



HAL
open science

SUR LA REGULARITE DES MINIMISEURS DE MUMFORD-SHAH EN DIMENSION 3 ET SUPERIEURE

Antoine Lemenant

► **To cite this version:**

Antoine Lemenant. SUR LA REGULARITE DES MINIMISEURS DE MUMFORD-SHAH EN DIMENSION 3 ET SUPERIEURE. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. Français. NNT: . tel-00288822

HAL Id: tel-00288822

<https://theses.hal.science/tel-00288822>

Submitted on 18 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

par

Antoine LEMENANT

Sujet :

**SUR LA RÉGULARITÉ DES MINIMISEURS DE
MUMFORD-SHAH EN DIMENSION 3 ET SUPÉRIEURE**

Directeur de thèse : Guy DAVID

Soutenue le 2 Juin 2008 après avis des rapporteurs :

M. Luigi AMBROSIO Rapporteur
M. Antonin CHAMBOLLE Rapporteur

devant la Commission d'examen composée de :

M. Antonin CHAMBOLLE Rapporteur
Mme. Monique DAUGE Examinatrice
M. Guy DAVID Directeur de Thèse
M. Yves MEYER Président du Jury
M. Pierre PANSU Examineur

*“Les montagnes sont plaines
les plaines sont montagnes
le vent et le sec
sont l’humide et le calme
tout se dissout à l’océan
la vie y prend forme
sous les pas du méditant”*

Nicolas Kurtovitch

REMERCIEMENTS

Je souhaiterais exprimer toute ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, Guy David, dont la confiance n'a jamais faibli. Toujours disponible, il a ce don de pouvoir transmettre les mathématiques avec beaucoup de patience, de plaisir, d'humour et de joie, rendant ces trois années d'efforts beaucoup plus faciles. J'ai énormément appris de sa grande expérience et de ses compétences mathématiques exceptionnelles, et je garde comme exemple sa gentillesse et sa modestie.

Je tiens à remercier Luigi Ambrosio et Antonin Chambolle, pour avoir accepté le rôle de rapporteur. Je les remercie pour leur lecture minutieuse du texte, et pour les commentaires et conseils de rédaction qu'ils m'ont apportés. Je remercie aussi Yves Meyer de me faire l'honneur de présider le jury, ainsi que Monique Dauge (qui m'a beaucoup appris sur le spectre du laplacien dans des domaines sphériques), pour sa présence dans le jury. Je suis profondément reconnaissant envers Pierre Pansu, dont l'aide au cours de ces trois années m'a été très précieuse, que ce soit en tant que directeur de l'école doctorale ou mathématicien. Je le remercie également d'être présent dans le jury.

Je remercie sincèrement Tatiana Toro à Seattle pour m'avoir accueilli à l'université de l'état de Washington pendant un mois, qui fut pour moi très formateur.

Je garderai un très bon souvenir de ces 6 années passées à l'Université Paris XI. Depuis la Maîtrise jusqu'aux cours de l'école doctorale, sans oublier la fameuse année d'agreg, je peux affirmer avoir bénéficié d'un enseignement d'une exceptionnelle qualité dispensé par les excellents professeurs d'Orsay. S'il n'est pas possible de les citer tous, je tiens à remercier particulièrement Patrick Gérard, Dominique Hulin, Patrick Billot, Jean-Christophe Léger, Pascal Ausher, Serge Alinhac, Alano Ancona, pour les enseignements qu'ils m'ont apportés et leur accompagnement tout au long de la thèse.

Par ailleurs je suis très fier d'avoir débuté sur les bancs de l'université de mon pays, la Nouvelle-Calédonie. Je souhaite exprimer ma gratitude envers les professeurs qui m'ont accompagnés, notamment Monique Tougeron, Henri Bonnel, Cécile Brulebois, Eric Edo, Bernard Rapp et Yazid Rouibah qui ont contribué à l'émergence de ma passion pour les mathématiques. Je souhaite remercier également Touraïvane, Gilles Talladoire et Nazha

Selmaoui qui m'ont ouvert l'esprit sur le monde de l'informatique théorique, même si la passion des mathématiques l'a emporté.

Il sera difficile de citer parmi la centaine de doctorants d'Orsay (ou issus d'Orsay) ceux qui d'une façon ou d'une autre m'ont aidé au cours de ces années de thèse. Les rencontres et les échanges que j'ai partagés ont été inoubliables. Une pensée particulière pour Frédéric Bernicot, Cathy Maugis, Benoît Landelle, Juliette Venel, Karine Adamy, Christine Vannier, Aline Lefebvre, Laurent Thomann, Bertrand Michel, Marianne Chapouly, Bertrand Micaux, Nicolas Verzelen, Octavio Paniagua-Taboada, Ismaël Bailleul, Nadine Badr, Sylvain Arlot, Maxime Lagouge... désolé pour ceux que je ne cite pas mais je pense à eux également. Merci aussi à mes amis Séverine Bernadat, Amélie Détails, Mickaël Pigné, Aurélie Bauer et Benjamin Dupuy pour la joie que j'ai partagée avec eux à Orsay et ailleurs. Enfin, merci à Brice Kiener, Madeleine N'Guyen, Benoît Naturel et Bénédicte Brou pour leur solidarité de calédoniens expatriés.

Je souhaite remercier mon professeur d'Aïkido et ami Daniel Champeimont dont la bonne humeur et l'enseignement m'ont été très précieux pour garder un équilibre durant ces années d'effort.

Ce que je dois à ma famille (au sens large !) dépasse largement le cadre de cette thèse. Je pense en particulier à mes parents et mes soeurs, qui m'ont toujours soutenu, même s'il fallait que je parte vivre à plus de 22 000 km de chez eux. Si cette thèse a pu voir le jour c'est principalement grâce à leur soutien moral (et accessoirement financier !). Je leur en serai éternellement reconnaissant. Je remercie également Thierry et Anne de m'avoir accueilli et de m'avoir convaincu que la vie à Paris était presque aussi bien qu'à Nouméa ! Bien sûr, je remercie chaleureusement Jean-Pierre et Didier pour tous les coups de pêche et les campings sur l'îlot Contrariétés ou ailleurs dans le lagon calédonien, indispensables au bon fonctionnement de mes neurones.

Enfin, je remercie infiniment Stéphanie, qui m'a supporté au quotidien durant ces trois années et qui je l'espère, continuera à le faire toute ma vie !

Résumé :

On étudie dans cette thèse certains aspects de la régularité de l'ensemble singulier d'un minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah. On se place principalement en dimension 3 même si certains résultats fonctionnent encore en dimension supérieure. Dans une première partie on étudie les minimiseurs globaux dans \mathbb{R}^N et on montre que si (u, K) est un minimiseur global et que si K est un cône assez régulier, alors u (modulo les constantes) est une fonction homogène de degré $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus K$. Ceci nous permet de lier l'existence d'un minimiseur global et le spectre du laplacien sphérique dans la sphère unité privée de K . Une conséquence est qu'un secteur angulaire stricte ne peut pas être l'ensemble singulier d'un minimiseur global de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 . Dans la deuxième partie on montre un théorème de régularité au voisinage des cônes minimaux \mathbb{P} , \mathbb{Y} et \mathbb{T} . On montre que si K est proche (en distance) d'un \mathbb{Y} ou d'un \mathbb{T} dans une certaine boule, alors K est l'image $C^{1,\alpha}$ d'un \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou d'un \mathbb{T} dans une boule légèrement plus petite, ce qui généralise un théorème de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara [AFP07]. Les techniques employées ne sont pas exclusives à la dimension 3 et devraient permettre de démontrer des résultats analogues en toute dimension pour un minimiseur de Mumford-Shah, dès lors qu'un résultat de régularité sur les ensembles presque minimaux existerait.

Abstract :

In this thesis we study some aspects about the regularity of a minimizer for the Mumford-Shah functional. The story takes place mostly in dimension 3 but some results are still true in higher dimension. The first part is about global minimizers in \mathbb{R}^N . We prove that if (u, K) is a global minimizer and if K is a cone smooth enough, then u (modulo constants) is a homogenous function of degree $\frac{1}{2}$ in $\mathbb{R}^N \setminus K$. Thank to this we can link the existence of a global minimizer and the spectrum of the spherical laplacian in $S^{N-1} \setminus K$. A consequence is that there is no global minimizer with K an angular sector in \mathbb{R}^3 . In the second part we prove a regularity theorem near a minimal cone of type \mathbb{P} , \mathbb{Y} and \mathbb{T} . We show that if K is close enough (in distance) to a cone of type \mathbb{P} , \mathbb{Y} or \mathbb{T} in a certain ball, then K is the $C^{1,\alpha}$ image of a \mathbb{P} , \mathbb{Y} or \mathbb{T} in a smaller ball. This is a generalisation of a theorem of L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara [AFP07]. The technics employed are not specific to dimension 3 and it should be used to prove some results in any dimension for a Mumford-Shah minimizer whenever some regularity result about almost minimal sets exists.

Mots clés : Mumford-Shah, Problème à frontière libre, Minimisation, Segmentation d'image, Cônes minimaux, Ensemble minimal, Calcul des variations, Théorie géométrique de la mesure

Classification : 49Q20, 49Q05, 35J25, 35P15

Table des matières

0	Introduction	13
1	Sur les minimiseurs globaux de Mumford-Shah coniques	31
1.1	Introduction	32
1.2	Si K est conique alors u est homogène	34
1.3	Quelques applications	62
1.4	Cas du demi plan dans \mathbb{R}^3	68
2	Régularité dans \mathbb{R}^3 proche d'un cône minimal	83
2.1	Introduction	84
2.2	Croissance de l'énergie normalisée pour un minimiseur d'énergie	86
2.3	Croissance de l'énergie pour une surface $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimale	97
2.4	Croissance et régularité pour Mumford-Shah	124
A	Une majoration du “Y-tilt”	169
	Index	182
	Bibliographie	182

Chapitre 0

Introduction

L'origine de la fonctionnelle de Mumford-Shah vient d'un problème de segmentation d'image. En mathématiques, une image peut être représentée par une fonction $g \in L^\infty(\Omega)$ où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Par exemple si g est à valeur dans $[0, 1]$ alors les points x de Ω tels que $g(x)$ vaut 1 sont noirs et les points x de Ω tels que $g(x)$ vaut 0 sont blancs. Entre les deux, toute la gamme des niveaux de gris est possible (pour une image en couleur on peut prendre g à valeur dans \mathbb{R}^3 en utilisant des mélanges de trois couleurs primaires).

Le problème de segmentation consiste à trouver un ensemble K qui représente les bords de l'image définie par g . En mathématiques, cela se traduit intuitivement par trouver l'ensemble des points où la fonction g possède un saut. La difficulté consiste à déterminer l'ensemble des points où le saut est significatif.



Une image segmentée en minimisant la fonctionnelle de Mumford-Shah.

D. Mumford et J. Shah ont alors eu l'idée d'introduire la fonctionnelle suivante qui comporte trois termes

$$J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + H^1(K),$$

où H^1 désigne la mesure de Hausdorff de dimension 1. Pour obtenir une segmentation de l'image g on minimise la fonctionnelle J sur l'ensemble des couples admissibles \mathcal{A} (voir plus loin pour la définition). On obtient alors un couple (u, K) solution. La fonction u représente une version régulière de l'image de départ (l'image du milieu dans la photo du cagou). La régularité de u provient du fait que l'on tend à minimiser l'intégrale de Dirichlet (l'intégrale du gradient au carré) et u ressemble à g car on minimise également la distance à g en norme L^2 . L'ensemble K représente alors les bords de l'image. C'est l'ensemble de singularité de u , c'est à dire là où il y a un saut significatif dans l'image (image de droite dans la photo du cagou).

L'existence d'au moins un minimum pour la fonctionnelle de Mumford-Shah est un résultat bien connu. La stratégie la plus efficace est sans doute d'utiliser la théorie des fonctions à variation bornée. En effet, on peut minimiser J sur les fonctions de $SBV(\Omega)$ où K est l'ensemble singulier approché de $u \in SBV$. Les théorèmes de compacité dans ces espaces permettent d'obtenir l'existence d'un minimum. Encore faut-il ensuite montrer que le minimum en question obtenu en minimisant sur SBV est bien un minimum pour la fonctionnelle obtenu en minimisant sur \mathcal{A} . Cela a été fait dans [GCL89].

En dépit du fait que la fonctionnelle de Mumford-Shah provienne d'un problème très concret (la segmentation d'image), dans cette thèse seuls les aspects théoriques et principalement les problèmes de régularité seront abordés. En effet, l'étude numérique de la fonctionnelle de Mumford-Shah a donné suite à des algorithmes efficaces de segmentations aujourd'hui bien connus. Par exemple l'algorithme qui a été utilisé pour segmenter la photo du cagou a été codé par A. Chambolle¹. En revanche, certains aspects théoriques du minimiseur comme par exemple sa régularité, sont des problèmes toujours d'actualité. On peut notamment citer la conjecture de Mumford-Shah datant de 1989 et toujours ouverte au moment où cette thèse est écrite.

Conjecture 0.1 (Mumford-Shah). *Soit (u, K) un minimum réduit pour la fonctionnelle J . Alors K est localement dans Ω une union finie d'arcs de classe C^1 .*

Le terme "réduit" veut simplement dire qu'on ne peut pas ôter de K des morceaux de mesure H^1 nulle de sorte que la fonction u puisse s'étendre à $\Omega \setminus \tilde{K}$ ($\tilde{K} \subset K$). C'est juste une hypothèse pour éviter les singularités artificielles et triviales.

1. Merci à Jean-Christophe Léger pour avoir su insérer le code de A. Chambolle dans GIMP et pour avoir traité l'image du cagou.

La question posée par D. Mumford et J. Shah est naturelle et l'on sait que pour les ensembles minimaux, c'est à dire en quelque sorte si on minimise uniquement la partie "mesure de Hausdorff" de la fonctionnelle J , ce phénomène est vrai.

Une fois que l'on a obtenu la régularité C^1 , il en découle éventuellement de la régularité d'ordre supérieure. En effet on sait montrer que s'il existe une boule B telle que $K \cap B$ est un graphe C^1 , et si de plus g est de régularité C^k , alors $K \cap B$ est en fait de classe C^k (cf Théorème 7.42 dans [AFP00]) et même si g est analytique alors K est aussi analytique (voir [KLM05]).

Plusieurs résultats partiels existent à propos de la conjecture de Mumford-Shah. On sait par exemple que K est C^1 presque partout. C'est une conséquence des travaux de G. David [DAV96] en dimension 2, A. Bonnet [BON96] avec un résultat encore plus précis très proche de la conjecture, ou encore L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara [AFP00] en dimension quelconque.

La majeure partie des travaux effectués sur la fonctionnelle de Mumford-Shah concerne la dimension 2, dimension dans laquelle on définit le plus souvent des images. Cependant, la fonctionnelle de Mumford-Shah peut se définir en toute dimension. En dimension 3 déjà, beaucoup de résultats ne fonctionnent plus. Le théorème de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara ([AFP00] chapitre 8) sur la régularité est l'un des rares théorèmes qui fonctionne en toute dimension. Il dit qu'un minimiseur de Mumford-Shah est une surface de classe C^1 au voisinage de presque tout point et quelque soit la dimension. Le point clé est de montrer que si K est assez plat et que l'énergie de u est assez petite dans une boule, alors K est en fait une hypersurface C^1 dans une boule un peu plus petite. La démonstration de ce théorème utilise le "tilt" et ne semble pas se généraliser à des situations géométriques différentes. La généralisation de ce résultat fera l'objet d'une grande partie de cette thèse.

Quelques travaux sur les ensembles minimaux en dimension 3 (par exemple l'étude des bulles de savons), nous renseignent un peu sur ce qui peut se passer pour la fonctionnelle de Mumford-Shah. En particulier le théorème de régularité de Jean Taylor [TAY76] qui donne la liste des trois cônes minimaux en dimension 3 (les cônes \mathbb{P} , \mathbb{Y} et \mathbb{T}) et qui prouve également que tout ensemble presque minimal de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 est équivalente à l'un de ces cônes au voisinage de chaque point. Ce résultat est un peu le point de départ de la deuxième partie de la thèse. On aimerait savoir si ce phénomène est aussi vrai pour un minimiseur de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 .

Dans une première partie on étudiera les minimiseurs globaux de Mumford-Shah en dimension 3. L'ensemble des minimiseurs globaux contient en particulier les objets tangents, c'est à dire les limites d'explosions en chaque point de l'ensemble singulier du minimiseur de Mumford-Shah. On peut dire que les minimiseurs globaux sont l'équivalent des cônes minimaux pour les surfaces minimales. Ils ont été introduits par A. Bonnet pour prouver le théorème de régularité qui est le plus proche à l'heure actuelle de la conjecture de Mumford-Shah. La connaissance exacte de la liste des minimiseurs globaux entraînerait

des résultats de régularité pour l'ensemble singulier de Mumford-Shah. En particulier si on connaissait la liste exacte en dimension 2 on aurait prouvé la conjecture de Mumford-Shah. En dimension 3 on connaît très peu de minimiseurs globaux. Le principal résultat de la première partie est que si un minimiseur global possède un ensemble singulier conique, alors la fonction associée est homogène de degré $\frac{1}{2}$. Les cônes considérés sont des cônes centrés en 0 tels que l'intersection avec la sphère unité soit constituée d'un nombre fini d'arcs C^2 (appelés "cônes lisses finis"). Voici le théorème principal de la première partie.

Théorème 0.2. *Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah global dans \mathbb{R}^N tel que K soit un cône lisse fini et $\partial B(0, 1) \setminus K$ possède la propriété du cône. Alors dans chaque composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus K$ il existe une constante u_0 telle que $u - u_0$ soit homogène de degré $\frac{1}{2}$.*

On déduira de ce théorème quelques corollaires à propos des minimiseurs globaux dont K est un secteur angulaire.

Dans la deuxième partie on présentera un théorème de régularité au voisinage d'un cône minimal. On montrera que si K est un minimiseur de Mumford-Shah assez proche d'un cône minimal (en distance de Hausdorff) dans une boule alors K est une version C^1 de ce cône dans une boule un peu plus petite. Voici un énoncé qui est le principal résultat de la deuxième partie de la thèse.

Théorème 0.3. *Il existe des constantes positives ε et c telles que ce qui suit est vrai. Soit $g \in L^\infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Il existe \tilde{r} qui dépend uniquement de $\|g\|_\infty$ tel que pour toute paire $(u, K) \in \mathcal{A}$ qui minimise la fonctionnelle*

$$J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + H^2(K),$$

pour tout $x \in K$ et $r < \tilde{r}$ tel qu'il existe un cône Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} centré en x avec

$$D_{x,r}(K, Z) \leq \varepsilon$$

il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, Cr)$ vers $B(x, 10Cr)$ tel que $K \cap B(x, Cr) = \phi(Z) \cap B(x, 10Cr)$.

On a également l'énoncé suivant, qui est une variante où la condition géométrique est remplacée par une condition sur l'énergie.

Théorème 0.4. *Il existe des constantes positives ε et c telles que ce qui suit est vrai. Soit $g \in L^\infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Il existe \tilde{r} qui dépend uniquement de $\|g\|_\infty$ tel que pour toute paire $(u, K) \in \mathcal{A}$ qui minimise la fonctionnelle*

$$J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + H^2(K),$$

pour tout $x \in K$ et $r < \tilde{r}$ tel que

$$\omega_2(x, r) := \frac{1}{r^2} \int_{B(x, r) \setminus K} |\nabla u|^2 \leq \varepsilon$$

il existe un cône minimal Z et un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1, \alpha}$ de $B(x, Cr)$ vers $B(x, 10Cr)$ tel que $K \cap B(x, Cr) = \phi(Z) \cap B(x, 10Cr)$.

L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara [AFP07] avaient déjà obtenu un résultat similaire dans \mathbb{R}^N mais qui concerne uniquement le cas des hyperplans. Leur résultat était le meilleur résultat de régularité à propos de la fonctionnelle de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^N (amélioré plus tard en version “uniforme” par S. Rigot [RIG]) et le théorème 0.3 en est une généralisation pour les cônes de type \mathbb{Y} et \mathbb{T} dans \mathbb{R}^3 . De plus le théorème 0.3 devrait contenir une nouvelle preuve de [AFP07] parce qu’il s’étend naturellement à toute dimension si on considère uniquement le cas des hyperplans. Enfin, le théorème 0.3 contient aussi le résultat de [DAV96] et le généralise en dimension 3.

Le point clé pour obtenir le théorème 0.3 est de pouvoir contrôler l’énergie de u . La difficulté provient du fait que dans la plupart des cas si on essaie de construire un compétiteur pour estimer l’énergie de u , l’incertitude sur la géométrie de K aux petites échelles est très gênante. Donc nous utiliserons un argument de temps d’arrêt basé sur l’ensemble singulier K de manière à toujours pouvoir travailler dans une situation où la géométrie est sous contrôle. Si la géométrie n’est pas suffisamment plate dans une boule, alors on coupe l’ensemble dans cette boule et on espère que cela n’arrive pas trop souvent.

Ce procédé de temps d’arrêt est l’argument principal qui lève les difficultés techniques auxquels nous avons été confronté dès le début à chaque tentative de construction d’un bon compétiteur pour u . Nous avons donc bon espoir que ce procédé puisse servir à nouveau pour démontrer d’autres résultats liés aux mêmes problèmes techniques que ceux rencontrés ici.

Enfin, en annexe on trouvera un résultat qui n’avait pas de place ailleurs. C’est une majoration qui ressemble au “tilt estimate” (lemme 8.11 de [AFP00]) mais dans le cas d’un ensemble singulier d’un minimiseur de Mumford-Shah proche d’un cône de type \mathbb{Y} . La technique employée est inspirée de l’argument de G. Lawlor et F. Morgan [LM] (voir aussi [MOR]) qui montre que la différence entre les normales à la surface et les normales au cône correspondant peut être estimée en fonction du défaut de minimalité de la surface.

Poursuivons l’introduction de cette thèse avec le rappel de quelques notions et propriétés classiques qui seront utilisées dans la suite. Ainsi, nous espérons que la thèse ait un caractère auto-contenu.

Distance de Hausdorff

La distance de Hausdorff entre deux fermés E et F de \mathbb{R}^N est la quantité

$$d_H(E, F) = \max \left\{ \sup_{z \in E} d(z, F), \sup_{z \in F} d(z, E) \right\}.$$

La distance de Hausdorff est très utile, car non seulement sa définition est élémentaire donc facile à manier, mais en plus on a le théorème de compacité suivant. La démonstration est étonnamment courte (voir [AFP00] page 320).

Théorème 0.5 (Blaschke). *Soit Ω un ouvert borné et $\{E_n\}$ une famille d'ensembles fermés non vides inclus dans $\bar{\Omega}$. Alors on peut extraire de $\{E_n\}$ une sous suite qui converge pour la distance de Hausdorff d_H .*

Mesure de Hausdorff

Dans la définition des minimiseurs de Mumford-Shah, l'un des termes concerne la mesure de Hausdorff de l'ensemble singulier K . La mesure de Hausdorff est une notion élémentaire et pourtant assez puissante de ce que peut être "l'aire" d'une surface, ou la "longueur" d'une courbe. Dans cette thèse, seules les mesures de Hausdorff de puissance entières seront utilisées. On pourra trouver des éléments de preuves et plus de références de ce qui est rappelé ici dans [AFP00] et [MAT95].

Soit k un entier positif. On note ω_k la mesure de Lebesgue de la boule unité dans \mathbb{R}^k . Soit E un ensemble inclus dans \mathbb{R}^N . Pour tout $\delta > 0$ on note

$$H_\delta^k(E) := \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} [\text{diam}(E_i)]^k; \text{diam}(E_i) < \delta, E \subset \bigcup_{i \in I} E_i \right\}.$$

L'inf est pris sur tous les recouvrements dénombrable $\{E_i\}$ tels que $\text{diam}(E_i) < \delta$ et avec la convention que $\text{diam}(\emptyset) = 0$. On définit alors la mesure de Hausdorff par

$$H^k(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^k(E).$$

La limite existe car $\delta \mapsto H_\delta^k(E)$ est décroissante. Le cas le plus intéressant est lorsque la limite est finie (et non nulle).

La mesure H^k est une mesure extérieure sur les boréliens de \mathbb{R}^N , et en particulier σ -additive. On peut donc tout à fait intégrer contre la mesure H^k et la formule

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dH^k(x)$$

a un sens pour toute fonction H^k -mesurable (c'est à dire borélienne en dehors d'un ensemble de mesure H^k nulle).

La normalisation par $\frac{\omega_k}{2^k}$ permet d'affirmer que H^k coïncide avec l'aire de dimension k pour tout borélien de \mathbb{R}^N inclus dans une sous-variété de classe C^1 .

Si k n'est pas entier on peut encore définir la mesure de Hausdorff et il faut dans ce cas étendre ω_k par la formule $\pi^{\frac{k}{2}}/\Gamma(1+k/2)$ avec $\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1}e^{-s}ds$ la fonction d'Euler. La dimension de Hausdorff d'un ensemble est alors

$$\dim(E) = \inf \{k \geq 0; H^k(E) = 0\}.$$

Certaines propriétés classiques sur la mesure de Hausdorff seront utilisées dans cette thèse. Par exemple le fait que si f est lipschitzienne de constante M , alors

$$H^k(f(E)) \leq M^k H^k(E).$$

Nous utiliserons également le théorème de la coaire qui est une sorte de généralisation du théorème de Fubini. Sous sa forme simple il dit que si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N et si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, alors

$$|\nabla f|dx = \int_{\mathbb{R}} H^{N-1}|_{f^{-1}(t)} dt.$$

Il existe une version plus générale (qui sera utilisée pour le lemme 1.36) et qui utilise la notion d'ensemble rectifiable.

Définition 0.6. *Un ensemble E H^k -mesurable est dit rectifiable si il existe un nombre dénombrable de fonction lipschitziennes $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ telles que*

$$E \subset Z \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^k)$$

avec $H^k(Z) = 0$.

La particularité des ensembles rectifiables est qu'ils possèdent une tangente approchée presque partout. De plus si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction lipschitzienne et si x est un point de E qui possède une tangente, on dit que f est tangentiuellement différentiable au point x si la restriction de f à l'espace affine $x + Tan^k(E, x)$ est différentiable au point x . La différentielle tangentielle est notée $d^E f_x$ et est une application linéaire de $Tan^k(E, x)$ vers \mathbb{R}^m . Si M désigne sa matrice dans une base orthogonale on note

$$C_k M := \sqrt{\det(M.M^t)}.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 0.7. [FED69](Coaire) *Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lipschitzienne et soit E un ensemble rectifiable de dimension k dans \mathbb{R}^N . Alors l'application $t \rightarrow H^{k-m}(E \cap f^{-1}(t))$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^m et*

$$\int_E C_k d^E f_x dH^k(x) = \int_{\mathbb{R}^m} H^{k-m}(E \cap f^{-1}(t)) dt.$$

Une autre propriété de la mesure de Hausdorff est son défaut de semi-continuité, à droite comme à gauche. En effet, si E_n est une suite d'ensembles qui tend vers E pour la distance de Hausdorff, alors les inégalités

$$H^k(E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} H^k(E_n) \tag{1}$$

et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} H^k(E_n) \leq H^k(E) \tag{2}$$

ne sont pas vraies en général. Il existe des contre exemples classiques. Pour l'inégalité (1) on peut considérer l'exemple favori de G. David : une suite d'ensemble "en pointillés" dans l'intervalle $[0, 1]$ tel que K_n soit 2^{-n} -dense dans $[0, 1]$ et $H^1(K_n) = \alpha_n < 1$. La limite de K_n pour la distance de Hausdorff est l'intervalle $[0, 1]$ et on peut s'arranger pour que la suite $H^1(K_n)$ tende vers $\alpha < 1$.

Pour la deuxième inégalité, il se trouve qu'elle est toujours vraie en dimension 1 dans l'intervalle $[0, 1]$ (voir proposition 10.1 de [MS]). En revanche, un contre exemple est donné pour $N = 2$ et $k = 1$ par la suite des graphes des fonctions $2^{-n} \sin 2^n x$ sur $[0, 1]$.

Dans la plupart des cas c'est l'inégalité (1) qui fera le plus défaut. La situation typique est pour montrer l'existence de certains minimiseurs. L'approche que l'on voudrait employer est de considérer une suite minimisante puis passer à la limite. Or le passage à la limite requiert une inégalité du type (1) ce qui empêche de conclure directement. Il faut travailler un peu plus comme l'on fait F. Maddalena et S. Solimini dans [MS01b]. Une méthode alternative et qui a porté ses fruits est de passer par la théorie des fonctions BV (voir [GCL89]).

Il existe tout de même un cas particulier où l'inégalité (1) est vraie. C'est le cas des ensembles qui ont la propriété d'uniforme concentration. Il se trouve que les minimiseurs de Mumford-Shah (qui sont définis un peu plus loin) possèdent cette propriété. C'est une conséquence de l'article de S. Rigot [RIG] sur la régularité presque partout "uniforme". Pour son théorème de régularité, S. Rigot utilise le théorème de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara [AFP07] mais en réalité la propriété d'uniforme concentration se démontre en utilisant les techniques de la preuve de S. Rigot et en utilisant uniquement l'uniforme rectifiabilité montré par G. David et S. Semmes, et donc n'a pas besoin de [AFP07] (voir la remarque 75.17 page 527 de [DAV05]). De plus, en 2001, F. Maddalena et S. Solimini

[MS01a] ont également démontré la propriété d'uniforme concentration pour un minimiseur de Mumford-Shah avec des techniques différentes. En réalité ils montrent que la propriété de bissection implique la propriété de concentration, et ils utilisent l'article de S. Solimini [SOL97] qui prouve qu'un minimiseur de Mumford-Shah possède la propriété de bissection.

Nous n'allons pas rappeler ici les définitions d'uniforme concentration et bissection. Tout ce qui importe pour nous, est que l'inégalité (1) est vraie pour une suite d'ensembles singuliers (réduits) de minimiseurs de Mumford-Shah, et que ce résultat n'utilise pas le théorème de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara [AFP07]. Ainsi, le théorème du chapitre 2 de la thèse est indépendant de [AFP07].

Minimiseurs de Mumford-Shah : Définitions et estimations élémentaires

Nous allons maintenant définir les minimiseurs de Mumford-Shah avec lesquels nous allons travailler tout au long de la thèse. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On considère l'ensemble des couples admissibles

$$\mathcal{A} := \{(u, K); K \text{ fermé}, u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega \setminus K)\}.$$

Définition 0.8. Soit $(u, K) \in \mathcal{A}$ et B une boule incluse dans Ω . Un compétiteur pour le couple (u, K) dans la boule B est un couple $(v, L) \in \mathcal{A}$ tel que

$$\left. \begin{array}{l} u = v \\ K = L \end{array} \right\} \text{ dans } \Omega \setminus \bar{B}$$

et on ajoute également la condition topologique suivante : si x et y sont deux points de $\Omega \setminus (\bar{B} \cup K)$ qui sont séparés par K alors ils sont aussi séparés par L .

L'expression "être séparés par K " signifie que x et y sont dans des composantes connexes différentes de $\Omega \setminus K$.

Définition 0.9. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et h une fonction positive, croissante sur \mathbb{R}^+ et telle que $h(0) = 0$. Un minimiseur de Mumford-Shah avec fonction jauge h est un couple $(u, K) \in \mathcal{A}$ tel que pour toute boule B et pour tout compétiteur (v, L) pour (u, K) dans B on ait

$$\int_{B \setminus K} |\nabla u|^2 dx + H^{N-1}(K \cap B) \leq \int_{B \setminus L} |\nabla v|^2 dx + H^{N-1}(L \cap B) + r^{N-1}h(r)$$

avec r le rayon de la boule B et où H^{N-1} désigne la mesure de Hausdorff de dimension $N - 1$.

Il n'est pas très difficile de montrer qu'un minimiseur pour la fonctionnelle J du début de l'introduction est un minimiseur de Mumford-Shah au sens de la définition 0.9 avec comme fonction jauge $h(r) = C_N \|g\|_\infty^2 r$ et C_N une constante dimensionnelle (voir la proposition 7.8 p. 46 de [DAV05]).

Définition 0.10. *Un minimiseur global dans \mathbb{R}^N est un minimiseur de Mumford-Shah au sens de la définition 0.9 avec $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $h = 0$.*

Les minimiseurs globaux ont été introduits par A. Bonnet dans le but d'étudier la régularité de l'ensemble singulier K pour un minimiseur de Mumford-Shah. En effet soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans un ouvert Ω avec fonction jauge h . Alors si t_k est une suite de nombre positifs et y un point de Ω on peut considérer $\Omega_k = \frac{1}{t_k}(\Omega - y)$ et les paires (u_k, K_k) définies par $u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{t_k}}u(y + t_k x)$ et $K_k = \frac{1}{t_k}(K - y)$. On peut vérifier que les (u_k, K_k) sont des minimiseurs de Mumford-Shah dans Ω_k avec fonction jauge $h(t_k r)$. Si t_k tend vers l'infini on dit que (u_k, K_k) est une suite d'explosion au point y de (u, K) . Il est possible d'extraire de cette suite une sous-suite convergente. La limite est un couple (u_∞, K_∞) qui est un Minimiseur global de Mumford-Shah au sens de la définition 0.10 (voir le chapitre 40 de [DAV05] pour plus de détails). On comprend alors que l'étude des minimiseurs globaux donne automatiquement les types de singularités possibles pour l'ensemble K .

Si (u, K) est un minimiseur de Mumford-Shah et que l'on ajoute à K un petit morceau fermé de mesure H^{N-1} nulle, alors le nouveau couple ainsi réalisé est encore un minimiseur de Mumford-Shah. C'est pourquoi dans la suite, pour obtenir des résultats de régularité sur l'ensemble K on va toujours supposer que notre minimiseur est "réduit", c'est à dire qu'il n'existe pas de couple $(\tilde{u}, \tilde{K}) \in \mathcal{A}$ tel que $\tilde{K} \subset K$ et \tilde{u} est une extension de u dans $W_{loc}^{1,2}(\Omega \setminus \tilde{K})$. A partir d'un couple $(u, K) \in \mathcal{A}$ on peut toujours trouver un minimiseur réduit $(\tilde{u}, \tilde{K}) \in \mathcal{A}$ tel que $\tilde{K} \subset K$ et \tilde{u} est une extension de u (voir la proposition 8.2 de [DAV05]).

Une estimation simple mais fondamentale sur le gradient d'un minimiseur de Mumford-Shah est donnée par la proposition suivante.

Proposition 0.11. *Si (u, K) est un minimiseur de Mumford-Shah avec comme fonction jauge h , alors pour toute boule B de rayon r , on a*

$$\int_{B \setminus K} |\nabla u(x)|^2 dx + H^{N-1}(K \cap B) \leq C(1 + h(r))r^{N-1}. \quad (3)$$

Preuve : Il suffit de comparer (u, K) et (v, L) où $L = K \setminus B \cup \partial B$ et v est nulle dans B et coïncide avec u hors de B . \square

L'inégalité (3) montre comment le gradient de u se contrôle en moyenne. Cette propriété permet d'avoir le résultat suivant qui est une sorte de lemme de Campanato (voir la remarque 0.14 juste après).

Proposition 0.12. Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et soit une boule $B \subset \Omega \setminus K$ de rayon r . Alors il existe une constante C qui ne dépend que de la dimension N et de $h(r)$, et il existe un représentant continu \tilde{u} de u tel que pour tous points x et y dans B on a

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq C|x - y|^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : Soit donc B une boule fixée telle que $B \subset \mathbb{R}^N \setminus K$. Si B_0 est une boule incluse dans B , on note

$$u_{B_0} := \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} u(x) dx.$$

On commence par prouver le

Lemme 0.13. Soient B_1 et B_0 deux boules de rayons r_1 et r_0 telles que $B_1 \subset B_0 \subset B$. Alors

$$|u_{B_1} - u_{B_0}| \leq Cr_0^{\frac{1}{2}}$$

où C est une constante qui dépend que de la dimension N .

Preuve : Si B_1 et B_0 sont de telles boules alors

$$\begin{aligned} |u_{B_1} - u_{B_0}| &= \left| \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} (u(x) - u_{B_0}) dx \right| \\ &\leq \frac{|B_0|}{|B_1|} \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} |u(x) - u_{B_0}| dx \\ &\leq C \frac{r_0^N}{r_1^N} r_0 \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} |\nabla u(x)| dx \\ &\leq C \frac{r_0^N}{r_1^N} r_0 \left(\frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \frac{r_0^N}{r_1^N} r_0^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4}$$

où C est la constante de Poincaré et on a utilisé (3). Pour montrer que l'estimation ne dépend en fait pas du rayon de la petite boule on va utiliser une famille décroissante de boules. On renomme $B_n := B_1$ où n est un entier tel qu'on ait une suite décroissante de boules $(B_i)_{i=1..n}$

$$B_n \subset \dots \subset B_{i+1} \subset B_i \subset \dots \subset B_0$$

avec

$$\begin{aligned} r_i &= 2^{-i} r_0, \quad i = 0..n-1 \\ 2^{-(n+1)} r_0 &\leq r_n \leq 2^{-n} r_0 \end{aligned}$$

où r_i est le rayon de B_i .

En appliquant (4) à $|u_{B_i} - u_{B_{i+1}}|$,

$$|u_{B_n} - u_{B_0}| \leq \left(\sum_{l=0}^{n-1} |u_{B_l} - u_{B_{l+1}}| \right) \leq Cr_0^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} 2^{\frac{-l}{2}} \leq Cr_0^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

On est maintenant en mesure de conclure la preuve de la proposition 0.12. Soit x et y deux point de B . Alors si $B_x \subset B_0$ est une petite boule de rayon ρ centrée en x et $B_y \subset B_0$ est une petite boule de rayon ρ centrée en y (avec ρ suffisamment petit pour que B_x et B_y soient inclus dans B), en utilisant le lemme 0.13 on a :

$$\begin{aligned} |u_{B_x} - u_{B_y}| &\leq |u_{B_x} - u_B| + |u_B - u_{B_y}| \\ &\leq C|x - y|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Quitte à remplacer u par une fonction équivalente qui lui est égale presque partout, les moyennes de u sur B_x et B_y tendent vers $u(x)$ et $u(y)$. Donc en faisant tendre ρ vers 0 dans (5) on en déduit le résultat. \square

Remarque 0.14. (voir [GIA]) L'espace de Campanato est l'espace :

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ 0 < \rho < \text{diam}(\Omega)}} \rho^{-\lambda} \int_{B(x_0,\rho) \cap \Omega} |u - u_{x_0,\rho}|^p dx < \infty \right\}$$

avec $u_{x_0,\rho}$ la moyenne de u sur $B(x_0,\rho) \cap \Omega$. En posant $\alpha = \frac{\lambda - N}{p}$, le théorème de Campanato nous dit que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) &\simeq C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) && \text{si } N < \lambda \leq N + p \\ &\simeq \{ \text{constantes} \} && \text{si } N + p < \lambda \end{aligned}$$

Si on change dans la définition de $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, $\sup_{\rho \leq \text{diam}(\Omega)}$ en $\sup_{\rho \leq \rho(x_0)}$, alors on obtient une version locale du théorème, c'est à dire, si u appartient à $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ -modifié, tout point de Ω admet un voisinage dans lequel u est $C^{0,\alpha}$. En utilisant l'inégalité de Poincaré et si u vérifie (3) on a $\int_{B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0}|^2 \leq C\rho^{N+1}$ pour tout $\rho \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ et donc $u \in \mathcal{L}^{2,N+1}$ -modifié. Et donc $u \in C_{loc}^{0,\alpha}(B)$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et on retrouve donc le résultat du théorème 0.12.

A. El Baraka a travaillé sur la caractérisation par Littlewood-Paley de cet espace en 2002 dans [BAR06].

L'espace de Morey est l'espace

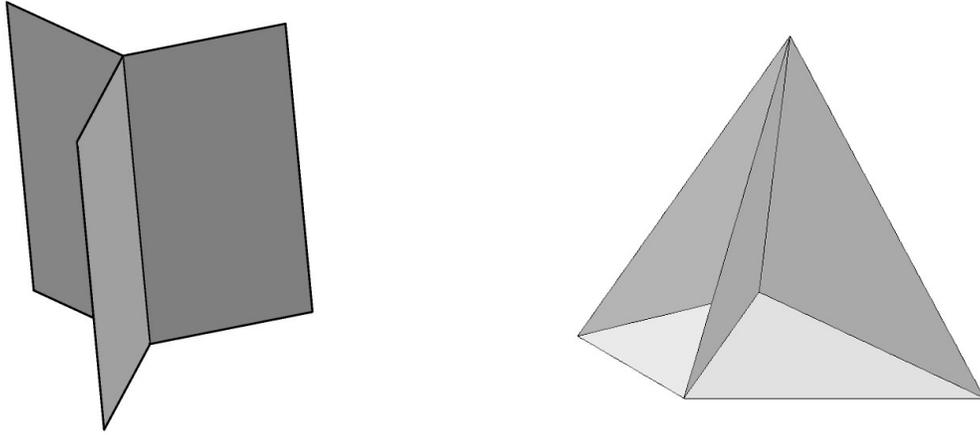
$$L^{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ 0 < \rho < \text{diam}(\Omega)}} \rho^{-\lambda} \int_{B(x_0,\rho) \cap \Omega} |\nabla u|^p dx < \infty \right\}$$

Et on a

$$L^{p,\lambda} \simeq \mathcal{L}^{p,\lambda} \quad 0 < \lambda < N.$$

Cônes minimaux

Les cônes \mathbb{P} , \mathbb{Y} et \mathbb{T} , dont les définitions précises seront données juste après, ont été abordés par Jean Taylor [TAY76] dans son théorème de régularité des films de savon. Ce sont les objets tangents pour les ensembles minimaux. Le théorème de Jean Taylor dit que toute surface minimale (par exemple un film de savon) est équivalent à un cône minimal de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} au voisinage de chacun de ses points. Les cônes de type \mathbb{P} sont les hyperplans. Les points localement équivalents à un \mathbb{P} sont des points réguliers. Les autres cônes déterminent les singularités possibles pour une surface minimale. Ce phénomène avait déjà été observé et conjecturé par Plateau plus d'un siècle auparavant.



Cônes² de type \mathbb{Y} et \mathbb{T} .

Définition 0.15. On définit $Prop \subset \mathbb{R}^2$ comme l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} Prop = \{ & (x_1, x_2); x_1 \geq 0, x_2 = 0 \} \\ & \cup \{ (x_1, x_2); x_1 \leq 0, x_2 = -\sqrt{3}x_1 \} \\ & \cup \{ (x_1, x_2); x_1 \leq 0, x_2 = \sqrt{3}x_1 \} \end{aligned}$$

puis $Y_0 \subset \mathbb{R}^3$ par $Y_0 = Prop \times \mathbb{R}$. L'épine de Y_0 est la droite $L_0 = \{x_1 = x_2 = 0\}$. Un cône de type 2 est un ensemble $Y = R(Y_0)$, où R est la composition d'une translation et d'une rotation. L'épine de Y est la droite $R(L_0)$. On note \mathbb{Y} l'ensemble des cônes de type 2. Par abus de langage on dira aussi parfois cône de type \mathbb{Y} .

Définition 0.16. Soit $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0)$, $A_3 = (-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$, et $A_4 = (-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$ les quatres sommets d'un tétraèdre régulier centré en 0. On note T_0 le cône (positif) engendré par les 6 arêtes $[A_i, A_j]$ $i \neq j$. L'épine de T_0 est l'union des quatres demi-droites engendrées par $[0, A_j]$. Un cône de type 3 est un ensemble $T = R(T_0)$

2. Merci à Ken Brakke pour ces images.

où R est la composée d'une translation et d'une rotation. L'épine de T est l'image par R de l'épine de T_0 . On note \mathbb{T} l'ensemble des cônes de type 3. Par abus de langage on dira aussi parfois cône de type \mathbb{T} .

Le fait que les cônes de \mathbb{Y} et \mathbb{T} soient minimaux peut être montré par une intégration par partie. On peut trouver l'argument dit "de calibration" dans [MOR] ou [LM].

Les cônes de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} et \mathbb{T} sont les seuls ensembles dans \mathbb{R}^3 qui minimisent localement la mesure de Hausdorff sous la contrainte topologique que chaque compétiteur préserve les composantes connexes à l'extérieur du domaine de compétition. Ce théorème est énoncé dans [DAV07], qui est une nouvelle démonstration du théorème de Jean Taylor et qui nous servira dans le dernier chapitre de la thèse.

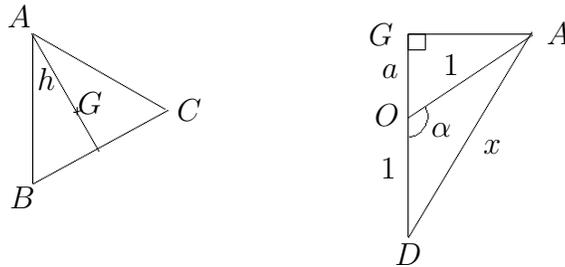
Quelques constantes numériques à propos du \mathbb{T}

Proposition 0.17. *Soit J un tétraèdre régulier centré en 0 dans \mathbb{R}^3 inscrit dans la boule unité et T le cône de type \mathbb{T} s'appuyant sur les arêtes de J . Alors on a les constantes suivantes :*

Longueur d'une arête de J : $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Angle au point 0 d'une face de T : $\alpha_0 := 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq 109^\circ 47'$

Preuve : Soit A, B, C, D un tétraèdre régulier centré en 0 et inscrit dans la boule unité de \mathbb{R}^3 . On nomme x le côté du tétraèdre (longueur des arêtes). On se place tout d'abord dans la face ABC . Soit h la hauteur issue de A . Alors comme ABC est un triangle équilatéral de côté x on sait que $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. On appelle G le centre de gravité du triangle ABC . Ensuite on se place dans le plan qui contient h et qui est orthogonal au triangle ABC . Dans ce plan on considère le triangle DGA (on note O l'origine).



Comme G est le centre de gravité de ABC on a $AG = \frac{2}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. En utilisant le théorème de Pythagore dans OAG on obtient que $OG = \sqrt{1 - \frac{1}{3}x^2}$. Ce qui permet maintenant de

trouver x en utilisant le théorème de Pythagore cette fois dans DGA ce qui donne

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Enfin, pour trouver l'angle α il suffit de se placer dans le triangle isocèle DOA . On appelle I le milieu de DA . Le rectangle DIO est rectangle en O donc $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{x}{2}$ d'où le résultat. \square

Théorème de Reifenberg

Les ensembles “Reifenberg-plats” introduits dans [REI] sont présents dans le deuxième chapitre. La nature même de ces ensembles a donné naissance aux idées de la démonstration du théorème de régularité dont fait l'objet le deuxième chapitre de cette thèse. Si E et F sont deux fermés de \mathbb{R}^N , pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$, on note $D_{x,r}$ la distance de Hausdorff normalisée dans $B(x, r)$

$$D_{x,r}(E, F) = \frac{1}{r} \max \left\{ \sup_{z \in E \cap B(x,r)} d(z, F), \sup_{z \in F \cap B(x,r)} d(z, E) \right\}. \quad (6)$$

On définit maintenant les ensembles “Reifenberg-plats”.

Définition 0.18. *Un ensemble E fermé dans \mathbb{R}^N est dit “Reifenberg-plat” de constante $\delta > 0$ si pour tout $x \in E$ et pour tout $r > 0$ il existe un hyperplan $P_{x,r}$ tel que*

$$D_{x,r}(E, P_{x,r}) \leq \delta.$$

Un ensemble Reifenberg-plat est donc un ensemble qui ressemble à un hyperplan à toute les échelles. Le théorème du disque topologique de Reifenberg nous informe alors sur la régularité de ces ensembles.

Théorème 0.19. [REI][DPT] *Quelque soit $0 < \alpha < 1$ il existe δ tel que pour tout ensemble E Reifenberg plat dans $B(0, 1)$ de constante δ qui contient l'origine il existe un hyperplan P contenant l'origine et il existe un homéomorphisme $\Phi : B(0, 1)$ sur son image, h olderien de puissance α ainsi que son inverse tel que*

$$E \cap B(0, \frac{1}{2}) \subset \Phi(P \cap B(0, \frac{3}{4})) \subset E \cap B(0, 1).$$

L'énoncé du théorème 0.19 est en fait tiré de [DPT]. En effet dans [DPT], G. David, T. De Pauw et T. Toro ont généralisé le théorème du disque topologique de Reifenberg dans \mathbb{R}^3 . Ils considèrent une généralisation des ensembles Reifenberg plat qu'ils nomment ensembles ε -minimaux dans \mathbb{R}^3 . Ce sont des ensembles qui à toutes les échelles ressemblent soit à un plan, soit à un cône de type \mathbb{Y} , soit à un cône de type \mathbb{T} . Ils montrent dans ce cas que si ε est assez petit, alors les ensembles ε -minimaux sont bi-h olderien équivalent à un cône minimal.

Dans l'introduction du chapitre 2 de la thèse on verra plus de détails à propos du théorème de [DPT].

Définition de $\beta(x, r)$

Il sera parfois utile d'employer la quantité $\beta(x, r)$, qui estime la distance à un cône minimal

$$\beta(x, r) := \inf_Z \left\{ \frac{1}{r} \sup_{y \in K \cap B(x, r)} d(y, Z) \right\}. \quad (7)$$

L'inf est pris sur tous les cônes Z de type \mathbb{P}, \mathbb{Y} ou \mathbb{T} qui passent par x . C'est Peter Jones [JON87] qui en premier a introduit le nombre β uniquement basé sur les hyperplans. Cette quantité a ensuite été généralisé dans [DPT] avec l'utilisation des autres cônes.

Notre définition du β donnée par (7) autorise a priori l'ensemble à avoir des trous. Ce n'est pas un fait très grave dans la mesure où nous contrôlerons par ailleurs la taille des trous en fonction du saut de la fonction u pour un minimiseur de Mumford-Shah. Mais lorsque l'on travaille uniquement avec des ensembles, il est plus judicieux de prendre un β "bilatéral", c'est à dire avec la distance de Hausdorff en entier :

$$\beta_b(x, r) := \frac{1}{r} \inf_Z \max(\{ \sup_{y \in K \cap B(x, r)} d(y, Z) \}, \{ \sup_{y \in Z \cap B(x, r)} d(y, K) \}).$$

Les nombres β permettent de contrôler de manière purement géométrique, la régularité d'un ensemble. Par exemple considérons uniquement le cas du β_b défini avec les hyperplans. Alors si K est un graphe lipschitzien on obtient que $\beta_b(x, r) \leq C$ pour tout x et r . La réciproque n'est pas vrai. Mais si il existe une constante C telle que pour tout x et r on a $\beta_b(x, r) \leq C$, cela veut dire que K est un ensemble Reifenberg-plat, et donc il est localement l'image bi-hölderienne d'un hyperplan. Si maintenant on a un point x tel que $\beta_b(x, r) \leq Cr^a$ avec a une puissance positive, alors x est localement inclus dans un graphe $C^{1, \alpha}$. Ce théorème est également vrai pour le β_b défini sur les cônes de type \mathbb{Y} et \mathbb{T} et se trouve dans [DPT].

Ce résultat est utilisé par G. David pour re-démontrer le théorème de Jean Taylor dans [DAV07]. Pour montrer la régularité de l'ensemble, il cherche à montrer que β décroît comme une puissance du rayon. C'est également par cette méthode que le théorème de régularité pour un minimiseur de Mumford-Shah dans [DAV96] est démontré, et en ce qui concerne le théorème de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara [AFP07], ils utilisent une méthode qui y ressemble. En effet, dans leurs cas ils démontrent une décroissance couplée d'une quantité analogue à β et de l'énergie normalisée.

Pour notre théorème de régularité (Chapitre 2), notre stratégie de départ était d'essayer de contrôler le nombre β et montrer une décroissance comme une puissance de r . Finalement on a pas eu recours à cette méthode dans la mesure où l'on s'est ramené aux estimations contenues dans [DAV07].

Enfin, un résultat marquant qui utilise les nombres β est le théorème du voyageur de commerce de Peter Jones [JON87]. Peter Jones montre également que si K est une courbe

lipschitzienne dans \mathbb{R}^2 , alors $\beta(x, r)^2 \frac{dH^1(x)}{r} dr$ est une mesure de Carleson sur $K \times \mathbb{R}^+$. Cette estimation permet par exemple de redémontrer le théorème de continuité de l'opérateur de Cauchy sur une courbe Lipschitzienne.

Chapitre 1

Sur les minimiseurs globaux de Mumford-Shah coniques

Sommaire

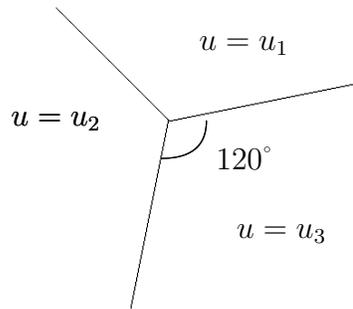
1.1	Introduction	32
1.2	Si K est conique alors u est homogène	34
1.2.1	Sur les fonctions harmoniques et minimiseurs d'énergie	34
	Quelques généralités	34
	Cônes lisses finis et intégration par partie	38
	Principe du maximum	40
	Mesure Harmonique	48
1.2.2	Décomposition spectrale et applications	49
1.3	Quelques applications	62
1.3.1	Minorations pour la plus petite valeur propre	63
1.3.2	Quelques premières applications	65
	Des cas où u est forcément constante	65
	Sur la recherche d'un nouveau minimiseur global	66
1.4	Cas du demi plan dans \mathbb{R}^3	68
1.4.1	Unicité de la fonction cracktip	69
1.4.2	Cas d'un secteur angulaire	81

1.1 Introduction

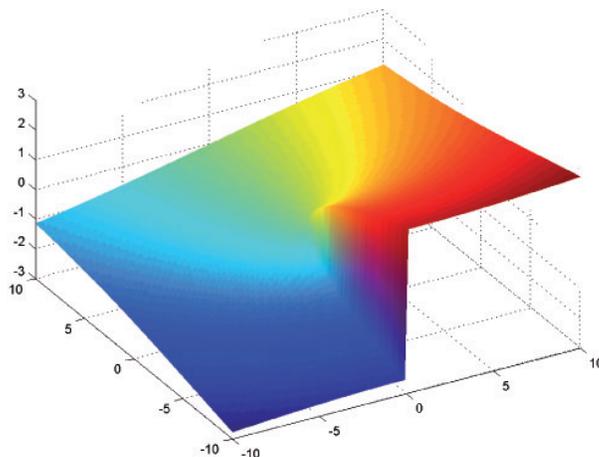
Dans ce chapitre on s'intéresse aux minimiseurs globaux de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 (voir la définition 0.10). Rappelons que les minimiseurs globaux apparaissent comme limites d'explosions d'un minimiseur de Mumford-Shah. Ainsi, la connaissance des minimiseurs globaux nous donne des renseignements importants à propos de la régularité d'un minimiseur de Mumford-Shah. Dans \mathbb{R}^2 la liste des minimiseurs globaux (pour lesquels K est connexe) est connue. C'est grâce à l'exhaustivité de cette liste que le théorème de régularité de A. Bonnet [BON96] a pu voir le jour.

Voici la liste en dimension 2 des 4 minimiseurs globaux où K est connexe :

- 1er cas** : $K = \emptyset$ et u est une constante.
- 2ème cas** : K est une droite et u est constante de chaque côté de K .
- 3ème cas** : "Hélice" : K est l'union de 3 demi-droites se rejoignant en formant des angles de 120 degrés et u est constante dans chaque composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus K$.



- 4ème cas** : (à rotation près) "Cracktip" : $K = \{(x, 0); x \leq 0\}$ et $u(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + C$, pour $r > 0$ et $|\theta| < \pi$, et où C est une constante.



Graphe de la fonction cracktip

Qu'en est-il en dimension 3? On en connaît très peu. Les cônes minimaux provenant de la théorie des surfaces minimales (le vide, le plan, le “Y”, le “T” voir les définitions 0.15 et 0.16) déterminent la liste des minimiseurs globaux où la fonction u est localement constante. Il existe au moins un autre minimiseur global dans \mathbb{R}^3 où u n'est pas localement constante, provenant de la dimension 2 : le *cracktip* fois une droite avec comme ensemble singulier un demi plan. A l'heure actuelle, on ne connaît pas d'autres exemples, même si certains arguments intuitifs nous permettent de croire qu'il y en a forcément d'autres (voir [DAV05] chapitre 76).

Rappelons que si (u, K) est un minimiseur global et que si K est assez régulier, alors u est harmonique dans $\mathbb{R}^N \setminus K$ avec condition de Neumann sur K .

Comme premier pas vers la découverte des minimiseurs globaux dans \mathbb{R}^3 on va étudier les minimiseurs dont l'ensemble singulier est conique. Pour cela on se placera dans \mathbb{R}^N car le travail est le même que pour \mathbb{R}^3 . Il se trouve qu'il y a un lien étroit entre un minimiseur global (u, K) lorsque K est conique et le spectre du laplacien sur $S^{N-1} \setminus K$. Tout simplement si (u, K) est un tel minimiseur, alors la restriction de u à $S^{N-1} \setminus K$ est une fonction propre pour le laplacien sphérique avec condition de Neumann associé à la valeur propre $\frac{3-2N}{4}$. C'est le principal résultat de ce chapitre.

Ensuite on étudiera quelques applications dans \mathbb{R}^3 , notamment le cas où K est un demi-plan. On montre comme première application que la fonction *cracktip* fois \mathbb{R} est la seule fonction associée à un demi-plan. En particulier on démontre également que les fonctions de type *cracktip* fois \mathbb{R} en restriction à la sphère engendrent l'espace propre associé à la valeur propre $-\frac{3}{4}$ sur la sphère privée d'un demi équateur.

Enfin, on termine en montrant qu'un secteur angulaire strict ne peut pas être l'ensemble singulier d'un minimiseur global dans \mathbb{R}^3 .

1.2 Si K est conique alors u est homogène

Dans cette partie on montre que si (u, K) est un minimiseur global dans \mathbb{R}^N et que si l'ensemble singulier K est un cône centré en zéro (avec quelques hypothèses de régularité supplémentaires sur K), alors il existe une fonction u_0 localement constante telle que la fonction $u - u_0$ soit homogène de degré $\frac{1}{2}$. Ce résultat n'est pertinent que si la dimension N est supérieure ou égale à 3. En effet, en dimension 2, si l'ensemble K est conique, alors il est connexe et donc il fait partie de la liste citée dans l'introduction. C'est pourquoi dans la suite on va supposer que $N \geq 3$.

1.2.1 Sur les fonctions harmoniques et minimiseurs d'énergie

Le but de ce paragraphe est d'étudier les minimiseurs d'énergie, en particulier dans le complémentaire d'un ensemble conique K . On voudrait par exemple étudier l'existence, l'unicité, la régularité, la validité de la formule d'intégration par partie, le principe du maximum, et la mesure harmonique sur la sphère privée de K . Toutes ces notions sont bien sûr liées.

Quelques généralités

- *Définition des fonctions harmoniques.* Rappelons tout d'abord qu'une fonction harmonique "au sens classique" dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N est une fonction $u \in C^2(\Omega)$ telle que $\Delta u = 0$ dans Ω où Δ désigne le laplacien

$$\Delta u := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

On peut aussi définir les fonctions harmoniques dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec la même formule pour le laplacien mais où les dérivées sont prises au sens des distributions. La définition est équivalente car le laplacien est hypoelliptique. Cela vient du fait que la solution élémentaire du laplacien est C^∞ en dehors de l'origine. L'hypoellipticité implique que si u est une distribution telle que $\Delta u = 0$, alors u est en réalité une fonction C^∞ et on a $\Delta u = 0$ au sens classique. Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$, on dit que u est harmonique au sens faible lorsque pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = 0. \quad (1.1)$$

Comme $u \in W^{1,2}(\Omega)$, on sait que ∇u possède un représentant dans L^2 et donc l'expression (1.1) a bien un sens. Une intégration par partie nous dit alors que u est harmonique au sens des distributions et donc par hypoellipticité que u possède un représentant C^∞ et est harmonique au sens classique.

• *Notion de Trace.* Voyons maintenant les différentes conditions au bord de l'ouvert et les diverses notions de trace que l'on utilisera. Lorsque Ω est un ouvert régulier et borné, il existe une bijection entre $W^{1,2}(\Omega)$ (modulo $H_0^1(\Omega)$) et $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. En quelque sorte, on peut donner un sens à la restriction d'une fonction $W^{1,2}(\Omega)$ sur le bord de l'ouvert et cette restriction est dans $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Si l'ouvert n'est pas régulier (par exemple un cône!) alors cette bijection n'est plus vraie. Ceci dit, la notion de trace a toujours un sens. On pourra consulter [GRI85] pour plus de détails sur ces questions, avec notamment la caractérisation de l'application trace sur les espaces de Sobolev dans des ouverts polygonaux.

Dans notre cas, on travaillera toujours avec des ouverts dont le bord est localement lipschitzien en dehors d'un ensemble de points de mesure nulle. Dans ce contexte, on peut donner une définition de trace "presque partout" qui sera suffisante dans bien des cas. Soit $I \subset \partial\Omega$ un morceau de bord qui est le graphe d'une fonction lipschitzienne et soit $z \in I$. On note ν_z le vecteur normal unitaire sortant au point z (qui existe pour presque tout z). Alors la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(z - \varepsilon\nu_z) \quad (1.2)$$

existe pour presque tout $z \in I$. On pourra consulter [DAV05] page 80 pour plus de détails. C'est cette limite que nous appellerons "trace" est qui sera définie presque partout au bord.

• *Condition de Dirichlet.* Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ et si $I \subset \partial\Omega$ est un morceau de bord, on dit que u satisfait une condition de Dirichlet sur I si en presque tout point de I la limite dans (1.2) est nulle. On verra plus tard que si u est une fonction harmonique avec condition de Dirichlet p.p. sur I , et si de plus I est de classe C^2 , alors la limite dans (1.2) existe et est nulle partout sur I (voir proposition 1.2). On peut aussi donner une notion de condition de Dirichlet non homogène, dans ce cas la trace n'est pas nulle mais vaut une certaine fonction continue f .

Un problème Classique consiste à trouver une fonction u telle que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

L'ouvert Ω est par exemple un ouvert régulier et la fonction f est continue. Dans ce contexte on sait qu'il existe une unique solution u et qu'elle est régulière jusqu'au bord. Une méthode connue est d'employer des fonctions barrières (méthode de Perron voir [GT83] et voir également [BRE]).

• *Condition de Neumann au sens fort.* Soit Ω un ouvert à bord localement lipschitzien. Pour presque tout point $z \in \partial\Omega$ il existe un vecteur tangent et un vecteur normal unitaire sortant ν_z . On sait que la limite dans (1.2) existe pour presque tout z . Par contre, la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \nu_z} f(z + \varepsilon\nu_z) \quad (1.3)$$

n'est pas forcément bien définie. En revanche si $u \in W^{2,2}(\Omega)$ alors cette limite existe mais malheureusement comme nous travaillerons toujours dans $W^{1,2}(\Omega)$ cette remarque ne servira pas.

Soit I inclus dans $\partial\Omega$. On dira que u satisfait une condition de Neumann au sens fort presque partout sur I si pour presque tout $z \in I$ la limite (1.3) existe et vaut zéro.

• *Condition de Neumann au sens faible.* Soit u une fonction harmonique qui de plus est dans $W^{1,2}(\Omega)$. Soit I un ouvert de $\partial\Omega$. On dit que u satisfait une condition de Neumann au sens faible sur I si pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ qui vaut 0 sur un voisinage de $\partial\Omega \setminus I$ on a

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = 0.$$

Si Ω est un ouvert régulier borné et que $u \in C^1(\bar{\Omega})$, alors en utilisant une intégration par partie on peut montrer qu'une condition de Neumann au sens fort implique une condition de Neumann au sens faible.

De la même façon que pour la condition de Dirichlet, si une fonction harmonique satisfait une condition de Neumann au sens faible sur I , et si I est de classe $C^{1,\alpha}$, alors en réalité la condition a lieu au sens fort partout. Cela vient du fait que si I est $C^{1,\alpha}$ on peut appliquer le principe de réflexion et des arguments de théorie elliptique pour dire que u a un prolongement C^1 jusqu'au bord (voir le théorème 1.4).

Un autre problème classique est celui du problème mixte Dirichlet-Neumann. C'est à dire trouver une fonction u telle que

$$\begin{cases} \Delta u & = 0 \text{ dans } \Omega \\ u & = f \text{ sur } I \subset \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus I \end{cases}$$

Le problème de Dirichlet-Neumann peut être résolu par méthode variationnelle. C'est pourquoi nous introduisons la notion de Minimiseur d'énergie.

• *Minimiseur d'énergie.* Soit Ω un ouvert et $I \subset \partial\Omega$ un morceau de bord qui soit localement lipschitzien. On se donne une fonction f bornée sur I . On note \mathcal{W} l'ensemble des fonction de $W^{1,2}(\Omega)$ telles que leurs traces soient presque partout égales à f . On suppose que \mathcal{W} est non vide. Pour $v \in \mathcal{A}$ on appelle "intégrale de Dirichlet" ou encore "énergie" la quantité

$$\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Une proposition de [DAV05] page 98 nous permet d'affirmer que

Proposition 1.1. *Il existe une unique fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (modulo constantes sur les composantes connexes de Ω qui ne touchent pas I) telle que la trace de u soit f sur I et telle que*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \min_{w \in \mathcal{W}} \int_{\Omega} |\nabla w|^2.$$

La fonction u est alors appelée “minimiseur d’énergie”. La démonstration de l’existence utilise simplement la convexité de l’application $u \mapsto \int |\nabla u|^2$. Pour d’autres résultats variationnels on pourra consulter le livre [KEN] qui contient par exemple des résultats sur les problème de Dirichlet avec bord lipschitzien.

En comparant u avec une petite variation $u + \varepsilon\varphi$ où φ est $C_0^\infty(\Omega)$ on montre facilement qu’un minimiseur d’énergie u vérifie (1.1) et donc que u est harmonique (voir aussi la proposition 1.1 un peu plus loin). Si $J := \partial\Omega \setminus I$ est régulier on peut montrer également que u vérifie une condition de Neumann forte sur J (voir par exemple la remarque 15.21 page 15 de [DAV05]). Ceci s’applique en particulier aux minimiseurs globaux car dans ce cas, u est un minimiseur d’énergie si K est fixé.

Ce qui nous intéresse particulièrement dans la proposition 1.1 c’est la notion d’unicité qui est obtenue pour les minimiseurs d’énergie. Comme il y a un lien étroit entre minimiseur d’énergie et fonctions harmoniques, ce résultat d’unicité pourra s’appliquer dans certains cas à des fonctions harmoniques avec condition au bord au sens fort presque partout. Ce résultat d’unicité ne provient pas d’un principe du maximum comme c’est habituellement le cas pour les fonctions harmoniques. La seule restriction est que le résultat utilise le fait qu’il existe au moins une fonction dans $W^{1,2}(\Omega)$ telle que sa trace soit égale à f presque partout sur I (i.e. \mathcal{W} est non vide). Si l’ouvert Ω n’est pas assez régulier ou que f n’est pas assez régulière, cette condition n’est pas automatiquement vérifiée.

- *Régularité au bord.* Voici une proposition qui nous servira plus tard et qui donne la régularité au bord pour une fonction harmonique avec condition de Dirichlet.

Proposition 1.2. *On considère Ω, I, f comme dans la proposition précédente, et u le minimiseur d’énergie associé. Soit $x_0 \in I$ et ω un voisinage de x_0 dans I tel que ω soit le graphe d’une fonction C^2 et que f soit continue sur ω . Alors u est continue jusqu’au bord sur ω .*

Preuve : Il y a plusieurs façons d’aborder ce problème. Il existe sûrement un moyen en utilisant les techniques décrites dans le livre [KEN]. Une autre façon sans doute, consiste à utiliser des estimations sur le noyau de poisson pour un ouvert régulier. Mais nous allons utiliser ici les résultats de la méthode de Perron des fonctions barrières (cf [GT83] Lemme 2.13 p.25). En effet, on considère un ouvert U de régularité C^2 tel que U soit inclus dans Ω et $\partial\Omega \cap \partial U = \omega$. La fonction u vérifie donc le problème de Dirichlet $\Delta u = 0$ dans U et $u = \varphi$ sur ∂U où $\varphi = f$ sur ω et $\varphi = u$ sur $\partial\Omega \setminus J$. Donc la condition de Dirichlet φ n’est pas forcément continue aux points de rencontre de $\partial U \setminus \omega$ avec ω . Mais comme φ est

la trace de u qui est une fonction d'énergie finie, on sait par la proposition précédente qu'il existe une unique fonction qui minimise l'énergie et donc résout le problème de Dirichlet en ayant ces propriétés. Donc la solution du problème de Dirichlet dans Ω avec comme donnée initiale φ obtenu par la méthode de Perron (voir page 23 de [GT83]) est égale à u . En appliquant ensuite le Lemme de régularité 2.13 p.25 de [GT83] on obtient le résultat voulu. \square

Remarque 1.3. Les points x_0 de $\partial\Omega$ tels que toute fonction harmonique dans Ω soit continue jusqu'en x_0 sont appelés les "points réguliers pour le laplacien". La proposition précédente utilise que si x_0 possède un voisinage dans $\partial\Omega$ qui est de régularité C^2 , alors x_0 est un point régulier. Mais il existe des points réguliers qui ne sont pas forcément inclus dans un voisinage C^2 . Par exemple, une condition suffisante pour qu'un point x_0 soit régulier est qu'il existe une "fonction barrière" en x_0 , c'est à dire qu'il existe une fonction $w \in C^0(\bar{\Omega})$, sur-harmonique dans Ω (i.e. $\Delta w < 0$) telle que w soit strictement positive dans $\bar{\Omega} \setminus x_0$ et nulle en x_0 . Une autre condition suffisante est la condition de "la sphère extérieure", c'est à dire pour $x_0 \in \partial\Omega$ qu'il existe une boule B telle que $\bar{B} \cap \bar{\Omega} = x_0$. On pourra consulter [GT83] page 25 et suivantes pour plus de détails.

Notons qu'il existe aussi des résultats de régularité au bord pour des conditions de Neumann. Voici par exemple un énoncé qu'on pourra trouver dans [AFP00] chapitre 7.6.

Théorème 1.4. *Soit Ω un ouvert dans \mathbb{R}^N , $g \in L^\infty$ et $u \in W^{1,2}(\Omega)$ une solution faible du problème*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sur } S \end{aligned}$$

où $S \subset \partial\Omega$ est un morceau de bord de régularité $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha < 1$. Alors pour tout $x_0 \in S$ il existe un voisinage U de x_0 tel que ∇u possède une extension continue sur $S \cap U$.

Cônes lisses finis et intégration par partie

Un autre résultat qui sera utile, est celui de pouvoir intégrer par partie dans des domaines du type "complémentaires d'ensembles coniques". C'est cette intégration par partie qui nous permettra de raisonner de manière équivalente en terme de "minimiseur d'énergie" ou "fonction harmonique avec condition de Neumann". Les ensembles coniques considérés auront quand même une certaine régularité. C'est pourquoi nous introduisons la notion de "cône lisse fini".

Définition 1.5. *Soit K un ensemble fermé H^{N-1} mesurable dans \mathbb{R}^N . On dira que K est un cône lisse fini (centré en zéro) si*

- i) K est conique (i.e. $x \in K \Rightarrow \forall t > 0, tx \in K$)
- ii) $K \cap \partial B(0,1)$ est une union finie d'arcs de classe C^2 .

Un cône lisse possède deux types de singularités. Les singularités de type I sont des points x qui sont à l'intersection de deux arcs qui se rejoignent en leur bout sur $\partial B(0, \|x\|)$. On note Σ_I l'ensemble des points singuliers de type I. Les singularités de type II sont les points sur la "tranche du cône", c'est à dire les points x qui sont à l'extrémité d'un arc sur $\partial B(0, \|x\|)$. On note Σ_{II} l'ensemble des points singuliers de type II. Et il y a aussi l'origine qui est un point de singularité d'un type à part. Enfin, on note $\Sigma := \Sigma_I \cup \Sigma_{II} \cup \{0\}$. On peut remarquer que $H^{N-1}(\Sigma) = 0$ localement et que $K \setminus \Sigma$ est de classe C^2 . On peut dire que l'ensemble Σ contient les arêtes et les sommets du cône K . De plus comme K est conique, pour connaître les singularités de K dans \mathbb{R}^N il suffit de connaître les singularités de K sur une sphère. La régularité C^2 est juste là pour s'assurer que les théorèmes de régularité elliptiques et les procédés de réflexion sont valides.

Lemme 1.6. (Intégration par partie)

Soit K un cône lisse fini dans \mathbb{R}^N . Soit $u \in W^{1,2}(B(0,r) \setminus K)$ et soit v une fonction $W^{1,2}(B(0,r) \setminus K)$ dont la trace est nulle sur $\partial B(0,r) \setminus K$. On suppose de plus que u est harmonique dans $B(0,r) \setminus K$ avec condition de Neumann au sens fort sur $K \setminus \Sigma$ (de chaque côté des faces de K). Alors

$$\int_{B(0,r) \setminus K} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx = 0.$$

Preuve : L'argument de la preuve est simplement d'isoler les singularités avec une fonction "cut off" dont la taille du support est infinitésimal, effectuer une intégration par partie et passer à la limite.

On suppose dans un premier temps que v est une fonction bornée dans $B(0,r) \setminus K$ et appartient à $C^\infty(B(0,r) \setminus K)$.

Soit $\hat{\varphi}_\varepsilon$ une fonction C^∞ sur $\partial B(0,r)$ telle que $\hat{\varphi}_\varepsilon$ soit nulle dans un ε -voisinage de $\Sigma \cap \partial B(0,r)$. On prolonge ensuite $\hat{\varphi}_\varepsilon$ de façon radiale dans $B(0,r)$ que l'on note $\tilde{\varphi}_\varepsilon$, et on pose $\varphi_\varepsilon := \tilde{\varphi}_\varepsilon \psi_\varepsilon$ où ψ_ε est une fonction C^∞ qui vaut 0 sur $B(0,\varepsilon)$ et 1 dans $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2\varepsilon)$. Ainsi, φ_ε est une fonction C^∞ dont le support ne rencontre pas Σ . De plus on a l'estimation $\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_\infty \leq C \frac{1}{\varepsilon}$ et la taille du support est aussi majoré par $|supp(\nabla \varphi_\varepsilon) \cap B(0,r)| \leq C \varepsilon^{N-1}$ où la constante C ne dépend que de r . On peut appliquer la formule d'intégration par partie classique à la fonction $\varphi_\varepsilon \nabla u$ car elle est nulle dans un voisinage des singularités de K et car u et v sont C^∞ dans $B(0,r) \setminus K$ et régulières jusqu'au bord lorsque celui-ci est régulier (car u et v sont harmoniques). Donc

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r) \setminus K} \varphi_\varepsilon \nabla u \nabla v &= - \int_{B(0,r) \setminus K} \operatorname{div}(\varphi_\varepsilon \nabla u) v + \int_{\partial B(0,r) \setminus K} \varphi_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} v \\ &= \int_{B(0,r) \setminus K} \langle \nabla u, \nabla \varphi_\varepsilon \rangle v \end{aligned} \quad (1.4)$$

car $\Delta u = 0$ dans $B(0, r) \setminus K$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur K , et $v = 0$ sur $\partial B(0, r) \setminus K$. Or,

$$|\varphi_\varepsilon \langle \nabla u, \nabla v \rangle| \leq |\langle \nabla u, \nabla v \rangle|$$

et

$$\int_{B(0, r) \setminus K} |\langle \nabla u, \nabla v \rangle| \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 < \infty$$

donc par convergence dominée

$$\int_{B(0, r) \setminus K} \varphi_\varepsilon \langle \nabla u, \nabla v \rangle \rightarrow \int_{B(0, r) \setminus K} \langle \nabla u, \nabla v \rangle.$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r) \setminus K} |\langle \nabla u, \nabla \varphi_\varepsilon \rangle| |v| &\leq \frac{1}{\varepsilon} |\text{supp}(\nabla \varphi_\varepsilon)|^{\frac{1}{2}} \|v\|_\infty \left(\int_{\text{supp}(\nabla \varphi_\varepsilon)} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{N-1}{2}-1} \left(\int_{\text{supp}(\nabla \varphi_\varepsilon)} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

qui tend bien vers zéro pour $N \geq 3$ car ∇u est dans L^2 par hypothèse. Donc en passant à la limite dans (1.4) on obtient

$$\int_{B(0, r) \setminus K} \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$$

pour toute fonction $v \in W^{1,2}(B(0, r) \setminus K)$ bornée et telle que $v = 0$ sur $\partial B(0, r)$. Pour conclure il suffit de raisonner par troncature et densité. En effet, pour montrer qu'on peut approcher une fonction $v \in W^{1,2}(B(0, r) \setminus K)$ non bornée par une suite de fonction bornées, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction $G_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $G_n(x) = x$ pour $|x| \leq n$ et $G_n(x) = n$ pour $\|x\| \geq n + 1$. Ainsi, pour $v \in W^{1,2}(\Omega)$ on a $G_n(v) \in W^{1,2}(\Omega)$, et $\|G_n(v)\|_\infty \leq n + 1$. De plus par convergence dominée on a facilement que $G_n(v)$ tend vers v pour la norme $W^{1,2}(\Omega)$ ce qui permet de conclure. \square

Principe du maximum

Cette section traite du principe du maximum pour des minimiseurs d'énergie dans $B \setminus K$ où K est un cône ayant certaines propriétés. Avant toute chose, rappelons l'énoncé d'un théorème de Guido Stampacchia.

Théorème 1.7. [STA] Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et L un opérateur elliptique du second ordre à structure de divergence c'est à dire de la forme

$$Lu = -\partial_{x_j}(a_{ij}\partial_{x_i}u)$$

où les fonctions a_{ij} sont des fonctions mesurables et bornées sur Ω avec la condition

$$\nu^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \nu|\xi|^2.$$

Alors si u est une sous-solution par rapport à L on a

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Remarque 1.8. Le maximum de u est pris au sens de $W^{1,2}(\Omega)$. En effet, on peut donner un sens au maximum d'une fonction $W^{1,2}(\Omega)$ sur $\partial\Omega$ quelque soit l'ouvert borné Ω (voir définition 1.1. et 1.2. de [STA]). En outre si $\partial\Omega$ est suffisamment régulier pour que la trace de u existe (ce qui sera notre cas en général), alors le maximum de u au sens de [STA] coïncide avec la norme L^∞ de la trace.

Rappelons enfin qu'une *sous-solution* pour L est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ sur Ω on a

$$a(u, \varphi) \leq 0$$

où $a(u, v)$ est la forme bilinéaire associée à L .

Le théorème 1.7 donne donc un principe du maximum assez général pour un minimiseur d'énergie dans un ouvert quelconque. La preuve est très astucieuse. Elle utilise la technique des "troncatures de Stampacchia" et repose sur le fait que la forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive sur $W_0^{1,2}$.

Soit K un cône lisse fini centré en 0 et $B := B(0, 1)$ la boule unité dans \mathbb{R}^N . Le but de ce qui va suivre est de montrer un principe du maximum pour un minimiseur d'énergie dans $\Omega := B \setminus K$ avec condition de Dirichlet sur $\partial B \setminus K$ (et donc condition de Neumann sur $K \cap B$). Ce résultat nous servira par exemple pour étudier la mesure harmonique sur $\partial B \setminus K$.

On sait déjà par le théorème 1.7 que le maximum est atteint sur $\partial\Omega$. Et on sait aussi par le principe de Hopf, que le maximum n'est pas atteint dans l'intérieur de K (le principe de Hopf nous dit que si le maximum est atteint au point $x_0 \in \partial\Omega$, alors forcément $|\frac{\partial u}{\partial n}(x_0)| > 0$ voir [GT83]). Donc les ennuis se situent aux points de singularité de K c'est à dire $\Sigma \cap B$. Plutôt que de se concentrer sur ces points précis, nous allons redémontrer le principe du maximum pour des conditions mixtes Dirichlet-Neumann.

Rappelons que la forme bilinéaire associée au laplacien est la forme

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $I \subset \partial\Omega$ un morceau du bord localement lipschitzien. Soit γ la fonction qui a une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ associe sa trace sur I . Pour l'existence d'une telle trace on peut se reporter par exemple au chapitre 13 de [DAV05]. On définit l'espace

$$X := \{u \in W^{1,2}(\Omega); \gamma(u) = 0\}.$$

Si on avait pris la trace sur $\partial\Omega$ en entier on aurait $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ et donc on aurait obtenu le théorème 1.7. Nous dirons que u est une sous-solution mixte pour le laplacien si pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ avec $\gamma(\varphi) = 0$ et $\varphi \geq 0$ sur Ω on ait

$$a(u, \varphi) \leq 0.$$

Avec cette petite modification on peut énoncer la variante suivante du théorème de Guido Stampacchia.

Théorème 1.9. [STA] *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $I \subset \partial\Omega$ ouvert et localement lipschitzien, $X := \gamma^{-1}\{0\}$ (où γ est la trace sur I) comme définis au paragraphe précédent, et f une fonction continue et bornée sur I . On suppose que la forme bilinéaire $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ est coercive sur X . Alors toute sous-solution mixte u pour l'opérateur laplacien dans Ω vérifie le principe du maximum suivant*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_I f.$$

Remarque 1.10. La preuve fonctionne encore pour un opérateur elliptique L a structure de divergence comme dans le théorème 1.7

Preuve : Pour mémoire, revoyons ici la preuve de ce théorème dans le cadre plus précis de l'opérateur de Laplace et avec la petite modification sur la trace.

Soit u la sous-solution. On pose $\Phi = \sup_I f$. Montrons dans un premier temps que

$$w := \max(u, \Phi) \text{ est une sous solution pour le problème mixte,} \quad (1.5)$$

c'est à dire que pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ telle que $\gamma(\varphi) = 0$ et $\varphi \geq 0$ sur Ω on a

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla \varphi \leq 0. \quad (1.6)$$

Comme la fonction $\max(\cdot, \Phi)$ est lipschitzienne et que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ on en déduit que $\max(u, \Phi) \in W^{1,2}(\Omega)$ et l'expression (1.6) a bien un sens (voir le lemme 1.1. de [STA] ou la proposition IX.5. page 155 de [BRE]).

Pour montrer (1.5) il faut introduire quelques notations. On considère le convexe fermé

$$\mathcal{U} := \{v \in W^{1,2}(\Omega); v(x) \leq w(x) \text{ et } v = f \text{ sur } I\}.$$

Si $h \in W^{1,2}(\Omega)$ on définit

$$V_h := \{v \in W^{1,2}(\Omega); \exists t > 0; h + tv \in \mathcal{U}\}.$$

Maintenant il faut remarquer qu'il existe une fonction h telle que pour tout $v \in V_h$ on ait

$$\int_{\Omega} \nabla h \nabla v \geq 0. \quad (1.7)$$

En effet il suffit de minimiser l'énergie sur \mathcal{U} c'est à dire

$$h := \arg \min_{v \in \mathcal{U}} \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

L'existence est un fait classique (voir par exemple l'argument du chapitre 15 page 98 de [DAV05]) et (1.7) résulte d'un phénomène variationnel. En effet, par minimalité, h est tel que pour tout $v \in V_h$

$$\int_{\Omega} |\nabla(h + tv)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla h|^2 + t \int_{\Omega} \nabla h \nabla v + t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla h|^2$$

et donc en simplifiant par l'énergie de h et divisant par t on a

$$\int_{\Omega} \nabla h \nabla v + t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \geq 0.$$

Enfin, en faisant tendre t vers 0 on obtient (1.7).

Maintenant on va montrer que h est une sous solution et que $h = w$, ce qui montrera (1.5).

Que h soit une sous solution vient du fait que

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega); \varphi \leq 0 \text{ et } \gamma(\varphi) = 0\} \subset V_h$$

(car $h \in \mathcal{U}$ donc $h \leq w$ et donc comme $\varphi \leq 0$ on a $h + t\varphi \leq w$). Donc pour toute fonction φ positive, $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla h \nabla \varphi \leq 0$$

ce qui montre que h est une sous solution.

Enfin posons $\xi = \max(u, h)$ et montrons que $\xi = h$. (Rappelons que a désigne la forme bilinéaire $a(u, v) = \int \nabla u \nabla v$). On sait que $\xi \in \mathcal{U}$ car u et h sont deux fonctions de \mathcal{U} . On en déduit que $\xi - h \in V_h \subset X$ et donc d'après (1.7) on a

$$a(h, \xi - h) \geq 0. \quad (1.8)$$

D'autre part, $\xi \geq h$. Donc si $\xi - h \neq 0$ c'est que $\xi > h$. Mais dans ce cas, par définition de ξ on a $\xi = u$ donc

$$a(\xi, \xi - h) = a(u, \xi - h)$$

et comme u est une sous solution on a

$$a(u, \xi - h) \leq 0$$

et finalement

$$a(\xi, \xi - h) = a(u, \xi - h) \leq 0.$$

En combinant maintenant avec (1.8) on obtient

$$a(\xi - h, \xi - h) \leq 0$$

et donc par coercivité de a sur l'espace X on en déduit que $\xi = h$ c'est à dire que $u \leq h$. D'une manière analogue on peut montrer que $\Phi \leq h$ et donc $w = \max(u, \Phi) \leq h$. Il en découle $w = h$ et (1.5) est démontré.

On en déduit que $w - \Phi$ est également une sous solution (car w et $-\Phi$ en sont) donc par définition, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ telle que $\gamma(\varphi) = 0$ et $\varphi \geq 0$ on a

$$a(w - \Phi, \varphi) \leq 0. \tag{1.9}$$

Ensuite on utilise que

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega); \gamma(\varphi) = 0\} \text{ est dense dans } X. \tag{1.10}$$

Rappelons que X désigne

$$X := \{u \in W^{1,2}(\Omega); \gamma(u) = 0\}.$$

Ainsi, l'inégalité (1.9) s'étend à toutes les fonctions de $W^{1,2}(\Omega)$ dont la trace est nulle sur I , par conséquent

$$a(w - \Phi, w - \Phi) \leq 0$$

et par coercivité de a sur X il en résulte

$$w = \Phi$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour prouver (1.10) on peut s'inspirer du théorème de Meyers-Serrin (Th. 3.6. page 52 de [ADA] ou remarque 5 page 152 de [BRE]) et du Théorème I.X.17 page 171 de [BRE]. En effet, le théorème de Meyers-Serrin nous dit que les fonctions $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ sont denses dans $W^{1,2}(\Omega)$ et la démonstration du théorème I.X.17 de [BRE] permet de dire que si la trace de u est nulle sur $\partial B(0, r)$ alors on peut supposer que les fonctions de la suite dans

le théorème de Meyers-Serrin ont aussi une trace nulle sur I (utiliser la démonstration de (i) \Rightarrow (ii) de [BRE] avec une légère modification). \square

Un exemple de cas où la forme a est coercive est par exemple lorsque K est un demi plan dans \mathbb{R}^3 et $\Omega := B \setminus K$. Pour fixer les idées on suppose K est le demi plan suivant

$$K = P := \{x_2 = 0\} \cap \{x_1 \leq 0\} \quad (1.11)$$

que l'on note P au lieu de K pour se souvenir que c'est un demi plan. On note X l'espace des fonctions dans l'espace de Sobolev de trace nulle sur $\partial B(0, R) \setminus K$

$$X := \{u \in W^{1,2}(B(0, R) \setminus P); u|_{\partial B(0, R) \setminus K} = 0\}.$$

Alors

$$a(u, v) \text{ est coercive sur } X \quad (1.12)$$

où a désigne la forme bilinéaire associée au laplacien. Pour prouver (1.12) on va utiliser une variante de l'inégalité de Poincaré¹.

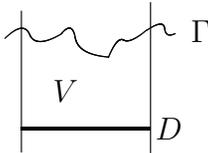
Proposition 1.11. *Il existe une constante C qui dépend uniquement de N et R telle que pour toute fonction $u \in X$ on ait*

$$\int_{B(0, R) \setminus P} |u|^2 dx \leq C \int_{B(0, R) \setminus P} |\nabla u|^2 dx \quad (1.13)$$

Remarque 1.12. La proposition 1.11 prouve immédiatement (1.12).

Preuve de la proposition 1.11 : Pour prouver la proposition 1.11 on va se servir du lemme 20 page 13 de [DAV05].

Lemme 1.13. [DAV05] *Soit Γ le graphe d'une fonction lipschitzienne au dessus d'un hyperdisque D dans \mathbb{R}^N et V le domaine "cylindrique" dans \mathbb{R}^N délimité par Γ et D .*



1. L'inégalité $\int |u - m_u|^2 \leq C \int |\nabla u|^2$ sur le cercle est plus connue sous le nom d'inégalité de Wirtinger. Parfois dans certains livres on trouvera cette inégalité sur une boule de \mathbb{R}^N encore sous le nom de "inégalité de Wirtinger" ou même "inégalité de Poincaré-Wirtinger" au lieu de "inégalité de Poincaré". Il existe aussi l'inégalité de Sobolev $\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p$ pour toute fonction $u \in H_0^1$. L'exposant p^* étant l'exposant de Sobolev. L'inégalité de Sobolev implique en particulier que sur un domaine borné Ω et pour toute fonction dans $H_0^1(\Omega)$ on a $\|u\|_2 \leq C \|\nabla u\|_2$ où C dépend de la mesure de Ω . Cette inégalité est parfois aussi appelée "inégalité de Poincaré" et montre en particulier que la forme $\int \nabla u \nabla v$ est coercive sur H_0^1 .

Soit enfin B une boule incluse dans V . Alors il existe une constante $C(V, B)$ telle que si $f \in W^{1,1}(V)$ et f^* désigne sa trace sur Γ ,

$$\int_{x \in B} \int_{z \in \Gamma} |f(x) - f^*(z)| dH^{N-1}(z) dx \leq C(V, B) \int_V |\nabla f| dx. \quad (1.14)$$

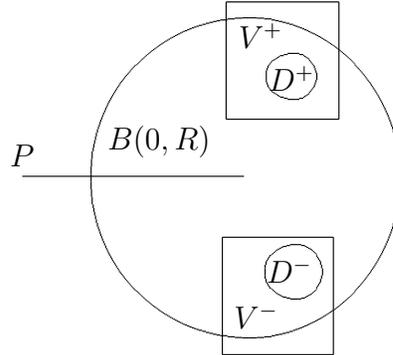
En adaptant légèrement la démonstration du lemme 1.13 (c'est à dire en utilisant essentiellement l'inégalité de Hölder) on obtient également que si $f \in W^{1,2}(V)$ alors on peut remplacer l'inégalité (1.14) par

$$\int_{x \in B} \int_{z \in \Gamma} |f(x) - f^*(z)|^2 dH^{N-1}(z) dx \leq C(V, B) \int_V |\nabla f|^2 dx.$$

Soit maintenant \tilde{P} le plan dans \mathbb{R}^3 qui contient P . On nomme B^+ et B^- les deux composantes connexes de $B \setminus \tilde{P}$. On voudrait appliquer le lemme 1.13 avec $V = B^\pm$. Malheureusement, $\partial B^\pm \cap \partial B(0, R)$ n'est pas le graphe d'une application lipschitzienne. On restreint alors B^\pm en posant

$$V^\pm := B^\pm \cap C^\pm$$

où C^\pm est le cube centré au point $(\frac{R}{4}, \pm \frac{3R}{4}, 0)$ et de diamètre $\frac{3R}{4}$. Ainsi, $\partial B(0, R) \cap V^\pm$ est bien le graphe d'une fonction lipschitzienne et on peut appliquer le lemme 1.13 dans V^\pm en choisissant une boule D^\pm dans chaque V^\pm .



En utilisant le lemme 1.13 appliqué dans V^\pm et en notant $\Gamma^\pm := \partial B(0, R) \cap V^\pm$ on a, pour toute fonction $u \in X$,

$$\int_{D^\pm} \int_{\Gamma^\pm} |u(x) - u^*(z)|^2 dH^{N-1}(z) dx \leq C(V^\pm, D^\pm) \int_V |\nabla u|^2$$

et comme $u^* = 0$ sur Γ^\pm on obtient

$$\int_{D^\pm} |u(x)|^2 dx \leq C \int_V |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (1.15)$$

Maintenant on écrit

$$\int_{B(0,R) \setminus K} |u(x)|^2 dx = \int_{B^+} |u(x)|^2 dx + \int_{B^-} |u(x)|^2 dx$$

et

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(B^+)} &\leq \|u - m_{B^+}\|_{L^2(B^+)} + \|m_{B^+} - m_{D^+}\|_{L^2(B^+)} + \|m_{D^+}\|_{L^2(B^+)} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2(B^+)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

en utilisant deux fois l'inégalité de Poincaré dans B^+ et en utilisant (1.15). En faisant de même dans B^- on obtient finalement

$$\|u\|_{L^2(B(0,R))} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(B(0,R))}$$

ce qui achève la preuve. \square

Remarque 1.14. La même démonstration s'applique encore pour des ensembles K plus généraux, par exemple pour tout ensemble K inclus dans un plan.

En réalité, pour les fonctions harmoniques, ou plus précisément un minimiseur d'énergie, la preuve du principe du maximum est beaucoup plus simple² et utilise l'unicité d'un minimiseur d'énergie. Une chose surprenante par rapport à l'énoncé précédent est que l'hypothèse de coercivité n'est plus nécessaire.

Théorème 1.15. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $I \subset \partial\Omega$ ouvert et localement lipschitzien, $X := \gamma^{-1}\{0\}$ (où γ est la trace sur I) comme définis au paragraphe précédent, et f une fonction continue et bornée sur I . Alors pour tout minimiseur d'énergie u dans Ω tel que $\gamma(u) = 0$ vérifie le principe du maximum suivant

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_I f.$$

Preuve : Soit u un minimiseur d'énergie. Alors comme

$$f : t \mapsto \min(\max f|_I, t)$$

est 1-lipschitz, on en déduit que $\nabla f(u) \in W^{1,2}(\Omega)$ et que

$$|\nabla f(u)| \leq |\nabla u|.$$

2. Merci à Antonin Chambolle pour cette remarque.

En particulier

$$\int_{\Omega} |\nabla f(u)|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

et $f(u)$ est un compétiteur, donc par unicité

$$u = f(u)$$

d'où le résultat. □

Mesure Harmonique

Dans cette partie on va étudier l'existence d'une mesure harmonique sur $\partial B \setminus K$ sous certaines conditions sur K .

Soit K un cône lisse dans \mathbb{R}^N centré à l'origine et $B \subset \mathbb{R}^N$ une boule intersectant K . On note γ la trace sur $\partial B \setminus K$ et on désigne par T l'image de $W^{1,2}(B \setminus K)$ par γ . On ne cherchera pas à caractériser T , bien que ce soit sûrement possible en utilisant les mêmes techniques que dans [GRI85]. On appelle aussi $C_b^0(\partial B \setminus K)$ les fonctions continues et bornées sur $\partial B \setminus K$. On note enfin l'espace $A := T \cap C_b^0$. L'espace A est non vide (contient par exemple les constantes). Alors pour toute fonction $f \in A$, la proposition 1.1 associe une unique fonction $u \in W^{1,2}(B \setminus K)$ qui minimise l'énergie dans $B \setminus K$ et qui vaut f sur $\partial B \setminus K$. D'après la proposition 1.2 on sait également que u est continue jusqu'au bord en tout point de $\partial B \setminus K$, et que u est une fonction harmonique dans $B \setminus K$ (donc en particulier C^∞). On se fixe un $y \in B \setminus K$ et on considère alors la forme linéaire μ_y définie par

$$\begin{aligned} \mu_y : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto u(y). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Le théorème 1.15 nous permet de dire que pour tout $f \in A$ on a

$$|\mu_y(f)| \leq \|f\|_\infty$$

ce qui implique que μ_y est une forme linéaire continue sur A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On identifie μ_y avec son représentant dans le dual de A et on l'appelle *mesure harmonique*.

De plus la mesure harmonique est positive dans le sens où si $f \in A$ est une fonction positive, alors (par le principe du maximum) $\mu_y(f)$ est positif. Par positivité de la forme linéaire μ_y , si g est une fonction positive de l'espace A et f une autre fonction de A telle que fg soit dans A , alors comme $(\|g\|_\infty + g)f$ et $(\|g\|_\infty - g)f$ sont des fonctions positives de A on en déduit que

$$|\langle fg, \mu_y \rangle| \leq \|f\|_\infty \langle g, \mu_y \rangle. \tag{1.18}$$

On pourrait être tenté de prolonger la forme linéaire μ_y à toutes les fonctions continues bornées et ainsi obtenir à l'aide du théorème de Riez une vraie mesure sur $\partial B \setminus K$. Il faudrait pour cela utiliser un théorème de densité. Mais ici on se contentera de travailler avec l'espace A .

1.2.2 Décomposition spectrale et applications

Maintenant que les principaux résultats généraux sur les fonctions harmoniques et minimiseurs d'énergie ont été traités, on peut regarder la décomposition spectrale qui sera l'outil principal pour montrer l'homogénéité des fonctions associées à un minimiseur global dont l'ensemble singulier est conique. On note $S^{N-1} := \partial B(0, 1)$ la sphère unité de \mathbb{R}^N .

Définition 1.16 (Propriété du cône). *On dit qu'un ouvert $S^{N-1} \setminus K$ possède la propriété du cône si il existe un nombre α tel que pour tout point x_0 de $K \cap S^{N-1}$ il existe un rayon r et un secteur conique \mathcal{C} de sommet x_0 et d'ouverture α tel que $B(x_0, r) \cap \mathcal{C} \subset \Omega$.*

On travaille dans $\Omega := S^{N-1} \setminus K$. On suppose que K est un cône lisse fini et que Ω possède la propriété du cône. Si on est dans ce cadre on dira qu'on est sous les hypothèses \mathcal{H} .

Tous les résultats suivants utilisent que l'injection $W^{1,2}(S^{N-1} \setminus K)$ dans $L^2(S^{N-1} \setminus K)$ est compacte. Or d'après le théorème 6.2. p 144 du livre [ADA] on sait que si un ouvert Ω borné possède la propriété du cône, alors l'injection $W^{1,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Proposition 1.17. *Si $S^{N-1} \setminus K$ possède la propriété du cône, alors les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_n$ (laplacien avec condition de Neumann) sont positives, discrètes tendant vers l'infini, et il existe une base orthonormée de $L^2(S^{N-1} \setminus K)$ formée de vecteurs propres pour l'opérateur $-\Delta_n$.*

Preuve : On se place sur l'ouvert $\Omega := S^{N-1} \setminus K$. On considère la forme quadratique Q définie par

$$Q(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

de domaine $W^{1,2}(\Omega)$ dense dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. C'est une forme quadratique positive et fermée donc (cf par exemple proposition 10.61 p.129 de [LB03]) il existe un unique opérateur autoadjoint noté $-\Delta_n$ de domaine $D(-\Delta_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tel que

$$\forall u \in D(-\Delta_n), \forall v \in W^{1,2}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \int_{\Omega} \langle -\Delta_n u, v \rangle.$$

On considère maintenant la nouvelle forme quadratique

$$\tilde{Q}(u) := Q(u) + \|u\|_2^2$$

sur le même domaine $W^{1,2}(\Omega)$. La forme \tilde{Q} a les mêmes propriétés que Q et l'opérateur associé est $\text{Id} - \Delta_n$. L'avantage de \tilde{Q} sur Q c'est que \tilde{Q} est coercive. Il en résulte que l'opérateur $\text{Id} - \Delta_n$ est bijectif et son inverse envoie $L^2(\Omega)$ dans $D(-\Delta_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$. Comme par hypothèse $\partial\Omega$ possède la propriété du cône, alors (cf. [RS] p.257) l'injection de $W^{1,2}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Donc la résolvante $(\text{Id} - \Delta_n)^{-1}$ est un opérateur compact et par conséquent (voir par exemple [RS] théorème XIII.64 p.245) il existe une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres pour $-\Delta_n$, et qui appartiennent au domaine. \square

Remarque 1.18. Le domaine de $-\Delta_n$ n'est en général pas connu. Si on est dans un ouvert à bord C^∞ , alors on peut montrer que le domaine est exactement $D(-\Delta_n) = \{u \in W^{2,2}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. Ici, le bord de l'ouvert peut contenir des singularités, donc ce théorème ne s'applique pas directement. Mais la connaissance exacte du domaine de $-\Delta_n$ n'est pas nécessaire pour ce que l'on veut faire.

Maintenant nous voulons étudier le lien entre Δ_n et le laplacien sphérique Δ_S , encore appelé opérateur de Laplace-Beltrami. On rappelle que si l'on calcule le laplacien en coordonnées sphériques on obtient la formule suivante

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S. \quad (1.19)$$

Proposition 1.19. *On se place sous les hypothèses \mathcal{H} . Pour toute fonction $f \in D(-\Delta_n)$ telle que $-\Delta_n f = \lambda f$ on a :*

- i) $f \in C^\infty(S^{N-1} \setminus K)$
- ii) $-\Delta_S f = -\Delta_n f = \lambda f$ dans $S^{N-1} \setminus K$
- iii) $\frac{\partial f}{\partial n}$ existe et vaut 0 sur $K \setminus \Sigma$

Preuve : Soit φ une fonction C^∞ à support compact dans $\Omega := S^{N-1} \setminus K$ et $f \in D(-\Delta_n)$. Alors la formule de Green au sens des distributions donne :

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \varphi = \langle -\Delta_S f, \varphi \rangle$$

où le crochet est le crochet de dualité des distributions. Or par définition de l'opérateur $-\Delta_n$ et comme f est dans le domaine $D(-\Delta_n)$ on a aussi

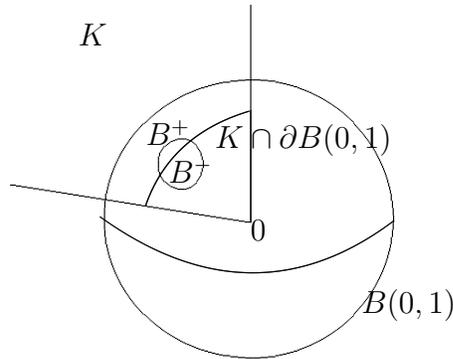
$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \varphi = \langle -\Delta_n f, \varphi \rangle$$

où le crochet désigne cette fois ci le produit scalaire L^2 . Ce qui prouve que

$$\Delta_n f = \Delta_S f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Autrement dit, $-\Delta_S f = \lambda f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Or comme $f \in W^{1,2}(\Omega)$, par hypoellipticité du laplacien on sait que f est C^∞ et que $-\Delta_S f = \lambda f$ au sens classique. Ce qui prouve à la fois *i*) et *ii*). On sait même par des propriétés classiques des solutions d'opérateurs elliptiques que f est régulière jusqu'au bord sur $K \setminus \Sigma$.

Maintenant on considère une boule B dont l'intersection avec K ne rencontre pas Σ . On suppose que B est coupée en deux parties B^+ et B^- par K .



Quitte à modifier légèrement B au voisinage de l'intersection avec K on peut supposer que B^+ et B^- sont à bord C^2 . La définition de Δ_n implique en particulier que pour toute fonction $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ nulle en dehors de B^+ on a

$$\int_{B^+} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{B^+} \langle -\Delta_n u, \varphi \rangle dx = \lambda \int_{B^+} \langle u, \varphi \rangle dx.$$

D'autre part une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} \int_{B^+} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx &= \int_{B^+} \langle -\Delta_S u, \varphi \rangle + \int_{\partial B^+} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \\ &= \lambda \int_{\partial B^+} \langle u, \varphi \rangle + \int_{\partial B^+} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\partial B^+} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi = 0.$$

Autrement dit la fonction f est solution faible du problème mixte

$$\begin{aligned} -\Delta_S f &= \lambda f & \text{dans} & B^\pm \\ f &= f & \text{sur} & \partial B^\pm \setminus K \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= 0 & \text{sur} & K \cap \partial B^\pm \end{aligned}$$

Donc par des résultats connus de théorie elliptique, f est régulière et vérifie le même problème fortement dans B (voir par exemple les théorèmes IX.25 et IX.26 page 181 de [BON96] ou encore [AFP00] chapitre 7.6 page 370). \square

Donc finalement on peut récapituler les énoncés précédents de la façon suivante. Pour toute fonction $f \in L^2(S^{N-1} \setminus K)$, il existe une suite de réels a_i tels que

$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i f_i \quad (1.20)$$

où la convergence de la série est dans L^2 . Les fonctions f_i sont dans $C^\infty(S^{N-1} \setminus K) \cap W^{1,2}(S^{N-1} \setminus K)$, vérifient $-\Delta_S f_i = \lambda_i f_i$ (où les λ_i sont positifs ou nuls) et $\frac{\partial f_i}{\partial n} = 0$ sur $K \cap \partial B(0, 1) \setminus \Sigma$. De plus, quitte à les renormaliser, les f_i forment une base orthonormale dans $L^2(S^{N-1})$, en particulier on a la formule de Parseval suivante :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|^2.$$

Dans la suite il sera plus commode de séparer les valeurs propres strictement positives du reste. Soit f une fonction dans le noyau de $-\Delta_n$ (c'est à dire une fonction propre avec pour valeur propre 0). Alors

$$\langle \nabla f, \nabla f \rangle = \langle -\Delta_n f, f \rangle = 0.$$

Donc f est une constante dans chaque composante connexe de Ω . On note f_0, f_{-1}, f_{-2} etc une base normalisée du noyau. Comme le nombre de composantes connexes de Ω est dénombrable, la base est au plus dénombrable (en fait sous les hypothèses \mathcal{H} elle est finie). Ensuite on considère l'orthogonal L du noyau dans L^2 . L'espace L possède une base formée de vecteur propres pour valeur propres strictement positives. On note f_i pour $i \geq 1$ la base de L . Ainsi, après avoir réordonné correctement la base, la décomposition de f s'écrit

$$f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i f_i.$$

Proposition 1.20. *La famille $\{f_i\}$ est orthogonale dans $W^{1,2}(\Omega)$. De plus si $f \in W^{1,2}(\Omega)$ et que sa décomposition dans $L^2(\Omega)$ est $f = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i f_i$ alors la série converge fortement dans $W^{1,2}(\Omega)$ et*

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 \|\nabla f_i\|_2^2 = \|\nabla f\|_2^2. \quad (1.21)$$

Preuve : On sait que $\{f_i\}$ est orthogonale dans $L^2(\Omega)$. De plus si $i \neq j$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla f_i \nabla f_j &= \int_{\Omega} -\Delta_n f_i f_j \\ &= \lambda_i \int_{\Omega} f_i f_j \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

donc $\{f_i\}$ est une famille orthogonale dans $W^{1,2}(\Omega)$ et

$$\|f_i\|_{W^{1,2}}^2 = \|f_i\|_2^2 + \|\nabla f_i\|_2^2 = 1 + \lambda_i.$$

On considère maintenant la projection orthogonale (pour le produit scalaire L^2)

$$P_k : f \mapsto \sum_{i=-k}^k a_i f_i.$$

L'opérateur P_k est la projection orthogonale sur le sous espace fermé (de dimension finie) noté A_k engendré par la famille $\{f_{-k}, \dots, f_k\}$. Plus précisément, on considère la restriction de P_k au sous espace $W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. On considère maintenant $\tilde{P}_k : W^{1,2} \rightarrow A_k$ la projection orthogonale sur le même sous espace pour le produit scalaire $W^{1,2}$. Montrons que $P_k = \tilde{P}_k$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\left\langle f - \sum_{i=-k}^k a_i f_i, \sum_{i=-k}^k a_i f_i \right\rangle_{W^{1,2}} = 0.$$

En effet, cela impliquera que

$$f = \underbrace{(f - P_k(f))}_{A_k^\perp} + \underbrace{P_k(f)}_{A_k}$$

où A_k^\perp désigne l'orthogonal de A_k dans $W^{1,2}(\Omega)$ donc $P_k(f) = \tilde{P}_k(f)$. Comme on a déjà

$$\left\langle f - \sum_{i=-k}^k a_i f_i, \sum_{i=-k}^k b_i f_i \right\rangle_{L^2} = 0$$

il suffit de montrer que pour tout k ,

$$\int_{\Omega} \left\langle \nabla f - \sum_{i=-k}^k a_i \nabla f_i, \sum_{i=-k}^k b_i \nabla f_i \right\rangle dx = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\langle \nabla f - \sum_{i=-k}^k a_i \nabla f_i, \sum_{i=-k}^k b_i \nabla f_i \right\rangle &= \int_{\Omega} \left\langle \nabla f, \sum_{i=-k}^k b_i \nabla f_i \right\rangle - \sum_{i=-k}^k a_i b_i \|\nabla f_i\|_2^2 \\ &= \sum_{i=-k}^k b_i \langle -\Delta_n f_i, f \rangle_{L^2} - \sum_{i=-k}^k a_i b_i \lambda_i \\ &= \sum_{i=-k}^k a_i b_i \lambda_i - \sum_{i=-k}^k a_i b_i \lambda_i \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

ce qui prouve que $P_k = \tilde{P}_k$ et donc, par Pythagore

$$\|P_k(f)\|_{W^{1,2}}^2 \leq \|f\|_{W^{1,2}}^2.$$

Il suffit maintenant de faire tendre k vers l'infini pour obtenir cette première inégalité

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 \|\nabla f_i\|_2^2 \leq \|\nabla f\|_2^2$$

qui est en réalité l'inégalité qui nous servira plus tard. En particulier, la série converge normalement dans $W^{1,2}(\Omega)$. On en déduit que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy pour la norme $W^{1,2}(\Omega)$ et donc comme la série converge déjà vers f dans L^2 , par unicité de la limite la série converge vers f dans $W^{1,2}(\Omega)$ ce qui prouve l'égalité (1.21). \square

Maintenant que l'on possède une base $\{f_i\}$ sur $\partial B(0,1)$, on considère pour un certain $r_0 > 0$, les fonctions

$$h_i(x) = r_0^{\alpha_i} f_i\left(\frac{x}{r_0}\right)$$

définies sur $\partial B(0, r_0) \setminus K$. L'exposant α_i n'est pas d'une grande importance pour l'instant. Il se trouve que l'on choisira plus tard

$$\alpha_i = \frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)^2 + 4\lambda_i}}{2}.$$

Ce qui nous intéresse principalement c'est que les fonctions h_i forment une base de $W^{1,2}(\partial B(0, r_0) \setminus K)$. En effet, si $f \in W^{1,2}(\partial B(0, r_0) \setminus K)$, alors $f(r_0 x) \in W^{1,2}(\partial B(0, 1) \setminus K)$ et donc en appliquant la décomposition précédente sur $\partial B(0, 1)$ on obtient

$$f(r_0 x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i f_i(x)$$

donc

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i h_i(x)$$

avec $a_i = b_i r_0^{-\alpha_i}$. Comme $\|h_i\|_2^2 = r_0^{2\alpha_i + N - 1}$ on a également

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^2 \|h_i\|_2^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^2 r_0^{2\alpha_i + N - 1} = \|f\|_{L^2(\partial B(0, r_0) \setminus K)}^2 < +\infty. \quad (1.24)$$

Enfin, en appliquant la proposition 1.20 on obtient

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i^2 \|\nabla f_i\|_2^2 \leq \|\nabla f(r_0 x)\|_2^2 < +\infty. \quad (1.25)$$

On est maintenant en mesure d'obtenir une décomposition dans $B(0, r_0)$ à partir d'une décomposition dans S^{N-1} . C'est ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.21. *Soit K un cône lisse fini dans \mathbb{R}^N tel que $\Omega := S^{N-1} \setminus K$ possède la propriété du cône. Alors il existe des fonctions α_i -homogènes et harmoniques g_i orthogonales dans $W^{1,2}(B(0, 1) \setminus K)$ telles que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(B(0, 1) \setminus K)$, harmonique dans $B(0, 1) \setminus K$ avec $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ au sens fort sur $K \setminus \Sigma$, et pour tout $r_0 \in]0, 1[$ la fonction u s'écrit de façon unique*

$$u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i g_i \quad \text{dans } B(0, r_0)$$

où les coefficients a_i ne dépendent pas du rayon r_0 . La convergence de la série a lieu dans $W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)$ et uniformément sur tout compact de $B(0, 1) \setminus K$. De plus

$$\|u\|_{W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)}^2 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 \|g_i\|_{W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)}^2. \quad (1.26)$$

Preuve : Comme $u \in W^{1,2}(B(0, 1) \setminus K)$ alors pour presque tout r_0 dans $]0, 1[$ on a

$$u|_{\partial B(0, r_0)} \in W^{1,2}(\partial B(0, r_0) \setminus K).$$

On peut donc appliquer la décomposition spectrale sur $\partial B(0, r_0)$ et dire que

$$u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i h_i \quad \text{sur } \partial B(0, r_0) \setminus K$$

On définit les fonction g_i par

$$g_i(x) := \|x\|^{\alpha_i} f_i \left(\frac{x}{\|x\|} \right).$$

Comme les f_i sont des vecteurs propres pour $-\Delta_S$ (on note λ_i la valeur propre associée), on en déduit d'après la formule (1.19) que

$$\begin{aligned} \Delta g_i &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} g_i + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g_i + \frac{1}{r^2} \Delta_S g_i \\ &= \alpha_i(\alpha_i - 1)r^{\alpha_i-2} f_i + \frac{N-1}{r} \alpha_i r^{\alpha_i-1} f_i - r^{\alpha_i-2} \lambda_i f_i \\ &= (\alpha_i^2 + (N-2)\alpha_i - \lambda_i) r^{\alpha_i-2} f_i \end{aligned}$$

et donc les fonctions g_i sont harmoniques dans $\mathbb{R}^N \setminus K$ quand α_i vérifie

$$\alpha_i = \frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)^2 + 4\lambda_i}}{2}. \quad (1.27)$$

On peut remarquer que les fonctions g_i sont orthogonales dans $L^2(B(0,1)\setminus K)$ car elles sont homogènes et orthogonales dans $L^2(\partial B(0,1)\setminus K)$. Notons que l'on s'est arrangé pour que les fonctions h_i coïncident avec les fonctions g_i sur $\partial B(0,r_0)$. De plus on a pour tout $0 < r \leq 1$

$$\begin{aligned}
\|g_i\|_{L^2(B(0,r)\setminus K)}^2 &= \int_{B(0,r)\setminus K} |g_i|^2 = \int_0^r \int_{\partial B(t)} |g_i(w)|^2 dw dt \\
&= \int_0^r \int_{\partial B(1)} |g_i(ty)|^2 dy dt = \int_0^r t^{2\alpha_i+N-1} \int_{\partial B(1)} |g_i(y)|^2 dy dt \\
&= \frac{r^{2\alpha_i+N}}{2\alpha_i+N} \|f_i\|_{L^2(\partial B(0,1)\setminus K)}^2 = \frac{r^{2\alpha_i+N}}{2\alpha_i+N} \leq 1.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

D'autre part, comme les gradients (tangentiels) des f_i sont aussi orthogonaux dans $L^2(\partial B(0,1)\setminus K)$ on en déduit (en effectuant une intégration par tranche) que les gradients des g_i sont orthogonaux dans $B(0,1)\setminus K$. Puis, par un calcul similaire à (1.28) on obtient que pour tout $0 < r \leq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\|\nabla g_i\|_{L^2(B(0,r)\setminus K)}^2 &= \int_0^r \int_{\partial B(t)} \left| \frac{\partial g_i}{\partial r} \right|^2 + |\nabla_\tau g_i|^2 dw dt \\
&= \int_0^r \int_{\partial B(t)} \left| \alpha_i t^{\alpha_i-1} f_i\left(\frac{w}{t}\right) \right|^2 + \left| t^{\alpha_i} \nabla_\tau f_i\left(\frac{w}{t}\right) \frac{1}{t} \right|^2 dw dt \\
&= \alpha_i^2 \int_0^r t^{2(\alpha_i-1)} \int_{\partial B(t)} \left| f_i\left(\frac{w}{t}\right) \right|^2 dw dt + \int_0^r t^{2(\alpha_i-1)} \int_{\partial B(t)} \left| \nabla_\tau f_i\left(\frac{w}{t}\right) \right|^2 dw dt \\
&= \alpha_i^2 \int_0^r t^{2(\alpha_i-1)} \int_{\partial B(1)} |f_i(w)|^2 t^{N-1} dw dt + \int_0^r t^{2(\alpha_i-1)} \int_{\partial B(1)} |\nabla_\tau f_i(w)|^2 t^{N-1} dw dt \\
&= \alpha_i^2 \frac{r^{2(\alpha_i-1)+N}}{2(\alpha_i-1)+N} \|f_i\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2 + \frac{r^{2(\alpha_i-1)+N}}{2(\alpha_i-1)+N} \|\nabla_\tau f_i\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2 \\
&= \frac{r^{2(\alpha_i-1)+N}}{2(\alpha_i-1)+N} (\alpha_i^2 + \lambda_i) \|f_i\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2 \\
&\leq Cr^{2\alpha_i} (\alpha_i^2 + \lambda_i)
\end{aligned} \tag{1.29}$$

car $\|\nabla_\tau f_i\|_2^2 = \lambda_i \|f_i\|_2^2$ et on a majoré le dénominateur en utilisant que $\alpha_i > 0$. En outre la constante C est indépendante de i .

On appelle g la fonction définie dans $\mathbb{R}^N \setminus K$ par

$$g := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i g_i.$$

La fonction g est bien définie dans $L^2(B(0, r_0))$ car en utilisant (1.28) et (1.24)

$$\|g\|_{L^2(B(0, r_0))}^2 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i|^2 \|g_i\|_{L^2(B(0, r_0))}^2 \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a_i|^2 r_0^{2\alpha_i + N} < \infty$$

On voudrait montrer maintenant que $g = u$.

• *Première étape* : Montrons que g est harmonique dans $B(0, r_0) \setminus K$. Comme les g_i sont des fonctions harmoniques de $B(0, r_0) \setminus K$ alors la suite des sommes partielles $s_k := \sum_{i=-k}^k a_i g_i$ est une suite de fonctions harmoniques uniformément bornées (en norme L^2) sur tout compact de $B(0, r_0) \setminus K$. Par l'inégalité de la moyenne (qui implique que la norme infinie sur une boule est majorée par une constante universelle fois la norme L^2 sur la boule de rayon double), on en déduit que la suite des sommes partielles est uniformément bornée sur tout compact. Donc il existe une sous suite qui converge uniformément vers une fonction harmonique qui n'est autre que g (par unicité de la limite). Donc g est harmonique dans $B(0, r_0) \setminus K$.

• *Deuxième étape* : Montrons que g est dans $W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)$. Tout d'abord, comme $u \in W^{1,2}(\partial B(0, r_0) \setminus K)$, par (1.24) on a

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 r_0^{2\alpha_i} \|\nabla_\tau f_i\|_{L^2(\partial B(0,1) \setminus K)}^2 < +\infty. \quad (1.30)$$

De plus comme $\|\nabla_\tau f_i\|_2^2 = \lambda_i \|f_i\|_2^2$ et $\|f_i\|_2 = 1$, on a aussi

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 r_0^{2\alpha_i} \lambda_i < +\infty \quad (1.31)$$

et comme α_i et λ_i sont liés par la formule (1.27) on en déduit que

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 r_0^{2\alpha_i} \alpha_i^2 < +\infty. \quad (1.32)$$

Maintenant, comme $\sum a_i g_i$ converge uniformément sur tout compact on peut dire que

$$\nabla g = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \nabla g_i$$

donc en utilisant (1.29), (1.31), et (1.32),

$$\begin{aligned} \|\nabla g\|_{L^2(B(0, r_0))}^2 &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2 \|\nabla g_i\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^2 r_0^{2\alpha_i} (\alpha_i^2 + \lambda_i) < +\infty \end{aligned}$$

Donc $g \in W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)$.

• *Troisième étape* : Montrons que $\frac{\partial g}{\partial n} = 0$ sur $K \cap B(0, r_0) \setminus \Sigma$. On sait déjà que $\frac{\partial g_i}{\partial n} = 0$ sur $K \setminus \Sigma$ (car les fonctions f_i ont cette propriété). Donc il suffit de voir que g est bien régulière jusque sur K pour pouvoir intervertir $\frac{\partial}{\partial n}$ et \sum . Soit donc x_0 un point de $K \setminus \Sigma$ et B un voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^N qui ne rencontre pas Σ et tel que K sépare B en deux parties B^+ et B^- . On considère la suite des sommes partielles $s_k := \sum_{i=-k}^k a_i g_i$ qui est une suite de fonctions harmoniques dans B^+ . Comme $\partial B^+ \cap K$ est C^∞ on peut faire une réflexion pour prolonger s_k de façon C^∞ dans B tout entier. Cette suite s_k de fonctions C^∞ est solution d'une certaine équation elliptique dont l'opérateur provient du laplacien composé avec l'application qui redresse $\partial B^+ \cap K$ en un morceau d'hyperplan. Donc comme s_k est uniformément bornée (pour la norme L^2), par une inégalité de type Harnack on peut montrer que s_k est uniformément bornée pour la norme infinie dans un voisinage un peu plus petit $B' \subset B$ qui contient toujours x_0 . Donc s_k converge normalement vers une fonction C^∞ notée s , qui coïncide avec g sur B^+ . Et comme $\frac{\partial s_k}{\partial n}(x_0) = 0$ et que la convergence est normale, on en déduit que $\frac{\partial s}{\partial n}(x_0) = 0$. Enfin, comme s coïncide avec g sur B^+ on en déduit que g est bien C^∞ jusqu'au bord et que $\frac{\partial g}{\partial n} = 0$ en x_0 , de chaque côté de K (en raisonnant avec B^- pour l'autre côté).

Comme on peut intervertir \sum et ∇ et que la famille g_i est orthogonale on en déduit au passage la formule (1.26).

• *Quatrième étape* : Montrons que g coïncide avec u sur $\partial B(0, r_0) \setminus K$. Soit r un rayon tel que $r < r_0$. Alors la fonction $x \mapsto g_r(x) := g(r \frac{x}{r_0})$ est bien définie pour $x \in \partial B(0, r_0)$, et par homogénéité des fonctions g_i on a

$$g\left(r \frac{x}{r_0}\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i g_i\left(r \frac{x}{r_0}\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_i} a_i g_i(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_i} a_i h_i(x).$$

Donc la fonction $x \mapsto g\left(\frac{r}{r_0}x\right)$ est dans $L^2(\partial B(0, r_0))$ et son développement sur la base $\{h_i\}$ a pour coefficients $\left\{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_i} a_i\right\}$. Montrons que $\|g_r - u\|_{L^2(\partial B(0, r_0))}$ tend vers 0. En effet, le développement de u est

$$u = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i h_i$$

donc

$$\|g_r - u\|_2^2 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha_i} - 1 \right)^2 a_i^2 \|h_i\|_2^2$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum a_i^2 \|h_i\|_2^2$ converge, il existe un certain rang L tel que pour tout $i > L$ le reste $\sum_{|i| > L} a_i^2 \|h_i\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus comme la suite α_i tend vers l'infini (quand i tend vers $+\infty$ et α_i est constant égal à zéro pour les i négatifs) pour $|i|$ assez grand et pour

tout $\frac{r_0}{2} < r < r_0$ on a $((\frac{r}{r_0})^{\alpha_i} - 1)^2 < 1$. Il en résulte que $\sum_{|i|>L} ((\frac{r}{r_0})^{\alpha_i} - 1)^2 a_i^2 \|h_i\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc il existe un L tel que pour tout $r \in [\frac{r_0}{2}, r_0]$ on ait

$$\begin{aligned} \|g_r - u\|_2^2 &= \sum_{i=-L}^L ((\frac{r}{r_0})^{\alpha_i} - 1)^2 a_i^2 \|h_i\|_2^2 + \sum_{|i|>L} ((\frac{r}{r_0})^{\alpha_i} - 1)^2 a_i^2 \|h_i\|_2^2 \\ &\leq \sum_{i=-L}^L ((\frac{r}{r_0})^{\alpha_i} - 1)^2 a_i^2 \|h_i\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant on peut choisir r assez proche de r_0 de manière à ce que le premier terme soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$ ce qui prouve que $\|g_r - u\|_2^2 \leq \varepsilon$ et donc g_r tend vers u en norme L^2 . Donc il existe une sous suite pour laquelle g_r tend vers u presque partout. Or on savait déjà comme g est harmonique, que la limite de g_r existe. Ce qui veut dire que g tend vers u radialement en presque tout point de $\partial B(0, r_0) \setminus K$. Cette propriété est suffisante pour la suite. Mais on peut remarquer en outre que comme g est une fonction harmonique et que sa trace au sens de Sobolev est une fonction continue (car on sait que u est continue sur $\partial B(0, r_0) \setminus K$) alors g tend vers u en tout point de $\partial B(0, r_0) \setminus K$.

• *Cinquième étape* : Les fonctions u et g sont deux fonctions harmoniques dans $B(0, r_0) \setminus K$, d'énergie finie, qui ont une dérivée normale nulle sur $K \setminus \Sigma$ et qui coïncident sur $\partial B(0, r_0) \setminus K$. Pour montrer que $u = g$ dans $B(0, r_0)$ on va montrer que g est un minimiseur d'énergie dans $B(0, r_0) \setminus K$. La proposition 1.1 nous donnera alors l'unicité. Soit $\varphi \in W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)$ telle que la trace de φ sur $\partial B(0, r_0)$ soit nulle. Alors en notant pour $v \in W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)$ l'énergie $J(v) := \int_{B(0, r_0) \setminus K} |\nabla v|^2$ on a

$$J(g + \varphi) = J(g) + \int_{B(0, r_0) \setminus K} \nabla g \nabla \varphi + J(\varphi).$$

Or comme g est une fonction harmonique avec condition de Neumann au sens fort sur $K \setminus \Sigma$ et que φ s'annule sur $\partial B(0, r_0) \setminus K$, en appliquant l'intégration par partie (lemme 1.6) on obtient

$$J(g + \varphi) = J(g) + J(\varphi).$$

Comme J est une fonction positive et que $g + \varphi$ décrit toute les fonctions $W^{1,2}(B(0, r_0) \setminus K)$ avec trace égale à u sur $\partial B(0, r_0) \setminus K$, on en déduit que g minimise J . On peut faire le même raisonnement avec u et donc u et g sont deux minimiseurs d'énergie avec même condition au bord. Donc par la proposition 1.1 on sait que $g = u$.

• *Sixième (et dernière) étape* : Montrons que la décomposition ne dépend pas du choix de r_0 . Soit r_1 un autre choix de rayon. Alors on peut refaire le même travail que précédemment et obtenir une décomposition

$$u(x) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_i g_i(x) \quad \text{dans } B(0, r_1) \setminus K.$$

Maintenant par unicité de la décomposition dans $B(0, \min(r_0, r_1))$ on en déduit que $b_i = a_i$ pour tout i . D'autre part r_0 était choisi a priori presque partout dans $]0, 1[$, mais comme la décomposition ne dépend pas du choix du rayon, on peut le prendre partout dans $]0, 1[$. En effet, pour avoir une décomposition par exemple pour un certain r_1 , il suffit de choisir presque partout un rayon r_0 plus grand que r_1 et appliquer la démonstration précédente. \square

Théorème 1.22. *Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah global dans \mathbb{R}^N tel que K soit un cône lisse fini et $\Omega := \partial B(0, 1) \setminus K$ possède la propriété du cône. Alors dans chaque composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus K$ il existe une constante u_k telle que $u - u_k$ soit homogène de degré $\frac{1}{2}$.*

Preuve : On applique la proposition précédente à u . C'est à dire

$$u(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i g_i(x) \quad \text{dans } B(0, r_0) \setminus K.$$

pour un certain r_0 choisi dans $]0, 1[$. De plus en appliquant la proposition 1.21 à la fonction $u_R(x) = u(Rx)$ on sait qu'il existe également des coefficients notés $a_i(R)$ tels que

$$u_R(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i(R) g_i(x) \quad \text{dans } B(0, r_0) \setminus K.$$

Maintenant comme $u_R(\frac{x}{R}) = u(x)$ on peut utiliser l'homogénéité des g_i et identifier les termes dans $B(0, r_0)$ ce qui donne $a_i(R) = a_i R^{\alpha_i}$. Donc en posant $y = Rx$ on obtient que

$$u(y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i g_i(y) \quad \text{dans } B(0, Rr_0) \setminus K.$$

Maintenant comme R est arbitraire on a en fait la décomposition dans $\mathbb{R}^N \setminus K$.

De plus pour tout rayon R on sait que

$$\|\nabla u\|_{L^2(B(0,R)\setminus K)}^2 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i^2 \|\nabla g_i\|_{L^2(B(0,R)\setminus K)}^2 \quad (1.33)$$

et comme g_i est homogène de degré α_i il en résulte que

$$\|\nabla g_i\|_{L^2(B(0,R)\setminus K)}^2 = R^{2(\alpha_i-1)+N} \|\nabla g_i\|_{L^2(B(0,1)\setminus K)}^2.$$

Comme les f_i pour $i \leq 0$ sont localement constantes on en déduit que pour $i \leq 0$, $\|\nabla g_i\|_{L^2(B(0,R)\setminus K)} = 0$. Donc on peut indexer la somme de la formule (1.33) par $i \geq 1$.

Maintenant, comme u est un minimiseur global de Mumford-Shah, on sait (voir (3)) qu'il existe une constante C telle que pour tout R

$$\|\nabla u\|_{L^2(B(0,R)\setminus K)}^2 \leq CR^{N-1}$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2 R^{2(\alpha_i-1)+N} \|\nabla g_i\|_{L^2(B(0,1)\setminus K)}^2 \leq CR^{N-1}.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2 R^{2\alpha_i-1} \|\nabla g_i\|_{L^2(B(0,1)\setminus K)}^2 \leq C.$$

Or cette quantité est bornée quand R tend vers l'infini si et seulement si tous les coefficients a_i correspondant à un degré α_i strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ sont nuls. D'autre part, cette quantité est bornée quand R tend vers 0, si et seulement si tous les coefficients a_i correspondant à un degré α_i strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ sont nuls. Donc finalement, u n'est autre qu'une somme finie de termes homogènes de degrés $\frac{1}{2}$, plus les constantes. \square

Remarque 1.23. On aimerait bien pouvoir affirmer que si (u, K) est un minimiseur global, alors non seulement $\frac{3-2N}{4}$ est une valeur propre du laplacien sur $\partial B(0, 1)\setminus K$, mais en plus on aimerait pouvoir dire que c'est la plus petite non nulle. Malheureusement, aucun argument que j'ai pu essayer ne confirme ce fait.

Remarque 1.24. Dans le théorème 1.22 on suppose que K est un cône lisse fini. Le fait de supposer que K soit lisse et fini n'est peut être pas si restrictif. On peut imaginer que si on applique le théorème de A. Bonnet [BON96] sur la sphère, alors l'intersection de K avec la sphère a une régularité proche de ce qu'on impose dans la définition de "lisse fini". D'autre part le fait de supposer que K soit conique n'est pas si choquant. En effet, tous les exemples connus en dimension 2 et 3 sont des cônes. Dans l'étude des ensembles minimaux, les objets tangents sont toujours des cônes. Donc il est naturel de penser que pour les ensembles minimaux de Mumford-Shah ce soit pareil. Il y a un autre argument qui nous incite à penser que K est sûrement invariant par dilatation. En effet, un minimiseur global est obtenu comme limite d'explosion d'un minimiseur local. Si (v, L) est un minimiseur local on obtient un minimiseur global (u, K) en extrayant par exemple une sous suite de $2^{-\frac{n}{2}}(u(2^n x - x_0), 2^{-n}(L - x_0))$. Si maintenant on fixe λ et qu'on fait une explosion à partir du couple minimiseur dilaté de λ c'est à dire $(\lambda^{-\frac{1}{2}}v(\lambda x - x_0), \frac{1}{\lambda}L)$ au lieu de (v, u) , on extrait une autre sous suite qui converge vers un minimiseur global. Rien n'indique à priori que les deux minimiseurs globaux coïncident. Mais il est naturel de penser que c'est le cas. De plus, si on savait prouver que K est conique, même en dimension 2, alors on aurait une démonstration de la conjecture de Mumford-Shah.

Remarque 1.25. Dans le chapitre 65 de [DAV05], on peut trouver un argument variationnel qui abouti à une formule en dimension 2 liant les normes des dérivée normales et radiales de u . La formule fut trouvée indépendamment par J.C. Léger pour les minimiseurs globaux et par F. Maddalena et S. Solimini. Pour tout $\xi \in K \cap \partial B(0, r)$, on appelle

$\theta_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angle (non orienté) entre la tangente à K au point ξ et le rayon $[0, \xi]$. On a alors la formule suivante

$$\int_{\partial B(0,r) \setminus K} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dH^1 = \int_{\partial B(0,r) \setminus K} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 dH^1 + \sum_{\xi \in K \cap \partial B(0,r)} \cos \theta_\xi - \frac{1}{r} H^1(K \cap B(0,r)).$$

Il est amusant de remarquer que pour un minimiseur global dans \mathbb{R}^2 dont K est conique (centré en 0) on trouve exactement

$$\int_{\partial B(0,r) \setminus K} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dH^1 = \int_{\partial B(0,r) \setminus K} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 dH^1. \quad (1.34)$$

Supposons maintenant que (u, K) soit un minimiseur global dans \mathbb{R}^N avec K un cône lisse fini centré en 0. Alors d'après le théorème 1.22 on sait à constante près que u est harmonique et homogène de degré $\frac{1}{2}$. Sa restriction à la sphère unité est une fonction propre pour le laplacien sphérique avec condition de Neumann sur K , associée à la valeur propre $\frac{2N-3}{4}$. On en déduit que

$$\|\nabla_\tau u\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2 = \frac{2N-3}{4} \|u\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2$$

et d'autre part

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \frac{1}{2} \|x\|^{-\frac{1}{2}} u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

donc

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2 = \frac{1}{4} \|u\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2.$$

On en déduit que

$$\|\nabla_\tau u\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2 = (2N-3) \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^2(\partial B(0,1))}^2$$

et donc pour $N = 2$ on retrouve bien la formule (1.34).

1.3 Quelques applications

Le théorème 1.22 donne un critère pour vérifier si K , cône lisse fini, a une chance de donner un minimiseur global (u, K) . En effet, si $\frac{3-2N}{4}$ n'est pas une valeur propre du laplacien sur $\partial B(0,1) \setminus K$, alors K ne peut pas être l'ensemble singulier d'un minimiseur global. En particulier, les minoration de la plus petite valeur propre dans certains domaines sphériques permettent d'éliminer certains cas.

1.3.1 Minorations pour la plus petite valeur propre

Ici nous allons résumer tous les résultats rencontrés dans la littérature à propos de la plus petite valeur propre pour le laplacien (Neumann) dans des domaines sphériques.

Tout d'abord un résultat général.

Théorème 1.26. [CHE70] *Soit M une variété Riemannienne compacte avec un bord C^∞ . On note λ_1^N la plus petite valeur propre non nulle pour $-\Delta_n$ (moins Laplacien avec condition de Neumann sur ∂M). On a alors*

$$\lambda_1^N > \frac{1}{4}h_N^2$$

où h_N est la constante isoperimétrique

$$h_N := \inf_D \left[\frac{Mes(\partial D)}{Mes(D)} \right]$$

où l'inf est pris sur tout les domaines D à bord C^∞ inclus dans M et qui vérifient $Mes(D) \leq \frac{1}{2}Mes(M)$.

Le théorème de J. Cheeger donne aussi une minoration dans le cas du problème de Dirichlet, et également pour les surfaces compactes sans bord.

Ce qui nous intéresse est en particulier le spectre sur des domaines sphériques. Tout d'abord, rappelons que pour la sphère unité de dimension $N - 1$, un calcul utilisant les harmoniques sphériques donne $\lambda_1 = N - 1$ (voir l'exercice 76.18 de [DAV05]). En particulier pour la sphère S^2 dans \mathbb{R}^3 on a $\lambda_1 = 2$. On sait même que cette valeur propre est de multiplicité 2 et que l'espace propre est engendré par les fonctions $\sin\theta \cos\varphi$ et $\sin\theta \sin\varphi$.

Il est connu également que sur la sphère, le problème isoperimétrique est résolu par les disques géodésiques (voir la page 305 de [BER]). Donc en utilisant le théorème de Cheeger on obtient la majoration suivante pour la sphère

$$\lambda_1^S > \frac{1}{4}$$

et pour la demie sphère

$$\lambda_1^{\frac{1}{2}S} > \frac{1}{8}$$

ce qui est loin d'être optimal car nous savons qu'en réalité

$$\lambda_1^S = \lambda_1^{\frac{1}{2}S} = 2.$$

Cependant, l'inégalité de Cheeger est optimale si on désire une inégalité qui reste vraie en toute dimension.

L'inégalité suivante est intéressante. Elle concerne les polygones curvilignes. La démonstration utilise un théorème de P. Li et S. T. Yau [LY] pour les domaines convexes de classe C^∞ sur des surfaces à courbure de Ricci positive. Monique Dauge se ramène à ce théorème pour des domaines avec des "coins" en l'approchant par une suite de domaines réguliers.

Proposition 1.27. [DAU92] *Soit Ω un polygone curviligne convexe sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 dont les bords sont C^∞ . Alors*

$$\lambda_1 \geq 1 \tag{1.35}$$

où λ_1 désigne la plus petite valeur propre non nulle de $-\Delta_S$ dans Ω avec condition de Neumann sur $\partial\Omega$.

L'inégalité (1.35) n'est pas optimale dans bien des cas. Par exemple pour les triangles on trouve, toujours dans [DAU92], l'inégalité suivante.

Proposition 1.28. [DAU92] *Soit Ω un triangle géodésique sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 tels que tous ses angles soient inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Alors*

$$\lambda_1 \geq 2 \tag{1.36}$$

où λ_1 désigne la plus petite valeur propre non nulle de $-\Delta_S$ dans Ω avec condition de Neumann sur $\partial\Omega$.

L'inégalité (1.36) ne s'applique pas directement pour le cas des triangles obtenus en intersectant un cône de type \mathbb{T} avec la sphère. En effet, de tels triangles ont des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Mais on verra au chapitre suivant qu'une preuve qui ressemble permet de montrer que $\lambda_1 \geq 2$ également pour un triangle de tétraèdre.

Concernant les domaines formés par l'intersection d'un cône de type \mathbb{Y} avec la sphère unité, c'est un cas particulier du résultat suivant.

Proposition 1.29. [DAU92] *Soit $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ les coordonnées cylindriques de \mathbb{R}^3 . Pour tout $\omega \in [0, 2\pi]$ on note Γ_ω l'espace angulaire suivant*

$$\Gamma_\omega := \{x \in \mathbb{R}^3; 0 < \theta < \omega\}.$$

On considère $\Omega_\omega = \Gamma_\omega \cap S^2$ et on note λ_1 la plus petite valeur propre non nulle de $-\Delta_S$ dans Ω_ω avec condition de Neumann sur $\partial\Omega_\omega$. Alors

$$\lambda_1 = \min(2, \lambda_\omega)$$

où

$$\lambda_\omega = \left(\frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

En particulier pour le \mathbb{Y} , $\omega = \frac{2\pi}{3}$ donc $\lambda_1 = 2$. Le résultat de la proposition 1.29 vient du fait qu'on connaît explicitement les fonctions propres dans ces domaines. On redémontrera au chapitre suivant que $\lambda_1 = 2$ pour le domaine provenant d'un cône de type \mathbb{Y} intersecté avec la sphère.

Il existe un autre résultat de minoration de valeur propre dans le cas d'un pavage de la sphère provenant d'une chambre d'un système de racines (voir [BB80]). Il dit que pour les pavages de la sphère unité qui proviennent d'un groupe cristallographique, la plus petite valeur propre est égale à 2. On y reviendra un peu plus tard dans le chapitre suivant.

Enfin, nous terminons ce paragraphe avec un résultat de monotonie pour les valeurs propres (Théorème 2.3.2 p.47 de [KMR]). La preuve utilise le principe du mini-max.

Proposition 1.30. *Soit $\Omega_1 \subset \Omega_2$ deux ouverts de \mathbb{R}^N tels que $H^N(\Omega_2 \setminus \Omega_1) = 0$. Alors pour tout $j \geq 0$ on a*

$$\lambda_j(\Omega_1) \leq \lambda_j(\Omega_2)$$

où les λ_j désignent les valeurs propres pour le laplacien avec condition de Neumann.

Remarque 1.31. La monotonie est inversée par rapport aux valeurs propres de Dirichlet.

Il existe encore deux propositions sur les minoration de valeur propres qui seront énoncées et utilisées dans le chapitre 2 (voir les propositions 2.8 et 2.12).

1.3.2 Quelques premières applications

Une application intéressante est le cas des secteurs angulaires qui seront traités à la fin du prochain paragraphe (Théorème 1.44). En attendant, voici déjà quelques autres applications.

Des cas où u est forcément constante

La proposition 1.27 implique immédiatement la proposition suivante.

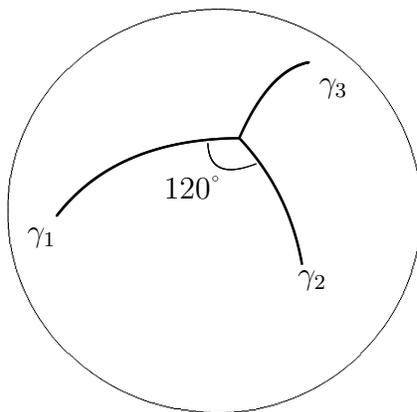
Proposition 1.32. *Soit (u, K) un minimiseur global de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 tel que l'une des composante connexe de $S^2 \setminus K$ (notée Ω) soit un polygone curviligne convexe avec bords C^∞ . Alors u est constante dans la composante connexe de $\mathbb{R}^N \setminus K$ qui contient Ω .*

Un cas de domaine non convexe où la fonction u est obligatoirement constante est donné par la proposition suivante. On garde les mêmes notations que pour la proposition 1.29.

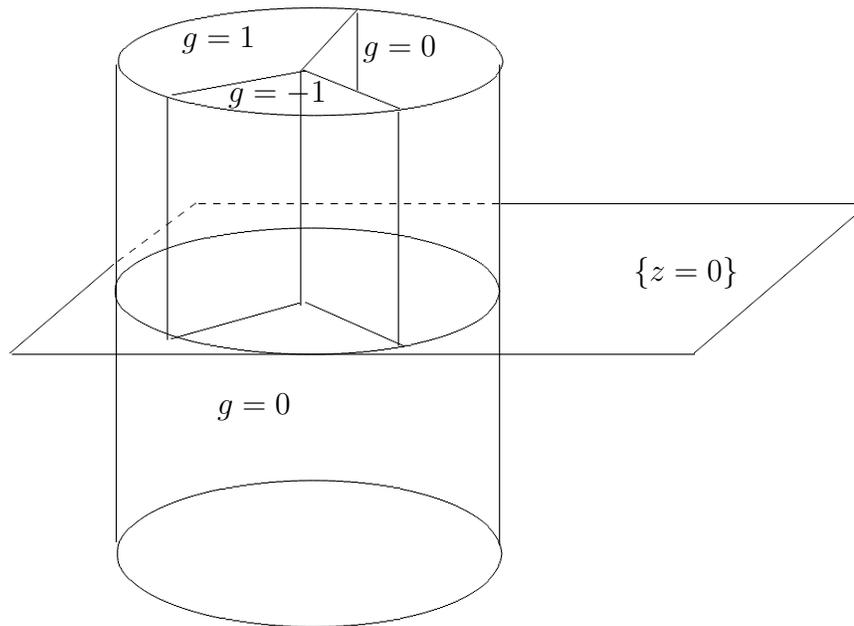
Proposition 1.33. *Soit (u, K) un minimiseur global de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 tel que l'une des composante connexe de $S^2 \setminus K$ est un espace angulaire de type Ω_ω avec $\omega < 2\pi$. Alors u est constante dans la composante connexe de $\mathbb{R}^3 \setminus K$ qui contient Ω_ω .*

Sur la recherche d'un nouveau minimiseur global

Dans la section 76 de [DAV05], Guy David discute sur la possibilité d'avoir un nouveau minimiseur global dans \mathbb{R}^3 . Le candidat potentiel pour K serait un cône de type \mathbb{Y} que l'on aurait coupé en forme de pointe. La restriction de K sur la sphère serait composé de trois courbes γ_i se rejoignant à l'un des pôles et formant des angles de 120 degrés.



Ce candidat devrait survenir comme limite d'explosion d'un certain minimiseur de Mumford-Shah bien précis. On se place dans le cylindre $\mathcal{C} := \{(x, y, z); |z| \leq 1 \text{ et } \|(x, y)\| \leq 1\}$. Prenons un cône de type \mathbb{Y} restreint à \mathcal{C} dont l'axe est porté par $0z$, que l'on coupe en deux ne conservant uniquement sa partie au dessus du plan $z = 0$. On obtient un "demi \mathbb{Y} ". Maintenant soit g une fonction régulière qui vaut 0 dans la partie $z < 0$ et qui vaut une constante différente dans chaque composante connexe de $\partial\mathcal{C} \cap \{z = 1\}$.



Le nouveau minimiseur global devrait être obtenu en minimisant la fonctionnelle de Mumford-Shah à partir de cette fonction g et avec $\Omega = \mathcal{C}$, puis en faisant une explosion à partir de l'origine. Intuitivement on devrait tomber sur un ensemble K qui ressemble à celui décrit au début de ce paragraphe.

Benoît Merlet dans sa thèse [MER04] semble réfuter l'existence d'un tel minimiseur en se basant sur des calculs numériques. Cependant, pour que les calculs puissent être exécutés il a dû se donner quelques hypothèses restrictives qui peuvent expliquer pourquoi la réponse est négative. Par exemple il suppose que $\frac{3}{4}$ est la plus petite valeur propre non nulle du laplacien. Peut être n'est ce pas le cas.

Essayons de voir comment les valeurs propres varient en fonction des courbes γ_i . On note $l_i \in [0, \pi]$ la longueur de chaque courbe γ_i . Si tous les l_i valent π on est dans le cas d'un cône de type \mathbb{Y} . Comme il y a 3 composantes connexes, la valeur propre 0 est de multiplicité 3. Et d'après la proposition 1.29, la valeur propre suivante vaut 2. Le début du spectre est donc

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0	0	0	2	...

$$l_1 = l_2 = l_3 = \pi$$

Maintenant on va utiliser la monotonie (proposition 1.30). On conserve $l_1 = \pi$ et $l_2 = \pi$. On prend $l_3 = \alpha$ avec $0 \leq \alpha < \pi$. Les valeurs propres augmentent lorsque α diminue. Comme il n'y a plus que deux composantes connexes on en déduit que 0 est de multiplicité

2. Donc $\lambda_2 > 0$. De plus pour $\alpha = 0$, en utilisant la proposition 1.29 on sait que $\lambda_2 = \frac{21}{16}$. Donc le début du spectre est

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0	0	$\in]0, \frac{21}{16}]$	≥ 2	...

$$l_1 = l_2 = \pi \quad l_3 = \alpha < \pi$$

Donc si les valeurs propres sont continues par rapport au domaine, alors il existe une valeur de l_3 pour laquelle $\frac{3}{4}$ est une valeur propre, de multiplicité 1, et c'est la plus petite valeur propre non nulle.

Maintenant, si on diminue également les longueurs l_1 et l_2 , alors 0 devient une valeur propre simple. De plus on sait que pour la sphère la plus petite valeur propre est 2 et elle est de multiplicité 4. On en déduit que $\lambda_2 \leq 2$ et $\lambda_3 \leq 2$ ce qui donne

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
0	$\in]0, 2]$	$\in]0, 2]$	≥ 2	...

$$l_1 \in [0, \pi[\quad l_2 \in [0, \pi[\quad l_3 \in [0, \pi[$$

Donc en conclusion on peut dire qu'il existe à priori plusieurs cas possibles : Soit $\frac{3}{4}$ est la plus petite valeur propre non nulle et de multiplicité 1, soit c'est la plus petite valeur propre non nulle et de multiplicité 2, ou bien c'est la deuxième valeur propre non nulle et de multiplicité 1. Mon sentiment est que, suite à la réponse négative de Benoît Merlet concernant le cas où $\frac{3}{4}$ est la plus petite valeur propre, le cas où $\frac{3}{4}$ est la deuxième plus petite valeur propre semble être le meilleur candidat.

1.4 Cas du demi plan dans \mathbb{R}^3

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude du cas particulier où (u, K) est un minimiseur global et K est un demi plan. On s'intéresse principalement à deux questions.

- 1) Si (u, K) est un minimiseur global et K est un demi plan, alors est-ce que u est forcément une fonction du type *cracktip* $\times \mathbb{R}$?
- 2) Existe-t-il d'autres minimiseurs globaux (u, K) tels que K soit inclus dans un demi plan mais différent de \emptyset ou du demi plan lui-même ?

Pour la première question, comme on pouvait s'y attendre, la réponse est oui. La fonction *cracktip* est l'unique fonction qui correspond au demi plan. La deuxième question est toujours ouverte. Cependant, on montrera dans la suite que si'il existe un tel minimiseur,

alors K ne peut pas être un secteur angulaire strict ou même (en raisonnant par explosion) contenir un secteur angulaire.

1.4.1 Unicité de la fonction cracktip

Dans cette section, on montre que si (u, K) est un minimiseur global dans \mathbb{R}^3 et K un demi plan, alors u est une fonction de type cracktip. Rappelons que d'après la "formule magique" de J.C. Léger [L99], en dimension 2 on sait que pour un minimiseur global quelconque (u, K) , le carré de la dérivée complexe $\frac{\partial u}{\partial z}$ est égal à une constante fois la transformée de Beurling de la mesure H^1 restreinte à K . En conséquence, la fonction u est déterminée de façon unique par l'ensemble singulier K (à constante additive près et multiplication par ± 1 dans les composantes connexes). On ne sait pas si ceci est encore vrai en dimension supérieure.

On suppose donc que K est un demi plan dans \mathbb{R}^3 . Pour fixer les idées on suppose dans toute cette section que l'ensemble singulier est le demi plan suivant

$$K = P := \{x_2 = 0\} \cap \{x_1 \leq 0\} \quad (1.37)$$

que l'on note P au lieu de K pour se souvenir que c'est un demi plan. On commence par étudier la mesure harmonique dans $\mathbb{R}^3 \setminus P$. En effet, pour tout rayon R et pour tout point $y \in B(0, R) \setminus P$ la section 1.2.1 associe une mesure harmonique sur $\partial B(0, R) \setminus P$ que l'on note μ_y^R . Voici une estimation sur la mesure μ_y^R qui sera utile dans la suite.

Lemme 1.34. *Soit R un réel positif. On considère pour $0 < \lambda < \frac{R}{2}$ la plaque sphérique*

$$\mathcal{C}_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| = R \text{ et } d(x, P) \leq \lambda\}$$

et soit φ_λ une fonction comprise entre 0 et 1 qui est dans $C^\infty(\partial B(0, R))$, qui vaut 1 sur \mathcal{C}_λ et 0 sur $\partial B(0, R) \setminus \mathcal{C}_{2\lambda}$ et qui est symétrique par rapport à P . Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de R et λ telle que pour tout $y \in B(0, \frac{R}{2}) \setminus P$ on ait

$$\mu_y^R(\varphi_\lambda) \leq C \frac{\lambda}{R}.$$

Preuve : Comme φ_λ est continue et symétrique par rapport à P , par le principe de réflexion son prolongement harmonique φ dans $B(0, R)$ a une dérivée normale nulle sur P à l'intérieur de $B(0, R)$. Et φ_λ est clairement dans l'espace A . Donc par définition de μ_y ,

$$\varphi(y) = \langle \varphi_\lambda, \mu_y^R \rangle.$$

Or comme φ_λ est continue sur la sphère tout entière, on a aussi la formule avec le noyau de Poisson classique

$$\varphi(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{CR} \int_{\partial B_R} \frac{\varphi_\lambda(x)}{|x - y|^3} ds(x).$$

autrement dit on a :

$$\mu_y^R(\varphi_\lambda) = \frac{R^2 - |y|^2}{CR} \int_{\partial B_R} \frac{\varphi_\lambda(x)}{|x - y|^3} ds(x).$$

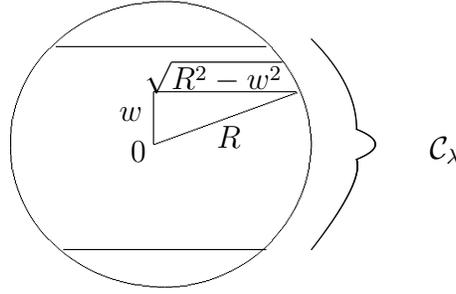
Pour $x \in \partial B_R$ on a :

$$\frac{1}{2}R \leq |x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y| \leq \frac{3}{2}R.$$

On en déduit que

$$\mu_y^R(\varphi_\lambda) \leq C \frac{1}{R^2} \int_{\mathcal{C}_{2\lambda}} ds.$$

D'autre part en utilisant une intégration par partie,



$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_\lambda} ds &= 2 \int_0^\alpha 2\pi \sqrt{R^2 - w^2} dw \\ &= 4\pi \frac{\lambda}{2} \sqrt{R^2 - \lambda^2} + R^2 \arcsin\left(\frac{\lambda}{R}\right) \\ &\leq CR\lambda \end{aligned}$$

car $\arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}x$. D'où le résultat.

□

On va maintenant prouver le

Théorème 1.35. Soit (u, P) un minimiseur global dans \mathbb{R}^3 , où P est le demi plan vertical.

$$P := \{(x, y, z); y = 0, x \leq 0\}$$

Alors u est de la forme cracktip $\times \mathbb{R}$ c'est à dire en coordonnées cylindriques

$$u(r, \theta, z) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + C$$

pour $0 < r < +\infty$ et $-\pi < \theta < \pi$.

Preuve : Montrons tout d'abord que u est verticalement constante. Soit t un réel positif. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on note $x_t := (x_1, x_2, x_3 + t)$. On note également

$$u_t(x) := u(x) - u(x_t).$$

Comme u est la fonction d'un minimiseur global de Mumford-Shah et que K est régulier, on sait que pour tout $R > 0$, la restriction de u à la sphère $\partial B(0, R) \setminus K$ est continue et bornée sur $\partial B(0, R) \setminus K$ avec des limites finies de chaque côté sur K . Il en est de même pour u_t . Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ et pour tout $R > 2\|x\|$ on peut écrire :

$$u_t(x) := \langle u_t|_{\partial B(0, R) \setminus P}, \mu_x^R \rangle$$

où μ_x est la mesure harmonique définie en (1.17). On va montrer que le deuxième membre tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Ce qui prouvera que $u_t(x)$ est nul pour tout x . Soit donc $x \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ fixé. On peut supposer dans la suite que $R > 100(\|x\| + t)$ (car le but est de faire tendre R vers l'infini). On considère la même plaque sphérique que dans le lemme précédent

$$C_\lambda := \{y \in \partial B(0, R) \setminus P; d(y, P) < \lambda\}$$

ainsi que la fonction φ_λ qui vaut 1 sur C_λ et 0 en dehors de $C_{2\lambda}$. On écrit ensuite

$$u_t(x) = \langle u_t|_{\partial B(0, R) \setminus P} \varphi_\lambda, \mu_x^R \rangle + \langle u_t|_{\partial B(0, R) \setminus P} (1 - \varphi_\lambda), \mu_x^R \rangle.$$

Par la proposition 0.12 on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus P$,

$$|u_t(x)| \leq C\sqrt{t}.$$

En utilisant le lemme 1.34 on obtient alors

$$|\langle u_t|_{\partial B(0, R) \setminus P} \varphi_\lambda, \mu_x^R \rangle| \leq C\sqrt{t} \frac{\lambda}{R}$$

d'une part, et d'autre part pour les points y tels que $d(y, P) \geq \lambda$, comme $\tilde{u} : u(\cdot) - u(y)$ est harmonique dans $B(y, d(y, P))$ on a par une estimation classique sur les fonctions harmoniques

$$|\nabla \tilde{u}(y)| \leq C \frac{1}{d(y, P)} \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\partial B(y, \frac{1}{2}d(y, P)))}.$$

En utilisant toujours la proposition 0.12 on sait que

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\partial B(y, \frac{1}{2}d(y, P)))} \leq Cd(y, P)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$|\nabla u(y)| \leq C \frac{1}{d(y, P)^{\frac{1}{2}}}$$

et finalement par un accroissement fini on en déduit que pour les y tels que $d(y, P) \geq \lambda$,

$$|u_t(y)| \leq C \sup_{z \in [y, y_t]} |\nabla u(z)| \cdot |y - y_t| \leq t \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

donc

$$|\langle u_t|_{\partial B(0,R)\setminus P}(1 - \varphi_\lambda), \mu_x^R \rangle| \leq Ct \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que

$$|u_t(x)| \leq C\sqrt{t} \frac{\lambda}{R} + Ct \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

et donc en posant $\lambda = R^{\frac{1}{2}}$ et en faisant tendre R vers $+\infty$ on en déduit que $u_t(x) = 0$ donc que $z \mapsto u(x, y, z)$ est constante.

Maintenant on se fixe un z_0 et on nomme $P_0 := P \cap \{z = z_0\}$. On va montrer que $(u(x, y, z_0), P_0)$ est un minimiseur de \mathbb{R}^2 . Pour cela il suffit de montrer le résultat pour $z_0 = 0$. Soit $(v(x, y), \Gamma)$ un compétiteur pour $(u(x, y, 0), P_0)$ dans la boule bidimensionnelle B de rayon ρ . Soit \mathcal{C} le cylindre $\mathcal{C} := B \times [-R, R]$. On définit \tilde{v} et $\tilde{\Gamma}$ dans \mathbb{R}^3 par

$$\tilde{v}(x, y, z) = \begin{cases} v(x, y) & \text{si } (x, y, z) \in \mathcal{C} \\ u(x, y, z) & \text{si } (x, y, z) \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

$$\tilde{\Gamma} := (\mathcal{C} \cap [\Gamma \times [-R, R]]) \cup (P \setminus \mathcal{C}) \cup (B \times \{\pm R\}).$$

C'est bien un compétiteur topologique car de toute façon $\mathbb{R}^3 \setminus P$ est connexe autrement dit P ne sépare aucun points. Soit enfin \tilde{B} une boule qui contient \mathcal{C} . Alors $(\tilde{v}, \tilde{\Gamma})$ est un compétiteur pour (u, P) dans \tilde{B} . Par minimalité on a :

$$\int_{\tilde{B}} |\nabla u|^2 + H^2(P \cap \tilde{B}) \leq \int_{\tilde{B}} |\nabla \tilde{v}|^2 + H^2(\tilde{\Gamma} \cap \tilde{B})$$

Or u coïncide avec \tilde{v} dans $\tilde{B} \setminus \mathcal{C}$ ainsi que Γ avec $\tilde{\Gamma}$. On en déduit

$$\int_{\mathcal{C}} |\nabla u|^2 dx dy dz + H^2(P \cap \mathcal{C}) \leq \int_{\mathcal{C}} |\nabla \tilde{v}|^2 dx dy dz + H^2(\tilde{\Gamma} \cap \mathcal{C}).$$

D'autre part, comme u et \tilde{v} sont constants en z , $\nabla_z u = \nabla_z \tilde{v} = 0$, et $\nabla_x u, \nabla_y u$ sont aussi constants en z . (De même pour \tilde{v}). Donc

$$2R \int_B |\nabla u(x, y, 0)|^2 dx dy + H^2(P \cap \mathcal{C}) \leq 2R \int_B |\nabla v(x, y)|^2 dx dy + H^2(\tilde{\Gamma} \cap \mathcal{C}).$$

Pour conclure on utilise le lemme suivant.

Lemme 1.36. *Si Γ est un ensemble rectifiable, H^1 mesurable contenu dans un plan Q on a :*

$$H^2(\Gamma \times [-R, R]) = 2RH^1(\Gamma).$$

Preuve : le lemme provient de la formule de la coaire (voir le rappel en introduction ou alors le théorème 2.93 de [AFP00]). On prend $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la projection orthogonale sur la coordonnée orthogonale à Q de sorte que si $E := \Gamma \times [-R, R]$, on a $E \cap f^{-1}(t) = \Gamma$ pour tout $t \in [-R, R]$. E est rectifiable (car Γ l'est par hypothèse). On peut donc appliquer la formule de la coaire. Pour cela il faut calculer $c_k d^E f_x$. Par construction, le plan tangent approché en chaque point de E est orthogonal au plan Q . On en déduit que si T_x est un plan tangent, alors il existe une base de T_x (\vec{b}_1, \vec{b}_2) telle que \vec{b}_1 soit orthogonal à Q . La fonction f étant la projection sur \vec{b}_1 , ainsi que sa dérivée (car f est linéaire) on obtient que $d^E f_x : T_x \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit dans la base (\vec{b}_1, \vec{b}_2) par la matrice :

$$d^E f_x = (1, 0)$$

d'où

$$c_k d^E f_x = \sqrt{\det[(1, 0), {}^t(1, 0)]} = 1.$$

Donc on obtient la formule

$$H^2(E) = \int_{-R}^R H^1(\Gamma) = 2RH^1(\Gamma). \quad \square$$

On peut supposer ici que Γ est rectifiable. En effet, il se trouve que la définition des minimiseurs de Mumford-Shah est équivalente si on ne prend que des compétiteurs rectifiables. Cela vient du fait que l'ensemble singulier d'une fonction SBV est rectifiable, et que dans [GCL89] on peut trouver la preuve qu'il est équivalent de minimiser la fonctionnelle de Mumford-Shah au sens classique ou de minimiser dans SBV .

En appliquant le lemme on trouve donc

$$2R \int_B |\nabla u(x, y, 0)|^2 dx dy + 2RH^1(P \cap B) \leq 2R \int_B |\nabla v(x, y)|^2 dx dy + 2RH^1(\Gamma \cap B) + H^2(B \times \{\pm R\}).$$

Puis, en divisant par $2R$,

$$\int_B |\nabla u(x, y, 0)|^2 dx dy + H^1(P \cap B) \leq \int_B |\nabla v(x, y)|^2 dx dy + H^1(\Gamma \cap B) + \pi \frac{\rho^2}{R}$$

donc en faisant tendre R vers l'infini on prouve que $(u(x, y, 0), P_0)$ est bien un minimiseur global dans \mathbb{R}^2 et c'est donc un *cracktip*. \square

Remarque 1.37. Le théorème de la coaire est un gros théorème. En fait on peut montrer en utilisant simplement la définition de H^N (cf [DAV05] chapitre 76) que si G est rectifiable,

$$\int_{[-R, R]} H^1(G_z \cap B) dz \leq H^2(G \cap [B \times [-R, R]])$$

où $G_z = \{(x, y); (x, y, z) \in G\}$. Dans notre cas G_z est constante en z et donc

$$2RH^1(G_0 \cap B) \leq H^2(G \cap (B \times [-R, R]))$$

ce qui constitue une moitié de l'égalité du lemme 1.36. Malheureusement, c'est l'inégalité dans l'autre sens qui nous sert pour montrer le théorème 1.35.

Une autre méthode pour montrer le théorème 1.35 est de se servir de la décomposition spectrale et d'utiliser la connaissance exacte des fonctions propres pour le laplacien sphérique sur la sphère privée d'un demi-équateur³. L'approche utilisée dans cette thèse est de ne pas utiliser la connaissance des fonctions propres sphériques. A forciors, nous allons redécouvrir la forme exacte des fonctions propres en utilisant les techniques du théorème 1.35.

Suivant le même principe que la démonstration du fait que u est verticalement constante dans la preuve du théorème précédent, on va montrer la proposition suivante qui nous permettra d'expliciter les fonctions propres pour la plus petite valeur propre du laplacien sur la sphère privée d'un demi équateur.

Proposition 1.38. *Soit u une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^3 \setminus P$ telle que u soit homogène de degré $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ et $u \in W^{1,2}(B(0,R) \setminus P)$ pour tout R . Soit f la restriction de u à $\partial B(0,1) \setminus P$ de sorte que u s'écrive sous la forme*

$$u(x) = \|x\|^\alpha f\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

On suppose que f est bornée. De plus, on note $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$ les pôles Nord et Sud de la sphère unité et on suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $\omega \in \partial B(0,1) \setminus P$,

$$\|\nabla_\tau f(\omega)\| \leq \frac{C}{d(\omega, N)^{\frac{1}{2}}} + \frac{C}{d(\omega, S)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.38)$$

où d est la distance géodésique sur la sphère. Alors u est constante verticalement (i.e. dans la direction de x_3).

Preuve : Le début est le même que le début de la preuve du théorème précédent. Soit t un réel positif. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on note $x_t := (x_1, x_2, x_3 + t)$. On note également

$$u_t(x) := u(x) - u(x_t).$$

Comme u est harmonique dans $\mathbb{R}^3 \setminus P$, il en est de même pour u_t . De plus, $u_t \in W^{1,2}(B(0,R) \setminus P)$ pour tout R . Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ et pour tout $R > 2\|x\|$ on peut écrire :

$$u_t(x) := \langle u_t|_{\partial B(0,R) \setminus P}, \mu_x^R \rangle$$

où μ_x est la mesure harmonique définie en (1.17). On va montrer que le deuxième membre tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Ce qui prouvera que $u_t(x)$ est nul pour tout x . Soit donc $x \in \mathbb{R}^3 \setminus P$ fixé. On peut supposer dans la suite que $R > 100(\|x\| + t)$ (car le but est de faire tendre R vers l'infini). On considère la même plaque sphérique que dans le lemme précédent

$$\mathcal{C}_\lambda := \{y \in \partial B(0,R) \setminus P; d(y,P) < \lambda\}$$

3. En réalité, au moment où cette partie de la thèse est écrite, je ne connaissais pas la forme exacte des fonctions propres sur la sphère privée d'un demi équateur...

ainsi que la fonction φ_λ qui vaut 1 sur C_λ et 0 en dehors de $C_{2\lambda}$. On écrit ensuite

$$u_t(x) = \langle u_t|_{\partial B(0,R)\setminus P}\varphi_\lambda, \mu_x^R \rangle + \langle u_t|_{\partial B(0,R)\setminus P}(1 - \varphi_\lambda), \mu_x^R \rangle.$$

On traitera ces deux morceaux séparément. Tout d'abord montrons que

$$|\langle u_t|_{\partial B(0,R)\setminus P}\varphi_\lambda, \mu_x^R \rangle| \leq C \frac{\lambda}{R^{1-\alpha}}. \quad (1.39)$$

En effet, pour $y \in \partial B(0, R) \setminus P$ on a

$$\begin{aligned} u_t(y) = u(y) - u(y_t) &= \|y\|^\alpha f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - \|y_t\|^\alpha f\left(\frac{y_t}{\|y_t\|}\right) \\ &\leq R^\alpha \|f\|_\infty + (R+t)^\alpha \|f\|_\infty \\ |u_t(y)| &\leq CR^\alpha \end{aligned}$$

Donc en utilisant le lemme 1.34 et (1.18) on en déduit que

$$|\langle u_t|_{\partial B(0,R)\setminus P}\varphi_\lambda, \mu_x^R \rangle| \leq C \frac{\lambda}{R^{1-\alpha}}$$

ce qui prouve (1.39). Maintenant, montrons que

$$\langle u_t|_{\partial B(0,R)\setminus P}(1 - \varphi_\lambda), \mu_x^R \rangle \leq Ct \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(R - t - \frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha-1}. \quad (1.40)$$

Pour prouver (1.40) il suffit de majorer u_t par

$$|u_t(y)| \leq Ct \left(\frac{R}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(R - t - \frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha-1} \quad \text{pour } y \in \partial B(0, R) \setminus \mathcal{C}_\lambda. \quad (1.41)$$

Pour cela on aura besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 1.39. *Pour tout x et y dans \mathbb{R}^N et pour tout réel α on a l'inégalité*

$$|\|x\|^\alpha - \|y\|^\alpha| \leq \alpha \sup_{h \in [x,y]} \|h\|^{\alpha-1} \|x - y\|.$$

Preuve : On applique simplement l'inégalité des accroissements finis à la fonction $G : y \mapsto \|y\|^\alpha$. On a

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \|y\|^\alpha = \alpha \|y\|^{\alpha-1} \frac{y_i}{\|y\|}$$

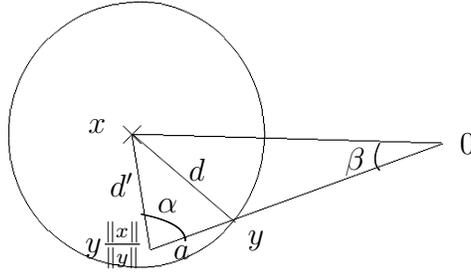
donc $|\nabla G(y)| = \alpha \|y\|^{\alpha-1}$ d'où l'inégalité.

□

Lemme 1.40. Soit $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Alors pour tout $d < \|x\|$ et tout $y \in \partial B(x, d)$, on a

$$\left\| x - y \frac{\|x\|}{\|y\|} \right\| \leq \sqrt{2} \|x - y\|.$$

Preuve : Le dessin suivant illustre la situation :



La formule d'Al-Kashi nous dit que

$$d^2 = d'^2 + a^2 - 2d'a \cos \alpha.$$

Le minimum de la fonction $t \mapsto t^2 - 2td' \cos \alpha$ est atteint pour $t = d' \cos \alpha$ donc

$$d^2 = d'^2 + a^2 - 2d'a \cos \alpha \geq d'^2(1 - \cos^2 \alpha).$$

Or comme le point 0 reste à l'extérieur du cercle, on en déduit que l'angle β est toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$, donc l'angle α est toujours minoré par $\frac{\pi}{4}$, ce qui prouve que $d^2 \geq \frac{1}{2}d'^2$ ou encore

$$\left\| x - y \frac{\|x\|}{\|y\|} \right\| \leq \sqrt{2} \|x - y\|. \quad \square$$

On peut maintenant prouver (1.41). Soit R fixé et $y \in \partial B(0, R) \setminus \mathcal{C}_\lambda$. On commence par estimer $u(y) - u(z)$ lorsque $z \in \partial B(y, \frac{\lambda}{2})$ (dans les estimations suivantes la constante C peut varier d'une inégalité à l'autre).

$$\begin{aligned} u(y) - u(z) &= \|y\|^\alpha f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - \|z\|^\alpha f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \\ &= \|y\|^\alpha \left[f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right] + (\|y\|^\alpha - \|z\|^\alpha) f\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \\ |u(y) - u(z)| &\leq \|y\|^\alpha \sup_{h \in [y/\|y\|, z/\|z\|]} |\nabla_\tau f(h)| \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| + \| \|y\|^\alpha - \|z\|^\alpha \| \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant (1.38) et que $z \in \partial B(y, \frac{\lambda}{2})$ avec $y \in \partial B(0, R) \setminus \mathcal{C}_\lambda$ on déduit l'inégalité

$$\sup_{h \in [\frac{y}{\|y\|}, \frac{z}{\|z\|}]} |\nabla_\tau f(h)| \leq C \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$|u(y) - u(z)| \leq C \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \|y\|^\alpha \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| + \left| \|y\|^\alpha - \|z\|^\alpha \right| \|f\|_\infty.$$

Puis en utilisant les lemmes 1.39 et 1.40 on obtient

$$\begin{aligned} |u(y) - u(z)| &\leq C \|y\|^\alpha \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{z}{\|z\|} \right\| + C \|f\|_\infty \left| R - \frac{\lambda}{2} \right|^{\alpha-1} \|y - z\| \\ &\leq C \|y\|^{\alpha-1} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \|y - z\| + C \|f\|_\infty \left| R - \frac{\lambda}{2} \right|^{\alpha-1} \|y - z\| \\ &\leq C R^{\alpha-1} \lambda \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(R - \frac{\lambda}{2} \right)^{\alpha-1} \lambda \\ &\leq C \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(R - \frac{\lambda}{2} \right)^{\alpha-1} \lambda \end{aligned} \tag{1.42}$$

car on choisira $\frac{R}{\lambda} > 1$. Revenons maintenant à la preuve de (1.41). Rappelons que R est toujours fixé, et on choisit $y \in \partial B(x, R) \setminus \mathcal{C}_\lambda$. La fonction u est harmonique dans $B(y, \frac{\lambda}{2})$ car $\frac{\lambda}{2} < d(y, P)$. Il en est de même pour la fonction $\tilde{u} = u(\cdot) - u(y)$. Donc on sait par les estimations classiques des fonctions harmoniques appliquées à \tilde{u} dans $B(y, \frac{\lambda}{2})$ que

$$|\nabla \tilde{u}(\xi)| \leq C \frac{2}{\lambda} \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\partial B(y, \frac{\lambda}{2}))}$$

Or $\nabla \tilde{u} = \nabla u$ et par l'inégalité (1.42) on a $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\partial B(y, \frac{\lambda}{2}))} \leq C \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(R - \frac{\lambda}{2} \right)^{\alpha-1} \lambda$. Donc finalement on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $d(y, P) > \lambda$,

$$|\nabla u(y)| \leq C \left(\frac{\|y\|}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|y\| - \frac{\lambda}{2} \right)^{\alpha-1}.$$

On en déduit par un accroissement fini que

$$\begin{aligned} |u_t(y)| = |u(y) - u(y_t)| &\leq \|\nabla u(y)\|_{L^\infty([y, y_t])} \|y - y_t\| \\ &\leq Ct \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(R - t - \frac{\lambda}{2} \right)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

ce qui prouve (1.41) et on en déduit que

$$\langle u_t|_{\partial B(0, R) \setminus P} (1 - \varphi_\lambda), \mu_x^R \rangle \leq Ct \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(R - t - \frac{\lambda}{2} \right)^{\alpha-1}$$

c'est à dire (1.40). Maintenant on peut finir la preuve de la proposition 1.38. On écrit

$$u_t(x) = \langle u_t|_{\partial B(0, R) \setminus P} \varphi_\lambda, \mu_x^R \rangle + \langle u_t|_{\partial B(0, R) \setminus P} (1 - \varphi_\lambda), \mu_x^R \rangle$$

puis en utilisant (1.39) et (1.40),

$$|u_t(x)| \leq C \frac{\lambda}{R^{1-\alpha}} + t \left(\frac{R}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} (R - t - \frac{\lambda}{2})^{\alpha-1}.$$

Maintenant on peut choisir $\lambda = R^{\frac{1-\alpha}{2}}$ et faire tendre R vers l'infini ce qui donne

$$\begin{aligned} |u_t(x)| &\leq CR^{\frac{\alpha-1}{2}} + CtR^{\frac{1}{2} - \frac{1-\alpha}{4}} (R - t - \frac{1}{2}R^{\frac{1-\alpha}{2}})^{\alpha-1} \\ &\sim R^{\frac{\alpha-1}{2}} + R^{\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4} + \alpha - 1} \\ &\sim R^{\frac{\alpha-1}{2}} + R^{\frac{5\alpha}{4} - \frac{3}{4}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

ce qui tend bien vers 0 car $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Donc $u_t(x) = 0$, ce qui prouve que u est verticalement constante. \square

Une conséquence importante de la proposition 1.38 est le théorème suivant.

Théorème 1.41. *On désigne toujours par P le demi plan défini par (1.37). Soit Δ_n le laplacien sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3 \setminus P$ défini dans la proposition 1.17 et soit $f \in L^2(\partial B(0,1) \setminus P)$ une fonction propre du premier espace propre pour le laplacien sphérique dans le domaine $\partial B \setminus P$, c'est à dire une solution faible du problème*

$$\begin{aligned} -\Delta_n f &= \lambda f \text{ dans } \partial B(0,1) \setminus P \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= 0 \text{ sur } P \cap \partial B(0,1) \end{aligned}$$

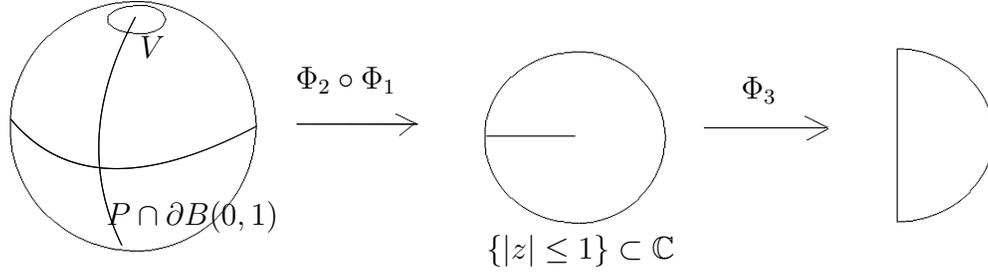
où λ est la plus petite valeur propre (non nulle) de $-\Delta_n$. Alors f est la restriction à $\partial B(0,1) \setminus P$ d'une fonction en coordonnées cylindriques $\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ du type

$$f(r, \theta, z) = Ar^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

c'est à dire que f est, à constante multiplicative près, une fonction de type cracktip $\times \mathbb{R}$.

Preuve : Tout d'abord il faut régler la question de la régularité de f . On sait par la proposition 1.19 que $f \in C^\infty(\partial B(0,1) \setminus P) \cap W^{1,2}(\partial B(0,1) \setminus P)$ et que $-\Delta_S f = \lambda f$ au sens fort dans $\partial B(0,1) \setminus P$, où Δ_S désigne le laplacien sphérique usuel. On sait également que en tout point de l'intérieur de P , la fonction f admet un prolongement C^1 et que $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ au sens fort sur l'intérieur de $P \cap \partial B(0,1)$. Pour la suite, il nous sera utile de savoir en plus que $f \in L^\infty(\partial B(0,1) \setminus P)$. Pour cela, on va montrer que f admet un prolongement continu sur les deux points qui posent problème, c'est à dire les deux pôles nord et sud $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$. Les deux points se traitent de manière identique. Donc il suffit de considérer par exemple le pôle nord. On considère également un petit voisinage sphérique V du pôle nord sur la sphère. Soit Φ la projection stéréographique associée au pôle sud. Alors Φ_1 envoie V sur une boule B de \mathbb{R}^2 centrée en zéro, de sorte que P soit envoyé sur $\{y = 0, x < 0\} \cap B$.

De plus Φ_1 est conforme. Ensuite, on utilise une autre application conforme Φ_2 qui envoie B dans $B(0, 1)$, et qui envoie également $\{y = 0, x < 0\} \cap B$ sur $\{y = 0, x < 0\} \cap B(0, 1)$. Enfin, on considère l'application conforme Φ_3 définie par $z \mapsto z^{\frac{1}{2}}$ qui envoie le disque unité privé de la demie droite $\{y = 0, x < 0\}$ dans le demi disque unité.



L'application $\Phi := \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1$ est conforme. Elle envoie V dans $B^+ := \{|z| \leq 1, \Re z > 0\}$, et envoie $P \cap V$ sur $H := \{|z| \leq 1, \Re z = 0\}$. On note pour tout $y \in B^+$,

$$v(y) := f \circ \Phi^{-1}(y), \quad \text{et} \quad h(y) = \lambda f(\Phi^{-1}) |\det \nabla \Phi^{-1}(y)|.$$

Comme Φ est conforme, la fonction v est solution faible du problème

$$\begin{aligned} -\Delta v &= h & \text{dans } B^+ \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 & \text{sur } H \end{aligned}$$

Donc on peut faire une réflexion dans B^+ et prolonger v en \tilde{v} dans $B(0, 1)$ où \tilde{v} vérifie $-\Delta \tilde{v} = \tilde{h}$. Comme \tilde{h} est une fonction L^2 , on en déduit par les théorèmes de théorie elliptique (exemple [GT83] chapitre 9) que \tilde{v} est une fonction continue. Donc comme Φ est conforme, elle admet un prolongement continu jusqu'au bord de chaque côté de P (on peut utiliser le théorème de Carathéodory, voir par exemple page 13 de [GM05], mais dans notre cas on connaît explicitement les fonctions donc on sait qu'elles sont continues), et donc f est continue. Ce qui prouve que f admet une extension continue aux pôles et donc que f est bornée sur $\partial B(0, 1) \setminus P$.

Enfin, concernant la dérivée de f on sait que $f = v \circ \Phi$ avec v une application C^1 jusqu'au bord et $\Phi = z^{\frac{1}{2}}$ a une singularité uniquement au point 0 d'ordre $z^{-\frac{1}{2}}$. Ce qui prouve que f a une singularité en aux pôles nord et sud en $\frac{1}{d(x, \text{Nord})^{\frac{1}{2}}}$ et $\frac{1}{d(x, \text{Sud})^{\frac{1}{2}}}$.

Soit f une fonction propre comme dans l'énoncé, c'est à dire associée à λ où lambda est la plus petite valeur propre du laplacien sphérique. La restriction de la fonction *cracktip* $\times \mathbb{R}$ est une fonction propre avec comme valeur propre $\frac{3}{4}$. Donc on sait que $\lambda \leq \frac{3}{4}$. Rappelons qu'un calcul du laplacien en coordonnées sphériques en dimension 3 donne

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S$$

On en déduit que la fonction u définie dans $\mathbb{R}^3 \setminus P$ par

$$F(x) := \|x\|^\alpha f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

avec

$$\alpha = \frac{-2 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}$$

est harmonique dans $\mathbb{R}^3 \setminus P$, avec dérivée normale nulle sur P . De plus comme $\lambda \leq \frac{3}{4}$, alors $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Et comme f est dans $W^{1,2}(\partial B(0,1) \setminus P)$, on en déduit que $F \in W^{1,2}(B(0,R) \setminus P)$ pour tout R , et on sait que f est C^∞ et bornée dans $\partial B(0,1) \setminus P$, avec singularité aux pôles en $d(x, Nord)^{\frac{1}{2}}$ et $d(x, Sud)^{\frac{1}{2}}$. Donc toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer le théorème 1.38. Ce qui prouve que F est verticalement constante.

Maintenant on voudrait montrer que F est, à constante multiplicative près, une fonction de type *cracktip* $\times \mathbb{R}$. Pour cela il suffit de montrer que $u(x, y) := F(x, y, 0)$ est une constante fois un cracktip. Or u est une fonction de $\mathbb{R}^2 \setminus D^-$ (où $D^- := \{y = 0, x < 0\}$), qui est harmonique et homogène de degré $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Donc sa restriction au cercle unité privé d'un point est une fonction propre du laplacien pour une valeur propre comprise entre 0 et $\frac{1}{4}$. Or on sait que la plus petite valeur propre du laplacien sur le cercle privé de $\{-1\}$ est $\frac{1}{4}$ et que l'espace propre correspondant est égal à toutes les fonctions du type $A \sin \frac{\theta}{2}$ et donc u est une fonction du type $A r^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{\theta}{2})$ où A est une constante. \square

Remarque 1.42. J. Keller [KEL99] en 1999 a déjà étudié les fonctions propres du laplacien sphérique dans le complémentaire d'un arc de cercle.

Remarque 1.43. Il y a un lien étroit entre le spectre du laplacien sphérique et la régularité (ou plutôt la singularité!) des solutions de certains opérateurs elliptique dans des domaines à coins. Les mathématiciens qui se sont penchés sur ces questions ont naturellement été amené à calculer les valeurs propre du laplacien dans des domaines sphériques à coins. On pourra par exemple consulter les travaux de Monique Dauge [DAU92] pour des calculs explicites du spectre pour des triangles géodésiques et autres polygones géodésiques, ainsi que dans des domaines à fissures tels que le complémentaire d'arcs de cercles. Dans [DAU92], Monique Dauge explique aussi le lien entre la régularité des solutions d'un problème elliptique et les valeurs propres du laplacien sphérique. Pour une étude plus récente et plus poussée de cette théorie on pourra également consulter [KMR]. Il est amusant de constater que certaines techniques employées dans [DAU92] et [KMR] sont assez proches des idées qui sont utilisées dans ce chapitre. La technologie n'est pas nouvelle mais n'a été portée à ma connaissance que plus tard. L'idée générale est que pour étudier la singularité d'une solution u d'un opérateur elliptique au voisinage d'un cône, on décompose u sur la base des fonctions propres du laplacien sur l'intersection de la sphère unité avec ce cône. Cette décomposition nous donne en quelque sorte le développement limité de u au voisinage de la singularité conique.

1.4.2 Cas d'un secteur angulaire

Dans cette section on voudrait discuter sur l'existence ou non de minimiseurs de Mumford-Shah globaux (u, S_θ) avec S_θ un secteur angulaire

$$S_\theta := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0); r > 0, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$$

La section précédente traite le cas du demi plan, c'est à dire le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$. On sait alors que la fonction *cracktip* $\times \mathbb{R}$ est l'unique fonction associée à $S_{\frac{\pi}{2}}$ (à multiplication par ± 1 près et à constante additive près). On sait également que $\frac{3}{4}$ est la plus petite valeur propre associée au laplacien sur $\partial B(0, 1) \setminus S_{\frac{\pi}{2}}$.

Théorème 1.44. *Il n'existe pas de minimiseur global de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 où l'ensemble singulier est un secteur angulaire strictement entrant ou sortant, c'est à dire de la forme (u, S_θ) pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$.*

Preuve : D'après le théorème 1.22, si un tel minimiseur existe, alors $u - u_0$ est une fonction homogène de degré $\frac{1}{2}$, et donc sa restriction à $\partial B(0, 1) \setminus S_\theta$ est une fonction propre pour $-\Delta_n$ associé à la valeur propre $\frac{3}{4}$. Or si $\lambda(\theta)$ désigne la plus petite valeur propre non nulle sur $\partial B(0, 1) \setminus S_\theta$, d'après la proposition 1.30 l'application $\lambda(\theta)$ est une fonction décroissante en theta. Comme $\lambda(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{4}$, il en résulte que pour $\theta < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\lambda(\theta) \geq \frac{3}{4}. \quad (1.44)$$

Or dans [KMR] page 53 on peut trouver un développement limité au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\lambda(\theta) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi} \cos \theta + O(\cos^2 \theta). \quad (1.45)$$

ce qui prouve que l'inégalité (1.44) est en réalité une inégalité stricte et donc une telle fonction propre u n'existe pas.

Considérons maintenant le cas $\theta > \frac{\pi}{2}$. En fait pour $\theta = \pi$ il y a deux composantes connexes. Donc 0 est valeur propre double. La suivante vaut 2. Par monotonie, lorsque le domaine augmente (c'est à dire θ diminue), les valeurs propres augmentent. Donc 0 devient une valeur propre simple et la deuxième valeur propre augmente jusqu'à atteindre $\frac{3}{4}$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Grâce au développement limité (1.45) on sait qu'elle n'atteint pas cette valeur avant d'arriver à $\frac{\pi}{2}$. Et toutes les autres valeurs propres restent supérieures à 2. Donc il n'existe pas de valeur propre $3/4$ pour $\theta > \frac{\pi}{2}$ et donc il n'y a pas non plus de minimiseur global dans ces espaces. \square

Chapitre 2

Régularité dans \mathbb{R}^3 proche d'un cône minimal

Sommaire

2.1	Introduction	84
2.2	Croissance de l'énergie normalisée pour un minimiseur d'énergie	86
2.2.1	Argument de Bonnet en dimension 3	87
2.2.2	Croissance de l'énergie pour le \mathbb{Y}	90
2.2.3	Croissance de l'énergie pour le \mathbb{T}	92
	Pourquoi la méthode précédente ne marche pas pour le \mathbb{T}	92
	Minoration de la plus petite valeur propre dans une face de tétraèdre	94
2.3	Croissance de l'énergie pour une surface $(\varepsilon_0, \varepsilon)$-minimale	97
2.3.1	Raisonnement par l'absurde et compacité	101
2.3.2	Construction d'un compétiteur	104
	Construction des boules de Whitney	105
	Orientation et Séparation	108
	Extension de la fonction u_n	112
2.3.3	Fin de la preuve	119
2.4	Croissance et régularité pour Mumford-Shah	124
2.4.1	Construction d'un compétiteur	124
	Séparation et contrôle du saut	124
	Construction des cubes de temps d'arrêt	133
	Construction des cubes de Whitney	134
	Extension de la fonction u	138
2.4.2	Croissance et régularité	140
	Choix du rayon	140
	Comparaison avec un minimiseur d'énergie	140
	Lemmes de compacité sur les ensembles presque minimaux	142
	Contrôle de la mauvaise masse	148
	Contrôle du défaut de minimalité	153
	Conclusion sur la régularité	155

2.1 Introduction

Le théorème de Jean Taylor [TAY76] nous dit qu'en tout point x d'une surface localement minimale S de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 , il existe un rayon r tel que dans $B(x, r)$ la surface S est C^1 équivalente à l'un des trois cônes minimaux, à savoir : le plan \mathbb{P} , le \mathbb{Y} (cône obtenu comme l'union de trois demi-plan qui se rencontrent suivant une droite et faisant des angles de 120°) ou le \mathbb{T} (cône s'appuyant sur les arêtes d'un tétraèdre régulier). Ce théorème permet de décrire totalement les singularités possibles pour une surface minimale, ou presque minimale. La question qui nous intéresse ici est la suivante : existe-t-il un résultat équivalent à propos de l'ensemble singulier d'un minimum de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 ?

A l'heure actuelle, si la liste des cônes minimaux pour les surfaces minimales est bien connue, en ce qui concerne la liste des objets tangents pour la fonctionnelle de Mumford-Shah (communément appelés "minimiseurs globaux"), est elle loin d'être totalement connue. En revanche les cônes minimaux \mathbb{P} , \mathbb{Y} , et \mathbb{T} avec comme fonction u associée une fonction localement constante, donne déjà trois exemples de minimiseur globaux pour la fonctionnelle de Mumford-Shah. Donc comme première réponse à la question posée au paragraphe précédent, on peut essayer déjà de prouver un théorème de régularité local au voisinage de cônes minimaux de type plan, \mathbb{Y} ou \mathbb{T} pour la fonctionnelle de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 .

Rappelons que dans [AFP00] il existe déjà un théorème de régularité au voisinage de \mathbb{P} dans \mathbb{R}^3 (et même \mathbb{R}^N). Le théorème démontré ici est un théorème analogue au résultat de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara mais avec des techniques différentes qui permettent d'obtenir de la régularité lorsque K est proche non seulement d'un plan, mais également d'un \mathbb{Y} ou d'un \mathbb{T} . Voici le théorème que l'on a démontré :

Théorème 2.1. *Il existe des constantes positives ε et $c < 1$ telles que ce qui suit est vrai. Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h , soit $x \in K$ et r tels que $B(x, r) \subset \Omega$ et $h(r) \leq \varepsilon$. Supposons de plus qu'il existe un cône Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} centré en x tel que*

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

où $D_{x,r}$ désigne la distance de Hausdorff normalisée bilatérale. Alors il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, cr)$ sur son image, tel que $K \cap B(x, cr) = \phi(Z) \cap B(x, cr)$.

Il existe aussi l'énoncé suivant avec une condition géométrique moins restrictive, mais avec une condition supplémentaire sur l'énergie normalisée.

Théorème 2.2. *Il existe des constantes positives ε et $c < 1$ telles que ce qui suit est vrai. Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h , soit $x \in K$ et r tels que $B(x, r) \subset \Omega$ et*

$$\omega_2(x, r) + h(r) \leq \varepsilon.$$

Alors il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, cr)$ sur son image, et il existe un cône minimal Z tel que $K \cap B(x, cr) = \phi(Z) \cap B(x, cr)$.

Dans toute la suite on se placera en dimension 3. Cependant la preuve du théorème 2.1 devrait pouvoir s'adapter en dimension supérieure dans le cas d'un hyperplan et donc on devrait ainsi retrouver le résultat complet de L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara. Nous espérons un jour pouvoir le généraliser dans le cas de la généralisation la plus simple du \mathbb{Y} et du \mathbb{T} dans \mathbb{R}^N (il manque toutefois pour l'instant l'adaptation nécessaire du résultat de J. Taylor dans ce cas).

L'avantage des techniques employées pour obtenir le théorème 2.1 est qu'elles sont mieux adaptées pour les figures géométriques telles que le \mathbb{Y} et le \mathbb{T} , chose que le "tilt" utilisé pour la preuve du théorème de L. Ambrosio, N. Fusco, et D. Pallara empêchait de faire. En réalité, les techniques utilisées sont relativement indépendantes de la forme géométrique des cônes minimaux, et indépendante aussi de la dimension. Ainsi, j'ai bon espoir de penser que ce chapitre contient une procédure systématique pour déduire des théorèmes de régularité pour les minimiseurs de Mumford-Shah à partir des théorèmes de régularité des ensembles minimaux.

L'approche utilisée pour prouver le théorème 2.1 est de se ramener au théorème de G. David [DAV07] qui est l'analogue du théorème 2.1 mais pour les ensemble presque minimaux. En effet, soit E un ensemble fermé dans \mathbb{R}^N .

Définition 2.3. Un *MS-compétiteur* pour l'ensemble E dans \mathbb{R}^N est un ensemble F tel qu'il existe une boule $B \subset \mathbb{R}^N$ de rayon r telle que

$$F \setminus B = E \setminus B$$

et si $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus (B \cup E)$ sont séparés par E alors ils le sont aussi par F .

Définition 2.4. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ est *MS-presque minimal* avec fonction jauge h si

$$H^{N-1}(E \setminus F) \leq H^{N-1}(F \setminus E) + r^{N-1}h(r)$$

pour tout *MS-compétiteur* F pour E dans la boule B de rayon r .

Pour un ensemble presque minimal E on définit la fonction densité par

$$\theta(x, r) = r^{-2}H^2(E \cap B(x, r)).$$

La limite en 0 de θ existe car si E est presque minimal alors la densité est une fonction monotone (voir 2.3 de [DAV07]).

On introduit également la fonction $f(x, r)$ correspond au défaut de densité

$$f(x, r) = \theta(x, r) - \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t).$$

On a alors le théorème suivant [DAV07] sur la régularité des ensembles presque minimaux.

Théorème 2.5. [DAV07] *Soit E un ensemble MS-presque minimal réduit dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h telle que $h(r) = Cr^\alpha$ pour r assez petit et soit $x \in E$. Alors il existe un ε_1 et une constante C tels que si $B(x, r_0) \subset \Omega$ et*

$$f(x, r_0) \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad h_1(r_0) \leq \varepsilon_1. \quad (2.1)$$

alors il existe un cône minimal Z centré en x du type défini par $d(x)$ et un difféomorphisme Φ de $B(x, Cr)$ sur son image, tel que $E \cap B(x, cr) = \Phi(Z) \cap B(x, cr)$.

Le théorème 2.5 n'est pas explicitement énoncé comme tel dans les articles [DAV07] et [DPT]. Mais il s'en déduit en regardant la preuve (voir la dernière section pour plus de détails).

La stratégie pour prouver le théorème 2.1 est de se ramener au théorème 2.5. La plupart du travail consiste à maîtriser l'énergie de u et montrer qu'elle croît. Une fois que l'énergie est sous contrôle, on peut dire que l'ensemble singulier K de notre minimiseur de Mumford-Shah n'est autre qu'un MS-presque minimiseur au sens de la définition 2.4, dont la fonction jauge h dépend (entre autres) de l'énergie de u .

Donc notre principal but dans un premier temps est de prouver la croissance d'énergie normalisée pour u . Dans la section suivante on montre que la croissance de l'énergie normalisée est vraie pour un minimiseur d'énergie dans quelques cas particuliers (typiquement si K est un cône minimal).

Ensuite on montrera que la croissance de l'énergie est vraie dans des cas plus généraux, par exemple lorsque K est Reifenberg-plat.

Enfin, on montrera que la croissance de l'énergie est vraie pour un minimiseur de Mumford-Shah proche d'un cône minimal ce qui conduira à notre théorème de régularité.

2.2 Croissance de l'énergie normalisée pour un minimiseur d'énergie

La première étape pour montrer un théorème de régularité pour un minimiseur de Mumford-Shah consiste à montrer des phénomènes de monotonie pour certaines quantités telle que l'énergie.

Oublions un instant les minimiseurs de Mumford-Shah et concentrons nous sur les minimiseurs d'énergie dans $\Omega = B \setminus K$ où B est une boule dans \mathbb{R}^3 et K est un ensemble fermé H^2 -mesurable.

Tout d'abord le cas le plus simple est lorsque l'ensemble $K = \emptyset$. En effet, pour toute fonction harmonique u dans \mathbb{R}^N , pour tout x et pour tout r on a

$$\frac{1}{(ar)^{N-1}} \int_{B(x, ar)} |\nabla u|^2 \leq a \frac{1}{r^{N-1}} \int_{B(x, r)} |\nabla u|^2.$$

En d'autres termes,

$$\omega_2(x, ar) \leq a\omega_2(x, r) \tag{2.2}$$

où $\omega_2(x, r)$ désigne l'énergie normalisée de u

$$\omega_2(x, r) = \frac{1}{r^{N-1}} \int_{B(x, r)} |\nabla u|^2. \tag{2.3}$$

L'inégalité (2.2) montre à quelle vitesse l'énergie normalisée croît en fonction du rayon. Pour montrer (2.2) on peut faire à la manière de l'exercice 7.6 page 380 de [AFP00], c'est à dire utiliser une intégration par partie pour montrer que si u est sous-harmonique (c'est à dire $\Delta u \geq 0$) alors l'application

$$r \mapsto \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u dH^{N-1}$$

est croissante, puis conclure en remarquant que si u est harmonique alors $|\nabla u|^2$ est sous-harmonique.

Maintenant si K est un hyperplan et u est un minimiseur local d'énergie dans $\mathbb{R}^N \setminus K$ (c'est à dire que u minimise l'intégrale du gradient au carré sur tous les compétiteurs dans $B \setminus K$ qui coïncident avec u sur $\partial B \setminus K$), alors on a la croissance d'énergie pour toute boule centrée sur K . En effet, u est une fonction harmonique qui vérifie une condition de Neumann sur K , ce qui permet de faire une réflexion pour prolonger u d'une demie boule dans la boule entière et auquel on applique (2.2).

2.2.1 Argument de Bonnet en dimension 3

Une autre méthode pour montrer des croissances d'énergie consiste à utiliser l'argument de A. Bonnet. Cet argument a pour la première fois été utilisé par A. Bonnet dans [BON96] en dimension 2. Il a été repris par G. David la même année dans [DAV96] toujours en dimension 2. L'argument utilise l'inégalité de Wirtinger sur des morceaux d'arcs de cercles. Il fonctionne bien en dimension 2 car quel que soit l'ensemble K considéré, l'intersection avec le cercle n'est constitué uniquement que de points. En dimension 3 par exemple, l'intersection avec la sphère est beaucoup moins facile à caractériser, ce qui pose des problèmes pour obtenir une inégalité de Poincaré sur une partie de la sphère analogue à l'inégalité de Wirtinger sur n'importe quel intervalle du cercle. Néanmoins, l'argument de Bonnet va

nous servir en dimension 3 lorsque l'intersection avec la sphère est facile à étudier, par exemple pour montrer la croissance d'énergie lorsque K est un cône minimal de type \mathbb{Y} ou \mathbb{T} .

Lemme 2.6. *Soit Z un cône minimal centré en 0. On suppose qu'il existe une constante $C_Z < 1$ telle que pour toute composante connexe A de $\mathbb{R}^N \setminus Z$, pour tout r et pour toute fonction $f \in W^{1,2}(A \cap \partial B(0,r))$ il existe une constante $c(f)$ telle que l'inégalité suivante est vraie*

$$\int_{A \cap \partial B(0,r)} |f - c(f)|^2 \leq C_Z^2 r^2 \int_{A \cap \partial B(0,r)} |\nabla_\tau f|^2$$

Alors pour tout minimiseur local d'énergie dans $B(0,1) \setminus Z$ et pour tout $r < 1$ on a

$$\omega_2(ar) \leq a^\gamma \omega_2(r)$$

avec

$$\gamma = 2 \left(\frac{1}{C_Z} - 1 \right)$$

et

$$\omega_2(r) := \frac{1}{r^2} \int_{B(0,r) \setminus Z} |\nabla u|^2.$$

Preuve : On pose

$$E(r) = \int_{B(0,r) \setminus Z} |\nabla u|^2.$$

La fonction $r \mapsto E(r)$ est dérivable presque partout,

$$E'(r) = \int_{\partial B(0,r) \setminus Z} |\nabla u|^2$$

et

$$E(r) = \int_0^r E'(t) dt.$$

(voir lemme 47.4 page 316 de [DAV05]).

Pour montrer la croissance d'énergie on va montrer une inégalité du genre

$$E(r) \leq CrE'(r)$$

où C est une constante que l'on explicitera.

Tout d'abord, comme u est harmonique et que $\frac{\partial}{\partial n} u = 0$ fortement sur Z (là où Z est régulier), une intégration par partie nous donne

$$E(r) = \sum_{j=1}^J \int_{S_j} u \frac{\partial u}{\partial n} \tag{2.4}$$

avec S_j les composantes connexes de $\partial B(0, r) \setminus Z$. Pour la justification de l'intégration par partie on est dans le cas d'application des résultats du chapitre précédente sur les cônes lisses (voir lemme 1.6). Sinon, il existe aussi un argument qui permet de montrer l'égalité (2.4) sans faire d'intégration par partie, en utilisant simplement que u est un minimiseur d'énergie (voir [DAV05] page 320).

On note A_j les composantes connexes de $B(0, r) \setminus Z$ telles que leur bord contienne S_j . Une intégration par partie dans S_j (justifiée car Z est un cône lisse) montre que

$$\int_{S_j} u \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{A_j} \Delta u = 0$$

On peut donc retrancher une constante ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{S_j} u \frac{\partial u}{\partial n} &= \int_{S_j} [u - c_j(u)] \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\leq \left[\int_{S_j} [u - c_j(u)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{S_j} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

puis on utilise l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}[\lambda^{-1}a^2 + \lambda b^2]$ avec λ une constante qui sera fixée plus tard,

$$\begin{aligned} \int_{S_j} u \frac{\partial u}{\partial n} &\leq \frac{1}{2\lambda} \left[\int_{S_j} [u - c_j(u)]^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \int_{S_j} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} C_Z^2 r^2 \int_{S_j} |\nabla_{\tau} u|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{S_j} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \end{aligned}$$

d'où en posant $\lambda = C_Z r$

$$\int_{S_j} u \frac{\partial u}{\partial n} \leq \frac{1}{2} C_Z r \int_{S_j} |\nabla u|^2$$

Enfin, en sommant sur les indices j ,

$$E(r) \leq \frac{1}{2} C_Z r E'(r).$$

Maintenant pour montrer la croissance de ω_2 on considère la fonction $g(r) := \ln(E(r))$. On a alors (par absolue continuité)

$$g(r) - g(ar) = \int_{ar}^r \frac{E'(t)}{E(t)} dt \geq \int_{ar}^r \frac{2}{tC_Z} dt \geq \frac{2}{C_Z} \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

d'où

$$E(ar) \leq a^{\frac{2}{C_Z}} E(r)$$

donc en divisant par $(ar)^2$

$$\frac{1}{(ar)^2}E(ar) \leq a^{2(\frac{1}{C_Z}-1)}\frac{1}{r^2}E(r)$$

ce qui implique la croissance voulue. \square

Donc pour montrer la croissance d'énergie pour les cônes minimaux \mathbb{Y} et \mathbb{T} , il suffit de contrôler la constante de Poincaré C_Y et C_T dans les domaines délimités par un \mathbb{Y} ou un \mathbb{T} sur la sphère. Rappelons que si C_Z est la constante optimale dans un domaine Ω , alors $\frac{1}{C_Z^2} = \lambda_1$ où λ_1 est la plus petite valeur propre non nulle pour l'opérateur moins Laplacien (Neumann) dans Ω . Donc de manière équivalente, il suffit de minorer la plus petite valeur propre non nulle de moins Laplacien Neumann dans ces domaines et montrer qu'elle est plus grande strictement que 1.

Pour la demie sphère, (c'est à dire Z est un hyperplan), on sait que $C_Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Rappelons que dans le paragraphe 1.3.1 on a récapitulé quelques minoration de la plus petite valeur propre dans certains domaines sphériques. Malheureusement, ces résultats ne sont pas suffisants. En particulier, c'est bien dommage que l'inégalité (1.35) de la proposition 1.27 ne soit pas stricte! Ou encore malheureusement, l'inégalité (1.36) sur les triangles géodésiques ne s'applique pas pour le cas des triangles obtenus en intersectant un cône de type \mathbb{T} avec la sphère. En effet, de tels triangles ont des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Donc il faudra prouver une inégalité par nos propres moyens.

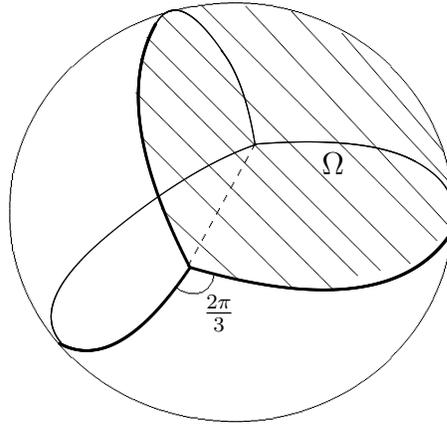
Par contre concernant le \mathbb{Y} on sait déjà que $\lambda_1 = 2$ par la proposition 1.29 appliquée avec $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

Dans la suite on donnera une autre démonstration du fait que 2 soit la plus petite valeur propre pour le \mathbb{Y} et on en déduira une minoration pour le cas du \mathbb{T} .

2.2.2 Croissance de l'énergie pour le \mathbb{Y}

Dans le but de montrer que l'énergie normalisée est croissante dans le complémentaire d'un Y , nous allons contrôler la constante de Poincaré dans les composantes connexes de $\partial B(0,1)\setminus Y$. Nous allons montrer que la plus petite valeur propre pour l'opérateur moins Laplacien (Neumann) dans ce domaine vaut 2 et donc est strictement plus grande que 1.

Soit donc Y un cône de type \mathbb{Y} centré en 0. On note Ω un tiers de sphère c'est à dire l'une des composantes connexe de $\partial B(0,1)\setminus Y$.



Proposition 2.7. *Pour toute fonction $f \in W^{1,2}(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} |f - m(f)|^2 \leq \frac{1}{2} r^2 \int_{\Omega} |\nabla f|^2.$$

Preuve : Soit λ_1 la plus petite valeur propre pour $-\Delta_S$ sur Ω avec condition de Neumann sur $\partial\Omega$ (pour la théorie spectrale dans Ω voir le chapitre 1) et soit f une fonction propre associée, c'est à dire en particulier que f vérifie

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \lambda_1 f & \text{dans} & \quad \Omega \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= 0 & \text{sur} & \quad \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

et f est de moyenne nulle. On appelle s la symétrie dans Ω qui laisse fixe chacun des deux sommets de Ω . On pose

$$g = f + f \circ s$$

Alors g est une fonction de moyenne nulle qui vérifie encore (2.6), et qui est symétrique par rapport à l'axe de symétrie de s . On suppose dans un premier temps que g est non identiquement nulle. On peut étendre g à toute la sphère entière en utilisant une succession de 2 réflexions par rapport aux bords de Ω . La fonction ainsi prolongée \tilde{g} est dans $W^{1,2}(\partial B(0,1))$ et vérifie donc l'inégalité de Poincaré

$$\int_{S^2} |\tilde{g}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla \tilde{g}|^2.$$

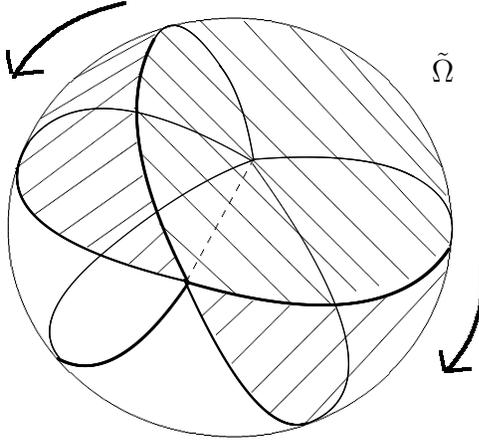
On en déduit immédiatement

$$\int_{\Omega} |g|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla g|^2.$$

Puis comme g est une fonction propre du laplacien Neumann on a $\int_{\Omega} |\nabla g|^2 = \lambda_1 \int_{\Omega} |g|^2$ et donc on en déduit que

$$\lambda_1 \geq 2.$$

Maintenant supposons que g soit nulle. Alors ceci implique que f est une fonction anti-symétrique par rapport à l'axe de s (noté δ). Comme f est de moyenne nulle, $f = 0$ sur δ . On étend ensuite f par réflexion de chaque côté de Ω jusqu'à obtenir $\frac{2}{3}$ de sphère. Ce nouveau domaine est noté $\tilde{\Omega}$.



L'extension de f (toujours notée f) est dans $W^{1,2}(\tilde{\Omega})$ et $f = 0$ sur $\partial\tilde{\Omega}$. On prolonge ensuite f sur toute la sphère en posant $f = 0$ sur $S^2 \setminus \tilde{\Omega}$. On obtient ainsi une fonction dans $W^{1,2}(S^2)$ qui vérifie donc l'inégalité de Poincaré

$$\int_{S^2} |f|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla f|^2$$

on en déduit immédiatement

$$\int_{\Omega} |f|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla f|^2$$

et on conclut comme pour la fonction g , c'est à dire, comme f est une fonction propre de $-\Delta_n$, on a $\int_{\Omega} |\nabla f|^2 = \lambda_1 \int_{\Omega} |f|^2$ et donc on en déduit que

$$\lambda_1 \geq 2$$

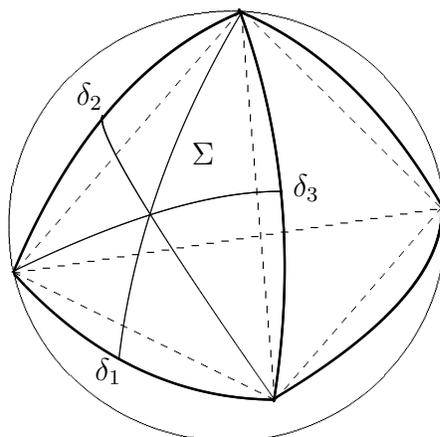
ce qui termine la preuve. □

2.2.3 Croissance de l'énergie pour le \mathbb{T}

Pourquoi la méthode précédente ne marche pas pour le \mathbb{T}

Pour le cas du \mathbb{T} on ne peut pas utiliser la même astuce que pour le \mathbb{Y} . Voyons pourquoi. La différence majeure vient du fait qu'il n'y a pas une, mais 3 symétries à considérer. Appelons

Σ l'une des quatres faces d'un tétraèdre régulier en projection sur la sphère (c'est à dire une des composantes connexes de $S^2 \setminus T$) et s_1, s_2, s_3 les trois symétries par rapport aux trois "médiatrices" δ_1, δ_2 et δ_3 des côtés de Σ



Soit f une fonction propre pour $-\Delta_S$ dans Σ avec condition de Neumann, associé à la plus petite valeur propre λ_1 . Si f est symétrique par rapport aux trois axes δ_1, δ_2 et δ_3 , on peut faire une succession de 3 réflexions pour prolonger f à toute la sphère. Maintenant si f n'est pas symétrique on peut essayer de faire comme pour le cas du Y et faire une symétrisation de f . On pose

$$g = f + f \circ s_1.$$

La fonction g est toujours une fonction propre du laplacien avec condition de Neumann, et g est invariante par s_1 . On pose ensuite

$$h = g + g \circ s_2 + g \circ s_3.$$

La fonction h est invariante par s_1, s_2 et s_3 . Il n'est pas possible de trouver une fonction qui soit invariante uniquement par s_1 et s_2 . Car si elle est invariante par s_1 et s_2 , elle est invariante par la rotation $s_1 \circ s_2$ et donc elle est aussi invariante par s_3 . Donc on est obligé de considérer directement la fonction h qui est invariante par les trois symétries s_1, s_2 et s_3 . Si h est non nulle on peut l'étendre sur toute la sphère et c'est gagné. Malheureusement, si h est nulle, on ne peut rien dire. On ne tombe pas sur le cas de fonctions anti-symétriques comme dans le cas du \mathbb{Y} .

Le fait que la technique des réflexions ne fonctionne pas pour le \mathbb{T} n'est pas si mystérieux. Cette technique fonctionne uniquement pour les polyèdres réguliers qui ont un lien avec un groupe cristallographique. L'octaèdre par exemple en fait partie. Mais le tétraèdre non. Dans le langage de Bourbaki on peut dire que le tétraèdre n'est malheureusement pas la "chambre d'un système de racines". Si c'était le cas, l'article [BB80] permettrait de conclure.

Minoration de la plus petite valeur propre dans une face de tétraèdre

Pour estimer la plus petite valeur propre non nulle dans une face de tétraèdre on va s'inspirer de la proposition 1.28 dont la preuve se trouve dans [DAU92]. Tout d'abord on aura besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.8. [DAU92] *Soit G et G' deux polygones connexes sur la sphère S^2 dans \mathbb{R}^3 . On considère une partition de ∂G en deux ouverts $\partial_N G$ et $\partial_D G$ tels que*

$$\partial G = \overline{\partial_N G} \cup \overline{\partial_D G}$$

et de même pour G'

$$\partial G' = \overline{\partial_N G'} \cup \overline{\partial_D G'}.$$

On suppose que

$$G \subset G' \text{ et } \partial_N G \subset \partial_N G'.$$

On note $\mu_1(G)$ (resp. $\mu_1(G')$) la plus petite valeur propre pour l'opérateur $-\Delta_S$ dans G (resp. G') avec condition de Neumann sur $\partial_N G$ (resp. $\partial_N G'$) et condition de Dirichlet sur $\partial_D G$ (resp. $\partial_D G'$). Alors

$$\mu_1(G) \geq \mu_1(G'). \quad (2.7)$$

La preuve est simple. Il suffit de prendre une fonction propre associée à la plus petite valeur propre dans G , la prolonger par 0 dans $G' \setminus G$ et utiliser le principe du min-max. Il faut juste vérifier que le prolongement est bien dans $W^{1,2}(G')$, notamment au voisinage des "coins" $\overline{\partial_N G} \cap \overline{\partial_D G}$ (voir la proposition 4.3. de [DAU92] pour plus de détails).

Remarque 2.9. La proposition 2.8 n'est utile que si le domaine le plus grand G' possède une condition de Dirichlet non vide. Sinon, la plus petite valeur propre est nulle et l'inégalité (2.7) est triviale dans ce cas.

Maintenant on peut prouver la

Proposition 2.10. *Soit Σ une face de tétraèdre sphérique (c'est à dire une composante connexe de $S^2 \setminus T$ où T est un cône de type \mathbb{T} centré en 0). Alors*

$$\lambda_N \geq 2$$

où λ_N désigne la plus petite valeur propre non nulle de $-\Delta_S$ avec condition de Neumann sur $\partial\Sigma$.

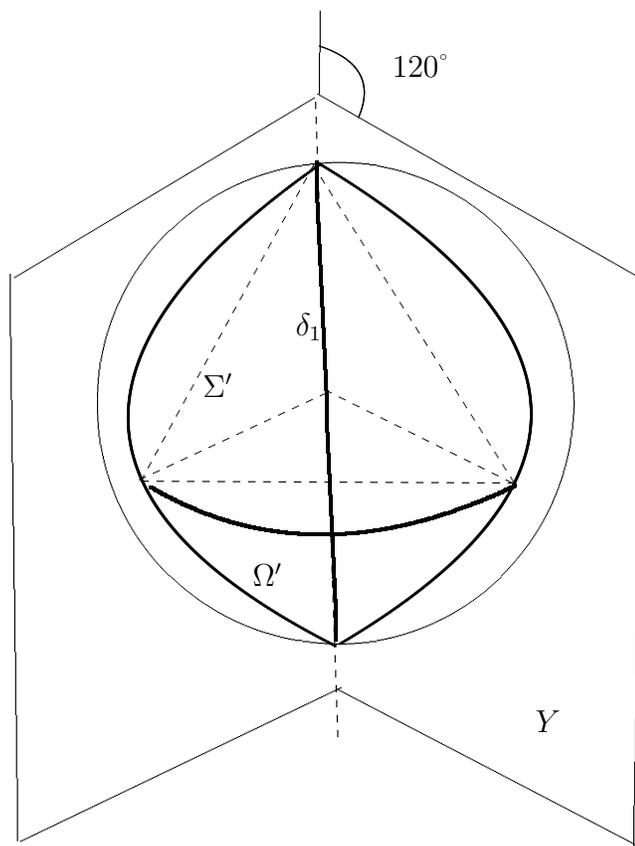
Preuve : Soit f une fonction propre associée à la plus petite valeur propre non nulle dans Σ avec conditions de Neumann sur $\partial\Sigma$. On garde les notations du paragraphe précédent, c'est à dire que pour $1 \leq i \leq 3$ on note δ_i les axes de symétrie de Σ et s_i les symétries

correspondantes. Si f est paire par rapport aux trois axes, alors comme on l'a dit plus haut, on peut étendre f à toute la sphère et donc la valeur propre correspondant à f est plus grande que 2.

Si f n'est pas paire par rapport aux trois axes, alors il existe un axe, par exemple δ_1 suivant lequel f n'est pas paire. On considère alors la fonction antisymétrique par rapport à δ_1

$$g = f - f \circ s_1.$$

La fonction g est non nulle dans Σ et c'est encore une fonction propre pour la même valeur propre que f . Par contre g s'annule sur δ_1 . L'axe δ_1 coupe Σ en deux triangles isométriques. On nomme Σ' l'un de ces deux triangles. Maintenant on considère Ω une composante connexe de $S^2 \cap Y$ où Y est un cône de type \mathbb{Y} et on suppose que Ω contient Σ .



Ω est coupé par l'axe δ_1 et on note Ω' la composante qui contient Σ' . On applique maintenant la proposition 2.8 avec $G = \Sigma'$, $\partial_D G = \delta_1 \cap \partial \Sigma'$, $\partial_N G = \partial \Sigma' \setminus \delta_1$, $G' = \Omega'$,

$\partial_N G' = \partial\Omega' \setminus \delta_1$ et $\partial_D G' = \delta_1 \cap \partial\Omega'$. On obtient que

$$\lambda_D(\Sigma') \geq \mu(\Omega')$$

où $\mu(\Omega')$ est la plus petite valeur propre non nulle dans Ω' avec condition de Neumann sur $\partial\Omega' \setminus \delta_1$ et condition de Dirichlet sur $\delta_1 \cap \partial\Omega'$. Maintenant en appliquant la proposition 1.29 avec $\omega = \frac{\pi}{3}$ on obtient que $\mu(\Omega') = 2$ il en découle

$$\lambda_N \geq 2. \quad \square$$

Remarque 2.11. La preuve de la proposition 2.10 fonctionne encore pour tout triangle géodésique convexe avec ses 3 angles égaux.

Il existe aussi un autre résultat qui peut être utile dans le cas d'étude de la plus petite valeur propre pour un triangle géodésique. Il s'agit de la proposition suivante.

Proposition 2.12. [DAU92] *Soit G un triangle géodésique sur la sphère S^2 . Alors il existe un "côté" $X \subset \partial G$ tel que*

$$\lambda_N(G) \geq \lambda_D(G)$$

où $\lambda_N(G)$ désigne la plus petite valeur propre non nulle de $-\Delta_S$ dans G avec condition de Neumann sur ∂G , et $\lambda_D(G)$ désigne la plus petite valeur propre de $-\Delta_S$ dans G avec condition de Dirichlet sur X et condition de Neumann sur $\partial G \setminus X$.

La preuve utilise les ensembles nodaux de la fonction propre u associée à la plus petite valeur propre, c'est à dire les composantes connexes de $u^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (voir la proposition 4.6. de [DAU92]).

Remarque 2.13. On déduit de ces derniers résultats que pour tout minimiseur d'énergie dans $B(0, 1) \setminus Z$ où Z est un cône minimal centré en 0 on a

$$\omega_2(x, ar) \leq a^\gamma \omega_2(x, r)$$

avec $\gamma = 2(\sqrt{2} - 1) \geq 0,8$ et $\omega_2(x, r)$ désigne l'énergie normalisée de u dans la boule $B(x, r)$ c'est à dire, rappelons le,

$$\omega_2(x, r) := \frac{1}{r^2} \int_{B(0,r) \setminus Z} |\nabla u|^2 dx.$$

2.3 Croissance de l'énergie pour une surface $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimale

Maintenant que l'on sait que l'énergie normalisée croît pour un minimiseur d'énergie dans le complémentaire d'un cône minimal, on va montrer par un argument de compacité et contradiction que l'énergie normalisée "croît" pour un minimiseur d'énergie dans le complémentaire d'un ensemble "proche" d'un cône minimal. En plus d'une condition de proximité avec un cône minimal, l'ensemble concerné devra avoir quelques propriétés de régularité et de géométrie, de façon à pouvoir ensuite facilement être comparé avec un minimiseur de Mumford-Shah. Typiquement, une surface Reifenberg-plate assez proche d'un hyperplan dans la boule unité rentre dans ce cadre. Donc un cas particulier du théorème 2.18 est que tout minimiseur d'énergie dans le complémentaire d'une surface E qui est Reifenberg plate dans $B(0, 1)$, avec $\beta(0, 1)$ assez petit, a son énergie normalisée qui est plus petite dans des petites boules centrées sur $E \cap B(0, \frac{1}{2})$. Il en sera de même pour les ensembles ε -minimaux (c'est à dire la généralisation des surfaces Reifenberg plates mais sur les cônes de type \mathbb{Y} et \mathbb{T} , les définitions précises seront énoncées plus loin).

Les définitions qui suivent vont sembler un peu compliquées de prime abord. La principale raison est qu'un résultat sur les ensembles ε -minimaux ne suffirait pas malheureusement pour la suite, c'est à dire obtenir la croissance pour Mumford-Shah. C'est pourquoi le théorème 2.18 est plus général. Il montre la propriété de "croissance" d'énergie pour les ensembles $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimaux dont les ensembles ε_0 -minimaux et Reifenberg-plats sont des cas particuliers.

Le lecteur comprendra plus tard dans la section sur Mumford-Shah l'intérêt de traiter les ensembles $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimaux et leur provenance. En effet ils apparaissent naturellement comme conséquence d'un argument de temps d'arrêt.

Définition 2.14. *Soit B une boule de \mathbb{R}^3 . Un ensemble fermé $E \subset B$ est ε_0 -minimal dans B si pour tout $x \in E$ et pour tout r tel que $B(x, r) \subset B$ on a*

$$\inf_{Z \ni x} \left\{ \frac{1}{r} \sup \{d(y, Z); y \in E \cap B(x, r)\} \right\} \leq \varepsilon_0 \quad (2.8)$$

où l'inf est pris sur tous les cônes de type \mathbb{P}, \mathbb{Y} , et \mathbb{T} qui contiennent x (mais ne sont pas forcément centrés en x). Autrement dit pour tout x et r on a

$$\beta(x, r) \leq \varepsilon_0.$$

Pour la définition des cônes de type \mathbb{P}, \mathbb{Y} et \mathbb{T} , se reporter aux définitions 0.15 et 0.16. La définition de $\beta(x, r)$ est donnée en (7).

La définition 2.14 est introduite dans [DPT] mais dans une version un peu différente. Dans [DPT] l'inégalité (2.8) est remplacée par

$$\inf_{Z \ni x} D_{x,r}(E, Z) \leq \varepsilon_0$$

où $D_{x,r}$ est la distance de Hausdorff normalisée c'est à dire

$$D_{x,r}(E, Z) = \frac{1}{r} \max \left\{ \sup \{d(y, Z); y \in E \cap B(x, r)\}, \sup \{d(y, E); y \in Z \cap B(x, r)\} \right\}.$$

Dans notre cas nous considérons seulement la première moitié de la distance de Hausdorff, ce qui autorise à priori l'ensemble E à avoir des trous. Les trous ne nous poseront cependant pas de problèmes particuliers car en général nous supposerons que la surface est ε_0 -minimale au sens de la définition 2.14, et de plus on supposera qu'elle sépare certaines régions. De manière générale et pour des raisons techniques, on traitera toujours cette condition topologique de séparation indépendamment de la propriété géométrique d'être proche d'un cône à toutes les échelles.

Le principal résultat sur les ensembles ε_0 -minimaux est le théorème 2.1 de [DPT] qui nous dit que pour ε_0 assez petit, tout ensemble ε_0 -minimal (au sens de la définition de [DPT] c'est à dire sans trous) est l'image bi-hölderienne d'un cône minimal.

Si on avait pris uniquement les cônes de type \mathbb{P} , alors on aurait la définition d'une surface "Reifenberg-plate" et le théorème 2.1. de [DPT] dans ce cas n'est autre que le théorème du disque topologique de Reifenberg. Les auteurs de [DPT] ont généralisé au cas des cônes de types \mathbb{Y} et \mathbb{T} ce que Reifenberg avait fait pour les cônes de type \mathbb{P} . Donc les ensembles ε_0 -minimaux peuvent se voir comme une généralisation des ensembles Reifenberg-plats.

La définition 2.14 n'est pertinente que si ε_0 est assez petit. Dans toute la suite on supposera que $\varepsilon_0 < 10^{-5}$. Avant de poursuivre, introduisons une dernière définition topologique.

Définition 2.15. Soit Z un cône minimal de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} , ou \mathbb{T} dans \mathbb{R}^3 et B une boule de rayon r telle que $B \cap Z \neq \emptyset$ et $\varepsilon_0 < 10^{-5}$. Pour tout $a > 0$ on note

$$Z_a := \{y \in B; d(y, Z) \leq a\}.$$

Soit E un ensemble fermé dans B tel que E soit inclus dans $Z_{r\varepsilon_0}$. On dit alors que " E sépare dans B " (par rapport à Z et ε_0) si les composantes connexes de $B \setminus Z_{2r\varepsilon_0}$ sont incluses dans des composantes connexes différentes de $B \setminus E$. On note également κ^B le nombre de composantes connexes de $B \setminus Z_{2\varepsilon_0}$.

Enfin,

Définition 2.16. Soit $\{B_i\}_{i \in I}$ une famille de boules. On dira que cette famille est en recouvrement borné si il existe une constante C_0 telle que

$$\forall x \in \bigcup_{i \in I} B_i, \#\{i; x \in B_i\} \leq C_0.$$

Le théorème de cette section montre que si ε_0 est suffisamment petit, alors tout minimiseur d'énergie dans le complémentaire d'un ensemble ε_0 -minimal centré a son énergie qui croît comme une certaine puissance du rayon. Malheureusement, les ensembles ε_0 -minimaux ne sont pas encore assez généraux pour pouvoir être utiles pour montrer la décroissance d'énergie pour un minimiseur de Mumford-Shah. C'est pourquoi nous allons introduire les ensembles $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimaux dont les ensembles ε_0 -minimaux seront un cas particulier.

On note B la boule unité dans \mathbb{R}^3 . Dans le théorème on se place dans B mais il est clair que l'énoncé est modifiable par translation et homogénéité.

Définition 2.17. *Soit $\varepsilon < 100\varepsilon_0$. Pour tout ensemble E fermé de mesure H^2 localement finie dans \mathbb{R}^3 on dit que E est $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimal si il existe une famille de boules $\{B_i\}_{i \in I} := \{B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ telle que $\{10B_i\}$ soit en recouvrement borné de constante C_0 , centrées sur E , et telles que :*

i) $\forall i \in I; r_i \leq \varepsilon$.

ii) $E \setminus \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$ est ε_0 -minimal dans B .

iii) Il existe un cône Z de type \mathbb{P}, \mathbb{Y} , ou \mathbb{T} centré en 0 tel que

$$E \subset \{y \in B(0, 1); d(y, Z) \leq \varepsilon\}.$$

iv) Pour tout $i \in I$ et pour tout $R > r_i$ avec $B(x_i, R) \subset B$, on a $\beta(x_i, R) \leq \varepsilon_0$.

v) E sépare dans B .

La condition de séparation de v) utilise le cône de iii).

On ne met pas de condition sur le nombre de B_i . Cela autorise par exemple l'ensemble E à être entièrement recouvert par des mauvaises boules B_i de taille plus petites que ε . La croissance de l'énergie sera vraie dans ce cas aussi, car nous utiliseront une "sphère coupeuse" (voir plus loin).

Par exemple, un ensemble ε_0 -minimal qui sépare dans B est un ensemble $(\varepsilon_0, 0)$ -minimal. En particulier un ensemble Reifenberg-plat avec petite constante est $(\varepsilon_0, 0)$ -minimal.

En fait les ensembles $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimaux seront obtenu par un argument de temps d'arrêt. En effet, si on part d'un ensemble quelconque et que l'on fait un temps d'arrêt avec comme condition d'arrêt de ne pas être proche d'un cône de type 1,2 ou 3, et si on arrive à contrôler le rayon des boules d'arrêt par ε , alors on aura obtenu un ensemble $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimal. C'est ce qui sera fait dans le chapitre suivant.

On aurait pu aussi prendre $\varepsilon = \varepsilon_0$ et ne pas définir des ensembles $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimaux mais simplement de nouveaux ensembles ε -minimaux avec mauvaises boules. Cela aurait suffi pour ce qu'on veut faire dans la suite. Mais de mon point de vue il est plus clair de dissocier la constante ε_0 de "proximité avec les cônes à toutes les échelles" du ε qui sert à l'argument de compacité pour bien se rendre compte que le ε_0 peut être fixé à l'avance (disons $< 10^{-5}$)

et que seul le ε de la masse des mauvaises boules B_i comptera dans l'argument de compacité. En fait pour être plus précis, dans l'argument de compacité le β à la grande échelle doit tendre vers 0 avec le ε mais pour les β des petites échelles il suffit qu'ils soient plus petits qu'un ε_0 fixé à l'avance et qui ne tend pas forcément vers 0.

Pour l'instant, on souhaite montrer un résultat de croissance d'énergie normalisée pour un minimiseur d'énergie dans le complémentaire d'un ensemble $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimal. En fait ce type d'ensemble est trop général pour espérer avoir une décroissance d'énergie. En effet, un ensemble $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimal n'interdit pas l'existence de petits tubes cachés dans les boules mauvaises B_i , et qui pourraient transporter de l'énergie vers le centre et contredire la croissance d'énergie. C'est pourquoi pour démontrer notre théorème on sera obligé de couper les tubes à l'aide d'un "cube coupeur" d'un certain rayon qui volontairement est laissé au choix dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Pour tout $i \in I$ on appelle

$$B'_i := C_1 B_i = B(x_i, C_1 r_i) \quad (2.9)$$

où $C_1 \geq 1$ est une constante universelle qui sera explicitée plus tard.

Pour tout $\rho \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ et pour tout ensemble E qui est $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimal dans B on appelle

$$I_\rho := \{i \in I; B_i \cap \partial B(0, \rho) \neq \emptyset\}.$$

On définit aussi

$$E^\rho := (E \setminus \bigcup_{i \in I_\rho} B'_i) \cup \bigcup_{i \in I_\rho} \partial B'_i$$

et

$$U(E^\rho) := \{u \in W^{1,2}(B \setminus E^\rho); u = \operatorname{argmin} \left\{ \int_{B \setminus E^\rho} |\nabla v|^2; v|_{\partial B \setminus E^\rho} = u \text{ et } \int_{B \setminus E^\rho} |\nabla u|^2 = 1 \right\}\}.$$

Toutes les fonctions de $U(E^\rho)$ sont constantes dans chacune des B'_i pour $i \in I_\rho$.

On se fixe un $\varepsilon_0 < 10^{-5}$. Pour tout $\varepsilon < 100\varepsilon_0$ on introduit

$$\Lambda(\varepsilon) := \{(u, E, \rho) \text{ qui vérifient } (*)\}$$

$$(*) \quad \begin{cases} E & \text{est } (\varepsilon_0, \varepsilon)\text{-minimal dans } \bar{B}(0, 1) \\ \rho & \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ u & \in U(E^\rho) \end{cases}$$

Dans la condition *iii*) de la définition de $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimal, Z est un cône minimal de type 1,2 ou 3 centré en 0. On distingue alors 3 types parmi les éléments de $\Lambda(\varepsilon)$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$

on appelle $\Lambda_i(\varepsilon)$ les éléments de $\Lambda(\varepsilon)$ tel que le Z de la condition *iii*) soit un cône de type i .

Pour tout $(u, E, \rho) \in \Lambda(\varepsilon)$ et tout $0 < r < 1$ on note

$$\omega(r) := \frac{1}{r^2} \int_{B(0,r) \setminus E^\rho} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

On a alors le théorème suivant

Théorème 2.18. *Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, pour tout $\varepsilon_0 \leq 10^{-5}$, $\gamma < 0,8$ et $0 < r_0 < \frac{1}{2}$, il existe un $\varepsilon_2 > 0$ tel que pour tout $(u, E, \rho) \in \Lambda_i(\varepsilon_2)$ on a*

$$\omega(r_0) \leq r_0^\gamma.$$

Preuve : On va raisonner par l'absurde. On utilise un argument de compacité qui ressemble à ce qu'ont fait L. Ambrosio, N. Fusco, et D. Pallara dans le théorème 8.19 page 408 de [AFP00] pour contrôler l'énergie pour obtenir un résultat de régularité. La difficulté ici consiste à obtenir une estimation de l'énergie proche de l'ensemble E (inégalité (2.13)). Dans leur cas, L. Ambrosio, N. Fusco, et D. Pallara ont obtenu cette estimation en approchant la surface E par une surface lipschitzienne et en contrôlant la différence avec le "Tilt". Ici, l'estimation sera obtenue à l'aide d'une extension de Whitney. La preuve du théorème sera assez longue et utilisera des outils et des techniques qui seront réutilisées dans la prochaine section pour montrer la décroissance de l'énergie pour Mumford-Shah. Pour plus de lisibilité on va découper la preuve en plusieurs sous-chapitres, mais tous font partie de la preuve du théorème.

2.3.1 Raisonnement par l'absurde et compacité

On suppose que le théorème est faux. Donc il existe un $i_0 \in \{1, 2, 3\}$, un $\varepsilon_0 \leq 10^{-5}$, un $\gamma < 0,8$ et il existe $0 < r_0 < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un triplet $(u_\varepsilon, E_\varepsilon, \rho_\varepsilon) \in \Lambda_{i_0}(\varepsilon)$ tel que

$$\int_{B(0,r_0) \setminus E_\varepsilon^\rho} |\nabla u_\varepsilon|^2 > r_0^{2+\gamma}. \quad (2.10)$$

Dans toute la suite l'indice i_0 est fixe. On appelle Z^0 un cône minimal de type i_0 centré en 0. Par rotation on peut supposer que chaque ensemble E_ε est dans $\{y \in B; d(y, Z^0) \leq \varepsilon\}$.

Pour tout $a > 0$ on appelle Z_a^0 la région

$$Z_a^0 := \{y \in B; d(y, Z^0) \leq a\}.$$

On appelle ensuite A_j pour $j \in [1, i_0 + 1] \cap \mathbb{N}$ les composantes connexes de $B \setminus Z_a^0$ et $m_{a,\varepsilon}^j$ la moyenne de u_ε sur A_a^j . Comme pour tout ε

$$\int_{B \setminus E_\varepsilon^p} |\nabla u_\varepsilon|^2 = 1$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré (ou une version légèrement différente ou la constante n'est pas la moyenne sur tout le domaine mais la moyenne sur un domaine inférieur mais de rayon comparable) on sait que pour tout $0 < a < \frac{3}{4}$ les suites $u_\varepsilon - m_{\frac{3}{4},\varepsilon}^j$ sont uniformément bornées pour la norme $W^{1,2}(A_a^j)$. On sait également que la suite ∇u_ε est uniformément bornée pour la norme $L^2(B)$. Donc en utilisant une succession d'extractions de suites et un procédé diagonal, on en déduit qu'il existe une sous suite notée u_n qui converge faiblement $W^{1,2}$ sur tous les A_a^j vers une fonction $u \in W^{1,2}(B \setminus Z^0)$, et telle que ∇u_n converge également faiblement $L^2(B)$ vers une certaine fonction, qui par unicité de la limite dans l'espace des distributions n'est autre que ∇u . On note également E_n l'ensemble correspondant à u_n , ainsi que ε_n et ρ_n tel que $(u_n, E_n, \rho_n) \in \Lambda(\varepsilon_n)$. Quitte à extraire encore une sous suite on peut supposer que ρ_n converge vers un certain $\rho_\infty \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Montrons que la limite faible u est un minimiseur d'énergie dans $B \setminus Z^0$. En effet si φ est une fonction C^∞ à support compact dans $B \setminus Z^0$, comme pour tout n on sait que u_n est un minimiseur d'énergie alors on a

$$\int_B \langle \nabla \varphi, \nabla u_n \rangle = 0$$

donc en passant à la limite (car ∇u_n converge faiblement $L^2(B)$) on obtient que

$$\int_{B \setminus Z^0} \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle = 0$$

ce qui prouve que u est harmonique dans $B \setminus Z^0$.

Montrons maintenant que la dérivée normale de u est nulle sur Z^0 , c'est à dire que pour toute fonction $\varphi \in C_c^1(B)$ on a

$$\int_{\Omega^j} \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle = 0$$

où Ω^j désignent les composantes connexes de $B \setminus Z^0$. Pour tout n on sait que

$$E_n \subset Z_{\varepsilon_n}^0 := \{y \in B; d(y, Z^0) \leq \varepsilon_n\}$$

et que E_n sépare dans B . On rappelle que $A_{\varepsilon_n}^j$ désigne les composantes connexes de $B \setminus Z_{\varepsilon_n}^0$ et on note Ω_n^j les composantes connexes de $B \setminus E_n$ qui contiennent $A_{\varepsilon_n}^j$. On se fixe un certain j_0 et on considère une suite de constantes c_n qui tend vers $+\infty$. On note v_n la suite dans $W^{1,2}(B \setminus K)$ définie par

$$v_n = \begin{cases} u_n + c_n & \text{dans } \Omega_n^{j_0} \\ u_n - c_n & \text{dans } \Omega_n^j \text{ pour } j \neq j_0 \\ u_n & \text{dans } B \setminus \bigcup_j \Omega_n^j \end{cases} .$$

Maintenant soit $\delta > 0$ fixé, et soit $\chi(t)$ une fonction définie sur \mathbb{R} telle que pour tout t , $\chi'(t) \leq \delta$ et telle que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \chi(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi(t) = 1$. Si φ est une fonction $C_0^1(B)$, la fonction $\varphi\chi(v_n) \in W^{1,2}(B \setminus E_n)$. En comparant l'énergie de u_n avec l'énergie de $u_n + \varepsilon_n \varphi\chi(v_n)$ on obtient que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_B \varphi \langle \nabla u_n, \nabla \chi(v_n) \rangle + \int_B \chi(v_n) \langle \nabla u_n, \nabla \varphi \rangle \right] \geq 0.$$

Or $\nabla \chi(v_n) = \chi'(v_n) \nabla u_n$, $|\chi'| \leq \delta$ et $\int_B |\nabla u_n|^2 = 1$. D'autre part $\chi(v_n)$ tend fortement dans $L^2(B)$ vers la fonction indicatrice de Ω^j . On en déduit que

$$\int_{\Omega^j} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \geq -\delta \|\varphi\|_\infty$$

et on conclut grâce au fait que δ soit arbitraire. On fait de même pour tous les autres Ω^j ce qui prouve que u est un minimiseur d'énergie dans $B \setminus Z^0$. Donc on sait d'après la section précédente que la croissance d'énergie est vraie avec $\gamma = 0,8$ c'est à dire que pour tout r

$$\int_{B(0,r) \setminus Z^0} |\nabla u|^2 \leq r^{0,8} \int_{B(0,1) \setminus Z^0} |\nabla u|^2. \quad (2.11)$$

Donc si on montre que ∇u_n converge fortement dans $L^2(B(0,r))$ on pourra en déduire une contradiction du au passage à la limite dans (2.10) avec $r = r_0$. Toute la suite de la preuve sert donc à justifier ce passage à la limite, qui sera fait en toute fin de ce chapitre.

On considère donc la mesure $\mu_n := |\nabla u_n|^2 dx$ sur B . Comme pour tout n on a $\mu_n(B) = 1$, quitte à extraire on peut supposer que μ_n converge faiblement vers une certaine mesure μ . Et comme ∇u_n converge faiblement L^2 vers ∇u , à priori on peut juste dire que (voir proposition 1.62(b) de [AFP00])

$$|\nabla u|^2 dx \leq \mu. \quad (2.12)$$

On va montrer que (2.12) est une égalité dans $B(0,r)$.

Tout d'abord, montrons que la partie régulière de μ par rapport à la mesure de Lebesgue est $|\nabla u|^2 dx$ et que la partie singulière est concentrée sur Z^0 . Pour cela, rappelons que u_n est une suite de fonctions harmoniques avec norme L^2 uniformément bornées et donc uniformément bornées pour la norme L^∞ sur tout compacts de $B \setminus Z^0$. Donc en recouvrant $B \setminus Z^0$ par un nombre dénombrable de compacts et en utilisant un procédé diagonal, on peut dire que u_n converge vers u pour la norme L^p sur tout compact et pour tout p . De plus, comme les u_n sont harmoniques, on sait que leur gradients sont aussi uniformément bornés. Donc, quitte à extraire encore une sous suite on peut supposer que les ∇u_n convergent vers ∇u dans L^2 fortement sur tout compacts de $B \setminus Z^0$. Il s'en suit que pour tout compact U dans $B \setminus Z^0$,

$$\mu(U) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(U) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_U |\nabla u_n|^2 dx = \int_U |\nabla u|^2 dx.$$

Donc il suffit de montrer que $\mu(Z^0) = 0$. Pour cela, on va considérer un domaine cylindrique \mathcal{C}_h . On définit la base

$$B' := B(0, \rho_\infty) \cap Z^0$$

et

$$\mathcal{C}_h := \{y \in B; d(y, B') \leq h\}.$$

On définit également

$$\mathcal{C}_h^n := \{y \in B; d(y, B'_n) \leq h\}$$

de base

$$B'_n := B(0, \rho_n) \cap Z^0$$

de sorte que \mathcal{C}_h^n tend vers \mathcal{C}_h pour la distance de Hausdorff. On va estimer $\mu(\mathcal{C}_h)$ et ensuite faire tendre h vers 0.

Dans un souci de clarté, avant de poursuivre avec la vraie preuve, faisons un petit argument qui explique l'idée de ce qu'on veut faire dans la suite sans justifier toutes les inégalités. L'idée pour finir la preuve est de démontrer une inégalité du type

$$\int_{\mathcal{C}_h} |\nabla u_n|^2 dx \leq C \int_{S_n} |\nabla u_n|^2 dx \quad (2.13)$$

où S_n est un certain domaine fermé tel que $E_n^{\rho_n} \cap B(\rho_n) \subset B(\rho_n) \setminus S_n$ et S_n tend vers

$$S_\infty := \{x \in \mathcal{C}_h; d(x, Z^0) \geq C_5 d(x, \partial \mathcal{C}_h)\}.$$

En effet, supposons que (2.13) est vérifié. Alors un passage à la limite qui sera justifié plus tard donnera

$$\mu(\mathcal{C}_h) \leq C \mu(S_\infty) = \int_{S_\infty} |\nabla u|^2 dx \leq Ch \|\nabla u\|_\infty^2$$

et donc en faisant tendre h vers 0 on en déduit que $\mu(Z^0 \cap B(0, \rho_\infty)) = 0$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Poursuivons maintenant avec la preuve de notre théorème. Le but est de justifier les précédents arguments.

2.3.2 Construction d'un compétiteur

Pour prouver une inégalité du type de (2.13) on va construire un compétiteur pour u_n dans \mathcal{C}_h^n . Tout d'abord on va utiliser le fait que E_n est $(\varepsilon_0, \varepsilon_n)$ -minimal pour construire une famille de boules de Whitney autour de l'ensemble E_n , à partir d'une distance bien adaptée au problème.

Construction des boules de Whitney

Pour tout $i \in I$ on note ψ_i une fonction positive, 1-lipschitz, telle que

$$\psi_i(x) := \begin{cases} r_i & \text{sur } B_i \\ 0 & \text{en dehors de } 2B_i \end{cases}$$

On définit ensuite pour tout $x \in B$,

$$d(x) := \sum_{i \in I} \psi_i(x).$$

La somme est localement finie et $d(x)$ est C_0 -lipschitz où C_0 est la constante de recouvrement borné de la famille $\{10B_i\}_{i \in I}$.

Puis, pour tout $x \in E_n \cap \mathcal{C}_h^n$ on définit

$$\delta(x) := \max(d(x, \partial\mathcal{C}_h^n), d(x)).$$

Pour tout $x \in E_n \cap \mathcal{C}_h^n$ on considère la boule

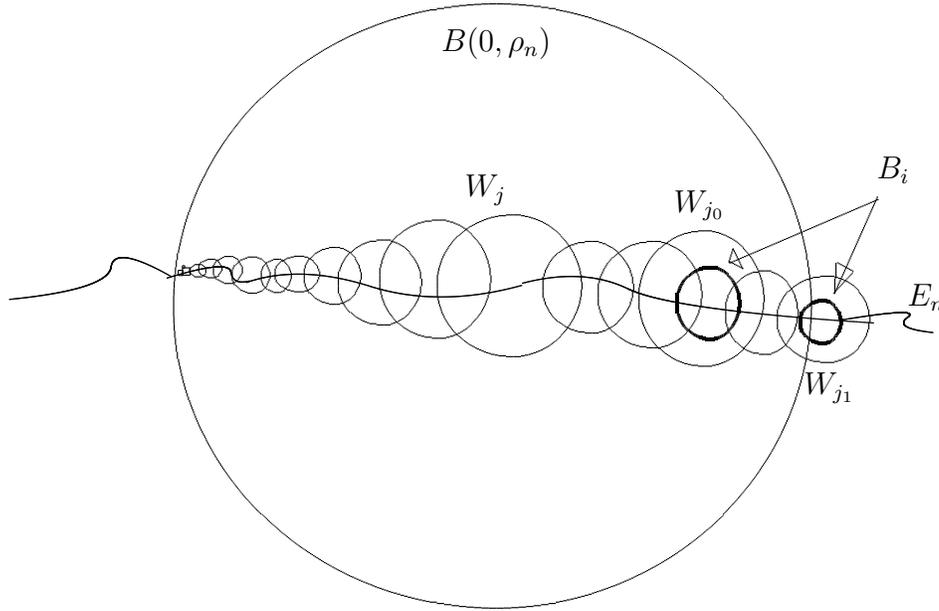
$$B_x := B(x, \frac{1}{U}\delta(x))$$

où $U \geq 30C_0$ est une constante qui sera choisie plus tard.

On choisit ensuite $\{W_j\}_{j \in J}$ une sous famille de boules $\{B_x\}_{x \in E_n \cap \mathcal{C}_h^n}$ maximale pour la propriété que

$$\forall j \neq j', \quad \frac{1}{100}W_j \cap \frac{1}{100}W_{j'} = \emptyset.$$

La famille $\{W_j\}_{j \in J}$ est une famille de boules de Whitney. Le lemme suivant récapitule les propriétés des boules W_j . Mais avant de passer à la preuve du lemme voyons d'abord la situation sur le schéma suivant et essayons de comprendre la disposition des W_j .



L'ensemble E_n est recouvert par des boules de Whitney W_j . Le diamètre des W_j est équivalent au maximum entre la distance au bord de \mathcal{C}_h^n et le diamètre des mauvaises boules B_i dans les alentours. Donc si il n'y a pas de mauvaises boules B_i dans la région, les boules W_j sont simplement des boules de Whitney donc le rayon est équivalent à la distance au bord. C'est ce qui se passe dans la partie gauche de la figure. Si en revanche il y a des mauvaises boules B_i , alors le diamètre des W_j augmente pour englober ces mauvaises boules. C'est ce qui se passe pour les boules B_i marquées en gras sur le dessin. La présence de ces boules fait augmenter le rayon de W_{j_0} et W_{j_1} . Ainsi, on est toujours dans une situation où on contrôle la géométrie dans chaque W_j . Enfin, il peut se produire que des mauvaises boules B_i soient proche du bord $\partial B(0, \rho_n)$. Ceci implique que les boules de Whitney touchent également le bord. C'est ce qui se produit pour W_{j_1} . A ce moment là on recouvrira ce genre de boules par les boules B'_i au bord. D'où l'intérêt de la "sphère coupeuse", c'est à dire de montrer la croissance d'énergie dans le complémentaire de E^ρ et pas E .

Lemme 2.19.

- Propriété de Whitney* i) $10W_j \cap 10W_{j'} \neq \emptyset \Rightarrow \frac{1}{20}r_{j'} \leq r_j \leq 20r_{j'}$
- Recouvrement de E_n* ii) $E_n \cap \mathcal{C}_h^n \subset \bigcup_{j \in J} W_j$
- Le recouvrement est borné* iii) $\exists C_2; \forall x \in \mathcal{C}_h^n, \#\{j \in J; x \in 10B_j\} \leq C_2$
- Condition au bord* iv) $\bigcup_{j \in J; 10W_j \cap \partial \mathcal{C}_h^n \neq \emptyset} B_j \subset \bigcup_{i \in I_{\rho_n}} B'_i$
- Contrôle de la géométrie* v) $\forall j \in J, \forall R > r_j, \beta(x_j, R) \leq 4\varepsilon_0$

Preuve : Montrons *i*). Soit $x \in \mathcal{C}_h^n$ et soit j et k dans J deux indices tels que $10W_j$ et $10W_k$ contiennent x . Alors si x_j et x_k désignent les centres des boules W_j et W_k , comme δ est C_0 -lipschitz on a

$$\begin{aligned} \delta(x_j) &\leq \delta(x_k) + C_0 d(x_k, x_j) \\ &\leq Ur_k + C_0 d(x_k, x) + C_0 d(x, x_j) \\ &\leq Ur_k + 10C_0 r_k + 10C_0 r_j \end{aligned}$$

Donc

$$(U - 10C_0)r_j \leq (U + 10C_0)r_k$$

Puis en raisonnant de même en échangeant r_i et r_j on en déduit finalement que

$$\frac{U - 10C_0}{U + 10C_0} r_j \leq r_k \leq \frac{U + 10C_0}{U - 10C_0} r_j$$

et donc si on considère que $U \geq 30C_0$ alors on obtient *i*).

Montrons maintenant *ii*). On raisonne par l'absurde. Soit $x \in E_n \setminus \bigcup_{j \in J} W_j$. On va montrer que la famille W_j n'est alors pas maximale. On rappelle que $B_x := B(x, \frac{1}{U}\delta(x))$ et on note r_x le rayon de B_x . En raisonnant comme précédemment on peut montrer que si $\frac{1}{100}B_x \cap \frac{1}{100}W_j \neq \emptyset$, alors $20^{-1}r_j \leq r_x \leq 20r_j$. Or comme $x \in E_n \setminus \bigcup_{j \in J} W_j$ on a (avec y un point commun à $\frac{1}{100}W_j$ et $\frac{1}{100}B_x$)

$$r_j < d(x, x_j) \leq d(x, y) + d(y, x_j) \leq \frac{1}{100}r_x + \frac{1}{100}r_j \leq \frac{21}{100}r_j$$

ce qui est absurde. Donc ça veut dire que $\frac{1}{100}B_x$ ne rencontre aucune des $\frac{1}{100}W_j$ et donc on peut rajouter B_x à la famille W_j , ce qui contredit que $\{W_j\}_{j \in J}$ est une famille maximale.

En ce qui concerne *iii*) c'est une conséquence d'un résultat géométrique dans \mathbb{R}^N . En effet, considérons une famille de boules dans \mathbb{R}^N qui contiennent tous un même point, qui soient de rayon équivalent à 1 et dont leurs centres sont tous deux à deux à distance plus grande que $\frac{1}{100}$, alors ces boules sont forcément en nombre fini. C'est ce fait qui prouve *iii*).

Prouvons *iv*). Soit j un indice tel que $10W_j \cap \partial\mathcal{C}_h^n \neq \emptyset$ et notons comme d'habitude x_j le centre de W_j . Comme le rayon de W_j (noté r_j) est par définition égal à $\frac{1}{U} \max(d(x_j), d(x_j, \partial\mathcal{C}_h^n))$, et puisque $U > 30$, on en déduit que $r_j = \frac{1}{U} d(x_j) := \frac{1}{U} \sum_{i \in I} \psi_i(x_j)$. Donc il existe i_0 tel que $\psi_{i_0}(x_j)$ soit non nul. Ce qui veut dire que $x_j \in 2B_{i_0}$. On peut supposer de plus que $\psi_{i_0}(x_j)$ est maximum parmi tous les $\psi_i(x_j)$. D'autre part $r_j = \frac{1}{U} \sum_{i; x_j \in 2B_i} \psi_i(x_j) \leq \frac{C_0}{U} r_{i_0}$ (car les B_i sont en recouvrement borné constante C_0). Donc finalement on a prouvé que

$$W_j \subset (2 + 10\frac{C_0}{U})B_{i_0}$$

ce qui prouve *iv*) si on choisi $C_1 = (2 + 10\frac{C_0}{U})$.

Enfin, il reste à montrer v). Soit $j \in J$ et $R > r_j$. On veut montrer qu'il existe un cône minimal Z_j qui approche bien E_n dans $B(x_j, R)$. Si x_j ne se trouve dans aucune des $\{B_i\}_{i \in I}$, alors comme $E_n \setminus \cup B_i$ est ε_0 -minimal, il existe un cône minimal $Z_{j,R}$ tel que pour tout $x \in E_n \cap B(x_j, R)$, $d(x, Z_{j,R}) \leq \varepsilon_0 R$. Donc il suffit de considérer le cas où $x_j \in B_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$. Mais alors on a

$$r_{i_0} = \psi_{i_0}(x_j) \leq \sum_{i \in I} \psi_i(x_j) = d(x_j) \leq r_j \leq R$$

Donc $B(x_j, R) \subset B(x_{i_0}, 2R)$ et par la propriété iv) de la définition de $(\varepsilon, \varepsilon_0)$ -minimalité (définition 2.17) on sait qu'il existe un cône minimal Z tel que pour tout $x \in E_n \cap B(x_{i_0}, 2R)$ on a $d(x, Z) \leq \varepsilon_0 2R$. En particulier on a trouvé un cône $Z_{j,R}$ tel que pour tout $x \in E_n \cap B(x_j, R)$ on ait $d(x, P_j) \leq 2\varepsilon_0 R$. C'est ce qu'on voulait démontrer et ceci achève la preuve du lemme. \square

Orientation et Séparation

Maintenant que les boules W_j sont construites ils faut faire quelques manipulations géométriques et topologiques. Tout d'abord on va utiliser un lemme de "recentrage" de sorte que les centres des cônes minimaux qui approchent E_n dans W_j soient environ dans $\frac{1}{2}W_j$ au moins. Si Z est un cône minimal on note $type(Z)$ son type. Il vaut 1 si Z est de type \mathbb{P} , 2 si c'est un \mathbb{Y} ou 3 si c'est un \mathbb{T} . On sait que pour tout $j \in J$ il existe un cône Z^j tel que

$$E_n \cap W_j \subset Z_{4r_j \varepsilon_0}^j := \{y; d(y, Z^j) \leq 4r_j \varepsilon_0\}.$$

On note κ^j le nombre de composantes connexes de $W_j \setminus Z_{4r_j \varepsilon_0}^j$. On a toujours

$$\kappa^j \leq type(Z^j) + 1.$$

Si le centre de Z^j est dans $\frac{1}{2}W_j$ alors on a égalité, mais ce n'est pas toujours le cas (par exemple si le centre est trop près du bord de W_j). Cette incertitude posera quelques problèmes dans l'extension de Whitney que nous effectuerons plus tard. Le lemme suivant va remédier à ces problèmes.

Lemme 2.20 (Recentrage). *Soit $0 < \eta < 10^{-5}$ et soit Z un cône minimal dans \mathbb{R}^3 qui contient 0 (mais n'est pas forcément centré en 0). Pour tout $r > 0$ on note κ^r le nombre de composantes connexes de $B(0, r) \setminus Z_{r\eta}$ où $Z_{r\eta} := \{y; d(y, Z) \leq r\eta\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^r]$ on note A_k^r les composantes connexes de $B(0, r) \setminus Z_{r\varepsilon_0}$ et $vol(A_k^r)$ le volume de A_k^r . Alors pour tout $r_0 > 0$ il existe un r_1 tel que*

$$r_0 \leq r_1 \leq 4r_0, \quad \kappa^{r_0} \leq \kappa^{r_1}$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^{r_1}], \quad vol(A_k^{r_1}) \geq \frac{1}{8} r_1^3 \tag{2.14}$$

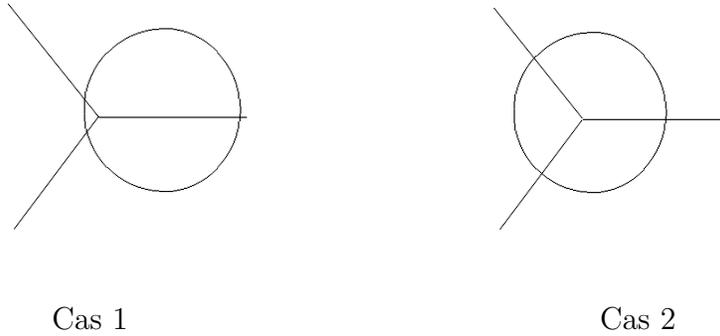
Remarque 2.21. La constante $\frac{1}{8}$ est une vague minoration du volume de la plus petite composante connexe du complémentaire d'un cône minimal centré au point $(0, 0, \frac{1}{2})$ dans $B(0, 1)$.

Preuve du lemme 2.20 : Donc on considère la boule $B(0, r_0)$. Si $type(Z) = 1$ alors Z est un hyperplan qui passe par x , donc $\kappa^{r_0} = 2$ et pour tout $k \in \{1, 2\}$ on a $vol(A_k^{r_0}) \geq \frac{1}{8}r_1^3$ donc on peut prendre $r_1 = r_0$.

On suppose donc que $type(Z) = 2$ et donc Z est un Y . Si $\kappa^{r_0} = 2$ alors comme $x \in Z$ la seule possibilité est que tout les points de l'épine de Z soient situés dans $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, (1-2\eta)r_0)$. Donc comme η est très petit (inférieur à 10^{-5}), pour $k \in \{1, 2\}$ on a bien $vol(A_k^{r_0}) \geq \frac{1}{8}r_1^3$ et donc on peut choisir $r_1 = r_0$.

Si maintenant $type(Z) = 2$ mais que $\kappa^{r_0} = 3$. Alors comme $x \in Z$, ou bien pour $k \in \{1, 2, 3\}$ on a $vol(A_k^{r_0}) \geq \frac{1}{8}r_1^3$, ou bien il existe un k_0 tel que $vol(A_{k_0}^{r_0}) < \frac{1}{8}r_1^3$ et alors pour $k \neq k_0$ on a $vol(A_k^{r_0}) \geq \frac{1}{8}r_1^3$.

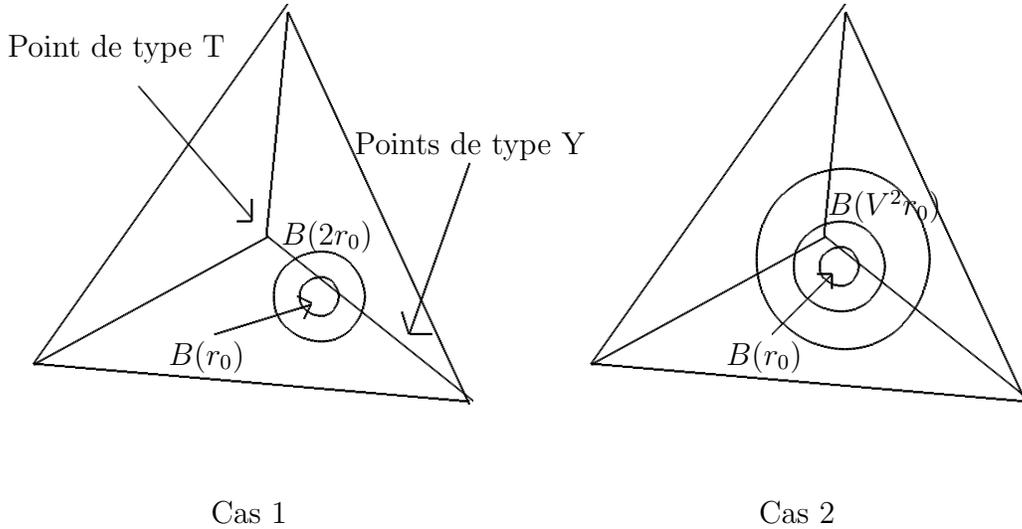
Figure 1



Dans le premier cas on peut choisir $r_1 = r_0$. Dans le second cas on prend $r_1 = 2r_0$ (voir la figure 1).

Il reste maintenant le cas où $type(Z) = 3$. On refait alors la même discussion. Si $\kappa^{r_0} = 2$ alors on garde $r_1 = r_0$. Si $\kappa^{r_0} = 3$ et qu'il existe un k_0 tel que $vol(A_{k_0}^{r_0}) < \frac{1}{8}r_0^3$ alors on essaie $r_1 = 2r_0$. Si $\kappa^{2r_0} = 3$ on garde $r_1 = 2r_0$ (on est dans le cas 1 de la figure 2). Si en revanche $\kappa^{2r_0} = 4$ et qu'il existe un k_1 tel que $vol(A_{k_1}^{2r_0}) < \frac{1}{8}(2r_0)^3$ alors on prend $r_1 = 4r_0$ (on est dans le cas 2 de la figure 2). Sinon on garde $r_1 = 2r_0$.

Figure 2



Enfin si $\text{type}(Z) = 3$ et que $\kappa^{r_0} = 4$ alors si il existe k_0 tel que $A_{k_0}^{r_0} < \frac{1}{8}(r_0)^3$ on prend $r_1 = 2r_0$ sinon on garde $r_1 = r_0$. \square

Définition 2.22. Soit Z un cône minimal et B une boule qui intersecte Z . Alors si (2.14) est vérifié on dit que Z est presque centré dans B . Ainsi, Z est presque centré dans B dès que son centre se situe dans $\frac{1}{2}B$.

En utilisant le lemme 2.20, pour tout $j \in J$ on peut si besoin changer W_j en $2W_j$ ou $4W_j$ de façon à ce que tous les cônes Z^j associés aux boules W_j soient presque centrés dans W_j . En effet, en utilisant une translation on peut supposer que W_j est centré en 0 et on applique le lemme au cône Z associé à $4W_j$ (qui approche bien E_n dans $4W_j$ mais également dans W_j avec comme constante $4\varepsilon_0$). D'après le lemme on peut choisir parmi W_j , $2W_j$ ou $4W_j$ une boule telle que Z soit presque centré. Le cône Z' associé à ce choix de boule étant proche de Z il est également presque centré.

Cette nouvelle famille de boules vérifie encore les propriétés du lemme 2.19 quitte à modifier légèrement les constantes (en les multipliant par 4).

Maintenant on va discuter d'orientation et de séparation pour les boules de Whitney $\{W_j\}_{j \in J}$. Rappelons un peu la situation et introduisons de nouvelles notations. On rappelle que E_n sépare dans $B = B(0, 1)$ et que Z^0 est un cône minimal de type $i_0 = \text{type}(Z^0)$ qui approche bien E_n dans B . C'est à dire que

$$E_n \subset Z_{\varepsilon_0}^0 := \{y \in B; d(y, Z^0) \leq \varepsilon_0\}.$$

Pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^B]$ on appelle A_k^0 les composantes connexes de $B \setminus Z_{\varepsilon_0}^0$ et on nomme également Ω_k pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^B]$ les composantes connexes de $B \setminus E_n$ telles que Ω_k contienne A_k^0 .

Définition 2.23. Soit $B(x, r)$ une boule incluse dans $B(0, 1)$. On suppose qu'il existe un cône minimal Z qui contient x et qui approche bien E_n dans $B(x, r)$ c'est à dire

$$E_n \cap B(x, r) \subset Z_{r\varepsilon_0} := \{y \in B(x, r); d(y, Z) \leq \varepsilon_0 r\}.$$

On nomme A_k pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^{B(x,r)}]$ les composantes connexes de $B(x, r) \setminus Z_{r\varepsilon_0}$. On dit alors que $B(x, r)$ est bien orienté dans $B(0, 1)$ si

i) E_n sépare dans $B(x, r)$.

ii) $\kappa^{B(x,r)} \leq \kappa^{B(0,1)}$.

iii) Pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^{B(x,r)}]$ il existe $l(k) \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^{B(0,1)}]$ tel que $A_k \subset \Omega_{l(k)}$.

iv) Si $k \neq k'$ alors $l(k) \neq l(k')$.

On a alors la

Proposition 2.24. Pour tout $j \in J$, W_j est bien orientée.

Preuve : On se fixe un $j \in J$ et une boule W_j que l'on notera $B(x, r)$. Pour ne pas alourdir la preuve on va oublier l'indice j car la boule W_j est maintenant fixe. On considère les boules $B^p := B(x, 2^p r)$ pour $p \in \mathbb{N} \cap [0, P]$, où P est tel que

$$\frac{1}{32} \leq 2^P r \leq \frac{1}{16}.$$

C'est toujours possible car $r < \frac{1}{100}$ et ainsi, toutes les B^p sont incluses dans $B(0, 1)$ car $x \in B(0, \rho_n)$. On nomme aussi $B^{P+1} := B(0, 1)$. On utilise maintenant le lemme 2.20 pour extraire parmi les B^p une sous suite $B^{\sigma(p)}$ telle que pour tout p , $B^{\sigma(p)}$ soit presque centrée et telle que le rayon de chaque boule ne soit pas plus grand que huit fois le rayon de la précédente. On nomme toujours B^p cette sous suite. B^0 désigne la boule de départ B_j et B^{P+1} désigne $B(0, 1)$. Par contre le rayon de B^p n'est plus exactement $2^p r$ mais est équivalent avec un facteur 4.

On va montrer par récurrence décroissante sur p que B^p est bien orientée. Ainsi, $B_j =: B^0$ sera aussi bien orientée.

Il est clair d'après les hypothèses dans $B(0, 1)$ que $B^{P+1} := B(0, 1)$ est bien orientée. Soit donc maintenant $p \in \mathbb{N} \cap [1, P+1]$. Montrons que si B^p est bien orientée, alors B^{p-1} est bien orientée. On note κ^p au lieu de κ^{B^p} , et on note également Z^p le cône minimal qui approche E_n dans B^p (on sait qu'il en existe un pour tout p par la propriété de $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimalité de E_n). On note enfin r_p le rayon de B^p . On sait que

$$E_n \cap B^p \subset Z_{r_p \varepsilon_0}^p := \{y; d(y, Z^p) \leq r_p \varepsilon_0\} \quad (2.15)$$

et de plus E_n sépare dans B^p . On appelle A_k^p pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^p]$ les composantes connexes de $B^p \setminus Z_{r_p \varepsilon_0}^p$.

Maintenant considérons B^{p-1} . Montrons tout d'abord que E_n sépare dans B^{p-1} . C'est à dire qu'il faut montrer que les composantes connexes de $B^{p-1} \setminus Z_{2r_p \varepsilon_0}^{p-1}$ sont dans des composantes connexes différentes de $B^{p-1} \setminus E_n$. Soit A_k^p les composantes connexes de $B^{p-1} \setminus Z_{2r_p \varepsilon_0}^{p-1}$ pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^{p-1}]$ Comme

$$E_n \cap B^{p-1} \subset Z_{r_{p-1} \varepsilon_0}^{p-1}$$

et que $\varepsilon_0 < 10^{-5}$, on peut choisir pour tout k un point a_k^{p-1} tel que $a_k^{p-1} \in A_k^{p-1}$, et $d(a_k^{p-1}, E_n) \geq \frac{r_{p-1}}{10}$ (car les cônes Z^p sont presque centrés).

Comme $d(a_k^{p-1}, E_n) \geq \frac{r_{p-1}}{10}$, alors $d(a_k^{p-1}, Z_{r_{p-1} \varepsilon_0}^{p-1}) \geq r_{p-1}(\frac{1}{10} - \varepsilon_0)$ et en utilisant (2.15) il s'ensuit $d(a_k^{p-1}, Z_{r_p \varepsilon_0}^p) \geq r_p(\frac{1}{10} - 10\varepsilon_0)$. Ce qui prouve que pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^{p-1}]$ il existe $l(k) \in \mathbb{N}[1, \kappa^p]$ tel que $a_k^{p-1} \in A_l^p$ et par conséquent

$$\kappa^{p-1} \leq \kappa^p \leq \kappa^B.$$

De plus les a_k^{p-1} sont dans des composantes connexes différentes de $B^p \setminus Z_{\varepsilon_0 r_p}^p$. En effet, supposons qu'il existe k_1 et k_2 tels que $a_{k_1}^{p-1}$ et $a_{k_2}^{p-1}$ soient tous les deux dans une même composante connexe de $B^p \setminus Z_{\varepsilon_0 r_p}^p$. Alors comme $d(a_{k_1}^{p-1}, Z_{r_p \varepsilon_0}^p) \geq r_p \frac{1}{11}$ et comme les Z^p sont presque centrés, on en déduit qu'il existe un chemin continu Γ qui relie $a_{k_1}^{p-1}$ et $a_{k_2}^{p-1}$ tel que tous les points de Γ soient à distance plus grande que $\frac{1}{11} r_p$ de Z^p , c'est à dire plus grand que $\frac{1}{100} r_{p-1}$ de Z^{p-1} ce qui est absurde par définition des a_k^{p-1} . On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition d'être "bien orienté", ce qui prouve *iv*).

Maintenant si E_n ne sépare pas dans B^{p-1} , alors il existe k_1 et k_2 , ainsi qu'un chemin continu qui relie $a_{k_1}^{p-1}$ et $a_{k_2}^{p-1}$ sans toucher E_n . Or nous savons que E_n sépare dans B^p donc c'est absurde.

Comme chaque A_k^p était inclus dans un Ω_l et que E_n sépare dans B^{p-1} , il s'ensuit maintenant que chaque A_k^{p-1} se trouve dans un Ω_l également. Ce qui achève la preuve de la proposition. \square

Extension de la fonction u_n

On va maintenant construire une nouvelle fonction v à partir de u_n dans \mathcal{C}_h . Pour chaque boule W_j on considère une fonction $\varphi_j \in C^\infty$, à support compact dans $10W_j$, qui vaut 1 sur $8W_j$ et 0 en dehors de $10W_j$.

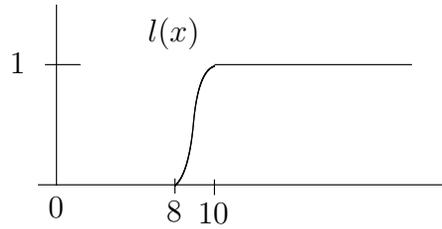
Lemme 2.25. *Il existe une fonction $\varphi_0 \in C^\infty$ telle que*

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 && \text{dans } B \setminus \bigcup_{j \in J} 10W_j \\ \varphi_0 &= 0 && \text{dans } \bigcup_{j \in J} 8W_j \end{aligned} \tag{2.16}$$

Et de plus il existe une constante C telle que pour tout $j \in J$ et pour tout $x \in 10W_j \setminus 8W_j$,

$$|\nabla \varphi_0(x)| \leq C \frac{1}{r_j}$$

Preuve : Soit $l \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ la fonction suivante



telle que l vaut 0 sur l'intervalle $[0, 8]$, vaut 1 sur $[10, +\infty[$ et

$$l'(x) \leq 3. \tag{2.17}$$

Alors la fonction

$$\varphi_0(x) := \prod_{j \in J} l\left(\frac{|x - x_j|}{r_j}\right)$$

convient. En effet, elle possède bien la propriété voulue (2.16) et pour l'estimation sur le gradient elle provient de (2.17), de la propriété i) du lemme 2.19 “de Whitney” et aussi du fait que les $\{W_j\}$ soient en recouvrement borné avec rayon semblables. \square

On pose

$$\theta_j = \frac{\varphi_j}{\varphi_0 + \sum_{j \neq 0} \varphi_j}$$

ce qui constitue une partition de l'unité sur B . Comme les $10W_j$ sont en recouvrement borné la somme est localement finie.

On reprend les notations de la proposition précédente. C'est à dire dans chaque W_j il existe un cône Z^j qui approche bien E_n donc

$$E_n \cap W_j \subset Z_{r_j \varepsilon_0}^j := \{y; d(y, Z^j) < \varepsilon_0 r_j\}.$$

On appelle A_k^j pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^j]$ les composantes connexes de $W_j \setminus Z_{r_j \varepsilon_0}^j$. Comme les B_j sont bien orientées on sait que chaque A_k^j est contenu dans l'une des composantes connexes Ω_l de $B(0, 1) \setminus E_n$. On renomme alors A_k^j en A_l^j de sorte que A_l^j soit contenu dans Ω_l^j . Par convention, si il existe l tel que Ω_l ne rencontre pas B_j on pose $A_l^j = \emptyset$. Ainsi pour tout j et pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^0]$, on a défini A_k^j . Dans chaque A_k^j on a choisit un point a_k^j a distance plus grande que $\frac{1}{10}r_j$ de E_n et on considère également D_k^j une boule de centre a_k^j

et de rayon $\frac{1}{100}r_j$. On appelle aussi m_k^j la moyenne de la fonction u_n sur D_k^j . C'est toujours possible car les cônes dans W_j sont presque centrés.

On définit maintenant pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^{B(0,1)}]$

$$v^k(x) := \varphi_0(x)u_n(x) + \sum_{j>0} m_k^j \theta_j(x).$$

Les fonctions v^k sont bien définies sur $B \setminus E_n$ et elles coïncident avec u_n en dehors de $R_n := \bigcup_{j \in J} 10W_j$.

Montrons que les fonctions v^k sont dans $W^{1,2}(B \setminus E_n)$ et estimons leur énergie en fonction de celle de u_n . On se fixe donc un point x dans $R_n = \bigcup_{j \in J} 10W_j$. Soit J_x l'ensemble des indices j tels que $10W_j$ contienne x . On sait alors par le lemme (2.19) *i*) que toutes ces boules sont de diamètre équivalent.

D'autre part, toutes les boules $10W_j$ pour $j \in J_x$ sont toutes incluses dans $30W_{j_0}$ où j_0 est n'importe quel indice fixé dans J_x . Par la propriété *v*) du lemme 2.19 on sait alors qu'il existe un cône Z_x qui passe par x_{j_0} (centre de W_{j_0}) tel que tout point de $E_n \cap 30W_{j_0}$ soit à distance inférieur à $\varepsilon_0 120r_{j_0}$ de Z_x où r_{j_0} est le rayon de W_{j_0} . On sait également que Z_x est presque centré dans W_{j_0} . Donc E_n est à distance au plus $400\varepsilon_0 r_j$ de Z_x dans toutes les W_j qui contiennent x . Donc si on considère les composantes connexes de $\mathbb{R}^3 \setminus Z_x$, chacune contient au plus un D_k^j pour chaque $j \in J_x$. On peut donc définir pour tout k , un domaine polyédral D_k^x (pavé si Z_x est un hyperplan ou domaine convexe de type \mathbb{Y} ou \mathbb{T} si Z_x est un \mathbb{Y} ou un \mathbb{T}) qui contient chaque D_k^j pour tout $j \in J_x$. Par exemple pour D_k^x on peut prendre quelque chose qui ressemble à l'enveloppe convexe des D_k^j . De plus le diamètre des polyèdres D_k^x est $\frac{C}{\bar{V}}\delta(x)$ car toutes les boules W_j pour j dans J_x ont un rayon équivalent à $\delta(x)$. La constante C une constante universelle géométrique. Enfin D_k^x ne rencontre pas E_n .

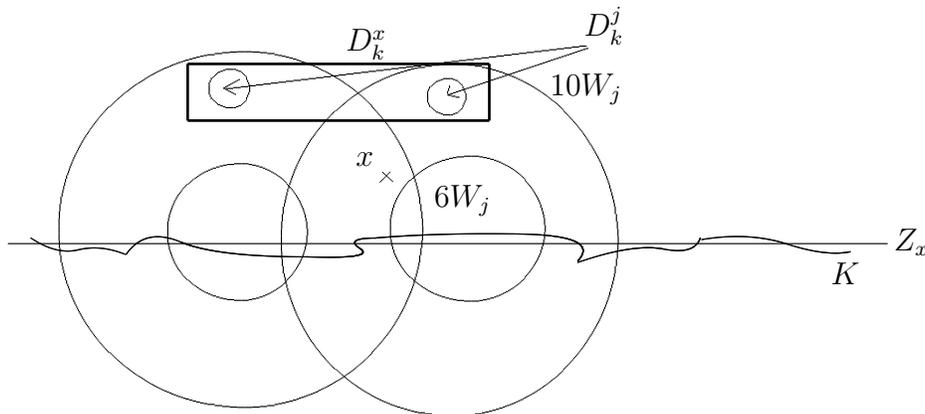
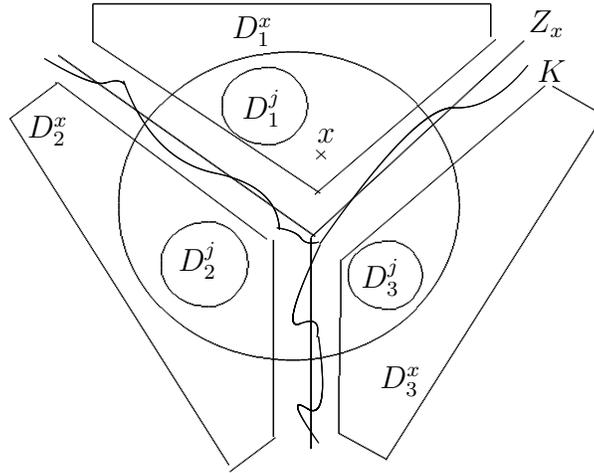


Schéma de la situation lorsque Z_x est un hyperplan

Schéma de la situation lorsque Z_x est un \mathbb{Y}

On appelle également m_k^x la moyenne de u_n sur D_k^x . Comme les θ_j forment une partition de l'unité, on sait que $\sum \nabla \theta_j = 0$ et donc on peut retrancher m_k^x ce qui donne

$$\nabla v^k(x) = \theta_0 \nabla u_n(x) + \nabla \theta_0 (u_n - m_k^x) + \sum_{j>0} (m_k^j - m_k^x) \nabla \theta_j(x). \quad (2.18)$$

Or en utilisant l'inégalité de Poincaré (la constante C désigne une constante dimensionnelle uniquement)

$$|m_k^j - m_k^x| \leq C \frac{1}{r_j^3} \int_{D_k^j} |u_n(y) - m_k^x| dy \leq \frac{1}{r_j^3} \int_{D_k^x} |u_n(y) - m_k^x| dy \leq C \frac{1}{r_j^2} \int_{D_k^x} |\nabla u(y)| dy.$$

D'autre part on sait que tous les r_j pour $j \in J_x$ sont équivalents. En outre comme $|\nabla \theta_j| \leq C r_j^{-1}$, alors chaque terme de la somme dans (2.18) est majoré par $C \frac{1}{r_j^3} \int_{D_k^x} |\nabla u_n(y)| dy$. De plus r_j est minoré par $C^{-1} \delta(x)$ donc finalement comme la somme n'a au plus que C_2 termes,

$$|\nabla v^k(x)| \leq |\nabla u_n(x) \theta_0(x)| + |\nabla \theta_0(x)| |u_n(x) - m_k^x| + C \frac{1}{\delta(x)^3} \int_{D_k^x} |\nabla u_n(y)| dy \quad (2.19)$$

on montrera plus tard que

$$|u_n(x) - m_k^x| \leq C \frac{1}{\delta(x)^2} \int_{D_k^x} |\nabla u_n(y)| dy. \quad (2.20)$$

On en déduit

$$|\nabla v^k(x)| \leq \underbrace{|\nabla u_n(x)|\theta_0(x)}_{:= f_1} + C \underbrace{\frac{1}{\delta(x)^3} \int_{D_k^x} |\nabla u_n(y)| dy}_{:= f_2}$$

Donc

$$|\nabla v^k(x)|^2 \leq f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2 \leq 2(f_1^2 + f_2^2).$$

On définit maintenant le fermé

$$V_n := \left(\bigcup_{j \in J} 10W_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j \in J} 8\overset{\circ}{W}_j \right)$$

de sorte que θ_0 est à support dans V_n . Et on aura également besoin de

$$\Delta_n^k := \bigcup_{x \in R_n} D_k^x.$$

On rappelle que

$$R_n := \bigcup_{j \in J} 10W_j.$$

On intègre pour $x \in R_n$. Pour f_1 , comme on a tronqué par θ_0 on a immédiatement

$$\int_{R_n} f_1^2(x) dx \leq \int_{V_n} |\nabla u_n(x)|^2 dx.$$

Pour f_2 en appliquant hölder on trouve

$$f_2^2 \leq C \frac{1}{\delta(x)^3} \int_{D_k^x} |\nabla u_n(y)|^2 dy.$$

En intégrant et en appliquant Fubini il s'ensuit

$$\begin{aligned} \int_{R_n} f_2^2(x) dx &\leq C \int_{R_n} \left(\frac{1}{\delta(x)^3} \int_{D_k^x} \mathbf{1}_{\Delta_n^k} |\nabla u_n(y)|^2 dy \right) dx \\ &\leq C \int_{\Delta_n^k} |\nabla u_n(y)|^2 \left(\int_{\{x; y \in D_k^x\}} \delta(x)^{-3} dx \right) dy. \end{aligned}$$

On va maintenant montrer que

$$\int_{\{x;y \in D_k^x\}} \delta(x)^{-3} dx \leq C \quad (2.21)$$

où C est une constante dimensionnelle en particulier indépendante de ε_n .

Si x est fixé, alors D_k^x est un polyèdre contenant le centre d'un certain D_k^j (le centre de D_k^x est à distance au plus $\frac{C}{U}\delta(x)$ de x) de diamètre $\frac{C}{U}\delta(x)$. Donc D_k^x est inclus dans la boule $B(x, \frac{C}{U}\delta(x))$. Ce qui veut dire que $\{x; y \in D_k^x\}$ est inclus dans l'ensemble $A := \{x; d(x, y) \leq \frac{C}{U}\delta(x)\}$. Montrons que pour tout x dans A , $\delta(x)$ est équivalent à $\delta(y)$. C'est ici que le choix de la constante U est important. En effet, si x est dans A alors comme δ est C_0 -lipschitz,

$$\delta(x) \leq \delta(y) + C_0 d(x, y)$$

d'où

$$\delta(y) \geq \delta(x) - \frac{CC_0}{U}\delta(x). \quad (2.22)$$

Rappelons que C_0 est la constante de recouvrement borné de la famille $\{10B_i\}_{i \in I}$. En particulier C_0 est indépendante de U . Donc si U est choisi assez grand $\frac{CC_0}{U}$ est plus petit que 1 de sorte que (2.22) donne

$$\delta(x) \leq C\delta(y).$$

D'autre part,

$$\delta(y) \leq \delta(x) + C_0 d(x, y) \leq C\delta(x).$$

Donc $\delta(x)$ et $\delta(y)$ sont équivalents sur A et

$$\int_{\{x;y \in D_k^x\}} \delta(x)^{-3} dx \leq C\delta(y)^{-3} \int_{\{x;d(x,y) \leq C\delta(y)\}} dx \leq C.$$

Ce qui prouve (2.21) et finalement

$$\int_{R_n} |\nabla v^k(x)|^2 dx \leq \int_{V_n} |\nabla u_n(x)|^2 dx + C \int_{\Delta_n^k} |\nabla u_n(y)|^2 dy.$$

Il ne reste plus qu'à prouver (2.20). En fait on veut majorer

$$|u_n(x) - m_k^x| |\nabla \theta_0(x)|$$

donc on peut supposer que x est dans le support de $\nabla\theta_0$ c'est à dire $x \in V_n$. Pour montrer la majoration voulue on va utiliser un accroissement fini sur u_n , qui est une fonction harmonique donc régulière. Pour cela on aura besoin du fait que pour tout $x \in V_n$ et tout $y \in D_k^x$, le segment $[x, y]$ ne rencontre pas l'ensemble singulier E_n . C'est un élément qui semble fortuit mais qui au contraire est très important. Comme nous allons le voir juste après, c'est à cause de cet argument qu'on a besoin de la "sphère coupée" de taille ρ_n . On appelle Ω_k la composante connexe de $B \setminus E_n$ qui contient A_k^0 . On note également

$$V_n^k := V_n \setminus E_n \cap \Omega_k.$$

Alors pour tout $x \in V_n^k \setminus \bigcup_{i \in I} B'_i$ et $y \in D_k^x$, le segment $[x, y]$ ne rencontre pas E_n comme on le voit sur la figure 1.

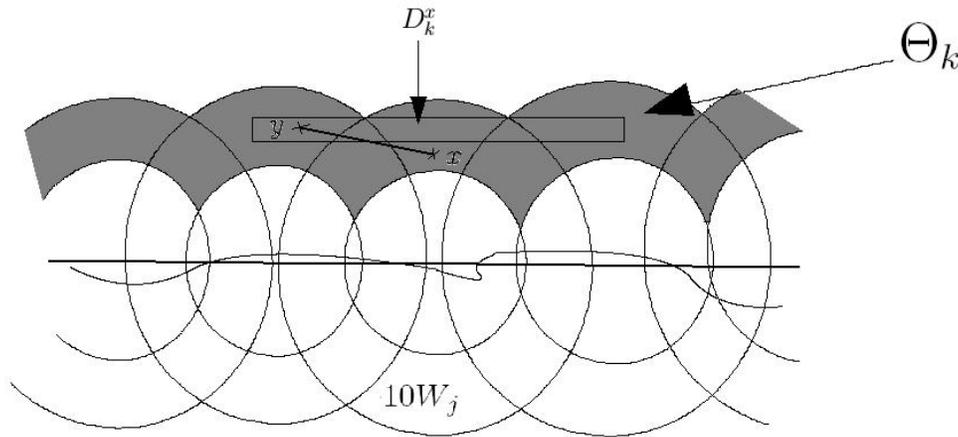


Figure 1

Les seuls ennuis qui peuvent se produire concernent le bord. Si il n'y a pas de mauvaise boule B_i près du bord alors on est toujours dans la situation de la figure 1 et donc il n'y a pas de problème. En revanche, si il y a des boules B_i près du bord alors les W_j peuvent intersecter le bord $\partial B(0, \rho_n) \cap \partial \mathcal{C}_n$ et il peut y avoir des points x trop proches de E_n qui posent des problèmes comme sur la figure 2. Mais comme on a entouré les W_j en question par les boules B'_i , ce cas n'arrive jamais.

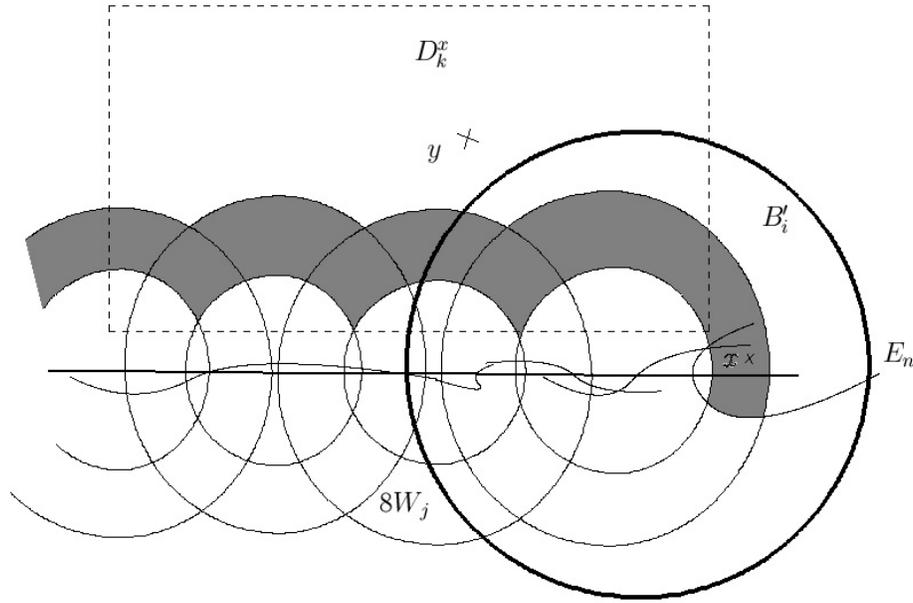


Figure 2

En conséquence, la majoration suivante est valide pour tout $x \in V_n^k \setminus \bigcup_{i \in I} B'_i$.

$$\begin{aligned}
 |u_n(x) - m_k^x| &\leq \frac{1}{|D_k^x|} \int_{D_k^x} |u_n(x) - u_n(y)| dy \\
 &\leq \frac{1}{|D_k^x|} \int_{D_k^x} \int_{[0,1]} |x - y| |\nabla u_n(x + t(y - x))| dt dy \\
 &\leq \frac{1}{|D_k^x|} \int_{D_k^x} \int_{D_k^x} |\nabla u_n(z)| \frac{dz}{|x - y|^2} dy \\
 &\leq CC_1 \frac{1}{\delta(x)^2} \int_{D_k^x} |\nabla u_n(z)| dz
 \end{aligned}$$

ce qui clôture la construction de v^k .

2.3.3 Fin de la preuve

Par construction, les v^k coïncident avec u_n sur $B(0, 1) \setminus R_n$. On compare donc l'énergie de u_n avec celle de la fonction v définie par

$$v = v^k \text{ dans } \Omega_k \setminus \bigcup_{i \in I} B'_i$$

(dans les autres composantes connexes on peut décider que $v = 0$). On obtient alors une version légèrement différente de (2.13). En effet, u_n est par définition un minimiseur d'énergie dans le domaine $B \setminus E_n^{\rho_n}$ donc

$$\begin{aligned} \int_{B \setminus E_n^{\rho_n}} |\nabla u_n|^2 &\leq \int_{B \setminus E_n^{\rho_n}} |\nabla v|^2 \\ \int_{R_n} |\nabla u_n|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\kappa} \int_{R_n} |\nabla v^k|^2 \\ &\leq C \int_{V_n} |\nabla u_n|^2 + C \int_{\bigcup_k \Delta_n^k} |\nabla u_n|^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathcal{C}_h} |\nabla u_n|^2 \leq \int_{\mathcal{C}_h \setminus R_n} |\nabla u_n|^2 + C \int_{V_n \cup \bigcup_k \Delta_n^k} |\nabla u_n|^2. \quad (2.23)$$

On appelle

$$S_n := (\mathcal{C}_h \setminus \overset{\circ}{R}_n) \cup V_n \cup \bigcup_k \Delta_n^k.$$

On a alors

$$\int_{\mathcal{C}_h} |\nabla u_n|^2 \leq C \int_{S_n} |\nabla u_n|^2.$$

Montrons que

$$S_n \text{ converge vers } S_\infty := \{x \in \mathcal{C}_h; d(x, Z^0) \geq C_5 d(x, \partial \mathcal{C}_h)\} \quad (2.24)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{S_n} |\nabla u_n|^2 dx \right) \leq \mu(S_\infty) \quad (2.25)$$

(C_5 est une constante qui sera explicitée plus tard).

On se donne donc un $\eta > 0$. On appelle S_∞^η un η -voisinage de S_∞ . C'est à dire $S_\infty^\eta := \{x \in B; d(x, S_\infty) < \eta\}$. On va montrer qu'il existe des constantes C_5 et C_6 telles que pour

n assez grand, tous les S_n sont inclus dans $S_\infty^{C_6\eta}$. En effet, on choisit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\varepsilon_n < \frac{\eta}{2}$ et $|\rho - \rho_n| \leq \frac{\eta}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in E_n$ on a $d(x, Z^0) \leq \eta$. Soit maintenant un point $x \in S_n$, pour $n \geq n_0$. Montrons que x est dans S_∞^η . En effet, si x est dans S_n , alors par définition ou bien $x \in V_n$, ou $x \in \Delta_n^k$ ou $x \in \mathcal{C}_h \setminus R_n$. Traitons chacun de ces cas séparément.

- Si x est dans Δ_n^k , alors x appartient à un certain polyèdre D_k^y pour un certain y , dont le diamètre est équivalent à $\frac{1}{V}\delta(x)$. Ce qui veut dire que la distance entre x et Z_y (le cône de la définition de D_k^y) est plus grande que $Cd(x, \partial\mathcal{C}_h^n)$. Or comme E_n est proche de Z_y à ε_0 près à l'échelle de D_k^y , on peut en déduire que

$$d(x, E_n) \geq Cd(x, \partial\mathcal{C}_h^n) - \varepsilon_0 Cd(x, \partial\mathcal{C}_h^n).$$

Donc si ε_0 est choisi assez petit devant la constante universelle C , on a

$$d(x, E_n) \geq Cd(x, \partial\mathcal{C}_h^n)$$

et maintenant on utilise que E_n est à distance au plus ε_n du cône Z^0 et donc

$$d(x, Z^0) \geq Cd(x, \partial\mathcal{C}_h^n) - \varepsilon_n \geq Cd(x, \partial\mathcal{C}_h^n) - \frac{\eta}{2} \quad (2.26)$$

et puisque $|\rho - \rho_n| \leq \frac{\eta}{2}$ on obtient

$$d(x, Z^0) \geq Cd(x, \partial\mathcal{C}_h) - \eta$$

ce qui prouve que $x \in S_\infty^\eta$ si on prend pour C_5 la constante qui intervient dans (2.26).

- Si x est dans $\mathcal{C}_h \setminus R_n$ ou dans V_n , alors x n'est dans aucune des boules $8W_i$. Notons

$$Q_n := \bigcup_{j \in J} 8W_j$$

et

$$Q_n^\eta := \{y \in \mathcal{C}_h; d(y, Q_n) \leq C_6\eta\}$$

avec C_6 une constante qui sera fixée plus tard. Montrons qu'il existe une constante c (qui dépend de C_0 et U) telle que

$$Q_n^\eta \supseteq \{y \in \mathcal{C}_h; d(y, Z^0) \leq cd(y, \partial\mathcal{C}_h)\}. \quad (2.27)$$

En effet soit $y \in \mathcal{C}_h$ tel que $d(y, Z^0) \leq cd(y, \partial\mathcal{C}_h)$. On appelle $\bar{y} \in Z^0$ un point tel que

$$d(y, \bar{y}) = d(y, Z^0).$$

Comme E_n sépare et que $E_n \subset Z_{\varepsilon_n}^0$, il existe un point $z \in E_n$ tel que

$$d(\bar{y}, z) \leq \varepsilon_n.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, alors la boule $B(\bar{y}, \varepsilon_n)$ ne contiendrait aucun point de E_n ce qui contredit la séparation. Soit maintenant W_{j_0} une boule de la famille $\{W_j\}_{j \in J}$ qui contient z . Une telle boule existe car l'ensemble des W_j recouvrent E_n . Le rayon de W_{j_0} est $r_{j_0} = \frac{1}{U}\delta(x_{j_0})$ avec x_{j_0} le centre de W_{j_0} . L'application δ est C_0 -lipschitzienne. Donc

$$\begin{aligned} \delta(y) &\leq \delta(x_{j_0}) + C_0|y - x_{j_0}| \\ &\leq \delta(x_{j_0}) + C_0(|y - \bar{y}| + |\bar{y} - z| + |z - x_{j_0}|) \\ &\leq \delta(x_{j_0}) + C_0(cd(y, \partial\mathcal{C}_h) + \varepsilon_n + r_{j_0}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Rappelons que

$$\delta(y) = \max(d(y, \partial\mathcal{C}_h^n), d(x)) \geq d(y, \partial\mathcal{C}_h^n) \geq d(y, \partial\mathcal{C}_h) - \eta.$$

On en déduit que

$$(1 - cC_0)d(y, \partial\mathcal{C}_h) - (1 + C_0)\eta \leq (1 + \frac{C_0}{U})\delta(x_{j_0}).$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} |y - x_{j_0}| &\leq |y - \bar{y}| + |\bar{y} - z| + |z - x_{j_0}| \\ &\leq cd(y, \partial\mathcal{C}_h) + \varepsilon_n + r_{j_0} \\ &\leq c(1 - cC_0)^{-1}[(1 + \frac{C_0}{U})\delta(x_{j_0}) + (1 + C_0)\eta] + \eta + r_{j_0}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir $c < 1$ assez petit pour que

$$|y - x_{j_0}| \leq 8r_{j_0} + C_6\eta$$

où C_6 dépend de c . Ce qui montre que $y \in B(x_{j_0}, r_{j_0} + C_6\eta)$, donc (2.27) est démontré. Puis en passant au complémentaire on en déduit

$$\mathcal{C}_h \setminus R_n \subset \{y \in \mathcal{C}_h; d(y, Z_0) \geq C_5d(y, \partial\mathcal{C}_h) + C_6\eta\}$$

et

$$\mathcal{C}_h \cap V_n \subset \{y \in \mathcal{C}_h; d(y, Z_0) \geq C_5d(y, \partial\mathcal{C}_h) + C_6\eta\}$$

avec C_5 et C_6 qui dépendent de c . On en déduit que $x \in S_\infty^{C_6\eta}$ (quitte à modifier encore une fois la constante C_5).

Maintenant montrons (2.25) et terminons la preuve du théorème. On va réutiliser les notations et les résultats du paragraphe précédent. C'est à dire pour tout η , on sait qu'il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $S_n \subset S_\infty^\eta$. On sait d'après (2.23) que

$$\int_{\mathcal{C}_h} |\nabla u_n|^2 dx \leq C \int_{S_n} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Autrement dit si μ_n désigne la mesure $|\nabla u_n|^2 dx$ on a

$$\mu_n(\mathcal{C}_h) \leq C\mu_n(S_n)$$

Or comme μ_n converge faiblement vers μ et que \mathcal{C}_h est fermé, on sait que $\mu_n(\mathcal{C}_h)$ converge vers $\mu(\mathcal{C}_h)$. D'autre part comme chaque S_n est inclus dans $S_\infty^{C_{6\eta}}$ pour n assez grand, on peut faire la majoration suivante et passer à la limite

$$\mu(\mathcal{C}_h) \leq C \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(S_\infty^{C_{6\eta}})$$

donc en utilisant la convergence faible maintenant que $S_\infty^{C_{6\eta}}$ est fixe et fermé

$$\mu(\mathcal{C}_h) \leq C\mu(S_\infty^{C_{6\eta}}).$$

Enfin, en faisant tendre η vers 0 on obtient

$$\mu(\mathcal{C}_h) \leq C\mu(S_\infty). \quad (2.29)$$

Ce dernier passage à la limite est bien justifié car μ est une mesure régulière et donc $\mu(S_\infty) := \inf_A(\mu(A))$ où l'inf est pris sur tous les ensembles ouverts A qui contiennent S_∞ , et S_∞ est une intersection dénombrable de S_∞^η .

Pour finir la preuve du théorème une fois que (2.13) est établi, on utilise le fait que pour presque tout α (la largeur du cylindre \mathcal{C}_h), $\mu(\partial\mathcal{C}_h) = 0$, et que $S_\infty \setminus \partial\mathcal{C}_h$ ne rencontre pas Z^0 donc μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur cet ensemble, de sorte que

$$\mu(\mathcal{C}_h) \leq C \int_{S_\infty} |\nabla u|^2 dx \leq Ch \|\nabla u\|_\infty^2.$$

La majoration de ∇u sur S_∞ provient du fait que u est une fonction harmonique avec dérivée normale nulle sur Z^0 . Donc en faisant tendre h vers 0, et comme ceci est vrai pour presque tout h , on obtient que $\mu(Z^0) = 0$ et donc que ∇u_n converge fortement dans L^2 vers ∇u . Donc en passant à la limite dans (2.10) on obtient une contradiction avec (2.11) ce qui achève la preuve du théorème. \square

2.4 Croissance et régularité pour Mumford-Shah

Nous allons maintenant passer à la preuve de la régularité pour un Minimiseur de Mumford-Shah. La première étape consistera à montrer que l'énergie normalisée est croissante. On utilisera pour cela un argument de temps d'arrêt afin de se ramener au théorème de croissance d'énergie pour les surfaces $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimales. L'argument de temps d'arrêt occasionnera des pertes qu'il faudra aussi contrôler (appelé "mauvaise masse"). C'est ce qui fait l'objet de tout ce qui suit.

2.4.1 Construction d'un compétiteur

Dans cette section on voudrait décrire une méthode générale pour construire un compétiteur pour un minimiseur de Mumford-Shah. En particulier, lorsqu'on se donne un compétiteur L pour l'ensemble singulier K dans une certaine boule B , on voudrait trouver une technique pour définir une fonction w dans la boule $B \setminus L$ associée à l'ensemble L sans perdre trop d'énergie par rapport à u . La méthode employée est encore basée sur une extension de type Whitney pour la fonction u . Pour construire la famille de boule appropriée, nous allons utiliser une méthode à temps d'arrêt de façon à se ramener à travailler dans un cadre " $(\varepsilon, \varepsilon_0)$ -minimal". Certains diront que la méthode à temps d'arrêt employée ressemble à une "décomposition de la couronne" qui a déjà été utilisée avec succès dans le passé. On pourra consulter par exemple [DAV00] page 86, [DS91] chapitre 2 ou encore [LEG].

On se place dans \mathbb{R}^3 mais pour le cas d'un hyperplan on pourra généraliser facilement à \mathbb{R}^N tous les résultats de cette thèse et ainsi on doit pouvoir retrouver le résultat complet de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara sans ajouter beaucoup de modifications. Les résultats de ce chapitre s'étendent également au cas de $\mathbb{R}^{N-1} \times Y$ et $\mathbb{R}^{N-1} \times T$, sous réserve que le résultat de G. David [DAV07] fonctionne encore.

Séparation et contrôle du saut

Soit donc un minimiseur de Mumford-Shah (u, K) et fixons $\varepsilon > 0$. On suppose qu'il existe une boule $B(x_0, r_0)$ telle que dans cette boule K est ε -proche d'un cône minimal Z^0 de type \mathbb{P}, \mathbb{Y} , ou \mathbb{T} (voir les définitions 0.15 et 0.16), c'est à dire qu'il existe un cône Z^0 tel que

$$K \cap B(x_0, r_0) \subset Z_{\varepsilon r_0}^0 := \{y; d(y, Z^0) \leq \varepsilon r_0\}.$$

Autrement dit,

$$\beta(x_0, r_0) \leq \varepsilon$$

où β est défini par

$$\beta(x_0, r_0) := \frac{1}{r_0} \inf_Z \left\{ \sup \{d(y, Z); y \in K \cap B(x_0, r_0)\} \right\}.$$

L'inf est pris sur tous les cônes de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} , ou \mathbb{T} qui contiennent x_0 (mais ne sont pas forcément centrés en x_0).

On suppose par ailleurs que Z^0 est centré en x_0 . On se placera en général sous ces hypothèses dans la succession de résultats qui suivront. Introduisons encore quelques notations habituelles. On note κ^0 le nombre de composantes connexes de $B(x_0, r_0) \setminus Z^0$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^0]$ on considère une boule D_k de rayon $\frac{1}{10}r_0$ de sorte que chaque D_k se situe dans l'une des composantes connexes de $B(x_0, r_0) \setminus Z^0$, le plus loin possible de Z^0 . On note également m_k la moyenne de u sur D_k . On introduit ensuite

$$\delta_{k,l}(x_0, r_0) = |m_k - m_l|$$

et enfin le saut normalisé est défini par

$$J(x_0, r_0) := r_0^{-\frac{1}{2}} \min\{\delta_{k,l}; 1 < k, l < \kappa^0 \text{ et } k \neq l\}. \quad (2.30)$$

De manière générale, pour tout $x \in K$ et tout rayon r tel que la boule $B(x, r)$ incluse dans $B(x_0, r_0)$, et telle qu'il existe un cône Z presque centré dans $B(x, r)$ qui approche bien K dans $B(x, r)$ on définit le saut normalisé de manière analogue

$$J(x, r) := r^{-\frac{1}{2}} \min\{\delta_{k,l}; 1 < k, l < \kappa^{B(x,r)} \text{ et } k \neq l\}$$

où les $\delta_{k,l}$ sont définis comme précédemment (différence de moyenne de u sur des boules dans des composantes connexes différentes de $B(x, r) \setminus Z$ le plus loin de Z possible et de volume équivalent au volume de $B(x, r)$).

Si une boule $B(x, r)$ est telle que $\beta(x, 4r) \leq 10^{-5}$ mais que le cône Z qui réalise l'inf n'est pas presque centré, on peut quand même définir le saut. En effet, par le lemme 2.20 on sait que $B(0, 2r)$ ou $B(0, 4r)$ est associée à un cône minimal presque centré et donc on définit $J(x, r)$ comme étant égal au premier de $J(x, 2r)$ ou $J(x, 4r)$ dont le cône est presque centré.

Tous les paramètres définissant le saut (choix de Z^0 , constante 4 pour obtenir un cône presque centré, diamètre et position des D_k , etc) ne jouent pas un rôle majeur. Une modification de ces paramètres ne fait que multiplier le saut par une constante universelle.

Tout d'abord on aura besoin de résultats de séparation. Pour cela on va utiliser une version généralisée de la proposition 1 p. 303 de [DAV05].

Proposition 2.26. *Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $0 < \varepsilon_0 < 10^{-5}$. On suppose qu'il existe $x \in \Omega$, $r > 0$ et $\varepsilon \ll \varepsilon_0$ tels que $B(x, r) \subset \Omega$ et il existe un cône minimal Z presque centré dans $B(x, r)$ tel que*

$$\sup_{y \in K \cap B(x, r)} \frac{1}{r} d(y, Z) \leq \varepsilon.$$

On suppose également que

$$\omega_2^{\frac{1}{2}}(x, r)J^{-1}(x, r) \leq \varepsilon \quad (2.31)$$

et

$$\omega_2(x, r)^{\frac{1}{8}} \leq CJ(x, r) \quad (2.32)$$

avec C une constante universelle fixée par la démonstration. On appelle D_k pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa]$ les domaines de la définition de $J(x, r)$. Alors il existe un ensemble compact $F(x, r) \subset B(x, r)$ tel que

$$K \cap B(x, r) \subset F(x, r) \subset \left\{x \in B; d(x, Z) \leq r \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right\} \quad (2.33)$$

$$F \text{ sépare chaque } D_k \text{ de } D_l \text{ pour } k \neq l \text{ dans } B(x, r) \quad (2.34)$$

$$H^2(F(x, r) \cap B(x, r) \setminus K) \leq Cr^2 \omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1}$$

De plus il existe une constante C telle que F possède la propriété \star (définie juste après).

La proposition \star montre qu'on contrôle la géométrie de F même aux petites échelles. Voici la définition de " F possède la propriété \star ".

Définition 2.27 (Propriété \star). *Pour toute boule $B(y, s)$ incluse dans $B(x, r)$ centrée sur $K \cap B(x, \frac{9r}{10})$ telle que $\beta(y, 2^l s) \leq \varepsilon_0$ pour tout $0 \leq l < L$ avec L le premier entier tel que $B(y, 2^L s)$ ne soit plus inclus dans $B(x, r)$, et telle que le cône Z_y qui approche K dans $B(y, s)$ soit presque centré, alors*

$$F \cap B(y, s) \subset \{z, d(z, Z_y) \leq C\varepsilon_0 s\}.$$

Remarque 2.28. La condition (2.32) nous permet d'avoir la propriété \star et la condition (2.31) nous permet de montrer que la propriété \star implique la dernière inclusion de (2.33). La proposition est encore vraie sans la propriété \star si on enlève les hypothèses (2.31) et (2.32). Dans ce cas, (2.33) se démontre en utilisant une rétraction comme dans 44.1 de [DAV05].

Preuve : La première partie de la proposition se montre de la même façon que pour montrer la proposition 1 p. 303 de [DAV05]. Écrivons quand même la démonstration car il sera plus facile de montrer la propriété \star ensuite.

Pour tout λ on appelle

$$S(\lambda) := \{y \in B(x, r); d(y, Z) \leq \lambda r\}$$

et on note $A_k(\lambda)$ pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \text{type}(Z) + 1]$ les composantes connexes de $B(x, r) \setminus S(\lambda)$ qui intersectent D_k . On pose $V = B(x, r) \setminus K$. On va construire à partir de la fonction u , une fonction v telle que

$$v(y) = m_k \quad \text{pour } y \in A_k \left(\frac{1}{10} \right) \quad (2.35)$$

et

$$\int_V |\nabla v| \leq C \int_V |\nabla u|. \quad (2.36)$$

Pour cela on considère pour chaque k une fonction φ_k telle que $0 \leq \phi_k \leq 1$ et $\phi_k = 1$ sur $A_k(\frac{1}{10})$, $\phi_k = 0$ sur $V \setminus A_k(\frac{1}{20})$ et $|\nabla \phi_k| \leq Cr^{-1}$. On pose ensuite

$$\varphi = 1 - \sum_k \varphi_k$$

et

$$v = \varphi u + \sum_k \varphi_k m_k$$

où m_k est la moyenne de u sur D_k . Ainsi, (2.35) est tout de suite vérifié. En ce qui concerne (2.36) on a

$$\nabla v(y) = \varphi(y) \nabla u(y) - \sum_k 1_{A_k(\frac{1}{20})}(y) \nabla \varphi_k(y) [u(y) - m_k]$$

et comme $\varepsilon \ll \lambda_0$, les $A_k(\frac{1}{20})$ ne rencontrent pas K et donc on peut appliquer l'inégalité de Poincaré dans les domaines $A_k(\frac{1}{20})$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{A_k(\frac{1}{2})} |\nabla \varphi_k(y)| |u(y) - m_k| dy &\leq Cr^{-1} \int_{A_k(\frac{1}{2})} |u(y) - m_k| dy \\ &\leq C \int_{A_k(\frac{1}{2})} |\nabla u(y)| dy \end{aligned}$$

ce qui permet de montrer (2.36).

Maintenant nous allons remplacer la fonction v par une fonction w plus régulière dans V qui vérifie toujours

$$w(y) = m_k \quad \text{pour } y \in A_k(\frac{1}{10}) \quad (2.37)$$

et

$$\int_V |\nabla w| \leq C \int_V |\nabla u|. \quad (2.38)$$

On va utiliser une extension de type Whitney. Pour tout $z \in V$ on note $B(z)$ la boule $B(z, 10^{-2}d(z, \partial V))$, et soit $X \subset V$ un ensemble maximal tel que pour tout $z \in X$, les $B(z)$ soient disjointes. Remarquons que par maximalité si $y \in V$, alors $B(y)$ rencontre une boule $B(z)$ pour un $z \in X$ et donc $y \in 4B(z)$ et donc les boules $4B(z)$ recouvrent V .

Pour tout $z \in X$ on choisit une fonction φ_z supportée dans $5B(z)$ telle que $\varphi_z(y) = 1$ pour tout $y \in 4B(z)$, $0 \leq \varphi_z(y) \leq 1$ et $|\nabla \varphi_z(y)| \leq Cd(z, \partial V)^{-1}$ partout. On pose $\Phi(y) = \sum_{z \in X} \varphi_z(y)$ sur V . On a $\Phi(y) \geq 1$ car les $4B(z)$ recouvrent V et la somme est localement

finie car toutes les boules $B(z)$ qui contiennent un point fixé y sont disjointes et ont un rayon équivalent à $d(y, \partial V)$. On pose ensuite $\psi_z(y) = \varphi_z(y)/\Phi(y)$ de sorte que $\sum_{z \in X} \psi_z(y) = 1$ sur V . Enfin, si m_z désigne la moyenne de v sur $B(z)$ on pose pour $y \in V$

$$w(y) = \sum_{z \in X} m_z \psi_z(y).$$

Si $y \in A_k(\frac{1}{10})$, $m_z = m_k$ pour tous les $z \in X$ tels que $y \in B(z)$ et donc (2.37) est vérifié. De plus

$$\nabla w(y) = \sum_{z \in X} m_z \nabla \psi_z(z) = \sum_{z \in X} [m_z - m(y)] [\nabla \psi_z(y)]$$

ou $m(y)$ est la moyenne de v sur $B(y) = B(y, 10^{-2}d(y, \partial V))$. La somme prise au point y a au plus C termes, et chacun de ces termes est plus petit que $Cd(y, \partial V)^{-1}|m_z - m(y)| \leq Cd(y, \partial V)^{-3} \int_{10B(y)} |\nabla v|$ en utilisant l'inégalité de Poincaré, et parce que toutes les boules $5B(z)$ qui contiennent y sont contenues dans $10B(y) \subset V$. Donc $|\nabla w(y)| \leq Cd(y, \partial V)^{-3} \int_{10B(y)} |\nabla v|$, et pour obtenir (2.38) il suffit d'intégrer sur V , appliquer Fubini, et utiliser (2.36).

On applique ensuite la formule de la co-aire (voir [FED69] p.248, et également [DAV05] chapitre 28) à la fonction w sur V . On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} H^2(\Gamma_t) dt = \int_V |\nabla w| \leq C \int_V |\nabla u|$$

où $\Gamma_t := \{y \in V; w(y) = t\}$ désigne l'ensemble de niveau t de la fonction w . On rappelle que

$$J(x, r) := r^{-\frac{1}{2}} \min\{\delta_{k,l}; k \neq l\}$$

et

$$\delta_{k,l} = |m_k - m_l|$$

m_k désignant la moyenne de u sur D_k . Soit k_0 et k_1 les indices tels que $\delta_{k_0, k_1} = \sqrt{r}J(x, r)$. Par Tchebychev, on choisit un t_1 strictement compris entre m_{k_0} et m_{k_1} et tel que

$$\begin{aligned} H^2(\Gamma_{t_1}) &\leq C|m_{k_0} - m_{k_1}|^{-1} \int_V |\nabla u| \\ &= Cr^{-\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} \int_V |\nabla u| \\ &\leq Cr^2 J(x, r)^{-1} \omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Pour tout couple $k_0 \neq k_1$ on fait la même chose, c'est à dire qu'on choisit t_2 etc, autant que le nombre de composantes connexes de $B(x, r) \setminus Z$ le nécessite (un si Z est un \mathfrak{A} , deux si Z est un \mathfrak{Y} , trois si Z est un \mathfrak{T}). On pose ensuite

$$F = \bigcup_i \Gamma_{t_i} \cup [K \cap B(x, r)] \subset B(x, r).$$

C'est un ensemble fermé dans $B(x, r)$ car chaque Γ_{t_i} est fermé dans $V = B(x, r) \setminus K$ et K est également fermé. Le fait d'avoir pris un ensemble de niveau nous donne que F sépare les $A_k(\frac{1}{10})$ entre eux dans $B(x, r)$. En effet si ce n'est pas le cas, alors c'est qu'il existe k et l et un chemin continu γ qui joint $A_k(\frac{1}{10})$ et $A_l(\frac{1}{10})$ et qui ne rencontre pas K (car $K \subset F$). Alors $\gamma \subset V$, donc w est bien définie et continue sur γ , et donc il existe un point $y \in \gamma$ tel que $w(y) = t_i$. Ainsi, $y \in F$, ce qui est absurde.

Il reste à Prouver la propriété \star . Soit donc $B(y, s)$ une boule centrée sur K telle que $\beta(y, 2^l s) \leq \varepsilon_0$ pour tout $0 \leq l \leq L$ avec L le premier entier tel que $B(y, 2^L s)$ ne soit plus inclus dans $B(x, r)$. On note $B_l := B(y, 2^l s)$ et quitte à extraire une sous suite on peut supposer en utilisant le lemme 2.20 que dans chaque B_l le cône minimal dans approche K est presque centré. Le rayon de B_l n'est alors plus exactement $2^l s$ mais est équivalent à un facteur 4 près. Les boules B_l constituent donc une suite de boules centrées toutes en y , telles que $B_l \subset B_{l+1}$ et $B_0 = B(x, s)$. On note Z_l le cône minimal associé à B_l .

Pour montrer que $F \subset Z_0(\varepsilon_0) := \{z; d(z, Z_0) \leq \varepsilon_0 s\}$, il suffit de montrer que

$$w(y) \neq t \quad \text{dans } B(y, s) \setminus Z_0(\varepsilon_0). \quad (2.40)$$

Soit donc $y \notin Z_0(\varepsilon_0)$. Rappelons que

$$w(y) = \sum_{z \in X} m_z \varphi_z(y).$$

Soit $X(y) \subset X$ l'ensemble (fini) des z tels que $\varphi_z(y) \neq 0$. Montrons que

$$\forall z \in X(y), \quad |m_z - m_{D_k}| \leq Cr^{\frac{1}{2}} \omega_2(x, r)^{\frac{1}{8}} \quad (2.41)$$

où m_{D_k} est la moyenne de u sur le "bon" domaine D_k et m_z est la moyenne de v sur $B_z := B(z, 10^{-2}d(z, \partial V))$. En effet, on peut utiliser un argument analogue à la proposition 2.24. C'est à dire que par récurrence, on peut associer à chaque composante connexe de $\{y; d(y, Z_l) \geq 10\varepsilon_0\} \cap B_l$, une composante de $\{y; d(y, Z_{l+1}) \geq 10\varepsilon_0\} \cap B_{l+1}$, et ainsi relier les composantes de $\{y; d(y, Z_0) \geq 10\varepsilon_0\} \cap B_s$ à l'un des A_k . On note O_0 la composante de $\{y; d(y, Z_0) \geq 10\varepsilon_0\} \cap B_s$ qui contient y et par récurrence on note O_l la composante de $B_l \setminus Z_l(\varepsilon)$ qui est reliée à O_0 . Grâce à la configuration géométrique particulière dans chaque B_l on peut choisir un domaine G_l inclus à la fois dans O_l et O_{l+1} et de diamètre équivalent au rayon de B_l . On note m_l la moyenne de v sur G_l . On peut maintenant estimer

$$\begin{aligned}
|m_0 - m_L| &\leq \sum_{l=0}^L |m_l - m_{l+1}| \leq \sum_{l=0}^L \frac{1}{|O_l|} \int_{O_l} |v - m_{l+1}| \\
&\leq \sum_{l=0}^L C \frac{1}{(2^l s)^3} \int_{O_{l+1}} |v - m_{l+1}| \leq \sum_{l=0}^L C (2^l s)^{-2} \int_{O_{l+1}} |\nabla v| \\
&\leq \sum_{l=0}^L C (2^l s)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{O_{l+1}} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{l=0}^L C (2^l s)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{O_{l+1}} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{3}{8}} \left(\int_{O_{l+1}} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{8}} \\
&\leq \sum_{l=0}^L C (2^l s)^{+\frac{1}{4}} \left(\int_{O_{l+1}} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{8}} \tag{2.42} \\
&\leq \left(\int_V |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{8}} \sum_{l=0}^L C (2^l s)^{\frac{1}{4}} \leq C \left(\int_V |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{8}} \sum_{l=0}^L (2^{-l} r)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq C \left(\int_V |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{8}} \sum_{l=0}^{+\infty} (2^{-l} r)^{\frac{1}{4}} \leq Cr^{\frac{1}{4}} \left(\int_V |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{8}} \leq Cr^{\frac{1}{4}} \left(\int_V |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{8}} \\
&\leq Cr^{\frac{1}{2}} \omega_2(x, r)^{\frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

pour (2.42) on a utilisé l'estimation (3). En faisant un calcul similaire à précédemment on trouve que

$$|m_L - m_{D_k}| \leq Cr^{\frac{1}{2}} \omega_2(x, r)^{\frac{1}{8}}.$$

D'autre part, comme $z \in X(y)$, alors $\varphi_z(y)$ est non nul. Ce qui implique que $d(z, \partial V) \geq Cd(y, \partial V) \geq C\varepsilon_0$. Et donc $B_z := B(z, 10^{-2}d(z, \partial V)) \subset Z_0(C\varepsilon_0)$. Comme par hypothèse K ne rencontre pas cette région, on peut appliquer l'inégalité de Poincaré pour prouver que

$$|m_z - m_0| \leq Cr^{\frac{1}{2}} \omega_2(x, r)^{\frac{1}{8}}$$

ce qui prouve (2.41).

Maintenant on en déduit (car $\sum_z \varphi_z(y) = 1$)

$$|w(y) - m_{D_k}| = |w(y) - \sum_{z \in X(y)} \varphi_z(y) m_{D_k}| \leq \sum_{z \in X(y)} |m_z - m_{D_k}| \leq Cr^{\frac{1}{2}} \omega_2(x, r)^{\frac{1}{8}}. \tag{2.43}$$

Donc si $\omega_2(x, r)^{\frac{1}{8}} \ll CJ(x, r)$, on peut supposer que $w(y) \neq t_i$. En effet, revenons au choix des t_i (voir les alentours de (2.39)). On a $t_i \in \frac{1}{10}[m_{k_0}, m_{k_1}]$. Et grâce à (2.43), si $\omega_2(x, r)$ est

suffisamment petit devant $J(x, r)$, alors on est sûr que $w(y) \neq t_i$ et donc F ne rencontre pas la région $Z_l(C\varepsilon_0)$.

Il reste enfin à prouver (2.33). En réalité, on va montrer que la propriété \star et l'hypothèse (2.31) prouvent (2.33). En effet, en utilisant (2.31) et (2.35) on peut trouver un recouvrement de F par une famille de boules $B\{(x_j, r_j)\}$ centrées sur K et telles que $r_j \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}r$ avec $\varepsilon < \varepsilon_0$. Or comme $\beta(x, r) \leq \varepsilon$, on a $\beta(x_j, r_j) \leq \varepsilon_0$. Et on a également $\beta(x_j, t) \leq \varepsilon_0$ pour tout $t \geq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. Donc en appliquant la propriété \star dans $B(x_j, r_j)$ on obtient $F \subset \{y; d(y, Z_j) \leq \varepsilon r\}$ où Z_j est le cône associé à $B(x_j, r_j)$. Maintenant, pour tout $y \in F \cap B(x_j, r_j)$ on a

$$d(y, Z) \leq d(y, x_j) + d(x_j, Z) \leq r_j + \varepsilon \leq C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} r$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Le lemme 7 page 301 de [DAV05] montre que le saut normalisé se contrôle assez facilement mais il est énoncé pour le cas du plan uniquement. Nous allons généraliser ce lemme pour les autres cônes minimaux. Commençons par le

Lemme 2.29. *Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans Ω . Soit $x \in K$, r et r_1 tels que $B(x, r) \subset \Omega$ et $0 < r_1 \leq r \leq \frac{4}{3}r_1$. Supposons également que $\beta(x, r) \leq 100^{-1}$. Alors*

$$\left| \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{1}{2}} J(x, r_1) - J(x, r) \right| \leq C \omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} \leq C(1 + h(r)) \quad (2.44)$$

avec C une constante dimensionnelle.

Preuve : Pour tout $r_1 \leq t \leq 2r_1$ on note Z_t un cône minimal tel que

$$\forall y \in K \cap B(x, t), d(y, Z_t) \leq t\beta(x, t)$$

et pour tout λ on note également

$$A_t(\lambda) := \{y \in B(x, t), d(y, Z_t) \geq \lambda t\}.$$

Enfin, on désigne par A_t^k pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa_t]$ les différentes composantes connexes de A_t .

On suppose dans un premier temps que Z_r est presque centré (c'est à dire que le centre de Z_r est dans $\frac{1}{2}B(x, r)$). Rappelons que dans ce cas

$$J(x, r) = r^{-\frac{1}{2}} \min\{\delta_{k,l}\}$$

où $\delta_{k,l} = |m_k(r) - m_l(r)|$ et m_k est la moyenne de u sur un domaine $D_k(x, r)$ dans $A_r^k(\frac{1}{100})$. Comme $r_1 \geq \frac{3}{4}r$, que Z_r est presque centré et que $\beta(x, r) \leq \frac{1}{100}$, on peut considérer des boules \tilde{D}_k dans chaque composante connexe de $B(x, r_1) \setminus Z_r(\frac{1}{100})$ de sorte que chaque \tilde{D}_k

soit de rayon équivalent à r (et donc de r_1) et tels que les \tilde{D}_k soient inclus dans $A_r^k(\frac{1}{100})$. Par l'inégalité de Poincaré on a

$$|m_{\tilde{D}_k} - m_{A_r^k}| \leq Cr^2 \int_{A_r^k} |\nabla u|$$

et également

$$|m_{D_k(x,r)} - m_{A_r^k}| \leq Cr^2 \int_{A_r^k} |\nabla u|$$

où $m_{D_k(x,r)}$, $m_{A_r^k}$, $m_{\tilde{D}_k(x,r)}$ désignent les moyennes de u sur $D_k(x,r)$, A_r^k , $\tilde{D}_k(x,r)$. On en déduit que

$$|m_{\tilde{D}_k} - m_{D_k(x,r)}| \leq Cr^2 \int_{B(x,r) \setminus K} |\nabla u| \leq Cr^{\frac{1}{2}} \omega_2(x,r) \leq C(1+h(r))r^{\frac{1}{2}}.$$

La dernière inégalité provient de (3). Maintenant exactement de la même manière on obtient

$$|m_{\tilde{D}_k} - m_{D_k(x,r_1)}| \leq Cr^2 \int_{B(x,r) \setminus K} |\nabla u| \leq Cr^{\frac{1}{2}} \omega_2(x,r) \leq C(1+h(r))r^{\frac{1}{2}}$$

où les $D_k(x,r_1)$ sont les domaines qui servent à définir $J(x,t_1)$. De ces inégalités on tire l'estimation de $r^{\frac{1}{2}}J(x,r) - r_1^{\frac{1}{2}}J(x,r_1)$ qui permet de montrer (2.44).

Enfin, si Z_r n'est pas presque centré alors il y a deux cas. Soit Z_{r_1} n'est pas presque centré non plus et donc on raisonne avec $2r_1$ et $2r$ ce qui revient à la démonstration que l'on vient de faire, ou soit Z_{r_1} est presque centré et alors ça veut dire que Z_{r_1} est un cône de type inférieur au type de Z_r et donc il suffit de contrôler seulement les moyennes dans les composantes connexes A_r qui touchent les A_{r_1} , et les différences entre ces moyennes est toujours contrôlé par le saut $J(x,r)$. \square

Lemme 2.30. *Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans Ω . Alors si $x \in K$ et r sont tels que $B(x,r) \subset \Omega$ et pour tout $r_1 < t < r$, $\beta(x,t) \leq 10^{-1}$, alors*

$$J(x, r_1) \geq \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}} [J(x, r) - C'] \quad (2.45)$$

où $C' := (1+h(r))C$ avec C une constante dimensionnelle.

Preuve : Si $r_1 \leq r \leq \frac{4}{3}r_1$ alors (2.45) provient du lemme 2.29. Sinon on utilise une suite de rayon r_k tels que $r_k = \frac{4}{3}r_{k-1}$ et on applique le lemme 2.29 suffisamment de fois de sorte que r_k devienne plus grand que r . On obtient

$$\begin{aligned} J(x, r_1) &\geq \sqrt{4/3}^k J(x, (4/3)^k r_1) - C \sqrt{4/3}^k (1 + \sqrt{4/3}^{-1} + \sqrt{4/3}^{-2} + \dots) \\ &\geq \sqrt{4/3}^k [J(x, (4/3)^k r_1) - \frac{C \sqrt{4/3}}{1 - \sqrt{4/3}}]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

et on conclut en utilisant le lemme 2.29 une dernière fois. \square

Dans la suite lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible on notera tout simplement F et B à la place de $F(x_0, r_0)$ et $B(x_0, r_0)$. De plus on suppose à partir de maintenant que $x_0 = 0$. On peut s'y ramener à l'aide d'une simple translation.

Construction des cubes de temps d'arrêt

Dans cette section on va construire une famille de cubes S par un argument de temps d'arrêt, avec la condition que dans tous les cubes de S , l'ensemble singulier K ressemblera toujours à un cône minimal.

On aura besoin d'utiliser des cubes dyadiques associés à l'ensemble singulier K . On pourra trouver page 93 de [DAV00] une telle construction pour toute surface Alfors-Régulière de \mathbb{R}^N . En particulier on a :

Proposition 2.31. *Soit K un fermé de mesure H^2 localement finie dans \mathbb{R}^3 . On suppose qu'il existe une constante C_0 telle que pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^N$ de rayon R on ait*

$$C_0^{-1}R^2 \leq H^2(B \cap K) \leq C_0R^2.$$

Alors il existe une famille de partitions Δ_j ($j \in \mathbb{Z}$) de K en "cubes" Q tels que

- 1) Si $j \leq k$, $Q \in \Delta_j$, $Q' \in \Delta_k$, alors $Q \cap Q' = \emptyset$ ou $Q \subset Q'$
- 2) Si $Q \in \Delta_j$ alors $\text{diam}(Q) \sim_{C_0} 2^j$ et $H^2(Q) \sim_{C_0} 2^{2j}$
- 3) Il existe un centre $c_Q \in Q$ tel que $d(c_Q, K \setminus Q) \geq C_0^{-1} \text{diam}(Q)$
- 4) $\forall Q \in \Delta_j$, $\forall \tau > 0$, $H^2\{x \in Q_j; d(x, K \setminus Q_j) \leq \tau 2^j\} \leq C_0 \tau^{\frac{1}{C_0}} 2^{2j}$

Remarque 2.32. On note $A \sim_C 2^j$ si $C^{-1}2^j \leq A \leq C2^j$

Remarque 2.33. La propriété 4) ne nous sera pas utile. Donc une autre manière de procéder, et qui est suffisante pour la suite, est peut être d'utiliser simplement un réseau de point avec des échelles dyadiques.

Remarque 2.34. Le diamètre $\text{diam}(Q)$ est $\sup\{d(x, y); x, y \in Q\}$ où la distance est la distance euclidienne dans \mathbb{R}^3 (et pas la distance géodésique sur Q !).

On part donc de Q_0 un cube qui contient $K \cap \bar{B}(0, r_0)$, qui est contenu dans $K \cap \bar{B}(0, \frac{11}{10}r_0)$ et sur lequel on peut appliquer la proposition précédente. Donc on dispose d'une famille de cubes dyadiques Δ sur Q_0 dont Q_0 est l'ancêtre commun. Si Q est un cube dyadique de Q_0 , on dit que Q est un bon cube si

$$H^2(F \cap B(c_Q, M \text{diam}Q)) - H^2(K \cap B(c_Q, M \text{diam}Q)) \leq \varepsilon'_0 \text{diam}(Q)^2 \quad (2.47)$$

et si de plus il existe un cône minimal Z_Q tel que

$$\forall x \in K \cap B(c_Q, M \text{diam}Q), d(x, Z_Q) \leq \varepsilon_0 \text{diam}Q \quad (2.48)$$

où M est une constante qui sera choisie plus tard, et ε'_0 tel que $\varepsilon < \varepsilon'_0 \ll \varepsilon_0 \ll \frac{1}{2}$. On note \mathcal{G} l'ensemble des bons cubes (c'est à dire vérifient (2.47) et (2.48)) et $\mathcal{B} = \Delta \setminus \mathcal{G}$ l'ensemble des mauvais cubes. On peut remarquer que le diamètre des mauvais cubes qui ne vérifient pas (2.48) est majoré par $2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}r_0$ si $\beta(0, r_0) \leq \varepsilon$. D'autre part le diamètre des mauvais cubes qui ne vérifient pas (2.47) est majoré par $2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}r_0$ si $\omega_2(x, r)$ et $J^{-1}(x, r)$ sont assez petits devant ε .

On va maintenant construire notre ensemble S . On commence par mettre Q_0 dans S (car $Q_0 \in \mathcal{G}$) puis on effectue l'algorithme suivant. Parmi tous les fils de Q_0 , pour ceux qui sont dans \mathcal{B} on s'arrête, c'est à dire qu'on les met dans S mais on ne va pas voir parmi leurs propres fils, par contre pour ceux qui sont dans \mathcal{G} on les met dans S puis on recommence avec leurs fils. On note $Stop(S)$ la famille des cubes pour lesquels on s'est arrêtés, et $End(S)$, l'ensemble des points $x \in Q_0$ tels que tout cube $Q \in S$ qui contient x est dans S . On a donc la décomposition suivante

$$Q_0 = End(S) \cup \left(\bigcup_{Q \in Stop(S)} Q \right).$$

Remarque 2.35. La construction que l'on vient de faire a sûrement un lien avec la construction de l'homéomorphisme dans la preuve de la généralisation du théorème de Reifenberg par G. David, T. De Pauw et T. Toro [DPT] (sauf que dans [DPT] ils n'utilisent pas les cubes dyadiques directement mais simplement un réseau de points avec des échelles dyadiques). Au départ la construction de ce chapitre avait pour but de se servir éventuellement de leur travail [DPT] mais finalement il s'est avéré que c'était inutile.

Construction des cubes de Whitney

A partir des cubes de S construits dans la section précédente, on va obtenir une famille de boules W_i qui aura les mêmes propriétés géométriques que ceux de S mais en plus les boules W_i auront la propriété d'être des cubes de type Whitney. C'est à dire si deux boules sont proches dans l'espace, alors c'est qu'ils ont à peu près le même diamètre. On pourra trouver une construction du même type (mais tout de même un peu différente) dans le chapitre 8 de [DS91]. Cette nouvelle décomposition W nous servira pour prolonger notre fonction u à la manière d'un prolongement de type Whitney.

On va définir donc une sorte de nouvelle distance associée aux cubes de S . Mais avant, on va changer S en \tilde{S} de sorte que nos boules de Whitney recouvrent bien les cubes de $Stop(S)$ et même les boules $B(c_Q, Adiam(Q))$ avec A une constante qui sera choisie plus tard.

On note $S^{(n)}$ les cubes de S de la génération n . Par exemple S^0 contient seulement Q_0 , $S^{(1)}$ les fils de Q_0 , etc. Donc pour tout cube $Q \in S^{(n)} \cap Stop(S)$ on pose

$$\Delta^n(Q) := \bigcup_{p>n} \{R \in S^{(p)}; R \cap B(c_Q, Adiam(Q)) \neq \emptyset\}$$

et

$$Parasite(S^{(n)}) := \bigcup_{Q \in S^{(n)} \cap Stop(S)} \Delta^n(Q)$$

puis,

$$Parasite(S) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Parasite(S^{(n)})$$

$$\tilde{S} := S \setminus Parasite(S)$$

on nomme également

$$Stop(\tilde{S}) := Stop(S) \setminus Parasite(S).$$

Ainsi, $Parasite(S)$ contient les cubes de plus grande génération qui sont trop proches des cubes de $Stop(S)$. Les cubes de $Parasite(S)$ peuvent être enlevés car les gros cubes de $Stop(S)$ dont ils sont proches suffisent.

On introduit maintenant une nouvelle distance associée aux cubes de S :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3; \quad d(x) := \inf_{Q \in \tilde{S}} \{d(x, Q) + diam Q\} \tag{2.49}$$

Pour tout $x \in Q_0 = K \cap B(x_0, r_0)$ tel que $d(x) > 0$, soit R_x le plus gros cube dyadique de Q_0 contenant x et qui satisfait

$$diam(R_x) \leq \frac{1}{L} \inf_{u \in R_x} (d(u)) \tag{2.50}$$

où L est une constante plus grande que 1 qui sera choisie plus tard. La hiérarchie entre les constantes A , L et M est la suivante :

$$A \ll M \ll L.$$

La constante L est fixée dans l'extension de Whitney de u . Elle joue le même rôle que la constante U de la section précédente. On prendra L suffisamment grande pour qu'une certaine intégrale soit bornée comme dans (2.21). La constante M est aussi fixée dans l'extension de Whitney de manière à aligner les cubes de Whitney qui contiennent un même point par rapport à un cône minimal commun. De plus il faudra fixer M plus grand que L dans la remarque 2.39. Enfin, la constante A sera fixée dans la preuve de (2.71),

et dépendra de M, L, C_0 et d'autres constantes comme \bar{r} qui sera introduit plus tard. La constante A nous assurera que les boules de Whitney recouvriront les cubes de $Stop(S)$.

Soit $R_i, i \in I$ une renumérotation de l'ensemble des cubes R_x sans répétition (en faisant varier x).

Proposition 2.36. *Les cubes R_i sont deux à deux disjoints et on a $R_i \cap End(S) = \emptyset$.*

Preuve : Le fait qu'ils soient disjoints provient de la structure dyadique et de la maximalité des R_i . De plus si $x \in End(\tilde{S})$ alors $d(x) = 0$. Donc tout cube R_i qui contiendrait x serait de diamètre nul. \square

Comme dans la section précédente, pour tout $i \in I$ on associe à chaque R_i une boule W_i définie par

$$W_i := B(c_{R_i}, diam(R_i))$$

On note $W := \{W_i, i \in I\}$. Les boules W_i forment une famille de type Whitney. C'est à dire qu'on a la propriété suivante.

Proposition 2.37. *Si $2W_i \cap 2W_j \neq \emptyset$, alors*

$$C_1^{-1}r_i \leq r_j \leq C_1r_i$$

avec $r_i = diam(R_i)$ et $C_1 = \frac{4C_0^2L}{(L-2)}$

Preuve : Si Q est un cube de \tilde{S} et x et y deux points quelconques, alors

$$\begin{aligned} d(x, Q) &\leq d(x, y) + d(y, Q) \\ d(x, Q) + diam(Q) &\leq d(x, y) + d(y, Q) + diam(Q) \\ d(x) \leq d(x, Q) + diam(Q) &\leq d(x, y) + d(y, Q) + diam(Q) \\ d(x) &\leq d(x, y) + d(y, Q) + diam(Q) \end{aligned}$$

donc en passant à l'inf on en déduit que

$$|d(x) - d(y)| \leq d(x, y)$$

ce qui montre que la fonction $x \mapsto d(x)$ est 1-Lipschitz.

Soit maintenant y un point de $2W_i$ et u un point de R_i (le cube dyadique qui définit la boule W_i). Alors comme d est 1-Lipschitz on a $d(u) \leq d(y) + 2diam(R_i)$ d'où $d(y) \geq \inf_{u \in R_i} d(u) - 2diam(R_i)$ et enfin

$$d(y) \geq (L - 2)diam(R_i). \quad (2.51)$$

D'autre part, le père R de R_i ne vérifie pas (2.50). Donc il existe un point z de R tel que $d(z) < Ldiam(R) \leq C_0^2 2Ldiam(R_i)$. Donc comme d est 1-Lipschitz

$$d(y) \leq d(z) + d(y, z) \leq d(z) + 2C_0^2 Ldiam(R_i) \leq 4C_0^2 Ldiam(R_i) \quad (2.52)$$

donc (2.51) et (2.52) ensembles donnent,

$$\forall y \in 2B_i, \quad (L-2)\text{diam}(R_i) \leq d(y) \leq 4C_0^2 L \text{diam}(R_i)$$

Maintenant, on suppose que $2W_i \cap 2W_j \neq \emptyset$. Alors pour $y \in 2W_i \cap 2W_j$ en utilisant l'inégalité précédente on sait que $d(y)$ est équivalent à la fois à $\text{diam}(R_i)$ et $\text{diam}(R_j)$ et on en déduit donc

$$\frac{L-2}{4C_0^2 L} \text{diam}(R_i) \leq \text{diam}(R_j) \leq \frac{4C_0^2 L}{L-2} \text{diam}(R_i) \quad (2.53)$$

ce qui prouve la proposition. \square

De plus, la famille de boules W est très liée a notre décomposition de la couronne S comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.38. *Il existe une constante C_2 telle que pour tout $i \in I$ et toute boule $W_i \in W$ de rayon r_i , il existe $Q_i \in S$ tel que*

$$C_2^{-1}r_i \leq \text{diam}Q_i \leq C_2r_i$$

et

$$d(B_i, Q_i) \leq C_2r_i$$

avec C_2 une constante qui dépend uniquement de C_0 et L .

Preuve : Par définition de R_i et en utilisant les estimations de la proposition précédente on peut dire que pour tout i et tout point $x \in R_i$ il existe un cube $Q \in S$ tel que

$$d(x, Q) + \text{diam}(Q) \leq 2d(x) \leq 4C_0^2 L \text{diam}(R_i).$$

Il suffit donc de choisir parmi les ancêtres de Q un cube qui fait l'affaire. \square

Remarque 2.39. Une conséquence de la proposition précédente est que pour toute boule $W_i \in W$ de rayon r_i il existe un cône Z_i tel que pour tout $x \in K \cap M'W_i$ on a

$$d(x, Z_i) \leq C_7 \varepsilon_0 r_i$$

où C_7 dépend de C_0 et L , et M' est une constante qui dépend de M, C_0 et L , plus précisément $M' = M - 8C_0^2 L$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre un ancêtre suffisamment âgé \hat{Q} du cube Q donné par la proposition 2.38 de façon avoir $W_i \subset B(c_{\hat{Q}}, \text{diam}(\hat{Q}))$. Ainsi le cône \hat{Q} est une bonne approximation de K dans W_i . Plus grosse est la constante A , et plus loin dans la généalogie de Q on doit aller chercher \hat{Q} mais il est important de noter que de cette façon, C_7 et M' ne dépendent pas de A .

Voici encore deux propositions qui termineront ce paragraphe et seront utiles dans la suite. Tout d'abord on va montrer la

Proposition 2.40. *La famille $\{2W_i\}_{i \in I}$ forme un recouvrement borné de $V = \bigcup_{i \in I} W_i$ de constante C_3 qui dépend de C_0 et L .*

Preuve : Soit $x \in V$ un point fixé et I_x l'ensemble des indices des boules $W_i \in W$ qui contiennent x . Alors l'union $\bigcup_{i \in I_x} W_i$ est incluse dans la boule $B(x, 2C_1r)$ où r est le rayon de n'importe laquelle des $\{W_i\}_{i \in I_x}$. Or chaque W_i contient un cube dyadique R_i , et les cubes R_i sont disjoints. Il en résulte que

$$|I_x|C_0^{-2}r^2 \leq \sum_{i \in I_x} H^2(R_i) \leq H^2(K \cap B(x, 2C_1r)) \leq C_0C_1^2r^2$$

la deuxième inégalité provient de l'Alfors régularité de K de constante C_0 . Donc finalement $|I_x| \leq C$ où C est une constante qui dépend de C_0 et C_1 . \square

Extension de la fonction u

Avant de passer à l'extension de la fonction u , il faut parler un peu d'orientation et de composantes connexes. On va suivre le même schéma que ce qui a été fait dans la section 2.2.2. Tout d'abord, on utilise le lemme 2.20 pour dire que quitte à changer W_i en $2W_i$ ou $4W_i$, on peut supposer que chaque cône Z^i associé à la boule W_i est presque centré dans W_i . La nouvelle famille ainsi construite est encore une famille de Whitney.

Ensuite en faisant la même démonstration que celle de la proposition 2.24, on peut montrer que

Proposition 2.41. *Pour tout $i \in I$, W_i est bien orientée au sens de la définition 2.23.*

Maintenant de la même manière que l'on avait étendu la fonction u_n au chapitre 2.2.3., on peut maintenant étendre la fonction u . La preuve est vraiment identique. On va simplement rappeler le début pour remettre les notations dans le contexte actuel et la suite suivra comme dans le chapitre 2.2.3. En effet, à partir de notre minimiseur (u, K) dans $B(0, r_0)$ on dispose de notre famille de boules de Whitney notée W qui forme un recouvrement borné de l'ensemble $V' := \bigcup_{i \in I} B_i$. De plus pour chaque rayon $\rho \in]0, r_0]$ on note I_ρ l'ensemble des indices i tels que $2W_i$ touche $\partial B(0, \rho)$. On note également $I'_\rho := \{i \in I; 2W_i \cap B(0, \rho) \neq \emptyset\} \setminus I_\rho$. Rappelons que l'ensemble F sépare dans $B(0, r_0)$. Pour $\rho \in [0, r_0]$ on note κ^ρ le nombre de composantes connexes de $B(0, \rho) \setminus Z_{\varepsilon_0\rho}^0$ et pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^\rho]$ on note V_ρ^k les composantes connexes de $B(0, \rho) \setminus F$ qui intersectent D^k (petit domaine qui définit le saut $J(0, \rho)$) et on note également u^k les restrictions de la fonction u dans ces régions. Pour $\rho \in [0, r_0]$ on va trouver une extension de la fonction u^k à $(V_\rho^k \cup V) \setminus \bigcup_{i \in I_\rho} 2W_i$. On obtiendra ainsi une fonction qui sera bien définie dans le complémentaire de n'importe quel compétiteur pour la surface K (et qui sépare). Le prix à payer se comptera en terme d'énergie de u dans une petite région près de K , ainsi que la masse des B_i pour $i \in I_\rho$ qui

sera estimée plus tard. En effet par Fubini on choisira un rayon ρ qui donnera la meilleure estimation possible.

On considère pour chaque $i \in I'_\rho$ une fonction φ_i qui vaut 1 sur W_i et 0 en dehors de $2W_i$. On réutilise le lemme 2.25 pour construire une fonction φ_0 qui vaut 1 en dehors des $2W_i$ et 0 sur chacune des W_i . Par construction, φ_0 vaut 0 sur $V := \bigcup_i W_i$. Donc on peut décomposer φ_0 en somme de κ^ρ fonctions φ_0^k qui valent respectivement 1 sur V^k et telles que toutes valent 0 sur V . Enfin, on pose

$$\theta_i^k = \frac{\varphi_i}{\varphi_0^k + \sum_{i \neq 0} \varphi_i} \quad \theta_0^k = \frac{\varphi_0^k}{\varphi_0^k + \sum_{i \neq 0} \varphi_i}$$

ce qui constitue κ^ρ partitions de l'unité, chacune associée à $V^k \cup V$. Pour chaque boule W_i on a vu dans la section précédente qu'il y avait une orientation. Donc pour chaque boule W_i on peut définir des petits domaines D_i^k qui sont des boules de diamètre équivalent au diamètre de W_i et tel que chacune des D_i^k se situe dans V_ρ^k loin de l'ensemble F . On définit

$$v^k(x) := \varphi_0^k(x)u(x) + \sum_{i>0} m_i^k \theta_i^k(x)$$

où les nombres m_i^k sont les moyennes de u sur D_i^k . La fonction v^k est bien définie sur $V \cup V^k$.

Les fonctions v^k sont dans $W^{1,2}(V \cup V^k)$ et leur énergie s'exprime en fonction de celle de u . En effet, c'est une extension de type Whitney identique à l'extension de u_n du chapitre 3.1.4. C'est pourquoi on ne va pas réécrire l'argument une deuxième fois. On peut résumer le résultat obtenu dans la proposition suivante.

Proposition 2.42. *Soit (u, K) un minimum de Mumford-Shah dans $B(0, r_0)$ tel qu'il existe un cône minimal Z centré en 0 tel que*

$$K \subset \{y \in B(0, r_0); d(y, Z) \leq \varepsilon r_0\}.$$

Pour tout $\rho \in [0, r_0]$ et pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^\rho]$ on appelle V^k les composantes connexes de $B(0, \rho) \setminus F$ qui contiennent les D_ρ^k (domaines introduits dans la définition du saut $J(0, \rho)$). Alors il existe une petite région V' autour de K incluse dans $B(0, \rho) \cap \{x; d(x, Z) \leq C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} r_0\}$ et des fonctions v^k définies dans $V^k \cup V'$ et qui coïncident avec u sur $V^k \setminus V'$, qui coïncident également avec u sur $\partial B(0, \rho) \setminus \bigcup_{i \in I_\rho} 2W_i$ (où les boules W_i sont construites dans la section sur les cubes de Whitney). Enfin, on a les estimations

$$\int_{V^k \cup V'} |\nabla v^k(x)|^2 dx \leq \int_{B(0, \rho) \setminus K} |\nabla u(x)|^2 dx + C \int_{V' \setminus K} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

2.4.2 Croissance et régularité

On va montrer que l'énergie normalisée de u décroît quand le rayon tend vers 0 comme une puissance du rayon. Pour cela on va utiliser un argument du même type que dans la section 48 de [DAV05]. Le tout est de trouver un bon compétiteur (v, G) dans la boule $B(0, \rho)$ où ρ est un certain rayon judicieusement choisi.

Choix du rayon

On cherche un rayon $\rho \in R := [\frac{r_0}{2}, \frac{3}{4}r_0]$ tel que la masse des mauvaises boules B_j qui intersectent $\partial B(0, \rho)$ soit inférieure à la moyenne c'est à dire, en notant $J(\rho) := \{j \in J; B_j \cap \partial B(0, \rho) \neq \emptyset\}$ et r_j le rayon de la boule B_j (l'ensemble J et les boules B_j sont définis dans les paragraphes précédents, c'est une numérotation des boules $B(c_Q, \text{diam}(Q))$ où Q parcourt $\text{Stop}(S)$ construit dans la première section)

$$\sum_{j \in J(\rho)} r_j^2 \leq \frac{1}{|R|} \int_R \sum_{i \in J(t)} r_i^2 dt \leq \frac{1}{|R|} \sum_{j \in J} \int_{t: j \in J(t)} r_j^2 \leq C \frac{1}{|R|} \sum_{j \in J} r_j^3.$$

Donc finalement on a trouvé un rayon ρ qui vérifie

$$\sum_{j \in J(\rho)} r_j^2 \leq \frac{C'}{r_0} \sum_{j \in J} r_j^3 \leq C \sup_j \{r_j\} \sum_{j \in J} r_j^2 \leq C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{j \in J} r_j^2. \quad (2.54)$$

Comparaison avec un minimiseur d'énergie

Une fois que ρ est choisi on va construire notre compétiteur. Par construction de temps d'arrêt, l'ensemble F a la propriété d'être $(\varepsilon_0, \varepsilon)$ -minimal au sens de la définition 2.17. En effet, si on considère la famille de boules $\{B_j\}_{j \in J}$, par construction on sait que F est ε -minimal dans le complémentaire de ces boules et on a également pour tout j , $r_j \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$. Donc si on considère l'ensemble

$$G := F^\rho = \left(F \setminus \bigcup_{j \in J(\rho)} B_j \right) \cup \bigcup_{j \in J(\rho)} \partial B_j$$

alors si ε est assez petit devant ε_0 et ε_2 on peut appliquer le théorème 2.18 et donc on sait que l'énergie normalisée décroît pour tout minimiseur d'énergie dans $B(0, r_0) \setminus G$. En particulier si w est le minimiseur d'énergie dans $B \setminus G$ qui coïncide avec u sur $\partial B \setminus G = \partial B \setminus F$ (pour l'existence d'un tel minimiseur, consulter par exemple [DAV05] page 97), en appliquant le théorème 2.18 avec $\gamma = 0,02$, on peut dire que pour tout $a < \frac{1}{2}$, il existe un ε_2 (qui dépend de a et ε_0), tel que si ε est assez petit (devant ε_0 et $\varepsilon_2(a, \varepsilon_0)$), alors on a

$$\frac{1}{(ar_0)^2} \int_{B(0,ar_0) \setminus G} |\nabla w|^2 \leq a^\gamma \frac{1}{r_0^2} \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla w|^2. \quad (2.55)$$

Le deuxième ingrédient qui nous sera utile est l'estimation suivante. Comme (u, K) est un minimum de Mumford-Shah et puisque (w, G) est un compétiteur on obtient

$$\int_{B(0,\rho) \setminus K} |\nabla u|^2 + H^2(K \cap B(0, \rho)) \leq \int_{B(0,\rho) \setminus G} |\nabla w|^2 + H^2(G \cap B(0, \rho)) + \rho^2 h(\rho)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\rho) \setminus K} |\nabla u|^2 - \int_{B(0,\rho) \setminus G} |\nabla w|^2 &\leq H^2(G \cap B(0, \rho)) - H^2(K \cap B(0, \rho)) + \rho^2 h(\rho) \\ &\leq Cr_0^2 \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(x_0, r_0)^{-1} + C \sum_{j \in J(\rho)} r_j^2 + \rho^2 h(\rho) \\ &\leq Cr_0^2 \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(x_0, r_0)^{-1} + C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{j \in J} r_j^2 + \rho^2 h(\rho). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Le troisième ingrédient est le fait que ∇w et $\nabla(w - u)$ sont orthogonaux dans $L^2(B(0, r_0))$. Cela vient du fait que w est un minimiseur d'énergie dans $B(0, r_0) \setminus G$ et que u est un compétiteur pour w dans ce domaine. Donc

$$\int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla u - \nabla w|^2 = \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla u|^2 - \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla w|^2.$$

On peut donc maintenant estimer l'énergie de u dans une petite boule. Soit $0 < a < \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned} \int_{B(0,ar_0) \setminus G} |\nabla u|^2 &\leq 2 \int_{B(0,ar_0) \setminus G} |\nabla w|^2 + 2 \int_{B(0,ar_0) \setminus G} |\nabla w - \nabla u|^2 \\ &\leq 2a^{2+\gamma} \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla w|^2 + 2 \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla w - \nabla u|^2 \\ &\leq 2a^{2+\gamma} \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla u|^2 + 2 \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla u|^2 - 2 \int_{B(0,r_0) \setminus G} |\nabla w|^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\omega(0, ar_0) \leq 2a^\gamma \omega(0, r_0) + C \frac{1}{a^2} \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(x_0, r_0)^{-1} + C \frac{\varepsilon}{a^2 \varepsilon_0} \sum_{j \in J} r_j^2 + \rho^2 h(\rho). \quad (2.57)$$

L'inégalité (2.57) est l'estimation fondamentale qui sera utilisée pour contrôler l'énergie.

Lemmes de compacité sur les ensembles presque minimaux

Cette section traite principalement de résultats sur les ensembles presque minimaux (voir la définition 2.4 en introduction). Dans les estimations futures on aura besoin d'un lemme qui dit que dans chaque mauvaise boule du temps d'arrêt on peut gagner quelque chose. Ce lemme s'exprime de la façon suivante. Si une boule $B(x, r)$ est telle que $x \in K$ et $\beta(x, r) \leq \varepsilon_0$ mais $\beta(x, ar) > \varepsilon_0$ alors il existe un ensemble qui fait mieux que K dans $B(x, r)$ en terme de surface.

Tout d'abord, voici un énoncé qui nous sera utile et qui est un résultat de [DAV06] sur les ensembles minimaux. On rappelle que pour tout ensemble presque minimal E dans $B(x, r)$ on note $f(r)$ la fonction excès de densité

$$f(r) = \theta(x, r) - \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) \quad (2.58)$$

avec

$$\theta(x, r) = r^{-1} H^2(E \cap B(x, r)).$$

La limite en 0 de θ existe car E est presque minimal (voir 2.3. de [DAV00] et la remarque qui suit). Pour $x \in E$ on appelle $d(x)$ la densité au point x c'est à dire $d(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \theta(x, t)$. La fonction $d(x)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, plus précisément $d(x) \in \{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, d_+\}$ qui sont (excepté 0) les densités des 3 cônes minimaux dans \mathbb{R}^3 .

Théorème 2.43. [DAV06] *Il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $b > 0$ tel que pour tout ensemble E presque minimal dans $B(0, r_0) \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge $h(r) = C_1 r^\alpha$ qui vérifie*

$$f(r_0) \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad h_1(r_0) \leq \varepsilon_1$$

où

$$h_1(r) := \int_0^r h(2t) \frac{dt}{t}$$

on a

$$\beta(x, r) \leq Cr^b \quad \forall x \in E \cap B(0, 10^{-4}r_0) \text{ et } 0 < r \leq 10^{-4}r_0.$$

Pour un ensemble presque minimal E , la fonction

$$\theta(x, t) := H^2(B(x, t) \cap E)/t^2$$

est presque croissante en t et donc la limite quand t tend vers 0 existe, ce qui permet de définir la fonction $d(x)$. Malheureusement si E est maintenant un ensemble singulier d'un minimiseur de Mumford-Shah, la croissance de θ n'est pas aussi facile à montrer. En fait il semblerait que θ ne soit pas la bonne fonction à considérer mais plutôt la somme de la densité et de l'énergie $\theta(x, r) + \omega_2(x, r)$. Par exemple en utilisant la même démarche que pour montrer la croissance de θ dans le cadre des ensembles minimaux, on arrive à montrer que pour un minimiseur de Mumford-Shah la fonction

$$r \mapsto r(\theta(x, r) + \omega_2(x, r))$$

est croissante. On se heurte donc à une difficulté pour définir un analogue de la fonction $f(r)$ pour les ensembles singuliers de Mumford-Shah.

Donc pour utiliser le théorème 2.43, on a besoin de contrôler la fonction densité $f(r)$. C'est ce qui fera l'objet des lemmes suivants. Le but étant d'obtenir un énoncé analogue au théorème 2.43 mais en remplaçant l'hypothèse sur f par une hypothèse sur β . Tout d'abord, l'application de la proposition 16.24 de [DAV06] dans $B(x, r10^{-3})$ avec $\eta_1 = \varepsilon_2 10^3$, combiné avec la proposition 18.1 de [DAV06] dans $B(x, r10^{-5})$ et avec $\eta_1 = \varepsilon_7 10^{-5}$ (où les ε_7 et ε_3 sont ceux de [DAV06]) permet d'énoncer le lemme suivant.

Lemme 2.44. [DAV06] *Il existe un $\eta_1 > 0$ tel que si E est un ensemble presque minimal dans un ouvert $U \in \mathbb{R}^3$ de fonction jauge h , si $x \in E$ et $r > 0$ sont tels que $B(x, r) \subset U$, s'il existe Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} tel que*

$$D_{x,r}(E, Z) \leq \eta_1, \quad h(2r) \leq \eta_1, \quad \int_0^{2r} h(t) \frac{dt}{t} \leq \eta_1$$

et si E sépare dans $B(x, r)$, alors il existe un point $x \in E \cap B(x, r10^{-5})$, du même type que le type de Z .

Remarque 2.45. Rappelons que $D_{x,r}$ est la distance de Hausdorff normalisée bilatérale définie en (6).

Remarque 2.46. L'hypothèse de séparation est utile seulement pour le cas du \mathbb{T} . Voir les propositions 16.24 et 18.1 de [DAV06] pour plus de détails.

Remarque 2.47. Le lemme 2.44 n'est pas évident car rien n'empêche a priori un ensemble minimal de ressembler fortement à un cône de type \mathbb{T} dans $B(x, r)$ mais constitué uniquement de points de type \mathbb{Y} (voir par exemple [DAV06] section 19). Le lemme nous dit en fait que sous des hypothèses de séparation, de contrôle et h et β , ce n'est pas possible.

Voici maintenant l'énoncé qui nous sera utile dans la suite. Il est à comparer avec l'énoncé du théorème 2.43.

Lemme 2.48. *Il existe η_2 telle que si E est un ensemble presque minimal dans l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge $h(r) = C_1 r^\alpha$, si $x \in E$ et r_0 sont tels que $B(x, 2r_0) \subset U$ et*

$$h(r_0) \leq \eta_2 \quad \int_0^{r_0} h(t) \frac{dt}{t} \leq \eta_2$$

et si de plus il existe un cône minimal Z centré en x tel que

$$D_{x,r_0}(E, Z) \leq \eta_2$$

et que E sépare dans $B(x, r_0)$, alors il existe des constantes C et b telles que pour tout $y \in E \cap B(x, r_0 10^{-5})$ et $0 < r \leq 10^{-5}$ on a

$$\beta(x, r) \leq C \left(\frac{r}{r_0} \right)^b$$

Preuve : Si η_2 est choisi plus petit que η_1 on peut appliquer le lemme 2.44 à E dans $B(x, r_0)$ et donc il existe un point z dans $B(x, r_0 10^{-5})$ du même type que Z . Donc en particulier pour tout r , $d(z) = \frac{1}{r^2} H^2(Z \cap B(z, r))$ et donc on peut exprimer le défaut de densité au point z dans $B(z, \frac{r_0}{2})$ par

$$f(z, \frac{r_0}{2}) = \frac{4}{r_0^2} [H^2(E \cap B(z, \frac{r_0}{2})) - H^2(Z \cap B(z, \frac{r_0}{2}))]$$

On définit le compétiteur L par

$$L = \begin{cases} M \cup Z \cap B(z, \frac{r_0}{2}) & \text{dans } \bar{B}(z, \frac{r_0}{2}) \\ E & \text{dans } U \setminus B(z, \frac{r_0}{2}) \end{cases}$$

où l'ensemble M est un petit mur

$$M := \{x \in \partial B(z, \frac{r_0}{2}); d(x, Z) \leq 10r_0\eta_2\}.$$

L'ensemble L est un MS-compétiteur pour E , et donc

$$\begin{aligned} H^2(E \cap B(z, \frac{r_0}{2})) &\leq H^2(L \cap B(z, \frac{r_0}{2})) + \frac{1}{4} r_0^2 h(\frac{r_0}{2}) \\ &\leq H^2(M) + H^2(Z \cap B(z, \frac{r_0}{2})) + \frac{1}{4} r_0^2 h(\frac{r_0}{2}) \end{aligned}$$

et comme $H^2(M) \leq Cr_0^2\eta_2$ on en déduit

$$f(z, \frac{r_0}{2}) \leq C\eta_2$$

Donc si η_2 est assez petit devant ε_1 , on peut appliquer le théorème 2.43 dans $B(z, \frac{r_0}{2})$ et donc pour tout $y \in E \cap B(z, 10^{-4}\frac{r_0}{2})$ et $0 < r < 10^{-4}\frac{r_0}{2}$ on a

$$\beta(y, r) \leq Cr^b \tag{2.59}$$

et comme $|x - z| \leq 10^{-5}r_0$ on en déduit que (2.59) est vrai pour tout $y \in B(x, 10^{-5}r_0)$ et $0 < r < 10^{-5}r_0$. \square

Remarque 2.49. Pour toutes constantes C_0 , M et ε_0 on appelle \bar{r} le rayon tel que

$$\bar{r}^b \leq \frac{2}{MC_0^2} \varepsilon_0$$

On peut maintenant s'occuper de notre lemme principal qui servira à compter la quantité de mauvaises boules dans l'argument de temps d'arrêt.

Lemme 2.50. *Pour tout $\varepsilon_0 < \frac{1}{100}\eta_2$, M , C_0 , C'_0 , et pour tout $r < \bar{r}$ (où \bar{r} est donné par la remarque 2.49), il existe une constante δ_0 telle que si E est un ensemble fermé de mesure H^2 finie dans $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ qui contient l'origine, uniformément concentré de constante C'_0 , si*

$$\beta(0, 1) \leq \varepsilon_0 \tag{2.60}$$

$$\beta(0, r) \geq \frac{2}{MC_0^2} \varepsilon_0 \tag{2.61}$$

et si le cône associé à $\beta(0, 1)$ est centré dans $B(0, 10^{-5})$, si on suppose également qu'il existe un ensemble F qui contient E et tel que F sépare dans $B(0, 1)$ (voir définition 2.63) et

$$H^2(F) - H^2(E) \leq \delta_0$$

alors il existe un ensemble L de mesure H^2 finie, MS-compétiteur pour E tel que

$$H^2(E) - H^2(L) \geq \delta_0$$

Preuve : On raisonne par l'absurde. Si le lemme n'est pas vrai, alors il existe $r < \bar{r}$, il existe $\varepsilon_0 < \frac{1}{100}\eta_2$ telles que pour tout δ il existe un ensemble E_δ qui vérifie (2.60) et (2.61). De plus pour tout MS-compétiteur L_δ on a

$$H^2(E_\delta) - H^2(L_\delta) \leq \delta. \tag{2.62}$$

Et pour tout δ il existe un ensemble F_δ qui contient E_δ , qui sépare dans $B(0, 1)$ et tel que

$$H^2(F_\delta) - H^2(E_\delta) \leq \delta \tag{2.63}$$

On fait tendre maintenant δ vers 0. Quitte à extraire une sous suite, on sait que la suite d'ensemble E_δ tend vers un certain ensemble E_0 au sens de la distance de Hausdorff. Par passage à la limite, on en déduit que cet ensemble E_0 vérifie toujours (2.60) et (2.61) (avec éventuellement des inégalités larges).

On voudrait montrer que E_0 est un ensemble localement minimal dans $B(0, \frac{3}{4})$. Soit L un MS-compétiteur pour E_0 . Comme E_δ tend vers E_0 pour la distance de Hausdorff D_H , on sait que pour tout τ il existe un η' tel que pour tout $\eta < \eta'$, $D_H(E_0, E_\eta) \leq \tau$. Donc si $T_\tau := \{x \in \partial B(0, 1); d(x, L) \leq \tau\}$, on sait que $E_\eta \cap \partial B(0, 1) \subset T_\tau$. Donc l'ensemble

$L_\delta := L \cup (E_\delta \cap B(0, 1) \setminus B(0, \frac{3}{4})) \cup T_\tau$ est un MS-compétiteur pour E_δ . Donc en appliquant (2.62) on obtient

$$\begin{aligned} H^2(E_\delta) &\leq H^2(L_\delta) + \delta \\ &\leq H^2(L) + H^2(T_\tau) \\ &\leq H^2(L \cap B(0, \frac{3}{4})) + C\tau(\delta) \end{aligned}$$

Comme de plus les E_δ sont des ensembles qui vérifient la propriété d'uniforme concentration avec constante C'_0 qui ne dépend pas de δ , on a

$$H^2(E_0) \leq \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} H^2(E_\delta).$$

Donc en faisant tendre δ vers 0 on obtient

$$H^2(E_0 \cap B(0, 1)) \leq H^2(L) + C \underline{\lim} \tau(\delta) = H^2(L \cap B(0, 1))$$

et donc E_0 est un ensemble minimal (c'est à dire presque minimal avec fonction jauge $h = 0$).

De plus E_0 sépare dans $B(0, 1)$ (en particulier E_0 est non vide). En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe un chemin continu γ qui joint A^+ et A^- (deux points dans des composantes connexes différentes de $B(0, 1) \setminus Z_{10^{-5}}$) dans $B(0, 1)$ et tel que γ ne rencontre pas E_0 . Comme E_δ tend vers E_0 pour la distance de Hausdorff, pour tout τ il existe un δ_τ tel que pour tout $\delta < \delta_\tau$ tous les E_δ sont τ proches de E_0 . Soit x le point de γ qui réalise l'inf de $d(x, E_0)$. Comme γ est disjoint de E_0 il existe une boule centrée en x telle et de rayon strictement positif r . Si on prend η plus petit que r on peut montrer que tous les E_δ pour $\delta < \delta_\tau$ ont un trou de taille au moins r , ce qui contredit (2.63).

Donc finalement E_0 est une surface localement minimale dans $B(0, \frac{3}{4})$, qui sépare et qui vérifie (2.60) et (2.61). On voudrait donc appliquer le lemme 2.48 pour obtenir une contradiction. On sait que

$$\beta(0, 1) \leq \varepsilon_0 \leq \frac{1}{100} \eta_2$$

et que le cône associé est presque centré dans $B(0, 1)$. Donc il existe $z \in B(0, 10^{-5})$ et un cône Z centré en z tel que pour tout $x \in E \cap B(z, \frac{1}{2})$, $d(x, Z) \leq \eta_2$. De plus E_0 sépare dans $B(z, \frac{1}{2})$. Montrons que

$$D_{z, \frac{1}{2}}(E_0, Z) \leq \eta_2. \tag{2.64}$$

Il faut montrer uniquement que pour tout $x \in Z$, $d(x, E_0) \leq \eta_2$. Or si ce n'est pas le cas, il existe $x \in Z$ tel que $B(x, \eta_2) \cap E_0 = \emptyset$. Mais alors on peut trouver un chemin continu qui relie deux points de deux composantes connexes différentes de $B(0, 1) \setminus Z_{\frac{1}{100}\eta_2}$ sans toucher l'ensemble E_0 , ce qui contredit le fait que E_0 sépare. Donc on a montré (2.64) et donc on peut appliquer le théorème 2.48 dans $B(z, \frac{1}{2})$, ce qui implique en particulier que

$$\beta(0, r) < \frac{2}{MC_0^2} \varepsilon_0$$

ce qui contredit (2.61) et achève la preuve du lemme. \square

En appliquant le lemme 2.50 on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.51. *Pour tout cube $Q \in \text{Stop}(S)$ il existe un ensemble L , MS-compétiteur de K dans $B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))$ et tel que*

$$H^2(K \cap B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))) - H^2(L \cap B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))) \geq \delta_0 \left(\frac{1}{r}M\text{diam}(Q)\right)^2$$

Preuve : Soit $Q \in \text{Stop}(S)$. Alors par définition de la condition de temps d'arrêt, pour tout cône minimal Z_Q qui contient c_Q il existe un $x \in K \cap B(c_Q, M\text{diam}(Q))$ tel que $d(x, Z_Q) > \varepsilon_0 \text{diam}(Q)$. En d'autres termes on a

$$\beta(c_Q, M\text{diam}(Q)) \geq \frac{\varepsilon_0}{M}$$

On cherche un ancêtre de Q de la p -ième génération noté \hat{Q}^p tel que

$$B(c_Q, \frac{1}{r^p}M\text{diam}(Q)) \subset B(c_{\hat{Q}^p}, 2\text{diam}(\hat{Q}^p))$$

On a alors

$$\frac{1}{C_0^2} 2^p \leq \frac{\text{diam}(\hat{Q}^p)}{\text{diam}Q} \leq 2^p C_0^2$$

où p est le premier entier tel que

$$2^p \geq \frac{C_0^2}{r} M$$

et comme \hat{Q}^p n'est pas un cube de temps d'arrêt on en déduit que

$$\beta(c_Q, \frac{1}{r^p}M\text{diam}(Q)) \leq \frac{C_0^4}{2} \varepsilon_0.$$

Rappelons que

$$\beta(c_Q, M\text{diam}(Q)) \geq \frac{\varepsilon_0}{M}.$$

Quitte à multiplier le rayon par 10^5 ou 10^{10} et en utilisant le lemme 2.20 de recentrage (avec la constante 10^5 à la place de 2), on peut supposer que le centre est dans la boule de rayon 10^{-5} fois plus petite.

On a également $F \cap B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))$ qui sépare dans $B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))$ et tel que

$$H^2(F \cap B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))) - H^2(K \cap B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))) \leq \varepsilon'_0 4C_0^4 \frac{M}{r} \text{diam}(Q)$$

Donc on peut appliquer le lemme 2.50 dans $B(c_Q, \frac{1}{r}M\text{diam}(Q))$ avec $\frac{C_0^4}{2} \varepsilon_0$ à la place de ε_0 que l'on peut supposer toujours plus petit que $C\varepsilon_1$. On peut également prendre $\varepsilon'_0 \ll \delta_0$.

Enfin, le lemme 2.50 est exprimé dans la boule $B(0, 1)$ mais par translation et dilatation il reste vrai dans n'importe quelle boule $B(x, r)$. \square

Avant de passer à la suite peut être qu'il est bon à ce stade de faire un petit tableau qui récapitule dans quel ordre sont fixées les principales constantes (d'autres constantes géométriques ou techniques étant omises ici). On part d'un ensemble K , minimiseur de Mumford-Shah dont $\beta(0, r_0)$ est plus petit qu'un certain ε . Puis on fait un temps d'arrêt sur la platitude à toutes les échelles avec comme paramètre d'arrêt un certain ε_0 pour la platitude et ε'_0 pour la séparation. On obtient une collection de boules que je qualifie de "petites échelles" sur lesquelles on va faire certaines manipulations (contrairement aux manipulations sur K dans la grande boule $B(0, r_0)$ que je qualifie de "grande échelle").

Manipulations aux petites échelles : Le théorème de régularité de Guy David fournit le ε_1 qui donne la décroissance du β pour un ensemble minimal dès que sa fonction densité est plus petite que ε_1 . Un autre lemme permet de contrôler $f(r)$ par β sous réserve de contrôler β par un η_1 . On obtient donc un \bar{r} , qui dépend principalement de ε_0 , pour lequel $\beta(0, \bar{r}) < C(M, C_0)\varepsilon_0$ pour toute surface minimale qui sépare et telle que $\beta(0, r_0) < \eta_2$. Dans le lemme de compacité on règle ε_0 suffisamment petit devant η_2 . Le lemme produit un nombre δ_0 qui est le gain de surface pour chaque mauvaise boule, et dépend de ε_0 et \bar{r} . En outre on doit s'assurer que ε'_0 est plus petit que ce δ_0 pour pouvoir appliquer le lemme. Donc on a pour l'instant (chaque quantité dépend des quantités qui se situent à droite du symbole \prec) :

$$\varepsilon'_0 \prec \delta_0 \prec \bar{r} \prec \varepsilon_0 \prec \eta_2. \quad (2.65)$$

Manipulations à la grande échelle : En ce qui concerne la grande échelle on veut montrer que certaines quantités à la taille ar_0 sont contrôlées par des quantités à la taille r_0 , pour un certain a qui est choisi uniquement en fonction de certaines propriétés arithmétiques, en particulier tel que $a^\gamma < \frac{1}{8}$ où γ est fixé à 0,08. On applique le théorème 2.18 avec F qui est une surface $(\varepsilon_0, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})$ -minimale avec ε_0 qui est soumis aux contraintes du paragraphe précédent. Le théorème 2.18 fournit donc un ε_2 (qui dépend de ε_0 , γ et a) tel que l'énergie décroît si ε est suffisamment petit devant ε_2 et ε_0 . Donc en plus de (2.65) on a

$$\varepsilon \prec \varepsilon_2 \prec \begin{cases} \varepsilon_0 \prec \varepsilon_1 \\ a, \gamma \end{cases}$$

Contrôle de la mauvaise masse

Dans les estimations précédentes on voit qu'une nouvelle quantité est entrée en jeu. Pour tout $r \leq r_0$ on appelle

$$J_r := \{j \in J; B_j \cap B(0, r) \neq \emptyset\}$$

et

$$m(r) := \frac{1}{r^2} \sum_{i \in J_r} r_i^2$$

L'estimation (2.57) sur l'énergie trouvée dans le paragraphe précédent montre que si ε est suffisamment petit, alors pour tout $a \leq \frac{1}{2}$ on a

$$\omega_2(0, ar_0) \leq 2a^\gamma \omega_2(0, r_0) + C \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(x_0, r_0)^{-1} + C \frac{\varepsilon}{a^2 \varepsilon_0} m(r_0) + \rho^2 h(\rho) \quad (2.66)$$

Donc pour montrer la décroissance de ω on va en fait montrer une décroissance couplée de ω et m . Mais avant de passer à la décroissance proprement dite, nous allons d'abord voir quelques résultats concernant la quantité $m(r)$, qui seront utilisés dans la suite. La proposition suivante est un premier contrôle de la mauvaise masse.

Proposition 2.52. *Il existe une constante universelle C telle que pour tout $x \in K$ et r tel que $B(x, r) \in \Omega$ on a*

$$m(x, r) \leq C \left[\omega_2(x, r) + \frac{1}{r_0^2} \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1} + \beta(x, r) + h(r) \right]$$

Remarque 2.53. Voir plus loin pour une autre proposition où β n'est pas dans le second membre de l'inégalité.

Preuve : Pour montrer la proposition 2.52 on va compter le nombre de boule B_j et si possible montrer qu'il n'y en a pas beaucoup en utilisant le lemme 2.50. On note J une indexation des boules des cubes $Q \in \text{Stop}(S)$. On note également B_j la boule $B(c_{Q_j}, \frac{1}{a_0} M \text{diam}(Q_j))$. Ainsi,

$$\{B(c_Q, \frac{1}{a_0} M \text{diam}(Q)); Q \in \text{Stop}(S)\} := \{B_j\}_{j \in J}$$

On sépare J en deux ensembles d'indices disjoints. Soit J_1 l'ensemble des indices des cubes Q_j qui ne vérifient pas (2.48) et $J_2 := J \setminus J_1$. On va commencer par compter la contribution de la masse des B_j pour $j \in J_1$. L'idée est d'utiliser le lemme de compacité pour montrer que pour chaque boule mauvaise B_j on peut gagner de la surface et ainsi dire qu'il ne peut pas y en avoir trop. La seule difficulté est de faire attention à ne pas modifier deux boules qui seraient non disjointes. Pour cela, on utilise la construction avec temps d'arrêt et notamment la construction de $\text{Parasite}(S)$. On va construire un nouvel ensemble d'indices $J' \subset J_1$ qui indexe les cubes de $\text{Parasite}(S)$. On initialise $J' := \emptyset$ et $R := J_1$. On part de $Q_0 \simeq K \cap B(0, r_0)$. Puis, pour chaque fils Q de Q_0 , on fait l'algorithme suivant. Si $Q \in \text{Stop}(S)$ (donc il existe $j \in J$ tel que $Q = Q_j$) et si $j \in R$, alors on ajoute l'indice j à l'ensemble J' . De plus on note J'_j l'ensemble des indices $k \in J_1$ tels que $B_k \cap B_j \neq \emptyset$ et on enlève l'ensemble d'indices J'_j de R . Ensuite on réitère l'algorithme pour chaque fils de Q_0 et ainsi de suite. Ainsi, on obtient un ensemble d'indice J' qui a la propriété que toutes

les boules $\{B_j\}_{j \in J'}$ sont soit disjointes, soit de rayon équivalent (donc par Alfors-régularité en recouvrement borné dans le pire des cas).

Un fait remarquable est que si on note r_j le rayon de la boule B_j , on a

$$\sum_{j \in J_1} r_j^2 \leq C \sum_{j \in J'} r_j^2 \quad (2.67)$$

En effet, par construction on a ré-ordonné J_1 en union disjointe

$$J_1 = \bigsqcup_{j \in J'} J'_j.$$

Or si on fixe $j_0 \in J'$, par Alfors-régularité de l'ensemble K , comme $\bigcup_{k \in J'_{j_0}} B_k \subset B_{j_0}$ et que chaque B_k contient un morceau de l'ensemble K de taille équivalente à r_k , et sachant que les cubes de $Stop(S)$ sont disjoints entre eux on peut dire que

$$\sum_{k \in J'_{j_0}} r_k^2 \leq CH^2(K \cap B_{j_0}) \leq Cr_{j_0}^2$$

où C ne dépend que de la dimension et de la constante d'Alfors-régularité. Par suite,

$$\sum_{j \in J'} r_j^2 \geq C^{-1} \sum_{j \in J'} \sum_{k \in J'_j} r_k^2 = \sum_{j \in J_1} r_j^2$$

ce qui prouve (2.67).

Pour les cubes de J_2 on sait qu'il ne vérifient pas (2.47). Donc on va se permettre d'englober chacun par toute une sphère entière. Comme pour $j \in J_2$, Q_j ne vérifie pas (2.47), on sait que

$$r_j^2 \leq \frac{1}{\varepsilon'_0} (H^2(F \cap Q_j) - H^2(K \cap Q_j))$$

et comme les Q_j sont disjoints on en déduit que

$$\sum_{j \in J_2} r_j^2 \leq C \frac{1}{\varepsilon'_0} (H^2(F(0, r_0)) - H^2(K \cap B(0, r_0))) \leq Cr_0^2 \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1}. \quad (2.68)$$

Maintenant, dans le but de compter les pertes en masse on va utiliser un compétiteur pour (u, K) dans $B(0, r_0)$. On modifie chaque boule B_j pour $j \in J'$ en utilisant la remarque 2.51. Par construction, les boules B_j pour $j \in J'$ sont disjointes. Pour éviter les problèmes de recollement au bord on considère un petit mur

$$T(0, r_0) := \{x \in \partial B(0, r_0); d(x, Z(0, r_0)) \leq r_0 \beta(0, r_0)\}$$

où $Z(0, r_0)$ est le cône minimal dans la définition de $\beta(0, r_0)$. On a $H^2(T(0, r_0)) \leq Cr_0^2 \beta(0, r_0)$.

Enfin, notre compétiteur est

$$G := \begin{cases} F(0, r_0) \cup T(0, r) \cup \bigcup_{j \in J_2} \partial B_j & \text{dans } B(0, r_0) \setminus \bigcup_{j \in J'} B_j \\ L_j & \text{dans } B_j \text{ pour tout } j \in J' \end{cases} \quad (2.69)$$

où L_j est la surface donnée par le lemme de compacité. Pour la fonction on va utiliser le prolongement construit dans la section précédente. On définit

$$\Omega^k \text{ pour } k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^0] \quad (2.70)$$

comme étant les grosses composantes connexes de $B(0, r_0) \setminus G$. On définit ensuite

$$v = v^k \text{ dans } \Omega^k$$

en utilisant la proposition 2.42. En effet, on utilise l'extension de u avec $\rho = r_0$. Pour les boules B_j pour $j \in J_2$, inutile de vérifier si v est bien définie car on a gardé l'ensemble F . Il faut juste vérifier que notre extension est bien définie dans nos boules B_j pour $j \in J'$, c'est à dire là où on a modifié F en le remplaçant par les ensembles L_j . La proposition 2.42 nous dit juste que la fonction est étendue dans les boules W_i pour $i \in I$. Or dans chaque boule B_j pour $j \in J'$ on a modifié l'ensemble en remplaçant K par l'ensemble L_j obtenu par compacité. Montrons que

$$\text{l'extension obtenue dans la proposition 2.42 est bien définie dans les } B_j \setminus L_j \quad (2.71)$$

C'est ici que le choix de la constante A est importante (dans la définition de \tilde{S}). Soit donc B_j une telle boule. C'est à dire que B_j est de la forme $B(c_Q, \frac{1}{a_0} M \text{diam}(Q))$ pour un certain $Q \in \text{Stop}(S) \setminus \text{Parasites}(S)$. On remarque qu'il existe une constante universelle positive telle que pour tout $x \in K \cap B(c_Q, \frac{A}{4} \text{diam}(Q))$ on a $d(x) \geq C \text{diam}(Q)$. En effet, on rappelle que

$$d(x) := \frac{1}{L} \inf_{R \in \tilde{S}} (\text{diam}(R) + d(x, R))$$

donc si $x \in K \cap B(c_Q, \frac{A}{2} \text{diam}(Q))$, soit pour l'inf on prend Q lui même et on trouve $\frac{1}{L}(A+1)\text{diam}(Q)$ ou soit on prend un cube R extérieur à $B(c_Q, A \text{diam}(Q))$ et on trouve alors quelque chose de supérieur à $\frac{A}{2} \text{diam}(Q)$. Dans tous les cas on obtient que $d(x) \geq \frac{A \text{diam}(Q)}{L}$. Donc tous les cubes R_i dans la construction de W qui contiennent les points de $K \cap B_j$ sont de diamètre plus grand ou égal à $d(x)$ à une constante multiplicative près, et donc de diamètre plus grand qu'une constante fois $\text{diam}(Q)$ c'est à dire plus grande qu'une constante fois le rayon de B_j si on choisit judicieusement A (en fonction des constantes M et L). Donc on est sûr que les boules W_i recouvrent K dans B_j et donc u est bien définie.

On applique maintenant le fait que (u, K) est un minimum de Mumford-Shah donc on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 + H^2(K \cap B(0, 2r_0)) &\leq \int_{B(0, r_0) \setminus G} |\nabla v|^2 + H^2(G \cap B(0, \rho_{k_0})) + r_0^2 h(r_0) \\ &\leq \int_{B(0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 + C \int_{V' \setminus K} |\nabla u|^2 + H^2(F(0, r_0)) - C\delta_0 \sum_{j \in J'} r_j^2 + Cr_0^2 \beta(0, r_0) \\ &\quad + C \sum_{j \in J_2} r_j^2 + Cr_0^2 h(r_0) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta_0 \sum_{j \in J'} r_j^2 \leq C \int_{V \setminus K} |\nabla u|^2 + r_0^2 \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1} + C r_0^2 \beta(0, r_0) + r_0^2 h(2r_0)$$

Et finalement par (2.68),

$$\sum_{j \in J} t_j^2 \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\frac{1}{r_0^2} \int_{V \setminus K} |\nabla u|^2 + \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1} + \beta(0, r_0) + h(2r_0) \right) \quad (2.72)$$

ce qui termine la preuve. \square

La proposition suivante est une variante plus fine que la proposition 2.52 dont la preuve est tout à fait similaire.

Proposition 2.54. *Si $m(ar) > \frac{m(r)}{2}$ alors*

$$m(ar) \leq \frac{C}{\varepsilon_1} \left(\omega(0, r_0) + \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1} + h(r_0) \right). \quad (2.73)$$

Preuve : On fait la même chose que dans la proposition précédente. On garde les mêmes notations. Comme compétiteur on prend cette fois

$$\tilde{G} := \begin{cases} F(0, r_0) & \text{dans } B(0, r_0) \setminus \bigcup_{j \in J'; B_j \cap B(0, \rho) \neq \emptyset} B_j \\ L_j & \text{dans } B_j \text{ pour tout } j \in J'; B_j \cap B(0, \rho) \neq \emptyset \end{cases}$$

où L_j est la surface donnée par le lemme de compacité. Puis

$$G := \tilde{G} \cup \bigcup_{j \in J(\rho)} \partial B_j.$$

Pour la fonction on va utiliser encore le prolongement construit dans la section précédente dans la proposition 2.42.

$$v = v^k \text{ dans } \Omega^k$$

Comme dans la proposition précédente (voir (2.71)), la fonction v est bien définie dans $B(0, r_0) \setminus G$.

D'autre part, comme dans la proposition précédente on a

$$\varepsilon'_0 \sum_{j \in J_2} r_j^2 \leq C r_0^2 \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1}$$

On applique maintenant le fait que (u, K) est un minimum de Mumford-Shah donc on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r_0)\setminus K} |\nabla u|^2 + H^2(K \cap B(0, r_0)) &\leq \int_{B(0,r_0)\setminus G} |\nabla v|^2 + H^2(G \cap B(0, r_0)) + r_0^2 h(r_0) \\ &\leq \int_{B(0,r_0)\setminus K} |\nabla u|^2 + C \int_{V' \setminus K} |\nabla u|^2 + H^2(F(0, r_0)) - \delta_0 \sum_{j \in J'; B_j \cap B(0,\rho) \neq \emptyset} r_j^2 \\ &\quad + C \sum_{j \in J_2} r_j^2 + C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{j \in J} r_j^2 + Cr_0^2 h(r_0) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta_0 \sum_{j \in J'; B_j \cap B(0,\rho) \neq \emptyset} r_j^2 - C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{j \in J} r_j^2 \leq C \int_{V' \setminus K} |\nabla u|^2 + Cr_0^2 \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1} + r_0^2 h(2r_0)$$

donc en combinant ces dernières estimations et en utilisant (2.67), si ε est suffisamment petit devant δ_0 et ε_0 , et en supposant que $m(ar) > \frac{m(r)}{2}$, on en déduit

$$m(r) \leq \frac{C}{\delta_0} \left(\omega(0, r_0) + \omega_2(0, r_0)^{\frac{1}{2}} J(0, r_0)^{-1} + h(2r_0) \right) \quad (2.74)$$

ce qui termine la preuve. \square

Contrôle du défaut de minimalité

Dans cette section on voudrait contrôler le défaut de minimalité de l'ensemble K en fonction de l'énergie et de la mauvaise masse. Pour des questions de séparation on ne va pas travailler directement avec K mais plutôt avec l'ensemble F pour être sûr que l'ensemble sépare bien dans B . On va montrer que pour tout MS compétiteur L de F on peut construire une fonction w telle que (L, w) soit un compétiteur de Mumford Shah pour (u, K) .

Proposition 2.55. *Il existe une constante universelle $c_{10} < 1$ telle que pour tout MS-compétiteur L pour la surface F (voir la définition 2.3) dans la boule $B(0, c_{10}r_0)$, on a :*

$$\frac{1}{r_0^2} [H^2(F \cap B(0, c_{10}r_0)) - H^2(L \cap B(0, c_{10}r_0))] \leq C [\omega_2(0, r_0) + m(r_0) + h(r_0)].$$

Remarque 2.56. En fait en travaillant un peu plus on peut obtenir une estimée meilleure pour les compétiteurs proches de F . En effet, en faisant une extension avec "argument de poussage" et en choisissant une bonne sphère avec Fubini pour avoir une énergie plus petite on peut modifier dans la majoration $\omega(r) + m(r)$ par $\varepsilon(\omega(r) + m(r))$. Cependant, l'inégalité de la proposition est suffisante pour ce qu'on veut faire et donc nous nous en contenterons.

Preuve de la proposition 2.55 : Soit Z_0 le cône tel que pour tout $x \in K \cap B(0, r_0)$, $d(x, Z_0) \leq \varepsilon r_0$. On appelle Z_ε la région

$$Z_\varepsilon := \{x \in B(0, r_0); d(x, Z_0) \leq r_0 \varepsilon\}. \quad (2.75)$$

Pour obtenir une extension bien définie quelque soit l'ensemble L , on va commencer par obtenir une extension bien définie dans Z_ε . La méthode consiste à utiliser une extension de type Whitney exactement comme dans la preuve du théorème 2.18. Rappelons l'idée générale de la construction, la preuve étant identique à ce qui a déjà été fait. On considère notre famille de boules $\{B_j\}_{j \in J}$ construites par temps d'arrêt. On définit la fonction

$$\psi_j := \begin{cases} r_j & \text{sur } B_j \\ 0 & \text{en dehors de } 2B_j \end{cases}$$

puis pour tout x on définit

$$d(x) := \sum_{j \in J} \psi_j(x).$$

Enfin, pour tout $x \in B(0, \rho)$ on définit

$$\delta(x) := \max(d(x, \partial B(0, \rho)), d(x))$$

Pour tout $x \in F \cap B(0, \rho)$ on considère la boule

$$W_x := B(x, \frac{1}{U} \delta(x))$$

où $U > 30C_0$ est une certaine constante universelle qui est fixée plus tard en fonction des paramètres de la démonstration, puis on choisit une sous-famille parmi les W_x , indexée par \mathcal{L} , maximale pour la propriété que $\frac{1}{100}W_l \cap \frac{1}{100}W_{l'} \neq \emptyset$. Cette famille $\{W_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ sera notre famille de whitney pour prolonger u . En particulier, les propriétés des W_l sont répertoriées dans le lemme 2.19.

Muni de ces boules de whitney on peut faire l'extension de Whitney habituelle (comme dans la section 2.2.3 ainsi que la proposition 2.42). Posons

$$V' := \bigcup_{l \in \mathcal{L}} 2W_l$$

et nommons comme d'habitude V^k pour $k \in \mathbb{N} \cap [1, \kappa^\rho]$ les grosses composantes connexes de $B(0, \rho) \setminus F$. Il existe alors κ^ρ fonction v^k telles que $v^k \in W^{1,2}(V^k \cup V')$ et telles que

$$\int_{V^k \cup V'} |\nabla v^k|^2 \leq C \int_{B(0, \rho) \setminus F} |\nabla u|^2$$

de plus v^k coïncide avec u sur $\partial B(0, \rho) \cap V^k$.

On possède désormais une extension de u dans un domaine V' qui contient F . De plus comme les rayons des boules W_x sont équivalents à $\delta(x)$ qui lui même est équivalent à $\frac{1}{\nu}d(x, \partial B(0, \rho))$ dans $B(0, \frac{\rho}{2})$ si ε est suffisamment petit on peut en déduire facilement qu'il existe une constante C_9 qui dépend uniquement de U telle que $B(0, C_9\rho) \subset V'$. Donc si L est un MS-compétiteur pour F dans $B(0, C_9\rho)$, on sait que L sépare $B(0, C_9\rho)$ en κ^ρ grosses composantes connexes que l'on note $B(0, C_9\rho)^k$ (car F sépare et $L = \phi(F)$ où ϕ est lipschitz). On peut alors définir une fonction v qui vaut v^k dans chaque $B(0, C_9\rho)^k$ (et 0 dans les autres composantes). Posons

$$G' = \begin{cases} F & \text{dans } B(0, r_0) \setminus B(0, C_9\rho) \\ L & \text{dans } B(0, C_9\rho) \end{cases}$$

Puis

$$G := G' \cup \bigcup_{l \in \mathcal{L}; W_l \cap \partial B(0, \rho) \neq \emptyset} 2W_l$$

Et

$$v := \begin{cases} u & \text{dans } B(0, r_0) \setminus B(0, \rho) \\ v^k & \text{dans } (B(0, \rho) \setminus G)^k \\ 0 & \text{dans les autres composantes de } B(0, \rho) \setminus G \end{cases}$$

En écrivant que (u, K) est un minimiseur de Mumford-Shah et que (w, G) est un compétiteur il sort

$$\int_{B(0, \rho) \setminus K} |\nabla u|^2 + H^2(K) \leq \int_{B(0, \rho) \setminus K} |\nabla v|^2 + H^2(G) + \rho^2 h(\rho)$$

donc $H^2(K \cap B(0, C_9\rho)) - H^2(L \cap B(0, C_9\rho))$

$$\leq C \left[\int_{B(0, r_0) \setminus K} |\nabla u|^2 + \sum_{j \in J(\rho)} r_j^2 + r_0^2 \omega(0, r)^{\frac{1}{2}} J(0, r)^{-1} + r_0^2 h(r_0) \right]$$

d'où la proposition. \square

Conclusion sur la régularité

Nous allons maintenant utiliser toutes les estimations des paragraphes précédents pour contrôler les diverses quantités en jeu. On va commencer par prouver cette proposition "d'auto amélioration".

Proposition 2.57. *Il existe $\varepsilon > 0$, et il existe $\tau_4 < \tau_3 < \tau_2 < \tau_1 < \varepsilon$ ainsi que $a < 1$ tels que pour tout $x \in K$ et r tels que $B(x, r) \subset \Omega$, et tels que*

$$h(r) + J(x, r)^{-1} \leq \tau_4, \quad \omega_2(x, r) \leq \tau_3, \quad m(r) \leq \tau_2, \quad \beta(x, r) \leq \tau_1 \quad (2.76)$$

alors (2.76) est encore vrai en remplaçant r par ar .

Preuve : On choisit $\varepsilon \ll \varepsilon_0$ et ε_1 de sorte que tous les résultats des sections précédentes soient valides. On choisit $a < \frac{1}{16}$ tel que (2.57) appliqué à (u, K) donne

$$\omega(x, ar) \leq \frac{1}{8}\omega(x, r) + C\omega(x, r)^{\frac{1}{2}}J(x, r)^{-1} + C\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}m(r) + h(r) \quad (2.77)$$

Une fois que a est choisi, on peut choisir τ_1 suffisamment petit de sorte que pour tout $ar < t < r$ on ait $\beta(x, t) \leq 10^{-1}$. Ainsi par le lemme 2.30

$$J(x, ar) \geq a^{-\frac{1}{2}}[J(x, r) - C'] \geq \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}J(x, r)$$

si τ_4 est assez petit devant C' . On en déduit ensuite que

$$J(x, ar)^{-1} \leq 2a^{\frac{1}{2}}J(x, r)^{-1} \leq \frac{J(x, r)^{-1}}{2}$$

car $a < \frac{1}{16}$. De plus si τ_4 est assez petit devant τ_3 , on aura

$$C\tau_3^{\frac{1}{2}}\tau_4 \leq \frac{1}{8}\tau_3. \quad (2.78)$$

Ainsi, par (2.77),

$$\omega(x, ar) \leq \frac{3}{8}\tau_3 + C\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}m(r) \leq \frac{\tau_3}{2}$$

sous la condition

$$8C\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\tau_2 < \tau_3. \quad (2.79)$$

En ce qui concerne $m(r)$, de deux choses l'une. Soit $m(ar) \leq \frac{m(r)}{2}$ et alors $m(ar) \leq \frac{\tau_2}{2}$ et c'est gagné. Sinon, on a $m(ar) > \frac{m(r)}{2}$ et alors on peut appliquer la proposition 2.54 et on obtient

$$m(ar) \leq \frac{C}{\varepsilon_1}(\tau_3 + \tau_3^{\frac{1}{2}}\tau_4 + \tau_4) \leq \frac{C}{\varepsilon_1}\tau_3 \leq \frac{\tau_2}{2}$$

si

$$2\frac{C}{\varepsilon_1}\tau_3 \leq \tau_2. \quad (2.80)$$

Il suffit donc de choisir ε suffisamment petit devant les constantes ε_0, C pour qu'il existe $\tau_3 < \tau_2$ qui vérifient à la fois (2.79) et (2.80). Ainsi on contrôle ω_2 et m , il reste enfin à contrôler β . Pour cela on utilise l'estimation de la proposition 2.55 et le lemme 2.50 que l'on applique dans $B(0, C_{10}r)$. En effet, si $a \ll \bar{r}(\varepsilon_0, C_0, M)$ et

$$\beta(0, ar) \geq \tau_1$$

alors en appliquant le lemme 2.50 avec $\varepsilon_0 = \tau_1 M C_0^2 / 2$, on sait qu'il existe $\delta(\tau_1, a)$ et un ensemble L compétiteur pour K dans $B(0, C_{10}r)$ tel que

$$H^2(K) - H^2(L) \geq \delta(\tau_1) \quad (2.81)$$

Or d'après la proposition 2.55, si on choisit τ_2 et τ_3 suffisamment petits devant $\delta(\tau_1)$, et donc devant τ_1 , l'inégalité (2.81) ne peut avoir lieu. Ce qui prouve que

$$\beta(0, ar) \leq \tau_1$$

et termine la preuve de la proposition. \square

On garde les constantes a et τ_i données par la proposition précédente. Soit b la puissance positive telle que $a^b = \frac{1}{2}$. On pose également

$$\tilde{h}_r(t) = \sup\left\{\left(\frac{t}{s}\right)^b h(s); t \leq s \leq r\right\}$$

pour $t < r$ et $\tilde{h}_r(t) = h(t)$ pour $t > r$. D'après [DAV05] page 318, la fonction \tilde{h} est encore une fonction jauge (i.e. monotone avec limite égale à 0 en 0). On a aussi trivialement $h(t) \leq \tilde{h}_r(t)$ et on peut prouver que

$$\tilde{h}_r(t) \geq \left(\frac{t}{t'}\right)^b \tilde{h}_r(t') \quad \text{for } 0 < t < t' \leq r. \quad (2.82)$$

De plus comme $a^b = \frac{1}{2}$, on a

$$\tilde{h}_r(at) \geq \frac{1}{2} \tilde{h}_r(t) \quad \text{for } 0 < t \leq r. \quad (2.83)$$

La proposition 2.57 n'a pour but que de maintenir le $\beta \leq \tau_1$ à toutes les échelles pour ensuite pouvoir obtenir plus de décroissance pour les autres quantités. C'est ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.58. *On se place dans les mêmes conditions que la proposition précédente. Alors pour tout $0 < t < r$ on a :*

$$\begin{aligned} J(x, t)^{-1} &\leq 2 \left(\frac{t}{r}\right)^b \tau_4 \\ \omega_2(x, t) &\leq C \left(\frac{t}{r}\right)^b \tau_3 + C \tilde{h}(t) \\ m(x, t) &\leq C \left(\frac{t}{r}\right)^b \tau_2 + C \tilde{h}(t) \end{aligned}$$

Preuve : Tout d'abord en ce qui concerne le contrôle du saut on sait maintenant que comme τ_1 est choisi de manière à ce que $\beta(x, t) \leq 10^{-1}$ pour tout $t < r$, alors par le lemme 2.30

$$J(x, t) \geq \left(\frac{r}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} [J(x, r) - C'] \geq \frac{1}{2} \left(\frac{r}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} (J(x, r))$$

si τ_4 est assez petit devant C' . On en déduit ensuite que

$$J(x, t)^{-1} \leq 2 \left(\frac{t}{r}\right)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1}.$$

Et comme $a < \frac{1}{4}$ on a

$$J(x, a^n r)^{-1} \leq 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \tau_4. \quad (2.84)$$

Maintenant, montrons par récurrence que

$$\omega_2(x, a^n r_0) \leq 2^{-n} \tau_3 + C_3 \tilde{h}_r(a^n r) \quad \text{and} \quad m(x, a^n r) \leq 2^{-n} \tau_2 + C_3 \tilde{h}_r(a^n r) \quad (2.85)$$

Pour $n = 0$ on a (2.85) aisément. Supposons maintenant que (2.85) est vrai pour n . Alors en appliquant (2.57) dans $B(x, a^n r)$

$$\omega_2(x, a^{n+1} r) \leq \frac{1}{8} \omega_2(x, a^n r) + C_2 \omega_2(x, a^n r)^{\frac{1}{2}} J(x, a^n r)^{-1} + C_2 \sqrt{\varepsilon} m(x, a^n r) + C_2 h(a^n r) \quad (2.86)$$

Maintenant, en utilisant $2ab \leq a^2 + b^2$ on obtient

$$\omega_2(x, a^n r)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{20C_2} \omega_2(x, a^n r) J(x, a^n r) + 5C_2 J(x, a^n r)^{-1}.$$

Donc (2.86) donne

$$\omega_2(x, a^{n+1} r) \leq \frac{7}{40} \omega_2(x, a^n r) + 5C_2^2 J(x, a^n r)^{-2} + C_2 \sqrt{\varepsilon} m(x, a^n r) + C_2 h(a^n r).$$

Maintenant, en utilisant (2.84), et par hypothèse de récurrence,

$$\omega_2(x, a^{n+1} r) \leq \frac{7}{40} 2^{-n} \tau_3 + 5C_2^2 4\tau_4^2 2^{-n} + C_2 \sqrt{\varepsilon} 2^{-n} \tau_2 + \left(\frac{7}{40} C_3 + C_2 \sqrt{\varepsilon} C_3 + C_2\right) \tilde{h}_r(a^n r).$$

Or τ_4 est contrôlé par τ_3 , et comme ε est aussi petit que voulu devant C_2 , en utilisant également (2.79) et (2.83), et finalement si on choisit C_3 plus grand que $100C_2$ on déduit que

$$\omega_2(x, a^{n+1} r) \leq \left(\frac{8}{40} + \frac{1}{8}\right) 2^{-n} \tau_3 + C_3 \tilde{h}_r(a^n r) \leq 2^{-(n+1)} \tau_3 + C_3 \tilde{h}_r(a^{n+1} r).$$

Concernant $m(x, r)$ c'est un argument similaire. On suppose que $m(x, a^{n+1}r) > 2^{-(n+1)}m(x, a^{n+1}r)$. Alors on peut appliquer la proposition 2.54 dans la boule $B(x, a^n r)$ donc

$$\begin{aligned} m(x, a^{n+1}r) &\leq \frac{C(a)}{\varepsilon_1} (\omega_2(x, a^n r) + \omega_2(x, a^n r)^{\frac{1}{2}} J(x, a^n r)^{-1} + h(a^n r)) \\ &\leq \frac{C(a)}{\varepsilon_1} \left(\frac{3}{2} \omega_2(x, a^n r) + \frac{1}{2} J(x, a^n r)^{-2} + h(a^n r) \right). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Fixons $C_4 = \frac{C(a)}{\varepsilon_1}$, en utilisant (2.84) et l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\begin{aligned} m(x, a^{n+1}r) &\leq C_4 2^{-n} \tau_3 + C_4 2^{-n} \tau_4 + 2C_4 \tilde{h}_r(a^n r) \\ &\leq 2^{-n} \tau_2 + C_3 \tilde{h}_r(a^{n+1}r) \end{aligned}$$

car τ_3 et τ_4 sont aussi petit que voulu devant C_4 et τ_2 , et car on peut choisir C_3 plus grand que $10C_4$ et on a également utilisé (2.83).

Pour finir la preuve soit $0 < t < r$ et n tels que $a^{n+1} \leq t \leq a^n r$. Alors on a

$$\begin{aligned} \omega_2(x, t) &= \frac{1}{t^2} \int_{B(0,t) \setminus K} |\nabla u|^2 \leq \left(\frac{a^n r}{t} \right)^2 \omega_2(x, a^n r) \\ &\leq \frac{1}{a^2} 2^{-n} \tau_3 + C_3 \tilde{h}_r(a^n r) \\ &\leq \frac{1}{a^2} a^{bn} \tau_3 + C'_3 \tilde{h}_r(t) \\ &\leq C \left(\frac{t}{r} \right)^b \tau_3 + C'_3 \tilde{h}_r(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m(x, t) &\leq \frac{a^{2n} r^2}{t^2} m(x, a^n r) \leq \frac{a^{2n} r^2}{t^2} 2^{-n} \tau_2 + C_3 \tilde{h}_r(a^n r) \\ &\leq \frac{1}{a^2} a^{bn} \tau_2 + C'_3 \tilde{h}_r(t) \leq C \left(\frac{t}{r} \right)^b \tau_2 + C'_3 \tilde{h}_r(t). \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 2.59. *Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $^* \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et de fonction jauge h . Soit $x_0 \in K$ et r_0 tels que $B(x_0, r_0) \subset \Omega$. On suppose que $\beta(x_0, r_0) \leq \varepsilon$. Soit S la collection des cubes dyadiques de temps d'arrêts construits dans la première section et soit $m(x, r)$ la fonction mauvaise masse associée, c'est à dire pour tout $x \in K \cap B(x_0, r_0)$ et pour tout r tels que $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$,*

$$m(x, r) := \frac{1}{r^2} \sum_{j \in J; B_j \cap B(x, r) \neq \emptyset} r_j^2.$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$, il existe $\tau'_4 < \tau'_3 < \tau'_2 < \tau'_1 < \varepsilon$ telles que si

$$h(r_0) + J(x_0, r_0)^{-1} \leq \tau'_4, \quad \omega_2(x_0, r_0) \leq \tau'_3, \quad m(x_0, r_0) \leq \tau'_2, \quad \beta(x_0, r_0) \leq \tau'_1$$

alors pour tout $x \in B(x_0, \frac{1}{20}r_0)$ et pour tout $0 < t < \frac{1}{2}r_0$ on a

$$\begin{aligned} J(x, t)^{-1} &\leq C \left(\frac{t}{r_0} \right)^b \\ \omega_2(x, r) &\leq C \left(\frac{t}{r_0} \right)^b + C\tilde{h}(t) \\ m(x, t) &\leq C \left(\frac{t}{r_0} \right)^b + C\tilde{h}(t) \\ \beta(x, t) &\leq \tau_1 \end{aligned}$$

Preuve : En fait il suffit de montrer qu'il existe $\tau'_4 < \tau'_3 < \tau'_2 < \tau'_1 < \varepsilon$ telles que si

$$h(r_0) + J(x_0, r_0)^{-1} \leq \tau'_4, \quad \omega_2(x_0, r_0) \leq \tau'_3, \quad m(x_0, r_0) \leq \tau'_2, \quad \beta(x_0, r_0) \leq \tau'_1$$

alors pour tout $x \in B(x_0, \frac{1}{10}r_0)$ on a

$$h\left(\frac{1}{2}r_0\right) + J\left(x, \frac{1}{2}r_0\right)^{-1} \leq \tau_4, \quad \omega_2\left(x, \frac{1}{2}r_0\right) \leq \tau_3, \quad m\left(x, \frac{1}{2}r_0\right) \leq \tau_2, \quad \beta\left(x, \frac{1}{2}r_0\right) \leq \tau_1$$

ainsi on pourra appliquer tout le travail des sections précédentes dans $B(x, \frac{1}{20}r_0)$ et obtenir le résultat.

Il suffit de remarquer que pour tout $x \in K \cap B(x_0, \frac{1}{10}r_0)$ on a

$$\begin{aligned} \omega_2\left(x, \frac{1}{2}r_0\right) &\leq 4\omega_2(x_0, r_0) \\ m\left(x, \frac{1}{2}r_0\right) &\leq 2m(x_0, r_0) \\ \beta\left(x, \frac{1}{2}r_0\right) &\leq 2\beta(x_0, r_0) \end{aligned} \tag{2.88}$$

et de plus si $\beta(x_0, r_0)$ est suffisamment petit alors

$$J^{-1}\left(x, \frac{1}{2}r_0\right) \leq 2J^{-1}(x_0, r_0).$$

Enfin comme h est croissante

$$h\left(\frac{1}{2}r_0\right) \leq h(r_0)$$

on en déduit qu'on peut prendre pour $i \in [1, 4]$,

$$\tau'_i := \frac{1}{4}\tau_i.$$

et la proposition s'ensuit. □

Corollaire 2.60. *Dans la même situation que la proposition précédente, si τ_1 est assez petit on a*

$$F(x_0, \frac{1}{10}r_0) = K \cap B(x_0, \frac{1}{10}r_0)$$

Preuve : On va montrer en fait que K sépare dans $B(x_0, \frac{1}{10}r_0)$. Cela montrera qu'on peut prendre $F = K$ dans cette boule. Pour montrer que K sépare on va appliquer le théorème 1.1 de [DPT]. Il suffit de montrer que pour tout $x \in B(x_0, \frac{1}{10}r_0)$ et pour tout r tel que $B(x, r) \subset B(x_0, \frac{1}{5}r_0)$ il existe un cône $Z(x, r)$ tel que

$$D_{x,r}(K, P(x, r)) \leq \varepsilon'$$

avec ε' une certaine constante donnée par le théorème de [DPT]. Rappelons que $D_{x,r}$ est la distance de Hausdorff

$$D_{x,r}(E, F) := \frac{1}{r} \max \left\{ \sup_{z \in E \cap B(x,r)} \{d(z, F)\}, \sup_{z \in F \cap B(x,r)} \{d(z, E)\} \right\}$$

Si on choisit τ_1 suffisamment petit devant ε' on sait alors que pour tout x et tout r on a $\beta(x, r) \leq \varepsilon'$ par la proposition précédente. D'où l'existence d'un cône $Z(x, r)$ qui satisfait la première moitié de $D(x, r)$. Il reste donc à montrer que

$$\sup \{d(z, K), z \in Z(x, r)\} \leq r\varepsilon'$$

On sait que $J(x, r)^{-1} \leq \tau_4$ et $\omega_2(x, r) \leq \tau_3$. Donc il existe un ensemble $F(x, r)$ qui sépare dans $B(x, r)$ et tel que

$$H^2(F(x, r) \cap K \cap B(0, r)) \leq C\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} \leq \frac{1}{8}\tau_3 r^2.$$

On a alors pour $z \in Z(x, r)$,

$$d(z, K) \leq d(z, y) + d(y, K)$$

avec y un point de $F(x, r)$ tel que $d(z, F(x, r)) = d(z, y)$. Si $\tau_1 \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ on peut supposer que $F(x, r) \subset \{y; d(y, Z) \leq r\frac{\varepsilon'}{2}\}$. Donc $d(z, y) \leq r\frac{\varepsilon'}{2}$. Montrons que $d(y, K) \leq r\frac{\varepsilon'}{2}$. On raisonne par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, alors $K \cap B(y, r\frac{\varepsilon'}{2}) = \emptyset$. Or l'ensemble $F(x, r)$ est inclus dans $T := \{y; d(y, P) \leq r\varepsilon'\}$. Soient A^k les composantes connexes de $B(y, r\frac{\varepsilon'}{2}) \setminus T$. Alors $F(x, r)$ sépare les A^k dans $B(y, r\frac{\varepsilon'}{2})$. Or la plus petite surface ayant cette propriété est un cône de type \mathbb{P} , Y ou T d'aire au moins égale à $C\varepsilon'^2 r^2$ où C est une constante universelle. Or $H^2(F(x, r) \setminus K) \leq \tau_3 r^2$. Donc si τ_3 est suffisamment petit devant ε' ce n'est pas possible. Ce qui prouve que $d(y, K) \leq \frac{\varepsilon'}{2}$. Donc finalement

$$D_{x,r}(K, P) \leq \varepsilon'$$

et le théorème 1.1 de [DPT] nous dit que K contient l'image d'un plan par un homéomorphisme de $B(x_0, \frac{1}{10}r_0)$ vers $B(x_0, \frac{1}{5}r_0)$. Ce qui prouve que K sépare bien D^+ et D^- dans $B(x_0, \frac{1}{10}r_0)$. \square

Maintenant voici le théorème clé de la thèse.

Théorème 2.61. *Il existe un ε tel que ce qui suit est vrai. Pour tout (u, K) , minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et de fonction jauge h , pour tout $x \in K$ et r tel que $B(x, r) \subset \Omega$ et*

$$\omega_2(x, r) + \beta(x, r) + J(x, r)^{-1} + h(r) \leq \varepsilon$$

ou le cône qui réalise l'inf dans $\beta(x, r)$ est un cône Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} centré en x . Alors il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ qui envoie $B(x, C_{10}10^{-6}r)$ dans $B(x, C_{10}10^{-6}r)$ tel que $K \cap B(x, C_{10}10^{-6}r) = \phi(Z)$.

Preuve : On va se servir des résultats sur les ensembles minimaux des articles [DAV06] et [DPT]. En effet, si on combine la fin de la preuve de [DAV06] page 67 (inégalité 11.5) avec la section 10 de [DPT] on obtient le théorème suivant sur les ensembles minimaux :

Théorème 2.62. [DAV07] *Soit E un ensemble presque minimal réduit avec fonction jauge $h(r) = Cr^\alpha$ et soit $x \in E$. Alors il existe un ε_1 tel que si*

$$f(r_0) = \theta(r_0) - d(0) \leq \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad h_1(r_0) \leq \varepsilon_1 \quad (2.89)$$

alors il existe un cône minimal Z centré en x du type défini par $d(x)$ et un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$, de $B(x, 10^{-6}r)$ vers $B(x, 10^{-5}r)$ tel que $E \cap B(x, 10^{-6}r) = \Phi(Z) \cap B(x, 10^{-6}r)$

Rappelons que

$$f(r) = \theta(r) - \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)$$

avec

$$\theta(r) = r^{-2}H^2(E \cap B(x, r)).$$

La limite en 0 de θ existe car E est presque minimal (voir 2.3 de [DAV07]).

Le théorème 2.62 n'est pas explicitement énoncé comme tel dans les articles [DAV07] et [DPT]. Mais il s'en déduit en regardant la preuve.

En effet, sous les hypothèses du théorème d'après l'inégalité (11.5) de [DAV07], il existe $C > 0$ et $b > 0$ tels que

$$\beta_0(y, r) \leq Cr^b \quad \text{pour } y \in E \cap B(x, 10^{-4}r) \quad \text{et } 0 < r < 10^{-4}r$$

ensuite la section 10 de [DPT] permet de conclure. Donc pour montrer le théorème 2.1 il suffit de montrer que $K \cap B(x, \frac{1}{10}r)$ est un ensemble presque minimal et que K vérifie également (2.89). Or si ε est choisit assez petit (plus petit que τ'_4), toutes les quantités ω , β , J^{-1} et h vérifient les hypothèses de la proposition 2.59. De plus d'après la proposition 2.52, m est aussi plus petit que τ_2 . Donc les propositions précédentes s'appliquent.

Par le corollaire 2.60, on sait donc que $F = K$ dans $K \cap B(x, \frac{1}{10}r)$. Donc on peut appliquer la proposition 2.55 directement sur K (à la place de F) et les décroissances de ω et m obtenus

dans la proposition 2.59 montrent que finalement K est un ensemble presque minimal dans $B(x, C_{10}r)$ avec comme fonction jauge

$$\hat{h}(t) := C\left(\frac{t}{r}\right)^b + C\tilde{h}(t).$$

Il reste donc à montrer que l'on a bien (2.89). Pour cela il suffit d'appliquer le même raisonnement que pour montrer le lemme 2.48. C'est à dire qu'on utilise le lemme 2.44 pour trouver un point x du même type que le cône Z qui définit la fonction densité f , puis on utilise le même compétiteur L de la preuve du lemme 2.48 c'est à dire $Z \cup M$ où M un petit mur. On en déduit ainsi une majoration de f par β . Donc si les τ_i sont suffisamment petits devant ε' , (2.89) est vérifié ce qui clôture la preuve du théorème. \square

Maintenant nous voulons prouver que les conditions sur J et ω_2 peuvent être omises dans les hypothèses du théorème 2.61 si on suppose que C et ε sont légèrement plus petits. Pour commencer, on doit utiliser le lemme suivant.

Lemme 2.63. *Il existe des constantes absolues ε_3 et δ_1 telles que si $x \in K$, $B(x, r) \subset \Omega$,*

$$\omega_2(x, r) + h(r) + \beta(x, r) \leq \varepsilon_3$$

alors $J(x, r) \geq \delta_1$.

Preuve : La preuve est similaire au lemme 8 page 365 et la proposition 10 page 297 de [DAV05]. La généralisation de ces lemmes en dimension supérieure ne pose pas de problème majeur de la même manière que les lemme 2.26, lemme 2.29 et lemme 2.30 ont pu être prouvés. \square

A propos de l'énergie normalisée on a aussi le résultat suivant qui provient d'un argument de limite par explosion. On pourra trouver un résultat similaire mais énoncé en dimension 2 uniquement dans [DAV05] page 504 lemme 3. Rappelons que $D_{x,r}$ désigne la distance de Hausdorff normalisée définie en (6).

Lemme 2.64. *Pour tout $\delta_2 > 0$ il existe des constantes positives ε_4 et a_0 avec les propriétés suivantes. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans Ω avec fonction jauge h . Soit $x \in K$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset \Omega$. On suppose que $h(r) \leq \varepsilon_4$ et qu'il existe un cône Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} centré en x tel que*

$$D_{x,r}(K, Z) \leq \varepsilon_4.$$

Alors

$$\omega_2(x, a_0r) \leq \delta_2.$$

Preuve : La preuve n'est pas difficile. Elle est identique au lemme 3 du chapitre 69 de [DAV05]. L'idée est de raisonner par l'absurde et par compacité. Si ce n'est pas vrai alors

on peut construire une suite de minimiseurs qui tend vers un minimiseur global dans \mathbb{R}^3 dont l'ensemble singulier est un cône minimal (comme on a pris la distance bilatérale $D_{x,r}$ la limite est bien égale au cône et pas simplement contenue dans un cône). Dans ce cas on sait qu'à la limite, l'énergie normalisée est nulle car u est localement constante, ce qui conduit à la contradiction souhaitée. \square

Nous pouvons maintenant énoncer quelques variantes du théorème 2.61.

Théorème 2.65. *Il existe des constantes positives ε et $c < 1$ telles que ce qui suit est vrai. Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h , soit $x \in K$ et r tels que $B(x, r) \subset \Omega$ et*

$$\omega_2(x, r) + h(r) \leq \varepsilon.$$

Supposons de plus qu'il existe un cône Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} centré en x tel que

$$\sup_{x \in K \cap B(x, r)} \frac{1}{r} d(x, Z) \leq \varepsilon.$$

Alors il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, cr)$ vers $B(x, 10cr)$ tel que $K \cap B(x, cr) = \phi(Z) \cap B(x, cr)$.

Preuve : Nous devons contrôler le saut normalisé pour ensuite appliquer le théorème 2.61. Tout d'abord, si ε est assez petit devant ε_3 on peut utiliser le lemme 2.63 et obtenir que

$$J(x, r) \geq \delta_1$$

pour un certain $\delta_1 > 0$. Puis par la démonstration des lemmes 2.29 et 2.30 on a pour $r' \leq r$

$$J(x, r') \geq \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{1}{2}} [J(x, r) - \omega_2(x, r)]$$

Si ε est assez petit devant δ_1 , la quantité $J(x, r) - \omega_2(x, r)$ est positive et si on choisit r' judicieusement, et si ε est assez petit devant $\frac{r}{r'}$, on en déduit que

$$J(x, r')^{-1} \leq \bar{\varepsilon}$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la constante du théorème 2.61.

Maintenant comme ε est toujours aussi petit que l'on veut, on peut supposer que le cône dans $\beta(x, r')$ est toujours centré près de x et aussi que

$$\beta(x, r') + J(x, r')^{-1} + \omega_2(x, r') + h(r') \leq \bar{\varepsilon}.$$

Donc nous pouvons appliquer le théorème 2.61 dans $B(x, r')$ ce qui achève la preuve. \square

Voici un autre énoncé où il n'y a plus de conditions sur $\omega_2(x, r)$ et $J^{-1}(x, r)$ mais uniquement une condition géométrique.

Théorème 2.66. *Il existe des constantes positives ε et $c < 1$ telles que ce qui suit est vrai. Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h , soit $x \in K$ et r tels que $B(x, r) \subset \Omega$ et $h(r) \leq \varepsilon$. Supposons de plus qu'il existe un cône Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} centré en x tel que*

$$D_{x,r}(Z, K) \leq \varepsilon$$

($D_{x,r}$ est comme d'habitude la distance normalisée bilatérale). Alors il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, cr)$ vers $B(x, 10cr)$ tel que $K \cap B(x, cr) = \phi(Z) \cap B(x, cr)$.

Preuve : Nous devons contrôler le saut normalisé et l'énergie normalisée pour ensuite appliquer le théorème 2.61. Tout d'abord, si ε est assez petit on peut utiliser le lemme 2.63 et obtenir que

$$J(x, r) \geq \delta_1$$

pour un certain $\delta_1 > 0$. On applique ensuite le lemme 2.64, avec $\delta_2 < \frac{1}{10}\delta_1$, et en supposant que $\varepsilon < \varepsilon_3$, pour obtenir un certain a_0 qui dépend de δ_1 pour lequel

$$\omega_2(x, a_0r) \leq \delta_2 < \frac{1}{10}\delta_1.$$

Puis par les lemmes 2.29 et 2.30 on a pour $r' \leq r$

$$J(x, r') \geq \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{1}{2}} [J(x, r) - \omega_2(x, r')] \geq \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{9}{10}\delta_1\right]$$

Donc si on choisit $r' < a_0r$ suffisamment petit, et si ε est assez petit devant $\frac{r}{r'}$ on en déduit que

$$J(x, r')^{-1} \leq \bar{\varepsilon}$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la constante du théorème 2.61. De plus si δ_2 est choisi suffisamment petit en fonction de $\bar{\varepsilon}$ et r' on a

$$\omega_2(x, r') \leq \bar{\varepsilon}.$$

Maintenant comme ε est toujours aussi petit que l'on veut, on peut supposer que le cône Z est toujours centré près de x et

$$\beta(x, r') + J(x, r')^{-1} + \omega_2(x, r) + h(r') \leq \bar{\varepsilon}.$$

Donc nous pouvons appliquer le théorème 2.61 dans $B(x, r')$ ce qui achève la preuve. \square

En terme de fonctionnelle J nous obtenons l'énoncé suivant.

Corollaire 2.67. *Il existe des constantes positives ε et c telles que ce qui suit est vrai. Soit $g \in L^\infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Il existe \tilde{r} qui dépend uniquement de $\|g\|_\infty$ tel que pour toute paire $(u, K) \in \mathcal{A}$ qui minimise la fonctionnelle*

$$J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + H^2(K),$$

pour tout $x \in K$ et $r < \tilde{r}$ tel qu'il existe un cône Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} centré en x avec

$$D_{x,r}(K, Z) \leq \varepsilon$$

il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, Cr)$ vers $B(x, 10Cr)$ tel que $K \cap B(x, Cr) = \phi(Z) \cap B(x, 10Cr)$.

Preuve : On a vu dans l'introduction de la thèse que (u, K) est un minimiseur de Mumford-Shah avec fonction jauge

$$h(r) = C_N \|g\|_\infty^2 r$$

où C_N dépend uniquement de la dimension. On obtient donc la conclusion voulue en appliquant le théorème 2.66 dans $B(x, r)$ si on choisit

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{2C_N \|g\|_\infty^2}$$

où $\tilde{\varepsilon}$ est la constante dans le théorème 2.66. □

Remarque 2.68. Comme K est Alfors-régulière et uniformément rectifiable, on peut trouver une tangente approchée presque partout sur K et pour presque tout point il existe un hyperplan tel que la distance bilatérale à cet hyperplan soit petite. Ainsi, le théorème 2.65 implique en particulier que K est C^1 presque partout, et ceci est vrai en toute dimension $N \geq 2$.

Maintenant, dans le but d'énoncer un théorème avec uniquement une condition sur l'énergie nous allons prouver le lemme suivant (comme d'habitude, D_H désigne la distance de Hausdorff).

Lemme 2.69. *Pour tout $\delta_4 > 0$ il existe un rayon $R > 1$ et il existe $\delta_3 > 0$ tels que pour tout minimiseur de Mumford-Shah (u, K) dans $B(x, R) \subset \mathbb{R}^3$ tel que $x \in K$ et*

$$\omega_2(x, R) + h(R) \leq \delta_3,$$

il existe un cône minimal Z de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} qui contient x et tel que

$$D_H(K \cap B(0, 1), Z \cap B(0, 1)) \leq \delta_4.$$

Preuve : On raisonne par compacité. Si ce n'est pas vrai, alors il existe un $\delta_4 > 0$ tel que pour tout $n > 0$, il existe un minimiseur de Mumford-Shah (u_n, K_n) dans $B(x, n)$ tel que

$$\omega_2(x, n) + h(n) \leq \frac{1}{n^3} \tag{2.90}$$

et tel que

$$\sup_Z D_H(K_n \cap B(0, 1), Z \cap B(0, 1)) \geq \delta_4 \tag{2.91}$$

où le supremum est pris sur tous les cônes minimaux qui contiennent x . On fait maintenant tendre n vers l'infini. Comme (u_n, K_n) est une suite de minimiseurs de Mumford-Shah, avec une fonction jauge commune $h_l(r) := \sup\{h(nr); n \geq l\}$, et que

$$\int_{B(x,n)} |\nabla u|^2 \leq r \frac{1}{n} \leq C$$

d'après la proposition 37.8 de [DAV05] on peut extraire une sous-suite telle que (u_{n_k}, K_{n_k}) tende vers (u, K) dans \mathbb{R}^3 au sens suivant : $D_H(K_{n_k} \cap A, K \cap A)$ tend vers 0 pour tout compact A inclus dans \mathbb{R}^3 . De plus pour toute composante connexe Ω de $\mathbb{R}^3 \setminus K$ et pour tout compact A de Ω , il existe une suite a_k telle que $\{u_{n_k} - a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^1(A)$. Puis, en utilisant (2.90) et en utilisant la proposition 37.18 de [DAV05], on sait que pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^3$,

$$\int_{B \setminus K} |\nabla u|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{B \setminus K_{n_k}} |\nabla u_{n_k}|^2 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} r \frac{1}{n_k} = 0.$$

Donc $\nabla u = 0$ et u est localement constante. Enfin, le théorème 38.3 de [DAV05] nous dit que la limite (u, K) est un minimiseur de Mumford-Shah avec fonction jauge $h_l(4r)$. Comme ceci est vrai pour tout l , et que $\sup_l h_l = 0$ on peut supposer que (u, K) est un minimiseur de Mumford-Shah avec fonction jauge nulle, et u localement constante. Mais alors dans ce cas on sait d'après [DAV07] que K est un cône minimal de type \mathbb{P} , \mathbb{Y} ou \mathbb{T} , et comme pour tout n , K_n contient x , c'est encore vrai à la limite et donc K contient x . De plus il existe un certain rang L tel que pour tout $k \geq L$ on a $D_H(K \cap B(0, 1), K_{n_k} \cap B(0, 1)) \leq \frac{\delta_4}{2}$ ce qui contredit (2.91) et achève la preuve du lemme. \square

Le lemme 2.69 implique le théorème suivant.

Théorème 2.70. *Il existe des constantes positives ε et $c < 1$ telles que ce qui suit est vrai. Soit (u, K) un minimiseur de Mumford-Shah dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec fonction jauge h , soit $x \in K$ et r tels que $B(x, r) \subset \Omega$ et*

$$\omega_2(x, r) + h(r) \leq \varepsilon.$$

Alors il existe un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, cr)$ vers $B(x, 10cr)$ et il existe un cône minimal Z tel que $K \cap B(x, cr) = \phi(Z) \cap B(x, cr)$.

Preuve : On note $\bar{\varepsilon}$ la constante du théorème 2.65. On applique le lemme 2.69 a (u, K) avec $\delta_4 = \bar{\varepsilon}$. On sait qu'il existe une constante $c < 1$ et il existe donc un cône Z qui contient x tel que

$$D_{x,cr}(Z, K) \leq \bar{\varepsilon}.$$

Quitte à diviser la constante c par 8 on peut supposer que le centre du cône est dans $\frac{1}{4}B(x, cr)$. Donc il existe $y \in B(x, c\frac{r}{2})$ tel que, quitte à diminuer encore ε ,

$$D_{y,c\frac{r}{2}}(Z, K) + \omega_2(y, c\frac{r}{2}) + h(r) \leq \bar{\varepsilon}$$

et donc on peut appliquer le théorème 2.66 dans $B(y, c\frac{r}{2})$, ce qui termine la preuve. \square

De la même manière que pour le corollaire 2.67, en terme de fonctionnelle J on trouve l'énoncé suivant.

Corollaire 2.71. *Il existe des constantes positives ε et c telles que ce qui suit est vrai. Soit $g \in L^\infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Il existe \tilde{r} qui dépend uniquement de $\|g\|_\infty$ tel que pour toute paire $(u, K) \in \mathcal{A}$ qui minimise la fonctionnelle*

$$J(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + H^2(K),$$

pour tout $x \in K$ et $r < \tilde{r}$ tel que

$$\omega_2(x, r) \leq \varepsilon$$

il existe un cône minimal Z et un difféomorphisme ϕ de classe $C^{1,\alpha}$ de $B(x, Cr)$ vers $B(x, 10Cr)$ tel que $K \cap B(x, Cr) = \phi(Z) \cap B(x, 10Cr)$.

Annexe A

Une majoration du “Y-tilt”

Introduction

Lorsque l’on étudie la régularité de certaines surfaces minimales, on est souvent amené à estimer la différence des normales à la surface étudiée, par rapport aux normales du cône minimal associé. Par exemple dans [GIO61], E. De Giorgi considère pour E un ensemble de périmètre fini la quantité suivante :

$$\sigma(x, r) := \int_{B(x,r)} |D\mathbf{1}_E| - \left| \int_{B(x,r)} D\mathbf{1}_E \right|$$

Il montre que si E est une surface minimale et que $\sigma(x, r_0)$ est assez petite pour un certain r_0 , alors $\sigma(x, r)$ décroît comme une puissance de r pour $r < r_0$ qui tend vers 0. Ce phénomène conduit au théorème de régularité pour les surfaces minimales (voir [GIO61] ou [GIU84] p.97). Or grâce aux propriétés sur le bord réduit d’un ensemble de périmètre fini (noté $\mathcal{F}E \subset \partial E$) on peut écrire $\sigma(x, r)$ sous la forme

$$\sigma(x, r) = r^{1-n} \left(H^{N-1}(B(x, r) \cap \mathcal{F}E) - \left| \int_{B(x,r) \cap \mathcal{F}E} \nu(y) dH^{N-1}(y) \right| \right)$$

ce qui montre que σ mesure combien la direction de la normale $\nu(y)$ varie dans la boule $B(x, r)$.

Ici, on s’intéresse à des minima un peu différents des surfaces minimales (minimiseurs de Mumford-Shah), mais suffisamment liés pour qu’il y ait bon espoir d’adapter certains arguments et certaines techniques pour obtenir de la régularité.

Le théorème de régularité de L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, fait intervenir un objet essentiel dans leur étude appelé ”tilt”. Le tilt est encore un autre exemple où mesurer la

variations des normales à une surface s’avère essentiel pour étudier la régularité. Le tilt associé à une surface K par rapport à l’hyperplan π dans la boule $B(x, r)$ est la quantité suivante :

$$\int_K |\pi_z - \pi|^2 dH^{N-1}(z)$$

où π_z et π sont les matrices des projections orthogonales sur le plan tangent à K au point z (pour π_z) et un certain plan fixe (pour π). Une bonne partie de la preuve de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara, repose sur une estimation convenable du tilt et de sa décroissance en fonction d’autres quantité que l’on contrôle également.

Un autre lemme qui contrôle les normales ou les tangentes d’un ensemble minimal est le lemme 10.26 de [DAV07]. Dans ce lemme on considère E un ensemble presque minimal qui contient 0 et on note $A := B(0, r_0) \setminus B(0, r_0/3)$. Pour $x \in A$ on note également $\alpha(x) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l’angle entre le rayon $[0, x]$ et le plan tangent à E au point x . Alors on a la majoration suivante :

$$\int_{x \in E \cap A} [1 - \cos \alpha(x)] dH^2(x) \leq Cr_0^2 [f(r_0) + h_1(2r_0)]. \quad (\text{A.1})$$

La fonction f est le défaut de densité (définie en (2.58)) et $h_1 := \int_0^r h(2t) \frac{dt}{t}$ où h est la fonction jauge associée à E .

Il n’est pas très facile de définir un analogue au tilt dans le cas où l’ensemble K ne ressemble plus à hyperplan. Cependant, on peut encore obtenir une estimation de la variation des normales à la surface. C’est ce qui fait l’objet de cet Annexe. Voici l’énoncé du théorème principal.

Théorème A.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 et soit (u, K) un minimiseur réduit de Mumford-Shah dans Ω avec fonction jauge h . On suppose qu’il existe un $x \in K$, un $r > 0$, ainsi qu’un cône minimal Z de type Y centré en $x \in K$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ et*

$$\sup_{y \in K \cap B(x, r)} \frac{1}{r} d(y, Z) \leq \varepsilon.$$

On note π_i les trois demis plan qui composent le Y. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on désigne par ν_i la normale à Y sur le plan π_i correspondant. Alors il existe trois ensembles F_1, F_2 et F_3 tels que

- i) $H^2(F_i \cap F_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
- ii) $\frac{1}{r^2} \left(H^2(K) - H^2(K \cap \bigcup_{i=1}^3 F_i) \right) \leq C \left(\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + \omega_2(x, r) + \varepsilon + h(r) \right)$
- iii) $\frac{1}{r^2} \left(\sum_{i=1}^3 \int_{F_i} 1 - \langle \nu_i, \nu(z) \rangle dz \right) \leq C \left(\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + \omega_2(x, r) + \varepsilon + h(r) \right)$

On utilise les mêmes notations que dans les sections précédentes pour l'énergie normalisée $\omega_2(x, r)$ (voir par exemple (2.3)) et le saut normalisé $J(x, r)$ (voir (2.30)).

La preuve repose essentiellement sur l'argument de "paired calibrations" dû à G. Lawlor et F. Morgan. En effet, dans [LM] ils montrent à l'aide d'une intégration par partie, que la variation des normales avec cône s'exprime en fonction du défaut de surface par rapport à la surface du cône minimal correspondant. C'est ce que nous allons utiliser ici. L'idée de la preuve est simple mais adapter l'argument à des minimiseurs de Mumford-Shah nécessite quelques considérations topologiques. Une grande partie des pages qui suivent est consacrée à trouver dans l'ensemble K , les ensembles F_i sur lesquels appliquer l'argument de G. Lawlor et F. Morgan. En outre dans [LM], on considère des surfaces dont l'intersection avec la sphère unité coïncide avec un cône minimal. Dans notre cas, on sait seulement que l'intersection avec la sphère unité est "proche" en distance d'un \mathbb{Y} . Cela occasionnera des problèmes supplémentaires.

Enfin, on peut imaginer un analogue au théorème A.1 concernant les cônes de type \mathbb{T} . La preuve fonctionnerait de la même manière.

Rappel sur les ensembles de périmètre fini

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Lebesgue mesurable. On dit que A est de périmètre fini si

$$P(A) := \sup \left\{ \int_A \operatorname{div} \varphi(x) dx; \varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^N)]^N \text{ et } \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$$

Autrement dit, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est une fonction de $BV(\mathbb{R}^N)$ et $P(A) = |D\mathbf{1}_A|(\mathbb{R}^N)$, où $|D\mathbf{1}_A|$ désigne la variation totale de la dérivée de $\mathbf{1}_A$, qui est une mesure finie (par définition car $\mathbf{1}_A$ est une fonction BV).

Pour un ensemble de périmètre fini, il existe plusieurs définitions du bord de l'ensemble, que l'on peut ranger par ordre croissant pour l'inclusion, du plus régulier au moins régulier. Le bord réduit est le bord sur lequel la normale existe en tout point et la formule de la divergence s'applique.

Dans la suite, A désigne un ensemble de périmètre fini.

Définition A.2 (Bord réduit). *On appelle bord réduit de A noté $\mathcal{F}A$, l'ensemble des points $x \in \operatorname{supp}|D\mathbf{1}_A|$ tel que la limite*

$$\nu_A(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D\mathbf{1}_\Omega(B_r(x))}{|D\mathbf{1}_A|(B_r(x))}$$

existe et satisfait $|\nu_A(x)| = 1$.

Par un théorème de De Giorgi on sait que $\mathcal{F}A$ est $(N-1)$ -rectifiable et $|D\mathbf{1}_A| = H^{N-1}|_{\mathcal{F}A}$. De plus le théorème de la divergence s’applique, c’est à dire que pour tout champ de vecteur $\varphi \in [C_0^1(\mathbb{R}^N)]^N$,

$$\int_A \operatorname{div} \varphi(x) dx = - \int_{\mathcal{F}A} \langle \nu_A(x), \varphi(x) \rangle dH^2(x).$$

Définition A.3 (Points de densité et bord essentiel). *Pour tout $t \in [0, 1]$ on note*

$$A^t = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|A \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} = t \right\}$$

et on appelle bord essentiel $\partial^* A = \mathbb{R}^n \setminus (A^1 \cup A^0)$.

Théorème A.4 (Federer).

$$\mathcal{F}A \subset A^{\frac{1}{2}} \subset \partial^* A$$

et $H^2(A \setminus (A^0 \cup A^1 \cup \mathcal{F}A)) = 0$.

Remarque A.5. Si A est un ouvert de périmètre fini et que ∂A désigne le bord topologique de A , c’est à dire $\partial A = \overline{A} \setminus A$, alors $\partial^* A \subset \partial A$ mais l’inclusion est souvent stricte. Par exemple si on considère dans \mathbb{R}^2 l’ensemble $A := B(0, 1) \setminus \mathcal{D}$ où $\mathcal{D} := \{(0, y); y > 0\}$. Alors $\partial A = \partial B(0, 1) \cup (\mathcal{D} \cap B(0, 1))$. Or tous les points de $\mathcal{D} \cap B(0, 1)$ sont de densité 1, donc $\partial^* A = \partial B(0, 1)$. Donc les bords essentiels et bords réduit ont de bonnes propriétés de régularité au niveau de la théorie géométrique de la mesure, mais malheureusement n’ont pas de bonnes propriétés topologiques.

Proposition A.6. *Si A est un ouvert de \mathbb{R}^N tel que $H^{N-1}(\partial A) < +\infty$, alors A est un ouvert de périmètre fini et*

$$|D\mathbf{1}_A| \leq H^{N-1}|_{\partial A}.$$

Pour une preuve de la proposition A.6 voir [GIU84].

On va finir ce paragraphe avec un petit lemme qui sera utile dans la suite et qui dit que l’intersection des bords de trois ouverts de périmètre fini est toujours de mesure H^{N-1} nulle.

Lemme A.7. *Soit trois ouverts de périmètre fini dans \mathbb{R}^N notés A_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$, connexes et disjoints deux à deux. Alors*

$$H^{N-1}\left(\bigcap_{i=1}^3 \partial^* A_i\right) = 0$$

Preuve : Comme pour tout i on sait par le théorème A.4 que $H^{N-1}(\partial^* A_i \setminus \mathcal{F}A_i) = 0$, il suffit de prouver que $H^{N-1}(\cap_{i=1}^3 \mathcal{F}A_i) = 0$. On va montrer que cette intersection est vide. En effet, soit $x \in \cap_{i=1}^3 \mathcal{F}A_i$. Alors par le théorème A.4 on sait que $x \in \cap A_i^{\frac{1}{2}}$ et par définition de $A_i^{\frac{1}{2}}$ on sait que pour tout i ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|A_i \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un r_ε tel que pour tout i ,

$$\left| \frac{|A_i \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$$

ce qui est absurde pour ε assez petit car les ouverts A_i sont disjoints et au nombre de 3.

□

Preuve du théorème

On aura besoin de l'estimation suivante.

Lemme A.8. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 et soit (u, K) un minimiseur réduit de Mumford-Shah dans Ω avec fonction jauge h . On suppose qu'il existe un $x \in K$, un $r > 0$, ainsi qu'un cône minimal $Y(x)$ de type \mathbb{Y} centré en $x \in K$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ et*

$$\sup_{z \in K \cap B(x, r)} \frac{1}{r} d(z, Y(x)) \leq \varepsilon.$$

Alors on a l'estimation

$$H^2(K \cap B(x, r)) - H^2(Y(x) \cap B(x, r)) \leq Cr^2 \omega_2(x, r) + C\varepsilon r^2 + r^2 h(r) \quad (\text{A.2})$$

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

$$T_n := \{z \in B(x, r); d(z, Y(x)) \leq nr\varepsilon\}.$$

Soit Φ un difféomorphisme de $B(x, r) \setminus T_2$ dans $B(x, r) \setminus Y(x)$ tel que $\Phi = Id$ sur $B(x, r) \setminus T_4$ et tel que $\|D\Phi^{-1}\| + \|D\Phi\| + |J_{\Phi^{-1}}| + |J_\Phi| \leq 100$. On définit alors \tilde{u} et \tilde{K} dans la boule $B(x, r)$ par

$$\tilde{u} = u \circ \Phi^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{K} = (Y(x) \cap B(x, r)) \cup (\partial B(x, r) \cap T_4)$$

et bien sûr $(\tilde{u}, \tilde{K}) := (u, K)$ hors de $B(x, r)$. Ainsi, (\tilde{u}, \tilde{K}) est un compétiteur pour (u, K) et donc

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)\setminus K} |\nabla u|^2 dx + H^2(K \cap B(x, r)) \\ \leq \int_{B(x,r)\setminus Y(x)} |\nabla \tilde{u}|^2 dx + H^{N-1}(\tilde{K} \cap B(x, r)) + r^2 h(r) \\ \leq C \int_{B(x,r)\setminus T_4} |\nabla u|^2 dx + H^2(Y(x) \cap B(x, r)) + Cr^2 \varepsilon + r^2 h(r) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On se place toujours sous les hypothèses du théorème. On note π_i les trois demis plan qui composent $Y(x)$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on désigne par ν_i la normale à Y sur le plan π_i correspondant.

Soit D_i trois petites boules contenue chacune dans l'une des composantes connexes de $B(x, r)\setminus T_1$. On appelle maintenant O_i la composante connexe de $B(x, r)\setminus F$ qui contient D_i , où F est l'ensemble obtenu dans le lemme 2.26. On appelle également $G_i := \partial^* O_i \cap \partial^* O_i^c$. Notons que d'après le lemme A.7 on sait que $H^2(\cap_{i=1}^3 G_i) = 0$.

Lemme A.9. *Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a*

$$H^2(G_i) \geq \frac{2}{3} H^2(Y(x) \cap B(x, r)) - Cr^2 \varepsilon$$

où C est une constante universelle.

Preuve : Dans toute la preuve, l'indice i est fixé. Parmi les trois demi disques qui composent $Y(x)$, il en existe un noté $\tilde{\pi}_i$ qui sépare les deux autres boules D_j ($j \neq i$). On appelle π_i le plan qui contient $\tilde{\pi}_i$ et on considère $H := \pi_i \cap (\overline{B}(0, r)\setminus O_i)$ et $S := (\partial O_i \cap \partial O_i^c) \cup H$. Notons que H est un morceau de plan, donc une surface régulière. Donc par le lemme A.7, $H^2(G_i \cap H) = 0$ et $G_i \subset \partial O_i \cap \partial O_i^c$. De plus, $B(x, r)\setminus S$ est composé d'exactly trois composantes connexes, dont O_i . Notons les deux autres A_2 et A_3 . On définit également $A_1 := O_i$. Chaque ensemble A_i est un ouvert de périmètre fini. Pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$ on note $L_j := \partial^* A_j \cap \partial^* A_{\sigma(j)}$ où σ est la permutation $(1, 2, 3)$. Notons que L_2 n'est autre que H , que $G_i = L_1 \cup L_3$ et que les L_i sont disjoints à H^2 mesure nulle près. On oriente chaque L_j avec la normale sortante à A_j . On peut supposer que l'axe de $Y(x)$ est vertical. On choisit des points a_1, a_2, a_3 sur le cercle $\partial B(0, \frac{2}{3}) \cap \{z = 0\}$ de sorte que les

vecteurs $a_k - a_j$ soient unitaires, orthogonaux à la face de $Y(x)$ qui les sépare, et tels que $a_j \in A_j$ (ou presque). Alors

$$\begin{aligned} H^2\left(\bigcup_{j=1}^3 L_j\right) &= \sum_{j=1}^3 \int_{L_j} dH^2 \geq \sum_{j=1}^3 \int_{L_j} \langle a_j - a_{\sigma(j)}, \nu(y) \rangle dH^2(y) \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\partial^* A_j \setminus \partial B(x,r)} \langle a_j, \nu(y) \rangle dH^2(y) \end{aligned}$$

car $L_j \cup L_{\sigma^2(j)} = \partial^* A_j \setminus \partial B(x,r)$ (avec les normales positives ou négatives). Puis par une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \int_{\partial^* A_j \setminus \partial B(x,r)} \langle a_j, \nu(y) \rangle dH^2(y) &= \sum_{j=1}^3 \int_{\partial^* A_j \cap \partial B(x,r)} \langle a_j, \nu(y) \rangle dH^2(y) \\ &\geq \sum_{j=1}^3 \int_{R_j \cap \partial B(x,r)} \langle a_j, \nu(y) \rangle dH^2(y) - Cr^2\varepsilon \\ &\geq H^2(Y(x)) - Cr^2\varepsilon. \end{aligned}$$

où les R_j sont les composantes connexes de $B(x,r) \setminus Y(x)$, et la dernière inégalité vient d'une seconde intégration par partie sur $Y(x)$ cette fois. On en déduit

$$\begin{aligned} H^2(G_i) = H^2(L_1 \cup L_2) &= H^2(\cup_j L_j) - H^2(H) \\ &\geq H^2(Y(x) \cap B(x,r)) - H^2(H) - Cr^2\varepsilon \end{aligned} \tag{A.3}$$

Or

$$H^2(H) \leq \frac{1}{3} H^2(Y(x) \cap B(x,r)) + Cr^2\varepsilon$$

donc finalement

$$H^2(G_i) \geq \frac{2}{3} H^2(Y(x) \cap B(x,r)) - Cr^2\varepsilon.$$

□

On note maintenant $F_i := G_i \cap G_{\sigma(i)}$. D'après le lemme A.7 on sait que si $i \neq j$ on a

$$H^2(F_i \cap F_j) = 0.$$

On considère également

$$Z_i := G_i \setminus (F_i \cup F_{\sigma^2(i)}).$$

Alors

Lemme A.10.

$$H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i\right) \leq Cr^2 \left[\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + \omega_2(x, r) + \varepsilon + h(r) \right].$$

Preuve : Pour tout i on peut écrire G_i sous la forme

$$G_i = Z_i \cup F_i \cup F_{\sigma^2(i)}$$

où les unions sont disjointes à mesure H^2 nulle près. De plus comme $\bigcup_{i=1}^3 G_i \subset F$ on peut écrire

$$\begin{aligned} 2H^2(F) &\geq 2H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 G_i\right) \\ &= 2H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 (Z_i \cup F_i \cup F_{\sigma^2(i)})\right) \\ &= 2H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i \cup \bigcup_{i=1}^3 F_i\right) \\ &= 2H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i\right) + 2H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 F_i\right) \\ &= H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i\right) + \sum_{i=1}^3 H^2(Z_i) + 2 \sum_{i=1}^3 H^2(F_i) \\ &= H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i\right) + \sum_{i=1}^3 (H^2(Z_i) + H^2(F_i) + H^2(F_{\sigma^2(i)})) \\ &= H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i\right) + \sum_{i=1}^3 H^2(G_i) \\ &\geq H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i\right) + 3 \times \frac{2}{3} H^2(Y(x) \cap B(x, r)) - Cr^2\varepsilon \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 Z_i\right) &\leq 2H^2(F) - 2H^2(Y(x) \cap B(x, r)) + Cr^2\varepsilon \\ &\leq 2(H^2(F) - H^2(K) + H^2(K) - H^2(Y(x) \cap B(x, r))) + Cr^2\varepsilon \\ &\leq Cr^2 \left[\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + \omega_2(x, r) + \varepsilon + h(r) \right] \end{aligned}$$

la dernière inégalité venant du lemme A.8 et de la proposition 2.26.

□

On peut maintenant démontrer le théorème principal dont nous rappelons l'énoncé ici.

Théorème A.11. *Soit (u, K) un minimiseur réduit de Mumford-Shah dans Ω avec fonction jauge h où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 . On suppose qu'il existe un $x \in K$, un $r > 0$, ainsi qu'un cône minimal Z de type \mathbb{Y} centré en $x \in K$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ et*

$$\sup_{y \in K \cap B(x, r)} \frac{1}{r} d(y, Z) \leq \varepsilon$$

On note π_i les trois demi plan qui composent le \mathbb{Y} . Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on désigne par ν_i la normale à Y sur le plan π_i correspondant. Alors il existe trois ensembles F_1, F_2 et F_3 tels que

$$\begin{aligned} i) \quad & H^2(F_i \cap F_j) = 0 \quad \forall i \neq j \\ ii) \quad & \frac{1}{r^2} \left(H^2(K) - H^2\left(K \cap \bigcup_{i=1}^3 F_i\right) \right) \leq C \left(\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + \omega_2(x, r) + \varepsilon + h(r) \right) \\ iii) \quad & \frac{1}{r^2} \left(\sum_{i=1}^3 \int_{F_i} 1 - \langle \nu_i, \nu(z) \rangle dz \right) \leq C \left(\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + \omega_2(x, r) + \varepsilon + h(r) \right) \end{aligned}$$

Preuve : L'assertion *i)* est une conséquence du lemme A.7. On garde les mêmes notations que dans la preuve du lemme A.9.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 H^2(F_i) &\geq \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \langle a_i - a_{\sigma(i)}, \nu(z) \rangle dH^2(z) \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{F_i \cup F_{\sigma^2(i)}} \langle a_i, \nu(z) \rangle dH^2(z) \\ &\geq \sum_{i=1}^3 \int_{G_i} \langle a_i, \nu(z) \rangle dH^2(z) - \sum_{i=1}^3 \int_{Z_i} dH^2(z) \end{aligned}$$

Or par la formule de la divergence appliquée dans l'ouvert O_i on obtient

$$\int_{G_i} \langle a_i, \nu(z) \rangle dH^2(z) = - \int_{\partial B(x, r) \cap \partial O_i} \langle a_i, \nu(z) \rangle dH^2(z) \geq - \int_{\partial B(x, r) \cap R_i} \langle a_i, \nu(z) \rangle dH^2(z) - Cr^2 \varepsilon$$

où les R_i sont les composantes connexes de $\partial B(x, r) \setminus Y(x)$. Puis en appliquant la formule de la divergence cette fois ci dans les ensembles R_i on obtient

$$\sum_{i=1}^3 - \int_{\partial B(x, r) \cap R_i} \langle a_i, \nu(z) \rangle dH^2(z) = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial R_i \cap \partial R_{\sigma(i)}} \langle a_i - a_{\sigma(i)}, \nu(z) \rangle dH^2(z) = H^2(Y(x))$$

Donc finalement

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 H^2(F_i) &\geq \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \langle a_i - a_{\sigma(i)}, \nu(z) \rangle dH^2(z) \\ &\geq H^2(Y(x)) - Cr^2\varepsilon - \sum_{i=1}^3 H^2(Z_i) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} 1 - \langle \nu_i(z), \nu(z) \rangle dH^2(z) &\leq \left[\sum_i H^2(F_i) \right] - H^2(Y(x)) + Cr^2\varepsilon + \sum_{i=1}^3 H^2(Z_i) \\ &\leq H^2(F) - H^2(K) + H^2(K) - H^2(Y(x)) + Cr^2\varepsilon + \sum_{i=1}^3 H^2(Z_i) \\ &\leq Cr^2\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + Cr^2\omega_2(x, r) + Cr^2\varepsilon + r^2h(r) \end{aligned}$$

ce qui prouve iii). Enfin, comme les F_i sont H^2 -disjoints et contenus dans F on a

$$H^2\left(\bigcup_i F_i \setminus K\right) \leq H^2(F \setminus K) \leq Cr^2\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1}$$

la dernière inégalité provenant de la proposition (2.26). Donc en utilisant (A.4) on obtient

$$\begin{aligned} H^2\left(\bigcup_i F_i \cap K\right) &= H^2\left(\bigcup_i F_i\right) - H^2\left(\bigcup_i F_i \setminus K\right) \\ &\geq H^2(Y(x)) - Cr^2\varepsilon - \sum_{i=1}^3 H^2(Z_i) - Cr^2\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} \end{aligned}$$

donc finalement

$$\begin{aligned} H^2(K) - H^2\left(\bigcup_{i=1}^3 F_i \cap K\right) &\leq H^2(F) - H^2\left(K \cap \bigcup_i F_i\right) \\ &\leq Cr^2\omega_2(x, r)^{\frac{1}{2}} J(x, r)^{-1} + Cr^2\omega_2(x, r) + Cr^2\varepsilon + r^2h(r) \end{aligned}$$

ce qui prouve ii).

□

Remarque A.12. D’après le travail du chapitre 2 de la thèse, on sait que si K est assez proche d’un cône de type \mathbb{Y} , alors les quantités $J(x, r)^{-1}$, $\omega_2(x, r)$ et $\beta(x, r)$ sont croissantes. Donc le théorème A.11 montre en particulier que le “Y-tilt” est croissant.

Index

- Énergie normalisée, 87
- Bonnet (Argument de), 87
- Bord essentiel, 172
- Cône minimal, 25
- Calibration, 171
- Campanato (Espace de), 23
- Cheeger (Théorème de), 63
- Coaire, 19, 73
- Compétiteur topologique, 21
- Cone lisse fini, 38
- Cracktip, 32
- Dirichlet, 35
- Distance de Hausdorff, 98
- Dyadiques (cubes), 133
- Ensemble minimal, 142
- Fonctionnelle de Mumford-Shah, 14
- Fubini, 19
- Harmonique
 - Fonctions, 34
 - mesure, 48
- Hausdorff
 - dimension de, 19
 - distance de, 18, 27
 - mesure de, 18
- Homogène, 60
- Hypoelliptique, 51
- Intégration par partie, 39
- Isoperimétrique, 63
- Jean Taylor, 25, 84
- Laplacien sphérique, 50
- Mauvaise masse, 149
- Minimiseur
 - d'énergie, 36
 - Global, 22, 32
 - Mumford-Shah, 21
- Neumann, 35
- Orientation, 110
- Périmètre fini (ensemble), 171
- Parseval, 52
- Poincaré (inégalité de), 45
- Points de densité, 172
- Principe du maximum, 40
- Propriété du cône, 49
- Réduit, 22
- Réflexion (principe de), 58
- Recentrage (lemme de), 108
- Rectifiable, 19, 166
- Reifenberg, 27
- Saut normalisé, 125
- Stampacchia (Théorème de), 40
- Temps d'arrêt (construction), 134
- Tilt, 170
- Trace, 35
- Whitney
 - extension de, 112, 138, 154
 - famille de, 105, 106, 134

Bibliographie

- [ADA] ADAMS. *Sobolev Spaces*.
- [AFP00] L. AMBROSIO, N. FUSCO, and D. PALLARA. *Fonctions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, 2000.
- [AFP07] L. AMBROSIO, N. FUSCO, and D. PALLARA. Partial regularity of free discontinuity sets II. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.Sci.(4)*, 24, pages 39–62, 2007.
- [BAR06] A. EL BARAKA. Littlewood-Paley characterisation for Campanato spaces. *J. Funct. Spaces Appl.*, pages 193–220, 2006.
- [BB80] P. BÉRARD and G. BESSON. Spectres et groupes cristallographiques. II : Domaines sphériques. *Ann. Inst. Fourier 30, No.3*, pages 237–248, 1980.
- [BER] M. BERGER. *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer.
- [BON96] A. BONNET. On the regularity of edges in image segmentation. *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire, Vol 13, 4*, pages 485–528, 1996.
- [BRE] H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod.
- [CHE70] J. CHEEGER. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. *Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.*, pages 195–199, 1970.
- [DAU92] M. DAUGE. Neumann and mixed problems on curvilinear polyhedra. *Int. Equ. Op. The.*, 15, pages 227–261, 1992.
- [DAV96] G. DAVID. C^1 arcs for the minimizers of the mumford-shah functional. *SIAM J. Appl. Math.*, 56, pages 783–888, 1996.
- [DAV00] G. DAVID. *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaces*. Lecture Notes in Mathematics n°1465, Springer-Verlag, 2000.
- [DAV05] G. DAVID. *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*. Birkhäuser verlag, 2005.
- [DAV06] G. DAVID. Hölder regularity of two dimensional almost-minimal sets in \mathbb{R}^n . *Preprint Orsay*, 2006.
- [DAV07] G. DAVID. Epiperimetry and $C^{1+\alpha}$ -regularity for almost-minimal sets in \mathbb{R}^3 . *Preprint Orsay*, 2007.

- [DPT] G. DAVID, T. DE PAUW, and T. TORO. A generalisation of Reifenberg's theorem in \mathbb{R}^3 . *Preprint Orsay*.
- [DS91] G. DAVID and S. SEMMES. *Singular Integrals and rectifiable sets in \mathbb{R}^N* . Asterisque 193, Société mathématique de France, 1991.
- [FED69] H. FEDERER. *Geometric measure theory*. Springer Verlag, 1969.
- [GCL89] E. DE GIORGI, M. CARRIERO, and A. LEACI. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rational Mech. Anal.* 108, pages 195–218, 1989.
- [GIA] M. GIAQUINTA. *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic system*.
- [GIO61] E. DE GIORGI. *Frontiere orientate di misura minima*. Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa., Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1961.
- [GIU84] E. GIUSTI. *Minimal Surfaces and Functions of bounded Variation*. Monographs in Mathematics, Birkhäuser, 1984.
- [GM05] J.B. GARNETT and D.E. MARSHALL. *Harmonic Measure*. Cambridge university press, 2005.
- [GRI85] P. GRISVARD. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman, Monographs and studies in mathematics, 1985.
- [GT83] D. GILBARG and N.S. TRUDINGER. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 1983.
- [JON87] P. JONES. Square functions, cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure. *Proc. Conf. on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, El Escorial*, 1987.
- [KEL99] J.B. KELLER. Singularities at the tip of a plane angular sector. *J. Maths. Phys.*, 40 :1087–1092, 1999.
- [KEN] C.E. KENIG. Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems. *Regional Conference Series in Mathematics*, 83.
- [KLM05] H. KOCH, G. LEONI, and M. MORINI. On the optimal regularity of free boundary problems and a conjecture of De Giorgi. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 58 :1051–1076, 2005.
- [KMR] V.A. KOZLOV, V.G. MAZ'YA, and J. ROSSMANN. *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*. Mathematical Surveys and Monographs.
- [L99] J.C. LÉGER. Flatness and finiteness in the mumford-shah problem. *J. Math. Pures Appl.*, (9) 78, pages 431–459, 1999.
- [LB03] P. LÉVY-BRUHL. *Introduction à la théorie spectrale*. Dunod, 2003.
- [LEG] J.C. LEGER. Menger curvature and rectifiability. *Ann. of Math.* (2), 149.
- [LM] G. LAWLOR and F. MORGAN. Paired calibrations applied to soap films, immiscible fluids, and surfaces or networks minimizing other norms. *Pacific J. Math.*, 166.

- [LY] P. LI and S.T. YAU. Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold. *Pacific J. Math.*, 36.
- [MAT95] P. MATTILA. *Geometry of sets and measures in euclidian spaces*. Cambridge univerisity press, 1995.
- [MER04] B. MERLET. *Sur quelques équations aux dérivées partielles et leurs analyse numérique*. Thesis, University of PARIS-SUD XI, 2004.
- [MOR] F. MORGAN. Minimal surfaces, crystals, shortest networks, ans undergraduate research. *Th. Mat. Int.*, 14.
- [MS] J.M. MOREL and S. SOLIMINI. *Variational Methods in Image Segmentation*. Birkhäuser Monograph.
- [MS01a] F. MADDALENA and S. SOLIMINI. Concentration and flatness property of the singular set of bisected balls. *Ann. Scu. Norm. Sup. 4*, 30, pages 624–659, 2001.
- [MS01b] F. MADDALENA and S. SOLIMINI. Lower semicontinuity properties of functionals with free discontinuities. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 159, pages 273–294, 2001.
- [REI] E.R. REIFENBERG. Solution of the plateau problem for m -dimensional surfaces of varying topological type. *Acta Math.*, 104.
- [RIG] S. RIGOT. Big pieces of $C^{1,\alpha}$ -graphs for minimizers of the mumford-shah functional. *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa.*, 29.
- [RS] M. REED and S. SIMON. *IV Analysis of operator*.
- [SOL97] S. SOLIMINI. Simplified excision techniques for free discontinuity problems in several variables. *J. Funct. Ann.*, 151, pages 1–34, 1997.
- [STA] G. STAMPACCHIA. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Four.*, 15.
- [TAY76] J. TAYLOR. The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces. *Ann. of Math. (2)* 103, pages 489–539, 1976.

Résumé :

Les travaux présentés dans cette thèse concernent l'étude de la régularité de l'ensemble singulier d'un minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah en grande dimension. On se place principalement en dimension 3 même si certains résultats fonctionnent encore en dimension supérieure.

Dans une première partie on étudie les minimiseurs globaux dans \mathbb{R}^N . Les minimiseurs globaux sont les "objets tangents", c'est à dire les limites d'explosions aux points de l'ensemble singulier. On montre que si (u, K) est un minimiseur global et que si K est un cône assez régulier, alors u (modulo les constantes) est une fonction homogène de degré $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus K$. Ceci nous permet de lier l'existence d'un minimiseur global et le spectre du laplacien sphérique dans la sphère unité privée de K . Une conséquence est qu'un secteur angulaire strict ne peut pas être l'ensemble singulier d'un minimiseur de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 .

Dans la deuxième partie on montre un théorème de régularité au voisinage des cônes minimaux. Les cônes minimaux sont les \mathbb{P} , \mathbb{Y} et \mathbb{T} introduits par Jean Taylor [TAY76] dans son théorème sur la régularité des films de savons. On sait depuis le théorème de L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara en 1997 [AFP07] que si l'ensemble singulier K d'un minimiseur de Mumford-Shah dans \mathbb{R}^3 est assez plat dans une certaine boule (c'est à dire assez proche d'un hyperplan \mathbb{P} en distance), alors K est l'image $C^{1,\alpha}$ de ce plan dans une boule légèrement plus petite. Dans le deuxième chapitre de cette thèse on montre que le phénomène est toujours vrai pour les cônes de type \mathbb{Y} et \mathbb{T} . C'est à dire que si K est proche (en distance) d'un \mathbb{Y} ou d'un \mathbb{T} dans une certaine boule, alors K est l'image $C^{1,\alpha}$ d'un \mathbb{Y} ou d'un \mathbb{T} dans une boule légèrement plus petite. Les techniques employées ne sont pas exclusives à la dimension 3 et devraient permettre de démontrer des résultats analogues en toute dimension pour un minimiseur de Mumford-Shah, dès lors qu'un résultat de régularité sur les ensembles presque minimaux de codimension 1 existerait.