

L'interféromètre Virgo :propriétés optiques, stabilisation en fréquence du laser

François Bondu

▶ **To cite this version:**

François Bondu. L'interféromètre Virgo :propriétés optiques, stabilisation en fréquence du laser. Astrophysique [astro-ph]. Université Nice Sophia Antipolis, 2008. tel-00284986v2

HAL Id: tel-00284986

https://theses.hal.science/tel-00284986v2

Submitted on 9 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Observatoire de la Côte d'Azur

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité Physique

présenté par

François BONDU

sujet :

L'interféromètre Virgo : propriétés optiques, stabilisation en fréquence du laser

Habilitation soutenue le 6 juin 2008 devant la Commission d'examen

MM.	Ch.	BLONDEL	Rapporteur
	A.	BRILLET	
	J.	COLAS	
	A.	FREISE	Membre invité
	A.	HEIDMANN	Rapporteur
	G.L.	LIPPI	Rapporteur
	Ch.	SALOMON	Président

Table des matières

1 Mesure des ondes gravitationnelles **3**

1.1 Les ondes gravitationnelles 3

1.2 Principes de détection des ondes gravitationnelles 4

1.2.1 Détection avec une horloge locale et des photons 4

1.2.2 Détection avec deux trajets orthogonaux de photons 5

1.3 Réalisation du principe de détection 5

1.3.1 Coordonnées spatiales 5

1.3.2 Horloges et source de photons 6

1.3.3 Stabilité de fréquence et interféromètre de Michelson 7

1.3.4 Les instruments 8

1.3.5 Autres systèmes de détection 10

2 Contributions de ce mémoire **11**

I Propriétés optiques **13**

3 Modélisation d'une cavité Fabry-Perot **15**

3.1 Localisation géométrique du mode résonnant 16

3.2 Modèle spectral 17

3.2.1 Rappels sur les matrices de diffusion 17

3.2.2 Revêtements réfléchissants et miroirs 19

3.2.3 Propriétés d'une cavité Fabry-Perot 20

3.2.4 Signal d'erreur pour une fréquence balayée 22

3.2.5 Fonction de transfert . . . 23
3.3 Modèle modal . . . 26
3.3.1 Filtrage modal . . . 27
3.3.2 Fonction de transfert . . . 27
3.3.3 Méthode alternative de création de signal d'erreur . . . 28
3.4 Cavité avec des miroirs non idéaux . . . 28
3.4.1 Rugosité . . . 28
3.4.2 Défaut local . . . 29
3.4.3 Effet de diaphragme . . . 29
3.4.4 Biréfringence . . . 29
3.4.5 Pertes par aberration modale . . . 30
3.4.6 Stabilité . . . 30
3.4.7 Modèles informatiques . . . 32
3.4.8 Perspectives sur les cavités non idéales . . . 33
3.5 Réponse d'une cavité Fabry-Perot . . . 34
3.5.1 Bruit de fréquence . . . 34
3.5.2 Déplacement d'un miroir . . . 34
3.5.3 Onde gravitationnelle . . . 38
3.5.4 Régimes transitoires . . . 41
3.6 Bruits limitant la résolution d'une cavité . . . 41
3.6.1 Bruit des fluctuations de pression des gaz . . . 41
3.6.2 Bruit sismique . . . 42
3.6.3 Bruits de contrôle . . . 42
3.6.4 Effets Doppler et Sagnac . . . 42
3.6.5 Bruit de déformation pour les cavités rigides . . . 43
3.6.6 Bruit de dérive . . . 43
3.6.7 Bruit thermique . . . 43
3.6.8 Bruit de photons . . . 45
3.6.9 Bruit de puissance . . . 46
3.6.10 Modulation d'amplitude parasite . . . 49
3.6.11 Lumière diffusée . . . 49

3.6.12 Bruit de charges . . . 50
3.6.13 Bruits par couplages . . . 50
3.6.14 Instabilités paramétriques . . . 51
3.6.15 Cavités résonnantes parasites . . . 51
3.6.16 Perspectives sur les sources de bruits . . . 52

4 Remarques sur les systèmes optiques composés **53**
4.1 Cavité avec effet étalon dans le miroir d'entrée . . . 53
4.2 Cavité couplée - pôle . . . 54

5 Note et publications sur la caractérisation de cavités **57**
5.1 Characterization of the LIGO 4 km FP cavities . . . 58
5.2 Measurement of the Virgo optical parameters . . . 64
5.3 Effective losses in Virgo FP cavities . . . 83

II Stabilisation en fréquence du laser **93**

6 Stabilisation de fréquence : peformances **95**
6.1 Introduction . . . 95
6.2 Le projet . . . 99
6.3 Faisabilité . . . 100
6.3.1 Nécessité de deux boucles d'asservissement différentes . . . 100
6.3.2 Pré-stabilisation . . . 100
6.3.3 Architectures . . . 101
6.4 Conception et spécifications . . . 102
6.4.1 Deuxième étage de stabilisation . . . 102
6.4.2 Boucles multiples imbriquées . . . 102
6.4.3 Architecture . . . 103
6.4.4 Verrouillage de la cavité rigide - filtres de Coulon . . . 105
6.5 Réalisation . . . 106
6.5.1 Acquisition du verrouillage . . . 106
6.5.2 Électronique analogique . . . 107

6.5.3 Effet Doppler dans la cavité de filtrage de mode . . . 107
6.5.4 Asymétrie . . . 107
6.6 Performances . . . 108
6.6.1 Signal d'écart du deuxième étage de stabilisation de fréquence . . 108
6.6.2 Écart de l'étage de pré-stabilisation . . . 113
6.7 Perspectives . . . 115
6.7.1 Symétrisation . . . 115
6.7.2 Isolation par commande par anticipation . . . 116
6.7.3 Stabilisation de fréquence sans cavité de filtrage de mode . . . 116

7 Compléments sur les asservissements **117**
7.1 Remarques sur les fonctions de transfert . . . 117
7.2 Critères de stabilité . . . 117
7.3 Compléments sur les filtres de Coulon . . . 119
7.4 Compensation désaccordée . . . 122

8 Compléments sur la stabilisation de fréquence **127**
8.1 Équations avec effet Doppler . . . 127
8.2 Modèle temps réel . . . 132
8.3 Modèles des éléments des boucles . . . 134
8.3.1 Cavités . . . 134
8.3.2 Actionneurs . . . 135
8.3.3 Filtres correcteurs . . . 136
8.4 Mesure des Fonctions de transfert en boucle ouverte . . . 138
8.4.1 Pré-stabilisation . . . 139
8.4.2 Deuxième étage de stabilisation en fréquence . . . 139
8.4.3 Verrouillage de la cavité de filtrage de mode . . . 140
8.5 Étalonnage des signaux . . . 141
8.5.1 Correction de la fréquence du laser . . . 141
8.5.2 Signal d'erreur de la cavité de référence . . . 142
8.5.3 Signal de correction du verrouillage de la cavité de filtrage de mode 142

8.5.4 Signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode en entrée 142
8.5.5 Signal de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence 143
8.5.6 Signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation 143
8.5.7 Signal de correction du mouvement des miroirs des grandes cavités 144
8.6 Asymétrie 144
8.6.1 Modélisation 146
8.6.2 Mesure 147
8.6.3 Contrôle de l'asymétrie à basse fréquence 148
8.6.4 Verrouillage de la cavité rigide et commande par anticipation . . . 149
8.7 Spécification 150

9 Notes techniques sur la stabilisation de fréquence 153
9.1 Advanced digital filters (1) 154
9.2 Comparison of two topologies 160
9.3 Design of the second stage of frequency stabilization 178
9.4 Advanced digital filters (2) 198
9.5 Multiple servo loops 205
9.6 Laser frequency stabilization topology 216
9.7 Frequency stabilization cabling layout 238
9.8 Doppler effect in mode cleaner cavity 245
9.9 Specifications of electronics 253
9.10 state-variable method for analog filters 257

Conclusions et perspectives 267

Bibliographie 278

Introduction

Chapitre 1

Mesure des ondes gravitationnelles

Je rappelle dans ce chapitre qu'une technique de mesure d'une onde gravitationnelle consiste en l'évaluation des variations de temps d'aller-retour de la lumière entre deux points de coordonnées spatiales fixes. Je montre comment une cavité optique résonnante à miroirs suspendus permettrait cette mesure si l'on pouvait s'affranchir du bruit de fréquence du laser qui l'interroge. Je rappelle le principe de fonctionnement d'un interféromètre de Michelson avec cavités Fabry-Perot dans les bras : ce montage semble le plus prometteur pour la détection puis l'observation de signaux astrophysiques nombreux.

Cette introduction me permet de préciser ma contribution dans le chapitre suivant : la réalisation de l'horloge qui mesure les variations de temps d'aller-retour.

1.1 Les ondes gravitationnelles

La théorie de la relativité générale d'A. Einstein, théorie géométrique de la gravitation, prédit des ondes gravitationnelles. Celles-ci sont des perturbations de la métrique de l'espace-temps [1]. La métrique est une description de la mesure d'un élément local infinitésimal d'espace-temps. Son utilisation permet de prévoir la trajectoire de photons ou encore le résultat de mesures de comparaison de règles et d'horloges. Notons que d'autres théories que la relativité générale pourraient produire des perturbations de la métrique de l'espace-temps.

L'onde émise par une source astrophysique, lorsqu'elle atteint la terre, est une onde plane. Si l'on pose z comme étant l'axe du vecteur d'onde, l'élément infinitésimal d'espace-temps ds s'écrit, dans une jauge appelée transverse sans trace [1],

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - (1 + h_+(t))\,\mathrm{d}x^2 - (1 - h_+(t))\,\mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + 2\,h_\mathrm{x}(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (1.1)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. L'onde gravitationnelle est sans dimension, a deux polarisations h_+ et h_x et est de nature tensorielle.

Un événement violent dans l'univers, mettant en jeu des masses égales ou supérieures à la masse du soleil avec une vitesse d'une fraction de la vitesse de la lumière, situé à plusieurs dizaines d'années-lumière, perturbe l'espace-temps pour produire une amplitude détectable $h \sim 10^{-22}$ lorsqu'elle atteint la terre. Cet événement peut être un effondrement asymétrique d'étoile, la phase spiralante avant coalescence de deux étoiles à neutrons, la rotation asymétrique d'une étoile à neutrons, ou encore un reliquat du big-bang, une vibration de corde cosmique, etc. Le document [2] effectue une revue des sources, des taux d'événements et des amplitudes attendues.

1.2 Principes de détection des ondes gravitationnelles

Nous considérons ici les éléments principaux pour concevoir un transducteur des ondes gravitationnelles : observateur inertiel, horloge et coordonnées spatiales, à partir d'une expérience de pensée.

1.2.1 Détection avec une horloge locale et des photons

Considérons un observateur inertiel au repos équipé d'une horloge au point de coordonnées spatiales $(0,0,0)$. D'après l'équation 1.1, celui-ci va rester au repos avec les mêmes coordonnées. Il envoie un photon (une bille de masse nulle) à un observateur inertiel au repos aux coordonnées spatiales $(L,0,0)$, qui le renvoie aussitôt qu'il le reçoit. L'observateur à l'origine mesure le temps d'aller-retour du photon avec son horloge locale. Nous considérons un photon, donc $\mathrm{d}s^2 = 0$ dans l'équation 1.1. Le parcours du photon de $(0,0,0)$ à $(L,0,0)$ est donné par :

$$\int_0^T \frac{c\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+h_+(t)}} = \int_0^L \mathrm{d}x \tag{1.2}$$

avec l'approximation $|h_+(t)| \ll 1$, l'observateur à l'origine mesure le temps de trajet $\tau_{(x=L)} = T$

$$\tau_{(x=L)} = \frac{L}{c} + \frac{1}{2}\int_0^{L/c} h_+(t)\,\mathrm{d}t\ . \tag{1.3}$$

Si la période de h_+ est bien plus grande que L/c, alors

$$\tau_{(x=L)} = \frac{L}{c}(1+\frac{1}{2}h_+(t))\ . \tag{1.4}$$

L'observateur à l'origine mesurera une variation relative de $h_+/2$ de la durée d'aller-retour du photon entre deux points de coordonnées spatiales fixes.

1.2.2 Détection avec deux trajets orthogonaux de photons

Considérons un observateur inertiel au repos au point $(0,0,0)$. Il envoie des photons à des observateurs inertiels aux coordonnées spatiales $(L,0,0)$ et $(0,L,0)$ qui les renvoient aussitôt qu'ils les reçoivent. L'observateur à l'origine peut comparer les temps d'aller-retour des photons dans un bras avec ceux de l'autre bras, comme deux horloges différentes. L'onde gravitationnelle h_+ a des effets de signes différents sur chacun des bras. L'observateur à l'origine verra donc une variation relative de h_+ entre des durées d'aller-retour dans un bras par rapport à l'autre bras.

1.3 Réalisation du principe de détection

Pour effectuer les mesures exposées ci-dessus, il faut réaliser les coordonnées spatiales, une horloge et une source de photons. Je montre qu'un laser interrogeant une cavité Fabry-Perot à miroirs suspendus réaliserait le principe de détection si le laser était assez stable en fréquence. Un interféromètre de Michelson, plus onéreux, permet de s'affranchir du bruit de fréquence du laser.

1.3.1 Coordonnées spatiales

Des corps en chute libre, suivant une géodésique de l'espace-temps, réalisent les coordonnées spatiales. En pratique cette réalisation ne s'effectue que dans une bande de fréquences donnée.

Une masse-test isolée des perturbations extérieures réalise des coordonnées spatiales. Pour l'interféromètre spatial LISA [3,4], un asservissement de position par rapport à une masse-test centrée dans un satellite réalise des coordonnées spatiales dans la gamme de fréquence 10^{-4} Hz – 10^{-1} Hz.

Un solide accroché à un oscillateur mécanique réalise des coordonnées spatiales pour les fréquences supérieures à la fréquence de résonance. Pour les interféromètres terrestres décrits par la suite, les miroirs sont accrochés à une suspension constituée de pendules en chaîne. Il est aisé de démontrer que le miroir se comporte comme une masse libre pour toutes les fréquences supérieures à la plus élevée des fréquences de résonance de la chaine de pendules. (nb : 0.6 Hz pour le dernier étage, mais 2.5 Hz en pratique).

Il n'est pas possible de réaliser des coordonnées spatiales avec une résolution [5] infinie. Pour les interféromètres au sol, la limitation vient de l'excitation thermique de la surface des miroirs, de leurs revêtements réfléchissants et de l'excitation thermique de leurs suspensions (chap. 3.6.7).

1.3.2 Horloges et source de photons

Si on utilise le procédé de détection donné en 1.2.1, un laser peut réaliser la source de photons et l'horloge de référence. Deux miroirs suspendus définis ci-dessus sont alignés de façon à constituer une cavité Fabry-Perot à résonance. Il suffit de divertir une partie du faisceau qui ne résonnera pas dans la cavité Fabry-Perot pour constituer l'horloge de référence. La comparaison des phases des faisceaux réfléchi non résonnant et réfléchi résonnant par interférométrie réalise la mesure des variations relatives des temps d'aller-retour. Différentes techniques permettent cette comparaison de phases :

- La méthode Pound-Drever-Hall [6, 7] utilise les propriétés spectrales d'une cavité. Une partie du faisceau est modulé en phase à une fréquence telle que les bandes latérales sont non résonnantes. La lumière recueillie sur une photodiode en réflexion est démodulée par la fréquence de modulation pour reconstituer la variation de phase relative entre porteuse et bandes latérales qui signalera une onde gravitationnelle. Si la fréquence de modulation est à l'intérieur de la raie de résonance, le procédé fonctionne avec une sensibilité [5] moindre et avec une bande passante moindre.
- La méthode "tilt locking" [8, 9] utilise les propriétés modales d'une cavité. Un désalignement du faisceau par rapport au mode fondamental et résonnant de la cavité peut être considéré comme la superposition du mode fondamental et d'un mode supérieur (TEM01 par exemple si le mode fondamental est TEM00). Les rayons de courbure des miroirs sont conçus pour que le mode TEM01 ne résonne pas. La détection se fait par soustraction du signal de deux moitiés d'une photodiode, comparant ainsi les phases des deux modes.
- La méthode Hänsch-Couillaud [10] utilise les propriétés de polarisation d'une cavité, si elle comporte un élément biréfringent ou si elle est triangulaire. La polarisation non résonnante forme l'horloge de référence. La comparaison des deux polarisations, à l'aide de lame quart d'onde et de polariseur, effectue la détection.
- Une autre méthode avec un interféromètre de Michelson [11] consiste à dévier une partie de la lumière dans un bras court avec une polarisation orthogonale à celle qui entre dans la cavité. Un système similaire à la méthode Hänsch-Couillaud recombine les polarisations.

La résolution d'une horloge définie par un laser est ultimement limitée par le bruit de comptage des photons reçus. Si la longueur d'onde du laser est asservie sur la longueur d'une cavité Fabry-Perot, l'action en retour (pression de radiation) limite également la résolution [11]. Avec une cavité Fabry-Perot, la sensibilité d'une mesure de h (c'est-à-dire la pente du signal d'erreur) est de l'ordre de $(\mathrm{h_p}\nu)\sqrt{n_\mathrm{r} n_\mathrm{n.r}}\,(\nu/f_P)$ où h_P est la constante de Planck, f_P est le pôle de la cavité, c'est à dire la demi-largeur de raie d'une résonance, ν la fréquence du laser et n_r [resp. $n_\mathrm{n.r}$] le flux de photons qui vont résonner dans la cavité [resp. non résonner dans la cavité]. Le bruit de photons détectés est de l'ordre de $(\mathrm{h_p}\nu)\sqrt{\zeta^2 n_\mathrm{r} + n_\mathrm{n.r}}$, où ζ^2 est la réflectivité en intensité de la cavité à résonance. La densité spectrale de la résolution (minimum de signal détectable par bande spectrale)

est donc de l'ordre de

$$\tilde{h} \sim \frac{1}{2Q}\sqrt{\frac{\zeta^2 n_{\mathrm{r}} + n_{\mathrm{n.r}}}{n_{\mathrm{r}} n_{\mathrm{n.r}}}} \tag{1.5}$$

où facteur $Q = \nu/(2f_P)$ représente le facteur de qualité de la résonance de la cavité Fabry-Perot éclairée par le laser de fréquence ν. La densité spectrale de la résolution est donc inversement proportionnelle au coefficient de qualité de la résonance optique et à la racine carrée du flux de photons. Nous ferons une évaluation précise du rapport bruit à signal (chap. 3.6.8) dans le cas du signal Pound-Drever-Hall en réflexion d'une cavité Fabry-Perot.

1.3.3 Stabilité de fréquence et interféromètre de Michelson

La phase d'un laser de longueur d'onde λ s'accroît d'une quantité $4\pi L/\lambda$ sur un trajet aller-retour entre les coordonnées $(0,0,0)$ et $(L,0,0)$. Cette phase est perturbée en valeur relative d'une quantité $h_+/2$ en présence d'une onde gravitationnelle. Il faut donc que le bruit de fréquence relatif du laser soit plus petit que le signal à mesurer, dans chaque bande de fréquence de mesure.

Un montage en interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot dans les bras (fig. 1.1) s'affranchit d'une partie du bruit de fréquence. Le port de sortie de l'interféromètre de Michelson est réglé sur la frange noire. L'onde gravitationnelle s'y additionne tandis que le bruit de fréquence s'y soustrait d'autant mieux que les cavités sont semblables (chap. 8.6). La lumière réfléchie par l'interféromètre permet la stabilisation de la fréquence du laser sur le mode commun des cavités, tandis que la détection des ondes gravitationnelles se fait sur le mode différentiel. Nous détaillerons dans la partie II les techniques utilisées et leurs performances pour la stabilisation de fréquence du laser.

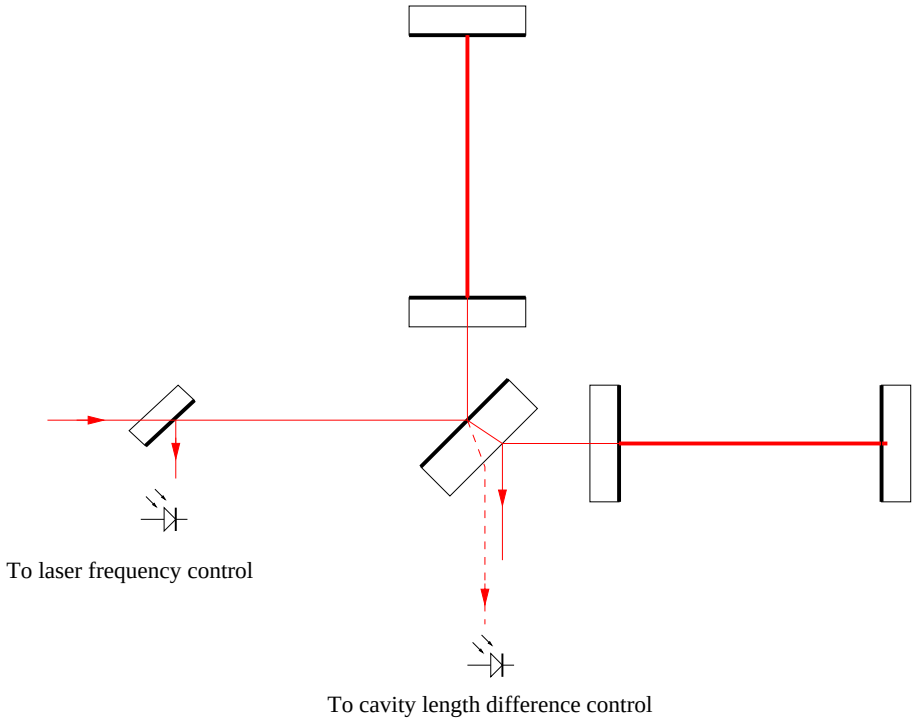


FIG. 1.1 – Un interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot résonnantes dans les bras est réglé sur la frange noire en sortie. Ce port permet la mesure des ondes gravitationnelles ou de la différence des variations relatives de longueur des deux grandes cavités Fabry-Perot. La lumière réfléchie mesure la somme des variations relatives des grandes cavités ou un bruit de fréquence du laser.

1.3.4 Les instruments

La figure 1.2 donne le principe du montage optique de l'interféromètre Virgo. Un laser de 20 W éclaire l'ensemble du montage. Une cavité résonnante à miroirs suspendus de 150 m, la cavité de filtrage de mode en entrée, filtre les fluctuations de pointé du faisceau incident. Un miroir "de recyclage" placé 6 m en amont de la séparatrice constitue une cavité résonnante avec l'interféromètre ; cela augmente la puissance lumineuse incidente sur la séparatrice d'un facteur 50. La distance entre la séparatrice et les miroirs d'entrée des grandes cavités de 3 km est d'environ 6 m. La technique de mesure de comparaisons de phases est la technique de Pound-Drever-Hall ; le laser est modulé en phase à une fréquence de 6.2 MHz. Une asymétrie de 80 cm des longueurs entre la séparatrice et les miroirs d'entrée des cavités Fabry-Perot rend la transmission du port de sortie non nulle pour les bandes latérales de la fréquence de modulation. La lumière recueillie sur la face anti-reflet de la séparatrice mesure la somme des variations différentielles des deux bras ou le bruit de fréquence du laser. La cavité de filtrage de mode en sortie est une cavité rigide de 4 cm. Elle élimine la lumière dont le front d'onde n'est pas adapté au front d'onde principal ; cette lumière ne contribuerait qu'au bruit.

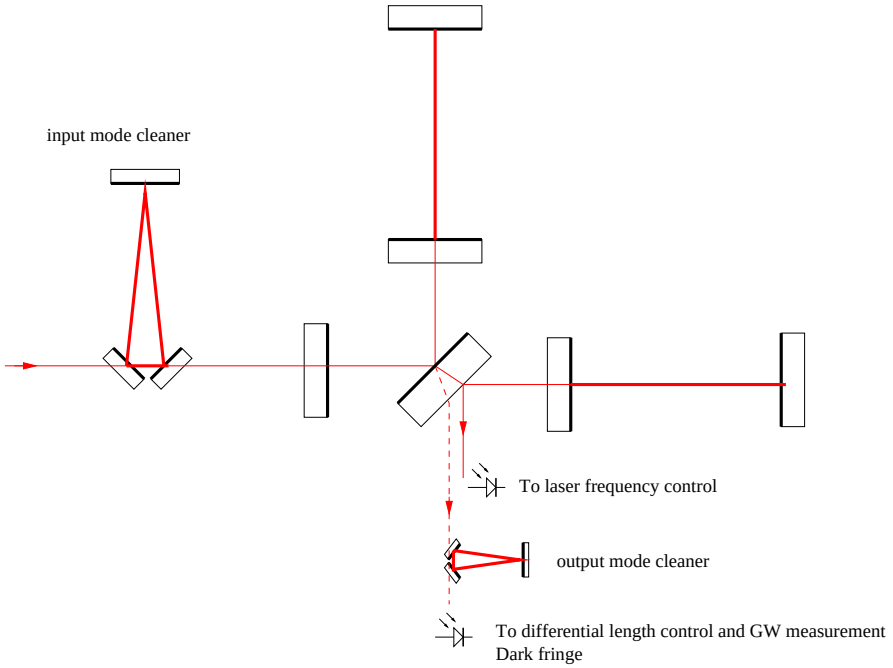


FIG. 1.2 – Principe du système optique de l'interféromètre Virgo.

Trois interféromètres avec cavités Fabry-Perot kilométriques et miroir de recyclage sont construits. Les deux interféromètres LIGO aux États-Unis sont en phase d'acquisition de données [12] ; l'interféromètre franco-italien Virgo [13], aux environs de Pise en Italie, termine la recette de l'instrument et commence à acquérir des données scientifiques. TAMA est un interféromètre avec des cavités Fabry-Perot de 300 m [14]. GEO est un interféromètre de Michelson avec des bras de 600 m, sans cavité Fabry-Perot, mais avec un miroir "de recyclage de signal" en aval de l'interféromètre qui forme une cavité supplémentaire réduisant le bruit de photons dans une gamme de fréquence déterminée [15]. ACIGA est un prototype australien pour tester les effets des hautes puissances lumineuses dans les interféromètres [16].

Pour les interféromètres de 2e génération Advanced Virgo et Advanced LIGO, à l'orée des années 2020, la puissance des lasers augmentera d'un facteur 10, jusqu'à $\sim$ 200 W, pour réduire le bruit de photons ; l'effet de l'agitation thermique de la surface des miroirs diminuera d'un ordre de grandeur et la densité spectrale de la résolution à 10 Hz sera améliorée [17–19].

Pour les interféromètres de 3e génération, on prévoit d'utiliser des miroirs à température cryogénique [20]. Ces interféromètres seraient enterrés pour réduire la contribution des ondes sismiques de surface au bruit sismique ; la borne inférieure de la fenêtre de détection serait alors de 1 Hz.

1.3.5 Autres systèmes de détection

Des interféromètres à ondes de matière peuvent, en principe, détecter des ondes gravitationnelles. Le facteur de qualité considéré est celui de la résonance atomique ; il est de l'ordre de grandeur de celui des grandes cavités Fabry-Perot de Virgo. Les flux n de la formule 1.5 sont alors des nombres d'atomes par seconde ; ils ne peuvent pas, pour le moment, être amplifiés par cavité comme pour des photons. Les interféromètres à ondes de matière ne peuvent concurrencer les interféromètres terrestres dans la gamme 10–100 Hz, en raison du flux très réduit par 7 ou 8 ordres de grandeur, au mieux, par rapport au flux de photons, 10^{20} photons/seconde pour Virgo. Ils pourraient les concurrencer dans la gamme 10^{-4}–10^{-1} Hz [21,22].

Une autre approche consiste à mesurer la déformation de larges solides monolithiques qui résonneraient au passage d'une onde gravitationnelle. L'approche « barres » (Allegro [23], Auriga [24], Explorer et Nautilus [25]) est progressivement abandonnée malgré l'amélioration possible apportée par les « sphères » (MiniGRAIL [26]),

Chapitre 2

Contributions de ce mémoire

CE MÉMOIRE assemble mes contributions expérimentales et les outils qui les interprètent sur deux thèmes :
– la stabilité en fréquence du laser qui constitue l'horloge de référence et la sonde des variations apparentes de longueur des cavités Fabry-Perot ;
– la caractérisation optique des cavités de l'interféromètre Virgo.
Ces thèmes sont liés : la conception d'un asservissement optimal de la fréquence du laser m'a amené à prévoir de façon précise la réponse d'une cavité Fabry-Perot ; la connaissance des propriétés optiques de l'interféromètre est nécessaire au contrôle de l'instrument et à la garantie de ses performances.

LA CAVITÉ FABRY-PEROT est le capteur sensible élémentaire des interféromètres terrestres construits pour mesurer les ondes gravitationnelles. Prolongeant des résultats publiés par J.-Y. Vinet, je donne les formules analytiques explicites de la réponse d'une cavité à un déplacement des miroirs, à un bruit de fréquence du laser qui l'interroge et à une onde gravitationnelle. Je décris comment la fonction de transfert entre une perturbation de fréquence du laser et le signal Pound-Drever-Hall permet de caractériser in-situ les propriétés optiques d'une cavité. J'inclus deux publications qui montrent l'application de cette technique aux cavités de LIGO et Virgo (chap. 5.1 et 5.2). Je discute des différents modèles spectral, modal et numérique d'une cavité Fabry-Perot, et des résultats qu'on peut atteindre avec chacun. Une note technique (chap. 5.3), reprenant les résultats du modèle numérique, montre que les pertes effectives dans les grands bras sont de l'ordre de 500 ppm. J'explicite quelques propriétés de deux cavités couplées.

LE BRUIT EN FRÉQUENCE d'un laser rend impossible la détection des ondes gravitationnelles avec une cavité Fabry-Perot simple. La configuration d'un interféromètre de Michelson avec cavités Fabry-Perot dans les bras est la meilleure technique pour contourner cette difficulté. La fréquence du laser est asservie sur le mode commun des deux cavités, tandis que les ondes gravitationnelles sont observées sur le mode différentiel, réglé sur la frange noire. Je rappelle qu'une stabilisation en deux étages est nécessaire. Je décris l'architecture que j'ai choisie : j'expose comment combiner au mieux les

diverses références de fréquence. Le système réalisé est complexe : je montre comment les différentes boucles d'asservissement interagissent. Avec J.-P. Coulon, ingénieur électronicien, nous avons développé des filtres numériques, qui, tout en ayant des marges suffisantes, ont une atténuation de 10^6 pour les fréquences supérieures à une décade au-dessus du gain unité ; ces filtres seront utilisés lorsque Virgo devra atteindre la résolution prévue à 10 Hz. Je décris en détail les équations du système d'asservissement, mettant ainsi à jour les notes techniques publiées. Je décris les procédures de calibration des signaux. Je démontre comment une activité systématique de modélisation, dans le domaine fréquentiel principalement, a soutenu la mise en place du système et la vérification de ses performances. Les performances obtenues donnent des résultats exceptionnels sur la stabilité de fréquence : 2×10^{-7} Hz$/\sqrt{\text{Hz}}$ à 10 Hz, limitée par le bruit de photons, sur la densité spectrale du signal d'erreur de l'asservissement de fréquence sur le mode commun. Grâce au gain de boucle, la densité spectrale du signal d'erreur mesuré est sous le bruit de photons et dans les spécifications sur la presque totalité du spectre. Je vérifie que le bruit de fréquence ne limite pas la résolution de l'interféromètre dans le canal qui porte l'information des ondes gravitationnelles.

MERCI aux collègues, stagiaires et étudiants qui ont contribué au travail et aux résultats présentés ici. Merci aux membres du jury qui ont accepté de l'évaluer.

Première partie

Propriétés optiques

Chapitre 3

Modélisation d'une cavité Fabry-Perot

Dans ce chapitre j'expose les différents modèles d'une cavité Fabry-Perot et les propriétés que ceux-ci décrivent. Je montre comment utiliser ces propriétés pour caractériser une cavité. Je m'appuierai sur celles-ci dans la seconde partie de ce mémoire qui traite de la stabilisation de fréquence.

Je rappelle d'abord des propriétés bien connues : un modèle scalaire décrit les propriétés spectrales d'une cavité Fabry-Perot ; la description des propriétés modales nécessite un modèle qui décrit le plan d'onde transverse à l'axe de propagation.

Je montre que pour une cavité à résonance, si l'on utilise la technique Pound-Drever-Hall, la fonction de transfert entre une perturbation de la fréquence du laser qui l'interroge et le courant démodulé du faisceau réfléchi permet de mesurer longueur, couplage d'impédance et largeur de raie. Une description modale rend compte d'un désaccord d'adaptation de front d'onde entre le laser et le mode résonnant ; la fonction de transfert permet alors de caractériser le rayon de courbure global, le défaut d'alignement et le défaut d'adaptation de front d'onde. J'applique ces résultats analytiques à des cavités des interféromètres LIGO et Virgo (chap. 5.1 et 5.2).

Je traite enfin du cas d'une cavité dont les miroirs n'ont pas une planéité idéale. Des modèles numériques sont utiles pour rendre compte des pertes optiques effectives. Il est essentiel de minimiser ces pertes optiques pour garantir la sensibilité des détecteurs interférométriques et la faisabilité de finesse ~ 1000 pour des cavités longues de plusieurs kilomètres.

Je fais une revue des connaissances sur les bruits qui perturbent les cavités utilisées comme références de longueur : les cavités rigides pour la métrologie des fréquences, les cavités à miroirs suspendus pour la détection des ondes gravitationnelles. Je veux montrer que l'on peut prévoir les effets qui brouillent le pointé, la phase, l'amplitude ou la polarisation du faisceau laser, ou qui perturbent la mesure. Il est donc possible de donner des spécifications sur chacune des sources de bruit ou sur la fonction de transfert qui les couple à la mesure, en fonction d'un objectif de résolution ou de stabilité.

3.1 Localisation géométrique du mode résonnant

La position géométrique du mode résonnant (l'axe du faisceau) dans une cavité est définie par la seule géométrie relative des miroirs [27]. Nous supposons ici des surfaces sans défaut et d'extension infinie.

Dans une cavité à deux miroirs plan et courbe, l'axe du faisceau est défini par la droite qui passe par le centre de courbure du miroir courbe et est orthogonale au miroir plan.

Dans une cavité à deux miroirs courbes, l'axe du faisceau est défini par la droite qui passe par les centres de courbure des miroirs.

Dans une cavité triangulaire longue, composée de deux miroirs plans rapprochés P_1 et P_2 et d'un miroir distant courbe sphérique S, le col du mode résonnant se trouve entre les deux miroirs plans. L'axe du faisceau est défini par les trois points A_1, A_2, A_3, situés sur S, P_1 et P_2 construits comme suit. La droite qui passe par le centre de centre de courbure C du miroir courbe et passe par l'intersection O des deux plans P_1 et P_2 intersecte S en A_1. Je définis B_1 (resp. B_2) comme le symétrique de A_1 par rapport à P_1 (resp. P_2). La droite (B_1, B_2) intersecte P_1 en A_2 et P_2 en A_3.

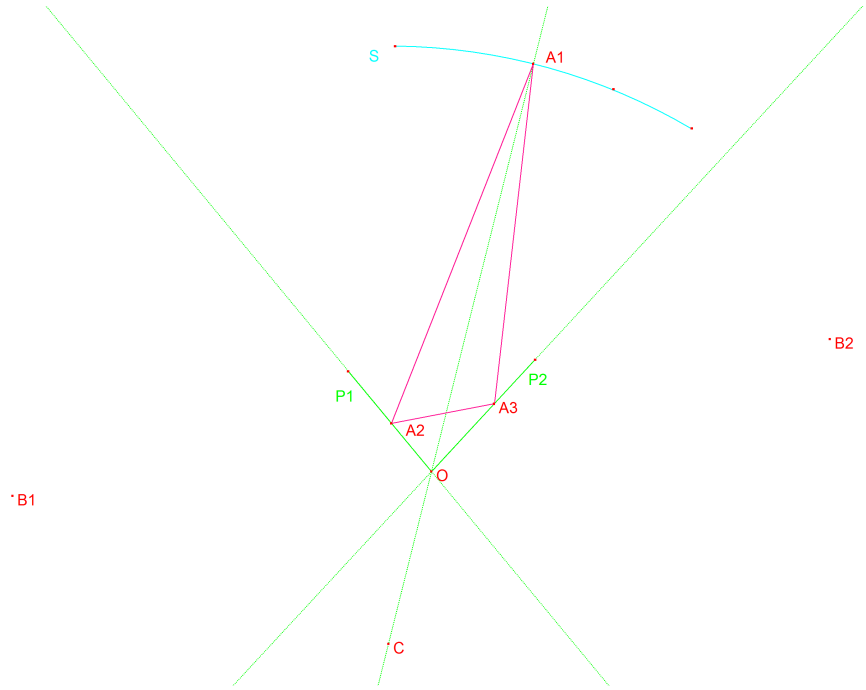


FIG. 3.1 – Construction géométrique de l'axe du mode résonnant dans une cavité triangulaire.

3.2 Modèle spectral

Une onde plane polarisée décrit la lumière se propageant dans une direction donnée. Un nombre imaginaire ψ décrit son amplitude et sa phase. L'amplitude $|\psi|$ est un coefficient d'onde normalisé telle que l'intensité lumineuse (en W/m^2) au point considéré est $\frac{1}{2}|\psi|^2$. Les miroirs sont des plans d'extension infinie, d'épaisseur nulle. Des nombres réels décrivent leurs transmittances, réflectances et pertes. Ce modèle analytique scalaire décrit efficacement les propriétés fondamentales d'une cavité résonnante : intervalle spectral libre, finesse, transmittance et réflectance et fonction de la fréquence du laser incident. Je rappelle comment calculer le signal Pound-Drever-Hall d'écart à la résonance et comment calculer la fonction de transfert entre une perturbation de la fréquence et le signal Pound-Drever-Hall.

Nous utilisons pour le calcul le modèle des matrices de diffusion développé pour les circuits micro-ondes [28]. Il n'est pas strictement nécessaire, mais les propriétés connues sur ces systèmes s'utilisent alors sans peine. Ce modèle est immédiatement utilisable pour évaluer les propriétés des revêtements réfléchissants constitués de couches minces.

3.2.1 Rappels sur les matrices de diffusion

Ce modèle traite les systèmes linéaires où un seul mode d'onde est présent. La figure 3.2 schématise un système à deux entrées et deux sorties.

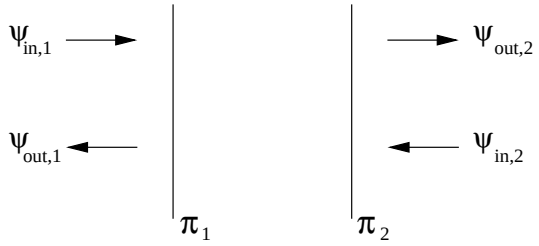


FIG. 3.2 – Un système avec deux ondes entrantes et deux ondes sortantes.

Les phases des ondes à droite ont pour référence de phases le plan π_2, tandis que les phases des ondes à gauche ont pour référence le plan π_1.

Les paramètres de diffusion S décrivent les ondes sortantes en fonction des ondes entrantes :

$$\begin{pmatrix} \psi_{\text{out},1} \\ \psi_{\text{out},2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\text{in},1} \\ \psi_{\text{in},2} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

tandis que les paramètres de chaîne C décrivent les ondes à gauche en fonction des

ondes à droite :

$$\begin{pmatrix} \psi_{\text{in},1} \\ \psi_{\text{out},1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\text{out},2} \\ \psi_{\text{in},2} \end{pmatrix} . \tag{3.2}$$

Une matrice S se transforme en une matrice C avec :

$$C = \frac{1}{S_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -\det S \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

et la transformation inverse de C en S est :

$$S = \frac{1}{C_{11}} \begin{pmatrix} C_{21} & \det C \\ 1 & -C_{12} \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

Il est facile de vérifier que $\det C = S_{12}/S_{21}$ et $\det S = -C_{22}/C_{11}$. Les matrices S sont utiles pour représenter les paramètres physiques (réflectance en champ pour les éléments diagonaux, transmittance en champ pour les autres éléments), tandis que les matrices C sont utiles pour faire les calculs : une simple multiplication de ces matrices résout une succession de systèmes.

Si le système est sans perte alors nous avons les propriétés suivantes :

$$S^+ S = \mathbb{I} \tag{3.5}$$

$$|\det S| = 1 \tag{3.6}$$

où S^+ est la matrice adjointe de S (transposée conjuguée).

Si les ondes de chaque côté du système sont dans le vide, un système sans matériau anisotrope ni composant actif est réciproque : $S_{12} = S_{21}$, c'est à dire que la transmittance de la gauche vers la droite est identique à la transmittance de la droite vers la gauche. Alors $\det C = 1$ et la multiplication conserve évidemment cette propriété.

Un système réciproque sans perte - un miroir sans perte en optique - s'écrit de façon générale :

$$S = \exp(i\delta) \begin{pmatrix} r\exp(i\phi) & t \\ t & -r\exp(-i\phi) \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{t}\exp(-i\delta) \begin{pmatrix} 1 & r\exp(-i\phi) \\ r\exp(i\phi) & \exp(i\delta) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

où δ et ϕ sont deux angles et un autre angle θ décrit r et t :

$$r = \sin(\theta) \tag{3.8}$$

$$t = \cos(\theta) . \tag{3.9}$$

Une onde de longueur λ se propageant sur une longueur L se déphase de $\alpha = 2\pi L/\lambda$. Cette propagation correspond à la matrice S :

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\alpha) \\ \exp(-i\alpha) & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.10}$$

Cette même matrice peut être utilisée pour déplacer un plan de référence le long de l'axe de propagation.

Le coefficient de réflexion $\zeta = \psi_{\text{out,i}}/\psi_{\text{in,i}}$, compris dans l'intervalle $[-1, 1]$, permet de calculer l'impédance du système optique :

$$Z = Z_{\text{vide}} \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \,. \tag{3.11}$$

Notons que l'impédance du système dépend du plan de référence π_1 choisi, puisque ce dernier change la phase de ζ.

3.2.2 Revêtements réfléchissants et miroirs

Une interface entre deux milieux diélectriques d'indices n_1 et n_2 a pour matrices S et C [29]

$$S_{n_1 \to n_2} = \frac{1}{n_1+n_2} \begin{pmatrix} n_1-n_2 & 2n_2 \\ 2n_1 & n_2-n_1 \end{pmatrix} \qquad C_{n_1 \to n_2} = \frac{1}{2n_1} \begin{pmatrix} n_1+n_2 & n_1-n_2 \\ n_1-n_2 & n_1+n_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

où les plans π_1 et π_2 sont confondus et égaux au plan d'interface. La matrice C d'une lame diélectrique d'indice n, d'épaisseur telle que l'onde acquiert un déphasage α est donc obtenue par

$$C = C_{n \to 1} \times C_{\alpha} \times C_{1 \to n} \tag{3.13}$$

où les plans π_1 et π_2 sont sur les deux interfaces de la lame. Après une transformation en matrice S, s'obtient une matrice de la forme

$$S = \exp(i\delta) \begin{pmatrix} ir & t \\ t & ir \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

où δ est un angle et r et t sont réels avec $r^2 + t^2 = 1$.

Avec un modèle classique de revêtement réfléchissant (première couche $\lambda/2$ bas indice, empilement de couches alternées $\lambda/4$ haut indice, $\lambda/4$ bas indice, substrat), la matrice S d'un miroir sans perte adapté à la longueur d'onde λ est

$$S = \begin{pmatrix} r & t \\ t & -r \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

où les plans de références sont confondus sur la surface de la première couche de revêtement, et r et t sont réels positifs. C'est cette représentation que l'on gardera dans la suite du texte puisque les principaux revêtements réfléchissants utilisés dans Virgo sont adaptés à la longueur d'onde. L'élément de matrice représentant la réflexion aura un signe $+$ si il correspond à une réflexion du côté du substrat qui porte le revêtement réfléchissant.

Dans le cas de pertes dans le miroir, il faudrait, en toute rigueur, décrire avec des coefficients différents les réflectivités droites et gauches. En pratique, les deux mesures ne sont jamais disponibles. On se contentera donc de continuer à poser le même modèle que celui que décrit l'équation 3.15, mais sans contraindre $r^2 + t^2 = 1$. Les pertes sont notées $P = 1 - r^2 - t^2$.

3.2.3 Propriétés d'une cavité Fabry-Perot

Un faisceau laser de longueur d'onde λ, décrit comme une onde plane ici, éclaire une cavité, constituée par un miroir d'entrée M_1, un miroir de fond M_2, une propagation sur une longueur L qui déphase la lumière de $\alpha/2 = 2\pi L/\lambda$. Les matrices S de ces trois éléments sont :

$$S_{M_1} = \begin{pmatrix} -r_1 & t_1 \\ t_1 & r_1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

$$S_{\alpha/2} = \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\alpha/2) \\ \exp(-i\alpha/2) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$$S_{M_2} = \begin{pmatrix} r_2 & t_2 \\ t_2 & -r_2 \end{pmatrix} . \tag{3.18}$$

Après calcul des matrices C correspondantes, multiplication de ces dernières, puis transformation en matrice de diffusion S, on retrouve les transmittances et les réflectances d'une cavité Fabry-Perot [30] :

$$S_{\mathrm{FP}} = \frac{1}{1 - r_1 r_2 \exp(-i\alpha)} \begin{pmatrix} -(r_1 - r_2(1-P_1)\exp(-i\alpha)) & t_1 t_2 \exp(-i\alpha/2) \\ t_1 t_2 \exp(-i\alpha/2) & -(r_2 - r_1(1-p_2)\exp(-i\alpha)) \end{pmatrix} . \tag{3.19}$$

Notons P_{AR} les pertes sur un aller-retour du faisceau,

$$P_{\mathrm{AR}} = T_1 + T_2 + P_1 + P_2 . \tag{3.20}$$

Notons ν la fréquence du laser. Le déphasage α d'un aller-retour dépend de ν par $\alpha(\nu) = 4\pi\nu L/c$, où c est la vitesse de la lumière. Les fonctions de réflectance $r_1(\nu)$ et $r_2(\nu)$ (les deux éléments diagonaux) sont périodiques de période l'intervalle spectral libre $\mathrm{ISL} = c/(2L)$.

La finesse $\mathscr{F}$ est définie comme le rapport de l'intervalle spectral libre sur la largeur à mi-hauteur des fonctions de transmittances en puissance $|t^2(\nu)|$. Avec un développement au second ordre en P_{AR}, nous trouvons

$$\mathscr{F} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \tag{3.21}$$

et avec un développement au premier ordre :

$$\mathscr{F} = \frac{2\pi}{P_{\mathrm{AR}}} \,. \tag{3.22}$$

Le pôle de la cavité (demi-largeur à mi-hauteur de la fonction $|t^2(\nu)|$) est $f_P = \mathrm{ISL}/(2\mathscr{F})$. La résonance est obtenue pour $\alpha = 0 \mod 2\pi$. La réflectance à résonance $\zeta = r(0)$ est

$$\zeta = \frac{-r_1 + r_2(1-p_1)}{1 - r_1 r_2} \cong 1 - \frac{2\,T_1}{P_{\mathrm{AR}}} \,. \tag{3.23}$$

Le couplage optimal de la lumière $\zeta = 0$ est vérifié pour $T_1 = T_2 + P_1 + P_2$. Pour une cavité très fortement sur-couplée ($T_2 \ll T_1$) et à faibles pertes ($P_1 + P_2 \ll T_1 + T_2$), le défaut de réflectivité en puissance à résonance vaut

$$1 - \zeta^2 \simeq \frac{2\mathscr{F}}{\pi} P_{\mathrm{tot.}} \tag{3.24}$$

où $P_{\mathrm{tot.}} = P_1 + P_2$ est la somme des pertes scalaires des deux miroirs et éventuellement des pertes dans la propagation.

Le gain en puissance G_{FP} de la cavité est, au premier ordre de développement en P_{AR}

$$G_{\mathrm{FP}} = \frac{4T_1}{(P_{\mathrm{AR}})^2} = \frac{(1+\zeta)\mathscr{F}}{\pi} \,. \tag{3.25}$$

Il faut noter le facteur $1 + \zeta$ dans la formule du gain en fonction de la finesse, malheureusement souvent remplacé dans la littérature par un facteur 2 sans considération du couplage. Ce facteur $1 + \zeta$ décrit une propriété physique de la cavité et ne dépend pas des plans de référence choisis. Si $2 > 1 + \zeta > 1$ le système est sur-couplé ; si $1 + \zeta = 1$ le couplage est optimal ; si $0 < 1 + \zeta < 1$ le système est sous-couplé.

Les pertes $P_{\mathrm{tot.}}$ diminuent le gain en puissance de la cavité, au premier ordre, si $P_{\mathrm{tot.}} \ll 1/\mathscr{F}$ par

$$G_{\mathrm{FP,pertes}} \simeq G_{\mathrm{FP,sans\ perte}} \times \left(1 - P_{\mathrm{tot.}} \frac{\mathscr{F}}{\pi}\right) \tag{3.26}$$

La transmittance en puissance à résonance est

$$T_{\mathrm{FP}} = \frac{4T_1 T_2}{P_{\mathrm{AR}}^2} \tag{3.27}$$

de sorte que si $P_1 = P_2 = 0$ et $T_1 = T_2$ alors $T_{\mathrm{FP}} = 1$.

En notant f le désaccord de la fréquence du laser à la résonance, la réflectance en champ vaut

$$r(f) = \frac{-r_1 + r_2(1-P_1)\exp(-i4\pi f L/c)}{1 - r_1 r_2 \exp(-i4\pi f L/c)} \tag{3.28}$$

qui se simplifie, si $f \ll c/(2L)$, par

$$r(f) = \frac{\zeta - if/f_P}{1 + if/f_P} \,. \tag{3.29}$$

Si l'on coupe brutalement la lumière à l'entrée d'une cavité Fabry-Perot, la puissance résonnante en un point dans la cavité varie par échelons de durée L/c. Cette puissance vérifiant l'équation $P(t) = r_1^2 r_2^2 P(t - 2L/c)$, l'enveloppe est une exponentielle qui définit le temps de stockage

$$\tau = -\frac{2L}{c \ln(r_1^2 r_2^2)} \tag{3.30}$$

ou encore

$$\tau \simeq \frac{1}{4\pi f_P} \tag{3.31}$$

avec un développement au premier ordre en P_{AR}.

3.2.4 Signal d'erreur pour une fréquence balayée

Je rappelle ici des résultats de [6, 7, 31] qui exposent une façon de mesurer le désaccord entre la fréquence effective d'un laser et une fréquence de résonance d'une cavité Fabry-Perot. Un laser monochromatique est modulé en phase à la fréquence f_{mod}. Nous supposons que la fréquence de modulation est telle qu'elle n'est pas résonnante : $\forall n, |f_{\mathrm{mod}} - n\,\mathrm{ISL}| \gg f_P$, où n est un entier. Le principe consiste à comparer la phase des bandes latérales, non résonnantes, avec la phase de la porteuse qui résonne. Cette méthode suppose qu'avant modulation, le laser est au bruit de photons à la fréquence de modulation, de sorte qu'après modulation, porteuse et bandes latérales ont des bruits de phase identiques.

L'onde entrante modulée en phase s'écrit :

$$\psi_{\mathrm{pm,in}}(t) = \psi_0 \exp(i2\pi\nu t) \exp(im \sin(2\pi f_{\mathrm{mod}} t)) \tag{3.32}$$

où m est l'indice de modulation. Supposons que $m \ll 1$; l'onde lumineuse s'écrit alors comme la superposition d'une porteuse et de deux bandes latérales :

$$\psi_{\mathrm{pm,in}}(t) = \psi_0 \exp(i2\pi\nu t)(1 + \frac{m}{2}\exp(i2\pi f_{\mathrm{mod}} t) - \frac{m}{2}\exp(-i2\pi f_{\mathrm{mod}} t)) \,. \tag{3.33}$$

En régime stationnaire, la cavité Fabry-Perot est un système linéaire. L'onde réfléchie s'écrit alors

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{pm,ref}}(t) = \psi_0 \exp(i2\pi\nu t)\big(r(f) &+ r(f + f_{\mathrm{mod}})\frac{m}{2}\exp(i2\pi f_{\mathrm{mod}} t) \\ &- r(f - f_{\mathrm{mod}})\frac{m}{2}\exp(-i2\pi f_{\mathrm{mod}} t)\big) \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $f = \nu - \nu_0$ est le désaccord à la résonance de la porteuse. La puissance réfléchie est recueillie par une photodiode d'efficacité quantique η. Les photo-électrons sont convertis en tension par la transimpédance Z. La tension résultante est filtrée de ses composantes radio-fréquence (signaux à la fréquence de modulation ou harmoniques), puis démodulée en phase par l'onde $V_0 \sin(2\pi f_{\mathrm{mod}} t)$, pour constituer le signal Pound-Drever-Hall :

$$s_{\mathrm{PDH}}(f) = K_{\mathrm{ph}} \frac{m}{2} P_0 \,\mathrm{Im}\Big[r(f) r^*(f - f_{\mathrm{mod}}) - r^*(f) r(f + f_{\mathrm{mod}})\Big] \tag{3.35}$$

avec

$$K_{\mathrm{ph}} = \eta \frac{e^-}{\mathrm{h_p}\nu} Z(2G_{\mathrm{mix}}) \; . \tag{3.36}$$

Le facteur de conversion puissance lumineuse - intensité vaut $e^-/\mathrm{h_p}\nu = 0.86$ A/W pour une longueur d'onde de 1.064 μm, avec $\mathrm{h_p}$ la constante de Planck et e^- la charge unitaire de l'électron. G_{mix} représente les pertes d'insertion du mélangeur, en tension, lorsque la tension V_0 est la tension nominale sur le port de l'oscillateur local du mélangeur ($G_{\mathrm{mix}} = 10^{(\text{pertes dB})/20}$) ; ce facteur vaut couramment $1/2$. $\mathrm{Im}()$ représente la partie imaginaire et $*$ note la conjugaison complexe.

Notons $f_M = |f_{\mathrm{mod}} - \mathrm{ISL} \times \mathrm{Round}(f_{\mathrm{mod}}/\mathrm{ISL})|$ la différence de fréquence entre la fréquence de modulation et la fréquence de résonance la plus proche. Si $f \ll f_M$ et si le désaccord à résonance f est balayé lentement (la vitesse de balayage de la fréquence est très petite devant f_P/τ), alors

$$s_{\mathrm{PDH}}(f(t)) = -K_{\mathrm{ph}} \, P_0 \, m(1+\zeta) \frac{f(t)/f_P}{1 + (f(t)/f_P)^2} \; . \tag{3.37}$$

Les points extrémaux sont obtenus pour $f = \pm f_P$. La pente de la courbe à la résonance vaut $K_{\mathrm{ph}} \, P_0 \, m(1+\zeta)/f_P$.

Si la puissance captée sur la photodiode est démodulée en quadrature (la référence de phase étant la modulation de phase), alors le signal est nul pour $f \sim 0$ et maximum pour $f \sim f_{\mathrm{mod}}$.

3.2.5 Fonction de transfert

Je cherche à calculer la fonction de transfert entre une perturbation de la fréquence du laser et le signal Pound-Drever-Hall [32].

Le désaccord f est maintenant supposé constant, et un signal $\sin(2\pi f_{\mathrm{mes}} t)$ module la phase du laser avec un indice de modulation b :

$$\psi_{\mathrm{in}}(t) = \psi_0 \exp(i 2\pi \nu t) \exp(im \sin(2\pi f_{\mathrm{mod}} t)) \exp(ib \sin(2\pi f_{\mathrm{mes}} t)) \; . \tag{3.38}$$

La fréquence du laser est modifiée par $b f_{\mathrm{mes}} \cos(2\pi f_{\mathrm{mes}} t)$. Nous supposons $b \ll 1$ dans les calculs qui suivent. La fonction de transfert $F_{\mathrm{PDH},\nu}(f_{\mathrm{mes}})$ recherchée entre la perturbation de fréquence et la composante à la fréquence f_{mes} de s_{PDH} est telle que :

$$s_{\mathrm{PDH},f_{\mathrm{mes}}}(t) = \frac{b\, f_{\mathrm{mes}}\, F_{\mathrm{PDH},\nu}}{2} \exp(i2\pi f_{\mathrm{mes}} t) + \frac{b\, f_{\mathrm{mes}}\, F^*_{\mathrm{PDH}}}{2} \exp(-i2\pi f_{\mathrm{mes}} t)\ . \tag{3.39}$$

Neuf composantes de fréquences constituent la lumière entrante. De façon similaire au calcul du signal d'erreur balayé, il faut évaluer la réponse de la cavité à chacune de ces neufs composantes. Ensuite le courant de la photodiode est démodulé avec $V_0 \sin(2\pi f_{\mathrm{mod}} t)$, toutes les radio-fréquences sont éliminées, et finalement la fonction de transfert $F_{\mathrm{PDH},\nu}(f_{\mathrm{mes}})$ est

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{PDH},\nu}(f_{\mathrm{mes}}) = K_{\mathrm{ph}} P_0 \frac{m}{4} \frac{1}{i f_{\mathrm{mes}}} \Big(& - r^*(f) r(f + f_{\mathrm{mod}} + f_{\mathrm{mes}}) - r(f) r^*(f - f_{\mathrm{mod}} - f_{\mathrm{mes}}) \\ & - r(f) r^*(f + f_{\mathrm{mod}} - f_{\mathrm{mes}}) - r^*(f) r(f - f_{\mathrm{mod}} + f_{\mathrm{mes}}) \\ & + r(f + f_{\mathrm{mod}}) r^*(f - f_{\mathrm{mes}}) + r^*(f - f_{\mathrm{mod}}) r(f + f_{\mathrm{mes}}) \\ & + r^*(f + f_{\mathrm{mod}}) r(f + f_{\mathrm{mes}}) + r(f - f_{\mathrm{mod}}) r^*(f - f_{\mathrm{mes}}) \Big)\ . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Le plus souvent la cavité est à résonance, c'est à dire $\nu = \nu_0$ et $f = 0$. Nous pouvons alors utiliser la propriété $r^*(f_{\mathrm{mes}}) = r(-f_{\mathrm{mes}})$, et la fonction de transfert se simplifie en

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{PDH},\nu}(f_{\mathrm{mes}}) = K_{\mathrm{ph}} P_0 \frac{m}{2} \frac{1}{i f_{\mathrm{mes}}} \Big(& - \zeta \left[r(f_{\mathrm{mod}} + f_{\mathrm{mes}}) + r(-f_{\mathrm{mod}} + f_{\mathrm{mes}}) \right] \\ & + r(f_{\mathrm{mes}}) \left[r(f_{\mathrm{mod}}) + r(-f_{\mathrm{mod}}) \right] \Big)\ . \end{aligned} \tag{3.41}$$

Dans l'équation 3.41, si $f_{\mathrm{mes}} \ll f_M$, alors suivant 3.28, $r(\pm f_{\mathrm{mod}}) \cong -1$ et $r(\pm f_{\mathrm{mod}} + f_{\mathrm{mes}}) \cong -1$, et la fonction de transfert vaut simplement

$$F_{\mathrm{PDH},\nu}(f_{\mathrm{mes}}) = -K_{\mathrm{ph}} P_0 m \frac{1}{f_P} \frac{1+\zeta}{1 + i f_{\mathrm{mes}}/f_P}\ . \tag{3.42}$$

La fonction de transfert est un simple filtre passe-bas. Un ajustement de la mesure de cette fonction de transfert estime f_P.

La démodulation de la puissance captée par la photodiode par $V_0 \cos(2\pi f_{\mathrm{mod}} t)$, onde en quadrature par rapport à la modulation de phase, produit une fonction de transfert nulle si la porteuse est résonnante dans la cavité.

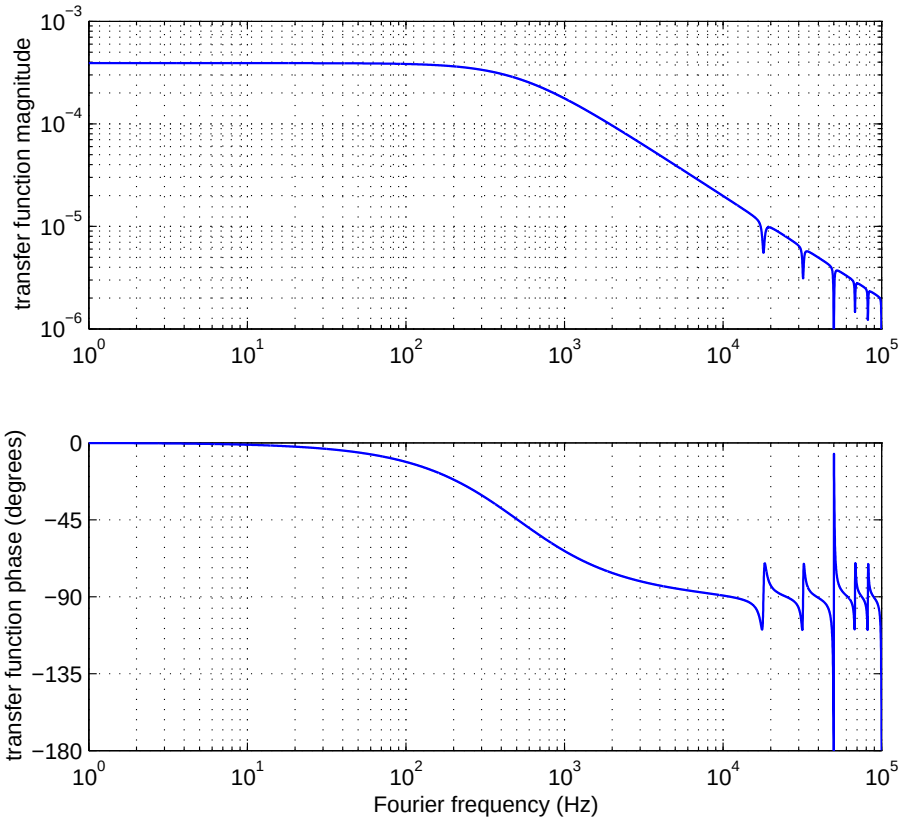


FIG. 3.3 – Fonction de transfert entre un bruit de fréquence et le signal Pound-Drever Hall, pour une cavité Fabry-Perot de finesse 50, de longueur 3 km, avec un miroir à réflexion maximale en extrémité. Le laser incident a une puissance de 1 W, la photodiode de détection en réflexion de la cavité une réponse de 1 V/W. La fréquence de modulation est 18 kHz et l'indice de modulation 0.1. Le laser est supposé parfaitement adapté et aligné avec le mode résonnant. La courbe est un filtre passe-bas, avec des accidents, dont les formes seront discutées plus loin, à l'intervalle spectral libre, à la fréquence de modulation repliée dans l'intervalle spectral libre et à la fréquence miroir de celle-ci. L'amplitude est en V/Hz. Le signe de la fonction de transfert a été inversé sur la figure.

Mesures de pôle et de l'ISL

Pour toutes les fréquences telles que $|f_{\mathrm{mes}} - \mathrm{ISL}| \lesssim f_P$, la fonction de transfert se simplifie en

$$F_{\mathrm{PDH},\nu}(f_{\mathrm{mes}}) = -K_{\mathrm{ph}} P_0 m \frac{1}{f_{\mathrm{mes}}} \frac{(1+\zeta)(f_{\mathrm{mes}} - \mathrm{ISL})/f_P}{1 + i(f_{\mathrm{mes}} - \mathrm{ISL})/f_P} \tag{3.43}$$

Une mesure du minimum local à ISLpermet une mesure exacte de f_P et ISL, donc de la finesse $\mathscr{F} = \mathrm{ISL}/(2f_P)$, et de la longueur $L = c/(2\,\mathrm{ISL})$.

Couplage et longueur de la cavité

Pour toutes les fréquences telles que $|f_{\text{mes}} - f_M| \lesssim f_P$,

$$F_{\text{PDH},\nu}(f_{\text{mes}}) = -K_{\text{ph}} P_0 m (1+\zeta) \frac{1}{i f_{\text{mes}}} \left(1 - \frac{\zeta/2}{1 + i(f_{\text{mes}} - f_M)/f_P}\right) . \tag{3.44}$$

La fonction de transfert, autour de f_M, montre un maximum local pour une cavité sous-couplée ($\zeta < 0$) ou un minimum local pour une cavité sur-couplée ($\zeta > 0$). Un détail similaire est présent à $|f_{\text{mes}} - \text{ISL} + f_M| < f_P$.

La mesure de la fonction de transfert autour de f_M et $\text{ISL} - f_M$ permet d'ajuster intervalle spectral libre, pôle de la cavité et facteur de couplage $1 + \zeta$.

3.3 Modèle modal

Pour rendre compte de la réponse modale, le plus simple est de superposer les réponses spectrales des modes qui résonnent à des fréquences différentes.

Un mode Hermite-Gauss TEMmn se propageant le long de l'axe z a une phase de Gouy supplémentaire à une onde plane égale à

$$\varphi_{\text{Gouy}} = \exp(i(m+n+1)\tan^{-1}(z/b)) \tag{3.45}$$

où $b = \pi w_0^2/\lambda$ est le paramètre de Rayleigh et w_0 définit le col du faisceau. Le mode TEMmn résonne donc à une fréquence décalée

$$f_{m,n} - f_{0,0} = \frac{c}{2\pi L}(m+n)\tan^{-1}(L/b) . \tag{3.46}$$

Un mode Laguerre-Gauss TEMmn aura lui un facteur $2m + n$ pour la phase de Gouy au lieu du facteur $m + n$. Le faisceau entrant est décomposé sur la base des modes de la cavité :

$$\psi_{\text{in}} = \sum_{m,n} \psi_{mn} \tag{3.47}$$

de sorte que la réponse sur le port q (réflexion, onde résonnante, transmission) dépend de l'élément $q(f)$ de matrice S correspondant

$$\psi_q = \sum_{m,n} q(f - f_{m,n})\psi_{mn} \tag{3.48}$$

en posant $f_{0,0} = 0$.

3.3.1 Filtrage modal

Lorsque le mode TEM00 est résonnant, si la finesse de la cavité vérifie $\mathscr{F} \gg 1$, la puissance transmise du mode TEMmn par rapport à la puissance transmise du mode TEM00 vaut, de façon approximative :

$$\frac{P_{mn}}{P_{00}} = \left(\frac{\pi}{2\mathscr{F}}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\pi(f_{m,n} - \mathrm{ISL}/2)}{\mathrm{ISL}}\right)^2\right) \tag{3.49}$$

où l'approximation est d'autant meilleure que le mode TEMmn est proche de l'anti-résonance $f_{m,n} \approx \mathrm{ISL}/2$.

En particulier, l'agitation d'un faisceau entrant sera transformée en un mode stable défini par la cavité, avec une fluctuation de puissance ; les modes d'ordres supérieurs, en transmission, pourront être négligés. La fluctuation de puissance relative dans la cavité ou en transmission de la cavité est égale à la variation de couplage.

Avec un mode principal TEM00, au premier ordre autour du point où l'alignement et l'adaptation de forme sont parfaits, avec θ l'agitation angulaire du faisceau, x le mouvement transversal du faisceau, Δz la variation de position entre le col du faisceau résonnant et le col du faisceau interrogeant la cavité, Δw la variation de taille du faisceau entrant, le couplage vaut

$$C = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta_d}\right)^2 - \left(\frac{x}{w_0}\right)^2 - \left(\frac{\Delta w}{w_0}\right)^2 - \left(\frac{\Delta z}{2b}\right)^2 \tag{3.50}$$

où w_0 est la taille au col du faisceau, $\theta_d = \lambda/\pi w_0$ l'angle de divergence, $b = \pi w_0^2/\lambda$ le paramètre de Rayleigh.

3.3.2 Fonction de transfert

Je cherche ici à caractériser des accidents particuliers de la fonction de transfert entre un bruit de fréquence et le signal Pound-Drever-Hall. Ceux-ci proviennent d'un mauvais accord du front d'onde incident par rapport au mode résonnant, dus à un mauvais alignement ou un défaut de taille ou de position du col du faisceau.

Faisons l'hypothèse d'une fraction $|a|^2 \ll 1$ de l'énergie sur les modes TEM01 ou TEM10 de la cavité. Les 9 composantes de fréquence du mode TEM00 ont une réponse avec $f = 0$ dans l'équation (3.40), tandis que les 9 composantes de fréquence de l'énergie projetée sur les modes TEM01 or TEM10 ont une réponse avec $f = f_{01}$. Le décalage de fréquence $f = f_{01}$ s'exprime en fonction du rayon de courbure effectif $(1 - L/R_{\mathrm{curv}}) = (1 - L/R_{\mathrm{curv},1})(1 - L/R_{\mathrm{curv},2})$: $f_{01} = (\mathrm{ISL}/\pi)\arcsin(L/R_{\mathrm{curv}})$. Après un peu d'algèbre, la fonction de transfert devient :

$$F_{\mathrm{PDH,alig}} = F_{\mathrm{PDH},\nu}(f = 0, f_{\mathrm{mes}}) - |a|^2 F_{\mathrm{PDH},\nu}(f = f_{01}, f_{\mathrm{mes}}) \,. \tag{3.51}$$

Si $|f_{\text{mes}} - f_{01}| \lesssim f_P$, en supposant que le mode TEM01 ne coïncide pas avec les bandes latérales ou la porteuse $|f_{01} - f_M| \gg f_P$ et $|f_{01} - \text{ISL} + f_M| \gg f_P$, la fonction de transfert devient

$$F_{\text{PDH,mismatch}}(f_{\text{mes}}) = -K_{\text{ph}} P_0 m(1+\zeta)\frac{1}{i f_{\text{mes}}}\left(1 - \frac{|a|^2}{2}\frac{1}{1+i(f_{\text{mes}} - f_{01})/f_P}\right). \quad (3.52)$$

Le cas de désaccord de taille ou de position du col du faisceau conduit à un traitement équivalent : $f_{02} = 2f_{01}$ remplace f_{01} dans l'équation 3.52.

3.3.3 Méthode alternative de création de signal d'erreur

La méthode Pound-Drever-Hall utilise les propriétés spectrales de la cavité Fabry-Perot : les bandes latérales, utilisées comme référence de phase, sont comparées à la lumière qui a résonné dans la cavité.

La méthode connue sous le nom de "tilt locking" [8,9] (verrouillage par désalignement) est similaire à la méthode Pound-Drever-Hall, mais utilise les propriétés modales de la cavité Fabry-Perot : le faisceau entrant est désaligné volontairement, créant sur la réflexion un mode 01 qui n'est pas résonnant. Ce dernier est utilisé comme référence de phase, et comparé à la lumière qui a résonné sur le mode TEM00 de la cavité. Une photodiode à deux quadrants est utilisée pour détecter le signal. L. Mondin vérifie dans sa thèse [33] que les performances de cette méthode sont similaires à celles de la technique Pound-Drever-Hall.

3.4 Cavité avec des miroirs non idéaux

Je montre ici qu'une cavité avec des miroirs ayant des défauts de planéité et une extension finie montre des pertes supplémentaires non prévues par la simple absorption des éléments diélectriques ou par la lumière diffusée.

3.4.1 Rugosité

Nous nommons par rugosité d'un miroir ses défauts de surface $z(x,y)$ avec des échelles de longueur telles que la lumière est diffusée à grands angles et sort de la cavité. Les miroirs considérés sont tels que $z(x,y) \ll \lambda$. Le défaut de phase du front d'onde après réflexion est $\exp(-i4\pi z/\lambda)$; il en résulte donc simplement des pertes scalaires $P_{\text{rugo.}}$ [34] :

$$P_{\text{rugo.}} = \left(\frac{4\pi z_{\text{rms}}}{\lambda}\right)^2. \quad (3.53)$$

Les pertes de rugosité sont valides lorsque l'échelle de longueur maximale des défauts de miroir est de l'ordre de $\lambda L/R$ [29, chap. "numerical methods"], où R est le diamètre des miroirs et L la longueur de la cavité.

L'état de surface n'est habituellement pas mesuré sur de très petites échelles. Les pertes de rugosité sont calculées à partir de la mesure de la fonction de distribution bidirectionnelle de la réflexion (BRDF), intégrée sur l'angle solide qui ne voit pas le miroir opposé au miroir considéré.

3.4.2 Défaut local

La prise en compte d'un défaut local nécessiterait la description précise de sa forme ou de sa fonction de distribution bidirectionnelle de la réflexion (BRDF).

Pour les miroirs de Virgo, la BRDF n'est habituellement mesurée pour chaque défaut local que pour un angle particulier de diffusion : les défauts locaux sont repérés, mais la quantité de lumière qu'ils diffusent n'est pas connue.

3.4.3 Effet de diaphragme

L'opérateur de pertes par effet de diaphragme $\mathbf{P}_{\text{diaph.}}(R)$ de rayon R sur le champ défini transversalement $\psi(x,y)$ à l'abscisse z se définit naturellement en coordonnées polaires par :

$$\mathbf{P}_{\text{diaph.}}\psi(r,\theta) = \begin{cases} \psi(r,\theta) & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r \geq R\ . \end{cases} \tag{3.54}$$

Si l'on considère un mode TEM00 dont la taille de col est w, centré sur un miroir cylindrique de rayon R, la perte scalaire est de

$$P_{\text{diaph.}} = \exp(-2R^2/w^2) \tag{3.55}$$

Si le rayon du revêtement du miroir est plus grand que 2.5 fois le rayon w d'un faisceau purement TEM00, alors les pertes par effet de diaphragme sont inférieures à 4 ppm.

3.4.4 Biréfringence

Les substrats des miroirs utilisés dans Virgo ont des pertes par biréfringence de 10^{-4} rad/cm. La perte relative de puissance est donc [35] $\sin^2(2\phi)\sin^2(\delta/2)$, où ϕ est l'angle du champ avec l'axe rapide de biréfringence du matériau et δ le déphasage de l'onde sur le chemin optique. Les pertes sont donc inférieures au ppm et négligeables.

3.4.5 Pertes par aberration modale

Le mode résonnant d'une cavité Fabry-Perot avec des miroirs ayant des défauts de surface n'est pas purement un TEM00. La fraction de puissance lumineuse envoyée sur des modes d'ordre élevé est appelée perte par aberration modale dans le projet LIGO [36,37].

3.4.6 Stabilité

Je considère ici le cas des défauts de surface dont la longueur d'onde est suffisamment grande pour que la lumière renvoyée par un miroir soit incidente sur l'autre miroir.

La définition usuelle de la stabilité [38] considère des miroirs parfaitement sphériques et de diamètres infinis : une cavité est stable si et seulement si il existe un mode TEM(m,n) dont les deux fronts d'onde à la position des deux miroirs sont identiques aux surfaces. Si les surfaces comportent des défauts de planéité, cela est alors impossible strictement. Autrement dit, si je définis l'opérateur $\mathbf{P}_{\mathrm{AR}}$ qui propage le front d'onde sur un aller-retour dans la cavité suivant l'axe z, la cavité est stable si et seulement si il existe un front d'onde propre $\psi_{\mathrm{eig.}}(x,y)$ et un complexe μ tels que

$$\mathbf{P}_{\mathrm{AR}}\psi_{\mathrm{eig.}}(x,y) = \mu\psi_{\mathrm{eig.}}(x,y)\ . \tag{3.56}$$

$\psi_{\mathrm{eig.}}(x,y)$ correspond de plus à un mode résonnant si μ est réel.

Dans les cas réels, il n'existe pas de front d'onde propre à l'opérateur $\mathbf{P}_{\mathrm{AR}}$; l'expérience nous montre quand même des modes dans une cavité Fabry-Perot concrète. Pour un faisceau entrant donné (forme de faisceau, alignement relatif aux miroirs), les modes sont alors définis par les maximums locaux de la puissance transmise en fonction du désaccord de la cavité.

Gain effectif

Soit ψ_{bras} un mode réel d'une cavité avec des miroirs avec des défauts de planéité. Si nous y appliquons l'opérateur $\mathbf{P}_{\mathrm{AR}}$, alors nous pouvons écrire qu'une partie du champ ne se superpose plus avec le faisceau résonnant :

$$\mathbf{P}_{\mathrm{AR}}\psi_{\mathrm{bras}} = r_1 r_2\ (x\psi_{\mathrm{bras}} + \psi_{\mathrm{bras},\perp}) \tag{3.57}$$

où r_1 et r_2 sont les réflectances en amplitude des miroirs d'entrée et de sortie de la cavité. La partie non résonnante du faisceau vérifie évidemment $< \psi_{\mathrm{bras}}|\psi_{\mathrm{bras},\perp} >= 0$. Les facteurs r_1 et r_2 tiennent compte des pertes scalaires (absorption, diffusion par rugosité). Définissons $P_{\mathrm{instab.}}$ la fraction de puissance qui va se transférer sur le mode non résonnant :

$$< \psi_{\mathrm{bras},\perp}|\psi_{\mathrm{bras},\perp} >= P_{\mathrm{instab.}} < \psi_{\mathrm{bras}}|\psi_{\mathrm{bras}} >\ . \tag{3.58}$$

Le champ $\mathbf{P}_{AR}\psi_{bras}/(r_1 r_2)$ a la même puissance que ψ_{bras} ; la valeur de la variable x dans l'équation 3.57 vérifie donc :

$$x^2 = 1 - P_{instab.} \ . \tag{3.59}$$

Nous supposons que $P_{instab.} \ll P_{AR}$. Nous avons une solution ψ_{bras} stationnaire, donc

$$\psi_{bras} = t_1 \psi_{in} + \mathbf{P}_{AR}\psi_{bras} \tag{3.60}$$

où ψ_{in} est le champ devant la cavité. Nous avons négligé ici la déformation du front d'onde qui traverse le substrat. En combinant les équations 3.57 et 3.60, il vient

$$t_1 \psi_{in} = \left(1 - r_1 r_2 (1 - \frac{1}{2} P_{instab.})\right) \psi_{bras} - r_1 r_2 \psi_{bras,\perp} \ . \tag{3.61}$$

En calculant la puissance de chacun des termes de cette dernière équation, on obtient le gain de recyclage effectif :

$$G_{FP,eff} = G_{FP,scal.} \left(1 - \left(\frac{\mathscr{F}}{\pi}\right)^2 P_{instab.}\right) \tag{3.62}$$

où $G_{FP,scal.}$ est le gain si l'on ne tient compte que des pertes scalaires.

Pertes d'instabilité

En identifiant les pertes dans l'équation 3.62 comme dans l'équation 3.26, nous voyons que l'instabilité de la cavité amène des pertes d'instabilité qui provoquent des erreurs qui varient comme le carré de la finesse, contrairement aux pertes scalaires qui font des erreurs linéaires.

Nous avons perdu en généralité par rapport aux pertes scalaires : les pertes dépendent des états de surfaces des miroirs et de la forme particulière du front d'onde entrant.

Nous pouvons redéfinir un critère de stabilité pour une cavité Fabry-Perot : une cavité est stable si $P_{instab.} \ll P_{AR}$, c'est-à-dire si les pertes d'instabilité ne contribuent pas significativement à la finesse.

Défaut d'adaptation de front d'onde d'instabilité

Définissons le couplage du faisceau résonnant avec le mode entrant [29] :

$$C(\psi_{bras}, \psi_{in}) = \frac{| < \psi_{bras} | \psi_{in} > |^2}{< \psi_{bras} | \psi_{bras} >< \psi_{in} | \psi_{in} >} \ . \tag{3.63}$$

En reprenant l'équation 3.61, il vient :

$$C(\psi_{bras}, \psi_{in}) = 1 - \left(\frac{\mathscr{F}}{\pi}\right)^2 P_{instab.} \ . \tag{3.64}$$

Même si le faisceau entrant a un col de faisceau bien positionné et de taille adaptée aux rayons de courbure, l'instabilité va déformer le faisceau résonnant, de sorte qu'une adaptation de forme de faisceau parfaite est impossible.

Notons que le défaut de couplage est proportionnel au carré de la finesse, contrairement à ce que nous avions observé pour des pertes scalaires.

3.4.7 Modèles informatiques

Deux types de modèles numériques rendent compte des effets de miroirs non idéaux. Le premier utilise une décomposition des faisceaux en ondes planes ; le deuxième une décomposition sur la base des modes d'Hermite-Gauss ou des modes de Laguerre-Gauss. La première méthode bénéficie d'une représentation plus précise, la seconde de temps de calculs plus rapides.

Propagation FFT

J.-Y. Vinet et M. Laval, du laboratoire ARTEMIS à Nice, ont mis au point le logiciel "DarkF" [39] qui calcule les fronts d'ondes de l'état stationnaire dans les longues cavités Fabry-Perot tout autant que dans la partie centrale de l'interféromètre, à partir des cartes de surfaces et des cartes de phase en transmission des miroirs mesurées par le laboratoire LMA à Lyon. Les définitions des opérateurs ici sont explicitées dans [40]. Le changement de signe de l'exponentielle dans la définition de la transformée de Fourier est adapté aux conventions que j'utilise (chap. 7.1).

L'opérateur propagation d'un front d'onde [39] à la longueur d'onde λ sur une distance L est défini par la succession d'opérateurs

$$\mathbf{P}_L = \mathrm{FFT}^{-1}\ \exp(-i\vec{p}^2 L\lambda/(4\pi) - i\phi)\ \mathrm{FFT} \tag{3.65}$$

où $\vec{p}$ est la variable conjuguée de (x, y) dans l'espace de Fourier. La longueur L est la longueur macroscopique de la cavité. ϕ est une variable d'ajustement pour verrouiller la cavité.

L'opérateur réflexion consiste à multiplier le front d'onde pixel par pixel par l'effet de retard des défauts de surface du miroir $\exp(-i4\pi z(x, y)/\lambda)$ [39]. Les retournements de carte sont soigneusement pris en compte.

L'opérateur propagation sur un aller-retour dans une cavité consiste en la succession d'une propagation sur la longueur L, une réflexion sur le miroir de fond, une propagation dans le sens inverse puis une réflexion sur le miroir d'entrée. La phase ϕ de la propagation sur la longueur L est ajustée de façon à ce que le coefficient μ de l'équation 3.56 soit réel. Numériquement, le champ stationnaire est deviné à partir du gain scalaire de la cavité. Il est ensuite ajusté par itérations successives de l'équation 3.56 jusqu'à ce que l'angle de μ soit plus petit qu'un seuil donné $\sim 10^{-9}$.

La dimension de la grille est calculée en fonction de la résolution pour éviter que la lumière diffractée soit repliée.

Le logiciel permet de "mesurer" les puissances, les couplages, les pertes effectives, etc.

Décomposition modale

V. Loriette, du laboratoire ESPCI, a écrit un programme qui décompose les faisceaux et les cartes de miroir sur une base de mode TEMmn. Les résultats sont comparés avec ceux de la simulation darkF.

V. Loriette a été le premier à remarquer que les défauts de surface amènent les modes TEMmn présents dans une cavité à se projeter les uns sur les autres. J'ai montré ici que ceci est également vrai pour le mode effectif qui résonne dans la cavité, en raison de l'instabilité de la cavité.

3.4.8 Perspectives sur les cavités non idéales

Les résultats numériques de la note technique sur les pertes effectives (chap. 5.3) semblent indiquer que les pertes dominantes dans les cavités kilométriques sont dues aux effets de l'aberration modale, c'est à dire aux défauts de planéité des miroirs. Le premier de ces effets est de la perte d'énergie lumineuse par diaphragme sur le contour des revêtements réfléchissants par la partie du front d'onde qui n'est pas adaptée au mode TEM00. Le deuxième effet est un défaut d'adaptation de forme de front d'onde du mode résonnant par rapport au mode devant la cavité.

Ces effets soulignent d'abord le besoin pour les cavités de l'interféromètre Virgo d'un système de correction de la courbure des miroirs d'entrée des grands bras pour adapter le front d'onde des bandes latérales. Ceci réduira la fraction stérile des bandes latérales.

L'étude des pertes à l'aide des modèles numériques reste à poursuivre. Il faut en particulier déterminer le rôle exact de l'instabilité telle que décrite en 3.4.6 et donner un modèle probant des pertes équivalentes pour la porteuse dans la cavité de recyclage.

Enfin, il faudra trouver comment spécifier les surfaces des miroirs pour atteindre un objectif donné de pertes sur un aller-retour hors transmittances des miroirs. Un compromis pourra alors être établi entre la finesse et les performances possibles de planéité par des techniques de polissage ou de revêtements correctifs de surface [41].

3.5 Réponse d'une cavité Fabry-Perot

3.5.1 Bruit de fréquence

Nous avons vu la fonction de transfert entre un bruit de fréquence et le signal Pound-Drever-Hall. Celle-ci, en ne tenant pas compte des accidents dus aux bandes latérales, s'écrit aussi

$$F_{\mathrm{PDH},\nu}(f_{\mathrm{mes}}) = -K_{\mathrm{ph}} P_0 m (1+\zeta) \frac{4\pi L}{c} \frac{\mathrm{sinc}(2\pi f_{\mathrm{mes}} L/c) \exp(-i2\pi f_{\mathrm{mes}} L/c)}{1 - r_1 r_2 \exp(-i2\pi f_{\mathrm{mes}} L/c)} \,. \tag{3.66}$$

3.5.2 Déplacement d'un miroir

J'expose ici brièvement la méthode de calcul de la fonction de transfert entre un mouvement du miroir de fond d'une cavité et le signal Pound-Drever-Hall développée par J.-Y. Vinet en [29, chap. "theory of GW interferometers, the A133 algebra"]. Je complète en établissant la fonction de transfert sous forme analytique et sa réponse à l'intervalle spectral libre.

Le miroir de fond de la cavité est déplacé d'une grandeur $x(t) = x_0 \sin(2\pi f_{\mathrm{mes}} t)$ où $x_0 \ll \lambda$. Une onde lumineuse monochromatique incidente sur la cavité crée des ondes lumineuses dans la cavité ou en réflexion de la forme

$$A(t) = \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \exp(i2\pi f_{\mathrm{mes}} t) - \frac{1}{2} A_2 \exp(-i2\pi f_{\mathrm{mes}} t) \right) \exp(i2\pi \nu t) \tag{3.67}$$

où les coefficients A_1 et A_2 décrivant les amplitudes des bandes latérales sont au premier ordre en x_0/λ par rapport à A_0. Nous écrivons donc toute onde sous forme d'un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ de trois nombres scalaires décrivant les amplitudes de la porteuse, de la bande latérale supérieure à $\nu_0 + f_{\mathrm{mes}}$ et de la bande latérale inférieure à $\nu_0 - f_{\mathrm{mes}}$:

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \,. \tag{3.68}$$

La réflexion sur un miroir mobile a pour équation $\psi_{\mathrm{reflechi}}(t) = r\psi_{\mathrm{incident}}(t - x/c)$. L'opérateur réflexion associé à la description vectorielle $\vec{\mathbf{A}}$ est alors une matrice 3×3, en négligeant les termes du second ordre en x_0/λ :

$$\mathbf{M}_{\mathrm{R}} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\xi_0 & 1 & 0 \\ -\xi_0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

où $\xi_0 = 4\pi\nu x_0/c$. L'opérateur propagation sur une longueur L est une simple matrice diagonale :

$$\mathbf{P}_\mathrm{L} = \exp(-2\pi\nu L/c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi f_\mathrm{mes} L/c) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2\pi f_\mathrm{mes} L/c) \end{pmatrix} . \tag{3.70}$$

L'ensemble des matrices 3×3 où les termes non nuls sont ceux de la première colonne et les éléments diagonaux forme une algèbre [29]. Nous pouvons ansi calculer la matrice correspondant à un aller-retour, puis la matrice qui décrit l'onde résonnante dans une cavité par rapport à l'onde incidente, et enfin la matrice qui décrit l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente sur la cavité :

$$\mathbf{M}_\mathrm{ref} = \begin{pmatrix} r(\nu) & 0 & 0 \\ -\xi_0 r_2 \exp(-i(\nu + f_\mathrm{mes}/2)4\pi L/c) g(\nu) g(\nu + f_\mathrm{mes}) & r(\nu + f_\mathrm{mes}) & 0 \\ -\xi_0 r_2 \exp(-i(\nu - f_\mathrm{mes}/2)4\pi L/c) g(\nu) g(\nu - f_\mathrm{mes}) & 0 & r(\nu - f_\mathrm{mes}) \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

où $r(f)$ est défini par l'équation 3.29 et

$$g(f) = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 \exp(-i4\pi f L/c)} . \tag{3.72}$$

Cette matrice permet de calculer les bandes latérales créées par le mouvement du miroir autour de la porteuse résonnante ($\nu = \nu_0$) et autour des bandes latérales ($\nu = \nu_0 \pm f_\mathrm{mod}$). Pour calculer le signal Pound-Drever-Hall, il faut tenir compte des 9 composantes fréquentielles du champ réfléchi. La fonction de transfert entre le mouvement du miroir d'extrémité et le signal Pound-Drever-Hall vaut alors, hors accidents dus aux bandes latérales,

$$F_\mathrm{PDH,\mathit{l}2}(f_\mathrm{mes}) = K_\mathrm{ph} P_0 m \frac{4\pi}{\lambda}(1+\zeta) \frac{\exp(-i2\pi f_\mathrm{mes} L/c)}{1 - r_1 r_2 \exp(-i2\pi f_\mathrm{mes} L/c)} ; \tag{3.73}$$

cela se simplifie, pour les fréquences petites devant l'intervalle spectral libre :

$$F_\mathrm{PDH,\mathit{l}2}(f_\mathrm{mes}) = K_\mathrm{ph} P_0 m \frac{1}{l_p} \frac{1+\zeta}{1 + i f_\mathrm{mes}/f_p} \exp(-i2\pi L f_\mathrm{mes}/c) \tag{3.74}$$

où nous avons défini l'équivalent du pôle de la cavité en longueur

$$l_p = \frac{\lambda/2}{2\mathscr{F}} . \tag{3.75}$$

L'équation est très similaire à l'équation 3.42. Je vérifie donc ici qu'un mouvement relatif $\delta l/L$ d'un miroir produit un effet égal à celui d'un déplacement relatif de fréquence $\delta\nu/\nu_0$ pour tous les mouvements de fréquence inférieure à l'intervalle spectral libre. Ceci nous permettra de vérifier les calibrations des fonctions de transfert mesurées.

On vérifie que pour toutes les fréquences le rapport des fonctions de transfert dépendant d'un bruit de fréquence et d'un mouvement du miroir d'extrémité est

$$\frac{F_{\mathrm{PDH},\nu}(f)}{F_{\mathrm{PDH},l2}(f)} = -\frac{L}{\nu_0}\frac{\sin(\pi f/\mathrm{ISL})}{\pi f/\mathrm{ISL}}\,, \tag{3.76}$$

retrouvant ainsi le résultat énoncé par [42]. On vérifie numériquement que ceci est vrai également aux fréquences des accidents dus aux bandes latérales.

J.-Y. Vinet et J.-A. Marck ont écrit le programme JAJY qui calcule les fonctions de transfert entre un mouvement d'un ou plusieurs miroirs et le signal d'une photodiode au choix de l'interféromètre. J'ai finalisé ce logiciel, puis l'ai appliqué au cas d'une cavité Fabry-Perot simple. On obtient alors la figure 3.4.

Pour un mouvement de fréquence autour de ISL, nous avons, au contraire d'un bruit de fréquence, une surtension dans la fonction de transfert : la cavité a une réponse pour les fréquences autour des intervalles spectraux libres identique à la réponse en basse fréquence. Ceci a été observé dans les cavités Fabry-Perot de 4 km de l'instrument LIGO [43]. Si l'on donne un mouvement d'amplitude unité à chacun des miroirs en phase (longueur fixe) ou de demi-unité en opposition de phase, on obtient la figure 3.5.

Nous observons que pour un mouvement différentiel, il n'y a surtension que pour les fréquences harmoniques paires de l'intervalle spectral libre. Pour un mouvement commun, nous notons une pente proportionnelle à la fréquence pour $f < 500$ Hz : cela correspond bien sûr à l'effet Doppler. Son effet est filtré par le pôle de la cavité au-dessus de 500 Hz. Pour un mouvement commun, il n'y a surtension que pour les fréquences harmoniques impaires de l'intervalle spectral libre.

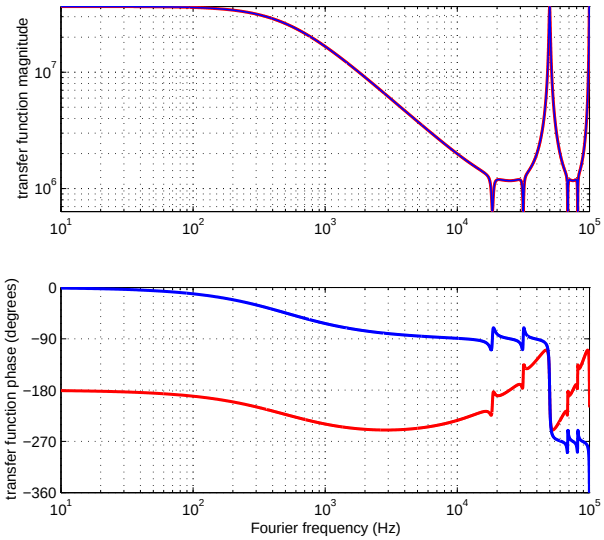


FIG. 3.4 – Fonction de transfert entre le mouvement d'un miroir et le signal Pound-Drever Hall, pour une cavité Fabry-Perot de finesse 50, de longueur 3 km, avec un miroir à réflexion maximale en extrémité. Le laser incident a une puissance de 1 W, la photodiode de détection en réflexion de la cavité une réponse de 1 V/W. La fréquence de modulation est 18 kHz et l'indice de modulation 0.1. La courbe rouge correspond à un mouvement du miroir d'entrée, la courbe bleue à un déplacement du miroir de fond. Le laser est supposé parfaitement adapté et aligné avec le mode résonnant. La courbe est un filtre passe-bas pour les fréquences petites devant l'intervalle spectral libre. L'amplitude est en V/m.

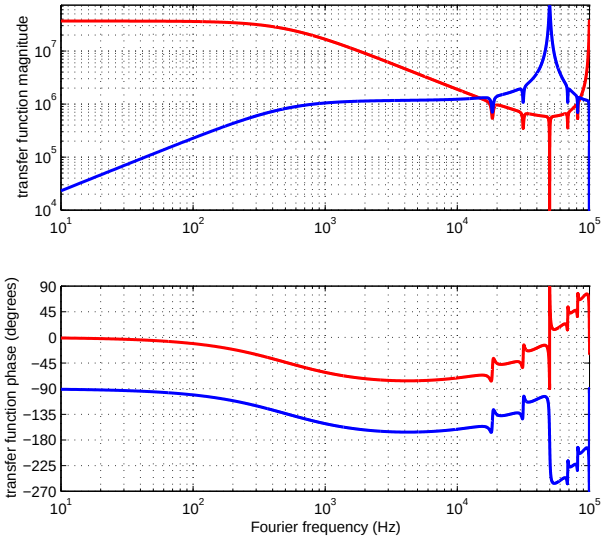


FIG. 3.5 – Fonction de transfert entre un mouvement de deux miroirs et le signal Pound-Drever Hall, pour une cavité Fabry-Perot avec des paramètres identiques à la figure précédente. La courbe rouge correspond à un mouvement différentiel unitaire, tandis que la courbe bleue correspond à un déplacement commun des deux miroirs. L'amplitude est en V/m.

3.5.3 Onde gravitationnelle

J'expose ici la réponse d'une cavité Fabry-Perot à une onde gravitationnelle, en résumant les résultats exposés dans [29, chap. "optics in a wave space time"], eux-mêmes isus de [44], et je les étends pour donner une formule analytique de la réponse d'une cavité à une onde gravitationnelle.

Nous considérons une source d'onde gravitationnelle pointée par le vecteur unitaire $\vec{w}$ et des photons se propageant selon l'axe $\vec{n}$; $\vec{r_M}$ donne les coordonnées du point moyen entre les points de départ et d'arrivée. Je nomme "+" la polarisation dont un des axes est perpendiculaire $\vec{w}$ dans le plan $(\vec{n}, \vec{w})$; la polarisation "×" ne contribue pas dans ce cas au trajet des photons. Je note γ l'angle d'incidence de l'onde par rapport à la normale au trajet soit $\vec{w}.\vec{n} = \sin(\gamma)$. Si l'onde incidente + a une amplitude $h_0 \cos(2\pi f_{\text{mes}} t)$ (dans le système d'axes de la source), alors le temps de parcours du photon t_{L} sur un trajet aller simple est :

$$t_{\text{L}} = \frac{L}{c}\left(1 + \frac{1}{2i}\frac{H}{2}\mu \exp(i2\pi f_{\text{mes}} t) - \frac{1}{2i}\frac{H}{2}\mu^* \exp(-i2\pi f_{\text{mes}} t)\right) \tag{3.77}$$

où $H = h_0 \cos^2\gamma$ est l'amplitude de l'onde gravitationnelle projetée dans le repère du trajet des photons et où

$$\mu = \exp(-i\pi f_{\text{mes}} L/c)\text{sinc}\left[(1-\sin\gamma)\pi f_{\text{mes}} L/c\right]\exp(-i2\pi f_{\text{mes}}\vec{w}.\vec{r_M}/c) \tag{3.78}$$

est le terme multiplicateur de $H/2$ dans la fonction de transfert entre l'onde gravitationnelle et le retard relatif du photon ; $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Nous pouvons encore utiliser l'algèbre A133. Les termes A_1 et A_2 sont du permier ordre en h par rapport à A_0. Dans ce cas les matrices de réflexion sur les miroirs sont diagonales tandis que la matrice de propagation sur un aller fait intervenir l'onde gravitationnelle :

$$\mathbf{P}_{\text{L}} = \exp(-i2\pi\nu L/c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2\pi\nu\frac{L}{c}\frac{H}{2}\mu & \exp(-2\pi f_{\text{mes}} L/c) & 0 \\ -2\pi\nu\frac{L}{c}\frac{H}{2}\mu^* & 0 & \exp(2\pi f_{\text{mes}} L/c)\end{pmatrix}. \tag{3.79}$$

Le calcul de la matrice $\mathbf{M}_{\text{ref}}$ est similaire à celui du cas du déplacement du miroir de fond. Nous trouvons alors la fonction de transfert entre l'onde gravitationnelle et le signal Pound-Drever-Hall, hors accidents dus à la résonance des bandes latérales :

$$F_{\text{PDH},h}(f_{\text{mes}}) = K_{\text{ph}} P_0 m \frac{4\pi L}{\lambda}\frac{F_{\text{lobe}}(\gamma)}{2}(1+\zeta)\frac{F_{\text{retard}}(\pi f_{\text{mes}} L/c, \gamma)}{1 - r_1 r_2 \exp(-i2\pi f_{\text{mes}} L/c)} \tag{3.80}$$

où

$$F_{\text{lobe}}(\gamma) = \cos^2\gamma \tag{3.81}$$

est une fonction qui définit le lobe d'antenne, du à la projection de l'onde dans le repère de la cavité et

$$F_{\text{retard}}(\pi f_{\text{mes}} L/c, \gamma) = \frac{\exp(-i\pi f_{\text{mes}} L/c)}{2} \exp(-i2\pi f_{\text{mes}} \vec{w}.\vec{r_M}/c) \left(\text{sinc}(\pi f_{\text{mes}} L/c(1 - sin\gamma)) + \text{sinc}(\pi f_{\text{mes}} L/c(1 + sin\gamma)) \exp(-i2\pi f_{\text{mes}} L/c) \right) . \quad (3.82)$$

Si nous analysons une onde perpendiculaire ($\gamma = 0$), et si nous choisissons l'origine alignée avec les points de départ et d'arrivée du photon, alors

$$F_{\text{retard}}(\pi f_{\text{mes}} L/c, \gamma) = \exp(-i2\pi f_{\text{mes}} L/c)\text{sinc}(2\pi f_{\text{mes}} L/c) . \quad (3.83)$$

La fonction de transfert se simplifie alors, pour les fréquences petites devant l'intervalle spectral libre :

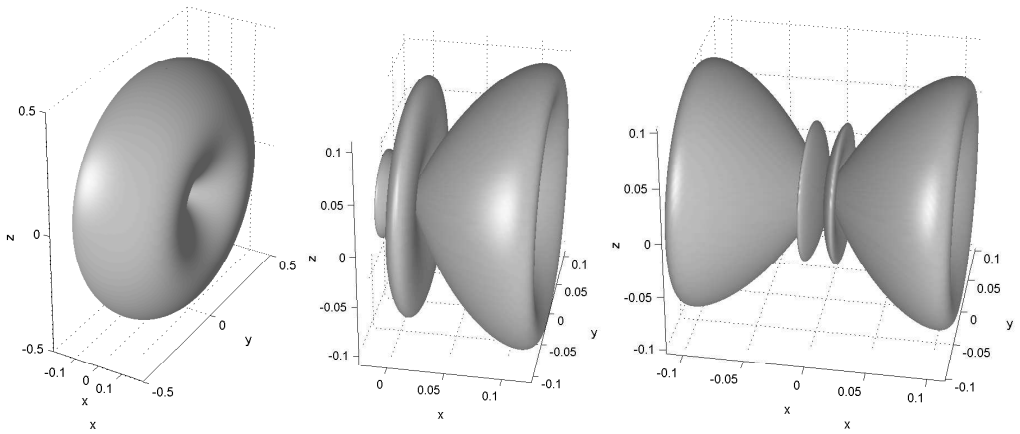
$$F_{\text{PDH},h}(f_{\text{mes}}) = K_{\text{ph}} P_0 m \frac{\nu_0}{2f_P} \frac{1+\zeta}{1 + if_{\text{mes}}/f_P} \exp(-i2\pi L f_{\text{mes}}/c) \quad (3.84)$$

Nous voyons que la sensibilité (la pente du signal d'erreur) d'une cavité Fabry-Perot à une onde gravitationnelle est proportionnelle au coefficient de qualité de sa résonance $\nu_0/(2f_P)$: nous pourrions avoir la même sensibilité avec une longueur de 3000 m et une finesse de 50 qu'avec une longueur de 0.3 m et une finesse de 500 000. Les détecteurs terrestres choisissent la première solution pour réduire la contribution du mouvement des miroirs par le bruit sismique (chap. 3.6.2) et par le bruit thermique (chap. 3.6.7).

Dans le cas d'une onde d'incidence normale, le rapport des fonctions de transfert dépendant d'un bruit de fréquence du laser et dépendant de l'onde gravitationnelle vaut $2/\nu_0$. L'équivalence $\delta l/L = h/2$, utilisée pour calibrer le signal dans Virgo, est valide pour les fréquences petites devant l'intervalle spectral libre.

La fonction lobe d'antenne pour des photons se déplaçant entre deux points distants de 3000 m est représentée en figure 3.6.

Le calcul de la fonction lobe d'antenne pour un interféromètre de Michelson à bras orthogonaux suivant $(0x)$ et (Oy) suit la même procédure. La direction de la source est indiquée par deux rotations successives, la rotation ϕ dans le plan (Oxy) et l'inclinaison θ par rapport à la verticale. Les ondes h_+ et $h_\times$ sont définies dans ce nouveau repère. La fonction lobe d'antenne pour des fréquences très petites devant $c/(2L)$ est alors la somme quadratique des fonctions lobe d'antenne pour l'onde h_+ $(1 + \cos^2\theta)\cos(2\phi)$ et pour l'onde $h_\times$ $2\cos(\theta)\sin(2\phi)$. Ceci donne la figure 3.7.

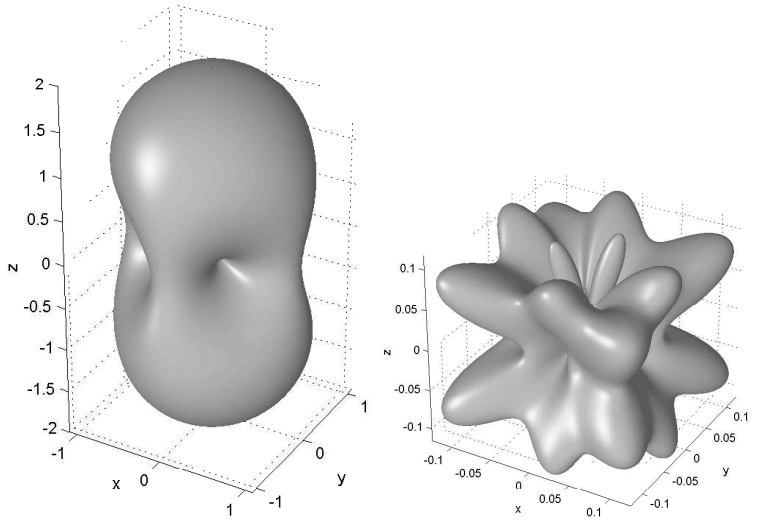


(a) aller simple, fréquences très petites devant $c/(2L)$; pour un aller-retour, la forme est identique et l'amplitude doublée

(b) aller simple, fréquence égale à $c/(2L)$

(c) aller-retour, fréquence égale à $c/(2L)$

FIG. 3.6 – Fonction lobe d'antenne pour des photons se déplaçant sur un axe x.



(a) fréquences très petites devant $c/(2L)$

(b) fréquence égale à $c/(2L)$

FIG. 3.7 – Fonction lobe d'antenne pour un interféromètre de Michelson réglé sur la frange noire.

La sensibilité moyenne d'un interféromètre de Michelson, lorsqu'on moyenne sur les orientations et les polarisations, est réduite par un facteur 1 .68 pour les basses fréquences par rapport à l'orientation optimale. La sensibilité optimale à $c/(2L)$, où $L =$

3000 m, est 5 .41 fois plus petite que la sensibilité optimale pour les fréquences petites devant $c/(2L)$. En moyennant sur les orientations possibles par rapport à la source, la sensibilité à $c/(2L)$ est 11.9 fois plus petite qu'en basses fréquences.

En toute rigueur, pour estimer l'horizon auquel est visible une source, c'est à dire la distance à laquelle on obtient un rapport signal à bruit donné, il faut aussi moyenner sur les orientations du lobe d'antenne en émission de la source.

3.5.4 Régimes transitoires

Si le balayage de la résonance d'une cavité est effectué trop rapidement, alors la courbe mesurée n'est plus celle de l'équation 3.37, mais elle devient asymétrique [45, 46]. Les asymétries permettent d'évaluer le temps de stockage et donc la finesse par ajustement avec les courbes prédites par un modèle numérique.

3.6 Bruits limitant la résolution d'une cavité

Je présente ici un ensemble des différentes sources de bruits pouvant affecter une mesure très sensible sur une cavité Fabry-Perot. Il ne s'agit pas d'expliciter en détail chaque source de bruit, mais de donner le phénomène physique et de renvoyer aux publications. Le cas du bruit de fréquence du laser qui interroge la cavité est traité dans la partie II.

3.6.1 Bruit des fluctuations de pression des gaz

La loi de Lorentz donne la relation entre l'indice d'un milieu et le nombre de dipôles polarisables dans le milieu. Elle s'exprime comme [47] :

$$\frac{4\pi}{3}\rho_i\alpha_i = \frac{n_i^2-1}{n_i^2+2} \tag{3.85}$$

où ρ_i est la densité de molécules de type i, α_i est la polarisabilité de la molécule i, n_i l'indice du milieu du aux particules de type i. Le seuil de détection d'une onde gravitationnelle avec une cavité Fabry-Perot du aux molécules de type i est alors [48]

$$\tilde{h}_i \sim \sqrt{2\frac{(n_i-2)^2}{\rho_i}\frac{D}{v_i}\mathrm{sinc}(2\pi f D/v_i)} \tag{3.86}$$

où D est le diamètre du faisceau et v_i la vitesse thermique des molécules de type i. Le seuil de détection pour une collection de gaz de types différents se fait par addition quadratique de seuil pour chaque type de molécule. Un vide meilleur que 10^{-6} mbar est suffisant pour garantir une densité spectrale de résolution de $10^{-23}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$.

3.6.2 Bruit sismique

Un miroir posé sur le sol reproduit le mouvement de ce dernier ($\sim 10^{-7}\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$) composé par la fonction de transfert de son support. L'insertion d'un isolateur sismique composé de pendules en cascade réduit ce niveau pour les fréquences plus grandes que les fréquences de résonance des pendules. L'ensemble d'isolation sismique de Virgo se nomme "super-atténuateur" [49]. Chaque pendule ajoute un filtre passe-bas du deuxième ordre : la fonction de transfert entre les déplacements horizontaux du haut et du bas d'un étage de pendule est

$$F_{\text{pendule}}(f) = \frac{1}{1 - (\frac{f}{f_0})^2 + i\frac{f}{f_0 Q}} \tag{3.87}$$

où $f_0 = (1/(2\pi))\sqrt{g/L_{\text{pend}}}$ est la fréquence de résonance du pendule, avec $g = 9.8$ m.s^{-2} et L_{pend} est la longueur du pendule ; Q est le coefficient de qualité de cette résonance.

Les suspensions de Virgo atténuent les déplacements verticaux par des résonateurs à lame dont la fréquence de résonance est réduite à l'aide de ressorts magnétiques à raideur effective négative [49].

Nous pouvons aisément vérifier que pour les fréquences supérieures aux fréquences des pendules, un miroir suspendu a une accélération proportionnelle à la force exercée sur la surface du miroir : le miroir est une masse "libre".

3.6.3 Bruits de contrôle

Avec une cavité à miroirs suspendus, un champ électrostatique applique une force sur un miroir diélectrique [50] ; une force magnétique applique une force sur des aimants collés au miroir. Des bruits dans le signal de contrôle, bruits de numérisation, bruits reportés de boucles d'asservissements annexes vont également détériorer la mesure de fluctuations de longueur. Les renversements de domaine dans les aimants [51] provoquent également un bruit. Pour réduire les effets de ces sources de bruit, il faut diminuer l'excursion nécessaire de la force de correction.

3.6.4 Effets Doppler et Sagnac

Un mouvement relatif du laser et de la cavité d'amplitude $\tilde{x}$ produit un signal $\tilde{s}$ par effet Doppler, comme nous le montre la figure 3.5, d'amplitude

$$\tilde{s}(f) = K_{\text{ph}} P_0 m (1+\zeta) \frac{\nu_0}{f_P} \frac{2\pi f \tilde{x}}{c} \frac{1}{1 + i f_{\text{mes}}/f_P} \,. \tag{3.88}$$

Si la cavité est triangulaire, de surface A, alors une densité spectrale de mouvement de rotation $\tilde{\omega}$ de la cavité produit un bruit de phase par effet Sagnac d'amplitude $2\pi\nu_0 2A\tilde{\omega}/c^2$ par rapport au faisceau incident.

3.6.5 Bruit de déformation pour les cavités rigides

Une cavité dont la distance entre les miroirs est définie par une cale d'épaisseur se déforme lorsque son support est soumis à des rotations ou une accélération [52]. Le bruit d'accélération produit un changement de longueur $\sim a\rho_m L/E$, où a est l'accélération, ρ_m est la densité du matériau, E le module d'Young. La sensibilité au bruit d'accélération est couramment de l'ordre de plusieurs dizaines de kHz/(m.s^{-2}). Une conception adéquate des points de suspension réduit la sensibilité à l'accélération [53] ; une optimisation la réduit même à moins de 1 kHz/$\sqrt{\text{Hz}}$/(m.s^{-2}) [54].

3.6.6 Bruit de dérive

Lorsqu'on considère des mouvements à long terme (au-delà de la dizaine de secondes), le mouvement des cavités suspendues est dominé par les effets de marées. Le mouvement relatif est de l'ordre de 10^{-8} sur une heure [55]. Pour les cavités rigides, le fluage de la cale d'espacement et les dérives thermiques dominent. Pour les cavités rigides à température ambiante, l'ordre de grandeur de la dérive relative est de 10^{-13} pour quelques secondes de temps d'intégration [56]. Pour les cavités rigides cryogéniques, la dérive est constante, de l'ordre de 10^{-13} par jour, jusqu'à des périodes de l'ordre de plusieurs milliers de jours [57].

3.6.7 Bruit thermique

Le bruit thermique est la mise en mouvement des degrés de liberté des solides à l'équilibre thermique avec leur environnement : le théorème fluctuation-dissipation donne l'amplitude du mouvement en fonction de l'angle de pertes des ondes acoustiques $\phi(f)$, de la température et de l'impédance mécanique [58]. Plus l'angle de dissipation ϕ est petit, plus l'énergie sera concentrée dans des résonances étroites. La densité spectrale de résolution sera alors excellente, en dehors de ces résonances de mesure nulle. Pour un solide, le bruit thermique de position pour des fréquences plus petites que la première fréquence de résonance est ainsi, dans un modèle de pertes internes [59] :

$$\tilde{x}^2(f) = 4k_B T \sum_{n\text{modes}} \frac{\phi_d}{m_{n,\text{eff}}(2\pi)^3 f f_n^2} \tag{3.89}$$

où k_B est la constante de Boltzmann, T la température, ϕ_d l'angle de dissipation, $m_{n,\text{eff}}$ la masse effective du mode n dépendant du recouvrement du mode avec le faisceau qui

l'interroge et f_n sa fréquence de résonance.

La dissipation est due à différents processus dans les matériaux [59]. Celui le plus fréquemment considéré est la thermo-élasticité [60–62] puisqu'il fournit une limite physique infranchissable. La déformation d'un solide provoque des gradients de température qui peuvent se dissiper avant retour du solide dans sa position initiale [29]. L'angle de pertes varie en fonction de la fréquence par une équation de la forme

$$\phi_{d,\text{anelastique}}(f) = \phi_{d,0}\frac{f f_0}{f^2 + f_0^2} \tag{3.90}$$

où f_0 est de l'ordre de l'inverse du temps caractéristique nécessaire à la chaleur pour traverser la plus petite dimension du solide, tandis que $\phi_{d,0}$ dépend de la température, du coefficient de dilatation, du module d'Young, de la capacité calorifique et de la densité.

Pour un miroir cylindrique, il est possible de mener le calcul en évaluant les modes résonnants [63], puis en affectant une énergie $(1/2)k_BT$ à chacun de ces modes [64,65]. Il est également possible de calculer la déformation du miroir soumis à une pression ayant le même profil que l'intensité du faisceau [66]. Les résultats pour un miroir cylindrique sont alors les mêmes [67].

Pour des miroirs suspendus, le bruit thermique du pendule lui-même doit être pris en compte [59].

Pour les cavités rigides, nous devons aussi considérer le bruit thermique de la cale d'espacement [68].

La contribution la plus importante du bruit thermique vient des pertes acoustiques dans les revêtements réfléchissants des miroirs, particulièrement dans les couches minces d'indice élevé. L'angle de pertes effectif du faisceau qui interroge la surface du miroir est alors

$$\phi_{d,\text{eff}} \approx \phi_s + \frac{E_c}{E_s}\phi_c \tag{3.91}$$

où ϕ_s est l'angle de pertes du substrat du miroir, ϕ_c l'angle de pertes du revêtement réfléchissant et $\frac{E_c}{E_s}$ le rapport des énergies de déformation emmagasinées dans le revêtement et dans le substrat. Ce dernier rapport fait dominer le bruit thermique du revêtement sur celui du substrat, un substrat nu pouvant donner un angle de pertes de 2×10^{-8} [69]. L'angle de pertes des couches d'indice élevé en Ta_20_5, de l'ordre de quelques 4×10^{-4}, contribuent principalement [70], indépendamment de la température [71]. L'ajout d'un dopant a récemment réduit cet angle par un facteur 2, ce qui réduit $\phi_{d,\text{eff}}$ par un facteur 2.7 [72]. Les pertes thermoélastiques [73] semblent être encore négligeables.

La mesure expérimentale du bruit thermique hors résonance, dominée par le bruit des revêtements des miroirs, a été faite récemment pour les cavités rigides [56]. Les meilleurs résultats ont été obtenus pour des cavités en céramique à coefficient de dilatation réduit (ULE, de Corning) : les meilleures performances sont alors une stabilité relative (écart type d'Allan) sur un temps de 1 seconde de 4×10^{-16} [52] ou encore de 1×10^{-15} [74].

Pour les cavités à miroirs suspendus, des équipes au Japon [75], aux États-Unis [76] et à Paris [77] ont mesuré le bruit thermique hors résonance. Elles ont vérifié la dominance du bruit thermique des revêtements des miroirs sur les autres composantes de bruit thermique.

La réduction de la résolution des cavités limitées par le bruit thermique suit plusieurs voies : l'amélioration de l'angle de pertes acoustiques dans les revêtements, particulièrement les couches de haut indice, sans dégradation des autres propriétés optiques ; l'utilisation de faisceaux lasers plus larges et donc moins intenses (faisceaux "plats" ou modes gaussiens d'ordre élevé) qui moyennent mieux la déformation du miroir [78,79] ; le refroidissement des miroirs à des températures cryogéniques [20] ; de façon plus improbable, l'utilisation de pièces diélectriques sans revêtement réfléchissant [80]. Le bruit thermique des suspensions est réduit par l'utilisation de suspensions monolithiques [81].

3.6.8 Bruit de photons

Si une puissance lumineuse continue P_{DC} tombe sur une photodiode, le flux de photo-électrons détectés est $\eta P_{\mathrm{DC}}/\mathrm{h_p}\nu$. La statistique des arrivées des photo-électrons suivant une loi de Poisson, et les arrivées n'étant pas corrélées, la densité spectrale linéaire monolatérale du courant détecté sur la voie continue vaut

$$\tilde{I}_{\mathrm{DC}} = \frac{e^-}{\mathrm{h_p}\nu}\sqrt{2\eta P_{\mathrm{DC}}\mathrm{h_p}\nu} = \sqrt{2I_{\mathrm{DC}}e^-}\ . \tag{3.92}$$

L'article [82] et le paragraphe [29, chap. "Modulation... , quantum noise"] montrent que, sur la voie démodulée qui donne le signal Pound-Drever-Hall, il faut tenir compte de la non-stationnarité des bandes latérales dans leur contribution au bruit de photons :

$$\tilde{V}_{\mathrm{demod}} = K_{\mathrm{ph}}P_0\sqrt{\frac{\mathrm{h_p}\nu}{\eta P_0}\left(\zeta^2 + \frac{m^2}{2}(1+\frac{1}{2}\cos(2\xi))\right)} \tag{3.93}$$

où ξ est la phase de l'onde démodulante par rapport à l'onde qui produit la modulation de phase. Dans cette formule, on a supposé que toute la lumière réfléchie est collectée. Pour un signal Pound-Drever-Hall, le signal de démodulation est en phase avec la modulation de phase, soit $\xi = 0$. Le calcul effectué ici du bruit de photons fait l'hypothèse que l'indice de modulation est tel que $m \ll 1$, de sorte que seules les bandes latérales d'ordre un sont considérées. Nous avons supposé également que le courant de l'onde démodulante est grand devant le signal de sorte que ses fluctuations statistiques sont négligées.

La densité spectrale de résolution, en $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, vaut donc

$$\tilde{\rho}(f) = \frac{\tilde{V}_{\mathrm{demod}}}{|F_{\mathrm{PDH},\nu}(f)|}\ . \tag{3.94}$$

Notons que la puissance détectée vaut, en fonction de la puissance incidente, $P_{\mathrm{DC}} = \zeta^2 P_0$, seulement si ζ n'est pas trop proche de zéro : dans la pratique, lorsque le couplage est presque optimal, la puissance détectée est celle de la lumière dont le front d'onde n'est pas adapté avec la lumière résonnante. Dans le cas d'un sur-couplage fort ($\zeta \sim 1$), la densité spectrale de résolution vaut :

$$\tilde{\rho}(f) = \frac{1}{\sqrt{\eta\, n_{\mathrm{ph}}}} \frac{f_P}{2} \sqrt{1 + (f/f_P)^2} \tag{3.95}$$

où n_{ph} est le nombre de photons par seconde incidents sur la cavité. Une résolution minimale implique donc une forte puissance lumineuse, une bonne efficacité quantique et un pôle de cavité le plus petit possible. Par exemple, avec $P_0 = 1$ mW, $\zeta \approx 1$, $f_P = 500$ Hz, $\eta \sim 0.9$, la densité spectrale de résolution, pour les fréquences d'analyse plus petites que 500 Hz, vaut 3.6×10^{-6} Hz$/\sqrt{\mathrm{Hz}}$.

Si l'indice de modulation n'est pas très petit, il faut remplacer m dans les équations de sensibilité telles que 3.42 par $2J_0(m)J_1(m)$, où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel. Dans les équations de niveau de bruit telles que 3.93, $m^2/4$ se remplace $J_1^2(m)$ et le terme $J_0^2(m)$ doit apparaître devant le terme qui donne la contribution de la porteuse. La valeur optimale de m pour diminuer la densité spectrale de résolution doit chercher à maximiser le facteur

$$\frac{J_0(m)J_1(m)}{\sqrt{\zeta^2 J_0^2(m) + 3J_1^2(m)}}\,; \tag{3.96}$$

cela donne $m = 1.12$ si $\zeta \sim 1$.

Le choix de la finesse (de son pôle en fait) se fait de façon à ce que le bruit d'obscurité de la photodiode ne domine pas par rapport aux autres bruits intrinsèques à la cavité. Les pertes doivent alors rester petites, de façon à ne pas dégrader le facteur de couplage $1 + \zeta = 2T_1/P_{\mathrm{AR}}$ qui doit rester dans l'intervalle 1–2 pour avoir une sensibilité optimale.

Notons qu'avec la formule 1.5 le point idéal serait de distribuer la puissance également sur la lumière résonnante et sur la lumière non résonnante. La technique de modulation de phase par un sinus ne le permet pas ; l'énergie serait distribuée alors sur les harmoniques d'ordre élevé.

La résolution peut être améliorée en changeant la statistique des photons, c'est à dire en utilisant des états compressés de lumière [83], pourvu que les pertes soient de l'ordre de 1% [84].

3.6.9 Bruit de puissance

Détection continue à flanc de frange

La façon la plus simple expérimentalement pour mesurer une variation de longueur d'une cavité Fabry-Perot serait de regarder les fluctuations de puissance transmise lorsque

la cavité a été placée à flanc de frange.

En reprenant l'équation 3.19, nous voyons que le signal $s(t)$ aurait alors la forme

$$s(t) = \frac{T_0 P_0}{2}\left(1 - \frac{\delta L(t)}{L_p}\right) \tag{3.97}$$

où T_0 est la transmittance à résonance, P_0 la puissance du laser devant la cavité, $L_p = \lambda/2/\mathscr{F}$ le pôle de la cavité. Il apparaît immédiatement que des fluctuations de puissance du laser $\tilde{P}$ limiteront la résolution à $\tilde{L} = L_p\tilde{P}/P_0$.

Avec une stabilisation de puissance relative effective à 3×10^{-9}, comme celle mesurée hors-boucle par [85], il est possible de diviser le pôle de la cavité que par ce nombre, ce qui est tout à fait acceptable comme performance de résolution, moyennant une grande finesse ou une cavité longue. Il faut garantir que le couplage défini dans l'équation 3.50 ait également la même stabilité que la puissance, ce qui pose une contrainte sur les éléments $(\theta/\theta_d)^2$, etc. identiques à celle sur la stabilité relative de puissance. De même, il faut que la référence de tension ait une stabilité relative meilleure que celle de la stabilité de puissance.

Notons que l'écart à la résonance $L_{\text{écart}} = 1/\sqrt{3}L_p$ de la courbe de transmission est un point d'inflexion ; il existe quand même une dépendance cubique puisque la plage d'accrochage n'est pas infinie (chap. 3.2.4).

Détection Pound-Drever-Hall

La méthode Pound-Drever-Hall est plus efficace pour s'affranchir du bruit de puissance, puisque celui-ci ne se couple qu'avec l'écart statique (ou d'amplitude faible) avec la résonance, comme le montre l'équation 3.37.

En pratique, les bruits d'amplitude et de fréquence du laser sont dominés par des bruits techniques en basse fréquence. La modulation va transposer ces bruits autour de la fréquence de modulation. Il faut donc choisir une fréquence de modulation où ces bruits techniques sont négligeables, sinon ceux-ci ne seront pas discernables du signal.

L'équation 3.37 montre un point d'inflexion autour du point zéro ; il n'y a donc pas de dépendance quadratique, mais il existe un terme cubique du à la plage limitée d'accrochage (le dénominateur de l'équation 3.37). Pour que ce terme reste négligeable, il faut que la densité spectrale de $f(t)/f_P$ soit plus grande, dans toute la gamme de fréquence disponible, que celle de $(f(t)/f_P)^3$.

Bruit de puissance et absorption des miroirs

La puissance absorbée dans les revêtements réfléchissants ou dans les substrats crée une modification de chemin optique via la variation d'indice ou le coefficient de dilatation

thermique [86]. La fonction de transfert entre les fluctuations de puissance absorbée et le chemin optique vaut

$$F_{\tilde{P}_{\text{abs.}}\to\tilde{z}} = \frac{1}{i2\pi f_{\text{mes}}}\frac{1}{S_{\text{moy}}\rho C}\left(n\alpha + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}\right) \tag{3.98}$$

avec ρ la densité du matériau, C la capacité calorifique, n l'indice, α le coefficient de dilatation, $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}T}$ la variation d'indice en fonction de la température. La section moyenne S_{moy} se calcule exactement en fonction du profil de faisceau [86]. Pour un mode TEM00, de col $w = 2$ cm, on obtient

$$F_{\tilde{P}_{\text{abs.}}\to\tilde{z}} \sim 3.10^{-10}\left[\frac{1\text{Hz}}{f}\right]\text{m/W}\ . \tag{3.99}$$

Dans "advanced Virgo", pour réaliser une résolution de $3.10^{-19}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ à 40 Hz, il faut que les fluctuations de puissance absorbée soient inférieures à $3.10^{-9}\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Pour une très bonne stabilité à basse fréquence (au dessous du Hz) il vaut mieux employer des puissances de $\sim 100\ \mu$W avec des cavités rigides de grande finesse [52].

Asservissements et pression de radiation

La phase du champ résonnant dans une cavité dépend de la position des miroirs. En retour, la position des miroirs va être modifiée par la pression de radiation du faisceau $2P(t)/c$. L'effet est quadratique dans le champ, donc similaire à un effet Kerr dans la cavité. Le temps de réponse des miroirs est toutefois très supérieur à celui de la boucle d'asservissement de la phase du laser ; l'effet de déformation du signal d'erreur, pouvant empêcher le verrouillage, observé dans d'autres cas [11], n'est donc pas pertinent dans le cas des cavités à miroirs suspendus.

Avec le logiciel SIESTA [87] de simulation temporelle dédié pour la description simultanée des optiques, de la réponse mécanique des suspensions et des asservissements numériques, nous constatons que les positions des miroirs d'une cavité Fabry-Perot asservie fluctuent même en l'absence des fluctuations quantiques de puissance [88], en raison de la non-linéarité de la réponse du signal Pound-Drever-Hall.

Bruit de pression de radiation quantique

La lumière incidente sur la cavité a des fluctuations quantiques de puissance $\tilde{P} = \sqrt{2P\text{h}_\text{p}\nu}$. Ces fluctuations sont amplifiées par le gain $G = (1+\zeta)\mathscr{F}/\pi$ de la cavité et filtrées par son pôle. Notons que dans la cavité la statistique des photons n'est plus poissonienne et que le bruit de puissance sur un miroir donné n'est pas blanc, mais filtré par le pôle de la cavité.

3.6.10 Modulation d'amplitude parasite

Je rappelle ici le résultat concernant une modulation d'amplitude parasite avec des fréquences proches de la fréquence de modulation pour la technique Pound-Drever-Hall. Si l'onde qui produit la modulation n'est pas parfaitement monochromatique, alors son bruit est replié à basse fréquence, dans la bande de détection. Ceci modélise également un bruit technique d'amplitude du laser, avant modulation, de fréquence proche de la fréquence de modulation. Ce bruit peut être causé par l'effet étalon dans le cristal qui produit les bandes latérales [89], par des variations de biréfringence dans le cristal, la diffusion des optiques, etc. [90]. Dans Virgo, les bandes latérales sont modulées par la cavité de filtrage de mode si la fréquence de modulation n'est pas exactement un multiple de l'intervalle spectral libre.

L'onde en entrée de l'interféromètre s'écrit dans ce cas :

$$\psi_{\text{in}}(t) = \psi_0 \exp(i2\pi\nu t) \exp(im \sin(2\pi f_{\text{mod}} t)) \exp(ib(t)) \ . \tag{3.100}$$

où $b(t)$ est une fonction complexe avec des composantes autour de f_{mod}. La puissance démodulée est nulle si b est réel pur (pure modulation de phase). Soit b_{amp} la partie imaginaire non nulle de b, donc une modulation d'amplitude autour de f_{mod}. La réponse de la cavité autour de la fréquence de modulation est telle que $r(f) \sim -1$. La densité spectrale du signal démodulé vaut alors

$$\tilde{s}(f_{\text{mes}}) = K_{\text{ph}} P_0 |\zeta| \tilde{b}_{\text{amp}}(f_{\text{mod}} + f_{\text{mes}}) \tag{3.101}$$

quelque soit la phase de démodulation. Une façon de mesurer ce signal est de garder la cavité hors résonance et de mesurer alors la densité spectrale. Ce signal peut être réduit par asservissement de la modulation d'amplitude, en plaçant le cristal qui produit les bandes latérales entre polariseurs, et en contrôlant la biréfringence du cristal [90].

3.6.11 Lumière diffusée

Une partie de la lumière qui résonne dans une cavité sort de la cavité, subit un effet Doppler sur les éléments liés au sol, puis se recombine avec le faisceau principal, en en brouillant la phase. Si l'écart de phase est ϕ, alors le bruit de phase ajouté au faisceau principal est $\phi_+ = \sqrt{P_n / P_c} \sin\phi$, où P_n est la puissance de la lumière qui se recombine et P_c la puissance de la lumière sur le faisceau principal [91,92]. Le bruit de phase ajouté doit être inférieur à celui donné par la densité spectrale de résolution, limitée par les bruits thermiques et le bruit de photons. La difficulté consiste à évaluer les trajets parasites du faisceau et la quantité de lumière susceptible de se recombiner. L'évaluation des trajets parasites effectués par la lumière diffusée par les surfaces rugueuses dans les grands bras permet de spécifier un ensemble de pièges [93]. L'évaluation des trajets parasites pour la lumière qui sort de l'interféromètre et arrive sur les bancs de détection donne une spécification sur la fraction maximale de lumière qui se recombine avec le

faisceau principal ($\sim 10^{-13}$), et donc sur les BRDF des surfaces traversées pour qu'elles ne rétrodiffusent pas [92].

3.6.12 Bruit de charges

Les charges sur un miroir diélectrique peuvent varier par effet de la radioactivité rémanente d'éléments autour du miroir ou par douches de rayons cosmiques. Si une surface conductrice se trouve proche du miroir, celui-ci sera mis en mouvement jusqu'à trouver une nouvelle position d'équilibre des forces électrostatiques et gravitationnelles. La difficulté consiste à évaluer expérimentalement la variation de charge [94].

Une pièce métallique, reliée mécaniquement et électriquement au sol, vibre avec le mouvement de ce dernier. Elle fait donc varier la distance entre les charges du miroir et leur reflet dans la pièce mécanique. On a un mouvement du miroir fonction du bruit sismique :

$$\tilde{x}_{\text{miroir}} = -\tilde{x}_{\text{sismique}} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{M(2\pi f)^2} \frac{\sigma A}{L^3} \tag{3.102}$$

où σA est le produit densité surfacique de charges par la surface, M la masse du miroir et L la distance entre le miroir et la surface métallique supposée plane. L'effet est négligeable si la distance du premier élément métallique est de l'ordre de 1 mètre.

Des champs électriques rémanents peuvent exister autour du miroir, aux points de contacts entre matériaux de l'enceinte à vide de natures différentes par exemple ; leurs gradients varient en position avec le bruit sismique. La position du miroir en fonction du bruit sismique est alors :

$$\tilde{x}_{\text{miroir}} = \tilde{x}_{\text{sismique}} \frac{\sigma A E}{M(2\pi f)^2} \tag{3.103}$$

où E est l'amplitude du champ électrique [95]. Cet effet devrait être aussi négligeable.

L'effet des charges peut être indirect, sur le coefficient de qualité des fils de suspensions métalliques par courant de Foucault, courant de polarisation, couplage électrostatique avec un système à pertes ou friction avec des particules de poussière [96]. Aucun de ces effets ne devrait être significatif.

3.6.13 Bruits par couplages

Les bruits peuvent se coupler de façon non linéaire par couplage, avec un mauvais alignement du faisceau, un écart à la résonance, etc. Ces bruits devraient être du second ordre. Une liste de couplages se trouve en [97].

3.6.14 Instabilités paramétriques

Les fluctuations de pression de radiation, si elles ont une distribution d'intensité semblable au profil de déformation d'un mode de résonance du miroir, vont exciter cette résonance ; la vibration de la surface du miroir, en retour, augmente la fraction de lumière avec le profil spatial fautif. Ce processus, si la quantité de lumière présente dans la cavité est suffisante, est divergent [98]. Les paramètres pertinents pour l'évaluation de l'effet sont donc : la puissance du laser dans la cavité ; l'écart en fréquence entre le mode acoustique de vibration et l'écart entre le mode TEMmn considéré et le TEM00 ; l'intégrale de superposition entre la déformation de la surface vibrante et le front d'onde du mode TEMmn ; le coefficient de qualité du mode acoustique résonnant. Ces paramètres donnent un paramètre R, proportionnel à la puissance du laser et au coefficient de qualité de la résonance mécanique. Si ce paramètre R est plus grand que un, alors il y a une instabilité divergente.

Ce phénomène serait très important dans les interféromètres de deuxième génération. Son étude doit tenir compte des couplages introduits par les cavités de recyclage de puissance et de recyclage du signal, ainsi que des asymétries des bras [99].

Il peut être contrôlé par un accord fin de la séparation des modes TEMmn dans la cavité par contrôle des rayons de courbure, pour écarter la condition de résonance de ce mode de la fréquence de vibration de modes du miroir [100]. Il peut être contrôlé également par un amortissement adéquat des modes de vibration sans dégradation notable du bruit thermique effectivement mesuré par le faisceau lumineux, par un anneau sur la surface latérale des miroirs [101].

3.6.15 Cavités résonnantes parasites

Un miroir, à l'extérieur de la cavité, perpendiculaire au faisceau, crée une cavité parasite. Je montre dans le chapitre 4.1 que cette cavité parasite déplace le point de verrouillage. Je montre ici un modèle simple de calcul de la rétro-diffusion.

Une configuration triangulaire de la cavité semble éviter la formation d'une cavité parasite. Cette raison a guidé le choix d'une cavité de filtrage de mode triangulaire dans Virgo. Toutefois, à chaque réflexion, une partie de la lumière R_ϵ est diffusée en sens arrière, à cause de l'état de surface qui n'est pas idéal [102]. La fraction est d'autant plus grande que l'angle d'incidence sur le miroir est petit. Il est alors facile de montrer que la quantité de lumière rétro-diffusée par la cavité est

$$R_{\mathrm{cav}} = G^2 R_\epsilon \tag{3.104}$$

où G est le gain en puissance de la cavité.

Dans la cavité de filtrage de mode de Virgo, nous avons $R_\epsilon \sim 10^{-8}$ sur le miroir courbe d'extrémité où l'angle d'incidence vaut 300 μrad. La densité de diffusion de 33 Sr^{-1} à

l'angle de rétro-diffusion de 600 μrad de diffusion est compatible avec la BRDF mesurée du miroir. Cet effet donne une réflectance parasite de toute la cavité de filtrage de mode de 1000 ppm. Sans isolateur de Faraday entre la cavité de filtrage de mode et l'interféromètre, nous observions des variations de la puissance incidente de 10% variant avec le balancement du banc suspendu portant le dièdre de la cavité de filtrage de mode.

Une étude plus fine montre que la lumière rétro-diffusée présente une figure de tavelures ; il est possible de choisir une orientation optimale du miroir pour minimiser l'effet [103].

3.6.16 Perspectives sur les sources de bruits

L'atténuation des effets de l'agitation thermique de la surface des miroirs est un champ de recherche très actif, comme en témoigne l'atelier organisé par la collaboration LIGO en mars 2008 [104]. La perspective la plus probable est une diminution de l'angle de pertes des ondes acoustiques dans les couches d'indice élevé des revêtements réfléchissants. Les modes plats ou d'ordre élevé sont également prometteurs, mais laissent des questions encore ouvertes : l'effet de l'alignement n'est pas toujours étudié de façon exhaustive, les pertes réelles avec des défauts de planéités de surface des miroirs ne sont pas évaluées, l'effet de la dégénérescence des modes TEMmn n'est pas connu.

Les études de lumière diffusée sont complexes là où il est difficile d'évaluer tous les faisceaux parasites, par exemple dans la partie centrale de l'interféromètre, dans la chambre à vide qui entoure la lame séparatrice. Une meilleure compréhension du parcours de la lumière de la frange noire, qui comprend de nombreux modes d'ordre très élevé, aiderait peut-être à une meilleure évaluation de la perturbation qu'elle apporte à la lumière diffusée puis recombinée dans le faisceau.

Les bruits dans un montage de type interféromètre de Michelson avec cavités Fabry-Perot dans les bras et miroir de recyclage de puissance s'adaptent facilement des effets connus pour une cavité Fabry-Perot. Les cavités Fabry-Perot kilométriques ne semblent pas donner lieu à des phénomènes de couplages de bruits inconnus. L'étude systématique des bruits peut donc être reprise en étude d'ingénierie détaillée pour donner des spécifications précises sur chacune des sources de bruits ou sur les fonctions qui les couplent à la mesure sensible de la frange noire.

Chapitre 4

Remarques sur les systèmes optiques composés

4.1 Cavité avec effet étalon dans le miroir d'entrée

Les miroirs d'entrée des grands bras sont composés de deux faces parallèles, une avec un revêtement anti-reflet et l'autre avec le revêtement à réflexion totale. Une cavité Fabry-Perot parasite existe à l'intérieur du miroir d'entrée ; sa longueur optique dépend de la température du substrat du miroir. Cette cavité parasite est conçue pour corriger l'asymétrie de l'interféromètre à basses fréquences (chap. 8.6.3). Je donne ici les équations qui correspondent à cette situation. Je montre que la variation relative de finesse de la cavité composite a une excursion de $4R_{\mathrm{AR}}$, où R_{AR} est la réflectance en intensité de la face anti-reflet.

Je suppose que la cavité principale, entre les revêtements réfléchissants, a une finesse plus grande que quelques dizaines. La réflectance en champ de la cavité principale s'écrit alors $r = (\zeta - ix)/(1 + ix)$, où $x = f/f_P$ avec f l'écart en fréquence à résonance et f_P le pôle de la cavité. Je suppose que l'écart x est très petit devant un, et je développe $r = \zeta - ix(1 + \zeta)$. La présence de la face anti-reflet va amener à désaccorder la cavité principale pour que la cavité composite soit à résonance. Je pose donc $r = \zeta - i(x + x_0)(1 + \zeta)$. Je vérifierai que $x_0 \ll 1$.

La réflectance en champ du bras, en tenant compte de la face anti-reflet, s'écrit donc

$$r_{\mathrm{bras}} = \frac{-r_{\mathrm{AR}} + r\exp(-i\beta)}{1 - r_{\mathrm{AR}}\, r\exp(-i\beta)} \tag{4.1}$$

où r_{AR} est la réflectance en champ de la face anti-reflet, et β la phase accumulée par le faisceau sur un aller-retour dans le substrat du miroir.

La réflectance de l'anti-reflet est faible, de sorte que l'on peut développer r_{bras} au pre-

mier ordre en r_{AR} en une expression de la forme

$$r_{\mathrm{bras}} = K_0(1 + iK_1x)(1 + K_2x) \tag{4.2}$$

où K_0, K_1 et K_2 sont indépendants de x, K_0 est complexe, K_1 et K_2 réels.

Pour garder la cavité couplée à résonance, il faut $K_2 = 0$, ce qui donne la condition sur l'écart x_0 de la cavité interne :

$$x_0 = r_{\mathrm{AR}}(1 - \zeta)\sin(\beta)\ . \tag{4.3}$$

Dans le cas d'une cavité sur-couplée, comme les bras kilométriques de Virgo, $\zeta \sim 1$, donc $x_0 \ll 1$.

La valeur absolue de K_0 donne la nouvelle réflectance à résonance ζ' :

$$\zeta' = \zeta(1 + r_{\mathrm{AR}})\frac{1 - \zeta^2}{\zeta}\cos(\beta)\ . \tag{4.4}$$

La variation de réflectance à résonance multiplie donc deux éléments du premier ordre, $(1 - \zeta^2) \ll 1$ pour une cavité sur-couplée et $r_{\mathrm{AR}} \ll 1$, et est donc négligeable. La phase de K_0 dépend de l'épaisseur optique du substrat du miroir.

En identifiant le facteur K_1 avec $i(f/f'_P)(1 + \zeta')$, j'obtiens la nouvelle valeur du pôle de la cavité

$$f'_P = f_P\left(1 + r_{\mathrm{AR}}\cos(\beta)\frac{2\zeta^2 + \zeta - 1}{\zeta}\right) \tag{4.5}$$

et donc la variation de finesse

$$\mathscr{F}' = \mathscr{F}\left(1 - r_{\mathrm{AR}}\cos(\beta)\frac{2\zeta^2 + \zeta - 1}{\zeta}\right) \tag{4.6}$$

et l'on obtient bien le résultat annoncé pour $\zeta \sim 1$.

Pour un revêtement anti-reflet de 130 ppm de réflectivité, l'excursion de finesse relative est donc de $4 \times \sqrt{130.10^{-6}} = 4.6$ %.

4.2 Cavité couplée - pôle

Je traite ici le cas où un troisième miroir forme une cavité résonnante devant une cavité. Ceci modélise la cavité de recyclage devant une cavité de 3 km. Je montre que la valeur du pôle de la cavité couplée est $(\pi/(2\mathscr{F}_{\mathrm{recyc}}))f_P$, où f_P est le pôle de la cavité simple et $\mathscr{F}_{\mathrm{recyc}}$ la finesse de la cavité de recyclage.

La cavité de 3 km a une réflectance $r = (\zeta - if/f_P)/(1 + if/f_P)$. Le miroir de recyclage ayant une réflectance en amplitude de r_{PR}, la cavité composée a une réflectance

$$r_{\mathrm{recyc}} = \frac{-r_{\mathrm{PR}} + r\exp(-i\beta)}{1 - r_{\mathrm{PR}}\,r\exp(-i\beta)} \tag{4.7}$$

où $\beta(f)$ est le désaccord de la cavité de recyclage lorsque f est l'écart en fréquence à la résonance des grands bras. En développant r_{recyc}, on voit que β est négligeable et on identifie alors le nouveau pôle

$$f_{P,\text{recyc}} = \frac{1 - r_{\text{PR}}\,\zeta}{2} f_P = \frac{\pi}{2\mathscr{F}_{\text{recyc}}} f_P \ . \tag{4.8}$$

Le gain de recyclage n'est pas directement déductible de la mesure du pôle ; le facteur $(1 + \zeta_{\text{recyc}})$ intervient également.

Chapitre 5

Note et publications sur la caractérisation de cavités

INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING CLASSICAL AND QUANTUM GRAVITY

Class. Quantum Grav. **21** (2004) S487–S492 PII: S0264-9381(04)69087-3

Characterization of the LIGO 4 km Fabry–Perot cavities via their high-frequency dynamic responses to length and laser frequency variations

M Rakhmanov[1], F Bondu[2], O Debieu[2] and R L Savage Jr[3]

[1] Department of Physics, University of Florida, Gainesville, FL 32611, USA
[2] Observatoire de la Côte d'Azur, Nice, France
[3] LIGO Hanford Observatory, PO Box 159, Richland, WA 99352, USA

E-mail: malik@phys.ufl.edu

Received 14 September 2003
Published 3 February 2004
Online at stacks.iop.org/CQG/21/S487 (DOI: 10.1088/0264-9381/21/5/015)

Abstract

Recent measurements at the LIGO Hanford Observatory have confirmed the predicted high-frequency dynamic response of km scale Fabry–Perot cavities to length and laser frequency variations. The dynamic response functions have been exploited to determine a number of cavity parameters including the cavity length and the resonance width. A new technique based on a variation of these measurements has been utilized to measure the interferometer arm cavity lengths with a precision of 80 μm. We present an overview of these measurements and discuss how the dynamic field responses could be used to measure the cavity g factors which are related to the mirror radii of curvature.

PACS numbers: 04.80.Nn, 07.60.Ly, 42.60.Da, 95.55.Ym

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version)

1. Introduction

To maintain resonance in a Fabry–Perot cavity when the cavity length, L, and laser frequency, ω, are varying, the dynamic resonance condition,

$$\frac{\delta\tilde{L}(s)}{L} = -C(s)\frac{\delta\tilde{\omega}(s)}{\omega}, \qquad \text{where} \quad C(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2sT}}{2sT}, \tag{1}$$

must be satisfied [1]. Here T is the light transit time in the cavity, s is the Laplace-domain variable, and $C(s)$ is the laser-frequency-to-length transfer function. Deviations from this resonant state are typically sensed by the Pound–Drever–Hall (PDH) locking signal, V. For small deviations from resonance, the responses of the PDH signal to variations in the laser frequency and the cavity length are given by the transfer functions

$$H_L(s) = \frac{\delta\tilde{V}(s)}{\delta\tilde{L}(s)} \qquad \text{and} \qquad H_\omega(s) = \frac{\delta\tilde{V}(s)}{\delta\tilde{\omega}(s)}. \tag{2}$$

0264-9381/04/050487+06$30.00 © 2004 IOP Publishing Ltd Printed in the UK

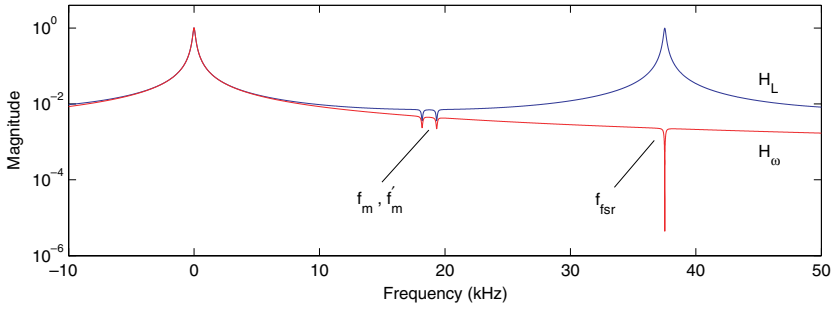


Figure 1. Predicted magnitudes of $H_L(s)$ and $H_\omega(s)$. The features labelled f_m and f'_m are discussed in section 3.

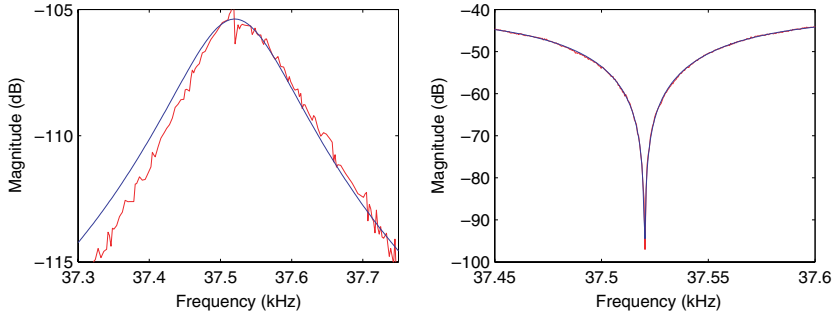


Figure 2. Measured magnitudes of $H_L(s)$ (left) and $H_\omega(s)$ (right) and the theoretical predictions (almost indistinguishable for $H_\omega(s)$).

Using the LIGO 4 km arm cavity parameters, the predicted magnitudes of these transfer functions are plotted over a 50 kHz span in figure 1. The response to length variations, $H_L(s)$, peaks at integer multiples of the cavity free spectral range frequency, $f_{\rm fsr}$,[4] and the halfwidth of the peaks (HWHM) equals the commonly quoted 'cavity pole' frequency. The response to laser frequency variations, $H_\omega(s)$, goes to zero at multiples of $f_{\rm fsr}$.

2. Response near multiples of $f_{\rm fsr}$

To measure $H_\omega(s)$ we vary the frequency of the laser light incident on the cavity; for $H_L(s)$ we vary the position of the input mirror of the cavity. The PDH signals are measured at the anti-symmetric port of the interferometer. Precise calibration of the excitation and PDH modulation frequencies is achieved via a benchtop rubidium frequency standard (SRS FS725). All $H_\omega(s)$ measurements are performed in a one-arm configuration with the second arm cavity mirrors and the recycling mirror misaligned. The full power-recycled interferometer is required only for $H_L(s)$ measurements in order to acquire sufficient signal to noise ratio.

Considering only the dynamic carrier field in the cavity [1], the transfer functions are given explicitly by

$$H_L(s) = \frac{1 - r_a r_b}{1 - r_a r_b \, \mathrm{e}^{-2sT}} \qquad \text{and} \qquad H_\omega(s) = C(s) H_L(s), \tag{3}$$

[4] The high-frequency response to gravitational waves is different from the response at dc [2]. For an optimally-oriented source the response is functionally equivalent to $H_\omega(s)$. However, for other orientations, the averaged response at $f_{\rm fsr}$ is only about a factor of five lower than the averaged response at dc. Searches for gravitational waves at $f_{\rm fsr}$ are being considered (see Markowicz *et al* [3]).

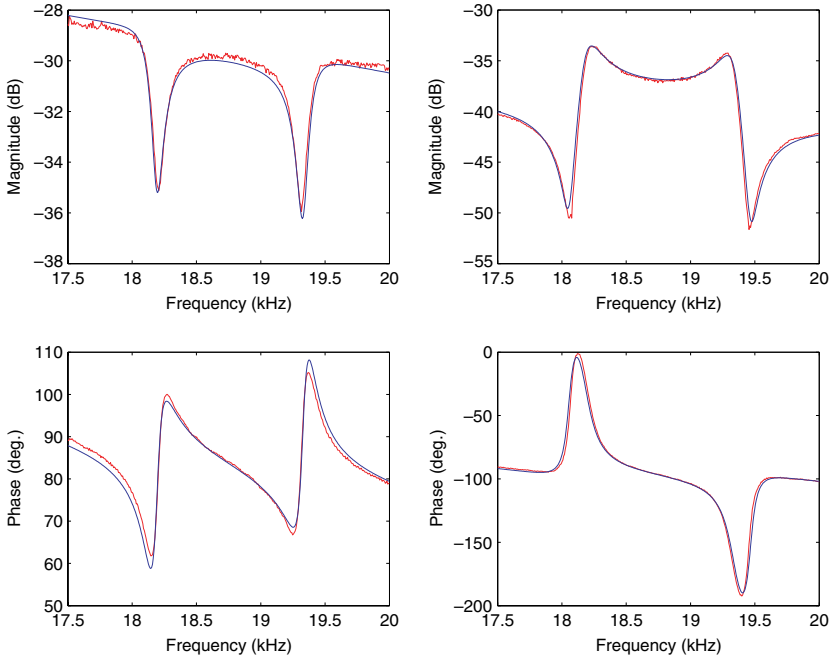


Figure 3. Bode plots of $H_\omega(s)$ measured near frequencies f_m (18.18 kHz) and f'_m (19.34 kHz) for demodulation phases of -18° (left) and $+73^\circ$ (right). The smooth curves are the theoretical predictions.

where $r_{a,b}$ are the cavity mirror reflectivities. The magnitudes of $H_L(s)$ and $H_\omega(s)$, measured near $f_{\rm fsr}$ (≈ 37.52 kHz), are shown in figure 2 along with the theoretical predictions of equation (3) multiplied by a constant scale factor. The peak in $H_L(s)$ at $f_{\rm fsr}$ is observed with the expected width (FWHM) of approximately 164 Hz. The cusp in $H_\omega(s)$ confirms the insensitivity of the cavity to variations of the laser frequency at $f_{\rm fsr}$. The location of the cusp yields the value of $f_{\rm fsr}$ within 10 mHz and thus the cavity length with a precision of 1 mm.

3. Response near sideband-related frequencies

The PDH sidebands are generated by phase modulation at $f_{\rm mod} = 24.481\,326$ MHz, and thus are symmetrically spaced many free spectral ranges from the resonant carrier. Because of the periodic nature of Fabry–Perot cavities, features in $H_\omega(s)$ are generated when the frequency of the laser frequency modulation coupled with the sideband frequency enforces *dynamic* resonance of the sideband light in the cavity [4]. The lowest frequency pair of these features appear at

$$f_m = f_{\rm mod} - N f_{\rm fsr} \qquad \text{and} \qquad f'_m = (N+1) f_{\rm fsr} - f_{\rm mod}, \tag{4}$$

where $N = \text{integer}(f_{\rm mod}/f_{\rm fsr}) = 652$. Bode plots of $H_\omega(s)$ measured near f_m and f'_m are shown in figure 3. The theory curves are given by

$$H_\omega(s) = C(s)\left(\frac{a_0}{1 - q_0\,\mathrm{e}^{-2sT}} - \frac{a_1}{1 - q_1\,\mathrm{e}^{-2sT}} - \frac{a_1^*}{1 - q_1^*\,\mathrm{e}^{-2sT}}\right). \tag{5}$$

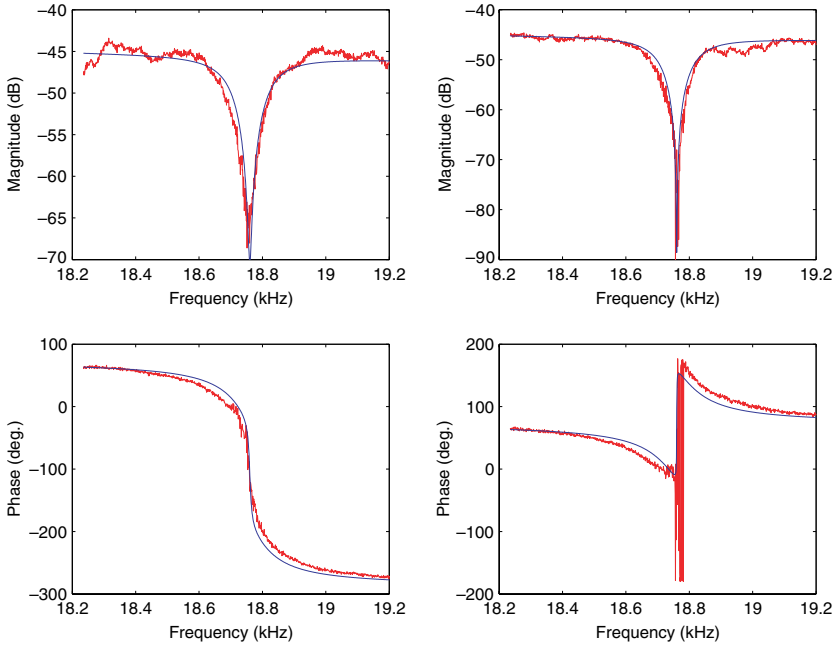


Figure 4. Bode plots of $H_\omega(s)$ (quadrature channel) measured near $f_{\rm fsr}/2$ for $f_{\rm mod} = 24\,482\,153$ Hz (left) and $f_{\rm mod} = 24\,482\,154$ Hz (right).

This expression includes the effect of the dynamic sideband fields in the cavity [4]. The coefficients, a_n, depend on mirror reflectivities and the demodulation phase[5], and $q_n = r_a r_b \exp(-4{\rm i}\pi n f_{\rm mod} T)$. Although the features at f_m and f'_m are not as sharp as the cusps at multiples of $f_{\rm fsr}$, the large value of N enables precision measurement of the cavity length by observing the $f'_m - f_m$ frequency separation. This spacing is given by $\Delta f_m = (2N+1) f_{\rm fsr} - 2 f_{\rm mod}$ so the length measurement precision is given by $\delta L/L = \delta(\Delta f_m)/[(2N+1) f_{\rm fsr}]$. Thus determination of the frequency separation with 12 Hz precision constrains the cavity length with 1 mm precision. This is comparable to the precision achieved by localizing the cusp in $H_\omega(s)$ near $f_{\rm fsr}$.

4. Precision measurement of arm cavity lengths

By adjusting $f_{\rm mod}$ so that the two sideband related features converge at $f_m = f'_m = f_{\rm fsr}/2$, we are able to improve the precision of the cavity length measurement by more than an order of magnitude [5]. The precision of the measurement is presently limited by the minimum step size (1 Hz) for setting the frequency of the modulation source. In practice, we observe the abrupt change in the trajectory of the phase of $H_\omega(s)$ as $f_{\rm mod}$ is tuned across the $f'_{\rm mod} = (N+1/2) f_{\rm fsr}$ point. Figure 4 shows Bode plots of $H_\omega(s)$ as $f_{\rm mod}$ is incremented by 1 Hz from below the $f'_{\rm mod}$ point (left) to above the $f'_{\rm mod}$ point (right). Note the dramatic change in the phase trajectory from monotonic roll-off to a roll-off with an abrupt 180° step. We therefore determine $f'_{\rm mod}$ within ±0.5 Hz which constrains the cavity lengths to within ±80 μm. The interferometer

[5] The coefficients, a_n, are given by $a_0 = (e^{i\gamma}\rho_1 + e^{-i\gamma}\rho_1^*)q_0/(1-q_0)$, and $a_1 = e^{i\gamma}\rho_0 q_1/(1-q_1)$, where $\rho_n = r_a - (t_a^2/r_a)q_n/(1-q_n)$ is the static cavity reflectivity with $n = 0$ for the carrier field and $n = 1$ for the sideband fields.

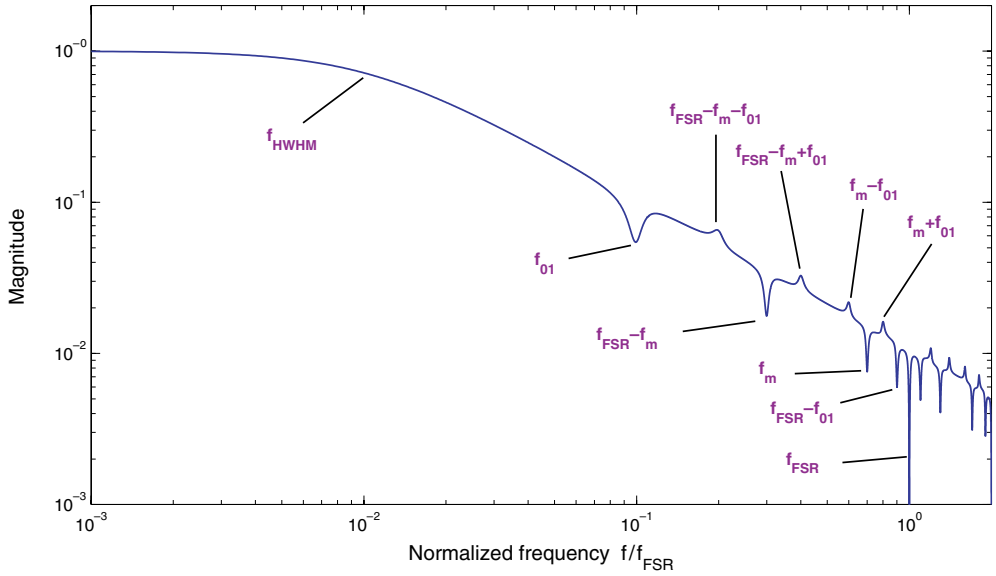


Figure 5. Calculated magnitude of $H_\omega(s)$ for a misaligned cavity with $f_m = 0.7 f_{\rm fsr}$ and $f_{01} = 0.1 f_{\rm fsr}$.

arm lengths thus measured are $L_X = 3995.084\,18 \pm 0.000\,08$ m and $L_Y = 3995.044\,37 \pm 0.000\,08$ m.

5. Measurement of the cavity g factor

When the incident laser beam is offset or misaligned with respect to the cavity axis, $H_\omega(s)$ acquires additional features at frequencies related to the higher-order transverse mode separation, f_{01}. This spacing is directly related to the mirror radii of curvature, $R_{1,2}$, by $f_{01} = f_{\rm fsr} \arccos(\sqrt{g_1 g_2})/\pi$, where $g_{1,2} = 1 - L/R_{1,2}$. Therefore, measuring $H_\omega(s)$ for a misaligned cavity would allow us to determine the cavity g factor product which is directly related to the mirror radii of curvature [6]. Figure 5 shows an example of $H_\omega(s)$ for a misaligned cavity. Although the cavity is locked on the $\rm TEM_{00}$ spatial mode, the $\rm TEM_{01}$ mode will *dynamically* resonate at laser frequency modulation frequencies where the residual round trip phase coupled with the Gouy phase change for the higher-order mode is an integer multiple of 2π.

Instead of making a swept sine measurement, an error signal can be generated by adding phase modulation sidebands at $N' f_{\rm fsr} + f_{01}$ and demodulating at this frequency. When a monolithic photodiode is used, the magnitude of the error signal is proportional to the square of the fractional misalignment but with a split photodiode it is proportional to the misalignment to first order. This error signal could be utilized to monitor changes in the mirror radii of curvature during variations in the thermal loading, for example immediately after acquiring lock.

6. Effect of arm-length mismatch

The magnitude of $H_L(s)$ shown in figure 2 has a small feature near the peak which is resolved in figure 6. This feature does not result from the dynamics of a single Fabry–Perot cavity;

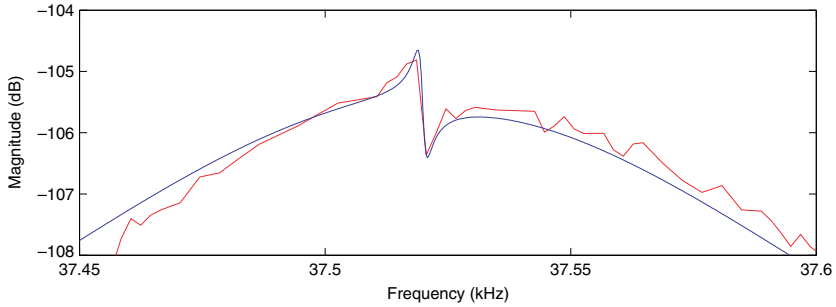


Figure 6. Magnitude of $H_L(s)$ near $f_{\rm fsr}$. The smooth curve is generated by *Finesse* for a 4 cm arm length mismatch with the Y-arm being shorter than the X-arm.

it appears only when the interferometer is operating in the full power-recycled configuration. The effect occurs because modulation of the length of one arm produces simultaneous excitation of the common and differential modes of the interferometer. The common mode is then amplified in the recycling cavity and a small fraction of it leaks into the anti-symmetric port due to asymmetries.

Modelling with the *Finesse* software package [7] indicates that the feature in $H_L(s)$ results from a 4 cm difference in the lengths of the interferometer arms (smooth curve in figure 6). The precision length measurements described above confirm both the sign and magnitude of this predicted arm cavity length difference.

Acknowledgments

We thank G Mueller for assistance with *Finesse* and the whole LIGO team for constructing and operating the interferometers that enabled this work. This material is based upon work supported by the US National Science Foundation under Cooperative Agreements no PHY-0107417 and PHY-0244902, and by the CNRS in France. This document has been assigned LIGO Laboratory document number LIGO-P030044-00-W.

References

[1] Rakhmanov M, Savage R L Jr, Reitze D H and Tanner D B 2002 *Phys. Lett.* A **305** 239
[2] Sigg D 2003 Strain calibration in LIGO *LIGO Technical Document T970101-B-D*
[3] Markowicz J, Savage R and Schwinberg P 2003 Development of a readout scheme for high-frequency gravitational waves *LIGO Technical Document T030186-00-W*
[4] Savage R L Jr, Rakhmanov M and Bondu F 2003 Observation of dynamic resonance in a kilometer-scale Fabry-Perot cavity *LIGO Document P020031-00-W* in preparation for submission to *Phys. Lett.* A
[5] An even more precise technique has been reported by Araya A *et al* 1999 *Appl. Opt.* **38** 2848
[6] Debieu O 2003 Détermination de méthodes de mesure précise des modes dans une cavite Fabry–Perot *Rapport de stage de DEA* Université de Nice Sophia-Antipolis et Observatoire de la Côte d'Azur
[7] Freise A *et al* 2004 Frequency domain interferometer simulations including higher order spatial modes *Class. Quantum Grav.* **21** S1067

Measurement of the optical parameters of the Virgo interferometer

The Virgo Collaboration[1]

[1]See Appendix A for full list of authors and affiliations.

Corresponding author: tournefi@lapp.in2p3.fr

Received 13 October 2006; revised 29 January 2007; accepted 1 February 2007;
posted 7 February 2007 (Doc. ID 75916); published 18 May 2007

The Virgo interferometer, aimed at detecting gravitational waves, is now in a commissioning phase. Measurements of its optical properties are needed for the understanding of the instrument. We present the techniques developed for the measurement of the optical parameters of Virgo. These parameters are compared with the Virgo specifications. © 2007 Optical Society of America

OCIS codes: 120.2230, 120.3180.

1. Introduction

Virgo [1,2] is a gravitational-wave antenna aiming at detecting gravitational waves emitted by several types of astrophysical sources. Several other detectors based on the same principle are being operated or commissioned in the United States [3] (LIGO), in Germany [4] (GEO), and in Japan [5] (TAMA). The Virgo detector has been built near Pisa in Italy. It is based on a Michelson interferometer with 3 km long arms. The interferometric detection is based on the following property: as a gravitational wave passes, the optical length of one arm gets longer while the other gets shorter. This induces a change in the interference pattern that is detected by measuring the intensity of the light exiting the interferometer output port [6,7]. To improve the sensitivity with respect to a simple Michelson, each arm of the interferometer contains a Fabry–Perot (FP) cavity [8], and the power recycling technique [8] is used with the addition of a partially reflecting mirror at the entrance of the interferometer.

Virgo has been in a commissioning phase since the fall of 2003. Such a detector has to be kept on an optimal working point by means of quite complex feedback controls and the optical properties of the interferometer have to be well known in order to understand the error signals used for these controls. The optical properties define the achievable sensitivity as well as the coupling of some of the technical noises to the gravitational-wave signal. This paper describes the techniques developed for the measurements of the optical properties of the interferometer. These techniques are applied to the Virgo data to extract their optical properties and compare them with the Virgo design. A detailed simulation is used to interpret these results and to understand which components have to be replaced to achieve the Virgo design sensitivity.

2. Optical Design of Virgo

The Virgo detector is based on a Michelson interferometer with 3 km long arms. Figure 1 shows the optical scheme of Virgo. All of the mirrors of the interferometer are suspended from a chain of pendulums for seismic isolation. Above the pendulum, resonant frequency the mirrors can be considered as free-falling masses in the horizontal direction. Each arm contains a FP cavity whose role is to increase the optical path and therefore the phase shift induced by a gravitational wave. To achieve maximal sensitivity, the interferometer arm length difference is set to obtain a destructive interference at the interferometer output port. In this condition, all the light is reflected toward the laser, and it can be reinjected into the interferometer using an additional mirror (the power recycling mirror). This power recycling technique can increase the amount of light impinging on the Mich-

0003-6935/07/173466-19$15.00/0
© 2007 Optical Society of America

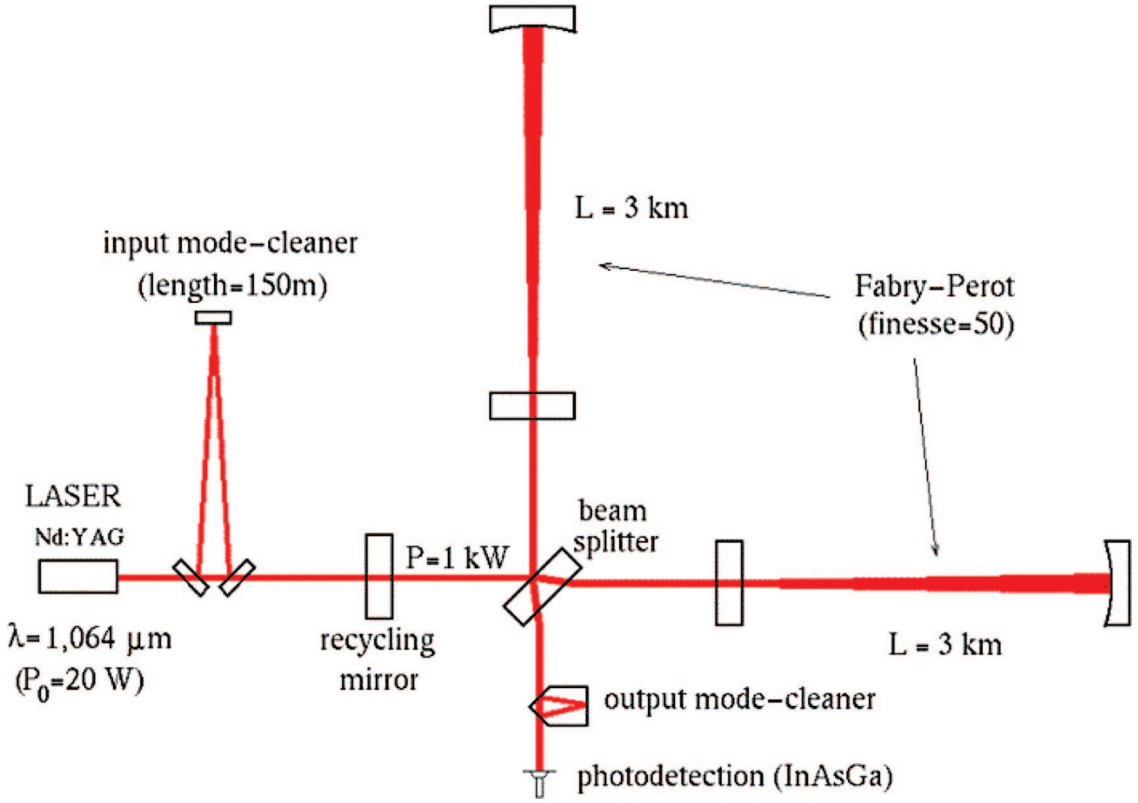


Fig. 1. (Color online) Optical scheme of Virgo.

elson beam splitter by orders of magnitude, and as a consequence improves the interferometer sensitivity.

The error signals that are used to control the interferometer globally are based on the Pound–Drever–Hall technique [9,10]. For this purpose, the laser beam is phase modulated at a high (several megahertz) frequency f_{mod}. This creates additional components for the laser beam (the sidebands) whose frequency differs by $n \times f_{\mathrm{mod}}$ (n is any integer) from the carrier one. The beams exiting the interferometer are collected on InGaAs photodiodes whose signals are also demodulated at one, two, or three times the modulation frequency.

At high frequency, the sensitivity of such an interferometer is given by the amplitude of the signal equivalent to the shot noise:

$$\Delta h_{\mathrm{sn}}(f) = \frac{\lambda}{2\pi L}\sqrt{\frac{h\nu}{2P_0}}\frac{\pi}{2F}\frac{\sqrt{J_0^{\,2}(m)G(1-C)+6TJ_1^{\,2}(m)}}{2J_0(m)J_1(m)\sqrt{GT}} \times\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}, \tag{1}$$

where λ is the laser wavelength, P_0 is the input power, F is the finesse of the FP cavities, $f_0 = c/4FL$ is their cutoff frequency, G is the recycling gain of the laser carrier, T is the product of the sidebands recycling gain by their transmission to the output port, $1 - C$ is the contrast defect, m is the modulation depth, and $J_{0(1)}$ are Bessel functions. The factor 6 in front of $TJ_1^{\,2}(m)$ takes into account the fact that the first-order sidebands are not stationary [11].

As can be deduced from Eq. (1), the main parameters for achieving good sensitivity are high input power, high recycling gain, and small contrast defect together with a good transmission of the sidebands. Figure 2 shows the shot-noise-limited sensitivity as a function of the modulation depth for plausible values of the contrast defect and of the transmission of the sidebands. The shot-noise limit can be pushed down by optimizing the modulation index for a given contrast defect: the worse the contrast the higher the modulation. Since high-modulation depth is difficult to achieve, the contrast defect has to be kept as small as possible. For this purpose, Virgo uses high-quality mirrors [12] and, in addition, an output-mode cleaner [13] (OMC) is used to filter high-order spatial modes that have built up in the interferometer.

The best achievable sensitivity depends on the recycling gain [see Eq. (1)]. This gain is limited by the losses of the FP cavities: the best recycling gain is obtained for a reflectivity of the recycling mirror equal to the reflectivity of the FP cavities. Since the losses are not *a priori* precisely known, the recycling mirror reflectivity is kept small enough with respect to the expected reflectivity of the long cavities in order to avoid any longitudinal locking instabilities. The transmission factor of the sidebands is also increased with the presence of a recycling cavity, therefore the modulation frequency is chosen such that it resonates inside the recycling cavity. A particularity

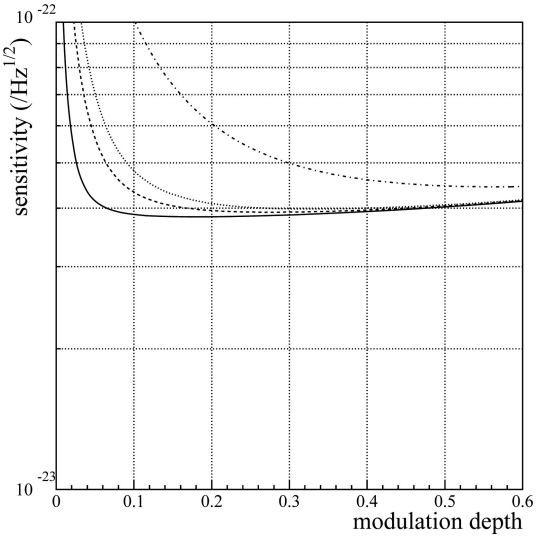


Fig. 2. Shot-noise-limited sensitivity as a function of the modulation depth for several values of sideband transmission (T) and contrast defect ($1 - C$): $T = 0.4$, $1 - C = 10^{-5}$ (solid curve), $T = 0.2$, $1 - C = 3 \times 10^{-5}$ (dashed curve), $T = 0.1$, $1 - C = 3 \times 10^{-5}$ (dotted curve), and $T = 0.1$, $1 - C = 3 \times 10^{-4}$ (dashed–dotted curve).

of Virgo with respect to other similar interferometers is that the angular alignment of the FP mirrors is based on the Anderson–Giordano technique [14], a variant of the Anderson technique [15]: the modulation frequency used for this purpose is chosen such that when the carrier resonates with the TEM_{00} mode of the FP cavities, the upper sideband frequency coincides with the resonance of the TEM_{01} mode. It was shown that, provided the sideband components are resonant in the recycling cavity, a single phase modulation can be used to extract both the longitudinal locking error signals and the alignment error signals [1]. When the interferometer is on its working point, the TEM_{00} of the carrier resonates in the cavities; this implies that the modulation frequency corresponds to the mode-separation frequency of the cavities.

The mode-separation frequency (see Subsection 7.B) is determined by the radius of curvature of the mirrors of the cavity and by its length. These quantities also define the size of the beam that resonates in this cavity. The input beam parameters therefore have to be matched to these properties.

The Virgo optical design characteristics are $F = 50$, $G = 50$, $T = 0.46$, flat FP input mirrors and curved end mirrors with a radius of curvature $R_{\mathrm{end}} = 3450$ m, and input beam waist $w_0 = 2$ cm. All mirrors were required to have losses lower than 10 ppm [1]. The modulation frequency was set at $f_{\mathrm{mod}} = 6.26$ MHz.

The mirror reflectivities have been defined by the gain of the cavities (F and G). After the coating deposition, the reflectivity and the mirror surface profile have been measured before installation on the Virgo site. These mirror maps are incorporated in an optical simulation, described in Section 3, in order to obtain a realistic estimation of the Virgo optical parameters. These parameters are also deduced from the interferometer signals. The measurements are reported in the following sections and compared with simulation results when it is relevant. Concerning the laser beam parameters, the measurement of the modulation index and the tuning of the modulation frequency are described in Section 4. Section 5 describes the input-mode cleaner (IMC) measurements, while the matching of the input and output beams are discussed in Section 6. The measurement of the characteristics of the FP and of the recycling cavities are described in Sections 7 and 8, respectively. Finally the contrast defect is discussed in Section 9.

The measurements reported in this paper have been performed with the 2005 optical configuration, which does not include the replacement of the power recycling mirror and the modifications on the injection system introduced at the end of 2005. The expected impact of these modifications is the increase of the input power ($\times 10$) and a higher recycling gain.

3. Simulation of Virgo Optical Properties

The SIESTA [16] simulation has been used to produce time-domain signals, which, once compared with real data signals, allow the extraction of some optical parameters, such as the finesse of the cavities (Subsection 7.A). The FINESSE [17] simulation, based on the computation of the light amplitudes using Hermite–Gauss modes in the frequency domain, has been used for beam matching (Section 6) purposes since it is well suited for the simulation of high-order modes.

In addition, we have developed two independent simulation codes that both aim at testing the effects of mirror defects on the interferometer sensitivity. These have been used in particular for the understanding of the losses inside the FP cavities and the recycling gain (Subsections 7.D and 8.B). Real interferometer characteristics that can be studied are typically beam and mirror misalignments, length mismatch, mirror defects, thermal deformations, and so on. The simulation results can be sensitive to the way these characteristics are represented so that two independent codes proved to be very useful. Both simulations are static, so only steady-state fields are computed.

One code (DarkF) is based on the representation of the various fields in a plane-wave basis and on a fast-Fourier-transform (FFT) algorithm for propagation, while in the second code (NV) the fields are represented in a Hermite–Gauss functions basis. DarkF and NV do not have exactly the same properties. For the simulations with some centered defects at long correlation length (typically of the order of the centimeter), NV is well adapted. DarkF is also adapted to the simulations with defects at short correlation length (but larger than the sampling step).

A. DarkF Simulation

DarkF is an optical simulation code using a plane-wave decomposition to propagate the wavefronts. Beams and mirrors are sampled on a grid (x, y) and the DarkF resolution depends on the grid size and on

the number of points. Typically a size of 0.7 m, i.e., larger than a mirror, and 128 × 128 points are used. This granularity is good enough since the results do not change when the number of points is increased. With the Fourier-transform method, the propagated beam $E_2(x, y, z)$ is obtained from the initial beam $E_1(x, y, z_0)$, and a propagator (P) in the Fourier space (z is the propagation axis) [18,19]:

$$E_2(x, y, z) = \mathrm{FT}^{-1}\left(\mathrm{FT}(E_1(x, y, z_0)) \times \exp\left[-i\frac{p^2+q^2}{2k}|z-z_0|\right]\right) = \mathrm{FT}^{-1}(\mathrm{FT}(E_1(x, y, z_0)) \times P), \quad (2)$$

where FT and FT^{-1} are the Fourier and inverse-Fourier transforms, respectively, and p and q are the Fourier space coordinates. This code can be used to simulate a simple or a complex system as a FP cavity or Virgo. To obtain an intracavity beam (Ecav) composed by two mirrors M_1 and M_2, a convergence algorithm is used

$$\mathrm{Ecav}_{n+1} = t_1 E_0 - r_1 r_2 \mathrm{M}_1 P_L \mathrm{M}_2 P_L \mathrm{Ecav}_n, \quad (3)$$

where P_L is the propagator on a length L, r_1 and r_2 are the reflection coefficients of M_1 and M_2, t_1 is the transmission coefficient of M_1, and E_0 is the incoming beam. The main drawback of DarkF is its large computing time (typically of the order of 1 h for the configurations used here).

B. NV Simulation

In the Hermite–Gauss representation, each interface, substrate, or free space is represented by a complex operator, calculated in the Hermite–Gauss space, which acts on the field incident upon it. Starting from real Cartesian maps of the mirrors' surface $z(x, y)$ and reflectance $r(x, y)$ taken from metrology instruments, elementary reflexion operators $r_{i,j\to m,n}$ are calculated using

$$r_{i,j\to m,n} = \int_{x,y} g_{i,j}(x, y) r(x, y) \exp(4i\pi z(x, y)) \times g_{m,n}{}^*(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

where the g's are the Hermite–Gauss basis functions and g^* denotes their complex conjugate. Transmission operators are calculated in the same way. The elementary operators can then be combined to create operators representing whole optical components, FP cavities, and eventually the full interferometer. Those operators are applied on the field u represented as a superposition of Hermite–Gauss modes:

$$u(x, y) = \sum_{i,j} u_{ij} g_{i,j}(x, y),$$

where the sum runs over all the basis functions. The field u' transformed after interaction with an optical component is then simply calculated by applying the relevant operator on the incident field such as

$$u_{mn}{}' = \sum_{i,j} r_{i,j\to m,n} u_{ij}.$$

Figure 3 shows the intensity reflection operator of Virgo, calculated using maps for each optical component. As can be seen in the figure, working with a Hermite–Gauss basis gives immediate access to all the coupling factors between TEM_{ij} modes inside Virgo and their precise localization, and allows immediate computation of the energy in each mode everywhere in the interferometer and outside. The main limitation of this particular code is the difficulty to accurately represent beams with shapes that strongly differ from that of a TEM_{00} beam without using a prohibitive number of Hermite–Gauss functions. To test these effects, at least 153 basis functions are used.

4. Modulation of the Laser Beam

The laser beam is phase modulated by means of an electro-optic modulator (EOM) located before the IMC. The value of the modulation depth is set by varying the voltage amplitude applied on the modulator, and its value is cross-checked with the interferometer signals. The modulation frequency has to be carefully tuned so that it fulfills the required resonance conditions inside the optical cavities of the interferometer.

A. Modulation Depth Measurement

The modulation depth has first been set to a small value, ~10%, and will be increased in the future if it is needed to improve the sensitivity. The value set at the level of the modulator is cross-checked with the interferometer data in the following ways:

1. A calibration of the voltage applied on the EOM was performed for a high voltage value (~5 V), using signals from a reference cavity located before the IMC. It is based on the same principle as the third method described below. An extrapolation of this calibration to the applied voltage gives $m = 0.13 \pm 0.03$.
2. With the signals observed with the central part of the interferometer aligned and free mirrors, the amplitude of the demodulated signal is proportional to $J_0(m)J_1(m)$, while the amplitude of the dc (nondemodulated) signal is proportionnal to $J_0(m)$. The ratio of the amplitudes of these signals therefore gives access to the value of m: $m = 0.16 \pm 0.01$, where the uncertainty comes from the knowledge of the calibration of the signals.
3. With a free FP cavity, use the measurement of the power stored inside the cavity for the sidebands and the carrier. When the TEM_{00} mode of the carrier resonates, the power is proportional to $J_0{}^2(m)$, while when the TEM_{00} mode of the upper sideband reso-

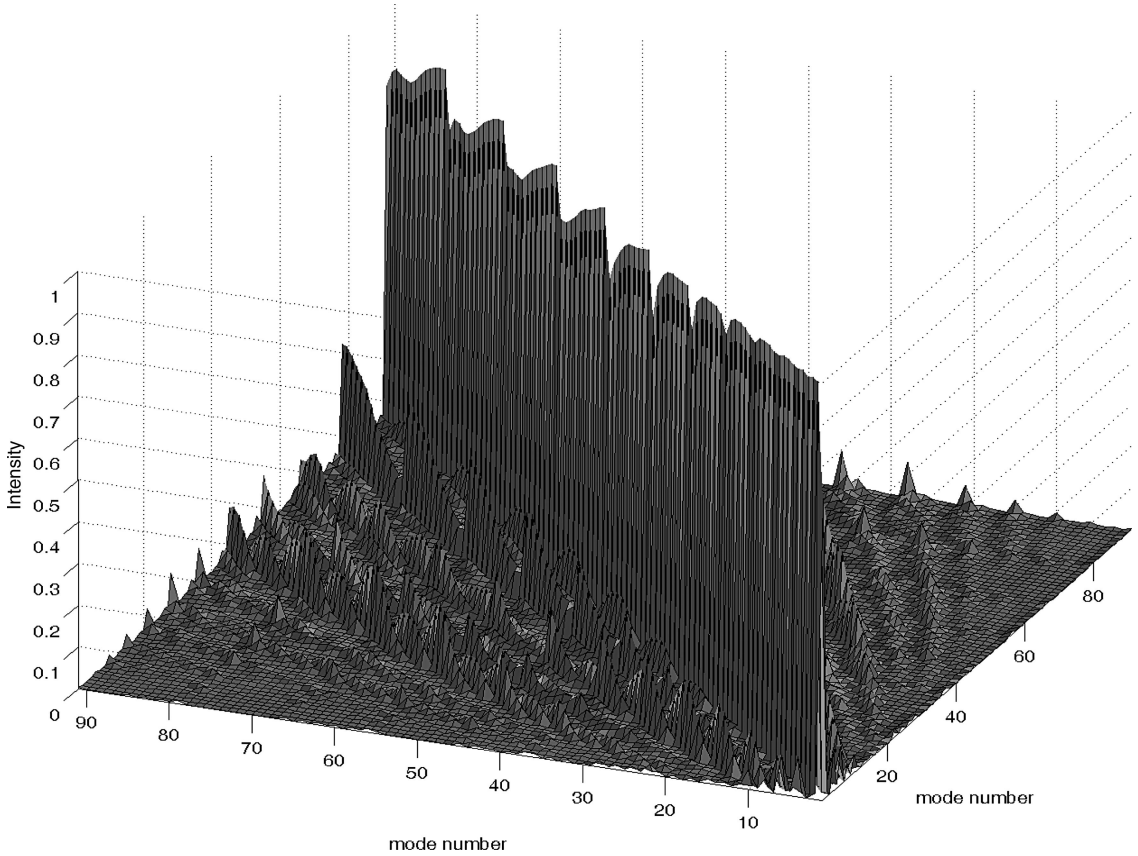


Fig. 3. Intensity reflection operator of the full interferometer with real maps. The modes are ordered {00, 01, 10, 02, 11, 20, 03, . . .}. Off-diagonal elements show coupling between modes inside the interferometer induced by surface defects. Diagonal elements slightly differ from unity mainly due to the finite size of the coatings.

nates, it is proportional to $J_1^2(m)$. These resonances are shown in Fig. 4. In this case, the ratio of these signals is free of any calibration errors, since the same photodiode channel is used and is just limited by the noise on the small sideband signal. The measurement gives $m = 0.165 \pm 0.005$.

Both methods based on the interferometer signal agree well, and the value obtained is used in the following.

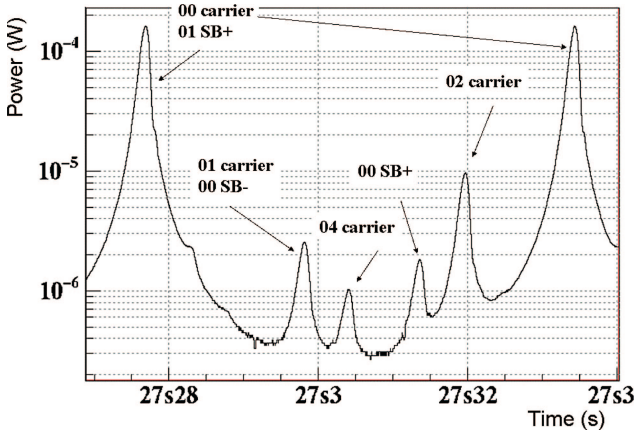


Fig. 4. (Color online) Power transmitted by a free FP cavity.

B. Modulation Frequency

Since the beam is modulated before the IMC, the sidebands should resonate in the IMC in order to be transmitted. As pointed out in Section 2, they should also resonate inside the recycling cavity and correspond to the Anderson frequency (i.e., the frequency spacing between the resonance of the TEM_{01} mode and the resonance of the TEM_{00} mode) of the FP cavities. The radius of curvature of the end mirror defines the mode-separation frequency of the cavity. This gives a set of possible values for the modulation frequency. Given the foreseen range of values for the IMC length and the recycling cavity length, the value of the modulation frequency has been set, among the possible values that matched the resonance condition inside these cavities, to 6.26 MHz. The fine-tuning is then done after the precise measurement of the mode-cleaner length. The modulation frequency has to be an exact multiple of the IMC's free spectral range (FSR):

$$f_{\mathrm{mod}} = n\mathrm{FSR}_{\mathrm{IMC}} = n\,\frac{c}{2L_{\mathrm{IMC}}}, \tag{4}$$

with $n = 6$. This condition has to be tuned very carefully since any mismatch couples the length noise of the IMC to the interferometer signals used for its

longitudinal controls. After the measurement of the IMC length (see Section 5), the modulation frequency has been adjusted to $f_{\mathrm{mod}} = 6.264180$ MHz.

It has then been checked that it matched the recycling length and the mode-separation frequency:

- The condition of resonance inside the recycling cavity takes into account the phase shift introduced by the FP cavities. An analytical calculation and simulations with SIESTA [16] and FINESSE [17] give the same optimal recycling length: $l_{rec} = 12.073$ m for this modulation frequency. This condition should be fulfilled within ~1 cm in order not to degrade the recycling factor. The length of the recycling cavity has been measured (see Subsection 8.A.2) and agrees with this requirement within 1 cm.
- The Anderson technique, used for the angular alignment of the FP cavities, requires that the TEM_{01} mode of the upper sideband is distant from the carrier by a multiple of the FSR, and therefore the modulation frequency should fulfill

$$f_{\mathrm{mod}} = f_{\mathrm{sep}} + n\mathrm{FSR}_{\mathrm{FP}}, \tag{5}$$

where f_{sep} is the mode-separation frequency of the FP cavity and $\mathrm{FSR}_{\mathrm{FP}}$ is its FSR. The Anderson technique requires that the modulation frequency corresponds to the optimum frequency given by Eq. (5) within the linewidth of the cavity (1000 Hz). The mode-separation frequency is deduced from the measurement of the end mirror radii of curvature (see Subsection 7.B), and the FSR has been measured as described in Subsection 7.C, $\mathrm{FSR}_{\mathrm{FP}} = (49{,}967 \pm 1)$ Hz. The optimal values of f_{mod} are therefore (with $n = 125$): ${f_{\mathrm{mod}}}^{\mathrm{opt},N} = (6{,}264{,}420 \pm 100)$ Hz for the north cavity and ${f_{\mathrm{mod}}}^{\mathrm{opt},W} = (6{,}264{,}340 \pm 200)$ Hz for the west cavity. The value set for the modulation frequency corresponds to the optimum values within at most 300 Hz and is therefore well within the allowed range.

Following these measurements, it can be concluded that all the required resonance conditions for the sidebands are fulfilled.

5. Input-Mode-Cleaner Cavity

The IMC is a triangular optical cavity whose aim is to filter the input beam jitter and to obtain a clean Gaussian beam at the entrance of the interferometer. Its optical components are suspended to achieve adequate seismic isolation. Therefore it offers a good reference for the laser frequency and is used to stabilize the laser frequency. The mode-cleaner design parameters are a length of 143 m, a finesse of 1000, and a waist of 5 mm. To achieve these goals, the mirrors of the cavity have been designed with the following characteristics: a radius of curvature of (183 ± 5) m for the end mirror and a transmittance of (3000 ± 300) ppm for both the input and the output mirrors.

The measurement of the IMC optical properties are detailed in the following.

A. Input-Mode-Cleaner Transmittance

The transmittance of the IMC is degraded by losses inside the cavity and by the imperfect matching of the input beam to the cavity.

1. Losses of the Input-Mode Cleaner

The transmittance of the cavity for the TEM_{00} mode can be deduced from the measurements of the individual transmittance of the mirrors and of their losses. The dc transmittance of the cavity is, according to Eq. (6) of Ref. 20,

$$T = \frac{4T_1T_2}{(T_1 + T_2 + L_{\mathrm{RT}})^2}, \tag{6}$$

where T_1 and T_2 are the input and output mirror transmittances and L_{RT} are the round-trip losses, including the far curved mirror transmittance. The input and output mirror transmittances have been measured after coating: $T_1 = (2427 \pm 30)$ ppm and $T_2 = (2457 \pm 30)$ ppm.

The measurement of the cavity pole f_P and of the FSR are necessary to compute the round-trip losses L_{RT}, which can be deduced from the equation:

$$T_1 + T_2 + L_{\mathrm{RT}} = 4\pi \frac{f_P}{\mathrm{FSR}}. \tag{7}$$

The FSR and the cavity pole are measured with the open loop transfer function H of the lock of the laser on the cavity around the FSR frequency. The open loop transfer function is measured as the cavity is locked, and the automatic alignment is operating. The error signal is perturbed by a swept sine. The transfer function of the voltages, after and before the perturbation, is measured at the frequency of the perturbation. Simple algebra shows that this transfer function is actually the open loop transfer function. For perturbation frequencies close to the FSR, the loop actuator is assumed to have a flat response, as well as the filtering electronics; therefore, H is equal (up to a constant factor) to the transfer function between frequency noise and the Pound–Drever–Hall signal. The result is fitted with

$$y = A \exp(i\phi)\left(\frac{1 + i(f - \mathrm{FSR})/f_Z}{1 + i(f - \mathrm{FSR})/f_P}\right), \tag{8}$$

similar to Eq. (18) in Ref. 20, where A and ϕ are arbitrary amplitude and phase of the open loop transfer function at this frequency. According to the mathematical development of Ref. 20, no zero is present in this transfer function, so that the notch has an infinite depth. A deep notch has been observed in similar experiments on rigid cavities [21]. It is therefore assumed that the large departure from a deep notch that is observed might be related to the fact that the mirrors are suspended, for example, that radiation pressure changes the response of the transfer function. An analytical model to reproduce this effect

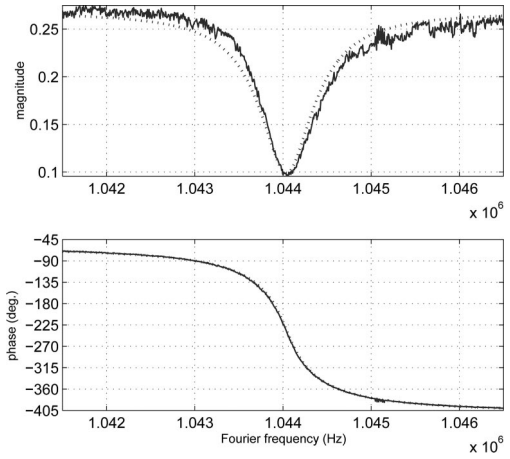


Fig. 5. Open loop transfer function of the lock of laser frequency on the cavity, at ~1 MHz. Solid curve, measured data; dotted curve, fitted curve.

would lead to too many parameters to fit. Therefore only an empirical zero f_Z has been added in Eq. (8).

The fit, shown in Fig. 5, gives with 95% confidence level errors: $f_P = (479 \pm 3.3)$ Hz and FSR = (1,044,039 ± 2.2) Hz and $f_Z = (-177 \pm 2.2)$ Hz. The losses deduced from these values, using Eq. (7), are $L_{RT} = (886 \pm 60)$ ppm. The departure of the amplitude response to the theoretical shape might bias the results; as this would be a different shape, the error bars would not reflect this possible bias.

An alternative way to measure the cavity pole f_P is the determination of the decay time [22]. It is measured after a fast change of the laser frequency, large enough to drive the cavity out of resonance. A fit of the measured data with an exponential decay, shown in Fig. 6, gives a measurement of the decay time: $\tau = (167.2 \pm 0.2)$ μs. Then, using $f_P = 1/(4\pi\tau) = (475.9 \pm 0.6)$ Hz and Eq. (7), the total losses are deduced: $L_{RT} = (846 \pm 45)$ ppm (where the uncertainty is dominated by the uncertainties on T_1 and T_2). This is in agreement with the value measured with the transfer function.

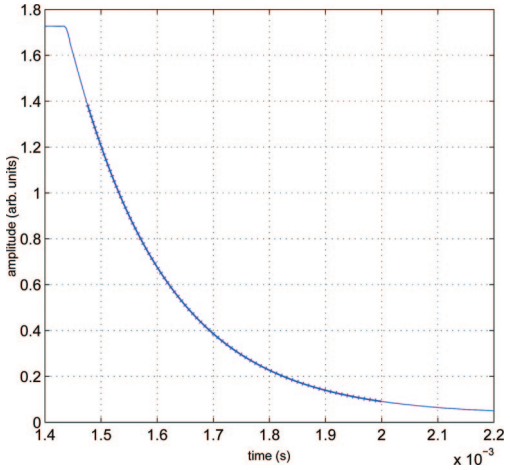


Fig. 6. (Color online) Time decay experiment: power transmitted by the IMC, after a fast change of input laser frequency.

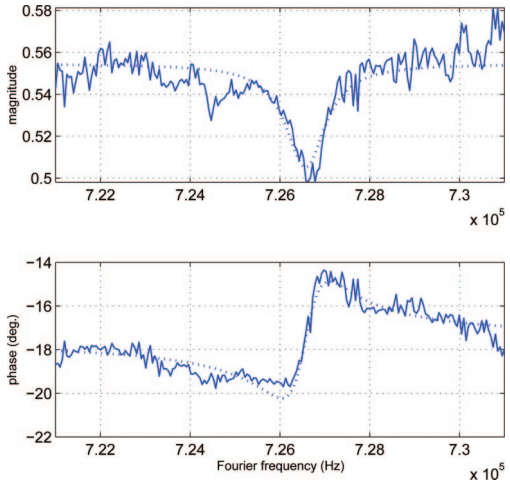


Fig. 7. (Color online) Open loop transfer function of the lock of laser frequency on the cavity, around the frequency of the TEM_{02} mode (726 kHz). Solid curve, measured data; dotted curve, result of the fit.

Then the expected transmission of the IMC for the TEM_{00} mode is $T = (73 \pm 2)\%$ [from Eq. (6)].

2. Beam Matching and Radius of Curvature of the End Mirror

The beam matching is deduced from the measurement of the transfer function H around the frequency of resonance of the TEM_{02} mode. The result is fitted with

$$y = A \exp(\phi)\left(1 - \frac{M}{2}\frac{1}{1 + i(f - f_{02})/f_P}\right) \qquad (9)$$

from Eq. (21) in Ref. 20, where A and ϕ are the arbitrary amplitude and phase of the open loop transfer function at this frequency, M is the amount of light intensity coupled to the TEM_{02} mode of the cavity, f_{02} is the frequency of the TEM_{02} mode, and f_P is the pole of the cavity. The fit, shown in Fig. 7, gives, with 95% confidence intervals, $f_P = (593 \pm 51)$ Hz, $M = 0.17 \pm 0.01$, and $f_{02} = (726{,}569 \pm 35)$ Hz.

Thus, the mode-shaping mismatching is 17%. A mismatching of ~15% had also been deduced from the measurement of the size of the beam, which confirms the measurement presented here.

The effective radius of curvature R can also be deduced from the measurement of the frequency of the TEM_{02} mode f_{02} (as explained in the case of the FP cavities in Subsection 7.B). The deduced value is $R = (181.99 \pm 0.01)$ m, in agreement with the design specification.

3. Total Transmittance of the Input-Mode Cleaner

The measurement of the power of the beams at the output ports of the interferometer can be used to deduce the power incident on the interferometer. The values found range from 7 to 8 W.

The measurements described in the previous sections lead to an expected total transmittance of the

IMC of (60 ± 3)%: 83% due to imperfect beam matching and 73% due to the transmittance of the TEM_{00} mode. Since the input power is 16.7 W, the power transmitted by the OMC is therefore expected to be 10 W. The difference with the power incident on the interferometer points to additional losses, which have not been understood yet.

B. Finesse and Length of the Input-Mode Cleaner

The other optical properties of the cavity are also deduced from the transfer function measurements and the decay time experiment. The finesse is directly deduced from the measurements of the pole of the cavity f_P described in the above sections:

$$F = \frac{c}{4 f_P L_{\mathrm{IMC}}}. \tag{10}$$

The most precise measurement comes from the decay time experiment and gives $F = 1097 \pm 2$. The optical length of a half round trip is deduced from the measurement of the FSR:

$$\mathrm{FSR} = \frac{c}{2 L_{\mathrm{IMC}}}, \tag{11}$$

and gives $L_{\mathrm{IMC}} = (143{,}533{,}326 \pm 30)$ μm.

6. Matching of the Input and Output Beams

Any mismatch of the beam with respect to the optical cavities of Virgo (IMCs and OMCs and FP cavities) results in a loss of the effective power and therefore a worsening of the sensitivity. The laser frequency noise also couples stronger to the gravitational-wave signal as the mismatch to the FP cavities is larger. The requirement on the beam mismatching therefore depends on the amount of frequency noise. It should typically be smaller than a few percent. Some loss of the input power is also the result of a nonunity transmittance of the IMC. The tuning of the beam parameters and the measurement of these losses are described in this section.

A. Input Beam Matching to the Interferometer

The beam exiting the IMC has a waist of 5 mm and is adjusted to the Virgo FP cavities by means of an off-axis telescope formed by two spherical mirrors. The Virgo beam waist is ~20 mm and is located at the FP input mirrors. The length of this telescope has to be tuned so that the beam incident on the interferometer matches the fundamental mode of the FP cavities as well as possible. The tuning consists of adjusting the distance between the two mirrors forming the input telescope in order to obtain the highest power stored inside the FP cavities at the TEM_{00} resonance.

The size of the beam on the end mirrors during the tuning of the telescope is compared with a simulation with FINESSE [17] as shown in Fig. 8. This allows a rough extraction of the input beam parameters: $\omega_x = 18$ mm, $z_{0x} = -500$ m, $\omega_y = 18$ mm, and $z_{0y} = 500$ m, where the z axis is oriented toward the laser and its origin is located on the beam-splitter mirror. After this tuning, it is expected that ~94% of the input beam is coupled to the TEM_{00} mode of the cavities. This coupling is measured by comparing the amplitude of the first Laguerre mode with the amplitude of the TEM_{00} mode in the FP cavities (see Fig. 4) and is found to be 94%. This could not be further improved since the beam was astigmatic due to a bad centering of the beam on the spherical mirrors of the telescope: a better alignment of the beam would have been needed.

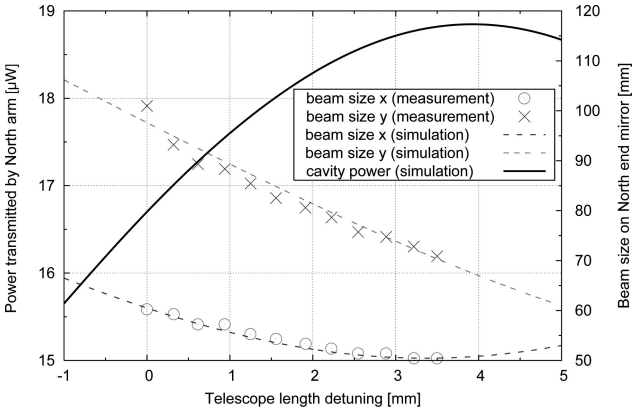


Fig. 8. Size of the beam after 3 km along two orthogonal axis as a function of the input telescope length tuning. The curves represent the result of the simulation while the dots are the experimental measurements. The wider black curve shows the power transmitted by the cavity as predicted by simulation (Ref. 17).

B. Matching of the Beam to the Output-Mode Cleaner

The beam entering the output bench has a waist of ~2 cm. The dark fringe beam is passed through the OMC in order to improve the contrast defect. The waist of the mode-cleaner cavity is 140 μm. The output beam is adapted to the mode-cleaner cavity by means of a telescope made of three lenses. The position of these lenses is adjusted in order to get the best transmission of the FP TEM_{00} mode. Only a rough matching was done using the direct beam exiting from the IMC. Due to the astigmatism of this beam, the matching to the OMC could not exceed 94%. The relative position of the lenses is tuned in order to minimize the power reflected by the OMC and a matching of 93% is reached.

The matching is then cross-checked with the beam reflected by the north FP cavity. The cavity is kept at resonance, and the end mirror position is excited with a frequency line. This line should be seen only by the mode that resonates into the cavity, i.e., the FP TEM_{00} mode. Therefore, comparing the amplitude of this line with the beams reflected and transmitted by the OMC gives an estimate of the OMC transmission for the FP TEM_{00}. It is found to be ~94% and could, in principle, be improved with a better tuning of the telescope. The matching was considered to be good enough at that time and no further tuning was per-

formed. It will be repeated when the Virgo sensitivity gets closer to its design goal.

7. Fabry–Perot Cavities

The FP cavities are characterized by their finesse, their length, the radius of curvature of the end mirrors, and the losses due to defects of the mirrors. This section reports on the measurement of these quantities.

A. Finesse

The finesse of the FP cavities is extracted from the TEM_{00} Airy peaks: it is defined as the ratio of the distance between two consecutive TEM_{00} resonances (FSR) to their linewidth (FWHM). Unfortunately, due to dynamical effects, the Airy peak is distorted, as shown in Fig. 9, and this effect prevents measuring the linewidth directly. Nevertheless, if the speed of the cavity mirrors is known, this distortion can be predicted by a simulation including dynamical effects. It is therefore first needed to measure the speed of the cavity, then the shape of the Airy peak is compared with a time-domain simulation including dynamical effects [16] (SIESTA) for a set of finesse values.

The speed of the cavity can be determined from the measurement of the cavity length as a function of time using the fact that the cavity length difference between two TEM_{00} resonances is equal to $\lambda/2$. If the cavity is not excited too much (angularly and longitudinally), its length varies sinusoidally with time. Figure 10 shows the length of the cavity as a function of time and the cosine function fitted to these points: $l(t) = \cos(\omega t + \phi)$. The speed is derived from $l(t)$ and is measured with an uncertainty of 1% to 2%.

For each Airy peak, the simulation is run with the measured speed for a set of finesse values. The shape of the peak is compared with these simulations, and the value that best matches the data is kept. This

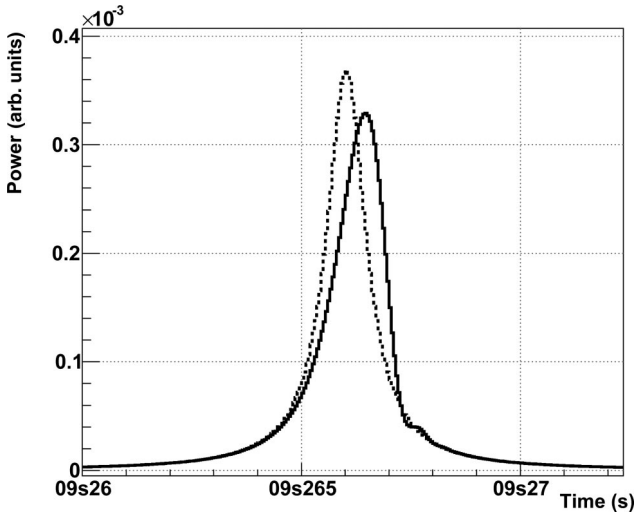


Fig. 9. Profile of the Airy peak without dynamical effects (dotted curve) and with dynamical effects (solid curve) for a speed of 10 μm/s.

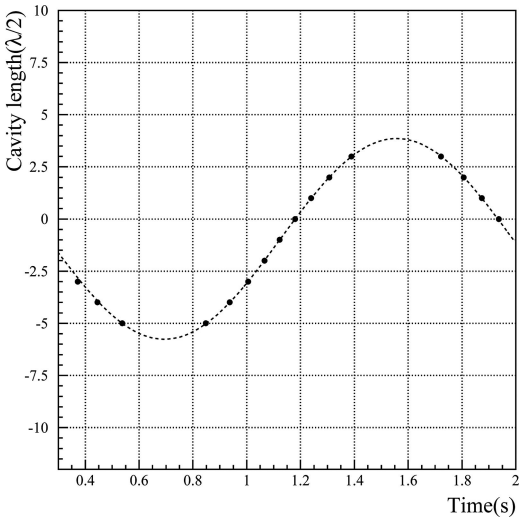


Fig. 10. Example of the measurement of the speed of the FP cavities: the dots represent the TEM_{00} peak positions, and the curve shows the length $l(t)$ fitted to these points.

measurement is repeated on several points, and the dispersion of these measurements defines the accuracy. Table 1 gives the measurement for each cavity as well as the values expected from the mirror coating measurements:

$$F = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}, \tag{12}$$

where $r_{1(2)}$ is the field reflectivity of the input (end) mirrors. It should be noted that since the input mirror is flat, its effective reflectivity is expected to vary due to thickness variation induced by temperature and therefore the finesse of the cavity is expected to vary as well. This effect is proportional to the value of the second face antireflective coating of the input mirror: $\Delta F/F = \pm 2 r_{AR}$, where r_{AR} is the field reflectivity of this second face. The coating measurement gave $R_{AR} = 150$ ppm and therefore the variation of finesse is expected to be approximately $\pm 2.5\%$.

B. Radius of Curvature of the End Mirrors and Mode-Separation Frequency

The radius of curvature of the end mirrors defines the waist of the beam but, as shown in Subsection 4.B, it is also related to the modulation frequency, via the mode-separation frequency of the cavities. The mode-

Table 1. FP Finesses[a]

	Measurement	From Mirror Reflectivities
North FP cavity	49.0 ± 0.5	50
West FP cavity	51 ± 1	51

[a]The values of the two FP finesses are obtained with the measurement based on the shape of the Airy peaks (first column) compared with those deduced from the mirror reflectivity measurements (second column).

separation frequency f_{sep} corresponds to the frequency difference for which the TEM_{00} and the TEM_{01} modes resonate and is related to the radius of curvature of the end mirror R_2 (the input mirror is flat) and the length of the cavity L_{FP}:

$$f_{sep} = \nu_{01} - \nu_{00} = \frac{c}{2\pi L_{FP}} \arccos \sqrt{1 - \frac{L_{FP}}{R_2}}. \quad (13)$$

The radius of curvature can be deduced from the signals measured at the transmission of the FP cavities and also from the measurement of the map of the mirrors as described in the following. The mode-separation frequency also depends on the cavity length, whose measurement is described in Subsection 7.C.

1. Measurement with the Fabry–Perot Signals

The radius of curvature can be deduced from the optical spectrum of the cavity by measuring the cavity length difference between the TEM_{nm} modes:

$$\frac{d_{nm-00}}{(n+m)d_{00-00}} = \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{1 - \frac{L_{FP}}{R_2}}, \quad (14)$$

where d_{nm-00} is the length difference between the resonances of TEM_{nm} and TEM_{00}, and d_{00-00} is the length difference ($\lambda/2$) between two consecutive TEM_{00} resonances. Figure 4 shows the transmitted power when the cavity is freely swinging and well aligned. One can recognize the TEM_{nm} resonances for low values of $m + n$. The modes of the carrier are used to do this measurement. Since the TEM_{00} of the lower sideband is superimposed on the TEM_{01} of the carrier, the cavity has to be adequately misaligned so that the TEM_{01} of the carrier is dominant. The data used for this measurement fulfill this criterion. The cavity length is reconstructed as a function of time with the same method as that described in Subsection 7.A. The length difference between the modes can then be reconstructed. The measurement is done for $m + n = 1, 2, 4$ and uses several tens of points. The uncertainty on d_{nm-00} is given by the rms of its distribution. The effective radius of curvature is deduced from Eq. (14). The effective radius of curvature extracted from these measurement is given in Table 2. The precision is typically of the order of 20 m.

Since the mirror curvature is not necessarily uniform, different modes might see a different radius of curvature since they have a different distribution of power. The radii of curvature seen by different modes are compatible, showing that the mirror curvature is reasonably uniform.

2. Measurement from the Mirror Surface Maps

The surface maps of the mirrors have been measured after coating. The radius of curvature can be deduced from these maps in several ways:

(1) with a simulation of the FP cavity including the maps based on FFT field propagation (DARKF) and applying the same method as on real data (see Subsection 7.B.1),

(2) with the same simulation as in (1) but using the size of the beam that resonates in the cavity, since it is directly related to the radius of curvature of the cavity mirrors,

(3) by fitting the map of the mirrors with a sphere weighted by a Gaussian in order to simulate the beam profile.

The radius of curvature determined with these three methods is given in Table 2. The measurements of the radius of curvature based on the FP signals agree with the results based on the mirror surface maps for the north cavity, but are systematically ~70 m lower for the west cavity. It is now known that a small bias was introduced during the measurement of these maps due to the apparatus holding the mirror. This could explain this difference.

3. Mode-Separation Frequencies

These results are turned into a measurement of the mode-separation frequency using Eq. (13). Since the Anderson technique used in Virgo is based on the TEM_{01} mode, only results from this mode are used. The Anderson frequencies are

- for the north arm: $f_{sep}^{north} = (18{,}533 \pm 100)$ Hz,
- for the west arm: $f_{sep}^{west} = (18{,}450 \pm 200)$ Hz.

These values are compared with the modulation frequency in Subsection 4.B.

C. Arm Length

The length of the arms can be extracted with a method similar to that described for the measure-

Table 2. Radius of Curvature of the End Mirrors[a]

		Mirror Maps		
	Interferometer Data	(1)	(2)	(3)
North cavity	$m + n = 1\ 3555 \pm 20$	$m + n = 1\ 3563 \pm 20$	3598 ± 20	3583
	$m + n = 2\ 3550 \pm 10$	$m + n = 2\ 3558 \pm 10$		
	$m + n = 4\ 3585 \pm 10$			
West cavity	$m + n = 1\ 3570 \pm 40$	$m + n = 1\ 3643 \pm 20$	3650 ± 20	3624
	$m + n = 2\ 3540 \pm 20$	$m + n = 2\ 3614 \pm 10$		

[a]The values of the radius of curvature are deduced from the FP signals and from the mirror map measurement (last three columns) for the two FP cavities of Virgo.

ment of the radius of curvature in Subsection 7.B by noting that the difference of length between the TEM_{00} resonance of the sidebands and of the carrier corresponds to the modulation frequency modulo the FSR:

$$f_{\mathrm{mod}} = \nu_{\mathrm{USB}} - \nu_{\mathrm{carrier}} + 125\mathrm{FSR} = \frac{c}{2L_{\mathrm{FP}}}\left(\frac{d_{\mathrm{USB-carrier}}}{d_{00-00}}\right) + 125\mathrm{FSR}, \quad (15)$$

where $d_{\mathrm{USB-carrier}}$ is the cavity length difference between the upper sideband and the carrier TEM_{00} resonances. The upper sideband resonance is well observed for a well-aligned cavity as shown in Fig. 4. Since the modulation frequency is known, the cavity length can be determined from Eq. (15). This gives $L_{\mathrm{north}} = (2999.86 \pm 0.03)$ m, which is compatible with the expected length (2999.90 m).

D. Cavity Losses

The FP cavity losses can be due to mirror absorption, scattering (due to roughness), or long-range surface defects that couple the TEM_{00} mode to higher-order modes. The first kind of losses (absorption and scattering) lead to the loss of some power inside the interferometer, while the long-range surface defects couple the TEM_{00} to higher-order modes so that the power is not necessarily lost, but both result in a decrease of the FP reflectivity for the TEM_{00}.

The mirror absorption and scattering have been measured after the coating and the total is of the order of 10 ppm for each mirror. A small fraction (typically 50 ppm) of the beam is transmitted by the end mirror to the end benches. The effect of long-range surface defects is estimated with simulations, including the measurement of the mirror surface maps.

The losses inside the FP cavity lower their reflectivity and as a consequence lowers the recycling gain, so it is therefore important to keep them as small as possible. The reflectivity (in amplitude) of the cavities is given by

$$r_{\mathrm{FP}} = \frac{r_i - r_e(1-L)}{1 - r_i r_e}, \quad (16)$$

where $r_{i(e)}$ is the reflectivity of the input (end) mirror and L represents the round-trip losses. This reflectivity can, in principle, be measured with a free cavity by comparing the power reflected by the cavity out of resonance with the power reflected on the TEM_{00} resonance: ${r_{\mathrm{FP}}}^2 = P_{\mathrm{on\ res}}/P_{\mathrm{out\ res}}$. Unfortunately this does not give a precise measurement due to dynamical effects and power fluctuations with the alignment. With this method, the power reflectivity was estimated to be in the range of 96% to 98% for both cavities.

It is nevertheless possible to estimate the fraction of the input power, which is lost due to scattering inside the FP cavities: while the interferometer is locked, from the known input power and the powers measured by the photodiodes at the interferometer pickups (the end mirrors transmitted beams and the interferometer transmitted and reflected beams), it can be deduced that ~35% of the power incident on the interferometer is lost inside the interferometer. The simulation also shows that 33% of the input power is lost in the FP cavities due to the mirror surface defects. This power loss is equivalent to round-trip losses of 330 ppm inside each arm. It can be concluded that the losses due to long-range surface defects that scatter the light at relatively small angles are well reproduced by the simulation.

8. Recycling Cavity

The lengths of the recycling cavity are of particular importance since the asymmetry between the two arms of the short Michelson defines the transmission of the sideband signals to the dark fringe, and the mean recycling length should fulfill the resonance condition for the sidebands. The other important quantity is the recycling gain that directly affects the shot-noise limit of the sensitivity.

A. Lengths

1. *Michelson Length Asymmetry*

The use of the modulation technique requires that the small Michelson is asymmetric. This asymmetry is defined by $\Delta l = l_2 - l_1$. The sidebands's transmission depends on this asymmetry. Therefore this quantity is also needed in order to estimate the expected sidebands's transmission (see Subsection 8.C).

The beam reflected by the west cavity travels $2\Delta l$ more than the beam reflected by the north arm. Therefore the optimum demodulation phase of this beam should be different by $\Delta\phi = 2(\Delta l\Omega/c)$. The measurement makes use of this property: the two cavities are alternatively locked, and the demodulation phase is tuned with a precision of 0.1°. The asymmetry deduced from this measurement is $\Delta l = (0.844 \pm 0.013)$ m.

2. *Recycling Cavity Length*

To reach the best sensitivity, both the carrier and the sidebands should resonate inside the recycling cavity. The condition of the resonances is

$$\frac{\omega}{c}\, 2l_{rec} = 0[2\pi] \quad (17)$$

for the carrier and

$$\frac{\omega \pm \Omega}{c}\, 2l_{rec} = \pi + \phi_{\mathrm{FP}}[2\pi] \quad (18)$$

for the sidebands, where ϕ_{FP} is the phase introduced by the FP cavities on the sidebands. Once the microscopic condition (17) is fulfilled, Eq. (18) transforms into a macroscopic condition on the recycling length:

$$\frac{\Omega}{c}\,2l_{rec} = \pi + \phi_{\mathrm{FP}}[2\pi]. \tag{19}$$

An analytical calculation and a simulation study taking into account the dephasing due to the FP cavities show that the optimum value is $l_{rec} = 12.073$ m. The recycling length should fulfill this condition within ± 1 cm. It was also found with the simulation including the mirror maps (see Section 3) that these have a nonnegligible impact on the optimal recycling length, and it could be several centimeters different from this last value. But since the beam-splitter transmission map had not been measured at 45° no conclusion could be drawn.

Several independent measurements of this length have been done:

- It has been deduced from the measurement of the position of the mirror suspension point during the installation and the known position of the reflective surface of the mirrors with respect to this point: $l_{rec} = (12.07 \pm 0.01)$ m.
- The optical length of the recycling cavity has been measured during the commissioning of the central part (CITF) of Virgo [23] using an auxiliary laser: it is deduced from the measurement of the FSR of this cavity obtained from the transfer function between the frequency noise and the interferometer output signal. This measurement cannot be performed on Virgo since the laser beam is now filtered by the IMC cavity, which makes the measurement less straightforward. Taking into account the changes of position of the mirrors for Virgo with respect to the CITF gives $l_{rec} = (12.07 \pm 0.01)$ m.
- The last measurement is done with the Virgo final configuration and relies on the fact that if the sidebands are at resonance, the field comes back in phase with the incoming field; otherwise some phase shift is accumulated proportionnally to the mean number of round trips, i.e., to the recycling gain. In this last case, the demodulation phase should shift from the case without recycling. The interferometer has been locked in the recombined and in the recycled configuration, and the demodulation phase of the dark fringe has been adjusted. A phase difference lower than 2° has been measured; this indicates that the recycling cavity length is the correct one within ~ 1 cm.

These three measurements agree within each other. The third one is the more direct and confirms that the recycling length is within 1 cm of the optimal value.

B. Recycling Gains

The recycling gains depend on the power recycling (PR) mirror reflectivity and the FP reflectivity for the carrier,

$$G = \left(\frac{t_{PR}}{1 + r_{PR} r_{\mathrm{FP}}}\right)^2, \tag{20}$$

as well as the small Michelson asymmetry for the sidebands:

$$G_{SB} = \left(\frac{t_{PR}}{1 - \cos\left(\frac{\Omega \Delta l}{c}\right) r_{PR} {r_{\mathrm{FP}}}^{SB}}\right)^2, \tag{21}$$

where t_{PR} and r_{PR} are the PR amplitude transmission and reflectivities, r_{FP} (respectively, ${r_{\mathrm{FP}}}^{SB}$) is the average FP reflectivity for the carrier (respectively, sidebands), Ω is the modulation frequency, and Δl is the small Michelson asymmetry. Without losses in the FP cavities, when these are resonant on the carrier, $r_{\mathrm{FP}} = -1$ and ${r_{\mathrm{FP}}}^{SB} = +1$ and given a PR mirror reflectivity equal to 92.2%, the recycling gains are expected to be $G = 50$ and $G_{SB} = 36$.

These gains can be deduced from the ratio of the power incident on the beam-splitter mirror with and without recycling:

$$G^{00} = T_{PR}\,\frac{{P_{dc}}^{\text{recycled}}}{{P_{dc}}^{\text{recombined}}}, \qquad {G_{SB}}^{00} = 2T_{PR}\,\frac{{P_{2\Omega}}^{\text{recycled}}}{{P_{2\Omega}}^{\text{recombined}}}, \tag{22}$$

where ${P_{dc(2\Omega)}}^{\text{recombined (recycled)}}$ is the dc power (respectively, the power at twice the modulation frequency) in the recombined (respectively, recycled) configuration. The recycling gains extracted from these measurements are $G = 31 \pm 1$ and $G_{SB} = 19 \pm 1$. Taking into account the mismatching of the input beam with the FP cavities (see Subsection 6.A), the deduced recycling gains for a well-matched TEM_{00} should be

$$G^{00} = 33 \pm 1, \qquad {G_{SB}}^{00} = 20 \pm 1. \tag{23}$$

These gains are significantly smaller than those computed above from scalar values. This is expected if there are nonnegligible losses in the FP cavities. A simulation (see Section 3) including the mirror long-range surface defects that have been measured after coating also gives smaller recycling gains: $G = 34$ and $G_{SB} = 30$. It is clear from this simulation that these low-gain values are due to the surface defects of the mirrors. The carrier is mainly sensitive to defects inside the FP cavities (see Subsection 7.D), while the sidebands are mainly sensitive to the recycling cavity defects since they do not couple to the FP cavities. The gain of the carrier obtained in simulation agrees well with the measurement, while the gain of the sidebands is significantly higher in simulation. This might be because the beam-splitter mirror is not well simulated: the surface map was only measured at 0° and not at 45°. Moreover, as shown in Fig. 11, the gain of the sidebands is also sensitive to the residual radius of curvature, which is not known for the beam-splitter mirror (the residual radius of curvature of the power recycling mirror is ~ 30 km). Inclusion of an arbitrary map for the beam-splitter mirror in the DARKF simulation shows that this mirror can have

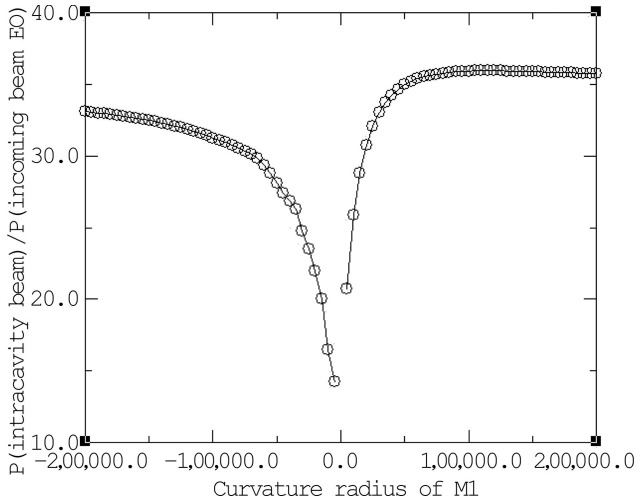


Fig. 11. Recycling gain of the sidebands as predicted by simulation as a function of the radius of curvature (in meters) of the power recycling mirror. The simulation is done for a 12 m long FP cavity, with flat input mirror and curved end mirror M1. The transmissions of the input and end mirrors are set, respectively, to 7.8% and 1.4% so that the behavior of this cavity is identical to the Virgo recycling cavity for the sidebands.

nonnegligible effects on the sidebands's recycling gain. The gain of the sidebands is also sensitive to the length of the recycling cavity: simulation shows that it varies by ± 1 for a variation of ± 1 cm.

Assuming that all the losses are located inside the FP cavities, the mean FP reflectivity for the carrier, deduced from Eq. (20) is therefore $R_{\mathrm{FP}} = 0.982 \pm 0.002$. This is equivalent to mean round-trip losses of (530 ± 50) ppm (after subtraction of the end mirror transmission, which is $\sim$40 ppm). This value is significantly higher than the 330 ppm deduced from the power lost inside the interferometer (see Subsection 7.D). Two effects can contribute to this discrepancy. First, the value of the losses deduced from the recycling gain gives only an upper limit of the FP losses since the recycling gain might also be lowered by defects inside the recycling cavity, as it is observed in the simulation. Then, the coupling of the TEM_{00} to higher-order modes inside the FP cavity leads to a reduction of the recycling gain but not to power loss, these losses are therefore not taken into account in the measurement reported in Subsection 7.D. One can then conclude that the mean round-trip losses inside the FP cavities compose between 330 and 530 ppm.

Assuming $R_{\mathrm{FP}} = {r_{\mathrm{FP}}}^2 = 0.982$, the maximum recycling gain that could be achieved taking the same reflectivity for the PR mirror would be 55. A new PR mirror was installed at the end of 2005 with a reflectivity of 95% that allowed, as expected, the increase of the carrier recycling gain up to 43.

C. Transmission of the Sidebands

For a nonperfect contrast, the higher the transmission of the sidebands the smaller the shot-noise limit [see Eq. (1)]; therefore the sideband transmission has to be maximized. For the recycled interferometer, it is given by

$$T = G_{SB} \sin^2\left(\frac{\Omega \Delta l}{c}\right) = \left(\frac{t_{PR} {r_{\mathrm{FP}}}^{SB} \sin\left(\frac{\Omega \Delta l}{c}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\Omega \Delta l}{c}\right) r_{PR} {r_{\mathrm{FP}}}^{SB}}\right)^2. \tag{24}$$

From the Virgo design, neglecting losses, one expects $T = 0.45$. Since this quantity is proportional to the recycling gain, measurement of the recycling gain (presented in Subsection 8.B) suggests a lower value: $T = 0.25$.

The dark-fringe signal is also demodulated at twice the modulation frequency, allowing measurement of the sidebands's power: $P_{2\Omega} = 2T_{opt}P_0 T J_1(m)^2$, where T_{opt} is the transmission of the dark fringe from the interferometer to the photodiode. Unfortunately there are significant uncertainties on quantities entering this equation ($\sim$10% on P_0 and J_1); therefore the sideband transmission is not precisely measured: $T = 0.12 \pm 0.03$. It is significantly smaller than what is expected from the sidebands's recycling gain. This might indicate that the sidebands contain a large fraction of high-order modes since T is measured after the OMC, while G_{SB} is not.

9. Contrast Defect

The contrast defect is defined by twice the ratio of the carrier transmitted power to the power incident on the beam-splitter mirror. Since the interferometer is locked on the dark fringe, it should be null for a perfect interferometer. However there is always a small contrast defect due to the mirror defects, mode mismatch to the cavities, and the alignment imperfections (due to finite gain of the alignment loops): these create higher-order modes that are not on the dark fringe.

Taking into account only the asymmetry of the FP field reflectivities, which, from simulations, is expected to be of the order of 0.2%, the resulting contrast defect is of the order of a few 10^{-6}. A full simulation including higher-order modes shows that a typical contrast defect is of the order of 10^{-2}. As can be seen in Fig. 2, the shot-noise-limited sensitivity improves significantly if the contrast defect is reduced below 10^{-4}.

The contrast is improved in Virgo by means of an OMC [13,24], which rejects higher-order modes. In the following, the contrast before and after the OMC is given for two optical configurations: the so-called recombined and recycled configurations. In the recombined configuration, the recycling technique is not used: the power recycling mirror is misaligned, the FP cavities are kept at resonance, and the Michelson on the dark fringe. The recycled configuration refers to the full Virgo, i.e., including the power recycling technique.

A. Recombined Interferometer

For the recombined interferometer, the total dc power on the dark fringe is given by

$$P_{dc} = P_0\left(J_0(m)^2\,\frac{1-C}{2} + 2T_{\mathrm{recomb}}J_1(m)^2\right), \quad (25)$$

where, in this case T_{recomb}, the transmission of the sidebands is here given by $T_{\mathrm{recomb}} = \sin^2(\Omega\Delta l/c)$. The second term is the power of the sidebands and is estimated from the expected value of T_{recomb}. This term is negligible compared with the power on the dark fringe before the OMC and the contrast defect is easily deduced from the measurement of the dc power: $1 - C = 3 \times 10^{-4}$ before the OMC. After the OMC, the total power is comparable with the expected contribution of the sidebands; therefore only an upper limit has been put: $1 - C < 10^{-4}$.

B. Recycled Interferometer

When the interferometer is in the recycled configuration, the total dc power on the dark fringe is the sum of a contribution of the carrier and of the sidebands:

$$P_{dc} = P_0\left(GJ_0(m)^2\frac{1-C}{2} + 2TJ_1(m)^2\right). \quad (26)$$

The second term is identical to the power demodulated at twice the modulation frequency (see Subsection 8.C) and can be subtracted to determine the contrast defect $(1 - C)$. The mean power before the OMC is 6.6 mW, whereas after, it is reduced to 1.6 mW out of which (1.2 ± 0.2) mW is the sidebands' contribution. Therefore the contrast defect is $1 - C = 3 \times 10^{-4}$ before the OMC and $1 - C = 3 \times 10^{-5}$ after. The observed contrast defect before the OMC is quite good, while it was predicted to be 1% by the simulation. This difference is not yet understood but could be related, as verified with a DARKF simulation, to small differences between the measured and the real end mirror maps.

Nevertheless, as illustrated in Fig. 2, using the OMC allows for improvement of the sensitivity by 35% for a modulation index $m \approx 0.15$. Without an OMC, the modulation depth would have to be increased up to its maximum tunable value (~0.4) in order not to reduce the sensitivity by more than 10%.

10. Optical Gain for the Gravitational-Wave Signal

The optical gain (OG), which converts the interferometer differential arm length variation (in m) into the output port photodiode signal (in watts) is given by

$$\mathrm{OG} = 4P_{in}{}^{00}T_{df}J_0(m)J_1(m)\frac{2F}{\pi}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\sqrt{GT}\ \mathrm{W/m}, \quad (27)$$

where $P_{in}{}^{00}$, the incident power coupled to the TEM_{00} mode, is given by the product of the input power P_{in} and of the beam matching to the cavities M. During the first period of the recycled interferometer commissioning, which is studied in this paper (until the end of 2005), the power exiting the IMC was reduced by a factor of 10 before entering the interferometer. The input power was deduced from the output port power measurements and from the IMC transmittance (see Section 5): $P_{in} = (0.9 \pm 0.1)$ W. T_{df} is the transmission from the interferometer output port to the photodiodes measuring the dark-fringe signal: $T_{df} = 0.85 \pm 0.05$. It is mainly given by the transmission of the OMC (90%) and that of the Faraday isolator (96%) located between the OMC and the photodiodes. The measurement of the other parameters entering in the expression (27) are reported in this paper: $M = 0.94$, $m = 0.16 \pm 0.01$, $G = 33 \pm 1$, $T = 0.12 \pm 0.03$, and $F = 50 \pm 1$. Therefore the expected optical gain is $\mathrm{OG} = (0.8 \pm 0.2) \times 10^8$ W/m.

The OG has been measured with the calibration procedure. To this purpose, permanent lines (at frequencies at ~350 Hz) are added to the correction sent to the cavities's end mirror. The amplitude of these lines is converted into meters using the actuator electronic and mechanical transfer function. The optical gain is then the ratio of the amplitude of the signal measured on the dark fringe at this frequency to the amplitude of the mirror displacement. The OG measured with this procedure was $\mathrm{OG} = (0.71 \pm 0.15) \times 10^8$ W/m, where the uncertainty reflects the uncertainty on the mirror actuator transfer function. Therefore the measured optical gain agrees with the expected optical gain.

At the end of 2005, before the commissioning run called C7, the modulation index was increased by roughly a factor of 2. Its value was measured with the same method as that described in Subsection 4.A: $m = 0.30 \pm 0.01$. In this case, the expected OG is $\mathrm{OG} = (1.5 \pm 0.3) \times 10^8$ W/m. This value is compatible with the measured OG, $\mathrm{OG} = (1.0 \pm 0.2) \times 10^8$ W/m. This measured OG cannot be directly compared with the value measured with a smaller modulation depth since part of the mirror actuators has been replaced between these two runs but their calibration has not been performed.

11. Conclusion

The techniques developed for the measurement of the Virgo optical parameters have been presented in this paper. The good agreement observed between these measurements and the predictions made with the simulation using the measured mirror maps allows the understanding of the optical characteristics of the interferometer and gives confidence in the simulation for future upgrade studies.

This is, to the best of our knowledge, the first demonstration of the optical feasibility of such a large instrument. It has been shown that, except for the recycling gain, the measured optical parameters meet the design specifications [1] necessary for the good operation of the instrument. It can, in particular, be noticed that the contrast defect of the interferometer is

good and better than expected. Nevertheless, the use of an OMC leads to an improvement of the sensitivity by ~35%. Concerning the smaller value of the recycling gain, it was possible to understand that this gain was limited by losses inside the FP cavities. Some upgrades can therefore be designed based on these observations. In particular, since the power recycling mirror has been changed recently, its reflectivity has been increased in order to obtain a higher recycling gain. This value was fixed on the basis of the measurement of the FP reflectivities. Moreover, it was shown that the main contribution to losses is due to long-range surface defects of the mirrors inside the FP cavities. Once these mirrors are changed, a corrective coating could be performed in order to obtain a more regular surface and therefore reduce these losses.

Following each modification in the Virgo optical configuration, the techniques presented here will be used in order to measure the interferometer optical properties.

Appendix A

Fausto Acernese is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Mohamed Alshourbagy is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Paolo Amico is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

S. Aoudia is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Federica Antonucci is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

P. Astone is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Saverio Avino is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

D. Babusci is with INFN, Laboratori Nazionali di Frascati, Via E. Fermi, 40, I-00044 Frascati (Roma), Italy.

G. Ballardin is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Fabrizio Barone is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Matteo Barsuglia is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Lisa Barsotti is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Fabrice Beauville is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Stefano Bigotta is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Simona Birindelli is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Marie-Anne Bizouard is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Albert-Claude Boccara is with ESPCI-10, rue Vauquelin, 75005 Paris-France.

François Bondu is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Leone Bosi is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

Stefano Braccini is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Carlo Bradaschia is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Alain Brillet is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Violette Brisson is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Laura Brocco is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Damir Buskulic is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Enrico Calloni is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Enrico Campagna is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Franco Carbognani is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Fabien Cavalier is with the Laboratoire de

l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Roberto Cavalieri is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Giancarlo Cella is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

E. Cesarini is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Eric Chassande-Mottin is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

N. Christensen is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Andre-Claude Clapson is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Frédéric Cleva is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Christian Corda is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

A. Corsi is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Francesco Cottone is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

Jean-Pierre Coulon is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Elena Cuoco is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Anna Dari is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

Vincenzo Datillo is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Michel Davier is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

M. del Prete is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Rosario De Rosa is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Luciano Di Fiore is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Angela Di Virgilio is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Bénédicte Dujardin is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

A. Eleuteri is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Isidoro Ferrante is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Francesco Fidecaro is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Irene Fiori is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Raffaele Flaminio is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France, and the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Jean Daniel Fournier is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Sergio Frasca is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Franco Frasconi is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy, and INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Olivier Francois is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Luca Gammaitoni is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

F. Garufi is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy, and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

E. Genin is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Armaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Alberto Gennai is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Adalberto Giazotto is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

G. Giordano is with INFN, Laboratori Nazionali di Frascati, Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Lara Giordano is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Romain Gouaty is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Daniel Grosjean is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Gianluca M. Guidi is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Salem Hebri is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Henrich Heitmann is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Patrice Hello is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Sonia Karkar is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Stephane Kreckelbergh is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Paolo La Penna is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Mikael Laval is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Nicolas Leroy is with the Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL), IN2P3/CNRS-Université de Paris-Sud, Boîte Postale 34, 91898 Orsay Cedex-France.

Nicolas Letendre is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

B. Lopez is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Matteo Lorenzini is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Vincent Loriette is with ESPCI-10, rue Vauquelin, 75005 Paris-France.

Giovanni Losurdo is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Jean-Marie Mackowski is with LMA 22, Boulevard Niels Bohr 69622-Villeurbanne-Lyon Cedex, France.

Ettore Majorana is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Maddalena Mantovani is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Fabio Marchesoni is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

Frédérique Marion is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Julien Marque is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Filippo Martelli is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Alain Masserot is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Massimo Mazzoni is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

F. Menzinger is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

J. Moreau is with ESPCI-10, rue Vauquelin, 75005 Paris-France.

Leopoldo Milano is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Christophe Moins is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Nazario Morgado is with LMA 22, Boulevard Niels Bohr 69622-Villeurbanne-Lyon Cedex, France.

Benoit Mours is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Catherine Nary-Man is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Flavio Nocera is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

A. Pai is with INFN-Sezione di Roma and/or Uni-

versità "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Cristiano Palomba is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Federico Paoletti is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Silvio Pardi is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Antonio Pasqualetti is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Roberto Passaquieti is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Diego Passuello is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

B. Perniola is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Francesco Piergiovanni is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Laurent Pinard is with LMA 22, Boulevard Niels Bohr 69622-Villeurbanne-Lyon Cedex, France.

Rosa Poggiani is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Michele Punturo is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

Paola Puppo is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

K. Qipiani is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Piero Rapagnani is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

V. Reita is with ESPCI-10, rue Vauquelin, 75005 Paris-France.

Alban Remillieux is with LMA 22, Boulevard Niels Bohr 69622-Villeurbanne-Lyon Cedex, France.

Fulvio Ricci is with INFN-Sezione di Roma and/or Università "La Sapienza," P.le A. Moro 2, I-00185, Roma, Italy.

Iolanda Ricciardi is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Paolo Ruggi is with the European Gravitational Observatory (EGO), Via E. Amaldi, I-56021 Cascina (PI), Italy.

Guido Russo is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Salvatore Solimeno is with INFN-Sezione di Napoli and/or Università di Napoli "Federico II" Complesso Universitario di Monte S. Angelo Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy and/or Università di Salerno Via Ponte Don Melillo, I-84084 Fisciano (Salerno), Italy.

Alessandro Spallicci is with the Department Artemis-Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

R. Stanga is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

M. Tarallo is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Alessandra Toncelli is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Mauro Tonelli is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Edwige Tournefier (corresponding author) is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Flavio Travasso is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

C. Tremola is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Gabriele Vajente is with INFN-Sezione di Pisa and/or Università di Pisa, Via Filippo Buonarroti, 2 I-56127 Pisa, Italy.

Didier Verkindt is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

Flavia Vetrano is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Andrea Viceré is with INFN-Sezione Firenze/Urbino Via G. Sansone 1, I-50019 Sesto Fiorentino and/or Università di Firenze, Largo E. Fermi 2, I-50125 Firenze and/or Università di Urbino, Via S. Chiara, 27 I-61029 Urbino, Italy.

Jean Yves Vinet is with the Department Artemis-

Observatoire de la Côte d'Azur, Boîte Postale 42209, 06304 Nice, Cedex 4, France.

Helios Vocca is with INFN-Sezione di Perugia and/or Università di Perugia, Via A. Pascoli, I-06123 Perugia, Italy.

Michel Yvert is with the Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules (LAPP), IN2P3/CNRS, Université de Savoie, Boîte Postale 110, F-74941, Annecy-le-Vieux Cedex, France.

References

1. The Virgo Collaboration, *Final Design Report,* VIR-TRE-DIR-1000-13 (1997).
2. The Virgo Collaboration, "The status of Virgo," in *HEP2005 International Europhysics Conference on High Energy Physics,* PoS(HEP2005)029 (2005).
3. D. Sigg, "Status of the LIGO detectors," Class. Quantum. Grav. **23,** S51–S56 (2006).
4. The GEO Collaboration, "Status of the GEO600 detector," Class. Quantum Grav. **23,** S71–S78 (2006).
5. K. Hayama and M. Fujimoto, "Monitoring non-stationary burst-like signals in an interferometric gravitational wave detector," Class. Quantum Grav. **23,** S9–S15 (2006).
6. M. E. Gersenshtem and V. I. Pustovoit, Sov. Phys. JETP **16,** 433 (1963).
7. R. Weiss, *Quarterly Progress Report of the Research Laboratory of Electronics* **105,** (MIT, 1972), p. 379.
8. R. W. P. Drever, in *Gravitational Radiation Proceedings,* Les Houches Summer Institute, T. Piran and N. Deruelle, eds. (North-Holland, 1982), p. 321.
9. R. V. Pound, "Electronic frequency stabilization of microwave oscillators," Rev. Sci. Instrum. **17,** 490–505 (1946).
10. R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward, "Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator," Appl. Phys. B **31,** 97–105 (1983).
11. T. M. Niebauer, R. Schilling, K. Danzmann, A. Rüdiger, and W. Winkler, "Nonstationary shot noise and its effect on the sensitivity of interferometers," Phys. Rev. A **43,** 5022–5029 (1991).
12. The Virgo Collaboration, "The VIRGO large mirrors: a challenge for low loss coatings," Class. Quantum Grav. **21,** S935–S945 (2004).
13. F. Beauville, D. Buskulic, L. Derome, A. Dominjon, R. Flaminio, R. Hermel, F. Marion, A. Masserot, L. Massonnet, B. Mours, F. Moreau, P. Mugnier, J. Ramonet, E. Tournefier, D. Verkindt, O. Veziant, and M. Yvert, "Improvement in the shot noise of a laser interferometer gravitational wave detector by means of an output mode-cleaner," Class. Quantum Grav. **23,** 3235–3250 (2006).
14. D. Babusci, H. Fang, G. Giordano, G. Matone, L. Matone, and V. Sannibale, "Alignment procedure for the VIRGO interferometer: experimental results from the Frascati prototype," Phys. Lett. A **226,** 31–40 (1997).
15. D. Z. Anderson, "Alignment of resonant optical cavities," Appl. Opt. **23,** 2944–2949 (1984).
16. B. Caron, L. Derome, R. Flaminio, X. Grave, F. Marion, B. Mours, D. Verkindt, F. Cavalier, and A. Viceré, "A time domain, general purpose simulation program for the VIRGO experiment," Astropart. Phys. **10,** 369–386 (1999).
17. A. Freise, G. Heinzel, H. Luck, R. Schilling, B. Willke, and K. Danzmann, "Frequency domain interferometer simulation with higher-order spatial modes," Class. Quantum Grav. **21,** S1067–1074 (2003).
18. J.-Y. Vinet, P. Hello, C. N. Man, and A. Brillet, "A high accuracy method for the simulation of non-ideal optical cavities," J. Phys. I **2,** 1287–1303 (1992).
19. A. Brillet, J.-Y. Vinet, V. Loriette, J.-M. Mackowski, L. Pinard, and A. Remillieux, "Virtual gravitational wave interferometers with actual mirrors," Phys. Rev. D **67,** 102006 (2003).
20. F. Bondu and O. Debieu, "Accurate measurement method of Fabry–Perot cavity parameters via optical transfer function," Appl. Opt. **46,** 2611–2614 (2007).
21. B. J. J. Slagmolen, M. B. Gray, K.G. Baigent, and D. E. McClelland, "Phase-sensitive reflection technique for characterization of a Fabry–Perot interferometer," Appl Opt. **39,** 3638–3643 (2000).
22. D. Z. Anderson, J. C. Frisch, and C. S. Masser, "Mirror reflectometer based on optical cavity decay time," Appl. Opt. **23,** 1238–1245 (1984).
23. The Virgo Collaboration, "The commissioning of the central interferometer of the Virgo gravitational wave detector," Astropart. Phys. **21,** 1–22 (2004).
24. The Virgo Collaboration, "Interferometer signal detection system for the VIRGO experiment," Class. Quantum Grav. **19,** 1857–1863 (2002).

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



From mirror maps to TEM00 model: evaluation of effective losses

François BONDU, Mikaël LAVAL and J.-Y. VINET

—

VIR-054A-07
Issue: 1
Date : December 11, 2007

EUROPEAN GRAVITATIONAL OBSERVATORY - VIRGO Project
Traversa H di Via Macerata, 56021 S. Stefano a Macerata - Cascina (PISA), ITALY
Secretariat: Telephone (39) 050 752 521 * FAX (39) 050 752 550

Abstract

We show how the behaviour of the interferometer as studied with the darkF program with the maps of the mirror surfaces and the maps of the light wave amplitudes can be reduced to an effective scalar model, where some mirrors have different transmittances for the carrier and the sidebands. We show that the behaviour of the sidebands can be simulated with very lossy end mirrors. This effective model could reproduce realistically the sensitivity, the shot noise resolution and the contrast defect after the OMC, as well as the effects due to the sideband amplitude imbalance. Applications could be locking studies (effect of amplitude imbalance, choices of modulation frequency, DC detection, etc.) and study of the role of losses when introducing squeezed light in the interferometer.

1 Introduction

A simple model of the interferometer, where the mirror transmittances and losses, as well as the light wave amplitude, are the (complex) scalar numbers given in Lyon's datasheets can not reproduce realistically the behaviour of a real interferometer. Some effects like the extra losses due to the diffraction and the screening on finite size mirrors; the conversion of TEM00 light into high order modes, due to the roughness of mirrors, the recycling cavity being almost unstable for sidebands; will not be properly taken into account, leading to an underestimated shot noise limited spectral resolution.

On the other hand, the simulation programs that are used to optimize the locking and alignment schemes, including seismic noise, or for squeezed light studies [1], can not afford to model the wave amplitude with a map of the transverse distribution: that would lead to impossible computing duration times.

The goal of this paper is to be able to translate the results of computations with mirror maps (for example with darkF) into simple effective parameters that can be used in "scalar" models, reproducing properly the gains for the carrier and sidebands, thus producing accurate error signals. Since the scalar parameters assume an OMC, these results will be accurate for the signals on the dark fringe (B1 photodiode). On other channels, the noise of high order modes (alignment, distorsion, etc.) will not be taken into account.

In all this note, the beam is assumed to have a unique vertical polarization.

We warn that the results of programs with mirror maps might not be accurate, since the mirror maps measured in 2001 may not be exactly real (they were taken without appropriate settling down time [2]), and since the BS transmission phase at 45 deg of incidence angle is unknown. Anyway, if not real, results are at least realistic, leading to realistic behaviours for gains, losses, sideband imbalance.

In section 2 we explain how scalar parameters are extracted. We show that mirror effective transmittances must be frequency dependent (one scalar number for laser frequencies around the carrier, and two scalar number for each laser frequency around each sideband). We show that effects on the dark fringe, as well as gains for the TEM00 modes are well reproduced.

2 Extraction of scalar parameters

2.1 Interferometer model with maps of mirrors and wave amplitudes

Two kinds of models are possible in order to take into account the non perfect TEM00 transverse structure of the wave amplitude in a real interferometer with unperfect mirror maps. The first kind uses a modal decomposition (Finesse, NV); the other kind uses a FFT for simulating the wave diffraction (darkF). Here we take into account results given by darkF.

A pure TEM00, with a 2 cm waist, is introduced into the interferometer. Wave amplitudes are propagated under the macroscopic distances, and the round trip phases are fine tuned in order to find the resonant steady state solution for the the carrier power in the arms and the recycling cavity. The procedure for the wave amplitude convergence is described in the darkF user's guide [3]. When the simulation of the carrier is finished, each sideband is simulated with an additional round trip phase corresponding to the frequency difference.

The simulations whose results are discussed in this paper use 256×256 point maps. The thermal effects are simulated, with the coating deformation and the thermal lens corresponding to the index change in the blank. The maps for these deformations are provided with a dedicated program (Deform.f90 ThermLens.f90, see also [4], chapter 6 "Heating issue"), assuming 17.5 mW absorbed in the north arm input mirror coating, and 17.32 in west arm input mirror.

The wave amplitudes at various places of the interferometer are named according to the figure 1. The notation ψ represents the complex wave amplitude; $\psi^2(x,y)$ represents the light intensity (in $\mathrm{W/m^2}$). ψ is related to the electrical field E with $\psi = \frac{1}{\sqrt{2Z_0}}E$, where Z_0 is the vacuum impedance ($377\,\Omega$). ψ represents either the power on the carrier, or the lower sideband, or the upper sideband, depending on the calculation being carried out.

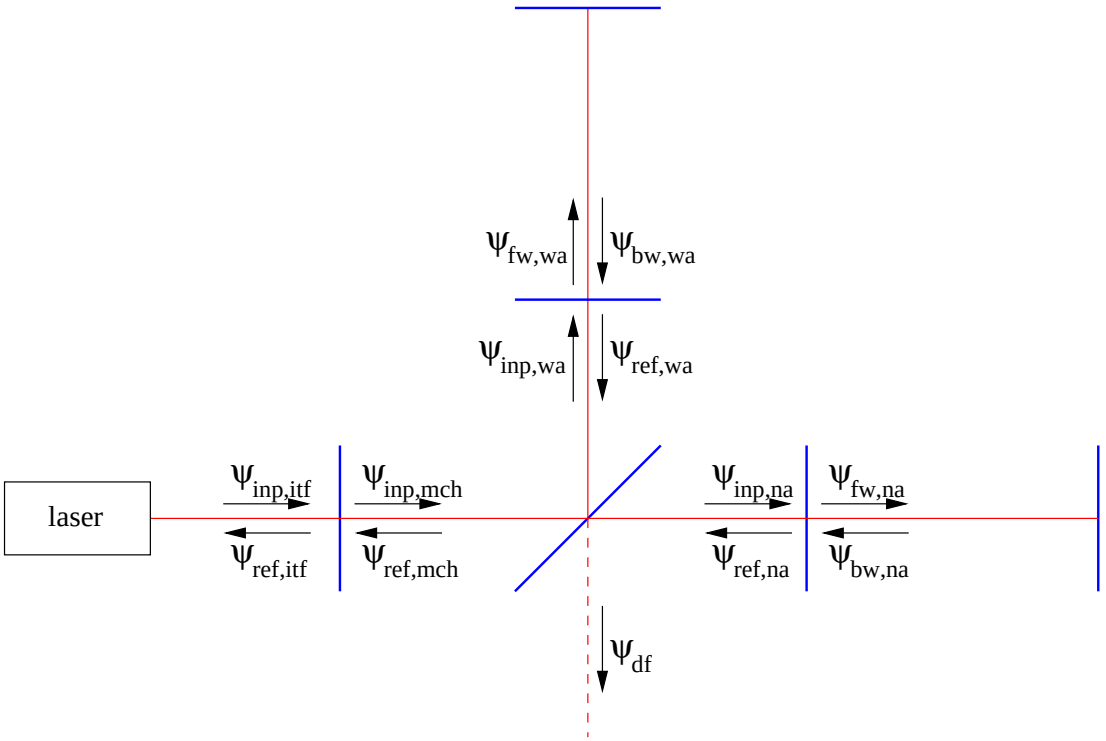


Figure 1: Naming of the wave amplitudes in the interferometer.

In the real interferometer, the dark fringe is analysed with the TEM00 that is defined by the output Mode Cleaner cavity and the output telescope. In the simulation, we actually use a TEM00 with a 2 cm waist, localized on the PR mirror, identical to the interferometer incoming beam.

After computation of the steady state solution of the interferometer, the couplings of the beams with the TEM00 are computed. For example, in the north arm, the coupling writes

$$C_{\mathrm{fw,na}} = |< \psi_{\mathrm{fw,na}} | \psi_{00} >|^2 \tag{1}$$

while the power on TEM00 mode is

$$P_{\mathrm{fw,na}} =< \psi_{\mathrm{fw,na}} | \psi_{\mathrm{fw,na}} > . \tag{2}$$

With similar notations for the other wave amplitudes, then the recycling gain of the north arm for the TEM00 mode is

$$G_{00,\mathrm{na}} = \frac{P_{\mathrm{fw,na}}\, C_{\mathrm{fw,na}}}{P_{\mathrm{inp,na}}\, C_{\mathrm{inp,na}}} \tag{3}$$

and the arm reflectance for TEM00 mode is

$$R_{00,\mathrm{na}} = \frac{P_{\mathrm{ref,na}}\, C_{\mathrm{ref,na}}}{P_{\mathrm{inp,na}}\, C_{\mathrm{inp,na}}}. \tag{4}$$

Similar factors $G_{00,\mathrm{wa}}$ and $R_{00,\mathrm{wa}}$ are computed for the west arm, and $G_{00,\mathrm{itf}}$ and $R_{00,\mathrm{itf}}$ for the recycling cavity.

The scalar mirror data used in the darkF program are extracted from the Lyon's datasheets. The loss numbers include scatter and absorption, as evaluated by Lyon.

mirror scalar values			
T_{NI}	0.1180	L_{NI}	9 ppm
T_{NE}	43 ppm	L_{NE}	47 ppm
T_{WI}	0.1166	L_{WI}	15 ppm
T_{WE}	38 ppm	L_{WE}	9 ppm
T_{PR}	0.0515	L_{PR}	28 ppm
R_{BS}	0.5025	L_{BS}	7 ppm

Table 1: Some scalar parameters of the mirrors in the darkF program.

The AR coating of the BS is included in the darkF program, although not displayed on figure 1 and in table 2.1. The AR coatings of input mirrors are set with a reflectance of 0 and the absorption given in Lyon's datasheets.

2.2 Carrier

For a given cavity, the G_{00} and R_{00} factors can be used to compute the effective mirror transmittances of an on-resonance Fabry-Perot cavity that will have the same parameters. These mirrors are assumed to have no losses: the losses will be actually included in the end mirror transmittance. If we name T_1 and T_2 the input and end mirror transmittances, $r_1 = \sqrt{1-T_1}$ and $r_2 = \sqrt{1-T_2}$ the input and output mirror amplitude reflectances, then r_1 and r_2 follow the equation system:

$$\begin{cases} \sqrt{G_{00}} = \dfrac{\sqrt{1-r_1^2}}{1-r_1\,r_2} \\ R_{00} = \left(\dfrac{r_1-r_2}{1-r_1\,r_2}\right)^2 \end{cases} \tag{5}$$

Two possible sets of mirror parameters are obtained. One leads to an over-coupled cavity (the amplitude reflectance of the cavity is negative), while the other one leads to an under-coupled cavity (the amplitude reflectance of the cavity is positive). The right solution is easily recognised as it gives an input mirror transmittance very close to the Lyon's value, whereas the other solution is very far.

If the thermal lensing is not taken into account, then the effective miror parameters are:

darkF results all modes		TEM00 numbers		TEM00 equivalent FP cavity effective mirror transmittances	
G_{na}	31.6419	$G_{00,na}$	31.6248	T_{NI}	0.118082
R_{na}	0.989561	$R_{00,na}$	0.985852	T_{NE}	447 ppm
G_{wa}	32.0682	$G_{00,wa}$	32.0042	T_{WI}	0.116638
R_{wa}	0.990192	$R_{00,wa}$	0.983459	T_{WE}	517 ppm
G_{itf}	45.1656	$G_{00,itf}$	44.9170	T_{PR}	0.051505
R_{itf}	0.29963	$R_{00,itf}$	0.286187	T_{mch}	0.015892

Table 2: Effective interferometer mirror transmittances for the carrier, without thermal lensing, from TEM00 data outcome of darkF.

We notice that the recycling mirror and long arm FP input mirrors are slightly changed compared to the scalar values by $\simeq 50$ ppm. The end mirror transmissions reflect losses that take into account the non-ideal surface maps of the mirrors. This increase the losses by $\simeq 400$ ppm in the arms. The Michelson part of the interferometer is, for the recycling cavity, an effective mirror with a transmission of 15892 ppm; this reflects the losses in the arms and the effective losses due to the mismatching of the beam in the recycling cavity and the beam resonanting in the arms.

If one takes into account the thermal lensing, then the effective parameters are:

darkF results all modes		TEM00 numbers		TEM00 equivalent FP cavity effective mirror transmittances	
G_{na}	31.6548	$G_{00,na}$	31.6364	T_{NI}	0.118040
R_{na}	0.989587	$R_{00,na}$	0.985826	T_{NE}	448 ppm
G_{wa}	32.0582	$G_{00,wa}$	31.99382	T_{WI}	0.116669
R_{wa}	0.990214	$R_{00,wa}$	0.983377	T_{WE}	520 ppm
G_{itf}	46.1444	$G_{00,itf}$	44.8431	T_{PR}	0.051505
R_{itf}	0.297893	$R_{00,itf}$	0.284815	T_{mch}	0.015949

Table 3: Effective interferometer mirror transmittances for the carrier, with thermal lensing, from TEM00 data outcome of darkF.

The situation difference in effective numbers between with and without termal lensing, is, for the TEM00 component of the carrier, negligeable. The change of the equivalent losses in the recycling cavity is only 60 ppm.

2.3 Sidebands

For the sidebands, one has to take into account that the long arms are non resonant. Two make the calculations simpler, the input mirror transmittance is assumed to be identical to the one

for the carrier, and the end mirror transmittance is given by the equation:

$$R_{\rm sb} = \left| \frac{r_1 - r_2\, {\rm e}^{i\,\phi}}{1 - r_1\, r_2\, {\rm e}^{i\,\phi}} \right|^2 \tag{6}$$

where $\phi = 2.3$ corresponds to the detuning of the sidebands in the arms.

The sidebands are supposed to be resonant in the recycling cavity, so the treatment is identical to the one for the carrier.

2.3.1 Lower sideband

This leads to the results for the lower sideband:

darkF results all modes		TEM00 numbers		TEM00 equivalent FP cavity effective mirror transmittances	
G_{na}	0.044956	$G_{00,na}$	0.038228	$T_{\rm NI}$	0.118082
R_{na}	0.999086	$R_{00,na}$	0.996653	$T_{\rm NE}$	0.085151
G_{wa}	0.046294	$G_{00,wa}$	0.037993	$T_{\rm WI}$	0.116638
R_{wa}	0.999225	$R_{00,wa}$	0.997902	$T_{\rm WE}$	0.054904
G_{itf}	43.5763	$G_{00,itf}$	41.0550	$T_{\rm PR}$	0.051505
R_{itf}	0.035435	$R_{00,itf}$	0.218893	$T_{\rm mch}$	0.019026

Table 4: Effective interferometer mirror transmittances for the lower sideband, without thermal lensing, from TEM00 data outcome of darkF.

and, with thermal lensing:

darkF results all modes		TEM00 numbers		TEM00 equivalent FP cavity effective mirror transmittances	
G_{na}	0.052778	$G_{00,na}$	0.036881	$T_{\rm NI}$	0.118040
R_{na}	0.999807	$R_{00,na}$	0.991905	$T_{\rm NE}$	0.194337
G_{wa}	0.046294	$G_{00,wa}$	0.037161	$T_{\rm WI}$	0.116669
R_{wa}	0.999764	$R_{00,wa}$	0.984310	$T_{\rm WE}$	0.347940
G_{itf}	41.6315	$G_{00,itf}$	35.5422	$T_{\rm PR}$	0.051610
R_{itf}	0.484394	$R_{00,itf}$	0.149146	$T_{\rm mch}$	0.023939

Table 5: Effective interferometer mirror transmittances for the lower sideband, with thermal lensing, from TEM00 data outcome of darkF.

The relative unstability of the sideband in the recycling cavity is modeled by an out of resonance arm effective reflection defect of a fraction of a %, or, equivalently, in an end mirror transmittance of a few 10 %. The thermal lensing changes significantly the effective end mirror transmittances.

2.3.2 Upper sideband

darkF results all modes		TEM00 numbers		TEM00 equivalent FP cavity effective mirror transmittances	
G_{na}	0.043239	$G_{00,na}$	0.036477	T_{NI}	0.118082
R_{na}	0.999005	$R_{00,na}$	0.988250	T_{NE}	0.269975
G_{wa}	0.042208	$G_{00,wa}$	0.035758	T_{WI}	0.116638
R_{wa}	0.999062	$R_{00,wa}$	0.993591	T_{WE}	0.158883
G_{itf}	32.1700	$G_{00,itf}$	27.1630	T_{PR}	0.082062
R_{itf}	0.053572	$R_{00,itf}$	0.264781	T_{mch}	0.027067

Table 6: Effective interferometer mirror transmittances for the upper sideband, without thermal lensing, from TEM00 data outcome of darkF.

and, with thermal lensing:

darkF results all modes		TEM00 numbers		TEM00 equivalent FP cavity effective mirror transmittances	
G_{na}	0.047159	$G_{00,na}$	0.038556	T_{NI}	0.118040
R_{na}	0.999483	$R_{00,na}$	0.964625	T_{NE}	0.627211
G_{wa}	0.050005	$G_{00,wa}$	0.037929	T_{WI}	0.116669
R_{wa}	0.999410	$R_{00,wa}$	0.940377	T_{WE}	0.839682
G_{itf}	29.3981	$G_{00,itf}$	20.11073	T_{PR}	0.053218
R_{itf}	0.050562	$R_{00,itf}$	0.001259	T_{mch}	0.049662

Table 7: Effective interferometer mirror transmittances for the upper sideband, with thermal lensing, from TEM00 data outcome of darkF.

The upper sidebands is the one that is tuned to the TEM01 mode of the long arms.

Please pay attention to the fact that the recycling cavity is close to optimal coupling for the upper sideband. This means that is case of bad common mode alignment, the sign of the upper sideband is going to switch its sign in reflection of the interferometer, probably leading to wrong demodulated signals on B2 photodiode. The limits on allowed misalignment is going to decrease when the thermal lensing is considered. This might be an explanation for locking issues, like bistabilities; see also recent suspicion of bad signals on B2 in [5].

The difference of recycling gain in all modes and in TEM00 mode is significant for the two sidebands. This is going to produce offsets in the error signals. Of course, it is always possible to find a demodulation phase that will compensate for this offset, but this will mix the signals of the two quadratures.

3 Conclusions

The scalar effective mirror transmittances computed in this note allow to consider the interferometer behaviour on the TEM00 mode, and have a more accurate simulation of the signals on the dark fringe (shot noise sensitivity, dark fringe contrast defect, etc.). This should be particularly useful for studies considering the injection of squeezed vacuum in the interferometer.

The effective mirror transmittances are uneffective to analyse the signals in transmission of the long arms. In order to reproduce the signals transmitted by the long arms, the numbers given as end mirror transmittances should be split into a transmittance and a loss factors.

The parameters G_{00}, R_{00} for each cavity, and the effective mirror transmittances are included as an output of the darkF program.

The parameters on the right column of the tables are the parameters to be entered in effective scalar models. The end mirror transmittances should be frequency dependent: one value for frequencies around the carrier, one value for frequencies around the lower sideband, one value for frequencies around the upper sideband.

The mirror surface defect change the arm losses, for the carrier, from $\simeq 50$ ppm to $\simeq 500$ ppm. The thermal lensing has negligeable effects for the carrier.

For the sidebands, the mirror surface defects is equivalent to high level losses.

4 Perspectives

The effective mirror transmittances obtained in this note can be used for studies of squeezed vacuum injection. In this possible scheme, it will allow to study if the effective high level of losses for the sidebands is indicating a DC detection; that would mean also reconsider modulation frequencies necessary for the locking and/or design of the OMC.

There is a strong asymmetry in the losses for each sideband. It would be interesting to see if a modulation frequency that would not be resonating with the TEM01 mode of the long arms still suffers from this problem.

If the finesse of the long arms is increased up to 200, meaning an input mirror transmittance of 3% for the long arms, then the over-coupled/under-coupled status of the sidebands depends strongly on the surface map of the mirrors. With actual surface weaviness the recycling cavity might be under-coupled, contrary to the actual situation. With better surface figure, the situation could be quite tricky.

Acknowledgments

The authors would like to thank A. Brillet and E. Tournefier for discussions and improvements of the manuscript.

References

[1] J. Le Bars. *xxx - in preparation.* PhD thesis, Université Paris Sud, 2007.

[2] F. Bondu et al. Meetings on optics. VIR-MOM-OCA-6500-103, June 2005.

[3] M. Laval. DarkF Users Guide. In preparation.

[4] The Virgo collaboration. The virgo physics book, vol. ii, optics and related topics. `http://wwwcascina.virgo.infn.it/vpb/`, April 2006.

[5] H. Heitmann. Alignment status, Commissioning meeting,. Technical report, VIRGO, September 2006.

Deuxième partie

Stabilisation en fréquence du laser

Chapitre 6

Stabilisation de fréquence : présentation et performances

Dans ce chapitre je donne les étapes de la conception de la stabilisation de fréquence de l'interféromètre Virgo. Je montre ensuite que les performances atteintes remplissent les spécifications, sauf sur certaines résonances, réalisant la référence de fréquence la plus stable jamais publiée. Le chapitre suivant donne des compléments sur des problèmes spécifiques : stabilité des boucles, filtres numériques pour boucles très efficaces. Enfin, le chapitre 8 explicite les détails des boucles et des équations qui n'ont pas été édités auparavant dans des notes techniques. Il met à jour la spécification sur la stabilisation de fréquence en fonction des paramètres mesurés.

6.1 Introduction

La fréquence d'un laser peut être stabilisée en fréquence sur une référence, une cavité Fabry-Perot pour une stabilité à court terme ou une référence atomique pour une stabilité à long terme.

Si on exprime l'onde lumineuse par l'équation

$$\psi = \exp(i2\pi\nu_0 t)\exp(im\sin(2\pi f_{\mathrm{mod}}t))\exp(i\phi_n(t)) \tag{6.1}$$

où $\nu_0 = c/\lambda$ est la fréquence du laser (avec $\lambda = 1.064$ μm), m l'indice de modulation, f_{mod} la fréquence de modulation, $\phi_n(t)$ une phase aléatoire, alors le bruit de fréquence instantané du laser est $\nu_n(t) = (1/(2\pi))\frac{d\phi_n(t)}{dt}$. Le bruit de phase $\phi_n(t)$ est commun à la porteuse et aux bandes latérales. La densité spectrale vérifie $\tilde{\nu}(f) = f\tilde{\phi}(f)$. La densité spectrale du bruit de fréquence, analysée sur un signal d'erreur, là où elle est plus grande que le bruit électronique de lecture, permet l'analyse de la performance d'une stabilisation de fréquence. Il faut distinguer la fréquence instantanée du laser de la fré-

quence de Fourier d'analyse des densités spectrales. L'analyse d'une densité spectrale de bruit de fréquence représente donc des $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ en ordonnée et des Hz en abscisse.

La précision obtenue dépend de la qualité de la référence, du gain de boucle et des bruits réintroduits par la boucle. Le contrôle des bruits décrits en 3.6 donne la qualité de la référence si celle-ci est une cavité résonnante. Les retards dans la boucle et la vitesse des actionneurs pour une cavité courte (quelques mètres au plus) limitent la fréquence de gain unité. Sans précaution particulière dans le filtre de correction, l'intervalle spectral libre d'une cavité Fabry-Perot longue limite également la fréquence de gain unité : la fonction de transfert entre un bruit de fréquence et le signal Pound-Drever-Hall subit un déphasage bref de -180°à la fréquence de l'intervalle spectral libre et à tous ses harmoniques (fig. 3.3). Plusieurs actionneurs de correction de la fréquence d'un laser sont généralement utilisés simultanément, en fonction de leur excursion et de leur rapidité. Pour un laser solide, la température du cristal permet d'obtenir des excursions de fréquence de plusieurs dizaines de GHz jusqu'à des fréquences de l'ordre de 1 Hz. La cale piezo-électrique derrière un des miroirs de la cavité laser, pour un laser solide, permet des corrections avec une excursion de centaines de MHz, pour des fréquences jusqu'à plusieurs dizaines de kHz. Un cristal électro-optique permet les corrections les plus rapides, jusqu'à plusieurs MHz. J'expose dans la note [105] (chap. 9.5) comment la combinaison de différents éléments s'exprime comme des boucles emboîtées et les critères de stabilité correspondants. Avec de multiples actionneurs, le plus simple pour la conception de l'asservissement est d'utiliser le signal de correction d'une boucle rapide comme signal d'erreur de la boucle plus lente.

Une boucle d'asservissement est conçue pour être stable, avec le plus souvent une marge de gain d'au moins 2 et une marge de phase de 30°, ce qui est équivalent à une amplification des bruits dans la boucle d'au maximum 2. Des intégrateurs multiples en basse fréquence annulent les erreurs de position et de vitesse. Le grand gain de boucle ($> 10^6$) pour les fréquences à deux décades en dessous de la fréquence de gain unité permet que le gain de boucle en basse fréquence ne limite pas les performances.

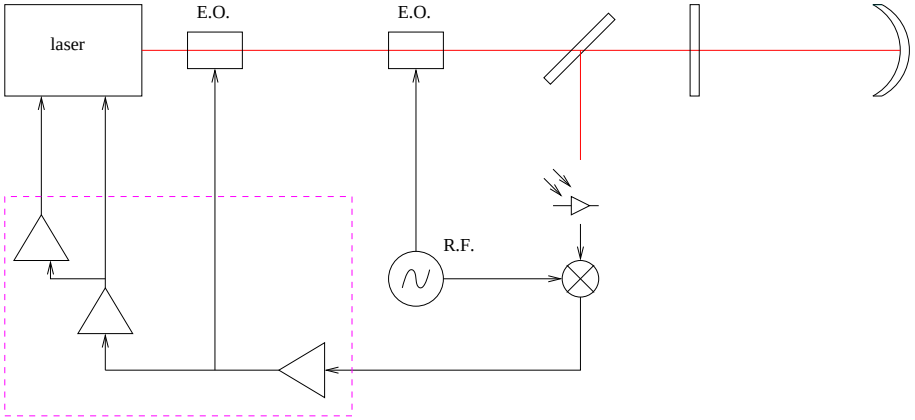


FIG. 6.1 – Représentation du montage d'un asservissement de la fréquence d'un laser sur une cavité Fabry-Perot avec la méthode Pound-Drever-Hall. Les optiques qui contrôlent la polarisation et la taille du faisceau et les isolateurs optiques ne sont pas représentés. Le faisceau d'un laser est modulé en fréquence à quelques MHz ou quelques dizaines de MHz. Une photodiode recueille la lumière réfléchie par la cavité. Le courant est mélangé avec le signal de modulation avec la phase adéquate. Le signal électrique est mis en forme de façon à ce que l'écart à résonance soit faible et la boucle d'asservissement stable. L'ensemble indiqué entre les traits hachurés représente l'électronique qui effectue cette correction. La correction se fait en utilisant plusieurs actionneurs qui corrigent la fréquence du laser. La mesure de l'écart à résonance est linéaire si la cavité est proche de la résonance : un signal continu, proportionnel à la puissance transmise par la cavité, déclenche l'action de l'électronique de correction.

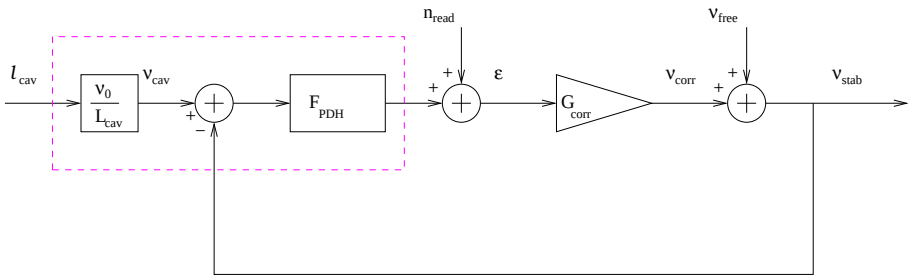


FIG. 6.2 – Schématisation du fonctionnement de l'asservissement, lorsque l'écart à résonance est plus petit que la largeur de raie de la cavité. La longueur de la cavité l_{cav} est une référence de fréquence ν_{cav}, lorsque les perturbations considérées ont des fréquences plus petites que l'intervalle spectral libre. La fonction F_{PDH} traduit en un signal électrique l'écart à résonance. Dans le domaine fréquentiel, un facteur réel de sensibilité et un simple pôle, qui est le pôle de la cavité, représentent cette fonction de transfert, si les fréquences considérées sont très inférieures à l'intervalle spectral libre. L'ensemble entre traits hachurés représente le discriminateur Fabry-Perot, qui inclut les procédés de modulation/démodulation de la méthode Pound-Drever-Hall. L'écart mesuré ϵ contient un bruit de lecture n_{read}. Le bloc G_{corr} représente l'électronique de correction et l'actionneur effectif. Le signal ν_{corr} vient compenser le bruit propre du laser ν_{free}, de sorte que le laser incident sur la cavité est maintenant stabilisé en fréquence.

Á partir du schéma 6.2, il est aisé de tirer les équations de base d'un asservissement de

fréquence :

$$\epsilon = n_{\text{read}} + F_{\text{PDH}}(\nu_{\text{cav}} - \nu_{\text{stab}}) \tag{6.2}$$

et

$$\nu_{\text{stab}} = G_{\text{corr}}\,\epsilon + \nu_{\text{free}} \tag{6.3}$$

où les différentes grandeurs sont explicitées sur les figures 6.1 et 6.2. L'équation 6.2 montre que le bruit de lecture n_{read} biaise, à une fréquence donnée, la mesure ϵ de l'écart $\nu_{\text{cav}} - \nu_{\text{stab}}$, accessible via la fonction de transfert F_{PDH}. Le gain de boucle ouverte est défini par $G_{\text{oltf}} = F_{\text{PDH}} G_{\text{corr}}$. Il vient immédiatement :

$$\epsilon = \frac{1}{1+G_{\text{oltf}}} n_{\text{read}} + \frac{F_{\text{PDH}}}{1+G_{\text{oltf}}}(\nu_{\text{cav}} - \nu_{\text{free}})\ , \tag{6.4}$$

$$\nu_{\text{corr}} = \frac{G_{\text{oltf}}}{1+G_{\text{oltf}}}\left(\frac{1}{F_{\text{PDH}}} n_{\text{read}} + \nu_{\text{cav}} - \nu_{\text{free}}\right) \tag{6.5}$$

et

$$\nu_{\text{stab}} = \frac{G_{\text{oltf}}}{1+G_{\text{oltf}}}\left(\frac{1}{F_{\text{PDH}}} n_{\text{read}} + \nu_{\text{cav}}\right) + \frac{1}{1+G_{\text{oltf}}}\nu_{\text{free}}\ . \tag{6.6}$$

L'équation 6.4 montre que un gain de boucle $|G_{\text{oltf}}|$ grand devant l'unité rend aussi petit que l'on veut l'écart mesuré, à une fréquence donnée, au bruit de lecture près. L'équation 6.5 montre que si la référence est bien meilleure que le laser et le bruit de lecture petit alors le signal de correction compense le bruit du laser libre : il est d'amplitude équivalente si le gain de boucle est grand, avec le signe opposé. Le signal de correction mesure donc le bruit propre de fréquence du laser. Avec l'équation 6.6, nous voyons que le laser stabilisé suit la référence pour les fréquences pour lesquelles le gain de boucle est grand, au bruit de lecture près, qui est réintroduit dans la boucle. Le bruit propre du laser est très fortement atténué.

Pour que le verrouillage soit possible, les conditions suivantes sont nécessaires :
- **C1.** La boucle G_{oltf} doit être stable. Un critère graphique comme le critère de Nichols effectue généralement cette vérification.
- **C2.** Pendant l'acquisition du verrouillage, le temps de passage par la résonance doit être plus grand que le temps de réponse de la boucle, lui-même de l'ordre de l'inverse de la fréquence de gain unité.
- **C3.** Le signal d'erreur doit être petit devant la largeur de raie de la cavité, pour que l'asservissement fonctionne dans sa zone linéaire. La racine carrée de l'intégrale de la densité spectrale de puissance de $(\epsilon/F_{\text{PDH}})$ doit donc être petit devant la largeur de raie $2f_P$: le gain de boucle G_{oltf} doit atténuer suffisamment le bruit propre du laser ν_{free}.

A propos de la condition **C2**, il est parfois mentionné qu'avec un signal Pound-Drever-Hall, la plage d'accrochage est bien plus large que la largeur de raie : elle s'étendrait jusqu'à ce que le signal d'erreur change de signe, lorsque une bande latérale vient à résonance. Ceci n'est valide que si la boucle est inconditionnellement stable. Avec une

boucle conditionnellement stable, la division du signal d'erreur par la puissance transmise accroît la plage de linéarité par un ordre de grandeur environ. Pour une cavité à miroir suspendus, la pression de radiation peut diminuer le temps de passage par la résonance.

Pour l'interféromètre Virgo, les spécifications des boucles ne portent pas sur les rebonds en réponse impulsionnelle ou indicielle, mais sur les densités spectrales et sur les précisions des verrouillages. Notons qu'une marge raisonnable (facteur 2 en amplitude, 30°de marge de phase) limite de fait le rebond de la réponse impulsionnelle et l'amplification de bruit à la fréquence de gain unité.

6.2 Le projet

J'ai rappelé (chap. 1.3.3) le besoin de stabiliser la fréquence du laser : pour une bande de fréquence donnée, la densité spectrale de bruit relatif de fréquence doit être plus petite que le rapport de la densité spectrale de résolution de la frange noire pour une onde gravitationnelle sur l'asymétrie de l'interféromètre. L'objectif du projet stabilisation de fréquence est de définir, réaliser et vérifier les conditions pour que les performances soient tenues avec la configuration de Virgo définitive, avec la densité spectrale de résolution définie dans [48, 106].

Je classe les 17 documents techniques internes concernant le projet de stabilisation de fréquence suivant les catégories : faisabilité, conception et spécifications, réalisation, performances. L'étude de faisabilité, entreprise dès la proposition du projet Virgo, considère différentes architectures possibles, et considère quelques difficultés associées à chacune d'elles. Cette étape établit la nécessité de deux boucles différentes : un étage de pré-stabilisation et un étage de stabilisation sur l'interféromètre lui-même. L'étape de conception que j'ai menée se focalise sur la solution qui parait la plus prometteuse, et définit des spécifications précises des différents éléments. La réalisation, suivant le plan prévu, a mis en évidence l'effet d'asymétrie de réflectivité. La mesure de la fonction d'asymétrie permet de calculer les spécifications réelles. Le bruit de fréquence mesuré dans la boucle est dans les spécifications, avec, en particulier, un bruit de fréquence incident sur l'interféromètre de $2.10^{-7}\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 10 Hz, mesuré dans la boucle, limité par le bruit de photons. Je vérifie que le bruit de fréquence ne domine pas dans la densité spectrale de la frange noire où seront détectées les ondes gravitationnelles.

Je reproduis dans le chapitre 9 les notes concernant la stabilisation de fréquence dont J.-P. Coulon et moi-même sommes auteur. Je résume dans ce chapitre les autres.

Dans le chapitre 7, je donne quelques éléments pour les boucles d'asservissements qui ont été utiles. Je montre qu'une contrainte sur la surtension apportée au bruit dans une boucle d'asservissement est en fait plus utile qu'une association marge de gain et marge de phase.

Dans le chapitre 8, je donne les équations actualisées valides pour le calcul des stabilités et des calculs de bruits dans les signaux. Je décris les modèles des éléments des boucles et la procédure d'étalonnage des signaux d'erreur et de correction. Je décris l'asymétrie de l'interféromètre pour le bruit de fréquence. Je termine par le calcul de la spécification sur le bruit de fréquence devant l'interféromètre.

6.3 Faisabilité

6.3.1 Nécessité de deux boucles d'asservissement différentes

Le document de proposition de Virgo [48] remarque que deux boucles sont nécessaires.

Pour les fréquences de quelques dizaines de Hz, la seule référence possible pour la stabilisation de fréquence est le mode commun des deux bras. Une cavité rigide courte aurait un bruit trop important, en particulier à cause de son bruit thermique. La boucle qui utilise ce signal d'erreur est appelée 2^{e}étage de stabilisation de fréquence (SSFS en abrégé dans le projet Virgo).

La cavité composite - cavité de recyclage et cavité moyenne des grand bras - filtre le bruit de fréquence à l'entrée de l'interféromètre. Le filtre équivalent (chap. 4.2) est un pôle du premier ordre de l'ordre de 10 Hz, pour les fluctuations de fréquence de la porteuse.

Cette boucle ne suffit pas : sa fréquence de gain unité limitée à environ 20 kHz ne permet pas d'avoir un gain de boucle plus grand que quelques unités à la fréquence d'analyse de 10 kHz. Il faut donc un premier étage de stabilisation en fréquence (pré-stabilisation dans Virgo), soit sur une cavité courte rigide, soit sur la cavité de filtrage de mode.

6.3.2 Pré-stabilisation

P. Fritschel, dans la note [107], conçoit de façon très complète la pré-stabilisation de la fréquence du laser sur une cavité rigide. Le matériau (ULE, une céramique avec une dilatation thermique relative de $\sim 10^{-7}$ pour une variation de 10 °C) et la forme de la cavité réduisent les bruits ajoutés. Selon le logiciel SYSTUS d'analyse par éléments finis, la première fréquence de résonance en élongation de la cavité est 12 kHz, au-dessus de la bande de fréquence d'analyse de Virgo. Deux cavités identiques ont été construites ; la note et la publication [108, 109] relatent la performance d'un bruit de fréquence hors boucle de $10^{-3}\,\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à 10 kHz.

La note [110], en faisant les hypothèses d'une pré-stabilisation sur cavité rigide et d'une correction de la fréquence en aval de la cavité de filtrage de mode, et avec une définition grossière de la boucle du 2e étage de stabilisation en fréquence, donne une première es-

timation des performances nécessaires à cet étage. Cette note explique l'effet de filtrage que devrait avoir la cavité de filtrage de mode, en la supposant parfaitement isolée.

6.3.3 Architectures

La note [111] compare deux architectures possibles pour la composition des deux boucles. La première consiste en deux boucles indépendantes ; la correction de fréquence se fait en aval de la cavité de filtrage de mode, à l'aide d'un miroir monté sur une cale piézoélectrique. La deuxième consiste en l'addition électronique des signaux d'erreurs. La note établit que les deux architectures doivent avoir des performances équivalentes, mais que la deuxième, retenue, a l'avantage d'un montage optique sous vide plus simple.

L'architecture de la deuxième boucle paraît difficile à gérer : la référence continue étant la cavité de pré-stabilisation, il faut, en très basse fréquence, agir sur la longueur moyenne des cavités Fabry-Perot kilométriques pour les garder à résonance. La solution alors imaginée était de séparer le signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation en deux, la partie basse fréquence (jusqu'à quelques Hertz) étant envoyée pour le verrouillage par action sur les miroirs des cavités kilométriques, tandis que le signal dans la gamme 10 Hz - 15 kHz est additionné au signal d'erreur de l'étage de pré-stabilisation, effectuée sur une cavité rigide [112]. M. Barsuglia, dans sa thèse [113], montre qu'il y a alors un décalage nécessaire du point de travail du signal d'erreur de cette cavité rigide. Il faut alors trouver un filtre numérique stable capable d'avoir une atténuation de 2-3 ordres de grandeur sur 1/2 décade. Un tel filtre n'est malheureusement pas connu. Le décalage du point de travail du signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode, encore plus exigeant, aggrave le problème. Le deuxième étage de stabilisation de fréquence doit composer une boucle numérique, en raison du partage difficile avec la voie de correction sur les miroirs des cavités kilométriques, et une boucle analogique pour pouvoir atteindre une fréquence de gain unité de l'ordre de 20 kHz. Cette boucle devient alors très complexe. J'ai proposé puis mis en œuvre une solution, exposée dans le chapitre 6.4, qui élimine ces difficultés et les difficultés de gain de boucle insuffisamment grands à 10 Hz exposés en [110].

La première conception du système laser prévoyait un verrouillage de la fréquence du laser sur la cavité de référence rigide ultra-stable, puis le verrouillage de la cavité de filtrage de mode par action mécanique sur le miroir courbe. La première mise en route du système laser a montré des difficultés pour verrouiller la cavité de filtrage de mode en entrée : le temps de réponse de la boucle n'était pas suffisamment grand devant l'inverse du temps de passage par la résonance ; lors d'un passage par la résonance, la pression de radiation pousse la cavité hors résonance. H. Trinquet et moi-même avons étudié une architecture différente [114]. Dans celle-ci, la fréquence du laser est tout d'abord pré-stabilisée sur la cavité de filtrage de mode. Ensuite, une action mécanique sur la longueur de cette dernière amène la cavité de référence à résonance. Nous avons montré qu'à cause de l'effet Doppler qu'apporte le mouvement de cette cavité, jusque-là non

pris en compte, les deux architectures ont des performances identiques pour la stabilité de fréquence dans la gamme de détection de Virgo, et pour la référence très basse fréquence. Le nouvel assemblage proposé et finalement mis en œuvre permet toutefois un verrouillage bien plus aisé : le temps de passage par la résonance lors du verrouillage de la cavité de référence est plus grand par deux ordres de grandeur et le problème du à la pression de radiation n'existe plus dans cette cavité rigide.

6.4 Conception et spécifications

6.4.1 Deuxième étage de stabilisation

La conception du deuxième étage de stabilisation en fréquence nécessite la connaissance précise de ce qui limite la fréquence de gain unité. J'ai établi dans le chapitre 3.2.5 la formule exacte pour une cavité Fabry-Perot. Pour l'interféromètre complet, en l'absence pour le moment de formule analytique complète, j'ai mis au point le programme JAJY pour le calcul des fonctions de transferts (chap. 3.5.2) entre un bruit de fréquence et la lumière réfléchie sur le miroir de recyclage recueillie par la photodiode PHD2 ou la lumière réfléchie sur la surface anti-reflet de la séparatrice recueillie par la photodiode PHD5. Ce modèle ne prend en compte que les propriétés spectrales des cavités, avec un mode unique. La note [115] montre que les deux photodiodes sont acceptables pour la limite du bruit de photons [116]. Elle montre également que la fréquence de modulation de 18 MHz permettrait, d'après le modèle scalaire utilisé, un gain unité élevé pour le deuxième étage de stabilisation de fréquence. Si cela se vérifiait, le premier étage de stabilisation pourrait être inutile, apportant une simplification importante.

6.4.2 Boucles multiples imbriquées

Je résume ici la note [105] (chap. 9.5) sur les propriétés d'un système à boucles multiples.

Un système comporte des boucles multiples lorsque deux boucles partagent au moins un signal en commun. Il n'est pas judicieux que deux boucles partagent un même signal d'erreur, en comportant un gain continu non nul sur chacune des deux boucles : elles intègrent toutes deux un petit écart de tension résiduel et saturent rapidement. Il est préférable d'utiliser le signal de correction de la boucle rapide comme signal d'erreur de la boucle plus lente. Après modélisation du système par blocs, il est possible d'écrire la fonction de transfert en boucle ouverte en supprimant, dans le schéma, un des liens. L'écriture de la fonction dépend de l'endroit où est effectué la coupure. La stabilité et les marges, qui sont des paramètres physiques, n'en dépendent pas. Une coupure astucieuse permet, pour les boucles de Virgo, d'écrire la fonction de transfert en boucle ouverte comme une somme de fonctions individuelles. Pour garantir la stabilité du système, il faut que la boucle totale soit stable avec des marges acceptables ; il faut aussi

que ce soit le cas là où deux des fonctions individuelles ont des amplitudes identiques. Une façon plus simple est de considérer le rapport des deux fonctions qui se croisent et de l'analyser comme une boucle classique. La fonction totale s'écrit sous forme factorisée, et il suffit que chacune des fonctions individuelles soit stable, et que les fréquences de gain unité soient suffisamment espacées (par exemple d'un facteur 10). Les fonctions individuelles ont des actionneurs ou des signaux d'erreurs effectifs.

6.4.3 Architecture

J'ai proposé, puis mis en œuvre, une solution qui s'affranchit de la contrainte sur le point de verrouillage de la cavité de référence [117]. Cette solution est exigeante pour l'acquisition du verrouillage : il faut passer instantanément d'une configuration où le système laser et l'interféromètre sont indépendants à une configuration où ils sont étroitement liés. Dans la première configuration, (a) figure 6.3, le laser est verrouillé en fréquence sur la cavité de filtrage de mode (IMC), en utilisant le signal réfléchi par cette cavité, puis démodulé, comme signal d'erreur, et la cavité IMC est verrouillée sur la cavité rigide (RFC). Dans la deuxième configuration, (b) figure 6.4, le signal d'erreur indiquant l'écart à résonance du mode commun de l'interféromètre (CARM), filtré, est additionné électroniquement au signal d'erreur de l'étage de pré-stabilisation. Ce même signal sert de signal d'erreur pour maintenir la cavité de filtrage de mode à résonance. Les fluctuations basses fréquences (inférieures à quelques Hz) de la cavité équivalente CARM sont réduites par déplacement des miroirs des cavités kilométriques, en utilisant l'écart à résonance de la cavité de référence rigide comme signal d'erreur.

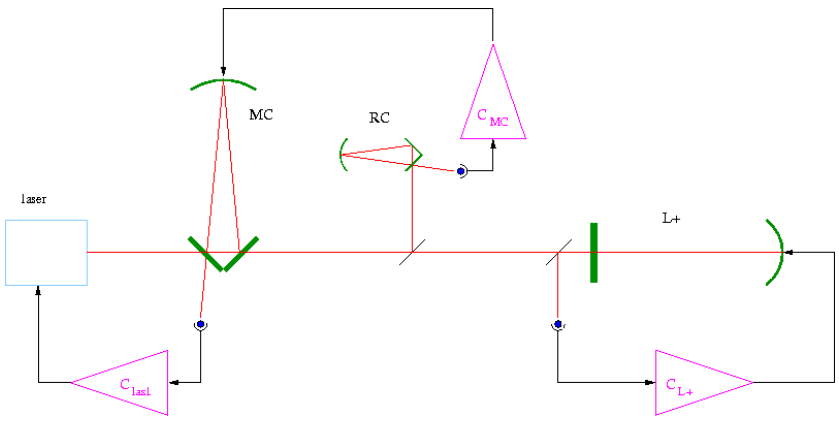


FIG. 6.3 – (a) Verrouillages de cavités pour la stabilisation de fréquence en deux étages, avant verrouillage du deuxième étage de stabilisation de fréquence.

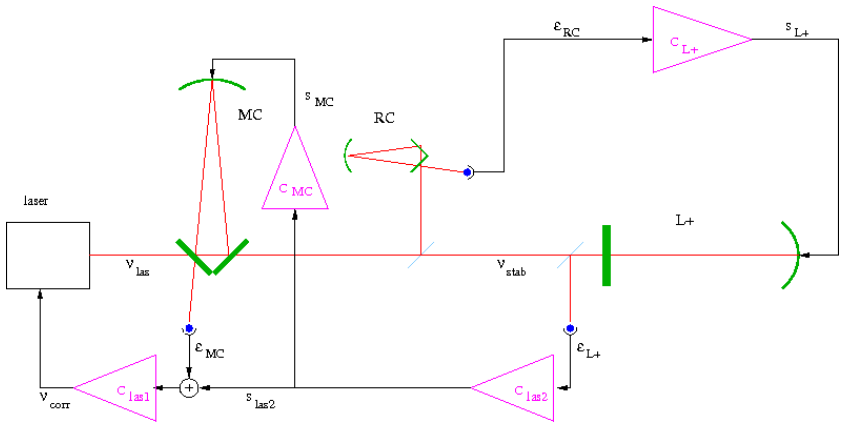


FIG. 6.4 – (b) Verrouillages de cavités pour la stabilisation de fréquence en deux étages, après verrouillage du deuxième étage de stabilisation.

L'architecture proposée utilise les cavités de façon optimale, en fonction de leurs performances, dans la gamme de détection de Virgo. La procédure pour établir la conception des boucles est la suivante. La première boucle, qui verrouille la fréquence du laser sur la cavité de filtrage de mode, est la plus rapide. Cette boucle établit la stabilité de fréquence du laser à la fréquence de 10 kHz. La deuxième boucle asservit le laser sur le mode commun de l'interféromètre. La fréquence du laser, dans la bande de détection, suit alors le mode commun de l'interféromètre. Pour les fréquences entre 20 kHz et 300 kHz, la fréquence du laser suit la fréquence définie par les fluctuations de longueur de la cavité de filtrage de mode en entrée. Cette cavité est une référence moins bonne que l'interféromètre mais autorise un verrouillage avec une fréquence de gain unité bien plus élevée. Après addition électronique du signal d'erreur du mode commun CARM au signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode (IMC), le signal d'erreur de cette dernière n'est plus contraint à être petit lorsque les gains de boucle sont grands. Il mesure l'écart à résonance entre la fréquence du laser, définie par le mode commun de l'interféromètre, et la fréquence définie par la cavité IMC. Le signal de correction s_{las2} fournit également la mesure de cet écart, mais avec un signe opposé : la boucle de préstabilisation étant très rapide, avec beaucoup de gain, son signal d'erreur est nul. Les deux signaux additionnés mesurent donc le même écart avec des signes opposés. Le signal s_{las2} est un signal d'erreur plus pratique pour verrouiller la cavité IMC. Son excursion est plus élevée par un jeu adéquat de résistances au moment de l'addition. Son bruit de numérisation est donc plus bas. Un filtre numérique permet la mise à résonance de la cavité IMC par déplacement de son miroir d'extrémité. Les retards numériques limitent le gain unité de cette boucle à environ 100 Hz. La prise en compte de l'effet Doppler dans la cavité IMC [118] permet d'établir les équations complètes (chap. 8.1).

Notons qu'il n'y a pas une source unique de bruit de fréquence, mais plusieurs : le bruit de fréquence du laser libre ; le bruit de fréquence induit par les fluctuations de longueur de la cavité de filtrage de mode ; le bruit de fréquence induit par les fluctuations de longueur de la cavité rigide ; les bruits de fréquence introduits par les bruits de lecture.

Il faut toujours préciser soit la source de bruit particulière soit le point de mesure du bruit équivalent (par exemple à l'entrée de l'interféromètre).

6.4.4 Verrouillage de la cavité rigide - filtres de Coulon

Le verrouillage du mode commun de l'interféromètre sur la cavité de référence rigide amortit le mouvement pendulaire des miroirs. Les performances du mode commun de l'interféromètre et de la cavité rigide sont toutefois très différentes : la cavité rigide constitue une référence de fréquence, à 50 Hz, avec un bruit d'environ 2.10^{-2} Hz$/\sqrt{\text{Hz}}$ [68], tandis que la spécification pour le bruit de fréquence est de 4.10^{-6} Hz$/\sqrt{\text{Hz}}$(fig. 8.12). Il faut donc que le gain de boucle à 50 Hz soit inférieur à 2.10^{-4}, tout en ayant un gain de boucle élevé à la fréquence du mode pendule (0.6 Hz) et pour les très basses fréquences pour compenser les dérives des marées.

J.-P. Coulon a développé un algorithme pour trouver des filtres numériques stables qui auraient de telles propriétés [119, 120]. Le programme demande de spécifier le rapport $f_{\max}/f_{\min}$ autour de la fréquence de gain unité. Il garantit que le gain est plus petit que $1/K$ pour toutes les fréquences au-dessus de $f_{\max}$, et plus grand que K pour toutes les fréquences au-dessus de $f_{\min}$. La fréquence de gain unité se trouve à $\sqrt{f_{\max} \times f_{\min}}$. Une combinaison de deux filtres passe-bas et passe-haut produit un filtre vérifiant une condition de marge donnée (chap. 7.2). Le programme cherche tous les filtres stables sur une grille des paramètres, garde celui qui donne le meilleur K, puis refait une recherche autour de ce dernier point. Une technique de recuit aléatoire gagne généralement presque un ordre de grandeur sur les performances. Des techniques "culinaires" accessoires accélèrent la recherche. Le programme cross68, en FORTRAN, qui définit les filtres numériques, est disponible auprès de J.-P. Coulon. Je précise une utilisation possible de tels filtres dans le chapitre suivant.

Nous avons mis en oeuvre avec succès un filtre de Coulon d'ordre élevé le 24 novembre 2004 (chap. 7.3). Toutefois, le filtre de Coulon n'est pas encore mis en oeuvre dans le fonctionnement habituel de Virgo :

- Pour le moment, le bruit de longueur de la cavité de référence rigide, excité par le bruit thermique, ne limite pas la densité spectrale de résolution.
- Il n'est pas possible de mettre en oeuvre un filtre de Coulon depuis la masse de référence seule. Il faut donc faire un contrôle depuis la marionnette et la masse de référence. Ce contrôle est nettement plus complexe vu la fonction de transfert de la marionnette. La définition du partage masse de référence / marionnette / haut de suspension étant maintenant définie de façon stable, il est possible de définir un filtre de Coulon adapté.
- Le bruit à corriger dans la bande de fréquence 36 mHz - 10 Hz est encore trop élevé. Un filtre de Coulon n'a pas de gain dans cette bande, si sa fréquence de gain unité est fixée aux alentours de 0.6 Hz.
- Enfin, mes collègues responsables du verrouillage de l'interféromètre ont mis en place

une soustraction du bruit de la cavité rigide dans la frange noire par compensation par anticipation ("feed-forward", technique "gamma" dans le vocabulaire Virgo). Elle apporte une isolation effective d'un facteur 50. Dans la pratique cette isolation supplémentaire lève les contraintes sur la ré-injection du bruit de la cavité rigide dans la frange noire. Cette technique consiste à mesurer la fonction de transfert entre une perturbation sur le signal d'erreur du verrouillage du mode commun sur la cavité rigide et la frange noire, puis à construire un filtre numérique, F_γ, qui approxime cette réponse. Ce F_γ filtre en permanence le signal d'erreur de la cavité rigide ; Le résultat est soustrait du signal d'erreur de la frange noire.

Les filtres de Coulon sont décrits de façon plus détaillée dans les notes techniques (chap. 9). Une évaluation de ces filtres est donnée dans le chapitre 7.

6.5 Réalisation

6.5.1 Acquisition du verrouillage

La technique de la finesse variable

Pour pouvoir acquérir le verrouillage de l'interféromètre en configuration (a), explicité par la figure 6.3, il faut en particulier que la condition **C3** du chapitre 6.1 soit réalisée. Ceci est particulièrement délicat : la largeur de raie du mode commun de l'interféromètre, en configuration nominale, est de environ 20 Hz ; la fréquence du laser asservi sur la cavité de filtrage de mode fluctue d'environ 10 MHz si les miroirs sont libres. Avec un verrouillage de la cavité de filtrage de mode sur la cavité de référence rigide, il est difficile d'obtenir mieux que quelques dizaines de Hz. Mes collègues du groupe "verrouillage de l'interféromètre" ont donc développé une procédure, la "finesse variable", où l'interféromètre est d'abord réglé sur une frange grise ; la largeur de raie de la cavité composite (cavité de recyclage - grand bras) est alors de l'ordre de 500 Hz. La configuration (b) est alors acquise, et l'interféromètre amené adiabatiquement sur la frange noire [121].

Changement de configuration

Dans le passage de la configuration (a) à la configuration (b), il faut éteindre puis allumer plusieurs boucles simultanément [122]. Le contrôle global de Virgo envoie un signal déclencheur aux électroniques analogiques et aux boucles numériques. Des mesures des éléments des fonctions de transfert en configuration (a) ont préparé les gains de boucles lors des premiers essais d'accrochage. L'ajustement des gains et des signes de chacune des boucles se fait par reconnaissance de la boucle fautive grâce à son temps de réponse. Pour la mise au point, j'ai utilisé une configuration optique simplifiée : un seul bras de

l'interféromètre est à résonance, les autres miroirs sont désalignés pour empêcher toute autre cavité composite.

6.5.2 Électronique analogique

Une électronique analogique [123] verrouille la boucle du deuxième étage de stabilisation en fréquence. Le signal d'erreur est traité dès sa production, proche de la photodiode qui délivre le signal. Une attention particulière a été portée au bruit de l'électronique et à sa rapidité. Un câble de 30 m envoie le signal de correction jusqu'à l'électronique de l'étage de pré-stabilisation, dans le laboratoire laser : une adaptation d'impédance évite les ondes stationnaires qui réduiraient la bande passante de façon non négligeable.

L'électronique analogique comporte plusieurs étages de gains. Les premiers étages ont une fonction de transfert robuste, avec un gain unité non optimal. Ils doivent stabiliser la fréquence du laser pendant l'acquisition du verrouillage de l'interféromètre, alors que la puissance dans l'interféromètre varie par plusieurs ordres de grandeur [121].

Lorsque l'interféromètre est dans sa configuration nominale de mesure, le second étage de stabilisation en fréquence a un gain de boucle optimal si la fréquence de gain unité est maximale. La fonction de transfert du filtre de compensation s'adapte à la fonction de transfert réelle, mesurée dans des conditions stables ; ceci a été possible à partir du printemps 2007.

6.5.3 Effet Doppler dans la cavité de filtrage de mode

La cavité de filtrage de mode n'est pas parfaitement rigidifiée par son verrouillage. Le mouvement relatif des miroirs produit donc un décalage Doppler de la lumière qui y circule et qui en sort. J'ai vérifié le signe de cet effet et vérifié qu'il ne perturbe le verrouillage global en aucun cas [118].

6.5.4 Asymétrie

La frange noire est sensible au bruit de fréquence du laser par l'asymétrie de finesse, comme suspecté [110]. Les documents [113,124,125] ont mis en évidence l'effet de l'asymétrie de réflectivité. L'asymétrie est discutée en détail dans le chapitre 8.6.

6.6 Performances

6.6.1 Signal d'écart du deuxième étage de stabilisation de fréquence

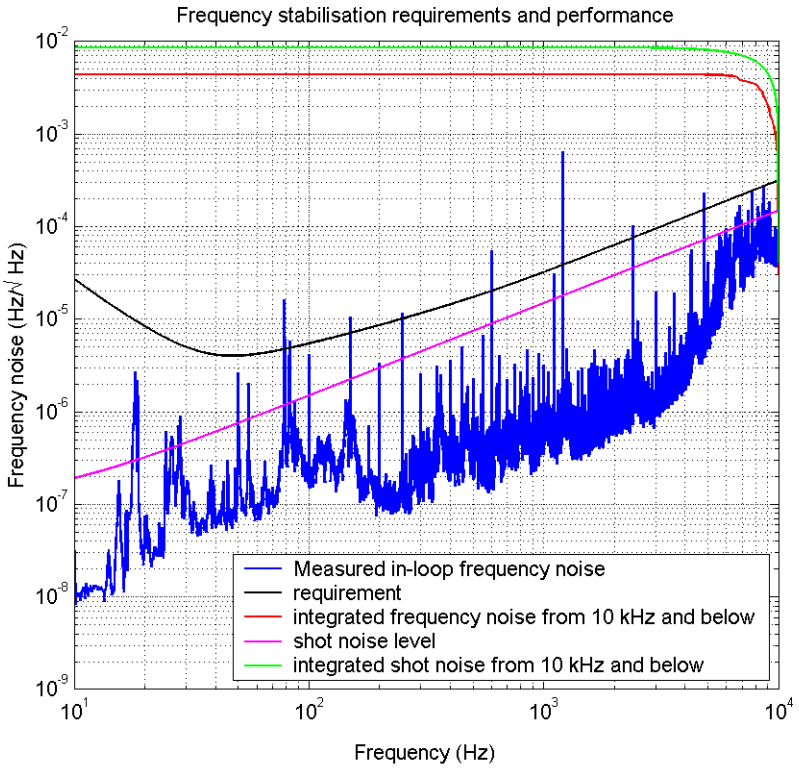


FIG. 6.5 – Mesure de l'écart entre le bruit de fréquence mesuré et la référence donnée par l'interféromètre, en boucle. La courbe magenta donne l'estimation du bruit de photons, la courbe noire la spécification, en tenant compte de l'asymétrie mesurée. Les courbes vertes et rouges donnent l'écart quadratique moyen, pour le bruit de photons et pour la mesure, intégré depuis les hautes fréquences : il permet d'estimer rapidement la "largeur de raie" pour un temps d'intégration donné, en supposant que la contribution du spectre pour les fréquences non mesurées est négligeable. La largeur de raie du laser, estimée dans la boucle, est donc ici 9 mHz sur 100 ms.

Les performances relatées ici proviennent de données acquises le 15 février 2008 avec l'interféromètre en mode optimal pour la détection d'ondes gravitationnelles. La figure 6.5 représente la densité spectrale du signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquences. Ce signal d'erreur ϵ_{las2} est étalonné en fréquences avec l'équation ϵ_{las2}/F_{L+}, où F_{L+} est la fonction de transfert entre un bruit de fréquence devant l'interféromètre et le signal d'erreur ; Un simple filtre passe-bas avec un pôle à 8 Hz approxime F_{L+} ; l'étalonnage est décrit dans le chapitre 8.5.6. ϵ_{las2}/F_{L+} représente le bruit de fréquence résiduel à l'entrée de l'interféromètre. La figure montre qu'il faut en fait

principalement tenir compte du bruit de photons pour estimer le niveau réel de bruit de fréquence, tel qu'il sera vu, hors boucle, dans le signal de frange noire. J'ai ici éliminé du spectre le signal de calibration à 1111 Hz.

L'écart type d'Allan $\sigma_{\bar{y}}$ est couramment utilisé en métrologie des oscillateurs pour caractériser la stabilité d'horloges. Il indique l'écart type de deux mesures successives de fréquences intégrées sur une durée τ. Il s'obtient à partir de la densité spectrale avec la relation [126] :

$$\sigma_{\bar{y}}^2(\tau) = \int_0^\infty \left(\frac{\tilde{\nu}(f)}{\nu_0}\right)^2 2\,\sin^2(\pi\tau f)\left(\frac{\sin \pi\tau f}{\pi\tau f}\right)^2 \mathrm{d}f\,. \tag{6.7}$$

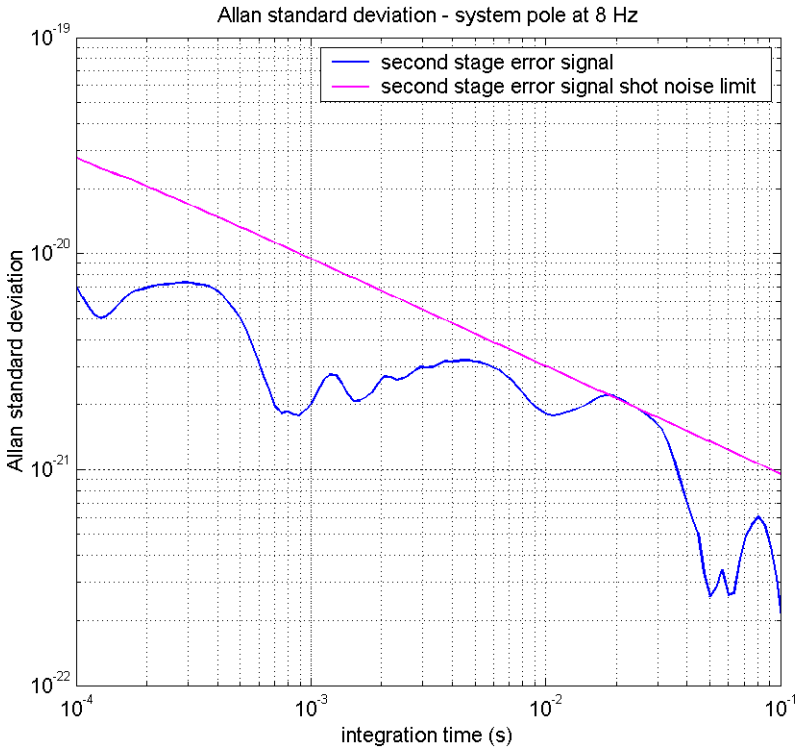


FIG. 6.6 – Ecart type d'Allan pour le signal d'erreur de la stabilisation de fréquence (en boucle), son bruit de fréquence et la spécification. Le signal d'erreur étant plus petit que le niveau de bruit de photons, c'est ce dernier qui est pertinent pour évaluer les performances hors boucle. Les deux courbes ont été calculées sur le même intervalle de fréquences, donnant des effets de bornes d'intégration similaires.

En pratique, je ne dispose pas de tout l'intervalle de fréquences ; l'estimation se fait donc sur un spectre borné en fréquences par f_{min} et f_{max}. Les écarts types calculés pour les temps d'intégration proches de $1/(2f_{\mathrm{min}})$ et $1/(2f_{\mathrm{max}})$ auront des erreurs d'effets

de bornes d'intégration. Je choisis la durée de mesure pour rendre l'erreur à $f_{\min}$ négligeable. L'équation 6.7 n'est pas utilisable telle quelle sur la densité spectrale de résolution du bruit de photons, illustrée dans la figure 6.5 : l'intégrale est divergente. Ce paradoxe apparent vient de ce que l'on cherche à calculer des écarts standards pour des temps d'intégration plus courts que l'inverse du pôle du système. Pour le calcul de l'écart type d'Allan, je ne compense donc pas les spectres par le pôle du système, ce qui se ferait naturellement si j'utilisais des données temporelles. L'écart type d'Allan dépend du pôle du système : un système limité par le bruit de photon avec un pôle petit peut cacher plus de bruit qu'un système avec un pôle élevé.

Le calcul appliqué au signal d'erreur de la stabilisation de fréquence donne la figure 6.6. Une estimation réaliste de la stabilité hors boucle doit prendre en compte le bruit de photons, puisque celui-ci domine en boucle. Le laser réalisé a une stabilité de 10^{-21} sur un temps d'intégration de 0.1 s, soit six ordres de grandeur de mieux qu'une cavité cryogénique en saphir sur un temps d'intégration équivalent [57]. Les étalons primaires de fréquence ont en fait besoin d'excellentes références de fréquences "volant d'inertie" sur des temps d'intégration de l'ordre de 1 à 10 s ; l'interféromètre a une stabilité peu intéressante de l'ordre de 10^{-9} sur ces échelles de temps où le bruit sismique domine.

La mesure hors boucle n'est pas possible avec la même résolution : La frange noire est moins sensible au bruit de fréquence à cause de la symétrie des deux bras. Il est toutefois possible de projeter l'erreur de fréquence mesurée sur la frange noire (fig. 6.7) en utilisant l'asymétrie mesurée. Une fréquence sinusoïdale à 1111 Hz est ajoutée au signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence. Le rapport de cette raie sur celle de la frange noire mesure l'asymétrie à 1111 Hz. Je fais l'hypothèse ensuite que l'asymétrie sur les signaux non étalonnés est indépendante de la fréquence (fig. 8.10). Le signal d'erreur étant plus petit que le niveau de bruit de photons, c'est bien sûr de ce dernier qu'il faut tenir compte dans la frange noire, même si, de par sa nature quantique, il ne donne pas de cohérence avec le signal hors boucle. Notons que la densité spectrale de résolution de la frange noire n'est pas encore au niveau nominal.

J'ai aussi mesuré la cohérence entre le signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence et le signal de frange noire. Cette mesure est utile pour vérifier la similitude entre deux signaux ; elle ne précise pas les liens de cause à effet. Une source de bruit extérieure peut produite le même effet dans les deux signaux. La cohérence ne permet pas d'évaluer le report du niveau de bruit de photons du signal d'erreur de la stabilisation de fréquence dans la frange noire si la source lumineuse n'utilise pas d'états comprimés de la lumière. La cohérence est plus grande que 0.5, hors harmoniques du secteur, pour des lignes à 18.5, 78.6 et 82.9 Hz ; pour les lignes de calibration à 444, 1111 Hz ; pour les "modes violons", excitation des fils de suspension des miroirs par le bruit thermique, à 300, 601, 1201 et 2403 Hz ; pour les excitation des modes des miroirs par le bruit thermique à 5583 et 7718 Hz [127] et pour un ensemble entre 8200 et 9200 Hz où le gain de boucle et l'asymétrie sont plus faibles, mais encore suffisants.

Les performances en boucle estiment donc suffisamment les performances hors boucle.

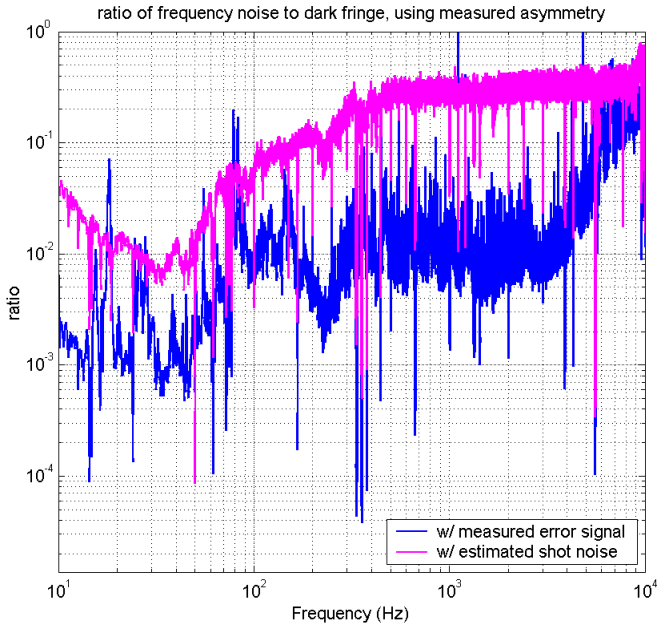


FIG. 6.7 – Fraction de bruit de fréquence dans la frange noire.

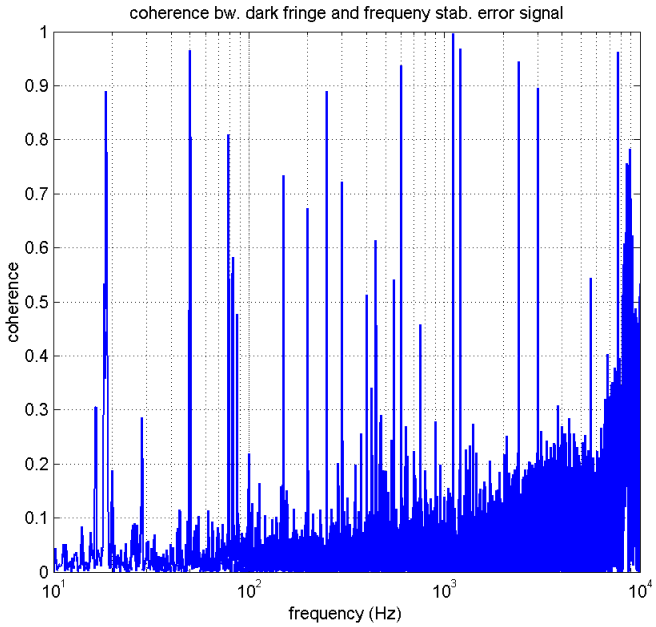


FIG. 6.8 – Cohérence entre le signal d'erreur de la stabilisation de fréquence et la frange noire.

La densité spectrale de bruit de phase $\tilde{\phi}$ se dérive simplement de la densité spectrale de bruit de fréquence $\tilde{\nu}$ par

$$\tilde{\phi}(f) = \frac{\tilde{\nu}(f)}{f} \, . \tag{6.8}$$

Le bruit de phase $S_c(f)$, en dBc, s'exprime à partir du bruit de fréquence $\tilde{\nu}$ par

$$S_c(f) = 10 \log \left[\left(\frac{\tilde{\nu}}{f} \right)^2 \right] \, . \tag{6.9}$$

L'erreur de bruit de phase est représentée en figure 6.9. L'erreur de phase vaut 600 nrad jusqu'à des temps d'intégration de 5 s ; la ligne à 1201 Hz domine cette erreur. Je vérifie que l'indice de modulation pour le bruit est très petit devant un, hypothèse qui avait été nécessaire pour les calculs et l'interprétation des résultats.

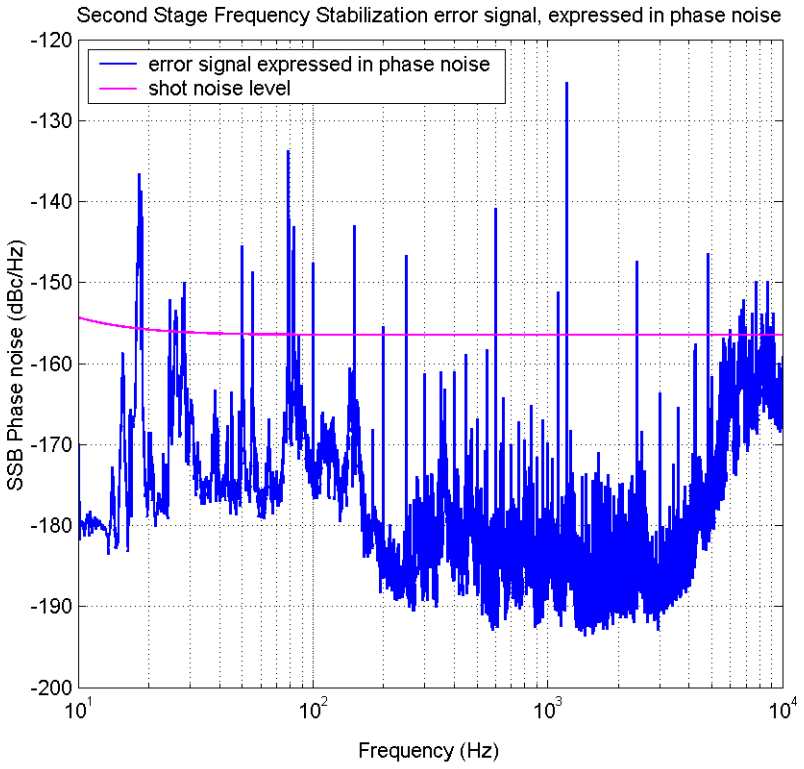


FIG. 6.9 – Signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence, exprimé en bruit de phase. Avec un niveau moyen de -155 dBc, le laser est un des oscillateurs les plus stables.

6.6.2 Écart de l'étage de pré-stabilisation

Je compare le bruit de fréquence du laser stabilisé, mesuré sur le signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence, au bruit de fréquence du laser libre, mesuré par le signal de correction du premier étage de stabilisation, et à la performance du laser après pré-stabilisation, mesurée par le signal de correction du deuxième étage. Le bruit après pré-stabilisation est probablement dû au mouvement résiduel de la cavité de filtrage de modes ; ce bruit, quoique dans les spécifications, est encore loin du niveau de bruit de photons de $9 \times 10^{-7}\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. La figure 6.10 montre le besoin d'un étage de pré-stabilisation puisque le gain du deuxième étage à 10 kHz n'est que de quelques unités.

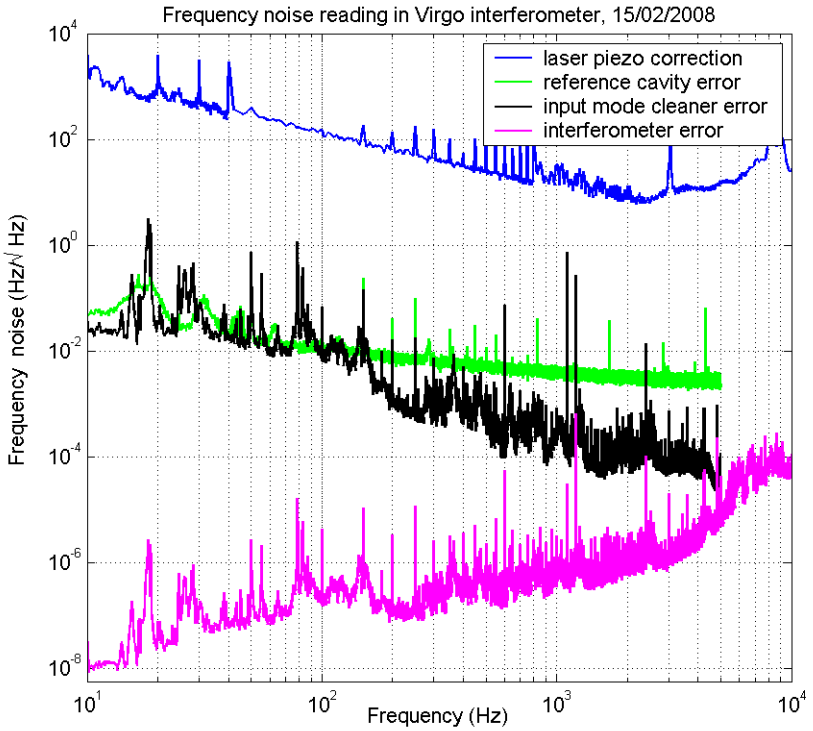


FIG. 6.10 – Stabilisation de la fréquence en deux étages. La courbe bleue représente le bruit de fréquence du laser libre ; la courbe noire, le bruit de fréquence du laser après le premier étage de stabilisation ; la courbe magenta la densité spectrale du signal d'erreur après le deuxième étage, creusant en fait sous le bruit de photons. La cavité de référence rigide, courbe verte, présenterait des capacités similaires à la cavité de filtrage de mode pour le premier étage de stabilisation. Le premier étage gagne les 5 ordres de grandeur nécessaires à 10 kHz ; le deuxième étage gagne les 6 ordres de grandeur supplémentaires manquants à 10 Hz.

Le bruit thermique limite la résolution du signal d'erreur du verrouillage sur la cavité de

référence rigide [68]. Ce signal d'erreur est saturé d'un facteur 2 lorsque la cavité est balayée ; le bruit de numérisation limite toutefois sa densité spectrale de résolution pour les fréquences d'analyse plus grandes que 2 kHz. Un filtre analogique, redressant les hautes fréquences avant numérisation, pourrait compenser ce manque de dynamique. Puisque cette mesure ne comporte pas réellement d'enjeu, je n'ai pas retenu cette modification. La figure 6.11 compare les performances de l'étage de pré-stabilisation à celles d'une pré-stabilisation sur la cavité de référence rigide. Elles seraient légèrement insuffisantes dans la configuration actuelle, mais il serait facile de corriger le manque de résolution à 10 kHz. Pour cette figure, j'ai calculé la spécification pour la pré-stabilisation à haute fréquence en utilisant l'asymétrie mesurée (fig. 8.10), et la fonction de transfert en boucle ouverte du deuxième étage mesurée (fig. 8.6).

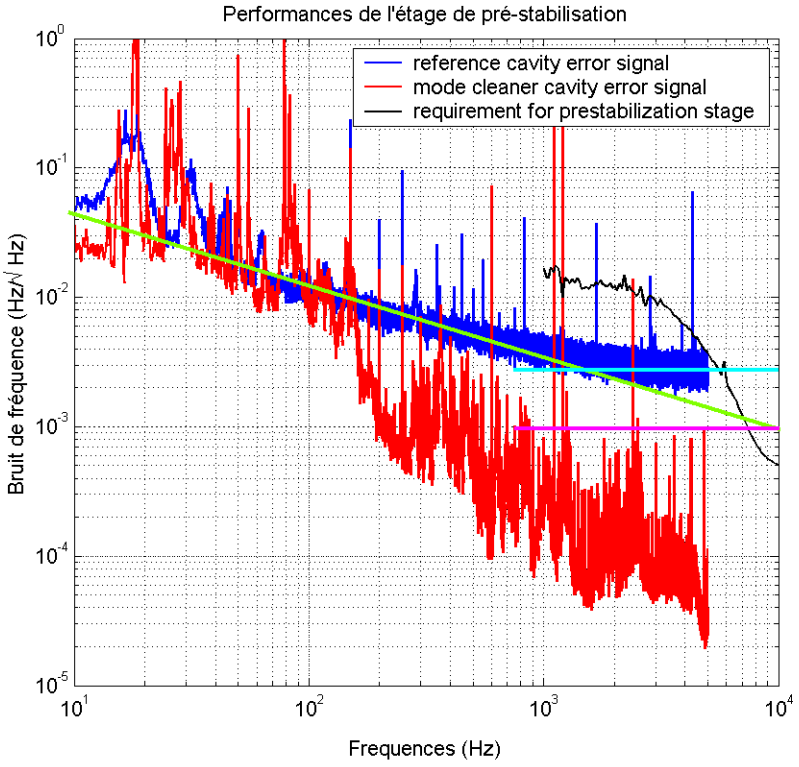


FIG. 6.11 – Performances du premier étage de stabilisation. La courbe verte figure le bruit thermique de la cavité rigide de référence, tel que calculé dans [68] ; la courbe cyan son bruit de numérisation ; la courbe magenta son bruit de photons.

Le bruit de photons pour la cavité de référence est ici de $0.95 \times 10^{-3}\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ tandis que le bruit de photons de la cavité de filtrage de mode, de $9 \times 10^{-7}\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, tenant compte de l'atténuateur de 19 dB sur le signal RF, n'est pas représenté. La cavité de référence a une largeur de raie de 0.6 Hz sur un temps d'intégration de 10 s. En configuration (a),

figure 6.3, lorsque la cavité de filtrage de mode est verrouillée sur la cavité rigide, le laser entrant dans l'interféromètre a une largeur de raie suffisamment petite pour que le verrouillage de l'interféromètre soit possible, condition (C3) de la partie 6.1.

6.7 Perspectives

La stabilisation de fréquence atteint la spécification nominale. Les techniques de symétrisation et d'isolation de l'erreur mesurée de fréquence par commande par anticipation permettront d'améliorer encore la performance dans les versions avancées de l'instrument. Enfin, je discute de simplifications qui pourraient être apportées.

6.7.1 Symétrisation

Le contrôle de l'effet étalon dans les miroirs d'entrée ou de fond des grands bras (chap. 4.1) peut ajuster la dissymétrie de l'interféromètre pour le bruit de fréquence du laser. Deux éléments de l'asymétrie (chap. 8.6) peuvent être contrôlés (fig. 8.9) : l'asymétrie de finesse qui s'ajoute à l'asymétrie de réflectivité, en basse fréquence (f < 1 kHz) ; l'asymétrie de réflectivité, liée à l'asymétrie des pertes dans les deux bras, en hautes fréquences.

Il est aisé d'obtenir des gains de boucles élevés en basses fréquences, et la réintroduction du bruit de photons de la mesure du mode commun de l'interféromètre est moins critique en basses fréquences, comme le montre la figure 6.5. Il semble donc préférable de contrôler l'asymétrie de réflectivité en haute fréquence. L'avantage supplémentaire est un contrôle du défaut de contraste $1 - C$, lié directement à l'asymétrie de réflectivité Δr :

$$1 - C = \frac{1}{2} (\Delta r)^2 \ , \tag{6.10}$$

l'asymétrie de réflectivité étant liée à l'asymétrie de pertes ΔP, pour deux cavités de finesse $\mathscr{F}$ sur-couplées :

$$\Delta r \simeq \frac{2\mathscr{F}}{\pi} \Delta P \ . \tag{6.11}$$

Le contrôle de l'asymétrie de réflectivité bénéficie donc également aux contraintes sur la stabilité de puissance du laser [48]. Il suffit de mesurer l'asymétrie, sur une perturbation ajoutée au signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence, et mesurée sur la frange noire, après cavité de filtrage de mode en sortie, pour constituer un signal d'erreur.

Notons que l'augmentation de la finesse des bras augmente le défaut de réflectivité proportionnellement si les pertes dominantes, dues aux défauts de surface des miroirs, ne sont pas corrigées (troisième note du chapitre 5).

Si l'on permet un effet étalon à la fois dans les miroirs d'entrée et de fond des grands bras, alors il pourrait être possible de corriger à la fois le défaut de réflectivité et le défaut de finesse, corrigeant donc l'asymétrie à toutes les fréquences.

6.7.2 Isolation par commande par anticipation

Une technique de commande par anticipation ("feed-forward") [128] isolerait tout bruit de fréquence hors spécifications qui ne serait pas du bruit quantique de photons d'un état cohérent. Une telle technique, utilisée pour d'autres signaux dans Virgo, a démontré une isolation jusqu'à trois ordres de grandeur [129]. Pour que cette technique soit possible, il faut pouvoir mesurer la perturbation et sa fonction de transfert avec la frange noire, avec l'hypothèse que le couplage est linéaire. Un filtre numérique ajuste du mieux possible la fonction de transfert mesurée dans l'intervalle 10 Hz - 10 kHz. Ici, la mesure de bruit de fréquence se ferait sur le signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation.

6.7.3 Stabilisation de fréquence sans cavité de filtrage de mode

Une version améliorée de l'instrument Virgo aura un laser plus puissant, qui pourrait être un laser fibré ; la fibre transporterait le faisceau sous vide, jusqu'à un banc optique suspendu qui adaptera sa taille. La fibre réaliserait ainsi la fonction de filtrage de mode et de stabilisation de pointé. La pré-stabilisation de fréquence devra se faire sur la cavité rigide, fixée au banc suspendu pour profiter de son isolation sismique et acoustique. Cette pré-stabilisation, avec une fréquence de gain unité élevée de l'ordre de 1 MHz, sera analogique, ou, au moins, aura un signal avec une meilleure dynamique que celle actuelle : le bruit de numérisation (courbe cyan, figure 6.11), ne jouera plus de rôle. Si le deuxième étage de stabilisation de fréquence sur l'interféromètre a une fonction de transfert similaire à l'actuelle, et si l'asymétrie est également similaire à celle mesurée 8.6, alors les performances de la cavité de référence rigide sont suffisantes.

Si la fonction de transfert en boucle ouverte du deuxième étage de stabilisation de fréquence peut avoir une fréquence de gain unité élevée, comme semble l'indiquer la simulation reportée avec une fréquence de modulation de 18 MHz dans [115] (chap. 9.3) alors tout étage de pré-stabilisation est inutile. La conception de la stabilisation de fréquence devient très simplifiée.

Chapitre 7

Compléments sur les asservissements

7.1 Remarques sur les fonctions de transfert

La transformée de Fourier de la fonction temporelle $g(t)$ s'écrit

$$\mathrm{TF}(g)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi ft) g(t) \mathrm{d}t \tag{7.1}$$

où f est la fréquence d'analyse en Hz. Le signe "$-$" dans l'exponentielle est indispensable pour utiliser les critères classiques de stabilité sans les adapter. Cette définition de la transformée de Fourier "des électroniciens", qui correspond à celle des instruments de laboratoire, n'est pas celle utilisée dans les ouvrages théoriques, par exemple [29]. Il faut donc prendre le complexe conjugué des résultats de [29] lorsqu'on veut les inclure dans une étude de stabilité ou les comparer avec des résultats expérimentaux.

Une fonction de transfert est une fonction complexe de la fréquence. Pour l'analyse de la stabilité, avec MATLAB par exemple, la phase doit être une fonction continue de la fréquence et non pas définie entre 0 et 2π. Avec le logiciel MATLAB, il faut utiliser la fonction "unwrap" pour obtenir cet effet. Si la fonction de transfert est telle que la boucle contient des intégrateurs purs en boucle ouverte, une pratique utile est d'ajouter et un (ou plusieurs) pôle multiple à une fréquence inférieure à toutes les fréquences utiles pour avoir une fonction continue à très basse fréquence, de sorte que la phase pour les fréquences très petites est nulle. Les critères de stabilité sont alors utilisables. Si le gain unité n'est croisé qu'une seule fois, ce doit être dans l'intervalle]-180°,180°[.

7.2 Critères de stabilité

Le critère de stabilité absolu est que la fonction de transfert en boucle ouverte, approximée par une fraction rationnelle, ne doit pas comporter de pôle à partie réelle positive.

Ce critère n'est pas explicite sur les marges d'asservissements.

Le critère de stabilité le plus habituellement utilisé est celui de Bode. Le diagramme de Bode trace les courbes d'amplitude et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte en fonction de la fréquence. La marge de phase, lors du franchissement du gain unité, doit être plus grande qu'un seuil, par exemple 30°. Ce même critère s'exprime par une pente effective, en échelle log-log ; la pente maximale est $f^{-1.5}$ par exemple. Ce critère n'est pas opérant lorsque la boucle croise plusieurs fois le gain unité. Cette situation est pourtant fréquente, lors du contrôle de miroirs suspendus, avec l'apparition de paires pôle / zéro de degrés de libertés angulaires couplés avec le degré longitudinal que l'on veut contrôler.

Le diagramme de Nichols trace l'amplitude de la fonction de transfert en boucle ouverte en fonction de la phase, la fréquence étant un paramètre. La stabilité dans le diagramme de Nichols s'exprime par le fait que la courbe doit :
- passer un nombre pair de fois dans chaque intervalle]-(2n+1)×180°,(-2n+1)×180°[sur l'axe du gain unité, où n est un entier relatif non nul, avec un nombre égal de montées et de descentes ;
- passer un nombre impair de fois dans]-180°,180°[sur l'axe du gain unité, si la boucle a du gain en continu, avec un excès d'une descente par rapport aux montées ;
- ne pas faire le tour complet d'aucun des points ((2n+1)×180°,1).

Si la fonction de transfert en boucle ouverte s'approche d'un point ((2n+1)×180°,1), la boucle oscille, avec une amplitude d'autant plus grande que l'on est proche d'un point "-1". L'affixe en fréquence du point sur la courbe de fonction de transfert en boucle ouverte le plus proche d'un point "-1" donne la fréquence de résonance de la boucle. Dans le diagramme de Nichols, le tracé des courbes G telles que $|G/(1+G)|$ ou $|1/(1+G)|$ est une constante permet de contrôler les marges de façon plus satisfaisante : la fonction en boucle ouverte ne doit pas rentrer à l'intérieur des ovales $|G/(1+G)| = K$ et $|1/(1+G)| = K$, où K, qui représente l'amplitude de l'oscillation de boucle, est un réel positif. Le premier ovale donne l'amplification des bruits dans le signal d'erreur, le deuxième l'amplification des bruits dans le signal de correction. $K = 2$ est équivalent à une marge de gain de deux et une marge de phase de 30°. H. Heitmann a réalisé de nombreux asservissements, en particulier sur les contrôles locaux de masses suspendues, où le gain croise plusieurs fois le gain unité, tout en ayant un ensemble stable, comme nous le verrons plus loin.

Les critères de Bode et Nichols conviennent pour les systèmes qui incluent des retards purs, sans qu'il soit besoin d'approximer le retard en fraction rationnelle : $G_1 = G_0 \exp(-i2\pi f\tau)$, où G_0 est la fonction de transfert en boucle ouverte sans retard, G_1 la fonction avec le retard τ.

Avec J.-P. Coulon, nous avons trouvé des fonctions qui vérifient les critères marge de gain et de phase strictement, mais qui pourtant possèdent des surtensions fortes en boucle fermée, donc qui oscillent, comme le filtre de la table ci-dessous, dessiné en figure 7.1. Ce filtre respecte une marge de gain de 2.65 et une marge de phase de 30°, mais a

un facteur de surtension de 3.13 en boucle fermée au lieu de 2.

zéros		pôles	
fréquence	Q	fréquence	Q
1.738	100	0.5651	18.65
0.1449	1.516	0.1749	15.16
0.04483	18.65	0.0146	100
		0.0001	100

J'utilise donc le critère de la surtension en boucle fermée, plus fort que celui des marges de gain et de phase. Il garantit ainsi la bonne utilisation des excursions maximales des signaux électriques et évite les phénomènes non linéaires de saturation et de pompage.

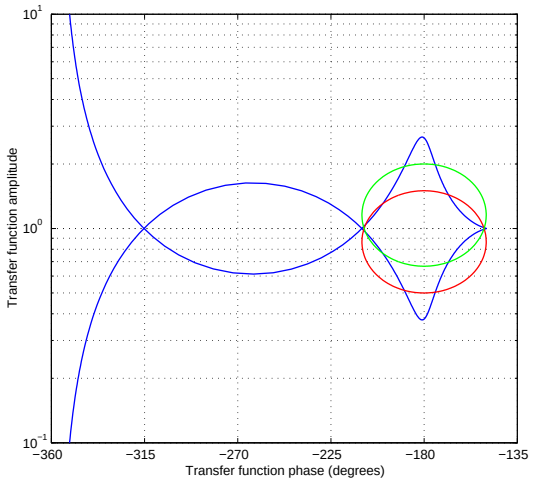


FIG. 7.1 – Figure de Nichols du filtre ci-dessus. La courbe verte représente la surtension de $G/(1+G)$ et la courbe rouge la surtension de $1/(1+G)$.

7.3 Compléments sur les filtres de Coulon

Nous avons développé des filtres numériques pour un asservissement dont le gain décroît le plus vite possible après le gain unité, croît le plus vite possible avant le gain unité, tout en ayant des marges de stabilité raisonnables, définies par le facteur de surtension, identiques pour $|G/(1+G)|$ et $|1/(1+G)|$ vu la définition des filtres.

Commençons par étudier le cas où l'ensemble du système à asservir (capteur + actionneur + système) à une fonction de transfert égale à un à toutes les fréquences.

Nous avons étudié les performances d'un filtre de Coulon, pour une marge de surtension donnée, en fonction de l'ordre du filtre de base et de l'intervalle $f_{\max}/f_{\min}$ autour

du gain unité pour lequel le gain de boucle n'est pas spécifié, en ayant une atténuation minimale pour toutes les fréquences supérieures à une fréquence donnée :

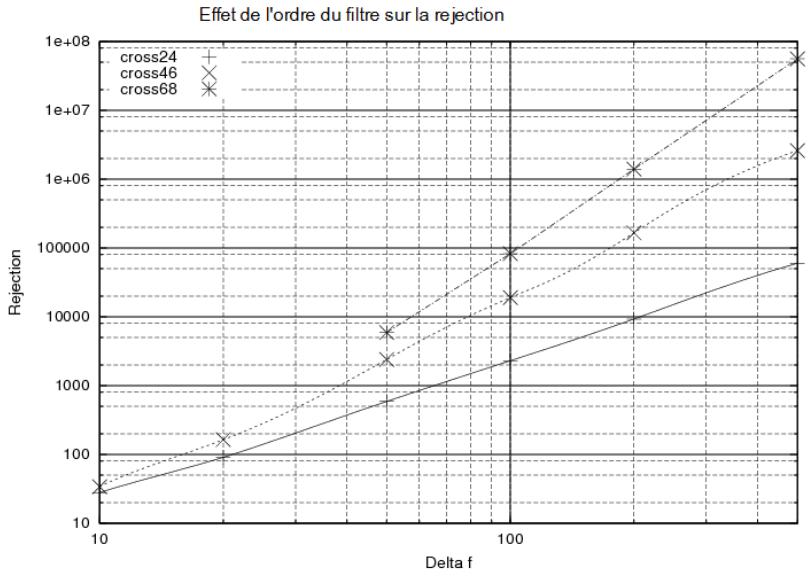


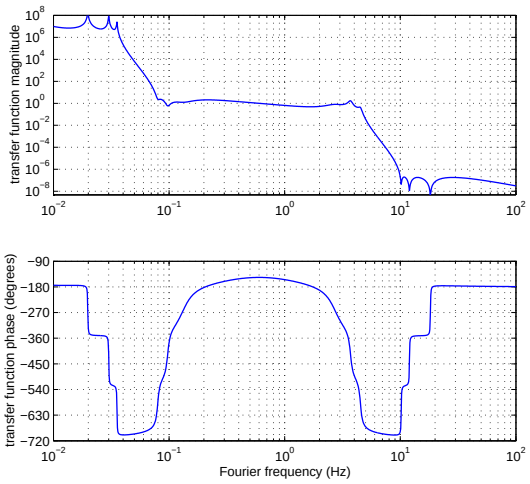
FIG. 7.2 – Performances d'un filtre de Coulon pour une marge de surtension de 2, pour un ordre donné du filtre de base. Crossxy indique x zéros et y pôles sur le filtre de base. Pour des ordres élevés, nous n'avons pas trouvé de solution pour un rapport de fréquence $\Delta f = f_{\max}/f_{\min} = 10$

Il semble qu'il ne soit pas possible de trouver des filtres qui aient de très bonnes performances d'atténuation (par exemple au moins 1000) avec $f_{\max}/f_{\min} = 10$; un travail de recherche en mathématiques serait sans doute nécessaire pour approfondir ce sujet.

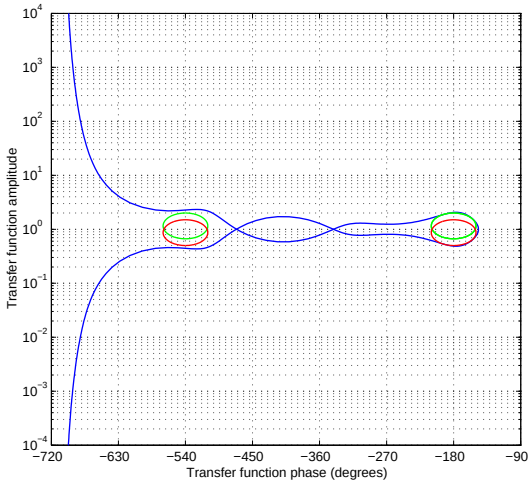
Nous avons étudié un filtre de Coulon avec $f_{\max}/f_{\min} = 278$, ce qui correspond à un gain unité à 0.6 Hz et une grande atténuation au-dessus de 10 Hz, qui peut être utilisé pour verrouiller le mode commun des grandes cavités sur la cavité de référence rigide, par contrôle depuis la masse de référence seule.

zéros		pôles	
fréquence	Q	fréquence	Q
10.2	100	0.03537	100
12.0	100	0.03003	100
18.20	100	0.01978	100
0.409	0.52	0.880	0.52
0.132	2.8	2.72	2.8
0.0971	14	3.71	14
0.0796	16	4.52	16
		0.001	30

La figure 7.3 explicite ses performances. La boucle n'a pas de gain notable pour les deux décades autour du gain unité : il faudra, pour utiliser ce filtre, que le bruit sismique à compenser pour garder la cavité rigide à résonance soit négligeable au-dessus de 30 mHz.



(a) Diagramme de Bode du filtre de Coulon exposé ci-dessus. La boucle a une atténuation de plus d'un million pour les fréquences situées à un facteur 18 au-dessus du gain unité.



(b) Diagramme de Nichols, faisant apparaître clairement les marges et le contournement des points "-1"

FIG. 7.3 – Performances d'un filtre de Coulon, marge de surtension 2, avec 6 pôles et 8 zéros dans le filtre de base.

Nous avons testé avec réussite ce filtre, avec compensation désaccordée comme expliqué dans la partie suivante, en novembre 2004 (entrée 7141 du cahier de manipulation électronique de Virgo) ; cela démontre la faisabilité de ce genre de filtre.

7.4 Compensation désaccordée

Les filtres numériques que J.-P. Coulon a développés (chap. 6.4.4) supposent que le système à compenser a une réponse unitaire à toutes les fréquences. Ce n'est évidemment pas le cas des systèmes réels. Pour l'asservissement longitudinal d'un miroir à partir de sa masse de référence suspendue à la même marionnette [130], la fonction de transfert est en première approximation un pôle résonnant à 0.6 Hz avec un coefficient de qualité très élevé, de l'ordre du million. Il serait imprudent de chercher à compenser exactement ce pôle : une élévation de température change la longueur du fil et la fréquence de résonance. Il est donc prudent de compenser par un zéro de coefficient de qualité plus bas, décalé en fréquence suivant la position où se trouve le zéro. Le signe du décalage est essentiel pour garder le système stable.

Avec le filtre de Coulon pour un système unitaire, je peux translater la courbe d'amplitude de gain sur l'échelle des fréquences par $f' = kf$ pour amener le croisement central du gain unité à la fréquence d'oscillation du pendule à 0.595 Hz. Un zéro à la fréquence de 0.57 Hz avec un coefficient de qualité de 100 réalise une compensation désaccordée. J'obtiens le filtre suivant, dans le diagramme de Nichols :

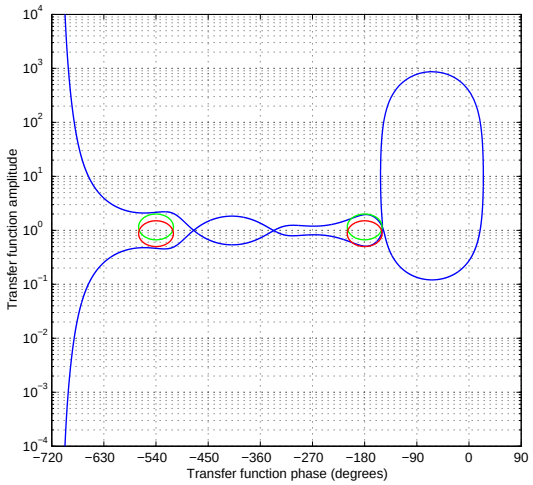


FIG. 7.4 – Figure de Nichols du filtre de Coulon, appliqué à un contrôle de miroir via la masse de référence. La courbe verte représente la surtension de $G/(1+G)$ et la courbe rouge la surtension de $1/(1+G)$. Le coefficient de qualité du pendule est limité à 10^4 dans la simulation pour des raisons de résolution numérique de la résonance. Cette figure montre que le coefficient de qualité est utilisé comme gain de boucle à la fréquence de résonance.

Notons que le coefficient de qualité du pendule n'apporte du gain de boucle que pour l'oscillation du miroir contrôlé. Pour que l'oscillation du pendule du deuxième miroir de la cavité soit amortie, il lui faut elle aussi une compensation de ce genre.

L'atténuation à 10 Hz de la fonction de transfert en boucle ouverte se compare très avantageusement à un développement de filtres non basés sur les filtres de Coulon :

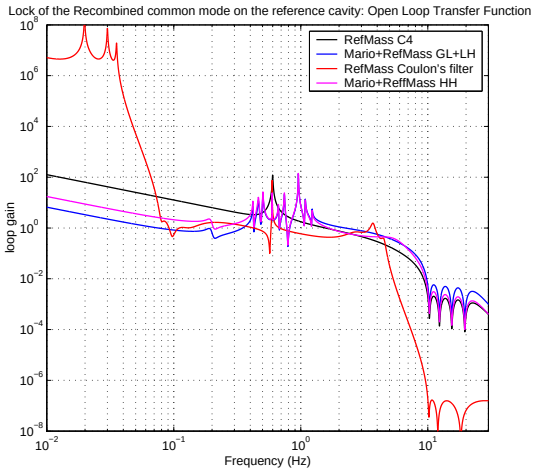


FIG. 7.5 – Figure de Bode du filtre de Coulon (courbe rouge), appliqué à un contrôle de miroir via la masse de référence. Les autres filtres sont des développements d'autres collègues.

En réalité, il n'est pas possible de verrouiller le mode commun de l'interféromètre par une action sur la masse de référence seule : le mouvement basse fréquence (marées) nécessite une excursion large des signaux de correction, donc un amplificateur à gain élevé, donc un fort bruit de numérisation pour le contrôle qui ne serait filtré que par la fonction de transfert en $1/f^2$ du pendule. Les mouvements de très basse fréquence sont en fait répartis sur le sommet de la suspension, la marionnette et la masse de référence [131]. La fonction de transfert depuis la marionnette est nettement plus complexe. Voici un modèle de la fonction de transfert de la marionnette, fourni par G. Losurdo :

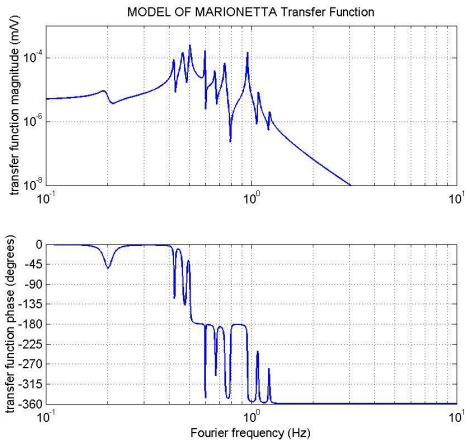


FIG. 7.6 – Fonction de transfert d'une force sur la marionnette vers un déplacement du miroir ; 8 paires pôles zéros sont nécessaires.

Je donne à titre d'exemple un filtre de Coulon adapté "à la main", c'est à dire par analyse

avec MATLAB de l'effet du déplacement des fréquences, au contrôle depuis la marionnette seule :

zéros		pôles	
fréquence	Q	fréquence	Q
10.2	100	0.012	100
12.0	100	0.014	100
0.196	0.52	0.733	0.42
0.0528	2.8	2.72	2.8
0.0388	14	3.71	14
0.0318	16	4.52	16
18.2	100	0.01	30
		0.01	30

J'ai adopté le principe de la compensation désaccordée, sauf pour la paire pôle/zéro à 200 mHz, dont le coefficient de qualité, faible (10) permet une compensation exacte. Le filtre de pseudo-compensation de la réponse de la marionnette, qui se multiplie au précédent, est :

zéros		pôles	
fréquence	Q	fréquence	Q
0.49	100	0.21	100
0.94	200	0.45	100
0.19	8	0.50	50
0.415	100	0.61	1000
0.450	40	0.69	100
0.59	1000	0.820	100
0.65	100		
0.730	100		

La fonction de transfert en boucle ouverte du verrouillage du mode commun sur l'interféromètre est représenté par la figure 7.7.

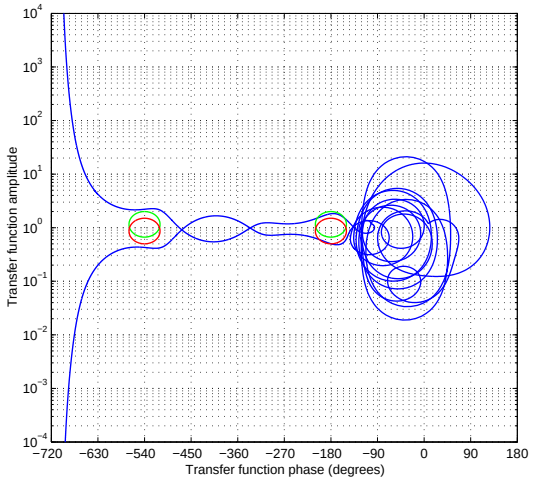


FIG. 7.7 – Figure de Nichols du filtre de Coulon, adapté à l'asservissement du mode commun des grands bras sur la cavité de référence rigide depuis la marionnette seule. La courbe verte représente la surtension de $G/(1+G)$ et la courbe rouge la surtension de $1/(1+G)$. La fréquence de gain unité est croisée de multiples fois : le critère de Bode n'est pas utilisable !

Cet asservissement devrait être stable. Malheureusement, le gain de boucle n'est pas significatif pour les fréquences au-dessus de 40 mHz. Ce filtre pourrait donc utilisable lorsque l'amortissement inertiel des suspensions sera plus efficace.

Le développement d'un filtre par compensation désaccordée, dans le cadre d'un contrôle qui inclurait la marionnette, la masse de référence et le haut de suspension est complexe, mais semble possible. Suivant les performances de mouvement résiduel des masses, il est possible d'appliquer avec efficacité un filtre basé sur 6 zéros et 8 pôles, avec $f_{\mathrm{max}}/f_{\mathrm{min}}$ compris entre 70 et 278. Il pourrait être inclus lorsque la densité spectrale de résolution de l'interféromètre à très basse fréquence sera limitée par le verrouillage du mode commun sur la cavité de référence ; il pourrait être indispensable dans des versions avancées des détecteurs.

Chapitre 8

Compléments sur la stabilisation de fréquence

8.1 Équations avec effet Doppler

La note [117] ne tient pas compte de l'effet Doppler ajouté à la fréquence laser produit par le mouvement résiduel des miroirs de la cavité de filtrage de mode. On pourrait soupçonner que l'effet Doppler augmente le bruit dans les hautes fréquences (1 kHz - 10 kHz). Je produis ici les équations qui en tiennent compte dans le régime de prise de données de l'interféromètre ; je montre que les spécifications ne sont pas fortement modifiées. Il faut modifier la figure 4 de la note [117], pour rajouter l'effet Doppler, avec le signe correct démontré dans la note [118]. Par ailleurs, la lumière injectée dans la cavité de référence rigide est maintenant prise après la cavité de filtrage de mode : il faut adapter le schéma.

Le schéma correct est alors celui de la figure 8.1, où les notations sont celles de la note [117] : C_{las1} représente la fonction de transfert de l'électronique analogique de correction de fréquence du laser multipliée à celle d'un actionneur effectif de correction de fréquence ; C_{MC} est le produit du filtre numérique de correction de longueur de la cavité de filtrage de mode par la fonction de transfert de l'actionneur qui déplace le miroir de fond de la cavité ; C_{L+} est le produit du filtre numérique d'asservissement de longueur du mode commun des bras sur la cavité de référence rigide par l'actionneur effectif de mouvement des miroirs du mode commun de l'interféromètre ; C_{las2} est la fonction de transfert de l'électronique du deuxième étage de correction de fréquence ; T_{MC} est la fonction de filtrage du bruit de fréquence par la cavité de filtrage de mode : c'est un filtre passe-bas du premier ordre ; $1 - T_{MC}$ est la représentation de l'effet Doppler produit par les mouvements résiduels de la cavité de filtrage de mode ; c'est un filtre passe-haut du premier ordre ; F_{RFC} et F_{MC} sont les réponses de la cavité de référence rigide et de la cavité de filtrage de mode, y compris leurs pôles de filtrage, à un bruit de fréquence ;

F_{L+} est la réponse du mode commun de l'interféromètre à un bruit de fréquence.

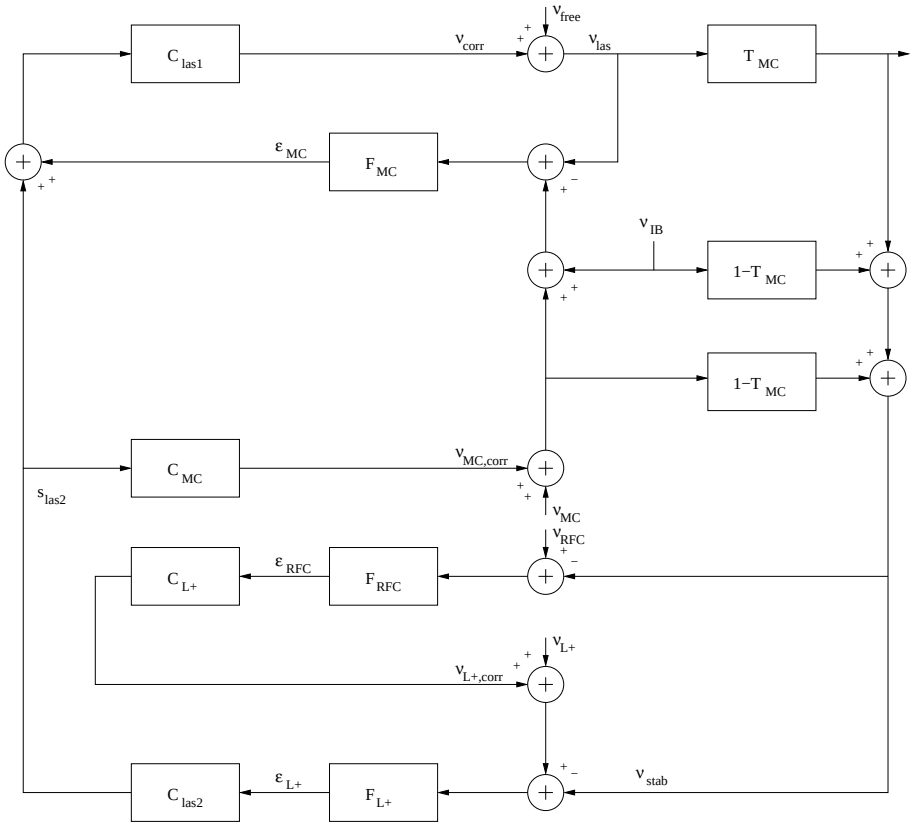


FIG. 8.1 – Boucles pour l'asservissement de fréquence en deux étages, avec verrouillage de la cavité de filtrage de mode en entrée et verrouillage du mode commun de l'interféromètre sur la cavité de référence rigide.

Le signal s_{las2} est la correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence, en volts, observable ; Les signaux $\nu_{\mathrm{MC,corr}}$, $\nu_{\mathrm{L+,corr}}$ sont les corrections pour les verrouillages de la cavité de filtrage de mode et du mode commun de l'interféromètre par déplacements de miroirs ; ces signaux sont observables sur les signaux de correction étalonnés. ν_{corr} est la correction en fréquence du laser, en Hz, observable après étalonnage, sur les signaux de correction du cristal piezo-électrique, sur la correction de température du cristal du laser et sur la correction du modulateur électro-optique après le laser. ν_{free} est la densité spectrale du bruit de fréquence du laser libre ; ν_{las} est la densité spectrale du bruit de fréquence du laser stabilisé, avant la cavité de filtrage de mode ; ν_{stab} est la densité spectrale du bruit de fréquence du laser, après la cavité de filtrage de mode, avant l'interféromètre ; ϵ_{MC}, ϵ_{RFC} et $\epsilon_{\mathrm{L+}}$ sont les densités spectrales d'écart à la résonance, en $\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, des cavité de filtrage de mode, cavité de référence rigide et longueur moyenne des bras ; ν_{IB} et ν_{MC} sont les densités spectrales des mouvements des miroirs en entrée et en fond de la cavité de filtrage de mode, calibrées en $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ par multiplication par

le coefficient ν_0/L_{MC} ; ν_{RFC} est la densité spectrale de longueur de la cavité de référence rigide, exprimée en $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ par multiplication par ν_0/L_{RFC} ; ν_{L+} est la densité spectrale de longueur du mode commun des grands bras, calibrée en fréquence, et référence ultime pour la stabilisation de fréquence du laser.

De façon similaire à la note [117], je définis les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$G_{las1} = F_{MC}\, C_{las1} \tag{8.1}$$
$$G_{las2} = F_{L+}\, C_{las2}\, \frac{T_{MC}}{F_{MC}} \tag{8.2}$$
$$G_{L+} = C_{L+}\, F_{RFC} \tag{8.3}$$
$$G_{MC} = C_{MC}\, \frac{F_{MC}}{T_{MC}}\,. \tag{8.4}$$

L'équation 8.1 est la fonction de transfert en boucle ouverte de l'étage de pré-stabilisation de la fréquence du laser sur la cavité de filtrage de mode ; l'équation 8.2 est la fonction de transfert en boucle ouverte du deuxième étage de stabilisation de fréquence sur l'interféromètre ; l'équation 8.3 est la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement du mode commun de l'interféromètre sur la cavité de référence rigide ; l'équation 8.4 est la fonction de transfert en boucle ouverte qui garde la cavité de filtrage de mode à résonance. Notons que dans l'équation 8.2 $(1/F_{MC})$ est réellement un actionneur effectif ; j'ai vérifié expérimentalement qu'un accroissement de F_{MC} diminue le gain de boucle G_{L+}, cf. l'entrée 16906 du cahier électronique de manipulations [132].

L'emboîtement des boucles rend inutilement lourd le calcul, nécessaire pour la définition des spécifications, des signaux mesurés en fonction des entrées, références et perturbations. Le gain du premier étage de stabilisation est très élevé dans la bande DC-100 kHz ; cette considération lève la difficulté.

Nous pouvons tirer quatre équations en particulier de la figure 8.1, qui font intervenir l'étage de pré-stabilisation :

$$\nu_{las} = \nu_{free} + \frac{G_{las1}}{F_{MC}} s_{las2} + G_{las1}(\nu_{IB} + \nu_{MC} + \nu_{MC,corr}) - G_{las1}\,\nu_{las} \tag{8.5}$$
$$\epsilon_{RA} = s_{las2} + \epsilon_{MC} \tag{8.6}$$
$$\nu_{corr} = \frac{G_{las1}}{F_{MC}}(s_{las2} + \epsilon_{MC}) \tag{8.7}$$
$$\epsilon_{MC} = F_{MC}\,(\nu_{MC,corr} + \nu_{IB} + \nu_{MC} - \nu_{las})\,. \tag{8.8}$$

L'équation 8.5 donne le bruit de fréquence du laser stabilisé en entrée de la cavité de filtrage de mode ; l'équation 8.6 donne le bruit du signal d'erreur du premier étage de stabilisation de fréquence ; l'équation 8.7 donne le signal de correction du premier étage de stabilisation de fréquence, pourvu que l'actionneur soit calibré ; l'équation 8.8 donne l'écart à résonance de la cavité de filtrage de mode, tel que mesuré par son signal d'erreur. Dans le cas où $G_{las1} \gg 1$, c'est à dire dans toute la bande 0-100 kHz, l'équation 8.5

se simplifie en :

$$\nu_{\text{las1}} = \frac{\nu_{\text{free}}}{G_{\text{las1}}} + \frac{1}{F_{\text{MC}}} s_{\text{las2}} + (\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}}) + \nu_{\text{MC,corr}} \,. \tag{8.9}$$

Si nous avons $G_{\text{las1}} \gg 1$ et que la fréquence de gain unité de G_{las1} est très grande devant la fréquence de gain unité de G_{las2} (300 kHz devant 20 kHz), alors le schéma 8.1 se simplifie et devient le schéma de la figure 8.2, auquel il faut adjoindre les équations 8.5, 8.6 et 8.7 qui ne sont plus représentées. Il est maintenant facile de couper le circuit après la correction du deuxième étage de stabilisation en fréquence, et nous trouvons la fonction de transfert en boucle ouverte G_T des boucles emboîtées :

$$G_T = G_{\text{las2}} \left(1 + G_{\text{MC}}\right) \left(1 + G_{\text{L+}}\right) . \tag{8.10}$$

Le système global est donc stable et robuste si G_T est stable avec des marges raisonnables. En pratique, il faut concevoir les boucles G_{las2}, G_{MC} et $G_{\text{L+}}$ pour qu'elles soient indépendamment stables, en ayant du gain ou des intégrateurs purs en très basse fréquence, et en veillant à ce que leurs fréquences de gain unité soient suffisamment séparées, par une décade par exemple. Si les fréquences de gain unité ne sont pas très séparées, il faut analyser les marges de la boucle du système global G_T. Il n'y a pas d'autre condition de croisement de boucle que celles-ci.

Il est maintenant facile d'exprimer tous les signaux en fonction des différentes sources de bruit ou références. Le bruit de fréquence du laser stabilisé, devant le miroir de recyclage de l'interféromètre, est

$$\begin{aligned} \nu_{\text{stab}} = \frac{1}{1 + G_T} \Big[& G_{\text{las2}} \left(1 + G_{\text{MC}}\right) \nu_{\text{L+}} + G_{\text{las2}} \left(1 + G_{\text{MC}}\right) G_{\text{L+}} \, \nu_{\text{RFC}} \\ & + (\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}}) + T_{\text{MC}} \frac{\nu_{\text{free}}}{G_{\text{las1}}} \Big] \,. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Le bruit de fréquence ne doit pas apparaître dans la frange noire ; la densité spectrale ν_{stab} est donc contrainte (note [115] dans chap. 9). Nous avons donc, d'après l'équation 8.11 des contraintes sur les sources ν_{RFC}, $(\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}})$ et ν_{free} et sur les fonctions qui couplent ces bruits à ν_{stab}. Le bruit thermique de la cavité rigide domine dans ν_{RFC}. On ne le contrôle pas quand la cavité est en place ; il faut donc réduire $G_{\text{L+}}$ dans la bande 10 Hz - 10 kHz, d'où le développement de filtres de Coulon. Un gain maximal des boucles et G_{las2} réduisent l'effet du bruit $(\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}})$ des mouvements des masses de la cavité de filtrage de mode. Les retards numériques limitent en pratique la fréquence de gain unité de G_{MC} à environ 150 Hz. La contrainte est ensuite sur le contrôle local et inertiel des suspensions courtes pour réduire $(\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}})$. Cette équation montre que pour $G_{\text{las2}} \gg 1$ et $G_{\text{L+}} \ll 1$, la fréquence du laser est bien verrouillée sur $\nu_{\text{L+}}$, le mode commun de l'interféromètre. Lorsque $G_{\text{L+}} > 1$, le laser suit, in fine, la cavité de référence.

Le bruit de fréquence du laser libre ν_{free} est une donnée du laser ; en pratique, la fréquence de gain unité de G_{las1} est si grande que le gain de boucle est suffisamment grand.

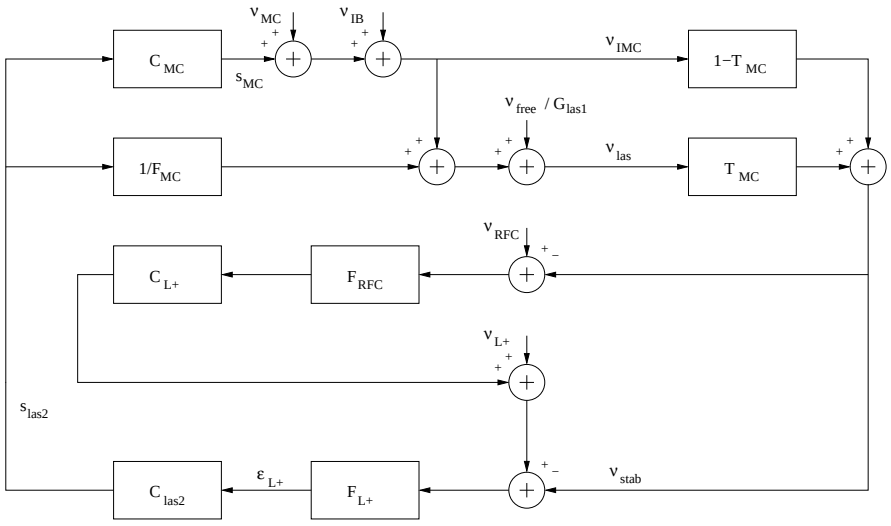


FIG. 8.2 – Boucles pour l'asservissement de fréquence en deux étages, avec verrouillage de la cavité de filtrage de mode en entrée et verrouillage du mode commun de l'interféromètre sur la cavité de référence rigide, dans le cas où la boucle de pré-stabilisation a un gain très grand, y compris lorsque le deuxième étage passe le gain unité.

Le bruit de fréquence du laser devant la cavité de filtrage de mode est

$$\begin{aligned}\nu_{\mathrm{las}} = \frac{1}{1+G_T}\Bigg[& \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}} G_{\mathrm{las2}}\left(1+T_{\mathrm{MC}}\,G_{\mathrm{MC}}\right)\nu_{\mathrm{L+}} + \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}} G_{\mathrm{las2}}\left(1+T_{\mathrm{MC}}\,G_{\mathrm{MC}}\right) G_{\mathrm{L+}}\,\nu_{\mathrm{RFC}} \\ & + \left(1 - G\mathrm{las2}(1+G_{\mathrm{L+}})(1-T_{\mathrm{MC}})\frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\right)\left(\nu_{\mathrm{IB}}+\nu_{\mathrm{MC}}\right) \\ & + \left(1+G_{\mathrm{las2}}\,G_{\mathrm{MC}}(1-T_{\mathrm{MC}})(1+G_{\mathrm{L+}})\right)\frac{\nu_{\mathrm{free}}}{G_{\mathrm{las1}}}\Bigg] .\end{aligned} \tag{8.12}$$

Les bruits des lasers stabilisés ainsi que les sources de bruits ne sont pas directement observables. Les signaux accessibles électriquement sont les signaux d'erreur et de correction des boucles. Le signal de correction du deuxième étage de stabilisation de fré-

quence vaut :

$$s_{\text{las2}} = \frac{1}{1+G_T} G_{\text{las2}} \frac{F_{\text{MC}}}{T_{\text{MC}}} \Bigg[\nu_{\text{L+}} + G_{\text{L+}}\, \nu_{\text{RFC}} - (1+G_{\text{L+}})(\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}}) - T_{\text{MC}}(1+G_{\text{L+}}) \frac{\nu_{\text{free}}}{G_{\text{las1}}} \Bigg] . \tag{8.13}$$

Cette équation donne l'expression du signal de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence, en $\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$, en fonction des différentes sources de bruit. Dans la pratique, il mesure $(\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}})$, au facteur $\sim \frac{F_{\text{MC}}}{T_{\text{MC}}} \frac{1}{(1+G_{\text{MC}})}$ près. Le signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode est

$$\epsilon_{\text{MC}} = \frac{F_{\text{MC}}}{1+G_T} \Bigg[-\frac{1}{T_{\text{MC}}} G_{\text{las2}}\, \nu_{\text{L+}} - \frac{1}{T_{\text{MC}}} G_{\text{las2}}\, G_{\text{L+}}\, \nu_{\text{RFC}} + \frac{1}{T_{\text{MC}}} G_{\text{las2}}\, (1+G_{\text{L+}})(\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}}) - (1 + G_{\text{las2}}\, G_{\text{MC}}(1+G_{\text{L+}}))\, \frac{\nu_{\text{free}}}{G_{\text{las1}}} \Bigg] ; \tag{8.14}$$

le signal d'erreur du verrouillage du deuxième étage de stabilisation de fréquence est

$$\epsilon_{\text{L+}} = \frac{F_{\text{L+}}}{1+G_T} \Bigg[\nu_{\text{L+}} + G_{\text{L+}}\, \nu_{\text{RFC}} - (1+G_{\text{L+}})(\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}}) - T_{\text{MC}}\, (1+G_{\text{L+}}) \frac{\nu_{\text{free}}}{G_{\text{las1}}} \Bigg] ; \tag{8.15}$$

et enfin le signal d'erreur de la cavité rigide est

$$\epsilon_{\text{RFC}} = \frac{F_{\text{RFC}}}{1+G_T} \Bigg[-G_{\text{las2}}\, (1+G_{\text{MC}})\, \nu_{\text{L+}} + (1 + G_{\text{las2}}(1+G_{\text{MC}}))\, \nu_{\text{RFC}} - (\nu_{\text{IB}} + \nu_{\text{MC}}) - T_{\text{MC}} \frac{\nu_{\text{free}}}{G_{\text{las1}}} \Bigg] . \tag{8.16}$$

Lorsque les fréquences sont très petites, les gains de boucles de G_{MC}, $G_{\text{L+}}$ et G_{RFC} sont très grands devant un ; nous pouvons facilement vérifier que les signaux d'erreurs tendent alors vers zéro : les cavités sont verrouillées. Il est facile de donner des expressions des signaux de correction qui dépendent des fonctions de transfert en boucle ouverte, des facteurs T_{MC} et $(1 - T_{\text{MC}})$. Lorsque les bruits de lecture et de numérisation ne dominent pas dans les densités spectrales de signaux d'erreur, les signaux de correction n'apportent pas d'information supplémentaire.

8.2 Modèle temps réel

J'ai développé un modèle temps réel SIMULINK / MATLAB de la stabilisation de fréquence pour vérifier le comportement des boucles en présence d'effets non linéaires.

Il n'apprend pas de contraintes supplémentaires aux équations. Le modèle observe le comportement des boucles dans des régimes pathologiques comme la saturation de signaux. Les éléments non linéaires ajoutés sont :
- les saturations à +/- 10 V des signaux de correction des électroniques analogiques, des convertisseurs numériques analogiques ;
- la non linéarité du signal Pound-Drever-Hall, l'écart de résonance $x = f/f_P$ étant remplacé par $x/(1+x^2)$;
- la pression de radiation dans la cavité de filtrage de mode
- la non linéarité des diodes limitant le signal dans l'électronique analogique de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence.

Ce modèle vérifie que les non-linéarités n'interviennent pas dans la performance du système global.

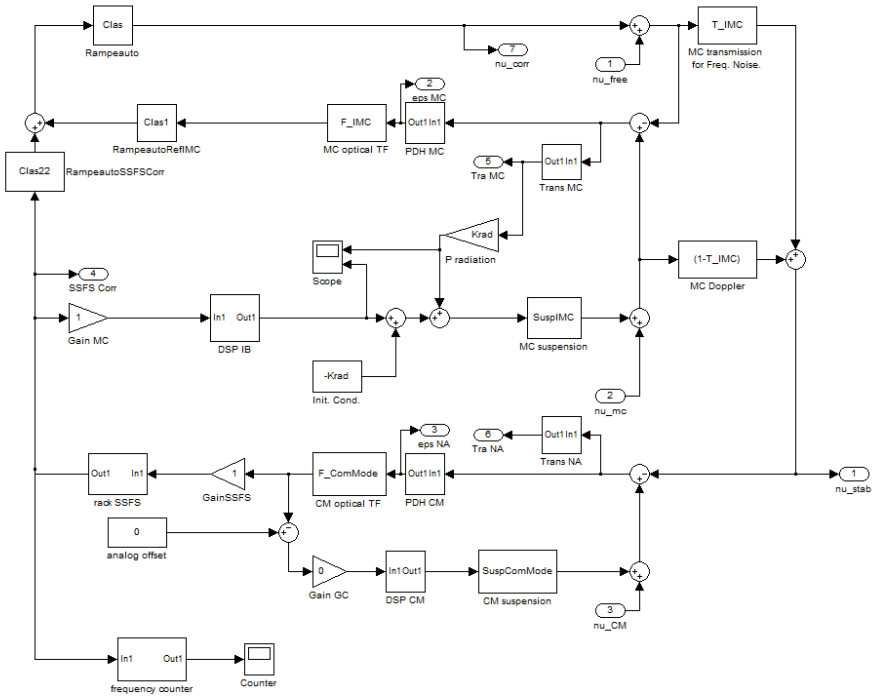


FIG. 8.3 – Simulation temps réel de la stabilisation de fréquence. La simulation présentée ici prend en compte la pression de radiation dans la cavité de filtrage de mode et la non-linéarité des signaux Pound-Drever-Hall.

8.3 Modèles des éléments des boucles

Les modèles décrits en [117] sont ceux estimés avant la réalisation. Je donne ici les chiffres tels que mesurés et vérifiés, une fois l'implantation réalisée ; le processus de mesure est détaillé dans le chapitre 8.5. Je ne donne pas les éléments du verrouillage du mode commun de l'interféromètre sur la cavité rigide, problématique décrite dans le chapitre précédent ; le filtre développé actuellement n'est pas encore optimal ; il a été modifié en janvier 2008. La technique d'isolation de ce signal par soustraction dans la frange noire, comme décrit dans le chapitre 6.4.4, suffit pour le moment.

8.3.1 Cavités

Les caractéristiques des signaux d'erreurs des cavités sont décrites ci-après :

cavité	RFC	IMC	L+
PDH p-p (V)	11.3	0.105	
pôle (Hz)	250×10^3	496	8
sensibilité (V/Hz)	4.52×10^{-5}	2.16×10^{-4}	12.3

RFC, IMC et L+ désignent la cavité rigide de référence, la cavité de filtrage de mode et le mode commun de l'interféromètre. Le signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode est pris immédiatement après le mélangeur. Le mode commun de l'interféromètre est mesuré sur la face anti-reflet de la séparatrice ; la sensibilité donnée ici est celle du signal électrique sur la sortie sans filtre anti-repliement. La fonction de transfert du bruit de fréquence sur le mode commun de l'interféromètre n'est pas qu'un simple filtre passe-bas ; La figure 8.4 donne la mesure de $F_{\mathrm{L}+}\frac{T_{\mathrm{MC}}}{F_{\mathrm{MC}}}$.

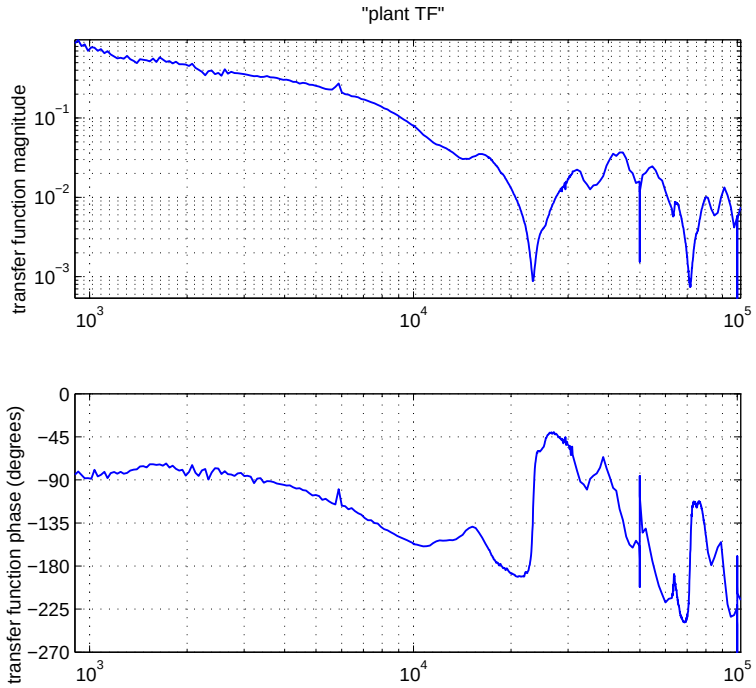


FIG. 8.4 – Fonction de transfert entre un bruit de fréquence et le mode commun de l'interféromètre, mesuré sur la face anti-reflet de la séparatrice. La mesure est effectuée par injection d'un bruit sur le signal d'erreur, et la fonction de transfert est le rapport du signal d'erreur, avant perturbation, au signal de correction de l'électronique. La mesure pour les fréquences en dessous de 1 kHz est trop bruitée et non significative. Le pôle de la cavité de filtrage de mode ne doit pas apparaître dans cette mesure (chap. 8.4). La simulation (modèle spectral) prévoit le creux aux multiples de l'intervalle spectral libre ; la prise en compte de ce creux est essentielle pour la stabilité de la boucle. La simulation prévoit également les creux à 25 kHz et 75 kHz ; ce n'est pas le cas des creux à 12.5 kHz et 37.5 kHz.

8.3.2 Actionneurs

Laser

Les corrections de phase ou de fréquence pour les fréquences plus grandes que 1 Hz se font par l'entrée "piezo" du contrôleur de laser ou par un correcteur électro-optique (EO) placé après le laser.

voie piezo	1.75 MHz/V	pôle simple 31 kHz
voie EO	9.4 mrad/V	ampli $\times 10$; pôle simple 100 kHz ; gain 0.75

Le gain de 0.75 sur la voie électro-optique est ajouté pour ajuster la fonction de transfert en boucle ouverte à la réponse mesurée. La voie EO a un amplificateur vidéo :

Gain 1300 à 1 kHz			
pôles		zéros	
fréq.	Q	fréq.	Q
29×10^3		92×10^3	
70×10^6	2	DC	
7.5×10^6			
50			

Une absence de coefficient de qualité signifie un pôle simple.

Suspension de cavité de filtrage de mode

Le contrôle de la suspension du miroir de fond de la cavité de filtrage de mode, à l'aide de sa masse de référence, a les caractéristiques suivantes :

0.182 m/N en continu			
1.70×10^{-4} N/V contrôle de suspension			
1.97×10^{12} Hz/m conversion longueur fréquence			
pôles		zéros	
fréquence	Q	fréquence	Q
0.676	140		
1.274	500	1.265	500
2.13	200	1.77	200

8.3.3 Filtres correcteurs

Étage de pré-stabilisation

développée par ARTEMIS appelée RAMPEAUTO effectue la correction analogique. Sa fonction de transfert est la suivante :

Retard 95 ns			
Gain 1.5 à 1 MHz			
pôles		zéros	
fréquence	Q	fréquence	Q
Voie commune			
DC	1	33000	1.1
DC	1	30500	
15×10^6		9750	
12×10^6			
Voie piezo			
80000		1500	
233		1500	
Voie E.O.			
450		DC	
100×10^6			

Une absence de coefficient de qualité signifie un pôle simple. Le retard est du à la longueur de câbles qui amène le signal d'erreur ; il est estimé par ajustement de la fonction de transfert en boucle ouverte mesurée.

Deuxième étage de stabilisation de fréquence

Une électronique analogique appelée "rack SSFS" réalise le filtre de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence. Sa fonction de transfert est

Retard 480 ns			
Gain 30 à 100 kHz			
pôles		zéros	
fréquence	Q	fréquence	Q
2900	0.7	8000	2.2
16000	3	17000	5
23500	26	23400	1
35200	2.9	32000	8
34900	3	43000	8
DC		1250	

Les paires pôle/zéro compensent la réponse de l'interféromètre. Un ajustement de la courbe mesuré mesure le retard de l'électronique. Le signal de sortie a une excursion forte (plusieurs volts) ; il est ainsi moins sensible aux bruits parasites pendant son transport sur 30 mètres jusqu'à l'électronique de l'étage de pré-stabilisation. Le potentiomètre d'ajustement est placé nominalement à 3.5. Pour la modélisation de la boucle

fermée, il faut multiplier $1/F_{MC}$ par 8.8×10^{-4}, gain relatif au signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode au point d'addition du signal d'erreur dans l'électronique de pré-stabilisation.

Verrouillage de la cavité de filtrage de mode

Le gain de correction est réparti pour que les signaux électriques aient des excursions correctes : 5×10^{-5} gain numérique dans le DSP-IB ; 1.14×10^{3} gain analogique du au poids relatif des signaux lors de l'addition électronique des premier et deuxième étages. Un ajustement de la fonction de transfert en boucle ouverte évalue les retards numériques à 820 μs.

Le filtre numérique dans le DSP-MC est :

Gain 20 à 100 Hz			
pôles		zéros	
fréquence	Q	fréquence	Q
2	5	10	2
5	5	12	2
16	8	17	3
18	3	21	2
24.7	30	25	10
350	30	350	1000
2000	0.8	5	

Les retards numériques limitent la fréquence de gain unité de cette boucle. Le développement de nouvelles électroniques numériques, plus rapides, augmentera le gain de boucle et l'écart de verrouillage sera donc plus petit.

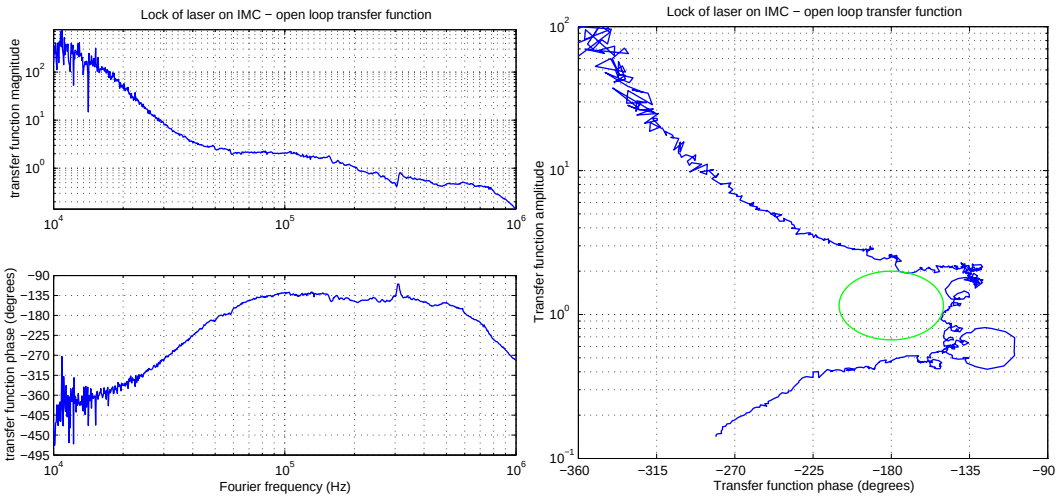
8.4 Mesure des Fonctions de transfert en boucle ouverte

Je discute ici des mesures des fonctions de transfert en boucle ouverte. Elles permettent à la fois de vérifier la stabilité et de calibrer les signaux comme nous le verrons dans la suite.

La mesure d'une fonction de transfert en boucle ouverte à la fréquence f est usuellement faite par injection d'une perturbation sinusoïdale à la fréquence f dans le signal d'erreur, lorsque la boucle est fermée. Il est aisé de démontrer que le rapport du signal d'erreur avant perturbation par le signal d'erreur après perturbation donne $-G_{BO}(f)$, où $G_{BO}(f)$ est la valeur complexe de la fonction de transfert en boucle ouverte à la fréquence f. La mesure est répétée pour différentes fréquences.

8.4.1 Pré-stabilisation

La fonction de transfert G_{las1} se mesure en n'ayant que le laser verrouillé sur la cavité de filtrage de mode, toutes les autres boucles n'étant pas en fonctionnement. Une perturbation est ajoutée au signal d'erreur. Je mesure ensuite le rapport des signaux avant et après la perturbation. Une telle mesure donne la figure 8.5. Pour une fréquence de gain unité à 200 kHz, la surtension en boucle fermée est 2, la marge est donc confortable. La fréquence de gain unité est limitée par la forme de la fonction de transfert à l'intervalle spectral libre.



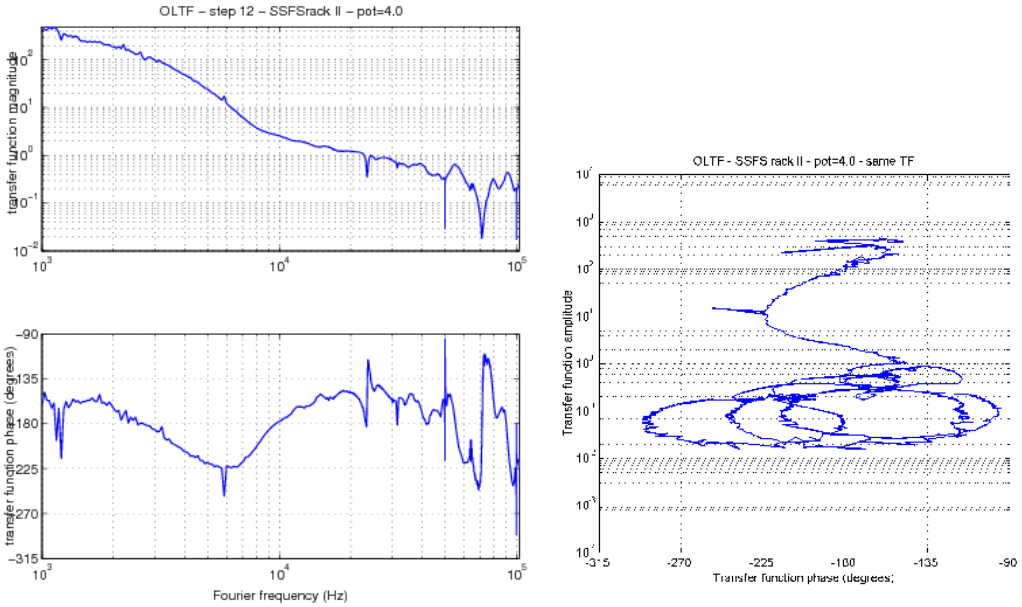
(a) diagramme de Bode (b) diagramme de Nichols

FIG. 8.5 – Fonction de transfert en boucle ouverte du premier étage de stabilisation de fréquence.

8.4.2 Deuxième étage de stabilisation en fréquence

Avec le schéma 8.2, il est aisé de montrer qu'une mesure de fonction de transfert en boucle ouverte appliquée au signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence mesure $-G_{las2}(1+G_{MC})(1+G_{L+})$, donc G_{las2} pour les fréquences supérieures au gain unité du verrouillage de la cavité de filtrage de mode (100 Hz). La figure 8.6 reporte la mesure. Le diagramme de Nichols est indispensable pour se convaincre de la stabilité de la boucle. Avec une fréquence de gain unité de 23 kHz, la marge de gain est 50 %, la marge de phase 20°, la surtension de résonance en boucle fermée est un facteur 8 ; j'ai vérifié que cela ne sature pas les électroniques. La surtension de 8 est un compromis qui déploie le maximum de gain de boucle (500) à la fréquence de 1 kHz, là où les bruits à corriger sont assez forts. Malgré la marge réduite, la fonction a montré

une grande robustesse pendant plusieurs mois de fonctionnement continu.

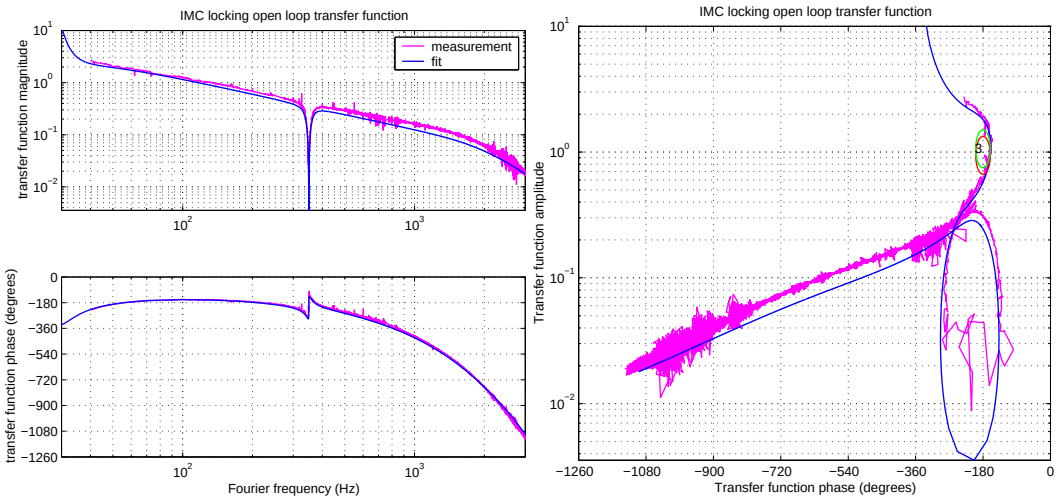


(a) diagramme de Bode (b) diagramme de Nichols

FIG. 8.6 – Fonction de transfert en boucle ouverte du deuxième étage de stabilisation de fréquence. La paire pôle-zéro à l'intervalle spectral libre est le principal obstacle à l'accroissement de la fréquence de gain unité.

8.4.3 Verrouillage de la cavité de filtrage de mode

Dans l'approximation $G_{\text{las1}} \gg 1$, une mesure de fonction de transfert en boucle ouverte avec application d'une perturbation sur le signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode donne $G_{\text{las2}}(1 + G_{\text{L+}})G_{\text{MC}}/(1 + G_{\text{las2}}(1 + G_{\text{L+}}))$, donc G_{MC} pour toutes les fréquences plus petites que la fréquence de gain unité de G_{las2} qui vaut 23 kHz. L'ajustement de la mesure fait bien apparaître que les pôles de F_{MC} et T_{MC} se compensent, mettant en évidence l'effet du bruit de fréquence Doppler dans cette mesure ; cela gagne de la marge de phase sur cette boucle.



(a) diagramme de Bode (b) diagramme de Nichols

FIG. 8.7 – Fonction de transfert en boucle ouverte du verrouillage de la cavité de filtrage de mode. La mesure est effectuée par injection d'un bruit blanc, ce qui produit des points aberrants, en particulier sur les harmoniques du 50 Hz. Les cercles de surtension, dans le diagramme de Nichols, correspondent à une surtension d'un facteur 3.

8.5 Étalonnage des signaux

Je décris ici comment j'étalonne la réponse continue des éléments des boucles, signaux d'erreur et signaux de correction, indépendamment de la réponse de la suspension des miroirs des grands bras ; je mesure également les pôles simples lorsqu'ils sont présents. La mesure des fonctions de transfert en boucle ouverte permet des redondances dans les mesures. J'expose la plupart des résultats reportés ci-dessous dans l'entrée 14397 du cahier électronique de manipulations de Virgo [132].

8.5.1 Correction de la fréquence du laser

Je mesure d'abord la réponse ν_{corr} du cristal piezo-électrique qui change la longueur de la cavité laser lorsque toutes les boucles sont ouvertes. J'applique une tension en dents de scie sur le piezo ; je mesure la différence de tension nécessaire pour un nombre entier d'intervalles spectraux libres sur la cavité de filtrage de mode. La valeur de l'intervalle spectral libre $c/(2L)$ est connue (publication exposée dans chapitre 5). la réponse du piezo, au niveau de la lecture de la voie "PZT/20" de l'électronique de RAMPEAUTO, est 35 MHz/V ; l'erreur de répétabilité est de l'ordre de 20%, sans doute due à la difficulté d'avoir un balayage linéaire.

J'ai mesuré cette même réponse sur la cavité de référence avec la fréquence du laser verrouillée sur la cavité de filtrage de mode. Un signal en dents de scie est appliqué à la suspension du miroir courbe en fond de cavité ; la réponse n'est pas très linéaire, mais je corrige ce défaut en observant le signal d'erreur de la cavité rigide ϵ_{RFC} en fonction de la tension de correction sur le piezo du laser. Les bandes latérales à 6 MHz sont reconnues, ce qui étalonne la voie piezo. La réponse de la voie "PZT/20" de l'électronique de RAMPEAUTO, est 47 MHz/V, avec une erreur de 5%. Cette mesure s'effectue dans de meilleures conditions de linéarité que la précédente, le premier étage de stabilisation étant verrouillé ; cette mesure est plus fiable.

8.5.2 Signal d'erreur de la cavité de référence

La mesure décrite ci-dessus calibre le signal d'erreur ϵ_{RFC}. La pente autour de l'origine donne la réponse continue, qui vaut donc 45.2 μV/Hz. L'ajustement de la partie centrale de la courbe PDH avec une forme $(f/f_P)/(1+(f/f_P)^2)$ permet de reconnaître le pôle ; il est ajusté à 250 kHz, avec une erreur de 4%.

8.5.3 Signal de correction du verrouillage de la cavité de filtrage de mode

Lorsque le deuxième étage de stabilisation de fréquence n'est pas engagé, le verrouillage de la longueur de la cavité de filtrage de mode sur la cavité de référence rigide en amortit les fluctuations. La mesure de la fonction de transfert en boucle ouverte G_{MC} permet d'estimer la sensibilité du signal de correction, tous les autres éléments de la boucle étant connus par ailleurs. Je trouve une sensibilité de la réponse de la suspension de 30.1 μm/V, valeur parfaitement compatible avec la réponse connue du pilote de courant des bobines, de la réponse des bobines, de la valeur des aimants collés sur la miroir courbe de la cavité de filtrage de mode.

8.5.4 Signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode en entrée

Il n'est pas possible de mesurer précisément la réponse du signal d'erreur de la cavité de filtrage de mode sans fermer de boucle : si le balayage est rapide, les déformations transitoires, décrites dans le chapitre 3.5.4, sont importantes ; si le balayage est lent, le bruit propre de fréquence du laser déforme la réponse.

La réponse F_{MC} est donc estimée à partir de la formule 3.42. Le pôle de la cavité de la cavité de filtrage de mode est estimé à 485 ± 3 Hz, par mesure de temps de décroissance et par ajustement de la fonction de transfert à l'intervalle spectral libre. En faisant l'hypothèse que les mesures de transmittance des miroirs effectuées par le LMA à Lyon

sont exactes, les pertes sur un aller-retour du faisceau dans la cavité de filtrage de mode sont de 954 ppm. Le rapport des puissances réfléchies en résonance par rapport à hors résonance devrait valoir 2.5% ; je le mesure à 10.5%, il y a donc 8% de lumière qui n'est pas adaptée au mode résonnant. Je corrige en conséquence l'étalonnage du signal d'erreur, pour trouver une sensibilité de 216 μV/Hz, pour le signal situé aussitôt après le mélangeur dans le tiroir électronique RAMPEAUTO.

Cette valeur de F_{MC} est parfaitement compatible avec la mesure de fonction de transfert en boucle ouverte du premier étage de stabilisation de fréquence, où l'on connaît par ailleurs l'étalonnage du signal de correction et la fonction de transfert de l'électronique.

8.5.5 Signal de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence

L'équation 8.2 montre que l'actionneur effectif du deuxième étage de stabilisation de fréquence s'écrit $T_{\mathrm{MC}}/F_{\mathrm{MC}}$. Si l'on tient compte des gains relatifs des deux voies où s'additionnent les signaux d'erreur dans le tiroir RAMPEAUTO, le signal s_{las2} de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence, tel que enregistré numériquement, a une sensibilité de 4 Hz/V.

Le signal de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence sert de signal d'erreur pour le verrouillage de la cavité de filtrage de mode ; la sensibilité du signal de correction est parfaitement compatible avec la mesure de la fonction de transfert en boucle ouverte G_{MC}.

Le verrouillage de la cavité de filtrage de mode utilise le même filtre numérique lorsque le second étage de stabilisation de fréquence est engagé, avec le signal s_{las2}, ou lorsqu'il ne l'est pas, avec le signal ϵ_{RFC}, avec un facteur numérique différent. Le rapport des deux facteurs numériques vérifie donc la mesure de sensibilité de s_{las2} par rapport à celle de ϵ_{RFC}.

8.5.6 Signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation

L'ajustement de $F_{\mathrm{L}+}$ dans la mesure de la fonction de transfert en boucle ouverte G_{las2} permet d'évaluer la sensibilité de $\epsilon_{\mathrm{L}+}$. D'après l'équation 8.2, la fonction de transfert en boucle ouvert, défalquée de celle de l'électronique de verrouillage, devrait être un filtre passe-bas, avec le pôle de la double cavité : cavité de recyclage et cavité moyenne des grands bras. Dans la pratique, la forme est nettement plus complexe pour les fréquences supérieures à 4 kHz, comme le montre la figure 8.4. L'injection d'une raie dans le signal d'erreur à 1111 Hz évalue la réponse de la boucle pour cette fréquence particulière. En estimant la réponse par un pôle simple, la sensibilité du signal d'erreur vaut 9.8×10^{-2} (1 kHz/f) V/Hz pour toutes les fréquences au-dessus du pôle. L'ajustement de la

réponse autour de l'intervalle spectral libre permet d'évaluer le pôle de la double cavité à 8 Hz, ce qui donc donne une sensibilité continue (fréquences plus petites que le pôle) estimée à 12.3 V/Hz.

8.5.7 Signal de correction du mouvement des miroirs des grandes cavités

Pour une fréquence petite devant l'intervalle spectral libre, un déplacement relatif des miroirs des grandes cavités en mode commun produit un signal identique à un bruit relatif de fréquence devant l'interféromètre. Un étalonnage de la réponse de la suspension du miroir d'extrémité du bras nord a consisté à introduire une perturbation sinusoïdale à 379 Hz, sur la masse de référence derrière le miroir. Le mouvement d'un seul miroir excite en partie le mode différentiel des grands bras et est donc vu comme un bruit de fréquence. La raie est présente sur le signal de correction s_{las2}. Il est facile d'établir que la dépendance entre le signal s_{las2} et le signal de correction appliqué à la suspension $s_{\mathrm{NE,corr}}$:

$$s_{\mathrm{las2}} \frac{T_{\mathrm{MC}}}{F_{\mathrm{MC}}} = \frac{G_{\mathrm{las2}}}{1+G_T} \frac{F_{\mathrm{L}+,l}}{F_{\mathrm{L}+}} \frac{1}{2} C_{\mathrm{susp,NE}}\, s_{\mathrm{NE,corr}} \tag{8.17}$$

où $s_{\mathrm{las2}} \frac{T_{\mathrm{MC}}}{F_{\mathrm{MC}}}$ est le signal de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence, étalonné en Hz ; $F_{\mathrm{L}+,l}$ est la réponse de $\epsilon_{\mathrm{L}+}$ à un mouvement différentiel des deux bras ; le facteur 1/2 est du à ce qu'un seul des deux miroirs est excité ; $C_{\mathrm{susp,NE}}$ est la réponse en déplacement de la suspension pour une tension de correction donnée. Pour les fréquences petites devant la fréquence de gain unité du deuxième étage, $\frac{G_{\mathrm{las2}}}{1+G_T}$ est bien sûr approximé à 1. La fraction $\frac{F_{\mathrm{L}+}}{F_{\mathrm{L}+,l}}$ vaut ν_0/L, où L est la longueur d'un grand bras. Avec la mesure reportée dans l'entrée 14206 du cahier électronique d de manipulations [132], j'établis donc que la réponse de la suspension est de 7.7×10^{-11} m/V à 379 Hz, en mode de contrôle bas bruit, donc par extrapolation 30 μm/V en continu.

Cette valeur diffère d'un facteur 3 de la valeur couramment utilisée pour l'étalonnage des signaux de la frange noire. La sensibilité de la suspension du bras nord, utilisée pour étalonner la réponse de l'interféromètre à une onde gravitationnelle, est plutôt estimée à 12 μm/V [133]. La raison de cet écart, à ce stade, n'est pas éclaircie.

8.6 Asymétrie

Un bruit de fréquence pourrait apparaître dans la frange noire en raison des asymétries entre les deux bras : asymétrie de longueur, de finesse, de réflectivité. Le bruit de fréquence relatif à l'entrée de l'interféromètre est reproduit sur la frange noire, calibrée en h, l'onde gravitationnelle, par un facteur F_{asym}. La frange noire n'est ainsi pas seulement

sensible à une onde gravitationnelle, mais aussi à un déplacement résiduel différentiel de la longueur des bras, ainsi qu'à un bruit de fréquence.

Les premières notes sur la stabilisation de fréquence ne considèrent que l'asymétrie de finesse [110, 111], de même que les spécifications que j'ai établies [115] ; dans ce modèle, F_{asym} est une simple filtre passe-bas, avec un pôle aux environs de 10 Hz. Les documents [113, 124, 125] démontrent le rôle de l'asymétrie de réflectivité, due par exemple à des pertes non équilibrées dans les bras. J'étudie ici comment le bruit de fréquence se couple sur la frange noire, par un modèle et par des mesures. J'expose aussi la méthode de compensation par anticipation qui soustrairait le bruit de fréquence résiduel, offrant ainsi un facteur d'isolation supplémentaire.

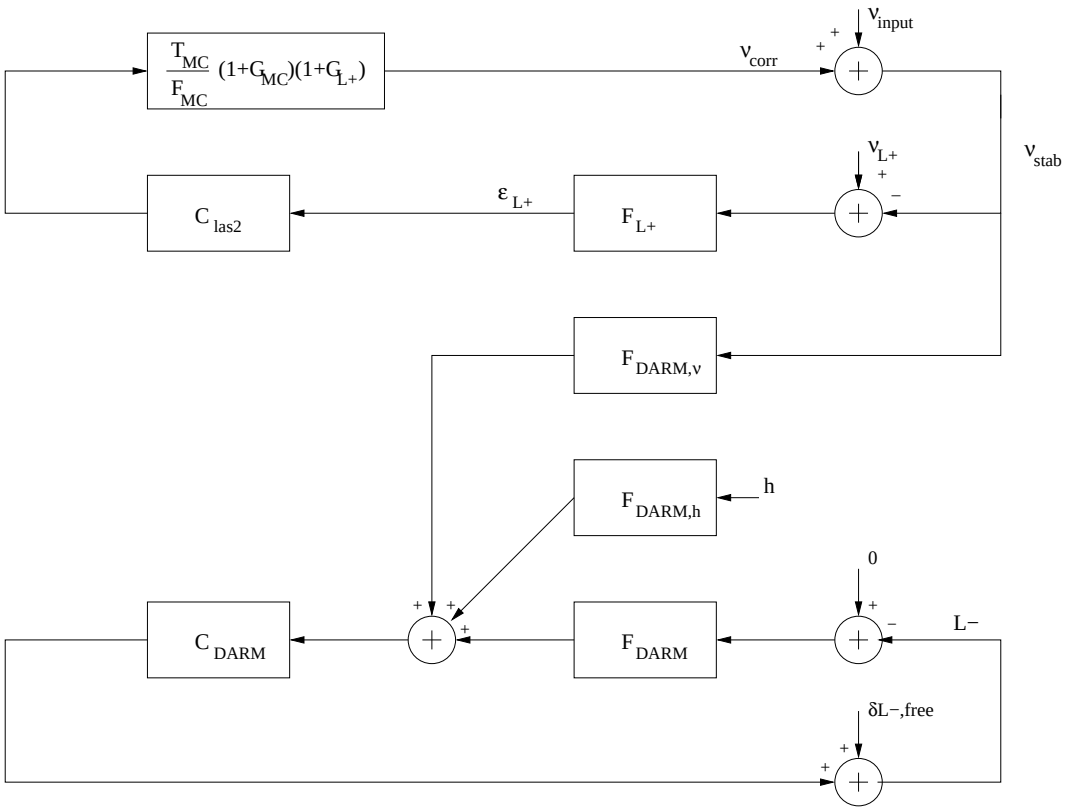


FIG. 8.8 – Report du bruit de fréquence dans la frange noire.

Le couplage du bruit de fréquence est modélisé dans la figure 8.8. Toutes les sources de bruits de fréquence sont ramenées à un bruit équivalent à l'entrée de l'interféromètre ν_{input}. $F_{\text{darm},\nu}$ est la fonction de transfert qui couple le bruit de fréquence résiduel devant l'interféromètre dans le signal d'erreur de la frange noire ϵ_{darm}. F_{darm} est la fonction de transfert entre un déplacement différentiel des miroirs $L-$ et la frange noire. C_{darm} est le produit du filtre correcteur qui maintient la sortie de l'interféromètre sur la frange

noire par la fonction de transfert de réponse des suspensions, de sorte que la fonction de transfert en boucle fermée est $G_{\mathrm{darm}} = F_{\mathrm{darm}} C_{\mathrm{darm}}$. $F_{\mathrm{darm,h}}$ est la fonction de transfert entre une onde gravitationnelle et le signal d'erreur de la frange noire. La fonction d'étalonnage du signal d'erreur de la frange noire est

$$F_{\mathrm{h}} = \frac{F_{\mathrm{darm,h}}}{1 + G_{\mathrm{darm}}} \,. \tag{8.18}$$

Le facteur F_{asym} est donné par la relation

$$F_{\mathrm{asym}} = \nu_0 \frac{F_{\mathrm{darm},\nu}}{F_{\mathrm{darm,h}}} \,. \tag{8.19}$$

Si la perturbation p domine, la fonction F_{asym} se mesure par la fonction de transfert entre $\epsilon_{\mathrm{L}+}$ et ϵ_{darm} :

$$F_{\mathrm{asym}} = -\frac{\epsilon_{\mathrm{darm}}}{\epsilon_{\mathrm{L}+}}\bigg|_p \nu_0 \frac{F_{\mathrm{L}+}}{F_{\mathrm{h}}} \,. \tag{8.20}$$

8.6.1 Modélisation

L'asymétrie s'écrit [125]

$$F_{\mathrm{asym}} = \frac{\Delta\mathscr{F}}{\mathscr{F}} \frac{1}{1 + if/f_{\mathrm{rec}}} + \frac{\Delta\zeta}{2} \frac{f_P}{f_{\mathrm{rec}}} \frac{1 + if/f_P}{1 + if/f_{\mathrm{rec}}} \tag{8.21}$$

où f_P est le pôle à 500 Hz d'une grande cavité de 3 km, f_{rec} est le pôle de la cavité de recyclage estimé à 8 Hz, $\frac{\Delta\mathscr{F}}{\mathscr{F}}$ est l'asymétrie relative de finesse des deux grandes cavités et $\Delta\zeta$ leur asymétrie de réflectivité en amplitude. J'ai simulé F_{asym} avec le modèle JAJY (chap. 3.5.2) où le bruit est un bruit de fréquence du laser. J'ai ensuite utilisé un modèle STF, plus maniable, en Matlab, qui étudie toutes les fonctions de transfert dans l'interféromètre qui font intervenir le bruit de fréquence. Les deux modèles produisent bien sûr des résultats identiques dans des conditions identiques.

Le modèle numérique consiste à utiliser un modèle de l'interféromètre similaire à l'existant. Les miroirs ont des réflectivités identiques à celles mesurées à Lyon, et des pertes arbitraires, de 50 ppm ou 150 ppm, ont été ajoutées aux miroirs d'extrémité. La courbe 8.9 reproduit le résultat. Une asymétrie de finesse produit un pôle à environ 10 Hz, avec une amplitude en basse fréquence égale à l'asymétrie de finesse. Une asymétrie de pertes produit une fonction composée d'un pôle et d'un zéro ; l'amplitude basse fréquence de la fonction de transfert est proportionnelle à l'asymétrie de réflectivité d'amplitude, donc à la racine carrée du défaut de contraste. Lorsque les deux effets sont présents, ils s'additionnent en basse fréquence ; si les signes sont corrects, ils peuvent même se compenser. La jonction entre la partie asymétrie de finesse / asymétrie de réflectivité

se fait par un zéro dont la fréquence dépend des valeurs relatives de l'asymétrie de finesse et de l'asymétrie de réflectivité.

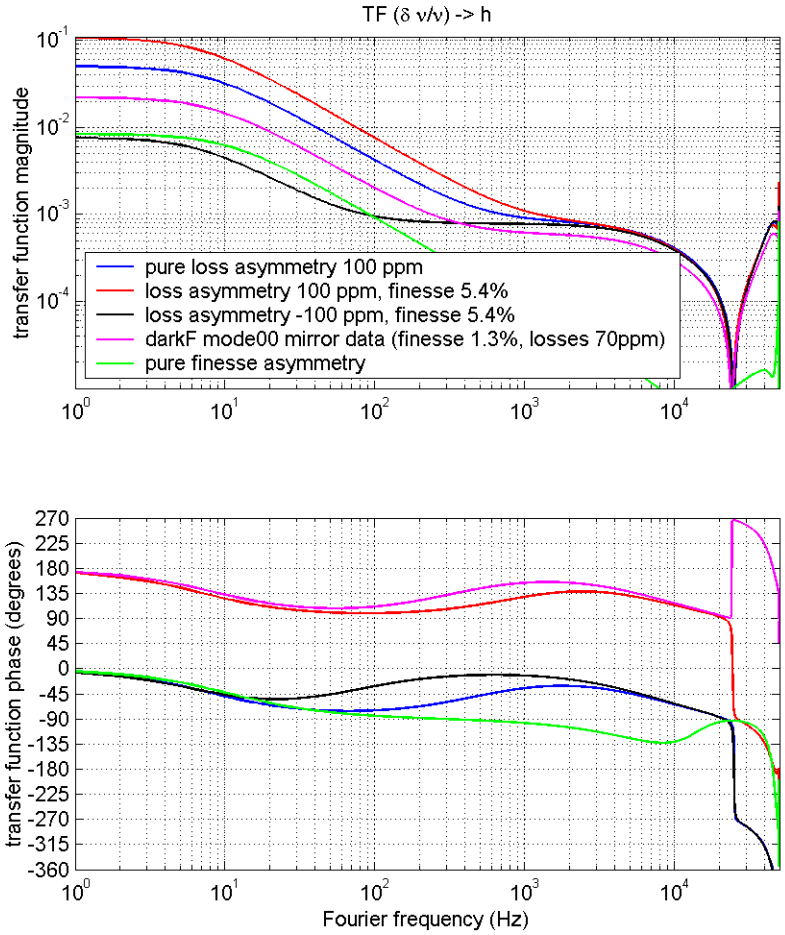


FIG. 8.9 – Report du bruit relatif de fréquence, devant l'interféromètre, sur la frange noire, étalonnée en *h*. Les courbes mesurent une asymétrie de finesse de 5.4% et/ou une asymétrie de pertes de 100 ppm. La courbe verte montre une asymétrie de finesse de 0.9%.

8.6.2 Mesure

La mesure de l'asymétrie s'effectue par injection d'une perturbation dans le signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence. G. Vajente, à Virgo, a mesuré la fonction de transfert entre le signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence, avant perturbation, et la frange noire. La figure 8.10, extrait 17286 du cahier électronique de manipulations [132], représente la fonction de transfert, en V/V, avant

et après correction par $(1 + G_{\mathrm{darm}})$, mais sans correction par les fonction $F_{\mathrm{L}+}$ et $F_{\mathrm{darm,h}}$. Après correction, il reste un artefact qui est peut-être du à d'autres boucles d'asservissements couplées à la boucle du mode différentiel.

Si l'on rétablit les facteurs $F_{\mathrm{L}+}$ et $F_{\mathrm{darm,h}}$, alors on obtiendra une courbe avec un pôle aux alentours de 10 Hz et un zéro à 500 Hz, courbe très similaire à celles de la figure 8.9. Avec les mesures reportées dans l'entrée 14206 du cahier électronique de manipulations [132], j'établis que $F_{\mathrm{darm,h}} = 8.4 \times 10^{11}$ W/h et donc que au moment de la mesure l'asymétrie en basse fréquence est de 4.1 %. L'asymétrie en haute fréquence est de 6.6×10^{-4}, soit un défaut de contraste, avec la formule 6.10, de 8.7×10^{-7}.

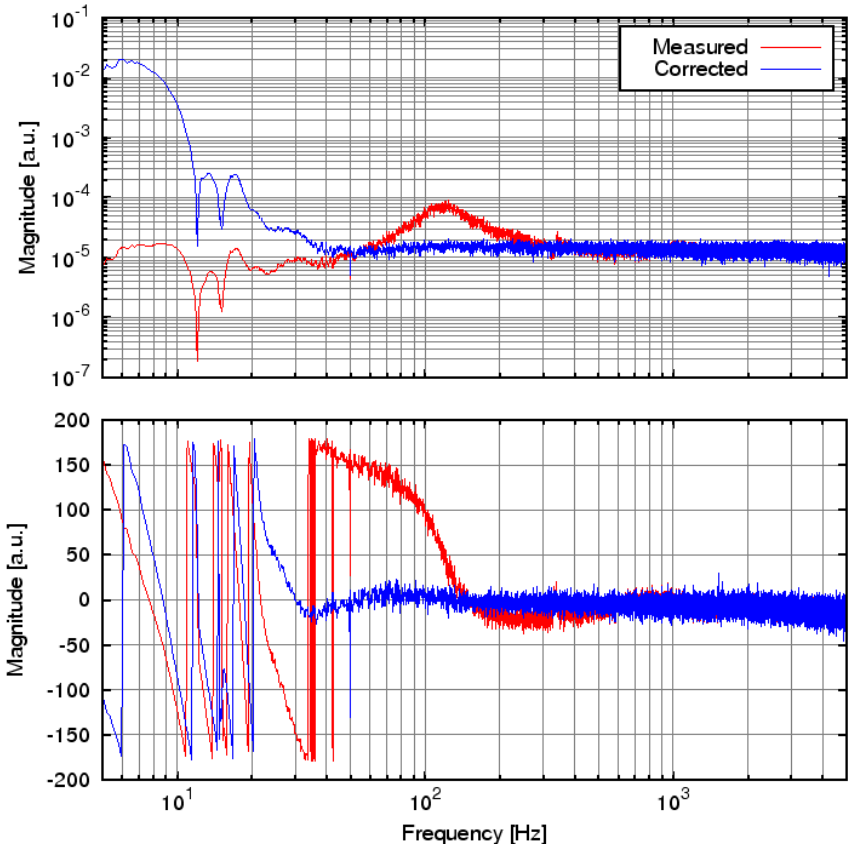


FIG. 8.10 – Mesure de la fonction de transfert entre $\epsilon_{\mathrm{L}+}$ et ϵ_{darm}, sans et avec correction de $(1 + G_{\mathrm{darm}})$.

8.6.3 Contrôle de l'asymétrie à basse fréquence

Le contrôle de l'effet étalon entre la face anti-reflet et la face réfléchissante dans les miroirs d'entrée des grands bras permet d'ajuster l'asymétrie de finesse. Il est donc pos-

sible de la régler pour qu'elle compense exactement l'asymétrie de pertes, avec un signe opposé.

Le signal d'erreur est facile à créer. Une perturbation sinusoïdale à quelques dizaines de Hz serait ajoutée au signal d'erreur du deuxième étage de stabilisation de fréquence. Cette même perturbation démodulerait le signal de la frange noire. Après filtrage par un filtre passe-bas, le signal obtenu mesurerait l'asymétrie résiduelle. Le contrôle de la température de l'enceinte qui contient le miroir réaliserait la correction.

8.6.4 Verrouillage de la cavité rigide et commande par anticipation

Lorsqu'on verrouille le mode commun de l'interféromètre sur la cavité rigide, il y a risque de ramener le bruit de longueur de la cavité de référence, par le facteur d'asymétrie $F_{\mathrm{darm},\nu}$ ou par une asymétrie de gain des corrections supposées identiques effectuées sur le bras nord et sur le bras ouest. J'ai exposé comment les filtres de Coulon peuvent résoudre le problème, à condition que le mouvement des suspensions ne soient pas trop important (chap. 6.4.4). Une technique additionnelle consiste à utiliser une technique de commande par anticipation ("feed-forward").

Il est possible de soustraire un bruit, de nature classique, qui perturbe une boucle, si il est mesurable et si sa fonction de transfert vers le signal d'erreur de la boucle est mesurable. Il s'agit de construire un filtre identique à la fonction mesurée, mais de signe opposé.

D'après l'équation 8.11, pour les fréquences petites devant la fréquence de gain unité du deuxième étage de stabilisation de fréquence ($G_{\mathrm{las2}} \gg 1$), le bruit de la cavité rigide est recopié sur la frange noire avec la fonction de transfert donnée par :

$$\epsilon_{\mathrm{darm}} = F_{\mathrm{darm},\nu} \frac{G_{\mathrm{L}+}}{1+G_{\mathrm{L}+}} \nu_{\mathrm{RFC}} \,. \tag{8.22}$$

Si je décompose la fonction de correction $C_{\mathrm{L}+}$ par le filtre numérique de correction $C_{\mathrm{dsp,L}+}$ et la réponse de la suspension $\frac{\nu_0}{L} C_{\mathrm{susp,L}+}$, où L est la longueur d'un grand bras, alors le signal de correction $s_{\mathrm{corr,L}+}$ de la boucle de verrouillage du mode commun des grands bras sur la cavité rigide voit le bruit de la cavité de référence :

$$s_{\mathrm{corr,L}+} = \frac{L}{\nu_0} \frac{1}{C_{\mathrm{susp,L}+}} \frac{G_{\mathrm{L}+}}{1+G_{\mathrm{L}+}} \nu_{\mathrm{RFC}} \,; \tag{8.23}$$

donc un filtre numérique F_γ

$$F_\gamma = -\frac{1}{F_{\mathrm{darm},\nu} C_{\mathrm{susp,L}+}} \frac{L}{\nu_0} \tag{8.24}$$

annule le signal parasite du bruit de la cavité de référence dans la frange noire.

G. Vajente, B. Swinkels et E. Campagna ont implémenté cette technique pour isoler les degrés de liberté de la partie centrale de l'interféromètre dans la frange noire, avec jusqu'à un facteur 1000 d'atténuation ; ils ont récemment implémenté le filtre F_γ, ce qui rend complètement négligeable le bruit ν_{RFC} dans la frange noire [129, 134].

Cette technique pourrait également être implémentée pour corriger des raies éventuelles de s_{las2} qui apparaîtraient dans le signal d'erreur, par un filtre F_δ.

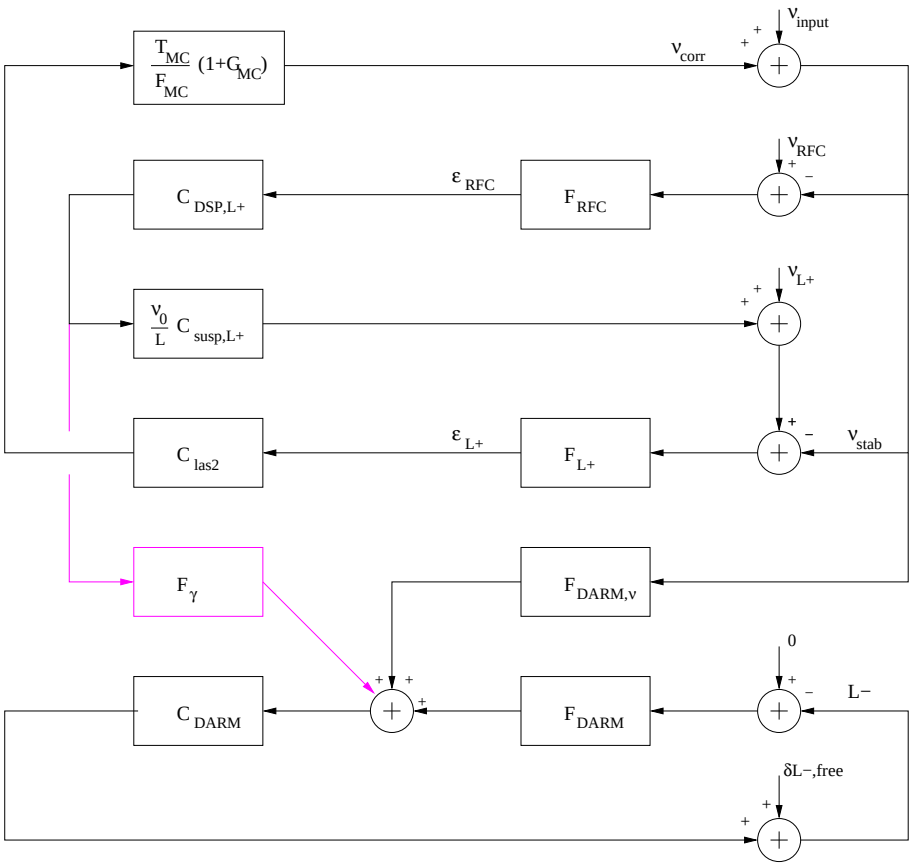


FIG. 8.11 – Soustraction du bruit ramené de la cavité rigide par une technique de commande par anticipation.

8.7 Spécification

La spécification sur la limite supérieure de la densité spectrale de bruit de fréquence stabilisé ν_{spec} devant l'interféromètre est

$$\nu_{\mathrm{spec}} = \tilde{h}_{\mathrm{virgo}} \frac{\nu_0}{F_{\mathrm{asym}}} F_{\mathrm{f.f.isolation}} F_{\mathrm{asym,corr}} \tag{8.25}$$

où $\tilde{h}_{\text{virgo}}$ est la spécification sur la densité spectrale de la résolution de l'interféromètre (rapport bruit sur signal = 1) [106] ; $F_{\text{f.f.isolation}}$ l'atténuation supplémentaire qui serait apporté par une technique de commande par anticipation, où le bruit considéré serait le bruit mesuré par la boucle de correction du deuxième étage de stabilisation de fréquence ; $F_{\text{asym,corr}}$ l'atténuation supplémentaire apportée par un contrôle d'asymétrie (chap. 8.6.3).

Si l'on ne considère pas d'isolation par technique de commande par anticipation, pas de contrôle de l'asymétrie, pas de marge de sécurité, un facteur d'asymétrie de 5% en basse fréquence, avec un pôle à 8 Hz et un zéro à 500 Hz, la figure 8.12 décrit alors la spécification.

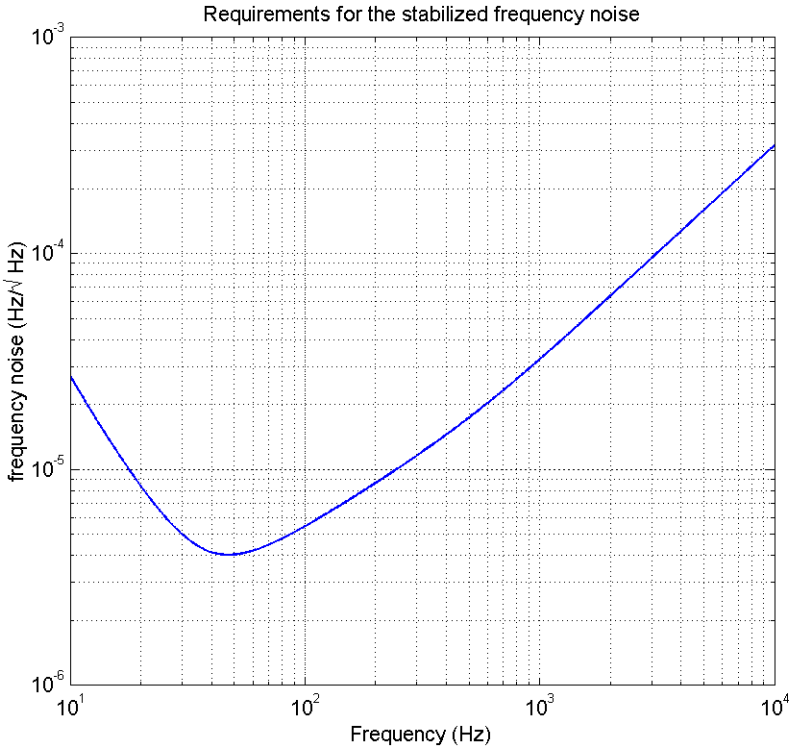


FIG. 8.12 – Spécifications sur le bruit de fréquence stabilisé ramené à l'interféromètre. Il n'est pas tenu compte ni d'un facteur de sécurité, ni d'un contrôle de l'asymétrie, ni d'une soustraction à posteriori par commande par anticipation.

Chapitre 9

Notes techniques sur la stabilisation de fréquence

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Transfer functions for the double-path frequency stabilization.

Jean-Pierre Coulon

VIRGO ILGA

VIR-MEM-OCA-4100-127
Issue: 2
Date : 17-10-2000

VIRGO * A joint CNRS-INFN Project
Project Office: Traversa H di Via Macerata, I-56021 S. Stefano a Macerata (Pisa)
Secretariat: Telephone (39) 050 752 511 * FAX (39) 050 752 550 * e-mail W3@virgo.infn.it

1 Introduction

The frequency stabilization will involve two paths: one will add up to the error signal of the prestabilization, the other will act on the mirrors trough coils. As explained in [1], there are tough requirements on the ratios of the modules of the gains of both channels close to the crossover frequency. For this reason I have investigated transfer functions that meet these criteria.

I assume some bright automatician has designed a overall open-loop transfer function which meets the stability and noise reduction requirements. The problem I have studied was to choose two functions $G_l(s)$ and $G_h(s)$ so that $G_l(s) + G_h(s) = 1$; $|\frac{G_l(s)}{G_h(s)}| \leq 10^{-2}$ at frequencies above 10 Hz, and $|\frac{G_h(s)}{G_l(s)}| \leq 10^{-2}$ at frequencies below 1Hz.

2 Polynom separation method

In the subsequent text s will denote the Laplace variable reduced to the crossover frequency, i.e. 3.16Hz. As explained in [1], Diego Pasuello suggested these functions: $D(s) = (1+s)^8$ is the denominator common to both transfer functions. The numerator of $G_l(s)$ is obtained by selecting terms of the orders 0 to 4 in $D(s)$, and that of $G_h(s)$ is obtained with terms of higher orders, so that $G_l(s) + G_h(s) = 1$ exactly. Their modules are plotted on Fig. 1:

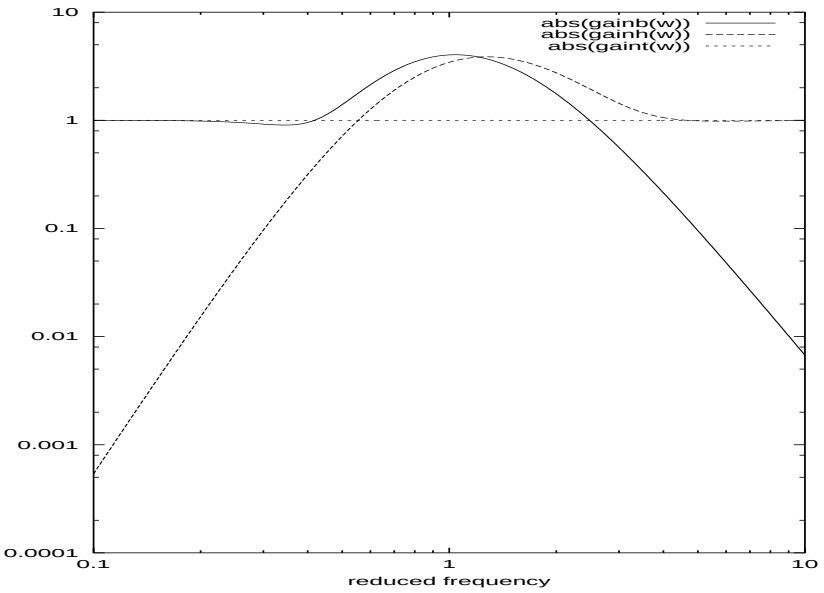


Figure 1: Module responses

3 Accurate separation method

The previous method does not meet the rejection criterium of 10^{-2}. I am not aware of any mathematical tool that yields transfer functions that meet our criteria, in a way similar to Chebishev and elliptic functions. Therefore I have written a Fortran program to find the most efficient function by trial and error.

I chose a Butterworth denominator instead of $D(s) = (1+s)^8$. Some basics on Butterworth functions can be found in [2]. I am not claiming these denominators are optimal, but they bring less phase shift and less attenuation than other denominators in the pass-band of the filters. The program looks for some way to split the denominator coefficients. Let the denominator be $1+b_1s+b_2s^2+...+b_7s^7+s^8$. The numerator of the lowpass function is $1+\alpha s+\beta s^2+...+(b_6-\beta)s^6+(b_7-\alpha)s^7$. The numerator of the highpass function is $(b_1-\alpha)s+(b_2-\beta)s^2+...+\beta s^6+\alpha s^7+s^8$. For an even order denominator, the $s^{n/2}$ term is of course $b_{n/2}/2$

The program then sweeps $\alpha, \beta...$ by steps over a given range, and keeps track of the set of coefficients that gives the best ratio above $3.16 f_0$.

Thus it is found that the function:

$$B_l(s) = \frac{1 + 5.04s + 12.15s^2 + 18.9s^s + 12.844s^4 + 2.946s^5 + .988s^6 + .0858s^7}{1 + 5.1258s + 13.1371s^2 + 21.846s^3 + 25.688s^4 + 21.846s^5 + 13.1371s^6 + 5.1258s^7 + 1} \quad (1)$$

and its complement to 1 give ratios of slightly more than 50 (34dB) in the required frequency domains. The s term of the numerator can be kept equal to that of the denominator without a great penalty, thus cancelling the s^7 term. This would guarantee the ratio to be in s^2 instead of s far from the crossover frequency. Fig. 2 shows a typical response.

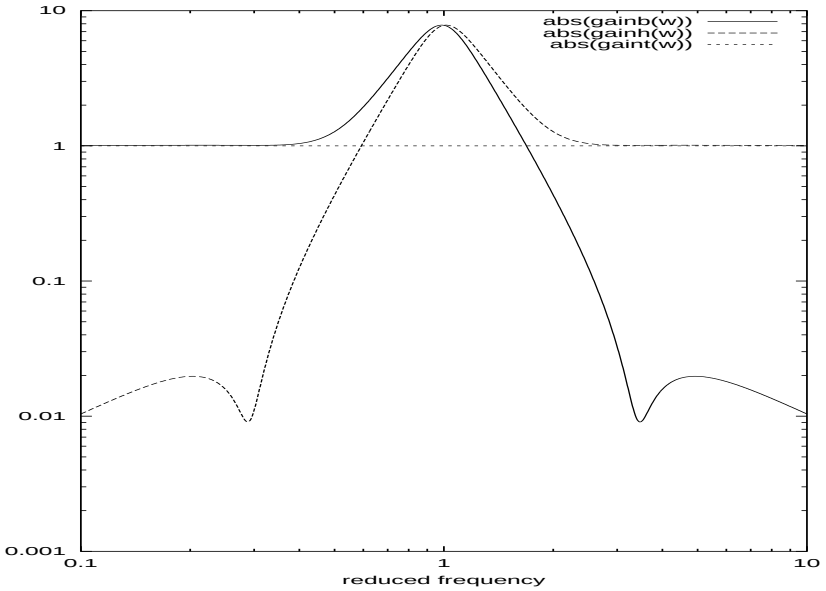


Figure 2: Module responses of the suggested transfer functions.

This method was also tried with filters of the 5th, 6th, and 10th orders, giving ratios of 28dB,

29dB and 101dB respectively. In [1], the required limit frequencies are 1Hz and 10Hz, giving a frequency transition domain of 10, but wider domains were tried, to see how much rejection ratio we can win.

Domain	10	16	20	25
5^{th} order	28	34	37	40
8^{th} order	34	42	47	49

4 Robustness

It can be easily checked that the transfer functions have modules close to 10 and phases close to 87° at the crossover point. Therefore an additional, unforeseen phase shift on 6° in the lowpass transfer function causes a notch in the sum of the channels. A larger phase shift brings back the sum close to 1, but the phase of the sum makes an entire rotation, causing the closed loop system to be instable.

Similarly, at the frequency where the phases of both transfer functions differ by 180°, an unforeseen variation of one of the gain modules may cause these modules to be equal, causing the sum to be zero at this frequency. Therefore the gain modules must be significally different at this frequency.

This ratio is .66 with 8^{th} order functions, but is very close to 1 with 10^{th} order functions.

5 Approximated solutions

I have investigated transfer functions whose sum is not exactly 1, but remains close to 1 within a given tolerance. Care must be taken to prevent the phase of the sum to rotate. A typical example in which this is not ckecked are the Linkwitz-Riley filters, popular in audio systems:

$$B_l(s) = \frac{1}{(1+\frac{\sqrt{2}}{2}s+s^2)^2} \qquad and \qquad B_h(s) = \frac{s^4}{(1+\frac{\sqrt{2}}{2}s+s^2)^2} \tag{2}$$

I have investigated these two forms of transfer functions:

$$B_{4l}(s) = \frac{(1+es^2)}{(1+as+bs^2)(1+cs+ds^2)} \tag{3}$$

and

$$B_{6l}(s) = \frac{(1+gs^2)(1+hs^2)}{(1+as+bs^2)(1+cs+ds^2)(1+es+fs^2)} \tag{4}$$

(the corresponding highpass functions $B_{4h}(s)$ and $B_{6h}(s)$ are obtained by substituting s into $1/s$)

Such functions have been chosen because unlike elliptic functions of the same order, the ratios of the modules differ by s^2 far from the crossover frequency (elliptic function of the corresponding order would have a numerator and a denominator of the same degree). I think this is wise for our specs.

Since there are up to 8 coeefficients to optimize, the former trial-and-error method had to be refined, because if n is the number of sweep values for each coefficient, dictated by the required accuracy, n^8 iterations would be necessary, requiring to much CPU time.

Therefore I reduced n to 5 for the 6^{th} order function, and to an adjustable, odd number between 7 and 15 for the 4^{th} order function. The loss of accurary must be recovered by performing several (typically 15) iterations. Each iteration sweeps an increasingly narrower range of coefficients centered on the set of values that gave the best attenuation at the previous iteration.

If an iteration fails to yield a better attenuation, the sweep range is increased back, so as to prevent the program from being "trapped" by a local maximum.

Such a program has been succesfully tried to find the coefficients of a 4^{th} order elliptic filter. The coefficients found agree with those found in books about filter synthesis. See for example [4]. Fig.3 shows some typical responses.

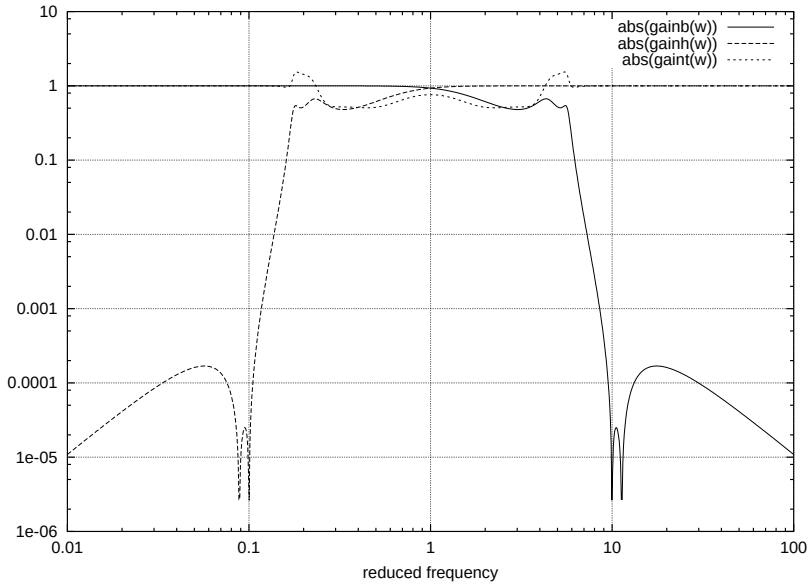


Figure 3: Some typical responses (ripple=6db, domain=100).

Here are the ratios(dB) obtained for several frequency transition domains and acceptable sum ripples:

Ripple	10dB				20dB			
Domain	10	16	20	25	10	16	20	25
4^{th} order	35	45	49	52	39	47	50	55
6^{th} order	33	47	52	58	40	54	59	74

Note that the 10-domain does not benefit from the 6^{th} order functions.

Gain ratios @ $\Delta\phi = 180°$, as explained in the robustness section, are close to .7 for a 10dB ripple, and close to .9 for a 20dB ripple.

Pairs of functions other than those corresponding by a frequency inversion have not been investigated. Should there be a demand for unequal ratios in the low and high frequency domains (e.g. 40dB and 60dB), the previous functions could be shifted in the frequency domain, so as to place the frequency of the less demanding ratio on the steep place of the module response rather than close to the first zero.

6 Finite impulse response filters (FIR)

A nice introduction to FIR filters with DSP's can be found on [3]. The delay required is incompatible with our servo system.

References

[1] M. Barsuglia: *Stabilisation en fréquence [...]*, thesis, p. 128 and ff.

[2] http://microindustrie.com/microindustrie/dsp/b-dis.htm (*beware of a few misprints*)

[3] http://www.siglab.ece.umr.edu/ee301/dsp/filters/fir1.html

[4] Paul Bildstein: *Filtres actifs*, Editions Radio.

Comparison of two different topologies for frequency stabilisation of the Laser

VIR-NOT-OCA-1390-178

Author Name: **H.TRINQUET**
F.BONDU

Date: 31/08/2001

I Introduction

The aim of this note is to compare two different topologies for frequency stabilisation of the Laser, in order to choose which one is more adapted to the Virgo specifications. Here we study the effect of the Mode Cleaner noise on the transmitted frequency noise and particularly not only the length noise but also the position noise of the cavity.

The two cavities (MC and Reference Cavity) provide two functions:

- DC reference for frequency, used for stabilizing the 3 km arms in low frequency.
- A first stage of frequency stabilization.

The reference solution (topology#1) for the laser prestabilisation and mode-cleaning, consists in locking the laser to the ULE Reference Cavity (suspended on the same bench as the Mode Cleaner input and output mirrors) and then locking the Mode Cleaner cavity to the laser frequency. This has been designed to fulfil the Virgo frequency specifications, based on the measured noise of the cavity and on the noise that we did expect from the Mode Cleaner.
Then, it was found that the motion of the Mode Cleaner benches was still high, and F.Bondu proposed to use "topology#2" (the laser is locked to the Mode Cleaner, which is locked in low frequency to the ULE cavity), in order to ease the lock acquisition.

To realise this frequency stabilisation, two different cavities are used in a Pound Drever scheme:

- The first is the Reference Cavity (RC). Built in an ULE structure, it provides a very stable cavity (about 1.5 10^5 Hz/°C) and provides a DC reference for the interferometer locking. With a finesse of 35000 and a length of 0.3m, its cut off frequency[i] is: f_c^{RC} = 7 kHz. The Reference Cavity is fixed under the Input Bench and moves with it.

- The second is the Mode Cleaner cavity (MC). It is a ring cavity composed with two plan mirrors on the Input Bench and a curved mirror suspended in the Mode Cleaner Tower. With a length of 142.73m [ii], it allows a spatial and a frequency filtering. Its cut off frequency is f_c^{MC} = 525 Hz for a finesse of 1000 [iii].

Due to seismic and electronic noises, each mirror of this suspended cavity moves and induces frequency noise on the MC resonant beam. If δX_f and δX_e are, respectively, position noise of the front and end mirror, we can deduce the position noise (δX_+) and the length noise (δX_-) of the cavity respect to an inertial frame:

$$\delta X_+ = \frac{\delta X_e + \delta X_f}{2}$$
$$\delta X_- = \delta X_e - \delta X_f \qquad (1)$$

[i] The cut off frequency (f_c) is defined by the free spectral range (ν_{fsr}) and the finesse $\mathcal{F}$ of the considered cavity, by: $f_c = \frac{\nu_{fsr}}{2\mathcal{F}}$. The free spectral range is inversely proportional to the length of the cavity (L) $\nu_{fsr} = \frac{c}{2L}$

[ii] According measurement in May 2001.

[iii] This value corresponds to the planned Mode Cleaner; current measurements give a value of 580.

First we will define the different noises and transfer functions involved in loops. Then we will present principles, functional schemes and the transmitted frequency noise for each topology. In conclusion we show that the current length noise gives a frequency noise level over the specifications required for Virgo between 400Hz and 7kHz, whatever the topology (one order of magnitude has to be gained). Moreover, with an optimal configuration where the seismic noise is the main contribution in the length noise, both of these topologies give a transmitted frequency noise below the Virgo specification and the Reference cavity is useful only for the DC reference.

II Elements of loops

Each loop is composed with sensors, correctors, and actuators. Noise sources are then injected in the loop. We take some simple models as:

- Correctors:
  - C_e^{MC} acts on actuators of the curved mirror of the Mode Cleaner. It is in 1/f up to f_c^{MC} in topology 1 and up to f_c^{RC} in topology 2, and constant over the cut off frequency considered so that the open loop gain of the MC length stabilisation (G^{MC}) is in 1/f.
  - C_e^{La} acts on the actuators of the Master Laser. It is in $1/f^4$ to fc, in $1/f^3$ between fc and 33kHz and constant over 33kHz. f_c is the cut off frequency, of the Reference Cavity for topology 1 (f_{c1} = 7kHz), of the Mode Cleaner for topology 2 (f_{c2} = 525Hz).

- Actuators:
  - A^{La} are actuators of the Maser Laser (piezo and E.O.): 22.3 MHz/V
  - A^{MC} are coils, acting on the curved mirror of the Mode Cleaner: 1.5µm/V in DC. We suppose that the filtering effect of the suspension is compensated.

II.1 Noise sources:

Different noise sources have been considered:

- Frequency noise of the free running laser $\delta\nu^{La} = 10^4/f$ [Hz/$\sqrt{Hz}$][iv]
- Frequency noise coming from the length noise of the Reference Cavity $\delta\nu^{RC}=2/f$ [Hz/$\sqrt{Hz}$][iv]
- Position noise of the Reference Cavity: δX_+^{RC}
- Position and length noises of the Mode Cleaner cavity, respectively δX_+^{MC},δX_-^{MC}

We assume that δX_+^{RC}, δX_+^{MC} and δX_-^{MC} have the same spectral density, we suppose implicitly that the position of the front and end mirrors are uncorrelated over 10Hz. Two cases are considered:

- The first case is the current MC length noise. Measured in topology 2, the extrapolation of the best noise floor level is: 7.10^{-10} $/f^{5/4}$ m/$\sqrt{Hz}$ [v].

[iv] F.Bondu These, June 1996
[v] Internal communication from F.Bondu 2001-12-20

For computational reasons we will work with a plain value of $10^{-10}/f$ m/$\sqrt{Hz}$ (Figure 1).

- The second case is the optimal length noise: seismic noise filtered by the four suspension stages of the Mode Cleaner (Figure 2)[vi]. In order to simplify we approximate the transfer function by (with Laplace variable s):

$$\frac{(1+sT_2/Q_2+s^2T_2^2)^3}{(1+sT_1/Q_1+s^2T_1^2)^5(1+sT_3/Q_3+s^2T_3^2)} \qquad (2)$$

where T_i corresponds to poles at respectively 0.6, 2.5 and 70Hz and quality factors Q_i of: 2, 10, 1000. And the spectral density is obtained by multiplying this approximated transfer function by the input seismic noise as:

$$\frac{10^{-7}}{f^2} \quad [m/\sqrt{Hz}] \qquad (3)$$

We consider that the main contribution in the length noise of the Mode Cleaner cavity is the seismic noise. This assumes that we are not dominated by other noises as electronic noises and provides us an ultimate frequency noise level.

[vi] M.Zbiri using SIESTA computed the short tower transfer function.

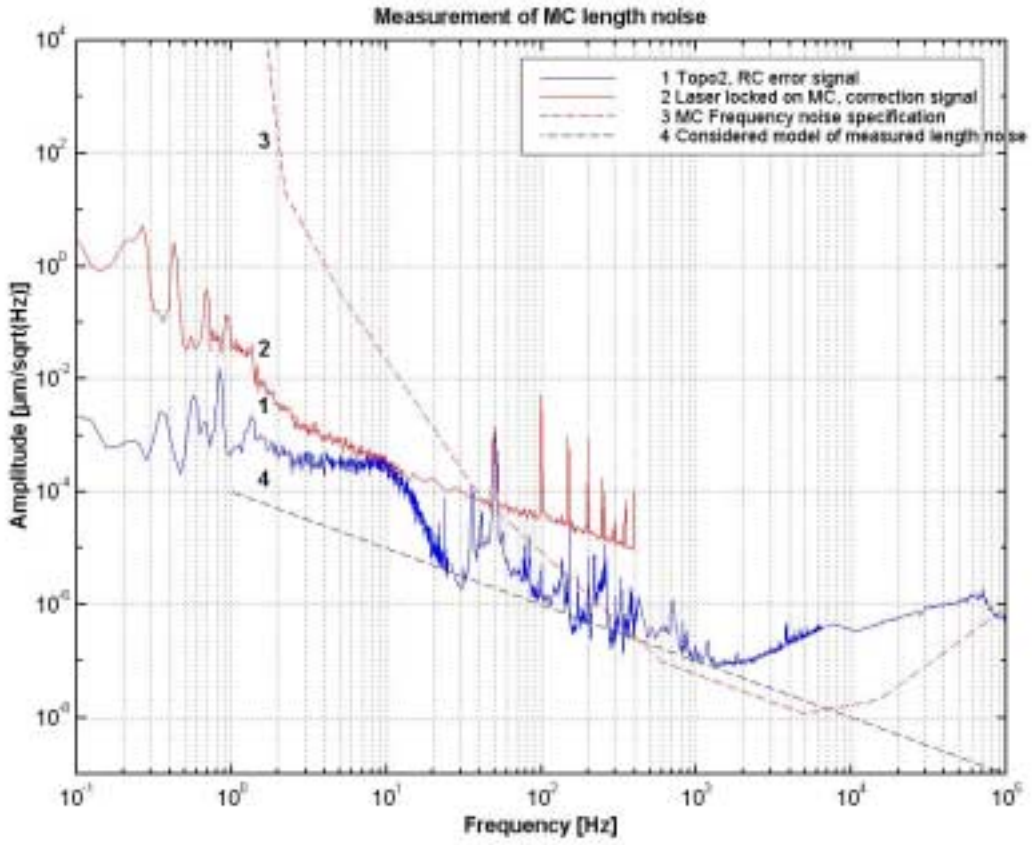


Figure 1: Fit of the length noise from the measurements performed in topology 2 with MC coils 09/05/01

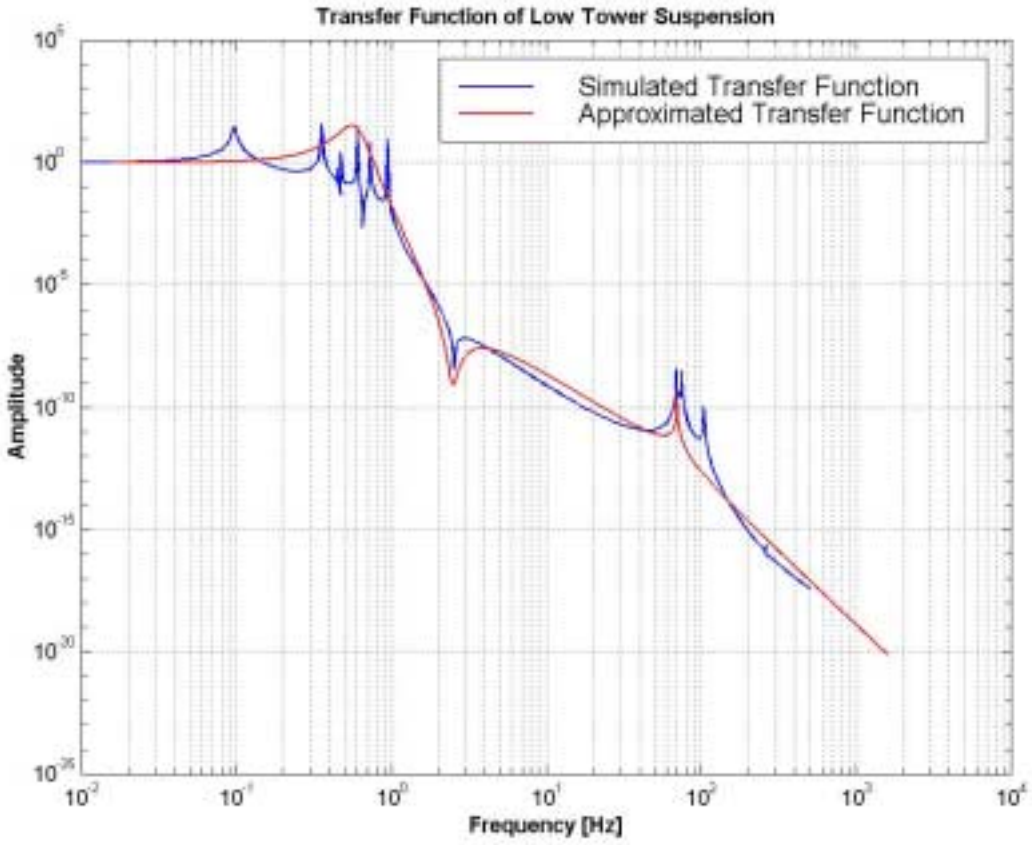


Figure 2: Computed and approximated transfer function of MC suspensions

In order to express the effects of length and position noise of the cavity on a frequency loop stabilisation, we have evaluated exact transfer function of these noises to the Pound Drever signal and to the transmitted frequency noise. These formulae were obtained by using the algebra A133 developed by J.Y.Vinet, for JAJY, in order to establish numerical models of exact transfer functions for a recycling interferometer. We suppose that the laser is tuned to the considered cavity and that the frequency of the noise is smaller than the free spectral range of the cavity.

II.2 Reflexion operator

G_ν, G_+, G_- are transfer functions for the Pound Drever Signal to, respectively, laser frequency, cavity position and length perturbations at a frequency (f). They are simply expressed in function of the cavity cut-off frequency (f_c), the optical gain G_o and the free spectral range (ν_{fsr}) of the considered cavity.

$$\begin{cases} G_\nu = G_o \dfrac{1}{1 + jf/f_c} & [V/Hz] \\ G_- = \dfrac{2 G_o \nu_{fsr}}{\lambda} \dfrac{1}{1 + jf/f_c} & [V/m] \\ G_+ = \dfrac{2\pi G_o}{\lambda} \dfrac{jf}{1 + jf/f_c} & [V/m] \end{cases} \qquad (4)$$

We can define $C_{l\nu}$ which converts the positions noise of the Mode Cleaner curved mirror into frequency noise:

$$C_{l\upsilon} = \frac{G_{+}^{MC}/2 + G_{-}^{MC}}{G_{\upsilon}^{MC}} \tag{5}$$

and which could be approximated, up to 100 kHz, by:

$$C_{l\upsilon} \approx \frac{G_{-}^{MC}}{G_{\upsilon}^{MC}} = \frac{\upsilon}{L_{MC}} = 2.10^{12}\ [\mathrm{Hz/m}] \tag{6}$$

We see the low pass filtering effect of the cavity to frequency noise and length noise and a high pass filter for the position noise. The cut off frequency f_c is the pole of the cavity [i]. The optical gain G_0 is function of the laser power, the modulation depth and the coupling rate of the cavity.

II.3 Transmission operator

The laser frequency transmitted by the Mode Cleaner cavity is then filtered. So, we must define F_{ν}, F_{+},F_{-} which are transfer function of frequency noise to, respectively, the incident frequency noise, the position noise and the length noise of the cavity.

$$\begin{cases} F_{\nu} = \dfrac{1}{1 + jf\ /f_c} & [\mathrm{Hz/Hz}] \\ F_{-} = \dfrac{\nu}{L}\dfrac{jf\ /f_c}{1 + jf\ /f_c} & [\mathrm{Hz/m}] \\ F_{+} = 2\,jf\,\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{1 + jf\ /(2f_c)}{1 + jf\ /f_c} & [\mathrm{Hz/m}] \end{cases} \tag{7}$$

We see that the cavity acts as a low pass filter for a frequency noise, as a derivative filter for a position noise and as a high pass filter for a length noise. We find the same result for F_{-}, if we considered that the Doppler effect shifts the frequency of the intracavity field: For a moving mirror at a speed v, the Doppler shift can be expressed as:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}$$

For a length noise in a cavity, we must take care of the two mirrors, the number of bounce (N) and the filtering effect for a frequency noise F_{ν}. So the frequency shift is:

$$\frac{\delta\nu_{-}}{\nu} = 2\frac{v}{c}N\,F_{\nu}$$

$$\delta\nu_{-} = 2\frac{v}{c}N\,F_{\nu} = 2\frac{v}{c}\frac{F}{\pi}F_{\nu}$$

When the loops are closed, noise considered is residual noise, so that the frequency noise at the output of the Mode Cleaner is:

$$\delta\nu_{tr}^2 = F_\nu^2 \delta\nu_{res}^2 + F_+^2 \delta X_{+res}^2 + F_-^2 \delta X_{-res}^2 \qquad (8)$$

Then we will compare the transmitted noise to the Mode Cleaner specification for frequency noise.

II.4 MC specification

Starting from the Virgo Sensitivity curves [vii], δh the detection threshold of gravitational wave amplitude is:

- for f < 2.2 Hz in $10^{-12}/f^{20}$ $[1/\sqrt{Hz}]$ limited by the seismic noise
- for 2.2 Hz < f < 40 Hz, in $10^{-18}/f^2$ $[1/\sqrt{Hz}]$ limited by the pendulum thermal noise
- for 40 Hz < f < 600 Hz, $8.10^{-22}/f^{1/2}$ $[1/\sqrt{Hz}]$ limited by the mirror thermal noise
- for f > 600 Hz , 10^{-25} f $[1/\sqrt{Hz}]$ limited by the shot noise

The corresponding frequency noise is deduced from:

$$\frac{\delta\upsilon}{\nu} = \frac{\delta h}{\beta} \qquad (9)$$

where β is the relative asymmetry between the two arms. As in a previous Virgo Note on the laser frequency prestabilization[viii], we assume an asymmetry of $\beta=10^{-2}$. For the high frequency part of the laser frequency stabilisation loop, with 15 kHz of bandwidth, we consider a transfer function of $1/f^{3/2}$ between 5 kHz to 15 kHz and in $1/f^3$ below 5 kHz. Then we consider the 5 Hz pole of the recycling cavity. Finally we consider a security margin of a factor 3 for 10 incoherent noises.
So the level of frequency noise at the output of the Mode Cleaner must be better than the level define by:

- f < 2.2 Hz in $3.31\ 10^{15}/f^{23}$ $[Hz/\sqrt{Hz}]$
- 2.2 Hz < f < 5 Hz in $2.27\ 10^9/f^5$ $[Hz/\sqrt{Hz}]$
- 5 Hz< f < 40 Hz in $0.45\ 10^9/f^4$ $[Hz/\sqrt{Hz}]$
- 40 Hz< f < 600 Hz in $1.79\ 10^6/f^{5/2}$ $[Hz/\sqrt{Hz}]$
- 600 Hz< f < 5 kHz in $1.22\ 10^2/f$ $[Hz/\sqrt{Hz}]$
- 5 kHz < f < 15 kHz in $0.34\ 10^{-3}\ f^{1/2}$ $[Hz/\sqrt{Hz}]$
- f > 15kHz in $1.88\ 10^{-10}\ f^2$ $[Hz/\sqrt{Hz}]$

[vii] The VIRGO sensitivity curve; VIR-NOT-PER-1390-51; C.Cattuto, F.Marchesoni, L.Gammaitoni, M.Punturo; 21/10/99

[viii] Virgo Note PJT94_036 Update on the requirements of the laser frequency prestabilization; C.N.Man, A.Brillet; 30/11/94

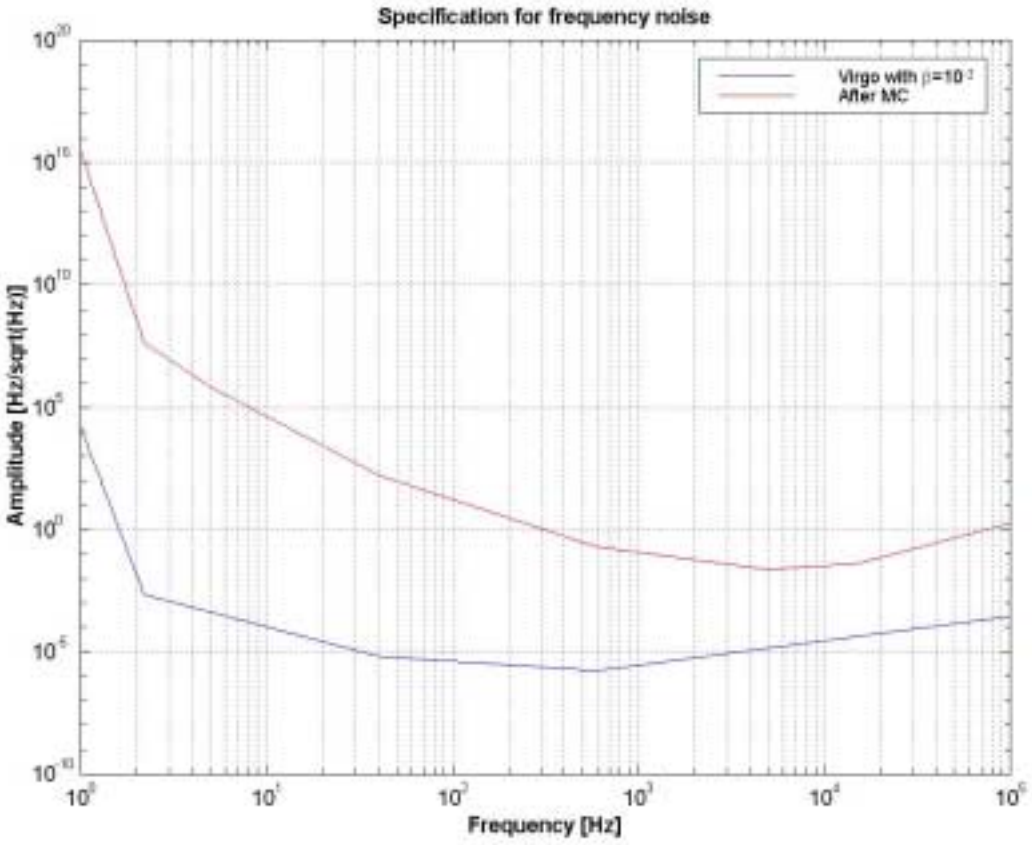


Figure 3: Specification for frequency noise at the output of the Mode Cleaner

III Description of topologies

III.1 Topology 1

In the first topology, the laser is stabilised on the Reference Cavity. Then the length of the Mode Cleaner is locked on the laser so prestabillised. These two loops have respectively 100 kHz and 40 Hz of bandwidth.
From the functional scheme (Figure 4), the two open loop transfer functions are:

$$\begin{cases} G_1^{La} = G_v^{RC}\, C_e^{La}\, A^{La} \\ G_1^{MC} = G_v^{MC}\, C_e^{MC}\, A^{MC} C_{lv} \end{cases} \qquad (10)$$

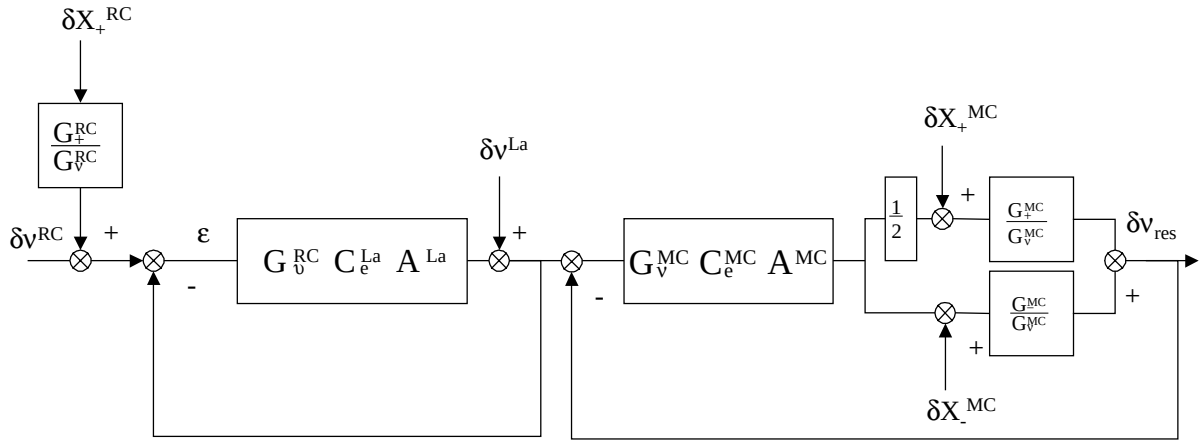


Figure 4: Functional scheme for topology

The residual frequency noise is defined by the prestabilisation loop, the residual length and position noise result of the second loop.
The transmitted frequency noise is the quadratic sum of each contribution of independent noises:

$$\delta\nu_{tr(1)}^{2} = H_{(1)}^{La\,2}\delta\nu^{La\,2} + H_{(1)}^{RC\,2}\left(\delta\nu^{RC\,2} + \left(\frac{G_{+}^{RC}}{G_{v}^{RC}}\right)\delta X_{+}^{RC\,2}\right) + H_{+(1)}^{MC\,2}\delta X_{+}^{MC\,2} + H_{-(1)}^{MC\,2}\delta X_{-}^{MC\,2}$$

with :

$$\begin{cases} H_{(1)}^{La} = \dfrac{1}{1+G_1^{La}}\left[F_v + \dfrac{G_1^{MC}/C_{lv}}{1+G_1^{MC}}\left(F_+/2 + F_-\right)\right] \\ H_{(1)}^{RC} = \dfrac{G_1^{La}}{1+G_1^{La}}\left[F_v + \dfrac{G_1^{MC}/C_{lv}}{1+G_1^{MC}}\left(F_+/2 + F_-\right)\right] \\ H_{+(1)}^{MC} = \dfrac{\left(1+G_1^{MC}\dfrac{G_-^{MC}}{C_{lv}G_v^{MC}}\right)F_+ - G_1^{MC}\dfrac{G_+^{MC}}{C_{lv}G_v^{MC}}F_-}{1+G_1^{MC}} \\ H_{-(1)}^{MC} = \dfrac{\left(1+G_1^{MC}\dfrac{G_+^{MC}}{C_{lv}G_v^{MC}}\right)F_- - G_1^{MC}\dfrac{G_-^{MC}}{C_{lv}G_v^{MC}}F_+}{1+G_1^{MC}} \end{cases} \qquad (11)$$

III.2 Topology 2

In the second topology, the laser is locked on the Mode Cleaner cavity and the length of the cavity is then stabilised on the Reference Cavity.
From the functional scheme (Figure 5), transfer functions of the two open loops are:

$$\begin{cases} G_2^{La} = G_v^{MC}\,C_e^{La}\,A^{La} \\ G_2^{MC} = G_v^{RC}\,C_e^{MC}\,A^{MC}C_{lv} \end{cases} \qquad (12)$$

They are adjusted in order to have the same bandwidth as in topology 1.

The functional scheme is:

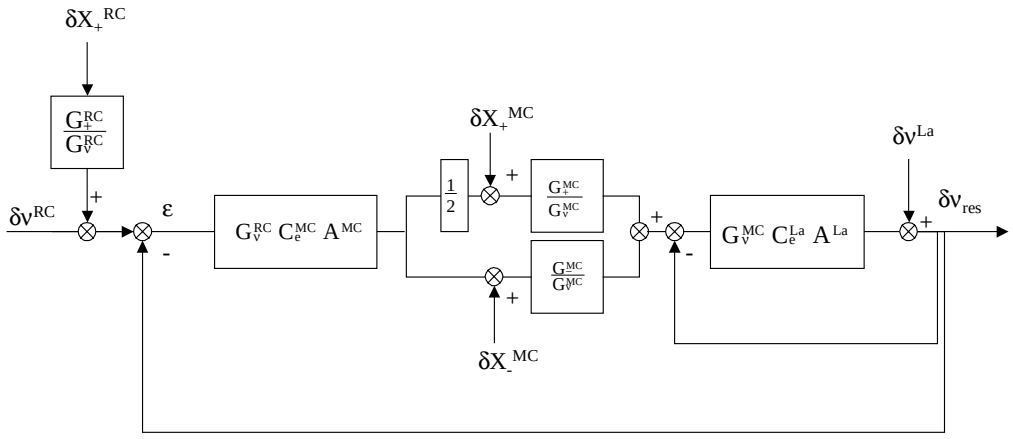


Figure 5: Functional scheme for topology 2

The noise transmitted at the output of the Mode Cleaner Cavity is:

$$\delta\nu_{tr(2)}^2 = H_{(2)}^{La\,2}\delta\nu^{La\,2} + H_{(2)}^{RC\,2}\left(\delta\nu^{RC\,2} + \left(\frac{G_+^{RC}}{G_\nu^{RC}}\right)\delta X_+^{RC\,2}\right) + H_{+(2)}^{MC\,2}\delta X_+^{MC\,2} + H_{-(2)}^{MC\,2}\delta X_-^{MC\,2}$$

with:

$$\begin{cases} H_{(2)}^{La} = \dfrac{F_\nu - G_2^{MC}/C_{l\nu}\left(F_+/2 + F_-\right)}{1 + G_2^{La} + G_2^{La}G_2^{MC}} \\ H_{(2)}^{RC} = \dfrac{G_2^{La}G_2^{MC}F_\nu + G_2^{MC}/C_{l\nu}\left(1+G_2^{La}\right)\left(F_+/2 + F_-\right)}{1 + G_2^{La} + G_2^{La}G_2^{MC}} \\ H_{+(2)}^{MC} = \dfrac{F_\nu\, G_2^{La}\, G_+^{MC}/G_\nu^{MC} + F_+\left[1 + G_2^{La} + G_2^{La}G_2^{MC}\dfrac{G_-^{MC}}{C_{l\nu}G_\nu^{MC}}\right] - F_-G_2^{La}G_2^{MC}\dfrac{G_+^{MC}}{C_{l\nu}G_\nu^{MC}}}{1 + G_2^{La} + G_2^{La}G_2^{MC}} \\ H_{-(2)}^{MC} = \dfrac{F_\nu\, G_2^{La}\, G_-^{MC}/G_\nu^{MC} - F_+G_2^{La}G_2^{MC}\dfrac{G_-^{MC}}{2C_{l\nu}G_\nu^{MC}} + F_-\left[1 + G_2^{La} + G_2^{La}G_2^{MC}\dfrac{G_+^{MC}}{2C_{l\nu}G_\nu^{MC}}\right]}{1 + G_2^{La} + G_2^{La}G_2^{MC}} \end{cases} \quad (13)$$

IV Applications

IV.1 Current length noise

We apply the two topologies to the fitted measured length noise. In both case, we see that the main contribution to the transmitted frequency noise is the length noise of the Mode Cleaner cavity and is over the specification between 400Hz and 7kHz. The length noise of RC could dominate in low frequency (< 10Hz). The contribution of the free running laser frequency noise in high frequency (>100kHz) depends of the open loop gain.

- **In topology 1, Figure 6:**

Up to the bandwidth of the Mode Cleaner loop (40 Hz), the contribution of the MC length noise is attenuated by the derivative effect of F- and by the MC loop gain.
Over the cut off frequency of MC (525Hz), the length noise is no more attenuated: the Doppler effect compensates the pole of the cavity (II.3)

$$\delta\nu \approx F_{-}\,\delta X_{-}^{MC} \approx \frac{\nu}{L}\,\delta X_{-}^{MC} \qquad (14)$$

- **In topology 2, Figure 7:**

For frequency smaller than 40Hz, the length noise is reinjected in the laser as frequency noise and the transmitted frequency noise is equivalent to:

$$\delta\nu_{tr} \approx \frac{F_{\nu} G_2^{La} G_{-}^{MC} / G_{\nu}^{MC}}{1+G_2^{La}+G_2^{La} G_2^{MC}}\,\delta X_{-}^{MC} \approx \frac{1}{1+G_2^{MC}}\,\frac{\nu}{L^{MC}}\,\delta X_{-}^{MC} \qquad (15)$$

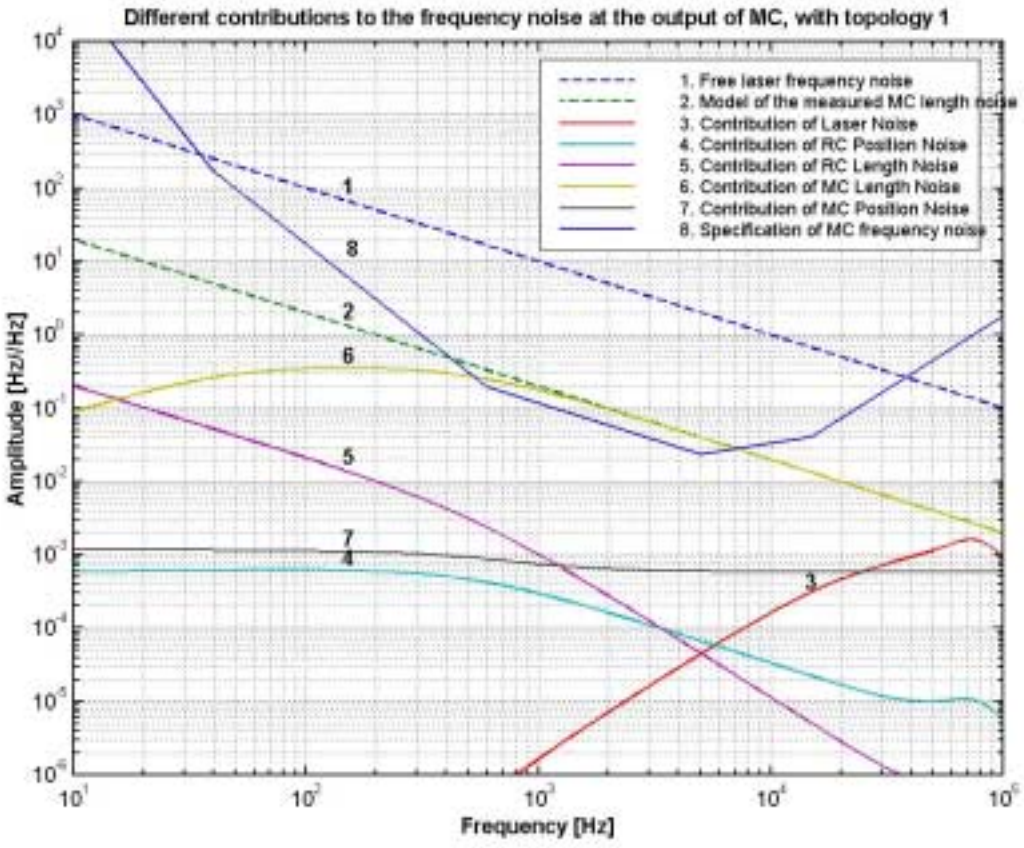


Figure 6: The different contributions to the frequency noise with topology 1

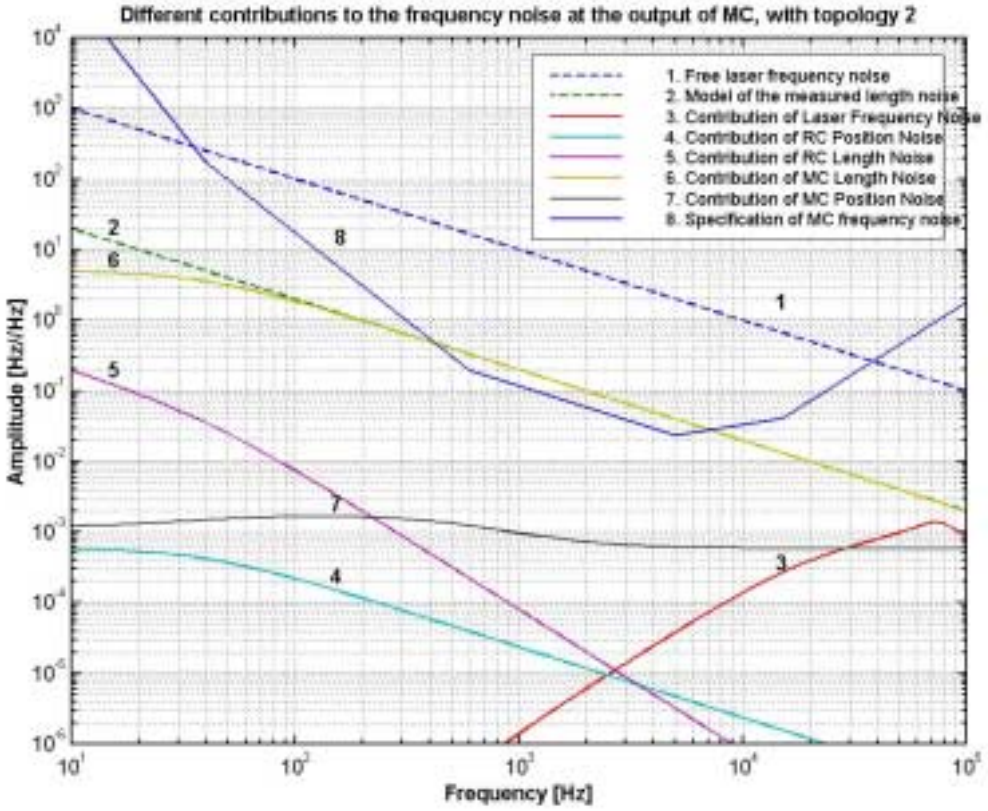


Figure 7: The different contributions to the frequency noise with topology 2

We can compare the transmitted noise of these two topologies:

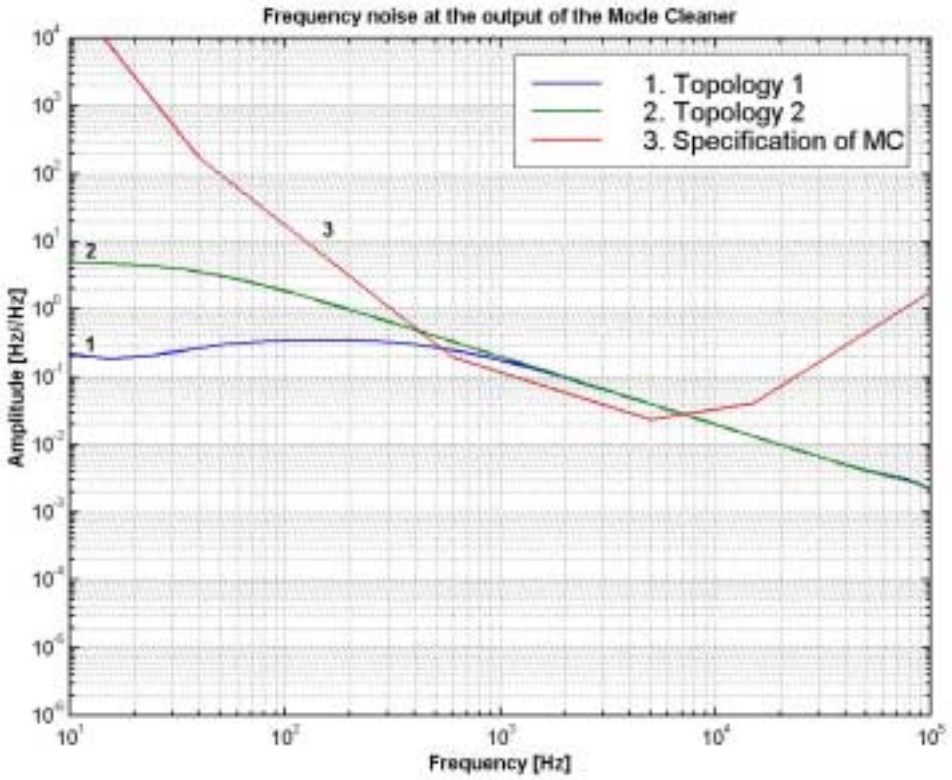


Figure 8: Frequency noise for the two topologies

We see that the transmitted frequency noise, with the fitted length noise, is over the MC specification between 400Hz and 7kHz whatever the topology. Still Topology 1 is better than 2 in a frequency range smaller than 100Hz and gives a comfortable margin with respect to specification.

IV.2 With the optimal length noise

If we consider now the length noise as it could be in an optimal configuration (Figure 2), we see that the difference between the two topologies (Figure 9 to Figure 11) becomes very negligible and only the implementation could be the critical factor. Both of them are limited by the contribution of the Reference Cavity length noise filtered by the pole of the Mode Cleaner Cavity.

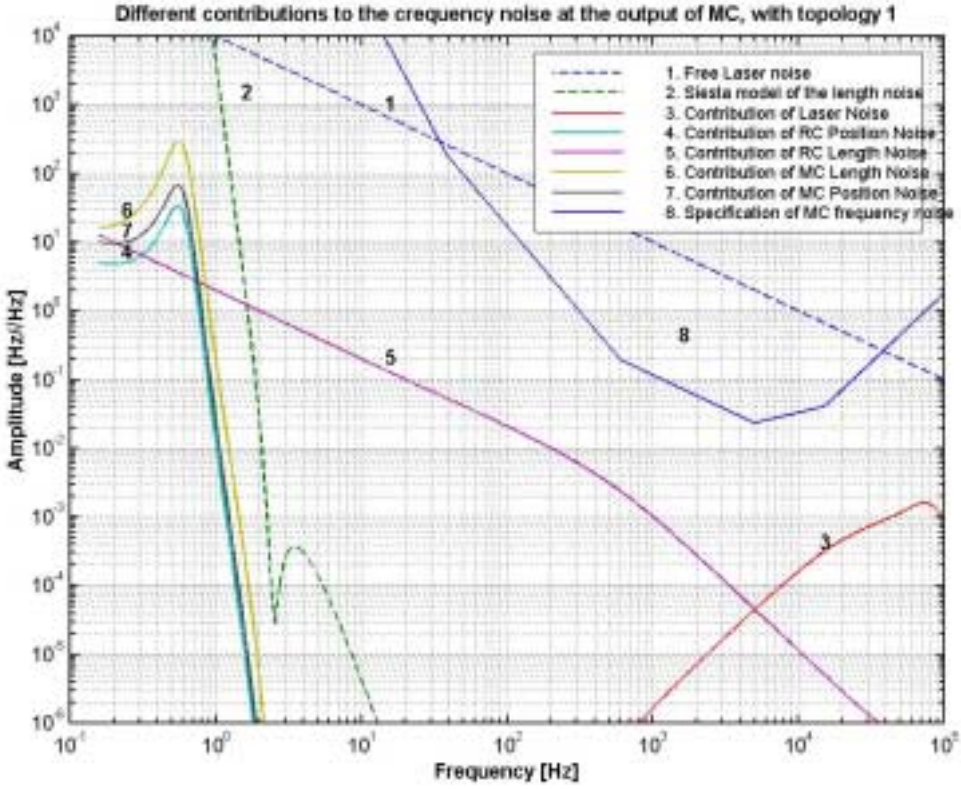


Figure 9: Contributions to the frequency noise in topology 1 with the simulated length noise

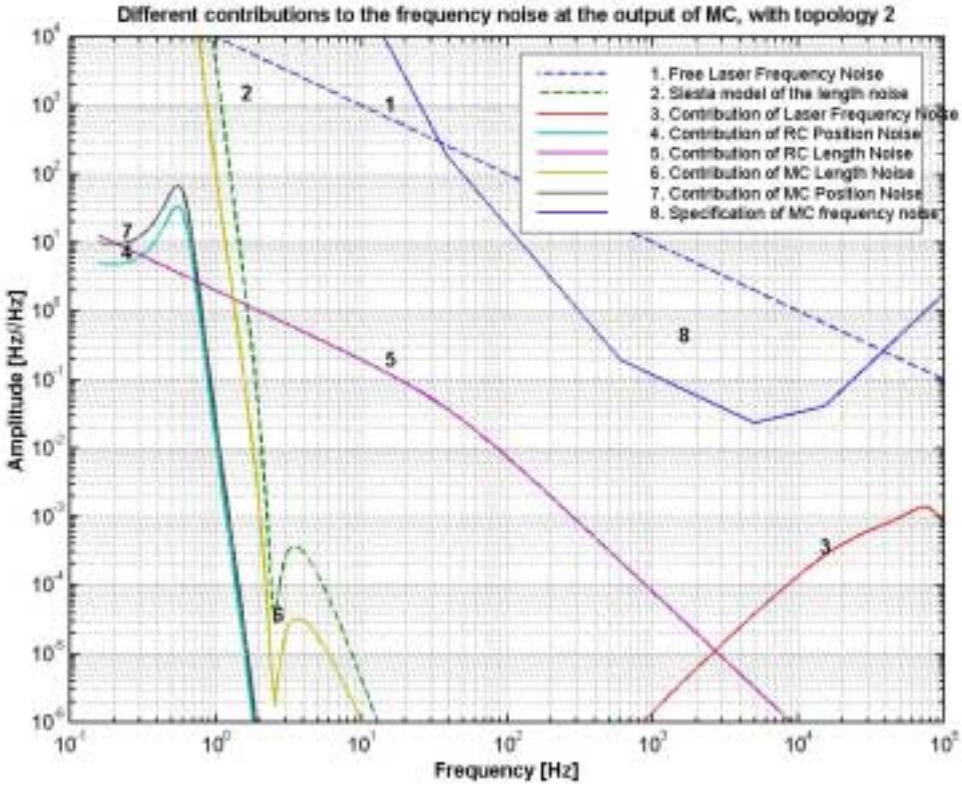


Figure 10: Contributions to the frequency noise in topology 2 with the simulated length noise

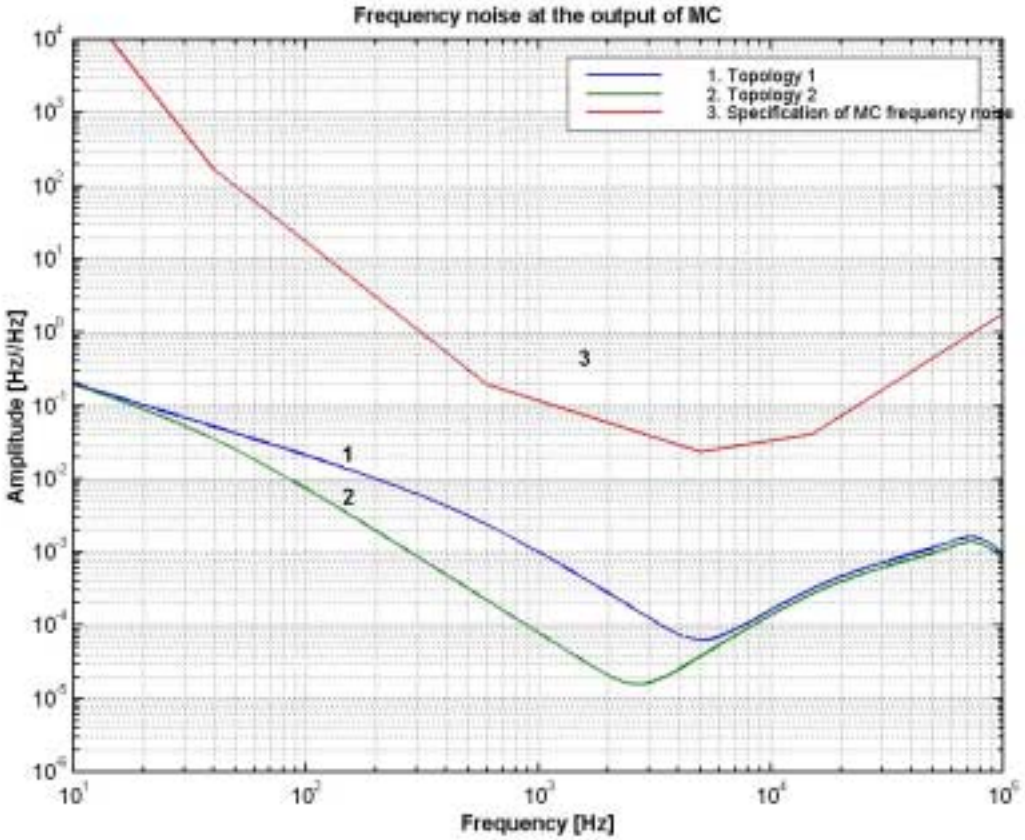


Figure 11: Transmitted frequency noise with the simulated length noise

IV.3 Comparison of the two topologies

We compare the transfer function for each noise, i.e we make the ratio of transfer functions topology 1 over topology 2, for a given source of noise.

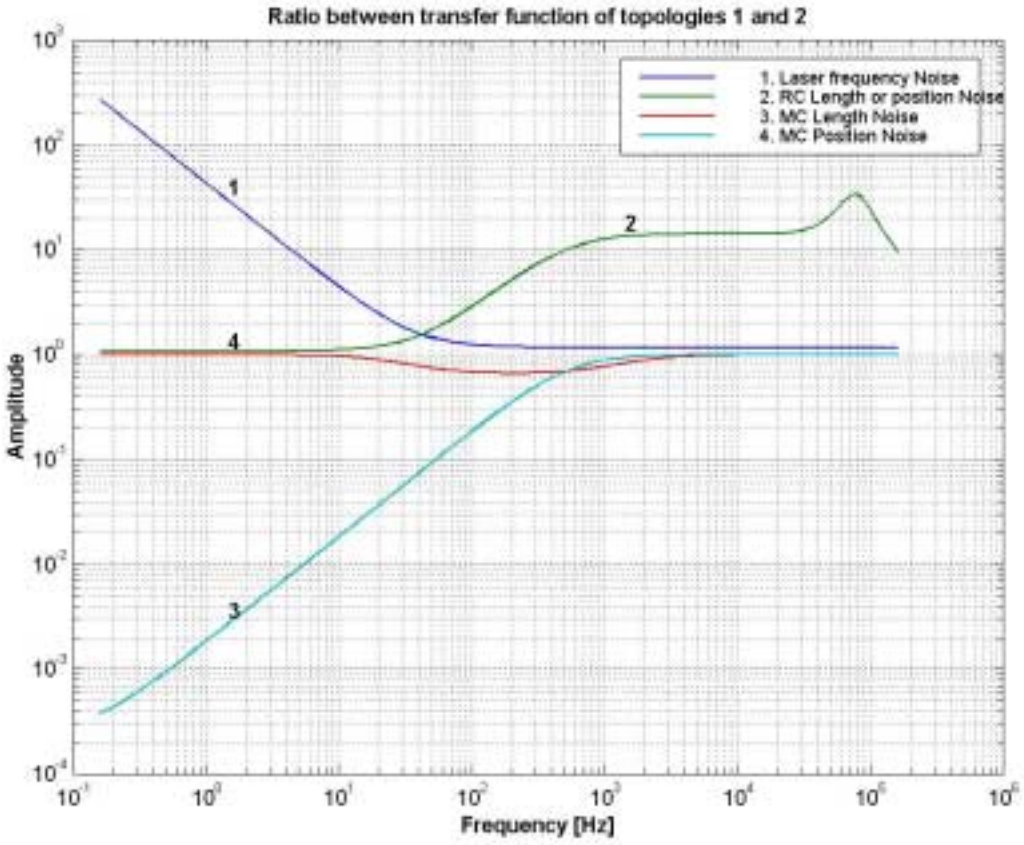


Figure 12: Comparison of topology 1 with topology 2

We see that:

- For the laser frequency noise, the topology 2 seems to be better, but the residual frequency noise at this level is so small that this difference is not fundamental.
- For the MC length noise, topology 1 is better: we benefit of the derivative effect of F. cumulated with the loop of the length noise stabilisation.
- After the bandwidth of MC stabilisation, the RC length or position noise has a better damping in topology 2

Whatever the topology, it will not be possible to control the mode cleaner length with a unity gain frequency much higher than 40 Hz. But for the sake of simplicity, we assumed throughout the computations a simple 1/f slope. It is possible to increase the gain at low frequencies, adding more integrators in open loop: the contributions of noises in low frequencies (1 Hz and below) will be decreased.

V Conclusions

We have studied the frequency noise at the output of the mode cleaner, using exact formulas for position and length noise of cavities, and taking into account the servo loops.

We show that when a laser beam is transmitted freely through a cavity, the frequency at the output is degraded, anyway, by the length noise. The frequency fluctuation is due to Doppler effect and is then filtered by the cavity pole. For Fourier frequencies larger than the cavity pole, the effect is the same as if the frequency was locked on this cavity. The formula to be used is the usual one:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta l}{l}$$

So, in the frequency range for analysing gravitational waves, we can as well use the Reference Cavity or the Mode Cleaner for frequency prestabilization. If we use the Reference Cavity, the Mode Cleaner has to meet the requirements for frequency noise anyway.

For the frequency noise of the beam at the output of the mode cleaner:

- The position noise of both cavities does not contribute significantly to the noise.
- The main contribution comes from the MC length noise.

With the actual length noise of the MC, we can't meet the requirements. The extra noise of the MC length noise should be lowered than the expected noise provided by the seismic isolation and then the Mode Cleaner could be used for frequency prestabilization.

To avoid long-term drift, it is possible to use the Reference Cavity or other long-term references.

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Design of the last stage of laser frequency stabilisation and laser frequency noise requirements

François BONDU

* * *

VIR-NOT-OCA-1390-227
Issue: 1
Date : December 5, 2002

VIRGO * A joint CNRS-INFN Project
Project Office: Traversa H di Via Macerata, I-56021 S. Stefano a Macerata (Pisa)
Secretariat: Telephone (39) 050 752 511 * FAX (39) 050 752 550 * e-mail W3@virgo.infn.it

1 Introduction

The Virgo interferometer needs a stabilisation of the laser frequency noise that uses the common mode of the 3-km long Fabry-Perot cavities [1]. Indeed, the dark fringe port is sensitive to both gravitational wave strain and laser frequency noise:

$$s_{\mathrm{D1}} = \alpha(h + \beta\frac{\delta\tilde{\nu}}{\nu_0}) \tag{1}$$

where α is a constant, h is the gravitational wave strain, β the interferometer effective asymmetry to laser frequency noise (a few %), $\delta\tilde{\nu}$ is the remaining laser frequency noise and $\nu_0 = c/\lambda$ is the light frequency. Hence, to detect a few $10^{-23}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, one needs a laser frequency stable at the few $10^{-7}\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ level.

The amount of tolerated remaining laser frequency noise depends on ν_{las}, the laser frequency noise at the output of mode cleaner, and of the open loop transfer function G_{CM} of the last stage of frequency stabilisation (the "common mode"):

$$\delta\tilde{\nu} = \frac{\nu_{\mathrm{las}}}{1 + G_{\mathrm{CM}}} \tag{2}$$

So the requirements on the pre-stabilized laser frequency noise depends on the design of the common mode servo loop.

Up to now, the requirement on the laser frequency noise depends on a rough estimation of the response of the interferometer to laser frequency noise [1, 2, 3]. The unity gain for the last stage of frequency stabilisation was supposed to be one third of the long arm free spectral range, and the slope of the open loop transfer function assumed to be $f^{-1.5}$ at unity gain. Actually, it was suspected that "something wrong" happens in the transfer function for frequencies close to the free spectral range, but it was not clear what to expect. The exact shape of the response of the full interferometer to the frequency noise is required to design the corrector filter with precise knowledge of gain and phase margin.

The second section of this note describes how to obtain precise transfer functions using the JAJY program. It then shows how to deduce the requirement on the laser frequency noise using a set of four transfer functions and the design of the common mode servo loop. The third section applies the equations of the second section to the case where the light used to sense the common mode of the long arms is the one reflected by the AR coated face of the beamsplitter, on photodiode D5, demodulated at 6 MHz. The fourth section is the same application where the sensing of the common mode of the interferometer is done on the light reflected by the interferometer (photodiode D2), demodulated at 6 MHz. The fifth section is the same application where the sensing of the common mode of the interferometer is done on the light reflected by the interferometer (photodiode D2), demodulated at 18 MHz.

This note considers the last stage of frequency stabilisation alone. Its interaction with other servo loops has to be considered in a forthcoming note. Some topologies may induce some other requirements on laser frequency noise (see for example [3]) in the low frequency range. This issue will not be discussed since it depends on the topology of the various servo loops used to lock the interferometer. The issues related to lock acquisition (for example transients) will not be discussed either.

[1] Contrary to what is sometimes thought, the laser frequency reference is not the recycling cavity length, but the average of the lengths of the two 3 km arms.

2 Calculation of the transfer functions with the JAJY program

2.1 Principles and setup of the JAJY program

2.1.1 Description of JAJY

JAJY, written by J.-A. Marck and J.-Y. Vinet, is a frequency domain model of the full interferometer. Its principles are described in the chapter 6, "Modulation and transfer functions", of [4]. The mathematical description of JAJY is necessary to stand the case of non negligeable modulation index and to compute the response of the interferometer at frequencies close to or higher than the long arm free spectral range.

The parameters used in the simulation are the following: each long Fabry-Perot cavity is 2999.9 m long; the recycling cavity is 12.053 m long, the optical length difference of the Michelson part (between the west and north mirrors) is 0.878 m. The finesse asymmetry of the long Fabry-Perot cavities is 5 %, the average being 50 (so that the two finesses are 51.25 and 48.75). The end mirrors of the long arm have a zero transmission. The recycling mirror reflects 92% of the incident light power. Each mirror has a loss coefficient of 20 ppm. The AR face of the beamsplitter reflects 500 ppm of the power. The dark current of each photodiode is set to zero. The laser input power is 20 W.

In a complicated optical object like the Virgo interferometer, one should be careful at the definition of the demodulation phases: for example, on the dark fringe port, the carrier and the sidebands have experienced different dephasing so that the definition of "phase" and "quadrature" is not obvious. The JAJY program defines the "quadrature" of the dark fringe port (D1) so that it optimizes the signal-to-noise ratio at 100 Hz, the signal being the gravitational wave strain, the noise being the shot noise. The "phase" on D1 is such that the demodulation sinewave adds a $\pi/2$ angle. The "phase" on D2 and D5 optimizes the signal-to-noise ratio at 100 Hz, the signal being a frequency noise and the noise the shot noise. The "quadrature" on D2 and D5 adds a $\pi/2$ angle to the demodulation sinewave. It can be checked that the "quadrature" of D1 optimizes also the response to laser frequency noise.

In the "quadrature" of D1, and "phase" of D2 and D5, it can be checked that optimizing the signal-to-noise ratio at 100 Hz leads to demodulation phase angles very close to the ones that maximize the signal size (and also the shot noise level).

In the "phase" of D1, and "quadrature" of D2 and D5, the exact tuning of the demodulation angles can produce big changes on transfer functions amplitudes and phases, since the extinction of the defined signal varies a lot. It is not an issue for the transfer function considered in this note, since these transfer functions are not used.

The behaviour of the interferometer to either laser frequency noise or gravitational wave strain is not obvious for frequencies close to the free spectral range of the long arms. Contrary to their use in a Fabry-Perot, the sidebands are not stable references : they experience a recycling gain (35.6) slightly different from the one of the carrier (46.5). The sidebands experience both amplitude and phase change when detuned by a few 100's of Hz.

The JAJY programs first tunes the various cavities. The long Fabry-Perot are brought to resonance. The dark fringe is tuned so that the Michelson has a maximum reflection for the carrier, but due to the length asymmetry, the sidebands are partly transmitted. The recycling

cavity is tuned to have maximum gain for the carrier. Then JAJY optimizes the modulation frequency and the modulation index so that gravitational wave to shot noise ratio is maximum on the quadrature of D1. Then, it optimizes the demodulation phase to maximize the same signal to noise ratio at 100 Hz. Then, it computes the optimal demodulation angles on D2 and D5, for maximizing their response to a laser frequency noise. Then a transfer function, between either gravitational wave or laser frequency noise, and the demodulated and filtered current on the photodiode is computed. The -6 dB of the mixer, in the demodulation process, is taken into account.

The calculation of the shot noise in JAJY takes into account the fact that the noise is non stationary (cf. [4]). It can be checked that optimizing the signal to noise ratio maximizes also the noise level. The discrepancy with the calculation that takes into account only the DC current is particularly important on the D1 photodiode, due to the fact that the laser power on this photodiode is mainly due to the sidebands.

2.1.2 Comparison with a Matlab model

The JAJY program transfer functions, if the "signal" is the laser frequency noise, can be checked with the transfer functions computed by the "STF" program [5]. The comparison has been successful, both in the transfer functions phases and amplitudes (in W/Hz). Due to the definition of the Fourier transform used by JAJY model, the complex conjugate should be taken before any use of transfer functions. The transfer functions show slight mismatches for "quadrature" in D2 and D5 and "phase" in D1, due to small mismatching of demodulation angles (of the order of 1 mrad) leading to different extinctions of the signal.

2.1.3 Comparison with experimental data

The low frequency response of JAJY in the case of a simple Fabry-Perot cavity matches the well known Pound-Drever-Hall signal amplitude and shape. The response of a single Fabry-Perot cavity at f being equal to the free spectral range seems also to match the experimental data [6, 7].

2.1.4 First results of JAJY

With the parameters above, the best modulation frequencies are 6.263415 MHz and 18.659996 MHz, the modulation indices being 0.0661 and 0.0549.

For the 6.26 MHz modulation frequency, JAJY gives the following results, where $\theta_{\nu \to Di}$ notes the transfer function between frequency noise and demodulated, filtered current on diode Di, and $\theta_{h \to Di}$ notes the transfer function between a gravitational wave strain and demodulated, filtered current on diode Di:

photodiode	D1	D2	D5
DC power (watts)	0.0203	18.3	0.229
phase definition	Q	P	P
demodulation angle(rad)	2.436	0.176	0.977
shot noise ($W/\sqrt{Hz}$)	7.56×10^{-11}	1.85×10^{-9}	2.07×10^{-10}
$\theta_{\nu \to Di}(DC)$(W/Hz)	-4.55×10^{-4}	0.174	-1.28×10^{-3}
$\theta_{h \to Di}(DC)(W/unit)$	-3.44×10^{12}	6.06×10^{11}	-1.20×10^{10}

For the 18.66 MHz modulation frequency, results are:

photodiode	D1	D2	D5
DC power (watts)	0.0289	18.3	0.229
phase definition	Q	P	P
demodulation angle(rad)	0.695	0.319	2.609
shot noise ($W/\sqrt{Hz}$)	8.99×10^{-11}	1.85×10^{-9}	2.07×10^{-10}
$\theta_{\nu \to Di}(DC)(W/Hz)$	5.41×10^{-4}	4.04×10^{-2}	-5.18×10^{-4}
$\theta_{h \to Di}(DC)(W/unit)$	4.10×10^{12}	1.41×10^{11}	-4.84×10^{9}

Since

$$D1_Q = \alpha(h + \beta \frac{\delta\tilde{\nu}}{\nu_0}) \tag{3}$$

The effective β asymmetry can be compared with $\beta_{\mathcal{F}}$, the finesse asymmetry:

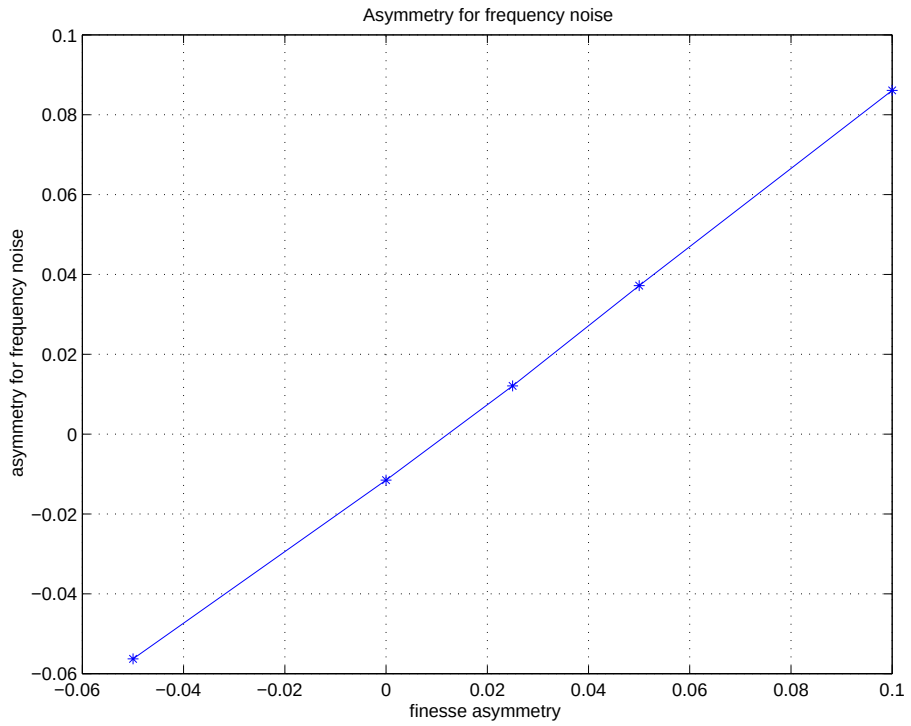


Figure 1: Effective asymmetry for frequency noise versus finesse asymmetry

From the figure 1, it is clear that the effective finesse is proportional to the finesse asymmetry, with an offset of 1.15 %, so that with a finesse asymmetry of 5 %, the effective asymmetry for frequency noise is 3.7 %.

2.2 Calculation of the laser frequency noise requirement

A simplified representation of the interferometer as concerns the laser frequency noise and stabilisation is:

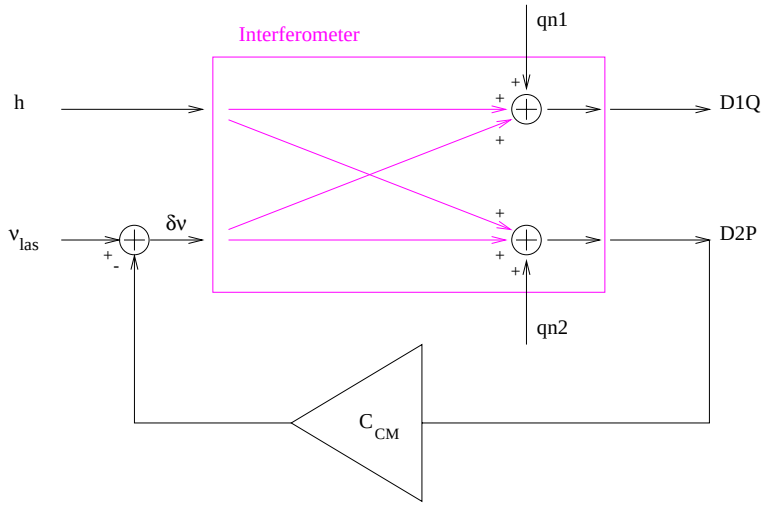


Figure 2: Model of the interferometer as concerns the laser frequency stabilisation and noise

In figure 2, the interferometer is described by two main input ports (gravitational wave strain and laser frequency noise) and two output ports, photodiodes D1 and D2. Four transfer functions are involved between laser frequency noise or gravitational wave strain and demodulated, filtered current on photodiodes D2 (in phase) and photodiode D1 (in quadrature). The q_{n1} and q_{n2} inputs represent the shot noise levels on the corresponding ports, for the optimized demodulating phases. The signal on photodiode D2 is fedback to the laser via the "common mode" corrector filter $C_{\rm CM}$, so that the pre-stabilized laser frequency noise $\nu_{\rm las}$ is reduced to the stabilized laser frequency noise δ_ν.

The open loop transfer function for the laser frequency stabilisation is:

$$G_{\rm CM} = C_{\rm CM}\theta_{\nu\to D2} \tag{4}$$

Simple alegra leads to:

$$s_{\rm D1} = \frac{\theta_{\nu\to D1}}{1+G_{\rm CM}}\left(\nu_{\rm las} + (1+G_{\rm CM})\frac{\theta_{h\to D1}}{\theta_{\nu\to D1}}(1-\kappa)h_{TN} + \frac{1+G_{\rm CM}}{\theta_{\nu\to D1}}q_{n1} - \frac{G_{\rm CM}}{\theta_{\nu\to D2}}q_{n2}\right) \tag{5}$$

where

$$\kappa = \frac{G_{\rm CM}}{1+G_{\rm CM}}\frac{\theta_{h\to D2}}{\theta_{h\to D1}}\frac{\theta_{\nu\to D1}}{\theta_{\nu\to D2}} \tag{6}$$

and h_{TN} is the thermal noise limit of the sensitivity of the interferometer, as described in [8].

If one uses the D5 photodiode instead of the D2 photodiode, all "2" subscripts should be switched to "5" subscripts.

So that the requirement on the prestabilized laser frequency noise is:

- $$|\nu_{\rm las}|^2 < \left|(1+G_{\rm CM})\frac{\theta_{h\to D1}}{\theta_{\nu\to D1}}(1-\kappa)h_{TN}\right|^2 + \left|\frac{1+G_{\rm CM}}{\theta_{\nu\to D1}}q_{n1}\right|^2 \quad (7)$$

- $$\left|\frac{G_{\rm CM}}{\theta_{\nu\to D2}}q_{n2}\right| \ll |\nu_{\rm las}| \quad (8)$$

2.3 Requirements for the stabilized laser frequency noise

One can express the $s_{\rm D1}$ signal as a function of the stabilized laser frequency noise $\delta\nu$, so that the open loop transfer function does not enter into account. One obtain then

$$|\delta\nu| < \left|\frac{\theta_{h\to D1}}{\theta_{\nu\to D1}}(h_{TN} + q_{n1}\frac{1}{\theta_{h\to D1}})\right| \quad (9)$$

If one plots the $(h_{TN} + q_{n1}\frac{1}{\theta_{h\to D1}})$ term, one will obtain a sensitivity curve higher than usual (see for example reference [8]) because the shot noise level on D1 was underestimated, it did not take into account the non-stationarity of the current.



Figure 3: Requirement on the stabilized laser frequency noise, effective asymmetry is 3.7 %, no margin. The pole of the recycling cavity at 10 Hz is naturally taken into account.

3 Design and requirement using D5 photodiode at 6 MHz

3.1 Design of the common mode servo loop

The amplitude of the transfer function between laser frequency noise and demodulated, filtered current on D5 photodiode is:

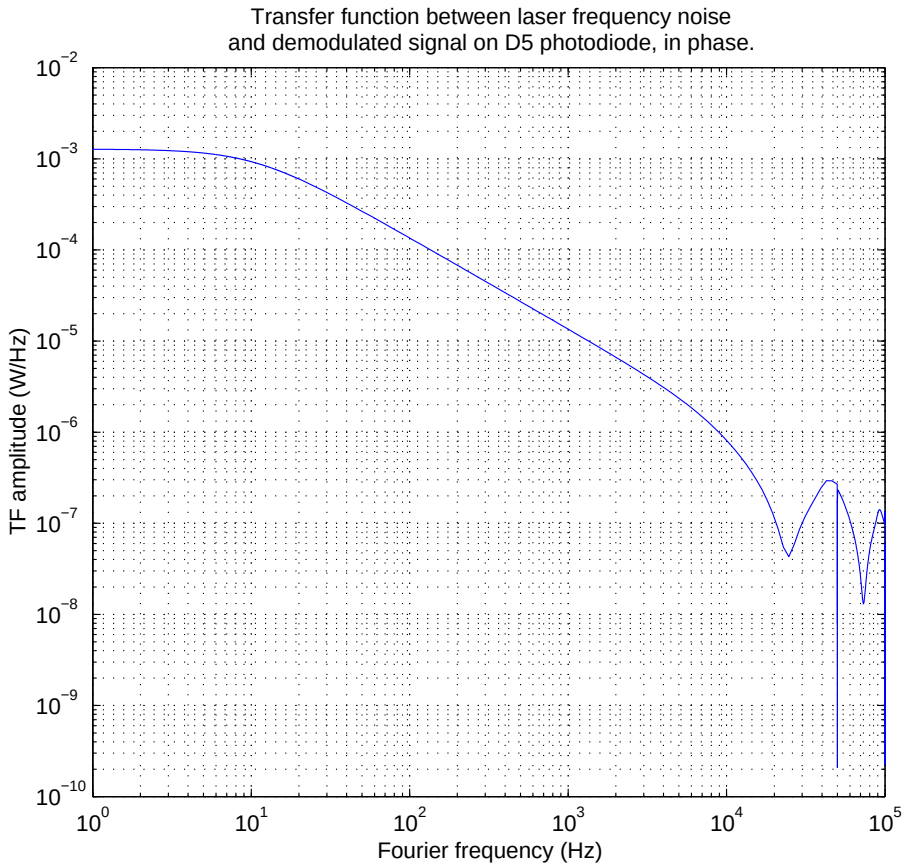


Figure 4: Amplitude of the transfer function.

In the figure 4, one sees the expected pole of the recycling cavity at 10 Hz (see [2] page 36):

$$f_{\mathrm{RC}} = \frac{f_{\mathrm{FP}}}{(1-\zeta_{\mathrm{FP}})\zeta_{\mathrm{FP}}} \frac{(1-\zeta_{\mathrm{RC}})}{G_{\mathrm{RC}}} \tag{10}$$

where $f_{\mathrm{FP}} = 500$ Hz is the pole of the long Fabry-Perot cavity, ζ_{FP} is close to -1 (they are well overcoupled), $\zeta_{\mathrm{RC}} = -0.709$ with the current set of parameters for the carrier (losses in the interferometer are low).

The transfer function has a deep notch at f equal to the free spectral range of the long arm. For frequencies close to half of the free spectral range, the transfer function shows up a notch; actually everything happens as if the transfer function was modulated by a sinewave of period

the free spectral range of the long arms. This effect is due to the sidebands in the recycling cavity:

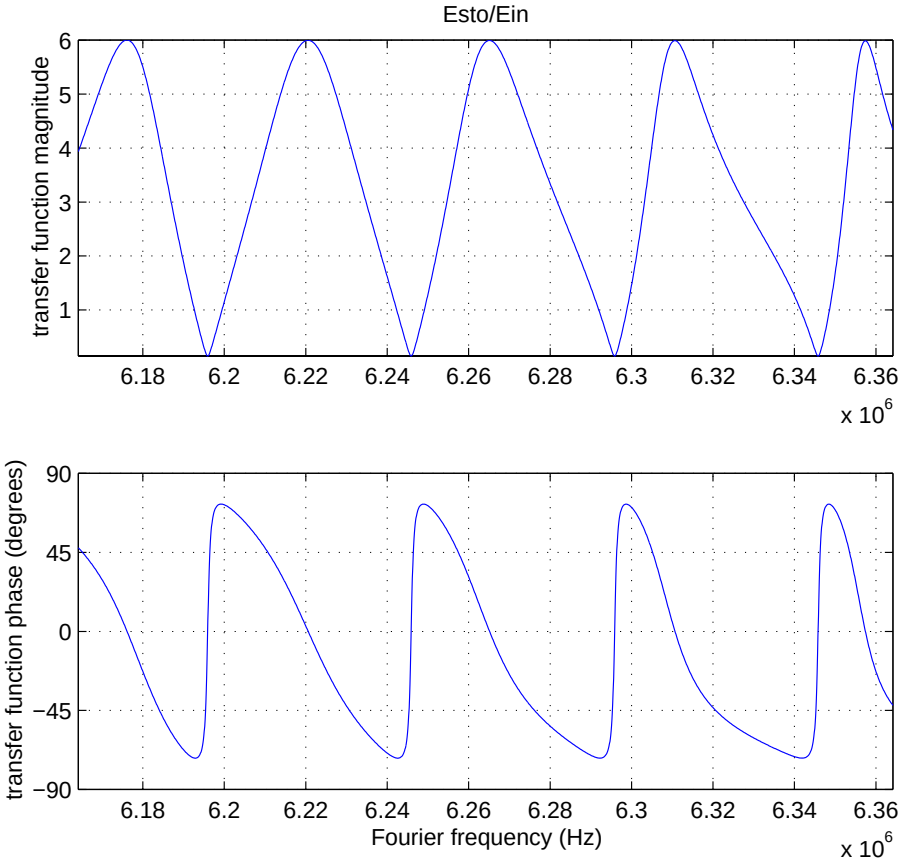


Figure 5: Transfer function between incident electrical field and electrical field inside the recycling cavity, for frequencies around the modulation frequency (computed by Stf).

The light that arrives on the D5 photodiode is the light in the recycling cavity, transmitted through the beamsplitter, reflected on the north arm. One might expect an additional pole at 500 Hz because of the reflection on the north arm; JAJY shows that this is not the case.

A corrector that optimizes open loop unity gain frequency and gain can be:

Poles		Zeroes	
frequency (Hz)	Q	frequency (Hz)	Q
10	5	6000	5
10	5	2000	5
30000	5	40000	5

So that the open loop transfer function, in the Nichols plot, looks like:

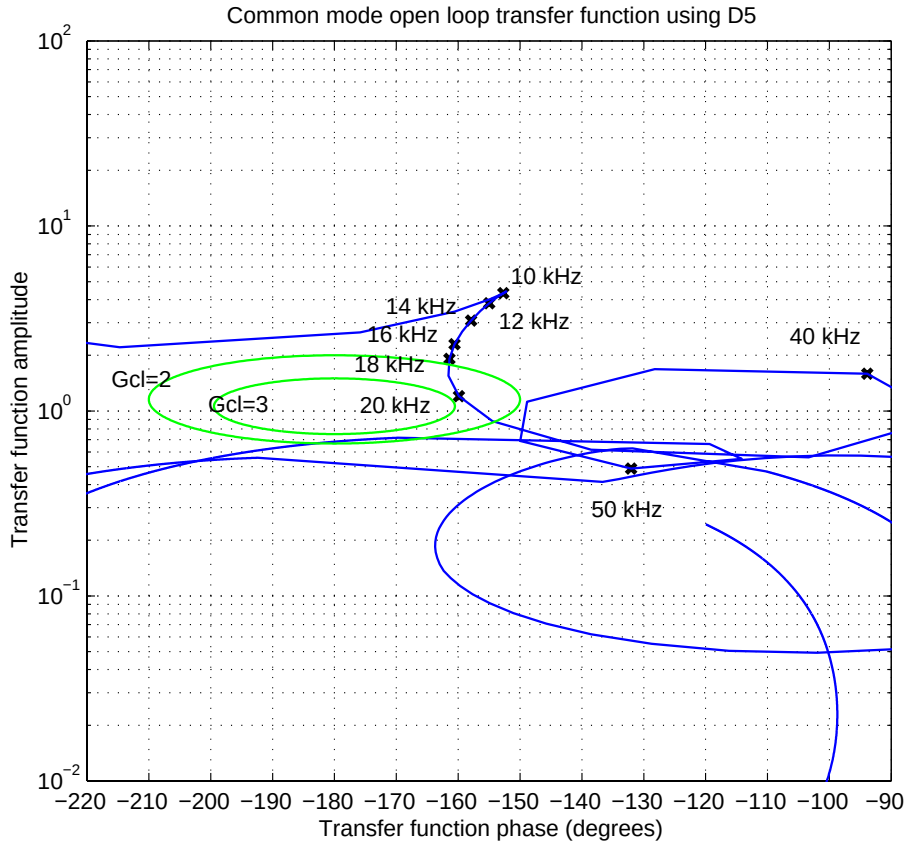


Figure 6: Open loop transfer function, zoom around the unity point. Some selected frequencies are displayed. The two green circles correspond to closed loop gain of 2 and 3.

The unity gain frequency is then 20.5 kHz, the gain margins are +2.5 (increasing)and 1.4 (decreasing), the phase margin is 20°. The bump size in closed loop is a factor of 3 at 20 kHz.

3.2 Requirement on laser frequency noise

Then the requirement on the laser frequency noise at the output of the mode cleaner, as given by equations 7 and 8 are:

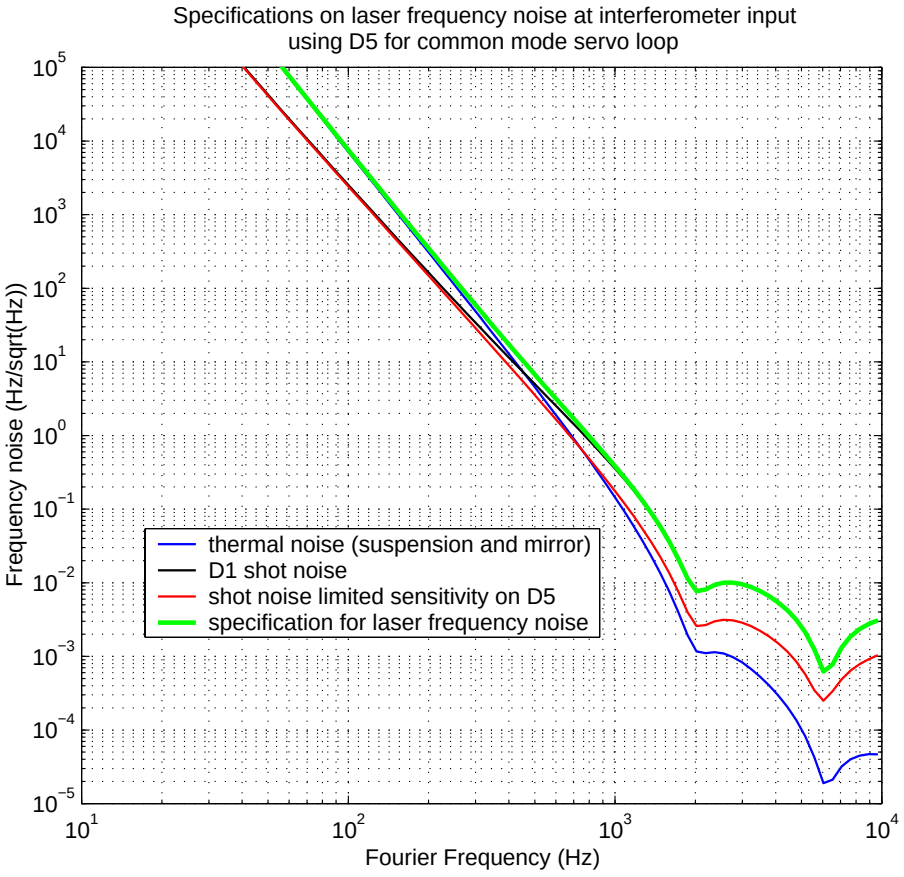


Figure 7: The blue curve is the D1 thermal noise contribution to laser frequency noise, whereas the black one is the D1 shot noise contribution. The green curve is the quadratic sum of these two contributions (blue and black). The red curve is the shot noise sensitivity of D5, using the 230 mW that should arrive on D5.

The laser frequency noise at the output of the mode cleaner should attain a sensitivity of $6 \times 10^{-4}\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ at 6 kHz ($3 \times 10^{-16}\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$). At 200 Hz, the shot noise sensitivity of D5 is only a factor of 2 away from the laser frequency stabilisation goal (without any margin).

4 Design and requirement using D2 photodiode at 6 MHz

4.1 Design of the common mode servo loop

The transfer function between laser frequency noise and demodulated, filtered current on D2 photodiode is:

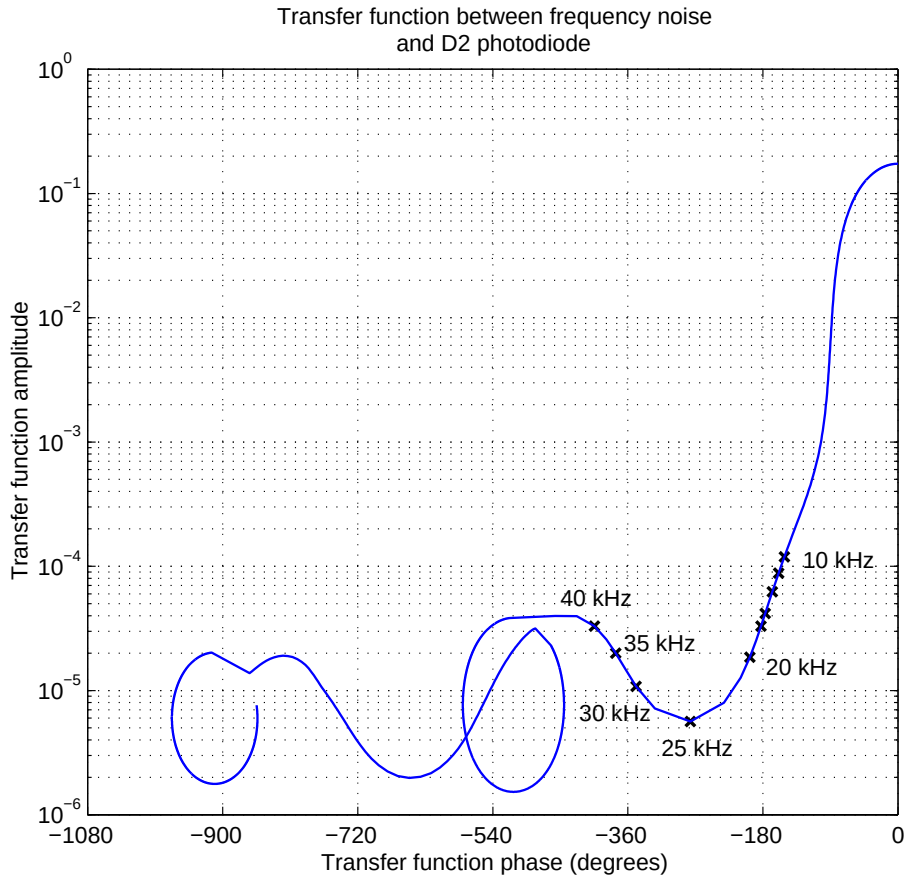


Figure 8: Transfer function between laser frequency noise and demodulated, filtered signal on D2 photodiode.

The $-140°$ dephasing at 10 kHz will make it difficult to obtain a very high unity gain. A corrector that optimizes open loop unity gain frequency and gain can be:

Poles		Zeroes	
frequency (Hz)	Q	frequency (Hz)	Q
10	2	3000	2
10	2	500	2
25000	10		

So that the open loop transfer function, in the Nichols plot, looks like:

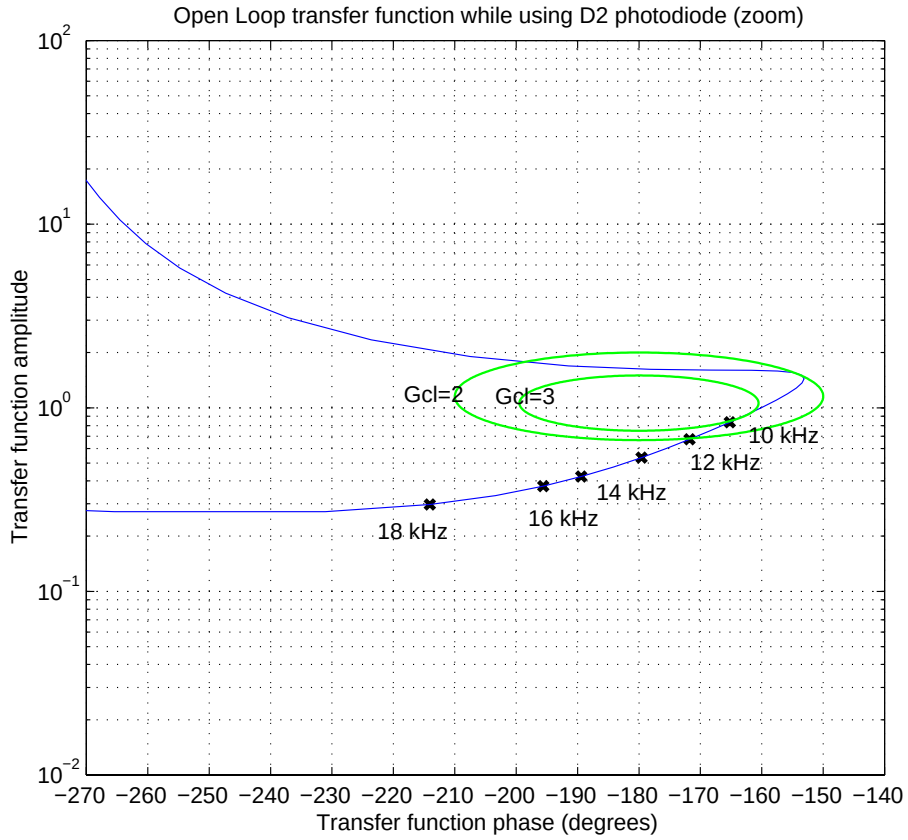


Figure 9: Open loop transfer function, zoom around the unity point. Some selected frequencies are displayed. The two green circles correspond to closed loop gain of 2 and 3.

The unity gain frequency is then 8.35 kHz, the gain margins are +1.6 (increasing)and 2 (decreasing), the phase margin is 20°. The bump size in closed loop is a factor of 3 at 10 kHz.

4.2 Requirement on laser frequency noise

Then the requirement on the laser frequency noise at the output of the mode cleaner, as given by equations 7 and 8 are:

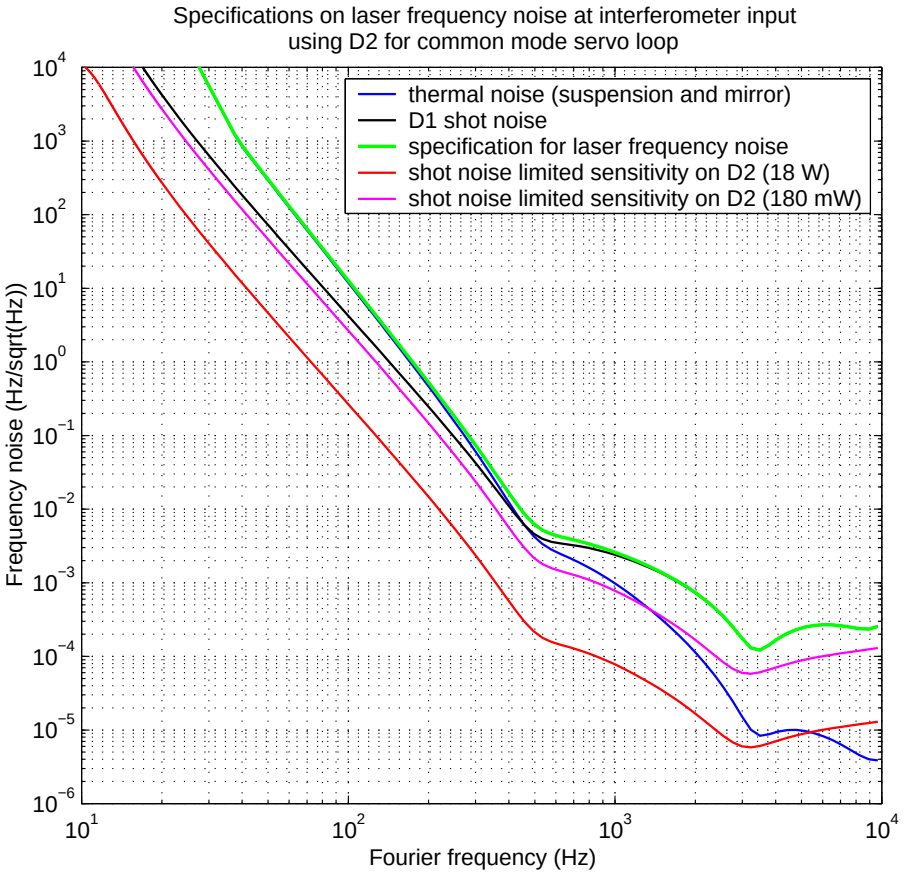


Figure 10: The blue curve is the D1 thermal noise contribution to laser frequency noise, whereas the black one is the D1 shot noise contribution. The green curve is the quadratic sum of these two contributions (blue and black). The red curve is the shot noise sensitivity of D2, using the full 18 W that should arrive on D2.

The laser frequency noise at the output of the mode cleaner should attain a sensitivity of $1 \times 10^{-4}\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ at 3 kHz ($5 \times 10^{-17}\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$). Of course, the reflected power is much to big to fit with the photodiode maximum current (200 mW). With a pick-up of 1 %, the shot noise limit sensitivity of D2 will be then close to the goal.

5 Design and requirement using D2 photodiode at 18 MHz

5.1 Design of the common mode servo loop

When using the 18.66 MHz modulation frequency, the behavior of the transfer function when using the D2 photodiode becomes different. Due to the Michelson length asymmetry, the transmission of the Michelson becomes greater than the transmission of the recycling mirror, so that, for the sidebands, the recycling cavity appears as under-coupled. The reflected field versus incident field transfer function does not experience dephasing anymore for the sidebands, so that the global transfer function has a nice looking :

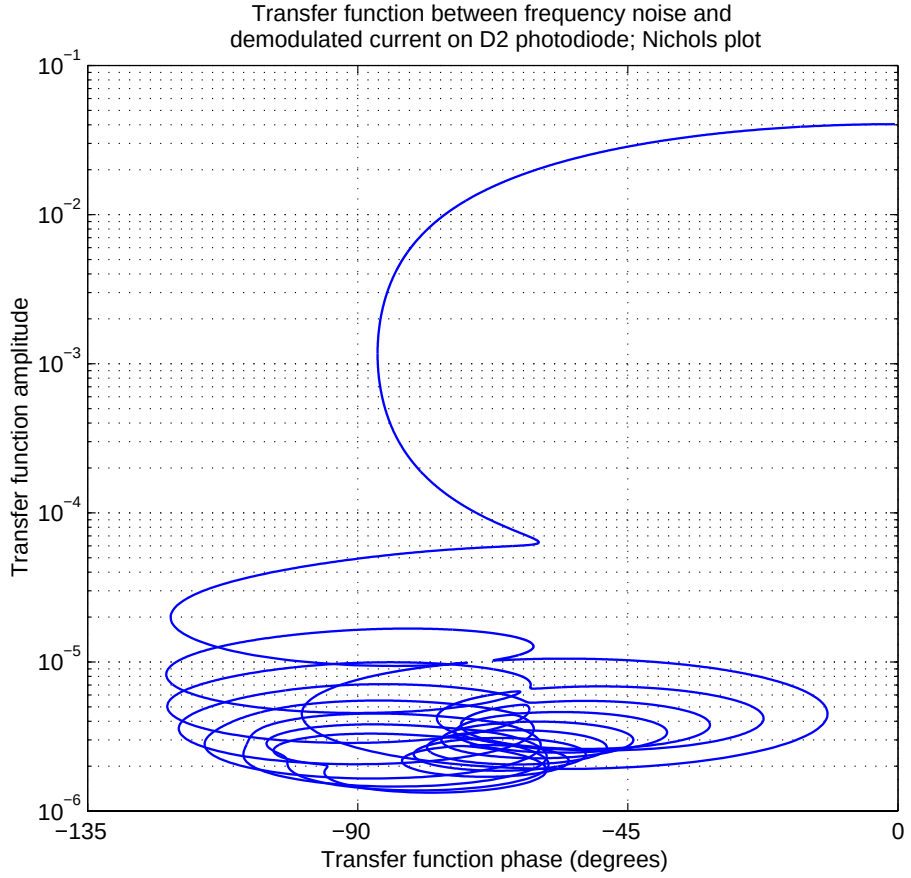


Figure 11: Transfer function for D2 photodiode up to 400 kHz. No crossing of the 180° at f multiple of FSR.

There is plenty of phase margin, so it is possible to build a loop with very high unity gain.

A possible corrector is:

Poles		Zeroes	
frequency (Hz)	Q	frequency (Hz)	Q
10	2	30000	2
10	2	20000	2
400000	0		

A quality factor of 0 means a simple pole in this table.

Then the open loop transfer function, in the Bode plot, is:

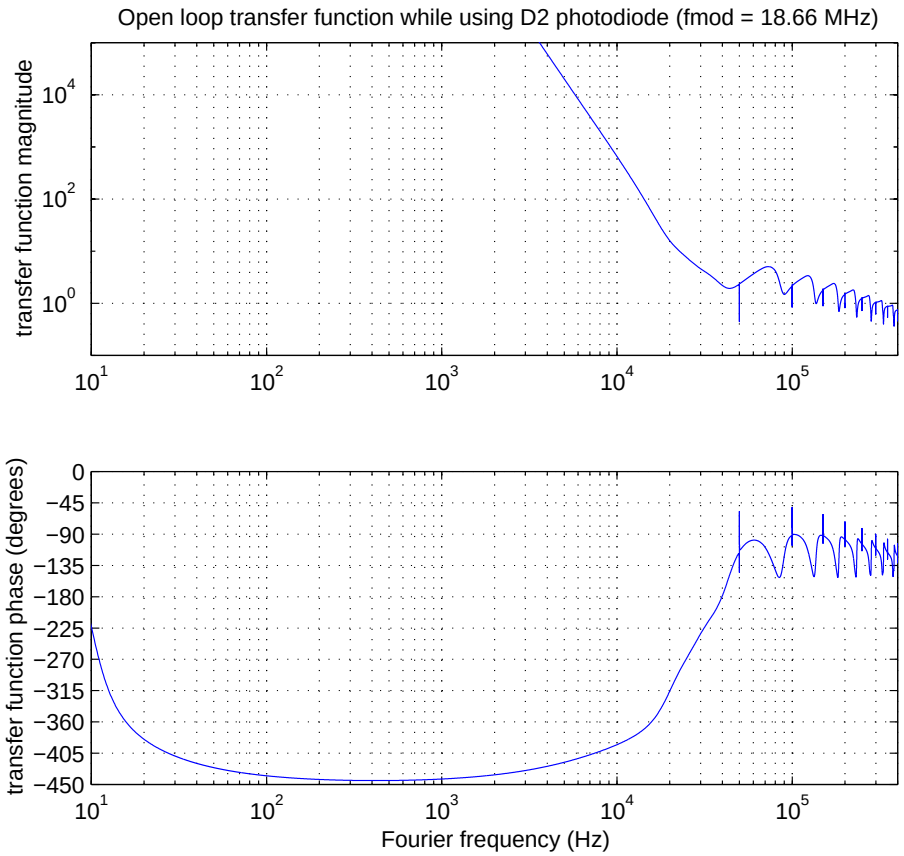


Figure 12: Open loop transfer function when using the D2 photodiodes

The unity gain is approximately 250 kHz (the unity gain is crossed several times). Phase margin is 30° and gain margin is 2.

5.2 Requirement on laser frequency noise

The loop gain at 10 kHz is about 1000, so the requirement on the laser frequency noise is much easier to obtain:

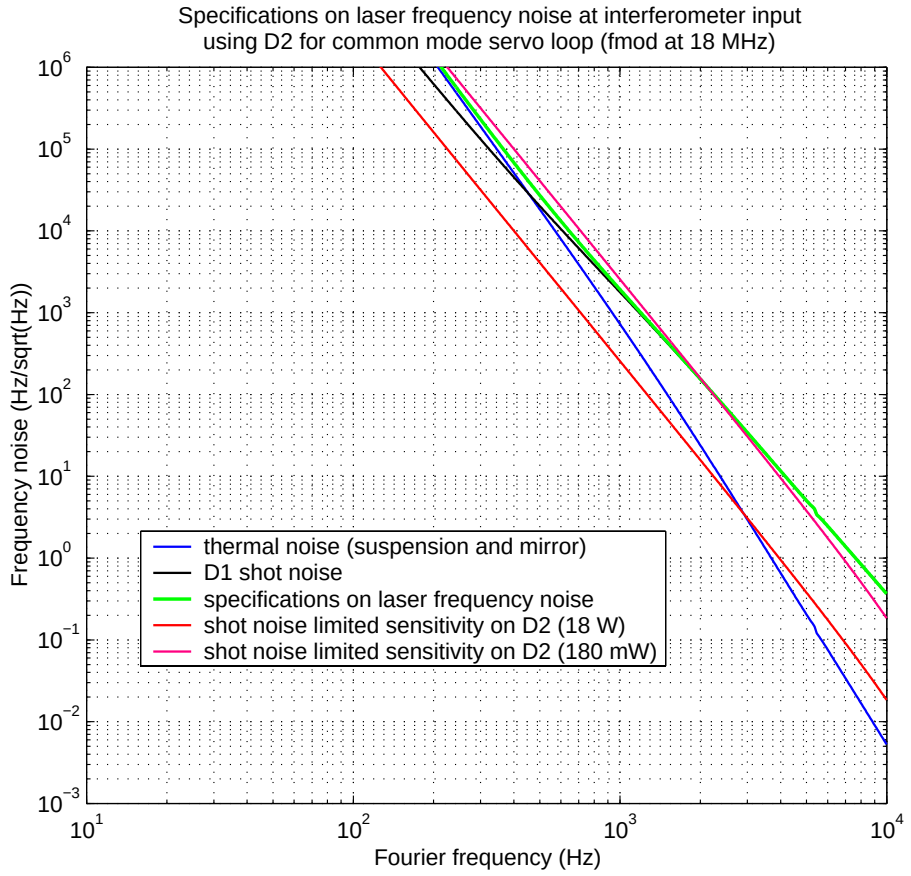


Figure 13: The blue curve is the D1 thermal noise contribution to laser frequency noise, whereas the black one is the D1 shot noise contribution. The green curve is the quadratic sum of these two contributions (blue and black). The red curve is the shot noise sensitivity of D2, using the full 18 W that should arrive on D2.

The problem of the big power arriving on D2 is the same : a pick-up mirror will have to be used if the losses in the interferometer are low, and the shot noise sensitivity of D2 will become close to the specification.

6 Discussion

6.1 About the interferometer model

The figure 2 is a simplified one. The conversion from thermal noise to h sensitivity is not exactly a number, but a transfer function. Since the thermal noise is visible up to 500 Hz, the approximation is good anyway. But some thermal noise may also limit the measurement resolution on the D2 or D5 photodiodes. A model that takes all inputs into account is:

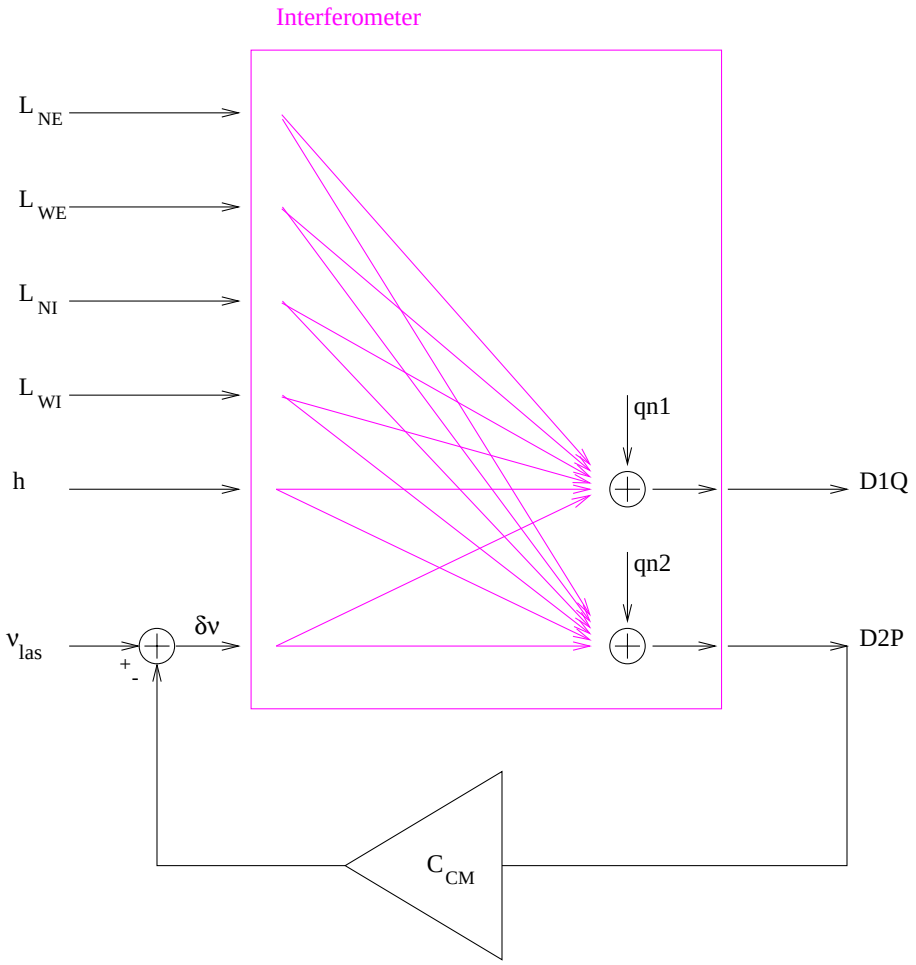


Figure 14: The interferometer has actually six main inputs: the four test masses, the gravitational wave strain and the laser frequency noise. There are transfer functions between all these inputs and the dark fringe and the channel used to stabilize the laser frequency.

The signal on the dark fringe is then:

$$s_{\mathrm{D1}} = \frac{\theta_{\nu\to D1}}{1+G_{\mathrm{CM}}}\nu_{\mathrm{las}} + \theta_{h\to D1}(1-\kappa_h)h + \theta_{Mi\to D1}(1-\kappa_{Mi})l_i + q_{n1} - \frac{G_{\mathrm{CM}}}{1+G_{\mathrm{CM}}}\frac{\theta_{\nu\to D1}}{\theta_{\nu\to D2}}q_{n2} \quad (11)$$

where $\theta_{Mi\to D1}(1-\kappa_{Mi})l_i$ is actually a sum on all four test masses, $\theta_{Mi\to D1}$ being $\theta_{NI\to D1}$ for the NI (north-input) mirror, $\theta_{WI\to D1}$ for the WI (west-input) mirror, $\theta_{NE\to D1}$ for the NE (north-

end) mirror, and $\theta_{WE\to D1}$ for the WE (west-end) mirror. κ_{Mi} is defined by:

$$\kappa_{Mi} = \frac{G_{\rm CM}}{1+G_{\rm CM}} \frac{\theta_{\nu\to D1}}{\theta_{\nu\to D2}} \frac{\theta_{Mi\to D2}}{\theta_{Mi\to D1}} \tag{12}$$

It is possible to check with JAJY that each κ_{MI} is much smaller than one at all frequencies, even at f=FSR.

It must be noted that $\theta_{h\to D1}$ is not exactly equal to $(-l_{NI}+l_{WI}+l_{NE}-l_{NW})/L_{\rm arm}$. Actually, each $\theta_{Mi\to D1}$ is slightly different by a few percent, as well as the sum.

On the contrary, $\theta_{\nu\to D2}$ is very close in DC (0.04% difference) to $(-l_{NI}+l_{WI}-l_{NE}+l_{NW})\nu_0/2L_{\rm arm}$, even if each individual transfer function differ from the others by a few percent. But the transfer functions have different poles, so the frequency response is differs: $\theta_{\nu\to D2}$ shows a pole at 10 Hz (and some more structure above 20 kHz), while $\theta_{l_+\to D2}$ displays a pole at 10 Hz and a zero at 500 Hz. But then the thermal noise contribution becomes negligible, so that the result is left unchanged (the κ_{Mi} are smaller than unity).

So the simplified model gives accurate numbers, at least up to a few percent.

6.2 transfer functions and parameter variation

The transfer function $\theta_{\nu\to D2}$ is left almost unchanged (variation less than a percent in amplitude and a few degrees in phase) while varying the modulation frequency by 500 Hz, the demodulation phase on D2 by 0.1 radian, the modulation index by 10 %, and the asymmetry changed from + 5 % to - 5 %. The biggest change comes from the change of loss level from 20 to 100 ppm per mirror, where the phase delay at 10 kHz is increased by 10 degrees.

The transfer function $\theta_{\nu\to D5}$ seems to be not sensitive to changed losses on the mirrors.

7 Conclusions

I have studied the different possibilities for the last stage of frequency stabilisation in Virgo and designed the correction filter to be used in different cases.

I propose that we use the signal on the D5 photodiode (demodulated at 6.22 MHz) to control the laser frequency fluctuations. This allows a larger unity gain frequency than the D2 photodiode, and reduces the requirements on the prestabilisation. I recommend anyway to design the frequency control system with enough flexibility, in order to allow for the use of different filters.

Increasing the finesse of the long arms would improve the filtering of the laser noise. In addition, the impedance matching would also be improved by increasing the finesse of the recycling cavity. That would improve both the sensitivity of Virgo and the shot noise in the frequency control loop. It requires the replacement of the initial PR mirror by a more reflective one; this improvement could take place after the measurement of the actual interferometer losses.

There is some introduction of the shot noise of photodiode D2 (or D5) on the dark fringe via the laser frequency stabilisation. The only way to cancel that effect is to improve the symmetrisation of the interferometer.

This study also shows that the frequency control loop would be much more effective if the modulation frequency was higher (18.66 MHz), but this advantage would be partially cancelled

by the improvement of the impedance matching and requires taking into account some other technical problems, like the noise of the input mode cleaner.

References

[1] C.N. Man and A. Brillet. Update on the requirements of the laser frequency prestabilization. Virgo note PJT 94036, 1994.

[2] F. Bondu. *Étude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1996.

[3] M. Barsuglia. *Stabilisation en Fréquence du laser et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus pour le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1999.

[4] The Virgo collaboration. The virgo physics book, vol. ii, optics and related topics. /www.virgo.infn.it/, documents, virgo physics book, vol. II., March 2002.

[5] F. Bondu. Simulation of transfer functions of virgo using matlab. /virgoDev/Stf, 2001. see /virgoDev/Stf/SimOptTF.htm for documentation.

[6] R. Savage. Measures on the ligo 4 km x arm. Personal communication, November 2002.

[7] F. Bondu. Measures on the virgo input mode cleaner, May 2001.

[8] G. Cagnoli, L. Gammaitoni, and J. Kovalik et al. The virgo sensitivity curve. Virgo Note VIR-NOT-PER-1390-51, 1999.

[9] R. Flaminio. Talk at Orsay, 1995.

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Transfer functions for the mirror-path of the interferometer frequency stabilization

Jean-Pierre Coulon

VIRGO ILGA

VIR-NOT-OCA-1390-233
Issue: 2
Date : May 5, 2003

EUROPEAN GRAVITATIONAL OBSERVATORY - VIRGO Project
Traversa H di Via Macerata, I-56021 Santo Stefano a Macerata - Cascina(PISA)
Secretariat: Telephone (39) 050 752 521 * FAX (39) 050 752 550

1 Introduction

We need to design a stable, robust open-loop transfer function $G(s)$. We have determined the bandwidth f_0 of the closed-loop transfer function, and a frequency transition domain around f_0. For noise-rejection reasons, we want $|G(s)|$ to be as high as possible for f below the transition domain, and as low as possible for f above this domain. Functions like s^{-1} or $s^{-1.5}$ are well below our demand.

In this study, I have assumed that all existing poles and zeros of the system to be controlled can be easily canceled out by the DSP. Therefore, I have studied a transfer-function intended to be simply closed on itself.

2 Choosing the form of the transfer function

For the sake of simplicity, we will assume that the specs about $|G(s)|$ below and above the transition domain are the inverse of each other, and that this transition domain is centered around f_0. We will also assume $f_0 = 1$, leaving this normalization problem to those who implement the transfer function in practice. In other words, the Bode plot is symetrical around the (1,1) point.

The $f > 1$ section of the plot is that of a low-pass filter, whose gain-module is close to 1 below $f = 1$, and drops drastically above the transition domain. The complete TRF can be obtained by cascading such a filter with the inverse of the highpass filter obtained by frequency-inversion.

$$G(s) = \frac{G_{lp}(s)}{G_{lp}(\frac{1}{s})} \tag{1}$$

An entire collection of filter families is available to meet the module-criteria of the low-pass filter alone (Butterworth, Chebyshev, elliptic, etc), but I am not aware of a family which takes stability-criteria into account. This implies taking the **phase** in account. Therefore I decided to design my own functions.

A compromise between Butterworth and Chebyshev functions, which drop as f^{-n} at high frequencies, and elliptic functions, which drop faster just above the transition frequency, but remain finite at high frequencies, was needed. Therefore the low-pass functions have one more pair of poles than pair of zeros. So far I have concentrated on these two low-pass functions:

$$G_{lp24}(s) = \frac{(1 + es^2)}{(1 + as + bs^2)(1 + cs + ds^2)} \tag{2}$$

and

$$G_{lp46}(s) = \frac{(1 + es^2)(1 + fs^2)}{(1 + as + bs^2)(1 + cs + ds^2)(1 + gs + hs^2)} \tag{3}$$

3 Goals of optimization

Besides the high attenuation above the transition domain, one can elect to meet either possible stability criterium:

- both the well-known gain- and phase-margin criteria,
- the fact that the module of the closed-loop gain must remain under a certain limit, e.g 1.5 or 2.

This closed-loop gain means either:

how the error signal reacts to a perturbation, i.e. $G_{CLe}(s) = \frac{1}{1+G(s)}$
or
how the system output reacts to this perturbation; i.e. $G_{CLs}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$

But in our case, both closed-loop gains correspond by frequency inversion, since G(s) does.

Straightforward calculations yield the correspondance between the first criterium, and $|G_{CLs}(s)|$ at the frequency where this criterium is checked:

phase margin	10^o	20	30	40	45	50	60	70	80
gain margin	1.2	1.5	2	2.5	3.41	4.27	7.46	17	66
$\|G_{CLs}(s)\|$	5.5	2.9	2	1.56	1.45	1.3	1.16	1.06	1.01

With either criterium, care must be exercised, so that the zeroes of the denominator of the closed-loop function keep a negative real part, to meet the general stability criterium, otherwise functions like s^{-5}, s^{-9}, s^{-13}, *etc.* would do the job wonderfully. In practice, I check that the phase visits a number of $[-180 : +180]$ domains consistent with the order of the function.

Once the stability criteria are set, I look for the set of coefficients that yield the highest attenuation above the transition domain.

4 Strategy of optimization

As far as I know, the mathematics that yields the coefficients of the elliptic functions is beyond the understanding of the average engineer, so that everybody obtains the coefficients from a "cookbook" when needed, rather than calculating them. Since our criteria are more sophisticated, I abandonned the idea of a rigourous mathematical optimization, and I chose a successive-approximation method. Using a gradient method is imposssible since the stablity criterium forbids some domains in the space of coefficients.

At the first iteration, I arbitrarily set the poles ot the low-pass function between 1 and the limit of the transition domain, and the zeroes slightly above this domain. I set the Q's of the poles at 1. I sweep the value of each coefficient between .5 and 2 times its initial value around

this value, in a geometric scale. There are as many "do loops" as there are coefficients. For example, the values of the coefficient a are:

$$a = (1+\eta)^{\frac{2i-n-1}{n-1}} \tag{4}$$

where $\eta = 1$, n is the number of steps, and i varies between 1 and n. n is always odd.

For each set of coefficients, the program sweeps the frequency in, and well above the transition domain, to check the stablity criteria, and to compute the worst attenuation above the transition domain.

The purpose of avoiding to be "trapped" by a local maximum would lead us to a very high number of sweep steps for each coefficient, but a compromise with the program execution-time must be found.

After each iteration, the program stores the set of coefficients that yield the highest attenutation. Then η is reduced by a factor of 2, reducing the sweep domain. This domain is centered around this best set, and the program attempts to find another set that provides a better attenuation, and so on till this works. If this fails, the program re-enlarges the sweep domain, in the hope to find a maximum that it previously missed. The program stops after 30 iterations.

5 Attempts to guarantee the real maximum

At this stage, there is no guarantee that the program was not induced into error by a local maximum. Therefore after the last iteration, the program prompts for a randomization coefficient x that will be used for the next series of iterations. η of the previous equation is replaced by ηx, where x is randomly distributed between $1-\epsilon$ and $1+\epsilon$, where ϵ is the chosen randomization factor.

This avoids doing the new series of iterations by visiting the same sets of coefficients, and gives a chance to discover a maximum that was previously missed.

Nevertheless some human judgment is required in order to "feel" that a maximum robust against the randomization has been reached. Memorizing the best set of coefficients after a given number of passes is not enough. (I call *pass* a series of *iterations* from some initial coefficients).

6 An example

This example was made with the **cross46.exe** programs that uses the $Glp46(s)$ function. The corresponding **cross24.exe** program exists for the other, simpler function $Glp24(s)$. The transition-domain width was set to 278, i.e. a domain from $1/\sqrt{278}$ to $\sqrt{278}$.

6.1 Gain and phase margin are the criteria:

An attenuation of about 1.300.000 is obtained with resp. 2 and 30°.

a	b	c	d	e	f	g	h
0.6989	0.778	.02493	.06117	1.705E-3	3.352E-03	.05224	.0163

The corresponding poles and zeroes of the complete function are:

zero frequency	Q
24.214	∞
17.272	∞
0.8820	1.262
0.2473	9.920
0.2285	14.023

pole frequency	Q
1.1338	1.2620
4.0433	9.9205
4.374912	14.023
.04129	∞
.057897	∞

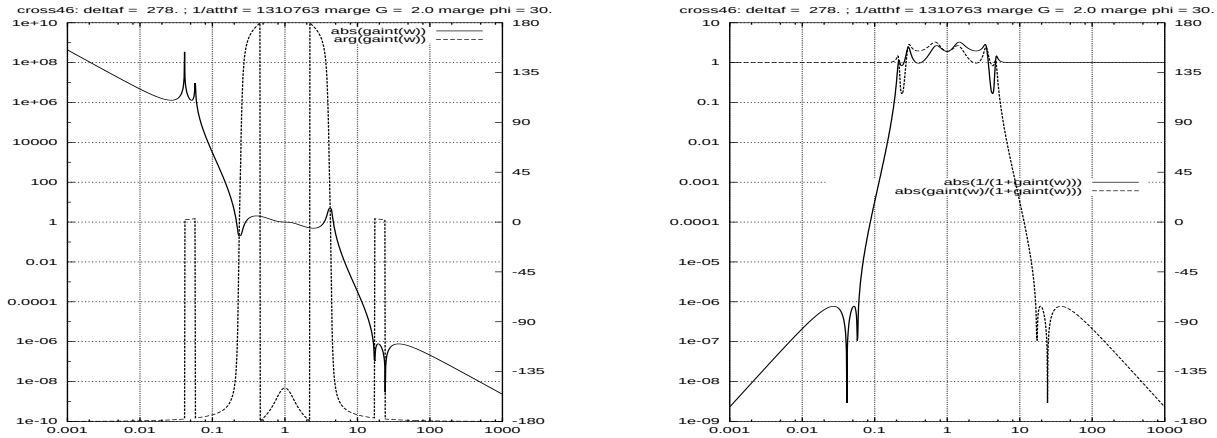


Figure 1: Modules of the low-pass, open-loop, and closed-loop functions

Intuitively, the fact that the obtained function "touches" our specified borders many times is a clue that we have found the "real" maximum (compare with the plot of an elliptic filter in a book about this topic).

Also note that the program attemps to benefit the lack of specs at frequencies other than those involved in the gain and phase margins. This results in close-loop modules higher than that of the table of section 3, i.e. a peak of 3 instead of 2 at some other frequencies.

This can also be seen after the shape of the Nichols plot in the center region. The somewhat concave form of this region corresponds to the higher closed-loop module.

6.2 Module of the closed-loop

An attenuation close to 440.000 was obtained for this module limited at 2. The coefficients are:

a	b	c	d	e	f	g	h
1.251	.49101	.0271763	.04179	1.714E-03	3.3573E-03	.04164	.06154

The corresponding poles and zeroes of the complete function are:

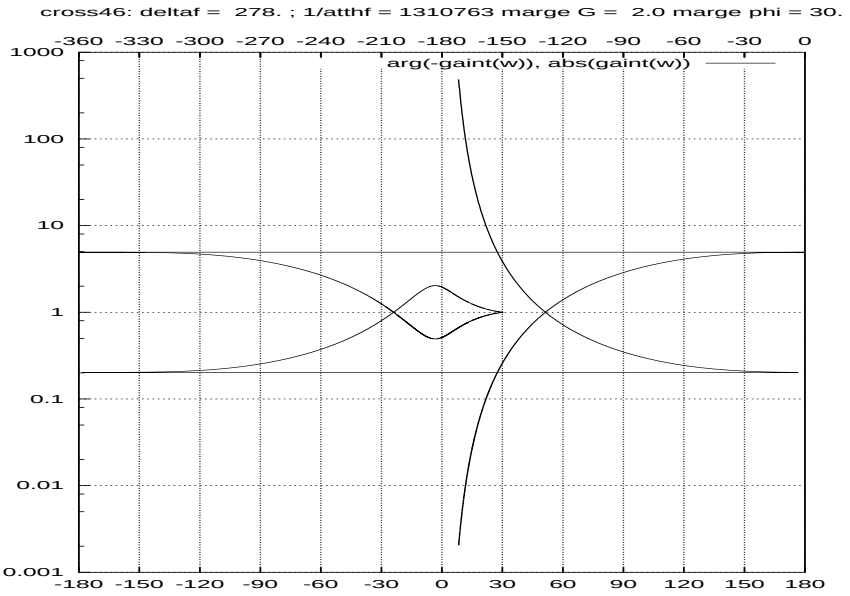


Figure 2: Nichols chart

zero frequency	Q
24.153	∞
17.258	∞
.7007	.5602
.2044	7.522
.2041	3.316

pole frequency	Q
1.427	.5602
4.892	7.522
4.9	3.316
.0414	∞
.05794	∞

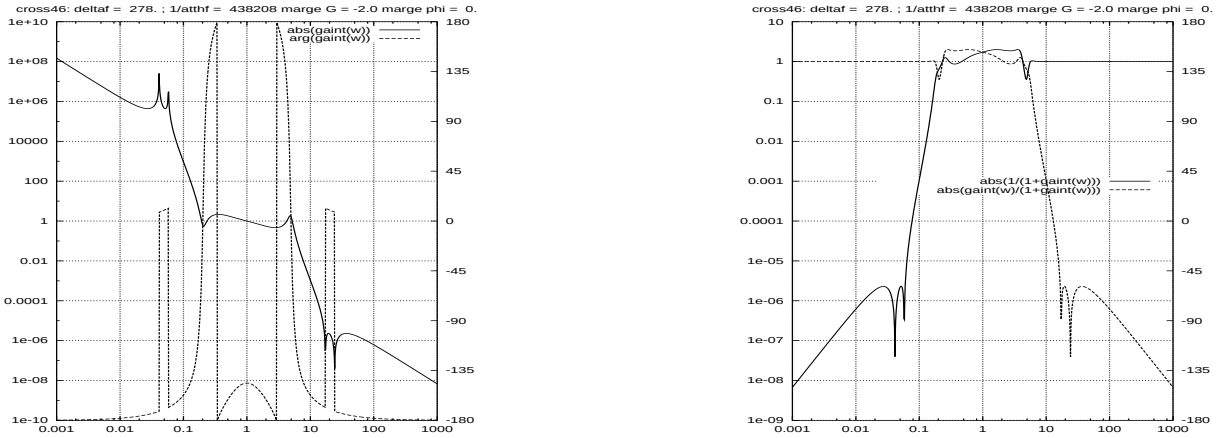


Figure 3: Modules of the low-pass, open-loop, and closed-loop functions

Notice how well the module remains close to its specified limit. But this is at the price of a lesser attenuation.

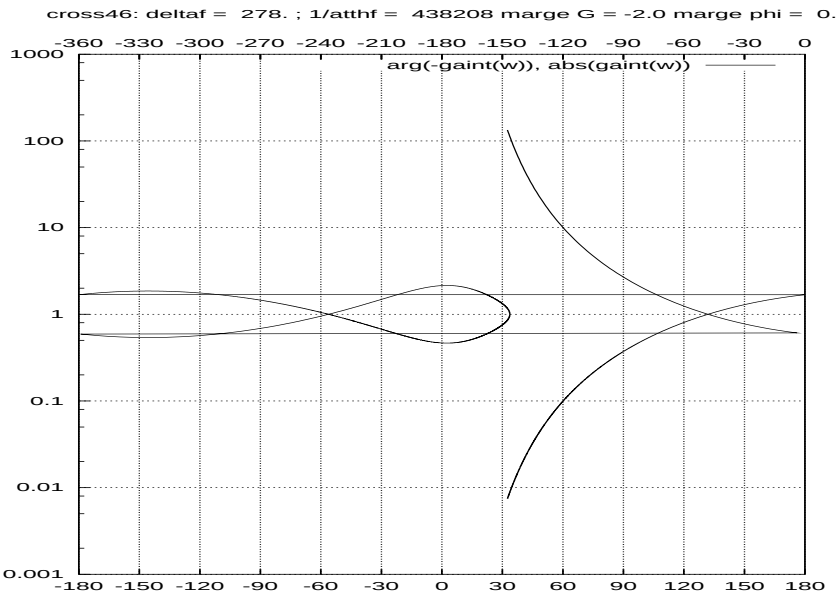


Figure 4: Nichols chart

7 Demonstration of the ability to find the "real" maximum

I also wrote a "demo" program **crossdbg.exe** which allows to evaluate the strategy, because the results are known in advance. The function to be optimized has two gaussian peaks in a 5-d space: the "right" one at point 8,7,6,5,4, and the "wrong" one at point 4,5,6,7,8, half as high as the "right" peak. The initial set of coefficients is intentionally set close to the "wrong" peak, in order to "challenge" the strategy. The "sigma" of both peaks can be adjusted.

It is found that the program works perfectly for $\sigma \approx 1$, but is trapped by the wrong peak for $\sigma \approx .1$. But if some more iterations are performed using the random feature, the program ends up finding the "right" peak. A more worrying trap with small $\sigma's$ is that when the program hits a point at say, 2/3 of the "right" peak at the first iteration by chance, it thinks it is the real maximum, because at the scale of space domain that has been explored, all other points have a negligible value, and the program fails to find a better point at the next iteration. Again, this can be overcome with the random feature of the program.

8 Conclusion

It may look strange that a computer program requires a bit of human intelligence from the user. I am aware of so-called *genetic algorithms* that push the use of randomization so far that they attempt to imitate the evolution of a specie of animals over huge periods of time, including *survival of the fittest* behaviours. But I did not go that far.

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Some issues with multiple servo loop systems

François BONDU

—

VIR-NOT-OCA-1390-234
Issue: 1
Date : June 24, 2003

VIRGO * A joint CNRS-INFN Project
Traversa H di Via Macerata, I-56021 S. Stefano a Macerata - Cascina (Pisa)
Secretariat: Telephone (39) 050 752 521 * FAX (39) 050 752 550

1 Introduction

This note explains the basics for understanding the note describing the laser frequency stabilization topology. In a system with multiple servo loops such as the frequency stabilization topology, several issues are raised:

- The system, usually designed by parts, should be globally stable.
- There is no unique expression of the global open loop transfer function. Usual concepts such as unity gain, gain and phase margins are not precise descriptions of the overall system.
- A bad design may make several loops to compete in the integration of offsets
- In a simple servo loop system, the open loop transfer function is the product of the sensor transfer function, corrector filter, actuator transfer function. In a complex system, a partial loop may involve the ratio of sensor transfer functions and no actuator, or the ratio of actuator transfer functions and no sensor.
- Some digital techniques can be used to benefit from optimal gain and phase margins and minimal noise re introduction.
- When switching from one configuration to another, the system must keep the lock.

These points will be demonstrated and illustrated in this note.

2 Global open loop transfer function in a compound system

I will show that in a compound system, the open loop transfer function does not have a unique expression. Of course, the physical system is unique, so the stability (the fact that the open loop transfer function does not have poles with positive real part) does not depend of the exact expression. I will show that usual concepts such as "unity gain", "phase and gain margin" are not uniquely defined. Among all possible presentations of the system, there is usually one that is more simple: a nested slow loop embedded in a fast one, so that it is possible to design both loops independently.

2.1 Example: laser frequency stabilisation with fast and slow loops

For illustration purposes, I assume a servo loop that stabilises a laser frequency with a fast and a slow servo loop. This model is very simple and does not require lots of study in practice. However, it allows to demonstrate that "open loop transfer function", "unity gain", "gain and phase margins" are not unique.

Let's assume a laser stabilised in frequency using a Fabry-Perot cavity as a reference, with the usual Pound-Drever-Hall technique:

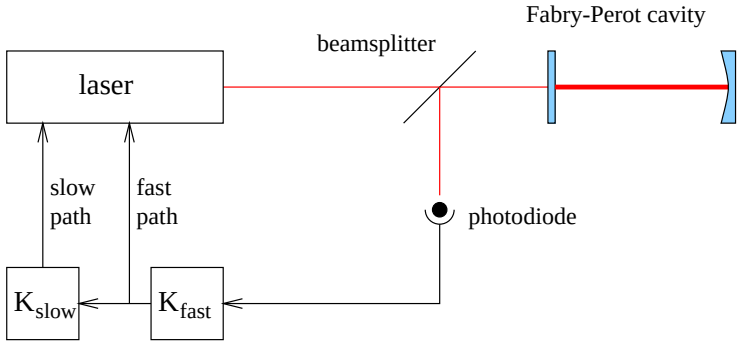


Figure 1: Laser stabilized in frequency on a Fabry-Perot cavity

A laser beam is sent to a Fabry-Perot cavity. The light in reflexion is collected on a photodiode. This photodiode produces an error signal using a modulation / demodulation process, not shown on this figure. The error signal is then filtered by a filter K_{fast}, and sent to a frequency actuator (laser cavity piezo). Since the excursion of this fast actuator is limited, the correction signal is integrated with filter K_{slow} and sent to a slow frequency corrector (laser slab temperature control).

The servo loop description of this system is:

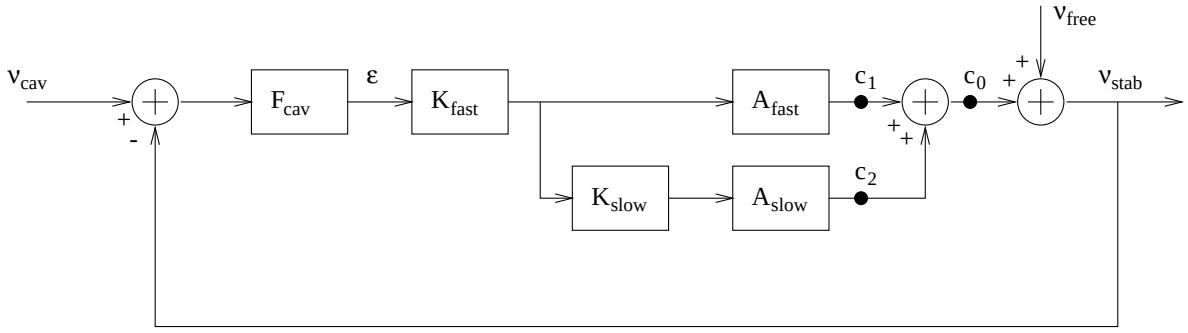


Figure 2: Servo loops related to the previous frequency stabilisation system

The cavity is a discriminator which compares the laser frequency with the cavity length. F_{cav} is the optical transfer function, translating frequency deviation into volts; it is proportional to the laser power, the cavity finesse, the photodiode optical efficiency, the photodiode preamp gain (amperes to volts conversion). This optical transfer function displays a pole equal to the half cavity linewidth (in Hz).

The error signal is sent to a filter, and the corresponding output (correction signal) sent to the fast actuator. The correction signal is filtered once more and sent to a slow actuator. The two frequency actuators correct for the laser natural frequency jitter ("free running laser frequency noise"), so that the stabilised laser frequency fluctuations follow the Fabry-Perot cavity.

The servo loop design consists in the definition of the two filters K_{fast} and K_{slow}.

At a first sight, it looks natural to define the fast and slow open loop transfer functions:

$$G_{\text{fast}} = F_{\text{cav}} K_{\text{fast}} A_{\text{fast}} \tag{1}$$

$$G_{\text{slow}} = F_{\text{cav}} K_{\text{fast}} K_{\text{slow}} A_{\text{slow}} \tag{2}$$

and the global open loop transfer function is:

$$G_{\text{T}} = G_{\text{fast}} + G_{\text{slow}} \tag{3}$$

2.2 Expression of the global open loop transfer function

In a complex system, the way to compute the open loop transfer function is to break one of the branches. Then the system is viewed as:

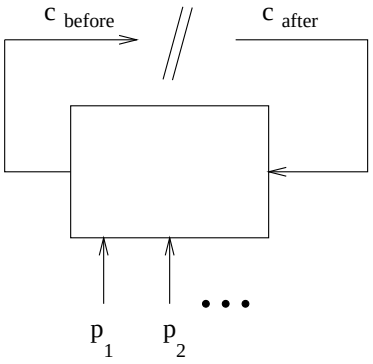


Figure 3: A compound servo system broken on signal c

The signal c_{before} can be expressed as a linear combination of perturbation inputs p_i and of the signal c_{after}:

$$c_{\text{before}} = -G_T c_{\text{after}} + \sum_i p_i G_i \tag{4}$$

and G_T is, by definition, the open loop transfer function (related to signal c).

In the simple system described in figure 2, it looks weird to break the system in points c_1 or c_2, but let's do it anyway. We obtain two new expressions of the open loop transfer function:

$$G_{\text{T,fast}} = \frac{G_{\text{fast}}}{1 + G_{\text{slow}}} \tag{5}$$

$$G_{\text{T,slow}} = \frac{G_{\text{slow}}}{1 + G_{\text{fast}}} \tag{6}$$

And since the system is designed to be physically stable, one deduces the theorem:

If G_{T} is stable, then $G_{\text{T,fast}}$ and $G_{\text{T,slow}}$ are stable.

This theorem applies with all permutations of G_{T}, $G_{\text{T,fast}}$ and $G_{\text{T,slow}}$.

2.3 Redefinition of the nested slow servo loop

It does not look easy to design the two loops at the same time, so that the compound system is stable.

The fast part of the servo loop G_{fast} can be designed alone, and the system can remain stable for long slices of time, as long as the correction signal is not saturating. Then the filter K_{fast} is designed taking into account the sensor F_{cav} and the actuator A_{fast}, so that, for example, the unity gain is as high as possible.

Then the equation 2 suggests to factorize G_{fast} in G_{slow}: the slow loop as G'_{slow} is redefined such that:

$$G_{\text{slow}} = G_{\text{fast}} G'_{\text{slow}} \tag{7}$$

and then:

$$G'_{\text{slow}} = K_{\text{slow}} \frac{A_{\text{slow}}}{A_{\text{fast}}} \tag{8}$$

The (partial) open loop transfer function G'_{slow} does not show up in any sensor transfer function. The filter K_{slow} is designed taking into account the ratio of the two actuators transfer function. The unity gain of G'_{slow} has a physical meaning: this is the crossover frequency between the fast and slow frequency correction.

Then the global open loop transfer function looks like:

$$G_{\text{T}} = G_{\text{fast}}(1 + G'_{\text{slow}}) \tag{9}$$

The slow loop is embedded in the expression of the global transfer function.

For frequencies below the unity gain of the slow loop, the loop gain is the product of both loops.

For frequencies above the unity gain of the slow loop, but below the unity gain of the fast loop, the module of $(1 + G'_{\text{slow}})$ is one. It can be checked on examples that its phase is close to zero if G'_{slow} is stable, but a multiple of $-360°$ otherwise. This property can probably be demonstrated mathematically. Then, the slow loop does not add phase to the fast one for high frequencies if it is designed to be stable: the stability of the global loop is determined by the stability of the two individual loops G_{fast} and G'_{slow}.

This property, though not demonstrated here, can be checked on examples and has been checked on the loops used for the laser frequency stabilization.

2.4 Unity gain, gain and phase margins

The two sub-loops G_{fast} and G'_{slow} are designed independently and have their own unity gains, phase and gain margins.

If one considers the global open loop transfer functions G_{T} or $G_{\text{T,fast}}$, their unity gain, gain and phase margins will be roughly that of G_{fast}. If one considers $G_{\text{T,slow}}$, its unity gain, gain and phase margins will be roughly the ones of G_{slow}.

3 Servo loop with two paths using the same error signal

When a loop uses two different paths, instead of having the topology of figure 2, it looks like a possibility to split the error signal:

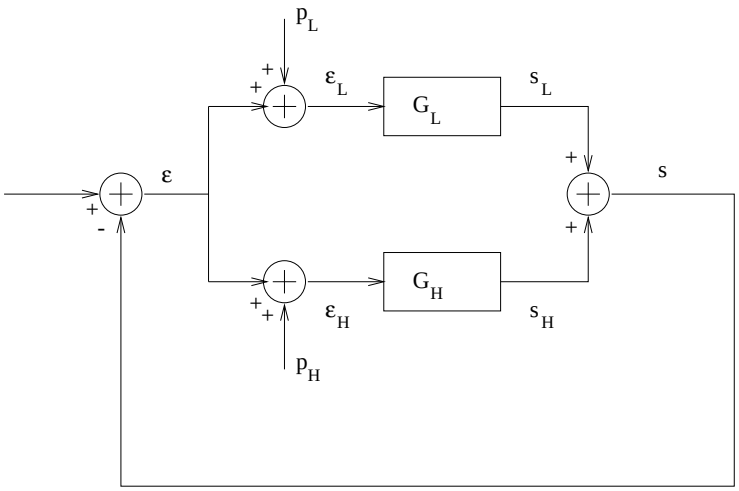


Figure 4: Two servo loops using the same error signal

If at least one of the loops is analog, it is impossible to avoid that an offset, even infinitesimal, develops. p_L and p_H represent these offsets. G_L is the low frequency path, while G_H is the high frequency one.

The design has to take into account:

- G_H should be stable when it crosses its unity gain (at high frequency)
- The crossover between G_H and G_L should be stable

There is actually an other hidden condition. It is easy to check that at DC, since $G_L > G_H$,

$$s_L \sim G_H(p_L - p_H) \tag{10}$$

$$s_H \sim G_H(p_H - p_L) \tag{11}$$

So there is an other constraint: G_H should not have gain at DC, otherwise the correction signals will diverge.

So it is better to design a two path servo loop with a topology like the one in figure 2.

4 D. Pasuello's virtual machine and J.-P. Coulon's filters

4.1 Issue with noise on error signal

Assume that one has to stabilize a system $S = AF$ (A is the actuator transfer function and F is the sensor transfer function) with a high unity gain frequency.

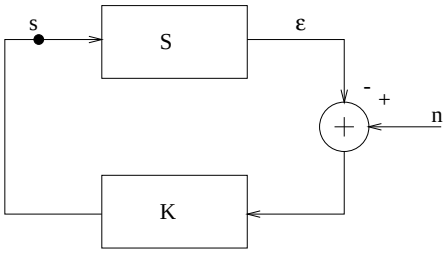


Figure 5: A simple servo system with noise on the error signal. ε is the error signal, s the correction signal.

One has to design a corrector K so that the open loop transfer function $G = KS$ has good gain and phase margins. If the actuator has a resonant pole (the last stage of a suspension for example), and the unity gain is higher than the pole frequency, then the corrector needs to have a slope in f^p around unity gain, where $p > 0$. Then any noise n on the error signal (shot noise, electronic noise, digitisation noise,...) is amplified by the corrector K at frequencies around the unity gain, and this can saturate the correction signal $s = \frac{K}{1+G}n$.

4.2 D. Pasuello's virtual machine

Diego has suggested to use, in a DSP, a model of the system to be compensated together with low pass and pass filters:

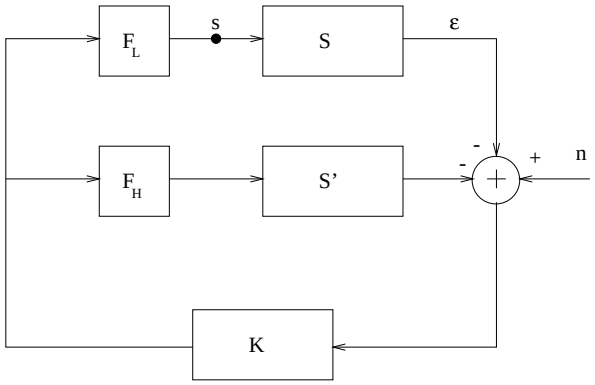


Figure 6: An other way to compensate a system S. F_L and F_H are low-pass and high-pass filters. All boxes K, F_L, F_H and S' are implemented in a DSP.

The corrector filter K is designed so that the open loop transfer function $G = KS$ has a high unity gain f_K. The crossover frequency between the low-pass and high-pass filters is a

lower frequency f_S.

Let's assume that the discrepancy between the simulated system S' and the real one S is

$$\Delta S = \frac{S'}{S} \tag{12}$$

and that the function ΔS is close to one.

From the point of view of the input of the corrector filter K, the open loop transfer function is:

$$G_{T,K} = G(F_L + F_H \Delta S) \tag{13}$$

So that the unity gain is f_K, the one of the open loop transfer function G, if F_H is defined as $F_H = 1 - F_L$ and ΔS is close to one.

From the point of view of the real system S, the open loop transfer function is:

$$G_{T,S} = \frac{F_L G}{1 + F_H G \Delta S} \tag{14}$$

If the filters crossover frequency f_S is much lower than the "virtual" unity gain f_K, then an approximate expression of the open loop transfer function is

$$G_{T,S} \sim \frac{F_L}{F_H \Delta S} \tag{15}$$

So that if ΔS is close to one, the unity gain, gain and phase margins are determined by $\frac{F_L}{F_H}$.

4.3 Using J.P. Coulon's filters as low and high pass filters

One way to have the best filtering properties on the real correction signal, along with given phase and gain margins, is to use J.-P. Coulon's filters $F_L = G_L(s)$ and $F_H = G_L(1/s)$, since there are designed especially for that purpose [1].

Then, for example, with a virtual unity gain f_K of 10 Hz, a real unity gain f_S of 1 Hz, the attenuation of noise re-injection can be about 5000 at $f = f_K$.

4.4 Using Butterworth's filters as low and high pass filters

If one takes a Butterworth filter for example for F_L, and $F_H = 1 - F_L$, one can check that the gain margin is 2 and phase margin is about 60 degrees:

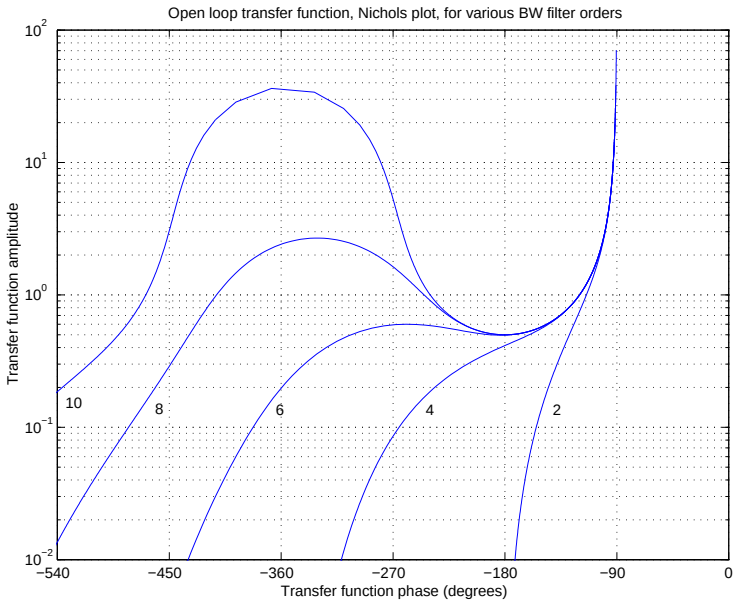


Figure 7: Using Butterworth filters makes a stable solution, but does not give optimal gain and phase margins.

The filtering improves with the filter order, though it does not attain the performances of Coulon's filters. If the filter order is too high (higher than 10), then $\frac{F_L}{F_H}$ shows up a gain oscillation at a frequency higher than the crossover frequency. This gain oscillation is not unstable, but will reintroduce the noise one was trying to avoid.

4.5 Inexact system modelling

If the system has a pole with a high Q, it may be difficult to measure accurately its frequency and Q, and these parameters may vary with time.

Actually, this is not a problem: the function ΔS does not need to be strictly equal to one.

One can model a pole with an other one, with a frequency and Q slightly different. The design just need to check that

$$G_{T,S} \sim \frac{G_L(s)}{G_H(s)\Delta S} \tag{16}$$

is stable.

5 Transition between two error signals

Here is evaluated the stability issue when one switches between two different error signals. An example could be the transition between local and global control.

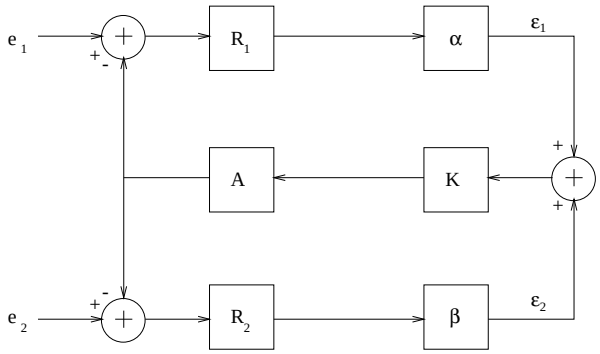


Figure 8: Example of a system switching between two error signals. α, β are digital gains, K is a digital filter.

Two different error signals e_1, e_2 and a unique actuator are used. The sensors R_1 and R_2 have similar behaviour, so that a unique corrector K makes both loops $G_1 = R_1KA$ and $G_2 = R_2KA$ stable.

The transition is done with α taking values from 1 to 0 continuously, while $\beta = 1 - \alpha$.

The global system $G_T = \alpha G_1 + (1 - \alpha)G_2$ is stable if the two loops have the same unity gain. This can be demonstrated graphically in the Nichols plot: whatever the value of α, the unity gain is the same and the phase margin varies between the phase margin of G_1 and the phase margin of G_2.

If G_1 and G_2 have different unity gain, no general conclusion can be drawn.

Little calculations show that is it a bad idea to switch between correction signals: if the open loop gain is gain is high at low frequencies, then the individual correction signals s_1 and s_2 will diverge (while their sum $s_1 + s_2$ is still the normal expected correction signal).

Though the conclusions given in this paragraph are all obvious, the situation is different in more complex systems.

6 Conclusions

- In a system with two paths (fast and slow, or acting on mirror and stabilizing the frequency), it is better not to split the error signal, but to use the correction signal of the fast loop as an error signal for the slow path. This avoids unnecessary constraints.
- In a multiple loop system, a redefinition of sub-loops, where fast loops are factorized, makes the design easier: the partial loops can be designed independently, and the stability of the global loop is guaranteed as long as the individual unity gains are quite different.
- In a compound system, unity gain, gain and phase margins are related to a signal.

- The D. Pasuello's virtual machine allows to cancel extra noise in the correction signal. the best results are obtained by using D.Pasuello's virtual machine, with Coulon's filters for the low pass/ high pass distribution.
- When switching from one configuration to another, if the transition is not abrupt, then the transient open loop transfer function should be stable.

References

[1] J.-P. Coulon. Transfer functions for the mirror path of the interferometer frequency stabilisation. Virgo note VIR-NOT-OCA-4100-233, 2003.

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Laser Frequency Stabilization Topology

François BONDU and Matteo BARSUGLIA

VIR-NOT-OCA-1390-247
Issue: 1
Date : June 24, 2003

EUROPEAN GRAVITATIONAL OBSERVATORY - VIRGO Project
Traversa H di Via Macerata, 56021 S. Stefano a Macerata - Cascina (PISA), ITALY
Secretariat: Telephone (39) 050 752 521 * FAX (39) 050 752 550

1 Introduction

The goal of this document is to describe a reference solution for the stabilisation of the laser frequency. The laser frequency stabilisation involves a reference cavity (RFC), an input mode-cleaner (IMC), the common mode of the interferometer (L+) (average length of the two kilometric arms), a first stage of frequency stabilisation and a second stage of frequency stabilisation. All these loops should be stable and compatible with one another.

The main issues for the whole system were pointed out in the Virgo proposal [1]:

- limited unity gain on the servo loop stabilizing the laser frequency on the interferometer common mode
- because of this limited bandwidth, two stages are necessary for reducing the free-running laser frequency noise
- question of bandwidth for the lock of long arm end mirrors
- a choice has to be done between correction with a dedicated actuator after input Mode-Cleaner ([1], section 3.1.3.1) and electronic addition of error signals ([1], section 3.3.1.3.3).

However, since then, some choices have been done, some points clarified, and some new issues raised.

- The behavior of transfer function between frequency noise and demodulated signal on B5 (or B2) photodiodes is known (thanks to a Matlab model [2] and the JAJY FORTRAN program [3], designed according to the principles described in [4]). A possible design of a servo loop has been done [5], where the unity gain frequency is 20.5 kHz.
- The choice of avoiding a frequency modulator after the Mode-Cleaner has been done, leading to the electronic addition of error signal. This technique of electronic addition of error signals has been experimentally demonstrated in other gravitational wave detectors. The advantages is to limit the number of optics, and to avoid the issue about frequency corrector excursion.
- M. Barsuglia [6] showed a difficult issue on the lock of the end mirrors: the gain at the suspension last stage resonant frequency must be very high, and very small at the opening of the gravitational wave detection window (10 Hz). Following an idea from D. Pasuello, J.P. Coulon has developed a FORTRAN program that designs very efficient filters, with guaranteed gain and phase margins [7, 8].
- The set of the servo loops should be stable.
- The set of the loops should be feasible, a sequence of possible operations to acquire lock has to be defined.
- The requirements on the various noises that enter the system should be feasible.

This note presents an update of a reference solution, taking into account the issues raised above. This is not a systematic study of all possible topologies.

The need for frequency stabilization comes from the interferometer asymmetry [1]. Accordingly, a change of the recycling cavity filtering properties (an increase of the recycling gain will decrease the pole of the recycling cavity) and / or some active control of the interferometer asymmetry could relax the constraints on the servo loops, maybe leading to make some of them unnecessary.

This notes describes the whole topology setup and gives the equations. It then describes the design of the various servo loops. This document gives then the requirements on various noise sources. It defines the lock acquisition sequence.

2 Setup

2.1 Setup description

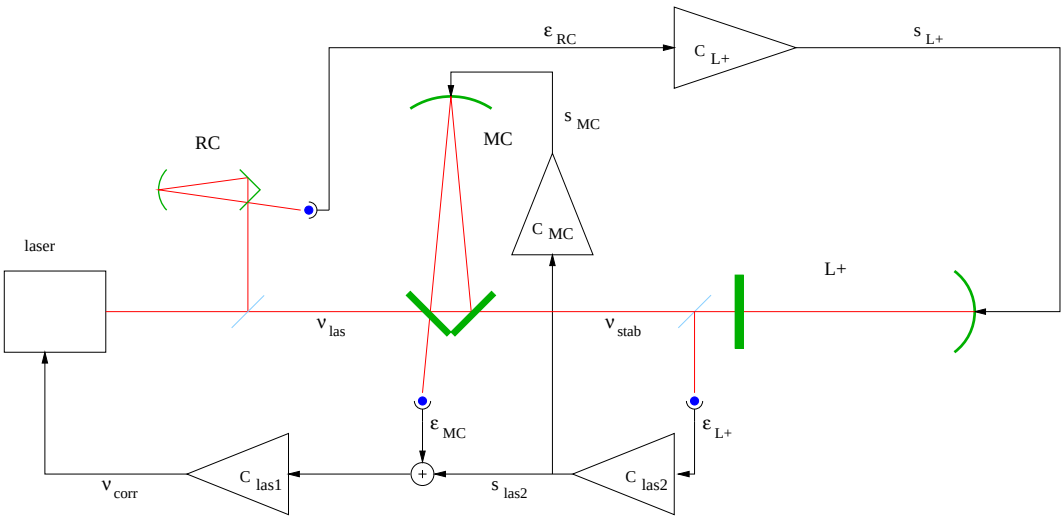


Figure 1: Setup of all servo loops.

The laser frequency is pre-stabilised using the input mode-cleaner as a reference. The second stage of frequency stabilisation is done using the interferometer common mode, measured on B5 (B2) photodiode. The input Mode-Cleaner is kept resonant using the second stage of frequency stabilisation correction signal as an error signal. The resonance of the suspension last stage is killed using the reference cavity as an error signal.

2.2 Servo loop system

The servo loop system corresponding to figure 1 is:

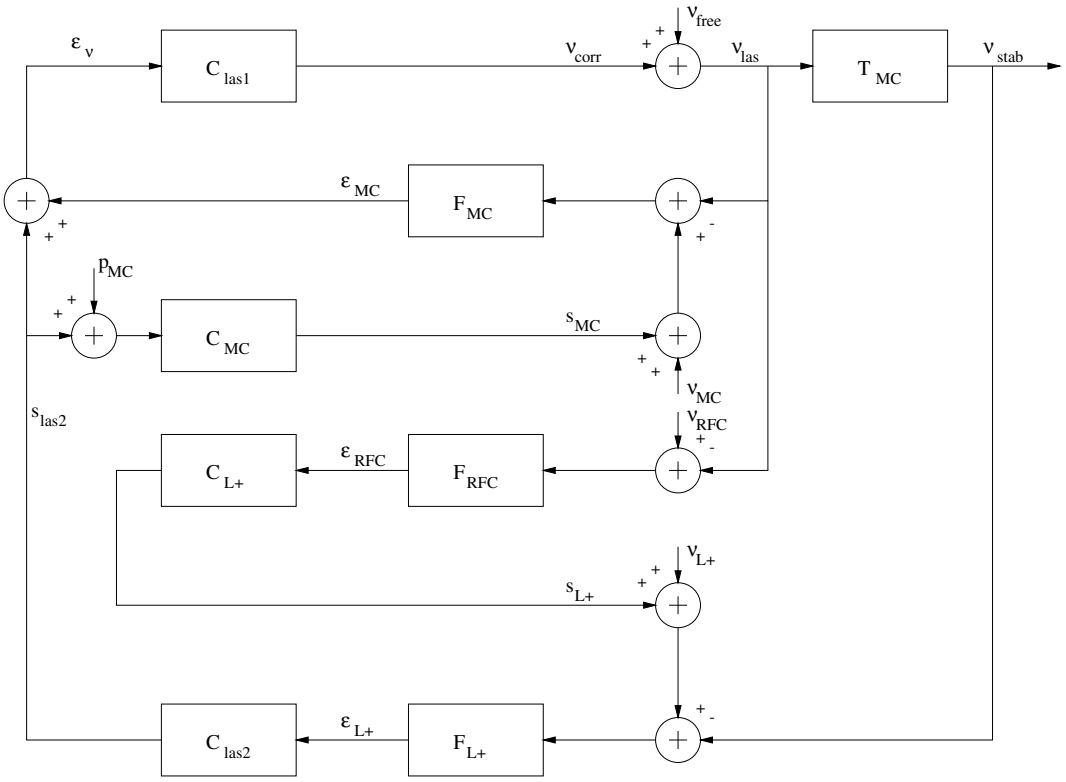


Figure 2: Setup of all servo loops.

In this figure, the F_x filters are optical transfer functions (transfer functions between frequency noise and demodulated signal on a photodiode), C_x are products of correction filters (either analog or digital) and actuator transfer functions. $C_{\rm las1}$ is the product of an analog filter ("RAMPEAUTO maitre") and master laser cavity piezo. $C_{\rm las2}$ is an analog filter. $C_{\rm MC}$ is the product of a digital filter (in Mode Cleaner suspension DSP) and of the Mode-Cleaner suspension transfer function. $C_{\rm L+}$ is the product of a digital filter and of the test mass suspension transfer function. $T_{\rm MC}$ is the filtering property of the Mode-Cleaner cavity (a filter with a DC gain of 1 and a pole equal to the Mode-Cleaner cavity half linewidth).

$\nu_{\rm free}$ is the laser free running frequency noise; it can also model, up to a calibration factor, the "RAMPEAUTO maitre" output electronic noise. $\nu_{\rm MC}$ is the Mode-Cleaner cavity frequency reference ((cavity length noise) $\times$ (laser frequency) / (cavity optical length)); this can also model the shot noise on the IMC photodiode (up to a calibration factor), and the MC suspension control DAC noise (with suspension transfer function). $\nu_{\rm RFC}$ is the reference cavity frequency noise; this can also model the shot noise on the RFC photodiode, and its ADC digitisation noise. $\nu_{\rm L+}$ is the average of the 3 km arm length cavities frequency reference; this can also model the shot noise on the B5 (B2) photodiode, and the mirror control DAC digitisation noise (via a transfer function).

The calculations have been carried out with an extra noise source, at input of the C_{MC} box, named p_{MC}. This can model either noise specific to this path (such as digitization noise) or an offset.

Of course, the complete setup has not been designed at once. This is a step-by-step process. The way to proceed is to lock one loop, compute equations and look what is a "good" error signal for the next one, recompute the equations, look what is the "good" error signal for the next cavity to be locked, and so on. Doing this way, and starting from the fact that the laser is pre-stabilised on the IMC, there are two possible topologies. The only difference between the two topologies is the choice of the error signal for locking the IMC (action on IMC curved mirror): both $\varepsilon_{\mathrm{MC}}$ and s_{las2} are possible error signals. The only difference between these two signals, in the gravitational wave detection band, is their sign. The calculations (see section 4.2) show that the noises have the same levels. So s_{las2} has been chosen (quite arbitrarily).

2.3 Open loop transfer functions

The way of designing allows to find the expression of individual servo loops (see [9], section 2.3). The first stage of frequency stabilization is given by:

$$G_{\mathrm{las1}} = F_{\mathrm{MC}} C_{\mathrm{las1}} \tag{1}$$

The second stage of laser frequency stabilisation is:

$$G_{\mathrm{las2}} = C_{\mathrm{las2}} T_{\mathrm{MC}} \frac{F_{\mathrm{L+}}}{F_{\mathrm{MC}}} \tag{2}$$

The loop that locks the Mode-Cleaner cavity curved mirror is:

$$G_{\mathrm{MC}} = F_{\mathrm{MC}} C_{\mathrm{MC}} \tag{3}$$

And finally the loop that locks the average of the kilometric arm length is:

$$G_{\mathrm{L+}} = C_{\mathrm{L+}} \frac{F_{\mathrm{RFC}}}{T_{\mathrm{MC}}} \tag{4}$$

In a system with multiple servo loops, there are several possible expressions of the global open loop transfer function (see [9], section 2). The one given below has been calculated using the stabilized laser frequency as a reference point. The global open loop transfer is then:

$$G_{\mathrm{T}} = G_{\mathrm{las1}}(1 + G_{\mathrm{las2}}(1 + G_{\mathrm{MC}})(1 + G_{\mathrm{L+}})) \tag{5}$$

The slow loops are nested inside the fast ones, so the design looks good: if each of the individual loop is stable, the global transfer function will be stable as well.

2.4 All loops together

When all the loops are closed, the situation is the following:

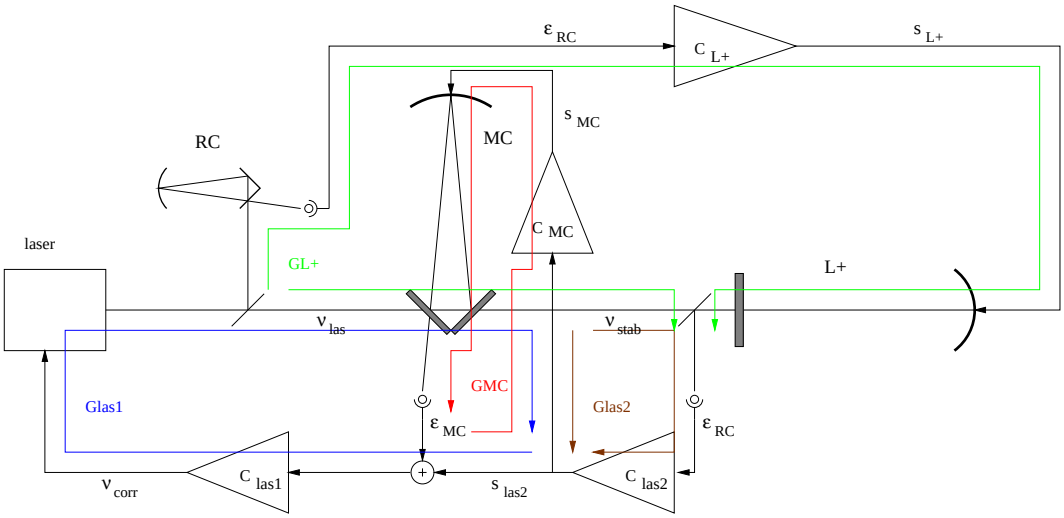


Figure 3: The four loops used in the laser frequency stabilization process

where G_{las1} is the prestabilization stage, G_{las2} the second stage of frequency stabilization, G_{MC} keeps the input mode-cleaner locked, $G_{\mathrm{L+}}$ locks the interferometer common mode. The loops G_{las2} and $G_{\mathrm{L+}}$ are of the type 'fast path against slow path' (see [9], section 2).

So the servo loops are:

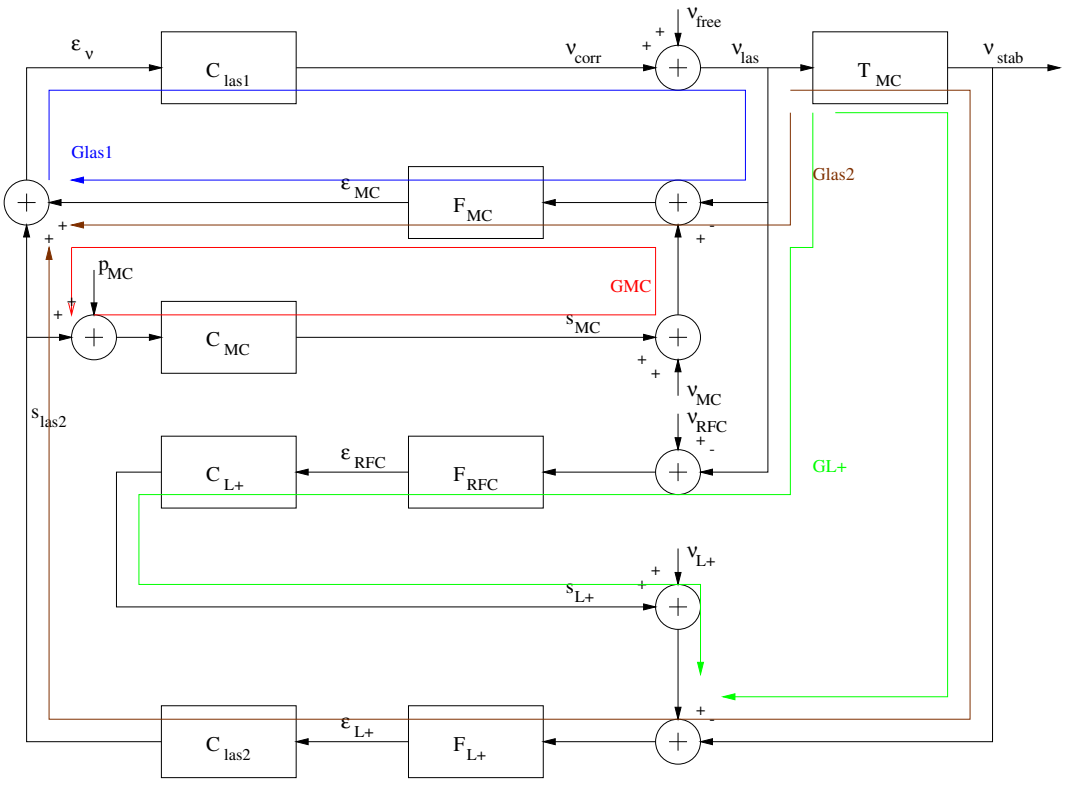


Figure 4: Description of the servo loops

3 Description of the servo loops

3.1 Laser prestabilization

The loop G_{las1} stabilises the laser frequency on the input Mode-Cleaner. The transfer function between laser frequency noise and demodulated signal in reflexion of the Mode-Cleaner cavity (Pound-Drever-Hall signal) features a big notch at the cavity free spectral range, with a phase rotation of 360°. So the unity gain is chosen to be 300 kHz, a fraction of the free spectral range.

The Mode-Cleaner photodiode can stand a maximum power of 250 mW. With a DC transimpedance of 5 Ohms, the maximum out of resonance voltage will be 0.88 Volts. One assumes that due to mismatching, misalignment, imperfect beam shape and so on, 5% of the incident light is reflected by the Mode-Cleaner at resonance. On the photodiode, the reflected power at resonance will be 12.5 mW.

The AC transimpedance is determined so that the maximum voltage when crossing the resonance will not saturate the mixer (maximum 300 mVolts peak value at mixer input). The photodiode efficiency is supposed to be 0.7 A/W. The sidebands used to lock the Mode-Cleaner have a frequency of 22.38 MHz, with a modulation index expected to be 0.01. The Mode-Cleaner pole is 500 Hz. The best AC transimpedance is then 170 Ohms. The IMC Pound-Drever-Hall signal is then expected to be 0.56 mV/Hz (including the -6 dB of the mixer).

In the correction filter the Mode-Cleaner cavity pole is compensated so that the electronic gain for frequencies above 33 kHz is 1.0 V/V. Three integrators in the correction transfer function are open for frequencies below 33 kHz, and one more integration stage for frequencies below 50 Hz (to prevent inner stages in the electronics from saturating). The correction filter is implemented in the "RAMPEAUTO maitre" electronics.

3.2 Laser second stage of frequency stabilisation

The planned loop G_{las2} is described in [5]. The maximum unity gain achievable, using the B5 photodiode, is 20.5 kHz, with gain margins 2.5 and 1.4, phase margin 20°. The closed loop maximum gain is a factor of 3 (due to the low phase margin).

The minimum level to detect is 3.10^{-6} Hz/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$ [5]. The peak value during lock acquisition will be 500 Hz (the half linewidth of the long arm). Actually, since the Pound-Drever-Hall signal is not linear at half of the cavity linewidth, the required dynamic range is $500/3.10^{-6}/2 = 8.3 \times 10^{7}\sqrt{\mathrm{Hz}}$. We can also saturate a little bit the error signal during lock acquisition. Then, a good DC gain for the Pound-Drever-Hall signal on B5 is 5.2×10^{-2} V/Hz. Since the foreseen transfer function between frequency noise and demodulated signal on the photodiode B5 is 1.3 mW/Hz, a good value for the current/voltage conversion factor for the photodiode and its amplifier is 50 V/A.

The gain of the correction filter is determined by the transfer function between laser frequency noise and demodulated signal in reflection of the Mode-Cleaner and the transfer function between laser frequency noise and demodulated signal on B5. The $F_{\mathrm{L+}}$ function has a DC gain of 5.2×10^{-2} V/Hz as stated before, and shows up a pole at 10 Hz. The F_{MC} function has a gain of 0.6 mV/Hz and has a pole at 500 Hz. According to the foreseen transfer functions between frequency noise and demodulated signal on Mode-Cleaner and B5 photodiodes, the voltage gain of the correction electronics at 2 kHz should be 160 V/V.

The electronic noise at correction electronics input should be less than 8.3 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$, and the same noise limit applies for diode electronic noise referred to output. The shot noise will correspond to 160 nHz/$\sqrt{\text{Hz}}$.

3.3 Mode Cleaner locking

The unity gain achievable depends on the performance of the new Mode-Cleaner suspension. One can expect a unity gain of 100 Hz.

The open loop gain at low frequencies (up to 10 Hz) must be as high as possible to reduce the error signal RMS. One can see from equation 9 that for frequencies where $G_{\text{L+}}$ is small (see paragraph 3.4), but G_{MC} still large (10 Hz for example), the Mode-Cleaner error signal looks like $\varepsilon_{\text{MC}} \sim \frac{1}{G_{\text{MC}}}(\nu_{\text{MC}} - \nu_{\text{las2}})$. So if the Mode-Cleaner shows up a large length noise at low frequencies, the gain should be high so that the RMS contribution is low, and the total RMS value of the error signal is much smaller than the cavity linewidth.

The correction filter is one of the filters designed by J.-P. Coulon's "cross46" program [8], crossing unity gain at 100 Hz, with a closed loop gain of 1.56 if used alone (corresponding to a gain margin of 2.8 and a phase margin of 40 degrees), and a gain of 6630 at 10 Hz:

Poles		Zeroes	
frequency (Hz)	Q	frequency (Hz)	Q
9.71	100	1030	100
7.23	100	1384	100
167	0.472	59.7	0.472
540	2.41	18.5	2.41
597	20.4	16.8	20.4
0	10		

The Mode-Cleaner curved mirror is controlled from the reference mass. The Mode-Cleaner suspension pole is compensated with a zero at a similar frequency, but lower by a few %, with a high Q (100 for example).

The IMC Pound-Drever-Hall signal is expected to be 0.56 mV/Hz. The Mode-Cleaner suspension transfer function, when controlled from the reference mass, has a DC gain of $4.8\,10^{-3}$ m/V (from data from P. Rapagnani). The coils make a pole at 2390 Hz. The digital correction filter gain needs then to be $4.0\,10^{-3}$ at 100 Hz, in order to have a unity gain at 90 Hz. The open loop transfer function has a phase margin a littler bit higher than 30 degrees, and a gain margin higher than 2. The maximum closed loop gain is 1.9.

The open loop transfer function displayed here takes into account the coil pole, but no delay.

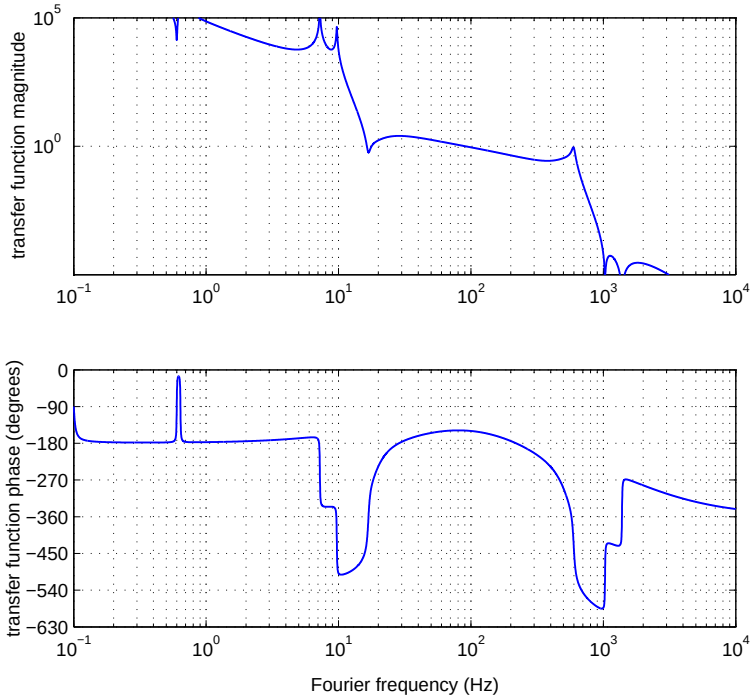


Figure 5: IMC locking, Bode plot. The unity gain is 90 Hz, the open loop gain at 10 Hz is 5700, the attenuation at 1 kHz is 16000.

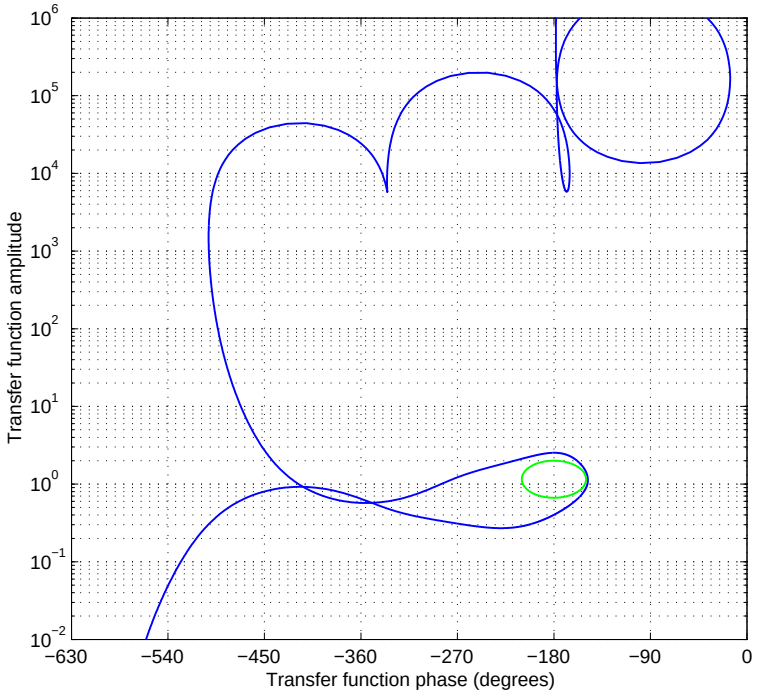


Figure 6: IMC locking, Nichols plot. The green ellipse is the abac scale for a closed loop gain of 2.

If 12.5 mW are impinging on the Mode-Cleaner photodiode at resonance, the shot noise will be 5.7 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$, so that the sensitivity is 9.7 μHz/$\sqrt{\text{Hz}}$.

3.4 3 km arm cavities locking

Here is the loop $G_{\text{L+}}$ that is difficult to design [6]: loop gain is needed at the resonance of the suspension last stage, but open loop gain should be very small at 10 Hz.

The average of the kilometric arm lengths is the only possible reference for laser frequency stabilization: it defines, at 10 Hz, a reference at a few 10^{-7} Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$.

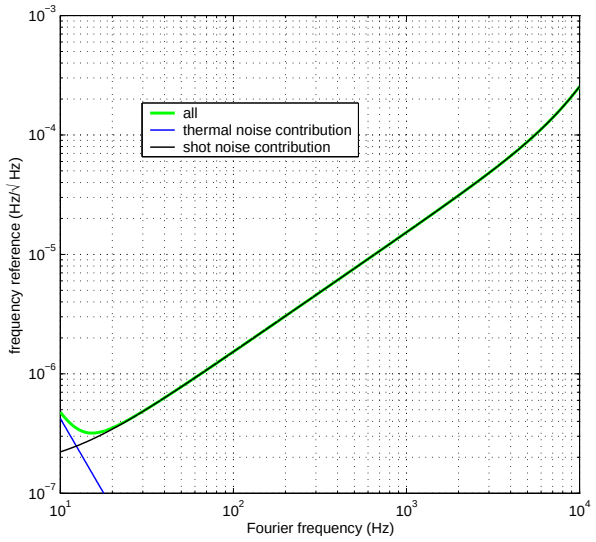


Figure 7: The average of the kilometric arm lengths as a frequency reference, predicted by JAJY. Modulation frequency is 6.263415 MHz, the measurement is done on B5 photodiode. Since this "fringe" is quite bright, shot noise dominates thermal noise on most of the spectrum.

A relative oscillation of 1 μm of one mirror versus the other gives a frequency deviation of 100 kHz, and this will sweep the Output Mode Cleaner linewidth. The requirement for the output mode cleaner locking point is $\lambda/3000$ [10], its free spectral range (6 GHz) over 1500 in Hertz, so 4 MHz. So there is no real need to lock the interferometer common mode from the point of view of the Output Mode Cleaner locking point, if the RMS of the mirror motion is in "standard" conditions.

There are some benefits anyway to use the reference cavity to lock the "L+" length:

- the lock is kept during small seismic events; it helps to damp the resonance of the last stage of the test mass suspension.
- the reference cavity is used as a reference for aligning the laser beam with the injection bench
- the reference cavity is used as an out-of-loop measurement of the laser frequency noise injected in the IMC

Then loop gain is needed at the resonance of the last stage (0.6 Hz). Since the reference cavity is a frequency reference of a few tenths of $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ at 10 Hz [11], and the requirement is a few $10^{-4}\,\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ [5], the loop attenuation should be bigger than 1000 at 10 Hz.

The way to solve that design issue uses two tricks:

- use the suspension Q as loop gain
- use Coulon's filters [8]

One possible digital filter, with unity gain at 0.6 Hz, is, using "cross68" program:

Poles		Zeroes	
frequency (Hz)	Q	frequency (Hz)	Q
0.0198	100	18.2	100
0.0300	100	12.0	100
0.0354	100	10.2	100
0.0880	0.52	0.409	0.52
2.72	2.8	0.132	2.8
3.71	14	0.0971	14
4.52	16	0.0796	16
0	10		

With a unity gain at 0.6 Hz, this filter gives an attenuation of $4.0\,10^6$ at 10 Hz.

The suspension pole is compensated in the digital correction filter with a zero, slightly detuned to lower frequencies by a few %, with a high Q. Then the resonance Q will damp the last stage of the suspension if this filter is installed on all four test masses.

The reference cavity will be used on the "low finesse" polarisation (finesse is then 1000, so the cavity pole is at about 500 kHz). The power at the reference cavity input is supposed to be 10 mW out of resonance. The Pound-Drever-Hall signal is then supposed to have a slope of $7.6\,10^{-7}$ V/Hz. Assuming that the reference cavity reflects 2 mW on resonance, the shot noise limit is $0.097\ \mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$.

The suspension is assumed here to have a response of 12 μm/V when acting from the reference mass.

In order to place the open loop transfer function at 0.6 Hz, the digital filter should have a gain of 0.134 V/V at 0.6 Hz.

The open loop transfer function, in Bode and Nichols plots, is then:

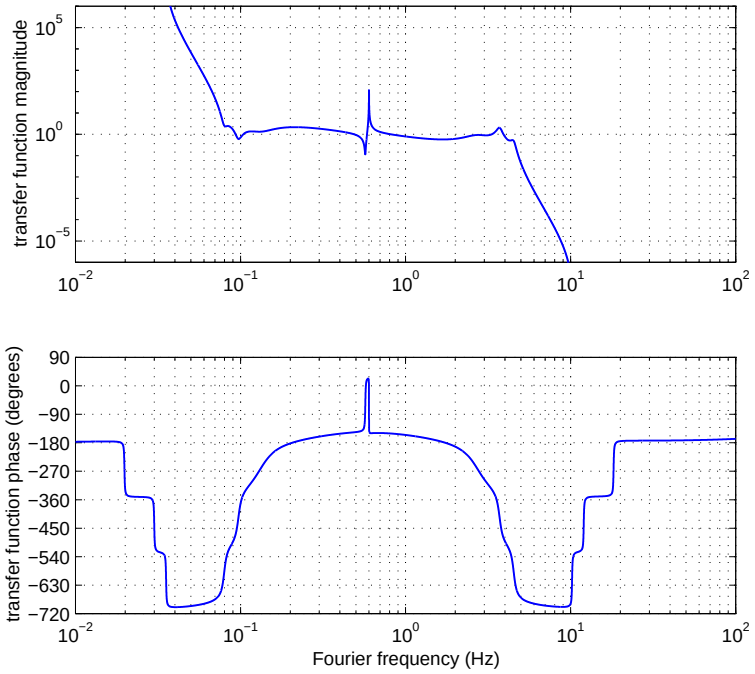


Figure 8: ITF Common mode locking, Bode plot. The unity gain is 0.6 Hz, the attenuation at 10 Hz is 4000000

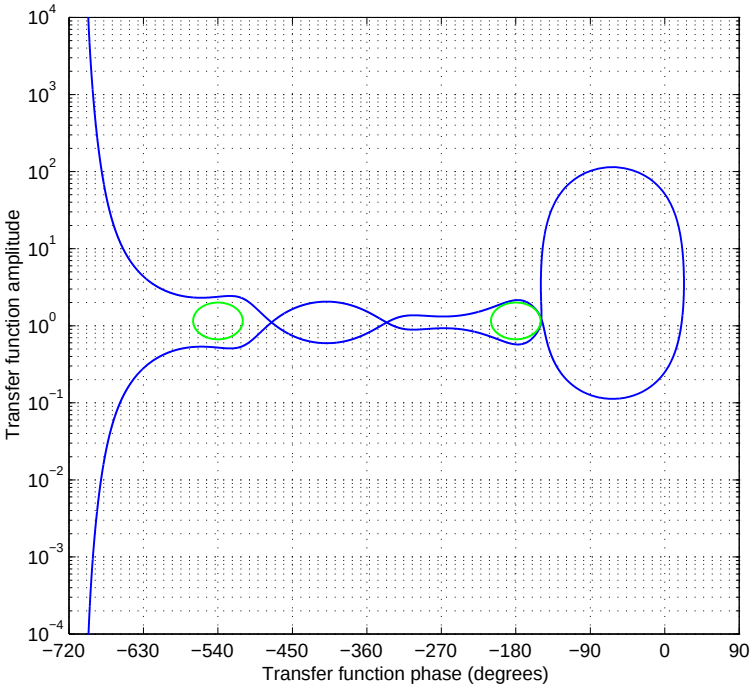


Figure 9: IMC locking, Nichols plot. The green ellipse is the abac scale for a closed loop gain of 2. The suspension Q is assumed to be 1000 in this plot, and the loop gain at suspension resonance is then 100. If Q is higher, loop gain will be higher as well.

The ratio of loop gains: (gain at 0.6 Hz) / (gain at 10 Hz) is then $Q_{\text{suspension}}/10\times$ 4 000 000, and fits the requirements of [6], with a gain margin of 2, a phase margin of 30°.

3.5 Global loop

Here is a summary of the various partial loops with their performances:

loop symbol	loop description	unity gain	gain margins	phase margin
G_{las1}	laser prestabilization	300 kHz	n/a and 6.9	75°
G_{las2}	laser final stabilization	20.5 kHz	2.5 and 1.4	20°
$G_{\text{L+}}$	DC control of common mode	0.6 Hz	2.0 and 2.0	30°
G_{MC}	IMC lock	90 Hz	2.0 and 2.0	30°

When applicable, the first gain margin is for gain increase, whereas the second one is for gain decrease (conditionally stable)

With the partial loops previously designed, one can check that the global loop is stable:

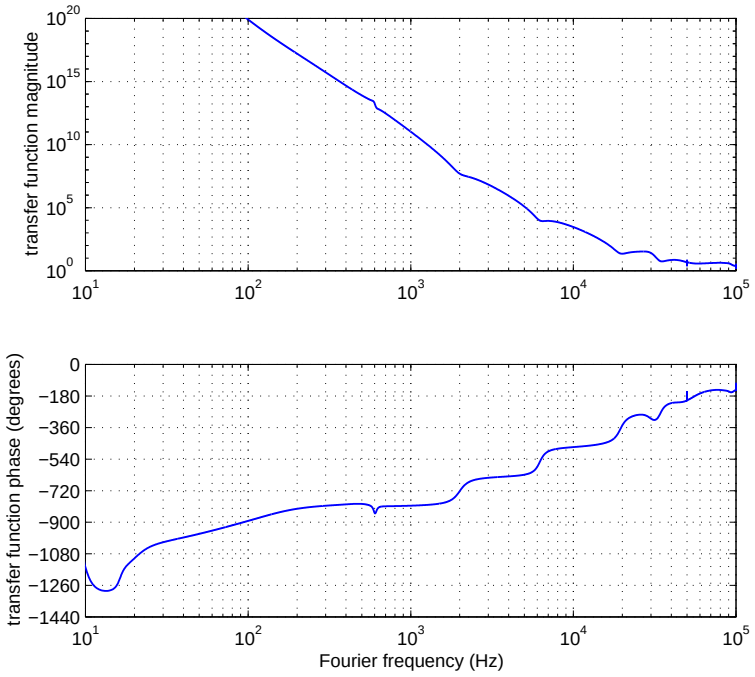


Figure 10: Global open loop transfer function, Bode plot. The unity gain is 180 kHz.

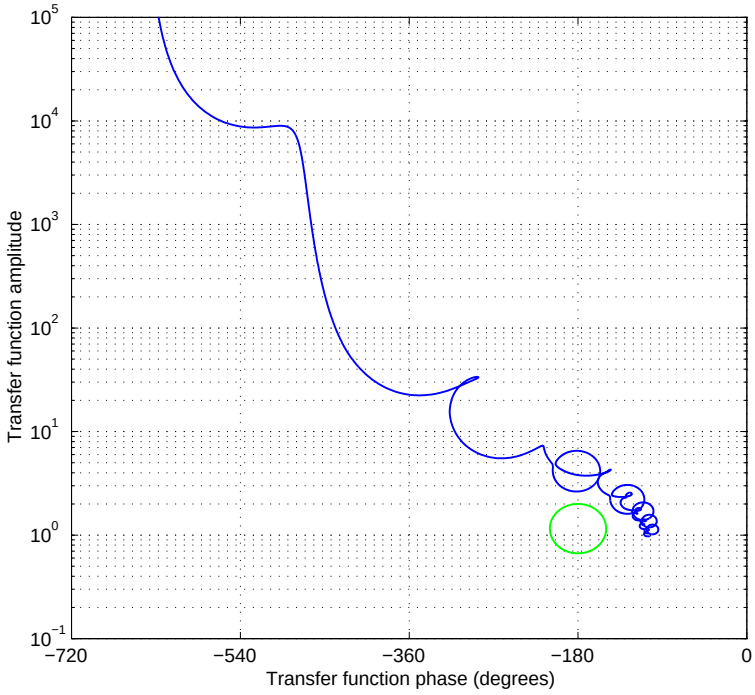


Figure 11: Global open loop transfer function, Nichols plot. The green ellipse is the abac scale for a closed loop gain of 2. The gain margin is 2.6, the phase margin is 70°, the closed loop gain is 1.6.

4 Requirements on various noise sources

4.1 Requirements for stabilised laser frequency

From figure 2, the stabilized laser frequency is:

$$\begin{aligned}\nu_{\rm stab} = & T_{\rm MC}\frac{G_{\rm las1}}{1+G_{\rm T}}\nu_{\rm MC} + T_{\rm MC}\frac{G_{\rm las1}G_{\rm las2}(1+G_{\rm MC})G_{\rm L+}}{1+G_{\rm T}}\nu_{\rm RFC} \\ & + \frac{G_{\rm las1}G_{\rm las2}(1+G_{\rm MC})}{1+G_{\rm T}}\nu_{\rm L+} + T_{\rm MC}\frac{1}{1+G_{\rm T}}\nu_{\rm free} + \frac{T_{\rm MC}}{F_{\rm MC}}\frac{G_{\rm las1}G_{\rm MC}}{1+G_{\rm T}}p_{\rm MC}\end{aligned} \tag{6}$$

The requirement for the stabilised laser frequency (with pre-stabilisation and second stage locked) is given in figure 2 in [5]. The equation 6 can then be used to give requirements on $\nu_{\rm RFC}$, $\nu_{\rm MC}$, $\nu_{\rm free}$, $p_{\rm MC}$.

The requirements on the free-running laser frequency noise are:

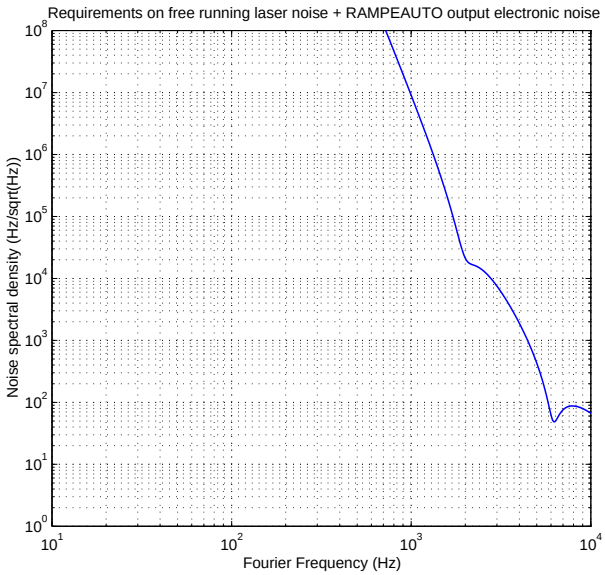


Figure 12: Requirements on the non-stabilised laser frequency noise

The laser frequency noise should be about $\frac{10\text{kHz}}{f}$ Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$, so well below requirements. RAMPEAUTO output electronic noise is 4 μV/$\sqrt{\text{Hz}}$, and the laser cavity piezo should have a sensitivity of 1 MHz/V, so this also fits the requirements.

The requirements on the reference cavity length noise are:

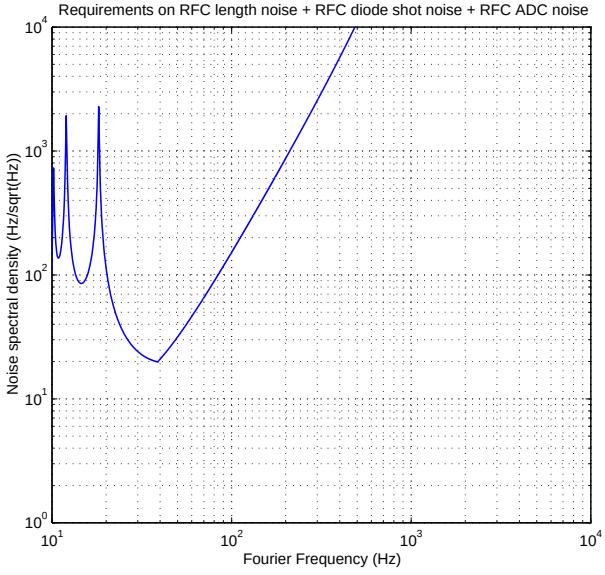


Figure 13: Requirements on the reference cavity length noise

The requirements are about two orders of magnitude higher than the measurement reported in [11], so the loop design issue in [6] is solved.

The requirements on the input Mode-Cleaner length noise are:

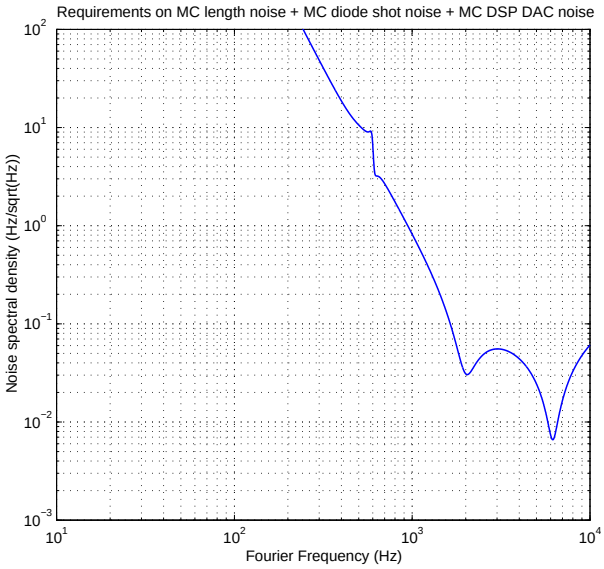


Figure 14: Requirements on the Mode-Cleaner length noise

There is no requirement on the Mode-Cleaner length noise in the low frequency region. The requirement in the high frequency region should be attainable (shot noise sensitivity is orders of magnitude lower than the requirement).

The requirements on the voltage noise at "RAMPEAUTO maitre" input are:

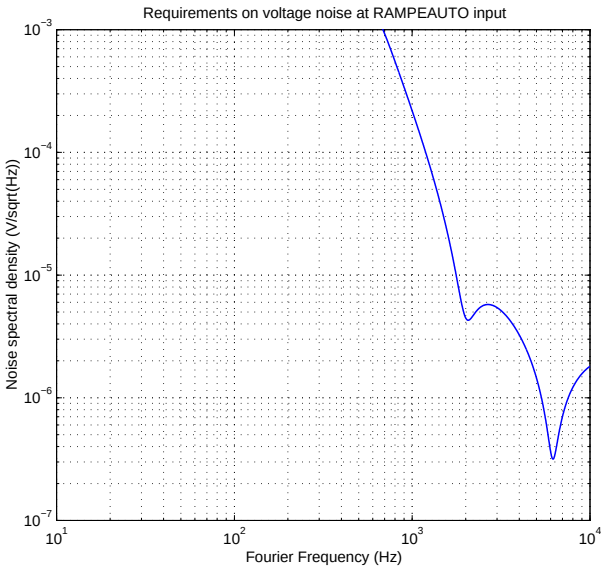


Figure 15: Requirements on the voltage noise at "RAMPEAUTO maitre" input

The requirement on the voltage noise at "RAMPEAUTO input" is easily achievable (the voltage noise is currently a few $\mathrm{nV}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$).

The requirements on the voltage noise at the input of the correction filter for locking the Mode-Cleaner are:

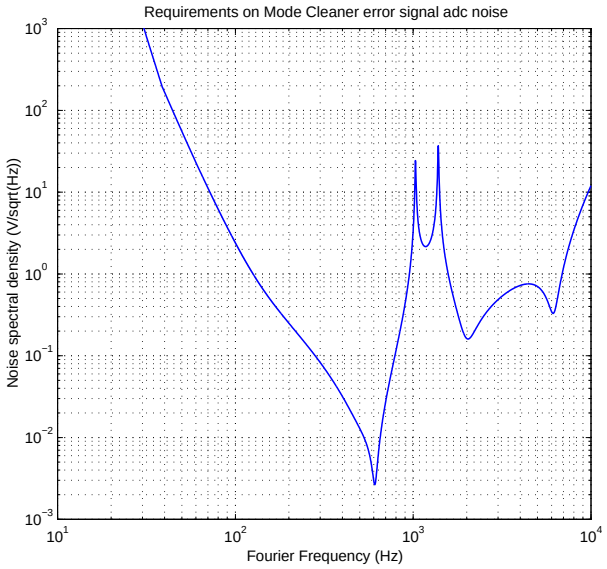


Figure 16: Requirements on the voltage noise at input of the correction filter for Mode-Cleaner locking

The requirement on the voltage at input of the correction filter used for locking the Mode-Cleaner is easily achievable. The ADC digitisation is not an issue.

4.2 Error and correction signals

The error signals are:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{RFC}} = F_{\mathrm{RFC}}\Big[&-\frac{G_{\mathrm{las1}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + \frac{1+G_{\mathrm{las1}}(1+G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}}))}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &- \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - \frac{1}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &- \frac{1}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{MC}}}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}}\Big]\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{L+}} = F_{\mathrm{L+}}\Big[&-T_{\mathrm{MC}}\frac{G_{\mathrm{las1}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + T_{\mathrm{MC}}\frac{(1+G_{\mathrm{las1}})G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &+ \frac{1+G_{\mathrm{las1}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - T_{\mathrm{MC}}\frac{1+G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &- \frac{T_{\mathrm{MC}}}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{MC}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}}\Big]\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mathrm{MC}} = F_{\mathrm{MC}}\Big[&\frac{1+G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + \frac{G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{L+}}(G_{\mathrm{MC}}-G_{\mathrm{las1}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &+ \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las2}}(G_{\mathrm{MC}}-G_{\mathrm{las1}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - \frac{1+G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{MC}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &+ \frac{1}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{MC}}(1+G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{L+}}))}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}}\Big]\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\nu} = F_{\mathrm{MC}}\Big[&\frac{1}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + \frac{G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}})G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &+ \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - \frac{1+G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}})(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &+ \frac{1}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{MC}}}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}}\Big]\end{aligned} \tag{10}$$

Assuming that loop gains are infinite for frequencies below unity gain and zero for frequencies above unity gain, one can have the meaning of the error signals of the three cavities:

	DC - 0.6 Hz	0.6 Hz - 100 Hz	100 Hz - 10 kHz
$\varepsilon_{\mathrm{RFC}}$	0	$\nu_{\mathrm{RFC}} - \nu_{\mathrm{L+}}$	$\nu_{\mathrm{RFC}} - \nu_{\mathrm{L+}}$
$\varepsilon_{\mathrm{MC}}$	p_{MC}	p_{MC}	$\nu_{\mathrm{MC}} - \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\nu_{\mathrm{L+}}$
$\varepsilon_{\mathrm{L+}}$	0	0	0

So error signals from reference cavity and Mode-Cleaner cavity are useful to characterize Mode-Cleaner "length" noise and L+ length noise, and the measurement sensitivity should be quite good (if shot noise is the limit).

The correction signals are:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{L+}} = &- T_{\mathrm{MC}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + T_{\mathrm{MC}}G_{\mathrm{L+}}\frac{1+G_{\mathrm{las1}}(1+G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}}))}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &- \frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}})G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - T_{\mathrm{MC}}\frac{G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &- \frac{T_{\mathrm{MC}}}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{MC}}G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{las2}} = F_{\mathrm{MC}}\Big[&-\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + \frac{(1+G_{\mathrm{las1}})G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &+ \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\frac{(1+G_{\mathrm{las1}})G_{\mathrm{las2}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - \frac{G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &- \frac{1}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{MC}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}}\Big] \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{MC}} = &- \frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{MC}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + \frac{(1+G_{\mathrm{las1}})G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{MC}}G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &+ \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\frac{(1+G_{\mathrm{las1}})G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{MC}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - \frac{G_{\mathrm{las2}}G_{\mathrm{MC}}(1+G_{\mathrm{L+}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &+ \frac{G_{\mathrm{MC}}}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{1+G_{\mathrm{las1}}(1+G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{L+}}))}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \nu_{\mathrm{corr}} = &+ \frac{G_{\mathrm{las1}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{MC}} + \frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}})G_{\mathrm{L+}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{RFC}} \\ &+ \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{las2}}(1+G_{\mathrm{MC}})}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{L+}} - \frac{G_{\mathrm{T}}}{1+G_{\mathrm{T}}}\nu_{\mathrm{free}} \\ &+ \frac{1}{F_{\mathrm{MC}}}\frac{G_{\mathrm{las1}}G_{\mathrm{MC}}}{1+G_{\mathrm{T}}}p_{\mathrm{MC}} \end{aligned} \tag{14}$$

Assuming that loop gains are infinite for frequencies below unity gain and zero for frequencies above unity gain, one can have the meaning of the correction signals:

	DC - 0.6 Hz	0.6 Hz - 100 Hz	100 Hz - 10 kHz
$s_{\mathrm{L+}}$	$\nu_{\mathrm{RFC}} - \nu_{\mathrm{L+}}$	0	0
s_{las2}	$-p_{\mathrm{MC}}$	$-p_{\mathrm{MC}}$	$\nu_{\mathrm{MC}} - \frac{1}{T_{\mathrm{MC}}}\nu_{\mathrm{L+}}$
s_{MC}	$\nu_{\mathrm{RFC}} - \nu_{\mathrm{MC}}$	$\nu_{\mathrm{L+}} - \nu_{\mathrm{MC}}$	0

So correction signals are useful to characterize Mode-Cleaner "length" noise and L+ length noise, in frequency bands complementary from the error signals. The master laser piezo correction signal will mostly see the laser free running noise.

5 Locking sequence

5.1 Sequence

- 1: lock the laser frequency on the input Mode-Cleaner
- 2: lock the Mode-Cleaner on the reference cavity.
- 3: lock mechanically the interferometer:

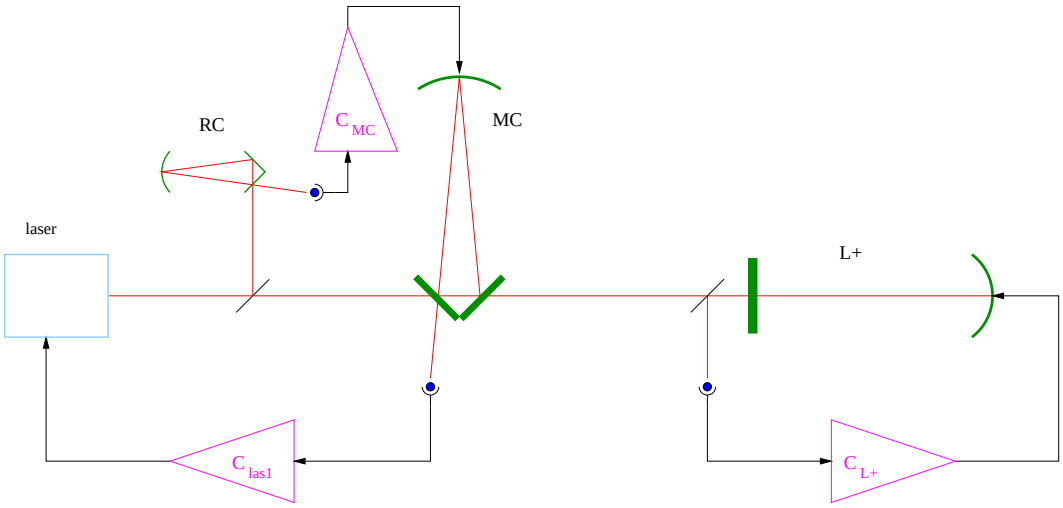


Figure 17: Before common mode is engaged

- 4: unlock the reference cavity
- 5: simultaneously, unlock L+ mechanically controlled, lock the second stage of frequency stabilisation and the Mode-Cleaner using s_{las2} as an error signal.
- 6: lock the test masses common mode using the reference cavity error signal.

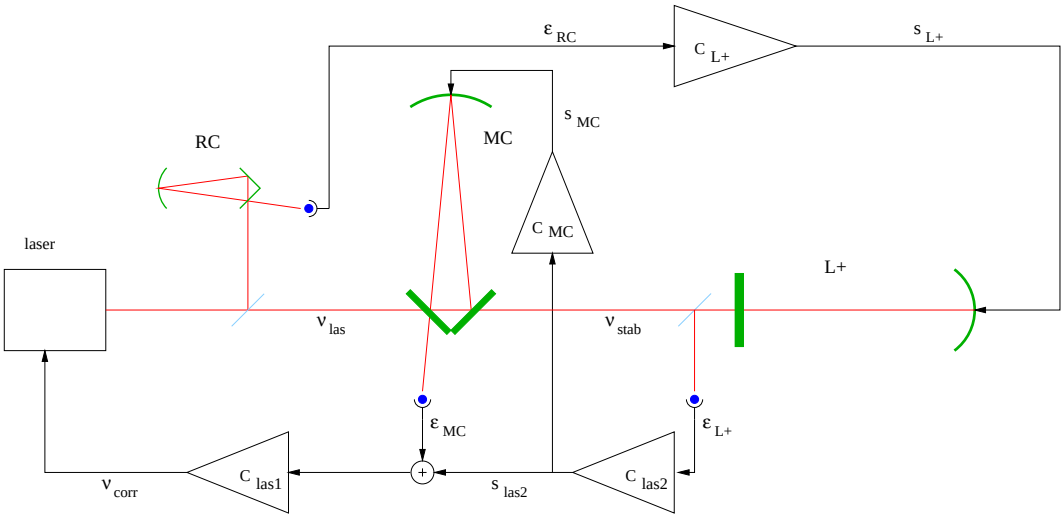


Figure 18: After common mode is engaged

Step 2 is necessary, otherwise, on step 6, it may be necessary to push on test masses quite a bit to find the RFC resonance (up to 5 mm)

5.2 Slow transitions

The previous step 5 assumes that the loops are opened and closed instantaneously. What happens if we want to do "soft" transitions, like the one described in section 5 of note [9]?

If during step 5, the mode cleaner error signal is smoothly moved from the reference cavity to the wavelength, then the global open loop transfer functions writes:

$$G_{\mathrm{T}} = G_{\mathrm{las1}}(1 + G_{\mathrm{las2}}(1 + \beta G_{\mathrm{MC1}})(1 + G_{\mathrm{L+}}) + \alpha G_{\mathrm{MC2}}) \tag{15}$$

where α varies between 1 and 0, β varies between 0 and 1, G_{MC1} is the open loop transfer function for the IMC locking in step 1, and G_{MC2} is the open loop transfer function for the IMC locking in step 6.

One does not have a situation as simple as the one described in section 5 of [9]. In the present situation, some signals may be valid as error signals in one configuration and not in a latter one where some loops have been added.

From equation 15, one can see that the loop will stay stable if the loops locking the IMC G_{MC1} and G_{MC2} are unconditionally stable.

6 Conclusions

The need for a 4-loop system for stabilizing the laser frequency comes from the interferometer asymmetry and the limited unity gain for the frequency stabilization using the interferometer as a reference. The improvement of the asymmetry and/or switching to another modulation frequency (18 MHz) may allow easier topologies.

With the current design of the Virgo interferometer, the topology and loop design exposed in this note will fill the requirements, so that laser frequency noise is not the dominant source of noise on the dark fringe. The tricky part is the lock of the L+ loop (action on test masses) so that the loop gain is very small at 10 Hz. Using the filters designed by J.-P. coulon, together with a play with the suspension resonance, solves the problem.

7 Thanks

Many, many thanks for many, many fruitful discussions, suggestions and questions by Alain Brillet, Alberto Gennai, Raffaelle Flaminio, Henrich Heitmann and Diego Pasuello. Many thanks for information provided by Frédéric Cleva, Jean-Pierre Coulon and Edwige Tournefier.

The experience of the CITF helped a lot to understand the issues.

References

[1] A. Brillet et al. VIRGO Proposal to CNRS and INFN. *unpublished*, 1989.

[2] F. Bondu. Simulation of transfer functions of virgo using matlab. /virgoDev/Stf, 2001. see /virgoDev/Stf/SimOptTF.htm for documentation.

[3] J.-A. Marck and J.-Y. Vinet. Simulation of transfer functions of an interferometer. Fortran program, 1998.

[4] The Virgo collaboration. The virgo physics book, vol. ii, optics and related topics. /www.virgo.infn.it/, documents, virgo physics book, vol. II., March 2002.

[5] F. Bondu. Design of the last stage of frequency stabilisation and laser frequency noise requirements. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-227, 2002.

[6] M. Barsuglia. *Stabilisation en Fréquence du laser et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus pour le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1999.

[7] J.-P. Coulon. Transfer functions for the double-path frequency stabilization. Virgo note VIR-MEM-OCA-4100-127, 2000.

[8] J.-P. Coulon. Transfer functions for the mirror path of the interferometer frequency stabilisation. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-233, 2003.

[9] F. Bondu. Some issues with multiple servo loop systems. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-234, 2003.

[10] A. Dominjon. *Recherche des ondes gravitationnelles avec l'interféromètre VIRGO : étude et conception de l'ensemble de détection du signal.* PhD thesis, Université de Savoie, 1996.

[11] F. Bondu. *Étude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1996.

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Cabling for the laser frequency stabilization

François BONDU and Matteo BARSUGLIA

—

VIR-SPE-OCA-4100-149
Issue: 1
Date : October 3, 2003

VIRGO * A joint CNRS-INFN Project
Traversa H di Via Macerata, I-56021 S. Stefano a Macerata - Cascina (Pisa)
Secretariat: Telephone (39) 050 752 521 * FAX (39) 050 752 550

1 Introduction

The issues and solutions for stabilizing the laser frequency are described in [1]. The laser frequency is stabilized in two stages. In the prestabilization stage, the laser is locked on the input mode-cleaner. In the second stage, the laser is locked on the 'common-mode' of the interferometer (the average length of the kilometric arm cavities). The input mode-cleaner is kept resonant by using as an error signal the correction signal of the second stage of laser frequency stabilization. The reference cavity provides an error signal to lock the slow variations of the common mode.

This document describes the cabling associated to this solution. This cabling described here allows also:

- other topologies,
- transitions between the various steps in the lock acquisition process,
- monitoring and debugging of the lock acquisition,
- characterization of the four servo loops,
- tuning of the offsets of the error signals,
- calibration of the signals,
- characterization of the laser frequency stabilization performances.

The documents [2, 3, 4, 5] also contribute to the description of the laser frequency stabilization.

2 Signals and cabling

In all the servo loops, the error signal, the correction signal, the trigger, the perturbation (same as offset tuning), the error signal after the introduction of the perturbation should be monitored (when they are useful).

The following table makes a list of the signals. The first column gives a signal number, reported on following drawings. The second one is the signal name. The third explicits if a signal is (A) sampled through an ADC, or (D) fully generated inside a DSP, and, if this is the case, if a DAC is required. The fourth gives the signal path. The fifth is a comment on the signal.

Prestabilization - analog loop				
s1	Bs_FS_Err1	A	LL → DAQ	error 1
s1	Bs_FS_ErrP	D / DAC	DAQ → LL	perturbation
s3	Bs_FS_Err2	A	LL → DAQ	error 2
s4	Bs_ML_Pz	A	LL → DAQ	correction
s5	Bs_IMC_D2T_DC	A	LL → DAQ	trigger
Second stage - analog loop				
s6	Pr_B5_ACp	A	Pr (DL)	error 1
s7	Bs_SSFS_ErrP	D / DAC	DAQ → DL	perturbation
s8	Bs_IMC_zErr1	A	DL → DAQ	correction
s9	Bs_SSFS_EN	D / DAC	DAQ → DL DAQ → LL	trigger
IMC locking - digital loop				
(s8)			(MC DSP)	error 1
s10	Bs_IMC_zErrP	D	(MC DSP)	perturbation
s11	Bs_IMC_zErr2	D	(MC DSP)	error 2
s12	Sc_MC_zCorr	D / DAC	(MC building)	correction
(s5)				trigger
Common mode locking - digital loop				
s13	Bs_RFC_DR_AC	A	LL → DAQ	error 1
s14	Bs_RFC_ErrP	D		perturbation
s15	Bs_RFC_Err2	D		error 2
s16	Sc_XX_zCorr	D / DAC	(ETM building)	correction
s17	Bs_RFC_DT_DC	A	LL → DAQ	trigger

Additional remarks:
LL means 'laser lab'
DL means 'detection lab'
DAQ means 'data acquisition room'
FS means 'frequency stabilization', SSFS means 'second stage of frequency stabilization'
error 1 is the error signal before the introduction of the perturbation
error 2 is the error signal after the introduction of the perturbation

The perturbation signals can be used to:

- add a sine or noise to measure open loop transfer functions
- add a line for calibration purposes while for interferometer is running
- add an offset to tune error signals and reduce power / frequency couplings

s1 is not named Bs_IMC_DR_AC1 and s3 Bs_IMC_DR_AC2: when the second stage is closed, the meaning of 'input mode cleaner error signal' is not true anymore.

The signal s6 used at the input of 'laser servo 2' (see figure 3) is actually not exactly the one read by the photodiode readout: the anti-aliasing filter should not be present.

The signal 'error 2' in the second stage loop is not necessary to measure the open loop transfer function. Actually, if provided, it would not help to measure G_{las2}.

The signal s8 is not named Bs_SSFS_Corr. Indeed, the mode cleaner far mirror control needs to switch its error signal between local control, control when the second stage is off, control when the second stage is on. In all three cases, the error signal is different, and the switch is managed by the MC suspension control.

The signal s9 will be provided in the frames either by the ISYS DSP or the GC (TBD).

The signal s16 is fed back to ETM suspension controls, and also to ITM suspension controls if the 0.6 Hz (probably slightly different on all suspensions) needs to be cancelled. This will not degrade the interferometer sensitivity.

All signals should be sampled at 10 kHz, at least in the commissioning phase, for analysis purposes.

Other views of the signals necessary to study laser frequency noise:

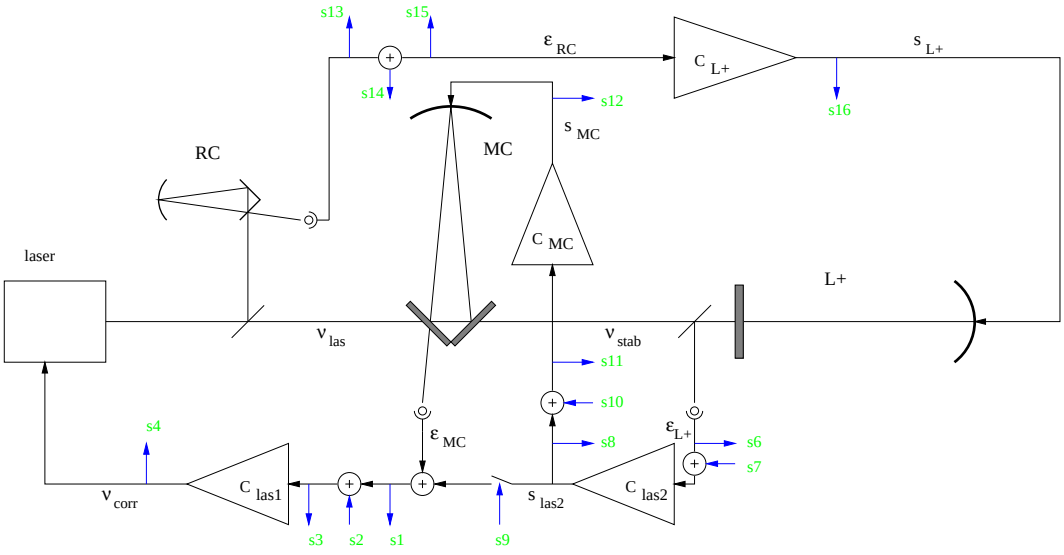


Figure 1: Signals for frequency noise analysis, setup display

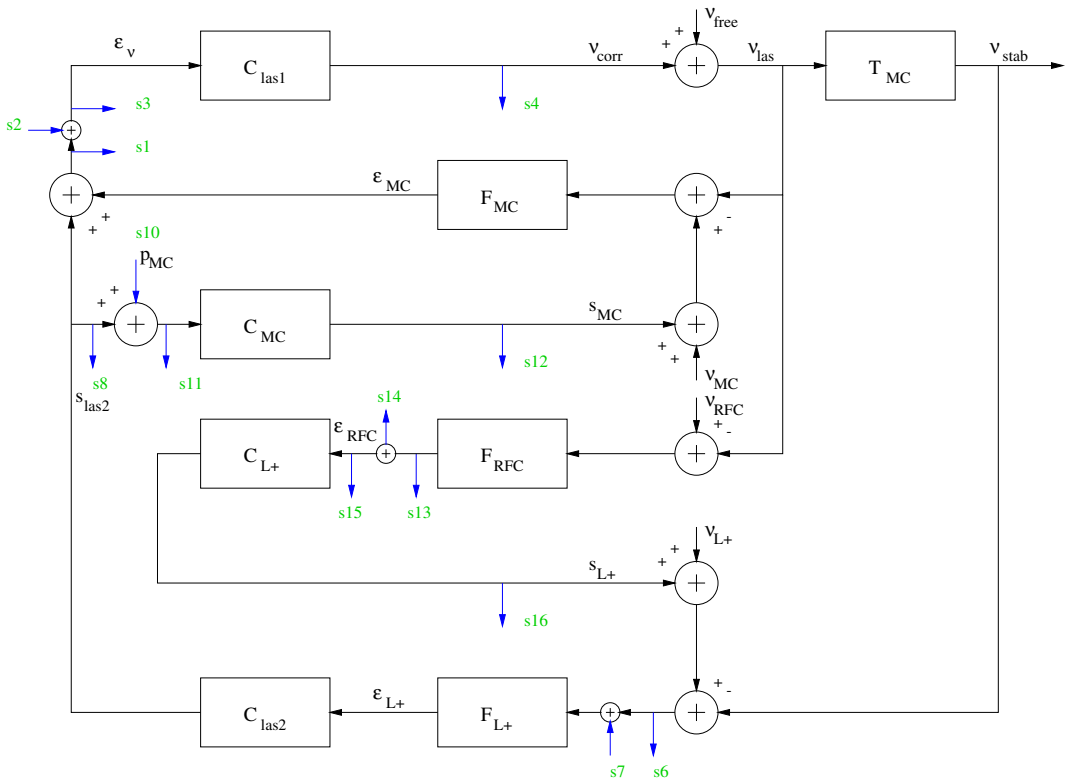


Figure 2: Signals for frequency noise analysis, servo loops display

3 Cabling layout

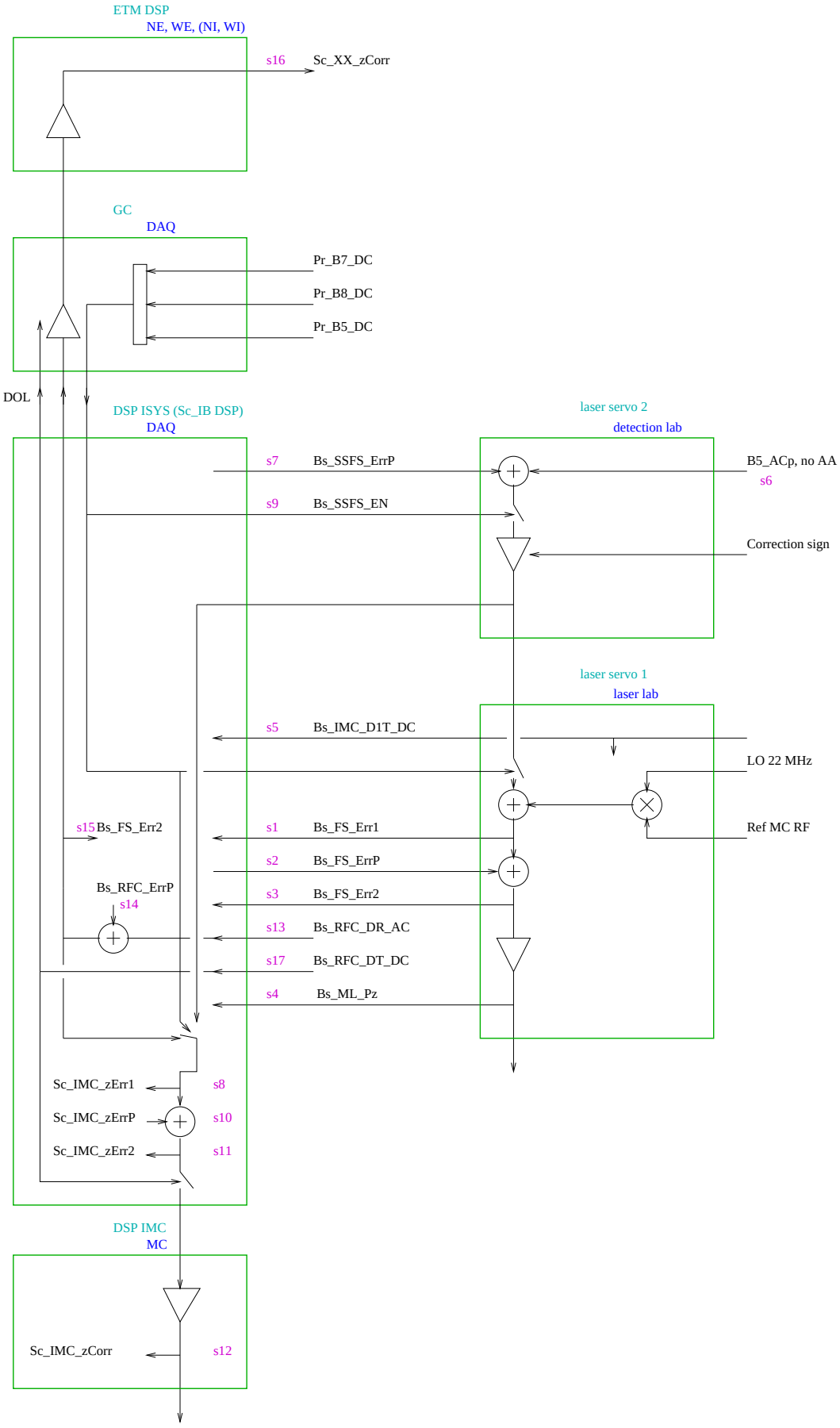


Figure 3: Cabling layout

References

[1] F. Bondu and M. Barsuglia. Laser frequency stabilization topology. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-247, 2003.

[2] F. Bondu. Some issues with multiple servo loop systems. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-234, 2003.

[3] F. Bondu. Design of the last stage of laser frequency stabilization and laser frequency noise requirements. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-227, 2002.

[4] J.-P. Coulon. Transfer function for the double-path frequency stabilization. Virgo note VIR-MEM-OCA-4100-127, 2000.

[5] J.-P. Coulon. Transfer functions for the mirror path of the interferometer frequency stabilisation. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-233, 2003.

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Phase Modulation due to the Motion of the Input Mode Cleaner Mirrors in C1 Configuration

François BONDU

–

VIR-NOT-OCA-1390-260
Issue: 1
Date : February 11, 2004

EUROPEAN GRAVITATIONAL OBSERVATORY - VIRGO Project
Traversa H di Via Macerata, 56021 S. Stefano a Macerata - Cascina (PISA), ITALY
Secretariat: Telephone (39) 050 752 521 * FAX (39) 050 752 550

1 Introduction

The laser frequency noise at the input of the interferometer depends on:

- the laser frequency noise filtered by the input Mode-Cleaner (IMC),
- the phase modulation due to the motion of the mirrors of the IMC cavity.

The first transfer function is a low-pass filter, with a pole equal to the half of the cavity linewidth. The second transfer function is a high-pass filter, with a pole also equal to the half of the cavity linewidth (see [1]).

The point of this note is to determine the sign of the second transfer function relative to the first one.

We will also show that we can determine if the frequency noise seen in the error signal of the north arm is due to the reference cavity length noise or due to the IMC length noise.

The treatment of the equations will be very similar to those of [2]. This note gives a formal demonstration of the guessed formulas from [3, 4, 5].

2 Setup of servo loops for the C1 run

2.1 Setup

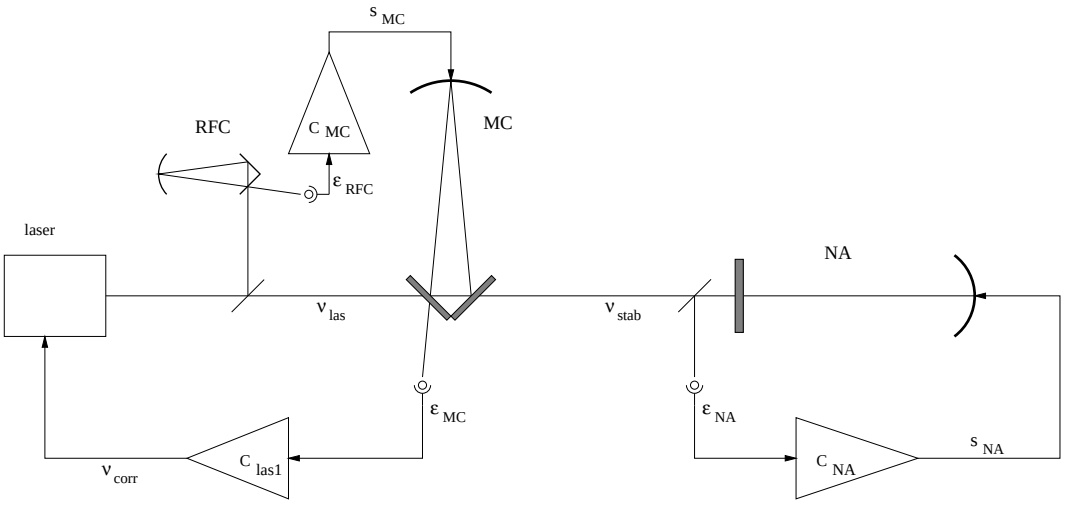


Figure 1: Setup of locking loops involved in frequency noise.

The laser frequency is pre-stabilised on the input Mode-Cleaner length, with a loop with a unity gain of 300 kHz. The low frequency length noise of the input Mode-Cleaner is stabilised on the reference cavity (unity gain of 50 Hz). The north arm length is locked on the wavelength (unity gain of 50 Hz).

2.2 Model of servo loops

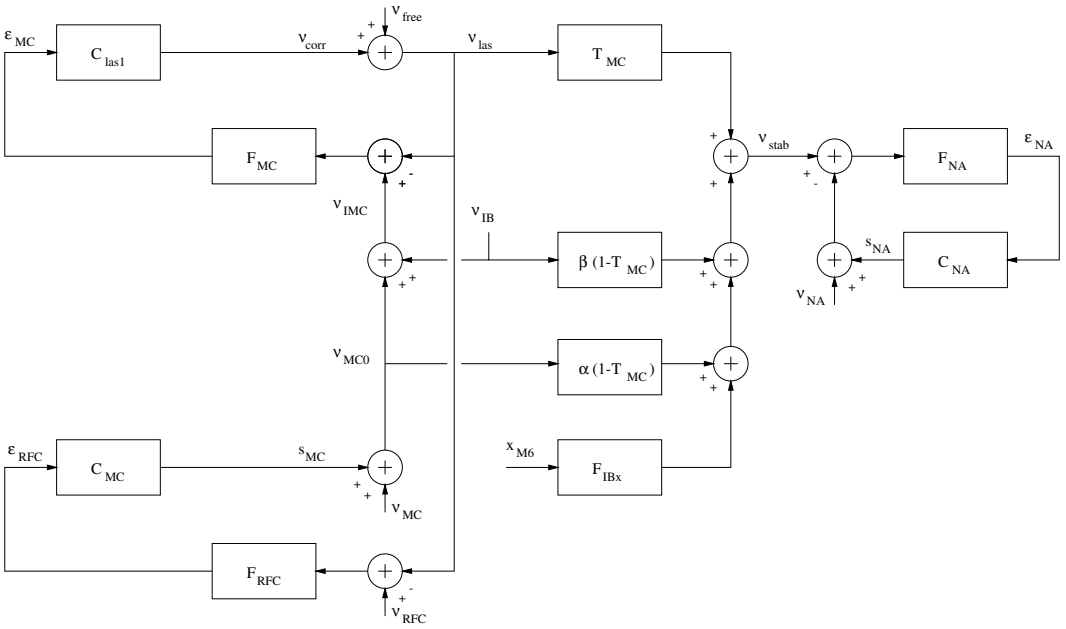


Figure 2: Model of the servo loops, including the phase modulation effect due to the motion of the mirrors of the Mode-Cleaner.

The open loop transfer function of the pre-stabilization stage $G_{\rm las1}$ consists of the optical transfer function of the input Mode-Cleaner $F_{\rm MC}$, and of the product of an analog corrector and a transducer (piezo, electro-optic): $C_{\rm las1}$.

The open loop transfer function of the lock of the input Mode-Cleaner $G_{\rm MC}$ consists of the optical transfer function of the reference cavity $F_{\rm RFC}$, and of the product of a digital corrector and the suspension transfer function: $C_{\rm MC}$.

The open loop transfer function of the lock of the north arm on the wavelength $G_{\rm NA}$ consists of the optical transfer function of the north arm $F_{\rm NA}$, and of the product of a digital corrector and the suspension transfer function: $C_{\rm NA}$.

The overall loop gain for the laser frequency stabilization is

$$G_{\rm T} = G_{\rm las1}(1 + G_{\rm MC}) \tag{1}$$

The free running laser frequency noise will be divided by this quantity.

The frequency noise at the output of the Mode-Cleaner is the sum of the stabilised frequency noise, filtered by the cavity at 500 Hz (filter $T_{\rm MC}$, with DC gain of 1), and of the phase modulation induced by the motion of the mirrors. This effect is equivalent to a high pass filter [1].

For the curved mirror, the induced frequency noise is $\alpha(1 - T_{\rm MC})\nu_{\rm MC0}$, where $\alpha = \pm 1$, and $\nu_{\rm MC0}$ is the frequency noise due to the motion of the curved mirror along the input Mode Cleaner optical axis, taking into account that this mirror is controlled, converted in frequency via $\delta\nu/\nu_0 = -\delta z_{\rm MC}/L$, where $\nu_0 = 2.83\,10^{14}$ Hz, and L is the considered cavity length. For the injection bench, the induced frequency noise is $\beta(1 - T_{\rm MC})\nu_{\rm IB}$, where $\beta = \pm 1$, and $\nu_{\rm IB}$ is the

frequency noise due to the motion of the dihedron along the input Mode Cleaner optical axis converted in frequency via $\delta\nu/\nu_0 = +\delta z_{\rm IB}/L$. The input Mode Cleaner optical axis is assumed to be oriented toward the curved mirror: a positive motion of the curved mirror makes the cavity longer, whereas a positive motion of the IB shortens it.

A motion of the injection bench along the north arm axis can be simulated with a motion of the M6 mirror on the injection bench. The conversion of the motion into frequency noise will be with the transfer function $\mathrm{F_{IBx}} = \frac{i4\pi f}{\lambda}$.

We will show how to use the data measured during C1 to determine α. We will show also that the JAJY programs foresees $\alpha = \beta$.

The signs of the comparators of the model (each used to generate an error signal) are quite arbitrary, since the demodulation phase can be changed by 180°and still producing a valid error signal. In practice, one changes the corrector sign to recover a stable loop. The physical effects will be of course the same; however, this can flip the sign of all equations 5,6,7 and 8.

2.3 "Length noise"

The quantities shown as $\nu_{\rm MC}$, $\nu_{\rm IB}$, $\nu_{\rm RFC}$ and $\nu_{\rm NA}$ represent the differential motion between the mirrors of the cavities. They can represent also all noise sources affecting the reading: shot noise, digitisation noise, photodiode dark current noise, etc.

2.4 Equations

The equations are presented in the case where $G_{\rm las1} \gg 1$, valid since the loop gain of the pre-stabilization stage is very high for frequencies below than 10 kHz.

$$\varepsilon_{\rm RFC} = F_{\rm RFC}\Big[-\frac{1}{G_{\rm las1}(1+G_{\rm MC})}\nu_{\rm free} - \frac{1}{1+G_{\rm MC}}(\nu_{\rm MC}+\nu_{\rm IB}-\nu_{\rm RFC})\Big] \tag{2}$$

$$\varepsilon_{\rm MC} = F_{\rm MC}\Big[-\frac{1}{G_{\rm las1}}\nu_{\rm free} + \frac{1}{G_{\rm las1}(1+G_{\rm MC})}(\nu_{\rm MC}+\nu_{\rm IB}) + \frac{1}{G_{\rm las1}}\frac{G_{\rm MC}}{1+G_{\rm MC}}\nu_{\rm RFC}\Big] \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rm NA} = F_{\rm NA}\Big[&+\frac{1}{1+G_{\rm NA}}\frac{1}{G_{\rm las1}(1+G_{\rm MC})}[T_{\rm MC}-\alpha(1-T_{\rm MC})G_{\rm MC}]\nu_{\rm free}\\ &+\frac{1}{1+G_{\rm NA}}\frac{1}{1+G_{\rm MC}}[T_{\rm MC}+\alpha(1-T_{\rm MC})]\nu_{\rm MC}\\ &+\frac{1}{1+G_{\rm NA}}\frac{1}{1+G_{\rm MC}}[T_{\rm MC}-\alpha(1-T_{\rm MC})G_{\rm MC}+\beta(1-T_{\rm MC})(1+G_{\rm MC})]\nu_{\rm IB}\\ &+\frac{1}{1+G_{\rm NA}}\frac{G_{\rm MC}}{1+G_{\rm MC}}[T_{\rm MC}+\alpha(1-T_{\rm MC})]\nu_{\rm RFC}\\ &-\frac{1}{1+G_{\rm NA}}\nu_{\rm NA}\Big]\end{aligned} \tag{4}$$

The error signal of the reference cavity $\varepsilon_{\rm RFC}$ can not distinguish between the "length noise" of the reference cavity (differential motion between mirrors, or any reading noise related to it), and the "length noise" of the Mode-Cleaner (differential motion between mirrors, or any reading noise related to it).

The north arm and the reference cavity error signals can be coherent in four cases: reference cavity "length noise" dominates both spectra, Mode-Cleaner "length noise" dominates both spectra via IB or MC motion, laser free running noise dominates both spectra.

In the four cases, the transfer function between the two is different:

$$\frac{\varepsilon_{\rm NA}}{\varepsilon_{\rm RFC}}\Big|_{\rm RFC} = +\frac{F_{\rm NA}}{F_{\rm RFC}}\frac{G_{\rm MC}}{1+G_{\rm NA}}[T_{\rm MC}+\alpha(1-T_{\rm MC})] \tag{5}$$

$$\frac{\varepsilon_{\rm NA}}{\varepsilon_{\rm RFC}}\Big|_{\rm MC} = -\frac{F_{\rm NA}}{F_{\rm RFC}}\frac{1}{1+G_{\rm NA}}[T_{\rm MC}+\alpha(1-T_{\rm MC})] \tag{6}$$

$$\frac{\varepsilon_{\rm NA}}{\varepsilon_{\rm RFC}}\Big|_{\rm IB} = -\frac{F_{\rm NA}}{F_{\rm RFC}}\frac{1}{1+G_{\rm NA}}[T_{\rm MC}-\alpha(1-T_{\rm MC})G_{\rm MC}+\beta(1-T_{\rm MC})(1+G_{\rm MC})] \tag{7}$$

$$\frac{\varepsilon_{\rm NA}}{\varepsilon_{\rm RFC}}\Big|_{\rm free} = -\frac{F_{\rm NA}}{F_{\rm RFC}}\frac{1}{1+G_{\rm NA}}[T_{\rm MC}-\alpha(1-T_{\rm MC})G_{\rm MC}] \tag{8}$$

So, in the data, once the coherence between the two error signals is checked, the fit of the transfer function, amplitude and phase, allows to recognize what kind of noise is actually dominating in the reference cavity error signal, and what the sign of α is.

2.5 Sign of α and β using JAJY

JAJY simulates a triangular Mode-Cleaner. Its length is tuned so that it is resonant. There is no feedback loops, so that only the phase modulation effects are measured. The two transfer functions: motion of IB or MC to demodulated current in reflection of the north arm, in phase, show a derivative effect up to 500 Hz, and then a $1/f$ slope, sue to the filtering effects of the input Mode Cleaner and north arm, both being at 500 Hz. The phases are opposite. Since one motion is making the cavity length longer, and the other one shorter, $\alpha = \beta$.

It is not possible to measure directly α or β here, since it depends on the arbitrary sign of the Pound-Drever-Hall signal.

Since $\alpha = \beta$, then it is obvious from equations 6 and 7 that

$$\frac{\varepsilon_{\rm NA}}{\varepsilon_{\rm RFC}}\Big|_{\rm MC} = \frac{\varepsilon_{\rm NA}}{\varepsilon_{\rm RFC}}\Big|_{\rm IB} \tag{9}$$

This is not obvious from the drawing of the servo loops of figure 2: the phase modulation effect on the curved mirror is on a controlled mirror, while the injection bench is free.

2.6 Comments on other calculations

In the calculation presented in [4, 5], the $\delta\nu$ in the reading of the reference cavity (equivalent to a reference cavity "length noise") is not the same as the $\delta\nu$ of the Mode-Cleaner "length noise". Thus, it is not possible to sum the two effects immediately. One has to write the equation of the servo loops that link the two uncoherent quantities.

3 Use of C1 data

It is straightforward to check that the north arm error signal Pr_B1_ACp is coherent with the reference cavity error signal Sc_IB_zErrGCx30, and that the same kind of noise dominates (coherence > 0.5).

A constant factor is fitted with the computed transfer function, representing the calibration factor (not used in this demonstration).

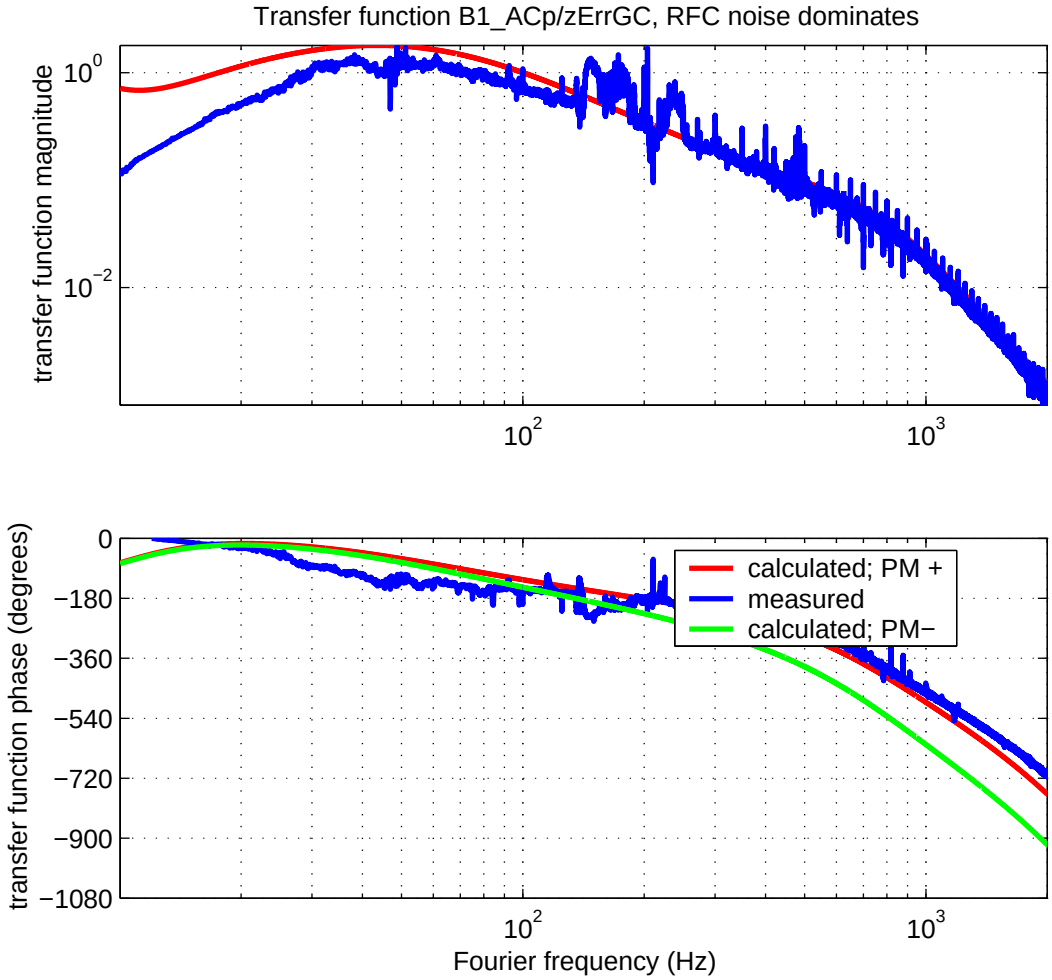


Figure 3: Transfer function between north arm error signal and reference cavity error signal, in the case the reference cavity "length noise" dominates. The red curve is for $\alpha = +1$, the green curve for $\alpha = -1$.

The equation tried on this plot is:

$$\frac{1}{1+jf/f_{\rm NA}}\frac{G_{\rm MC}}{1+G_{\rm NA}}[T_{\rm MC}+\alpha(1-T_{\rm MC})] = 150\frac{\rm B1_ACp(W)}{\rm zErrGCx30(V)} \qquad (10)$$

The fit is good for all frequencies above 50 Hz, and the phase looks better if one tries $\alpha = +1$.

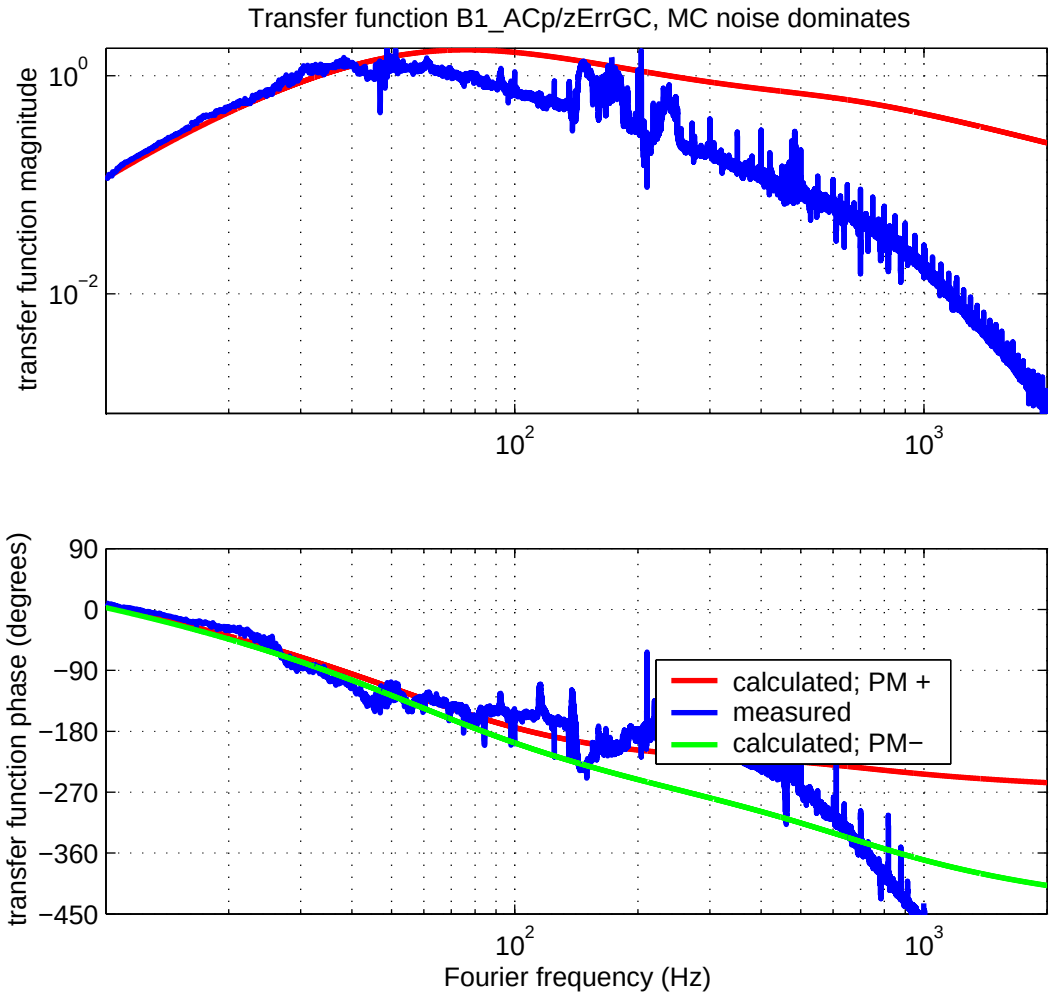


Figure 4: Transfer function between north arm error signal and reference cavity error signal, in the case the Mode-Cleaner "length noise" dominates. The red curve is for $\alpha = +1$, the green curve for $\alpha = -1$.

The equation tried on this plot is:

$$\frac{1}{1+jf/f_{\rm NA}}\frac{1}{1+G_{\rm NA}}[T_{\rm MC}+\alpha(1-T_{\rm MC})] = 150\frac{\rm B1_ACp(W)}{\rm zErrGCx30(V)} \qquad (11)$$

The fit is good for all frequencies below 50 Hz.

The case where the free running laser noise dominates can be eliminated if one measures the free running laser noise on the laser frequency correction signal (Bs_ML_pz), divides by the expected loop gain, and compares to the calibrated spectrum measured on the reference cavity.

4 Conclusions

The error signal of the reference cavity compares the "length noise" of the input Mode-Cleaner and the "length noise" of the reference cavity. One is unable to decide which is the cavity which is the cause of the measured noise. As expected (since no second stage of frequency stabilization was on), the north arm error signal is dominated by frequency noise, either due to the prestabilization stage (input Mode-Cleaner), or due to the reference cavity. But these two noise sources have different transfer function with the error signal of the north arm, in the configuration used during the engineering run C1. This allows to know what kind of noise is actually measured on the reference cavity: between 10 and 50 Hz, input Mode-Cleaner length noise dominates the reference cavity error signal and the frequency noise, and also for a bum between 150 and 250 Hz; between 50 Hz and 2 kHz, the reference cavity length noise dominates.

The input Mode-cleaner mirror motion induces a phase modulation on the laser; this effect can be modeled by a high pass filter, with a "+" sign.

5 Thanks

The contributions of R. Gouaty, R. Flaminio and E. Tournefier, in their talks on C1 data, helped a lot to understand that the data could be used to determine what is the main contributing source of frequency noise (I had no clear idea of this before). Thanks also to A. Brillet who suggested to add the study of the IB motion.

References

[1] H. Trinquet and F. Bondu. Comparison of two different topologies for frequency stabilisation of the laser. VIR-NOT-OCA-1390-178, 2003.

[2] F. Bondu and M. Barsuglia. Laser frequency stabilization topology. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-247, 2003.

[3] R. Gouaty. Search for noise sources in c1 sensitivity. http://wwwcascina.virgo.infn.it/commissioning/C1/InvestigationsDocuments/Readout_noise/ gouaty_09Nov03_sens.ppt, December 2003.

[4] R. Flaminio. Laser frequency noise generation and propagation during c1 (preliminary). http://wwwcascina.virgo.infn.it/commissioning/C1/InvestigationsDocuments/Readout_noise/ C1meeting_laser_noise.ppt, December 2003.

[5] E. Tournefier R. Flaminio, R. Gouaty. Readout noises in c1 sensitivity. http://wwwcascina.virgo.infn.it/commissioning/C1/InvestigationsDocuments/Readout_noise/ readoutnoisesC1_210104.ppt, January 2004.

Second Stage of Frequency Stabilization Electronics

Specification Document

VIR-SPE-OCA-1390-336

F. Bondu, October 2006/January 2007
Issue 2 – April 2007

The goal of this note is to describe the requirements on the second stage of frequency stabilization (SSFS) final electronics, so that they meet the requirements for Virgo, as defined in the VIR-NOT-PER-1390-51 document, on the whole detection band. The test procedure is detailed.

1. Description of the Second stage Open Loop Transfer Function

   The loop is composed by:
   - Sensing: transfer function between a frequency noise line in the wave before the beam-splitter and the demodulated current, either B5_d2_ACp or equivalent on B2 photodiode. This TF has basically a low-pass filter shape at a ~10 Hz pole, and some high frequency details in the TF (notch at FSR, notch at ½ FSR, etc.).
   - Filtering: Second Stage of Frequency Stabilization Electronics, discussed in this document. Output: SSFS_Corr signal.
   - Actuation: as this loop is embedded in a complex loop system (see VIR-NOT-OCA-1390-247), the equivalent actuation is composed of the ratio of the input Mode Cleaner transmittance and input Mode Cleaner optical TF, multiplied by the gain between SSFS_Corr and summing point in RAMPEAUTO crate.

   Note that this loop allows DC integration, independently of Input Mode Cleaner locking TF (actuation on IMC curved mirror), see VIR-NOT-OCA-1390-247, as long as SSFS unity gain is high enough compared to IMC UGF (~100 Hz).

2. Functions of Electronics

   a. Remotely switchable gain and SSFS_Ctrl signal

   The electronics has to handle the varying gain in the recycling cavity during the lock acquisition. Four stages are designed in that purpose. These stages are controlled by the SSFS_Ctrl variable. The SSFS_Ctrl variable is controlled in the IB DSP control. The DSP sends a voltage Vssfsctrl with V=3.1V*SSFS_Ctrl value.
   The SSFS rack should decode this voltage with the truth table:

Vssfsctrl < 2.5 V	TF0
2.5 < Vssfsctrl < 5.0 V	TF1
5.0 < Vssfsctrl < 7.5 V	TF2
7.5 < Vssfsctrl	TF3

   TF0, TF1 and TF2 are used during the lock acquisition process. The TF0, TF1 and TF2 have similar shapes, to have quite simple and robust OLTF. Only the gain differs.

TF3 has different shape and gain: additional integrators, additional optional pole/zero pairs.

b. Remotely switchable inputs

TF0, TF1 and TF2 use input 1, while TF3 uses input 2. These two inputs refer to two photodiodes, where the photodiode 1 has a gain 10 times lower than photodiode 2 on demodulated signal.

c. Remote enabling and SSFS_Enable signal

The Rack is controlled with a remotely controllable enabling. This signal is generated via IB DSP interface.

The enable signal, when 0:

- discharges the DC integrators, if any
- puts the output signal to zero, to avoid perturbation in the initial phase of ISYS locking,
- opens the summation of SSFS_Corr signal in RAMPEAUTO crate, to avoid perturbation in the initial phase of ISYS locking.

The SSFS_Enable signal lights a LED when it is ON.

d. Correction signal excursion

The excursion of the correction signal is a few volts in order to improve the immunity to noise pick ups (radiated, guided). This also makes a better immunity of IMC error signal to digitization noise.

The correction signal might be limited to +1/-1 V. The board has places to implement that function if needed. This limiter should be as linear as possible.

e. Noise referred to input requirements

As the transfer function from frequency noise to dark fringe could not be measured (logbook entry #14192, Nov. 22nd, 2006), the requirements are extracted from figure 3 in VIR-NOT-OCA-1390-227. The most stringent requirement is at 40 Hz where the spectral resolution should be 3.10^{-6} Hz/√Hz (finesse asymmetry of 3.5%, reflectivity asymmetry of 1000 ppm). With the error signal having a sensitivity of ~0.1 (1kHz/f) V/Hz, this gives a noise referred to input requirement of 1.10^{-6} V/√Hz, no margin. There is an easy margin of 50 with a "noisy" input amplifier of 20 nV/√Hz.

f. TF measurement function (in-situ and remote)

The error signal is monitored on a "Err_before" port. A "perturbation" input signal can be added to the main channel. An output "Err_after" signal is available that looks at the signal after addition of perturbation input, but before the shaping of the signal by the correction filter. The "perturbation" input and monitor plugs are built such that they do not change the behaviour of rack when plugged/unplugged (impedance negligible for the signal mainstream). The main signal output of the rack is also duplicated via a signal driver. All these plugs are BNC. The perturbation input is attenuated so that its noise is negligeable.

The "perturbation" input can be used from remote to add lines and/or offsets.

g. Rack self-lock

The rack should be able to lock on itself to check its good functioning. Additional plugs/buttons are added to allow this.

h. Input signal sign change
A switch allows to change the sign of the whole TFs (all 4 at once).

i. Input signal gain change
A potentiometer allows gain change on a 0-100% scale. Normal behaviour is obtained at 50% scale. A 10 turn linear potentiometer is suggested.

j. TF in TF0, TF1, TF2 configurations (main gain potentiometer at 50%).
Simple pole at 20 Hz, simple zero at 1250 Hz.
Gain at 20 kHz, not including output stage gain of 2: 1300 TF0; 350 TF1; 75 TF2.

k. TF in TF3 configuration

Pole frequency	Pole Q	Zero frequency	zero Q
2.9 kHz	0.7	8 kHz	2.2
16 kHz	3	17 kHz	5
23.5 kHz	26	23.4 kHz	1
35.2 kHz	2.9	32 kHz	8
34.9 kHz	3	43 kHz	8
DC	0 (simple)	1250	0 (simple)

with gain=29 at 100 kHz
The total delay should be below 500 ns.

l. Main error signal input plug
It is of isolated BNC type, compatible with detection electronics outputs. To avoid ground loops, the signal is read through a differential amplifier.
The input impedance should be larger than 10 kOhm.

m. Main output plug
The main output plug is either of tri-axial coaxial cable of LEMO-3 pins. Rewiring may be needed to change the output plug.
The output impedance is identical to the cable one.

3. Rack location

The study VIR-NOT-OCA-1390-227 shows that B5_ACp is a better signal than B2_ACp: it allows more unity gain and reduces the requirements on the pre-stabilization stage.
The error signal should be treated as close as possible to the place of its production. The requirements on the spectral density of the error signal are higher in the 20-200 Hz band than in the rest of the detection band. Therefore the error signal must be amplified in this region before being sent to laser lab; this function being similar to the amplifying factor of the correction filter, this suggests that the SSFS rack is in the detection lab.

4. All plugs on the rack are labelled.

5. Three identical racks are delivered.

6. Documentation delivered:

    a. Schematics
    b. Functional scheme. It is explained how to work the “self-lock” function.

7. Test Procedure

    a. TF2 is measured in open loop, with section DC pole/1250 Hz zero bypassed.
    b. Gains of TF0 and TF1 relative to TF2 are measured, with corresponding levels for SSFS_Ctrl. The gains and pole/zero locations should match the requirements within 10%. If this is not the case, values of passive components (capacitors, resistors) are adjusted.

    c. TF3 is measured while the rack is closed on itself. The measured TF is fitted with pole/zero pairs, and with some delay as well. The corresponding TF is applied on the measured “plant” TF (logbook entry 14184), and the obtained margins should be similar, within 10%, to be designed ones. If this is not the case, the values of the passive components are adjusted.

    d. Values of gains of input stage and output stage are checked.

CNRS
Centre National de la Recherche Scientifique

INFN
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare



Analog filters: the "state-variable" method.

Jean-Pierre Coulon

VIRGO

VIR-015A-07
Issue: 1
Date : June 13, 2007

EUROPEAN GRAVITATIONAL OBSERVATORY - VIRGO Project
Traversa H di Via Macerata, I-56021 Santo Stefano a Macerata - Cascina(PISA)
Secretariat: Telephone (39) 050 752 521 * FAX (39) 050 752 550

1 Introduction

There is a frequent need for practical designs of analog transfer functions in servo systems. Due to resonances of piezo crystals and mechanical elements, it is often necessary to compensate poles and zeros at frequencies up to 50 KHz, with quality factors up to 100. Despite steady progress, digital filters still have limits in bandwidth, quantization noise, convenience and ... cost. Therefore I have often wired their analog equivalents on so-called breadboards, and recently I made a printed circuit version for the SSFS of Virgo. In this version each second-order pole-zero pair is a daughterboard to allow to change parameters quickly.

2 The state variable approach

Assume the required transfer function is:

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + ... + n_n s^n}{p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + ... + p_n s^n} \tag{1}$$

(some coefficients may be 0, but we assume the degree of the numerator does not exceed that of the denominator, i.e. the filter does not differentiate at high frequencies).

In a nutshell, the *state-variable* approach in linear systems consists in replacing a system involving the n^{th} order derivatives of a single time variable with a system involving $n-1$ time variables and their sole first-order derivatives, each one being the derivative of the next one.

Let us proceed in two steps:

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_i(s)} \frac{V_i(s)}{V_e(s)} \tag{2}$$

where

$$\frac{V_i(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + ... + p_n s^n}, \quad and \quad \frac{V_s(s)}{V_i(s)} = n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + ... + n_n s^n \tag{3}$$

The corresponding behaviour of the left side of this equation in the time domain is:

$$p_0 v_i(t) + p_1 \frac{dv_i(t)}{dt} + ... + p_n \frac{d^n v_i(t)}{dt^n} = v_e(t) \tag{4}$$

The n state variables chosen are $v_i(t)$, and its $n-1$ derivatives. The single-variable, matrix equivalent of this equation is:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_i(t) \\ \frac{dv_i(t)}{dt} \\ \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} \\ ... \\ \frac{d^{n-1} v_i(t)}{dt^{n_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \\ -\frac{p_0}{p_n} & -\frac{p_1}{p_n} & -\frac{p_2}{p_n} & ... & -\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i(t) \\ \frac{dv_i(t)}{dt} \\ \frac{d^2 v_i(t)}{dt^2} \\ ... \\ \frac{d^{n-1} v_i(t)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_e(t)$$

or, with the usual vector notation:

$$\frac{d\mathbf{V_i}(t)}{dt} = A\mathbf{V_i}(t) + B\mathbf{V_e}(t) \tag{5}$$

The n^{th} derivative of $v_i(t)$ can be expressed by the lower part of the block diagram of fig.1, as a linear combination of $v_e(t)$ and the derivatives of lesser order, in agreement with equation 4. These derivatives of lesser order are obtained with a series of cascaded integrators.

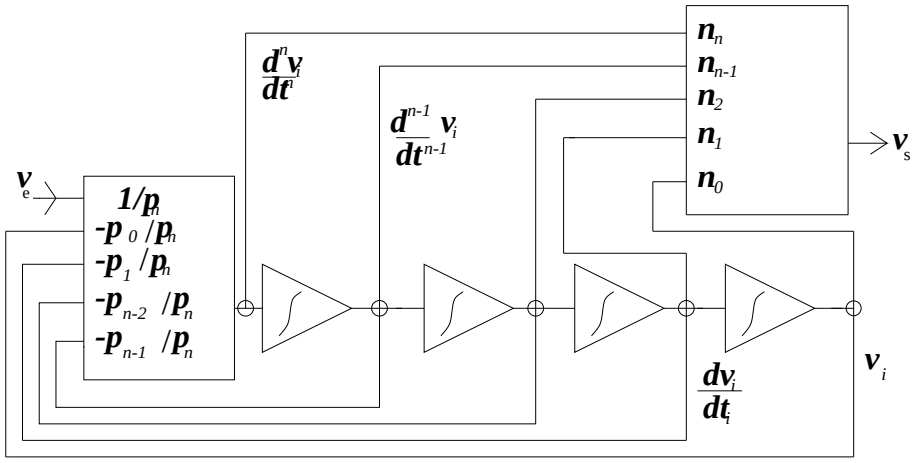


Figure 1:

The complete transfer function is then obtained by noticing that:

$$v_s(t) = n_0 v_i(t) + n_1 \frac{dv_i(t)}{dt} + ... + n_n \frac{d^n v_i(t)}{dt^n} \tag{6}$$

Some versions of the SPICE circuit simulator lack blocks providing such transfer functions in their types of devices. Such a block diagram is a convenient way to provide a specific transfer function as part of a circuit to be simulated. It requires less nodes and devices than the electronic form we are going to see. Inverting integrators, as will be seen in next section, provide the simplest integrating circuits, but their sign inversion must be cancelled out by appropriate signs in the coefficients of the adding blocks.

3 Electronic form of this block diagram

Each adding block can be easily made with a single operational amplifier (I assume there is no need to recall the theory). Such an adding block provides an undesirable inversion of sign, but both blocks cancel each other's effect. Fig. 2 represents the corresponding circuit.

R0 is an arbitrary resistor value. It must not be chosen too low, because of the maximum output current available from the opamps, nor too high, because the bias current of the opamps would cause some offsets.

The practical wiring of an integrator requires the familiar R-C-opamp integrator followed by an inverter (minus-one-gain amplifier), because this familiar integrator performs $-\frac{1}{RC}\int e(t)dt$ (fig. 3) . We must get rid of the minus sign. In practice $n-1$ familiar integrators can be

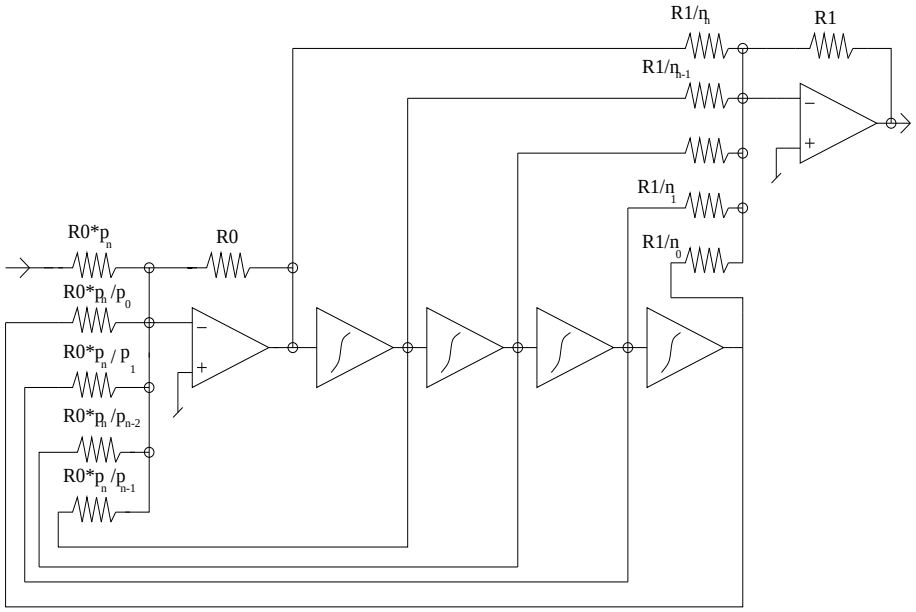


Figure 2:

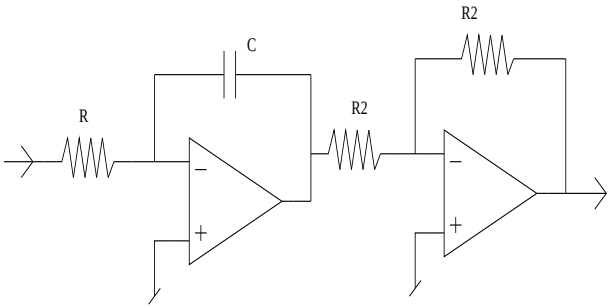


Figure 3: A non-inverting integrator

directly cascaded, and inverters need be inserted only in the paths of odd-order terms, since two cascaded inversions cancel each other.

In our situation, the frequencies of interest are often in the KHz range, so that the transfer function coefficients are in the 10^{-3} range, requiring excessive resistor value ranges. Therefore the resistor and capacitor values common to all integrators are chosen so as to give a unity-gain frequency of the integrators close to our frequencies of interest, resulting in filter coefficients not too far from unity. The variable s in all equations seen so far represents the Laplace variable reduced to this unity-gain frequency.

4 High order filters: to factorize or not to factorize ?

High order polynoms can always be factorized in second-order trinoms (this comparison is limited to even-order polynoms for the sake of simplicity). The non-factorized realization

involves $\frac{3}{2}n + 2$ opamps. The factorized realization involves $\frac{5}{2}n$ opamps. The visual analysis of a measured transfer function plot yields a factorized form more easily. Moreover, the factorized form allows to adjust the frequency or the Q of a particular pole or zero more easily. If the electronics is cascaded with the system under test, these parameters can be experimentally adjusted so as to cancel those of the system.

The non-factorized form is more suited to predetermined functions such as Butterworth functions.

The delay of the non-factorized form may be less than that of the factorized form. See section 8.

5 Practical designs of second order filters

Assume the transfer function reduces to:

$$H(s) = \frac{K_1(\omega_1^2 + \frac{\omega_1}{Q_1}s + s^2)}{\frac{1}{K_0}(\omega_0^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + s^2)} \tag{7}$$

As will be discussed later, distributing the HF gain $K = K_0K_1$ like this on both summing opamps influences the high-frequency delay.

A straightforward adaptation of the general form filter yields this design:

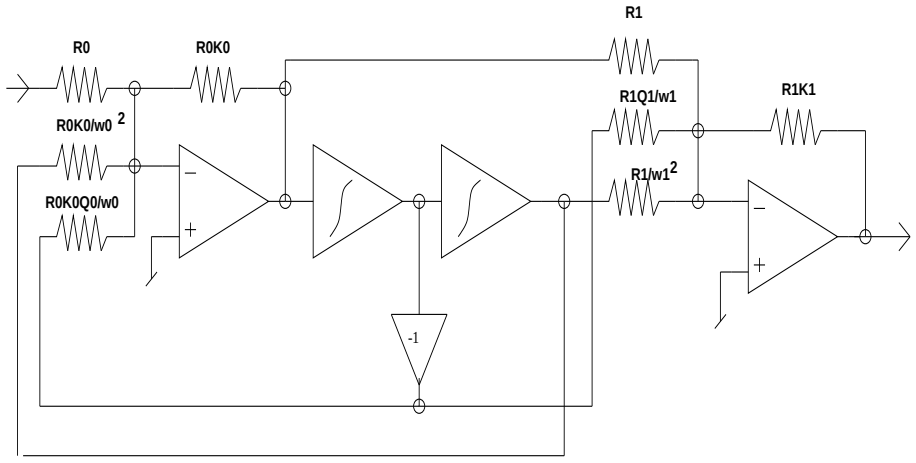


Figure 4:

(The $-\int$ blocks are familiar, one-opamp integrators)

Adjusting either frequency or Q is much more convenient than with twin-T or other "cookbook" filters, which require accurate relationships between their component values to work properly.

The opamp of the inverter section can be saved by using the non-inverting inputs of the summing opamp's, but this complicates the independent adjustment of frequencies and Q's. Moreover

we loose the ability to adjust the overall gain by adjusting the sole feedback resistor of the output opamp[1]:

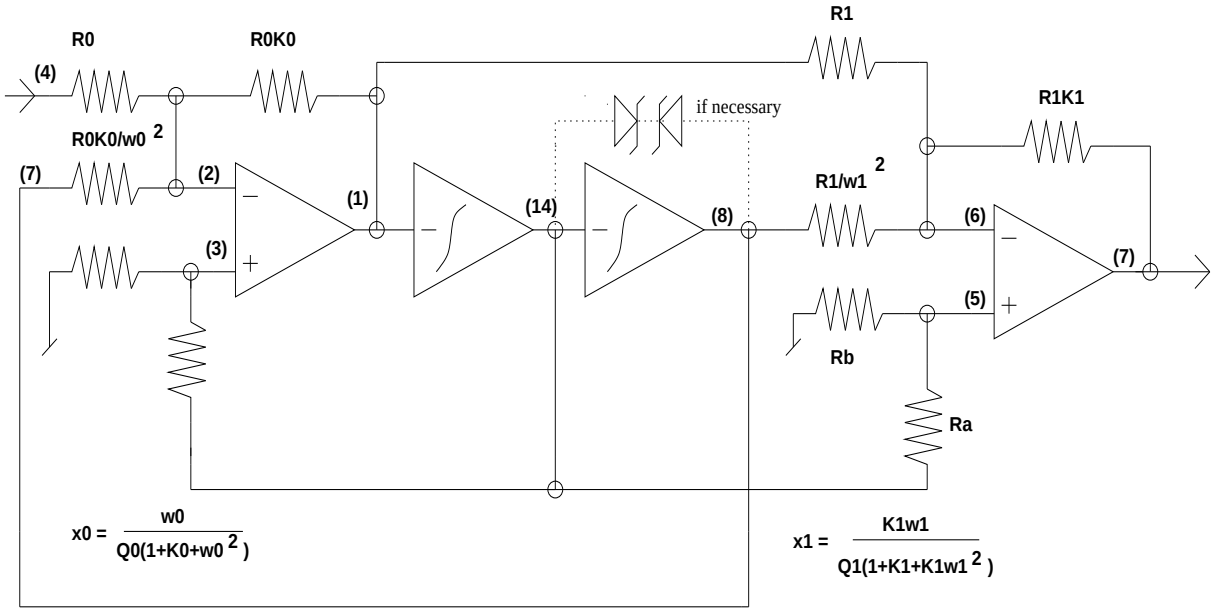


Figure 5:

Dividing bridges for the + inputs of both sommators with the ratio:

$$R_b = R_a \frac{x_i}{1 - x_i} \tag{8}$$

give the expected dividing factor x_i.

Filters with high Q's and with a pole and zero close together make the zero parameters difficult to tune, because the frequencies and values of the max and min are not simply related to the pole and zero parameters (the pole parameters are easily tuned by monitoring the outputs of the integrators instead of the "real" output). This adjustment can be made much easier by directly connecting the + input of the input sommator directly to the output of the first integrator, i.e. making $x_0 = 1$. Then Q_0 becomes:

$$Q_{0tempor} = \frac{\omega_0}{1 + K_0 + \omega_0^2} \tag{9}$$

which usually less than $\frac{1}{3}$. Then the filter's TRF becomes mainly dominated by the zero.

6 Taking care of saturations

A filter like fig.2 may oscillate if one or more integrators saturates, because unsaturating adds delays in the loop of the first summing opamp. Care must be taken to allow this loop to be

[1] Parenthesized numbers are pin numbers for LM324 or similar. [(4) is only for my SPICE simulation]

still linear even if all integrators saturates. According to the R_0/n_i resistor values, this may require clamping some opamps with a set of two opposite Zener diodes in parallel with their feedback capacitor, so the contribution of the direct feedback resistor R_0 always dominates those of saturated integrators.

If such a filter in part of a servo loop, the entire loop may oscillate in a similar manner if the corresponding resistors at the output opamp do not meet the same proportion law.

On a fig.5 type filter, "local" oscillations can easily be prevented by choosing $\omega_0 < 1$. So the resistor from the last integrator to the input summing opamp is bigger its own feedback resistor, and the proportional contribution is still linear in a significant range above the limit where the last integrator saturates, since all opamps have the same output range.

In a similar way, loop oscillations can be prevented by choosing $\omega_1 < 1$. If either inequality cannot be met, zener diodes must be used with the second integrator[2].

The dividing bridge that provides Q_1 usually prevents the first integrator from dominating.

7 Taking care of delays

The finite gain-bandwidth products of the opamps cause slight phase shifts which may limit the bandwidth of a servo loop. Such small phase shifts are more conveniently described in terms of delays for signals well within the bandwidth. It can be shown that the delay of a non-inverting two-resistor amplifier with gain K is $T = K\tau$ where $\tau = 1/(2 * pi * GB)$. For an inverting amplifier with the same gain K, the gain of the non-inverting amplifier made with the same set of resistors must be taken into account[3], giving $T = (K + 1)\tau$.

In the filter of fig.5, the path that causes the delay in high frequencies is the path which does not involve the integrators. It can be shown that:

$$T = (1 + K_0 + \omega_0^2)\tau + (1 + K_1 + K_1\omega_1^2)\tau \tag{10}$$

by examining the gains of the opamps seen from the + inputs. The minimal delay is obtained with $K_0 = \sqrt{K(1 + w_1^2)}$ and $K_1 = \sqrt{K/(1 + w_1^2)}$.

giving: $T = (3 + 2\sqrt{2K})\tau$ if $w_0 = w_1 = 1$.

Then distributing the gain equitably on both opamps is not the best strategy (but the increase of delay is not spectacular!).

The delay of the non-factorized form of a high order filter must be calculated the same way. Depending on K and n it can be smaller or bigger.

[2]When in principle zener diodes are not required, most opamps recover from their natural saturated state much **slower** than from the saturation obtained with zener diodes.

[3]"parasitic" resistors between the - input and the ground (or another voltage source) do not change the inverting gain, but add some delay!

8 Practical issues

The opamps must be fast enough for the filter to behave accurately. A rule of thumb is that their gain-bandwidth product must be large compared to the product of the frequencies and Q's of interest, otherwise the integrators do not bring 90^o phase accurately, resulting in a Q lesser than expected. OP-27's (low noise, 8 MHz gain-bandwidth) have fulfilled our needs for poles and zeroes under 10KHz with a breadboard[4]implementation.

The SSFS electronics uses OP467 quadruple opamps (28MHz GB) mounted on a printed circuit with a ground plane.

Filters with null poles require analog switches to short-circuit the capacitors of the integrators that have no feedback path, to prevent their saturation. This forces their outputs to 0 until the conditions allow to lock the servo system. Analog-Devices ADG211AKN give good results.

[4]I will be glad to provide interested parties with my breadboard practices orally. :-)

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

LES PERFORMANCES OPTIQUES sont essentielles pour le fonctionnement d'un détecteur à ondes gravitationnelles.

Avec un modèle numérique d'interféromètre, je montre que les pertes effectives dans les bras kilométriques sont de 500 ppm. Cette valeur est acceptable dans la configuration actuelle. Pour accroître la finesse des longues cavités il sera nécessaire de comprendre, à l'aide de modèles numériques de cavités avec défauts, le rôle des pertes par diaphragme et des pertes par aberrations modales. Il faudra ensuite donner des spécifications sur la correction de surface des miroirs qui doit être apportée.

J'ai développé des calculs analytiques de fonctions de transfert entre un bruit de fréquence et le signal Pound-Drever-Hall d'une cavité Fabry-Perot. En analysant les détails de cette fonction de transfert, j'ai montré comment mesurer avec précision, in-situ, les paramètres optiques de la cavité : indice de couplage, pôle, rayon de courbure, longueur, erreurs d'adaptation et d'alignement du faisceau. J'ai appliqué cette technique à la cavité de filtrage de modes en entrée, vérifiant les paramètres, avec une précision suffisante pour évaluer les pertes. Les calculs analytiques pourraient s'appliquer à des systèmes optiques plus complexes, comme un interféromètre de Michelson avec miroir de recyclage et cavités Fabry-Perot dans les grands bras. L'ajustement de la fonction de transfert utilisée par le deuxième étage de stabilisation de fréquence mesurerait in-situ les pertes de la porteuse et celles des bandes latérales.

Par l'étude systématique de tous les effets couplant les bruits environnementaux à une cavité Fabry-Perot, puis à un interféromètre de Michelson, il sera possible de spécifier tous les niveaux requis pour les bruits, pour les fonctions de transfert qui les couplent dans l'interféromètre, ou pour les techniques d'isolation par commande par anticipation.

Dans la prochaine génération d'interféromètres, les bruits quantiques limiteront la densité spectrale de la résolution : bruit de pression de radiation dans la partie basse fréquence du spectre, bruit de comptage de photons dans la partie haute fréquence. L'utilisation d'états comprimés de lumière sera nécessaire pour réduire ces bruits. Il faudra étudier quelles sont les spécifications optiques nécessaires pour que l'utilisation d'une telle lumière améliore les performances.

LE PROJET STABILISATION DE FRÉQUENCE montre une étude de faisabilité, de conception et de spécification, puis d'implémentation, de recette et de vérification des performances.

J'obtiens une performance exceptionnelle, une densité spectrale de fluctuations relatives de fréquence de $7 \times 10^{-22} / \sqrt{\text{Hz}}$ à 10 Hz, mesurée en boucle, limitée par le bruit de photons. Cette performance est bien sûr possible grâce à l'ensemble des travaux effectués sur l'interféromètre, en particulier l'isolation sismique des miroirs. L'architecture proposée, puis réalisée, m'a permis de m'affranchir des contraintes de partages de boucles qui existent dans d'autres configurations. Les performances hors boucle ne sont pas vérifiables avec la même résolution ; je montre qu'elles sont toutefois suffisantes.

Avec J.-P. Coulon, nous avons développé des filtres numériques qui effectuent des asservissements stables, avec des marges confortables, et des atténuations de plus d'un million pour toutes les fréquences supérieures à une décade au-dessus de la fréquence de gain unité. Nous avons testé avec succès un tel filtre. Ces filtres ne sont pas encore utilisés, mais pourront l'être, en appui des techniques de commande par anticipation, pour améliorer encore les performances à basses fréquences de la prochaine génération de détecteurs.

Avec une mesure de l'asymétrie pour le bruit de fréquence, je montre que le défaut de contraste est 8.7×10^{-7}. Je montre comment il est possible de réduire encore l'asymétrie et le défaut de contraste pour la prochaine génération d'interféromètre. La fraction de bruit de fréquence dans la frange noire diminuera par encore un ordre de grandeur au moins. Les contraintes sur la stabilisation de puissance seront allégées.

Une note technique (chap. 9.3) suggère qu'avec certains paramètres, par exemple une fréquence de modulation plus élevée, la fonction de transfert en boucle ouverte qui stabilise la fréquence sur l'interféromètre pourrait avoir une fréquence de gain unité de plusieurs centaines de kHz. Une étude approfondie, prenant en compte les pertes modales, pourrait confirmer cette indication. Il serait alors possible de s'affranchir de l'étage de pré-stabilisation, ce qui simplifierait considérablement le système.

UNE ÉTUDE DE CONCEPTION ET DE SPÉCIFICATIONS appliquée à la stabilisation de fréquence montre qu'une analyse systématique, préparée par des modèles adéquats, apporte les résultats nécessaires au bon fonctionnement de l'instrument. Avec de telles études sur les aspects optique, verrouillage, couplage des bruits et isolation sismique, nous pourrons montrer qu'un instrument avec une résolution dix fois meilleure que Virgo est possible.

Un tel instrument donnerait au moins un signal tous les trois jours, passant d'une première détection à une véritable exploitation astrophysique des effets forts de la relativité générale portés par les ondes gravitationnelles.

Bibliographie

[1] É. Gourgoulhon. Cours de relativité générale, master. http://www.luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf, 2006.

[2] B. Owen. Sources of gravitational waves for ground-based detectors. http://amaldi6.nao.ac.jp/02.gws/Mon1330_00196.ppt, 2006. 6th E. Amaldi conference on gravitational waves.

[3] http://lisa.esa.int.

[4] http://lisa.nasa.gov.

[5] http://nistboulder.net/Presentations/wg2docN318VIM3ed2006.pdf, 2006. Les significations de sensibilité et résolution dans le mémoire sont celles définies dans le Vocabulaire International de la Métrologie.

[6] R.V. Pound. Electronic frequency stabilization of microwave oscillators. *Rev. Sci. Instrum.*, 17 :490–505, 1946.

[7] R.W.P. Drever, J.L. Hall, F.V. Kowalsky, J. Hough, G.M. Ford, A.J. Munley, and H. Ward. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Appl. Phys. B*, 31(2) :97–105, 1983.

[8] D. A. Shaddock. *Advanced Interferometry for Gravitational Wave Detection*. PhD thesis, The Australian National University, 2001.

[9] D. A. Shaddock, M. B. Gray, and D. E. McClelland. Frequency locking a laser to an optical cavity by use of spatial mode interference. *Opt. Lett.*, 24(21) :1499–1501, 1999.

[10] T.W. Hänsch and B. Couillaud. Laser frequency stabilization by polarization spectroscopy of a reflecting reference cavity. *Opt. Commun.*, 35(3) :441–444, 1980.

[11] T. Caniard. *Couplage optomécanique, action en retour et limites quantiques dans les mesures optiques ultrasensibles*. PhD thesis, Université de Paris VI, 2007.

[12] D. Sigg (for the LIGO Science Collaboration). Status of the LIGO detectors. *Class. Quantum Grav.*, 23(8) :S51–S56, 2006.

[13] F. Acernese, P. Amico, M. Al-Shourbagy, S. Aoudia, S. Avino, D. Babusci, G. Ballardin, F. Barone, L. Barsotti, M. Barsuglia, F. Beauville, M.-A. Bizouard, C. Boccara, F. Bondu, L. Bosi, C. Bradaschia, S. Birindelli, S. Braccini, A. Brillet, V. Brisson, L. Brocco, D. Buskulic, E. Calloni, E. Campagna, F. Cavalier, R. Cavalieri,

G. Cella, E. Chassande-Mottin, C. Corda, A.-C. Clapson, F. Cleva, J.-P. Coulon, E. Cuoco, V. Dattilo, M. Davier, R. De Rosa abd L. Di Fiore, A. Di Virgilio, B. Dujardin, A. Eleuteri, D. Enard, I. Ferrante, F. Fidecaro, I. Fiori, R. Flaminio, J.-D. Fournier, O. Francois, S. Frasca, F. Frasconi, A. Freise, L. Gammaitoni, A. Gennai, A. Giazotto, G. Giordano, L. Giordano, R. Gouaty, D. Grosjean, G. Guidi, S. Hebri, H. Heitmann, P. Hello, L. Holloway, S. Karkar, S. Kreckelbergh, P. La Penna, N. Letendre, M. Lorenzini, V. Loriette, M. Loupias, G. Losurdo, J.-M. Mackowski, E. Majorana, C.N. Man, M. Mantovani, F. Marchesoni, F. Marion, J. Marque, F. Martelli, A. Masserot, M. Mazzoni, L. Milano, C. Moins, J. Moreau, N. Morgado, B. Mours, A. Pai, C. Palomba, F. Paoletti, S. Pardi, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, B. Perniola, F. Piergiovanni, L. Pinard, R. Poggiani, M. Punturo, P. Puppo, K. Qipiani, P. Rapagnani, V. Reita, A. Remillieux, F. Ricci, I. Ricciardi, P. Ruggi, G. Russo, S. Solimeno, A. Spallicci, R. Taddei R. Stanga, M. Tonelli, A. Toncelli, E. Tournefier, F. Travasso, G. Vajente, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Viceré, J.-Y. Vinet, H. Vocca, M. Yvert, and Z. Zhang. The status of VIRGO. *Class. Quantum Grav.*, 23(8) :S63–S69, 2006.

[14] T. Akutsu, M. Ando, N. Kanda, D. Tatsumi, and S. Telada. Veto analysis for gravitational wave burst signals in TAMA300 data using an ALF filter. *Class. Quantum Grav.*, 23 :S23–S28, 2006.

[15] H. Lück, M. Hewitson, P. Ajith, B. Allen, P. Aufmuth, C. Aulbert, S. Babak, R. Balasubramanian, B.W. Barr, S. Berukoff, A. Bunkowski, G. Cagnoli, C. A. Cantley, M.M. Casey, S. Chelkowski, Y. Chen, D. Churches, T. Cokelaer, C.N. Colacino, D.R.M. Crooks, C. Cutler, K. Danzmann, R.J. Dupuis, E. Elliffe, C. Fallnich, A. Franzen, A. Freise, I. Gholami, S. Goßler, A. Grant, H. Grote, S. Grunewald, J. Harms, B. Hage, G. Heinzel, I.S. Heng, A. Hepstonstall, M. Heurs, S. Hild, J. Hough, Y. Itoh, G. Jones, R. Jones, S.H. Huttner, K. Kötter, B. Krishnan, P. Kwee, M. Luna, B. Machenschalk, M. Malec, R.A. Mercer, T. Meier, C. Messenger, S. Mohanty, K. Mossavi, S. Mukherjee, P. Murray, G.P. Newton, M.A. Papa, M. Perreur-Lloyd, M. Pitkin, M.V. Plissi, R. Prix, V. Quetschke, V. Re, T. Regimbau, H. Rehbein, S. Reid, L. Ribichini, D.I. Robertson, N.A. Robertson, C. Robinson, J.D. Romano, S. Rowan, A. Rüdiger, B.S. Sathyaprakash, R. Schilling, R. Schnabel, B.F. Schutz, F. Seifert, A.M. Sintes, J.R. Smith, P.H. Sneddon, K.A. Strain, I. Taylor, R. Taylor, A. Thüring, C. Ungarelli, H. Vahlbruch, A. Vecchio, J. Veitch, H. Ward, U. Weiland, H. Welling, L. Wen, P. Williams, B. Willke, W. Winkler, G. Woan, and R. Zhu. Status of the GEO600 detector. *Class. Quantum Grav.*, 23(8) :S71–S78, 2006.

[16] D.E. McClelland, S.M. Scott, M.B. Gray, A.C. Searle, S. Goßler, B.J.J. Slagmolen, J. Dickson, J.H. Chow, G. de Vine, K. McKenzie, C.M. Mow-Lowry, A. Moylan, D.S. Rabeling, B.S. Sheard, J. Cumpston, K. Wette, D.G. Blair, L. Ju, R. Burman, D. Coward, C. Zhao, P. Barrigo, E. Chin, J. Degallaix, Y. Fan, S. Gras, E. Howell, B. Lee, S. Schediwy, Z. Yan, J. Munch, P.J. Veitch, D. Mudge, A. Brooks, and D. Hosken. Status of the Australian Consortium for Interferometric Gravitational Astronomy. *Class. Quantum Grav.*, 23(8) :S41–S49, 2006.

[17] http://wwwcascina.virgo.infn.it/advirgo.

[18] http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/.

[19] http://www.ligo.caltech.edu/docs/G/G070372-00/G070372-00.pdf.

[20] K. Kuroda and the LCGT collaboration. The status of LCGT. *Class. Quantum Grav.*, 23(8) :S215–S221, 2006.

[21] P. Delva, M.-C. Angonin, and P. Tourrenc. A comparison between matter wave interferometers for the detection of gravitational waves. *Phys. Let. A*, 357 :149–254, 2006.

[22] P. Delva, M.-C. Angonin, and Ph. Tourrenc. Matter waves and the detection of gravitational waves. *J. Phys. : Conf. Ser.*, 66 :012050, 2007.

[23] M.P. McHugh, W.W. Johnson, W.O. Hamilton, J. Hanson, I.S. Heng, D. McNeese, P. Miller, D. Nettles, J. Weaver, and P. Zhang. Calibration of the allegro resonant detector. *Class. Quantum Grav.*, 22(18) :S965–S973, 2005.

[24] L. Baggio et al. 3-mode detection for widening the bandwidth of resonant gravitational wave detectors. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :241101, 2005.

[25] P. Astone, R. Ballantini, D. Babusci, M. Bassan, P. Carelli, G. Cavallari, F. Cavanna, A. Chincarini, E. Coccia, C. Cosmelli, S. D'Antonio, F. Dubath, V. Fafone, S. Foffa, G. Gemme, G. Giordano, M. Maggiore, A. Marini, Y. Minenkov, I. Modena, G. Modestino, A. Moleti, G.P. Murtas, A. Pai, O. Palamara, G.V. Pallottino, R. Parodi, G. Piano Mortari, G. Pizzella, L. Quintieri, A. Rocchi, F. Ronga, R. Sturani, R. Terenzi, G. Torrioli, R. Vaccarone, G. Vandoni, and M. Visco. Status report on the EXPLORER and NAUTILUS detectors and the present science run. *Class. Quantum Grav.*, 23(8) :S57–S62, 2006.

[26] A. de Waard, M. Bassan, Y. Benzaim, V. Fafone, J. Flokstra, G. Frossati, L. Gottardi, C.T. Herbschleb, A. Karbalai-Sadegh, K. Kuit, H. van der Mark, Y. Minenkov, J.B.R. Oonk, G.V. Pallottino, J. Pleikies, A. Rocchi, O. Usenko, and M. Visco. Preparing for science run 1 of MiniGRAIL. *Class. Quantum Grav.*, 23 :S79–S84, 2006.

[27] T. Battistini. Alignements du mode cleaner d'entrée de VIRGO. Rapport de stage de fin d'études d'ingénieur ECAM Lyon, Observatoire de la Côte d'Azur, 2001.

[28] S.J. Orfanidis. Electromagnetic waves and antennas. http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/, 2004. chapter 12.

[29] The Virgo collaboration. The Virgo Physics Book, vol. II, optics and related topics. http://wwwcascina.virgo.infn.it/vpb/, November 2005.

[30] Ch. Fabry and A. Perot. Les franges des lames minces argentées. *Ann. Chim. Phys.*, 7(12) :459–501, 1897. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k349121/f452.table.

[31] E.D. Black. An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization. *Am. J. Phys.*, 69(1), January 2001.

[32] F. Bondu and O. Debieu. Accurate measurement method of Fabry-Perot cavity parameters via optical transfer function. *Appl. Opt.*, 46(14) :2611–2614, 2007.

[33] L. Mondin. *Stabilisation en fréquence de laser Nd :YAG pour applications spatiales*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2005.

[34] J.-Y. Vinet, V. Brisson, and S. Braccini. Scattered light noise in gravitational wave interferometric detectors : Coherent effects. *Phys. Rev. D*, 54(2) :1276–1286, 1996.

[35] W. Koechner. *Solid-state laser engineering*. Springer-Verlag, 1988.

[36] B. Bochner and Y. Hefetz. Grid-based simulation program for gravitational wave interferometers with realistically imperfect optics. *Phys. Rev. D*, 68 :082001, 2003.

[37] W.B. Kells. Initial LIGO COC loss investigation summary. LIGO-T070051, 2007.

[38] A.E. Siegman. *Lasers*. Stanford University, 1986.

[39] J.-Y. Vinet, P. Hello, C.N. Man, and A. Brillet. A high accuracy method for the simulation of non-ideal optical cavities. *J. Phys. 1 France*, 2 :1287–1303, 1992.

[40] M. Laval and J.Y. Vinet. DarkF users guide. VIR-007-08, 2007.

[41] J. M. Mackowski, L. Pinard, L. Dognin, P. Ganau, B. Lagrange, C. Michel, and M. Morgue. Different approaches to improve the wavefront of low-loss mirrors used in the virgo gravitational wave antenna. *Applied Surface Science*, 151(1–2) :86–90, 1999.

[42] M. Rakhmanov, R.L. Savage Jr., D.H. Reitze, and D.B. Tanner. Dynamic response of light in Fabry-Perot cavities. *Phys. Lett. A*, 305 :239–244, 2002.

[43] W.E. Butler. *Characterization of the high frequency response of the laser interferometer gravitational wave detectors*. PhD thesis, University of Rocherster, 2004.

[44] R. Schilling. Angular and frequency response of LISA. *Class. Quantum Grav.*, 14(6) :1513–1519, 1997.

[45] J. Poirson, F. Bretenaker, M. Vallet, and A. Le Floch. Analytical and experimental study of ringing effects in a Fabry-Perot cavity. Application to the measurement of high finesses. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(11) :2811–2817, 1997.

[46] L. Matone, M. Barsuglia, F. Bondu, F. Cavalier, H. Heitmann, and N. Man. Finesse and mirror speed measurement for a suspended Fabry-Perot cavity using the ringing effect. *Phys. Lett. A*, 271(5-6) :314–318, 2000.

[47] F. Cleva and J.-P. Coulon. Acousto-optic effects in air. Virgo note VIR-NOT-LAL-1380-112 alias NTS95011, 1995.

[48] A. Brillet et al. VIRGO Proposal to CNRS and INFN. *unpublished*, 1989.

[49] G. Ballardin, L. Bracci, S. Braccini, C. Bradaschia, C. Casciano, G. Calamai, R. Cavalieri, R. Cecchi, G. Cella, E. Cuoco, E. D'Ambrosio, V. Dattilo, A. Di Virgilio, L. Fabbroni, F. Fidecaro, F. Frasconi, A. Gaddi, A. Gennai, G. Gennaro, A. Giazotto, G. Losurdo, L. Holloway, P. La Penna, F. Lelli, E. Majorana, M. Mazzoni, F. Paoletti, M. Pasotti, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, R. Poggiani, P. Puppo,

F. Raffaelli, P. Rapagnani, F. Ricci, P. Ruggi, R. Stanga, R. Taddei, F. Vetrano, A. Vicerè, and Z. Zhang. measurement of the VIRGO superattenuator performance for seismic noise suppression. *Rev. Sci. Instrum.*, 72(9) :3643–3652, 2001.

[50] M. Pham Tu. Electrostatic system for quality factor measurement and control of position of the test masses. Virgo note VIR-TRE-LAS-1390-179, 1997.

[51] A. brillet. Comments on the barkhausen noise. Virgo note VIR-NOT-LAS-1380-013, 1991.

[52] B. C. Young, F. C. Cruz, W. M. Itano, and J. C. Bergquist. Visible lasers with subhertz linewidths. *Phys. Rev. Lett.*, 82(19) :3799–3802, 1999.

[53] M. Notcutt, L.-S. Ma, J. Ye, and J. L. Hall. Simple and compact 1-Hz laser system via an improved mounting configuration of a reference cavity. *Opt. Lett.*, 30(14) :1815–1817, 2005.

[54] S. A. Webster, M. Oxborrow, and P. Gill. Vibration insensitive optical cavity. *Phys. Rev. A*, 75 :011801(R), 2007.

[55] D. Pasuello S. Braccini, A. Genai. Superattenuators position control. Virgo note VIR-TRE-PIS-4600-132, 1997.

[56] M. Notcutt, L.-S. Ma, A. D. Ludlow, S. M. Foreman, J. Ye, and J. L. Hall. Contribution of thermal noise to frequency stability of rigid optical cavity via hertz-linewidth lasers. *Phys. Rev. A*, 73 :031804(R), 2006.

[57] M. Tobar, E. Ivanov, C. Locke, P. Stanwix, J. Hartnett, A. Luiten, R. Warrington, P. Fisk, M. Lawn, M. Wouters, S. Bize, G. Santarelli, P. Wolf, A. Clairon, and P. Guillemot. Long term operation and performance of cryogznic sapphire oscillators. http://arxiv.org/ftp/physics/papers/0608/0608202.pdf, 2006.

[58] H.B. Callen and T.A. Welton. Irreversability and generalized noise. *Phys. Rev.*, 83 :34–40, 1951.

[59] F. Bondu. *Étude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1996.

[60] C. Zener. Theory of internal friction in reeds. *Phys. Rev.*, 52 :230–235, 1937.

[61] C. Zener. General theory of thermoelastic internal friction. *Phys. Rev.*, 53 :90–99, 1938.

[62] C. Zener. Experimental demonstration of thermoelastic internal friction. *Phys. Rev.*, 53 :100–101, 1938.

[63] G. W. Mac-Mahon. Experimental study of solid, isotropic elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 36 :85–92, 1964.

[64] F. Bondu and J.Y. Vinet. Mirror thermal noise in interferometric gravitational-wave detectors. *Phys. Lett. A*, 198 :74–78, 1995.

[65] A. Gillespie and F. Raab. Thermally excited vibrations of the mirrors of a laser interferometer gravitational-wave detector. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 39(2) :1152, 1994.

[66] Y. Levin. Internal thermal noise in the LIGO test masses : a direct approach. *Phys. Rev. D*, 57(2) :659–663, 1998.

[67] F. Bondu, P. Hello, and J.-Y. Vinet. Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas. *Phys. Lett. A*, 246(3-4) :227–236, 1998.

[68] K. Numata, A. Kemery, and J. Camp. Thermal noise limit in the frequency stabilization of lasers with rigid cavities. *Phys. Rev. lett.*, 93(25) :250602, 2004.

[69] S. D. Penn, G. M. Harry, A. M. Gretarsson, S. E. Kittelberger, P. R. Saulson, J. J. Schiller, J. R. Smith, and S. O. Swords. High quality factor measured in fused silica. *Rev. Sci. Instrum*, 72(9) :3670–3673, 2001.

[70] F. Beauville and the VIRGO Collaboration. The VIRGO large mirrors : a challenge for low loss coatings. *Class. Quantum Grav*, 21 :S935–S945, 2004.

[71] K. Yamamoto, S. Miyoki, T. Uchiyama, H. Ishitsuka, M. Ohashi, and K. Kuroda. Measurement of the mechanical loss of a cooled reflective coating for gravitational wave detection. *Phys. Rev. D*, 74 :022002, 2006.

[72] G. M. Harry, M. R. Abernathy, A. E. Becerra-Toledo, H. Armandula, E. Black, K. Dooley, M. Eichenfield, C. Nwabugwu, A. Villar, D. R. M. Crooks, G. Cagnoliand J. Hough, C. R. How, I. MacLaren, P. Murray, S. Reidand S. Rowan, P. H. Sneddon, M. M. Fejer, R. Route, S. D. Pennand P. Ganau, J.-M. Mackowski, C. Michel, L. Pinard, and A. Remilleux. Titania-doped tantala/silica for gravitational-wave detection. *Class. Quantum Grav.*, 24 :405–415, 2007.

[73] M. M. Fejer, S. Rowan, G. Cagnoli, D. R. M. Crooks, A. Gretarson, G. M. Harry, J. Hough, S. D. Penn, P. H. Sneddon, and S. P. Vyatchanin. Thermoelastic dissipation in inhomogeneous media :loss measurements and displacement noise in coated test masses for interferometric gravitational wave detectors. *Phys. Rev. D*, 70 :082003, 2004.

[74] A. D. Ludlow, X. Huang, M. Notcutt, T. Zannon-Willette, S. M. Foreman, M. M. Boyd, S. Blatt, and J. Ye. Compact, thermal-noise-limited optical cavity for diode laser stabilization at 1×10^{-15}. *Opt. Lett.*, 32(6) :641–643, 2007.

[75] K. Numata, M. Ando, K. Yamamoto, S. Otsuka, and K. Tsubono. Wide-band direct measurement of thermal fluctuations in an interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 91(26) :260602, 2003.

[76] E. D. Black, A. Villar, K. Barbary, A. Bushmaker, J. Heefner, S. Kawamura, F. Kawazoe, L. Matone, S. Meidt, S. R. Rao, K. Schulz, M. Zhang, and K. G. Libbrecht. Direct observation of broadband coating thermal noise in a suspended interferometer. *Phys. Lett. A*, 328(1) :1–5, 2004.

[77] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, A. Heidmann, J.-M. Mackowski, C. Michel, L. Pinard, O. Français, and L. Rousseau. High-sensitivity optical monitoring of a micromechanical resonator with quantum-limited optomechanical sensor. *Phys. Rev. Lett*, 97 :133601, 2006.

[78] B. Mours, E. Tournefier, and J.-Y. Vinet. Thermal noise reduction in interferometric gravitational wave antennas : using high order TEM modes. *Class. Quantum Grav.*, 23 :5777–5784, 2006.

[79] E. D'Ambrosio. Nonspherical mirrors to reduce thermoelastic noise in advanced gravitational wave interferometers. *Phys. Rev. D*, 67 :102004, 2003.

[80] G. Cella and A. Giazotto. Coatingless, tunable finesse interferometer for gravitational wave detection. *Phys. Rev. D*, 74 :042001, 2006.

[81] P. Amico, L. Bosi, L. Carbone, L. Gammaitoni, F. Marchesoni, M. Punturo, F. Travasso, and H. Vocca. Monolithic fused silica suspension for the gravitational wave detector. *Rev. Sci. Instrum.*, 73(9) :3318–3323, 2002.

[82] T. M. Niebauer, R. Schilling, K. Danzmann, A. Rüdiger, and W. Winkler. Nonstationary shot noise and its effect on the sensitivity of interferometers. *Phys. Rev. A*, 43(9) :5022–5029, 1991.

[83] T. C. Corbitt, Y. Chen, and N. Mavalvala. Mathematical framework for simulation of quantum fields in complex interferometers using the two-photon formalism. *Phys. Rev. A*, 72 :013818, 2005.

[84] H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne, and S. P. Vyatchanin. Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics. *Phys. Rev. D*, 65 :022002, 2002.

[85] F. Seifert, P. Kwee, M. Heurs, B. Willke, and K. Danzmann. Laser power stabilization for second-generation gravitational wave detectors. *Opt. Lett.*, 31(13) :2000–2002, 2006.

[86] J.-Y. Vinet. Light/mirror interactions in advanced gravitational wave interferometric detectors. En préparation pour Living Reviews in relativity, 2007.

[87] F. Marion et al. SIESTA : A general purpose simulation program for the VIRGO experiment. In K. Tsubono, M.-K. Fujimoto, and K. Kuroda, editors, *Proceedings of the TAMA International Workshop on Gravitational Wave Detection*, page 21. Frontiers Science Series No. 20 Universal Academy Press, Inc., 1997. Japan, on 12-14 November, 1996.

[88] S. Hebri. *Etudes de la pression de radiation dans les interféromètres utilisés pour la détection des ondes gravitationnelles*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2007.

[89] E.A. Whittaker, M. Gehrtz, and G.C. Bjorklund. Residual amplitude modulation in laser electro-optic phase modulation. *J. opt. Soc. Am. B*, 2(8) :1320–1326, 1985.

[90] N.C. Wong and J.L. Hall. Servo control of amplitude modulation in frequency-modulation spectroscopy : demonstration of shot-noise detection. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2(9) :1527–1533, 1985.

[91] M. Smith. Scattered light noise in Virgo. Virgo note VIR-NOT-CAS-1390-162, 2000.

[92] M. Smith. Scattered light control in LIGO. G000008-00-D, 2000.

[93] J.-Y. Vinet, V. Brisson, S. Braccini, I. Ferrante, L. Pinard, F. Bondu, and E. Tournié. Scattered light noise in gravitational wave interferometric detectors : A statistical approach. *Phys. Rev. D*, 56(10) :6085–6095, 1997.

[94] V.P. Mitrofanov, L.G. Prokhorov, and K.V. Tokmakov. Variation of electric charge on prototype of fused silica test mass of gravitational wave antenna. *Phys. Let. A*, 300 :370–374, 2002.

[95] R. Weiss. Note on electrostatics in the LIGO suspension. T960137-00-E, 1995.

[96] M.J. Mortoson, C.C. Vassiliou, D.J. Ottaway, D.H. Shoemaker, and G.M. Harry. Effects of charging on the mechanical Q of a fused silica disk. *Rev. Sci. Instrum.*, 74(11) :4840–4845, 2003.

[97] P. Hello. *Couplages dans les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles*. PhD thesis, Université de Paris XI (Orsay), 1996. mémoire d'habilitation à diriger des recherches.

[98] V.B. Braginsky, S.E. Strigin, and S.P. Vyatchanin. Parametric oscillatory instability in Fabry-Perot interferometer. *Phys. Let. A*, 287 :331–338, 2001.

[99] S.E. Strigin and S.P. Vyatchanin. Analysis of parametric oscillatory in signal recycled LIGO interferometer with different arms. *Phys. Let. A*, 365 :10–16, 2007.

[100] L. Ju, S. Gras, C. Zhao, J. Degallaix, and D.G. Blair. Multiple modes contributions to parametric instabilities in advanced gravitational wave detectors. *Phys. Let. A*, 354 :360–365, 2006.

[101] E.D. Black. Thermal noise interferometer progress and status : Ring dampers and aperiodic coatings. G060448-00, 2006.

[102] A. Brillet, J.-Y. Vinet, V. Loriette, J.-M. Mackowski, L. Pinard, and A. Remilleux. Virtual gravitational wave interferometers with actual mirrors. *Phys. Rev. D*, 67, 2003.

[103] J.-Y. Vinet. Backscattering off mc mirror. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-221, 2002.

[104] http://www.ligo.mit.edu/~gharry/workshop/workshop.html.

[105] F. Bondu. Some issues with multiple servo loop systems. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-234, 2003.

[106] M. Punturo. The Virgo sensitivity curve. Virgo note VIR-NOT-PER-1390-51 v11, 2003.

[107] P. Fritschel. Notes on the laser frequency stabilization. Virgo note VIR-NOT-LAL-1380-051 alias PJT 93009, 1993.

[108] F. Bondu, A. Brillet, J.P. Coulon, and C.N. Man. Laser frequency prestabilization. Virgo note NTS 95025, 1995.

[109] F. Bondu, P. Fritschel, C.N. Man, and A. Brillet. Ultrahigh-spectral-purity laser for the VIRGO experiment. *Opt. Lett.*, 21(8) :582–584, 1996.

[110] C.N. Man and A. Brillet. Update on the requirements of the laser frequency prestabilization. Virgo note VIR-NOT-LAS-1380-105 alias PJT94036, 1994.

[111] A. Brillet and C.N. Man. Double servo loop for laser frequency stabilization. Virgo note VIR-NOT-LAS-1380-134 alias NTS95033, 1995.

[112] C.N. Man, F. Bondu, M. Barsuglia, F. Cavalier, and Ph. Heusse. Definition of the interface between global control and laser/input bench about the second stage of frequency stabilization. Virgo note VIR-ICD-LAS-4100-117, 1999.

[113] M. Barsuglia. *Stabilisation en Fréquence du laser et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus pour le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles VIRGO*. PhD thesis, Université Paris XI (Orsay), 1999.

[114] H. Trinquet and F. Bondu. Comparison of two different topologies for frequency stabilisation of the laser. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-178, 2001.

[115] F. Bondu. Design of the last stage of laser frequency stabilization and laser frequency noise requirements. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-227, 2002.

[116] M. Barsuglia. Signal and noise for the second stage of frequency stabilization. Virgo note VIR-NOT-LAS-1390-102, 1997.

[117] F. Bondu and M. Barsuglia. Laser frequency stabilization topology. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-247, 2003.

[118] F. Bondu. Phase modulation due to the motion of the input mode cleaner mirrors in c1 configuration. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-260, 2004.

[119] J.-P. Coulon. Transfer function for the double-path frequency stabilization. Virgo note VIR-MEM-OCA-4100-127, 2000.

[120] J.-P. Coulon. Transfer functions for the mirror path of the interferometer frequency stabilisation. Virgo note VIR-NOT-OCA-1390-233, 2003.

[121] The Virgo collaboration. Lock acquisition of the virgo gravitational wave detector. submitted to Phys. Rev. D.

[122] F. Bondu and M. Barsuglia. Cabling for the laser frequency stabilization. Virgo note VIR-SPE-OCA-1390-149, 2003.

[123] F. Bondu. Second stage of frequency stabilization electronics, specification document. VIR-055A-07 alias VIR-SPE-OCA-1390-336, 2007.

[124] R. Flaminio, R. Gouaty, and E. Tournefier. Analysis of the sensitivity of the recombined interferometer during c4 and c5 runs. Virgo note VIR-NOT-LAP-1390-312, 2006.

[125] R. Flaminio, R. Gouaty, and E. Tournefier. Analysis of the sensitivity of the recycled interferometer during c5, c6 and c7 runs. Virgo note VIR-NOT-LAP-1390-313, 2006.

[126] F. Hartmann and F. Stoeckel. Stabilité de fréquence et pureté spectrale des lasers. *J. Phys. (Paris)*, 39 :C1–32, 1978.

[127] P. Puppo. A finite element model of the virgo mirrors. Virgo note VIR-NOT-ROM-1390-262, 2004.

[128] http://www.bgu.ac.il/chem_eng/pages/Courses/oren%20courses. chapter 9.

[129] B. Swinkels. Longitudinal noise substraction, α,β, γ, ... Virgo locking group meeting, january 2008.

[130] The Virgo collaboration. Last stage control and mechanical transfer function measurement of the virgo suspensions. *Rev. Sci. Instrum.*, 73(5) :2143–1249, 2002.

[131] L. Holloway, G. Losurdo, and D. Passuello. Feedback of interferometer error signal to upper suspension. VIR-NOT-PIS-1390-182, 2001.

[132] https://pub3.ego-gw.it/logbook/.

[133] F. Marion, B. Mours, L. Rolland, and D. Huet. Virgo actuator gain calibration : methods and results. period september 2006 to april 2007. Virgo note VIR-005A-07, 2007.

[134] B. Swinkels, E. Campagna, G. Vajente, L. Barsotti, and M. Evans. Longitudinal substraction : the *alpha* and *beta* technique. in preparation, 2008.