



Rang des couplages maximums d'un graphe

Denis Naddef

► To cite this version:

Denis Naddef. Rang des couplages maximums d'un graphe. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1978. Français. NNT : . tel-00287822

HAL Id: tel-00287822

<https://theses.hal.science/tel-00287822>

Submitted on 13 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

"Mathématiques appliquées"

par

Denis NADDEF



RANG DES COUPLAGES MAXIMUMS D'UN GRAPHE



Thèse soutenue le 9 février 1978 devant la Commission d'Examen :

Président : M. SAKAROVITCH

Examineurs : C. BENZAKEN
P. JULLIEN

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOU Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BERNARD Alain	Mathématiques pures
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZEZ Henri	Pathologie chirurgicale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme.	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique oto-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
	CONTAMTIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique

Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KRAVITCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme.	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
	IEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (IUT I)
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Melle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICoud Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Semeiologie médicale (Neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT I)

MM.	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	PENNEY Thomas	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	AGNIUS-DELOD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BLAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (IUT I)
	BUISSON René	Physique (IUT I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie
	CONTE René	Physique (IUT I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biologie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (IUT I)
	LIU DUC Cuong	Chimie organique
	MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme.	MINIER Colette	Physique (IUT I)
MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PEIRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Melle	PIERY Yvette	Physiologie animale

MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (IUT I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme.	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNIER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (IUT I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JULIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (IUT I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT I)

MM.	NEGRE Robert	Mécanique (IUT I)
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (IUT I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (IUT I)
	PERRIER Guy	Géophysique-Glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie (Pharmacie)
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme.	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (Pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
	Romier Guy	Mathématiques (IUT B) (Personnalité étrangère habilité à être directeur de thèse)
	SCHAERER René	Cancérologie
	SHOM Jean-Claude	Chimie générale
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro physique
	HODGES Christopher	Transition de phases

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, NOVEMBRE 1976.

A l'occasion de cette thèse je tiens à remercier tous les enseignants qui ont su développer mon goût pour les mathématiques. Je remercie monsieur SAKAROVITCH de m'avoir accueilli dans son équipe et m'avoir ainsi permis de préparer cette thèse. Je remercie aussi Monsieur BENZAKEN et Monsieur JULLIEN qui ont accepté de faire partie du jury. Que Monsieur UHRY trouve ici l'expression de ma plus profonde reconnaissance, ses conseils m'ont été d'une aide précieuse tout au long de mon travail . Je suis reconnaissant au professeur EDMONDS de m'avoir fourni le sujet de cette recherche et au Professeur PULLEYBLANK pour ses travaux qui m'ont permis de mener à bien cette étude. Je remercie Madame NEUMANN pour son aide précieuse dans la frappe de cette thèse ainsi que Monsieur IGLESIAS et son équipe pour leur excellent travail dans le tirage de cette thèse .

Denis NADDEF

TABLE DES MATIERES

	<i>Pages</i>
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>NOTATIONS</u>	2
<u>CHAPITRE I : POLYEDRES ET SYSTEMES D'INEQUATIONS LINEAIRES</u> ..	4
<u>CHAPITRE II : RAPPELS SUR LA THEORIE DU COUPLAGE; $\mathcal{U}$-GRAPHES</u> ..	7
A - Rappels sur la théorie du couplage	7
B - $\mathcal{U}$ -graphes : Définition et propriétés	21
C - Applications aux graphes k-réguliers	29
<u>CHAPITRE III : RANG DES COUPLAGES MAXIMUMS DANS UN GRAPHE</u>	
<u>BIPARTI</u>	33
A - Rang des couplages parfaits	33
B - Cas des graphes sans sommets parfaits $V = P_G + M_G$ et cas général	39
<u>CHAPITRE IV : RANG DES COUPLAGES MAXIMUMS DANS UN GRAPHE</u>	
<u>QUELCONQUE</u>	41
A - Rang des couplages parfaits	41
B - Cas des graphes sans sommets parfaits $V = P_G + M_G$ et cas général	55
<u>CONCLUSION</u>	60
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	62

INTRODUCTION

Au cours d'un séjour de quelques jours au C.O.R.E. (Center of Operations Research and Econometrics) à Louvain, le Professeur Jack EDMONDS m'a posé le problème suivant :

"Soit $G = (V, E)$ un graphe, avec $E = (e_1, \dots, e_m)$. Si à chaque couplage $\mathcal{C}$ de G on associe un vecteur $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ de $\{0, 1\}^m$ avec $c_i = 1$, si et seulement si, $e_i \in \mathcal{C}$, on connaît très bien l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^m$ des vecteurs de C . Dans ces conditions quelle est la dimension de la face contenant les couplages de cardinalité maximum de G ?

La réponse à cette question se trouve dans les chapitres III et IV suivant que le graphe est biparti ou pas. Auparavant, le chapitre I donne brièvement des rappels sur les polyèdres et les systèmes d'inéquations linéaires. Dans le chapitre II, après un rappel sur la théorie du couplage, on étudie les propriétés d'une famille de graphes, les $\mathcal{U}$ -graphes. Ce chapitre se termine par deux théorèmes sur les graphes k -réguliers, k -arêtes connexes qui sont des cas particuliers de $\mathcal{U}$ -graphes, et par une approche originale à une conjecture de Fulkerson sur la coloration des graphes cubiques 3-arêtes connexes.

NOTATIONS

Entre parenthèses la page où se trouve pour la première fois cette notation.

$G = (V, E)$: Graphe dont l'ensemble des sommets est V , l'ensemble des arêtes est E (7)

$n = |V|$

$m = |E|$

$G(S)$: Sous-graphe de G construit sur $S \subset X$

G^* : Graphe obtenue à partir de G en lui appliquant le "Blossom Algorithm" quand il est muni d'un couplage maximum (26)

$G^v = (V + \{\alpha\}, E + \{(\alpha, v)\})$ (20)

$G^{*v} = (G^v)^*$

P_G, M_G : Ensemble des sommets externes, internes de G (15)

P_G^v, M_G^v : Ensemble des sommets externes sauf α , internes de G^v (20)

A : Matrice $n \times m$ (4)

I : Indice des lignes de A (4)

$A_{I'}$: Sous-matrice de A formée des lignes de A dont l'indice se trouve dans $I' \subset I$ (4)

$P = P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^m / Ax \leq b\}$ (4)

$F(I') = \{x \in P / A_{I'} x = b_{I'}\}$ (4)

(PC) : Polyèdre dont les points extrêmes sont les vecteurs représentatifs des couplages d'un graphe G donné (9)

F : Face de (PC) contenant les couplages maximums de G (6)

$r_e(G)$: Rang des couplages maximums de G (6)

$v(G)$: Nombre cyclomatique de G (6)

$R_{\tilde{V}}(G)$: Graphe obtenu à partir de G en contractant les éléments de $\tilde{V}$. (10)

$\delta(\tilde{V})$: Cocycle de $\tilde{V}$ (8)

$\gamma(\tilde{V})$: Arêtes dont les deux extrémités sont dans $\tilde{V} \subset V$ (8)

$|X|$: Cardinalité de l'ensemble X (7)

$q_S = \frac{|S|-1}{2}$ pour $|S|$ impaire et $S \subset V$ (9)

e : Couplage

$x(\tilde{E}) = \sum_{\{i/e_i \in \tilde{E}\}} x_i$ pour $\tilde{E} \subset E$ (9)

- S : Famille emboîtée (11)
- $G \times S$: Graphe obtenu en contractant les éléments maximaux de S (11)
- $S(S)$: Eléments de S strictement contenus dans $S \subset V$ (11)
- $S.T = \{S \in S / S \cap T \neq \emptyset, S \not\subset T, S \not\supset T \text{ et } S \text{ maximal pour ces propriétés}\}$ (45)
- $H = \{S / S \text{ hypocouplable et } x(\gamma(S)) = q_S \text{ pour tout couplage parfait de } G\}$ (28)
- $E(S)$: Ensemble des contraintes serrées suivantes : (42)

$$\begin{cases} x(\delta(v)) = 1 & \text{pour tout } v \in V \\ x(\gamma(S)) = q_S & \text{pour tout } S \in S \end{cases}$$
- $E = E(H)$ (41)
- $I = \{S / |S| \text{ est impaire et } x(\gamma(S)) = q_S \text{ pour tout couplage parfait de } G\}$ (43)
- H' (resp. I') = $\{T \in H$ (resp. I) / $x(\gamma(T)) = q_T$ n'est pas une combinaison
linéaire des contraintes de $E(S)$ pour un S donné}
- D : Ensemble des composantes connexes de $G(P_G)$ (43)
- $b(G)$: Nombre de blocs de G (55)
- $|D|_b = \sum_{D \in \mathcal{D}} b(G(D)).$ (56)
- $\dot{+}$: Union disjointe. (7)

CHAPITRE I

POLYEDRES ET SYSTEMES D'INEQUATIONS LINEAIRES

Soit A une matrice réelle à m lignes et n colonnes, b et x des matrices colonnes réelles convenablement dimensionnées. Considérons le système d'inéquations linéaires suivant :

$$(1) Ax \leq b$$

Un polyèdre est défini comme étant l'ensemble des solutions d'un système du type de (1), c'est à dire :

$$P = P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$$

Dans toute la suite, on supposera que A n'a pas de ligne composée uniquement de zéros. On note I l'ensemble d'indices des lignes de A . $A_{I'}$, pour $I' \subset I$, représente la sous-matrice de A , constituée des lignes de A dont l'indice figure dans I' .

Soient $I' \subset I$ et $F(I') = \{x \in P / A_{I'}x = b_{I'}\}$. $F(I')$ est un polyèdre qu'on appelle face de P . Toute face d'une face de P est elle-même une face de P , de même que l'intersection d'une famille de faces de P . Une notion essentielle pour la compréhension de cette thèse est celle d'ensemble serré d'un système d'inéquations définissant un polyèdre (par souci de concision nous dirons ensemble serré d'un polyèdre). A tout système d'inéquations linéaires $Ax \leq b$, on peut faire correspondre l'unique ensemble maximal $I^0 \subset I$, tel que $F(I^0) = P(A,b)$; c'est cet ensemble I^0 que l'on appelle ensemble serré de P . I^1 est alors l'ensemble serré d'une face F de P si I^1 est le sous-ensemble maximal de I , tel que $F = F(I^1)$.

Remarquons que plusieurs systèmes d'inéquations linéaires différents peuvent donner le même polyèdre ; on vérifie (voir par exemple Pulleyblank [6]) que la définition d'une face ne dépend pas du système choisi pour définir P .

Rappelons deux propriétés bien connues des faces d'un polyèdre :

$$\text{On note } c \cdot x = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \text{ pour } c \in \mathbb{R}^n \text{ et } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition I-1 :

$F \subset P$ est une face non vide de P , si et seulement si, il existe $c \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $c \cdot x = \alpha$ pour tout $x \in F$ et $c \cdot x < \alpha$ pour tout $x \in P - F$.

Proposition I-2 :

Soit $c \in \mathbb{R}^n$. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $c \cdot x \leq \alpha$ pour tout x d'un polyèdre non vide P , alors il existe une face F de P telle que :

$$x' \in F \Rightarrow c \cdot x' = \max_{x \in P} \{c \cdot x\} \quad \square$$

La dimension d'un polyèdre P de $\mathbb{R}^n$ est la dimension de la variété linéaire de plus petite dimension qui contient P . On la notera dim P . La dimension de P et l'ensemble serré de P sont liés de la façon suivante :

Proposition I-3 :

La dimension d'un polyèdre $P = P(A, b)$ de $\mathbb{R}^n$ est :

$$\dim P = -1 \text{ si } P = \emptyset$$

$\dim P = n - \text{rang } (A_I)$ où I^0 est l'ensemble serré de P et le rang est le rang usuel d'une matrice. $\square$

Si $\dim P = n$, c'est à dire si $P \neq \emptyset$, et $\text{rang } (A_I) = 0$, alors on dira que P est de pleine dimension.

On dit que les $x^k \in \mathbb{R}^n$ ($k = 1, 2, \dots, p$) sont affinement indépendants si pour tout système $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, p$), tel que $\sum_{k=1}^p \alpha_k x^k = 0$ et $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 0$, on a $\alpha_k = 0$ pour $k = 1, \dots, p$; c'est à dire que les x^k ($k = 1, \dots, p$) sont affinement indépendants si et seulement si, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, les vecteurs $x^k - x^j$, $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, p$ sont linéairement indépendants.

Proposition I-4 :

On a $\dim P = k-1$ si, et seulement si, P contient k éléments affinement indépendants et n'en contient pas $k+1$. $\square$

Une face F de P est une facette de P si $\dim F = \dim P - 1$, donc F est une facette de P , si et seulement si, F contient $k = \dim P + 1$ éléments affinement indépendants. Les facettes sont les faces non triviales maximales de P .

Il est souvent intéressant d'avoir un système d'inéquations linéaires minimal pour définir P ; c'est le cas par exemple, quand on veut donner des théorèmes de minimax en utilisant la dualité en programmation linéaire. La proposition suivante nous donne une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier un tel système, dans le cas où P est de pleine dimension.

Proposition I-5 :

Soit $P = P(A,b)$ un polyèdre de pleine dimension, alors $K \subseteq I$ est un ensemble minimal, tel que $P(A,b) = P(A_K, b_K)$, si et seulement si, les $F(\{i\})$ sont

- (i) des facettes pour tout $i \in K$
- (ii) tous différents.

Les faces de dimension zéro de P s'appellent indifféremment points extrêmes ou sommets du polyèdre P . Un polytope est un polyèdre borné.

Le polytope (PC), dont il sera question dans cette thèse, est l'enveloppe convexe des vecteurs de R^m représentant⁽¹⁾ les couplages d'un graphe $G = (V,E)$ avec $|E| = m$. On verra que l'enveloppe convexe des vecteurs représentant⁽¹⁾ les couplages de cardinalité maximum de G est une face F de (PC). Le but de cette thèse, comme il a été annoncé dans l'introduction, est de trouver la dimension de F .

On appelle rang des couplages maximum d'un graphe G , et on note $r_e(G)$, le plus grand nombre de couplages maximums dont les vecteurs représentatifs⁽¹⁾ sont linéairement indépendants. Puisque $0 = (0, \dots, 0) \notin F$ on a $r_e(G) = \dim F + 1$.

Le résultat central de cette thèse est que, si G admet un couplage parfait, alors $r_e(G) = v(G') - \alpha$ où G' est un certain graphe partiel de G qui sera défini dans le chapitre II ; $v(G')$ le nombre cyclomatique du graphe G' ; et α un terme correctif, qui vaut -1 si G' est biparti et dont la détermination est l'objet principal du chapitre IV.

(1) Pour la définition de "représentant et "représentatif" voir page 7

CHAPITRE II

RAPPELS SUR LA THEORIE DU COUPLAGE ; $\mathcal{U}$ -GRAPHES

A - RAPPELS SUR LA THEORIE DU COUPLAGE

Les notations utilisées sont celles de Berge [1] et d'Edmonds [4].
 $G = (V, E)$ représente un graphe dont l'ensemble des sommets est V et l'ensemble des arêtes est E . Si on note $|B|$ la cardinalité de l'ensemble B , on supposera dans la suite que $|V| = n$ et $|E| = m$.

Pour deux ensembles disjoints B et C , on note $B+C$ leur union.

On appelle couplage de G un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de E , tel que deux arêtes quelconques de $\mathcal{C}$ ne sont pas adjacentes.

Soient $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. On considèrera qu'il y a une bijection ϕ entre E et les composantes de x . x est le vecteur d'incidence d'un ensemble $\tilde{E} \subset E$ si :

$$((x_j = 1) \iff (e_j \in \tilde{E})) \quad \text{et} \quad ((x_j = 0) \iff (e_j \notin \tilde{E}))$$

On dira aussi que x est le vecteur représentatif de $\tilde{E}$. Par la suite, par abus de langage, on confondra souvent un couplage et son vecteur représentatif.

Un sommet est dit saturé par un couplage $\mathcal{C}$ s'il est adjacent à une arête de $\mathcal{C}$, sinon il est dit insaturé. Un couplage pour lequel il n'y a pas de sommets insaturés est dit parfait.

Un ensemble $A \subset V$ est dit presque parfaitement couplé par un couplage $\mathcal{C}$, si dans le sous-graphe $G(A)$ construit sur A , seul un sommet est insaturé par le couplage qu'induit $\mathcal{C}$ sur ce sous-graphe.

Exemple :

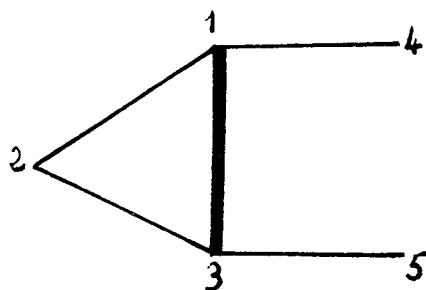


Figure 1

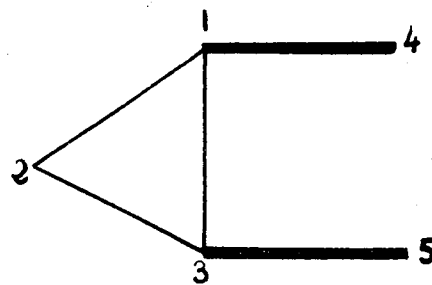


Figure 2

Les arêtes grasses représentent les arêtes de $\mathcal{C}$ (ce sera le cas dans toutes les figures de cette thèse). $\{1,2,3\}$ est presque parfaitement couplé dans la figure 1, mais ne l'est pas dans la figure 2.

Pour $\tilde{V} \subset V$, on note $\delta(\tilde{V})$ le cocycle de V , c'est à dire l'ensemble des arêtes n'ayant qu'une extrémité dans $\tilde{V}$ et $\gamma(\tilde{V})$ l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans $\tilde{V}$. On notera $\delta(v)$ au lieu de $\delta(\{v\})$ pour $v \in V$. Remarquons que $\delta(\tilde{V}) = \bigcup_{v \in \tilde{V}} \delta(v) - \gamma(\tilde{V})$. Par abus de langage, on dira aussi qu'une arête $e \in \delta(\tilde{V})$ "touche" $\tilde{V}$. Rappelons que $|\delta(v)|$ s'appelle degré de $v \in V$.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit hypocouplable si pour tout sommet $v \in V$, il existe un couplage presque parfait de G laissant v insaturé. Un graphe G étant donné, on dira, par abus de langage, qu'un ensemble $\tilde{V} \subset V$ est hypocouplable (resp. presque parfaitement couplé) si le sous-graphe $G(\tilde{V})$ est hypocouplage (resp. presque parfaitement couplé).

Un graphe G contenant un cycle impair hamiltonien est hypocouplable, mais comme le montre l'exemple de la figure 3, cette condition n'est pas nécessaire, cependant, il existe un lien très étroit entre les graphes hypocouplables et les cycles impairs, comme on le verra dans le théorème II.1.3.

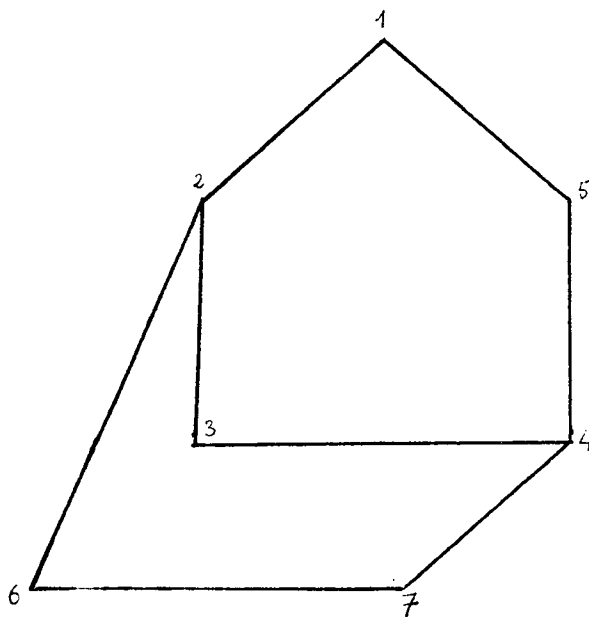


Figure 3

Soit $\tilde{E} \subset E$, on notera $x(\tilde{E}) = \sum_{\{i/e_i \in \tilde{E}\}} x_i$. Pour un ensemble impair, $S \subset V$, on note $q_S = \frac{|S|-1}{2}$.

Jack EDMONDS est le premier à avoir déterminé un système d'inéquations linéaires qui définit le polyèdre (PC) dont les points extrêmes représentent les couplages de G .

Théorème II.1.1 : (EDMONDS [5])

Soit $G = (V, E)$ un graphe. L'enveloppe convexe (PC) des vecteurs représentatifs des couplages de G est donnée par le système d'inéquations linéaires suivants :

$$(PC) \begin{cases} (1) & x(\delta(v)) \leq 1 & \text{pour tout } v \in V. \\ (2) & x(\gamma(S)) \leq q_S & \text{pour tout } S \subset V \text{ tel que } |S| \text{ est impair.} \\ (3) & x_i \geq 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad \square$$

Cependant, ce système n'est pas minimal ; en effet, soit $v \in V$ de degré un, avec $e_i = (v, v')$, l'unique arête adjacente à v (figure 4).

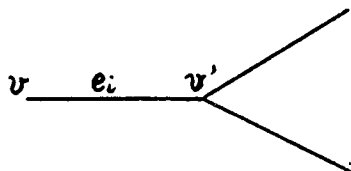


Figure 4

Si le degré de v' est aussi égal à un, alors l'arête e_i est dite isolée et, dans ce cas, l'inéquation $x_i \leq 1$ est une contrainte de (PC). Sinon, la contrainte $x_i \leq 1$ est évidemment la conséquence des contraintes suivantes :

- (i) $x(\delta(v')) \leq 1$.
- (ii) $x_j \geq 0$ pour tout $e_j \in \delta(v')$.

Un autre cas de redondance facile à voir est celui où v est de degré 2 (figure 5).

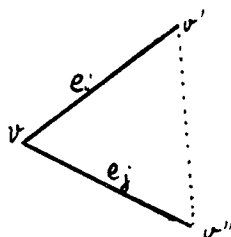


Figure 5

Soit $\delta(v) = \{e_i, e_j\}$ et $e_i = (v, v')$, $e_j = (v, v'')$; l'ensemble $S = \{v, v', v''\}$ est impair et donc $x(\delta(v)) \leq 1$ est la conséquence de $x(\gamma(S)) \leq 1$ et des $x_k \geq 0$ pour $e_k \in \gamma(S)$.

Pulleyblank et Edmonds [7] ont montré que de nombreuses contraintes $x(\gamma(s)) \leq q_s$ étaient redondantes et qu'il suffit de considérer les ensembles $S \subset V$ hypocouplables tels que le sous-graphe $G(S)$ soit sans point d'articulation.

Dans ces conditions, si le degré de v est 2, la contrainte $x(\delta(v)) \leq 1$ ne se retrouve comme conséquence d'une contrainte $x(\gamma(s)) \leq q_s$ que si l'arête (v', v'') existe (cf. figure 5).

Soit $N(v)$ l'ensemble des sommets adjacents à v . On considère la condition (*) suivante :

(*) Si $|N(v)| = 1$ alors $e = (v, v')$ est une arête isolée. Si $|N(v)| = 2$, alors $\gamma(N(v)) = \emptyset$.

Théorème II.1.2 : (EDMONDS - PULLEYBLANK [7])

Le système suivant définit l'enveloppe convexe (PC) des couplages d'un graphe $G = (V, E)$.

$$(PC) \begin{cases} (1) & x(\delta(v)) \leq 1, \text{ pour tout } v \in V \text{ vérifiant la condition } (*). \\ (2) & x(\gamma(S)) \leq q_S, \text{ pour tout } S \text{ hypocouplable.} \\ (3) & x_i \geq 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Ce système devient minimal si l'on ajoute la condition que $G(S)$ soit sans point d'articulation dans les contraintes (2). $\square$

Quand on se réfèrera aux contraintes du polyèdre (PC) -pour des raisons que l'on verra plus loin-, c'est du système non minimal précédent (th. II.1.2) qu'il s'agira. Les contraintes seront nommées par le numéro qu'elles ont dans le théorème précédent : on dira contraintes de (PC) de type (1), (2) et (3) respectivement.

On appelle contraction d'un graphe par rapport à un ensemble de sommets $\tilde{V} \subset V$, et on note $R_{\tilde{V}}(G)$, l'opération qui consiste à remplacer $\tilde{V}$ par un sommet $\tilde{v}$, que l'on joint par les arêtes à tous les sommets de $v \in V - \tilde{V}$ adjacentes à $\tilde{V}$ dans G avec un ordre de multiplicité tel que les degrés des

sommets de $V-\tilde{V}$ sont les mêmes dans $R_{\tilde{V}}(G)$ et dans G ; d'autre part, pour $u \notin \tilde{V}$ et $v \in \tilde{V}$, $e_i = (u,v)$ est une arête de $R_{\tilde{V}}(G)$ si et seulement si $e_i \in E$.

Rappelons que deux sous-ensembles d'un ensemble B sont dits comparables pour la relation d'ordre définie par l'inclusion si, et seulement si, l'un contient l'autre.

Soit S un ensemble de parties de V possédant toutes plus d'un élément de V , S est dite famille emboîtée si deux éléments non comparables sont disjoints.

Le graphe réduit de G par rapport à une famille emboîtée S est le graphe que l'on note $G \times S$, obtenu à partir de G par contraction des ensembles maximaux de S .

On dit qu'un graphe G est engendré par un cycle impair s'il admet un cycle impair hamiltonien.

Soit S une famille emboîtée et $S \in S$. On note :

$$S(S) = \{T \in S / T \subset S, T \neq S\},$$

c'est à dire la famille emboîtée induite par S sur l'intérieur de S .

Il existe une caractérisation des graphes hypocouplables à l'aide des familles emboîtées, donnée par le théorème suivant :

Théorème II.1.3 : (EDMONDS - PULLEYBLANCK [7])

Un graphe $G = (V,E)$ est hypocouplable si, et seulement si, il existe une famille emboîtée S telle que :

- (i) Pour tout $S \in S$, $G(S) \times S(S)$ est engendré par un cycle impair.
- (ii) $\forall S \in S$. $\square$

Une famille emboîtée S avec la propriété (i) sera désormais appelée famille emboîtée de contractions. (Cette définition est moins restrictive que celle donnée par Pulleyblank qui impose les conditions (i) et (ii) à de telles familles).

Décrivons maintenant ce que l'on entend par marquage des sommets d'un graphe G muni d'un couplage $\mathcal{C}$. La description récursive est la suivante :

Après initialisation, en marquant + ou - un sommet, selon le cas, appliquer, tant que possible, les règles suivantes :

(a) Si u est marqué $+$ et $(u,v) \in E$, marquer v par $-$ s'il ne possède pas déjà cette marque.

(b) Si u est marqué $-$ et $(u,v) \in E$, marquer v par $+$ s'il ne possède pas déjà cette marque.

(c) Dès qu'un sommet u est marqué $+$ et $-$, contracter l'ensemble Γ de sommets faisant partie du cycle décrit ci-dessous. Le sommet obtenu sera appelé pseudo-sommet ; lui donner la marque $+$.

Les règles de marquage (a) et (b) développent un arbre constitué par les sommets marqués et les arêtes qui ont servi au marquage, ceci tant qu'aucun sommet ne possède deux marques. Dès qu'un sommet reçoit une double marque, l'arête qui a servi au deuxième marquage forme un cycle unique avec les arêtes de l'arbre ; c'est l'ensemble des sommets de ce cycle qui est contracté dans (c). L'arbre obtenu par marquage sera appelé arbre de marquage. En orientant les arêtes de cet arbre dans le sens où elles sont parcourues dans le marquage, on obtient une arborescence ayant pour racine le sommet initial du marquage. Cette arborescence induit un préordre sur ses sommets : un sommet u étant dit inférieur à un autre v s'il existe un chemin de u à v sur cette arborescence. Remarquons que l'arbre de marquage, en raison de (c), n'est pas nécessairement un sous-graphe de G . Il n'est d'autre part pas unique. En effet, ces règles étant données, plusieurs politiques de marquage peuvent être suivies. L'une, par exemple, consiste à "pousser" le plus possible dans une direction, c'est à dire, dès qu'un sommet est marqué, voir si on peut appliquer soit (a), soit (b) pour marquer un de ses voisins et, dans l'affirmative, recommencer avec ce dernier. Une autre, dite "par balayage", consiste à appliquer (a) tant que possible, puis (b) dans les mêmes conditions, puis à nouveau (a), etc... On peut inventer beaucoup d'autres politiques et, en particulier, une qui consiste justement à ne pas en avoir et que l'on peut appeler "anarchique". En principe, à chaque politique, correspond un arbre de marquage. On ne donne pas ici d'exemple concret d'application de ces diverses politiques, pour des raisons qui paraîtront évidentes après le théorème II.1.4.

Edmonds [4] a donné un algorithme qui permet, partant d'un couplage de cardinalité k , soit de trouver un couplage $\mathcal{C}'$ de cardinalité $k+1$ (cas α), soit de conclure que $\mathcal{C}$ est maximum (cas β). Dans toute la suite de cet exposé, nous n'aurons jamais à augmenter la cardinalité d'un couplage puisque nous

travaillerons uniquement sur des couplages maximums. Par contre, l'itération de l'algorithme qui conclut que le couplage $\mathcal{C}$ est maximum nous sera extrêmement utile ; aussi donnons-nous l'algorithme d'Edmonds, sans expliciter ce qui se passe dans le cas α .

Le "Blossom Algorithm" (EDMONDS [4])

Le graphe $G = (V, E)$ est muni d'un couplage $\mathcal{C}$ qui peut être vide. Marquer + un sommet insaturé, puis marquer à partir de celui-ci jusqu'à ce que l'on ait, soit marqué - un autre sommet insaturé, soit épuisé les possibilités de marquage. Dans le premier cas, on a trouvé une chaîne augmentante (cas α) ; changer le couplage, effacer les marques et recommencer. Dans le deuxième cas, s'il reste des sommets insaturés, marquer l'un de ceux-ci + et recommencer (on maintient les marques précédentes), sinon on arrête : le couplage $\mathcal{C}$ est maximum. $\square$

A la fin de l'algorithme précédent, on obtient un graphe que l'on note G^* . Dans ce graphe, certains sommets correspondent directement à ceux de G : ceux-ci sont dits sommets réels ; d'autres, par contre, proviennent de réductions successives : on les appelle pseudo-sommets ; l'ensemble des sommets qui ont été contractés pour obtenir le pseudo-sommet α s'appelle l'expansion de α .

Donnons un exemple d'application du "Blossom Algorithm" : Soit G , le graphe de la figure 6 et $\mathcal{C}$ le couplage représenté par les arêtes grasses :

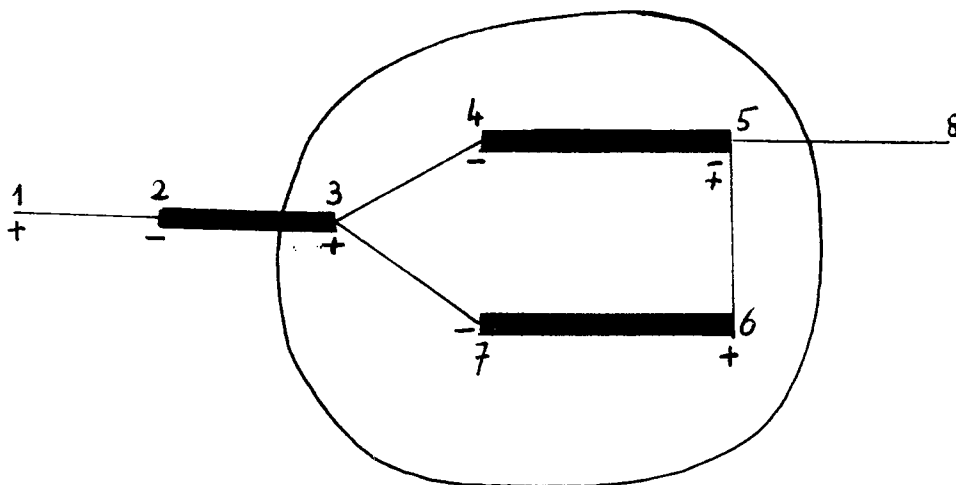


figure 6

Au cours du marquage, le sommet 5 se retrouve doublement marqué. Après la contraction de l'ensemble $\{3,4,5,6,7\}$, on obtient la configuration de la figure 7.



Figure 7

En continuant le marquage sur ce nouveau graphe, on obtient le marquage du sommet 8 qui est insaturé. Le nouveau couplage sur le graphe réduit est



Figure 8

et sur le graphe initial (figure 9)

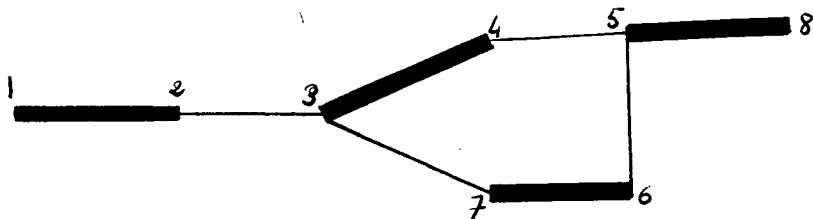


Figure 9

On efface les marques et on recommence. Il n'y a pas de sommet insaturé, donc ce couplage est maximum. $\square$

Soit G , un graphe muni d'un couplage $\mathcal{C}$. On appelle chaîne alternée, une chaîne élémentaire telle que, de toute paire d'arêtes adjacentes, l'une appartient au couplage. Une chaîne est dite augmentante si elle est alternée et si ses deux sommets extrêmes sont insaturés par $\mathcal{C}$ (dans G). Le but de "Blossom Algorithm" est la détection de telles chaînes. En effet, d'après un théorème de Berge [2], un couplage est maximum si, et seulement si, il n'existe pas de telles chaînes. L'opération de marquage telle qu'on l'a décrite permet cette détection. Pour le voir, il suffit de remarquer que l'opération de contraction, décrite au pas (c) de l'algorithme de marquage, ne détruit pas l'existence de chaînes alternées contenant les arêtes qui

précéderont le pseudo-sommet créé. Ce n'est, par contre, pas vrai pour les autres chaînes alternées, comme le montre l'exemple de la figure 10 ; d'où la nécessité de repartir du graphe original après augmentation.

Exemple :

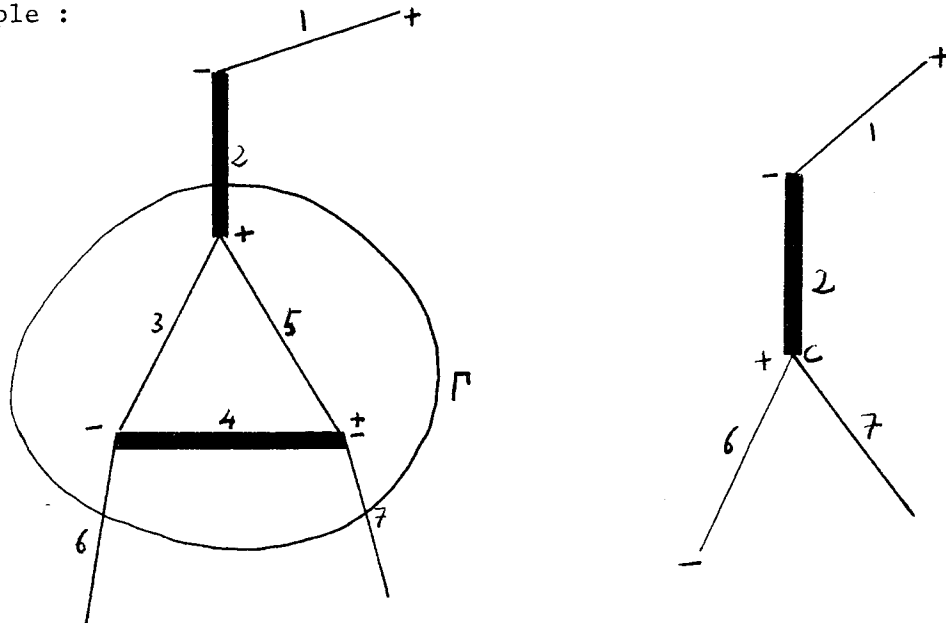


Figure 10

La contraction de Γ conserve l'existence de toutes les chaînes alternées contenant les arêtes 1 et 2, mais pas toutes celles contenant les arêtes 6 ou 7 ; en effet, la chaîne 6-4-7 n'a pas d'homologue dans le graphe contracté. $\square$

Le "Blossom Algorithm", appliqué à un graphe G muni d'un couplage maximum $\mathcal{C}$, développe un arbre de marquage par sommet insaturé par $\mathcal{C}$. Ces arbres sont appelés Hongrois par Edmonds [4] et la forêt qu'ils constituent est dite hongroise. Dans les mêmes conditions, on note P_G et M_G l'ensemble des sommets de G marqués + et - respectivement, où on entend par sommets marqués +, les vrais sommets de telle marque et les sommets contenus dans l'expansion des pseudo-sommets. A priori, P_G , M_G et la forêt hongroise dépendent du couplage maximum $\mathcal{C}$ choisi, et de la politique de marquage. Voyons ce qu'il en est :

Théorème II.1.4 : (Edmonds [4])

Soient $G = (V, E)$ un graphe, $\mathcal{C}$ un couplage maximum de G , P_G et M_G l'ensemble des sommets marqués + et - respectivement dans l'application du "Blossom Algorithm".

Alors :

(1) P_G est l'ensemble des sommets laissés insaturés par au moins un couplage maximum de G . M_G est l'ensemble des sommets adjacents à P_G .

(2) Le graphe réduit G^* , obtenu à la fin de l'algorithme, est le graphe obtenu en contractant les composantes connexes du sous-graphe $G(P_G)$.

(3) Quel que soit le couplage maximum, le sous-graphe $G(V-(P_G + M_G))$ est parfaitement couplé.

Corollaire II.1.5 :

P_G et M_G ne dépendent, ni du couplage maximum choisi, ni de la politique de marquage. $\square$

Corollaire II.1.6 :

Les arêtes du cocycle $\delta(P_G + M_G)$, ainsi que celle de $\gamma(M_G)$ n'appartiennent à aucun couplage maximum. $\square$

Remarquons que si G admet un couplage parfait, $P_G = M_G = \emptyset$. D'autre part, la forêt hongroise obtenue à l'issue du "Blossom Algorithm" ne dépend pas de la politique de marquage, mais seulement de l'ordre dans lequel on considère les sommets insaturés par $\mathcal{C}$. (Dans la mesure où ces sommets dépendent de $\mathcal{C}$ la forêt en dépend un peu). Notons enfin que d'après la propriété (3) du théorème précédent, quel que soit le couplage maximum $\mathcal{C}$ choisi, quelle que soit la politique de marquage, les ensembles maximaux contractés sont les mêmes.

Reprenant la terminologie de J. Edmonds [4], on appelle sommets internes les éléments de M_G , sommets externes ceux de P_G et sommets parfaits ceux de $V-(P_G + M_G)$.

Donnons maintenant un exemple d'application du "Blossom Algorithm" dans les conditions du théorème II.1.4.

Exemple : Considérons le graphe de la figure 11

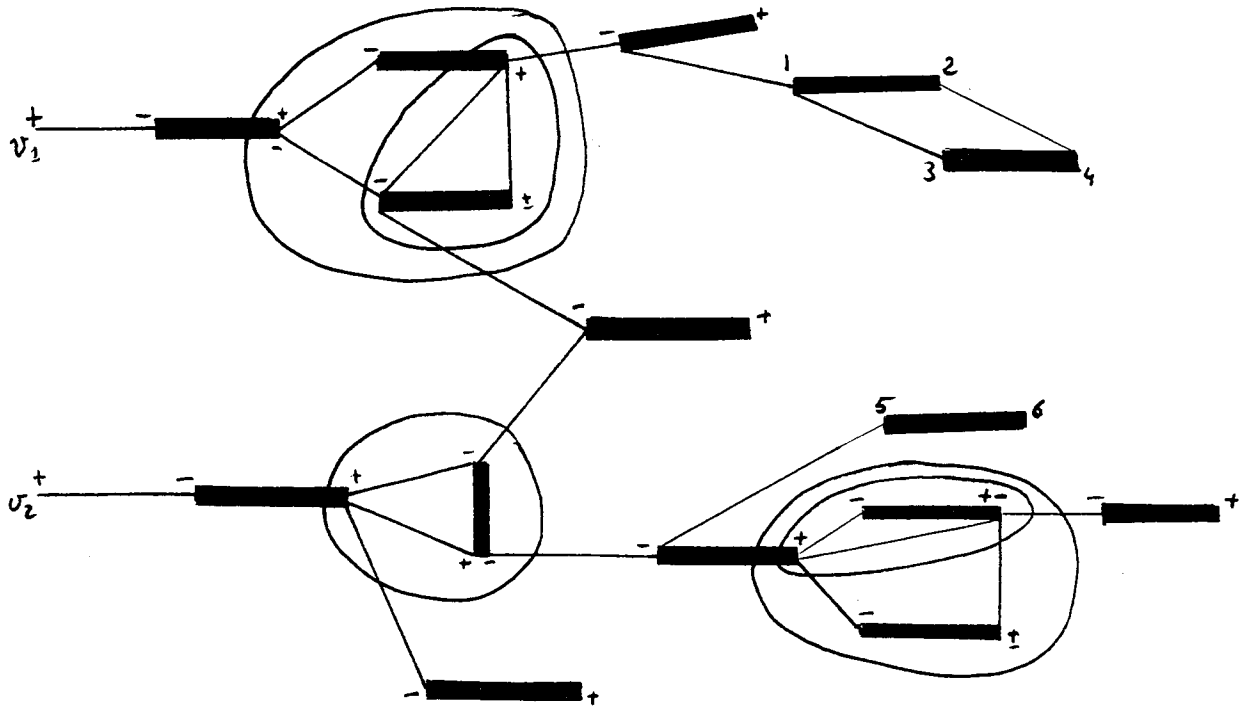


Figure 11

Sont entourés les ensembles qui seront contractés à la suite du marquage.
La forêt hongroise obtenue est donnée par la figure 12 et est formée de deux arbres hongrois.

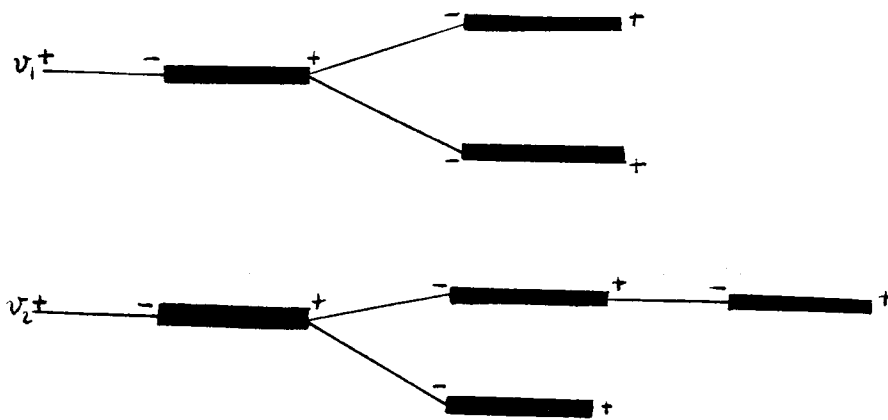


Figure 12

En considérant v_2 puis v_1 , dans le "Blossom Algorithm", on obtient la forêt suivante (figure 13) :

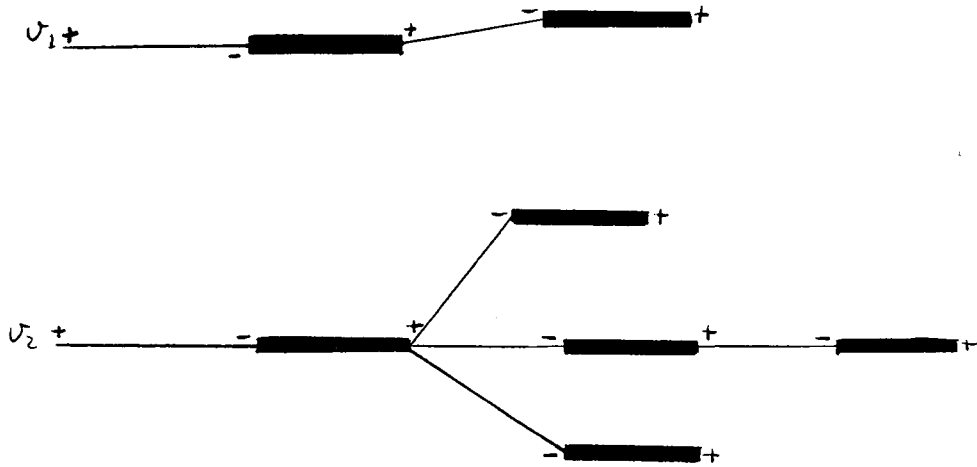


Figure 13

P_G et M_G sont donnés par les sommets marqués + et -. $V-(P_G \cup M_G) = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Le graphe G^* est le suivant (figure 14) :

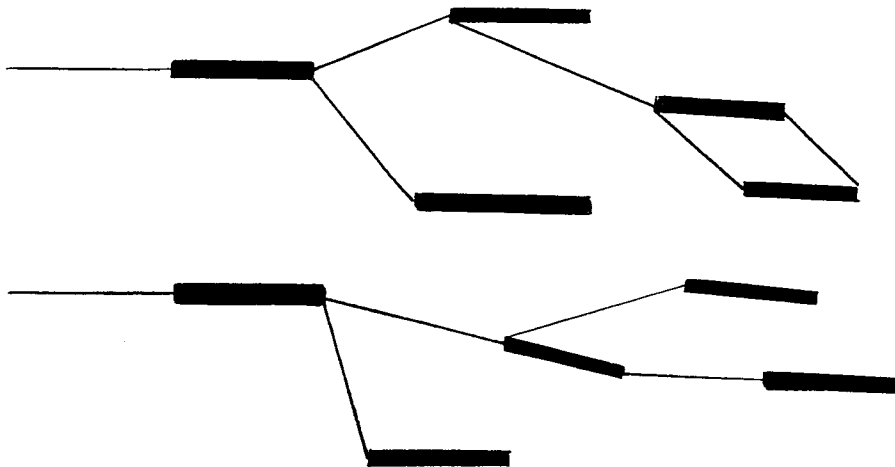


Figure 14

Le problème qui consiste à trouver un couplage de cardinalité maximum est un programme linéaire dont les contraintes sont celles de (PC) et la fonction objective est de maximiser $\sum_{i=1}^m x_i = x(E)$. Tout programme linéaire possède un dual ; voyons ce qu'il représente dans ce cas.

Le programme linéaire du couplage maximum que l'on notera aussi (PC) est donc :

$$(PC) \begin{cases} (1) & x(\delta(v)) \leq 1 & \text{pour tout } v \in V \\ (2) & x(\gamma(S)) \leq q_S & \text{pour tout } S \text{ hypocouplable} \\ (3) & x_i \geq 0 & \text{pour tout } e_i \in E. \\ & \max x(E) \end{cases}$$

Attachons à chaque contrainte (1) la variable duale y_v et à chaque contrainte (2) la variable duale z_S . Le dual de (PC) s'écrit alors :

$$(DC) \begin{cases} y_u + y_v + \sum_{\{T/(u,v) \in T\}} z_T \geq 1 & \text{pour tout } (u,v) \in E \\ y_u \geq 0 & \text{pour tout } u \in V, \quad z_S \geq 0 & \text{pour tout } S \text{ hypocouplable} \\ \min(\sum_{u \in V} y_u + \sum_{S \text{ hypocouplable}} q_S z_S) \end{cases}$$

Disons qu'une arête est recouverte par un sommet si celui-ci lui est adjacent, et recouverte par un hypocouplable S si ses deux extrémités sont dans S . Si on associe le poids 1 au premier recouvrement et q_S au second, le dual (DC) d'un problème de couplage maximum est un problème de recouvrement des arêtes de poids minimum.

Par exemple, considérons un graphe sans sommet parfait, une solution optimale de (DC) est constituée par :

$$\begin{cases} y_u = 1 & \text{si, et seulement si, } u \in M_G \\ z_S = 1 & \text{si, et seulement si, } S \text{ est une composante connexe de } G(P_G). \end{cases} \quad \square$$

Soit G un graphe muni d'un couplage parfait, on appellera marquage de ses sommets à partir de $v \in V$, le marquage décrit plus haut après initialisation du processus en marquant v par $-$. L'ensemble des sommets marqués $-$ se notera M_G^v , l'ensemble des sommets marqués $+$, ou leur expansion, sera noté P_G^v .

Il sera commode, pour se représenter le marquage, à partir de $v \in V$, d'un graphe remplissant les conditions précédentes, d'utiliser l'artifice suivant : considérer le graphe $G^v = (V + \{\alpha\}, E + \{(\alpha, v)\})$, le marquage des sommets de G est celui donné par l'application du "Blossom Algorithme" à G^v muni d'un couplage presque parfait laissant α insaturé. Par l'application du théorème II.1.4 à G^v , on voit que P_G^v et M_G^v ne dépendent ni du couplage parfait choisi, ni de la politique de marquage, mais de $v \in V$.

Il ressort du théorème II.1.4 qu'un couplage maximum de $G = (V, E)$ est la réunion d'un couplage maximum de $G(P_G + M_G)$ et d'un couplage parfait de $G(V - (P_G + M_G))$. Par conséquent, la face F contenant les couplages maximums de G est isomorphe au produit des variétés linéaires contenant les couplages maximums de ces deux graphes. Cette remarque nous amène à étudier séparément les deux cas suivants :

$$(1) P_G = M_G = \emptyset$$

$$(2) P_G + M_G = V$$

Le théorème II.1.2 a fait apparaître trois types de contraintes pouvant se trouver dans l'ensemble serré de F . Le point de départ du paragraphe suivant est la caractérisation des contraintes de type 3 de (PC), celle de non négativité, qui se trouvent dans l'ensemble serré de F dans le cas $P_G = M_G = \emptyset$. Si on se réfère à la fin du chapitre I, c'est dans ce paragraphe que l'on va définir le graphe G' qui se trouve dans la formule $r_e(G) = v(G') - |S| + 1$.

B - U-GRAPHES : DEFINITION ET PROPRIETES

1) Définition et caractérisation des U-graphes

Soit $G = (V, E)$, un graphe admettant un couplage parfait. On dira qu'une arête $e \in E$ est faiblement utile s'il existe un couplage parfait e_1 tel que $e \in e_1$; e sera dite utile si, de plus, il existe un couplage parfait e_2 tel que $e \notin e_2$. Une arête sera inutile si elle n'est pas utile.

Exemple : Dans le graphe de la figure 15, les arêtes 1, 2, 3 et 5 sont utiles, l'arête 7 est faiblement utile, les arêtes 4, 6 et 7 sont inutiles.

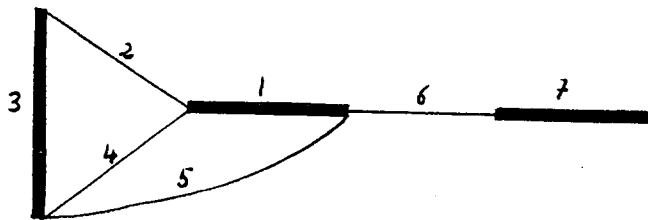


Figure 15

Un graphe dont toutes les arêtes sont utiles sera appelé un U-graphe. Notons que, par définition d'une arête utile, un U-graphe possède toujours un couplage parfait.

Soit G muni d'un couplage e , un cycle est dit alterné si le couplage induit par e sur ce cycle sature tous les sommets. Remarquons que ce cycle est nécessairement pair.

Exemple :

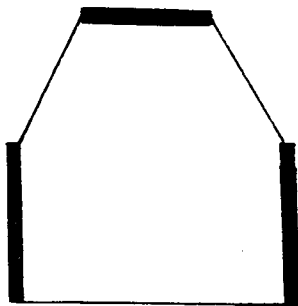


Figure 16a

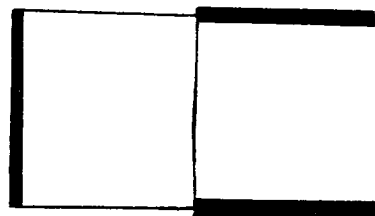


Figure 16b

Le cycle pair de la figure 16 a est alterné, alors que celui de la figure 16 b ne l'est pas.

Proposition II.2.1 :

Soit $G = (V, E)$ un graphe muni d'un couplage parfait $\mathcal{C}$. G est un $\mathcal{U}$ -graphe si, et seulement si, toute arête appartient à un cycle alterné.

Démonstration : Soit $e \in E$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux couplages parfaits tels que $e \in \mathcal{C}$ et $e \notin \mathcal{C}'$. La différence symétrique de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est formée de cycles alternés disjoints (alternés à la fois pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$). e appartient à cette différence symétrique et appartient donc à un cycle alterné.

Réciproquement, si e appartient à un cycle alterné pour un couplage parfait $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{C}'$ le couplage parfait obtenu en inversant le rôle des arêtes de ce cycle relativement au couplage $\mathcal{C}$, sans changer celui des autres arêtes alors, un et un seul des couplages $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ contient e . $\square$

On appelle pivotage autour d'un cycle alterné C d'un couplage l'opération qui donne un nouveau couplage parfait $\mathcal{C}'$ à partir de $\mathcal{C}$ en inversant le rôle des arêtes de ce cycle par rapport au couplage.

Remarque 1 : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre, par pivotage autour d'un cycle alterné si, et seulement si, leur différence symétrique est un cycle alterné.

Remarque 2 : Il est très simple par marquage de savoir si une arête est utile ou non. Soit $e \in E$ et $\mathcal{C}$ un couplage parfait de $G = (V, E)$. Si $e \in \mathcal{C}$, marquer une extrémité par + sinon la marquer-. (Figures 17 et 18).

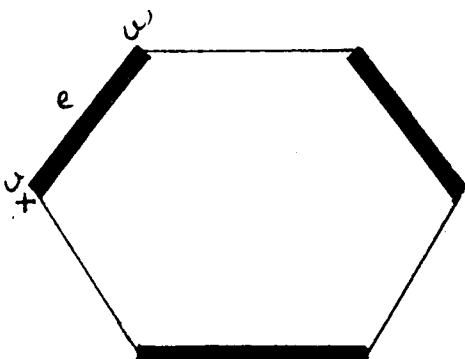


Figure 17

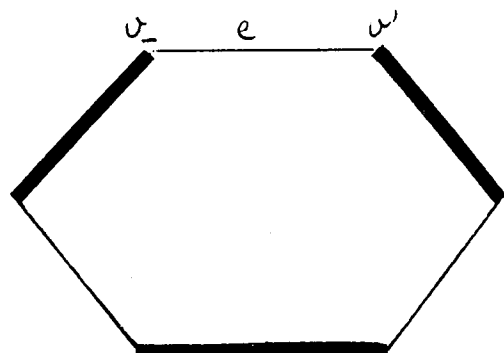


Figure 18

Soit $e = (v, v')$, avec v le sommet marqué. e appartient à un cycle alterné si, et seulement si, le graphe partiel $\hat{G} = (V, E - \{e\})$ possède une chaîne alternée impaire entre v et v' . Les règles de marquage conduisent alors à la condition, nécessaire et suffisante, suivante :

" e est utile si, et seulement si, on arrive à marquer v' d'une marque opposée à celle de v ".

Remarque 3 : Une conséquence directe des remarques faites sur le marquage au chapitre II, et qui a été implicitement utilisée dans la remarque précédente, est que la réduction, au cours d'un marquage, d'un cycle impair presque parfaitement couplé (cf. définition §A), n'altère pas l'appartenance ou non à un cycle alterné d'une arête qui précède le nouveau pseudo-sommet. De même, ceci est en général faux pour les autres arêtes, comme le montre l'exemple de la figure 19.

Exemple :

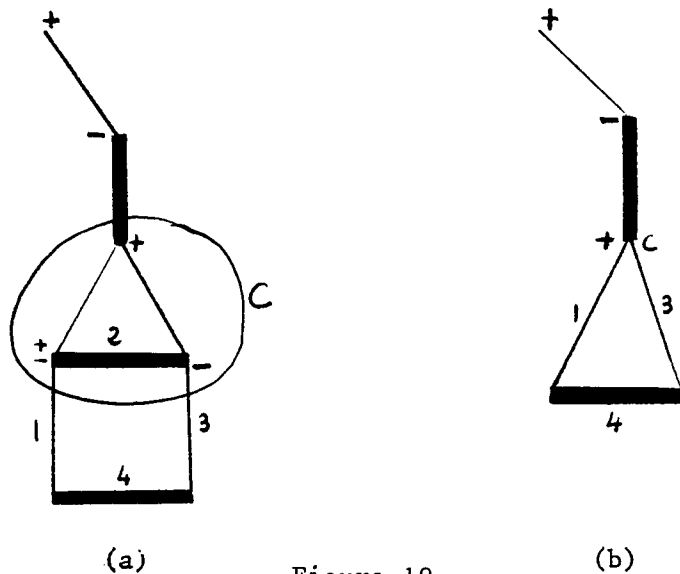


Figure 19

Dans la figure 19 a, les arêtes 1, 3 et 4 appartiennent à un cycle alterné ; après réduction du cycle C, ce n'est plus vrai. $\square$

D'après la remarque 2, il est très aisé d'associer à un graphe G , admettant un couplage parfait, l'unique graphe partiel maximal G' de G qui est un $\mathcal{U}$ -graphe. Il suffit, pour cela, de supprimer toute arête inutile de G , ainsi que les sommets qui se trouvent isolés après cette opération.

2) Propriété des $\mathcal{U}$ -graphes

Soient P_G^v et M_G^v , définis au §A de ce chapitre, on a alors :

Proposition II.2.2 :

Si G est un $\mathcal{U}$ -graphe connexe muni d'un couplage parfait, quel que soit le sommet $v \in V$ choisi pour marquer, on a : $P_G^v + M_G^v = V$.

Démonstration : Le corollaire II.1.6, appliqué au graphe $G^v = (V + \{\alpha\}, E + \{(\alpha, v)\})$, nous apprend qu'aucune arête de $\delta(P_G^v + M_G^v)$ ne peut appartenir à un couplage maximum de G^v ; par conséquent, une telle arête ne peut appartenir à un couplage parfait de G . Puisque G est connexe, on a donc $P_G^v + M_G^v = V$. $\square$

Proposition II.2.3 :

Soient G un $\mathcal{U}$ -graphe et $\mathcal{C}$ un couplage parfait de G , P_G^v et M_G^v les ensembles marqués + et - respectivement dans le marquage à partir de $v \in V$. Alors pour tout $w \in M_G^v$, on a $M_G^v = M_G^w$, et par conséquent $P_G^w = P_G^v$ (où P_G^w (resp. M_G^w) est l'ensemble des sommets marqués + (resp. -) dans un marquage à partir de w).

Démonstration : Considérons le graphe $G^{v,w} = (V + \{\alpha\}, E + \{(\alpha, v), (\alpha, w)\})$. Appliquons le "Blossom Algorithm" à $G^{v,w}$, en utilisant une des politiques de marquage suivantes :

- (i) De α marqué +, marquer v par -, et poursuivre le marquage sans jamais marquer à partir de α .
- (ii) De α marqué +, marquer w par -, et poursuivre le marquage sans jamais marquer à partir de α .

Le marquage des sommets, en suivant la politique (i), est alors obtenu en appliquant le "Blossom Algorithm" à G^v . Celui obtenu par la politique (ii) correspond au "Blossom Algorithm" appliqué à G^w . Or (i) et (ii) marquent tous les sommets en vertu de la proposition précédente ; les marquages sont identiques car on sait, par le théorème II.1.4, que le marquage de $G^{v,w}$ ne dépend pas de la politique choisie. $\square$

Corollaire II.2.4 :

Soient G un $\mathcal{U}$ -graphe connexe et $\mathcal{C}$ un couplage parfait de G . Si G est muni d'un marquage à partir d'un de ses sommets $v \in V$, alors entre deux sommets de marques opposées, il existe une chaîne alternée dont les deux arêtes extrêmes appartiennent au couplage .

Démonstration : Soient u et v de marques opposées, supposons u marqué $+$. Si l'on marque G à partir de u , d'après le lemme précédent, v reçoit à nouveau la marque $-$. Sur l'arbre de marquage ainsi obtenu, l'unique chaîne de u à v répond aux conditions demandées. $\square$

Soit G un graphe muni d'un couplage $\mathcal{C}$, on appelle I -chaîne, une chaîne alternée dont les deux arêtes extrêmes n'appartiennent pas à $\mathcal{C}$. La chaîne de la figure 20 est une I -chaîne.



Figure 20

Soient u et v deux sommets de G . L'adjonction d'une anse à G , entre u et v pour obtenir un graphe G' , est l'opération qui consiste à adjoindre à G une I -chaîne dont seuls les deux sommets extrêmes sont aussi des sommets de G (cf. figure 21).

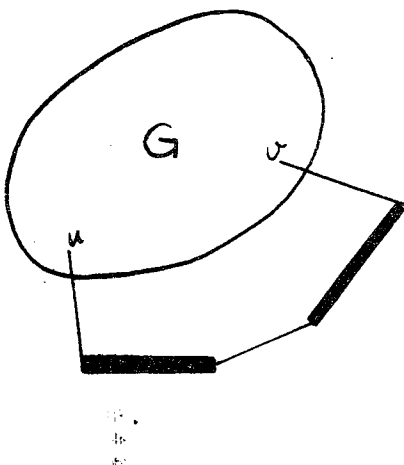


Figure 21

Proposition II.2.5 :

Soit G un $\mathcal{U}$ -graphe connexe muni d'un couplage parfait $\mathcal{C}$ et d'un marquage à partir de l'un quelconque de ses sommets. Soient u et v deux sommets de marques opposées, si on adjoint à G une anse entre u et v , le graphe G' obtenu est également un $\mathcal{U}$ -graphe.

Démonstration : D'après le corollaire précédent, il existe entre u et v une chaîne alternée dont les deux arêtes extrêmes sont dans $\mathcal{C}$. La réunion de cette chaîne et de l'anse forme un cycle alterné, donc toutes les arêtes que l'on a rajoutées sont utiles. $\square$

Remarquons que la proposition précédente reste valable si la I -chaîne se réduit à une seule arête.

Théorème II.2.6 :

Soit $G = (V, E)$ un $\mathcal{U}$ -graphe connexe et G^{*v} le graphe obtenu en contractant les composantes connexes de $G(P_G^v)$ (i.e. le graphe obtenu à la fin du marquage à partir de v) ; alors, G^{*v} est un $\mathcal{U}$ -graphe biparti quelque soit le sommet $v \in V$.

Démonstration : Si G^{*v} n'est pas biparti, il possède un cycle impair C , et une arête au moins de ce cycle a ses deux extrémités de même marque ; cette marque ne peut être +, il y aurait alors, nécessairement, un sommet doublement marqué, ce qui donnerait lieu à une contraction. Or, d'après le corollaire II.1.6, $\gamma(M_G^v) = \emptyset$; donc cette marque ne peut être non plus -.

Reste à montrer que $G^{*v} = (V^{*v}, E^{*v})$ est un $\mathcal{U}$ -graphe. Notons que les arêtes G^{*v} ont un correspondant dans G , et on les nommera de la même façon. Par contre, seuls les sommets de M_G^v ont en général un correspondant dans G . Soit $e \in E^{*v}$ avec $e = (u, u')$. Si $e \notin \mathcal{C}$ (e , considéré comme arête de G), alors il existe un couplage parfait $\mathcal{C}'$ de G tel que $e \in \mathcal{C}'$. En marquant à partir de v le graphe G muni de $\mathcal{C}'$, on sait que l'on obtient le même graphe G^{*v} . Or, $\mathcal{C}'$ induit sur G^{*v} un couplage auquel e appartient.

Remarquons que si un graphe est connexe, il suffit de vérifier l'utilité des arêtes qui n'appartiennent pas au couplage parfait $\mathcal{C}$ de référence, car une arête qui appartiendrait à tous les couplages est nécessairement isolée. La démonstration est donc terminée. $\square$

On appelle famille réalisable de contractions une famille emboîtée S pour laquelle il existe $v \in V$ et un couplage parfait $\mathcal{C}$ de G tel que les éléments de S sont les ensembles successivement contractés dans un marquage à partir de v . Remarquons que divers marquages, à partir du même sommet v avec le même couplage, peuvent donner des familles réalisables de contractions différentes, seules les éléments maximaux étant nécessairement les mêmes en vertu du théorème II.1.4.

Exemple : L'exemple de la figure 22 illustre la remarque précédente :

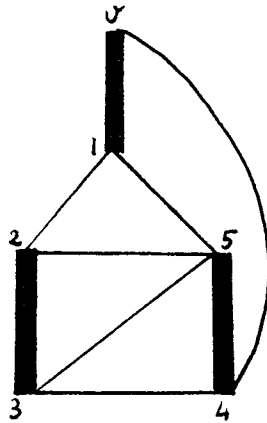
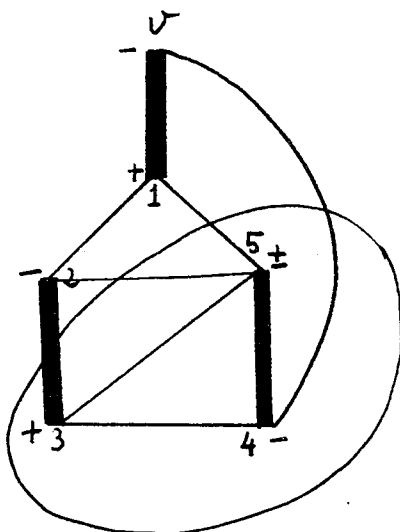
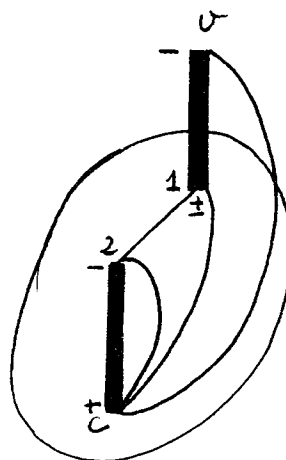


Figure 22

Ce graphe est un $\mathcal{U}$ -graphe, marquons à partir de v de deux façons différentes (figures 23 et 24).



(a)



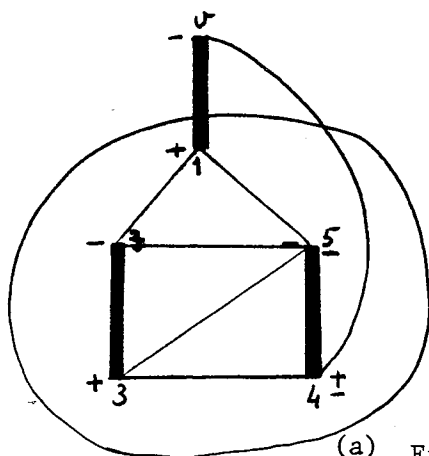
(b)



(c)

Figure 23

2ème marquage : On marque autour du cycle à 5 sommets 1, 2, 3, 4, 5



(a) Figure 24



(b)

Les sommets 1, 2, 3, 4 et 5 sont alors contractés en une seule fois pour donner le même graphe réduit.

$S_1 = \{\{3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ et $S_2 = \{\{1,2,3,4,5\}\}$ sont deux familles réalisables de contractions réalisables à partir de v . On vérifiera que $S_3 = \{\{2,3,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ est aussi une telle famille.

Théorème II.2.7 :

Soit G un $\mathcal{U}$ -graphe connexe. Les ensembles maximaux d'une famille réalisable de contractions S sont des hypocouplables presque parfaitement couplés pour tous les couplages parfaits de G .

Démonstration : Le fait que ces éléments maximaux sont des hypocouplables découle de la caractérisation de ces derniers, contenue dans le théorème II.3 et des règles de contractions définies dans la procédure de marquage.

Considérons le recouvrement des arêtes de G formé par les sommets de M_G^v et des ensembles maximaux de S . Puisque $\gamma(P_G^v) = \emptyset$, chaque arête est couverte une et une seule fois. Ce recouvrement est donc une solution réalisable et optimale du dual (DC) de (PC). Par conséquent, la contrainte correspondant à S élément maximal de S dans (PC) est toujours serrée en vertu du théorème des écarts complémentaires. $\square$

On notera désormais par H la famille des hypocouplables tels que la contrainte de (PC) de type (2) correspondante soit toujours serrée. Un ensemble $S \in H$ sera dit hypocouplable toujours presque parfaitement couplé.

Proposition II.2.8 :

Soient G un $\mathcal{U}$ -graphe muni d'un couplage parfait $\mathcal{C}$ et $S \in H$. Le graphe contracté $R_S(G)$ est aussi un $\mathcal{U}$ -graphe.

Démonstration : Soit $e \in E - \gamma(S)$ ⁽¹⁾. On sait qu'il existe un cycle alterné C_e contenant e . Si $C_e \cap \gamma(S) = \emptyset$, c'est à dire si ce cycle ne rencontre pas l'ensemble contracté, e appartient à un cycle alterné dans $R_S(G)$; sinon, $C_e \cap \gamma(S)$ est une chaîne paire, car $|C_e \cap \delta(S)| = 2$ avec $f \in C_e \cap \delta(S)$; autrement, en pivotant autour de C_e , S ne serait plus presque parfaitement couplé. La contraction de S transforme donc C_e en C'_e qui est aussi alternée. $\square$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème II.2.6.

Théorème II.2.9 :

Soit G un $\mathcal{U}$ -graphe et S une famille emboîtée dont tous les éléments appartiennent à H et maximale pour cette propriété. Alors, $G \times S$, graphe obtenu par contraction des éléments maximaux de S est un $\mathcal{U}$ -graphe biparti.

Démonstration : $G \times S$ est un $\mathcal{U}$ -graphe d'après la proposition II.2.8. Supposons qu'il ne soit pas biparti. D'après le théorème II.2.6, en marquant $G \times S$ à partir d'un de ses sommets, on obtient une famille de contraction S' de $G \times S$. S' induit sur V une famille de contraction S'' . Les ensembles maximaux de S'' forment avec S une famille de contraction dont tous les éléments appartiennent à H : ceci contredit la maximalité de S . $\square$

C - APPLICATION AUX GRAPHS K-REGULIERS

Dans Berge [2], chapitre 8, théorème 13, on trouve le résultat suivant :

Théorème II.3.1 :

Soit $G = (V, E)$, un graphe connexe, régulier de degré k et $(k-1)$ arêtes connexe avec un nombre pair de sommets. G est alors un $\mathcal{U}$ -graphe. $\square$

(1) e et f est une correspondant dans $R_S(G)$ qu'on note aussi e et f respectivement.

Le théorème suivant complète le théorème II.3.1.

Théorème II.3.2 :

Soit $G = (V, E)$ un graphe régulier de degré k , $(k-1)$ arêtes connexe avec un nombre impair de sommets. G est alors hypocouplable.

Démonstration : k est évidemment pair puisqu'il y a un nombre impair de sommets. Soit A un ensemble impair de sommets, $|A| = 2\ell+1$. Montrons que $|\delta(A)| \geq k$. On sait par hypothèse que $|\delta(A)| \geq k-1$; il suffit donc de montrer que $|\delta(A)| \neq k-1$. On a :

$$|\delta(A)| = \sum_{v \in A} |\delta(v)| - 2|\gamma(A)|.$$

Si $|\delta(A)| = k-1$, on obtient :

$$(k-1) = (2\ell+1)k - 2|\gamma(A)|.$$

Puisque k est pair, le deuxième membre est pair et le premier impair, ce qui est impossible.

D'après le théorème II.1.4, V se partitionne en trois sous-ensembles P_G , M_G et $V - (P_G + M_G)$. Soient $C_1, C_2, \dots, C_q$ les composantes connexes de $G(P_G)$ à au moins deux éléments. Soit G^* le graphe obtenu en contractant les C_i pour $i = 1, \dots, q$ et notons P_G^* , M_G^* et $V^* - (P_G^* + M_G^*)$ les sommets externes, internes et parfaits de G^* . On a :

$$|P_G^*| = |M_G^*| + r$$

où r est le nombre de sommets laissés insaturés par un couplage maximum de G . Soient c_i , $i = 1, \dots, q$, les sommets provenant de la contraction des C_i , on a $|\delta(C_i)| \geq k$. Supposons que $M_G \simeq M_G^* \neq \emptyset$. Le nombre d'arêtes adjacentes à P_G^* est supérieur ou égal à $|P_G^*| \times k$ puisque $\gamma(P_G^*) = \emptyset$. Or, $\delta(P_G^*) \subset \delta(M_G^*)$ et $|\delta(M_G^*)| \leq k|M_G^*| = k(|P_G^*| - r)$; on a alors : $k|P_G^*| \leq k(|P_G^*| - r)$ et puisque $r \geq 1$, ceci est impossible. Donc $M_G \simeq M_G^* = \emptyset$ et G est hypocouplable. $\square$

Revenons au cas des graphes G k -réguliers, connexes, avec un nombre pair de sommets mais cette fois-ci, k -arêtes connexes. Soit $\mathcal{C}$ un couplage parfait de G et $v \in V$. Que peut-on dire du graphe G^{*v} obtenu en marquant à partir de v ?

Théorème II-3-3 :

Soit G un grahe régulier de degré k , connexe, k -arêtes-connexe et possédant un nombre pair de sommets. Le graphe G^{*v} obtenu à la fin du marquage à partir de $v \in V$ est un graphe biparti régulier de degré k .

Démonstration : On sait que G^{*v} est biparti (théorème II.2.6). Soient P_G^{*v} et M_G^{*v} les sommets externes et internes de G^{*v} respectivement. On sait que $\gamma(P_G^{*v}) = \emptyset$ de même que $\gamma(M_G^{*v}) = \emptyset$. Toute arête de G^{*v} relie un sommet de M_G^{*v} et un sommet de P_G^{*v} . Il y a donc $k \times |M_G^{*v}|$ arêtes dans G^{*v} puisque tout sommet interne a le même degré dans G et G^{*v} . Pour tout sommet $\alpha \in P_G^{*v}$, on a dans G^{*v} $|\delta(\alpha)| \geq k$. Or, $|P_G^{*v}| = |M_G^{*v}|$ et on ne peut donc pas avoir $|\delta(\alpha)| > k$ pour un $\alpha \in P_G^{*v}$, ce qui prouve que G^{*v} est k -régulier. $\square$

Corollaire II.3.4 :

Si $k = 3$ et si les composantes connexes de $G(P_G^{*v})$ possèdent toutes, au plus 7 éléments pour un certain $v \in V$, alors G est d'indice chromatique 3.

Démonstration : Soit $v \in V$ le sommet tel que $G(P_G^{*v})$ n'ait que des composantes connexes de cardinalité au plus égale à 7. G^{*v} le graphe obtenu en contractant ces composantes connexes est biparti et cubique; d'après le théorème précédent. On sait qu'un tel graphe est 3 coloriable. Soit $\phi : \gamma(M_G^{*v} + P_G^{*v}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, une 3 coloration des arêtes de G^{*v} .

Soient $C_1, \dots, C_q$ les composantes connexes de $G(P_G^{*v})$. Dans la coloration ϕ , les 3 arêtes de $\delta(c_i)$ ont des couleurs différentes puisque, dans G^{*v} , elles sont adjacentes. Il suffit donc de montrer qu'on peut 3 colorier les arêtes du graphe Γ_i suivant (figure 25) où C_i est un hypocouplable à au plus 7 sommets.

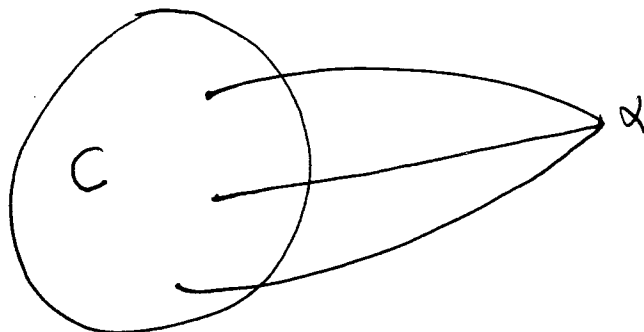


Figure 25

Les 3 arêtes de $\delta(C_i)$ étant reliées à un même sommet α . Ce graphe est évidemment cubique et 3 arêtes connexes. Si $|C_i| = 3$ ou 5, ce graphe est planaire et donc 3 coloriable. (On suppose la conjecture des 4 couleurs démontrée). Si $|C_i| = 7$ et si $G(C_i)$ admet un cycle hamiltonien, il n'y a que les 2 cas suivants à un isomorphisme près qui ne sont pas planaires (figures 26a, 26b).

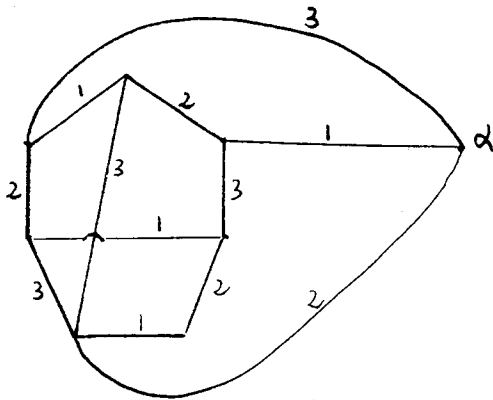


Figure 26 a

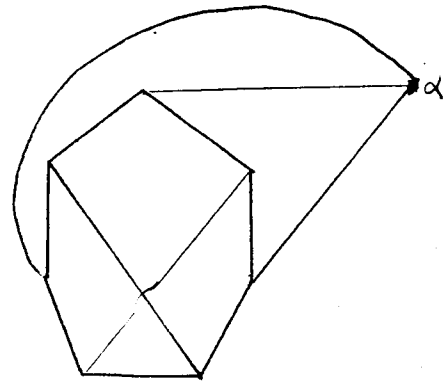


Figure 26 b

Si C_i ne possède pas de cycle hamiltonien, une étude exhaustive nous montre qu'alors, Γ_i en admet un et est donc 3 arêtes-coloriables. $\square$

Conjecture de Fulkerson

Soit G un graphe cubique connexe. Si G n'est pas d'indice chromatique 3, alors en dédoublant les arêtes de G , on obtient un graphe d'indice chromatique 6. $\square$

En raison du théorème II.3.3, il suffirait de démontrer cette conjecture pour les graphes cubiques $G = (V, E)$ 3 arêtes-connexe, tels que $\tilde{G} = (V - \{v\}, E - \delta(v))$ est un hypocouplable (cf. figure 27).

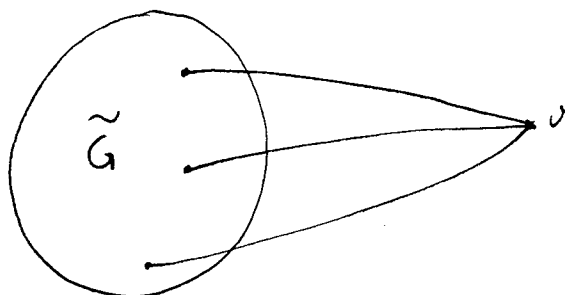


Figure 27

CHAPITRE III

RANG DES COUPLAGES MAXIMUMS DANS UN GRAPHE BIPARTI

Soit $G=(V,E)$ un graphe biparti. L'ensemble de ses sommets se partitionne en trois ensembles, $M_G, P_G, V-(M_G+P_G)$, respectivement ensemble des sommets internes, externes et parfaits. On a vu (chapitre II fin du A) que l'étude du rang des couplages maximums passait par l'étude du rang des couplages parfaits de $G(V-(M_G+P_G))$ et des couplages maximums de $G(M_G+P_G)$.

A -RANG DES COUPLAGES PARFAITS: ($M_G=P_G=\phi$)

Rappelons qu'un graphe est biparti si, et seulement si, il ne possède pas de cycle impair. En raison du théorème II-1-3, le polyèdre (PC) pour un graphe biparti ne possède pas de contraintes de type(2).

Pour un couplage parfait, toutes les contraintes de type(1) sont serrées. Si de plus G est un $\mathcal{U}$ -graphe biparti, ce sont les seules qui sont serrées. Ceci nous amène au théorème suivant:

Théorème III-1-1:

Soit G un $\mathcal{U}$ -graphe biparti, la dimension de la face F contenant les couplages parfaits de G est égale au nombre cyclomatique, $\nu(G)$, de G . On a donc $r_{\mathcal{U}}(G) = \nu(G) + 1$.

Démonstration :

On sait que l'ensemble serré de F est formé des contraintes de type(1) et d'après le théorème I-1-3, on a :

$$\dim F = m - \text{rang } A_I, \quad \text{où } I \text{ est l'ensemble serré de } F. \text{ Or, } A_I \text{ est}$$

la matrice d'incidence aux arêtes du graphe G . Il est bien connu que le rang d'une telle matrice, quand G est biparti, est égal au nombre de lignes n diminué du nombre de composantes connexes p :

$$\text{rang } A_I = n - p$$

$$\text{donc, } \dim F = m - n + p = \nu(G)$$

et par définition du rang $r_{\mathcal{U}}(G)$ on a :

$$r_{\mathcal{U}}(G) = \nu(G) + 1 \quad \square$$

Le théorème suivant montrera que l'apparition du nombre cyclomatique n'est pas fortuite. Pour un cycle C , on notera Γ l'ensemble de ses sommets et on conservera C pour désigner l'ensemble de ses arêtes.

Théorème III-1-2:

Soit G un $\mathcal{U}$ graphe biparti muni d'un couplage parfait $\mathcal{C}$. Il existe alors une base de cycles formée uniquement de cycles alternés. De plus cette base de cycle peut être choisie triangulaire.

Démonstration:

Supposons le graphe connexe. Soit C_0 un alterné de G . Marquons C_0 à partir de l'un de ses sommets. Construisons une suite

$(G_i = (V_i, E_i))_{i=0, \dots, v(G)-1}$ de sous graphes partiels de G telle que:

(1) $G_0 = (V_0, C_0)$ est le cycle alterné C_0 et $G_{v(G)-1} = G$

(2) On construit G_{i+1} à partir de G_i de la façon suivante:

a) Si $V_i = V$, alors puisque G est connexe, il existe $e \in \delta(V_i) \neq \emptyset$, soit K_e un cycle alterné contenant e et J_e la J -chaîne de $K_e - \gamma(V_i)$ contenant e . G_{i+1} est obtenu à partir de G_i en y adjoignant l'anse J_e . On sait d'après la proposition II-2-5 qu'il existe un cycle alterné C_e de G_{i+1} contenant la J -chaîne J_e car, G étant biparti, les deux extrémités de J_e sont nécessairement de signes opposés. On étend le marquage de G_i à G_{i+1} .

b) Si $V_i \neq V$ et $i \neq v(G)-1$ alors il existe $e \in E - \bigcup_{j=0}^{i-1} C_j$ et alors $G_{i+1} = (V, E_{i+1})$ avec $E_{i+1} = E_i \cup \{e\}$. Soit $e = (u, v)$, u et v sont nécessairement de signes opposés du fait que G est biparti; par conséquent il existe une chaîne alternée dont les deux arêtes extrêmes appartiennent à C_0 (corollaire II-2-4), cette chaîne forme avec e un cycle alterné C_e .

C_0 et l'ensemble des cycles C_e construits en 2a et 2b sont linéairement indépendants car chacun contient au moins une arête que ne contient aucun des cycles construits avant lui. On dit d'un tel ensemble qu'il a une structure triangulaire. En remarquant que les G_i construits en 2a et 2b sont tels que $v(G_{i+1}) = v(G_i) + 1$, puisque $v(G_0) = 1$ on a bien $v(G)$ cycles.

Corollaire III-1-3:

Algorithme de construction de $v(G) + 1$ couplages parfaits linéairement indépendants:

Soit $C_0, \dots, C_{v(G)-1}$ la base de cycles alternés construite dans la démonstration du théorème précédent. La famille de couplages parfaits

$(\mathcal{C}_i)_{i=0, \dots, v(G)}$ suivante :

(i) $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$

(ii) $\mathcal{C}_i$ pour $i=1, \dots, v(G)$ est obtenu par pivotage de $\mathcal{C}$ autour de C_{i-1} .

est une famille de couplages parfaits linéairement indépendants de cardinalité $v(G) + 1$

Démonstration:

Il suffit de remarquer que les e_i $i=0, \dots, \nu(G)-1$ utilisés dans la construction des C_i n'appartiennent pas à $\mathcal{C}$ et la démonstration est alors la même que celle de l'indépendance des C_i (l'ensemble a une structure triangulaire) $\square$

Remarquons qu'on obtient ainsi une deuxième démonstration du théorème III-1-1.

Exemple:

Soit G le graphe de la figure 28 muni d'un couplage parfait $\mathcal{C}$

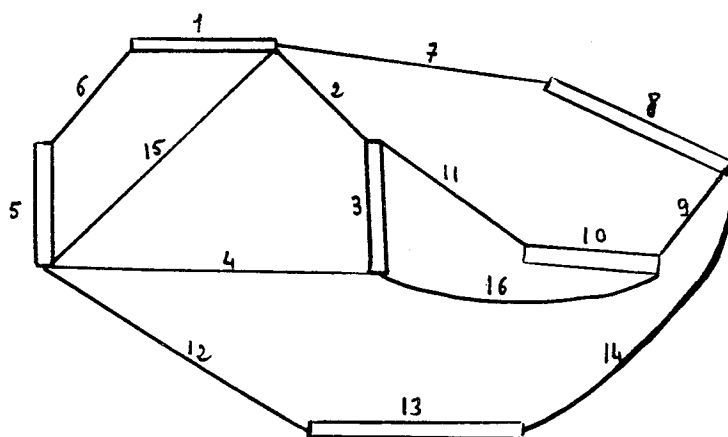
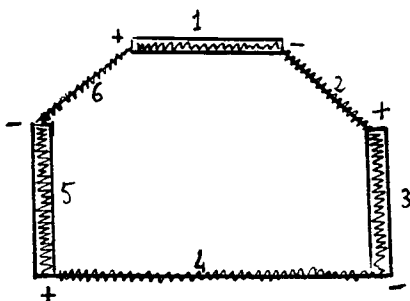


figure 28

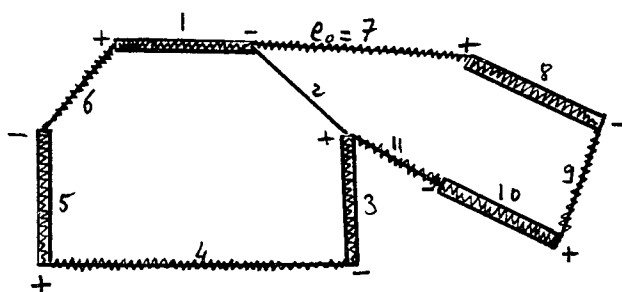
Les figures 29 à 33 donnent la construction d'une base de cycles alternés; ceux-ci sont donnés par leur ensemble d'arêtes et représentés sur les figures par des ~~~~~.



$$G_0 = C_0$$

$$C_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

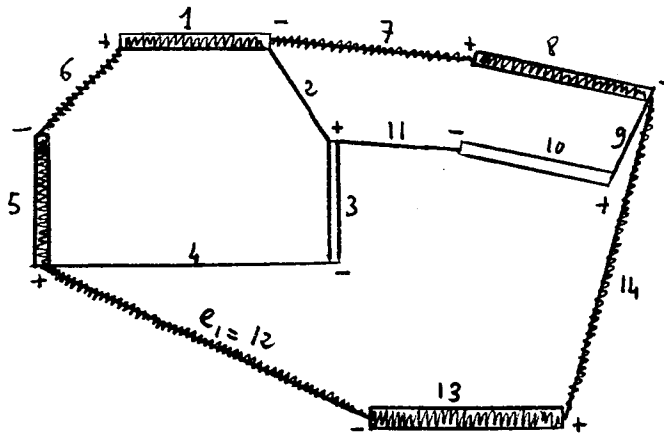
figure 29



$$G_1 = (V_1, E_1)$$

$$C_1 = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

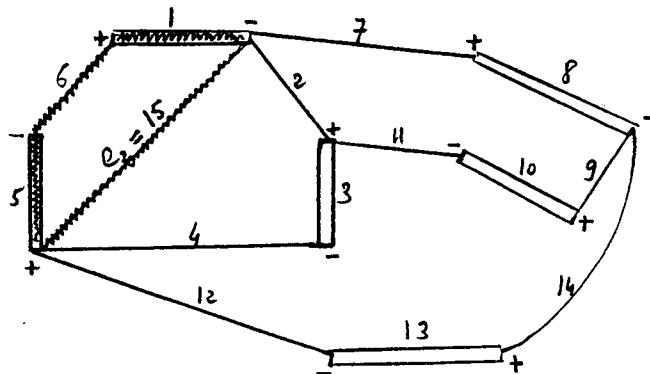
figure 30



$$G_2 = (V, E_2)$$

$$C_2 = \{1, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14\}$$

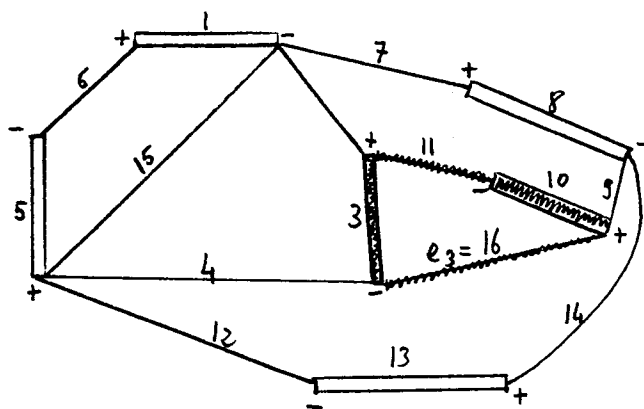
figure 31



$$G_3 = (V, E_3)$$

$$C_3 = \{1, 5, 6, 15\}$$

figure 32



$$G_4 = (E, V) = G$$

$$C_4 = \{3, 10, 11, 16\}$$

figure 33

L'ensemble des $v(G)+1=6$ couplages linéairement indépendants, obtenus par la construction décrite dans le corollaire III-1-3, est:

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} = \{1, 3, 5, 8, 10, 13\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \{\underline{2}, 4, 6, 8, 10, 13\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{4, 6, \underline{7}, 9, 11, 13\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \{3, 6, 7, 10, \underline{12}, 14\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{3, 6, 8, 10, 13, \underline{15}\}$$

$$\mathcal{C}_5 = \{1, 5, 8, 11, 13, \underline{16}\}$$

L'arête soulignée correspond à e_i . C'est l'ensemble de ces arêtes qui confère à cet ensemble de couplages sa structure triangulaire. $\square$

Remarque:

Dans la construction donnée par le corollaire III-1-3, les couplages parfaits $\mathcal{C}_i$ pour $i=1, \dots, v(G)$ sont tous voisins de $\mathcal{C}$ sur le polyèdre (PC) (cf. Chvátal[3]).

Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe, $A = (V, \tilde{E})$ un arbre maximal de G , on appelle base fondamentale de cycles l'ensemble des cycles C_e pour $e \in E - \tilde{E}$, où C_e est l'unique cycle du graphe $A'_e = (V, \tilde{E} + \{e\})$. On vient de voir que pour un $\mathcal{U}$ -graphe biparti muni d'un couplage parfait $\mathcal{C}$, il existe une base de cycles formée de cycles alternés. Existe-t-il une base fondamentale de tels cycles? L'exemple de la figure 34 nous montre qu'une telle base n'existe pas en général.



figure 34

Cependant on peut s'appuyer, d'une certaine manière, sur un arbre maximal pour obtenir une base de cycles alternés à structure triangulaire. L'algorithme utilise un arbre $A=(V, \tilde{E})$, obtenu par marquage à partir d'un sommet quelconque $v \in V$. Il consiste alors à ordonner les arêtes de $E - \tilde{E}$ de telle sorte que l'on puisse construire une suite $(G_i = (V, E_i))_{i=0, \dots, v(G)}$ de graphes partiels de G tels que:

(i) $G_0 = A$

(ii) $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$ avec $e_{i+1} \in E - \tilde{E}$

(iii) L'adjonction de e_{i+1} à G_i crée un cycle alterné.

Les sommets de G se partitionnent en P_G^V , marqués +, et M_G^V , marqués -. Certains sommets de M_G^V (respectivement de V) seront dits 'considérés'; on les notera $\tilde{V}^-$ (resp. $\tilde{V}$). L'algorithme est le suivant:

(0) $\tilde{V}^- = \{v\}$ $\tilde{V} = \{v\}$, $G_0 = A = (V, \tilde{E})$, $E_0 = \tilde{E}$, $i := 1$

(1) s'il existe $e \in \delta(\tilde{V}^-) - \tilde{E}_{i-1}$ aller en (2), sinon aller en (3)

(2) soit $e = (t, z)$, avec $t \in \tilde{V}^-$, faire $E_i := E_{i-1} \cup \{e\}$. Soit C_i un cycle alterné de $G_i = (V, E_i)$ contenant e . Si Γ_i^- représente les sommets Γ_i de C_i marqués -, faire $\tilde{V}^- := \tilde{V}^- \cup \Gamma_i^-$ et $\tilde{V} := \tilde{V} \cup \Gamma_i$. Faire $i := i + 1$, aller en (1)

(3) les C_i pour $i = 1, \dots, \nu(G)$ forment une base de cycles alternés à structure triangulaire. stop. $\square$

Justification de l'algorithme:

Les graphes $\tilde{G}_i = (\tilde{V}, \gamma(\tilde{V}) \cup E_i)$ sont des $\mathcal{U}$ -graphes par construction. Si $e \in \gamma(\tilde{V})$ l'existence du cycle alterné C_i est alors une conséquence du théorème II-2-5. Si $e = (t, z) \notin \gamma(\tilde{V})$, il existe une chaîne unique qui joint z à v sur l'arbre A . Si l'on parcourt cette chaîne à partir de z , le premier sommet w de V qu'elle rencontre est un sommet de P_G^V (marqué +). Appelons K_i cette chaîne de z à w sur A . Dans G_i , il existe une chaîne alternée, K , dont les deux arêtes extrêmes appartiennent à $\tilde{E}$ (théorème II-2-5) joignant w à t . $K \cup \{e\} \cup K_i$ forme un cycle alterné contenant e . A partir de ce point l'algorithme se justifie exactement comme celui du théorème III-1-2.

Remarquons que l'algorithme précédent ne diffère de celui, décrit dans la démonstration du théorème III-1-2, que par le fait qu'on 'dirige' l'augmentation du graphe. L'exemple suivant illustre cet algorithme

Exemple:

Reprenons le graphe de la figure 28 muni du même couplage parfait. Dans la figure 35 les arêtes de l'arbre A sont représentées par: . Les numéros entourés donnent un ordre possible d'entrée des arêtes. La base de cycles alternés est alors la suivante:

$$C_1 = \{1, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14\}$$

$$C_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C_3 = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$C_4 = \{1, 5, 6, 15\}$$

$$C_5 = \{3, 10, 11, 16\}$$

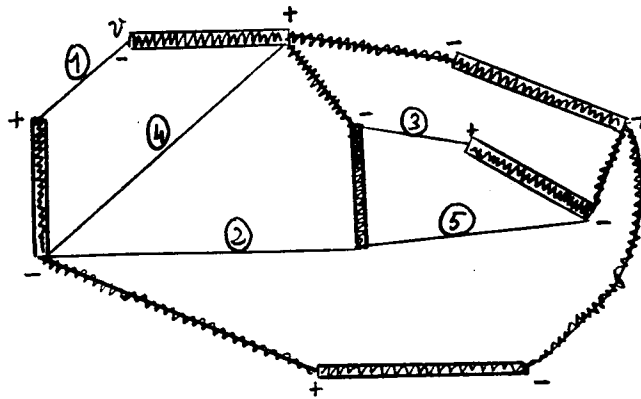


figure 35

B - CAS OU $P_G + M_G = V$ ET CAS GENERAL :

Soit $\mathcal{C}$ un couplage maximum de G et soient $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ les sommets laissés insaturés par $\mathcal{C}$. En appliquant le 'Blossom algorithme' à G muni de $\mathcal{C}$, on obtient une forêt F formée des arbres $A_i = (V_i, A_i)$ pour $i=1, \dots, k$ (un par v_i) qui sont des sous-graphes partiels de G . Puisque par hypothèse $P_G + M_G = V$, F est une forêt maximale de G .

Soit m^* le nombre d'arêtes joignant des sommets internes à des sommets externes et $q = |M_G|$. Remarquons que $q = \frac{|V| - k}{2}$.

Théorème III-2-1:

Si $G = (V, E)$ est un graphe biparti sans sommet parfait, on a alors:

$$r_{\mathcal{C}}(G) = m^* - q + 1 = m^* - \frac{|V| - k}{2} + 1$$

Démonstration:

Une arête $e \in \gamma(M_G)$, c'est à dire une arête entre deux sommets internes, ne peut pas appartenir à un couplage maximum, la contrainte de non négativité correspondante, $x_e \geq 0$, est donc nécessairement dans l'ensemble serré de F . Les seules autres contraintes qui peuvent être serrées sont les:

$$x(\delta(v)) \leq 1 \quad \text{pour tout } v \in M_G \quad (\text{théorème II-1-4})$$

Ces équations et les $x_e = 0$ pour $e \in \gamma(M_G)$ sont indépendantes, car une fois supprimées les variables x_e pour $e \in \gamma(M_G)$, les équations $x(\delta(v)) = 1$ pour $v \in M_G$ sont à variables disjointes (chaque variable n'apparaît que dans une équation). Le théorème est alors une conséquence directe de la définition du rang des couplages maximums, puisque $m = m - |\gamma(M_G)|$, et du théorème I-3 $\square$

La construction de ces $r_e(G)$ couplages maximums linéairement indépendants est un cas particulier de la construction donnée pour le cas des graphes non nécessairement bipartis, dans le §B du chapitre suivant.

Ceci termine le cas des graphes bipartis puisque si G est un tel graphe, on a:

$$r_e(G) = r_e(G(P_G + M_G)) + r_e(G(V - (P_G + M_G))) .$$

CHAPITRE IV

RANG DES COUPLAGES MAXIMUMS D'UN GRAPHE QUELCONQUE

Comme dans le cas biparti, on va étudier d'abord les graphes dont tous les sommets sont parfaits puis ceux ne possédant pas de tels sommets.

A - RANG DES COUPLAGES PARFAITS :

Soit G un graphe admettant un couplage parfait. Soit G' le sous-graphe partiel obtenu en gardant toutes les arêtes utiles de G et les sommets adjacents à au moins une de ces arêtes. G' est un $\mathcal{U}$ -graphe et $r_p(G) = r_p(G')$. On va donc se contenter d'étudier le rang des couplages parfaits des $\mathcal{U}$ -graphes. Par la suite, G sera toujours un $\mathcal{U}$ -graphe.

Rappelons que si G est un $\mathcal{U}$ -graphe, l'ensemble serré de F est formé des contraintes de (PC) de type (1) et de celles de type (2) pour $S \in H$. On notera E l'ensemble des équations :

$$E \quad \begin{cases} x(\delta(v)) = 1 \text{ pour tout } v \in V \\ x(\gamma(S)) = q_S \text{ pour tout } S \in H \end{cases}$$

Par analogie avec le théorème II-1-3 et la définition qui le suit, on appellera H -famille emboîtée une famille emboîtée S telle que

$$(i) \quad \forall S \in S \Rightarrow S \in H$$

(ii) $\forall S \in S, G(S) \times S(S)$ contient un cycle impair (non nécessairement hamiltonien).

Remarque 1 :

La définition récursive suivante détermine un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les H -familles emboîtées maximales :

$$(0) \quad S = \emptyset$$

(i) Si $G \times S(V)$ est biparti, Stop

(ii) sinon soit S un hypocouplable toujours presque parfaitement couplé de $G \times S(V)$ et minimal. Faire $S := S \cup \{S\}$ aller en (1). $\square$

Cependant, toute H -famille maximale ne peut pas être obtenue ainsi comme le montre le contre-exemple suivant : (figure 35)

Exemple :

Dans l'exemple de la figure 36, $\{S\}$ et $\{T\}$ constituent chacun une H -famille maximale. Seule $\{T\}$ peut être obtenue par la méthode récursive que l'on vient de définir.

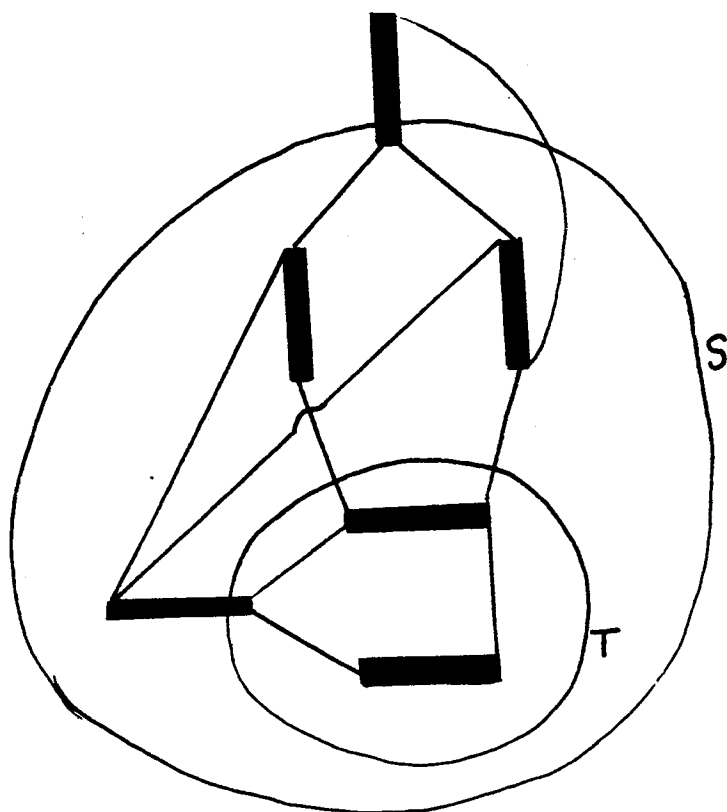


figure 36

Remarque 2 :

Cette définition récursive sera aussi constructive quand l'on aura un algorithme permettant de reconnaître la minimalité d'un élément de H . Ce n'est pas le cas au moment de la rédaction de cette thèse.

Soit S une famille emboîtée d'éléments de H , on note $E(S)$ l'ensemble des équations suivantes :

$$E(S) \begin{cases} x(\delta(v)) = 1 \text{ pour tout } v \in V \\ x(\gamma(S)) = q_s \text{ pour tout } S \in S \end{cases}$$

Le résultat central de cette thèse est le :

Théorème IV-1-1 :

Soit G un $\mathcal{U}$ -graphe, on a :

$$r_e(G) = v(G) - |S| + 1$$

avec $v(G)$ nombre cyclomatique de G et S une H -famille emboîtée maximale $\square$

D'après le théorème I-3, il suffira de montrer que, pour toute H -famille emboîtée maximale S , les équations de $E(S)$ engendrent toutes les équations de E et que le rang du système est : $|V| + |S| - p$, où p est le nombre de composantes connexes de G .

On notera I la famille des ensembles impairs de sommets de G presque parfaitement couplés pour tous les couplages parfaits de G ($I \supset H$).

Soit $S \in I$ on pourrait utiliser les théorèmes II-1-1 et II-1-2 pour montrer que $x(\gamma(S)) = q_S$ est une combinaison linéaire d'équations de E . Cependant le lemme suivant va nous apporter un peu plus de précision en spécifiant les équations de E nécessaires à cette combinaison :

Lemme IV-1-2 :

Soient G un $\mathcal{U}$ -graphe, $S \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ un couplage parfait de G . Soit $a \in S$ le sommet insaturé de $G(S)$. Soient M_S et P_S les sommets internes et externes de $G(S)$ et D la famille des composantes connexes d'au moins deux sommets de $G(P_S)$. On a alors

$$P_S + M_S = S$$

D'autre part : $x(\gamma(S)) = q_S$ est combinaison linéaire des équations $\tilde{E}(D)$ suivantes :

$$\tilde{E}(D) \begin{cases} x(\delta(v)) = 1 \text{ pour tout } v \in M_S \\ x(\gamma(D)) = q_D \text{ pour tout } D \in D \end{cases}$$

Démonstration :

Un couplage parfait de G est un couplage presque parfait de $G(S)$, donc $P_S + M_S = S$, sinon il existerait une arête e de $\delta(P_S + M_S) \cap \gamma(S)$. Celle-ci ne pouvant pas appartenir à un couplage presque parfait de $G(S)$ (corollaire II-1-6), ne peut pas non plus appartenir à un couplage parfait de G qui est un $\mathcal{U}$ -graphe.

D'autre part tout élément $D \in D$ appartient à H : c'est un hypocouplable car il est contractable par application du 'Blossom Algorithm' à $G(S)$; la contrainte correspondante est toujours serrée, ceci est une conséquence du théorème des écarts complémentaires (cf. l'exemple de solution du dual du problème de couplage, donnée dans le chapitre II et Edmonds[4]).

Une autre conséquence du corollaire II-1-6 est que $\gamma(M_S) = \emptyset$. on peut donc écrire :

$$(i) \quad \gamma(S) = \sum_{v \in M_S} \delta(v) + \sum_{D \in D} \gamma(D)$$

$$(ii) \quad x(\gamma(S)) = \sum_{v \in M_S} x(\delta(v)) + \sum_{D \in D} x(\gamma(D))$$

Puisque $D \in H$ quel que soit $D \in D$ on a :

$$\begin{aligned} (iii) \quad x(\gamma(S)) &= |M_S| + \sum_{D \in D} q_D \\ &= |M_S| + \sum_{D \in D} \frac{|D| - 1}{2} \\ &= |M_S| + \sum_{D \in D} \frac{|D|}{2} - \frac{1}{2} |D| \end{aligned}$$

si on note P_S^R l'ensemble des sommets externes qui n'appartiennent à aucun $D \in D$ (sommets externes réels), en raison de la structure de l'arbre de marquage ($\gamma(P_S^R) = \phi$), on a :

$$(iv) |P_S^R| + |D| = |M_S| + 1$$

$$(v) S = M_S + P_S^R + \sum_{D \in D} D$$

$$(vi) \frac{|S| - 1}{2} = |M_S| + |P_S^R| + \sum_{D \in D} \frac{|D|}{2} - \frac{1}{2}$$

En reportant dans (vi) $|P_S^R|$, par sa valeur calculée dans (iv), on obtient :

$$(vii) q_S = |M_S| - \frac{|D|}{2} + \sum_{D \in D} \frac{|D|}{2}$$

qui en raison de (iii) est égal à $x(\gamma(S))$ $\square$

Notons H' et I' l'ensemble des éléments T de H et I respectivement, tels que l'équation $x(\gamma(T)) = q_T$ n'est pas combinaison linéaire d'éléments de $E(S)$. Une conséquence immédiate du lemme précédent est que H' et I' ont les mêmes éléments minimaux.

Lemme IV-1-3 : (Pulleyblank [6])

Soient $G = (V, E)$ un graphe admettant un couplage parfait, S et T deux éléments de I . Si $|SnT|$ est impair, alors $TnSeI$, $TuSeI$ et pour tout $e_i \in \gamma(TuS) - \gamma(T) - \gamma(S)$, on a $x_i = 0$ quel que soit le couplage parfait.

Démonstration :

Voir l'article de référence $\square$

Corollaire IV-1-4 :

Si G est un $\mathcal{U}$ -graphe, sous les hypothèses précédentes on a :

$$\gamma(TuS) - \gamma(T) - \gamma(S) = \phi$$

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de la définition d'un $\mathcal{U}$ -graphe et du lemme précédent $\square$

Lemme IV-1-5 : (Pulleyblank [6])

Sous les mêmes hypothèses que celles du lemme précédent mais avec $|SnT|$ pair, on a : $T-SeI$ et $S-TeI$; de plus, pour tout $e_i \in \delta(SnT) - \gamma(SuT)$, on a $x_i = 0$ pour tout couplage parfait.

Démonstration :

Voir l'article de référence $\square$

Corollaire IV-1-6 :

Si G est un $\mathcal{U}$ -graphe, sous les hypothèses précédentes on a :

$$\delta(S \cap T) - \gamma(S \cup T) = \emptyset$$

Démonstration :

Conséquence immédiate du lemme et de la définition d'un $\mathcal{U}$ -graphe $\square$

Lemme IV-1-7 :

Soient $T \in I'$ et $S \in S$ tels que $|T \cap S|$ est impair. Alors, l'équation $x(\gamma(T)) = q_T$ est une combinaison linéaire des 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} x(\gamma(S)) = q_S \\ x(\gamma(S \cap T)) = q_{S \cap T} \\ x(\gamma(S \cup T)) = q_{S \cup T} \end{cases}$$

Démonstration :

En raison du corollaire IV-1-4, on a :

$$\begin{aligned} \gamma(S \cup T) &= \gamma(S) \cup \gamma(T) \\ &= \gamma(T) + (\gamma(S) - \gamma(S \cap T)) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$x(\gamma(T)) = x(\gamma(S \cup T)) - x(\gamma(S)) + x(\gamma(S \cap T)) \quad \square$$

Rappelons qu'on note H' , la famille des éléments $T \in H$ tels que $x(\gamma(T)) = q_T$ n'est pas combinaison linéaire d'équations de $E(S)$. Un élément T de H' peut soit intersecter proprement un ou plusieurs éléments $S \in S$ (i.e. $S \cap T \neq \emptyset$, $S \not\supset T$ et $T \not\supset S$), soit contenir, ou être contenu, dans ou plusieurs éléments de S . En raison de la maximalité de S , ce sont les seuls cas, non exclusifs, possibles.

Intéressons-nous d'abord à la première situation. Pour cela, définissons :

$$S.T = \{ S \in S / S \cap T \neq \emptyset, S \not\supset T, T \not\supset S \text{ et } S \text{ maximal pour ces propriétés} \}$$

Proposition IV-1-8 :

Soient T un élément minimal de H' (et donc de I') et $\{S_i\}_{i=1..q}$ les éléments de $S.T$. Alors, pour au moins un $i = 1, \dots, q$, on a $|T \cap S_i|$ pair

Démonstration :

Supposons que, pour tout $i = 1, \dots, q$, $|T \cap S_i|$ soit impair, par application répétée du lemme IV-1-7, on obtient que l'équation:

$$x(\gamma(T)) = q_T$$

est une combinaison linéaire des équations suivantes:

$$(a) \ x(\gamma(S_i)) = q_{S_i} \text{ pour } i = 1, \dots, q$$

$$(b) \ x(\gamma(T \cap S_i)) = q_{T \cap S_i} \text{ pour } i = 1, \dots, q$$

$$(c) \ x(\gamma(T \cup (\sum_{i=1}^q S_i))) = q_{T \cup (\sum_{i=1}^q S_i)}$$

Or les équations (a) appartiennent à $E(S)$ et les équations (b), par minimalité de T , sont combinaisons linéaires d'équations de $E(S)$. Il reste à établir que (c) est également une telle combinaison.

Pour cela, montrons d'abord que pour tout $i = 1, \dots, q$, on a:

$$\delta(S_i) - \gamma(T \cup (\sum_{j=1}^q S_j)) \neq \emptyset$$

S_i est connexe, il existe donc une arête $e \in \delta(T \cap S_i) \cap \gamma(S_i)$ (voir figure 37)

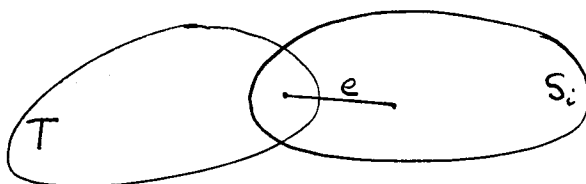


figure 37

e étant par hypothèse utile, il existe un couplage parfait $\mathcal{C}_e$ de G tel que $e \in \mathcal{C}_e$. D'après le lemme IV-1-3, $T \cap S_i$ est presque parfaitement couplé; par conséquent, l'unique arête f de $\mathcal{C}_e \cap \delta(S_i)$ ne peut pas appartenir à $\delta(T \cap S_i)$; cette arête f ne peut pas appartenir à $\gamma(S_i \cup T)$ (si c'était le cas T ne serait pas presque parfaitement couplé). Elle ne peut non plus appartenir à un $\gamma(S_i \cup S_j)$. En effet, si c'était le cas pour un certain j , on peut facilement voir qu'un des trois ensembles suivants S_j , T ou $S_j \cup T$ ne serait plus presque parfaitement couplé, ce qui est contraire, suivant le cas, aux hypothèses ou au lemme IV-1-3

Les figures 38 et 39 résument la situation quand on impose à $T \cap S_j$ d'être presque parfaitement couplé; dans le premier cas, T , et dans le second, S_j ne respectent plus les hypothèses.

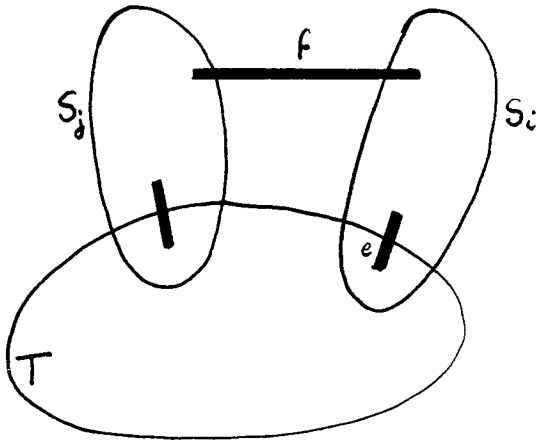


figure 38

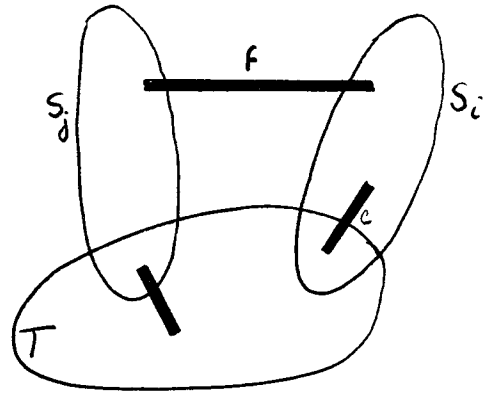


figure 39

Soient $(f_i)_{i=1, \dots, q}$ une famille d'arêtes telles que $f_i \in \delta(S_i) - \gamma(T \cup (\sum_{j=1}^q S_j))$ et $\mathcal{C}_{f_1}$ un couplage parfait de G contenant f_1 . $G(T \cup (\sum_{j=1}^q S_j))$ étant presque parfaitement couplé, on a pour tout $i=1, \dots, q$

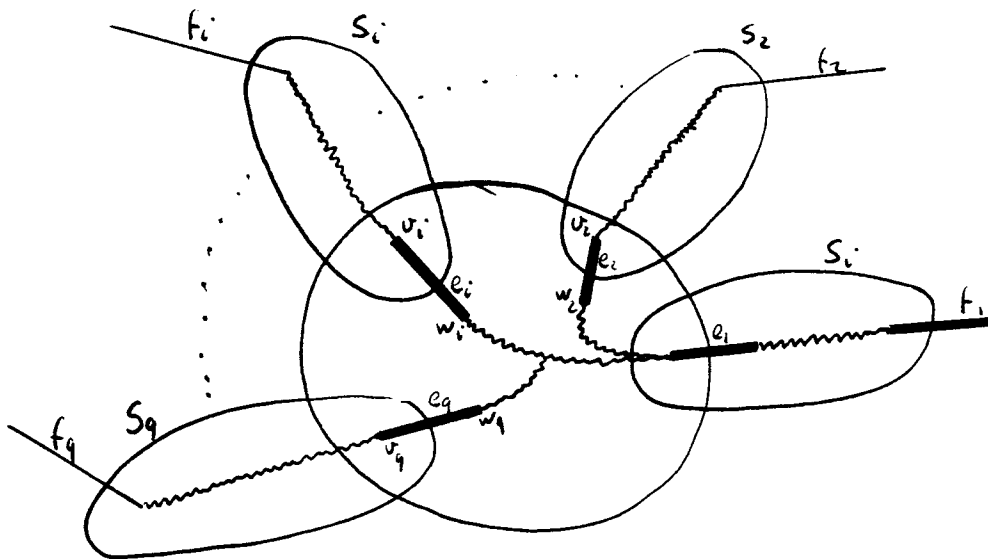
$$\{e_i\} = \delta(S_i) \cap \mathcal{C}_{f_1} \subset \gamma(T) \quad (\text{voir figure 40})$$


figure 40

Supposons que $e_i = (v_i, w_i)$ avec $v_i \in S_i$. Soit $(C_i)_{i=2, \dots, q}$ une famille de cycles alternés telle que $f_i \in C_i$ pour $i = 2, \dots, q$. chaque C_i contient nécessairement e_i et e_1 ; sinon, en pivotant e_{f_1} autour de C_i , on détruirait la presque perfection du couplage sur S_i ou sur $TU(\sum_{j=1}^q S_j)$. $C_i - \gamma(S_i)$ est connexe pour la même raison.

Toutes ces considérations ont pour seul but de justifier le fait que l'on peut appliquer l'algorithme de marquage à $G(TU(\sum_{j=1}^q S_j))$ muni de e_{f_1} , de la façon suivante:

- (a) Diriger le marquage de façon à contracter S_1 .
- (b) Marquer le long de $C_i \cap \gamma(T)$ jusqu'à atteindre v_i . On sait qu'alors v_i est le premier sommet de S_i marqué. Diriger le marquage pour contracter S_i et répéter pour tout $i=2, \dots, q$
- (c) Terminer le marquage.

En raison de la minimalité de T , les ensembles contractés dans (c) sont des éléments de $H-H'$

Or, d'après le lemme IV-1-2, l'équation (c) est combinaison linéaire des équations :

$$\begin{cases} x(\delta(v)) = 1 \text{ pour } v \in M_{TU(\sum_{j=1}^q S_j)} \\ x(\gamma(S)) = q_S \text{ pour tout } S \text{ expansion} \\ \text{d'un pseudo-sommet dans le marquage} \\ \text{de } G(TU(\sum_{i=1}^q S_i)) \end{cases}$$

On vient de voir que si S est l'expansion d'un pseudo-sommet dans le marquage de $G(TU(\sum_{i=1}^q S_i))$, alors, soit $S \in S.T$, soit S a été contracté dans la phase (c) et par conséquent $S \in H-H'$. L'équation (c) est donc combinaison linéaire d'équations de $E(S)$ $\square$

Proposition IV-1-9 :

Soit T un élément minimal de H' . Il n'existe aucun $S \in S$ tel que $T \cap S \neq \emptyset$ et $|T \cap S|$ soit pair.

Démonstration :

Soit S un élément minimal pour la propriété d'intersecter un élément minimal de H' en un nombre pair de sommets.

D'après le corollaire IV-1-6, on a: $\delta(S \cap T) - \gamma(S \cap T) = \emptyset$, donc:

$$\sum_{v \in S \cap T} x(\delta(v)) = 2x(\gamma(S \cap T)) + x(\delta(S) \cap \gamma(T)) + x(\delta(T) \cap \gamma(S))$$

Or :

$$\gamma(S \cap T) + \delta(T) \cap \gamma(S) = \gamma(S) - \gamma(S-T)$$

$$\gamma(S \cap T) + \delta(S) \cap \gamma(T) = \gamma(T) - \gamma(T-S)$$

Donc :

$$\sum_{v \in S \cap T} x(\delta(v)) = x(\gamma(T)) - x(\gamma(T-S)) + x(\gamma(S)) - x(\gamma(S-T))$$

Finalement :

$$x(\gamma(T)) = \sum_{v \in S \cap T} x(\delta(v)) + x(\gamma(T-S)) + x(\gamma(S-T)) - x(\gamma(S))$$

T étant aussi élément minimal de I' , $x(\gamma(T-S)) = q_{T-S}$ est combinaison linéaire d'équations de $E(S)$. D'après le lemme IV-1-2, l'équation $x(\gamma(S-T)) = q_{S-T}$ est combinaison linéaire des $x(\delta(w)) = 1$ pour $w \in M_{S-T}$ et des $x(\gamma(D)) = q_D$ pour tout $D \in D$, famille des composantes connexes de $G(P_{S-T})$. Or, par minimalité de S, $x(\gamma(D)) = q_D$ pour $D \in D$ est combinaison linéaire d'équations de $E(S)$; en effet, supposons que ce ne soit pas le cas, alors de la minimalité de S, on déduit que D rencontre les $S_i \in S$ en un nombre impair de sommets; ainsi, en raison de la proposition précédente, on arrive à une contradiction. $\square$

Les deux propositions précédentes nous montrent que $S.T = \emptyset$ pour tout $T \in H'$ (et pour tout $T \in I'$).

Soit $T \in H'$ tel que $S.T = \emptyset$ on se trouve alors dans au moins un des cas suivants :

Cas a : Quand on contracte les éléments de $S(T)$, le graphe $G(T) \times S(T)$ est biparti. Ce cas est le seul à considérer si S vérifie la définition récursive, donnée au début de ce paragraphe.

Cas b : Si le cas a ne se produit pas, il existe $S \in S$ contenant T. Choisissons S le plus petit avec cette propriété, le graphe $G(S) \times (S(S) \cup \{T\})$ est biparti.

Proposition IV-1-10 :

Soit $T \in H-S$ tel que $S.T = \emptyset$. Alors $T \notin H'$, c'est-à-dire ,
 $x(\gamma(T)) = q_T$ est combinaison linéaire d'équations de $E(S)$.

Démonstration :

La figure 41 représente le cas b; le cas a s'obtient en interchangeant les lettres S et T

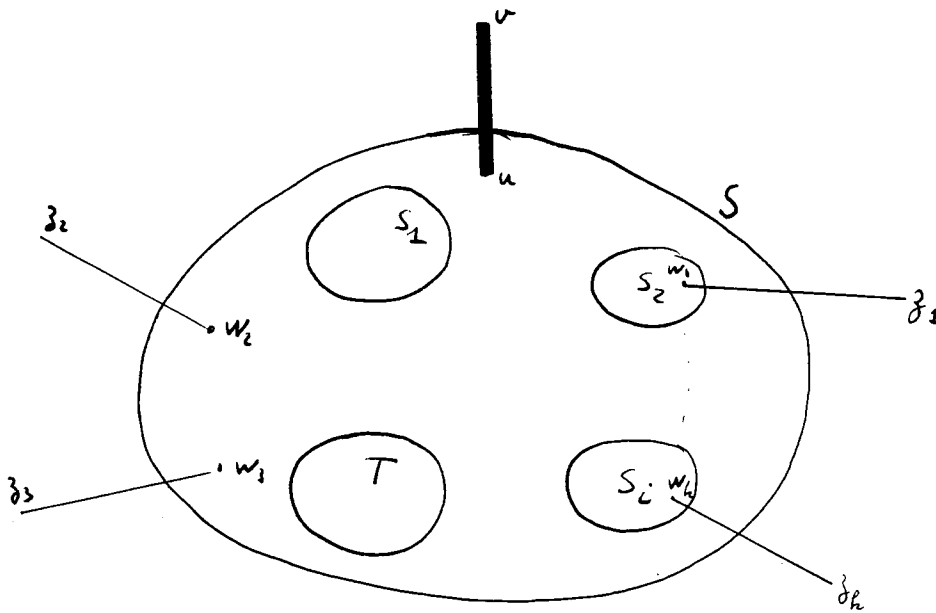


figure 41

Traisons le cas b. On verra que la démonstration dans le cas a s'en déduit immédiatement. Soit

Soit $e = (u, v), v \notin S$, l'arête de $\delta(S) \cap \mathcal{E}$. Appelons $G'(S)$ le graphe dont l'ensemble de sommets est $S \cup \{v\}$ et dont l'ensemble des arêtes est formé de $\gamma(S)$ et de l'ensemble $\delta'(S)$, obtenu en remplaçant chaque arête (w, z) de $\delta(S)$, avec $w \in S$, par (w, v) . (voir figure 42)

Soit $G'^*(S) = G'(S) \times (S(S) \cup \{T\})$: c'est un $\mathcal{U}$ -graphe biparti.

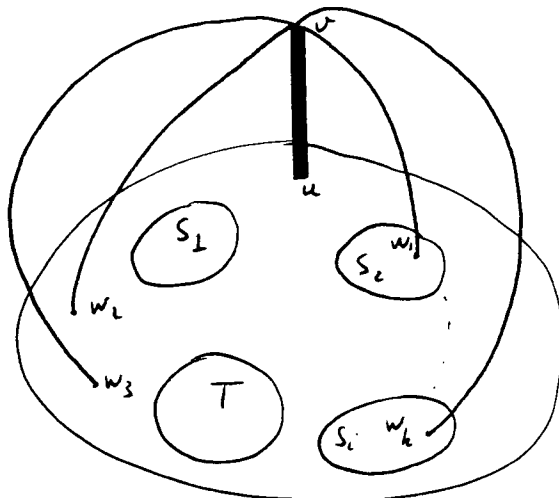


figure 42

Marquons ce graphe à partir de v . Tous les sommets admettent une marque + ou - .

Soient σ_i les pseudos-sommets correspondants aux $S_i \in S(S)$ et τ celui correspondant à T . Rappelons que dans $G'^*(S)$ aucune arête n'a ses deux extrémités marquées - du fait qu'une telle arête serait inutile. Les sommets de $G'^*(S)$ marqués - se partitionnent en 3 ensembles: $\{v\}$, M_S^{*r} les sommets réels qui appartiennent à S , M_S^{*p} les pseudos sommets (qui proviennent de contractions). On a alors :

$$x(\gamma(S)) = \sum_{u \in M_S^{*r}} x(\delta(u)) + \sum_{\{R/\rho \in M_S^{*r}\}} x(\gamma(R)) + \sum_{S_i \in S(S)} x(\gamma(S_i)) + x(\gamma(T))$$

Egalité vraie du fait que pour $\rho \in M_S^{*p}$: $\delta(R) \cap \delta(S) = \emptyset$ puisqu'il ne peut y avoir d'arêtes aux deux extrémités marquées - , donc $\delta(R) \subset \gamma(S)$.
Or,

$$\delta(R) = \sum_{z \in R} x(\delta(z)) - 2x(\gamma(R))$$

Selon que τ est marqué - (cas α) ou + (cas β), on obtient :

Cas α : $\varepsilon = 1$, cas β : $\varepsilon = -1$

$$x(\gamma(S)) = \sum_{u \in M_S^{*r}} x(\delta(u)) + \sum_{\{R/\rho \in M_S^{*p}\}} \left(\sum_{z \in R} x(\delta(z)) \right) - \sum_{\{i/\sigma_i \in M_S^{*p}\}} x(\gamma(S_i)) + \sum_{\{i/\sigma_i \in M_S^{*p}\}} x(\gamma(S_i)) + \varepsilon x(\gamma(T))$$

Ce qui montre que $x(\gamma(T)) = q_T$ est combinaison linéaire d'éléments de $E(S)$ dans le cas β . Le cas α s'obtient en éliminant, des équations α ou β , le terme $x(\gamma(T))$ puis en remplaçant S par T . Dans ce cas, on a donc aussi $x(\gamma(T)) = q_T$ combinaison linéaire d'éléments de $E(S)$ $\square$

Corollaire IV-1-11 :

$$H' = \phi$$

Démonstration :

H' ne possède pas d'élément minimal, donc $H' = \phi$ $\square$

Par conséquent, $E(S)$ est bien un système générateur des équations de E . Il ne nous reste plus qu'à montrer, comme annoncé, que le rang du système $E(S)$ est $|V| + |S| - p$ où p est le nombre de composantes connexes de G .

Supposons G connexe et considérons la combinaison linéaire

(c) suivante des premiers membres des équations de $E(S)$:

$$(c) \quad \sum_{w \in V} \alpha_w x(\delta(w)) + \sum_{S \in S} \beta_S x(\gamma(S)) = 0$$

(c) est un système de $|E| + |S|$ équations aux inconnues α_w , pour tout $w \in V$, et β_S , pour tout $S \in S$. On va montrer que ce système admet la solution suivante qui ne dépend que d'un seul paramètre:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_S = \begin{cases} \varepsilon(S)k & \text{si } S \text{ est un élément maximal de } S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \alpha_w = \varepsilon(w) \frac{k}{2} & \text{pour tout } w \in V \end{array} \right.$$

où les $\varepsilon(S)$ et les $\varepsilon(w)$ prennent leurs valeurs dans $\{-1, +1\}$

Prouvons d'abord que si $u \in V$ et $S \in S$ sont tels que S est minimal pour la propriété de contenir u , alors $\alpha_w = \alpha_u$ pour tout $w \in S$.

Appelons nombre de couches de $S \in S$, le nombre maximum d'éléments de $S(S) \cup \{S\}$ deux à deux comparables. Si S est dessiné à l'aide d'un diagramme de Ven, c'est le plus grand nombre de frontières que l'on traverse en allant d'un point, à l'intérieur de S , à un autre, à l'extérieur. Par exemple, S de la figure 43 a trois couches.

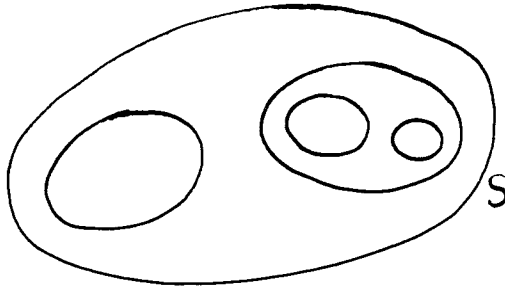


figure 43

La démonstration va se faire par récurrence sur le nombre de couches de S .

Notons $b_S = \sum_{T \in S} \beta_T$

. Si S n'a qu'une seule couche (i.e. $S(S) = \emptyset$). Pour tout sommet $y \in S$ adjacent à u , on a : $\alpha_y = -\alpha_u - b_S$. Les voisins z de y dans S ont un coefficient $\alpha_z = \alpha_u$; les voisins z' de z ont, à leur tour un coefficient $\alpha_{z'} = -\alpha_u - b_S$ et ainsi de suite. Or, S possède un cycle impair, donc pour un certain $t \in S$, on aura : $\alpha_t = -\alpha_u - b_S$, donc pour tout $w \in S$, $\alpha_w = \alpha_u = -\frac{b_S}{2}$.

. Supposons la proposition vraie pour S à $(k-1)$ couches.

. Soit S à k couches. Par définition de S , $u \in S$ et $u \notin T \in S(S)$.

Répétons ce qui a été fait dans le cas d'une seule couche, c'est-à-dire déterminons les α_w , de proche en proche, à partir de u . Quand un

des sommets atteints appartient à un élément S_i maximal de $S(S)$, alors tous les sommets w de S_i ont, par hypothèse de récurrence, même α_w qui est, soit α_u , soit $-\alpha_u - b_S$. Les éléments de $S(S)$ étant contractés, il existe, par définition de S , un cycle impair dans le graphe réduit; on obtiendra donc pour un sommet t : $\alpha_t = -\alpha_u = -\alpha_u - b_S$: tous les sommets de S ont, par conséquent même coefficient $\alpha_w = -\frac{b_S}{2}$.

Soient $e = (u, v) \notin \bigcup_{S \in S} \gamma(S)$ et $G^* = G \times S$ le graphe obtenu en contractant les éléments maximaux de S . D'après le théorème II-2-6, G^* est un $\mathcal{U}$ -graphe biparti. Marquons G^* à partir de u , chaque sommet reçoit une marque (et une seule).

Posons $\alpha_u = -\frac{k}{2}$ (u est marqué $-$) et calculons de proche en proche les α_w pour $w \in V - \{u\}$. On trouve que si $w \notin \bigcup_{S \in S} S$, alors $\alpha_w = \varepsilon \alpha_u = \varepsilon \frac{k}{2}$

où ε est la marque du sommet correspondant dans G^* . Pour tous les sommets $w \in S \in S$, S élément maximal de S , on arrive à $\alpha_w = \varepsilon \alpha_u = \varepsilon \frac{k}{2}$

où ε est la marque du pseudo-sommet de G^* correspondant à S . Pour tout élément maximal S de S , on a alors $b_S = \beta_S = -2\varepsilon \alpha_u = -\varepsilon k$, et pour tout T élément maximal de $S(S)$, on a $b_T = \beta_S + \beta_T = -2\varepsilon \alpha_u = \beta_S$,

donc $\beta_T = 0$. De la même manière on démontre alors que, pour tout $T \in S(S)$, $\beta_T = 0$.

La solution, une fois fixée la valeur d'un α_w , étant unique, le rang du système, dans le cas où G est connexe, est $|V| + |S| - 1$. Ce que l'on vient de réaliser s'applique à chaque composante connexe de G ; si G a p composantes connexes, il suffira de fixer p paramètres pour trouver une solution qui sera alors unique.

Ceci termine la démonstration du théorème IV-1-1.

Remarque 3 :

Si l'on remplace la condition sur G , que toute arête est utile, par celle moins forte, que toute arête est faiblement utile, le résultat précédent demeure valable puisque une arête faiblement utile et inutile est isolée; ni le nombre cyclomatique, ni $|S|$ ne sont changés.

Corollaire IV-1-12 :

Soit G un $\mathcal{U}$ -graphe. Toute H -famille emboîtée maximale a la même cardinalité.

Démonstration :

D'après le théorème IV-1-1, $\dim F = v(G) - |S|$, $\dim F$ et $v(G)$ étant des constantes, $|S|$ en est également une $\square$

Remarque 4 :

En raison de la remarque 3 précédente, le corollaire IV-1-12 reste valable pour les graphes tels que toute arête est faiblement utile.

Remarque 5 :

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des H -familles emboîtées d'éléments de H . Si $\mathcal{I}$ est considéré comme l'ensemble des indépendants, le couple $(H, \mathcal{I})$ forme-t-il un matroïde ? Non, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Dans le graphe de la figure 44, $\{S_1, S_2\}$ est un ensemble indépendant. Un circuit, étant un ensemble dépendant minimal, est formé de l'intersection de deux éléments de H . Or, $\{S_1, S_2\} \cup \{T_1\}$ possède deux circuits, ce qui est impossible pour un matroïde.

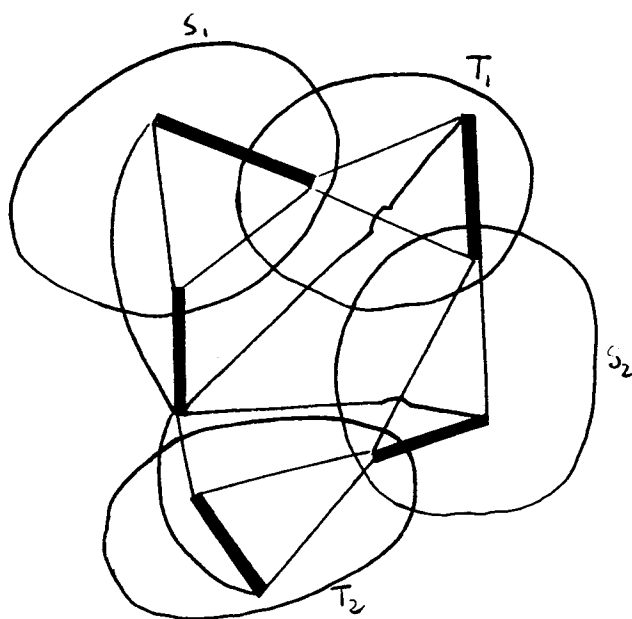


figure 44

Un problème encore non résolu est celui de trouver une H -famille maximale. Si l'on sait obtenir les ensembles maximaux d'une telle famille, par marquage à partir d'un sommet, on ne sait pas la trouver toute entière. On aurait pu penser qu'une famille emboîtée maximale de contractions, obtenue par marquage, contiendrait une H -famille maximale. L'exemple ci-dessous montre que ce n'est pas le cas.

Exemple :

Soit G le graphe de la figure 45. Une H -famille maximale est formée des ensembles $\{1,2,3\}$ et $\{4,5,6\}$. La famille emboîtée maximale suivante, obtenue par marquage à partir du sommet 5, $\{1,4,6\}$ et $\{1,2,3,4,6\}$, ne contient qu'un élément de H qui est $\{1,2,3,4,6\}$, et ne contient donc pas une H -famille maximale.

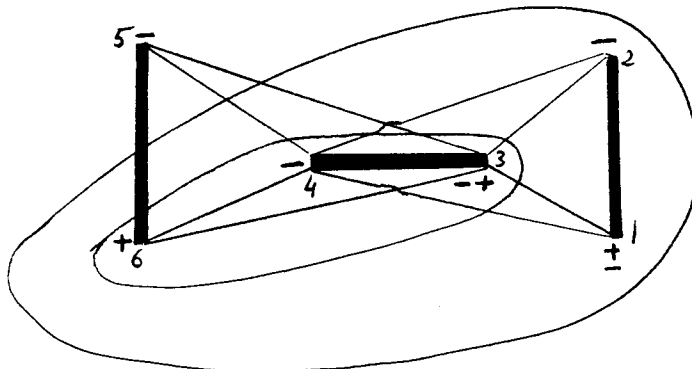


figure 45

B - CAS DES GRAPHS SANS SOMMETS PARFAITS ET CAS GENERAL

Soient $\mathcal{C}$ un couplage maximum de G et $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ les sommets laissés insaturés par $\mathcal{C}$. En appliquant le 'Blossom algorithm' à G muni de $\mathcal{C}$, on obtient une forêt F , formée des arbres $A_i = (V_i, A_i)$ pour $i=1, \dots, k$ (un par v_i) qui sont des sous-graphes partiels de G^* , le graphe obtenu après contraction des composantes connexes de $G(P_G)$. Puisque, par hypothèse, $P_G + M_G = V$, F est une forêt maximale de G^* .

Rappelons qu'on note $D = \{D \subset V / |D| > 1 \text{ et } D \text{ est une composante connexe de } G(P_G)\}$

On appelle bloc de G un sous-graphe de G maximal sans point d'articulation. On note $b(G)$ le nombre de tels blocs dans G .

Exemple :

Le graphe de la figure 46 possède deux blocs qui sont :
 $\{1,2,3\}$ et $\{3,4,5\}$

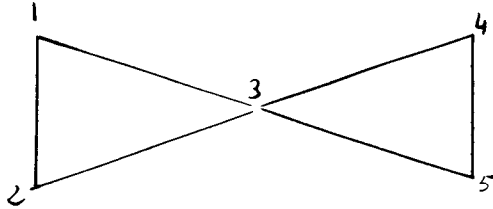


figure 46

Théorème IV-2-1 : (Pulleyblank [7])

Si G est un hypocouplable, il admet $|E| - b(G) + 1$ couplages presque parfaits linéairement indépendants $\square$

Une démonstration constructive est donnée dans [7].

Posons $|D|_b = \sum_{D \in \mathcal{D}} b(G(D))$, $q = |M_G|$, $m_1^* = m - m^-$ où $m^- = |\gamma(M_G)|$

Théorème IV-2-2 :

Si G est un graphe sans sommet parfait :

$$r_p(G) = m_1^* - q - |D|_b + 1$$

Démonstration :

Un bloc de G est un élément de $\tilde{H}$, où $\tilde{H}$ est l'ensemble des hypocouplables dont la contrainte correspondante de (PC) est serrée pour tous les couplages maximums. Construisons une famille emboîtée S d'éléments de $\tilde{H}$, de la façon suivante:

Soient $D \in \mathcal{D}$ et $B_1^D, \dots, B_{b(G(D))}^D$ les blocs de $G(D)$, rangés

dans un ordre tel que $B_j^D \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i^D \neq \emptyset \forall j$; posons $S_1^D = B_1^D$, $S_z^D = \bigcup_{i=1}^z B_i^D$ pour $i=2, \dots, b(G(D))$; remarquons que $S_{b(G(D))}^D = D$.

Soit, alors, $S = \{S_z^D / D \in \mathcal{D}, z=1, \dots, b(G(D))\}$. Par construction, $|S_1^D| = |D|_b$

Considérons l'ensemble suivant de contraintes de l'ensemble serré de F :

- $$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & x(\delta(v)) = 1 \text{ pour tout } v \in M_G \\ \text{(b)} & x(\gamma(S)) = q_S \text{ pour tout } S \in S \\ \text{(c)} & x_e = 0 \text{ pour tout } e \in (P) \end{array} \right.$$

En rangeant les équations précédentes dans l'ordre (c), (a) et (b), ces dernières classées dans un ordre décroissant (pour l'inclusion) sur les $S \in S$, elles ont une structure triangulaire et sont donc indépendantes. Par conséquent :

$$r_{\mathcal{C}}(G) \leq m_1^* - q - |D|_b + 1$$

En remarquant que la famille S construite précédemment est unique, à une commutativité près, on pourrait démontrer directement l'égalité voulue. Cependant, il est tout aussi simple d'essayer de construire $m_1^* - q - |D|_b + 1$ couplages maximums linéairement indépendants, ce qui donnera l'inégalité précédente dans l'autre sens.

Soit $\alpha \in M$. Il existe un seul i tel que $\alpha \in V_i$. Soit C_α la chaîne joignant α à v_i dans l'arbre A_i . Glisser le couplage $\mathcal{C}$ le long de C_α , pour obtenir un nouveau couplage maximum $\mathcal{C}'$, consiste à inverser le rôle des arêtes de C_α par rapport au couplage.

La construction est alors la suivante :

(i) Pour tout sommet externe réel et tout pseudo sommet α , glisser $\mathcal{C}$ le long de C_α . Dans le cas où α est un pseudo sommet, on ne change pas le couplage dans le sous-graphe dont la contraction a donné α . (Bien entendu, dans les autres pseudo-sommets de C_α , ce couplage devra être changé). Les sommets externes et pseudo-sommets minimaux dans la relation de préordre définie par la forêt F , ne donnent lieu à aucun glissement.

(ii) Soient α un pseudo-sommet et $\mathcal{C}'_\alpha$ le couplage maximum obtenu par glissement de $\mathcal{C}$ le long de C_α . Remarquons que $\mathcal{C}'_\alpha = \mathcal{C}$ si α est un des éléments minimaux mentionnés dans (i). Soit D l'expansion de α . Comme on l'a précisé dans (i), $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'_\alpha$ induisent le même couplage presque parfait de $G(D)$. Cependant, $\mathcal{C}'_\alpha \cap \delta(D) = \emptyset$ et l'on peut donc remplacer le couplage presque parfait de $G(D)$ par $|\gamma(D)| - b(D)$ autres linéairement indépendants. On trouvera dans Pulleyblank [7], la manière d'opérer.

Répéter pour tout D .

(iii) Pour toute arête $e \in \gamma(M_G) + (\sum_1 A_i)$, soit $e = (t, z)$. Si les deux sommets adjacents à e sont comparables dans la relation de préordre déjà définie, faire (1), sinon faire (2)

- (1) Si t et z sont comparables, l'adjonction de e à la forêt F crée un cycle alterné. Pivoter $\mathcal{C}$ autour de ce cycle.

- (2) Supposons $t \in P_G, i$ tel que $t \in V_i$ et $f = (z, w) \in \mathcal{C}$, l'arête du couplage adjacente à z . Glisser $\mathcal{C}$ le long de la chaîne : $C_t \cup \{e\} \cup \{f\}$.

Combien a-t-on construit de couplages maximums ?

(i) Autant que de sommets externes de $G \times D$ qui ne sont pas minimaux, c'est à dire autant que de sommets internes, donc q .

$$(ii) \sum_{D \in \mathcal{D}} (|\gamma(D)| - b(D)) = \sum_{D \in \mathcal{D}} |\gamma(D)| - |\mathcal{D}|_b$$

(iii) On construit un couplage par arête qui n'appartient pas à la forêt F et qui joint un sommet interne à un sommet externe. La forêt possédant $2q$ arêtes, on a construit $m_1^* - 2q - \sum_{D \in \mathcal{D}} |\gamma(D)|$ couplages maximums.

En ajoutant tous ces couplages, sans oublier le couplage initial $\mathcal{C}$, on obtient bien $m_1^* - q - |\mathcal{D}|_b + 1$.

Pour montrer qu'ils sont indépendants, rangeons-les dans l'ordre suivant :

Premièrement, ceux obtenus dans (iii), puis ceux obtenus dans (ii), dans un ordre décroissant pour les $D \in \mathcal{D}$, l'ordre étant induit par celui sur les pseudo-sommets dont ils sont l'expansion ; enfin, ceux donnés par (i), puis $\mathcal{C}$. Dans cet ordre, ces couplages ont une structure triangulaire et sont donc linéairement indépendants. $\square$

Remarque 1 :

Un couplage maximum de G est constitué d'un couplage maximum de $G(P_G + M_G)$ et d'un couplage parfait de $G(P_G)$, donc :

$$r_{\mathcal{C}}(G) = r_{\mathcal{C}}(G(P_G + M_G)) + r_{\mathcal{C}}(G(P_G)) - 1$$

Remarque 2 :

Soit μ la cardinalité maximum d'un couplage de G . On s'intéresse, ici, à la dimension du polyèdre qui est l'enveloppe convexe des couplages de cardinalité $k \leq \mu$.

Si $k = \mu$: c'est l'objet des chapitres III et IV précédents.

Si $k < \mu$: le système suivant :

$$(PC_k) \begin{cases} x(\delta(v)) \leq 1 & \text{pour tout } v \text{ vérifiant la condition } * \text{ du chapitre II.} \\ x(\gamma(S)) \leq q_S & \text{pour tout } S \text{ hypocouplable sans point d'articulation.} \\ x(E) \leq k \end{cases}$$

définit l'enveloppe connexe des couplages de cardinalité inférieure ou égale à k .

Ce système est visiblement minimal puisque la dernière contrainte ne peut pas être la conséquence des autres si $k < \mu$. Ce polyèdre est de plus, de pleine dimension, donc la contrainte $x(E) \leq k$ correspond à une facette de (PC_k) . La dimension cherchée est par conséquent de $|E|-1$.

CONCLUSION

Parmi les questions qui restent ouvertes, après ce travail, les deux suivantes semblent les plus intéressantes pour les raisons que l'on exposera ci-dessous.

1) Construction des $v(G) - |S| + 1$ couplages parfaits du théorème IV.1.1.

En vue de cette construction, on peut conjecturer que si G est un $\mathcal{U}$ -graphe et $\mathcal{C}$ un couplage parfait de G , il existe une base de cycles formée de $|S|$ cycles impairs (presque parfaitement couplés ?) et de $v(G) - |S|$ cycles alternés, ces derniers ayant une structure triangulaire.

2) Caractérisation des éléments minimaux de H .

Cette caractérisation est certainement nécessaire pour répondre à la question précédente. Elle revient à celle des hypocouplables S pour lesquels le graphe obtenu, en reliant toutes les arêtes du cocycle de S (voir figure 47) à un même sommet α , possède des H -familles maximales de cardinalité 1.

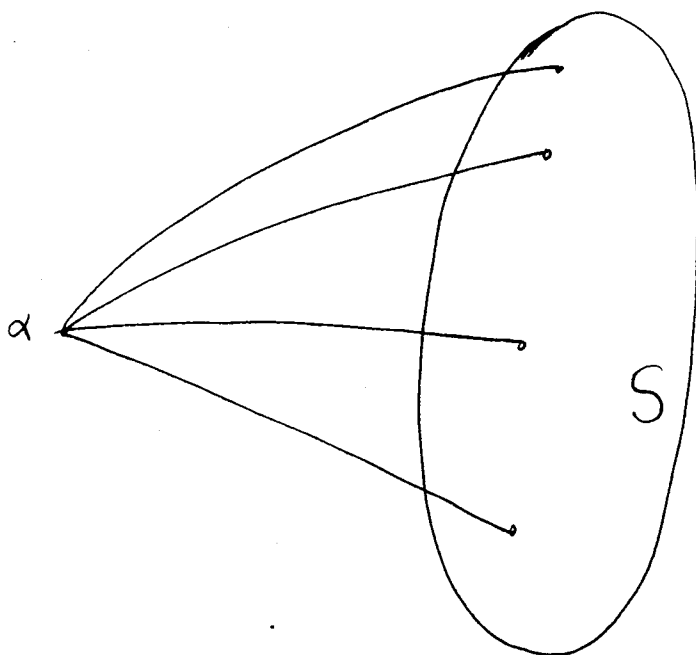


figure 47

La réponse à ces deux questions permettrait d'avancer dans la détermination des facettes du polyèdre, enveloppe convexe des vecteurs représentatifs des couplages parfaits. Dans le même ordre d'idées, il serait intéressant de connaître la classe de contraintes qui donne la même facette. Ces deux problèmes sont assez difficiles à résoudre car le polyèdre en question n'est pas de pleine dimension.

Un autre intérêt qui suscite la caractérisation des éléments minimaux de H est la conjecture de Fulkerson (voir chapitre II, §C). Il suffirait de démontrer cette conjecture, dans le cas où G est un graphe cubique 3 arêtes-connexe, tel que toute H -famille maximale soit de cardinalité 1. En effet, soient G un graphe cubique 3 arêtes-connexe (cf. chapitre II, §C) et $S \in H$, alors $|\delta(S)| = 3$, car on tire de l'égalité :

$$|\delta(S)| = 3|S| - 2|\gamma(S)|$$

que $|\delta(S)|$ est impair ; or, $|\delta(S)| \geq 3$, en raison de la 3-arête connexité de G et $|\delta(S)| \leq 4$ du fait que si G n'est pas 3 arêtes coloriable il est 4 arêtes coloriable et que si $S \in H$, une seule arête du cocycle de S est coloriée chaque fois.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BALINSKI : "Establishing the matching polytope".
- [2] C. BERGE : "Graphes et hypergraphes". Dunod.
- [3] V. CHVATAL : "On certain polytopes associated with graphs". Journal of combinatorial theory (B), (1975), p. 138-154.
- [4] J. EDMONDS : "Path, trees and flowers". Canadian Journal of Mathematics 17, (1965).
- [5] J. EDMONDS : "Maximun matching and a polyhedron with (0-1) vertices".
Journal of research of the National Bureau of Standards, Vol. 69B,
Nos 1 and 2, January-June 1965.
- [6] W. PULLEYBLANK : "Thesis". University of Waterloo.
- [7] W. PULLEYBLANK, J. EDMONDS : "Facets of the 1-matching polyhedra"
Research Report CORR 73-3, University of Waterloo.

ERRATA

Page 2 : ligne 6 $S \subset V$

Page 39 : avant dernière ligne

$$m^* = m - |\gamma(M_G)|$$

Page 40 : $r_e(G) = r_e(G(P_G + M_G)) + r_e(G(V - (P_G + M_G))) - 1$

Page 42 : 4° ligne en partant du bas :

proposition I-3

Page 56 : dernière ligne : $e \in \gamma(M_G)$

Page 58 : dans remarque 1 :

$$r_e(G) = r_e(G(P_G + M_G)) + r_e(G(V - (P_G + M_G))) - 1$$