Quelques propriétés et algorithmes de calcul formel des polynômes symétriques et antisymetriques

Alain Galli

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
«mathématiques appliquées»

par

GALLI ALAIN

QUELQUES PROPRIETES ET ALGORITHMES DE CALCUL FORMEL DES POLYNOMES SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES.

Thèse soutenue le 11 Mai 1979 devant la commission d'examen

N. GASTINEL	Président
P. JORRAND R. LOOS J. WEY	Examinateurs

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

.../...

MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

.../...

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	SUNIER Jules	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

.../...

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

.../...

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

.../...

MM.	SCHAERER René	Cancérologie
Mme	SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogamie
MM.	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	STUTZ Pierre	Mécanique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro Physique
	KANEKO Akira	Mathématiques pures
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	RAY Tuhina	Physique

MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE

M.	ROCHAT Jacques	Hygiène et hydrologie (pharmacie)

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1977-1978

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-présidents : M. René PAUTHENET
M. Georges LESPINARD

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	BENOIT Jean	Electronique - automatique
	BESSON Jean	Chimie minérale
	BLOCH Daniel	Physique du solide - cristallographie
	BONNETAIN Lucien	Génie chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
*	BOUDOURIS Georges	Electronique - automatique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide - cristallographie
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique - automatique
	COUMES André	Electronique - automatique
	DURAND Francis	Métallurgie
	FELICI Noël	Electronique - automatique
	FOULARD Claude	Electronique - automatique
	LANCIA Roland	Electronique - automatique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire corpusculaire
	LESPINARD Georges	Mécanique
	MOREAU René	Mécanique
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - physique
	PAUTHENET René	Electronique - automatique
	PERRET René	Electronique - automatique
	POLOUJADOFF Michel	Electronique - automatique
	TRAYNARD Philippe	Chimie - physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée

* en congé pour études

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BLIMAN Samuël	Electronique - automatique
	BOUVARD Maurice	Génie mécanique
	COHEN Joseph	Electronique - automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie physique
	LACOUME Jean-Louis	Electronique - automatique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide - cristallographie

.../...

MM.	ROBERT André	Chimie appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	ZADWORNY François	Electronique - automatique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	CHARTIER Germain	Electronique - automatique
	CHIAVERINA Jean	Biologie, biochimie, agronomie
	IVANES Marcel	Electronique - automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	MORET Roger	Physique nucléaire - corpusculaire
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Informatique fondamentale et appliquée
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie Physique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MATHIEU Jean-Claude	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)

E.N.S.E.E.G.

MM.	BISCONDI Michel	Ecole des Mines St. Etienne (dépt. Métallurgie)
	BOOS Jean-Yves	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	DRIVER Julian	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)

.../...

MM.	KOBYLANSKI André	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LE COZE Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LESBATS Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	LEVY Jacques	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	RIEU Jean	Ecole des Mines St. Etienne (Métallurgie)
	SAINFORT	C.E.N. Grenoble (Métallurgie)
	SOUQUET	U.S.M.G.
	CAILLET Marcel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	COULON Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	GUILHOT Bernard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	LALAUZE René	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	LANCELOT Francis	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	SARRAZIN Pierre	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	SOUSTELLE Michel	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	THEVENOT François	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	THOMAS Gérard	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	TOUZAIN Philippe	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)
	TRAN MINH Canh	Ecole des Mines St. Etienne (Chim. Min. Ph.)

E.N.S.E.R.G.

MM.	BOREL	Centre d'études nucléaires de Grenoble
	KAMARINOS	Centre national recherche scientifique

E.N.S.E.G.P.

M.	BORNARD	Centre national recherche scientifique
Mme	CHERUY	Centre national recherche scientifique
MM.	DAVID	Centre national recherche scientifique
	DESCHIZEAUX	Centre national recherche scientifique

A ma fille Frédérique,
à ma femme et
à mes Parents.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Le Professeur GASTINEL, qui m'a enseigné l'Analyse Numérique, m'a fait découvrir le calcul formel et a dirigé ce travail.

Que soient aussi remerciés Messieurs les Professeurs Ph. JORRAND, R. LOOS et WEY pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je dois témoigner toute ma gratitude à mes camarades de l'équipe d'Analyse Numérique, particulièrement à Messieurs COSNARD, DELLA-DORA et REDONT, ainsi qu'à Madame MEYRIEUX pour sa compétence et sa gentillesse.

Je remercie A. LUX pour les nombreux coneils qu'il m'a donnés sur l'utilisation de LISP.

Que Madame CARRE-PIERRAT soit remerciée pour la compétence, la rapidité et le soin apporté à la réalisation de cette thèse.

Enfin, j'adresse ma sympathie aux futurs occupants du bureau 68.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

A un moment où le calcul formel apparaît comme un outil très prometteur pour les problèmes de type algébrique et pour certains problèmes abordés de façon plus analytique par le biais de l'Analyse Numérique, on peut se demander quelles sont les limitations de celui-ci en ce qui concerne les problèmes de calcul avec polynômes à plusieurs variables. En effet, si le calcul formel manipule des objets et des structures de complexité sans cesse accrue, les calculs polynômiaux ne sont pas sans poser quelques problèmes. Les difficultés tiennent d'abord au grand nombre de termes que peuvent présenter des polynômes à plusieurs variables, même de degré modéré. Lors d'un produit le nombre de terme obtenu est de l'ordre du produit du nombre de termes des opérandes ; à cet égard la symétrie par rapport à certaines variables, si elle n'est pas utilisée, est un cas défavorable, qui présente en outre une grande redondance. Il paraît alors intéressant de développer des algorithmes spécifiques pour les polynômes symétriques ou antisymétrique, dans le but d'accroître la possibilité de calcul, et l'exploitation des résultats, car d'une part certains problèmes de type polynômiaux peuvent présenter des symétries, que l'on pourrait alors exploiter. D'autre part, les polynômes symétriques apparaîssent comme des outils dans des domaines très divers comme la théorie des groupes [32], la combinatoire [36], [12], [48] et la théorie des invariants [32]. Le but de ce travail est donc de présenter un certain nombre de propriétés des polynômes symétriques et antisymétriques, sous différents aspects, ainsi que quelques algorithmes de calcul formel de ceux-ci.

Dans le premier chapitre, après avoir rappelé quelques définitions nous mettons en évidence un ordre sur le n-uple des exposants caractérisant les polynômes symétriques monomiaux, que nous appelons ordre "sommes partielles", qui sera ensuite utilisé systématiquement, puis nous nous intéressons aux bases de polynômes symétriques et aux algorithmes de changement de bases, nous terminons ce chapitre par l'étude de certaines fonctions génératrices de polynômes symétriques, qui sera poursuivie dans le troisième chapitre.

Nous consacrons le deuxième chapitre à un algorithme de multiplication de polynômes symétriques et antisymétriques, ainsi qu'à un algorithme de passage de la base monomiale à la base somme de puissances semblables. Nous présentons de façon détaillée la structure de données utilisée pour ceux-ci, en vue d'en améliorer les performances.

Dans le troisième chapitre, nous abordons une classe particulière de polynômes symétriques, les polynômes de Schur, ceux-ci ont été initialement définis et étudiés dans le cadre de la théorie des groupes [32], [4], [44], mais leur étude peut se faire pour l'essentiel sans références à celle-ci. Nous devrons cependant admettre que les coefficients des polynômes de Schur dans la base monomiale, s'expriment au moyen des tableaux d'Young, ce qui ne peut se montrer, à ma connaissance que dans le cadre de la combinatoire, en utilisant la correspondance de Schensted Robinson, généralisée par Knuth [2], [29], [51], ou de la théorie du groupe symétrique [32]. En outre, nous ne pourrons montrer que les coefficients de ces polynômes dans la base somme de puissances semblabes sont les caractères du groupe symétrique, c'est-à-dire les traces des représentations irréductibles de celui-ci,[4] [32], [58], mais nous montrerons de façon simple l'orthogonalité de ces coefficients, l'identité de Frobenius, et la règle de Murnaghan pour leur calcul. Pour plus de détails entre les relations entre les polynômes de Schur, la théorie des groupes et la combinatoire on pourra se reporter à [4], [21], [26], [40], [41], [43], [12], [50], [48], [58], [30].

Nous présentons brièvement dans le dernier chapitre quelques utilisations des polynômes de Schur dans des domaines divers, tels que le calcul des puissances de matrices, l'interpolation et les approximants de Padé.

I POLYNOMES SYMETRIQUES

Ce chapitre est consacré aux définitions et propriétés générales des polynômes symétriques. Après quelques rappels dans le premier paragraphe, nous mettons en évidence dans le deuxième paragraphe un ordre qui joue un rôle privilégié lors de la multiplication de deux polynômes monomiaux, puis nous donnons une décomposition des polynômes symétriques monomiaux à n variables en fonction des polynômes symétriques monomiaux en k et (n-k) variables, qui sera utilisée pour définir un algorithme de multiplication, nous utilisons ensuite celle-ci pour caractériser l'évolution des coefficients d'un produit avec le nombre des variables. Nous donnons ensuite les théorèmes classiques sur les bases de polynômes symétriques, ainsi que des algorithmes de changement de base.

Dans le quatrième paragraphe, nous étudions deux fonctions génératrices de polynômes symétriques dont on déduit les lois de symétrie de Macmahon ainsi que d'autres propriétés qui seront utilisées dans le chapitre III.

1. NOTATIONS ET RAPPELS

Nous noterons π_n le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$, soit $\sigma \in \pi_n$, t_j une transposition, on peut écrire σ sous la forme de produi de transpositions, cela de façon non unique, mais si $\sigma = t_1,\ldots,t_p$ le nombr $\varepsilon_\sigma = (-1)^p$ appelé signature de σ est bien défini.

Définition 1 :

Une k-partition (λ) de $u \in IN_k$ est un k-uple d'entiers ordonnés $\lambda_1 \geq \lambda_2,\ldots, \geq \lambda_k \geq 0$ tels que $\sum_{i=1} \lambda_i = u$.

Nous noterons $|\lambda| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$,

si $(\lambda) = (b_1{}^{a_1},\ldots,b_p{}^{L_p})$ ou $b_1{}^{a_i}$ signifie que b_i apparaît a_i fois dans (λ) avec $b_1 > b_2,\ldots, > b_p \geq 0$

Notons $(\lambda)\ ! = a_1!a_2!,\ldots,a_p!$

Définition 2 :

Un polynôme P en les indéterminées $x_1,\ldots,x_n$ est symétrique (respectivement antisymétrique) si quelque soit la permutation
$\sigma \in {}_n \cdot P\ (x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) \equiv P(x_1,\ldots,x_n)$
(respectivment $P(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon_\sigma\ P(x_1,\ldots,x_n)$

Soit (m) une n-partition de $k \in IN$ définissons

$$s^*(x_1,\ldots,x_n,\ (m)) = \sum_{\sigma\in\pi_n} x_1{}^{m_{\sigma(1)}},\ldots,\ X_N{}^{m_{\sigma(n)}}$$

$$s(x_1,\ldots,x_n\ ;\ (m)) = \sum_{\sigma\in\pi_n}{}' x_1{}^{m_{\sigma(1)}},\ldots,x_n{}^{m_{\sigma(n)}}$$

Σ' signifiant que la somme est prise sur toutes les permutations donnant des monômes différents.

$$A(x_1,\ldots,x_n\ ;\ (m)) = \sum_{\sigma\in\pi_n} \varepsilon_\sigma\ x_1{}^{m_{\sigma(1)}},\ldots,\ x_n{}^{m_{\sigma(n)}}$$

Nous appellerons $s(x_1,\ldots,x_n\ ;\ (m))$; polynôme symétrique monomial, de degré μ, et de multidegré (m), $A(x_1,\ldots,x_n\ ;\ (m))$ alternant ou polynôme antisymétrique monomial de degré μ et de multidegré (m).

$s^*(x_1,\ldots,x_n\ ;\ (m))$, $s(x_1,\ldots,x_n\ ;\ (m))$ et $A(x_1,\ldots,x_n\ ;\ (m))$ seront notés respectivement $s^*(m)$, $s(m)$, $A(m)$, lorsque aucune confusion sur les variables et leur nombre ne sera à craindre.

Soit $(m) = (b_1^{a_1},\ldots,b_p^{a_p})\ b_k \geq 0\ \sum_{i=1}^{p} a_i = n$

Nous avons $s^*(m) = (m)!\,s(m)$

Exemples :

$$s(2\ 0^2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$s(2\ 0^3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$
$$s\ (2\ 0^2) = 2\ s(2\ 0\ 0)$$
$$s\ (1\ 0^3) = 3\ !\ s(2\ 0\ 0\ 0)$$

$$A(2\ 1\ 0) = \det \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Soit A le corps des fractions rationnelles en les indéterminées $y_1,\ldots,y_p$.

Notons A_k^n l'espace vectoriel des polynômes symétriques, homogène de degré k, en les n indéterminées $x_1,\ldots,x_n$, à coefficients dans $A(0 \in A_k^n)$.

Notons $P(k,n)$ le nombre de n partitions (λ) de k telles que $\lambda_n \neq 0$, et $P(k) = \sum_{i=1}^{k} P(k,i)$.

$P(k)$ est le nombre de partitions de k, sa fonction génératrice ainsi que des formules de récurrences sont données dans [14].
Notons Λ_k^n l'ensemble des n-partitions de k, nous avons alors le théorème :

Théorème (1.1)

A_k^n admet comme base la famille $\{s(\lambda)\}\quad (\lambda) \in \Lambda_k^n$

et $\dim A_k^n = \sum_{j=1}^{n} P(k,j)$.

Démonstration voir [6]

Définition 3 :

Nous appellerons

a) $i^{ème}$ polynôme symétrique élémentaire le polynôme $s(1^i,0^{n-i})$ noté a_i ;

b) $i^{ème}$ polynôme symétrique complètement homogène le polynôme $h_i = \sum_{|m|=i} s(m)$ ((m) est une n-partition)

c) $i^{ème}$ polynôme somme des puissances semblables le polynôme $s(i,0^{n-1})$ noté S_i

Définition 4 : Diagramme d'Young

A toute n-partition $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$; $\lambda_k \neq 0$, $\lambda_{k+1} = 0$
Associons un diagramme d'Young de la façon suivante :

D_λ =

. . . . λ_1 noeuds

. . . λ_2 noeuds

.

.

.

. . λ_k noeuds

Exemple :

A la 5 partition $(\lambda) = (3\ 1\ 0^3)$ correspond le diagramme d'Young

D_λ =

. . .

.

Définition 5 :

Soit (λ) une n-partition d'un entier N. Nous appellerons partition conjuguée $\tilde{(\lambda)}$ la λ_1 partition de μ dont le diagramme d'Young est le symétrique de D_λ par rapport à la diagonale.

ex. : $(\lambda) = (3\ \ 1\ \ 0^3)$

D_λ =

. . .

.

$D_\lambda^{\sim}$ =

. .

.

.

$\tilde{(\lambda)} = (2\ \ 1^2)$

Définition 6 :

Soit $A\ (a_{ij})\ \begin{matrix} i = 1,\ldots,n \\ j = 1,\ldots,n \end{matrix}$ un tableau carré. Le permanent de A est la quantité $\text{perm}\ (A) = \sum_{\sigma \in \Pi_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$

2. PREMIERES PROPRIETES DES POLYNOMES SYMETRIQUES ET ANTISYMETRIQUES

Proposition 2.1. :

Soit (m) une n-partition de , $\forall\ k \leq n$ on a

$$s^*(m) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots i_k \leq n \\ i_{k+1} < \ldots < i_n}} s^*(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})\ \ s^*(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n}) \qquad (2.1)$$

$$s(m) = \sum'_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 - < i_k \leq n \\ i_{k+1} < \ldots < i_n}} s(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})\ \ s(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n}) \qquad (2.2)$$

$$A(m) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq n \\ i_{k+1} < \ldots < i_n}} \varepsilon\begin{pmatrix} 1\ldots n \\ i_1 \ldots i_n \end{pmatrix} A(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})\ A(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n}) \qquad (2.3)$$

$s(m_{i_1}\ldots m_{i_k})$ et $A(m_{i_1}\ldots m_{i_k})$ sont des polynômes en $x_1,\ldots,x_k$

et $s(m_{i_{k+1}}\ldots m_{i_n})$ ainsi que $A(m_{i_{k+1}}\ldots m_{i_n})$ en $x_{k+1},\ldots,x_n$;

et $\varepsilon\begin{pmatrix} 1\ldots n \\ i_1 \ldots i_n \end{pmatrix}$ est le signe de la permutation σ: $\sigma(j) = i_j$

Démonstration : (2.3) résulte immédiatement du développement par la formule de Laplace du déterminant de :

$$\Lambda = \begin{vmatrix} x_1^{m_1},\ldots, x_1^{m_n} \\ x_2^{m_1},\ldots, x_2^{m_n} \\ x_n^{m_1},\ldots, x_n^{m_n} \end{vmatrix}$$

(2.1) se montre de la même façon en développant par la formule de Laplace le permanent de A.

Démonstration de (2.2) posons $(m) = (a_1^{b_1}, \ldots, a_p^{b_p})$ $\sum_{i=1}^{p} b_i = n$

$$s(m) = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots \; i_k \le n \\ 1 \le i_{k+1} < i_{k+2} < \ldots \le i_n \; n}} \frac{1}{(m)!} \, s^*(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \; s^*(m_{i_{k+1}}, \ldots, m_{i_n})$$

D'après (2.1)

pour $i_1, \ldots, i_k \; i_{k+1}, \ldots, i_n$ fixés posons $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) = (a_1^{c_1}, \ldots a_p^{c_p})$

$\sum_{j=1}^{p} c_p = k$, le terme $s^*(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \; s^*(m_{i_{k+1}}, \ldots, m_{i_n}) =$

$$c_1! \ldots c_p! (b_1 - c_1)! \ldots (b_p - c_p)! \times s(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \; s(m_{i_{k+1}}, \ldots, m_{i_n})$$

donc $$s(m) = \sum_{\substack{i_1 < i_2 \ldots < i_k \\ i_{k+1} < \ldots < i_n}}{}' s(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \; s(m_{i_{k+1}}, \ldots, m_{i_n})$$

car $c_{b_1}^{c_1} \ldots \ldots c_{b_p}^{c_p} \times c_i! \ldots c_p! \; (b_1 - c_1)! \ldots (b_p - c_p)! \; / \; (m)! = 1$

Remarque :

Soit H un sous-groupe de Π_n, notons aH ($a \in s_n$), les éléments de la forme ah, $h \in H$. Π_n étant fini, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_p$ tels que : $a_o = I$ et $\forall \sigma \in \Pi_n$, $\exists_i$; $\sigma \in a_i H$. Ce que l'on note

(a) $\Pi_n = H + a_1 H + \ldots + a_p H$. (2.1) et (2.3) sont alors équivalentes à (a) avec respectivement $H = \Pi_k \times \Pi_{n-k}$ et $H = t_k \times t_{n-k}$

où t_k est le groupe des permutations paires de $\{1, \ldots, k\}$

t_{n-k} le groupe des permutations paires de $\{k+1, \ldots, n\}$.

On peut munir l'ensemble des n-partitions de l'ordre lexicographique, mais il existe une autre structure d'ordre qui semble plus appropriée à la multiplication des polynômes symétriques ou antisymétriques, c'est l'ordre "sommes partielles".

Définition 6 : Ordre "sommes partielles" (S.P)

Soient (m) et (L) deux n-partitions. Nous dirons que (m) est inférieur ou égal à (L), (m) ≤ (L) pour l'ordre sommes partielles si et seulement si :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \quad \sum_{i=1}^{k} m_i \leq \sum_{i=1}^{k} L_i \qquad (2.4)$$

Cet ordre n'est pas total, par exemple (5 2 2) et (4 4 2) ne sont pas comparables.

Nous employerons également l'ordre lexicographique si (m) est inférieur à (L) pour cet ordre nous le noterons :

$$(m) \leq (L) \qquad \underline{(lex)}$$

Remarquons que (m) ≤ (L) =>(m) ≤ (L) lex

Si on impose en plus de l'inégalité (2.4) la condition

$$|m| = |L| \quad \{ \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} L_i) \qquad (2.4 \text{ bis})$$

on a le résultat suivant :

Théorème (2.2)

Une condition nécessaire et suffisante pour que les nombres m_i, L_i satisfassent (2.4) et (2.4 bis) est que :

$$L_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} m_i \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

ou

a) $a_{ki} \geq 0$

b) $\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} = 1$

c) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} = 1$

Démonstration [47]

- Note. Les matrices (aij) vérifiant (a), (b), (c) sont appelées doublement stochastiques.
- Soient s(m) et s(L) deux polynômes symétriques en les indéterminées $x_1,\ldots,x_n$. Leur produit s'exprime d'une manière unique comme combinaison linéaire de s(ν) à coefficients positifs ou nuls (ν) parcourant l'ensemble des n-partitions de $|m| + |L|$.

Il est possible de caractériser les termes dont le coefficient peut être non nul de la façon suivante :
Soient (L) et (m) deux n-partitions, $s(L)\ s(m) = \Sigma a_\nu s(\nu)$.
On a $a_\nu \equiv 0$ si (ν) n'est pas inférieur ou égal à (L+m) pour l'ordre S.P (L+m) est la n-partition d'éléments $L_i + m_i$;
Cela s'obtient directement en substituant $tX_1, tX_2,\ldots,tX_n$ à $X_1,\ldots,X_k$ dans le produit, le membre de droite donne un polynôme en t à coefficients dans $A(X_1,\ldots X_n)$ dont le degré (en t) est $d = m_1 + L_1 + \ldots + m_k + L_k$, si dans les termes de droite figurait (ν) tel que $(\nu) \leq (L+m)$ après substitution nous aurions un terme de degré supérieur ou égal à d (k étant bien choisi) car les a_ν sont ≥ 0 ; ce qui est impossible.

$$\text{En résumé } s(\lambda)\ s(\mu) = \sum_{(\nu)\leq(\lambda+\mu)} a_\nu\ s(\nu) \qquad (2.5)$$

Si à la n-partition (λ) nous faisons correspondre la fonction F_λ linéaire par morceaux telle que :

$F_\lambda(i) = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j$, et $F_\lambda(0) = 0$, F_λ est concave croissante. Si l'on pose

$F(x) = \frac{|\lambda|}{n} \cdot x$, les n-partitions (μ) vérifiant (2.4) et (2.4 bis) sont

telles que $F(x) \leq F_\mu(x) \leq F_\lambda(x) \qquad x \in [0,n]$

Lemme 2.3

Si (U) et (V) sont des n-partitions non comparables pour l'ordre S.P, il existe une n-partition (W) telle que, soit $(W) \leq (u)$, soit $(W) \leq (V)$ si $|u| = |V|$ on peut choisir (W) telle que $|W| = |u|$.

Démonstration

(u) et (v) ne sont pas comparables donc leurs graphes se coupent, soient k et i, tels que :

$$F_u(j) = F_v(j) \qquad j = 0,\ldots,k$$

$$F_u(j) < F_v(j) \qquad j = k+1,\ldots,i-1 \text{ et } F_u(i) > F_v(i)$$

Choisissons G linéaire par morceau de la façon suivante :

$$G(j) = F_u(j) \qquad j = 0,\ldots,i-1$$

$$G(j) = F_v(j) \qquad j = i,\ldots,n$$

$$G(j) \leq F_v(j) \qquad j = 0,\ldots,n$$

Il suffit de montrer que G est concave croissante.
Appelons u^j, v^j, w^j les pentes de F_u, F_v et G dans $[j-1,J]$ par construction :

$$w^i = u^i \geq u^{i+1} \geq w^{i+1} \geq 0$$

et $$w^{i+2} = v^{i+2} \leq v^{i+1} < w^{i+1}$$

Proposition (2.4)

Soient (ν) une n-partition, et $T_{(\nu)}$ l'ensemble des n-partitions (μ) telles que $(\mu) \leq (\nu)$.

Alors $t_{(\nu)}$ admet un minimum pour l'ordre sommes partielles qui est aussi minimum pour l'ordre lexicographique.

Démonstration

S'il n'existe qu'un élément minimal (β) c'est le minimum sinon soient (γ) et (β) deux éléments minimaux, ils ne sont pas comparables, donc d'après le lemme (2.3), on peut trouver (α) dans $T_{(\nu)}$ tel que par exemple $(\gamma) \leq (\alpha)$, (α) n'est donc pas minimal, ce qui contredit l'hypothèse.

Soit (δ) le minimum pour l'ordre lexicographique, et (α), le minimum pour l'ordre sommes partielles.

$$(\delta) \leq (\alpha) \text{ Lex} \Rightarrow \alpha_1 \leq (\alpha_1)$$

$$(\delta) \leq (\alpha) \Rightarrow \alpha_1 \geq (\alpha_1) \Rightarrow \delta_1 = \alpha_1$$

supposons $\delta_i = \alpha_i \quad i = 1,\ldots,k-1$; alors :

$$(\delta) \geq (\alpha) \text{ Lex} \Rightarrow \delta_k \leq \alpha_k$$

$$(\delta) \geq (\alpha) \Rightarrow \sum_{i}^{k} \alpha_i \geq \sum_{i}^{k} \alpha_i = \sum_{i}^{n-1} \delta_i + \alpha_k \Rightarrow \alpha_k - \delta_k$$

Les deux inégalités impliquant $\alpha_k = \delta_k$

Il est possible de préciser la caractérisation (2.5) en faisant la remarque suivante.

Remarque

Soit $s(\lambda)\ s(\mu) = \Sigma\ a_\nu s(\nu)$, si $a_\nu \neq 0$ c'est qu'il existe $\sigma \in \mathbb{I}_n$ telle que (ν) soit égale (à une permutation près pour l'ordonner) à $(\lambda_1 + \mu_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_n + \mu_{\sigma(n)})$ (2.6). En effet le terme général du produit est de la forme :

$$X_1^{\lambda_\tau(1)+\mu_\gamma(1)} \cdot X_2^{\lambda_\tau(2)+\mu_\gamma(2)} \cdot X_n^{\lambda_\tau(n)+\mu_\gamma(n)},\ \gamma, \tau \in \mathbb{I}_n$$

par symétrie si $\sigma = \tau^{-1}\gamma$ on trouve le terme :

$X_1^{\lambda_1+\mu_\sigma(1)} \times \ldots \times X_n^{\lambda_n+\mu_\sigma(n)}$ et toujours par symétrie $S(\lambda_1+\mu_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_n+\mu_{\sigma(n)})$ - Si $(\lambda_1+\mu_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_n+\mu_{\sigma(n)})$ n'est pas ordonné en l'ordonnant il devient $(\nu') = (\lambda_1 + k_1, \ldots, \lambda_n + k_n)$ or d'après (2.5) $(\nu') \leq (\lambda + \mu) \Longleftrightarrow (k_1, \ldots, k_n) \leq (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ cet ordre se conservant une fois (k) ordonné.

Les (ν) ; $a_\nu \neq 0$ sont donc de la forme $(\lambda+k)$

$(k) \leq (\mu)$ (2.7)

par symétrie $(\nu) = (\mu+L)$

$(L) \leq (\lambda)$ (2.8).

il existe une interprétation combinatoire des coefficients du produit [36], mais elle n'est d'aucune utilité pour les calculer. On procède en général dans l'autre sens.

Notons que (2.6), (2.7) et (2.8) sont valables pour des produits de la forme :

$$A(\lambda)\ A(\mu) = \Sigma\ b_\nu\ s(\nu)$$
$$A(\lambda)\ s(\mu) = \Sigma\ c_\nu\ A(\nu).$$

A ma connaissance (2.6), (2.7), (2.8) ne figurent pas explicitement de l'abondante littérature sur les polynômes symétriques, des inégalités de ce type ont été montrée par Van der Corput [54] pour la multiplication des polynômes symétriques élémentaires, et cela en utilisant des opérateurs différentiels. Cela découle simplement de (2.6). Ces relations seront utilisées systématiquement par la suite, et seront à la base d'autres résultats moins connus.

Nous appelerons longueur de la n-partition (m), l'entier $\ell(m)$ tel que $m_{\ell(m)} \neq 0$ et $m_{\ell(n)+1} = 0$ (2.9)

Notons $(m_{\uparrow k})$ la n+k partition obtenue en bordant (m) de k zéros et $(m_{\downarrow k})$ la (n-k)-partition restriction de (m) à ses n-k premiers éléments.

Appliquées à un polynôme symétrique monomial, ces opérations ont le sens suivant d'après (2.2)

$$s(m) = s(X_1, \ldots, X_n ; (m))$$
$$s(m_{\uparrow k}) = s(X_1, \ldots, X_n, \ldots X_{n+k}; (m_{\uparrow k})) \quad (2.10)$$

$$s(m_{\downarrow k}) = \begin{cases} s(X_1, \ldots, X_{n-k} ; (m_{\downarrow k})) \text{ si } k \leq n-\ell(m) \\ 0 \quad \text{si non} \end{cases} \quad (2.11)$$

(i.e $s(m_{\downarrow k}) = s(X_1, \ldots, X_{n-k}, 0 \ldots 0, n)$.

Soient (m) et (P) fixés ; C_Q le coefficient de $S(Q)$ dans le produit $S(m)\ S(P)$, il est intéressant d'étudier le comportement de C_Q comme fonction du nombre de variables, on a alors le théorème suivant qui peut se résumer ainsi, "l'infini pour le produit de polynômes symétrique est atteint pour $N = \ell(m) + \ell(P)$."

Théorème (2.5)

Soient (m) et (P) deux n-partitions telles que $n \leq \ell(m) + \ell(P)$ et $\mu = |m| + |P|$ $\quad N = \ell(m) + \ell(P)$

si $s(m_{\uparrow(N-n)}) \cdot s(P_{\uparrow(N-n)}) = \Sigma\ C_Q\ s(Q)$

Alors

$$\text{Si } k \geq n \quad s(m_{\uparrow(k-n)})\ s(P_{\uparrow(k-n)}) = \Sigma\ C_Q\ s(Q_{\downarrow(N-k)} \quad (2.13)$$

La somme est prise sur les N partitions de P.

Si $k \leq n$ et $k \geq \text{Max}(\ell(m), \ell(P))$.

$$s(m_{\downarrow k})\ s(P_{\downarrow k}) = \Sigma\ C_Q\ s(Q_{\downarrow(N-n+k)}) \quad (2.14)$$

La somme est prise sur les n-partitions de P de longueur inférieure ou égale à n-k.

Démonstration :

D'après (2.7) la partition de longueur maximum figurant dans (2.12) est $(m_1, \ldots, m_{\ell(m)}, P_1, \ldots, P_{\ell(P)}, 0^{N-\ell(m)-\ell(P)})$ dont la longueur est $\ell(m) + \ell(P)$, donc si k est supérieur à $\ell(m) + \ell(P)$ le produit (2.11) ne comporte que des éléments de la forme $s(Q_{\uparrow(k-n)})$; il reste à vérifier que les coefficients ne changent pas.
Soit donc W un entier positif, posons $s(m_{\uparrow W})\ s(P_{\uparrow W}) = \Sigma\ a_V\ s(v)$
si $W \geq N$

$$s(m_{\uparrow W\downarrow(W-N)})\ s(P_{\uparrow W\downarrow(W-N)}) = \Sigma\ a_V\ s(V_{\downarrow(W-N)})$$

d'après (2.11) et (2.2) d'autre part les polynômes symétriques monomiaux de degré μ forment une base de A_p^N, la décomposition précédente est unique, elle coïncide donc avec (2.12) d'où $a_V = C_V$, ce qui montre (2.13) si $k > N$. Si $n \leq k \leq N$ en posant $W = N-n$ et en considérant $s(n_{\uparrow N-n\downarrow N-k})$ $s(P_{\uparrow N-n\downarrow N-k})$ on termine la démonstration de (2.13).

Quant à (2.14) il suffit d'appliquer le même raisonnement et de remarquer que si Q est une N partition de longueur supérieure à n-k $s(Q_{\downarrow(N-n+k)}) \equiv 0$.

Exemple

$(m) = (5,3) \qquad (P) = (2,1)$

$s(5,3)\ s(2,1) = s(74) + s(65)$

$s(530)\ s(210) = s(740) + s(731) + s(650) + s(632) + s(551) + s(54$

$s(5300)\ s(2100) = s(7400) + s(7310) + s(6500) + s(6320)$
$+s(5510) + s(5420) + s(5321)$

$s(53000)\ s(21000) = s(74000) + s(73100) + s(65000) + s(63200)$
$+s(55100) + s(54200) + s(53210)$

Signalons une méthode de calcul du coefficient d'un polynôme symétrique monomial dans le produit de deux polynômes exprimés dans cette base, elle est due à MACMAHON [35], [36] qui introduit un opérateur D_k, $k \in IN$ tel que :

$$D_k\ s(L_1 \ldots L_p) = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall j \quad L_j \neq k \\ s(L_1, \ldots, L_{j-1}, L_{j+1}, \ldots L_p) \text{ si } L_j = k. \end{cases}$$

cet opérateur est en fait un opérateur différentiel qui peut s'exprimer au moyen des polynômes symétriques élémentaires a_i, en posant $a_o = 1$.

$$D_k = \sum_{\mu=k}^{n} a_{\mu-k} \frac{\partial}{\partial a_\mu}$$ voir par exemple [36] ou [54].

ces opérateurs ont été généralisés par Van der Corput [54] qui a définit un anneau d'opérateurs différentiels, isomorphe à l'anneau des polynômes symétriques, aux propriétés très intéressantes. Dans ce qui suit, nous nous bornerons à la présentation par MACMAHON de l'opérateur $D_{(m)}$.

Définition

$$D_{(m)} = D_{m_1} \ldots . D_{m_n}$$

il est alors évident que $D_{(m)}\ s(L)\ s(P)$ est égal au coefficient de $s(m)$ dans ce produit.

Tout polynôme symétrique P, pouvant s'écrire :

$$P = P_o\ P + X_1\ D_1\ P + X_1^2\ D_2\ P + \ldots + X_1^u\ D_u\ P$$

Le produit $P_1\ P_2$ s'écrit :

$$P_1\ P_2 = D_o\ P_1\ D_o\ P_2 + X_1(D_o\ P_1\ D_1\ P_2 + D_o\ P_2\ D_1\ P_1) + \ldots + X_1^J \left(\sum_{s=o}^{J} D_s\ P_1\ D_{m-s}\ P_2\right) + \ldots$$

et aussi $P_1\ P_2 = D_o(P_1\ P_2) + X_1\ D_1(P_1\ P_2) + \ldots + X_1^J\ D_J(P_1\ P_2) + \ldots$

en comparant les coefficients de X_1^J nous avons l'identité :

$$D_J(P_1\ P_2) = \sum_{s=o}^{J} D_S\ P_1 . D_{m-s}\ P_2$$

3 . BASES DE POLYNOMES SYMETRIQUES

Soit (λ) une n-partition de k, définissons l'opérateur C par

$C(\lambda) = (\lambda_1-\lambda_2, \ldots, \lambda_i-\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n-1}-\lambda_n, \lambda_n)$

si $(\alpha) = C(\lambda)$ (α) vérifie $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = k$

si (λ) s'écrit $(\lambda) = (b_1^{c_1}, \ldots, b_k^{c_k})$ $b_k, c_k > 0$

Nous avons $C(\lambda) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec

$$\alpha_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq C_1, \ldots, C_k$$

$$\alpha_{C_j} = b_j - b_{j+1} \tag{3.1}$$

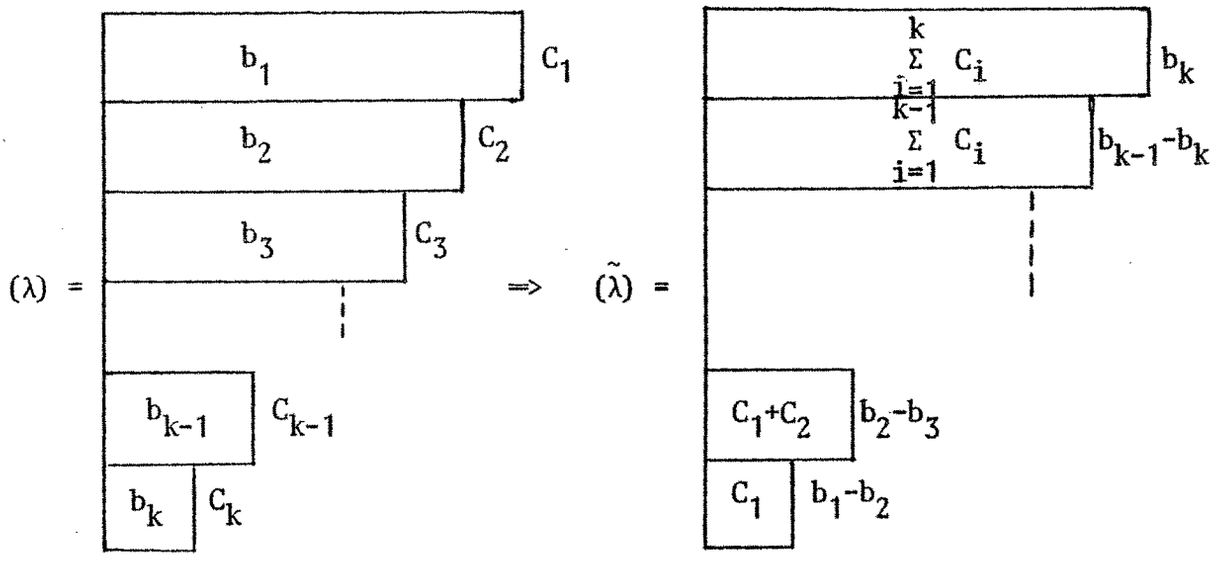
soit $(\tilde{\lambda})$ la partition conjuguée de (λ)

alors $C(\tilde{\lambda}) = (\beta)$ avec

$$\beta_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq b_1, \ldots, b_k$$

$$\beta_{b_j} = C_j \tag{3.2}$$

en effet



Posons $a_{(\lambda)} = a_1^{\alpha_1} \ldots\ldots a_n^{\alpha_n}$ si $(\alpha) = C(\lambda)$

$S_{(\lambda)} = S_1^{\beta_1} \ldots\ldots S_k^{\beta_k}$ si $(\beta) = C(\tilde{\lambda})$

que nous noterons aussi $S_{(\beta)}$

$$h_{(\lambda)} = h_{\lambda_1} \ldots\ldots h_{\lambda_n} \qquad \text{en posant } h_o = 1$$

Théorème (3.1)

Soit A_k^n l'espace vectoriel des polynômes symétriques homogènes de d° k, en les n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$.

Si Λ_k^n est l'ensemble des n-partitions de k

Alors La famille $\{a_{(\lambda)}\}_{(\lambda) \in \Lambda_k^n}$ est une base de A_k^n et plus si $(\mu) \in \Lambda_k^n$

$$s(\mu) = \sum_{(\lambda) \leq (\mu)} C_\lambda^\mu \, a_{(\lambda)}, \quad C_\lambda^\mu \in Z, \quad c_\lambda^\lambda = 1 \tag{3.3}$$

Démonstration :

$$(\lambda) \leq (\mu) \iff (\lambda) \leq (\mu) \quad \text{Lexicographique}$$

donc si les n-partitions sont ordonnées lexicographiquement (3.3) est équivalente à l'assertion ; la matrice de passage entre les familles $\{s(\lambda)\}$ et $\{a_{(\lambda)}\}$ est triangulaire, à diagonale 1. ce qui implique que la famille $\{a_{(\lambda)}\}_{(\lambda)\in \Lambda_k^n}$ est une base de Λ_k^n.

Montrons donc que $a_{(\lambda)} = \sum_{(\mu)\leq(\lambda)} d_\mu^\lambda \, s(\mu)$ ce qui est équivalent à (3.3).

En effet si $(\lambda) = (k, 0^{n-1})$, $a_\lambda = a_1^k$, par application de (2.6) le terme de plus haut degré est $S(k, 0, \ldots, 0)$. Supposons que :

$$a_1^{\lambda_1-\lambda_2} \ldots a_{L-1}^{\lambda_{L-1}-\lambda_L} = \sum_{(\mu)\leq D_L} e_{D_L}^\mu \, S(\mu) \qquad 1 < L < k$$

$$(D_L) = (\lambda_1 - \lambda_L, \ldots, \lambda_{L-1} - \lambda_L)$$

alors

$$a_1^{\lambda_1-\lambda_2} \ldots a_{L-1}^{\lambda_{L-1}-\lambda_L} \cdot a_L^{\lambda_L-\lambda_{L+1}} = \sum_{(\mu)\leq D_{L+1}} e_{D_{L+1}}^\mu \, s(\mu)$$

par application de (2.6)

d'autre part, à chaque étape le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Remarquons que les $e_{D_i}^\mu$ sont ≥ 0.

Cette démonstration fournit l'algorithme (parfois attribué à Gauss) permettant d'écrire un polynôme $P = \Sigma \, u_\lambda \, s(\lambda)$ dans la base $a_{(\lambda)}$ [31], [49], [56].

Algorithme (3.2)

Initialisons Q à zéro, et $P = \Sigma \, u_\lambda \, s(\lambda)$

a) Si (λ_o) est la n-partition maximum pour l'ordre lexicographique des (λ) ; $u_\lambda \neq 0$ posons :

$$P \leftarrow P - u_{(\lambda_o)} \, a_{(\lambda_o)} \, (X_1, \ldots, X_n)$$

$$Q \leftarrow Q + u_{(\lambda_o)} \, a_{(\lambda_o)}$$

d'après (3.3) le multidegré de p diminue.

b) si P n'est pas identiquement nul aller, en (a).

Cet algorithme nécessite le calcul des $a_{(\lambda)}$ pour $(\lambda) \in \Lambda_k^n$ qui peut se faire itérativement dès que l'on sait effectuer des produits du type $a_J S(\mu)$

Proposition (3.3)

Soient j un entier inférieur ou égal à n

(μ) une n-partition ; $(\mu) = (b_1^{c_1}, \ldots, b_k^{c_i})$ $\sum_{i=1}^{k} c_i = n$

alors

$$a_J \; s(\mu) = \Sigma \; e^{\lambda}_{\mu,J} \; s(\lambda)$$

La somme est prise sur les n-partitions (λ) différentes obtenues en réordonnant les n-uples de la forme :

$$(b_1^{c_1}, \ldots, (b_i+1)^{di}, bi^{ci-di}, \ldots (bj+1)^{d_j}, bj^{cj-dj}, \ldots, (bj+1)^{ds}$$

$$bj^{c_s-d_s}, \ldots, b_k^{c_k}) \qquad di > 0 \qquad \sum_{u=i}^{s} d_u = j$$

$$\text{et} \quad e^{\lambda}_{\mu,J} = \begin{cases} 1 \text{ si } Vu = \{i, \ldots, S\} \quad b_u+1 \neq b_{u-1} \\ a.b \qquad \text{sinon} \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\text{ou} \quad a = \prod_u (c_{u-1}+d_u) \ldots (c_{u-1}+1) \quad u \; ; \begin{cases} b_u+1 = b_{u-1} \text{ et } d_{u-1} = 0 \\ \text{et si } d_{u+1} \neq 0, \; b_{u+1}+1 \neq b_u \end{cases}$$

$$b = \prod_u C^{d_{u+1}}_{c_u-d_u+d_{u+1}} \qquad u \; ; \begin{cases} b_u+1 = b_{u-1} \quad (d_u \neq 0) \\ \text{ou} \\ b_u = b_{u+1}+1 \quad (d_{u+1} \neq 0) \end{cases}$$

Démonstration :

$$s^*(\mu) \; s^*(1^J, 0^{n-j}) = \sum_{\substack{\sigma \in \pi_n \\ i_1 \ldots i_j = 1 \\ i_{j+1} \ldots i_n = 0}} s^*(\mu_1+i_{\sigma(1)}, \ldots, \mu_n+i_{\sigma(n)})$$

chaque n-uple (J) formé de J-un et (n-j) zéros est obtenu j!(n-j)! fois donc

$$\frac{1}{J!(n-j)!} \; s^*(\lambda) \; s^*(1^J, 0^{n-j}) = \Sigma' \; s^*(\lambda_1+i_1, \ldots, \lambda_n+i_n)$$

La somme est prise sur tous les n.uples $(I) = (i_1 \ldots i_n)$ différents ; parmi ces n-uples $\prod_{i=1}^{k} C_{c_i}^{d_i}$ donnent le terme

$$S^*(b_1^{c_1}, \ldots, (b_i+1-^{d_i}, b_i^{c_i-d_i}, \ldots, (b_s+1-d_s, b_s^{c_s-d_s}, \ldots, b_k^{c_k})$$

$$\text{or } s^*(b_1^{c_1}, \ldots, (b_1+1)^{d_i}, b_i^{c_i-d_i}, \ldots, (b_s+1)^{d_s}, b_s^{c_s-d_s}, \ldots, b_k^{c_k}) =$$

$$d\, s(b_1^{c_1}, \ldots, (b_1+1)^{d_i}, b_i^{c_i-d_i}, \ldots, (b_s+1)^{d_s}, b_s^{c_s-d_s}, \ldots, b_k^{c_k})$$

$$\text{avec } d = \left(\prod_I c_j!\right) \left(\prod_J j!(c_j-d_j)!\right) \left(\prod_k (c_{j-1}+d_j)\ldots(c_{j+1}+1)\right)$$

$$\times\ (c_{j-1}+d_j)!\ (c_j-d_j+d_{j+1})!\ (c_{j+1}-d_{j+1})!$$

où $I = \{i \in \{1\text{-}n\}\ ;\ di = 0\}$, $J = \{j \in \{1\text{-}n\}\ ;\ d_j \neq 0$ et $\begin{matrix} b_j+1 = b_{j-1} \\ d_{j-1} = 0 \\ \text{et si } d_{j+1} \neq 0 \\ b_{j+1}+1 \neq b_J \end{matrix}\}$

$$J = \{J \in \{1,\ldots,n\}\ ;\ d_j \neq 0 \text{ et } \begin{matrix} b_{j+1} = b_{j-1} \\ d_{j-1} = 0 \\ \text{et si } d_{j+1} \neq 0,\ b_{j+1}+1 \neq b_j \end{matrix}\}$$

$$K = \{j \in \{1\ldots n\}\ ;\ d_j,\ d_{j+1} \neq 0 \text{ et } \begin{matrix} b_{j-1} = b_{j+1} \\ b_{j+1}+1 = b_J \end{matrix}\}$$

d'où le coefficient du terme $s(b_1^{c_1} \ldots (b_i+1)^{d_i}, b_i^{c_i-d_i}, \ldots, b_k^{c_k})$

dans $s^*(\mu)\, s^*(1^j, 0^{n-j}) = \dfrac{1}{(\mu)!j!(n-j)!}\ s(\mu)\ s(1^j, 0^{n-j})$

est égal à $\dfrac{1}{(\mu)!j!(n-j)!} \times \prod_{i=1}^{k} C_{c_i}^{d_i} \times d$

Remarque :

En cas de calcul systématique des $a_{(\lambda)}$ $(\lambda) \in \Lambda_k^n$, on pourra se servir de (4.1).

Les produits $S_J s(\mu)$ s'expriment encore plus facilement.

Proposition (3.4)

Soient (μ) une n.partition, j un entier

Alors

$$si\ (\mu) = (b_1^{c_1} \ldots b_k^{c_k})$$

$$S_J\ s(\mu) = \sum_{(\lambda)} d^{\lambda}_{\mu,J}\ s(\lambda)$$

La somme est prise sur les n-partitions (λ) différentes obtenues en réordonnant les n-uples de la forme $(b_1^{c_1},\ldots,b_\ell+j,b_\ell^{c_\ell}-1,\ldots,b_k^{c_k})$

$$\text{et}\quad d^{\lambda}_{\mu,J} = \begin{cases} 1 & si \quad V_u \quad b_u \neq b_{L}+j \\ c_{u+1} & si \quad b_u = b_L+j \end{cases} \qquad (3.5)$$

La démonstration est identique à la précédente.
Ces deux propositions fournissent deux algorithmes, l'un permettant d'exprimer $s(\mu)$ dans la base des $a_{(\lambda)}$, l'autre $s(\mu)$ comme combinaison linéaire des $S_{(\lambda)}$.

Algorithme (3.5)

Soit (μ) une n partition de k $\quad (\mu) = (\mu_1 \ldots \mu_L, 0^{n-\ell})$

alors

$$s(\mu) = s(\mu_1-1, \ldots, \mu_L-1, 0^{n-\ell})\ a_k - R$$

avec R somme de polynômes symétriques monomiaux de multidegré inférieur à (μ).

Algorithme (3.6) (Van der Waerden [56]).

Soit (μ) une n partition de k $\quad (\mu) = (\mu_1 \ldots \mu_\ell, 0^{n-\ell})$

alors

$$s(\mu) = e^{\mu_1-\mu_{\ell-1}}_{\mu_\ell} s(\mu_1,\ldots, \mu_{\ell-1}, 0^{n-L+1})\ S_{\mu_\ell} + R$$

$$\text{avec } R = \sum_{(\gamma)\geq(\mu)} e^{\mu 1-\mu_{\ell-1}}_{\mu_\ell,\gamma}\ s(\gamma)$$

en itérant le procédé définit par (3.6) on arrive à la formule :

$$s(\mu) = \sum_{(\gamma)\geq(\mu)} e_{\mu}^{\gamma} S_{(\gamma)} \qquad (3.6)$$

le terme de plus bas degré étant $S_{b_1}^{c_1} \ldots S_{b_k}^{c_k}$ si

$(\mu) = (b_1^{c_1} \ldots b_k^{c_k}) \quad b_k > 0$ ie $S_{(\mu)}$ d'après (3.2)

d'où le :

Théorème (3.7)

Soit A_k^n l'espace vectoriel des polynômes symétriques homogènes de d°k, en n indéterminées $X_1,\ldots,X_n$;

Alors

La famille $(S_{(\gamma)})_{(\lambda)\in\Lambda_k^n}$ est une base de A_k^n ; plus précisément

on a (3.6) avec $e_{\mu}^{\mu} \neq 0$.
Il est à noter que si $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_K, 0^{n-k})$ et $S_{(\lambda)}^{\sim} = \sum_{(\mu)\geq(\lambda)} d_{\lambda}^{\mu}.\, s(\mu)$

on a $(\mu) > (\lambda)$ et $\ell(\mu) < k$.

Un autre algorithme de passage de la base monomiale à la base des $S_{(\lambda)}$ a été proposé par A. BOOKER [5] pour des polynômes à n indeterminées, de degré k, avec la restriction $k \leq n$, il est aisé de voir que celle-ci ne tient qu'à sa démonstration, et qu'elle peut être levée très facilement

Algorithme (3.8)

$$P = \sum u_{(\lambda)}\ s(\lambda)$$

initialisons Q à zéro ;

a) soit (λ_o) la plus petite n.partition pour l'ordre lexicographique de P.

$$Q \leftarrow Q + \frac{u_\lambda}{c_\lambda^\lambda} S_{(\lambda)}$$

$$P \leftarrow P - \frac{u_\lambda}{c_\lambda^\lambda} S_{(\lambda)}$$

ou c_λ^λ est le coefficient de $s(\lambda)$ dans le produit $S_{(\lambda)}$.

d'après (3.6) le multidegré de P augmente, mais son degré total est constant.

b) si P n'est pas identiquement nul, aller en (a)

Le théorème suivant est l'analogue des théorèmes (3.1) et (3.7) pour la famille $h_{(\lambda)}$, nous nous bornons à l'énoncer, il sera démontré dans le chapitre III.

Théorème (3.9)

Soient A_k^n l'espace vectoriel des polynômes symétriques, homogènes, en les n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$, Λ_k^n l'ensemble des n.partitions de k.

Alors

La famille $\{h_{(\lambda)}\}_{(\lambda)\in \Lambda_k^n}$ est une base de A_k^n.

Il convient de remarquer que l'on a une formule "explicite" pour les $a_{(\mu)}$; $S_{(\lambda)} = \Sigma' a_{(\mu)} s(\mu)$.
En effet si $(\lambda) = (k, 0^{n-1})$ d'après le théorème multinomial

$$S_{(\lambda)} = \sum'_{(\mu)\text{n part de k}} M(k,\mu)\, s(\mu) \qquad M(k,\mu) = \frac{k!}{\mu_1!\ldots\mu_n!}$$

dans le cas général si $c(\tilde{\lambda}) = (\alpha,\beta,\gamma\ldots)$

$$S_{(\lambda)} = \left(\Sigma\, M(\alpha,u)\, s(u)\right)\left(\Sigma\, M(\beta,v)\, s(v)\right)\ldots$$

d'où $$a_{(\mu)} = \Sigma \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ldots} \times \frac{\beta!}{\beta_1!\beta_2!\beta_3!\ldots} \times \frac{\gamma!}{\gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!\ldots} \times \ldots$$

$$\Sigma\, \alpha_i = \alpha \qquad \Sigma\, \beta_i = \beta \qquad \Sigma\, \gamma_i = \gamma \quad \ldots$$

La somme est prise sur tous les choix de α_i,β_j tels que :

$$\alpha_i + 2\beta_i + 3\gamma_i + \ldots = \mu_i \quad i = 1\ldots k \quad \text{si } (\mu) = (\mu_1,\ldots,\mu_k\, 0^{n-k}).$$

Pour terminer, mentionons une théorie combinatoire des polynômes symétriques utilisant le treillis des partitions d'un ensemble [13], [34]. Les auteurs étudient toutes les relations entre ces différentes bases, ainsi que l'interprétation des coefficients. On pourra aussi consulter [35] où sont établies d'autres propriétés des polynômes symétriques.

4 . FONCTIONS GENERATRICES

$$\text{Soient } f(x) = \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i x) \quad \text{et} \quad F(x) = 1/f_{(x)}$$

$f(-x)$ et $F(x)$ sont respectivement les fonctions génératrices des a_j et h_i

$$f(-x) = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i \qquad a_o = 1 \qquad (4.1)$$

$$F(x) = \sum_{j=o}^{\infty} h_j X^J \qquad h_o = 1 \qquad (4.2)$$

elles permettent d'exprimer facilement certaines relations bien connues entre les a_i, h_i, S_i.

En effet de l'identité $f(+x)\ F(x) = 1$

on déduit $a_o h_o = 1$, $a_o h_1 - a_1 h_o = o$, $a_o h_2 - a_1 h_1 + a_2 h_o = o$ ...

ce qui peut s'exprimer par le fait que les matrices :

$$H_j = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{j-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_1 \\ 0 & & & h_0 \end{vmatrix} \qquad \Lambda_j = \begin{vmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & \cdots & (-1)^{j-1} a_{j-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & & & \ddots & -a_1 \\ & & & & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\text{si } j > n \ ; \ a_j = 0 \qquad (4.3)$$

sont inverses l'une de l'autre, chaque élément de l'une est donc le cofacteur de l'autre d'où :

$$a_k = \text{dét}\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_k \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \\ & & h_b & & h_1 \end{vmatrix}$$

et réciproquement

(4.3)

de même de la relation $\frac{F'}{F} = \sum_{j=o}^{\infty} S_{j+1} X^J$

on déduit :

$$nh_n = S_1 h_{n-1} + S_2 h_{n-2} + \cdots + S_{n-1} h_1 + S_n \qquad \text{(Brioschi)}$$

de $\frac{f'}{f} = - \Sigma S_{j+1} X^J$

$$Ja_J = (-1)^J S_1 a_{j-1} + (-1)^{j-1} S_2 a_{j-2} + - S_{j-1} a_1 + S_J \qquad j \leq n$$

$$o = (-1)^{n+1} S_{J-n} a_n + (-1)^n S_{j-n+1} \cdot a_{n-1} \cdots + S_J \qquad j > n$$

(Newton)

elles ont été utilisées, en particulier par Murnaghan [43] pour exprimer h_i et a_j en fonction des S_k i,j,kϵIN, c'est-à-dire pour résoudre les équations précédentes. Dans ce qui suit, nous montrons qu'il est possible d'en tirer des relations plus générales.

Un simple calcul montre que :

$$\prod_{i=1}^{n} F(x_i) = \sum_{p=o}^{\infty} \left(\sum_{(\theta)} h_{(\theta)} \, s'(\theta) \right) \qquad (4.4)$$

(θ) parcourant l'ensemble des n-partitions de p, il est à remarquer que dans (4.4) $s'(\theta)$ est le polynôme monomial en $X_1, \ldots, X_r$ alors que $h_{(\theta)} = h_{\theta_1} \cdots h_{\theta_r}$ est un polynôme en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Effectuons le changement de variable $X_i \to t X_i$ $i = 1 \ldots r$ dans (4.4) et posons $G(t) = \prod_{i=1}^{r} F(x_i t)$

$$G(t) = \sum_{p=o}^{\infty} \left(\sum_{|\theta|=p} h_{(\theta)} \, s'(\theta) \right) \qquad (4.5)$$

$$\text{Log } G(t) = - \text{Log } \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{r} (1 - \alpha_i X_j t) \right.$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \text{Log } (1 - \alpha_i X_j t)$$

$$= + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_i^u X_j^u \frac{t^u}{u}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_i^u S'_u \frac{t^u}{u}$$

$$= \sum_{u=1}^{\infty} S_u S'_u \frac{t^u}{u}$$

en posant $S_u = \alpha_1^u + \ldots + \alpha_n^u$, $S'_u = X_1^u + \ldots + X_r^u$

d'où l'on déduit que :

$$G(t) = e^{S_1 S'_1 t + S_2 S'_2 \frac{t^2}{2} + \ldots}$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} e^{S_i S'_i \frac{t^i}{i}} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\beta_i=o}^{\infty} \frac{1}{\beta_i!} S_i^{\beta_i} S_i'^{\beta_i} \frac{t^{i\beta_i}}{i^{\beta_i}} \right)$$

$$= \sum_{p=o}^{\infty} \left(\sum_{(\beta)=(\beta_1,\ldots,\beta_p)} \frac{1}{\beta_1! \ldots \beta_p!} \times \frac{1}{1^{\beta_1} . 2^{\beta_2} \ldots p^{\beta_p}} S_1^{\beta_1} \ldots S_p^{\beta_p} S_1'^{\beta_1} \ldots S_p'^{\beta_p} \; t^p \right)$$

$$\sum_{j=1}^{p} j\beta_j = p$$

$$\beta_i \in \text{IN} \qquad (4.6)$$

si (λ) est une p.partition de p posons $(\beta) = c\tilde{(\lambda)}$ et notons :

$$|c\tilde{(\lambda)}| = \frac{1}{\beta_1!\ldots\beta_p!\,1^{\beta_1}\ldots p^{\beta_p}} \quad \text{que nous noterons aussi } c(\beta).$$

(4.6) s'écrit alors :

$$G(t) = \sum_{p=o}^{\infty} \Big(\sum_{(\alpha):\Sigma i\alpha_i = p} c(\alpha) S_{(\alpha)} S'_{(\alpha)} \Big) t^p \qquad (4.7)$$

Notons $\{\alpha, X; p\}$ le coefficient de t^p dans (4.7).
La comparaison de (4.5) et (4.7) donne l'égalité

$$\{\alpha, X; p\} = \sum_{(\theta)} h_{(\theta)}\, s'(\theta) \qquad (4.8)$$

ou (θ) parcourt les r.partitions de P.

Si (λ) est une p.partition de p, nous avons

$$S'_{(\lambda)} = \sum_{(\mu)\geq(\lambda)} m_\lambda^\mu\, s'(\mu) \qquad \text{avec la restriction } (\mu) \text{ est une r.partition de p}$$

et si $\ell(\lambda) > r \qquad m_\lambda^\lambda = o$

c'est évident en considérant $S'_{(\lambda)}$ comme un polynôme en les $\ell(\lambda)$ variables $X_1, \ldots, X_{\ell(\lambda)}$ après application de (3.6), posons $X_{r+1}, \ldots, X_{\ell(\lambda)} = o$, d'après (2.1) on trouve le résultat annoncé.

Remplaçons $S'_{(\lambda)}$ par sa valeur dans $\{\alpha, X; p\}$

$$\{\alpha, X; p\} = \sum_{(\alpha)} \Big(c(\alpha) S_{(\alpha)} \sum_{(\mu)\geq(\lambda)} m_\lambda^\mu S'(\mu)\Big)$$

$$= \sum_{(\mu)} \Big(\sum_{(\alpha);(\mu)\geq(\lambda)} m_\lambda^\mu c(\alpha) S_{(\alpha)} \Big) S'(\mu)$$

dans ces deux égalités $(\mu)\geq(\lambda)$ signifie (μ) (λ) avec (λ) ; $(\lambda) = C(\alpha)$ et $m_\lambda^\mu = m^\mu_{C^{-1}(\alpha)}$.

(μ) parcourt les r.partitions de p, (λ) les p.partitions de p. La comparaison u coefficient de S(θ) dans les deux membres de l'égalité (4.8) donne :

$$h_{(\theta)} = \sum_{(\alpha);C^{-1}(\alpha)\leq(\theta)} m_\lambda^\theta c(\alpha) S_{(\alpha)} \tag{4.9}$$

si $(\theta) = (p, o^{n-1})$ (4.9) se réduit à

$$h_p = \sum_{(\alpha)} c(\alpha)\ S_{(\alpha)} \tag{4.10}$$

donnée par Murnaghan dans [43].

Remarques : si $p > r$ $(\lambda) \leq (\theta)$ signifie $(\lambda) \leq (\theta_{\downarrow p-r})$
si $p \leq r$ $(\lambda) \leq (\theta)$ signifie $(\lambda_{\downarrow r-p}) \leq (\theta)$

dans ce dernier cas les décompositions de $h_{(\theta)}$ et h_p sont uniques (les $S_{(\lambda)}$ sont indépendants).

Procédons de la même façon avec la fonction :

$$\Pi(t) = \prod_{i=1}^{r} f(-tX_i) = \sum_{p=o}^{rn} (\Sigma\, a_{(\tilde{\theta})}\ s\ (\theta))t^p \tag{4.11}$$

(θ) parcourant les r-partitions de p dont le premier terme (θ_1) est inférieur ou égal à n.

Posons $\{\alpha, X; 1^p\} = \sum_{(\lambda)} |c(\tilde{\lambda})|\epsilon_\lambda\ S_{(\lambda)}\ S'(\lambda)$ (4.12)

(λ) parcourt les p.partitions de p, $\epsilon_\lambda = (-1)^{\sum_{i=1}^{p/2} \beta_{2i}}$ si $c(\tilde{\lambda}) = (\beta)$

on obtient $\{\alpha, X; 1^p\} = \Sigma\, a_{(\tilde{\theta})}\ S'(\theta)$ (4.13)

ce qui donne

si $\theta_1 \leq n$

$$a_{(\tilde{\theta})} = \sum_{(\alpha);C^{-1}(\alpha)\leq\theta} c(\alpha)\epsilon_\lambda m_\lambda^\theta S_{(\alpha)} \tag{4.14}$$

si $\theta_1 > n$

$$\sum_{(\alpha);C^{-1}(\alpha)\leq(\theta)} c(\alpha)\epsilon_\lambda m_\lambda^\theta S_{(\alpha)} = 0 \tag{4.15}$$

et si $(\theta) = (p, o^{n-1})$ $p \leq n$

$$a_p = \sum_{(\alpha);C^{-1}(\alpha)\leq(\theta)} c(\alpha)\epsilon_\lambda m_\lambda^\theta S_{(\alpha)} \tag{4.16}$$

avec les mêmes conventions que précédemment.

D'autre part, si r = n, par symétrie H(t) et G(t) peuvent s'écrire :

$$G(t) = \sum_{p=o}^{\infty} \left(\sum_{(\theta)} h'_{(\theta)} \; s(\theta) \right) t^p \qquad (4.17)$$

$$H(t) = \sum_{p=o}^{rn} \left(\sum_{(\theta)} a^{\sim}_{(\theta)} \; s(\theta) \right) t^p \qquad (4.18)$$

comparons (4.5) et (4.17)

$$\sum h'_{(\theta)} \; s(\theta) = \sum h_{(\theta)} \; s'(\theta) \qquad (4.19)$$

exprimons $h_{(\theta)}$ comme combinaison linéaire des $S(\mu)$

$h_{(\theta)} = \sum u_\theta^{\mu} \; S(\mu)$, portons dans (4.19)

$$\sum_{\theta} h'_{(\theta)} \; s(\theta) = \sum_{\theta,\mu} u_\theta^{\mu} \; s(\mu) \; s'(\theta) = \sum_{(\mu)} \left(\sum_{(\theta)} u_\theta^{\mu} \; s'(\theta) \right) \quad (\mu)$$

Identifions les coefficients de $s(\mu)$, cela donne :

$$h'(\mu) = \sum_{(\theta)} u_\theta^{\lambda} \; s'(\theta)$$

en comparant avec $h_{(\theta)}$, nous avons :

Proposition (4.1)

Si $s(\lambda)$ est le polynôme monomial en les r indéterminées $X_1, \ldots, X_r$ associé à la r.partition (λ), soit (μ) une autre r.partition de $|\lambda|$.

Alors Le coefficient de $s(\lambda)$ dans le produit $h_{(\mu)}$ est égal au coefficient de $s(\mu)$ dans le produit $h_{(\lambda)}$.

De même en comparant les deux écritures de H(t), nous avons :

Proposition (4.2)

Si (λ) et (μ) sont deux r.partitions de $u \in \mathbb{N}$

alors le coefficient de $s(\lambda)$ dans le produit $a^{\sim}_{(\theta)}$ est égal au coefficient de $s(\mu)$ dans $a^{\sim}_{(\lambda)}$.

Ce sont les premières et deuxièmes lois de symétrie de Macmahon [36] ; (on pourra voir aussi [51], [15]).

Terminons par les remarques suivantes :

1) si l'on exprime que $a(t)\,H(-t) = 1$, on retrouve les relations (4.3) en remplaçant a_k par $\{\alpha, X; 1^k\}$ et h_J par $\{\alpha, X; J\}$.

2) si (λ) est une p.partition de $u \in \mathbb{N}$ $P > r$, le polynôme $S_{(\lambda)}$ en les variables $X_1,\ldots,X_r$ s'exprime de manière unique sous la forme :

$$S_{(\lambda)} = \sum_{(\nu)\geq(\lambda)} W_\nu^\lambda\, S_{(\nu)} \qquad \text{où } (\nu) \text{ est une r-partition de u.}$$

en effet $S_{(\lambda)} = \sum_{(\mu)\geq(\lambda)} t_\lambda^\mu\, s_{(\mu)}$ (μ) est une r-partition, de façon unique

et $s(\mu) = \sum_{(\nu)\geq\mu} k_\mu^\nu\, S_\nu$, de façon unique d'où

$$S_{(\lambda)} = \sum_{(\mu)\geq(\lambda)} t_\lambda^\mu \sum_{(\nu)\geq(\mu)} k_\mu^\nu\, s_{(\nu)} = \sum_{(\nu)\geq(\lambda)} \Big(\sum_{(\lambda)\leq(\mu)\leq(\nu)} t_\lambda^\mu\, k_\mu^\nu\Big)\, s_{(\nu)}$$

II ALGORITHMES DE MULTIPLICATION

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la multiplication de deux polynômes symétriques ou antisymétriques exprimés dans la base monomiale. Après avoir formulé le problème, et mis en évidence les difficultés de celui-ci, qui sont, la taille des listes à manipuler, et, un double réordonnement, nous présentons un algorithme de multiplication de polynômes symétriques dû à E. LAUER [31], puis nous en proposons un autre, qui, tout en reprenant l'idée de [31], étendue aux produits de polynômes antisymétriques ou de polynôme symétrique par un polynôme antisymétrique, permet de réduire le coût du double réordonnement.

Dans le second paragraphe, nous présentons brièvement le système de calcul formel REDUCE, sur lequel seront programmés les algorithmes définis précédemment, puis nous passons à la mise en oeuvre de l'algorithme de produit que nous proposons après avoir défini une structure de données qui sera utilisée systématiquement, en vue de réduire le nombre de tests et la taille des listes à stocker.

A ce stade, il eut été intéressant d'avoir des bornes théoriques pour le coût de la multiplication de deux polynômes symétriques ou antisymétriques, mais, la complexité de la structure mise en oeuvre ne nous a permis qu'un résultat partiel sur la somme de polynômes symétriques ou antisymétriques.

- Nous présenterons donc essentiellement des résultats expérimentaux.

- Le quatrième paragraphe est consacré à la description d'un algorithme de passage de la base monomiale à la base somme des puissances semblables, qui est issu de la proposition I (2.1).

1 - ALGORITHMES DE MULTIPLICATION -

Soient deux polynômes P et Q, symétriques ou antisymétriques, exprimés dans la base monomiale ; leur multiplication "se réduit" à la multiplication de polynômes symétriques ou antisymétriques monomiaux. Soit donc à multiplier s(m) par s(L), nous avons vu dans le chapitre précédent I(2.1), que cette multiplication se réduit aux 3 étapes suivantes :

(S)
a) générer les n-uples $(m_1+\ell_{\sigma(1)},\ldots,m_n+\ell_{\sigma(n)})$ ou $(\ell_1+m_{\sigma(1)},\ldots,\ell_n+m_{\sigma(n)})$ quelque soit $\sigma \in \pi_n$

b) réordonner chacun de ces n-uples,

c) ordonner la liste de n partitions et ajouter celles qui sont identiques.

Ce schéma correspond à celui utilisé dans [31], en utilisant la notion de pseudo-permanent.

Définition 1 - Soit la matrice A d'éléments a_{ij} ; le pseudo-permanent de A est l'expression $\sum_{\sigma\in\pi_n} s(a_{1,\sigma(1)},\ldots a_{n,\sigma(n)})$

- ce pseudo-permanent peut se calculer de manière analogue à un permanent, en développant par lignes ou par colonnes.

- Il est immédiat de vérifier, que si $a_{ij} = m_i+\ell_j$ le calcul de ce pseudo permanent réalise l'étape (a) de (s), en un nombre minimum d'additions de type ℓ_j+m_i, avec l'avantage supplémentaire de permettre de tenir compte facilement lors du calcul d'éventuelles répétitions sur les n-partitions définissant les deux polynômes, répétitions qui se traduisent par des lignes ou des colonnes identiques, ce qui dans certains cas diminue beaucoup le travail b), c).

Notons qu'il est aisé d'étendre cette définition à la multiplication de polynômes antisymétriques, ou d'un polynôme symétrique par un polynôme antisymétrique, mais cette approche a l'inconvénient de dissocier les trois étapes de construction du résultat, l'expérience montrant que les deux dernières sont les plus coûteuses, il est donc intéressant d'accomplir ces trois étapes simultanément afin de réduire le nombre de tests nécessaires au double réordonnement, c'est le but de l'algorithme que nous proposons.

Définition - opération $*$

Soit (m) un n-uple posons $U_i(m) = \begin{cases} s(m) & \text{si } i=1 \\ A(m) & \text{si } i=2 \end{cases}$

et définissons l'opération $*$ par :

$$\Big(\sum_{\ell\in D_k} a_\ell U_i(\ell)\Big)*\Big(\sum_{m\in D_{n-k}} b_m U_i(m)\Big) \tag{1.1}$$

$$= \sum_{\ell,m} a_\ell b_m U_i(\ell,m)$$

ou D_k est un ensemble de k-uples, D_{n-k} un ensemble de (n-k)-uples.

Proposition (1.1) -

$$s^*(m)s^*(\ell) = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n \\ 1\le i_{k+1}<\ldots<i_n\le n \\ i_j\neq i_u \text{ si } u\neq j}} [s^*(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})s^*(\ell_1,\ldots,\ell_k)]*[s^*(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n})s^*(\ell_{k+1},\ldots,\ell_n)] \tag{1.2}$$

$$s^*(m)\Lambda(\ell) = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n \\ 1\le i_{k+1}<\ldots<i_n\le n \\ i_j\neq i_u \text{ si } u\neq j}} [s^*(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})\Lambda(\ell_1,\ldots,\ell_k)]*[s^*(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n})\Lambda(\ell_{k+1},\ldots,\ell_n)] \tag{1.3}$$

$$= \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n \\ 1\le i_{k+1}<\ldots<i_n\le n \\ i_j\neq i_u \text{ si } u\neq j}} \epsilon_\sigma[\Lambda(\ell_{i_1},\ldots,\ell_{i_k})s^*(m_1,\ldots,m_k)]*[\Lambda(\ell_{i_{k+1}},\ldots,\ell_{i_n})s^*(m_{k+1},\ldots,m_n)] \tag{1.4}$$

ou ϵ_σ = signe de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$

$$\Lambda(m)\Lambda(\ell) = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n \\ 1\le i_{k+1}<\ldots<i_n\le n \\ i_j\neq i_u \text{ si } u\neq j}} \epsilon_\sigma[\Lambda(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})\Lambda(\ell_1,\ldots,\ell_k)]*[\Lambda(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n})\Lambda(\ell_{k+1},\ldots,\ell_n)] \tag{1.5}$$

Démonstration

Nous savons que les n-uples obtenus dans un quelconque des trois produits sont de la forme $(m_1+\ell_{\sigma(1)},\ldots,m_n+\ell_{\sigma(n)})$ ou $(\ell_1+m_{\sigma(1)},\ldots,\ell_n+m_{\sigma(n)})$

$\sigma \in \pi_n$.

Or d'après I(2.1) $s^*(m) = \Sigma\, s^*(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})s^*(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n})$, multiplions $s^*(m)$ sous cette forme, par $s^*(\ell_1,\ldots,\ell_k)s^*(\ell_{k+1},\ldots,\ell_n)$, ce produit n'est évidemment pas symétrique, mais il suffit d'observer que :

$\underline{A} = s^*(m_{i_{\tau(1)}}{}^{+\ell_1},\ldots,m_{i_{\tau(k)}}{}^{+\ell_k})s^*(m_{i_{\gamma(k+1)}}{}^{+\ell_{k+1}},\ldots,m_{i_{\gamma(n)}}{}^{+\ell_n})$ est un terme du produit $[s^*(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})s^*(\ell_1,\ldots,\ell_k)]\cdot[s^*(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n})s^*(\ell_1,\ldots,\ell_n)]$

donc : $s^*(m_{i_{\tau(1)}}{}^{+\ell_1},\ldots,m_{i_{\tau(k)}}{}^{+\ell_k},m_{i_{\gamma(k+1)}}{}^{+\ell_{k+1}},\ldots,m_{i_{\gamma(n)}}{}^{+\ell_n})$ est un terme du produit $s^*(m)s^*(\ell)$, et réciproquement.

- La première assertion est vraie par symétrie.

Montrons la réciproque. Si $s^*(u)$ est un terme de $s^*(m)\ s^*(\ell)$, alors $u = (m_{\sigma(i)}{}^{+\ell_1},\ldots,m_{\sigma(n)}{}^{+\ell_n})$ soit $\alpha \in \pi_n$ telle que :

$$\alpha(\sigma(1))<\alpha(\sigma(2))<\ldots<\alpha(\sigma(k))$$
$$\alpha(\sigma(k+1))<\ldots\ldots\ldots<\alpha(\sigma(n))$$

posons $\alpha(\sigma(j)) = i_j$, (1,6) et définissons

τ la permutation de $\{1,\ldots,k\}$ telle que $i_{\tau(j)}=\sigma(j)$ $\quad j=1\ldots k$

γ la permutation de $\{k+1,\ldots,n\}$ telle que $i_{\gamma(j)}=\sigma(j)$ $\quad j=k+1,\ldots,n$

Par construction, le terme $X_1^{m_{i_{\tau(1)}}{}^{+\ell_1}}\ldots\ldots X_k^{m_{i_{\tau(k)}}{}^{+\ell_k}}\, X_{k+1}^{m_{i_{\tau(k+1)}}{}^{+\ell_{k+1}}}\ldots\, X_n^{m_{i_{\tau(n)}}{}^{+\ell_n}}$ qui figure dans $s^*(u)$, donne, par symétrie par rapport à $X_1,\ldots,X_k$ et $X_{k+1},\ldots,X_n$, le terme A qui est obtenu en effectuant :

$$[s^*(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})s^*(\ell_1,\ldots,\ell_k)]\cdot[s^*(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n})s^*(\ell_{k+1},\ldots,\ell_n)]$$

i_j étant définit par (1.6).

Montrons maintenant (1.4) ; utilisons pour cela la décomposition I(2.3)

$$A(\ell_1,\ldots,\ell_n) = \Sigma\, \varepsilon\sigma A(\ell_{i_1},\ldots,\ell_{i_k})A(\ell i_{k+1},\ldots,\ell_{i_n})$$

et multiplions par $s^*(m_1,\ldots,m_k)s^*(m_{k+1},\ldots,m_n)$, de la même façon que précédemment, dans le produit :

$$\varepsilon_\sigma[s^*(m_1,\ldots,m_k)A(\ell_{i_1},\ldots,\ell_{i_k})]\cdot[s^*(m_{k+1},\ldots,m_n)A(\ell_{i_{k+1}},\ldots,\ell_{i_n})]$$

figure : $\varepsilon_\sigma\ \varepsilon_{\tau_1}\ \varepsilon_\gamma\ A(\ell_{i_{\tau(1)}}{}^{+m_1},\ldots,\ell_{i_{\tau(k)}}{}^{+m_k})A(\ell_{i_{\gamma(k+1)}}{}^{+m_k},\ldots,\ell_{i_{\gamma(n)}}{}^{+m_n})$

donc : $\varepsilon_\sigma\ \varepsilon_\tau\ \varepsilon_\gamma\ A(\ell_{i_{\tau(1)}}{}^{+m_1},\ldots,\ell_{i_{\tau(k)}}{}^{+m_k},\ell_{i_{\gamma(k+1)}}{}^{+m_{k+1}},\ldots,\ell_{i_{\gamma(n)}}{}^{+m_n})$

dans $s^*(m)A(\ell)$; il suffit de montrer que si $\alpha \in \pi_n$ et :

$$\alpha(j) = i_{\tau(j)} \qquad j\le k$$

$$\alpha(j) = i_{\gamma(j)} \qquad j>k$$

$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\sigma\ \varepsilon_\tau\ \varepsilon_\gamma$ ce qui résulte de l'dientité $\alpha = \mu\ \beta\ \sigma$

en posant $\beta = \begin{pmatrix} i_1,\ldots\ldots\ldots,i_k,\ i_{k+1},\ldots,i_n \\ i_{\tau(1)},\ldots,i_{\tau(k)},\ i_{k+1},\ldots,i_n \end{pmatrix}$

$$\mu = \begin{pmatrix} i_1,\ldots,i_k,\ i_{k+1},\ldots\ldots,i_n \\ i_1,\ldots,i_k,\ i_{\gamma(k+1)},\ldots,i_{\gamma(n)} \end{pmatrix}$$

Le fait que l'expression (1.4) est égale à (1.3) découle immédiatement de l'identité $\alpha = \mu\ \beta\ \sigma$.

Nous omettrons la démonstration de (1.5) qui est analogue aux précédentes.

Les identités (1.2) et (1.3) donnent immédiatement le corollaire suivant, très intéressant dans la pratique.

Corollaire (1.2)

$$s(m)s(\ell) = \frac{1}{(\ell)!} \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n \\ 1\le i_{k+1}<\ldots<i_n\le n \\ i_j\ne i_u \quad u\ne j}} [s^*(\ell_1,\ldots,\ell_k)s(m_{i_1},\ldots,m_{i_k})]*[s^*(\ell_{k+1},\ldots,\ell_n)\, s(m_{i_{k+1}},\ldots,m_{i_n})]. \qquad (1.7)$$

et

$$s(m)A(L) = \sum_{\substack{1\le i_1<\dots i_k \\ 1\le i_{k+1}<\dots<i_n\le n \\ i_j\neq i_u \quad u\neq j}} [s(m_{i_1},\dots,m_{i_k})A(\ell_1,\dots,\ell_k)]* [s(m_{i_{k+1}},\dots,m_{i_n})A(\ell_{k+1},\dots,\ell_n)] \qquad (1.8)$$

Σ' signifiant que la somme est prise sur les indices $i_1 \dots i_n$ qui donnent des termes $s(m_{i_1} \dots m_{i_k})$ différents.

Le résultat de (1.7) doit être interprété comme un s^*.

Démonstration

Montrons seulement (1.7) d'après (1.3)

$$s(m)s(\ell) = \frac{1}{(m)!}\frac{1}{(\ell)!} \Sigma\, [s^*(m_{i_1},\dots,m_{i_k})s^*(\ell_1,\dots,\ell_k)]* [s^*(m_{i_{k+1}},\dots,m_{i_n})s^*(\ell_{k+1},\dots,\ell_n)]$$

ce qui d'après I(2.2) est égal à :

$$\frac{1}{(\ell)!} \Sigma'\, [s(m_{i_1},\dots,m_{i_k})s^*(\ell_1,\dots,\ell_k)]* [s^-(m_{i_{k+1}},\dots,m_{i_n})s^*(\ell_{k+1},\dots,\ell_n)]$$

ce résultat permet, si l'on sait effectuer la décomposition I(2.2), d'adapter la multiplication aux répétitions des éléments des n partitions qui définissent les polynômes monomiaux, ce qui a comme conséquences, de réduire la longueur de la liste manipulée, et le nombre d'additions de polynômes monomiaux, qui sont très coûteuses car elles nécessitent la comparaison de tous les entiers définissant le polynôme monomial. Nous verrons par la suite que la longueur de la liste résultante est le facteur de coût le plus important dans la multiplication de polynômes symétriques ou antisymétriques.

Exemple : soient à multiplier deux polynômes symétriques à 4 variables

$P = s(5\ 3\ 0\ 0) + s(5\ 3\ 2\ 1)$ par

$Q = s(6\ 4\ 3\ 1)$

d'après (1.6) cela se réduit à :

$$[s(5\ 3)\ s^*(6\ 4)]*[s(0\ 0)s^*(3\ 1) + s(2\ 1)s^*(3\ 1)]$$
$$+ [s(0\ 0)s^*(6\ 4) + s(2\ 1)s^*(6\ 4)]*[s(5\ 3)s^*(3\ 1)]$$
$$+ [s(5\ 2)s^*(6\ 4)]*[s(3\ 1)s^*(3\ 1)]+[s(5\ 1)s^*(6\ 4)]*[s(3\ 2)s^*(3\ 1)]$$
$$+ [s(3\ 2)s^*(6\ 4)]*[s(5\ 1)s^*(3\ 1)]+[s(3\ 1)s^*(6\ 4)]*[s(5\ 2)s^*(3\ 1)]$$

$= [s^*(11\ 7) + s^*(9\ 9)]*[s^*(5\ 2) + s^*(4\ 3) + s^*(3\ 1)]$
$+ [s^*(8\ 5) + s^*(7\ 6) + s^*(6\ 4)]*[s^*(8\ 4) + s^*(6\ 6)]$
$+ [s^*(11\ 6) + s^*(9\ 8)]*[s^*(6\ 2) + s^*(4\ 4)]$
$+ [s^*(11\ 5) + s^*(9\ 7)]*[s^*(6\ 3) + s^*(5\ 4)]$
$+ [s^*(9\ 6) + s^*(8\ 7)]*[s^*(8\ 2) + s^*(6\ 4)]$
$+ [s^*(9\ 5) + s^*(7\ 7)]*[s^*(8\ 3) + s^*(6\ 5)]$

$= \{s^*(11\ 7\ 5\ 2) + s^*(11\ 7\ 4\ 3) + s^*(11\ 7\ 3\ 1) + s^*(9\ 9\ 5\ 2) + s^*(9\ 9\ 4\ 3)$
$+ s^*(9\ 9\ 3\ 1)\} +$
$\{s^*(8\ 8\ 5\ 4) + s^*(8\ 6\ 6\ 5) + s^*(8\ 7\ 6\ 4) + s^*(7\ 6\ 6\ 6) + s^*(8\ 6\ 4\ 4)$
$+ s^*(6\ 6\ 6\ 4)\} +$
$\{s^*(11\ 6\ 6\ 2) + s^*(11\ 6\ 4\ 4) + s^*(9\ 8\ 6\ 2) + s^*(9\ 8\ 4\ 4)\} +$
$+ \{s^*(11\ 6\ 5\ 3) + s^*(11\ 5\ 5\ 4) + s^*(9\ 7\ 6\ 3) + s^*(9\ 7\ 5\ 4)\} +$
$\{s^*(9\ 8\ 6\ 2) + s^*(9\ 6\ 6\ 4) + s^*(8\ 8\ 7\ 2) + s^*(8\ 7\ 6\ 4)\} +$
$\{s^*(9\ 8\ 5\ 3) + s^*(9\ 6\ 5\ 5) + s^*(8\ 7\ 7\ 3) + s^*(7\ 7\ 6\ 5)\}$

$= s(11\ 7\ 5\ 2) + s(11\ 7\ 4\ 3) + s(11\ 7\ 3\ 1) + 2s(11\ 6\ 6\ 2) + s(11\ 6\ 5\ 3)$
$+ 2s(11\ 6\ 4\ 4) + 2s(11\ 5\ 5\ 4) + 2s(9\ 9\ 5\ 2) + 2s(9\ 9\ 4\ 3)$
$+ 2s(9\ 9\ 3\ 1) + 2s(9\ 8\ 6\ 2) + s(9\ 8\ 5\ 3) + 2s(9\ 8\ 4\ 4)$
$+ s(9\ 7\ 6\ 3) + s(9\ 7\ 5\ 4) + 2s(9\ 6\ 6\ 4) + 2s(9\ 6\ 5\ 5)$
$+ 2s(8\ 8\ 7\ 2) + 2s(8\ 8\ 5\ 4) + 2s(8\ 7\ 6\ 4) + 2s(8\ 7\ 7\ 3) + 2s(8\ 6\ 6\ 5) +$
$2s(8\ 6\ 4\ 4) + 2s(7\ 7\ 6\ 5)$
$+ 6s(7\ 6\ 6\ 6) + 6s(6\ 6\ 6\ 4)$

Remarquons que :
- les listes entre crochets sont partiellement ordonnées,
- la multiplication "classique" aurait donné 410 monômes différents, à raison de 5 monômes par 2 lignes cela fait 160 lignes de résultat.

L'algorithme précédent peut suggérer la multiplication de P par le terme dominant de Q soit $X_1^6\ X_2^4\ X_3^2\ X_4$, en utilisant un algorithme de multiplication rapide, ce qui donne tous les n-uples puissances. Il resterait alors réordonner chacun de ces n-uples, puis ordonner la liste de n partitions ainsi obtenue (il faut remarquer que dans ce cas deux monômes différents peuvent donner la même n partition, exemple : $X_1^5\ X_2^6\ X_3^3\ X_4$ et $X_1^5\ X_2^3\ X_3^6\ X_4$). Ce qui revient de nouveau à effectuer les étapes b) et c) séparément, et qui représente l'essentiel du travail.

Donnons maintenant un algorithme pour effectuer les décompositions I(2.2) et I(2.3).

Lemme (1.3) si $k_1 > k_2 > \ldots > k_n$

le signe de la permutation $\begin{matrix} k_1 & \ldots & k_n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{matrix}$ est $sg(\prod_{j<\ell} (i_j - i_e))$ (1.9)

Démonstration COMTET [14]

Algorithme COMB

k, n, (m) = $(m_1, \ldots, m_n)$ fixés.

COMB est une procédure récursive qui utilise 7 paramètres, son but est de construire à partir de (m) tous les triplets de k-uples, (n-k)-uples et signe, qui figurent dans I(2.1).

Description des paramètres :

Le premier, m est la partie du k-uple déjà construite.
Le deuxième, ℓ est la partie du (n-k)-uple construite.
Le troisième, R le reste de la liste initiale (m).
Le quatrième sera $k-|m|$.
Le cinquième sera $n-|\ell|$.
Le sixième et le septième servirons à construire le signe.

Note : le signe final est construit par étape, ce qui évite de réinspecter chaque k-uple et son (n-k)-uple associé pour appliquer (1.7).

- COMB est initialisée par COMB(∅,∅, (m),k,n,0,1)
  * COMB(m, ℓ, R, k, n, n_1, ε)

$m = (m_1, \ldots, m_p)$, $\ell = \ell_1, \ldots, \ell_r)$, $R = (R_1, \ldots, R_s)$, INT = ∅.

1 - si k = 0 résultat = (ϵ, m, ℓ) et aller en 14

2 - i = 1

3 - si i > n-k aller en 14

4 - $m^i = m \cup R_i$, $\ell^i = \ell \cup INT$,

5 - $INT = INT \cup R^i$, $n_1^i = n_1+i-1$, $R^i = R-R_i$

6 - $n_i = n-i$

7 - $\epsilon_i = sg(\epsilon, (-1)^{n_1^i})$

8 - si $r_i \neq r_{i+1}$ aller en 11

9 - $i = i+1$; $INT = INT \cup R_i$

10 - si $R \neq \emptyset$ aller en 8

cette boucle permet de ne pas reconstruire un k-uple et un (n-k)-uple ayant les mêmes éléments.

11 - $\ell = i+1$

12 - résultat = résultat $\cup$ COMB(m^i, ℓ^i, R^i, k-1, n_i, n_1^i, ϵ_i)

13 - aller en 3

14 - return (résultat)

15 - Fin

Supposons qu'au $i^{ème}$ appel de comb nous ayons la propriété suivante :

(P) $m_j > m_{j+1}$, $\ell_j > \ell_{j+1}$, $R_1 < m_p$, $R_1 < \ell_r$

$\epsilon = sg\left(\prod_{u<j} (i_j - i_u)\right)$ avec i_j tel que $m_{i_j} = m_j$ si $j \leq p$

$m_{i_j} = \ell_j$ si $j>p$, $j<p+j$

<u>alors</u> $m^i < m^{i-}$, $\ell^{i-1} < \ell^i$, $R^i \subset R^{i-1}$, d'après 4, 5, 6 et 9 et $\epsilon^i = sg(\epsilon\ (-1)^{n_1^i})$,

or n_1^i est la longueur de ^{i}, donc

$sg((-1)^{n_1^i}) = sg\left(\prod_{j=1,\ldots,s} (r_i - r_j) \prod_{v=1,\ldots,i-1} (r_i - r_v)\right)$ et ϵ^i vérifie

donc (P).

Il est facile de vérifier que le résultat final est ordonné lexicographiquement, en ordre décroissant pour les k-uples, croissant pour les (n-k)-uples. Cette propriété sera utilisée lors de la programmation.

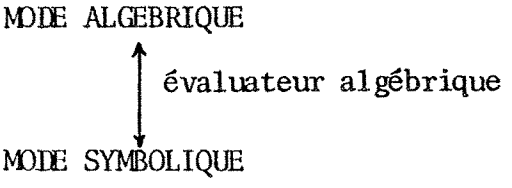
2 - REDUCE -

Dans ce paragraphe nous donnons une description sommaire du système Réduce, et non exhaustive quant à ses propriétés, nous réservant de présenter celles qui sont nécessaires pour la suite de notre exposé.

Réduce [25], est un système de calcul formel interactif organisé en deux niveaux appelés "modes" :

- le mode algébrique,
- le mode symbolique.

La communication entre ces deux niveaux étant faite automatiquement par l'évaluateur algébrique.



Il convient de distinguer deux types de représentations des données. La représentation interne qui est la représentation de travail, et la représentation de surface de type algébrique classique, utilisée pour les entrées sorties uniquement en mode algébrique. Le passage entre les deux se faisant par l'évaluateur algébrique.

Le mode algébrique - c'est le mode naturel d'utilisation de Réduce (et le plus simple !), l'évaluateur algébrique se chargeant de l'essentiel du travail, simplification, appel des procédures appropriées, ..., en tenant compte d'un "contexte" définit par l'utilisateur. Le langage de programmation est de type algol.

Le contexte est formé par les déclarations, les options et enfin les règles opératoires ou les relations entre éléments.

- les déclarations - entiers, scalaires, tableaux, matrices ... scalaire étant le type par défaut.

Les options sont à "on" ou "off" (actives ou inactives) ; par exemple si l'option pgcd est active un calcul de pgcd sera fait automatiquement par le système dès que l'on manipulera une fraction rationnelle.

Les règles opératoires permettent de définir de nouvelles opérations, de donner des propriétés à un opérateur ou a des variables.

Exemple : les lignes précédées de + sont des entrées, celles précédées de 0 sont des réponses du système :

```
+ Matrix     A(2, 2),  B(2, 2),  C(2, 2) ;
+ A := Mat((5, 4), (1, 1)) ;
0 MAT(1, 1) = 5
0 MAT(1, 2) = 4
0 MAT(2, 1) = 1
0 MAT(2, 2) = 1
+ B := Mat((1, 0), (0, 1)) ;
0 MAT(1, 1) = 1
.  .
.  .
.  .
0 MAT(2, 2) = 1
+ C := A*B ;      A et B étant des matrices, le système interprète *
                  comme la procédure de multiplication matricielle
0 MAT(1, 1) = 5
0 MAT(2, 2) = 1
+ C := A^(-1)     (on affecte à C l'inverse de A)
+ OFF GCD ;
+ (x**3 + 4*x**2 + 5*x + 2)/(x^2+1) ;
0 (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)/(x^2-1)
+ P = (x+1)**2 ;
0 x^2 + 2x+1
+ let x = y+1
+ P ;              (demande d'impression du contenu de P évalué)
0 y^2 + 4y + 4
+ Q := P*(x+1) ;
0 y^3 + 6y^2 + 12y + 8
+ clear x ;       (efface la propriété x = y+1)
+ P ;
0 x^2 + 2x + 1
+ Q
0 y^3 + 4y^2 + 12y +8
```

Le mode symbolique

On y programme en R lisp qui est une extension de lisp.

. Avantages - c'est le niveau ou est écrit le système, on ne passe pas par l'évaluateur algébrique, et on peut utiliser toutes les procédures de Réduce, en exploitant les propriétés de lisp pour le traitement de listes.

. Inconvénients - il faut appeler les procédures avec leurs arguments compatibles, représentés sous forme interne, ce qui suppose une très bonne connaissance du système. En outre les données sont difficiles à lire en représentation interne.

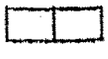
L'évaluateur algébrique

C'est le lien entre les deux modes ; en mode symbolique il faut l'appeler explicitement, en mode algébrique il est appelé automatiquement lorsqu'on entre une chaîne de caractères au terminal.

L'évaluateur analyse alors cette chaîne, reconnaît son type, l'exprime sous forme préfixée, la simplifie et l'évalue en tenant compte du contexte, la stocke (si nécessaire) sous forme interne et la retourne au terminal sous la forme de surface.

Remarque : la représentation interne d'un polynôme par exemple, ne varie pas lorsqu'on change le contexte, à moins d'affecter le résultat de l'évaluation.

Lisp est un langage de traitement de listes utilisé pour l'implantation de R-lisp - lisp gère un espace de travail divisé "en cellules", composées de deux champs, le CAR et le CDR - une cellule sera schématisée par

 .

A l'origine les cellules disponibles forment la liste libre dans laquelle on puise lorsqu'on a besoin de mémoire, et que l'on reconstruit, lorsqu'elle est vide avec le programme rammasse miettes (r.m.), qui chaîne les cellules qui ne sont plus actives. Si après exécution du ramasse miettes, la liste libre est encore vide, l'exécution du programme s'arrête avec un message d'erreur.

On trouvera en annexe une description de quelques fonctions de lisp, qui seront utilisées dans le paragraphe suivant pour décrire des programmes.

Représentation interne des polynômes dans réduce -

Comme dans la plupart des systèmes de calcul formel les polynômes sont codés sous forme récursive :

$P(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{j\in D} X_1^j P_j(X_2,\ldots,X_n)$, en ne représentant que les puissances dont le coefficient est différent de zéro.

Exemple : $A^{10} + A^2 + 2AB + B^2$ est représenté par la liste

(((A•10)•1) ((A•2)•1) ((A•1) ((B•1)•1)) ((B•2)•1))

cette représentation récursive définit un arbre, dont le noeud de niveau zéro est l'identificateur du polynôme, les noeuds de premier niveau représentent les termes à ajouter, ...
Pour une description plus complète de réduce on pourra se référer à [25], et pour lisp à [33], [34], [38].

3 - MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME -

Comme il a été montré dans le § 1 l'algorithme de multiplication que nous proposons, se "réduit" à des manipulations de listes ; il est alors naturel (et nécessaire) de le programmer avec un langage de type lisp. Nous utiliserons le langage Rlisp de réduce. Cependant afin d'en rendre l'utilisation plus aisée, et, d'utiliser les possibilités de réduce, nous avons réalisé une interface avec le mode algébrique de réduce, de telle façon que l'algorithme admette comme arguments et retourne comme résultat, des polynômes au sens de réduce ; on dispose ainsi de toutes les facilités de celui-ci pour des manipulations ultérieures, (ou préliminaires) sur ces polynômes.

La programmation a été faite avec trois idées directrices :

a) - une seule procédure pour les trois types de produits possibles, qui ne se différencie que si le nombre de variables est deux, et pour l'opération étoile.

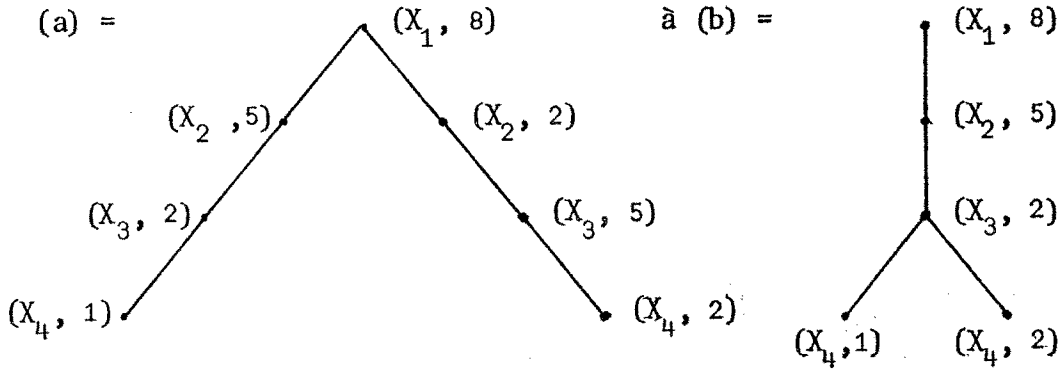
b) - minimiser la place mémoire du résultat, qui, dans le cas le plus général comporte n! n-partitions (pour un produit de type s(ℓ)s(m)). Pour cela on

tiendra compte de la propriété suivante : dans le cas du produit s(m)s(ℓ) des n-partitions sont construites à partir de n^2 nombres.

c) - définir une structure de données, qui permette de réaliser cet algorithme avec le moins de tests possibles.

Au vu de ce qui précéde, il apparaît que la meilleure structure de données est de type représentation récursive. Il semblerait alors naturel d'utiliser celle de réduce, mais, elle est redondante pour notre problème car nous devons savoir a priori quelles sont les variables de symétrie. Dans notre cas cela entraîne, outre une perte de place une difficulté supplémentaire dans le cas de polynômes symétriques à coefficients polynomiaux, car les variables des coefficients peuvent être choisies par le système comme variables principales, et un coût plus élevé du réordonnement. Supposons par exemple avoir obtenu à une étape du produit de deux polynômes symétriques, le polynôme :

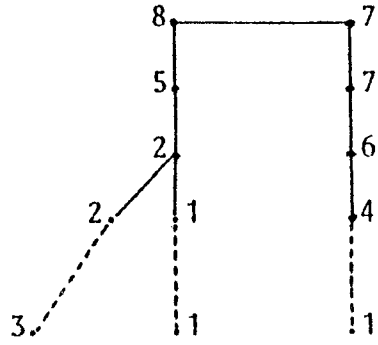
(a) = $X_1^8 X_2^5 X_3^2 X_4 + X_1^8 X_2^2 X_3^5 X_4^2$, qui représente le polynôme s(8 5 2 1) + s(8 2 5 2) ; il faut donc réordonner le 4-uple(8 2 5 2). Ce qui donne en schématisant la représentation récursive de réduce, le passage de l'arbre (a).



Le passage de (a) à (b) nécessite l'exploration de tous les noeuds de (a), à chaque noeud on doit tester l'exposant, et l'échanger avec le précédent s'il lui est inférieur, les variables étant fixes.

Nous avons donc créé notre propre structure récursive qui ne garde que les exposants.

Exemple : le polynôme s(8 5 2 1) + 3s(8 5 2 2) + s(7 7 6 4) sera représenté par l'arbre :



Ce qui donne sous forme de liste :

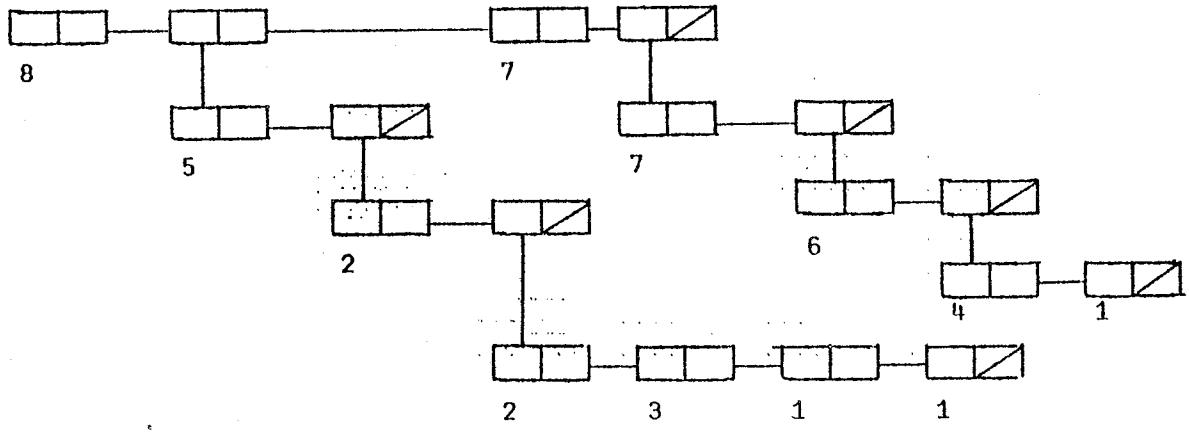
P = (8 (5 (2 (2 3 1 1))) 7 (7 (6 (4 1))))

on peut donc définir un niveau dans cet arbre par le nombre de parenthèses qu'il faut traverser (en omettant les blocs) pour sortir de la liste.

Par exemple : 8 et le premier 7 sont au premier niveau
5 et le deuxième 7 sont au deuxième niveau

Les nombres soulignés étant les coefficients des polynômes monomiaux.

En représentation interne P s'écrit :



L'addition de deux polynômes symétriques ou antisymétrique représentés sous cette forme, peut donc se faire sous forme de tests des éléments du premier niveau, ce qui correspond à la fusion de deux listes ordonnées, on se passe au niveau inférieur que s'il y a coïncidence de deux éléments d'un niveau ce qui donne une procédure de nature récursive, bien adaptée au langage Rlisp.

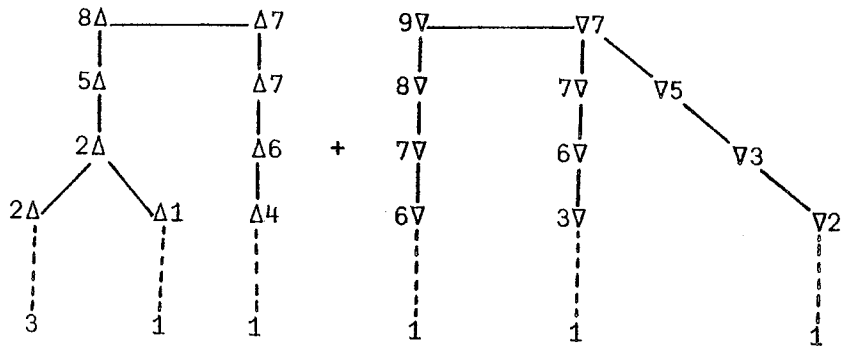
Exemple : ajoutons à P

Q = (9 (8 (7 (6 1))) 8 (6 (4 (3 2))) 7 (7 (6 (3 1)) 5 (3 (2 1))))

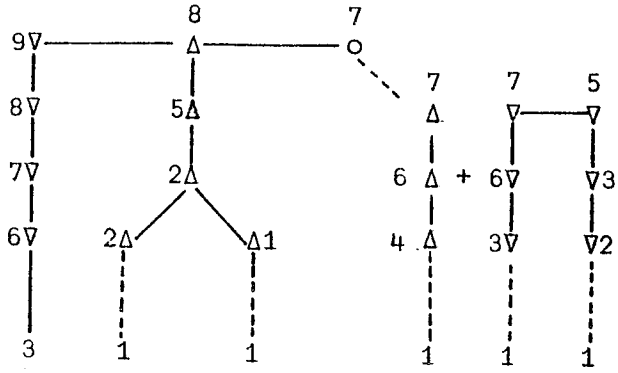
P + Q = R

R = (9 (8 (7 (6 1))) 8 (6 (4 (3 2)) 5 (2 (2 3 11))) 7 (7 (6 (4 1(3 1)) 5 (3 (2 1))))

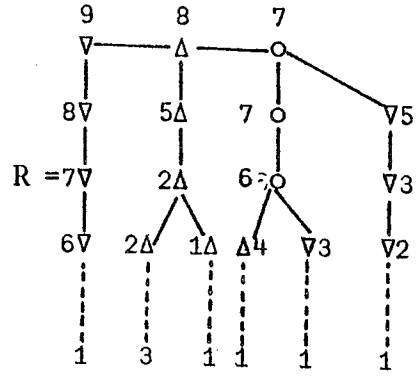
P + Q = R =



Première étape

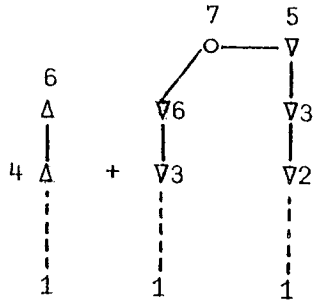


A

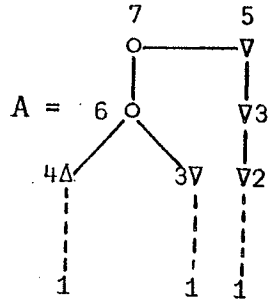


Calcul de A

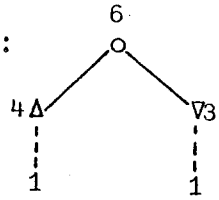
Première étape



B



B donne :



Etudions maintenant brièvement le nombre de cellules nécessaires pour le stockage d'une liste linéaire de n! (n+1)-uples et d'une liste récursive de n!-(n+1)-uples vérifiant l'hypothèse H_n.

H_n chaque noeud de niveau p a n_{p+1} successeurs sur le niveau p+1 : p = 0, 1, ..., n-2.

a) - Liste linéaire -

La liste principale comporte n! cellules, le CAR de chacune d'elle pointe sur une liste de (n+1) nombres, si l'on suppose que chacun des nombres stockés, y compris les coefficients sont des entiers courts, on peut négliger la place qu'ils occupent on obtient donc n! (n+1) cellules = (n+1)! cellules.

b) - Liste récursive avec l'hypothèse H_n -

Au niveau n, chaque noeud est composé de deux cellules. La première pointant sur le $n^{ième}$ terme du n-uple puissance, la seconde sur le coefficient, de même que précédemment négligeons la place qu'ils occupent en mémoire et posons f(n). Le nombre de cellules d'une liste de n! (n+1)-uples, vérifiant H_n. Le premier niveau comporte $2n_1$ cellules, une sur deux pointe sur un atome, l'autre sur une liste à n- niveaux vérifiant H_{n-1} ; donc :

$$f(n) = n_1 \ (2 + f(n-1))$$

posons : $n_1 = n$, $n_2 = n-1$, ..., $n_{n-1} = 2$

nous avons les valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6
f(n)	2	8	30	128	650	3912

remarquons que dès que n≥ la représentation récursive est (dans ce cas) plus économique que la représentation linéaire.

L'obtention d'une borne pour le nombre de tests nécessaires lors de l'addition de deux polynômes représentés récursivement étant trop difficile à obtenir dans le cas général, donnons le nombre de tests et une borne de celui-ci lorsque l'arbre des deux polynômes vérifie la propriété H_n avec en outre $m_{n_i} = n!$.

Notons $g(n_1,\ldots,n_n\ ;\ n)$ ou $g(n)$ le nombre de tests.
Le pire cas au premier niveau est celui ou tous les noeuds sont égaux deux à deux, dans ce cas :

$$g(n) = n_1(1+ g(n-1))$$

Au dernier niveau, nous avons chaque fois deux listes ordonnées de m_{n-1} éléments chacune à fusionner en une seule liste ordonnée, ce qui se fait en $2n_{n-1}$ tests au maximum.

Donc $g(n) = n_1 + n_1 n_2 + \ldots + 2n_1 n_2,\ldots,n_{n-1}$ et on vérifie que :

$$\max g(n) = n.n!$$
$$n_1>0,\ -\ n_{n-1}>0$$
$$\pi_{n_i} = n!$$

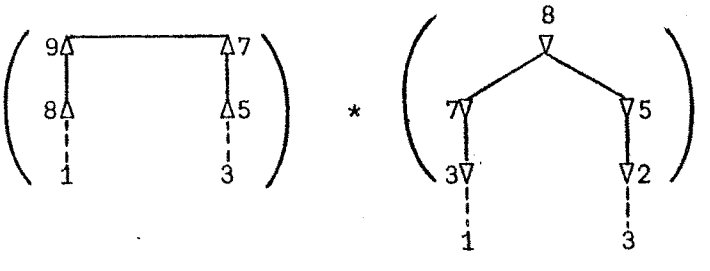
ce max est atteint pour $n_1 = n!$, $n_2 = \ldots = n_{n-1} = 1$ c'est le cas ou les premières composantes de chaque n-uple sont différentes deux à deux ; les représentations linéaires et récursives coïncident.

Remarquons cependant que lors des additions effectuées pendant une multiplication de deux polynômes monomiaux, ce cas ne se présente jamais.

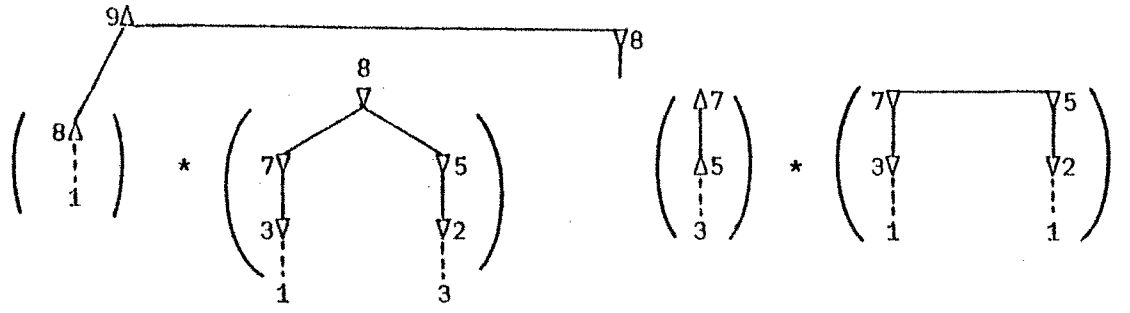
Réalisation de l'opération "étoile" -

Soit à effectuer P Q, et P et Q étant représentés sous forme récursive, notons étm la procédure réalisant l'opération "étoile" et décrivons là si P et Q sont symétriques sur un exemple.

P = (9 (8 1) 7(5 3))
Q = (8 (7 (3 1) 5(2 3))

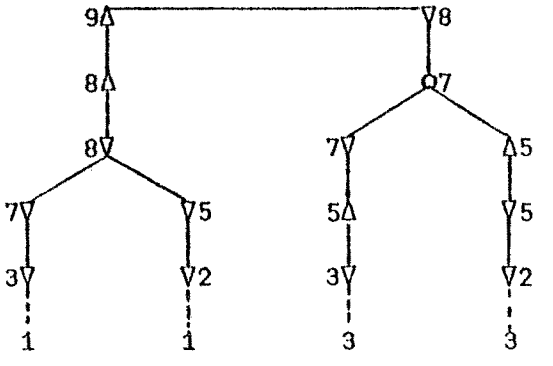


Première étape :



et enfin

P + Q =



Remarquons que le cas antisymétrique est essentiellement le même, au signe près lorsqu'on permutte P et Q, et un test supplémentaire car P = car Q. Par rapport à une opération étoile réalisée sur une structure linéaire nous gagnons de nombreux tests nécessaires aux fusions de multilistes ordonnées. En effet dans le cas d'une structure linéaire posons :

$$P = (X_1, X_2, \ldots, X_m) \qquad X_i > X_{i+1}$$

$$Q = (Y_1, \ldots, Y_s) \qquad y_j > y_{j+1}$$

X_i et Y_i sont des k-uples, (respectivement (n-k)-uples) ordonnées. Notons (X_i, Y_j) le n-uple formé des éléments de X_i et Y_j ordonnés , nous avons :

$$(X_1, Y_1) > (X_1, Y_2) \ldots > (X_1, Y_s)$$

$$(X_2, Y_1) > (X_2, Y_2) \ldots > (X_2, Y_s)$$

$$\vdots$$

$$(X_m, Y_1) > (X_m, Y_2) \ldots > (X_m, Y_s)$$

on obtient donc m listes ordonnées de n-uples qu'il faut fusionner en une seule liste ordonnée de n-uples.

Factorisations "droites" et "gauches" -

Soit un polynôme symétrique, ou antisymétrique P dont tous les polynômes monomiaux sont décomposés suivant I(2.2), on obtient une nouvelle expression P' que l'on peut "factoriser" à droite ou à gauche, dans le but d'éviter des sommes de polynômes lors de la remontée de l'algorithme, ainsi que des multiplications de polynômes à une ou deux variables qui sont les étapes terminales du processus récursif. Cette factorisation est faite par comparaison des termes droits et gauches de chaque expression donnée par I(2.2), avec ceux de la partie déjà factorisée du polynôme. Il y a avantage à tirer parti de la propriété de l'algorithme COMB, de donner la décomposition I(2.2) sous forme ordonnée (voir exemple au paragraphe 1). Cette factorisation n'étant susceptible d'efficacité que si elle est peu coûteuse, ce qui en pratique sera toujours le cas.

Test numériques -

Nous avons programmé deux algorithmes de produit :

- le premier ASS limité au produit d'un polynôme symétrique par un polynôme antisymétrique ; ASS est une transcription de l'algorithme proposé dans [31], pour le cas symétrique par antisymétrique ; en cas de répétitions dans le n-uple exposant du polynôme symétrique, ASS ne développe qu'une fois les mineurs identiques induits par ces répétitions. Les polynômes à multiplier sont donnés sous forme linéaire, le résultat est aussi une liste linéaire.

- le second MSP directement issu de la proposition (1.1) effectue le produit de deux polynômes symétriques ou antisymétriques, en décomposant son premier argument en somme de produits de polynômes symétriques ou antisymétriques en k et (n-k) variables suivant I(2.2), le résultat est ensuite "factorisé" à droite et à gauche.

- MSP demande des arguments stockés sous forme linéaire, et construit le résultat sous forme récursive.

- Choix de k (pour MSP) expérimentalement le meilleur choix est $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

- La vérification du résultat peut se faire soit en évaluant chacun des opérandes et le résultat en utilisant une procédure "évalue" directement programmée d'après I(2.1) ou (et) en comparant les résultats après permutation des opérandes, ainsi qu'en effectuant des produits dont le résultat est connu à l'avance.

- Les algorithmes ASS et MSP sont programmés en utilisant la partie Rlisp de réduce, implanté sur un IBM (360-67), les procédures utilisent les fonctions de multiplication et d'additions de polynômes de réduce.
Taille de l'espace de travail 14000 cellules.
Le temps est exprimé en secondes.
Le choix du paramètre k dans la décomposition donnée par la proposition (1.1) est $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, c'est toujours le meilleur expérimentalement.

Conventions :

tt est le temps total
trm le temps d'exécution du ramasse miettes (estimé)
tp le temps propre à la procédure ; tp = tt - trm
\+ = dépassement de capacité mémoire.

A - comparaison de ASS et MSP sur des polynômes monomiaux tels que le produit comporte n! polynômes monomiaux :

$P_n = 2\Lambda(10n, 10(n-1), \ldots, 10)$

$Q_n = 3s(n, n-1, \ldots, 1)$

A1:

	ASS			MSP		
Exemple	tp	trm	tt	tp	trm	tt
$P_4.Q_4$	0,25	0	0,25	0,3	0	0,3
$P_5.Q_5$	1,1	0,6	1,7	1,1	0,6	1,7
$P_6.Q_6$	+	+	+	5,3	3,6	8,9

A2 :

	MSP		
Exemple	tp	trm	tt
$Q_4.P_4$	0,27	0	0,27
$Q_5.P_5$	0,77	0,0	0,77
$Q_6.P_6$	2,8	1,8	4,6

La comparaison entre A1 et A2 est un bon exemple de non commutativité du produit (en temps).

En règle générale soient à multiplier deux polynômes P et Q de complexité équivalente, si P est de degré total grand par rapport à Q, il est plus rapide de faire msp(Q, P), cela s'explique au vu de la proposition (1.1) car l'opération "étoile" sera peu coûteuse dans ce cas. L'algorithme ASS étant quant à lui très peu sensible à l'ordre des opérandes.

Remarque : A titre indicatif ASS(P_6, Q_6) a été effectué avec un espace de travail de 70 000 cellules (il suffirait probablement de 16 à 17 000 cellules pour exécuter la multiplication avec ASS). Le temps est le suivant :

tp = 12, 1 - trm = 1, 1 - tt = 13, 2

B - Comparaison de ASS et MSP sur trois exemples ou les composantes des partitions définissant les polynômes symétriques comportent des répétitions

ex. n° 1 - 3s(6 6 6 3 3 1 0) x 2A(70 60 50 40 30 20 10)
n° 2 - 3s(7 7 7 7 5 5 3 3) x 2A(80 70 60 50 40 30 20 10)
n° 3 - 3s(1 1 1 1 1 1 0 0 0) x 2A(90 80 70 60 50 40 30 20 10)

ASS et MSP tiennent compte des répétitions pour simplifier le calcul ; dans le cas de MSP le polynôme dont on veut tenir compte des répétitions doit être placé comme premier argument.

	ASS			MSP		
Exemple	tp	trm	tt	tp	trm	tt
n° 1	7,1	5,4	12,5	1,8	0,6	2,4
n° 2	7,6	6,6	14,2	1,9	1,2	3,1
n° 3	1,8	1,2	3,0	0,95	0	0,95

C - Comparaison de ASS et MSP sur des polynômes sommes de polynômes monomiaux

4. (3.s(5 4 3 2) + 3.s(3 2 1 0)) x (2.A(5 4 3 2) + 2.A(4 3 1 0))
5. (3.s(4 3 2 1)) x (2.A(40 30 20 10) + 4.A(20 15 72))
6. P = 3.A(5 4 3 2) + 4.A(6 4 3 1) + 5.A(8 6 3 1) + 6.A(10 7 4 1) + 7.A(12 8 5 2) + 8.A(14 7 4 3)
   Q = 3.s(5 4 3 2) + 4.s(6 4 8 1) + 5.s(8 6 3 1) + 6.s(10 7 4 1) + 7.s(12 8 5 2) + 8.s(14 7 4 3)
   exemple 6 = P x Q
7. P = P + 9.A(9 8 7 6) + 10.A(9 5 4 1) + 12.A(11 6 5 4) + 14.A(13 9 2 1) + 16.A(8 3 2 1)
   Q = Q + 9.s(9 8 7 6) + 10.A(9 5 4 1) + 12.s(11 6 5 4) + 14.s(13 9 2 1) + 16.A(8 3 2 1)
   exemple 7 = P x Q

Les exemples 4, 5, 6, 7 sont à 4 variables.

8. 3.s(5 4 3 2 1) x (2.A(50 40 30 20 10) + 2.A(20 15 10 5 3))
9. (3.s(10 8 6 2 1) + 3.s(5 4 3 2 1))(2.A(50 40 30 20 10) + 2.A(20 15 10 5 3))

Ces deux exemples sont à 5 variables.

10. 3.s(6 5 4 3 2 1) x 2.A(20 10 6 5 4 3)
11. 3.s(6 5 4 3 2 1) x 2.A(30 20 15 8 5 2)
12. 3.s(6 5 4 3 2 1) x 2.A(40 30 20 15 8 2)

Les 3 derniers exemples sont à 6 variables.

	ASS			MSP		
Exemple	tp	trm	tt	tp	trm	tt
4	0,7	0,0	0,7	0,63	0,0	0,63
5	0,46	0,0	0,46	0,4	0,0	0,4
6	6,8	3,6	10,4	5,6	3,0	8,6
7	56,0	21,6	77,6	20,4	15,6	36,0
8	2,7	1,2	3,9	1,2	0,6	1,8
9	5,1	2,4	7,5	2,6	1,2	3,8
10	4,1	2,4	6,5	2,7	1,8	4,5
11	9,2	6,0	15,2	2,6	1,2	3,8
12	12,0	10,0	22,0	2,7	1,8	4,5

C' - Valeurs moyennes pour MSP

Dans chacun des exemple les coefficients sont majorés en valeur absolue par 2^8.

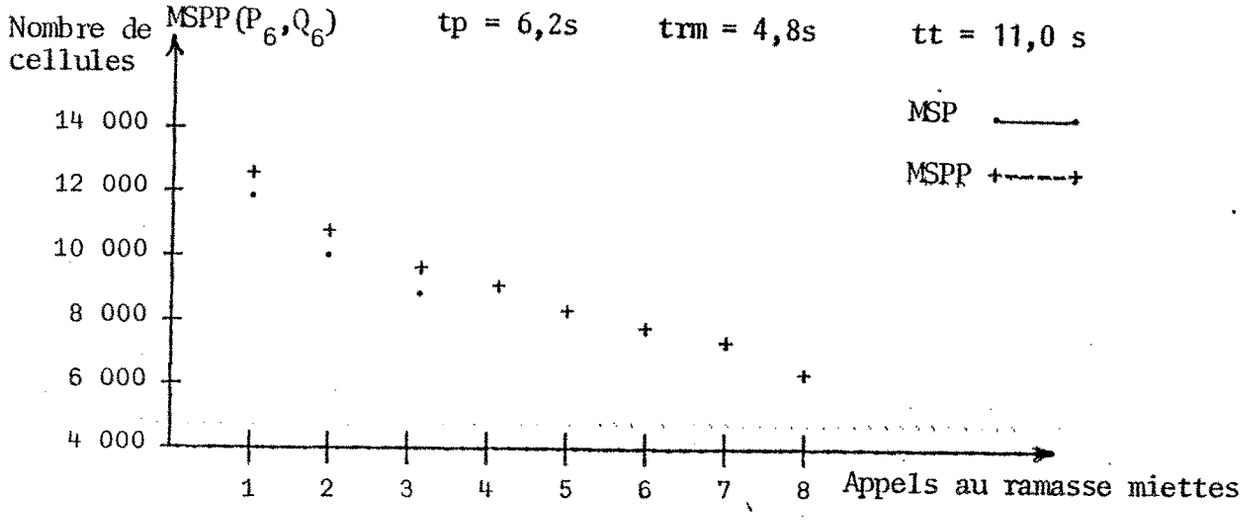
Exemple 1 - polynômes symétriques à 4 variables de degré inférieur à (4 4 4 4) ; les polynômes sont à moitié dense environ 30 à 35 polynômes monomiaux chacun.

Exemple 2 - polynômes symétriques à 5 variables de degré inférieur à (3 3 3 3 3), à moitié dense, environ 25 à 28 polynômes monomiaux chacun.

Exemple 3 - polynômes symétriques à 6 variables de degré inférieur à (3 3 3 3 3 3) environ 25 à 28 polynômes monomiaux chacun.

Exemple	tp	trm	tt
1	43,0	30,0	73,0
2	80,0	70,0	150,0
3	153,0	132,0	285,0

En régle générale il faut développer par rapport au polynôme dans lequel le plus de simplification auront lieu, soit du fait de répétitions d'indices, soit par "factorisation".
Donnons maintenant un exemple illustrant l'intérêt de la structure récursive ; MSPP est la procédure MSP dans laquelle on stocke les résultats de l'opération "étoile" sur les produits à k et (n-k) variables, pour ne les sommer qu'après avoir effectué toutes les opérations "étoiles", alors que dans MSP on somme au fur et à mesure. L'exemple que nous prendrons est $P_6.Q_6$ dont nous savons que le résultat comporte 6! polynômes monomiaux, donc les additions ne diminuent pas le nombre de ceux-ci.



Mentionnons enfin les nombreuses versions de MSP que nous avons essayées, en particulier nous avons testé des versions moins récursives de pmeℓ et etm, ou le nombre d'appel est égal au nombre de variables, ce qui n'est pas le cas dans les versions que nous avons présentées. Le temps propre n'a pas évolué de façon significative, alors que le temps de garbage collection a augmenté ; en particulier nous ne pouvions faire le produit P_6, Q_6 avec les versions peu récursives. Il semblerait qu'avec une version peu récursive, les listes restent actives plus longtemps, en conséquence le ramasse miettes ne peut les récupérer, ce qui peut aboutir à un dépassement de capacité. Dans certains cas d'ailleurs le garbage collector ne réussit pas à rendre à la liste libre des cellules non actives ; il semble que cela provienne du grand nombre de paramètre utilisé par certaines procédures de MSP, ceux-ci ne sont pas récupérés aprés la dernière exécution de ces procédures. On peut y remédier en déclarant et activant une procédure ayant un grand nombre d'arguments, ceux-ci étant mis à NIL (Ø) lors de l'activation. Ces exemples montrent que le temps propre aux algorithmes est parfois important, et en tout état de cause ne permettra sans doute pas de faire des produits de routine de très gros polynômes. Mais néanmoins nous pensons que ces algorithmes représentent un bon outil dont la limitation la plus importante est la place mémoire nécessaire à la construction et au stockage du résultat. La structure récursive bien que meilleure qu'une structure linéaire ne résout pas tous les problèmes. Il convient cependant de remarquer que la taille de l'espace de travail utilisé de l'ordre de 100 k octets est relativement faible.

4 - PASSAGE DE LA BASE MONOMIALE A LA BASE SOMME DE PUISSANCES SEMBLABLES -

Soit $A = Q[Y]$, les $S_{(\lambda)}$, $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$; $\Sigma \lambda_i = k$ sont une base de A_n^k l'espace vectoriel des polynômes symétriques en les indéterminées $X_1,\ldots,X_n$, et de degré total (par rapport à $X_1,\ldots,X_n$) k, à coefficients dans A.

Dans ce paragraphe, nous décrivons un algorithme de passage de la base monomiale à la base somme de puissances semblables (s.p) basé sur la proposition I(3.8).

Tout d'abord il faut calculer les $S_{(\lambda)}$, ce qui sera fait itérativement par des produits de la forme $S_j(\Sigma a_M s(M))$. Pour ces produits on peut évidemment utiliser l'algorithme MSP décrit dans le paragraphe précédent, mais cela présente deux inconvénients :

a) - Cet algorithme bien que tenant compte des particularités des opérandes ne saurait être aussi efficace qu'un algorithme conçu pour ce type de multiplication.

b) - Lors du passage de la base monomiale à la base s.p nous aurons à calculer de nombreux $S_{(\lambda)}$ donc de nombreux produits, or la procédure MSP telle que nous l'avons écrite demande, en entrée, les polynômes à multiplier sous forme linéaire, et donne le résultat sous forme récursive, il faut donc une procédure de passage de la forme récursive à la forme linéaire ; cette procédure bien que très rapide et négligeable devant le coût de MSP dans le cas général, devient cause d'une perte de temps trop importante lorsqu'on l'utilise systèmatiquement avec ce type d'arguments.

Nous avons donc écrit un algorithme de multiplication d'un polynôme symétrique ou antisymétrique sous forme récursive, par un S_k ; sur la base de la proposition I(3.4). La procédure étant écrite de telle façon à tirer parti au maximum de la structure récursive. Cette procédure peut se décrire de la façon suivante donnés P un polynôme sous forme récursive, K un entier

a) - ajouter K à tous les noeuds de niveau j de P, j=1,...,n ce qui donne l'arbre P_j.

b) - Réordonner tous les arbres résultants, avec la convention : si un noeud N_j, de niveau j, modifié dans l'étape a) est égal à un noeud N_{j-1} de niveau j-1, si le polynôme est symétrique, multiplier l'arbre dont le noeud de niveau j est N_j par C_{j+1} ; (ce qui suppose de stocker lors de la descente, les nombres C_j et de pouvoir "marquer" les noeuds modifiés), si le polynôme est antisymétrique, enlever l'arbre passant par N_j.

c) - Additionner tous les arbres résultants.

En pratique il est naturel de ne pas dissocier les trois étapes, on commence par les noeuds de niveau n, et on effectue simultanément b) et c) avec la remontée dans l'arbre et l'opération a). On y gagne, en tests nécessaires

pour l'étape c) car il est moins coûteux d'ajouter deux arbres ayant n-j niveaux, que deux arbres dont les j premiers niveaux sont identiques, et en place car les arbres sont plus vite sous forme réduite ce qui induit aussi un gain pour l'étape b).

- (A) - Notons que pour des raisons d'efficacité, il faut effectuer le produit $S'_{(\lambda)}$, en commençant par S_n, puis S_{n-1},..., (on évite des remontées dans l'arbre).
On pourrait aussi envisager de calculer $S_n^{\alpha_n}$ par la formule monomiale cela n'a pas été fait.

Donnons simplement quelques résultats sur le calcul des $S_{(\lambda)}$ qui suffisent à donner une idée du temps nécessaire au changement de base, en effet nous savons que le nombre de $S_{(\lambda)}$ à calculer pour exprimer dans cette base un polynôme symétrique homogène de d°k est égal, en général, au nombre de n-partitions de k supérieures à la plus petite partition présente dans le polynôme, à cet égard on remarquera que pour la transformation des polynômes symétriques dans la base des polynômes symétriques élémentaires la situation est inversée.

A - $(\alpha) = (0\ 0\ 5)$ $(\lambda) = 3^5$
B - $(\alpha) = (2\ 0\ 2)$ $(\lambda) = (3\ 3\ 1\ 1)$
C - $(\alpha) = (1\ 3\ 2\ 0\ 1)$ $(\lambda) = (5\ 3^2\ 2^3\ 1)$

A				B				C			
ex	tp.	trm	tt	ex	tp	trm	tr	ex	tp	trm	tt
n=4	0,160	0	0,16	n=4	0,11	0	0,11	n=4	0,9	0,6	1,5
n=5	0,180	0	0,18	n=5	0,12	0	0,12	n=5	1,2	0,6	1,8
n=6	0,21	0	0,21	n=6	0,14	0	0,14	n=6	1,4	0,6	2,0
n=7	0,23	0	0,23	n=7	0,16	0	0,16	n=7	1,6	0,6	2,2
n=8	0,26	0	0,26	n=8	0,18	0	0,18	n=8	1,8	1,2	3,0
n=9	0,29	0	0,29	n=9	0,2	0	0,2	n=9	2,0	1,2	3,2

temps en secondes - espace de travail 9 000 cellules.

III - POLYNOMES DE SCHUR

Les polynômes de Schur, définis par ce dernier ont été très largement étudiés par D.E Littlewood et F.D. Murnaghan dans le cadre de la théorie des représentations du groupe symétrique. Paradoxalement ce n'est que par la relation entre celles-ci et les représentations du groupe linéaire qu'ils acquièrent leur caractère de polynôme symétrique. Le but de ce chapitre est de les présenter sous ce point de vue sans utiliser le formalisme de la théorie des groupes. Nous montrons que la plupart de leurs propriétés peuvent s'obtenir de façon simple en termes de polynômes symétriques. Cependant cette approche ne nous permet ni de démontrer que leurs coefficients s'expriment en termes de tableaux d'Young, ni de montrer complètement leur expression en termes des caractères du groupe symétrique ; ces deux démonstrations ne pouvant être faites qu'en utilisant la dite théorie, ou bien pour le premier, la combinatoire. Nous les admettrons donc, bien que nous démontrions d'une manière élémentaire que les coefficients des polynômes de Schur dans la base somme de puissances semblables forment une matrice orthogonale. Nous décrivons d'abord les propriétés de leurs coefficients et la manière de les calculer, puis après avoir donné leur expression en termes des a_i, h_i, et s_i nous montrons qu'ils forment une base de Λ_n^k, l'espace vectoriel des polynômes symétriques de degré k, et en déduisons que les $h_{(\lambda)}$ forment une base du même espace. Nous établirons dans le troisième paragraphe d'autres de leurs propriétés qui nous conduiront au calcul des caractères du groupe symétrique, puis aux théorèmes de multiplication et de décomposition qui sont étroitements reliés, après avoir étudié dans le quatrième paragraphe une fonction génératrice des ces polynômes et ses conséquences.

1 - DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES -

Soit (λ) une n-partition d'un entier k.

Définition 1 - Le polynôme de Schur associé à la n-partition (λ), en les variables $X_1, \ldots, X_n$ est le polynôme :

$$\{X_1, \ldots, X_n, \lambda\} = \frac{\det \begin{vmatrix} X_1^{L_1}, \ldots, X_1^{L_n} \\ X_2^{L_1}, \ldots, X_2^{L_n} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ X_n^{L_1}, \ldots, X_n^{L_n} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} X_1^{n-1}, \ldots, X_1, 1 \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ X_n^{n-1}, \ldots, X_n, 1 \end{vmatrix}} \qquad (1.1)$$

ou $L_i = \lambda_i + n-i \qquad i=1,\ldots,n$

On vérifie que c'est un polynôme en remarquant que le dénominateur est le déterminant de Vandermonde $\prod_{i<j} (X_i - X_j)$ et le numérateur est divisible par $(X_i - X_j)$.

Avec les notations du chapitre I $\{X_1, \ldots, X_n, \lambda\}$ s'écrit :

$$\{X_1, \ldots, X_n, \lambda\} = \frac{A(L_1, \ldots, L_n)}{A(n-1, \ldots, 0)}$$

ce polynôme est symétrique, homogène, de degré k ; cherchons donc sa décomposition dans la base monomiale,pour cela remarquons que le polynôme de plus haut degré pour l'ordre lexicographique figurant dans $\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\}$ est $s(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, nous pouvons donc entamer le processus de division de la façon suivante :

$$A(L_1, \ldots, L_n) = A(n-1, \ldots, 0)\ s\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - R$$

$$\text{ou } R = \sum_{(\mu)<(\lambda)} K_\lambda^\mu\ A(\mu_1+n-1, \ldots, \mu_n) \qquad (1.2)$$

cela d'après I (2.7)

Rappelons que $(\lambda) \geq (\mu) \iff \forall k = 1, \ldots, n \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{k} \mu_i$

(les n-partitions μ figurant dans R vérifient évidemment $|\mu| = k$)

Le processus de division donne donc à la première étape :

$$\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\} = s(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - \sum_{(\mu)<(\lambda)} K_\lambda^\mu \{X_1, \ldots, X_n ; \mu\} \quad (1.3)$$

ce qui assure que la division va se terminer et que :

$$\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\} = \sum_{(\mu)\leq(\lambda)} N_\mu^\lambda \, s(\mu) \quad (1.4)$$

Exemple :

$n = 4$, $(\lambda) = (5\ 3\ 1\ 0)$

$$\{X_1, \ldots, X_4 ; \lambda\} = \frac{A(8\ 5\ 2\ 0)}{A(3\ 2\ 1\ 0)}$$

$$A(3\ 2\ 1\ 0)\ .\ s(5\ 3\ 1\ 0) = A(8\ 5\ 2\ 0) - A(8\ 4\ 3\ 0) - A(8\ 4\ 2\ 1) - A(7\ 6\ 2\ 0) + 2A(7\ 4\ 3\ 1) - A(6\ 5\ 4\ 0) - A(6\ 4\ 3\ 2)$$

donc $\{X_1, X_2, X_3, X_4 ; \lambda\} = s(5\ 3\ 1\ 0) + (A(8\ 4\ 3\ 0) + A(8\ 4\ 2\ 1) + A(7\ 6\ 2\ 0) - 2A(7\ 4\ 3\ 1) + A(6\ 5\ 4\ 0) + A(6\ 4\ 3\ 2))/A(3\ 2\ 1\ 0)$

et finalement

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4 ; \lambda\} = s(5\ 3\ 1\ 0) + s(5\ 2\ 2\ 0) + 2s(5\ 2\ 1\ 1) + s(4\ 4\ 1\ 0) + 2s(4\ 3\ 2\ 0) + 4s(4\ 3\ 1\ 1) + 5s(4\ 2\ 2\ 1) + 3s(3\ 3\ 3\ 0) + 7s(3\ 3\ 2\ 1) + 9s(3\ 2\ 2\ 2)$$

On voit immédiatement que la méthode de division de $A(L_1, \ldots, L_n)$ par $A(n-1, \ldots, 0)$ qui aboutit à (1.4) peut se généraliser au cas suivant :

soit (μ) une n-partition de q telle que $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mu_i \leq \lambda_i$ posons $b_i = \mu_i + n - i$, de la même façon que précédemment on trouve :

$$\frac{\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\}}{\{X_1, \ldots, X_n ; \mu\}} = s(\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_n - \mu_n) - \sum_{(\nu)<(\lambda)} M_{\lambda,\mu}^\nu \frac{\{X_1, \ldots, X_n ; \nu\}}{\{X_1, \ldots, X_n ; \mu\}} \quad (1.5)$$

Il est aisé de vérifier que les n-partitions (ν) intervenant dans la somme vérifient encore $\nu_i \geq \mu_i \quad i=1,\ldots,n$ on peut donc continuer la division et arriver à :

$$\frac{\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\}}{\{X_1, \ldots, X_n ; \mu\}} = \sum_{(\nu)<(\lambda-\mu)} W_{\nu}^{\lambda,\mu}\, s(\nu) \qquad (1.6)$$

Remarquons que l'on peut exprimer (1.5) de la façon suivante :

$$s(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)\ \{X_1, \ldots, X_n ; \mu\} = \sum_{(\nu)\leq(\theta+\mu)} M_{\theta,\mu}^{\nu}\ \{X_1, \ldots, X_n ; \nu\}$$

avec $\theta = (\lambda-\mu)$ (1.7)

Définition 2 - Soit (λ) une n-partition, $D_{(\lambda)}$ le diagramme qui lui est associé ; un tableau standard d'Young est un tableau obtenu en mettant un entier à chaque noeud du diagramme $D_{(\lambda)}$ de telle façon que :

1 - les éléments soient non décroissants en ligne,

2 - strictement croissants en colonnes.

Exemples :

si $(\lambda) = (5\ 3\ 1)$

$D_{(\lambda)} =$ . . . . .
. . .
.

Le tableau $T = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & & \\ 2 & & & & \end{matrix}$ n'est pas un tableau standard d'Young

mais $T_1 = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & & \\ 5 & & & & \end{matrix}$, $T_2 = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & & \\ 4 & & & & \end{matrix}$ sont des tableaux

standards d'Young.

Un des intérêts de la notion de tableau standard d'Young tient à la proposition suivante :

Théorème (1.1) -

Le coefficient de $s(\mu)$ dans $\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\}$ est le nombre de tableaux standards d'Young que l'on peut construire sur le diagramme $D_{(\lambda)}$ avec μ_1 1, μ_2 2, ..., μ_n n.

Exemple : $(\lambda) = (2\ 1\ 0)$

$$\{X_1, X_2, X_3 ; \lambda\} = s(2\ 1\ 0) + 2s(1\ 1\ 1)$$

et on vérifie que l'on peut construire, un seul tableau standard à partir de D_λ et 2 1, 1 2

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix}$$

deux à partir de D_λ et 1 1, 1 2, 1 3

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}$$

Il existe deux démonstrations de ce théorème à ma connaissance, la démonstration originale de D.E. Littlewood [32] utilisant la théorie des groupes, et une démonstration combinatoire de Stanley [51], utilisant une construction de Schensted Robinson généralisée par Knuth [29].
Nous allons utiliser ce théorème afin de préciser la décomposition (1.4) soit $d \geq 0$ et e_d l'application de l'ensemble des n-partitions de k, de premier élément plus grand que d, dans l'ensemble des n-partitions de k-d telle que :

$$e_d(\lambda) = \begin{cases} (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n - d) & \text{si } \lambda_n \geq d \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1} - d + \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n, 0) & \text{si } \lambda_n < d \text{ et } \lambda_k < \lambda_{k-1} \end{cases}$$

Lemme (1.3)

Soient (λ) et (ν) deux n-partitions de k telles que $(\nu) \leq (\lambda)$ alors

$$e_{\nu_n}(\lambda) \geq e_{\nu_n}(\nu) \qquad (1.8)$$

Démonstration -

Posons $(\nu') = e_{\nu_n}(\nu) = (\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, 0)$

$(\lambda') = e_{\nu_n}(\lambda)$

si k ; $\delta = \lambda_{k-1} - \nu_n \geq 0$ et $\lambda_k - \nu_n < 0$ nous avons

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda'_j = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j & \text{si } \ell < k-1 \\ \sum_{j=1}^{k-2} \lambda_j + \sum_{j=k}^{\ell+1} \lambda_j + \delta & \text{si } \ell \geq k-1 \text{ (en posant } \lambda_{n+i} = 0) \end{cases}$$

si k-1 < ℓ par hypothèse

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda'_j \geq \sum_{j=1}^{\ell} \nu_j$$

si k-1 ≥ ℓ, $\sum_{j=1}^{k-2} \lambda_j + \sum_{j=k}^{\ell+1} \lambda_j + \delta = \sum_{j=1}^{\ell+1} \lambda_j - \nu_n$

or par hypothèse :

$$\sum_{j=1}^{\ell+1} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{\ell+1} \nu_j \geq \sum_{j=1}^{\ell} \nu_j + \nu_n$$

ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^{\ell+1} \lambda_j - \nu_n \geq \sum_{j=1}^{\ell} \nu_j$$

Remarque - Le résultat précédent est encore vrai si l'on remplace ν_n par ν_j $\forall j = 1, \ldots, n$.

Théorème (1.4) - Soient (λ) et (μ) deux n-partitions de k, telles que $(\mu) \leq (\lambda)$

Alors on peut construire à partir de D_λ un tableau standard d'Young ayant $\mu_1 1$, $\mu_2 2$, ..., $\mu_n n$.

Démonstration -

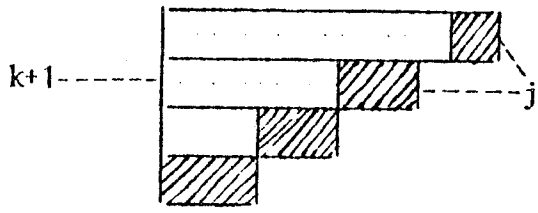
Le lemme (1.3) nous assure qu'il est possible de construire la suite de n-partitions $(\lambda^0) = (\lambda)$

$$(\lambda^{n-j+1}) = e_{\mu_j}\,(e_{\mu_{j+1}}(\ldots\, e_{\mu_n}(\lambda)\ldots) \qquad j=1,\ldots,n$$

plaçons donc les μ_j j dans :

$$D(\lambda^{n-j} - \lambda^{n-j+1})$$

Les nombres j sont donc placés après les j+k dans le tableau.
Il suffit de remarquer qu'à droite d'un bloc de j il ne peut y avoir que des j+k, et qu'en dessous d'un j on ne peut trouver que des j+k, k>0 ; car le mode de remplissage du tableau se fait de bas en haut et de droite à gauche, on ne monte sur la ligne k-1 que si le nombre de j disponible est supérieur à λ_{k+1},



Ce théorème a été démontré de manière indépendante par R. Merris [39] en utilisant le théorème de Littlewood - Ridcharson de multiplication de polynômes de Schur [32]. On pourra aussi consulter [17] et [18] pour une démonstration de la positivité des coefficients de $\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\}$

Corollaire (1.5) - Une CNS pour que le coefficient de $S(\mu)$ dans $\{\lambda\}$ soit non nul est que $(\mu) \leq (\lambda)$.

Démonstration - D'après (1.3) si (μ) n'est pas inférieur à (λ) pour l'ordre "sommes partielles" le coefficient de $S(\mu)$ dans $\{X_1,\ldots, X_n ; \lambda\}$ est nul ; si $(\mu) \leq (\lambda)$ le coefficient de $s(\mu)$ est le nombre de tableaux standards d'Young construits à partir de $D_{(\lambda)}$ et (μ) (théorème (1.1)), or le théorème (1.4) nous assure que l'on peut en construire au moins un.

Proposition 1.6 - (dimension du sous-espace invariant par D_λ)

$$\{1, \ldots, 1 ; \lambda\} = \frac{\prod_{i<j} (L_i - L_j)}{\prod_{i>j} (i - j)}$$

Démonstration [4]

Posons $X_i = e^{(n-i)t}$, le numérateur est alors le produit des différences $e^{Lit} - e^{Ljt}$, le numérateur des différences $e^{jt} - e^{it}$; calculons la limite $e^{at} - e^{bt}$ lorsque $t \to 0$ pour cela développons en série de t, $e^{at} - e^{bt} = (a-b)t+O(t^2)$ donc le numérateur $\simeq t^p \prod_{i<j} (L_i - L_j)$ et le dénominateur $\simeq t^p \prod_{i<j} (i - j)$

Les identités (1.2) et (1.3) suggèrent de calculer $\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\}$ en utilisant les algorithmes de multiplication de polynômes symétriques et antisymétriques, c'est ce qui a été fait dans [23], la difficulté viendra alors du grand nombre de termes à manipuler si n et $|\lambda|$ sont grands. On trouvera dans [50], une méthode de calcul des coefficients de $\{X_1, \ldots, X_n ; \lambda\}$ qui est susceptible d'être plus efficace.

2 - D'AUTRES EXPRESSIONS DES POLYNOMES DE SCHUR -

Dans ce paragraphe nous allons donner l'expression des polynômes de Schur dans les bases classiques des polynômes symétriques ; tout d'abord énonçons deux résultats préliminaires.

Lemme (2.1) - $h_i(X_1, \ldots, X_n)$ étant définit par I(4.2), nous avons :

$$(2.1) \quad h_j(X_1,\ldots,X_{n+1}) = (h_{j+1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+1}) - h_{j+1}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n))/(x_n - x_{n+1})$$

$$(2.2) \quad h_j(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=0} h_{m-k}(x_{n-k},\ldots,x_n) h_{j-m+k}(x_1,\ldots,x_{n-k}) \qquad \forall m.$$

Démonstration - Elles se font sur la fonction génératrice des h_i montrons seulement (2.1) ; pour (2.2) on pourra consulter [42], [43].

$$(x_n - x_{n+1}) \times \frac{t}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i t)} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n+1}(1-x_j t)} - \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{n}(1-x_j t)}$$

en développant en série cette identité on trouve :

$$(x_n - x_{n+1}) \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x_1,\ldots,x_n)t^{j+1} \sum_{j=0}^{\infty} (h_j(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n+1}) - h_j(x_1,\ldots,x_n))t^j$$

et on obtient (2.1) en identifiant.

Théorème (2.2) -

Soient A une matrice d'ordre n, A^{-1} son inverse désignons par $A\begin{bmatrix}\ell_1,\ldots,\ell_p\\ j_1,\ldots,j_p\end{bmatrix}$ le mineur construit sur les lignes ℓ_i et les colonnes j_k, si $j'_1,\ldots,j'_{n-p}$ sont les indices des (n-k) lignes négligées et $\ell'_1,\ldots,\ell'_{n-p}$ celles des (n-p) colonnes négligées.

Alors

$$\det A^{-1}\begin{bmatrix}j'_1,\ldots,j'_{n-p}\\ \ell'_1,\ldots,\ell'_{n-p}\end{bmatrix} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n-p}(j'_i+\ell'_i)} \frac{\det A\begin{bmatrix}\ell_1,\ldots,\ell_p\\ j_1,\ldots,j_p\end{bmatrix}}{\det A} \qquad (2.3)$$

Démonstration - [24] page 21.

Donnons maintenant trois théorèmes classiques sur les polynômes de Schur.

Théorème (2.3) Jacobi [32], [44], [42].

$$\{x_1,\ldots,x_n\ ;\ \lambda\} = \det \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & \ldots, & h_{\lambda_1+p-1} \\ \vdots & & \\ h_{\lambda_p-p+1} & \ldots, & h_{\lambda_p} \end{vmatrix} \qquad (2.4)$$

où $p = \ell(\lambda)$ (ie $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_p, 0^{n-p})$) et avec la convention $h_i = 0$ si $i < 0$; les h_i étant définis par I(1.2).

Démonstration -

Calculons $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$, pour cela retranchons dans le déterminant du numérateur la dernière colonne aux précédentes en position (i,j) on a :

$$x_j^{L_i} - x_n^{L_i} = h_{L_i}(x_J) - h_{L_i}(x_n) = h_{L_i-1}(x_J,x_n)\cdot(x_j - x_n) \text{ d'après (2.1)}$$

Après division des lignes 1 à n-1 par (x_j-x_n) (2.1) s'écrit :

$$\det \begin{vmatrix} h_{L_1-1}(x_1,x_n),\ldots,h_{L_1-1}(x_{n-1},x_n),h_{L_1}(x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{L_n-1}(x_1,x_n),\ldots,h_{L_n-1}(x_{n-1},x_n),h_{L_n}(x_n) \end{vmatrix} \Big/ \prod_{\substack{j<k \\ k\neq n}} (x_j-x_k)$$

retranchons maintenant la $(n-1)^{\text{ème}}$ colonne aux précédentes, appliquons (2.1) et recommençons ce processus jusqu'à retrancher la colonne 2. (2.1) devient :

$$\det \begin{vmatrix} h_{L_1-n+1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_{L_1-1}(x_{n-1},x_n),\ h_{L_1}(x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{L_n-n+1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_{L_n-1}(x_{n-1},x_n),h_{L_n}(x_n) \end{vmatrix} = \det A$$

posons $B = (h_{j-i}(x_1,\ldots,x_i))_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$

B est triangulaire supérieure à éléments diagonaux 1. Il est alors facile de vérifier en utilisant (2.2) que :

$$AB = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1}(x_1-x_n),\ldots\ldots\ldots,\ h_{\lambda_1+n-1}(x_1,..,x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{\lambda_n-n+1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_{\lambda_n}(x_1,\ldots,x_n) \end{vmatrix}$$

et det AB = det A, en outre si $\lambda_p \neq 0$, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. La ligne p+J est composée de zéros en positions 1 à k+j-1, et 1 en (k+j, k+J) ce qui achève la démonstration du théorème.

Théorème (2.4) - [5] [7]

Si a_i est défini par I(3), et (μ) est la partition conjuguée de (λ)
Alors

$$\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = \begin{vmatrix} a_{\mu_1} & a_{\mu_1+1}, \ \ldots, & a_{\mu_1+k-1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{\mu_k-k+1}, & \ldots\ldots, & a_{\mu_k} \end{vmatrix} \qquad (2.5)$$

avec la convention $a_i = 0$ si $i > n$ ou $i < 0$.

Démonstration -

D'après le théorème (2.1) $x_{\ },\ldots,x_n$; s'exprime comme un déterminant en h_j, ce déterminant étant un mineur d'ordre p de $H_{\lambda 1+p}$, nous allons appliquer le théorème (1.1).

Le mineur $\begin{vmatrix} h_{\lambda_t} & & h_{\lambda_1+p-1} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ h_{\lambda_p-p+1},\ldots, & & h_{\lambda_p} \end{vmatrix}$ est obtenu en prenant

les colonnes $\lambda+1$, $\lambda_1+2,\ldots,\lambda_1+p$, et les lignes 1, $(\lambda_1-\lambda_2+2)$, $(\lambda_1-\lambda_3+3)$ $\ldots(\lambda_1-\lambda_p+p)$ de H_{λ_1+p} donc :

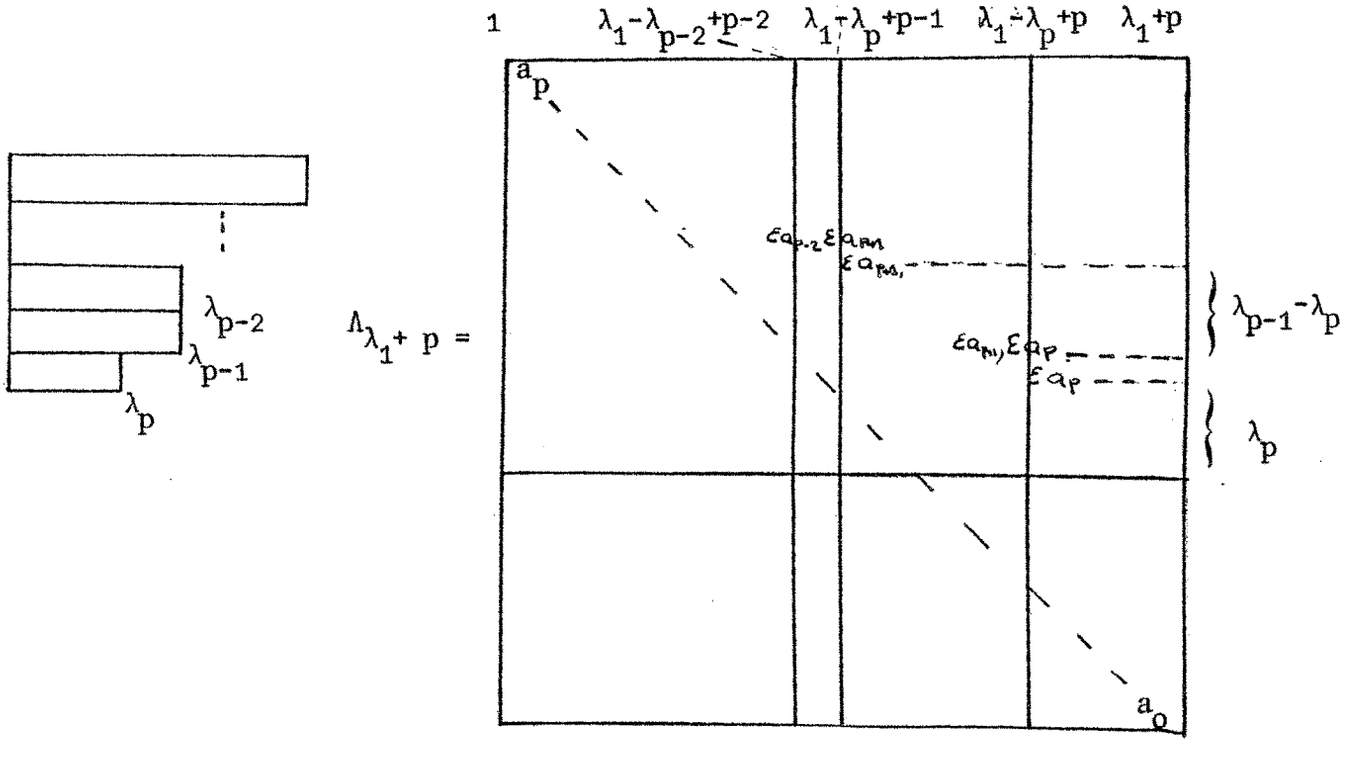
$$\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = \varepsilon \text{ dét } \Lambda_{\lambda_1+p} \begin{pmatrix} 1,2,\ldots,\lambda \\ a_1\ ,\ldots,a_p \end{pmatrix} \times \frac{1}{\det H_{\lambda_1+p}}$$

D'après le théorème (1.1) avec Λ_{λ_1+p} et H_{λ_1+p} définis par I(4.3).

où $a_1,\ldots,a_p$ sont les colonnes complémentaires de 1, (λ_1,λ_2+2) ... $(\lambda_1-\lambda_p+p)$ de Λ_{λ_1+p} où :

$$\varepsilon = (-1)^{\sum_{L=1}^{1} L_2'+J_L'} \qquad \text{et} \qquad \det H_{\lambda_1+p} = 1$$

puisque $\lambda_p>0$. La dernière colonne est prise, le mineur de Λ_{λ_1+p} étant d'ordre λ_1. L'indice de l'élément (λ_1,λ_1) est p. En comptant à partir de la dernière colonne du mineur de Λ_{λ_1+p}, la première colonne enlevée est la colonne λ_p+1 donc les λ_p derniers éléments diagonaux sont $(-1)^p a_p$.



la seconde colonne omise est la $\lambda_{p-1}+2^{\text{ème}}$, donc les éléments diagonaux suivants sont $(-1)^{p_1} a_{p_1}$ où p_1 = p moins le nombre de λ_j : $\lambda_j = \lambda_p$, en nombre $\lambda_{J_0}-\lambda_p$ où J_0 est l'indice minimum ; $\lambda_{J_0} > \lambda_p$, en continuant on voit que les éléments diagonaux du mineur constituent la partition (μ) conjuguée de (λ).

- le signe - $\varepsilon = (-1)^{n_0+n_1}$

où n_0 est le nombre de lignes de numéro impair du mineur, n_1 le nombre de colonnes de numéro impair du mineur.

Enlevons maintenant les signes moins du mineur, 2 cas se présentent :

a) - l'élément (1.1) du mineur a un signe + (ie $=a_{2k}$) on multiplie les colonnes puis les lignes dont le premier indice est impair, par -1, il y a λ_1-n_1 de ces colonnes et λ_1-n_0 de ces lignes, le signe est donc $(-1)^{n_0+\lambda_1-n_0+\lambda_1-n_1} = 1$.

b) - l'élément (1.1) du mineur a un indice impair, on multiplie les lignes dont l'indice est impair par -1, et les colonnes dont l'indice est pair par -1, il y a n_0 de ces lignes et n de ces colonnes.
Le signe est donc :

$$(-1)^{n_0+n_1+n_0+n_1} = +1.$$

Théorème (2.5) -

Soit (λ) une n-partitions de k.

Alors

$$\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = \frac{1}{k!} \sum_{(\alpha)} c_{(\alpha)}\ \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\ S_{(\alpha)} \qquad (2.6)$$

La somme est prise sur tous les $(\alpha) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ tels que $\alpha_i \in N$ et $\sum_{i=1}^{k} i\alpha_i = k$.

$$c_{(\alpha)} = \frac{k!}{\alpha_1!,\ldots,\alpha_k!\ 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots k^{\alpha_k}} \qquad (2.7)$$

Les $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ sont appelés caractères du groupe symétrique ils vérifient les identités :

$$\sum_{(\alpha)} c_{(\alpha)}\ \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\ \chi^{(\mu)}_{(\alpha)} = k!\ \delta_{(\lambda,\mu)}$$

$$\sum_{(\nu)} \chi^{(\nu)}_{(\alpha)}\ \chi^{(\nu)}_{(\beta)} = \frac{k!}{c_{(\alpha)}}\ \delta_{(\alpha,\beta)} \qquad (2.8)$$

avec $\delta_{(\alpha,\beta)} = 1$ si $(\alpha) = (\beta)$ et 0 sinon

* rappel $S_{(\alpha)} = S_1^{\alpha} ,\ldots,S_k^{\alpha_k}$

Démonstration - voir [41, [32], [43].

L'identité (2.8) donne la décomposition de $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$ sur la base $S_{(\mu)}$ si $n \leq k$, si $n > k$ les $S_{(\alpha)}$ de (2.8) ne sont pas indépendants ; dans ce dernier cas il n'existe pas de décomposition explicite de $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$ sur la base des $S_{(\mu)}$ de degré correspondant.

L'identité (2.8) est équivalente à l'identité matricielle

$$X^T X = D \qquad (2.9)$$

où D est la matrice diagonale $k!/c_{(\alpha)}$

X la matrice $(\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)})$ $(\lambda) \in \Lambda_n^n$, $(\alpha) \in \Lambda_n^n$

Dans le paragraphe 4 nous verrons comment l'identité (2.7) peut être utilisée pour calculer les $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$

Remarque -

Soit $F = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x^i$ $h_0 = 1$, les théorèmes (2.3), (2.4) et (2.5) permettent de définir le polynôme de Schur $\{\lambda\}$ en les indéterminées h_i, (th.(2.3)) a_i, (th. 2.4)) ou S_i (th.(2.5)). $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$ sera obtenu lorsque

$$F = \frac{1}{\prod_{i=1}^{h} (1-X_i X)}$$

Théorème (2.6) - Littlewood [32]

Soit (λ) une partition de longueur $p > n$

Alors $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\} \equiv 0$

Démonstration -

Montrons le dans le cas ou $p = n+1$;

Considérons le polynôme $\{X_1,\ldots,X_{n+1} ; \lambda\} = \det \begin{vmatrix} L_1 & & L_{n+1} \\ X_1, \ldots, & & X_1 \\ & & \\ L_1 & & L_{n+1} \\ X_{n+1}, & \ldots, & X_{n+1} \end{vmatrix} / \prod_{i<j} (X_i - X_j)$

et posons $X_{n+1} = 0$ si les X_i $(i<n)$ ne sont pas nuls et différents le dénominateur ne s'annule pas, et il est facile de vérifier que $\{X_1,\ldots,X_n, 0 ; \lambda\} \equiv \{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$

donc $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\} \equiv 0$ si les $X_i \neq 0$, et $X_i \neq X_j$ $J,i=1,\ldots,n$ d'où

$\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\} \equiv 0$

Remarques -

1) - Jusqu'à présent nous avons défini le polynôme de Schur $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$ dans le cas ou (λ) est une n-partition de k, le théorème (2.6) permet de définir $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$ dans le cas ou (λ) est une partition quelconque en convenant de poser $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$, si $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ $k < n$ en outre on peut s'affranchir de la condition $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ en étendant la définition à un n-uple (μ) par :

$$\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\} = \begin{cases} -\{X_1,\ldots,X_n ; \mu_1,\ldots,\mu_i-1,\mu_{i+1}+1,\mu_{i+2},\ldots,\mu_n\} \text{ si } \mu_{i+} > \mu_i \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.10) \\ 0 \quad \text{si} \quad \mu_n < 0 \end{cases}$$

2) $h_i = \{i\}$, $\quad a_i = \{1^i\}$

Donnons maintenant dans le dernier théorème de ce paragraphe une autre expression de $\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$ due à D.E. Littlewood. Auparavant une définition.

Définition 2 -

Le rang d'une partition (λ) est le plus grand entier i tel que $\lambda_i \geq i$.

La notation de Frobenius d'une partition (λ) est :

$$\begin{pmatrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_p \end{pmatrix} \qquad \text{ou p est le rang de } (\lambda)$$

et $a_j = \lambda_i - i$, $b_j = \mu_j - j$ ou $(\mu) = (\tilde{\lambda})$

Exemples : $(\lambda) = (531)$ est de rang 2, en notation de Frobenius (λ) s'écrit $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$(\lambda) = (533)$ est de rang 3 et s'écrit $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(\lambda) = (5\ 1^3)$ est de rang 1 et s'écrit $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Théorème (2.7) -

si (λ) est une partition de rang p, s'écrivant $(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_p \end{pmatrix}$ en notation de Frobenius.

Alors :

$$\{\lambda\} = \det \begin{vmatrix} \{a_1+1,\ 1^{b_1}\} & \ldots & \{a_1+1,\ 1^{b_p}\} \\ \vdots & & \vdots \\ \{a_p+1,1^{b_1}\} & \ldots & \{a_p+1,\ 1^{b_p}\} \end{vmatrix} \qquad (2.12)$$

Démonstration - Newell [46]

Si $\ell(\lambda) = n$ soit $n \geq r$ et $X_1 \ldots X_n$ n indéterminées

$\{\lambda\} = \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = A(L_1 \ldots L_n)/\Delta$ où $L_i = \lambda_i + n - i$

$$\{\lambda\} = \det \begin{vmatrix} X_1^{L_1} & \ldots & X_n^{L_1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{L_n} & \ldots & X_n^{L_n} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} X_1^{n-1} & \ldots & X_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} \qquad (2.13)$$

L'inverse de la matrice de Van der monde étant :

$((-1)^{i+j} \Lambda_{j,i})/\Delta$ ou

$$\Lambda_{ji} = \det \begin{vmatrix} x_1^{n-1}, \ldots, x_{i-1}^{n-1}, x_{i+1}^{n-1}, \ldots, x_n^{n-1} \\ \cdot \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ x_1^{n-j+1} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ x_1^{n-j-1} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ x^1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \cdot \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{vmatrix}$$

Le terme (m,k) du produit est $\Sigma\, x_j^{Lm}(-1)^{k+J} \frac{\Lambda_{k,J}}{\Delta}$

$= A\,(n-1,\ldots,\ n-k+1,\ L_m,\ n-k-1,\ldots,\ 1,\ 0)/\Delta =$

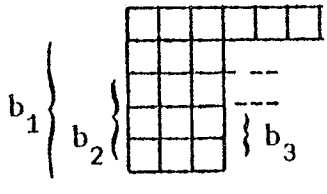
$(-1)^{k-1} A(L_m,\ n-1,\ldots,\ n-k+1,\ldots,\ 0)/\Delta = (-1)^{k-1}\{\lambda_m - m+1,\ 1^{k-1},\ 0^{r-k}\}$

si $m \le p$ $\quad \lambda_m - m+1 \ge 1$.

Sinon, $-m+1 \le \lambda_m - m+1 \le 0$ $\quad \{\lambda_m - m+1,\ 1^{k-1}\} = 0$

sauf si $k\ ;\ k = m-\lambda$ $\quad \{\lambda_m - m+1,\ 1^{k-1}\} = \{0^n\} = 1$.

Remarquons que pour $m > r$ le 1 est en position (m m) le déterminant se réduit donc à un déterminant d'ordre r, dont r-p lignes n'ont qu'un élément non nul (=1) en position $p+1 - \lambda_{p+1} < p+2 - \lambda_{p+2}, \ldots, < r-\lambda_r < r$, si l'on développe suivant ces lignes, on obtient un déterminant pxp dont les lignes sont les p premières du déterminant initial quant aux colonnes $\lambda_r > 0$ donc $r-\lambda_r < r = b_{1+1}$ donc la $(b_1+1)^{\text{ème}}$ colonne n'est pas enlevée de même que les colonnes $b_2+1, \ldots, b_{\lambda_r}+1$ car $i \le \lambda_r$ $\quad b_i+1 = b+1-(i-1) = r-(i-1) > r-\lambda_r$



de même pour $b_{\lambda_{r-1}}+1 = r-1-\lambda_r$

car $r-\lambda_r > r-1-\lambda_r > r-1-\lambda_{r-1}$

et ainsi de suite.

donc

$$\{\lambda\} = \varepsilon \det \begin{vmatrix} \{a_1+1, 1^{b_p}\}(-1)^{b_p}, \ldots, \{a_1+1, 1^{b_1}\}(-1)^{b_1} \\ \vdots \\ \{a_{p+1}, 1^{b_p}\}(-1)^{b_p}, \ldots, \{a_p+1, 1^{b_1}\}(-1)^{b_1} \end{vmatrix}$$

$\varepsilon = (-1)^{\sum_{j=1}^{p} b_j + \frac{1}{2}p(p-1)}$, en renversant l'ordre des colonnes et en sortant les $(-1)^{b_j}$, on obtient le résultat annoncé.

Exemples - $(\lambda) = (5\ 3\ 2) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \{\lambda\} = \begin{vmatrix} \{5,1^2\} & \{5,1\} \\ \{2,1^2\} & \{2,1\} \end{vmatrix}$

$$(\lambda) = (5^{10},3) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 9 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\{\lambda\} = \text{dét} \begin{vmatrix} \{5,1^{10}\} & \{5,1^9\} & \{5,1^8\} & \{5,1^6\} & \{5,1^5\} \\ \{4,1^{10}\} & \{4,1^9\} & \{4,1^8\} & \{4,1^6\} & \{4,1^5\} \\ \{3,1^{10}\} & \{3,1^9\} & \{3,1^8\} & \{3,1^6\} & \{3,1^5\} \\ \{2,1^{10}\} & \{2,1^9\} & \{2,1^8\} & \{2,1^6\} & \{2,1^5\} \\ \{1^{11}\} & \{1^{10}\} & \{1^9\} & \{1^7\} & \{1^6\} \end{vmatrix} \qquad (2.11)$$

3 - PROPRIETES DES COEFFICIENTS DE $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que les coefficients de $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$ exprimé dans la base monomiale s'interprètent comme le nombre de tableaux standards d'Young que l'on peut construire sur le diagramme D_λ, dans ce paragraphe nous en donnons une interprétation due à Kosta et Littlewood en fonction du développement de

$$\det \left(h_{\lambda_{i-i+j}}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

posons $s(\lambda) = \sum_{(\mu)\leq(\lambda)} K_\lambda^\mu \{X_1,\ldots,X_n ; \mu\}$ (3.1)

et $\{\lambda\} = \sum_\mu V_\mu^\lambda h_{(\mu)}$ (3.2)

où $h_{(\mu)} = h_{\mu_1} \cdot h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_n}$

caractérisons K_λ^μ et V_μ^λ

multiplions (3.1) par $A(n-1,\ldots,1,0)$ cela donne

$$S(\lambda)A(n-1,\ldots,1,0) = \sum_{(\mu)\leq(\lambda)} K_\lambda^\mu A(\mu_1+n-1,\ldots,\mu_n)$$

calculons le membre de gauche,

$$S(\lambda)A(n-1,\ldots,1,0) = \sum_{\sigma\in\overline{\Pi}_n} A(n-1+\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(n)})$$

ou $\overline{\Pi}_n$ est l'ensemble des permutations donnant des n-uples $(\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(n)})$ différents ; il faut maintenant réordonner les n-uples $(n-1+\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(n)})$; pour σ fixé, soit $\tau\in\Pi_n$. La permutation, unique, telle que $(n-\tau(1)+\lambda_{\sigma(\tau(1))},\ldots,n-\tau(n)+\lambda_{\sigma(\tau(n))})$ soit ordonnée,

posons $T_{(\mu)} = \{(\sigma,\tau) ; \sigma\in\overline{\Pi}_n, \tau\in\Pi_n ; n-\tau(j)+\lambda_{\sigma(\tau(j))} = \mu_j\}$ $j=1,\ldots,n$

Nous avons $K_\lambda^\mu = \sum_{\tau\in T_{(\mu)}} \varepsilon_\tau$

Calculons V_μ^λ ; en développant le déterminant (h_{λ_i-j+i}) nous trouvons

$$\{\lambda\} = \sum_{\nu\in\Pi_n} \varepsilon_\nu h_{\lambda_1-1-\nu(1)} \circ \cdots \circ h_{\lambda_j-j+\nu(j)} \circ \cdots \circ h_{\lambda_n-n+\tau(n)}$$

La comparaison avec (3.2) donne

$$V_{\mu}^{\lambda} = \sum_{\nu \in \overline{T}_{(\mu)}} \varepsilon_{\nu}$$

ou $\overline{T}_{(\mu)} = \{\nu \in \Pi_n$ tels que : $\exists\, \beta \in \Pi_n$; $\lambda_j - J + \nu_{(J)} = \mu_{\beta(J)}\}$ $\quad J=1,\ldots,n$

ce qui s'écrit encore :

$$\overline{T}_{(\mu)} = \{\nu \in \Pi_n \ ; \ \exists \alpha \in \Pi_n \ ; \ \lambda_{j-j+\nu(J)} = \mu_{\alpha(\nu(J))} \quad J=1,\ldots,n\}$$

remarquons maintenant que si $\nu \in \Pi_n$ est tel qu'il existe $\alpha \in \Pi_n$ vérifiant $\lambda_{j-j+\nu(J)} = \mu_{\alpha(\nu(J))}$ $J=1,\ldots,n$ si l'on prend α' ; $\mu_{\alpha'} = \mu_{\alpha}$, nous avons $\lambda_{J-J+\nu(J)} = \mu_{\alpha'(\nu(J))}$, et réciproquement s'il existe α'' tel que $\lambda_{j-j+\nu(J)} = \mu_{\alpha''(\nu(J))}$ $\mu_{\alpha''} = \mu_{\alpha}$, ceci permet de donner une forme équivalente pour $\overline{T}_{(\mu)}$.

$$\overline{T}_{(\mu)} = \{(\nu,\alpha) \ \nu \in \Pi_n, \ \alpha \in \overline{\Pi}_n \ ; \ \lambda_{j-J+\tau(J)} = \mu_{\alpha(\tau(J))} \quad J=1,\ldots,n\}$$

il est alors évident que $\overline{T}_{(\mu)} = T_{(\mu)}$ donc que $K_{\lambda}^{\mu} = V_{\mu}^{\lambda}$

Nous avons donc montré le théorème suivant :

Théorème (3.1) - Kosta , [32], [45]

si $s(\lambda) = \sum_{(\mu) \leq (\lambda)} K_{\lambda}^{\mu} \{X_1,\ldots,X_n \ ; \mu\}$

alors

$$\{\lambda\} = \sum_{(\mu) \geq (\lambda)} K_{\mu}^{\lambda} h_{(\mu)} \qquad (3.3)$$

Note : La démonstration du théorème (3.1) que nous donnons reprend celle de Newell[45], en la précisant, car sa démonstration, assez vague, n'était valable que si (λ) et (μ) avaient tous leurs lemmes différents.

Il peut néanmoins subsister une ambiguïté sur le choix de n, il suffit en fait de le choisir assez grand, i.e $n = |\lambda|$ et de prolonger (λ) à une n-partition en lui ajoutant des zéros ; remarquons ensuite que le

théorème (3.1) reste vrai si $n < |\lambda|$ car dans ce cas si une partition (μ) intervenant dans (3.3) est de longueur supérieure à n $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} \equiv 0$; cela permet d'affirmer que le coefficient K_λ^μ ne change pas avec le nombre de variable (le coefficient de $S(\mu)$ dans $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$ ne dépend non plus pas de n d'après sa définition en termes de tableau standard d'Young).

Posons $\qquad \Lambda = (K_\mu^\lambda)_{\mu \lambda \in \Lambda_n^k}$

ou Λ_n^k est l'ensemble des n-partitions de k ; nous avons donc :

$$\{\Lambda\} = A^T \ H \qquad (3.4)$$

avec $\{\Lambda\}$ le vecteur de $\{\lambda\}$ pour $(\lambda) \in \Lambda_n^k$

H le vecteur des $h_{(\mu)}$ $\quad (\mu) \in \Lambda_n^k$

les n-partitions étant ordonnées suivant l'ordre <u>lexicographique</u>, et $K_\mu^\lambda = 0$ si $(\mu) \nleq (\lambda)$

et $\qquad (\Lambda) = \Lambda\ \{\Lambda\} \qquad (3.5)$

si $\qquad (\Lambda)$ est le vecteur des $S(\lambda)$, $(\lambda) \in \Lambda_n^k$ nous avons donc montré les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème (3.2)</u> -
Soient n et k fixés, Λ_n^k l'espace vectoriel des polynômes symétriques, homogènes, en les variables $X_1,\ldots,X_n$
<u>Alors</u> la famille $(\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\})$ $(\lambda) \in \Lambda_n^k$ est une base Λ_n^k.

<u>Théorème (3.3)</u> -
Avec les mêmes notations que précédemment la famille $\{h_{(\lambda)}\}$ $(\lambda) \in \Lambda_n^k$ est une base de Λ_n^k.

Remarquons que le théorème de Kosta peut se généraliser. En effet d'après (1.7)

$$S(\theta)\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \mu\} = \sum_{(\nu) \leq (\theta+\mu)} M_{\theta\mu}^\nu\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \nu\}$$

posons :

$$\{\lambda/\mu\} = \det\left(h_{\lambda i-\mu j+j-i}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

$$\{\lambda/\mu\} = \sum M^{\nu}_{\lambda\mu} \{\nu\}$$

par les mêmes arguments que pour le théorème (3.1) nous obtenons

Théorème (3.4) - Newell[45]

si $$s(\theta)\{X_1,\ldots,X_n ; \mu\} = \sum_{(\nu)\leq(\theta+\mu)} M^{\nu}_{\theta\mu} \{X_1,\ldots,X_n ; \nu\}$$

Alors

$$\{\lambda/\mu\} = \sum_{\theta} M^{\lambda}_{\theta} \; h_{(\theta)} \qquad (3.6)$$

Notons N^{μ}_{λ} les éléments de A^{-1}

(3.3) est équivalent à

$$h_{(\mu)} = \sum_{\lambda} N^{\mu}_{\lambda} \{\lambda\} \qquad (3.7)$$

substituons (3.7) dans (3.6) cela donne :

$$\{\lambda/\mu\} = \sum_{\nu} \left(\sum_{\theta} M^{\lambda}_{\theta\mu} N^{\theta}_{\nu}\right) \{\nu\}$$

calculons maintenant $\{\mu\}\{\nu\} = \{\mu\} \sum_{\theta} N^{\nu}_{\theta} s(\theta)$ et d'après le théorème précédent

$$\{\mu\}\{\nu\} = \sum_{(d)} \left(\sum_{\theta} N^{\nu}_{\theta} M^{\alpha}_{\theta\mu}\right) \{\alpha\}$$

Le coefficient de $\{\lambda\}$ dans $\{\mu\}\{\nu\}$ est égal au coefficient de $\{\nu\}$ dans $\{\lambda/\mu\}$

posons $$\{\mu\}\{\nu\} = \sum_{\alpha} g^{\alpha}_{\mu\nu} \{\alpha\} \qquad (3.8)$$

nous avons donc montré le théorème.

Théorème (3.5) - [35], [45]

si $\{\nu\}\ \{\mu\} = \Sigma\ g^{\alpha}_{\mu\nu}\ \{\alpha\}$

Alors

$$\{\lambda/\mu\} = \Sigma\ g^{\lambda}_{\mu\nu}\ \{\nu\} \qquad (3.9)$$

Remarques -

1 - L'identité (1.4) permet d'obtenir la décomposition de $s(\lambda)$ dans la base $h_{(\nu)}$ en développant les $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \mu\}$ intervenant dans le membre de droite. En utilisant le théorème (2.4) qui s'écrit $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \mu\}_h = \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \tilde{\mu}\}_a$ on peut aussi avec (1.4) obtenir les coefficients de $s(\lambda)$ dans la base $a_{(\nu)}$, c'est ce qui a été fait dans [8], cependant cette méthode pour obtenir la décomposition de $s(\lambda)$ dans la base $a_{(\nu)}$ n'est pas très performante ; comme il est montré dans [31] il est beaucoup plus rapide d'utiliser un algorithme de multiplication pour des produits du type $a_i\ s(\alpha)$ et d'utiliser l'algorithme de Gauss I(3.2).

2 - Les coefficients $M^{\lambda}_{\theta\mu}$ ont une interprétation combinatoire analogue aux N^{λ}_{θ}, en termes de tableaux "gauches" d'Young [51].

4 - FONCTIONS GENERATRICES -

Dans [32] Littlewood donne de nombreuses fonctions génératrices pour les polynômes de Schur, ou bien pour certaines classes parmi ceux-ci ; il en déduit ensuite de nombreuses propriétés des S polynômes. Dans ce paragraphe nous nous bornerons à présenter les deux plus importantes, et en donnerons une démonstration différente de celle de Littlewood. Ensuite nous montrerons l'orthogonalité de la matrice des coefficients des $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$; $(\lambda) \in \Lambda^n_n$ dans la base $S_{(\lambda)}$ et le classique théorème de décomposition.

posons $H(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$

$$G(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

ou F et f sont les fonctions génératrices des a_i et h_i définies en I.§4.

Théorème (4.1) - [32]

$$H(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{(\lambda):|\lambda|=p} \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n ; \lambda\} \{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\} \tag{4.1}$$

$$G(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sum_{(\lambda):|\lambda|=p} \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n ; \lambda\}\{X_1,\ldots,X_n ; \tilde{\lambda}\} \tag{4.2}$$

Démonstration -

D'après I(4.4) $H(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{p} \sum_{(\theta):|\theta|=p} h_{(\theta)} s'(\theta)$

ou h porte sur les X_i, S' sur les α_i.

Nous avons d'après le théorème (3.1) :

$$h_{(\theta)} = \sum_{\lambda} N_{\lambda}^{\theta} \{\lambda\} \qquad \{\lambda\} = \{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$$

$$s'(\theta) = \sum_{\lambda} K_{\theta}^{\lambda} \{\lambda\}' \qquad \{\lambda\}' = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n ; \lambda\}$$

Nous avons donc :

$$H(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\theta,\lambda,\mu} N_{\lambda}^{\theta} K_{\theta}^{N} \{\lambda\} \{\mu\}'$$

et d'après le théorème (3.1) $\sum_{\theta} N_{\lambda}^{\theta} K_{\theta}^{\mu} = \delta_{\lambda\mu}$

d'où $H(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{(\lambda):|\lambda|=p} \{\lambda\} \{\lambda\}'$

Pour (4.2) remarquons que le coefficient de $a_{(\tilde{\theta})}$ dans $\{\tilde{\lambda}\}$ est égal au coef-

ficient de $h_{(\theta)}$ dans $\{\lambda\}$, donc nous pouvons appliquer le même raisonnement à $G(x_1,\ldots,x_n)$ qui est égal d'après I(4.5) à

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \sum_{(\theta):|\theta|=p} a_{\theta}^{\sim} s'(\theta)$$

Posons $G(t) = H(tx_1,\ldots,tx_n)$ et remplaçons $\{\lambda\}$ et $\{\lambda\}'$ par leur expression en fonction des $S_{(\alpha)}$

$$G(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{(\lambda)|p} \sum_{\alpha,\beta} C'_{(\alpha)} C'_{(\beta)} \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} \chi^{(\lambda)}_{(\beta)} S_{(\alpha)} S'_{(\beta)} \Big) t^p$$

avec $C'_{(\alpha)} = \dfrac{C_{(\alpha)}}{p!}$

Posons $u_{\alpha,\beta} = \sum_{(\lambda)|p} \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} \times \chi^{(\lambda)}_{(\beta)}$

$$G(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{\alpha,\beta} C'_{(\alpha)} C'_{(\beta)} u_{\alpha,\beta} S_{(\alpha)} S'_{(\beta)} \Big) t^p$$

or d'après I(4.6)

$$G(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{(\alpha) : \sum_{i=1}^{p} i_{\alpha_i} = p} c(\alpha) S_{(\alpha)} S'_{(\alpha)} \Big) t^p$$

en comparant le coefficient de t^p nous obtenons :

$$\sum_{\alpha,\beta} c(\alpha)\, c(\beta)\, u_{\alpha\beta} S_{(\alpha)} S'_{(\beta)} = \sum_{(\alpha)} c(\alpha) S_{(\alpha)} S'_{(\alpha)}$$

choisissons n assez grand ($n \geq p$). Les $S_{(\alpha)} S'_{(\alpha)}$ forment une base de A_n^p, donc, nous pouvons identifier le coefficient de $S_{(\alpha)}$

$$\sum_{(\beta)} c(\beta)\, u_{\alpha\beta} S'_{(\beta)} = S'_{(\alpha)}$$

<u>donc</u> si $\alpha = \beta$ $\quad u_{\alpha\beta} = 1/c(\beta) = 1/c(\beta)$

sinon $\quad u_{\alpha\beta} = 0$

Nous avons donc montré le théorème :

Théorème (4.2) -
Soit (λ) une partition de $\underline{n}$.

Si $$\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = \frac{1}{n!} \sum_{(\alpha):\ \sum_{i=1}^{n} i\,\alpha_i = n} c(\alpha)\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\, S_{(\alpha)}$$

Alors si X est la matrice $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ pour $(\lambda) \in \Lambda^n_n$ et (α) parcourant les n-uples d'entiers tels que $\sum_{i=1}^{n} i\,\alpha_i = n$ $\quad X^T X = D$

Cette démonstration est originale (à ma connaissance). Cependant nous n'avons pas montré que les $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ sont les caractères du groupe symétrique, on peut se demander s'il est possible de le montrer à partir de ce théorème et d'en déduire l'orthogonalité des caractères. La réponse est positive, en effet ce théorème implique l'identité de Frobénius, (paragraphe 6) qui exprime $S_{(\alpha)}$ en fonction des $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ et $\{\lambda\}$, or il est possible d'arriver à cette même identité de Frobenius, avec les caractères du groupe symétrique, sans utiliser l'orthogonalité de ces derniers, [4] ; les $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$ $(\lambda) \in \Lambda^n_n$ formant une base de A^n_n on peut identifier, il en résulte, que les $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ sont les caractères du groupe symétrique, et l'orthogonalité de ceux-ci.

Remarque - si (λ) est une partition de $k \geq n$

$$\{X_1,\ldots,X_n, \underbrace{0,\ldots,0}_{k-n}\ ;\ \lambda\} = \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} \text{ et}$$

$$S_{(\alpha)}(X_1,\ldots,X_n, 0,\ldots,0) = S_{(\alpha)}(X_1,\ldots,X_n) \qquad \text{donc}$$

$$\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = \frac{1}{k!} \sum c(\alpha)\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\, S_{(\alpha)} \qquad \text{mais la décomposition}$$

n'est pas unique car les $S_{(\alpha)}$ (α) ; $\sum_{i=1}^{k} i_{\alpha_i} = k$ ne forment pas un système libre.

Enonçons maintenant une autre conséquence du théorème (4.1).

Théorème (4.3) - [32] , [45]

$$\{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\} = \Sigma\, g^{\lambda}_{\mu\nu}\, \{X_1,\ldots,X_k ; \mu\}\, \{X_{k+1},\ldots,X_n ; \nu\} \qquad (4.2)$$

Démonstration -

$\prod_{i=1}^{n} F(x_i) = \prod_{i=1}^{k} F(x_i) \cdot \prod_{j=k+1}^{n} F(x_j)$, notons $\{\lambda\}$ le polynôme

$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n ; \lambda\}$

Nous avons alors d'après le théorème (4.1)

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{(\nu)|_j} \{\nu\}\{X_1,\ldots,X_k ; \nu\}\Big) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{(\mu)|_j} \{\mu\}\{X_{k+1},\ldots,X_n ; \mu\}\Big)$$

effectuons le produit

$$\prod_{i=1}^{n} F(x_i) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p=|\nu|+|\mu|} \{\nu\}\{\mu\}\, \{X_1,\ldots,X_k ; \nu\}\{X_{k+1},\ldots,X_n ; \mu\}$$

et posons : $\{\nu\}\{\mu\} = \Sigma\, g^{\lambda}_{\mu\nu}\, \{\lambda\}$

$$\prod_{i=} F(x_i) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p=|\nu|+|\mu|} g^{\lambda}_{\mu\nu}\, \{X_1,\ldots,X_k ; \nu\}\, \{X_{k+1},\ldots,X_n ; \mu\}\, \{\lambda\}$$

$(\lambda);|\lambda|=p$

en comparant à (4.1) on obtient le théorème.
D'après le théorème (4.1) :

$$\{X_1,\ldots,X_n ; \tilde{\lambda}\} = \Sigma\, g^{\lambda}_{\mu\nu}\, \{X_1,\ldots,X_n ; \mu\}\, \{X_{k+1},\ldots,X_n ; \mu\} \qquad (4.3)$$

ce qui implique que $g^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = g^{\lambda}_{\mu\nu}$ (4.4)

Nous pouvons en déduire le théorème d'Aitken.

Théorème (4.4) - [32] , [45], [51]

$$\{\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}\} = \Sigma\, g^{\lambda}_{\mu\nu}\, \{\tilde{\nu}\} = \det\,(a_{\lambda_i-\mu_j+j-i}) \qquad (4.5)$$

Démonstration -
D'après le théorème (3.5) $\{\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}\} = \Sigma\, g^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, \{\tilde{\nu}\}$ qui est égal d'après (4.4) à $\Sigma\, g^{\lambda}_{\mu\nu}\, \{\tilde{\nu}\}$ or si l'on note $\{\nu\}_a = \det\,(a_{\nu_i+j-i})$ d'après le théorème $\{\tilde{\nu}\} = \{\nu\}_a$ donc $\{\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}\} = \Sigma\, g^{\lambda}_{\mu\nu}\, \{\nu\}_a$ qui toujours par le théorème (3.5) est égal à $\{\lambda/\mu\}_a = \det\,(a_{\lambda_i-\mu_j+i})$

Il est possible de montrer un théorème analogue au théorème (4.3) pour les polynômes $\{\lambda/\mu\}\ (X_1,\ldots,X_n)$ dont ce dernier apparaît comme un cas particulier.

Théorème (4.5) - soient (λ) et (μ) deux n-partitions telles que

$$\lambda_i \geq \mu_i \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

Alors $$\{\lambda/\mu\} = \sum_{(\delta)} \{\lambda/\delta\}'\ \{\delta/\mu\}'' \qquad (4.6)$$

(δ) variant de $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ à $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

Démonstration -

a) $$h_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=0}^{i} h_{i-j}(x_1,\ldots,x_k)\ h_j(x_{k+1},\ldots,x_n)$$

il suffit d'écrire $F(t) = F'(t)\ F''(t)$

où $$F(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-xit)} \qquad F'(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(1-xit)} \qquad F''(t) = \frac{1}{\prod_{i=k+1}^{n}(1-xit)}$$

b) - pour simplifier posons $h'_i = h_i(x_1,\ldots,x_k)$ $h''_i = h(x_{k+1},\ldots,x_n)$ de même pour $\{\alpha/\beta\}'$ et $\{\alpha/\beta\}''$.

Notons A la matrice d'élément (i, j) $h_{\lambda_i-\mu_j+j-i}$ l'idée est d'écrire $A = A'\,A''$ et d'utiliser le théorème de Binet Cauchy [42], si $A'(i_1,\ldots,i_n)$, resp $A''(j_1,\ldots,j_n)$ est le mineur extrait de A' en prenant les colonnes $i_1,\ldots,i_n$, resp les lignes $j_1,\ldots,j_n$.

$$\det A = \sum_{\substack{i_1,\ \ldots,\ i_n \\ 1\le i_1<\ \ldots <\ i_n}} \det A'(i_1,\ldots,i_n)\det A''(i_1,\ldots,i_n) \qquad \text{(Binet Cauchy)}$$

posons donc :

$$A' = \begin{vmatrix} h'_0 & \cdots & h'_{\lambda_1-\mu_n+n-1} \\ 0 & h'_0 & h'_{\lambda_2-\mu_n+n-2} \\ & & \\ 0 & \cdots\ 0\ h'_0 & h'_{\lambda_n-\mu_n} \end{vmatrix}$$

$$A'' = \begin{vmatrix} h''_{\lambda_1-\mu_1} & \cdots & h''_{\lambda_1-\mu_{n-1}+n-2} & h''_{\lambda_1-\mu_n+n-1} \\ h_0 & & & \\ 0 & & & \\ & h''_0 & & \\ & 0 & & \\ & & & h''_0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots\ 0 \end{vmatrix}$$

Nous avons bien $A = A'\,A''$ d'après a).

L'élément (i,j) de A' est $h'_{j-(\lambda_1-\lambda_i+i)} = h_{\lambda_i-\lambda_1+j-i}$

L'élément (i,j) de A'' est $h''_{\lambda_1-\mu_j+j-i}$

L'élément (i,k) de $A'(i_1,\ldots,i_n)$ est $h'_{\lambda_i-\lambda_1+i_k-i}$

i_k varie de k à $\lambda_1-\mu_n+k$ posons $i'_k = i_k-k$

i'_k varie de 0 à $\lambda_1-\mu_n$ donc $\lambda_1-i'_k \geq \mu_n \geq 0$

donc notons $(\delta) = (\lambda_1-i'_n,\ldots,\lambda_1-i'_1)$

det $A'(i_1,\ldots,i_n)$ est égal à $\{\lambda/\delta\}'$ et l'élément (k,j) de

$A''(i_1,\ldots,i_n)$ est : $h''_{\lambda_1-\mu_j+j-i_k} = h''_{\lambda_1-i'_k-\mu_j+j-k} = h''_{\delta_k-\mu_j+j-k}$ d'où

$$\text{dét } A''(i_1,\ldots,i_n) = \{\delta/\mu\}''$$

Le théorème de Binet Cauchy donne donc :

$$\{\lambda/\mu\} = \sum_{\delta} \{\lambda/\delta\}' \{\delta/\mu\}''$$

(δ) variant de $(\lambda_1,\ldots,\lambda_1)$ à $(\mu_n,\ldots,\mu_n)$

mais si $\delta_i > \lambda_i$ <u>alors</u> $\{\lambda/\delta\}' \equiv 0$

de même si $\delta_i < \mu_i$ <u>alors</u> $\{\delta/\mu\}'' \equiv 0$

d'où le théorème.

Le théorème (4.3) est alors obtenu lorsque $(\mu) \equiv (0)$ car (4.6) devient alors :

$$\{\lambda\} = \sum_{(\delta)} \{\lambda/\delta\}' \{\delta\}'' \qquad (4.7)$$

mais $\{\lambda/\delta\}' = \sum g^{\lambda}_{\delta\nu} \{\nu\}'$

donc $\{\lambda\} = \sum_{\delta,\nu} g^{\lambda}_{\delta\mu} \{\nu\}' \{\delta\}''$

Un examen attentif de (4.7) dans le cas ou $(\lambda) = (k, 1^s)$ donne

Proposition (4.6) -

$$\{k,1^s\} = \sum_{\substack{r=0,k-1 \\ v=0,\ s}} \{1+r,1^v\}' \{k-r,1^{s-v}\}'' + \sum_{\substack{r=1,k-1 \\ v=0,s-1}} \{1+r,1^v\}' \{k-r+1,1^{s-v-1}\}'' \qquad (4.8)$$

5 - CALCUL DES CARACTERES -

Théorème (5.1) - Frobenius [32] , [45] ; [4]

$$S_{(\alpha)} = \sum_{(\lambda):\ell(\lambda)\leq n} \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} \{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\} \qquad (5.1)$$

où $S_{(\alpha)}$ est le polynôme $S_1^{\alpha_1}, \ldots, S_p^{q_p}$ $\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i = p$, en les n variables $X_1, \ldots, X_n$.

Démonstration - Soit (λ) une partition de p, $k \geq p$

$$\{X_1,\ldots,X_k ; \lambda\} = \frac{1}{p!} \sum_{(\alpha):\Sigma i\alpha_i=p} c(\alpha)\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\, S_{(\alpha)}$$

multiplions par $\chi^{(\lambda)}_{(\beta)}$ et sommons sur tous les $(\lambda) \in \Lambda_p^p$, nous avons

$\sum_{\lambda} \chi^{(\lambda)}_{(\beta)} \{X_1,\ldots,X_k ; \lambda\} = \frac{1}{p!} \sum_{(\alpha)} C(\alpha)\, S_{(\alpha)} \left(\sum_{\lambda} \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\, \chi^{(\lambda)}_{(\beta)} \right)$ par orthogonalité

(th.(4.2) ou th.(2.5)) le terme de droite se réduit à $S_{(\beta)}$.

donc $S_{(\beta)}(X_1,\ldots,X_k) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}_{(\beta)} \{X_1,\ldots,X_k ; \lambda\}$

posons maintenant $x_{n+1} = \ldots = x_k = 0$

$\{x_1,\ldots,x_n, 0,\ldots,0 ; \lambda\} = \{x_1,\ldots,x_n ; \lambda\}$

or $\{x_1,\ldots,x_n ; \lambda\} \equiv 0$ si $\ell(\lambda)>n$ d'où le résultat

car $S_{(\beta)}(X_1,\ldots,X_n, 0,\ldots,0) = S_{(\beta)}(X_1,\ldots,X_n)$

C'est ce théorème qui permet de calculer les $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$. Etendons la définition de $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ au cas où (λ) n'est pas une partition de la même façon que pour $\{\lambda\}$

$$\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = \begin{cases} -\chi^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i+1}-1,\lambda_i+1,\lambda_{i+2},\ldots,\lambda_n)}_{(\alpha)} & \text{si } \lambda_{i+1} > \lambda_i \\ 0 \quad \text{si } \lambda_n < 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

si $\exists j>k$; $\lambda_j = \lambda_k - k + j$ cela entraîne $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = 0$

Théorème (5.2) - "Règle de Murnaghan" [4], [32], [43]

si $\alpha_p \neq 0$

$$\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = \chi^{(\lambda_1-p,\ldots,\lambda_n)}_{(\alpha')} + \ldots + \chi^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_j-p,\ldots,\lambda_n)}_{(\alpha')} + \ldots + \chi^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n-p)}_{(\alpha')} \tag{5.3}$$

ou $(\alpha') = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}, \alpha_p-1, \alpha_{p+1},\ldots,\alpha_n)$

Démonstration -

Soit donc p ; $\alpha_p \neq 0$

$$S_{(\alpha)} = \Sigma\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} \{X_1,\ldots,X_n ; \lambda\}$$

et $S_{(\alpha)} = S_{(\alpha')}\, S_p = S_p \sum_\mu \chi^{\mu}_{(\alpha')} \{X_1,\ldots,X_n ; \mu\}$

d'autre part, il est facile de voir que :

$$S_p \{X_1,\ldots,X_n ; \mu\} = \sum_{j=1}^{n} \{X_1,\ldots,X_n ; \mu_1,\ldots,\mu_j+p, \ldots, \mu_n\}$$

$(\mu_1,\ldots,\mu_j+p,\ldots,\mu_n)$ n'est pas ordonné réordonnons $\{X ; \mu_1,\ldots,\mu_j+p,\ldots,\mu_n\}$ par la règle (2.10) cela donne $\pm \{X ; p\}$

donc $$S_{(\alpha')}\, S_p = \sum_{\mu,\beta} \pm \chi^{\mu}_{(\alpha')} \{X ; \beta\}$$

identifions nous obtenons :

$$\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = \sum_{\mu:\exists j\ ;\ (\mu_1,\ldots,\mu_j+p,\ldots,\mu_n)\to(\lambda)} \pm\ \chi^{(\mu)}_{(\alpha')}$$

Il est clair que les (μ) en question sont de la forme :

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_j-p,\ldots,\lambda_n)$$

Remarque - D'après cette règle :

$$\chi^{(\lambda)}_{(0,\ldots,0,1)} = \begin{matrix}(-1)^k & \text{si } (\lambda) = (a,1^k)\\ 0 & \text{sinon}\end{matrix}$$

en outre $\chi^{(1,1)}_{(2,0)} = 1$ $\qquad$ $\chi^{(1\ 1)}_{(0\ 1)} = (-1)$

$\chi^{(2,0)}_{(2,0)} = 1$ $\qquad$ $\chi^{(2\ 0)}_{(0\ 1)} = 1$

en posant $\chi^{(0)}_{(2,0)} = 1$

Exemple - $\quad n = 5 \quad (\lambda) = (2\ 2\ 1) \quad (\alpha) = (0\ 1\ 1)$

choisissons $\quad p = 3 \quad (\alpha') = (0\ 1)$

$$\chi^{(2\ 2\ 1)}_{(0\ 1\ 1)} = \chi^{(-1\ 2\ 1)}_{(0\ 1)} + \chi^{(2-1\ 1)}_{(0\ 1)}$$

$$\text{"} \qquad\qquad \text{"}$$

$$0 \qquad - \quad \chi^{(2)}_{(0\ 1)}$$

donc $\chi^{(2\ 2\ 1)}_{(0\ 1\ 1)} = -1$

Posons $C^{\mu}_{\beta,\nu}$ le coefficient de $\{\chi_1,\ldots,\chi_n\ ;\ \mu\}$ dans le produit $S_{(\beta)}\ \{\chi_1,\ldots,\chi_n\ ;\ \nu\}$, on peut poursuivre la récurrence.

Théorème (5.3) -

$$\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = \sum_{\nu} \chi^{(\nu)}_{(\theta)}\ C^{\lambda}_{\beta,\nu} \qquad (5.4)$$

où $(\theta) + (\beta) = (\alpha)$.

dem

$$S_{(\alpha)} = \Sigma\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$$

$$S_{(\alpha)} = S_{(\theta)}\ S_{(\beta)} = \sum_{\nu} \chi^{(\nu)}_{(\theta)}\ S_{(\beta)}\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \nu\}$$

$$= \sum_{\lambda}\ (\sum_{\nu} \chi^{\nu}_{(\theta)}\ C^{\lambda}_{\beta,\nu})\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$$

en identifiant on trouve le résultat annoncé.

On pourrait aussi utiliser :

$$S_{(\theta)}\ S_{(\beta)} = (\Sigma\, \chi^{(\nu)}_{(\theta)}\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\nu\})\ (\Sigma\, \chi^{(\mu)}_{(\beta)}\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \mu\})$$

$$= \Sigma\, \chi^{(\nu)}_{(\theta)}\ \chi^{(\mu)}_{(\beta)}\ g^{\lambda}_{\mu\nu}\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\},$$

en identifiant on obtient :

Théorème (5.4) -

$$\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = \sum_{\mu,\nu}\ \chi^{(\nu)}_{(\theta)}\ \chi^{(\mu)}_{(\beta)}\ g^{\lambda}_{\nu\mu} \qquad (5.5)$$

Notons qu'il existe d'autres algorithmes de calcul des caractères du groupe symétrique, qui permettent de calculer tous les caractères associés à une n-partition [11]. Quant à la règle de Murnaghan, il est possible de l'interpréter en termes de diagrammes d'Young [4], [32] on peut montrer que si $(\tilde{\lambda})$ est la partition conjuguée de (λ) $\chi^{(\tilde{\lambda})}_{(\alpha)} = \pm\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ suivant la parité de (α), ce qui limite le nombre de caractères à calculer, il est en outre possible d'avoir l'expression de certains de ceux-ci [4], [43] ; cependant le calcul de la table des caractères peut difficilement être entrepris pour n>20. On pourra trouver une méthode ainsi que des tables de caractères pour n≤20 en consultant [13]. On pourra aussi consulter [21], [26].

6 - MULTIPLICATION DES POLYNOMES DE SCHUR -

Il existe deux méthodes pour multiplier les polynômes de Schur.

1 - La règle de Murnaghan, Newell [44], [45].

2 - La règle de Littlewood Richardson [32]

Cette dernière est purement combinatoire et basée sur les diagrammes d'Young, nous n'en citerons qu'un cas particulier, la multiplication de $\{\lambda\}$ par h_r.

Théorème (6.1) - [32]

Les polynômes de Schur obtenus dans le produit $h_r\{\lambda\}$ sont ceux qui correspondent aux diagrammes d'Young qui peuvent être construits en ajoutant r noeuds au diagramme $D_{(\lambda)}$ de telle façon qu'aucun des noeuds ajoutés n'apparaisse dans la même colonne.

Nous allons en donner une démonstration basée sur la multiplication de $\{\tilde{\lambda}\}$ par a_i, que l'on sait effectuer en termes de polynômes symétriques.

Théorème (6.2) -

Les termes du produit $a_i\ \{\lambda\}$ sont de la forme :

$$\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{j1}+1,\lambda_{j1+1},\ldots,\lambda_{j2}+1,\ldots,\lambda_{ji}+1,\lambda_{ji+1},\ldots,\lambda_{k+i}\}$$

en prolongeant $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ par i zéros. Leur coefficient est 1.

Démonstration - si $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ écrivons le $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\underbrace{0,\ldots,0}_{i})$

Posons $L_j = \lambda_j+(k+i)-J$ et multiplions $A(L_1,\ldots,L_{k+i})$ par a_i d'où le résultat.

La démonstration du théorème (6.1) est maintenant évidente en utilisant le fait que si :

$$\{\tilde{\lambda}\}\ \{\tilde{\mu}\} = \Sigma\, g^{\tilde{\nu}}_{\tilde{\lambda}\tilde{\mu}}\ \{\tilde{\nu}\} \qquad \underline{\text{alors}}$$

$$\{\lambda\}\ \{\mu\} = \Sigma\, g^{\tilde{\nu}}_{\lambda\tilde{\mu}}\ \{\nu\}$$

et en remarquant que l'opération consistant à placer un noeud sur certaines lignes de $D_{(\tilde{\lambda})}$ est identique à placer des noeuds sur $D_{(\lambda)}$ suivant la règle du théorème (6.1).

Etablissons les préliminaires du théorème de Murnaghan Newell. Il nous faut d'abord une méthode pour déterminer le coefficient du polynôme monomial en les variables $X_1,\ldots,X_k$ de multidegré (θ) dans $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$ ou $n > \ell(\lambda)$.

Nous avons donc $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = \Sigma\ s'(\theta)\ A''(\theta)$ ou comme précédemment s' porte sur les variables 1 à k A''_θ sur les (n-k) restantes.
Définissons l'action d'un monôme $\xi_1^{m_1}\ldots\xi_p^{m_p}$ sur $\{\lambda\}$ $(p=\ell(\lambda))$ par $\xi_1^{m_1},\ldots,\xi_p^{m_p}\ \{\lambda\} = \{\lambda_1-m_1\ \ldots\ \lambda_p-m_p\}$ par linéarité nous avons donc défini l'action de $h_\ell(\xi)\ \{\lambda\} = \sum_{|k|=\ell} \{\lambda_1-k_1,\ldots,\lambda_p-k_p\}$.

Les S polynômes figurant à droite doivent être réordonnés, un certain nombre s'annulent.

Posons $h_{(\theta)}(\xi) = h_{\theta_1} o h_{\theta_2} o \ldots . o h_{\theta_n}(\xi)$

Théorème (6.3) -

$$A''_{(\theta)} = \Sigma\ h_{(\theta)}(\xi)\{\lambda\} \qquad (6.2)$$

dans le terme de droite le résultat de $h_{(\theta)}(\xi)\{\lambda\}$ doit être considéré comme un polynôme en les variables $X_{k+1},\ldots,X_n$.

Démonstration -

Commençons par k = 1.

$$\{\lambda\} = \sum_{j=o}^{\lambda_1} \left(\Sigma_\mu\ g^\lambda_{\mu\nu}\ \{\mu\}''\right)\ \{J\}'$$

d'après le théorème (4.3). Si k = 1, $\{J\} = X_1^J$ mais $\{J\}$ est aussi égal à h_J et $g^\lambda_{\mu J}$ est égal au coefficient de $\{\lambda\}$ dans le produit $\{\mu\}\ h_J$, qui d'après le théorème (6.1) est égal à 1, et toujours d'après ce théorème (μ) est de la forme :

$$(\lambda_1-k_1,\ldots,\mu_n-k_n) \qquad \text{avec} \qquad \Sigma\ k_i = J$$

Donc $A''_J = \sum_{(k):|k|=j} \{\lambda_1,-k_1,\ldots,\lambda_n-k_n\}$

c'est par définition $h_J(\xi)\{\lambda\}$

- Cas général - remarquons que le coefficient de $s'(\theta)$ est le même que celui de $X_1^{\theta_1},\ldots,X_k^{\theta_k}$ qui est donné par application successive de h_{θ_i} ; donc

$$A''_{(\theta)} = h_{(\theta)}(\xi)\ \{\lambda\}$$

Ce théorème est dû à Newell [45], nous n'avons pas reproduit sa démonstration qui est assez imprécise.

Notons maintenant $\{\xi;\mu\}$ l'opérateur $\Sigma\, k_\theta^\lambda\, h_{(\theta)}$ d'après le théorème de Kosta c'est bien l'opérateur associé à $\{\mu\}$, et c'est aussi le coefficient de $\Sigma\, K_\theta^\lambda\, s'(\theta) = \{\mu\}'$ dans $\{\lambda\}$.

Exemple : soit $(\lambda) = (2\ 2\ 1)$ et $n \geq 6$

écrivons $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\} = \Sigma\, s'_\theta(\theta)\, A''_\theta$ ou $s'(\theta)$ est un polynôme en X_1, X_2, X_3. Par application de la définition de $h_j(\xi)\ \{\lambda\}$ nous avons :

$$h_1 \quad \{2\ 2\ 1\} = \{2^2\} + \{2\ 1^2\}$$
$$h_1^2 \quad \{2\ 2\ 1\} = 2\{2\ 1\} + \{1^3\}$$
$$h_1^3 \quad \{2\ 2\ 1\} = 2\{2\} + 3\{1^2\}$$
$$h_2 \quad \{2\ 2\ 1\} = \{2\ 1\}$$
$$h_2^2 \quad \{2\ 2\ 1\} = \{1\}$$
$$h_2h_1 \quad \{2\ 2\ 1\} = \{1^2\} + \{2\}$$
$$h_2^2h_1 \quad \{2\ 2\ 1\} = 1$$
$$h_2h_1^2 \quad \{2\ 2\ 1\} = 2\{1\}$$
$$h_0 \quad \{2\ 2\ 1\} = \{2\ 2\ 1\}$$

donc

$$\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ 2\ 2\ 1\} = S'(2\ 2\ 1) + S'(2\ 2\ 0)\ \{1\}'' + 2S'(2\ 1\ 1)\ \{1\}''$$
$$+ S'(2\ 1\ 0)\ [\{2\}'' + \{1\}''] + S'(2\ 0\ 0)\ \{2\ 1\}''$$
$$+ S'(1\ 1\ 1)\ [2\{2\}'' + 3\{1^2\}''] + S'(1\ 1\ 0)[2\{2\ 1\}'' + \{1^3\}'']$$
$$+ S'(1\ 0\ 0)\ [\{2^2\}'' + \{2\ 1^2\}''] + \{2^2\ 1\}''$$

Notons que la restriction $n>\ell(\lambda)$ n'est imposée que pour qu'aucun des S polynômes $\{\mu\}''$ ne soit identiquement nul.

Remarquons que le coefficient de $s'(\theta)$ est aussi le conjugué du résultat obtenu en opérant avec $a_{(\theta)}$ sur $\{\tilde{\lambda}\}$.

Théorème (6.3) - Règle de Murnaghan Newell [44] , [45] soient (λ) et (μ) deux partitions de longueur m et k $\quad k \leq m$

$$\{\lambda\} = \Sigma\ \underline{s}'(\theta)\ A''_{(\theta)} \qquad \text{où} \qquad s'(\theta) \text{ porte sur les } \underline{k} \text{ premières}$$

variables.

Alors

$$\{\lambda\}\ \{\mu\} = \Sigma\ \left(\frac{s'(\theta)\ A'(L_\mu)}{\Delta_k}\right) * A''_{(\theta)} \qquad (6.4)$$

où $A'(L_\mu) = A'(\mu_1+k-1,\ldots,\mu_k)$ et $\Delta_k = A'(k-1,\ldots,0)$.

L'opération étoile étant définie au chapitre II.

Démonstration

Pour trouver $\{\lambda\}\ \{\mu\}$ nous devons construire tous les S polynômes $\{\nu\}$ tels que $\{\xi:\lambda\}\ \{\nu\}$ contienne $\{\mu\}$.

En effet si $\{\lambda\}\ \{\mu\} = \Sigma\ g^{\nu}_{\lambda\mu}\ \{\nu\}$, $g^{\nu}_{\lambda\mu}$ est le coefficient de $\{\mu\}''$ dans $\{\xi:\lambda\}\ \{\nu\}$.

Ecrivons : $\qquad \{\lambda\} = \Sigma\ s'(\theta)\ A''_{(\theta)}$

si $\{\xi\ \lambda\}\ \{\nu\}$ contient $\{\mu\}''$ celui-ci est obtenu dans un terme du type

$(s'(\theta)\ \{\nu^k\}) * (A''_0\{\nu^{N-k}\})$ où l'on considère $s'(\theta)$ et A''_0 comme opérateurs sur les k premiers termes de (ν), respectivement les (N-k) restants.

donc

$\{\nu\}$ est obtenu dans l'expression $(s'(\theta)\ \{\mu\}) * A'_{(\theta)}$,

il suffit alors de remarquer que $s'(\theta)\ \{\mu\} = s'(\theta)\ A(L_\mu)/\Delta_k$

Exemple : Calculons {3 1} {7 2}.

écrivons :

$\{3\ 1\} = s'(3\ 1) + {}'(3\ 0)\ \{1\}'' + s'(2\ 2) + 2\ '(2\ 1)\ \{1\}''$

$+ s'(2\ 0)\ [\{2\}'' + \{1^2\}''] + s'(1\ 1)\ [2\{2\}'' + \{1^2\}'']$

$+ s'(1\ 0)\ [\{3\}'' + \{2\ 1\}''] + \{3\ 1\}''$

et multiplions chacun des s' par $\frac{A'(8\ 2)}{\Delta_2}$, puis effectuons C^*, cela donne pour le second terme :

$$(s'(3\ 0)\ x\ A'(8\ 2)) = (A(11\ 2) + A(8\ 5))\ \text{d'où}$$

$$(s'(3\ 0)\ x\ A'(8\ 2))/\Delta'_2 = \{10\ 2\}' + \{7\ 5\}'$$

donc le second terme contribue pour :

$$(\{10\ 2\} + \{7\ 5\}) * (\{1\}) = \{10\ 2\ 1\} + \{7\ 5\ 1\}$$

en faisant de même pour chacun des termes nous trouvons

$\{3\ 1\}\ \{7\ 2\} = \{1\ 0\ 3\} + \{8\ 5\} + \{1\ 0\ 2\ 1\} + \{7\ 5\ 1\} + \{9\ 4\} + 2\{9\ 3\ 1\}$

$+ 2\{8\ 4\ 1\} + \{9\ 2^2\} + \{7\ 4\ 2\} + \{9\ 2\ 1^2\} + \{7\ 4\ 1^2\}$

$+ 2\{8\ 3\ 2\} + \{8\ 3\ 1^2\} + \underline{\{8\ 2\ 3\}} + \{7\ 3^2\}$

$+ \{8\ 2^2\ 1\} + \{7\ 3\ 2\ 1\} + \underline{\{7\ 2\ 3\ 1\}}$

Les termes soulignés s'annulent.

Remarques

1) - Pour obtenir le produit $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}\ \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \mu\}$ il suffit d'interpréter les polynômes figurant dans le produit $\{\lambda\}\ \{\mu\}$ comme des $\{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \nu\}$ si $n > \ell(\lambda) + \ell(\mu)$ cela ne change pas le résultat - sinon certains des termes sont identiquement nuls.

2) - La décomposition du théorème (6.1) demande d'agir sur $\{\lambda\}$ par les $h_{(\theta)}$ (ξ) ou (ξ) sont en nombre $\ell(\lambda)$ - cela pose deux problèmes a) générer les h_J puis effectuer $h_J\{\lambda\}$ ce qui signifie des tests très nombreux. Ces deux opérations deviennent très vite difficile lorsque $\ell(\lambda)$ ou (et) $|\lambda|$ sont grands car $h_J(\xi)$ a pour nombre de variables $\ell(\lambda)$ et les termes (θ) de (6.2) sont tels que $(\theta_1,\ldots,\theta_k) \leq (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$. D'où l'idée d'utiliser le même procédé qu'en II(1.3), ce qui amène à reformuler la règle de M.N. de manière plus générale.

Théorème (6.4) -

Soient (λ) et (μ) deux partitions de longueur M et k_1, et $k_1 < k$, si $S'(\theta)$ et A''_θ désignent le polynôme monomial en les variables 1 à k_1 et A''_θ une somme de polynômes de Schur en les $(m+k-k_1)$ variables restantes Alors

$$\text{si} \quad \{\mu^{k_1}\} = \{\mu_1,\ldots,\mu_{k_1}\}, \{\mu^{k-k_1}\} = \{\mu_{k_1+1},\ldots,\mu_k\}$$

$$\{\lambda\}\{\mu\} = \Sigma \left(\frac{s'(\theta)\, A'(L_\mu^{k_1})}{\Delta^{k_1}} * (A''_\theta \{\mu^{k-k_1}\}) \right) \qquad (6.5)$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que la division par Δ^k dans (6.4), si l'on exprime le résultat en termes de polynômes de Schur est l'opération $A(L_1,\ldots,L_k) \to \{L_1-k+1,\ldots,L_k\}$. Nous pouvons effectuer cette transformation même si $(L_1,\ldots,L_k)$ n'est pas ordonné il suffira d'ordonner $\{L_1-k+1,\ldots,L_k\}$ suivant la règle (2.10) ce qui revient au même ; donc écrivons :

$$\frac{A'(L_\mu)S'(\theta)}{\Delta_k} = \Sigma \frac{S'(\theta_{L_1},\ldots,\theta_{i_{k_1}})A'(L_\mu^{k_1}))}{\Delta_{k_1}} * \frac{(S'(\theta_{i_{k+1}},\ldots,\theta_{i_k})A'(L_{\mu k-k_1})}{\Delta_{k-k_1}}$$

d'après II(1.4) et la remarque précédente.

Ecrivons :

$$\{\lambda\}\ \{\mu\} = \sum_{\theta, J=(i_1,\ldots,i_{k_1})} \frac{s'(\theta_J)A'(L_\mu^{k_1})}{\Delta_{k_1}} * \frac{s'(\bar{\theta}_J)A'(L_\mu^{k-k_1})}{\Delta_{k-k_1}} A''(\theta)$$

$$\{\lambda\}\ \{\mu\} = \sum_{(\alpha)} \left(\frac{s'(\alpha)A'(L_\mu^{k_1})}{\Delta^{k_1}}\right) * \left(\{\mu^{k-k_1}\}'' B''(\alpha)\right)$$

car $\sum_{\theta,l} s'(\bar{\theta}_I)\ A''(\theta)$ est $B''(\theta_I)$ le coefficient de $s'(\theta_I)$ dans $\{\lambda\}$, car la décomposition est unique.

Cette règle de produit réunit les mêmes avantages que pour les polynômes symétriques, avec le suivant : il est plus facile de générer $h_{(\theta)}\{\lambda\}$ si θ a k termes, et dans la multiplication à droite de * on peut tenir compte des particularités de $\{\mu^{k-k_1}\}$ cf. th. (6.1) et (6.2)

Réalisation de la multiplication MSCHUR

$\{\lambda\}$ et $\{\mu\}$ donnés, on teste si $\{\lambda\}$ ou $\{\mu\}$ est un h_j ou a_j si oui on effectue directement, sinon nouveau test $\ell(\lambda)$ ou $\ell(\mu) = 2$, si c'est le cas on développe le déterminant en (h) et on multiplie par $h_{(\theta)}$ $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ - sinon

a) - on calcule tous les (θ) de longueur k_1 inférieurs à $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k_1})$, que l'on stocke sous forme arborescente.

b) - on applique $\sum_{(\theta)\leq(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k_1})} h_{(\theta)}$ à $\{\lambda\}$ où à une somme de S polynômes représentés récursivement (on fait agir la liste récursive issue de a) sur cette liste représentant la somme de S polynômes suivant la règle (6.3)). On obtient une liste de la forme $(s'(\theta)A''_\theta,\ldots)$ ou A''_θ est stocké sous forme récursive.

c) - pour chacun des termes de cette liste on effectue MSP$(s'(\theta), A(L_\mu^{k_1}))$, et MSCHUR $(\{\mu^{k-k_1}\}, A''_\theta)$ qui sont obtenus sous forme récursive, donc on peut utiliser ETM.

d) - on ajoute les résultats partiels (sous forme récursive) par PMEL.

On verra en annexe quelques résultats.

IV D'AUTRES ASPECTS DES POLYNOMES DE SCHUR

Dans ce chapitre un peu fourre tout nous décrivons quelques propriétés des polynômes de Schur qui ne se situent pas dans le cadre de l'étude des polynômes symétriques.

Nous présentons d'abord deux méthodes de calcul numérique de ceux-ci, puis dans le second paragraphe nous montrons comment les polynômes de Schur du type $\{a, 1^b\}$ interviennent dans le calcul des puissances d'une matrice ; ensuite après une brève incursion dans la convexité au sens de Schur, nous montrons comment les utiliser pour calculer un polynôme d'interpolation, en particulier en cas d'instabilités numériques, et enfin dans le cinquième paragraphe, nous explicitons la relation entre-ceux-ci et les approximants de Padé, et tentons d'en déduire quelques bornes.

1 - CALCUL NUMERIQUE DES POLYNOMES DE SCHUR -

Donnons tout d'abord un théorème qui servira de base pour les relations entre polynômes de Schur.

Théorème (1.1) -
Soit A une matrice n x n $A\binom{i_1,\ldots,i_k}{j_1,\ldots,j_k}$ le mineur extrait de A, en enlevant les lignes $i_1,\ldots,i_k$ et les colonnes $j_1,\ldots,j_k$.
Alors

$$(1.1)\quad \det A \det A\binom{i_1,i_2}{j_1,j_2} = \det A\binom{i_1}{j_1} \det A\binom{i_2}{j_2} - \det A\binom{i_1}{j_2} \det A\binom{i_2}{j_1}$$

Ce théorème est un cas particulier d'un énoncé plus général liant le produit du déterminant d'une matrice, avec un de ses mineurs, aux produits d'autres mineurs le contenant [42]. Mais cette version nous suffira.

Nous allons appliquer deux fois ce théorème, d'abord au déterminant $\Delta(L_1,\ldots,L_n)$ puis au déterminant $\{\lambda/\mu\}$.

Proposition (1.2) -

Notons $\{\lambda\}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$ le polynôme de Schur basé sur

$X_1,\ldots,X_{i-1}$,,$X_{i_1-1},\ldots,X_{i_2-1}$, $X_{i_2+1},\ldots,X_n$ et

$(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j_1-1},\lambda_{j_1+1},\ldots,\lambda_{j_2-1},\lambda_{j_2+1},\ldots,\lambda_n)$ de même pour $\{\lambda\}^{i}_{j}$

Alors

$$\{\lambda\}\ \{\lambda\}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2} = (\{\lambda\}^{i_1}_{j_1}\{\lambda\}^{i_2}_{j_2} - \{\lambda\}^{i_1}_{j_2}\{\lambda\}^{i_2}_{j_1})/(x_{i_1}-x_{i_2}) \qquad (1.2)$$

Démonstration -

Appliquons le théorème (1.1) à $A(L_1,\ldots,L_n)$ que nous noterons A

$A^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ aura la même signification relativement à A que la notation $\{\lambda\}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$ relativement à $\{\lambda\}$; nous avons

$$AA^{i_1,i_2}_{j_1,j_2} = A^{i_1}_{j_1} A^{i_2}_{j_2} - A^{i_1}_{j_2} A^{i_2}_{j_1}$$

Notons : $\Delta = \prod_{i<j} (x_i-x_j)$ $\qquad \Delta^k = \prod_{\substack{i<\delta \\ i,j\neq k}} (x_i-x_j)$ $\qquad \Delta^{k_1,k_2} \prod_{\substack{i<j \\ i,j\neq k_1 \\ i,j\neq k_2}} (x_i-x_j)$

Nous avons : $\Delta\Delta^{k_1,k_2} = \Delta^{i_1}\Delta^{i_2}(x_{i_1}-x_{i_2})$

donc en divisant l'identité précédente par $\Delta\Delta^{i_1 i_2}$ nous trouvons le résultat annoncé.

Proposition (1.3)

Soient (λ) et (μ) deux partitions, posons :

$$(\beta) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{i_1}-1,\lambda_{i_1+1}-1,\ldots,\lambda_{i_2}-1,\lambda_{i_2+1}-2,\ldots,\lambda_n-2)$$

$$(\alpha) = (\mu_1,\ldots,\mu_{j_1}-1,\mu_{j_1+1}-1,\ldots,\mu_{j_2}-1,\mu_{j_2+1}-2,\ldots,\mu_n-2)$$

$$(\beta^1) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{i_1}-1,\lambda_{i_1+1}-1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\lambda_n-1)$$

$$(\beta^2) = (\lambda_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\lambda_{i_2}-1,\lambda_{i_2+1}-1,\ldots,\lambda_n-1)$$

$$(\alpha^1) = (\mu_1,\ldots,\mu_{j_1}-1,\mu_{j_1+1}-1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\mu_n-1)\ .$$

$$(\alpha^2) = (\mu_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\mu_{j_2}-1,\mu_{j_2+1}-1,\ldots,\mu_n-1)$$

Alors

$$\{\lambda/\mu\}\ \{\beta/\alpha\} = \{\alpha^1/\beta^1\}\ \{\alpha^2/\beta^2\} - \{\alpha^1/\beta^2\}\ \{\alpha^2/\beta^1\} \qquad (1.3)$$

Démonstration - Il suffit d'appliquer le théorème (1.1) et de vérifier que les déterminants sont de la forme indiquée.

Corollaire (1.4) -

$$\{\lambda\}\ \{\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}\} = \{\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}\ \{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}\} - \{\lambda_2-1,\ldots,\lambda_n-1\}\ \{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_{n-1}+1\} \qquad (1.4)$$

Démonstration - Prenons $\mu \equiv 0$ $\quad i_1 = j_1 = 1$ $\quad j_2 = i_2 = n$

Appliquons le théorème précédent et remarquons que :

$$(\beta^1) = (-1,\ldots,-1) \quad (\beta^2) = (o,\ldots,o) \quad (\alpha^1) = (\lambda_2-1,\ldots,\lambda_n-1)$$

$$(\alpha^2) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}) \quad \text{et que} \quad \{\alpha^1/\beta^1\} = \{\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$$

$$\{\alpha^2/\beta^1\} = \{\lambda_1+1,\ldots,\lambda_{n-1}+1\}$$

Note : En règle générale une relation entre S-polynômes donne la même relation entre les conjugués.

2 - PUISSANCE DE MATRICES -

Soit A une matrice nxn, $P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{n-i} \lambda^i$, son polynôme caractéristique, il est bien connu que $P(A) \equiv 0$, donc $\forall k \geq n$ A^k s'exprime comme combinaison linéaire des A^i $i=0,\ldots,n-1$.

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{L}^k_{n-j} A^j \qquad (2.1)$$

Les $\tilde{L}^k_j$ sont parfois appelés "polynômes généralisés de Lucas" [57]. Nous allons montrer que ce sont des S polynômes de la forme $\{n-k+1, 1^{n-j-1}\}$ au signe près.

Relation de récurrence entre les $\{a, 1^b\}$.

Il est immédiat que :

$$\{a,1^b\} = h_a\{1^b\} - \{a+1,1^{b-1}\} \qquad (2.2)$$

Posons : $\tilde{L}^k_{n-j} = (-1)^{n-j-1} L^k_{n-j}$

(2.1) s'écrit $A^k = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} L^k_{n-j} A^j$ (2.2)

Nous avons $L^n_{n-j} = a_{n-j} = \{1^{n-j}\}$

Supposons que : $L^\ell_{n-j} = \{k-\ell+1, 1^{n-j-1}\}$ $\quad \ell \leq k$, $k \geq n$

$$A^{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} L^k_{n-j} A^{j+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} [(-1)^{n-j-2} L^k_{n-j-1} + L^k_1 L^n_{n-j} (-1)^{n-j-1} A^j]$$

et $$A^{k+1} = \Sigma[(-1)^{n-j-1} L^{k+1}_{n-j} A^j + L^k_1 L^n_{n-j}]$$

si le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique les A^i $i=0,\ldots,n-1$ sont indépendants et nous pouvons identifier.

d'où $(-1)^{n-j-1} L_{n-j}^{k+1} = (-1)^{n-j-2} L_{n-j-1}^{k} + (-1)^{n-j-1} L_1^k L_{n-j}^n$

ce qui donne :

$$L_{n-j}^{k+1} = L_1^k L_{n-j}^n - L_{n-j-1}^k \qquad j=1,\ldots,n$$

d'après les hypothèses

$$L_1^k = \{k-n+1\} \qquad L_{n-j}^n = \{1^{n-j}\} \qquad L_{n-j-1}^k = \{k-n+1, 1^{n-j-2}\}$$

ce qui donne :

$$L_{n-j}^{k+1} = h_{k-n+1}\{1^{h-j}\} - \{k-n+1, 1^{n-j-2}\}$$

donc

$$L_{n-j}^{k+1} = \{k-n+2,\ 1^{n-j-1}\}$$

Il suffit de remarquer pour lever l'hypothèse de l'indépendance des A^i $i=0,\ldots,n-1$ que l'ensemble des matrices simples pour lequel l'identité est valable est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Théorème (2.1) -

si $\quad k \geq n$, $A^k = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j-1} \{k-n+1, 1^{n-j-1}\} A^j$

3 - CONVEXITE AU SENS DE SCHUR -

Soit $f(X_1,\ldots,X_n)$ une fonction symétrique en $X_1,\ldots,X_n$.

Définition - f est dite convexe au sens de Schur sur $I = \prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[$

si et seulement si quelque soit (x) et (y) dans I ; (x) ≤ (y) (ordre S.P.)

$$f(x) \leq f(y)$$

de même f est dite concave au sens de Schur si pour (x) et (y) dans I tels que :

$$(x) \leq (y) \qquad f(x) \geq f(y)$$

Une condition nécessaire et suffisante a été donnée par Ostrowski [47] pour qu'une fonction symétrique soit convexe au sens de Schur.

Théorème (3.1) -

Soit $F(x_1,\ldots,x_n)$ une fonction symétrique continue et douée des dérivés partielles continues du premier ordre dans $D = M]\ a,\ b[^n$,
Alors une CNS pour que F soit convexe au sens de Schur dans D, est que $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in D$

$$(x_2-x_1)\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) \geq 0$$

une CNS pour que F soit concave au sens de Schur dans D est que $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in D$

$$(x_2-x_1)\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) \leq 0$$

Lemme (3.2) -

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) h_p(x_1,\ldots,x_n) = (x_2 - x_1) \sum_{j=0}^{p-2} h_j(x_1,x_2) h_{p-j-2}(x_1,\ldots,x_n) \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) a_p(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 - x_2)\ a_{p-2}(x_3,\ldots,x_n) \tag{3.2}$$

Démonstration -

$$F(t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1-x_i t)} = \sum_{v=0}^{\infty} h_j(x_1,\ldots,x_n) t^{\delta}$$

appliquons $\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}$ aux deux membres de l'égalité

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) F(t) = tF(t)\ \left(\frac{1}{1-x_2 t} - \frac{1}{1-x_1 t}\right)$$

$$= (x_2 - x_1) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{p-2} h_j(x_1,x_2) h_{p-j-2}(x_1,\ldots,x_n) \right) t^{p+2}$$

en identifiant on trouve le résultat annoncé.
(3.2) se montre de la même façon.

Proposition (3.3) -

Si $x_i \in R^+$, $h_j(x_1,\ldots,x_n)$ est croissant et convexe au sens de Schur, et $a_j(x_1,\ldots,x_n)$ est croissant et concave au sens de Schur.
La démonstration est immédiate.

En outre nous avons d'après III(3.3)

$$h_{(\theta)} = \Sigma\, N_\lambda^\theta \{\lambda\}$$

et si les x_i sont positifs

$$(x_2-x_1)\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) h_{(\theta)} \geq 0$$

donc $\Sigma\ N_\lambda^\theta \{\lambda\}$ est convexe au sens de Schur sur R_+^n de même

$\sigma_{(\theta)} = \Sigma\, N_\lambda^\theta \{\tilde{\lambda}\}$ est concave au sens de Schur sur R_+^n.

De même en utilisant l'identité de Frobenius nous avons,

si $\Sigma i\alpha_i = k$ $\qquad S_{(\alpha)} = \Sigma_\lambda\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} \{\lambda\}$

Il est facile de vérifier que sur R_+^n $S_{(\alpha)}$ est aussi convexe au sens de Schur donc $\Sigma_\lambda\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} \{\lambda\}$ l'est aussi or $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = \pm\, \chi^{(\tilde{\lambda})}_{(\alpha)}$ [4], avec le signe plus si $\Sigma_k\, \alpha_{2k}$ est pair et moins sinon.

Ce qui donne $2\ \Sigma'_{(\lambda)}\ \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} (\{\lambda\} \pm \{\tilde{\lambda}\})$ cette dernière somme est prise sur l'ensemble Λ^+, tel que si Λ^- est l'ensemble des partitions conjuguées de celles de Λ^+
$\Lambda^+ \cap \Lambda^- = \emptyset$ et $\Lambda^+ \cup \Lambda^- = \Lambda$ l'ensemble des partitions de k.

Ceci suggère que les S polynômes présentent aussi des propriétés de concavité au sens de Schur, et plus particulièrement, du type suivant

si $(\lambda) > (\tilde{\lambda})$ alors $\{\lambda\}$ est convexe au sens de Schur sur R_+^n et concave au sens de Schur sur R_+^n, ce qui est vrai pour $(\lambda) = (n)$, et $(\tilde{\lambda}) = (1^n)$.

4 - INTERPOLATION -

Soient $\ell_0,\ldots,\ell_{n-1}$ n entiers ; $\ell_i < \ell_j \quad \ell_1 = o$; cherchons à interpoler aux points X_j les valeurs Y_j par un polynôme de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i x_1^{L_i}$

Il faut résoudre le système $A\tau = b$ ou A est la matrice (X^{P_j}) τ le vecteur des coefficients a_i, b le vecteur des y_i.

Posons $b^{[k]}$ $A^{[k]}$ les vecteurs et matrices obtenus de b et A au $k^{ème}$ pas du processus de triangularisation, nous avons le théorème.

Théorème (4.1) - [55]

$$a_{i_j}^{[2]} = \{x_1,\ x_i\ ;\ L_j-1\} \qquad i,j=2,\ldots,n$$

$$b_i^{[2]} = \frac{b_i-b_1}{x_i-x_1} \qquad i=2,\ldots,n \quad (4.1)$$

$$a_{i,j}^{[k]} = \{X_1,\ldots,x_{k-1},x_i\ ;\ \ell_1,\ \ell_2,\ldots,\ell_{k-2},\ \ell_j-1\} \qquad i,j=k,\ldots,n$$

$$k=3,\ldots,n$$

$$b_i^{[k]} = \frac{b_i^{[k-1]}\{x_1,\ldots,x_{k-1};\ell_1,\ldots,\ell_{k-2}\} - b_{k-1}^{[k-1]}\{x_1,\ldots,x_{k-2},x_i;\ell_1,\ldots,\ell_{k-2}\}}{(x_i-x_{k-1})\ \{x_1,\ldots,x_{k-2};\ell_1,\ldots,\ell_{k-3}\}}$$

$$i = 3,\ldots n, \qquad k = 3,\ldots,n$$

La matrice triangulaire supérieure s'écrit :

$$R = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{\ell_1} & x_1^{\ell_2} & x_1^{\ell_{n-1}} \\ & \{x_1,x_2;\ell_2\} & \{x_1,x_2;\ell_2\} & \{x_1,x_2;\ell_{n-1}\} \\ & & \{x_1,x_2,x_3;\ell_1,\ell_2\} & \\ & 0 & & \\ & & & \\ & & & \{x_1,\ldots,x_n;\ell_1,\ldots,\ell_{n-1}\} \end{vmatrix}$$

Démonstration -

Il suffit d'utiliser le théorème (1.1).
On sait en outre que si les x_i sont > 0, tous les termes diagonaux le seront car $\{X_1,\ldots,X_j\ ;\ \lambda\}$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de $s(\mu)$ qui sont positifs.
Cette méthode est intéressante à utiliser si l'on a des formules de récurrences pour les $\{X_i\ ;\ \lambda\}$ stables, on pourra en trouver une dans [55].
Une autre méthode est la suivante renumérotons les L_i de telle façon qu'ils soient en ordre décroissant $L_i > L_i+1$. Posons de nouveau A et Z les matrices correspondantes. Nous savons que $\det A = \{X_1,\ldots,X_n\ ;\ \lambda\}$ ou $\lambda_i = L_i - n+i$.
Lors de la démonstration du théorème III(2.7) nous avons montré que si B est la matrice de Van der Monde, et p le rang de (λ) et

$$(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_p \end{pmatrix}$$

$AB^{T^{-1}} = V$ est la matrice (nxn) composée d'un bloc pxp dont les éléments sont $\{a_i+1,\ 1^{b_j}\}$ et d'un bloc (n-p)(n-p) qui est l'identité

$$V = \begin{array}{c} \\ p \end{array} \begin{array}{c} \overset{p}{} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \{a_{i+1},1^{b_j}\} & 0 \\ \hline 0 & I_{n-p} \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad (4.2)$$

Posons donc $B^{T^{-1}} Z = S$

Théorème (4.2) -

Résoudre $A\ Z = b$ est équivalent à résoudre $V\ S = b$ puis effectuer $B^T\ S$ (4.3)

Les éléments $\{a_{i+1},1^{b_j}\}$ peuvent se calculer par les formules III(4.8) ou (2.2).

5 - APPROXIMANTS DE PADE ET S POLYNOMES -

Soit une fonction H(t) développable en série au voisinage de zéro

$$H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \, t^i$$

pour tout couple d'entier L, M l'approximant de Padé [L, M] est la fraction rationnelle :

$$[L, M] = P_L^M / Q_M^L \qquad \text{telle que}$$

$$P \begin{cases} H(t) - [L, M] = O(x^{L+M+1}) \\ d^o P_L^M \leq L \qquad d^o Q_M^L \leq M \quad \text{et} \quad Q_M^L(o) = 1 \end{cases}$$

On montre [1], [9] que l'approximant de Padé, s'il existe est l'unique solution de (P).

Dans [32] Littlewood propose une généralisation des approximants de Padé, qui permet d'annuler i coefficients du numérateur. Il est ensuite facile de se donner la même liberté pour les coefficients du dénominateur ; le cas des approximants de Padé étant celui ou on choisit d'annuler les coefficients de plus haut degré des numérateurs et numérateurs. Cette "généralisation" bien que de peu d'utilité dans la pratique a le mérite d'être "fermée" pour la multiplication.

Notons $\{\lambda/\mu\}$ le déterminant de la matrice $\{h_{\lambda_i - \mu_j + j - i}\}$ et supposons que

$H(o) = 1$. Choisissons un (i+1)-uple d'entiers ordonnés :

$(\mu) = (\mu_o, \ldots, \mu_{i-1}, o)$ et un i-uple ordonné

$(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i)$ tel que $\lambda_j \geq \mu_{j-1}$

et posons :

$$G^{(\lambda)}_{(\mu)} = \det \begin{vmatrix} x^{\mu_o+i}, & x^{\mu_1+i-1} & x^{\mu_{i-1}+1}, & 1 \\ h_{\lambda_1-\mu_o-1}, & h_{\lambda_1-\mu_o}, \ldots, & h_{\lambda_1-\mu_{i-1}+i-2}, & h_{\lambda_1+i-1} \\ & & & \\ h_{\lambda_i-\mu_o-i}, & & & h_{\lambda_i} \end{vmatrix} \qquad (5.1)$$

Posons : $P^{(\mu)}_{(\lambda)} = \sum_{n=o}^{\lambda_1+i-1} \{n-i, \lambda_1, \ldots, \lambda_i/\mu_o, \ldots, \mu_{i-1}, o\}\, x^n$ (5.2)

Théorème (5.1)

$$H(t) \cdot G^{(\lambda)}_{(\mu)} - P^{(\mu)}_{(\lambda)} = \sum_{n=\lambda_1}^{\infty} \{n, \lambda_1, \ldots, \lambda_i/\mu_o, \ldots, \mu_{i-1}, o\}\, x^{n+i} \qquad (5.3)$$

et si $G^{(\lambda)}_{(\mu)}(o) \neq o$

$\dfrac{G^{(\lambda)}_{(\mu)}}{G^{(\lambda)}_{(\mu)}(o)}$ et $\dfrac{P^{(\mu)}_{(\lambda)}}{G^{(\lambda)}_{(\mu)}(o)}$ sont les solutions uniques du

problème (P').

(P') Trouver P et Q de degré P_1+i-1, μ_o+i tels que les coefficients de Q de degré différent de μ_j+i-j $j=o,\ldots,i$ (en posant $\mu_i=o$) et ceux de P de degré λ_1+i-1, λ_2+i-2, ..., λ_i soient nuls et

$$H(t) - \frac{P}{Q} = O(x^{\lambda_{1+i}}) \quad \text{avec } q(o) = 1$$

Démonstration -

Pour montrer (5.3) il suffit de vérifier en développant $G^{(\lambda)}_{(\mu)}$ par rapport à la première ligne et en effectuant $H\, G^{(\lambda)}_{(\mu)}$ que le coefficient de x^n est $\{n-i, \lambda_1, \ldots, \lambda_i / \mu_o, \ldots, \mu_{i-1}, o\}$

Démontrons maintenant le reste du théorème ; tout d'abord, il est évident d'après la définition de $G^{(\lambda)}_{(\mu)}$ que les coefficients de $d^o \neq \mu_j+i-j$ sont nuls. Pour $P^{(\mu)}_{(\lambda)}$ on remarquera que si $n-j = \lambda_{j-j}\ \{n-i,\lambda_1,\ldots,\lambda_i/\mu_o,\ldots,\mu_{i-1},0\}$ est nul car la matrice correspondante a deux lignes égales.

D'autre part si $q(o) \neq o$

(5.4) $\quad H - \frac{P}{Q} = O(x^{\lambda_1+i})$ est équivalent à

$HQ - P = O(x^{\lambda_1+i})$, compte tenu des conditions sur les coefficients, nous avons à résoudre un système

$$\sum_{k=1}^{\mu_o+i} q_k\, h_{j-k} = -h_k \quad \text{pour } k = \lambda_{j-j} \quad \text{et} \quad j = 1,\ldots,i$$

Les q_k étant nuls si $k \neq \mu_j+i-j$ nous avons à résoudre un système linéaire de i équations à i inconnues dont le déterminant est $G^{(\lambda)}_{(\mu)}(0)$ si celui-ci est non nul nous pouvons résoudre, les q_k sont identiques aux coefficients de degré correspondant de $G^{(\lambda)}_{(\mu)}$ (par la règle de Cramer), il faut maintenant vérifier que les coefficients de P donnés par $\sum_{k=o}^{\mu_o+i} q_k\, h_{j-k} = P_k$ peuvent être choisis nuls pour cela prenons $q(o) = G^{(\lambda)}_{(\mu)}(0)$, les P_k sont alors donnés par (5.2) et vérifient bien la condition imposée.
$G^{(\lambda)}_{(\mu)}(0) = q(0)$ est différent de zéro ; nous pouvons diviser par celui-ci P et Q, le quotient ne change pas, donc (5.4) est vérifié par P/Q(0), Q/Q(0) dont le coefficient de d^o 0 est 1 et d'après la construction faite il est unique, puisque le seul degré de liberté était le choix de Q(0).

Si $\mu_o = \text{---} = \mu_{i-1} = o$ on retrouve la généralisation de Littlewood ; si en outre $\lambda_1 = \lambda_2 = \text{---} = \lambda_i = r+1$, on retrouve l'approximant de Padé [r, i], ce choix annulant les coefficients de P de degré supérieure à r.

Exemple :

$i = 2$ $\quad \mu_o = 2,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = o$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$

$$G^{(\lambda)}_{(\mu)} = \det \begin{vmatrix} t^4 & t^2 & 1 \\ 1 & h_2 & h_4 \\ 0 & 1 & h_2 \end{vmatrix} = t^4(h_2^2 - h_4) - t^2 h_2 + 1$$

$$G^{(\lambda)}_{(\mu)}(t)\ H(t) = 1 + h_1 t + (h_3 - h_2 h_1)t^3 + (h_5 - h_2 h_3 + h_1(h_2^2 - h_4))t^5 + \ldots$$

Nous avons $P = 1 + h_1 t + (h_3 - h_2 h_1)t^3 + 0t^4$ c'est un polynôme de degré 4 ayant ses coefficients de degré $4 = \lambda_1 + i - 1$ et $\lambda_2 + i - 2$ nuls

et le coefficient de x^3 est $\det \begin{vmatrix} 1 & h_2 & h_4 \\ 0 & h_1 & h_3 \\ 0 & 1 & h_2 \end{vmatrix}$

celui de x^5 est $\det \begin{vmatrix} h_1 & h_3 & h_5 \\ 1 & h_2 & h_4 \\ 0 & 1 & h_2 \end{vmatrix}$

Dans ce qui suit nous nous limiterons aux approximants de Padé, c'est-à-dire au cas :

$(\mu) \equiv (0) \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_i = r+1$

Posons $\quad G^{(\lambda)}_{(\mu)} = Q^r_i \quad$ et $\quad P^{(\mu)}_{(\lambda)} = P^i_r$

Nous avons $\quad Q^r_i = \sum_{k=o}^{i} (-1)^k x^{i-k} \{r+1\}^{i-k}, r^k\}$

et $\quad P^i_r = \sum_{i=o}^{r} (-1)^i \{r^i, n\} x^n \qquad (5.5)$

Les fonctions $\{\lambda\}$ et $\{\lambda/\mu\}$ définies dans ce paragraphe sont les S-polynômes associés à H(t), nous allons maintenant montrer qu'ils ont les mêmes propriétés que ceux associés à :

$$F(t) = \frac{1}{\prod(1-x_i t)} ,$$

c'est-à-dire qu'ils s'expriment de la même façon en fonction des coefficients de $1/H(t)$, $H'(t)/H(t)$, des S-polynômes de rang 1 $\{a, 1^b\}$, et des racines d'un polynôme convenablement choisi.

Remarquons avec Littlewood qu'il existe toujours un polynôme Q de degré n ; $n \geq r+i+1$ et vérifiant :

$$QH - 1 = O(x^n)$$

posons $Q = \prod_{i=1}^{n} (1-x_i t)$.

Les coefficients des approximants de Padé de H (et aussi des approximants de Padé "généralisés") de degré inférieur ou égal à r+i, sont construits à partir des r+i+1 premiers termes de H, donc de 1/Q, ils s'expriment donc sous la forme d'un quotient de deux déterminants en les x_i ; de même Q coïncide avec 1/H jusqu'à l'ordre n donc si l'on écrit :

$$\frac{1}{H} = \sum^{n-1} (-1)^i a_i t^i + O(x^n)$$

les a_i peuvent s'interpréter comme les polynômes symétriques élémentaires en les x_i, le théorème III(2.3) est donc valable.

Pour montrer que le théorème III(2.5) l'est aussi, il faut vérifier que si $(\alpha) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{ri+k})$ $k \leq r$ est tel que $\exists j \geq 1$; $\alpha_{r+i+j} = 0$

alors : $\chi_{(\alpha)}^{(r^i,k)} = 0$, en effet

Q'/Q ne coïncide avec H'/H qu'à l'ordre n-1 et l'identité III(2.5) utilise pour $\{r^i,k\}$ les coefficients de Q'/Q jusqu'à l'ordre ri+k, il faut que leur contribution soit nulle.

L'identité (5.6) se vérifie immédiatement en utilisant la règle de Murnaghan pour le calcul des caractères. Nous avons donc montré que les polynômes de Schur associés à H ont les mêmes propriétés que ceux construits à partir de F.

Utilisons le théorème III(2.5) pour donner une majoration de $\{\lambda\}$.

Proposition (5.2) -

Si (λ) est une partition de la forme (r^i, k) ou (μ, r^i) ou encore $((r+1)^{i-k}, r^k)$ et si $|\lambda| = n$

Alors

$$|\{\lambda\}| \leq k_s \operatorname{Max}_{\substack{(\alpha)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \\ \sum_{i=1}^{s} i\,\alpha_i = n}} |S_{(\alpha)}| \qquad (5.7)$$

ou

$$k_s = \Big(\frac{1}{n} \sum_{\substack{(\alpha) \\ \sum_{i=1}^{s} i\,\alpha_i = n}} c(\alpha)\Big)^{1/2}$$

et $$s = \begin{cases} r + i & \text{si } (\lambda) = (r+k) & k \leq r \\ \mu + i & \text{si } (\lambda) = (\mu, r^i) & \mu \geq r \\ r + i & \text{si } (\lambda) = ((r+1)^{i-k}, r^k) & k \leq i \end{cases}$$

Nous avons $\{\lambda\} = \frac{1}{n!} \sum c(\alpha)\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\, S(\alpha)$ et si (α) est tel que $\alpha_j \neq 0$, $j > s$ $\chi^{(\lambda)}_{(\alpha)} = 0$ donc $\{\lambda\} = \frac{1}{n!} \Sigma^s c(\alpha)\, \chi^{(\lambda)}_{(\alpha)}\, S(\alpha)$

ou Σ^s signifie que l'on somme sur les (α) de la forme :

$$(\alpha) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_s, 0, \ldots, 0) : \sum_{i=1}^{s} i\,\alpha_i = n$$

et d'après l'inégalité de Schwartz, (les $c(\alpha)$ étant positifs).

$$|\{\lambda\}| \leq \frac{1}{n!} \Big(\Sigma^s c(\alpha)\, \chi^{(\lambda)2}_{(\alpha)}\Big)^{1/2} \Big(\Sigma^s c(\alpha)\, S^2_{(\alpha)}\Big)^{1/2}$$

d'après le théorème III(2.5) le premier terme :

$$\Big(\Sigma^s c(\alpha)\, \chi^{(\lambda)2}_{(\alpha)}\Big)^{1/2} = (n!)^{1/2} \quad \text{donc}$$

$$|\{\lambda\}| \leq (n!)^{-1/2} \left(\Sigma^{s} c(\alpha)\ S^2_{(\alpha)}\right)^{1/2}$$

Posons $|S_{(MAX)}| = \underset{\substack{(\alpha)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,0,\ldots,0) \\ \sum i\,\alpha_i = n}}{\text{Max}} |S_{(\alpha)}|$

Les $c(\alpha)$ sont positifs donc :

$$(n!)^{-1/2} \left(\Sigma^{s} c(\alpha)\ S^2_{(\alpha)}\right)^{1/2} \leq |S_{(MAX)}| k_s$$

Cherchons maintenant à majorer k_s soit $X^{(\lambda)}_{(\alpha)}$ un caractère, nous avons III(2.5) ou III(4.2), $\sum_{(\alpha)} c(\alpha)\ X^{(\lambda)2}_{(\alpha)} = n!$ prenons $(\lambda) = (n)$ il est immédiat d'après la règle de Murnaghan que $X^{(n)}_{(\alpha)} = 1 \quad \forall(\alpha)$, ce qui donne $\sum_{(\alpha)} c(\alpha) = n!$. Les $c(\alpha)$ sont positifs donc

$$\frac{1}{n!} \Sigma^{s} c(\alpha) < 1 \qquad (5.8)$$

C'est une première majoration pour k_s, mais elle ne tient pas compte de la différence n-s. Si par exemple $(\lambda) = (r^{i+1})$ avec r = 5, i = 4 la somme $\Sigma^{s} c(\alpha)$ est prise sur moins de 1000 (α) au lieu de 1958 pour $\Sigma\, c(\alpha)$.

Les k_s dépendent de s mais aussi de n, notons les $k_s(n)$ et cherchons leur fonction génératrice, pour cela calculons le développement en série de :

$$G(t) = e^{t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^s}{s}}$$

$$G(t) = \prod_i e^{\frac{t^i}{i}} = \prod_i \sum_{k_i=0}^{\infty} \frac{t^{k_i i}}{i^{k_i}\, k_i!}$$

$$= \sum_{p=o}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_s \\ \sum_{i=1}^{s} i_k i = n}} \frac{p!}{1^{k_1},\ldots,s^{k_s}\, k_1!,\ldots,k_s!}\, t^p$$

qui s'écrit encore :

$$G(t) = \sum_{p=o}^{\infty} k_s^2(p)\, t^p \qquad (5.9)$$

G(t) est donc la fonction génératrice cherchée.

Théorème (5.3) -

$$k_s^2(p) \leq \frac{s!}{p!} [(s+1)\ s]^{1/2} \times \prod_{k=s+1}^{p-1} (s+k^2)^{1/2}$$

Démonstration

Nous avons G(o) = 1, et $\frac{G'}{G} = 1 + t + \ldots + t^{s-1}$ et nous savons que les S-polynômes associés à G s'expriment en fonction des coefficients de G'/G de la même façon que ceux de $Q = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1-x_i t)}$, (pour n assez grand) en fonction de Q'/Q. Le S polynôme qui nous intéresse est $k_s^2(p) = \{P\}_G$

Si $Q = \sum_{i=o}^{\infty} h_i\, t_i$, nous avons donc $\{P\}_G = h_p$, or il est bien connu (on peut le montrer facilement à partir de I(4.10)) que :

$$h_p = \frac{1}{p!} \text{ dét} \begin{vmatrix} S_1 & -1 & & \\ S_2 & & -2 & 0 \\ & & & \\ & & & -p+1 \\ S_p & & S_2 & S_1 \end{vmatrix} . \qquad (5.10)$$

Si Q est de degré plus grand que s, nous avons : $S_i = 1 \qquad i=1,\ldots,s-1.$

donc :

$$k_s^2(p) = \frac{1}{p!} \text{ dét } \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & & & & 0 & \\ 1 & & & & & \\ & & & & & -p+1 \\ & 0 & & 1 & & 1 \\ & & & & s & \end{vmatrix}$$

Appelons A la matrice qui figure dans le second membre, on vérifie facilement que $B = A\,A^T$ est définie positive. Nous pouvons donc utiliser le théorème de Hadamard [37].

$$\det(A\,A^T) \leq \prod b_{ii}$$

Les b_{ii} sont donnés par $b_{ii} = \begin{cases} i(i+1) & \text{si } i \leq S \\ s + i^2 & \text{si } s < i < p \\ s & \text{si } i = p \end{cases}$

$$\prod b_{ii} = (s!)^2\ (s+1)^s \prod_{i=s+1}^{p-1} [s + i^2]$$

$$\text{donc } \det A \leq s!\ (s+1)^{s/2} \left[\prod_{i=s+1}^{p-1} [s+i^2]\right]^{1/2}$$

$$\text{et } k_s^2(p) \leq \frac{s!}{p!}\ (s+1)^{s/2} \left[\prod_{i=s+1}^{p-1} [s+i^2]\right]^{1/2}$$

Une autre méthode pour améliorer cette borne serait d'utiliser les majorations données par Marcus [37] et Freese [22] pour les fonctions généralisées de matrices, qui sont des polynômes de Schur, pour un choix convenable de la matrice.

Cas d'une fonction méromorphe -

Lorsque H est méromorphe ayant un nombre fini p de pôles on connaît une majoration asymptotique des coefficients de Q_i^r lorsque i>p et i>r [1]. Dans ce qui suit nous établissons une majoration pour les coefficients de Q_j^r, et ceux du reste (i.e. de $Q_i^r H - P_r^i$), en fonction des pôles de H, dans le cas où ceux-ci sont simples.

Lemme 5.4 -

Si (λ) et (μ) sont deux partitions de longueur inférieure ou égale à n

Alors

$$\{X_1,\ldots,X_n,\lambda\}\{X_1,\ldots,X_n;\mu\} = \frac{\det \begin{vmatrix} S_{L_1+L'_1},\ldots, S_{L_1+L'_n} \\ \\ S_{L_n+L'_1},\ldots, S_{L_n+L'_n} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} S_{2n-2},\ldots\ldots\ldots, S_{n-1} \\ \\ S_{n-1},\ldots\ldots\ldots, S_0 \end{vmatrix}} \qquad (5.11)$$

avec $S_j = \sum_{i=1}^{n} X_i^j$

$L_i = \lambda_i + n-i$

$L'_i = \mu_i + n-i$

Démonstration

C'est évident, il suffit de se reporter à la définition et de multiplier les matrices intervenant au numérateur et au dénominateur.

Proposition (5.5) -

Soit (λ) une n-partition de k

Alors

$$|\{X_1,\ldots,X_n;\lambda\}| \leq \max_{\substack{\sigma \in \Pi_n \\ (P)\leq(\lambda)}} |X_1^{p_{\sigma(1)}},\ldots,X_n^{p_{\sigma(n)}}|\{1,\ldots,1;\lambda\} \qquad (5.12)$$

Démonstration

Nous savons que $\{X_1,\ldots,X_n;\lambda\} = \sum_{(p)\leq(\lambda)} a_p S(p)$ avec $a_p > 0$

$$|S(p)| \in \max_{\sigma \in \Pi_n} |X_1^{p_{\sigma(1)}} .---. X_n^{p_{\sigma(n)}}| \times k_{(p)}$$

où $k_{(p)} = s(1,\ldots,1;(p))$

$$\text{donc } |\{X_1,\ldots,X_n;\lambda\}| \leq \max_{\substack{\sigma \in \Pi_n \\ (p)\leq(\lambda)}} |X^{p_{\sigma(1)}} .---. X_n^{p_{\sigma(n)}}| \sum_{(p)\leq(\lambda)} a_p \cdot k_{(p)}$$

d'où le résultat.

Théorème (5.6) -

Si (λ) est une partition de longueur j telle que $\lambda_j \geq j$

Alors

$$|\{\lambda\}| \leq R\Delta^2 M_\lambda M(\lambda,\sigma,\rho) \sum_{\ell=o}^{p} c_p^\ell \sum_{\substack{o\leq k_1<\ldots<k_\ell\leq j-1 \\ o\leq k_{\ell+1}<\ldots<k_j \\ k_j\neq k_j}} \sum_{\substack{(\delta),(\gamma) \\ j-1\ i_1<\ldots<i_\ell\leq j-1}} \{1,\ldots,1;\delta\}\{1,\ldots,1;\gamma\} \qquad (5.12)$$

où R est le max des produits des résidus, Δ le max du produit des différences $u_i - u_j$, $M(\lambda,\sigma,\rho)$ explicité dans la démonstration ne dépend que de la série $\sum b_i x^i$ et de ρ, $M_\lambda = \max_\ell \max_{n_1,\ldots,n_\ell} \max_{(\delta),(\gamma)} \max_{\substack{\sigma,\tau\in M_\ell \\ p\leq\delta \\ q\leq\gamma}} |u_{n_1}^{p_{\sigma(1)}+q_{\tau(1)}},---.u_{n_\ell}^{p_{\sigma(\ell)}+q_{\tau(\ell)}}|$

Démonstration

Posons $u_i = 1/\alpha_i$

Il est analytique sur le disque $|x| < \alpha_p$ et nous pouvons l'écrire :

$$H(x) = \frac{r_1}{(1+u_1 x)} + \ldots + \frac{r_p}{(1-u_p x)} + g(x)$$

où $\quad g(x) = \sum_{i=o}^{\infty} b_i x^i$

donc $\quad H(x) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i x^i \qquad$ avec $\qquad c_i = \sum_{k=1}^{p} u_k^i + b_i$

en outre $|b_i| < \sigma\rho^i \qquad$ avec $\qquad \rho < |u_1|$

Il faut donc majorer :

$$\{\lambda\} = \det \begin{vmatrix} c_{\lambda_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, c_{\lambda_1+j-1} \\ \\ \\ \\ c_{\lambda_j-j+1}, \ldots\ldots\ldots, c_{\lambda_j} \end{vmatrix}$$

posons $S'_k = \sum_{i=1}^{p} r_i u_1^k \qquad , \qquad c_k = b_k + S_k$

développons $\{\lambda\}$ en somme de déterminants

$$\{\lambda\} = \sum_{\ell=o}^{j} \sum_{o<k_1<\ldots<k_\ell\leq j-1} \epsilon \det \begin{vmatrix} S'_{\lambda_1+k_1}, \ldots\ldots\ldots, S'_{\lambda_1+k_\ell} & \cdot b_{\lambda_1+k_{\ell+1}}, \ldots\ldots\ldots, b_{\lambda_1+k_j} \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ S'_{\lambda_j-j+1+k_1}, \ldots, S'_{\lambda_j-j+k_{\ell+1}} & \cdot b_{\lambda_j-j+1+k_{\ell+1}}, \ldots, b_{\lambda_j-j+1+k_j} \end{vmatrix}$$

avec $\epsilon = \pm 1$

Notons $[\lambda_1+k_1,\ldots,\lambda_1+k_\ell:\lambda_1+k_{\ell+1},\ldots,\lambda_1+k_j]$ le déterminant de droite, et développons le suivant la règle de Laplace.

$$[\lambda_1+k_1,\ldots,\lambda_1+k_\ell:\lambda_1+k_{\ell+1},\ldots,\lambda_1+k_j] =$$

$$\sum_{\substack{0\le i_1<\ldots<i_\ell\le j-1 \\ 0\le i_{\ell+1}<\ldots<i_j\le j-1}} \varepsilon_{i_1,\ldots,i_j} \det \begin{vmatrix} S'_{\lambda_{i_1}-i_1+k_1},\ldots,S'_{\lambda_{i_1}-i_1+k_\ell} \\ \\ S'_{\lambda_{i_\ell}-i_\ell+k_1},\ldots,S'_{\lambda_{i_\ell}-i_\ell+k_\ell} \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} b_{i_{\ell+1}-i_{\ell+1}+k_{\ell+1}},\ldots,b_{i_{\ell+1}-i_{\ell+1}+k_j} \\ \\ b_{i_j-i_j+k_{\ell+1}},\ldots,b_{i_j-i_j+k_j} \end{vmatrix}$$

majorons les déterminants en b_i par :

$$(j-\ell)!\ \sigma^{j-\ell}\rho \left(\sum_{k=\ell+1}^{j} \lambda_{i_k-i_k} + \sum_{\nu=\ell+1}^{j} k_\nu \right)$$

posons $\mu_k = \lambda_{i_k-i_k}$, les déterminants en S'_k s'écrivent :

$$\det \begin{vmatrix} S'_{\mu_1+k_1},\ldots,S'_{\mu_1+k_\ell} \\ \\ S'_{\mu_\ell+k_1},\ldots,S'_{\mu_\ell+k_\ell} \end{vmatrix}$$ qui est égal à 0

si $\ell > p$, sinon ce déterminant s'écrit :

$$\sum_{\sigma \in \Pi_p} r_{\sigma(1)},\ldots,r_{\sigma(\ell)} \quad \det \begin{vmatrix} u_{\sigma(1)}^{\mu_1+k_1}, \ldots\ldots\ldots, u_{\sigma(\ell)}^{\mu_1+k_\ell} \\ \\ u_{\sigma(1)}^{\mu_\ell+k_1}, \ldots\ldots\ldots, u_{\sigma(\ell)}^{\mu_\ell+k_\ell} \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{1\le n_1<\ldots<n_\ell\le j} r_{n_1}\cdot\text{----}\cdot r_{n_\ell} \sum_{\tau\in\Pi_\ell} \det \begin{vmatrix} u_{\tau(n_1)}^{\mu_1+k_1}, \ldots\ldots\ldots, u_{\tau(n_\ell)}^{\mu_1+k_\ell} \\ \\ u_{\tau(n_1)}^{\mu_\ell+k_1}, \ldots\ldots\ldots, u_{\tau(n_\ell)}^{\ell+k_\ell} \end{vmatrix} \tag{5.14}$$

(5.15)

(5.15) est égal à :

$$\det \begin{vmatrix} S_{\mu_1+k_1}^{n_1\ldots n_\ell}, \ldots\ldots\ldots, S_{\mu_1+k_\ell}^{n_1\ldots n_\ell} \\ \\ S_{\mu_\ell+k}^{n_1\ldots n_\ell}, \ldots\ldots\ldots, S_{\mu_\ell+k_\ell}^{n_1\ldots n_\ell} \end{vmatrix} \quad \text{ou } S_k^{n_1,\ldots,n_\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} U_{n_i}^k$$

ce dernier déterminant s'écrit d'après le lemme (5.4)

$\pm \{\delta\}\ \{\gamma\}\ \Delta_\ell^2$ ou $\{\delta\}$ et $\{\gamma\}$ désignent les polynômes de Schur en les indéterminées $u_{n_1},\ldots,u_{n_\ell}$, Δ_ℓ le vandermonde en ces mêmes indéterminées

et $(\delta) = (\lambda_{i_1} - i_1 - \ell + 1, \ldots\ldots\ldots, \lambda_{i_\ell} - i_\ell)$

$(\gamma) = (k_\ell - \ell + 1, \ldots\ldots\ldots, k_2 - 1, k_1)$

ces termes sont positifs car :

$\lambda_{i_1} - i_1 > \lambda_{i_2} - i_2 > \ldots > \lambda_{j-j} \geq 0$ par hypothèse

$j-1 \geq k_\ell > \qquad\qquad > k_2 \; k_1 \geq 0$

donc (5.15) en valeur absolue est majoré par :

$$\Delta_\ell^2 \, M^\ell_{p,\gamma} \{\underbrace{1,\ldots,1}_{\ell} ; \delta\} \{1,\ldots,1 ; \gamma\}$$

$$\text{ou } M^\ell_{(\delta,\gamma)} = \max_{\sigma\in\Pi_\ell} \left| u_{n_1}^{p_{\sigma(1)}}, \ldots, u_{n_\ell}^{p_{\sigma(\ell)}} \right| \max_{\tau\in\Pi_\ell} \left| u_{n_1}^{q_{\tau(1)}} \cdot \ldots \cdot u_{n_\ell}^{q_{\tau(\ell)}} \right|$$

$$= \max_{\sigma,\tau\in\Pi_\ell} \left| u_{n_1}^{p_{\sigma(1)}+q_{\tau(1)}} \cdot \ldots \cdot u_{n_\ell}^{p_{\sigma(1)}+q_{\tau(\ell)}} \right|$$

$$(p)\le(\delta)$$

$$(q)\le(\gamma)$$

Posons M_λ le maximum des $M^\ell_{(\delta,\gamma)}$ sur tous les choix de $n_1,\ldots,n_\ell$, de ℓ, et de (δ), (γ) qui interviennent dans le développement de $\{\lambda\}$.

$$R = \max_{k=1,\ldots,p} \prod_{i=1}^{k} r_{ni}$$

$$M(\lambda,\rho,\sigma) = \max_{\ell=0,\ldots,p} \sigma^{j-\ell} \max_{\substack{i_1,\ldots,i_\ell\in\{0,j-1\} \\ k_1,\ldots,k_\ell\in\{0,j-1\}}} \rho^{\sum_{j=1}^{\ell} k_j+\lambda i_j-i_j}$$

$$\Delta = \max_{\ell} \max_{n_1,\ldots,n_\ell} \prod_{i<j\le\ell} (u_{n_i}-u_{n_j})$$

(5.14) est majoré en valeur absolue par :

$$C_p^\ell \, R \cdot \Delta^2 \cdot M_\lambda \{1,\ldots,1,\delta\} \{1,\ldots,1,\gamma\} \qquad \text{donc}$$

$$\left| [\lambda_1+k_1,\ldots,\lambda_1+k_\ell : \lambda_1+k_{\ell+1},\ldots,\lambda_1+k_j] \right| \le$$

$$C_p^\ell \, R \, \Delta^2 \, M_\lambda \, M(\lambda,\sigma,\rho) \sum_{(\delta)=(\lambda_{i_1-i_1-\ell+1},\ldots,\lambda_{i_\ell-i_\ell})} \{1,\ldots,1 ; \delta\} \{1,\ldots,1 ; \gamma\}$$

$$(\gamma) = (k_\ell-\ell+1,\ldots,k_1)$$

$$1<i_1<,\ldots,<i_\ell\le j-1$$

donc

$$|\{\lambda\}| \leq R\,\Delta^2\, M_\lambda\, M(\lambda,\sigma,\sigma) \sum_{\ell=0}^{p} c_p^{\ell} \sum_{\substack{k_1<k_2<\ldots<k_\ell \\ k_{\ell+1}<\ldots<k_j}} \sum_{(\delta),(\gamma),i_1,\ldots,i_j} \{1,\ldots,1;\delta\}\{1,\ldots,1;\delta\}$$

Passons pour terminer en revue quelques conséquences des relations connues sur les polynômes de Schur.

Le théorème III(2.3) permet de lier les coefficients des approximants de Padé au zéro du Padé [0, N], le théorème (2.4) exprime la relation bien connue, (et très simple à montrer directement) entre les Padés de H et de 1/H, elle a aussi comme conséquence : toute relation entre coefficients des approximants de Padé, est encore valable si on prend les conjugués des polynômes de Schur y figurant (pour de telles relations on pourra voir[10]).

L'expression donnée par le théorème III(2.5) ne semble pas pouvoir être utilisée telle quelle, à cause du nombre de caractères à calculer. Par contre le théorème III(2.6) relie les approximants [r, i] aux coefficients du reste de $Q_n^1 H - P_n^1 = \sum_{a=n+1} \{a, 1^n\} x^{a+1}$ et si r est très différent de i, permet de réduire la taille du déterminant à calculer, en outre elle ne nécessite pas l'hypothèse $Q_n^1(0) \neq 0$.

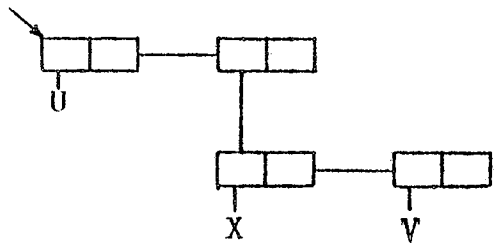
ANNEXE 1

QUELQUES FONCTIONS DE LISP

Lisp est un langage de traitement de listes, qui gère un espace de travail divisé en "cellules" composées de deux champs, le CAR et le CDR, une cellule est schématisée par |__|__|. Al'origine les cellules forment la liste libre dans laquelle on puise lorsqu'on a besoin de mémoire.
Il y a trois opérations élémentaires CAR, CDR, CONS.

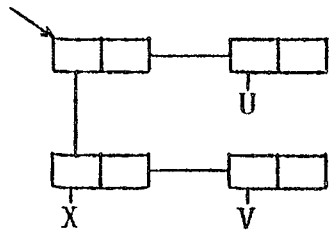
Le CAR - Le CAR d'une liste est la liste pointée par le CAR de la première cellule composant la liste.

Exemple - (U (X V)) est représenté par :



son CAR est U

((X V) U) est représentée par :



son CAR est (X V)

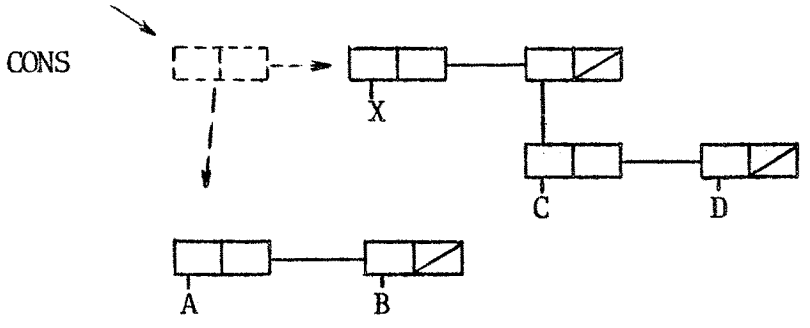
Le CDR - Le CDR d'une liste est la liste pointée par le CDR de la première cellule.

Exemple - CDR (U (X V)) = ((X V))
CDR ((X V) U) = (U)

Le CONS - Le CONS de deux listes construit une liste dont le CAR de la première cellule est la première liste, le CDR de la première cellule est la seconde liste.

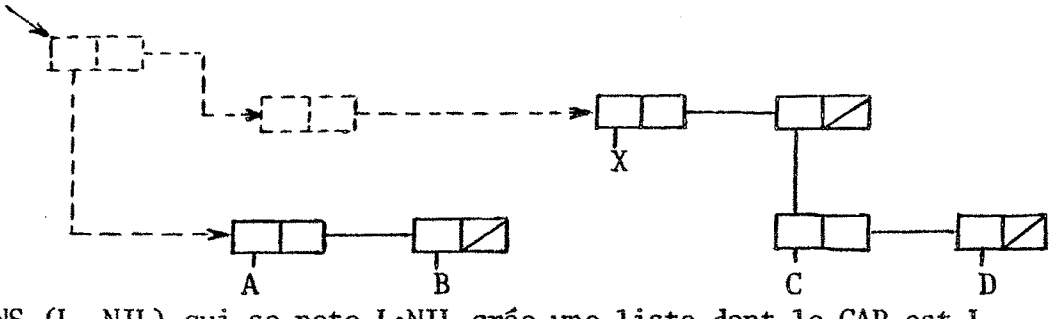
CONS (X, (U V)) = (X U V)

CONS ((A B), (X (C D))) = ((A B) x (C D))



Notons qu'avec le CONS, il n'y a pas copie des deux opérantes, puis liaison ; mais une liaison directe ; le CONS permet donc de construire des listes qui ont des éléments communs.

Exemple - CONS ((A B), CONS ((A B), (X (C D)))) est la liste



CONS (L, NIL) qui se note L•NIL crée une liste dont le CAR est L.

A partir de ces fonctions de base sont construites d'autres fonctions plus élaborées, dont nous ne citerons que deux d'entres-elles.

NCONC c'est l'union de deux listes

NCONC ((5), (3 (2 1))) = (5 3 (2 1))

NCONC ((5 4), (3 2)) = (5 4 3 2)

APPEND1 insère son second argument comme élément du premier :

APPEND1 ((5 4), 3) = (5 4 3)
APPEND1 ((5 4), 3)) = (5 4 (3))

ces deux fonctions ne créent pas de copie de leurs arguments.

Les programmes décrits précédemment utilisent au maximum ce type de fonction qui permettent d'avoir des listes ayant des sous-listes communes, ce qui économise de la place, c'est ainsi que le résultat de MSP (P6, Q6) occupe seulement 2 000 cellules au lieu des plus de 4 000 comptées.

Nous avons vu que certaines opérations (le CONS) prennent des cellules dans la liste libre. Lorsque celle-ci est vide, un programme, le ramasse-miettes recherche dans l'espace de travail des listes qui ne sont plus actives, et les chaîne de nouveau dans la liste libre, si après exécution de ce programme, celle-ci est encore vide, l'exécution est arrêtée. Le temps d'exécution d'un programme a donc deux composantes, le temps d'exécution propre à la procédure, et le temps du ramasse miettes ; on ne peut évaluer exactement le temps d'exécution du ramasse-miettes lors d'un programme, il est seulement possible de compter le nombre d'appels et ensuite d'estimer ce temps, par multiplication du nombre d'appel par un temps moyen, qui peut être obtenu par des appels au ramasse-miettes dans diverses configurations de mémoire, avec l'espace de travail que nous avons testé environ 14 000 cellules ce temps d'exécution variait de 0,58 à 0,75 secondes.

Pour une description complète de LISP on pourra consulter [33], [34], [38].

ANNEXE 2

RESULTATS NUMERIQUES DE LA MULTIPLICATION DES POLYNOMES DE SCHUR

L'algorithme MSCHUR présenté dans le chapitre III est beaucoup plus compliqué que MSP, auquel il se ramène en partie. Il nécessite de nombreuses étapes intermédiaires, qui peuvent donner de nombreux termes. La représentation récursive des résultats permet un gain de place important, même aux étapes intermédiaires, par exemple si $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ soit $k<n$, le nombre de k-partitions $(\mu) = (\mu_1,\ldots,\mu_k)$ telles que $\mu_i \leq \lambda_i$ est supérieur à $($ - $(\lambda_1-\lambda_2)!\ (\lambda_2-\lambda_3)!\ \ldots(\lambda_{k-1}-\lambda_k)!$. Les k-uples (μ) du type précédent définissent un opérateur $h_{(\mu)}(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ qu'il faut appliquer à $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Nous avons donc à calculer :

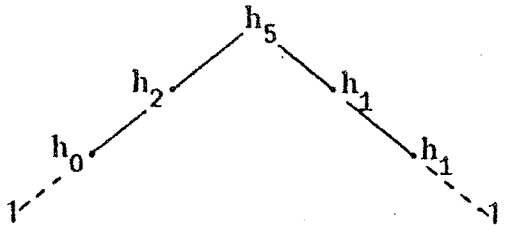
$$\sum_{(\mu)\,;\mu_i\leq\lambda_i} h_{(\mu)}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\{\lambda\},$$

ce qui se ramène au calcul de $h_{\mu_i}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\{\lambda\}$ qui est effectué en développant $h_{\mu_i}(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \sum_{j=0}^{\mu_i} h_{\mu_i-j}(\xi_1,\ldots,\xi_\ell)h_j(\xi_{(\ell+1)},\ldots,\xi_n)$ et en appliquant chacun des opérateurs à $\{\lambda\}$ de la façon suivante :

$$h_{\mu_i}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\{\lambda\} = \sum_{j=0}^{\mu_i} [h_{\mu_i-j}(\xi_1,\ldots,\xi_\ell)\{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell\}] \star$$

$$[h_j(\xi_{\rho+1},\ldots,\xi_n)\{\lambda_{\rho+1},\ldots,\lambda_n\}]$$

Il est alors naturel, à la fois pour des questions de place mémoire que de temps d'exécution, de stocker l'opérateur $\sum_{(\mu)} h_{(\mu)}$ sous forme récursive, ce qui permet d'éviter les répétitions par exemple $h_5h_2+h_5h_1^2$ se représente sous la forme $(h_5(h_2(h_0,1)\ h_1(h_1,1)))$ ce qui est équivalent à :



Il est évident d'après ce qui précède que l'utilisation de cet algorithme va poser des problèmes de place mémoire et de temps d'exécution beaucoup plus importants que la multiplication de polynômes symétriques ; à cet égard on peut se poser la question du calcul du pléthysm de deux S polynômes, définie dans [32], qui peut s'effectuer en se "réduisant" à des multiplications de S polynômes.

Un autre problème se pose ; la vérification de cet algorithme. Nous avons utilisé trois tests. Le premier est la positivité des coefficients, le second l'égalité de $g^{\lambda}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ avec $g^{\lambda}_{\mu\nu}$. Le dernier est la permutation des arguments, ou l'adjonction de zéros aux partitions définissant les S polynômes, ce qui implique des calculs différents qui doivent évidemment donner le même résultat.

- RESULTATS NUMERIQUES -

Les temps sont donnés en secondes, les procédures étant compilées. L'espace de travail est de 14 000 cellules.

Nous avons choisi $k = \lfloor \ell/2 \rfloor$ où $\ell = \min(n,m)$ avec $(\lambda) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $(\mu) = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$.

Exemples -

1) - $\{3\ 1\} \times \{3\ 1\}$
2) - $\{3\ 2\ 1\} \times \{3\ 2\ 1\}$
3) - $\{2\ 1^3\} \times \{2\ 1^3\}$
4) - $\{4\ 2\ 1\} \times \{4\ 2\ 1\}$
5) - $\{4\ 3\ 2\} \times \{5\ 2\ 1\}$
6) - $\{5\ 2\ 1\} \times \{4\ 3\ 2\}$
7) - $\{5\ 2\ 2\} \times \{4\ 3\ 2\}$
8) - $\{5\ 4\ 1\} \times \{4\ 4\ 2\}$
9) - $\{5\ 4\ 1\ 3\} \times \{5\ 3\ 2\}$
10) - $\{4\ 4\ 2\} \times \{4\ 3\ 1\}$
11) - $\{4\ 4\ 2\} \times \{4\ 2\ 1^4\}$
12) - $\{4\ 4\ 2\} \times \{6\ 2\ 1\}$
13) - $\{6\ 2\ 1^2\} \times \{3^2\ 2^2\}$
14) - $\{3^2\ 2\ 1^2\} \times \{3\ 2^2\ 1\}$
15) - $\{5^2\ 4\ 3\ 2\ 1\} \times \{4^3\ 3\ 2^2\}$

Ex	tp	tmm	tt
1	0,7	0	0,7
2	1,3	0	1,3
3	0	0	0,9
4	2,0	0,6	2,6
5	6,7	3,6	10,3
6	2,1	0,6	2,7
7	4,9	2,4	7,3
8	3,0	1,2	4,2
9	5,7	3,0	8,7
10	11,4	6,6	18,0
11	10,4	6,6	17,0
12	16,0	9,0	25,0
13	3,3	1,2	4,5
14	14,0	7,8	21,8
15	+	+	+

+ dépassement de capacité mémoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - BAKER
Essential of Padé approximant
Academic Press

[2] - E.A. BENDER AND D.E. KNUTH
Enumération of plane partitions,
J. of comb theory 13 (1972) 40-54

[3] - BOCHER
Introduction to higer algebra
The Macmillan Compagny

[4] - H. BOERNER
Représentations of groups
North Holland publishing compagny (1970)

[5] - A. BOOKER
Numerical evaluation of symetric polynomials
J. of the ACM Vol 12 - n°1 (1965) p. 90-94

[6] - BOURBAKI
Algèbre, Livre II

[7] - P.H. BUTLER AND R.C. KING
The symetric group characters, products and plethisms
J of math phys. (14) 1973 - p. 1176 à 1182

[8] - P. BRATLEY AND J.K.S. McKAY
Algorithm 305 symmetric polynomials
Comm ACM - vol 10 - 1967 et vol 11 (1968)

[9] - C. BREZINSKI
Accélération de la convergence en analyse numérique
Springer Verlag Lecture note in math n° 584

[10] - D. BUSSONAIS
"Tous" les algorithmes de calcul par récurrence des approximants de Padé d'une série - construction des fractions continues correspondantes
Séminaire d'Analyse Numérique n° 293 - Grenoble

[11] - A.J. COLEMAN
Induced representations with applications to Sn and GL(n,)
Queen' paper in pure and applied mathematic s - n° 4

[12] - Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Strasbourg 1976
Lecture - notes in mathematics - n° 579

[13] - STIG COMET
Character tables for N≤20
Library of mathematik maskinnämnden
P.O. Box 6131 Stockohlm 6, Swenden

[14] - L. COMTET
Advanced Combinatories
D. Reided publ compagny

[15] - P. DOUBILET
On the foundation of combinatorial theory VII - Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy
Studies in applied mathematics - Vol LI n° 4 - dec. 72

[16] F.N. DAVID AND D.E. BARTON
Combinatorial chance
Charles Griffin & compagny

[17] R.J. EVANS AND I.M. ISAACS
Generalised Vandermonde determinants and roots of unity of prime order
American Mathematical soc Vol 38 - 1976

[18] - A.M. FINK
Certain determinants related to the Vandermonde
Amer math soc Vol 38 - 1973 - p. 483 à 488

[19] - H.O. FOULKES
Differential operators associated with S functions
J London Math Soc 24 (1949) p. 136-143

[20] - H.O. FOULKES
A survey of some combinatorial aspects of symmetric functions
Permutations - actes du colloque - Paris - juillet 1972
Gauthier Villars

[21] - R.F. FOX
A new simple method for calculating the caracters of the symmetric group
J. Comb theory 2 (1967) p. 186-212

[22] - FREESE
Inequalities for generalised matrix functions based on arbitrary characters - Lin alg and its applications (7) p. 337-345 - (1973)

[23] - A. GALLI
Seminaire d'Analyse Numérique n° 280 - Grenoble

[24] - GANTMATCHER
Theory of matrices

[25] - A. HEARN
Reduce user's manual
University of Utha - Salt Lake City

[26] - A. KERBER
On a paper of Fox about a method for calculating the ordinary irreductible characters of symmetric groups
J of comb theory - 6 (1969) p. 90-93

[27] - T. KLEIN
The Hall polynomial
J of algebra 12 - p. 61-67 (1969)

[28] - R.C. KING
Generalised vandermonde determinants and Schur functions
Proc of the amer math soc - Vol 48 , (1975) p. 53-56

[29] - D.E. KNUTH
Permutations, matrices, and generalised young tableaux
Pacific J of math - Vol 34, 1970 - p. 709 à 727

[30] - A. LASCOUX
Puissances extérieures, déterminants et cycles de Schubert
Bull. soc. math. France, 102, 1974 - p. 161-179

[31] - E. LAUER
Algorithms for symmetrical polynomials
Proc of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and algebraic computation

[32] - D.E. LITTLEWOOD
The theory of group characters - Oxford (1950)

[33] - A. LUX
Etude d'un modèle abstrait pour une machine LISP et son implantation
Thèse de troisième cycle - U.S.M.G - Grenoble 1975

[34] - J. McCARTHY
Lisp 1-5 programmer's manual
MIT press, Cambridge mass, 1965

[35] - P.A. Mac MAHON
Introduction to combinatory analysis in famous problems and
other monographs
Chelsea publ Compagny - New York

[36] - P.A. Mac MAHON
Combinatory analysis
Cambrige Univ. Press, Cambrige

[37] - M. MARCUS
Finite dimensional multilinear algebra, pure and applied
mathematics - Marcel Dekker inc 1973

[38] - W.D. MAURER
The programmer's introduction to Lisp, Macdonald amer elsevier
computer monographs

[39] - R. MERRIS
Non zéro decomposable symmetrized tensors
Linear alg and its applications 12 - 287-292 - 1977

[40] - A.O. MORRIS
On an algebra of symmetric functions
Quaterly journal of mathematics - 16 - (1965) - P. 53-64

[41] - A.O. MORRIS
The multiplication of hall functions
Proc. Lond. Math soc (3) 13-(1963) - p. 733-742

[42] - T. MUIR
A treatise on the theory of determinants
Dover, New-York 1960

[43] - F.D. MURNAGHAN
The characters of the symmetric group
Amer, J of math (59) 1938 - p. 739-753

[44] - F.D. MURNAGHAN
The theory of group representations
J hopkins press, Baltimore, 1938

[45] - M.J. NEWELL
On the multiplication of S-functions
Proc - Lond - math - Soc - 53 - p. 356-362 - 1951

[46] - M.J. NEWELL
On the quotient of alternants and the symmetric group
Proc - Lond - math - Soc 53 - p. 345-355 - 1951

[47] - A. OSTROWSKI
Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de Schur. J. Math. Pures - Appl. 31 (1952) p. 253-292

[48] - R.C. READ
The use of S functions in combinatorial analysis
Comb J of analysis 20 (1968) p. 808-841

[49] - REDEI
Algebra Vol 1 - Pergamon press

[50] - G. d. B. ROBINSON
Representation theory of symmetric group
Univ of Toronto Press, 1961

[51] - R.P. STANLEY
Theory and application of plane partitions - part 1
Studies in applied mathematics, Vol L n° 2 - 1971 - p. 167 à 188

[52] - G.P. THOMAS
Frames, young tableaux, and Baxter Sequences
Avances in mathematics 26, 275-289 (1977)

[53] - A.O. USHER
Plethysm of S-Functions
Can J Math Vol XXVIII - n° 2 - p. 440-445 1976

[54] - VAN DER CORPUT
Sur les fonctions symétriques
Nederl-akad-Wetenschk. Proc. 53 (1950) - p. 216-230

[55] - H. VAN DE VEL
Numerical treatment of a generalized Vandermonde System of equations - Linear alg and its appl - 17 - 149 - 179 (1977)

[56] - VAN DER WAERDEN
Modern algebra

[57] - YEHIEL ILAMED
Powers of a matrix and the generalized Lucas polynomials
J of math phys - Vol 12, n° 1 - Jan. 1971 - p. 113

[58] - H. WEYL
Classical groups
Princeton

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 21 mars 1979

Le Président de la thèse

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 26 mars 1979

P. Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale
Le Vice-Président

G. AUBERT