



HAL
open science

Contributions a l'analyse de la variance et aux plans d'experience

Tuan Ph Am Dinh

► **To cite this version:**

Tuan Ph Am Dinh. Contributions a l'analyse de la variance et aux plans d'experience. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1970. Français. NNT : . tel-00282292

HAL Id: tel-00282292

<https://theses.hal.science/tel-00282292>

Submitted on 27 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Tu 389

N° d'ordre

THESE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE SPECIALITE

"Mathématiques Appliquées"

par

PH AM DINH Tuan

Contributions à l'analyse de la Variance et aux plans d'expérience

Thèse soutenue le 18 Décembre 1970, devant la commission d'examen :

MM. KUNTZMANN

Président

BARRA

Examineur

ROMIER

Examineur

L I S T E D E S P R O F E S S E U R S

Doyen Honoraire : Monsieur M.MORET
Doyen : Monsieur E.BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLANBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie Animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle-Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	BERBER Robert	Mathématiques
	PAUTENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire
	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBERT Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique

MM.	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme	KOFLER Lucie	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I.U.T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse Numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean Jacques	Mathématiques Pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique
MM.	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMMIER Pierre	Physique Nucléaire-Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul Numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme	KAHANE Josette	Physique
Mme	BONNIER Jane	Chimie
MM.	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	MORITA Susumu	Physique Nucléaire
	RADHAKRISHNA	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques
MM.	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Pyysique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEHOWICZ Joseph	Physique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	LONGEQUEUE Jean Pierre	Physique
	SOHM Jean Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND François	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie Végétale
	PFISTER Jean Claude	Physique
	CHIBON Pierre	Biologie Animale
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I.P.
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.S.U.Chambery)
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T.)
	BRUGEL Lucien	Energétique I.U.T.
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	BOUSSARD Jean Claude	Mathématiques Appliquées(I.P.G.)
	MOREAU René	Hydraulique I.P.G.
	ARMAND Yves	Chimie I.U.T.
	BOLLIET Louis	Informatique I.U.T.
	KUHN Gérard	Energétique I.U.T.
	PEFFEN René	Chimie I.U.T.
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	JOLY Jean René	Mathématiques Pures

Mlle	PIERY Yvette	Biologie Animale
MM.	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	MOHSEN Tahsin	Biologie (C.S.U.Chambery)
	CONTE René	Mesures Physiques I.U.T.
	LE JUNTER Noël	Génie Electrique Electronique I.U.T.
	LE ROY Philippe	Génie Mécanique I.U.T.
	ROMIER Guy	Technique Statistiques Quantitatives I.U.T
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	MAYNARD Roger	Physique
	DUSSAUD René	Mathématiques (C.S.U.Chambery)
	BELORIZKY Elie	Physique (C.S.U Chambery)
Mme	LAJZEROWICZ Jeanine	Physique (C.S.U Chambery)
M.	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie
MM.	BLIMAN Samuel	E.I.E.
	BEGUIN Claude	Chimie Organique
	NEGRE Robert	I.U.T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	YAMADA Osamu	Physique du Solide
	NAGAO Makoto	Mathématiques Appliquées
	MAREZIO Massimo	Physique du Solide
	CHEECKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	ROZMARIN Georges	Chimie Papetière

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à :

Monsieur le Professeur J. KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Université de Grenoble, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le Jury,

Monsieur le Professeur J.R. BARRA qui a dirigé ce travail et qui par son intérêt et ses conseils m'a aidé à le mener à bien, ce dont je l'en remercie tout particulièrement,

Monsieur G. ROMIER, Maître de Conférences, qui a bien voulu accepter d'être membre du Jury,

Mademoiselle G. BICAIS et Monsieur MOUNET, ainsi que tous les membres du Laboratoire qui y ont contribué.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE - I : TEST D'HYPOTHESE LINEAIRE ET D'HYPOTHESES LINEAIRES MULTIPLES

1 - Test d'hypothèse linéaire -----	2
2 - Test d'hypothèses multiples -----	16
3 - Test d'hypothèses linéaires multiples -----	26

CHAPITRE - II: ANALYSE DE LA VARIANCE SUR PLAN D'EXPERIENCE (Modèle I)

1 - Décomposition de l'espace des fonctions définies sur un produit cartésien d'ensembles finis et le modèle statistique ---	44
2 - Hypothèse vérifiable. Plan d'expérience adapté à un couple d'hypothèses -----	51
3 - Test d'hypothèse -----	58
4 - Exemples d'application -----	65

CHAPITRE - III : PLAN D'EXPERIENCE ADAPTE DANS LE CAS DE DEUX FACTEURS

1 - Caractérisation des plans d'expérience adaptés et minimaux adaptés -----	76
2 - Construction des plans d'expérience minimaux -----	80

CHAPITRE - IV : LE MODELE II D'ANALYSE DE LA VARIANCE ET LE PLAN D'EXPERIENCE HIERARCHIQUE

1 - Analyse de la Variance sur plan factoriel en modèle II -----	117
2 - Plan d'expérience hiérarchique -----	130

<u>BIBLIOGRAPHIE</u> -----	144
----------------------------	-----

INTRODUCTION

L'Analyse de la Variance est une technique statistique pour analyser des mesures ou observations dépendant de plusieurs facteurs agissant simultanément et déterminer parmi les facteurs ceux qui ont réellement une influence sur les observations. Elle s'appuie sur la décomposition de la forme quadratique unité des observations en une somme des formes quadratiques orthogonales souvent appelée "égalité fondamentale de l'Analyse de la Variance". Chaque forme quadratique est interprétée comme représentant l'influence principale d'un facteur, ou l'interaction entre un groupe de facteurs ou le terme d'erreur. Les tests auxquels on s'intéresse sont des tests de non-influence d'un facteur ou de non-interaction entre un groupe de facteurs et ils sont basés sur le rapport F des formes quadratiques correspondantes. Cette méthode ne met pas en lumière la décomposition de l'espace vectoriel des observations en sous-espaces vectoriels orthogonaux qui est à la base des résultats de l'Analyse de la Variance.

Le but de ce travail est d'appliquer cette idée géométrique et l'utilisation systématique du langage fonctionnel introduit dans BARRA [2], qui nous permettent de traiter les problèmes d'Analyse de la Variance dans toute sa généralité sur un plan d'expérience quelconque à un nombre arbitraire de facteurs. En se plaçant à ce niveau de généralité, nous dégageons la notion d'hypothèses vérifiables et de plans d'expérience adaptés à un système d'hypothèses. Cette dernière notion est nouvelle et procède d'un point de vue différent de celui de la littérature classique qui se bornait à étudier les plans d'expérience ayant une structure particulière comme les blocs incomplets équilibrés, les carrés eulériens etc...

Comme les hypothèses que l'on peut faire dans le modèle I d'Analyse de la Variance sont essentiellement des hypothèses linéaires, le premier chapitre est consacré à l'étude des tests d'hypothèses linéaires ou d'hypothèses linéaires multiples. Soit X un vecteur aléatoire gaussien de R^n , de matrice de covariances $\sigma^2 I$ (I étant la matrice unité) de moyenne $m \in V$ où V est un sous-espace vectoriel strict de R^n . Le problème de test d'hypothèses linéaires multiples consiste à choisir un des 2^k hypothèses :

$$H_I : \begin{cases} m \in V_i & \forall i \in I \\ m \notin V_i & \forall i \notin I \end{cases}$$

où I parcourt l'ensemble des parties de $\{1, \dots, k\}$ et V_1, \dots, V_k sont des sous-espaces vectoriels de V .

L'idée naturelle pour résoudre ce problème est de procéder simultanément k tests d'hypothèses linéaires $m \in V_i$ contre $m \notin V_i$ et de conclure suivant les résultats de ces tests. Dans ce chapitre nous justifions cette procédure en plongeant le problème dans le contexte d'un problème de décision multiple avec une classe de fonctions de perte convenable. Plus précisément, nous montrons que la procédure précédente est optimale dans une large classe de procédures (sans-biais et invariants).

L'Analyse de la Variance est développée à partir du deuxième chapitre. Un plan d'expérience sera représenté mathématiquement comme une partie E^* de

$$E = \prod_{i=1}^k \{1, \dots, v_i\}.$$

Chaque élément $e = (e_1, \dots, e_k) \in E$ correspond à une expérience réalisable, la coordonnée e_i de e désigne le niveau du facteur F_i . Dans le modèle I d'Analyse de la Variance, les effets des facteurs F_1, \dots, F_k se portent uniquement sur la fonction $m(e)$, $e \in E$ où $m(e)$ est l'espérance mathématique de l'observation $X(e)$, de loi gaussienne. D'où l'introduction de l'espace Ω (resp. Ω^*) des fonctions réelles définies sur E (resp. E^*). La décomposition de la fonction m en une somme des termes représentant soit l'effet principal d'un facteur, soit l'interaction entre un groupe de facteurs, correspond à une décomposition de Ω en sous-espaces vectoriels orthogonaux. Les hypothèses statistiques intéressantes sont donc représentées par un ensemble de sous-espaces linéaires de Ω . Comme on ne réalise que des expériences correspondant à $e \in E^*$, ces hypothèses ne peuvent être testées que si elles sont équivalentes à des hypothèses linéaires de Ω^* . D'où la notion d'hypothèse vérifiable. Dans [20], Roy a introduit cette notion sous le nom de

"testable hypothesis", dont la définition s'exprime à l'aide des matrices représentant les hypothèses linéaires. Cette représentation matricielle réduit l'Analyse de la Variance sur plan d'expérience à un nombre quelconque de facteurs, à la résolution d'un système d'équations dites normales étudiées par Bradu [3]. Néanmoins, notre point de vue géométrique à l'intérêt de mettre en lumière le rôle joué par le plan d'expérience dans un problème de test d'hypothèse. Nous introduisons alors la notion plan d'expérience adapté à un couple d'hypothèses, à savoir hypothèse à priori et hypothèse à tester, c'est un plan d'expérience pour lequel l'hypothèse à tester est vérifiable sous cette hypothèse à priori.

Dans le troisième chapitre, on étudie en détail les plans d'expérience adaptés dans le cas de deux facteurs dont les effets sont supposés additif et quand on teste la non-influence d'un facteur. Il se trouve que la condition de vérifiabilité de cette hypothèse de non-influence ne dépend pas du facteur choisi, par conséquent on peut parler de plan d'expérience adapté sans préciser le couple hypothèse à priori et hypothèse à tester. Comme chaque plan d'expérience adapté contient un plan d'expérience minimal adapté, nous nous intéressons à la construction d'une liste complète de ces derniers. Notre point de vue diffère fondamentalement de celui des traités classiques sur les plans d'expérience (Dugué [5] et [6], Kempthorne [12],...) qui cherche à construire, par des méthodes algébriques, des plans d'expérience ayant une structure particulière. Par exemple les carrés eulériens, les blocs incomplets équilibrés etc... Comme le nombre des plans d'expérience minimaux adaptés d'une dimension assez petite est déjà très élevé, nous utilisons le fait que la nature minimale adapté d'un plan d'expérience ne change pas quand on permute les niveaux d'un facteur, pour retenir dans chaque classe de plans équivalents par permutation un seul représentant : celui qui est le plus grand selon un ordre lexicographique que nous définissons. A la fin du chapitre III, on trouvera une liste complète de tels plans d'expérience jusqu'à la dimension 6×6 . Cette liste est construite à l'aide d'une procédure ALGOL exécutée sur ordinateur. L'algorithme utilisé est basé sur la notion de sous-plan d'expérience exposé en détail dans ce chapitre. Malheureusement, les résultats obtenus ne peuvent pas se généraliser au cas des plans d'expériences à plus de deux facteurs, le problème devient infiniment plus complexe et le calcul numérique trop lourd.

Le dernier chapitre est une illustration de l'utilisation du langage fonctionnel et la méthode géométrique pour l'étude du modèle II d'Analyse de la Variance les plans d'expérience hiérarchiques. En modèle II, on se bornera à l'Analyse de la Variance sur plans factoriels, car seulement dans ce cas on peut trouver des résultats intéressants. La décomposition de l'espace des observations en sous-espaces vectoriels orthogonaux permet de trouver une statistique exhaustive formée essentiellement par les formes quadratiques égales aux carrés des normes des projections du vecteur d'observation sur ces sous-espaces orthogonaux. On se ramène alors à une structure exponentielle incomplète à liaisons polynomiales, ces liaisons étant introduites par l'hypothèse que l'on veut tester. Linnik dans [17] et [18] a étudié ce problème de test et a donné une caractérisation des tests sans biais. Néanmoins, l'existence et la construction éventuelle des tests U.M.P. sans biais pour tester l'hypothèse de non-influence d'un facteur ou de non-interaction entre un groupe de facteurs restent encore une question ouverte. Cependant, dans le cas des plans factoriels à une ou deux dimensions, ces hypothèses correspondent à des liaisons linéaires sur la structure exponentielle et on peut construire des tests U.M.P. sans biais pour les tester. Dans le cas des plans d'expérience hiérarchiques, la nature du phénomène étudié demande une nouvelle décomposition de l'espace des observations. Cette décomposition servira comme base pour l'étude du modèle I aussi bien que le modèle II d'Analyse de la Variance. Dans le dernier cas, on suppose que le nombre des niveaux d'un facteur à l'intérieur d'un niveau d'un facteur hiérarchiquement supérieur est le même pour tous les niveaux de ce dernier.

En conclusion, c'est l'utilisation de la notation fonctionnelle et la décomposition de l'espace des observations en sous-espaces vectoriels orthogonaux qui permet de résoudre les problèmes de tests rencontrés en Analyse de la Variance d'une manière simple et unifiée. En se plaçant au niveau des plans d'expérience stricts (généralis), la notion d'hypothèse vérifiable s'introduit naturellement et entraîne la notion des plans d'expérience adaptés. Ces derniers permettent d'économiser le coût d'expérimentation quand la connaissance du phénomène étudié permet de justifier une hypothèse à priori. Dans ce sens, le résultat du chapitre III

est très intéressant et pourrait être utile aux praticiens de l'Analyse de la Variance. Il est important de noter que ce nouveau résultat ne peut être obtenu qu'à l'aide d'un ordinateur. L'utilisation des moyens de calcul a en effet ouvert de nouvelles perspectives aux statisticiens (voir par exemple Hisleux [10],...). Remarquons que plusieurs questions ne sont pas résolues dans ce travail. Le modèle II d'Analyse de la Variance sur plan d'expérience général n'a pas été abordé car nous n'avons pas réussi à trouver une statistique exhaustive non triviale comme dans le cas des plans factoriels. Nous avons parlé à propos du test d'hypothèses linéaires multiples, des plans d'expérience orthogonaux sans étudié l'existence et la construction de ces plans. Il semble que l'utilisation de l'ordinateur pourrait compléter les méthodes algébriques existantes (voir par exemple [23]), pour la construction effective de ces plans. Enfin, nous n'avons pas envisagé la possibilité de généraliser les résultats de ce travail au cas d'Analyse de la Variance multivariées, dont le fondement est esquissé dans Anderson [1].

CHAPITRE - I

TEST D'HYPOTHESE LINEAIRE ET D'HYPOTHESES LINEAIRES MULTIPLES

En analyse de la variance, modèle I, les hypothèses statistiques, à savoir l'hypothèse à priori et les hypothèses à tester, sont toujours des hypothèses linéaires. Dans ce modèle, les observations forment un système de variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n , suivant des lois normales de moyennes respectives m_1, \dots, m_n , et de variance commune σ^2 . Le vecteur des moyennes m est supposé appartenant à un sous-espace vectoriel V de R^n . On considère dans V , des sous-espaces vectoriels V_1, \dots, V_k , chacun ayant une signification statistique, et on pose la question si le vecteur m appartient à un ou plusieurs sous-espaces précédents. Pour $k = 1$, c'est un problème de test d'hypothèse linéaire où il s'agit de choisir entre deux hypothèses : $m \in V_1$ (hypothèse nulle) ou $m \notin V_1$ (alternative). Pour $k > 1$, on a un problème de test d'hypothèses linéaires multiples où il s'agit de choisir entre les hypothèses :

$$\begin{aligned} H_I : m \in V_i & \quad \forall i \in I \\ m \notin V_i & \quad \forall i \notin I \end{aligned}$$

(I parcourant l'ensemble des parties de $\{1, \dots, k\}$).

Ces problèmes seront traités dans les paragraphes qui suivent.

I - TEST D'HYPOTHESE LINEAIRE

I-1 - Définition du problème et le test adopté

Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires normales, indépendantes, de moyennes respectives m_1, \dots, m_n et de variance commune σ^2 . Le vecteur des moyennes $m \in \mathbb{R}^n$ est supposé a priori appartenir à un sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^n ($\dim V = r < n$), et l'hypothèse statistique à tester est :

$$H : m \in V_1 \quad (\dim V_1 = s < r).$$

Notons W_1 l'orthogonal de V_1 dans V et V^* le complémentaire orthogonal de V . Si $x \in \mathbb{R}^n$, désignons par x_{V^*} , x_{W_1} les projections de x sur V^* et W_1 , alors

DEFINITION I.1

"On appelle test d'hypothèse linéaire (ou F-test), le test de région critique $\{F > \rho\}$ où

$$F = \frac{\|x_{W_1}\|^2}{\|x_{V^*}\|^2}$$

et ρ est une constante choisie de façon que le test ait un niveau de signification α donné".

I-2 - Propriétés optimales du F-test

Diverses propriétés optimales du F-test ont été données dans Hsu [1], Lehmann [25] ou Scheffé [21] ; citons la plus importante :

THEOREME I-1

Le F-test est uniformément le plus puissant parmi les tests invariants de même niveau pour tester l'hypothèse $m \in V_1$ contre $m \notin V_1$.

On rappelle que les groupes de transformations considérés ici sont : les translations suivant un vecteur de V^* , les transformations orthogonales dans W_1 et les homothéties.

I-3 - Calcul de la séparatrice et puissance du F-test

Les variables aléatoires

$$U_1 = \frac{\|x_{W_1}\|^2}{\sigma^2}$$

$$U = \frac{\|x_{V^*}\|^2}{\sigma^2}$$

suivent respectivement une loi du x^2 décentrée à $n_1 = r-s$ degrés de liberté avec un paramètre de décentrage $p = \frac{\|m_{W_1}\|^2}{\sigma^2}$, et une loi du x^2 centrée à $n_2 = n-r$ degrés de liberté, le rapport $F = U_1/U$ suit alors une loi β décentrée, et a pour densité :

$$(1.1) f_{n_1, n_0, p}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-p/2} \frac{(p/2)^j}{j!} \frac{\Gamma((n_0+n_1)/2+j)}{\Gamma(n_0/2)\Gamma(n_1/2+j)} \frac{f^{n_1/2-1+j}}{(1+f)^{\frac{n_0+n_1}{2}+j}}$$

Si l'hypothèse $H : m \in V_1$ est vérifiée, F suit une loi de Fisher qui ne dépend plus du paramètre fantôme σ^2 , on peut donc calculer ρ de telle sorte que :

$$P(F > \rho) = \alpha$$

soit

$$(1.2) \quad \int_0^{\rho} f_{n_1, n_0, 0}(f) df = 1 - \alpha.$$

La puissance du F-test ne dépend que du paramètre de décentrage p . Elle croît avec p et il est intéressant de calculer la valeur p^* pour laquelle cette fonction atteint $1 - \alpha$. On a :

$$(1.3) \quad \int_0^{\rho} f_{n_1, n_0, p^*}(f) df = \alpha.$$

Alors si on teste de l'hypothèse $p = 0$ contre $p > p^*$, par le F-test, les probabilités pour chaque type d'erreur de décision ne dépassent pas α .

La procédure Algol TESLIN(N1,NO,ALPHA,RO,P) permet de calculer pour chaque n_1, n_0, α , les valeurs de ρ et p^* définies par (1.2) et (1.3). Ces valeurs sont tabulées à titre d'exemple pour $\alpha = 0.05$ (table I-1), $\alpha = 0.10$ (table I.2) et pour $n_0 = 1(1) 20$ $n_1 = (1(1)20$. On trouvera dans Lehmer [16] des tables du même genre.

I.4 - Remarque sur la procédure TESLIN

La procédure TESLIN fait appel aux procédures FISHER et FDEC pour le calcul des fonctions de répartition de la loi du rapport F dont la densité est donnée par (1.1), respectivement dans le cas où $p = 0$ et le cas général. Notons F_{n_1, n_0} et $F_{n_1, n_0, p}$ ces fonctions, on a les relations de récurrence :

$$F_{n_1, n_0}(x) = F_{n_1-2, n_0}(x) - \frac{\Gamma((n_0+n_1)/2-1)}{\Gamma(n_0/2)\Gamma(n_1/2)} \frac{x^{n_1/2-1}}{(1+x)^{\frac{n_0+n_1}{2}-1}}$$

$$F_{n_1, n_0}(x) = F_{n_1, n_0-2}(x) + \frac{\Gamma((n_0+n_1)/2-1)}{\Gamma(n_0/2)\Gamma(n_1/2)} \frac{x^{n_1/2}}{(1+x)^{\frac{n_0+n_1}{2}-1}}$$

Ces relations permettent de calculer $F_{n_1, n_0}(x)$, en remarquant que :

$$F_{2, n_0}(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^{n_0/2}}$$

$$F_{1, 2}(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

$$F_{1, 1}(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arctg}(\sqrt{x}).$$

Quand à $F_{n_1, n_0, p}(x)$, on peut l'obtenir en sommant la série :

$$F_{n_1, n_0, p}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-p/2} \frac{(p/2)^j}{j!} F_{n_1+2j, n_0}(x).$$

```
'PROCEDURE' TESLIN(N1,NO,ALPHA,RC,P) ; 'VALUE' N1,NO,ALPHA ;
'INTEGER' N1,NO ; 'REAL' ALPHA,RO,P ;
'BEGIN'
'REAL' 'PROCEDURE' FDEC(N2,N1,P,F,EPS) ;
'VALUE' N2,N1,P,F,EPS ; 'INTEGER' N2,N1 ; 'REAL' P,F,EPS ;
'COMMENT' CETTE PROCEDURE CALCULE LA FONCTION DE REPARTITION
DE LA VARIABLE ALEATOIRE U/V DU U SUIT LA LOI DU KI DEUX
DECENTREE DE PARAMETRE DE DECENTRAGE P, DE DEGRE DE LIBERTE
N2 ET V SUIT LA LOI DU KI DEUX CENTREE DE DEGRE DE LIBERTE N1 ;
'BEGIN'
'INTEGER' J,K ; 'REAL' AUX,S,X,Y,C,L,T,R ;
X:=F/(1+F) ; Y:=1-X ;
FCENTRE:
  J:=N2-2*(N2/'2) ;
'IF' J=0 'THEN'
'BEGIN' AUX:=Y**(N1/2) ; S:=1 'END'
'ELSE' 'BEGIN'
  K:=N1-2*(N1/'2) ;
  'IF' K=0 'THEN'
  'BEGIN' S:=0 ; AUX:=SQRT(X) 'END'
  'ELSE' 'BEGIN'
    S:=2*ARCTAN(SQRT(X/Y))/3.14159265359 ;
    AUX:=2*SQRT(X*Y)/3.14159265359
  'END' ;
  'FOR' K:=K+2 'WHILE' K <= N1 'DO'
  'BEGIN' S:=S+AUX ;
    AUX:=AUX*Y*(K-1)/K
  'END' ;
  AUX:=AUX*N1
'END' ;
'FOR' J:=J+2 'WHILE' J <= N2 'DO'
'BEGIN' S:=S-AUX ; AUX:=AUX*X*(N1+J-2)/J 'END' ;
T:=S ;
FDECENT:
'IF' P=0 'THEN' 'GOTO' FIN ;
C:=L:=P/2 ; K:=0 ;
AUG: 'IF' C > 88 'THEN'
'BEGIN' K:=K+1 ; S:=S-AUX ;
  AUX:=AUX*X*(1+(N1-2)/(N2+2*K)) ;
  C:=C-LN(L/K) ; 'GOTO' AUG
'END' ;
C:=EXP(-C) ; R:=1-C ; T:=T*C ;
BOUCLE:
K:=K+1 ; S:=S-AUX ;
AUX:=AUX*X*(1+(N1-2)/(N2+2*K)) ;
C:=C*L/K ; R:=R-C ; T:=T+S*C ;
'IF' R*S/T > EPS 'THEN' 'GOTO' BOUCLE ;
FIN: FDEC:=T
'END' FDEC ;
'REAL' A,H ;
A:=H:=N1/NO/ALPHA ;
AUG:
'IF' FDEC(N1,NO,0,A,'-3) < 1-ALPHA 'THEN'
'BEGIN' A:=A+H ; 'GOTO' AUG 'END' ;
H:=H/2 ; A:=A-H ;
DIV: H:=H/2 ;
```

```
'IF' FDEC(N1,NO,0,A,'-3) < 1-ALPHA 'THEN' A:=A+H 'ELSE' A:=A-H ;
'IF' H/A > '-5 'THEN' 'GOTO' DIV ;
RD:=A ;
A:=H:=N1/NO/ALPHA ;
AUG1:
  'IF' FDEC(N1,NO,A,RD,'-3 ) > ALPHA 'THEN'
  'BEGIN' A:=A+H ; 'GOTO' AUG1 'END' ;
H:=H/2 ; A:=A-H ;
BOUC: H:=H/2 ;
'IF' FDEC(N1,NO,A,RD,'-3) > ALPHA 'THEN' A:=A+H 'ELSE' A:=A-H ;
'IF' H/A > '-4 'THEN' 'GOTO' BOUC ;
P:=A ;
'END' TESLIN ;
```

TABLE I-1 $\alpha = .05$

n_0	1		2		3		4		5	
	ρ	P^*								
1	161.45	624.1	399.00	1539	647.15	2497	898.34	3468	1150.9	4450
2	9.2564	60.39	19.000	117.7	28.747	175.1	38.494	232.5	48.241	289.9
3	3.3760	31.97	6.3680	54.38	9.2768	76.12	12.156	97.62	15.022	119.0
4	1.9272	24.28	3.4721	38.03	4.9435	51.02	6.3883	63.74	7.8201	76.35
5	1.3216	20.92	2.3145	31.05	3.2457	40.42	4.1537	49.50	5.0504	58.45
6	.9579	19.07	1.7144	27.28	2.3785	34.73	3.0224	41.88	3.6562	48.90
7	.7988	17.90	1.3535	24.95	1.8629	31.22	2.3544	37.20	2.8368	43.03
8	.6647	17.11	1.1147	23.37	1.5248	28.86	1.9189	34.05	2.3047	39.09
9	.5686	16.54	.9459	22.23	1.2875	27.17	1.6147	31.79	1.9343	36.27
10	.4965	16.10	.8206	21.38	1.1125	25.89	1.3912	30.10	1.6629	34.16
11	.4404	15.76	.7240	20.71	.9784	24.90	1.2206	28.79	1.4563	32.52
12	.3956	15.49	.6476	20.18	.8726	24.11	1.0864	27.75	1.2941	31.21
13	.3590	15.26	.5855	19.74	.7870	23.47	.9782	26.89	1.1636	30.14
14	.3286	15.07	.5341	19.38	.7166	22.93	.8892	26.18	1.0565	29.26
15	.3029	14.92	.4910	19.07	.6575	22.48	.8148	25.58	.9671	28.51
16	.2809	14.78	.4542	18.81	.6073	22.10	.7517	25.07	.8914	27.87
17	.2618	14.66	.4225	18.58	.5641	21.76	.6976	24.63	.8265	27.32
18	.2452	14.56	.3949	18.38	.5267	21.47	.6506	24.24	.7702	26.83
19	.2306	14.46	.3707	18.21	.4938	21.21	.6095	23.90	.7211	26.41
20	.2176	14.38	.3493	18.05	.4648	20.98	.5732	23.60	.6777	26.03

n_0	n_1	6		7		8		9		10	
		ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*
1	1404.0	5428	1657.5	6409	1911.2	7398	2165.2	8396	2418.9	9412	
2	57.589	347.3	67.737	404.7	77.485	462.1	87.232	519.5	96.979	577.0	
3	17.881	140.4	20.736	161.7	23.587	133.0	26.437	204.2	29.285	225.5	
4	9.2447	88.86	10.665	101.3	12.082	113.8	13.497	126.2	14.911	138.6	
5	5.9403	67.32	6.8263	76.13	7.7093	84.93	8.5905	93.68	9.4701	102.4	
6	4.2839	55.83	4.9078	62.69	5.5291	69.54	6.1485	76.34	6.7666	83.13	
7	3.3137	48.77	3.7870	54.46	4.2580	60.09	4.7272	65.71	5.1950	71.31	
8	2.6854	44.04	3.0629	48.92	3.4381	53.75	3.8117	58.57	4.1840	63.36	
9	2.2492	40.64	2.5611	44.96	2.8707	49.22	3.1789	53.47	3.4859	57.68	
10	1.9303	38.11	2.1948	42.00	2.4573	45.83	2.7133	49.64	2.9782	53.42	
11	1.6880	36.14	1.9170	39.69	2.1440	43.20	2.3697	46.67	2.5942	50.12	
12	1.4981	34.57	1.6595	37.86	1.8990	41.10	2.0973	44.31	2.2945	47.49	
13	1.3455	33.29	1.5250	36.36	1.7027	39.39	1.8792	42.38	2.0546	45.34	
14	1.2204	32.22	1.3821	35.12	1.5421	37.97	1.7009	40.78	1.8587	43.55	
15	1.1162	31.33	1.2631	34.07	1.4084	36.77	1.5526	39.42	1.6958	42.05	
16	1.0280	30.56	1.1625	33.18	1.2956	35.74	1.4274	38.27	1.5584	40.76	
17	.9525	29.90	1.0765	32.40	1.1990	34.86	1.3205	37.27	1.4411	39.65	
18	.8871	29.32	1.0021	31.73	1.1155	34.08	1.2281	36.39	1.3398	38.67	
19	.8300	28.81	.9371	31.13	1.0429	33.40	1.1476	35.63	1.2515	37.82	
20	.7797	28.36	.8799	30.61	.9788	32.79	1.0768	34.94	1.1739	37.05	

TABLE I.1 $\alpha = .05$

n_0	11		12		13		14		15	
	ρ	p^*								
1	2673.1		2327.0		3181.3		3435.6		3689.5	
2	106.73	634.5	116.48	691.9	126.22	749.6	135.97	807.0	145.72	864.8
3	32.133	246.8	34.579	268.0	37.825	289.3	40.670	310.5	43.514	331.7
4	16.323	151.0	17.735	163.4	19.146	175.8	20.557	188.2	21.967	200.6
5	10.349	111.1	11.226	119.9	12.104	128.6	12.980	137.3	13.856	146.0
6	7.3836	89.92	7.9998	96.67	8.6155	103.4	9.2306	110.2	9.8451	116.9
7	5.6620	76.88	6.1281	82.45	6.5935	88.00	7.0585	93.55	7.5230	99.09
8	4.5553	68.13	4.9259	72.89	5.2959	77.64	5.6654	82.38	6.0345	87.11
9	3.7919	61.87	4.0973	66.06	4.4020	70.23	4.7063	74.39	5.0102	78.54
10	3.2373	57.19	3.4956	60.93	3.7533	64.66	4.0106	68.39	4.2675	72.11
11	2.8179	53.55	3.0410	56.96	3.2635	60.35	3.4856	63.74	3.7073	67.11
12	2.4909	50.64	2.6666	53.78	2.8819	56.91	3.0766	60.03	3.2711	63.13
13	2.2293	48.28	2.4034	51.20	2.5770	54.11	2.7500	57.00	2.9228	59.88
14	2.0158	46.31	2.1722	49.04	2.3282	51.77	2.4837	54.47	2.6389	57.18
15	1.8383	44.65	1.9803	47.23	2.1217	49.80	2.2627	52.34	2.4035	54.89
16	1.6888	43.23	1.8185	45.68	1.9478	48.10	2.0767	50.52	2.2052	52.93
17	1.5611	42.00	1.6805	44.33	1.7994	46.65	1.9180	48.95	2.0362	51.24
18	1.4509	40.92	1.5614	43.15	1.6714	45.38	1.7811	47.57	1.8905	49.76
19	1.3549	39.98	1.4576	42.12	1.5600	44.25	1.6620	46.36	1.7638	48.46

n ₁	16		17		18		19		20		
	n ₀	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*
1	3943.8	4198.5	4452.7	4706.4	4901.2						
2	155.47	165.22	174.96	184.71	194.46	1037	1095	1153			
3	46.359	49.203	52.047	54.892	57.735	395.4	416.6	437.9			
4	23.376	24.786	26.195	27.604	29.013	237.7	250.1	262.4			
5	14.722	15.607	16.483	17.358	18.233	172.1	180.8	189.4			
6	10.459	11.073	11.687	12.301	12.914	137.1	143.9	150.6			
7	7.9872	8.4512	8.9148	9.3783	9.8415	115.7	121.2	126.7			
8	6.4032	6.7717	7.1400	7.5080	7.8758	101.3	106.0	110.7			
9	5.3137	5.6170	5.9200	6.2229	6.5255	90.95	95.08	99.21			
10	4.5241	4.7804	5.0365	5.2923	5.5481	83.22	86.91	90.59			
11	3.9286	4.1497	4.3706	4.5913	4.8117	77.20	80.56	83.90			
12	3.4652	3.6590	3.8526	4.0461	4.2393	72.40	75.48	78.55			
13	3.0953	3.2675	3.4395	3.6113	3.7829	68.48	71.33	74.18			
14	2.7939	2.9485	3.1030	3.2572	3.4113	65.21	67.88	70.54			
15	2.5439	2.6841	2.8240	2.9638	3.1034	62.45	64.96	67.47			
16	2.3335	2.4615	2.5894	2.7170	2.8444	60.09	62.47	64.84			
17	2.1542	2.2719	2.3894	2.5068	2.6239	58.04	60.31	62.55			
18	1.9996	2.1085	2.2172	2.3257	2.4340	56.26	58.41	60.56			
19	1.8652	1.9664	2.0674	2.1682	2.2690	54.69	56.75	58.80			
20	1.7472	1.8417	1.9360	2.0302	2.1241	53.29	55.27	57.24			

TABLE I.1 $\alpha = .10$

n_1	1		2		3		4		5	
	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*	ρ	P^*
1	.39.864	110.5	.99.001	269.4	160.78	435.6	223.33	603.9	286.21	773.2
2	.4.2632	23.13	.9.0000	43.93	13.743	64.76	18.487	85.61	23.232	106.5
3	.1.8461	15.43	.3.6416	25.70	5.3908	35.66	7.1236	45.50	8.8486	55.28
4	.1.1362	12.96	.2.1623	20.05	3.1431	26.72	4.1072	33.24	5.0632	39.70
5	.8121	11.78	1.5119	17.40	2.1717	22.56	2.8162	27.55	3.4530	32.45
6	.6293	11.09	1.1544	15.88	1.6444	20.18	2.1205	24.30	2.5896	28.33
7	.5128	10.64	.9307	14.90	1.3175	18.65	1.6917	22.22	2.0595	25.68
8	.4322	10.33	.7783	14.21	1.0964	17.59	1.4032	20.77	1.7040	23.84
9	.3734	10.10	.6681	13.71	.9376	16.81	1.1967	19.71	1.4503	22.50
10	.3285	9.92	.5849	13.33	.8183	16.22	1.0421	18.90	1.2608	21.47
11	.2932	9.78	.5199	13.02	.7255	15.75	.9222	18.25	1.1142	20.65
12	.2647	9.66	.4678	12.78	.6514	15.37	.8267	17.74	.9975	19.99
13	.2412	9.57	.4251	12.57	.5908	15.05	.7488	17.31	.9026	19.45
14	.2216	9.49	.3895	12.40	.5405	14.79	.6842	16.95	.8239	19.00
15	.2049	9.42	.3594	12.26	.4980	14.57	.6297	16.65	.7577	18.61
16	.1905	9.36	.3335	12.13	.4616	14.37	.5832	16.39	.7012	18.28
17	.1780	9.31	.3111	12.03	.4301	14.21	.5430	16.16	.6524	17.98
18	.1671	9.26	.2916	11.93	.4027	14.06	.5080	15.96	.6100	17.73
19	.1574	9.22	.2743	11.85	.3785	13.93	.4771	15.78	.5726	17.50
20	.1487	9.19	.2590	11.77	.3570	13.81	.4498	15.62	.5396	17.30

n ₀	6		7		8		9		10	
	ρ	p*								
1	349.23	543.1	412.35	1114	475.52	1285	538.74	1455	601.95	1626
2	27.977	127.3	32.722	148.1	37.467	169.0	42.212	189.8	46.958	210.7
3	10.570	65.04	12.288	74.79	14.004	84.51	15.720	94.24	17.435	104.0
4	6.0146	46.11	6.5632	52.50	7.9099	58.86	8.8552	65.22	9.7997	71.58
5	4.0854	37.32	4.7151	42.14	5.3429	46.95	5.9693	51.75	6.5948	56.53
6	3.0546	32.31	3.5169	36.24	3.9774	40.17	4.4366	44.06	4.8949	47.95
7	2.4235	29.09	2.7849	32.46	3.1447	35.80	3.5032	39.13	3.8607	42.43
8	2.0013	26.86	2.2561	29.03	2.5894	32.77	2.8814	35.69	3.1726	38.60
9	1.7006	25.22	1.9486	27.90	2.1950	30.54	2.4403	33.17	2.6848	35.78
10	1.4764	23.96	1.6898	26.42	1.9017	28.84	2.1126	31.24	2.3226	33.62
11	1.3031	22.98	1.4501	25.25	1.6756	27.49	1.8601	29.71	2.0439	31.91
12	1.1655	22.17	1.3316	24.31	1.4964	26.40	1.6601	28.48	1.8231	30.53
13	1.0537	21.52	1.2030	23.53	1.3510	25.51	1.4980	27.46	1.6443	29.39
14	.9611	20.96	1.0966	22.88	1.2308	24.75	1.3641	26.60	1.4967	28.43
15	.8832	20.49	1.0071	22.32	1.1299	24.11	1.2517	25.88	1.3729	27.62
16	.8169	20.08	.9310	21.84	1.0440	23.56	1.1561	25.25	1.2676	26.91
17	.7597	19.73	.8654	21.42	.9700	23.08	1.0739	24.70	1.1770	26.30
18	.7099	19.42	.8083	21.06	.9057	22.65	1.0023	24.22	1.0983	25.76
19	.6661	19.15	.7582	20.73	.8493	22.28	.9396	23.79	1.0293	25.28
20	.6274	18.90	.7139	20.44	.7994	21.94	.8842	23.41	.9684	24.86

TABLE I.1 $\alpha = .00$

n_0	11		12		13		14		15	
	ρ	P^*								
1	65.21	1797	728.48	1969	791.76	2141	855.03	2311	918.35	2485
2	51.703	231.5	56.449	252.4	61.195	273.2	65.939	294.1	70.686	314.9
3	19.149	113.7	20.862	123.4	22.576	133.1	24.289	142.8	26.002	152.5
4	10.743	77.91	11.687	84.25	12.629	90.57	13.572	96.91	14.514	103.2
5	7.2196	61.30	7.8438	66.08	8.4675	70.83	9.0909	75.60	9.7140	80.35
6	5.3524	51.83	5.8094	55.70	6.2659	59.57	6.7222	63.42	7.1781	67.28
7	4.2176	45.73	4.5739	49.02	4.9298	52.31	5.2853	55.59	5.6405	58.86
8	3.4630	41.49	3.7529	44.37	4.0424	47.25	4.3316	50.13	4.6204	53.00
9	2.9286	38.38	3.1719	40.96	3.4147	43.54	3.6572	46.11	3.8994	48.68
10	2.5320	35.98	2.7409	38.34	2.9493	40.69	3.1574	43.03	3.3653	45.36
11	2.2269	34.10	2.4095	36.27	2.5917	38.43	2.7736	40.59	2.9551	42.74
12	1.9855	32.57	2.1474	34.59	2.3089	36.61	2.4702	38.62	2.6311	40.62
13	1.7901	31.31	1.9353	33.21	2.0802	35.10	2.2247	36.98	2.3690	38.86
14	1.6287	30.24	1.7603	32.04	1.8915	33.83	2.0224	35.61	2.1531	37.38
15	1.4935	29.34	1.6137	31.05	1.7334	32.75	1.8530	34.44	1.9722	36.12
16	1.3785	28.56	1.4890	30.19	1.5992	31.82	1.7091	33.43	1.8187	35.03
17	1.2797	27.88	1.3819	29.45	1.4838	31.00	1.5854	32.55	1.6868	34.08
18	1.1938	27.28	1.2889	28.79	1.3837	30.28	1.4781	31.77	1.5723	33.24
19	1.1185	26.75	1.2074	28.21	1.2959	29.65	1.3841	31.08	1.4721	32.50

No	16		17		18		19		20	
	ρ	P^*								
1	981.61	2654	1045.0	2827	1108.2	2999	1171.6	3171	1234.9	3343
2	75.431	335.8	80.177	356.6	84.922	377.5	89.668	398.3	94.413	419.2
3	27.714	162.2	29.427	171.9	31.139	181.6	32.852	191.3	34.563	201.0
4	15.455	109.6	16.397	115.9	17.339	122.2	18.280	128.5	19.222	134.9
5	10.337	85.10	10.960	89.86	11.582	94.61	12.204	99.37	12.827	104.1
6	7.6337	71.14	8.0891	74.98	8.5444	78.83	8.9994	82.67	9.4545	86.53
7	5.9954	62.13	6.3502	65.39	6.7048	68.66	7.0592	71.92	7.4135	75.19
8	4.9090	55.85	5.1974	58.72	5.4856	61.57	5.7736	64.43	6.0616	67.28
9	4.1413	51.24	4.3831	53.79	4.6247	56.34	4.8661	58.91	5.1074	61.44
10	3.5728	47.69	3.7802	50.02	3.9875	52.33	4.1945	54.66	4.4015	56.97
11	3.1365	44.88	3.3176	47.03	3.4986	49.16	3.6794	51.30	3.8601	53.42
12	2.7918	42.61	2.9523	44.60	3.1126	46.59	3.2728	48.57	3.4328	50.54
13	2.5131	40.72	2.6570	42.59	2.8007	44.46	2.9442	46.30	3.0876	48.16
14	2.2835	39.14	2.4137	40.90	2.5438	42.66	2.6737	44.41	2.8035	46.15
15	2.0912	37.79	2.2101	39.46	2.3288	41.12	2.4474	42.78	2.5657	44.44
16	1.9281	36.62	2.0373	38.22	2.1464	39.80	2.2553	41.38	2.3641	42.95
17	1.7880	35.60	1.8889	37.13	1.9898	38.64	2.0904	40.15	2.1910	41.66
18	1.6664	34.71	1.7602	36.17	1.8539	37.62	1.9475	39.08	2.0409	40.52
19	1.5599	33.91	1.6476	35.32	1.7350	36.72	1.8224	38.12	1.9096	39.51
20	1.4660	33.20	1.5482	34.56	1.6302	35.91	1.7121	37.26	1.7938	38.61

II - TEST D'HYPOTHESES MULTIPLES

2.1 - Le problème

Ce problème est en fait un problème de décision multiple (voir Ferguson [7]). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta : \theta \in \Theta)$ une structure statistique, (Ω, \mathcal{A}) étant l'espace mesurable de observations dont la distribution de probabilité est une des P_θ de la famille $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$. On se donne une partition de Θ en k parties disjointes $\Theta_1, \dots, \Theta_k$, le problème de test d'hypothèses multiples est de choisir, au vu de l'observation $\omega \in \Omega$, une parmi k hypothèses :

$$H_i : \theta \in \Theta_i \quad i = 1, \dots, k$$

Un test est défini par une fonction Φ , mesurable de Ω dans R^k :

$$\Phi(\omega) = (\Phi_1(\omega), \dots, \Phi_k(\omega))$$

telle que

$$\Phi_i(\omega) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k ; \quad \sum_{i=1}^k \Phi_i(\omega) = 1$$

où $\Phi_i(\omega)$ représente la probabilité pour que l'on accepte l'hypothèse H_i quand ω est observé.

La performance du test Φ est déterminée par sa fonction puissance $\beta(\cdot, \Phi)$ défini sur Θ , à valeurs dans R^k :

$$\beta(\theta; \Phi) = E_{P_\theta}(\Phi) \quad \theta \in \Theta.$$

La composante $\beta_i(\theta; \Phi) = E_{P_\theta}(\Phi_i)$ de $\beta(\theta; \Phi)$ représente la probabilité pour que l'on accepte l'hypothèse H_i en utilisant le test Φ et quand P est la vraie loi. Evidemment :

$$\beta_i(\theta; \Phi) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \quad ; \quad \sum_{i=1}^k \beta_i(\theta; \Phi) = 1.$$

Remarque - Dans le cas où $k = 2$, un test peut s'écrire sous forme $(1-\Phi(\omega), \Phi(\omega))$ où $\Phi(\omega)$ est la fonction de test classique.

2.2 - Critère de perte et test sans biais

Le problème de test d'hypothèses multiples est aussi un problème de décision dont l'espace des décisions est $\{1, \dots, k\}$, on peut donc classer les tests suivant le critère de perte de Wald [26]. Etant donné une fonction de perte $W(\theta, i)$, à chaque test Φ , on associe sa fonction du risque $R^W(\theta, \Phi)$ définie par :

$$R^W(\theta; \Phi) = E_{P_\theta} \left(\sum_{i=1}^k W(\theta, i) \Phi_i \right) = \sum_{i=1}^k W(\theta, i) \beta_i(\theta; \Phi).$$

Comme $W(\theta, i)$ représente la perte quand on accepte l'hypothèse H_i et que la vraie loi est P_θ , $R^W(\theta, \Phi)$ n'est autre que la perte moyenne en utilisant le test Φ et quand la vraie loi est P_θ .

DEFINITION 2.1

Soit W une fonction de perte, le test Φ^* est dit W -meilleur que le test Φ si :

$$R^W(\theta; \Phi^*) \leq R^W(\theta, \Phi) \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Nous proposons de généraliser ce critère et définir une relation de préordre sur les tests, qui a l'intérêt de ne pas exiger la spécification complète de la fonction de perte que l'on connaît d'ailleurs mal en pratique :

DEFINITION 2.2

Soit W une classe de fonctions de perte, le test Φ^* est dit W -meilleur que Φ s'il est W -meilleur que Φ , pour tout $W \in \mathcal{W}$.

La notion de test sans biais relativement à une fonction de perte dans un problème de décision a été introduite par Lehmann ([13] et [14]). Dans le cas des tests d'hypothèses multiples, on a :

DEFINITION 2.3

Soit W une fonction de perte, le test Φ est dit W -sans-biais si pour tout $\theta \in \Theta$, $\theta' \in \Theta$, on a :

$$\sum_{i=1}^k W(\theta, i) \beta_i(\theta; \Phi) \leq \sum_{i=1}^k W(\theta', i) \beta_i(\theta, \Phi)$$

Plus généralement :

DEFINITION 2.4

Soit W une classe de fonctions de perte, le test Φ est dit W -sans-biais s'il existe $W \in \mathcal{W}$ telle que Φ soit W -sans-biais.

Remarque -

La définition précédente permet de retrouver la notion classique du test sans-biais dans le cas de test de deux hypothèses. Il suffit de prendre pour W la classe des fonctions de perte W de la forme

$$W(\theta, 1) = 0 \quad \text{si } \theta \in \Theta_1, \quad \mu \quad \text{sinon}$$

$$W(\theta, 2) = \lambda \quad \text{si } \theta \in \Theta_1, \quad 0 \quad \text{sinon}$$

où λ et μ sont positifs quelconques. Le test $(1-\Phi, \Phi)$ est alors W -sans-biais si et seulement si

$$E_{P_\theta}(\Phi) \leq \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{pour } \theta \in \Theta_1$$

$$E_{P_\theta}(\Phi) \geq \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad \text{pour } \theta \notin \Theta_2.$$

Par conséquent un test W -sans-biais est aussi sans-biais au sens classique et réciproquement.

2.3 - Produit des problèmes de test

La notion de produit des problèmes de test a été introduit par Lehmann [14]. On retrouve dans ce paragraphe certains de ses résultats.

DEFINITION 2.5.

Soient P_1, \dots, P_r , r problèmes de test de deux hypothèses, où P_i consiste à tester $\theta \in \Theta$ contre $\theta \in \Theta'_i = \Theta \setminus \Theta_i$, on appelle produit des problèmes P_1, \dots, P_r , un problème de test d'hypothèses multiples P qui consiste à choisir une des hypothèses $H_J : \theta \in \Theta_J$ défini par

$$\Theta_J = \bigcap_{i \in J} \Theta_i \cap \bigcap_{i \notin J} \Theta'_i$$

où J parcourt l'ensemble des parties de $\{1, \dots, r\}$ telles que Θ_J soit non vide.

DEFINITION 2.6.

Soit Φ un test pour le problème de test d'hypothèses multiples P , produit des problèmes de test P_1, \dots, P_r , alors le test $(1-\Phi_i, \Phi_i)$ défini par :

$$\Phi_i = \sum_{J \ni i} \Phi_J \quad (\Phi_J = \text{probabilité d'accepter } H_J)$$

est appelé test partiel pour le problème P_i , déduit de Φ .

DEFINITION 2.7.

Soient pour chaque $i = 1, \dots, r$, un test $(1-\Phi_i, \Phi_i)$ pour le problème de test P_i : $\theta \in \Theta_i$ contre $\theta \in \Theta_i' = \Theta \setminus \Theta_i$; les tests $(1-\Phi_i, \Phi_i)$, $i = 1, \dots, r$ sont dits compatibles si :

$$\bigcap_{i \in J} \Theta_i \cap \bigcap_{i \notin J} \Theta_i' = \emptyset \Rightarrow \prod_{i \in J} (1-\Phi_i) \prod_{i \notin J} \Phi_i = 0.$$

THEOREME 2.1.

Si les tests $(1-\Phi_i, \Phi_i)$, $i = 1, \dots, r$, pour les problèmes P_i , $i = 1, \dots, r$, sont compatibles alors la fonction vectorielle Φ de composantes :

$$\Phi_J = \prod_{i \in J} (1-\Phi_i) \prod_{i \notin J} \Phi_i$$

défini un test pour le problème P , produit des problèmes P_i , $i = 1, \dots, r$, appelé le test produit des tests $(1-\Phi_i, \Phi_i)$, $i = 1, \dots, r$.

D'autre part, les tests partiels déduits de Φ pour les problèmes P_i , $i = 1, \dots, r$ coïncident avec $(1-\Phi_i, \Phi_i)$, $i = 1, \dots, r$.

Démonstration

Pour montrer que Φ est un test, il suffit de vérifier :

$$\sum_J \Phi_J = 1.$$

Cela résulte de l'identité

$$\prod_{j=1}^r [(1-\Phi_j)+\Phi_j] = \sum_J \left[\prod_{j \in J} (1-\Phi_j) \cdot \prod_{j \notin J} \Phi_j \right]$$

Quant à la dernière partie du théorème, elle vient d'une identité plus générale :

$$\Phi_i \prod_{j \neq i} [(1-\Phi_j)+\Phi_j] = \sum_{J \ni i} \left[\prod_{j \in J} (1-\Phi_j) \cdot \prod_{j \notin J} \Phi_j \right].$$

Remarque

Soit Φ un test pour le problème de test d'hypothèses multiples P , produit des problèmes de test P_i , $i = 1, \dots, r$, les tests partiels déduits de Φ pour les problèmes P_i , $i = 1, \dots, r$ ne sont nécessairement compatibles et s'ils le sont, leur produit ne coïncide pas en général avec Φ .

Nous allons étudier la liaison entre un test d'un problème de test du type produit et ses tests partiels, en ce qui concerne la relation d'ordre et la propriété d'être sans-biais. On prendra comme classe de fonction de perte pour le problème P , produit des problèmes P_1, \dots, P_r , l'ensemble des fonctions W de la forme :

$$W(\theta, J) = \sum_{i \in J} W_i(\theta, 1) + \sum_{i \notin J} W(\theta, 2)$$

où W_i est une fonction de perte pour le problème P_i . Cela revient à supposer que la perte est additive.

Comme P_i est un problème de test de deux hypothèses, il est naturel de prendre W_i de la forme

$$W_i(\theta,1) = 0 \text{ si } \theta \in \Theta_i^0, \quad \mu_i \text{ si } \theta \in \Theta_i^1$$

$$W_i(\theta,2) = \lambda_i \text{ si } \theta \in \Theta_i^0, \quad 0 \text{ si } \theta \in \Theta_i^1$$

où λ_i, μ_i sont positifs ou nuls quelconques, de telle sorte que la relation d'ordre et la propriété d'être sans-biais dans les problèmes $P_i, i = 1, \dots, r$ coïncident avec les définitions classiques.

THEOREME 2.2.

Le test Φ^ pour le problème P est W-meilleur que le test Φ si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, r$, le test partiel $(1-\Phi_i^*, \Phi_i^*)$, déduit de Φ^* est meilleur que celui déduit de $\Phi : (1-\Phi_i, \Phi_i)$, comme test du problème P_i .*

Démonstration

La fonction du risque du test Φ , associée à la fonction de perte W est :

$$\begin{aligned} R^W(\theta; \Phi) &= \sum_J W(\theta, J) \beta_J(\theta; \Phi) \\ &= \sum_{i=1}^r [W_i(\theta, 1) E_{P_\theta}(1-\Phi_i) + W_i(\theta, 2) E_{P_\theta}(\Phi_i)] \end{aligned}$$

Le terme entre crochet est la fonction du risque du test $(1-\Phi_i, \Phi_i)$; par conséquence, le test Φ^* sera meilleur que le test Φ si pour chaque problème P_i , le test $(1-\Phi_i^*, \Phi_i^*)$ est meilleur que le test $(1-\Phi_i, \Phi_i)$.

Inversement, si le test Φ^* est meilleur que Φ , $R^W(\theta; \Phi^*) \leq R^W(\theta, \Phi)$, donc quand $\theta \in \Theta_I = \bigcap_{i \in I} \Theta_i \cap \bigcap_{i \notin I} \Theta'_i$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i [E_{P_\theta}(\Phi_i^*) - E_{P_\theta}(\Phi_i)] + \sum_{i \notin I} \mu_i [E_{P_\theta}(\Phi_i) - E_{P_\theta}(\Phi_i^*)] \leq 0.$$

Comme λ_i et μ_i sont positifs ou nuls arbitraires, cela entraîne que :

$$\forall \theta \in \Theta_I : E_{P_\theta}(\Phi_i^*) \leq E_{P_\theta}(\Phi_i) \quad \forall i \in I$$

$$E_{P_\theta}(\Phi_i^*) \geq E_{P_\theta}(\Phi_i) \quad \forall i \notin I$$

et comme $\Theta_i = \bigcup_{I \ni i} \Theta_I$ et $\Theta'_i = \bigcup_{I \not\ni i} \Theta_I$, on en déduit que le test $(1-\Phi^*, \Phi^*)$ est meilleur que le test $(1-\Phi_i, \Phi_i)$, comme test du problème P_i .

THEOREME 2.3.

Le test Φ est W-sans biais pour le problème P si pour chaque $i = 1, \dots, r$ le test partiel $(1-\Phi_i, \Phi_i)$ déduit de Φ est sans-biais.

Démonstration

Elle est immédiate à partir des inégalités ($\theta \in \Theta$, $\theta' \in \Theta$)

$$\sum_J W(\theta, J) \beta_J(\theta; \Phi) = \sum_{i=1}^r [W_i(\theta, 1) E_{P_\theta}(1-\Phi_i) + W_i(\theta, 2) E_{P_\theta}(\Phi_i)]$$

$$\sum_J W(\theta', J) \beta_J(\theta', \Phi) = \sum_{i=1}^r [W_i(\theta', 1) E_{P_\theta}(1-\Phi_i) + W_i(\theta', 2) E_{P_\theta}(\Phi_i)].$$

La réciproque du théorème 2.3 nécessite une hypothèse supplémentaire.

Hypothèse H1

"Aucune des intersections $\bigcap_{i \in J} \Theta_i \cap \bigcap_{i \notin J} \Theta'_i$, $J \subset \{1, \dots, r\}$ n'est vide".

THEOREME 2.4

Sous hypothèse H1, si le test Φ pour le problème P est W-sans biais, alors pour chaque $i = 1, \dots, r$, le test partiel $(1-\Phi_i, \Phi_i)$ déduit de est sans biais pour le problème P_i .

Démonstration

Soit $\theta \in \Theta_i$, il existe $I \ni i$ tel que $\theta \in \Theta_I$. Posons $I' = I - \{i\}$ et choisissons $\theta' \in \Theta_{J'} = \bigcap_{i \in J'} \Theta_i \cap \bigcap_{i \notin J'} \Theta'_i$ (non vide d'après H1). La propriété d'être sans biais du test Φ permet d'écrire :

$$\sum_J W(\theta, J) \beta_J(\theta; \Phi) \leq \sum_J W(\theta', J) \beta_J(\theta; \Phi)$$

comme $\theta \in \Theta_I$:

$$\begin{aligned} \sum_J W(\theta, J) \beta_J(\theta; \Phi) &= \sum_{i=1}^r [W_i(\theta, 1) E_{P_\theta}(1-\Phi_i) + W_i(\theta, 2) E_{P_\theta}(\Phi_i)] \\ &= \sum_{j \in I} \lambda_j E_{P_\theta}(\Phi_j) + \sum_{j \notin I} \mu_j E_{P_\theta}(1-\Phi_j) \end{aligned}$$

De même, comme $\theta' \in \Theta_{I'}$:

$$\sum_J W(\theta', J) \beta_J(\theta; \Phi) = \sum_{j \in I'} \lambda_j E_{P_\theta}(\Phi_j) + \sum_{j \notin I'} \mu_j E_{P_\theta}(1-\Phi_j).$$

Comme $I' = I - \{i\}$, on en déduit :

$$\lambda_i E_{P_\theta}(\Phi_i) \leq \mu_i E_{P_\theta}(1 - \Phi_i)$$

d'où

$$E_{P_\theta}(\Phi_i) \leq \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Si on prend maintenant $\theta \in \Theta'_i$, par un raisonnement analogue, on trouve

$$E_{P_\theta}(\Phi_i) \geq \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} .$$

Ces deux inégalités montrent que le test $(1 - \Phi_i, \Phi_i)$ est sans-biais pour le problème P_i .

III - TEST D'HYPOTHESES LINEAIRES MULTIPLES

3.1 - Le problème de test et le test adopté

Les données sont les mêmes que dans le § 1.1. Soient X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires indépendantes, normales, de même variance σ^2 , dont le vecteur des moyennes m appartient à un sous-espace vectoriel V de R^n ($\dim V < n$).

Soient V_1, \dots, V_k , k sous-espaces vectoriels de V ($\dim V_i < \dim V$, $i=1, \dots, k$), on veut décider l'une des 2^k hypothèses :

$$H_J : m \in V_i \quad i \in J$$

$$m \notin V_i \quad i \notin J$$

où J est une partie de $\{1, \dots, k\}$.

Le test que nous proposons d'étudier est classique :

Désignons par W_i , l'orthogonal de V_i dans V ($i = 1, \dots, k$) et V^* l'orthogonal de V dans R . Pour $x \in R^n$, notons x_{W_i} , $i = 1, \dots, k$, et x_{V^*} les projections de x respectivement sur W_i , $i = 1, \dots, k$ et V^* , le test Φ est alors donné par

$$(3.1) \quad \Phi_J(x) = 1 \text{ si } \frac{\|x_{W_i}\|^2}{\|x_{V^*}\|^2} < \rho_i \quad \forall i \in I$$
$$\frac{\|x_{W_i}\|^2}{\|x_{V^*}\|^2} > \rho_i \quad \forall i \notin I$$

(Φ_J représente la probabilité que l'on accepte l'hypothèse H_J . Les ρ_i , $i=1, \dots, k$ sont des constantes données à l'avance).

On remarque qu'effectuer ce test équivaut à tester simultanément l'hypothèse $m \in V_i$ contre $m \notin V_i$, pour chaque $i = 1, \dots, k$, par la méthode de test d'hypothèse linéaire.

3.2 - Réduction du problème

3.2.a - Réduction par exhaustivité

Une statistique exhaustive pour l'observation X est :

$(X_{W_1}, \dots, X_{W_k}, X_T, X_{V^*})$ où X_T désigne la projection de X sur le sous-espace vectoriel T , l'orthogonal dans V du sous-espace vectoriel engendré par W_1, \dots, W_k .

Comme la fonction puissance d'un test d'hypothèses multiples ne change pas quand on remplace ce test par son espérance conditionnelle à une statistique exhaustive, on se restreint donc à des tests fonction de la statistique précédente.

3.2.b - Réduction par l'invariance

Nous supposons vérifiée la condition (C) suivante :

(C) *Les sous-espaces vectoriels W_1, \dots, W_k sont orthogonaux entre eux.*

On dira alors que les hypothèses linéaires correspondantes à V_1, \dots, V_k sont indépendantes. Cette notion importante d'hypothèses linéaires indépendantes a été introduite par Darroch et Silvey [4]. Elle nous permettra de réduire le problème de test à l'aide du principe d'invariance. En effet, le problème est invariant par rapport au groupe des transformations orthogonales dans les sous-espaces vectoriels W_1, \dots, W_k (d'après la condition (C)), et au

groupe des translations $x \rightarrow x+a$, $a \in V$. On se restreint donc à la statistique $(\|x_{W_1}\|, \dots, \|x_{W_k}\|^2, \|x_{V^*}\|^2)$ qui est un maximal invariant pour ces deux groupes (Lehmann p. 216 [15]).

On peut encore réduire le problème en considérant le groupe des homothéties $X \rightarrow \lambda X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mais l'application du principe sans-biais rend cela inutile.

3.2.c - Problème réduit

Posons :

$$S_i = \|x_{W_i}\|^2 ; \quad p_i = \frac{\|m_{W_i}\|^2}{\sigma^2} ; \quad n_i = \dim W_i$$

$$S = \|x_{V^*}\|^2 ; \quad n_0 = n - \dim V$$

comme $p_i = 0$ équivaut à ce que $m \in V_i$, la restriction à des tests invariants permet de réduire le problème de test initial au problème suivant.

Soient S_1, \dots, S_k, S , $k+1$ variables aléatoires indépendantes, S_i/σ^2 , $i = 1, \dots, k$ et S/σ^2 suivent respectivement des lois du x^2 décentrées à n_i degrés de liberté, de paramètre de décentrage p_i et une loi du x^2 centrée à n_0 degrés de liberté, on veut tester les hypothèses

$$H_J : p_i = 0 \quad \forall i \in J$$

$$p_i > 0 \quad \forall i \notin J$$

où J parcourt les parties de $\{1, \dots, k\}$.

3.3 - Problème de test partiel : test de l'hypothèse $p_i = 0$ contre $p_i > 0$

Le problème de test d'hypothèses multiples précédent est du type produit. Pour pouvoir appliquer les résultats de § 2.3, on prendra comme classe W de fonction de perte pour ce problème, les fonctions :

$$W(\theta, J) = \sum_{i \in J} W_i(\theta, 1) + \sum_{i \notin J} W_i(\theta, 2) \quad \theta = (p_1, \dots, p_k, \sigma^2)$$

où $W_i(\theta, 1) = 0$ si $p_i = 0$, μ_i si $p_i > 0$ et $W_i(\theta, 2) = \lambda_i$ si $p_i = 0$, 0 si $p_i > 0$. (λ_i et μ_i sont positifs ou nuls quelconques).

La signification de W est facile à comprendre. On considère chaque décision d'accepter l'hypothèse H_J , $J \subset \{1, \dots, k\}$ comme composée de k décisions élémentaires accepter $p_i = 0$ ou non, et on suppose que la perte totale est la somme des pertes résultées de chaque décision élémentaire, ces dernières étant λ_i ou μ_i suivant que $p_i = 0$ ou $p_i > 0$, quand on a déclaré le contraire.

D'après § 2.3, la relation d'ordre ainsi que la propriété d'être sans-biais dans le problème de test précédent s'exprime alors à l'aide des tests partiels pour tester l'hypothèse $p_i = 0$ contre $p_i > 0$, pour chaque $i = 1, \dots, k$. Ainsi, On va d'abord étudier ces problèmes de test de deux hypothèses :

THEOREME 3.1

Pour tout α_i , $0 \leq \alpha_i \leq 1$, parmi les tests $(1-\Phi_i, \Phi_i)$ pour tester $p_i = 0$ contre $p_i > 0$ qui soient α_i -libre en moyenne sur $\{(p_1, \dots, p_k, \sigma^2) : p_i = 0\}$ c'est-à-dire :

$$E_{P_\theta}(\Phi_i) = \alpha_i \quad \forall \theta = (p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_k, \sigma^2),$$

il existe un meilleur test $(1-\Phi_i^*, \Phi_i^*)$ défini par :

$$\Phi_i^*(s_1, \dots, s_k, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i/s < \rho_i \\ \gamma_i & \text{si } s_i/s = \rho_i \\ 1 & \text{si } s_i/s > \rho_i \end{cases}$$

où $0 \leq \gamma_i \leq 1$ et ρ_i est choisi tel que

$$P_\theta\{S_i/S < \rho_i\} = 1 - \alpha_i \quad \text{quand } p_i = 0,$$

ce qui est possible car la loi de S_i/S ne dépend que de p_i .

Démonstration

On utilisera la méthode des tests conditionnels pour chercher le meilleur test parmi les tests α_i -libre en moyenne sur $\{(p_1, \dots, p_k, \sigma^2) : p_i = 0\}$. On cherche d'abord une statistique de conditionnement, qui est exhaustive complète pour la famille $\{P_\theta, \theta = (p_1, \dots, p_k, \sigma^2) : p_i = 0\}$. Ecrivons la densité de S_1, \dots, S_k, S :

$$f(s_1, \dots, s_k, s) = \frac{1}{\sigma^{2k}} \prod_{i=1}^k g_{n_i} \left(p_i, \frac{s_i}{\sigma^2} \right) \frac{e^{-s/2\sigma^2} s^{n_0/2-1}}{2^{n_0/2} \Gamma(n_0/2)}$$

où $g_n(p, x)$ est la densité de la loi du x^2 décentrée à n degrés de liberté et de paramètre de décentrage p :

$$g_n(p, x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-p/2} \frac{(p/2)^j}{j!} \frac{e^{-x/2} x^{n/2-1+j}}{2^{n/2+j} \Gamma(n/2+j)}$$

On voit que :

$$g_n(p, \frac{x}{\sigma^2}) = \frac{1}{\sigma^{n-2}} \exp\left(-\frac{p}{2\sigma^2} - \frac{p}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2\sigma^2}\right) g_n\left(\frac{p}{\sigma^2}, x\right)$$

par conséquence :

$$f(s_1, \dots, s_k, s) = \frac{1}{\sigma^{n_0 + \sum_{i=1}^k n_i}} \exp\left[\frac{1-\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} (s + \sum_{i=1}^k s_i)\right]$$

$$\times \sum_{i=1}^k g_{n_i}\left(\frac{p_i}{\sigma^2}, s_i\right) \cdot \frac{s^{n_0/2-1}}{2^{n_0/2} \Gamma(n_0/2)}$$

On posera $t = \sum_{i=1}^k s_i + s$, $\lambda_i = p_i/\sigma^2$, la densité de (S_1, \dots, S_k, S) est de la forme :

$$f(s_1, \dots, s_k, s) = c(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \sigma^2) h(s_1, \dots, s_k, t) e^{-t/2\sigma^2} \prod_{i=1}^k g_{n_i}(\lambda_i, s_i)$$

Sous cette forme, on voit que, quand $\lambda_i = 0$ ($p_i = 0$), une statistique exhaustive pour la famille des lois précédentes est (\hat{S}_i, T) où

$$\hat{S}_i = (S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_k) \text{ et } T = \sum_{i=1}^k S_i + S.$$

La statistique (\hat{S}_i, T) est complète. Il suffit de remarquer que (\hat{S}_i, T) est fonction de $(X_{W_1}, \dots, X_{W_{i-1}}, X_{W_{i+1}}, \dots, X_{W_k}, T)$, cette dernière statistique a pour loi une famille exponentielle complète, car sa densité est de la forme :

$$a(m, \sigma^2) g(x_{W_1}, \dots, x_{W_{i-1}}, x_{W_{i+1}}, \dots, x_{W_k}, t) \exp\left[\frac{-t}{2\sigma^2} + \sum_{j \neq i} \frac{\langle x_{W_j}, m_{W_j} \rangle}{\sigma^2}\right]$$

où $\langle x, m \rangle$ désigne le produit scalaire de x et m .

Par conséquent, (Soler p. 51 [24]) un test $(1-\Phi, \Phi)$, α_i -libre en moyenne sur $(p_1, \dots, p_k, \sigma^2) : p_i = 0$ est de structure de Neymann par rapport à (\hat{S}_i, T) , c'est-à-dire :

$$(1) \quad E_{P_\theta}(\Phi / \hat{S}_i, T) = \alpha_i \text{ quand } p_i = 0.$$

D'autre part, la densité de la loi de S_i conditionnelle à (\hat{S}_i, T) ne dépend que de λ_i et est égale à :

$$f_{\lambda_i}(s_i / \hat{s}_i, t) = \frac{h(s_1, \dots, s_k, t) \cdot g_{n_i}(\lambda_i, s_i)}{\int h(s_1, \dots, s_k, t) g_{n_i}(\lambda_i, s_i) d_{s_i}}$$

Pour (\hat{s}_i, t) fixé, cette famille des lois conditionnelles précédentes est une famille des lois de probabilité de rapport de vraisemblance monotone. Cela vient du fait que la famille des lois du x^2 décentrée de paramètre de décentrage λ est de rapport de vraisemblance monotone (Lehmann p. 312 [15]). Par conséquent, pour tout α_i , $0 \leq \alpha_i \leq 1$, il existe un test $\Phi_i^*(\cdot, \hat{s}_i, t)$ de la forme (Ferguson p. 210 [10]) :

$$\Phi_i^*(s_i; \hat{s}_i, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i < c(\hat{s}_i, t) \\ \gamma_i & \text{si } s_i = c(\hat{s}_i, t) \\ 1 & \text{si } s_i > c(\hat{s}_i, t) \end{cases}$$

qui est U.M.P. de niveau α pour tester l'hypothèse $\lambda_i = 0$ contre $\lambda_i > 0$, c'est-à-dire :

$$(2) \quad \int f_0(s_i / \hat{s}_i, t) \Phi_i^*(s_i; \hat{s}_i, t) ds_i = \alpha_i$$

et pour tout test Φ , $0 \leq \Phi \leq 1$ qui vérifie

$$(3) \quad \int f_0(s_i/\hat{s}_i, t) \Phi(s_i; \hat{s}_i, t) ds_i = \alpha_i$$

on a :

$$(4) \quad \int f_{\lambda_i}(s_i/\hat{s}_i, t) \Phi_i^* ds_i \geq \int f_{\lambda_i}(s_i/\hat{s}_i, t) \Phi ds_i \quad (\lambda_i > 0).$$

Si $\Phi_i^*(s_i, \hat{s}_i, t)$ est mesurable comme fonction de (s_1, \dots, s_k, t) , il définit un test pour le problème non conditionnel qui soit meilleur que tout test $(1-\Phi, \Phi)$, α_i -libre en moyenne sur $\{(p_1, \dots, p_k, \sigma^2) : p_i = 0\}$. En effet, un tel test satisfait à (2), donc à (3) et en intégrant l'inégalité (4) par rapport à la loi marginale de (\hat{S}, T) on trouve :

$$E_{P_\theta}(\Phi_i) \leq E_{P_\theta}(\Phi_i^*) \quad \Phi = (p_1, \dots, p_k, \sigma^2) : p_i = 0$$

Or Φ_i^* peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi_i^*(s_1, \dots, s_k, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i/s < c'(\hat{s}_i, t) \\ \gamma_i & \text{si } s_i/s = c'(s_i, t) \\ 1 & \text{si } s_i/s > c'(s_i, t) \end{cases}$$

car pour (\hat{s}_i, t) fixé, la fonction $s_i/s = s_i / (t - \sum_{i=1}^k s_i)$ est une fonction croissante de s_i .

Quand $p_i = 0$, la statistique S_i/S est libre, donc indépendante de (\hat{S}_i, T) , la condition (2) montre que $c'(s_i; \hat{s}_i, t)$ est une constante ρ_i . Le test Φ^* a donc la forme indiquée du théorème et on voit que Φ^* est bien une fonction mesurable de (s_1, \dots, s_k, t) , ce qui achève la démonstration.

3.4 - Aspect optimal du test (3.1)

Rappelons qu'une classe C_0 de tests est dite W -essentiellement complète dans une classe C de tests si pour tout $\Phi \in C$, il existe un test $\Phi_0 \in C_0$ qui soit W -meilleur que Φ . D'autre part, un test Φ est dit W -admissible dans la classe C de test s'il n'existe pas de test $\Phi^* \in C$ qui soit strictement W -meilleur que Φ .

THEOREME 3.2.

La classe des tests Φ^* définis par :

$$\Phi_J^*(x) = 1 \text{ si } \frac{\|x_{W_i}\|^2}{\|x_{V^*}\|^2} < \rho_i$$

$$\text{et } \frac{\|x_{W_i}\|^2}{\|x_{V^*}\|^2} > \rho_i$$

où ρ_1, \dots, ρ_k sont des constantes arbitraires, est une classe W -essentiellement complète dans la classe des tests invariants W -sans biais. De plus, ces tests sont W -admissibles dans la classe des tests invariants.

Démonstration

Il suffit de considérer le problème réduit et montrer que les tests Φ^* précédent forme une classe essentiellement complète parmi les tests W sans-biais de ce problème.

Soit donc Φ , un test W -sans-biais, d'après le théorème 2.4, le test partiel $(1-\Phi_i, \Phi_i)$ déduit de Φ pour tester $p_i = 0$ contre $p_i > 0$ est sans-biais, et comme sa fonction puissance est continue, on a :

$$E_{P_\theta}(\Phi_i) = \alpha_i \text{ (constante)} \quad \forall \theta = (p_1, \dots, p_k, \sigma^2) : p_i = 0.$$

Le théorème 3.1 montre qu'il existe un test $(1-\Phi_i^*, \Phi_i^*)$ qui soit meilleur que le test $(1-\Phi_i, \Phi_i)$. Si on forme le produit de ces tests, on obtient un Φ^* qui sera W -meilleur que le test Φ . On a :

$$\Phi_J^* = \prod_{i \in J} (1-\Phi_i^*) \prod_{i \notin J} \Phi_i^*$$

Comme Φ_i^* est de la forme :

$$\Phi_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i/s < \rho_i \\ 1 & \text{si } s_i/s > \rho_i \end{cases}$$

le test Φ a bien la forme indiquée par le théorème.

Soit maintenant, un test Φ^{**} , invariant qui est W -meilleur que Φ^* , cela implique que le test partiel $(1-\Phi_i^{**}, \Phi_i^{**})$ déduit de Φ^* est meilleur que le test $(1-\Phi_i^*, \Phi_i^*)$ déduit de Φ^{**} , comme test de $p_i = 0$ contre $p_i > 0$. Or la fonction puissance $(1-\Phi_i^{**}, \Phi_i^{**})$ est continue, on a :

$$E_{P_\theta}(\Phi_i^{**}) = E_{P_\theta}(\Phi_i^*) = \forall \theta = (p_1, \dots, p_k, \sigma^2) \text{ avec } p_i = 0.$$

D'après le théorème 3.1, le test $(1-\Phi_i^*, \Phi_i^*)$ est meilleur que le test $(1-\Phi_i^{**}, \Phi_i^{**})$ et cela pour chaque $i = 1, \dots, k$. Par conséquent, le test d'hypothèses multiples Φ^* est W -meilleur que Φ^{**} . Il n'existe donc pas de test invariant qui soit strictement W -meilleur que le test Φ^* .

3.5 - Fonction puissance du test (3.1). Résultats numériques dans le cas de deux hypothèses linéaires

La fonction puissance du test (3.1), définie dans § 3.1 est une fonction à valeurs dans R^{2k} , soit $\beta(\theta)$ dont les composantes sont :

$$\beta_J(\theta) = P_\theta \{ \text{accepter hypothèse } J_H \} \quad \theta = (m, \sigma^2)$$

$$= P_\theta \frac{\|x_{W_i}\|^2}{\|x_{V^*}\|^2} < \rho_i \quad \forall i \in J ; \frac{\|x_{W_i}\|^2}{\|x_{V^*}\|^2} > \rho_i \quad \forall i \notin J$$

Notons $U_i = \|x_{W_i}\|^2/\sigma^2$, $i = 1, \dots, k$ et $U_0 = \|x_{V^*}\|^2/\sigma^2$, la fonction puissance du test (3.1) se déduit de la loi de probabilité du k -triple $(\frac{U_1}{U_0}, \dots, \frac{U_k}{U_0})$. Comme les variables aléatoires U_i , $i = 1, \dots, k$ et U_0 suivent respectivement des lois du x^2 décentrées à n_i degrés de liberté et de paramètre de décentrage $p_i = \|m_{W_i}\|^2/\sigma^2$, et une loi du x^2 centrée à n_0 degrés de liberté, cette fonction puissance est fonction de (p_1, \dots, p_k) seulement et dépend des degrés de liberté n_0, n_1, \dots, n_k ainsi que les séparatrices ρ_1, \dots, ρ_k qui définissent le test.

Dans le cas où $k = 2$, la fonction puissance a quatre composantes :

$$\beta_0 = \beta_{\{1,2\}} = P\{U_1 < \rho_1 \cdot U_0, \quad U_2 < \rho_2 \cdot U_0\}$$

$$\beta_1 = \beta_{\{1\}} = P\{U_1 < \rho_1 \cdot U_0, \quad U_2 > \rho_2 \cdot U_0\}$$

$$\beta_2 = \beta_{\{2\}} = P\{U_1 > \rho_1 \cdot U_0, \quad U_2 < \rho_2 \cdot U_0\}$$

$$\beta_3 = \beta_\Phi = P\{U_1 > \rho_1 \cdot U_0, \quad U_2 > \rho_2 \cdot U_0\}$$

La procédure TESLI2(N1,N2,NO,P1,P2,RO1,RO2,BETA) permet de calculer ces quatre composantes pour chaque valeur de n_0, n_1, n_2, p_1, p_2 et ρ_1, ρ_2 .

Comme exemple, prenons $n_0 = 12, n_1 = 4, n_2 = 3$. On choisira ρ_1 et ρ_2 de façon que :

$$(3.2) \quad P\left\{\frac{U_i}{U_0} < \rho_i\right\} = 1-\alpha \quad \text{quand } p_i = 0 \quad (i = 1,2)$$

où α est comprise entre 0 et 1. Pour $\alpha = 5 \%$, on a $\rho_1 = 1.0864, \rho_2 = 0.8726$.
(voir table I.1)

On a listé (table I.2), pour chaque couple p_1, p_2 , les quatre probabilités de décider les quatre hypothèses : H1 : $p_1 = p_2 = 0$ (en haut, à gauche), H2 : $p_1 = 0, p_2 > 0$ (en haut, à droite), H3 : $p_1 > 0, p_2 = 0$ (en bas, à gauche), H4 : $p_1 > 0, p_2 > 0$ (en bas, à droite). On voit que l'erreur de décision est moins que 5 % si p_1 n'est pas comprise entre 0 et 30.0 et p_2 n'est pas comprise entre 0 et 25.0. Plus précisément, soit p_i^* , $i = 1, 2$ définis par :

$$(3.4) \quad P\left\{\frac{U_i}{U_0} < \rho_i / p_i = p_i^*\right\} = \alpha \quad i = 1, 2$$

où ρ_i , $i = 1, 2$ sont donnés par (3.2). Alors si on teste les hypothèses :

$$H'1 : p_1 = p_2 = 0$$

$$H'2 : p_1 = 0, p_2 > 0$$

$$H'3 : p_1 > 0, p_2 = 0$$

$$H'4 : p_1 > 0, p_2 > 0$$

les probabilités pour chaque type d'erreur de décision seront inférieures à α .

Les valeurs de ρ_i, p_i^* ne dépendent que de n_i, n_0 et α . Elles peuvent être calculées à l'aide de la procédure TESLIN (§ 1.2). Dans la table I.1, pour $\alpha = 5\%$, $n_0 = 12, n_1 = 4, n_2 = 3$, on trouve $p_1^* = 27.75$ et $p_2^* = 24.12$.

3.7 - Remarque sur la procédure TESLI2

Notons $K_{n,p}$ la fonction de répartition de la loi du x^2 décentrée à n degrés de liberté et de paramètre de décentrage p , et g_n la densité de la loi du x^2 centrée à n degré de liberté, dans la procédure TESLI2, le calcul d'une composante de β , par exemple β_2 , s'effectue de la manière suivante :

$$\beta_2 = \int_0^\infty [1 - K_{n_1, p_1}(\rho_1 v)] \cdot K_{n_2, p_2}(\rho_2 \cdot v) \cdot g_{n_0}(v) dv$$

On fait appel à la procédure INSIRO pour le calcul de l'intégrale (HISLEUR p. 104 [10]). La procédure KIDEC permet de calculer la fonction de répartition de la loi du x^2 décentrée. Notons K_n la fonction de répartition de la loi du x^2 centrée à n degrés de liberté, on a :

$$K_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-p/2} \frac{(p/2)^j}{j!} K_{n+2j}(x).$$

Pour calculer $K_n(x)$, on utilise la relation de récurrence

$$K_n(x) = K_{n-2}(x) - e^{-x/2} \frac{(x/2)^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)}$$

en remarquant que :

$$K_2(x) = 1 - e^{-x/2}$$

$$K_1(x) = 2N(x) - 1$$

où $N(x)$ est la fonction de répartition de loi Normale centrée réduite (pour le calcul de cette fonction, se référer à HISLEUR [10]).

Une autre méthode consiste à sommer la série :

$$K_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-x/2} \frac{(x/2)^{n/2+2j}}{\Gamma(n/2+1+2j)}.$$

```
*PROCEDURE* TESLI2(N1,N2,NO,P1,P2,RO1,RO2,BETA) ;
*INTEGER* N1,N2,NO ;
*REAL* P1,P2,RO1,RO2 ; *ARRAY* BETA ;
*BEGIN*
*REAL* *PROCEDURE* INSIRO(F,A,B,ORDMAX,PREC,SDRT,RES) ;
*VALUE* A,B,ORDMAX,PREC ;
*REAL* *PROCEDURE* F ; *BOOLEAN* SDRT ; *REAL* A,B,PREC ;
*INTEGER* ORDMAX ; *ARRAY* RES ;
*BEGIN*
  *REAL* L,T,P,MA ; *INTEGER* N,I,J,FAC ;
  L:=B-A ; SDRT:= 'FALSE' ; MA:=RES(/1/):=L*.5*(F(A)+F(B)) ; N:=1 ;
  *FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* ORDMAX *DO*
  *BEGIN* T:=0 ; P:=L/N ;
    *FOR* I:= 1 *STEP* 1 *UNTIL* N *DO* T:=T+F(A+P*(I-.5)) ;
    RES(/J+1/):=(P*T+RES(/J/))/2 ; FAC:=1 ;
    *FOR* I:=J *STEP* -1 *UNTIL* 1 *DO*
    *BEGIN* FAC:=4*FAC ;
      RES(/I/):=RES(/I+1/)+(RES(/I+1/)-RES(/I/))/(FAC-1)
    *END* ;
    *IF* ABS(RES(/1/)-MA) < ABS(RES(/1/))*PREC *THEN* *GOTO* TERM ;
    MA:=RES(/1/) ; N:=2*N
  *END* ;
  *GOTO* AFECT ;
  TERM: SDRT:= 'TRUE' ;
  AFECT: INSIRO:=RES(/1/)
*END* INSIRO ;
*REAL* *PROCEDURE* KIDEC(N,P,X,EPS) ;
*VALUE* N,P,X,EPS ; *INTEGER* N ; *REAL* P,X,EPS ;
*COMMENT* CETTE PROCEDURE CALCUL LA FONCTION DE REPARTITION
DE LA LOI DE KI DEUX DECENTREE DE PARAMETRE DECENTRAGE P ET
DE DEGRE DE LIBERTE N ;
*BEGIN*
*REAL* *PROCEDURE* NORMALE(X,M,SIGMA) ;
*VALUE* X,M,SIGMA ; *REAL* X,M,SIGMA ;
*BEGIN*
  *INTEGER* I ; *REAL* SGNE,X2,Y,R,S,T,P1,P2,Q1,Q2 ;
  X:=(X-M)/SIGMA ; SGNE:=SIGN(X) ; X:=ABS(X) ;
  X2:=X*X ; Y:=.3989422804*EXP(-X2/2) ;
  *IF* X < 3.5 *THEN*
  *BEGIN*
    I:=1 ; T:=0 ; S:=Y:=Y*X ;
    *FOR* I:=I+2 *WHILE* S /= T *DO*
    *BEGIN* Y:=Y*X2/I ; T:=S ; S:=S+Y *END* ;
    NCRMALE:= .5+SGNE*S
  *END*
  *ELSE* *BEGIN*
    Q1:=X ; P1:=Y ; R:=P1/Q1 ;
    Q2:=X2+1.0 ; P2:=Y*X ; T:=P2/Q2 ;
    I:=1 ; S:=0 ;
    *FOR* I:=I+1 *WHILE* ((R /= T) & (S /= T)) *DO*
    *BEGIN*
      S:=X*P2+I*P1 ; P1:=P2 ; P2:=S ;
      S:=X*Q2+I*Q1 ; Q1:=Q2 ; Q2:=S ;
      S:=R ; R:=T ; T:=P2/Q2
    *END* ;
    *IF* SGNE=1 *THEN* T:=1-T ;
```

```
NORMAL:=T
'END'
'END' NORMAL ;
'INTEGER' K ; 'REAL' T,S,AUX,C,L,R ;
CALCULKI:
  K:=N-2*(N/'2) ;
  'IF' K=0 'THEN'
  'BEGIN' S:=1 ; AUX:=EXP(-X/2) 'END'
  'ELSE' 'BEGIN'
    'IF' X < 12.2 'THEN' 'GOTO' SERIE ;
    S:=2*NORMALE(SQRT(X),0,1.0)-1 ;
    AUX:=EXP(-X/2)*SQRT(X*2/3.14159265359) ;
  'END' ;
  'FOR' K:=K+2 'WHILE' K<= N 'DO'
  'BEGIN' S:=S-AUX ; AUX:= AUX*X/K 'END' ;
  'GOTO' KIDECENT ;
SERIE:
  AUX:=EXP(-X/2)*SQRT(X*2/3.14159265359) ;
  'FOR' K:=3 'STEP' 2 'UNTIL' N 'DO'
  AUX:=AUX*X/K ;
  S:=C:=AUX ; T:=0 ; K:=N ;
  'FOR' K:=K+2 'WHILE' S<=T 'DO'
  'BEGIN'
    C:=C*X/K ; T:=S ; S:=S+C
  'END' ;
KIDECENT:
  T:=S ;
  'IF' P=0 'THEN' 'GOTO' FIN ;
  C:=L:=P/2 ; K:=0 ;
  AUG: 'IF' C > 88 'THEN'
  'BEGIN' K:=K+1 ;
    S:=S-AUX ; AUX:=AUX*X/(N+2*K) ;
    C:=C-LN(L/K) ; 'GOTO' AUG
  'END' ;
  C:=EXP(-C) ; R:=1-C ; T:=S*C ;
BOUCLE:
  K:=K+1 ; C:=C*L/K ; R:=R-C ;
  S:=S-AUX ; AUX:=AUX*X/(N+2*K) ; T:=T+S*C ;
  'IF' R*S/T > EPS 'THEN' 'GOTO' BOUCLE ;
FIN: KIDEC:=T
'END' KIDEC ;
'REAL' V1,V2,TOTAL,FACT ;
'INTEGER' I ; 'ARRAY' RES(/1:7/) ; 'BOOLEAN' SORT ;
FACT := 2 ; I := NO-2 ;
REC: 'IF' I > 1 'THEN'
'BEGIN' FACT:=FACT*I ; I:=I-2 ; 'GOTO' REC 'END' ;
'IF' I=1 'THEN' FACT:=FACT*SQRT(3.14159265359/2) ;
'FOR' I:=1,2,3 'DO'
'BEGIN'
'REAL' 'PROCEDURE' F(V) ; 'VALUE' V ; 'REAL' V ;
'BEGIN'
'REAL' I1,I2 ;
I1:=KIDEC(N1,P1,V*RC1,'-3) ;
I2:=KIDEC(N2,P2,V*RC2,'-3) ;
'IF' I=1 | I=3 'THEN' I2:=1-I2 ;
'IF' I=2 | I=3 'THEN' I1:=1-I1 ;
```

```
F:=EXP(-V/2)*V**((NO/2-1)*I1*12 ;
'END' ;
TOTAL:=0.0 ; V1:=-8 ; V2:=NO/2 ;
RETOUR: TOTAL:=TOTAL+INSIRC(F,V1,V2,6,'-4, SCRT, RES) ;
'IF' 1-KIDEC(NO,0,V2,'-3) < '-3 'THEN' 'GOTO' SUITE ;
V1:=V2 ; V2:=V2+NO/2 ;
'GOTO' RETOUR ;
SUITE: BETA(/I/):=TOTAL/FACT ;
'END' ;
BETA(/O/):=1-BETA(/1/)-BETA(/2/)-BETA(/3/) ;
'END' TESLI2 ;
```

TABEE I-2

FONCTION PUISSANCE DU TEST
SIMULTANE DE 2 HYPOTHESES LINEAIRES

$\alpha = .05$, $n_0 = 12$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$

Probabilités de décider

$P_1 = P_2 = 0$	$P_1 > 0$ $P_2 = 0$
$P_1 = 0$ $P_2 > 0$	$P_1 > 0$ $P_2 > 0$

$P_1 \backslash P_2$	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
0.0	.909 .041	.699 .251	.460 .490	.271 .679	.146 .804	.074 .876	.036 .914
5.0	.041 .009	.021 .029	.009 .041	.004 .046	.001 .049	.000 .050	.000 .050
10.0	.652 .019	.528 .142	.366 .305	.225 .446	.126 .545	.066 .605	.032 .638
15.0	.298 .031	.193 .137	.104 .226	.050 .280	.022 .308	.009 .321	.003 .326
20.0	.387 .007	.329 .066	.240 .154	.156 .239	.092 .303	.050 .344	.026 .369
25.0	.563 .043	.392 .214	.229 .376	.119 .487	.056 .550	.025 .581	.010 .595
30.0	.202 .002	.178 .026	.137 .068	.094 .111	.058 .147	.033 .172	.018 .187
35.0	.748 .048	.542 .253	.333 .463	.181 .614	.090 .705	.041 .754	.018 .777
40.0	.097 .001	.088 .010	.070 .027	.050 .047	.033 .065	.019 .078	.011 .086
45.0	.853 .049	.633 .270	.399 .503	.224 .679	.115 .788	.055 .848	.025 .878
50.0	.043 .000	.040 .003	.033 .010	.025 .018	.017 .026	.011 .033	.006 .037
55.0	.907 .050	.681 .276	.436 .520	.249 .707	.131 .826	.064 .893	.030 .927

CHAPITRE - II

ANALYSE DE LA VARIANCE SUR PLANS D'EXPERIENCE (modèle I)

La méthode d'Analyse de la Variance repose sur la décomposition de l'espace des fonctions définies sur un produit cartésien d'ensembles finis. En effet, le phénomène à analyser est soumis à l'influence d'un ou plusieurs facteurs F_1, \dots, F_k , prenant respectivement un nombre fini de valeurs appelées niveaux. Une expérience est donc définie par la donnée du k-tuple $e = (e_1, \dots, e_k)$ où $e_i \in \{1, \dots, v_i\}$ désigne le niveau du facteur F_i et un plan d'expérience est une partie E^* de

$$E = \prod_{i=1}^k \{1, \dots, v_i\}$$

où chaque niveau de chaque facteur apparaît une fois au moins.

Dans le modèle I d'Analyse de la Variance, des facteurs influent uniquement sur la moyenne des observations, de telle sorte que le résultat de l'expérience e s'écrit :

$$X(e) = m(e) + v(e)$$

où $v(e)$ est une variable aléatoire de moyenne nulle représentant l'effet du hasard pur.

On voit donc l'importance de l'étude des fonctions définies sur E et sa restriction à E^* . Comme on n'observe que les valeurs de X sur E^* , on ne peut pas tirer toutes les conclusions portant sur la fonction m , considérée comme fonction définie sur E . D'où la notion de l'hypothèse vérifiable (relative à un plan d'expérience) et de plan d'expérience adapté à un système d'hypothèses. Ces questions seront étudiées en détail dans la suite de ce chapitre.

I - DECOMPOSITION DE L'ESPACE DES FONCTIONS DEFINIES SUR UN PRODUIT CARTESIEN
D'ENSEMBLES FINIS ET LE MODELE STATISTIQUE

1.1 - Décomposition de l'espace des fonctions sur un produit cartésien d'ensembles
finis

Ce paragraphe reprend la présentation et l'exposé de BARRA [2] Chapitre IX,
§ 3.

Soient v_1, \dots, v_k , k entiers positifs et E le produit cartésien :

$$E = \prod_{i=1}^k \{1, \dots, v_k\}$$

Un élément de E sera noté $e = (e_1, \dots, e_k)$. On désigne par Ω , l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur E , Ω est muni du produit scalaire :

$$m \in \Omega, m' \in \Omega : \langle m, m' \rangle = \sum_{e \in E} m(e) \cdot m'(e).$$

Dans toute la suite, on utilise les notations suivantes :

Soit I une partie de $\{1, \dots, k\}$, on notera F_I le sous-espace vectoriel de Ω formé par les fonctions qui ne dépendent que des variables e_i , $i \in I$ et Ω_I l'orthogonal dans F_I du sous-espace engendré par la famille $\{F_J, J \subset I, J \neq I\}$. En particulier $F_\emptyset = \Omega_\emptyset$ est le sous-espace vectoriel des fonctions constantes sur E . D'autre part, si $m \in \Omega$, m_I (resp. \bar{m}_I) désignera la projection de m sur Ω_I (resp. F_I).

THEOREME 1.1 (théorème de décomposition)

1°) Ω_I est le sous-espace vectoriel des fonctions $m \in F_I$ qui vérifient :

$$(1.1) \quad \forall i \in I \quad \sum_{e_i=1}^{v_i} m(e_1, \dots, e_i, e_k) = 0$$

2°) Ω_I est orthogonal à $\Omega_{I'}$, pour tout $I' \neq I$

3°) F_I est engendré par la famille des sous-espaces vectoriels $\{\Omega_J, J \subset I\}$ en particulier Ω est engendré par $\{\Omega_J, J \subset \{1, \dots, k\}\}$.

Démonstration

Les relations (1.1) sont équivalentes à l'orthogonalité de F_I au Ω_J , $J \subset I$, $J \neq I$. On en déduit que Ω_I est orthogonal à $\Omega_{I'}$, pour tout $I' \neq I$ (voir BARRA [2], lemme 3 et 2 chapitre IV, § 3).

La troisième partie du théorème se démontre par récurrence sur $\text{Card}(I)$ ($\text{card}(I)$ désigne le cardinal de I). Supposons qu'elle soit vraie pour $\text{card}(I) \leq n$, alors elle est vraie pour $\text{card}(I) = n+1$. En effet, F_I est engendré par Ω_I et $\{F_J, J \subset I, J \neq I\}$ mais comme $\text{card}(J) \leq n$ (si $\text{card}(I) = n+1$), F_J est à son tour engendré par $\{\Omega_K, K \subset J\}$, d'où F_I est engendré par $\{\Omega_K, K \subset I\}$.

Corollaire

Pour tout $I \subset \{1, \dots, k\}$, $I \neq \emptyset$, la dimension de Ω_I est $\prod_{i \in I} (v_i - 1)$

Démonstration

D'après la première partie du théorème, une fonction $m \in \Omega_I$ est complètement déterminée si on connaît ses valeurs sur le produit $\prod_{i \in I} \{1, \dots, v_i - 1\}$ qui contient $\prod_{i \in I} (v_i - 1)$ points.

THEOREME 1.2 (théorème de projection)

Les projections \bar{m}_I , m_I de m sur F_I , Ω_I s'écrivent :

$$(1.2) \quad \bar{m}_I(e_1, \dots, e_k) = \frac{1}{\prod_{i \notin I} v_i} \sum_{e_i, i \in I} m(e_1, \dots, e_k)$$

$$(1.3) \quad m_I(e_1, \dots, e_k) = \sum_{J \subset I} (-1)^{\text{card}(I-J)} \bar{m}_J(e_1, \dots, e_k)$$

De plus, on a :

$$(1.4) \quad \|m_I\|^2 = \sum_{J \subset I} (-1)^{\text{card}(I-J)} \|\bar{m}_J\|^2$$

(le symbole $\sum_{e_i, i \in I}$ signifie que l'on somme sur tous les variables e_i , dont l'indice appartient à I).

Démonstration

On montre que \bar{m}_I définie par la formule (1.2) est la projection de m sur F_I en vérifiant :

$$\langle m, m' \rangle = \langle \bar{m}_I, m' \rangle \quad \forall m' \in F_I$$

En effet :

$$\langle m, m' \rangle = \sum_{e_i, i \in I} m'(e) \sum_{e_i, i \notin I} m(e) = \langle \bar{m}_I, m' \rangle.$$

D'autre part d'après le théorème de décomposition:

$$\bar{m}_J(e) = \sum_{K \subset J} m_K(e)$$

$$\|\bar{m}_J\|^2 = \sum_{K \subset J} \|m_K\|^2$$

D'où

$$\sum_{J \subset I} (-1)^{\text{card}(I-J)} \bar{m}_J(e) = \sum_{K \subset I} \left[\sum_{J \supset K} (-1)^{\text{card}(I-J)} \right] m_K$$

Si $K \neq I$, la somme $\sum_{J \supset K} (-1)^{\text{card}(I-J)}$ est nulle car il y a un même nombre de termes positifs que de termes négatifs. D'où la formule (1.3). La formule (1.4) se démontre de la même façon.

Remarque

Les formules (1.3) et (1.4) nous donnent l'identité :

$$(1.5) \quad \sum_{e \in E} \left[\sum_{J \subset I} (-1)^{\text{card}(I-J)} \bar{m}_J(e) \right]^2 = \sum_{J \subset I} (-1)^{\text{card}(I-J)} \cdot \sum_{e \in E} \bar{m}_J(e)^2$$

1.2 - Plan d'expérience

Reprenons le produit cartésien introduit dans § 1.1 :

$$E = \prod_{i=1}^k \{1, \dots, v_i\}.$$

Un point $e \in E$ sera appelé une expérience. La i -ième coordonnée e_i de e s'interprète comme le niveau du facteur F_i , une expérience est donc définie par la donnée des niveaux des facteurs F_1, \dots, F_k .

DEFINITION 1.1

On appelle plan d'expérience, tout sous-ensemble E^* de E tel que :

$$(1.6) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall e_i^0 \in \{1, \dots, v_i\}, \exists e \in E^* \quad e_i = e_i^0$$

La condition (1.6) n'est pas restrictive, elle signifie que tout niveau d'un facteur intervient dans au moins une expérience réalisée, sinon on pourrait supprimer ce niveau.

On continue à utiliser les notations du § 1.1. On notera Ω^* , l'espace des fonctions réelles, définies sur E^* . Ω^* sera muni du produit scalaire :

$$m \in \Omega^*, m' \in \Omega^* \quad \langle m, m' \rangle = \sum_{e \in E^*} m(e) m'(e).$$

D'autre part, pour tout $m \in \Omega$, m^* désignera la restriction de la fonction m à E^* et pour tout sous-espace vectoriel V de Ω , on notera V^* , le sous-espace vectoriel de Ω^* qui est l'image de V par cette application "restriction".

1.3 - Hypothèse a priori et structure statistique

Le modèle I d'Analyse de la Variance consiste à supposer que le résultat de l'expérience e est de la forme :

$$X(e) = m(e) + U(e).$$

Les $U(e)$, $e \in E$ sont des variables aléatoires indépendantes, normales, centrées et de même variance (inconnue) σ^2 , qui représentent l'effet du hasard.

La fonction m décrit l'influence des facteurs F_1, \dots, F_k sur le phénomène qu'il s'agit d'étudier. Le théorème 1.1 permet d'écrire

$$(1.7) \quad m = \sum_{I \subset \{1, \dots, k\}} m_I.$$

Les fonctions m_I , $I \subset \{1, \dots, k\}$ ont une interprétation statistique ; m_I représente l'interaction entre les facteurs F_i , $i \in I$, en particulier $m_{\{i\}}$ représente l'effet principal du facteur F_i et m_\emptyset qui est une constante est la moyenne générale des observations.

Les hypothèses ayant un sens statistique correspondent donc à la nullité de certains des m_I dans la décomposition (1.7). Par exemple, la non-influence du facteur F_i s'exprime par $m_I = 0$, $\forall I \ni i$, la non interaction entre les groupes des facteurs F_i , $i \in J$ et F_i , $i \in K$ ($J \cap K = \emptyset$), s'exprime par $m_I = 0$, $\forall I : I \cap J \neq \emptyset, I \cap K \neq \emptyset$.

Compte-tenu des connaissances sur le phénomène à étudier, on fait alors une hypothèse à priori :

$$H : m = \sum_{I \in \mathcal{K}} m_I$$

où \mathcal{K} est une famille des parties de $\{1, \dots, k\}$.

Comme on ne réalise que des expériences pour $e \in E^*$, l'ensemble des observations est un vecteur aléatoire $X \in \Omega^*$, gaussien, de matrice de covariances $\sigma^2 I_{\Omega^*}$ (I_{Ω^*} est la matrice unité de Ω^*), et de moyenne $m^* \in \Omega^*$, m^* étant la restriction de m , qui d'après l'hypothèse à priori appartient à $\Omega_{\mathcal{K}}^* = \sum_{I \in \mathcal{K}} \Omega_I$. On peut donc écrire la structure statistique du modèle :

$$(\Omega^*, \mathcal{B}^*, N(m^*, \sigma^2 I_{\Omega^*})_{m^* \in \Omega_{\mathcal{K}}^*}, \sigma^2 \in R^+)$$

\mathcal{B}^* étant la tribu des boreliens sur Ω^* .

Remarque : Cas d'un plan d'expérience avec répétition de chaque catégorie d'expérience.

Supposons que pour chaque niveau donné de chaque facteur F_1, \dots, F_k , on réalise l'expérience avec un nombre quelconque (éventuellement nul) de répétitions.

On peut considérer ces expériences comme membre d'un plan d'expérience à $k+1$ facteurs où le facteur F_{k+1} est le "facteur de répétition" dont le nombre des niveaux est le plus grand de ces nombres de répétitions précédentes. Comme le facteur F_{k+1} n'a aucune influence sur les observations, on exprime ce fait en prenant pour l'hypothèse à priori, une famille des parties de $\{1, \dots, k\}$ au lieu de $\{1, \dots, k+1\}$.

II - HYPOTHESE VERIFIABLE - PLAN D'EXPERIENCE ADAPTE A UN COUPLE D'HYPOTHESES

2.1 - Hypothèse vérifiable

D'après ce qui précède, les hypothèses intéressantes au point de vue statistique sont de la forme :

$$H_0 : m_I = 0 \quad \forall I \in \mathcal{I}_0$$

où \mathcal{I}_0 est un sous-ensemble de \mathcal{I} .

Cette hypothèse équivaut à :

$$m \in \Omega_{\mathcal{I}-\mathcal{I}_0} \quad (\Omega_{\mathcal{I}-\mathcal{I}_0} = \sum_{I \in \mathcal{I}-\mathcal{I}_0} \Omega_I)$$

comme on n'effectue que des expériences pour $e \in E^*$, on ne peut tirer que des conclusions portant sur m^* , restriction de m à E^* , donc :

DEFINITION 2.1

Le plan d'expérience E^* étant donné, l'hypothèse \mathcal{I}_0 est dite vérifiable dans \mathcal{I} si on a :

$$(2.1) \quad \forall m \in \Omega_{\mathcal{I}} : m^* \in \Omega_{\mathcal{I}-\mathcal{I}_0}^* \Rightarrow m \in \Omega_{\mathcal{I}-\mathcal{I}_0}$$

THEOREME 2.1

L'hypothèse \mathcal{I}_0 est vérifiable dans \mathcal{I} si et seulement si l'intersection de $\Omega_{\mathcal{I}}$ avec le noyau de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$ est contenu dans $\Omega_{\mathcal{I}-\mathcal{I}_0}$.

Démonstration

Il est clair que l'implication :

$$(2.1) \quad \forall m \in \Omega_{\mathcal{J}_C}, m^* \in \Omega_{\mathcal{J}_C \mathcal{J}_O}^* \Rightarrow m \in \Omega_{\mathcal{J}_C \mathcal{J}_O}$$

entraîne :

$$(2.2) \quad \forall m \in \Omega_{\mathcal{J}_C}, m^* = 0 \Rightarrow m \in \Omega_{\mathcal{J}_C \mathcal{J}_O}$$

D'autre part, si $m^* \in \Omega_{\mathcal{J}_C \mathcal{J}_O}$, on peut écrire $m = m_0 + m_1$ où $m_0^* = 0$ et $m_1 \in \Omega_{\mathcal{J}_C \mathcal{J}_O}$, ce qui montre que l'implication (2.2) entraîne (2.1). Comme (2.2) signifie que l'intersection de $\Omega_{\mathcal{J}_C}$ avec le noyau de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$, est contenu dans $\Omega_{\mathcal{J}_C \mathcal{J}_O}$, le théorème est démontré.

Remarque

Le noyau de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$ est formé par des fonctions $m \in \Omega$ qui s'annulent sur E^* , une deuxième version du théorème 2.1 est la suivante :

THEOREME 2.1'

Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{J}_O soit vérifiable dans \mathcal{J}_C est que pour tout $m \in \Omega$, les relations :

$$m_I(e) = 0 \quad \forall I \notin \mathcal{J}_C \quad \forall e \in E$$

$$m(e) = 0 \quad \forall e \in E^*$$

impliquent :

$$m_I(e) = 0 \quad \forall I \notin \mathcal{J}_O, \forall e \in E.$$

Corollaire

- 1°) Si \mathcal{K}_0 est vérifiable dans \mathcal{K} , alors tout $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ est vérifiable dans \mathcal{K} .
- 2°) Si \mathcal{K}'_0 et \mathcal{K}''_0 sont vérifiables dans \mathcal{K} , alors $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}'_0 \cup \mathcal{K}''_0$ est aussi vérifiable dans \mathcal{K} .
- 3°) Un plan d'expérience E^* est une hypothèse a priori étant donné, il n'y a que deux situations :
- aucun sous-ensemble de \mathcal{K} n'est vérifiable dans \mathcal{K}
 - il existe $\mathcal{K}_m \subset \mathcal{K}$, vérifiable dans \mathcal{K} tel que tout sous-ensemble de \mathcal{K} , vérifiable dans \mathcal{K} soit contenu dans \mathcal{K}_m et inversement.

THEOREME 2.2

Pour que \mathcal{K}_0 soit vérifiable dans \mathcal{K} , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- 1°) L'intersection de $\Omega_{\mathcal{K}}^*$ et $\Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$ se réduit à la fonction nulle.
- 2°) La restriction de $\Omega_{\mathcal{K}_0}$ de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$ est injective.

Démonstration

D'après le théorème 2.1, la vérifiabilité de \mathcal{K}_0 dans \mathcal{K} est équivalente à

$$(2.2) \quad \forall m \in \Omega_{\mathcal{K}}, m^* = 0 \Rightarrow m \in \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}$$

Soit $m \in \Omega_{\mathcal{K}}$ écrivons $m = m_1 + m_2$ où m_1 et m_2 sont respectivement les projections de m sur $\Omega_{\mathcal{K}_0}$ et $\Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}$, l'implication (2.2) est équivalente à :

$$(2.3) \quad \forall m_1 \in \Omega_{\mathcal{K}_0}, \forall m_2 \in \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}, m_1^* + m_2^* = 0 \Rightarrow m_1 = 0.$$

La condition (1) du théorème s'écrit :

$$\forall m_1 \in \Omega_{\mathcal{K}_0}^*, \forall m_2 \in \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*, m_1^* + m_2^* = 0 \Rightarrow m_1^* = m_2^* = 0$$

et la condition (2) :

$$\forall m_1 \in \Omega_{\mathcal{K}_0}^*, m_1^* = 0 \Rightarrow m_1 = 0.$$

Il est clair que ces deux conditions sont équivalentes à (2.3) et inversement, d'où théorème.

THEOREME 2.3

Pour que \mathcal{K}_0 soit vérifiable dans \mathcal{K} , il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée ($\Omega_{\mathcal{K}}^* - \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$ désigne l'orthogonal dans $\Omega_{\mathcal{K}}^*$ de $\Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$)

1°) l'application qui à $m \in \Omega_{\mathcal{K}_0}^*$ fait correspondre la projection de m^* sur $\Omega_{\mathcal{K}}^* - \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$ est injective.

2°) La dimension de $\Omega_{\mathcal{K}}^* - \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$ est égale à celle de $\Omega_{\mathcal{K}_0}^*$.

Démonstration

Soit P le projecteur de Ω^* sur $\Omega_{\mathcal{K}}^* - \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$, on remarque d'abord que l'application $m \in \Omega_{\mathcal{K}_0}^* \rightarrow Pm^* \in \Omega_{\mathcal{K}}^* - \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$ est surjective car $P(\Omega_{\mathcal{K}}^*) = \Omega_{\mathcal{K}}^* - \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$ et $P(\Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*) = \{0\}$.

Comme une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension fini dans un autre espace vectoriel est injective si et seulement si la dimension de son image est égale à celle de l'espace de départ, la condition (1) est donc équivalente à (2).

- 1°) Supposons que \mathcal{H}_0 soit vérifiable dans \mathcal{H} , alors, pour tout $m \in \Omega_{\mathcal{H}}$, $Pm^* = 0$ entraîne que $m^* \in \Omega_{\mathcal{H}-\mathcal{H}}$ et d'après le théorème 2.2, cela n'est possible que si $m = 0$, d'où l'application $m \in \Omega_{\mathcal{H}} \rightarrow Pm^* \in \Omega_{\mathcal{H}}^* - \Omega_{\mathcal{H}_0}^*$ est injective.
- 2°) Inversement si l'application précédente est injective, cela implique déjà la condition (1) du théorème 2.2. Quand à la condition (2) de ce théorème, si elle n'est pas vérifiée, il existerait $m \neq 0$ $m \in \Omega_{\mathcal{H}}$ tel que $m^* \in \Omega_{\mathcal{H}-\mathcal{H}}^*$, d'où $Pm^* = 0$ qui est une contradiction. L'hypothèse \mathcal{H}_0 est donc vérifiable dans \mathcal{H} .

Remarque

Le théorème 2.3 est très utile dans la pratique. On verra dans § 1.3 que pour tester l'hypothèse $m \in \Omega_{\mathcal{H}-\mathcal{H}}$, il faut connaître le projecteur P de Ω^* sur $\Omega_{\mathcal{H}}^* - \Omega_{\mathcal{H}_0}^*$. On peut donc effectuer le test et en même temps déterminer si \mathcal{H}_0 est vérifiable dans \mathcal{H} .

2.2 - Plan d'expérience adapté à un couple d'hypothèses

Soit une hypothèse a priori \mathcal{H} et une hypothèse à tester \mathcal{H}_0 .

DEFINITION 2.2

Un plan d'expérience E^* est dit adapté aux hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ si pour ce plan \mathcal{H}_0 est vérifiable dans \mathcal{H} .

DEFINITION 2.3

Un plan d'expérience est dit minimal adapté aux hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ s'il ne contient strictement aucun autre plan d'expérience adapté aux hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$.

L'intérêt d'un plan d'expérience minimal adapté vient du théorème suivant qui est une conséquence immédiate du théorème 2.1.

THEOREME 2.4

Si E_0^ est un plan d'expérience adapté aux hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$, alors tout plan d'expérience E^* contenant E_0^* est aussi adapté aux hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$*

Corollaire

Il existe des plans d'expérience minimaux adaptés à un couple donné d'hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$, tout plan d'expérience adapté aux $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ contient un tel plan minimal.

La recherche de tous les plans d'expérience adaptés à un couple d'hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ se ramène donc à la recherche des plans d'expérience minimaux adaptés aux hypothèses $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$. Cette recherche peut être facilitée par la considération des permutations sur les niveaux des facteurs.

On notera $P(v)$ le groupe des permutations sur v symboles, si $\sigma \in P(v)$, alors $(\sigma_1, \dots, \sigma_v)$ est une permutation de $(1, \dots, v)$. Considérons maintenant le groupe $\prod_{i=1}^k P(v_i)$, produit des groupes $P(v_1), \dots, P(v_k)$, donc les éléments s'écrivent $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ où $\sigma_i \in P(v_i)$; on peut faire opérer ce groupe sur E par

$$e \rightarrow \sigma e = (\sigma_1 e_1, \dots, \sigma_k e_k) \quad e = (e_1, \dots, e_k) \in E.$$

DEFINITION 2.4

Un plan d'expérience E_1^* est dit équivalent par permutations sur les niveaux des facteurs (ou plus brièvement équivalent par permutations) à un plan E_2^* s'il existe $\sigma \in \prod_{i=1}^k P(v_i)$ tel que :

$$E_1^* = \{\sigma e : e \in E_2^*\}.$$

THEOREME 2.5

Si E_1^* est un plan d'expérience équivalent par permutations à E_0^* alors quelque soient $\mathcal{K}, \mathcal{K}_0$, le plan E_1^* est adapté (resp. minimal adapté) aux hypothèses $(\mathcal{K}, \mathcal{K}_0)$ si et seulement si le plan E_0^* l'est.

Démonstration

Ce théorème découle du théorème 3.1 en remarquant que pour tout $\mathcal{K} \subset P(\{1, \dots, k\})$, si $m \in \Omega_{\mathcal{K}}$ alors la fonction σm ($\sigma \in \prod_{i=1}^k P(v_i)$) définie par

$$\sigma m(e) = m(\sigma e)$$

appartient aussi à $\Omega_{\mathcal{K}}$

III - TEST D'HYPOTHESES

3.1 - Les problèmes de test

Reprenons la structure statistique :

$$(\Omega^*, \mathcal{B}^*, N(m^*, \sigma^2 I_{\Omega^*})_{m^* \in \Omega_{\mathcal{J}}^*}, \sigma^2 \in R^+)$$

Comme il a été dit dans le § 1.1, les hypothèses qui ont une signification statistique sont de la forme :

$$H_0 : m_I = 0 \quad \forall I \in \mathcal{J}_0$$

où \mathcal{J}_0 est un sous-ensemble de \mathcal{J} . En notant $\Omega_{\mathcal{J}-\mathcal{J}_0} = \sum_{I \in \mathcal{J}-\mathcal{J}_0} \Omega_I$, cette hypothèse est équivalente à :

$$m \in \Omega_{\mathcal{J}-\mathcal{J}_0}.$$

Pour que l'on puisse tester l'hypothèse H_0 , définie par \mathcal{J}_0 , il faut que \mathcal{J}_0 soit vérifiable dans \mathcal{J} , de telle sorte que H_0 équivaut à :

$$H_0^* : m^* \in \Omega_{\mathcal{J}-\mathcal{J}_0}^*.$$

C'est donc un problème de test d'hypothèse linéaire que l'on peut résoudre à l'aide du F-test défini comme suit : (voir Chap. I, § 1).

Notons respectivement $q_{\mathcal{J}_0/\mathcal{J}}(X)$, $q_{\mathcal{J}}(X)$ le carré de la norme de la projection de l'observation $X \in \Omega^*$, sur l'orthogonal de $\Omega_{\mathcal{J}-\mathcal{J}_0}^*$ dans $\Omega_{\mathcal{J}}^*$ et sur l'orthogonal de $\Omega_{\mathcal{J}}^*$ dans Ω^* , le test rejette l'hypothèse H_0 si :

$$F = \frac{q_{\mathcal{J}_0/\mathcal{J}}(X)}{q_{\mathcal{J}}(X)} > c$$

où c est calculé de façon à ce que le test ait un niveau de signification donné α . On suppose évidemment que $\Omega_{\mathcal{J}\mathcal{C}}^* \neq \Omega^*$ sinon, il n'existe pas de F-test.

La variable aléatoire $q_{\mathcal{J}\mathcal{C}} / \mathcal{J}\mathcal{C}(X)$ suit une loi du x^2 décentrée, dont le paramètre de décentrage est $q_{\mathcal{J}\mathcal{C}} / \mathcal{J}\mathcal{C}(m^*)$. D'après le théorème 2.3, cette forme quadratique, qui ne dépend que de $m_{\mathcal{J}\mathcal{C}}^*$ est nulle si et seulement si $m_{\mathcal{J}\mathcal{C}} = 0$.

Soient maintenant r sous-ensembles disjoints $\mathcal{J}\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{J}\mathcal{C}_r$ de $\mathcal{J}\mathcal{C}$, vérifiable dans $\mathcal{J}\mathcal{C}$. On s'intéresse à la vérification simultanée de r hypothèses linéaires :

$$H_i : m_I = 0 \quad \forall I \in \mathcal{J}\mathcal{C}_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

qui sont équivalentes à :

$$H_i^* : m^* \in \Omega_{\mathcal{J}\mathcal{C}-\mathcal{J}\mathcal{C}_i}^* \quad (\Omega_{\mathcal{J}\mathcal{C}-\mathcal{J}\mathcal{C}_i} = \sum_{I \in \mathcal{J}\mathcal{C}-\mathcal{J}\mathcal{C}_i} \Omega_I).$$

C'est un problème de test d'hypothèses linéaires multiples, qui consiste à déterminer parmi les H_1^*, \dots, H_r^* celles qui sont vraies. Supposons que les hypothèses linéaires H_1^*, \dots, H_r^* sont indépendantes, c'est-à-dire la condition (C) du § 3.2.b, chapitre I est vérifiée, alors les résultats du § 3, Chap. I montrent que l'on peut résoudre le problème à l'aide des F-tests correspondant aux hypothèses H_1^*, \dots, H_r^* .

Le plan d'expérience E^* tel que les hypothèses H_1^*, \dots, H_r^* soient indépendantes est dit alors orthogonal relativement au système $(\mathcal{J}\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{J}\mathcal{C}_r, \mathcal{J}\mathcal{C})$. Cette notion a été introduite par Seber [22]. Il est clair que si E^* est tel que les sous-espaces vectoriels Ω_I^* , $I \in \mathcal{J}\mathcal{C}$ soient orthogonaux entre eux, alors quelque soient $\mathcal{J}\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{J}\mathcal{C}_r$, E^* est orthogonal relativement au système $(\mathcal{J}\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{J}\mathcal{C}_r)$; dans ce cas, on dira que E est orthogonal relativement à $\mathcal{J}\mathcal{C}$. Cette définition contient comme cas particulier les "hyper-cubes de RAO [19] ou "orthogonal array" (voir [23]).

3.2 - Calcul des formes quadratiques

Les tests d'hypothèse linéaire ou d'hypothèses linéaires multiples font intervenir les formes quadratiques $q_{\mathcal{J}C} / \mathcal{J}C(X)$ ou $q_{\mathcal{J}C_i} / \mathcal{J}C(X)$, $i = 1, \dots, r$ et $q_{\mathcal{J}C}(X)$. D'autre part la fonction puissance de ces tests dépendent des paramètres de décentrage $q_{\mathcal{J}C} / \mathcal{J}C(m^*)$ ou $q_{\mathcal{J}C_i} / \mathcal{J}C(m^*)$ $i = 1, \dots, r$. On voit donc l'importance du calcul de ces formes quadratiques.

3.2.a) - Cas d'un plan factoriel

On appelle plan factoriel (ou plan d'expérience complet), le plan d'expérience $E^* = E$. Dans ce cas $\Omega^* = \Omega$ et les sous-espaces vectoriels $\Omega_{\mathcal{J}C}^*$, $\Omega_{\mathcal{J}C-\mathcal{J}C_i}^*$, $i = 0, \dots, r$ se confondent avec $\Omega_{\mathcal{J}C}$, $\Omega_{\mathcal{J}C-\mathcal{J}C_i}$. Comme les sous-espaces vectoriels Ω_I , $I \subset \{1, \dots, k\}$ sont orthogonaux entre eux, il est clair que :

$$q_{\mathcal{J}C_i} / \mathcal{J}C(X) = \sum_{I \in \mathcal{J}C-\mathcal{J}C_i} \|X_I\|^2 \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

$$q_{\mathcal{J}C}(X) = \sum_{I \in \mathcal{J}C} \|X_I\|^2$$

Les $\|X_I\|$, $I \subset \{1, \dots, k\}$ peuvent être calculés à l'aide des formules (1.3) ou (1.4). Le calcul de $q_{\mathcal{J}C_i} / \mathcal{J}C(X)$, ($i = 0, 1, \dots, r$) et $q_{\mathcal{J}C}(X)$ est donc immédiat.

3.2.b) - Cas d'un plan d'expérience strict

Le plan d'expérience E^* est dit strict si $E^* \neq E$. Dans ce cas, il n'y a pas de formules directes pour calculer $q_{\mathcal{J}C_i} / \mathcal{J}C(X)$ ($i = 0, 1, \dots, r$) et $q_{\mathcal{J}C}(X)$. Cependant, on pourra obtenir ces quantités par résolution des systèmes linéaires. Cette méthode permet en même temps de déterminer si $\mathcal{J}C_i$ est vérifiable dans $\mathcal{J}C$.

Le lemme suivant est très utile dans la suite, il sert à démontrer le théorème 3.1 qui est la base du calcul de $q_{\mathcal{J}C} / \mathcal{J}C(X)$.

LEMME 3.1

Soit $\{v_1, \dots, v_r\}$ un système de générateurs d'un sous-espace vectoriel V de Ω^* , notons P_V le projecteur de Ω^* sur V , alors

$$\forall x \in \Omega^* \quad P_V x = \sum_{i=1}^r \xi_i v_i$$

où (ξ_1, \dots, ξ_r) est une solution quelconque du système d'équation :

$$\sum_{j=1}^r \langle v_i, v_j \rangle \xi_j = \langle v_i, x \rangle \quad i = 1, \dots, r$$

Ce système admet toujours une solution qui est unique si $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une base de V .

Démonstration

Elle est presque immédiate, il suffit de remarquer que $z = P_V x$ si et seulement si le vecteur $x-z$ est orthogonal aux vecteurs v_1, \dots, v_r .

THEOREME 3.1

Soit ξ_1, \dots, ξ_r un système de vecteurs de $\Omega_{\mathcal{K}}$ qui engendre un sous-espace vectoriel contenant $\Omega_{\mathcal{K}_0}$ et Q le projecteur de Ω^* sur $\Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$, alors :

1°) L'hypothèse \mathcal{K}_0 est vérifiable dans \mathcal{K} si et seulement si la matrice A de terme général

$$A_{ij} = \langle \varepsilon_i^*, \varepsilon_j^* \rangle - \langle \varepsilon_i^*, Q\varepsilon_j^* \rangle$$

est de rang égal à $\dim(\Omega_{\mathcal{K}_0})$. En particulier, si $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ est une base de $\Omega_{\mathcal{K}}$, alors \mathcal{K}_0 est vérifiable dans \mathcal{K} si et seulement si A est non singulière.

2°) Notons $q_i(x) = \langle \varepsilon_i^* - Q\varepsilon_i^*, x \rangle$, $i = 1, \dots, r$; alors :

$$q_{\mathcal{K}_0/\mathcal{K}}(x) = \sum_{i=1}^r \xi_i q_i(x)$$

où (ξ_1, \dots, ξ_r) est une solution de

$$\sum_{j=1}^r A_{ij} \xi_j = q_i(x) \quad i = 1, \dots, r.$$

Démonstration

1°) Il est clair que les vecteurs $\varepsilon_i^* - Q\varepsilon_i^*$, $i = 1, \dots, r$ forment un système générateur de $\Omega_{\mathcal{K}}^* - \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}^*$. D'après le théorème 2.3, l'hypothèse \mathcal{K}_0 est vérifiable dans \mathcal{K} si et seulement si ce système est de rang égal à $\dim(\Omega_{\mathcal{K}_0})$. Comme la matrice A de terme général :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle \varepsilon_i^* - Q\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^* - Q\varepsilon_j^* \rangle \\ &= \langle \varepsilon_i^*, \varepsilon_j^* \rangle - \langle \varepsilon_i^*, Q\varepsilon_j^* \rangle \quad i, j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

est de même rang que le système de vecteurs $\{\varepsilon_i^* - Q\varepsilon_i^*, i = 1, \dots, r\}$, la première partie du théorème est démontrée.

2°) D'après le lemme 3.1, si (ξ_1, \dots, ξ_r) désigne une solution de

$$\sum_{j=1}^r \langle \varepsilon_i^* - Q\varepsilon_i^*, \varepsilon_j^* - Q\varepsilon_j^* \rangle \xi_j = \langle \varepsilon_i^* - Q\varepsilon_i^*, x \rangle \quad (i = 1, \dots, r)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^r A_{ij} \xi_j = q_i(x) \quad i = 1, \dots, r$$

alors la projection de x sur le sous-espace vectoriel $\Omega_{\mathcal{J}\mathcal{C}}^* - \Omega_{\mathcal{J}\mathcal{C}\mathcal{C}_0}^*$ est :

$$\sum_{j=1}^r \xi_j (\varepsilon_j^* - Q\varepsilon_j^*), \text{ d'où :}$$

$$q_{\mathcal{J}\mathcal{C}_0 / \mathcal{J}\mathcal{C}}(x) = \sum_{i=1}^r \xi_i \langle \varepsilon_i^* - Q\varepsilon_i^*, x \rangle$$

$$q_{\mathcal{J}\mathcal{C}_0 / \mathcal{J}\mathcal{C}}(x) = \sum_{i=1}^r \xi_i q_i(x)$$

et le théorème est démontré.

Le théorème 3.1 permet donc de calculer numériquement $q_{\mathcal{J}\mathcal{C}_0 / \mathcal{J}\mathcal{C}}(x)$, à condition que l'on connaisse les quantités $\langle \varepsilon_i^*, Q\varepsilon_j^* \rangle$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, r$. D'autre part, pour avoir $q_{\mathcal{J}\mathcal{C}}(x)$, il suffit de calculer $\langle x, Qx \rangle$ car :

$$q_{\mathcal{J}\mathcal{C}}(x) = \|x\|^2 - \langle x, Qx \rangle.$$

Toutes ces quantités précédentes peuvent être calculées à l'aide du lemme 3.1. Il suffit de trouver un système générateur $\{\eta_1^*, \dots, \eta_s^*\}$ de $\Omega_{\mathcal{J}\mathcal{C}\mathcal{C}_0}^*$, on résoud alors des systèmes d'équations linéaires pour obtenir les projections de x , et de ξ_i^* , $i = 1, \dots, r$, sur $\Omega_{\mathcal{J}\mathcal{C}\mathcal{C}_0}^*$.

Remarque

Le paramètre décentrage de $q_{\mathcal{J}_C} / \mathcal{J}_C(X)$ est $q_{\mathcal{J}_C} / \mathcal{J}_C(m^*) = q_{\mathcal{J}_C} / \mathcal{J}_C(m_{\mathcal{J}_C}^*)$ où $m_{\mathcal{J}_C}$ est la projection de m sur $\Omega_{\mathcal{J}_C}$. Ecrivons que

$$m_{\mathcal{J}_C} = \sum_{i=1}^r \mu_i \varepsilon_i$$

il est facile de vérifier que

$$\sum_{j=1}^r A_{ij} \mu_j = q_i(m^*)$$

D'après le théorème 3.1, le paramètre décentrage de $q_{\mathcal{J}_C} / \mathcal{J}_C(X)$ est donc

$$\sum_{i=1}^r \mu_i q_i(m^*) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r A_{ij} \mu_i \mu_j.$$

IV - EXEMPLES D'APPLICATION

Ce paragraphe illustre l'application de la théorie générale précédente dans les plans d'expérience classiques.

4.1 - Plan factoriel à trois facteurs ou à deux facteurs avec un même nombre de répétitions.

On utilise la notation indexée classique. Les observations sont notées $x_{i,j,k}$, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, K$, de moyennes m_{ijk} et de variance commune σ^2 . On désignera μ , a , b , c , (ab) , (bc) , (ac) , (abc) respectivement pour m_{\emptyset} , $m_{\{1\}}$, $m_{\{2\}}$, $m_{\{3\}}$, $m_{\{1,2\}}$, $m_{\{2,3\}}$, $m_{\{1,3\}}$ et $m_{\{1,2,3\}}$, le théorème 1.1 permet d'écrire :

$$m_{ijk} = \mu + a_i + b_j + c_k + (ab)_{ij} + (bc)_{jk} + (ac)_{ik} + (abc)_{ijk}.$$

Les quantités $a, b, c, (ab), (bc), (ac), (abc)$ doivent satisfaire aux relations (1.1), c'est-à-dire :

$$a_i = b_j = c_k = (ab)_{i.} = (ab)_{.j} = (bc)_{j.} = (bc)_{.k} =$$

$$(ac)_{i.} + (ac)_{.k} = (abc)_{ij.} = (abc)_{i.k} = (abc)_{.jk} = 0.$$

La convention d'écriture est que chaque fois un indice est remplacé par un point, signifie que l'on a fait la moyenne suivant cet indice, ainsi :

$$a_i = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I a_i, \quad (abc)_{i.k} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (abc)_{ijk}, \text{ etc...}$$

On peut faire diverses hypothèses a priori sur le vecteur m . Seules sont considérées les hypothèses :

$$H : m_{ijk} = \mu + a_i + b_j + c_k$$

$$H' : m_{ijk} = \mu + a_i + b_j + c_k + (ab)_{ij} + (bc)_{jk} + (ac)_{ik}$$

$$H'' : m_{ijk} = m_{ij} = \mu + a_i + b_j$$

$$H''' : m_{ijk} = m_{ij} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij}$$

Les deux dernières hypothèses correspondent à un plan d'expérience à deux facteurs avec un nombre K de répétitions.

Tous les tests que l'on a à considérer sont basés sur les formes quadratiques :

$$S_{abc} = \|x_{\{1,2,3\}}\|^2 = \sum_{i,j,k} (x_{ijk} - x_{.jk} - x_{i.k} + x_{ij.} + x_{i..} + x_{.j.} + x_{..k} - \mu)^2$$

$$S_{ab} = \|x_{\{1,2\}}\|^2 = K \sum_{i,j} (x_{ij.} - x_{i..} - x_{.j.} + \mu)^2$$

$$S_{bc} = \|x_{\{2,3\}}\|^2 = I \sum_{j,k} (x_{.jk} - x_{.j.} - x_{..k} + \mu)^2$$

$$S_{ac} = \|x_{\{1,3\}}\|^2 = J \sum_{i,k} (x_{i.k} - x_{i..} - x_{..k} + \mu)^2$$

$$S_a = \|x_{\{1\}}\|^2 = J.K \sum_i (x_{i..} - \mu)^2$$

$$S_b = \|x_{\{2\}}\|^2 = I.K \sum_j (x_{.j.} - \mu)^2$$

$$S_c = \|x_{\{3\}}\|^2 = I.J \sum_k (x_{..k} - \mu)^2$$

Par exemple, sous l'hypothèse à priori H, les tests de non-influence du facteur A (premier facteur), B (deuxième facteur), ou C (troisième facteur) sont basés respectivement sur les rapports S_a/S_e , S_b/S_e , S_c/S_e , où $S_e = S_{abc} + S_{ab} + S_{bc} + S_{ac}$.

Sous l'hypothèse à priori H', les tests de non-intéraction entre les facteurs A et B, B et C ou C et A sont basés respectivement sur les rapports S_{ab}/S_{abc} , S_{bc}/S_{abc} et S_{ac}/S_{abc} .

Dans le cas du plan d'expérience à deux facteurs, il est commode d'introduire la forme quadratique

$$S = S_{abc} + S_{ac} + S_{bc} + S_c = \sum_{ijk} (x_{ijk} - x_{ij.})^2$$

alors sous l'hypothèse à priori H'', le test de non-influence du facteur A ou B est basé respectivement sur les rapports S_a/S_e , S_b/S_e où $S_e = S_{ab} + S$, et sous l'hypothèse à priori H''', le test de non-intéraction entre A et B est basé sur le rapport S_{ab}/S .

4.2 - Plan d'expérience à deux facteurs sans intéraction avec un nombre quelconque de répétitions pour chaque catégorie d'expérience

On considère un plan d'expérience à trois facteurs où le dernier facteur joue le rôle de "facteur de répétition". Une expérience sera défini par le triplet (i,j,k) et le plan d'expérience $E^* \subset \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, K\}$ est donné par :

$$(i,j,k) \in E^* \Leftrightarrow 1 \leq k \leq n_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, I\}, \quad j \in \{1, \dots, J\}.$$

Le nombre de répétition pour la catégorie d'expérience (i,j) est donc n_{ij} , il peut être éventuellement nul, dans ce cas, quelque soit k, le triplet (i,j,k) n'appartenant pas à E^* , donc il n'y a pas d'observation pour cette catégorie d'expérience.

On utilisera les notations :

$$x_{ij.} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{k=1}^K x_{ijk}$$

$$N_{i.} = \sum_{j=1}^J n_{ij} \quad ; \quad x_{i.} = \frac{1}{N_{i.}} \sum_{j=1}^J x_{ij.}$$

$$N_{.j} = \sum_{i=1}^I n_{ij} \quad ; \quad x_{.j} = \frac{1}{N_{.j}} \sum_{i=1}^I x_{ij.}$$

$$N_{..} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} \quad ; \quad x_{..} = \frac{1}{N_{..}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij.}$$

L'hypothèse à priori considérée est $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Nous nous intéressons au problème de test d'hypothèse de non-influence du premier facteur, soit $m_{\{1\}} = 0$. Le test de $m_{\{2\}} = 0$ peut être traité de la même manière. On a ici $\Omega_{\mathcal{H}} = \Omega_{\{1\}}$, $\Omega_{\mathcal{H}-\mathcal{H}} = F_{\{1\}}$. D'autre part, il est facile de vérifier que le projecteur Q de Ω^* sur $F_{\{2\}}^*$ est défini par :

$$x \in \Omega^* \rightarrow Qx \in F_{\{2\}}^* : (Qx)_{ijk} = x_{.j.}$$

Comme $\Omega_{\{1\}} \subset F_{\{1\}}$ et que ce dernier est engendré par les vecteurs $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^I$ où $\varepsilon_{ijk}^p = \delta(p, i)$ ($\delta(p, i)$ étant le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $p = i$ et 0 sinon), le théorème 3.1 nous conduit à la considération de la matrice A de terme général :

$$\begin{aligned} A_{pq} &= \langle \varepsilon^{*p}, \varepsilon^{*q} \rangle - \langle \varepsilon^{*p}, Q\varepsilon^{*q} \rangle \\ &= \delta(p, q)N_{p..} - \sum_{j=1}^J \frac{n_{pj.} n_{.qj.}}{N_{.j.}} \end{aligned}$$

L'hypothèse de non influence du facteur F_1 est vérifiable si et seulement si la matrice A est de rang $I-1$. Calculons maintenant la forme quadratique $q_{\mathcal{C}_0/\mathcal{C}}(x)$. Comme :

$$q_i(x) = \langle \varepsilon^{*i} - Q\varepsilon^{*i}, x \rangle = N_{i..} x_{i..} - \sum_{j=1}^J n_{ij} x_{.j}$$

on a :

$$q_{\mathcal{C}_0/\mathcal{C}}(x) = \sum_{i=1}^I \xi_i q_i(x)$$

où (ξ_1, \dots, ξ_I) est une solution de $A\xi = q$.

D'autre part, écrivons le vecteur m sous forme :

$$m_{ij} = \mu + a_i + b_j \quad \left(\sum_{i=1}^I a_i = \sum_{j=1}^J b_j = 0 \right).$$

Le paramètre de décentrage de $q_{\mathcal{C}_0/\mathcal{C}}(X)$ est (voir la remarque du § 3.2.b)

$$q_{\mathcal{C}_0/\mathcal{C}}(m^*) = \sum_i \sum_j A_{ij} a_i a_j$$

On peut résumer ces résultats dans le théorème :

THEOREME 4.1 (Graybill [8])

L'hypothèse de non-influence du facteur A est vérifiable si et seulement si la matrice A de terme général

$$A_{ij} = - \sum_{r=1}^J \frac{n_{ir} n_{jr}}{N_{.r}} \quad (i \neq j)$$

$$A_{ii} = N_{i..} - \sum_{r=1}^J \frac{n_{ir}^2}{N_{.r}}$$

est de rang J-1 . Le test de cette hypothèse est alors basé sur le rapport Q_0/Q où

$$Q_0 = \sum_{i=1}^I \xi_i q_i$$

$$Q = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^{n_{i,j}} x_{ijk}^2 - \sum_j N_{.j} x_{.j}^2 - \sum_i \xi_i q_i$$

(ξ_1, \dots, ξ_I) étant une solution de

$$\sum_{j=1}^I A_{ij} \xi_j = N_{.i} x_{i..} - \sum_{j=1}^J n_{ij} x_{ij.} = q_i$$

La variable aléatoire Q_0 suit une loi du x^2 décentrée de paramètre de décentrage :

$$\lambda = \sum_{i=1}^I N_{i.} a_i^2 - \sum_{i,j} \left(\sum_{r=1}^J \frac{n_{ir} n_{jr}}{N_{.r}} \right) a_i a_j.$$

Remarques

- 1°) Les (ξ_1, \dots, ξ_I) sont définis à une constante près car la somme des lignes de la matrice A est nulle, cela n'affecte pas Q_0 car on a $\sum_{i=1}^I q_i = 0$.
 Soumis à la condition $\sum_{i=1}^I \xi_i = 0$, les ξ_1, \dots, ξ_I sont des estimateurs sans biais de a_1, \dots, a_I (Graybill [8]).
- 2°) Les projections de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_I$ sur $\Omega_{\{1\}}$ sont indépendantes, il s'en suit que la vérifiabilité de $\mathcal{J}C_0$ est équivalente à la non-singularité de la matrice A', obtenue à partir de A en supprimant la i -ème ligne et i -ème colonne.
- 3°) L'étude précédente contient le cas du plan d'expérience strict à deux facteurs en prenant $n_{ij} = 0$ si $(i,j) \notin E$ et 1 sinon. En particulier, pour un plan en bloc incomplet équilibré, un calcul simple montre que :

$$A_{ij} = -\frac{\lambda}{k} \quad i \neq j$$

$$A_{ii} = r - \frac{r}{k}.$$

(Pour les notations, voir par exemple Scheffé [21] ou Barra [2]).

D'après le théorème 4.1, l'hypothèse de non-influence du premier facteur est vérifiable et on a :

$$Q_0 = \frac{k}{\lambda I} \sum q_i^2 = \frac{k}{\lambda I} \sum_{i=1}^I \left(r x_{i.} - \sum_{(i,j) \in E^*} x_{ij} \right)^2$$

$$Q = \sum_{(i,j) \in E^*} x_{ij}^2 - k \sum x_{.j}^2 - \frac{k}{\lambda I} \sum_{i=1}^I \left(r x_{i.} - \sum_{j:(i,j) \in E^*} x_{ij} \right)^2$$

Procédure ALGOL

La procédure P2FSI(N,NU1,NU2,X,A,Q1,Q0,Q,DF,VF) permet l'analyse de la variance sur un plan d'expérience à deux facteurs. Les données sont :

- NU1, NU2 : les dimensions du plan
- N la matrice de terme général n_{ij} = nombre d'observations pour la catégorie d'expérience (i,j)
- X la matrice des observations.

On calcule alors la matrice A et les formes quadratiques Q1, Q0, Q ($Q1 = \sum_{j=1}^J n_{ij} x_{.j}^2$) et le degré de liberté DF de la variable aléatoire Q. Le booléen VF prendra la valeur "vrai" si l'hypothèse est vérifiable et "faux" sinon.

```
*PROCEDURE P2FSI(N,NU1,NU2,X,A,Q1,Q0,Q,DF,VF) ;
*INTEGER *ARRAY N ; *BOOLEAN VF ;
*ARRAY X,A ; *INTEGER NU1,NU2,DF ; *REAL Q1,Q0,Q ;
*BEGIN
  *INTEGER I,IP,J,K,NB,NO ; *REAL SOM,R ;
  *ARRAY X1(/1:NU1/),X2(/1:NU2/),X12(/1:NU1,1:NU2/),
    S(/1:NU1-1,1:NU2/) ;
  *INTEGER *ARRAY N1(/1:NU1/),N2(/1:NU2/) ;
  Q:=0 ;
  *FOR I:=1 *STEP 1 *UNTIL NU1 *DO
  *FOR J:=1 *STEP 1 *UNTIL NU2 *DO
  *BEGIN SOM:=0 ;
    *FOR K:=1 *STEP 1 *UNTIL N(/I,J/) *DO
    *BEGIN
      Q:=Q+X(/I,J,K/)*X(/I,J,K/) ;
      SOM:=SOM+X(/I,J,K/)
    *END ;
    X12(/I,J/):=SOM
  *END ;
  NO:=0 ;
  *FOR I:=1 *STEP 1 *UNTIL NU1 *DO
  *BEGIN
    NB:=0 ; SOM:=0 ;
    *FOR J:=1 *STEP 1 *UNTIL NU2 *DO
    *BEGIN
      NB:=NB+N(/I,J/) ;
      SOM:=SOM+X12(/I,J/)
    *END ;
    N1(/I/):=NB ; X1(/I/):=SOM ; NO:=NO+NB
  *END ;
  *FOR J:=1 *STEP 1 *UNTIL NU2 *DO
  *BEGIN
    NB:=0 ; SOM:=0 ;
    *FOR I:=1 *STEP 1 *UNTIL NU1 *DO
    *BEGIN
      NB:=NB+N(/I,J/) ;
      SOM:=SOM+X12(/I,J/)
    *END ;
    N2(/J/):=NB ; X2(/J/):=SOM
  *END ;
  Q1:=0 ;
  *FOR J:=1 *STEP 1 *UNTIL NU2 *DO
    Q1:=Q1+X2(/J/)*X2(/J/)/N2(/J/) ;
  *FOR I:=1 *STEP 1 *UNTIL NU1 *DO
  *BEGIN
    *FOR IP:=1 *STEP 1 *UNTIL I-1 *DO
    *BEGIN SOM:=0 ;
      *FOR J:=1 *STEP 1 *UNTIL NU2 *DO
      SOM:=SOM-N(/I,J/)*N(/IP,J/)/N2(/J/) ;
      A(/I,IP/):=A(/IP,I/):=SOM
    *END ;
    SOM:=N1(/I/) ;
    *FOR J:=1 *STEP 1 *UNTIL NU2 *DO
      SOM:=SOM-N(/I,J/)*N(/I,J/)/N2(/J/) ;
      A(/I,I/):=SOM
    *END ;
```

```
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NU1-1 'DO'  
'BEGIN'  
  'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' NU1-1 'DO'  
    S(/I,J/):=A(/I,J/);  
    SOM:=X1(/I/);  
    'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NU2 'DO'  
      SOM:=SOM-X2(/J/)*N(/I,J/)/N2(/J/);  
    S(/I,NU1/):=SOM  
  'END';  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NU1-1 'DO'  
'BEGIN'  
  'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' I-1 'DO'  
    'BEGIN' R:=-S(/K,I/)/S(/K,K/);  
    'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' NU1 'DO'  
      S(/I,J/):=S(/I,J/)+R*S(/K,J/)  
    'END';  
    'IF' ABS(A(/I,I/)) < '-18 'THEN' 'GOTO' IMPOSSIBLE;  
  'END';  
R:=0;  
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NU1-1 'DO'  
  R:=R+S(/I,NU1/)*S(/I,NU1/)/S(/I,I/);  
Q0:=R; Q:=Q-Q0-Q1; DF:=NC-NU1-NU2+1; VF:='TRUE';  
'GOTO' FIN;  
IMPOSSIBLE: VF:='FALSE';  
FIN:  
'END' P2FSI;
```

CHAPITRE - III

PLANS D'EXPERIENCE ADAPTES DANS LE CAS DE DEUX FACTEURS

Dans le cas d'un plan d'expérience à deux facteurs, les hypothèses a priori ayant un sens statistique intéressante sont : $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{2\}\}$, $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ et $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Les deux premiers cas se réduisent à la considération d'un plan d'expérience à un facteur avec répétition de chaque catégorie d'expérience. L'étude d'un tel plan ne représente aucune difficulté.

Comme on ne s'intéresse qu'à des plans d'expérience 'général' on pourra ne pas considérer le dernier cas, car si le plan n'est pas factoriel et $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ alors aucun sous-ensemble de \mathcal{K} n'est vérifiable dans \mathcal{K} . En effet, soit $e \notin E^*$, le plan d'expérience en question, notons δ^e la fonction définie sur E qui vaut 1 au point e et 0 ailleurs, alors δ^e appartient au noyau de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$ et les projections δ_I^e de δ^e sur Ω_I , $I \subset \{1,2\}$ ne sont pas nulles.

Par conséquent, quelque soit $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, $\delta^e \notin \Omega_{\mathcal{K}-\mathcal{K}_0}$, et \mathcal{K}_0 n'est pas vérifiable dans \mathcal{K} .

Il reste le cas où $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Cette hypothèse a priori signifie qu'il n'y a pas d'interaction entre les facteurs. On s'intéresse à la vérification de l'hypothèse correspondant à $\mathcal{K} = \{\{1\}\}$ (non influence du premier facteur) ou $\mathcal{K}_0 = \{\{2\}\}$ (non influence du deuxième facteur). Il se révèle que la condition de vérifiabilité de ces hypothèses est identique et très simple, ce qui nous permet de construire des plans d'expérience minimaux adaptés.

I - CARACTERISATION DES PLANS D'EXPERIENCE ADAPTE ET MINIMAUX ADAPTES

1.1 - Condition de vérifiabilité

LEMME 1.1

Quelque soit le plan d'expérience (à deux facteurs) E^* , l'intersection du noyau de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$ avec $F_{\{1\}}$ (resp. $F_{\{2\}}$) se réduit à la fonction nulle.

Démonstration

Soit $m \in F_{\{1\}}$, alors $m(e_1, e_2) = \hat{m}(e_1)$ où \hat{m} est une fonction d'une seule variable e_1 . Si m appartient au noyau de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$, on a $m(e) = 0 \quad \forall e \in E^*$, mais alors pour tout $e_1 \in \{1, \dots, v_1\}$, il existe $e = (e_1, e_2) \in E^*$ (définition du plan d'expérience) par conséquent, $\hat{m} = 0$, d'où $m = 0$. En échangeant l'indice 1 par 2, on a un résultat analogue pour $F_{\{2\}}$.

THEOREME 1.1

Pour que l'hypothèse $\mathcal{J}_0 = \{\{1\}\}$ (ou $\mathcal{J}_0 = \{\{2\}\}$) soit vérifiable dans $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, il faut que la restriction à $\Omega_{\mathcal{J}}$ de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$ soit injective. Si cette condition est vérifiée, tout sous-ensemble de \mathcal{J} est vérifiable dans \mathcal{J} .

Démonstration

D'après le théorème 2.1 du chapitre II, $\mathcal{J}_0 = \{\{1\}\}$ est vérifiable dans $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ entraîne que l'intersection $N_{\mathcal{J}}$ du noyau de l'application $m \in \Omega \rightarrow m^* \in \Omega^*$ et $\Omega_{\mathcal{J}}$ est contenu dans $F_{\{2\}}$. Cela n'est possible que si $N_{\mathcal{J}} = \{0\}$ (lemme 1.1), d'où l'injectivité de l'application $m \in \Omega_{\mathcal{J}} \rightarrow m^* \in \Omega^*$. La deuxième partie du théorème résulte directement du théorème 2.1, chapitre II.

Une deuxième version du théorème 1.1 est la suivante :

THEOREME 1.1

Une condition nécessaire pour que $\mathcal{J}_0 = \{\{1\}\}$, (où $\mathcal{J}_0 = \{\{2\}\}$) soit vérifiable dans $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ est que les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \in \Omega_{\mathcal{J}} \\ m(e) = 0 \quad \forall e \in E^* \end{array} \right.$$

impliquent

$$m(e) = 0 \quad \forall e \in E$$

cette condition est suffisante pour que tout sous-ensemble de \mathcal{J} soit vérifiable dans \mathcal{J}

1.2 - Théorèmes de caractérisation

Dans toute la suite, $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, $\mathcal{J}_0 = \{\{1\}\}$ ou $\mathcal{J}_0 = \{\{2\}\}$ et on dit brièvement qu'un plan d'expérience est adapté (resp. minimal adapté) au lieu d'adapté (resp. minimal adapté), aux hypothèses $(\mathcal{J}, \mathcal{J}_0)$.

THEOREME 1.2

Pour tout $e \in E^*$, notons δ^e la fonction définie sur E qui vaut 1 au point e et 0 ailleurs et $\Omega_{\mathcal{J}}$ la projection de e sur $\Omega_{\mathcal{J}}$ alors une condition nécessaire et suffisante pour que $E^* \subset E$ soit un plan d'expérience adapté est que les vecteurs $\{\delta_{\mathcal{J}}^e, e \in E^*\}$ engendrent $\Omega_{\mathcal{J}}$

Démonstration

La relation $m(e) = 0$ ($e \in E$) peut s'écrire sous forme :

$$\langle m, \delta^e \rangle = 0.$$

Si $m \in \Omega_{\mathcal{J}C}$, cette relation équivaut à

$$\langle m, \delta_{\mathcal{J}C}^e \rangle = 0.$$

Par conséquent, les deux relations du théorème 1.1' équivalent à :

$$\begin{cases} m \in \Omega_{\mathcal{J}C} \\ \langle m, \delta_{\mathcal{J}C}^e \rangle = 0. \end{cases}$$

Ces relations impliquent que $m = 0$ si et seulement si les vecteurs $\{\delta_{\mathcal{J}C}^e, e \in E^*\}$ engendrent $\Omega_{\mathcal{J}C}$.

Corollaire

Avec les notations du théorème 1.2, une condition nécessaire et suffisante pour que $E^ \subset E$ soit un plan d'expérience minimal adapté est que les vecteurs $\{\delta_{\mathcal{J}C}^e, e \in E^*\}$ forment une base de $\Omega_{\mathcal{J}C}$.*

Démonstration

Si E^* est un plan d'expérience minimal adapté, alors le système $\{\delta_{\mathcal{J}C}^e, e \in E^*\}$ est une base de $\Omega_{\mathcal{J}C}$, sinon on pourrait extraire du système de générateurs $\{\delta_{\mathcal{J}C}^e, e \in E^*\}$ de $\Omega_{\mathcal{J}C}$ (théorème 1.2) une base de $\Omega_{\mathcal{J}C}$, formée par les vecteurs $\{\delta_{\mathcal{J}C}^e, e \in E_1^*\}$ où E_1^* est un plan d'expérience adapté strictement contenu dans E^* et E^* ne serait donc un plan d'expérience minimal adapté.

Inversement, si $\{\delta_{\mathcal{J}C}^e, e \in E^*\}$ est une base de $\Omega_{\mathcal{J}C}$, alors E^* est un plan d'expérience minimal adapté, car pour tout E_1^* strictement contenu dans E^* , les vecteurs $\delta_{\mathcal{J}C}^e, e \in E_1^*$ n'engendrent pas $\Omega_{\mathcal{J}C}$ et E_1^* n'est pas un plan d'expérience adapté.

Remarques

1°) Comme la dimension de $\Omega_{\mathcal{J}C}$ est v_1+v_2-1 , le corollaire précédent montre que :

Tout plan d'expérience minimal adapté contient exactement v_1+v_2-1 points.

La réciproque n'est pas exacte. Considérons par exemple le plan d'expérience 3×3 suivant :

$e_2 \backslash e_1$	1	2	3
1	*	*	
2	*	*	
3			*

Les points marqués * sont ceux appartenant à E^* . On verra que ce plan n'est pas minimal adapté car il contient un sous-plan 2×2 ayant quatre points (voir Théorème 1.3).

2°) On ne peut pas faire de l'Analyse de la Variance sur un plan d'expérience minimal adapté

En effet, l'application $m \in \Omega_{\mathcal{J}C} \rightarrow m^* \in \Omega^*$ étant injective, la dimension de $\Omega_{\mathcal{J}C}^*$ est égale à celle de $\Omega_{\mathcal{J}C}$, donc à celle de Ω^* , par conséquent $\Omega_{\mathcal{J}C}^* = \Omega^*$ et on n'a pas de F-test (voir § 3.1 chapitre II). Pour pouvoir effectuer des tests à l'aide d'un plan d'expérience E^* , il faut que ce dernier contienne strictement un plan d'expérience minimal adapté.

II - CONSTRUCTION DE PLANS D'EXPERIENCE MINIMAUX ADAPTES

2.1 - Sous plan d'un plan d'expérience

DEFINITION 2.1

On appelle sous-plan d'un plan d'expérience E^* , un plan d'expérience \tilde{E}^* obtenu à partir de E^* en ne considérant que des niveaux $e_1 \in S_1$, $e_2 \in S_2$ où S_1 (resp. S_2) est un sous-ensemble de $\{1, \dots, v_1\}$ (resp. $\{1, \dots, v_2\}$).

Dans la définition précédente, on suppose que S_1 et S_2 soit choisis de façon que \tilde{E}^* satisfasse aux axiomes des plans d'expérience.

THEOREME 2.3

Si E^* est un plan d'expérience minimal adapté, alors tout sous-plan \tilde{E}^* de E^* défini par $S_1 \subset \{1, \dots, v_1\}$, $S_2 \subset \{1, \dots, v_2\}$ contient au plus $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$ points où $\alpha_1 = \text{card}(S_1)$, $\alpha_2 = \text{card}(S_2)$; de plus si ce sous-plan contient exactement $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$ points, c'est un plan minimal adapté.

Démonstration

On ne restreint pas la généralité en supposant que $S_1 = \{1, \dots, v_1\}$, $S_2 = \{1, \dots, v_2\}$. Comme les vecteurs $\{\delta_{JC}^e, e \in \tilde{E}^*\}$ sont indépendants, il n'existe pas de $\lambda \in \Omega$, $\lambda \neq 0$ et $\lambda(e) = 0, \forall e \notin \tilde{E}^*$ tel que : $\sum_{e \in \tilde{E}^*} \lambda(e) \delta_{JC}^e = 0$, ou de façon différente $\lambda \in \Omega_{\{1,2\}}$ (l'orthogonal de Ω_{JC} dans Ω).
Ainsi le système d'équations :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e_1=1}^{\nu_1} \lambda(e_1, e_2) = 0 \\ \sum_{e_2=1}^{\nu_2} \lambda(e_1, e_2) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} e_1 = 1, \dots, \nu_2 \\ e_2 = 1, \dots, \nu_1 \end{array}$$

avec :

$$\lambda(e) = 0 \quad \forall e \notin \tilde{E}^*$$

n'admet que la seule solution $\lambda(e) = 0, \forall e \in \tilde{E}^*$.

Comme $\tilde{E}^* \subset \{1, \dots, \alpha_1\} \times \{1, \dots, \alpha_2\} = \tilde{E}$, le système précédent est réduit à :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e_1=1}^{\alpha_1} \lambda(e_1, e_2) = 0 \\ \sum_{e_2=1}^{\alpha_2} \lambda(e_1, e_2) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} e_1 = 1, \dots, \alpha_1 \\ e_2 = 1, \dots, \alpha_2 \end{array}$$

et par conséquence \tilde{E}^* contient au plus $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$ points.

Si maintenant on se restreint l'attention à l'ensemble des expériences \tilde{E} et travaille dans l'espace $\tilde{\Omega}$ des fonctions définie seulement sur \tilde{E} . Nous définirons $\tilde{\Omega}_{\mathcal{J}_C}$ de la même manière que $\Omega_{\mathcal{J}_C}$. L'indépendance des vecteurs $\{\tilde{\delta}_{\mathcal{J}_C}^e, e \in \tilde{E}^*\}$ où $\tilde{\delta}_{\mathcal{J}_C}^e$ est la projection de δ^e (considérée comme un élément de Ω) sur $\tilde{\Omega}_{\mathcal{J}_C}$, découle alors du fait que :

$$\forall \lambda \in \Omega, \lambda(e) = 0, \forall e \notin \tilde{E}^*, \lambda \text{ satisfait à (2.2)} \Rightarrow \lambda(e) = 0, \forall e \in \tilde{E}^*$$

car nous pouvons identifier ces λ comme des éléments de $\tilde{\Omega}$.

Par conséquence, si $\text{card}(\tilde{E}^*) = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 = \dim(\tilde{\Omega}_{\mathcal{J}_C})$, les vecteurs $\{\tilde{\delta}_{\mathcal{J}_C}^e, e \in \tilde{E}^*\}$ forment une base de $\tilde{\Omega}_{\mathcal{J}_C}$ et \tilde{E}^* est un plan d'expérience minimal adapté.

THEOREME 2.4

Une condition nécessaire et suffisante pour que le plan d'expérience E^* soit minimal adapté est qu'il existe $\hat{e} \in E^*$ vérifiant soit la condition 1°), soit la condition 2) suivante :

1°) Pour tout $e_2 \neq \hat{e}_2$, alors $(\hat{e}_1, \hat{e}_2) \in E^*$ et le sous-plan d'expérience obtenu à partir de E^* en enlevant la ligne indexée par \hat{e}_1 est un plan d'expérience minimal adapté.

2°) Pour tout $e_1 \neq \hat{e}_1$, alors $(e_1, \hat{e}_2) \in E^*$ et le sous-plan d'expérience obtenu à partir de E^* en enlevant la colonne indexée par \hat{e}_2 est un plan d'expérience minimal adapté.

Démonstration

Supposons que E^* est un plan d'expérience minimal adapté, alors $\text{Card}(E^*) = v_1 + v_2 - 1$, et on peut trouver un point $\hat{e} \in E^*$ vérifiant

(1) aucun des points (\hat{e}_1, e_2) , $e_2 \neq \hat{e}_2$ appartient à E^*

et/ou

(2) aucun des points (e_1, \hat{e}_2) , $e_1 \neq \hat{e}_1$ appartient à E^*

En effet, s'il n'existe pas de $\hat{e} \in E^*$ vérifiant (1), $\text{card}(E^*) \geq 2v_1$, et s'il n'existe pas non plus $\hat{e} \in E^*$ vérifiant (2), $\text{card}(E^*) \geq \max(2v_1, 2v_2) > v_1 + v_2 - 1$, d'où une contradiction.

Maintenant, si \hat{e} vérifie à la fois (1) et (2), le sous-plan d'expérience obtenu à partir de E^* en enlevant la ligne indexée par \hat{e}_1 et la colonne indexée par \hat{e}_2 est de dimension $(v_1 - 1) \times (v_2 - 1)$ et contient $v_1 + v_2 - 2$ points, qui est encore une contradiction (voir théorème 2.3). Par conséquent, \hat{e} vérifie soit (1), soit (2) et le sous-plan d'expérience \tilde{E}^* obtenu à partir de E^* en enlevant soit la ligne, soit la colonne contenant \hat{e} , est minimal adapté (théorème 2.3).

Inversement, si ξ vérifie (1) ou (2), le vecteur $\delta_{\mathcal{J}\mathcal{C}}^{\xi}$ est indépendant des vecteurs $\{\delta_{\mathcal{J}\mathcal{C}}^e, e \in E^* - \{\xi\}\}$ et le plan d'expérience E^* est minimal adapté si le sous-plan E^* l'est.

2.2 - Construction de tous les plans d'expérience minimaux adaptés

Le nombre des plans d'expérience minimaux adaptés pour une dimension donnée croît rapidement avec sa dimension et devient énorme dès que celle-ci dépasse 3×3 . Ainsi dans chaque classe des plans équivalents par permutation (voir § 2.2 chapitre II), on choisira un représentant qui est le plus grand suivant un ordre lexicographique que l'on va définir.

DEFINITION 2.1

Soient $e' \in E, e'' \in E$, on dira que e' est lexicographiquement plus grand que e'' si $e'_1 > e''_1$ ou si $e'_1 = e''_1$ et $e'_2 > e''_2$.

DEFINITION 2.2

On dira que le plan d'expérience E' est lexicographiquement plus grand que le plan E'' (tous les deux contiennent un même nombre, soit r , de points), si ayant ordonné lexicographiquement les éléments de E' et E'' en $e'^1 > \dots > e'^r$ et $e''^1 > \dots > e''^r$, il existe $k, 1 \leq k \leq r$ tel que

$$e'^i = e''^i \quad \forall i < k, \quad e'^k > e''^k.$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour qu'un plan d'expérience minimal adapté soit lexicographiquement plus grand que tous les plans qui lui sont équivalents par permutation.

THEOREME 2.5

Si le plan minimal adapté $n \times m, E^*$ est lexicographiquement plus grand que tous les plans qui lui sont équivalents par permutation, alors, il existe k_1, \dots, k_n , $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n = m$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$, on a les propriétés suivantes :

- 1°) E^* ne contient pas les points (e_1, e_2) avec $e_1 \leq i$, $e_2 > k_i$
- 2°) Les points $(i, k_{i-1}+1), (i, k_{i-1}+2), \dots, (i, k_i)$ appartiennent à E^*
- 3°) Le sous-plan d'expérience $i \times k_i$ de E^* formé par i premières lignes et k_i premières colonnes est minimal adapté est lexicographiquement plus grand que tous les plans qui lui sont équivalents.

Par exemple pour le plan 4×5 ci-dessous, on a $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $k_3 = k_4 = 5$.

e_2					
e_1	1	2	3	4	5
1	*	*	*		
2	*			*	
3		*			*
4			*		

Démonstration

Soit k_1 le nombre des points sur la première ligne appartenant à E^* , alors ces points seront $(1,1), (1,2), \dots, (1, k_1)$ car sinon, par permutation sur les colonnes, on peut ramener E^* à un plan E^{**} contenant ces points et par conséquence lexicographiquement plus grand que E^* . D'où les n° 1°), 2°), 3°) sont vérifiés pour $i = 1$. Montrons par récurrence qu'il sont vérifiés pour tout i , $i \leq n$.

Supposons donc que 1°), 2°), 3°) soient vrais pour $i \leq v$. On remarque d'abord qu'il existe un point (e_1, e_2) avec $e_1 > v$ et $e_2 \leq k_v$, appartenant à E^* , car sinon le sous-plan d'expérience $(n-v) \times (m-k_v)$ formé par les $n-v$ dernières lignes et $m-k_v$ dernières colonnes contiendra $(n+m-1)-(v+k_v-1) = (n-v)+(m-k_v)$ points, ce qui est une contradiction (voir théorème 2.3). D'une manière plus forte, il existe $e_2 \leq k_v$ tel que le point $(v+1, e_2)$ appartient à E^* car sinon, par permutation sur les lignes, on peut amener le point (e_1, e_2) précédent en $(v+1, e_2)$ et obtenir un plan d'expérience E^{**} lexicographiquement plus grand que E^* .

D'autre part, le point $(v+1, e_2) \in E^*$ avec $e_2 \leq k_v$, qui existe d'après ce qui précède est unique, sinon le sous-plan d'expérience $(v+1) \times k_v$ de E^* formé par les $v+1$ premières lignes et k_v premières colonnes contiendrait plus de $(v+1)+k_v-1$ points qui est une contradiction (voir théorème 3.3). Si k'_{v+1} est le nombre des points sur la $v+1$ -ième ligne appartenant à E^* , alors ces points sont : $(v+1, e_2)$ avec $e_2 \leq k_v$ et $(v+1, k_v+1), (v+1, k_v+2), \dots, (v+1, k_{v+1})$ où $k_{v+1} = k_v + k'_{v+1} - 1$. En effet, E^* contient $k'_{v+1} - 1$ points sur la $v+1$ ligne dont la deuxième coordonnée est plus grande que k_v et par permutation sur les colonnes, on peut ramener ces points en $(v+1, k_v+1), \dots, (v+1, k_{v+1})$. Les n° 1°), 2°) du théorème sont donc démontrés. De plus, l'application répétée du théorème 2.4 montre que le sous-plan d'expérience $(v+1 \times k_{v+1})$ de E^* est minimal adapté car le sous-plan d'expérience $(v \times k_v)$ de E^* l'est.

Finalement, il résulte directement du fait que le plan d'expérience E^* est lexicographiquement plus grand que tous les plans d'expérience qui lui sont équivalents par permutation et qu'il n'existe pas de points $(e_1, e_2) \in E^*$ avec $e_1 \leq i, e_2 > k_i$, que le sous-plan d'expérience $(i \times k_i)$ de E^* est aussi lexicographiquement plus grand que tous les plans d'expérience qui lui sont équivalents.

Remarque

Si le plan d'expérience E^* est tel que 1°) et 2°) soient vérifiées pour tout i , alors d'après le théorème 2.4, quelque soit $i = 1, \dots, n$, le sous-plan d'expérience $i \times k_i$ de E^* formés par les i premières lignes et k_i premières colonnes

est un plan d'expérience minimal adapté. En particulier, E^* est un plan d'expérience minimal adapté ; mais on ne sait pas s'il est lexicographiquement plus grand que tous les plans d'expérience qui lui sont équivalents par permutation.

Algorithme de construction

Le théorème 2.5 permet de construire une liste complète de tous les plans d'expérience minimaux adaptés, chacun est lexicographiquement plus grand que tous les plans qui lui sont équivalents par permutation ; en effet, on voit que de tels plans de dimension $n_\ell \times n_c$ s'obtiennent à partir de ceux de dimension $(n_\ell-1) \times n_c$ en ajoutant un point sur la n_ℓ -ième ligne et ceux de dimension $n_\ell \times (n_c-1)$, en ajoutant un point sur la n_ℓ -ième ligne et sur la n_c -ième colonne. On remarque que les plans d'expérience obtenus de cette façon sont minimaux adaptés mais pas forcément lexicographiquement le plus grand dans leur classe d'équivalence (par permutation).

L'algorithme que nous proposons est le suivant :

A l'étape r , on dispose d'une liste complète de tous les sous-plans d'expérience minimaux adaptés, lexicographiquement le plus grand dans leur classe d'équivalence (par permutation) : $E_r^1, E_r^2, \dots, E_r^{n(r)}$, de dimension respectives $n_\ell^1 \times n_c^1, n_\ell^2 \times n_c^2, \dots, n_\ell^{n(r)} \times n_c^{n(r)}$ avec $1 \leq n_\ell^i \leq v_1, 1 \leq n_c^i \leq v_2$ et $n_\ell^i + n_c^i = r+1$ (c'est-à-dire le sous-plan E_r^i , contient exactement r points). A partir du sous-plan d'expérience E_r^i , en ajoutant un point soit sur la n_ℓ^i+1 -ième ligne (sous réserve que $n_\ell^i+1 \leq v_1$), soit sur la n_ℓ^i -ième ligne et sur la n_c^i+1 -ième colonne (sous réserve que $n_c^i+1 \leq v_2$), on obtient des sous-plans d'expérience minimaux adaptés tels que la somme de leurs dimensions est égale à $(r+1)+1$. On ne retient de ces sous-plans que ceux qui sont lexicographiquement le plus grand dans sa classe d'équivalence. D'après ce qui précède, en partant des sous-plans $E_r^1, \dots, E_r^{n(r)}$, on obtient une liste complète $E_{r+1}^1, \dots, E_{r+1}^{n(r+1)}$ des sous-plans d'expérience pour l'étape $r+1$. L'algorithme s'arrête quand $r = v_1 + v_2 - 1$.

Il reste le problème de déterminer si un plan d'expérience E est lexicographiquement le plus grand dans sa classe d'équivalence. Pour cela, on construira un plan d'expérience équivalent par permutation au plan E précédent qui est lexicographiquement le plus grand possible. Soit λ_i la i -ième ligne de E , qui contient le plus de points que les autres lignes. Soit k_i le nombre de points sur λ_i . Par permutation, on a un plan d'expérience E^1 équivalent à E dont la première ligne contient les points $(1,1), \dots, (1, k_1)$. Considérons maintenant la i -ième ligne λ_i^1 , ($i = 2, \dots, n$) de E^1 , on essaye de permuter entre les colonnes de E_1 de façon que la première ligne de E^1 soit inchangée et que la ligne λ_i^1 devienne lexicographiquement plus grande possible (on assimile les lignes de E^1 comme un sous-plan d'expérience d'ordre $1 \times m$). Soit $\tilde{\lambda}_i^1$ cette nouvelle ligne obtenue par les permutations précédentes. En répétant ces opérations, on obtient les lignes $\tilde{\lambda}_2^1, \dots, \tilde{\lambda}_n^1$ et on choisira l'indice i de façon que $\tilde{\lambda}_i^1$ soit lexicographiquement plus grand que toutes les autres lignes. Par permutation, on arrive donc à un plan d'expérience E^2 , ayant $\tilde{\lambda}_i^1$ comme deuxième ligne et dont la première ligne est la même que celle de E^1 .

Ainsi, on passe de E^k à E^{k+1} par des permutations sur les colonnes des E^k qui laissent inchangées les k premières lignes de E^k et par des permutations sur les $n-k$ dernières lignes de E^k . Ces permutations devraient rendre lexicographiquement plus grande possible la $k+1$ -ième ligne de E^k . A l'étape n , il est facile de voir que le plan d'expérience E^n obtenu est lexicographiquement le plus grand possible parmi les plans d'expérience équivalents à E .

2.3 - La procédure ALGOL

La procédure LP2MIN(NU1, NU2, LP, NP) fournit une liste complète (tableau LP) des plans d'expérience minimaux adaptés de dimension $NU1 \times NU2$ qui sont lexicographiquement le plus grand dans leur classe d'équivalence (par permutation). Le nombre des éléments de cette liste est NP. Dans la machine, un plan d'expérience sera codé par NU2 nombre $EC1, \dots, ECNU2$ de la façon suivante :

Prenons par exemple, le plan d'expérience ci-dessous. On remplace les cases vides par 0 et les cases marquées * par 1, et on considère les colonnes comme des nombres binaires lus de haut en bas. Ainsi le plan ci-dessous est représenté par 5 nombres binaires (1100, 1010, 1001, 0100, 0010).

$e_2 \backslash e_1$	1	2	3	4	5
1	*	*	*		
2	*			*	
3		*			*
4			*		

Le tableau LP est de dimension $NP \times NU2$. Chaque ligne de LP contient le code d'un plan d'expérience de la liste.

La programmation suit de près l'algorithme expliqué en § 2.2. La procédure LP2MIN utilise un sous-programme EQUIV(EC,N1,N2) qui permet à partir d'un plan d'expérience de dimension $N1 \times N2$, codé par EC de construire un nouveau plan d'expérience équivalent par permutation qui soit lexicographiquement le plus grand possible. A la sortie de cette procédure, EC contient le code de ce plan ainsi construit.

```
'PROCEDURE' LP2MIN(NU1,NU2,LP,NP) ;
'INTEGER' NU1,NU2,NP ; 'INTEGER' 'ARRAY' LP ;
'BEGIN'
'PROCEDURE' STORE(EC,LP,N2,NP) ;
'INTEGER' 'ARRAY' EC,LP ; 'INTEGER' N2,NP ;
'BEGIN'
  'INTEGER' I,J,K ;
  K:=0 ;
  REP: 'IF' K=NP 'THEN' 'GOTO' STOCK ;
      K:=K+1 ; J:=1 ;
  TEST: 'IF' EC(/J/) /= LP(/K,J/) 'THEN' 'GOTO' REP ;
      J:=J+1 ;
      'IF' J > N2 'THEN' 'GOTO' TERM 'ELSE' 'GOTO' TEST ;
  STOCK: NP:=NP+1 ;
      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
      LP(/NP,J/):=EC(/J/) ;
  TERM:
'END' STORE ;
'PROCEDURE' EQUIV(EC,N1,N2) ;
'INTEGER' 'ARRAY' EC ; 'INTEGER' N1,N2 ;
'BEGIN'
  'INTEGER' NL,NP,NPE,I,J,K,Q,LGM ;
  'INTEGER' 'ARRAY' PTI,PTK(/1:100/),LP,LPE(/1:100,1:N2/) ;
INIT:
  NL:=NP:=1 ;
  'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
  'BEGIN' LP(/1,J/):=EC(/J/) ; EC(/J/):=0 'END' ;
LIGNESMAX:
  LGM:=0 ;
  'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NP 'DO'
  'BEGIN'
    'INTEGER' 'ARRAY' ECR(/1:N2/) ; 'INTEGER' LG,SHIFT ;
    'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
      ECR(/J/):=LP(/K,J/) ;
    'FOR' I:=N1 'STEP' -1 'UNTIL' NL 'DO'
    'BEGIN'
      LG:=0 ; SHIFT:=J:=1 ;
    TASS:
      Q:=ECR(/J/)/2 ;
      'IF' 2*Q /= ECR(/J/) 'THEN' LG:=2*LG+1 ;
      'ELSE' SHIFT:=2*SHIFT ;
      ECR(/J/):=Q ;
      'IF' J=N2 'THEN' 'GOTO' SUITE ;
      'IF' EC(/J/) /= EC(/J+1/) 'THEN'
      'BEGIN' LG:=SHIFT*LG ; SHIFT:=1 'END' ;
      J:=J+1 ; 'GOTO' TASS ;
    SUITE:
      LG:=SHIFT*LG ;
      'IF' LG >= LGM 'THEN'
      'BEGIN'
        'IF' LG = LGM 'THEN' NPE:=NPE+1 ;
        'ELSE' 'BEGIN' NPE:=1 ; LGM:=LG 'END' ;
        PTI(/NPE/):=I ; PTK(/NPE/):=K ;
      'END'
    'END'
  'END'
'END' ;
```

```
'IF' NL=N1 'THEN' 'GOTO' PLANEXP ;
LISTE:
NP:=0 ;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NPE 'DO'
'BEGIN'
  'INTEGER' 'ARRAY' ECR,JR(/1:N2/) ;
  'INTEGER' IO,JO,KO,R,MASQ ;
  IO:=PTI(/K/) ; KO:=PTK(/K/) ;
  MASQ:=2** (N1-IO) ;
PERMULTE:
JR(/1/):=1 ;
'FOR' R:=2 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
'BEGIN'
  Q:=LP(/KO,R/)/'MASQ ;
  'IF' Q=2*(Q/'2) 'THEN' 'BEGIN' J:=R-1 ; 'GOTO' SUITE 'END' ;
  'FOR' J:=R-1 'STEP' -1 'UNTIL' 1 'DO'
  'BEGIN'
    'IF' EC(/JR(/J//)) = EC(/R/) 'THEN' 'GOTO' SUITE ;
    Q:=LP(/KO,JR(/J//))/'MASQ ;
    'IF' Q = 2*(Q/'2) 'THEN' 'GOTO' SUITE ;
    JR(/J+1/):=JR(/J/)
  'END' ;
  J:=0 ;
SUITE: JR(/J+1/):=R
'END' ;
'FOR' R:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
'BEGIN' J:=JR(/R/) ;
  Q:=LP(/KO,J//)/'MASQ ;
  ECR(/R/):=(LP(/KO,J//)-MASQ*Q)+(Q/'2)*MASQ
'END' ;
STORE(ECR,LPE,N2,NP) ;
'END' ;
PLANEXP:
'FOR' J:=N2 'STEP' -1 'UNTIL' 1 'DO'
'BEGIN'
  Q:=LGM/'2 ;
  EC(/J/):='IF' LGM=2*Q 'THEN' 2*EC(/J/) 'ELSE' 2*EC(/J/)+1 ;
  LGM:=Q
'END' ;
'IF' NL=N1 'THEN' 'GOTO' TERM ;
RECOMENCE:
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NP 'DO'
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO'
  LP(/K,J/):=LPE(/K,J/) ;
NL:=NL+1 ; 'GOTO' LIGNESMAX ;
TERM:
'END' EQUIV ;
'INTEGER' R,N1,N2,NPE,J,JO,JM,K ;
'INTEGER' 'ARRAY' NC,NCP(/1:1000/),LPE(/1:1000,1:NU2/),
  EC,ECR(/1:NU2/) ;
R:=NP:=NC(/1/):=1 ; LP(/1,1/):=1 ;
RECUR:
R:=R+1 ; NPE:=0 ;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NP 'DO'
'BEGIN'
  N2:=NC(/K/) ; N1:=R-N2 ;
```

```

*FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
  EC(/J/):=ECR(/J/):=LP(/K,J/);
COL:
*IF* N2 = NU2 *THEN* *GOTO* LIGNE ;
N2:=N2+1 ; EC(/N2/):=ECR(/N2/):=1 ;
EQUIV(EC,N1,N2) ;
*FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
  *IF* EC(/J/) != ECR(/J/) *THEN* *GOTO* CONT ;
NPE:=NPE+1 ; NCP(/NPE/):=N2 ;
*FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
  LPE(/NPE,J/):=EC(/J/);
CONT:
N2:=N2-1 ;
LIGNE:
*IF* N1 = NU1 *THEN* *GOTO* TERM ;
N1:=N1+1 ; JM:=1 ; JO:=N2 ;
AUG:
*IF* ECR(/JM/) = 2*(ECR(/JM/))/'2) *THEN*
  *BEGIN* JM:=JM+1 ; *GOTO* AUG *END* ;
*FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
  ECR(/J/):=2*ECR(/J/);
PLANEXP:
*IF* JO > JM *THEN*
  *BEGIN*
    *IF* ECR(/JO/)=ECR(/JO-1/) *THEN*
      *BEGIN* JO:=JO-1 ; *GOTO* PLANEXP *END* ;
    *END* ;
    ECR(/JO/):=ECR(/JO/)+1 ;
    *FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
      EC(/J/):=ECR(/J/);
    EQUIV(EC,N1,N2) ;
    *FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
      *IF* EC(/J/) != ECR(/J/) *THEN* *GOTO* SUITE ;
    NPE:=NPE+1 ; NCP(/NPE/):=N2 ;
    *FOR* J:= 1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
      LPE(/NPE,J/):=EC(/J/);
SUITE:
*IF* JO=JM *THEN* *GOTO* TERM ;
ECR(/JO/):=ECR(/JO/)-1 ;
JO:=JO-1 ; *GOTO* PLANEXP ;
TERM:
*END* ;
NP:=NPE ;
*FOR* K:=1 *STEP* 1 *UNTIL* NP *DO*
  *BEGIN* N2:=NC(/K/):=NCP(/K/);
    *FOR* J:=1 *STEP* 1 *UNTIL* N2 *DO*
      LP(/K,J/):=LPE(/K,J/);
  *END* ;
*IF* R < NU1+NU2-1 *THEN* *GOTO* RECUR
*END* LP2MIN ;
```

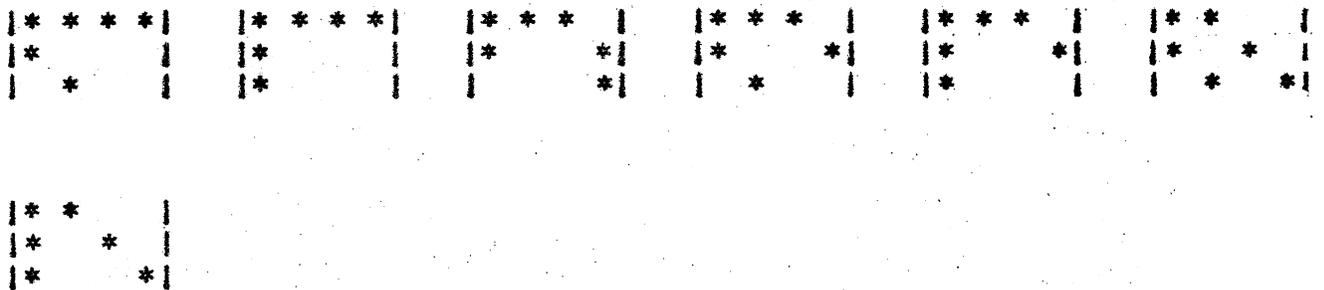
PLANS D EXPERIENCE (DEUX FACTEURS) MINIMAUX ADAPTES

CHAQUE CLASSE DE PLANS EQUIVALENTS PAR PERMUTATION SUR LES LIGNES ET COLONNES EST REPRESENTEE PAR UN SEUL PLAN. SUR LES FIGURES LES POINTS MARQUES * SONT CEUX APPARTENANT AU PLAN D EXPERIENCE

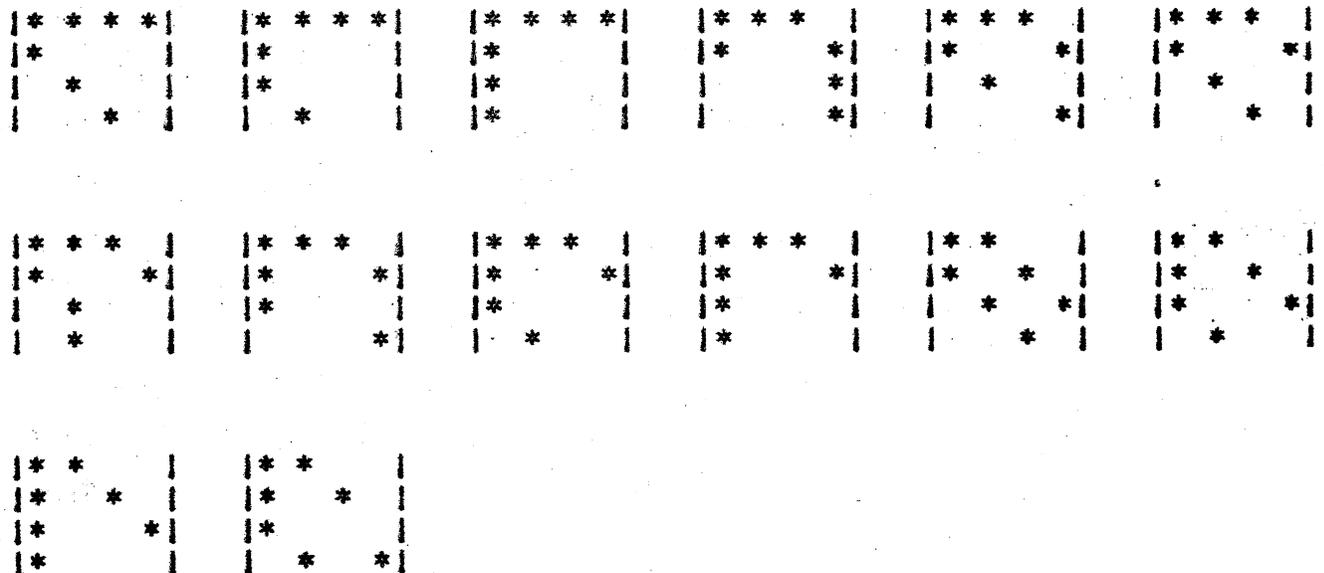
PLANS 3 X 3 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 4



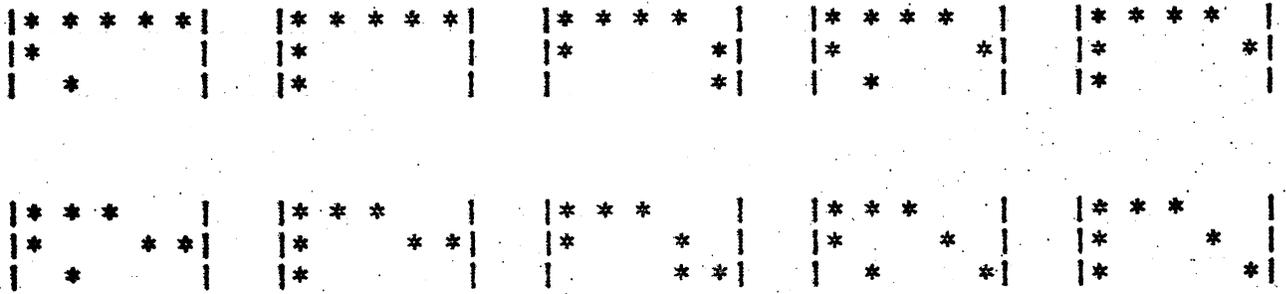
PLANS 3 X 4 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 7



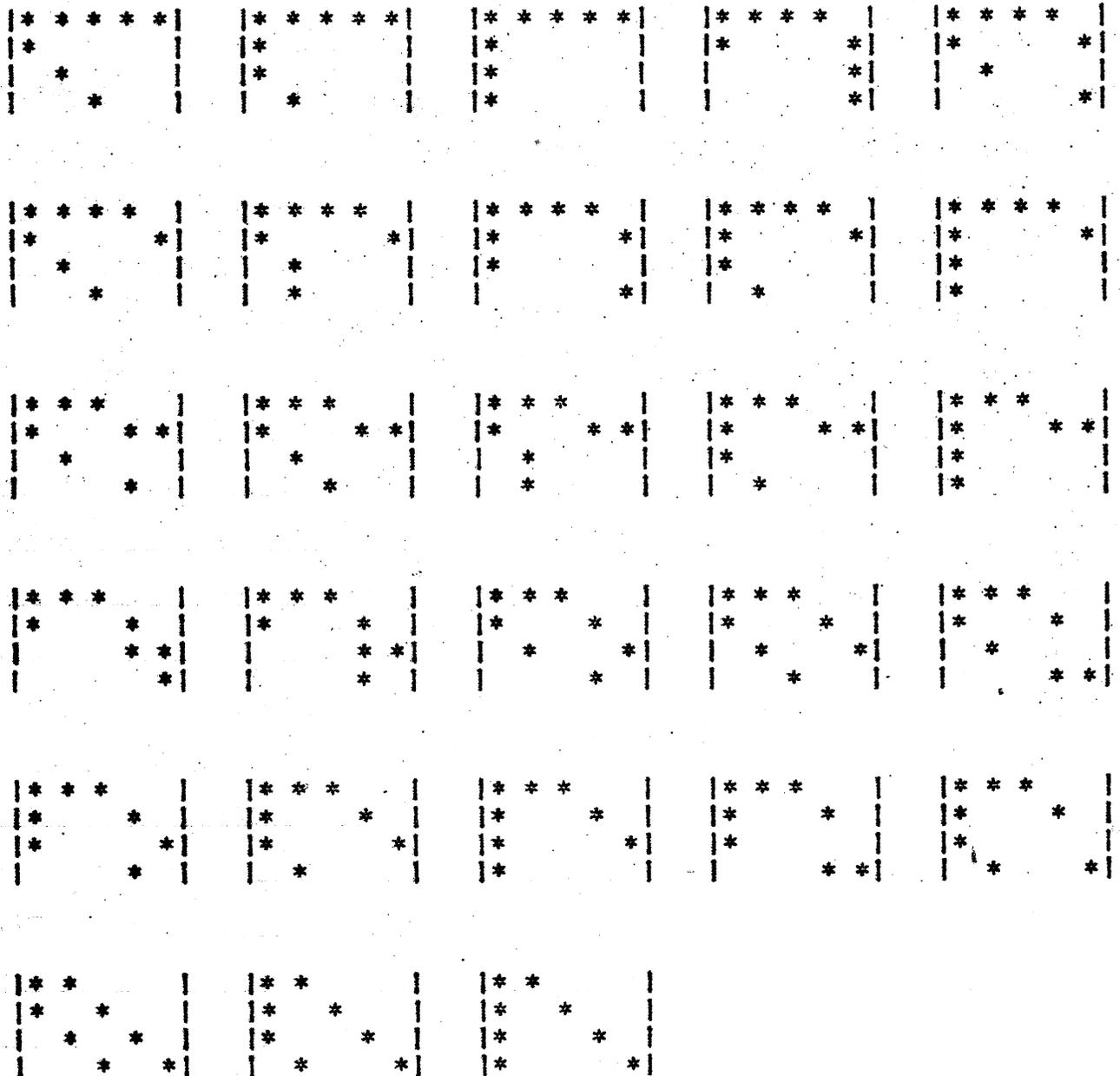
PLANS 4 X 4 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 14

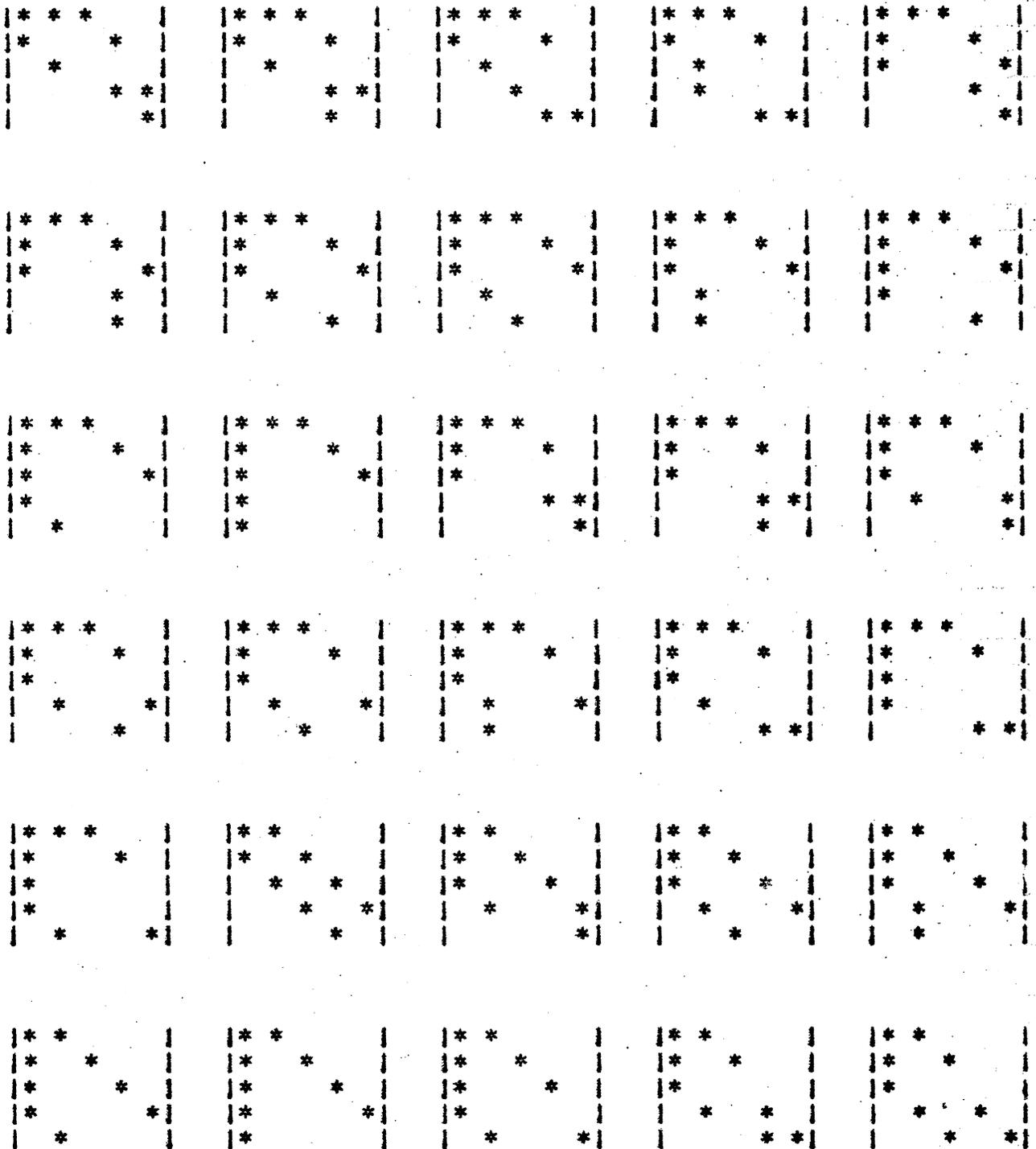


PLANS 3 X 5 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 10

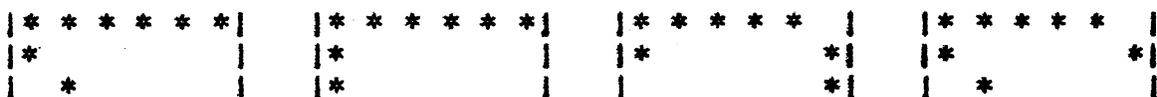


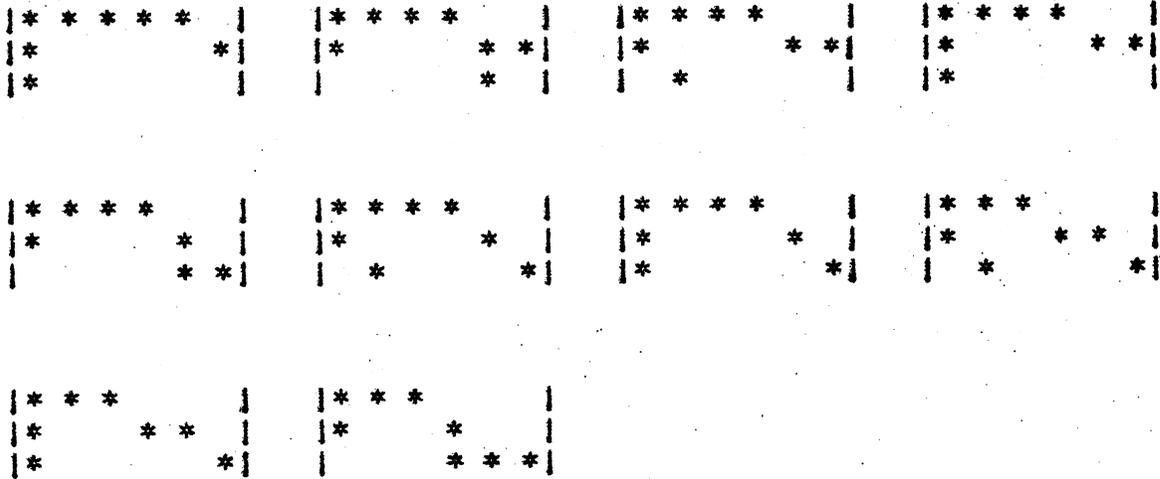
PLANS 4 X 5 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 28



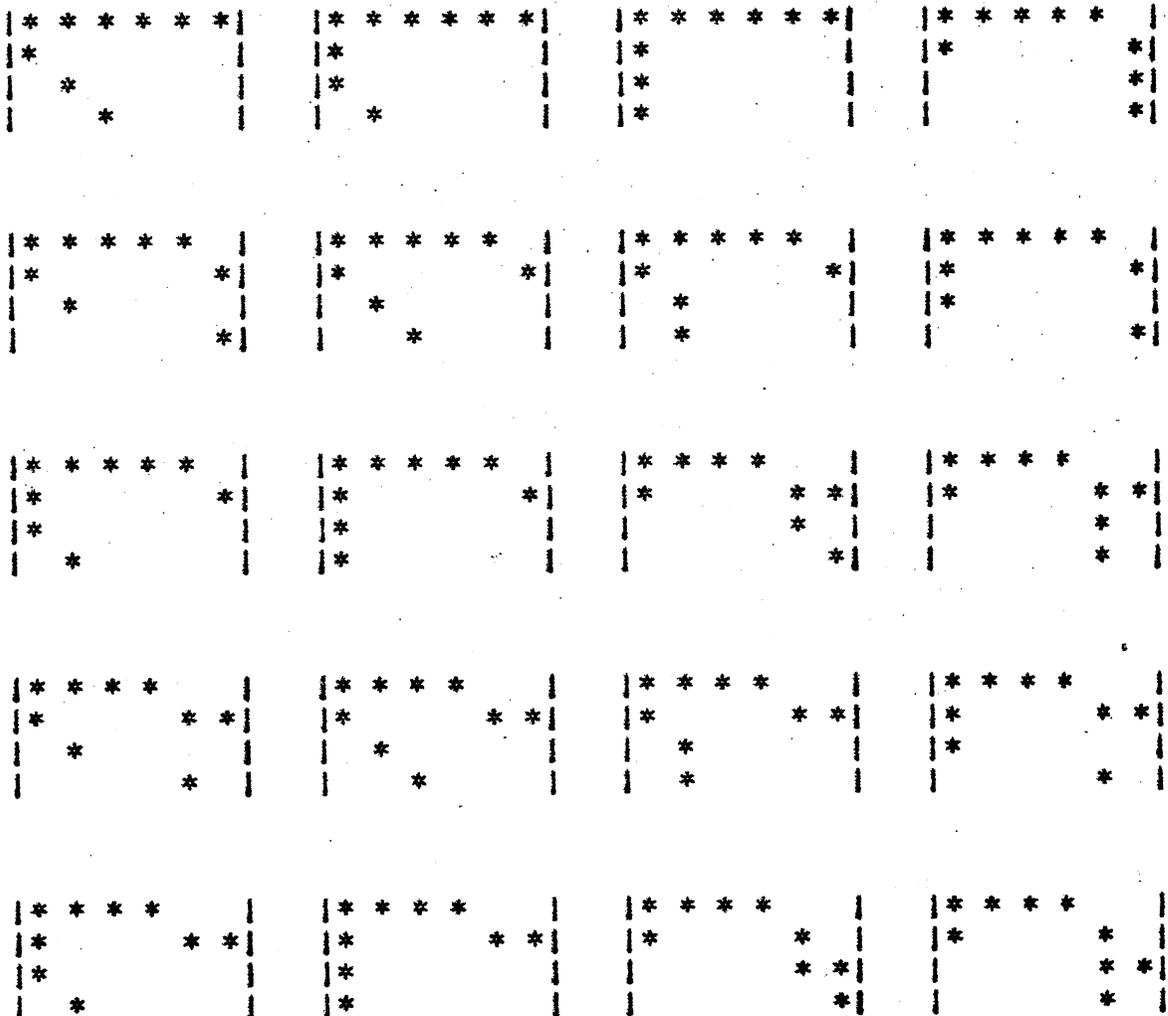


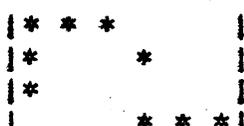
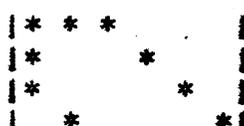
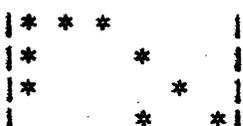
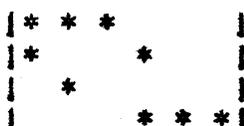
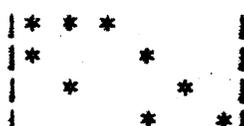
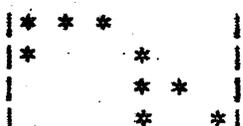
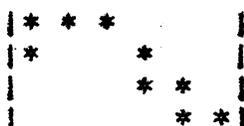
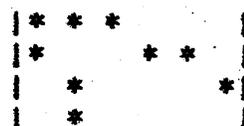
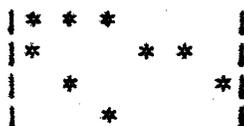
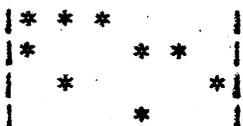
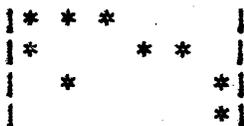
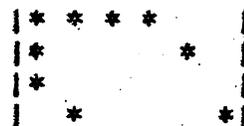
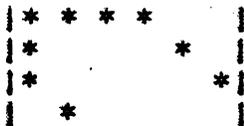
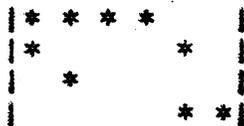
PLANS 3 X 6 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 14



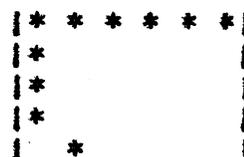
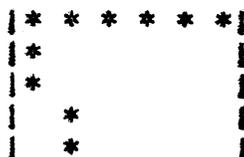
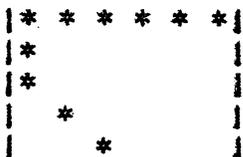
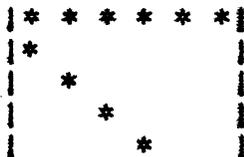


PLANS 4 X 6 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 45





PLANS 5 X 6 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 132



* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

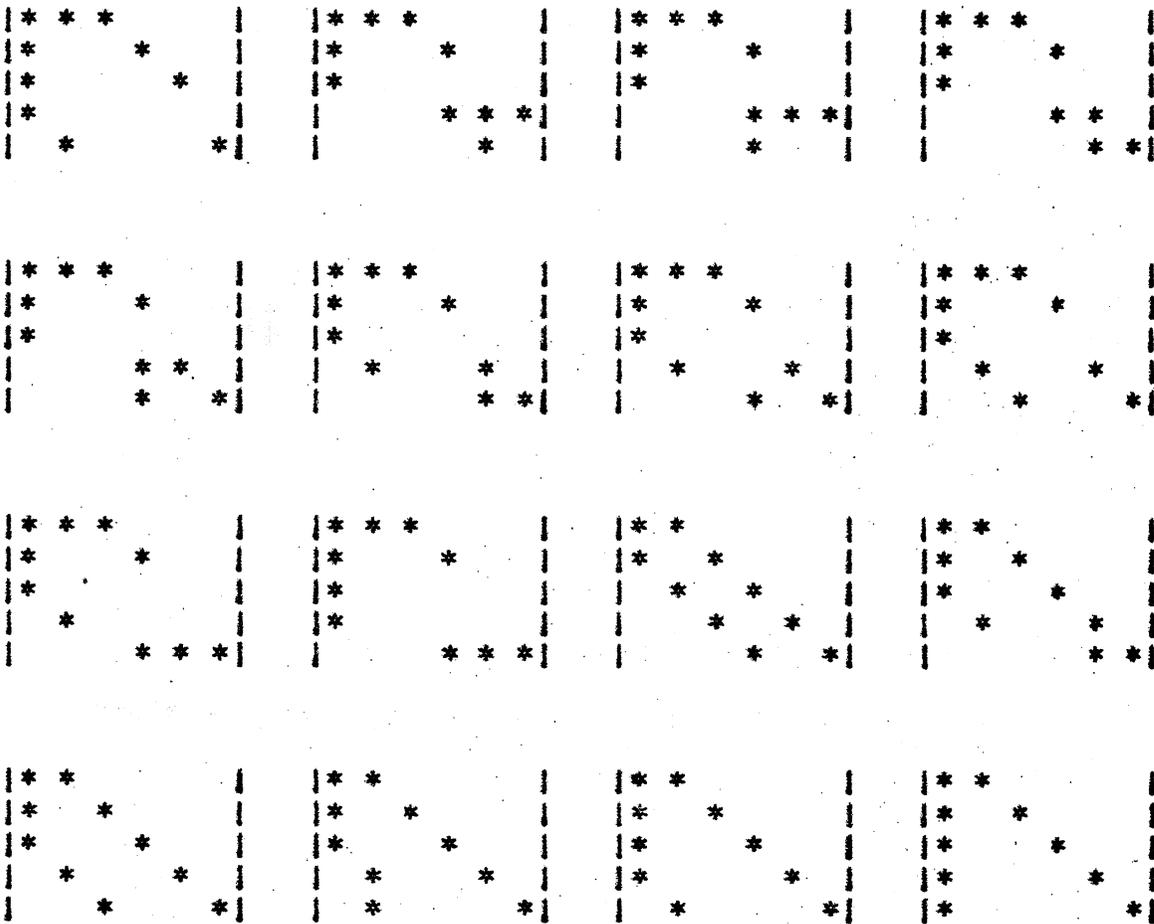
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

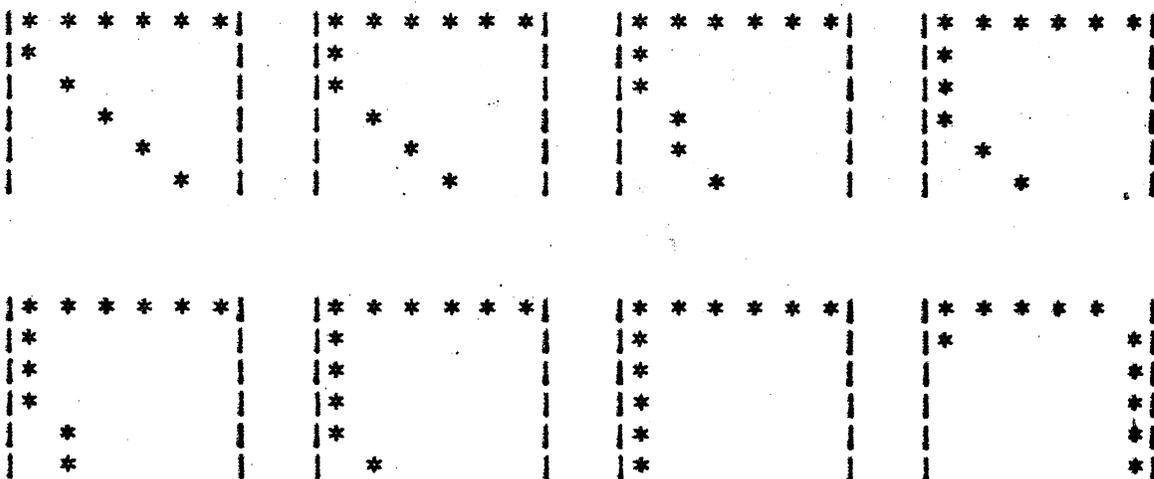
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *



PLANS 6 X 6 : NOMBRE DE CLASSES D EQUIV. = 316



* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * * *
* * * *
* * * *
* * * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

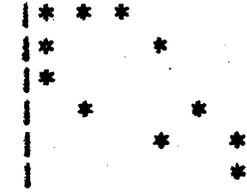
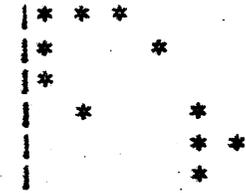
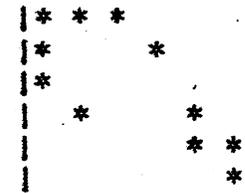
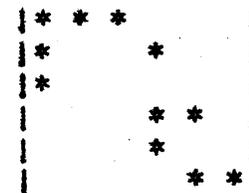
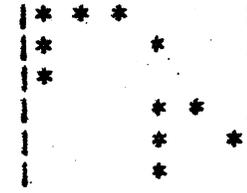
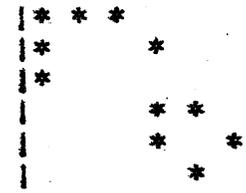
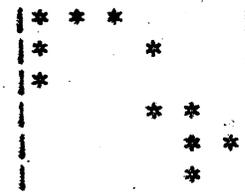
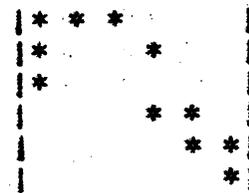
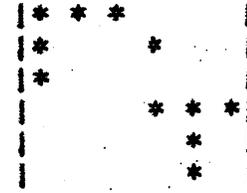
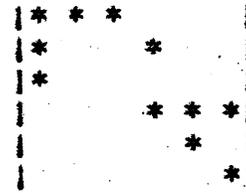
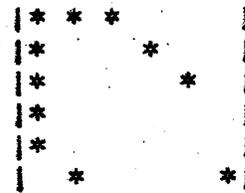
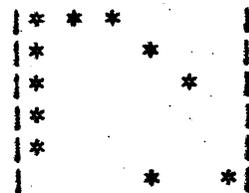
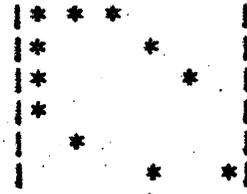
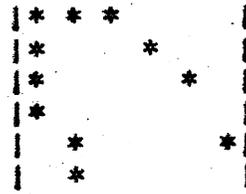
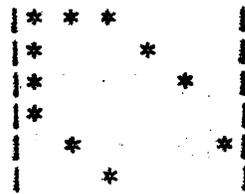
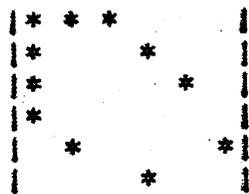
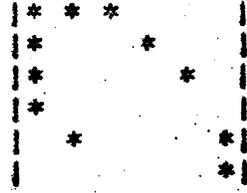
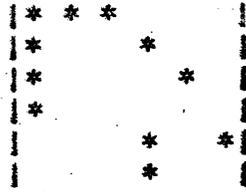
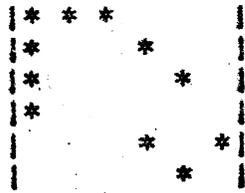
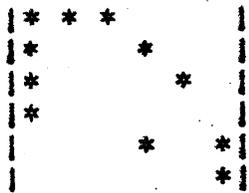
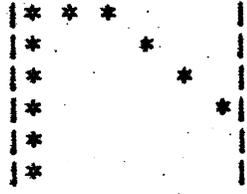
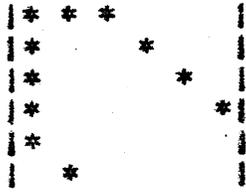
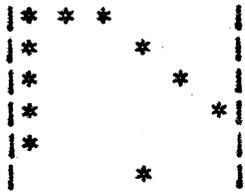
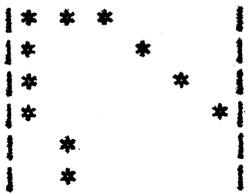
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *



* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

* * *
* * *
* * *
* * *
* * *

CHAPITRE IV

LE MODELE II D'ANALYSE DE LA VARIANCE ET PLAN D'EXPERIENCE HIERARCHIQUE

Ce chapitre contient deux parties : la première est consacrée à l'étude du modèle II d'Analyse de la Variance. Nous rencontrons beaucoup de difficultés. Il se trouve que le théorème de décomposition du chapitre II permet de définir une statistique exhaustive de la structure considérée, dans le cas des plans factoriels et seulement dans ce cas. Nous nous bornons donc à l'étude des plans factoriels et nous sommes amené à une structure exponentielle à liaisons polynomiales. Il s'avère que sauf dans les cas particuliers où ces liaisons deviennent linéaires, on ne sait pas s'il existe des tests U.M.P. sans biais et les construire éventuellement.

La deuxième partie illustre l'utilisation de la notation fonctionnelle et de la méthode géométrique à l'étude des plans d'expérience hiérarchique. Pour s'adapter au phénomène aléatoire étudié, on appuie sur une nouvelle décomposition de l'espace des observations. Cette décomposition permet de construire des tests dans le modèle I aussi bien que dans le modèle II d'Analyse de la Variance. Dans le dernier cas, on suppose que le nombre des niveaux d'un facteur à l'intérieur d'un niveau du facteur hiérarchiquement supérieur est le même pour tous les niveaux de ce dernier.

I - ANALYSE DE LA VARIANCE SUR PLAN FACTORIEL EN MODELE II

1.1 - Le modèle statistique

Nous reprenons ici la présentation de BARRA [2].

Dans le cas du modèle II sur plan factoriel, il est plus commode de considérer des plans avec répétitions, les plans d'expérience sans répétition constituent un cas particulier de ces derniers. L'ensemble des expériences possibles est donc défini par :

$$E = \prod_{i=1}^{k+1} \{1, \dots, v_i\}.$$

Le modèle II consiste à écrire que l'observation correspondante à l'expérience $e \in E$ est de la forme :

$$(1.1) \quad X(e) = \mu + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ I \neq \emptyset}} X_I(e_I) + U(e)$$

où :

- μ est une constante représentant la moyenne générale des observations.
- $X_I(e_I)$, qui ne dépend que de $e_I = \{e_i, i \in I\}$ est une variable aléatoire normale centrée de variance σ_I^2 , représentant l'interaction entre les facteurs $F_i, i \in I$ (en particulier $X_{\{i\}}$ représente l'effet principal du facteur F_i).
- $U(e)$ est une variable aléatoire normale centrée, de variance σ_e^2 représentant l'effet du hasard pur.

De plus, les variables aléatoires $X_I(e_I), e_I \in \prod_{i \in I} \{1, \dots, v_i\}, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}$ et $U(e), e \in E$ sont toutes indépendantes entre elles.

On notera $\Lambda(\sigma_I^2, \sigma_e^2)$ la matrice des covariances du vecteur aléatoire X dont le terme général est $\Lambda_{ee'} = E\{[X(e) - \mu] \cdot [X(e') - \mu]'\}$. Avec les mêmes notations du chapitre II, on peut alors écrire la structure statistique du modèle :

$$(\Omega, \mathcal{B}, N(\mu, \Lambda(\sigma_I^2, \sigma_e^2)), \mu \in \mathbb{R}, \sigma_I^2 \in \mathbb{R}^+ \quad \forall I \subset \{1, \dots, k\}, I \neq \emptyset, \sigma_e^2 \in \mathbb{R}^+)$$

1.2 - Existence d'une statistique exhaustive

Nous allons montrer que par un changement de base convenable, la matrice des covariances $\Lambda(\sigma_I^2, \sigma_e^2)$ devient une matrice diagonale et cela quelque soit les valeurs des σ_I^2 , $I \subset \{1, \dots, k\}$ et σ_e^2 .

LEMME 1.1

Soient pour tout $I \subset \{1, \dots, k+1\}$, $I \neq \emptyset$, une base orthonormale $\{\varepsilon_{I,1}, \dots, \varepsilon_{I,r_I}\}$ de Ω_I ($r_I = \dim(\Omega_I)$) et $X \in \Omega$ est défini par (1.1).
Notons

$$(1.2) \quad Y_\emptyset = \left(\prod_{i=1}^{k+1} v_i \right)^{-1/2} \sum_{e \in E} X(e)$$

$$(1.3) \quad Y_{I,i} = \langle \varepsilon_{I,i}, X \rangle \quad i = 1, \dots, r_I, I \subset \{1, \dots, k\}, I \neq \emptyset$$

alors les variables aléatoires $Y_\emptyset, Y_{I,i}, i = 1, \dots, r_I, I \subset \{1, \dots, k\}, I \neq \emptyset$ sont normales indépendantes ; Y_\emptyset a la moyenne $\left(\prod_{i=1}^{k+1} v_i \right)^{1/2} \mu$ et variance

$$\sigma^2(Y_\emptyset) = \sigma_e^2 + \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, k\} \\ J \neq \emptyset}} \left(\prod_{j \in J} v_j \right) \sigma_J^2$$

et $Y_{I,i}$ est centrée, de variance :

$$\sigma^2(Y_{I,i}) = \sigma_e^2 + \sum_{\substack{J \supset I \\ J \subset \{1, \dots, k\}}} \left(\prod_{j \in J} v_j \right) \sigma_J^2.$$

Démonstration

Dans l'espace F_I , le vecteur aléatoire \tilde{X}_I , de composantes $\tilde{X}_I(e) = X_I(e_I)$ où $e_I = \{e_i, i \in I\}$ est de loi gaussienne, dont la matrice de covariance est diagonale. Comme les vecteurs $\varepsilon_{J,i}, i = 1, \dots, r_J, J \subset I, J \neq \emptyset$ et $\varepsilon_\emptyset = (\prod_{i=1}^{k+1} v_i)^{-1/2} \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ étant la fonction qui vaut partout 1) forment une base orthonormale de F_I , les variables aléatoires $\langle \varepsilon_{J,i}, \tilde{X}_I \rangle, i = 1, \dots, r_J, J \subset I, J \neq \emptyset$ et $\langle \varepsilon_\emptyset, \tilde{X}_I \rangle$ sont normales indépendantes. D'autre part $\langle \varepsilon_{J,i}, \tilde{X}_I \rangle$ est nul si J n'est pas contenu dans I , on a :

$$Y_{I,i} = \sum_{\substack{J \supset I \\ J \subset \{1, \dots, k\}}} \langle \varepsilon_{I,i}, \tilde{X}_J \rangle + \langle \varepsilon_{J,i}, U \rangle \quad (I \neq \emptyset, i = 1, \dots, r_I)$$

$$Y_\emptyset = \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, k\} \\ J \neq \emptyset}} \langle \varepsilon_\emptyset, \tilde{X}_J \rangle + \langle \varepsilon_\emptyset, U \rangle$$

Ces relations montrent l'indépendance des variables aléatoires $Y_{I,i}, i = 1, \dots, r_I, I \subset \{1, \dots, k\}, I \neq \emptyset$ et Y_\emptyset . D'autre part, la variance de $\langle \varepsilon_{I,i}, \tilde{X}_J \rangle, (I \subset J)$ est :

$$\sum_{e_j, j \in J} \left[\left(\prod_{j \notin J} v_j \right) \cdot \varepsilon_{I,i}(e) \right]^2 \sigma_J^2 = \left(\prod_{j \notin J} v_j \right) \sigma_J^2$$

et celle de $\langle \varepsilon_{I,i}, U \rangle$ est σ_e^2 . On en déduit que les variances de $Y_{I,i}, i = 1, \dots, r_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}$ et de Y_\emptyset sont bien celles données par le lemme.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant qui généralise les résultats de Herbach [9] (voir BARRA [2]).

THEOREME 1.1

Notons

$$Y_{\emptyset} = N^{-1/2} \sum_{e \in E} X(e)$$

$$N = \prod_{i=1}^{k+1} v_i$$

$$S_I = \|X_I\|^2$$

$$S_e = \|X - \bar{X}_{\{1, \dots, k\}}\|^2$$

(X_I et \bar{X}_I sont respectivement les projections de $X \in \Omega$ sur Ω_I et F_I) alors la densité du vecteur aléatoire X est de la forme :

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det \Lambda} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{Y_{\emptyset} - N\mu}{\lambda_{\emptyset}} + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ I \neq \emptyset}} \frac{S_I}{\lambda_I} + \frac{S_e}{\lambda_e} \right]\right\}$$

où

$$\lambda_{\emptyset} = \sigma_e^2 + \sum_{\substack{J \neq \emptyset \\ J \subset \{1, \dots, k\}}} (\prod_{j \in J} v_j) \sigma_J^2$$

$$\lambda_I = \sigma_e^2 + \sum_{\substack{J \supset I \\ J \subset \{1, \dots, k\}}} (\prod_{j \in J} v_j) \sigma_J^2 \quad I \neq \emptyset$$

$$\lambda_e = \sigma_e^2$$

par conséquence, la statistique $(Y_{\emptyset}, S_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, S_e)$ est exhaustive. Les variables S_I/λ_I , $I \neq \emptyset$, $I \subset \{1, \dots, k\}$ et S_e/λ_e sont indépendantes et suivent respectivement des lois du χ^2 à $r_I = \dim \Omega_I$ et à

$N - \prod_{i=1}^k v_i$ degrés de liberté.

Démonstration

La transformation qui à $X \in \Omega$ (isomorphe à \mathbb{R}^N) fait correspondre le vecteur $Y \in \mathbb{R}^N$ de composantes $Y_\emptyset, Y_{I,i}, i = 1, \dots, r, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k+1\}$ (Notation du lemme 1.1) est orthogonale, la densité de X est donc la même que celle de Y , qui d'après le lemme 1.1, a la forme donnée par le théorème (on remarque que $S_e = \sum_{I \subset \{1, \dots, k+1\}} \|X_I\|^2$ et que les variables $Y_{I,i}, i = 1, \dots, r_I$, pour $I \supset k+1$ ont même variance σ_e^2).

1.3 - Les problèmes de test

On s'intéresse uniquement aux hypothèses portant sur les paramètres $\sigma_I^2, I \subset \{1, \dots, k\}, I \neq \emptyset$. Les paramètres μ et σ_e^2 sont des paramètres fantômes. Nous allons montrer que pour tester ces hypothèses, il suffit de se restreindre à la statistique $S = (S_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, S_e)$.

Remarquons d'abord qu'il y a une correspondance biunivoque entre $\lambda = (\lambda_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, \lambda_e) \in \mathbb{R}^{2k}$ et $\sigma^2 = (\sigma_I^2, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, \sigma_e^2)$. Plus précisément on a :

$$\left(\prod_{i \in I} v_i \right) \sigma_I^2 = \sum_{\substack{J \supset I \\ J \subset \{1, \dots, k\}}} (-1)^{\text{card}(I-J)} \lambda_J \quad J \neq \{1, \dots, k\}, J \neq \emptyset$$

et
$$\left(\prod_{i=1}^k v_i \right) \sigma_{\{1, \dots, k\}}^2 = \lambda_{\{1, \dots, k\}}^{-\lambda_e}$$

$$\sum_{J \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{\text{card}J} \lambda_I = 0.$$

Ces égalités se vérifient facilement en remplaçant les λ_J par leurs expressions en terme de $\sigma_K^2, K \neq \emptyset, K \subset \{1, \dots, k\}$ et σ_e^2 , et en remarquant que :

$$\sum_{\substack{J \supset I \\ J \subset K}} (-1)^{\text{card}(K-J)} = 0 \quad \forall I \neq K, I \subset K.$$

Les hypothèses à tester peuvent donc s'exprimer à l'aide de λ . On a le théorème :

THEOREME 1.2

S'il existe un test U.M.P. (uniformément le plus puissant) parmi les tests sans-biais de niveau de signification α , pour tester $\lambda \in H$ contre $\lambda \in K$ où H et K sont deux régions de R^{2k} , ayant une frontière commune H_0 , et $\lambda = (\lambda_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, \lambda_e) \in R^{2k}$, alors ce test est équivalent à un test basé sur la statistique $S = (S_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, S_e)$

Inversement, si pour la structure restreinte à S , il existe un test U.M.P. parmi les tests sans-biais de niveau α , de l'hypothèse $\lambda \in H$ contre $\lambda \in K$ alors le test $\bar{\Phi} : \bar{\Phi}(y_\emptyset, s) = \Phi(s)$ de la structure complète est aussi U.M.P. sans-biais de niveau α pour tester $\lambda \in H$ contre $\lambda \in K$.

Démonstration

1°) Soit Φ un test U.M.P. sans-biais de niveau α . Montrons que la fonction puissance $\beta_\Phi(\mu, \lambda)$ est indépendante de μ . En effet, s'il existe μ_1 et μ_2 tels que $\beta_\Phi(\mu_1, \lambda) > \beta_\Phi(\mu_2, \lambda)$, pour un λ fixé dans K , alors le test Φ' défini par :

$$\Phi'(y_\emptyset, s) = \int \Phi(y_\emptyset, s) dP_{\mu_1}(y_\emptyset)$$

($P_{\mu_1}(y_\emptyset)$ étant la densité de la variable Y_\emptyset , correspondance au paramètre μ_1) est tel que ($P_\lambda(s)$ désigne la densité de S correspondante au paramètre λ):

$$\begin{aligned} \beta_{\Phi'}(\mu_2, \lambda) &= \int \Phi' dP_\lambda(s) dP_{\mu_2}(y_\emptyset) = \int \Phi dP_\lambda(s) dP_{\mu_1}(y_\emptyset) \\ &= \beta_\Phi(\mu_1, \lambda) > \beta_\Phi(\mu_2, \lambda). \end{aligned}$$

Comme le test Φ est encore sans-biais de niveau α , on a donc une contradiction avec la propriété U.M.P. du test Φ .

Si $\beta_{\Phi}(\mu, \lambda)$ est indépendant de μ , le même raisonnement montre que le test Φ_0 défini par :

$$\Phi_0(y_{\emptyset}, s) = \int \Phi(y_{\emptyset}, s) dP_{\mu_0}(y_{\emptyset})$$

est équivalent à $\Phi(\mu_0)$ étant quelconque). La première partie du théorème est démontrée.

- 2°) Soit φ un test sans-biais de niveau α . Comme la fonction puissance β_{φ} est continue, on a $\beta_{\varphi}(\mu, \lambda) = \alpha$, $\forall \mu \in R$, $\forall \lambda \in H_0$. D'autre part, pour un $\lambda_0 \in H_0$ fixé, la statistique Y_{\emptyset} est exhaustive complète, par conséquence (Lehmann p. 134 [15], Soler p. 50 [24]), le test φ est de structure de Neymann relative à Y_{\emptyset} , c'est-à-dire :

$$\alpha = E_{\mu, \lambda}[\varphi/Y_{\emptyset}] = \int \varphi(y_{\emptyset}, s) dP_{\lambda_0}(s).$$

Par conséquence, le test $\varphi(y_{\emptyset}, \cdot)$ considéré comme test défini sur la structure restreinte à S (y_{\emptyset} étant fixé) est de niveau α . D'après l'hypothèse du théorème, ce test est moins puissant que Φ , d'où :

$$\int \varphi(y_{\emptyset}, s) dP_{\lambda}(s) \leq \int \Phi(s) dP_{\lambda}(s) \quad \forall \lambda \in K$$

soit en intégrant les deux membres par rapport à la loi P_{μ} de Y_{\emptyset} :

$$\beta_{\varphi}(\mu, \lambda) \leq \beta_{\Phi}(\mu, \lambda) \quad \forall \lambda \in K$$

et le théorème est démontré.

D'après le théorème, on pourra se restreindre à des tests basés sur la statistique $S = (S_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, S_e)$. La loi de cette dernière est une famille exponentielle de paramètre naturelle $\theta = (\theta_I, I \neq \emptyset, I \subset \{1, \dots, k\}, \theta_e)$ où $\theta_I = -1/2\lambda_I$ et $\theta_e = -1/2\lambda_e$. On peut exprimer les σ_I^2 en fonction de θ , soit $\sigma_I^2 = \pi_I(\theta)/q_I(\theta)$ où π_I et q_I sont des polynômes. Comme les hypothèses ayant une signification statistique sont de la forme :

$$\sigma_I^2 = 0 \quad \forall I \in \mathcal{H}_0$$

où \mathcal{H}_0 est une famille des parties de $\{1, \dots, k\}$, ces hypothèses introduisent dans la famille exponentielle des liaisons polynomiales. L'étude des familles exponentielles incomplètes à liaison polynomiale a été abordée par LINIK [17] et [18] qui a donné une caractérisation des tests sans-biais (similar), mais cette caractérisation, de nature analytique, n'a pas grand intérêt au point de vue pratique. L'existence d'un test U.M.P. parmi les tests sans-biais est encore une question ouverte. Même si on se contente à un test bayésien le plus puissant relatif à une mesure à priori donnée, le problème de la construction effective de tel test n'est pas entièrement résolu.

Par contre, d'après Lehmann p. 139 [15], il existe des tests U.M.P. parmi les tests sans-biais pour tester les hypothèses du type :

$$H : \Delta_e \theta_e + \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ I \neq \emptyset}} \Delta_I \theta_I \leq \theta_0$$

Nous nous intéressons ici qu'aux hypothèses : $\theta_I - \Delta \theta_J \leq 0$ ($J \neq I, J \subset I$) ou $\theta_e - \Delta \theta_J \leq 0$, qui s'écrivent aussi :

$$\frac{\lambda_J}{\lambda_I} \leq \Delta \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda_J}{\lambda_e} \leq \Delta$$

car ce sont les seules auxquelles on peut donner un sens statistique. Notons que pour $\Delta = 1$ ces hypothèses deviennent respectivement $\lambda_I = \lambda_J$ et $\lambda_J = \lambda_e$ (on a toujours $\lambda_e \leq \lambda_I \leq \lambda_J$ ($J \subset I$)).

THEOREME 1.3

Il existe un test U.M.P. parmi les tests sans-biais pour tester $H :$
 $\lambda_J/\lambda_I \leq \Delta$ (resp. $\lambda_J/\lambda_e \leq \Delta$) contre $K : \lambda_J/\lambda_I > \Delta$ (resp. $\lambda_J/\lambda_e > \Delta$),
 $J \subset I, J \neq I$ qui consiste à rejeter l'hypothèse H si le rapport

$$F = \frac{S_J}{S_I} \quad (\text{resp } \frac{S_J}{S_e})$$

est supérieur à une constante c , choisie de façon que le test ait un niveau de signification donné α .

Démonstration

Considérons la statistique S^* où $S_J^* = S_J + \Delta S_I$ (resp. $S_J + \Delta S_e$) et $S_K^* = S_K$
 $\forall K \neq J$, dont la loi est encore exponentielle de paramètre $\theta_I^* = \theta_I - \Delta\theta_J$
 (resp. $\theta_e^* = \theta_e - \Delta\theta_J$) et $\theta_K^* = \theta_K, \forall K \neq I$.

D'après Lehmann p. 134 [15], il existe un test Φ , U.M.P. parmi les tests sans-biais pour tester $\theta_I^* \leq 0$ contre $\theta_I^* > 0$, défini par :

$$\Phi(s^*) = 1 \Leftrightarrow s_I^* > c(s_K^*, K \neq I, s_e^*)$$

que l'on peut écrire d'une autre manière :

$$\Phi(s^*) = 1 \Leftrightarrow s_I/s_J > c'(s_K^*, K \neq I, s_e^*).$$

Quand $\lambda_J = \Delta\lambda_I$, les variables $S_J, \Delta S_I$ sont des variables du x^2 à une même constante multiplicative près. Par conséquent S_I/S_J est indépendant de $S_J^* = S_J + \Delta S_I$ et comme on doit avoir (Lehmann p. 135 [15]) :

$$E(\Phi/S_K^*, K \neq I, S_e^*) = \alpha$$

la fonction c' est en fait une constante. D'où le théorème.

1.4 - Exemples d'application

1.4.a) - Plan factoriel à deux facteurs

Nous utiliserons les notations d'Herbach [9]. A et B désignent les facteurs, prenant respectivement des niveaux $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$. L'observation X_{ijk} ($k = 1, \dots, K$ étant l'indice de répétition) s'écrit :

$$X_{ijk} = \mu + e_i^A + e_j^B + e_{ij}^{AB} + e_{ijk}$$

Les e_i^A , e_j^B , e_{ij}^{AB} , e_{ijk} correspondent respectivement à $X_{\{1\}}(i)$, $X_{\{2\}}(j)$, $X_{\{1,2\}}(i,j)$ et $U(i,j,k)$ du § 1.1, et ont comme variances respectives σ_a^2 , σ_b^2 , σ_{ab}^2 , σ_e^2 .

D'après le théorème 1.1, une statistique exhaustive est formée par :
 I.J.K. X... et les variables :

$$S_a = J.K \sum_i (X_{i..} - X_{...})^2$$

$$S_b = I.K \sum_j (X_{.j.} - X_{...})^2$$

$$S_{ab} = K \sum_i \sum_j (X_{ij.} - X_{i..} - X_{.j.} + X_{...})^2$$

$$S_e = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - X_{ij.})^2$$

Notons λ_a , λ_b , λ_{ab} à la place de $\lambda_{\{1\}}$, $\lambda_{\{2\}}$ et $\lambda_{\{1,2\}}$, il vient :

$$\lambda_a = \sigma_e^2 + K\sigma_{ab}^2 + JK\sigma_a^2$$

$$\lambda_b = \sigma_e^2 + K\sigma_{ab}^2 + IK\sigma_b^2$$

$$\lambda_{ab} = \sigma_e^2 + K\sigma_{ab}^2$$

Par conséquence, les hypothèses à considérer sont toutes de la forme indiquée dans le théorème 1.3. Ainsi :

- l'hypothèse de non influence du facteur A (resp. B) : $\sigma_a^2 = 0$ (resp. $\sigma_b^2 = 0$) s'écrit $\lambda_a = \lambda_{ab}$ (resp. $\lambda_b = \lambda_{ab}$), que l'on peut tester à l'aide du rapport S_a/S_{ab} (resp. S_b/S_{ab}).
- l'hypothèse de non-interaction entre les facteurs A et B : $\sigma_{ab}^2 = 0$, s'écrit $\lambda_{ab} = \lambda_e$ que l'on peut tester à l'aide du rapport S_{ab}/S_e .

4.1.b) - Plan factoriel à trois facteurs

L'observation s'écrit (Herbach [9])

$$X_{ijkl} = \mu + e_i^A + e_j^B + e_k^C + e_{ij}^{AB} + e_{jk}^{BC} + e_{ik}^{AC} + e_{ijk}^{ABC} + e_{ijkl}$$

où $(i,j,k,\ell) \in \{1, \dots, I\} \times \{1, \dots, J\} \times \{1, \dots, K\} \times \{1, \dots, L\}$, ℓ étant l'indice de répétition.

D'après le théorème 1.1 la statistique exhaustive est formée par $\sqrt{IJKLX \dots}$ et les variables :

$$S_a = JKL \sum_i (X_{i\dots} - \bar{X}_{i\dots})^2$$

$$S_b = IKL \sum_j (X_{.j\dots} - \bar{X}_{.j\dots})^2$$

$$S_c = IJL \sum_k (X_{\dots k} - \bar{X}_{\dots k})^2$$

$$S_{ab} = KL \sum_i \sum_j (X_{ij\dots} - \bar{X}_{i\dots} - \bar{X}_{.j\dots} + \bar{X}_{\dots})^2$$

$$S_{bc} = IL \sum_j \sum_k (X_{.jk\dots} - \bar{X}_{.j\dots} - \bar{X}_{\dots k} + \bar{X}_{\dots})^2$$

$$S_{ac} = JL \sum_i \sum_k (X_{i.k\dots} - \bar{X}_{i\dots} - \bar{X}_{\dots k} + \bar{X}_{\dots})^2$$

$$S_{abc} = L \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk\dots} - \bar{X}_{ij\dots} - \bar{X}_{.jk\dots} - \bar{X}_{i.k\dots} + \bar{X}_{i\dots} + \bar{X}_{.j\dots} + \bar{X}_{\dots k} - \bar{X}_{\dots})^2$$

$$S_e = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \bar{X}_{ijk})^2$$

Les λ sont donnés par (on notera $\lambda_a, \lambda_b, \dots$ à la place de $\lambda_{\{1\}}, \lambda_{\{2\}}, \dots$)

$$\lambda_{\emptyset} = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2 + K\sigma_{ab}^2 + J\sigma_{ac}^2 + I\sigma_{bc}^2 + JK\sigma_a^2 + IK\sigma_b^2 + IJ\sigma_c^2$$

$$\lambda_a = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2 + K\sigma_{ab}^2 + J\sigma_{ac}^2 + JK\sigma_a^2$$

$$\lambda_b = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2 + K\sigma_{ab}^2 + I\sigma_{bc}^2 + IK\sigma_b^2$$

$$\lambda_c = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2 + J\sigma_{ac}^2 + I\sigma_{bc}^2 + IJ\sigma_c^2$$

$$\lambda_{ab} = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2 + K\sigma_{ab}^2$$

$$\lambda_{ac} = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2 + J\sigma_{ac}^2$$

$$\lambda_{bc} = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2 + I\sigma_{bc}^2$$

$$\lambda_{abc} = \sigma_e^2 + L\sigma_{abc}^2$$

$$\lambda_e = \sigma_e^2$$

Contrairement à ce qui se passe dans le cas du plan à deux facteurs, les hypothèses de nullité des σ^2 , ne sont pas toutes de la forme indiquée par le théorème 1.2. Ainsi on ne peut tester que :

- l'hypothèse de non-interaction d'ordre 3 : $\sigma_{abc}^2 = 0$, qui s'écrit :

$$\lambda_{abc} = \lambda_e \text{ dont le test est basé sur le rapport } S_{abc}/S_e.$$

- L'hypothèse de non-interaction d'ordre 2 : $\sigma_{ab}^2 = 0$ (resp. $\sigma_{ac}^2 = 0$, resp. $\sigma_{bc}^2 = 0$) qui s'écrit : $\lambda_{ab} = \lambda_{abc}$ (resp. $\lambda_{ac} = \lambda_{abc}$, resp. $\lambda_{bc} = \lambda_{abc}$) dont le test est basé sur le rapport S_{ab}/S_{abc} (resp. S_{ac}/S_{abc} , resp. S_{bc}/S_{abc}).

Par contre l'hypothèse de non-influence d'un facteur (A par exemple) correspond à $\lambda_a - \lambda_{ab} - \lambda_{ac} + \lambda_{abc} = 0$ qui est une relation polynomiale en terme des paramètres naturels θ . Le théorème 1.3 n'est pas applicable à moins que l'on a supposé a priori par exemple qu'il n'y a pas l'interaction entre les facteurs A et B, dans ce cas $\lambda_{ab} = \lambda_{abc}$ et l'hypothèse à tester devient $\lambda_a = \lambda_{ac}$, dont le test optimal est basé sur le rapport S_a/S_{ac} (remarquons que la statistique à considérer devient $(S_a, S_b, S_c, S_{ab}+S_{abc}, S_{bc}, S_{ac}, S_e)$ ayant comme loi une famille exponentielle de paramètres naturels $\theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_{ab}, \theta_{bc}, \theta_{ac}, \theta_e$.

Le même phénomène se rencontre dans le cas des plans factoriels à k facteurs ($k \geq 2$). Seules les hypothèses de non-interaction d'ordre k et k-1 peuvent être testées à l'aide du théorème 1.3, les autres ne le sont que moyennant une hypothèse à priori convenable sur les σ^2 .

II - PLAN D'EXPERIENCE HIERARCHIQUE (emboité)

Ce paragraphe illustre l'utilisation de la notation fonctionnelle et de la méthode géométrique pour analyser les plans d'expérience hiérarchique.

2.1 - Définition

Il est important de noter que le plan d'expérience hiérarchique (ou emboité) n'est pas un plan d'expérience strict quoique ce plan est représenté par une partie de :

$$\prod_{i=1}^k \{1, \dots, v_i\}.$$

Cela tient au fait que le phénomène statistique étudié est de nature différente (voir par exemple Scheffé [21]).

DEFINITION 2.1

On appelle plan d'expérience hiérarchique, une partie E du produit cartésien

$$\prod_{i=1}^k \{1, \dots, v_i\}$$

tel qu'il existe des applications surjectives γ_i , $i = k, k-1, \dots, 2$ de $\{1, \dots, v_i\}$ sur $\{1, \dots, v_{i-1}\}$ vérifiant

$$e \in E \Leftrightarrow e_{i-1} = \gamma_i(e_i) \quad i = k, k-1, \dots, 2.$$

Il s'en suit directement de cette définition que le nombre des éléments de E est v_{k+1} .

Dans le cas des plans d'expérience hiérarchique le phénomène aléatoire est tel que les éléments de $\prod_{i=1}^k \{1, \dots, v_i\}$ qui n'appartiennent pas à E ne correspondent à aucune expérience réalisable. Par conséquent, nous ne considérons que l'espace des fonctions réelles définies sur E et nous donnons une décomposition de cet espace vectoriel en sous-espaces orthogonaux.

2.2 - Décomposition de l'espace des fonctions réelles définies sur E

On appelle Ω , l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur E, muni du produit scalaire :

$$\langle m, m' \rangle = \sum_{e \in E} m(e) \cdot m'(e) \quad m \in \Omega, m' \in \Omega.$$

Soit $i = 0, 1, 2, \dots, k$, on appelle F_i le sous-espace de Ω formé par des fonctions définies sur E qui ne dépendent que des variables e_1, \dots, e_i et Ω_i l'orthogonal dans F_i du sous-espace F_{i-1} . En particulier, $\Omega_0 = F_0$ est le sous-espace vectoriel des fonctions constantes sur E. D'autre part, si $m \in \Omega$, m_i (resp. \bar{m}_i) désignera la projection de m sur le sous-espace Ω_i (resp. F_i).

THEOREME 2.1

1°) Ω_i est le sous-espace vectoriel des fonctions $m \in F_i$ qui vérifient :

$$(2.1) \quad \sum_{e_i \in \gamma_i^{-1}(e_{i-1})} m(e_1, \dots, e_i, \dots, e_k) = 0 \quad \forall e_1 = \gamma_2(e_2), \dots, \\ e_{i-2} = \gamma_{i-1}(e_{i-1}).$$

2°) Ω_i est orthogonal à Ω_j pour tout $j \neq i$.

3°) F_i est engendré par les sous-espaces vectoriels $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_i$, en particulier Ω est engendré par $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_k$.

Démonstration

L'orthogonalité de Ω_i avec F_{i-1} s'écrit :

$$\sum_{e \in E} m(e_1, \dots, e_i, \dots) m'(e_1, \dots, e_{i-1}, \dots) = 0 \quad \forall m \in \Omega_i$$

$$\forall m' \in F_{i-1}$$

Comme m' ne dépend que de e_1, \dots, e_{i-1} , et m ne dépend que de e_1, \dots, e_i , on a :

$$\sum_{e_{i-1}} m'(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, \dots) \sum_{e_i \in \gamma_i^{-1}(e_{i-1})} m(e_1, e_2, \dots, e_i, \dots) = 0$$

où

$$e_1 = \gamma_2(e_2), e_2 = \gamma_3(e_1), \dots, e_{i-2} = \gamma_{i-1}(e_{i-1})$$

de façon qu'il existe des points e_{i+1}, \dots, e_k tel que $e = (e_1, \dots, e_i, \dots, e_k) \in E$ ($e_i \in \gamma_i^{-1}(e_{i-1})$).

Comme m' est une fonction arbitraire des variables e_1, \dots, e_{i-1} , l'égalité précédente ne se vérifie que si les relations (2.1) sont vérifiées, et le n° 1 du théorème est démontré.

D'après la définition de Ω_i , F_i est engendré par F_{i-1} et Ω_i , donc par récurrence, il est engendré par $\Omega_0, \dots, \Omega_i$. Le n° 3 du théorème est démontré. D'autre part si $j < i$, Ω_j est contenu dans F_{i-1} , donc orthogonal à Ω_i , d'où le n° 2 du théorème.

Remarque

"La dimension de Ω_i est $v_i - v_{i-1}$ "

En effet, on a $e_{j-1} = \gamma_j(e_j)$, $j = 1, \dots, i$ de façon que la dimension de F_i est v_i et comme Ω_i est l'orthogonal de F_{i-1} dans F_i , la dimension de Ω_i est bien $v_i - v_{i-1}$.

THEOREME 2.2 (théorème de projection)

Les projections \bar{m}_i , m_i de m sur Ω_i , F_i sont :

$$(2.2) \quad \bar{m}_i(e_1, \dots, e_k) = \frac{1}{\text{Card } S_i(e)} \sum_{e' \in S_i(e)} m(e'_1, \dots, e'_k)$$

(où $S_i(e)$ est l'ensemble des points $e' \in E$ tels que $e'_1 = e_1, \dots, e'_i = e_i$)

$$(2.3) \quad m_i(e_1, \dots, e_k) = \bar{m}_i(e_1, \dots, e_k) - m_i(e_1, \dots, e_k)$$

De plus, on a

$$(2.4) \quad \|m_i\|^2 = \|\bar{m}_i\|^2 - \|\bar{m}_{i-1}\|^2$$

Démonstration

Pour montrer que \bar{m}_i donné par la formule (2.2) est la projection de m sur F_i , il suffit de vérifier que

$$\langle m, m' \rangle = \langle \bar{m}_i, m' \rangle \quad \forall m' \in F_i.$$

En effet,

$$\langle m, m' \rangle = \sum_{e_1, \dots, e_i} m'(e) \sum_{e_{i+1}, \dots, e_k} m(e)$$

(la sommation étant étendue sur les e_1, \dots, e_k tels que $(e_1, \dots, e_k) \in E$), d'où

$$\langle m, m' \rangle = \langle \bar{m}_i, m' \rangle.$$

D'autre part, d'après le théorème de décomposition :

$$\bar{m}_i = \bar{m}_{i+1} + m_i$$

$$\|\bar{m}_i\|^2 = \|\bar{m}_{i-1}\|^2 + \|m_i\|^2$$

ce qui donne les relations (2.3) et (2.4)

2.3 - Modèle I d'Analyse de la Variance sur plan d'expérience hiérarchique.

2.3.1 - Le modèle statistique

Il est important de noter que seul les points $e \in E$ représentent une expérience réalisable, dont le résultat est une variable aléatoire :

$$(2.5) \quad X(e) = m(e) + U(e) \quad e \in E.$$

Les $U(e)$, $e \in E$ sont des variables aléatoires normales, indépendantes, centrées et de variances communes σ^2 qui tiennent compte de l'effet du hasard. Quant à la fonction m , on fait une hypothèse à priori qui consiste à supposer que :

$$(2.6) \quad m(e) = \sum_{i \in \mathcal{K}} m_i(e) \quad m_i \in \Omega_i$$

où \mathcal{K} est une partie de $\{0, 1, \dots, k\}$, $\mathcal{K} \ni 0$, et $m_i \in \Omega_i$ est la projection de m sur Ω_i .

Le terme m_i représente l'influence du facteur F_i à l'intérieur de F_1, F_2, \dots, F_i . L'hypothèse a priori signifie donc que certains des facteurs de F_1, \dots, F_k n'ont pas d'influence sur le phénomène.

Remarque

Dans le cas où il y a répétition de chaque catégorie d'expérience, on a affaire à un plan d'expérience à $k+1$ facteur où de facteur F_{k+1} est un "facteur de répétition". Ce facteur n'a aucune influence sur les observations, l'hypothèse a priori sera donc une partie de $\{0, 1, \dots, k\}$ au lieu de $\{0, 1, \dots, k+1\}$.

2.3.2 - Test d'hypothèses

Soit \mathcal{K}_0 un sous-ensemble de \mathcal{K} . On s'intéresse au problème de test d'hypothèse :

$$H_0 : \quad m_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{K}_0$$

Notons $\Omega_{\mathcal{J}_0}$, $\Omega_{\mathcal{J}_0 \setminus \mathcal{J}}$ les sous-espaces vectoriels de Ω engendrés respectivement par $\{\Omega_i, i \in \mathcal{J}_0\}$ et $\{\Omega_i, i \in \mathcal{J}_0 \setminus \mathcal{J}\}$, l'hypothèse à tester est équivalente à :

$$m \in \Omega_{\mathcal{J}_0 \setminus \mathcal{J}}$$

et l'hypothèse a priori s'écrit :

$$m \in \Omega_{\mathcal{J}}$$

C'est donc un problème de test d'hypothèses linéaires. D'après le théorème 2.1, les projections du vecteur d'observation $X \in \Omega$ sur le complémentaire orthogonal de $\Omega_{\mathcal{J}}$ et sur le complémentaire orthogonal de $\Omega_{\mathcal{J}_0 \setminus \mathcal{J}}$ dans $\Omega_{\mathcal{J}_0}$ sont respectivement

$$\sum_{i \notin \mathcal{J}} \|X_i\|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \mathcal{J}_0 \setminus \mathcal{J}} \|X_i\|^2$$

On en déduit que le F-test est basé sur le rapport (voir Chap. I, § 1).

$$F = \frac{\sum_{i \in \mathcal{J}_0 \setminus \mathcal{J}} \|X_i\|^2}{\sum_{i \notin \mathcal{J}} \|X_i\|^2}$$

Le test rejette l'hypothèse H_0 si $F > C$ où c est une constante calculée de façon que le niveau de signification est α , ($0 \leq \alpha \leq 1$). Les formules (2.3) et (2.4) permettent de donner une expression explicite du rapport F pour chaque \mathcal{J}_0 , \mathcal{J} donnés.

2.3.3 - Exemple : plan hiérarchique à trois facteurs "avec répétition"

Les niveaux des facteurs A, B, C seront désignés par les indices i, j, k et ℓ est l'indice de répétition. L'observation sera de la forme :

$$X_{ijk\ell} = m_{ijk} + U_{ijk\ell}$$

car la fonction m ne dépend que de i, j, k . Le théorème de décomposition permet d'écrire :

$$m_{ijk} = \mu + a_i + b_{ij} + c_{ijk}$$

où a, b, c sont respectivement les projections de m sur Ω_1, Ω_2 et Ω_3 . Ils doivent satisfaire aux relations (2.1), c'est-à-dire :

$$a_{.} = b_{i.} = c_{ij.} = 0.$$

La convention d'écriture est que chaque fois un indice est remplacé par un point, signifie que l'on a fait la moyenne suivant cet indice, la moyenne étant étendue sur tous les triplets (i, j, k) tel qu'il existe ℓ de façon que $(i, j, k, \ell) \in E$.

Tous les tests que l'on a à considérer sont basés sur les formes quadratiques :

$$S_a = \|x_1\|^2 = \sum (x_{i\dots\dots} - x_{\dots\dots})^2$$

$$S_b = \|x_2\|^2 = \sum (x_{ij\dots} - x_{i\dots})^2$$

$$S_c = \|x_3\|^2 = \sum (x_{ijk} - x_{ij.})^2$$

$$S_e = \|x_4\|^2 = \sum (x_{ijk\ell} - x_{ijk.})^2$$

La sommation est étendue sur tous les $(i,j,k,\ell) \in E$ et la convention d'écriture est la même que précédemment de façon que $(\bar{x}_1)_i = x_{i\dots}$, $(\bar{x}_2)_{ij} = x_{ij\dots}$ et $(\bar{x}_3)_{ijk} = x_{ijk\dots}$.

Comme il s'agit d'un plan d'expérience "avec répétition", l'hypothèse a priori sera $\mathcal{K} = \{0,1,2,3\}$. On peut alors tester respectivement des hypothèses correspondantes à $\mathcal{K}_0 = \{1\}$: non influence du facteur A (premier facteur) ; $\mathcal{K}_0 = \{2\}$: non influence du facteur B (second facteur) à l'intérieur de A ; $\mathcal{K}_0 = \{3\}$: non influence du facteur C (troisième facteur) à l'intérieur de A et B. D'après ce qui précède, on a la décomposition des sommes des carrés

$$\|x\|^2 = \sum_{ijkl} (x_{ijkl})^2 = Nx^2 + S_a + S_b + S_c + S_e$$

(N étant le nombre de points de E).

On en déduit que les tests correspondants aux trois cas précédents sont basés respectivement sur les rapports S_a/S_e , S_b/S_e , S_c/S_e .

2.4 - Modèle II d'Analyse de la Variance sur plan d'expérience hiérarchique

2.4.1 - Le modèle statistique

On ne considère ici que des plans d'expérience avec répétitions. Le nombre des facteurs sera donc $k+1$ où le facteur F_{k+1} est un "facteur de répétition".

L'ensemble des expériences possibles est représenté par E. En modèle II, le résultat d'une expérience correspondante à $e \in E$ est de la forme :

$$(2.7) \quad X(e) = \mu + \sum_{i=1}^k X_i(e_1, \dots, e_i) + U(e) \quad e \in E$$

où :

- μ est une constante représentant la moyenne générale des observations.
- $X_i(e_1, \dots, e_i)$ qui ne dépend que de e_1, \dots, e_i , est une variable aléatoire normale centrée de variance σ_i^2 , elle représente l'influence du facteur F_i à l'intérieur des facteurs F_1, \dots, F_{i-1} .
- $U(e)$ est une variable aléatoire normale, centrée de variance σ_e^2 représentant l'effet du hasard pur.

De plus, les variables aléatoires $X_i(e_1, \dots, e_i)$, $U(e)$, $i = 1, \dots, k$, $e \in E$ sont toutes indépendantes entre elles.

2.4.2 - Statistique exhaustive

Soit $n_i(e_i)$ le nombre des e_{i+1} tels que $e_i = \gamma_i(e_{i+1})$. Nous ne considérons ici que le cas où $n_i(e_i) = n_i$, c'est-à-dire indépendant de e_i , on dira alors que le plan E est équilibré, dans ce cas, on peut montrer l'existence d'une statistique exhaustive pour le problème. Remarquons alors que les n_i et v_i sont liés par les relations $v_i = n_{i-1} \times n_{i-2} \times \dots \times n_1 \times v_1$.

LEMME 2.1

Soient pour $i = 1, 2, \dots, k$ une base orthonormale $\{\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{ir_i}\}$ de Ω_i ($r_i = \dim \Omega_i$) et $X \in \Omega$ est défini par (2.7) notons :

$$(2.8) \quad Y_0 = \frac{1}{\sqrt{v_{k+1}}} \sum_{e \in E} X(e)$$

(2.9) $Y_{ij} = \langle \varepsilon_{ij}, X \rangle$ $j = 1, \dots, r_i$ $i = 1, \dots, k$
 alors les variables aléatoires Y_0, Y_{ij} , $j = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, k$ sont indépendantes, Y_0 a la moyenne $\sqrt{v_{k+1}}$ et variance

$$\sigma^2(Y_0) = \sigma_e^2 + \sum_{i=1}^k \left(\prod_{j=i}^k n_j \right) \sigma_i^2$$

et les variables Y_{ij} sont centrées de variance

$$\sigma^2(Y_{ij}) = \sigma_e^2 + \sum_{h=i}^k \left(\prod_{j=h}^k n_j \right) \sigma_h^2.$$

Démonstration

Soit \tilde{X}_i le vecteur aléatoire appartenant à F_i dont les composantes sont $\tilde{X}_i(e) = X_i(e_1, \dots, e_i)$ où $e = (e_1, \dots, e_k)$. Pour tout $e_i \in \{1, \dots, v_i\}$, soit δ_{e_i} la fonction qui vaut 1 en tout point $e' \in E$ tel que $e'_i = e_i$, il est facile de voir que les vecteurs $\delta_{e_i}, e_i = 1, \dots, v_i$ forment une base orthogonale de F_i et que les vecteurs $(\prod_{j=i}^k n_j)^{-1/2} \delta_{e_i}, e_i = 1, \dots, v_i$ forment une base orthonormale de F_i . Comme les composantes de \tilde{X} suivant cette base sont $(\prod_{j=i}^k n_j)^{1/2} X_i(e_1, \dots, e_i)$, on voit que \tilde{X} est de loi gaussienne dont la matrice de covariance est $(\prod_{j=i}^k n_j) \sigma_i^2$ fois la matrice unité.

Maintenant F_i est engendrée par $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_i$, dont une base de F_i est formée par $\varepsilon_{hj}, j = 1, \dots, r_h, h = 1, \dots, i$ et $(v_{k+1})^{-1/2} \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ étant la fonction sur E qui vaut partout 1). Par suite, les variables aléatoires $\langle (v_{k+1})^{-1/2} \mathbf{1}, \tilde{X}_i \rangle$ et $\langle \varepsilon_{hj}, X_i \rangle, j = 1, \dots, r_h, h = 1, \dots, i$ sont normales indépendantes, centrées de variance $(\prod_{j=i}^k n_j) \sigma_i^2$. D'autre part, $\langle \varepsilon_{ij}, \tilde{X}_h \rangle = 0$ si $h < i$, par conséquent :

$$Y_0 = \prod_{h=1}^k \langle (v_{k+1})^{-1/2} \mathbf{1}, \tilde{X}_h \rangle + \langle (v_{k+1})^{-1/2} \mathbf{1}, U \rangle$$

$$Y_{ij} = \sum_{h=i}^k \langle \varepsilon_{ij}, X_h \rangle + \langle \varepsilon_{ij}, U \rangle$$

On en déduit que l'indépendance et la normalité des variables $Y_0, Y_{ij}, j = 1, \dots, r_i$ et $i = 1, \dots, k$ et que les variances de ces variables sont bien celles données dans le lemme.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant qui montre l'existence d'une statistique exhaustive.

THEOREME 2.3

Notons

$$Y_c = \frac{1}{\sqrt{v_{k+1}}} \sum_{e \in E} X(e)$$

$$S_i = \|X_i\|^2 \quad i = 1, \dots, k$$

$$S_e = \|X_{k+1}\|^2$$

(X_i est la projection de X sur le sous-espace Ω_i) alors la densité du vecteur aléatoire X est de la forme :

$$\frac{1}{(2\pi)^{(v_{i+1})/2} \det \Lambda} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{Y_o - \sqrt{v_{k+1}} \mu}{\lambda_o} + \sum_{i=1}^k \frac{S_i}{\lambda_i} + \frac{S_e}{\lambda_e} \right\}$$

où :

$$\lambda_i = \sigma_e^2 + \sum_{h=i}^{k+1} \left(\prod_{j=h}^k n_j \right) \sigma_h^2$$

$$\lambda_e = \sigma_e^2$$

Λ = matrice des covariances de X

par conséquent, la statistique $(Y_o, S_i, i = 1, \dots, k, S_e)$ est exhaustive, les variables $S_i (\lambda_i, i = 1, \dots, k$ et S_e / λ_e sont indépendantes et suivent respectivement des lois du x^2 à $r_i = \dim \Omega_i, i = 1, \dots, k$ et $r_e = \dim \Omega_{k+1}$ degrés de liberté.

Démonstration

La transformation qui à $X \in \Omega$ (isomorphe $R^{v_{k+1}}$) fait correspondre $Y \in \Omega^{v_{k+1}}$ de composantes $Y_o, Y_{ij}, i = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, k+1$ (notations du lemme 2.1) est orthogonale. La densité de X est donc la même que celle de Y , qui d'après le lemme 2.1 a la forme donnée par le théorème.

2.4.3 - Test d'hypothèse

On s'intéresse uniquement aux hypothèses portant sur les paramètres σ_i^2 , $i = 1, \dots, k$. Le même raisonnement que le paragraphe § 1.2 montre que l'on peut se restreindre à la statistique $S = (S_1, \dots, S_k, S_e)$. D'autre part, on peut démontrer un théorème analogue au théorème 1.2.

THEOREME 2.4

Il existe un test U.M.P. parmi les tests sans-biais pour tester

$H : \lambda_j / \lambda_i \leq \Delta$ (resp. $\lambda_j / \lambda_e \leq \Delta$) *contre* $K : \lambda_j / \lambda_i > \Delta$ (resp. $\lambda_j / \lambda_e > \Delta$)
où $j < i$ *qui consiste à rejeter l'hypothèse H si le rapport*

$$\frac{S_j}{S_i} \quad (\text{resp. } \frac{S_j}{S_e})$$

est supérieur à une constante c, c étant choisie de façon que le test à un niveau de signification donnée α .

D'après l'expression des λ_i , l'hypothèse $\lambda_i / \lambda_{i+1} \leq 1$ est équivalente à $\sigma_i^2 = 0$. On en déduit :

Corollaire

Il existe un test U.M.P. parmi les tests sans-biais pour tester l'hypothèse

$H : \sigma_i^2 = 0$ *contre* $K : \sigma_i^2 > 0$, *qui consiste à rejeter H si* $S_i / S_{i+1} > c$
(pour $i = k$, *on prend* S_k / S_e *) où c est une constante choisie de façon que le test a un niveau de signification donnée* α .

2.4.4 - Exemple : plan hiérarchique à trois facteurs

Les notations sont les mêmes que celles du § 2.3.2. L'observation s'écrit :

$$X_{ijkl} = \mu + A_i + B_{ij} + C_{ijk} + U_{ijkl} \quad (i, j, k, l) \in E$$

où les A_i , B_{ij} , C_{ijk} , U_{ijkl} sont des variables aléatoires représentant respectivement l'effet du facteur A, du facteur B à l'intérieur de A, du facteur C à l'intérieur de A et B, et du hasard. Leurs variances sont respectivement σ_a^2 , σ_b^2 , σ_c^2 et σ_e^2 .

Supposons que le plan E tombe dans le cas défini en § 2.4.2, alors le théorème 2.3 montre que les variables aléatoires

$$Y_o = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{ijkl} X_{ijkl} \quad N = \text{nombre total des observations}$$

$$S_a = \|x_1\|^2 = \sum_{(i,j,k,l) \in E} (x_{i\dots} - x_{\dots})^2$$

$$S_b = \|x_2\|^2 = \sum_{(i,j,k,l) \in E} (x_{ij\dots} - x_{i\dots})^2$$

$$S_c = \|x_3\|^2 = \sum_{(i,j,k,l) \in E} (x_{ijk\dots} - x_{ij\dots})^2$$

$$S_e = \|x_4\|^2 = \sum_{(i,j,k,l) \in E} (x_{ijkl} - x_{ijk\dots})^2$$

forment une statistique exhaustive.

Le corollaire du théorème 2.4 permet alors de tester les hypothèses $\sigma_a^2 = 0$ (non influence du facteur A), $\sigma_b^2 = 0$ (non influence du facteur B à l'intérieur de A) et $\sigma_c^2 = 0$ (non influence du facteur C à l'intérieur de A et B). Ces tests sont basés respectivement sur les rapports S_a/S_b , S_b/S_c et S_c/S_e . On remarque que les variables aléatoires S_a , S_b , S_c et S_e suivent des lois du x^2 ayant comme variances respectives:

$$\lambda_a = \sigma_e^2 + JKL\sigma_a^2 + KL\sigma_b^2 + L\sigma_c^2$$

$$\lambda_b = \sigma_e^2 + KL\sigma_b^2 + L\sigma_c^2$$

$$\lambda_c = \sigma_e^2 + L\sigma_c^2$$

$$\lambda_e = \sigma_e^2$$

où $J = n_1$, $K = n_2$, $L = n_3$ (les n_i sont définis dans § 2.4.2).

BIBLIOGRAPHIE

- 705-71.
- 1 ANDERSON T.W. *Introduction to multivariate statistical analysis.*
John Wiley & Son, New-York (1966).
- 1355-1.
- 2 BARRA J. R. *Notions fondamentales de statistiques mathématiques.*
A paraître. Dunod, Paris 1971.
- mes. -
l'Unive:
- 3 BRADU D. *Main effect analysis of the general non-orthogonal layout with
any number of factors.*
Annals. of Math. Statist. Vol. 36 1965 pp. 88-97
- ance te:
434-43:
- 4 DARROCH J.N. - SILVEY S.D. *On testing more than one hypothesis.*
Annals of Math. Statist. Vol. 34 - 1962, pp. 555-567.
- 5 DUGUE D. *Algèbre aléatoire.*
Masson & Cie Paris 1958.
- 6 DUGUE D. - GIRAULT M. *Analyse de la variance et plan d'expérience*
Dunod, PARIS, 1969.
- 7 FERGUSON T.S. *Mathematical statistics. A decision theoretic approach.*
Academic Press, New-York 1967.
- 8 GRAYBILL F.A. *An introduction to linear statistical models.*
Mac Graw-Hill Serie in Prob. and Statist., New-York, Toronto,
London, 1961.
- 9 HERBACH L.H. *Properties of model II type analysis of variance test,
A : optimum nature of the F-test for model II in the balanced
case.*
Annals of Math. Statist., Vol. 30 (1959) pp. 939-959.

- 10 HISLEUR G.
Exemples d'utilisation d'un calculateur en statistiques.
Thèses présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble (1969).
- 11 HSU P.L.
Analysis of the Variance from the power function standpoint.
Biometrika, Vol. 32 (1941), pp. 62-69.
- 12 KEMPTHORNE O.
The design and analysis of experiments.
John Wiley & Son, New-York (1960).
- 13 LEHMANN E.L.
A general concept of unbiasedness.
Annals of Math. Statist. Vol. 22 (1951), pp. 587-592.
- 14 LEHMANN E.L.
A theory of some multiple decisions problems, I.
Annals. of Math. Statist. Vol. 28 (1957), pp. 1-25.
- 15 LEHMANN E.L.
Testing statistical hypothesis.
John Wiley & Son, New-York (1959).
- 16 LEHMER E.
Inverse table of probabilities of errors of the second kind.
Annals of Math. Statist. Vol. 15 (1944), pp. 388-398.
- 17 LINNIK Y.V.
Leçon sur les problèmes de statistique analytique.
Gauthier Villard, Paris (1968).
- 18 LINNIK Y.V.
On the elimination of nuisance parameters in statistical problems.
Fifth Berkeley Symposium, Vol. I, pp. 267-280 (1967)
- 19 RAO C.R.
Hypercube of strength "d" leading to confounded designs in factorial experiments.
Bull. Calcutta Math. Soc. 38, pp. 67-78.
- 20 ROY S.N. - GNANDESIKAN R.
Some contributions of ANOVA in one or more dimension, I.
Annals of Maths. Statist., Vol. 30 (1959). pp. 304-317.

- 21 SCHEFFE H.
The analysis of variance.
John Wiley & Son, New-York (1959).
- 22 SEBER G.A.F.
Orthogonality in analysis of variance.
Annals of Math. Statist., Vol. 35 (1964), pp. 705-710.
- 23 SEIDEN E. - ZEMACK R.
On orthogonal arrays.
Annals of Math. Statist., Vol. 37 (1966), pp. 1355-1370.
- 24 SOLER J.L.
Notions de liberté en statistiques mathématiques.
Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble (1970).
- 25 WALD A.
On the power function of the analysis of variance test.
Annals. of Math. Statist. Vol. 13 (1942), pp. 434-439.
- 26 WALD A.
Statistical decision function.
John Wiley & Son, New-York (1950).



VU

Grenoble, le

Le Président de la Thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de GRENOBLE