



HAL
open science

Simulation numérique lagrangienne des phénomènes consécutifs à l'excitation dans un plasma d'une onde de très grande amplitude

Yves Ducloux

► **To cite this version:**

Yves Ducloux. Simulation numérique lagrangienne des phénomènes consécutifs à l'excitation dans un plasma d'une onde de très grande amplitude. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1976. Français. NNT: . tel-00287152

HAL Id: tel-00287152

<https://theses.hal.science/tel-00287152>

Submitted on 11 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Simulation numérique lagrangienne des phénomènes consécutifs à l'excitation dans un plasma d'une onde de très grande amplitude

THESE

**DOCTORAT DE 3^e CYCLE
PHYSIQUE DES PLASMAS**

Yves DUCLOUX

**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE - GRENOBLE**

JURY :

PRESIDENT : J.M. DOLIQUE

**EXAMINATEURS : N. GASTINEL, P. GUELIN, C. POMOT,
P. CHENEVIER**

Soutenue le 9 Novembre 1976

Monsieur Gabriel CAU : Président
Monsieur Pierre JULLIEN : Vice Président

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ARNAUD Paul	Chimie
AUBERT Guy	Physique
AYANT Yves	Physique approfondie
Mme BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM. BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale
BARBIER Reynold	Géologie appliquée
BARJON Robert	Physique nucléaire
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
BARRA Jean-René	Statistiques
BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
BEAUDOING André	Clinique de Pédiatrie et Puériculture
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
Mme BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM. BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BEZES Henri	Pathologie chirurgicale
BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
BONNET Georges	Electrotechnique
BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
BONNET-EYMARD Joseph	Clinique gastro-entérologique
Mme BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM. BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
BOUTET DE MONTVEL Louis	Mathématiques pures
BRAVARD Yves	Géographie
CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
CALAS François	Anatomie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
CHARACHON Robert	Clinique Oto-rhino-laryngologique
CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
CHIBON Pierre	Biologie animale
COEUR André	Pharmacie chimique et chimie analytique
CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
Mme DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM. DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie

MM. DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Métallurgie
DESSAUX Georges	Physiologie animale
DODU Jacques	Mécanique appliquée (IUT A)
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DREYFUS Bernard	Thermodynamique
DUCROS Pierre	Cristallographie
DUGOIS Pierre	Clinique de dermatologie et syphiligraphie
GAGNAIRE Didier	Chimie physique
GALLISSOT François	Mathématiques Pures
GALVANI Octave	Mathématiques Pures
GASTINEL Noël	Analyse numérique
GAVEND Michel	Pharmacologie
GEINDRE Michel	Electroradiologie
GERBER Robert	Mathématiques Pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
JANIN Bernard	Géographie
KAHANE André	Physique générale
KLEIN Joseph	Mathématiques pures
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
LACAZE Albert	Thermodynamique
LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM. LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LATREILLE René	Chirurgie générale
LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
LEDRU Jean	Clinique médicale B
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Pierre	Sciences nucléaires
LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
LOUP Jean	Géographie
Melle LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM. MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
MALINAS Yves	Clinique obstétricale
MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiologique
MAZARE Yves	Clinique médicale A
MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
MOURIQUAND Claude	Histologie
MOUSSA André	Chimie nucléaire
MULLER Jean-Michel	Thérapeutique (néphrologie)
NEEL Louis	Physique du Solide
OZENDA Paul	Botanique
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
REVOL Michel	Urologie
RINALDI Renaud	Physique
DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-chirurgie
SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
SENGEL Philippe	Zoologie

MM. SIBILLE Robert	Construction mécanique (IUT A)
SOUTIF Michel	Physique générale
TANCHE Maurice	Physiologie
TRAYNARD Philippe	Chimie générale
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM. VERAIN André	Physique
VEYRET Paul	Géographie
VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. CLARK Gilbert	Spectrométrie physique
CRABBE Pierre	CERMO
ENGLMAN Robert	Spectrométrie physique
HOLTZBERG Frédéric	Basses températures
DEMBICKI Eugéniuz	Mécanique
MATSUSHIMA Yozo	Mathématiques Pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
ALARY Josette	Chimie analytique
MM. AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
BELORIZKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
BILLET Jean	Géographie
BOUCHET Yves	Anatomie
BRUGEL Lucien	Energétique (IUT A)
BUISSON René	Physique (IUT A)
BUTEL Jean	Orthopédie
COHEN ADDAD Pierre	Spectrométrie physique
COLOMB Maurice	Biochimie
CONTE René	Physique (IUT A)
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAUTHIER Yves	Sciences Biologiques
GAUTRON René	Chimie
GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
GLENAT René	Chimie organique
GROULADE Joseph	Biochimie médicale
HACQUES Gérard	Calcul numérique
HOLLARD Daniel	Hématologie
HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme KAHANE Josette	Physique
MM. KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
KUHN Gérard	Physique (IUT A)
LE ROY Philippe	Mécanique (IUT A)
LUU DUC Cuong	Chimie organique

MM. MAYNARD Roger	Physique du solide
Mme MINIER Colette	Physique (IUT A)
MM. PELMONT Jean	Biochimie
PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et Minéralogie
PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle PIERY Yvette	Physiologie animale
MM. RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM. ROBERT André	Chimie papetière
SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM. STREGLITZ Paul	Anesthésiologie
VIALON Pierre	Géologie
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM. AMBLARD Pierre	Dermatologie
ARMAND Gilbert	Géographie
ARMAND Yves	Chimie (IUT A)
BACHELOT Yvan	Endocrinologie
BARGE Michel	Neuro chirurgie
BARJOLLE Michel	M.I.A.G.
BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM. BOST Michel	Pédiatrie
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM. BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
CHARDON Michel	Géographie
CHERADAME Hervé	Chimie papetière
CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
CONDONNIER Daniel	Néphrologie
COULOMB Max	Radiologie
CROUZET Guy	Radiologie
CYROT Michel	Physique du solide
DELOBEL Claude	M.I.A.G.
DENIS Bernard	Cardiologie
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM. FAURE Jacques	Médecine légale
FAURE Gilbert	Urologie
GAUTIER Robert	Chirurgie générale
GENSAC Pierre	Botanique
GIDON Maurice	Géologie
GROS Yves	Physiques (IUT A)

MM. GUITTON Jacques	Chimie
HICTER Pierre	Chimie
IVANES Marcel	Electricité
JALBERT Pierre	Histologie
JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
KOLCDIE Lucien	Hématologie
LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
LEROUY Philippe	IUT A
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
MARECHAL Jean	Mécanique (IUT A)
MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
MICHOULLIER Jean	Physique (IUT A)
NEGRE Robert	Mécanique (IUT A)
NEMOZ Alain	Thermodynamique
NOUGARET Marcel	Automatique (IUT A)
PARAMELLE Bernard	Pneumologie
PECCOUD François	Analyse (IUT B)
PEFFEN René	Métallurgie (IUT A)
PERRET Jean	Neurologie
PERRIER Guy	Géophysique - Glaciologie
PHELIP Xavier	Rhumatologie
RACHAIL Michel	Médecine interne
RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
RAMBAUD André	Hygiène et hydrologie
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
Mme RENAUDET Jacqueline	Bactériologie
MM. ROBERT Jean-Bernard	Chimie Physique
ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
SHOM Jean-Claude	Chimie générale
STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
VROUSOS Constantin	Radiologie

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

M. COLE Antony	Sciences nucléaires
----------------	---------------------

Fait à SAINT MARTIN D'HERES, AVRIL 1976.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Président : M. Philippe TRAYNARD
Vice-Président : M. Pierre-Jean LAURENT

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. BENOIT Jean	Radioélectricité
BESSON Jean	Electrochimie
BLOCH Daniel	Physique du solide
BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrometallurgie
BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
COUMES André	Radioélectricité
DURAND Francis	Métallurgie
FELICI Noël	Electrostatique
FOULARD Claude	Automatique
LESPINARD Georges	Mécanique
MOREAU René	Mécanique
PARIAUD Jean-Charles	Chimie-Physique
PAUTHENET René	Physique du solide
PERRET René	Servomécanismes
POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
SILBER Robert	Mécanique des Fluides

PROFESSEUR ASSOCIE

M. ROUXEL Roland Automatique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BLIMAN Samuel	Electronique
BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
COHEN Joseph	Electrotechnique
LACOUME Jean-Louis	Géophysique
LANCIA Roland	Electronique
ROBERT François	Analyse numérique
VEILLON Gérard	Informatique Fondamentale et appliquée
ZADWORNÝ François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. ANCEAU François	Mathématiques Appliquées
CHARTIER Germain	Electronique
GUYOT Pierre	Chimie Minérale
IVANES Marcel	Electrotechnique
JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
MORET Roger	Electrotechnique Nucléaire
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
SABONNADIÈRE Jean-Claude	Informatique Fondamentale et appliquée
Mme SAUCIER Gabrièle	Informatique Fondamentale et appliquée

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIE

M. LANDAU Ioan Automatique

CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maîtres de Recherche)

MM. FRUCHART Robert

Directeur de Recherche

ANSARA Ibrahim

Maître de Recherche

CARRE René

Maître de Recherche

DRIDLE Jean

Maître de Recherche

MATHIEU Jean-Claude

Maître de Recherche

MUNIER Jacques

Maître de Recherche

Le travail exposé dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Physique des Plasmas, sous la Direction de Monsieur le Professeur J.M. DOLIQUE.

Je tiens à lui exprimer toute ma vive reconnaissance pour le soin avec lequel il a dirigé mon travail et pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également Monsieur le Professeur N. GASTINEL, Directeur du CICG, et Monsieur P. GUELIN, Maître de Recherche au CNRS, d'avoir bien voulu accepter de participer au jury.

Que Monsieur C. POMOT, Maître de Recherche au CNRS, soit assuré de ma reconnaissance pour les discussions fructueuses qui ont permis de mener à bien cette étude.

Je tiens à remercier spécialement Monsieur P. CHENEVIER, Maître Assistant à l'INPG, pour l'attention avec laquelle il a suivi mon travail et pour l'aide constante qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je ne saurais oublier mes camarades de laboratoire qui ont facilité ma tâche par l'ambiance amicale que j'ai trouvée auprès d'eux, et en particulier Madame F. PICARD, pour la diligence et le soin avec lequel elle s'est chargée de la réalisation matérielle de ce mémoire.

- S O M M A I R E -

INTRODUCTION	1
<hr/>	
1 - ETUDE ANALYTIQUE ET PRESENTATION DES CARACTERES GENERAUX DE LA SIMULATION	
<hr/>	
1.1. - Etude analytique	3
1.2. - Description des caractères généraux de la simulation	9
1.2.1. - Injection des superparticules	10
1.2.2. - Description de la grille chargée	11
1.2.3. - Etude de la neutralisation de la charge de la grille	13
2 - DESCRIPTION DU MODELE A PARTICULE DE DAWSON ET APPLICATION	
<hr/>	
2.1. - Description du modèle de simulation	15
2.1.1. - Calcul des champ et potentiel électriques créés par une superparticule	16
2.1.2. - Equation du mouvement d'une superparticule	18
2.2. - Application du modèle à la situation physique étudiée ...	21
2.3. - Etude des performances du code	25
2.3.1. - Etude de la conservation de la quantité de mouvement	25
2.3.1.1. - Action de Γ_0 à DT constant	25
2.3.1.2. - Action de DT à Γ_0 constant	28
2.3.1.3. - Action du rapport Γ_0/DT , le produit $\Gamma_0 \cdot DT$ étant constant	28
2.3.2. - Etude de la conservation de l'énergie	30
2.3.3. - Etude de la réversibilité dans le temps	30

2.4. - Algorithme de calcul rapide utilisant un maillage spatial	30
2.5. - Détermination des paramètres de la simulation	37

3 - DESCRIPTION DU MODELE CIC ET APPLICATION

3.1. - Description du modèle CIC à une dimension	41
3.1.1. - Répartition de la charge d'une superparticule sur les noeuds du maillage	41
3.1.2. - Calcul du champ et du potentiel électriques	42
3.1.3. - Calcul de la force exercée sur une superparticule	44
3.2. - Application du modèle CIC à la simulation du problème physique étudié	45
3.3. - Etude des performances du modèle	50
3.3.1. - Etude de la conservation de la quantité de mouvement	50
3.3.1.1. - Action du paramètre $\tau \cdot \omega_{pe}$ (temps réduit)	50
3.3.1.2. - Action du paramètre N_e	54
3.3.1.3. - Action du paramètre K	54
3.3.2. - Etude de la conservation de l'énergie	54

4 - COMPARAISON DES DEUX MODELES ET PRESENTATION D'UNE PREMIERE SIMULATION

4.1. - Comparaison entre le code CIC et le code à particules de Dawson	55
4.1.1. - Résultats obtenus à l'aide du code à particules de Dawson	55
4.1.2. - Résultats obtenus à l'aide du code CIC	56
4.1.3. - Choix du modèle	56
4.2. - Résultats d'une simulation réalisée avec le modèle CIC ..	60
4.2.1. - Description du champ électrique	60
4.2.2. - Description de l'espace des phases	68
4.2.3. - Etude des spectres du champ électrique	73

4.2.3.1. - Etude du spectre en nombre d'onde 73
4.2.3.2. - Etude du spectre en fréquence 73

CONCLUSION 83

BIBLIOGRAPHIE 85

A mes parents,

A Florence,

- I N T R O D U C T I O N -

Nous présentons une étude numérique lagrangienne de l'excitation d'une onde de grande amplitude par un obstacle polarisé dans un plasma non-collisionnel hypersonique.

Une grille chargée, transparente, plongée dans un plasma hypersonique donne naissance à une onde électrostatique de grande amplitude. L'originalité de cette étude vient de ce que les phénomènes liés : de piégeage, de modulation d'amplitude et d'apparition de bandes latérales, sont étudiés ici dans leur phase initiale interactionnaire, et non pas dans l'hypothèse stationnaire où s'étaient toujours placés jusqu'à présent les "simulateurs" pour pouvoir utiliser la méthode classique de conditions aux limites périodiques. Un phénomène semblable avait été étudié par Claude POMOT dans des expériences de neutralisation d'un faisceau d'ions par des thermo-électrons. Cet auteur avait mis en évidence un amortissement des oscillations de grande amplitude du potentiel électrique ; la présence d'électrons piégés dans celles-ci, observée lors des simulations lagrangiennes, avait incité Claude POMOT à chercher la cause de cet amortissement dans un piégeage d'électrons, source de turbulence. Cette voie avait été explorée par une analyse microscopique utilisant le formalisme de Dupree-Weinstock, et les résultats obtenus étaient en accord tant avec ceux de l'expérience qu'avec ceux des simulations numériques.

Le travail, présenté ici, consiste dans la recherche du modèle de simulation numérique lagrangienne permettant d'obtenir la description la plus fine possible du choc hypersonique turbulent d'un faisceau de plasma sur une grille chargée. Comme nous voulons décrire la population des électrons piégés dans une onde de grande amplitude et observer leur action sur cette dernière, nous avons envisagé l'utilisation d'un modèle du type Dawson où le champ électrique

n'est pas supposé constant pendant un pas élémentaire de calcul.

Malheureusement, la gourmandise d'un tel modèle en temps de calcul sur ordinateur nous a conduit à le mettre en compétition avec un modèle du type CIC ou Clouds In Cells classique.

Une première partie présente les calculs théoriques simples décrivant la perturbation apportée par un plan chargé dans un faisceau de plasma. Ces calculs mettent en évidence le développement d'une onde de grande amplitude et nous permettent de voir qu'une théorie analytique n'est pas envisageable ab initio pour décrire le rôle joué par les particules piégées dans cette onde. Cela nous conduit à introduire la méthode des simulations numériques sur ordinateur.

Nous présentons donc les caractéristiques générales de la simulation d'un tel phénomène.

Dans la seconde partie, nous décrivons un modèle de simulation du type Dawson, applicable à la description de tout phénomène non périodique. Nous présentons les performances de ce modèle et un algorithme de calcul rapide des équations du mouvement des superparticules utilisant un maillage spatial.

Dans la troisième partie, nous décrivons le modèle CIC à une dimension et nous l'appliquons à l'étude du choc cité plus haut. Nous présentons de plus, les performances de ce modèle dans le cadre de la simulation qui nous intéresse.

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, nous comparons les résultats de deux simulations utilisant les deux modèles à paramètres égaux décrits précédemment. Cette étude nous permet de sélectionner le modèle CIC, demandant un temps de calcul faible pour une description acceptable du phénomène physique comparée à celle donnée par le modèle de type Dawson. A l'aide du code CIC, nous présentons donc une simulation complète de l'excitation d'une onde de grande amplitude par un obstacle polarisé dans un plasma non collisionnel hypersonique.

1.1. - ETUDE ANALYTIQUE

Dans ce paragraphe, nous exposons brièvement les méthodes analytiques permettant de décrire l'onde excitée dans un faisceau de plasma sur une grille chargée transparente.

L'approche la plus simple est faite à l'aide des équations macroscopiques, dans l'approximation des plasmas froids, couplées à l'équation de Poisson autoconsistante. Nous considérons les ions comme formant un fond uniforme neutralisant de densité n_0 ; seul le plasma d'électrons est perturbé par la grille. Nous étudions les variations des quantités n et v représentant la densité et la vitesse moyenne électroniques au point d'abscisse x . Nous posons : $n(-\infty) = n_0$ et $v(-\infty) = v_0$. Le système d'équations, cité plus haut, s'écrit dans l'hypothèse de stationnarité :

$$\frac{d}{dx} (nv) = 0 \quad (1.1)$$

$$m_e v \frac{dv}{dx} = e \frac{d\phi}{dx} \quad (1.2)$$

$$\frac{d\phi}{dx^2} = \frac{-e}{\epsilon_0} (n_0 - n) - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \delta(x) \quad (1.3)$$

σ_0 étant la densité aréolaire de la grille située au point d'abscisse nulle, σ est la distribution de Dirac et $\phi(x)$ le potentiel électrique.

En considérant que le potentiel électrique et sa dérivée sont nuls à l'infini, la solution du système 1.1, 1.2, 1.3 est :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = G_0(\phi) \text{ pour } x < 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = G_0(\phi) + \frac{\sigma_0^2}{\epsilon_0^2} \text{ pour } x > 0 \quad (1.5)$$

$$\text{avec : } G_0(\phi) = \frac{n_0 m_e v_0^2}{\epsilon_0} \left[\left(1 + \frac{2e\phi}{m v_0^2} \right)^{1/2} - 1 \right] - e \frac{n_0 \phi}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

La résolution de 1.4 montre que le potentiel et sa dérivée sont nuls pour tous x inférieurs à zéro, alors que 1.5 conduit à une solution périodique du côté des x positifs. Le potentiel oscille entre les valeurs :

$$\phi_{\min} = \left(\frac{\alpha^2}{4} - \alpha \right) \frac{m_e v_0^2}{2e}$$

$$\phi_{\max} = \left(\frac{\alpha^2}{4} + \alpha \right) \frac{m_e v_0^2}{2e}$$

α^2 est défini par :

$$\alpha^2 = \frac{\sigma_0^2 / \epsilon_0}{n_0 m_e v_0^2} \quad (1.7)$$

La période des oscillations de l'onde est λ_0 définie par :

$$\lambda_0 = 2 \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \frac{d\phi}{\left[\frac{\sigma_0^2}{\epsilon_0^2} + 2 G_0(\phi) \right]^{1/2}}$$

$$\text{Soit : } \lambda_0 = 2 \pi \frac{v_0}{\omega_{pe}} \quad (1.8)$$

ω_{pe} étant la fréquence plasma électronique pour $n = n_0$, soit :

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Nous avons obtenus ces résultats à partir des équations macroscopiques

dans l'approximation des plasmas froids, c'est-à-dire que la vitesse orientée v_0 est très supérieure à la vitesse d'agitation thermique des électrons c_e ($v_0 \gg c_e$).

Pour tenir compte des effets de température, nous traitons le problème à l'aide du système Vlasov-Poisson qui s'écrit dans le référentiel de la grille :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + w \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{me} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial w} = 0 \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = - \frac{n_0}{\epsilon_0} \left(1 - \int_{\mathbb{R}} f \, dw \right) - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \delta(x) \end{array} \right. \quad (1.10)$$

$f(x, w, t)$ est la fonction de distribution à une particule décrivant l'état des électrons, les ions formant toujours un fond de charge uniforme neutralisant.

Si le plasma est faiblement perturbé ($\alpha \ll 1$), nous pouvons écrire $f(x, w, t)$ sous la forme :

$$f(x, w, t) = f_0(w) + f_1(x, w, t)$$

où $f_0(w)$ est la fonction de distribution de l'état non perturbé ;

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f_0(w) \, dw = 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} w f_0(w) \, dw = V_0 \right)$$

et $f_1(x, w, t)$ est la perturbation due à la grille.

Si $\left| \frac{\partial f_1}{\partial w} \right| \ll \left| \frac{\partial f_0}{\partial w} \right|$ le système 1.9, 1.10 se linéarise sous la forme :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + w \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{me} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} f_1 \, dw - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \delta(x) \quad (1.12)$$

Nous obtenons après avoir pris les transformées de Fourier de (1.11) et (1.12) :

$$\hat{\Phi}(k, \omega) = 2\pi \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{\delta(\omega)}{k^2 \epsilon_e(k, \omega)} \quad (1.13)$$

avec : $\hat{\Phi}(k, \omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(kx - \omega t)} \Phi(x, t) dx dt$ et où $\epsilon_e(k, \omega)$ est

la permittivité électrique définie par :

$$\epsilon_e(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p e^2}{k} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_0 / \partial w}{\omega - kw} dw \quad (1.14)$$

En faisant la transformation inverse de (1.13), nous obtenons :

$$\Phi(x, t) = \frac{\sigma_0}{2\pi \epsilon_0} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2 \epsilon_e(k, \omega)} dk \quad (1.15)$$

Nous sommes donc amenés à chercher les pôles de l'intégrale contenue dans 1.15 ce qui revient à déterminer les racines de l'équation :

$$1 - \frac{\omega_p e^2}{k^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{df_0(w)/dw}{w} dw = 0 \quad (1.16)$$

Dans l'expression (1.16), nous avons à calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \frac{df_0/dw}{w} dw$ qui a un pôle au point de vitesse nulle, donc la valeur de cette intégrale est :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{df_0/dw}{w} dw = P \int_{\mathbb{R}} \frac{df_0/dw}{w} dw + i\pi \left. \frac{df_0}{dw} \right|_{w=0}$$

où P signifie que l'on prend la partie principale de l'intégrale au sens de Cauchy.

En écrivant $\int_{\mathbb{R}} \frac{df_0/dw}{w} = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_0}{w^2} dw$ et en remarquant que la fonction f_0 ne

prend ses valeurs qu'au voisinage de v_0 , une approximation de $P \int \frac{\partial f_0/dw}{w} dw$ est :

$$\frac{1}{v_0^2} \left(1 + \frac{3c_e^2}{v_0^2} \right)$$

L'équation 1.16 s'écrit alors sous la forme :

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_0^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left(\frac{3c_e^2}{v_0^2} \right) - i \pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{df_0}{dw} \Big|_{w=0} \quad (1.17)$$

Les solutions de cette équation sont :

$$k^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{v_0^2} \left(1 + \frac{3c_e^2}{v_0^2} \right) + i \pi \omega_{pe}^2 \frac{df_0}{dw} \Big|_{w=0}$$

Nous constatons que k est complexe et en posant $k = k_1 + i\beta$, avec $\beta^2 \ll k^2$:

$$k_1^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{v_0^2} \left(1 + \frac{3c_e^2}{v_0^2} \right) \quad (1.18)$$

Nous obtenons :

$$\beta = \pi \frac{\omega_{pe}^2}{v_0^2} \frac{df_0}{dw} \Big|_{w=0} \quad (1.19)$$

Si $f_0(w)$ est une gaussienne de température c_e , soit :

$$f_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} c_e} e^{-\frac{(w - v_0)^2}{2c_e^2}}$$

Nous avons :

$$\beta = - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{k_1}{2} \right) \left(\frac{v_0}{c_e} \right)^3 e^{-v_0^2/2c_e^2} \quad (1.20)$$

Finalement :

$$\Phi(x, t) = \frac{\sigma_0}{2 \pi \epsilon_0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - (k_1 + i\beta)^2} dk$$

Soit :

$$\Phi(x, t) = -\alpha \frac{m_e v_0^2}{2e} e^{\beta x} \sin(k_1 x) \quad (1.21)$$

Nous remarquons que dans le cas d'un choc hypersonique où $v_0/c_e \ll 1$, nous retrouvons sensiblement les mêmes résultats qu'avec les équations macroscopiques. En effet, 1.18 montre que $k_1 \approx k_1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$.

1.19 conduit à une valeur de β sensiblement nulle, soit :

$$\Phi(x, t) = -\alpha \frac{m_e v_0^2}{2e} \sin(k_1 x)$$

ce qui conduit bien à une onde de période λ_0 et qui a sensiblement la même amplitude que les Φ_{\min} et Φ_{\max} calculés précédemment (en effet, comme $\alpha \ll 1$, $\alpha^2/4$ est négligeable devant α).

L'étude macroscopique nous a montré que se développe en aval de la grille, une onde de grande amplitude. Microscopiquement, l'existence de telles ondes, solutions stationnaires du système Vlasov-Poisson, a été démontrée par Bernstein, Grene et Kruskal [1]. Ces solutions sont caractérisées par la présence des deux populations de particules suivantes :

- les particules piégées : elles rebondissent dans les puits du potentiel à la fréquence ω_B dite fréquence de rebond,
- les particules passantes : elles ont une énergie cinétique suffisante pour traverser les puits de potentiel.

L'étude de la stabilité de ces solutions est largement faite dans la littérature Wharton, Malmberg, et O'Neil [2]. Ils ont mesuré expérimentalement l'amortissement spatial d'une telle onde, tout en observant des satellites

se développer dans le temps à des fréquences du même ordre de grandeur que la fréquence de rebond des électrons piégés. Cette étude a été reprise par Kruer, Davson et Sudan [3]. Ces auteurs ont remplacé les électrons piégés par un ensemble d'oscillateurs harmoniques de fréquence ω_B . Ils montrent ainsi le développement des mêmes satellites au détriment de l'onde principale. Goldman [4] obtient les mêmes résultats en étudiant la stabilité des ondes de Bernstein, Greene et Kruskal en termes de solutions du système Vlasov-Poisson linéarisé. La seule différence réside dans le fait que dans ce modèle, les électrons sont piégés dans les fonds des puits de potentiel.

A partir de théories non linéaires et en tenant compte de l'échange d'énergie entre l'onde et les particules piégées, il a été démontré que l'onde est amortie et que son amplitude est modulée dans le temps [5], [6], [7]. Cette modulation est due aux électrons piégés au voisinage de la séparatrice entre électrons piégés et non piégés [18].

Nous voyons qu'il y a plusieurs façons d'aborder le problème posé par les particules piégées dans les puits du potentiel électrique.

Les travaux que nous venons de passer brièvement en revue ne permettent pas de déterminer le phénomène prépondérant dans l'amortissement de l'onde de grande amplitude excitée dans le plasma hypersonique par une grille chargée.

Une description microscopique rigoureuse ab initio paraissant inaccessible, nous avons été amenés à étudier le problème à l'aide des méthodes de simulation numérique lagrangienne sur ordinateur.

1.2. - DESCRIPTION DES CARACTERES GENERAUX DE LA SIMULATION

Ici, nous décrivons les caractéristiques générales de la simulation lagrangienne du phénomène physique à étudier.

Les superparticules sont repérées par l'abscisse de leur centre de gravité le long de l'axe Ox , ce dernier ayant le sens de la vitesse orientée

du faisceau. Comme dans l'étude analytique, nous posons le champ électrique nul à l'infini. Dans ce paragraphe, nous décrivons l'injection des superparticules dans le domaine d'étude, la grille chargée et la neutralisation de la charge de cette dernière.

1.2.1. - INJECTION DES SUPERPARTICULES

L'étude analytique précédente considère le plasma infini. Ceci étant irréalisable en simulation lagrangienne, le plasma doit être injecté à une distance finie en amont de la grille. L'étude de H. PERES [8], [9] montrant que le plasma est faiblement perturbé à une distance de l'ordre de $\lambda_0/3$ en amont de la grille, nous permet d'injecter un plasma à l'équilibre thermodynamique en un point ayant une telle abscisse et d'étudier son comportement dans l'espace situé en aval, que nous appelons domaine d'étude. Il reste à définir la méthode d'injection.

Les ions n'étant pas perturbés, nous pouvons représenter les charges positives soit sous la forme d'un fond de charge uniforme pénétrant dans le domaine d'étude à la vitesse v_0 , soit en injectant des superparticules ayant un mouvement uniforme rectiligne de vitesse v_0 .

Plusieurs types d'injection des superparticules ont été testés et nous avons choisi d'utiliser un réservoir infini de superparticules en amont du point d'injection.

A l'aide de la figure 1.1, nous décrivons l'injection d'un superélectron entre les temps t et $t + \tau$ où τ est le pas élémentaire de calcul dans le temps. I, point d'injection est pris comme origine des abscisses ; IA représente le réservoir de superélectrons de longueur $d\ell$. Soit P un nombre tiré au hasard sur le segment $[0,1]$, sachant que tous les points sont équiprobables.

Nous considérons que le superélectron à injecter est, au temps $t + (1 - p) \tau$ au point P , d'abscisse $-pd\ell$, avec la vitesse w appartenant à la gaussienne centrée sur v_0 et de température c_e . Suivant le signe de la quantité $\ell = -pd\ell + w\tau$, nous opérons comme suit :

- si ℓ est positif : $\ell = IP_2'$. Nous considérons que le superélectron est dans le domaine d'étude au temps t , qu'il se situe au point P_2' et qu'il a la vitesse w définie précédemment.
- si ℓ est négatif : la particule n'est pas entrée dans le domaine d'étude. Nous retirons une autre vitesse w sur la gaussienne définie plus haut et nous recommençons cette opération jusqu'à ce que la valeur de ℓ soit positive, ce qui nous ramène au cas précédent.

Remarques :

- dans la pratique, nous prenons ℓ égal à $v_0 dt$.
- le nombre p est calculé à l'aide du sous programme RANDU de la bibliothèque du centre de calcul de l'université de Grenoble.
- la vitesse w est tirée sur la gaussienne de température c_e et de vitesse moyenne v_0 , soit :

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} c_e} e^{-\frac{(w - v_0)^2}{2 c_e^2}}$$

Dans les chapitres suivants, nous raisonnerons dans un système d'unités sans dimension où v_0 sera l'unité de vitesse. Dans ces conditions, nous avons à tirer une vitesse V appartenant à la gaussienne

$$F(V) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta^2 (V^2 - 1)}{2}}$$

$\beta = v_0/c_e$ est un paramètre de la simulation caractérisant la nature du choc. Pour un choc hypersonique, nous avons $\beta > 1$. La vitesse V est calculée à l'aide du sous programme GAUSS de la bibliothèque citée ci-dessus.

A chaque pas élémentaire de calcul, nous injectons ainsi N_e superélectrons dans le domaine d'étude et la même quantité de charge positive.

1.2.2. - DESCRIPTION DE LA GRILLE CHARGÉE

La grille se présente sous la forme d'un plan chargé de densité aréolaire de

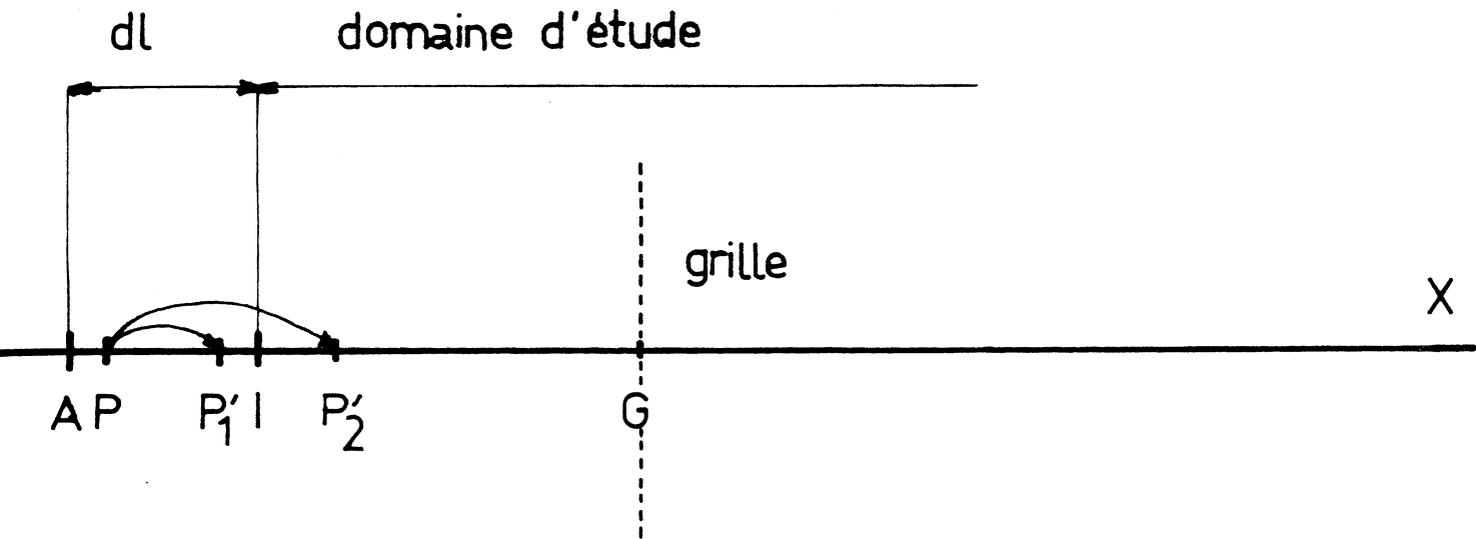


Figure 1.1. : injection d'un superélectron dans le domaine d'étude

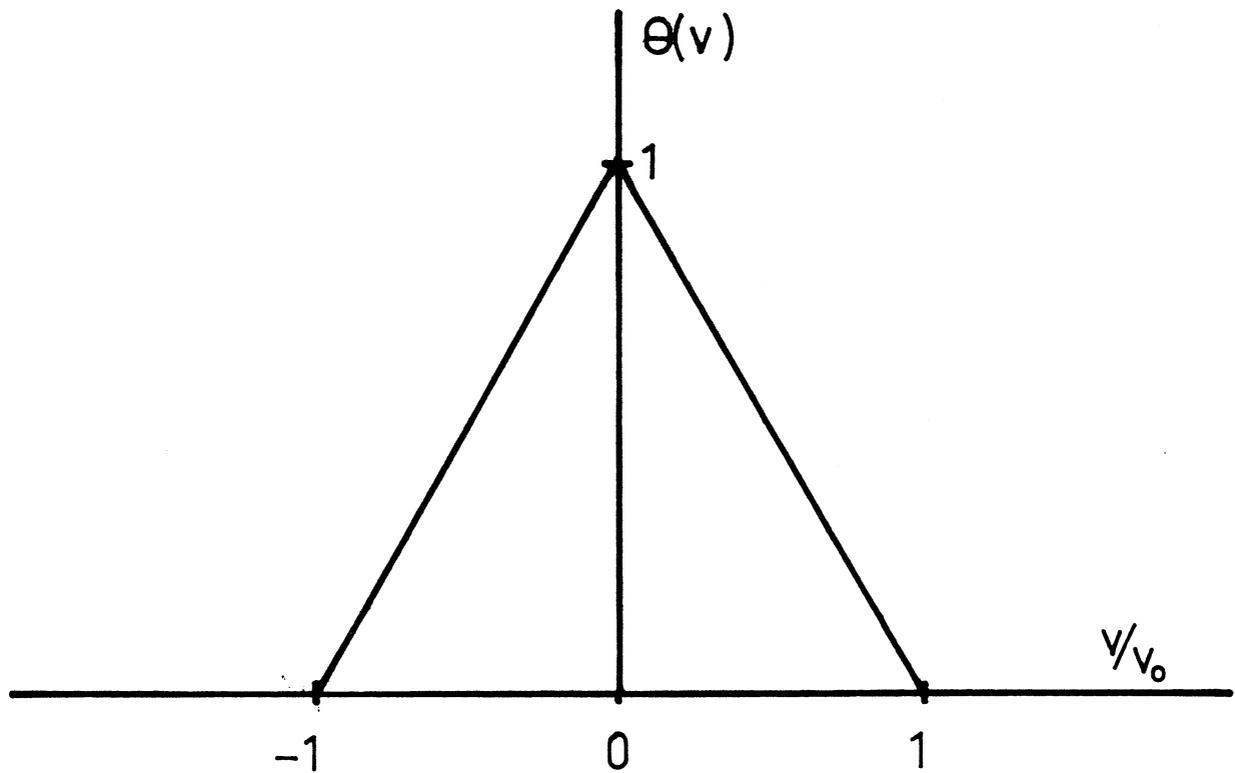


Figure 1.2. : variations du coefficient d'absorption θ en fonction de la vitesse du superélectron qui traverse la grille chargée

charge σ_0 . Elle est perpendiculaire à l'axe Ox au point d'abscisse Xg. Dans un premier temps, nous avons considéré qu'elle était transparente, c'est-à-dire qu'elle n'absorbait pas les superélectrons qui la traversaient. Mais, en opérant ainsi, nous avons observé que les superparticules ayant une vitesse d'injection faible, se concentraient en son voisinage, ce qui dénaturait le phénomène à observer. Nous avons donc rendu la grille absorbante en donnant une probabilité θ , fonction de la vitesse (figure 1.2) d'être absorbé à toute superparticule qui la traverse. La forme de $\theta(v)$ montre que seule les particules de faible vitesse sont concernées.

Des superélectrons sortent du domaine d'étude, soit en étant absorbés par la grille chargée, soit en prenant une abscisse négative.

Nous étudions le problème posé par ces superparticules dans le paragraphe suivant.

1.2.3. - ETUDE DE LA NEUTRALISATION DE LA CHARGE DE LA GRILLE

La résolution de l'équation de Poisson à une dimension montre que le champ électrique à l'infini est proportionnel à la charge totale contenue dans l'espace ; ce qui, d'après l'hypothèse faite précédemment, conduit à éliminer certains superélectrons du domaine d'étude, la charge de la grille étant négative.

Nous avons vu que certaines superparticules négatives sortent du domaine d'étude suivant deux processus et nous avons remarqué que le temps de neutralisation de la grille est long. Nous avons donc été amenés à accélérer ce processus en injectant un superélectron de moins pendant les premiers pas élémentaires de calcul. Nous avons vérifié que la pente de la courbe de neutralisation reste inchangée en opérant ainsi. Lorsque la charge de la grille est neutralisée, chaque fois qu'un superélectron sort du domaine d'étude, nous le réinjectons par la méthode décrite plus haut comme s'il avait été attiré du réservoir par une charge positive dans l'espace.

Conclusion

Après avoir montré la nécessité d'employer la méthode des simulations lagrangiennes sur ordinateur pour étudier le choc hypersonique d'un plasma sur une grille chargée, nous avons décrit les caractéristiques générales d'une telle étude numérique.

Dans les chapitres suivants, nous appliquerons deux modèles de simulation lagrangienne à ce problème et nous les comparerons dans le but d'obtenir la meilleure description possible du choc, tout en ayant le temps de calcul sur ordinateur le plus faible.

Nous avons vu qu'une simulation lagrangienne sur ordinateur est nécessaire pour étudier la turbulence de Langmuir excitée dans un faisceau hypersonique par une grille chargée. Nous avons cherché un modèle permettant de décrire au mieux cette turbulence, et pour cela entaché d'un bruit numérique aussi faible que possible. Dans la littérature, on rencontre surtout des modèles dans lesquels le plasma est gelé à chaque pas élémentaire de calcul. Seul, un code élaboré par Dawson [10], échappe à cette règle. Hélas, le modèle en question, n'est applicable qu'à l'étude de phénomènes périodiques et son utilisation dans l'étude qui nous intéresse pose de gros problèmes [11].

Ici, nous présentons un code, qui est une extension de celui de Dawson pour l'étude de phénomènes essentiellement aperiodiques. Dans un premier paragraphe, nous décrivons les superparticules et les lois de force, puis calculons les équations du mouvement. Un second paragraphe présente les performances du modèle. Nous l'appliquons ensuite à la situation physique qui nous occupe en tenant compte des caractéristiques décrites dans le premier chapitre. Ceci nous conduit à élaborer un algorithme de calcul rapide, en introduisant un maillage spatial, décrit dans le quatrième paragraphe. Enfin, nous définissons les paramètres utiles à cette simulation.

2.1. - DESCRIPTION DU MODELE DE SIMULATION

Ce modèle de simulation utilise des superparticules que nous qualifions de superparticules de Dawson. Elles se présentent comme suit :

- leur charge totale σ , par unité de surface transverse, est répartie suivant une loi de Gauss autour du plan $x = x_j$

- la densité de charge est donc :

$$\Sigma_j(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left(-\frac{(x - x_j)^2}{2a^2}\right) \quad (2.1)$$

$\sqrt{2}a$ est ce que nous appellerons l'épaisseur de la superparticule.

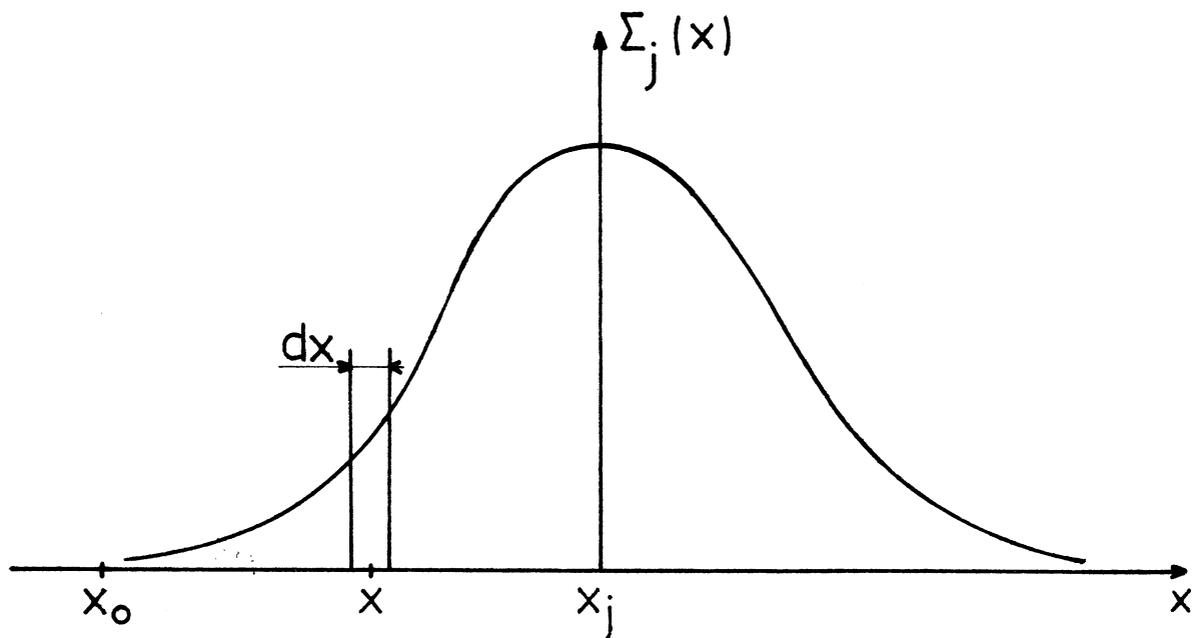
La masse de cette dernière est uniformément répartie, avec la densité M_e pour un superélectron.

2.1.1. - CALCUL DES CHAMP ET POTENTIEL ELECTRIQUES CREES PAR UNE SUPERPARTICULE

Soit $E_j(x_0)$ le champ électrique créé en $x = x_0$ par la superparticule centrée en $x = x_j$,

$$E_j(x_0) = \int d E_j (x|x_0) \quad (2.2)$$

où $d E_j (x|x_0)$ est le champ créé en x_0 par la couche plane d'épaisseur dx centrée en x .



$$d E_j (x|x_0) = \frac{\Sigma_j (x) dx}{2\epsilon_0} (2T (x_0 - x) - 1) \quad (2.3)$$

où $T(x)$ est la fonction échelon de Heaviside.

$$\text{D'où : } E_j(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\Sigma_j(x) dx}{2\epsilon_0} (2T(x_0 - x) - 1)$$

$$\begin{aligned} E_j(x) &= \frac{1}{2\epsilon_0} \Sigma_j * (2T - 1) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma_j * T - \frac{1}{2\epsilon_0} \Sigma_j * 1 \end{aligned}$$

où $*$ désigne le produit de convolution.

$$\begin{aligned} \Sigma_j * T &= \int_{\mathbb{R}} \Sigma_j(x) T(x_0 - x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} \Sigma_j(x) dx = \int_{-\infty}^{\xi_0} \Sigma_j(\xi) a d\xi \end{aligned}$$

avec $\xi = \frac{1}{a}(x - x_j)$.

En remplaçant $\Sigma_j(x)$ par son expression, il vient :

$$\begin{aligned} \Sigma_j * T &= \frac{\sigma_j}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_0} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi \\ &= \sigma_j \left\{ \int_0^{\xi_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \right\} \\ &= \sigma_j \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Par ailleurs :

$$\Sigma_j * 1 = \int_{\mathbb{R}} \Sigma_j(x) dx = \sigma_j. \tag{2.5}$$

$$\text{D'où : } E_j(x_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\frac{\sigma_j}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_0}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\sigma_j}{2} + \frac{\sigma_j}{2} \right]$$

$$E_j(x_0) = \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0} \operatorname{erf} \left(\frac{x_0 - x_j}{\sqrt{2} a} \right) \quad (2.6)$$

En prenant l'origine des potentiels électriques à l'origine des abscisses et en considérant que la différence de potentiel entre deux points est égale à la circulation du champ électrique, nous avons :

$$\Phi_j(x_0) = \frac{-\sigma_j}{2\epsilon_0} \int_0^{x_0} \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_j}{\sqrt{2} a} \right) dx$$

où $\Phi_j(x_0)$ est le potentiel électrique créé par la superparticule j au point d'abscisse x_0 . Un calcul simple nous permet d'écrire :

$$\Phi_j(x_0) = \frac{\sigma_j \sqrt{2} a}{2\epsilon_0} \left[\frac{x_j - x_0}{\sqrt{2} a} \operatorname{erf} \left(\frac{x_j - x_0}{\sqrt{2} a} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x_j - x_0)^2}{2a^2}} - \frac{x_j}{\sqrt{2}a} \operatorname{erf} \left(\frac{x_j}{\sqrt{2}a} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_j^2}{2a^2}} \right]. \quad (2.8)$$

2.1.2. - EQUATION DU MOUVEMENT D'UNE SUPERPARTICULE

La force exercée, par unité de surface, par la superparticule j sur la superparticule i est :

$$F_{j,i} = \int_R E_j(x) \Sigma_i(x) dx = E_j(x) * \Sigma_i'(x)$$

où $\Sigma_i'(x) = \Sigma_i(-x)$.

En remplaçant $E_j(x)$ par son expression ci-dessus :

$$E_j(x) = \frac{1}{\epsilon_0} (\Sigma_j * T - \frac{\sigma_j}{2}).$$

Il vient :

$$F_{j, i} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma_j * T * \Sigma'_i - \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0} 1 * \Sigma'_i$$

or : $1 * \Sigma'_i = \sigma_i$

et : $\Sigma_j * \Sigma'_i = \sigma_j \sigma_i G_{x_j, a} * G_{-x_i, a} = \sigma_i \sigma_j G_{x_j - x_i, \sqrt{2}a}$

où $G_{m, \sigma}$ désigne la distribution de Gauss de moyenne m et d'écart type σ .

Par conséquent :

$$F_{j, i} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_i \sigma_j G_{x_j - x_i, \sqrt{2} a} * T - \frac{\sigma_i \sigma_j}{2\epsilon_0}. \quad (2.9)$$

On a déjà vu plus haut que :

$$G_{m, \sigma} * T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - m}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

d'où : $F_{j, i} = \frac{\sigma_i \sigma_j}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x_j - x_i}{\sqrt{2} \sqrt{2} a} \right) - \frac{1}{2} \right]$

$$F_{j, i} = - \frac{\sigma_i \sigma_j}{2\epsilon_0} \operatorname{erf} \left(\frac{x_j - x_i}{2a} \right) \quad (2.10)$$

La force exercée par un ensemble de superparticules j , sur la superparticule i , est :

$$F_i = - \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} \sum_j \sigma_j \operatorname{erf} \left(\frac{x_j - x_i}{2a} \right) \quad (2.11)$$

La sommation sur j porte sur toutes les superparticules, celle d'indice i com-

prise, la participation $j = i$ étant nulle.

Dans la suite, nous supposons connaître les positions et les vitesses de toutes les superparticules au temps t .

D'après 2.11, la force que subit la superparticule i au temps $t + \tau$ est :

$$F_i(t+\tau) = - \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} \sum_j [\sigma_j \operatorname{erf}\left(\frac{x_j(t+\tau) - x_i(t+\tau)}{2a}\right)] \quad (2.12)$$

τ étant pris suffisamment petit, nous faisons un développement de Taylor de 2.12 autour de t , soit :

$$F_i(t+\tau) = F_i(t) + \tau \left. \frac{dF_i}{dt} \right|_t + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{d^2F_i}{dt^2} \right|_t + O(\tau^3). \quad (2.13)$$

Avec : $x_{j,i} = x_j(t) - x_i(t)$

$$v_{j,i} = v_j(t) - v_i(t)$$

$$\gamma_{j,i} = \gamma_j(t) - \gamma_i(t) = \frac{F_j(t)}{M_j} - \frac{F_i(t)}{M_i},$$

L'équation 2.13 s'écrit :

$$F_i(t+\tau) = - \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} \left\{ \sum_j \sigma_j \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{j,i}}{2a}\right) + \frac{-x_{j,i}^2}{4a^2} + \frac{e}{\sqrt{\pi} a} \tau \left(v_{j,i} + \frac{\tau \gamma_{j,i}}{2} - \frac{\tau v_{j,i}^2 x_{j,i}}{4a^2} \right) \right] \right\} + O(\tau^3). \quad (2.14)$$

A partir de 2.14, nous passons à la loi du mouvement de la superparticule considérée :

$$v_i(t+\tau) = v_i(t) + \int_0^\tau \frac{F_i(t+\tau')}{M_i} d\tau' \quad (2.15)$$

$$x_i(t + \tau) = x_i(t) + \int_0^\tau v_i(t + \tau') dt'. \quad (2.16)$$

En remplaçant $F_j(t + \tau)$ par 2.14 dans 2.15, nous obtenons après intégration :

$$v_i(t+\tau) = v_i(t) - \frac{\sigma_i}{2 M_i \epsilon_0} \left\{ \sum_j \sigma_j \left[\tau \operatorname{erf} \left(\frac{x_{j,i}}{2a} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{-x_{j,i}^2}}{4a^2} \left(\tau^2 v_{j,i} + \frac{\tau^3 \gamma_{j,i}}{3} - \frac{\tau^3 v_{j,i}^2 x_{j,i}}{6a^2} \right) \right] \right\} + O(\tau^4). \quad (2.17)$$

En portant 2.17 dans 2.16, nous obtenons après intégration :

$$x_i(t+\tau) = x_i(t) + v_i(t) \tau - \frac{\sigma_i}{4M_i \epsilon_0} \left\{ \sum_j \left[\tau^2 \operatorname{erf} \left(\frac{x_{j,i}}{2a} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{-x_{j,i}^2}}{4a^2} \left(\tau^3 v_{j,i} + \frac{\tau^4 \gamma_{j,i}}{4} - \frac{\tau^4 v_{j,i}^2 x_{j,i}}{8a^2} \right) \right] \right\} + O(\tau^5). \quad (2.18)$$

Les équations 2.17 et 2.18 donnent la position et la vitesse de la superparticule i au temps $t+\tau$ en fonction des positions et des vitesses de l'ensemble des superparticules au temps t .

2.2. - APPLICATION DU MODELE A LA SITUATION PHYSIQUE ETUDIEE

Le plasma est injecté à l'origine des abscisses alors que la grille chargée est au point d'abscisse x_a . Cette dernière crée le champ électrique :

$$E_a(x) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} (2 \tau (x - x_a) - 1). \quad (2.19)$$

Elle exerce sur la superparticule i la force :

$$F_{a,i} = E_a(x) * \Sigma'_i(x) \quad (2.20)$$

$$\text{où } \Sigma'_i(x) = \Sigma_i(-x).$$

$$\begin{aligned} F_{a,i} &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} [2 T(x - x_a) - 1] * \sigma_i G_{-x_i, a} \\ &= \frac{\sigma_0 \sigma_i}{\epsilon_0} T(x - x_a) * G_{-x_i, a} - \frac{\sigma_0 \sigma_i}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } T(x - x_a) * G_{-x_i, a} &= T(x) * G_{x_a - x_i, a} \\ &= G_{x_a - x_i, a} * T(x) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x_a - x_i}{\sqrt{2} a}\right). \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } F_{a,i} = \frac{\sigma_0 \sigma_i}{2\epsilon_0} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x_a - x_i}{\sqrt{2} a}\right) - 1 \right]$$

$$F_{a,i} = \frac{\sigma_0 \sigma_i}{2\epsilon_0} \operatorname{erf}\left(\frac{x_i - x_a}{\sqrt{2} a}\right). \quad (2.21)$$

En remplaçant dans 2.17 et 2.18 F_i par $F_{a,i}$, et en limitant le développement de la force au premier ordre en τ , nous obtenons les variations de la vitesse et de la position de la particule i dues à l'action de la grille sur un pas élémentaire de calcul.

$$\Delta_a v_i = \frac{\sigma_i \sigma_0}{2M_i \epsilon_0} \tau \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_i - x_a}{\sqrt{2} a}\right) + \frac{v_i \tau}{\sqrt{2}\pi a} e^{-\frac{(x_i - x_a)^2}{2a^2}} \right] + 0(\tau^3) \quad (2.22)$$

$$\Delta_a x_i = \frac{\sigma_i \sigma_0}{4M_i \epsilon_0} \tau^2 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_i - x_a}{\sqrt{2} a}\right) + \frac{2v_i \tau}{3\sqrt{2}\pi a} e^{-\frac{(x_i - x_a)^2}{2a^2}} \right] + 0(\tau^4) \quad (2.23)$$

Dans la suite, nous verrons que l'ordre en τ des expressions 2.22 et 2.23 est largement suffisant pour obtenir une description fine du mouvement des superélectrons.

Dans les simulations utilisant ce modèle, nous considérons que les ions forment un plasma froid de supercharges positives et ont une masse infinie, si bien que leur mouvement est uniforme à la vitesse v_0 . A chaque pas élémentaire de calcul, nous injectons N_i ions uniformément répartis sur la distance $v_0 \tau$. La charge de ces superparticules est donc $N_e \sigma / N_i$, sachant que nous injectons N_e superélectrons de charge $-\sigma$ et une bouffée de plasma de charge totale nulle par pas élémentaire de calcul.

Dans ces conditions, la position et la vitesse du superélectron i au temps $t+\tau$ sont, sachant que nous connaissons les positions et les vitesses de tous les superélectrons, indice j , et de tous les superions, indice ℓ , au temps t :

$$\begin{aligned}
 v_i(t+\tau) = & v_i(t) + \frac{\sigma^2}{2M_e \epsilon_0} \tau \left\{ \frac{N_e}{N_i} \sum_{\ell} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{\ell,i}}{2a}\right) + \frac{e^{-x_{\ell,i}^2/4a^2}}{2\sqrt{\pi} a} \tau v_{0,i} \right] \right. \\
 & - \sum_j \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{j,i}}{2a}\right) + \frac{e^{-x_{j,i}^2/4a^2}}{2\sqrt{\pi} a} \tau v_{j,i} \right] \\
 & \left. - \frac{\sigma_0}{\sigma} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_i - x_a}{\sqrt{2}a}\right) + \frac{v_i \tau}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{(x_i - x_a)^2}{2a^2}} \right] + 0(\tau^3) \right. \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_i(t+\tau) = & x_i(t) + v_i(t) \tau + \frac{\sigma^2 \tau^2}{4M_e \epsilon_0} \left\{ \frac{N_e}{N_i} \sum_{\ell} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{\ell,i}}{2a}\right) + \frac{e^{-x_{\ell,i}^2/4a^2}}{3\sqrt{\pi} a} \tau v_{0,i} \right] \right. \\
 & - \sum_j \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{j,i}}{2a}\right) + \frac{e^{-x_{j,i}^2/4a^2}}{3\sqrt{\pi} a} \tau v_{j,i} \right] \\
 & \left. - \frac{\sigma_0}{\sigma} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_i - x_a}{\sqrt{2}a}\right) + \frac{2v_i \tau}{3\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{(x_i - x_a)^2}{2a^2}} \right] \right\} + 0(\tau^4) \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

$$\text{où : } x_{j,i} = x_j(t) - x_i(t)$$

$$x_{\ell,i} = x_\ell(t) - x_i(t)$$

$$v_{j,i} = v_j(t) - v_i(t)$$

$$v_{0,i} = v_0 - v_i(t)$$

En posant : $V = v/v_0$, $X = x/\sqrt{2}a$, $DT = \tau v_0/\sqrt{2}a$, $\Gamma_0 = \frac{\sigma^2 \sqrt{2} a}{2 M_e \epsilon_0 v_0^2}$, $q_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma}$,

$$X_{i,a} = X_i - X_a,$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} V_i(t+\tau) = & V_i(t) + \Gamma_0 \cdot DT \left\{ \frac{Ne}{Ni} \sum_{\ell} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{X_{\ell,i}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e^{-X_{\ell,i}^2/2} \cdot DT \cdot V_{0,i}}{\sqrt{2\pi}} \right] \right. \\ & - \sum_j \left[\operatorname{erf}\left(\frac{X_{j,i}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e^{-X_{j,i}^2/2} \cdot DT \cdot V_{j,i}}{\sqrt{2\pi}} \right] \\ & \left. - q_0 \left[\operatorname{erf}(X_{i,a}) + \frac{e^{-X_{i,a}^2} v_i(t) DT}{\sqrt{\pi}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$X_i(t+\tau) = X_i(t) + V_i(t) \cdot DT + \frac{\Gamma_0 DT^2}{2} \left\{ \frac{Ne}{Ni} \sum_{\ell} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{X_{\ell,i}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2e^{-X_{\ell,i}^2/2} DT \cdot V_{0,i}}{3\sqrt{2\pi}} \right] \right.$$

$$\left. - \sum_{\ell} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{X_{j,i}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2e^{-X_{j,i}^2/2} \cdot DT \cdot V_{j,i}}{3\sqrt{2\pi}} \right] \right.$$

$$\left. - q_0 \left[\operatorname{erf}(X_{i,a}) + \frac{2e^{-X_{i,a}^2} v_i(t) DT}{3\sqrt{\pi}} \right] \right\} \quad (2.27)$$

Les équations 2.26 et 2.27, représentent les équations du mouvement du superélectron i dans le système sans dimension défini ci-dessus. Nous voyons qu'elles dépendent des paramètres : DT , Γ_0 , N_e , N_i , q_0 .

2.3. - ETUDE DES PERFORMANCES DU CODE

Nous entendons par là, la précision avec laquelle sont d'une part, conservées la quantité de mouvement et l'énergie d'un système isolé de superparticules, et d'autre part, assurée la réversibilité dans le temps.

Nous établissons les performances de notre modèle en fonction des paramètres Γ_0 et DT , pour un système isolé de 50 superparticules.

2.3.1. - ETUDE DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Nous partons d'un état ayant une quantité de mouvement P_0 . A chaque pas élémentaire de temps, nous calculons la vitesse et la position de chacune des superparticules grâce aux équations 2.26 et 2.27, ce qui nous permet de connaître la quantité de mouvement P_t du système. Nous obtenons ainsi les variations temporelles du rapport :

$$DP/P = (P_0 - P_t)/P_0$$

2.3.1.1. - Action de Γ_0 à DT constant

La valeur de DT étant fixée à 10^{-2} , nous avons porté sur la figure 2.1 les variations du rapport DP/P en fonction du nombre de pas de calcul N pour les valeurs suivantes de Γ_0 :

$$\Gamma_0 = 10^{-2}, \Gamma_0 = 10^{-3}, \Gamma_0 = 10^{-4}.$$

Nous constatons, comme cela était prévisible, qu'à N et DT constant, la quantité de mouvement se conserve d'autant mieux que la valeur de Γ_0 est faible.

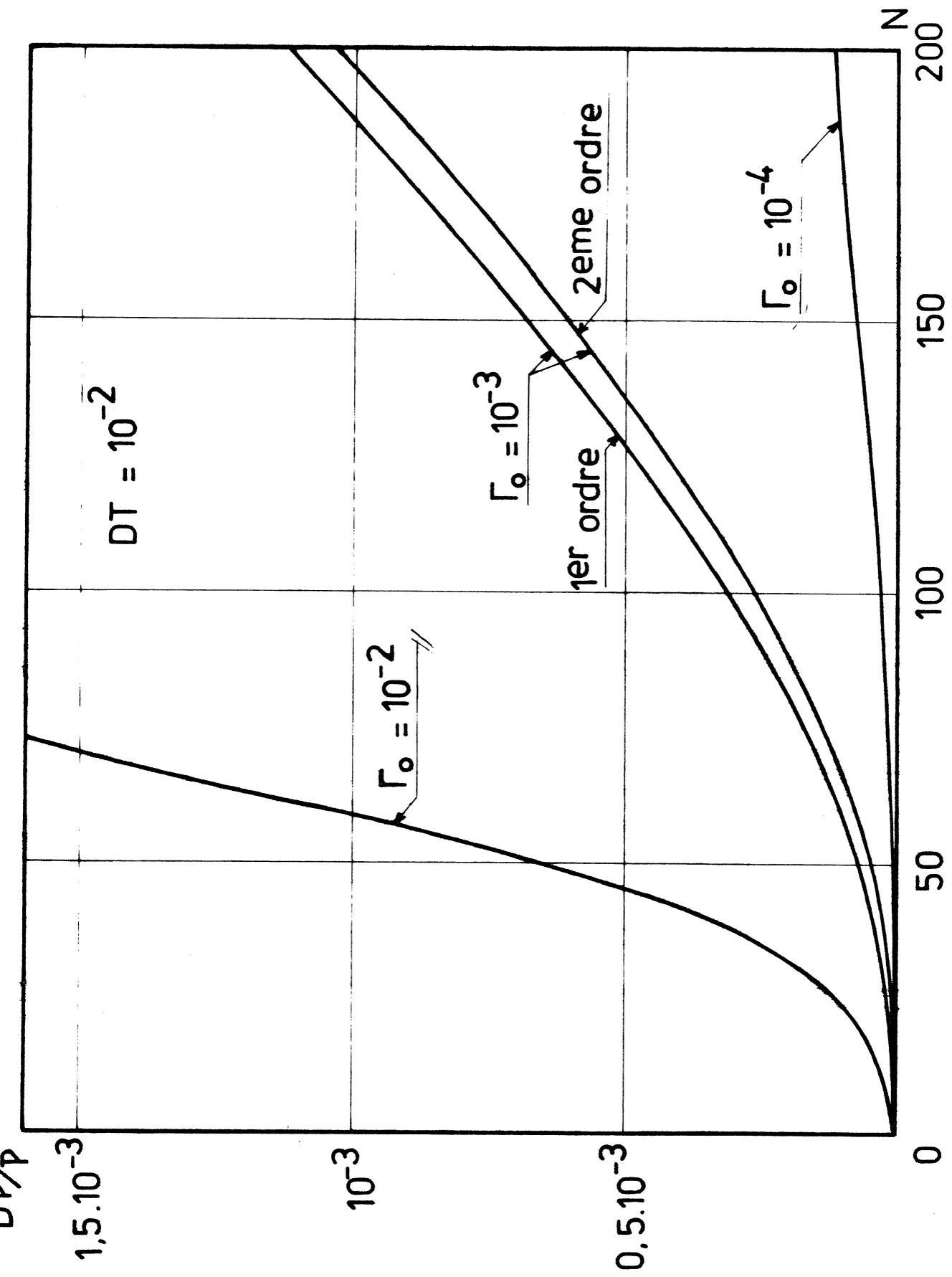


Figure 2.1 : étude de la conservation de la quantité de mouvement en fonction de

2.3.1.2. - Action de DT à Γ_0 constant

La valeur de Γ_0 étant fixée à 10^{-4} , nous avons porté sur la figure 2.2, les variations du rapport DP/P en fonction du produit $N.DT$, où N est le nombre de pas élémentaires pour les valeurs de DT suivantes :

$$DT = 5 \cdot 10^{-2}, DT = 10^{-2}, DT = 2 \cdot 10^{-3}$$

Nous constatons, comme on pouvait le prévoir, qu'à Γ_0 constant, la conservation de la quantité de mouvement est d'autant meilleure que la valeur de DT est faible.

D'ores et déjà, nous pouvons dire que, pour avoir une bonne conservation de la quantité de mouvement, le produit $\Gamma_0.DT$ doit avoir la valeur la plus faible possible.

2.3.1.3. - Action du rapport Γ_0/DT , le produit $\Gamma_0.DT$ étant constant

La valeur du produit $\Gamma_0.DT$ étant fixée à 10^{-6} , nous avons porté sur la figure 2.3 les variations du rapport DP/P en fonction du produit $N.DT$, où N est le nombre de pas élémentaires pour les valeurs suivantes du rapport Γ_0/DT :

$$\Gamma_0/DT = 0,25 ; \Gamma_0/DT = 4 \times 10^{-2}$$

Nous constatons qu'à $\Gamma_0.DT$ constant, la conservation de la quantité de mouvement est d'autant meilleure que le rapport Γ_0/DT est plus grand.

L'étude précédente nous conduit à choisir :

- le produit $\Gamma_0.DT$ le plus petit possible
- le rapport Γ_0/DT le plus grand possible
- Γ_0 le plus petit possible
- DT le plus petit possible

Sur la figure 2.1, nous présentons les variations du rapport DP/P déduites des équations du mouvement obtenues d'une part, d'un développement de la

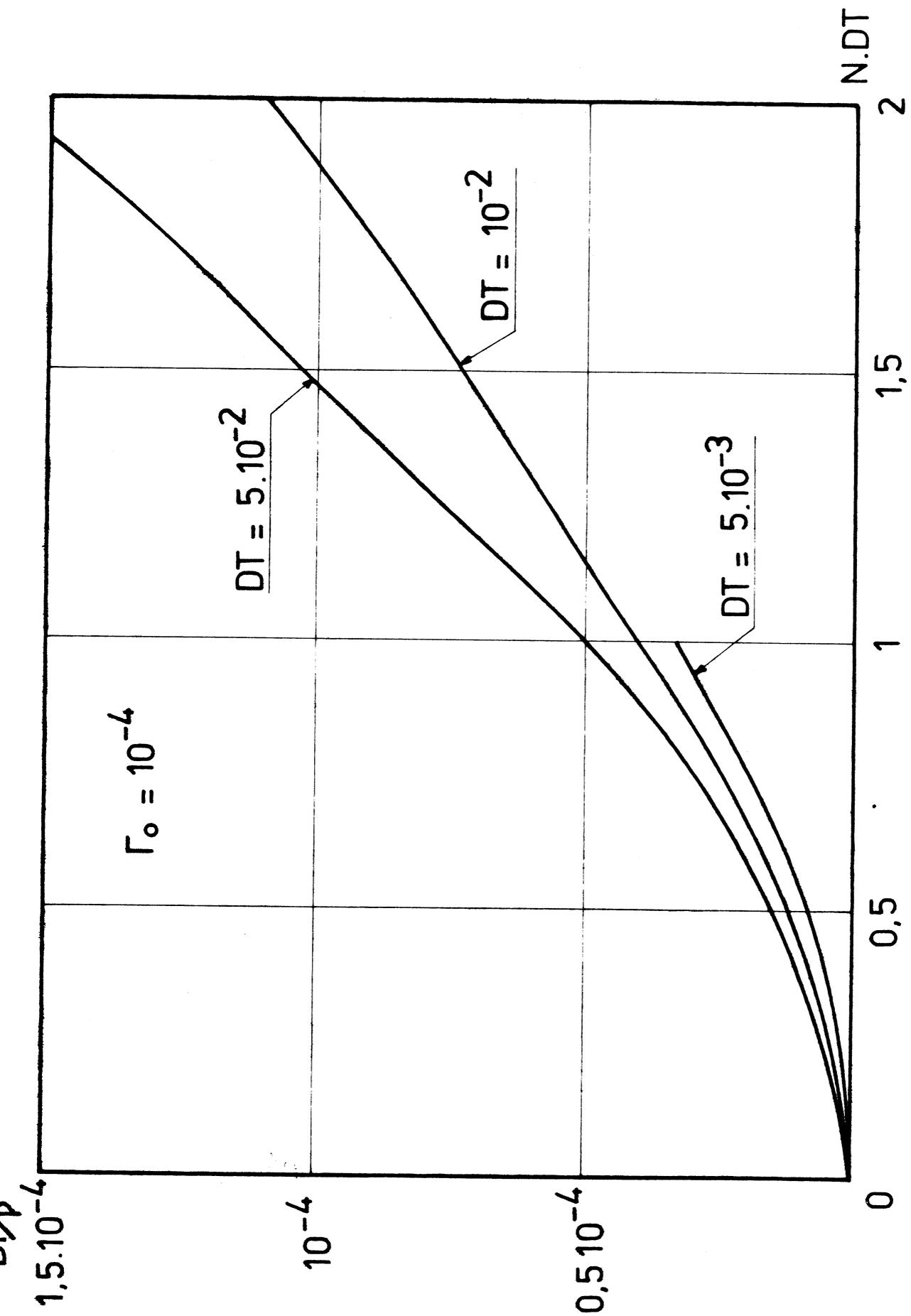


Figure 2.2 : étude de la conservation de la quantité de mouvement en fonction de DT

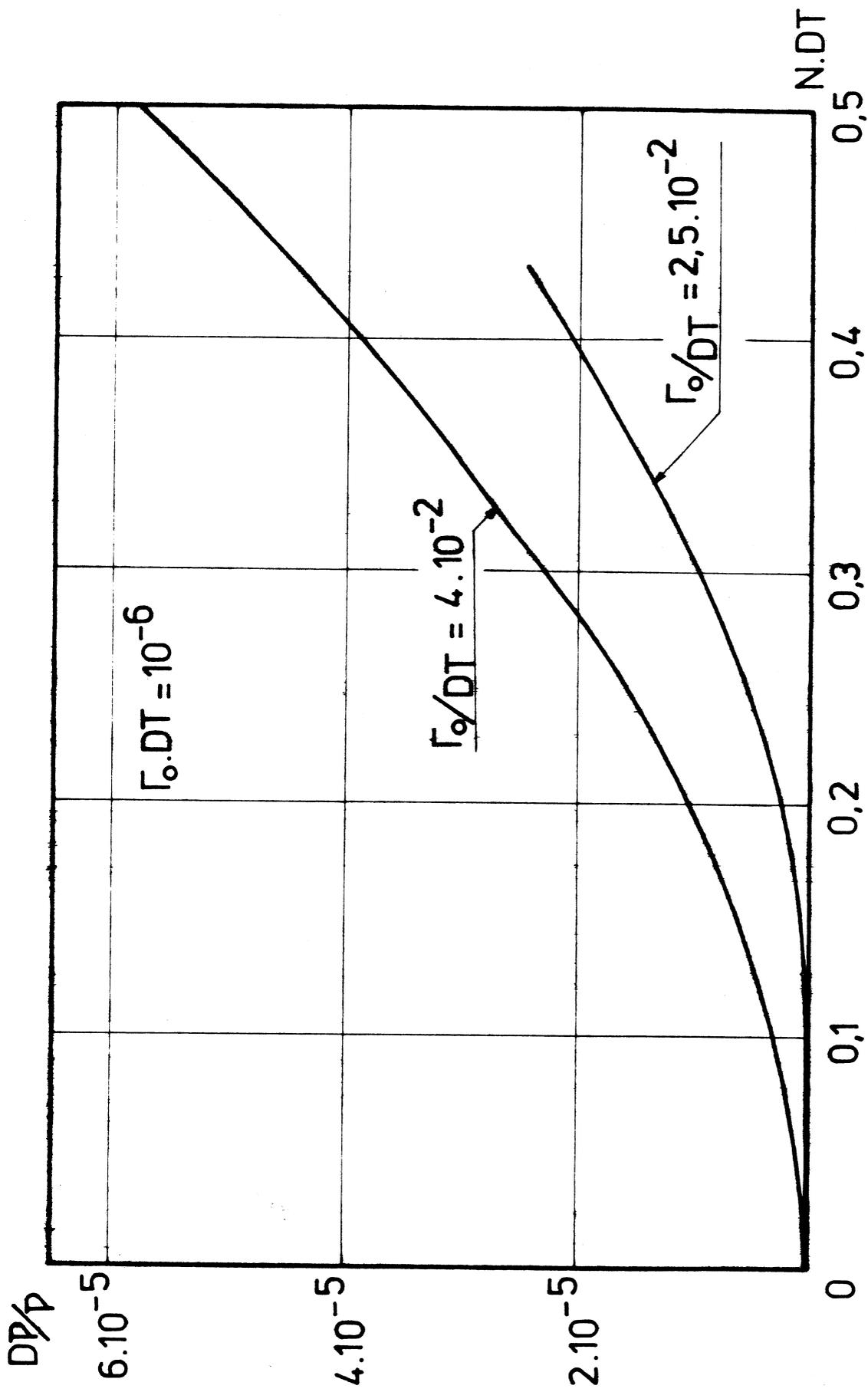


Figure 2.3 : étude de la variation de la quantité de mouvement en fonction de Γ_0/DT

force interparticulaire au deuxième ordre en τ et d'autre part, d'un développement de cette quantité au premier ordre en τ .

L'ordre du développement en τ de la force jouant peu sur les variations de DP/P , nous choisissons les équations 2.26 et 2.27 pour décrire le mouvement des superparticules, le gain de temps de calcul sur ordinateur l'emportant sur la finesse de la description du mouvement.

2.3.2. - ETUDE DE LA CONSERVATION DE L'ENERGIE

Avec le même système de 50 superparticules décrit précédemment, nous avons établi les variations du rapport $DE/E = (E_0 - E)/E_0$ où E_0 est l'énergie initiale et E_t l'énergie au temps t . Les courbes obtenues ont la même forme que celles décrites plus haut et conduisent aux mêmes conclusions.

2.3.3. - ETUDE DE LA REVERSIBILITE DANS LE TEMPS

Dans toutes les manipulations précédentes, après avoir suivi le mouvement des 50 superparticules sur 200 pas de calcul, nous avons changé le signe de DT et refait 200 pas de calcul. Théoriquement, l'état final obtenu doit être le même que l'état initial. Nous avons calculé les rapports DX/X et DV/V représentant les variations relatives des positions et des vitesses entre l'état initial et l'état final. Dans tous les cas, l'ordre de grandeur de ces deux rapports est de 10^{-5} , ce qui montre que la réversibilité dans le temps est bonne.

L'étude faite ci-dessus prouve que le code a de bonnes performances. Cependant, la gourmandise en temps de calcul sur ordinateur nous a amené à chercher un algorithme de calcul rapide.

2.4. - ALGORITHME DE CALCUL RAPIDE UTILISANT UN MAILLAGE SPATIAL

Les équations du mouvement 2.26 et 2.27 montrent qu'à chaque pas élémentaire on doit calculer un grand nombre de fois les fonctions $\text{erf}(x)$ et e^{-x^2} . Dans le but d'établir un algorithme de calcul rapide, nous avons mis au point une méthode utilisant un maillage spatial et des tables de valeurs de ces deux fonctions.

Pour toute valeur de x supérieure à 4, nous posons, en commettant une erreur inférieure à 10^{-7} , $\text{erf}(x) = 1$ et $e^{-x^2} = 0$. Les propriétés de symétrie de ces deux fonctions permettent, en plus, de limiter le domaine où nous avons à les calculer, au segment $[0,4]$.

En aval du point d'injection I, nous maillons l'espace suivant un pas h . Chaque noeud du maillage est repéré par son indice n ou par son abscisse $(n - 1).h$ (figure 2.4).

La connaissance des abscisses de tous les superélectrons nous permet de déterminer le noeud du maillage le plus proche de chacun d'eux.

Si le noeud d'indice n_i est le plus proche du superélectron i d'abscisse X_i , nous posons :

$$X_{0,i} = X_i - (n_i - 1).h \text{ (figure 2.5).}$$

D'après les équations 2.26 et 2.27, nous déterminons l'action du superélectron i en calculant :

$$T_{j,i} = \text{erf} (X_{j,i} / \sqrt{2})$$

$$C_{j,i} = V_{j,i} \exp (-X_{j,i}^2 / 2).$$

En posant :

$$n_{j,i} = n_j - n_i ; X_{0,j,i} = X_{0,j} - X_{0,i},$$

nous avons :

$$T_{j,i} = \text{erf} (n_{j,i} \cdot h/\sqrt{2} + X_{0,j,i}/\sqrt{2})$$

$$C_{j,i} = V_{j,i} \cdot \exp [-(n_{j,i} h + X_{0,j,i})^2/2].$$

En utilisant les développements de Taylor des fonctions erreur et exponentielle autour de la valeur $n_{j,i} h$, nous avons :

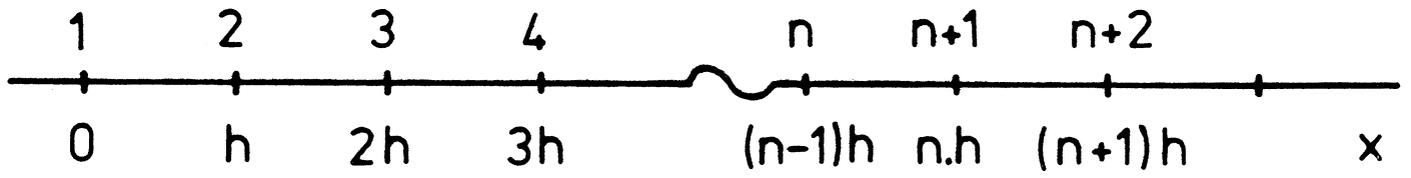


Figure 2.4 : définition du maillage spatial

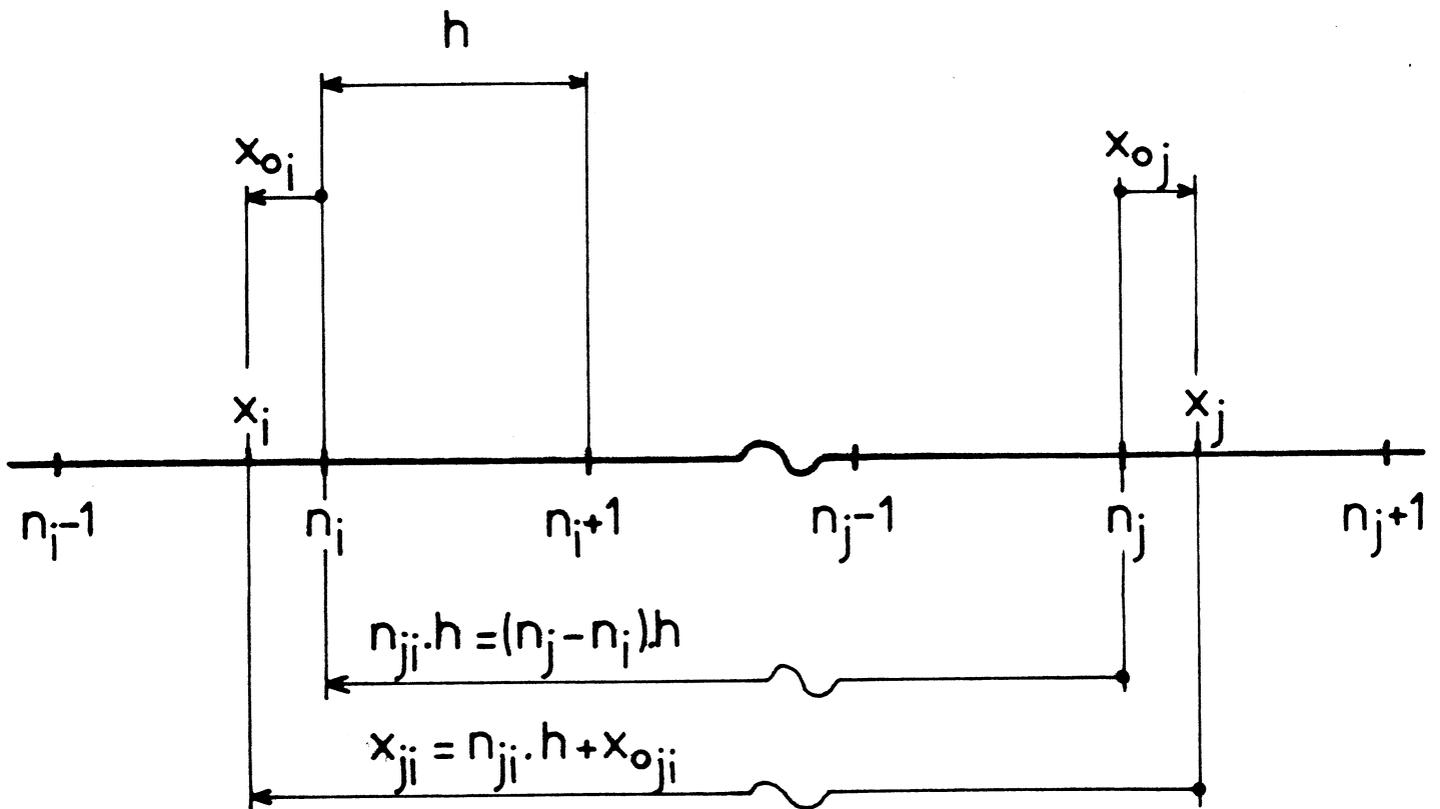


Figure 2.5 : définition des principales grandeurs dans l'utilisation d'un maillage spatial

$$\begin{aligned}
T_{j,i} = & \operatorname{erf}\left(\frac{n_{j,i} \cdot h}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot X_{0,j,i} e^{-\frac{n_{j,i}^2 \cdot h^2}{2}} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} X_{0,j,i}^2 \cdot n_{j,i} \cdot h e^{-\frac{n_{j,i}^2 \cdot h^2}{2}} \\
& + \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} X_{0,j,i}^3 (n_{j,i}^2 \cdot h^2 - 1) e^{-\frac{n_{j,i}^2 \cdot h^2}{2}} \\
& + 0 (X_{0,j,i}^4)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
C_{j,i} = & V_{j,i} \left[e^{-\frac{n_{j,i}^2 \cdot h^2}{2}} - X_{0,j,i} \cdot n_{j,i} \cdot h e^{-\frac{n_{j,i}^2 \cdot h^2}{2}} \right. \\
& \left. + \frac{X_{0,j,i}^2}{2} (n_{j,i}^2 \cdot h^2 - 1) e^{-\frac{n_{j,i}^2 \cdot h^2}{2}} + 0(X_{0,j,i}^3) \right].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$C_{j,i}$ étant un terme correctif dans 2.26 et 2.27, nous n'utilisons qu'un développement à l'ordre 3 en $X_{0,j,i}$.

Soit N_m le nombre de mailles contenu sur la distance $4\sqrt{2}$:

$$N_m = P [4\sqrt{2} / h] + 1.$$

Suivant la valeur de $n_{j,i}$ par rapport à N_m , le calcul de $T_{j,i}$ et $C_{j,i}$ se ramène aux trois cas suivants :

1er cas : $|n_{j,i}| > N_m$,

$$T_{j,i} = \operatorname{sgn}(n_{j,i})$$

$$C_{j,i} = 0 ;$$

2ème cas : $0 < n_{j,i} \leq N_m$,

$T_{j,i}^+$ et $C_{j,i}^+$ sont donnés par les expressions 2.28 et 2.29 ;

3ème cas : $-N_m \leq n_{j,i} \leq 0$,

avec $n'_{j,i} = -n_{j,i}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 T_{j,i}^- = & -\operatorname{erf}\left(\frac{n'_{j,i} \cdot h}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \chi_{0,j,i} e^{-\frac{n'^2_{j,i} h^2}{2}} \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \chi^2_{0,j,i} n'_{j,i} h e^{-\frac{n'^2_{j,i} h^2}{2}} \\
 & + \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \chi^3_{0,j,i} (n'^2_{j,i} h^2 - 1) e^{-\frac{n'^2_{j,i} h^2}{2}} \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{j,i}^- = & V_{j,i} \left[e^{-\frac{n'^2_{j,i} h^2}{2}} + \chi_{0,j,i} n'_{j,i} h e^{-\frac{n'^2_{j,i} h^2}{2}} \right. \\
 & \left. + \frac{\chi^2_{0,j,i}}{2} (n'^2_{j,i} h^2 - 1) e^{-\frac{n'^2_{j,i} h^2}{2}} \right]. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Soit L_{n_j} l'ensemble des superélectrons ayant leur centre de gravité dans la maille j centrée au noeud d'indice n_j , ℓ_{n_j} étant le cardinal de cet ensemble. L'action de ces superparticules sur le mouvement du superélectron i passe par le calcul de :

$$T'_{i,n_j}{}^\alpha = \sum_{j \in L_{n_j}} T_{j,i}{}^\alpha. \quad (2.32)$$

$$C_{i,n_j}^{\alpha} = \sum_{j \in L} \ell_{n_j} C_{j,i}^{\alpha} \quad (2.33)$$

où α représente le signe de $N_{j,i}$

L'action de l'ensemble de tous les superélectrons sur le mouvement du $i^{\text{ème}}$ nécessite le calcul de :

$$T_{i,\text{elec}} = - \sum_{n_j=1}^{n_i-N_m-1} \ell_{n_j} + \sum_{n_j=n_i-N_m}^{n_i} T_{i,n_j}^- + \sum_{n_j=n_i+1}^{n_i+N_m} T_{i,n_j}^+ + \sum_{n_j>n_i+N_m+1} \ell_{n_j} \quad (2.34)$$

$$C_{i,\text{elec}} = \sum_{n_j=n_i-N_m}^{n_i} C_{i,n_j}^- + \sum_{n_j=n_i+1}^{n_i+N_m} C_{i,n_j}^+ \quad (2.35)$$

L'action du supérieur ℓ sur le superélectron i se ramène au calcul des termes $C_{\ell,i}$ et $T_{\ell,i}$ semblables aux termes $C_{j,i}$ et $T_{j,i}$. Cependant, les ions étant uniformément répartis dans l'espace, nous simplifions grandement les calculs en les plaçant sur les noeuds du maillage. Soit $h = DT/N_j$. Ainsi les valeurs $X_{0,\ell,i}$ et $V_{\ell,i}$ se réduisent à :

$$X_{0,\ell,i} = -X_{0,i}$$

$$V_{\ell,i} = 1 - V_i = V_{0,i}$$

Nous calculons ainsi les termes $T_{i,\text{ions}}$ et $C_{i,\text{ions}}$ qui ont la même forme que les termes $T_{i,\text{elec}}$, $C_{i,\text{elec}}$.

Le calcul de l'action de l'ensemble des superparticules sur le mouvement d'un superélectron se fait à l'aide des quatre tableaux de N_m valeurs suivants :

$$EF_n = \operatorname{erf} (n h / \sqrt{2})$$

$$EX_n = \exp (- n^2 h^2 / 2)$$

$$YEX_n = n h \exp (- n^2 h^2 / 2)$$

$$ZEX_n = (n^2 h^2 - 1) \exp (- n^2 h^2 / 2).$$

Pour calculer le mouvement des superélectrons, nous opérons comme suit :

- dans un premier temps, nous réalisons ce que nous appelons la répartition des superparticules sur le maillage, en déterminant la maille dans laquelle se trouve le centre de gravité de chacun des superélectrons. En faisant cette répartition, nous calculons les valeurs $X_{0,i}$ et déterminons les ensembles L_{n_j} . En remplaçant dans 2.28 à 2.31, $\operatorname{erf}(x)$ et $\exp(-x^2)$ par leurs développements de Taylor, nous constatons que les grandeurs T_{i,n_j}^α et C_{i,n_j}^α s'expriment à l'aide des termes :

$$S1_{n_j} = \sum_{j \in L_{n_j}} X_{0,j}$$

$$S2_{n_j} = \sum_{j \in L_{n_j}} X_{0,j}^2$$

$$S3_{n_j} = \sum_{j \in L_{n_j}} X_{0,j}^3$$

$$SV_{n_j} = \sum_{j \in L_{n_j}} V_j$$

$$SVX_{n_j} = \sum_{j \in L_{n_j}} X_{0,j} V_j$$

$$SVX2_{n_j} = \sum_{j \in L_{n_j}} X_{0,j}^2 V_j$$

Le calcul de ces grandeurs se fait lors de la répartition des superélectrons sur le maillage.

- dans un second temps, nous calculons les termes $T_{i,elec}$, $C_{i,elec}$, $T_{i,ions}$, $C_{i,ions}$ pour chaque superélectron et nous déterminons leur position et leur vitesse au pas de calcul suivant à l'aide des équations 2.26 et 2.27.

En utilisant cette méthode, nous avons réduit le temps de calcul sur ordinateur, du mouvement de 200 particules sur 200 pas de calcul, de moitié, comparé à celle utilisant le calcul direct des fonctions erreur et exponentielle.

La précision du calcul ne dépend que du pas de calcul, du pas du maillage h et de l'ordre où est poussé le développement de Taylor des fonctions erreur et exponentielle. Dans la pratique, nous prenons $N_i = 1$, soit $h = DT$ et, dans ces conditions, la précision est largement suffisante en utilisant des développements de Taylor au second ordre de la fonction erreur et au premier ordre de la fonction exponentielle.

Les charges positives étant régulièrement réparties dans l'espace, nous avons vérifié que cela n'entraînait pas de périodicités parasites dans le champ électrique d'un faisceau de plasma non perturbé.

L'action de la grille sur chaque électron se calcule suivant la même méthode. Dans le but de simplifier les calculs, nous l'avons placé au noeud du maillage d'indice N_g .

2.5. - DETERMINATION DES PARAMETRES DE LA SIMULATION

Lors de la description du modèle de simulation, nous avons vu que les équations du mouvement dépendent des paramètres suivants :

$$DT = \tau \frac{v_0}{\sqrt{2}a}$$

$$\Gamma_0 = \frac{\sigma^2}{2 M_e \epsilon_0} \frac{\sqrt{2} a}{v_0^2}$$

Lors de la description générale de la simulation, nous avons déjà les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}
 N_e &= \text{nombre de superélectrons injectés par pas de calcul,} \\
 N_i &= \text{nombre de superions injectés par pas de calcul,} \\
 \beta &= v_0/c_e \text{ manière de nombre de Mach,} \\
 q_0 &= \sigma_0/\sigma \text{ caractérisant la charge de la grille.}
 \end{aligned}$$

Comme nous pensons observer une onde de période $\lambda_0 = 2\pi v_0/\omega_{pe}$, nous posons $\sqrt{2}a = \lambda_0/K$ où K est un nombre entier.

Nous avons dans ces conditions :

$$DT = \frac{\tau \omega_{pe} K}{2\pi}$$

$$\text{et : } \Gamma_0 = \frac{\pi \tau \omega_{pe}}{N_e K} \quad \text{car : } \omega_{pe}^2 = \frac{N_e \sigma^2}{\epsilon_0 M_e v_0 \tau}$$

Cela nous conduit à remplacer les paramètres DT et Γ_0 par $\tau \omega_{pe}$ et K qui ont une signification physique plus évidente.

D'après l'étude des performances du modèle :

- $\tau \omega_{pe}$ et K doivent être le plus faible possible,
- N_e doit être le plus grand possible.

Les paramètres de la simulation sont :

- $\tau \omega_{pe}$: pas élémentaire de calcul (temps rapporté à la fréquence plasma),
- K : définissant l'extension spatiale des superélectrons en fraction de longueur d'onde λ_0 ,
- N_e : nombre de superélectrons injectés par pas de calcul,
- N_i : nombre de superions injectés par pas de calcul,
- β : manière de nombre de Mach,
- q_0 : caractérisant la charge de la grille,
- N_g : caractérisant la position de la grille,

Conclusion

Nous venons de décrire un modèle de simulation donnant une description très fine du mouvement des superélectrons et que nous baptisons :

"modèle à particules de Dawson".

Cependant, ce modèle est très gourmand en temps de calcul sur ordinateur, malgré un algorithme de calcul rapide utilisant un maillage spatial.

Dans ce chapitre, nous appliquons le modèle CIC, ou Clouds In Cells, à la simulation de notre problème. Ce modèle, largement décrit dans la littérature, repose sur les trois principes suivants : [12] [13]

- l'espace est maillé : h étant le pas du maillage. Nous calculons les champ et potentiel électriques exacts aux différents noeuds du maillage.
- les superélectrons sont de dimension finie. Ils se présentent sous la forme d'une densité uniforme de charge ($-\sigma$ par unité de surface transverse) dans l'espace limité par deux plans parallèles et perpendiculaires à la direction Ox . Nous appelons extension spatiale de la superparticule la distance d séparant ces deux plans (figure 3.1). La masse est, elle aussi, uniformément répartie dans le volume de la superparticule avec la densité M_e par unité de surface. La charge des superélectrons est répartie sur les noeuds du maillage suivant une loi décrite plus loin.
- le mouvement des superparticules est calculé en gelant le plasma à chaque pas élémentaire de calcul. Si $F(t)$ est la force exercée, par unité de surface, sur une superparticule, les équations du mouvement de son centre de gravité sont :

$$x(t + \tau) = x(t) + v(t) \tau + \frac{1}{2M_e} F(t) \tau^2 + O(\tau^3) \quad (3.1)$$

$$v(t + \tau) = v(t) + \frac{1}{M_e} F(t) \tau + O(\tau^2) \quad (3.2)$$

où τ est le pas élémentaire de calcul dans le temps.

Si nous connaissons la position de la particule au temps $t(x(t))$ et sa vitesse au temps $t - \tau/2 (v(t - \tau/2))$, le système d'équations :

$$v(t + \tau/2) = v(t - \tau/2) + \frac{1}{M_e} F(t) \tau + O(\tau^3) \quad (3.3)$$

$$x(t + \tau) = x(t) + v(t - \tau/2) \tau + O(\tau^3) \quad (3.4)$$

donne une description plus fine du mouvement des superélectrons que les deux équations précédentes tout en ayant une forme plus simple.

Nous décrivons, dans un premier temps, la répartition des charges des superparticules sur les noeuds du maillage. Nous en déduisons les expressions du champ et du potentiel électriques en ces points. Puis, nous établissons les lois de force entre superparticules. Dans un second paragraphe, nous appliquons le modèle CIC à la simulation du problème physique qui nous occupe, ce qui nous permet de mettre en évidence les paramètres utiles. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous déterminons les performances de ce modèle.

3.1. - DESCRIPTION DU MODELE CIC A UNE DIMENSION

Ici, nous décrivons le modèle CIC à une dimension qui utilise les particules décrites sur la figure 3.1. Les études de Langdon et Okuda [14], [15], sur les bruits numériques introduits par le maillage spatial et les chocs entre superparticules, nous conduisent à prendre l'extension d de la superparticule égale au pas du maillage h . Dans ce chapitre, chaque particule est repérée par l'abscisse x_i de son centre de gravité, dont nous étudions le mouvement.

3.1.1. - REPARTITION DE LA CHARGE D'UNE SUPERPARTICULE SUR LES NOEUDS DU MAILLAGE

Suivant la position du centre de gravité (x_i) de la superparticule considérée par rapport à l'abscisse (x_n) du noeud du maillage le plus proche, la loi de répartition de la charge de cette dernière entre les noeuds du maillage se décompose comme suit (figure 3.2) :

1er cas : figure 3.2.a : $x_n \leq x_i \leq x_n + h/2$

- le plan d'abscisse x_n est affecté de la charge contenue dans le volume limité par les plans d'abscisse $x_i - h/2$ et $x_n + h/2$. Il a donc la densité aréolaire de charge : $\sigma_{n,i} = \frac{-\sigma}{h} (x_n + h - x_i)$.

- le plan d'abscisse $x_n + 1$ reçoit la charge contenue dans le volume limité par les plans d'abscisse $x_n + \frac{h}{2}$ et $x_i + h/2$. Il a donc la densité aréolaire de charge : $\sigma_{n+1, i} = -\frac{\sigma}{h} (x_i - x_n)$.

2ème cas : figure 3.2.b : $x_n - h/2 \leq x_i < x_n$

- le plan d'abscisse x_n est affecté de la densité aréolaire de charge $\sigma_{n,i} = -\frac{\sigma}{h} (x_i - x_n + h)$ correspondant à la charge contenue entre les plans d'abscisse $x_n - h/2$ et $x_i + h/2$.
- le plan d'abscisse x_{n-1} reçoit la densité aréolaire de charge $\sigma_{n-1,i} = -\frac{\sigma}{h} (x_n - x_i)$ correspondant à la charge contenue entre les plans d'abscisse $x_i - h/2$ et $x_n - h/2$.

Ainsi, les plans médians des mailles sont affectés d'une fraction de la charge de chacune des superparticules égale à la fraction de volume de celles-ci situées dans la maille, soit finalement d'une densité aréolaire uniforme de charge :

$$\sigma_n = \sum_i \sigma_{n,i}$$

3.1.2. CALCUL DU CHAMP ET DU POTENTIEL ELECTRIQUES

Chaque plan d'abscisse x_n est affecté d'une densité aréolaire uniforme de charge σ_n . Nous considérons que l'action d'un plan chargé est antisymétrique, cette hypothèse étant expliquée plus loin. Le champ électrique créé par un tel plan est :

$$E(x) = \frac{\sigma_n}{\epsilon_0} \left[T(x - x_n) - \frac{1}{2} \right]$$

Soit un ensemble de superparticules dont les charges sont réparties sur différents noeuds du maillage, le champ électrique au point d'abscisse x est :

$$E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k \frac{\sigma_k}{k} \left[T(x - kh) - \frac{1}{2} \right]$$

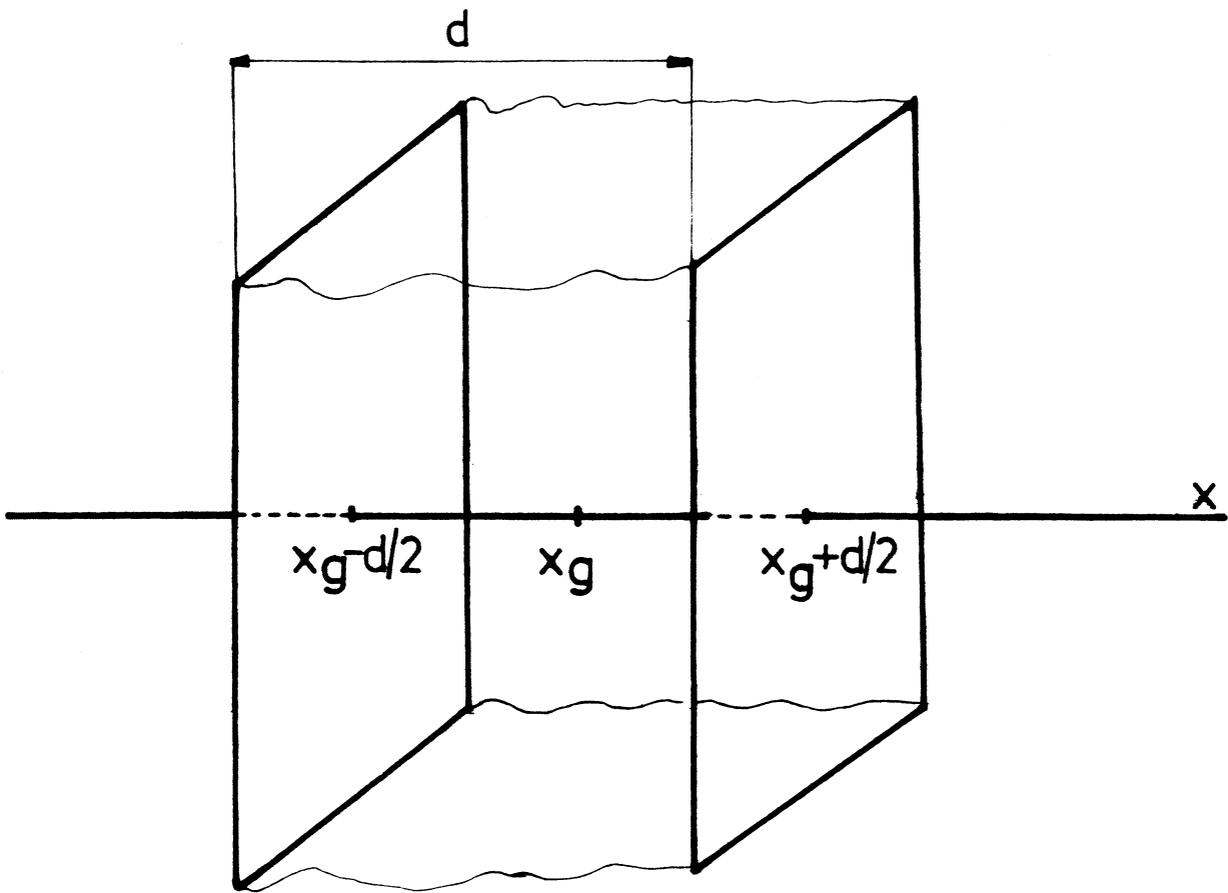


Figure 3.1 : forme des superélectrons dans le modèle CIC

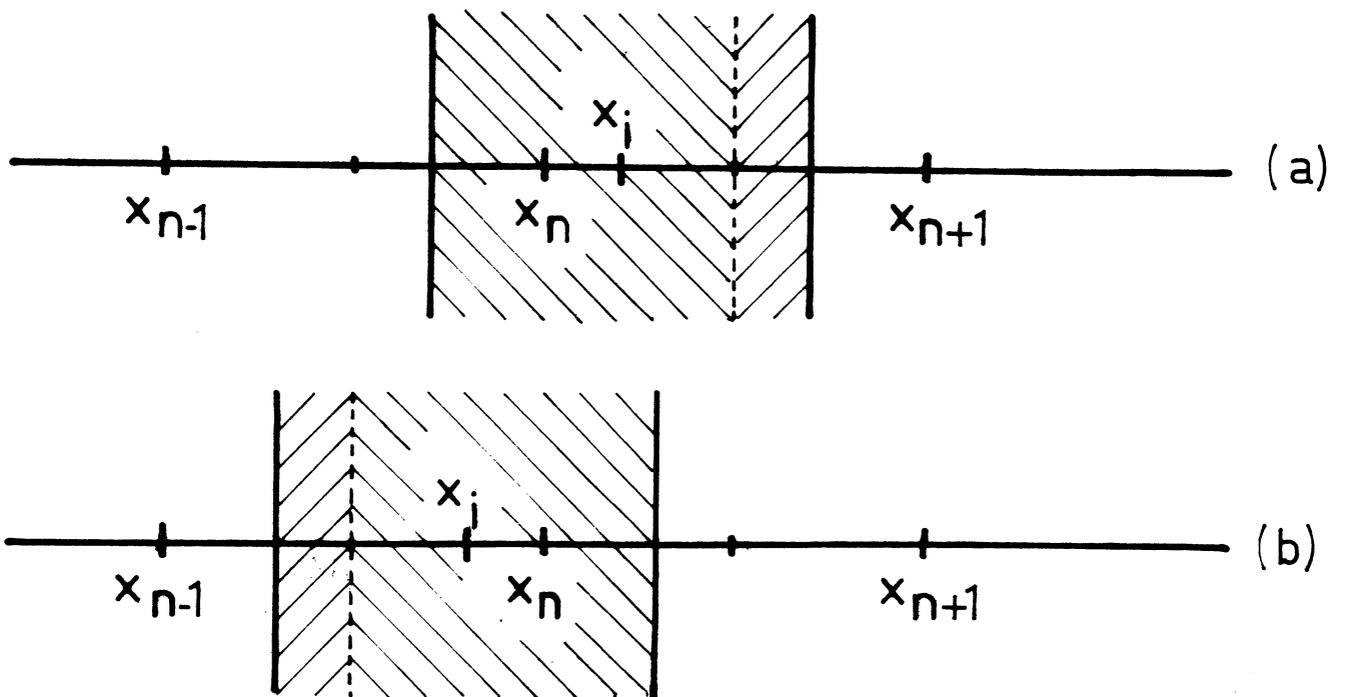


Figure 3.2 : répartition de la charge d'une superparticule entre les noeuds du maillage

Au n^{ième} noeud ($x = x_n$), on a :

$$E_n = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[\sum_{k < n} \sigma_k - \sum_{k > n} \sigma_k \right], \quad (3.5)$$

la sommation sur k portant sur tous les noeuds du maillage.

En prenant l'origine des potentiels au point d'abscisse nulle et en considérant que tous les x_n sont positifs, le potentiel électrique, créé par un ensemble de superparticules, est au point d'abscisse x :

$$\Phi(x) = - \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_k [\sigma_k |x - kh| - kh \sigma_k]$$

Soit au n^{ième} noeud ($x = x_n$) :

$$\Phi_n = x_n \sum_{k \geq n} \frac{\sigma_k}{2\epsilon_0} + \sum_{k < n} \frac{\sigma_k}{2\epsilon_0} (2x_k - x_n) \quad (3.6)$$

3.1.3. - CALCUL DE LA FORCE EXERCEE SUR UNE SUPERPARTICULE

Considérons notre ensemble de superparticules à charges réparties sur les noeuds du maillage. La superparticule i donne les densités de charge $\sigma_{n,i}$ et $\sigma_{n+1,i}$ aux plans d'abscisse x_n et x_{n+1} . Soient E_n et E_{n+1} les champs électriques en ces deux points. La force subie par unité de surface par la particule considérée est :

$$F_i = \sigma_{n,i} E_n + \sigma_{n+1,i} E_{n+1} \quad (3.7)$$

Dans les expressions de E_n et E_{n+1} , la charge de la particule i intervient, mais grâce à l'hypothèse faite précédemment, nous pouvons vérifier que la particule considérée n'exerce pas de force sur elle-même.

Conclusion

La connaissance de la position de toutes les superparticules dans le domaine d'étude au temps t, nous permet de répartir leur charge sur les noeuds du

maillage. Cette opération étant réalisée, nous calculons le champ électrique en ces noeuds à l'aide de 3.5. L'expression 3.7 nous permet alors de connaître la force subie par toutes les superparticules au temps t . Grâce à la connaissance de leur vitesse au temps $t - \tau/2$, les équations 3.3 et 3.4 nous donnent leur vitesse au temps $t + \tau/2$ et leur position au temps $t + \tau$. En répétant ce cycle d'opérations à chaque pas élémentaire, nous suivons l'évolution temporelle du plasma.

3.2. - APPLICATION DU MODELE CIC A LA SIMULATION DU PROBLEME PHYSIQUE ETUDIE

L'origine des abscisses étant prise au point d'injection I, l'abscisse du $n^{\text{ième}}$ noeud est : $x_n = (n - 1) h$, où h est le pas du maillage. La grille chargée est placée au noeud d'indice N_g .

Supposons qu'au $M^{\text{ième}}$ pas de calcul, les superélectrons soient répartis sur les mailles comprises entre la première et la $n_0^{\text{ième}}$, les ions formant, par hypothèse, un fond continu neutralisant de densité ρ_p . Cette charge positive, qui au temps $M\tau$ s'étend du point d'abscisse nulle au point d'abscisse $Mv_0\tau$, est répartie sur les noeuds du maillage comme suit (figure 3.4) :

1er cas : figure 3.3.a : $M \cdot v_0 \cdot \tau \leq h/2$

- seul le plan d'abscisse nulle est affecté d'une charge uniforme de densité aréolaire :

$$\sigma_{1,p} = M v_0 \tau \rho_p$$

2ème cas : figure 3.3.b : $(n - 1) h \leq M v_0 \tau \leq (n - 1) h + h/2$

- le plan d'abscisse nulle est affecté de la densité aréolaire de charge uniforme :

$$\sigma_{1,p} = h \rho_p / 2$$

- les plans d'abscisse x_k tels que $1 < k < n$ sont affectés de la densité aréolaire de charge uniforme :

$$\sigma_{k,p} = h \rho_p$$

- le plan d'abscisse x_n est affecté de la densité aréolaire de charge :

$$\sigma_{n,p} = \rho_p (M v_0 \tau - (n - 1) h + h/2)$$

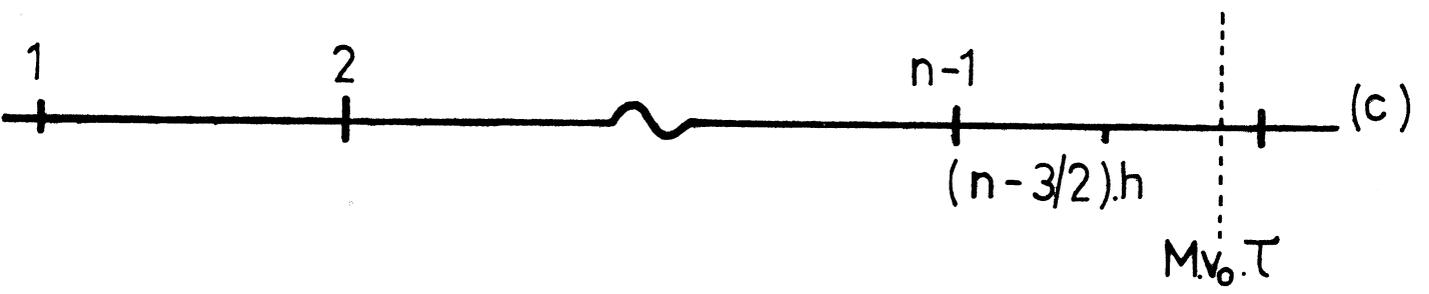
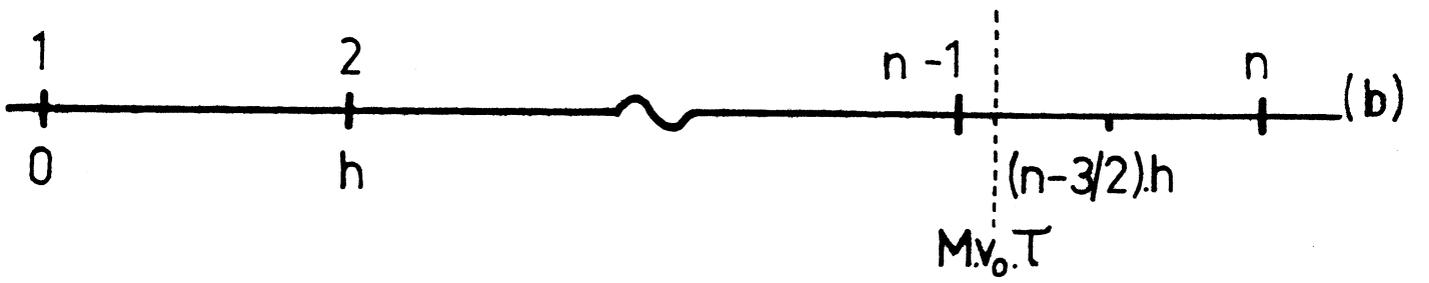
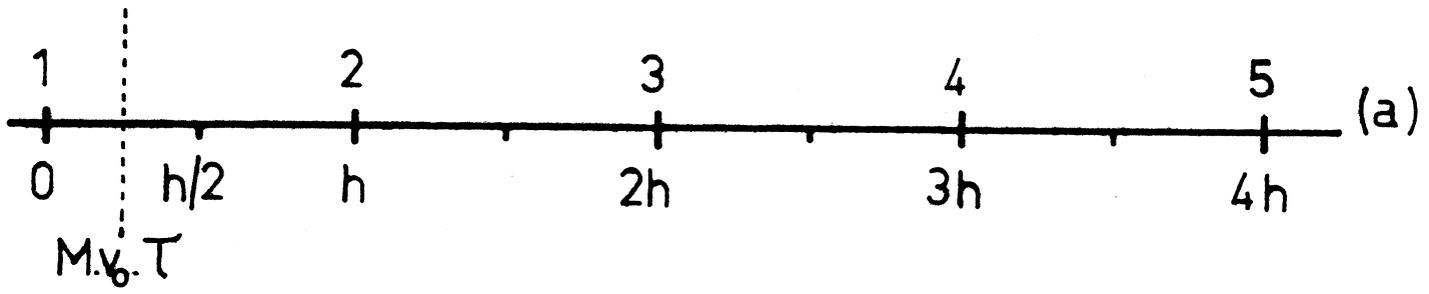


Figure 3.3 : répartition de la charge positive suivant la position du fond

3ème cas : figure 3.3.c : $(n - 1) h - h/2 \leq M v_0 \tau < (n - 1) h$

- le plan d'abscisse nulle est affecté de la densité aréolaire de charge uniforme :

$$\sigma_{1,p} = h \rho_p / 2$$

- les plans d'abscisse x_k tels que $1 < k < n$ sont affectés de la densité aréolaire de charge uniforme :

$$\sigma_{k,p} = h \rho_p$$

- le plan d'abscisse x_n est affecté de la densité aréolaire de charge uniforme :

$$\sigma_{n,p} = \rho_p (M v_0 \tau - (n - 1) h + h/2)$$

La charge positive et toutes les charges des superélectrons étant réparties sur les noeuds du maillage situés entre le premier et le n_0 ^{ième}, le plan médian de la n ^{ième} maille avec $1 \leq n \leq n_0$, est affecté de la densité aréolaire de charge uniforme :

$$\sigma_n = \sum_i \sigma_{n,i} + \sigma_{n,p} \quad (3.8)$$

D'après 3.5, le champ électrique au n ^{ième} noeud est :

$$E_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{2\epsilon_0} - \sum_{k=n+1}^{n_0} \frac{\sigma_k}{2\epsilon_0} \quad (3.9)$$

alors que le potentiel est :

$$\Phi_n = \frac{h}{\epsilon_0} \left[\frac{n-1}{2} \sum_{k=1}^{n_0} \sigma_k + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (k-n) \right] \quad (3.10)$$

Nous injectons dans le domaine d'étude un plasma électriquement neutre. Si nous injectons N_e superélectrons, de charge $-\sigma$, par pas élémentaire, nous avons :

$$\rho_p = \frac{N_e \sigma}{v_0 \tau} \quad \text{soit : } \rho_p = \frac{R\sigma}{h}$$

où $R = N_e h / v_0 \tau$ est une grandeur sans dimension.

Les expressions de $\sigma_{n,i}$ du paragraphe 3.1.1 peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{n,i} = - \frac{\sigma}{h} \Delta x_{n,i}$$

où $\Delta x_{n,i}$ a la dimension d'une longueur, alors que les expressions de $\sigma_{n,p}$ sont de la forme :

$$\sigma_{n,p} = \rho_p \Delta x_{n,p}$$

où $\Delta x_{n,p}$ à la dimension d'une longueur.

Dans ces conditions, 3.8 s'écrit sous la forme :

$$\sigma_n = - \sigma \sum_i \frac{\Delta x_{n,i}}{h} + R \sigma \frac{\Delta x_{n,p}}{h}$$

soit :
$$\sigma_n = \sigma \left[R \frac{\Delta x_{n,p}}{h} - \frac{\Delta x_{n,e}}{h} \right]$$

où $\Delta x_{n,e} = \sum_i \Delta x_{n,i}$ a la dimension d'une longueur.

3.9 s'écrit alors :

$$E_n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(R \frac{\Delta x_{k,p}}{h} - \frac{\Delta x_{k,e}}{h} \right) - \sum_{k=n+1}^{n_0} \left(R \frac{\Delta x_{k,p}}{h} - \frac{\Delta x_{k,e}}{h} \right) \right]$$

Nous remarquons que :

- $\sigma_{n,i}$ s'écrit sous la forme du produit de σ par une grandeur sans dimension
- E_n s'écrit sous la forme du produit de $\sigma/2\epsilon_0$ par une grandeur sans dimension

Donc, d'après 3.7, la force subie par le superélectron i s'écrit sous la forme :

$$F_i = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S_i$$

où S_i est sans dimension.

Les équations du mouvement du centre de gravité de cette particule sont donc :

$$v_i(t + \tau/2) = v_i(t - \tau/2) + \frac{\sigma^2}{2 M_e \epsilon_0} s_i \tau$$

$$x_i(t + \tau) = x_i(t) + v_i(t - \tau/2) \tau$$

Soit dans le système sans dimensions :

$$X = \frac{x}{h}, V = \frac{v}{v_0}, DT = \frac{\tau v_0}{h} \text{ et } \Gamma_0 = \frac{\sigma^2}{2 M_e \epsilon_0} \frac{h}{v_0^2}$$

Le mouvement du superélectron s'écrit :

$$V_i(t + \tau/2) = V_i(t - \tau/2) + \Gamma_0 S_i DT \quad (3.11)$$

$$X_i(t + \tau) = X_i(t) + V_i(t - \tau/2) DT \quad (3.12)$$

Pour traiter plus facilement nos résultats, nous posons :

$$h = \frac{2\pi v_0}{\omega_{pe}} \frac{1}{K}$$

où K est un nombre entier.

Dans ces conditions, nous avons :

$$DT = \frac{K}{2\pi} \tau \omega_{pe} \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = \frac{2\pi^2 DT}{N_e K^2}$$

Nous avons précédemment placé la grille sur le noeud d'indice N_g , qui est donc toujours affecté de la densité aréolaire de charge σ_0 . Comme nous avons pris σ comme unité de charge, la charge de la grille est donc caractérisée par le paramètre $q_0 = \sigma_0/\sigma$, alors que la densité de charge du fond neutralisant est N_e/DT .

Les paramètres de la simulation sont donc :

- N_e : nombre d'électrons injectés par pas de calcul
- $\tau \omega_{pe}$: définissant le pas élémentaire de calcul
- K : définissant la longueur de la maille utilisée

- q_0 : définissant la charge de la grille
- β : manière de nombre de MACH
- N_g : précisant la position de la grille par rapport au point d'injection

3.3. - ETUDE DES PERFORMANCES DU MODELE

Quelle est l'action des paramètres précédents sur les performances du modèle et notamment sur la qualité de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement ?

Pour l'étudier, nous considérons un système isolé de 200 superparticules uniformément réparties dans l'espace et, étudions les variations temporelles des rapports : $DE/E = (E - E_0)/E_0$ et $DP/P = (P - P_0)/P_0$ où E et E_0 représentent les énergies totales du système au temps considéré et au temps $t = 0$ et où P et P_0 sont respectivement les quantités de mouvement aux mêmes instants.

3.3.1. - ETUDE DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

Nous allons étudié les variations du rapport DP/P en fonction de chacun des paramètres à un instant donné.

3.3.1.1. - Action du paramètre $\tau \cdot \omega_{pe}$ (temps réduit)

Nous avons porté sur la figure 3.4, les variations de DP/P en fonction de $\tau \cdot \omega_{pe}$, k étant fixé à 40, pour les deux valeurs suivantes de N_e : $N_e = 16$, $N_e = 8$.

Nous constatons que DP/P est une fonction croissante de $\tau \cdot \omega_{pe}$ et que la pente de la courbe obtenue est une fonction décroissante de ce paramètre, cette pente ayant une variation rapide pour les valeurs de $\tau \cdot \omega_{pe} < 3 \cdot 10^{-2}$ et plus lente ensuite.

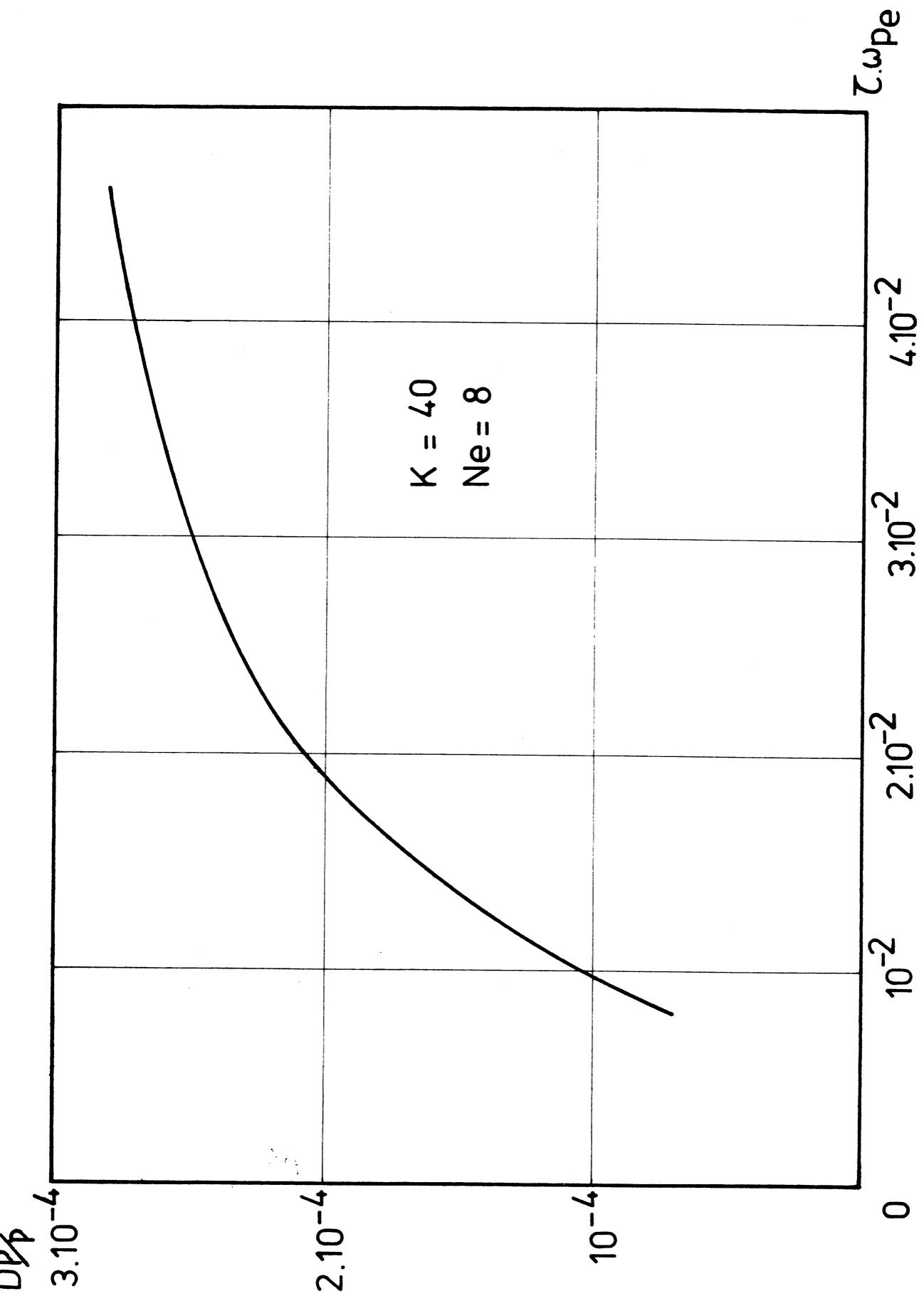


Figure 3.4 : étude de la conservation de la quantité de mouvement en fonction de $z \cdot \omega \cdot pe$

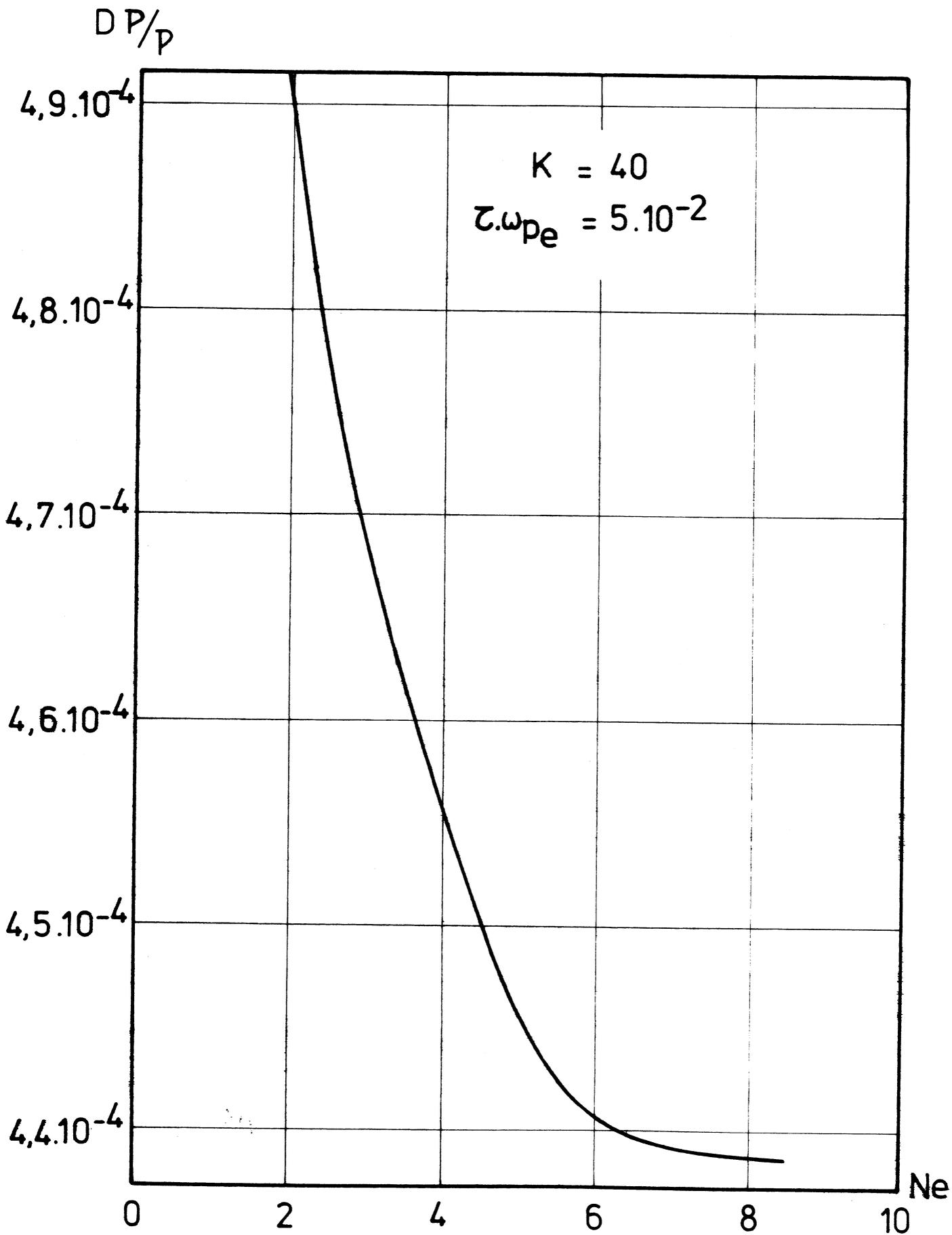


Figure 3.5 : étude de la conservation de la quantité de mouvement en fonction de N_e

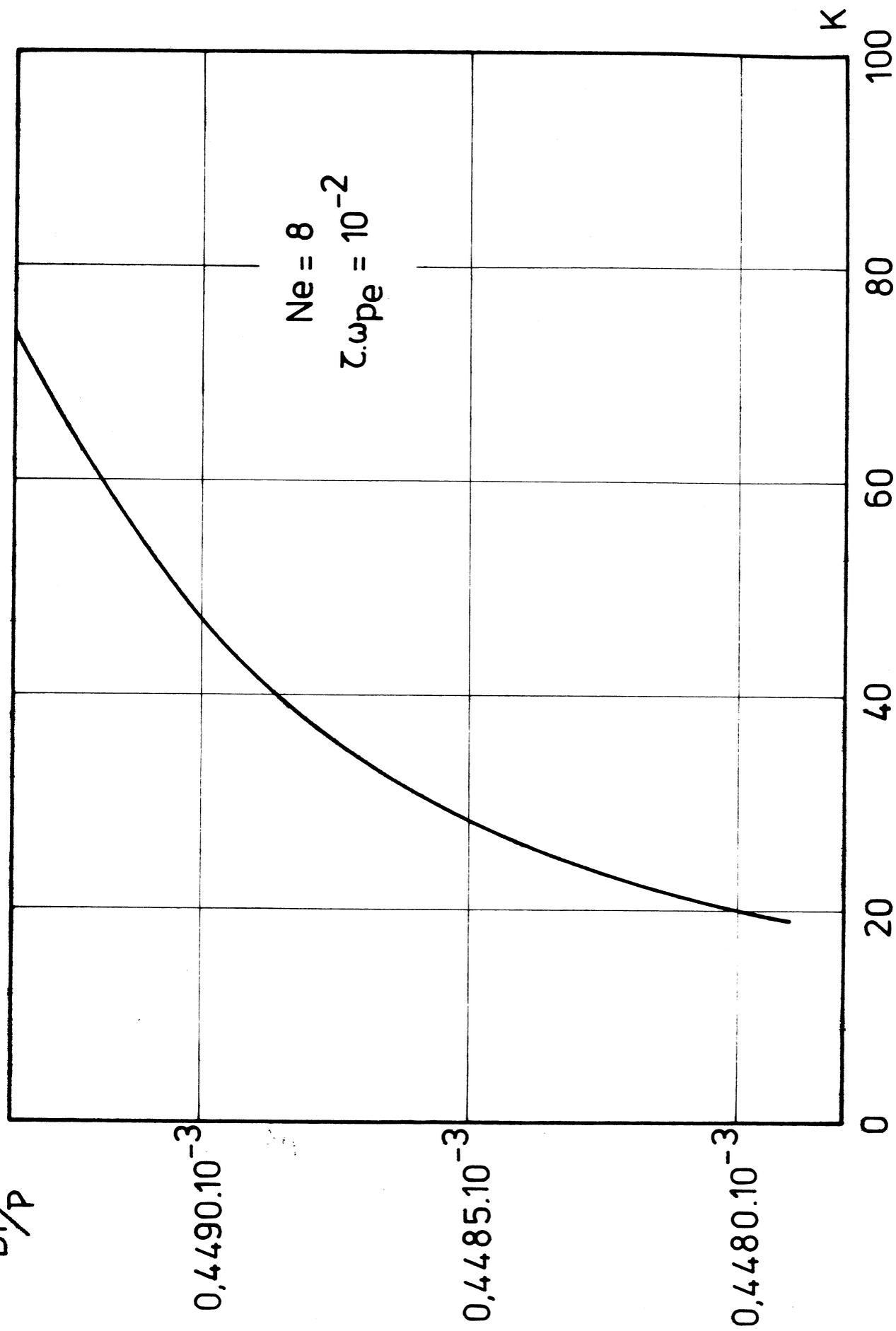


Figure 3.6 : étude de la conservation de la quantité de mouvement en fonction de K

3.3.1.2. - Action du paramètre N_e

La figure 3.5 représente les variations de DP/P en fonction de N_e , K étant fixé à 40, et $\tau \cdot \omega_{pe}$ pris égal à $5 \cdot 10^{-2}$.

Nous vérifions que DP/P est une fonction décroissante de N_e ; la variation de la pente de la courbe obtenue n'a pas les mêmes caractéristiques que celles de la figure 3.4.

3.3.1.3. - Action du paramètre K

La figure 3.6 représente les variations de DP/P en fonction de K pour : $N_e = 8$ et $\tau \cdot \omega_{pe} = 2 \cdot 10^{-2}$.

Nous constatons que DP/P est une fonction croissante de K et que la pente de la courbe obtenue est une fonction décroissante de ce paramètre, cette pente ayant une variation rapide pour les valeurs de $K < 40$ et plus lente ensuite.

3.3.2. - ETUDE DE LA CONSERVATION DE L'ENERGIE

Les études de conservation de l'énergie nous ont amenés aux mêmes observations que précédemment. En effet, les courbes représentant les variations de DE/E en fonction des différents paramètres ont les mêmes formes que celles décrites plus haut.

Conclusion

Nous venons de décrire le modèle CIC à une dimension et nous l'avons appliqué à l'étude du phénomène physique qui nous occupe.

Les performances de ce modèle montrent qu'il peut donner une bonne description du phénomène à étudier.

Nous venons de décrire deux codes de simulation lagrangienne à une dimension. Dans ce chapitre, nous comparons les résultats de ces deux codes appliqués au problème physique décrit au chapitre 1. En dernier lieu, nous présentons les résultats d'une simulation complète.

4.1. - COMPARAISON ENTRE LE CODE CIC ET LE CODE A PARTICULE DE DAWSON

Les paramètres de la simulation du problème physique qui nous occupe sont les mêmes dans les deux codes. Pour comparer ceux-ci, nous attribuerons les valeurs suivantes aux différents paramètres :

- $\tau \omega_{pe} = 5 \times 10^{-2}$
- $K = 40$
- $N_e = 2$
- $\beta = 10$
- $q_0 = -25$

Dans la simulation utilisant le modèle à particule de Dawson, nous injectons un seul ion par pas élémentaire de calcul.

Nous avons fait tourner les deux programmes sur ordinateur pendant 300 pas de calcul, ce qui revient à suivre l'évolution du plasma du temps 0 au temps $15 \omega_{pe}^{-1}$.

4.1.1. - RESULTATS OBTENUS A L'AIDE DU CODE A PARTICULE DE DAWSON

Sur la figure 4.1, nous avons porté l'évolution spatiale du champ électrique, exprimé en unités $\sigma/2\epsilon_0$, au temps $15 \omega_{pe}^{-1}$. Nous constatons que :

- en aval de la grille se développe une onde de période voisine de λ_0 .
- en amont de la grille le champ est essentiellement apériodique.

La figure 4.3 représentant l'espace des phases au temps $15 \omega_{pe}^{-1}$, nous permet de décomposer l'espace en deux parties :

- la première, en amont de la grille, représente le précurseur du choc. Nous constatons que les superélectrons y sont globalement ralentis et que le champ y a la forme décroissante prévue.
- la seconde, en aval de la grille, est la région où se développe l'onde de grande amplitude. L'ensemble des superparticules s'y décompose en deux populations :
 - * les particules passantes, à vitesse toujours positive, dont la trajectoire correspond à une suite d'accélération et de décélération en phase avec le champ électrique,
 - * les particules piégées, en petit nombre sur la première période, qui tournent dans le puits de potentiel.

4.1.2. - RESULTATS OBTENUS A L'AIDE DU CODE CIC

Nous avons porté, sur la figure 4.2, l'évolution spatiale du champ électrique au temps $15 \omega_{pe}^{-1}$. Nous voyons que sa forme est sensiblement la même que sur la figure 4.1. La figure 4.4, représente la configuration de l'espace des phases au même instant. Nous constatons que le précurseur est mal décrit, ce qui peut s'expliquer par le nombre important de superélectrons qui rebondissent sur le front et qui ont le comportement de particules oscillantes entre le point d'injection et le front. Nous avons observé un phénomène similaire lorsque la grille n'était pas absorbante et que les particules de faible énergie oscillaient à son niveau. Seules, les mauvaises conditions d'utilisation du code CIC semblent être mises en cause.

4.1.3. - CHOIX DU MODELE

Le modèle à particules de Dawson donne une très bonne description du phénomène à étudier. Hélas, son utilisation demande un temps CPU de calcul sur

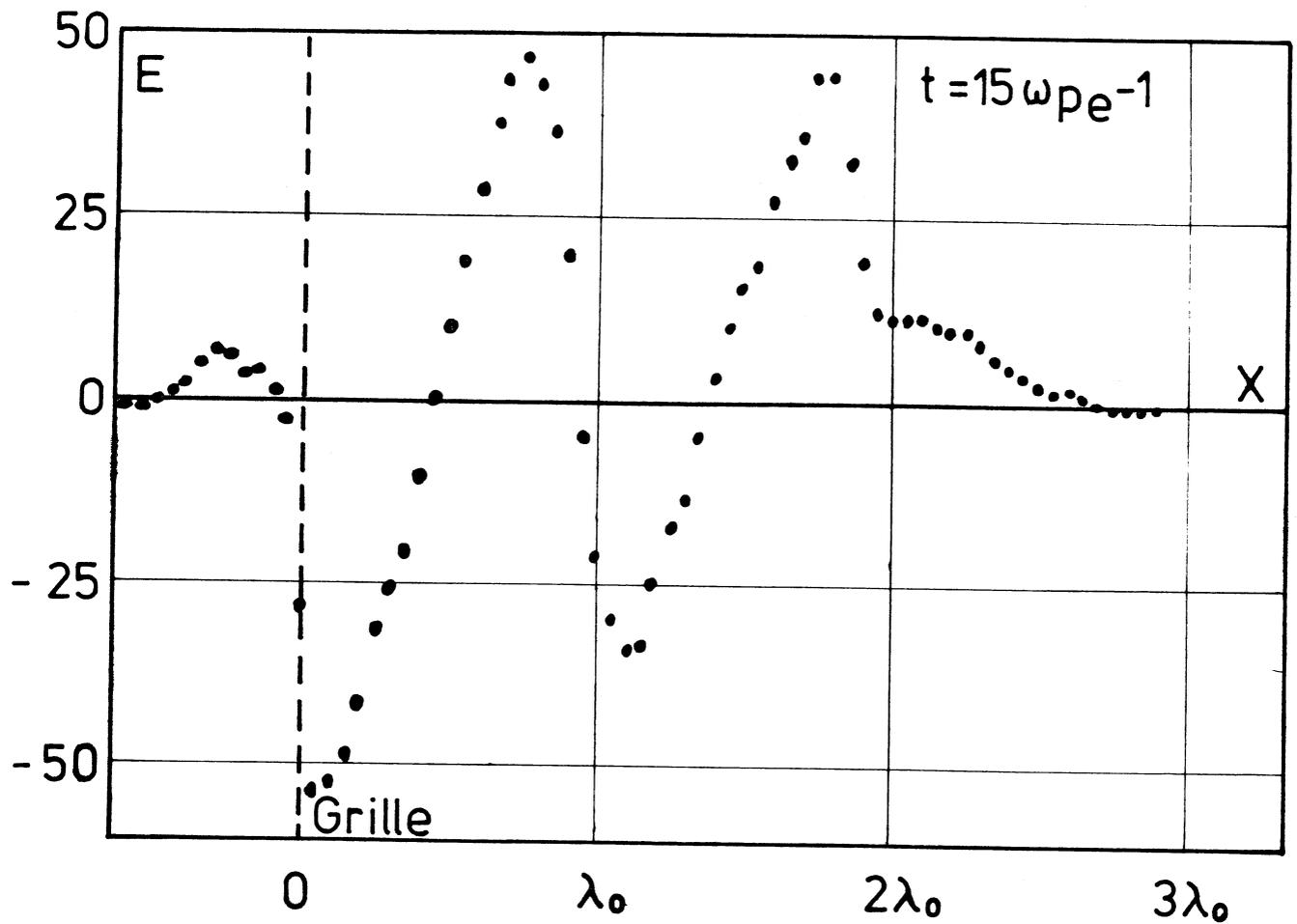


Figure 4.1 = évolution spatiale du champ électrique obtenue avec le modèle à particules de Dawson

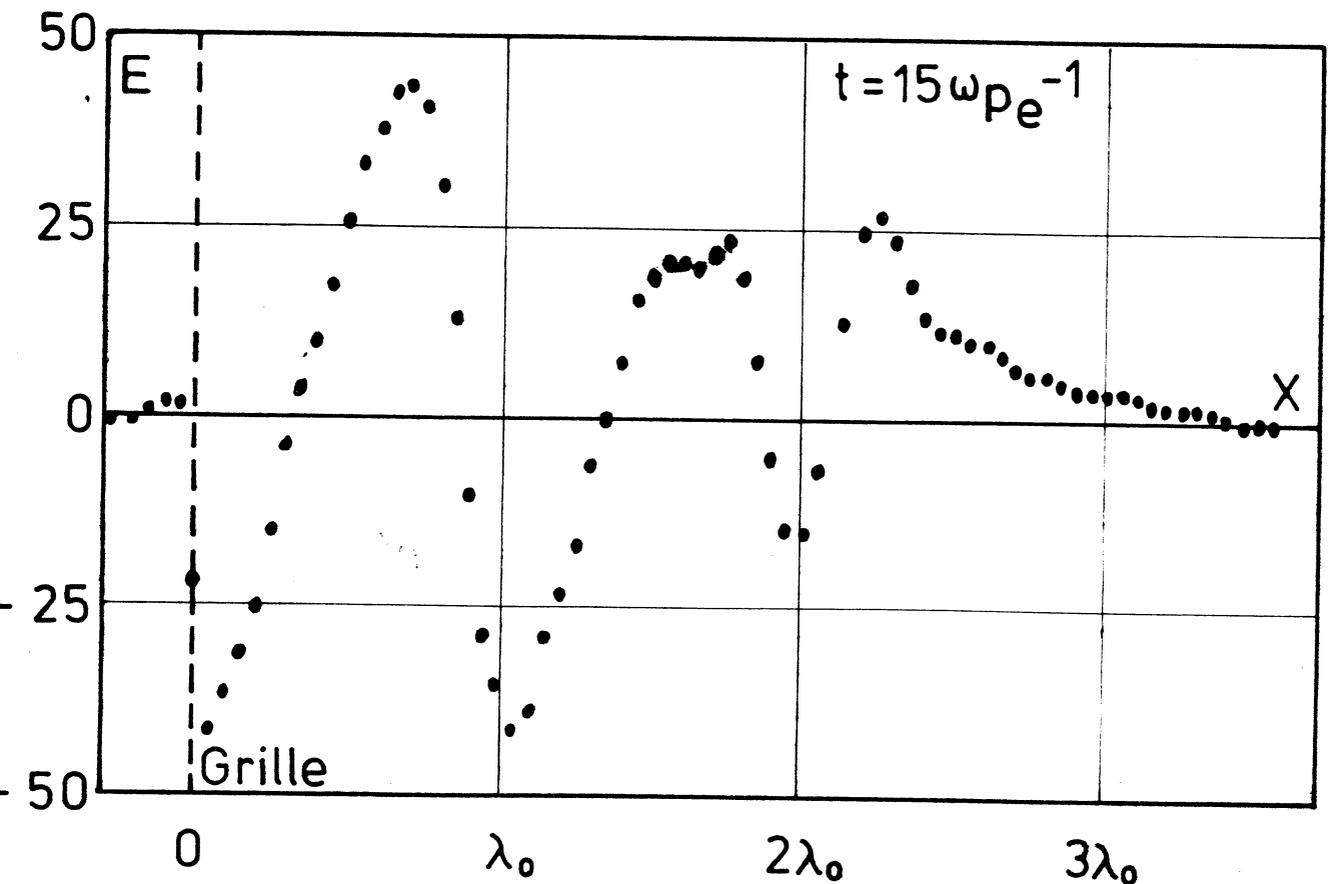


Figure 4.2 : évolution spatiale du champ électrique obtenue avec le modèle CIC

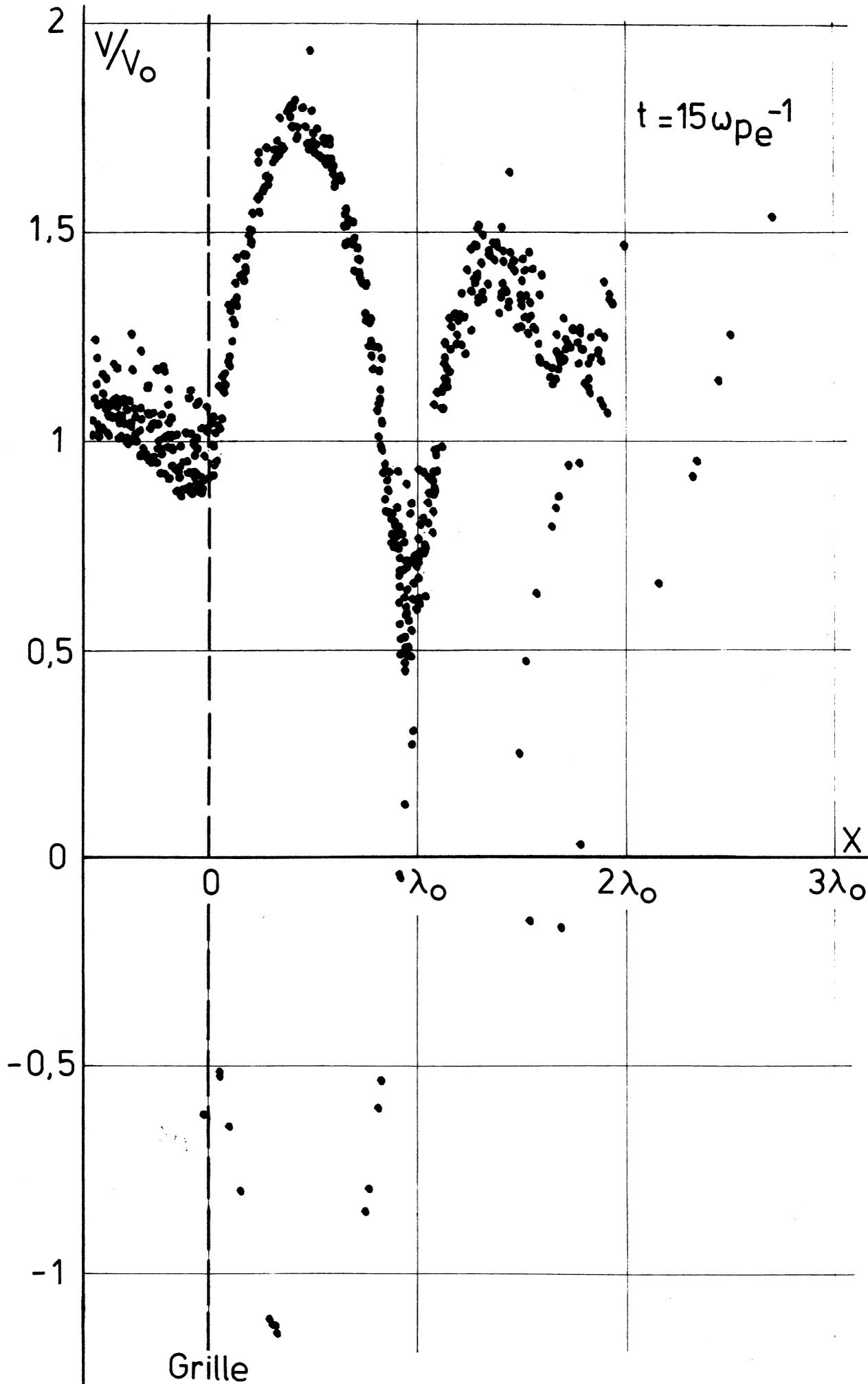


Figure 4.3 : espace des phases obtenu à l'aide du modèle à particules

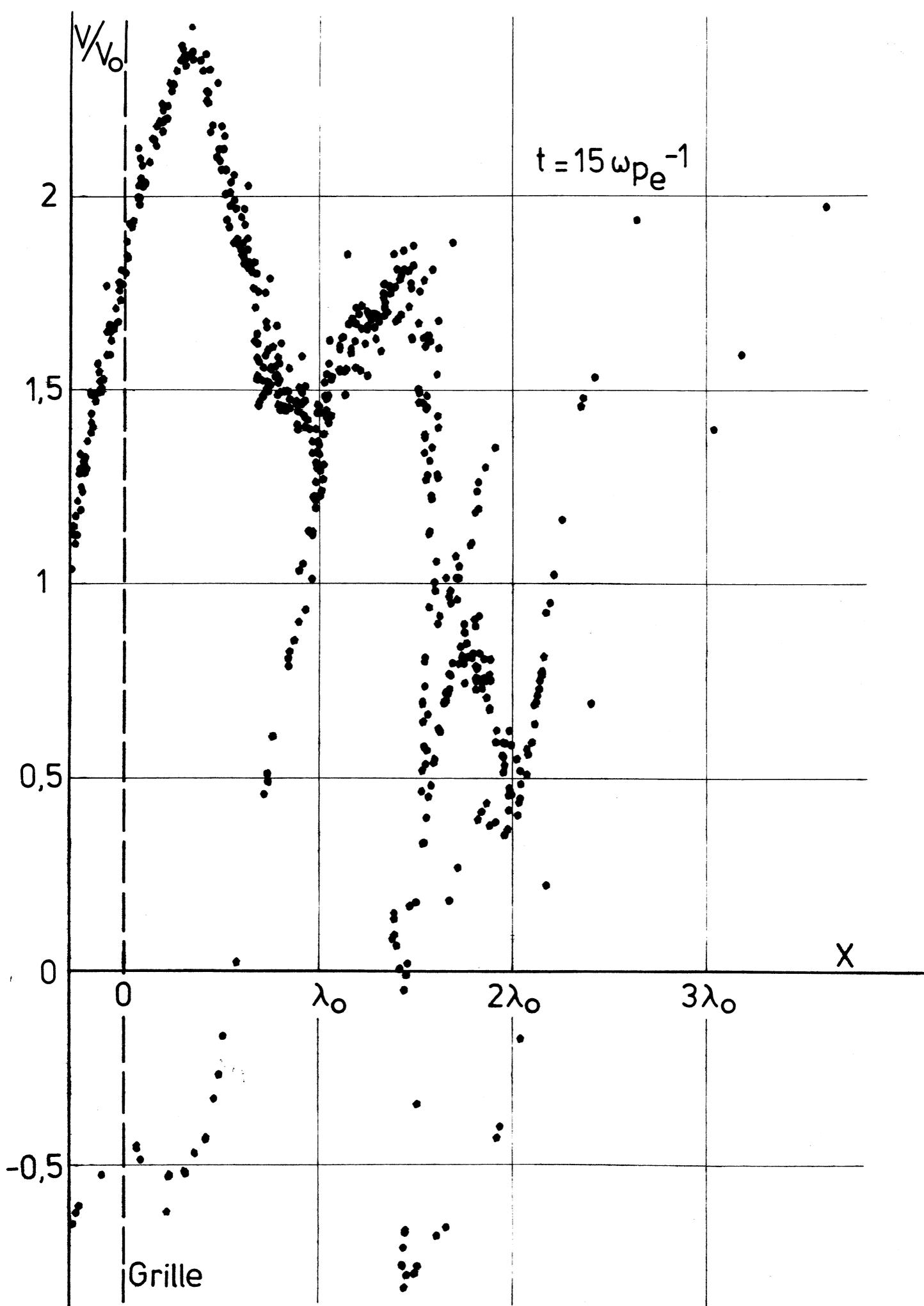


Figure 4.4 : espace des phases obtenu à l'aide du modèle CIC

IBM 360, 20 fois plus grand que celui nécessaire à l'utilisation du modèle CIC pour parcourir 300 pas dans le temps. Aussi, est-ce ce dernier que nous utiliserons. Malgré des conditions d'utilisation défavorables, il donne une description acceptable du phénomène lorsqu'on augmente le nombre de superparticules par pas.

4.2. - RESULTATS D'UNE SIMULATION REALISEE AVEC LE MODELE CIC

Nous avons donné les valeurs suivantes aux paramètres :

- $\tau \omega_{pe} = 5 \times 10^{-2}$
- $\beta = 10$
- $N_e = 8$
- $K = 40$
- $q_0 = -100$

La valeur de α correspondant à q_0 est : $\alpha = \frac{25}{36}$. $\left| \frac{10}{32} \right|^9$
 Etant donné la valeur importante de ce rapport, nous nous attendons à perturber fortement le plasma.

Les simulations de neutralisation réalisées par Claude POMOT [17], utilisant des particules planes, montrent qu'un minimum de 352 superélectrons par longueur λ_0 est nécessaire pour que l'effet grain particule-superparticule soit négligeable. Ici, nous travaillons avec 960 superélectrons par longueur λ_0 , ce qui laisse penser que cet effet sera inexistant dans nos résultats.

Nous avons fait tourner le programme sur ordinateur sur 1350 pas de calcul, ce qui revient à suivre l'évolution du plasma du temps 0 au temps $67,5 \omega_{pe}^{-1}$

4.2.1. - DESCRIPTION DU CHAMP ELECTRIQUE

La figure 4.5 représente l'évolution spatiale du champ électrique, en unité $\sigma/2\epsilon_0$, à différents instants. L'observation de cette figure, nous fait décomposer l'espace en deux régions :

- la première se situe en amont de la grille, le champ électrique y a la forme décroissante du précurseur décrit par H. PERES [8].
- la seconde se situe en aval de la grille. Le champ électrique a la forme oscillante attendue de période voisine de λ_0 . Son amplitude est modulée spatialement comme dans l'observation expérimentale de O'Neil [6].

La figure 4.6 représente à différents instants l'évolution spatiale de l'amplitude du champ électrique ($|E|_{\max}$), exprimée en unité $\sigma/2\epsilon_0$. Nous constatons que cette modulation spatiale évolue dans le temps, ce qui sera expliqué lors de l'étude du mouvement des particules piégées.

Sur la figure 4.7, nous avons porté l'évolution temporelle de l'abscisse des points où le champ électrique s'annule. Les courbes obtenues font penser à l'existence d'ondes progressives se propageant sur une onde stationnaire.

La figure 4.8, représentant l'évolution spatiale et temporelle du champ électrique, montre d'une part des déformations se propageant sur les sommets des vallonements, ce qui corrobore l'hypothèse d'ondes progressives et d'autre part, la stationnarité de la première période dans le temps. Ce dernier point s'explique par un phénomène de régularisation dû à la grille qui absorbe toutes les particules piégées dans cette zone. Un calcul rapide de l'amplitude du champ électrique sur cette période donne :

$$|E_0| = \frac{4,5}{16} \frac{m_e v_0 \omega_{pe}}{e}$$

alors que, d'après les résultats de la théorie macroscopique, elle doit être :

$$|E_T| = \frac{5}{16} \frac{m_e v_0 \omega_{pe}}{e}$$

Le faible écart existant entre ces deux valeurs, montre que la théorie macroscopique donne une description acceptable du phénomène lorsqu'il n'y a pas de piégeage.

A ce stade, l'étude de l'espace des phases devient nécessaire pour décrire l'action des particules piégées sur cette onde de grande amplitude.

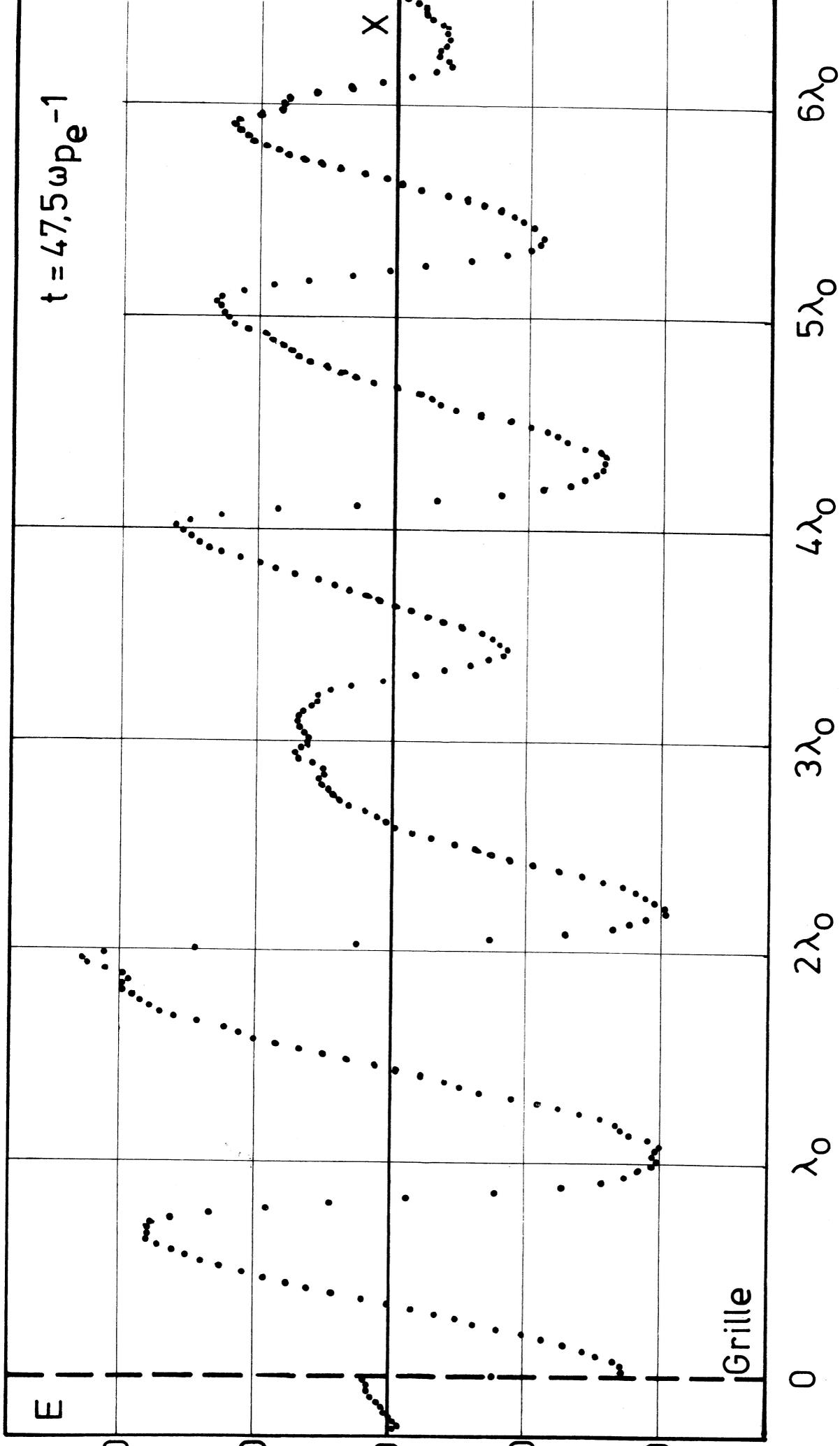


Figure 4.5.a

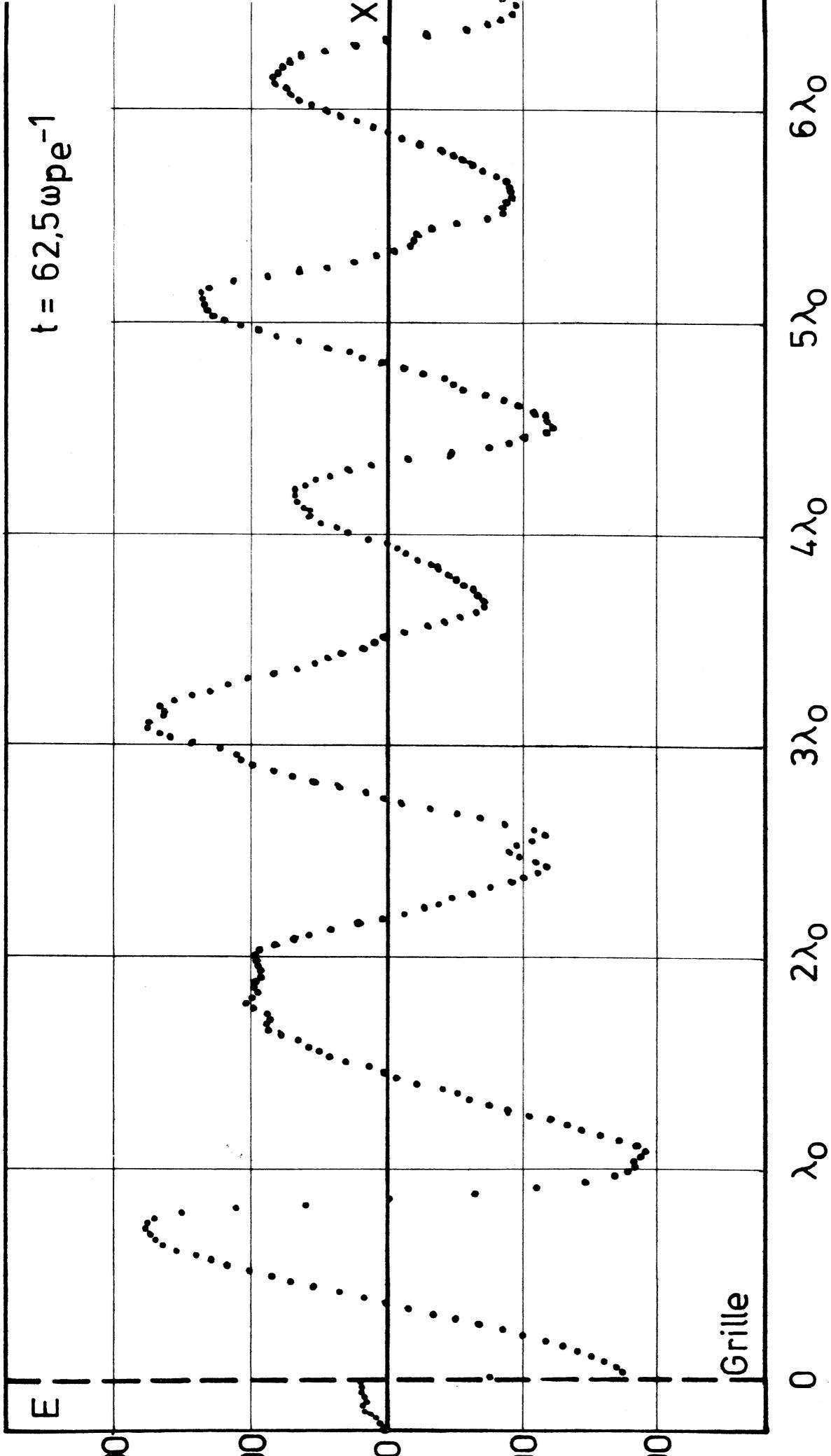


Figure 4.5.b

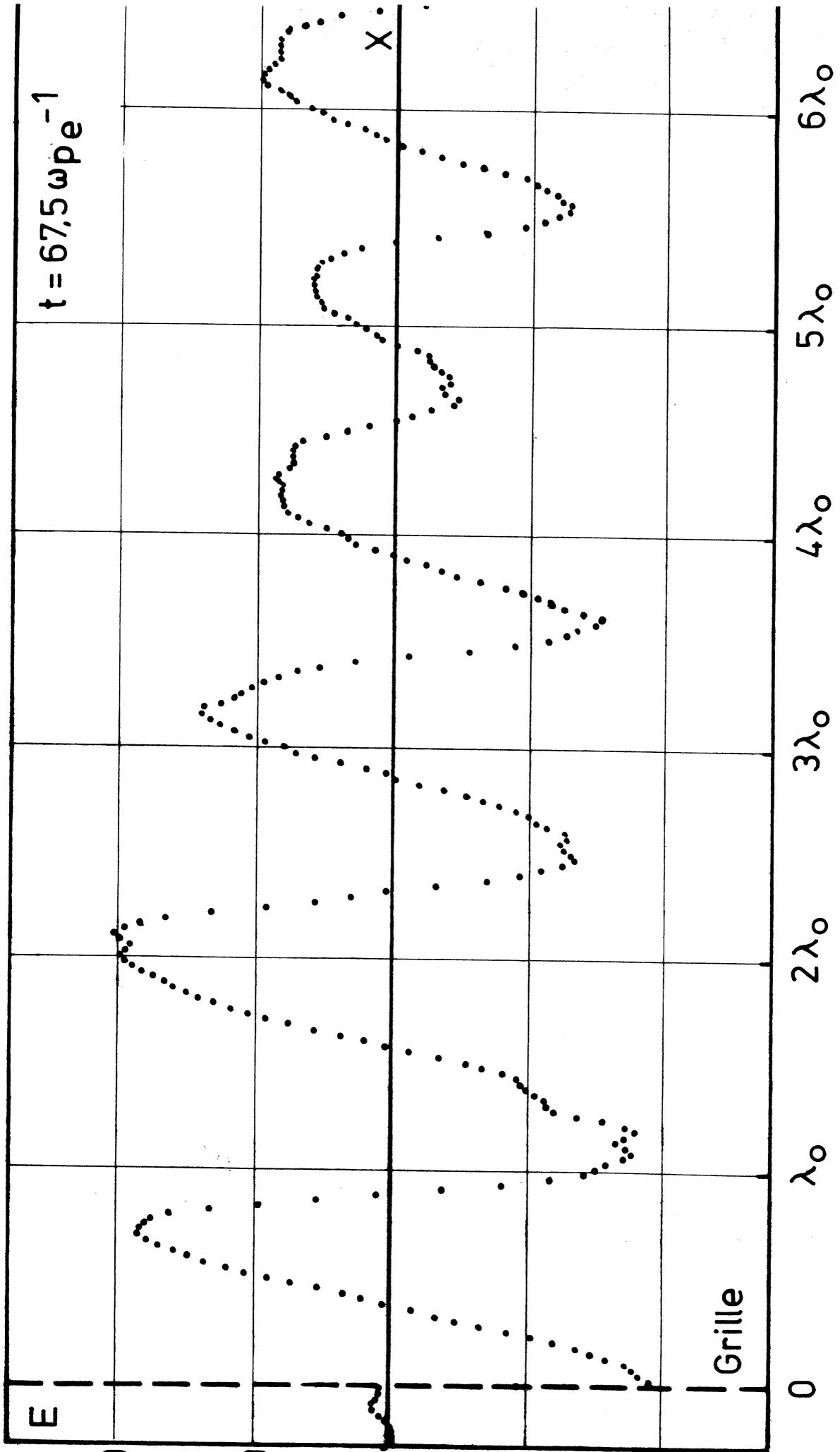


Figure 4.5.c

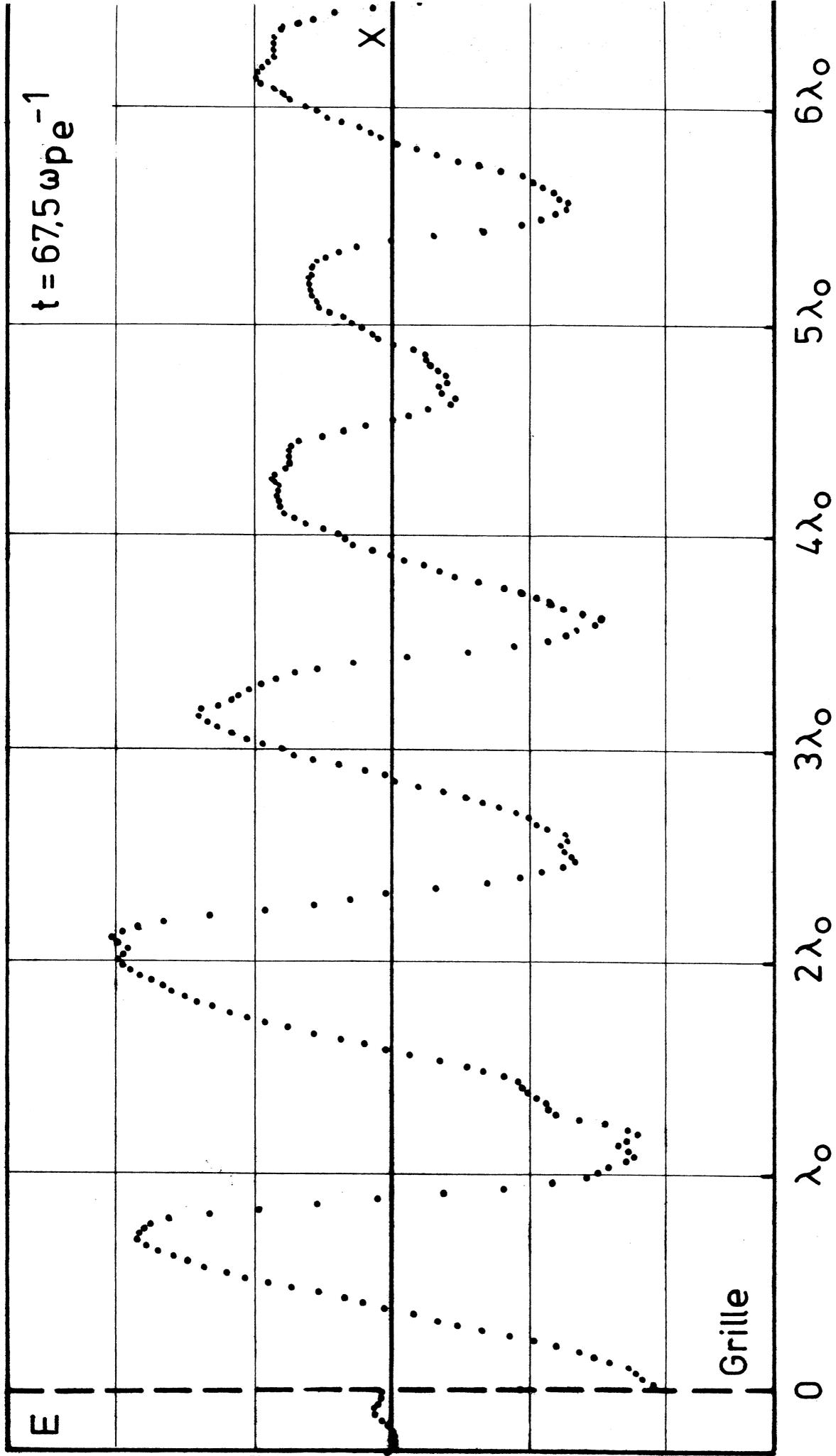


Figure 4.5.c

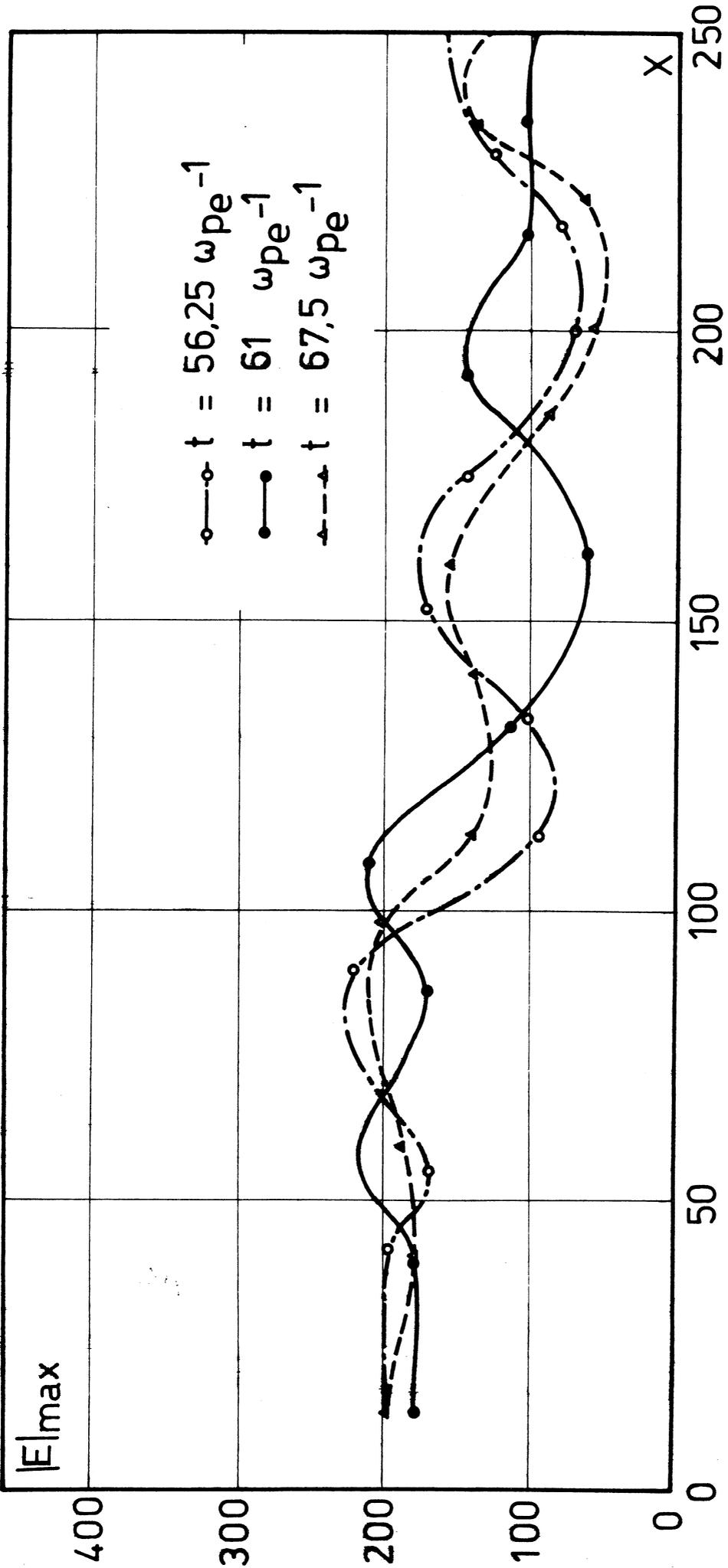


Figure 4.6

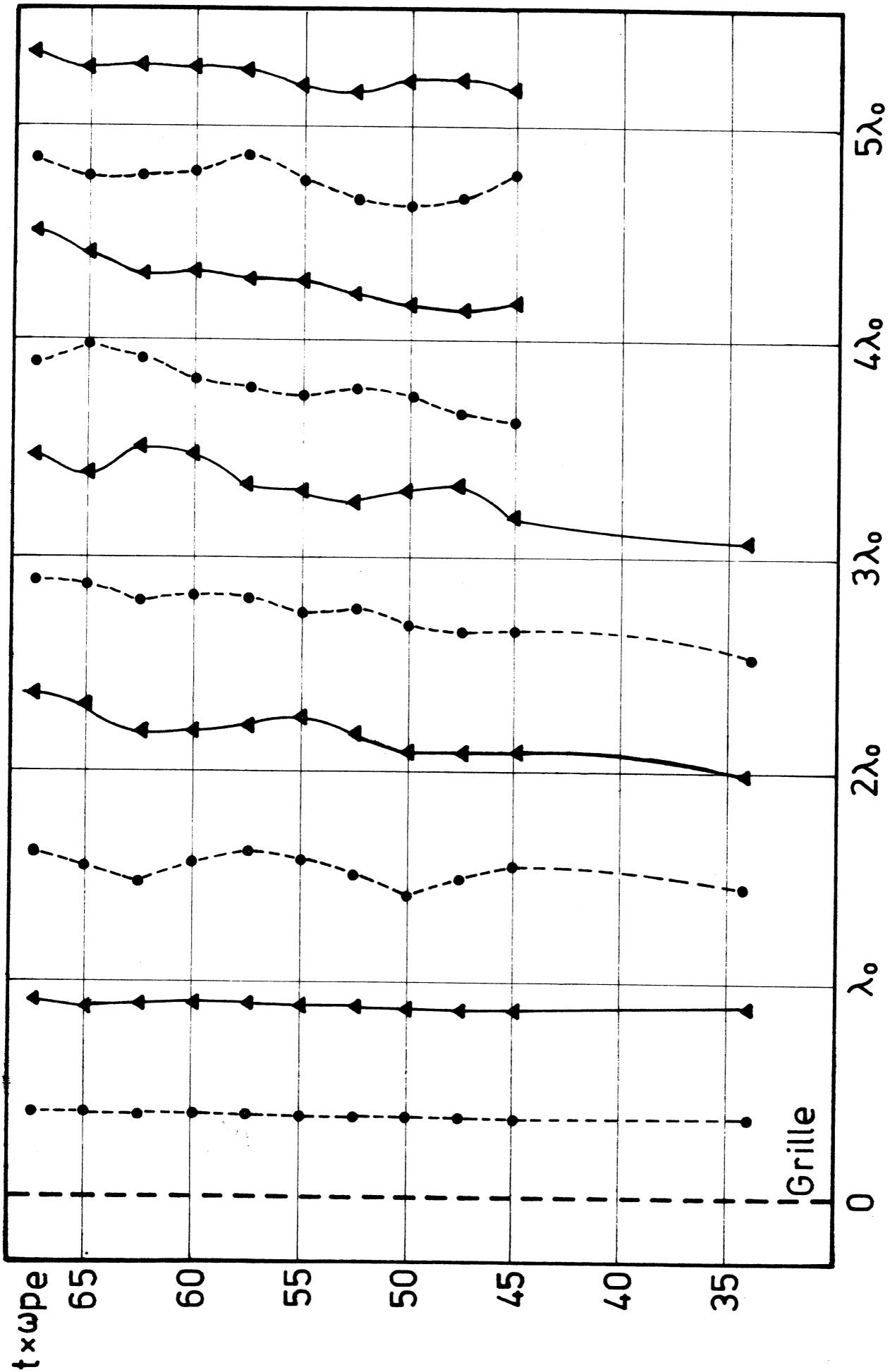


Figure 4.7

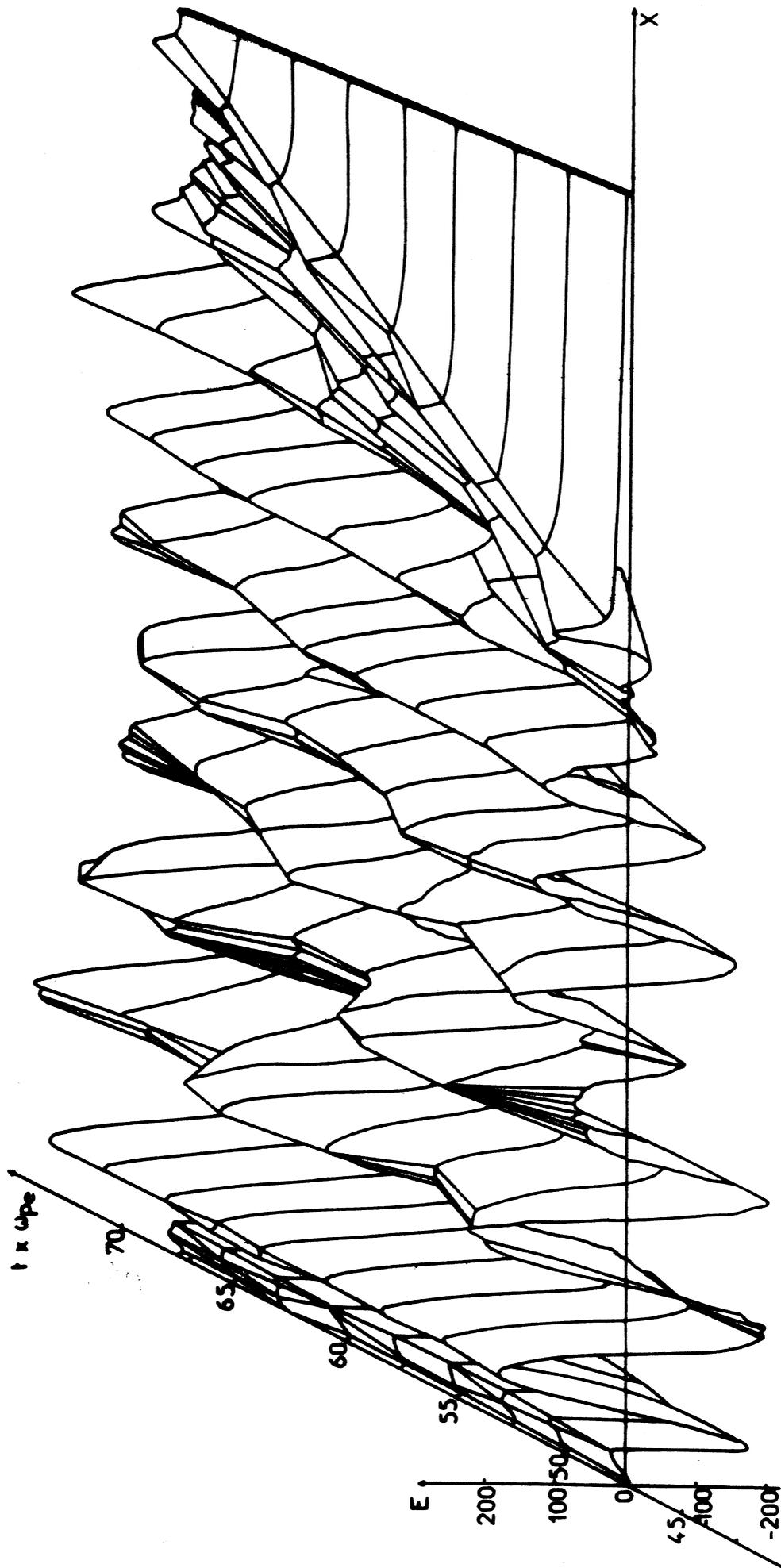


Figure 4.8

4.2.2. - DESCRIPTION DE L'ESPACE DES PHASES

La figure 4.9 représente l'espace des phases à différents instants. Seule la partie en aval de la grille est analysée. Dans cette région, nous discernons deux populations de superélectrons :

- celle des particules passantes qui est la plus peuplée. Elle contient, en effet, la presque totalité des superélectrons. La trajectoire de l'axe de ces superparticules est tracée sur la figure 4.10. Elle subit des accélérations et des décélérations en phase avec le champ électrique.
- celle des particules piégées qui se piègent sur les bords des puits de potentiel (figure 4.9.a) et se dirigent progressivement vers le fond de ces puits (figures 4.9.b et 4.9.c).

La figure 4.10 représente la trajectoire de deux d'entre elles, piégées dans la seconde période où nous estimons leur pulsation de rebond à $0,5 \omega_{pe}$. La figure 4.9 met en évidence l'effet régulateur de la grille sur la première période ; en effet, on remarque que les particules qui y sont piégées sont absorbées par la grille lorsqu'elles arrivent à son niveau.

Le phénomène de piégeage se développe de période en période à partir de la seconde période. Nous constatons que, lorsque les particules piégées sont voisines de la séparatrice, l'amplitude de l'onde est fortement modulée alors que, cette modulation disparaît au fur et à mesure que ces électrons piégés se dirigent vers le fond des puits de potentiel. Cette observation est faite sur la seconde période des figures 4.9 et 4.5. Ceci confirme l'hypothèse de O'Neil qui aboutit au même résultat à l'aide de théories non linéaires tenant compte de l'échange d'énergie entre l'onde et les électrons piégés sur la séparatrice [6], [7].

De nombreuses théories analytiques montrent que les particules piégées au fond des puits de potentiel d'une onde de grande amplitude provoquent la naissance de satellites. Nous avons donc étudié les spectres de l'onde décrite ci-dessus.

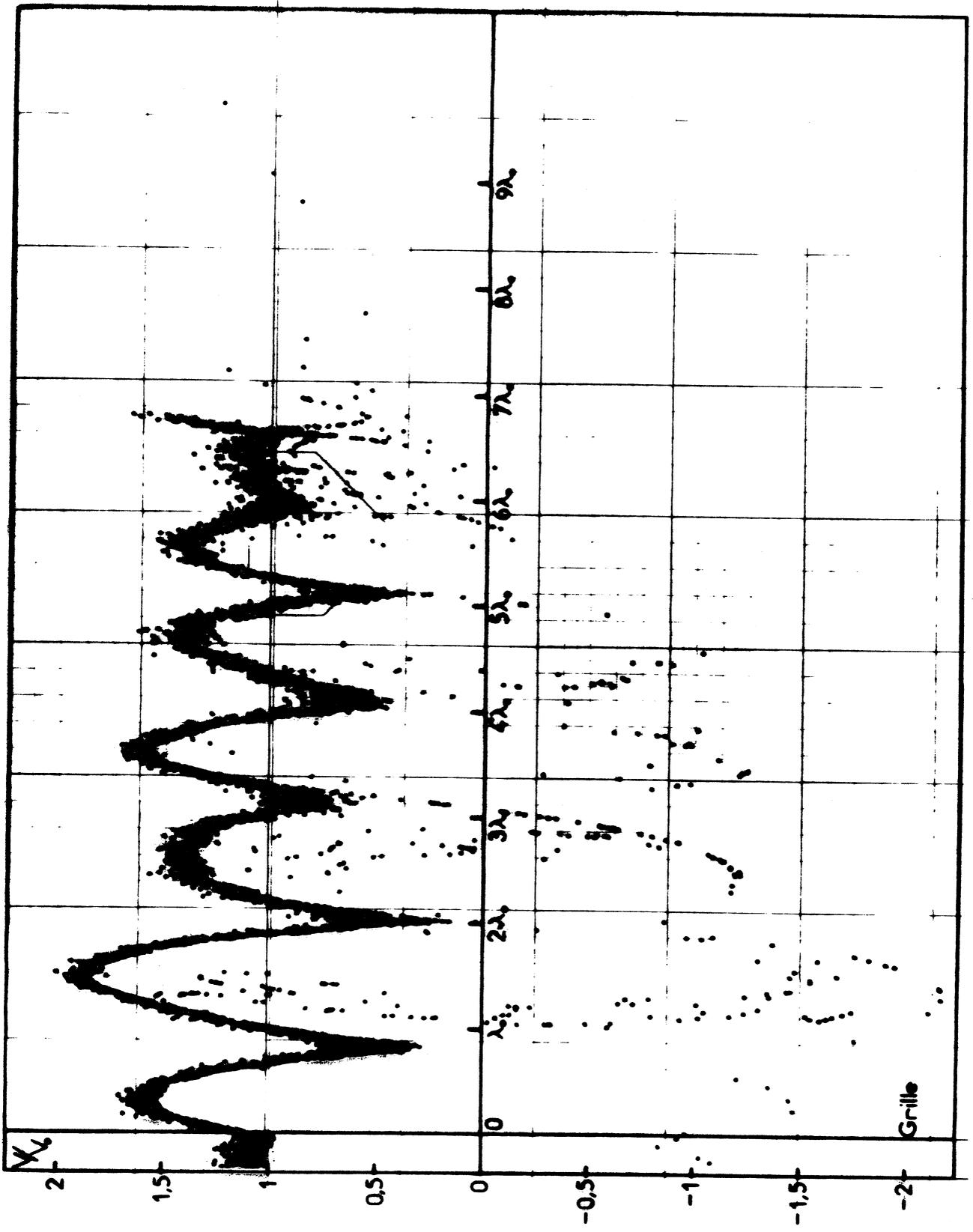


Figure 4.9.a : $t = 47,5 \text{ } \mu\text{pe}^{-1}$

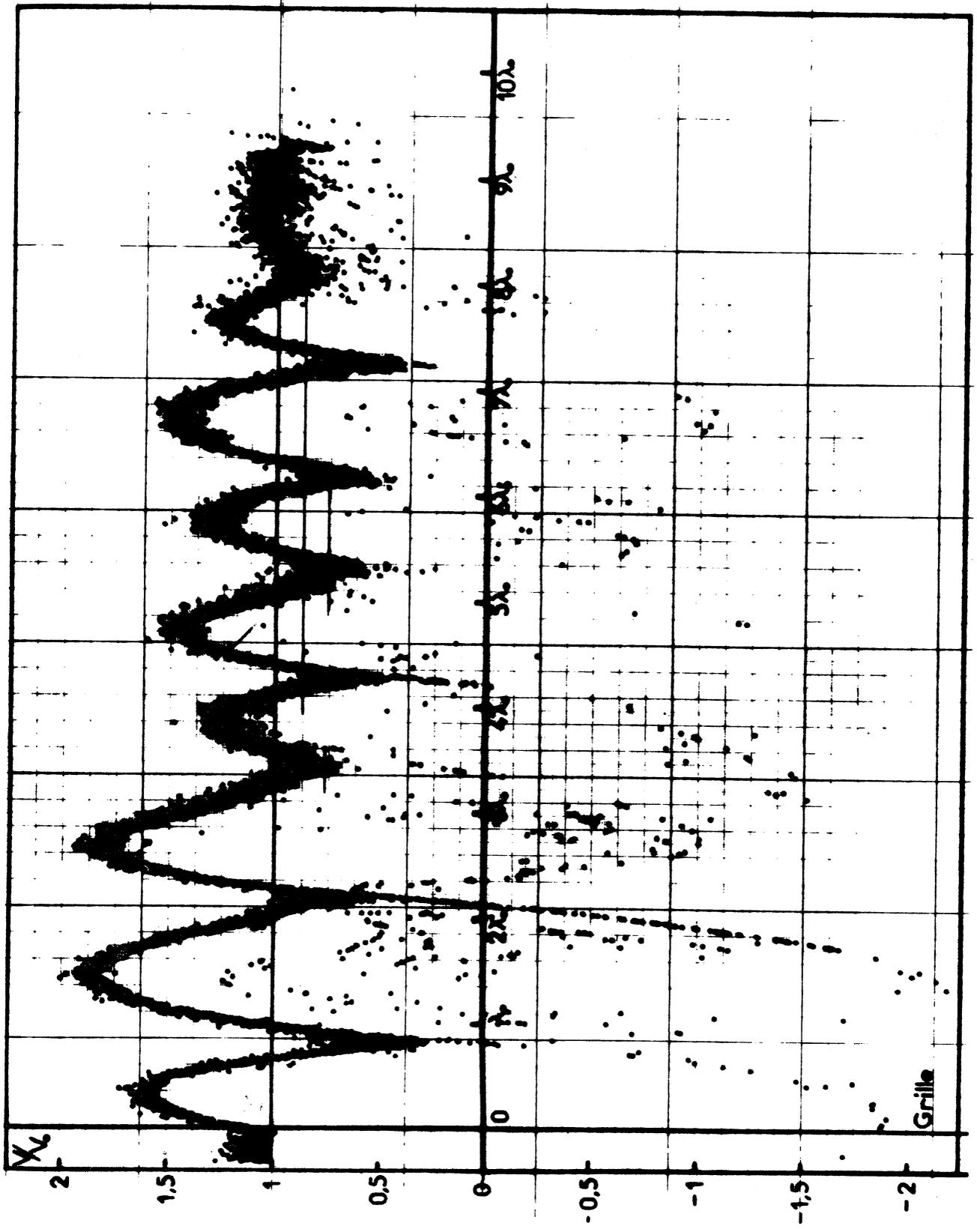


Figure 4.9.b : $t = 62,5 \omega^{-1}$ pe

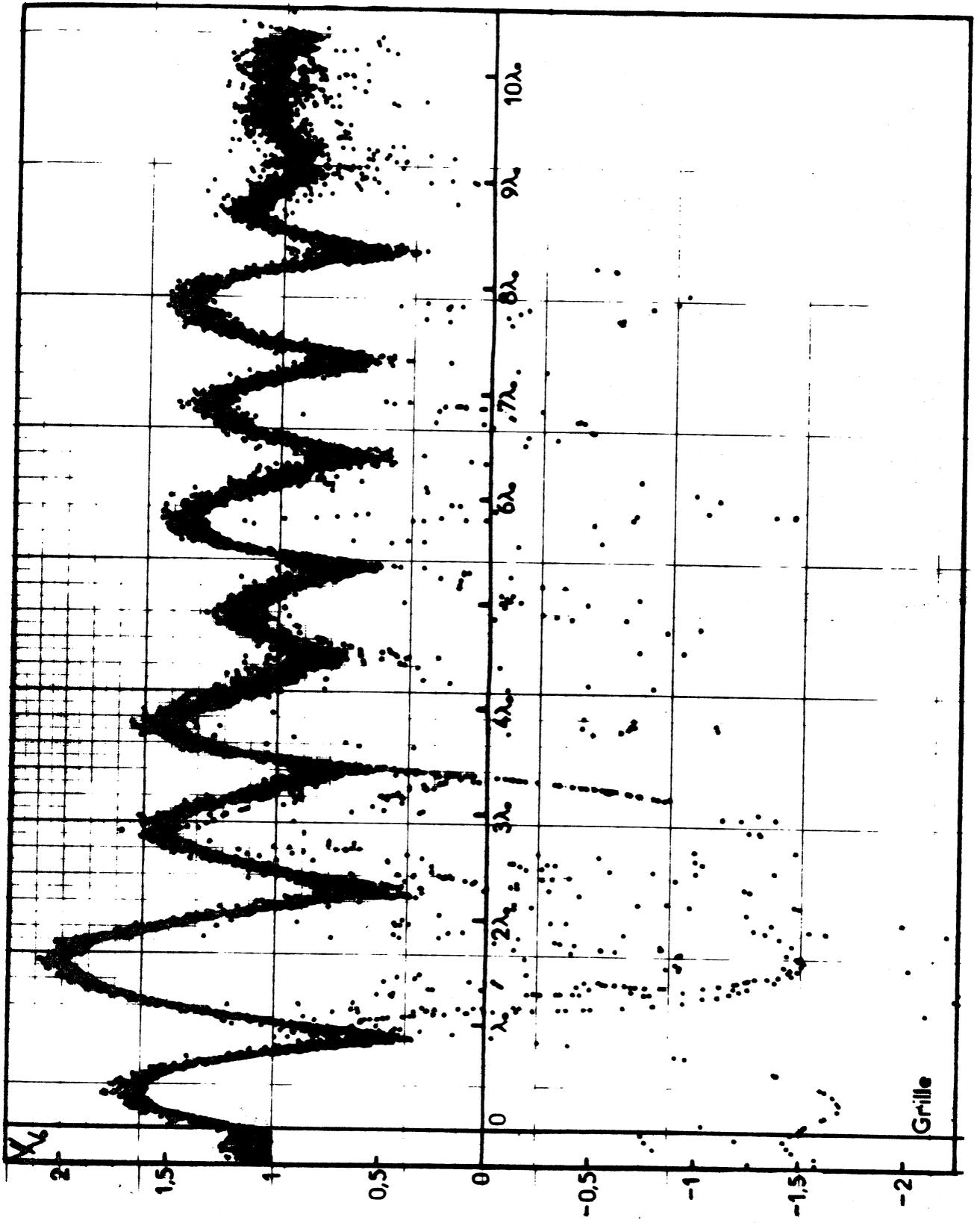


Figure 4.9.c : $t = 67,5 \text{ "pe}^{-1}$

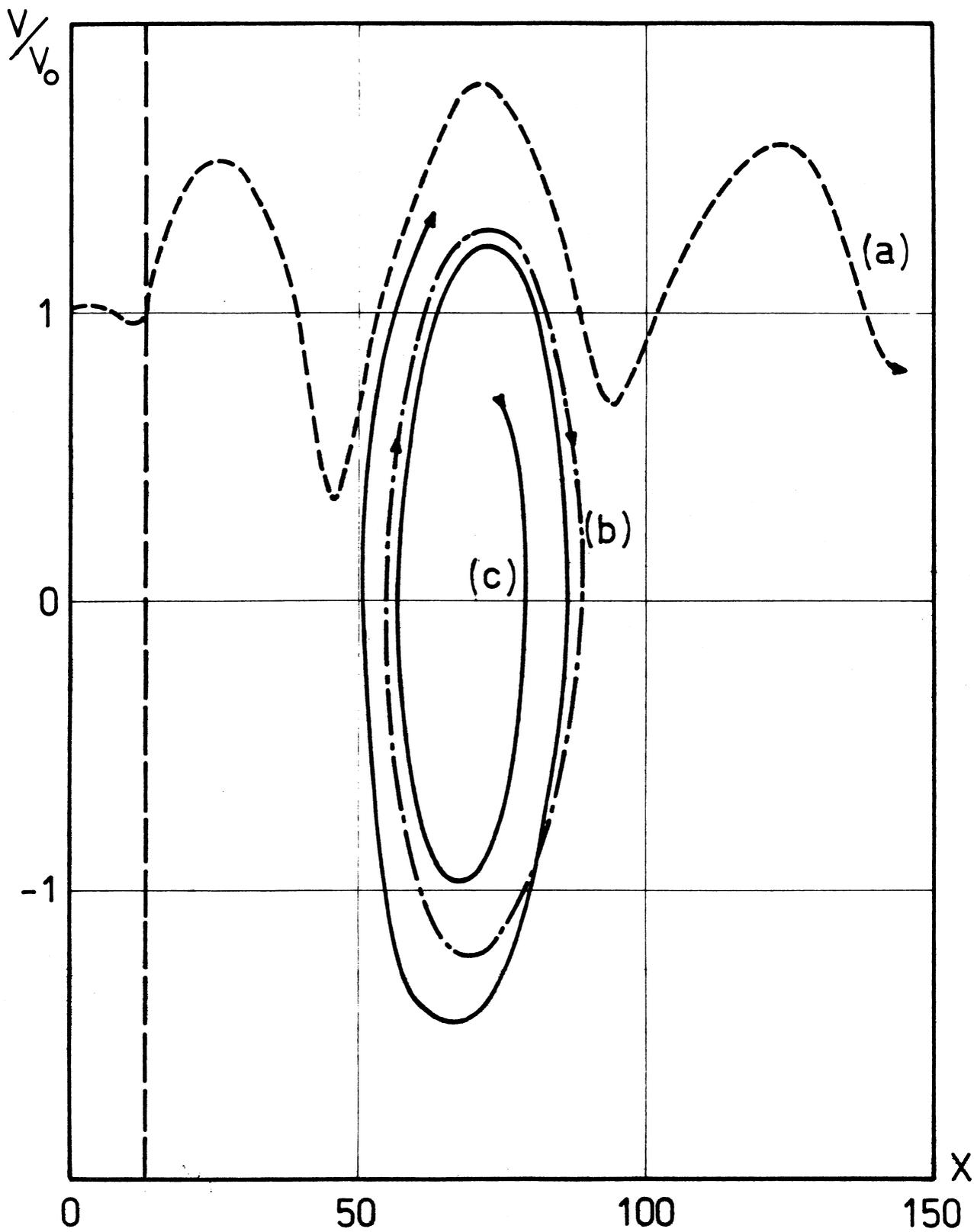


Figure 4.10 : a = particule passante
 b et c = particules piégées

4.2.3. - ETUDE DES SPECTRES DU CHAMP ELECTRIQUE

Les spectres du champ électrique ont été obtenus grâce à un programme de transformation de Fourier rapide [16]. Ici, nous ne présentons qu'une description qualitative des phénomènes, le programme utilisé ne permettant pas d'avoir une bonne résolution.

4.2.3.1. - Etude du spectre en nombre d'onde

Nous avons calculé la transformée de Fourier $C_e(k)$ de la fonction d'auto-corrélation $C_e(x)$ du champ électrique à différents instants. La figure 4.11 représente l'évolution de $C_e(k)$, en unité $\sigma^2/4\epsilon_0^2$, à différents instants.

La mauvaise résolution du spectre nous permet, cependant, d'observer :

- une onde principale de période voisine de λ_0 dont l'amplitude décroît dans le temps,
- des satellites de part et d'autre de l'onde principale se développant dans le temps au fur et à mesure que l'onde principale décroît.

La figure 4.12 représentant l'évolution du module au carré $|E(k)|^2$ de la transformée de Fourier du champ électrique exprimé en unité $\sigma^2/4\epsilon_0^2$, conduit aux mêmes observations.

4.2.3.2. - Etude du spectre en fréquence

La figure 4.13 représente le module au carré $|E(\omega)|^2$ de la transformée de Fourier du champ électrique en unité $\sigma^2/4\epsilon_0^2$, calculée à une distance égale à $1,95 \lambda_0$ de la grille. Les calculs ont été fait entre les instants

$45 \omega_{pe}^{-1}$ et $57,5 \omega_{pe}^{-1}$ (figure 4.13.a) et $55 \omega_{pe}^{-1}$ et $67,5 \omega_{pe}^{-1}$ (figure 4.13.b). Nous observons les phénomènes suivants :

- la figure 4.13.a correspond à un intervalle de temps pendant lequel les électrons piégés dans la seconde période de l'onde restent au voisinage de la séparatrice. Le spectre en fréquence ne présente qu'un pic centré sur la fréquence nulle.
- la figure 4.13.b correspond à un intervalle de temps où les électrons piégés dans la seconde période de l'onde se sont dirigés vers le fond du puits de potentiel. L'étude du spectre en fréquence montre que :

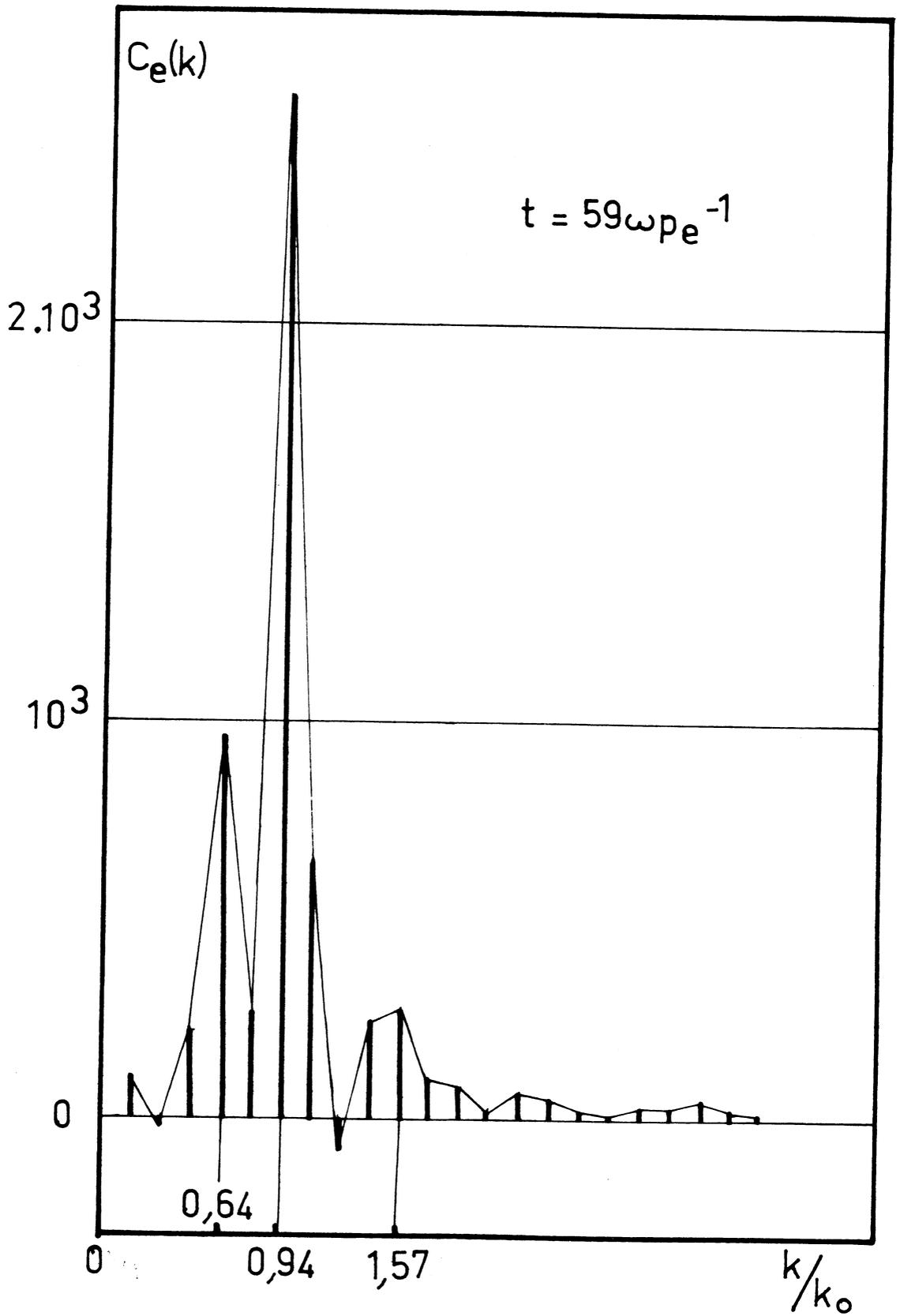


Figure 4.11. a

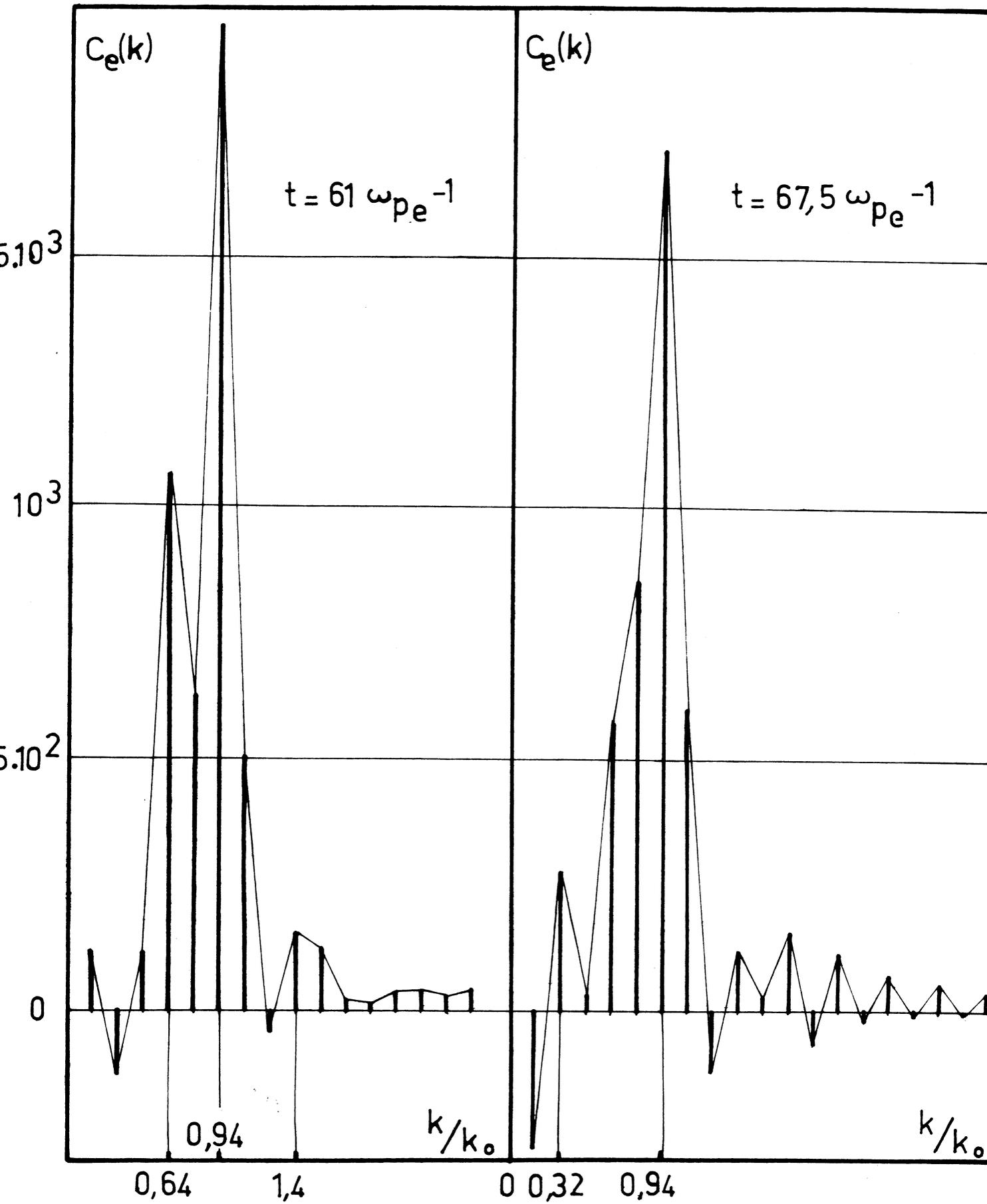


Figure 4.11.b

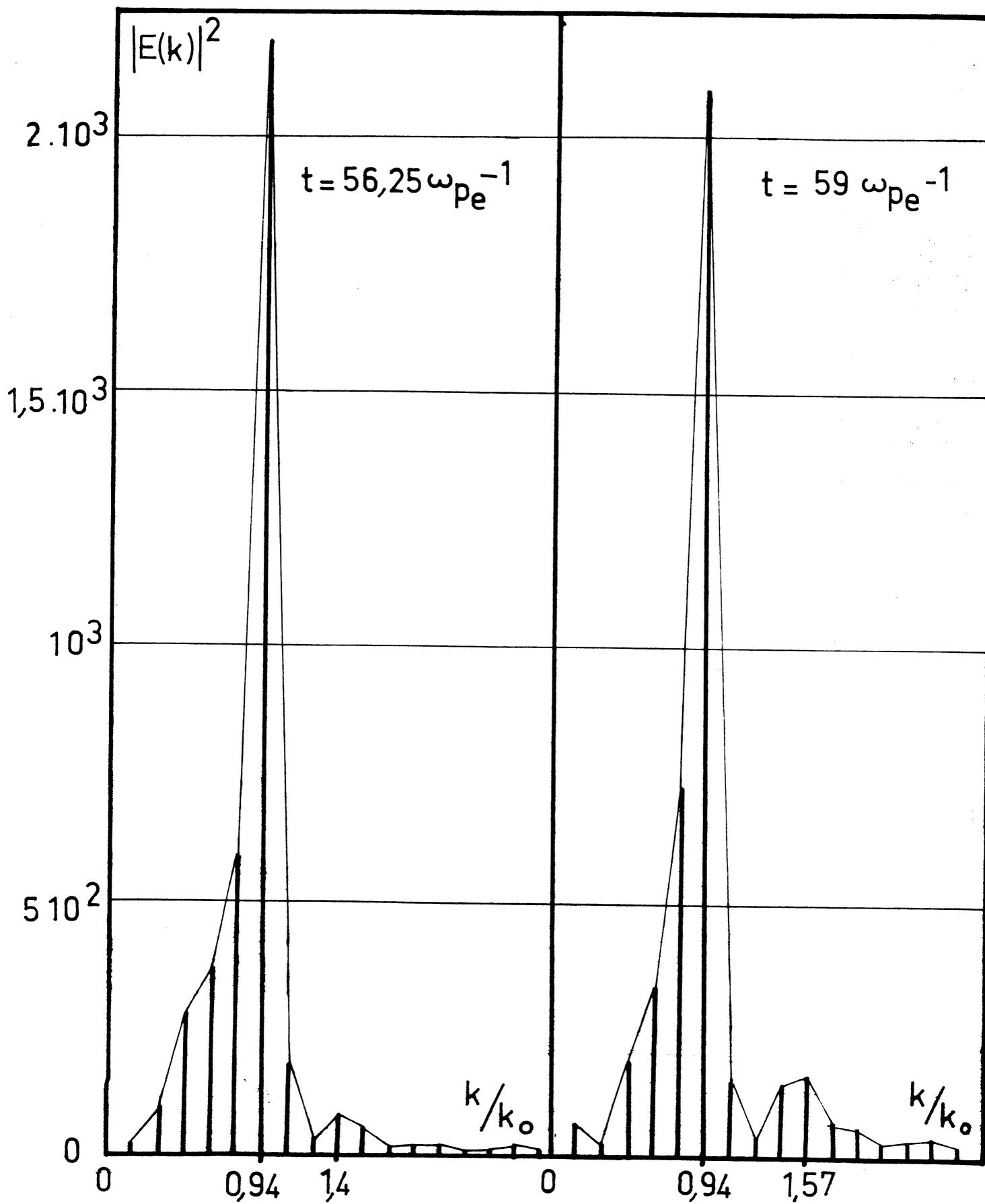


Figure 4.12.a

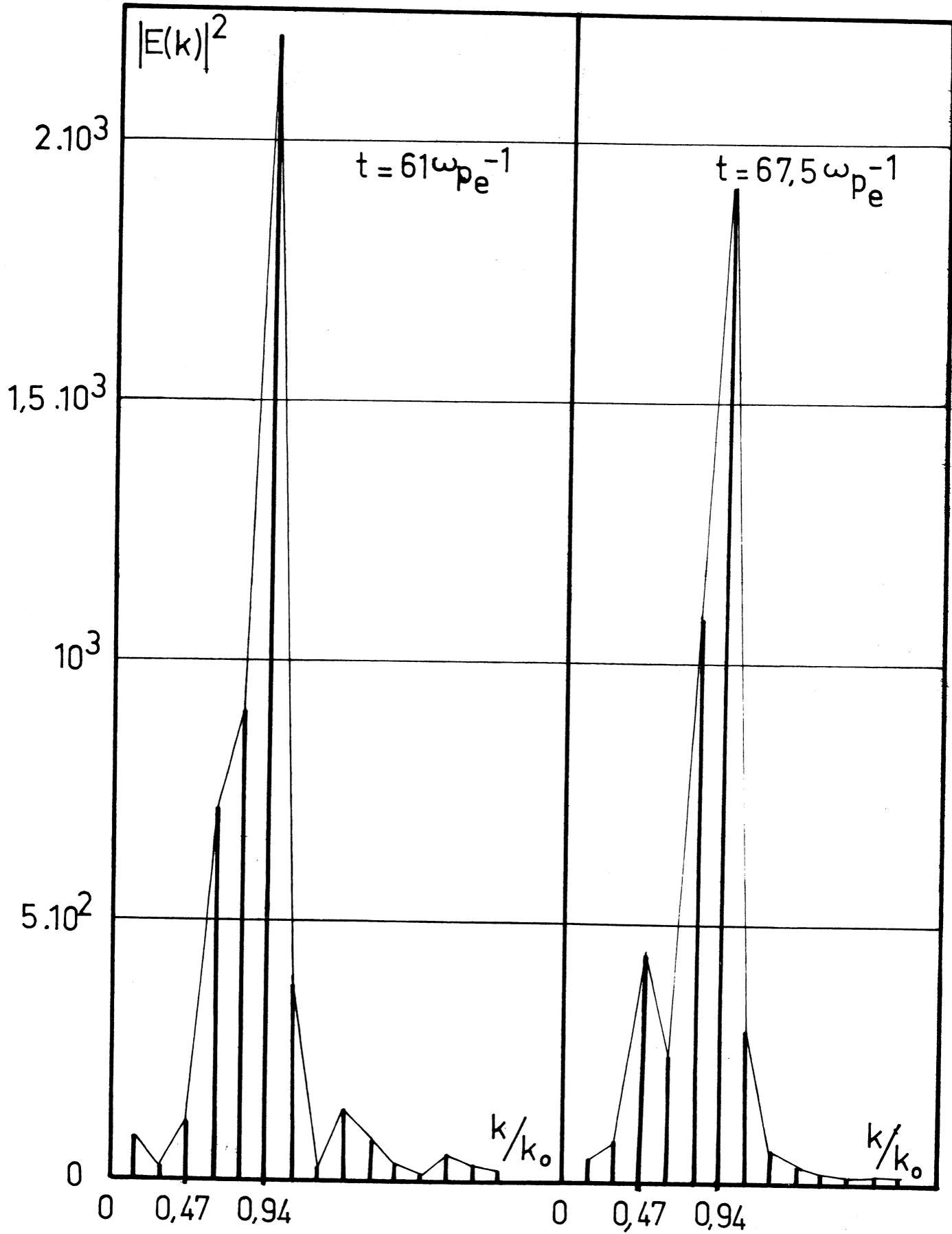


Figure 4.12.b

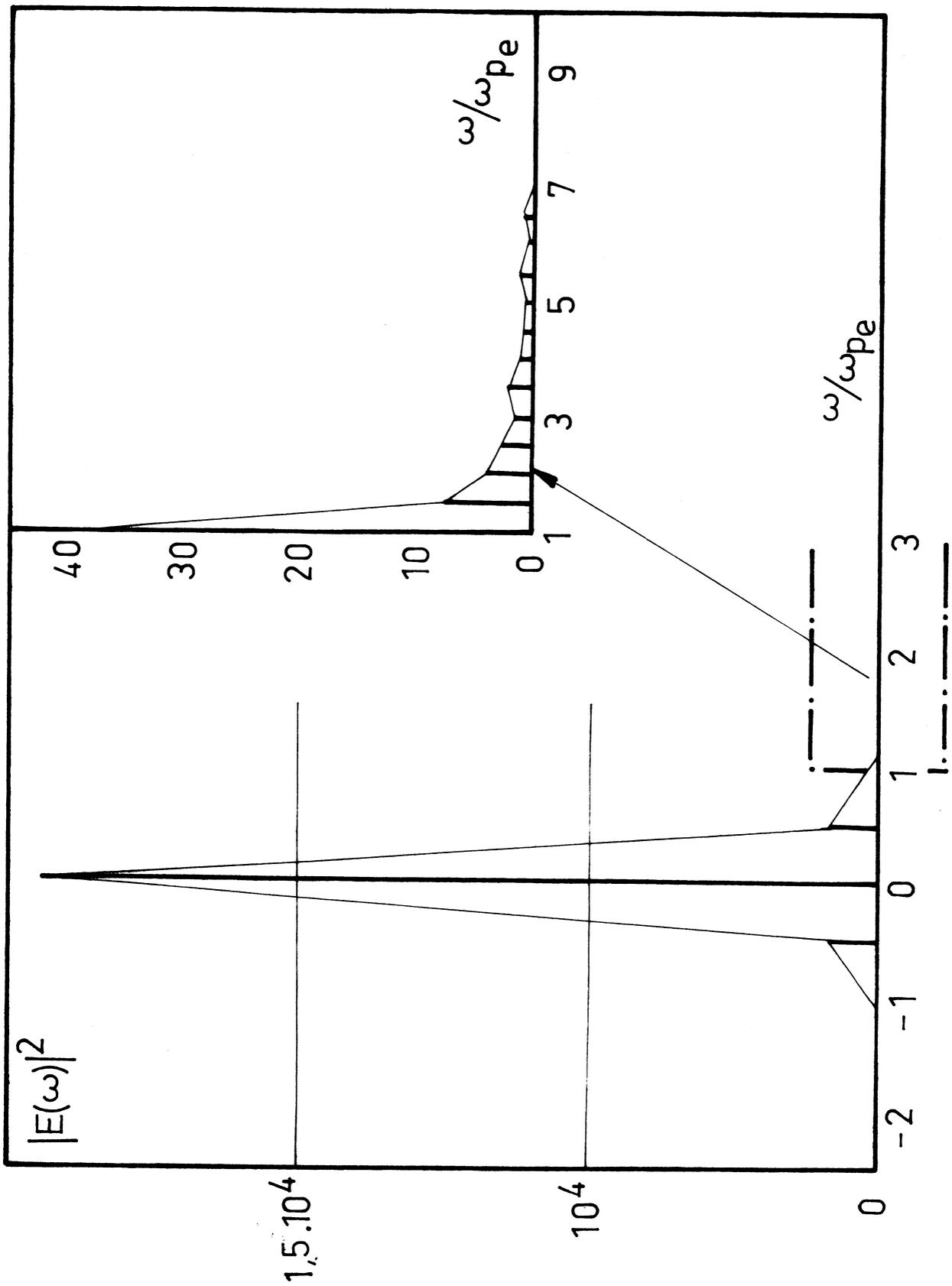


Figure 4.13.a : $\bar{t} = 51,2 \text{ } \omega_{pe}^{-1}$
 $\Delta t = 12,5 \text{ } \omega_{pe}^{-1}$

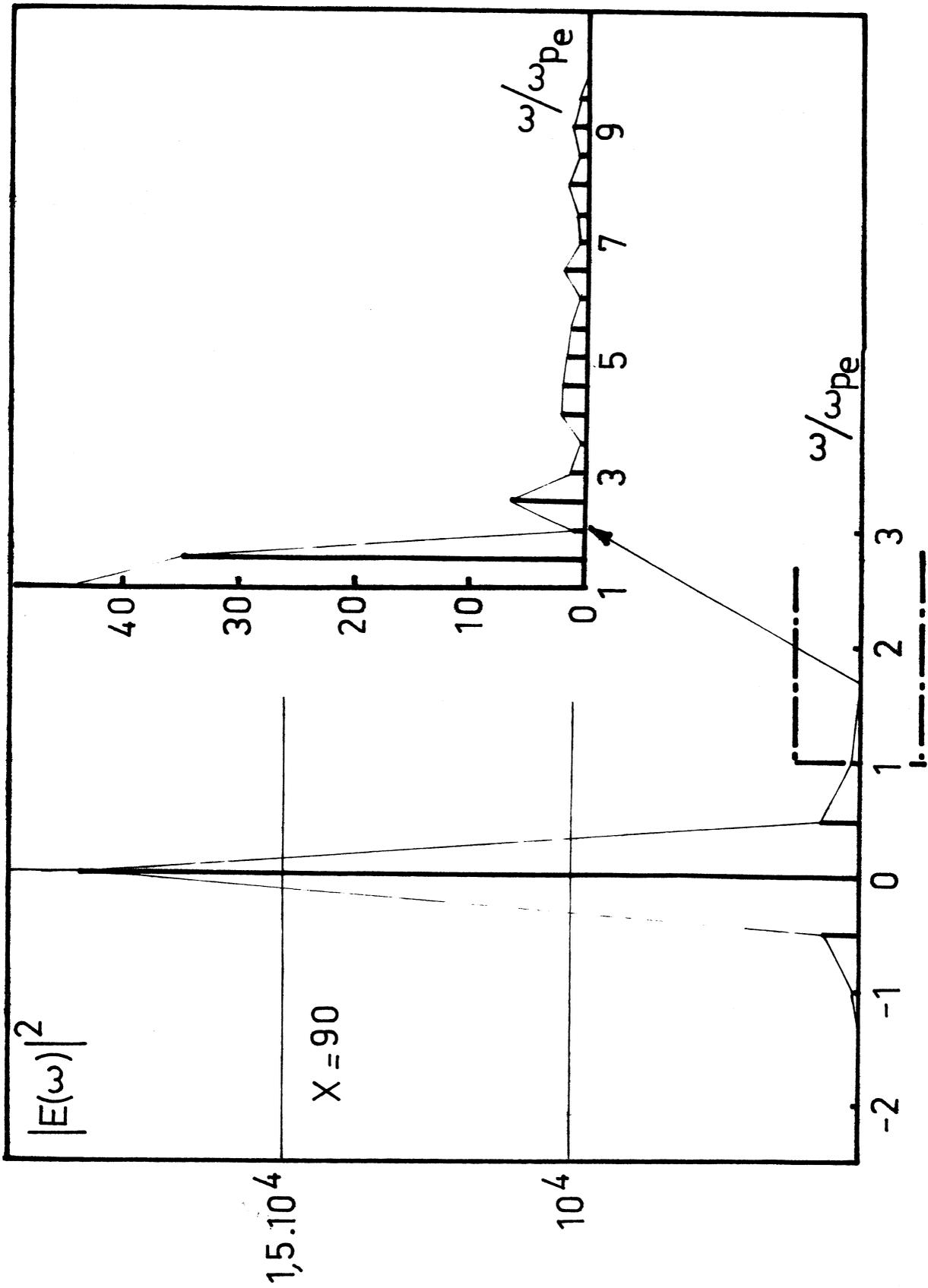


Figure 4.13.b : $\bar{t} = 66,2$ pe
 $\hat{t} = 12,5$ pe

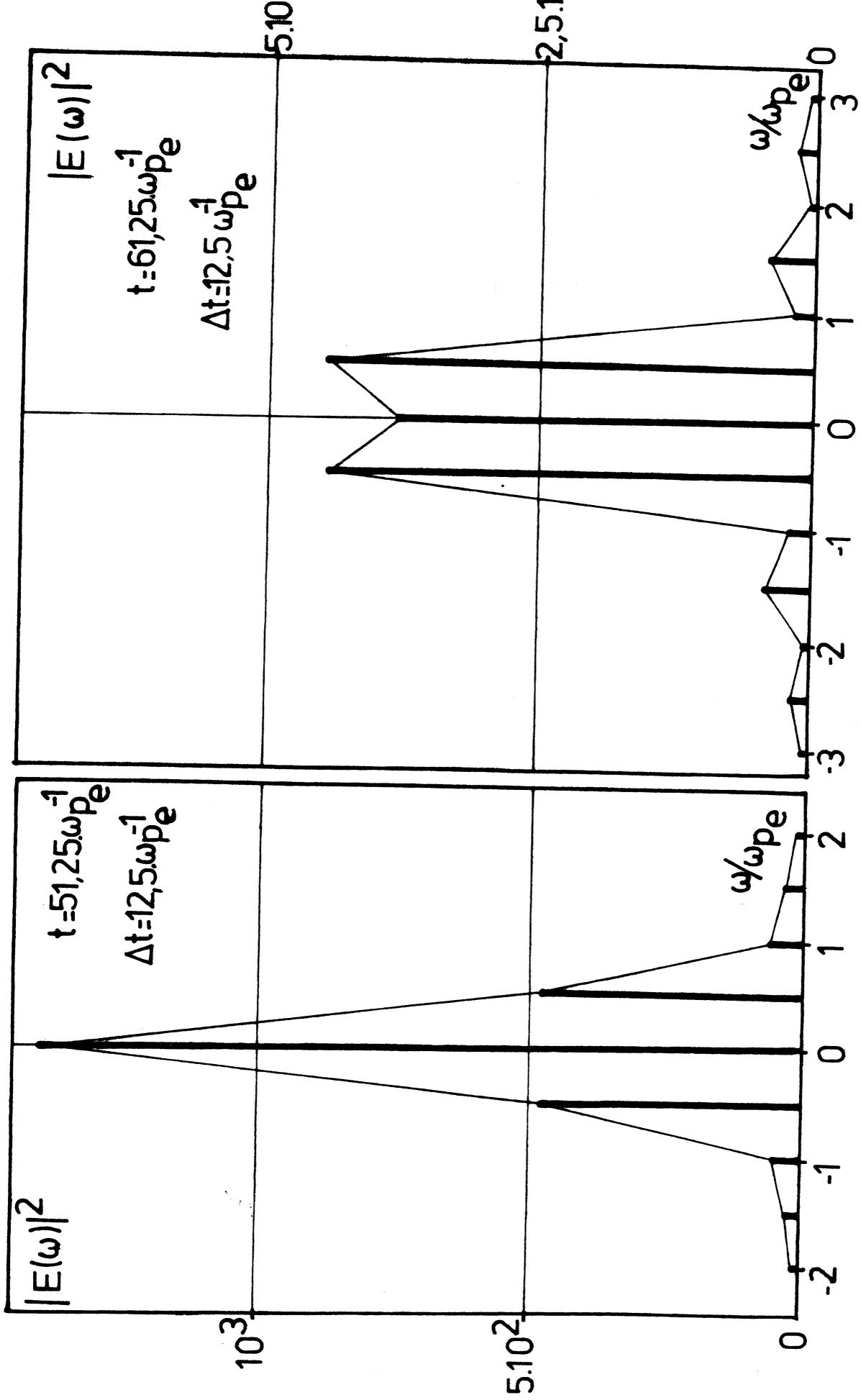


Figure 4.14

- * le pic centré sur la fréquence nulle est d'amplitude plus faible que précédemment,
- * l'amplitude des ondes de fréquence voisine de $0,5 \omega_{pe}$ croît en fonction du temps, ainsi que celle de leurs harmoniques ; il apparaît notamment un pic à la pulsation $2,5 \omega_{pe}$.

La même étude a été faite au point pris dans la troisième période à une distance égale à $2,25 \lambda_0$, sur les mêmes intervalles de temps que précédemment. La figure 4.14 confirme les hypothèses précédentes. En effet, l'amplitude de l'onde de pulsation $0,5 \omega_{pe}$ devient plus grande que celle de l'onde principale et nous constatons le développement de ses harmoniques.

L'étude des spectres de l'onde de grande amplitude met en évidence les phénomènes suivants :

- un amortissement de l'onde principale, de longueur d'onde λ_0 , dans le temps alors que simultanément, des satellites se développent.
- un développement de satellites sur la seconde période de l'onde lorsque les particules piégées s'éloignent de la séparatrice pour se diriger vers le fond du puits de potentiel, la fréquence du satellite observé semblant être du même ordre de grandeur que la pulsation de rebond des superélectrons piégés.

L'étude des phénomènes que nous venons de décrire est essentiellement qualitative. En plus, le fait que la résolution en fréquence soit du même ordre de grandeur que la pulsation de rebond des superélectrons dans le puits de potentiel nous conduit à rester très prudent sur les conclusions émises.

Conclusion

La simulation réalisée à l'aide du code CIC met en évidence de nombreux phénomènes consécutifs à l'excitation d'une onde de grande amplitude par une grille chargée transverse à un écoulement hypersonique de plasma. Nous résumons ces phénomènes ainsi :

- en aval de la grille se développe une onde de grande amplitude, quasi périodique, amortie et stationnaire dans le repère du laboratoire, dans laquelle

se piègent des électrons.

- d'abord les électrons se piègent sur les bords des puits de potentiel alors que l'amplitude de l'onde est modulée spatialement. Ceci confirme les résultats de O'Neil.
- ensuite les particules piégées se dirigent vers le fond des puits de potentiel et la modulation de l'amplitude de l'onde disparaît. Elle est remplacée par un phénomène d'amortissement temporel et de croissance d'ondes satellites progressives et de fréquences voisines de la pulsation de rebond des particules piégées.

Ayant saturé le bloc mémoire de l'ordinateur, nous n'avons pas pu sortir de l'état transitoire, si bien qu'aucun champ fluctuant n'a été étudié.

- C O N C L U S I O N -

En vue de l'étude par simulation numérique lagrangienne des phénomènes consécutifs à l'excitation par une grille chargée, dans un faisceau de plasma hypersonique, d'une onde de grande amplitude, nous avons comparé deux codes :

- le premier utilisant les particules de Dawson, donne une description fine du mouvement des superélectrons.
- le second est le modèle CIC à une dimension.

Cette comparaison nous a montré :

- qu'à paramètres égaux, le modèle CIC donne une description acceptable de ce phénomène comparée à celle obtenue avec le modèle à particules de Dawson. Le temps de calcul sur ordinateur nécessaire au premier étant de fort loin le plus faible, c'est lui que nous avons choisi pour notre étude.
- que la portée infinie de l'action des superparticules provoque l'oscillation des superélectrons dans le front des ions, à la fréquence plasma ω_{pe} , ce qui est physiquement inacceptable. Dans ces conditions, il serait bon de mettre au point des modèles de simulation ayant des lois de force à portée finie, afin de supprimer ces effets de front dans les simulations des phénomènes semi-infinis.

La simulation réalisée à l'aide du code CIC nous montre que l'état transitoire se décompose en deux phases caractéristiques :

- la première consiste en la naissance d'une onde de grande amplitude, dans laquelle se piègent des électrons. Ces derniers se déplacent au bord des puits de potentiel et provoquent une modulation de l'amplitude de l'onde du même type que celle observée par O'Neil. Une étude des spectres du champ électrique montre que nous n'avons qu'une onde de grande amplitude stationnaire et quasi-périodique voisine à $\lambda_0 = 2\pi v_0/\omega_{pe}$.

- la seconde voit les électrons piégés se diriger vers le fond des puits de potentiel. La modulation de l'onde disparaît alors.

Une étude des spectres du champ électrique montre que :

- le spectre en longueur d'onde s'étale autour de la valeur λ_0 , l'amplitude de l'onde étant une fonction décroissante du temps.
- sur le spectre en fréquence, se développe des satellites à des fréquences comparables aux fréquences de rebond des électrons piégés.

Dans notre simulation, nous n'avons pas atteint d'état stationnaire ; ceci prouve que l'état transitoire est long.

- B I B L I O G R A P H I E -

- [1] J.B. BERNSTEIN, J.M. GREENE, A.D. KRUSKAL
Physical Review Letters, 108, 546 (1957)
- [2] C.B. WHARTON, J.H. MALMBERG, T.M. O'NEIL
Physics of Fluids, 11, 1761 (1968)
- [3] W.L. KRUER, J.M. DAWSON, R.N. SUDAN
Physical Review Letters, 23, 838 (1969)
- [4] M.V. GOLDMAN
Physics of Fluids, 13, 1281 (1970)
- [5] W.L. KRUER, J.M. DAWSON
Physics of Fluids, 13, 2747 (1970)
- [6] G.J. MORALES, T.M. O'NEIL
Physical Review Letters, 28, 417 (1972)
- [7] V.L. BAILEY, J. DENAVIT
Physics of Fluids, 13, 451 (1970)
- [8] H. PERES
Thèse de 3ème cycle ; Université de Grenoble (1975)
"Gaine sur un obstacle plan perpendiculaire à un plasma
hypersonique non collisionnel"
- [9] P. CHENEVIER, J.M. DOLIQUE, H. PERES
Journal of Plasma Physics, 10, 185 (1973)

- [10] J.M. DAWSON, C.G. HSI, R.N. SHANNY
Conference on Numerical Simulation of Plasma of the
American Physical Society
Las Alamas - New Mexico (1968)
- [11] Y. DUCLOUX
Rapport D.E.A. (1972)
"Application de code de Dawson à la simulation de l'excitation
d'une onde de grande amplitude dans un faisceau de plasma
hypersonique"
- [12] C.K. BIRDSALL, D. FUSS
Journal of Computational Physics, 3, 494 (1969)
- [13] R.W. HOCKNEY
Physics of Fluids, 9, 1826 (1966)
- [14] H. OKUDA
Journal of Computational Physics, 10, 475 (1972)
- [15] A.B. LANGDON
Journal of Computational Physics, 6, 247 (1970)
- [16] D. EBERHARD
Thèse Docteur Ingénieur ; Université de Grenoble (1970)
"Algorithme de l'analyse harmonique numérique"
- [17] C. POMOT
Thèse Docteur ès Sciences Physiques ; Université de Grenoble (1972)
"Mécanisme de la synthèse d'un plasma par neutralisation d'un
faisceau d'ions supersonique à l'aide de thermo-électrons"
- [18] T. O'NEIL
Physics of Fluids, 8, 2255 (1965)

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 11 Octobre 1976

Le Président de la thèse
J.M. DOLIQUE



Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale

