1 Le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$.

Théorème :

La matrice $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie l'équation suivante dite de Cayley-Hamilton :

$$L^2 - \left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right) L + \left(ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1}a\right) I = 0. \tag{2.2.1}$$

Preuve :

Nous vérifions cette égalité par calcul direct sur les coefficients de la matrice.
Nous avons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} . & * \\ . & . \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} ab + bd - \left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right) b &= ab + bd - q^{-2}ab - db - q^{-1}\hbar b \\ &= (bd - db) + \left(1 - q^{-2}\right) ab - q^{-1}\hbar b \\ &= -q^{-1}(\zeta a - \hbar) b + q^{-1}\zeta ab - q^{-1}\hbar b \\ &= -q^{-1}\zeta ab + q^{-1}\zeta ab + q^{-1}\hbar b - q^{-1}\hbar b = 0 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} . & . \\ * & . \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} ca + dc - \left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right) c &= q^{-1}\left(qca - q^{-1}ac\right) + dc - dc - q^{-1}\hbar c \\ &= q^{-1}\hbar c - q^{-1}\hbar c = 0 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} * & . \\ . & . \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &a^2 + bc - \left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right) a + ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1}a \\ &= a^2 + bc - q^{-2}a^2 - da - q^{-1}\hbar a + ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1}a \\ &= q^{-1}\zeta a^2 - q^{-1}\zeta a^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & cb + d^2 - \left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right) d + ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1} a \\ & = cb + d^2 - q^{-2}ad - d^2 - q^{-1}\hbar d + ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1} a \\ & = q^{-1}\left(-q\left(bc - cb\right) + \left(\zeta a - \hbar\right)\left(d - a\right)\right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

Nous avons démontré l'égalité de Cayley-Hamilton (2.2.1). ■

Corollaire :

L'identité de Cayley-Hamilton peut être présentée sous la forme équivalente :

$$L^2 - \left(q^{-1}Tr_q\left(L\right) + q^{-1}\hbar\right) L + [2]_q^{-1}\left(q^{-1}\left(Tr_q\left(L\right)\right)^2 - Tr_q\left(L^2\right) + \hbar q^{-1} Tr_q\left(L\right)\right) I = 0. \quad (2.2.2)$$

(Rappelons que nous utilisons la trace normalisée.)

Preuve :

$$q^{-1}Tr_q\left(L\right) + q^{-1}\hbar = q^{-1}\left(q^{-1}a + qd\right) + q^{-1}\hbar = q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar$$

$$\begin{aligned} & [2]_q^{-1}\left(q^{-1}\left(Tr_q\left(L\right)\right)^2 - Tr_q\left(L^2\right) + \hbar q^{-1} Tr_q\left(L\right)\right) \\ & = [2]_q^{-1}\left(q^{-1}\left(q^{-1}a + qd\right)^2 - q^{-1}a^2 - q^{-1}bc - qcb - qd^2 + \hbar q^{-1}\left(q^{-1}a + qd\right)\right) \\ & = [2]_q^{-1}\left(q^{-3}a^2 + 2q^{-1}ad + qd^2 - q^{-1}a^2 - q^{-1}bc - qcb - qd^2 + \hbar\left(q^{-2}a + qd\right)\right) \\ & = [2]_q^{-1}\left(q^{-1}ad - q^{-2}\zeta a^2 - q^{-1}bc - qcb + qcb - qbc + qad - \zeta a^2 + \hbar\left(a - d + q^{-2}a + d\right)\right) \\ & = ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1} a \qquad ■ \end{aligned}$$

2.2.2 Le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(1|1\right)$

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(1|1\right)$.

Théorème :

Si nous notons $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors la matrice vérifie l'équation suivante dite de Cayley-Hamilton :

$$\left(a - d\right) L^2 - \left(a^2 - d^2 + bc - cb\right) L + \left(ad\left(a - d\right) + bcd - cba\right) I = 0. \quad (2.2.3)$$

(Notons que q et $\hbar$ n'interviennent pas explicitement dans cette relation.)

Preuve :

Nous vérifions cette égalité par calcul direct sur les coefficients de la matrice.
Nous avons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & * \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(a - d\right)\left(ab + bd\right) - \left(a^2 - d^2 + bc - cb\right) b & = a^2b + abd - adb - dbd - a^2b + d^2b - bcb + cb^2 \\ & = d\left(db - bd\right) + a\left(bd - db\right) - q\left(qcb + q^{-1}bc\right) b \\ & = -d\left(bd - db\right) + a\left(bd - db\right) - \left(q\zeta a - q\hbar\right)\left(a - d\right) b \\ & = \left(a - d\right)\left(q\zeta a - q\hbar - q\zeta a + q\hbar\right) b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ * & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(a-d)(ca+dc)-\left(a^2-d^2+bc-cb\right)c &= aca+adc-dca-d^2c-a^2c+d^2c-bc^2+cbc\\ &= d(ac-ca)+a(ca-ac)+q^{-1}\left(qcb+q^{-1}bc\right)c\\ &= (d-a)(ac-ca)-\left(q^{-1}\zeta a-q^{-1}\hbar\right)(d-a)c\\ &= (d-a)\left(ac-ca-q^{-1}\zeta ac+q^{-1}\hbar c\right)\\ &= (d-a)\left(ac-ca-ac+q^{-2}ac+q^{-1}\hbar c\right)\\ &= (d-a)\left(q^{-1}\left(q^{-1}ac-qca\right)+q^{-1}\hbar c\right)\\ &= (d-a)\left(-q^{-1}\hbar c+q^{-1}\hbar c\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} * & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&(a-d)\left(a^2+bc\right)-\left(a^2-d^2+bc-cb\right)a+(ad(a-d)+bcd-cba)\\ &= ad(d-a)+(a-d)bc+(cb-bc)a+ad(a-d)+bcd-cba\\ &= cb(a-d)+(cb-bc)d+bcd-cba\\ &= cba-cbd+cbd-bcd+bcd-cba=0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&(a-d)\left(cb+d^2\right)-\left(a^2-d^2+bc-cb\right)d+(ad(a-d)+bcd-cba)\\ &= ad(d-a)+(a-d)cb+(cb-bc)d+ad(a-d)+bcd-cba\\ &= cb(a-d)+(cb-bc)d+bcd-cba\\ &= cba-cbd+cbd-bcd+bcd-cba=0\end{aligned}$$

Nous avons démontré l'égalité de Cayley-Hamilton (2.2.3). ■

2.3 Les centres

2.3.1 Le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$

L'étude des coefficients du trinôme de Cayley-Hamilton

Théorème :

Les coefficients du trinôme de Cayley-Hamilton (2.2.1) sont au centre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$, autrement dit :

$$q^{-2}a+d+q^{-1}\hbar \in Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)\right) \quad \text{et} \quad ad-bc-q^{-1}\zeta a^2+\hbar q^{-1}a \in Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)\right).$$

Preuve :

Pour démontrer ce théorème nous nous appuyons sur l'égalité (2.2.2) et un des théorèmes principaux du chapitre 1 à savoir $\forall k \in \mathbb{N},\ Tr_q\left(L^k\right) \in Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)\right)$. ■.

Remarque :

Nous avons utilisé un théorème très général du chapitre 1 pour démontrer ce théorème. Il peut être intéressant de donner la démonstration directe de ce théorème en utilisant uniquement le système d'équation (2.1.1). Le lecteur pourra alors prendre conscience de l'étendue des calculs que cela implique. Voici cette démonstration :

Preuve "directe" :

Il suffit de vérifier que ces coefficients commutent avec a, b, c, d les quatre générateurs de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$.

Montrons d'abord que $q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2))$.

Nous savons que $q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar = q^{-1}Tr_q(L) + q^{-1}\hbar$.
Il nous suffit donc de montrer que $Tr_q(L) = l = q^{-1}a + qd \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2))$.
Il nous faut démontrer que l commute avec les quatre générateurs de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$: a, b, c, d.
De manière évidente, nous avons bien : $al = la$ et $dl = ld$.

$$\begin{aligned}
bl &= q^{-1}ba + qbd \\
&= qab - \hbar b + qdb + (\hbar - \zeta a)\, b \\
&= qab - \hbar b + qdb + \hbar b + q^{-1}ab - qab \\
&= lb \\
cl &= q^{-1}ca + qcd \\
&= q^{-3}ac + \hbar q^{-2}c + qdc + \zeta ca - \hbar c \\
&= -q^{-2}\left(qca - q^{-1}ac\right) + qca + \hbar q^{-2}c + qdc - \hbar c \\
&= -\hbar q^{-2}c + \hbar q^{-2}c + qdc + qca - \hbar c \\
&= qdc + q^{-1}ac = lc
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que $ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1}a \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2))$.

Nous savons que :

$$ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1}a = [2]_q^{-1}\left(q^{-1}(Tr_q(L))^2 - Tr_q\left(L^2\right) + \hbar q^{-1}Tr_q(L)\right).$$

Il nous suffit donc de montrer que $Tr_q\left(L^2\right) = l' \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2))$.
Il nous faut démontrer que l' commute avec les quatre générateurs de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$: a, b, c, d.

$$l' = Tr_q\left(L^2\right) = q^{-1}a^2 + q^{-1}bc + qcb + qd^2$$

a commute avec l' si et seulement si a commute avec $q^{-1}bc + qcb$.

$$\begin{aligned}
a\left(q^{-1}bc + qcb\right) &= q^{-1}abc + qacb \\
&= q^{-3}bac + \hbar q^{-2}bc + q^3cab - \hbar q^2cb \\
&= q^{-1}bca - \hbar q^{-2}bc + \hbar q^{-2}bc + qcba + \hbar q^2cb - \hbar q^2cb \\
&= \left(q^{-1}bc + qcb\right) a
\end{aligned}$$

Nous avons bien $al' = l'a$.

d commute avec l' si et seulement si d commute avec $q^{-1}bc + qcb$.

$$\begin{aligned}
d\left(q^{-1}bc + qcb\right) &= q^{-1}dbc + qdcb \\
&= q^{-1}bdc + q^{-2}(\zeta a - \hbar)\, bc + qcdb - c(\zeta a - \hbar)\, b \\
&= q^{-1}bcd - q^{-2}bc(\zeta a - \hbar) + q^{-2}(\zeta a - \hbar)\, bc + qcbd + c(\zeta a - \hbar)\, b - c(\zeta a - \hbar)\, b \\
&= \left(q^{-1}bc + qcb\right) d
\end{aligned}$$

Nous avons bien $dl' = l'd$.

Montrons que b et l' commutent :

$$\begin{aligned}
bl' &= q^{-1}ba^2 + q^{-1}b^2c + qbcb + qbd^2 \\
q^{-1}b^2c + qbcb &= q^{-1}bcb + qcb^2 + q^{-2}b\left(\zeta a - \hbar\right)\left(d-a\right) + \left(\zeta a - \hbar\right)\left(d-a\right)b \\
&= q^{-1}bcb + qcb^2 + \left(\zeta a - \hbar\right)b\left(d-a\right) + \left(\zeta a - \hbar\right)\left(d-a\right)b \\
&= q^{-1}bcb + qcb^2 + \left(\zeta a - \hbar\right)b\left(d-a\right) + \zeta adb - qa^2b + q^{-1}a^2b - \hbar\left(d-a\right)b \\
qbd^2 &= qd^2b - \left(\zeta a - \hbar\right)db - \left(\zeta a - \hbar\right)bd \\
q^{-1}ba^2 - qa^2b &= \left(\zeta a - \hbar\right)ba - \hbar ab
\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned}
bl' &= l'b + \left(\zeta a - \hbar\right)\left(bd - ba - db - bd + ba\right) - \hbar db + \hbar ab - \hbar ab \\
&= l'b - \zeta adb + \hbar db - \hbar db + \zeta adb = l'b
\end{aligned}$$

Nous avons bien $bl' = l'b$.

Montrons que c et l' commutent :

$$\begin{aligned}
cl' &= q^{-1}ca^2 + q^{-1}cbc + qc^2b + qcd^2 \\
q^{-1}cbc + qc^2b &= q^{-1}bc^2 + qcbc - q^{-2}\left(\zeta a - \hbar\right)\left(d-a\right)c - c\left(\zeta a - \hbar\right)\left(d-a\right) \\
&= q^{-1}bc^2 + qcbc - \left(d-a\right)c\left(\zeta a - \hbar\right) - c\left(d-a\right)\left(\zeta a - \hbar\right) \\
qcd^2 &= qd^2c + \left(\zeta a - \hbar\right)d + dc\left(\zeta a - \hbar\right) \\
&= qd^2c + cd\left(\zeta a - \hbar\right) + dc\left(\zeta a - \hbar\right) \\
q^{-1}ca^2 - q^{-1}a^2c &= q^{-1}\left(q^{-2}aca + \hbar q^{-1}ca - q^2aca + \hbar qac\right) \\
&= -\left(1 + q^{-2}\right)\zeta aca + \hbar q^{-2}ca + \hbar ac \\
&= -ac\left(\zeta a - \hbar\right) - q^{-2}\zeta aca + \hbar q^{-2}ca
\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned}
cl' &= l'c + \left(-dc + ac - cd + ca + cd + dc - ac\right)\left(\zeta a - \hbar\right) - q^{-2}\left(\zeta a - \hbar\right)ca \\
&= l'c + \zeta ca^2 - \hbar ca - q^{-2}\zeta aca + \hbar q^{-2}ca \\
&= l'c + \zeta ca^2 - \hbar ca - \zeta ca^2 + \hbar q^{-1}\zeta ca + \hbar q^{-2}ca = l'c
\end{aligned}$$

Nous avons bien $cl' = l'c$. ■

Les valeurs propres de L

Il découle du théorème précédent qu'en fixant un caractère :

$$\chi : Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)\right) \longrightarrow \mathbb{K}$$

nous fixons les valeurs des coefficients de l'identité de Cayley-Hamilton (2.2.1).
Soient μ_1 et μ_2 les racines du trinôme qui est obtenu par cette fixation des coefficients.
Comme nous l'avons déjà dit, nous appelons μ_1 et μ_2 les valeurs propres de la matrice L dont les coefficients appartiennent à l'algèbre $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}\left(2\right)$.
(Nous rappelons que l'algèbre $\mathcal{L}^{\chi}_{\hbar,q}\left(2\right)$ est l'algèbre quotient de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ et de l'idéal $\mathcal{I}^{\chi}$ engendré par les éléments $z - \chi\left(z\right)$ avec $z \in Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)\right)$.)

Théorème :

En supposant que les valeurs propres de L sont distinctes (i.e. $\mu_1 \neq \mu_2$) :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad Tr_q\left(L^k\right) = \mu_1^k \frac{q\mu_1 - q^{-1}\mu_2 - \hbar}{\mu_1 - \mu_2} + \mu_2^k \frac{q\mu_2 - q^{-1}\mu_1 - \hbar}{\mu_2 - \mu_1}. \qquad (2.3.1)$$

Preuve :

Notons $\alpha_k = Tr_q\left(L^k\right)$.
Nous avons $L^2 + a_1 L + a_2 I = 0$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ tels que $a_1 = \chi\left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right)$ et
$a_2 = \chi\left(ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1} a\right)$.
Mais alors en multipliant l'identité précédente par L^k :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad L^{k+2} + a_1 L^{k+1} + a_2 L^k = 0.$$

En appliquant la trace nous en déduisons donc la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \alpha_{k+2} + a_1 \alpha_{k+1} + a_2 \alpha_k = 0.$$

Si les racines μ_1 et μ_2 de l'équation $\mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0$ sont distinctes, la solution générale de cette équation de récurrence est de la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \alpha_k = d_1\mu_1^k + d_2\mu_2^k \ \text{ avec } \ d_1, d_2 \in \mathbb{K}.$$

(Les coefficients d_1 et d_2 sont appelés *multiplicités quantiques*.)
Or $Tr_q\left(I_2\right) = [2]_q \Leftrightarrow d_1 + d_2 = [2]_q$.
De plus, connaissant l'identité de Cayley-Hamilton (2.2.2), nous en déduisons l'égalité :

$$q^{-1}Tr_q\left(L\right) + q^{-1}\hbar = \mu_1 + \mu_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = q\mu_1 + \mu_2 - \hbar \Leftrightarrow \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 = q\mu_1 + q\mu_2 - \hbar.$$

Il ne nous reste plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = [2]_q \\ \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 = q\mu_1 + q\mu_2 - \hbar \end{cases}$$

Ce système a pour solution :

$$d_1 = \frac{q\mu_1 - q^{-1}\mu_2 - \hbar}{\mu_1 - \mu_2} \ \ et \ \ d_2 = \frac{q\mu_2 - q^{-1}\mu_1 - \hbar}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Nous en déduisons donc la formule du théorème. ■

Remarque :

Cette formule est généralisable avec certaines symétries de Hecke , le lecteur peut consulter à ce propos [GS3]. Cette formule se généralise également avec les algèbres REA standards (Cf. [Mu2]).

2.3.2 Le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$

L'étude des coefficients du trinôme de Cayley-Hamilton

Théorème :

Les coefficients du trinôme de Cayley-Hamilton (2.2.3) sont au centre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$, autrement dit :

$$a-d \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)) \quad ; \quad a^2-d^2+bc-cb \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)) \quad \text{et} \quad ad(a-d)+bcd-cba \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)).$$

Preuve :

Il suffit de vérifier que ces coefficients commutent avec a, b, c, d les quatre générateurs de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$.

Commençons par démontrer que :

$$l = a - d \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)).$$

Trivialement, $al = la$ et $dl = ld$.

$$\begin{aligned}
bl &= ba - bd \\
&= q^2ab - q\hbar b - db - q\zeta ab + q\hbar b \\
&= \left(q^2 - q^2 + 1\right) ab - db \\
&= ab - db = lb \\
cl &= ca - cd \\
&= ca - dc + q\zeta ca - q\hbar c \\
&= ca + q^2ca - ca - q\hbar c - dc \\
&= ac - dc = lc
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que :

$$\delta = a^2 - d^2 + bc - cb \in Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)).$$

$$
\begin{aligned}
a\delta &= a^3 - d^2a + abc - acb \\
&= a^3 - d^2a + q^{-1}bac + q^{-1}\hbar bc - q^2cab + q\hbar cb \\
&= a^3 - d^2a + bca - q^{-1}\hbar bc + q^{-1}\hbar bc - cba - q\hbar cb + q\hbar cb \\
&= \delta a \\
b\delta &= ba^2 - bd^2 + b^2c - bcb \\
&= -cb^2 - dbd - q\left(\zeta a - \hbar\right)bd - bcb + ba^2 \\
&= -cb^2 - d^2b - qd\left(\zeta a - \hbar\right)b - q\left(\zeta a - \hbar\right)bd - bcb + ba^2 \\
&= -cb^2 - db^2 - q\left(\zeta a - \hbar\right)db - q\left(\zeta a - \hbar\right)bd - q\zeta a^2b + q\hbar ab + q\left(\zeta a - \hbar\right)db + ba^2 \\
&= a^2b - d^2b - cb^2 - q\zeta abd + q\hbar bd - q^2a^2b + q\hbar ab + ba^2 - \zeta qabd \\
&= a^2b - d^2b - cb^2 - q\zeta abd + q\hbar bd - q^2a^2b + q^2a^2b - aba + ba^2 - \zeta\left(\hbar bd + q^{-1}bad\right) \\
&= a^2b - d^2b - cb^2 + q^{-1}\hbar bd - q^{-1}\zeta bad - aba + ba^2 \\
&= a^2b - d^2b - cb^2 + q^{-1}\hbar ba - q^{-1}\zeta ba\left(a - d\right) - q^{-1}\zeta bad - aba + ba^2 \\
&= \delta b - ba^2 + q^{-2}ba^2 - q^{-2}ba^2 - q^{-1}\hbar ba + ba^2 + q^{-1}\hbar ba \\
&= \delta b \\
c\delta &= ca^2 - cd^2 + cbc - c^2b \\
&= bc^2 + ca^2 + cbc - dcd + qc\left(\zeta a - \hbar\right)d \\
&= bc^2 - d^2c + ca^2 + cbc + qdc\left(\zeta a - \hbar\right) + qcd\left(\zeta a - \hbar\right) \\
&= bc^2 - d^2c + ca^2 + q^{-1}\left(\zeta a - \hbar\right)\left(a - d\right)c + q\left(cd + dc\right)\left(\zeta a - \hbar\right) \\
&= bc^2 - d^2c + ca^2 + a^2c - q^{-2}a^2c - q^{-1}\zeta adc - q^{-1}\hbar ac + q^{-1}\hbar dc + q\left(cd + dc\right)\left(\zeta a - \hbar\right) \\
&= a^2c - d^2c + bc^2 - q^{-2}a^2c - q^{-1}\zeta adc - q^{-1}\hbar ac - \zeta\hbar dc + q\left(dc + cd\right)\zeta a - q\hbar cd + ca^2 \\
&= a^2c - d^2c + bc^2 - q^{-2}a^2c - q\zeta dca + \zeta\hbar dc - q^{-1}\hbar ac - \zeta\hbar dc + q\zeta dca + q\zeta cda - q\hbar cd + ca^2 \\
&= a^2c - d^2c + bc^2 - q^{-2}a^2c - q^{-1}\hbar ac + q\zeta cda - cbc - q\hbar ca + q\zeta ca\left(a - d\right) + ca^2 \\
&= \delta c - q^{-2}a^2c + q\zeta ca^2 - q^{-1}\hbar ac - q\hbar ca + ca^2 \\
&= \delta c - aca + q^{-1}\hbar ac + q^{-1}\zeta aca + \zeta\hbar ca - q^{-1}\hbar ac - q\hbar ca \\
&= \delta c - q^{-2}aca - q^{-1}\hbar ca + ca^2 \\
&= \delta c - q^{-2}aca - q^{-1}\hbar ca + q^{-2}aca + q^{-1}\hbar ca \\
&= \delta c \\
d\delta &= a^2d - d^3 + dbc - dcb \\
&= a^2d - d^3 + bdc - q\left(\zeta a - \hbar\right)bc - cdb - qc\left(\zeta a - \hbar\right)b \\
&= a^2d - d^3 + bcd + qbc\left(\zeta a - \hbar\right) - q\left(\zeta a - \hbar\right)bc - cbd = qc\left(\zeta - \hbar\right)b - qc\left(\zeta a - \hbar\right)b \\
&= \delta d + q\zeta\left(bca - abc\right) \\
&= \delta d
\end{aligned}
$$

Montrons pour terminer que :

$$\Delta = ad\,(a-d) + bcd - cba \in Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(1|1)\right).$$

$$\begin{aligned}
a\Delta &= ad\,(a-d)\,a + abcd - acba \\
&= ad\,(a-d)\,a + q^{-2}bacd + q^{-1}\hbar bcd - q^{2}caba + q\hbar cba \\
&= ad\,(a-d)\,a + bcda - q^{-1}\hbar bcd + q^{-1}\hbar bcd - cba^{2} - q\hbar cba + q\hbar cba \\
&= \Delta a \\
b\Delta &= bad\,(a-d) + b^{2}cd - bcba \\
&= -cbab + (a-d)\,bad - bcba \\
&= -cbab + q^{2}\,(a-d)\,abd - q\,(a-d)\,\hbar bd - bcba \\
&= -cbab + q^{2}\,(a-d)\,abd - q\zeta a\,(a-d)\,bd + q^{2}cb^{2}d + bcbd - bcba \\
&= -cbab + q^{2}\,(a-d)\,abd - q\zeta a\,(a-d)\,bd + bcdb + qbc\,(\zeta a-\hbar)\,b - bcba \\
&= -cbab + bcdb + q^{2}\,(a-d)\,abd + \left(-q^{2}+1\right)(a-d)\,abd + qbc\,(\zeta a-\hbar)\,b - bcba \\
&= -cbab + bcdb + (a-d)\,abd + bc\,(\zeta a-\hbar)\,b - bcba \\
&= -cbab + bcdb + (a-d)\,adb + q\,(a-d)\,a\,(\zeta a-\hbar)\,b + qbc\,(\zeta a-\hbar)\,b - bcba \\
&= \Delta b + (q\,(a-d)\,a + qbc)\,(\zeta a-\hbar)\,b - q\,(\zeta a-\hbar)\,(a-d)\,ba \\
&= \Delta b + \left(q\left(a-d)a + qbc - q^{3}\,(a-d)\,a + q^{2}\hbar\,(a-d)\right)\right)(\zeta a-\hbar)\,b \\
&= \Delta b + \left((a-d)\left(qa - q^{3}a + q^{2}\hbar\right) - q^{3}cb + q^{2}\,(\zeta a-\hbar)\,(a-d)\right)(\zeta a-\hbar)\,b \\
&= \Delta b + (a-d)\left(-q^{2}\zeta a + q^{2}\hbar + q^{2}\zeta a - q^{2}\hbar\right)(\zeta a-\hbar)\,b \\
&= \Delta b \\
c\Delta &= cad\,(a-d) + cbcd - c^{2}ba \\
&= bcdc + cad\,(a-d) + cbcd \\
&= bcdc + cad\,(a-d) + q^{-1}\,(\zeta a-\hbar)\,(a-d)\,cd \\
&= bcdc + cad\,(a-d) + a\,(a-d)\,cd - q^{-2}a\,(a-d)\,cd - q^{-1}\hbar\,(a-d)\,cd \\
&= bcdc + cad\,(a-d) + ad\,(a-d)\,c - qa\,(a-d)\,c\,(\zeta a-\hbar) - q^{-2}a\,(a-d)\,cd - q^{-1}\hbar\,(a-d)\,cd \\
&= bcdc + ad\,(a-d)\,c + cad\,(a-d) - cbac - q^{-2}a\,(a-d)\,cd - q^{-1}\hbar\,(a-d)\,cd \\
&= \Delta c + q^{-2}acd\,(a-d) + q^{-1}\hbar cd\,(a-d) - q^{-2}a\,(a-d)\,cd - q^{-1}\hbar\,(a-d)\,cd \\
&= \Delta c \\
d\Delta &= ad\,(a-d)\,d + dbcd - dcba \\
&= ad\,(a-d)\,d + bdcd - q\,(\zeta a-\hbar)\,bcd - cdba - qc\,(\zeta a-\hbar)\,ba \\
&= ad\,(a-d)\,d + bcd^{2} + qbc\,(\zeta a-\hbar)\,d - q\,(\zeta a-\hbar)\,bcd - cbad + qc\,(\zeta a-\hbar)\,ba - qc\,(\zeta a-\hbar)\,ba \\
&= \Delta d + q^{-1}b\zeta acd - -q\hbar bcd - q\zeta abcd + q\hbar bcd + \hbar b\zeta cd \\
&= \Delta d + q^{-1}\zeta bacd - q^{-1}\zeta bacd + \hbar\zeta bcd - \hbar\zeta bcd \\
&= \Delta d
\end{aligned}$$

■

Les valeurs propres de L

Regardons la localisation $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\left[\bar{l}\right]$ de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ par l'élément $\bar{l}=l^{-1}$. Cela signifie plus précisément que nous ajoutons à l'ensemble des générateurs de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ un élément $\bar{l}$ soumis aux relations suivantes :

$$\begin{cases} l\bar{l}=\bar{l}l=e_{\mathcal{L}} \\ a\bar{l}=\bar{l}a \\ b\bar{l}=\bar{l}b \\ c\bar{l}=\bar{l}c \\ d\bar{l}=\bar{l}d \end{cases}$$

Remarque :

D'après l'équation (2.2.3), nous avons :

$$lL^2-(l(a+d)+bc-cb)L+(lad+bcd-cba)I=0.$$

Dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\left[\bar{l}\right]$, cette équation est équivalente à la suivante :

$$L^2-\left(a+d+\bar{l}(bc-cb)\right)L+\left(ad+\bar{l}(bcd-cba)\right)I=0.$$

Théorème :

Présentons le polynôme de Cayley-Hamilton sous la forme suivante dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\left[\bar{l}\right]$:

$$L^2-\left(a+d+\bar{l}(bc-cb)\right)L+\left(ad+\bar{l}(bcd-cba)\right)I=(L-\mu)(L-\nu)\quad\text{avec}\quad \mu,\nu\in\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\left[\bar{l}\right].$$

Alors à l'ordre près :

$$\begin{cases} \mu=a+\bar{l}bc \\ \nu=d-\bar{l}cb \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mu+\nu &= a+d+\bar{l}(bc-cb) \\ \mu\times\nu &= \left(a+\bar{l}bc\right)\left(d-\bar{l}cb\right) \\ &= ad-a\bar{l}cb+\bar{l}bcd-\bar{l}^2bc^2b \\ &= ad+\bar{l}(bcd-acb) \\ &= ad+\bar{l}\left(bcd-q^2cab-q\hbar cb\right) \\ &= ad+\bar{l}(bcd-cba+q\hbar cb-q\hbar cb) \\ &= ad+\bar{l}(bcd-cba) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Définition :

Nous appellerons μ et ν valeurs propres de L.

Théorème :

Dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\left[\bar{l}\right]$, nous pouvons exprimer l en fonction des valeurs propres μ et ν . En fait :

$$l=q^{-2}\mu-\nu+q^{-1}\hbar.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
q^{-1}\mu - q\nu + \hbar &= q^{-1}a - qd + \bar{l}\left(q^{-1}bc + qcb\right) + \hbar \\
&= q^{-1}a - qd + \bar{l}\left(q^{-1}bc + qcb\right) + \hbar \\
&= q^{-1}a - qd + \bar{l}\left(\zeta a - \hbar\right) l + \hbar \\
&= q^{-1}a - qd + \left(q - q^{-1}\right) a - \hbar + \hbar \\
&= q\left(a - d\right) \\
&= ql \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corollaire :

Nous pouvons donc exprimer, dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(1|1\right)\left[\bar{l}\right]$ l'équation de Cayley-Hamilton, de cette manière :

$$\left(q^{-2}\mu - \nu + q^{-1}\hbar\right) L^2 - \left(q^{-2}\mu - \nu + q^{-1}\hbar\right)\left(\mu + \nu\right) L + \left(q^{-2}\mu - \nu + q^{-1}\hbar\right)\mu\nu I = 0.$$

Théorème :

$$\forall k \in \mathbb{N} : Tr_q\left(L^k\right) = \left(q^{-1}\mu - q\nu + \hbar\right)\frac{\mu^k - \nu^k}{\mu - \nu} \tag{2.3.3}$$

Preuve :

Nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad Tr_q\left(L^k\right) = d_1\mu^k + d_2\nu^k$$

Or :

$$Tr_q\left(I\right) = 0 \Leftrightarrow d_1 + d_2 = 0 \Leftrightarrow d_2 = -d_1$$

$Tr_q\left(L\right) = q\left(a - d\right) = ql = q^{-1}\mu - q\nu + \hbar \Leftrightarrow d_1\mu - d_1\nu = q^{-1}\mu - q\nu + \hbar \Leftrightarrow d_1\left(\mu - \nu\right) = q^{-1}\mu - q\nu + \hbar$

Mais alors $d_2\left(\mu - \nu\right) = -\left(q^{-1}\mu - q\nu + \hbar\right)$.
Nous avons démontré la formule (2.3.3). $\blacksquare$

2.4 Modules de Verma

2.4.1 Généralités

Représentations induites

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres telles que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$.
Soit W un $\mathcal{B}$-module.
Nous pouvons considérer $\mathcal{A}$ comme un $\mathcal{B}$-module à droite, aussi, nous définissons le $\mathcal{A}$-module à gauche suivant :

$$M = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} W.$$

Nous l'appelons $\mathcal{A}$-module induit par W.
En langage de représentations, cela signifie que si ρ désigne la représentation de $\mathcal{B}$ associée à W et π la représentation de $\mathcal{A}$ correspondant à M, π est la représentation de $\mathcal{A}$ induite par ρ.
Nous la notons $\pi = Ind_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\rho$.

Un cas particulier des représentations induites : les modules de Verma

Considérons une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ qui admet une décomposition triangulaire :

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{N}_+ + \mathcal{N}_-.$$

où $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre commutative (nous appellerons cette algèbre algèbre de Cartan), $\mathcal{N}_+$ et $\mathcal{N}_-$ étant des sous-algèbres nilpotentes telles que :

$$[\mathcal{H}, \mathcal{N}_+] \subset \mathcal{N}_+ \text{ et } [\mathcal{H}, \mathcal{N}_-] \subset \mathcal{N}_-.$$

Les sous-algèbres $\mathcal{B}_+ = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_+$ et $\mathcal{B}_- = \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_-$ sont appelées algèbres de Borel.
Soit $\lambda \in \mathcal{H}^*$ (nous appelerons cet élément poids).
Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 : $\mathbb{K}_\lambda$ muni de la représentation de $\mathcal{B}_+$ comme suit :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \;\; \pi_\lambda (h)\, e_\lambda = \lambda (h)\, e_\lambda, \;\; \forall n_+ \in \mathcal{N}_+, \;\; \pi_\lambda (n_+)\, e_\lambda = 0$$

où e_λ est un générateur de l'espace $\mathbb{K}_\lambda$.
Nous définissons alors un module de Verma par :

$$M_\lambda = U(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{B}_+} \mathbb{K}_\lambda.$$

Sachant que nous pouvons définir une action de l'algèbre $\mathcal{G}$ sur M_λ par :

$$x \triangleright (u \otimes e_\lambda) = xu \otimes e_\lambda, \;\; u \in U(\mathcal{G}), \;\; x \in \mathcal{G}$$

nous introduisons sur M_λ une structure de $\mathcal{G}$-module.

Quelques propriétés de base des modules de Verma :

Les modules de Verma en tant que $\mathcal{G}$-modules sont générés par un vecteur de plus haut poids.
Nous notons ce vecteur de plus haut poids e_0 et son poids est λ.
Une propriété remarquable des modules de Verma est la suivante :
Si V est une représentation de $\mathcal{G}$ généré par un vecteur de plus haut poids λ, il existe un $\mathcal{G}$-morphisme surjectif $M_\lambda \longrightarrow V$.
Autrement dit, toute représentation de plus haut poids λ généré par un vecteur de plus haut poids est un quotient de M_λ.
M_λ contient un unique sous-module maximal et son quotient est l'unique représentation irréductible avec un plus haut poids λ.
Supposons enfin que :

$$U(\mathcal{G}) \cong U(\mathcal{N}_-) \otimes U(\mathcal{B}_+)$$

alors le module de Verma M_λ est engendré en tant qu'espace vectoriel par l'ensemble $U(\mathcal{N}_-) \otimes e_\lambda$.

2.4.2 Le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$

Les modules de Verma de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$

L'algèbre associative $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ admet la décomposition triangulaire suivante :

$$\mathcal{L}_{\hbar,q}(2) \cong \mathcal{N}_- \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+$$

avec $\mathcal{H}$ sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ engendré par l'unité et les élément a et d qui est de toute évidence commutative puisque a et d commutent entre eux, l'algèbre $\mathcal{N}_+$ (respectivement $\mathcal{N}_-$) étant la sous-algèbre associative de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ engendré par l'unité et l'élément b (respectivement c).
Il nous faut néanmoins vérifier que notre produit tensoriel $\mathcal{N}_- \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+$ est vraiment une algèbre. Pour cela, il suffit de ramener les trois produits $a.\left(c^k a^l d^m b^n\right)$, $b.\left(c^k a^l d^m b^n\right)$ et $d.\left(c^k a^l d^m b^n\right)$ dans notre algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ à une forme compatible avec $\mathcal{N}_- \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+$ grâce aux équations (2.1.1).
Cela ne pose aucune difficulté pour $a.\left(c^k a^l d^m b^n\right)$. Ensuite, en s'appuyant sur ce résultat, on réussit à mettre $d.\left(c^k a^l d^m b^n\right)$ sous la forme voulue pour terminer avec $b.\left(c^k a^l d^m b^n\right)$.
Dans ce dernier cas, nous utilisons les deux résultats précédents et nous aboutissons au résultat voulu

grâce à une récurrence sur le degré total du monôme.
Nous en déduisons pour un $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \cong \mathcal{H}^*$ fixé la définition d'un $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$-module de Verma :

$$M_{\widetilde{\lambda}} = \mathcal{L}_{\hbar,q}(2) \otimes_{\mathcal{B}_+(2)} \mathbb{K}_{\widetilde{\lambda}} \text{ sachant que } \mathcal{B}_+(2) = \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+.$$

Nous pouvons voir le $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$-module $M_{\widetilde{\lambda}}$ comme une représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ dans un espace vectoriel de dimension infinie que nous notons :

$$\pi_{\widetilde{\lambda}} : \mathcal{L}_{\hbar,q}(2) \longrightarrow End\left(M_{\widetilde{\lambda}}\right).$$

Nous savons que $M_{\widetilde{\lambda}}$ est généré par un vecteur de plus haut poids $\widetilde{\lambda}$.
Nous allons noter ce vecteur e_0.
Nous avons donc :

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(a)(e_0) = \lambda_1 e_0; \quad \pi_{\widetilde{\lambda}}(b)(e_0) = 0; \quad \pi_{\widetilde{\lambda}}(d)(e_0) = \lambda_2 e_0.$$

Nous notons :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad e_k = c^k \otimes e_0.$$

Nous avons alors : $M_{\widetilde{\lambda}} = \left\langle (e_k)_{k\in\mathbb{N}} \right\rangle$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \pi_{\widetilde{\lambda}}(c)(e_k) = e_{k+1}.$$

Théorème :

Dans la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, nous pouvons considérer $\pi_{\widetilde{\lambda}}(a);\ \pi_{\widetilde{\lambda}}(b);\ \pi_{\widetilde{\lambda}}(c);\ \pi_{\widetilde{\lambda}}(d)$ comme des matrices de taille infinie avec :

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(a) = \begin{pmatrix} a_1 = \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(d) = \begin{pmatrix} d_1 = \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_n & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Preuve :

Nous allons simplifier la notation dans cette démonstration en notant $\pi_{\widetilde{\lambda}}(a);\ \pi_{\widetilde{\lambda}}(b);\ \pi_{\widetilde{\lambda}}(c);\ \pi_{\widetilde{\lambda}}(d)$ respectivement $a;\ b;\ c;\ d$.
Il nous suffit de vérifier que les équations (2.1.1) sont vérifiées avec cette représentation.

1. L'équation $ad - ad = 0$ est trivialement vérifiée.
2. L'équation $qca - q^{-1}ac = \hbar c$ est vérifiée si et seulement si :
$$\forall n \geq 1 : \quad a_{n+1} = q^2 a_n - q\hbar.$$
3. L'équation $qab - q^{-1}ba = \hbar b$ est vérifiée si et seulement si :
$$\forall n \geq 1 : \quad a_{n+1} = q^2 a_n - q\hbar.$$
4. L'équation $q\,(cd - dc) = c\,(\zeta a - \hbar)$ est vérifiée si et seulement si :
$$\forall n \geq 1 : \quad d_{n+1} = qd_n - q^{-1}\zeta a_n + q^{-1}\hbar.$$
5. L'équation $q\,(db - bd) = (\zeta a - \hbar)\,b$ est vérifiée si et seulement si :
$$\forall n \geq 1 : \quad d_{n+1} = qd_n - q^{-1}\zeta a_n + q^{-1}\hbar.$$
6. L'équation $q\,(bc - cb) = (\zeta a - \hbar)\,(d - a)$ est vérifiée si et seulement si :
$$\forall n \geq 1 : \quad b_{n+1} = q^{-1}\,(\zeta a_n - \hbar)\,(d_n - a_n)\,.$$

Nous constatons que les conditions imposées sur le suites (a_n), (b_n) et (d_n) par les 6 équations (2.1.1) nous permettent de déterminer les suites (a_n), (b_n) et (d_n) par récurrence.
Le théorème est démontré. ■

Remarque :

En travaillant sur $\mathcal{SL}_{\hbar,q}\,(2)$, nous établirons que cette représentation est covariante par rapport à l'action du groupe quantique $U_q(sl(2))$.

Théorème :

Les images des éléments centraux sont scalaires :

$$\forall z \in Z\,(\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)) : \quad \pi_{\widetilde{\lambda}}\,(z) = Z\ Id, \quad Z \in \mathbb{K}.$$

Preuve :

Pour simplifier la notation, nous identifions pour cette démonstration $u \in \mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ et $\pi_{\widetilde{\lambda}}\,(u)$.

$$a\,(z\,(e_0)) = az\,(e_0) = za\,(e_0) = z\,(\lambda_1 e_0) = \lambda_1\,(z\,(e_0))$$

Nous avons donc $a\,(z\,(e_0)) = \lambda_1\,(z\,(e_0))$.
Par conséquent $\exists Z \in \mathbb{K},\ \ z\,(e_0) = Ze_0$ si $a_n \neq a_1$ pour tout entier $n \neq 1$, ce que nous pouvons imposer sans difficulté sachant que que q est générique.
Mais alors :
$$z\,(e_1) = zc\,(e_0) = zc\,(e_0) = cz\,(e_0) = c\,(Ze_0) = Ze_1.$$
Nous démontrons ainsi par une récurrence évidente sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad z\,(e_n) = Ze_n. \qquad ■$$

Les valeurs propres de L

En associant à $z \in Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)\right)$ le nombre $Z \in \mathbb{K}$, nous définissons un caractère :

$$\chi_{\widetilde{\lambda}} : Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)\right) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}{}^{\chi_{\widetilde{\lambda}}}(2)$, l'équation de Cayley-Hamilton (2.2.1) a des coefficients numériques et nous notons $\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right)$ et $\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)$ les valeurs propres de L tels que dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}{}^{\chi_{\widetilde{\lambda}}}(2)$:

$$L^2 - \left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right)L + \left(ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1}a\right)I = \left(L - \mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right)\right)\left(L - \mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)\right).$$

Théorème :

Dans le cadre de la représentation $\pi_{\widetilde{\lambda}}$ dans le module de Verma $M_{\widetilde{\lambda}}$ les valeurs propres de L sont $\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right)$ et $\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)$ avec :

$$\begin{cases} \mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right) = q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar \\ \mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right) = \lambda_2 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

$\left(\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right)\right.$ et $\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)$ sont bien sûr définies à l'ordre près.$\left.\right)$
Remarquons que si nous posons $q = 1$ et $\hbar = 1$, nous retrouvons une formule bien connue. (Cf. [BR]).

Preuve :

Calculons $\chi_{\widetilde{\lambda}}\left(Tr_q(L)\right)$ et $\chi_{\widetilde{\lambda}}\left(Tr_q\left(L^2\right)\right)$.

$$\begin{aligned} \chi_{\widetilde{\lambda}}\left(Tr_q(L)\right) &= \chi_{\widetilde{\lambda}}\left(q^{-1}a + qd\right) = q^{-1}\lambda_1 + q\lambda_2 \\ \chi_{\widetilde{\lambda}}\left(Tr_q\left(L^2\right)\right) &= \chi_{\widetilde{\lambda}}\left(q^{-1}\left(a^2 + bc\right) + q\left(cb + d^2\right)\right) \\ &= q^{-3}\lambda_1^2 + q\lambda_2^2 + \left(q^{-1} - q^{-3}\right)\lambda_1\lambda_2 + q^{-2}\hbar\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que nous retrouvons les mêmes résultats à partir des formules (2.4.1) et (2.3.1).
Nous nous plaçons pour ce qui suit dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}{}^{\chi_{\widetilde{\lambda}}}$:

$$\begin{aligned} Tr_q(L) &= \mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right)\frac{q\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right) - q^{-1}\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right) - \hbar}{\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right) - \mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)} + \mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)\frac{q\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right) - q^{-1}\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right) - \hbar}{\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right) - \mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right)} \\ &= \left(q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar\right)\frac{q^{-1}\lambda_1 - q^{-1}\lambda_2}{q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar - \lambda_2} + \lambda_2\frac{q\lambda_2 - q^{-3}\lambda_1 - q^{-2}\hbar - \hbar}{\lambda_2 - q^{-2}\lambda_1 - q^{-1}\hbar} \\ &= \frac{1}{q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar - \lambda_2}\left(q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar - \lambda_2\right)\left(q^{-1}\lambda_1 = q\lambda_2\right) \\ &= q^{-1}\lambda_1 + q\lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr_q\left(L^2\right) &= \mu_1^2\left(\widetilde{\lambda}\right)\frac{q\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right) - q^{-1}\mu_2^2\left(\widetilde{\lambda}\right) - \hbar}{\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right) - \mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)} + \mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right)\frac{q\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right) - q^{-1}\mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right) - \hbar}{\mu_2\left(\widetilde{\lambda}\right) - \mu_1\left(\widetilde{\lambda}\right)} \\ &= \left(q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar\right)^2\frac{q^{-1}\lambda_1 - q^{-1}\lambda_2}{q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar - \lambda_2} + \lambda_2^2\frac{q\lambda_2 - q^{-3}\lambda_1 - q^{-2}\hbar - \hbar}{\lambda_2 - q^{-2}\lambda_1 - q^{-1}\hbar} \\ &= \frac{1}{q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar - \lambda_2}\left(q^{-2}\lambda_1 + q^{-1}\hbar - \lambda_2\right)\left(q^{-3}\lambda_1^2 + q\lambda_2^2 + \left(q^{-1} - q^{-3}\right)\lambda_1\lambda_2 + q^{-2}\hbar\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\right) \\ &= q^{-3}\lambda_1^2 + q\lambda_2^2 + \left(q^{-1} - q^{-3}\right)\lambda_1\lambda_2 + q^{-2}\hbar\left(\lambda_1 - \lambda_2\right) \end{aligned}$$

Les formules (2.4.1) sont établies. ■

Les modules de Verma de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$

Après avoir construit une représentation $\pi_{\widetilde{\lambda}} : \mathcal{L}_{\hbar,q}(2) \longrightarrow End\left(M_{\widetilde{\lambda}}\right)$ telle que $\pi_{\widetilde{\lambda}}(\lambda) = 0$, nous en déduisons une représentation de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$. Néanmoins, il peut être intéressant d'établir que nous pouvons construire de la même manière un module de Verma associée à cette représentation.

L'algèbre associative $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ admet la décomposition triangulaire suivante :

$$\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2) \cong \mathcal{N}_- \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+$$

avec $\mathcal{H}$ sous-algèbre de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ engendré par l'unité et l'élément g qui est évidemment commutative, les algèbres $\mathcal{N}_+$ et $\mathcal{N}_-$ étant les sous algèbres associatives de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ engendrés par l'unité et respectivement l'élément b et c.
Nous vérifions sans difficulté de la même manière que précédemment que notre produit tensoriel $\mathcal{N}_- \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+$ est vraiment une algèbre.
Nous en déduisons pour un $\overline{\lambda} \in \mathbb{K} \cong \mathcal{H}^*$ fixé la définition d'un $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$-module de Verma :

$$M_{\overline{\lambda}} = \mathcal{SL}_{\hbar,q}(2) \otimes_{\mathcal{B}_+(sl(2))} \mathbb{K}_{\overline{\lambda}}.$$

Nous pouvons voir le $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$-module $M_{\overline{\lambda}}$ comme une représentation de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ dans un espace vectoriel de dimension infinie que nous notons :

$$\pi_{\overline{\lambda}} : \mathcal{SL}_{\hbar,q}(2) \longrightarrow End\left(M_{\overline{\lambda}}\right).$$

Nous savons que $M_{\overline{\lambda}}$ est généré par un vecteur de plus haut poids $\overline{\lambda}$: $1 \otimes 1$.
Nous allons noter ce vecteur e_0.
Nous avons donc :

$$\pi_{\overline{\lambda}}(g)(e_0) = \overline{\lambda} e_0; \quad \pi_{\overline{\lambda}}(b)(e_0) = 0.$$

Nous considérons alors une base dénombrable $\left\langle (e_k)_{k\in\mathbb{N}} \right\rangle$ dont e_0 est le premier vecteur.
Nous pouvons alors faire explicitement le lien entre la représentation $\pi_{\widetilde{\lambda}}$ et notre représentation induite $\pi_{\overline{\lambda}}$.
En effet $\pi_{\widetilde{\lambda}}(l) = 0$ nous impose la relation $q^{-1}\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$.
De même $g(e_0) = \overline{\lambda} e_0$ nous impose la relation $(\lambda_1 - \lambda_2) e_0 = \overline{\lambda} e_0$.
Nous en déduisons le système suivant :

$$\begin{cases} q^{-1}\lambda_1 + q\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \overline{\lambda} \end{cases}$$

Théorème :

Dans la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, nous pouvons considérer $\pi_{\overline{\lambda}}(g)$; $\pi_{\overline{\lambda}}(b)$; $\pi_{\overline{\lambda}}(c)$ comme des matrices de taille infinie avec :

$$\pi_{\overline{\lambda}}(g) = \begin{pmatrix} g_1 = \overline{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_n & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

$$\pi_{\overline{\lambda}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

$$\pi_{\overline{\lambda}}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{2.4.4}$$

les relations ci-dessous étant vérifiées :

$$b_1c_1 = \hbar q^{-1}\overline{\lambda} - \frac{\zeta}{[2]_q}\overline{\lambda}^2$$

$$\forall n \geq 2 : g_n = q^{2(n-1)}\overline{\lambda} - \hbar\,[2]_q \sum_{k=2}^{n} q^{2k-4}$$

$$\forall n \geq 1 : b_{n+1}c_{n+1} = b_nc_n - \frac{\zeta}{[2]_q}g_{n+1}^2 + \hbar q^{-1}g_{n+1}$$

Preuve :

Nous déduisons de l'équation $gc - q^2cg = -\hbar\,[2]_q\,c$ les égalités suivantes :

$$g_2 - q^2g_1 = -\hbar\,[2]_q \Leftrightarrow g_2 = q^2\overline{\lambda} - \hbar\,[2]_q$$

$$g_3 - q^2g_2 = -\hbar\,[2]_q \Leftrightarrow g_3 = q^4\overline{\lambda} - \hbar\,[2]_q\left(q^2+1\right)$$

$$g_4 - q^2g_3 = -\hbar\,[2]_q \Leftrightarrow g_3 = q^6\overline{\lambda} - \hbar\,[2]_q\left(q^4+q^2+1\right)$$

Nous en déduisons grâce à une récurrence évidente que :

$$\forall n \geq 2 : g_n = q^{2(n-1)}\overline{\lambda} - \hbar\,[2]_q \sum_{k=2}^{n} q^{2k-4}$$

Si g est définie telle que précédemment, l'équation $q^2gb - bg = \hbar\,[2]_q\,b$ est vérifiée.
Nous déduisons de l'équation $\left(q^2+1\right)(bc-cb) + \left(q^2-1\right)g^2 = \hbar\,[2]_q\,g$ les égalités suivantes :

$$\left(q^2+1\right)b_1c_1 + \left(q^2-1\right)\overline{\lambda}^2 = \hbar\,[2]_q\,\overline{\lambda} \Leftrightarrow b_1c_1 = \hbar q^{-1}\overline{\lambda} - \frac{\zeta}{[2]_q}\overline{\lambda}^2$$

$$\left(q^2+1\right)(b_2c_2 - b_1c_1) + \left(q^2-1\right)g_2^2 = \hbar\,[2]_q\left(q^2\overline{\lambda} - \hbar\,[2]_q\right)$$

$$\Leftrightarrow b_2c_2 = \hbar\left(q\overline{\lambda} - \hbar q^{-1}\,[2]_q\right) - \frac{\zeta}{[2]_q}\left(q^2\overline{\lambda} - \hbar\,[2]_q\right)^2 + \hbar q^{-1}\overline{\lambda} - \frac{\zeta}{[2]_q}\overline{\lambda}^2$$

Nous déduisons ainsi par récurrence tous les b_nc_n pour $n \geq 1$ qui sont ainsi parfaitement définis par la relation suivante :

$$b_{n+1}c_{n+1} = b_nc_n - \frac{\zeta}{[2]_q}g_{n+1}^2 + \hbar q^{-1}g_{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Nous savons d'après (2.2.2) que :

$$L^2 - \left(q^{-1}l + q^{-1}\hbar\right)L + [2]_q^{-1}\left(q^{-1}l^2 + \hbar q^{-1}l - Tr_q\left(L^2\right)\right)I = 0.$$

Aussi sur $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, cette équation devient :

$$L^2 - q^{-1}\hbar L - [2]_q^{-1}\,Tr_q\left(L^2\right)I = 0.$$

Mais :

$$Tr_q\left(L^2\right) = q^{-1}a^2 + qd^2 + q^{-1}bc + qcb = [2]_q^{-1}\left(g^2+l^2\right) + q^{-1}bc + qcb.$$

Aussi sur $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$:

$$L^2 - q^{-1}\hbar L + \sigma I = 0 \text{ avec } \sigma = -[2]_q^{-1}\left([2]_q^{-1} g^2 + q^{-1}bc + qcb\right).$$

Nous nous proposons donc dans le cadre de la représentation précédente de calculer :

$$\sigma = -[2]_q^{-1}\left([2]_q^{-1} g^2 + q^{-1}bc + qcb\right) \in Z\left(\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)\right).$$

Théorème :

$$\forall z \in Z\left(\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)\right), \quad \pi_{\overline{\lambda}}(z) \text{ est une matrice scalaire.}$$

Preuve :

Soit $z \in Z\left(\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)\right)$:
Notons $Z = \pi_{\overline{\lambda}}(z)$.

$$\overline{\lambda} Z(e_1) = Z\left(\overline{\lambda} e_1\right) = Z\left(g(e_1)\right) = Z \circ g(e_1) = g \circ Z(e_1) = g\left(Z(e_1)\right).$$

Nous avons donc $g\left(Z(e_1)\right) = \overline{\lambda} Z(e_1)$. Nécessairement :

$$\exists \lambda_Z \in \mathbb{K},\ Z(e_1) = \lambda_Z e_1.$$

Mais alors :

$$Z(e_2) = Z\left(\frac{1}{c_1} c(e_1)\right) = \frac{1}{c_1} Z \circ c(e_1) = \frac{1}{c_1} c \circ Z(e_1) = \lambda_Z c\left(\frac{1}{c_1} e_1\right) = \lambda_Z e_2.$$

Nous démontrons ainsi par une récurrence évidente sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall n \geq 1 : \quad Z(e_n) = \lambda_Z e_n. \qquad \blacksquare$$

Théorème :

Nous avons $\pi_{\overline{\lambda}}(\sigma) = \sigma\left(\overline{\lambda}\right) Id$ avec $\sigma\left(\overline{\lambda}\right) \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\sigma\left(\overline{\lambda}\right) = \frac{-q^{-2}}{[2]_q^2} \overline{\lambda}^2 - \hbar \frac{q^{-2}}{[2]_q} \overline{\lambda}. \tag{2.4.5}$$

Preuve :

Nous savons que $\sigma \in Z\left(\mathcal{SL}_{\hbar,q}\right)$, nous en déduisons donc que $\pi_{\overline{\lambda}}(\sigma)$ est scalaire.
De plus :

$$\begin{aligned} -[2]_q \left(\pi_{\overline{\lambda}}(\sigma)\right)_{1,1} &= \frac{1}{[2]_q} \overline{\lambda}^2 + \hbar q^{-2} \overline{\lambda} + \frac{q^{-2} - 1}{[2]_q} \overline{\lambda}^2 \\ &= \frac{q^{-2}}{[2]_q} \overline{\lambda}^2 + \hbar q^{-2} \overline{\lambda} \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'égalité (2.4.5). $\blacksquare$

Les valeurs propres de L dans $M_{\overline{\lambda}}$

Dans le cadre de la représentation de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$: $\pi_{\overline{\lambda}}$, nous pouvons définir le caractère $\chi_{\overline{\lambda}}$ de la manière suivante :

$$\chi_{\overline{\lambda}} = \pi_{\overline{\lambda}}\big|_{Z\left(\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)\right)} \quad \text{en identifiant l'ensemble des matrices scalaires avec le corps } \mathbb{K}.$$

Nous pouvons donc nous placer dans l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}^{\chi_{\overline{\lambda}}}(2)$ et considérer les valeurs propres de L puisque l'équation de Cayley-Hamilton (2.2.1) devient numérique dans l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}^{\chi_{\overline{\lambda}}}(2)$.
Définissons les valeurs propres $\mu_1\left(\overline{\lambda}\right)$ et $\mu_2\left(\overline{\lambda}\right)$ tels que dans l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}^{\chi_{\overline{\lambda}}}(2)$, nous avons l'égalité :

$$L^2 - q^{-1}\hbar L + \sigma I = \left(L - \mu_1\left(\overline{\lambda}\right)\right)\left(L - \mu_2\left(\overline{\lambda}\right)\right).$$

Théorème :

Dans le cadre de la représentation $\pi_{\overline{\lambda}}$ dans l'espace vectoriel $V_{\overline{\lambda}}$ les valeurs propres de L sont $\mu_1\left(\overline{\lambda}\right)$ et $\mu_2\left(\overline{\lambda}\right)$ avec :

$$\begin{cases} \mu_1\left(\overline{\lambda}\right) = -\dfrac{q^{-1}}{[2]_q}\overline{\lambda} \\ \mu_2\left(\overline{\lambda}\right) = q^{-1}\hbar + \dfrac{q^{-1}}{[2]_q}\overline{\lambda} \end{cases} \tag{2.4.6}$$

($\mu_1\left(\overline{\lambda}\right)$ et $\mu_2\left(\overline{\lambda}\right)$ sont bien sûr définies à l'ordre près.)

Preuve :

Il suffit de vérifier que :

$$\mu_1\left(\overline{\lambda}\right) + \mu_2\left(\overline{\lambda}\right) = q^{-1}\hbar \text{ et } \mu_1\left(\overline{\lambda}\right) \times \mu_2\left(\overline{\lambda}\right) = -\frac{q^{-2}}{[2]_q}\hbar\overline{\lambda} - \frac{q^{-2}}{[2]_q^2}\overline{\lambda}^2 = \sigma.$$

Cette vérification est directe. ■

Remarque 1 :

Notons que les valeurs propres de L que sont $\mu_1\left(\overline{\lambda}\right)$ et $\mu_2\left(\overline{\lambda}\right)$ peuvent être calculées par un calcul direct. Pour cela nous allons calculer le discriminant associé à notre trinôme :

$$\begin{aligned} \Delta &= q^{-2}\hbar^2 + \frac{4q^{-2}}{[2]_q^2}\left(\overline{\lambda}^2 + \hbar[2]_q\overline{\lambda}\right) \\ &= \frac{4q^{-2}}{[2]_q^2}\left(\overline{\lambda}^2 + \hbar[2]_q\overline{\lambda} + \frac{\hbar^2[2]_q^2}{4}\right) \\ &= \left(\frac{2q^{-1}}{[2]_q}\left(\overline{\lambda} + \hbar\frac{[2]_q}{2}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Alors nous avons :

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\overline{\lambda}\right) &= \frac{q^{-1}\hbar - \frac{2q^{-1}}{[2]_q}\left(\overline{\lambda} + \hbar\frac{[2]_q}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{q^{-1}\hbar[2]_q - 2q^{-1}\overline{\lambda} - q^{-1}\hbar[2]_q}{2[2]_q} = -\frac{q^{-1}}{[2]_q}\overline{\lambda} \end{aligned}$$

et :

$$\mu_2\left(\overline{\lambda}\right) = q^{-1}\hbar + \frac{q^{-1}}{[2]_q}\overline{\lambda}$$

à l'ordre près naturellement.

Remarque 2 :

Nous pouvons naturellement déduire les formules (2.4.6) à partir des formules (2.4.1).

Le groupe quantique $U_q(sl(2))$ et la sphère quantique

Un des objectifs principaux de ce paragraphe est de démontrer que les représentations de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ et de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ construites précédemment sont équivariantes par rapport à l'action du groupe quantique $U_q(sl(2))$. Nous construisons par la même occasion des représentations finies de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ (et donc de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$).

Structure algébrique de l'algèbre de Hopf $U_q(sl(2))$:

Dans les publications sur les groupes quantiques et leurs applications (notamment dans [K]), on utilise des comultiplications différentes Δ (associés son antipode S correspondante) qui munissent l'algèbre $U_q(sl(2))$ d'une structure d'algèbre de Hopf. Néanmoins, ces comultiplications sont toutes équivalentes. Nous préférons donc ne pas choisir une comultiplication en particulier et plutôt de déterminer une famille de comultiplications possibles permettant à $U_q(sl(2))$ d'être munie d'une structure de bigèbre d'abord et d'algèbre de Hopf ensuite en lui associant l'antipode S adéquate.
Par la suite, nous regardons la sphère (ou hyperboloïde) quantique qui est un quotient approprié de l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ que nous munissons de l'action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ munis de notre comultiplication sous sa forme générale.

Définition :

L'algèbre $U_q(sl(2))$ est $U_q(sl(2)) = \left\langle X; Y; K; K^{-1} \right\rangle$ tel que :

$$\begin{cases} KXK^{-1} = q^2 X \\ KYK^{-1} = q^{-2} Y \\ KK^{-1} = K^{-1}K = 1 \\ XY - YX = \dfrac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \end{cases}$$

avec $q \neq \pm 1$.

Remarque :

Une autre manière de définir l'algèbre $U_q(sl(2))$ que nous utiliserons plutôt par la suite est celle indiquée ci-dessous. Nous pouvons passer de l'une à l'autre en posant $K = q^H$. L'algèbre $U_q(sl(2))$ est $U_q(sl(2)) = \langle H; X; Y \rangle$ tel que :

$$\begin{cases} HX - XH = 2X \\ HY - YH = -2Y \\ XY - YX = \dfrac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} \end{cases}$$

Définition :

Nous allons pour commencer définir sur l'algèbre $U_q(sl(2))$ une counité ϵ.
$\epsilon : U_q(sl(2)) \longrightarrow \mathbb{K}$ est le morphisme d'algèbre tel que :

$$\epsilon(H) = \epsilon(X) = \epsilon(Y) = 0 \text{ et } \epsilon\left(K^{\pm 1}\right) = \pm 1.$$

En ce qui concerne un coproduit compatible avec la structure algébrique de $U_q(sl(2))$, il en existe une famille qui est décrite par le théorème suivant :

Théorème :

Définissons le coproduit $\Delta : U_q(sl(2)) \longrightarrow U_q(sl(2))^{\otimes 2}$ par :

$$\Delta\left(K^{\pm 1}\right) = K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1} \Leftrightarrow \Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H$$

$$\Delta(X) = q^{aH} \otimes X + X \otimes q^{bH} \text{ et } \Delta(Y) = q^{cH} \otimes Y + Y \otimes q^{dH} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{K}$$

Alors $(U_q(sl(2)); \Delta; \epsilon)$ est une bigèbre si et seulement si :

$$\begin{cases} a + c = \epsilon \\ b + d = -\epsilon \\ a = -d \\ b = -c \end{cases}$$

avec $\epsilon = \pm 1$.

Preuve :

Nous posons :

$$\Delta(X) = q^{aH} \otimes X + X \otimes q^{bH} \text{ et } \Delta(Y) = q^{cH} \otimes Y + Y \otimes q^{dH} \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{K}.$$

Notre coproduit vérifie les égalités suivantes :

$$\Delta(H)\Delta(X) - \Delta(X)\Delta(H) = 2\Delta(X)$$
$$\Delta(H)\Delta(Y) - \Delta(Y)\Delta(H) = -2\Delta(Y)$$

Notre coproduit Δ doit nécessairement également vérifier la formule suivante :

$$\Delta(X)\Delta(Y) - \Delta(Y)\Delta(X) = \frac{\Delta\left(q^{H}\right) - \Delta\left(q^{-H}\right)}{q - q^{-1}}.$$

Or :

$$\Delta(X)\Delta(Y) = q^{(a+c)H} \otimes XY + q^{aH}Y \otimes Xq^{dH} + Xq^{cH} \otimes q^{bH}Y + XY \otimes q^{(b+d)H}$$
$$\Delta(Y)\Delta(X) = q^{(a+c)H} \otimes YX + q^{aH}X \otimes Yq^{dH} + Yq^{cH} \otimes q^{bH}X + YX \otimes q^{(b+d)H}$$

Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned} &\Delta(X)\Delta(Y) - \Delta(Y)\Delta(X) \\ =&q^{(a+c)H} \otimes (XY - YX) + (XY - YX) \otimes q^{(b+d)H} \\ &+ q^{aH}Y \otimes Xq^{dH} - q^{cH}X \otimes Yq^{bH} + Xq^{cH} \otimes q^{bH}Y - Yq^{aH} \otimes q^{dH}Y \\ =&\frac{1}{q - q^{-1}}\left(q^{(a+c)H} \otimes q^{H} - q^{(a+c)H} \otimes q^{-H} + q^{H} \otimes q^{(b+d)H} - q^{-H} \otimes q^{(b+d)H}\right) \\ &+ q^{aH}Y \otimes Xq^{dH} - q^{cH}X \otimes Yq^{bH} + Xq^{cH} \otimes q^{bH}Y - Yq^{aH} \otimes q^{dH}Y \end{aligned}$$

Nous avons donc nécessairement le système suivant :

$$\begin{cases} a + c = \epsilon \\ b + d = -\epsilon \\ a = -d \\ b = -c \end{cases}$$

avec $\epsilon = \pm 1$. ■

Mais alors nous déduisons du système précédent que :

$$b = -\epsilon + a \quad c = \epsilon - a \quad d = -a.$$

Nous pouvons donc paramètrer la famille de coproduits obtenues par $a \in \mathbb{K}$ et $\epsilon = \pm 1$.
Par la suite pour éviter toute confusion entre $a \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{L}_{\hbar,q}$, nous utiliserons la notation $\theta \in \mathbb{K}$ pour le paramètre $a \in \mathbb{K}$.
Nous définissons donc la famille de coproduits $\Delta_{\theta,\epsilon}$ tels que :

$$\Delta_{\theta,\epsilon}(X) = q^{\theta H} \otimes X + X \otimes q^{(\theta-\epsilon)H} \text{ et } \Delta_{\theta,\epsilon}(Y) = q^{(\epsilon-\theta)H} \otimes Y + Y \otimes q^{-\theta H}.$$

Théorème :

Cherchons l'antipode $S : U_q(sl(2)) \longrightarrow U_q(sl(2))$ sous la forme :

$$S(H) = -H \text{ et } S\left(q^{\pm H}\right) = q^{\mp H}$$

$$S(X) = -q^{\alpha H} X q^{\beta H} \text{ et } S(Y) = -q^{\alpha' H} Y q^{\beta' H} \text{ avec } \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{K}$$

Alors la bigèbre $(U_q(sl(2)); \Delta_{\theta,\epsilon})$ est une algèbre de Hopf $(U_q(sl(2)); \Delta_{\theta,\epsilon}; S)$ si et seulement si :

$$S(X) = -q^{-\theta H} X q^{(\epsilon-\theta)H} \text{ et } S(Y) = -q^{(\theta-\epsilon)H} Y q^{\theta H} \text{ avec } \theta \in \mathbb{K} \text{ et } \epsilon = \pm 1.$$

Preuve :

Nous posons :

$$S(X) = -q^{\alpha H} X q^{\beta H} \text{ et } S(Y) = -q^{\alpha' H} Y q^{\beta' H} \text{ avec } \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{K}$$

$$X \xmapsto{\Delta_{\theta,\epsilon}} q^{\theta H} \otimes X + X \otimes q^{(\theta-\epsilon)H} \xmapsto{Id\otimes S} q^{\theta H} \otimes \left(-q^{\alpha H} X q^{\beta H}\right) + X \otimes q^{(\epsilon-\theta)H} \xmapsto{\mu} -q^{(\theta+\alpha)H} X q^{\beta H} + X q^{(\epsilon-\theta)H}$$

Or $\epsilon\,(X) = 0$ donc $\alpha = -\theta$ et $\beta = \epsilon - \theta$.
Nous avons bien :

$$X \xmapsto{\Delta_{\theta,\epsilon}} q^{\theta H} \otimes X + X \otimes q^{(\theta-\epsilon)H} \xmapsto{S\otimes Id} q^{-\theta H} \otimes X - q^{-\theta H} X q^{(\epsilon-\theta)H} \otimes q^{(\theta-\epsilon)H} \xmapsto{\mu} 0 = \epsilon(X)$$

$$Y \xmapsto{\Delta_{\theta,\epsilon}} q^{(\epsilon-\theta)H} \otimes Y + Y \otimes q^{-\theta H} \xmapsto{Id\otimes S} q^{(\epsilon-\theta)H} \otimes \left(-q^{\alpha' H} Y q^{\beta' H}\right) + Y \otimes q^{\theta H} \ldots$$

$$\ldots \xmapsto{\mu} -q^{((\epsilon-\theta)+\alpha')H} Y q^{\beta' H} + Y q^{\theta H}$$

Or $\epsilon\,(Y) = 0$ donc $\alpha' = \theta - \epsilon$ et $\beta = \theta$.
Nous avons bien :

$$Y \xmapsto{\Delta_{\theta,\epsilon}} q^{(\epsilon-\theta)H} \otimes Y + Y \otimes q^{-\theta H} \xmapsto{S\otimes Id} q^{(\theta-\epsilon)H} \otimes Y - q^{(\theta-\epsilon)H} Y q^{\theta H} \otimes q^{-\theta H} \xmapsto{\mu} 0 = \epsilon\,(Y) \qquad \blacksquare$$

Nous noterons par la suite $S_{\theta,\epsilon}$ l'antipode associé à $\Delta_{\theta,\epsilon}$ telle que $(U_q(sl(2)); \Delta_{\theta,\epsilon}; S_{\theta,\epsilon})$ soit une algèbre de Hopf.

Notation :

Nous notons l'action de $U \in U_q(sl(2))$ sur un élément v par $U \triangleright v$.

Définition :

Considérons V_1 et V_2 deux espaces-vectoriels sur lesquels le groupe quantique $U_q(sl(2))$ opère.
$\alpha : V_1 \longrightarrow V_2$ est un $U_q(sl(2))$-*morphisme* par définition si :

$$\forall v \in V_1,\ \forall U \in U_q(sl(2)) : \quad \alpha\,(U \triangleright v) = U \triangleright \alpha\,(v)\,.$$

Autrement dit α commute avec tout $U \in U_q(sl(2))$.

Nous avons défini deux familles de coproduit $\Delta_{\theta,\epsilon}$ et d'antipode $S_{\theta,\epsilon}$ suivant la valeur de $\epsilon = \pm 1$.

Il est bien connu que les groupes quantiques sont des algèbres de Hopf presque commutatives au sens de Drinfeld (on peut consulter à ce sujet [CP]).

Une conséquence de cette propriété est que le coproduit du groupe quantique est compatible avec la R-matrice dans le sens suivant :

$$R\Delta(U) = \Delta(U)\, R. \tag{2.4.7}$$

Ici, R est l'image de la R-matrice quantique universelle dans une représentation du groupe quantique multiplié par la volte usuelle P.
En choisissant la représentation fondamentale vectorielle dans laquelle H, X, Y sont donnés par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(et donc dans cette représentation, l'action de $U_q(sl(2))$ coïncide avec celle de $U\,(sl(2)))$ et la R-matrice R est donnée comme précédemment par notre symétrie de Hecke classique paire de rang 2 à savoir :

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

la relation (2.4.7) est vérifiée si et seulement si $\epsilon = 1$.
Par contre, dans le cas où $\epsilon = -1$, la relation (2.4.7) est vérifiée avec la R-matrice :

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

(qui est bien sûr également une symétrie de Hecke.)

C'est pourquoi par la suite nous allons considérer que $\epsilon = 1$. En ce qui concerne θ, nous préférons conserver cette liberté de notation même si toutes les comultiplications ainsi construites peuvent être ramenés les unes aux autres par le changement de base :

$$H \longmapsto H, \quad X \longmapsto XK^{\rho\theta}, \quad Y \longmapsto K^{-\rho\theta}Y$$

avec un $\rho \in \mathbb{K}$ approprié.

Les modules de Verma de $U_q(sl(2))$

De la même manière que pour $\mathcal{SL}_{\hbar,q}\,(2)$, nous montrons que l'algèbre associative $U_q(sl(2))$ admet la décomposition triangulaire suivante :

$$U_q(sl(2)) \cong \mathcal{N}_- \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+$$

avec $\mathcal{H}$ sous-algèbre de $U_q(sl(2))$ engendré par l'unité et l'élément H qui est évidemment commutative, les algèbres $\mathcal{N}_+$ et $\mathcal{N}_-$ étant les sous algèbres associatives de $U_q(sl(2))$ engendrés par l'unité et respectivement l'élément X et Y.
Nous vérifions sans difficulté de la même manière que précédemment que notre produit tensoriel $\mathcal{N}_- \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}_+$ est vraiment une algèbre.
Nous en déduisons pour un $\lambda \in \mathbb{K} \cong \mathcal{H}^*$ fixé la définition d'un $\mathcal{SL}_{\hbar,q}\,(2)$-module de Verma :

$$M_\lambda = U_q(sl(2)) \otimes_{\mathcal{B}_+(U_q(sl(2)))} \mathbb{K}_\lambda.$$

Nous pouvons voir le $U_q(sl(2))$-module M_λ comme une représentation de $U_q(sl(2))$ dans un espace vectoriel de dimension infinie que nous notons :

$$\pi_\lambda : U_q(sl(2)) \longrightarrow End\,(M_\lambda)\,.$$

Nous savons que M_λ est généré par un vecteur de plus haut poids λ.
Nous allons noter ce vecteur e_0.
Nous avons donc :

$$\pi_\lambda(H)\,(e_0) = \lambda e_0.$$

Nous notons :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* :\quad e_k = \frac{1}{[k]_q!} Y^k \otimes e_0.$$

Nous considérons alors une base dénombrable $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de M_λ dont e_0 est le premier vecteur.

Théorème :

Dans la base $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, il est facile de vérifier que nous pouvons considérer $\pi_\lambda(H);\ \ \pi_\lambda(X);\ \ \pi_\lambda(Y)$ comme des matrices de taille infinie avec :

$$\pi_\lambda\,(H) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & \lambda-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-6 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2n & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{2.4.8}$$

$$\pi_\lambda\,(X) = \begin{pmatrix} 0 & [\lambda]_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & [\lambda-1]_q & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & [\lambda-2]_q & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\lambda-3]_q & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\lambda-n]_q & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{2.4.9}$$

$$\pi_\lambda\,(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & [2]_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & [3]_q & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [n-1]_q & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{2.4.10}$$

De manière analogue au cas classique, une telle représentation possède un quotient de dimension finie si et seulement si $\lambda \in \mathbb{N}$.
La dimension de ce quotient est alors de $\lambda + 1$.

Exemples :

Pour $\lambda = 1$. La représentation finie de dimension 2 est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $\lambda = 2$, nous avons la représentation finie de dimension 3 suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} 0 & [2]_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & [2]_q & 0 \end{pmatrix}$$

Le $U_q(sl(2))$-module $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

Définition :

Nous définissons une action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ sur un élément $M \in End\,(V)$ par les formules suivantes :

$$K^{\epsilon}\,(M) = \pi\,(K^{\epsilon}) \circ M \circ \pi\,(K^{-\epsilon})\,, \quad X\,(M) = \pi\,(X) \circ M \circ \pi\left(K^{1-\theta}\right) - q^{-1}\pi\left(K^{\theta}\right) \circ M \circ \pi\,(X))\,,$$

$$Y\,(M) = \pi\,(Y) \circ M \circ \pi\left(K^{\theta}\right) - q\pi\left(K^{1-\theta}\right) \circ M \circ \pi\,(Y)$$

avec $\epsilon = \pm 1$, les matrices de taille 2×2 $\pi\,(K^{\epsilon})$, $\pi\,(X)$ et $\pi\,(Y)$ étant issues de la représentation usuelle en dimension 2 de $U_q(sl(2))$.

Nous en arrivons à la proposition suivante :

Proposition :

L'action de groupe précédente induit une action de $U_q(sl(2))$ sur $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ en utilisant la représentation fondamentale vectorielle sur V de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ est définie par la table suivante :

$$K^{\epsilon}\,(a) = a, \quad K^{\epsilon}\,(b) = q^{2\epsilon}b, K^{\epsilon}\,(c) = q^{-2\epsilon}c, \quad K^{\epsilon}\,(d) = d,$$

$$X\,(a) = -q^{\theta+1}b, \quad X\,(b) = 0, \quad X\,(c) = q^{1-\theta}g, \quad X\,(d) = q^{\theta-1}b,$$

$$Y\,(a) = -q^{\theta}c, \quad Y\,(b) = -q^{-\theta}g, \quad Y\,(c) = 0, \quad Y\,(d) = -q^{\theta-2}c.$$

Preuve :

Il nous suffit d'appliquer les formules définies précédemment avec la représentation de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ définie dans le paragraphe représentations fondamentales et adjointe de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$.
Le calcul est direct. ■

Nous considérons maintenant l'espace vectoriel de dimension 3 : $\mathbb{V} = \langle u; v; w\rangle$ auquel nous donnons une structure de $U_q\,(sl(2))$-module en utilisant l'action précédente et en posant $u = b$, $v = a - d$ et $w = c$, nous définissons donc dans la base $\langle u; v; w\rangle$ l'action de $U_q(sl(2))$ par les matrices :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -q^{\theta}\,[2]_q & 0 \\ 0 & 0 & q^{1-\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -q^{-\theta} & 0 & 0 \\ 0 & q^{\theta-1}\,[2]_q & 0 \end{pmatrix}$$

Nous étendons cette action à $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ grâce à notre coproduit $\Delta_{\theta,1}$.

Il est bien connu que pour q générique, le $U_q(sl(2))$-module $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ se décompose en somme directe de composantes irréductibles de dimension respective 1, 3 et 5 :

$$\mathbb{V}^{\otimes 2} = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2.$$

Remarque :

Ici par convention : $dim\,(V_i) = i$.
Notons que la quantité $\frac{i-1}{2}$ est appelée $spin$.

Dans le théorème suivant, nous allons décrire explicitement nos composantes irréductibles.
Notre objectif est de définir la sphère (ou l'hyperboloïde) quantique sans passer par la construction de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}\,(2)$, et de faire le lien entre ces deux définitions afin de prouver la covariance des représentations de $\mathcal{L}_{\hbar,q}\,(2)$ et de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}\,(2)$ par rapport à l'action de $U_q(sl(2))$.

Théorème :

Dans la base $\{u^2; uv; uw; vu; v^2; vw; wu; wv; w^2\}$, les composantes V_1,V_3 et V_5 sont :

$$V_0 = \left\langle q^{-1}[2]_q uw + v^2 + q[2]_q wu \right\rangle$$

$$V_1 = \left\langle \overline{u} = q^{-2}uv - vu \,; \overline{v} = q^{-1}[2]_q (wu - uw) + \left(q^{-2} - 1\right) v^2 \,; \overline{w} = q^{-2}vw - wv \right\rangle$$

$$V_2 = \left\langle u^2 \,; q^2uv + vu \,; q^2uw + q^{-2}wu - v^2 \,; q^2vw + wv \,; w^2 \right\rangle$$

Preuve :

$$H(\overline{u}) = 2\overline{u}$$

$$X(\overline{u}) = q^{-2}\left(q^{2\theta}u\left(-q^{\theta}[2]_q\right)u\right) + q^{\theta}[2]_q uq^{2\theta-2}u = -q^{3\theta-2}[2]_q u^2 + q^{3\theta-2}[2]_q u^2 = 0$$

$\overline{u}$ est donc un vecteur de plus haut poids.

$$\begin{aligned} Y(\overline{u}) &= [2]_q q^{-2\theta}q^{\theta-1}uw - q^{-2}q^{-\theta}v^2 + q^{-\theta}v^2 - [2]_q q^{\theta-1}q^{-2\theta}wu \\ &= [2]_q q^{-(\theta+1)}(uw - wu) + q^{-\theta}\left(1 - q^{-2}\right)v^2 \end{aligned}$$

Nous posons alors $\overline{v} = -q^{\theta}Y(\overline{u}) = q^{-1}[2]_q (wu - uw) + \left(q^{-2} - 1\right)v^2$.
Nous avons bien $H(\overline{v}) = 0$.

$$\begin{aligned} X(\overline{v}) &= [2]_q\left(q^{-\theta}q^{2\theta}vu - q^{2\theta}q^{-\theta}uv\right) + \left(q^{-2} - 1\right)\left(-q^{\theta}[2]_q vu - q^{\theta}[2]_q uv\right) \\ &= q^{\theta}[2]_q\left(q^{-2}vu - uv + vu + uv - q^{-2}vu - q^{-2}uv\right) \\ &= -q^{\theta}[2]_q \overline{u} \end{aligned}$$

Nous avons donc bien la relation $X(\overline{v}) = -q^{\theta}[2]_q \overline{u}$ ce qui justifie nos notations.

$$\begin{aligned} Y(\overline{v}) &= q^{-1}[2]_q\left(-q^{-2(1-\theta)}q^{-\theta}wv + q^{-\theta}q^{2\theta}vw\right) + \left(q^{-2} - 1\right)[2]_q\left(q^{\theta-1}vw + q^{\theta-1}wv\right) \\ &= q^{\theta-1}[2]_q\left(-q^{-2}wv + vw - vw - wv + q^{-2}vw - vw + q^{-2}wv - wv\right) \\ &= q^{\theta-1}[2]_q\left(q^{-2}vw - wv\right) \end{aligned}$$

Nous posons alors $\overline{w} = q^{-2}vw - wv$.
Nous constatons que :

$$Y(\overline{w}) = [2]_q q^{3(\theta-1)}\left(w^2 - w^2\right) = 0$$

Au final : $V_1 = \langle \overline{u}; \overline{v}; \overline{w} \rangle$ est un sous-$U_q(sl(2))$-module de $V^{\otimes 2}$ de dimension 3.

$$\begin{aligned} H\left(u^2\right) &= 4u^2 \\ X\left(u^2\right) &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

u^2 est donc un vecteur de plus haut poids.

$$\begin{aligned} Y\left(u^2\right) &= -q^{2(1-\theta)}q^{-\theta}uv - q^{-\theta}q^{-2\theta}vu \\ &= -q^{-3\theta}\left(q^2uv + vu\right) \\ Y\left(q^2uv + vu\right) &= q^2q^{1-\theta}[2]_q uw - q^2q^{-\theta}v^2 - q^{-\theta}v^2 + [2]_q q^{\theta-1}q^{-2\theta}wu \\ &= q^{-\theta+1}[2]_q\left(q^2uw + q^{-2}wu - v^2\right) \\ Y\left(q^2uw + q^{-2}wu - v^2\right) &= -q^2q^{-\theta}vw - q^{-2}q^{-2(1-\theta)}q^{-\theta}wv - [2]_q q^{\theta-1}vw - q^{\theta-1}[2]_q wv \\ &= q^{\theta-2}\left(-q^4vw - q^{-2}wv - q^2vw - vw - q^2wv - wv\right) \\ &= -q^{\theta-2}\left(q^2 + 1 + q^{-2}\right)\left(q^2vw + wv\right) \\ Y\left(q^2vw + wv\right) &= \left(q^{-\theta+1}[2]_q + q^{3\theta-3}[2]_q\right)w^2 \\ Y\left(w^2\right) &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Au final :

$$V_2 = \left\langle u^2 \,; q^2uv + vu \,; q^2uw + q^{-2}wu - v^2 \,; q^2vw + wv \,; w^2 \right\rangle$$

est un sous-$U_q(sl(2))$-module de $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ de dimension 5.
Si nous posons $C_q = q^{-1}\,[2]_q\,uw + v^2 + q\,[2]_q\,wu$:

$$H\left(C_q\right) = X\left(C_q\right) = Y\left(C_q\right) = 0.$$

En effet :

$$X\left(C_q\right) = [2]_q\, q^{\theta}\left(uv - uv - vu + vu\right) = 0$$
$$Y\left(C_q\right) = [2]_q\, q^{\theta-1}\left(-vw + wv + vw - wv\right) = 0$$

Nous appelons C_q le Casimir tressé. Il engendre un sous-$U_q(sl(2))$-module $V_0 = \langle C_q \rangle$ de $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ de dimension 1.
Nous avons calculé les coefficients dits de Clebsch-Gordan pour les sous-modules V_0,V_1 et V_2 avec un coproduit de $U_q(sl(2))$: $\Delta_{\theta,1}$. ■

Remarque :

Notre calcul est équivalent à celui des coefficients de Clebsch-Gordan de [K].

La sphère quantique en tant que $U_q(sl(2))$-algèbre

Nous appelons $U_q(sl(2))$-algèbre toute algèbre $\mathcal{A}$ telle que :

$\forall a, b \in \mathcal{A},\ \forall U \in U_q(sl(2)) : \quad U\left(a \circ b\right) = U_1\left(a\right) \circ U_2\left(b\right)$ avec $\Delta\left(U\right) = U_1 \otimes U_2$ en utilisant la notation de Sweedler.

Δ étant bien sûr un coproduit de l'algèbre $U_q(sl(2))$ munissant celle-ci d'une structure de bigèbre.

Définition :

Si nous considérons le quotient de l'algèbre $T\left(\mathbb{V}\right)$ par l'idéal engendré par les trois éléments :

$$\overline{u} + 2\hbar u \quad ; \quad \overline{v} - 2\hbar v \quad ; \quad \overline{w} - 2\hbar w$$

nous définissons l'algèbre $\mathcal{A}_{\hbar,q}$.
Si nous fixons $C_q = c \in \mathbb{K}$, nous définissons alors la sphère quantique $\mathcal{A}^c_{\hbar,q}$.

Remarque : Nous parlons plutôt d'hyperboloïde quantique pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

La sphère quantique via un plongement dans $U_q(sl(2))$:

Ici nous appliquons la construction de Lyubashenko-Sudbery avec notre coproduit $\Delta_{\theta,1}$.
Nous nous inspirons de la construction de l'algèbre $sl(2)_q$ dans l'article [LS].

Définition :

Considérons l'algèbre de Hopf $(U_q(sl(2)); \Delta_{\theta,1}; S_{\theta,1}; \epsilon)$.
Nous appelons action adjointe de $U_q(sl(2))$ sur $U_q(sl(2))$ l'action suivante (nous utilisons la notation de Sweedler) :

$$\forall U, V \in U_q(sl(2)) : \quad U \triangleright V = U_1 V S\left(U_2\right) \quad \text{avec} \quad \Delta_{\theta,1}\left(U\right) = U_1 \otimes U_2.$$

Théorème :

L'espace vectoriel $sl(2)_q$ engendré dans l'algèbre $U_q(sl(2))$ par les générateurs :

$$sl(2)_q = \langle X_+ \, ; X_0 \, ; X_- \rangle$$

avec :

$$\begin{cases} X_+ = q^{\theta} q^{-\theta H} X \\ X_0 = q^2 XY - YX \\ X_- = q^{\theta+1} q^{(\theta-1)H} Y \end{cases}$$

est fermé par rapport à l'action adjointe de $U_q(sl(2))$ définie grâce au coproduit $\Delta_{\theta,1}$ et son antipode associé $S_{\theta,1}$ et est par conséquent isomorphe à la représentation donnée par matrices.

Preuve :

Nous nous plaçons dans $U_q(sl(2))$ munis du coproduit $\Delta_{\theta,1}$ et de son antipode associée $S_{\theta,1}$. Grâce à $\Delta_{\theta,1}$ et $S_{\theta,1}$, nous définissons une action adjointe sur $U_q(sl(2))$.
Nous notons $X_+ = q^{\theta} q^{-\theta H} X$.

$$\begin{aligned} X \triangleright X_+ &= q^{\theta} \left(X \left(-q^{-\theta H} X q^{(1-\theta)H} \right) + X q^{-\theta H} X q^{(1-\theta)H} \right) \\ &= q^{\theta} \left(-X q^{-\theta H} + X q^{-\theta H} \right) X q^{(1-\theta)H} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous notons $X_0 = -q^{\theta} Y \triangleright X_+$.

$$\begin{aligned} Y \triangleright X_+ &= q^{\theta} \left(q^{(1-\theta)H} q^{-\theta H} X \left(-q^{(\theta-1)H} Y q^{\theta H} \right) + Y q^{-\theta H} X q^{\theta H} \right) \\ &= q^{\theta} \left(-q^{2(1-\theta)H} q^{-\theta H} XY q^{\theta H} + q^{-2\theta} YX \right) \\ &= -q^{-\theta} \left(q^2 XY - YX \right) \end{aligned}$$

Nous avons donc : $X_0 = q^2 XY - YX$.
Nous notons maintenant $X_- = \frac{q^{1-\theta}}{[2]_q} Y \triangleright X_0$.

$$Y \triangleright X_0 = q^2 \left(YX - XY \right) Y q^{\theta H} + Y \left(XY - YX \right) q^{\theta H}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(q - q^{-1} \right) Y \triangleright X_0 &= q^2 \left(q^{-H} - q^{H} \right) Y q^{\theta H} + Y \left(q^{H} - q^{-H} \right) q^{\theta H} \\ &= \left(q^2 q^{-H} Y - q^2 q^{H} Y + q^2 q^{H} Y - q^{-2} q^{-H} Y \right) q^{\theta H} \\ &= q^{2\theta} q^{(\theta-1)H} \left(q^2 - q^{-2} \right) Y \end{aligned}$$

D'où $\frac{q^{1-\theta}}{[2]_q} Y \triangleright X_0 = q^{\theta+1} q^{(\theta-1)H} Y$.
Nous avons donc $X_- = q^{\theta+1} q^{(\theta-1)H} Y$.
Nous vérifions facilement que nous avons bien :

$$H \triangleright X_+ = 2X_+ \quad H \triangleright X_0 = 0 \quad H \triangleright X_- = -2X_-$$

$$Y \triangleright X_- = q^{\theta+1} \left(Y \left(-q^{(\theta-1)H} Y q^{\theta H} \right) + Y q^{(\theta-1)H} Y q^{\theta H} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} X \triangleright X_- &= q^{\theta+1} \left(q^{(2\theta-1)H} Y \left(-q^{-\theta H} X q^{(1-\theta)H} \right) + X q^{(\theta-1)H} Y q^{(1-\theta)H} \right) \\ &= q^{1-\theta} \left(q^2 XY - YX \right) = q^{1-\theta} X_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \triangleright X_0 &= q^2 q^{\theta H} XY \left(-q^{-\theta H} X q^{(1-\theta)H} \right) + q^2 X^2 Y q^{(1-\theta)H} - q^{\theta H} YX \left(-q^{-\theta H} X q^{(1-\theta)H} \right) - XYX q^{(1-\theta)H} \\ &= \left(q^2 X \left(XY - YX \right) + \left(YX - XY \right) X \right) q^{(1-\theta)H} \\ &= q^{2\theta} q^{-\theta H} \frac{q^2 X q^{H} - q^2 X q^{-H} - q^{H} X + q^{-H} X}{q - q^{-1}} q^{H} \\ &= -q^{2\theta} q^{-\theta H} \left(q + q^{-1} \right) X = -q^{\theta} \left[2 \right]_q X_+ \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque :

Ici nous avons en fait réalisé notre espace-vectoriel $\mathbb{V}$ comme sous-$U_q(sl(2))$-module de $U_q(sl(2))$ en posant :

$$\mathbb{V} = sl(2)_q.$$

Représentation de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ dans M_λ le module de Verma du groupe quantique $U_q(sl(2))$

Considérons notre sphère quantique $\mathcal{A}^c_{\hbar,q}$.
Nous pouvons faire l'identification suivante :

$$\begin{cases} -q^2\overline{u} = q^2 gb - bg \\ -q^2\overline{v} = \left(q^2+1\right)(bc-cb) + \left(q^2-1\right) g^2 \\ -q^2\overline{w} = q^2 cg - gc \end{cases}$$

Nous considérons alors dans $U_q(sl(2))$:

$$\begin{cases} X_+ = q^\theta q^{-\theta H} X \\ X_0 = q^2 XY - YX \\ X_- = q^{\theta+1} q^{(\theta-1)H} Y \end{cases}$$

Avec l'identification $g = X_0$, $b = X_+$ et $c = X_-$, nous pouvons avoir une représentation plus naturelle de g, b et c grâce aux représentations habituelles de $H; X; Y$: (2.4.8)(2.4.9)(2.4.10).
Considérons un poids $\lambda \in \mathbb{K}$ que nous pouvons considérer comme la valeur propre de H associée au vecteur propre e_0 et nous considérons désormais les représentations de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}$ dans notre module de Verma M_λ.
Nous avons donc les équations :

$$\begin{cases} q^2 X_0 X_+ - X_+ X_0 = C_\lambda \left[2\right]_q X_+ \\ q\left[2\right]_q (X_+X_- - X_-X_+) + \left(q^2-1\right) X_0^2 = C_\lambda \left[2\right]_q X_0 \\ q^2 X_- X_0 - X_0 X_- = C_\lambda \left[2\right]_q X_- \end{cases}$$

Avec $C_\lambda \in \mathbb{K}$ dépendant de la représentation que nous avons choisi. Ici :

Proposition :

$$C_\lambda = \left(q^4+1\right)\frac{\left[\lambda\right]_q}{\left[2\right]_q} - q^2\left[\lambda-1\right]_q$$

Preuve :

Il suffit de raisonner dans l'une des équations du précédent système sur la première composante non nulle :

$$\begin{aligned} \left[2\right]_q C_\lambda &= \frac{q^\theta q^{-\theta\lambda} q^4 \left[\lambda\right]_q^2 - q^\theta q^{-\theta\lambda} q^2 \left[2\right]_q \left[\lambda-1\right]_q \left[\lambda\right]_q \left[2\right]_q + q^\theta q^{-\theta\lambda}\left[\lambda\right]_q^2}{q^\theta q^{-\theta\lambda}\left[\lambda\right]_q} \\ &= q^4\left[\lambda\right]_q - q^2\left[\lambda-1\right]_q\left[2\right]_q + \left[\lambda\right]_q \end{aligned}$$

Nous avons bien $C_\lambda = \left(q^4+1\right)\frac{\left[\lambda\right]_q}{\left[2\right]_q} - q^2\left[\lambda-1\right]_q$. ∎

Tous ces résultats nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème :

Les représentations construites précédemment de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ et donc de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ sont covariantes par rapport à l'action de $U_q(sl(2))$.
De plus, notre représentation $\pi_{\overline{\lambda}}$ de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ est finie si et seulement si :

$$\overline{\lambda} = q^2 [\lambda]_q \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{N}.$$

Nous en déduisons alors les représentation finies $\pi_{\widetilde{\lambda}}$ de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$.

Preuve :

La première partie du théorème est établie dans ce qui précède.
En ce qui concerne la deuxième partie du théorème, il nous suffit d'utiliser ce que nous savons des représentations de $U_q(sl(2))$ pour conclure que $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ admet une représentation finie dans M_λ si et seulement si $\lambda \in \mathbb{N}$ et que :

$$\overline{\lambda} = q^2 [\lambda]_q . \qquad \blacksquare$$

Les valeurs propres de L dans M_λ

Si $Tr_q(L) = 0$:

Nous considérons maintenant une représentation de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ dans M_λ :π_λ.
Nous avons pu précédemment définir un caractère $\chi_{\overline{\lambda}}$ de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ à partir de la représentation $\pi_{\overline{\lambda}}$, en procédant exactement de la même manière, nous pouvons définir un caractère χ_λ de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$.
Nous pouvons donc nous placer dans l'algèbre $\mathcal{SL}^{\chi_\lambda}_{\hbar,q}(2)$ et considérer les valeurs propres de L.
Nous définissons donc $\mu_1(\lambda)$ et $\mu_2(\lambda)$ tels que dans l'algèbre $\mathcal{SL}^{\chi_\lambda}_{\hbar,q}(2)$:

$$L^2 - q^{-1}\hbar L + \sigma I = (L - \mu_1(\lambda))(L - \mu_2(\lambda)).$$

Nous déterminons la première valeur propre de g en fonction de λ :

$$\overline{\lambda} = q^2 [\lambda]_q .$$

Par conséquent : sachant que $\overline{\lambda} = q^2 [\lambda]_q$ et $\hbar = C_\lambda = \left(q^4+1\right) \frac{[\lambda]_q}{[2]_q} - q^2 [\lambda - 1]_q$, nous déduisons de (2.4.6) le théorème suivant :

Théorème :

Dans le cadre de la représentation π_λ de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ dans l'espace M_λ, les valeurs propres de L sont $\mu_1(\lambda)$ et $\mu_2(\lambda)$ avec :

$$\begin{cases} \mu_1(\lambda) = -q\dfrac{[\lambda]_q}{[2]_q} \\ \mu_2(\lambda) = q^{-1}\hbar + q\dfrac{[\lambda]_q}{[2]_q} \end{cases} \tag{2.4.11}$$

($\mu_1(\lambda)$ et $\mu_2(\lambda)$ sont bien sûr définies à l'ordre près.)

Si $Tr_q(L) = \lambda_0 \in \mathbb{K}$ **:**

Nous nous plaçons donc maintenant dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ quotienté par la relation $Tr_q(L) = \lambda_0 \in \mathbb{K}$.

Proposition :

Les équations définissant $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ sont déformées ainsi dans notre nouvelle algèbre :

$$\begin{cases} q^2gb - bg = [2]_q \overline{\hbar} b \\ q[2]_q(bc - cb) + \left(q^2 - 1\right) g^2 = [2]_q \overline{\hbar} g \\ gc - q^2cg = -[2]_q \overline{\hbar} c \end{cases}$$

Avec :

$$\overline{\hbar} = \hbar - \frac{\zeta}{[2]_q}\lambda_0.$$

Preuve :

Nous avons établis précédemment le système d'équations (2.1.2), il nous suffit de remplacer l par λ_0. ■

Nous pouvons donc étendre le caractère χ_λ précédent défini sur $Z(\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2))$ à l'ensemble $Z(\mathcal{L}_{\hbar,q}(2))$ en un caractère χ_{λ,λ_0} en posant $\chi_{\lambda,\lambda_0}(l) = \lambda_0 \in \mathbb{K}$.
Nous travaillons donc dans l'algèbre ${\mathcal{L}_{\hbar,q}}^{\chi_{\lambda,\lambda_0}}(2)$ et nous pouvons donc considérer les valeurs propres de L.
Nous définissons donc $\mu_1(\lambda;\lambda_0)$ et $\mu_2(\lambda;\lambda_0)$ tels que dans l'algèbre ${\mathcal{L}_{\hbar,q}}^{\chi_{\lambda,\lambda_0}}(2)$:

$$L^2 - \left(q^{-2}a + d + q^{-1}\hbar\right)L + \left(ad - bc - q^{-1}\zeta a^2 + \hbar q^{-1}a\right)I = (L - \mu_1(\lambda;\lambda_0))(L - \mu_2(\lambda;\lambda_0)).$$

Théorème :

Dans le cadre de la représentation dans l'espace M_λ de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, si nous imposons la relation $Tr_q(L) = \lambda_0$, les valeurs propres de L sont $\mu_1(\lambda;\lambda_0)$ et $\mu_2(\lambda;\lambda_0)$ avec :

$$\begin{cases} \mu_1(\lambda;\lambda_0) = \dfrac{\lambda_0 - q[\lambda]_q}{[2]_q} \\ \mu_2(\lambda;\lambda_0) = q^{-1}\hbar + q\dfrac{[\lambda]_q}{[2]_q} + \dfrac{q^{-2}}{[2]_q}\lambda_0 \end{cases} \tag{2.4.12}$$

($\mu_1(\lambda;\lambda_0)$ et $\mu_2(\lambda;\lambda_0)$ sont bien sûr définies à l'ordre près.)

Preuve :

Nous avons :

$$L = \begin{pmatrix} [2]_q^{-1}\lambda_0 + [2]_q^{-1}qg & b \\ c & [2]_q^{-1}\lambda_0 - [2]_q^{-1}q^{-1}g \end{pmatrix} = \widetilde{L} + \frac{\lambda_0}{[2]_q}I$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} &\left(\widetilde{L} - \mu_1\right)\left(\widetilde{L} - \mu_2\right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(\widetilde{L} + \frac{\lambda_0}{[2]_q} - \left(\mu_1 + \frac{\lambda_0}{[2]_q}\right)\right)\left(\widetilde{L} + \frac{\lambda_0}{[2]_q} - \left(\mu_2 + \frac{\lambda_0}{[2]_q}\right)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(L - \left(\mu_1 + \frac{\lambda_0}{[2]_q}\right)\right)\left(L - \left(\mu_2 + \frac{\lambda_0}{[2]_q}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors les deux racines de l'équation de Cayley-Hamilton (2.4.12) grâce à (2.4.6) en prenant garde d'utiliser $\overline{\hbar}$ à la place de $\hbar$. ■

Remarque 1 :

Nous pouvions démontrer ce théorème grâce à l'équation de Cayley-Hamilton (2.2.2).
Nous pouvons donc reformuler l'équation de Cayley-Hamilton ainsi :

$$L^2-\left(q^{-1}\lambda_0+q^{-1}\hbar\right)L+[2]_q^{-1}\left(q^{-2}[2]_q^{-1}\lambda_0^2+\zeta[2]_q^{-1}[\lambda]_q\lambda_0-q^2[2]_q^{-1}[\lambda]_q^2+q^{-1}\hbar\lambda_0-\hbar[\lambda]_q\right)I=0.$$

Nous démontrons ensuite que :

$$\mu_1(\lambda;\lambda_0)+\mu_2(\lambda;\lambda_0)=q^{-1}\lambda_0+q^{-1}\hbar$$
$$\mu_1(\lambda;\lambda_0)\times\mu_2(\lambda;\lambda_0)=[2]_q^{-1}\left(q^{-2}[2]_q^{-1}\lambda_0^2+\zeta[2]_q^{-1}[\lambda]_q\lambda_0-q^2[2]_q^{-1}[\lambda]_q^2+q^{-1}\hbar\lambda_0-\hbar[\lambda]_q\right)$$

Remarque 2 :

Nous pouvons faire un lien avec les formules (2.4.1). Il nous suffit de remarquer que :
$\chi_\lambda(l)=\lambda_0$ nous impose la relation $q^{-1}\lambda_1+q\lambda_2=\lambda_0$ si nous utilisons les notations de (2.4.1).
De même $g(e_0)=\overline{\lambda}e_0$ qui nous impose la relation $(\lambda_1-\lambda_2)e_0=q[\lambda]_q e_0$.
Nous en déduisons le système suivant :

$$\begin{cases} q^{-1}\lambda_1+q\lambda_2=\lambda_0 \\ \lambda_1-\lambda_2=q^2[\lambda]_q \end{cases}$$

Nous déduisons alors des formules (2.4.1) les formules (2.4.12).

2.4.3 Le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$

Les modules de Verma de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$

Ce que nous avons dit sur les modules de Verma de l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ reste valable pour l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$. Néanmoins dans ce dernier cas, ces modules de Verma sont de dimension finie (notamment 2) car la suite $1,b,b^2,b^3,\ldots$ dégénère dés le troisième terme. (On peut naturellement dire la même chose pour la suite $1,c,c^2,c^3,\ldots$).
Aussi si notre algèbre $\mathcal{H}$ ne diffère pas de l'exemple précédent, désormais nous avons :

$$\mathcal{N}_+=\langle 1,b\rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_-=\langle 1,c\rangle\,.$$

Nous en déduisons alors pour un $\widetilde{\lambda}\in\mathcal{H}^*\cong\mathbb{K}^2$ fixé la définition d'un $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$-module de Verma :

$$M_{\widetilde{\lambda}}=\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\otimes_{\mathcal{B}_+(1|1)}\mathbb{K}_{\widetilde{\lambda}}.$$

Nous pouvons également considérer notre module de Verma en tant que représentation :

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}:\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\longrightarrow End\left(M_{\widetilde{\lambda}}\right).$$

Nous notons toujours e_0 le vecteur de plus haut poids $\widetilde{\lambda}$.
Comme auparavant nous introduisons une représentation de $\mathcal{B}_+(1|1)=\mathcal{H}\otimes\mathcal{N}_+$ par :

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(a)(e_0)=\lambda_1e_0;\ \ \pi_{\widetilde{\lambda}}(d)(e_0)=\lambda_2e_0.$$

Théorème :

Soit W l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les deux vecteurs e_0 et $e_1=\pi_{\widetilde{\lambda}}(c)(e_0)$.
Dans notre base $(e_0;e_1)$, nous pouvons considérer $\pi_{\widetilde{\lambda}}(a)$, $\pi_{\widetilde{\lambda}}(b)$, $\pi_{\widetilde{\lambda}}(c)$ et $\pi_{\widetilde{\lambda}}(d)$ comme des matrices de taille 2×2 avec :

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(a)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & q^2\lambda_1-q\hbar\end{pmatrix};\ \ \pi_{\widetilde{\lambda}}(d)=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & q\zeta\lambda_1+\lambda_2-q\hbar\end{pmatrix}$$

$$\pi_{\widetilde{\lambda}}(b)=\begin{pmatrix}0 & \widetilde{b}\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ \ \pi_{\widetilde{\lambda}}(c)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{avec } \widetilde{b}=q(\zeta\lambda_1-\hbar)(\lambda_1-\lambda_2)$$

Preuve :

Nous allons simplifier la notation de cette démonstration en notant $\pi_{\widetilde{\lambda}}(a)$, $\pi_{\widetilde{\lambda}}(b)$, $\pi_{\widetilde{\lambda}}(c)$, $\pi_{\widetilde{\lambda}}(d)$ respectivement $a;\ b;\ c;\ d$.
Il nous suffit de vérifier que les équations (2.1.4) sont vérifiées avec cette représentation.

1. Les équations $b^2 = c^2 = 0$ et $ad = da$ sont trivialement vérifiées.
2. Montrons que l'équation $qab - q^{-1}ba = \hbar b$ est vérifiée.

$$\begin{aligned}\left(qab - q^{-1}ba\right)(e_0) &= qab(e_0) - q^{-1}ba(e_0) = -q^{-1}\lambda_1 b(e_0) = 0 = \hbar b(e_0)\\ \left(qab - q^{-1}ba\right)(e_1) &= qab(e_1) - q^{-1}ba(e_1)\\ &= q\widetilde{b}a(e_0) - q^{-1}\left(q^2\lambda_1 - q\hbar\right)b(e_1)\\ &= \widetilde{b}(q\lambda_1 - q\lambda_1 + \hbar)e_0 = \hbar\widetilde{b}e_0 = \hbar b(e_1)\end{aligned}$$

3. Montrons que l'équation $qca - q^{-1}ac = \hbar c$ est vérifiée.

$$\begin{aligned}\left(qca - q^{-1}ac\right)(e_0) &= qca(e_0) - q^{-1}ac(e_0)\\ &= q\lambda_1 c(e_0) - q^{-1}a(e_1)\\ &= (q\lambda_1 - q\lambda_1 + \hbar)e_1 = \hbar e_1 = \hbar c(e_0)\\ \left(qca - q^{-1}ac\right)(e_1) &= qca(e_1) - q^{-1}ac(e_1) = 0 = \hbar c(e_1)\end{aligned}$$

4. Montrons que l'équation $qcb + q^{-1}bc = (\zeta a - \hbar)(a - d)$ est vérifiée.

$$\begin{aligned}\left(qcb + q^{-1}bc\right)(e_0) &= q^{-1}\widetilde{b}e_0 = (\zeta\lambda_1 - \hbar)(\lambda_1 - \lambda_2)e_0 = (\zeta a - \hbar)(a - d)(e_0)\\ \left(qcb + q^{-1}bc\right)(e_1) &= q\widetilde{b}e_1 = q^2(\zeta\lambda_1 - \hbar)(\lambda_1 - \lambda_2)e_1\end{aligned}$$

   Or :

$$\begin{aligned}(q\zeta a - \hbar)(a - d)(e_1) &= (q\zeta a - \hbar)\left(q^2\lambda_1 - q\hbar - q\zeta\lambda_1 - \lambda_2 + q\hbar\right)\\ &= (q\zeta a - \hbar)((\lambda_1 - \lambda_2)e_1)\\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)\left(q^3\zeta\lambda_1 - q\zeta\hbar - \hbar\right)e_1\\ &= q^2(\zeta\lambda_1 - \hbar)(\lambda_1 - \lambda_2)e_1\end{aligned}$$

   Donc $\left(qcb + q^{-1}bc\right)(e_1) = (q\zeta a - \hbar)(a - d)(e_1)$.
5. Montrons que l'équation $q^{-1}(bd - db) = (\zeta a - \hbar)b$ est vérifiée.

$$\begin{aligned}q^{-1}(bd - db)(e_0) = 0 &= (\zeta a - \hbar)b(e_0)\\ q^{-1}(bd - db)(e_1) &= q^{-1}bd(e_1) - q^{-1}db(e_1)\\ &= q^{-1}\widetilde{b}(q\zeta\lambda_1 + \lambda_2 - q\hbar)e_0 - q^{-1}\widetilde{b}\lambda_2 e_0\\ &= \widetilde{b}(\zeta\lambda_1 - \hbar)e_0\\ &= (\zeta a - \hbar)b(e_1)\end{aligned}$$

6. Montrons que l'équation $q^{-1}(dc - cd) = c(\zeta a - \hbar)$ est vérifiée.

$$\begin{aligned}q^{-1}(dc - cd)(e_0) &= q^{-1}dc(e_0) - q^{-1}cd(e_0)\\ &= q^{-1}d(e_1) - q^{-1}\lambda_2 c(e_0)\\ &= \left(\zeta\lambda_1 + q^{-1}\lambda_2 - \hbar - q^{-1}\lambda_2\right)e_1\\ &= (\zeta\lambda_1 - \hbar)e_1\\ &= (c(\zeta a - \hbar))(e_0)\\ q^{-1}(dc - cd)(e_1) = 0 &= (c(\zeta a - \hbar))(e_1)\end{aligned}$$

Nous avons démontré que toutes les équations (2.1.4) sont vérifiées. ■

Comme auparavant nous pouvons montrer que les images des éléments centraux sont scalaires dans

notre module de Verma. Donc notre représentation $\pi_{\widetilde{\lambda}} : \mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1) \longrightarrow End\left(M_{\widetilde{\lambda}}\right)$ définit un caractère $\chi : Z\left(\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\right) \longrightarrow \mathbb{K}$.
Nous nous intéressons toujours au problème du lien entre les racines μ et ν de l'équation de Cayley-Hamilton et le plus haut poids $(\lambda_1; \lambda_2)$.

Théorème :

Dans le cadre de notre représentation, si nous considérons son caractère associé :

$$\chi : \begin{array}{ccc} Z\left(End\left(W\right)\right) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda Id & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

Dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)^{\chi}\left[\bar{l}\right]$:

$$\begin{cases} \mu = q^2\lambda_1 - q\hbar \\ \nu = \lambda_2 \end{cases} \tag{2.4.13}$$

Preuve :

Nous étendons sans difficulté notre représentation en dimension 2 de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)$ à $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)\left[\bar{l}\right]$.
Dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)^{\chi}\left[\bar{l}\right]$, nous avons :

$$\mu = a + \bar{l}bc = \left(q^2\lambda_1 - q\hbar\right) Id.$$

Donc $\mu = q^2\lambda_1 - q\hbar$ dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)^{\chi}\left[\bar{l}\right]$.
De même :

$$\nu = d - \bar{l}cb = \lambda_2 Id.$$

Donc $\nu = \lambda_2$ dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\hbar,q}(1|1)^{\chi}\left[\bar{l}\right]$. ■

Chapitre 3

Modèles dynamiques Non Commutatifs avec symétries quantiques

Nous avons maintenant une bonne connaissance des algèbres $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ et $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, et nous pouvons définir des modèles dynamiques non commutatifs (qui sont la déformation de certains modèles dynamiques classiques) dont l'espace des phases n'est autre que l'espace de q-Minkowski $\mathcal{L}_q(2)$ ou son quotient $\mathcal{SL}_q(2)$.

3.1 Modèles dynamiques non commutatifs dans un champ à force central

3.1.1 Généralisation des intégrales de mouvement

Considérons pour commencer un point matériel $\overrightarrow{r} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ se déplaçant dans un champ à force central. Dans le cadre de la mécanique classique, son mouvement est défini par le système différentiel :

$$\ddot{\overrightarrow{r}} = -\overrightarrow{r} f(r), \tag{3.1.1}$$

avec $r = \|\overrightarrow{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la composante radiale, f étant une fonction lisse pour $r > 0$ et les points correspondant comme d'habitude à la dérivation par rapport au temps $t \in \mathbb{R}$, autrement dit $\dot{\overrightarrow{r}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{r}$.
Nous pouvons réécrire ce système grâce à la matrice suivante :

$$L = \begin{pmatrix} x & y + iz \\ y - iz & -x \end{pmatrix}.$$

Cette matrice vérifie la formule de Cayley-Hamilton :

$$L^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) I = 0.$$

Nous en déduisons que les valeurs propres de L sont $\pm r$. Nous pouvons alors réécrire le système différentiel précédent de cette manière :

$$\ddot{L} = -Lf(r)$$

Notre objectif immédiat est de généraliser le système précédent à mREA. Nous allons considérer séparément deux situations, $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ d'un côté et $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ de l'autre. En considérant le cas $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, nous imposons exactement la même équation que précédemment, mais cette fois L est la matrice permettant de définir mREA et r est remplacé par $\rho = \sqrt{\frac{Tr_q(L^2)}{2}}$. (On remarquera que dans le cas classique, i.e. $q = 1$ et $\hbar = 0$, nous avons $\rho = r$.) L'analogue quantique de l'équation (3.1.1) est donc :

$$\ddot{L} = -Lf(\rho) \tag{3.1.2}$$

Si nous considérons le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$, nous imposons une équation plus générale :

$$\ddot{L} = -Lf(\mu_1; \mu_2) \tag{3.1.3}$$

où μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres de la matrice L et f est une fonction symétrique par rapport aux valeurs propres μ_i. Aussi, nous considérons les coefficients de la matrice L (autrement dit a, b, c, d) et les variables numériques μ_1 et μ_2 en tant que variables dynamiques dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$. Néanmoins, elles ne sont pas indépendantes les unes des autres, puisque liées par l'équation de Cayley-Hamilton. Nous pouvons remarquer que (3.1.2) et (3.1.3) sont invariantes pour toute action de $U_q(sl(2))$ qui agit sur $\ddot{L}$ de la même manière que sur L et de telle sorte que les valeurs propres μ_i sont invariantes.

Théorème :

Dans le cas $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, l'équation (3.1.2) possède une intégrale de mouvement appelée énergie :

$$E = \frac{Tr_q\left(\dot{L}^2\right)}{4} + U(\rho) \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{\frac{Tr_q\left(L^2\right)}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{U'(\rho)}{\rho} = f(\rho)$$

Preuve :

Dérivons E :

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \frac{Tr_q\left(\dot{L}\ddot{L} + \ddot{L}\dot{L}\right)}{4} + \frac{U'(\rho)}{4\rho} Tr_q\left(\dot{L}L + L\dot{L}\right) \\
&= \frac{-f(\rho)\, Tr_q\left(\dot{L}L + L\dot{L}\right)}{4} + \frac{U'(\rho)}{4\rho} Tr_q\left(\dot{L}L + L\dot{L}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{U'(\rho)}{\rho} - f(\rho)\right) Tr_q\left(\dot{L}L + L\dot{L}\right) = 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Théorème :

Supposons que dans le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ dans le cadre de l'équation (3.1.3) :

$$f(\mu_1; \mu_2) = \psi\left(Tr_q\left(L^2\right)\right).$$

Alors l'équation (3.1.3) possède une intégrale de mouvement appelée énergie :

$$E = \frac{Tr_q\left(\dot{L}^2\right)}{4} + U(\mu_1; \mu_2)$$

avec U telle que :

$$U(\mu_1; \mu_2) = \frac{F(g(\mu_1; \mu_2))}{4} = \frac{F\left(Tr_q\left(L^2\right)\right)}{4} \quad \text{où } F \text{ est une primitive de } \psi.$$

Preuve :

Dérivons E :

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \frac{Tr_q\left(\dot{L}\ddot{L} + \ddot{L}\dot{L}\right)}{4} + U'_{\mu_1}(\mu_1; \mu_2)\,\dot{\mu}_1 + U'_{\mu_2}(\mu_1; \mu_2)\,\dot{\mu}_2 \\
&= -f(\mu_1; \mu_2)\frac{Tr_q\left(\dot{L}L + L\dot{L}\right)}{4} + U'_{\mu_1}(\mu_1; \mu_2)\,\dot{\mu}_1 + U'_{\mu_2}(\mu_1; \mu_2)\,\dot{\mu}_2
\end{aligned}$$

Nous savons d'après le chapitre 2 que :

$$Tr_q\left(L^2\right) = g(\mu_1; \mu_2) = \mu_1^2 \frac{q\mu_1 - q^{-1}\mu_2 - \hbar}{\mu_1 - \mu_2} + \mu_2^2 \frac{q\mu_2 - q^{-1}\mu_1 - \hbar}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Nous en déduisons donc que :

$$Tr_q\left(\dot{L}L + L\dot{L}\right) = g'_{\mu_1}(\mu_1;\mu_2)\,\dot{\mu}_1 + g'_{\mu_2}(\mu_1;\mu_2)\,\dot{\mu}_2.$$

Nous déduisons de l'équation précédente que $\dot{E} = 0$ si et seulement si :

$$fg'_{\mu_1} = 4U'_{\mu_1} \quad \text{et} \quad fg'_{\mu_2} = 4U'_{\mu_2}.$$

Nous savons d'après le théorème de Schwarz que $\left(U'_{\mu_1}\right)'_{\mu_2} = \left(U'_{\mu_2}\right)'_{\mu_1}$. Nous en déduisons donc que U existe si et seulement si :

$$\left(fg'_{\mu_1}\right)'_{\mu_2} = \left(fg'_{\mu_2}\right)'_{\mu_1} \Leftrightarrow f'_{\mu_2}g'_{\mu_1} + f\left(g'_{\mu_1}\right)'_{\mu_2} = f'_{\mu_1}g'_{\mu_2} + f\left(g'_{\mu_2}\right)'_{\mu_1}.$$

Ceci équivaut grâce au théorème de Schwarz à :

$$f'_{\mu_2}g'_{\mu_1} = f'_{\mu_1}g'_{\mu_2}.$$

Nous en déduisons finalement que U existe si et seulement si :

$$f(\mu_1;\mu_2) = \psi\left(g(\mu_1;\mu_2)\right).$$

Et nous achevons ainsi facilement la démonstration du théorème. ■

Dans le cas classique, nous connaissons d'autres intégrales de mouvement de l'équation (3.1.1). Il y a les trois composantes du vecteur $\overrightarrow{M} = \dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{r}$ où $\wedge$ symbolise le produit vectoriel. En supposant que $\overrightarrow{M}$ est vertical, nous pouvons démontrer que le point matériel se déplace dans le plan d'équation $z = 0$. Ainsi, en considérant les coordonnées polaires de notre point matériel $(r;\varphi)$ dans ce plan, la quantité $r^2\dot{\varphi}$ est une intégrale de mouvement.
Nous ne connaissons pas d'analogue non commutatif du vecteur $\overrightarrow{M}$, néanmoins, nous allons proposer un analogue de la dernière intégrale de mouvement.

Théorème :

Dans les deux cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$ et $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, la quantité ci-dessous est une intégrale de mouvement :

$$G = \left(Tr_q\left(\dot{L}^2\right)\right)\left(Tr_q\left(L^2\right)\right) - \frac{\left(Tr_q\left(L\dot{L} + \dot{L}L\right)\right)^2}{4}.$$

Preuve :

Dérivons G :

$$\begin{aligned}\dot{G} =& Tr_q\left(\ddot{L}\dot{L} + \dot{L}\ddot{L}\right)Tr_q\left(L^2\right) + Tr_q\left(\dot{L}^2\right)Tr_q\left(L\dot{L} + \dot{L}L\right)\\ &- \frac{1}{2}Tr_q\left(L\dot{L} + \dot{L}L\right)\left(Tr_q\left(2\dot{L}\dot{L}\right) + Tr_q\left(\ddot{L}L + L\ddot{L}\right)\right)\end{aligned}$$

Nous démontrons alors facilement grâce à l'équation (3.1.2) ou (3.1.3) que $\dot{G} = 0$. ■

Il nous reste néanmoins à vérifier que G est effectivement une généralisation de l'intégrale de mouvement classique $r^2\dot{\varphi}$.

Proposition :

Considérons pour cela G dans le cas particulier où $\hbar = 0$ et $q = 1$. Nous supposons naturellement de plus que notre point matériel évolue dans le plan d'équation $z = 0$. Nous avons alors les égalités :

$$Tr_q\left(L^2\right) = 2r^2; \quad Tr_q\left(\dot{L}^2\right) = 2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right); \quad Tr_q\left(L\dot{L} + \dot{L}L\right) = 4r\dot{r}.$$

Preuve :

$$
\begin{aligned}
Tr_q\left(L^2\right) &= x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2 = 2\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2r^2 \\
Tr_q\left(\dot{L}^2\right) &= 2\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) \\
&= 2\left(\left(\dot{r}cos\left(\varphi\right)-r\dot{\varphi}sin\left(\varphi\right)\right)^2+\left(\dot{r}sin\left(\varphi\right)+r\dot{\varphi}cos\left(\varphi\right)\right)^2\right) \\
&= 2\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right) \\
Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right) &= 4x\dot{x}+4y\dot{y} \\
&= 4rcos\left(\varphi\right)\left(\dot{r}cos\left(\varphi\right)-\dot{\varphi}sin\left(\varphi\right)\right)+4rsin\left(\varphi\right)\left(\dot{r}sin\left(\varphi\right)+\dot{\varphi}cos\left(\varphi\right)\right) \\
&= 4r\dot{r}\left(cos^2\left(\varphi\right)+sin^2\left(\varphi\right)\right) = 4r\dot{r} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons alors :

$$G = 2\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)2r^2 - \frac{16r^2\dot{r}^2}{4} = 4r^4\dot{\varphi}^2.$$

Par conséquent dans le cas commutatif, G est une constante revient à dire que $4r^4\dot{\varphi}^2$ est constante ce qui équivaut à $r^2\dot{\varphi}$ est constante si nous passons à la racine.
Nous retrouvons donc bien notre intégrale de mouvement classique.

Considérons à nouveau la généralisation non commutative dans le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$.
G étant une constante, nous avons l'égalité :

$$Tr_q\left(\dot{L}^2\right) = \frac{G}{Tr_q\left(L^2\right)} + \frac{\left(Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right)\right)^2}{4Tr_q\left(L^2\right)}.$$

Mais alors, si nous prenons en compte l'énergie E :

$$E = \frac{G}{4Tr_q\left(L^2\right)} + \frac{\left(Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right)\right)^2}{16Tr_q\left(L^2\right)} + \frac{F\left(Tr_q\left(L^2\right)\right)}{4}.$$

En posant $y = Tr_q\left(L^2\right)$, alors $\dot{y} = Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right)$ nous obtenons une équation différentielle en y, à savoir :

$$4E = \frac{G+\frac{\dot{y}^2}{4}}{y} + F\left(y\right). \tag{3.1.4}$$

De la même manière que dans le cas classique, nous pouvons résoudre cette équation et ainsi calculer $y\left(t\right)$. Ensuite en déterminant $\frac{G}{y^2}$, nous trouvons un analogue non commutatif à $\dot{\varphi}^2$.

3.1.2 Deux cas particuliers de modèles non commutatifs

Nous allons étudier dans ce paragraphe deux cas particuliers importants de modèles non commutatifs. Le premier est une version non commutative du modèle de Kepler. Dans le cas classique, il est défini grâce à l'équation (3.1.2) avec $f\left(r\right) = \frac{k}{r^3}$. Aussi $U\left(r\right) = \frac{-k}{r}$. Nous connaissons dans ce cas précis, d'autres intégrales de mouvement spécifiques à ces dynamiques, à savoir les composantes du vecteur de Runge-Lenz (parfois appelé vecteur de Laplace-Runge-Lenz) :

$$\overrightarrow{K} = \dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{M} - \overrightarrow{r}U\left(r\right) = \dot{\overrightarrow{r}} \wedge \left(\dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{r}\right) - \overrightarrow{r}U\left(r\right).$$

Bien que nous ne connaissions pas d'analogue non commutatif au vecteur $\overrightarrow{M}$, nous allons pouvoir déterminer un analogue non commutatif au vecteur $\overrightarrow{K}$, et cela grâce à la formule suivante :

$$\overrightarrow{x} \wedge \left(\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{z}\right) = \overrightarrow{y}\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{z}\right) - \overrightarrow{z}\left(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}\right).$$

Nous pouvons alors réécrire la définition du vecteur de Runge-Lenz ainsi :

$$\overrightarrow{K} = \dot{\overrightarrow{r}} \left(\dot{\overrightarrow{r}} . \overrightarrow{r} \right) - \overrightarrow{r} \left(\dot{\overrightarrow{r}} . \dot{\overrightarrow{r}} \right) - \overrightarrow{r} U \left(r \right).$$

Nous en arrivons à notre analogue non commutatif du vecteur de Runge-Lenz, en réécrivant cette formule avec des matrices et en la généralisant avec l'algèbre mREA $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$:

Théorème :

La matrice (dite de Runge-Lenz) :

$$K = \frac{\dot{L} Tr_q \left(\dot{L} L + L \dot{L} \right)}{4} - \frac{L Tr_q \left(\dot{L}^2 \right)}{2} - L U \left(\rho \right) \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt{\frac{Tr_q \left(L^2 \right)}{2}}$$

est une intégrale de mouvement des équations (3.1.2) si $U\left(\rho\right) = -\frac{k}{\rho}$ et $f\left(\rho\right) = \frac{k}{\rho^3}$ avec $k \in \mathbb{K}$ un nombre fixé.

Preuve :

Dérivons la matrice K :

$$\begin{aligned}
\dot{K} = &- \frac{f\left(\rho\right) L Tr_q \left(\dot{L} L + L \dot{L} \right)}{4} + \frac{\dot{L} Tr_q \left(\dot{L}^2 \right)}{2} - \frac{f\left(\rho\right) \dot{L} Tr_q \left(L^2 \right)}{2} - \frac{\dot{L} Tr_q \left(\dot{L}^2 \right)}{2} \\
&+ \frac{f\left(\rho\right) L Tr_q \left(\dot{L} L + L \dot{L} \right)}{2} - \dot{L} U\left(\rho\right) - \frac{L U'\left(\rho\right) Tr_q \left(\dot{L} L + L \dot{L} \right)}{4\rho} \\
= &- \rho^2 f\left(\rho\right) \dot{L} - U\left(\rho\right) \dot{L} \\
= &- \dot{L} \left(U\left(\rho\right) + \rho^2 f\left(\rho\right) \right) = 0
\end{aligned}$$

car $f\left(\rho\right) = \frac{k}{\rho^3}$ et $U\left(\rho\right) = \frac{-k}{\rho}$. ■

Considérons le cas $\mathcal{L}_{\hbar,q}\left(2\right)$ en posant $\psi = 0$ (nous choisissons $F = 0$ comme primitive de ψ). Dans ce cas précis, les dynamiques sur mREA sont modélisées par l'équation $\ddot{L} = 0$. Ce qui implique l'équation $Tr_q\left(\ddot{L}\right) = 0$. Autrement dit, $Tr_q\left(L\right)$ est une fonction affine en t :
$Tr_q\left(L\right) = \alpha_1 t + \alpha_2$. Considérons alors l'équation (3.1.4). Sachant que $F\left(y\right) = 0$, nous avons :

$$\dot{y} = \sqrt{16Ey - 4G}$$

Or sachant que $\int \frac{\dot{y}}{\sqrt{\alpha y + \beta}} dt = \gamma \sqrt{\alpha y + \beta} = \delta t + \omega$, toute solution de l'équation précédente est un polynôme de degré 2 en t :

$$y = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Nous pouvons naturellement exprimer les coefficient de notre trinôme en fonction des quantités E et G, mais nous n'en avons pas besoin.
Nous avons établi dans le chapitre précédent l'expression de la trace quantique d'une puissance de L en fonction de ses racines. Nous en déduisons le système d'équation :

$$\begin{cases} q\left(\mu_1 + \mu_2\right) - \hbar = \alpha_1 t + \alpha_2 \\ q\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) + \zeta \mu_1 \mu_2 - \hbar\left(\mu_1 + \mu_2 + 2\right) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0 \end{cases}$$

Nous résolvons facilement ce système, ce qui nous permet de déterminer une expression des racines μ_1 et μ_2. La voici :

$$\mu_{1,2} = \frac{q^{-1}\left(\alpha_1 t + \alpha_2 t + \hbar\right) \pm \sqrt{A(t)}}{2}$$

où $A(t)$ est un trinôme en t.

Le lemme suivant se vérifie facilement :

Lemme :

Pour tout trinôme $A(t)$, le polynôme $\dot{A}^2 - 2A\ddot{A}$ est constant.
(Cette constante étant égale au discriminant du polynôme $A(t)$.)

Grâce à ce lemme, nous démontrons le théorème :

Théorème :

Les valeurs propres de L vérifient le système d'équations de Calogero-Moser :

$$\ddot{\mu}_1 = \frac{Q}{(\mu_2 - \mu_1)^3}, \quad \ddot{\mu}_2 = \frac{-Q}{(\mu_2 - \mu_1)^3} \quad Q \in \mathbb{K}.$$

Preuve :

$$\mu_{1,2} = \frac{q^{-1}(\alpha_1 t + \alpha_2 t + \hbar) \pm \sqrt{A(t)}}{2}.$$

Nous en déduisons que :

$$\dot{\mu}_{1,2} = \mathcal{C}^{ste} \pm \frac{1}{4}\dot{A}(t)\,(A(t))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_{1,2} &= \mathcal{C}^{ste} \pm \frac{1}{4}\dot{A}(t)\,(A(t))^{-\frac{1}{2}} \\
\ddot{\mu}_{1,2} &= \mp\frac{1}{8}\dot{A}^2(t)\,(A(t))^{-\frac{3}{2}} \pm \frac{1}{4}\ddot{A}(t)\,(A(t))^{-\frac{1}{2}} \\
&= \pm\frac{1}{8}\,(A(t))^{-\frac{3}{2}}\left(-\dot{A}^2(t) + 2\ddot{A}A(t)\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien :

$$\ddot{\mu}_{1,2} = \frac{\pm Q}{(\mu_1 - \mu_2)^3} \ \text{ avec } \ Q = -\frac{1}{8}\left(\dot{A}^2 - 2A\ddot{A}\right)(t) \in \mathbb{K}. \quad \blacksquare$$

Revenons au cas classique. En premier lieu, soulignons le fait que ce théorème est valable pour n'importe quel cas particulier de mREA (aussi bien $q = 1$ ou $\hbar = 0$ que les deux à la fois). Aussi, le cas classique est un cas particulier de notre résultat général. Deuxièmement, nous ne réduisons pas notre matrice L à une matrice diagonale grâce à une matrice de passage (qui n'existe en général pas). Cela ne nous empêche pas d'arriver à un résultat très similaire au cas classique (cf. [DMV]).

3.1.3 Modèles non commutatifs dans un espace temps doté d'une métrique admettant une symétrie sphérique

Nous allons introduire dans ce paragraphe des analogues non commutatifs de dynamiques dans un espace temps courbé sachant que sa métrique admet une symétrie sphérique. Plus précisément, nous raisonnons avec la métrique :

$$ds^2 = g_0(r)\,dx_0^2 - g_1(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

où $x_0 = ct$, t étant la variable temps, c étant la vitesse de la lumière, g_0, g_1 sont des fonctions dont la variable radiale est $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ parfaitement définies et lisses pour $r > r_0 \geq 0$.
De plus, $d\Omega^2 = cos^2(\theta)\,d\varphi^2 + d\theta^2$ est la forme d'aire sur la sphère unité, sachant que nous utilisons les coordonnées sphériques usuelles $(r;\theta;\varphi)$ qui vérifient les égalités :

$$x = x_1 = rcos(\theta)\,cos(\varphi), \quad y = x_2 = rcos(\theta)\,sin(\varphi), \quad z = x_3 = rsin(\theta).$$

Remarque :

Un cas particulier de notre métrique définie de manière générale est la métrique de Schwarzschild qui est solution de l'équation d'Einstein dans le vide. Voici l'expression de cette métrique :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dx_0^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Dans ce cas précis nous avons $g_0(r) = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$ et $g_1(r) = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r^2}}$ qui sont lisses pour $r > r_0 \geq 0$ avec $r_0 = \sqrt{2GM}$.
Nous allons exprimer notre métrique avec des coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$r^2 d\Omega^2 + dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad dr = \frac{xdx + ydy + zdz}{r}.$$

Nous avons donc :

$$ds^2 = g(r)dx_0^2 - f(r)\left(xdx + ydy + zdz\right)^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

avec $g(r) = g_0(r)$, $f(r) = \frac{g_1(r)-1}{r^2}$.
Nous en déduisons la proposition suivante en considérant l'action $\int ds^2$:

Proposition :

Les équations d'Euler-Lagrange prennent la forme :

$$\frac{d}{d\tau}\left(g(r)\dot{x}_0\right) = 0$$

$$\ddot{x}_i + \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{r}\left(\sum_j x_j \dot{x}_j\right)^2 x_i + f(r)\left(\sum_j \dot{x}_j^2\right) x_i + f(r)\left(\sum_j x_j \ddot{x}_j\right) x_i + \frac{1}{2}\frac{g'(r)}{r} x_i \dot{x}_0^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

sachant que τ est le temps propre et les points symbolisent la dérivation par rapport à cette variable.

Preuve :

Le lagrangien que nous considérons est le suivant :

$$L\left(x_i; \dot{x}_i; \tau\right) = g(r)\dot{x}_0^2 - f(r)\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)^2 - \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Nous avons alors l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_0}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(2g(r)\dot{x}_0\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(g(r)\dot{x}_0\right) = 0\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow &\frac{d}{d\tau}\left(0 - 2f(r)\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)x - 2\dot{x}\right) - \frac{g'(r)}{r} x\dot{x}_0^2 + \frac{f'(r)}{r}\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)^2 x \\ &+ 2f(r)\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)\dot{x} + 0 = 0 \\ \Leftrightarrow &- 2\frac{f'(r)}{r}\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)^2 x - 2f(r)x\left(\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \left(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}\right)\right) \\ &- 2f(r)\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)\dot{x} - 2\ddot{x} - \frac{g'(r)}{r} x\dot{x}_0^2 + \frac{f'(r)}{r}\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)^2 x \\ &+ 2f(r)\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)\dot{x} = 0 \\ \Leftrightarrow &\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{r}\left(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}\right)^2 x + f(r)\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)x + f(r)\left(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}\right)x \\ &+ \frac{1}{2}\frac{g'(r)}{r} x\dot{x}_0^2 = 0\end{aligned}$$

Nous en déduisons par symétrie pour x, y et z en notant $x_1 = x$, $y = x_2$ et $z = x_3$ les trois formules :

$$\ddot{x}_i+\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{r}\left(\sum_j x_j\dot{x}_j\right)^2 x_i+f(r)\left(\sum_j \dot{x}_j^2\right)x_i+f(r)\left(\sum_j x_j\ddot{x}_j\right)x_i+\frac{1}{2}\frac{g'(r)}{r}x_i\dot{x}_0^2=0,\quad i=1,2,3.\quad\blacksquare$$

Nous déduisons facilement de la première équation que $g(r)\dot{x}_0 = C$. Cette équation nous permet de relier le temps t, le temps propres τ et la composante radiale r. Nous déterminons $\dot{x}_0$ et nous l'injectons dans la seconde équation de notre proposition et nous obtenons la formule :

$$\ddot{x}_i+\left(h(r)\left(\sum_j x_j\dot{x}_j\right)^2+f(r)\left(\sum_j x_j\dot{x}_j\right)^{\cdot}+k(r)\right)x_i=0,\quad i=1,2,3$$

avec :

$$h(r)=\frac{f'(r)}{2r},\quad k(r)=\frac{g'(r)C^2}{2rg^2(r)}.$$

Nous avons démontré la proposition :

Proposition :

Le système différentiel décrivant notre dynamique est :

$$\ddot{L}=-\left(h(r)\frac{\left((r^2)^{\cdot}\right)^2}{4}+f(r)\frac{(r^2)^{\cdot\cdot}}{2}+k(r)\right)L.$$

Jusqu'à maintenant les coefficients de L sont commutatifs. Néanmoins, nous pouvons facilement généraliser l'équation précédente au cas non commutatifs. En nous plaçant dans le cadre de l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, nous avons alors l'équation :

$$\ddot{L}=-\left(h(\rho)\frac{\left((\rho^2)^{\cdot}\right)^2}{4}+f(\rho)\frac{(\rho^2)^{\cdot\cdot}}{2}+k(\rho)\right)L. \tag{3.1.5}$$

Proposition :

Le système différentiel (3.1.5) admet pour intégrale de mouvement :

$$G=\left(Tr_q\left(\dot{L}^2\right)\right)\left(Tr_q\left(L^2\right)\right)-\frac{\left(Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right)\right)^2}{4}.$$

Preuve :

Dérivons G :

$$\begin{aligned}\dot{G}=&Tr_q\left(\ddot{L}\dot{L}+\dot{L}\ddot{L}\right)Tr_q\left(L^2\right)+Tr_q\left(\dot{L}^2\right)Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right)\\&-\frac{1}{2}Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right)\left(Tr_q\left(2\dot{L}\dot{L}\right)+Tr_q\left(\ddot{L}L+L\ddot{L}\right)\right)\end{aligned}$$

Nous démontrons alors facilement grâce à l'équation (3.1.5) que $\dot{G}=0$. $\blacksquare$

Conjecture :

La quantité :

$$E=g(\rho)\dot{x}_0^2-f(\rho)\frac{\left(Tr_q\left(L\dot{L}+\dot{L}L\right)\right)^2}{16}-\frac{Tr_q\dot{L}^2}{2}$$

est une intégrale de mouvement pour l'équation (3.1.5).

3.2 Champs de vecteurs tressés

3.2.1 L'ensemble des champs de vecteurs sur la sphère classique

Nous travaillons sur la sphère S^2 pouvant être vu comme une sous-variété affine algébrique de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

r étant le rayon de notre sphère. Nous définissons également l'ensemble des polynômes sur S^2 comme étant :

$$\mathbb{R}\left[S^2\right] = \mathbb{R}\left[\mathbb{R}^3\right] / \left\langle x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \right\rangle .$$

Toutes les fonctions que nous utiliserons par la suite seront implicitement des éléments de cet ensemble.

Par la suite nous regardons la complexification $S^2_{\mathbb{C}}$ de cette sphère et les anneaux des fonctions polynomiales :

$$\mathbb{C}\left[S^2_{\mathbb{C}}\right] = \mathbb{C}\left[\mathbb{C}^3\right] / \left\langle x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \right\rangle .$$

Nous définissons ensuite trois champs de vecteurs X, Y et Z sur S^2 entièrement défini par les actions de ces champs sur les trois fonction x, y et z de telles sorte que X, Y, Z engendrent l'algèbre de Lie $so\,(3)$.

Notamment nous posons :

$$\begin{array}{ccc} X \triangleright x = 0 & Y \triangleright x = -z & Z \triangleright x = y \\ X \triangleright y = z & Y \triangleright y = 0 & Z \triangleright y = -x \\ X \triangleright z = -y & Y \triangleright z = x & Z \triangleright z = 0 \end{array}$$

Nous en déduisons alors l'expression des trois champs de vecteurs X, Y et Z sur S^2 :

$$\begin{cases} X = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z} \\ Y = x\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial x} \\ Z = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Nous vérifions facilement que nous avons bien :

$$X\left(x^2 + y^2 + z^2 - r^2\right) = Y\left(x^2 + y^2 + z^2 - r^2\right) = Z\left(x^2 + y^2 + z^2 - r^2\right) = 0.$$

Nous en déduisons donc que les opérateurs X, Y, Z sont bien définis sur l'algèbre $\mathbb{K}\left[S^2\right]$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Les trois champs de vecteurs X, Y et Z sont appelés rotations infinitésimales autour de respectivement l'axe (Ox), (Oy) et (Oz).

Nous constatons l'égalité :

$$xX + yY + zZ = 0.$$

Si nous notons $\mathcal{A} = \mathbb{K}\left[S^2\right]$, nous pouvons considérer l'ensemble des champs de vecteurs sur S^2 que nous notons $Vect\left(S^2\right)$ comme étant un quotient de $\mathcal{A}$ modules. Il est énoncé comme suit :

$$Vect\left(S^2\right) = \{\alpha X + \beta Y + \gamma Z\} / \langle xX + yY + zZ \rangle$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ et $\langle xX + yY + zZ \rangle = \{\varphi\,(xX + yY + zZ)\,|\varphi \in \mathcal{A}\}$ est le $\mathcal{A}$-module engendré par $xX + yY + zZ$.

Nous avons donc :

$$Vect\left(S^2\right) \cong \mathcal{A}^{\oplus 3}/M$$

où M est $\mathcal{A}$-module engendré par $xX + yY + zZ$. $Vect\left(S^2\right)$ est donc un $\mathcal{A}$-module à gauche.

$Vect\left(S^2\right)$ **est projectif**

Il est connu que quel que soit la variété algébrique affine régulière S, $Vect\left(S\right)$ est un $\mathbb{K}\left[S\right]$-module projectif.

Ici nous avons une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules. Elle est formulée comme suit :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{A}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{A}^{\oplus 3}/M \longrightarrow 0.$$

Pour montrer que le $\mathcal{A}$-module $Vect\left(S^2\right)$ est projectif, il nous suffit de démontrer que le projecteur $\mathcal{A}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{A}^{\oplus 3}/M$ admet une section globale.

Pour cela, nous observons que :

$$\mathcal{A}^{\oplus 3} = M \oplus \overline{M}$$

avec $M = Im(e)$ et $\overline{M} = Im(Id - e)$, e étant un projecteur :

$$e : \mathcal{A}^{\oplus 3} \longrightarrow M.$$

En fait, il suffit de considérer le projecteur e avec :

$$e\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \frac{1}{r^2}\left(\begin{array}{ccc}\alpha & \beta & \gamma\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}x^2 & xy & xz\\ xy & y^2 & xz\\ xz & yz & z^2\end{array}\right)$$

Nous utilisons le fait que :

$$\left(\begin{array}{ccc}x^2 & xy & xz\\ xy & y^2 & xz\\ xz & yz & z^2\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}x & y & z\end{array}\right)$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^4}\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}x & y & z\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}x & y & z\end{array}\right) &= \frac{1}{r^2}\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right)\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)\left(\begin{array}{ccc}x & y & z\end{array}\right)\\ &= \frac{1}{r^2}\left(\begin{array}{c}x\\ y\\ z\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc}x & y & z\end{array}\right)\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $e^2 = e$ ce qui prouve que e est un projecteur.

Il nous reste à démontrer que e est surjectif sur M. Pour cela il suffit de voir que :

$$e\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = \left(\alpha x + \beta y + \gamma z\right)\left(x,y,z\right).$$

Aussi, pour n'importe quelle fonction $\phi \in \mathbb{K}\left[S^2\right]$, nous pouvons considérer l'antécédent par e de $\phi\left(x,y,z\right)$ suivant :

$$\left(\alpha;\beta;\gamma\right) = \frac{1}{r^2}\left(\phi x;\phi y;\phi z\right).$$

Ceci démontre que e est surjectif.

Nous avons donc démontré que $Vect\left(S^2\right)$ est un module projectif.
Il n'est pas possible d'établir une déformation satisfaisante de S^2 tout en restant dans le corps $\mathbb{R}$. Aussi préférons-nous travailler sur l'hyperboloïde.

3.2.2 L'ensemble des champs de vecteurs sur l'hyperboloïde classique

Définition :

Nous travaillons sur l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ pouvant être vue comme une sous-variété de $\mathbb{V} = \langle u; v; w\rangle \cong \mathbb{R}^3$ définie par l'équation :

$$v^2 + 4uw = \rho^2$$

ρ étant une constante non nulle (notons que si $\rho \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}$ est une hyperboloïde à une nappe et si $\rho \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ est une hyperboloïde à deux nappes). Nous définissons également l'ensemble des polynômes sur $\mathcal{H}$ comme étant :

$$\mathbb{R}\left[\mathcal{H}\right] = \mathbb{R}\left[\mathbb{R}^3\right] / \left\langle v^2 + 4uw - \rho^2\right\rangle.$$

Toutes les fonctions que nous utiliserons par la suite seront implicitement des éléments de cet ensemble.

Par la suite nous regardons la complexification $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ de cette hyperboloïde et les anneaux des fonctions polynomiales :

$$\mathbb{C}\left[\mathcal{H}_{\mathbb{C}}\right] = \mathbb{C}\left[\mathbb{C}^3\right] / \left\langle v^2 + 4uw - \rho^2\right\rangle.$$

Nous définissons ensuite trois champs de vecteurs U, V et W sur $\mathcal{H}$ entièrement définis par les actions de ces champs sur les trois fonctions u, v et w. Nous voulons en effet que U, V, W engendrent l'algèbre de Lie $sl(2)$.

Nous posons :

$$\begin{array}{ccc} U \triangleright u = 0 & V \triangleright u = 2u & W \triangleright u = -v \\ U \triangleright v = -2u & V \triangleright v = 0 & W \triangleright v = 2w \\ U \triangleright w = v & V \triangleright w = -2w & W \triangleright w = 0 \end{array}$$

Nous en déduisons alors l'expression des trois champs de vecteurs U, V et W sur $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} U = -2u\dfrac{\partial}{\partial v} + v\dfrac{\partial}{\partial w} \\ V = 2u\dfrac{\partial}{\partial u} - 2w\dfrac{\partial}{\partial w} \\ W = -v\dfrac{\partial}{\partial u} + 2w\dfrac{\partial}{\partial v} \end{cases}$$

Nous vérifions facilement que nous avons bien :

$$U\left(v^2 + 4uw - \rho^2\right) = V\left(v^2 + 4uw - \rho^2\right) = W\left(v^2 + 4uw - \rho^2\right) = 0.$$

Nous en déduisons donc que les opérateurs U, V, W sont bien définis sur l'algèbre $\mathbb{K}\left[\mathcal{H}\right]$.

Les trois champs de vecteurs U, V et W sont appelés rotations hyperboliques infinitésimales.

Nous constatons l'égalité :

$$2uW + vV + 2wU = 0.$$

Si nous notons $\mathcal{A} = \mathbb{K}\left[\mathcal{H}\right]$, nous avons :

$$Vect\,(\mathcal{H}) = \{\alpha U + \beta V + \gamma W\} \,/\, \langle 2uW + vV + 2wU \rangle$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$. Par conséquent :

$$Vect\,(\mathcal{H}) \cong \mathcal{A}^{\oplus 3}/M$$

où M est le $\mathcal{A}$-module engendré par $2uW + vV + 2wU$. $Vect\,(\mathcal{H})$ est donc un $\mathcal{A}$-module à gauche.

$Vect\,(\mathcal{H})$ **est projectif**

Ici nous avons une suite exacte de $\mathcal{A}$-modules. Elle est formulée comme suit :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathcal{A}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{A}^{\oplus 3}/M \longrightarrow 0.$$

Pour montrer que le $\mathcal{A}$-module $Vect\,(S^2)$ est projectif, il nous suffit de démontrer que le projecteur $\mathcal{A}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{A}^{\oplus 3}/M$ admet une section.

Pour cela, nous observons que :

$$\mathcal{A}^{\oplus 3} = M \oplus \overline{M}$$

avec $M = Im(e)$ et $\overline{M} = Im(Id - e)$, e étant un projecteur :

$$e : \mathcal{A}^{\oplus 3} \longrightarrow M.$$

En fait, il suffit de considérer le projecteur e avec :

$$e\,(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2uw & uv & 2u^2 \\ 2vw & v^2 & 2uv \\ 2w^2 & vw & 2uw \end{pmatrix}$$

Nous utilisons le fait que :

$$\begin{pmatrix} 2uw & uv & 2u^2 \\ 2vw & v^2 & 2uv \\ 2w^2 & vw & 2uw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2w & v & 2u \end{pmatrix}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^4} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2w & v & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2w & v & 2u \end{pmatrix} &= \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \left(\frac{v^2 + 4uw}{\rho^2} \right) \begin{pmatrix} 2w & v & 2u \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2w & v & 2u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $e^2 = e$ ce qui prouve que e est un projecteur.

Il nous reste à démontrer que e est surjectif sur I. Pour cela il suffit de voir que :

$$e\,(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha u + \beta v + \gamma w)\,(2w, v, 2u)$$

Aussi, pour n'importe quelle fonction $\phi \in \mathbb{K}\,[\mathcal{H}]$, nous pouvons considérer l'antécédent par e de $\phi\,(2w, v, 2u)$ suivant :

$$(\alpha; \beta; \gamma) = \frac{1}{\rho^2}\,(\phi 2w; \phi v; \phi 2u)\,.$$

Ceci démontre que e est surjectif.

Nous avons donc démontré que $Vect\,(\mathcal{H})$ est un module projectif.

3.2.3 Analogue tressé de l'algèbre de Lie $sl(2)$

Nous voulons maintenant définir des analogues de champs de vecteurs sur notre hyperboloïde quantique.

Nous travaillons pour cela sur sur le $U_q(sl(2))$-module $\mathbb{V} = \langle u; v; w \rangle$.
Nous savons déjà que $\mathbb{V}^2$ admet une structure de $U_q(sl(2))$-module de dimension 9 telle que :

$$\mathbb{V}^2 = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$$

les différents espaces V_0, V_1 et V_2 ayant été décrits dans le chapitre précédent.

Définition :

Le crochet de Lie tressé de $sl(2)$ est l'opérateur :

$$[\ ,\ ]_q : \mathbb{V}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{V}$$

qui commute avec l'action de $U_q(sl(2))$.

Ce qui nous amène naturellement à la proposition suivante :

Proposition :

$\exists \tau \in \mathbb{K}$ tel que :

1. $[\ ,\ ]_q V_0 = [\ ,\ ]_q V_2 = 0$
2. $.[\ ,\ ]_q \left(q^{-2}uv - vu\right) = -\tau u$
   $.[\ ,\ ]_q \left(q^{-1}[2]_q (uw - wu) + \left(1 - q^{-2}\right) v^2\right) = \tau v$
   $.[\ ,\ ]_q \left(-q^{-2}vw + wv\right) = \tau w$

Par la suite, nous supposons que $\tau \neq 0$.

Proposition :

Nous en déduisons la table de commutation de $[\ ,\ ]_q$:

$$[u; u]_q = 0, \quad [u; v]_q = -q^2 M u, \quad [u; w]_q = \frac{q^3 M}{[2]_q} v$$

$$[v; u]_q = q^4 M u, \quad [v; v]_q = q^2\left(q^2 - 1\right) M v, \quad [v; w]_q = -q^2 M w$$

$$[w; u]_q = -\frac{q^3 M}{[2]_q} v, \quad [w; v]_q = q^4 M w, \quad [w; w]_q = 0$$

si nous notons $M = \left(1 + q^4\right)^{-1} \tau$.

Preuve :

Par définition :

$$\begin{aligned} [\ ,\ ]_q \left(u^2\right) = [\ ,\ ]_q \left(uv + q^{-2}vu\right) = [\ ,\ ]_q \left(q^2 uw + q^{-2}wu - v^2\right) &= 0 \\ [\ ,\ ]_q \left(vw + q^{-2}wv\right) = [\ ,\ ]_q \left(w^2\right) &= 0 \\ [\ ,\ ]_q \left(q^{-1}[2]_q uw + v^2 + q[2]_q wu\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$[\ ,\ ]_q \left(q^{-2}uv - vu\right) = -\tau u; \quad [\ ,\ ]_q \left(q^{-1}[2]_q (uw - wu) + \left(1 - q^{-2}\right) v^2\right) = \tau v; \quad [\ ,\ ]_q \left(-q^{-2}vw + wv\right) = \tau w$$

Il vient donc facilement :

$$[u;u]_q = [w;w]_q = 0.$$

Nous en déduisons aussi que :

$$[u;v]_q = -q^{-2}[v;u]_q \text{ et } q^{-2}[u;v]_q - [v;u]_q = -\tau u.$$

Et par conséquent :

$$\left(q^2+q^{-2}\right)[u;v]_q = -\tau u \Leftrightarrow [u;v]_q = -q^2 Mu \text{ et } [v;u]_q = -q^2[u;v]_q = q^4 Mu.$$

De même :

$$[v;w]_q = -q^{-2}[w;v]_q \text{ et } q^2[v;w]_q - [w;v]_q = -\tau w.$$

Donc :

$$\left(q^2+q^{-2}\right)[v;w]_q = -\tau w \Leftrightarrow [v;w]_q = -q^2 Mw \text{ et } [w;v]_q = -q^2[v;w]_q = q^4 Mw.$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned} q^{-1}[2]_q[u;w]_q + [v;v]_q + q[2]_q[w;u]_q &= 0 \\ q^2[u;w]_q + q^{-2}[w;u]_q - [v;v]_q &= 0 \end{aligned}$$

Si nous additionnons ces deux équations, nous obtenons l'équation :

$$\left(q^{-1}[2]_q + q^2\right))[u;w]_q = -\left(-q[2]_q + q^{-2}\right))[w;u]_q \Leftrightarrow \left(q^2+1+q^{-2}\right))[u;w]_q = -\left(q^2+1+q^{-2}\right)[w;u]_q.$$

Nous avons donc $[u;w]_q = -[w;u]_q$ et $[v;v]_q = \left(q^2-q^{-2}\right)[u;w]_q$.
Nous en déduisons alors l'équation :

$$2q^{-1}[2]_q[u;w]_q + \left(1-q^{-2}\right)\left(q^2-q^{-2}\right)[u;w]_q = \tau v.$$

Au final nous avons :

$$[u;w]_q = \frac{q^3 M}{[2]_q}v, \quad [w;u]_q = -\frac{q^3 M}{[2]_q}v, \quad [v;v]_q = q^2\left(q^2-1\right)Mv. \qquad \blacksquare$$

3.2.4 Définition des champs de vecteurs tressés sur l'hyperboloïde quantique

Nous considérons u, v, w comme étant les générateurs de l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$. Nous allons définir les q-analogues U^q, V^q, W^q des rotations hyperboliques infinitésimales U, V, W.

Définition :

Commençons par définir U^q, V^q, W^q sur $\mathbb{V}$.

$$\begin{array}{rccc} U^q: & \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ & z & \longmapsto & [u;z]_q \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} V^q: & \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ & z & \longmapsto & [v;z]_q \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} W^q: & \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ & z & \longmapsto & [w;z]_q \end{array}$$

Remarque :

Pour $q = 1$ et $\tau = 4$, nous retrouvons nos rotations hyperboliques infinitésimales classiques U, V, W.

Proposition :

Sur $\mathbb{V} \subset \mathcal{A}^c_{0,q}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$q^{-1}\left[2\right]_q uW^q + vV^q + q\left[2\right]_q wU^q = 0. \tag{3.2.1}$$

Preuve :

Il suffit de vérifier cette relation sur les éléments u, v, w de notre algèbre.

$$\begin{aligned}
& q^{-1}\left[2\right]_q uW^q(u) + vV^q(u) + q\left[2\right]_q wU^q(u) \\
=& -q^2\left[2\right]_q^{-1} Muv + q^4 Mvu \\
=& q^4 M\left(vu - q^{-2}uv\right) = 0 \\
& q^{-1}\left[2\right]_q uW^q(v) + vV^q(v) + q\left[2\right]_q wU^q(v) \\
=& q^{-1}\left[2\right]_q q^4 Muw + q^2\left(q^2-1\right)Mv^2 - q\left[2\right]_q q^2 Mwu \\
=& q^4 M\left(q^{-1}\left[2\right]_q (uw - wu) + \left(1-q^{-2}\right)v^2\right) = 0 \\
& q^{-1}\left[2\right]_q uW^q(w) + vV^q(w) + q\left[2\right]_q wU^q(w) \\
=& -q^2 Mvw + q^4 Mwv \\
=& q^4 M\left(-q^{-2}vw + wv\right) = 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Théorème :

Sur $\mathbb{V} \subset \mathcal{A}^c_{0,q}$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases}
q^{-2}U^qV^q - V^qU^q = -\kappa U^q \\
q^{-1}\left[2\right]_q\left(U^qW^q - W^qU^q\right) + \left(1-q^{-2}\right)V^{q2} = \kappa V^q \\
q^{-2}V^qW^q - W^qV^q = -\kappa W^q
\end{cases} \tag{3.2.2}$$

avec $\kappa = M\left(q^4 - q^2 + 1\right)$.

Preuve :

Commençons par démontrer l'égalité :

$$q^{-2}U^qV^q - V^qU^q = -\kappa U^q.$$

Il suffit de vérifier cette relation sur les éléments u, v, w de notre algèbre.

$$\begin{aligned}
\left(q^{-2}U^qV^q - V^qU^q\right)(u) &= 0 = -\kappa U^q(u) \\
\left(q^{-2}U^qV^q - V^qU^q\right)(v) &= \left(-q^2Mu\right)\left(M\left(q^2\left(1-q^{-2}\right) - q^4\right)\right) \\
&= U^q(v)M\left(q^2 - 1 - q^4\right) = -\kappa U^q(v) \\
\left(q^{-2}U^qV^q - V^qU^q\right)(w) &= \left(\left[2\right]_q^{-1} q^2 Mv\right)\left(M\left(-1 + q^2\left(1-q^2\right)\right)\right) \\
&= U^q(w)M\left(-1 + q^2 - q^4\right) = -\kappa U^q(w)
\end{aligned}$$

Nous démontrons maintenant l'égalité :

$$q^{-1}\left[2\right]_q\left(U^qW^q - W^qU^q\right) + \left(1-q^{-2}\right)V^{q2} = \kappa V^q.$$

Il suffit de vérifier cette relation sur les éléments u, v, w de notre algèbre.

$$\begin{aligned}
\left(q^{-1}[2]_q\left(U^qW^q-W^qU^q\right)+\left(1-q^{-2}\right)V^{q2}\right)(u) &= \left(q^4Mu\right)\left(M\left(1+\left(1-q^{-2}\right)q^4\right)\right)\\
&= V^q(u)M\left(1+q^4-q^2\right)=\kappa V^q(u)\\
\left(q^{-1}[2]_q\left(U^qW^q-W^qU^q\right)+\left(1-q^{-2}\right)V^{q2}\right)(v) &= \left(q^2\left(q^2-1\right)Mv\right)\left(M\left(q^2+\left(1-q^{-2}\right)q^2\left(q^2-1\right)\right)\right)\\
&= V^q(v)M\left(q^4-q^2+1\right)=\kappa V^q(u)\\
\left(q^{-1}[2]_q\left(U^qW^q-W^qU^q\right)+\left(1-q^{-2}\right)V^{q2}\right)(w) &= \left(-q^2Mw\right)\left(M\left(q^2q^2-\left(1-q^{-2}\right)q^2\right)\right)\\
&= V^q(u)M\left(q^4-q^2+1\right)=\kappa V^q(u)
\end{aligned}$$

Démontrons l'égalité :

$$q^{-2}V^qW^q-W^qV^q=-\kappa W^q.$$

Il suffit de vérifier cette relation sur les éléments u, v, w de notre algèbre.

$$\begin{aligned}
\left(q^{-2}V^qW^q-W^qV^q\right)(u) &= \left(-[2]_q^{-1}q^3Mv\right)\left(M\left(q^2\left(1-q^{-2}\right)-q^4\right)\right)\\
&= W^q(u)M\left(q^2-1-q^4\right)=-\kappa W^q(u)\\
\left(q^{-2}V^qW^q-W^qV^q\right)(v) &= \left(q^4Mw\right)\left(M\left(-q^4q^{-4}+q^2\left(q^2-1\right)\right)\right)\\
&= W^q(v)M\left(-1+q^4-q^2\right)=-\kappa W^q(v)\\
\left(q^{-2}V^qW^q-W^qV^q\right)(w) &= 0=-\kappa W^q(w) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque 1 :

Considérons l'algèbre enveloppante $\langle U^q; V^q; W^q\rangle$ définie par les relations :

$$\begin{cases}
q^2V^qU^q-U^qV^q=\hbar U^q\\
q[2]_q\left(U^qW^q-W^qU^q\right)+q\zeta V^{q2}=\hbar V^q\\
q^2W^qV^q-V^qW^q=\hbar W^q
\end{cases}$$

avec $\hbar\in\mathbb{K}$ un paramètre formel. (Nous reconnaissons naturellement les relations définissant l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$.
Notre crochet de Lie tressé $[\ ;\ ]_q$ définit une représentation de cette algèbre enveloppante si et seulement si :

$$\tau=\frac{q^{-2}\left(1+q^4\right)\hbar}{q^4-q^2+1}.$$

Remarque 2 :
Nous considérons les représentations de $H, X, Y\in U_q(sl(2))$ sur $\mathbb{V}$:

$$H=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0&-q^\theta[2]_q&0\\0&0&q^{1-\theta}\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&0&0\\-q^{-\theta}&0&0\\0&q^{\theta-1}[2]_q&0\end{pmatrix}$$

Considérons maintenant le plongement de Lyubashenko-Sudbery du chapitre 2. Nous rappelons que X_+, X_0 et X_- sont fonctions de H, X, Y par les formules :

$$\begin{cases}
X_+=q^\theta q^{-\theta H}X\\
X_0=q^2XY-YX\\
X_-=q^{\theta+1}q^{(\theta-1)H}Y
\end{cases}$$

Cela nous permet de trouver les images des éléments X_+, X_0, X_- dans l'espace $End(\mathbb{V})$. Connaissant les images des opérateurs U^q, V^q, W^q dans cet espace, nous pouvons établir les relations entre les opérateurs U^q, V^q, W^q et les opérateurs X_+, X_0, X_- dans $End\,(\mathbb{V})$:

$$\begin{cases} U^q = \dfrac{q^2 M}{[2]_q} X_+ \\ V^q = \dfrac{q^2 M}{[2]_q} X_0 \\ W^q = \dfrac{q^2 M}{[2]_q} X_- \end{cases}$$

Sachant qu'il ne nous faut étendre U^q, V^q, W^q de $\mathbb{V}$ à $\mathcal{A}^c_{0,q}$, la tentation d'utiliser un coproduit de notre groupe quantique $U_q(sl(2))$ en s'appuyant sur le plongement de Lyubashenko-Sudbery est forte. Néanmoins, le prolongement que nous déterminons ainsi n'est pas satisfaisant car il ne vérifie pas la relation (3.2.1).

Théorème :

Nous pouvons étendre U^q, V^q et W^q de $\mathbb{V}$ à $\mathcal{A}^c_{0,q}$ en préservant les relations (3.2.1) et (3.2.2).

Preuve :

Nous allons nous inspirer de la méthode de [A] tout en la modifiant légèrement.
Notons V_k les sous-$U_q(sl(2))$-modules de dimension $2k+1$ engendrés par le vecteur de plus haut poids u^k, autrement dit :

$$V_k = \left\langle u^k; Y\left(u^k\right); Y^2\left(u^k\right); \ldots; Y^{2k}\left(u^k\right)\right\rangle.$$

Il existe un projecteur $U_q(sl(2))$-covariant $P_k : \mathbb{V}^{\otimes k} \longrightarrow V_k$. On peut le réaliser en tant que polynôme de :

$$R_{12} = R \otimes I_{2k-1},\ R_{23} = I \otimes R \otimes I_{2k-2}, \ldots, R_{2k2k+1} = I_{2k-1} \otimes R$$

R étant le produit de la R-matrice quantique universelle représentée dans l'espace $\mathbb{V}^2$ et de la volte classique. Une manière de construire ces opérateurs P_k est décrite dans [OP]. Nous observons ainsi que les tressages R sont du type Birman-Murakami-Wenzl et que donc les résultats de cet article peuvent être appliqués.
Aussi les extension de U^q, V^q, W^q à la composante V_k (que nous notons U^q_k, V^q_k, W^q_k) respectivement sont définies ainsi :

$$U^q_k = \tau_k P_k\left(U^q \otimes I_{2k}\right), \quad V^q_k = \tau_k P_k\left(V^q \otimes I_{2k}\right), \quad W^q_k = \tau_k P_k\left(W^q \otimes I_{2k}\right)$$

le facteur τ_k étant déterminé par le fait que les opérateurs U^q_k, V^q_k, W^q_k satisfont les relations (3.2.2).
Ainsi, nous avons parfaitement défini les opérateurs U^q, V^q, W^q sur toutes les composantes V_k.
Observons alors que pour q générique nous avons $\mathcal{A}^c_{0,q} \cong (\oplus V_k) \otimes Z$ avec Z étant le centre de notre algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$.
Nous posons alors :

$$U^q\left(v_k \otimes z\right) = U^q_k\left(v_k\right) \otimes z; \quad V^q\left(v_k \otimes z\right) = V^q_k\left(v_k\right) \otimes z; \quad W^q\left(v_k \otimes z\right) = W^q_k\left(v_k\right) \otimes z \ \text{ avec } \ v \in V_k,\ z \in Z.$$

Nous définissons ainsi les opérateurs $U^q; V^q; W^q$ sur toute l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$.
Il ne nous reste plus qu'à vérifier que la relation (3.2.1) reste vraie sur toute l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$.
Soient $v_k \in V_k$ et $z \in Z$:

$$\begin{aligned} &\left(q^{-1}[2]_q u W^q + v V^q + q[2]_q w U^q\right)\left(v_k \otimes z\right) \\ =&\tau_k\left(q^{-1}[2]_q u P_k\left(W^q \otimes I_{2k}\right) + v P_k\left(V^q \otimes I_{2k}\right) + q[2]_q w P_k\left(U^q \otimes I_{2k}\right)\right)\left(v_k\right) \otimes z. \end{aligned}$$

Il nous faut démontrer que cet élément vaut 0 dans l'algèbre symétrique correspondant au tressage de Birman-Murakami-Wenzl. Notons alors $\mathcal{P}_{k+1} : \mathbb{V}^{\otimes k} \longrightarrow Sym^k_q(V)$ la projection sur la composante

q-symétrique.
Nous considérons donc l'élément :

$$\tau_k \mathcal{P}_{k+1} P_k \left(\left(q^{-1} [2]_q uW^q + vV^q + q [2]_q wU^q \right) \otimes I_{2k} \right) (v_k) \otimes z. \tag{3.2.3}$$

En sachant que $\mathcal{P}_{k+1} P_k = P_k \mathcal{P}_{k+1}$, nous pouvons conclure que l'élément (3.2.3) vaut 0 car l'élément :

$$\left(q^{-1} [2]_q uW^q + vV^q + q [2]_q wU^q \right) (v_k) \otimes z$$

appartient à $\widetilde{V}_2 \otimes \mathbb{V}^{\otimes (k-2)} \otimes Z$ où $\widetilde{V}_2$ est engendré par les éléments $q^2 vu - uv$, $[2]_q (uw - wu) + \zeta v^2$ et $q^2 wv - vw$.
Nous en déduisons donc que (3.2.1) est vérifiée sur toute l'algèbre $\mathcal{A}^c_{0,q}$. ■

Remarque :

Nous n'avons pas utilisé de R-forme tressée de la règle de Leibniz pour construire le prolongement des opérateurs U^q, V^q, W^q de $\mathbb{V}$ à $\mathcal{A}^c_{0,q}$ car la vérification de la relation (3.2.1) devient beaucoup plus compliquée.

3.2.5 Système quasi-sphérique des champs de vecteurs

Notre objectif dans ce paragraphe est de définir une généralisation acceptable des dérivés partielles sur un q-analogue de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Dérivées partielles sur $\mathbb{R}^3$ via les champs de vecteurs tangents sur $so(3)^*$

Nous travaillons pour commencer dans l'espace $\mathbb{R}^3$ en adoptant le point de vu $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}\left[so\left(3\right)^*\right]$:
Ainsi grâce à nos trois rotations infinitésimales X, Y, Z et en notant $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, nous avons les égalités :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{r^2} \left(yZ - zY + xr\dfrac{\partial}{\partial r} \right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{r^2} \left(zX - xZ + yr\dfrac{\partial}{\partial r} \right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{r^2} \left(xY - yX + zr\dfrac{\partial}{\partial r} \right) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Ces égalités se vérifient par un calcul direct.

Définition :

Nous appelons le système de champs de vecteurs $\left(X, Y, Z, \frac{\partial}{\partial r}\right)$ quasi-sphérique. Donc les formules (3.2.4) décrivent le passage des coordonnées cartésiennes au système quasi-sphérique.

Dérivées partielles sur $\mathbb{R}^3$ via les champs de vecteurs tangents sur $sl(3)^*$

Afin de pouvoir généraliser les dérivées partielles à une situation non commutative, nous allons plutôt travailler sur l'espace $sl(2)^*$.
Nous considérons la matrice $L = \begin{pmatrix} v & 2u \\ 2w & -v \end{pmatrix}$ qui vérifie l'équation de Cayley-Hamilton suivante :

$$L^2 - \left(v^2 + 4uw\right) I = 0.$$

Nous posons $\rho^2 = v^2 + 4uw$.

Proposition :

Si nous imposons $\frac{\partial L}{\partial \rho} = \alpha L + \beta I$, alors nécessairement :

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} L.$$

Preuve :

Nous déduisons de l'équation de Cayley-Hamilton (en notant $L' = \frac{\partial L}{\partial \rho}$) :

$$\begin{aligned}
2LL' - 2\rho I = 0 &\Leftrightarrow 2L\left(\alpha I + \beta I\right) - 2\rho I = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\alpha L^2 + 2\beta L - 2\rho I = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\alpha\rho^2 I + 2\beta L - 2\rho I = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\rho\left(-1 + \alpha\rho\right) I + 2\beta L = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\rho} \text{ et } \beta = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Nous pouvons considérer par conséquent que :

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}u = u; \quad \rho\frac{\partial}{\partial\rho}v = v; \quad \rho\frac{\partial}{\partial\rho}w = w.$$

Théorème :

Nous avons :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial w} = \dfrac{1}{\rho^2}\left(vU - uV + 2\rho u\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{1}{\rho^2}\left(uW - wU + \rho v\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{1}{\rho^2}\left(wV - vW + 2\rho w\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)
\end{cases}$$

Preuve :

Il suffit de vérifier ces trois égalités sur les trois coordonnées $u; v; w$.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^2}\left(vU - uV + 2\rho u\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(v) &= \frac{1}{\rho^2}\left(-2uv + 2uv\right) = 0 \\
\frac{1}{\rho^2}\left(vU - uV + 2\rho u\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(u) &= \frac{1}{\rho^2}\left(-2u^2 + 2u^2\right) = 0 \\
\frac{1}{\rho^2}\left(vU - uV + 2\rho u\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(w) &= \frac{1}{\rho^2}\left(v^2 + 2uw + 2uw\right) = 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^2}\left(uW - wU + \rho v\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(u) &= \frac{1}{\rho^2}\left(-uv + vu\right) = 0 \\
\frac{1}{\rho^2}\left(uW - wU + \rho v\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(v) &= \frac{1}{\rho^2}\left(2uw + 2uw + v^2\right) = 2 \\
\frac{1}{\rho^2}\left(uW - wU + \rho v\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(w) &= \frac{1}{\rho^2}\left(-wv + vw\right) = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^2}\left(wV - vW + 2\rho w\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(u) &= \frac{1}{\rho^2}\left(2uw + v^2 + 2uw\right) = 1 \\
\frac{1}{\rho^2}\left(wV - vW + 2\rho w\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(v) &= \frac{1}{\rho^2}\left(-2vw + 2vw\right) = 0 \\
\frac{1}{\rho^2}\left(wV - vW + 2\rho w\frac{\partial}{\partial\rho}\right)(y) &= \frac{1}{\rho^2}\left(-2w^2 + 2w^2\right) = 0 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Définition :

Sur l'espace $sl(2)^*$, nous appelons le système $\left(U, V, W, \frac{\partial}{\partial \rho}\right)$ quasi-sphérique.

Définitions :

Nous utilisons dans ce qui suit l'algèbre enveloppante $U\left(sl(2)\right)$ et sa représentation en dimension 2 :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Regardons sur l'algèbre de Lie $sl\left(2\right)$ (que nous envisageons comme étant notre espace vectoriel $\mathbb{V}$) le couplage $\mathbb{V}^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{K}$ $sl\left(2\right)$-invariant défini ainsi :

$$\begin{aligned} \langle u; u\rangle &= 0 \\ \langle v; v\rangle &= 2 \\ \langle w; w\rangle &= 0 \\ \langle v; u\rangle = \langle u; v\rangle &= 0 \\ \langle v; w\rangle = \langle w; v\rangle &= 0 \\ \langle u; w\rangle = \langle w; u\rangle &= 1 \end{aligned}$$

Donc sur l'espace $\mathbb{V}$, si nous notons les opérateurs de couplage avec u, v et w respectivement $\langle u$, $\langle v$ et $\langle w$, nous en arrivons à l'identification suivante :

$$\begin{cases} \langle u = \dfrac{\partial}{\partial w} \\ \langle v = 2\dfrac{\partial}{\partial v} \\ \langle w = \dfrac{\partial}{\partial u} \end{cases}$$

Nous définissons donc les opérateurs $\langle u$, $\langle v$, $\langle w$ sur toute l'algèbre $\mathbb{K}\left[sl\left(2\right)^*\right]$ grâce aux identifications de nos opérateurs avec les dérivées partielles et les formules de ce théorème. Nous introduisons ainsi de nouvelles notations pour les dérivées partielles, ce qui nous permet de définir l'action du groupe $SL\left(2\right)$ sur ces dérivées.
Nous reproduisons cette construction dans le cas quantique.

Système quasi-sphérique avec les champs de vecteurs tressés

Nous considérons maintenant la matrice $L = \begin{pmatrix} qg & [2]_q\, b \\ [2]_q\, c & -q^{-1}g \end{pmatrix}$ avec $\langle g; b; c\rangle = \mathcal{SL}_{0,q}$ qui vérifie l'équation de Cayley-Hamilton suivante :

$$L^2 - \rho_q^2 I = 0 \quad \text{avec} \quad \rho_q^2 = [2]_q \left([2]_q^{-1} g^2 + q^{-1}bc + qcb\right).$$

Proposition :

Si nous imposons $\frac{\partial L}{\partial \rho_q} = \alpha L + \beta I$, alors nécessairement :

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_q} = \frac{1}{\rho_q} L. \tag{3.2.5}$$

Preuve :

La démonstration est identique à celle du paragraphe précédent. ■

Nous pouvons considérer par conséquent que :

$$\rho_q \frac{\partial}{\partial \rho_q} g = g; \quad \rho_q \frac{\partial}{\partial \rho_q} b = b; \quad \rho_q \frac{\partial}{\partial \rho_q} c = c.$$

Il est alors facile de vérifier que la formule (3.2.5), si nous supposons de plus que $\frac{\partial}{\partial \rho_q}$ vérifie la règle de Leibniz, est compatible avec l'équation définissant notre algèbre REA. Nous pouvons donc définir la dérivée $\frac{\partial}{\partial \rho_q}$ sur toute l'algèbre REA.

Définition :

Nous définissons sur *l'espace vectoriel* $\mathcal{L}(2) = vect\,(a, b, c, d)$ l'opérateur bilinéaire (couplage) :

$$\left\langle l_i^j ; l_a^b \right\rangle = B_a^j \delta_i^b$$

qui est $U_q(sl(2))$-invariant.

Proposition :

Le couplage défini précédemment sur $\mathcal{L}(2)$ induit la table de couplage suivante sur *l'espace vectoriel* $\mathcal{SL}(2)$ engendré par b, g, c :

$$\begin{array}{lll} \langle g; g\rangle = q^{-2}[2]_q & \langle b; g\rangle = 0 & \langle c; g\rangle = 0 \\ \langle g; b\rangle = 0 & \langle b; b\rangle = 0 & \langle c; b\rangle = q^{-1} \\ \langle g; c\rangle = 0 & \langle b; c\rangle = q^{-3} & \langle c; c\rangle = 0 \end{array}$$

Preuve :

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1^1 & l_2^1 \\ l_2^1 & l_2^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

De plus $g = a - d$.

$$\begin{aligned} &\langle g; g\rangle = \langle a - d; a - d\rangle = \langle a; a\rangle - \langle a; d\rangle - \langle d; a\rangle + \langle d; d\rangle = B_1^1 + B_2^2 = q^{-2}[2]_q \\ &\langle g; b\rangle = \langle a; b\rangle - \langle d; b\rangle = 0 - B_1^2 = 0 \\ &\langle g; c\rangle = \langle a; c\rangle - \langle d; c\rangle = B_2^1 - 0 = 0 \\ &\langle b; g\rangle = \langle b; a\rangle - \langle b; d\rangle = 0 - B_1^2 = 0 \\ &\langle b; b\rangle = 0 \\ &\langle b; c\rangle = B_2^2 = q^{-3} \\ &\langle c; g\rangle = \langle c; a\rangle - \langle c; d\rangle = 0 - 0 = 0 \\ &\langle c; b\rangle = B_1^1 = q^{-1} \\ &\langle c; c\rangle = 0 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Définition :

Nous définissons les champs de vecteurs tressés B^q, G^q, C^q tels que :

$$B^q = U^q; \quad G^q = V^q; \quad C^q = W^q \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{q^{-2}\left(1 + q^4\right)\hbar}{q^4 - q^2 + 1}.$$

Aussi $\langle B^q, G^q, C^q\rangle \cong \mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$.
De telle sorte que en notant $\omega = \hbar\left(q^4 - q^2 + 1\right)^{-1}$:

$$\begin{array}{lll} B^q \triangleright g = -\omega q^2 b & G^q \triangleright g = \omega q^2\left(q^2-1\right) g & C^q \triangleright g = \omega q^4 c \\ B^q \triangleright b = 0 & G^q \triangleright b = \omega q^4 b & C^q \triangleright b = -\omega q^3 [2]_q^{-1} g \\ B^q \triangleright c = \omega q^3 [2]_q^{-1} g & G^q \triangleright c = -\omega q^2 c & C^q \triangleright c = 0 \end{array}$$

Théorème :

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{SL}(2) = vect(b, g, c)$, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} q^{-2}[2]_q \dfrac{\partial}{\partial g} = \langle g = \dfrac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\dfrac{1}{\omega q^4}\left(q[2]_q(bC^q - cB^q) + q\zeta g G^q\right) + \rho_p g\dfrac{\partial}{\partial \rho_q}\right) \\ q^{-3}\dfrac{\partial}{\partial c} = \langle b = \dfrac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\dfrac{1}{\omega q^4}\left(q^2 g B^q - bG^q\right) + \rho_q b\dfrac{\partial}{\partial \rho_q}\right) \\ q^{-1}\dfrac{\partial}{\partial b} = \langle c = \dfrac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\dfrac{1}{\omega q^4}\left(q^2 c G^q - gC^q\right) + \rho_q c\dfrac{\partial}{\partial \rho_q}\right) \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Preuve :

Il suffit de vérifier ces trois égalités sur les trois coordonnées $g; b; c$.

1.

$$\begin{aligned} &\frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q[2]_q(bC^q - cB^q) + q\zeta g G^q\right) + \rho_p g\frac{\partial}{\partial \rho_q}\right)(g) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q[2]_q \omega q^4 bc + q[2]_q \omega q^2 cb + q\zeta\omega q^2\left(q^2-1\right)g^2\right) + g^2\right) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left([2]_q qbc + [2]_q q^{-1} cb + \zeta q^{-1}\left(q^2-1\right)g^2 + g^2\right) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q^2}{\rho_q^2}\left(qbc + q^{-1}cb + [2]_q^{-1}\left(q^2 - 1 + q^{-2}\right)g^2\right) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q^2}{\rho_q^2}\left(qcb - q\zeta[2]_q^{-1} g^2 + q^{-1}bc + q^{-1}\zeta[2]_q^{-1} g^2 + [2]_q^{-1}\left(q^2 - 1 + q^{-2}\right)g^2\right) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q^2}{\rho_q^2}\left(qcb + q^{-1}bc + [2]_q^{-1} g^2\right) = q^{-2}[2]_q = \langle g; g\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q[2]_q(bC^q - cB^q) + q\zeta g G^q\right) + \rho_p g\frac{\partial}{\partial \rho_q}\right)(b) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(-q[2]_q \omega q^3 [2]_q^{-1} bg + q\zeta\omega q^4 gb\right) + gb\right) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(-bg + \left(q^2-1\right)gb + gb\right) \\ &= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(q^2 gb - bg\right) = 0 = \langle g; b\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q\left[2\right]_q\left(bC^q-cB^q\right)+q\zeta gG^q\right)+\rho_p g\frac{\partial}{\partial\rho_q}\right)(c)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(-q\left[2\right]_q\omega q^3\left[2\right]_q^{-1}cg-q\zeta\omega q^2 gc\right)+gc\right)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(-cg-\left(1-q^{-2}\right)gc+gc\right)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(q^{-2}gc-cg\right)=0=\langle g;c\rangle
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2 gB^q-bG^q\right)+\rho_q b\frac{\partial}{\partial\rho_q}\right)(g)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(-\omega q^4 gb-\omega q^2\left(q^2-1\right)bg\right)+bg\right)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(-gb-bg+q^{-2}bg+bg\right)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(q^{-2}bg-gb\right)=0=\langle b;g\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2 gB^q-bG^q\right)+\rho_q b\frac{\partial}{\partial\rho_q}\right)(b)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(-\omega q^4 b^2\right)+b^2\right)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(-b^2+b^2\right)=0=\langle b;b\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2 gB^q-bG^q\right)+\rho_q b\frac{\partial}{\partial\rho_q}\right)(c)\\
&=\frac{q^{-2}\times q^{-1}}{\rho_q^2}\left[2\right]_q\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2\omega q^3\left[2\right]_q^{-1}g^2+\omega q^2 bc\right)+bc\right)\\
&=\frac{q^{-2}\times q^{-1}}{\rho_q^2}\left[2\right]_q\left(q^2\left[2\right]_q^{-1}g^2+q^{-1}bc+qbc\right)\\
&=\frac{q^{-3}}{\rho_q^2}\left[2\right]_q\left(q^2\left[2\right]_q^{-1}g^2+q^{-1}bc+qcb-q\zeta\left[2\right]_q^{-1}g^2\right)\\
&=\frac{q^{-3}}{\rho_q^2}\times\rho_q^2=q^{-3}=\langle b;c\rangle
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2 cG^q-gC^q\right)+\rho_q c\frac{\partial}{\partial\rho_q}\right)(g)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2\omega q^2\left(q^2-1\right)cg-\omega q^4 gc\right)+cg\right)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(\left(q^2-1\right)cg-gc+cg\right)\\
&=\frac{q^{-2}\left[2\right]_q}{\rho_q^2}\left(q^2cg-gc\right)=0=\langle c;g\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2cG^q - gC^q\right) + \rho_q c\frac{\partial}{\partial\rho_q}\right)(b) \\
&= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2\omega q^4 cb + \omega q^3 [2]_q^{-1} g^2\right) + cb\right) \\
&= \frac{q^{-2}\times q}{\rho_q^2}[2]_q\left(q^{-2}[2]_q^{-1} g^2 + qcb + q^{-1}cb\right) \\
&= \frac{q^{-1}}{\rho_q^2}[2]_q\left(q^{-2}[2]_q^{-1} g^2 + qcb + q^{-1}bc + q^{-1}\zeta [2]_q^{-1} g^2\right) \\
&= \frac{q^{-1}}{\rho_q^2}\times\rho_q^2 = q^{-1} = \langle c; b\rangle \\
&\frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(q^2cG^q - gC^q\right) + \rho_q c\frac{\partial}{\partial\rho_q}\right)(c) \\
&= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(\frac{1}{\omega q^4}\left(-\omega q^4 c^2\right) + c^2\right) \\
&= \frac{q^{-2}[2]_q}{\rho_q^2}\left(-c^2 + c^2\right) = 0 = \langle c; c\rangle \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque :

Pour revenir au cas commutatif, celui de l'hyperboloïde classique, il nous suffit de poser $q = 1$ et $\hbar = 2$ pour retrouver les égalités suivantes avec $\rho^2 = v^2 + 4uw$:

$$\begin{cases}
2\dfrac{\partial}{\partial v} = \langle v = \dfrac{2}{\rho^2}\left(uW - wU + \rho v\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial w} = \langle u = \dfrac{1}{\rho^2}\left(vU - uV + 2\rho u\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) \\
\dfrac{\partial}{\partial u} = \langle w = \dfrac{1}{\rho^2}\left(wV - vW + 2\rho w\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)
\end{cases}$$

Sachant que G^q, B^q, C^q et $\frac{\partial}{\partial\rho_q}$ sont bien définis sur $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$, nous pouvons alors étendre nos dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial g}, \frac{\partial}{\partial c}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{SL}(2)$ à l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ sans passer par la règle de Leibniz qui ne peut pas s'appliquer ici car elle n'est pas compatible avec les relations définissant l'algèbre REA.
En plus, nous pouvons définir l'action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ sur les dérivées partielles tressées en utilisant les identifications avec les opérateurs $\langle b$, $\langle g$, $\langle c$ et donc avec les opérateurs $\langle u$, $\langle v$, $\langle w$.

3.3 Modules projectifs et q-analogues des équations de Maxwell

3.3.1 Préliminaire

Nous définissons dans ce paragraphe l'opérateur de Maxwell et nous étudions son comportement par rapport à la restriction à une sous-variété.
Considérons $\mathcal{M}$ une variété affine régulière munie de la métrique pseudo-riemanienne $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j}\right)$ où les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial i}$ sont définies dans les coordonnées locales.
Nous définissons les deux opérateurs :

$$d : \mathbb{K}[\mathcal{M}] \to \Omega^1(\mathcal{M}), \quad f(x) \mapsto \frac{\partial}{\partial_i} f dx_i$$

$$\delta : \Omega^1(\mathcal{M}) \to \mathbb{K}[\mathcal{M}], \quad \alpha_i dx_i \mapsto \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\alpha_j\right)$$

où $g = det\,(g_{ij})$ et le tenseur g^{ij} est l'inverse de g_{ij}. L'opérateur de Laplace sur l'algèbre $\mathbb{K}\,[\mathcal{M}]$ est alors par définition :

$$\Delta\,(f) = \delta d\,(f) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x_j}f\right).$$

Les opérateurs de Laplace sur les espaces $\Omega^i\,(\mathcal{M})$ sont définis par la formule :

$$\Delta := \delta d + d\delta.$$

Nous définissons alors l'opérateur de Maxwell $\mathcal{MW}$ sur l'espace $\Omega^1\,(\mathcal{M})$ ainsi :

$$\mathcal{MW} := \delta d = \Delta - d\delta.$$

Bien sûr, si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ et la métrique est euclidienne l'opérateur agit sur $\Omega^1\,(\mathcal{M})$ de cette manière :

$$\Delta\,(\alpha_i dx_i) = \Delta\,(\alpha_i)\,dx_i.$$

Proposition :

Soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ une sous-variété régulière de codimension 1.
Supposons qu'au voisinage de chaque point $a \in \mathcal{N}$, il existe un système de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que $\mathcal{N}$ est donnée par $x_n = 0$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est un système de coordonnées locales de $\mathcal{N}$, $g\left(\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = 1$ et $g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Alors :

$$\mathcal{MW}_{\mathcal{N}} = \mathcal{MW}_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{N}}.$$

Autrement dit l'opérateur de Maxwell sur $\mathcal{N}$ est la restriction de l'opérateur de Maxwell sur $\mathcal{M}$ restreint à $\mathcal{N}$. Un résultat similaire est valable pour l'opérateur de Laplace.

3.3.2 L'opérateur de Maxwell sur $\mathbb{R}^3$

Nous travaillons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ munis des fonctions coordonnées x, y, z et de la métrique euclidienne. Rappelons dans un premier temps le complexe de De Rham suivant muni de l'opérateur d (l'opérateur δ est introduit plus loin) :

$$0 \underset{\delta}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \Omega^0\left(\mathbb{R}^3\right) \underset{\delta}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right) \underset{\delta}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right) \underset{\delta}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \Omega^3\left(\mathbb{R}^3\right) \underset{\delta}{\overset{d}{\rightleftarrows}} 0$$

Nous définissons explicitement les opérateurs $d : \Omega^p\left(\mathbb{R}^3\right) \longrightarrow \Omega^{p+1}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\delta : \Omega^p\left(\mathbb{R}^3\right) \longrightarrow \Omega^{p-1}\left(\mathbb{R}^3\right)$ grâce aux fonctions coordonnées x, y, z en utilisant les bases suivantes :

$$\begin{aligned}
\Lambda^1\mathbb{R}^3 &= \{dx; dy; dz\} \subset \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\\
\Lambda^2\mathbb{R}^3 &= \{dy \wedge dz; dz \wedge dx; dx \wedge dy\} \subset \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\\
\Lambda^3\mathbb{R}^3 &= \{dx \wedge dy \wedge dz\} \subset \Omega^3\left(\mathbb{R}^3\right)
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir dans ces bases d par les opérateurs bien connus :

$$0 \longrightarrow \Omega^0\left(\mathbb{R}^3\right) \xrightarrow{grad} \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right) \xrightarrow{rot} \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right) \xrightarrow{div} \Omega^3\left(\mathbb{R}^3\right) \longrightarrow 0$$

Grâce à l'étoile de Hodge $*$, nous en déduisons $\delta = - *^{-1} d*$ et définissons alors complètement le complexe de De Rham sur la variété lisse $\mathbb{R}^3$ munie d'une métrique euclidienne et des opérateurs d et δ :

$$0 \rightleftarrows \Omega^0\left(\mathbb{R}^3\right) \underset{-div}{\overset{grad}{\rightleftarrows}} \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right) \underset{-rot}{\overset{rot}{\rightleftarrows}} \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right) \underset{-grad}{\overset{div}{\rightleftarrows}} \Omega^3\left(\mathbb{R}^3\right) \rightleftarrows 0$$

Nous pouvons alors définir l'opérateur de Maxwell $\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^3}$ sur la variété lisse $\mathbb{R}^3$ grâce à l'égalité :

$$\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^3} = \delta d\,(\omega) \quad \text{avec} \quad \omega \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Or :

$$\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^3} = \delta d\left(\omega\right) = -rot\left(rot\left(\omega\right)\right) = \Delta_{\mathbb{R}^3}\left(\omega\right) - grad\left(div\left(\omega\right)\right).$$

Sachant que nous définissons l'opérateur de Laplace $\Delta_{\mathbb{R}^3}$ grâce à l'égalité :

$$\Delta_{\mathbb{R}^3}\left(\omega\right) = d\delta\left(\omega\right) \quad \text{avec} \quad \omega \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Nous en déduisons la forme explicite de l'opérateur de Laplace $\Delta_{\mathbb{R}^3}$ sur $\mathbb{R}^3$ en notant :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Si nous posons $\omega = fdx + gdy + hdz$, nous pouvons alors formuler $\Delta_{\mathbb{R}^3}$ ainsi :

$$\Delta_{\mathbb{R}^3}\left(\omega\right) = \begin{pmatrix} \Delta\left(f\right) \\ \Delta\left(g\right) \\ \Delta\left(h\right) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors formuler l'opérateur de Maxwell ainsi :

$$\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^3}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\left(f\right) \\ \Delta\left(g\right) \\ \Delta\left(h\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

L'opérateur de Maxwell est invariant par rapport à une action adéquate du groupe $SO(3)$ que nous définirons de manière plus générale à la fin du chapitre dans le cas quantique sur les générateurs x, y, z et les matrices de taille 3×3 à coefficients réels.
Notons que si nous posons $f = \frac{\partial}{\partial x}\varphi$, $g = \frac{\partial}{\partial y}\varphi$ et $h = \frac{\partial}{\partial z}\varphi$ avec $\varphi \in \mathbb{K}\left[\mathbb{R}^3\right]$, alors :

$$\left(f, g, h\right)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^3}\right).$$

Nous en déduisons la liberté de jauge de cet opérateur qui s'exprime ainsi :

$$\left(\alpha, \beta, \gamma\right)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^3}\right) \Rightarrow \left(\alpha, \beta, \gamma\right)^t + \left(f, g, h\right)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^3}\right).$$

3.3.3 L'opérateur de Maxwell sur l'espace de Minkowski classique

Nous considérons la norme $SO\left(1, 3\right)$-covariante :

$$\left\|\left(t, x, y, z\right)\right\| = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Nous en déduisons alors l'opérateur appelé d'Alembertien :

$$\Delta_{\mathbb{R}^4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Nous écrivons finalement l'opérateur de Maxwell suivant :

$$\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^4}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\left(f\right) \\ \Delta\left(g\right) \\ \Delta\left(h\right) \\ \Delta\left(i\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} \tag{3.3.2}$$

Ici le vecteur $\left(f, g, h, i\right)^t$ est identifié avec la forme $fdt + gdx + hdy + idz$.
L'opérateur de Maxwell est invariant par rapport à une action adéquate du groupe $SO\left(1|3\right)$ que nous définirons de manière plus générale à la fin du chapitre dans le cas quantique.
Notons que si nous posons $f = \frac{\partial}{\partial t}\varphi$, $g = \frac{\partial}{\partial x}\varphi$, $h = \frac{\partial}{\partial y}\varphi$ et $i = \frac{\partial}{\partial z}\varphi$ avec $\varphi \in \mathbb{K}\left[\mathbb{R}^4\right]$, alors :

$$\left(f, g, h, i\right)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^4}\right).$$

Nous en déduisons la liberté de jauge de cet opérateur. Ainsi si $\left(\alpha, \beta, \gamma, \xi\right)^t$ est dans $Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^4}\right)$ alors $\left(\alpha, \beta, \gamma, \xi\right)^t + \left(f, g, h, i\right)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{R}^4}\right)$.

3.3.4 L'opérateur de Maxwell sur S^2

Nous allons utiliser nos trois rotations infinitésimales X, Y et Z. Définissons les opérateurs :

$$\mathcal{X} = yZ - zY, \quad \mathcal{Y} = zX - xZ, \quad \mathcal{Z} = xY - yX.$$

En utilisant (3.2.4), nous pouvons réécrire l'opérateur de Laplace Δ sur $\mathbb{R}^3$ sous la forme suivante :

$$\Delta = \left(\frac{1}{r^2}\mathcal{X} + \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\mathcal{Y} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\mathcal{Z} + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2. \tag{3.3.3}$$

Proposition :

Nous pouvons alors définir l'opérateur de Laplace sur la sphère S^2 par la formule :

$$\Delta_{S^2} = \frac{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}{r^4}.$$

Preuve :

Nous partons naturellement de la formule (3.3.3).
Nous savons que sur la sphère S^2 : $\frac{\partial}{\partial r} = 0$.
Il nous reste juste à vérifier que la composante du premier ordre issue de notre formule s'annule.
En fait cette composante vaut :

$$\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\mathcal{X} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\mathcal{Y} + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right)\mathcal{Z} = \frac{-2}{r^4}\left(x\mathcal{X} + y\mathcal{Y} + z\mathcal{Z}\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition :

L'opérateur de Laplace Δ_{S^2} vérifie les égalités suivantes :

1.
$$\Delta_{S^2} = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{r^2}$$

2.
$$\begin{cases} \Delta_{S^2}\mathcal{X} - \mathcal{X}\Delta_{S^2} = -\,2x\Delta_{S^2} \\ \Delta_{S^2}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\Delta_{S^2} = -\,2y\Delta_{S^2} \\ \Delta_{S^2}\mathcal{Z} - \mathcal{Z}\Delta_{S^2} = -\,2z\Delta_{S^2} \end{cases}$$

Preuve :

1.
$$\begin{aligned} \mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2 =& (yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2 \\ =& \left(r^2 - x^2\right)X^2 - yxYX - zxZX + \left(r^2 - y^2\right)Y^2 - zyZY - xyXY \\ &+ \left(r^2 - z^2\right)X^2 - xzXZ - yzYZ \\ =& r^2\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) - \left(x\left(xX + yY + zZ\right) + y\left(xX + yY + zZ\right) + z\left(xX + yY + zZ\right)\right) \\ =& r^2\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right) \end{aligned}$$

2.
$$\Delta_{S^2}\mathcal{X} - \mathcal{X}\Delta_{S^2} = \frac{2}{r^2}\left(zZX + yYX - xY^2 - xZ^2\right) = \frac{2}{r^2}\left(\left(xX + yY + zZ\right)X - x\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)\right)$$

$$\Delta_{S^2}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\Delta_{S^2} = \frac{2}{r^2}\left(xXY + zZY - yZ^2 - yX^2\right) = \frac{2}{r^2}\left(\left(xX + yY + zZ\right)Y - y\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)\right)$$

$$\Delta_{S^2}\mathcal{Z} - \mathcal{Z}\Delta_{S^2} = \frac{2}{r^2}\left(yYZ + xXZ - zX^2 - zY^2\right) = \frac{2}{r^2}\left(\left(xX + yY + zZ\right)Z - z\left(X^2 + Y^2 + Z^2\right)\right) \quad \blacksquare$$

Nous ne pouvons pas utiliser la théorie classique pour restreindre l'opérateur de Maxwell défini sur $\mathbb{R}^3$ à S^2, aussi nous présentons maintenant l'espace $\Omega^1\left(S^2\right)$ en termes de modules projectifs.
Pour cela, nous avons besoin de notre projecteur $e : \mathcal{A}^{\oplus 3} \longrightarrow M$ dont nous rappelons la formule :

$$e = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$$

Nous définissons alors le module projectif $\Omega^1\left(S^2\right)$ de la même manière que le module projectif $Vect\left(S^2\right)$.

Nous pouvons enfin définir l'opérateur de Maxwell sur la sphère S^2 en notant
$\omega = fdx + gdy + hdz \in \Omega^1\left(S^2\right)$, ce qui implique que $(I-e)(\omega) = \omega$:

$$\mathcal{MW}_{S^2}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = (I-e)\left(\begin{pmatrix} \Delta_{S^2}(f) \\ \Delta_{S^2}(g) \\ \Delta_{S^2}(h) \end{pmatrix} - \frac{1}{r^4}\begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{Y} & \mathcal{Z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}\right) \quad (3.3.4)$$

L'opérateur de Maxwell est bien sûr invariant par rapport à une action adéquate du groupe $SO(3)$ que nous définirons de manière plus générale à la fin du chapitre.
Notons que si nous posons $f = \mathcal{X}(\varphi)$, $g = \mathcal{Y}(\varphi)$ et $h = \mathcal{Z}(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathbb{K}\left[S^2\right]$, alors :

$$(f, g, h)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{S^2}\right).$$

Nous en déduisons la liberté de jauge de cet opérateur. Ainsi si $(\alpha, \beta, \gamma)^t$ est dans $Ker\left(\mathcal{MW}_{S^2}\right)$ alors $(\alpha, \beta, \gamma)^t + (f, g, h)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{S^2}\right)$.

3.3.5 L'opérateur de Maxwell sur $\mathcal{H}$

Nous allons utiliser nos trois rotations hyperboliques infinitésimales U, V et W et définir les opérateurs :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}(vU - uV), \quad \mathcal{V} = uW - wU, \quad \mathcal{W} = \frac{1}{2}(wV - vW)$$

Ainsi, nous avons :

$$\langle u = \frac{2}{\rho^2}\left(\mathcal{U} + \rho u\frac{\partial}{\partial\rho}\right); \quad \langle v = \frac{2}{\rho^2}\left(\mathcal{V} + \rho v\frac{\partial}{\partial\rho}\right); \quad \langle w = \frac{2}{\rho^2}\left(\mathcal{W} + \rho w\frac{\partial}{\partial\rho}\right).$$

Nous définissons alors l'opérateur de La place sur l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ par la formule :

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\rho^4}\left(2\mathcal{U}\mathcal{W} + \mathcal{V}^2 + 2\mathcal{W}\mathcal{U}\right).$$

Nous déduisons par un calcul direct que :

$$\Delta_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\rho^2}\left(2UW + V^2 + 2WU\right).$$

Présentons maintenant l'espace $\Omega^1(\mathcal{H})$ en terme de modules projectifs.
Pour cela nous avons besoin de notre projecteur $e : \mathcal{A}^{\oplus 3} \to M$ dont nous rappelons la formule :

$$e = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2w & v & 2u \end{pmatrix}.$$

Nous définissons alors le module projectif $\Omega^1(\mathcal{H})$ de la même manière que le module projectif $Vect(\mathcal{H})$.
Nous pouvons enfin définir l'opérateur de Maxwell sur l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ en notant
$\omega = fdx + gdy + hdz \in \Omega^1(\mathcal{H})$, ce qui implique que $(I-e)(\omega) = \omega$:

$$\mathcal{MW}_{\mathcal{H}}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = (I-e)\left(\begin{pmatrix} \Delta_{\mathcal{H}}(f) \\ \Delta_{\mathcal{H}}(g) \\ \Delta_{\mathcal{H}}(h) \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho^4}\begin{pmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \\ \mathcal{W} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\mathcal{W} & \mathcal{V} & 2\mathcal{U} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}\right). \tag{3.3.5}$$

L'opérateur de Maxwell est invariant par rapport à une action adéquate du groupe $SL(2)$ que nous définirons de manière plus générale à la fin du chapitre.
Notons que si nous posons $f = 2\mathcal{W}(\varphi)$, $g = \mathcal{V}(\varphi)$ et $h = 2\mathcal{U}(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathbb{K}\left[\mathbb{R}^4\right]$, alors :

$$(f,g,h)^t \in Ker(\mathcal{MW}_{\mathcal{H}}).$$

Nous en déduisons la liberté de jauge de cet opérateur. Ainsi si $(\alpha,\beta,\gamma)^t$ est dans $Ker(\mathcal{MW}_{\mathcal{H}})$ alors $(\alpha,\beta,\gamma)^t + (f,g,h)^t \in Ker(\mathcal{MW}_{\mathcal{H}})$.

3.3.6 Les opérateurs de Maxwell sur les algèbres quantiques

Le cas de l'algèbre $\mathcal{SL}_q(2) = \mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$

Suivant le cas classique nous rappelons la définition de l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \rho_q}$ sur $\mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$ qui vérifie la formule de Leibniz et les égalités :

$$\frac{\partial}{\partial \rho_q}(g) = \frac{g}{\rho_q};\quad \frac{\partial}{\partial \rho_q}(b) = \frac{b}{\rho_q};\quad \frac{\partial}{\partial \rho_q}(c) = \frac{c}{\rho_q}.$$

Quand aux dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial g}, \frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial c}$, elles sont définies sur l'algèbre $\mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$ via les formules (3.2.6). Nous privilégions la notation du type dérivée partielle sachant que :

$$\frac{\partial}{\partial g} = \frac{q^2}{[2]_q}\langle g\ ;\quad \frac{\partial}{\partial b} = q\langle c\ ;\quad \frac{\partial}{\partial c} = q^3\langle b\ .$$

Pour définir l'opérateur de Laplace sur l'algèbre $\mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$, nous remplaçons dans l'élément central $q^{-1}bc + [2]_q^{-1}g^2 + qcb$ les générateurs b, g, c par respectivement $\langle b$, $\langle g$, $\langle c$. Nous en arrivons alors à la formule :

$$\Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]} = q^{-1}\langle b\langle c + [2]_q^{-1}\langle g\langle g + q\langle c\langle b = q^{-5}\frac{\partial}{\partial c}\frac{\partial}{\partial b} + [2]_q q^{-4}\frac{\partial^2}{\partial g^2} + q^{-3}\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial c}. \tag{3.3.6}$$

Nous définissons de même l'opérateur de Maxwell sur $\mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$:

$$\mathcal{MW}_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]}\begin{pmatrix} \overline{f} \\ \overline{g} \\ \overline{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]}(\overline{f}) \\ \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]}(\overline{g}) \\ \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]}(\overline{h}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b} \\ \frac{\partial}{\partial g} \\ \frac{\partial}{\partial c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^{-5}\frac{\partial}{\partial c} & q^{-4}[2]_q\frac{\partial}{\partial g} & q^{-3}\frac{\partial}{\partial b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{f} \\ \overline{g} \\ \overline{h} \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

avec $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h} \in \mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$.

Théorème :

Si nous posons $\overline{f} = \frac{\partial}{\partial b}\varphi$, $\overline{g} = \frac{\partial}{\partial g}\varphi$ et $\overline{h} = \frac{\partial}{\partial c}\varphi$ avec $\varphi \in \mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$:

$$(f,g,h)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]}\right)$$

à condition que $\Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]}$ commute avec $\frac{\partial}{\partial g}, \frac{\partial}{\partial g}, \frac{\partial}{\partial c}$.

Preuve :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b} \\ \frac{\partial}{\partial g} \\ \frac{\partial}{\partial c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^{-5}\frac{\partial}{\partial c} & q^{-4}[2]_q\frac{\partial}{\partial g} & q^{-3}\frac{\partial}{\partial b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial g}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial c}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b} \\ \frac{\partial}{\partial g} \\ \frac{\partial}{\partial c} \end{pmatrix}\Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]}(\varphi)$$

Nous en déduisons alors facilement notre théorème. ■

Le cas de l'algèbre $\mathcal{L}_q(2) = \mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^4\right]$

Nous avons l'égalité $\frac{\partial}{\partial l} = q^2 [2]_q^{-1} \langle l$ et donc connaissant la relation entre le Casimir de l'algèbre $\mathcal{SL}_{\hbar,q}(2)$ et le Casimir de l'algèbre de $\mathcal{L}_{\hbar,q}(2)$, nous en déduisons que :

$$\Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^4]} = \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]} + [2]_q^{-1} \langle l \langle l = \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^3]} + q^{-4} [2]_q \frac{\partial^2}{\partial l^2}.$$

Nous définissons alors l'opérateur de Maxwell :

$$\mathcal{MW}_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^4]} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^4]}(f) \\ \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^4]}(g) \\ \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^4]}(h) \\ \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathbb{R}^4]}(i) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b} \\ \frac{\partial}{\partial g} \\ \frac{\partial}{\partial c} \\ \frac{\partial}{\partial l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{-5} \frac{\partial}{\partial c} & q^{-4} [2]_q \frac{\partial}{\partial g} & q^{-3} \frac{\partial}{\partial b} & q^{-4} [2]_q \frac{\partial}{\partial l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} \tag{3.3.8}$$

avec $f, g, h, i \in \mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^4\right]$.

Le cas de l'algèbre $\mathcal{A}_{0,q}^{\rho_q^2} = \mathbb{K}_q[\mathcal{H}]$

Nous définissons les opérateurs :

$$\mathcal{G}^q = \omega^{-1}\left(q[2]_q (bC^q - cB^q) + q\zeta g G^q\right); \quad \mathcal{B}^q = \omega^{-1}\left(q^2 g B^q - bG^q\right); \quad \mathcal{C}^q = \omega^{-1}\left(q^2 c G^q - gC^q\right).$$

Voici la généralisation de l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]$:

$$\Delta_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]} = \frac{1}{q^8 \rho_q^4}\left(q^{-1}[2]_q \mathcal{B}^q \mathcal{C}^q + \mathcal{G}^{q2} + q[2]_q \mathcal{C}^q \mathcal{B}^q\right).$$

Nous pouvons alors définir l'opérateur de Maxwell sur $\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]$ en notant $\omega = \overline{f} db + \overline{g} dg + \overline{h} dc$:

$$\mathcal{MW}_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]} \begin{pmatrix} \overline{f} \\ \overline{g} \\ \overline{h} \end{pmatrix} = (I - e)\left(\begin{pmatrix} \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]}(\overline{f}) \\ \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]}(\overline{g}) \\ \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]}(\overline{h}) \end{pmatrix} - \frac{1}{q^8 \rho_q^4} \begin{pmatrix} \mathcal{B}^q \\ \mathcal{G}^q \\ \mathcal{C}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q[2]_q \mathcal{C}^q & \mathcal{G}^q & q^{-1}[2]_q \mathcal{B}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{f} \\ \overline{g} \\ \overline{h} \end{pmatrix}\right) \tag{3.3.9}$$

avec $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h} \in \mathbb{K}_q[\mathcal{H}]$ et le projecteur e est défini par :

$$e = \frac{1}{\rho_q^2} \begin{pmatrix} b \\ g \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q[2]_q c & g & q^{-1}[2]_q b \end{pmatrix}.$$

Nous supposons de plus que $(I - e)(\omega) = \omega$, ce qui revient à dire que $\omega \in \Omega_q^1(\mathcal{H})$.

Théorème :

Si nous posons $\overline{f} = \mathcal{B}^q \varphi$, $\overline{g} = \mathcal{G}^q \varphi$ et $\overline{h} = \mathcal{C}^q \varphi$ avec $\varphi \in \mathbb{K}_q[\mathcal{H}]$:

$$\left(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}\right)^t \in Ker\left(\mathcal{MW}_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]}\right)$$

$$\text{à condition que} \quad (I - e)\left(\begin{pmatrix} \mathcal{B}^q \\ \mathcal{G}^q \\ \mathcal{C}^q \end{pmatrix} \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]} - \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]} \begin{pmatrix} \mathcal{B}^q \\ \mathcal{G}^q \\ \mathcal{C}^q \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \text{sur l'algèbre } \mathbb{K}_q[\mathcal{H}].$$

Preuve :

$$\frac{1}{q^8 \rho_q^4} \begin{pmatrix} \mathcal{B}^q \\ \mathcal{G}^q \\ \mathcal{C}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q[2]_q \mathcal{C}^q & \mathcal{G}^q & q^{-1}[2]_q \mathcal{B}^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}^q \varphi \\ \mathcal{G}^q \varphi \\ \mathcal{C}^q \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^q \\ \mathcal{G}^q \\ \mathcal{C}^q \end{pmatrix} \Delta_{\mathbb{K}_q[\mathcal{H}]}$$

Nous en déduisons alors facilement notre théorème. ■

Action du groupe quantique $U_q(sl(2))$

Définissons une action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ sur les éléments définissant les opérateurs de Maxwell sur l'espace de q-Minkowski et l'hyperboloïde quantique de telle manière que ces opérateurs deviennent $U_q(sl(2))$-invariants.

Remarquons pour commencer que le groupe quantique $U_q(sl(2))$ agit sur B^q, G^q, C^q et sur $\langle b\ , \langle g\ , \langle c$ de la même manière que sur b, g, c. Cela signifie que les applications $b \mapsto B^q, \ldots$ et $b \mapsto \langle b\ , \ldots$ sont des $U_q(sl(2))$-morphismes. Nous pouvons donc restreindre notre travail à l'hyperboloïde quantique et plus particulièrement à notre idempotent e associé à l'hyperboloïde quantique, pour lequel nous allons définir une action de $U_q(sl(2))$ le rendant invariant ; l'extension de l'action de $U_q(sl(2))$ sur les autres éléments des opérateurs de Maxwell ne posant pas de difficultés.

Considérons la représentation π de l'algèbre $U\left(sl(2)_q\right)$ telle que :

$$\pi\left(b\right) = B^q, \;\; \pi\left(g\right) = G^q, \;\; \pi\left(c\right) = C^q.$$

Nous définissons alors l'action de $U_q(sl(2))$ sur l'espace $M_3\left(\mathbb{K}\right)$ en respectant celle sur les générateurs b, g, c :

$$K^{\epsilon}\left(B^q\right) = q^{2\epsilon}B^q; \ldots; Y\left(G^q\right) = [2]_q\, q^{\theta-1}\left(C^q\right), Y\left(C^q\right) = 0.$$

Nous généralisons cette action à tout l'espace $M_3\left(\mathbb{K}\right)$ en traitant $M_3\left(\mathbb{K}\right)$ comme étant l'image de l'algèbre $U\left(sl(2)_q\right)$. Par construction la représentation $\pi\, :\, U\left(sl(2)_q\right) \longrightarrow M_3\left(\mathbb{K}\right)$ est un $U_q(sl(2))$-morphisme.

Grâce à notre représentation π et au Casimir de $\mathcal{SL}_{\hbar,q}\left(2\right)$, nous définissons la matrice :

$$\begin{aligned} Cas =& q^{-1}b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -q\,[2]_q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \end{pmatrix} + [2]_q^{-1}\, g\begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + qc\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & [2]_q^{-1}\, q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{[2]_q}\begin{pmatrix} q^2 g & -[2]_q\, qc & 0 \\ -b & \left(q^2-1\right)g & q^2 c \\ 0 & [2]_q\, qb & -g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons maintenant $L = Cas^t$.
Cette matrice et ses puissances sont étudiées dans [GLS], elles sont $U_q(sl(2))$-invariantes. De plus, notre matrice L vérifie une identité de Cayley-Hamilton (Cf. [GLS, GS2]). Nous introduisons alors une nouvelle action de $U_q(sl(2))$ sur les éléments $M \in M_3\left(\mathbb{K}\right)$ ainsi :

$$X \triangleright M = \left(X\left(M^t\right)\right)^t$$

où $X\left(M\right)$ est l'action définie précédemment, nous en arrivons au fait que la matrice L et toutes ses puissances sont $U_q(sl(2))$-invariantes.
Nous concluons alors avec la proposition suivante qui nous permet de munir l'idempotent e d'une action $U_q(sl(2))$-invariante.

Proposition :

e est égal à un trinôme de la matrice L :

$$e = [2]_q^{-2}\left(I - \frac{[2]_q^4}{q^2\rho_q^2}L^2\right).$$

Preuve :

L vérifie l'équation de Cayley-Hamilton suivante :

$$L^3 - q^2\,[2]_q^{-4}\,\rho_q^2 L = 0 \quad \left(\text{Rappelons que } \rho_q^2 = [2]_q\left([2]_q^{-1}\, g^2 + q^{-1}bc + qcb\right)\right).$$

L admet donc pour valeurs propres 0, $q\,[2]_q^{-2}\,\rho_q$ et $-q\,[2]_q^{-2}\,\rho_q$.
Nous utilisons alors le projecteur défini dans les articles [GLS, GS2] :

$$\frac{\left(L - q\,[2]_q^{-2}\,\rho_q I\right)\left(L + q\,[2]_q^{-2}\,\rho_q I\right)}{\left(0 - q\,[2]_q^{-2}\,\rho_q\right)\left(0 + q\,[2]_q^{-2}\,\rho_q\right)} = I - \frac{[2]_q^4}{q^2\rho_q^2}L^2.$$

Nous démontrons alors l'égalité :

$$I - \frac{[2]_q^4}{q^2\rho_q^2}L^2 = [2]_q^2\,e. \quad \blacksquare$$

Nous avons donc démontré qu'en définissant l'action du groupe quantique $U_q(sl(2))$ sur L et ses puissances, nous obtenons que l'idempotent e est $U_q(sl(2))$-invariant.
Nous pouvons donc conclure que l'opérateur de Maxwell sur l'algèbre $\mathbb{K}_q\,[\mathcal{H}]$ est $U_q(sl(2))$-invariant.
De manière évidente, nous pouvons dire la même chose des opérateurs de Maxwell sur les algèbres $\mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^3\right]$ et $\mathbb{K}_q\left[\mathbb{R}^4\right]$.

Bibliographie

[A] AKUESON P. *Géométrie de l'espace tangent sur l'hyperboloïde quantique*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, **XLII-1** (2001), 2-50. (Cité pages 6 et 87.)

[AG] AKUESON P., GUREVICH D. *Cotangent and tangent modules on quantum orbits*, Int. J. Mod. Phys. **B14** (2000), 2287-2509. (Cité page 6.)

[BB] BORDEMANN M., BURSZTYN H. *Deformation quantization of Hermitian vector Bundles*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), 349-365. (Cité page 6.)

[BK] BIBIKOV P.N., KULISH P.P. *Dirac operators on quantum $SU(2)$ group and quantum sphere*.

[BLT] BOROWIEC A., LUKIERSKI J., TOLSTOY V.N. *On twist quantification of $D = 4$ Lorentz and Poincaré Algebras*. (Cité page 8.)

[BR] BARUT A., RACZKA R. *Theory of Group Representations and Applications*, World Scientific, Singapore (1986). (Cité page 50.)

[C1] CONNES A. *Noncommutative geometry*, Academic Press, Inc, San Diego, CA, (1994). (Cité pages 6 et 7.)

[C2] CONNES A. *A shot survey of Noncommutative geometry*, J. Math. Phys. **42** (2000), 3832-3866. (Cité pages 6 et 7.)

[CP] CHARI V., PRESSLEY A. *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, (1994). (Cité page 57.)

[D] DIXMIER J. *Algèbres enveloppantes*, Editions Jacques Gabay, (1996).

[Dr] DRINFEL'D V.G. *'Quantum Groups'*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, (Berkeley, Calif., 1986), 798-820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987). (Cité page 1.)

[DGR] DONIN J., GUREVICH D., RUBTSOV V. *Quantum Hyperboloid and Braided Modules*, Algèbre Non Commutative, Groupes quantiques et invariants, Société Mathématique de France, Collection séminaires et congrès, No 2 (1997), 103-118.

[DMV] D'AVANZO A., MARMO G., VALENTINO A. *Reduction and unfolding for quantum systems : the hydrogen atom*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **2** (2005), 1043-1062. (Cité page 76.)

[FP] FADDEEV L., PYATOV P. *The Differential Calculus on Quantum Linear Groups*, Trans. Amer. Math. Soc., Ser. 2 **175** (1996), 35-47. (Cité page 6.)

[G] GUREVICH D. *Algebraic aspects of the Yang-Baxter equation*, English translation : Leningrad Math. J. **2** (1991), 801-828.

[G2] GOUREVITCH D. *Equation de Yang-Baxter et quantification des cocycles*, C. R. Acad. Sci. Paris, **310** (1990), 845-848. (Cité page 10.)

[GLS] GUREVICH D., LECLERCQ R., SAPONOV P. *q-Index on braided noncommutative spheres*, J. Geom. Phys. **53** (2005), 392-420. (Cité pages 101 et 102.)

[GPS1] GUREVICH D., PYATOV P., SAPONOV P. *Hecke Symmetries and Characteristic Relations on Reflection Equation Algebras*, Lett. Math. Phys. **41** (1997), 255-264. (Cité page 25.)

[GPS4] GUREVICH D., PYATOV P., SAPONOV P. *Representation theory of (modified) Reflection Equation Algebra of the $GL(m|n)$ type*, Algebra and Analysis 20 (2008), 70-133 (in Russian, English translation will be published in St Petersburg Math. J.). (Cité pages 2, 3, 8, 16, 21, 22 et 23.)

[GS1] GUREVICH D., SAPONOV P. *Quantum line bundles via Cayley-Hamilton identity*, J. Phys. A : Math. Gen. **34** (2001), 4553-4569.

[GS2] GUREVICH D., SAPONOV P. *Quantum line bundles on a noncommutative sphere*, J. Phys. A : Math. Gen. **35** (2002), 9629-9643. (Cité pages 101 et 102.)

[GS3] GUREVICH D., SAPONOV P. *Geometry of non-commutative orbits related to Hecke symmetries*, Contemporary Mathematics **433** (2007), 209-250. (Cité page 41.)

[GVF] GRACIA-BONDIA J.M., VARILLY J.C., FIGUEROA H. *Elements of Noncommutative Geometry* Birkhäuser Advanced Texts (2001). (Cité page 7.)

[IP] ISAEV A., PYATOV P. *Covariant differential complexes on quantum linear groups*, J. Phys. A : Math. Gen. **28** (1995), 2227-2246. (Cité page 6.)

[K] KASSEL C. *Quantum Groups*, Springer-Verlag, NY (1995). (Cité pages 55 et 62.)

[Ku] KULISH P.P. *Representations of q-Minkowski space algebra*, St. Petersburg Math. J. **6** (1995), 365-374. (Cité pages 1, 5, 6 et 29.)

[LS] LYUBASHENKO V., SUDBERY A. *Generalized Lie algebras of Type A_n*, J. Math. Phys. **39** (1998), 3487-3504. (Cité pages 4 et 62.)

[LWW] LOREK A., WEICH W., WESS J. *Non-commutative Euclidean and Minkowski structures* Z. Phys. C 76 (1997), 375-386. (Cité page 1.)

[Ma] MADORE J. *An introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications* (second edition) London Math. Society Lecture Nore series, 257. Cambridge University Press (1999).

[Me] MEYER U. *Wave equations on q-Minkowski space*, Comm. Math. Phys. **174** (1996), 249-264. (Cité page 1.)

[Mu1] MUDROV A. *Characters of $U_q\,(gl(m))$-reflection equation algebra*, Lett. Math. Phys **60** (2002), 283-291. (Cité page 3.)

[Mu2] MUDROV A. *On quantization of Semenov-Tian-Shansky Poisson bracket on simple algebraic groups*, Algebra Anal. **18** (2006), 156-172. (Cité page 41.)

[MM] MAJID S., MEYER U. *Braided Matrix structure of q-Minkowski space and q-Poincare group*, Z. Phys. C **63** (1994), 457-475. (Cité page 1.)

[OP] OGIEVTSKY O., PYATOV P. *Orthogonal and Sympleptic Quantum Matrix Algebras and Cayley-Hamilton Theorem for them*, arxiv : math/0511618. (Cité page 87.)

[R] ROSENBERG J. *Rigidity of K-theory under deformation quantization*, arxiv : q-alg/9607021. (Cité page 6.)

[S] SAPONOV P. *Weyl approach to representation theory of reflection equation algebra*, J.Phys. A : Math. Gen. **37** (2004), 5021-5046 ; math. QA/0307024. (Cité pages 16 et 27.)

[Si] SITARZ A. *Noncommutative differential calculus on the κ-Minkowski space*. (Cité page 8.)

[SW] SEIBERG N., WITTEN E. *String theory and noncommutative geometry*, J. High Energy Phys. 9 (1999), paper 32, 93 pp (electronic). (Cité page 7.)

[WZ] WESS J., ZUMINO B. *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*, Nuclear Physics B– Proceedings Supplements 18 (1991), 302-312. (Cité page 1.)

Notations

$\mathbb{K}$	le corps des réels $\mathbb{R}$ ou bien le corps des complexes $\mathbb{C}$
V	$\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$
$[\lambda]_q$	$[\lambda]_q := \frac{q^{\lambda}-q^{-\lambda}}{q-q^{-1}}$ sachant que $q \in \mathbb{K}$ avec $q \neq 1$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
R	tressage de V
I	endomorphisme identité sur l'espace vectoriel V
$\Lambda_{\pm}(V)$	composantes R-symétrique et antisymétrique associé à V et R
$\Lambda_{\pm}^{k}(V)$	composantes R-symétrique et antisymétrique homogènes de degré k
$\mathcal{P}_{\pm}$	séries de Hilbert-Poincaré associées à V et R
δ_i^j	symbole de Kronecker
ζ	$\zeta := q - q^{-1}$ sachant que $q \in \mathbb{K}$
R_{12}, R_{23}	$R_{12} = R \otimes I$ et $R_{23} = I \otimes R$
$Tr_{(k)}$	trace sur la k-ième composante du produit tensoriel d'un certain nombre d'espaces
$\mathcal{L}_{\hbar,q}, \mathcal{L}_q$	respectivement les algèbres mREA et REA associées à un tressage R_q
$Z(\mathcal{A})$	centre de l'algèbre $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}_{\hbar,q}^{c}$	hyperboloïde quantique associée au casimir $c \in \mathbb{K}$
$\langle E \rangle$	si E est un sous-ensemble de l'algèbre $\mathcal{A}$, c'est la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ engendré par E
$vect(E)$	si E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel W, c'est le sous espace vectoriel de W engendré par E
$\mathbb{K}[\mathcal{M}]$	algèbre coordonnée sur la variété affine régulière $\mathcal{M}$
$Vect(\mathcal{M})$	ensemble des champs de vecteurs sur la variété affine régulière $\mathcal{M}$