



HAL
open science

Application des méthodes de la programmation dynamique au problème de la répartition optimale d'une activité

Marc Baissac

► **To cite this version:**

Marc Baissac. Application des méthodes de la programmation dynamique au problème de la répartition optimale d'une activité. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT: . tel-00279834

HAL Id: tel-00279834

<https://theses.hal.science/tel-00279834>

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

T H E S E

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE
L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

Mathématiques Appliquées

par

Marc BAISSAC

APPLICATION DES METHODES DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE
AU PROBLEME DE LA REPARTITION OPTIMALE D'UNE ACTIVITE

Thèse soutenue le 23 juin 1965 devant la Commission d'Examen :

Président : Monsieur J. KUNTZMANN
Examineurs : Messieurs J. BARRA
N. GASTINEL

LISTE DES PROFESSEURS

-oOo-

DOYENS HONORAIRES

Monsieur FORTRAT P.
Monsieur MORET L.

DOYEN

Monsieur WEIL Louis

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	Magnétisme et Physique du Solide
HEILMANN R.	Chimie Organique
KRAVTCHENKO J.	Mécanique Rationnelle
CHABAUTY	Calcul Différentiel et intégral
PARDE	Potamologie
BENOIT	Radioélectricité
CHENE	Chimie Papetière
BESSON	Electrochimie
WEIL	Thermodynamique
FELICI	Electrostatique
KUNTZMANN	Mathématiques Appliquées
BARBIER R.	Géologie Appliquée
SANTON	Mécanique des Fluides
OZENDA	Botanique
FALLOT	Physique Industrielle
GALVANI	Mathématiques
MOUSSA	Chimie Nucléaire
TRAYNARD	Chimie
SOUTIF	Physique
CRAYA	Hydrodynamique
REULOS	Théorie des Champs
AYANT	Physique Approfondie
GALLISSOT	Mathématiques Appliquées
Melle LUTZ	Mathématiques
MM. BLAMBERT	Mathématiques
BOUCHEZ	Physique Nucléaire
LLIBOUTRY	Géophysique
MICHEL	Géologie et Minéralogie
BONNIER	Electrochimie
DESSAUX	Physiologie Animale
PILLET	Electrotechnique
DEBELMAS	Géologie
GERBER	Mathématiques
PAUTHENET	Electrotechnique
VAUQUOIS	Mathématiques Appliquées
BUYLE-BODIN	Electronique

KOSZUL	Mathématiques
SILBER	Mécanique des Fluides
DREYFUS	Thermodynamique
VAILLANT	Zoologie
MOUSSIEGT	Electronique
BARBIER J.C.	Physique
KLEIN	Mathématiques
ARNAUD	Chimie
SENGEL	Zoologie
BARJON	Physique Nucléaire
BARNOUD	Bio-Synthèse de la Cellulose

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme KOFLER	Botanique
MM. GIRAUD	Géologie
GIDON	Géologie et Minéralogie
PERRET	Servomécanismes
Mme BARBIER	Electrochimie
Mme SOUTIF	Physique
MM. COHEN	Electrotechnique
BRISSONNEAU	Physique
DEPASSEL	Mécanique
GASTINEL	Mathématiques Appliquées
LACAZE	Thermodynamique
GLENAT	Chimie
DUCROS	Minéralogie et Cristallographie
ANGLES D'AURIAC	Mécanique des Fluides
DEGRANGE	Zoologie
BARRA	Mathématiques Appliquées
COUMES	Electronique
GAGNAIRE	Chimie Papetière
PERRIAUX	Géologie
RASSAT	Chimie Systématique
ROBERT	Chimie Papetière
PEBAY-PEROULA	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM. WAGNER	Botanique
NAPP-ZINN	Botanique

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BIAREZ	Mécanique Physique
DODU	Mécanique des Fluides
HACQUES	Calcul Numérique

LANCIA	Physique Automatique
Mme KAHANE	Physique
MM. POLOUJADOFF	Electrotechnique
DEPOMMIER	Physique Nucléaire
DEPORTES	Chimie
Mme BOUCHE	Mathématiques
MM. DOLIQUE	Electronique
SARROT-REYNAULD	Géologie
CAUQUIS	Chimie Générale
BONNET	Physique Expérimentale
Mme BONNIER	Chimie
MM. KAHANE	Physique Générale
COLOBERT	Physiologie Animale
PAYAN	Mathématiques
BRIERE	Physique Expérimentale
VALENTIN	Physique Générale
LAJZEROWICZ	Physique Générale
DESRE	Métallurgie
BONNETAIN	Chimie Minérale

MAITRE DE CONFERENCE ASSOCIE

RADELLI	Géologie
---------	----------

APPLICATION DES METHODES DE LA PROGRAMMATION
DYNAMIQUE AU PROBLEME DE LA REPARTITION
OPTIMALE D'UNE ACTIVITE .

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements, à
Monsieur KUNTZMANN, Directeur du Laboratoire de Calcul de
l'Université de Grenoble, qui a bien voulu me faire
l'honneur de présider le jury,

à Monsieur BARRA, Professeur, qui par son aide constante
et ses conseils précieux, m'a permis d'entreprendre et de
mener à bien cette étude,

à Monsieur GASTINEL, Professeur, qui a bien voulu faire
partie du jury.

Je remercie aussi tous les membres du Laboratoire
de Calcul de l'Université de Grenoble qui m'ont aidé dans
ce travail.

I N T R O D U C T I O N

=====

Ce travail a pour objet de présenter le problème de la répartition, on dit aussi "allocation", optimale d'une activité et de montrer comment les méthodes de la programmation dynamique de type discret ou continu permettent de résoudre un tel problème.

Après avoir explicité le mot activité et ce que nous entendons par répartition optimale, nous citons quelques exemples empruntés aux domaines suivants :

gestion de stock
théorie des sondages
théorie de la détection

De nombreux autres problèmes pratiques peuvent être présentés sous la forme de problèmes de répartition optimale d'activité. Pour résoudre ce type de problème nous avons suivi les démarches usuelles de la programmation dynamique.

Notre étude étant orientée vers le calcul numérique, nous avons distingué deux versions du problème.

Les chapitres II-III-IV concernent la version discrète du problème de la répartition optimale d'une activité. Nous en présentons le formalisme mathématique. Nous appliquons à ce problème la méthode classique de BELLMAN. Puis nous donnons une nouvelle démonstration plus générale de la méthode de KARUSH. Nous mettons alors en évidence certaines propriétés conduisant à de nouveaux algorithmes permettant de résoudre le problème. Reprenant ensuite le problème sous sa forme originale et en introduisant un multiplicateur de LAGRANGE, nous proposons une nouvelle méthode de résolution.

La seconde partie de notre travail concerne la version continue du problème (chap. V-VI-VII-VIII). Nous énonçons le problème dans cette version et montrons qu'il est possible de ramener ce problème à un problème plus restreint auquel on peut appliquer la méthode de PONTRYAGIN. Nous avons cherché à éviter ce passage et le retour au problème initial. Nous avons, pour cela, repris les résultats du calcul des variations classiques et obtenu des conditions nécessaires que doit vérifier toute solution du problème. Nous avons, de plus, appliqué la même méthode que dans le cas discret pour obtenir des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit solution du problème.

Nous avons reporté à la fin (chap. IX-X-XI-XII), la partie concernant la rédaction et l'utilisation des programmes ainsi que les résultats numériques obtenus.

Certains problèmes de répartition d'activité peuvent s'exprimer sous des hypothèses moins restreintes que celles envisagées ici (notamment répartition dans un espace à plusieurs dimensions et certaines discontinuités sur les fonctions). Nous avons signalé certaines particularités des méthodes utilisées qui devraient en faire des outils intéressants quant à la résolution de tels problèmes.

C H A P I T R E - I

INTRODUCTION AU PROBLEME DE LA REPARTITION

OPTIMALE D'UNE ACTIVITE

I-1: GENERALITES

Soit à répartir une certaine activité entre plusieurs secteurs.

Le terme activité peut aussi bien désigner une quantité d'eau à répartir entre plusieurs entreprises qu'une somme d'argent à investir.

Supposons par exemple qu'un Etat consacre un budget donné à sa Recherche Nucléaire en vue de fabriquer des matières fissiles.

Il peut s'orienter vers plusieurs voies :

- a) Piles.
- b) Séparation isotopique par diffusion gazeuse
- c) " " " triage électromagnétique
- d) " " " ultracentrifugation.
- e) Procédé original.

Le problème est alors d'évaluer les sommes à investir dans les différentes voies.

Il existe en général plusieurs répartitions possibles, aussi est-il nécessaire de trouver un critère permettant de décider si telle répartition est plus avantageuse que telle autre ou non.

Dans ce but supposons qu'il soit possible d'associer à chaque secteur une grandeur, que nous nommerons effort, fonction de l'importance de l'activité allouée à ce secteur, sur laquelle il soit possible de faire les hypothèses suivantes :

a) L'effort associé à un secteur pour une activité fixée déployée dans ce secteur ne dépend pas de la répartition dans les autres secteurs.

b) Les efforts associés aux divers secteurs pour une répartition donnée peuvent se mesurer avec une même unité.

c) L'effort total de la répartition d'une activité donnée est la somme des efforts associés à chaque secteur pour cette répartition de l'activité.

Le problème est alors celui-ci :

Comment répartir cette activité entre plusieurs secteurs de façon à rendre optimum l'effort total ?

Pour de nombreux problèmes il est commode de mesurer cet effort par un coût ou un profit exprimé en argent. On peut envisager d'autres grandeurs : ainsi dans la fable Le Laboureur et ses Enfants, l'effort de recherche peut être mesuré par le volume de terre déplacée ; dans les applications militaires, il sera presque toujours mesuré par le temps ; temps nécessaire à une patrouille pour localiser un objet, par exemple.

I-2 : EXEMPLES

I-2-1 : Constitution d'un stock en vue d'un fonctionnement en régime stationnaire et délai de livraison aléatoire
(voir [14] KARUSH)

Préliminaire

Considérons un magasin dans lequel sont en vente des articles d'un type donné selon le processus suivant :

- 1) Chaque client commande un article et un seul
- 2) a) Si l'article demandé est en magasin, le client est servi, de plus une commande est immédiatement passée en vue de remplacer l'article vendu.

b) Si l'article demandé n'est pas en magasin, la demande n'est pas satisfaite, aucun ordre de remplacement n'est donné et on enregistre une pénalité.

Il s'agit là d'un système sans attente, on écarte l'éventualité des arrivées répétées correspondant à des arrivées de clients non servis précédemment et qui se présenteraient à nouveau.

On suppose que les arrivées des clients ont lieu aux instants $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tels que :

$$T_1 = t_1, T_2 = t_2 - t_1, \dots, T_n = t_n - t_{n-1}, \dots$$

soient des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon une même loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\lambda}$. Le nombre des arrivées de clients pendant une période T est alors une variable aléatoire distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λT .

Soit S_n , l'intervalle de temps entre l'instant t_n où la commande de remplacement est envoyée et le moment de la livraison de cette commande. S_n est le délai de

livraison de la commande envoyée à l'instant t_n .
 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ sont supposés être des variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes distribuées selon une même loi quelconque de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

Désignons par x le nombre d'articles en stock au début du processus. Dans toute la suite, la somme du nombre d'articles en magasin et du nombre d'articles dont on attend la livraison est un nombre constant égal à x .

Espérance mathématique du coût des demandes non satisfaites en régime stationnaire.

Le nombre d'articles commandés avant l'instant t et non encore livrés à cette date peut être représenté par une variable aléatoire.
Soit $N(t)$ cette variable.

Toute demande d'article se produisant à un instant t , alors que $N(t)$ est égal à x , n'est pas satisfaite.

Plaçons nous dans le cas du processus limite stationnaire, c'est-à-dire dans un intervalle de temps T suffisamment éloigné de l'instant où le magasin a ouvert

pour la première fois, pour que la distribution $N(t)$ soit la même pour tout t appartenant à l'intervalle T . On désignera cette variable aléatoire $N(t)$ simplement par N .

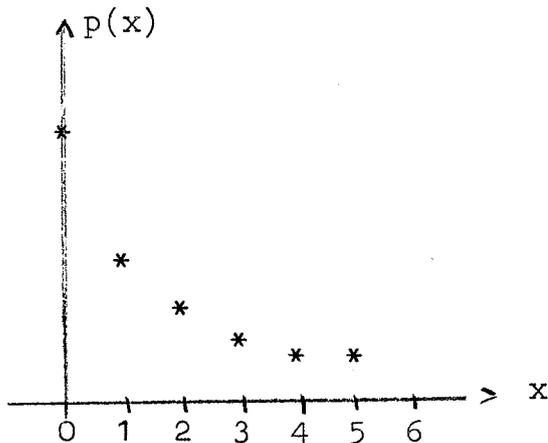
En fonctionnement stationnaire, la probabilité pour que N soit égale à x est donnée par la formule de perte d'ERLANG valable pour une loi de délai de livraison quelconque. ([15] LE GALL)

$$P(N=x) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x}{x! \sum_{j=0}^x \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}}$$

Posons $p(x) = P(N=x)$; $p(x)$ est une fonction strictement convexe de x ; c'est-à-dire que

$$p(x-1) - p(x) > p(x) - p(x+1)$$

Graphe de $p(x)$



Supposons que la pénalité enregistrée soit proportionnelle au nombre de clients non servis. Soit C le coefficient de proportionnalité.

Pour une période T donnée en régime stationnaire, le coût moyen des demandes non satisfaites est alors :

$$C \cdot T \cdot \lambda \cdot p(x)$$

Soit u le prix d'achat d'un article ; posons

$$z = x \cdot u$$

u, C, T, λ étant donnés, ce coût moyen peut être exprimé en fonction du montant, z , affecté à la constitution

du stock x . Soit $f(z)$ ce coût, on a alors :

$$f(z) = C.T. \lambda \cdot p\left(\frac{z}{u}\right)$$

Si u est suffisamment petit devant z , on peut considérer que f est une fonction continue de z , définie sur l'intervalle donné $[0, S]$, S représentant le montant maximum susceptible d'être affecté à la constitution de ce stock.

Problème.

Soient p types d'articles A_1, A_2, \dots, A_p en vente indépendamment les uns des autres selon le mode et les hypothèses précédentes et R le montant total fixé, affecté à la constitution des stocks pour l'ensemble des articles.

Pour une période T fixée, en régime stationnaire, soient $\lambda_1 T, \dots, \lambda_p T$ les moyennes des variables aléatoires représentant les arrivées des clients désirant un article du type A_1, \dots, A_p respectivement et $\frac{1}{\mu_1}, \dots, \frac{1}{\mu_p}$ les moyennes des variables aléatoires représentant^P les délais de livraison pour chacun des types d'articles respectivement. Toutes ces variables aléatoires sont supposées mutuellement indépendantes, on peut, dans une certaine mesure, se ramener à ce cas. ([15] WEINSTOCK-YOUNG). Désignons par $\{f_i(z)\}, i=1, \dots, p$ la suite

de fonctions définies sur $[0, S_i]$ respectivement ;
 $f_i(z)$ représente le coût moyen des pénalités enregistrées lorsque le montant affecté à la constitution du stock d'articles de type A_i est z , pour $i = 1, \dots, P$.

Remarquons que R est astreint à vérifier la double inégalité :

$$0 \leq R \leq \sum_{i=1}^P S_i$$

Déterminer

$$M = \text{Inf} \left[\sum_{i=1}^P f_i(z_i) \mid 0 \leq z_i \leq S_i, i=1, \dots, P; \sum_{i=1}^P z_i = R \right]$$

et les valeurs I_i , ($i=1, \dots, P$) des variables z_i , ($i=1, \dots, P$) qui réalisent ce minimum.

I_i , ($i=1, \dots, P$) représente le montant à affecter à la constitution du stock d'articles de type A_i , ($i=1, \dots, P$) et M le coût total des pénalités enregistrées pendant la période T .

I-2-2 : Répartition optimum d'un budget global de sondage par stratification ([11] FOURGEAUD)

La stratification consiste à répartir préalablement aux opérations de sondage, les unités de la population

en groupes homogènes appelés strates suivant des caractères supposés en relation avec le caractère à étudier.

A l'intérieur de chaque strate on prélève un échantillon aléatoire. Supposons les unités de la population groupées en strates U_1, \dots, U_n ; quelle taille d'échantillon doit on prendre dans les différentes strates, sachant que la somme disponible pour effectuer le sondage est S et qu'il faille dépenser une somme C_i pour examiner un individu de la strate U_i ?

Si, par exemple, la loi de répartition du caractère à étudier à une forme connue et que l'on désire avoir une estimation d'un paramètre de cette loi, on cherchera à déterminer les tailles des échantillons à extraire des strates U_i , ($i=1, \dots, n$) de façon à rendre minimum la variance de l'estimateur du paramètre de la loi.

I-2-3 Autres exemples.

La "théorie de la recherche", où recherche est pris dans le sens de détection, fournit aussi des exemples pratiques. ([10] DE GUENIN et [9] CHARNES-COOPER).

On peut schématiser le problème fondamental ainsi : Comment répartir une activité de recherche donnée sur une région fixée de manière à rendre maximum

- la probabilité de découvrir l'objectif : recherche d'une caravane dans le désert.
- le nombre probable d'objectifs découverts : prospection minière ou pétrolière.

Citons aussi un autre type de problème d'origine économique qui peut être ramené à un problème de répartition optimale d'activité. ([20] YAARI).

Soit un intervalle de planification $[T_0, T_1]$.
Désignons par c un programme de consommation appartenant à C , ensemble des programmes admissibles.

c appartient à C si :

- c est une fonction à valeur réelle définie sur $[T_0, T_1]$,
- $c(t)$ appartient à un intervalle borné, pour t appartenant à $[T_0, T_1]$,
- w étant un nombre fixé représentant un budget à répartir dans l'intervalle $[T_0, T_1]$, on a

$$\int_{T_0}^{T_1} c(t) dt = w .$$

De plus soient $P(c)$ la satisfaction correspondant à un niveau de consommation c et $\alpha(t)$ une fonction d'actualisation. Le problème est alors le suivant :

Quel programme de consommation c , admissible, faut-il adopter pour rendre optimum :

$$J(c) = \int_{T_0}^{T_1} P(c) \alpha(t) dt$$

C H A P I T R E I I

PROBLEME GENERAL DISCRET

I-1 : Enoncé du problème DI

Soient, dans R , une suite donnée d'intervalles $[a_i, A_i]$, $(i=1, \dots, N)$ et de fonctions données $f_i(x)$, $(i=1, \dots, N)$, respectivement définies sur ces intervalles et w un nombre donné, appartenant à l'intervalle $\left[\sum_{i=1}^N a_i, \sum_{i=1}^N A_i \right]$.

Le problème consiste à déterminer le minimum M de la fonction

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$$

sous les contraintes :

$$a_i \leq x_i \leq A_i, \quad (i=1, \dots, N)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = w$$

et les systèmes de valeurs y_1, \dots, y_N des variables x_1, \dots, x_N respectivement, réalisant ce minimum.

Nous modifierons l'énoncé du problème D \bar{I} pour montrer qu'il s'agit bien d'un problème relevant de la programmation dynamique et qu'il est alors possible d'appliquer la méthode classique de BELLMAN.

Nous nous intéresserons ensuite, plus particulièrement, aux cas de fonctions f_i , continues et linéaires par morceaux (nous dirons de fonctions formées de segments se raccordant) et donnerons un nouvel exposé de la méthode de KARUSH étendant cette méthode au cas de fonctions dont les segments ne sont pas nécessairement de pentes positives.

KARUSH a proposé un algorithme original de résolution du problème D \bar{I} dans le cas de fonctions f_i formées de segments se raccordant de pentes positives. Cet algorithme à l'avantage de donner toutes les solutions du problème avec une grande précision car la méthode est une méthode exacte, mais exige un nombre important de mémoires. C'est pourquoi nous avons écrit un algorithme que nous avons appelé de BELLMAN-KARUSH où, pour réduire très sensiblement le nombre de mémoires par rapport à l'algorithme de KARUSH, nous avons utilisé la méthode de BELLMAN, mais nous effectuons le calcul des fonctions récursives au moyen de la méthode de KARUSH, donc de façon exacte,

ce qui n'était pas le cas du procédé classique de détermination des fonctions récursives.

Si on considère que définir des fonctions f_i formées de segments se raccordant (le choix de ces segments étant laissé à l'utilisateur) constitue une approximation correcte du problème DI, on peut dire que cette méthode conduit à une solution exacte du problème approché alors que le procédé classique de programmation de la méthode de BELLMAN fournit une solution approchée au problème posé.

Dans la mise au point théorique de cet algorithme, nous avons été amenés à introduire un opérateur de transition. Nous avons utilisé les propriétés de commutativité et d'associativité de cet opérateur pour obtenir un algorithme original appelé KARUSH-SIMPLIFIE applicable dans le cas particulier où les fonctions f_i formées de segments se raccordant sont convexes.

Nous utiliserons ensuite la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour obtenir une condition suffisante pour qu'une suite $\{y_i\}$, $i=1, \dots, N$ soit solution du problème. L'algorithme qui en découle est délicat à programmer à cause, en particulier de la non-unicité de la solution. Nous ferons donc les habituelles hypothèses de convexité et de dérivabilité sur les fonctions f_i pour pouvoir écrire un programme numérique de résolution du problème.

II-2 : Enoncé du problème équivalent D-II

Posons $z_0 = 0$

$$z_i - z_{i-1} = x_i, \quad (i=1, \dots, N-1)$$

$$z_N = W$$

On obtient le problème suivant, équivalent au problème D-I.

Déterminer le minimum M de la fonction :

$$F^*(z_1, z_2, \dots, z_{N-1}) = \sum_{i=1}^N f_i (z_i - z_{i-1})$$

sous les contraintes $z_0 = 0$,

$$z_i - z_{i-1} \in [a_i, A_i], \quad (i=1, \dots, N),$$

$$z_N = W,$$

et les systèmes de valeurs $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{N-1}$,
respectivement des variables z_1, \dots, z_{N-1} ,
réalisant ce minimum.

Ainsi énoncé, le problème entre bien dans le cadre de la programmation dynamique déterministe, notons aussi que cet énoncé a détruit la "symétrie" du problème et suppose le choix d'un ordre sur les fonctions f_i .

II-3 Méthode récursive de résolution.

Appliquons pour résoudre le problème D-II, la méthode classique de BELLMAN.

pour $n = 1, \dots, N$ posons

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^n A_k$$

Considérons alors les fonctions auxiliaires $g_n(u)$, ($n=1, \dots, N$), définies sur $[b_n, B_n]$ respectivement par :

$$g_n(u) = \inf_f \left[\sum_{i=1}^n f_i(z_i - z_{i-1}) \mid z_0=0; z_n=u; z_i - z_{i-1} \in [a_i, A_i], i=1, \dots, n \right]$$

Pour $n = 2, \dots, N$, posons

$$I_n(u) = \inf [u - a_n, B_{n-1}]$$

$$S_n(u) = \sup [u - A_n, b_{n-1}]$$

Les fonctions auxiliaires $g_n, (n=1, \dots, N)$, satisfont au système S suivant dont la résolution détermine complètement la ou les solutions du problème.

$$(II-S) \left\{ \begin{array}{l} g_1(z) = f_1(z), \quad z \in [a_1, A_1] \\ g_n(u) = \text{Inf} [g_{n-1}(v) + f_n(u-v) \mid s_n(u) \leq v \leq I_n(u)] \\ \quad \quad \quad u \in [b_n, B_n], \quad n=2, \dots, N \\ g_N(w) = M \end{array} \right. \quad (2)$$

En effet, désignons par $v = \Psi_n(u)$ la fonction éventuellement multivoque qui assure le minimum du second membre de II-S.

Il est clair que toute suite ξ_1, \dots, ξ_N satisfaisant à

$$\xi_n = \Psi_n(\xi_{n+1}) \quad n=1, \dots, N-1$$

$$\xi_N = w$$

est solution du problème général **DII**.

II-4 : Introduction d'un opérateur de transition

Soit \mathcal{E} l'opérateur qui, aux fonctions f et g respectivement définies sur $[a,b]$ et $[c,d]$, fait correspondre la fonction h définie sur $[a+c, b+d]$ par :

$$h(z) = I_{nf} [f(x) + g(y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d], x+y = z]$$

On notera

$$h = \mathcal{E}(f, [a,b] ; g, [c,d])$$

Avec cette notation, le système (II-S) s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(u) = f_1(u) \quad u \in [a_1, A_1] \\ g_n = \mathcal{E}(f_n, [a_n, A_n] ; g_{n-1}, [b_{n-1}, B_{n-1}]) \\ \quad \text{définie sur } [b_n, B_n], n=2, \dots, N \\ g_N(W) = M \end{array} \right.$$

Remarquons que l'opérateur \mathcal{E} est commutatif et associatif.

C H A P I T R E I I I

=====

METHODE DE BELLMAN-KARUSH

Nous établirons dans ce chapitre, une méthode permettant d'obtenir le graphe de la fonction g_n à partir des graphes de g_{n-1} et f_n lorsque les graphes de ces fonctions sont formés de segments se raccordant.

III-1 Définition des fonctions f_i

Hypothèse 1 : les fonctions $f_i, (i=1, \dots, N)$ sont définies et continues dans tout l'intervalle de définition $[a_i, A_i]$

Hypothèse 2 : chaque fonction $f_i, (i=1, \dots, N)$ est tabulée sur un système de $w(i) + 1$ points $\{u_i^k\}$ de pas h_i^k variables :

$$u_i^0 = a_i ; u_i^1 = a_i + h_i^1 ; \dots ; u_i^k = a_i + \sum_{t=1}^k h_i^t ; \dots ; u_i^{w(i)} = A_i$$

Pour tout i , k varie de 0 à $w(i)$. Cet indice placé en exposant, permet de repérer les points du système. L'indice inférieur $i(i=1, \dots, N)$ désigne la fonction

Nous pouvons encore dire que chaque fonction est donnée par une suite de segments se raccordant, chaque segment étant défini par les coordonnées de ses extrémités.

Le k ième segment de la fonction f_i est alors défini par

$$\left[(u_i^{k-1}, f_i(u_i^{k-1})), (u_i^k, f_i(u_i^k)) \right]$$

Cette structure particulière, définie par la notion de chaîne, sera étudiée au paragraphe III-2-1

III-2 : Représentation géométrique

Considérons l'espace R^2 et utilisons les définitions et notations suivantes :

Un point est défini par ses coordonnées et un segment par les coordonnées de ses extrémités.

Si s désigne un segment et P un point alors $P + S$ désigne le segment s translaté de \vec{P}

$$P + [A, B] = [P + A, P + B]$$

Si F est une famille de segments et P un point, alors $P + F$ désigne cette famille translatée de P .

En particulier : $P + \emptyset = \emptyset$.

On considère tantôt les segments de F comme des éléments de cet ensemble, tantôt comme des éléments de l'ensemble des parties de F pour alléger l'exposé.

On désignera par $\alpha(s)$ la pente du segment s

$$s = [(x_1, y_1) ; (x_2, y_2)]$$

$$\alpha(s) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

III-2-1 Chaîne.

Soit f une fonction dont le graphe est formé des segments $[A_{i-1}, A_i]$, $i=1, \dots, P$

A_0 et A_P étant les points extrémités respectivement à gauche et à droite du graphe de cette fonction, nous compléterons la famille $\{[A_{i-1}, A_i]\}$, $i=1, \dots, P$ par deux demi-droites verticales situées l'une au dessus de A_0 d'extrémité A_0 , l'autre au dessus de A_P d'extrémité A_P .

Nous conviendrons que la réunion de ces segments et de ces 2 demi-droites forme une chaîne de la fonction f.

Les points A_i , ($i=0, \dots, P$) sont appelés points de concours. Remarquons que ces points de concours ne sont pas nécessairement des points anguleux.

Soient r et s deux segments consécutifs d'une chaîne, Q le point de concours commun à ces deux segments.

$\alpha(Q+0)$ désigne la pente du segment situé à droite de Q ;

$\alpha(Q-0)$ désigne la pente du segment situé à gauche de Q ;

Q est un point anguleux convexe si $\alpha(Q-0) < \alpha(Q+0)$

Q " " " " concave si $\alpha(Q-0) > \alpha(Q+0)$

Une chaîne sera dite concave (resp. convexe) si tous ses points anguleux, non compris les points extrémités de la chaîne, sont des points anguleux concaves (resp. convexes)

Soit $\{A_i\}$ $i=0, \dots, P$ une suite de points dont les abscisses sont strictement croissantes. Cette suite permet de définir une chaîne et nous avons les relations suivantes :

$$\alpha(A_0 - 0) = -\infty,$$

$$\alpha(A_{i-1} + 0) = \alpha([A_{i-1}, A_i]) = \alpha(A_i - 0), \quad (i=1, \dots, P),$$

$$\alpha(A_P + 0) = \infty.$$

III-2-2 : Famille de segments admissibles par rapport à un point d'une chaîne.

Soit P un point appartenant à une chaîne, un segment t est dit admissible par rapport à ce point P si :

$$\alpha(P-0) \leq \alpha(t) \leq \alpha(P+0)$$

On notera $\Gamma(P)$ la famille des segments admissibles par rapport à P.

A étant une famille de segments, l'ensemble des segments de A admissibles par rapport au point P est l'ensemble $A \wedge \Gamma(P)$.

Si P est un point anguleux concave, il n'existe pas de segment admissible par rapport à P.

III-2-3 : Enveloppe inférieure d'une famille de segments

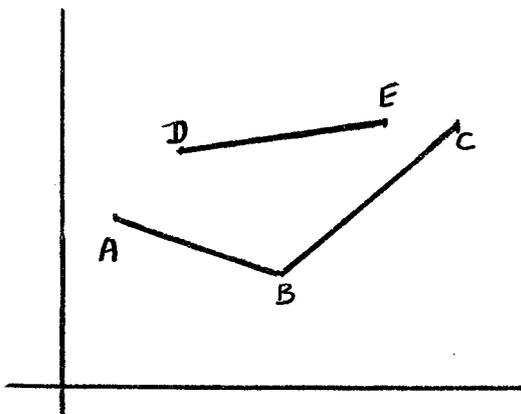
Soit s un segments, désignons par $\omega(s)$ sa projection sur l'axe des abscisses.

Nous appellerons enveloppe inférieure d'une famille F de segments, l'ensemble E des points (x, y^*) tels que :

- l'abscisse x parcourt l'ensemble projection des segments de F sur l'axe des abscisses ;
- l'ordonnée y^* , pour x fixé, est la valeur minimum des valeurs y prises par l'ordonnée du point (x, y) appartenant à un des segments de F

$$\left\{ (x, y) \in E \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \bigcup_{s \in F} \omega(s) \\ y^* = \inf [y \mid y : (x, y) \in t, t \in F] \end{array} \right\}$$

Exemple



soit $F = \{AB, BC, DE\}$

L'enveloppe inférieure de F est l'ensemble des points des 2 segments AB et BC.

III-3 : L'opérateur \mathcal{E} sur des fonctions définies par chaînes.

Soient F et G les chaînes des fonctions f et g respectivement définies sur les intervalles $[a, A]$ et $[b, B]$, $P_i, (i=0, \dots, n)$ les points de concours des n segments consécutifs $s_i, (i=1, \dots, n)$, de F et $Q_j, (j=0, \dots, m)$, les points de concours des m segments consécutifs $t_j, (j=1, \dots, m)$ de G.

Posons

$$S = \{s_1, \dots, s_n\}$$

$$T = \{t_1, \dots, t_m\}$$

Théorème

Soit \perp l'opérateur qui aux deux chaînes F et G fait correspondre l'enveloppe inférieure de la famille de segments.

$$\left\{ \left(\bigcup_{i=0}^n [P_i + \Gamma(P_i) \wedge T] \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^m [Q_j + \Gamma(Q_j) \wedge S] \right) \right\}$$

$F \perp G$ est une chaîne de $\mathcal{E}(f, [a, A]; g, [b, B])$.

III-3-1 Lemme 1

Si P est un point de la chaîne F, Q un point de G
et P+Q un point du graphe de $\mathcal{L}(f, [a,A] ; g, [b,B])$ alors

$$\alpha(P - 0) \leq \alpha(Q + 0) \text{ et } \alpha(Q-0) \leq \alpha(P+0)$$

Démontrons la première inégalité, la deuxième se démontrant de façon analogue.

1) si P est un point extrémité à gauche de F, ou Q un point extrémité à droite, la relation est évidente.

2) sinon, posons $P = (x, f(x))$
 $Q = (y, g(y))$

Par hypothèse P + Q est un point du graphe de $\mathcal{L}(f, [a,A] ; g, [b,B])$ donc :

$$(a) \quad f(x) + g(y) = \text{Inf} (f(t) + g(u) \mid a \leq t \leq A, b \leq u \leq B, u+t = x+y)$$

Supposons $\alpha(P-0) > \alpha(Q+0)$

Cette inégalité entraîne qu'il existe au moins une valeur ε strictement positive telle que

$$\alpha(P-0) = \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \alpha(Q+0) = \frac{g(y+\varepsilon) - g(y)}{\varepsilon}$$

On aurait alors $\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} > \frac{g(y+\varepsilon) - g(y)}{\varepsilon}$

Cette dernière inégalité peut encore s'écrire :

$$f(x) + g(y) > f(x-\varepsilon) + g(y+\varepsilon)$$

Or, cette inégalité est incompatible avec la relation (a)
donc :

$$\alpha(P-0) \leq \alpha(Q+0)$$

III-3-2 : Lemme 2.

Soit V un point du graphe de $\mathcal{C}(f, [a,A]; g, [b,B])$
alors il existe un point P appartenant à F et un point
Q appartenant à G tels que :

a) $P + Q = V$

- b) soit :
- i) P est un point anguleux convexe de F
 - ii) Q appartient à un segment t de G et
 $\alpha(P-0) \leq \alpha(t) \leq \alpha(P+0)$

- ou bien i) Q est un point anguleux convexe de G
- ii) P appartient à s, segment de F et
 $\alpha(Q-0) \leq \alpha(s) \leq \alpha(Q+0)$

a) Posons $(x, y) = V$

Soient u^* et t^* des valeurs respectives de u et t satisfaisant aux contraintes

$$a \leq u \leq A$$

$$b \leq t \leq B$$

$$u + t = x$$

et réalisant le minimum de la somme

$$f(u) + g(t)$$

Les points $P = (t^*, g(t^*))$ et $Q = (u^*, f(u^*))$ appartiennent aux chaînes G et F respectivement et nous pouvons écrire

$$V = P + Q$$

b) D'après le lemme 1

$$\alpha(P-0) \leq \alpha(Q+0) \quad \textcircled{1}$$

$$\alpha(Q-0) \leq \alpha(P+0) \quad \textcircled{2}$$

- Supposons que P soit un point anguleux concave

$$\alpha(P+0) < \alpha(P-0) \quad \textcircled{3}$$

Les relations ① , ② , ③ entraînent l'inégalité suivante :

$$\alpha(Q-0) < \alpha(P-0) \leq \alpha(Q+0)$$

On en déduit :

- i) Q est un point anguleux convexe
- ii) Soit s le segment situé à gauche de P, P appartient à s et

$$\alpha(Q-0) \leq \alpha(s) < \alpha(Q+0)$$

- Supposons que P soit un point anguleux convexe

$$\alpha(P-0) < \alpha(P+0) \quad \text{④}$$

$$\text{Si } \alpha(Q+0) \leq \alpha(Q-0) \quad \text{⑤}$$

Les relations ① , ② , ⑤ entraînent la double inégalité

$$\alpha(P-0) \leq \alpha(Q-0) \leq \alpha(P+0)$$

- Donc
- i) P est un point anguleux convexe
 - ii) Soit t le segment situé à gauche de Q, Q appartient à t et

$$\alpha(P-0) \leq \alpha(t) \leq \alpha(P+0)$$

Si $\alpha(Q-0) < \alpha(Q+0)$ ⑥

Les points P et Q sont alors tous deux convexes, i) et ii) sont immédiatement vérifiées.

- Supposons que P ne soit pas un point anguleux. Il appartient alors à l'intérieur d'un segment s de G et nous avons les relations

$$\alpha(P-0) = \alpha(P+0) = \alpha(s) \quad ⑦$$

① , ② , ⑦ permettent d'écrire

$$\alpha(Q-0) \leq \alpha(s) \leq \alpha(Q+0) \quad ⑧$$

Si Q est un point anguleux convexe le lemme est démontré sinon la double inégalité ⑧ peut être écrite

$$\alpha(Q-0) = \alpha(s) = \alpha(Q+0) \quad ⑨$$

Q appartient alors à un segment r de F et

$$\alpha(r) = \alpha(s)$$

Dans ce cas, pour tout point $P_1 = (a, g(a))$ appartenant à s et $Q_1 = (b, f(b))$ appartenant à r, vérifiant la relation

$$a + b = u^* + t^*$$

nous avons

$$g(a) + f(b) = f(u^*) + g(t^*)$$

Il existe, alors au moins un couple P_1, Q_1 vérifiant les conditions précédentes, tel que P_1 ou Q_1 soit extrémité des segments s ou r . Nous sommes alors ramenés à l'un des cas précédents.

III-3-3 : Démonstration du théorème III-3

Montrons que F étant une chaîne de la fonction f , et G une chaîne de g , alors $F \perp G$ est une chaîne décrivant la fonction $\mathcal{C}(f, [a, A]; g, [b, B])$.

a) Montrons que la projection de l'enveloppe inférieure de l'ensemble que nous désignerons par R dans la suite

$$\left\{ \left(\bigcup_{i=0}^n [P_i + \Gamma(P_i) \wedge T] \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^m [Q_j + \Gamma(Q_j) \wedge S] \right) \right\}$$

sur l'axe des abscisses est l'intervalle $[a+b, A+B]$ de définition de $\mathcal{C}(f, [a, A]; g, [b, B])$.

Rappelons que r étant un segment, nous avons désigné par $\omega(r)$ la projection de ce segment sur l'axe des abscisses.

$$a ; 1) \bigcup_{r \in R} \omega(r) \subset [a+b, A+B]$$

En effet tout point (x,y) appartenant à un segment de R peut être écrit

$$(x,y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

où (x_1, y_1) appartient à la chaîne F
et (x_2, y_2) appartient à la chaîne G .

or x_1 appartient à l'intervalle $[a,A]$ et x_2 à $[b,B]$,
donc $x=x_1 + x_2$ appartient à $[a + b, A + B]$

$$a ; 2) \bigcup_{r \in R} \omega(r) \supset [a+b, A+B]$$

Soit z un point de l'intervalle $[a+b, A+B]$ et désignons par h la fonction $\mathcal{C}(f, [a,A]; g, [b,B])$.

Appelons u et t des variables vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in [a, A] \\ t \in [b, B] \\ u + t = z \\ f(u) + g(t) = h(z) \end{array} \right.$$

Le lemme 2 montre que dans l'ensemble des couples $\{u, t\}$ remplissant ces conditions, il en existe sûrement un, soit $\{x, y\}$ tel que l'un des points $(x, f(x))$ ou $(y, g(y))$ soit un point anguleux convexe d'une chaîne, l'autre appartenant à un segment admissible par rapport à ce point. Donc $(x, f(x)) + (y, g(y))$ est un point appartenant à un segment de R . Nous en déduisons que $z = x + y$ appartient à l'ensemble $\bigcup_{r \in R} \omega(r)$

Nous avons ainsi démontré que

$$\bigcup_{r \in R} \omega(r) = [a+b, A+B]$$

- b) Pour alléger l'écriture continuons à désigner par h la fonction $\mathcal{E}(f, [a, A]; g, [b, B])$. Montrons que le graphe de h est l'enveloppe inférieure de la famille R .

b;1)

$$\forall x : x \in [a+b, A+B] , \forall y : (x,y) \in r, r \in R \\ \Rightarrow h(x) \leq y$$

Il résulte immédiatement de la construction de la famille R, qu'il existe deux nombres x_1 et x_2 , $x_1 \in [a, A]$ et $x_2 \in [b, B]$ tels que

$$x = x_1 + x_2$$

$$y = f(x_1) + g(x_2)$$

Par définition de l'opérateur \mathcal{C}

$$h(x) \leq f(x_1) + g(x_2)$$

c'est-à-dire $h(x) \leq y$

Il n'y a donc pas de point appartenant à des segments de R situé au dessous du graphe de la fonction h.

b;2)

$$\forall x, x \in [a+b, A+B] , \exists y : (x,y) \in r, r \in R \\ \Rightarrow h(x) \geq y$$

Le point $(x, h(x))$ étant un point du graphe de h , d'après le lemme 2 il existe deux points P et Q tels que :

$$(x, h(x)) = P + Q$$

où P est un point anguleux convexe d'une chaîne de f ou de g et Q appartient à un segment s de l'autre chaîne, admissible par rapport à P . Le segment $P + s$ appartient donc à R et le point $(x, h(x))$ appartient alors bien à un segment de R .

Le théorème est alors établi.

III-3-4 : Propriétés de l'opérateur \perp

P1 L'opérateur \perp définit sur l'ensemble des chaînes une loi de composition interne associative et commutative.

Le théorème précédent montre que F et G étant deux chaînes, $F \perp G$ est aussi une chaîne. Les propriétés d'associativité et de commutativité se déduisent des propriétés de l'opérateur \mathcal{E} .

P2 Soient 2 chaînes F et G . Tout point anguleux convexe de la chaîne $F \perp G$ est la somme de points anguleux convexes P et Q appartenant à F et G respectivement et satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$\alpha(P-O) \leq \alpha(V-O) < \alpha(V+O) \leq \alpha(P+O) \quad \textcircled{1}$$

$$\alpha(Q-O) \leq \alpha(V-O) < \alpha(V+O) \leq \alpha(Q+O) \quad \textcircled{2}$$

Soit V un point anguleux convexe de $F \perp G$ d'après le lemme 2, il existe deux points P et Q appartenant respectivement à F et G tels que

$$V = P + Q$$

Montrons que ces points satisfont aux relations $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$.

Soit π une chaîne déterminée par deux segments contenus dans F et ayant le point P pour point de concours.

La chaîne π_Q déterminée par les segments de π translatés de Q n'a aucun point situé au-dessous des points de la chaîne $F \perp G$, d'après la définition de l'opérateur \perp . De plus les chaînes π_Q et $F \perp G$ ont en commun le point $V = P+Q$ convexe par rapport à la chaîne $F \perp G$. On a donc les inégalités suivantes :

$$\alpha(P+Q-O) \leq \alpha(V-O) < \alpha(V+O) \leq \alpha(P+Q+O)$$

$$P+Q \in \pi_Q$$

$$P+Q \in \pi_Q$$

La chaîne Π_Q se déduisant de Π par translation de Q seulement :

$$\alpha(P) \leq \alpha(V-Q) < \alpha(V+Q) \leq \alpha(P)$$

$P \in \Pi \qquad \qquad \qquad P \in \Pi$

La chaîne Π étant contenue dans F, la relation ① est démontrée.

En utilisant une chaîne formée de deux segments consécutifs ayant le point Q pour point de concours, contenus dans G, la même méthode permet de démontrer la relation ②.

P3 Soient deux chaînes concaves F et G. Désignons par P_0 et P_n les extrémités de la chaîne F, Q_0 et Q_m les extrémités de la chaîne G, S et T les familles des segments de F et G respectivement. La chaîne $F \perp G$ est l'enveloppe inférieure de l'ensemble.

$$\left\{ P_0 + \Gamma(P_0) \wedge T, P_n + \Gamma(P_n) \wedge T, Q_0 + \Gamma(Q_0) \wedge S, Q_m + \Gamma(Q_m) \wedge S \right\}$$

D'après le lemme 2 tout point de $F \perp G$ est la somme de deux points appartenant respectivement à F et G et dont l'un ou moins est un point anguleux convexe. Or dans ce cas, P_0, P_n, Q_0 et Q_m sont les seuls points anguleux convexes.

Il suffit donc pour obtenir l'ensemble des segments décrivant la chaîne $F \perp G$, d'examiner les segments admissibles par rapport à ces points.

P4 : Soient P_0, P_1, \dots, P_n les points de concours des segments consécutifs s_1, s_2, \dots, s_n formant une chaîne F , et S l'ensemble de ces segments. L'enveloppe inférieure de l'ensemble

$$\left\{ \bigcup_{i=0}^n (P_i + \Gamma(P_i) \wedge S) \right\}$$

est la chaîne $F \perp F$.

P5 : Soient P_0, P_1, \dots, P_n les points anguleux tous convexes d'une chaîne F . Les points $2 P_0, 2 P_1, \dots, 2 P_n$ sont les extrémités des segments consécutifs formant la chaîne $F \perp F$.

Désignons par S l'ensemble des segments $\{s_i, i=1, \dots, n\}$ de la chaîne F . $F \perp F$ est l'enveloppe inférieure de l'ensemble.

$$R = \left\{ \bigcup_{i=0}^n P_i + \Gamma(P_i) \wedge S \right\}$$

Appelons s_{i-1} et s_i deux segments consécutifs dont le point de concours est P_i , $i=1, \dots, n$

$$\Gamma(P_i) \wedge S = \{s_{i-1}, s_i\}, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Gamma(P_0) \wedge S = \{s_1\}$$

$$\text{et } R = \{P_0 + s_1, P_1 + s_1, P_2 + s_2, P_3 + s_2, \dots, P_n + s_{n-1}, P_n + s_n\}$$

$$\text{or } [P_i, P_{i-1}] = s_i, \quad i=1, \dots, n$$

on en déduit que $2P_0, 2P_1, \dots, 2P_n$ sont les points de concours de la chaîne $F \perp F$.

Ce résultat peut être obtenu sans faire intervenir la notion de chaîne, plus généralement:

Soient N fonctions identiques, convexes, définies sur un intervalle $[a, A]$, alors pour $z \in [Na, NA]$ nous avons la relation :

$$N \times f\left(\frac{z}{N}\right) = \text{Inf} \left(\sum_{i=1}^N f(x_i) \mid a \leq x_i \leq A, i=1, \dots, N; \sum_{i=1}^N x_i = z \right)$$

P6 F et G étant deux chaînes convexes, $F \perp G$ est une chaîne formée des segments de F et G mis bout à bout et rangés selon des pentes croissantes.

Soient F et G deux chaînes convexes représentant les fonctions f et g définies sur $[a, A]$ et $[b, B]$ respectivement.

Soit K la chaîne formée par les segments translattés de F et de G, mis bout à bout et rangés selon des pentes croissantes. Les points extrémités de cette chaîne étant les points

$$(a+b, f(a) + g(b)) \text{ et } (A+B, f(A) + g(B)).$$

W étant un nombre donné, appartenant à l'intervalle $[a+b, A+B]$, x^* et y^* deux nombres tels que :

$$\begin{aligned} x^* &\in [a, A] \\ y^* &\in [b, B] \\ x^* + y^* &= W \\ (W, f(x^*) + g(y^*)) &\in K \end{aligned}$$

Montrons que cette répartition x^*, y^* de W est bien une répartition optimale.

S'il n'en était pas ainsi, il existerait une répartition x, y de l'activité W telle que l'on ait :

$$(III.H) \left\{ \begin{array}{l} f(x) + g(y) < f(x^*) + g(y^*) \\ x \neq x^* \end{array} \right.$$

Supposons, pour fixer les idées, que $x > x^*$ (s'il n'en était pas ainsi, un raisonnement analogue pourrait être fait en prenant y et y^*). Soient s_1, s_2, \dots, s_n les segments contenus dans F , définissant une chaîne ayant pour une extrémités les points $(x^*, f(x^*))$ et $(x, f(x))$, r_1, r_2, \dots, r_m les segments, contenus dans G , définissant une chaîne ayant pour extrémités les point $(y, g(y))$ et $(y^*, g(y^*))$.

F et G étant convexes, nous avons les inégalités suivantes :

$$\alpha(s_1) \leq \alpha(s_2) \leq \dots \leq \alpha(s_n)$$

$$\alpha(r_1) \leq \alpha(r_2) \leq \dots \leq \alpha(r_m)$$

Par suite :

$$f(x) - f(x^*) \geq \alpha(s_1) \cdot (x - x^*)$$

$$g(x^*) - g(y) \leq \alpha(r_m) \cdot (y^* - y)$$

Les segments de F situés à droite de $(x^*, f(x^*))$ n'ont pas été utilisés dans la construction de K dans l'intervalle $[a + b, w]$. On en déduit que

$$\alpha(s_1) \geq \alpha(r_m)$$

or

$$y^* - y = x - x^*$$

Nous pouvons donc encore écrire :

$$f(x) - (f^*) \geq g(y^*) - g(y)$$

$$f(x) + g(y) \geq f(x^*) + g(y^*)$$

Cette dernière inégalité est en contradiction avec l'hypothèse (III.H)

La propriété P6 se généralise facilement au cas de N chaînes convexes.

C H A P I T R E - I V

METHODE DIRECTE DE RESOLUTION DU PROBLEME DI

IV-1 Introduction d'un multiplicateur de Lagrange

Reprenons le problème de la répartition optimale d'une activité sous la forme DI. Le problème DIII suivant lui est équivalent.

λ étant un paramètre réel, déterminer

$$M_1 = \text{Inf} \left(\sum_{i=1}^N f_i(u_i) - \lambda u_i \mid u_i \in [a_i, A_i], i=1, \dots, N, \sum_{i=1}^N u_i = W \right)$$

et les systèmes de valeurs $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$, des variables $\{u_i\}$, $i=1, \dots, N$, respectivement, réalisant ce minimum.

En effet, nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^N (f_i(u_i) - \lambda u_i) = \sum_{i=1}^N f_i(u_i) - \lambda W$$

et il est évident que toute suite $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$, solution du problème DIII est aussi solution du problème DI et réciproquement. Notons aussi que :

$$M = M_1 - \lambda W.$$

Considérons alors le problème

$$M_2 = \text{Inf} \left(\sum_{i=1}^N f_i(u_i) - \lambda u_i \mid u_i \in [a_i, A_i], i=1, \dots, N \right)$$

que l'on peut encore écrire

$$M_2 = \sum_1^N \text{Inf} (f_i(u_i) - \lambda u_i \mid u_i \in [a_i, A_i])$$

La suite des valeurs des variables $\{u_i\}$, $i=1, \dots, N$, solution de ce dernier problème dépend du paramètre λ . Désignons par $K_i(\lambda)$, ($i=1, \dots, N$) une valeur de u_i , réalisant le minimum en u_i de $f_i(u_i) - \lambda u_i$, ($i=1, \dots, N$), respectivement.

La suite $\{K_i(\lambda)\}$, $i=1, \dots, N$, solution de ce problème n'est pas nécessairement unique, formons la somme

$$\sum_{i=1}^N K_i(\lambda)$$

Cette expression est définie pour toute valeur réelle de λ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[\sum_1^N a_i, \sum_1^N A_i]$. Supposons qu'il existe une valeur λ_0 du paramètre λ telle que :

$$\sum_{i=1}^N K_i(\lambda_0) = W$$

Il est clair qu'une telle suite rend minimum la somme

$$\sum_{i=1}^N f_i(u_i) - \lambda_0 W$$

et satisfait aussi aux contraintes du problème **DI**. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème

Une condition suffisante pour que la suite $\{K_i(\lambda_0)\}, i=1, \dots, N$ soit solution du problème **DI** est qu'il existe une valeur λ_0 de λ telle que $K_i(\lambda_0)$ soit solution en u de :

$$\text{Inf } (f_i(u) - \lambda_0 u) \mid u \in [a_i, A_i]$$

pour $i=1, \dots, N$

et que la relation suivante soit vérifiée :

$$\sum_1^N K_i(\lambda_0) = W$$

On en déduit immédiatement une méthode de résolution du problème DI : ajuster la valeur du paramètre λ de façon à vérifier la relation

$$\sum_{i=1}^N K_i(\lambda) = W$$

IV-2 Application aux fonctions convexes

Précédemment nous n'avons fait aucune hypothèse sur les fonctions f_i , nous supposons maintenant que ces fonctions sont strictement convexes, pourvues de dérivées premières et secondes continues.

Pour $i=1, \dots, N$, dans l'intervalle $[a_i, A_i]$ le minimum en u de la fonction

$$f_i(u) - \lambda u$$

est obtenu pour

$$K_i(\lambda) = \begin{cases} a_i & \text{si } \lambda \leq f'_i(a_i) \\ A_i & \text{si } \lambda \geq f'_i(A_i) \\ x & \text{si } \exists x, x \in]a_i, A_i[: \\ & f'_i(x) = \lambda \end{cases}$$

Nous pouvons alors énoncer le corollaire suivant :

Corollaire :

Une condition suffisante pour qu'une suite
 $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i \in [a_i, A_i] , (i=1, \dots, N) \\ \sum_1^N x_i = W \end{array} \right.$$

soit solution du problème, est qu'il existe une valeur λ_0
telle que pour $i = 1, \dots, N$:

$$f'_i(x_i) \geq \lambda_0 \quad \text{si } x_i = a_i$$

$$f'_i(x_i) \leq \lambda_0 \quad \text{si } x_i = A_i$$

$$f'_i(x_i) = \lambda_0 \quad \text{si } x_i \in]a_i, A_i[$$

Montrons que la méthode précédente fournit une seule
solution et que cette solution est l'unique solution du problème

$$\text{Posons : } \lambda_1 = \text{Inf } (f'_i(a_i) \mid i=1, \dots, N)$$

$$\lambda_2 = \text{Sup } (f'_i(A_i) \mid i=1, \dots, N)$$

Il existe une valeur unique λ_0 de λ appartenant à l'intervalle
 $[\lambda_1, \lambda_2]$ auquel correspond une suite unique de fonction $K_i(\lambda)$
telle que

$$\sum_{i=1}^N K_i(\lambda_0) - W = 0$$

Pour $i=1, \dots, N$, la fonction $f'_i(u) - \lambda$ est une fonction continue strictement croissante par rapport à u , définie sur $[a_i, A_i]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Il en résulte que la fonction $K_i(\lambda)$ est une fonction continue, définie dans \mathbb{R} et à valeurs dans $[a_i, A_i]$.

Remarquons que $K_i(\lambda)$ est strictement croissante par rapport à λ dans $[f'_i(a_i), f'_i(A_i)]$, par suite la somme $\sum_1^N K_i(\lambda)$ est une fonction strictement croissante de λ , pour λ appartenant à $[\lambda_1, \lambda_2]$, depuis $\sum_1^N K_i(\lambda_1) = \sum_1^N a_i$ jusqu'à $\sum_1^N K_i(\lambda_2) = \sum_1^N A_i$.

Cette méthode fournit donc bien une répartition de l'activité W , pour W appartenant à $[\sum_1^N a_i, \sum_1^N A_i]$ et il y a une seule valeur de λ dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ telle que

$$\sum_{i=1}^N K_i(\lambda) - W = 0$$

Il reste à montrer que le problème à une seule solution ; or il est clair que l'on a la condition suivante :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$, soit solution unique du problème DI est que, pour toute suite à éléments non nuls $\{S_i\}$, $i=1, \dots, N$,

telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^N S_i = 0 \\ S_i \geq 0 \quad \text{si } x_i = a_i \\ S_i \leq 0 \quad \text{si } x_i = A_i \end{array} \right\} i=1, \dots, N$$

L'inégalité suivante soit vérifiée :

$$(IV-A) \quad \sum_{i=1}^N f_i(x_i + S_i) > \sum_1^N f_i(x_i)$$

Désignons par $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$, la suite solution du problème DI et montrons que cette condition est vérifiée.

Les hypothèses faites assurent l'existence d'une suite $\{\theta_j\}$, $j = 1, \dots, N$, dont tous les éléments vérifient la double inégalité

$$0 \leq \theta_j \leq 1, j = 1, \dots, N$$

telle que pour $i=1, \dots, N$ on ait :

$$f_i(x_i + S_i) = f_i(x_i) + f'_i(x_i) S_i + \frac{S_i^2}{2} f''_i(x_i + \theta_i S_i)$$

(IV-A) peut alors être écrite :

$$\sum_1^N f'_i(x_i) s_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^2 f''_i(x_i + \theta_i s_i) > 0.$$

$f'_i(x)$ étant strictement positive, pour tout x appartenant à $[a_i, A_i]$, on a :

$$\sum_{i=1}^N s_i^2 f'_i(x_i + \theta_i s_i) > 0$$

Montrons alors que la relation suivante est vérifiée

$$\sum_1^N f'_i(x_i) s_i \geq 0. \quad (\text{IV-B})$$

Soient $\{\vec{e}_i\}; i=1, \dots, N$ les vecteurs de base de \mathbb{R}^N . Les suites $\{s_i\}, i=1, \dots, N$ remplissant les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^N s_i = 0 \\ s_i \geq 0 \text{ si } x_i = a_i, i=1, \dots, N \\ s_i \leq 0 \text{ si } x_i = A_i, i=1, \dots, N \end{array} \right.$$

Définissent un cône Γ dans \mathbb{R}^N que l'on peut écrire $\Gamma = \Pi \cap \Gamma_1$, en désignant par :

- J l'ensemble des indices j pour lesquels $x_j = a_j$
- K l'ensemble des indices j pour lesquels $x_j = A_j$
- Π l'hyperplan défini par l'équation : $\sum_1^N s_i = 0$.
- Γ_1 le cône : $\{ \vec{s} : \langle \vec{e}_i, \vec{s} \rangle \geq 0, i \in J ; \langle \vec{e}_i, \vec{s} \rangle \leq 0, i \in K \}$

La relation (IV-B) signifie que le vecteur F ainsi défini :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f'_1(x_1) \\ \vdots \\ f'_n(x_n) \end{pmatrix}$$

appartient à l'orthogonal du cône Γ . Les vecteurs appartenant au cône orthogonal de Γ_1 sont de la forme :

$$\sum_{i \in J} \vec{e}_i \cdot \lambda_i - \sum_{i \in K} \vec{e}_i \lambda_i$$

$$\lambda_i \geq 0 \text{ pour } i \in J \cup K.$$

Soit F un vecteur orthogonal au cône Γ , il peut donc être écrit :

$$\vec{F} = \lambda_0 \cdot \vec{1} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot I_i(x_i) \vec{e}_i$$

où : $\vec{1}$ désigne le vecteur suivant de \mathbb{R}^n

$$\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

: $\{I_i(x)\}$, $i=1, \dots, N$ est une suite d'indicateurs

$$I_i(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = A_i \\ 0 & \text{si } x \in]a_i, A_i[\\ 1 & \text{si } x = a_i \end{cases}$$

: $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, N$

: λ_0 quelconque

Soit encore

$$f'_i(x_i) = \lambda_0 + \lambda_i I_i(x_i), i=1, \dots, N$$

Il est alors équivalent d'écrire :

$$\text{IV-C} \quad \left. \begin{array}{l} f'_i(x_i) \geq \lambda_0 \quad \text{pour } i \in J \\ f'_i(x_i) \leq \lambda_0 \quad \text{" } i \in K \\ f'_i(x_i) = \lambda_0 \quad \text{" } i \notin J \cup K \end{array} \right\} i=1, \dots, N$$

Cette condition (IV-C) est donc équivalente à la condition (IV-B) ; on sait que la suite $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$ fournie par le corollaire vérifie (IV-C). Cette suite est donc bien l'unique solution du problème.

C H A P I T R E - V

=====

PROBLEME GENERAL CONTINU

V-1 : Enoncé du problème CI

Soient :

- un intervalle donné $[T_0, T_1]$, T_0 étant strictement inférieur à T_1 ;
- une constante donnée W ;
- $\varphi(t, v)$ une fonction donnée à valeurs réelles, continue par rapport au couple (t, v) ;
- $a(t)$ et $b(t)$, deux fonctions données, définies sur $[T_0, T_1]$, continues, à valeurs réelles et telles que $a(t)$ soit strictement inférieure à $b(t)$ pour tout t appartenant à $]T_0, T_1[$.

Déterminer la ou les fonctions $v(t)$ sur $[T_0, T_1]$, telles que :

1) $v(t)$ soit continue par morceaux, c'est-à-dire n'admette qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce et que de plus, entre deux points de discontinuités, la relation suivante soit vérifiée

$$a(t) \leq v(t) \leq b(t)$$

2) on ait la relation :

$$\int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W$$

3) L'intégrale

$$J(v) = \int_{T_0}^{T_1} \Psi(t, v) dt$$

soit minimum pour les fonctions v satisfaisant à 1) et 2).

On désignera par \mathcal{A} la famille des fonctions v satisfaisant aux conditions 1) et 2).

Toute fonction v de la famille \mathcal{A} , représente une répartition de l'activité W sur l'intervalle $[T_0, T_1]$. L'effort associé à cette répartition est évaluée par l'intégrale $J(v)$. \mathcal{A} est appelé ensemble des répartitions ou commandes admissibles.

Dans toute la suite, nous supposons que cet ensemble n'est pas vide. Une répartition v^* appartenant à \mathcal{A} sera dite optimale, si elle rend minimum l'intégrale $J(v)$, c'est-à-dire si :

$$J(v^*) = \text{Inf} (J(v) \mid v \in \mathcal{A})$$

Sous forme condensée, ce problème peut être écrit :

déterminer $v(t)$ et M solution de :

$$M = \text{Inf} \left(\int_{T_0}^{T_1} \varphi(t, v(t)) dt \mid a(t) \leq v(t) \leq b(t), t \in [T_0, T_1]; \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W \right)$$

Notons qu'il est équivalent d'écrire, en posant

$$s(t) = \int_{T_0}^t v(x) dx$$

Déterminer $s(t)$ et M solution de :

$$M = \text{Inf} \left(\int_{T_0}^{T_1} \varphi(t, s'(t)) dt \mid a(t) \leq s'(t) \leq b(t), t \in [T_0, T_1]; \right.$$

$$\left. s(T_0) = 0, s(T_1) = W \right).$$

Nous montrons dans ce chapitre qu'un autre type classique de problème de gestion de stock peut, dans certains cas, être ramené à ce formalisme. Il est clair que ce résultat pourrait être appliqué au problème sous sa version discrète.

Dans les chapitres suivants, nous supposons tout d'abord la fonction $\varphi(t, v)$ continuellement dérivable par rapport à t et le domaine de variation de la répartition v uniformément borné (nous montrons dans la suite que le problème CI se ramène à ce dernier cas par un changement de variable) et appliquons la méthode de PONTRYAGIN ([17]).

Nous supposons ensuite la fonction $\varphi(t, v)$ pourvues de dérivées premières et secondes continues par rapport à t et d'une dérivée première continue par rapport à v . Nous considérons alors le problème CI comme un cas particulier du problème de BOLZA ([5] et [7]). Des conditions nécessaires que doit vérifier toute solution à ce dernier problème, nous en déduisons des conditions nécessaires généralisant l'emploi de la méthode de PONTRYAGIN à notre problème où le domaine de variation de la commande n'est pas borné de façon uniforme.

Sans faire d'hypothèse supplémentaire sur la fonction $\varphi(t, v)$ nous avons cherché une condition suffisante pour qu'une fonction soit solution du problème en utilisant la même méthode que dans la version discrète.

Pour obtenir des algorithmes faciles à programmer et donnant des résultats numériques précis, nous avons étudié en détail, le cas où la fonction $\varphi(t, v)$ est strictement convexe par rapport à v , le problème ayant alors une solution unique.

V-2 : Un problème dégénéré.

La famille \mathcal{A} des fonctions v représentant les répartitions admissibles, sur l'intervalle $[T_0, T_1]$ de l'activité W , W appartenant à l'intervalle :

$$\left[\int_{T_0}^{T_1} a(t) dt, \int_{T_0}^{T_1} b(t) dt \right]$$

est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) \leq v(t) \leq b(t), \quad t \in [T_0, T_1] \\ \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W. \end{array} \right.$$

La seconde contrainte indique que toute l'activité W doit être répartie. Montrons que moyennant certaines conditions sur la fonction $\varphi(t, v)$ le cas où cette contrainte est remplacée par

$$\int_{T_0}^{T_1} v(t) dt \leq W.$$

peut être ramené à un problème de répartition optimale d'activité.

Considérons donc le problème CII suivant :

déterminer $v(t)$ sur $[T_0, T_1]$, solution de

$$\text{Inf} \left(\int_{T_0}^{T_1} \varphi(t, v) dt \mid a(t) \leq v(t) \leq b(t), t \in [T_0, T_1] ; \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt \leq W \right).$$

Nous supposons qu'il existe une fonction $c(t)$ vérifiant la double inégalité :

$$a(t) \leq c(t) \leq b(t), \forall t \in [T_0, T_1]$$

telle que quelque soit t , appartenant à $[T_0, T_1]$, la fonction $\varphi(t, v)$, comme fonction de v , soit non croissante sur $[a(t), c(t)]$ et strictement croissante sur $[c(t), b(t)]$.

Désignons par \mathcal{Q} la famille des fonctions v sur $[T_0, T_1]$, continues par morceaux, vérifiant les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) \leq v(t) \leq b(t), t \in [T_0, T_1] \\ \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt \leq W. \end{array} \right.$$

Nous supposons que \mathcal{a} n'est pas vide et désignerons par \mathcal{a}^* la famille :

$$\mathcal{a}^* = \left\{ v \in \mathcal{a}, \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = \text{Inf} \left(W, \int_{T_0}^{T_1} c(t) dt \right) \right\}$$

Théorème : Toute solution du problème $\text{Inf}(J(v) \mid v \in \mathcal{a}^*)$ est solution du problème $\text{Inf}(J(v) \mid v \in \mathcal{a})$.

Soit $\bar{v}(t)$ une solution au problème C II et $\hat{v}(t)$ une fonction définie sur $[T_0, T_1]$, sauf pour les valeurs de t pour laquelle $\bar{v}(t)$ n'est pas définie, par :

$$\hat{v}(t) = \text{Inf}(\bar{v}(t), c(t)).$$

D'après les hypothèses faites sur la fonction $\psi(t, v)$, il est clair que la relation suivante est vérifiée presque partout :

$$\psi(t, \hat{v}(t)) \leq \psi(t, \bar{v}(t))$$

or \hat{v} appartient à la famille \mathcal{a} , c'est donc aussi une solution du problème C II. De plus \hat{v} appartient à la famille des fonctions v continues par morceaux sur $[T_0, T_1]$ vérifiant les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) \leq v(t) \leq b(t), \quad t \in [T_0, T_1] \\ \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt \leq \text{Inf} (W, \int_{T_0}^{T_1} c(t) dt) \end{array} \right.$$

Soit \hat{a} cette famille de fonctions.

Ceci ramène donc la recherche de la répartition optimale, pour t appartenant à $[T_0, T_1]$, à l'intervalle $[a(t), c(t)]$, intervalle dans lequel la fonction $\psi(t, v)$ est non croissante par rapport à v . Il est alors évident que pour toute fonction v appartenant à \hat{a} , il existe une fonction v^* appartenant à \hat{a}^* tel que l'on ait :

$$\int_{T_0}^{T_1} \psi(t, v^*(t)) dt \leq \int_{T_0}^{T_1} \psi(t, v(t)) dt.$$

Nous pouvons donc écrire la relation suivante :

$$\int_{T_0}^{T_1} \psi(t, v^*(t)) dt = \int_{T_0}^{T_1} \psi(t, \hat{v}(t)) dt$$

Par suite, toute solution du problème de répartition optimale d'activité :

$$\text{Inf} \left(\int_{T_0}^{T_1} \psi(t, v(t)) dt \mid a(t) \leq v(t) \leq c(t), \right. \\ \left. t \in [T_0, T_1] ; \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = \text{Inf}(W, \int_{T_0}^{T_1} \psi(c(t))) \right.$$

est solution du problème C II.

C H A P I T R E - V I

METHODE DE PONTRYAGIN

VI-1 Application de la méthode de PONTRYAGIN

Supposons que la fonction $\psi(t, v)$ soit continûment dérivable par rapport à t et que le domaine de variation de la répartition v ne dépende pas de t , c'est à dire que les fonctions a et b de la condition 1) soient de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = a_0 \\ b(t) = b_0 \\ a_0 < b_0 \end{array} \right. \quad \text{où } a_0 \text{ et } b_0 \text{ sont des constantes}$$

Nous pouvons alors appliquer la méthode de PONTRYAGIN.
Considérons la fonction :

$$H(t, v, \Psi) = v \Psi - \psi(t, v)$$

Cette fonction H , Ψ et t étant fixée, atteint son maximum sur l'intervalle $[a_0, b_0]$ pour une valeur de v , fonction de Ψ et de t ; soit $K(t, \Psi)$ cette valeur.

Pour toute solution $v(t)$ du problème C I avec les hypothèses restrictives précédentes, il existe une fonction $\Psi(t)$ continue sur $[T_0, T_1]$, telle que $s(t)$, $v(t)$, $\Psi(t)$ soient solutions du système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \Psi(t) = 0 \\ \frac{d}{dt} s(t) = v(t) \\ v(t) = K(t, \Psi) \\ s(T_0) = 0 \\ s(T_1) = W \end{array} \right.$$

Supposons la fonction K univoque ; on est alors en présence d'un système où les équations différentielles en Ψ et t sont très simples, mais où les conditions sont des conditions aux limites.

Ce système peut-être résolu numériquement par une "méthode de tir". Les hypothèses précédentes permettent encore d'énoncer

ce théorème sous la forme suivante :

Une condition nécessaire pour qu'une fonction $v(t)$ soit solution du problème précédent est qu'il existe une constante Ψ_0 telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) = K(t, \Psi_0) ; \\ \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W ; \end{array} \right.$$

VI-2 : Réduction du problème C-I

Pour ramener le problème C I au problème précédent où la commande $v(t)$ appartient à un domaine uniformément borné, on effectuera le changement de variable suivant :

La différence $b(t) - a(t)$ est strictement positive dans tout l'intervalle $]T_0, T_1[$. Considérons alors la fonction λ définie dans $[T_0, T_1]$ par

$$\text{VI-A} \quad \lambda(t) = \int_{T_0}^t (b(y) - a(y)) dy$$

Cette fonction est strictement croissante de 0 à $\lambda = \lambda(T_1)$; elle admet donc une fonction inverse $t(\lambda)$.

Posons

$$\text{VI-B} \quad u(\lambda) = \int_{T_0}^{t(\lambda)} (v(y) - a(y)) dy$$

La dérivée par rapport à λ de cette fonction est

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} u(\lambda) &= (v(t(\lambda)) - a(t(\lambda))) \frac{d}{d\lambda} t(\lambda) \\ &= \frac{v(t) - a(t)}{b(t) - a(t)} \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\text{VI-C} \quad v(t) = (b(t) - a(t)) \frac{d}{d\lambda} u(\lambda) + a(t)$$

Effectuons alors la substitution de la variable $v(t)$ par $u(\lambda(t))$. La condition

$$a(t) \leq v(t) \leq b(t)$$

est équivalente à

$$0 \leq \frac{d}{d\lambda} u(\lambda) \leq 1$$

La condition

$$\int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W$$

est remplacée, d'après VI-A, par :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(\Lambda) = W_1 \end{cases}$$

En posant $W_1 = W - \int_{T_0}^{T_1} a(t) dt$. D'autre part en effectuant

le changement de variable défini par VI-A et VI-C l'intégrale

$$\int_{T_0}^{T_1} \varphi(t, v) dt$$

peut être écrite :

$$\int_0^\Lambda \Phi(\lambda, \frac{d}{d\lambda} u(\lambda)) d\lambda.$$

On est alors ramené au problème suivant :

déterminer la ou les fonctions $u(\lambda)$ sur l'intervalle $[0, \Lambda]$
solution de

$$M = \text{Inf} \left(\int_0^{\Lambda} \phi(\lambda, \frac{d}{d\lambda} u(\lambda)) \mid 0 \leq \frac{d}{d\lambda} u(\lambda) \leq 1, u(0) = 0, u(\Lambda) = W_1 \right)$$

Ce problème peut être résolu par la méthode de PONTRYAGIN ;
on en déduit ensuite la solution de C I puisque :

$$M = M$$

et que $v(t)$ s'obtient à partir de $u(\lambda)$ par VI-C

C H A P I T R E VII

METHODE VARIATIONNELLE

Nous supposerons dans ce chapitre que la fonction $\varphi(t, v)$ admet des dérivées premières et secondes continues par rapport à t , une dérivée première continue par rapport à v , et les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ pourvues de dérivées premières et secondes continues.

VII-1 Conditions nécessaires

Soient v^* une répartition optimale de l'activité W , S^* le graphe de la fonction s^* définie sur $[T_0, T_1]$ par

$$s^*(t) = \int_{T_0}^t v^*(t) dt$$

et H la fonction :

$$H(t, v, \theta_0, \theta) = \theta_0 \varphi(t, v) + \theta v$$

où θ_0 et θ sont deux variables auxiliaires à valeurs réelles.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Il existe un couple de constantes (θ_0, θ) tel que $\theta_0 \geq 0$ et que le couple (θ_0, θ) ne soit pas nul et un couple de fonction $(\eta_1(t), \eta_2(t))$ à valeurs négatives ou nulles, définies et continues sur $[T_0, T_1]$, sauf peut être pour des valeurs de t correspondants aux points anguleux de S^* ou elles possèdent des limites à droite et à gauche respectivement égales tels que les relations suivantes soient vérifiées le long de S^* :

$$\text{VII-A} \quad \theta_0 \frac{\partial}{\partial v} \psi(t, v) + \theta + \eta_1(t) - \eta_2(t) = 0$$

$$\text{VII-B} \quad \eta_1(t) \cdot (v(t) - a(t)) = 0$$

$$\text{VII-C} \quad \eta_2(t) \cdot (b(t) - v(t)) = 0$$

Pour tout élément (t, s^*, v^*) de S^* et tout v appartenant à l'intervalle $[(a, t), b(t)]$

$$\text{VII-D} \quad H(t, v, \theta_0, \theta) \geq H(t, v^*, \theta_0, \theta)$$

Nous déduirons la démonstration de ce théorème à partir du problème de BOLZA ; Auparavant, il est nécessaire de modifier un peu le problème, pour n'avoir que des contraintes écrites sous forme d'égalités

La double inégalité

$$a(t) \leq v(t) \leq b(t)$$

peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} c_1(t, v) \geq 0 \\ c_2(t, v) \geq 0 \end{cases}$$

en posant

$$c_1(t, v) = v - a(t)$$

$$c_2(t, v) = b(t) - v$$

Nous emploierons la même méthode que VALENTINE ([18]) et introduirons deux fonctions $z_1(t)$ et $z_2(t)$ solution des équations différentielles suivantes :

$$(z'_1(t))^2 = v(t) - a(t) ; z_1(T_0) = 0 ; z_1(T_1) = P_1 ;$$

$$(z'_2(t))^2 = b(t) - v(t) ; z_2(T_0) = 0 ; z_2(T_1) = P_2 ;$$

Ces fonctions pourvues de dérivées premières et secondes définies presque partout et n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce sont solutions du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} G_i(t, x, y') - x'_{i_1} = 0, & (i=1, \dots, n) \\ R_j(t, x, y') - z'_{j_2} = 0, & (j=1, \dots, r) \end{cases}$$

où les fonctions $G_i, (i=1, \dots, n)$ et $R_j, (j=1, \dots, r)$ sont des fonctions données continues et pourvue de dérivées premières et secondes continues par rapport à t, x, y' et sont indépendantes. Sous forme vectorielle nous écrirons ce système de la façon suivante :

$$\begin{cases} G(t, x, y') - x' = 0 \\ R(t, x, y') - z'^2 = 0 \end{cases}$$

Les conditions aux limites pour ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(T_0) = 0 & ; & x(T_1) = x^1 \\ y(T_0) = 0 & ; & y(T_1) = \Pi \\ z(T_0) = 0 & ; & z(T_1) = \rho \end{cases}$$

x^1 est un vecteur donné de \mathbb{R}^n , Π et ρ des vecteurs de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^r respectivement et dont les composantes sont des paramètres réels.

2) $(x(t), y(t), z(t))$, satisfaisant à 1), minimise l'intégrale

$$\int_{T_0}^{T_1} f(t, x, y') dt$$

où f est une fonction continue, à dérivée première et secondes continues par rapport à t et à x .

Il s'agit ici d'un énoncé simplifié par rapport à celui exposé par BERKOVITZ ou T_1 et $x(T_1)$ sont supposés appartenir à un domaine donné.

Pour énoncer les conditions nécessaires que doit vérifier toute solution au problème de BOLZA, nous utiliserons les notations suivantes :

x étant un vecteur de \mathbb{R}^p , on désigne par ${}^t x$ le vecteur transposé de x .

F étant une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} on désigne par $\frac{d}{dx} F$ le vecteur colonne gradient de F par rapport au vecteur x de \mathbb{R}^p

F étant une application de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q , on désigne par $\frac{d}{dx} F(x)$ la matrice dont les lignes sont formées du gradient de chaque composante de F par rapport à x .

VII-3 Conditions nécessaires du problème de BOLZA.

Théorème 2

Soit K^* un arc solution au problème de BOLZA. Le long de K^* , nous avons les conditions nécessaires suivantes :

- Il existe une constante λ_0 positive, un vecteur de \mathbb{R}^n , $\lambda(t)$ et un vecteur de \mathbb{R}^r , $\mu(t)$ tels que le vecteur de \mathbb{R}^{n+r+1}

$$\begin{array}{|l} \lambda_0 \\ \lambda(t) \\ \mu(t) \end{array}$$

ne soit jamais nul et que $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ soient continues sur $[T_0, T_1]$ sauf peut être pour des valeurs de t correspondant aux points anguleux de K^* . En ces points d'abscisse t , les limites à droite de ces fonctions sont égales à leurs limites à gauche respectivement. De plus, la fonction F ainsi définie :

$$F(t, x, y, z, x', y', z', \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f + {}^t \lambda (G - x') + {}^t \mu (R - z', 2)$$

satisfait aux conditions suivantes le long de K^* :

Théorème d'EULER-LAGRANGE

- entre deux points anguleux de K^*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x'} F = \frac{\partial}{\partial x} F$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y'} F = \frac{\partial}{\partial y} F$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial z'} F = \frac{\partial}{\partial z} F$$

Théorème de WEIERSTRASS-ERDMANN

- En un point anguleux de K^* , $\frac{\partial}{\partial x'} F$, $\frac{\partial}{\partial y'} F$, $\frac{\partial}{\partial z'} F$ et $F - x' \frac{\partial}{\partial x'} F - y' \frac{\partial}{\partial y'} F - z' \frac{\partial}{\partial z'} F$ ont des limites définies, les limites à droites étant égales aux limites à gauche respectivement.

Conditions de transversalité.

Au point d'abscisse T_1 de K^* , nous avons les relations suivant

$${}^L \left(\frac{\partial}{\partial y'} F \right) \cdot \frac{d}{d\pi} y = 0$$

$${}^L \left(\frac{\partial}{\partial z'} F \right) \cdot \frac{d}{d\varphi} z = 0$$

Théorème de WEIERSTRASS

Pour tout (t, x, y, z, X', Y', Z') différent de (t, x, y, z, x', y', z') de K^* et satisfaisant aux équations du 1) de l'énoncé du problème de BOLZA, ξ étant une fonction définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, x, y, z, x', y', z', X', Y', Z', \lambda_0, \lambda, \mu) = \\ F(t, x, y, z, X', Y', Z', \lambda_0, \lambda, \mu) - F(t, x, y, z, x', y', z', \lambda_0, \lambda, \mu) \\ + {}^t(X' - x') \cdot \frac{\partial}{\partial X'} F - {}^t(Y' - y') \cdot \frac{\partial}{\partial Y'} F - {}^t(Z' - z') \cdot \frac{\partial}{\partial Z'} F \end{aligned}$$

où $\frac{\partial}{\partial X'} F, \frac{\partial}{\partial Y'} F, \frac{\partial}{\partial Z'} F$ sont évaluées au point $(t, x, y, z, x', y', z', \lambda_0, \lambda, \mu)$ la relation suivante est vérifiée :

$$\mathcal{E}(t, x, y, z, x', y', z', X', Y', Z', \lambda_0, \lambda, \mu) \geq 0$$

Relation de CLEBSCH

Pour tout vecteur :

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} \quad \beta = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{vmatrix} \quad \gamma = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{vmatrix}$$

Solution du système linéaire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'} G\right) \cdot \beta - I \alpha = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'} R\right) \cdot \beta - 2 \Delta \gamma = 0$$

où I est une matrice identité d'ordre $r \times r$ et Δ une matrice diagonale d'ordre $r \times r$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z'_r \end{vmatrix}$$

La relation suivante est vérifiée :

$${}^t \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} F\right) \alpha + {}^t \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} F\right) \beta - 2 \sum_{i=1}^r \mu_i \gamma_i^2 \geq 0$$

Normalité

Il peut exister plusieurs triplets de multiplicateurs $(\lambda_0, \lambda, \mu)$ satisfaisant le théorème précédent. On dit que la courbe K^* est normale s'il n'existe aucun triplet tel que λ_0 soit nul. Dans ce cas, on peut choisir λ_0 égal à 1 ; Ce choix étant fait, on montre qu'il existe un seul triplet $(1, \lambda, \mu)$

satisfaisant au problème. Si la courbe K^* n'est pas normale, il n'y a alors pas de courbes au voisinage de K^* satisfaisant les contraintes. Des conditions nécessaires et suffisantes de normalité pour le problème de BOLZA sont donnés en référence ([6] BLISS)

VII-4 Retour au problème.

Le problème que nous nous proposons de résoudre peut être formulé ainsi, en utilisant les notations du problème de BOLZA.

Déterminer $x(t)$, $y(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$ et M solution de

$$M = \text{Inf} \left(\int_{T_0}^{T_1} f(t, y'(t)) dt \left| \begin{array}{l} y' - x' = 0 \\ c_1(t, y') - z'_1{}^2 = 0 \\ c_2(t, y') - z'_2{}^2 = 0 \end{array} \right. ; \begin{array}{l} x(T_0) = 0 \quad x(T_1) = W \\ y(T_0) = 0 \quad y(T_1) = \Pi \\ z_1(T_0) = 0 \quad z_1(T_1) = \rho_1 \\ z_2(T_0) = 0 \quad z_2(T_1) = \rho_2 \end{array} \right)$$

Les fonctions $y' - x'$, $c_1(t, y') - z'_1{}^2$, $c_2(t, y') - z'_2{}^2$ sont indépendantes. En effet la matrice jacobienne de ces fonctions s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2z'_1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2z'_2 \end{pmatrix}$$

Nous avons supposé $a(t) < b(t)$ dans l'intervalle $[T_0, T_1]$, cela entraîne que $z'_1(t)$ est différent de $z'_2(t)$ dans cet intervalle. Cette matrice est bien de rang 3 dans l'intervalle $[T_0, T_1]$.

Les hypothèses du problème de BOLZA sont alors toutes vérifiées et nous pouvons appliquer le théorème.

Démonstration du théorème 1 à partir des conditions nécessaires du problème de BOLZA.

La fonction F est réduite à :

$$\lambda_0 f(t, y') + \lambda (y' - x') + \mu_1 (C_1(t, y') - z'_1{}^2) + \mu_2 (C_2(t, y') - z'_2{}^2)$$

Identifions θ_0 avec λ_0 , θ avec λ , η_1 avec μ_1 et η_2 avec μ_2 .

La condition $\lambda_0 \geq 0$ assure $\theta_0 \geq 0$. La première relation du théorème d'EULER-LAGRANGE s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = 0$$

La continuité de $\lambda(t)$ entre les points anguleux de K^* et la relation de WEIERSTRASS-ERDMANN aux points anguleux de K^* nous assure de l'existence d'une constante λ .

Remarquons ici que la fonction H est continue le long de S^* . En effet en tout point de K^*

$$H = F - x' \frac{\partial}{\partial x'} F - y' \frac{\partial}{\partial y'} F - z'_1 \frac{\partial}{\partial z'_1} F - z'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2} F$$

et ce second membre est une fonction continue. La deuxième relation du théorème d'EULER-LAGRANGE s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial y'} F = 0$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial y'} F = \lambda_0 f_{y'}(t, y') + \lambda + \mu_1 - \mu_2.$$

Toujours d'après la relation de WEIERSTRASS-ERDMANN, $\frac{\partial}{\partial y'} F$ est continue le long de K^* ; De plus, au point extrémité d'abscisse T_1 de K^* , nous avons la condition de transversalité suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y'} F = 0$$

puisque $y(T_1) = \pi$. Ceci justifie la relation VII-A

$$\lambda_0 f_{y'}(t, y') + \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Les relations VII-B et VII-C se démontrent de façon analogue ; en utilisant les mêmes résultats on obtient :

$$\mu_1 z'_1 = 0$$

$$\mu_2 z'_2 = 0$$

Etant donné que

$$z'_{1^2} = C_1(t, y')$$

$$z'_{2^2} = C_2(t, y')$$

on peut encore écrire :

$$\mu_1(t) \cdot C_1(t, y') = 0$$

$$\mu_2(t) \cdot C_2(t, y') = 0$$

Il est clair que :

$$H(t, y'^*, \lambda_0, \lambda) = F - x' \frac{\partial}{\partial x'} F - y' \frac{\partial}{\partial y'} F - z'_1 \frac{\partial}{\partial z'_1} F - z'_2 \frac{\partial}{\partial z'_2} F$$

$$H(t, y', \lambda_0, \lambda) = F - X' \frac{\partial}{\partial X'} F - Y' \frac{\partial}{\partial Y'} F - Z'_1 \frac{\partial}{\partial Z'_1} F - Z'_2 \frac{\partial}{\partial Z'_2} F$$

On voit alors que la relation VII-D n'est qu'une écriture différentielle du théorème de WEIERSTRASS.

Conservons les notations du problème de BOLZA, pour montrer que $(\lambda_0, \lambda(t))$ ne s'annule jamais le long de K^* . En effet si, pour une valeur t appartenant à $]T_0, T_1[$, le vecteur $(\lambda_0, \lambda(t))$ était nul, les relations VII-A, VII-B et VII-D déjà démontrées s'écriraient :

$$\mu_1(t) - \mu_2(t) = 0,$$

$$\mu_1(t) \cdot C_1(t, y') = 0,$$

$$\mu_2(t) \cdot C_2(t, y') = 0.$$

La seule solution de ce système serait alors

$$\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0.$$

Ce qui est impossible puisque le vecteur $(d_0, \lambda(t), \mu_1(t), \mu_2(t))$ ne s'annule jamais le long de K^* .

Les fonctions μ_1 et μ_2 sont à valeurs négatives ou nulles ; ce résultat se déduit du théorème de CLEBSCH. En effet le système linéaire de ce théorème s'écrit :

$$\beta - \alpha = 0$$

$$\beta - 2 z'_1 \gamma_1 = 0$$

$$-\beta - 2 z'_1 \gamma_2 = 0$$

On sait que z'_1 et z'_2 ne peuvent être nuls en même temps dans $]T_0, T_1[$. Si $C_1(t, y')$ est différent de zéro, alors μ_1 est nul puisqu'on a

$$\mu_1(t) \cdot C_1(t, y') = 0.$$

Si $C_1(t, y')$ est égal à zéro, alors z'_1 est nul ; cela résulte de la définition de la fonction z_1 . Le système linéaire précédent montre alors que β est nul ainsi que γ_2 . On peut prendre γ_1 égal à 1 et la relation de CLEBSCH s'écrit :

$$\mu_1(t) \leq 0$$

De façon analogue on montre que $\mu_2(t) \leq 0$, le long de K^* .

Remarque.

Lorsque le domaine de variation de la commande v ne dépend pas de t , les équations (VII-A,B,C,D) sont tout à fait équivalentes au principe du maximum de PONTRYAGIN. Les résultats auraient été identiques si la constante θ_0 avait été prise égale à -1. Le minimum H du problème serait alors le maximum de \mathcal{H} dans la méthode de PONTRYAGIN.

Le théorème donnant les conditions que doit vérifier toute solution au problème de BOLZA, montre que l'on pourrait aussi résoudre un problème de répartition optimale d'activité moins restreint que celui envisagé, où la répartition se ferait dans un espace à plusieurs dimension au lieu d'une dans le cas présent, où le domaine de variation des activités dépendrait non seulement de t , mais encore de l'activité déjà répartie dans l'intervalle $[T_0, t]$.

VII-5 Corollaire

I désignant un intervalle contenu dans $[T_0, T_1]$, si en tout point t appartenant à I, on a :

$$v(t) = a(t) \text{ alors } \theta_0 \varphi'_v(t, v(t)) + \theta \geq 0$$

$$= b(t) \quad " \quad \theta_0 \varphi'_v(t, v(t)) + \theta \leq 0$$

$$\in]a(t), b(t)[\quad \theta_0 \varphi'_v(t, v(t)) + \theta = 0$$

Ce corollaire résulte immédiatement des relations (VII-A, B, C) et de ce que $\mathcal{N}_1(t)$ et $\mathcal{N}_2(t)$ sont des fonctions à valeurs négatives ou nulles.

Application au cas d'une fonction $\varphi(t, v)$ convexe.

Supposons la fonction $\varphi(t, v)$ strictement convexe par rapport à v et cherchons à déterminer une fonction $v(t)$ solution du problème CI.

Nous pouvons supposer θ_0 différent de 0, s'il n'en était pas ainsi la solution serait évidente et consisterait à suivre l'une des contraintes sur tout $[T_0, T_1]$. On peut donc prendre θ_0 égal à un.

Soit $K(t, \theta)$ la fonction continue par morceaux sur
[T_0, T_1] ainsi définie :

a) si $\varphi'_v(t, a(t)) + \theta \geq 0$ alors $K(t, \theta) = a(t)$

b) si $\varphi'_v(t, b(t)) + \theta \leq 0$ " " " = $b(t)$

c) sinon $K(t, \theta)$ est l'unique racine de l'équation en v :

$$\varphi'_v(t, v) + \theta = 0$$

$$a(t) < v < b(t)$$

Cette fonction $K(t, \theta)$ vérifie les conditions nécessaires du théorème 1. Au chapitre suivant nous donnerons une condition suffisante que doit vérifier cette fonction pour être solution du problème CI.

C H A P I T R E - V I I I

M E T H O D E D I R E C T E D E R E S O L U T I O N

D U P R O B L E M E C I

VIII-1 Introduction d'un multiplicateur de Lagrange

Reprenons le problème général CI.

Déterminer $v(t)$ et M_1 solution de :

$$M_1 = \text{Inf} \left[\int_{T_0}^{T_1} \varphi(t, v(t)) dt \mid \begin{array}{l} a(t) \leq v(t) \leq b(t), \\ T_0 \leq t \leq T_1 \end{array}, \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W \right]$$

Le problème C-III suivant, lui est équivalent :

Déterminer $v(t)$ et M_2 solution de :

$$M_2 = \text{Inf} \left[\int_{T_0}^{T_1} (\Psi(t, v(t)) + \lambda v(t)) dt \mid \begin{array}{l} a(t) \leq v(t) \leq b(t), \\ T_0 \leq t \leq T_1; \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W. \end{array} \right]$$

Il est évident que toute fonction $v(t)$ solution de l'un des deux problèmes est aussi solution de l'autre et que

$$M_2 = M_1 + \lambda W$$

La fonction $v(t)$ sur $[T_0, T_1]$, solution de ce dernier problème C III dépend du paramètre λ . Désignons par $K(t, \lambda)$ la valeur de $v(t)$ pour t fixé, comprise entre $a(t)$ et $b(t)$, réalisant le minimum de

$$\Psi(t, v(t)) + \lambda v(t)$$

A une valeur du paramètre λ peuvent correspondre plusieurs valeurs $K(t, \lambda)$. Supposons qu'il existe une valeur λ_0 du paramètre λ à laquelle correspond $K(t, \lambda_0)$ telle que

$$\int_{T_0}^{T_1} K(t, \lambda_0) dt = W$$

Il est clair qu'une telle fonction est solution du problème C III puisqu'elle rend minimum l'expression

$$\int_{T_0}^{T_1} (\Psi(t, v(t)) + \lambda_0 v(t)) dt$$

et satisfait aux contraintes.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème : une condition suffisante pour qu'une fonction $v(t)$ soit solution du problème C I est qu'il existe une valeur λ_0 de λ telle que $K(t, \lambda)$, solution en v de

$$\text{Inf } (\Psi(t, v) + \lambda v) \mid a(t) \leq v \leq b(t)$$

pour t appartenant à l'intervalle $[T_0, T_1]$, vérifie la relation suivante :

$$\int_{T_0}^{T_1} K(t, \lambda) dt = W$$

VIII-2 Application au cas d'un fonction $\Psi(t, v)$ convexe.

Supposons de plus $\Psi(t, v)$ strictement convexe par rapport à v , pourvues de dérivées premières et secondes continues par rapport à t , à dérivée première continue par rapport à v . Le minimum en v de la fonction $\Psi(t, v) + \lambda v$ est alors obtenu pour :

$$K(t, \lambda) = \begin{cases} a(t) & \text{si } \Psi'_v(t, a(t)) + \lambda \geq 0 \\ b(t) & \text{si } \Psi'_v(t, b(t)) + \lambda \leq 0 \\ u & \text{si } \exists u : u \in]a(t), b(t)[, \text{ solution de} \\ & \text{l'équation } \Psi'_v(t, u) + \lambda = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Une condition suffisante pour qu'une fonction $K(t, \lambda)$, définie pour t appartenant à $[T_0, T_1]$ par

$$K(t, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} a(t) \text{ si } \Psi'_V(t, a(t)) + \lambda \geq 0 \\ b(t) \text{ si } \Psi'_V(t, b(t)) + \lambda \leq 0 \\ u \quad \text{si } \exists u : u \in]a(t), b(t)[\\ \quad \quad \quad \text{solution de } \Psi'_V(t, u) + \lambda = 0 \end{array} \right.$$

soit solution du problème est qu'il existe une valeur λ_0 de λ telle que

$$\int_{T_0}^{T_1} K(t, \lambda) dt = w$$

Remarque. Nous avons déjà montré, au chapitre précédent, que cette condition était aussi une condition nécessaire.

Posons

$$W_1 = \int_{T_0}^{T_1} a(t) dt \quad ; \quad W_2 = \int_{T_0}^{T_1} b(t) dt$$

$$\lambda_1 = - \text{Sup} (\Psi'_v(t, b(t)) \mid t \in [T_0, T_1])$$

$$\lambda_2 = - \text{Inf} (\Psi'_v(t, a(t)) \mid t \in [T_0, T_1])$$

Montrons qu'il existe une valeur unique λ_0 de λ appartenant à l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ auquel correspond une fonction unique $K(t, \lambda)$ telle que

$$\int_{T_0}^{T_1} K(t, \lambda) dt - W = 0$$

En effet, pour tout t fixé appartenant à l'intervalle $]T_0, T_1[$, $\Psi'_v(t, v) + \lambda$ est, par rapport à v , définie sur $[a(t), b(t)]$, continue, strictement croissante et à valeur dans \mathbb{R} . Par suite, $K(t, \lambda)$ est continue et strictement croissante pour λ appartenant à $[\lambda_1, \lambda_2]$ depuis W_1 jusqu'à W_2 . Posons

$$F(\lambda) = \int_{T_0}^{T_1} K(t, \lambda) dt$$

$F(\lambda)$ est donc une fonction strictement croissante de λ , dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$.

La condition énoncée dans le corollaire est une condition nécessaire pour qu'une fonction $K(t, \lambda)$ soit solution du problème C I. Nous avons montré qu'il y avait une seule fonction vérifiant cette relation et indiqué une condition suffisante pour que cette fonction soit effectivement une solution. La fonction $K(t, \lambda)$ satisfaisant cette relation est donc l'unique solution du problème.

C H A P I T R E - I X

ALGORITHME DE BELLMAN - KARUSH

IX - 1 Rappel du problème

Soient :

- $\{[a_i, A_i]\}$, $i=1, \dots, N$, une suite donnée d'intervalles telle que
 $a_i < A_i$, $i=1, \dots, N$;
- $\{f_i(x)\}$, $i=1, \dots, N$, une suite donnée de fonctions définies respectivement sur $[a_i, A_i]$, $i=1, \dots, N$;
- W un nombre donné appartenant à l'intervalle $[\sum_1^N a_i, \sum_1^N A_i]$.

Le problème consiste à déterminer le minimum M de la fonction

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_1^N f_i(x_i)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} a_i \leq x_i \leq A_i, & (i=1, \dots, N) \\ \sum_{i=1}^N x_i = W \end{cases}$$

et les systèmes de valeurs y_1, \dots, y_N des variables x_1, \dots, x_N respectivement, réalisant ce minimum.

$$\text{Posons } b_n = \sum_{k=1}^N a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n A_k, \quad n=1, \dots, N.$$

Nous avons montré que ce problème revenait à résoudre le système :

$$\begin{cases} g_1(z) = f_1(z) ; \\ g_n = \mathcal{F}(g_{n-1}, [b_{n-1}, B_{n-1}] ; f_n, [a_n, A_n]), \quad (n=2, \dots, N) ; \\ g_N(W) = M ; \end{cases}$$

puis le système :

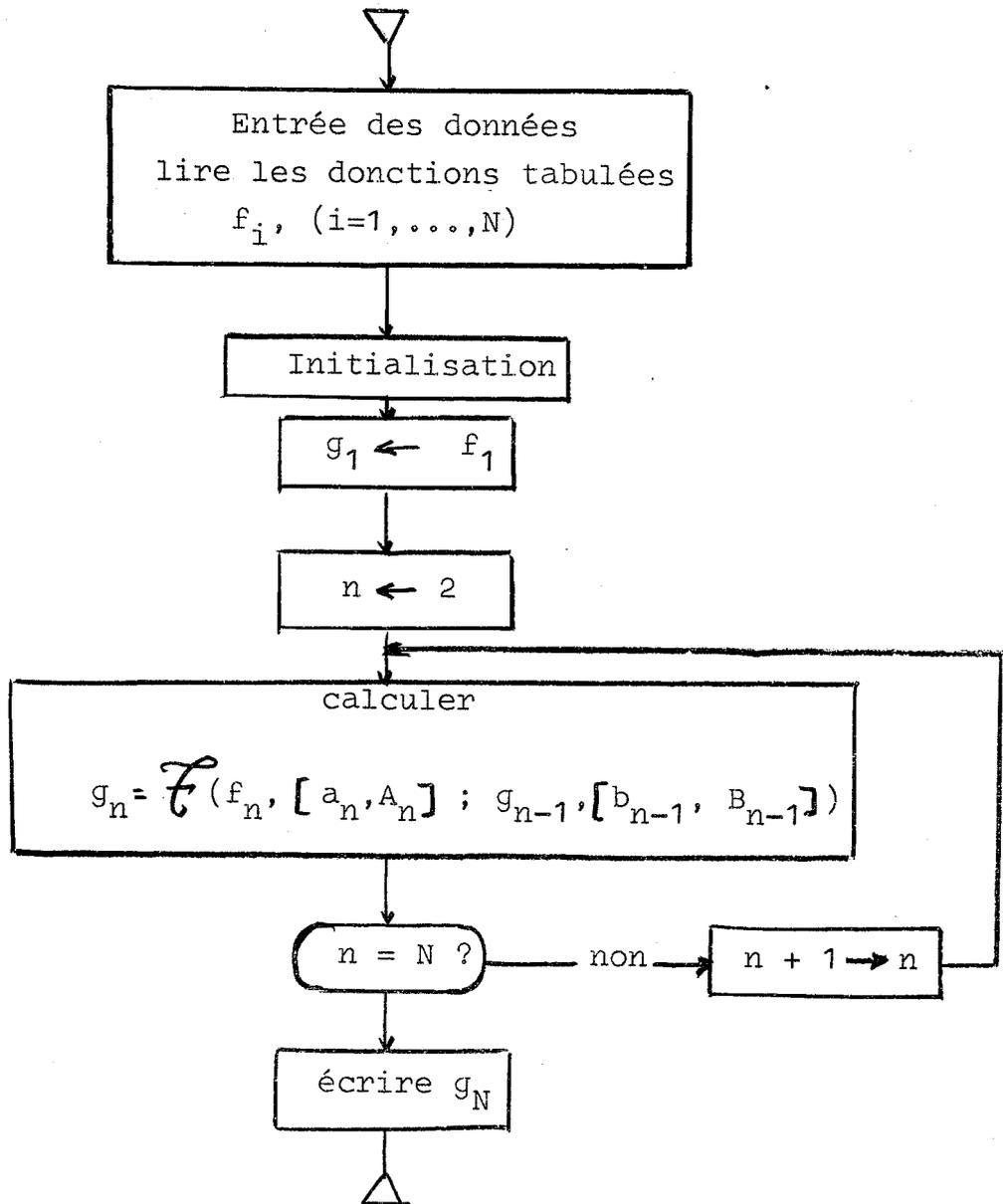
$$\begin{cases} \mathcal{Z}_n = \Psi_n(\mathcal{Z}_{n+1}), \quad (n=1, \dots, N-1) ; \\ \mathcal{Z}_N = W ; \mathcal{Z}_0 = 0 ; \end{cases}$$

De la suite \mathfrak{z}_i , ($i=0, \dots, N$) solution de ce système, on déduit immédiatement la suite $\{y_i\}$, ($i=1, \dots, N$), solution du problème :

$$y_i = \mathfrak{z}_i - \mathfrak{z}_{i-1}, \quad (i=1, \dots, N).$$

Remarque : Les valeurs de la fonction g_n , ($n=1, \dots, N$), ne nous intéressent que comme intermédiaires, à l'exception de g_N qui est calculée en dernier.

Algorithme de BELLMAN



IY-2 Calcul de g_n

Algorithme classique de BELLMAN

Soient :

$$\left. \begin{aligned} I_n(u) &= \text{Inf} (u - a_n, b_{n-1}) \\ S_n(u) &= \text{Sup} (u - A_n, b_{n-1}) \end{aligned} \right\} n = 2, \dots, N$$

Pour $n = 2, \dots, N$, la fonction g_n est définie dans l'intervalle $[b_n, B_n]$ à partir de g_{n-1} par :

$$g_n(u) = \text{Inf} [g_{n-1}(v) + f_n(u-v) \mid S_n(u) \leq v \leq I_n(u)]$$

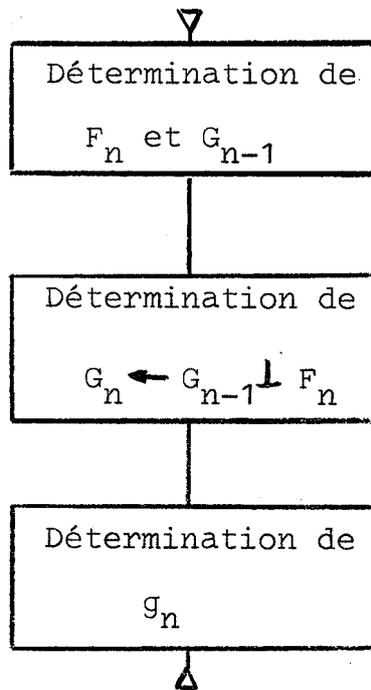
Le procédé classique permettant de déterminer la suite des fonctions g_n est le suivant :

Les fonctions $f_n, (n=1, \dots, N)$ ayant été tabulées sur un système de points à pas égaux h , on détermine, pour u variant depuis b_n jusqu'à B_n par pas h , la valeur correspondante $g_n(u)$. On procède ainsi : u étant fixé on détermine la valeur $\Psi_n(u)$ de v qui rend minimum $g_{n-1}(v) + f_n(u-v)$ en calculant la valeur de cette somme depuis $v = S_n(u)$ jusqu'à $v = I_n(u)$ par pas h . Il est nécessaire de garder en mémoire la suite $\Psi_n(u)$, $n=2, \dots, N$.

Utilisation de la méthode de Karush dans le calcul de g_n .

Supposons maintenant que les fonctions $f_n, (n=1, \dots, N)$ vérifient les hypothèses du paragraphe II-1 c'est-à-dire sont formées de segments se raccordant. Il en est de même des fonctions $g_n, (n=1, \dots, N)$.

Soient F_n une chaîne de $f_n, (n=1, \dots, N)$ et G_n une chaîne de $g_n, (n=1, \dots, N)$. Le bloc de calcul de g_n peut être remplacé par :



Ce bloc est pratiquement réduit au calcul de $G_{n-1} \perp F_n$ puisque la connaissance des points anguleux des graphes de f_n et g_{n-1} suffit à déterminer aussi bien les chaînes que les fonctions.

Soient S l'ensemble des segments de F_n et P_0, P_1, \dots, P_k , les points anguleux de cette chaîne. De même soit T l'ensemble des segments consécutifs de G_n d'extrémités Q_0, Q_1, \dots, Q_m .

La détermination de la chaîne G_n se fait en deux étapes :

- Calcul de l'enveloppe inférieure H de l'ensemble

$$\bigcup_{i=1}^k (P_i + \Gamma(P_i) \wedge S)$$

- Calcul de l'enveloppe inférieure de l'ensemble

$$H \cup \left(\bigcup_{j=1}^m (Q_j + \Gamma(Q_j) \wedge T) \right)$$

Cette division justifie la création d'une procédure appelée ADMISS que l'on appliquera successivement à ces deux ensembles.

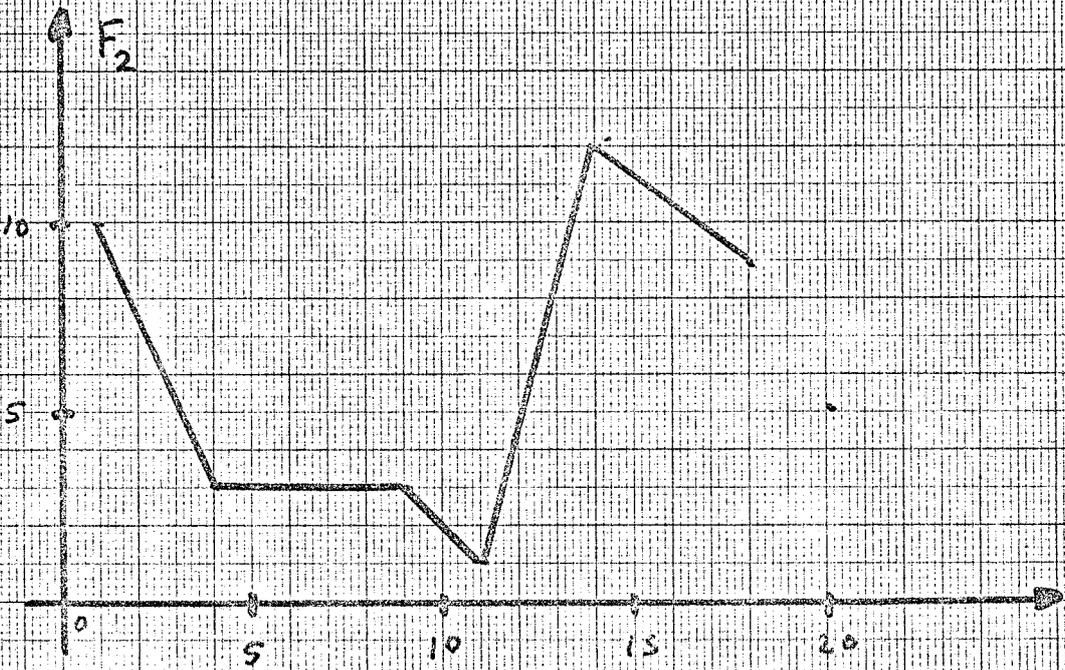
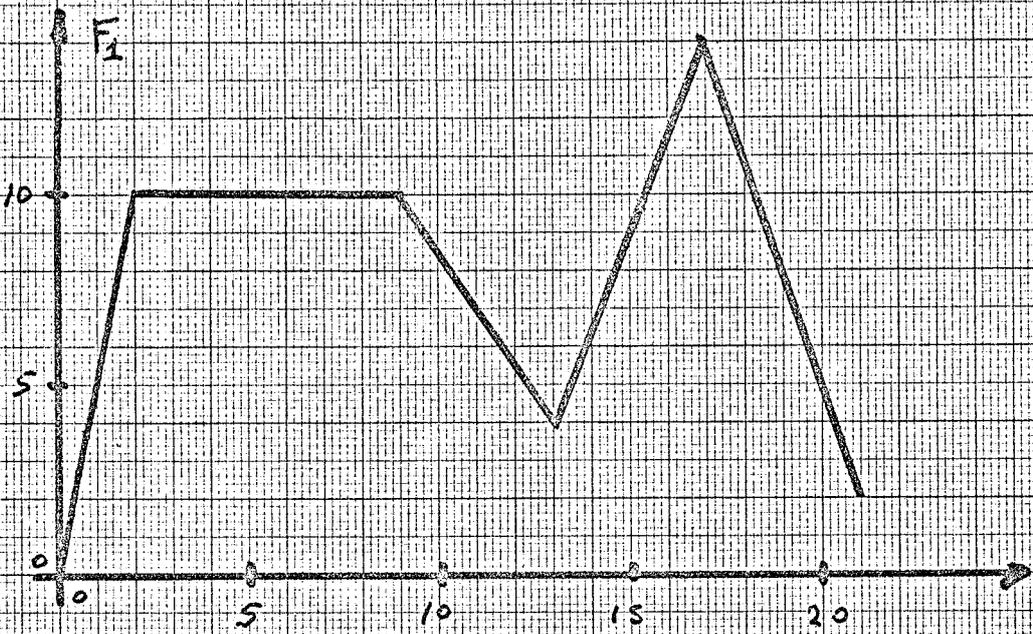
IX-3 Exemple : Soient f_1 et f_2 deux fonctions représentées par les chaînes F_1 et F_2 dont les points anguleux sont les suivants (voir graphiques)

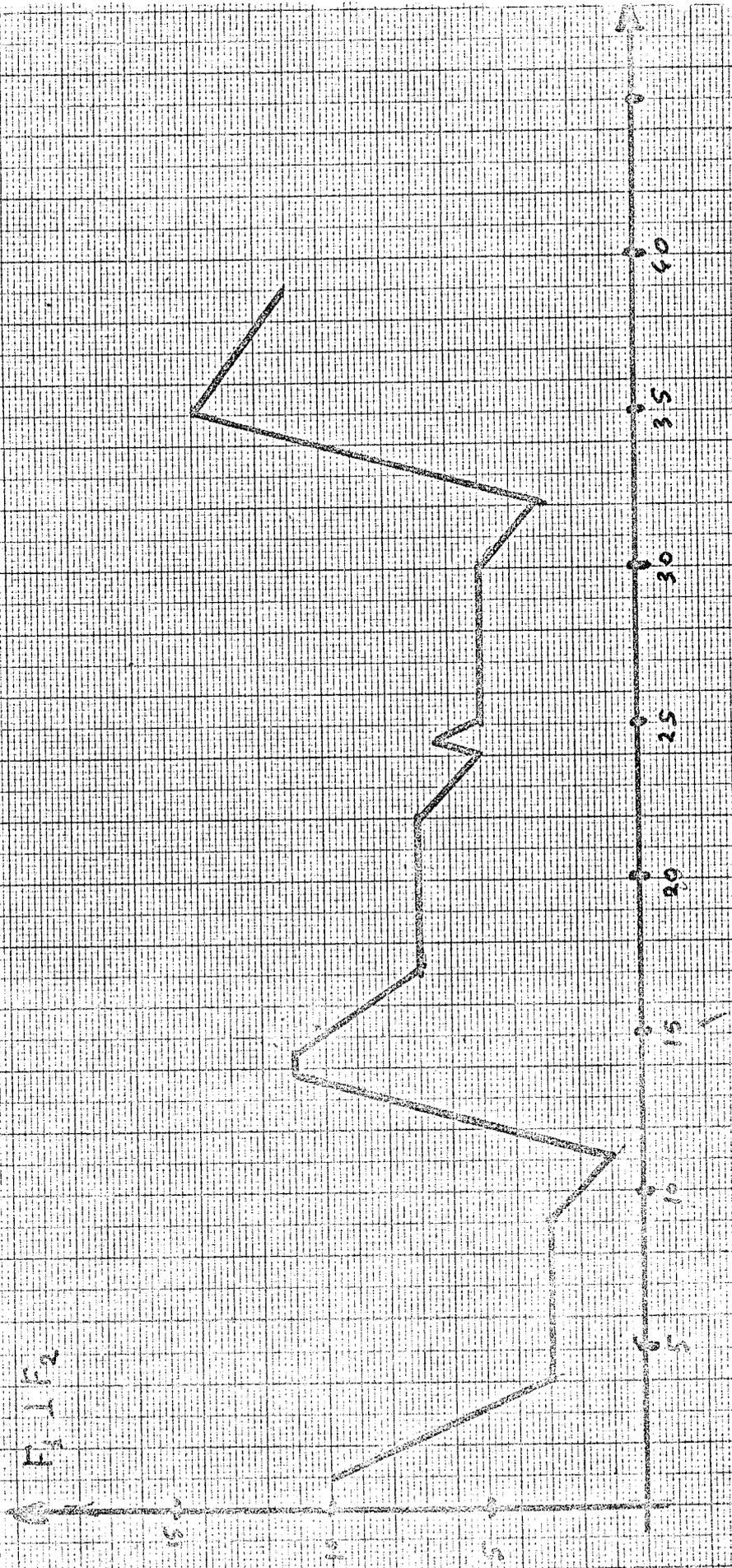
$$F_1 \begin{cases} 0 & 2 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 0 & 10 & 10 & 4 & 14 & 2 \end{cases}$$

$$F_2 \begin{cases} 1 & 4 & 9 & 11 & 14 & 18 \\ 10 & 3 & 3 & 1 & 12 & 9 \end{cases}$$

Alors $F_1 \perp F_2$ est une chaîne de la fonction g définie sur l'intervalle $[1 ; 39]$ par

$$g(u) = \text{Inf} [f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 21, 1 \leq x_2 \leq 18, x_1 + x_2 = u]$$





Les points anguleux de $F_1 \perp F_2$ sont les suivants :

Tableau IX-A

abscisses	ordonnées
1	10
4	3
9	3
11	1
13,727 273	11
14,333 333	11
17	7
22	7
24	5
24,482 758	6,206 895
25	5
30	5
32	3
35	14
39	11

Comparaison entre les deux procédés dans le cas précédent de fonctions définies par des segments se raccordant ;

Dans le premier procédé la fonction g est définie sur un système de points alors que dans le second procédé elle est définie pour tout point appartenant à l'intervalle de définition. De plus, ce procédé est théoriquement exact, les seules erreurs sont des erreurs d'arrondis ; dans l'exemple précédent, nous avons 7 chiffres exacts. Ce procédé est aussi plus rapide dans la mesure où il suffit de peu de segments pour caractériser les fonctions, mais le nombre de mémoires de manœuvres exigées est aussi plus élevé.

IX-4 Programme ALGOL correspondant

IX-4-1 Schéma général de calcul

1) Les données :

N : désigne le nombre de fonctions

$W[I]$: " " " " segments nécessaires

pour déterminer la I^{ème} fonction. I varie de 1 à N

W_{MAX} : désigne le nombre suivant :

$$\text{Sup} (W[I] | I=1, \dots, N)$$

$X[I, J]$ } : le J^{ème} segment (repéré à partir du segment le plus
 $Y[I, J]$ } à gauche de la fonction numérotée I a pour extrémités,
à gauche le point $(X[I, J-1], Y[I, J-1])$ et à droite
le point $(X[I, J], Y[I, J])$.

KPEND : désigne un nombre minorant de la pente des segments
nombre conventionnel représentant $-\infty$

2) Initialisation

$$J \leftarrow 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{RESX [I]} \leftarrow \text{X [J,I]} \\ \text{RESY [I]} \leftarrow \text{Y [J,I]} \end{array} \right\} I = 0, \dots, W[J]$$

Les tableaux à deux dimensions TOT, ACT, COUR permettent de déterminer la répartition optimale de l'activité. Chaque segment de la fonction récursive est repéré ainsi :

TOT [J,I] désigne l'abscisse du point de départ des segments numéro I.

COUR[J,I] désigne le numéro de la fonction d'où provient le segment.

ACT [J,I] désigne l'abscisse du point de départ de ce segment dans la fonction numéro COUR [J,I].

3) Calcul des fonctions récursives

Soient EXA une chaîne, représentant la fonction numéro J, définie par

$$\left. \begin{array}{l} \text{EXAX [I]} \leftarrow \text{X [J,I]} \\ \text{EXAY [I]} \leftarrow \text{Y [J,I]} \end{array} \right\} I=0, \dots, W [J]$$

et RE une chaîne, représentant la fonction récursive, définie par

$$\left. \begin{array}{l} \text{RESX [I]} \\ \text{RESY [I]} \end{array} \right\} I=0, \dots, W \text{ RES}$$

La procédure ADMISS détermine les segments contenus dans EXA admissibles par rapport aux points de concours de RE et construit l'enveloppe inférieure de ces segments. Le Ième segment de cette enveloppe est défini par :

$$[(\text{MDX [I] , MDY [I] }) ; (\text{MFX [I] , MFY [I]})], I=1, \dots, L$$

De plus, ORIG [I] représente l'abscisse du point de concours par rapport auquel le segment était admissible et PROV [I] est égal à 0, si le segment appartenait à RE, et égal à I, s'il appartenait à EXA.

Une deuxième application de la procédure ADMISS détermine les segments contenus dans RE admissibles par rapport aux points de concours de EXA et achève la construction de l'enveloppe inférieure représentant la chaîne EXA \perp RE.

4) Sortie.

Dans le dernier bloc de calcul étiqueté SORTIE, on détermine, à partir des tableaux TOT, ACT, COUR, la répartition

de l'activité REP. Cette répartition est calculée seulement pour les points anguleux de la chaîne représentant la dernière fonction récurrente. Entre deux points anguleux, on a indiqué le numéro de l'activité à faire varier pour obtenir une répartition optimale.

IX-4-1

PROGRAMME BELLMAN-KARUSH

```

'DEBUT' 'ENTIER' WMAX,N FF LIRE(N,WMAX) FF
'DEBUT' 'ENTIER' L,LM1,I,J,WRES,T,S FF
'REEL' PEND,PENG FF
'ENTIER' 'TABLEAU' W.(1FN).,
COUR.(1FN,OFWMAX*(N+3)). FF
'REEL' 'TABLEAU' X,Y.(1FN,OFWMAX)..,TOT,ACT.(1FN,OFWMAX*(N+3)).,
RESX,RESY.(OFWMAX*(N+3)). FF
'ENTIER' 'TABLEAU' COMPT.(1FN).FF

'PROCEDURE' ADMISS (XJ,YJ,WJ,J,XK,YK,WK,K,MDX,MDY,MFX,MFY,PROV,ORIG,
L,WMAX,KPEND) FF

'ENTIER' J,K,L,WMAX,WJ,WKFF
'REEL' KPEND FF
'REEL' 'TABLEAU' MDX,MDY,MFX,MFY,ORIG,XJ,YJ,XK,YKFF
'ENTIER' 'TABLEAU' PROV FF

'DEBUT' 'REEL' ADX,ADY,AFX,AFY,APEN, KPEND,RDX,RDY,AFX,RFY,MINO,RX,
MAXI,BDX,BDY,BFX,BFY,MABS,BORI,BPEN,MIR,MIBS,MAR,RY FF
'ENTIER' P,WKPI,I,M,T,BPRO,LM1FF
'BOOLEEN' PSWK FF
'REEL' 'TABLEAU' WDX,WDY,WFX,WFY.(1FWMAX).FF
RECOF 'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' WJ 'FAIRE'
'DEBUT' ADXF=XJ.(I-1).FF ADYF=YJ.(I-1). FF AFXF=XJ.(I). FF
AFYF=YJ.(I). FF
APENF=(AFY-ADY)/(AFX-ADX) FF PSWKF= 'VRAI' FF
PF=1 FF WKPIF= WK +1 FF
AUGPF 'SI' P 'INFER' WKPI 'ALORS' 'DEBUT' KPENGF=KPEND FF
KPENDF=(YK.(P).-YK.(P-1).)/(XK.(P).-XK.(P-1).)FF
'SI' (KPENG 'INFEG' APEN) 'ET' (APEN 'INFEG' KPEND) 'ALORS'
'ALLERA' RS 'SINON' 'DEBUT' PF=P+1 FF 'ALLERA' AUGP
'FIN'
'SINON' 'SI' (KPEND 'INFEG' APEN) 'ET' PSWK 'ALORS'
'DEBUT' PSWKF= 'FAUX' FF 'ALLERA' RS 'FIN'
'SINON' 'ALLERA' FINI FF
RSF MF=1FF RDXF=XK.(P-1).+ADXF RDYF=YK.(P-1).+ADYFF
RFXF=XK.(P-1).+AFXF RFYF=YK.(P-1).+AFYFF
BSF TF=1 FF
ITERTF 'SI' T=L 'ALORS' 'DEBUT' MDX.(L).F=RDX FF MDY.(L).F=
RDY FF MFX.(L).F=RFX FF
MFY.(L).F=RFY FF PROV.(L).F=J FF ORIG.(L).F=XK.(P-1).FF
LF=L+1
'FIN'
'SINON' 'DEBUT' MINOF= 'SI' MDX.(T). 'INFEG' RDX 'ALORS'
RDX 'SINON' MDX.(T). FF
MAXIF= 'SI' MFX.(T). 'INFEG' RFX 'ALORS'
MFX.(T). 'SINON' RFX FF
'SI' MINO 'SUPEG' MAXI 'ALORS' 'DEBUT' TF=T+1 FF
'ALLERA' ITERT 'FIN'

```

```

      'SINON' 'DEBUT'
      BDXF=MDX.(T). FF BDYF=MDY.(T). FF BFXF=MFX.(T). FF BFYF=
      MFY.(T). FF
      BPROF=PROV.(T). FF BORIF=ORIG.(T). FF BPENF=(BFY-BDY)/
      (BFX-BDX) FF
      MIRF=RDY+APEN*(MINO-RDX) FF MIBSF=BDY+BPEN*(MINO-BDX) FF
      MARF=RDY+APEN*(MAXI-RDX) FF MABSF=BDY+BPEN*(MAXI-BDX) FF
      'SI' RDX 'INFER' MINO 'ALORS' 'DEBUT' WDX.(M).F=RDX FF
      WDY.(M).F=RDY FF WFX.(M).F=MINO FF
      WFY.(M).F=MIR FF MF=M+1
      'FIN' FF

```

```

      'SI' (MIR 'INFEG' MIBS) 'ET' (MAR 'INFEG' MABS) 'ALORS' 'DEBUT'
      ORIG.(T).F=XK.(P-1).FF
      MDX.(T).F=MINO FF MDY.(T).F=MIR FF MFX.(T).F=MAXI FF MFY.(T).F=
      MAR FF PROV.(T).F=J FF
      'SI' BDX 'INFER' MINO 'ALORS' 'DEBUT' MDX.(L).F=BDX FF MDY.(L).F=
      BDY FF MFX.(L).F=MINO FF
      MFY.(L).F=MIBS FF PROV.(L).F=BPRO FF ORIG.(L).F=BORI FF
      LF=L+1

```

```

      'FIN' FF
      'SI' BFX 'SUPER' MAXI 'ALORS' 'DEBUT' MDX.(L).F=MAXI FF MDY.(L).
      F=MABS FF MFX.(L).F=BFX FF
      MFY.(L).F=BFY FF PROV.(L).F=BPRO FF ORIG.(L).F=BORI FF
      LF=L+1

```

'FIN'

'FIN'

```

      'SINON' 'SI' MIR 'INFER' MIBS 'ALORS' 'DEBUT'
      RXF=0.5*(-BPEN*(BFX+BDX)+BFY+BDY+APEN*(RFX+RDX)-RFY-RDY)/
      (APEN-BPEN) FF
      RYF=MIBS+BPEN*(RX-MINO) FF
      MDX.(T).F=MINO FF MDY.(T).F=MIR FF MFX.(T).F=RX FF
      MFY.(T).F=RY FF PROV.(T).F=J FF ORIG.(T).F=XK.(P-1). FF
      MDX.(L).F=RX FF MDY.(L).F=RY FF MFX.(L).F=BFX FF
      MFY.(L).F=BFY FF PROV.(L).F=BPRO FF
      ORIG.(L).F=BORI FF LF=L+1 FF

```

```

      'SI' BDX 'INFER' MINO 'ALORS' 'DEBUT' MDX.(L).F=BDX FF
      MDY.(L).F=BDY FF MFX.(L).F=MINO FF
      MFY.(L).F=MIBS FF PROV.(L).F=BPRO FF ORIG.(L).F=BORI FF
      LF=L+1

```

'FIN'

'FIN'

```

      'SINON' 'SI' MAR 'INFER' MABS 'ALORS'
      'DEBUT' RXF=0.5*(-BPEN*(BFX+BDX)+BFY+BDY+APEN*(RFX+RDX)-
      RFY-RDY)/(APEN-BPEN) FF
      RYF=MIBS+BPEN*(RX-MINO) FF
      MDX.(T).F=BDX FF MDY.(T).F=BDY FF MFX.(T).F=RX FF MFY.(T).F=RY FF
      PROV.(T).F=BPRO FF
      ORIG.(T).F=BORI FF MDX.(L).F=RX FF MDY.(L).F=RY FF MFX.(L).F=
      MAXI FF MFY.(L).F=MAR FF
      PROV.(L).F=J FF ORIG.(L).F=XK.(P-1).FF LF=L+1 FF

```

```

      'SI' BFX 'SUPER' MAXI 'ALORS' 'DEBUT' MDX.(L).F=MAXI FF
      MDY.(L).F=MABS FF MFX.(L).F=BFX FF
      MFY.(L).F=BFY FF PROV.(L).F=BPRO FF ORIG.(L).F=BORI FF
      LF=L+1

```

'FIN'

'FIN' FF

```

'SI' RFX SUPER MAXI 'ALORS' 'DEBUT' WDX.(M).F=MAXI FF
WDY.(M).F=MAR FF WFX.(M).F=RFX FF
WFY.(M).F=RFY FF MF=M+1

```

```
'FIN'
```

```
'FIN'
```

```
'FIN' FF
```

```
MF=M-1 FF 'SI' M SUPEG 1 'ALORS' 'DEBUT' RDXF=WDX.(M). FF
RDYF=WDY.(M). FF RFXF=WFX.(M). FF
RFYF=WFY.(M). FF 'ALLERA' BS

```

```
'FIN' FF
```

```
PF=P+1 FF 'ALLERA' AUGP FF
```

```
FINIF
```

```
'FIN'
```

```
'FIN' FF
```

```
'PROCEDURE' RANGEMENT(MDX,MDY,MFX,MFY,ORIG,PROV,LM1)FF
```

```
'ENTIER' LM1 FF
```

```
'ENTIER' 'TABLEAU' PROV FF
```

```
'REEL' 'TABLEAU' MDX,MDY,MFX,MFY,ORIGFF
```

'COMMENTAIRE' CHAQUE SEGMENT EST REPERE PAR UN INDICE I VARIANT DE 1 A LM1. LES CARACTERISTIQUES DE CE SEGMENT SONT CONTENUES DANS LES SIX TABLEAUX PRECEDENTS. CETTE PROCEDURE CLASSE LES SEGMENTS PAR ABSCISSES EXTREMITES A GAUCHE MDX.(I). CROISSANTES.

```
'DEBUT' 'ENTIER' M,N,IP FF 'BOOLEEN' RANG FF
```

```
'REEL' IDX,IDY,IFX,IFY,IORI FF
```

```
'POUR' MF=2 'PAS' 1 'JUSQUA' LM1 'FAIRE'
```

```
'DEBUT' RANGF= 'FAUX' FF NF=M-1 FF
```

```
COMPAF 'SI' MDX.(M). INFER MDX.(N). 'ALORS' 'DEBUT'
```

```
RANGF= 'VRAI' FF NF=N-1 FF 'SI' N SUPEG 1 'ALORS' 'ALLERA'
```

```
COMPA
```

```
'FIN' FF
```

```
'SI' RANG 'ALORS' 'POUR' NF=N+1 'TANTQUE'
```

```
N INFER M 'FAIRE'
```

```
'DEBUT' IDXF=MDX.(N). FF IDYF=MDY.(N). FF
```

```
IFXF=MFX.(N). FF IFYF=MFY.(N). FF
```

```
IORIF=ORIG.(N). FF IPF=PROV.(N). FF
```

```
MDX.(N).F=MDX.(M). FF MDY.(N).F=MDY.(M). FF
```

```
MFX.(N).F=MFX.(M). FF
```

```
MFY.(N).F=MFY.(M). FF ORIG.(N).F=ORIG.(M). FF
```

```
PROV.(N).F=PROV.(M). FF
```

```
MDX.(M).F=IDX FF MDY.(M).F=IDY FF MFX.(M).F=IFX FF
```

```
MFY.(M).F=IFY FF
```

```
ORIG.(M).F=IORI FF PROV.(M).F=IP FF
```

```
'FIN'
```

```
'FIN'
```

```
'FIN' FF
```

```

'PROCEDURE' LECTU(A,B,W,N) FF
  'ENTIER' N FF 'ENTIER' 'TABLEAU' W FF
  'REEL' 'TABLEAU' A,B FF
  'DEBUT' 'ENTIER' I,J FF
  'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' LIRE(W.(I).) FF
    'POUR' JF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
      'POUR' IF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' W.(J). 'FAIRE'
        LIRE(A.(J,I).,B.(J,I).)
    'FIN' FF

```

PROGRAMME PRINCIPAL F

```

LECTU(X,Y,W,N) FF
LIRE(KPEND) FF
WRESF=W.(1). FF
'POUR' IF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' WRES 'FAIRE' 'DEBUT'
RESX.(1). F= X.(1,I). FF RESY.(1). F= Y.(1,I). 'FIN' FF
'POUR' JF=2 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT' 'ENTIER' WJ FF
'REEL' 'TABLEAU' EXAX,EXAY.(OFWMAX). ,
  MDX,MDY,MFX,MFY,ORIG.(1FWMAX*(N+3)).FF
'ENTIER' 'TABLEAU' PROV.(OFWMAX*(N+3)). FF
  WJF=W.(J). FF
  'POUR' IF=0 'PAS' 1 'JUSQUA' WJ 'FAIRE'
    'DEBUT' EXAX.(I).F=X.(J,I). FF EXAY.(I).F=Y.(J,I). 'FIN' FF
LF=1 FF
ADMISS(EXAX,EXAY,WJ,J,RESX,RESY,WRES,0,MDX,MDY,MFX,MFY,PROV,
ORIG,L,WMAX) FF
  LM1 F= L-1 FF
ADMISS(RESX,RESY,WRES,0,EXAX,EXAY,WJ,J,MDX,MDY,MFX,MFY,PROV,
ORIG,L,WMAX) FF
  LM1F=L-1 FF
RANGEMENT (MDX,MDY,MFX,MFY,ORIG,PROV,LM1) FF
'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' LM1 'FAIRE'
'DEBUT' TOT.(J,I-1).F=MDX.(I). FF COUR.(J,I-1).F=PROV.(I). FF
ACT.(J,I-1).F=ORIG.(I).
'FIN' FF
TOT.(J,LM1).F=MFX.(LM1). FF
COUR.(J,LM1). F= PROV.(LM1). FF
COMPT.(J). F= LM1 FF
IF=1 FF TF=0 FF
PENDF=(MFY.(1).-MDY.(1).)/(MFX.(1).-MDX.(1).) FF
'POUR' SF=2 'PAS' 1 'JUSQUA' LM1 'FAIRE'
'DEBUT'
  PENG F=PEND FF
  PENDF=(MFY.(S).-MDY.(S).)/(MFX.(S).-MDX.(S).) FF
'SI' PENG'NONEG'PEND 'ALORS' 'DEBUT'
  RESX.(T).F=MDX.(I). FF RESY.(T).F=MDY.(I). FF
  TF=T+1 FF IF=S 'FIN'
'FIN' FF
RESX.(T).F=MDX.(I). FF RESY.(T).F=MDY.(I). FF WRESF=T+1 FF
RESX.(WRES).F=MFX.(LM1). FF RESY.(WRES).F=MFY.(LM1).
'FIN' FF

```

E

SORTIEF

```

ECRIRE('('COUT TOTAL')) FF
ECRIRE('('X')',('Y')) FF
  'POUR' IF= 0 'PAS' 1 'JUSQUA' WRES 'FAIRE'
    ECRIRE (RESX.(I),RESY.(I)) FF SAUTLIGNE
  'DEBUT' 'REEL' BON,REP,S,VALMAX FF 'BOOLEEN' VALFF
  'REEL' JUSQ,VALMAXI FF
  REPF= TOT.(N,0) FF
  RETOURF SF=0 FF
  ECRIRE('('REPARTITION')',REP) FF VALF='VRAI' FF
  'VALMAXI F= TOT.(N,LM1) FF
  'POUR' JF=N 'PAS' -1 'JUSQUA' 2 'FAIRE'
  'DEBUT' IF=OFF
NOUVF 'SI' REP 'SUPEG' TOT.(J,I+1). 'ALORS' 'DEBUT' IF=I+1 FF
  'SI' I=COMPT.(J). 'ALORS' VAL F= 'FAUX' 'SINON' 'ALLERA' NOUV 'FIN'
  'SINON' 'SI' VAL 'ALORS'
    'DEBUT' VALMAX F= TOT.(J,I+1). - REP FF
  'SI' VALMAX 'INFER' VALMAXI 'ALORS' VALMAXI F= VALMAX 'FIN' FF
  'SI' COUR.(J,I). 'NONEG' J 'ALORS'
    'DEBUT' BONF= ACT.(J,I). FF
  REP F= REP -BONFF
  ECRIRE(REP,('(' ACTIVITE')',J,BON) 'FIN'
    'SINON' 'SI' 'NON' VAL 'ALORS'
  'DEBUT' BONF=REP-ACT.(J,I). FF REPF= ACT.(J,I). FF
  ECRIRE(REP,('(' ACTIVITE')',J,BON) 'FIN'
    'SINON' 'DEBUT' VAL F= 'FAUX' FF
    BON F= REP - ACT.(J,I). FF REP F= ACT.(J,I). FF JUSQ F= BON+ VALMA)
  FF
  ECRIRE(REP,('(' ACTIVITE')',J,BON,('(' JUSQU A')',JUSQ)
    'FIN' FF
    S F= S + BON
    'FIN' FF
  'SI' VAL 'ALORS' 'DEBUT' IF= 0 FF
NOVF 'SI' REP 'SUPEG' X.(1,I+1). 'ALORS' 'DEBUT' IF=I+1 FF
  'SI' I 'NONEG' W.(1). 'ALORS' 'ALLERA' NOV 'FIN'
  'SINON' 'DEBUT'
    VALMAX F= X.(1,I+1) . -REP FF
  'SI' VALMAX 'INFEG' VALMAXI 'ALORS' VALMAXIF= VALMAX FF
  JUSQ F= REP + VALMAXI FF
  ECRIRE(0 ,('(' ACTIVITE')',J,REP,('(' JUSQU A')',JUSQ)
    FF 'ALLERA' TRIQ 'FIN' 'FIN' FF
  ECRIRE(0 ,('(' ACTIVITE')',1,REP) FF
  TRIQF3 F= S + VALMAXI+ REP FF
  'SI' S 'INFER' TOT.(N,LM1). 'ALORS' 'DEBUT' REP F= S FF
  'ALLERA' RETOUR 'FIN' FF
  SAUTLIGNE FF ECRIRE(S,TOT.(N,LM1).) FF
  'FIN'
  'FIN' 'FIN' FF

```

IX-4-3 Utilisation du programme ALGOL

Entrée des données

La première carte porte le nombre de fonctions et le maximum des nombres de segments nécessaires pour définir chaque fonction.

Structure de cette carte

$N ; WMAX ;$

Ensuite un paquet de N cartes ; la I ème carte du paquet porte le nombre de segments permettant de définir la I ème fonction.

I varie de 1 à N .

Structure de cette carte

$W [I] ;$

Ensuite N paquets de cartes, le I ème paquet contient $W [I] + 1$ cartes. La J ème carte du I ème paquet porte les coordonnées du $J + I$ ième point anguleux de la I ème fonction.

I varie de 1 à N et J de 0 à $W [I]$

Structure de cette carte

$X [I,J] ; Y [I,J]$

La dernière carte donnée indique un minorant des pentes des segments définissant les fonctions

Structure de cette carte

$KPEND ;$

IX-5 : Exemple

Reprenons les fonctions f_1 et f_2 de l'exemple précédent. u étant fixé, soit à déterminer x_1 , x_2 et M solutions du problème :

$$M = \text{Inf} (f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 21, 1 \leq x_2 \leq 18, x_1 + x_2 = u)$$

Les données sont alors les suivantes :

1ère carte	2 ; 5 ;
2è "	5 ;
3è "	5 ;
4è "	0 ; 0 ;
5è "	2 ; 10 ;
6è "	9 ; 10 ;
7è "	13 ; 4 ;
8è "	17 ; 14 ;
9è "	21 ; 2 ;
10è "	1 ; 10 ;
11è "	4 ; 3 ;
12è "	9 ; 3 ;
13è "	11 ; 1 ;
14è "	14 ; 12 ;
15è "	18 ; 9 ;
16è "	-30 ;

Les résultats

Dans une première phase (libellé : COUT TOTAL) est indiquée, en fonction de l'activité à répartir (1ère colonne), la valeur correspondante du minimum M (2ème colonne). Il s'agit d'une fonction continue et linéaire par morceaux, on a imprimé seulement les points anguleux.

Pour l'exemple précédent, le résultat est le tableau

IX - A précédé du libellé suivant :

COUT TOTAL

X en 1ère colonne Y en 2ème colonne

Dans une deuxième phase, en face du libellé REPARTITION est indiqué l'activité à répartir et, au dessous, la répartition optimum.

La 1ère colonne est une colonne de vérification la dernière ligne de cette colonne doit être égale à 0.

La 3ème colonne indique le secteur.

La 4ème colonne indique l'activité à allouer à ce secteur.

Si, en 5ème colonne, se trouve le libellé JUSQUA, alors en 6ème colonne est indiquée la valeur maximum à laquelle

peut être portée l'activité à répartir dans le secteur correspondant tout en ayant une répartition optimale

Résultats de l'exemple précédent : Tableau IX-B

		REPARTITION		activité : maximum à allouer	
REPARTITION	1				
O	ACTIVITE	2	1	JUSQU A	13,727 273
	ACTIVITE	1	0		
REPARTITION	13,727 273				
O	ACTIVITE	2	11	JUSQU A	3,333 333
	ACTIVITE	1	2,723 272		
REPARTITION	14,333 333				
O	ACTIVITE	2	4	JUSQU A	13
	ACTIVITE	1	10,333 333		
REPARTITION	17				
O	ACTIVITE	2	4	JUSQU A	11
	ACTIVITE	1	13		
REPARTITION	24				
O	ACTIVITE	2	11	JUSQU A	13,482 758
	ACTIVITE	1	13		
REPARTITION	24,482 758				
O	ACTIVITE	2	3,482 758	JUSQU A	18
	ACTIVITE	1	21		

a) Soit à répartir l'activité $u = 24$. On sait que l'effort correspondant, mesuré par la valeur de M correspondante (Tableau IX-A), est égal à 5. On lit sur le tableau précédent IX-B, la répartition correspondante

$$x_1 = 11$$

$$x_2 = 13$$

b) Soit à répartir l'activité $u = 5$. Par interpolation linéaire on obtient $M = 3$. La répartition correspondante est la suivante

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 5$$

C H A P I T R E - X
=====

ALGORITHME DE KARUSH SIMPLIFIE

X-1 Exposé de l'algorithme

Considérons le même problème que précédemment et supposons de plus, les fonctions f_i , ($i=1, \dots, N$), linéaires par morceaux et convexes.

Les propriétés P1 et P6 du paragraphe III-3-4, dans ce cas, conduisent à l'algorithme suivant :

Soient z un nombre donné appartenant à l'intervalle $[\sum_I^N a_i, \sum_I^N A_i]$ représentant une certaine activité et x_1, x_2, \dots, x_N une répartition optimale de cette activité. L'effort correspondant est évalué par la somme :

$$\sum_I^N f_i(x_i)$$

Désignons par J l'ensemble des indices, contenu dans l'ensemble $1, \dots, N$, tel que, pour tout j appartenant à J le point $(x_j, f_j(x_j))$ ne soit pas point extrémité à droite de la chaîne représentant la fonction f_j . Pour j appartenant à J désignons par s_j , le segment de la chaîne de f_j situé à droite du point $(x_j, f_j(x_j))$.

s étant un segment, rappelons que nous avons désigné par $\omega(s)$ la projection de ce segment sur l'axe des ordonnées et par $\alpha(s)$ la pente de ce segment.

Supposons l'ensemble J non vide et posons

$$\Delta z = \text{Inf} (\omega(s_j) \mid j \in J)$$

et soit j^* un indice appartenant à J tel que :

$$\alpha(s_{j^*}) = \text{Inf} (\alpha(s_j) \mid j \in J)$$

Alors la répartition de l'activité $z + \theta \Delta z$, où θ est un paramètre dont la valeur est comprise entre 0 et 1, peut être représentée par la suite $\{y_i\}$, $i=1, \dots, N$ ainsi définie :

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \neq j^* \\ x_i + \theta \Delta z & \text{si } i = j^* \end{cases}$$

La répartition de l'activité $z = \sum_{i=1}^N a_i$ est évidente : c'est la suite $\{a_i\}$, $i=1, \dots, N$. Par itérations successives sur W , obtenues en utilisant l'algorithme du paragraphe précédent avec $\theta = 1$, il arrive un moment où les conditions suivantes sont vérifiées :

$$z < W$$

$$z + \Delta z \geq W$$

On arrête alors l'itération et on ajuste la valeur θ de façon à vérifier la relation

$$z + \theta \Delta z = W$$

La répartition de l'activité W s'en déduit immédiatement.

X-2 Programme ALGOL correspondant

Le programme correspondant est mis sous forme de procédure.

Notations utilisées

1) Les données

N désigne le nombre de fonctions
 TOTAL " l'activité à répartir
 R[I] " le nombre de segments permettant de définir
 la fonction repérée par le numéro I. I varie de
 de 1 à N.

X [I,J] Chaque fonction f_I est repérée par une suite de segments
 Y [I,J] Le Iième segment de la fonction f_I est défini par :

$$[(X [I,J-1] , Y [I,J-1]) , (X [I,J] , Y [I,J])]$$

I désigne le numéro de la fonction et varie de 1 à N.
 J désigne le numéro du segment : les segments sont
 numérotés de gauche à droite :
 J varie de 0 à W I .

VERIFI désigne un identificateur booléen pouvant prendre les
 valeurs VRAI ou FAUX. Si VERIFI a la valeur VRAI, une
 vérification élémentaire est effectuée et permet de détecter
 deux types d'erreurs dans les données avant exécution :

- l'activité à répartir n'appartient pas au domaine

$$\left[\sum_1^N a_i , \sum_1^N A_i \right].$$

- une des fonctions au moins n'est pas convexe.

Si VERIFI a la valeur FAUX aucune vérification n'est effectuée.

2) Les résultats

ERREUR

Si VERIFI a la valeur VRAI on sort de la procédure par un ordre allera ERREUR lorsque le programme de détection d'erreur a détecté une erreur.

Cette étiquette devra figurer dans le programme principal.

COUT

désigne l'effort total de la répartition de l'activité TOTAL.

ACT [I]

A la sortie normale de la procédure ACT [I], (I=1,...,N), désigne l'activité à répartir dans le secteur I.

```
'PROCEDURE' KASI(X,Y,R,N,TOTAL,ACT,COUT,VERIFI,ERREUR) FF
  'REEL' TOTAL,COUT FF
  'ENTIER' N FF
  'REEL' 'TABLEAU' X,Y,ACT FF
  'ENTIER' 'TABLEAU' R FF
  'BOOLEEN' VERIFI FF
  'ETIQUETTE' ERREUR FF
```

'COMMENTAIRE'

CETTE PROCEDURE DETERMINE LES VALEURS ACT.(1),ACT.(2),---
ACT.(N). DES VARIABLES X1,X2,--,XN RESPECTIVEMENT
- RENDANT MINIMUM LA SOMME $F_1(X_1)+F_2(X_2)+\dots+F_N(X_N)$. CHACUNE
DES N FONCTIONS EST DEFINIE PAR DES SEGMENTS SE RACCORDANT W.(1),W.(2),
,---, W.(N). DESIGNER LE NOMBRE DE SEGMENTS PERMETTANT DE DEFINIR CHAQUE
FONCTION. LE IEME SEGMENT (REPERE A PARTIR DU SEGMENT LE PLUS A GAUCHE)
DE LA FONCTION NUMEROTEE I A POUR EXTREMITES A GAUCHE LE POINT
 $X.(I,J-1), Y.(I,J-1)$. A DROITE LE POINT $X.(I,J), Y.(I,J)$. I VARIE DE
1 A N ET J DE 0 A W.(I).

- VERIFIANT POUR $I = 1, \dots, N$ LA DOUBLE INEGALITE

$X.(I,0) \leq X.(I,W.(I))$

- TELLES QUE $X_1+X_2+\dots+X_N = \text{TOTAL}$

VERIFI PRENDRA LA VALEUR 'VRAI' SI ON DESIRE EFFECTUER QUELQUES
VERIFICATIONS ELEMENTAIRES CONCERNANT LA CONVEXITE DES N FONCTIONS OU
L'EXISTENCE D'UNE SOLUTION. SI UNE ERREUR EST DETECTEE AU COURS DE CES
VERIFICATIONS ON SORT DE LA PROCEDURE PAR UN ORDRE 'ALLERA' ERREUR. CETTE
ETIQUETTE DEVRA FIGURER DANS LE PROGRAMME PRINCIPAL.

- LA VALEUR 'FAUX' SI ON NE DESIRE PAS EFFECTUER CETTE
VERIFICATION.

APRES UNE EXECUTION NORMALE DE LA PROCEDURE COUT DESIGNER LA
SOMME DES N FONCTIONS CORRESPONDANTS AUX VALEURS ACT.(1),---,ACT.(N). FF

```
'DEBUT' 'ENTIER' I,IND ,J,WM1 FF
'REEL' PENTE,PEN,REP,BASTE,HAUTE,BAS,HAU FF
'BOOLEEN' VAL FF
'ENTIER' 'TABLEAU' G.(1FN). FF
```

'SI' VERIFI 'ALORS' 'DEBUT'

'REEL' INF,SUP FF

INFF=SUPF=0 FF

'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'

'DEBUT' INFF=INF+X.(I,0). FF SUPF=SUP+X.(I,R.(I)). 'FIN' FF

'SI' (TOTAL'SUPER'SUP)'OU' (TOTAL'INFER'INF) 'ALORS'

'ALLERA' ERREUR FF

'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' 'DEBUT'

WM1F=R.(I).-1 FF

'POUR' JF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' WM1 'FAIRE'

'SI' $(Y.(I,J)-Y.(I,J-1))/(X.(I,J)-X.(I,J-1))$ 'SUPER'

$(Y.(I,J+1)-Y.(I,J))/(X.(I,J+1)-X.(I,J))$

'ALORS' 'ALLERA' ERREUR 'FIN' FF

'FIN' FF

REPF=COUTF=0.0 FF

'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'

'DEBUT' G.(I).F=0 FF REPF=REP+X.(I,0). FF COUTF=COUT+Y.(I,0). 'FIN' FF

DEPARTF

VALF='VRAI' FF

'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'SI' G.(I). 'INFER' R.(I). 'ALORS' 'DEBUT'
'SI' VAL 'ALORS' 'DEBUT'
BASTE F=X.(I,G.(I).+1).-X.(I,G.(I).). FF
HAUTE F=Y.(I,G.(I).+1).-Y.(I,G.(I).). FF
PENTE F=HAUTE/BASTE FF
VALF='FAUX' FF INDF=I
'FIN'

'SINON' 'DEBUT'
BAS F=X.(I,G.(I).+1).-X.(I,G.(I).). FF
HAU F=Y.(I,G.(I).+1).-Y.(I,G.(I).). FF
PEN F=HAU/BAS FF
'SI' PEN 'INFER' PENTE 'ALORS' 'DEBUT'
INDF=I FF PENTE F=PEN FF HAUTE F=HAU FF
BASTE F=BAS 'FIN'
'FIN' 'FIN' FF

G.(IND).F=G.(IND).+1 FF

REPF=REP+BASTE FF

COUTF=COUT+HAUTE FF

'SI' REP 'INFER' TOTAL 'ALORS' 'ALLERA' DEPART

'SINON' 'DEBUT'

'POUR' IF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'

'SI' I 'NONEG' IND 'ALORS' ACT.(I).F=X.(I,G.(I).).
'SINON' 'DEBUT'

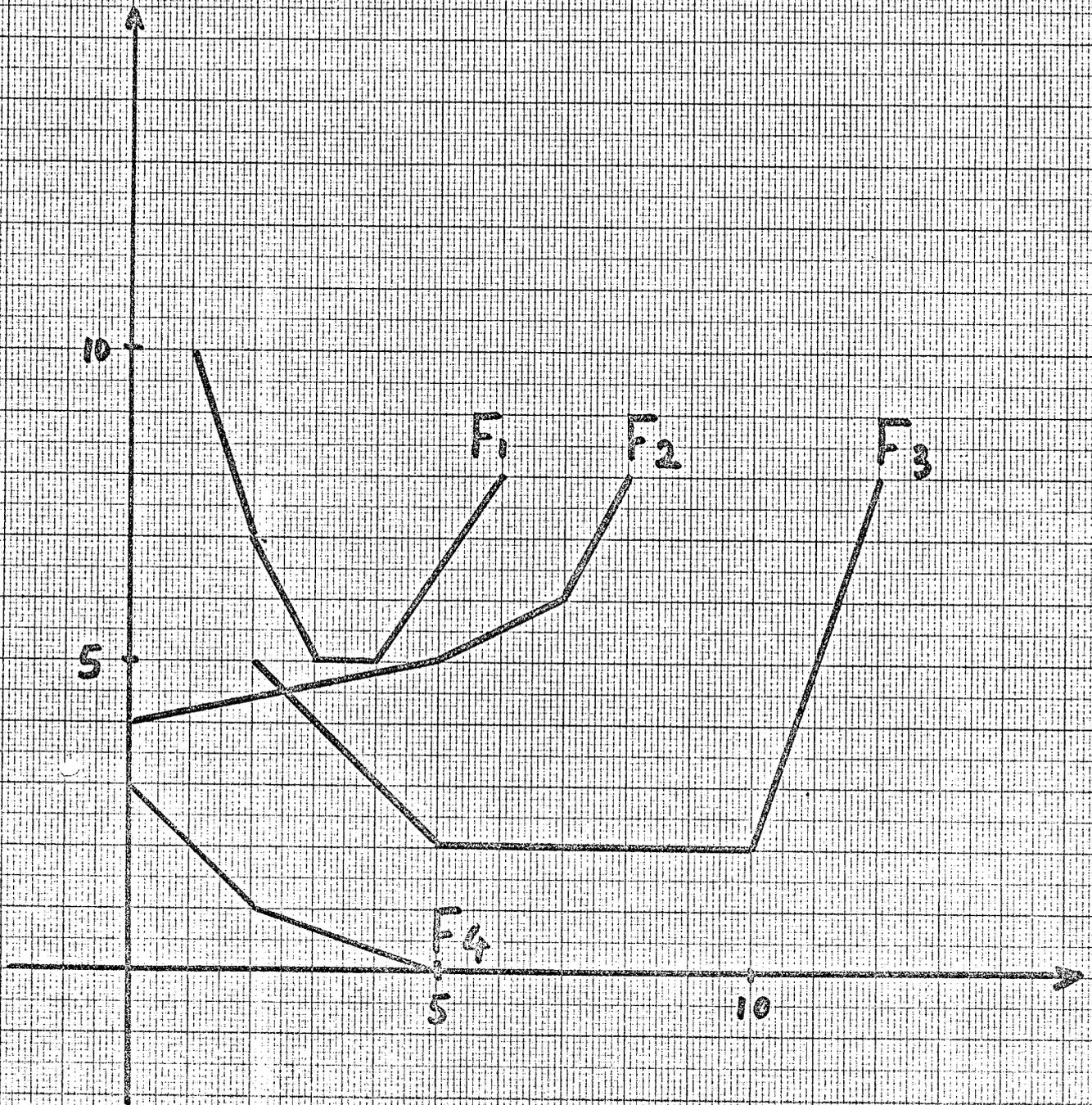
'SINON' 'DEBUT'

ACT.(I).F=TOTAL-REP+X.(IND,G.(IND).). FF

COUTF=COUT-PENTE*(REP-TOTAL)

'FIN' 'FIN' FF

'FIN' FF



X-3 Exemple 1

Soient quatre fonctions (voir graphiques) définies par le tableau suivant :

X [1, -]	:	1	2	3	4	6
Y [1, -]	:	10	7	5	5	8
<hr/>						
Y [2, -]	:	0	5	7	8	
Y [2, -]	:	4	5	6	8	
<hr/>						
X [3, -]	:	2	5	10	12	
Y [3, -]	:	5	2	2	8	
<hr/>						
X [4, -]	:	0	2	5		
Y [4, -]	:	3	1	0		

Les résultats

Soit à répartir l'activité TOTAL entre les quatre secteurs. Nous avons indiqué les résultats obtenus pour diverses valeurs de TOTAL :

TOTAL	Sect 1	Sect 2	Sect 3	Sect 4	COUT
5	3	0	2	0	17
15	4	0	6	5	11
30	6	8	11	5	21

Les résultats donnés par la procédure KASI sont exacts. Cela est dû au fait que la méthode utilisée est une méthode exacte lorsque les fonctions f_i , ($i=1, \dots, N$), sont formées de segments se raccordant, comme c'est le cas ici et que, de plus, le nombre d'opérations effectuées est faible.

C H A P I T R E - X I
=====

ALGORITHME DIRECT

XI-1 Rappel du problème

Soient $\{f_i(x)\}$, $i = 1, \dots, N$ une suite donnée de fonctions strictement convexes, à dérivées premières et secondes continues, respectivement définies sur les intervalles donnés $[a_i, A_i]$, $i = 1, \dots, N$ et W un nombre donné appartenant à l'intervalle $[\sum_{i=1}^N a_i, \sum_{i=1}^N A_i]$.

Déterminer

$$M = \text{Inf} \left(\sum_{i=1}^N f_i(u_i) \mid u_i \in [a_i, A_i], i=1, \dots, N; \sum_{i=1}^N u_i = W \right)$$

et les systèmes de valeurs $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$ des variables $\{u_i\}$, $i=1, \dots, N$ respectivement, réalisant ce minimum.

Théorème

Une condition suffisante pour qu'une suite $\{x_i\}$, $i=1, \dots, N$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i \leq x_i \leq A_i, \quad i=1, \dots, N \\ \sum_{i=1}^N x_i = W \end{array} \right.$$

soit solution du problème est qu'il existe une valeur λ_0 telle que, pour $i = 1, \dots, N$, on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_i(x_i) \geq \lambda_0 \quad \text{si } x_i = a_i, \\ f'_i(x_i) \leq \lambda_0 \quad \text{si } x_i = A_i, \\ f'_i(x_i) = \lambda_0 \quad \text{si } x_i \in]a_i, A_i[. \end{array} \right.$$

Nous avons de plus, montré que cette condition fournissait une seule suite solution et que cette suite était l'unique solution du problème.

XI-2 Approche numérique du problème

Posons :

$$W1 = \sum_1^N a_i ; \quad W2 = \sum_I^N A_i ;$$

$$\lambda_1 = \text{Inf} (f'_i(a_i) \mid i=1, \dots, N) ;$$

$$\lambda_2 = \text{Sup} (f'_i(A_i) \mid i=1, \dots, N) ;$$

et désignons par $K_i(\lambda)$ la suite telle que

$$K_i(\lambda) = \begin{cases} a_i & \text{si } f'_i(a_i) \geq \lambda \\ A_i & \text{si } f'_i(A_i) \leq \lambda \\ x_i & \text{si } f'_i(x_i) = \lambda \end{cases}$$

La méthode numérique de résolution du problème est alors la suivante : ajuster la valeur de λ de façon à vérifier la relation :

$$\sum_1^N K_i(\lambda) - W = 0$$

On sait que pour W appartenant à l'intervalle $[w_1, w_2]$ le problème a une solution et que pour λ appartenant à $[\lambda_1, \lambda_2]$ la fonction $\sum_{i=1}^N K_i(\lambda) - W$ ne s'annule qu'une fois.

XI-3 Programme ALGOL correspondant

Ce programme est mis sous forme de procédure.

XI-3-1 Notations utilisées :

Les données :

N désigne le nombre de fonctions ;
 W " l'activité à répartir ;
 $DF(I, X)$ " la dérivée par rapport à X de la fonction numérotée I . I varie de 1 à N et X appartient à l'intervalle de définition de la fonction numérotée I , c'est-à-dire a_I, A_I ;
 $AV[I]$ désigne le nombre $a_I, I=1, \dots, N$;
 $AP[I]$ " " " $A_I, I=1, \dots, N$;

ETAI
ETA sont des paramètres de précision
EPSI
EPS

Les résultats

PAS DE RACINE On sort de la procédure par un ordre allera
PAS DE RACINE dans les cas suivants :

- la fonction $f'_i(x)$, n'est pas strictement convexe
pour x appartenant à a_i, A_i ;

$$- \sum_{\dagger}^N K_i(\lambda_1) - W \text{ et } \sum_{\dagger}^N K_i(\lambda_2) - W, \text{ sont de}$$

même signe. Ce cas se produit, en particulier
si W n'appartient pas à l'intervalle $[W_1, W_2]$

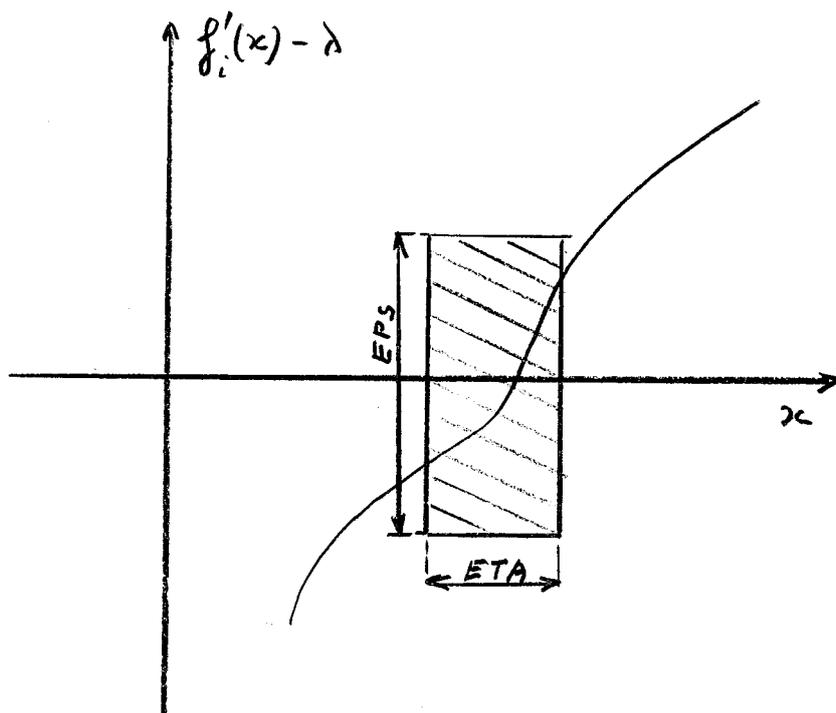
U A la fin de la procédure $U[I], I=1, \dots, N$, désigne
l'activité à répartir dans le secteur I .

XI-3-2 Signification des paramètres de précision

Détermination de $K_i(\lambda)$ solution en x l'équation
 $f'_i(x) - \lambda = 0, i=1, \dots, N$

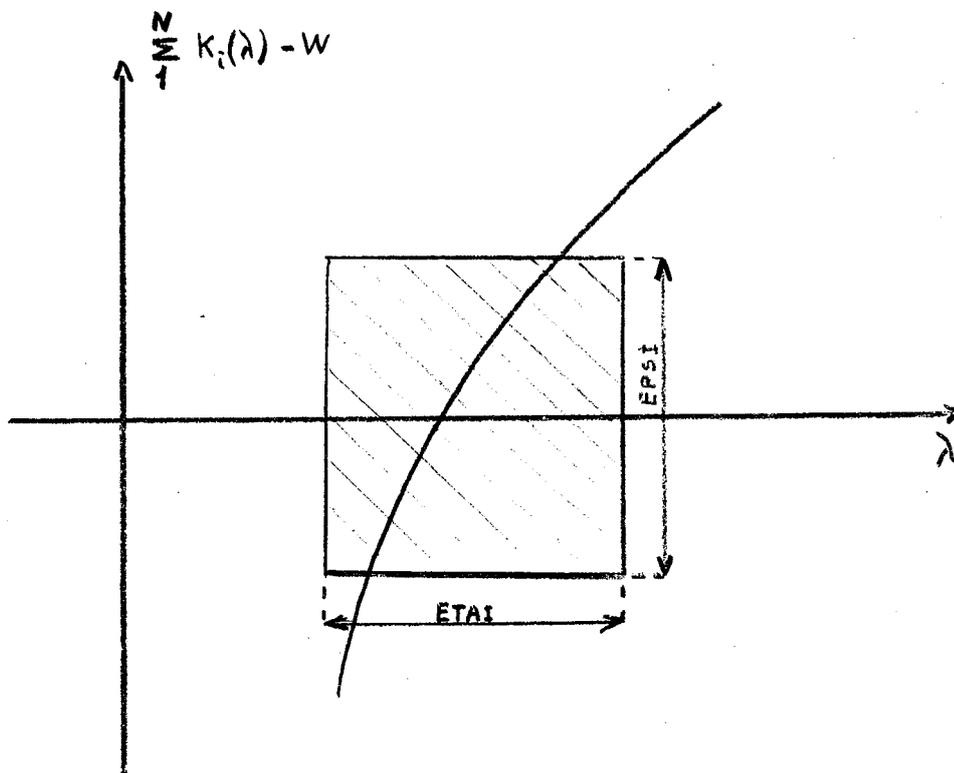
Dans la procédure BISSECTION utilisée pour résoudre cette équation ([21] BISSECTION). On partage l'intervalle de variation de x c'est-à-dire $[a_i, A_i]$ en deux parties égales, on teste celle ou la fonction change de signe et on recommence jusqu'à ce que, soit la longueur de l'intervalle est inférieure à ETA en valeur absolue, soit la fonction est inférieure à EPS en valeur absolue à l'une des extrémités de l'intervalle.

L'itération s'arrête lorsqu'on entre dans la partie hachurée.



Détermination de λ solution de l'équation $\sum_{i=1}^N K_i(\lambda) - W = 0$

De même que, dans la procédure BISSECTION, on partage l'intervalle de variation de λ , c'est-à-dire $[\lambda_1, \lambda_2]$, en deux parties égales, on teste celle où la fonction change de signe et on recommence jusqu'à ce que, soit la longueur de l'intervalle est inférieure à ETAI en valeur absolue, soit la fonction est inférieure à EPSI en valeur absolue à l'une de ses extrémités.



X-3-3

```
'PROCEDURE' DIRECTE(DF,N,AV,AP,U,W,ETAI,EPSI,ETA,EPS,PASDERACINE) FF
'REEL' W,ETAI,EPSI,ETA,EPS FF
'ENTIER' N FF
'REEL' 'TABLEAU' AV,AP,U FF
'REEL' 'PROCEDURE' DF FF
'ETIQUETTE' PASDERACINE FF
```

'COMMENTAIRE'

CETTE PROCEDURE DETERMINE LES VALEURS DE LA SUITE $U.(1).$,
 $U.(2).$,---, $U.(N).$

- RENDANT MINIMUM LA SOMME DEPUIS $I = 1$ JUSQUA $I = N$ DE
FONCTIONS DONT LES DERIVEES PAR RAPPORT A U SONT DEFINIES PAR REEL
PROCEDURE $DF(1,U)$,---, $DF(N,U)$ OU LA PREMIERE VARIABLE EST UN INDICE
PERMETTANT DE REPERER LA FONCTION ET LA DEUXIEME EST UNE VARIABLE REELLE
APPARTENANT A L'INTERVALLE D'EXTREMITES A GAUCHE $AV.(I).$ ET A DROITE
 $AP.(I).$, REPRESENTANT LE DOMAINE DE DEFINITION DE LA FONCTION NUMERO I .

- VERIFIANT POUR $I = 1$,---, N LA DOUBLE INEGALITE
 $AV.(I) \leq U.(I) \leq AP.(I)$.

- TELLE QUE LA SOMME $U.(1) + U.(2) + \dots + U.(N)$ SOIT EGALE A W

SI UNE DES CONTRAINTES N'ETAIT PAS VERIFIEE ON SORT DE LA PROCEDURE
PAR UN ORDRE 'ALLER A' PAS DE RACINE . CETTE ETIQUETTE DEVRA FIGURER
DANS LE PROGRAMME PRINCIPAL

```
'DEBUT' 'ENTIER' I FF
'REELS' L1,L2,INTER FF
```

```
L1F=DF(1,AV.(1.)) FF L2F=DF(1,AP.(1.)) FF
'POUR' IF=2 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE' 'DEBUT'
INTERF=DF(I,AV.(I.)) FF
'SI' INTER<INFER'L1 'ALORS' L1F=INTER FF
INTERF=DF(I,AP.(I.)) FF
'SI' INTER>SUPER'L2 'ALORS' L2F=INTER 'FIN' FF
```

```
'DEBUT' 'ENTIER' I,J,K FF
'REEL' G,G1,LAMBDA FF
```

```
'PROCEDURE' BISSECTION(F,Y1,Y2,EPS,ETA,X,PASDERACINE)FF
'VALEUR' Y1,Y2 FF
'REEL' 'PROCEDURE' F FF
'REEL' Y1,Y2,EPS,ETA,X FF
'ETIQUETTE' PASDERACINE FF
```

'COMMENTAIRE' CETTE PROCEDURE EST DESTINEE A TROUVER UN ZERO DE LA FONCTION F (DECLAREE REEL PROCEDURE F(X)) ENTRE Y1 ET Y2 .
CALCUL DE F(Y1) ET DE F(Y2) .

SI L'UNE DE CES QUANTITES EST INFÉRIEURE A EPS EN VALEUR ABSOLUE LA RACINE X EST EGALE A L'ABSCISSE CORRESPONDANTE .

SINON , SI CES QUANTITES SONT DE MEME SIGNE , ON SORT DE LA PROCEDURE POUR ALLER A PASDERACINE . (CETTE ETIQUETTE DEVRA OBLIGATOIREMENT FIGURER DANS LE PROGRAMME) .

DANS LE CAS OU F(Y1) ET F(Y2) SONT DE SIGNES DIFFÉRENTS , ON PARTAGE L'INTERVALLE EN 2 PARTIES ÉGALES , ON TESTE CELLE OU LA FONCTION CHANGE DE SIGNE ET ON RECOMMENCE JUSQU'A CE QUE

SOIT LA LONGUEUR DE L'INTERVALLE EST 'INFER' ETA

SOIT LA FONCTION EST 'INFER'EPS A L'UNE DES EXTREMITES DE L'INTERVALLE .

REMARQUES F 1 - CETTE PROCEDURE EST AVANTAGEUSE DANS LE CAS OU L'ON A DEJA LOCALISE GROSSIEREMENT UN ZERO DE F .

2 - SI DANS L'INTERVALLE (Y1,Y2) ,ON A UN NOMBRE PAIR D ZEROS DE F , CETTE PROCEDURE N'EN TROUVERA AUCUN (SIGNE(F(Y1)) = SIGNE(F(Y2))) .
SORTIE VERS PASDERACINE .

3 - SI CE NOMBRE EST IMPAIR , BISSÉCTION FOURNIRA UN QUELCONQUE DE CES ZEROS FF

'DEBUT' 'ENTIER' I,J,K FF

'REEL' G,G1 FF

IF=JF= KF= 1 FF

XF= Y2 FF

ALPHA F G F= F(X) FF

'SI' ABS(G)'INFER'EPS 'ALORS' 'ALLERA' TERM FF

'SI' I=1 'ALORS' 'DEBUT' IF= 2 FF

G1F=G FF

XF= Y1 FF

'ALLERA' ALPHA

'FIN' FF

'SI' SIGN (G)= SIGN (G1) 'ALORS' 'DEBUT' 'SI' J= 1

'ALORS' 'ALLERA' PASDERACINE FF

Y2F= X FF

'ALLERA' TEST

'FIN' FF

'SI' K= 1 'ALORS' 'DEBUT' JF= KF= 2 FF

'ALLERA' MILIEU

'FIN' FF

Y1F= X FF

TEST F 'SI' ABS(Y1-Y2)'INFER'ETA 'ALORS' 'ALLERA' TERM FF

MILIEU F XF= (Y1+Y2)/2.0 FF

'ALLERA' ALPHA FF

TERM F 'FIN' PROCEDURE BISSÉCTION FF

```
PROGRAMME PRINCIPAL F
IF=JF=KF=1 FF
LAMBDAF=L2 FF

ALPHAF 'DEBUT' 'ENTIER' P FF
GF=-W FF
'POUR' PF=1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
'DEBUT' 'SI' LAMBDA'INFEQ'DF(P,AV.(P).) 'ALORS' U.(P).F=AV.(P).
'SINON' 'SI' LAMBDA'SUPEQ'DF(P,AP.(P).) 'ALORS' U.(P).F=AP.(P).
'SINON' 'DEBUT' 'REEL' SOLU FF
'REEL' 'PROCEDURE' CALDF(X) FF 'VALEUR' X FF 'REEL' X FF
CALDF F=DF(P,X)-LAMBDA FF
BISSECTION(CALDF,AV.(P).,AP.(P).,EPS,ETA,SOLU,PASDERACINE) FF
U.(P).F=SOLU
'FIN' FF
GF=G+U.(P).
'FIN' 'FIN' FF

'SI' ABS(G)'INFER'EPSI 'ALORS' 'ALLERA' TERM FF
'SI' I=1 'ALORS' 'DEBUT' IF=2 FF G1F=G FF LAMBDAF=L1 FF
'ALLERA' ALPHA 'FIN' FF
'SI' SIGN(G)=SIGN(G1) 'ALORS' 'DEBUT'
'SI' J=1 'ALORS' 'ALLERA' PAS DE RACINE FF L2F=LAMBDA FF 'ALLERA'
TEST 'FIN' FF
'SI' K=1 'ALORS' 'DEBUT' JF=KF=2 FF 'ALLERA' MILIEU 'FIN' FF
L1F=LAMBDA FF
TESTF 'SI' ABS(L1-L2)'INFER'ETAI 'ALORS' 'ALLERA' TERM FF
MILIEUF LAMBDAF=(L1+L2)/2.0 FF 'ALLERA' ALPHA FF
TERM F
'FIN' 'FIN' FF
```

XI-4 Exemple 1

$$\begin{aligned} \text{Soit } f_1(v) &= \frac{1}{2} v^2 + 1 & ; & \quad [a_1, A_1] = [-5, + 5] \\ f_2(v) &= \frac{1}{2} (v+1)^2 + 2 & ; & \quad [a_2, A_2] = [-5, 0] \\ f_3(v) &= \frac{1}{2} (v+2)^2 + 3 & ; & \quad [a_3, A_3] = [0, + 5] \\ f_4(v) &= \frac{1}{2} (v+3)^2 + 4 & ; & \quad [a_4, A_4] = [0, 10] \end{aligned}$$

Il est immédiat de déterminer les dérivées de ces fonctions

$$f'_1(v) = v$$

$$f'_2(v) = v + 1$$

$$f'_3(v) = v + 2$$

$$f'_4(v) = v + 3$$

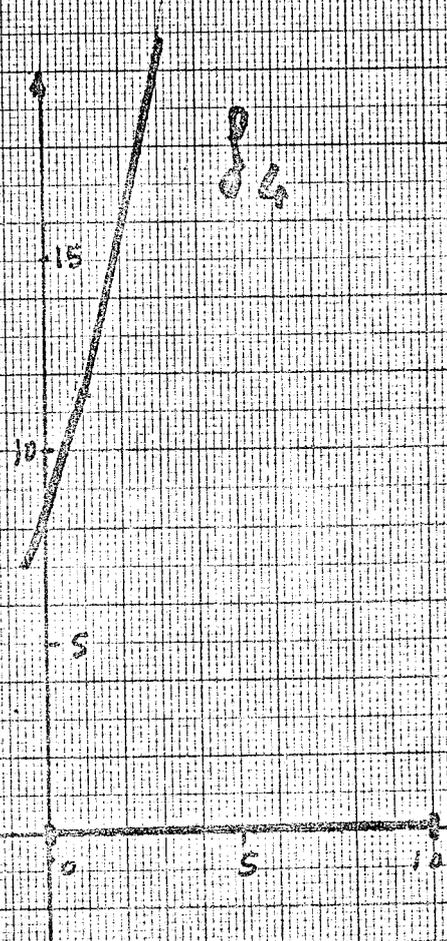
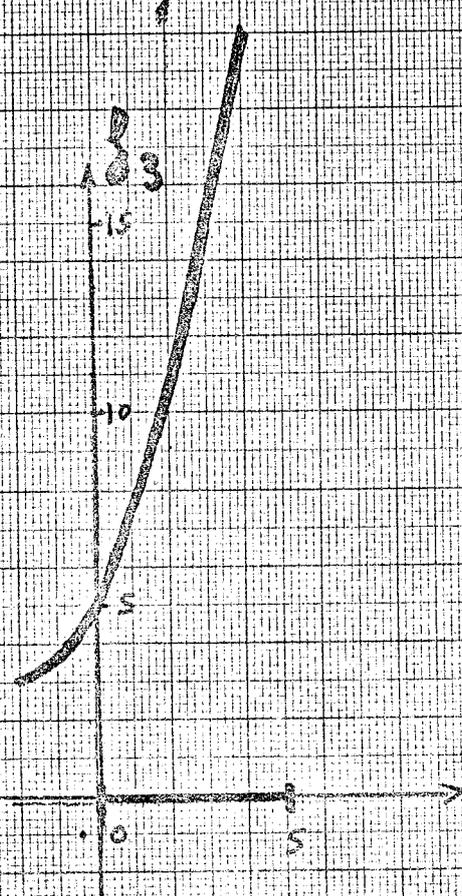
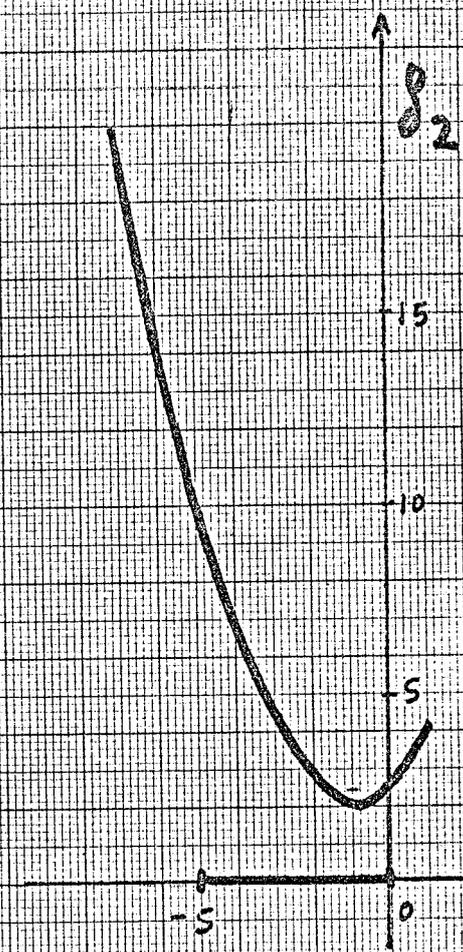
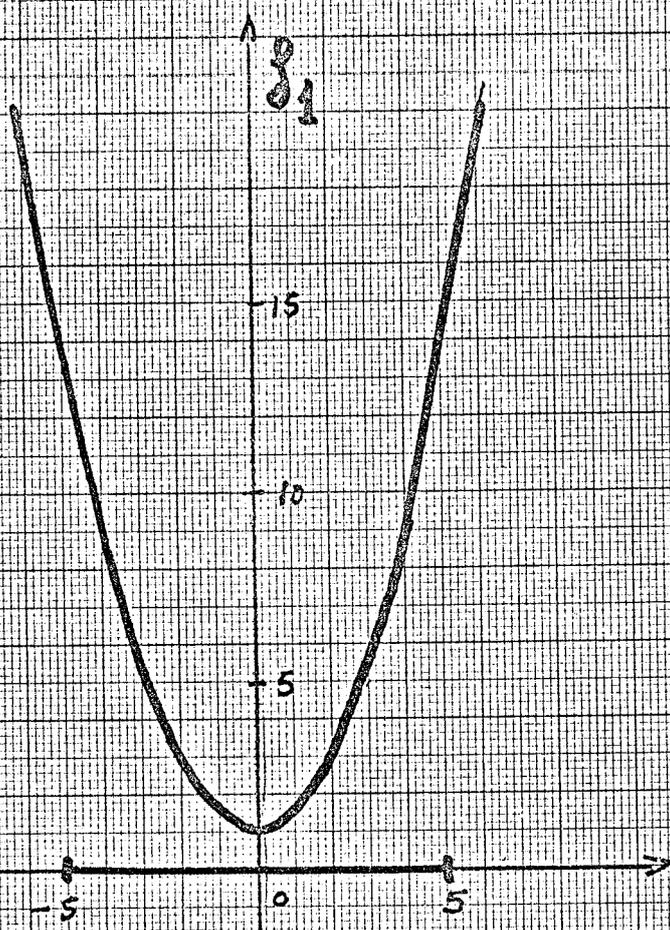
Il est, dans ce cas particulier, facile de déterminer la structure de la suite solution $K_i(\lambda)$, $i=1, \dots, 4$. (voir graphiques)

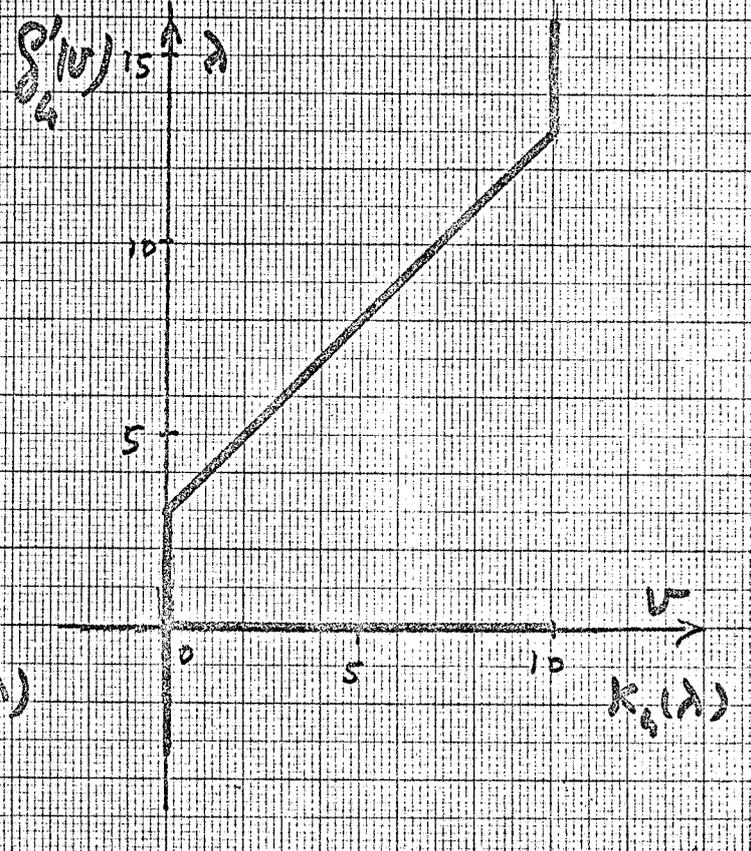
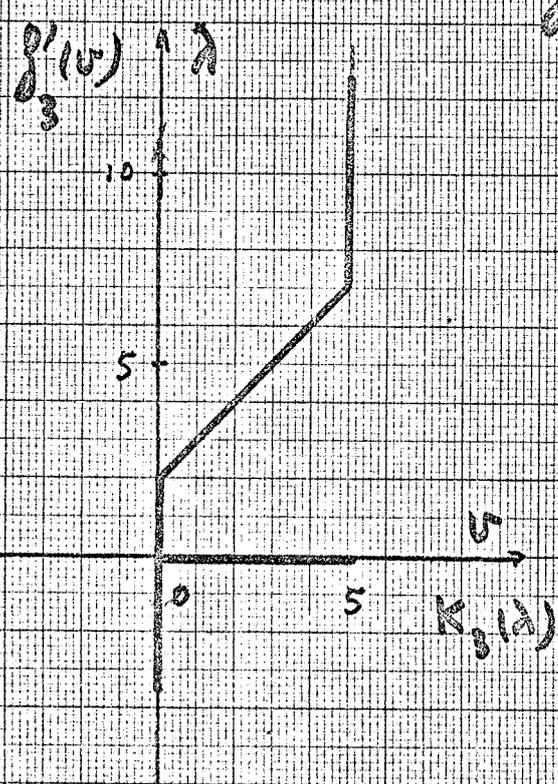
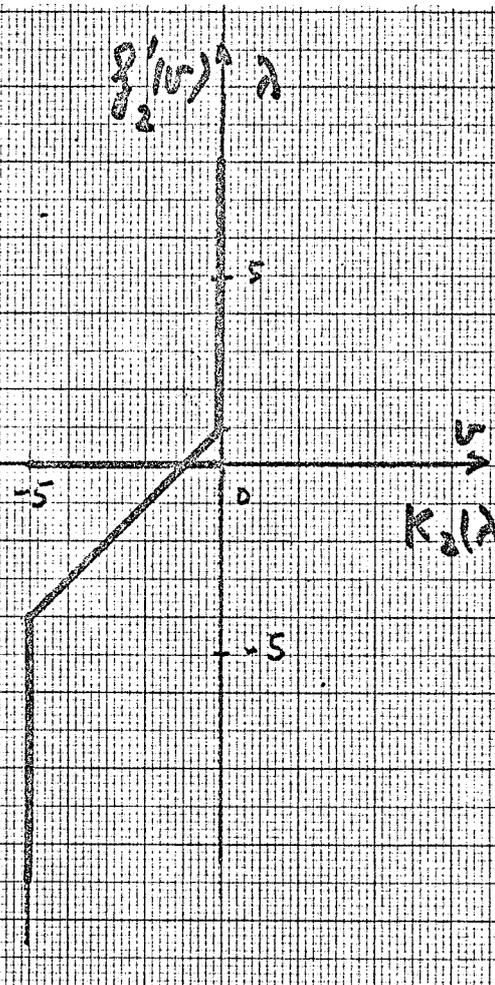
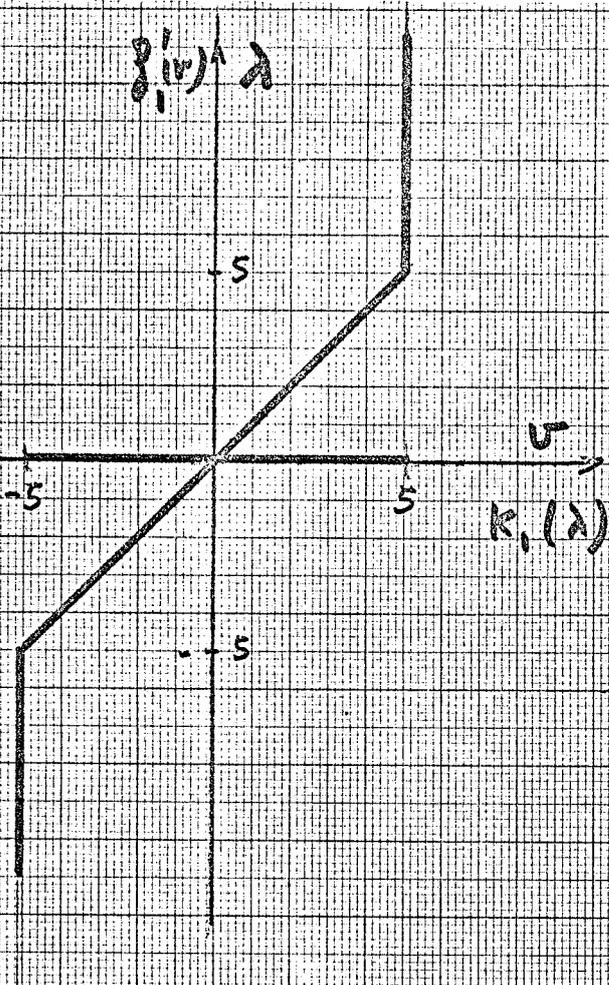
$$K_1(\lambda) = \begin{cases} 5 & \text{si} & \lambda \geq 5 \\ \lambda & \text{si} & \lambda \in]-5, +5[\\ -5 & \text{si} & \lambda \leq -5 \end{cases}$$

$$K_2(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} & \lambda \geq 1 \\ \lambda - 1 & \text{si} & \lambda \in]-4, 1[\\ -5 & \text{si} & \lambda \leq -4 \end{cases}$$

$$K_3(\lambda) = \begin{cases} 5 & \text{si} & \lambda \geq 7 \\ \lambda - 2 & \text{si} & \lambda \in]2, 7[\\ 0 & \text{si} & \lambda \leq 2 \end{cases}$$

$$K_4(\lambda) = \begin{cases} 10 & \text{si} & \lambda \geq 13 \\ \lambda - 3 & \text{si} & \lambda \in]3, 13[\\ 0 & \text{si} & \lambda \leq 3 \end{cases}$$





Prenons $ETA = EPS = 10^{-8}$
 $ETAI = EPSI = 10^{-6}$

Nous obtenons les résultats suivants

Pour $W = 0$	valeur calculée	valeur exacte
x_1	0, 500 00 48	0,5
x_2	-0, 499 999 52	-0,5
x_3	0	0
x_4	0	0
M	16, 750 000	16, 75
Pour $W = 10$		
x_1	5, 000 000 0	5
x_2	0	0
x_3	3,000 000 5	3
x_4	2,000 000 5	2
M	48,000 005	48

XI-5 Exemple 2 Influence des paramètres de précision

Soit à résoudre

$$M = \text{Inf} \left(\frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4}{4} \right) \quad \left| \begin{array}{l} -2 \leq x_1 \leq 2 \\ -1 \leq x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_3 \leq 2 \\ 1 \leq x_4 \leq 3 \end{array} \right. ; \sum_I^N x_i = 8$$

La solution analytique est la suivante :

$$x_i = 2, (i=1, \dots, 4)$$

$$M = 16$$

Les résultats numériques obtenues pour diverses valeurs des paramètres ont été résumés dans le tableau suivant. Le temps de calcul indiqué est la différence entre le temps indiqué par la procédure de gestion TEMPS ([7] BOUSSARD) avant et après exécution de la procédure DIRECTE.

EPS=ETA	EPSI=ETAI	erreur maximum sur la suite x_i solution	erreur sur M	temps en dixième de seconde
10^{-4}	10^{-2}	0,000 305 2	0,009 764	6
10^{-4}	10^{-3}	0,000 427 2	0,006 838	8
10^{-5}	10^{-3}	0,000 389 1	0,006 227	10
10^{-6}	10^{-3}	0,000 386 2	0,006 181	11
10^{-6}	10^{-4}	0,000 030 5	0,000 488	12
10^{-7}	10^{-5}	0,000 002 9	0,000 046	18
10^{-7}	10^{-5}	0,000 002 7	0,000 043	21
10^{-7}	10^{-5}	0,000 000 1	0,000 002	22
10^{-8}				cyclage

Pour obtenir des résultats numériques corrects, il semble nécessaire de prendre des valeurs EPS et ETA compatibles avec la précision de la calculatrice et tenant compte de la complexité des calculs à effectuer pour déterminer les fonction f_i , pour EPSI et ETAI, prendre des valeurs un peu supérieurs à $ETA \times N$.

C H A P I T R E XII

=====

ALGORITHME VARIATION

XII-1 Rappel du problème

Soient :

- un intervalle donné $[T_0, T_1]$, T_0 étant strictement inférieur à T_1 ;
- W un nombre donné ;
- $\Psi(t, v)$ une fonction donnée à valeurs réelles, pourvues de dérivées premières et secondes continues par rapport à t et à dérivée première continue par rapport à v , strictement convexe par rapport à v (c'est-à-dire dont la dérivée par rapport à v , $\Psi'_v(t, v)$, est strictement croissante par rapport à v),

- $a(t)$ et $b(t)$ deux fonctions données, à valeurs réelles, continues et pourvues de dérivées premières et secondes continues telles que $a(t)$ soit strictement inférieure à $b(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $]T_0, T_1[$.

Déterminer la ou les fonctions v sur l'intervalle $[T_0, T_1]$ telles que :

- 1) $v(t)$ soit continue par morceaux, c'est-à-dire n'ait qu'un nombre fini de discontinuités de première espèce et qu'entre deux points de discontinuités, on ait :

$$a(t) \leq v(t) \leq b(t)$$

- 2) la relation suivante soit vérifiée

$$\int_{T_0}^{T_1} v(t) dt = W.$$

3) l'intégrale $\int_{T_0}^{T_1} \varphi(t, v) dt$ soit minimum pour les fonctions v satisfaisant à 1) et 2).

Théorème 1

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $K(t, \theta)$, à valeurs réelles, définie pour t appartenant à l'intervalle $[T_0, T_1]$ et toute valeur réelle de θ par :

$$K(t, \theta) = \begin{cases} a(t) & \text{si } \varphi'_v(t, a(t)) + \theta \geq 0 \\ b(t) & \text{si } \varphi'_v(t, b(t)) + \theta \leq 0 \\ x & \text{si } \exists x, x \in]a(t), b(t)[, \text{ solution} \\ & \text{de l'équation en } v \\ & \varphi'_v(t, v) + \theta = 0 \end{cases}$$

soit solution du problème, est qu'il existe une valeur θ_0 de θ vérifiant la relation :

$$\int_{T_0}^{T_1} K(t, \theta) dt = W$$

Posons

$$W_1 = \int_{T_0}^{T_1} a(t) dt; \quad W_2 = \int_{T_0}^{T_1} b(t) dt ;$$

$$\theta_1 = - \text{Sup} (\Psi'_v(t, b(t)) \mid t \in [T_0, T_1]) ;$$

$$\theta_2 = - \text{Inf} (\Psi'_v(t, a(t)) \mid t \in [T_0, T_1]) ;$$

Théorème 2

Si W appartient à l'intervalle $]W_1, W_2[$ alors il existe une valeur unique θ_0 de θ appartenant à l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ telle que la fonction $K(t, \theta)$ vérifie la relation :

$$\int_{T_0}^{T_1} K(t, \theta) dt = W$$

Remarque

Si W n'appartient pas à l'intervalle $[W_1, W_2]$, alors le problème n'a pas de solution.

Si W est égal à W_1 ou à W_2 la solution est soit l'arc $a(t)$, soit l'arc $b(t)$.

XII-2 Approche numérique du problème

Considérons la fonction $R(\theta)$, définie à partir de $K(t, \theta)$, pour θ appartenant à $[\theta_1, \theta_2]$, de la façon suivante :

$$R(\theta) = \int_{T_0}^{T_1} K(t, \theta) dt$$

$R(\theta)$ est une fonction continue de θ .

On se propose d'ajuster la valeur de θ , de façon à vérifier la relation :

$$R(\theta) - W = 0 .$$

On sait que dans l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ cette équation n'a qu'une seule racine. On utilisera donc, pour déterminer numériquement la valeur θ_0 de θ solution de cette équation, le procédé classique de bisection qui sera toujours convergent pourvu que W appartienne bien à l'intervalle $[W_1, W_2]$.

Schéma de calcul de la fonction $K(t, \theta)$ pour des valeurs t et θ fixées.

si $\psi'_v(t, a(t)) + \theta$ est positif, alors $K(t, \theta) = a(t)$;

si $\psi'_v(t, b(t)) + \theta$ est négatif, alors $K(t, \theta) = b(t)$;

sinon, $K(t, \theta)$ est racine de l'équation en v :

$$\psi'_v(t, v) + \theta = 0.$$

On sait que la solution de cette équation appartient à l'intervalle ouvert $]a(t), b(t)[$ et qu'elle est unique. On la détermine par la méthode de bisection :

Si l'une des valeurs $\psi'_v(t, a(t)) + \theta$ ou $\psi'_v(t, b(t)) + \theta$ est inférieure à une quantité fixée à l'avance EPS en valeur absolue, alors $K(t, \theta)$ est égale à la valeur $a(t)$ ou $b(t)$ correspondante, sinon, les quantités $\psi'_v(t, a(t)) + \theta$ et $\psi'_v(t, b(t)) + \theta$ n'étant pas de même signe puisque $\psi'_v(t, v)$ est strictement croissante et qu'il y a une racine unique dans l'intervalle $[a(t), b(t)]$, on partage cet intervalle en deux parties égales, on teste celle où la fonction $\psi'_v(t, v) + \theta$ change de signe et on recommence alors le même

processus avec l'intervalle de variation de v dans lequel la fonction change de signe jusqu'à ce que :

- soit la longueur de l'intervalle est inférieure à la quantité donnée ETA.
- soit la fonction $\Psi'_v(t, v) + \theta$ est inférieure à EPS à l'une des extrémités de l'intervalle.

Schéma de calcul de la valeur de θ comprise entre θ_1 et θ_2 pour laquelle la fonction $R(\theta) - W$ est nulle par la méthode de bisection.

On calcule successivement, pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$, les valeurs de $K(t, \theta)$, au moyen de l'algorithme précédent pour des valeurs discrètes de t depuis $t = T_0$ jusqu'à $t = T_1$ par H (ce pas est défini par $H = \frac{T_1 - T_0}{N}$ où N est un entier donné) et la valeur correspondante^N de $R(\theta)$ par intégration de $K(t, \theta)$ au moyen de la méthode des trapèzes.

Si l'une des quantités $R(\theta_1) - W$ ou $R(\theta_2) - W$ est inférieure à une valeur fixée EPSI en valeur absolue, la racine θ_0 de θ est égale à l'abscisse correspondante. Sinon, ces deux quantités devant être de signe opposé, on partage l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ en deux parties égales, on teste celle où la fonction change de signe et on recommence alors le même processus avec l'intervalle de variation de θ dans lequel $R(\theta) - W$

change de signe, jusqu'à ce que :

- soit la longueur de l'intervalle est inférieure à E_{TAI}
- soit la fonction $R(\theta) - W$ est inférieure à E_{PSI} à l'une des extrémités de l'intervalle de variation.

Remarque

La valeur $R(\theta)$, pour θ fixé, est déterminée par intégration de $K(t, \theta)$ par la méthode des trapèzes. Lorsque la fonction $K(t, \theta)$ est discontinue ou encore peu régulière cette méthode donne encore des résultats corrects à condition de prendre un pas suffisamment petit.

Ce schéma suppose aussi que l'on a déjà déterminé les VALEURS θ_1 et θ_2 . Ces calculs préliminaires peuvent être faits analytiquement si les fonctions $\psi'_v(t, v)$, $a(t)$, $b(t)$ ont des expressions analytiques simples, sinon on utilisera une méthode numérique permettant d'obtenir les quantités θ_1 et θ_2 de façon suffisamment approchée!

Notons aussi qu'à la fin du processus, on a, non seulement déterminé la valeur θ_0 de θ solution de l'équation $R(\theta) - W$ mais aussi déterminé la fonction $K(t, \theta)$ solution du problème.

XII-3 Programme ALGOL correspondant

Le programme ALGOL correspondant est mis sous forme de procédure :

Les données

DVPHI (T,V) : sous programme de calcul de $\Psi'_v(t,v)$;
A (T) : " " " " " a (t)
B (T) : " " " " " b (t)
T0 : désigne le nombre T_0
T1 : " " " T_1
N : nombre de points sur lequel est calculée la solution $v(t)$ dans l'intervalle $[T_0, T_1]$
L1 : désigne le nombre θ_1
L2 : " " " θ_2
W : activité à répartir
ETAI
EPSI paramètres de précision
ETA
EPS

Les résultats

NON EXISTE : on sort de la procédure par un ordre allera
NON EXISTE dans les cas suivants :

- $a(t) > b(t)$ pour une valeur t appartenant à $[T_0, T_1]$
- $R(\theta_1) - W$ et $R(\theta_2) - W$ sont de même signe ;
- $\Psi'_v(t, a(t)) + \theta$ et $\Psi'_v(t, b(t)) + \theta$ pour une valeur t appartenant à $[T_0, T_1]$ et une valeur θ appartenant à $[\theta_1, \theta_2]$ sont de même signe.

Ces cas se produisent, en particulier, si :

- W n'appartient pas à l'intervalle $[W_1, W_2]$;
- il y a une erreur de calcul des bornes θ_1 ou θ_2
- la fonction $\Psi'_v(t, v)$ n'est pas strictement croissante par rapport à v pour toute valeur de t appartenant à $[T_0, T_1]$; v appartenant à l'intervalle $[a(t), b(t)]$;
- $a(t)$ n'est pas inférieure à $b(t)$ dans $[T_0, T_1]$.

Après exécution de la procédure :

L_1, L_2 encadre la valeur θ_0

V : le tableau V contient les valeurs de la fonction $K(t, \theta_0)$ depuis $t = T_0$, auquel correspond $K(T_0, \theta_0) = V [1]$, jusqu'à $t = T_1$, auquel correspond $K(T_1, \theta_0) = V [P]$ par pas

$$H = \frac{T_1 - T_0}{N}$$

```

'PROCEDURE' VARIATION(DVPHI,A,B,T0,T1,W,V,P,N,L1,L2,ETAI,EPSI,
ETA,EPS,NON EXISTE) FF
'REEL' TU,T1,W,L1,L2,ETAI,EPSI,ETA,EPS FF
'ENTIER' N,P FF
'ETIQUETTE' NON EXISTE FF
'REEL' 'PROCEDURE' DVPHI,A,B FF
'REEL' 'TABLEAU' V FF

```

'COMMENTAIRE' CETTE PROCEDURE DETERMINE LES VALEURS V.(1), V.(2),...,V.(P), DEPUIS TF= T0 JUSQUA TF= T1 PAR PAS (T1-T0)/N D UNE FONCTION V(T)

1) RENDANT MINIMUM L INTEGRALE DE DE TF= T0 A TF= T1 D UNE FONCTION DE T ET V(T) DONT LA DERIVEE PAR RAPPORT A V EST DEFINIE PAR LA REEL PROCEDURE DVPHI(T,V). CETTE DERNIERE FONCTION ETANT STRICTEMENT CROISSANTE PAR RAPPORT A V .

2) VERIFIANT POUR POUTE VALEUR DE T APPARTENANT A L INTERVALLE (T0,T1) LA DOUBLE INEGALITE A(T) 'INFEG' V(T) 'INFEG' B(T) OU A(T) ET B(T) SONT DEUX FONCTIONS DEFINIES PAR REEL PROCEDURES TEL QUE A(T) 'INFER' B(T)

3) TELLE QUE L INTEGRALE DE V(T) DE TF=T0 A TF= T1 SOIT EGALE A LA QUANTITE W,

SI UNE DES CONTRAINTES N EST PAS VERIFIEE ON SORT DE LA PROCEDURE PAR UN ORDRE 'ALLERA' NON EXISTE . CETTE ETIQUETTE DEVRA FIGURER DANS LE PROGRAMME PRINCIPAL.

ETAI, EPSI, ETA, EPS SONT DES PARAMETRES AUXILIAIRES DE PRECISION. FF

```

'DEBUT' 'BOOLEEN' I,J,K FF
'REEL' LAMBDA ,ACTIV,G1,H FF
'ENTIER' PM1 FF
HF=(T1-T0)/N FF
IF=JF=KF='VRAI' FF
LAMBDAF=L2 FF
ALPHA F 'DEBUT' 'REEL' TCAL,BCAL,ACAL FF
'ENTIER' Q FF
TCALF=T0-H FF PF=0 FF
'POUR' TCALF=TCAL+H 'TANTQUE' TCAL 'INFEG' T1 'FAIRE'
'DEBUT' PF=P+1 FF
BCALF=B(TCAL) FF
ACALF=A(TCAL) FF
'SI' ACAL 'SUPER' BCAL 'ALORS' 'ALLERA' NONEXISTE FF
'SI' LAMBDA+DVPHI(TCAL,BCAL) 'INFEG' 0 'ALORS'
'DEBUT' V.(P).F=BCAL FF 'ALLERA' SUITE 'FIN' FF
'SI' LAMBDA+DVPHI(TCAL,ACAL) 'SUPEG' 0 'ALORS'
'DEBUT' V.(P).F=ACAL FF 'ALLERA' SUITE 'FIN' FF

```

```

CACINEF 'DEBUT' 'BOOLEEN' I,J,K FF
      'REEL' G,G1,SOLU FF
IF=JF=KF='VRAI' FF
SOLUF=BCAL FF
RACALPHAF GF=LAMBDA+DVPHI(TCAL,SOLU) FF
'SI' ABS(G)'INFER'EPS 'ALORS' 'ALLERA' RACTERM FF
'SI' I 'ALORS' 'DEBUT' IF='FAUX' FFG1F=G FF
SOLUF=ACAL FF 'ALLERA' RACALPHA 'FIN' FF
'SI' SIGN(G)=SIGN(G1) 'ALORS' 'DEBUT'
'SI' J 'ALORS' 'ALLERA' NON EXISTE FF
BCALF=SOLU FF 'ALLERA' RACTEST 'FIN' FF
'SI' K 'ALORS' 'DEBUT' JF=KF='FAUX' FF
'ALLERA' RACMILIEU 'FIN' FF
ACALF=SOLU FF
RACTESTF 'SI' ABS(ACAL-BCAL) 'INFER' ETA 'ALORS'
      'ALLERA' RACTERM FF
RACMILIEUF SOLUF=(ACAL+BCAL)*0.5 FF
'ALLERA' RACALPHA FF
RACTERMF V.(P).F=SOLU
'FIN' FF
SUITEF
'FIN' FF
ACTIVF=(V.(1).+V.(P).)*0.5 FF
PM1F=P-1 FF
'POUR' QF=2 'PAS' 1 'JUSQUA' PM1 'FAIRE'
ACTIVF=ACTIV+V.(Q). FF
ACTIVF=ACTIV*H -W
'FIN' FF
'SI' ABS(ACTIV)'INFER'EPSI 'ALORS' 'ALLERA' TERM FF
'SI' I 'ALORS' 'DEBUT' IF='FAUX' FFG1F=ACTIV FF
LAMBDAF=L1 FF 'ALLERA' ALPHA 'FIN' FF
'SI' SIGN(ACTIV)=SIGN(G1) 'ALORS'
'DEBUT' 'SI' J 'ALORS' 'ALLERA' NON EXISTE FF
L2F=LAMBDA FF 'ALLERA' TEST 'FIN' FF
'SI' K 'ALORS' 'DEBUT' JF=KF='FAUX' FF 'ALLERA' MILIEU 'FIN' FF
L1F=LAMBDA FF
TESTF 'SI' ABS(L1-L2)'INFER'ETA1 'ALORS' 'ALLERA' TERM FF
MILIEUF LAMBDAF=(L1+L2)*0.5 FF
      'ALLERA' ALPHA FF
TERMF
'FIN' VARIATION FF

```

XII-4 Exemple 1 Soit à déterminer $v(t)$ solution de

$$M = \text{Inf} \left(\int_1^2 (v(t))^2 - 2 v(t) \cdot t + 4 \right) dt \mid 2 \leq v(t) \leq 4, \int_1^2 v(t) dt = 2,1$$

- La solution analytique de ce problème est la suivante :

$$v(t) = \begin{cases} 2 & \text{pour } 1 \leq t \leq 1,5 \\ t + 0,5 & \text{" } 1,5 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

- solution numérique. Posons

$$\begin{aligned} \Psi(t, v) &= v^2 - 2 vt + 4 \\ a(t) &= 2 \\ b(t) &= 4 \\ T_0 &= 1 \\ T_1 &= 2 \end{aligned}$$

et donnons aux paramètres auxiliaires les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{ETAI} &= \text{EPSI} = 10^{-6} \\ \text{ETA} &= \text{EPS} = 10^{-7} \\ N &= 10 \end{aligned}$$

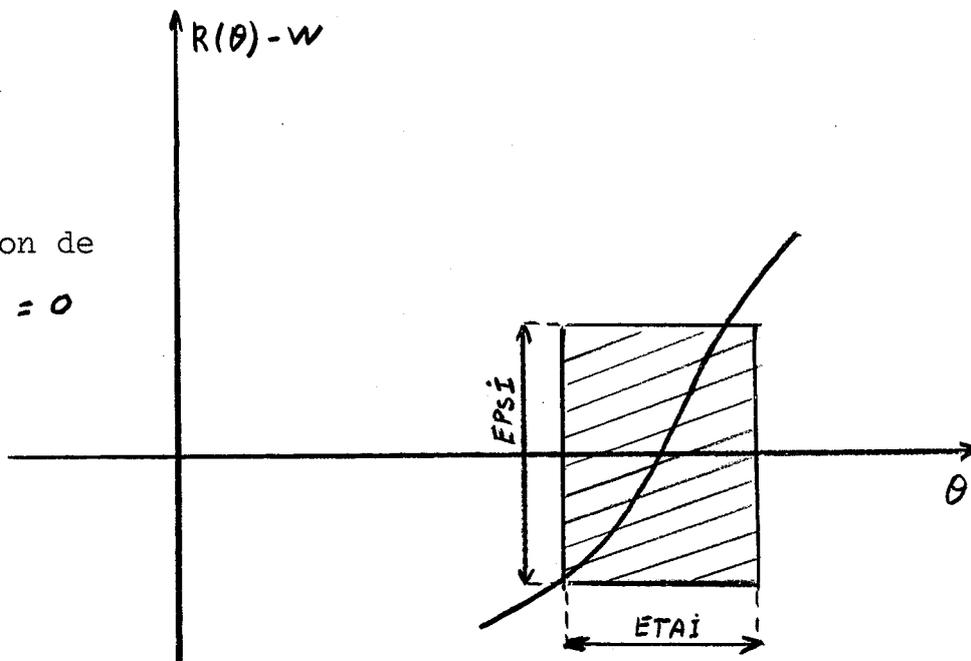
Nous obtenons les résultats suivants :

t	v (t) calculée	v (t) exacte
1	2, 000 000 0	2
1, 1	2, 000 000 0	2
1, 2	2, 000 000 0	2
1, 3	2, 000 000 0	2
1, 4	2, 000 000 0	2
1, 5	2, 000 000 0	2
1, 6	2, 099 998 0	2, 1
1, 7	2, 199 998 0	2, 2
1, 8	2, 299 998 0	2, 3
1, 9	2, 399 998 1	2, 4
2	2, 499 998 0	2, 5
M	2, 082 499 2	2, 083 333 4

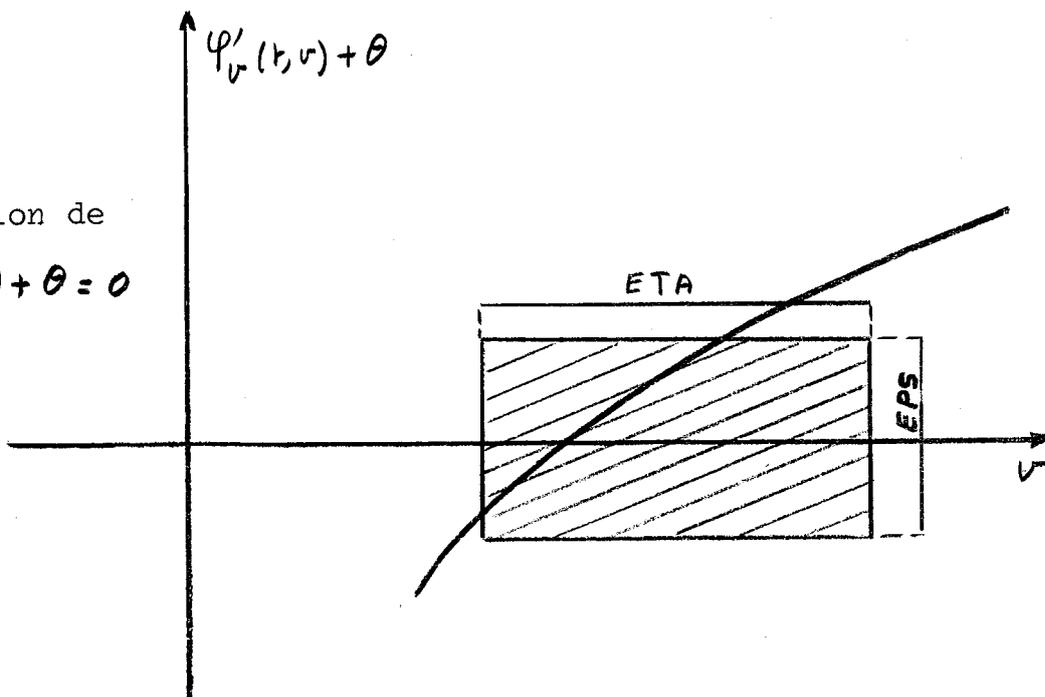
XII-5 Influence des paramètres de précision

Supposons, tout d'abord, N fixé ; la précision avec laquelle les valeurs de la fonction $K(t, \theta_0)$ sont déterminées pour $t = T_0$ jusqu'à $t = T_1$ par pas H dépend des valeurs données aux paramètres EPSI, ETAI, ETA, EPS dont les graphiques rappellent les significations.

résolution de
 $R(\theta) - w = 0$



résolution de
 $\varphi'_v(t, v) + \theta = 0$



Le critère $|R(\theta) - W| < \text{EPSI}$ permet de s'assurer que l'on répartit bien l'activité W . Pour être sûr que cette condition est bien rempli, il est nécessaire de donner des valeurs très faibles aux autres paramètres ETAI, EPS, ETA. Mais toutes ces valeurs doivent être compatibles avec les erreurs d'arrondis de la calculatrice et la taille de N caractérisant la précision de la méthode des trapèzes utilisés dans l'intégration de la fonction $K(t, \theta_0)$.

Exemple 2 : Reprenons le problème précédent et faisons varier les paramètres EPS, ETA, EPSI ETAI et N .

EPS ETA	EPSI ETAI	N	Temps de calcul en 1/10 s	erreur de commande	erreur M
10^{-4}	10^{-3}	10	9	$2 \cdot 10^{-3}$	0, 001 71
-	-	20	18	-	0, 001 13
-	-	40	35	-	0, 001 00
-	-	80	69	-	0, 000 97
-	-	160	138	-	0, 000 97
-	-	320	276	-	0, 000 97
10^{-6}	10^{-2}	10	8	$2 \cdot 10^{-2}$	0, 007 9
-	-	20	16	-	0, 008 1
-	-	40	31	-	0, 008 1
-	-	80	69	-	0, 008 1
-	-	160	137	-	0, 008 1
-	-	320	273	-	0, 008 0
10^{-6}	10^{-3}	10	12	$2 \cdot 10^{-3}$	0, 001 71
-	-	20	23	-	0, 001 11
-	-	40	45	-	0, 001 00
-	-	80	97	-	0, 000 97
-	-	160	193	-	0, 000 97
-	-	320	387	-	0, 000 97

EPS ETA	EPSI ETAI	N	Temps de calcul en 1/10 s	erreur de commande	erreur M
10^{-6}	10^{-4}	10	16	10^{-4}	0, 000 888
-	-	20	32	-	266
-	-	40	63	-	111
-	-	80	135	-	072
-	-	160	269	-	063
-	-	320	539	-	062
10^{-6}	10^{-5}	10	21	2 10^{-5}	0, 000 825
-	-	20	39	-	200
-	-	40	77	-	044
-	-	80	164	-	004
-	-	160	327	-	005
-	-	320	653	-	005
10^{-7}	10^{-6}	10	29	2 10^{-6}	0, 000 834 2
-	-	20	58	-	0, 000 208 0
-	-	40	115	-	051 4
-	-	80		-	011 5
-	-	160	406	-	001 0
-	-	320	816	-	000 1

En pratique, on prendra donc EPS et ETA compatible avec la précision de la machine et la complexité de la procédure DVPHI. Les paramètres EPSI et ETAI seront choisis un peu supérieurs à $(T_1 - T_0)$ EPS.

Si N n'est pas fixé, il sera alors prudent d'effectuer les calculs pour diverses valeurs de N, par exemple $N_0, 2 N_0, \dots$, et, ... et de voir comment évoluent les valeurs de $K(t, \theta_0)$ et l'intégrale $\int_{T_0}^{T_1} \Psi(t, K(t, \theta_0)) dt$ en fonction de N.

XII-6 Exemple 3 : Comparaison des méthodes à propos d'un exemple simple :

Déterminer $v(t)$ et M solution de

$$M = \text{Inf} \left(\frac{1}{2} \int_0^{10} (t+1) v^2(t) dt \mid \begin{array}{l} 0 \leq v(t) \leq -t + 10, \\ 0 \leq t \leq 10; \int_0^{10} v(t) dt = W \end{array} \right)$$

pour une valeur W donnée appartenant à l'intervalle $0,50$

Pour obtenir une solution analytique simple, nous prendrons W égal à $11,5 + 18 \log(4,5)$ soit $38,5738$. Les temps de calcul indiqués correspondent au temps de passage de chaque programme sur l'ordinateur IBM-7044.

Solution analytique

L'unique solution du problème est la suivante :

$$v(t) = \begin{cases} -t + 10 & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{18}{t+1} & 1 \leq t \leq 8 \\ -t + 10 & 8 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

$$M = 323,29$$

Solution numérique

version continue du problème

On utilise la procédure VARIATION pour déterminer la solution $v(t)$ depuis $t = 0$. Jusqu'à $t = 10$ par pas de $0,2$ ce qui correspond à $N = 50$. On obtient les résultats suivants, pour diverses valeurs des paramètres de contrôle :

EPS-ETA	EPSI-ETAI	Temps de calcul en 1/10 s	erreur maximum en valeur absolue sur $v(t)$	valeur de M calculée - erreur -
10^{-6}	10^{-4}	61	0,004	0,14
-	10^{-5}	65	-	-
-	10^{-4}	69	-	-
10^{-7}		cyclage		

Remarque : on aurait eu intérêt, dans ce cas à remplacer la résolution de l'équation en v , $\Psi'_v(t,v) + \theta = 0$ par la solution analytique de cette équation car la fonction réciproque de $\Psi'_v(t,v)$ par rapport à v se déterminait facilement.

version discrète du problème

On discrétise par rapport à t , soit Δ le pas.

Posons $N = \frac{T_1 - T_0}{\Delta}$. La version discrète du problème est la suivante :

déterminer la suite $\{v_i\}, i=1, \dots, N$ solution de

$$\text{Inf} \left(\frac{\Delta}{2} \sum_{i=1}^N (t_i + 1) v_i^2 \mid 0 \leq v_i \leq -t_i + 10, \right.$$

$$\left. i=1, \dots, N ; \sum_{i=1}^N v_i = \frac{W}{\Delta} \right)$$

Pour obtenir des résultats analogues au précédent prenons $\Delta = 0,2$ ce qui permet d'écrire l'expression précédente sous la forme

$$\text{Inf} \left(0,1 \sum_{i=1}^{50} ((i-0,5) \cdot 0,2 + 1) \cdot v_i^2 \mid 0 \leq v_i \leq 10 - (i-0,5) \times 0,2, \right.$$

$$\left. i=1, \dots, 50 ; \sum_{i=1}^{50} v_i = 192,867 \right)$$

Utilisation de la procédure DIRECTE

Pour diverses valeurs des paramètres de contrôle, on obtient les résultats suivants :

ETA-EPS	ETAI-EPSI	Temps de calcul en 1/10 s	erreur maximum en valeur absolue sur v(t)	valeur de M calculée - erreur -
10^{-6}	10^{-5}	72	0,002	0,06
10^{-7}	10^{-6}	79	-	-
-	10^{-7}	83	-	-

Ces deux méthodes sont bâties sur le même principe et l'erreur moyenne, de l'ordre du millièrne en valeur absolue avec laquelle est déterminée la solution dans chacun des cas est la même.

Utilisation de la procédure KASI.

Les 50 fonctions sont ici définie par des segments se raccordant, le choix en est laissé à l'utilisateur. On sait que le problème n'admet plus alors une solution unique puisque les fonctions ne sont plus strictement convexes.

Désignons par **S** le nombre total approximatif de segments utilisés pour définir les 50 fonctions, TEMPS, le temps de calcul évalué en dixièmes de secondes et par E l'erreur maximum en valeur absolue sur v(t).

S	TEMPS	E	valeur de M calculée -erreur-
600	50	0, 7	0,84
1200	115	0, 2	0,08
1500	130	0, 2	0,01
2500	210	0, 1	-

Ces résultats montrent bien qu'il est plus intéressant d'utiliser la procédure VARIATION ou la procédure DIRECTE lorsque les données se présentent sous une forme analytique. L'emploi de la méthode de BELLMAN - KARUSH n'est pas justifié ici puisqu'il s'agit de fonctions convexes. Nous l'avons tout de même fait par curiosité et avons obtenu des résultats dont la précision est comparable à ceux obtenus par la procédure KASI, mais le temps de calcul est supérieur, de plus le nombre de mémoires de manœuvre à réserver est important. Compte tenu du nombre de mémoires rapides de l'ordinateur IBM-7044 dès que le nombre total de segments servant à définir les fonctions est supérieur à 1000, il est nécessaire de redéfinir les fonction récursives par un moins grand nombre de segments à chaque étape de la récurrence.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] BARRA - BRODEAU "Cours de Programmation Dynamique
Déterministe"
Polycopié Faculté des Sciences de
GRENOBLE 1964
- [2] BELLMAN "Dynamic Programming"
Princeton University Press 1957
- [3] BELLMAN - DREYFUS "Applied Dynamic Programming"
Princeton University Press 1961
- [4] BELLMAN - KARUSH "On a new fonctionnal transform in
analysis ; the maximum transform"
Bull of American Mathematical Society
67 (1961)
- "Mathematical programming and the maximum
transform"
Journal of Society ofr Industrial and
Applied Mathematics. Sept 1962
- [5] BERKOVITZ "Variationnal methods in problem of contro
and Programming"
A Governement reserach report. Memorandum
RM 2888 PR Dec 1961. Prepared for United
States Air Force. Project RAND. The Rand
Corporation. 46 pages.

- "Variational Methods in Problem of Control and Programming"
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 3 (1961)
- "On control problem with bounded state variables"
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 3 (1962)
- [6] BLISS "Lectures on the calculus of variations"
University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1946
- [7] BOLZA "Lectures on the calculus of variation"
Chelsea Publishing Company New York
- [8] BOUSSARD "Compilateur ALGOL sur 7040/44"
Manuel d'emploi. Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble - A - 01. Juil. 1964
- [9] CHARNES - COOPER "The theory of search, optimum distribution of search effort"
Management Science 5 N° 1, (1958)
- [10] DE GUENIN "Optimum distribution of effort : an extension of the KOOPMAN basic theory"
Operations Research Jan. Feb. 1961
- "Les fondements d'une théorie de la Recherche"
Revue de Statistiques Appliquées 7, n° 4 1959
- [11] FOURGEAUD "Cours de Statistiques"
2ème année Licence-ès-Sciences Economiques"
Faculté de Droit et des Sciences Economiques de Paris C.E.F.A.S.E. 1964
- [12] HESTENES "Elements of the calculus of variations"
BECKENBACH Editor Mc Graw Hill Book Company, Inc 1956

- "Variational theory and optimal control theory, Computing methods in optimization problems"
 edited by BALAKRISHNAN and NEUSTADT
 Academic Press New York 1964
- [13] KARUSH "A general algorithm for the optimal distribution of effort"
 Manegement Science Vol. 9 N° 1 oct. 1962
- [14] KARUSH "A queing model for an inventory problem"
 Journal of the operation Research Society of America Vol. 5 (1957)
- [15] LEGALL "Les systèmes avec ou sans attentes et les processus stachastiques"
 Collection Technique et Scientifique du C.N.E.T Dunod 1962
- [16] Mc SHANE "On multipliers for LAGRANGE problems"
 American Journ. Math. Vol. 61, (1939)
- "Necessary conditions in generalized - curve problem of the calculus of variations
 Duke Math. J. Vol. 7, (1940)
- [17] PONTRYAGIN "The mathematical theory of optimal processes"
 BOLTIANSKII Interscience Publishers 1962
 KAMKRELIDZE
- [18] VALENTINE "The problem of LAGRANGE with differential in equalities as added side conditions"
 Contributions to the calculus of Variations (1933-1937) The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1937
- [19] WEINSTOCK - YOUNG "The influence of correlation of replenishment times on inventory control system" (abstract). Operation research 5,145 (1957)

- [20] YAARI "On the existence of an optimal plan in a continuous time allocation process"
Econometrica Vol. 32 N° 4, Oct 1964
- [21] BISSECTION "Procédure de la bibliothèque ALGOL de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble ,

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE -I : INTRODUCTION AU PROBLEME DE LA page
REPARTITION OPTIMALE D'UNE ACTIVITE

I-1	Généralités.....	1
I-2	Exemples.....	3
I-2-1	Constitution d'un stock en vue d'un fonc- tionnement en regime stationnaire et délai de livraison aléatoire.....	3
I-2-2	Répartition optimale d'un budget global de sondage par stratification.....	9
I-2-3	Autres exemples.....	10

CHAPITRE - II : PROBLEME GENERAL DISCRET

II-1	Enoncé du problème D \mathbf{I}	13
II-2	Enoncé du problème équivalent D \mathbf{II}	16
II-3	Méthode récursive de résolution.....	17
II-4	Introduction d'un opérateur de transition	19

CHAPITRE - III : METHODE DE BELLMAN - KARUSH

III-1	Définition des fonction f_i	20
III-2	Représentation géométrique.....	21
III-2-1	Chaîne.....	22
III-2-2	Famille de segments admissibles par rapport à un point d'une chaîne.....	24
III-2-3	Enveloppe inférieure d'une famille de segments.....	24
III-3	L'opérateur \mathcal{L} sur des fonction définies par chaînes.....	26
III-3-1	Lemme 1.....	27
III-3-2	Lemme 2.....	28
III-3-3	Théorème.....	32
III-3-4	Propriétés de l'opérateur.....	36

CHAPITRE IV : METHODE DIRECTE DE RESOLUTION DU PROBLEME

DI

IV-1	Introduction d'un multiplicateur de LAGRANGE.....	44
IV-2	Application aux fonctions convexes...	47

CHAPITRE - V : PROBLEME GENERAL CONTINU

V-1	Enoncé du problème CI.....	55
V-2	Un problème dégénéré.....	59

CHAPITRE - VI : METHODE DE PONTRYAGIN

VI-1	Application de la méthode de PONTRYAGIN	63
VI-2	Réduction du problème CI.....	65

CHAPITRE - VII : METHODE VARIATIONNELLE

VII-1	Conditions nécessaires.....	69
VII-2	Enoncé du problème de BOLZA.....	72
VII-3	Conditions nécessaires du problème de BOLZA.....	75
VII-4	Retour au problème.....	79
VII-5	Corollaire.....	85

CHAPITRE - VIII : METHODE DIRECTE DE RESOLUTION DU
PROBLEME DI

VIII-1	Introduction d'un multiplicateur de LAGRANGE.....	87
VIII-2	Application au cas d'une fonction $\Psi(t,v)$ convexe.....	88

CHAPITRE - IX : ALGORITHME DE BELLMAN -KARUSH

IX-1	Rappel du problème.....	93
IX-2	Calcul de g_n	97
IX-3	Exemple.....	100
IX-4	Programme ALGOL correspondant.....	104
IX-4-1	Schéma général de calcul.....	104
IX-4-2	Programme BELLMAN-KARUSH.....	108
IX-4-3	Utilisation du programme.....	113
IX-5	Exemple.....	114

CHAPITRE - X ALGORITHME DE KARUSH SIMPLIFIE

X-1	Exposé de l'algorithme.....	118
X-2	Programme ALGOL correspondant.....	120
X-3	Exemple.....	126

CHAPITRE - XI ALGORITHME DIRECT

XI-1	Rappel du problème.....	128
XI-2	Approche numérique du problème.....	130
XI-3	Programme ALGOL correspondant.....	131
XI-3-1	Notations utilisées.....	131
XI-3-2	Signification des paramètres de précision.....	133
XI-4	Exemple 1.....	138
XI-5	Exemple 2.....	143

CHAPITRE - XII : <u>ALGORITHME VARIATION</u>	145
XII-1 Rappel du problème.....	145
XII-2 Approche numérique du problème.....	149
XII-3 Programme ALGOL correspondant.....	153
XII-4 Exemple.....	158
XII-5 Influence des paramètres de précision	159
XII-6 Exemple; comparaison des méthodes à propos d'un exemple simple.....	165

BIBLIOGRAPHIE

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

VU

Grenoble, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'Académie de Grenoble