

THESE

présentée à

**Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut National Polytechnique de Grenoble**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
Mathématiques appliquées
Option : Recherche Opérationnelle

par

DRIDI Mohamed-Tahar



**ANALYSE DES DONNEES ORDINALES ET
MODELISATION EXPLICATIVE**



Thèse soutenue le 6 juin 1979 devant la commission d'examen

C. BENZAKEN

Président

B. MONJARDET
G. ROMIER
H. RAYNAUD

}
Examineurs

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président

Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CRABBE Pierre
SUNIER Jules

CERMO
Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM. SCHAEERER René	Cancérologie
Mme SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM. STOEIBNER Pierre	Anatomie pathologie
STUTZ Pierre	Mécanique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. : DEVINE Roderick	Spectro Physique
KANEKO Akira	Mathématiques pures
JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M. : ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)
---------------------	-----------------------------------

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1977-1978

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-présidents : M. René PAUTHENET
M. Georges LESPINARD

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Electronique - automatique
BESSON Jean	Chimie minérale
BLOCH Daniel	Physique du solide - cristallographie
BONNETAIN Lucien	Génie chimique
BONNIER Etienne	Métallurgie
* BOUDOURIS Georges	Electronique - automatique
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide - cristallographie
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique - automatique
COUMES André	Electronique - automatique
DURAND Francis	Métallurgie
FELICI Noël	Electronique - automatique
FOULARD Claude	Electronique - automatique
LANCIA Roland	Electronique - automatique
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire corpusculaire
LESPINARD Georges	Mécanique
MOREAU René	Mécanique
PARIAUD Jean-Charles	Chimie - physique
PAUTHENET René	Electronique - automatique
PERRET René	Electronique - automatique
POLOUJADOFF Michel	Electronique - automatique
TRAYNARD Philippe	Chimie - physique
VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
* en congé pour études	

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuël	Electronique - automatique
BOUVARD Maurice	Génie mécanique
COHEN Joseph	Electronique - automatique
GUYOT Pierre	Métallurgie physique
LACOUME Jean-Louis	Electronique - automatique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide - cristallographie

.../...

MM.	ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	ZADWORNY François	Electronique - automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	CHARTIER Germain	Electronique - automatique
	CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
	IVANES Marcel	Electronique - automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	MORET Roger	Physique nucléaire - corpusculaire
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie Physique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	BISCONDI Michel	Ecole des Mines St. Etienne (dépt. Métallurgie)
	BOOS Jean-Yves	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	DRIVER Julian	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)

.../...

MM.	KOBYLANSKI André	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LE COZE Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LESBATS Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LEVY Jacques	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	RIEU Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	SAINFORT	C.E.N. Grenoble (Métallurgie)
	SOUQUET	U.S.M.G.
	CAILLET Marcel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	COULON Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	GUILHOT Bernard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	LALAUZE René	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	LANCELOT Francis	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	SARRAZIN Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	SOUSTELLE Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	THEVENOT François	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	THOMAS Gérard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	TOUZAIN Philippe	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	TRAN MINH Canh	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)

E.N.S.E.R.G.

MM.	BOREL	Centre d'études nucléaires de Grenoble
	KAMARINOS	Centre national recherche scientifique

E.N.S.E.G.P.

M.	BORNARD	Centre national recherche scientifique
Mme	CHERUY	Centre national recherche scientifique
MM.	DAVID	Centre national recherche scientifique
	DESCHIZEAUX	Centre national recherche scientifique

Je voudrais exprimer

Ma profonde gratitude à Monsieur RAYNAUD qui m'a permis par son aide efficace, ses conseils, de mener ce travail jusqu'au bout.

A Monsieur BENZAKEN mes chaleureux remerciements pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Tous mes remerciements à Monsieur ROMIER qui a bien voulu accepter d'être membre du jury.

Toute ma reconnaissance à Monsieur MONJARDET, avec lequel j'ai eu de nombreux échanges d'idées, d'avoir bien voulu accepter d'être membre du jury.

Ses suggestions m'ont été précieuses dans l'accomplissement de ce travail.

Ma reconnaissance à Monsieur TERRIER et Monsieur KOHLER pour leur collaboration fructueuse et encouragement.

Mes meilleurs remerciements à Madame NEUMANN, Madame SOUILLARD ainsi que le personnel du Service Tirage pour l'excellente qualité de la présentation de cette thèse.

SOMMAIRE

	Page
INTRODUCTION	
<u>CHAPITRE I</u>	I
Théorème d'Arrow	I-1
Axiome d'indépendance	I-2
Les procédures majoritaires au seuil 5	I-4
Quelques propriétés des graphes de surclassement	I-6
La procédure "seuil max"	I-10
Une conséquence pour la procédure "seuil max"	I-11
<u>CHAPITRE II</u>	
FONCTIONS D.I.B.A.D.O.	
Introduction	II-1
A) Définitions, notations et résultats préliminaires	II-4
B) Fonctions D.I.B.A.D.O. et ordres partiels	II-8
Caractérisations des D.I.B.A.D.O. à valeurs dans $\{0, 1, \frac{1}{2}\}$	II-10
Conséquences	II-11
Caractérisations des pseudo-D.I.B.A.D.O. 2- éligibles	II-14
Caractérisation des pseudo-D.I. B.A D.O à valeurs dans $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\}$ 3-éligibles	II-16
C) Caractérisation des D.I.B.A.D.O. Pour un nombre d'objets inférieur ou égal à 5	II-
D) Algorithme pour la construction d'un état de l'opinion correspondant.	II-48
Heuristique pour la construction d'une D.I.B.A.D.O "proche" d'une pseudo D.I.B.A.D.O donnée.	II-52

La procédure "Max-min" et le problème de
recherche de tous les ordres totaux qui contiennent
un ordre partiel donné.

II-57

CHAPITRE III

GRAPHES ELIGIBLES

Deux classes de graphes éligibles	III-1
Éligibilité des graphes sans circuit	III-3
Éligibilité des graphes contenant des circuits	III-4
Éligibilité d'un préordre total selon la procédure "Seuil-max".	III-8
Construction d'un état de l'opinion correspondant à un graphe circuit pour un seuil admissible maximum.	III- 11

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION

Pour comprendre ou prédire des choix psychologues, économistes, théoriciens de la science politique font très souvent appel à l'analyse des données ordinales.

Notre thèse est au centre de ce domaine -nouveau en analyse des données, mais remontant, en pratique, au dix huitième siècle-.

L'étude des graphes de surclassement, graphes valués représentations de choix guidés par des critères multiples, nous a naturellement conduit vers certains modèles d'agrégation de critères ordinaux et à en étudier les propriétés peu connues.

C'est à cette occasion qu'il nous a été permis de voir combien les psychologues économistes, sociologues et politologues, utilisateurs de ces techniques les utilisaient en de ça de leurs capacités.

Pour eux et pour nous, les données accessibles, brutes ne sont guère éloquentes. La recherche de structures latentes plus facilement interprétables s'avère nécessaire.

Les modèles appliqués aux sciences sociales, jusqu'à une époque récente, étaient plutôt des modèles physico-chimiques appliqués "de force" à des situations où les nombres réels, la dérivabilité des fonctions et l'hypothèse du contenu n'avaient rien à faire. Dans la théorie du choix, il se trouve, au contraire que les ordres (totaux ou partiels) sur un ensemble fini, sont les structures les plus riches que l'on puisse exiger des données sans forcer la nature.

De plus, les structures latentes que l'on cherche pour pouvoir prendre des décisions ou trouver des interprétations pertinentes n'ont souvent besoin d'être que des ordres.

Par exemple, en psychologie sociale, un sondage peut fournir l'ensemble des fréquences de préférences entre objets pris deux par deux dans un ensemble fini ; c'est ce que l'on appelle "résultat d'une expérience de comparaisons par paires".

Un tel résultat n'est en général pas clair pour le décideur qui préférerait par exemple pouvoir dire "les observations montrent que, pour la population sondée, les objets sont rangés dans l'ordre de préférence suivant...".

Cette structure ordonnée serait indiscutablement plus exploitable, plus lisible qu'un graphe complet arbitrairement valué !

Notre travail a consisté à approfondir la recherche des structures latentes et des modèles qui les explicitent.

Le champ des applications des modèles considérés est sans doute restreint. Cependant ils se sont très tôt avérés indispensables à la description de situations "expérimentales" importantes.

C'est ce dont témoignent, par exemple les travaux, sources constantes d'intérêt pour nous, d'Arrow [1], de Guilbaud [43], Marschack [20] et Barbut, Monjardet [3].

Ce domaine mathématique, son formalisme original, les techniques un peu spécifiques de démonstration qu'il nécessite, la pauvreté de ses exigences axiomatiques expliquent peut-être les nombreuses démonstrations fausses, les conjectures sympathiques mais très éloignées des résultats exacts qui sont, eux, souvent paradoxaux.

Le lecteur trouvera donc dans cette thèse à la fois le rétablissement de certains résultats sous une forme exacte, la preuve de résultats et conjecture paradoxaux.

Nous espérons que le lecteur prendra à la lire le plaisir que nous avons eu à l'écrire.

x x x

Le premier chapitre reflète le début de notre recherche : il contient un exposé des propriétés générales des graphes de surclassement dont nous avons parlé et une condition suffisante pour qu'un graphe de surclassement soit sans circuit. Très naturellement il développe la formalisation d'une méthode employée, mais peu étudiée dans ses propriétés, la méthode que nous avons appelé "seuil max" clôt le chapitre.

Le second s'attaque à la recherche, proprement dite, de structures latentes : un graphe valué étant donné, de quelle manière raisonnable et dans quelle mesure peut-on lui associer un ensemble pondéré d'ordres totaux tel qu'il puisse en être considéré comme une synthèse.

A ce propos, nous avons établi le caractère erroné d'une conjecture de Marschack -pour tout ensemble de plus de 5 éléments-. Cette conjecture avait été démontrée 1970 [12] et même redémontré en 1972 [4].

L'obtention, en vue de l'"analyse" du graphe valué, de résultats généraux nous permette de caractériser les graphes valués admettant certaines structures latentes ordinales utiles pour d'éventuelles interprétations.

En particulier nous proposons un algorithme pour engendrer des "états de l'opinion" correspondant à la classe des graphes valués admissibles pour un nombre de sommets ≤ 5 , un algorithme pour rechercher les structures admissibles les plus proches d'une structure donnée et en quelque sorte accidentellement, un algorithme performant pour lister les ordres totaux qui contiennent un ordre partiel donné.

Enfin, Mc Garvey [21] a montré que tous les graphes peuvent être considérés comme des graphes de surclassement pour le seuil $1/2$. Après avoir précisé une classe de seuils admissibles pour un graphe donné, nous montrons qu'en général un graphe n'est pas éligible -n'est pas un graphe de surclassement- pour tous les seuils admissibles.

Nous montrons également au 3ème chapitre que tous les préordres totaux sont éligibles -susceptibles d'être issus de la procédure "seuil max"- et que l'effet Condorcet est possible sur n'importe quel ensemble d'objets de plus de deux éléments dès que le nombre de votants est supérieur ou égal à 4 avec cette procédure.

En outre, les chapitres II et III mettent en rapport certains problèmes de la théorie algébrique de l'analyse ordinale avec des problèmes combinatoires comme le problème de la dimension d'un ordre.

CHAPITRE I

Procédure à seuil et graphe de surclassement

CHAPITRE ITHEOREME D'ARROW :

Soit une assemblée à m votants qui doit se prononcer sur n candidats ($m, n \geq 3$).

On suppose que la règle du vote obéisse aux conditions suivantes :

a) Chacun des votants exprime son opinion par un ordre total sur les candidats et l'opinion collective (résultat du scrutin) est un ordre total.

b) Tous les ordres totaux sont admissibles.

c) Si dans l'opinion collective un candidat "a" était préféré à un candidat "b", alors dans tout scrutin où les mêmes votants préfèrent "a" à "b", l'issue du vote ne doit pas varier sur a, b .

d) La préférence collective relativement à un sous-groupe de candidats ne dépend que des préférences des votants relatives à ce sous-groupe.

e) Aucun votant ne peut imposer son ordre, quelles que soient les autres opinions individuelles.

Autrement dit :

Aucune des opinions individuelles n'est prise une fois pour toutes pour une opinion collective.

Arrow [1] a montré que ces conditions "innocentes", "démocratiques" ne sont pas conciliables !

Il faut donc abandonner l'une ou plusieurs des 5 conditions.

Ce résultat paradoxal a incité les chercheurs à la relaxation de l'une ou l'autre des conditions du théorème afin d'éviter l'impasse, tout en rendant plus ou moins compte de toutes les opinions individuelles dans une règle d'agrégation.

Bien avant, Condorcet^(*) (1785) proposa sa fameuse méthode d'élection dite "méthode majoritaire" qui consiste à établir la préférence collective à partir des ordres individuels de telle manière qu'un candidat "a" est préféré à un candidat "b" si et seulement si la majorité des votants a classé "a" avant "b" (au sens de l'ordre).

(*) "Essais sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendue à la pluralité des choix". Paris 1785

Cependant la relation de préférence collective établie par cette méthode n'est souvent pas un ordre -elle n'est pas transitive-, ce qui constitue un handicap à son application (ce phénomène est souvent désigné dans la littérature par le nom d'effet Condorcet).

Beaucoup de méthodes d'agrégation sont dérivées de la méthode majoritaires où l'un ou l'autre des conditions d'Arrow sont affaiblies.

La condition (b) a reçu une grande attention de la part des auteurs. On trouve dans la littérature des restrictions diverses de l'ensemble des ordres individuels, conduisant à l'application de la méthode majoritaire sans apparition de l'effet Condorcet.

Nous trouvons, entre autres, les conditions de Ward [30] Inada [16], Inada orienté [23], étoilement [27], ou la condition B(N) [18], etc, qui empêchent l'apparition de l'effet Condorcet.

Ces conditions ont parfois une interprétation psychologique.

Quant à la condition (d), elle est souvent adaptée sous une forme ou sous une autre, notamment dans les modèles de choix individuel multicritère (ne vérifiant pas nécessairement les autres conditions d'Arrow).

Dans ces modèles, dont la plupart se fondent sur la notion d'utilité, ex : modèle de Luce [49], cette condition est connue sous le nom d'"indépendance vis à vis des autres alternatives" ou "axiome d'indépendance".

Nous sommes attachés dans la première partie à cette dernière condition en présentant des exemples de faits courants qui la violent et en proposant un modèle d'agrégation ordinal qui semble avoir des interprétations plausibles dans le domaine du choix individuel -lorsque l'indépendance n'est pas réalisée-.

I-1 - AXIOME D'INDEPENDANCE

Dans ce travail, nous adoptons la description particulière de l'axiome d'indépendance qui consiste à dire que la comparaison entre deux éléments du même ensemble suivant un certain critère, ne doit pas être affectée par l'élargissement de l'ensemble ou la suppression d'éléments différents des deux éléments en question.

I-1-1 - Exemple

Soit $E = \{P_1, P_2\}$ l'ensemble de deux produits de consommation. Supposons qu'un individu mis en présence de E choisisse P_1 .

Soit $S = \{P_1, P_2, P_3\}$ l'ensemble obtenu en introduisant un troisième élément P_3 .

L'axiome d'indépendance exige que cet individu mis en présence de S préfère toujours P_1 à P_2 .

Cette notion d'indépendance est incompatible avec beaucoup de phénomènes courants, exhibant systématiquement des dépendances entre items.

Dans Tversky [29], Flament [44], on trouve des exemples de telles situations, où les modèles proposés sont des modèles à utilité. A notre avis, les modèles ordinaux sont plus aptes à décrire ou prédire le choix individuel.

Nous allons décrire deux situations expérimentales où l'analyse ordinale nous semble la plus pertinente, et où l'axiome d'indépendance n'est pas respecté.

Exemple de situations expérimentales qui ne vérifient pas l'axiome d'indépendance

I-1-2 - Exemple

Supposons qu'un agent commercial ait à choisir entre les trois postes suivants :

- 1) Concessionnaire de voitures dans la zone A.
- 2) Concessionnaire de voitures dans la zone B.
- 3) Concessionnaire de camions dans la zone C.

On peut supposer que l'agent commercial est également intéressé par les trois postes, le critère unique de l'agent étant l'espérance du profit.

Si les zones A et B sont voisines, et si l'entreprise décide de supprimer sa concession de la zone B, toutes choses étant égales par ailleurs, il est évident que l'agent commercial va être plus intéressé par le poste de la zone A qui offre plus de possibilité de développement, ce qui augmente forcément son profit probable justificateur du choix.

On constate ainsi que la suppression d'un item a entraîné la modification des préférences sur les items restants.

I-1-3 - Exemple

Supposons qu'une personne veuille voyager en période d'hiver : ayant à choisir entre les moyens de transport suivants :

Le train désigné par T, l'avion désigné par A.

Les critères subjectifs étant le confort et la rapidité.

L'individu jugerait alors T et A exaequos.

Introduisons le bateau comme 3ème moyen de transport possible.

Supposons que cette personne ait de mauvais souvenir du "mal de mer" ressenti lors de voyages précédents effectués par bateau, il serait plausible de prendre en compte un nouveau critère se joignant aux deux autres (tarif, rapidité) qu'on pourrait appeler confort.

En présence des 3 moyens de transport et du nouvel ensemble de critères il y a de fortes chances que ce voyageur choisisse le train qui lui ferait éviter tous les "maux" !

Il est clair que le nouveau choix violerait l'axiome d'indépendance.

I-1-4 - Remarque

L'exemple (I-1-2) (concessionnaire) peut être interprété d'une manière ordinale, à l'aide d'une hypothèse qui consiste à dire que le classement d'un bien est systématiquement amélioré lorsqu'il devient rare.

Une telle hypothèse nous a permis [6] de donner une adaptation ordinale du modèle de Tversky [29] qui utilise la notion d'utilité.

Le modèle adapté permet également d'interpréter un exemple d'une situation expérimentale qui viole l'axiome d'indépendance, dû à Debreu et relaté par Tversky [29].

Quant à l'exemple (I-1-3) il est facile à interpréter à l'aide des méthodes ordinales.

On pourrait vérifier sans peine que la méthode d'agrégation qu'on va présenter offre d'une manière simple une interprétation au non respect de l'axiome d'indépendance rencontré dans l'exemple (I-1-2).

I-2 - LES PROCEDURES MAJORITAIRES AU SEUIL s

I-2-1 - Définitions

Le mot bulletin sur un ensemble de candidats sera utilisé pour désigner un ordre total sur ces candidats.

On dira que B est un bulletin partiel d'un bulletin donné B si B est la restriction de B à un sous-ensemble particulier de S : dans un tel cas, on dira également que B contient B_1 .

On appelle état de l'opinion $E(S)$ sur S' une suite finie de bulletins correspondant à un scrutin particulier,

m désigne le nombre de votants, n celui des candidats : $m \gg 3, n \gg 3$.

P sera utilisé pour désigner la relation de préférence collective associée à $E(S)$; on écrit iPj si et seulement si i est préféré à j .

$m(i, j)$ désigne le nombre de votants ayant placé i avant j , et s un rationnel compris entre 0 et 1, $s \in \{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\}$.

I-2-2 - Procédure majoritaire au seuil s

On dit que P résulte d'une procédure majoritaire de seuil s , si elle est construite de la manière suivante :

$$iPj \iff m(i, j) \geq m.s \iff m_{ji} \leq (1-s)m.$$

I-2-3 - Graphe de surclassement

On appelle graphe de surclassement G_s associé à P (de seuil s) le graphe défini comme suit :

$$G_s = (S, A)$$

S désigne l'ensemble des sommets du graphe et est en bijection avec l'ensemble des candidats ;

A désigne l'ensemble des arcs et $(i, j) \in A \iff m(i, j) \geq m.s$.

Si s est le plus petit rationnel tel que $s \in \{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\}$, on obtient la procédure majoritaire simple (Méthode de Condorcet).

Pour $s = 1$ on obtient la règle d'unanimité pour laquelle la relation P n'est pas transitive.

La relation P n'est pas en général une relation de préordre total. On peut avoir des sommets incomparables.

Pour la plupart des auteurs, ce qui correspond à l'effet Condorcet dans cette procédure est l'apparition de circuits dans les graphes de surclassement.

Par ailleurs, en général, P n'est pas transitive.

I-3 - QUELQUES PROPRIETES DES GRAPHES DE SURCLASSEMENTI-3-1 - Lemme

Soit $G_s = (S, A)$ un graphe de suclassement tel que :

$$B_0 = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-2}, x_{k-1}), (x_{k-1}, x_k)\} \subseteq A$$

$B = (x_0, x_1, \dots, x_{k-2}, x_{k-1})$ étant un bulletin partiel dans l'état de l'opinion $E(S)$ correspondant à G_s , si m_1 cardinal de l'ensemble des bulletins contenant B_1 est tel que $m_1 > (1-s)m$, où m est le nombre total de votants, alors il existe un ensemble de bulletins contenant B_0 et dont le cardinal est supérieur ou égal à $[m_1 - m(1-s)] > 0$.

Preuve : (Cf. (E))

I-3-2 : Proposition

Soit $G_s = (S, A)$ un graphe de surclassement,

$P_\ell = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{\ell-1}, x_\ell)\}$ un chemin dans G_s de longueur ℓ ($|P_\ell| = \ell$) -un ℓ -chemin-.

Si $s > \frac{\ell-1}{\ell}$ alors le cardinal $|B_0|$ de l'ensemble des bulletins contenant $B_0 = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_\ell)$ est supérieur ou égal à $m[\ell s - (\ell-1)] > 0$.

Démonstration : On effectue la démonstration par induction sur ℓ .

Pour $\ell = 1$ la proposition est évidente. On peut vérifier facilement que la proposition est aussi vraie pour $\ell = 2$.

Supposons qu'elle soit vérifiée pour tout $(\ell-1)$ chemin avec $(\ell-1) \geq 2$, et démontrons qu'elle est alors vraie pour tout ℓ -chemins.

Soit $s > \frac{\ell-1}{\ell}$, $P_\ell = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell)$ un ℓ -chemin, on a :

$$s > \frac{\ell-1}{\ell} \Rightarrow s > \frac{\ell-2}{\ell-1}$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence, le nombre m_1 de bulletins contenant $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1})$ est supérieur ou égal à $m[(\ell-1)s - (\ell-2)]$.

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} s > \frac{\ell-1}{\ell} &\iff (\ell s - \ell > -1) \iff (\ell s - \ell - s + 2 > 1 - s) \\ &\iff m((\ell-1)s - (\ell-2)) > m(1-s). \end{aligned}$$

d'où

$$m_1 \geq m((\ell-1)s - (\ell-2)) > m(1-s).$$

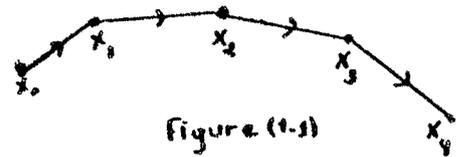
L'application du lemme (I.1) montre que :

$$|B_0| \geq m_1 - (1-s)m \geq m[(\ell-1)s - (\ell-2)] - (1-s)m = m[\ell s - (\ell-1)].$$

c.q.f.d.

I-3-3 - Exemple

Soit P_4 (figure (1-1) ci-contre)



un 4-chemins d'un graphe de surclassement

G_s tel que $s = \frac{80}{100} > \frac{3 \cdot \ell - 1}{4 \cdot \ell}$, m le nombre de votants est égal à 100. Le théorème précédent montre que le chemin $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ est voté par au moins $100[4 \cdot \frac{80}{100} - 3] = 20$ votants.

I-3-4 - Définition d'un " ℓ_α -rotatoire" associé à un k -uplet d'objets ($\alpha \leq k$)

Soit $C = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, x_1)\}$ un circuit dans un graphe.

On appelle " ℓ_α -rotatoire" de l'une des permutations circulaires représentées par les chemins maximaux de C_k , l'ensemble des ordres partiels représentés par les ℓ -chemins de C_k , dont chacun est muni de la pondération α .

Exemple :

Le " ℓ_3 -rotatoire" du quintuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ (fig. (1-2)) est égal à :

$$\{(x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_4), (x_3, x_4, x_5), (x_4, x_5, x_1), (x_5, x_1, x_2)\},$$

où chaque élément de T est pondéré par 3.

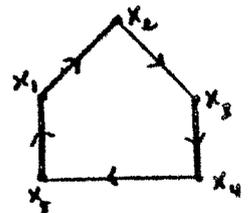


Figure (1-2).

QUELQUES COROLLAIRES DE [1-3-2]

1-3-5 - Corollaire : Conséquence immédiate (1-3-2) :

Une condition suffisante pour la non apparition de circuit dans un graphe de surclassement

Posons $\alpha = m[\ell s - (\ell - 1)]$, $s > \frac{\ell - 1}{\ell}$, $k \geq \ell$.

Une condition suffisante pour qu'un graphe de surclassement G_s associé à un état de l'opinion $E(s)$ ne contienne pas de circuit est que :

pour tout $k \geq \ell$, il n'est pas de k -uplet sur S admettant un " ℓ_α -rotatoire" contenu dans $E(s)$.

Remarque : Par rapport aux CIMM^(*) classiques où une configuration particulière entre objets est interdite, ici il s'agit d'une configuration pondérée.

(*) Conditions de Transitivité de la Méthode Majoritaire.

I-3-6 - Corollaire [47]

Si $s > \frac{\ell-1}{\ell}$ alors G_s ne contient pas de k circuit pour $3 \leq k \leq \ell$.

Démonstration : Soit G_s un graphe de surclassement correspondant à un état de l'opinion $E(s)$ avec $|E(s)| = m$, $s > \frac{\ell-1}{\ell}$.

Supposons que G_s contienne un k -circuit C_k avec $\ell \leq k$.

On a : $k \leq \ell \Rightarrow \frac{k-1}{k} \leq \frac{\ell-1}{\ell}$, car sinon on aurait :

$$\frac{k-1}{k} > \frac{\ell-1}{\ell} \iff \ell k - \ell > \ell k - k \iff \ell < k \text{ (impossible).}$$

L'application de (I.3.2) montre que tout $(k-1)$ -chemin de C_k est voté au moins $m[(k-1)s - (k-2)]$ fois.

Comme C_k contient k -chemins maximaux distincts, il résulte que : le nombre total de bulletins est supérieur ou égal à :

$$k \cdot m[(k-1)s - (k-2)] \leq m \iff s \leq \frac{k-1}{k}$$

Contradiction

Donc G_s ne comporte pas de circuit de longueur $\leq \ell$.

c.q.f.d.

I-3-7 - Corollaire

Soient G_s ($s > \frac{1}{2}$) un graphe de surclassement associé à un état de l'opinion $E(S)$, (a,b,c) un 2-chemin élémentaire de G_s .

Si les votants sont en nombre pair, deux au moins d'entre eux ont voté le chemin (a,b,c)

En effet :

On peut poser : $s = \frac{\frac{m}{2} + p}{m}$, où m est le nombre de votants, p un entier positif. En vertu de la proposition, le chemin (a,b,c) est voté par au moins :

$$m \left[2 \frac{\left(\frac{m}{2} + p\right)}{m} - (2-1) \right] = 2p \geq 2 \text{ votants.}$$

I-3-8 - Remarque

Si m est impair, cette propriété n'est en général pas vraie, en effet :

Soit $E(S)$ l'état de l'opinion suivant :

$$(x_1, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2) .$$

Si cet ensemble d'ordres correspondait à 3 votants, alors le graphe de surclassement G_s ($s = \frac{2}{3}$) serait un 3-circuit (fig. (1-3) ci-dessous).

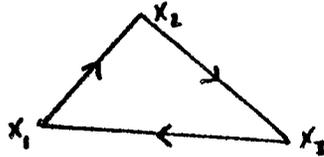


Fig. (1-3)

A chacun des chemins maximaux du circuit correspond un bulletin unique.

Cependant on peut démontrer aisément que si (x_1, x_2, x_3) est un 2-chemin dans $G_s = (S, A)$, $s > \frac{1}{2}$, tel que $\{(x_1, x_3), (x_3, x_4)\} \cap A = \emptyset$, alors il existe au moins 3 votants ayant voté (x_1, x_2, x_3) .

I-2-9 - Proposition

Soit un graphe de surclassement G_s associé à un état de l'opinion $E(S)$, si G_s comporte un 2-chemin (x_1, x_2, x_3) tel que x_1 et x_2 sont incomparables, alors pour m pair (resp. impair) m (le nombre de votants) doit être supérieur ou égal à 4 (resp. supérieur ou égal à 5).

Démonstration : G_s n'étant pas complet, on doit avoir $s > \frac{1}{2}$. D'autre part, G_s n'est pas transitif, donc $s < 1$. En outre $m \geq 2$ (corollaire I-3-7) si m est pair.

Or pour $m = 2$, aucune valeur ne peut convenir pour s de 1 et $\frac{1}{2}$ puisque s doit être strictement compris entre ces deux valeurs.

Il en résulte que $m \geq 4$, pour m pair. Si m est impair on a : $m \geq 3$ (d'après (I-3-8))

m ne peut être égal à 3, car s'il en était ainsi on aurait

$$\frac{1}{2} < s < 1, s \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right) \quad (\text{impossible})$$

Donc : $m \geq 5$ pour m impair

c.q.f.d.

I-4 - UNE METHODE D'AGREGATION ORDINALE : LA PROCEDURE "Seuil-max"

En présence d'un circuit dans le graphe de surclassement (intransitivité de la préférence collective), il semble raisonnable de parler d'éléments exaequos, en l'occurrence les sommets du circuit, au lieu d'admettre qu'il y a "incohérence", terme souvent utilisé dans la littérature, pour désigner l'effet Condorcet.

Dans le modèle ordinal en voie de description, nous convenons que dans la relation de préférence collective issue d'une procédure à seuil, les éléments appartenant à un même circuit sont exaequos.

I-4-1 - La procédure "Seuil-max"

La procédure "Seuil-max" est une procédure à seuil tel que le seuil s , correspondant ait la particularité d'être maximal pour la propriété suivante (P_0) :

$(P_0) := G_{s_1}$ contient un chemin passant par tous les sommets (pas nécessairement hamiltoniens).

Si l'on contracte les circuits du graphe G_s , ainsi obtenu, on obtient un graphe contenant un chemin hamiltonien unique (démonstration triviale cf. (6)).

En remplaçant dans l'ordre correspondant à ce chemin un sommet représentatif d'un circuit contracté par les sommets de ce circuit (en les considérant comme exaequos), on établit un préordre "collectif" total.

I-4-2 - Remarque

Le seuil s_1 conduisant à l'application de la procédure "Seuil-max" existe toujours, en effet :

L'ensemble des seuils vérifiant la propriété (P_0) n'est pas vide, il contiendrait au moins le seuil $\frac{m-1}{2} + 1$ si m est impair, $\frac{m}{2}$ si m est pair.

Le graphe de surclassement correspondant à un tel seuil est complet ; en conséquence il contient toujours un chemin hamiltonien^(*).

I-4-3 - Proposition

Quand la méthode majoritaire est applicable sans appartition de "l'effet Condorcet", la procédure "Seuil-max" donne le même préordre collectif que celui correspondant à cette méthode.

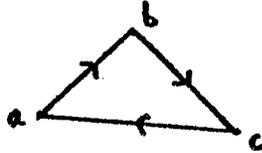
(*) Cf.; BERGE C. "Graphes et hypergraphes" 2e ed. 1973, Dunod.

Démonstration : Facile à voir.

I-4-4 - Une conséquence pour la procédure "Seuil-max"

La procédure "Seuil-max" viole l'axiome d'indépendance.

Exemple (1) : Pour 3 items a, b, c et 3 ordres individuels $\{(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)\}$
La procédure "Seuil-max" donne un graphe de surclassement réduit à un circuit,
pour le seuil $s_1 = \frac{2}{3}$



ainsi les éléments a, b, c sont exaequos.

Cependant, le retrait d'un des objets a, b, c quelconque, ferait établi un ordre total sur la paire d'objets restants. Ce qui constitue une violation de l'axiome d'indépendance.

I-4-5 - Exemple (2)

Soit $E(S)$ l'état de l'opinion suivant sur $S = \{a, b, c, d\}$:

$E(S)$ étant l'état de l'opinion suivant sur S :

Ordres	Pondérations
bacd	3
dbca	3
acdb	2
dbac	1
bcd a	1
cadb	1
bcad	1
dacb	1

On a : $m(b, a) = 9, m(b, c) = 9, m(c, d) = 8, m(d, b) = 8, m(a, d) = 7, m(a, c) = 7$

Il en résulte que le seuil s , correspondant à la procédure "Seuil-max" est égal à $\frac{8}{13}$.

Le graphe G_{s_1} est illustré dans la figure (1-4)

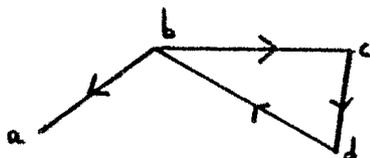


Fig. (1-4).

Le préordre collectif issu de la procédure est tel que : les éléments b, c, d soient exaequos et classés avant a .

. Si on supprime b , le graphe de surclassement obtenu pour le même seuil $\frac{8}{13}$ ne serait plus connexe.

En appliquant de nouveau la procédure "Seuil-max" sur la restriction de $E(S)$ à $\{a, c, d\}$, on obtient un seuil $s_2 = \frac{7}{13}$.

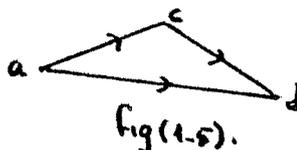


Fig (1-5).

Le graphe G_{s_2} (figure 1-5) est un graphe d'ordre total sur $\{a, c, d\}$, où "d" est classé en tête, "c" au milieu et "a" à la dernière position.

Ceci viole manifestement l'axiome d'indépendance, puisque la restriction du préordre collectif dans G_{s_1} faisaient classer c, d avant a .

c.q.f.d.

Remarque : Flament [11] a effectué une expérience psychologique qui a révélé des cas de violation de l'axiome d'indépendance. Le modèle proposé par Flament [11] utilise la notion d'utilité. A l'aide de la procédure "Seuil-max", nous avons donné une interprétation au phénomène ; on a utilisé l'exemple précédent (1-4-5).

CHAPITRE II

**Distribution binaire associée
à une distribution ordinale**

CHAPITRE II

INTRODUCTION

Soient S un ensemble fini d'objets et E un ensemble fini d'ordres totaux sur S , où chacun des ordres o_i de E est affecté d'un coefficient réel $p_i \in]0,1]$ tel que $\sum_i p_i = 1$.

Ces données peuvent signifier qu'en présence de l'ensemble S , chacun des ordres o_i a la probabilité p_i d'être adopté comme étant l'ordre de préférence d'un certain sujet. Dans ce cas E représente l'ensemble des ordres de préférences possibles du sujet sur l'ensemble S .

A partir de telles données il est évidemment facile de calculer pour tout couple (x,y) d'objets distincts de S la quantité $V(x,y)$, probabilité que l'objet x soit préféré à l'objet y .

Elle est égale à la somme des p_i des ordres contenant le couple (x,y) (la fonction V est dite distribution binaire associée à E).

Considérons le problème suivant :

Supposons qu'à tout couple (x,y) d'objets distincts de S soit associée une valeur numérique $V(x,y)$ par laquelle le sujet exprime l'intensité de sa préférence sur x par rapport à y .

En pratique, cette intensité peut être prise comme étant la fréquence théorique avec laquelle le sujet, en présence de $\{x,y\}$ préfère x à y .

Serait-il possible d'expliquer ces préférences binaires par une structure latente (probabilisation d'ordres sur les objets) qu'on suppose régir le choix du sujet ? (Pour plus de détails sur l'utilité de la question cf. Guilbaud [43], Marschak [20], qui étaient les premiers à proposer ce modèle).

La réponse à la question est d'importance en psychologie expérimentale.

Dans une expérience individuelle de comparaison par paires - on propose au sujet des paires d'objets - si deux objets A et B sont jugés exaequos, (dans 50% de cas le sujet préfère "A" à "B") et s'il en est de même de "B" et "C", les objets "A" et "C" ne sont pas jugés nécessairement exaequos par le même sujet.

Cependant le voeu de l'expérimentateur est de faire apparaître des structures d'ordres sur les objets, correspondant à la préférence globale.

Par ailleurs le désir des psychologues et des économistes est d'attribuer, à partir des comparaisons par paires, une valeur numérique à chacun des objets, exprimant l'intensité de préférence, nécessite la recherche d'une structure d'ordre total sur les objets.

D'autre part ce modèle peut être vu sous un autre angle :

Un sujet (ou une collectivité) établit des préférences binaires sur les objets, exprimées par des valeurs numériques v , en fonction d'un ensemble de critères. Chacun des critères C_i classe les objets selon un ordre de préférence, et un poids p_i est attribué à chaque critère, tel que $p_i \in]0,1]$ et $\sum p_i = 1$. L'intensité de la préférence (binaire) d'un objet x à un objet y est égale à la somme des poids des critères ayant classé x avant y .

Donc, traiter du problème inverse, reviendrait, une fonction V étant donnée (estimations des préférences binaires) à se demander s'il existe un ensemble d'ordres totaux munis de poids p_i (en bijection avec un ensemble de critères) tels que $\forall (x,y), V(x,y) = \frac{\sum_{R(x,y)} p_i}{R(x,y)}$, où $R(x,y)$ désigne l'ensemble des critères qui place x avant y .

Ces considérations justifient ce chapitre (II).

DISTRIBUTIONS BINAIRES ASSOCIEES A DES

DISTRIBUTIONS ORDINALES

A)

DEFINITIONS, NOTATIONS et RESULTATS PRELIMINAIRES :

Soient :

 $S = \{x, y, z, u, \dots\}$ un ensemble fini de cardinalité n $S^{(2)} = \{(x, y), x \in S, y \in S, x \neq y\}$ (ensemble de couples d'éléments distincts de S). T l'ensemble des ordres totaux^(*) sur S ($|T| = n!$).A.1. Distribution ordinale ou état de l'opinion :

Soient :

$$R = \{o_1, o_2, \dots, o_i, o_j, o_k, \dots, o_r\} \subseteq T,$$

une application $p : R \rightarrow]0, 1]$ qui à o_i fait correspondre p_i .

On dira que $E = (R, p)$ est un état de l'opinion (ou distribution ordinale) sur S . Autrement dit, un état de l'opinion sur S est un ensemble d'ordres totaux sur S , pondérés par des nombres réels $p_i \in]0, 1]$, tels que la somme des p_i soit égale à l'unité.

* Ici les "ordres totaux" ne vérifient pas la réflexivité, ils sont, en fait, la restriction d'ordres totaux à $S^{(2)}$

A.2. Fonction D.I.B.A.D.O. (distribution binaire associée à une distribution ordinale) :

Si l'on pose pour $x \neq y$:

$$R(x,y) = \{o_i \in R : x o_i y\} ,$$

$$R(y,x) = \{o_i \in R : y o_i x\} = \overline{R(x,y)}$$

L'application $V_E : S^{(2)} \rightarrow [0,1]$, qui à tout couple (x,y) d'éléments de $S^{(2)}$ fait correspondre $V_E(x,y) = \sum_{o_i \in R(x,y)} p_i$, sera dite D.I.B.A.D.O. associée à l'état de x .

Inversement si V est une D.I.B.A.D.O., toutes les fois qu'on notera E_V un état de l'opinion, cela signifiera que sa fonction D.I.B.A.D.O. est égale à V .

Soit E un état de l'opinion donné, V_E la D.I.B.A.D.O. associée, on a :

$$V_E(x,y) + V_E(y,x) = 1 \quad \forall (x,y) \in S^{(2)}$$

Soit $U \subseteq S^{(2)}$, on pose :

$$V_E(U) = \sum_{(x,y) \in U} V_E(x,y)$$

Exemple :

$$S = \{x,y,z,u\}$$

$$o_1 = (x,y,z,u), p_1 = 1/2$$

$$o_2 = (y,z,u,x), p_2 = 1/3$$

$$o_3 = (u,x,z,y), p_3 = 1/6$$

$E = (R,p)$ est un état de l'opinion ($R = \{o_1, o_2, o_3\}$, $p_i : R \rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ $o_i \rightarrow p_i$)

$$V_E(x,y) = p_1 + p_3 = \frac{1}{6} \quad , \quad V_E(u,y) = \frac{1}{6} \quad \text{etc ...}$$

A.3. Définition :

Soit C une partie de $S^{(2)}$ telle que :

$$C = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{\ell-1}, x_\ell), (x_\ell, x_1)\}$$

On dit que C est un ℓ -circuit de $S^{(2)}$ (ou un circuit de $S^{(2)}$, de longueur $\ell = |C|$). Quand il n'y aura pas de confusion à craindre, C sera désigné également par $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\ell-2}, x_{\ell-1}, x_\ell]$.

La vérité des deux lemmes suivants est simple à vérifier :

Lemme 1 :

$$\forall U \subseteq S^{(2)}$$

$$V_E(U) = \sum_{(x,y) \in U} \left(\sum_{o_i \in R(x,y)} p_i \right) = \sum_{o_i \in R} p_i |o_i \cap U|$$

Lemme 2 :

Soient o_i un ordre total sur S , C un ℓ -circuit de $S^{(2)}$, on a :

$$1 \leq |o_i \cap C| \leq (\ell-1)$$

A.4. Définition :

Soit un ordre total o_i sur S , et un ℓ -circuit C de $S^{(2)}$, on dit que C est o_i -saturé ou o_i sature C si et seulement si :

$$|o_i \cap C| = \ell-1$$

Proposition 1 : (Guilbaud, [12]) :

Soient V_E une D.I.B.A.D.O. et C un ℓ -circuit, on a :

$$1 \leq V_E(C) \leq (\ell-1), \quad \textcircled{1}$$

et de plus on a :

$$V_E(C) = \ell-1 \text{ si et seulement si } C \text{ est } o_i \text{ saturé pour tout } o_i \text{ de } E.$$

Démonstration :

Ceci est une conséquence immédiate des lemmes 1 et 2, en effet :

$$1 = \sum_{o_i \in R} p_i \leq V_E(C) = \sum_{o_i \in R} p_i |o_i \cap C| \leq (\ell-1) \sum_{o_i \in R} p_i = \ell-1.$$

Corollaire 1 :

Pour toute D.I.B.A.D.O. V_E et pour tout 3-circuit C on a :

$$1 \leq V_E(C) \leq 2 \quad (2)$$

Remarque :

Les propriétés du corollaire 1 et de la proposition 1 sont équivalentes^(**)

A.5. Définition :

Soient V_E une D.I.B.A.D.O., C un ℓ -circuit.

On dit que C est V_E -saturé si et seulement si : pour tout o_i de E , C est o_i -saturé ($V_E(C) = \ell-1$).

A.6. Fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.

On dira qu'une fonction $\varphi : S^{(2)} \rightarrow [0,1]$ est pseudo-D.I.B.A.D.O. si et seulement si :

$$C_1) \quad \forall (x,y) \in S^{(2)} : \varphi(x,y) + \varphi(y,x) = 1$$

$$C_2) \quad \forall (x,y,z)^* \in S : 1 \leq \varphi(x,y) + \varphi(y,z) + \varphi(z,x) \leq 2.$$

* On précise que conformément à l'usage $x \neq y \neq z$.

(**) Cf. MOUJARDET, B. Math.Sci.Hum. 43, 1973, p 55-70.

B) FONCTIONS PSEUDO-D.I.B.A.D.O. ET ORDRES PARTIELS
Rappels - définitions.

B.1. Ordre partiel

Soit P une relation binaire sur S .

On dira que P est un ordre partiel sur S si et seulement si elle est :

réflexive : si $x \in S$ alors xPx ,

Antisymétrique : si $x, y \in S$, xPy et yPx alors $x = y$;

Transitive : si $x, y, z \in S$, xPy et yPz alors xPz .

B.2. La relation d'incompatibilité associée à P qu'on désigne par I est définie comme suit :

$$x, y \in S, xIy \iff \{(x, y), (y, x)\} \cap P = \emptyset$$

(si la relation I est vide, l'ordre P est un ordre total).

B.3. Définition : Dushnik, Miller [8], 1941

Soit P un ordre partiel sur S .

On dit qu'un ordre total o qui contient (ou prolonge) P est séparant, ssi :

$$\exists x, y, z \in S \text{ tq } x P y \text{ avec } xI_p z, yI_p z \text{ et } xoz, zoy.$$

B.4. Définition : Dushnik, Miller [8], 1941

La dimension d'un ordre partiel P sur S est définie comme étant la cardinalité minimale d'un ensemble d'ordres totaux (sur S) d'intersection P - on dira qu'ils réalisent P .

Par ailleurs il résulte d'un théorème de Szpilrajn [26] que pour tout ordre partiel P , il existe toujours un ensemble d'ordres totaux qui réalisent P .

Fonctions pseudo-D.I.B.A.D.O. et ordres partiels

Soient Q l'ensemble des ordres partiels sur S ,
 F l'ensemble des applications pseudo-D.I.B.A.D.O. à valeurs
dans $\{0, 1, 1/2\}$

A tout élément p de Q on associe une image φ_p dans F définie
comme suit :

$$\forall x \neq y \text{ tel que } x P y \text{ on posera } \varphi_p(x, y) = 1, \varphi_p(y, x) = 0$$

$$\forall x \neq y \text{ tel que } x I y \text{ on posera } \varphi_p(x, y) = \varphi_p(y, x) = 1/2$$

On voit immédiatement que φ_p appartient effectivement à F .

Réciproquement on constate que tout élément φ de F est l'image
d'un élément unique P_φ de Q donné par :

$$\varphi(x, y) = 1, \varphi(y, x) = 0 \implies x P_\varphi y$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} = \varphi(y, x) \implies x I_{P_\varphi} y.$$

On vient d'établir une bijection entre les ordres partiels sur S
et les fonctions pseudo-D.I.B.A.D.O. $\varphi : S^{(2)} \rightarrow \{0, 1, \frac{1}{2}\}$.

B.5. Définition :

On dit que φ est une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O. ordinale si
elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \frac{1}{2}\}$.

Théorème 1 Duschnik, Miller [8], 1941

Soit P un ordre partiel sur S ;
les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① P est de dimension > 2
- ② Tout ordre total contenant P est séparant.

Proposition 2

Soient P un ordre partiel sur S , φ_P sa pseudo-D.I.B.A.D.O. ordinale associée, o un ordre total contenant P , alors :

o séparant $\iff \exists$ un 3-circuit φ_P -saturé et non o -saturé.

Démonstration :

Si o est un ordre total contenant P alors :

" o est séparant" équivaut à dire d'après la définition (B.3) que :

$\exists x, y, z \in S$ tel que :

xPy et xIz , zIy avec xoz et yoz .

ou d'une manière équivalente :

le circuit $C = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ est φ_P -saturé

$$(\varphi_P(C) = \varphi_P(x, y) + \varphi_P(y, z) + \varphi_P(z, x) = 2) \text{ et } |C \cap o| = 1.$$

c.q.f.d.

Corollaire 2 :

Pour un ordre partiel P sur S on a :

$\dim(P) \leq 2 \iff$ Il existe un ordre total o contenant P tel que tous les 3-circuits φ_P -saturés sont o -saturés.

Théorème 2 :

Soit P un ordre partiel, φ_P sa fonction ordinale associée, on a :

φ_P D.I.B.A.D.O. $\iff \dim P \leq 2$.

Démonstration :

(\Rightarrow) : Supposons que φ_p soit une D.I.B.A.D.O.

Soit E_{φ_p} un état de l'opinion correspondant.

D'après la proposition (1) tout 3-circuit φ_p -saturé est o_i saturé, pour tout o_i de E_{φ_p} .

En outre tout ordre o_i de E_{φ_p} contient nécessairement P puisque :

$$(x,y) \in P \iff \varphi_p(x,y) = 1 \iff (x,y) \in o_i \quad \forall o_i \in E_{\varphi_p}.$$

Par conséquent il existe un ordre total o contenant P tel que tous les 3-circuits φ_p -saturés soient o -saturés, ce qui montre d'après le corollaire 2) que P est de dimension inférieure ou égale à 2.

(\Leftarrow)

Si P est partiel de dimension 2, désignons par o_1 et o_2 deux ordres totaux réalisant P .

Si l'on attribue à o_1 et o_2 le poids $1/2$, il n'est pas difficile de vérifier que l'état de l'opinion E :

$$E = (R, p) , \quad R = \{o_1, o_2\} , \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

a pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction φ_p .

Par ailleurs si P est un ordre total (de dimension 1), il est clair que φ_p est une D.I.B.A.D.O., l'état de l'opinion correspondant est formé de l'ordre total P pondéré par 1.

c.q.f.d.

CONSEQUENCES du théorème (2) :

Avant de tirer quelques conséquences du théorème (2), rappelons le résultat suivant :

Théorème 3 : [Hiraguchi 1955, [14]]

Soit P un ordre partiel sur S, $|S| \geq 4$.

On a :

$$\dim(P) \leq \frac{|S|}{2} .$$

Corollaire 3 :

Pour $|S| \leq 5$ on a :

$$\dim(P) \leq 2 .$$

Par ailleurs, Hiraguchi [15], montre qu'il n'existe que 2 ordres de dimension 3 sur un ensemble à 6 éléments.

Leurs diagrammes de Hass sont représentés à la figure (B.1.)

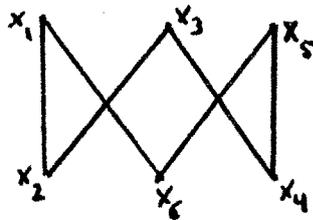


Figure 1

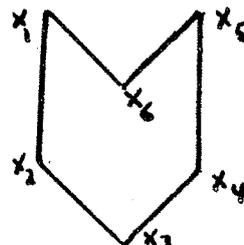


Figure 2

Figure (B.1.)

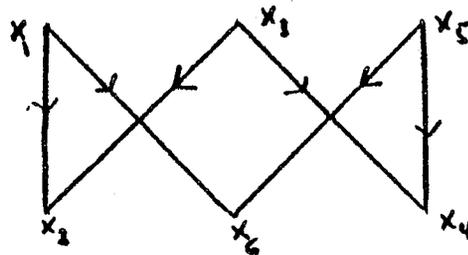
Proposition 3 :

Pour un ensemble S de cardinalité ≥ 6 , il existe des fonctions $\varphi : S^2 \rightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, pseudo-D.I.B.A.D.O. et non D.I.B.A.D.O.

Démonstration :

Il suffit de montrer l'existence d'une telle fonction φ pour un ensemble S de cardinalité égale à 6.

Le graphe ci-dessous représente l'ordre partiel P correspondant à la figure 1



Représentons la fonction ordinale φ_P , dans une matrice $\varphi_P(i, j)$ 6×6 , telle que la case (x_i, x_j) contienne la valeur $\varphi_P(x_i, x_j)$

On obtient le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1	1/2	1/2	1/2	1
x_2	0		0	1/2	1/2	1/2
x_3	1/2	1		1	1/2	1/2
x_4	1/2	1/2	0		0	1/2
x_5	1/2	1/2	1/2	1		1
x_6	0	1/2	1/2	1/2	0	

L'ordre P étant de dimension $3 > 2$, il résulte d'après le théorème 2 que la fonction φ_P n'est pas D.I.B.A.D.O.

c.q.f.d.

Remarque :

La proposition précédente permet de construire des contre-exemples^(*) à une conjecture de Marschak [20], 1959, et un théorème de Guilbaud [42], 1970 sur n'importe quel ensemble de plus de 5 éléments.

B.6. Test d'une fonction φ_p D.I.B.A.D.O.

P. Duschik et Miller, 1941, ont montré qu'un ordre partiel P sur S est de dimension^(*) 2 si et seulement si la relation d'incomparabilité qui lui est associée est une relation de comparabilité, c'est-à-dire que les arêtes du graphe $G = (S, E)$ tel que $(x, y) \in E$ ssi xIy , peuvent être orientés de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre.

D'autre part, on trouve dans [40] une procédure simple pour tester si un graphe donné est de comparabilité.

Par conséquent on peut facilement tester si une fonction φ_p est D.I.B.A.D.O., car ceci revient d'après le théorème (2) à tester si I_p est une relation d'incomparabilité.

B.7. Caractérisation des pseudo-D.I.B.A.D.O. 2-éligibles

B.7.1. Définition

Soit $V : S^2 \rightarrow [0, 1]$ une pseudo-D.I.B.A.D.O. Nous dirons que V est k-éligible ($k \in \mathbb{N}$) si et seulement si il existe un état de l'opinion E_V associée à V tel que $|E_V| = K$. Nous allons caractériser les "pseudo-D.I.B.A.D.O." 2-éligibles.

Il est clair que toute état de l'opinion E dont la cardinalité est inférieure ou égale à deux est tel que sa fonction D.I.B.A.D.O. V prenne 2 valeurs distinctes au moins et quatre au plus : $p_2, 0, 1, p_1$.

(*) Il existe diverses caractérisations d'un ordre de dimension 2 ; à ce sujet nous renvoyons le lecteur à la référence [2] ou [3].

(*) (*) Nous trouvons dans [22] un contre exemple sur 13 éléments.

On peut ainsi distinguer 3 cas :

a) V prend 2 valeurs distinctes et la caractérisation n'est pas difficile.

b) V prend 3 valeurs distinctes et l'ensemble de ces valeurs est alors nécessairement confondu avec $\{0, 1, 1/2\}$, le problème de caractérisation correspondant à un tel cas est résolu par le théorème 2) du chapitre II.

c) V prend 4 valeurs distinctes dans l'ensemble $(0, 1, p_1, p_2 \mid p_1 + p_2 = 1)$;

dans ce cas le problème peut être également résolu sans difficulté à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 4 :

Soient : $v : S^{(2)} \rightarrow \{0, 1, p_1, p_2 \mid p_1 + p_2 = 1\}$ une pseudo-D.I.B.A.D.O., E_V un état de l'opinion correspondant.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- ① V est D.I.B.A.D.O. et $|E_V| = 2 \quad \forall E_V$.
- ② $P_1 = \{(i_1, j_1) \in S^{(2)} \mid v(i_1, j_1) = p_1\}$ est un ordre partiel.
- ③ $P_2 = \{(i_2, j_2) \in S^{(2)} \mid v(i_2, j_2) = p_2\}$ est un ordre partiel.

Démonstration :

② \iff ③ : facile, en effet : $v(i, j) = p_1 \iff v(j, i) = p_2$
 P_2 est donc l'ordre inverse de P_1 .

② \implies ① : Supposons que P_1 soit un ordre partiel;

Remarquons que $P_0 = \{(i_0, j_0) \mid v(i_0, j_0) = 1\}$ est un ordre partiel disjoint de P_1 et tel que $o_1 = P_1 \cup P_0$ soit un ordre total.

Il en est de même pour $o_2 = P_2 \cup P_0$;

Affectons à o_1 et o_2 respectivement les poids p_1 et p_2 , on obtient ainsi un état de l'opinion, dont la fonction D.I.B.A.D.O. associée coïncide avec v .

① \implies ② :

Si V est une fonction D.I.B.A.D.O., et il existe E_V un état de l'opinion associé tel que $|E_V| = 2$ et $V \in \{0, 1, p_1, p_2\}$ désignons par o_1 et o_2 les ordres de E_V .

Sans perte de généralité on peut supposer que p_1 et p_2 sont les poids respectifs.

On voit que p_1 est un ordre partiel, en effet :

$$P_1 = o_1 - o_2 = o_1 \cap (\text{ordre inverse de } o_2).$$

c.q.f.d.

B.8. Caractérisation des pseudo-D.I.B.A.D.O. 3-éligibles

La caractérisation des pseudo-D.I.B.A.D.O. K -éligibles pour $k \geq 4$, paraît bien difficile, dans le cas général.

Nous venons de caractériser les pseudo-D.I.B.A.D.O. 2-éligibles.

Nous allons caractériser les pseudo-D.I.B.A.D.O. à valeurs dans $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ qui sont 3-éligibles. L'importance du théorème obtenu en nombre de lignes de démonstration nous semble très supérieure à son importance théorique ! Nous l'avons donc présenté de manière détaillée surtout afin de donner au lecteur une idée de la difficulté du problème.

B.8.1. Définition : Soit $V : S^{(2)} \rightarrow \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ une pseudo-DIBADO.

On associe à V le graphe $G_{2/3} = (S, A)$ tel que :

$$(x, y) \in A \iff v(x, y) \geq \frac{2}{3}$$

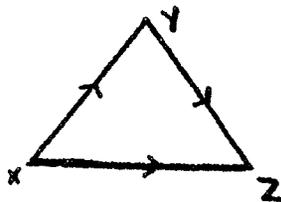
Le graphe est complet et antisymétrique, en effet :

$$\forall x, y \in S \quad v(x, y) + v(y, x) = 1 \text{ et } v(x, y), v(y, x) \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$$

entraîne que $v(x, y) \geq \frac{2}{3}$ ou $v(y, x) \geq \frac{2}{3}$.

Soit $E_0 \subseteq A$ un sous ensemble d'arcs de $G_{2/3}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- ① E_0 est un ordre de dimension 2, contenant tous les arcs-unités
- ② tout 3-circuit de $G_{2/3}$ a une intersection non vide avec E_0
- ③ E_0 ne contient pas de sous graphe isomorphe au graphe ci-dessous.



tel que $v(x, y) = v(y, z) = \frac{2}{3}$ et $v(x, z) = 1$.

- ④ $\forall x, y, z \in S$ tels que :
 $v(x, y) = v(y, z) = v(x, z) = \frac{2}{3}$ et $(x, z) \in E_0$ alors $(x, y) \in E_0$
ou $(y, z) \in E_0$.
- ⑤ $\forall x, y, z, \in S$
 $[v(x, y) = 1 \text{ (resp. } v(x, y) = \frac{2}{3}), v(y, z) = \frac{2}{3} \text{ (resp. } v(y, z) = 1),$
 $(x, z) \in E_0] \implies (y, z) \in E_0$.

Tout ensemble E_0 de A vérifiant les 5 propriétés ci-dessus sera dit ordre principal.

Théorème 4 :

Soit $V : S^{(2)} \rightarrow \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ une pseudo-D.I.B.A.D.O. ;

les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) V est 3-éligible
- b) $G_{2/3} = (S, A)$ admet un ordre principal E_1 .
- c) $G_{2/3}$ admet 3 ordres principaux E_1, E_2, E_3 tels que :

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = A, \quad \bigcap_{i=1}^3 E_i = \{(x, y) \mid V(x, y) = 1\}$$

Lemme :

Si $V : S^{(2)} \rightarrow \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ est 3-éligible, alors tout état de l'opinion $E(S) : (|E(S)|=3)$ correspondant est tel que les pondérations associées à ses ordres sont égales à $\frac{1}{3}$.

Démonstration : Soient $E(S)$ un état de l'opinion correspondant à V tel que $|E(S)| = 3, \{o_1, o_2, o_3\}$ l'ensemble des ordres de $E(S)$ dont les pondérations respectives p_1, p_2, p_3 sont non nulles.

Il existe un couple (x_0, y_0) appartenant à l'intersection exclusive de deux ordres de $E(S)$. En effet : $|E(S)| = 3$ entraîne l'existence dans E de 2 ordres différents qu'on désigne par o_1, o_2 . Par conséquent, il existe un couple (x, y) tel que : $(x, y) \in o_1 - o_2$ et $(y, x) \in o_2 - o_1$. o_3 étant un ordre total, il vient $(x, y) \in o_1 \cap o_3 - o_2$ ou $(y, x) \in o_2 \cap o_3 - o_1$. Ce qui prouve qu'il existe un couple qui appartient à l'intersection exclusive de 2 ordres qu'on désignera par o_2, o_3 .

Par ailleurs il existe un autre couple (x_1, y_1) appartenant à l'intersection exclusive de 2 autres ordres qu'on désigne par o_1, o_2 .

S'il n'en était pas ainsi tout couple (x, y) de $S^{(2)}$ appartiendrait soit à zéro ordre, à $o_2 \cap o_3$ exclusivement, à $o_2 \cap o_3 \cap o_1$, ou à o_1 .

Donc tout couple appartiendrait à zéro ordre, à o_1 ou à $o_2 \cap o_3$.

On aurait donc : $\forall (x, y) \in S^{(2)} (x, y) \in o_2 \cap o_3$ ou $(y, x) \in o_2 \cap o_3$.

Comme $o_2 \cap o_3$ est un ordre, et de plus c'est une relation totale, o_2 et o_3 sont nécessairement confondus (contradiction).

On est donc dans l'une des situations suivantes :

$$\text{I } (V(x_0, y_0) = p_2 + p_3 = \frac{2}{3}, p_1 = \frac{1}{3}), (V(x_1, y_1) = p_1 + p_2 = \frac{2}{3}, p_3 = \frac{1}{3}) \implies p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{II } (V(x_0, y_0) = p_2 + p_3 = \frac{2}{3}, p_1 = \frac{1}{3}), (V(x_1, y_1) = p_1 + p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{2}{3}) \implies p_2 = 0 \text{ (impossible)}$$

$$\text{III } (V(x_0, y_0) = p_2 + p_3 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{2}{3}), (V(x_1, y_1) = p_1 + p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{2}{3}) \implies p_2 = -\frac{1}{3} \text{ (impossible)}$$

$$\text{IV } (V(x_0, y_0) = p_2 + p_3 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{2}{3}), (V(x_1, y_1) = p_1 + p_2 = \frac{2}{3}, p_3 = \frac{1}{3}) \implies p_2 = 0 \text{ (impossible)}$$

Ce qui montre que la seule possibilité est : $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

c.q.f.d.

Démonstration du théorème :

a) \implies c) : soit V une pseudo-D.I.B.A.D.O. 3-éligible à valeurs dans

$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$. Soit $E(S)$ - un état de l'opinion associée à V tel que $|E(S)| = 3$,

Soit $\{o_1, o_2, o_3\}$ l'ensemble des ordres de $E(S)$.

D'après le lemme précédent les pondérations des ordres de $E(S)$ sont égales à $\frac{1}{3}$.

Soit $E_1 = o_1 \cap o_2$; $E_2 = o_2 \cap o_3$; $E_3 = o_1 \cap o_3$.

E_1 est un ordre principal, en effet :

① L'ordre $o_1 \cap o_2$ est évidemment de dimension 2, puisque $o_1 \neq o_2$

$$\begin{aligned} o_1 \cap o_2 \text{ contient les arcs-unités car } V(x,S) = 1 &\implies (x,S) \in o_1 \cap o_2 \cap o_3 \\ &\implies (x,S) \in o_1 \cap o_2 \end{aligned}$$

② Soit $C = [xyz]$ un 3-circuit de $G_{2/3}$.

Il est évident que tout arc de C appartient à $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.

Et de plus 2 arcs de C ne peuvent pas appartenir simultanément à l'intersection exclusive de deux ordres qu'on désigne par o_1, o_2 car s'il en était ainsi on aurait : $\{(x,y), (y,z)\} \in o_1 \cap o_2 \implies (x,z) \in o_1 \cap o_2$. ($o_1 \cap o_2$ est un ordre

Il en résulterait que $V(x,z) = \frac{2}{3}$, ce qui contredirait l'hypothèse selon laquelle $V(z,x) = \frac{2}{3}$ ($(z,x) \in C$).

Par conséquent $E_1 \cap C \neq \emptyset$ (et $E_2 \cap C \neq \emptyset$ et $E_3 \cap C \neq \emptyset$)

③ Si $E_1 = o_1 \cap o_2$ contient un sous graphe isomorphe au graphe



avec $V(x,y) = V(y,z) = \frac{2}{3}$ et $v(x,z) = 1$.

On constate alors que : $\{(z,y), (y,x), (x,z)\} \subseteq o_3$,

ce qui est impossible (transitivité non vérifiée).

④ et ⑤ peuvent être vérifiées d'une manière analogue à ③.

c) \implies b) évident.

b) \implies a) Soit $v : S^{(2)} \rightarrow \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ une pseudo-D.I.B.A.D.O. telle que $G_{2/3}$ admette un ordre principal E_0 .

E_0 étant de dimension 2, il existe 2 ordres totaux o_1, o_2 qui réalisent E_0 . Attribuons à o_1 et o_2 le poids $\frac{1}{3}$.

On définit R_1, R_2, R_3 de la manière suivante :

$$R_1 = \{(x, y) \in S^{(2)} \mid v(x, y) = 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid (y, x) \in E_0 - R_1\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid v(x, y) = \frac{2}{3}, (x, y) \notin o_1 \cap o_2 = E_0\}$$

La relation $o_3 = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ est une relation d'ordre total, en effet :

i) Il n'est pas difficile de vérifier que o_3 est antisymétrique et totale.

ii) Transitivité :

si $(x, y) \in o_3, (y, z) \in o_3$ on a les possibilités suivantes :

$$\bullet (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_1 \implies v(x, y) = v(y, z) = 1 \implies v(x, z) = 1$$

(v est pseudo-D.I.B.A.D.O.), ce qui montre que $(x, z) \in R_1$.

$$\bullet (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2 \iff v(x, y) = 1, (v(y, z) = \frac{1}{3}, (z, y) \in E_0)$$

si $(x, z) \in R_1$, on a évidemment $(x, z) \in o_3$

si $(x, z) \notin R_1$ on a soit : $(v(x, z) = \frac{2}{3} \text{ et } v(z, y) = \frac{2}{3},$

$(z, y) \in E_0) \implies (x, z) \notin E_0$ (condition ③) donc $(x, y) \in R_3 \subseteq o_3$

soit $v(x, z) = \frac{1}{3}$ et $(z, x) \notin R_1$ (condition ⑤), donc $(x, z) \in R_2$.

. $(x,y) \in R_1, (y,z) \in R_3 \iff V(x,y) = 1, (V(y,z) = \frac{2}{3}, (y,z) \notin E_0)$

donc $V(x,z) \geq \frac{2}{3}$ (V est pseudo-D.I.B.A.D.O. : si $V(x,z) \leq \frac{1}{3}$,

la valeur du circuit $[xyz]$ est > 2).

Si $V(x,z) = 1$, alors $(x,z) \in R_1 \subseteq O_3$.

sinon, on a $V(x,z) = \frac{2}{3}$, et $(x,z) \notin E_0$ (condition (5))

donc $(x,z) \in R_3 \subseteq O_3$.

. $(x,y) \in R_2, (y,z) \in R_3 \iff (V(x,y) = \frac{1}{3}, (y,x) \in E_0),$

$(V(y,z) = \frac{2}{3}, (y,z) \notin E_0)$; si $V(x,z) = 1$, alors $(x,z) \in R_1 \subseteq O_3$;

sinon on a :

soit $V(x,z) = \frac{2}{3}$, alors $(x,z) \notin E_0$ nécessairement (sinon

$(y,x) \in E_0$ et $(x,z) \in E_0 \implies (y,z) \in E_0$ (contradiction)), ce qui

montre que $(x,z) \in R_3 \subseteq O_3$;

soit $V(z,x) = \frac{2}{3} \implies (z,x) \in E_0$ (condition (4)) d'où $(x,z) \in R_2$

on ne peut avoir $V(z,x) = 1$, car

$[(z,x) \in E_0, (y,x) \in E_0, \text{ avec } V(z,x) = 1 \text{ et } V(y,z) = \frac{2}{3}]$

entraîne $(y,z) \in E_0$, d'après la condition (5), ce qui

contredit le fait que $(y,z) \in R_3$.

. $(x,y) \in R_3, (y,z) \in R_3 :$

donc $V(x,y) = V(y,z) = \frac{2}{3}$ et $(x,y) \notin E_0, (y,z) \notin E_0$

si $(x,z) \in R_1$, alors $(x,z) \in O_3$.

sinon, on a l'une des situations suivantes :

α) $(V(x,z)) = \frac{2}{3}$, $(x,z) \in E_0$, ce qui est impossible d'après la condition (4) ,

par conséquent $V(x,z) = \frac{2}{3} \implies (x,z) \notin E_0 \implies (x,z) \in R_3 \subseteq O_3$.

β) $V(x,z) = \frac{1}{3}$, comme le circuit $C = \{(x,y), (y,z), (z,x)\}$ a une intersection non vide avec E_0 , et $(x,y), (y,z) \notin E_0$,

on a : $(z,x) \in E_0$, $(z,x) \notin R_1$,

d'où $(x,z) \in R_2 \subseteq O_3$.

Par ailleurs on ne peut avoir $V(x,z) = 0$, sinon on aurait

$V(x,z) + V(y,z) + V(z,x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 > 2$, ce qui est impossible puisque V est pseudo-D.I.B.A.D.O.

Enfin remarquons que si l'ordre de l'appartenance des couples (x,y) , (y,z) est inversé, dans chacun des 6 cas, on peut procéder d'une manière analogue pour établir la transitivité.

Il n'est pas difficile de vérifier que les ordres O_1, O_2, O_3 munis de poids égaux à $\frac{1}{3}$ forment un état de l'opinion ayant pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction V .

c.q.f.d.

Remarque :

A partir d'un tournoi valué $(G_{2/3})$, associé à une pseudo-D.I.B.A.D.O. V , à valeurs dans $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, le théorème précédent permet de tester si V est 3-éligible.

En effet, d'après ce théorème, V est 3-éligible ssi $G_{2/3}$ admet 3 ordres principaux E_1, E_2, E_3 .

La procédure proposée consiste à donner la marque $(1,2,3)$ aux arcs-unités. Tout autre arc de $G_{2/3}$ recevrait la marque 1, 2 ou 3 de telle sorte que les arcs ayant le numéro i forment un ordre principal E_i (cf. définition (B.8.1.)), si V est 3-éligible. $1 \leq i \leq 3$

On peut se contenter, de donner la marque 1, à un sous ensemble d'arcs de $G_{2/3}$, formant un ordre principal E_1 . Un tel marquage est possible ssi V est 3-éligible.

L'existence d'un ordre principal, permet d'exhiber un état de l'opinion E_V - associé à V), tel que $|E_V| = 3$, de la manière décrite dans la démonstration du théorème précédent (cf. $(b \implies a)$).

Remarque :

Une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O. $V : S^{(2)} \rightarrow \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ peut être 4-éligible.

Exemple : Soit $E(S)$ l'état de l'opinion suivant :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{6} \ a \ c \ b \ d \\ \frac{1}{6} \ a \ c \ d \ b \\ \frac{1}{6} \ c \ a \ b \ d \\ \frac{3}{6} \ c \ a \ d \ b \end{array}$$

La fonction D.I.B.A.D.O. V associée à $E(S)$ prend ces valeurs dans $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, en effet :

$$\begin{array}{l} V(a,b) = 1 \quad (v(b,a)) = 0, \quad v(a,c) = \frac{1}{3} \quad (v(c,a) = \frac{2}{3}) \\ V(a,d) = 1 \quad (v(d,a) = 0), \quad V(b,c) = 0 \quad (V(c,b) = 1) \\ V(b,d) = \frac{1}{3} \quad (v(d,b) = \frac{2}{3}), \quad V(c,d) = 1 \quad (v(d,c) = 0) \end{array}$$

Remarquons que V est également 3-éligible ; un état de l'opinion correspondant est donné par :

$$\frac{1}{3} \quad c \ a \ d \ b$$

$$\frac{1}{3} \quad a \ c \ d \ b$$

$$\frac{1}{3} \quad c \ a \ b \ d$$

Conjecture :

Une condition nécessaire pour que $V : S^{(2)}$ ($S \geq 6$) \rightarrow

$\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1\}$ (pseudo-D.I.B.A.D.O.) soit D.I.B.A.D.O. est que la dimension de l'ordre constitué par les arcs-unités soit inférieure ou égale à m .

On rappelle que cette condition est nécessaire et suffisante si $m = 2$, d'après le théorème 2 du chapitre II.

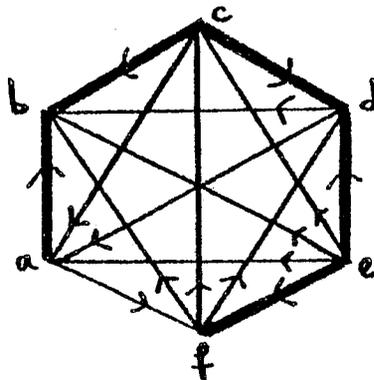
Cependant cette condition n'est pas suffisante dans le cas général. Nous donnons le contre-exemple suivant :

Soient :

$$S = \{a, b, c, d, e, f\} \quad , \quad v : S^{(2)} \rightarrow \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \text{ une pseudo-D.I.B.A.D.O.}$$

telle que : $G_{2/3} = (S, A)$, avec $(x, y) \in A \iff v(x, y) \geq \frac{2}{3}$

Soit le graphe ci-dessous :



l'ensemble U des arcs en gras est tel que $U = \{u \mid V(u) = 1\}$. Il est évident que tout ordre total élément d'un état de l'opinion éventuel E_V doit contenir U , et saturer tous les circuits V -saturés (prop. 1). Cependant une vérification directe montre qu'il existe un ordre total unique sur S vérifiant cette propriété, il s'agit en l'occurrence de l'ordre (c, f, c, d, a, b) . En effet :

tout ordre total α contenant U , a nécessairement l'un des éléments a, e, c classé en tête :

1) Si "a" est classé en tête et e (resp. c) en 2ème position le circuit $[e, a, b]$ (resp. $[c, a, f]$) qui est V -saturé est non α -saturé ;

Par conséquent "a" ne peut être classé en tête d'un ordre de E_V

2) Si "c" est classé en tête de α , l'élément "a" (resp. "e") ne peut être classé en 2ème position, car le circuit $[c, d, a]$, (resp. $[e, c, b]$) qui est V -saturé, serait non α -saturé.

Il ne peut y avoir donc d'ordre total de E_V , avec "c" en tête.

3) Si "e" est en tête d'un ordre total α de E_V , il est nécessairement confondu avec (e, f, c, d, a, b) . Il est évident qu'un tel ordre ne peut former un état de l'opinion E_V , bien que U soit de dimension ≤ 3 (théorème 3).

C)

CARACTERISATION DES FONCTIONS D.I.B.A.D.O. POUR $|S| \leq 5$.

Dans cette partie il sera établi qu'une pseudo-D.I.B.A.D.O $V : S^{(2)} \rightarrow Q$ (rationnelle), est D.I.B.A.D.O. lorsque $|S| \leq 5$.

La démonstration se fonde essentiellement sur une proposition démontrée de manière constructive, prouvant que dans le cas $|S| \leq 5$, il est toujours possible de construire un ordre total α contenant tous les arcs-unités (i.e. : $\{u \mid V(u) = 1\}$), et saturant tous les 3 circuits V -saturés.

A partir de l'ordre o , on peut construire une pseudo-D.I.B.A.D.O. à valeurs dans $(0, \frac{\alpha-1}{\alpha-1}, \frac{\alpha-2}{\alpha-1}, \frac{\alpha-3}{\alpha-1}, \dots, \frac{1}{\alpha-1})$, où $\alpha \geq 2$ désigne le plus petit dénominateur commun des valeurs de V .

Ceci permet d'utiliser la récurrence sur α pour démontrer la propriété énoncée.

C.1. Définition

Pour 2 circuits C_1 et C_2 , $|C_1| \geq 3$, $|C_2| \geq 3$, on dit que C_1 est un circuit partiel de C_2 si, et seulement si, pour tout ordre o tel que C_2 soit o -saturé, C_1 est o -saturé. Autrement dit, pour tout ordre o tel que $|C_2 \cap o| = |C_2| - 1$, on a $|C_1 \cap o| = |C_1| - 1$.

Remarque : tous les circuits partiels de $C_2 = [xyz \dots, t]$ s'obtiennent en prenant une sous suite de $[xyz \dots t]$.

Exemple : Soient : $C_5 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}$,

$$C_3 = \{(3,5), (5,1), (1,3)\},$$

$$C_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}.$$

Les circuits C_3 et C_4 sont des circuits partiels de C_5 . Voir figure (C.1.)

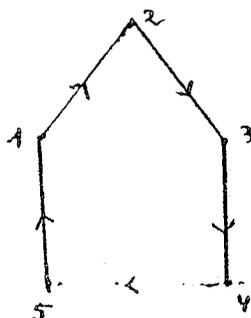


Fig (C.1).

Lemme 1 :

Soit $V : S^{(2)} \rightarrow [0,1]$ une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.
 Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un circuit C de $S^{(2)}$ soit V -saturé est que tout circuit partiel de C soit V -saturé.

Démonstration :

Condition nécessaire :

Par récurrence sur ℓ , nous allons montrer la vérité du lemme pour tout ℓ -circuit V -saturé. Pour un 3-circuit C on voit trivialement que le seul circuit partiel est C_3 , donc le lemme est vrai.

Supposons que le lemme soit vérifié jusqu'à $(\ell-1)$, et montrons qu'il est alors vrai pour ℓ .

Il est facile de vérifier que tout K -circuit partiel de C_ℓ , tel que $K \leq \ell-1$, est un circuit partiel d'un $(\ell-1)$ circuit partiel de C_ℓ .

Il va donc suffir de prouver que tout $(\ell-1)$ circuit partiel de C_ℓ est V -saturé.

Soit $C_\ell = [1,2,3,4,\dots, \ell-1, \ell]$, voir figure (C.2.).

Posons, sans perte de généralité $C_{\ell-1} = [1,2,3,4,\dots, \ell-1]$

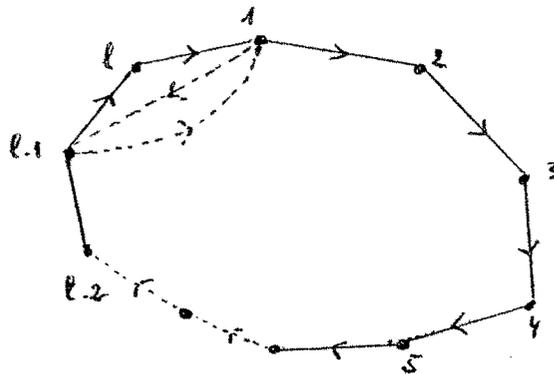


Figure (C.2.)

et soit : $C_3 = \{(l-1, l), (l, 1), (1, l-1)\} = [l-1, l, 1]$.

$$\text{On a : } V(C_\ell) = \sum_{(i,j) \in C_\ell} V(i,j) + 1 - 1 = \sum_{(i,j) \in C_\ell} V(i,j) + V(l-1, l) + V(1, l-1) - 1$$

En opérant une permutation convenable sur les termes de cette somme, on obtient :

$$\begin{aligned} & (V(l-1, l) + V(l, 1) + V(1, l-1)) + (V(1, 2) + V(2, 3) + \dots + V(l-2, l-1) + V(l-1, 1)) - 1 \\ & = V(C_3) + V(C_{\ell-1}) - 1. \end{aligned}$$

Comme $V(C_\ell) = \ell - 1$ (C_ℓ est V-saturé par hypothèse), on a :

$$V(C_\ell) = (\ell-1) = V(C_3) + V(C_{\ell-1}) - 1,$$

$$(I) \text{ ou encore : } V(C_3) + V(C_{\ell-1}) - 1,$$

(II) En outre on a ($V(C_3) \leq 2$, $V(C_{\ell-1}) \leq \ell-2$) car V est pseudo-D.I.B.A.D.O.

De la relation I et II on déduit que :

$$V(C_3) = 2 \text{ et } V(C_{\ell-1}) = \ell - 2.$$

ce qui prouve que $C_{\ell-1}$ est V-saturé.

Condition suffisante :

Si tout circuit partiel de C_ℓ est V-saturé, on a en particulier :

$$V(C_3) = 2 \text{ et } V(C_{\ell-1}) = \ell - 2$$

$$\text{Comme } V(C_\ell) = V(C_{\ell-1}) + V(C_3) - 1$$

$$\text{il vient : } V(C_\ell) = (\ell-2) + 2 - 1 = \ell - 1$$

Donc C_ℓ est V-saturé.

c.q.f.d.

Lemme 2 :

Soit $G = (S, U_0)$ un graphe simple orienté sans boucle. Si G est sans circuit, on peut toujours rajouter des arcs dans G , de manière à obtenir un tournoi transitif.

Autrement dit :

$\exists U_1 \subseteq S^{(2)}$ tel que :

$$\bullet U_0 \subseteq U_1, (x,y) \in U_1 \iff (y,x) \notin U_1. \quad \forall (x,y) \in S^{(2)}$$

$$\bullet (x,y) \in U_1, (y,z) \in U_1 \implies (x,z) \in U_1.$$

Démonstration :

Il est facile de voir que tout graphe sans circuit $G = (S, U_0)$ admet une source s (resp. un puits p) i.e.;

$$\forall y \neq s : (y,s) \notin U_0 \quad (\text{resp. } \forall y \neq p \quad (p,y) \notin U_0)$$

On montre le lemme par récurrence sur $|S|$:

On voit trivialement que le lemme est vérifié pour $|S| \leq 3$.

Supposons que la propriété énoncée soit vérifiée jusqu'à $|S| = n - 1$, et montrons qu'elle est alors vérifiée pour n .

En supprimant une source s du graphe G , on obtient un graphe à $(n-1)$ sommets, auquel correspond un tournoi transitif $T_1 = (S - \{s\}, U_1)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

s étant une source, on conclut immédiatement que le tournoi $T = (s, U_2)$ avec $U_2 = U_1 \cup \{(s,x) \mid x \neq s, x \in S\}$, vérifie le lemme.

c.q.f.d.

Lemme 3 :

Soient V une pseudo-D.I.B.A.D.O., C un circuit V -saturé.

S'il existe un arc (x_0, y_0) appartenant à C tel que $V(x_0, y_0) = 0$

alors : $\forall (x, y) \in C, (x, y) \neq (x_0, y_0)$ on a :

$$V(x, y) = 1$$

Démonstration

Immédiate.

Lemme 4. Soit C_ℓ un ℓ -circuit dont l'ensemble des sommets est S . Si l'on suppose que C_ℓ est V -saturé, alors il existe un ordre saturant C_ℓ et contenant tous les arcs-unités de S ⁽²⁾.

Démonstration :

Pour $\ell = 3$ vérifie trivialement le lemme.

Soit maintenant $C_\ell = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{\ell-1}, x_\ell), (x_\ell, 1)\}$, $\ell > 3$,

voir figure C.3.

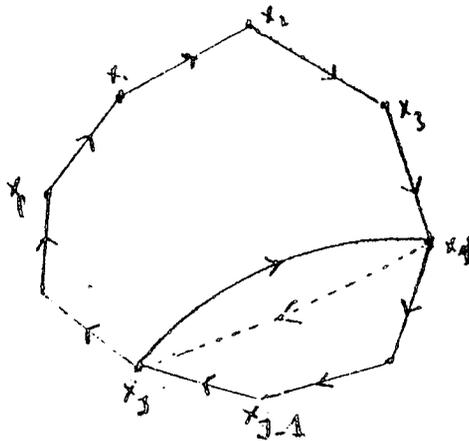


Fig (C.3)

Il est facile de voir qu'il existe un sommet qui ne soit pas l'extrémité terminale d'un arc unité de $S^{(2)}$.

Sans perte de généralité désignons un tel sommet par x_1 .

Nous prétendons que l'ordre $o_0 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_\ell)$ vérifie les conditions du lemme.

Il suffit de montrer que o_0 contient tous les arcs-unités de $S^{(2)}$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, ce qui implique l'existence d'un couple (x_i, x_j) de S^2 avec $1 < i < j$, $V(x_j, x_i) = 1$.

Le circuit :

$$C = \{(x_j, x_{j+1}), (x_{j+1}, x_{j+2}), \dots, (x_{\ell-1}, x_\ell), (x_\ell, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_j)\}$$

est un circuit partiel de C_ℓ .

Il en résulte d'après le lemme précédent que C est V -saturé.

Comme $(x_i, x_j) \in C$, $V(x_j, x_i) = 1$, l'application du lemme précédent montre que x_1 est l'extrémité terminale d'un arc unité, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle x_1 n'aurait pas cette propriété.

Par conséquent o_0 contient tous les arcs unités éventuels de $S^{(2)}$.

c.q.f.d.

Proposition 5 :

Soit $V : S^{(2)} \rightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.

Pour $|S| \leq 5$, il existe un ensemble E_0 de $S^{(2)}$ vérifiant les propriétés suivantes :

① E_0 est un ordre.

$$\textcircled{2} \quad \{(x, y) \in S^2 \mid V(x, y) = 1\} \subseteq E_0,$$

autrement dit : E_0 contient tous les arcs-unités de $S^{(2)}$.

$$\textcircled{3} \quad \forall \mathcal{C} = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4)\} \text{ 3-circuit V-saturé}$$

on a :

$$\text{soit } |\mathcal{C} \cap E_0| = 2,$$

$$\text{soit } |\mathcal{C} \cap E_0| = 1 \text{ et si } \mathcal{C} \cap E_0 = \{(x_1, x_2)\} \text{ on a}$$

$$x_1 \text{ I } x_3 \text{ et } x_2 \text{ I } x_3 \quad (\text{I étant la relation d'incomparabilité de } E_0)$$

Démonstration :

Pour $|S| = 3$ la vérité de la proposition est simple, il suffit d'envisager successivement les cas dans lesquels V ait 2, 3, 1 ou 0 arc-unité. Avant d'aborder les autres cas, remarquons que tout ordre total sur S contenant tous les arcs unités, et saturant tous les circuits V -saturés, vérifie les conditions de la proposition.

En outre, si $|S| = 4$ (resp. $|S| = 5$) et si $S^{(2)}$ comporte un 4-circuit V -saturé (resp. un 5-circuit V -saturé), la vérité de la proposition est une conséquence du lemme 2.

CAS : A) $\underline{|S| = 4}$

On suppose maintenant que $S^{(2)}$ ne contient pas de 4-circuit saturé :

Ceci implique, que pour deux 3-circuits saturés \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 distincts on a : $(x, y) \in \mathcal{C}_1 \implies (y, x) \notin \mathcal{C}_2$. Car s'il n'en est pas ainsi, désignons par $\mathcal{C}_1 = [xyz]$, $\mathcal{C}_2 = [yxt]$, deux 3-circuits V -saturés ; on constate que le 4-circuit $[zxty]$ est V -saturé (contradiction).

Donc, $S^{(2)}$ comporte au plus deux 3-circuits saturés $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, de plus ces circuits ont un arc en commun.

On se place dans ce cas, en posant : $\mathcal{C}_1 = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{(b,c), (c,d), (d,b)\}$. (Voir figure (C.4.)).

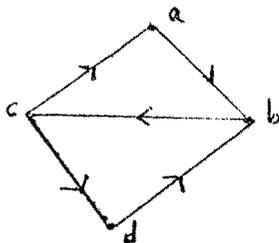


Fig (C.4)

On pose $U_0 = \{(i,j) \in S \times S \mid v(i,j) = 1\}$

1) : $|U_0| = 1$:

si $U_0 = \{(b,c)\}$ on prend $E_0 = U_0$,

si $U_0 = \{(a,b)\}$ ou $\{(c,d)\}$ on prend $E_0 = \{(a,b), (c,d)\}$.

si $U_0 = \{(d,b)\}$ ou $\{(c,a)\}$ $E_0 = \{(d,b), (c,a)\}$.

si $U_0 = \{(d,a)\}$ (resp. $\{(a,d)\}$) on prend $E_0 = \{(d,a,b,c)\}$ (resp. $\{(a,d,b,c)\}$)

Dans chacun des cas traités, E_0 vérifie les conditions de la proposition

2) $|U_0| = 2, U_0 = \{u_1, u_2\}$:

Si u_1 et u_2 se confondent avec deux arcs de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , l'ensemble $E_0 = U_0$ vérifie les conditions du lemme.

Sinon, sans perte de généralité on peut supposer que $u_1 = (a,d)$, $u_2 = (a,b)$ et par conséquent $E_0 = \{(a,b,c,d)\}$ vérifie les propriétés de la proposition.

3) $|U_0| \geq 3$

L'ordre E_0 cherché peut être choisi comme étant U_0 , ce qui n'est pas difficile à vérifier.

Enfin si $S^{(2)}$ contient au plus un 3-circuit saturé \mathcal{C} la construction d'un ordre saturant \mathcal{C} et contenant tous les arcs unités est assez simple.

CAS : B) $|S| = 5$

B.1.) $S^{(2)}$ ne comporte pas de 4-circuit saturé :

Nous désignons, désormais, $\{u \in S^{(2)} \mid v(u) = 1\}$ par U_0 .

Si $S^{(2)}$ ne comporte pas de circuit saturé, il est évident que $E_0 = U_0$ vérifie les conditions de la proposition.

S'il existe un ensemble non vide de 3-circuits saturés, désignons par $T = (S, U)$ le tournoi (graphe complet antisymétrique) dont l'ensemble des sommets est S , et dont les arcs sont obtenus de la manière suivante :

① $U_0 \subseteq U$

② Si un arc (i, j) appartient à un 3-circuit saturé, et n'appartient pas à U_0 , alors (i, j) est un élément de U .

③ Si deux sommets de S ne sont pas reliés par un arc qui est dans le cas ① ou ②, on les joint par un arc et un seul, dont l'orientation est arbitraire.

Cherchons un ordre E_0 , qui vérifie les conditions du lemme. Supposons que T contienne une source $s \in S$ (i.e. : $\forall i \in S - \{s\} : (i, s) \notin U$) ou un puits p ($\forall i \in S - \{p\} : (p, i) \notin U$), on cherche un ordre $E_1 \subseteq U$ sur $S - \{s\}$ (resp. $s - \{p\}$) qui remplisse les conditions de la proposition (un tel ordre existe en vertu de A).

On vérifie alors sans peine que :

$E_0 = E_1 \cup \{(s,i) \mid (s,i) \in U\}$ (resp. $E_1 \cup \{(i,p) \mid (i,p) \in U\}$) satisfait aux conditions de la proposition

Dans le cas où T ne contient ni source ni puits, T serait fortement connexe, ce qui nécessite l'existence d'un circuit hamiltonien H dans T [5].

Posons : $H = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,a)\}$ (fig. (C.5)).

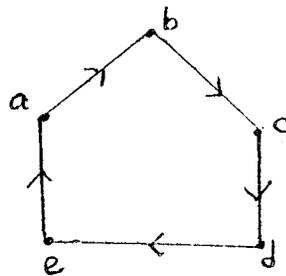


Fig (C.5)

On a la propriété suivante : Tout 3-circuit saturé \mathcal{C}_0 , possède ou bien 2 arcs unités ($|\mathcal{C}_0 \cap U_0| = 2$), ou bien sinon au moins un arc dans H ($|\mathcal{C}_0 \cap H| \geq 1$). En effet :

Si l'on pose $\mathcal{C}_0 = \{(i,j), (j,k), (k,i)\}$, il existe au moins un arc de \mathcal{C}_0 qu'on désigne par (i,j) tel que $(i,j) \in H$ ou $(j,i) \in H$ (Ceci tient à ce que $S = 5$).

Si $(i,j) \notin H$, on a nécessairement $(j,i) \in H$.

D'après l'étape ② de la construction de U , on doit avoir $V(j,i) = 1$.

Comme \mathcal{C}_0 est saturé, il vient : $V(j,k) = V(k,i) = 1$.

Ce qui prouve que $|\mathcal{C}_0 \cap U_0| = 2$ ou $|\mathcal{C}_0 \cap H| \geq 1$.

Par conséquent, tout ordre σ_0 qui sature H , et qui contient U_0 , doit saturer tous les 3-circuits V -saturés, donc satisfait aux conditions de la proposition. La construction d'un tel ordre σ_0 est toujours possible, sauf dans un cas particulier qu'on va examiner en priorité :

B.1.4) Soient $u_1 = (i,k)$, $u_2 = (i,j)$, $u_3 = (j,k)$ trois arcs unités de $S^{(2)}$ tel que u_1 appartienne à H .

Sans perte de généralité on peut prendre a en i , b en k et d en j , voir figure (C.6.).

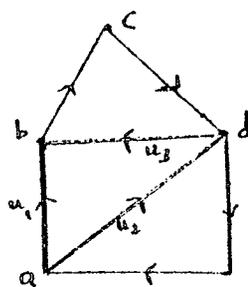


Fig (C-6)

Il est clair qu'aucun ordre qui sature H ne peut contenir les trois arcs u_1 , u_2 , u_3 . On cherche maintenant à construire un ordre total σ_0 contenant u_1 , u_2 , u_3 , d'autres arcs unités éventuels, et qui sature tous les 3-circuits de T .

L'ordre σ_0 sature alors nécessairement tous les 3-circuits V -saturés.

Un simple examen de la fig. (C.6.) montre que l'on a :

$$\forall (i,j) \in H, (i,j) \neq (a,b) : V(i,j) \neq 1.$$

En outre, pour tout 3-circuit C de T , on a : $|C \cap H| \neq \emptyset$

En conséquence dans un 3-circuit de T , il est toujours possible de supprimer un arc u tel que $u \in H$ et $V(u) \neq 1$, de manière à obtenir à partir de T un graphe sans circuit. L'application du lemme (2), montre l'existence d'un ordre o contenant U , et saturant tous les 3-circuits, donc o sature les 3-circuits V -saturés. Ce qui montre la vérité de la proposition.

Horsmis ce cas (3.1.4.) on va pouvoir construire un ordre total o sur S , tel que : $o \supseteq U_0$ et $|o \cap H| = 4$: Désignons par "a" un sommet du graphe

qui ne soit pas l'extrémité terminale d'un arc unité (voir figure (C.7.),

donc $V(e,a) \neq 1, V(d,a) \neq 1, V(c,a) \neq 1$.

On va parcourir les sommets du chemin (a,b,c,d,e) de "a" à "e".

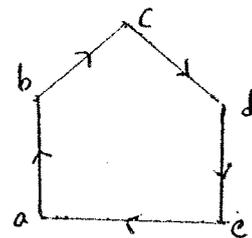


Fig (C.7)

Si on ne rencontre pas l'extrémité terminale d'un arc-unité avant d'atteindre l'extrémité initiale de celui-ci, alors l'ordre (a,b,c,d,e) vérifie les conditions de la proposition, sinon considérons les cas suivants :

I) Supposons tout d'abord que b soit l'extrémité terminale d'un arc unité différent de (a,b) , on a nécessairement $u_0 \in \{(e,b), (d,b)\}$.

Si l'on suppose que $V(d,b) = 1$, voir fig. (C.8.),

Il en résulte que : $V(c,d) \neq 1$ et

$V(b,c) \neq 1$, car:

$(V(c,d)=1 \text{ et } V(d,b)=1) \implies V(c,b)=1$ (impossible).

et $(V(b,c)=1 \text{ et } V(d,b)=1) \implies V(d,c)=1$ (impossible)

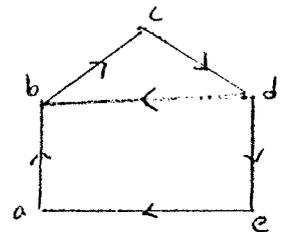


Fig (C.8)

Par ailleurs si $V(a,d) = 1$ (resp. $V(b,e) = 1$) on a : $V(a,b) = 1$ (resp. $V(d,e) = 1$), ce qui nous ramène au cas (B.1.4.), déjà examiné.

Considérons donc le cas $V(a,d) \neq 1$ et $V(b,e) \neq 1$.

Il en résulte que "d" n'est pas l'extrémité terminale d'un arc unité.

I.1.a) Si l'on suppose que $V(c,e) = 1$ on ne peut avoir $V(a,c) = 1$ car ceci entraîne, $V(a,e) = 1$, ce qui est impossible d'après la construction de T. Par conséquent c n'est pas l'extrémité terminale d'un arc unité.

L'ordre $o_0 = (c,d,e,a,b)$ contient tous les arc unités éventuels, car son opposé $\bar{o}_0 = (b,a,e,d,c)$ ne peut contenir un arc unité, en effet, par élimination des autres couples seuls les couples (a,e) , (d,c) , et (e,d) pourraient éventuellement prendre la valeur 1. Cependant $V(a,e) \neq 1$ et $V(d,c) \neq 1$, d'après la construction de T. Seul $V(e,d)$ pourrait donc être égale à 1, ce qui est impossible puisque $(d,e) \in H$. Comme H est o_0 -saturé, on en déduit que o_0 vérifie les propriétés de la proposition.

I.1.b) Si $V(c,e) \neq 1$, on vérifie sans peine que l'ordre (d,e,a,b,c) satisfait aux conditions de la proposition.

I.2) Supposons que $V(d,b) \neq 1$:

Donc $V(e,b) = 1$ (puisque b est l'extrémité terminale d'un arc unité différent de (a,b)). Voir figure (C.9).

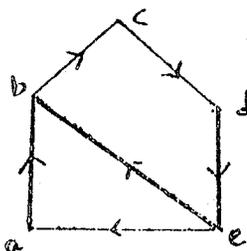


Fig (C.9).

d'où : $V(c,e) \neq 1$ et $V(d,e) \neq 1$

Par conséquent le sommet e n'est pas l'extrémité terminale d'un arc unité. Il est facile de vérifier que l'ordre $o_0 = (e,a,b,c,d)$ contient U_0 et sature H. Donc o_0 vérifie les conditions de la proposition.

II) On suppose maintenant que c soit le premier sommet rencontré qui soit l'extrémité terminale d'un arc unité n'appartenant pas à l'ensemble $\{(a,b), (b,c), (a,c)\}$ - voir fig. (C.10)

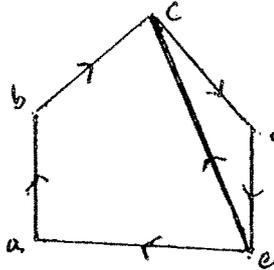


Fig (C.10).

On a nécessairement $V(e,c) = 1, V(d,b) \neq 1, V(e,b) \neq 1$.

Si $V(b,e) = 1$, on en déduit que $V(b,c) = 1$, ce qui nous ramène au cas (B.1.4.) déjà traité.

Supposons donc $V(b,e) \neq 1$.

On a $V(d,e) \neq 1$ car : $(V(d,e) = 1, V(e,c) = 1) \implies V(d,c) = 1$ (impossible). Comme $V(a,e) \neq 1$ on en conclut que "e" n'est l'extrémité terminale d'un arc unité.

Il est assez facile de montrer que l'ordre $o_0 = (e,a,b,c,d)$ sature H , et contient U_0 . En conséquence o_0 vérifie les conditions de la proposition.

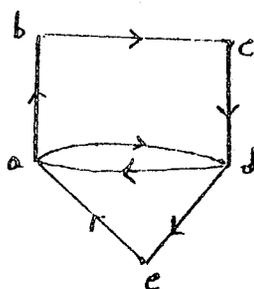
B.2.) $S^{(2)}$ contient un 4-circuit saturé \mathcal{C}_4 unique.

Posons $S = \{a,b,c,d,e\}$, $\mathcal{C}_4 = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$ (fig. C.11).

2.0) Si tous les 3-circuits saturés de $S^{(2)}$ sont des circuits partiels de \mathcal{C}_4 , le problème est facile à résoudre.

2.1.) Supposons que S contienne au moins un 3-circuit saturé \mathcal{C}_3 qui ne soit pas partiel de \mathcal{C}_4 . \mathcal{C}_3 a deux sommets dans $\{a,b,c,d\}$, l'autre sommet étant e .

On ne peut avoir $(i,j) \in \mathcal{C}_4$, et $(j,i) \in \mathcal{C}_3$, car si l'on pose par exemple $(i,j) = (a,d)$ et $\mathcal{C}_3 = \{(a,d), (d,e), (e,a)\}$, on constate que le 5-circuit $\mathcal{C}_5 = [a,b,c,d,e]$ est saturé. figure C.11), car $v(\mathcal{C}_5) = v(\mathcal{C}_4) + v(\mathcal{C}_3) - 1 = 4$.



Fig(C.11).

Ceci contredit l'hypothèse (B.2.), puisque tous les 4-circuits partiels de \mathcal{C}_5 sont saturés (cf. lemme 1).

Par ailleurs si i et j sont deux éléments de $S - \{e\}$ tels que $\{(i,j), (j,i)\} \cap \mathcal{C}_4 = \emptyset$, alors (i,j) ne peut être un arc de \mathcal{C}_3 .

En effet, si l'on suppose que $(i,j) = (a,c)$ et $(a,c) \in \mathcal{C}_3$, le 4-circuit $[c e a b]$ est saturé (contradiction avec B.2.).

On peut donc, sans perte de généralité, supposer que $\mathcal{C}_3 = [e,d,a]$

Il est facile de voir qu'il ne peut y avoir d'autre 3-circuit saturé différent de $\mathcal{C}_3' = [b,c,e]$, sinon on a un 4-circuit saturé différent de \mathcal{C}_4 .

S'il existe un couple (i,j) élément de \mathcal{C}_4 tel que $v(i,j) = 0$ alors on

a : $v(k,\mathcal{C}_4) = 0$ ou 1 , $\forall (k,\mathcal{C}_4) \in \mathcal{C}_4$, et on peut vérifier aisément dans

ce cas que l'ensemble des arcs unités vérifie les conditions de la proposition.

S'il existe un couple (i,j) de \mathcal{C}_4 tel que $V(i,j) \neq 0,1$ alors on construit le graphe $J = (S,U)$ comme suit : un élément de $S^{(2)}$ est un arc de J si et seulement si : soit $V(i,j) = 1$,

Soit $(i,j) \in \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_3'$ et $V(j,i) \neq 1$.

Il en résulte que $\mathcal{C}_4 \subseteq U$,

On supprime dans J un arc u tel que : $u \in \mathcal{C}_4, V(u) \neq 0,1$.

S'il existe un autre circuit dans le graphe J dont aucun arc n'a été supprimé, on choisit dans ce circuit un arc u n'appartenant pas à un circuit dont un arc a été supprimé et tel que $V(u) \neq 0,1$. La suppression d'arcs différents de zéro et de l'unité de chacun des circuits de J de la manière décrite ci-dessous, nous fournit un graphe J_0 sans circuit et contenant tous les arcs unités.

De plus chacun des circuits a tous ses arcs sauf un dans U .

L'application du lemme (2) montre que l'ensemble des arcs de J_0 peut être complété pour faire de J_0 un tournoi transitif désigné par $J_1 = (S, U_1)$.

Soit E_0 l'ordre associé à ce tournoi transitif. E_0 est évidemment un ordre total contenant tous les arcs unités et saturant tous les circuits V -saturés.

Par conséquent E_0 vérifie les conditions de la proposition.

B.3.) $S^{(2)}$ comporte plus d'un 4-circuit saturé et ne contient pas de 5-circuit saturé. Dans ce cas il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe exactement deux 4-circuits saturés \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}'_4 tels que :

$$|\mathcal{C}_4 \cap \mathcal{C}'_4| = 2$$

Posons $\mathcal{C}_4 = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$, $\mathcal{C}'_4 = \{(d,a), (a,b), (b,e), (e,d)\}$

voir figure (C.12).

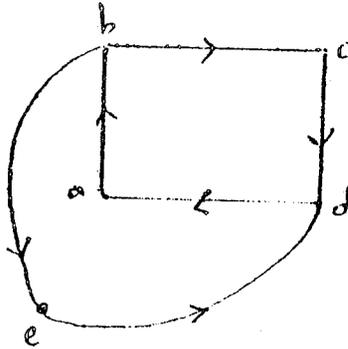


Fig (c.12).

Les seuls circuits V-saturés sont les circuits partiels de \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}'_4 . Pour trouver un ordre E_0 vérifiant les conditions de la proposition, on procède d'une manière tout à fait analogue à celle du cas précédent :

S'il existe un arc u de \mathcal{C}_4 ou \mathcal{C}'_4 tel que $v(u) = 0$,

l'ensemble des arcs unités vérifie les conditions de la proposition, sinon on construit un graphe $J = (S, U)$ dont l'ensemble des arcs est formé des arcs de \mathcal{C}_4 , \mathcal{C}'_4 et des arcs unités.

Si on choisit de chacun des circuits un arc u et un seul différent de zéro et de l'unité, que l'on supprime, on obtient un graphe sans circuit lequel sera prolongé en un tournoi transitif.

L'ordre total associé au tournoi vérifie les conditions de la proposition.

Théorème 5 : Soit $V : S^{(2)} \rightarrow [0,1] \subseteq \Omega$, $|S| \leq 5$; on a :

V est pseudo D.I.B.A.D.O. $\iff V$ est D.I.B.A.D.O.

Démonstration :

Nous allons effectuer la démonstration par récurrence sur le plus petit dénominateur commun des valeurs de v , qu'on désigne par α .

Si $\alpha = 1$ le théorème est vrai, et ceci peut être vérifié aisément. pour $\alpha = 2$, la fonction V prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \frac{1}{2}\}$. Il résulte du théorème (3) que l'ordre $\{u \in S^{(2)} \mid V(u) = 1\}$ est de dimension inférieure ou égale à 2. Donc le théorème est aussi vrai d'après le théorème (2).

Supposons que le théorème soit vrai pour $(\alpha-1) \geq 2$, et montrons qu'il est alors vrai pour α .

Soit P un ordre vérifiant les conditions de la proposition 5), en vertu du théorème (3), P est de dimension inférieure ou égale à 2. D'autre part le théorème (1) entraîne l'existence d'un ordre o_0 prolongeant P et non séparant.

La condition 3 de la proposition 5) implique que o_0 sature tous les 3-circuits saturés relativement à V , en effet :

Si \mathcal{C} est un 3-circuit saturé on a :

$$\text{soit } |\mathcal{C} \cap P| = 2 \text{ ce qui implique } |o_0 \cap \mathcal{C}| = 2$$

$$\text{soit } |\mathcal{C} \cap P| = 1 \text{ ce qui implique également } |o_0 \cap \mathcal{C}| = 2,$$

puisque o_0 est non séparant.

On définit la fonction v' comme suit :

$$V : S^{(2)} \rightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{Q}$$

$$V(i, j) \in S^{(2)} \quad V'(i, j) = \begin{cases} \frac{\alpha V(i, j) - 1}{\alpha - 1} & \text{si } (i, j) \in o_0 \\ \frac{\alpha V(i, j)}{\alpha - 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que si U est une partie de $S^{(2)}$ telle que $|U \cap o_0| = \lambda$, alors :

$$V'(U) = \sum_{(i, j) \in U} V'(i, j) = \frac{\alpha \left(\sum_{(i, j) \in U} V(i, j) - \lambda \right)}{\alpha - 1}$$

Montrons que V' est une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.

a) Remarquons tout d'abord que :

$$\forall (i, j) \in S^{(2)} : V'(i, j) \geq 0$$

car σ_0 contient tous les arcs unités de $S^{(2)}$.

$$b) \forall (i, j) \in S^{(2)} : V'(i, j) + v'(j, i) = \frac{\alpha(V(i, j) + V(j, i)) - 1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1} = 1.$$

c) Soient :

$$\mathcal{C} = \{(i, j), (j, k), (k, i)\} \text{ un 3-circuit,}$$

$$\mathcal{C}^{-1} = \{(i, k), (k, j), (j, i)\} \text{ le circuit inverse.}$$

$$\lambda = |\mathcal{C} \cap \sigma_0|. \quad (\lambda \in \{1, 2\}).$$

C.1.) Supposons qu'aucun des circuits \mathcal{C} et \mathcal{C}^{-1} ne soit saturé, relativement à V : on peut alors écrire : $V(\mathcal{C}) = 2 - \frac{\epsilon}{\alpha}$, ϵ étant entier positif tel que : $1 \leq \epsilon < \alpha$.

$$d'où \quad 1 + \frac{1}{\alpha} \leq V(\mathcal{C}) \leq 2 - \frac{1}{\alpha}$$

ce qui est équivalent à : $1 + \alpha \leq \alpha V(\mathcal{C}) \leq 2\alpha - 1$

$$\text{ou encore :} \quad \alpha - 1 + 2 - \lambda \leq \alpha V(\mathcal{C}) - \lambda \leq 2\alpha - 2 + 1 - \lambda$$

$$\text{donc :} \quad 1 + \frac{2 - \lambda}{\alpha - 1} \leq \frac{\alpha V(\mathcal{C}) - \lambda}{\alpha - 1} \leq 2 + \frac{1 - \lambda}{\alpha - 1}$$

Comme $V'(\mathcal{C}) = \frac{\alpha V(\mathcal{C}) - \lambda}{\alpha - 1}$, il vient : $1 \leq V'(\mathcal{C}) \leq 2$.

C.2) Supposons que \mathcal{E} soit saturé relativement à V ;

Donc $|\mathcal{E} \cap o_0| = \lambda = 2$ et $V(\mathcal{E}) = 2$.

Il en résulte que : $v'(\mathcal{E}) = \frac{\alpha V(\mathcal{E}) - 2}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 1} = 2$.

d'où : $1 \leq v'(\mathcal{E}) \leq 2$.

C.3) \mathcal{E} n'est pas saturé et \mathcal{E}^{-1} est saturé :

On a : $v'(\mathcal{E}) + v'(\mathcal{E}^{-1}) = 3$, $v'(\mathcal{E}^{-1}) = 2$

on conclut que : $1 \leq v'(\mathcal{E}) = 1 \leq 2$.

Donc V' est une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O. à valeurs dans :

$$\left\{ 0, \frac{1}{\alpha-1}, \frac{2}{\alpha-1}, \frac{3}{\alpha-1}, \dots, \frac{\alpha-2}{\alpha-1}, \frac{\alpha-1}{\alpha-1} \right\}.$$

Le dénominateur commun des valeurs de v' étant $(\alpha-1)$, comme v' est pseudo-D.I.B.A.D.O., d'après l'hypothèse de récurrence il existe un état de l'opinion $E_1(S)$ ayant pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction v' .

Construisons un autre état de l'opinion $E_0(S)$ de la manière suivante : l'ensemble des ordres de $E_0(S)$ est constitué des ordres de $E_1(S)$ et de o_0 . On associe à o_0 la pondération $\frac{1}{\alpha}$.

La pondération de tout ordre de $E_0(S)$, différent de o_0 , est égale à sa pondération dans $E_1(S)$ multipliée par $\frac{\alpha-1}{\alpha}$.

L'état de l'opinion $E_0(S)$ ainsi obtenu a pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction V , ce qui peut être vérifié aisément.

c.q.f.d.

Proposition (6) :

Si $V : S^{(2)} \rightarrow Q$ est une pseudo-D.I.B.A.D.O. rationnelle contenant un $|S|$ -circuit V -saturé C , i.e. : un circuit à $|S|$ éléments, alors V est D.I.B.A.D.O.

Démonstration :

C étant un circuit V -saturé, le lemme (3) montre l'existence d'un ordre E_0 (total) saturant C et contenant tous les arcs unités. Donc E_0 vérifie les conditions de la proposition (5).

La démonstration est ainsi ramenée à celle du théorème précédent.

c.q.f.d.

D

ALGORITHME POUR LA CONSTRUCTION D'UN ETAT DE L'OPINION
CORRESPONDANT A UNE FONCTION PSEUDO-D.I.B.A.D.O. ($|S| \leq 5$)

Pour une fonction $V: S^{(2)} \rightarrow [0,1] \subseteq Q$, $|S| \leq 5$, pseudo-D.I.B.A.D.O. rationnelle, les techniques utilisées dans la démonstration de la proposition 5 du théorème 5) nous permettent de proposer l'algorithme suivant pour construire E_V (un état de l'opinion ayant pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction V).

Si $V^{(k)}$ est une pseudo-DIBADO rationnelle, désignons par $C^{(k)}$ l'ensemble des 3-circuits $V^{(k)}$ saturés, par $\alpha^{(k)}$ le plus petit dénominateur commun des valeurs de $v^{(k)}$ et par $U^{(k)}$ l'ensemble $\{u \in S^{(k)} / v^{(k)}(u) = 1\}$, ($U^{(0)} = \{u \in S^{(2)} / v(u) = 1\}$).

Algorithme :

(0) Poser $k = 0$, $V^{(0)} = V$, $\alpha^{(0)} = \alpha$.

(1) Chercher un ordre total O_k sur S saturant $C^{(k)}$ et contenant $U^{(k)}$, aller en (2).

(2) Construire la fonction $V^{(k+1)} : S^2 \rightarrow Q$ comme suit :

$$V_{(x,y) \in S^{(2)}}^{(k+1)}(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha v^{(k)}(x,y) - 1}{\alpha^{(k)} - 1} & \text{si } (x,y) \in O_k \\ \frac{\alpha v^{(k)}(x,y)}{\alpha^{(k)} - 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

$k := k+1$, aller en (1).

(3) On réitère ((1), (2)) jusqu'à ce que l'on obtienne une fonction $V^{(\gamma)}$ à valeurs dans $\{0, \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\gamma}\}$.

A la fonction $V^{(\gamma)}$ sera associé l'ordre O_γ , tel que $(x,y) \in O_\gamma \iff V^{(\gamma)}(x,y) = 1$.
 Aller en (4).

(4) Les étapes précédentes génèrent une famille d'ordres $O_0, O_1, O_2, O_3, \dots, O_{\gamma-1}, O_\gamma$ que l'on désigne par F .

Soit $q = F \rightarrow Q$, telle que :

$$\forall k \neq \gamma : q(O_k) = \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{et } q(O_\gamma) = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha}$$

Appelons \mathcal{R} l'ensemble des ordres distincts de F et définissons l'application $p : R \rightarrow Q$ comme suit

$$\forall o \in R : p(o) = \sum_{i \in I_o} q(o_i) \text{ où } I_o \text{ est l'ensemble des index des ordres identiques à } o.$$

à 0.

$$\text{On a : } E = (R, p) = E_v.$$

Autrement dit l'état de l'opinion $E = (R, p)$ a pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction v .

Justification de l'algorithme :

$E = (R, p)$ est effectivement un état de l'opinion puisque

$$\sum_{O \in R} p(O) = \sum_{i=0}^Y q(O_i) = \frac{Y}{\alpha} + \frac{\alpha-Y}{\alpha} = 1.$$

Il suffit donc de montrer que E a pour fonction D.I.B.A.D.O. la fonction v .
On peut effectuer cette démonstration par induction sur α de manière tout à fait analogue à celle utilisée dans le théorème 5).

Exemple : $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Soit $K = (S, s^{(2)})$ le graphe complet symétrique, valué de la figure (D-1) avec $v : s^{(2)} \rightarrow \{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5\}$.

On désigne ce graphe par $(S, s^{(2)}, v)$, et v par $v^{(0)}$.

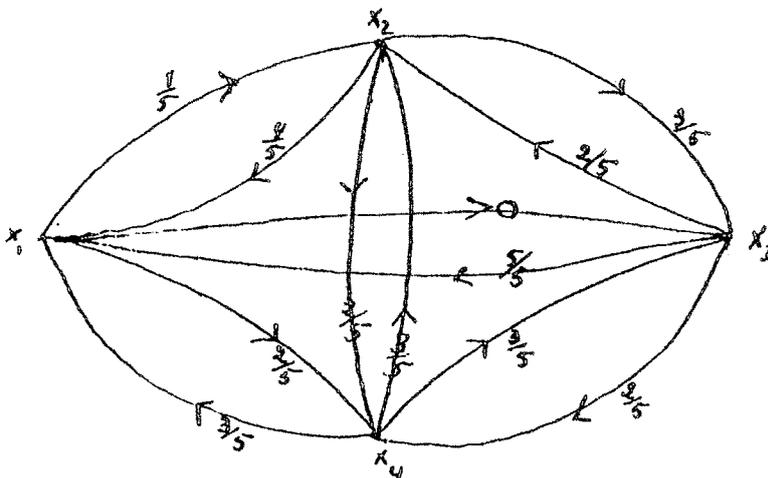


Fig (D.1)

I - En considérant la liste des 3-circuits on voit que :

$S^{(2)}$ contient un 3-circuit v -saturé unique $C = [x_3, x_1, x_4]$, et un seul arc unité $(x_3, x_1) = u_0$.

- Etape 1 : On choisit un ordre total contenant u_0 et saturant C .

Soit $O_0 = (x_3, x_1, x_4, x_2)$ un tel ordre.

- Etape 2 : Construction de V^0 .

On obtient le graphe $G_1 = (s, s^{(2)}, v^0)$ de la figure D-2

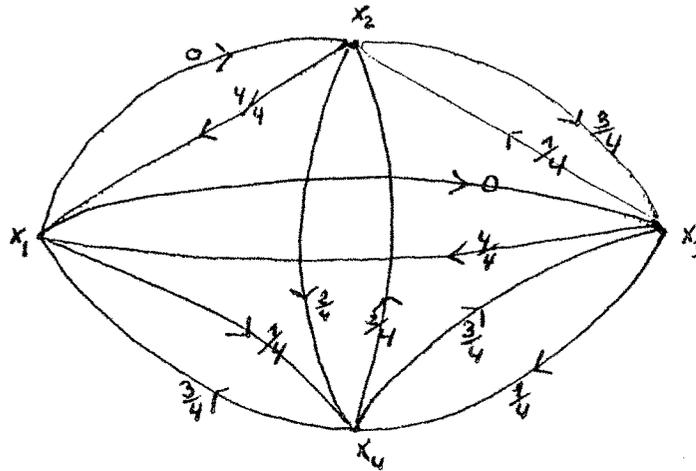


Fig (D-2).

II - $v^{(1)}(x_2, x_1) = v(x_3, x_1) = 1$, donc $U^{(1)} = \{(x_2, x_1), (x_3, x_1)\}$.

$C = [x_3, x_1, x_4]$ est l'unique circuit $v^{(1)}$ -saturé.

- Etape 1 : On choisit l'ordre $O_1 = (x_3, x_2, x_1, x_4)$ qui sature C et contient $\{(x_2, x_1), (x_3, x_1)\}$.

- Etape 2 : L'application de l'étape 2 nous fournit le graphe valué

$G_2 = (s, s^{(2)}, v^{(2)})$ de la figure (D-3)

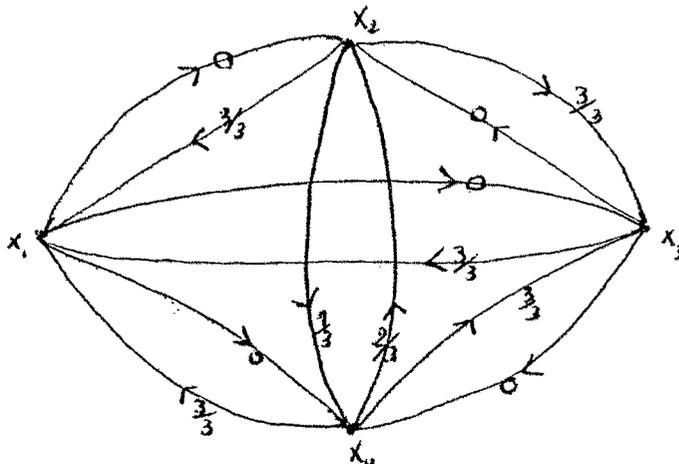


Fig (D-3).

III - On a :

$$v^{(2)}(x_2, x_5) = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall (x_2, x_5) \neq (x_2, x_4) \text{ et } (x_4, 2)$$

$$v^{(2)}(x_2, x_4) = 1/3, \quad v^{(2)}(x_4, x_2) = 2/3$$

- Etape 1 : L'ordre $O_2 = (x_2, x_4, x_3, x_1)$ contient tous les arcs unités.

- Etape 2 : On obtient le graphe $G_3 = (s, s^{(2)}, v^{(3)})$, fig. (D-4)

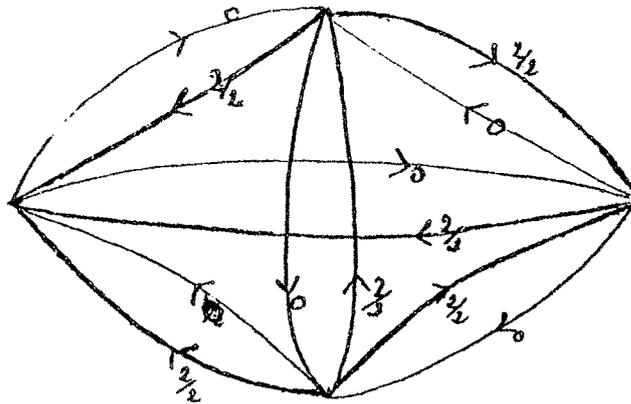


Fig (D-4)

L'ordre O_3 (associé à $v^{(3)}$) est : $O_3 = (x_4, x_2, x_3, x_1)$

- Etape 3 : Les ordres O_1, O_2, O_3 étant distincts, on a :

$$q(O_0) = q(O_1) = q(O_2) = p(O_0) = p(O_1) = p(O_2) = \frac{1}{5}$$

$$q(O_3) = p(O_3) = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5} .$$

Si l'on pose :

$$R = \{O_0, O_1, O_2, O_3\} = \{(x_3, x_1, x_4, x_2), (x_3, x_2, x_1, x_4), (x_2, x_4, x_3, x_1), (x_4, x_2, x_3, x_1)\}$$

l'état de l'opinion cherché est $E_v = (R, p)$.

HEURISTIQUE POUR LA CONSTRUCTION D'UN ETAT DE L'OPINION
CORRESPONDANT A UNE PSEUDO-D.I.B.A.D.O.

L'heuristique qu'on va proposer se justifie par sa rapidité comme méthode de construction d'un état de l'opinion dont la D.I.B.A.D.O. ne soit pas très différente d'une pseudo D.I.B.A.D.O. donnée.

Cette heuristique se fonde sur la procédure suivante qu'on désigne par -Max min-, elle est due à Köhler [], 1978.

Problème :

Etant donnée une matrice réelle $(a(i,j))$ $n \times n$, telle que $i, j \in I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Soit O_γ un ordre total sur I , avec $\epsilon_\gamma = \text{Min}_{(i,j) \in O_\gamma} \{a(i,j)\}$

Trouver un ordre total sur I qui maximise la valeur de ϵ_γ .

La procédure "Max-Min" :

(0) Pour toute ligne i , chercher le minimum des $a(i,j)$.

(1) Choisir le maximum des minima ainsi obtenus.

Soit i_1 l'indice de la ligne correspondant à ce maximum.

(1)' Si i_1 n'est pas unique, on en choisit un tel que $\sum_{j \in I} a_{i_1, j}$ soit maximale.

(2) Supprimer la ligne et la colonne i_1 .

Sur la matrice obtenue par la suppression de la ligne et de la colonne i_1 , on applique le procédé décrit dans (0), (1), (1)' pour obtenir un indice i_3 .

En réitérant ce procédé on obtient les indices $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$. Köhler [18], 1978, a montré que l'ordre $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ sur I résoud le problème posé.

Nous signalons que la procédure de Köhler [18] ne contient pas l'étape (1)'; son introduction rend l'heuristique que nous allons proposer plus efficace.

Dans le cas $|S| \leq 5$, l'algorithme proposé précédemment, permet de construire un état de l'opinion correspondant à une pseudo-D.I.B.A.D.O.

Cependant pour $|S| > 5$, une pseudo-D.I.B.A.D.O. n'est pas nécessairement D.I.B.A.D.O., et de plus le problème de recherche d'un ordre contenant tous les arcs-unités et saturant tous les circuits v -saturés n'est pas résolu dans le cas général, ce qui limite l'application de l'algorithme au cas $|S| \leq 5$.

Pour une pseudo-D.I.B.A.D.O. rationnelle donnée v_0 , l'heuristique qu'on va proposer permet de construire un état de l'opinion E , dont la fonction D.I.B.A.D.O. v , constitue une approximation acceptable de v_0 dans ce sens que :

$$\forall (i,j) \in S^{(2)} \quad |v_0(i,j) - v(i,j)| \leq \frac{\epsilon}{\alpha}$$

où α désigne le plus petit dénominateur commun des valeurs de v et ϵ un entier suffisamment petit par rapport à α . Il est souvent de l'ordre 1 ou 2 quel que soit α .

$$\text{Posons } S = \{1, 2, \dots, i, i+1, \dots, j, \dots, n-1, n\}, \quad \alpha^{(1)} = \alpha, \quad v^{(1)} = v.$$

v étant une pseudo-D.I.B.A.D.O. dont les valeurs sont représentées dans une matrice carrée $(v_{(i,j)})_{n \times n}$, amputée de sa diagonale. $\alpha^{(\gamma)}$ désignera le dénominateur commun aux valeurs de $v^{(\gamma)}$ obtenus au cours de l'application de l'heuristique.

HEURISTIQUE :

(0) $\gamma := 1$

(1) Appliquer la procédure "Max-min" sur la matrice $(v_{(i,j)}^{(\gamma)})$ pour trouver un ordre O_γ qui maximise la valeur $\epsilon_\gamma = \min_{(i,j) \in O_\gamma} v_{(i,j)}^{(\gamma)}$ sur tous les ordres totaux possibles sur S .

(2) On définit la matrice $(v_{(i,j)}^{(\gamma+1)})$ comme suit :

$$v_{(i,j)}^{(\gamma+1)} = \begin{cases} \frac{\alpha^{(\gamma)} v_{(i,j)}^{(\gamma)} - 1}{\alpha^{(\gamma)} - 1} & \text{si } (i,j) \in O_\gamma \\ \frac{\alpha^{(\gamma)} v_{(i,j)}^{(\gamma)}}{\alpha^{(\gamma)} - 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

(3) Si $\gamma = \alpha$ stop

 Sinon aller en (4).

(4) $\gamma := \gamma + 1$, aller en (1).

Si $\gamma \leq \alpha - 2$ aller en (1), sinon aller en (4).

(5) Si $v^{(\alpha-1)}$ est D.I.B.A.D.O. et prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 1/2, \dots, 1/\alpha\}$ désignent deux ordres qui réalisent l'ordre formé par les arcs unités. Sinon aller en (1).

L'application de l'heuristique fournit un ensemble d'ordres totaux $R = \{O_1, O_2, O_3, \dots, O_{\alpha-1}, O_\alpha\}$.

Posons $p(O_i) = 1/\alpha \quad \forall O_i \in R$;

Soit v_E la D.I.B.A.D.O. associée à l'état de l'opinion $E = (R, p)$
 v_E est l'approximation cherchée.

Exemple : On se propose de trouver un état de l'opinion correspondant à la fonction pseudo-D.I.B.A.D.O., v - représentée par la matrice ci-dessus- en appliquant l'heuristique

	a	b	c	d
a		2/4	1/4	3/4
b	2/4		1/4	3/4
c	3/4	3/4		4/4
d	1/4	1/4	0	

(v^1)

Etape I : Recherche d'un ordre O_1 tel que $\varepsilon_1 = \text{Min}_{(i,j) \in O_1} v(i,j)$ soit maximum

par la méthode "Max-min" :

Le maximum des minima sur toutes lignes correspond à la ligne C ; donc l'élément C est en tête de l'ordre O_1 cherché.

Si l'on supprime la ligne et la colonne (C) on obtient la matrice ci-dessous :

	a	b	d
a		2/4	3/4
b	2/4		3/4
d	1/4	1/4	

L'application de l'étape (1) de la procédure "Max-min" montre qu'il existe deux lignes candidates "a" et "b" puisque :
 les minima des lignes "a" et "b" sont égaux à 2/4, lequel est supérieur au minimum de la ligne "d" qui est égale à 1/4.

On choisit l'élément "a" pour occuper la 2ème position dans l'ordre O_1 .
 On supprime la ligne et la colonne (a).

Sur la matrice résultats (2 2), on trouve d'une manière analogue que b est candidat -unique- à la 3ème position dans O_1 .

L'élément d est classé en 4ème position.

Donc l'application de la procédure "Max-min" sur la matrice $(v_{(i,j)})_{n \times n}$ fournit l'ordre $O_1 = (c,a,b,d)$.

II - Passage à la matrice $v^{(2)}$

O, modifie la matrice v de telle sorte que le numérateur et le dénominateur des poids associés aux couples appartenant à O_1 diminue d'une unité.

Pour les poids non nuls des couples n'appartenant pas à O_1 , seul le dénominateur diminue d'une unité.

Nous obtenons ainsi la matrice $v^{(2)}$ ci-dessous :

	a	b	c	d
a		1/3	1/3	1/3
b	2/3		1/3	2/3
c	2/3	2/3		3/3
d	2/3	1/3	0	

La procédure "Max-min" appliquée à la matrice $v^{(2)}$ aboutit à l'ordre total $O_2 = (b,c,a,d)$ et la modification de la matrice $v^{(2)}$ conduit à la matrice $v^{(3)}$ suivante :

	a	b	c	d
a		1/2	1/2	1/2
b	1/2		0	1/2
c	1/2	2/2		2/2
d	1/2	1/2	0	

La fonction représentée dans $v^{(3)}$ est pseudo-D.I.B.A.D.A.

Les ordres $O_3 = (c,d,b,a)$, $O_4 = (a,c,b,d)$ réalisent l'ordre formé par les arcs-unités de v_3 .

Ici l'application de l'heuristique est heureuse, car l'approximation donne une solution exacte :

Les ordres $O_1 = (c,a,b,d)$, $O_2 = (b,c,a,d)$, $O_3 = (c,d,b,a)$, $O_4 = (a,c,b,d)$, munis de la pondération $1/4$, forment un état de l'opinion dont la fonction D.I.B.A.D.O. coïncide avec la fonction v .

La Procédure "Max-min" et le problème
de Recherche de l'ensemble de tous les ordres totaux qui contiennent
un ordre partiel donné

Problème :

Trouver l'ensemble de tous les ordres totaux qui contiennent (ou prolongent) un ordre partiel P - fini - donné.

Dans la littérature, on ne connaît pas de réponse algorithmique satisfaisante à cette question.

La méthode booléenne proposée par Ducamp [7] semble relativement performante.

Nous adoptons ici la méthode "max-min" pour résoudre le problème posé.

Soit P un ordre partiel sur S , φ sa fonction ordinale associée, cf. (B.5), i.e. :

$$\varphi : S^{(2)} \rightarrow \{0, 1, \frac{1}{2}\} ; \varphi \text{ est une pseudo-D.I.B.A.D.O.}$$

$$(i, j) \in P \iff \varphi(i, j) = 1, \varphi(j, i) = 0$$

$$(i, j) \in I_P \iff \varphi(i, j) = \varphi(j, i) = \frac{1}{2}$$

Si $|S| = n$, on représente la fonction φ au moyen d'une matrice $(n \times n)$ amputée de sa diagonale principale.

Proposition :

Tout ordre total issu de la méthode "max-min" appliquée à la matrice $(\varphi(i, j))$ est un ordre total qui contient P .

Démonstration :

Soit α_T un ordre total issu de la méthode max-min appliquée à φ , on a nécessairement :

$$\epsilon_T = \min_{(i,j) \in \alpha_T} \varphi(i,j) = \frac{1}{2} ;$$

en effet :

On ne peut avoir $\epsilon_T = 1$, car ceci entraîne que :

$$\varphi(i,j) = 1 \quad \forall (i,j) \in \alpha_T,$$

ce qui signifie, φ étant pseudo-D.I.B.A.D.O, que celle-ci prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle φ est une fonction ordinale associée à un ordre partiel.

D'autre part : $\epsilon_T \geq \frac{1}{2}$,

car il existe au moins un ordre α_{T_1} tel que $\epsilon_{T_1} = \frac{1}{2}$,

Il suffit pour le voir de prendre un ordre total α_{T_1} qui contient P.

L'ordre α_T contient P. car s'il n'en était pas ainsi, il existerait un couple $(i,j) \in \alpha_T$ tel que $(i,j) \notin P$, ceci implique :

$$\varphi(i,j) = 0 \quad (\text{contradiction avec } \epsilon_T = \frac{1}{2}).$$

c.q.f.d.

Proposition (2)

L'ensemble des ordres engendrés par la méthode "max-min" appliquée à (φ) constitue l'ensemble de tous les ordres totaux qui prolongent P.

Démonstration :

Soit $\alpha_T = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ un ordre contenant P.

Il est évident que $\epsilon_T = \min_{(i,j) \in \alpha_T} \varphi(i,j) = \frac{1}{2}$

Montrons que α_T est susceptible d'être obtenu par l'application de la méthode "max-min" :

i_1 peut être classé en tête d'un ordre issu de la procédure "Max-min", en effet, si le minimum qui correspond à la ligne i_1 est égale à 1, alors i_1 est systématiquement choisi selon la procédure "Max-min" comme premier élément, sinon, le minimum des poids correspondant à la ligne i_1 serait égal à $\frac{1}{2}$, et de plus toute ligne différente de i_1 est telle que le poids minimum de ses éléments est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$. En effet, supposons qu'il existe une ligne $i_\alpha \neq i_1$ dont le minimum des poids est égal à 1.

On déduit de la construction de φ que i_α surclasse dans P tous les éléments de S, et donc en particulier i_1 , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_\alpha, \dots, i_n)$ prolonge P.

Donc i_1 peut être classé en tête d'un ordre issu de la méthode "max-min".

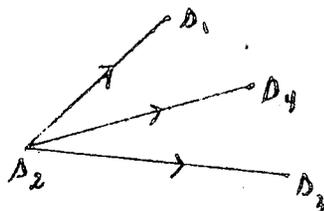
On démontre d'une manière tout à fait analogue que i_2 peut être classé en 2ème position ... etc ...

c.q.f.d.

Exemple :

Soit $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

P l'ordre partiel sur S dont le graphe associé est représenté par la figure ci-dessous :



La matrice (φ) associée à P est la suivante :

	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
s_2	1		1	1
s_3	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$
s_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	

On constate que le minimum sur la 2ème ligne - s_2 - est le maximum des mini-
correspondant aux lignes de la matrice.

Donc s_2 doit être placé en tête de tout ordre prolongeant P.

Supprimons la ligne et la colonne qui correspondent à - s_2 - on obtient la matrice :

	s_1	s_3	s_4
s_1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
s_3	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
s_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

à partir de cette matrice, en poursuivant l'application de la procédure "max-min" toutes les permutations possibles de (s_1, s_3, s_4) sont susceptibles d'être obtenues, elles sont :

$(s_1, s_3, s_4), (s_1, s_4, s_3), (s_3, s_1, s_4), (s_3, s_4, s_1), (s_4, s_1, s_3), (s_4, s_3, s_1)$.

Il en résulte que l'ensemble de tous les ordres totaux qui prolongent P est égal à :

$$\{(s_2, s_1, s_3, s_4), (s_2, s_1, s_4, s_3), (s_2, s_3, s_1, s_4), (s_2, s_3, s_4, s_1), (s_2, s_4, s_1, s_3), (s_2, s_4, s_3, s_1)\}.$$

Une conséquence de la proposition précédente

Soit $V : s^{(2)} \rightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, une fonction pseudo-D.I.B.A.D.O.

Afin de tester si V est D.I.B.A.D.O., on peut procéder de la manière suivante si le nombre d'arcs unités est grand par rapport au nombre des éléments de S :

I). Chercher l'ensemble des ordres totaux prolongeant P ordre partiel formé de l'ensemble des arcs-unités.

Tout ordre d'un état de l'opinion éventuel sur S correspondant à V, appartenir à l'ensemble des ordres totaux qui prolongent P.

II). A chacun des ordres o_i , on fait correspondre une pondération p_i - considérée comme inconnue.

III). On exprime les contraintes suivantes sur les p_i :

a) la somme des pondérations $\{p_i\}$ doit être égale à l'unité.

b) la somme des pondérations des ordres contenant le couple (i,j) de $S^{(2)}$ est égale à $v(i,j)$

IV). Résoudre le système linéaire

Si le système linéaire admet une solution dans laquelle les valeurs des p_i sont positives ou nulles, alors la fonction V est D.I.B.A.D.O. et un état de l'opinion correspondant est constitué par les ordres de pondération non nulle, muni de cette pondération.

Cette méthode est pratique dans le cas où le nombre d'arcs unités est relativement grand, ce qui correspond à un nombre de contraintes linéaires relativement petit.

CHAPITRE III

Grappe eligible

CHAPITRE IIIGRAPHES ELIGIBLES

Au chapitre (I) on a défini le graphe de surclassement G (associé à un état de l'opinion et à une procédure à seuil) à partir d'un état de l'opinion où la pondération associée à un ordre représente le nombre de votants l'ayant adopté.

Dans un graphe de surclassement, les candidats sont en bijection avec les sommets.

Deux sommets a et b sont reliés par l'arc (a,b) si et seulement si le nombre de votants ayant préféré "a" et "b" est supérieur ou égal à $m \cdot s$ ($\frac{1}{2} \leq s \leq 1$).

Graphes éligiblesIII-1 - DEFINITION

Soit $G = (S,A)$ un graphe simple orienté et antisymétrique avec $|S| = n$. Soit m un nombre de votants (resp. s un seuil). On dira que G est éligible si et seulement si il existe un état de l'opinion $E(S)$ (avec des pondérations entières) ayant comme graphe de surclassement le graphe G , et tel que le nombre de votants (resp. le seuil) soit égal à m (resp. s).

DEUX CLASSES PARTICULIERES DE GRAPHES ELIGIBLESIII-2 - GRAPHES ELIGIBLES POUR LE SEUIL UNITE

L'ensemble des graphes éligibles pour le seuil unité est constitué par les graphes d'ordre -graphes associés à une relation d'ordre-.

Tous les graphes d'ordre sur n sommets sont éligibles pour le seuil 1, en effet :

Soit $E(S)$ un ensemble d'ordres totaux dont l'intersection est égale à l'ordre sur S représenté par $G = (S,A)$. Attribuons à chacun des ordres de $E(S)$ la pondération unité.

On vérifie sans peine que $E(S)$ a pour graphe de surclassement le graphe G pour le seuil $s = 1$.

Déterminer la cardinalité minimale de $E(S)$ tel que G soit éligible pour le seuil unité, revient à trouver la dimension de l'ordre défini par G . Un problème réputé bien difficile dans le cas général (voir Trotter [28], Ducamp [7], ..etc).

Cependant nous rappelons que la dimension de tout ordre partiel sur n éléments est inférieure ou égale au plus petit entier inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$, qu'on désigne par $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (théorème 3 du chapitre II).

Il en résulte que le nombre minimum $m(n)$ de votants tel que tout graphe d'ordre sur n sommets soit éligible pour $s = 1$ est égal à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

III-3 - GRAPHE ELIGIBLE POUR LE SEUIL $\frac{1}{2}$

Ce sont les graphes de surclassement correspondant à la méthode majoritaire simple.

Tout graphe appartenant à cette catégorie est complet (avec éventuellement deux arcs reliant 2 sommets si le nombre de votants est pair).

Mc Garvey [11], a établi que tout graphe est éligible pour le seuil $\frac{1}{2}$. Stearn [25] et Erdős-Moser [9] ont respectivement établi que le nombre minimum de votants $m(n)$ pour lequel tout graphe G à n sommets est éligible vérifie $C_2 n / \log n < m(n)$ et $m(n) < C_1 n / \log n$ où C_1 et C_2 sont deux constantes ne dépendant pas de n . On voit que lorsque le seuil s est supérieur à $\frac{1}{2}$, en particulier lorsque $s = 1$, le nombre $m(n)$ ne respecte pas ces bornes, en effet : Si un graphe d'ordre sur n sommets est tel que sa dimension soit égale à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -c'est à dire maximale-, on a $m(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor > C_1 n / \log n$ pour n suffisamment grand.

III-3-1 - Définition

On dit qu'un seuil $s_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ est admissible pour le graphe G si et seulement si, pour tout ℓ -circuit de G on a $s_0 \leq \frac{\ell-1}{\ell}$.

Exemple (1) : : Le seuil $\frac{1}{2}$ est admissible pour tous les graphes.

Exemple (2) : Le seuil 1 n'est admissible que pour les graphes d'ordres.

III-4 - PROPOSITION

Soit $G^{(n)}$ l'ensemble de tous les graphes éligibles à n sommets ; soit $G^{(n)} \in G^{(n)}$.

Soit $m(n)$ un nombre de votants tel que tout $G^{(n)}$ soit éligible, alors

$$\min_{G^{(n)} \in G^{(n)}} [m(n)] \geq n.$$

Démonstration : Pour le montrer il suffit d'exhiber un graphe $G \in G^{(n)}$ et un seuil s admissible pour G tel que ce graphe ne soit éligible que pour $m(n) \geq n$.

Soit G le graphe à n sommets réduit à un circuit élémentaire. Posons $s = \frac{n-1}{n}$.

D'après la proposition 1) du chapitre I tout état de l'opinion ayant pour graphe de surclassement associé le graphe G_s pour un seuil $s \geq \frac{n-1}{n}$ doit contenir toutes les permutations circulaires représentées par les chemins élémentaires maximaux du circuit.

Ce qui prouve que $m(n) \geq n$.

c.q.f.d.

GRAPHES SANS CIRCUIT : Nous désignons par $G_1^{(n)} \subseteq G^{(n)}$ l'ensemble de tous les graphes sans circuit à n sommets.

III-5 - PROPOSITION

$\forall G_1 \in G_1^{(n)}, \forall s_0 \in]\frac{1}{2}, 1[\subseteq \mathbb{Q}$ (l'ensemble des rationnels) fixé, \exists un entier m_1 tel que G_1 soit éligible.

Démonstration : Soit $G_1 \in G_1^{(n)}$ un graphe sans circuit.

G_1 est éligible pour le seuil $\frac{1}{2}$ et pour un nombre de votants $m_0(n)$ d'après (II).

Soit E_1 l'état de l'opinion correspondant.

Désignons par $K_0(n)$ le nombre de votants de la majorité simple relativement à $m_0(n)$ dans E_1 .

Soit $s_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$ un nombre rationnel.

Montrons que G_1 est éligible pour un certain nombre de votants $m_1(n)$ pour le seuil s_0 .

G_1 étant sans circuit, en vertu du lemme 2(D), il existe un ordre total θ_0 sur S contenant tous les arcs de G_1 .

Soit $\alpha_o(\theta_o)$ une pondération entière positive attribuée à θ_o , telle que

$$s_o = \frac{K_o(n) + \alpha_o(n)}{m_o(n) + \alpha_o(n)}$$

ce qui équivaut à

$$\alpha_o = \frac{m_o(n) \cdot s_o - K_o(n)}{1 - s_o}$$

On peut constater sans peine que l'état de l'opinion $E_1 \cup \{\theta_o\}$, a pour graphe de surclassement le graphe G_1 pour le seuil s_o , et pour un nombre de votants $m_1(n) = m_o(n) + \alpha_o(n)$.

c.q.f.d.

III-6 - ELIGIBILITE DES GRAPHES CONTENANT DES CIRCUITS

Il va être montré que tous les graphes contenant des circuits ne sont pas éligibles pour tous les seuils admissibles.

Pour cela, nous construisons un graphe particulier G_o ayant des 3-circuits, et nous établissons que G_o , pour le seuil admissible particulier $s_o = \frac{2}{3}$ n'est pas éligible, i.e. : il n'existe pas d'état de l'opinion ayant pour graphe de surclassement le graphe G_{s_o} , tel que que $s_o = \frac{2}{3}$.

Problème : Etant donné un graphe G , simple orienté -antisymétrique- et contenant des 3-circuits.

Est-il toujours possible d'obtenir un graphe sans circuit par suppression d'un arc unique de chaque 3-circuit de G .

III-7 - PROPOSITION

Soit $G^{(3)}$ l'ensemble des graphes contenant des 3-circuits. Il n'est pas possible de rendre tous les graphes de $G^{(3)}$ sans 3-circuits, par suppression d'un arc unique de chaque 3-circuit.

Démonstration : Nous allons construire un graphe G_o contenant des 3-circuit et montrer qu'il n'est pas possible de supprimer tous les 3-circuits de G par la "destruction" d'un arc et d'un seul de chacun des 3-circuits.

Le graphe G_o va être construit progressivement, étant donné le nombre élevé de ses sommets.

Construction de $G_0 = (S, A)$:

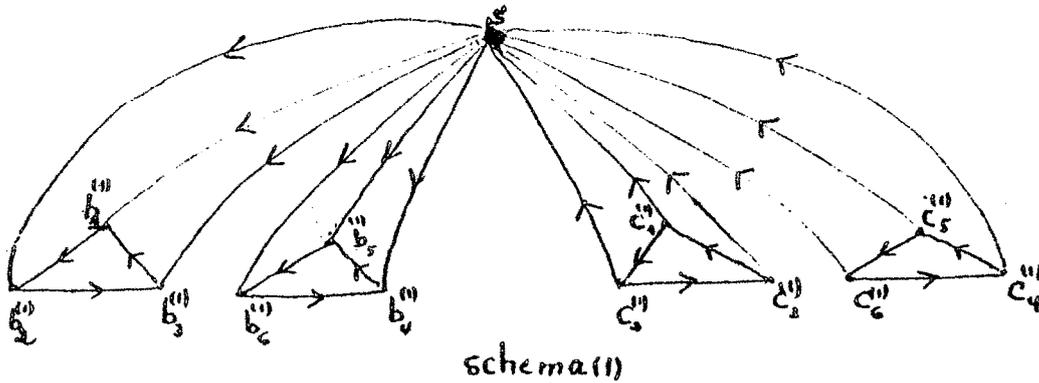
Soient : $s \in S$

$$B^{(1)} = \{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_3^{(1)}, b_4^{(1)}, b_5^{(1)}, b_6^{(1)}\} \subseteq \Gamma^+(s) = \{b \in S \mid (s, b) \in A\}.$$

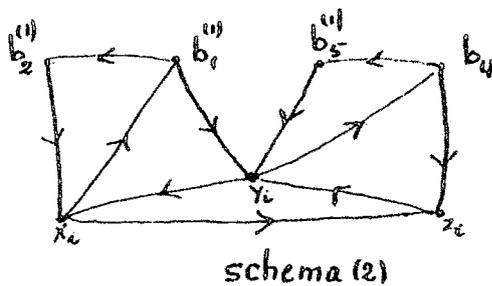
$$C^{(1)} = \{c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}, c_4^{(1)}, c_5^{(1)}, c_6^{(1)}\} \subseteq \Gamma^-(s) = \{c \in S \mid (c, s) \in A\}.$$

$[b_1^{(1)} b_2^{(1)} b_3^{(1)}]$ et $[b_4^{(1)} b_5^{(1)} b_6^{(1)}]$ sont deux 3-circuits de G_0 . Il en est de même de $[c_1^{(1)} c_2^{(1)} c_3^{(1)}]$ et $[c_4^{(1)} c_5^{(1)} c_6^{(1)}]$;

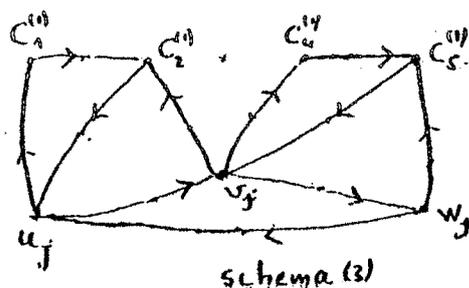
Voir schéma 1 ci-dessous



A toute paire d'arcs appartenant l'un à $[b_1^{(1)} b_2^{(1)} b_3^{(1)}]$ et l'autre à $[b_4^{(1)} b_5^{(1)} b_6^{(1)}]$ nous associons 3 sommets x_i, y_i et z_i ($1 \leq i \leq 9$), suivant le schéma (2) ci-dessous -celui-ci correspond à la paire d'arcs $\{(b_1^{(1)} b_2^{(1)}), (b_4^{(1)} b_5^{(1)})\}$:



On associe également à toute paire d'arcs appartenant aux circuits $[c_1^{(1)} c_2^{(1)} c_3^{(1)}]$ et $[c_4^{(1)} c_5^{(1)} c_6^{(1)}]$ 3 sommets u_j, v_j et w_j ($1 \leq i \leq 9$) suivant le schéma (3) suivant correspondant à la paire $\{(c_1^{(1)} c_2^{(1)}), (c_4^{(1)} c_5^{(1)})\}$:



Supposons encore que $\{x_i, y_i, z_i\} \in \Gamma^-(s)$

et $\{u_i, v_i, w_i\} \in \Gamma^+(s)$

Sans être terminée, la construction de G est bien avancée !

Supposons que les arcs $(s, b_i^{(1)})$ pour $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, doivent être choisis comme "à supprimer" dans des 3-circuits de G_0 .

Pour rendre G_0 sans 3-circuits, un des arc du 3-circuit $[b_1^{(1)} b_2^{(1)} b_3^{(1)}]$ et un arc du 3-circuit $[b_4^{(1)} b_5^{(1)} b_6^{(1)}]$ doit être supprimé.

Supposons que ce soient par exemple $(b_1^{(1)} b_2^{(1)})$ et $(b_4^{(1)} b_5^{(1)})$ (schéma (2))

Dans le 3-circuit $[b_1^{(1)} b_2^{(1)} x_i]$ les arcs $(b_2^{(1)} x_i)$, $(x_i b_1^{(1)})$ ne peuvent être alors supprimés.

De plus dans le circuit $[sb_1^{(1)} y_i]$ l'arc $sb_1^{(1)}$ ayant été supprimé, on ne peut supprimer $b_1^{(1)} y_i$.

Donc, dans le 3-circuit $[x_i b_1^{(1)} y_i]$ c'est $y_i x_i$ qui doit être supprimé.

Avec un raisonnement analogue, on déduit que $y_i z_i$ doit être supprimé.

Ce qui fait 2 arcs supprimés du 3 circuit $[x_i y_i z_i]$.

En conséquence, un des arcs $\{(s, b_1^{(1)}), (s, b_2^{(1)}), (s, b_3^{(1)}), (s, b_4^{(1)}), (s, b_5^{(1)}), (s, b_6^{(1)})\}$ ne doit pas être supprimé ; désignons le par $(sb^{(1)})$ pour fixer les idées.

De même supposons que les arcs $\{(c_i^{(1)}, s) / i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aient été choisis comme à supprimer dans des 3-circuits de G_0 .

Si l'on suppose que les arcs $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)})$ et $(c_4^{(1)}, c_5^{(1)})$ sont à supprimer, respectivement dans le 3-circuit $[c_1^{(1)} c_2^{(1)} c_3^{(1)}]$ et $[c_4^{(1)} c_5^{(1)} c_6^{(1)}]$, on déduit par un raisonnement analogue à celui du cas précédent que (u_i, v_i) et (v_i, w_i) doivent être supprimés dans le 3-circuit $[u_i, v_i, w_i]$.

Par conséquent un arc $(c_i^{(1)}, s)$ ne doit pas être supprimé, désignons le par $(c^{(1)}, a)$.

Rajoutons d'autres ensembles B^i, C^i , $i \in \{2, 3\}$ de sommets, inclus dans S, tels que

$$B^{(i)} = \{b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}, b_4^{(i)}, b_5^{(i)}, b_6^{(i)}\} \subseteq \Gamma^+(a)$$

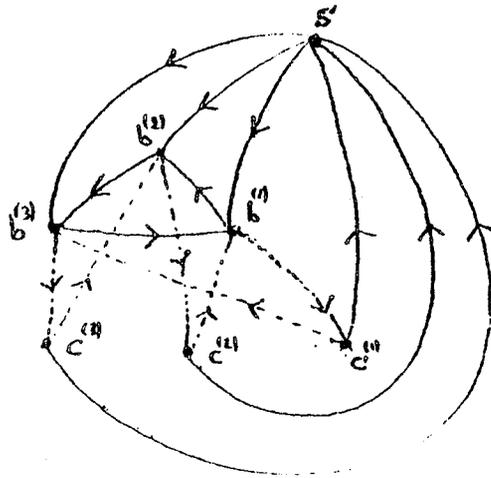
$$C^{(i)} = \{c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)}, c_4^{(i)}, c_5^{(i)}, c_6^{(i)}\} \subseteq \Gamma^-(a)$$

Sur chacun des ensembles de sommets $S^{(i)} = \{s\} \cup B^{(i)} \cup C^{(i)}$, on construit des arcs d'une manière analogue à celle utilisée dans le cas de $S^{(1)} = \{s\} \cup B^{(1)} \cup C^{(1)}$.

III-7

On en conclut qu'il existe parmi les arcs construits sur chacun des ensembles $S^{(i)}$, $i \in \{2,3\}$ un arc $(s, b^{(i)})$ et un arc $(c^{(i)}, s)$ qui ne doivent pas être supprimés.

Sur tout ensemble $S_0 = \{s, b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}\}$ des sommets, déjà reliés par quelques arcs, d'autres arcs sont rajoutés selon le schéma (4) suivant :



schema (4)

Dans les 3-circuits $[sb^{(3)}c^{(3)}]$, $[sb^{(2)}c^{(2)}]$ et $[sb^{(1)}c^{(1)}]$ les arcs à supprimer sont alors respectivement $(b^{(3)}, c^{(3)})$, $(b^{(2)}, c^{(2)})$ et $(b^{(1)}, c^{(1)})$.

Il en résulte qu'aucun des arcs $(b^{(1)}, b^{(2)})$, $(b^{(2)}, b^{(3)})$ et $(b^{(3)}, b^{(1)})$ -constituant (a) le circuit $[b^{(1)}b^{(2)}b^{(3)}]$ - ne peut être supprimé, car ils appartiennent respectivement aux 3-circuits $[b^{(1)}b^{(2)}c^{(2)}]$, $[b^{(2)}b^{(3)}c^{(3)}]$ et $[b^{(3)}b^{(1)}c^{(1)}]$ dont chacun serait déjà amputé d'un arc d'après (a).

Par conséquent d'après la construction de G_0 , il n'est pas possible de supprimer un arc et un seul de chacun des 3-circuits, de manière à le rendre sans circuit.

c.q.f.d.

Nota : L'idée principale de cette démonstration est due à Jean-Claude Bermond.

III-8 - THEOREME

Tous les graphes contenant des 3-circuits ne sont pas éligibles.

Démonstration : Remarquons tout d'abord, qu'un état de l'opinion tel qu'il est défini au Chapitre I -avec des ordres à pondérations entières- peut être décrit comme un état de l'opinion, avec des pondérations réelles appartenant

à l'intervalle $]0,1[$, tel qu'il est défini au début du chapitre II. Il suffit de remplacer chacune des pondérations entières K_i associée à un ordre par $\frac{K_i}{m}$, où m désigne le nombre total de votants.

Par ailleurs, si G est un graphe contenant des 3-circuits, alors tout seuil admissible est inférieur ou égal à $\frac{2}{3}$, d'après le Corollaire I du chapitre I.

Donc si E est un graphe de surclassement correspondant à un état de l'opinion E à pondérations dans $]0,1[$, déduit à partir d'un état de l'opinion à pondérations entières de la manière décrite ci-dessus, alors tout 3-circuit de G est V_E saturé, où V désigne la DIBADO associée à E .

Par conséquent, d'après la proposition I du chapitre II, tout état de l'opinion éventuel correspondant à G est tel que chacun de ses ordres sature tous les 3-circuits saturés, en l'occurrence, ici, tous les 3-circuits dans G .

En outre, il est facile de vérifier qu'un ordre θ_0 saturant tous les 3-circuits de G existe si et seulement si il est possible de supprimer un arc et un seul de chacun des 3-circuits de G de manière à le rendre sans 3-circuits.

Or si l'on choisit le graphe G identique à G_0 , la proposition précédente montre qu'on ne peut pas supprimer les 3-circuits de G_0 par la suppression d'un arc et un seul de chacun des 3-circuits.

Donc le graphe G_0 n'est pas "éligible".

c.q.f.d.

III-8-1 Corollaire

Tous les graphes ne sont pas éligibles.

III-9 - ELIGIBILITE D'UN PREORDRE TOTAL SELON LA PROCEDURE "SEUIL-MAX"

Dans le premier chapitre, nous avons traité de la méthode d'agrégation dite "seuil-max", qui, à un état de l'opinion $E(s)$ sur S associe un préordre total représentant l'opinion collective.

Ce préordre est établi à partir d'un graphe de surclassement G_{S_0} , ayant un chemin passant par tous les sommets (il n'est pas nécessairement élémentaire).

Le seuil s_0 étant maximal pour cette propriété.

La contraction de circuits éventuels de G_{s_0} le réduit à un graphe contenant un chemin élémentaire unique [6], dont on ordonne les sommets en le parcourant à partir du sommet initial.

Cet ordre définit le préordre collectif, en considérant comme exaequos les sommets appartenant à un même circuit.

Les paragraphes suivants porteront sur l'éligibilité d'un préordre selon la procédure "seuil-max" pour un nombre de votants m donné.

L'éligibilité d'un préordre selon cette procédure sera dite tout simplement "éligibilité d'un préordre".

III-9-1 - Définition

Un préordre total sur S sera dit éligible si et seulement si ce préordre coïncide avec un préordre total sur S , établi par application de la procédure "seuil-max" sur un certain état de l'opinion $E(S)$.

Remarque : Tout préordre est éligible, cf. (III-3), si le nombre de votants m n'est pas restreint.

Cependant, déterminer si un préordre total donné est éligible selon "seuil-max", pour un nombre m de votants donné est relativement plus délicat dans le cas général.

Nous montrerons qu'un préordre donné est éligible par m votants si et seulement si $m \geq 4$ (resp. $m \geq 5$) pour m pair (resp. m impair).

Autrement dit, toute opinion collective exprimée selon "seuil-max" par un préordre total est possible dès que le nombre de votants m est supérieur ou égal à 4 ou à 5 suivant que m est pair ou impair.

Si le préordre collectif est un ordre total, l'éligibilité est immédiate pour tout $m \geq 1$.

Si le préordre comporte des exaequos, on exigera que le nombre d'éléments ayant le même classement soit supérieur ou égal à 3 éléments auxquels on associe un circuit élémentaire les contenant.

Le problème posé sera presque entièrement résolu, après avoir montré que tout circuit élémentaire (de longueur supérieure ou égale à 3) est éligible pour tout m supérieur ou égal à 4 (resp. 5) pour m pair (resp. impair).

Ceci est l'objectif des paragraphes suivants.

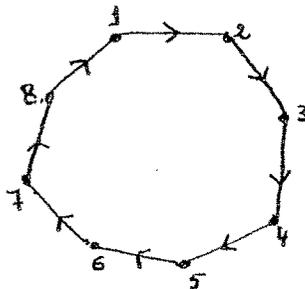
III-10 - GRAPHES CIRCUITS ELIGIBLES

Définition : On appelle graphe circuit $G = (S,A)$ tout graphe réduit à un circuit élémentaire (en particulier on exigera que $|S| \geq 3$).

On posera désormais pour un graphe circuit $G = (S,A)$:

$$S = \{1,2,3,4,\dots,n\}, A = \{(1,2), (2,3), (3,4), \dots, (n-1,n), (n,1)\}.$$

Exemple : (Figure ci-dessous) : $G = (S,A), S = \{i | 1 \leq i \leq 8, i \in \mathbb{N}\}$.



Rappel : Une condition nécessaire pour qu'un graphe de surclassement contienne un circuit de longueur n est que s (seuil associé à G_s) soit inférieur ou égal à $\frac{n-1}{n}$.

Ceci va nous permettre de déterminer le seuil admissible maximum pour un graphe circuit.

III-10-1 - Seuil Maximum admissible pour un graphe circuit

Remarquons tout d'abord que le seuil maximum admissible par un graphe circuit est strictement inférieure à 1, sinon il y aurait transitivité dans G , ce qui contredit l'hypothèse que G est un graphe circuit.

Nous distinguons deux cas :

Cas a) : m (le nombre de votants) est inférieur ou égal à n :

Le seuil maximum est inférieur ou égal à $\frac{m-1}{m} = s_0$

Cas b) : Si $m > n$, on constate que $s_0 \leq \frac{[m \cdot \frac{n-1}{n}]}{m}$.

D'autre part ce qui suit montrera que tout graphe circuit est éligible pour le seuil s_0 (dans les cas a et b).

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que tout graphe-circuit $G = (S,A)$ ($|S| \geq 3$) soit éligible est que le nombre de votants m associé à G soit supérieur ou égal à 4.

La condition nécessaire est une conséquence immédiate de (I-2 g)
La condition suffisante énoncée va être montrée progressivement.

III-11 - CONSTRUCTION D'UN ETAT DE L'OPINION CORRESPONDANT A UN GRAPHE CIRCUIT POUR UN SEUIL ADMISSIBLE MAXIMUM

III-11-1 - Définition

Une séquence U de couples d'éléments de S est dit compatible avec un ordre sur S , s'il existe un bulletin sur S contenant tous les éléments de la séquence.

Remarque : Une séquence compatible avec un ordre constitue un ensemble de chemins du graphe de l'ordre.

Exemple : $S = \{1,2,3,4,5\}$, $U = \{(1,2), (2,3), (3,4), (5,6)\}$.

La séquence U est compatible avec l'ordre $(1,2,3,4,5,6)$.

III-11-2 - Définition

On appelle séquence circulaire toute séquence de la forme

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)$$

Remarque : Il est évident qu'il n'existe pas de séquence circulaire de $I \times I$ compatible avec un ordre sur I .

Pour rendre une séquence circulaire compatible avec un ordre, il faudrait inverser les éléments d'un couple unique de la séquence.

III-11-3 - La matrice M et le schéma d'inversion

- On dira qu'on inverse le couple (i, j) si on le remplace par (j, i) -

Soit M une matrice $m \times n$ ($m < n$) dont chacune des lignes est la séquence circulaire $(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), \dots, (n-1,n), (n,1)$.

On donne le tableau ci-dessous, qu'on appelle schéma d'inversion sur M. Les couples sur lesquels porteront les inversions sont en gras sur ce tableau.

12	23	34	45	56	$m-1, m$	$m, m+1$	$m+1, m+2$	$n-1, n$	$n, 1$
12	23	34	45	56	$m-1, m$	$m, m+1$	$m+1, m+2$	$n-1, n$	$n, 1$
12	23	34	45	...	$m-2, m-1$	$m-1, m$	$m, m+1$						
12													
.....													
12	23	34	45									

Autrement dit, on effectue sur la matrice M des inversions sur les éléments diagonaux correspondant à la matrice $m \times m$ constituée des m premières colonnes de M. A partir de la $(m+1)$ ème colonne les inversions sont effectuées alternativement dans la deuxième et la première colonne de M.

III-11-3-1-Exemple : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $m = 5$

Ci-dessus le schéma d'inversions sur la matrice associée :

12	23	34	45	56	67	71
12	23	34	45	56	67	71
12	23	34	45	56	67	71
12	23	34	45	56	67	71
12	23	34	45	56	67	71

III-11-4 - Propriétés

Soit M' la matrice obtenue par le procédé d'inversions sur M.

On a les propriétés suivantes :

P1) : Chacune des $(m-2)$ dernières lignes est compatible avec un ordre total sur S et un seul, puisqu'une seule inversion est effectuée dans chacune de ces lignes.

Exemple : Dans l'exemple précédent la 3ème ligne est compatible avec l'ordre unique $(4, 5, 6, 7, 1, 2, 3)$.

P2) : En général chacune des deux premières lignes est compatible avec plusieurs ordres.

Exemple : Dans l'exemple(III-11-3-1), la première ligne de M' est compatible avec les ordres :

(1,2,3,6,4,7,5)

(1,2,3,6,7,4,5)

etc...

P3) : Dans tout état de l'opinion sur S dont chacun des ordres est compatible avec une ligne et une seule de M', on constate que le bulletin (l'ordre) partiel $B = m-1, m, m+1, m+2, \dots, n-1, n, 1$ est contenu dans chacun des ordres (uniques) compatibles avec les (m-2) dernières lignes de M'. Par conséquent si l'on veut choisir un état de l'opinion correspondant au graphe circuit $G = (S,A)$ (pour $s = \frac{m-1}{m}$), les ordres compatibles avec les deux premières lignes doivent être tels que si i est placé avant j dans B et $j \neq i+1$ alors j est classé avant i dans les ordres compatibles avec les deux premières lignes.

P4) : De même dans un état de l'opinion correspondant au graphe circuit G pour $s = \frac{m-1}{m}$, le couple (n,2) serait voté au moins (m-2) fois : (m-3) fois dans les ordres compatibles avec les (m-2) dernières lignes, et une fois dans un ordre compatible avec l'une des deux premières lignes.

Ainsi on doit choisir un ordre compatible avec l'une des deux premières lignes tel qu'il contienne (2,n).

P5) : On constate que tout autre couple (i,j), ($i < j, j \neq i+1$) et son inverse (j,i) est voté au moins 2 fois chacun.

III-11-5 - Etat de l'opinion E(S) correspondant au graphe circuit $G = (S,A)$, $s = \frac{m-1}{m}$ et $m < n$

Les propriétés précédentes justifient partiellement le choix de l'état de l'opinion E(S) suivant la forme de la première ligne de M'.

(1) Si le dernier couple de la première ligne de M' ait été inversé, les deux premières lignes prennent alors la forme :

(1,2)(23)(34) (m-1,m), (m+1,m), (m+1, m+2), (n-1,n), (1,n)

(1,2)(23)(34) (m-2,m-1), (m-1,m), (m,m+1) (n,n-1), (n,1)

et les ordres choisis correspondant à ces lignes sont respectivement :

(1,2,3,4,5 m-3, m-2, n-1, n, n-3, n-2, n-5, n-4, ... m+1, m+2, m-1, m)

(n,1,2,3,4,5 m-4, m-3, n-2, n-1, n-4, n-3, n-6, n-5, ... m, m+1, m-2, m-1)

(2) Le dernier couple de la première ligne n'a pas été inversé.

On en conclut que les deux premières lignes sont respectivement :

(1,2) (2,3) (3,4) ... (m-1,m), (m+1,m), (m+1,m+2) ... (n-2,n-1), (n,n-1), (n,
 (1,2) (2,3) (3,4) ... (m-2,m-1), (m,m-1), (m,m+1) ... (n-1,n-2), (n-1,n), (1,1)

Les ordres choisis compatibles avec ces lignes seraient :

(1,2,3,4 ... m-2, n, 1, n-2, n-1, n-4, n-3 m+1, m+2, m-1, m)

(1,2,3,4 ... m-3, n-1, n, n-3, n-2, n-5, n-4 m, m+1, m-2, m-1)

Dans les deux cas (1) et (2) les ordres choisis compatibles avec les m-2 dernières lignes sont uniques.

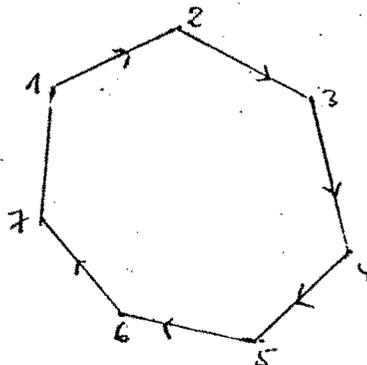
Ainsi selon la forme des deux premières lignes (Cas (1) ou (2)) on aboutit à l'état de l'opinion E_1 ou E_2 suivant :

$E_1 \equiv$ (1,2,3,4,5... m-3, m-2, n-1, n, n-3, n-2, n-5, n-4 ... m+1, m+2, m-1, m)
 (n,1,2,3,4 ... m-4, m-3, n-2, n-1, n-4, n-3, n-6, n-5 ... m, m+1, m-2, m-1)
 (m-1, m, m+1, m+2 ... n-1, n, 1, 2, 3 ... m-3, m-2)
 (m-2, m-1, m, m+1 ... n-1, n, 1, 2 m-4, m-3)

 (3,4,5,6 n-2, n-1, n, 1, 2)
 (2,3,4 n-3, n-2, n, 1)

$E_2 \equiv$ (1,2,3,4 ... m-2, n, 1, n-2, n-1, n-4, n-3 ... m+1, m+2, m-1, m)
 (1,2,3,4 ... m-3, n-1, n, n-3, n-2, n-5, n-4 ... m, m+1, m-2, m-1)
 (m-1, m, m+1, m+2 n-1, n, 1, 2, 3 ... m-3, m-2)
 (m-2, m-1, m, m+1 n-1, n, 1, 2, 3 ... m-2, m-1)
 (... ..
 (3,4,5,6,7 m, m+1, m+2 n-2, n-1, n, 1, 2)
 (2,3,4,5,6 m, m+1 n-3, n-2, n-1, n, 1)

Exemple : Soit $G = (S,A)$ un graphe circuit à 7 sommets, figure ci-dessous



Supposons que m (le nombre de votants) soit égal à 4.
Le graphe G est éligible pour le seuil maximum $s = \frac{3}{4}$.

Ci-dessous la matrice M' associée à G

12	23	34	54	56	76	71
12	23	43	45	65	67	17
12	32	34	45	56	67	71
21	23		45	56	67	71

(La ligne pointillé joint les couples inversés de M).

L'état de l'opinion E correspondant à G est donnée par :

- (1, 2, 7, 5, 6, 3, 4)
- (1, 6, 7, 4, 5, 2, 3)
- (2, 3, 4, 5, 6, 7, 1)
- (3, 4, 5, 6, 7, 1, 2)

On peut vérifier directement que le graphe de surclassement associé à E pour $s = \frac{3}{4}$ coïncide avec G .

III-11-6 - Proposition

Tout graphe circuit $G = (S,A)$ est éligible pour $m \geq n$ et s maximum.

Démonstration : Rappelons que dans ce cas le seuil maximum admissible par G serait égal à $\frac{\left[\frac{n-1}{n} . m \right]}{m} = s$.

i) Si $m = k.n$ est multiple de n , le seuil s serait égal à $\frac{n-1}{n}$ et l'état de l'opinion $E(S)$ correspondant à G serait unique.
 $E(S)$ doit contenir n bulletins représentés par les chemins maximaux du circuit.
Par ailleurs chacun des bulletins doit être voté K fois.
Il en résulte une construction simple de $E(S)$: n fois K bulletins de votes identiques à chacun des chemins maximaux du circuit.

ii) Si m est strictement supérieur à n , et m n'est pas un multiple de n , il existe un couple (q,r) d'entiers positifs non nuls, uniques tel que :
 $m = nq+r$ et $0 < r < n$.

Il vient :
$$s = \frac{\left[\frac{n-1}{n} . m \right]}{m} = \frac{\left[\frac{n-1}{n} (nq+r) \right]}{m} = \frac{\left[nq - q + r - \frac{r}{n} \right]}{m} = \frac{nq - q + r - 1}{m} = \frac{nq - q + r - 1}{nq+r}$$

La construction d'un état de l'opinion correspondant à G pour un tel seuil n'est guère plus difficile, en effet, posons $m_1 = nq$, $m_2 = r$.

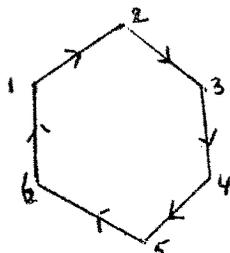
m_1 étant un multiple de n , il existe un état de l'opinion E_1 correspondant à G pour m_1 et $s_1 = \frac{n-1}{n}$

D'autre part si $r \leq 3$, il n'est pas difficile de trouver un état de l'opinion $E_2(S)$ pour $m_2 = r$ tel que $E_1 \cup E_2$ réponde à la question.

Si $r \geq 4$, on déduit que G est éligible pour $m_2 = r$, $s_2 = \frac{r-1}{r}$,

Si E_2 est l'état de l'opinion correspondant, on vérifie alors sans peine que $E_1 \cup E_2$ est un état de l'opinion dont le graphe de surclassement coïncide avec G pour le seuil maximum admissible $s = \frac{nq-q+r-1}{nq+r}$.

Exemple : Soit G un graphe circuit sur 6 sommets (voir fig. ci-dessous)



Montrons que G est éligible pour $m = 10$ et $s = \frac{8}{10}$ (m n'est pas multiple de n).

D'après la proposition précédente, le seuil admissible maximum par G est donné par $s = \frac{nq-q+r-1}{nq+r}$, $m = nq+r = 6.1+4$ et $q = 1$, $r = 4$.

$$\text{Donc } s = \frac{6-1+4-1}{10} = \frac{8}{10}$$

Si on pose $m_1 = nq = 6$, il est clair que G est éligible pour $n_1 = 6$ et $s = \frac{5}{6}$.

Ci-dessous l'état de l'opinion E_1 (unique) correspondant :

$$E_1 \equiv \begin{matrix} (1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ (2, 3, 4, 5, 6, 1) \\ (3, 4, 5, 6, 1, 2) \\ (4, 5, 6, 1, 2, 3) \\ (5, 6, 1, 2, 3, 4) \\ (6, 1, 2, 3, 4, 5) \end{matrix}$$

pour $m_2 = r = 4$.

D'après (III.14), G est éligible pour $m_2 = 4$ et $s_2 = \frac{3}{4}$.

En utilisant le procédé (III-5), on trouve un état de l'opinion E_2 dont le graphe de surclassement coïncide avec G pour m_2 et s_2 :

$$E_2 \equiv \begin{pmatrix} (2, 3, 4, 5, 6, 1) \\ (3, 4, 5, 6, 1, 2) \\ (6, 1, 4, 5, 2, 3) \\ (1, 2, 5, 6, 3, 4) \end{pmatrix}$$

il s'ensuit que $E_1 \cup E_2$ a pour graphe de surclassement le graphe G pour le seuil maximum $s = \frac{8}{10}$.

III-11-7 - Proposition

Soit $G = (S, A)$ un graphe circuit éligible pour m , $s = \frac{m-1}{m}$.

Si m et n vérifient $4 \leq m \leq n < 2m$, alors dans tout état de l'opinion E correspondant à G , il existe au moins $2m-n$ permutations circulaires de l'ordre $(1, 2, 3, \dots, n)$.

Autrement dit :

Dans E on a voté au moins $2m-n$ chemins parmi les chemins maximaux de G .

Démonstration : Soit :

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) \dots \dots (n-1, n), (n, 1) = U$$

Pour tout ordre θ sur S , on peut toujours, en effectuant des inversions sur certains couples rendre U compatible avec cet ordre.

Par conséquent, à tout état de l'opinion E , on peut associer une matrice de séquences circulaires de couples de S .

Si les conditions $s = \frac{m-1}{m}$, $4 \leq m \leq n < 2m$ sont vérifiées, alors chacune des colonnes de la matrice M associée doit être telle qu'un élément (couple) et un seul puisse être inversé.

Comme il existe n colonnes, on en déduit qu'il existe au plus $n-m$ lignes dont 2 éléments (couples) sont inversés.

Donc il existe au moins $m - (n-m) = 2m-n$ lignes, dans chacune un couple est inversé.

De telles lignes sont compatibles avec des ordres uniques qui sont des permutations circulaires de l'ordre $(1, 2, 3, 4, \dots, n)$.

III-12 - ELIGIBILITE D'UN PREORDRE TOTAL

L'éligibilité de tout graphe circuit $G = (S,A)$ pour $m \geq 4$, $|S| \geq 3$, prouve que tout préordre collectif sur l'ensemble S où tous les éléments sont exaequos, est aussi éligible.

Ce problème étant résolu, l'éligibilité d'un préordre total quelconque sur l'ensemble S est facile à vérifier.

Désignons par R une relation de préordre total sur S .

Soit $G = (S,A)$ le graphe associé à R tel que :

$$i, j \in S, (i, j) \in A \iff (i, j) \in R.$$

Sur toute partie $S_\alpha \subseteq S$ d'éléments exaequos dans R , tous les arcs reliant des éléments de S_α sont remplacés par un circuit élémentaire C_α passant par tous les sommets de S_α .

Tout circuit C_α associé à S_α est éligible d'après (III-11-3) et (III-1 pour un seuil maximum s_α et pour tout $m \geq 4$.

Désignons par $E(S_\alpha)$ un état de l'opinion associé à S_α pour m, s_α .

La contraction des circuits élémentaires obtenus dans G le réduit à un graphe d'ordre total P où chacune des classes S_α serait représentée par un sommet qu'on désigne par le même symbole S_α .

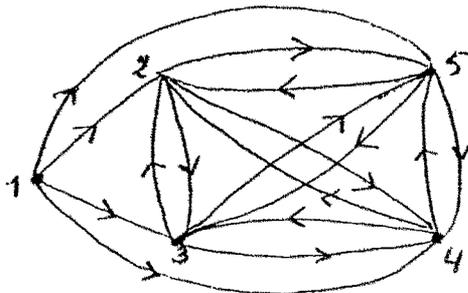
P est évidemment éligible pour $s = 1$.

Soit E un état de l'opinion sur les sommets de P , constitué par m ordres identiques à l'ordre P .

Si l'on remplace chaque élément S_α dans chacun des m ordres par un ordre de $E(S_\alpha)$, on obtient un état de l'opinion E_0 sur S dont le graphe de surclassement associé pour $m, s_0 = \min s_\alpha$ est tel que le préordre total associé coïncide avec R .

Exemple : Soit (S) un préordre total sur $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, où l'élément 1 est classé en tête, et les 4 éléments 2, 3, 4, 5 sont classés exaequos en 2ème position.

Le graphe associé à R serait alors le suivant :



On associe à $S_1 = \{2, 3, 4, 5\}$ le circuit élémentaire $\{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 2)\} = C_1$.

Pour $m = 4$, $s = \frac{3}{4}$ le circuit C_1 est éligible.

L'état de l'opinion E_1 correspondant est :

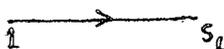
(2, 3, 4, 5)

(3, 4, 5, 2)

(4, 5, 2, 3)

(5, 2, 3, 4)

d'autre part, la contraction de C_1 réduit G au graphe ci-dessous.



On voit immédiatement que l'état de l'opinion E suivant répond à la question (c'est à dire que le préordre collectif obtenu à partir du graphe de surclassement associé à E pour $m = 4$, $s = \frac{3}{4}$ coïncide avec \mathcal{R}).

$E \equiv$

(1, 2, 3, 4, 5)

(1, 3, 4, 5, 2)

(1, 4, 5, 2, 3)

(1, 5, 2, 3, 4)

CONCLUSION

Comme le lecteur a pu s'en rendre compte, les résultats obtenus de cette thèse peuvent être regroupés en trois grandes catégories.

La première est relative aux D.I.B.A.D.O., caractérisées pour un nombre d'objets inférieur ou égal à 5 (un algorithme permettant de construire un état de l'opinion correspondante complète cette caractérisation).

La restructuration est intéressante et ouvre un domaine de recherche précis - les psycho-physiologistes savent bien que l'esprit humain, en principe, possède une mémoire à court terme limitée à 7 items - mettre un ordre sur des objets en fonction de plusieurs critères ne sera évidemment une tâche relativement aisée que si les objets peuvent être traités en quelque sorte simultanément par le cerveau.

Nous avons montré que toute pseudo-D.I.B.A.D.O., pour un nombre d'objets inférieur ou égal à 5 était D.I.B.A.D.O., tandis que cette propriété était fautive au delà.

Le lecteur attentif peut voir là une espèce d'explication, de justification au nombre 7, qui a beaucoup intrigué les psycho-sociologues et qui serait peut-être un seuil au delà duquel la probabilité pour qu'une pseudo-D.I.B.A.D.O. soit une D.I.B.A.D.O. deviendrait très faible.

Ceci relève cependant de la conjecture. Notre apport précis est en fait de permettre au chercheur en sciences sociales qui a observé une pseudo-D.I.B.A.D.O sur 5 objets - qui peut être par exemple le résultat d'une expérience de comparaisons par paires - d'en inférer un certain nombre de structures latentes explicatives possibles qu'il pourra tester par la suite.

x x x

La seconde catégorie de résultats porte sur l'éligibilité des graphes qui peut être considérée comme une relaxation du problème précédent.

Son intérêt pratique est manifeste en raison de l'utilisation des procédures majoritaires à seuil dans les techniques d'aide à la décision en présence de critères multiples, comme la méthode Electre [24].

x x x

Quant aux propriétés générales des graphes de surclassement qui composent la troisième catégorie, elles nous ont servi dans une grande partie de la thèse.

x x x

Dans ces trois catégories, les théorèmes obtenus nous ouvrent des perspectives de recherches nombreuses. A titre d'exemples, nous pouvons mentionner :

(1) La reconnaissance des DIBADO correspondant à un ensemble d'ordres (resp. pondérations) donnés, lorsque les pondérations (resp. les ordres) varient.

Par ailleurs les liens entre la dimension k d'un ordre et les DIBADO D_k à valeurs dans $\{0, \frac{1}{k} \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ méritent d'être explorés.

On se propose d'étudier les ordres partiels maximaux sur n objets et les pseudo DIBADO $D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ qu'on pourrait leur associer.

Tout ceci pourrait évidemment servir d'introduction à la résolution du problème de caractérisation des DIBADO sur un nombre d'objets quelconques.

(2) Les rapports des modèles explicatifs exposés jusque là et des modèles classiques d'analyse des données semblent pouvoir fournir de fructueux sujets.

(3) Chercher des procédures de reconnaissance d'un graphe éligible, ceci nécessite une étude plus profonde des procédures à seuil.

(4) Les rapports de nos problèmes et de la programmation linéaire, à peu près complètement inexplorés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARROW, K.J. : "Social choice and individual values", Wiley 2nd ed., 1962.
- [2] BAKER, K. & FISHBURN, P. & ROBERTS, F. : "Partial orders of dimension 2", Networks 2, 1972, pp. 11-28.
- [3] BARBUI, M. & MONTJARDET, B. : "Ordre et classification, algèbre et combinatoire tomes 1 et 2, Hachette 1970.
- [4] BOWMAN, V.J. : "Permutation polyhedra", SIAM J. appl. Math. Vol. 22, n°4, June 1972.
- [5] CAMION, P. : "Quelques propriétés des chemins et des circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes", Cahiers du centre d'études de Rech. Op., Bruxelles, 2, 1960, 10-15.
- [6] DRIDI, T. : "Sur l'axiome d'indépendance", Mémoire de D.E.A. en Rech. Op., Grenoble, 1976.
- [7] DUCAMP, A. : "Sur la dimension d'un ordre partiel", In theory of graphs, Gordon and Breach, New-York, 1967.
- [8] DUSHNIK, B. & MILLER, E. : "Partially ordered sets", Amer. J. Math., 63, 1941, pp. 600-610.
- [9] ERDOS, P. & MOSER, L. : "On the representation of graphs as unions of orderings" Publ. Math., Inst Hung. Acad. Sc. (1964), 9, 125-132.
- [10] EVEN, A. & PNUELI & LEMPEL, A. : "Permutation graphs and transitive graphs", JACM 19(1972), 400-410.
- [11] FLAMENT, C. : "Comportement de choix et échelle de mesure", Bulletin du G.E.R.P., 1960-9, n° 2, 165-185.
- [12] GUILBAUD, G.Th. : "Préférences stochastiques", Math. Sc. Hum. 32, 1970.
- [13] GUILBAUD, G.Th. : "Sur une difficulté de la théorie du risque", Colloques internationaux du Centre National de la Rech. Sc. (Econométrie), 40 (1953), 19-25.
- [14] HIRA GUCHI, T. : "On the dimension of orders", Sc. Rep. Kanazawa Univ. 4(1955), pp. 1-20.
- [15] HIRA GUCHI, T. : "Note on the orders of finite cardinality", Arm. Sc. Kanazawa Univ. 3, 1-2- 8, 1966.
- [16] INADA, K. : "A note on the simple majority decision rule", Econometrica 32, 1964.
- [17] JACQUET LAGREZE, E. : "Le problème de l'agrégation des préférences - une classe de procédure à seuil", Math. Sc. Hum., n° 43, 1973, pp. 29-37.

- [18] KOHLER, G. : "Thèse 3ème cycle en Recherche Opérationnelle, Grenoble 1978.
- [19] LUCE, R.D. : "Individual choice Behavior", 1958.
- [20] MARSCHAK, J. : "Binary choice constraints and random utility indicators", in K.J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes, eds. Mathematical Methods in Social Sciences, 1959, Stanford Univ. Press, 1960, 312-329.
- [21] Mc GARVEY : "A theorem on the construction of voting paradoxes", Econometri Vol. 21, 1953, pp. 608-690.
- [22] MEGIDDO, N. : "Mixtures of order matrices and generalized order matrices", Discrete Math., 19(1977), 177-181.
- [23] RAYNAUD, H. : "Conditions Inada orientées", Séminaire Alg. Combin., Mars 1979 IRMA, Grenoble
- [24] ROY, B. : "Critères multiples et modélisation des préférences - l'apport des relations de surclassement", SEMA (METRA INTERNATIONAL) n° 79, 1973.
- [25] STEARNS, R. : "The voting problems", Amer Math. Monthly 66(1959), 761-763.
- [26] SZPILRAJN, E. : "Sur l'extension d'un ordre partiel", Fundamenta Mathematicae 16, 1930, pp. 386-389.
- [27] TERRIER, E. : "Sur quelques problèmes d'agrégation de préférences", Mémoire de DEA en Recherche Opérationnelle, Grenoble 1976.
- [28] TROTTER, W. : "Dimension of the Crowns $S_n^{(k)}$ ", Discrete Math. 8(1974), 85-103.
- [29] TVERSKEY, A. : "Elimination by aspects" July 1972, Psych. Rev., Vol. 79, n° 4.
- [30] WARD, W. : "Majority rule and allocation", Journal of conflict resolution, Vol. 15, n° 4, 1965.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 25 mai 1979.

Le Président de la thèse



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 25 mai 1979.

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale



D. G. CALI