



HAL
open science

Modélisation morpho-fonctionnelle des réseaux d'assainissement urbain à l'aide du concept de dimension fractale

Serge Thibault

► **To cite this version:**

Serge Thibault. Modélisation morpho-fonctionnelle des réseaux d'assainissement urbain à l'aide du concept de dimension fractale. Autre. INSA de Lyon; Université Claude Bernard - Lyon I, 1987. Français. NNT: . tel-00277119

HAL Id: tel-00277119

<https://theses.hal.science/tel-00277119>

Submitted on 5 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**MODELISATION MORPHO-FONCTIONNELLE DES
RESEAUX D'ASSAINISSEMENT URBAIN
A L'AIDE DU CONCEPT
DE DIMENSION FRACTALE**

Thèse Doctorat d'Etat
S. THIBAUT

I.N.S.A.
Laboratoire Méthodes
Département Génie Civil & Urbanisme
20 avenue Albert Einstein
F-69621 VILLEURBANNE CEDEX

THESE

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON
ET L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES

par

Serge THIBAUT

Docteur-Ingénieur

**MODELISATION MORPHO-FONCTIONNELLE
DES RESEAUX D'ASSAINISSEMENT URBAIN A L'AIDE DU CONCEPT
DE DIMENSION FRACTALE**

Soutenue le 2 avril 1987 devant la Commission d'Examen

Jury MM. BOCQUILLON C.
 BOTTA H.
 CHOCAT B.
 Mme DESOLNEUX N.
 MM. DEUTSCH J.C.
 DUPUY G.
 GIELLY J.
 LE MOIGNE J.L.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

Directeur : R.HAMELIN

Chefs de Département :

C.GUILLAUD, Professeur	1° Cycle
L.CRONENBERGER, Professeur	Biochimie
N.MONGEREAU, Professeur	Génie Civil et Urbanisme
H.KLEIMANN, Professeur	Génie Electrique
A.LALLEMAND, Professeur	Génie Energétique
C.MARTY, Professeur	Génie Mécanique Construction
D.BERTHE, Professeur	Génie Mécanique Développement
J.ROBIN, Professeur	Génie Physique Matériaux
R.ARNAL, Professeur	Informatique

Professeurs :

R.ARNAL	INFORMATIQUE APPLIQUEE
J.BAHUAUD	MECANIQUE DES SOLIDES
B.BALLAND	PHYSIQUE DE LA MATIERE
D.BERTHE	MECANIQUE DES CONTACTS
M.BOIVIN	MECANIQUE DES SOLIDES
H.BOTTA	GENIE CIVIL ET URBANISME (METHODES)
G.BOULAYE	INFORMATIQUE APPLIQUEE
J.BOUSQUET	THERMOCHIMIE MINERALE
J.P.CHANTE	ELECTRONIQUE DE PUISSANCE
M.CHEVRETON	ETUDE DES MATERIAUX
B.CLAUDEL	CINETIQUE ET GENIE CHIMIQUES
L.CRONENBERGER	CHIMIE BIOLOGIQUE
J.C.CUBAUD	GENIE CIVIL ET URBANISME (BETONS STRUCTURES)
A.DOUTHEAU	CHIMIE ORGANIQUE
L.EYRAUD	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
G.FANTOZZI	GEMPPM*
J.FAVREL	INFORMATIQUE APPLIQUEE
Y.FETIVEAU	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE
P.FLEISCHMANN	GEMPPM*
L.FRECON	DEVELOPPEMENT ET LANGAGES INFORMATIQUES AVANCES
M.GERY	GENIE CIVIL ET URBANISME (EQUIPEMENT DE L'HABITAT)
G.GIMENEZ	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
P.GOBIN	GEMPPM*
M.GODET	MECANIQUE DES CONTACTS
P.GONNARD	ENERGETIQUE ET AUTOMATIQUE
R.GOUTTE	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
G.GUENIN	GEMPPM*
C.GUILLAUD	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASONS
G.GUILLOT	GEMPPM*
C.GUITTARD	DEVELOPPEMENT ET LANGAGES INFORMATIQUES AVANCES
J.L.GUYADER	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
J.JOUBERT	GENIE MECANIQUE
A.JUTARD	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
H.KLEIMANN	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRICITE

* GROUPE D'ETUDES METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

M.LALANNE	MECANIQUE DES STRUCTURES
A.LALLEMAND	ENERGETIQUE ET AUTOMATIQUE
P.LAREAL	GENIE CIVIL ET URBANISME (GEOTECHNIQUE)
A.LAUGIER	PHYSIQUE DE LA MATIERE
CH.LAUGIER	PHYSIOLOGIE ET PHARMACODYNAMIE
P.LAVIOLETTE	BIOLOGIE
C.LESUEUR	VIBRATIONS-ACOUSTIQUE
Y.MARTINEZ	INFORMATIQUE APPLIQUEE
C.MARTY	ETUDE DES PROCEDES DE FABRICATION
H.MAZILLE	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
N.MONGEREAU	GENIE CIVIL (GEOTECHNIQUE)
J.P.PASCAULT	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
G.MONNIER	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
P.NARDON	BIOLOGIE
A.NAVARRO	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT
H.PACHECO	CHIMIE BIOLOGIQUE
J.PERA	SOLIDES ET MATERIAUX MINERAUX
G.PERACHON	THERMOCHIMIE MINERALE
M.PERDRIX	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASON
J.PEREZ	GEMPPM*
E.PERNOUX	GEMPPM*
P.PINARD	PHYSIQUE DE LA MATIERE ET PHYSIQUE INDUSTRIELLE
D.PLAY	CONCEPTION ET ANALYSE DE SYSTEMES MECANIQUES
P.PREVOT	INFORMATIQUE APPLIQUEE
R.REYNAUD	ENERGETIQUE ET AUTOMATIQUE
M.RICHARD	ENERGETIQUE ET AUTOMATIQUE
E.RIEUTORD	MECANIQUE DES FLUIDES ET THERMIQUE
R.RIVIERE	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASON
J.ROBERT-BAUDOUY	MICROBIOLOGIE
J.ROBIN	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
M.ROLIN	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
J.F.SACADURA	MECANIQUE DES FLUIDES ET THERMIQUE
L.SICARD	MECANIQUE
F.STOEBER	MICROBIOLOGIE
M.THEOLIER	METALLURGIE ET TRAITEMENTS THERMIQUES
J.TUSET	SOLIDES ET MATERIAUX MINERAUX
R.UNTERREINER	TRAITEMENT DU SIGNAL ET ULTRASON
J.VERON	CHIMIE PHYSIQUE APPLIQUEE ET ENVIRONNEMENT

Directeurs de recherche C.N.R.S.:

P.CLAUDY	THERMOCHIMIE MINERALE
A.GROUILLER	CHIMIE BIOLOGIQUE
M.MURAT	SOLIDES ET MATERIAUX MINERAUX
A.NOUILHAT	PHYSIQUE DE LA MATIERE

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

- . Président de l'Université
- . 1er Vice-Président Fédération Santé
- . Coordonnateur Fédération Sciences
- . Président du Comité de Coordination des Etudes Médicales
- . Secrétaire Général

- M. le Professeur P. ZECH
- M. le Professeur L.M. PATRICOT
- M. le Professeur R. UZAN
- M. le Professeur R. MORNEX
- M. F. MARIANI

FEDERATION SANTE

UFR de Médecine GRANGE-BLANCHE

Directeur provisoire : Mme le Pr H. PELLET

UFR de Médecine ALEXIS-CARREL

Directeur prorogé : M. le Pr R. MORNEX

UFR de Médecine LYON-NORD

Directeur prorogé : Mme le Pr A. PINET

UFR de Médecine LYON-SUD

Directeur prorogé : M. le Pr J. NORMAND

UFR de PHARMACIE

Directeur prorogé : M. le Pr C.A. BIZOLLON

UFR d'ODONTOLOGIE

Directeur prorogé : M. le Pr G. LABE

INSTITUT de TECHNIQUES DE READAPTATION

Directeur provisoire : M. le Pr M. EYSSETTE

DÉPARTEMENTS FÉDÉRATION SANTÉ

Département de BIOLOGIE HUMAINE

Directeur provisoire : M. le Pr P.A. BRYON

Département d'INNOVATION et de COORDINATION PEDAGOGIQUE

Directeur provisoire : M. le Pr G. LLORCA

FEDERATION SCIENCES

Institut des SCIENCES de la MATIERE

Directeur provisoire : M. le Pr E. ELBAZ

Institut des SCIENCES DE L'INGENIERIE ET DU DEVELOPPEMENT TECHNOLOGIQUES

Directeur provisoire : M. le Pr J.N. GENCE

Institut DE CHIMIE ET BIOLOGIE MOLECULAIRE ET CELLULAIRE

Directeur provisoire : M. le Pr M. PAVANS DE CECCATTY

Institut D'ANALYSE DES SYSTEMES BIOLOGIQUES ET SOCIO-ECONOMIQUES

Directeur provisoire : M. le Pr J.M. LEGAY

Institut DES SCIENCES DE LA TERRE, DE L'OCEAN, DE L'ATMOSPHERE, DE L'ESPACE ET DE L'ENVIRONNEMENT

Directeur provisoire : M. le Pr S. ELMI

UFR DES ACTIVITES PHYSIQUES ET SPORTIVES

Directeur provisoire : M. C. JACQUEMOUD, Pr certifié d'EPS

I.U.T. A

Directeur : M. le Pr J. GIELLY

I.U.T. B

Directeur prorogé : M. le Pr P. MICHEL

DÉPARTEMENTS FÉDÉRATION SCIENCES

Département de 1er Cycle Pluridisciplinaire Sciences

Directeur provisoire : M. P. PONCET, M.C.

Départements de 2ème cycle

- Sciences de la vie et de la terre

Directeur provisoire : M. le Pr J.P. BLANCHET

- Sciences pour l'ingénieur

Directeur provisoire : M. le Pr J. DIMNET

- Sciences de l'analyse et de la matière

Directeur provisoire : Mme M. MEYER, M.C.

RESUME

Les systèmes d'assainissement urbain sont des objets qui assurent une fonction hydrologique (concentration et évacuation des eaux d'origine météorologique) à partir de réseaux de canalisations dont les structures sont en perpétuelle évolution.

Après avoir constaté que les modèles représentant l'activité hydrologique des réseaux furent basés sur une approche centrée sur le seul pôle fonctionnel et noté l'insuffisance d'une telle position, il est proposé de recentrer la modélisation de l'objet en reliant le pôle fonctionnel au pôle structurel ; liaison entre ce qu'est et ce que fait l'objet.

La théorie de la Dimension Fractale, et en particulier l'utilisation du concept de dimension d'homothétie, permettent de concevoir un modèle de structure des réseaux principalement ramifiés. La forme d'un réseau d'agglomération est alors représentée à partir de sa complète décomposition (non unique) en sous systèmes structurés par des réseaux morphologiquement quantifiés par une dimension d'homothétie statistique comprise entre un et deux.

La validation expérimentale de ce modèle enrichit son sens initial. En effet, les structures sont évolutives ; leur état est quantifié à partir d'une mesure de l'état de celui-ci relativement à l'objet fractal théorique par le biais d'un coefficient de complétude.

Le modèle étant compatible avec le fait hydrologique, est décrit le mode de formalisation d'un modèle fonctionnel qui conjugue par convolution deux distributions, l'une relative au sol et l'autre au réseau.

Le fonctionnel et le structurel sont reliés l'un à l'autre ; le modèle est globalement, un modèle morpho-fonctionnel.

SUMMARY

Urban storm sewer systems are functional systems (rainfall collection and drainage) which are structured with evolutive networks.

The modelling of the rainfall-discharge relationship does not considered the morphological aspect when networks are taken as a whole.

In order to do away and to reach a real cognitive level, we propose a structural model compatible with the hydrological activity. The conceived model is based on the fractal dimension theory and particularly the self similarity dimension.

All a local community network is able to be decomposed into elementary networks quantified with two principals parameters : the statistical self similarity dimension and a state parameter. This last is a fractionnary number when the structure is not a complete form in relation to the theoretical model.

The formalization of the hydrological model is based on a particularly relation between the distance from the outlet to the extrema points of a truncated network and its total length which depends on the fractal dimension.

A convolution of two distributions successively relatives to the area and to the network is the model of the rainfall-discharge relationship.

TABLE

Résumé	
Avant Propos	
Introduction	1

Partie A**ETAT**

1	Phénomènes	9
2	Cheminement vers la modélisation	14
2.1.	Qu'est-ce qu'un modèle	14
2.2.	Hydrologie urbaine : relation pluie/débit	16
3	Quelques modèles	20
3.1.	Modèle du réservoir linéaire	24
	a. modèle empirique	25
	b. modèle de localisation spatiale	28
	c. modèle type courbes isochrones	30
	d. bilan	32
3.2.	Modèle de Moore et Clarke	33
3.3.	Modèle conceptuel type noyaux de Volterra	36
3.4.	Modèle de Gupta	38
	a. modèle structurel	38
	b. modèle fonctionnel	41
4.	Un modèle structurel en magnitude	43
4.1.	Magnitude d'un réseau	43

II

4.2. Modèle de Bocquillon : évolution allométrique de la magnitude	47
a. relation entre B et H : détermination de L (S,S ₀)	49
b. autres relations	50
4.3. Exemples théoriques des structures allométriques	51
5. Expérimentation	53
5.1. Le champ expérimental	55
5.2. Mesures effectuées et représentations	57
a. modèle de Strahler et de Horton	57
b. modèle de Bocquillon	60
5.3. Résultats	64
a. Saint Didier ouest	66
b. Francheville	70
c. Décines	74
d. Vaulx en Velin sud	78
e. Sainte Foy lès Lyon	82
f. Vaulx en Velin nord	86
6. Passages	91
6.1. Bilans	91
6.2. Arguments	97
6.3. Passage	100

Partie B

RESEAU-LOGIE FRACTALE

Introduction	107
1. Allométrie en magnitude et fractalité	113
2. Cheminement vers un modèle	117
2.1. Mouvement	118
2.2. Longueur	122
a. première approche	123
b. approche dernière	125
3. Modèle à homothétie	130
3.1. Dimension fractale et réseau	130
a. principe	131
b. propriétés	132

III

3.2.	Longueur et dimension d'homothétie	135
a.	procédure	135
b.	proposition	138
c.	exemples	139
4.	Retour au réel - Modèle à homothétie statistique	141
4.1.	Dimension d'homothétie statistique	141
4.2.	Longueur et dimension d'homothétie statistique	144
a.	interpolation statistique	145
b.	extrapolation statistique	146
4.3.	Décomposition d'un réseau	146
4.4.	Esquisse pour une algèbre de formes ramifiées	149
5.	Expérimentation	
5.1.	Champ expérimental	153
5.2.	Traitement	154
a.	Vaulx en Velin nord	157
b.	Saint Didier au Mont d'Or est	161
c.	Dardilly	163
d.	Craponne	165
e.	Saint Didier au Mont d'Or ouest	167
f.	Francheville	169
g.	Sainte Foy lès Lyon	171
h.	Décines	173
i.	Chassieu	175
j.	Jonage	177
k.	Vaulx en Velin sud	179
l.	Meyzieu	181
6.	Retour au modèle	183

Partie C

PERSPECTIVES

"Hydrologie Urbaine Fractale"

Introduction	191
1. Syntaxe du modèle hydrologique	193
1.1. Modèle de transfert	195

IV

a. évolution du nombre de terminaisons	196
b. évolution de la surface en fonction de R	197
c. modèle de transfert fractal	198
1.2. Modèle de production	199
a. modèle à coefficient constant	200
b. modèle à représentation évolutive	200
1.3. Perspectives hydrologiques	204
2. Retour à la modélisation	206
2.1. Position initiale	206
2.2. Evolution	210

COMPLEMENTS & ANNEXES

Complément 1	215
Complément 2	249
Complément 3	251
Complément 4	259
Complément 5	263
Complément 6	267
Complément 7	277
Complément 8	281
Annexe 1	285
Annexe 2	293

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	297
-----------------------------------	-----

à Matthieu

AVANT PROPOS

Cette thèse résulte de la grande insatisfaction que nous avons eue à concevoir des objets urbains tels que les réseaux d'assainissement, à l'aide de modèles qui ne reflétaient en rien ce que sont ces objets ; modèles de l'équilibre des forces pour les plus anciens, modèles à réservoirs, héréditaires à noyaux multiples pour ceux de ces dernières décennies.

Une hydrologie sans hydrographie, modèles oublieux de l'objet par lequel le flux est évacué, il nous manquait, peut être, la perception de ces réseaux comme nouvel objet d'étude.

Auparavant, le fonctionnel sans la morphologie : Redécouvrir l'objet pour lui-même et pour ce qu'il fait.

La découverte de la géométrie fractale convergea avec notre désir de dépasser notre insatisfaction et nous permit d'allier la morphologie des réseaux avec la poésie nécessaire à tout sentiment de vérité.

Notre recherche a été menée au sein du Laboratoire Méthodes créé par Monsieur Henri BOTTA. C'est à partir de ses réflexions et travaux sur les sciences de la conception, son effort constant pour que se développent des recherches en Génie Urbain que notre travail a pris son essor.

Ses conseils constants nous ont encouragés à poursuivre un travail théorique qui aurait pu être jugé de prime abord trop singulier.

Monsieur Bernard CHOCAT, de par sa grande connaissance de l'hydrologie urbaine, des problèmes de conception et de gestion en assainissement et ses réflexions sur les réseaux techniques urbains, nous ont apporté une aide sans cesse renouvelée.

Nous avons également trouvé un appui stimulant auprès de Monsieur Marcel MIRAMOND, directeur du Laboratoire Méthodes, dont l'écoute et les critiques nous furent toujours précieuses.

Nos conversations amicales avec Monsieur GIRE ont participé de l'ouverture introduite par cette thèse.

Nous tenons à remercier :

Madame LE VAGUERESE et Monsieur CHAPGIER pour leur précieuse collaboration technique ;

Les membres et Laboratoire Méthodes et Mademoiselle RAFINESQUE pour le soin apporté à la mise en forme du texte.

*
* *
*

Les premiers lecteurs de ce travail ont été Madame DESOLNEUX, Messieurs DUPUY, LE MOIGNE, GIELLY, BOCQUILLON et DEUTSCH. Nous avons bénéficié de leurs critiques et suggestions pour la rédaction du document final.

Nous tenons à les remercier pour leur participation au jury de cette thèse.



INTRODUCTION

"L'intérêt d'une recherche réside dans sa capacité
à révéler une structure sous jacente
qui rende intelligibles les phénomènes"

R. THOM

Paraboles et Catastrophes

"La thèse est l'action de poser
quelque chose en un lieu"

M. SERRES

La genèse

L'hydrologie urbaine, corpus scientifique de création récente, présente pour l'évacuation des eaux usées et pluviales en milieu urbain, un ensemble de modèles destinés à dimensionner les canalisations, simuler le fonctionnement de tout ou partie d'un réseau d'assainissement soit a priori, soit a posteriori, soit en temps réel et apporter une aide à la conception des réseaux d'assainissement.

Ce corpus aborde les problèmes de transport de flux liés à l'évacuation des eaux d'origine météorique et des eaux usées, les problèmes de qualité et de traitement de ces eaux, la relation entre l'urbanisme et l'assainissement avec en particulier la notion de risque de défaillance d'un réseau et étudie le phénomène de la pluie (en particulier d'origine orageuse), dont les représentations, fournies par les études menées précédemment à l'existence de l'hydrologie urbaine ne sont pas en adéquation avec les besoins de cette science.

La présente étude porte sur la modélisation de la transformation de la pluie en débit à l'exutoire d'une surface urbaine structurée par un réseau d'assainissement. Les modèles établis à ce jour sont habituellement nommés modèles hydrologiques de ruissellement.

Nous qualifierons de fonctionnelle l'approche qui consiste à ne percevoir qu'une transformation mathématique de flux ; le système transformateur (surface + réseau) est une boîte noire.

Nous qualifierons de structurelle l'approche qui consiste à modéliser l'objet, support de la transformation.

Jusqu'à ce jour, seul le fonctionnel fut abordé pour modéliser la transformation pluie/débit en hydrologie urbaine ; les modèles existants étant de ce fait faiblement-cognitifs, prévisionnels et décisionnels.

L'hydrologie urbaine ne doit pas se satisfaire de modèles dont le sens précis et le champ d'application nous échappent.

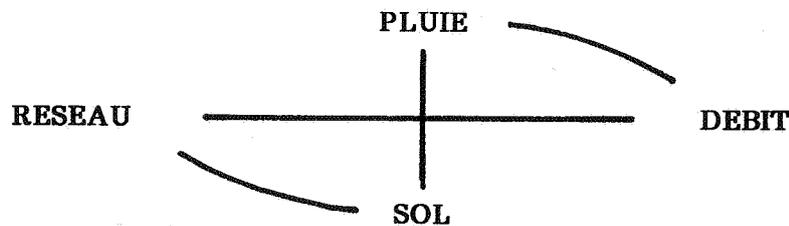
La thèse défendue est la suivante :

Toute avancée en ce domaine est basée sur la conjugaison du structurel et du fonctionnel pour une intelligence nouvelle du phénomène de la transformation de la pluie en débit qui transite à l'exutoire du bassin versant.

La théorie de la dimension fractale permet de modéliser les structures de réseaux d'assainissement en cohérence avec la visée de l'hydrologie urbaine. Elle nous introduit à une modélisation théorique et cognitive du phénomène, fonction de la structure des réseaux.

Explicitons quelque peu :

Le quadripôle suivant structure la transformation pluie / débit :



Le sol, interceptant une pluie, "produit" une quantité d'eau. Cette partie ruisselante est transférée à l'exutoire par un cheminement surfacique et un écoulement en réseau.

Sont donc conjugués les termes pluie/débit et les termes sol/réseau.

En retenant l'approche transformationnelle, les modèles existants à ce jour sont généralement des modèles empiriques de type noyau de convolution.

Ils ont été élaborés à partir de mesures sur des zones possédant un réseau de canalisations enterrées. Ces zones, intitulées bassins versants urbains, avaient des surfaces, des structures de réseaux et des types d'occupation de sol très différents.

Comme aucune approche théorique ne fut jusqu'à ce jour élaborée pour concevoir un modèle à partir de la dualité sol/réseau et en abordant le rôle que peut jouer éventuellement la structure du réseau, les modèles hydrologiques urbains de ruissellement, comme le modèle du réservoir linéaire, sont faiblement cognitifs, ne peuvent pas représenter tout le champ potentiel des transformations et sont très faiblement reliés à la morphologie des bassins versants structurés par le réseau d'assainissement ; nous les avons qualifiés

de fonctionnels. (*)

Afin de pouvoir élaborer un modèle plus riche quant aux qualités possédées, nous nous sommes inspirés des recherches développées en hydrologie fluviale et avons utilisé la théorie de Dimension Fractale développée par Benoît Mandelbrot, pour proposer une modélisation de la structure des réseaux d'assainissement (morphologie des réseaux).

En plus de la qualité de simplicité de ce modèle, son intérêt réside dans le fait qu'il peut être relié directement avec le phénomène qui nous intéresse c'est-à-dire la transformation pluie/débit.

Nous proposons également une modélisation théorique de cette transformation, fonction de la morphologie sur laquelle pourra être expérimenté par la suite le modèle.

En ce qui concerne la modélisation du phénomène, l'étude développée est un cadre théorique, dont la pré-existence est nécessaire à toute investigation expérimentale et calage.

Il ne s'agit pas d'un modèle directement opérationnel.

Sa syntaxe satisfaisant le quadripôle précédemment cité, nous le qualifierons de cognitif.

Le texte qui suit est scindé en trois parties.

La première intitulée "ETAT" présente le phénomène étudié, certains modèles hydrologiques, les modélisations de structures de réseaux (fluviaux et d'assainissement) actuellement établis.

Le phénomène et les modèles hydrologiques cités ont été à ce jour, abondamment présentés tant à l'étranger qu'en France. Nous nous sommes

(*) **Nota** : Si le modèle du réservoir linéaire est par exemple quant à lui faiblement décisionnel et prévisionnel, il n'en est pas de même des systèmes informatiques jusqu'à ce jour construits. Leur qualité décisionnelle est plutôt consécutive du système que du modèle dont il est élément. En effet, un système type C.A.O. permet de comprendre comment fonctionne un réseau, qu'elle est l'influence de tel ou tel choix d'infrastructure (bassin de retenue, ...), compréhension qui ne pouvait pas être atteinte par les formules de calcul de débit de pointe. Il n'en reste pas moins vrai que pour un bassin versant le modèle du réservoir linéaire ne permet pas de juger de l'influence d'une modification de structure de réseau par exemple.

donc attachés à relever (quand cela était possible) l'articulation de ces modèles avec la relation sol/réseau, et à développer une présentation du phénomène conduisant au quadripôle précédemment cité, en cheminant au départ et de façon quelque peu circonvolutoire entre faits et phénomènes.

L'étude de ces modèles et en particulier celui du réservoir linéaire, fréquemment utilisé en hydrologie urbaine, nous a permis de développer certaines démonstrations et considérations qui précisent, et le sens, et le domaine de validité de ce modèle, et qui enrichissent notre connaissance du phénomène.

Si tous les résultats sont dans le texte central, les démonstrations et autres développements font l'objet de textes situés volontairement en fin de document. Nous les avons regroupés sous la forme de compléments, les annexes étant relatives à des exemples de traitements numériques.

La seconde partie est intitulée "Réseau Logie Fractale". Après avoir relevé la carence de l'hydrologie urbaine actuelle qui a développé des modèles sans un regard premier et explicite sur son objet, le réseau d'assainissement, nous y présentons les éléments théoriques de la Dimension Fractale, un modèle de structure de réseau en adéquation avec le fait hydrologique et enfin les expérimentations destinées à valider ce modèle.

"Perspectives" est le titre de la troisième et dernière partie. Elle présente un modèle théorique de la transformation de la pluie en débit qui balaye le quadripôle et conjugue fonctionnel et structurel.

Une réflexion sur le chemin parcouru conclue cette partie sous titrée "Vers une Hydrologie Urbaine Fractale".

PARTIE A

ETAT

1. PHENOMENES

Le fait est que toute différence introduit le mouvement.

Le fait est que toute rencontre modifie de quelque façon que ce soit, et le "contactant", et le "contacté".

Le fait est que la rencontre de deux masses d'air, ou d'une masse d'air et d'un sol à des potentiels différents, et sans énoncer le contenu du potentiel et de la différence, introduit le nuage et éventuellement un processus de transformation du nuage en pluie précipitée vers le sol.

Le fait est alors que la pluie d'été ou de toute autre saison est un contactant lorsque sa chute est stoppée par le sol.

Le fait est qu'il y a modification d'état.

La pluie est un ensemble de gouttes d'eau de tailles et de vitesses différentes en mouvement vers le sol. Le contacté est soit une masse solide immobile ou non, une nappe liquide éventuellement mobile, c'est-à-dire tout ce qui forme la surface terrestre.

Le fait est de nouveau qu'il y a modification d'état lors de toute rencontre.

La goutte de pluie disparaît comme élément isolé et devient participante et génératrice d'une masse liquide.

De nouveau, le fait est que toute différence introduit le mouvement.

Et les différences sont multiples.

Des points hauts et des points bas ; tout ou partie de la masse liquide est alors ruisselet et flot.

Des cavités plus ou moins grandes ; tout ou partie de la masse liquide humidifie le sous-sol et peut rejoindre une nappe phréatique.

Différence de température ; tout ou partie de la masse liquide s'évapore pour reformer nuage.

Le fait est qu'il est possible maintenant de définir des phénomènes dans la multiplicité présente ; introduire un tri, des classements, des regroupements, des oublis conscients ou non de tout ou partie de l'observable, créer des faits élaborés pour qu'ils puissent être codifiés avec une visée scientifique, en un mot passer du fait brut au phénomène.

FAIT \longrightarrow PHENOMENE

Introduire des termes

Le ruisseau et le flot sont des flux qui peuvent être représentés par une grandeur physique intensive, le débit c'est-à-dire un volume d'eau (m^3) variable dans le temps (m^3/s) pour un observateur occupant une position spatiale quelconque.

La pluie d'origine orageuse ou non, phénomène extensif, est repérable par une grandeur intensive variable dans le temps, la hauteur précipitée, soit une intensité (m/s).

La surface terrestre urbaine ou non est un transformateur qui réalise de multiples transformations.

Nous appellerons transformateur tout élément ou ensemble d'éléments en relation physique et dynamique qui participe à ou réalise la transformation d'un flux extensif, la pluie, en flux intensif, les débits, en masse d'eau stockée ou infiltrée ou évaporée et variable dans le temps.

Nous appellerons phénomène, toute transformation d'une grandeur extensive ou intensive en grandeur intensive ou en masse d'eau.

Le transformateur est donc à la fois le lieu de la transformation et une représentation de ce qui transforme.

Introduire la multiplicité des transformateurs.

Une double multiplicité. La multiplicité des types de recouvrement du sol introduit par l'urbanisation : toitures, arbres, jardins, aires de jeux, rues, trottoirs, parkings, pelouses, etc ... et des recouvrements de recouvrements : voitures, hommes, etc ...

Ensuite la multiplicité des transformateurs que l'on peut considérer. A titre d'exemple trois niveaux emboîtés.

- **Niveau 1** - la toiture, le parking, la rue, la pelouse, etc ...
- **Niveau 2** - une collection d'éléments du niveau 1, la rue avec les toitures, les parkings, pelouses, jardins, etc ...
- **Niveau 3** - une surface urbaine avec un réseau de canalisations eau pluviale

Introduire la multiplicité des phénomènes.

Selon le type de recouvrement urbain et les liaisons entre les éléments

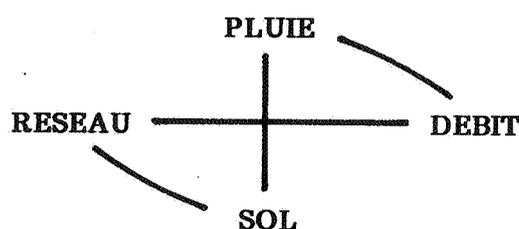
considérés de la surface urbaine, l'eau de pluie qui rencontre le sol, ruisselle vers un autre élément ou vers une canalisation, est retenue dans une cavité, s'infiltré, s'écoule dans une canalisation, ou même s'évapore, c'est-à-dire au minimum cinq phénomènes :

- pluie transformée en débit de ruissellement ;
- pluie transformée en débit d'infiltration ;
- pluie transformée en masse d'eau retenue ;
- pluie transformée en vapeur d'évaporation ;
- pluie transformée en débit d'écoulement dans une canalisation.

Multiplicité des phénomènes à conjuguer avec la multiplicité des transformateurs.

Introduire une structure.

Quels que soient le transformateur et les phénomènes qui s'y déroulent, la transformation s'organise autour d'un quadripôle. [1]



Cette structure permet de dégager deux niveaux d'interactions et de relations.

- Niveau 1 -

- . pluie/sol; le sol comme récepteur d'un flux météorique.
- . réseau/débit . le réseau évacue les débits de ruissellement qui rejoignent les entrées du réseau (bouches d'égout, ...), sa capacité de fonctionnement étant fonction elle-même des débits qui y transitent. Comme la plupart des réseaux, il possède des lieux de stockage (bassin de retenue ...) et des organes de régulation (seuils, vannes ...).

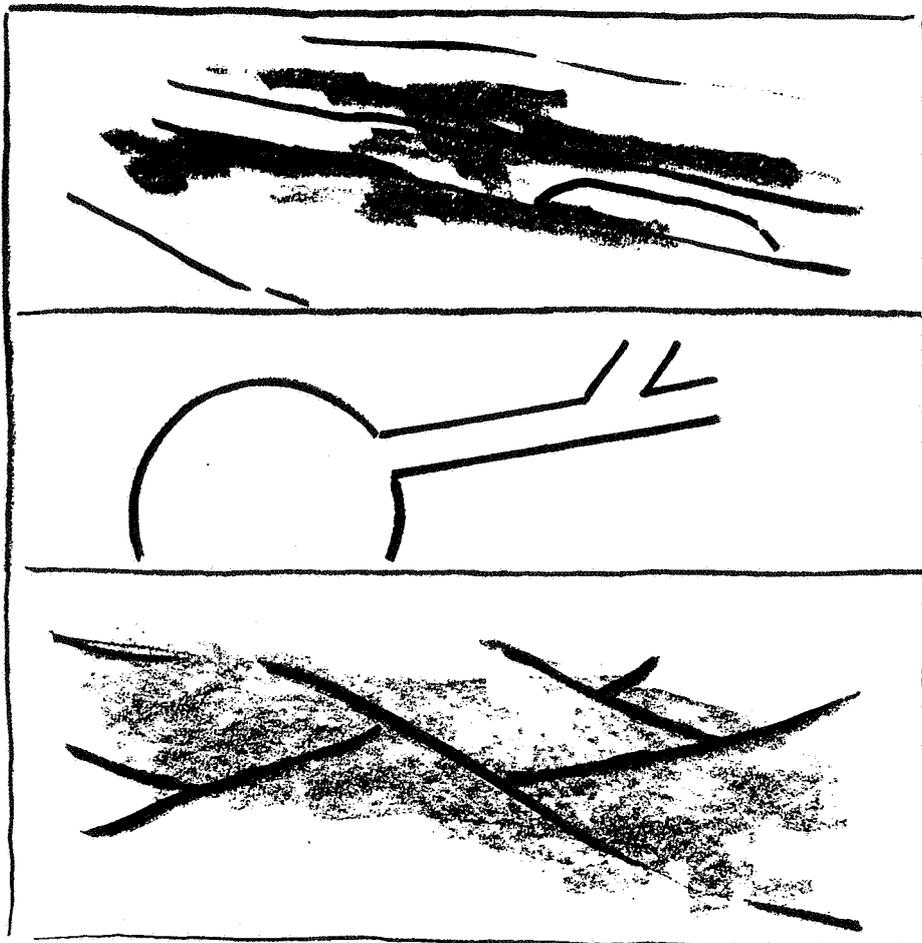
- Niveau 2 -

- . sol/réseau . tout ou partie de l'eau précipitée vers le sol ruisselle. Le flux ainsi constitué s'écoule des points hauts vers les points bas. Un fait nouveau alors : le cheminement de l'eau des points hauts vers les

points bas dessine sur les surfaces une myriade de chemins qui forment réseaux.

Ce cheminement utilise également des chemins de drainage privilégiés construits par l'homme qui sont de surface (caniveaux, fossés, conduites de descente de toitures, ...) et souterrain (réseau de canalisations).

Un fait donc : des réseaux d'écoulement qui s'enchainent et transportent l'eau précipitée puis ruisselée vers le réseau souterrain de canalisations s'il existe.



Une définition : en milieu urbain, l'eau ruisselée est la partie de l'eau pluviale qui, interceptée par le sol, va cheminer des points hauts vers des points bas en utilisant ou créant dans son cheminement des réseaux d'écoulements enchaînés les uns aux autres pour atteindre un réseau de drainage généralement souterrain qui rejoindra d'autres réseaux pour retourner au milieu naturel (rivière, mer, nappe phréatique, etc ...).

. pluie/débit ; cette relation de flux, quantitative, est consécutive de la relation précédente (sol/réseau).

Le réseau d'égout évacue la quantité d'eau ruisselée qui forme ainsi un flux représentable en grandeurs physiques par un débit (m^3/s). Celle-ci, écoulee par un ou plusieurs réseaux et en provenance d'une pluie, est moindre que la quantité d'eau précipitée [2] soit :

$$\int_A i(t,x,y) dx dy \int dt \geq \sum_j \int_T Q_j(t) dt$$

avec :

A : surface potentiellement drainante

$i(t, x, y)$: pluie précipitée sur la surface A

$Q_j(t)$: débit évacué par l'un des réseaux de canalisations drainant A et observé à la sortie j de ce réseau.

Un phénomène : le sol "produit" un débit de ruissellement qui s'écoule dans un réseau de canalisations et dont le volume total est moindre que celui précipitée.

En terme de flux et de signal même, la relation signal pluie, signal débit résulte d'un transport modifiant progressivement la forme du signal initial.

En considérant une surface structurée par un réseau de canalisations ayant une seule sortie, nommons-la exutoire, le transport retarde l'apparition du signal de débit par rapport au signal pluie.



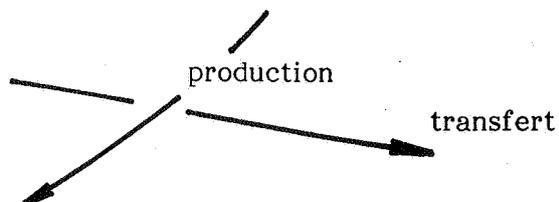
Un phénomène donc : le transport, l'évacuation de l'eau pluviale en terme de signal induit le transfert.

Précisions : le phénomène de la production et du transfert.

Soit un transformateur A. Il intercepte la pluie et produit éventuellement un débit de ruissellement $Q_e(t)$.

Ce débit généré par la pluie précipitée sur A, et peut-être complété par les apports de transformateurs amont, est transféré à l'exutoire.

En terme de flux, le quadripôle qui structure les phénomènes, amène à définir deux phénomènes conjugués, l'un symboliquement vertical comme la relation pluie/sol et l'autre horizontal comme la relation réseau/débit.



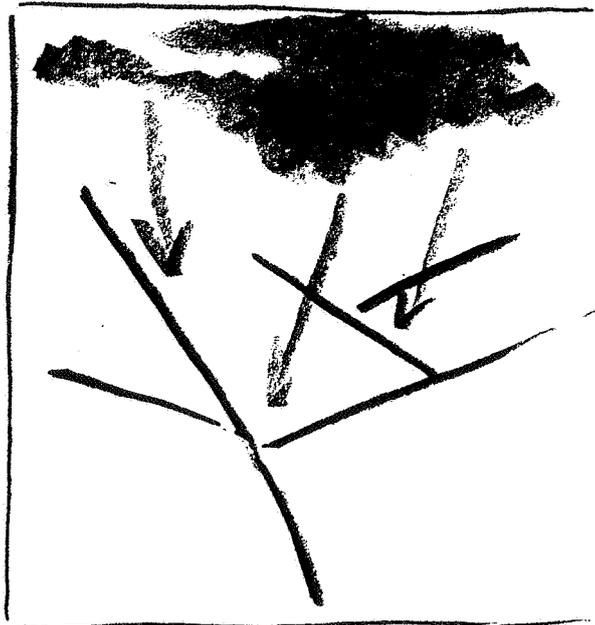
même si le transfert n'est pas uniquement constitutif du seul réseau d'égouts, c'est-à-dire que l'un et l'autre de ces phénomènes sont indissociables.

2. CHEMINEMENT VERS LA MODELISATION

Initialement un détour.

2.1. Qu'est-ce qu'un modèle ?

Soit le phénomène de la transformation de la pluie en débit observable à l'exutoire d'une surface urbaine.



La surface urbaine est alors un système transformateur pour la relation pluie/débit.

Après avoir défini l'objet en le qualifiant de système, nous signifions par là même qu'il est objet d'une démarche scientifique dont la modélisation en serait la finalité. De nombreuses définitions sont proposées pour définir ce qu'est un modèle :

- représentation mentale ou physique d'un système réel exprimée sous forme verbale, graphique ou mathématique (Walliser) [3] ;
- système formel construit, c'est-à-dire une image plus ou moins fidèle du système réel (Feuvrier) [4] ;
- représentation des phénomènes tels qu'ils pourraient être afin d'atteindre des buts (Simon) [5] ;
- substitut pour un objet ou un système (Forrester) [6] ;
- le système concret S' est un modèle du système concret S (dont les variables d'état peuvent être totalement différentes) si tous deux ont la même image abstraite (Vogel) [7].

Ces définitions font appel au couple système/modèle comme si l'un et l'autre étaient intimement liés.

Tout d'abord un univers potentiel, un champ de virtualités.

Un acte, le logos précédé, accompagné du regard, du geste qui isole, sépare.

Une connaissance, celle des liens de l'objet actualisé avec le reste de l'univers.

Liens et objets intitulés système.

Une réalité nouvelle, une imitation conceptuelle, le premier modèle, évident, nécessaire et qui procède de l'acte de connaissance.

Systèmes ouverts pour la plupart, fermés parfois c'est-à-dire sans liaisons sans interactions avec le reste.

Le regard au début.

Puis la représentation du système, le dessin, le verbe, le texte ; soit le modèle enfin.

Nouvel objet, parfois système lui-même.

Une définition rejointe, celle de Bruter [8] pour qui le modèle est encore un objet ou éventuellement un système qui permet de communiquer à l'ensemble du groupe social les propriétés reconnues comme telles à l'instant t de l'objet considéré.

Elle introduit le rôle du groupe social et donc son histoire comme l'un des déterminants du processus d'élaboration d'un modèle.

Ce sont les interrogations du groupe social et sa réceptivité potentielle qui conditionne l'émergence d'un type de modèles. Comme il procède d'une actualisation d'un champ virtuel, le modèle réalisera au temps t l'équilibre entre la perte de signification due à l'actualisation et le gain de communicabilité ou d'intelligibilité introduit par l'émergence du modèle comme représentation d'une réalité. Pour celle-ci, il peut y avoir plusieurs modèles qui traduisent des interrogations différentes et correspondent à des réceptivités également différentes.

Définition : un modèle est une représentation codifiée d'une réalité issue d'un champ virtuel et qui satisfait au temps t l'équilibre entre dégradation et communicabilité, consécutives à toute représentation. Diverses typologies de modèles ont été formulées sur lesquels nous ne reviendrons pas dans ce texte renvoyant ainsi le lecteur à d'autres ouvrages [3,4,5,8,9].

Un média entre système et modèle ; la théorie "une théorie est une référence obligatoire pour modéliser un système" (Rouby) [10]. La théorie, une démarche libre de l'esprit humain pour A. Einstein qui considérait qu'entre deux théories présentant les mêmes valeurs expérimentales, la plus belle devait être la plus vraie.

L'esthétique, critère de vérité peut être, de nouveau nous ré-introduisant dans le potentiel, le champ du virtuel conceptuel. "La recherche de la vérité ne peut se faire qu'à travers l'errance, l'itinérance" (Morin [11]).

La boucle est bouclée.

Le retour.

2.2. Hydrologie urbaine - relation pluie/débit

La modélisation est consécutive d'une actualisation ; celle de la relation pluie/débit résulte de représentations particulières des phénomènes et de la ville puisque le lieu d'investigation est relatif au parcours de l'eau pluviale en milieu urbain soit un segment du cycle urbain de l'eau dont l'étude est l'une des composantes de l'hydrologie urbaine.

Introduire les termes signifiants de l'actualisation.

La conception et la connaissance du fonctionnement d'un réseau d'assai-

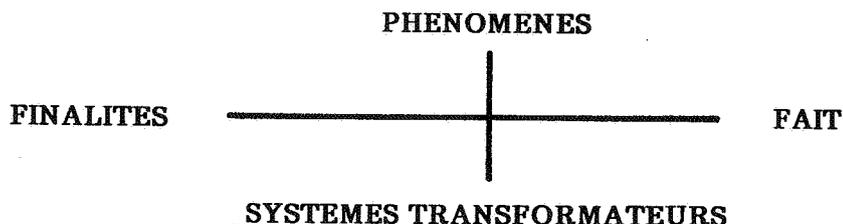
nissement eau pluviale et des surfaces de ruissellement sont basées sur une décomposition de la ville et de son réseau à partir de la dualité :

- phénomènes physiques ;
- structure du système de drainage.

La question fondamentale posée n'est pas la connaissance de la capacité au ruissellement de telle ou telle surface élémentaire (toiture, surface goudronnée, pelouse, etc ...) mais est relative soit à la capacité d'écoulement d'un réseau, soit au calcul du débit qui transite ou transitera dans une canalisation. L'une des finalités de la modélisation est la concrétisation de ce calcul soit sur un réseau existant (simulation, simulation en temps réel), soit sur un réseau futur (aspect prévisionnel) de canalisations, géré par la collectivité territoriale, ou tout autre organisme.

Suivant le problème, le modèle devra donc être soit cognitif (simulation et simulation en temps réel de l'existant), soit prévisionnel (simulation d'un état futur et même éventuellement décisionnel, rôle de l'urbanisme sur les flux produits).

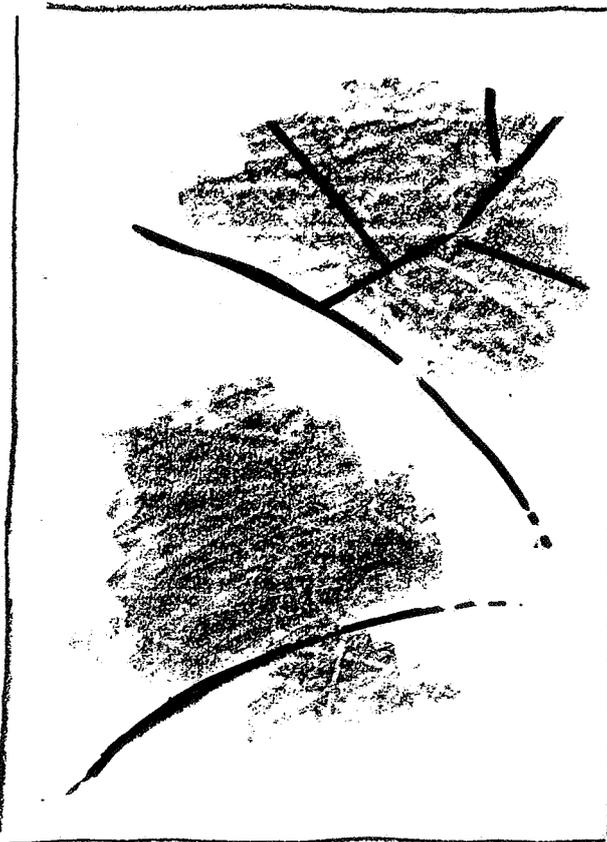
Ces diverses finalités analysées par différents chercheurs en vue de l'élaboration de systèmes de modèles informatisés [12], conditionnent la constitution des phénomènes à partir des faits et amènent à définir des systèmes transformateurs eux-mêmes en adéquation avec la constitution des phénomènes.



Jusqu'à ce jour, la circularité précédente située entre faits et finalités s'est résolue par l'introduction du concept de bassin versant.

Définition : un bassin versant urbain est une surface qui draine des eaux d'origine météorique vers un réseau de drainage artificiel qui peut être présent à l'intérieur de ladite surface, l'exutoire étant éventuellement situé sur un réseau aval.

Les deux figures suivantes schématisent les bassins versants :



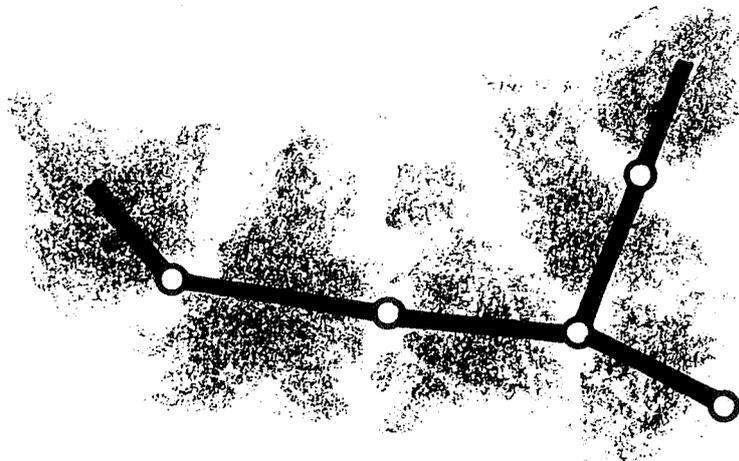
réseau de
drainage
artificiel

réseau de
drainage
naturel

Pour un même milieu urbain, il est possible de définir plusieurs niveaux de décomposition du milieu en système transformateur pluie/débit [13] :

. représentation "microscopique" . le bassin versant est la surface urbaine drainée par un tronçon de canalisation, c'est-à-dire par le bief situé entre deux regards.

Cette surface est constituée d'éléments d'écoulement enterrés (branchements particuliers), d'éléments aériens (descente de toitures ...) et de surfaces d'apports.



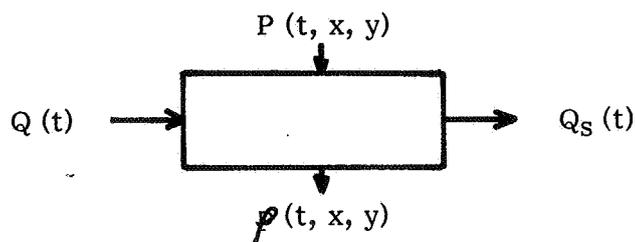
. représentation "macroscopique" . Le bassin versant est un ensemble de bassins versants "microscopiques". Il possède alors un réseau de drainage constitué d'un ensemble de biefs ramifiés et/ou maillés.



Si ce type de bassin possède dans sa description, tous les biefs de l'amont jusqu'à l'exutoire (milieu naturel ou la station de traitement), nous le qualifierons de global.

Introduire un schéma fonctionnel

Quel que soit le type de bassin versant, le fonctionnement du transformateur associé peut être représenté symboliquement par le schéma et la relation suivants :



avec :

$Q_S(t)$: débit variable transitant à l'exutoire

$Q(t) = \sum_j q_j(t)$: somme des débits en provenance d'autres bassins versants par l'amont

$P(t, x, y)$: pluie précipitée sur le bassin versant

$p(t, x, y)$: eau ne rejoignant pas le réseau de canalisation

$$Q_S(t) = Q(t) \oplus (P(t, x, y) \ominus p(t, x, y))$$

Une actualisation étant définie, la modélisation du système transformateur qui en résulte est double :

- modélisation de l'aspect structurel du transformateur ;
- modélisation de son aspect fonctionnel c'est-à-dire de la relation établie ci-avant selon les finalités retenues (cognitive, prévisionnelle, décisionnelle).

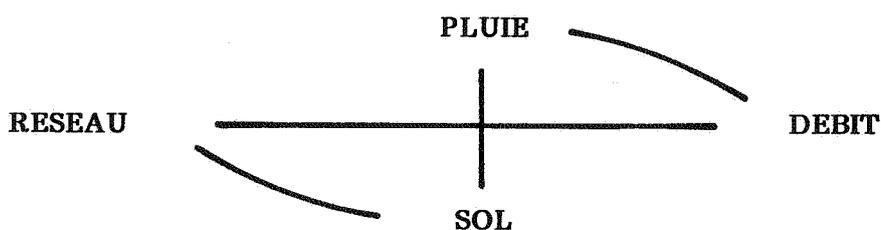
Nota : nous avons volontairement situées hors de ce texte toutes considérations sur les faits et phénomènes induits par l'évacuation des eaux pluviales, autre que ceux relatifs à la relation quantitative entre flux de pluie et flux de débit (qualités des eaux par exemple, etc ...).

3. QUELQUES MODELES

Soit à présenter les modèles et formules jusqu'à ce jour établis (*) et qui élucident la relation

$$Q_S(t) = Q(t) \oplus (P(t, x, y) \ominus \rho(t, x, y))$$

combinant les quatre termes du quadripôle



Pluie-sol $P(t, x, y)$

Sol-réseau $P(t, x, y) \ominus \rho(t, x, y)$

Réseau-débit $Q(t) \oplus (P(t, x, y) \ominus \rho(t, x, y))$

(*) Démontrer la réalité ; prouver

Installer dans un lieu, une position

Instituer, mettre en vigueur (petit Larousse en couleur 1980)

conjuguant les deux phénomènes du transfert de la production.

Production $P(t, x, y) \ominus \mathcal{P}(t, x, y)$

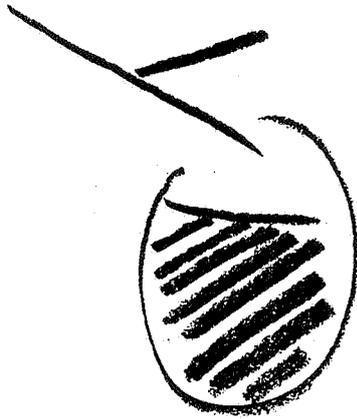
Transfert $(P(t, x, y) \ominus \mathcal{P}(t, x, y)) \oplus Q(t)$

Entreprise aussi vaste et circonvolutoire que les milliers de textes sur le sujet.

Reprenons alors,

soit à décrire les relations jusqu'à ce jour établies qui nous semblent présenter les qualités cognitives les plus intéressantes.

Pour ce faire, élargissons le champ de l'hydrologie urbaine à l'hydrologie fluviale et rurale. Peu de risques en fait



Réseau de canalisations
eau pluviale



Réseau de canaux,
de rivières ou de ruisseaux

Différence de taille peut-être, un schéma "naturel", l'autre "artificiel" ; mais où est située précisément la coupure ?

La même relation

$$Q_S(t) = Q(t) \oplus P(t, x, y) \ominus \mathcal{P}(t, x, y)$$

Des passerelles déjà entre ce qui est encore séparé : hydrologie urbaine/ hydrologie fluviale et rurale. Les modèles de Horton, de Holtan et de Linsley pour le calcul de $\mathcal{P}(t, x, y)$ en considérant l'infiltration et la rétention appartiennent à quel champ ? [2,14,15,16,17]. Le modèle dit du réservoir linéaire [18] tant utilisé en hydrologie urbaine, de type convoluteur est bien un cas particulier du modèle de Muskingum, nom d'un canal ou d'une rivière

situés aux Etats-Unis.

Une bonne raison enfin pour élargir le champ tout en restreignant l'exposé ; l'hydrologie rurale et fluviale élabore actuellement des modèles dont l'hydrologie urbaine pourrait s'inspirer.

Reprenons enfin :

soit la relation

$$Q_s(t) = Q(t) \Theta [P(t, x, y) \Theta \rho(t, x, y)]$$

trois flux qui se combinent pour définir le flux sortant :

$\rho(t, x, y)$ que nous intitulerons pertes

$P(t, x, y)$ la pluie

$Q(t)$ les débits produits à l'amont

et deux opérateurs :

Θ un opérateur de Production

Θ un opérateur de transfert de l'amont vers l'aval.

Nota : ces deux opérateurs sont doublement conjugués :

- le modèle hydrologique est la globalité de ces deux opérateurs ;
- des mesures in situ de pluie et de débit à l'exutoire d'un bassin versant, comme elles sont actuellement menées, ne permettent pas de séparer les deux phénomènes. Le choix du mode de représentation de l'un conditionne la forme de l'autre. Etant calés ensemble sur les mêmes événements, on ne peut pas utiliser un modèle de transfert avec un modèle de production qui aurait été déterminé et calé avec un autre modèle de transfert et vice-versa.

Soit la question aujourd'hui posée :

Connaissant (éventuellement) la pluie, c'est-à-dire la distribution spatio-temporelle des intensités $P(t, x, y)$ peut-on formuler un modèle qui reproduise les débits observés à l'exutoire d'un bassin versant quelconque ou qui prédétermine ce que l'on observera à partir d'une hypothèse de réseau et d'urbanisme (voirie, bâti, etc ...) ?

Soit la question formulée autrement :

Peut-on simuler en temps réel ou non le fonctionnement d'un réseau d'assainissement soumis à une pluie quelconque en vue d'une connaissance et d'une amélioration de son fonctionnement, ou pour déterminer l'effet de choix

urbanistiques ou les effets d'une évolution urbaine sur un réseau existant [12] ?

Question qui à ce jour est posée depuis une quinzaine d'année et s'oppose au (ou complète) le problème initialement posé par le choix du tout à l'égout comme système d'évacuation des eaux pluviales et usées et qui a sa solution opératoire depuis la fin du 19ème siècle par la création de formules permettant le calcul d'un débit maximum obtenu à l'exutoire d'un bassin versant.

Ces formules sont légions et toutes voisines de la formule rationnelle américaine [2].

En France, les travaux de Monsieur Caquot ont permis d'instruire le calcul des réseaux d'assainissement depuis 1930 environ, par une circulaire réactualisée en 1977 à partir des travaux du groupe "Loriferne" [19].

Tenant d'apporter quelques éléments de réponse à la question actuelle, nous ne reprendrons pas l'exposé des formules qui permettent le calcul d'une valeur de débit maximum.

Rappelons brièvement et pour être en cohérence avec le quadripôle que dans la formule issue des travaux de Caquot :

- . l'existence de bassins amonts par rapport au bassin pour lequel est calculée la pointe de débit, amène à considérer un bassin global qui englobe les bassins amonts.

- . la pluie est représentée par une valeur moyenne d'intensité dépendant d'une durée T_c (temps de concentration du bassin versant global) et d'une fréquence d'apparition f .

- . la production du débit ruisselé est obtenue en considérant une surface efficace correspondant aux seules surfaces imperméables en relation avec le réseau.

- . le transfert c'est-à-dire l'amortissement de la valeur du débit de pointe par écoulement dans le réseau n'apparaît pas comme tel [18,20].

Revenons à la question actuelle.

Soit le transformateur opérant la production et le transfert et un ensemble de modèles.

Le premier de ces modèles, très utilisé en hydrologie tant urbaine que rurale, fera l'objet de développements particuliers que nous ne rencontrerons pas pour les autres modèles.

3.1. Le modèle du réservoir linéaire

Sa formulation peut être établie à partir des systèmes d'équations de Muskingum qui existent depuis au moins un siècle [18,21].

$$V(t) = K (a Q_e(t) + (1 - a) Q_s(t))$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

en prenant $a = 0$

$$V(t) = K Q_s(t)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t)$$

$$\text{avec } Q_e(t) = \int_S [P(t, x, y) \ominus \rho(t, x, y)] dx dy$$

que nous intitulerons débit de pluie nette (m^3/s) avec

S : surface

K : temps moyen de transfert [s^{-1}]

$V(t)$: variable d'état mesurant le volume d'eau (m^3) existant dans le réservoir au temps t .

Si les quantités au temps zéro sont nulles ($V(0) = Q_e(0) = Q_s(0) = 0$), le système différentiel s'intègre pour donner un modèle de convolution si K est constant quel que soit $Q_e(t)$

$$Q_s(t) = \frac{H(t)}{K} e^{-t/K} * (H(t) \cdot Q_e(t))$$

avec $H(t)$ distribution d'Heaviside soit :

$$Q_s(t) = \frac{H(t)}{K} \int_0^t e^{-(t-Z)/K} (\int_S P(Z, x, y) \ominus \rho(Z, x, y) dx dy) dZ$$

Ce modèle, souvent qualifié de conceptuel à cause de l'image transformateur attribuée au bassin versant, peut être considéré soit comme un modèle

purement empirique, soit comme un modèle de localisation spatiale de surfaces élémentaires drainées, soit comme un modèle type courbes isochrones.

a) Modèle Empirique

Diverses tentatives de la modélisation de la relation pluie/débit, tant aux U.S.A. qu'en France, que ce soit pour l'hydrologie urbaine et l'hydrologie rurale, furent basées directement et sans approche théorique préalable, sur des campagnes de mesures élaborées à partir d'une approche transformateur. Nous pouvons citer la campagne française des années 1970 conduite à la demande du Ministère de l'Intérieur, qui a permis à la S.O.G.R.E.A.H. et à M. Desbordes de choisir le modèle cité, en calant le paramètre K à partir du choix d'un opérateur de production introduisant le calcul d'une quantité fictive que nous avons intitulée débit de pluie nette. [18,22]

$$Q_e(t) = \int_A [p(t, x, y) \ominus \rho(t, x, y)] dx dy$$

Les bassins versants étant de taille modeste (n'excédant pas quelques dizaines d'hectares), la pluie mesurée uniquement en un point fut supposée isotrope sur la surface considérée (pas de variation spatiale). L'objectif étant une bonne reproduction du débit de pointe et non du volume écoulé, furent considérées comme surfaces actives participant à la détermination du débit maximum, les surfaces imperméables, d'où l'opérateur de production :

$$Q_e(t) = P(t) \cdot S_{IMP} \quad S_{IMP} : \text{surface imperméable}$$

Cette hypothèse formulée, la relation $V(t)/Q_s(t)$ a été déterminée en calculant $V(t)$

$$V(t) = \int_0^t [Q_e(Z) - Q_s(Z)] dZ$$

Elle est de type hystérésis.

La courbe est d'autant plus resserée que la pluie est intense, de durée longue (voir complément 1).

Exemple : bassin Grenoblois constitué de surfaces perméables et imperméables, la surface active S_0 étant supposée variable.

COURBES $Q_e(T)$ ET $Q_s(T)$

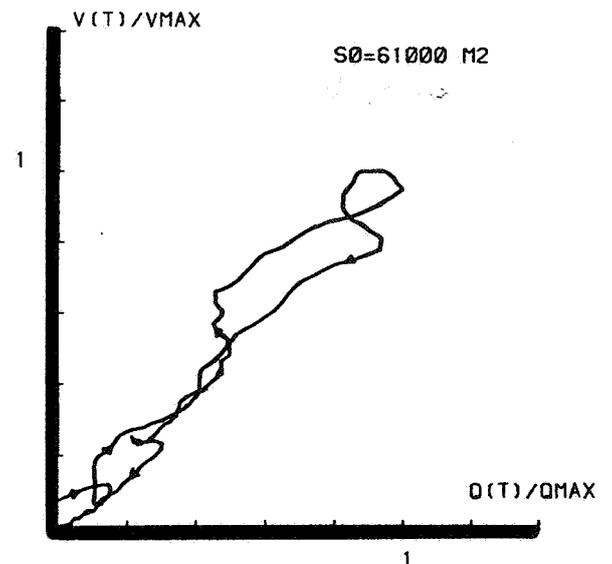
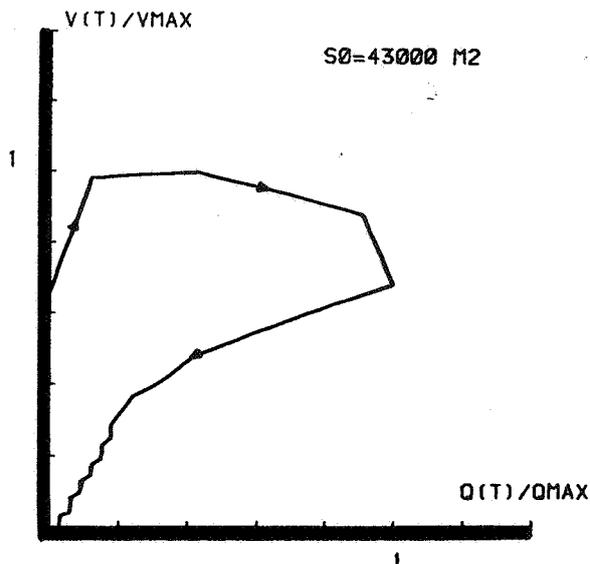
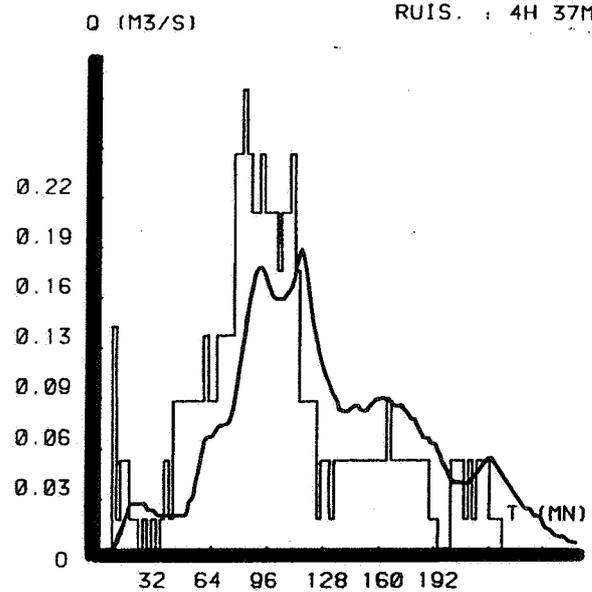
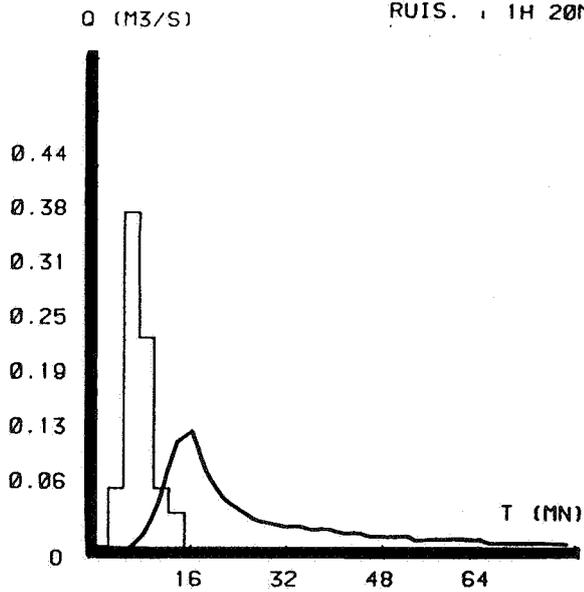
BASSIN GRENOBLE AV
LE 23 9 68

COURBES $Q_e(T)$ ET $Q_s(T)$

BASSIN GRENOBLE AV
LE 18 06 69

PLUIE : 0H 15MN 0
RUIS. : 1H 20MN 0

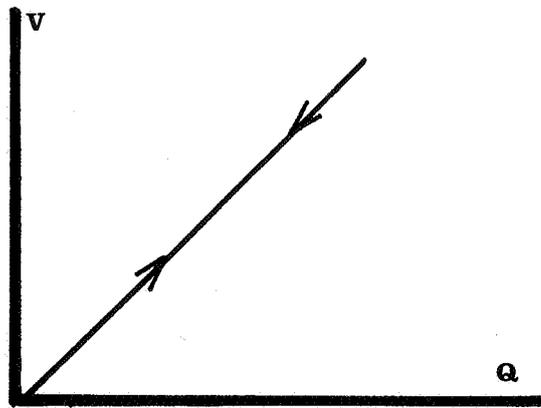
PLUIE : 3H 52MN 30
RUIS. : 4H 37MN 30



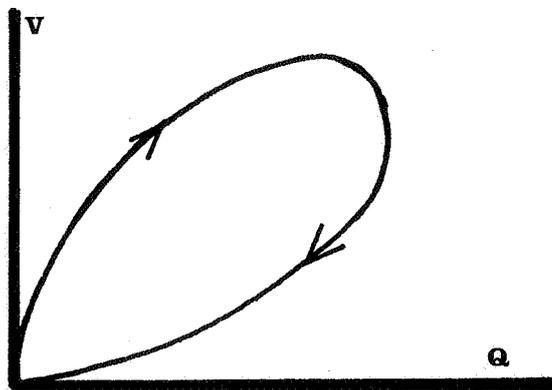
Une pluie très brève et de faible intensité s'écoulera plutôt sous la forme de réseaux de surface, révélant à la fois la complexité de la surface et sa complexité hydrologique (pertes et ruissellement).

Une pluie longue et de forte intensité s'écoulera plutôt en nappe ruissellante. La pluie sera homogénéisante vis-à-vis de la complexité du ruissellement.

Ceci nous amène à définir deux comportements types :



comportement simple



comportement complexe

La finalité du modèle étant la simulation du fonctionnement d'un réseau de canalisations soumis à des pluies de fortes intensités et de durée relativement longue (supérieur à l'heure), M. Desbordes a élaboré un modèle partiel vis-à-vis du phénomène en choisissant la relation de comportement simple.

$$V(t) = K \cdot Q_S(t)$$

K : pente de la droite

Avec celle-ci, la pointe de débit en sortie est obligatoirement située sur la courbe du débit de pluie nette entrant.

Afin de rendre prévisionnel le modèle, le paramètre K a été calé à partir de grandeurs facilement mesurables (surface, pente, longueur, grandeurs relatives à la pluie). K étant fonction de la pluie, le noyau perd son caractère de convolution. Cette "perte" traduit en fait la faible non linéarité du phénomène pour des bassins de taille modeste soumis à des pluies orageuses quelques peu importantes.

La finalité sauve le modèle (*).

b) Modèle de localisation spatiale

Soit un opérateur de production de la forme

$$Q_e(t) = \int_S [P(t, x, y) \ominus \rho(t, x, y)] dx dy$$

$Q_e(t)$ étant un débit de pluie nette, totalement écoulé par le réseau de canalisations.

$$\int Q_e(Z) dZ = \int Q_s(Z) dZ$$

avec $Q_s(t)$, débit sortant.

On suppose que la relation $Q_e(t) - Q_s(t)$ est modélisable par un noyau de convolution

$$Q_s(t) = O(t) * Q_e(t)$$

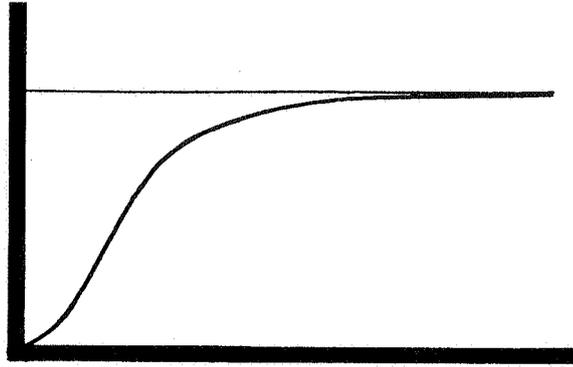
Si $Q_e(t)$ est une distribution d'Heaviside, $Q_s(t)$ représente l'intégrale du noyau $O(t)$.

(*) **Nota** : pour pouvoir représenter un comportement complexe et une pointe de débit sortant non située sur la courbe du débit entrant, il suffit de considérer une série n de transformateurs soit :

$$Q_s(t) = \left(\frac{1}{K} e^{-t/K} \right)^{*n} * Q_e(t)$$

Il s'agit du modèle dit de Nash [23,24] qui est utilisée en hydrologie urbaine et rurale avec des valeurs de n voisines de deux.

Nous ne développerons pas ce modèle qui possède, au regard de la prise en compte de la structure du réseau, les mêmes caractéristiques fondamentales que le réservoir linéaire, la formulation, produit de convolution, permettant de représenter plus complètement le champ comportemental.



On peut dire que cette courbe représente alors la distribution temporelle de la surface drainante par rapport à l'exutoire considéré, surface dont l'évolution sera supposée continue :

$$O(t) = \frac{1}{S_0} \cdot \frac{dS(t)}{dt}$$

avec S_0 surface totale puisque l'intégrale de l'opérateur $O(t)$ est égale à l'unité. Cet opérateur définit la localisation temporelle des surfaces d'apport drainées par le réseau de canalisations, dans l'interactions surface/exutoire, le véhicule étant l'eau qui ruisselle et s'écoule dans le réseau.

$O(t)$ est alors solution d'un problème de localisation à une dimension (le temps) qui peut se résoudre à partir de l'hypothèse fondamentale suivante :

- la répartition de la surface temporelle par rapport à l'exutoire est la répartition la plus probable.

et en introduisant les deux termes :

- $g(t)$ une fonction "coût" pour aller d'un point quelconque de la surface à l'exutoire.

- K l'espérance de $g(t)$

La localisation $O(t)$ s'obtient à partir de la résolution du système d'équations : (voir complément 2) [25,26]

$$\int_0^{\infty} O(Z) dZ = 1$$

$$\int_0^{\infty} O(Z) g(Z) dZ = K$$

$$\cdot \text{Log } \Gamma(2) - \int_0^{\infty} \text{Log}(\Gamma(g(Z)+1)) dZ \text{ maximum}$$

En prenant $g(t) = t$, Gangnet a démontré que la solution de ce problème

est le noyau empirique du réservoir linéaire soit :

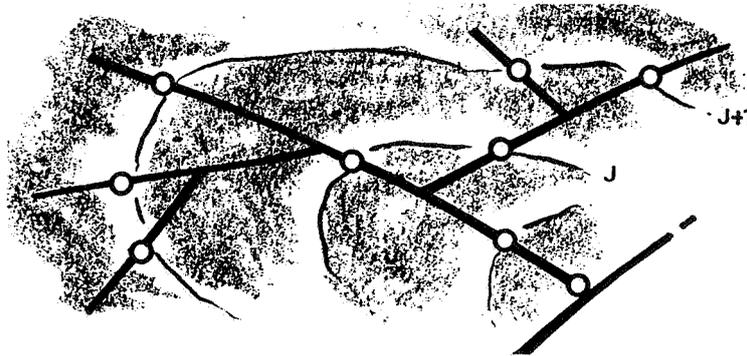
$$O(t) = 1/K e^{-t/k}$$

La fonction de répartition de la surface est alors :

$$S(t) / S_0 = 1 - e^{-t/K}$$

c) Modèle type courbes isochrones

On appelle courbes isochrones, les courbes qui relient sur un bassin versant les points situés à une même distance temps de l'exutoire.



Ce concept a été utilisé pour développer la méthode rationnelle américaine [28].

Supposons que soit réalisable un découpage en courbes (j) espacées d'une durée T.

Supposons que le transfert de j+1 vers j puisse être approximé par une distribution de Dirac.

L'opérateur permettant de passer du débit de pluie nette au débit à l'exutoire est alors :

$$O(t) = \sum_{j=1}^N a_j \delta(t - jT) \quad \delta : \text{delta}$$

si N est le nombre total de courbes et $a_j = S_j / S_T$

S_T : surface totale

S_j : surface comprise entre les courbes j+1 et j

L'opérateur est donc une suite d'impulsions définissant un peigne de Dirac.

Si N vaut 1, l'opérateur singulier peut être remplacé par un opérateur régulier à partir des considérations suivantes. Soient :

$$Q_S(t) = (t - T) * Q_e(t)$$

$$Q_e(t) = (t + T) * Q_S(t)$$

Introduisons la variable $V(t)$ précédemment définie

$$\delta'(t) * V(t) = Q_e(t) - Q_S(t)$$

$$\delta'(t) * V(t) = (t + T) * Q_S(t) - (t) * Q_S(t)$$

$$V(t) = H(t + T) * Q_S(t) - H(t) * Q_S(t)$$

avec $H(t)$ distribution d'Heaviside

$$V(t) = \int_t^{t+T} Q_S(Z) dZ$$

si $Q_S(Z)$ ne varie pratiquement pas sur la durée T alors :

$$V(t) \sim T \cdot Q_S(t)$$

et sachant que

$$dV(t) / dt = Q_e(t) - Q_S(t) \quad (\text{équation de continuité})$$

Nous obtenons le modèle du réservoir linéaire $O(t) = 1/T e^{-t/T} *$

L'hypothèse qui permet de passer d'un opérateur singulier à un opérateur régulier, corrobore l'hypothèse qui a fondé le modèle du réservoir linéaire : sont uniquement modélisés des comportements homogènes soit des transformations de pluies longues et à variation relativement lente par rapport à la durée moyenne du transfert.

Si N est supérieur à 1 :

$$O(t) = \sum_{j=1}^N a_j \delta(t - jT)$$

Cet opérateur singulier peut être relié à l'opérateur régulier exponentiel de deux façons,

. soit en remplaçant

$$\sum_{j=1}^N a_j \delta(t - jT)$$

par $\delta[t - nT]$ avec

$$n = \sum_{j=1}^N j \cdot a_j$$

(approximation du premier ordre)

. soit en considérant une suite a_j infinie et géométrique $a_j = b \cdot a_{j-1}$ de raison $b < 1$.

Dans les deux cas on obtient (voir complément 3)

$$V(t) = \int_t^{t+nT} Q_S(Z) dZ$$

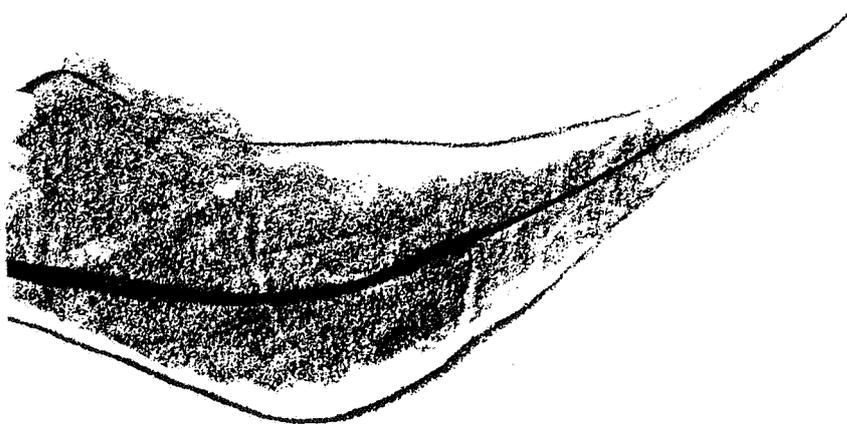
$$V(t) = \frac{1}{a_1} \int_t^{t+T} Q_S(Z) dZ$$

Si $Q_S(t)$ varie peu, ces deux intégrales donnent :

$$V(t) \sim nT \cdot Q_S(t)$$

$$V(t) \sim (T/a_1) \cdot Q_S(t)$$

En ce qui concerne le second cas, la distribution de la surface temporelle obéit à une suite géométrique éventuellement exponentielle de raison < 1 . C'est-à-dire qu'elle décroît rapidement à partir de l'exutoire.



On retrouve ainsi une illustration de l'obtention de ce modèle par la technique de localisation spatiale précédemment définie.

d) Bilan (voir complément 3)

Nous pouvons dire que deux hypothèses fondent le modèle du réservoir linéaire :

- les flux varient lentement relativement au temps de transfert ;
- si on considère la surface temporelle totale comme un enchaînement de surfaces "élémentaires" séparées d'une durée T , leur valeur décroît très rapidement.

Si la première hypothèse ne contredit pas la finalité actuelle d'utilisation

du modèle (utilisation pour des pluies de durée très supérieure au temps de transfert d'un bassin), la seconde hypothèse ne nous permet pas de définir les morphologies de bassins qui la satisferaient.

En effet, nous sommes incapables actuellement de passer d'une image temporelle de surface à son image morphologique c'est-à-dire à la structure du réseau.

Le succès actuel de ce modèle quant à l'étendue de son utilisation, est due d'une part à la simplicité de sa mise en oeuvre [29] (voir complément 4 : réponse calculée en valeur moyenne) et d'autre part à la simplicité de la détermination des paramètres qui génèrent la valeur du coefficient K [18].

3.2. Modèle de Moore et Clarke

C'est un modèle rural, défini à partir d'une convolution. La différence fondamentale avec le modèle précédent réside dans l'opérateur de production.

Rappelons que le modèle du réservoir linéaire a la forme suivante :

$$Q_s(t) = 1/K e^{-t/K} * \left[\int_{S_{imp}} i(t, x, y) dx dy \right]$$

avec $i(t, x, y)$ pluie spatialement distribuée

S_{imp} surface imperméable.

L'opérateur de Production du modèle de Moore et Clarke [30] est basé sur le concept suivant :

Le bassin versant est un ensemble de réservoirs de capacité s , et de densité de probabilité $f_1(s)$.

Au temps t , une fraction de ces réservoirs contribue au ruissellement vers le réseau de drainage.

Soit F cette partie :

$$F(t) = S_c(t) / S_o = \int_0^{H(t)} f_1(s) ds$$

avec

H : capacité maximum pleine au temps t

S_c : surface ruisselante

S_o : surface totale potentiellement drainante

Cette partie amène à définir un débit de pluie nette Q_e :

$$Q_e(t) = S_c / S_o \int_{S_o} i(t, x, y) dx dy$$

soit

$$Q_e(t) = \left(\int_{S_o} i(t, x, y) dx dy \right) \cdot \int_0^{H(t)} f_1(s) ds$$

Si $f_2(t) *$ est l'opérateur de transfert t qui permet d'obtenir le débit à l'exutoire du bassin versant alors :

$$Q_s(t) = f_2(t) * Q_e(t)$$

$$Q_s(t) = \int_0^t f_2(t-Z) \left[\int_{S_o} i(Z, x, y) dx dy \cdot \int_0^{H(Z)} f_1(s) ds \right] dZ$$

Si s et t sont indépendants et en introduisant la fonction $P(t)$:

$$S_o \cdot P(t) = \int_{S_o} i(t, x, y) dx dy$$

le transformateur est modélisé par :

$$Q_s(t) = \int_0^t \left(\int_0^{H(Z)} S_o P(s) f_3(s, t-s) ds \right) dZ$$

avec $f_3(s, t)$ distribution conjuguant production et transfert.

Cette approche qui n'en est qu'à ses débuts en hydrologie rurale, tente d'aborder la modélisation des surfaces hétérogènes en mettant l'accent sur la fonction de production, fondamentale pour le ruissellement sur terrain perméable. Le fait d'introduire une distribution à deux variables est certainement une amélioration vis-à-vis d'un noyau à une seule dimension, d'autant plus que chacune des variables est relative à chacun des phénomènes Production/Transfert. En ce qui concerne notre réflexion, ce modèle qui ne nous semble pas encore pouvoir refléter la conjugaison sol/réseau, est une illustration des tentatives actuellement développées pour améliorer la modélisation.

En hydrologie urbaine, ceci est d'autant plus vrai que le phénomène de production est parfois modélisé à partir des travaux de Linsley qui peuvent être reformulés pour fournir une relation de type probabiliste comme celle

utilisée par le modèle de Moore et Clarke.

Sont considérées comme surface potentiellement drainante les seules surfaces non infiltrantes (S_0). Le ruissellement dépend alors du taux de remplissage des dépressions et de l'interaction entière dépressions.

La hauteur de remplissage moyenne au temps t est définie comme suit par Linsley [31] : $h(t) = h_0 (1 - e^{-H(t)/h_0})$, l'exponentielle exprimant l'interaction entre dépressions, avec

$$H(t) = 1/S_0 \int_0^t \left(\int_{S_0} i(Z,x,y) dx dy \right) dZ$$

En introduisant la fonction $P(t)$ définie précédemment, l'intensité ruisselante est déterminée par la différence :

$$P(t) - dh(t)/dt = P(t) (1 - e^{-h(t)/h_0})$$

qui peut être traduite en terme de surface active $S(t)$ vis-à-vis de $P(t)$ soit :

$$S(t) = S_0 (1 - e^{-H(t)/h_0})$$

d'où $F(t) = S(t) / S_0 = 1 - e^{-H(t)/h_0}$

$$F(t) = \int_0^{H(t)} \frac{e^{-s/h_0}}{h_0} ds$$

Le modèle de Linsley est ainsi reformulé en terme de densité de probabilité, la borne d'intégration étant la hauteur totale précipitée au temps t .

$$f_1(s) = \frac{e^{-s/h_0}}{h_0} ; P(s,S) = e^{-S/h_0}$$

le débit de pluie nette serait alors

$$Q_e(t) = P(t) \cdot S_0 \cdot (1 - e^{-H(t)/h_0})$$

et le débit de sortie $Q_s(t)$

$$Q_s(t) = S_0 (f_2(t) * (P(t) (1 - e^{-H(t)/h_0}))$$

Si S_0 et h_0 sont connus il reste soit à identifier $f_2(t)$, soit à calculer le ou les paramètres d'une fonction $f_2(t)$ choisie a priori.

Bilan : ce type de modélisation conjugue très partiellement la dualité sol/réseau, la structure du réseau n'étant pas du tout abordée et cette modélisation ne devrait pas permettre de relier l'opérateur à la morphologie sous-jacente si ce n'est par une typologie mettant en relation $f_2(t)$ et la structure des bassins.

3.3. Modèle conceptuel type Noyaux de Volterra

C'est un modèle qui fait actuellement l'objet de développement en hydrologie rurale. Nous avons choisi de l'exposer car il généralise le modèle précédent et le modèle du réservoir linéaire, dans le cadre des opérateurs linéaires de convolution [1,9,32,33]. Nous nous appuyerons sur les travaux de Diskin [34].

La relation pluie/débit et en particulier débit de pluie nette/débit à l'exutoire, étant non linéaire, nous savons qu'il est théoriquement possible de représenter cette relation à partir d'un développement polynomial d'intégrales linéaires du type Frechet Volterra,

$$Q_S(t) = \iiint \dots K_i(t, Z_1, \dots, Z_i) Q_e(Z_1) \dots Q_e(Z_i) \dots dZ_1 dZ_i \dots$$

la relation de convolution $Q_S(t) = 0(t) * Q_e(t)$ étant une approximation d'ordre 1 (un seul noyau).

Diskin conseille d'utiliser un opérateur à deux noyaux de convolution pour représenter la non linéarité du phénomène, soit

$$Q_S(t) = \int_0^t h(Z) Q_e(t-Z) dZ + \int_0^t \int_0^t g(Z,x) Q_e(t-Z) Q_e(t-x) dZ dx$$

si les conditions initiales sont nulles.

Deux méthodes sont utilisables pour identifier les deux noyaux. La première est basée sur l'identification par l'observation. La seconde est basée sur le calage des paramètres de fonctions choisies a priori.

Comme nous l'avons souligné [9], la première méthode est pratiquement impossible tant en hydrologie rurale qu'urbaine.

La seconde démarche fut utilisée par l'auteur à partir des travaux de Napiur Kowski et Strupezewski [35,36].

Ces derniers ont élaboré un ensemble d'équations permettant de définir les deux noyaux (h, g) pour représenter la transformation d'un débit entrant en débit sortant dû à un transfert à travers N canaux ouverts identiques et en séries.

Pour un canal, l'équation de stockage étant non linéaire,

$$Q_S(t) = a V(t) + b V^2(t) \quad V : \text{volume stocké}$$

$$Q_S : \text{débit de sortie}$$

Ils proposent à partir de la fonction

$$F_N(t) = (Kt)^{N-1} \cdot e^{-Kt} / (N-1)!$$

les noyaux :

$$h(Z) = F_N(Z) \cdot a$$

$$g(Z,t) = [F_N(Z) \cdot \sum F_j(t) + F_N(t) \sum F_j(Z) - F_N(\max(Z,t))] \cdot b$$

A partir de ces expressions, Diskin a calé les trois paramètres (N,a,b) pour que soit au mieux représentée la transformation débit de pluie nette/débit sur des bassins ruraux.

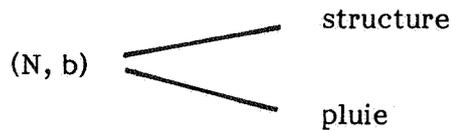
Bilan : on reconnaîtra dans l'expression de h(Z), le modèle de Nash qui lui-même est une N.convolution du modèle à réservoir linéaire. Le travail de H. Diskin prouve l'intérêt qu'ont les séries de Frechet Volterra pour représenter des phénomènes non linéaires ou faiblement non linéaires.

Par contre, cette approche en dehors d'une meilleure reproduction de l'observable n'apporte rien de plus que le modèle du réservoir linéaire et surtout que le modèle de Nash quant à la dualité sol/réseau et sur le rôle que joue la structure du réseau.

La valeur du nombre N doit dépendre de la taille du bassin versant, de la structure du réseau de drainage, du type de ruissellement en surface et surtout d'un phénomène d'échelle relative entre ces grandeurs géométriques et la variation dans le temps des intensités de pluie et de la durée totale de cet événement. Le complément 1 et l'approche courbes isochrones précé-

demment explicitée en sont une illustration.

Pour définir le rôle de la structure, par exemple, il faudrait relier le couple N, b (coefficient exprimant la non linéarité) à la structure du bassin et aux caractéristiques de la pluie



Cela revient à "ouvrir" la boîte noire, image de l'approche utilisée et peut être à formuler un autre type de modèle comme nous l'avons envisagé par la suite. Enfin, à notre connaissance, ce modèle n'a pas été utilisé en hydrologie urbaine sauf avec $b = 0$ (modèle de Nash).

3.4. Modèle de Gupta

C'est un modèle probabiliste dont la fonction de transfert est élaborée à partir d'une modélisation de la structure du réseau de drainage.

Il a été établi pour représenter le fonctionnement de bassins drainés par des rivières.

La modélisation structurelle utilisée fut introduite par Horton, Strahler puis Smart [37]. La modélisation fonctionnelle par Rodriguez, Iturbe, Valdes, Gupta [38,39].

Nous développerons quelque peu la présentation de ce modèle qui n'a pas été, à notre connaissance, utilisée en hydrologie urbaine.

a) modèle structurel

Ce modèle résulte des travaux de Horton et de Strahler qui ont défini un schéma de classification des branches constituant un réseau de drainage naturel ramifié.

Une branche est soit un bief qui relie deux points de jonction, soit un bief sans arrivée amont et rejoignant un noeud (elle sera alors qualifiée de source et drainant une surface source).

Schéma de Strahler [40]

. Les branches sources sont d'ordre 1

. Deux branches de même ordre w se joignant, la branche aval est d'ordre $w+1$

. Deux branches d'ordres différents se joignant (v, w), la branche aval reçoit l'ordre $\text{Max}(v, w)$.

Soit :

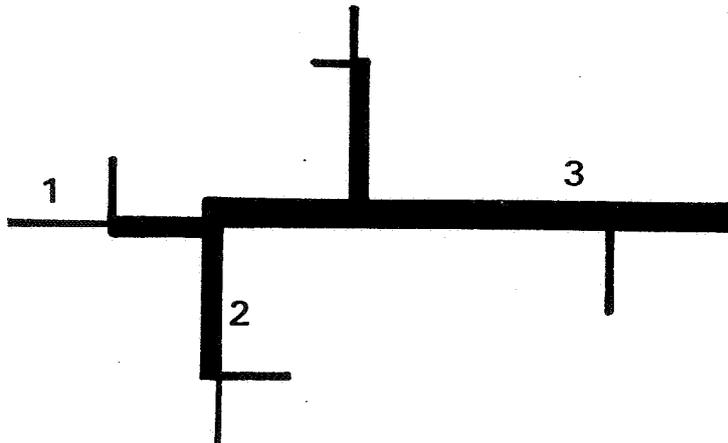


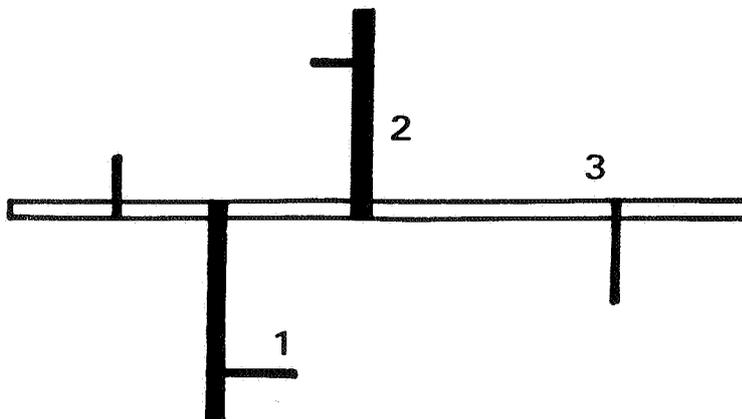
Schéma de Horton

Basé sur le schéma précédent, il modifie l'ordre de certaines branches pour qu'apparaissent sous un même ordre les séries de branches qui constitueraient les chemins principaux de drainage.

Pour ce faire, le schéma de Strahler étant établi de l'amont vers l'aval, la modification se fait de l'aval vers l'amont comme suit :

. A chaque jonction où deux branches de même ordre se rejoignent, parmi ces deux branches, l'une d'elle est affectée de l'ordre de la branche aval à partir d'un critère ou d'un ensemble de critères (parallélisme, longueur, etc ...).

Ainsi le réseau précédent recevrait les ordres suivants :



Ces deux schémas sont liés entre eux par un ensemble de relations. Soit N_w^S le nombre de chemins constitués de branches d'ordre w , obtenu par Strahler et N_w^H celui obtenu par Horton et Z l'ordre maximum commun aux deux schémas. Exemple : à partir des deux figures précédentes :

ordre j	1	2	3
N_j^S	7	3	1
N_j^H	4	2	1

On démontre alors les relations suivantes [37] :

$$N_w^S = \sum_{j=w}^Z N_j^H \quad w = 1, 2, \dots Z$$

$$N_w^H = N_w^S - N_{w+1}^S \quad w = 1, 2, \dots Z - 1$$

A partir de ces schémas d'ordre, plusieurs chercheurs ont élaboré un ensemble de coefficients qui représentent des évolutions moyennes de grandeurs géométriques d'ordre w à $w + 1$.

Pour ce faire, on introduit la longueur moyenne des chemins d'ordre w , la surface moyenne des surfaces drainées par des chemins de même ordre :

$$L_w = \frac{1}{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} L_{wj} ; \quad S_w = \frac{1}{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} S_{wj}$$

et on définit les coefficients

$$R_L = L_w / L_{w-1} ; \quad R_A = S_w / S_{w-1} ; \quad R_B = N_{w-1} / N_w$$

Ensuite, on peut dire qu'une morphologie est homogène vis-à-vis de ces schémas d'ordre si les trois coefficients sont pratiquement indépendants de l'ordre w .

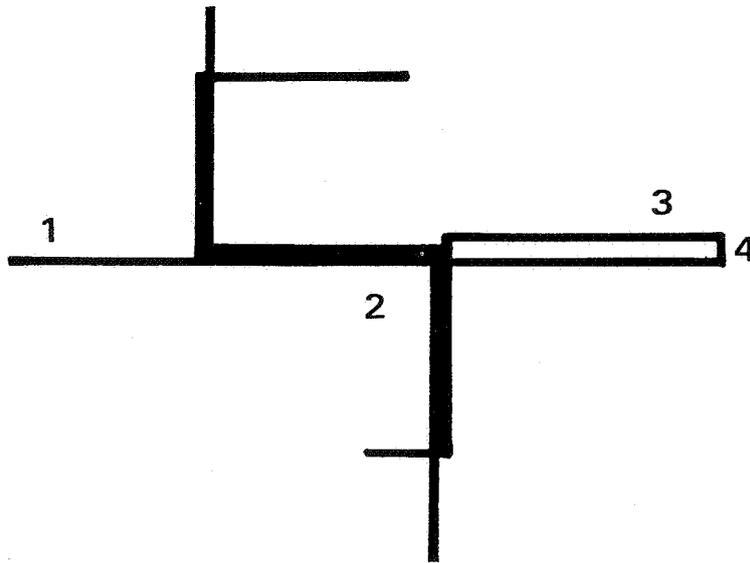
Cela signifie que les longueurs, les surfaces et le nombre de jonctions suivent une progression géométrique.

Le fonctionnement hydrologique de telles structures est alors représenté par un modèle fonctionnel.

b) Modèle fonctionnel

L'opérateur fonctionnel résulte d'une analyse basée sur le cheminement potentiel d'une goutte d'eau choisie au hasard ; une goutte tombant sur une surface est affectée de l'ordre du chemin qui traverse ou draine ladite surface. Puis elle suit un cheminement vers l'exutoire qui est représenté par les ordres successifs rencontrés.

Soit le réseau suivant, ordonné par le schéma de Strahler :



L'exutoire étant affecté de l'ordre $(Z + 1)$, on a trois classes de chemins :

s_1 1 -----> 2 -----> 3 -----> 4
 s_2 2 -----> 3 -----> 4
 s_3 3 -----> 4

Ensuite, Gupta définit la probabilité qu'un chemin soit emprunté par une goutte d'eau. Soit un parcours s composé d'une suite de chemins $i, j, \dots, k-1, k$

$$P(s) = P(i) \cdot P(j, j+1) \dots P(k-1, k)$$

avec

$P(i)$: probabilité de commencer le trajet à partir d'une surface d'indice i

$P(i, j)$: probabilité transitionnelle de i vers j

$$P(i) = S_i / S_0$$

$$P(i, j) = N_{ij}/N_i$$

S_i : surface d'indice i

N_{ij} : nombre de chemins d'indice i allant vers j

N_i : nombre total de chemins d'indice i

Ces probabilités ont été rattachées aux coefficients R_A, R_B [38].

Ainsi, la probabilité pour que le temps de transfert T d'une goutte soit inférieur ou égal à t est :

$$P(T \leq t) = \sum_s P(T_s \leq t) \cdot p(s)$$

avec $T_s = \sum_i T_{si}$: temps de transfert pour un chemin composé d'éléments i de temps de transfert T_{si} .

Si T_{si} est une variable aléatoire de fonction de répartition F_i alors :

$$P(T \leq t) = \left(\prod_i F_i(t)^* \right) \cdot F'(t)$$

$F'(t)$ correspondant au ruissellement de surface.

Gupta proposant de négliger le temps dû au ruissellement, l'opérateur de transfert du débit de pluie nette en débit à l'exutoire de la zone est alors :

$$O(t) = d/dt (P(T < t)) = \sum_s \left(\prod_i f_i(t)^* \right) \cdot p(s)$$

En supposant que la densité de probabilité $f_i(t)$ est une densité exponentielle :

$$f_i(t) = \frac{1}{k_i} e^{-t/k_i}$$

avec k_i temps moyen de transfert.

$$O(t) = \sum_s \left(\prod_i (1/k_i e^{-t/k_i})^* \right) \cdot p(s)$$

Divers travaux ont été menés pour préciser la définition de la densité de probabilité en utilisant comme modèle de référence les équations de Barré de Saint Venant [9,38] travail que nous avons également abordé pour les canalisations.

Bilan : le modèle de Gupta est un modèle de transfert directement issu d'une modélisation structurelle mais restreinte aux structures qui présentent un développement géométrique.

Il répond au bilan que nous avons formulé pour le modèle précédent puisque l'opérateur formulé par Gupta est une somme de modèles de Nash, chaque somme étant pondérée par une valeur issue de la structure du réseau de drainage.

Ce modèle très récemment développé n'a pas encore été appliqué sur des bassins versants urbains. Même si les bassins versants présentent des structures à développement géométrique, ce modèle serait uniquement utilisable pour simuler le fonctionnement d'un réseau existant.

En effet, en calcul prévisionnel, le réseau n'étant pas complètement défini, le nombre de paramètres est trop important, ceux-ci étant difficiles à définir (RL, RA, RB, nombre de chemins etc ...). Un modèle plus simple est encore préférable.

Enfin, ce modèle ne conjugue pas transfert et production si ce n'est que par la définition d'un débit de pluie nette soit une soustraction.

Le chapitre suivant présente une autre modélisation de structure qui n'a pas été suivie d'une modélisation fonctionnelle. Ensuite, seront abordées la validation de ce modèle ainsi que celle des modèles de Strahler et de Horton puisque leur application à des réseaux d'assainissement urbain n'avait pas été encore tentée.

4. UN MODELE STRUCTUREL EN MAGNITUDE

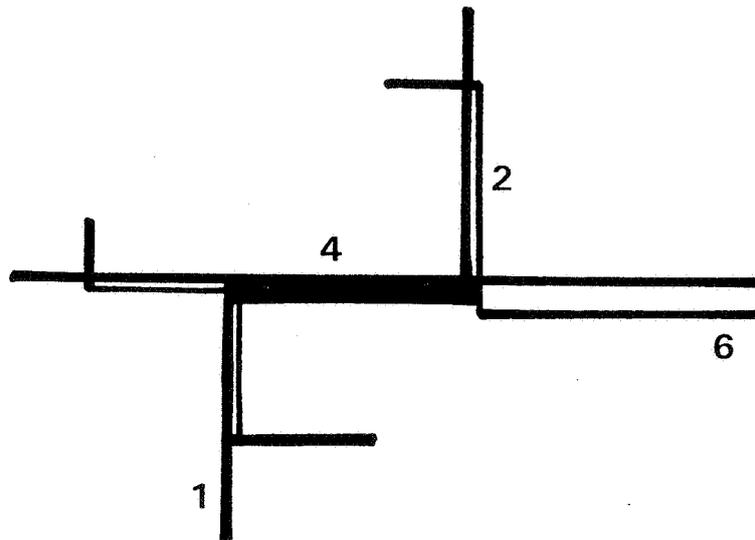
Cette approche que nous avons abordée a été plus particulièrement développée par Bocquillon qui a formulé un cadre théorique.

Ce modèle est basé sur une quantification en magnitude de la structure d'un réseau de drainage [41,42].

4.1. Magnitude d'un réseau [37]

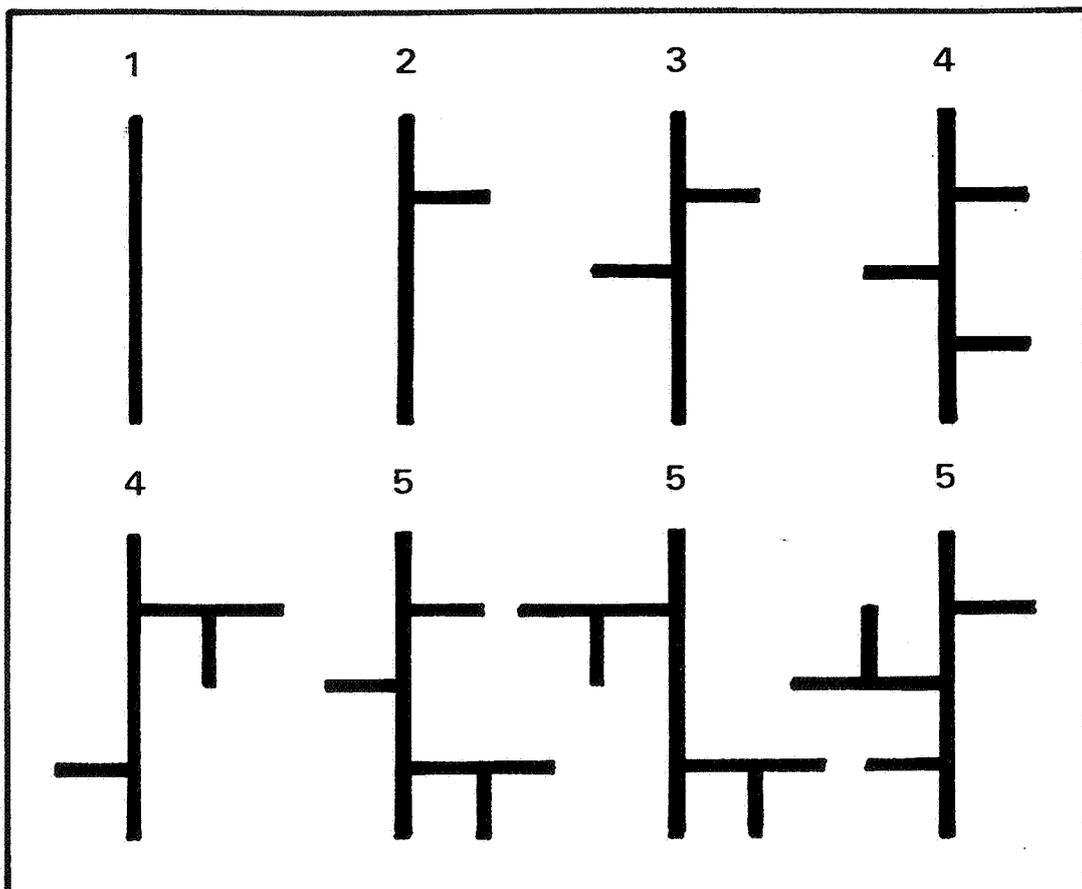
A la différence de la modélisation structurelle de Strahler ou de Horton précédemment définie, l'ordonnancement en magnitude distingue toutes les branches reliant deux jonctions par le schéma suivant :

- les branches sources (sans branches affluentes) sont d'ordre 1 ;
- soit une jonction de deux branches d'ordre n et m, la branche aval est affectée de l'ordre $n + m$;
- la magnitude du réseau est l'ordre de la dernière branche aval.



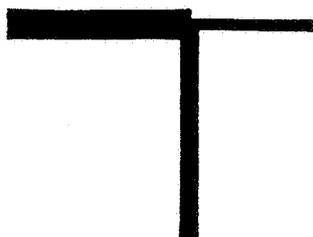
Nous avons les propriétés suivantes : si N est l'ordre en magnitude du réseau, il possède $2N-1$ branches, N branches sources, N jonctions, l'exutoire étant considéré comme une jonction.

Le chemin de drainage le plus long est défini par la succession des tronçons dont les ordres sont les plus proches en partant de l'exutoire. Plus la magnitude est élevée, plus il y a de structures possibles pour une valeur de magnitude donnée. Afin d'illustrer cette propriété, considérons les figures suivantes pour différents ordres :



et ainsi de suite.

Une figure de magnitude N peut être élaborée par la réunion d'une figure de magnitude J et une figure de magnitude N-J.



Il y a donc autant de figures de magnitude N qu'il y a de façons de composer des figures (J, N-J), chacune de ces figures n'étant pas unique structurellement ; soit la propriété suivante en notant P(I) le nombre total de structures de magnitude (I) :

avec M = valeur entière de N/2.

$$P(N) = \sum_{j=1}^M P(J) \cdot P(N - J)$$

N		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
P(N)		1	1	1	2	3	6	11	24	47	103	214	451	1000	...

La magnitude n'est pas une mesure d'unicité structurelle.

Emettons l'hypothèse fondamentale suivante que nous reprendrons par la suite :

La conception d'un opérateur pour une modélisation hydrologique d'un système de drainage, basée sur la liaison structure / fonction, nécessite un déploiement régulier du réseau de drainage.

Cette hypothèse qui est sous-jacente au modèle de Gupta, nous incite donc à conjuguer magnitude et régularité structurelle.

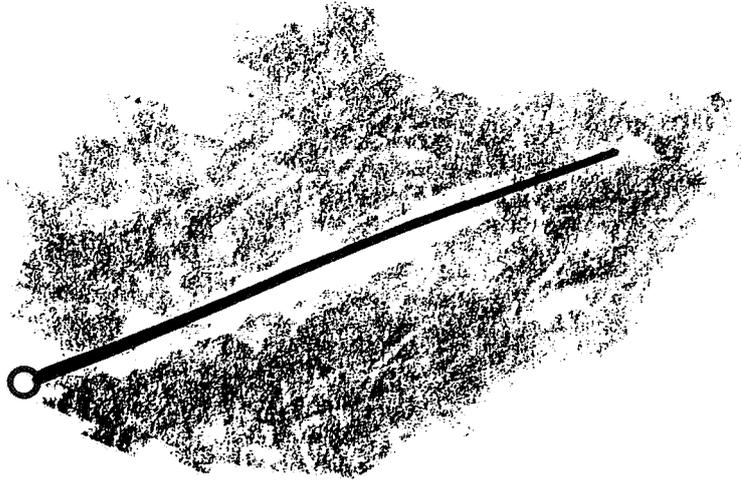
La mesure de régularité que nous proposons est déduite de la propriété suivante déjà énoncée :

Une figure de magnitude N possède N branches sources, c'est-à-dire N sousbassins sources de magnitude égale à l'unité.

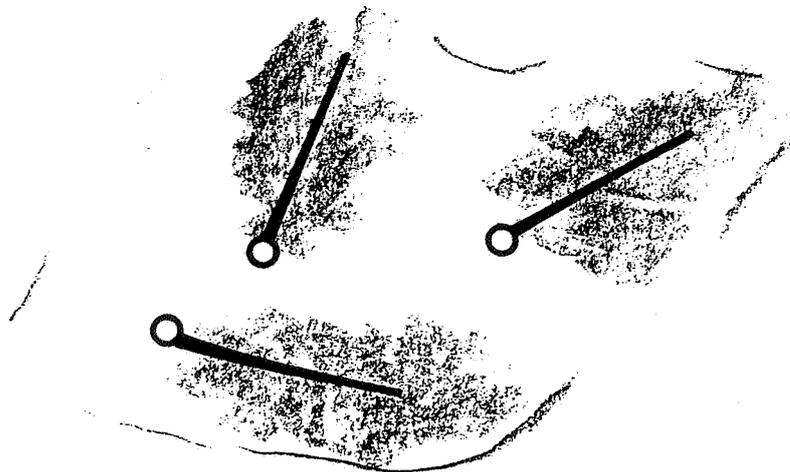
Ainsi, la magnitude d'un réseau est relative à la taille choisie pour la définition des bassins sources.

En ne considérant que le réseau de canalisations d'un système d'évacuation eau pluviale d'un bassin versant ne drainant pas d'autres bassins situés à son amont, nous pouvons lui associer tout un ensemble de valeurs de magnitude comprise entre les deux valeurs extrêmes 1 et N.

Magnitude 1 : le bassin est défini globalement comme un seul bassin source



Magnitude N : sont considérées comme bassins sources, les surfaces drainées par les antennes du réseau au nombre de N



Des valeurs intermédiaires de magnitude sont obtenues en considérant des regroupements successifs de bassins sources. Ainsi en faisant croître la taille de ceux-ci (S, S_1, S_2, \dots) jusqu'à la surface totale S_0 , une suite de valeurs de magnitude (N, N_1, N_2, \dots) représente l'évolution du nombre de ces bassins sources.

Définition

Un bassin versant structuré par un réseau d'assainissement ramifié et composé de plusieurs biefs, sera dit à unicité structurelle en magnitude ou régulier, si la relation (N, S), S étant la surface des bassins sources au nombre de N , peut être représentée par une fonction continue et continuellement dérivable, à décroissance monotone lorsque S croît continuellement.

Un cas particulier de relation, du type modèle allométrique $N = b \cdot S^{-a}$ avec a positif [45], renvoie à la théorie de la dimension fractale [43,44] qui était en fait sous-jacente conceptuellement lors de l'ébauche de ce travail pour nous-mêmes et Bocquillon. Cette relation entre allométrie et dimension fractale sera reprise plus loin (Partie B).

4.2. Modèle de Bocquillon : évolution allométrique de la magnitude

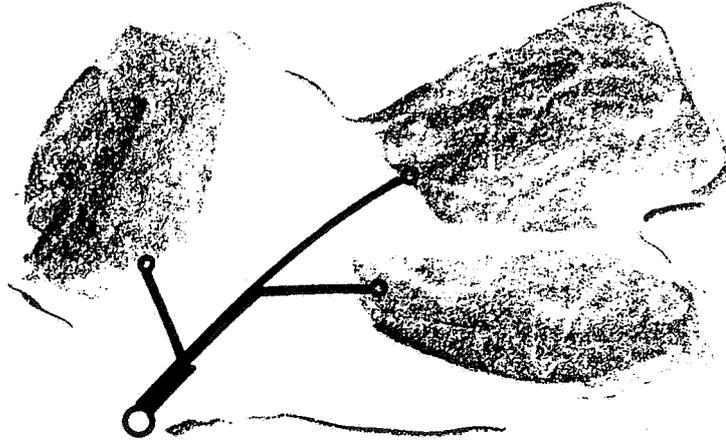
Le cadre théorique développé par Bocquillon permet de relier une évolution (N, S) de type allométrique à différentes grandeurs physiques telles que la longueur totale du réseau situé à l'aval de tous les bassins sources considérés [42].

Ainsi, Bocquillon introduit deux relations :

$$(N, S) ; (L, S)$$

avec N : magnitude ou nombre de surfaces sources de valeurs S

L : longueur du réseau tronqué

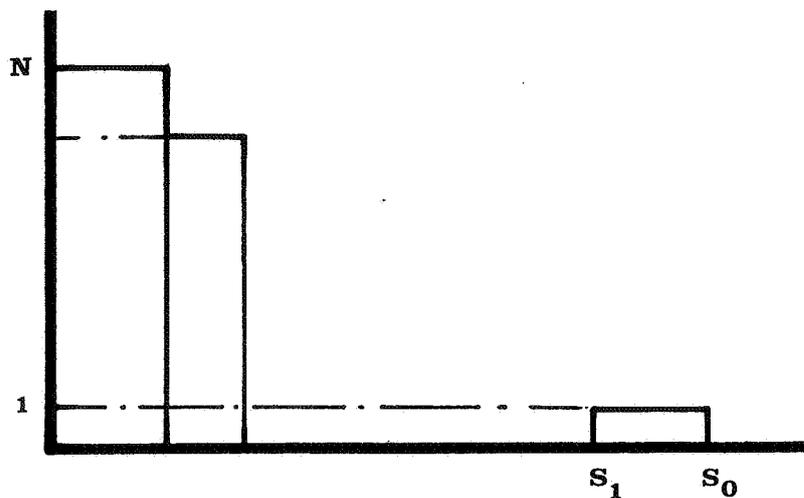


Trois hypothèses sont introduites.

Première hypothèse

Soit un bassin versant de surface totale S_0 et possédant un réseau ramifié de canalisations.

En partant de l'amont vers l'aval, et en faisant croître progressivement à partir de zéro la valeur des surfaces sources, leur nombre évolue par valeur entière N , à chaque valeur étant associé un intervalle de variation de S .



Cette fonction en escalier peut être approximée par la relation allométrique continue $N = (S/S_0)^{-a}$ avec a , coefficient d'allométrie.

Seconde hypothèse

Le bassin versant et la structure du réseau possèdent une qualité d'homothétie interne ; tout bassin source est une réduction du bassin total S_0 .

En partant de cette hypothèse, Bocquillon introduit les deux relations suivantes :

$$L = \sqrt{S_0} B(S/S_0) = L(S, S_0)$$

$$N = H(S/S_0) = N(S, S_0)$$

Troisième hypothèse

Les fonctions B , H sont continues, dérivables. Cette dernière hypothèse traduit une abstraction du système observé afin de rendre opératoires les relations.

a) relation entre B et H : détermination de $L(S, S_0)$

A partir de ces trois hypothèses, Bocquillon démontre que : (voir complément 5)

$$L(S, S_0) = \frac{\sqrt{S_0} \cdot B'(1)}{\frac{1}{2} - a} \left[\left[\frac{S}{S_0} \right]^{(\frac{1}{2}-a)} - 1 \right]$$

Si le coefficient a traduit une tendance au branchement, $B'(1)$ est un coefficient de forme du réseau constant s'il y a homothétie interne et qui peut se calculer comme suit en introduisant la longueur totale du réseau (L_T) et la plus petite valeur de surface source correspondante S_1 . (voir complément 5).

$$B'(1) = \frac{L_T}{\sqrt{S_0}} \times \frac{(\frac{1}{2} - a)}{\left[S_1/S_0 \right]^{\frac{1}{2}-a} - 1}$$

Ainsi $L(S, S_0)$ vérifie :

$$L(S, S_0) = L_T \cdot \frac{S^{\frac{1}{2}-a} - S_0^{\frac{1}{2}-a}}{S_1^{\frac{1}{2}-a} - S_0^{\frac{1}{2}-a}} \quad \text{avec } N = (S/S_0)^{-a}$$

Ces deux relations définissent le modèle de Bocquillon, appartenant

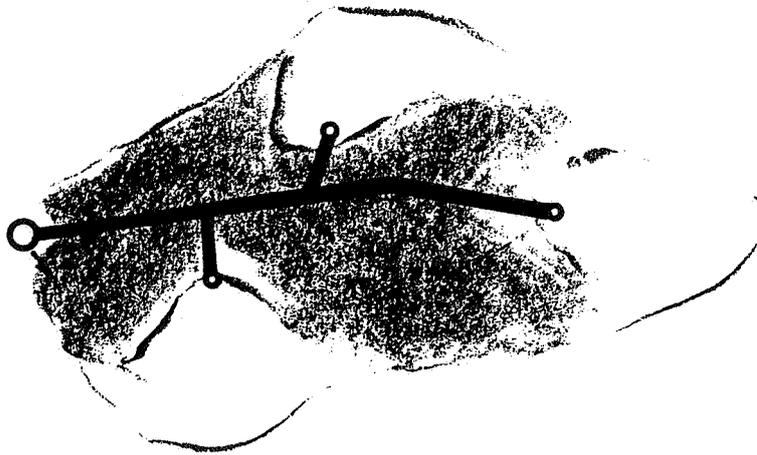
à l'intervalle $[0,1]$, puisque pour toute valeur de S inférieure à S_0 , nous devons vérifier l'inégalité suivante :

$$NS < S_0 \quad ; \quad (S_0/S)^a < S_0/S$$

(0.5 est une valeur critique de a pour le calcul de $L(S, S_0)$).

b) Autre relation

Soit $A(S, S_0)$ la surface drainée le long du réseau tronqué.



En posant $A(S, S_0) = S_0 F(S/S_0)$ (hypothèse d'homothétie interne), nous obtenons (voir complément 5) :

$$A(S, S_0) = \frac{S_0^2}{1-a} \cdot F'(1) \cdot \left[(S/S_0)^{1-a} - 1 \right]$$

$F'(1)$ se détermine en considérant la valeur S_1 des plus petites surfaces sources, et est égal à :

$$F'(1) = (a-1) / S_0$$

En remplaçant $F'(1)$ par sa valeur, nous obtenons finalement :

$$A(S, S_0) = S_0 - NS$$

relation qui confirme le bien fondé de la démarche puisque le réseau tronqué draine le complément à S_0 des N surfaces sources.

4.3. Exemple théorique de structures allométriques

Pour illustrer la forme des structures régulières en magnitude selon ce modèle allométrique, considérons l'accroissement relatif du nombre de bifurcations ou jonctions lorsque la valeur des surfaces sources varie :

Soit $S_1 < S_2$ et $N_2 < N_1$ tels que :

$$N_1 = (S_1/S_0)^{-a} \quad \text{et} \quad N_2 = (S_2/S_0)^{-a}$$

En passant de S_2 à S_1 , l'accroissement relatif du nombre de surfaces sources vaut :

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N_1 - N_2}{N_2} = \frac{S_1^{-a} - S_2^{-a}}{S_2^{-a}} = \frac{S_1}{S_2}^{-a} - 1$$

Soit r la valeur du rapport S_1/S_2 ; d'où

$$\boxed{\frac{\Delta N}{N} = r^{-a} - 1}$$

En fixant la valeur de r , nous pouvons calculer les valeurs de a qui donnent des accroissements relatifs entiers.

Exemple : $r = 1/4$

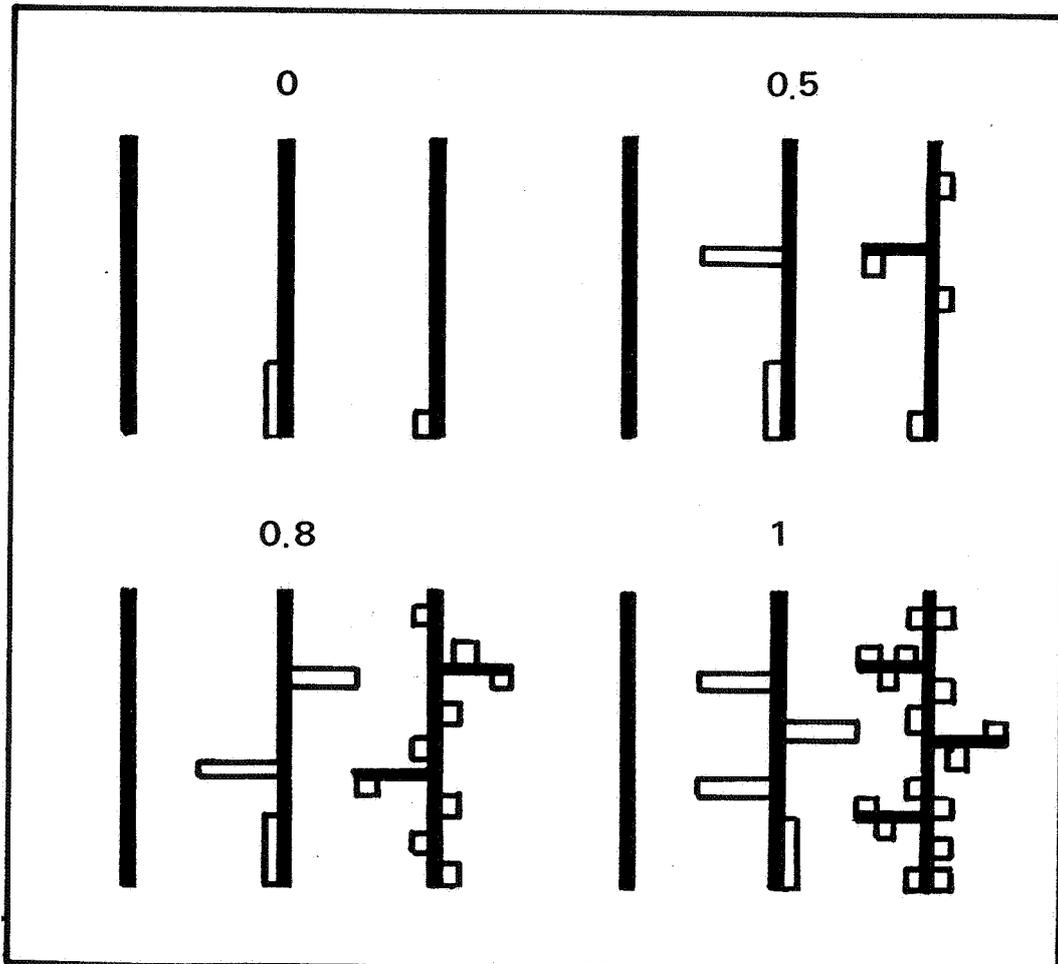
$\frac{\Delta N}{N}$	0	1	2	3
a	0	0.5	0.8	1

Pour cette valeur de r , $\Delta N/N$ ne peut pas excéder 3, puisque la valeur du coefficient d'allométrie appartient à l'intervalle $[0,1]$ ($N_S < S_0$).

En partant de N égal à un, c'est-à-dire d'une surface source équivalente à la surface totale, nous obtenons successivement différentes figures par

diminution dans le rapport r , de la valeur des surfaces sources.

Dans les illustrations suivantes, les bassins sources sont imagés par des tronçons épaissis, trois étapes (S_0 , $S_0/4$, $S_0/16$) étant représentées pour chaque valeur de magnitude (a).



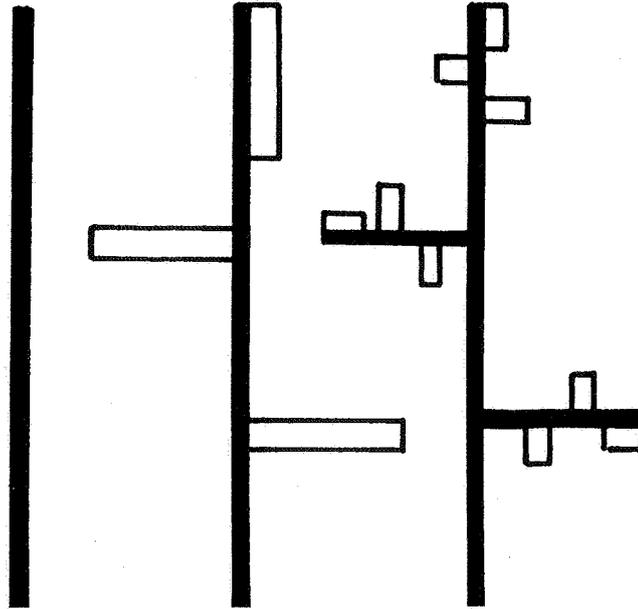
Pour un coefficient nul, le réseau est purement linéique alors qu'il devient progressivement surfacique lorsque a tend vers 1.

Pour cette valeur dernière, NS est égal à S_0 quel que soit S , c'est-à-dire qu'à chaque étape, les bassins sources recouvrent la surface totale drainée S_0 ; les éléments de liaison entre ces surfaces ne drainent donc rien. Il s'agit d'un cas limite qui n'a guère de chance de représenter un réseau d'assainissement réel.

Si ces figures illustrent un comportement allométrique pour l'évolution de la magnitude, elles ne sont pas basées sur une homothétie interne, intro-

duite par Bocquillon ; cette hypothèse étant satisfaite pour des structures plus particulières.

Exemple : $r = 1/4$ $a = 0.8$



Nous pouvons postuler a priori que cette hypothèse sera plus difficilement satisfaite par des réseaux d'assainissement. La validité de ce modèle structurel sera appréciée après avoir présenté sa vérification expérimentale menée conjointement avec le modèle structurel type Horton /Strahler décrit précédemment (paragraphe III.4).

Puis nous aborderons le problème posé par la conjugaison structurel / fonctionnel à partir du modèle allométrique en vue de représenter la transformation pluie / débit.

5. Expérimentation

Nous avons mené cette étude sur le réseau d'assainissement de la Communauté Urbaine de Lyon, ayant à notre disposition les données informatisées de ce réseau.

Le système informatique S.E.R.A.I.L., utilisé par la Communauté Urbaine de Lyon pour simuler le fonctionnement hydraulique du réseau d'assainissement, est basé sur une description de ce réseau regard par regard [46].

D'une longueur totale actuelle (1986) de 2 051 km et structuré par 49 350 cheminées (*), les données affectées à chacune d'elles comportent entre autre, la longueur du tronçon aval, la surface totale du bassin versant que draine le tronçon, affecté d'un coefficient d'imperméabilisation, et les liaisons de cette cheminée avec la cheminée avale et les cheminées amont.

Ainsi, le système nous permet d'explorer la structure des réseaux.



Réseau d'assainissement de la Communauté Urbaine de Lyon

(*) : appellation lyonnaise du regard

Cette image globale du réseau, révélée par l'émergence de l'ordinateur et son usage pour étudier le fonctionnement de cette infrastructure urbaine, nous introduit à un champ expérimental extraordinaire et nouveau. L'existence de ce modèle graphique est due et illustre le passage du local au global c'est-à-dire du tronçon, à l'ensemble de tronçons agencés en réseau qui épouse et génère la forme urbaine globale. Elle nous introduit à une intelligence nouvelle du milieu urbain à travers sa relation avec les réseaux qui structurent cet ensemble.

Ainsi visualisé, l'objet réseau présente une complexité extraordinaire et différents types de morphologies. C'est un objet évolutif dans le temps et l'espace, ses variations de structure reflétant différentes époques et techniques urbaines.

Si nous appelons modèle structurel, un modèle qui rend intelligible la structure d'un réseau, peut-il y avoir un modèle unique qui représente la diversité présente :

- réseaux ramifiés
- réseaux maillés
- réseaux maillés / ramifiés
- réseaux à exutoire unique
- réseaux à exutoires multiples
- réseaux à exutoires et à sorties partielles (déversoirs ...)

Quoi qu'il en soit, s'ils sont validés expérimentalement, le modèle en progression géométrique (Horton / Strahler) et le modèle allométrique seront des modèles partiels puisqu'ils ne pourront représenter que des réseaux ramifiés à exutoire unique avec éventuellement des sorties partielles latérales qui ne seraient pas prises en compte au niveau de l'étude de la structure globale.

5.1. Le champ expérimental

Le système de drainage eau pluviale, eau usée de la Communauté Urbaine de Lyon est en grande partie un système unitaire. Les eaux sont rejetées au milieu naturel par huit stations d'épuration (1986) qui induisent une partition du système global en autant de systèmes indépendants, chacun d'eux étant caractérisé par un seul exutoire principal et un ensemble de points de rejet partiels situés le long des ruisseaux, rivières et fleuves.

La structure maillée est prépondérante au centre de l'agglomération, le reste du réseau étant ramifié avec des mailles localisées.

Nous avons rejeté hors de notre champ expérimental le réseau central, les modèles structurels précédemment explicités ne s'appliquant qu'à des structures ramifiées. Ces modèles sont basés sur un découpage du système en sous systèmes ne possédant qu'un seul exutoire et théoriquement sans mailles ni points latéraux de rejet.

Cette condition étant très difficile à respecter au vu de la complexité des réseaux, nous avons retenu un ensemble de sous systèmes ne présentant qu'un très faible nombre de déversoirs ou évacuateurs latéraux et très peu de mailles, arbitrairement coupées afin d'obtenir une structure purement ramifiée.

De plus, nous avons choisi de préférence des sous systèmes quasi isolables, c'est-à-dire possédant au plus une ou deux liaisons avec des sous systèmes amonts et caractérisées a priori par une entité structurelle propre.

L'enjeu n'étant pas de tester ces modèles sur tous les systèmes possibles mais de révéler leur capacité à modéliser la structure des réseaux ramifiés, nous avons restreint notre étude à une vingtaine de cas.

Ce qui résulte de l'étude des réseaux des communes qui suivent, est représentatif de l'ensemble des résultats que nous avons obtenus.

Nom de la commune	Surface imperméabilisée raccordée en hectares (*)	Longueur du réseau en kilomètres
Saint Didier ouest	5	3.9
Francheville	18	8.5
Décines	38	25
Vaulx en Velin sud	49.5	10
Ste Foy lès Lyon	60	13
Vaulx en Velin nord	76	13

(*) **Nota** : Cette valeur de surface imperméabilisée est relative au mode de définition des bassins versants qui a servi et sert à élaborer l'ensemble des données hydrologiques du système informatique S.E.R.A.I.L. que nous avons utilisé pour la validation des modèles.

Par cheminées sont définies des surfaces drainantes à partir d'un certain nombre de règles relativement simples qui ne rendent pas compte de la très grande complexité de ces surfaces [46]. Dans le système utilisé, à chacune de ses surfaces est attaché un coefficient d'imperméabilisation permettant de définir la surface imperméable en liaison directe avec le réseau. C'est cette valeur qui a servi à définir les quantités du tableau précédent.

5.2. Mesures effectuées et représentations

a) Modèles de Strahler et de Horton

Les branches (ensemble de biefs) étant classés à partir d'un ordonnancement particulier, la structure du réseau est de Strahler ou Horton si leur nombre, leur longueur et la surface moyenne drainée suivent une progression géométrique ordre par ordre. Soit :

$$R_B = N_{W-1} / N_W$$

$$R_L = L_W / L_{W-1}$$

$$R_A = S_W / S_{W-1}$$

N : nombre de branches à l'ordre

L : longueur moyenne des branches

S : surface moyenne des surfaces drainées

Pour un sous système donné ayant un seul exutoire, l'ordonnancement étant déterminé, nous avons donc simplement calculé par ordre les longueurs, les surfaces et les valeurs moyennes correspondantes.

Si les longueurs sont des données purement géométriques et totalement définies par le réseau de canalisations, les surfaces des bassins versants n'ont pas de définition aussi simple. En effet, la valeur de ces surfaces résulte de la dualité Pluie / Sol.

Ces surfaces sont l'ensemble des lieux qui peuvent éventuellement contribuer au ruissellement vers le réseau de drainage soit de façon directe (surface en liaison directe avec le réseau) soit de façon indirecte (cas des surfaces perméables saturées ou des dépressions imperméables remplies,

qui ruissellent alors vers des surfaces reliées directement au réseau).

La véritable surface qu'il faudrait prendre en compte est la surface active c'est-à-dire la partie de la surface potentiellement drainante, actualisée par une pluie. Il s'agit donc d'une surface qui dépend de la pluie et qui varie dans le temps.

Si une telle définition de la surface est hydrologiquement juste, elle se révèle trop complexe pour le cadre de notre étude, la valeur de la surface active étant quasiment impossible à définir a priori.

Si nous avons choisi l'enveloppe des surfaces actives, c'est-à-dire la surface potentiellement drainante, les éléments perméables auraient eu le même poids que ceux qui sont imperméables, cette surface résultant d'une simple sommation de ces deux types d'éléments.

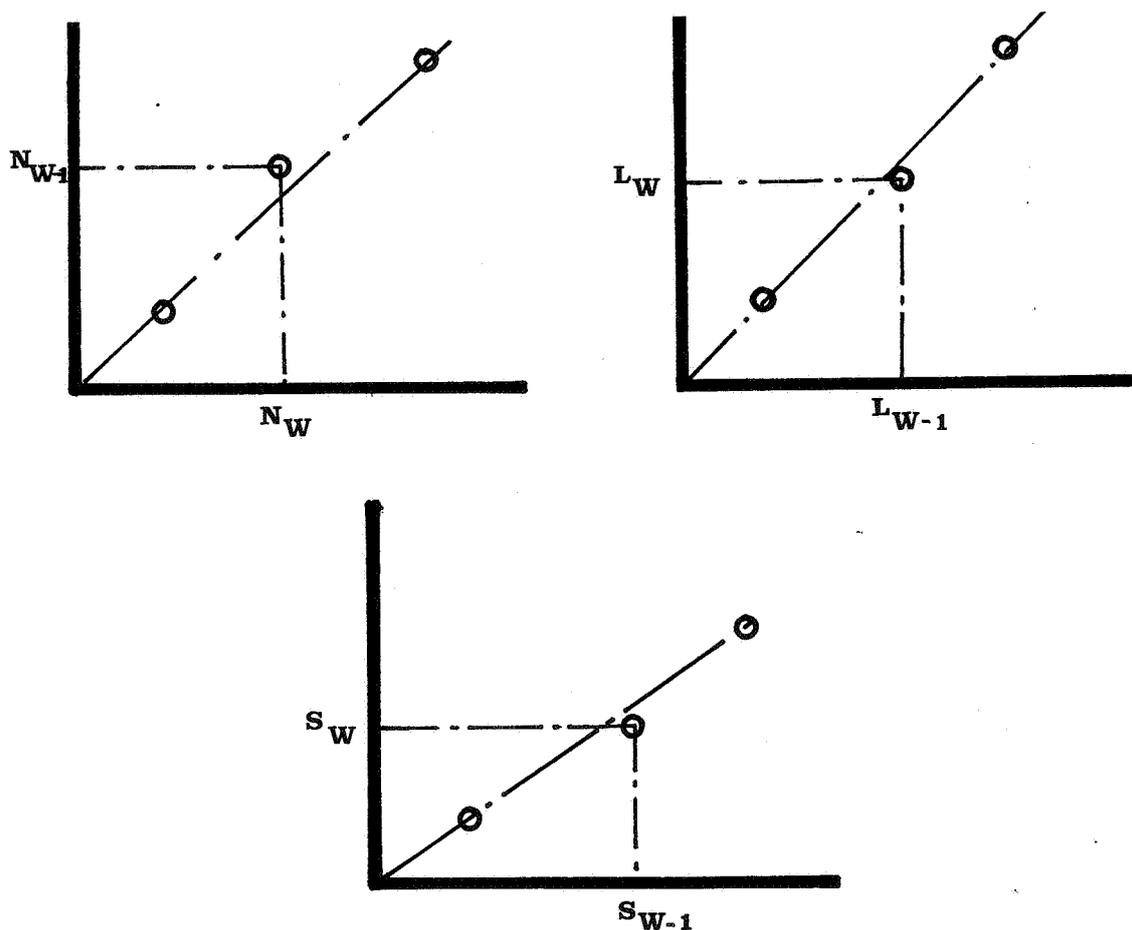
Ce choix pouvant favoriser les éléments perméables, nous avons retenu comme valeur celle de la surface imperméable. Même s'il n'est pas hydrologiquement parfait, ce choix permet de définir un coefficient R_A sans ambiguïté vis-à-vis de l'étude structurelle menée.

Enfin, le modèle de Horton étant basé sur une modification de l'ordre des branches donné par le modèle de Strahler et en cheminant de l'amont vers l'aval (voir paragraphe 3.4.1.), nous avons retenu le critère suivant :
A une jonction, le bief amont le plus aligné avec le bief aval est affecté de l'ordre de ce dernier.

Les ordonnancements de Strahler et de Horton amènent à définir le nombre de branches N ayant un ordre w (w variant de 1 à Z (ordre de la branche joignant l'exutoire)).

Pour chaque ordre w , on peut calculer les longueurs des branches, la valeur des surfaces drainées par ces branches, puis la valeur moyenne de ces longueurs et de ces surfaces (L_w, S_w).

Afin de vérifier que la structure du réseau étudié est de Strahler ou de Horton, il suffit de représenter les relations (N_w, N_{w-1}) , (L_{w-1}, L_w) , (S_{w-1}, S_w) comme suit :



La structure sera de Strahler ou de Horton si les points obtenus sont alignés, la droite les joignant passant par l'origine et sa pente donnant alors la valeurs du coefficient R (R_B , R_A , R_L).

Rappelons que le modèle fonctionnel type Gupta (voir paragraphe 3.4.2.) n'est utilisable que si les trois relations sont approximativement linéaires.

Nous dirons donc qu'un réseau est structurellement en progression géométrique si et seulement si les trois relations N,L,S sont linéaires.

Pour apprécier la qualité de ce modèle, nous avons approximé les résultats expérimentaux, c'est-à-dire les trois relations N, L, S par des droites du type $y = ax$, les pentes étant égales aux coefficients de Horton ou Strahler R_B , R_L , R_A . Puis nous avons calculé l'erreur relative moyenne (voir annexe 1).

Nota : Les grandeurs manipulées ayant des valeurs très variables, nous avons

réalisé les tracés en ramenant toutes les valeurs dans un intervalle $[0,1]$ en divisant celles-ci par la plus grande d'entre elles pour chaque type de tracé.

b) Modèle de Bocquillon

Ce modèle est basé sur l'étude de la décroissance du nombre N de surfaces sources S lorsque l'on fait croître la valeur de celles-ci jusqu'à S_0 , surface totale drainée par le réseau considéré.

La structure du réseau est allométrique au sens de la magnitude si la relation N,S est du type :

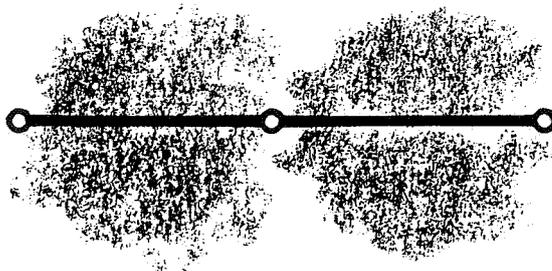
$$N = C S^{-a} \quad \text{avec } C = S_0^a$$

La vérification de la validité de cette relation est donc uniquement basée sur la "mesure" de N et de S . Nous avons choisi d'effectuer ces mesures en ne prenant en compte que la surface imperméable pour les mêmes raisons que précédemment. Cela est d'autant plus justifié que la relation que nous voulons vérifier est basée sur le rapport S/S_0 .

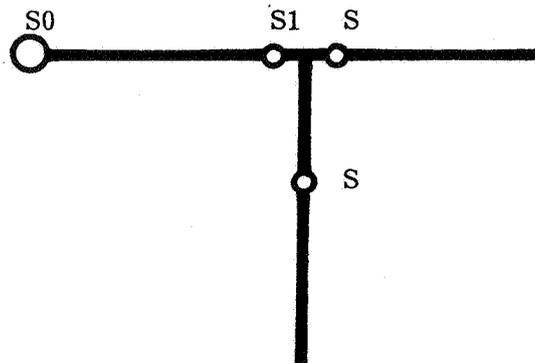
Comme nous l'avons déjà signalé, expérimentalement, la relation N,S est une fonction en escalier.

En effet, est considéré comme seul réseau de drainage des surfaces urbaines, le réseau d'assainissement.

Celui-ci étant décrit cheminée par cheminée, chaque surface élémentaire est affectée à la cheminée avale.



Ainsi, avec l'exemple suivant,

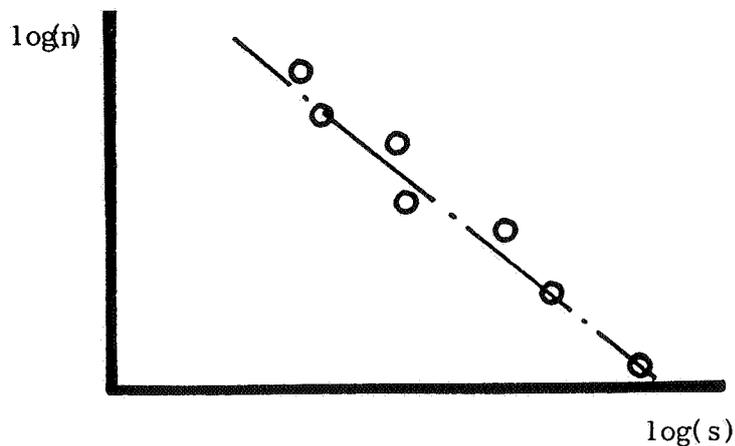


N vaut 2 pour une valeur de surface source variant de 0 à S puis 1 pour une surface comprise entre S_1 et S_0 . Ce nombre N est également le nombre de jonctions permettant de drainer S si l'exutoire est compté comme tel.

Attaché à une description de la structure du réseau, nous dirons que N , tout en étant un nombre de surfaces sources, est surtout le nombre de ramifications du réseau drainant ces surfaces. Nous affecterons à N non pas un intervalle de valeurs de surface, mais la borne supérieure afin de représenter au mieux le rôle de drainage de la ramification.

b.1) réseau allométrique en magnitude

L'allométrie de la relation N, S résulte de la linéarité approximative entre $\text{Log}(N)$ et $\text{Log}(S)$

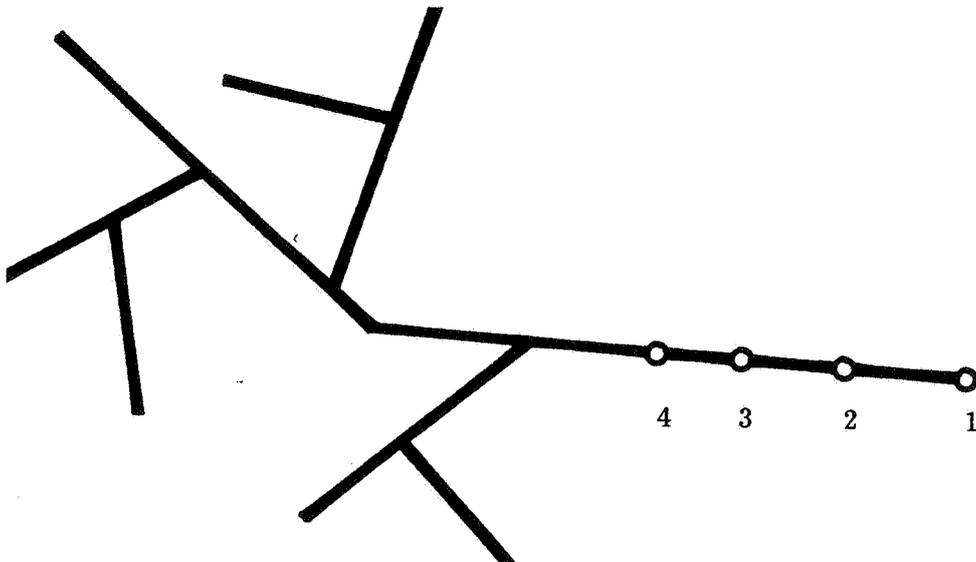


La valeur absolue de la pente de la droite donne la valeur du coefficient d'allométrie a .

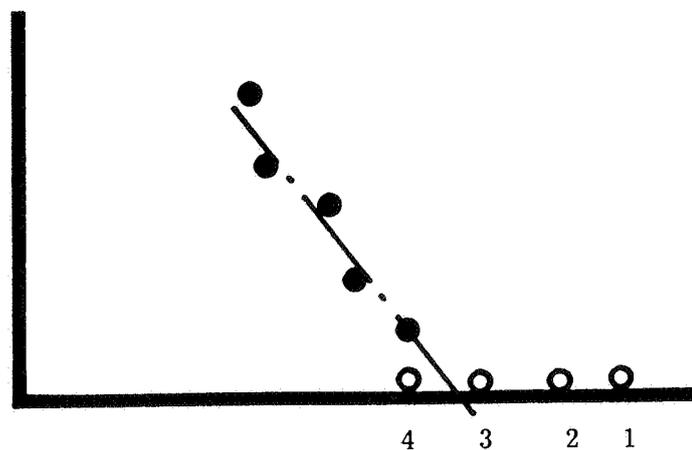
$$\text{Log}(N) = -a \text{Log}(S) + b$$

A partir du mode de description du réseau que nous avons retenu, la surface totale drainée par le réseau correspond à N égal à un.

L'étude structurale s'effectuant de l'amont vers l'aval, nous ne pouvons pas déterminer a priori la cheminée exutoire donnant une surface totale S_0 qui soit située approximativement sur la droite reliant $\text{Log}(N)$ à $\text{Log}(S)$. L'exemple théorique suivant illustre ce propos :



En désignant par S_4, S_3, S_2, S_1 les surfaces globales drainées par les points correspondants, la surface totale S_0 répondant au principe d'allométrie c'est-à-dire approximativement alignée avec les couples (N,S) est plus ou moins proche de l'un de ces points.



Si l'approximation est menée sans tenir compte d'une surface globale drainée par un exutoire choisi a priori, la surface S_0 globale correspondant à une structure allométrique se calcule à partir de la relation précédente :

$$S_0 = e b/a$$

Avec des points (Log (N) Log (S)) suffisamment alignés, c'est le modèle qui définit la figure globale.

Ainsi, pour l'exemple théorique précédent, le réseau ayant pour exutoire le point 1, se décompose au sens du modèle allométrique en magnitude, en deux sous réseaux. Le premier ayant pour exutoire le point 4 a un coefficient d'allométrie supérieur à un, le second situé entre les points 4 et 1 a un coefficient d'allométrie nul (pas de jonctions).

La qualité de la représentation est quantifiable par l'écart relatif moyen $\frac{\Delta N}{N}$ entre N observé (N_0) et N calculé (N_c) par l'approximation linéaire (voir annexe 1).

b.2) réseau allométrique en magnitude et à homothétie interne

La qualité d'homothétie interne se vérifie à partir de la relation donnant la longueur L du réseau tronqué à S, établie par Bocquillon (voir complément 5).

$$L(S, S_0) = \frac{\sqrt{S_0} \cdot \mathbf{B}'(1)}{(\frac{1}{2} - a)} \left[\left(\frac{S}{S_0} \right)^{\frac{1}{2} - a} - 1 \right]$$

a : coefficient d'allométrie

S_0 : surface totale

S : surface source

Le réseau est à homothétie interne si les quantités suivantes définies à partir de $L(S, S_0)$

$$\mathbf{B}'(1) = \frac{L(S, S_0)}{\sqrt{S_0}} \frac{(\frac{1}{2} - a)}{((S/S_0)^{\frac{1}{2} - a} - 1)}$$

sont constantes quel que soit S.

Après avoir déterminé expérimentalement $L(S, S_0)$ et approximé le coefficient d'allométrie a, nous avons calculé la quantité précédente pour différentes valeurs de S, estimé la valeur moyenne de $\mathbf{B}'(1)$ puis recalculé

les longueurs $L(S, S_0)$ correspondantes.

La qualité d'homothétie sera estimée à partir des valeurs suivantes (voir annexe 1).

$B'(1)$ moyen $[B'm]$

$$\Delta B'm / B'm = \frac{|B'(1) - B'm|}{B'm} \text{ moyen } [E1]$$

$$\Delta L / L = \frac{|L(S, S_0) - L B'm|}{L(S, S_0)} \text{ moyen } [E2]$$

Nous pouvons également apprécier cette qualité en calculant directement les coefficients d'allométrie de différents sous systèmes. Si ceux-ci sont égaux entre eux et égaux au coefficient du réseau global, nous dirons que le réseau est à homothétie interne.

Si le principe d'allométrie est fondé, le modèle induit une décomposition d'un réseau quelconque en sous systèmes structurellement stables vis-à-vis de ce principe. Une figure globale choisie a priori peut ou ne pas être structurellement stable.

Si elle ne l'est pas, une décomposition s'impose, la décomposition ultime étant le bief sans jonction, figure élémentaire allométriquement nulle en magnitude.

Nous pouvons dire que l'expérimentation du modèle revient à définir les sous systèmes approximativement réguliers d'un système donné en repérant les discontinuités d'ordre un de la courbe (Log N, Log S).

Pour des figurès suffisamment continues, les paramètres a et b ont été déterminés par une méthode d'approximation numérique aux moindres carrés.

5.3. Résultats

Ils sont présentés réseau par réseau et illustrés d'un tracé de celui-ci, réalisé par ordinateur à partir des données structurelles du fichier de la Communauté Urbaine de Lyon.

Pour chacun de ces réseaux, nous avons adopté l'ordre suivant :

- Résultats relatifs au modèle en progression géométrique avec un calcul par approximation aux moindres carrés des coefficients, complété de l'erreur relative moyenne pour chacun d'eux

$$. R_B = N_{W-1} / N_W \quad ; \quad \Delta N/N$$

$$. R_L = L_W / L_{W-1} \quad ; \quad \Delta L/L$$

$$. R_A = S_W / S_{W-1} \quad ; \quad \Delta S/S$$

- Résultats relatifs au modèle allométrique en magnitude avec :

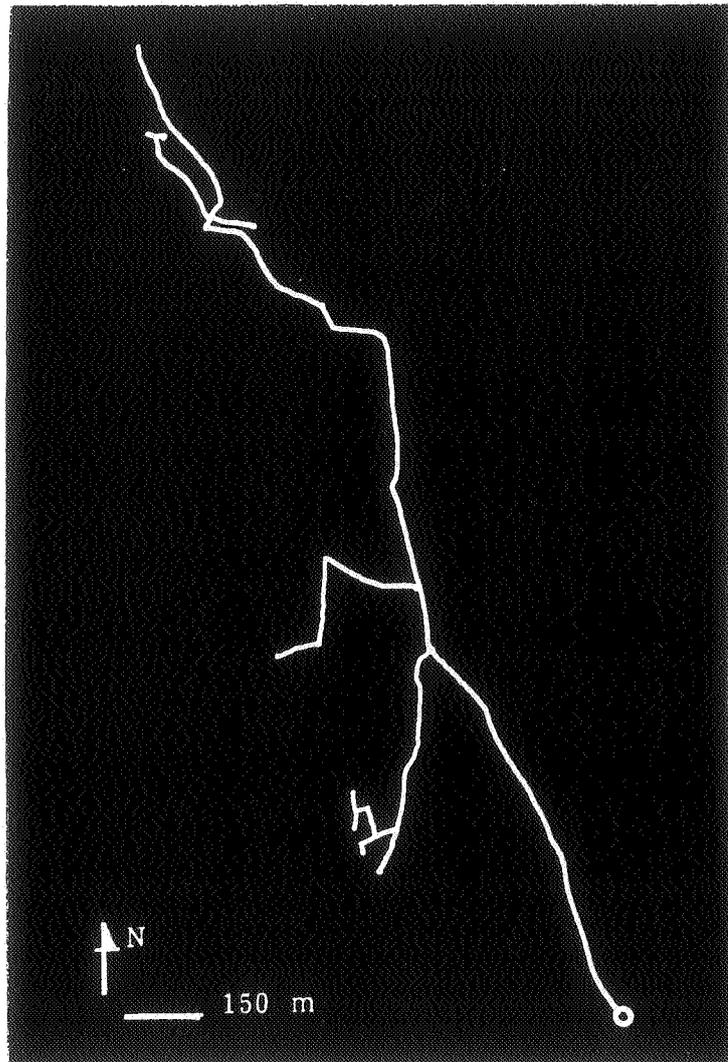
. les calculs de a, b ($N = b S^{-a}$), de S_0 et de $\Delta N/N$ pour apprécier l'allométrie du réseau

. la détermination des grandeurs permettant d'apprécier la qualité d'homothétie avec éventuellement le calcul de a pour quelques sous systèmes du réseau étudié.

Nous n'avons pas reproduit ni l'ensemble des données expérimentales (utilisation de données informatiques représentant le réseau de la Communauté Urbaine de Lyon) ni l'ensemble des résultats provenant d'un traitement informatique.

Nous nous sommes contentés de reproduire à titre d'exemple l'ensemble des données et des résultats obtenus pour le réseau de la commune de Saint Didier au Mont d'Or "ouest" dans l'annexe 1, le reste pouvant être mis à disposition.

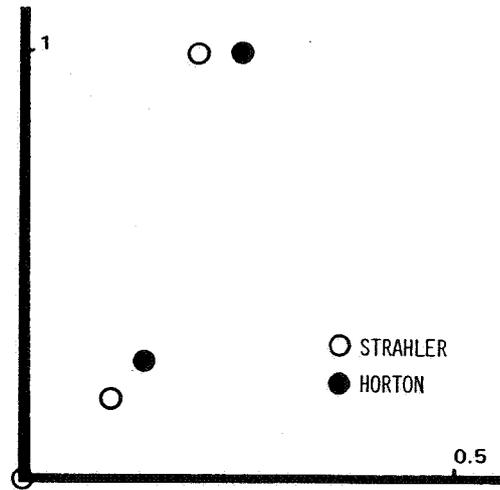
Pour que les tracés ($\log(N)$, $\log(S)$) et ($L(S, S_0)$, S) soient lisibles, nous n'avons pas reproduit toutes les valeurs qui ont servi à valider les modèles.



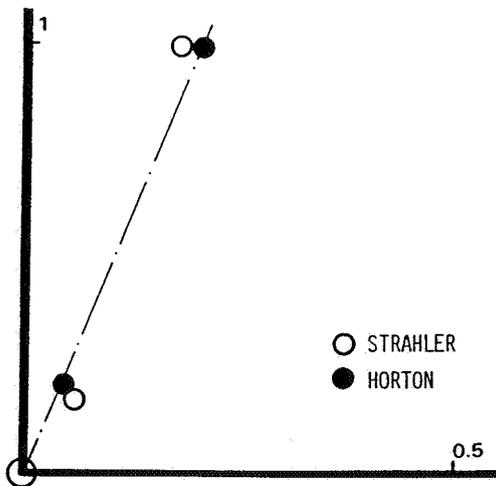
Saint Didier "ouest"

Commune située à la naissance des Monts d'Or
dans le nord ouest lyonnais

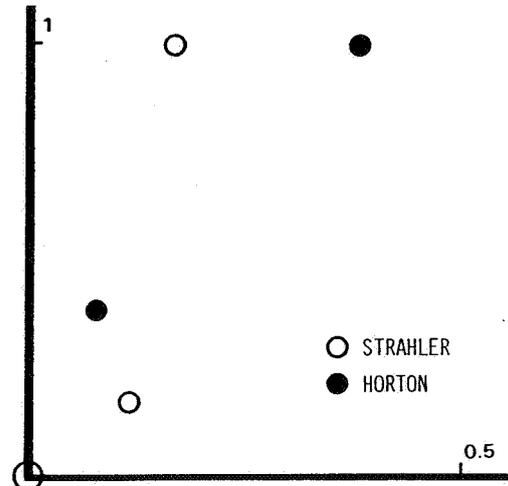
Réseau de 3,9 km drainant 5 hectares de surfaces imperméabilisées

Relations R_B , R_L , R_A 

$$\frac{N_{w-1}}{N_1} = f\left(\frac{N_w}{N_1}\right)$$



$$\frac{L_w}{L_{\max}} = f\left(\frac{L_{w-1}}{L_{\max}}\right)$$



$$\frac{S_w}{S_{\max}} = f\left(\frac{S_{w-1}}{S_{\max}}\right)$$

Pour chaque ordre, les valeurs de surfaces et de longueurs associées aux branches sont très dispersées autour de leur valeur moyenne (voir annexe 1).

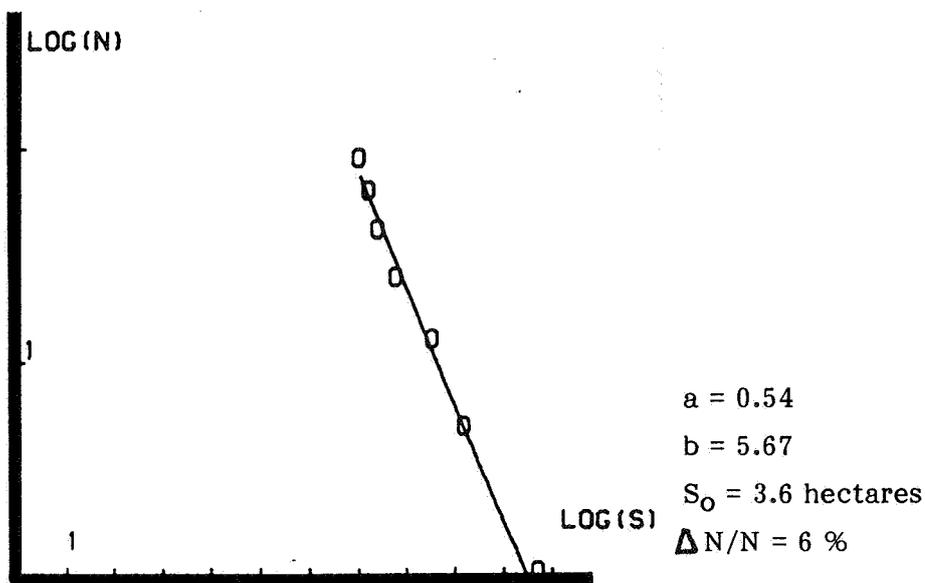
Cette caractéristique se retrouve pour l'ensemble des réseaux testés.

coefficients et erreurs relatives

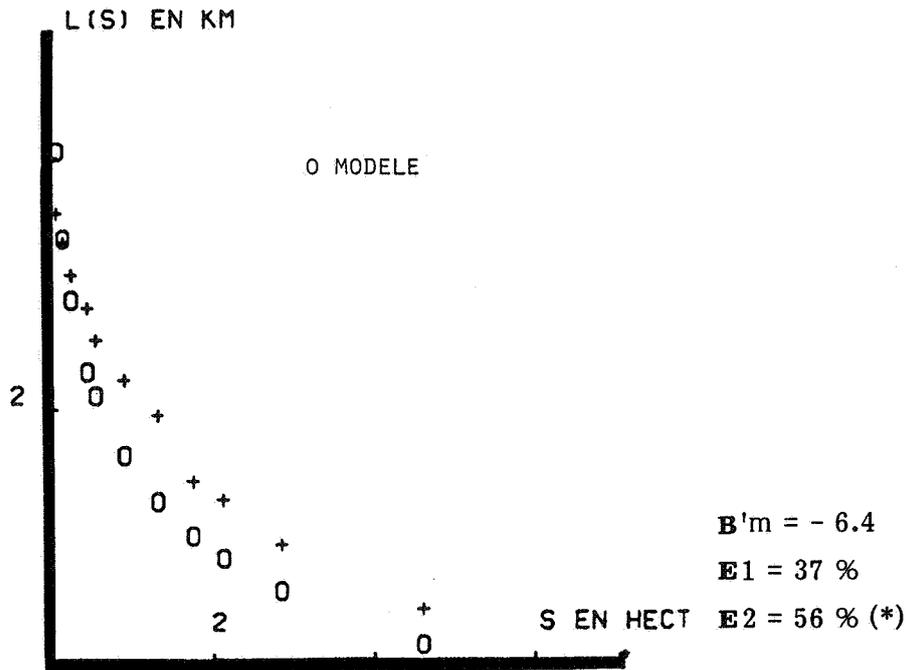
	Strahler		Horton	
R_B	4.4	32%	3.6	25%
R_L	5.2	19%	4.8	2%
R_A	4.5	53%	2.7	18%

Ce modèle donne une très mauvaise représentation de la structure du réseau.

Relation (N,S) et (L,S)

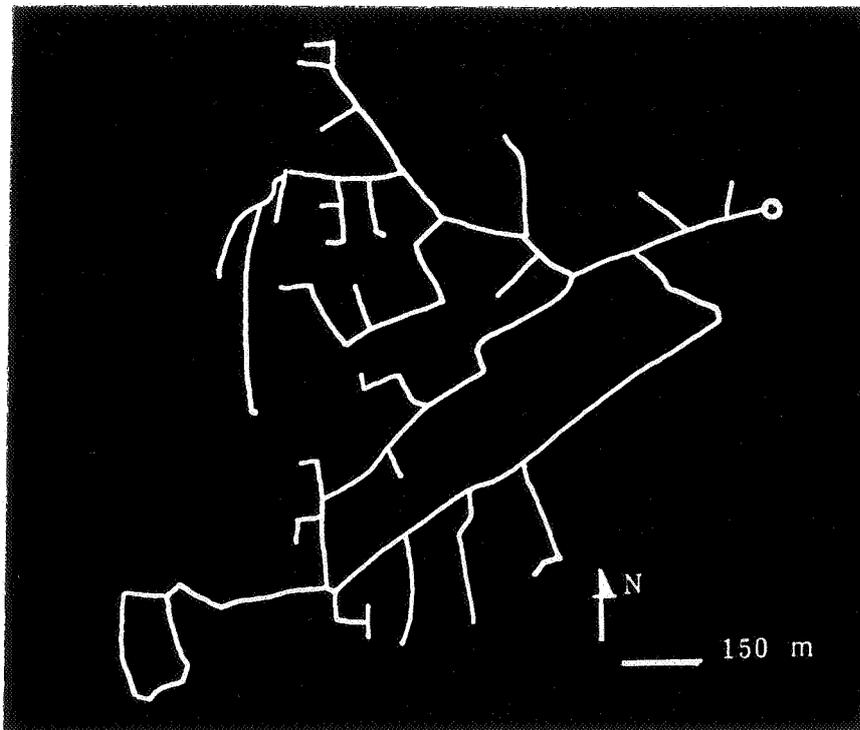


L'approximation linéaire étant satisfaisante, le réseau initial est composé de deux sous systèmes en série ; le premier d'une allométrie nulle et d'une surface de 1.47 hectares, le second de 3.6 hectares avec une allométrie égale à 0.54.



Cette dernière valeur tombe à 20 % lorsque les longueurs du réseau tronqué sont calculées avec $\beta(1)$ égale à -4, valeur proche de celles obtenues pour des surfaces sources faibles. Si ce réseau peut être jugé allométrique en magnitude, l'homothétie interne n'est pas vérifiée.

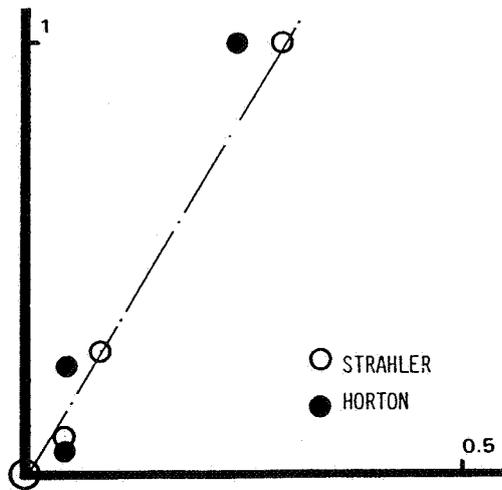
(*) $E1 = \Delta B'm / B'm$; $E2 = \Delta L / L$



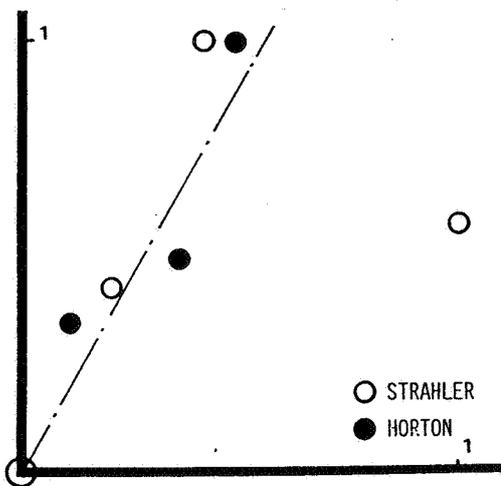
Francheville

Commune située sur les plateaux du sud ouest lyonnais
surface imperméabilisée de 18 hectares drainée par 8.5 km de réseau

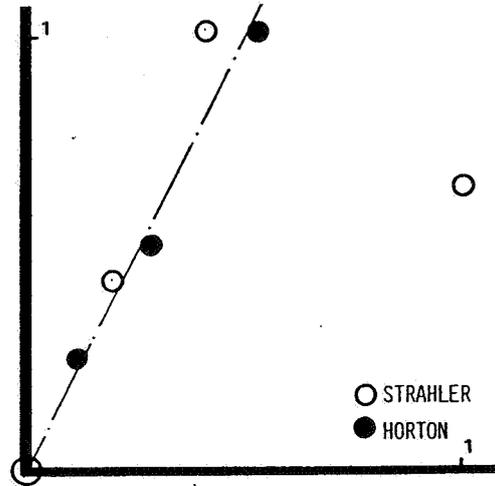
Relations R_B, R_L, R_A



$$\frac{N_{w-1}}{N_1} = f\left(\frac{N_w}{N_1}\right)$$



$$\frac{L}{L_{max}} = f\left(\frac{L_{w-1}}{L_{max}}\right)$$



$$\frac{S}{S_{max}} = f\left(\frac{S_{w-1}}{S_{max}}\right)$$

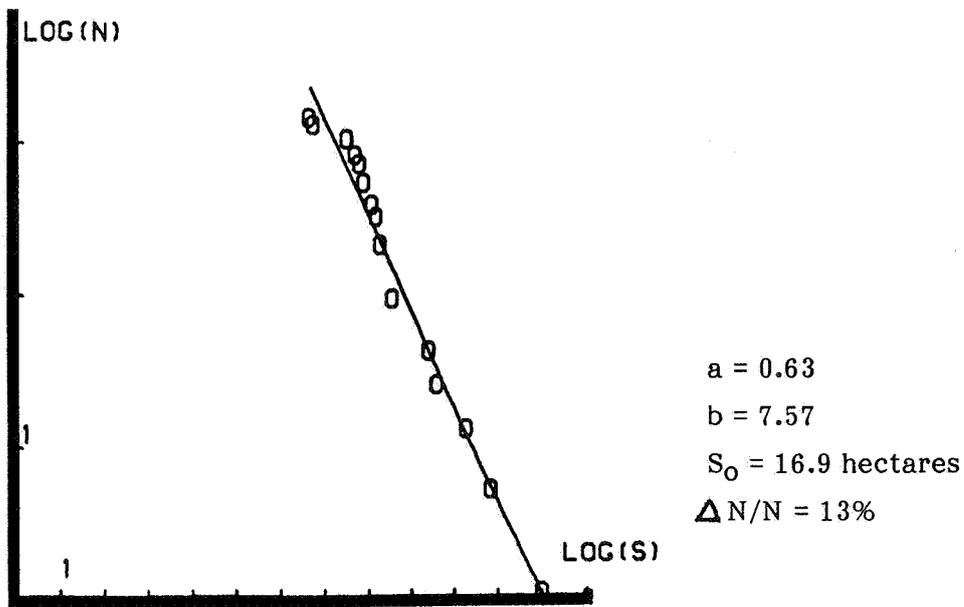
coefficients et erreurs relatives

	Strahler		Horton	
R_B	3.4	7%	4.1	20%
R_L	0.9	64%	1.9	24%
R_A	0.9	61%	1.9	9%

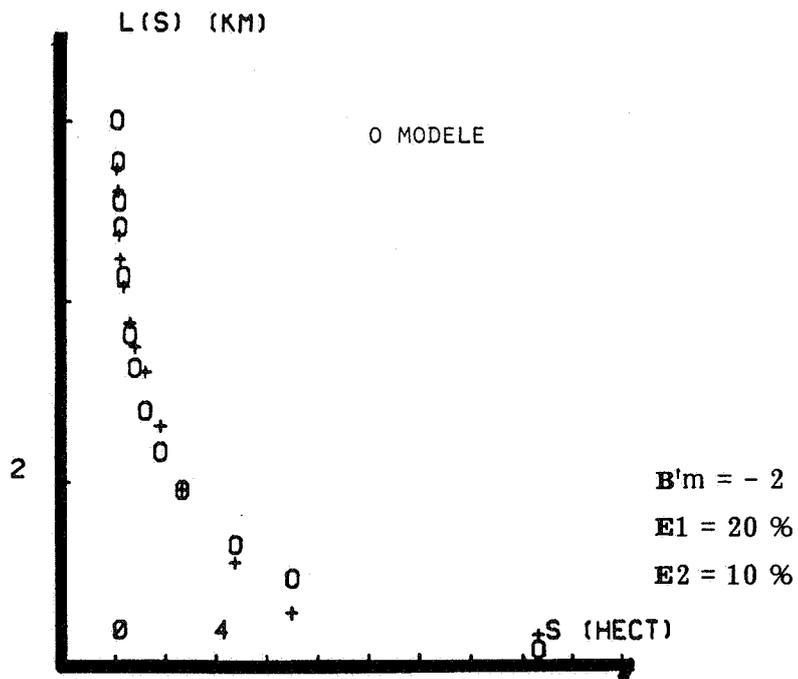
Le schéma de Horton est meilleur, la progression géométrique étant très approximativement vérifiée, avec des écarts en longueur importants :

L_1 (m)	L_{I-1} (m)	L_{I-1} approximé (m)
132	499	247
499	701	936
701	1 471	1 316

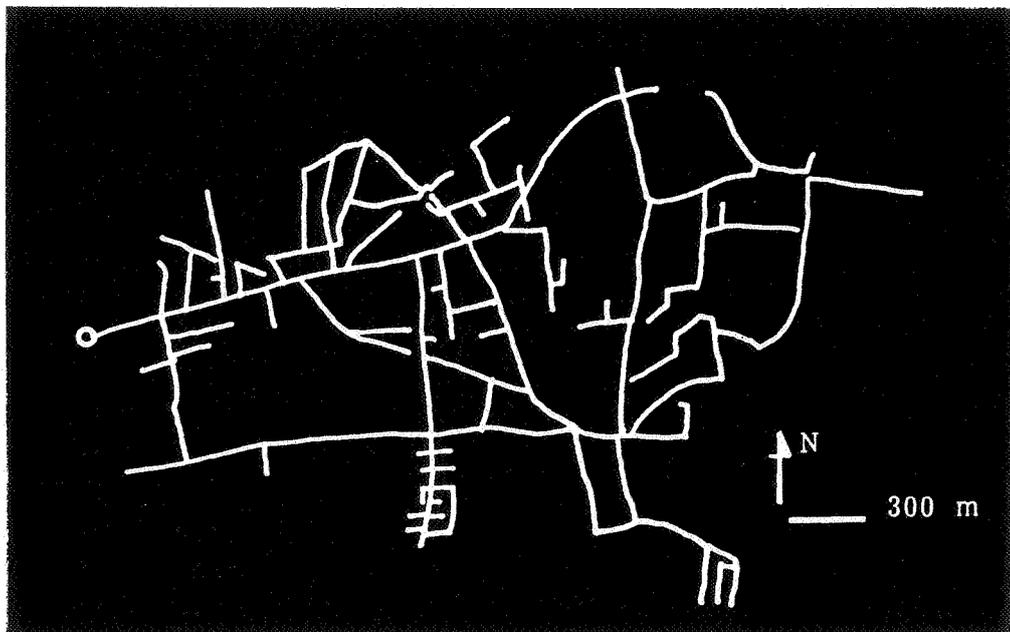
Relations (N,S) (L,S)



La tendance à l'allométrie se vérifie même si elle est plus approximative que pour le réseau précédent. Par contre, elle s'applique pratiquement sur la figure initialement choisie de 18 hectares.

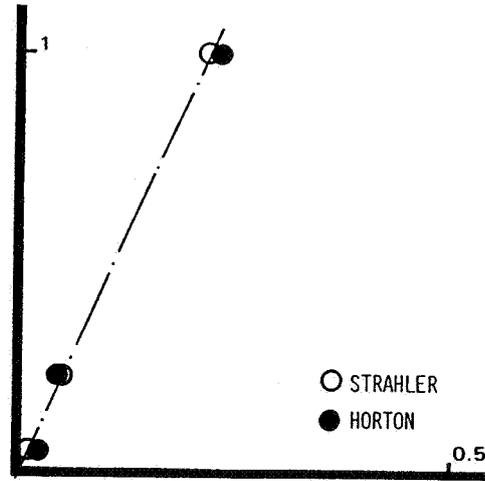


La tendance à l'homothétie interne est meilleure que précédemment.

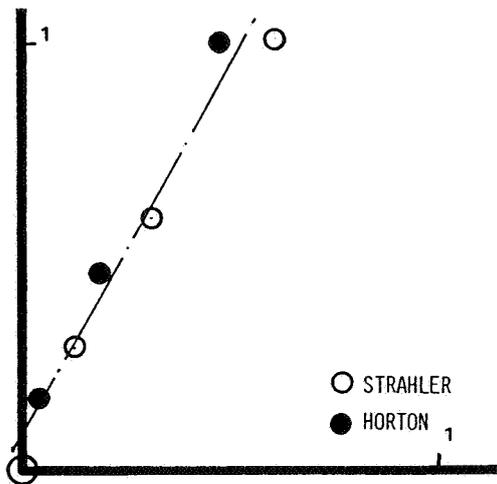


Décines

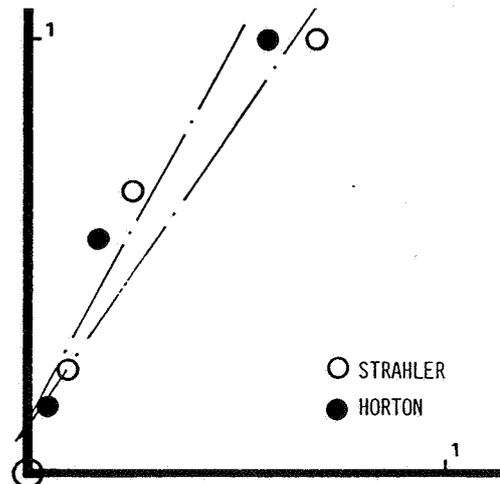
Situé dans la plaine de l'est lyonnais, ce réseau de 25 km
draine une surface imperméabilisée de 38 hectares

Relation R_B, R_L, R_A 

$$\frac{N_{W-1}}{N_1} = f\left(\frac{N_W}{N_1}\right)$$



$$\frac{L_W}{L_{\max}} = f\left(\frac{L_{W-1}}{L_{\max}}\right)$$



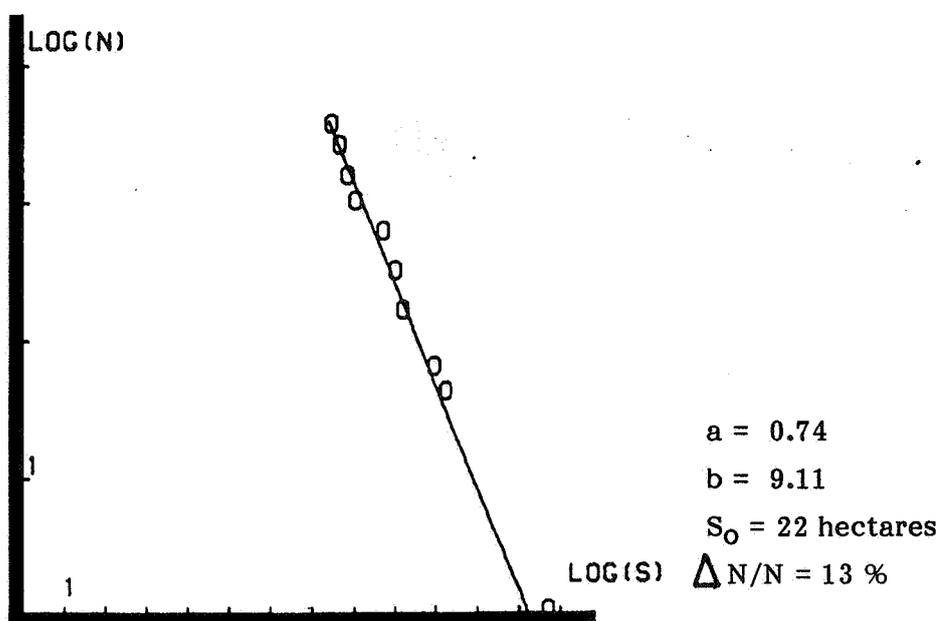
$$\frac{S_W}{S_{\max}} = f\left(\frac{S_{W-1}}{S_{\max}}\right)$$

La structure de ce réseau possède une tendance certaine à satisfaire le principe de progression géométrique.

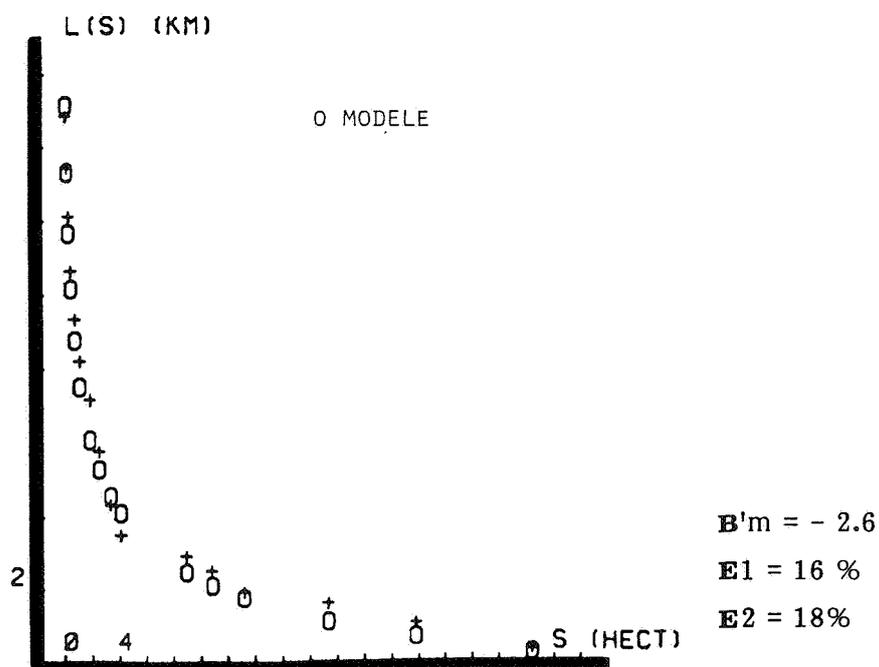
L'approximation par $y = ax$ donne les résultats suivants :

coefficients et erreurs relatives

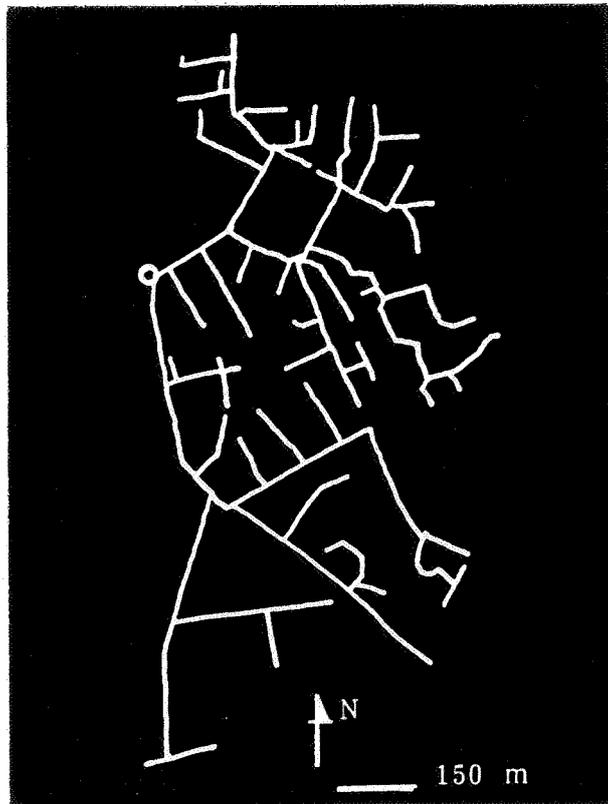
	Strahler		Horton	
R_B	4.3	1%	4.3	4%
R_L	1.8	10%	2.1	12%
R_A	1.7	26%	2.	28%

Relations (N,S) (L,S)

Pour obtenir un réseau approximativement allométrique, il faut lui ôter toute une partie proche de l'exutoire que nous avons choisie a priori.



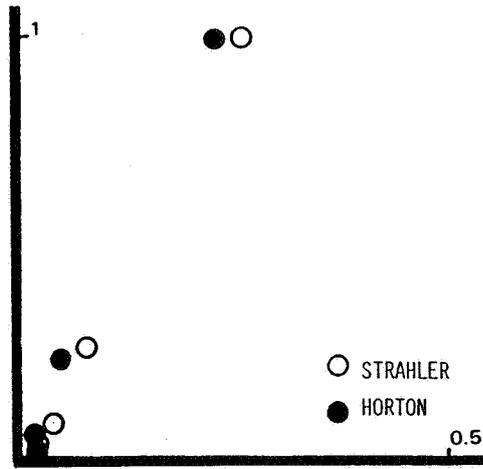
Même si la plage de variation autour de la constante est plus faible que pour les réseaux précédents, la longueur tronquée calculée reste éloignée de la longueur observée ; il faudrait utiliser une valeur de $B'm = - 2.1$ pour avoir une meilleure représentation de L.



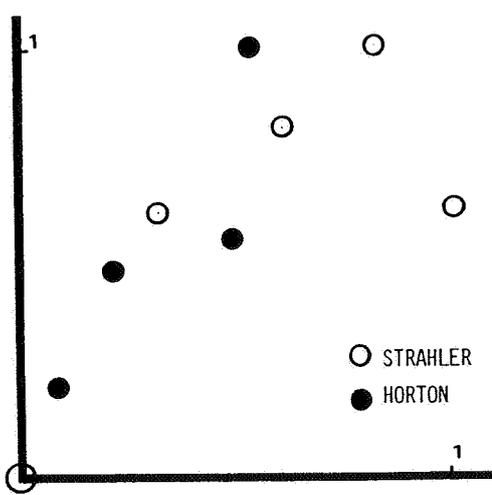
Vaulx en Velin sud

Commune située au début de la plaine de l'est lyonnais
Surface imperméable de 49.5 hectares drainée par 10 km de réseau

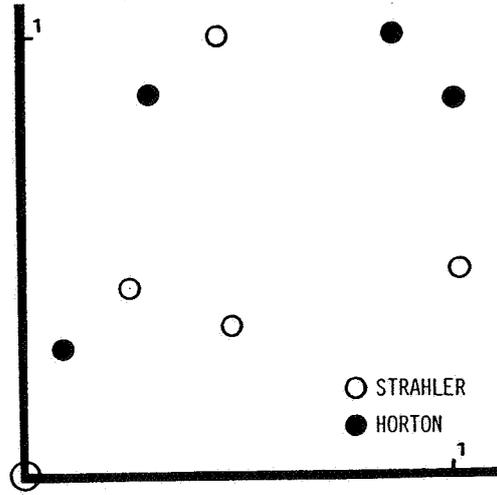
Relations R_B, R_L, R_A



$$\frac{N_{W-1}}{N_1} = f\left(\frac{N_W}{N_1}\right)$$



$$\frac{L_W}{L_{max}} = f\left(\frac{L_{W-1}}{L_{max}}\right)$$

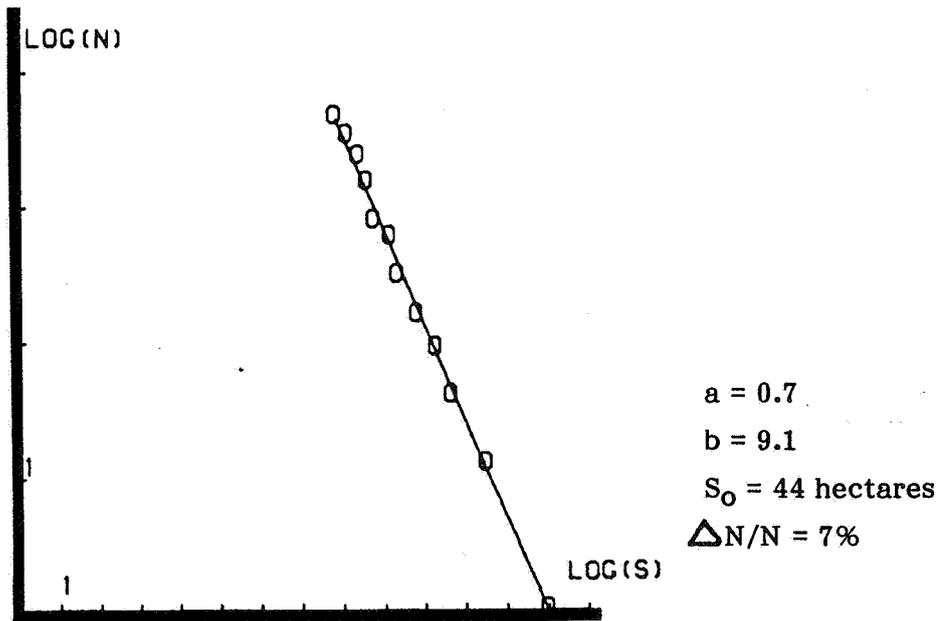


$$\frac{S_W}{S_{max}} = f\left(\frac{S_{W-1}}{S_{max}}\right)$$

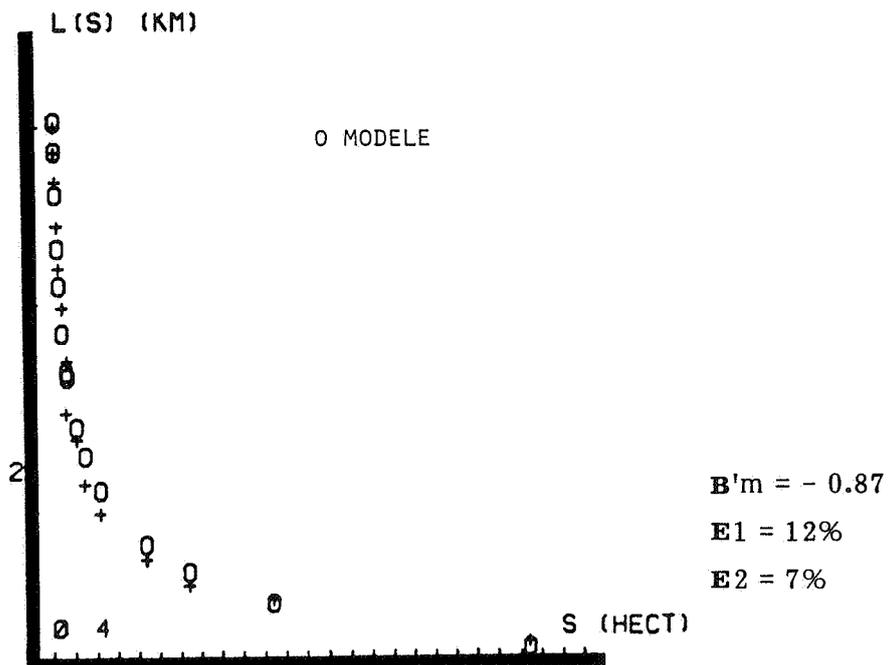
	Strahler		Horton	
R_B	3.7	11%	4.4	15%
R_L	1.	36%	1.6	27%
R_A	0.8	68%	1.1	43%

Ces schémas ne représentent pas la structure du réseau.

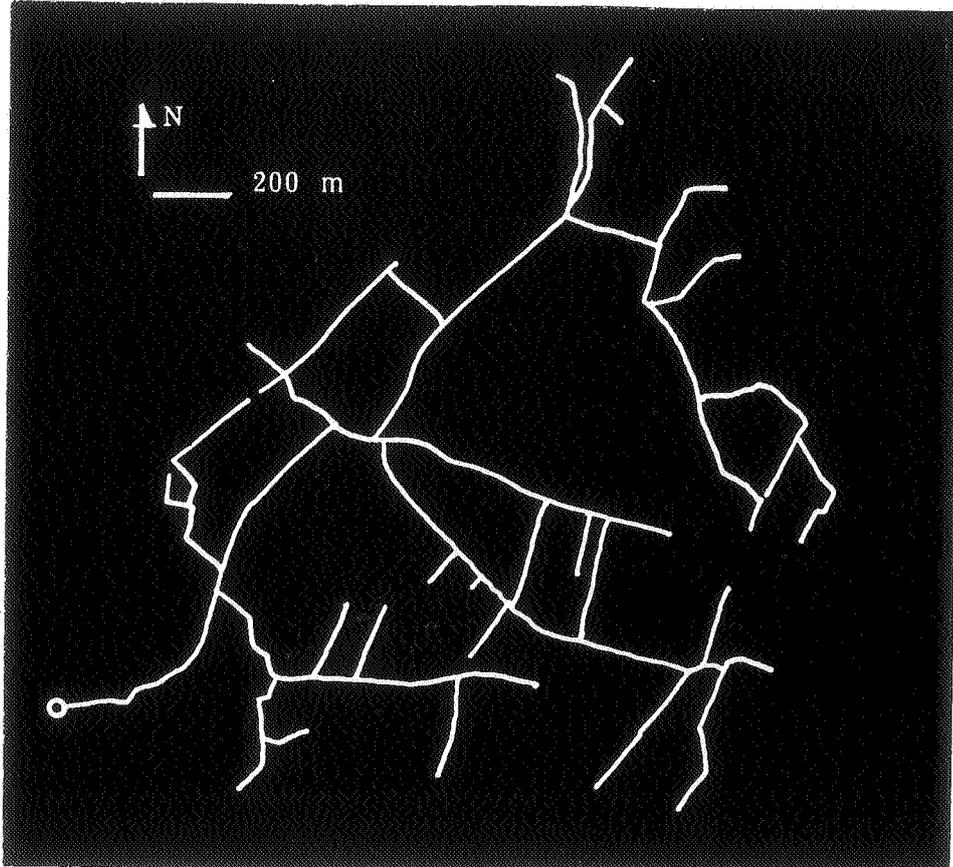
Relations (N,S) , (L,S)



Le modèle allométrique en magnitude s'applique assez bien à tout



Le principe d'homothétie interne est satisfait pour ce réseau ; l'écart moyen entre longueurs tronquées observées et calculées valant 0.2 km.

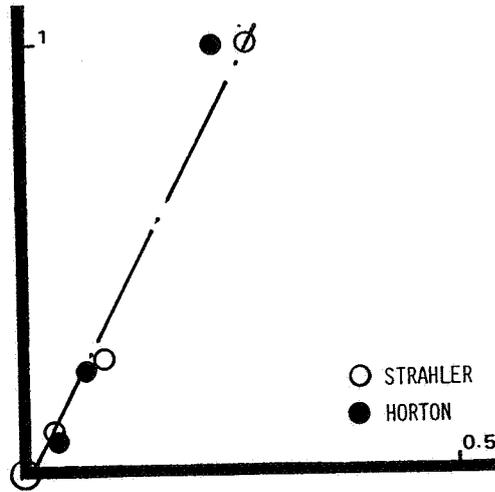


Sainte Foy lès Lyon

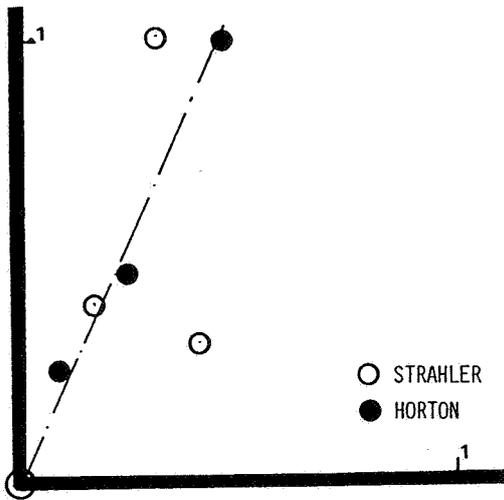
Commune située sur le plateau bordant
la rive droite du Rhône au sud ouest de Lyon.

Le réseau de 13 km draine 60 hectares de surfaces imperméabilisées

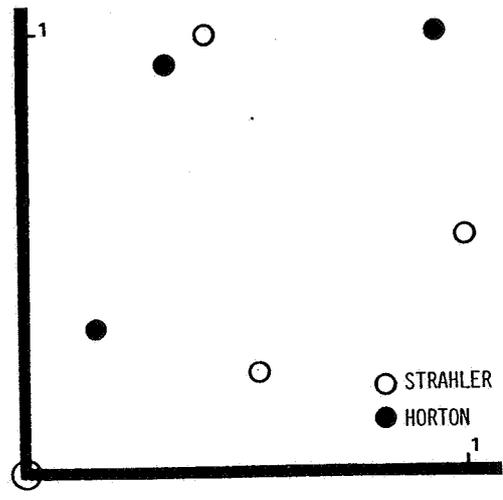
Relations R_B, R_L, R_A



$$\frac{N_{W-1}}{N_1} = f\left(\frac{N_W}{N_1}\right)$$



$$\frac{L_W}{L_{max}} = f\left(\frac{L_{W-1}}{L_{max}}\right)$$



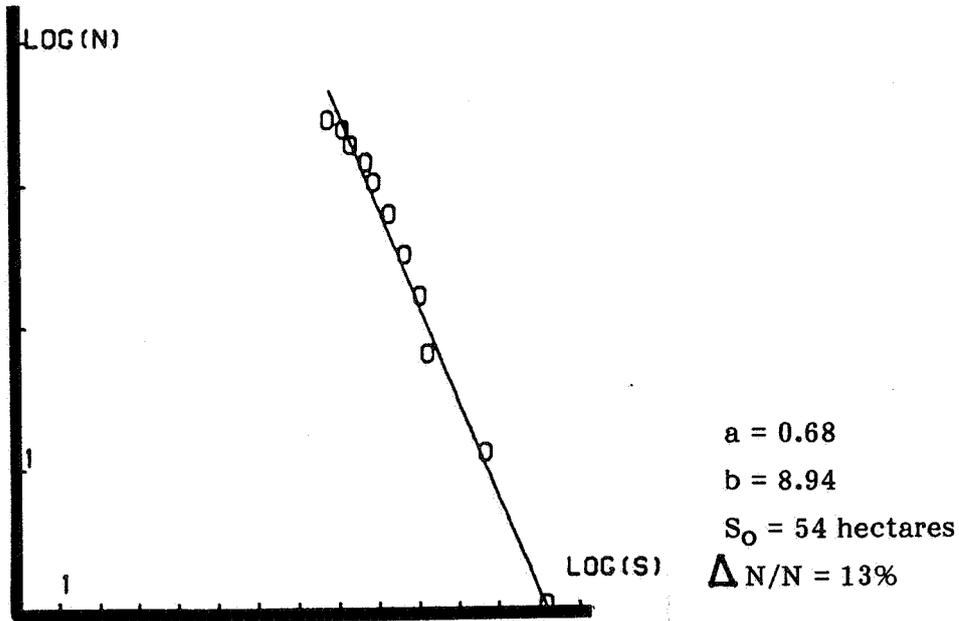
$$\frac{S_W}{S_{max}} = f\left(\frac{S_{W-1}}{S_{max}}\right)$$

coefficients et erreurs relatives

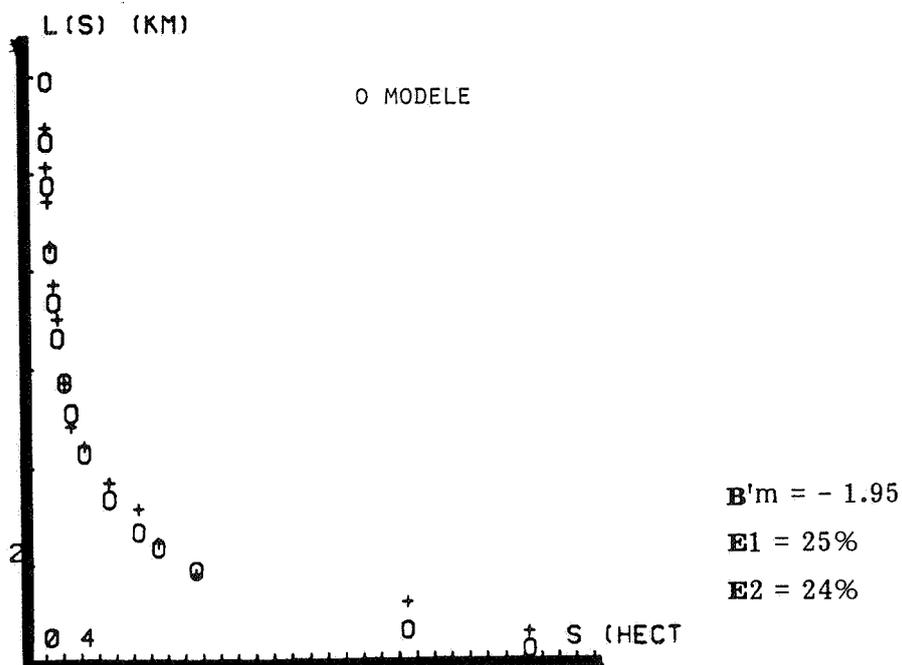
	Strahler		Horton	
R_B	3.8	10%	4.3	18%
R_L	1.7	65%	2.14	7%
R_A	0.7	73%	1.27	45%

Même si le schéma de Horton est numériquement meilleur, le modèle ne représente pas la structure.

Relations (N,S) , (L,S)

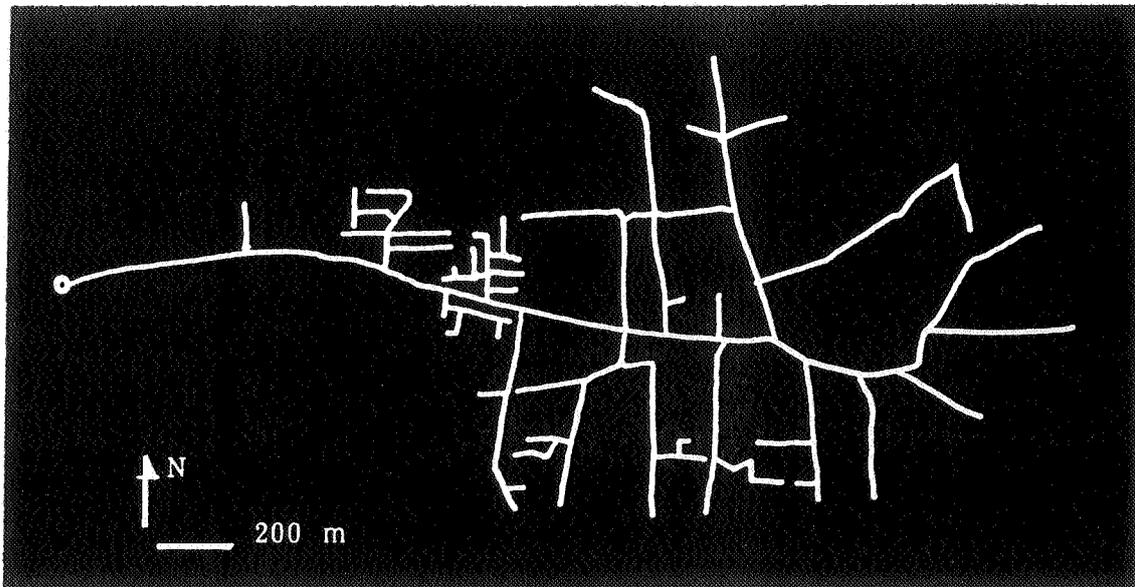


La tendance à une allométrie en magnitude se vérifie, même si, pour des surfaces sources faibles, la décroissance expérimentale est plus rapide que celle donnée par le modèle.



Le réseau n'est pas à homothétie interne au sens de l'allométrie en magnitude ; l'écart moyen entre longueur observée et longueur calculée est élevé (1.3 km).

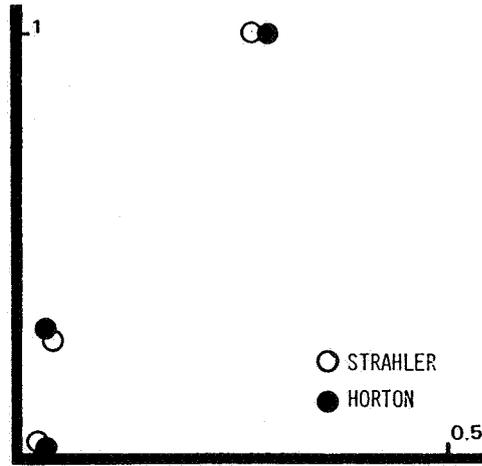
Il se réduit à 0.37 km pour $B'(1) = - 1.65$, soit un $\Delta L/L$ ramené à 7 %.



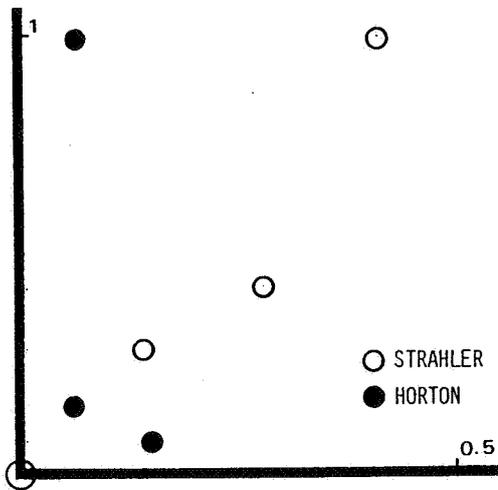
Vaulx en Velin nord

Situé sur une commune de l'est lyonnais, ce réseau de 13 km² draine 76 hectares de surfaces imperméabilisées

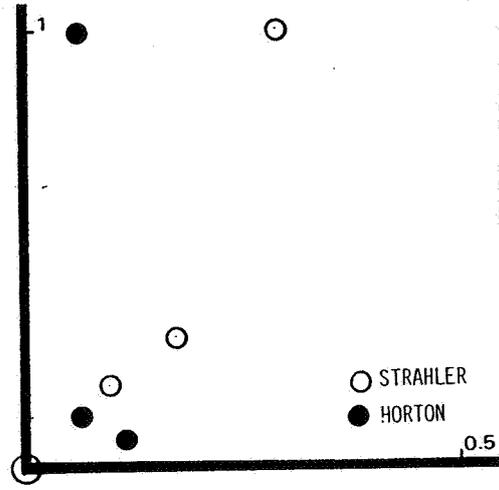
Relations R_B , R_L , R_A



$$\frac{N_{w-1}}{N_1} = f\left(\frac{N_w}{N_1}\right)$$



$$\frac{L_w}{L_{max}} = f\left(\frac{L_{w-1}}{L_{max}}\right)$$



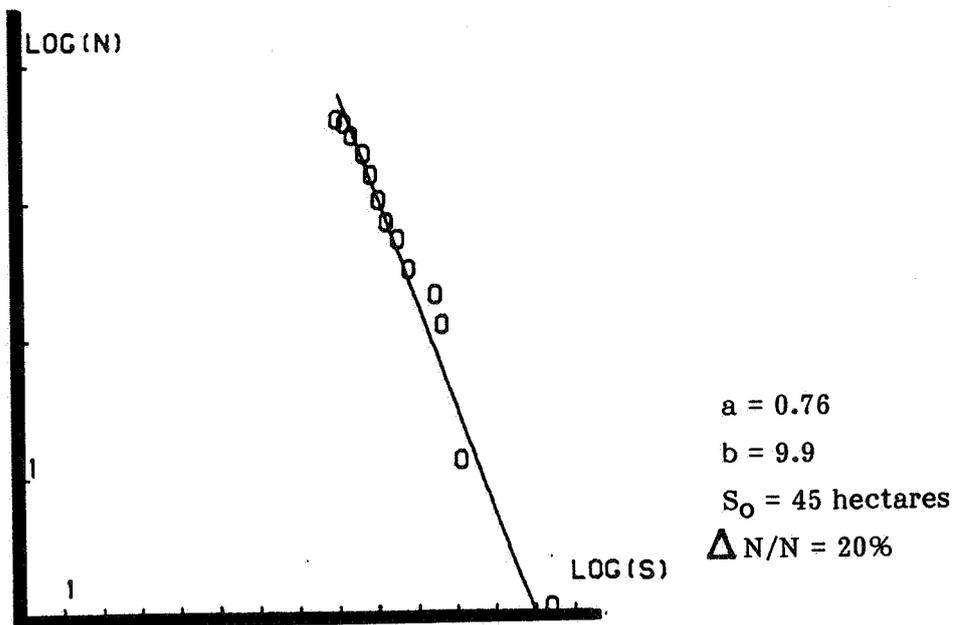
$$\frac{S_w}{S_{max}} = f\left(\frac{S_{w-1}}{S_{max}}\right)$$

coefficients et erreurs relatives

	Strahler		Horton	
R_B	4.4	15%	3.6	27%
R_L	5.2	23%	4.8	128%
R_A	4.5	34%	2.7	130%

Le schéma de Strahler, tout en donnant des écarts relatifs importants, est meilleur que celui de Horton. Cela s'explique par un développement faible du réseau le long d'un collecteur "principal" relativement étroit.

Relations (N,S) et (L,S)

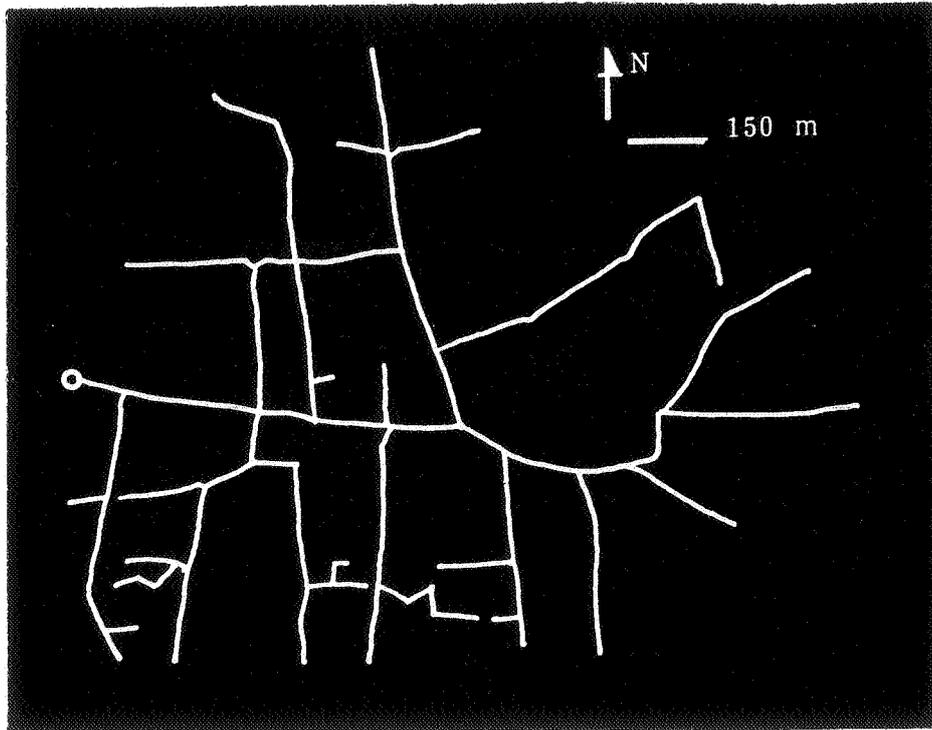


La surface totale très approximativement allométrique est beaucoup plus faible que celle de la figure initiale.

Il faut lui soustraire toute la partie aval constituée d'un collecteur principal et des premières ramifications très différentes structurellement de ce que nous observons vers l'amont.

Ces différences structurelles se traduisent par une discontinuité de la relation (Log N / Log S).

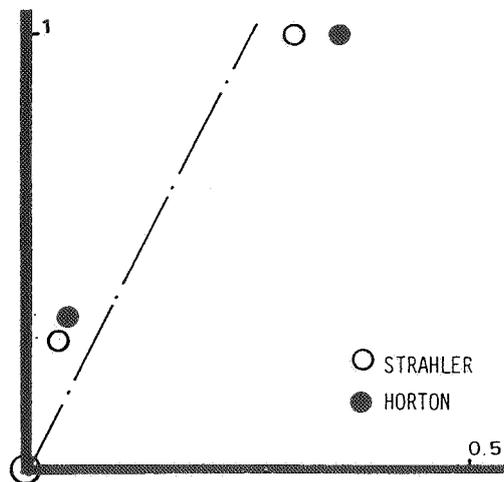
Avec la nouvelle figure,



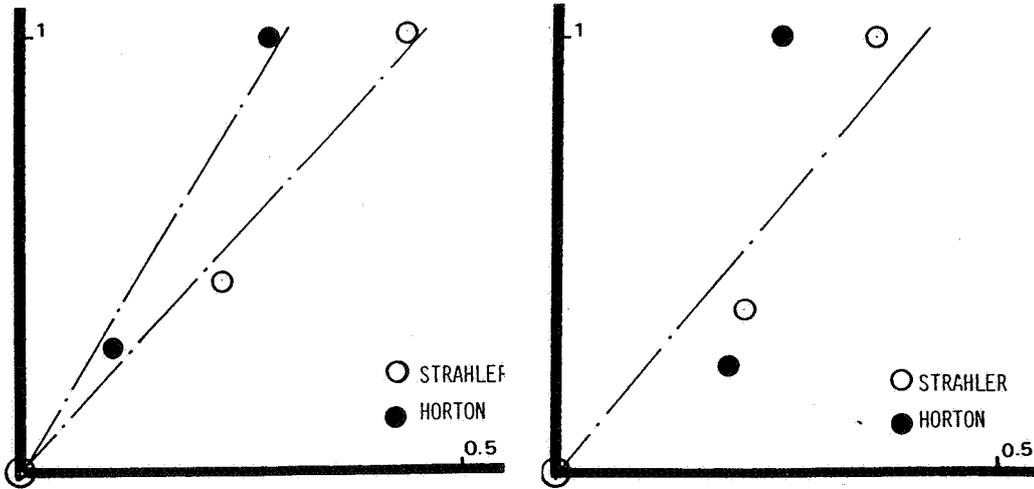
Surface imperméabilisée de 55 hectares drainées par 10 km de réseau.

nous obtenons les résultats suivants qui sont de meilleure qualité que ceux précédemment établis.

Relations R_B , R_L , R_A



$$\frac{N_{w-1}}{N_1} = f\left(\frac{N_w}{N_1}\right)$$



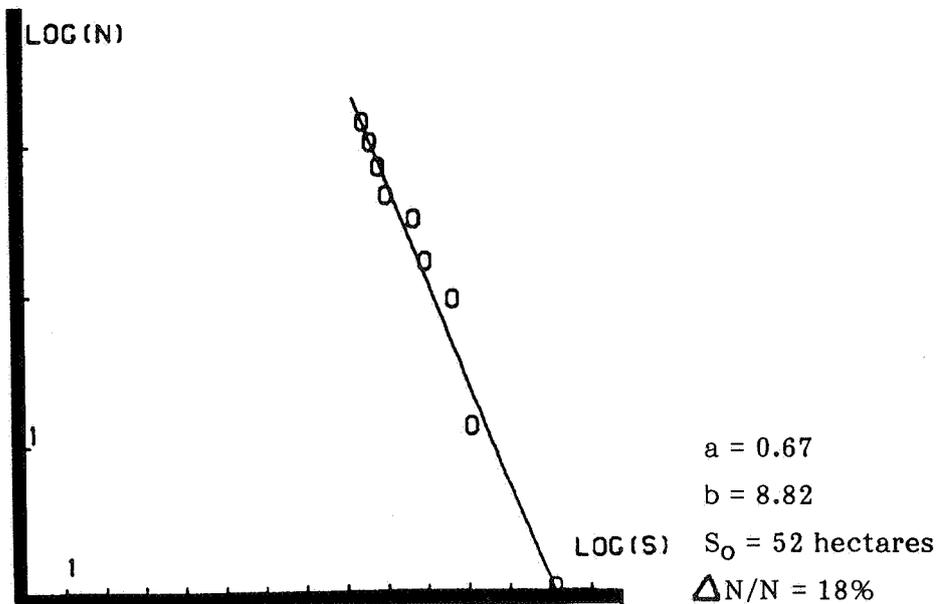
$$\frac{L_w}{L_{max}} = f \left(\frac{L_{w-1}}{L_{max}} \right)$$

$$\frac{S_w}{S_{max}} = f \left(\frac{S_{w-1}}{S_{max}} \right)$$

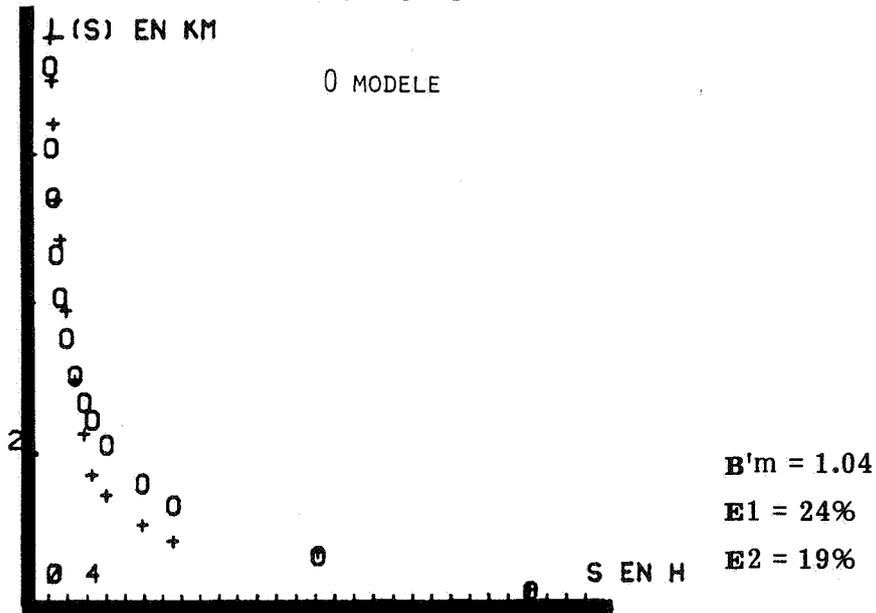
	Strahler		Horton	
R _B	3.4	20%	3.4	23%
R _L	2.2	6%	3.4	14%
R _A	42.4	14%	3.4	28%

Meilleur que le schéma de Horton, le schéma de Strahler révélerait une tendance approximative de la structure à suivre le principe de progression géométrique.

Relations (N,S) , (L,S)



La surface S_0 recalculée à l'aide du modèle est très proche de la surface globale de la figure. La tendance à l'allométrie se vérifie toujours même si l'erreur relative est quelque peu importante.



Les écarts relatifs traduisent une assez bonne homothétie interne du réseau.

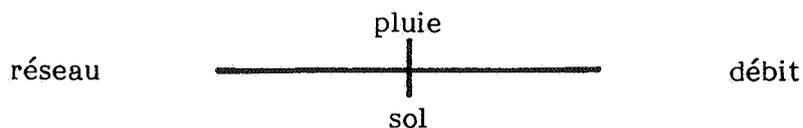
6. PASSAGES

6.1. Bilans

Revenons au point de départ.

Soit un objet : le milieu urbain, c'est-à-dire un ensemble structuré par des chemins d'évacuation des eaux pluviales qu'il soit de surface ou souterrain ; chemins constituant l'ossature d'un réseau unidirectionnel, toujours de l'amont vers l'aval à moins qu'il y aient dysfonctionnements, catastrophes peut-être. Evacuation mais parfois stockage aussi (bassin de stockage, de retenue) et régulation (vannes). Considérons les lieux du cheminement, c'est-à-dire canaux et canalisations formant réseaux.

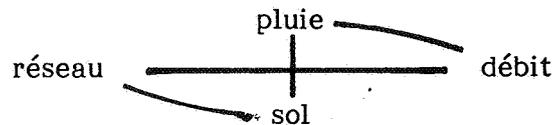
Soit un phénomène hydrologique, celui de la transformation de la pluie en débit, conceptuellement structurée par le quadripôle :



Conjuguant la production d'un signal par interception de la pluie par le sol, et le transfert de ce signal par propagation de l'amont vers l'aval.

Une remarque : Production et transfert sont expérimentalement indissociables même si conceptuellement ces deux fonctions sont séparées.

Soit de nouveau le quadripôle complété :

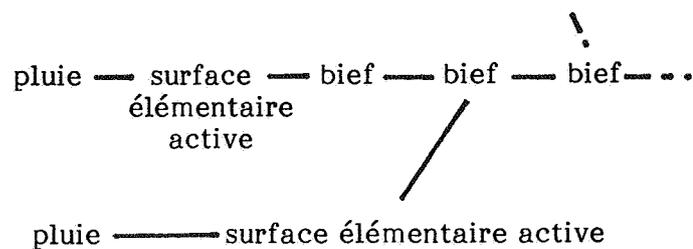


avec un pôle originel ; la pluie.

La relation pluie/débit à l'exutoire d'un bassin est la résultante de trois relations enchainées.



Soit deux approches : celle que nous avons qualifiée de microscopique pour laquelle le réseau est une succession de biefs chacun d'eux drainant une partie du territoire. L'objet réseau n'étant défini que par l'enchaînement des biefs, la relation pluie/débit est la résultante d'un enchaînement de trois nouvelles relations enchainées.



Puis celle que nous avons qualifiée de macroscopique pour laquelle le bassin versant n'est pas une succession de transformateurs élémentaires mais un transformateur global constitué de deux parties liées par le ruissellement de l'eau de pluie, la surface globale et le réseau. Un modèle hydrologique global conjugue alors les trois relations :

pluie — surface — réseau — débit
 globale
 active

Un premier bilan.

Les modèles microscopiques sont constitués de deux modèles indépendants.

Le premier produit le débit entrant dans un bief.

Le second représente la transformation hydraulique réalisée par le bief.

Tous les modèles macroscopiques sont des systèmes de deux modèles en série, le calage de l'un dépendant du calage de l'autre.

L'un produit la quantité d'eau évacuée par le réseau sous la forme d'un signal de volume inférieur ou égal à celui obtenu en intégrant la pluie sur la surface potentiellement drainante.

L'autre, enfin, transforme le signal obtenu pour reproduire ou représenter la forme obtenue à la sortie du réseau.

Selon l'approche (microscopique/macroscopique) le sens du modèle de production diffère.

Il devrait effectivement représenter les débits ruisselés par les surfaces actives élémentaires lorsque l'approche microscopique est utilisée.

Il conjugue alors pertes au ruissellement et ruissellement de surface vers l'entrée du bief.

Ce modèle qualifié initialement de production est en fait de nouveau globalement un modèle de production et de transformation où sont pris en compte les écoulements de surface.

Pour les modèles macroscopiques, la fonction de production conduit à définir un débit de pluie nette, résultant d'une modélisation des pertes et d'un calcul d'une valeur de surface active globale, qui n'a pas de réalité autre que conceptuelle.

Ne pouvons-nous pas affirmer que les modèles hydrologiques actuels s'éloignent du quadripôle originel lorsque sont séparées production et transfert, coupure qui se traduit par une mise en série de deux modèles non interactifs ?

D'autant plus que cet enchaînement est parfois inversé

transfert — production

Un second bilan.

Soit la relation pluie/sol/réseau et la fonction de production des modèles macroscopiques.

Ayant séparé production et transfert, l'approche macroscopique actuelle, empruntent à l'approche microscopique ses représentations des pertes, pertes soustraites de façon plus ou moins complexe à la pluie, et selon la finalité du modèle.

Soit la simplification suivante :

. finalité prévisionnelle ; ne sont pas reproduites les quantités d'eau ruisselantes sur les surfaces perméables et celles stockées lorsque les éléments intercepteurs de ces quantités ne sont pas définissables ; la boîte de la production est noire, la surface productive du flux évacué est la surface imperméable.

Prévision satisfaisante pour les pointes de débit mais ne permettant pas de déterminer les volumes écoulés.

. finalité cognitive ; la boîte noire peut être ouverte. La surface étant connue, sont modélisables les pertes par infiltration et rétention. Soit par soustraction au signal de pluie de valeurs correspondantes à une classification de ces pertes en pertes initiales et continues, soit par l'usage de modèles de type exponentiel pour reproduire l'infiltration et la rétention et surtout l'interaction entre les différentes surfaces ; les pertes dues au stockage par la végétation n'étant généralement pas prises en compte en hydrologie urbaine [2].

Un dernier bilan.

Soit l'axe réseau/débit et la fonction de transfert. Même si cette fonction des modèles hydrologiques macroscopiques ne représentent pas strictement le rôle du réseau, elle est une image du cheminement vers l'exutoire.

Le regard que nous avons porté sur les modèles macroscopiques tant urbain que rural, nous amène à définir deux classes de modèles.

La première de celles-ci est basée sur la recherche du meilleur opérateur mathématique permettant de représenter la transformation (débit de pluie nette / débit de sortie).

Le système transformateur, image fonctionnelle du cheminement, est une boîte noire.

Les critères de définition du meilleur opérateur dépendent de la finalité recherchée du modèle.

Si celle-ci est cognitive, il est possible de formuler un opérateur non linéaire qui recouvre les divers comportements d'un bassin versant structuré par un réseau d'assainissement ou un système fluvial d'évacuation [1]. Les travaux de Diskin en sont une illustration, l'opérateur étant fondé sur l'utilisation des noyaux de Volterra et la recherche du développement minimum permettant de représenter au mieux numériquement les sorties observées.

Le modèle de Nash, lorsque le degré de convolution n'est pas fixé, en est une autre illustration même si la forme de l'opérateur choisi a priori est déjà une simplification par rapport à ce qu'il est théoriquement possible d'utiliser.

Comme nous l'avons signalé, il est très difficile voire impossible d'extrapoler à d'autres systèmes de drainage de tels opérateurs.

S'ils sont complètement prévisionnels pour les systèmes étudiés en supposant que ceux-ci ne se modifient pas au niveau de la structure et au niveau du type de surface, ils ne le sont pas pour des systèmes non observés.

Pour atteindre cet objectif d'extrapolation tant cognitif que prévisionnel, il faudrait étudier comparativement les comportements de différents bassins et définir des méta-opérateurs représentant les différences comportementales.

Mais ceci reviendrait à ouvrir la boîte noire et à rattacher les paramètres du modèle (s'il n'y a que ceux-ci qui varient) à des données physiques caractéristiques du cheminement de l'eau.

Cette action nous semble contradictoire avec le concept de boîte noire car il se peut fort bien qu'elle conduise en fait à redéfinir des modèles de transfert basés sur la structure du cheminement.

Nous classons dans le même type, le modèle du réservoir linéaire, de Nash lorsque pour ce dernier le nombre de réservoirs est fixé (généralement à deux) et de Moore et Clarke.

Quant au modèle à réservoir linéaire surtout, il représente une dégradation mathématique ultime des développements polynomiaux d'intégrales linéaires de type Frechet-Volterra, puisque seul le premier noyau est utilisé.

Si de ce fait ce modèle a une qualité cognitive très faible, puisque ne peuvent être représentées comme nous l'avons démontré que les comportements dus à des pluies longues et de forte intensité, sa simplicité permet d'envisager une extrapolation à des systèmes non observés, un seul paramètre

étant utilisé.

Ce modèle, ainsi que celui de Nash, représentent des comportements moyens de systèmes de drainage soumis à des pluies longues et fortes.

Si pour le modèle à réservoir linéaire au niveau du calage, la seule grandeur physique du cheminement représentée est la longueur du plus long parcours, la structure du réseau ou la distribution des surfaces de drainage par rapport à l'exutoire imagée par l'exponentiel n'a pas une réalité physique certaine.

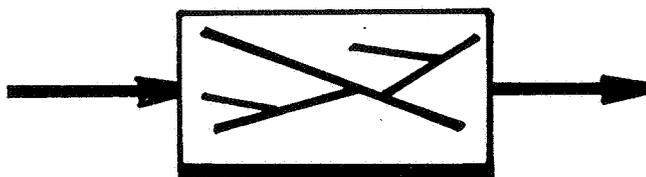
En effet, comme nous l'avons démontré, ce modèle serait fondé soit sur une distribution de type entropique des surfaces d'apport relativement à l'exutoire, soit sur une progression géométrique de celles-ci en partant de l'exutoire avec une raison inférieure à un, la variable de distribution étant le temps.

Il est quasiment impossible de déterminer les types de cheminement qui satisfont l'une ou l'autre hypothèse.

En définitive, ces modèles issus du concept de boîte noire ne satisfont pas au sens de la représentation physique, la relation du quadripôle

réseau \longrightarrow débit

La seconde classe des modèles basée sur une ouverture de la boîte noire est quant à elle plus proche de cette relation.



Sont à ranger dans cette catégorie le modèle des courbes isochrones et les modèles qui utilisent une représentation type Horton ou Strahler pour décrire la structure du réseau ; deux types de modèles très différents l'un de l'autre.

Le modèle des courbes isochrones est fondé sur une recherche de la distribution temporelle de la surface drainée relativement à l'exutoire.

L'opérateur ainsi formulé (type opérateur de convolution) est quelque peu cognitif et prévisionnel pour le bassin étudié, mais n'est pas du tout

extrapolable à d'autres structures non étudiées.

La boîte noire étant ouverte pour formuler ce modèle, elle reste grise quant à la relation opérateur/réseau.

Quant au modèle de Gupta, il satisfait d'une certaine façon cette relation. Il utilise trois paramètres (R_L , R_B , R_A) traduisant une progression géométrique à partir de l'exutoire, du nombre de branches de la longueur moyenne de celles-ci et des surfaces moyennes drainées.

L'opérateur ainsi formulé, ce type de noyau de convolution est donc éventuellement extrapolable à tout réseau satisfaisant les principes formulés par Horton et Strahler. Malheureusement, les réseaux d'assainissement urbain semblent ne pas vérifier ceux-ci.

Parmi le champ expérimental utilisé, il n'y a que le réseau de la Commune de Décines qui les satisferaient avec une erreur relative importante pour la détermination du coefficient R_A (26 à 28 %).

Si ce modèle peut être utilisé aux dires de leurs auteurs en Hydrologie Fluviale, il ne l'est pas en Hydrologie Urbaine du moins sur la Communauté Urbaine de Lyon. Mais gageons que les résultats obtenus sont transposables aux réseaux des villes européennes.

L'ordonnancement des branches de réseau est tel qu'il y a trop peu de classes (w) pour qu'une progression géométrique puisse correctement se déployer (entre deux et trois classes pour les exemples traités).

Pour augmenter ce nombre, il faudrait considérer des surfaces beaucoup plus importantes (au moins plusieurs centaines d'hectares) soit pratiquement une exclusion de ce modèle du champs de l'hydrologie urbaine.

En définitive, une relation réseau/débit non représentée par le modèle de transfert des modèles hydrologiques macroscopiques, ne l'étant que par le biais du bief pour les modèles hydrologiques microscopiques, le réseau en tant que totalité n'ayant pas d'autre définition que le repérage de l'enchaînement des biefs.

6.2. Arguments

Une distance si grande entre le modèle et l'objet.

Un objet extraordinaire, système structuré par des réseaux.

Des réseaux, planage d'arbres merveilleux, ramifications infinies étirants leurs branches pour suivre et rendre possible le développement des citées

humaines.

Galaxies principales et galaxies naines ; la plupart souterraines, invisibles uniquement visitées par la classe des réparateurs et surveillants.

Et des modèles de fonctionnement, macroscopiques, souvent convolutifs, pseudo-convolutifs, faussement convolutifs.

Modèles locaux et un objet boîte noire, qui se veulent non locaux et un objet boîte grise, faussement non local, restreints aux devenirs de quelques pluies mais lesquelles, et pour quels systèmes ?

Modèles non locaux de la moyenne, mais de quelle moyenne ?

Un oubli surtout, esthétique d'abord.

Le réseau.

Celui-là même qui recueille.

"L'intérêt d'une recherche réside dans sa capacité à révéler une structure sous jacente qui rende intelligibles les phénomènes". [46]

Une structure, système urbain structuré par des réseaux d'assainissement.

Une raison suffisante pour une recherche, une thèse donc ; reconcilier le modèle et l'objet.

Et puis d'autres raisons ; simuler analyser, le fonctionnement du réseau ; pour le réparer d'abord, lui permettre d'évoluer, le concevoir même.

Elaborer des modèles de fonctionnement, macroscopiques et autres, non restreints aux seuls systèmes observés, non restreints aux seuls systèmes situés dans un voisinage direct de l'épicentre pluvieux. Un champ actuel de modèles macroscopiques qui pourra se révéler à brève échéance trop étroit ; l'élargir donc.

Pour tout cela, un chemin quadripolaire, afin de ne plus séparer au niveau de l'élaboration d'un modèle, la production du transfert, c'est-à-dire formuler une raison à la différence éventuelle de fonctionnement entre systèmes.

Raison d'ordre structurel peut être ; le réseau.

Notre chemin, celui du quadripôle, devra conjuguer intimement deux groupes de relations



avec une différence structurelle fondamentale ; si les cheminements de l'un sont de surfaces et faiblement organisées, ils le sont totalement pour l'autre et la plupart du temps souterrains, la potentialité du chemin de l'eau est fixée.

Deux fonctionnements a priori disjoints ; l'hydrologie de surface et l'hydrologie des réseaux.

Les deux combinés pour former un modèle hydrologique macroscopique.

$$M = S \circ R$$

S relatif aux pertes au ruissellement et à l'écoulement du surface

R relatif à l'écoulement en réseau.

La combinaison ne doit pas relever de la coupure traditionnelle production/transfert.

Deux modèles de comportement, la raison du second (R) étant le premier (S).

Soit symboliquement :

$$Q = \langle S \circ R, P \rangle$$

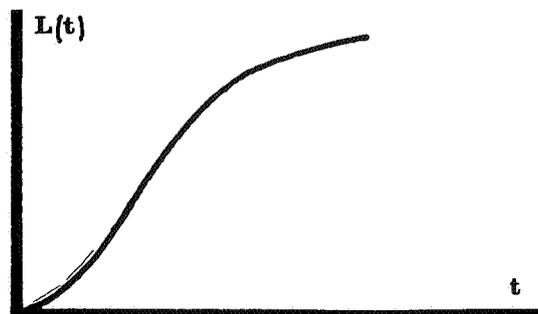
avec Q : débit

P : pluie

Pour nous même, approcher R c'est-à-dire définir globalement l'objet réseau avec la visée modélatrice précédemment établie. Rechercher un modèle de structure autre que celui de Horton/Strahler et même autre que le modèle de structure allométrique en magnitude dont la validation expérimentale est pourtant satisfaisante.

Ce modèle qui représente assez bien l'évolution du nombre de ramifications de l'arbre réseau en fonction de la taille des surfaces sources sur tous les réseaux testés, est incompatible avec une modélisation hydrologique du fonctionnement du réseau c'est-à-dire avec la formulation de R.

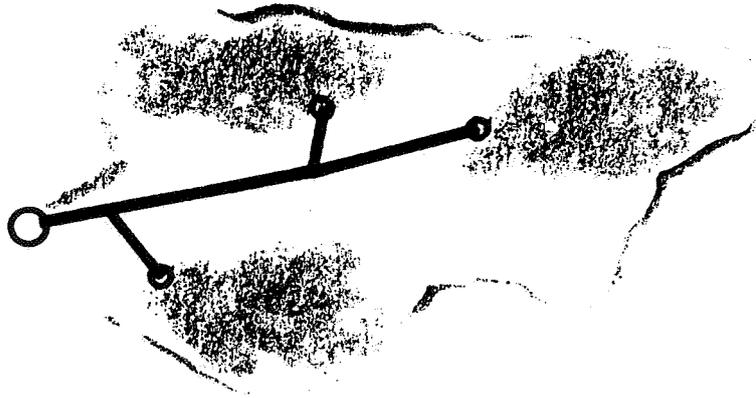
En effet, si S o R représente la dérivée de la distribution temporelle de la surface drainée par rapport à l'exutoire, R devrait s'établir à partir de la distribution temporelle des longueurs de réseau drainée toujours par rapport à l'exutoire, soit :



avec $L(t)$: longueur du réseau contribuant à l'apparition du débit Q au temps t .

Le modèle basé sur la magnitude est incompatible avec l'obtention de la distribution $L(t)$.

En effet, tout en donnant le nombre de surfaces sources S , il donne, s'il y a homothétie interne, la longueur $L(S, S_0)$ de réseau drainant celle-ci qu'elles soient proches ou éloignées de l'exutoire.



Cette longueur a un tout autre sens que la distribution $L(t)$ et surtout cette dernière ne peut pas être définie par le biais de $L(S, S_0)$.

C'est à regret et après de nombreuses recherches vaines que nous avons dû abandonner un modèle structurel performant.

6.3. Passage

La démarche suivie par Bocquillon pour établir la relation (L, S) et que nous avons également empruntée, résulte de l'émerveillement que nous avons eu à découvrir les formes fractales proposées par B. Mandelbrot.

[43,44]

Comme nous le verrons dans la seconde partie intitulée "Réseau-Logie", le coefficient d'allométrie est en fait une dimension de valeur inférieure à un, la définition du contenu de l'objet (surface/réseau) étant similaire à celle des ensembles triadiques de Cantor par exemple.

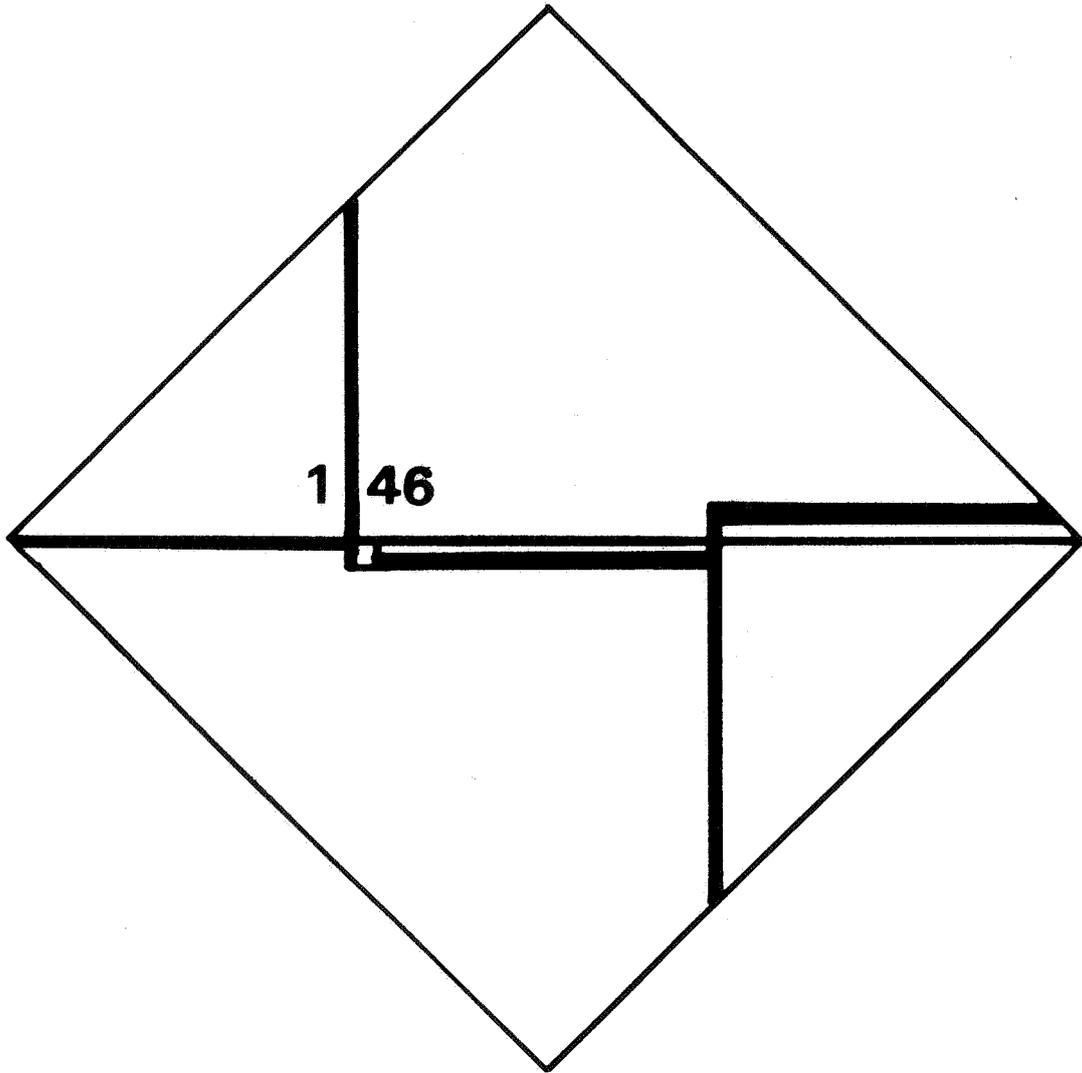
Si la géométrie de B. Mandelbrot nous paraissait fondamentale pour étudier la structure des réseaux, la route empruntée jusqu'alors n'était pas la bonne.

Le passage nécessite la singularité ; elle sera fractale.

Ayant défini un modèle fractal de structures au moins aussi performant mais plus riche que le précédent, nous aborderons dans la dernière partie intitulée "Perspectives" la formulation du modèle quadripolaire fondamental :

$$Q = \langle S \circ R , P \rangle$$

à envisager comme le premier pas, une perspective initialisée.



PARTIE B

RESEAU-LOGIE FRACTALE

"Dimension fractale ;
unicité de la structure"

P. BOULEZ

A propos de la musique
d'Anton Webern

"Voici

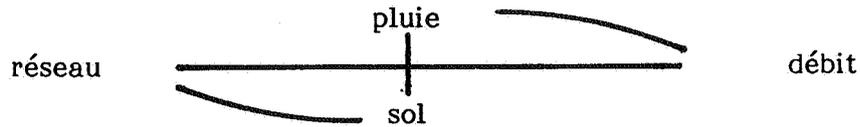
L'intuition revient. L'espace revient
Non la vieille géométrie qui, morte, reste morte,
non les anciens discours qui, fanés,
tombent à la poussière,
mais du beau neuf visible
et qui remplit nos yeux.
Les catastrophes à la Thom,
ou les fractals de Mandelbrot.
Oui, nous revoyons enfin la bête.
Depuis cinq à dix ans, à nouveau c'est la fête.
Le Dimanche du Monde."

M. SERRES

Le passage du Nord-Ouest

Un phénomène urbain toujours
l'eau d'origine météorique, précipitée puis ruisselante et évacuée.

Un quadripôle pour la modélisation.



Un état de fait, souvent ignoré :

La modélisation du phénomène est consécutive de et introduite par la modélisation de l'objet (objet au sens de C.P. Bruter). Un objet, une forme surtout, oubliée jusqu'alors, celle dessinée par l'eau ; les chemins de drainage.

Une première, aléatoire, non figée à chaque fois créée, redessinée, le parcours de l'eau en surface ; cheminement par delà le grain de sable, la pierre, la végétation, la dépression.

Une première forme de la forme, relative à la relation sol / réseau.

Une seconde, déterminée, figée.

Une collection structurée de biefs, un ensemble de jonctions, de ramifications menant à la sortie nommée exutoire.

Une seconde, relative à l'axe

réseau ———— débit

Deux formes complémentaires, enchainées par les bouches d'égouts, les regards ou cheminées en langue lyonnaise.

Deux formes conjuguées par le parcours des eaux météoriques.

Décrire ce parcours.

Le second pour nous même, le plus simple a priori puisque figé, déterminé.

Le seul humainement descriptible peut être ; le réseau.

Décrire la forme, mais d'un lieu bien précis : se mettre à la place du parcourant, être l'eau qui s'écoule.

Passage.

Retrouver la forme oubliée, la découvrir en fait.

Pour cela, quitter une géométrie, une physique trop euclidienne.

Entre deux points toujours la droite, le segment.

Mais un ensemble même fini, dénombrable de segments agencés par des ramifications, qu'est-ce globalement ?

Embrasser cette forme qui n'est pas une courbe, lui trouver une dénomination, mathématique pour nous même, pour ne plus la réduire à une seule

grandeur comme le plus long parcours c'est-à-dire une simple courbe, euclidienne.

Pour cela, être l'eau, et non plus seulement géomètre.

Considérer la discontinuité comme élément fondateur de la forme.

La ramification est l'essence même de l'arbre réseau ; complexification sans cesse renouvelée.

Prendre son bâton de pèlerin, puis mesurer, remesurer sans cesse.

Saisir la non mesure ; partir de ce constat.

Un exutoire pour l'eau, point de départ pour nous même et remonter à contre courant le réseau.

Un chemin de l'aval vers l'amont, le premier bief, puis une première, une seconde, puis dix, cent ramifications et plus encore sur les tronçons enchainés.

Reprenons ; un premier chemin, principal, celui qui arrive au point de notre départ.

Des chemins seconds, ramifiés sur le premier.

D'autres sur le premier et les seconds.

Puis d'autres encore.

Soit un réseau, arbre plané tentaculaire, réticule et nervures d'une feuille urbaine, à la poursuite des lieux surfaciques de ruissellement. Un objet, entre le point et la surface respectivement de dimensions euclidiennes zéro et deux.

Soit un intervalle dimensionnel pour cet objet.

Mais quel objet ?

Non pas une courbe, alors ?

Un souvenir de lecture (Lewis Fry Richardson) parti au petit matin pour mesurer la distance séparant deux villes côtières, bretonnes.

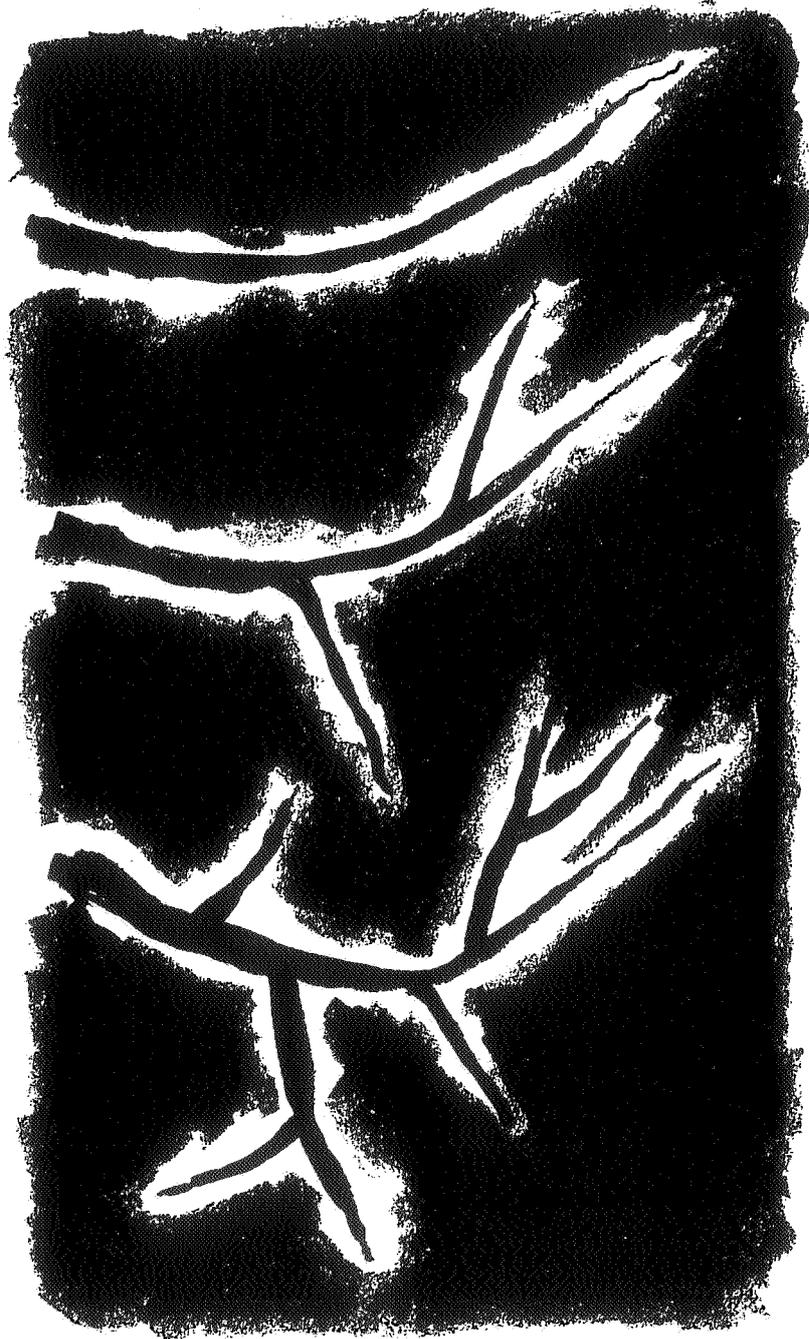
En avion d'abord, le plus direct.

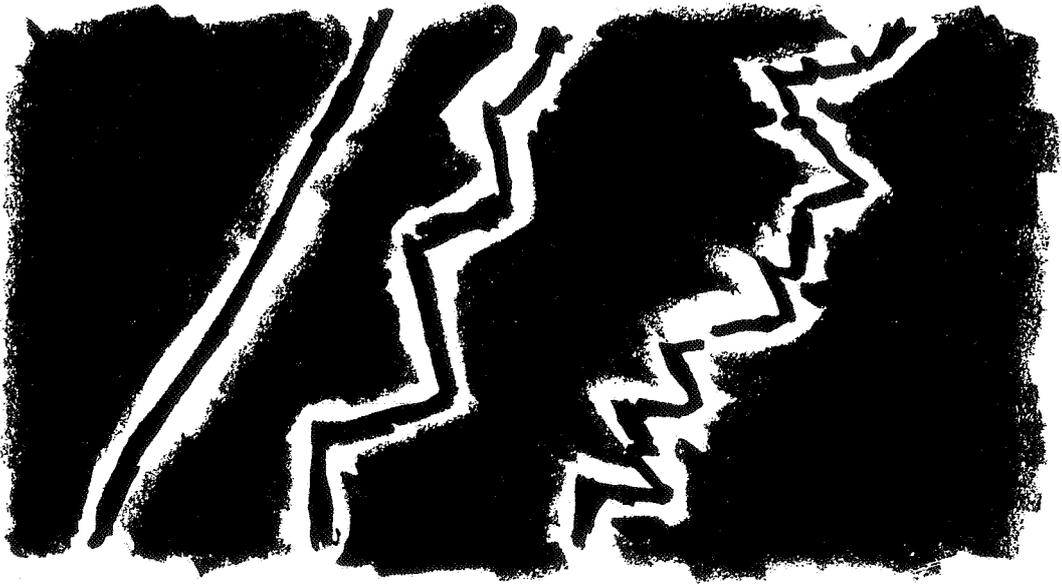
Soit un segment.

A cheval ensuite, puis à pied.

Une substitution :

Un segment transformé en un ensemble de segments.





Puis de nouveau le même parcours pour Jean de la Fontaine, à dos du rat des champs, puis de la fourmi.

Un enchainement de segments plus petits, plus nombreux encore, une nouvelle substitution.

Une fable, Serrienne, celle de la mesure, issue du passage du nord-ouest [47] "Zénon partit d'Athènes pour aller embarquer n'importe où, sur la côte. Je trouverai partout un pêcheur, disait-il. Parvenu au milieu de son voyage, certains disent au tiers, d'autres disent au quart, mais les plus avertis prétendent au nième, il infléchit un peu sa direction, à droite, disons d'un quart, comme comptent les matelots ..."

Puis Lewis Fry, tard dans la nuit, à l'aube du second jour peut-être, nous n'en saurons jamais rien, demanda à Jean le chemin, les chemins parcourus.

Une surprise ; mille réponses et une régularité.

Tous les parcours parcourus ont des longueurs L qui sont enchainées en représentation nepérienne, par une simple droite, c'est-à-dire :

$$L = ar^{1-d}$$

et pour chacun des parcourants, N pas effectués, chacun d'un écartement r .

Mille paysages différents pour un même chemin côtier, mille formes d'une forme.

Une relation entre tous les cheminements, du moins presque tous ; de l'homme à la fourmi. Au delà un espace nouveau, nucléaire à la limite.

Une relation entre Jean de la Fontaine et Lewis Fry Richardson.

Multiples images, enchainées par petit d.

Puis Mandelbrot se souvenant.

Histoire mathématique cette fois (complément 6).

Un conflit entre Camille Jordan, lyonnais d'origine, et Giuseppe Peano de Cuneo, Lyon la presque florentine et Cuneo la piémontaise.

La courbe de Peano [48,49], c'est-à-dire celle qui s'approche aussi près que nous le voulons de n'importe quel point d'un plan est-elle de Jordan, c'est-à-dire une forme de dimension euclidienne égale à un ?

Figure aberrante pour le lyonnais d'origine.

Un planaire justement, qui ronge l'édifice de Jordan.

Un contresens pour tout un chacun.

Il était bien entendu depuis 300 ans avant J.C. que le plan était à deux dimensions et la droite à une seule.

L'extension du concept euclidien à la courbe ne serait-elle pas assez clairement définie ou la courbe serait-elle autre chose qu'une simple droite déformée et plus encore, que sont ces formes ?

Un conflit d'origine franco-italienne pour une interrogation multiple et nouvelle.

Allez chercher un tiers, en fait deux, en vue d'un règlement conceptuel bien entendu.

Deux allemands Félix Hausdorff et Georg Cantor.

Pour le premier des deux, topologue, un retour à la forme.

Qu'est-ce qu'une forme, c'est-à-dire que contient-elle ?

Une mesure donc, en fait mille, une infinité de mesures, puis une définition celle de la dimension du contenu, fractionnaire éventuellement, prolongée par la dimension de recouvrement d'une forme par N pas de valeur r

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}$$

Pour le second enfin, le planaire de Peano exclue du champ les courbes. Une axiomatique nouvelle pour la formalisation de la dimension topologique toujours entière, comme celle d'Euclide.

Une relation de voisinage redéfinie entre la droite et la courbe, variété nouvelle de dimension un, cantorienne justement.

Une confluence entre médiateurs et conflictuants, tous de la même

époque, celle qui a produit ou vu le basculement pictural introduit par Paul Cézanne et prolongé par George Braque et Pablo Ruiz Picasso. Une simple coïncidence historique ou beaucoup plus ?

L'éclatement de la forme, mille représentations, mille mesures pour une réalité commune, justement comme le cheminement côtier de L.F. Richardson.

Et B. Mandelbrot découvre un nouveau paysage.

Passage de Richardson à Hausdorff allié à Besicovitch.

Et si chaque explorateur mesurait sa version d'un même objet, des contenus révélés de plus en plus complexes au fur et à mesure que s'affine le pas de résolution.

Des segments remplacés par N segments vides ou pleins, un cubisme de la forme.

Des figures générées par la discontinuité, le changement brutal de direction.

Des figures qualifiées de fractales par B. Mandelbrot si les différentes explorations s'enchainent approximativement en satisfaisant la relation de Richardson mais aussi celle qui donne les dimensions de recouvrement, d'homothétie.

$$N = a r^{-D}$$

Le petit d de Richardson devient alors une dimension, une qualité propre à révéler l'unicité structurelle de la forme.

Dimension de recouvrement pour une mesure du contenu, fractionnaire pour F. Hausdorff, fractale pour B. Mandelbrot.

Le réel euclidien devient fractal.

La dimension d'abord cantonnée aux entiers, embrasse maintenant les réels, le réel. Le continu euclidien n'est qu'une marge, une île dans l'océan du discontinu.

Le fractal réinterprète notre monde, ses formes multiples, toujours en devenir ; le flocon de neige, les agglomérations et conglomérats, les fissures, les montagnes ...

Les réseaux enfin.

Reprenons.

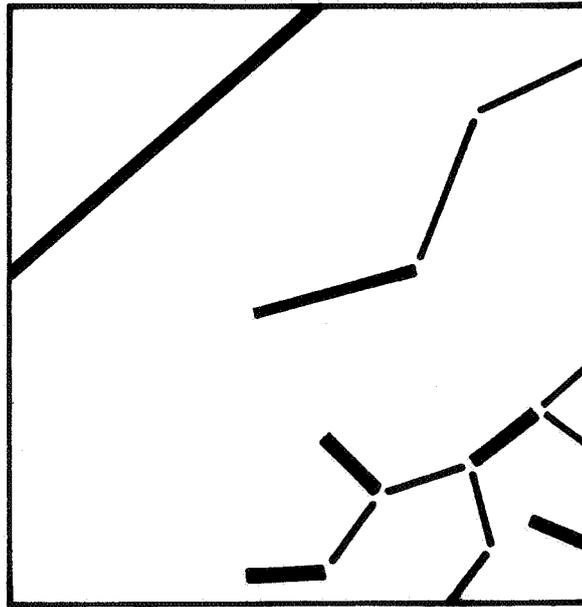
une première exploration (r_1)

une seconde (r_2) une troisième (r_3)

et ainsi de suite jusqu'au passage à un nouvel espace, de surface justement.

Une nouvelle démarche constituée d'un ensemble de mesures et non pas d'une seule pour une modélisation structurelle.

Un nouvel archétype : la forme fractale.



1. ALLOMETRIE EN MAGNITUDE ET FRACTALITE

La démarche initialement empruntée par Bocquillon et nous même pour modéliser la structure des réseaux d'assainissement, entretenait quelques rapports avec le concept de figure fractale.

Le passage au fonctionnel étant impossible, nous ne pouvions que nous interroger sur le caractère fractal du modèle élaboré, notre intuition étant que ce passage nécessitait comme nous l'avons dit, la singularité fractale.

Soit à explorer le chemin parcouru.

Si la structure d'un réseau est quantifiable par sa magnitude, celle-ci n'est pas un critère d'unicité structurelle puisque pour une valeur de magnitude N , $P(N)$ figures sont possibles

$$P(N) = \sum_{j=1}^M P(j) \cdot P(N-j)$$

avec M : valeur entière de $N/2$ (Partie A, chapitre 4).

La recherche d'un modèle structurel nécessitait donc d'aller au delà d'une simple quantification en magnitude.

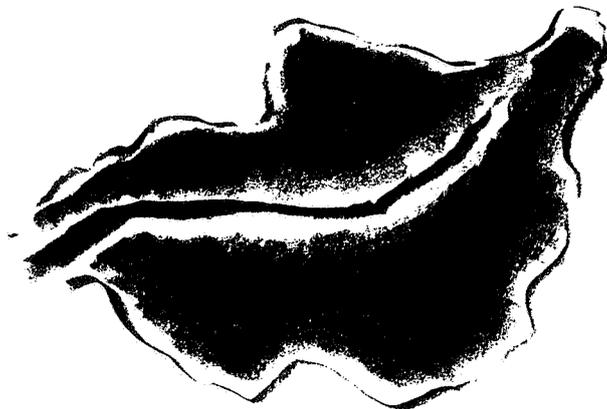
Trouver un invariant qui représentât l'unicité, c'est-à-dire formuler le générateur modélisant le mode de ramification.

D'où l'emprunt à L.F. Richardson via B. Mandelbrot : effectuer un ensemble de mesures en utilisant à chaque fois un pas de résolution différent.

Examiner ensuite l'ensemble des résultats, représentés en grandeur népérienne.

Le cheminement côtier de L.F. Richardson et surtout le principe d'homothétie interne traduisant la découverte d'une même forme contenue dans chaque pas d'exploration et quelle que soit la valeur de ce pas, nous avait conduits à imaginer une suite de perceptions d'un bassin versant, altimétrique si le réseau pouvait se voir, le pas de résolution étant le bassin source, la feuille avec une seule nervure centrale.

Soit pour un bassin versant différents paysages.



etc ...

Ce schéma d'exploration défini, nous avons pu constater une homogénéité des mesures telle que :

$$N = b S^{-a}$$

une relation simple entre le nombre N de surfaces sources et leur taille S , que nous avons qualifiée initialement d'allométrie en magnitude (Allos : autre) en référence à la terminologie des modèles mathématiques proposée par L.V. Bertalanffy [45].

Ces modèles représentent généralement des évolutions de sous systèmes qui tirent leur potentialité à l'évolution du système dont ils sont partis.

L.V. Bertalanffy note que ce type de modèle s'applique tout particulièrement à la représentation de données morphologiques.

Ce terme d'allométrie est ainsi tout à fait justifié pour le cas présent puisque le déploiement des surfaces sources est relatif aux potentialités de la surface globale S_0 .

Le passage au monde fractal fut envisagé à partir de la proximité syntaxique entre la relation (N,S) et celle définissant la dimension de recouvrement, ou la dimension d'homothétie interne pour le système théorique élaboré par Bocquillon.

$$\text{Soit } N = (S/S_0)^{-a} \quad \text{d'un côté et}$$

$$D = \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad \text{de l'autre}$$

avec r : rapport d'homothétie.

En définissant (S/S_0) comme étant ce rapport, le coefficient d'allométrie a pouvait-il être une dimension caractéristique de la structure de l'objet et comprise entre zéro et un ?

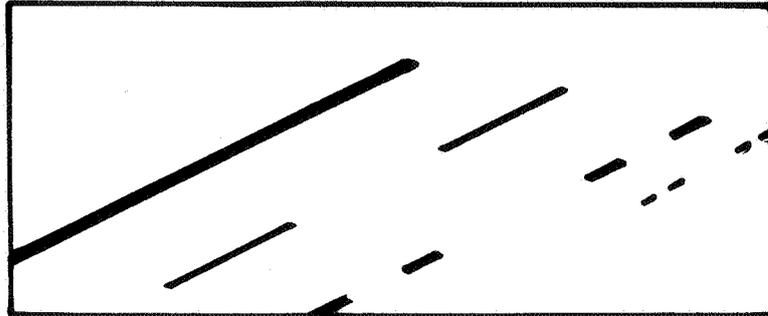
Le rapprochement avec l'ensemble triadique de Cantor permet d'expliquer la perception du bassin versant modélisé.

En effet, cet ensemble est l'un des archétypes mathématiques de dimension fractale inférieure à un.

Rappelons brièvement que la structure s'établit en utilisant une suite de pas d'exploration de raison géométrique valant $1/3$ à partir d'une valeur initiale unitaire.

Ainsi, ce qui avait été précédemment reconnu plein, perd $1/3$ de son contenu lorsque le pas d'exploration est divisé par trois.

Soit la succession de formes.



Et à l'infini, une infinité de points qui ne recouvrent plus le segment initial.

Une forme qui n'a pas une dimension euclidienne égale à un ni égale à zéro à moins de postuler l'égalité :

$$0 \times \infty = 0$$

et quel que soit l'ordre d'infinité.

Cette indétermination est levée si nous caractérisons la forme obtenue par la dimension d'homothétie, autre cas particulier de la dimension fractionnaire, qui peut être déterminée à n'importe quelle étape de l'exploration (voir complément 6)

$$D = \text{Log}(2) / \text{Log}(3)$$

ce qui revient à nommer une forme située entre le point et la ligne.

En référant la modélisation structurelle envisagée à cet ensemble triadique de Cantor, le passage de l'allométrie au fractal amène à considérer la figure comme étant de dimension inférieure à un, même si l'homothétie interne n'est pas exactement vérifiée.

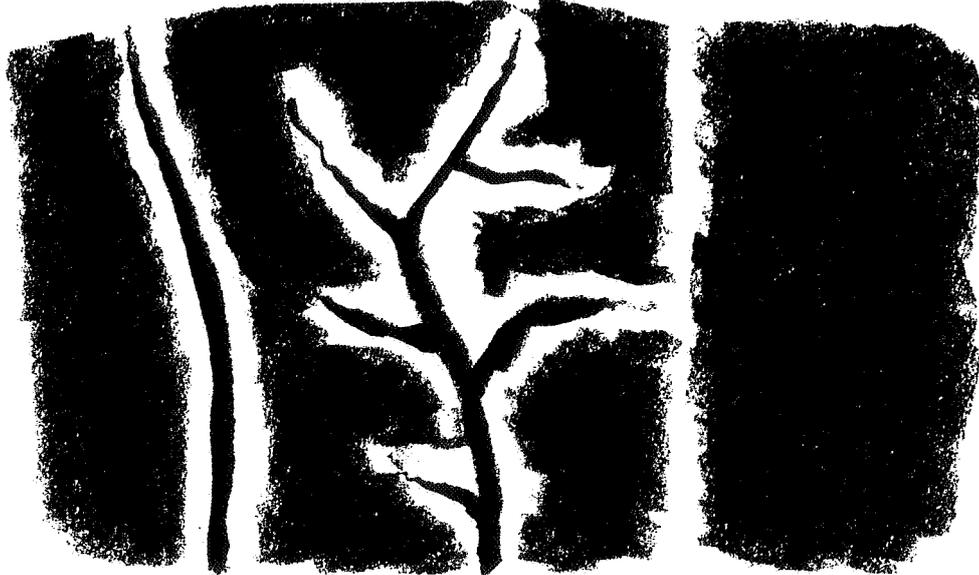
Par ce biais, nous définissons un contenu qui, au fur et à mesure que l'exploration se poursuit, est une succession de plus en plus nombreuse de surfaces sources mais qui recouvre de moins en moins la surface initiale.

Cet ensemble n'est pas exactement un ensemble du type triadique de Cantor à homothétie interne, puisque l'émergence de bassins sources à une étape donnée, ne provient pas uniquement de ceux reconnus à l'étape précédente.

Cette modélisation ne permet pas de définir la structure du réseau même si le nombre N de surfaces sources S est un nombre de ramifications.

En effet, la dimension du réseau est intuitivement comprise entre un et deux.

C'est un objet qui est à situer entre le drain linéaire unique et la surface où l'écoulement se ferait en plan.



C'est pour cette raison que nous dirons que le modèle structurel basé sur la représentation de la variation de la magnitude n'est pas un modèle fractal de structure de réseau de drainage.

Cela nous semble d'autant plus justifié que le passage au fonctionnel est impossible comme nous l'avons démontré précédemment.

Ce qui est somme toute logique, puisque ce passage ne peut s'actualiser qu'en considérant la conjugaison surface / réseau, soit le passage d'un objet de dimension deux à un objet de dimension comprise entre un et deux qui concentre les flux ruisselés en surface.

Pour atteindre cette conjugaison, il nous fallait donc envisager une autre modélisation, basée également sur l'archétype fractal marié au fait hydrologique.

2. CHEMINEMENT VERS UN MODELE

Déclarer le chemin de nouveau ouvert à partir d'une interrogation. Comment avons nous pu, jusqu'à ce jour, élaborer des modèles, macroscopiques surtout, qu'ils soient à "réservoir" unique ou à "réservoirs" multiples en fermant les yeux sur l'objet lui-même ?

Pas d'imagination, pas d'images.

Une nécessité peut-être.

Quel oubli !

Une définition élémentaire de ce fait.

Un réservoir, n réservoirs.

Autre objet substitué à une merveille.

Regardez là ! déploiement de ramifications, vol toujours suspendu.

"Lisez ce qui paraît en France depuis ma naissance, au titre de philosophie, vous n'y trouverez pas une racine d'arbre, une cascade, un fleuve, la plaine, jamais le sourire de l'Océan ... Il y a peu d'objet, encore moins de grands objets. Ce qui paraît perdu par cet idéalisme triomphant, dans ce monde nouveau qui n'est plus que nos représentations ou que nos pratiques, ce qui paraît perdu, oui, c'est peut être la grandeur, et c'est, à coup sûr la beauté". [M. SERRES, 47].

Puis pour nous même, hydrologues dit-on, cortège de réservoirs uniquement, réseaux oubliés. Un nouveau formalisme, délaissant et l'intuition et le regard. Hydrologues oublieux de l'hydrographie ; le dessin des cours d'eau, des réseaux urbains tentaculaires, mouvements ignorés.

Au fil de l'eau, personne.

Aucun mouvement, que du stockage.

Un esprit réservoir, multiples pour plus de sûreté.

Comment avons-nous pu fermer les yeux, nous oublier nous-même ?

Etre hydrologue sans être huydrographe.

Règles et compas remisés.

Production de modèles sans objets.

Pour combler ce vide, ouvrir les yeux puis, à pas comptés, repasser par où nous ne sommes pas encore passés.

Annihiler le saut de la logie sans graphie.

Pour cela ressortir règles et compas.

Parcourir le chemin du réseau, pour un écoulement pluvial.

Etre cette eau ; revenir au fait du phénomène.

2.1. Mouvement

Soit de nouveau l'axe réseau ——— débit pour retourner à l'objet oublié.

Retour introduit par un fait et pour celui là-même : la circulation de l'eau d'origine météorique, concentrée en débits de ruissellement par les surfaces attenantes au réseau et drainées de l'amont vers l'aval, formation d'un débit à l'exutoire, le signal écoulé. Imaginons la production de ce signal par le réseau et répétons-le pour modéliser la structure de l'objet.

La circulation est l'objet galiléen par excellence, le point de départ de toute notre science.

Que de noms célèbres attachés à sa représentation.

Galilée, Newton, Euler, Hamilton et tant d'autres encore.

Ils créent une science, l'hydrodynamique, basée sur la modélisation du mouvement d'une cheminant particulier, un groupe homogène de particules (jamais isolé, jamais vu, mais faisons confiance à ces savants) qui décrit une trajectoire.

Un système d'équations pour ce groupe, d'Euler si le fluide est parfait, de Navier Stockès s'il est visqueux.

Au dix neuvième siècle, Barré de Saint Venant introduit une simplification, un nouveau système d'équations, tant de fois utilisé depuis et particulièrement en hydrologie urbaine.

Passage de quatre à deux dimensions, une d'espace et une de temps.

Puis, grâce à l'un des Bernouilli, Daniel, la conjugaison de la hauteur et de la vitesse, appliquée section par section donne le débit.

La trajectoire est l'intégrale des positions.

Une modélisation du mouvement d'abord. Une modélisation de l'objet, consécutive.

A partir de l'examen mathématique des équations, le réseau est un ensemble composé de deux sous ensembles disjoints [voir complément 7]



Des lieux sans singularité, et non soumis aux effets de celle-ci, lieux de continuité hydrodynamique où les modèles représentent l'écoulement.

Pour les autres, aucune théorie encore. Lieux du modèle expérimental, seuil, déversoir etc ...

Une frontière incertaine entre ces deux lieux.

Soit une modélisation de l'objet, sans rapport avec notre recherche.

Partir d'un autre lieu,

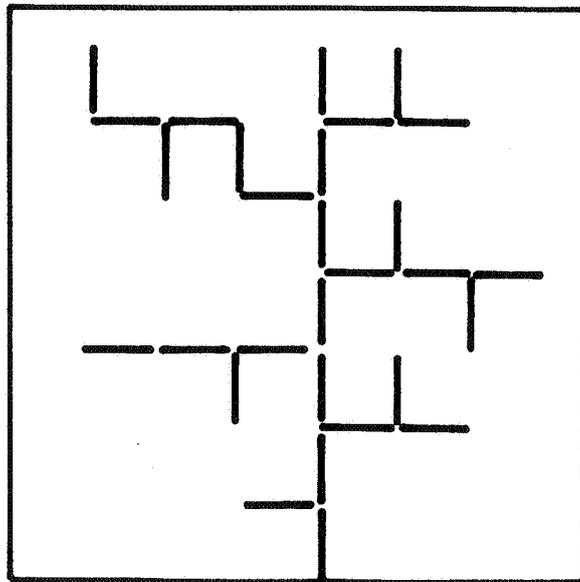
imaginer la production du signal de sortie par un autre biais.

Soit un réseau transformateur, une simplification extrême, convolutive, inimaginable pour le mécanicien qui recherche positions et vitesses alors que nous raisonnons en terme de transformation de signal.

Le réseau est un ensemble de biefs.

Simplifions encore.

Le réseau est constitué de tronçons transformationnels, identiques, chacun d'eux évacuant et le signal amont et un même apport surfacique local.



Pour appréhender la relation entre le signal produit et la structure, soumettons le réseau à la question de DIRAC.

Soit un apport surfacique local en forme de distribution de Dirac et des tronçons qui translatent sans déformer les signaux.

Le réseau est un ensemble d'opérateurs locaux, tous identiques

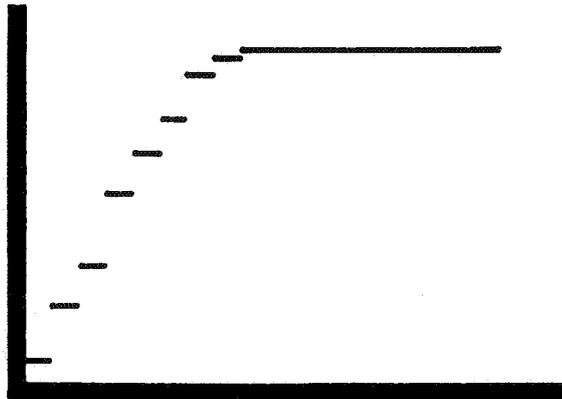
$$\delta(t - T) * \quad T : \text{temps de transfert}$$

Au bout du compte, un résultat discret, un peigne à envelopper pour donner forme au signal sortant.

Agissons autrement.

Soit toujours des tronçons, simples "transferrants" et des apports surfaciques locaux en forme de distribution d'Heaviside.

Le résultat est une intégrale, un cumul comptable de l'enchaînement des biefs.



Chaque marche a la même largeur, T.

Les différences de hauteur entre chacune d'elles représentent le nombre de tronçons ajoutés lorsque le temps de l'observation passe de jT à $(j + 1)T$ et ce, quel que soit j.

Une mécanique de l'eau simplifiée, pour apercevoir l'objet réseau et un modèle.

$$S = 0 * E$$

avec $E = Y(t)$ distribution d'Heaviside.

Puis une dérivation vers l'opérateur 0.

$$DS = 0 * DE$$

et le résultat $0 = DS$

Le signal obtenu est l'intégrale de l'opérateur, c'est-à-dire qu'il représente le rôle du réseau pour cette mécanique convolutive.

Cette simplification extrême mais voulue, définit le sens de l'opérateur.

Son intégrale est une distribution $0(t)$ qui représente le nombre N de tronçons qui participent à la formation du débit passant l'exutoire au temps t.

Cette définition, abordée précédemment sous une autre forme (modèle courbe isochrone, paragraphe 3.1.c partie A) introduit un rapprochement entre structurel et fonctionnel.

Cette simplification n'est utilisée quant à nous que pour produire ce rapprochement, indispensable à notre perspective.

La piste de la modélisation structurelle est ainsi tracée.

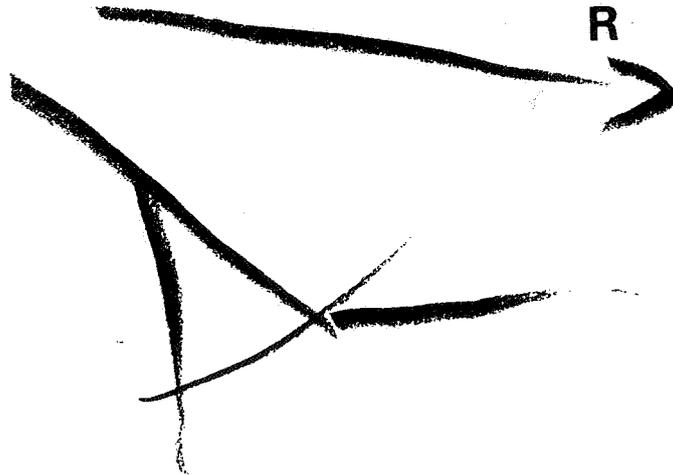
Le modèle recherché doit permettre d'approcher $Q(t)$, ce qui ne pouvait être réalisé par le modèle allométrique en magnitude.

Les tronçons d'un réseau n'étant pas des transformateurs tous identiques, $Q(t)$ s'obtient à partir de la distribution temporelle $L(t)$ qui représente la longueur totale de réseau contribuant à la formation du débit qui transite au temps t par l'exutoire.

La recherche qui se veut maintenant purement structurelle ne peut pas avoir pour but, dans un premier temps, la modélisation de la distribution temporelle $L(t)$. En effet, cette longueur temporelle dépend a priori de la vitesse du flux, soit des débits qui transitent dans le réseau et induits par la pluie et le ruissellement.

Cette conjugaison non encore établie entre longueur et temps nous a conduit à ne pas faire dépendre la modélisation structurelle de la vitesse de transfert.

Soit alors à recherche un modèle qui soit explicatif quant à la structure des réseaux et dont l'une des propriétés est le calcul possible de la longueur totale du réseau, tronqué à une distance R de l'exutoire, $L(R)$.



2.2. Longueur

Nous avons dit que le passage serait fractal.

Avant le franchissement, un dernier regard.

a) première approche

Soit le champ des modèles différentiels et un système, la surface urbaine structurée par un réseau de drainage dont le modèle sera $L(R)$.

La longueur totale L varie avec R , distance à l'exutoire ; cette variation dL/dR supposée continue et continuellement différentiable est développable selon les puissances de L .

$$\frac{dL}{dR} = a + b L + c L^2 + \dots$$

Une infinité de coefficients inconnus pour une infinité de modèles.

Un premier pas, le modèle le plus simple

$$\frac{dL}{dR} = a \qquad L(R) = a R$$

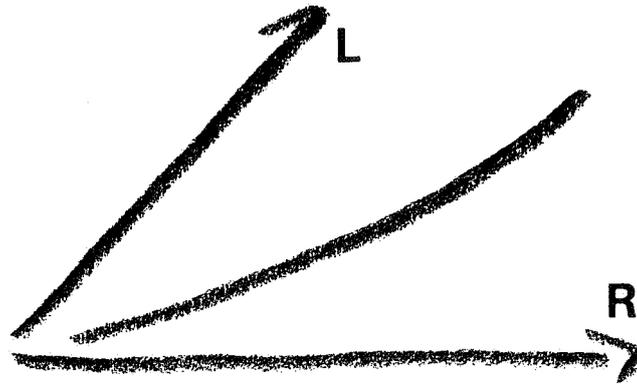
pour une structure très particulière.



Un second pas

$$\frac{dL}{dR} = a + b L \qquad L(R) = \frac{a}{b} (e^{bR} - 1)$$

une croissance exponentielle sans structure imagée.



Un troisième pas

$$\frac{dL}{dR} = a + bL + cL^2$$

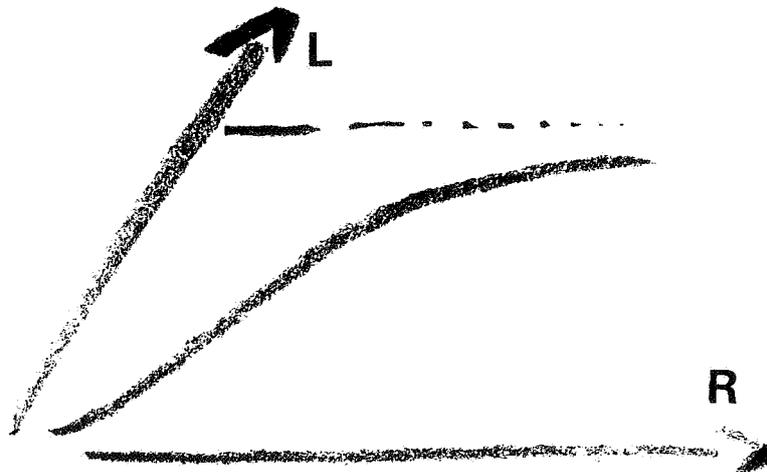
pour un modèle à la syntaxe de plus en plus compliquée,

$$L(R) = \frac{-be^{bR}}{bf(a,R) + c(e^{bR} - 1)}$$

et une définition du développement d'un réseau.

Les perspectives de croissance d'un réseau sont limitées, sa longueur totale ne pouvant pas dépasser un seuil.

Ce type de modèle représente le développement de phénomènes à ressources limitées [45].



Plus séduisant que ceux qui soustendent les deux premiers modèles, ce concept ne recouvre pas obligatoirement tous les types de développement.

De plus, les trois coefficients a , b , c ne seront déterminés expérimenten-

talement que pour des réseaux ayant atteint leur limite de croissance.

Pour les autres, la relation (L,R) correspondant approximativement à une première partie de la courbe logistique, serait modélisée uniquement si les trois coefficients a, b, c sont calculables à partir de la connaissance de la surface totale qui sera potentiellement drainée par l'exutoire.

Ce type de modèles ne permet pas de définir dans un premier temps comment sont agencés les tronçons.

Seule une analyse seconde permettrait éventuellement de relier le modèle à la structure du réseau.

Une approche première, basée sur la connaissance du sens général des modèles différentiels et qui se révèle être une impasse vis-à-vis de notre visée.

En fait, ces équations modélisent des comportements et non pas des formes, des figures.

Revenons à celles-ci, soyons hydrographes.

b) approche dernière

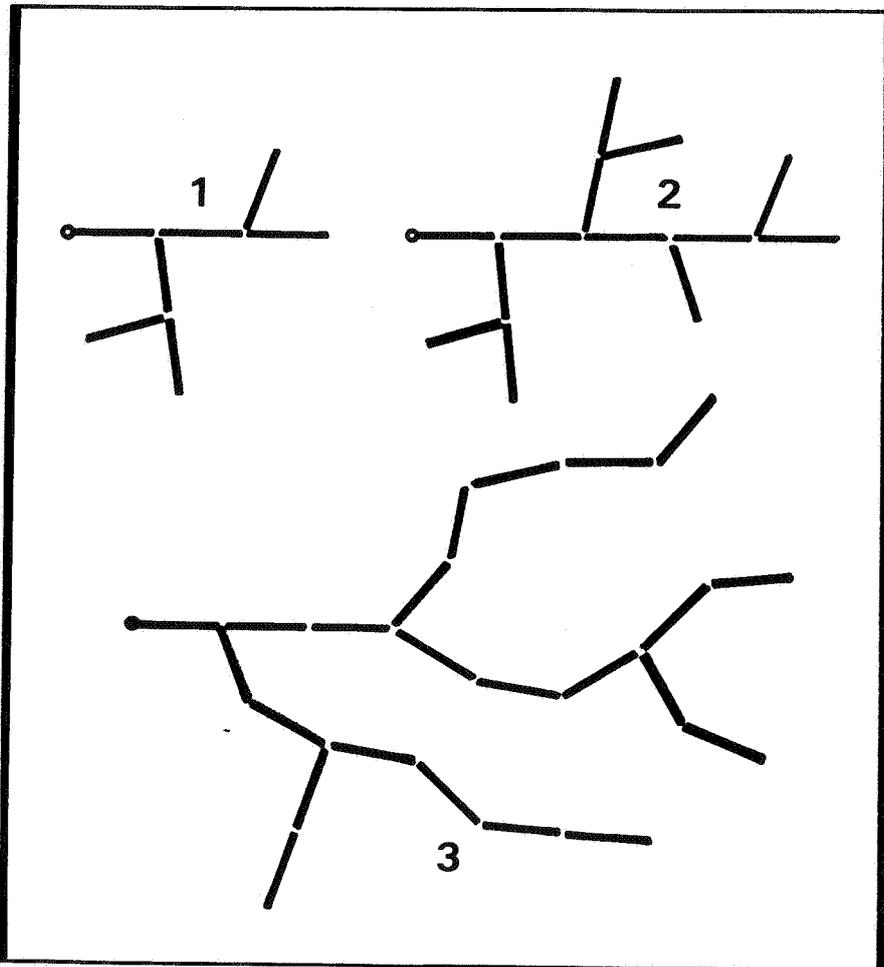
Soit l'archétype fractal et à représenter la relation (L,R) le plus simplement possible pour des réseaux principalement ramifiés dont la dimension serait comprise entre un et deux, figures entre la lignes et le plan, écolières d'abord, constitués de tronçons tous identiques de longueur unitaire chacun.

Des réseaux imaginaires pour les premiers pas d'une approche dernière. Jeux de recherche. La forme la plus simple initialement : la ligne.



pour laquelle L est égale à R.

Puis pour d'autres formes, plus complexes, moins linéiques, un accroissement de L plus important. Des figures, puissances de la première, en est-il de même pour L ; soit $L = a R^d$?



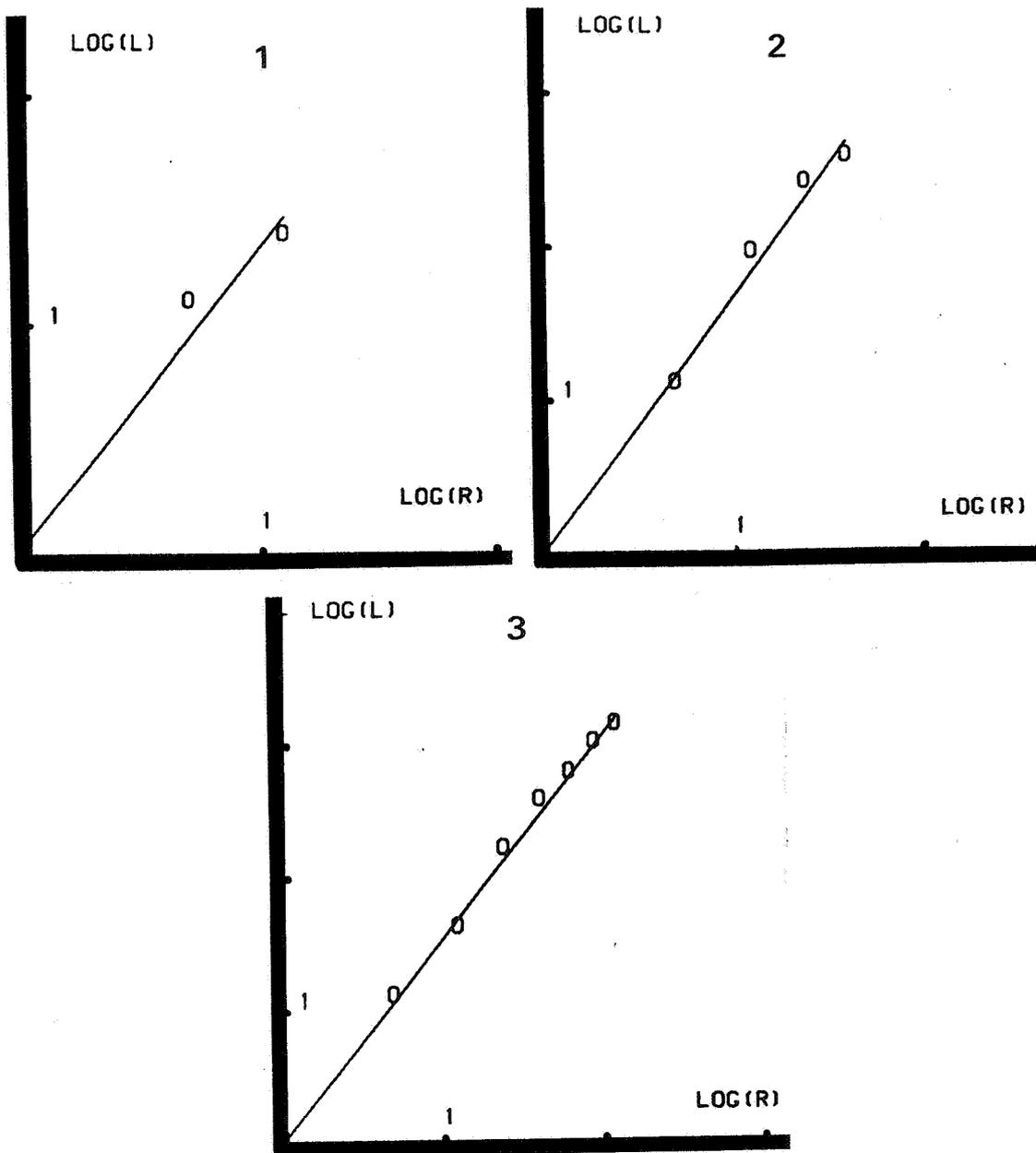


Figure	1	2	3
a	1.05	1.01	1.01
d	1.29	1.66	1.53

Relation (L,R) calculée numériquement par une approximation "aux moindres carrés" en représentation népérienne, pour chacune d'elles.

Pour d'autres encore, puisées parmi toutes celles dessinées.

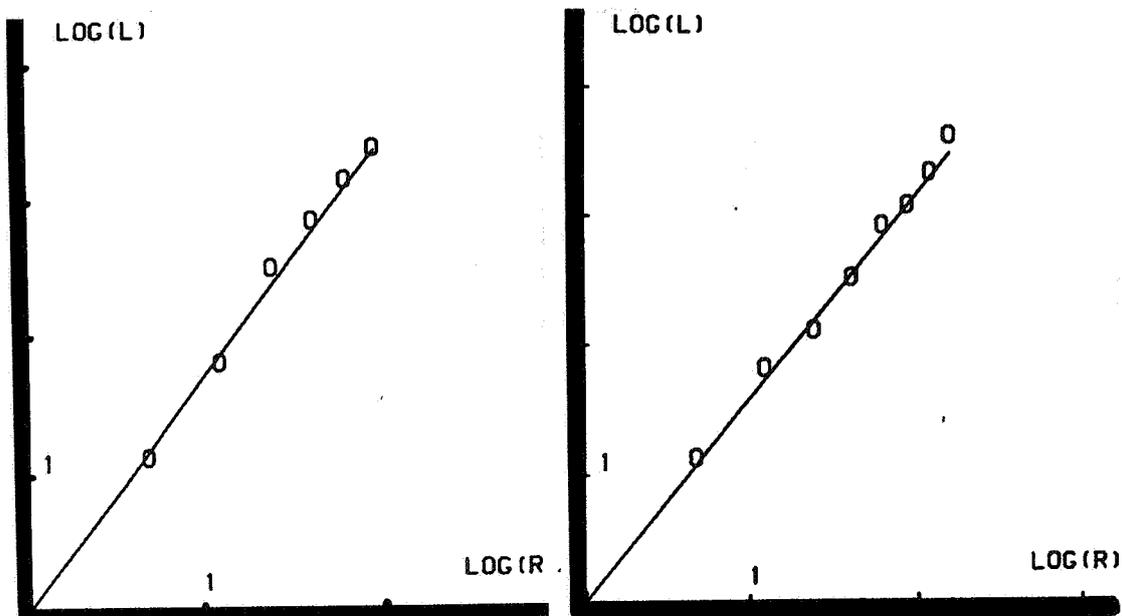
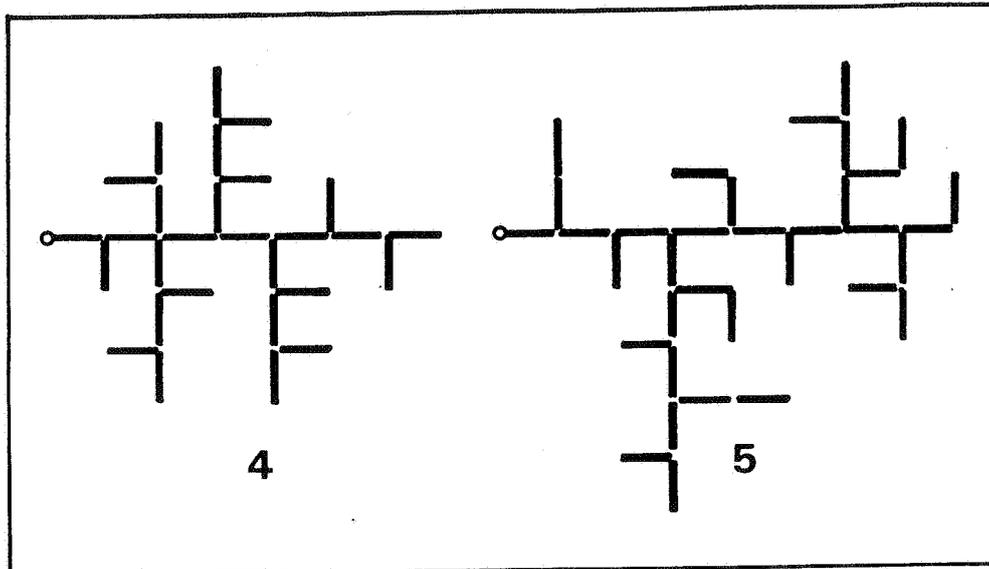


Figure	4	5
a	0.94	0.98
d	1.77	1.60

Ne nous arrêtant pas à l'erreur introduite par l'approximation, la tendance à satisfaire la relation

$$L \sim a R^d$$

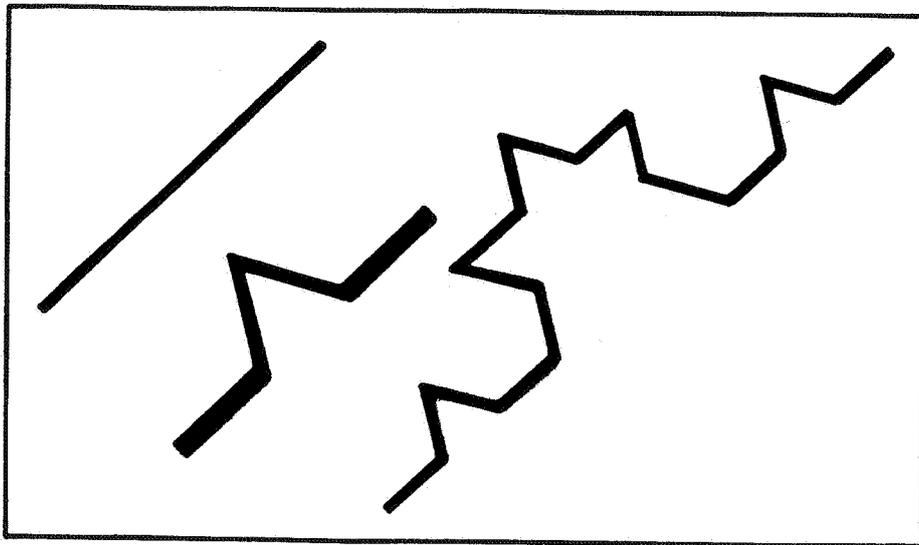
est manifeste avec d compris entre un et deux, l'intervalle pour une dimension de réseau plané.

Le monde des formes fractales se découvre à nous par cette ouverture.

En effet, B. MANDELBROT avait remarqué que certaines grandeurs comme le nombre d'éléments ou la longueur d'une figure, calculés à partir d'un point, s'exprimaient très correctement à l'aide de la dimension fractale, définie soit à partir d'une dimension de contenu ou d'homothétie.

Comme, par exemple, autre que l'ensemble triadique de Cantor, nous pouvons citer le cas de la courbe de Von Koch, côte d'une chimérique "en flocon de neige" pour l'auteur.

Cette figure s'élabore à l'aide d'un processus itératif qui remplace le tiers central de chaque segment par deux segments de longueur égale au tiers.



La dernière figure dessinée est composée de 12 segments considérés par nous-même de longueur unitaire.

En partant de l'une des extrémités, l'approximation numérique de la relation (L,R) donne le résultat suivant :

$$L \sim 1.06 R^{1.28}$$

avec une valeur d'exposant très proche de la dimension fractale (d'homothétie) de la figure qui vaut :

$$D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1.26$$

Ces propriétés remarquables comme celle que nous venons de présenter pour la courbe de Von Koch, nous amènent à penser que la valeur de l'exposant d , calculé pour diverses formes de réseaux imaginaires, doit être proche numériquement d'une dimension fractale qui serait caractéristique de la structure d'un réseau.

Reste à définir un principe de construction nous introduisant à une vision fractale de l'objet réseau et qui soit en adéquation avec la propriété

$$L = A R^D$$

3. MODELE A HOMOTHETIE

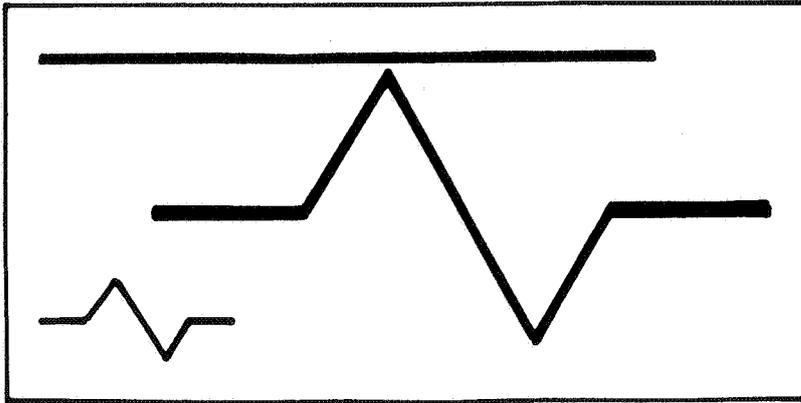
Du rapprochement précédent, effectué entre les propriétés de la courbe de Von Koch et le calcul de $L(R)$ pour quelques figures de réseaux imaginaires, nous en déduisons un modèle théorique structurel, basé sur un principe d'homothétie interne.

3.1. Dimension fractale et réseau

Rappelons que la dimension d'homothétie relie le nombre (N) de parties créées à partir d'une-partie, chaque nouvelle étant dans un rapport constant r par rapport à la partie remplacée

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)}$$

Pour l'une des courbes de Von Koch généralisées par B. Mandelbrot



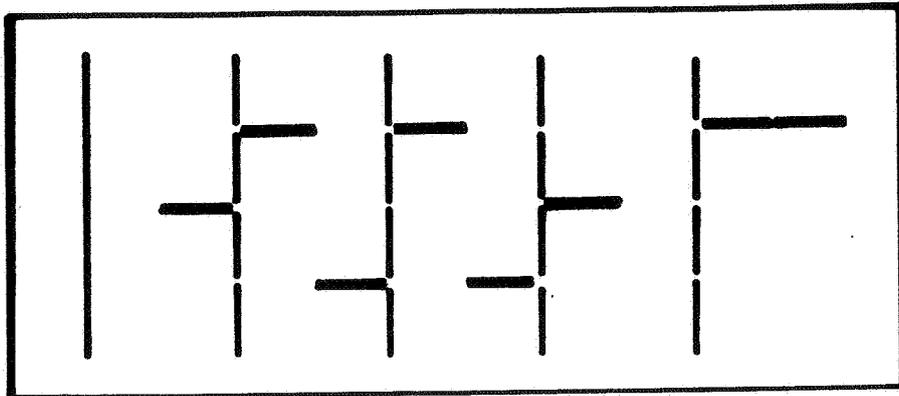
$$D = \ln(6) / \ln(4)$$

soit une partie remplacée par 6 parties dans un rapport de 1/4 par rapport à la première.

a) principe

Nous obtenons la même définition de la dimension si la substitution précédente est remplacée par la conservation de la partie initiale et son complètement par de nouvelles parties ramifiées sur cette partie première et éventuellement enchaînées et ramifiées entre elles.

Soit pour $D = \ln(6) / \ln(4)$ plusieurs formes :



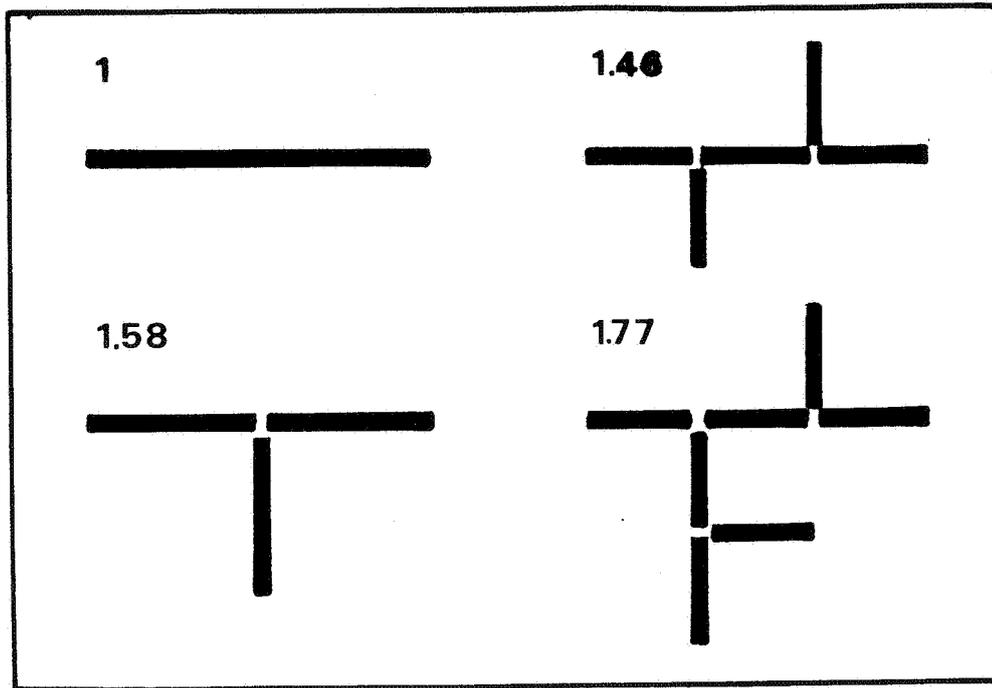
Avec ce principe d'interpolation, la figure se découvre progressivement à partir d'une diminution progressive du pas d'exploration.

Comme il y a homothétie, à partir de la seconde interpolation chaque segment est remplacé par la figure globale résultant de la première interpolation.

Un type de ramifications qui peut se poursuivre autant que nous le voulons.

Parmi l'infinité des nouvelles figures fractales, quelques unes.

La plus simple d'abord.



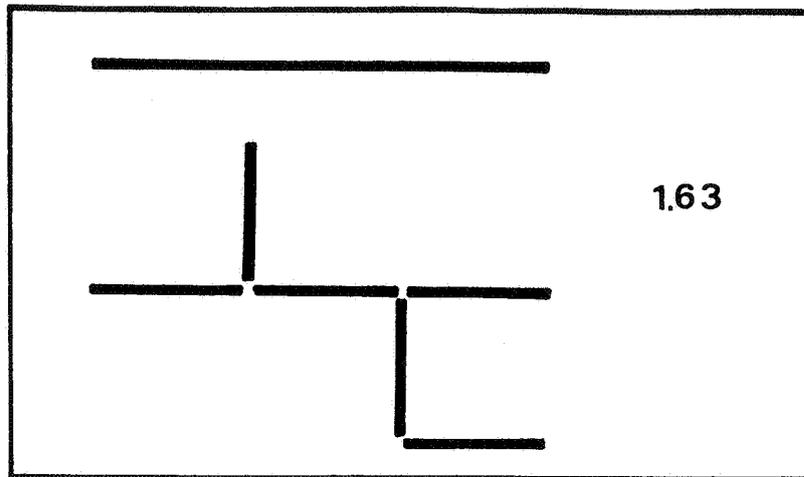
b) propriétés

L'une des particularités fondamentales de ce principe de construction est la conservation de la partie initiale qui est complétée par de nouvelles parties (tronçons) ramifiées sur la figure initiale puis éventuellement enchaînées et ramifiées entre elles.

La figure première, toujours composée d'un seul segment, a une longueur qui correspond au plus grand pas d'exploration.

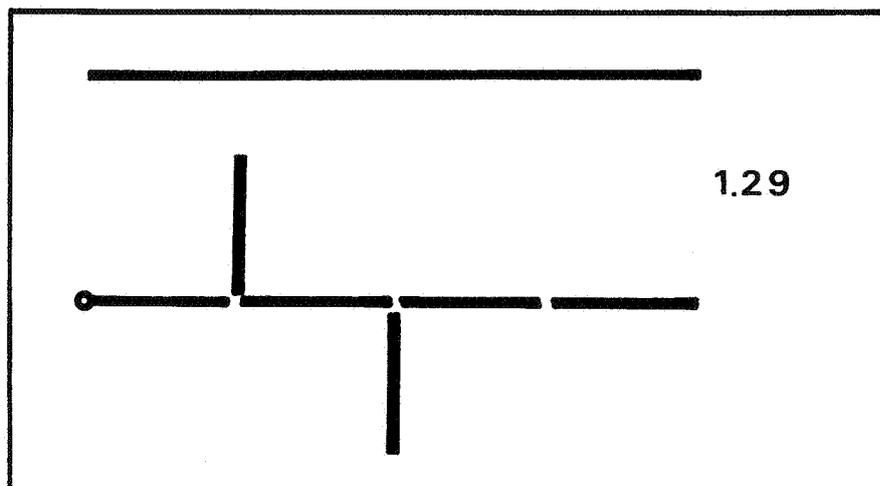
La figure obtenue après une interpolation ne peut pas présenter un chemin qui, partant de l'exutoire et rejoignant une extrémité quelconque, ait une longueur supérieure à celle de la figure première.

Ainsi, le processus suivant combinant ramification et enchaînement



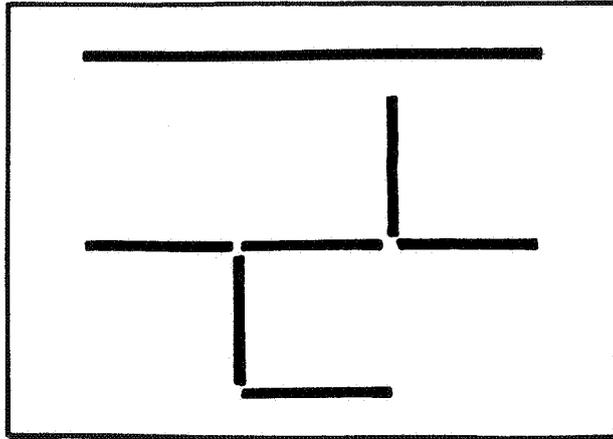
satisfait ce principe si l'exutoire est à droite. Il ne le satisfait plus si ce dernier est à gauche.

Pour cette position dernière de l'exutoire, la structure obtenue correspond à la figure fractale suivante qui a une dimension d'homothétie plus faible.



Si l'interpolation comprend au moins un enchaînement sans ramification aux nœuds intermédiaires, la dimension d'homothétie n'est plus égale à la dimension de recouvrement.

Cette figure avec l'exutoire situé à gauche,



a une dimension de recouvrement définie par la relation :

$$\sum_{j=1}^N r_j^D = 1$$

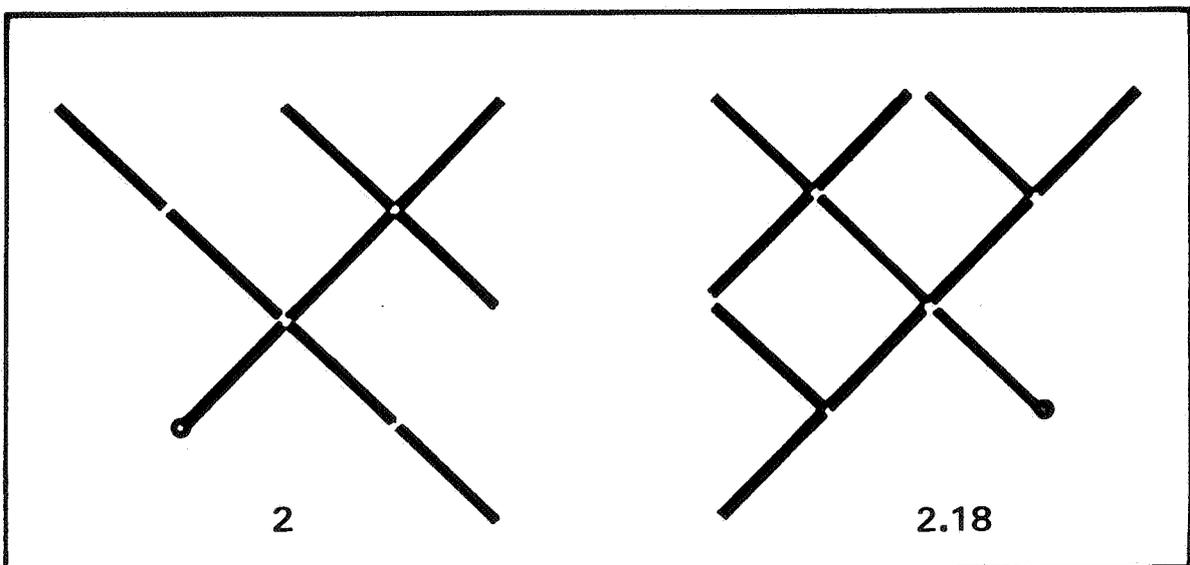
soit $4 \cdot (1/3)^D + (2/3)^D = 1$ satisfaite pour $D \sim 1.84$, alors que sa dimension d'homothétie vaut 1.63.

Comme les figures considérées recouvrent au plus le plan, leur dimension d'homothétie appartient à l'intervalle fermé $[1,2]$.

Avec l'exutoire à gauche, la figure de gauche représentée ci-après a une dimension égale à deux, celle de droite a une dimension supérieure à deux,

mais une interpolation supplémentaire donnerait des tronçons qui se chevauchent soit une infinité de points doubles.

Il ne s'agit plus d'une figure plane fractale.



Définition : Appartenant à l'intervalle $[1,2]$ pour des réseaux plans, la dimension d'homothétie qui n'est pas, dans tous les cas de figure, équivalente à la dimension de recouvrement, dépend de l'orientation de la figure, c'est-à-dire de la position du point aval.

Elle n'est pas une mesure d'unicité structurelle, puisqu'une même dimension peut représenter différents types de ramifications. Nous dirons qu'elle est représentative d'une classe de figures (N,r) .

3.2. Longueur et dimension d'homothétie

Soit à faire la liaison entre une intuition et un principe théorique de construction basé sur le concept de fractalité des réseaux.

D'une part, une relation longueur / distance $L = aR^d$.

D'autre part, une dimension d'homothétie :

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)}$$

représentative d'une classe de figures.

Soit à vérifier que pour une classe de figures quelconque, la relation longueur distance est du type $L \simeq AR^D$.

a) procédure

Après une interpolation, un segment est remplacé par N segments, le segment initial étant découpé en $1/r$ tronçons.

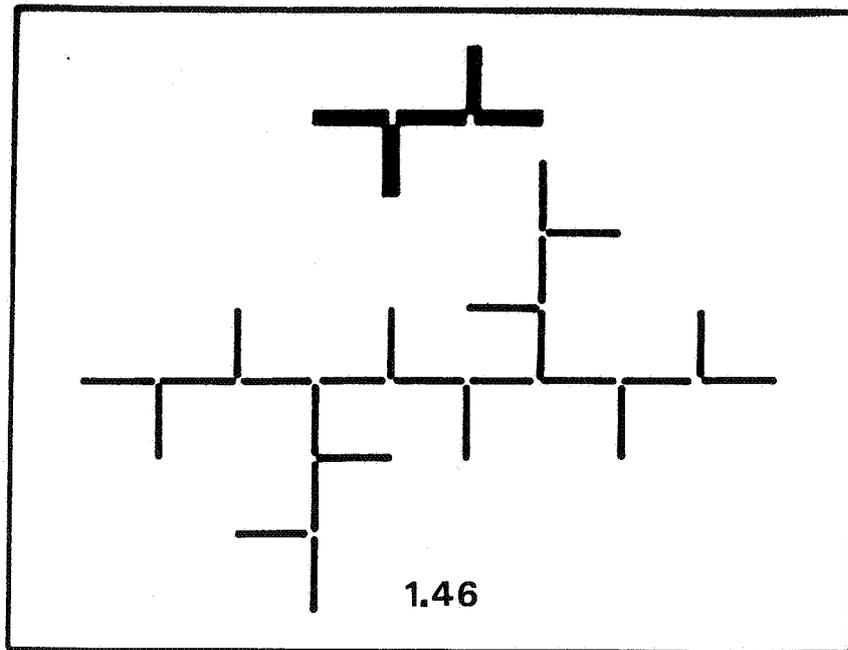
Si l est la longueur de ceux-ci, la figure a une longueur totale L qui se détermine comme suit :

$$x = 1/r$$

$$L = N \cdot l = r^{-D} \cdot l = \left(\frac{1}{x}\right)^{-D} \cdot l$$

$$L = l^{1-D} \cdot x^D$$

Considérons maintenant une extrapolation de cette figure initiale, explicitée par l'exemple suivant :



La nouvelle figure obtenue après une seule extrapolation est constituée de N figures initiales, le plus long chemin en contenant $1/r$.

Nous allons calculer les longueurs L de x en x , sachant qu'à la distance x ,

$$L = l^{1-D} x^D$$

Comme la dimension d'homothétie est représentative d'une classe de figures et non pas d'une seule figure, ce calcul de longueur n'est pas déterministe. En effet, l'interpolation revient à répartir $(N - 1/r)$ segments sur $(1/r - 1)$ points de ramifications possibles avec un certain nombre de contraintes qui découlent des propriétés énoncées précédemment.

Notre propos étant de vérifier une tendance et non pas une situation exacte, nous ferons un calcul moyen de longueur, c'est-à-dire que la répartition des figures sera supposée uniforme.

Ainsi, et après une extrapolation, la forme partielle est constituée de $(2 + n)$ figures extrapolées, à la distance $2 \cdot x$ avec $n = (N - 1/r) / (1/r - 1)$.

En notant R_2 la distance $2 \cdot x$, la longueur correspondante vaut :

$$L_2 = (2 + n) 2^{-D} \cdot l^{1-D} \cdot R_2^D$$

relation qui se généralise comme suit pour j variant de 1 à $1/r$

$$L_j = A(j,D) l^{1-D} R_j^D$$

avec $R_j = j \cdot x$
 $A(j,D) = (j + (j-1) \cdot n) J^{-D}$

Rappelons que sur un ensemble de figures "imaginaires" nous avons trouvé

$$L(R) \sim a R^d \quad (d \approx 1)$$

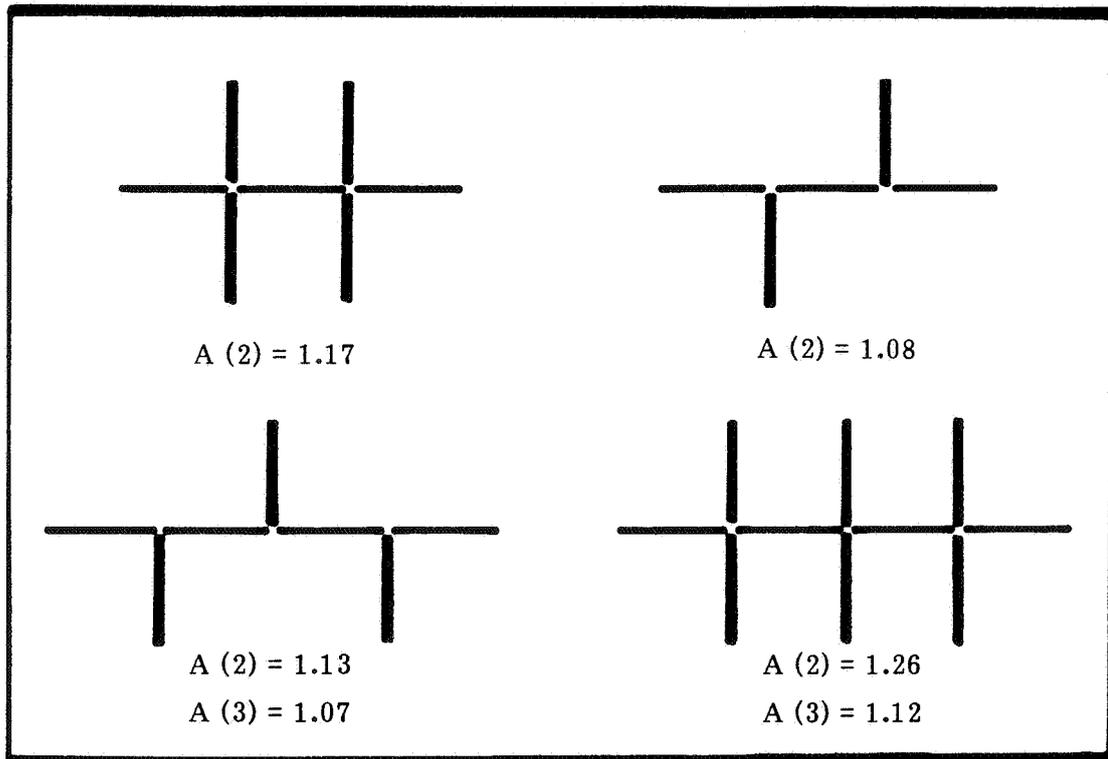
avec a toujours voisin de 1.

Si la fonction $A(j,D)$ est également voisine de 1 lorsque j varie, nous pouvons dire que la fonction $a R^d$ est une approximation de $A R^D$ et que l'exposant d représente une évaluation de la dimension fractale du réseau, considérée comme une dimension d'homothétie.

Pour les valeurs extrêmes de J , la fonction $A(J,D)$ vaut strictement 1.

Pour des figures où la répartition des ramifications est effectivement uniforme, nous avons pu vérifier la proximité à 1 de $A(J,D)$.

Quelques exemples :

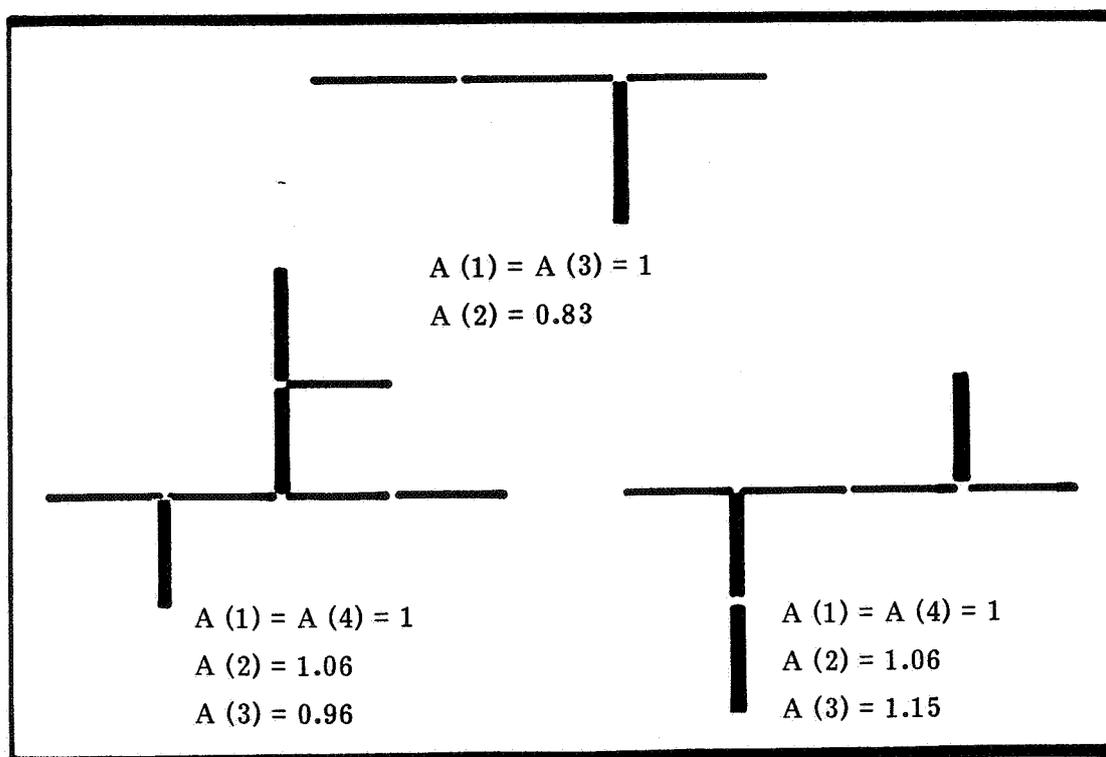


Ceci est d'autant plus vrai que la ramification est une bifurcation.

Lorsque la répartition n'est plus uniforme, la fonction A reste également proche de l'unité, celle-ci étant calculée comme suit :

$$A(R) = L(R) \cdot R^{-D}$$

Quelques exemples en prenant égale à un la longueur de la figure servant à l'extrapolation.



b) proposition

Intuition et principe structurel théorique reliés pour la proposition capitale suivante :

L'approximation de $L(R)$ par la fonction $a R^d$ donne une bonne évaluation de la dimension d'homothétie ($D \simeq d$), les variations de la fonction A étant en partie représentées par un coefficient a moyen.

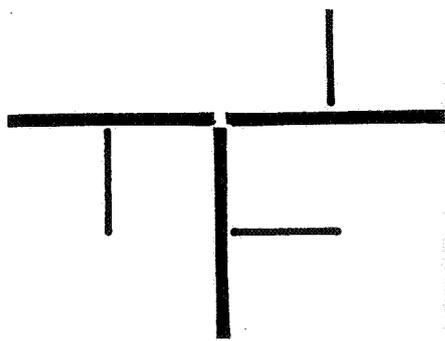
REMARQUE : Cette approximation étant basée sur un décompte des parties de la figure, elle est uniquement reliée à la dimension d'homothétie.

thétique, différente en règle générale de la dimension de recouvrement (sauf lorsque le principe de composition n'utilise pas l'enchaînement des parties).

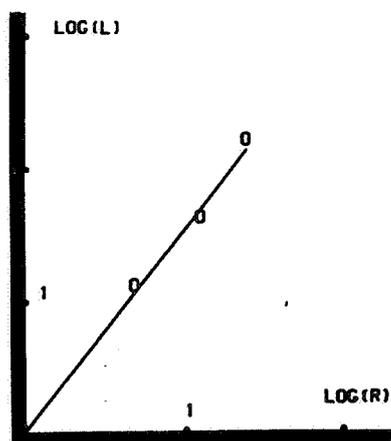
c) exemples

Pour les figures suivantes, à homothétie, nous avons approximé $L = F(R)$ par $L = a R^d$.

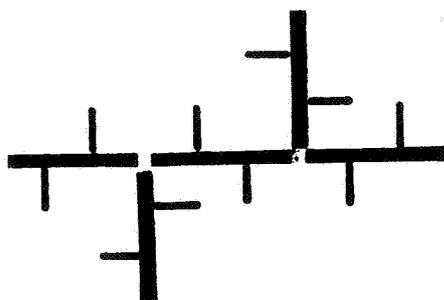
Pour chacune d'elles, d est proche de la dimension d'homothétie.



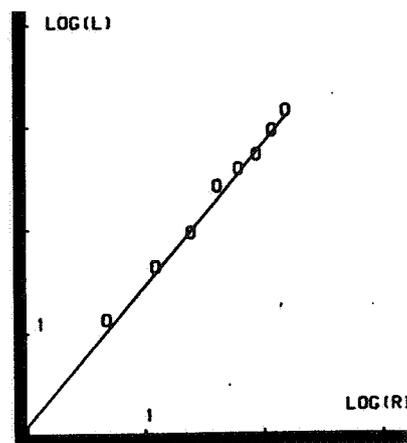
$$D = 1.585$$



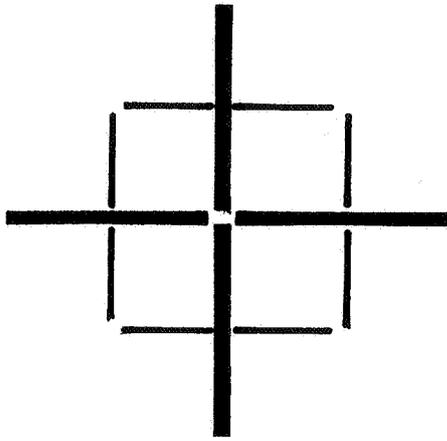
$$d = 1.55$$



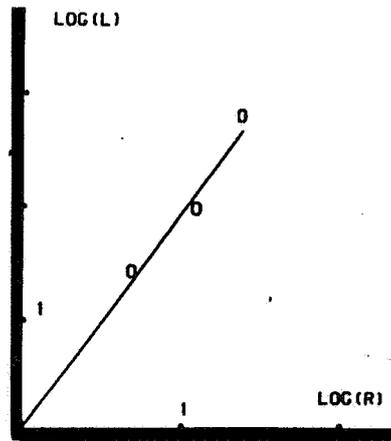
$$D = 1.43$$



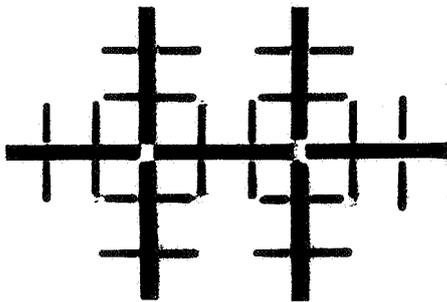
$$d = 1.40$$



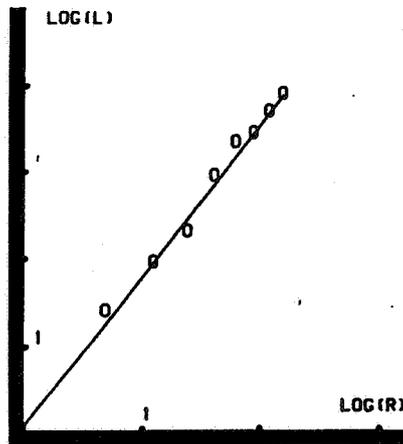
$D = 2$



$d = 1.93$



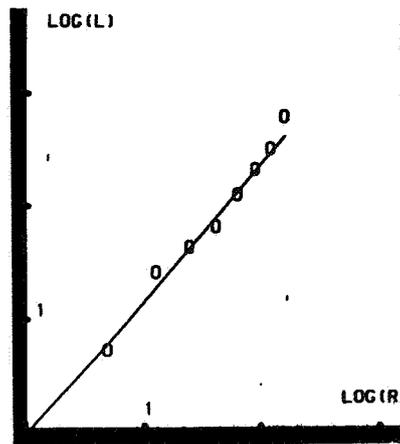
$D = 1.77$



$d = 1.76$



$D = 1.26$



$d = 1.23$

4. RETOUR AU REEL - MODELE D'HOMOTHETIE STATISTIQUE

Avant le retour, le chemin parcouru.

Des réseaux, objets ramifiés, mille variétés, arbrisseaux, conifères, feuillus ...

Un concept, celui de la forme fractale.

Des réseaux imaginaires, élaborés à partir d'un principe élémentaire d'homothétie, entre le tout et la partie.

Des classes de figures, autant de classes que de dimensions comprises entre le un et le deux, le roseau et le chêne planés.

Et pour chacune de ces classes, une relation $L = A R^D$.

Puis, de nouveau, le réel ; un modèle si simple pour une réalité si complexe.

D'un côté, un modèle de structure basé sur la régularité homothétique.

Des réseaux comme les allées d'un jardin à la française, avec des rapports de grandeurs si clairement définis, des égalités partout. Une perfection de la rectitude.

De l'autre, le foisonnement, la direction sans cesse renouvelée, aucune égalité, des parcours hasardeux à première vue.

Une beauté, celle de la multitude.

Et puis, fondamentalement, un principe de composition inconnu.

Un chemin principal, peut être, puis d'autres, secondaires.

Mais où sont les parties qui, redivisées, ont supporté les ramifications et enchaînements des parties nouvellement créées ?

Initialement, introduire le rapprochement à partir d'un parcours double.

Du modèle vers le réel en dépassant la régularité de l'homothétie stricte, à la vue du mode de ramification presque chaotique, des réseaux urbains.

Analyser le réel ensuite, c'est-à-dire le décomposer à partir d'un modèle à homothétie statistique.

4.1. Dimension d'homothétie statistique

Modifier le premier modèle par une série d'écarts à chaque étape de l'interpolation ; soit à partir d'une figure fractale à homothétie stricte, créer une infinité de figures à homothétie statistique.

A la première interpolation, modifier la longueur des N parties mais

en satisfaisant la règle :

$$r = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_j$$

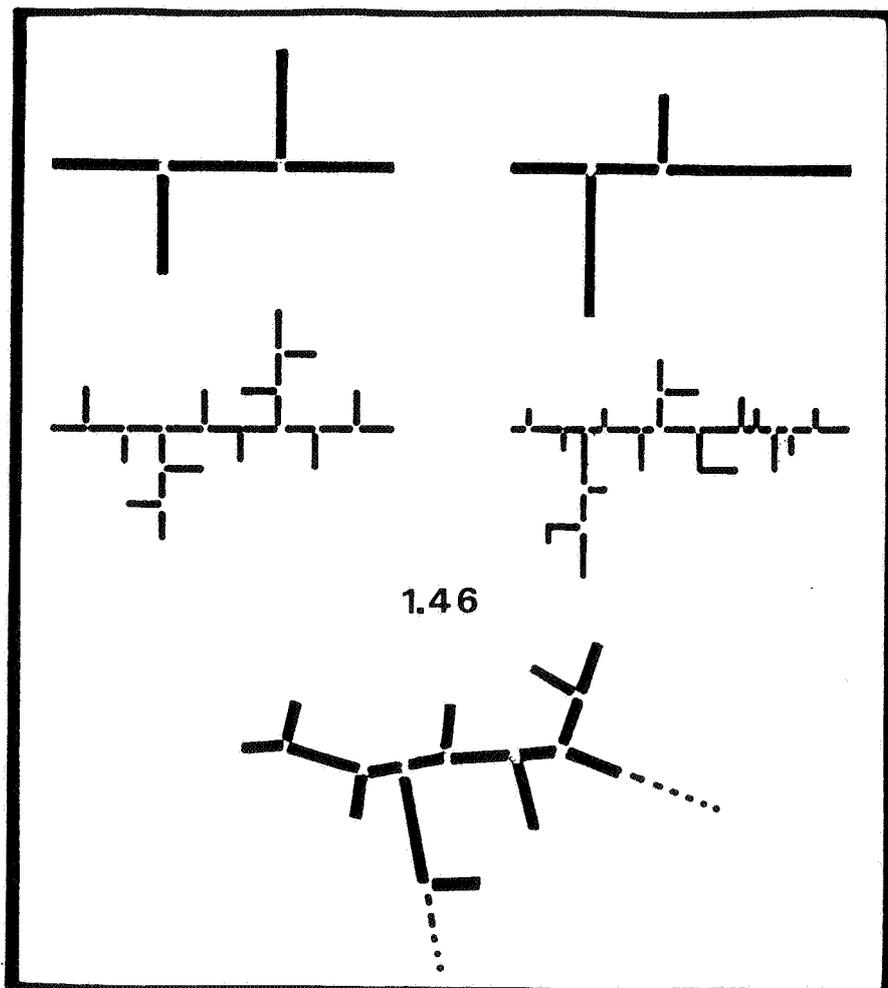
avec r_j rapport d'homothétie de la $j^{\text{ème}}$ partie et r rapport d'homothétie du modèle originel.

A partir de la seconde, créer autant de parties que dans le modèle à homothétie stricte avec un rapport d'homothétie moyen équivalent. Tronçons ramifiés et enchaînés mais n'importe où, au hasard de la moyenne du rapport d'homothétie à obtenir.

Puis un rapprochement graphique ; imiter le réel, ne plus enchaîner en ligne droite et ramifier en perpendiculaire.

Pour une dimension donnée, une figure imaginaire de la rectitude et autant de figures "réelles" qu'il y a de façons d'obtenir la moyenne et de situer les points de ramification.

Fluctuations autour d'un thème ; introduction à la dimension d'homothétie statistique pour une figure fractale.



A une étape donnée de l'interpolation, N tronçons enchaînés et ramifiés de longueurs l_j chacun et R_M la longueur du chemin initial.

Soit r_j le rapport d'homothétie de chacun d'eux.

$$r_j = l_j / R_M$$

et r la valeur moyenne.

Propriété : Si l est la longueur moyenne de tous les tronçons, le rapport r est tel que :

$$r = l / R_M$$

Définition : Nous appellerons dimension d'homothétie statistique D la valeur :

$$D = \ln(N) / \ln(1/r)$$

Si cette valeur est pratiquement constante à chaque interpolation, la figure est fractale.

De nouveau, introduire l'extrapolation statistique pour complexifier la figure initiale et exprimer la proximité du modèle $L = A R^D$ à la fonction (L,R) avec L longueur totale du réseau tronqué à la distance R de l'exutoire, pour une figure extrapolée.

Nous la définissons comme suit :

Soit une figure de plus long parcours l_1 interpolée avec un rapport d'homothétie moyen r .

Elle est repliquée $(N - 1)$ fois, chacune des N parties principales ayant un plus long chemin de longueur l_K tel que :

$$\frac{1}{N} (\sum l_K) / R_M = r$$

avec R_M longueur du plus long chemin du tout.

Les parties secondaires de chacune des nouvelles figures ont une longueur moyenne \bar{l}_K telle que :

$$\bar{l}_K / l_K = r \quad \forall K$$

Soit N^2 parties secondaires pour le tout avec un rapport d'homothétie statistique moyen r , déterminé comme suit :

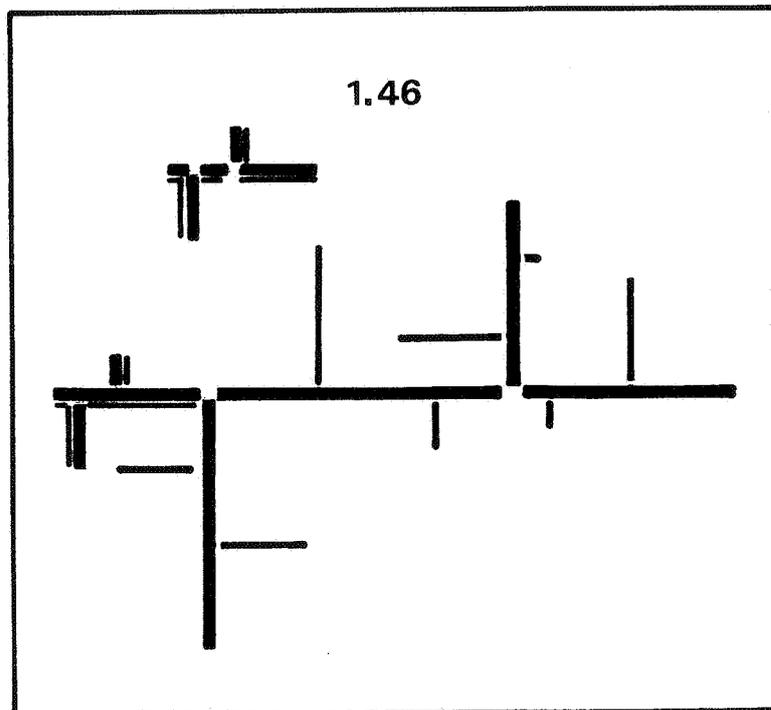
$$\bar{r} = \bar{l} / R_M \quad ; \quad \bar{l} = (\sum \bar{l}_K) / N$$

comme $\bar{l}_K = r l_K$ et que $r = (\sum l_K) / R_M / N$

$$\bar{r} = r^2$$

Avec ce principe, les chemins secondaires du tout forment une figure de dimension d'homothétie statistique égale à celle de la figure interpolée.

Il en sera de même pour les chemins correspondant à toutes les étapes de l'interpolation de la figure originelle et pour toutes les autres extrapolations, si on utilise le principe défini.



4.2. Longueurs et dimension d'homothétie statistique

La qualité de la représentation de la relation (L,R) par $L = a R^d$ diffère selon qu'il s'agisse d'une structure construite à partir d'une interpolation

ou d'une extrapolation statistiques.

a) interpolation statistique

Une seule certitude pour les figures ayant des parties de longueur moyenne l :

$$L_T = l^{1-D} R_M^D$$

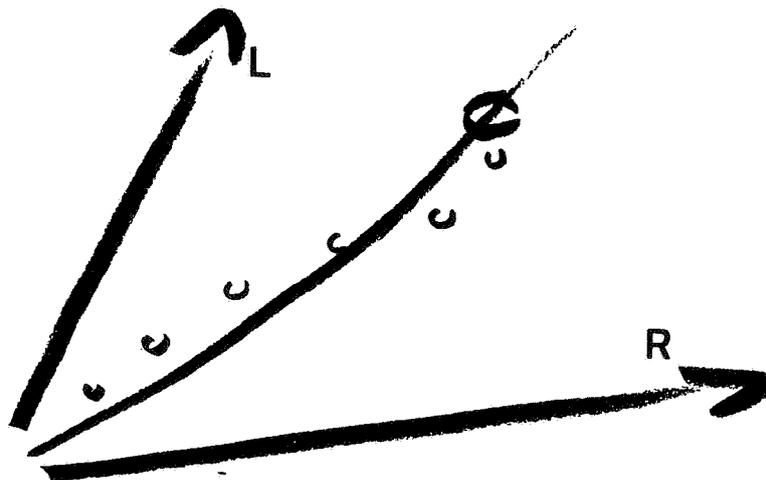
avec L_T : longueur totale, puisque :

$$L_T = \sum_{j=1}^N r_j \cdot R_M = N r R_M$$

avec $N = r^{-D}$ et $l = r \cdot R_M$

Entre l'origine ($R = 0$) et R_M , une fluctuation d'autant plus importante que le positionnement des ramifications n'est pas uniforme.

Ainsi, d peut différer sensiblement de D si $L = a R^d$ résulte d'une approximation



Un écart d'autant plus grand que l'erreur relative suivante est forte :

$$\left| 1 - a R_M^d / L_T \right|$$

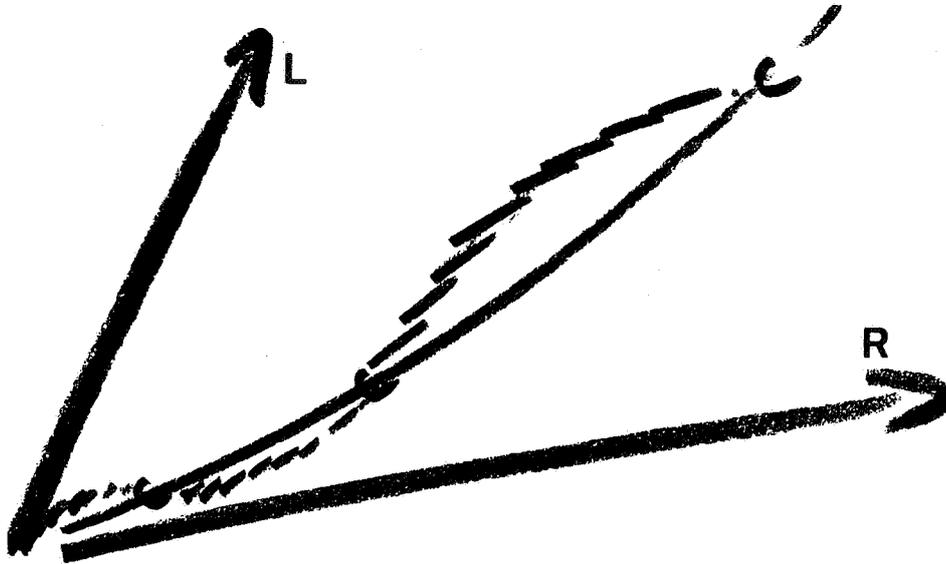
b) extrapolation statistique

Soit une structure avec une longueur moyenne des parties 1, résultant d'une suite d'extrapolations à partir d'une figure initiale interpolée.

Pour la première extrapolation, deux points satisfont la relation $L = 1 - DR^D$, celui correspondant à la longueur totale de la figure initiale et celui correspondant à celle de la nouvelle figure.

Puis à chaque extrapolation, un nouveau point, celui de la nouvelle longueur totale.

Entre tous ces points, des fluctuations différentes.



L'approximation de D par d sera d'autant meilleure que le nombre d'extrapolations est important, écart quantifiable à partir de l'erreur relative définie ci-avant.

4.3. Décomposition d'un réseau

Soit à rapprocher un modèle théorique de structure, basé sur un principe d'homothétie statistique et un réseau quelconque, parti d'un système de drainage eau pluviale d'une agglomération.

Pour ce réseau, autant de sous systèmes qu'il y a de façons de le décomposer en sous réseaux à exutoire unique.

Une décomposition ultime, à rapprocher d'une analyse "microscopique", en tronçons sans ramification, de dimension euclidienne et fractale unitaire.

En envisageant le macroscopique, il n'y a pas de décompositions évidentes, la forme observée, si elle est fractale, étant le résultat d'une suite d'interpolations / extrapolations sans que nous en connaissions les étapes.

Ainsi, pour une figure donnée, la dimension ne peut pas se calculer à partir des couples (N,r) qui nécessiteraient la reconnaissance du chemin principal, puis des chemins secondaires et ainsi de suite.

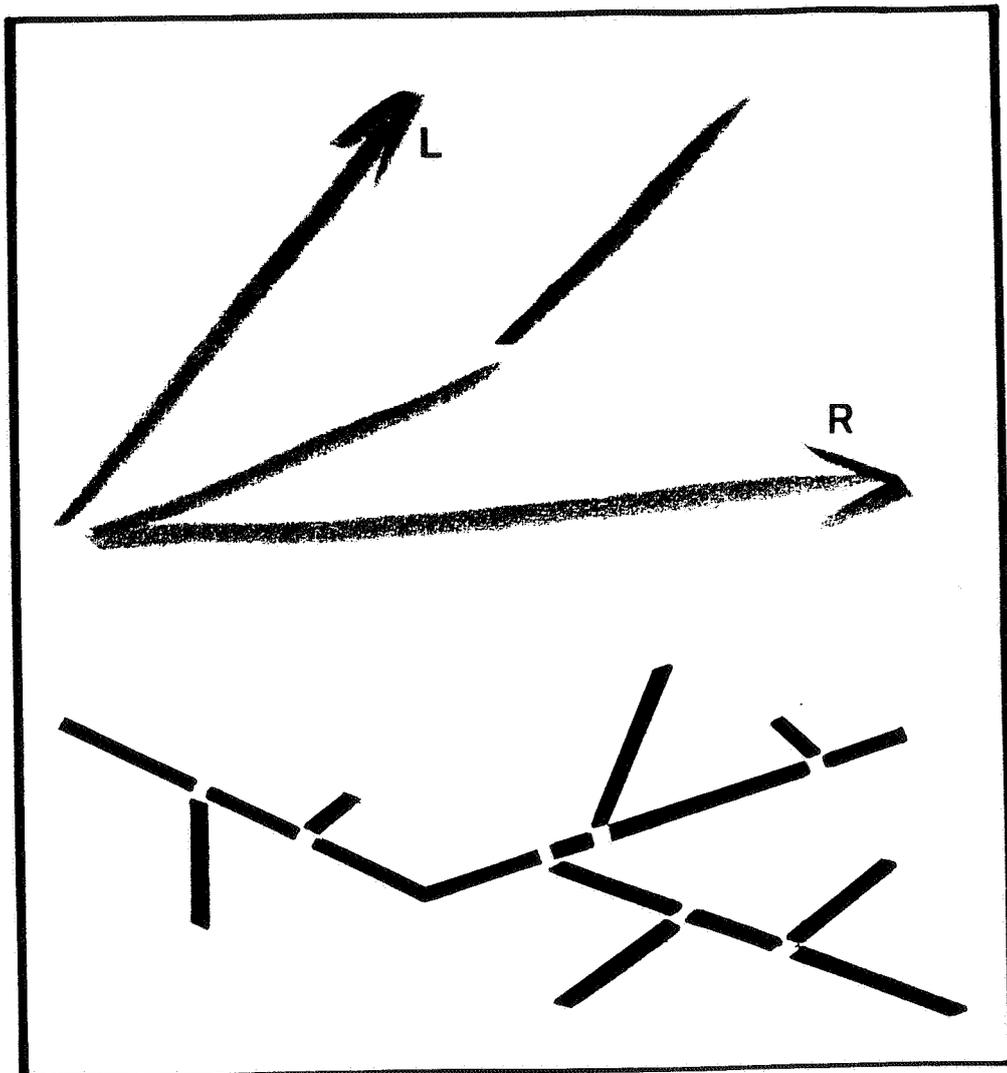
Cependant, nous pouvons utiliser un biais, un test de fractalité, comme l'évolution de la longueur drainée en fonction de la distance à l'exutoire

$$L \simeq A R^D$$

Ce test est également l'outil de la décomposition du réseau en sous systèmes homogènes vis-à-vis du concept de fractalité.

En effet, la relation (L,R) doit être approximativement continue, faiblement fluctuante.

Toute discontinuité du second ordre traduit un changement morphologique comme, par exemple, la mise en série d'un réseau très faiblement ramifié et d'un réseau fortement ramifié.



Définition : Dans l'espace des formes fractales, les structures ramifiées à homothétie statistique, sont les éléments de base à partir desquels s'opère la décomposition d'un réseau en sous systèmes fractals.

Si la décomposition est induite par le modèle, elle n'en est pas pour autant unique.

D'une part, relevant de la discontinuité structurelle marquée par les ruptures d'évolution de la fonction (L,R) , elle dépend du seuil à partir duquel l'observateur juge qu'il y a rupture.

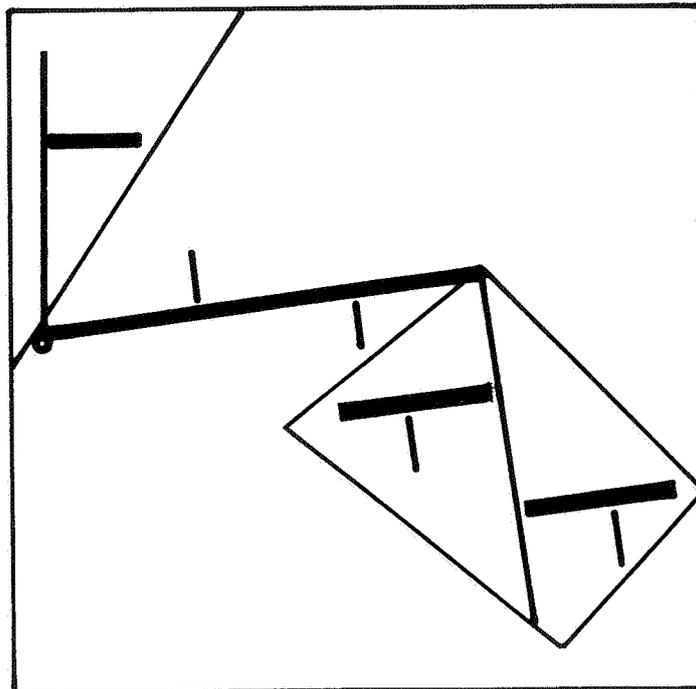
Cette relativité du seuil de rupture provient également de la relation

$$L \approx A R^D$$

qui n'est pas une relation exacte, consécutive du modèle structurel à homothétie statistique ou non.

D'autre part, une figure reconnue comme fractale est peut être décomposable en plusieurs figures de dimension supérieure à un.

La réunion de figures fractales peut constituer une figure également fractale, les discontinuités n'étant plus apparentes.



Une définition de la décomposition encore floue, à compléter si cela est possible, par une étude de la structure de l'ensemble des formes fractales de réseaux.

4.4. Esquisse pour une algèbre de formes ramifiées

Soit un ensemble de formes ramifiées, muni d'une application injective dans \mathbb{R}^+ qui, à toute forme, lui fait correspondre sa dimension d'homothétie, statistique ou non, et deux lois de composition portant sur des figures dont les plus longs chemins ont des longueurs voisines.

La première sérielle, l'exutoire de la figure rajoutée étant l'un des points les plus éloignés de l'exutoire de la figure complétée.

La seconde parallèlique, l'exutoire de la figure complétée étant l'exutoire de la figure rajoutée.

Un débat ouvert,
ces deux lois sont-elles internes ?

Seulement une première approche à partir de quelques essais sur des figures à homothétie interne stricte, la dimension de la figure résultante étant déterminée par la relation (L,R) approximée :

$$L \simeq A R^D$$

tests plutôt négatifs pour la première des lois et plutôt positifs pour la seconde, avec la propriété suivante :

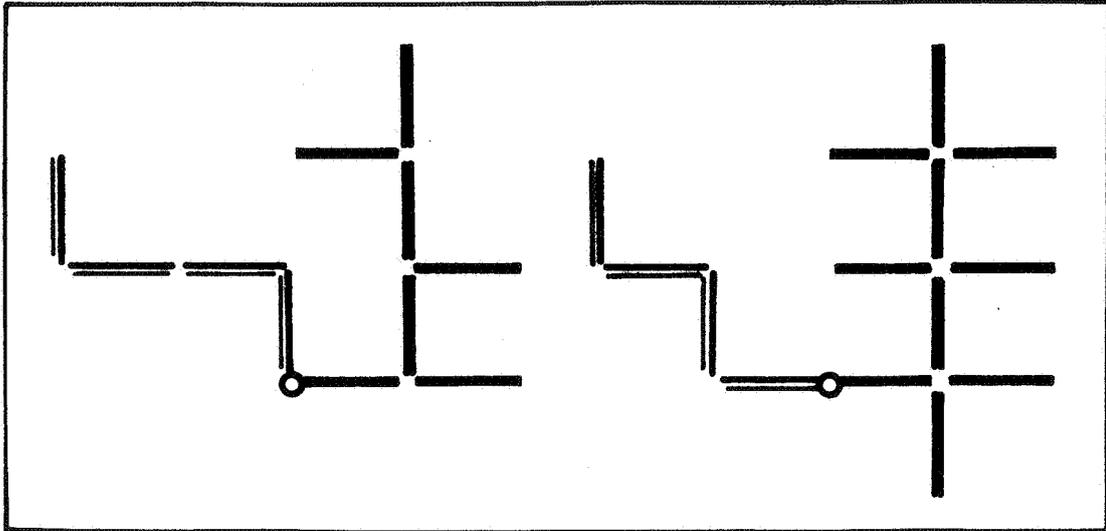
Soit deux figures fractales caractérisées par leur nombre d'éléments (N_1, N_2) et leur dimension d'homothétie (D_1, D_2) . La composition parallèlique donne une nouvelle figure avec $N_1 + N_2$ éléments et de dimension D d'homothétie statistique, cette fois, voisine d'une dimension D pondérée telle que :

$$L \sim 2 \ell^{1-D} R^D$$

$$D = \frac{N_1 D_1 + N_2 D_2}{N_1 + N_2}$$

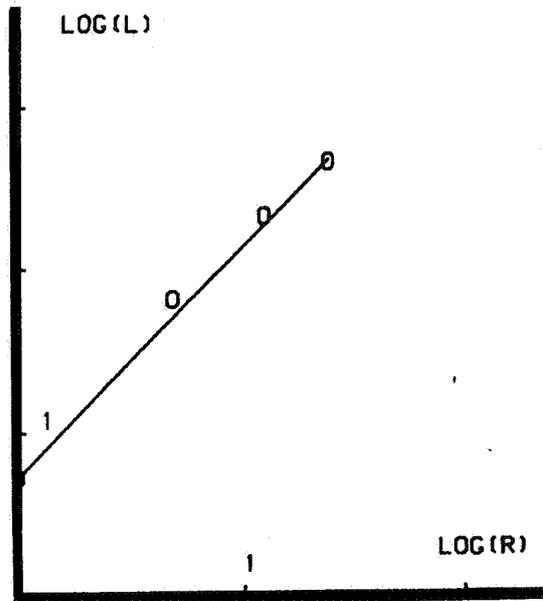
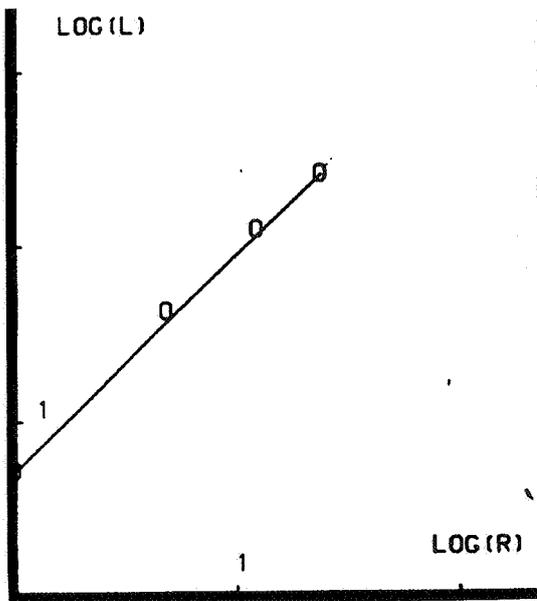
avec ℓ : longueur de l'élément.

Deux exemples avec $\ell = 1$.



$D_1 = 1 ; D_2 = 1.4$

$D_1 = 1 ; D_2 = 1.66$



$L \sim 2.04 R^{1.23}$
 $D = 1.25$

$L \sim 2.09 R^{1.41}$
 $D = 1.47$

Une dimension fractale d'une globalité nouvelle. Seulement un signe 2, 3, n figures en parallèle

$$L \approx n l^{1-D} R^D$$

chacune d'elles à homothétie structurelle ou résultant d'une composition sérielle et parallélique de figures à homothétie ou ... etc, etc ...

Cheminement fractal.

5. EXPERIMENTATION

Pour étudier la validité de la théorie élaborée, quant à représenter le réel, nous avons utilisé les données informatisées du réseau de la Communauté URbaine de LYon (état 1985-86) déjà présentées précédemment (partie A, chapitre 5).

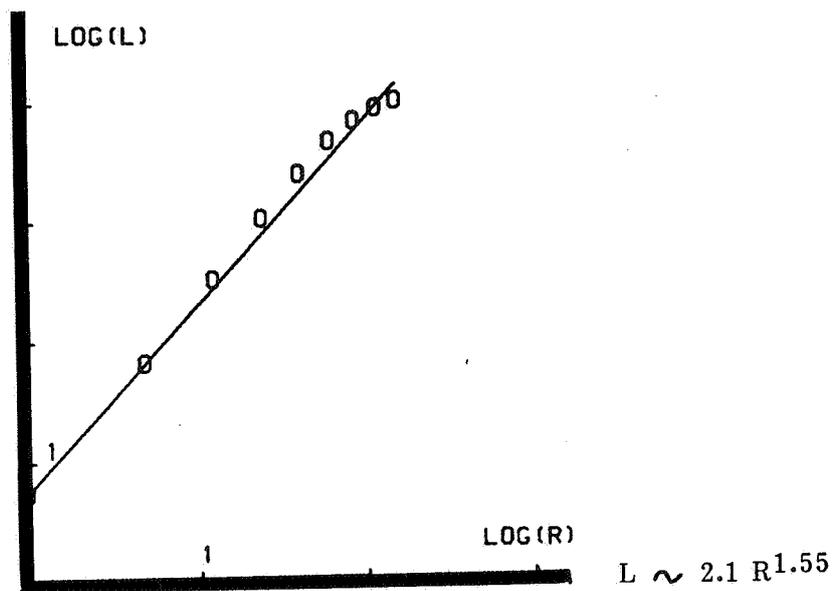
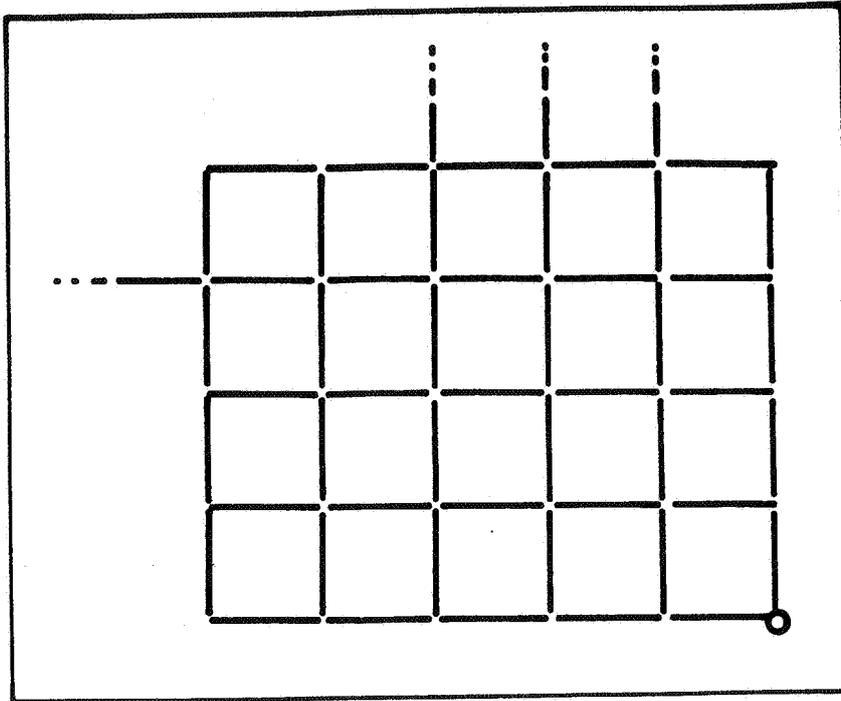
La dimension d'homothétie statistique étant calculée à partir d'une approximation numérique "aux moindres carrés" de la relation (L,R) par la fonction

$$L = A R^D$$

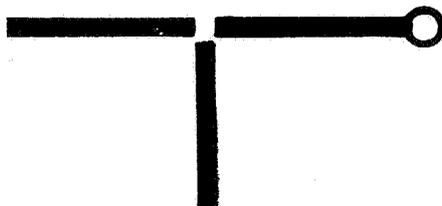
sa valeur est plus sûrement déterminée que celles des divers coefficients des modèles structurels type Horton / Strahler ou à évolution en magnitude, puisque ce calcul porte uniquement sur la géométrie du réseau d'assainissement eau pluviale.

Le choix des sous systèmes est plus souple que pour ces autres modèles. En effet, s'ils doivent présenter des structures principalement ramifiées pour qu'il y ait accord avec le fait hydrologique (partie B, paragraphe 2.1.), l'existence de mailles locales n'est pas incompatible avec ce modèle.

Un réseau maillé est une figure à homothétie statistique résultant d'une composition parallélique comme nous le suggère l'exemple suivant ($1 = 1$).



La structure d'un tel réseau s'obtient par combinaison multiple de la figure élémentaire suivante qui a une dimension d'homothétie sensiblement égale à 1.58, lorsque l'exutoire est à l'aval de la maille.



Si le point d'origine est centré sur le réseau maillé, la relation $L(R)$ a la forme suivante :

$$L = 4 R^2$$

et le réseau est un objet de dimension 2.

Nota : Pour cette dernière quantification, le point origine n'est plus un "exutoire". Il s'agit d'un centre pour un réseau supportant un écoulement qui n'est plus unidirectionnel. Le rapprochement avec les réseaux de voiries est immédiat pour lesquels la notion d'exutoire n'a pas de légitimité.

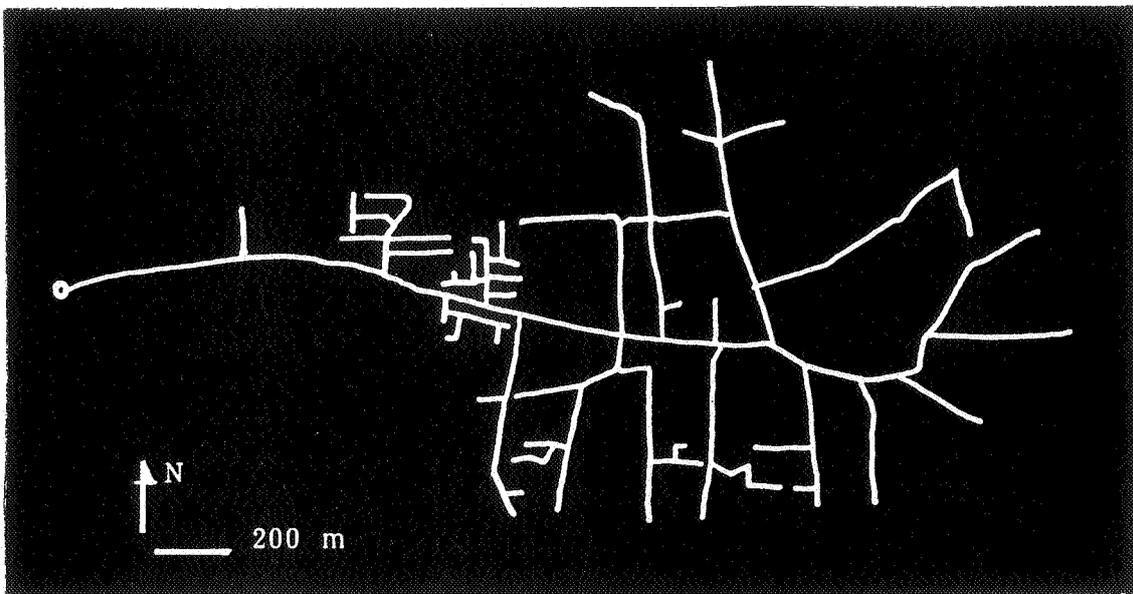
5.1. Le champ expérimental

Nous avons utilisé les mêmes sous systèmes que ceux testés pour les modèles structurels présentés dans la première partie.

La dizaine de réseaux des communes suivantes illustrent les résultats obtenus.

Nom de la commune	Longueur du réseau en kilomètres	surface imperméabilisée (*)
Saint Didier Ouest	5	3.9
Craponne	4.7	14
Jonage	7	16
Saint Didier Est	7.6	16
Francheville	8.5	18
Dardilly	8.8	10.8
Vaulx en Velin Sud	10	49.5
Ste Foy lès Lyon	13	60
Vaulx en Velin Nord	13.5	76
Décines	26	38
Meyzieu	50	80
Chassieu	74	80

(*) **Nota** : Cette surface calculée selon le mode présenté dans la partie A (paragraphe 5.1.) est donnée à titre d'information.



Vaulx en Velin Nord

Ce réseau qui présente des dysfonctionnements hydrologiques possède trois parties distinctes.

La première, très linéaire, comporte à son amont une partie dense suivie d'une partie aérée et beaucoup plus étendue.

Cette distinction se retrouve au niveau des types d'urbanisme.

Nous avons testé le modèle successivement sur le tout, la figure constituée des deux parties en amont et enfin sur la partie que nous avons qualifiée d'aérée.

5.2. Traitements

Ne définissant pas la dimension d'homothétie statistique à partir d'une étude directe du mode de composition d'un réseau, nous l'avons évaluée à l'aide de la fonction $L(R)$.

L'exutoire des réseaux étant choisi a priori puisque ceux-ci sont pour la plupart des sous systèmes, les couples (L,R) sont calculés à chaque ramifications.

Dans un premier temps, les ramifications sont classées par ordre croissant de distance par rapport à l'exutoire.

Si L_j est la longueur totale du réseau tronqué, tous les points extrêmes étant à une distance inférieure ou égale à R_j , distance de la ramification, pour la ramification du niveau supérieur $(j + 1)$, cette longueur est incrémentée de la longueur des chemins qui se terminent ou se poursuivent vers l'amont et ce à concurrence de la différence $R_{j+1} - R_j$.

Ce calcul effectué, l'examen de la courbe (L,R) nous permet de déceler les discontinuités structurelles éventuelles et de choisir s'il y a lieu, un exutoire permettant d'avoir une figure homogène vis-à-vis de la distribution L, R .

Pour les figures nouvelles, les couples (L,R) sont approximés "aux moindres carrés non pondérés" en représentation népérienne par une droite soit :

$$L = A R^D$$

Cette fonction est le seul élément à partir duquel nous pouvons analyser le caractère fractal de la structure.

Si le coefficient A est approximativement égal à n^{1-D} , l étant la moyenne des longueurs de toutes les parties et n voisin d'un nombre de figures en parallèle, nous pourrions en déduire que la figure est fractale et composée à partir d'un principe statistique d'extrapolation.

Rappelons les conditions de proximité de n à un entier :

- . l doit être une valeur commune à toutes les figures
- . les longueurs de leurs chemins principaux doivent être voisines.

Mais ne connaissant ni l ni n puisque maintenant le réseau est la seule donnée originelle, cette vérification se révèle impossible, d'autant plus que

la composition parallélique peut elle-même être statistique et que l n'est pas la valeur moyenne des tronçons reliant deux ramifications et des tronçons terminaux.

La qualité de fractalité de la figure se déduira de l'analyse conjointe de deux types d'erreurs relatives.

Pour définir la première erreur, partons du résultat souhaité.

D est une évaluation statistique telle que :

$$N = n \cdot r^{-D}$$

A tel que : $l = (A/n)^{1/1-D}$

Soit $N = (L_T / l)$ le nombre de parties de longueur moyenne l du réseau de longueur totale L_T .

Soit $N_e = n \cdot (1/R_M)^{-D}$ ce nombre obtenu en supposant la fractalité de la structure avec R_M , longueur du plus long chemin.

Soit l'erreur d'assimilation :

$$E = | 1 - N_e / N |$$

$$N_e / N = n \cdot R_M^D \cdot (A/n)^{D/1-D} / (L_T \cdot (A/n)^{-1/1-D})$$

$$E = \left| 1 - \frac{A R_M^D}{L_T} \right|$$

Evidence du résultat, indépendant de l et n inconnus, puisqu'il est relatif au dernier point approximé.

Puis, pour tous les autres, une qualité globale de l'approximation définie par deux erreurs relatives.

La première est la moyenne des écarts relatifs en longueurs

$$E_1 = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \frac{|L_i - L_{ci}|}{L_i} \right)$$

avec L_i et L_{ci} respectivement longueur expérimentale et approximée (m : nombre de points).

La seconde est un écart relatif pondéré par la longueur

$$E_2 = \frac{\sum_{i=1}^m |L_i - L_{ci}|}{\sum_{i=1}^m L_i}$$

Nous considérons que cette dernière est plus intéressante car elle relativise l'erreur par rapport à la longueur représentée.

Ces deux dernières erreurs seront d'autant plus faibles que la structure du réseau s'apparente à une forme élaborée à partir du principe d'extrapolation statistique.

Afin de ne pas alourdir la présentation, nous n'avons pas plus reproduit les valeurs expérimentales que celles des traitements ultérieurs.

L'annexe 2 en est un exemple pour le premier des réseaux présentés, toutes les autres valeurs étant disponibles.

Nous nous sommes contentés de reproduire les résultats suivants :

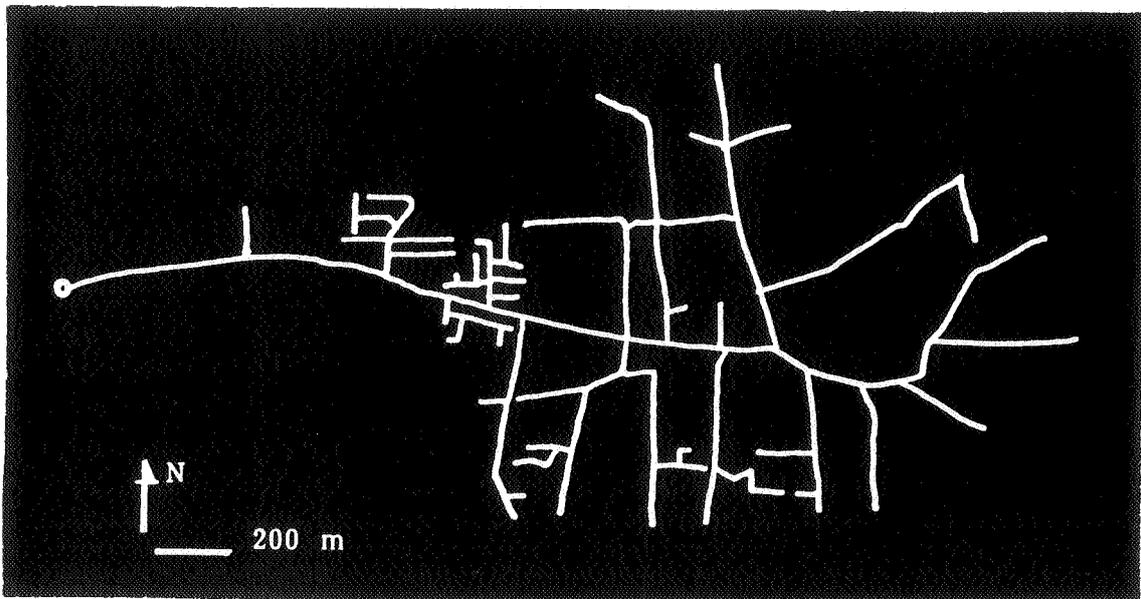
- D : dimension
- A : coefficient ($L = A R^D$: longueurs en mètres)
- R_M : distance maximum
- E_1, E_2, E : erreurs relatives
- l_m, n : longueur moyenne entre ramifications et nombre de figures paralléliques correspondant
- l, n : longueur moyenne des parties correspondant à des nombres entiers (n) de figures paralléliques

De même pour que les courbes soient claires, nous n'avons reporté qu'un certain nombre de points (un sur deux ou trois) lorsque ceux-ci étaient nombreux.

L'ordre de présentation n'est pas celui du tableau précédent.

La première expérimentation sur le réseau de la commune de Vaulx en Velin "Nord" est une bonne illustration des problèmes de discontinuités structurelles induites par des compositions sérielles et paralléliques de figures différentes.

Par la suite, les résultats sont présentés par ordre de dimension croissante ; cheminement de la ligne vers le plan.



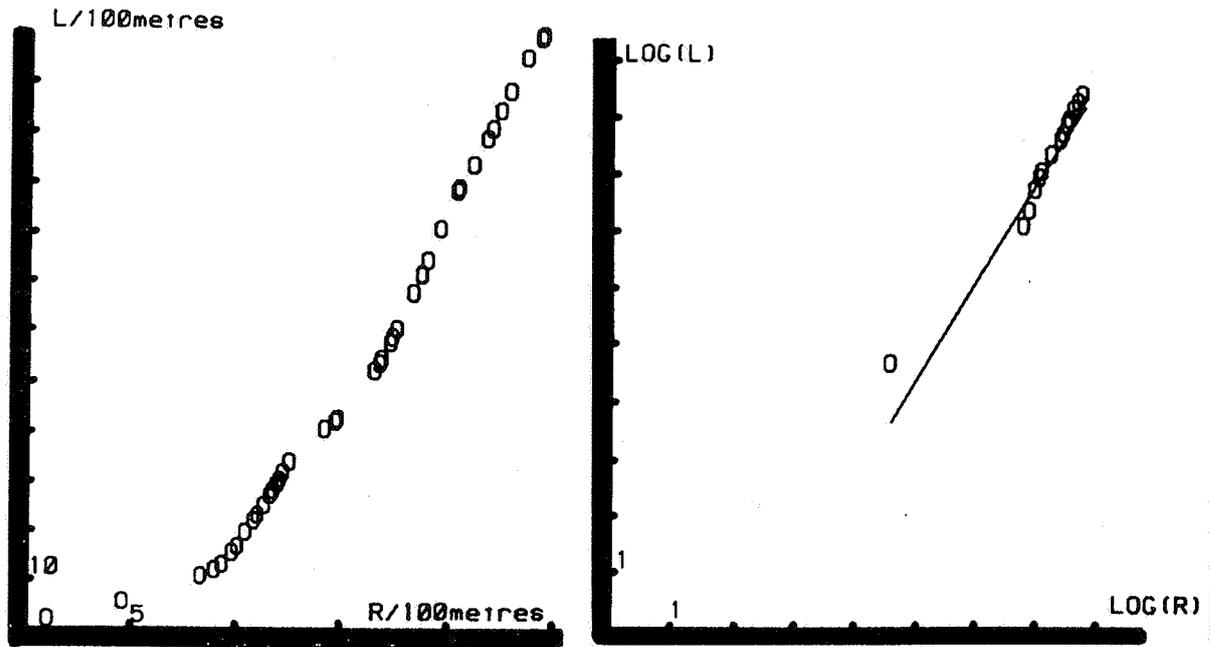
Vaulx en Velin Nord

Ce réseau qui présente des dysfonctionnements hydrologiques possède trois parties distinctes.

La première, très linéaire, comporte à son amont une partie dense suivie d'une partie aérée et beaucoup plus étendue.

Cette distinction se retrouve au niveau des types d'urbanisme.

Nous avons testé le modèle successivement sur le tout, la figure constituée des deux parties en amont et enfin sur la partie que nous avons qualifiée d'aérée.



$$D = 1.73$$

$$A \approx 0.013$$

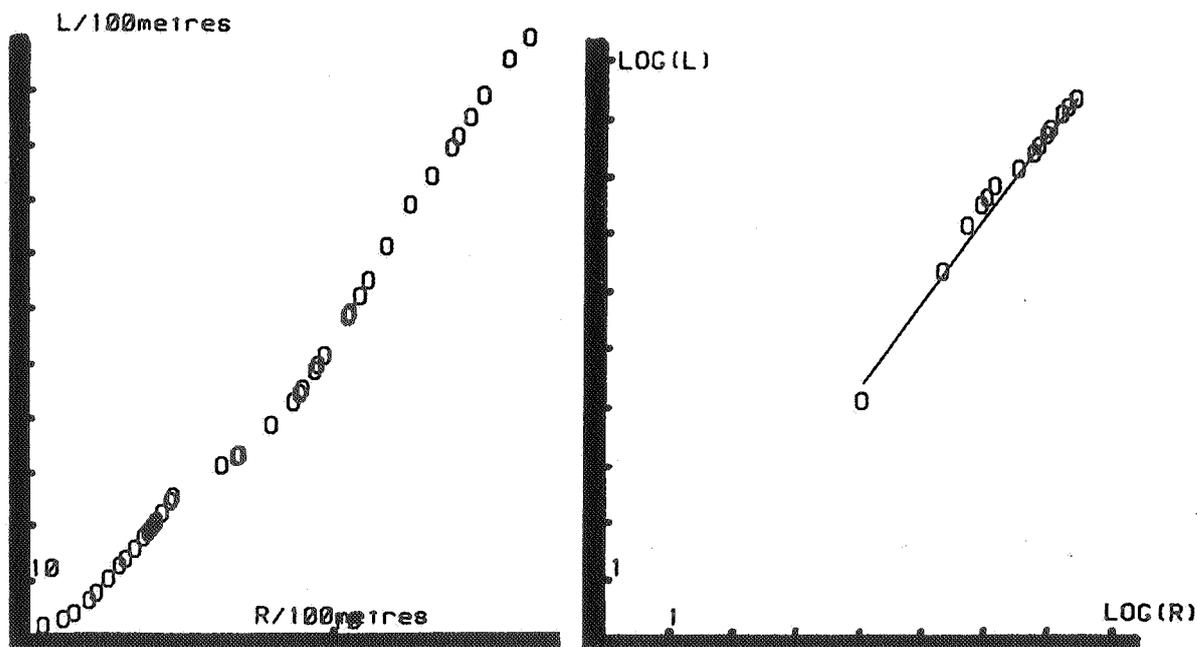
$$\left| \begin{array}{l} R_M = 2.4 \text{ km} \\ l_m = 125 \text{ m} : n = 0.47 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} E_1 = 17 \% \\ E_2 = 14 \% \\ E = 17 \% \end{array} \right.$$

. Courbe 1 : la première des discontinuités d'ordre deux marque l'apparition de la partie dense, la suivante, celle de la partie aérée.

. Courbe 2 : la pente D étant calculée numériquement à partir des couples (L,R) définis aux ramifications, elle ne relève pas de la première partie tout en n'étant pas celle du reste pris isolément.

A cause de la première discontinuité et des erreurs relatives assez élevées, D ne correspond pas à une évaluation correcte d'une dimension fractale.



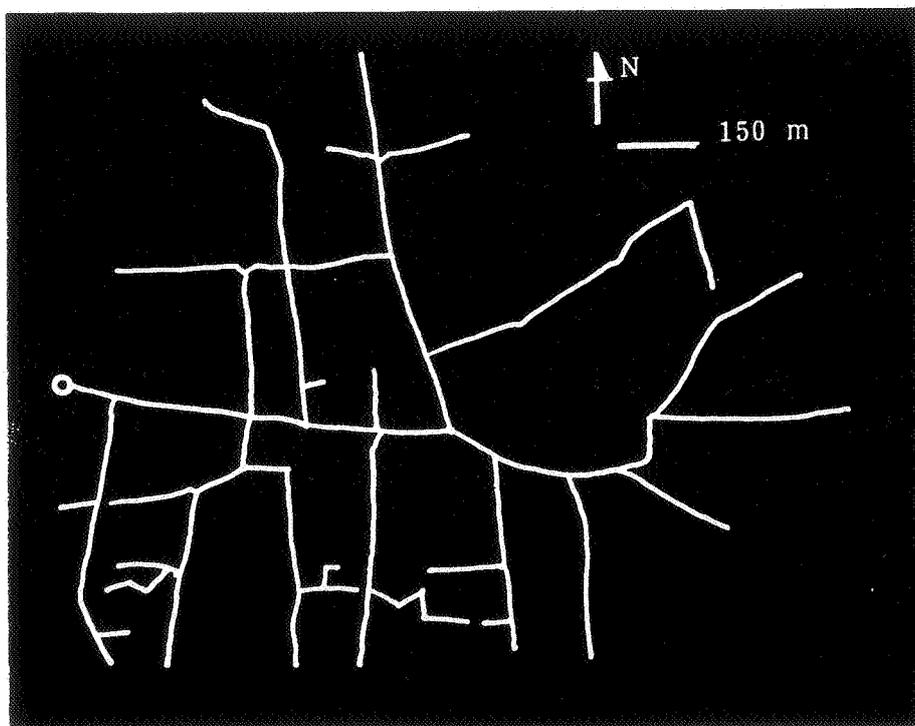
$$D = 1.47$$

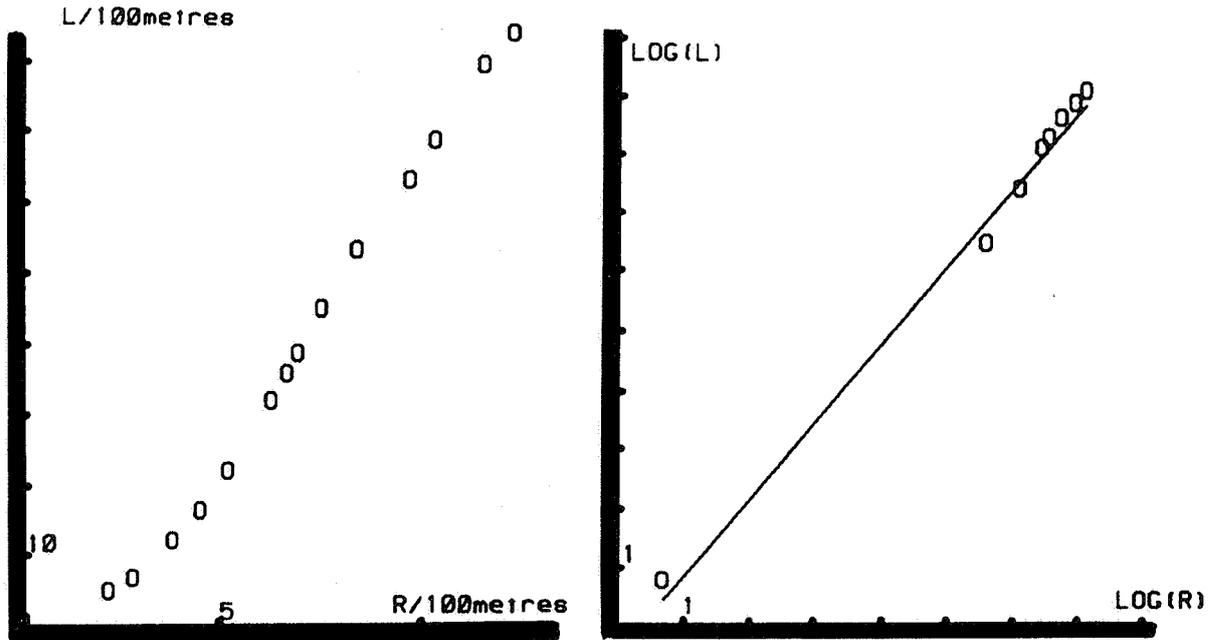
$$A \approx 0.22$$

$$\begin{cases} R_M = 1.65 \text{ km} \\ l_m = 118 \text{ m} : n = 2.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 = 12 \% \\ E_2 = 8 \% \\ E = 9 \% \end{cases}$$

Avec des erreurs relatives E_2 et E satisfaisante, devons nous considérer qu'il s'agit d'une forme fractale de dimension $D \sim 1.5$ composée des deux parties distinctes en parallèles ?





$$D = 1.32 \qquad A = 0.6$$

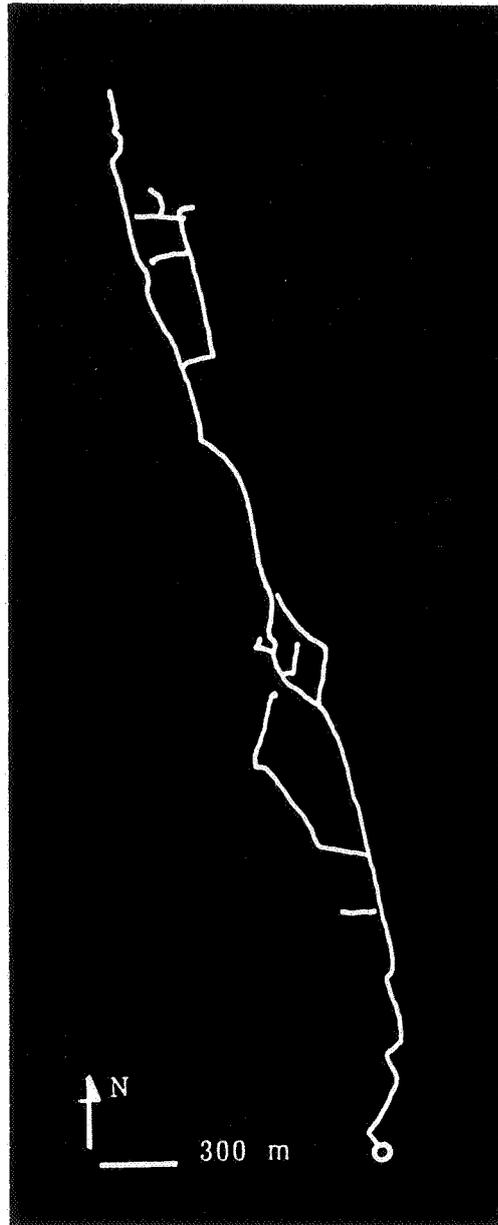
R_M	= 1.3 km		E_1	= 22 %
l_m	= 148 m	; $n \approx 3$	E_2	= 16 %
1	= 5 m	; $n \approx 1$	E	= 6 %

. Courbe 1 : Nous supposons que cette courbe ne présente plus de discontinuités du second ordre.

. Courbe 2 : Pour l_m , la proximité de n à l'entier 3 provient peut-être du fait que les longueurs des tronçons de l'arête principale sont nettement plus faibles que celles des autres chemins.

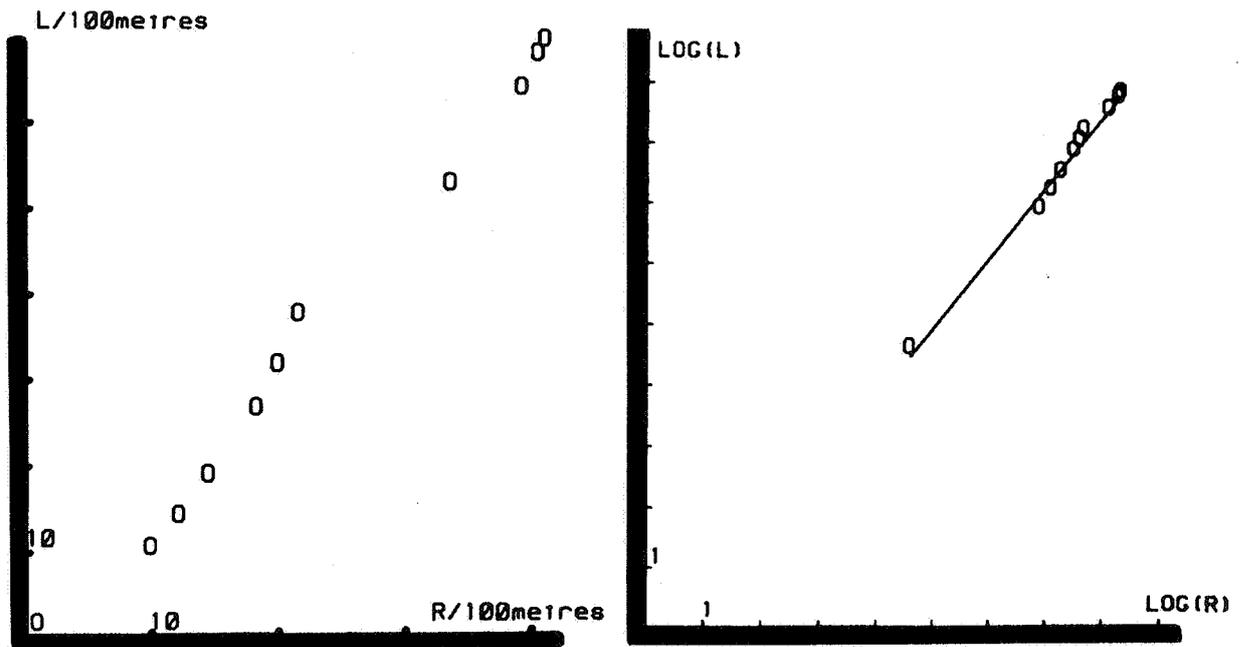
Des homothéties, longueurs de plus long chemin différentes et une composition par interpolation expliqueraient l'importance des deux premières erreurs relatives.

Cette valeur de n expliquerait a posteriori la valeur précédent ($n \sim 2$) qui provient plus d'un allongement de cette figure, que de la mise en parallèle de deux parties structurellement différentes.



Saint Didier au Mont d'Or Est

Commune située à la naissance des Monts d'Or
dans le Nord-Ouest Lyonnais

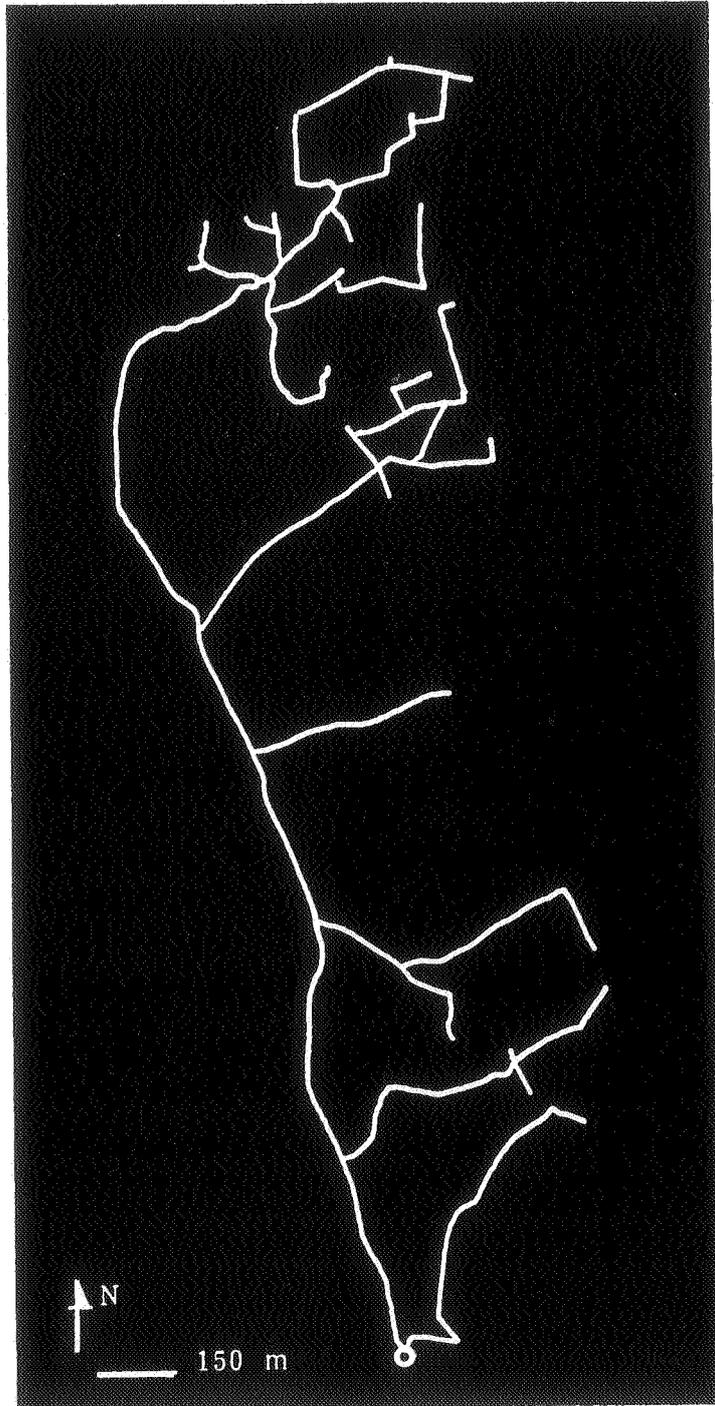


$$D = 1.16$$

$$A = 0.42$$

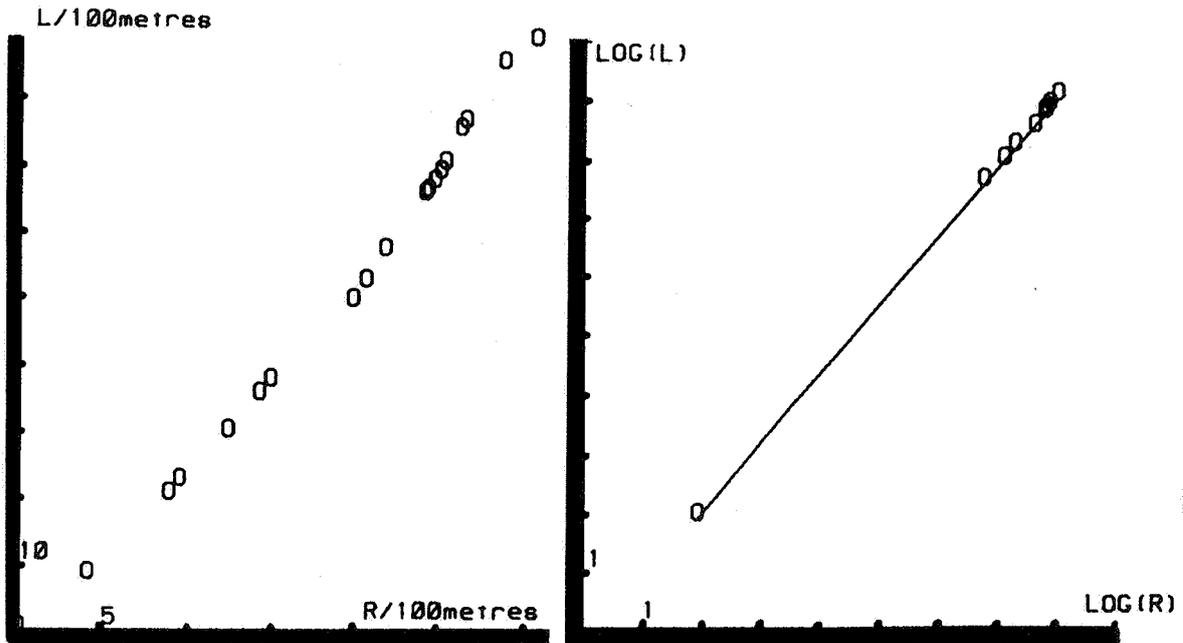
R_M	= 4.1 km	; n = 1.09	E_1	= 9 %
l_m	= 366 m		E_2	= 6 %
l	= 213 m		E	= 4 %

Ce réseau est un exemple d'une figure fractale obtenue après une interpolation comprenant 31 parties pour un rapport d'homothétie statistique voisin de 1/19.



Dardilly

Commune située au nord ouest de Lyon,
à proximité de la nationale 6



$$D = 1.17$$

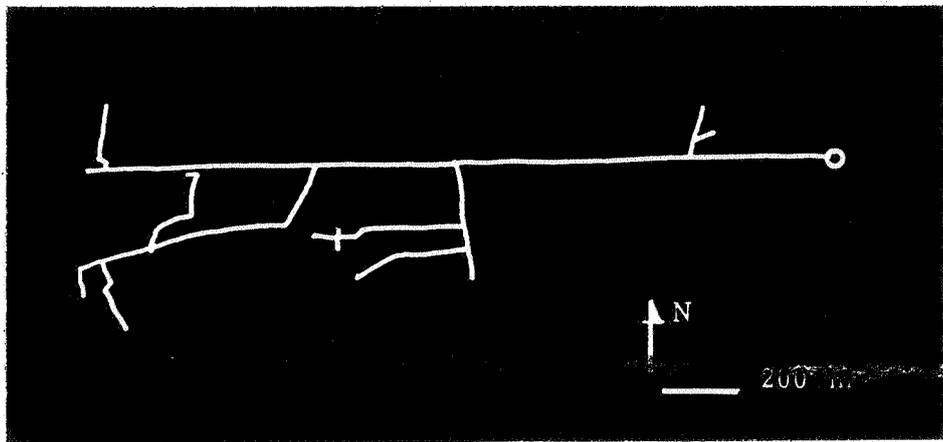
$$A = 0.70$$

R_M	= 3.07 km	
l_m	= 193 m	; n = 1.75
l	= 414 m	; n = 2
l	= 7.5 m	; n = 1

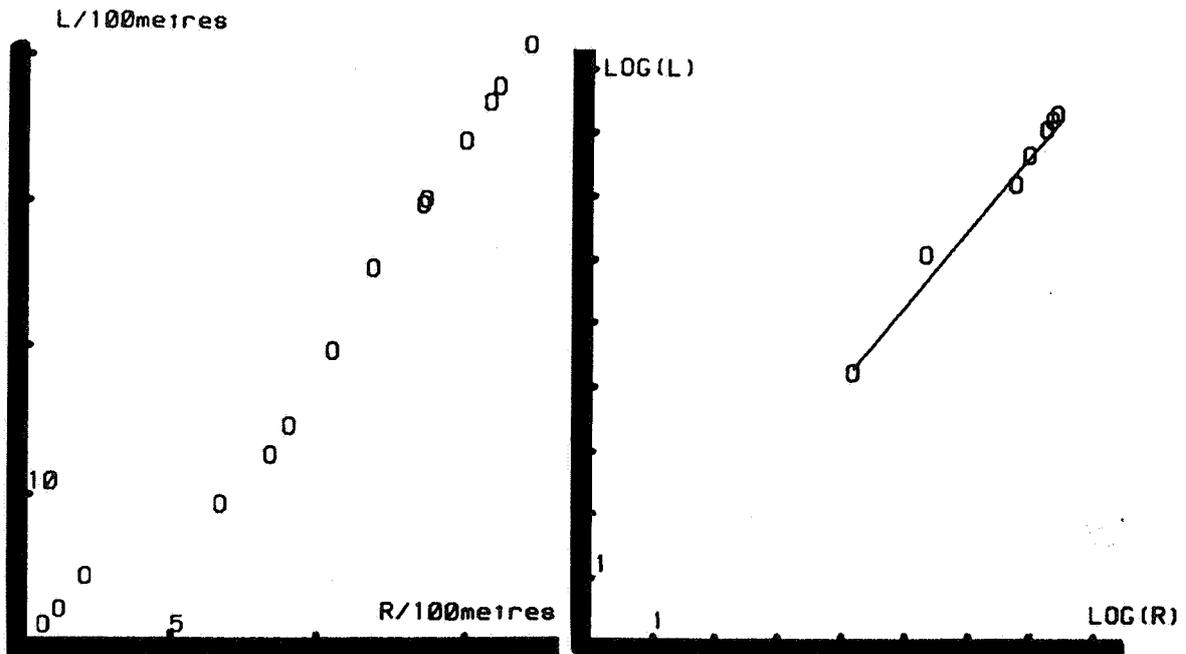
$E_1 = E_2 = E$	= 2 %
-----------------	-------

. Courbe 1 : Malgré une structure différenciée entre l'amont et l'aval, cette courbe ne présente pas de discontinuité apparente.

. Courbe 2 : Avec une longueur moyenne de parties égale à celle des tronçons, la figure se comporte raisonnablement comme une figure parallélique. Si nous y voyons qu'une seule figure, la composition enchaîne fortement les parties de longueurs très faibles avec un rapport d'homothétie statistique égale à 1/400.



Réseau central de Craponne
Commune aux abords des Monts du Lyonnais
à l'ouest de la CO.UR.LY.



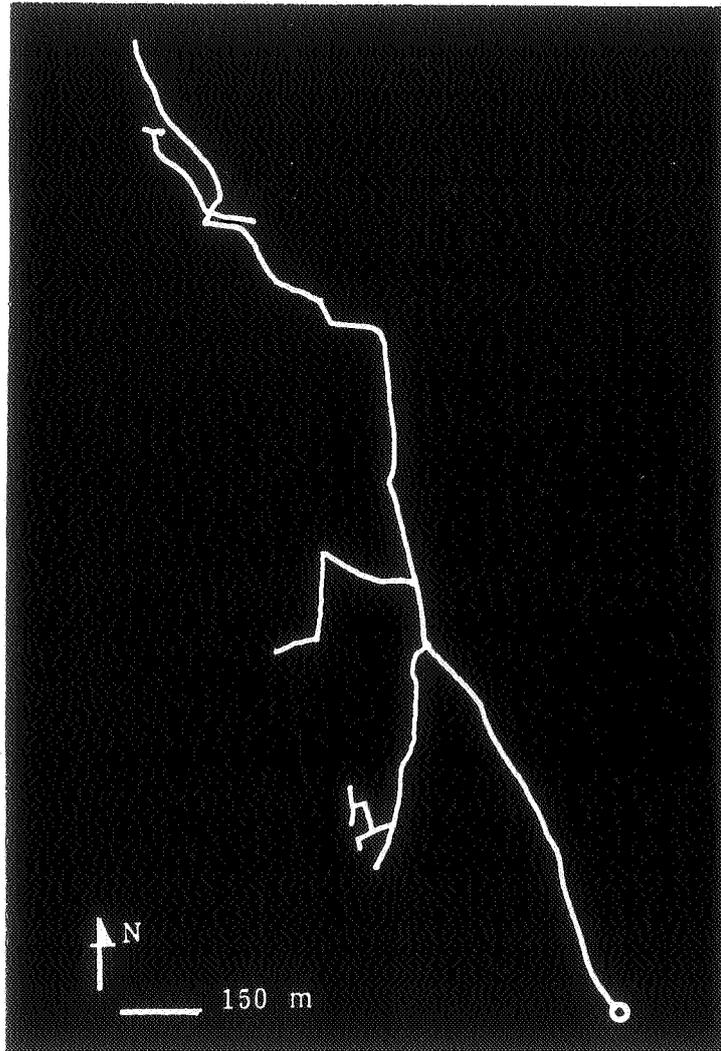
$$D = 1.19$$

$$A = 0.51$$

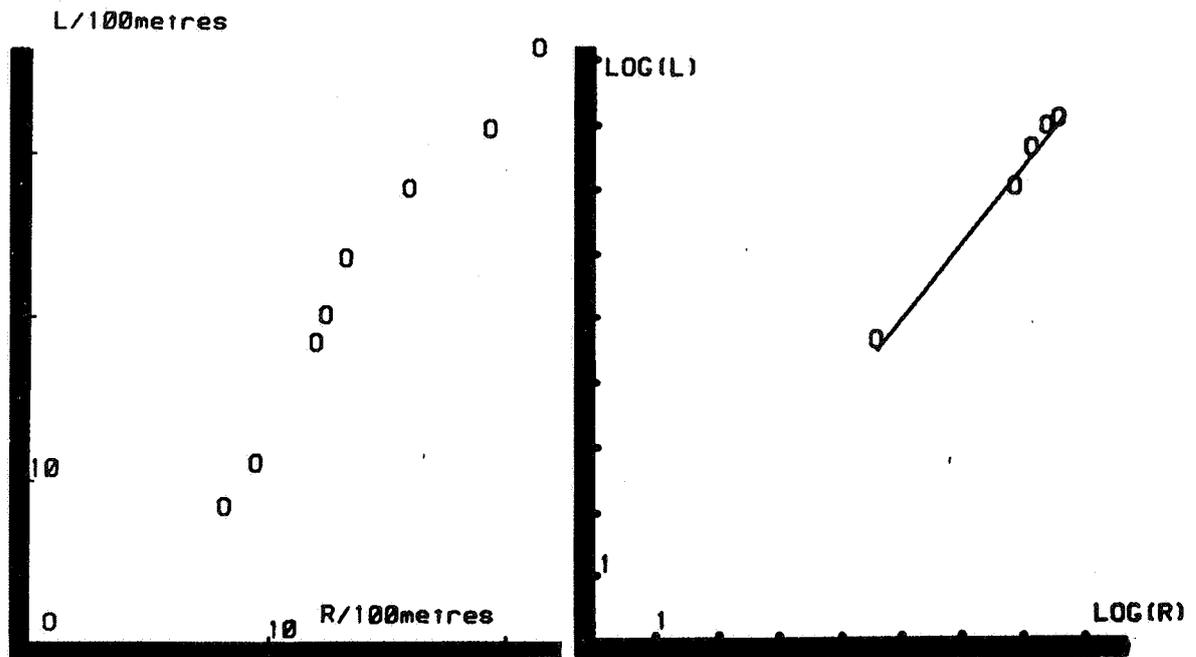
R_M	= 1.72 km	E_1	= 14 %
l_m	= 139 m ; n = 1.32	E_2	= 10 %
l	= 127 m ; n = 1	E	= 9 %

. Courbe 1 : Ces points sont relatifs au réseau diminué d'une première partie linéaire ($D = 1$) et de 300 mètres de longueur.

. Courbe 2 : Les erreurs E_2 et E étant acceptables, la structure de ce réseau correspond à un fractal à homothétie statistique. Nous pouvons considérer que la figure résulte de deux interpolations successives avec un rapport d'homothétie statistique sensiblement égal à 0.29.



Saint Didier au Mont d'Or Ouest
Autre partie de cette commune à développée
linéique, et dans un sens Nord-Sud



$$D = 1.20$$

$$A = 0.37$$

$$R_M = 2.13 \text{ km}$$

$$l_m = 214 \text{ m} ; n = 1.05$$

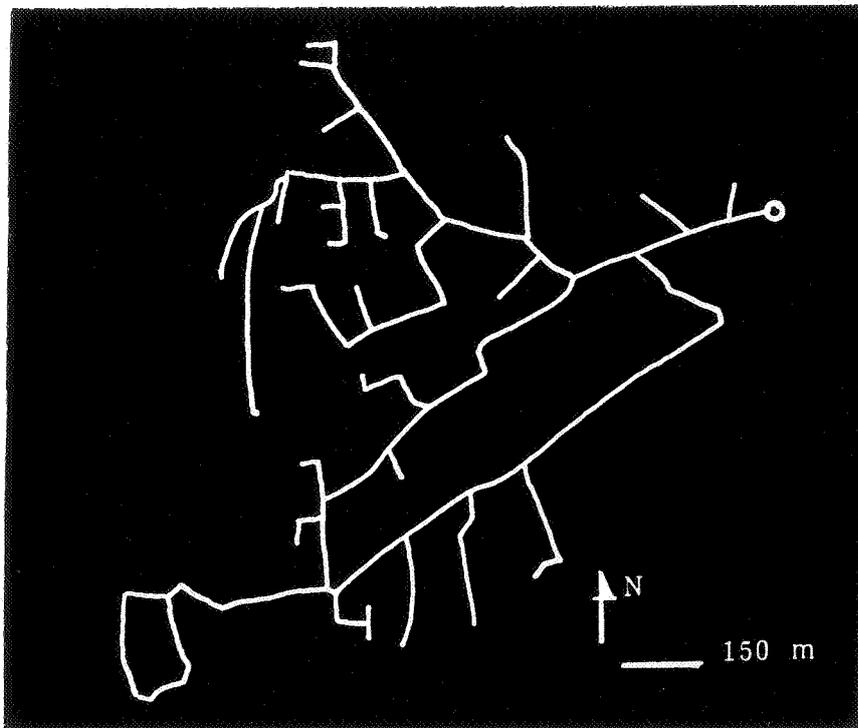
$$l = 163 \text{ m} ; n = 1$$

$$E_1 = 11 \%$$

$$E_2 = 8 \%$$

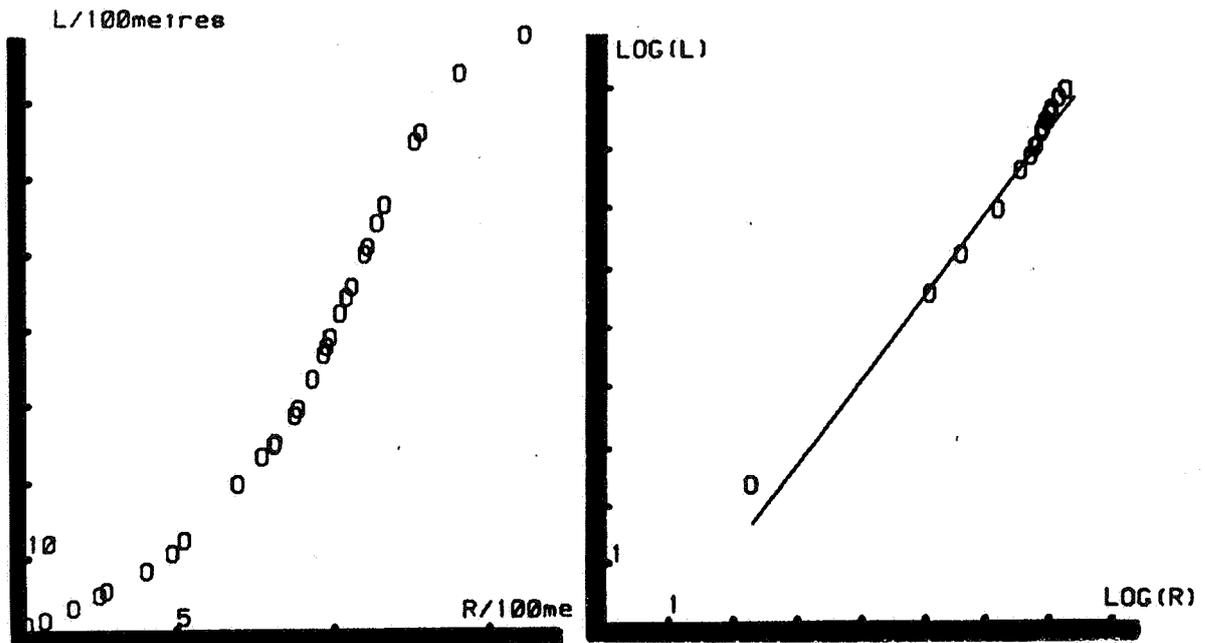
$$E = 3 \%$$

Cette figure unique résulterait d'une interpolation statistique avec une répartition non uniforme le long du plus long parcours des ramifications et un enchaînement assez élevé des parties secondaires.



Francheville

Cette commune est développée sur un plateau
qui rejoint les Monts du Lyonnais à l'Ouest de Lyon



$$D = 1.41$$

$$A = 0.22$$

R_M	= 1.6 km	
1 m	= 129 m	; n = 1.6
1	= 225 m	; n = 2
1	= 41 m	; n = 1

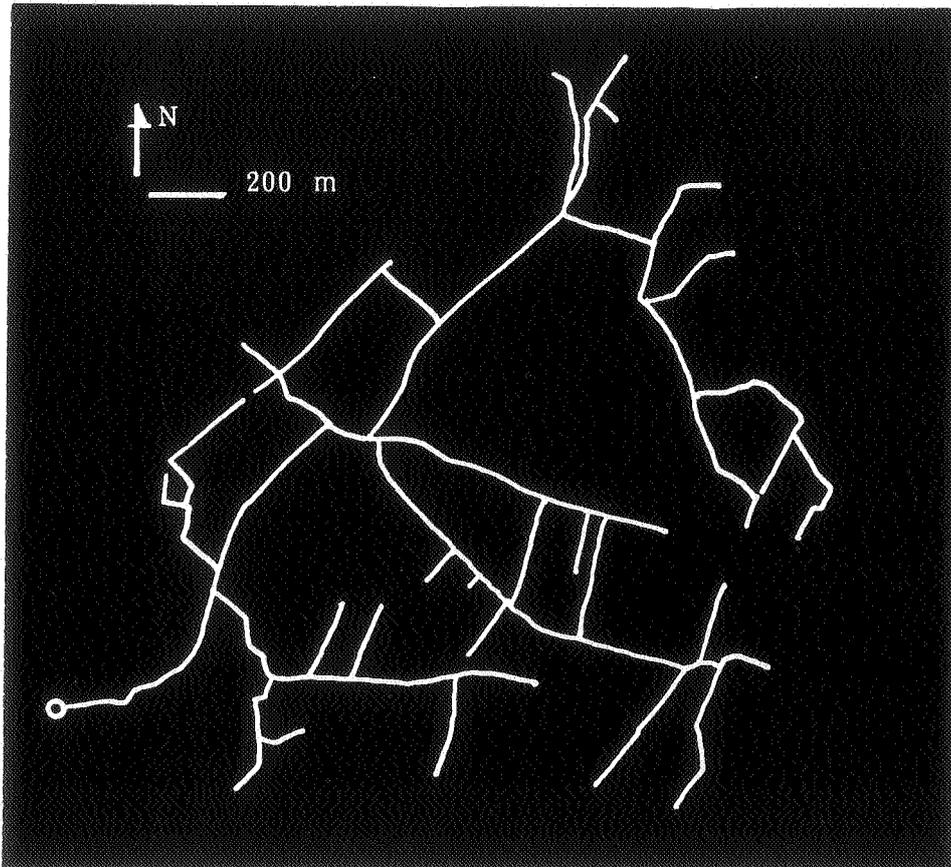
E_1	= 17 %
E_2	= 14 %
E	= 8 %

En considérant que la composition est à tendance parallélique, la différence structurelle des deux figures expliquerait la valeur élevée des erreurs relatives.

Une partie supérieure nettement plus interpolée qu'une partie inférieure, comme si cette dernière n'avait pas atteint la "plénitude" de l'autre.

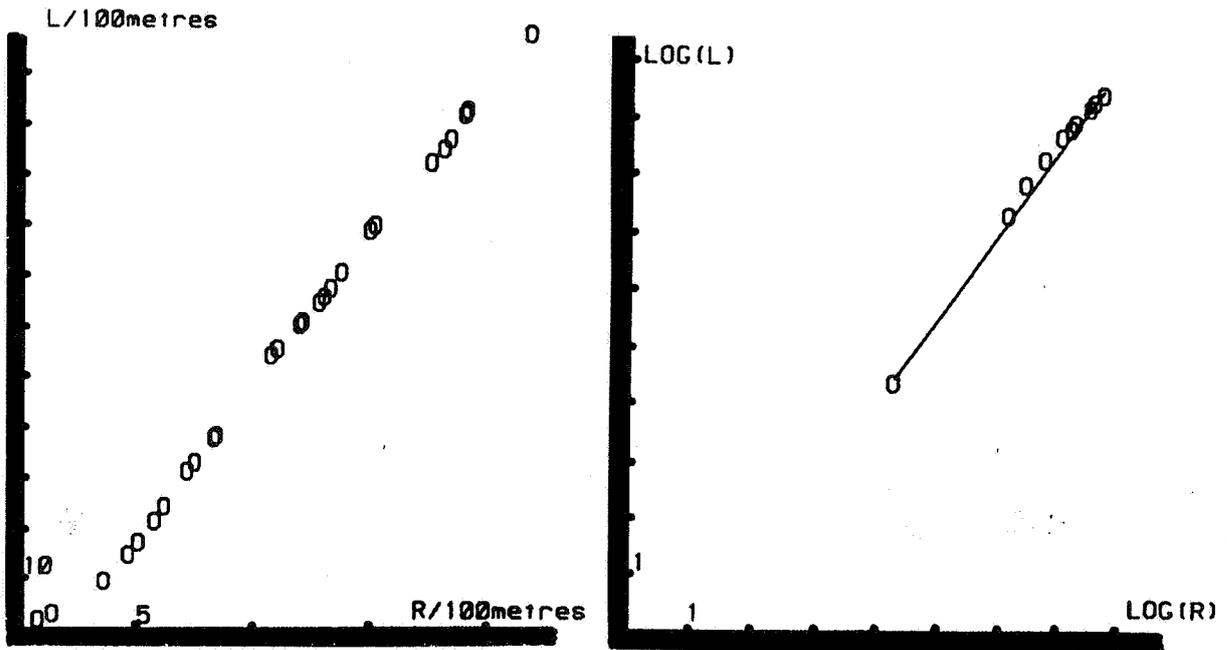
Une totalité à 20 % de la figure double.

Sinon, dans le cas où la figure serait unique et le resterait, un enchaînement élevé de parties résultant d'une composition par homothétie statistique.



Saint Foy lès Lyon

Située sur le même plateau que la commune précédente,
cette commune surplombe la Vallée du Rhône



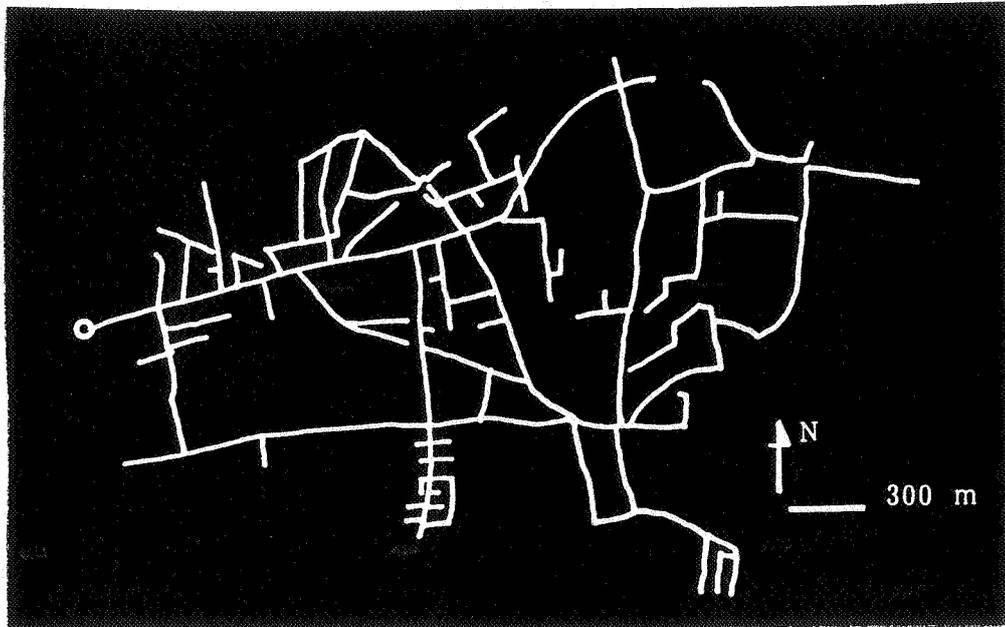
$$D = 1.49$$

$$A = 0.15$$

R_M	= 2.56 km	E_1	= 8 %
l_m	= 188 m ; n 1.90	E_2	= 8 %
l	= 209 m ; n = 2	E	= 37 %

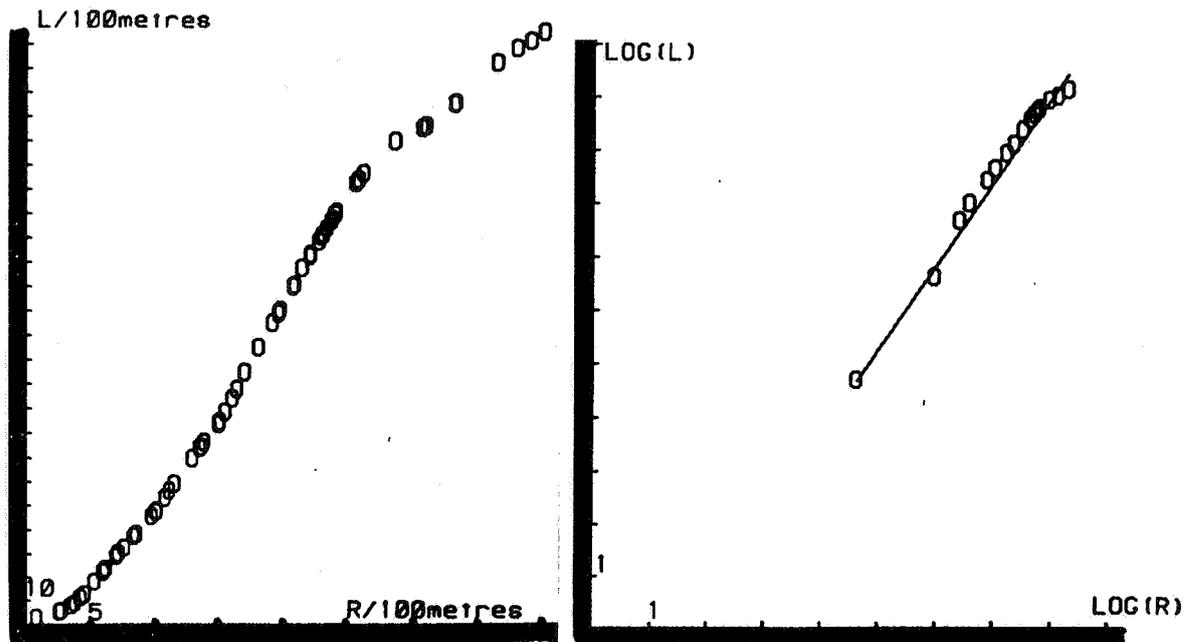
. Courbe 1 : Les 500 premiers mètres du réseau ont été supprimés pour avoir une courbe pratiquement sans discontinuité du second ordre.

. Courbe 2 : L'erreur relative E calculée sur la représentation de la longueur totale du réseau chute à 10 % lorsqu'elle est calculée sur la longueur correspondant à la dernière ramification ayant servi à l'approximation soit pour $L_T = 11.7$ km et $R_M = 2.2$ km au lieu d'une longueur totale de 12.6 km.



Décines

Cette commune est située dans la grande plaine de l'Est Lyonnais



$$D = 1.58$$

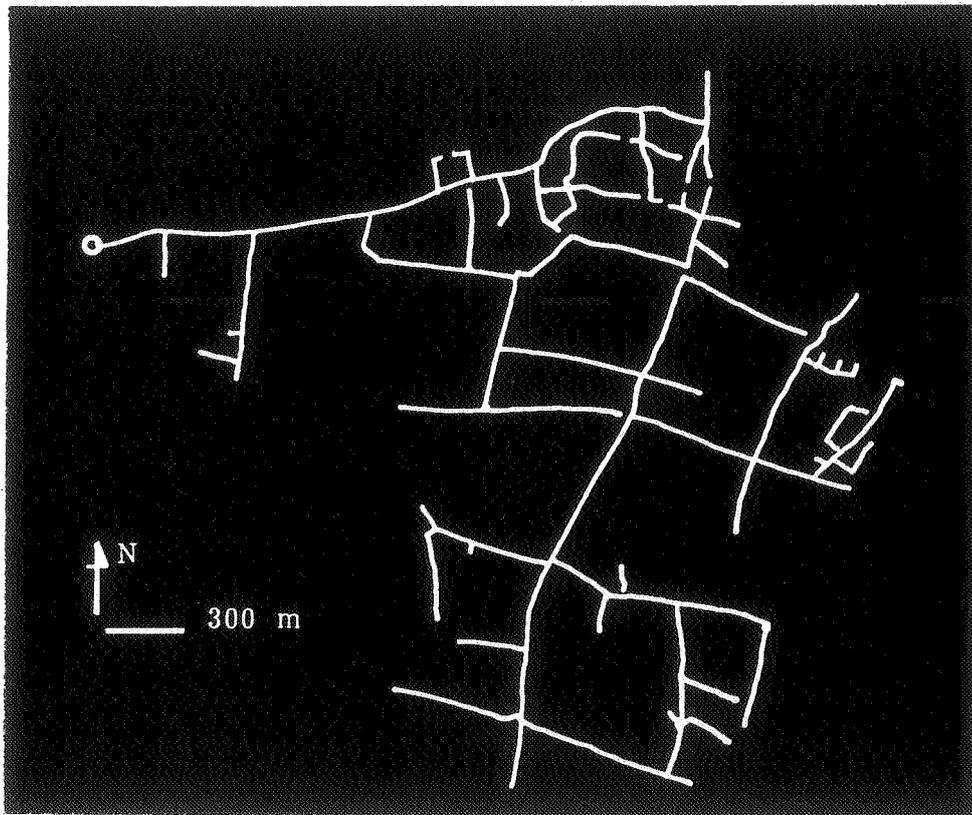
$$A = 0.07$$

$R_M = 4.34 \text{ km}$;	$n = 1.4$	$E_1 = 14 \%$
$l = 168$;	$n = 1$	$E_2 = 13 \%$
$l = 94 \text{ m}$;	$n = 1$	$E = 61 \%$

La valeur très élevée de E résulte d'une discontinuité due à la différence de structure entre le tiers amont et le reste de la figure.

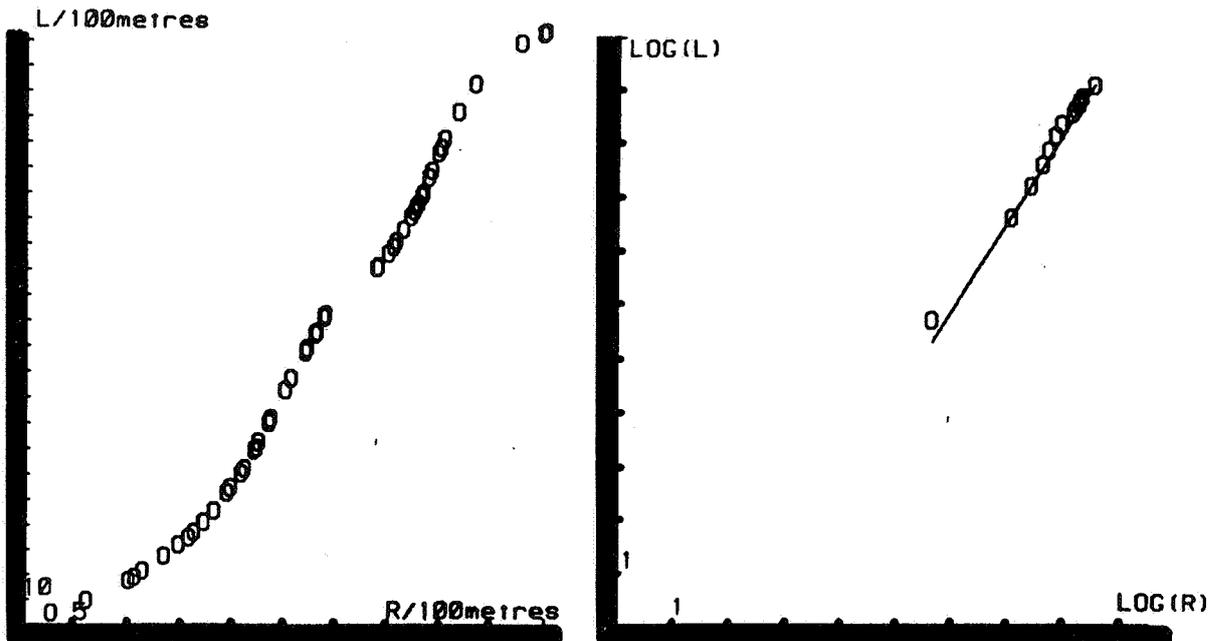
La dimension calculée est en fait relative aux deux premiers tiers, soit jusqu'à une distance $R_M = 2.9 \text{ km}$.

Pour cette valeur et la longueur totale correspondante $L_T = 20 \text{ km}$ (au lieu de 25) E chute aux environs de 7 %. Ce sous réseau peut être considéré comme étant une figure fractale unique avec des parties enchaînées ou comme une figure à tendance parallélique, l'une des deux parties étant un peu plus interpolée que l'autre.



Chassieu

Située dans la plaine de l'Est Lyonnais,
cette commune est directement au sud de Décines



$$D = 1.68$$

$$A = 0.015$$

R_M	= 5 km	E_1	= 7 %
l_m	= 202 m ; $n = 0.59$	E_2	= 5 %
l	= 440 m ; $n = 1$	E	= 13 %

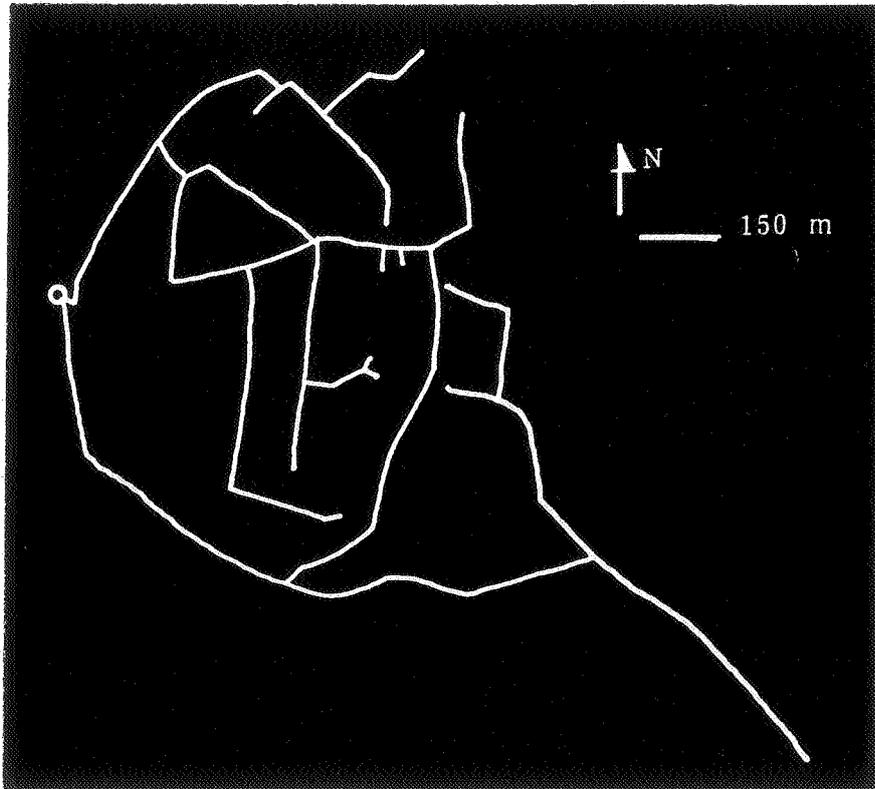
. Courbe 1 : Sans qu'il y ait de discontinuité d'ordre deux marquée, cette figure aurait pu éventuellement être scindée en deux figures sérielles.

. Courbe 2 : L'aplatissement de la première courbe pour les toutes dernières ramifications est la cause de la grandeur de E.

Les écarts entre longueurs calculées et longueurs réelles sont assez peu élevés jusqu'à $R \sim 4.3$ km ; il suffirait d'enlever les trois dernières ramifications pour avoir une erreur E n'excédant pas 3 %.

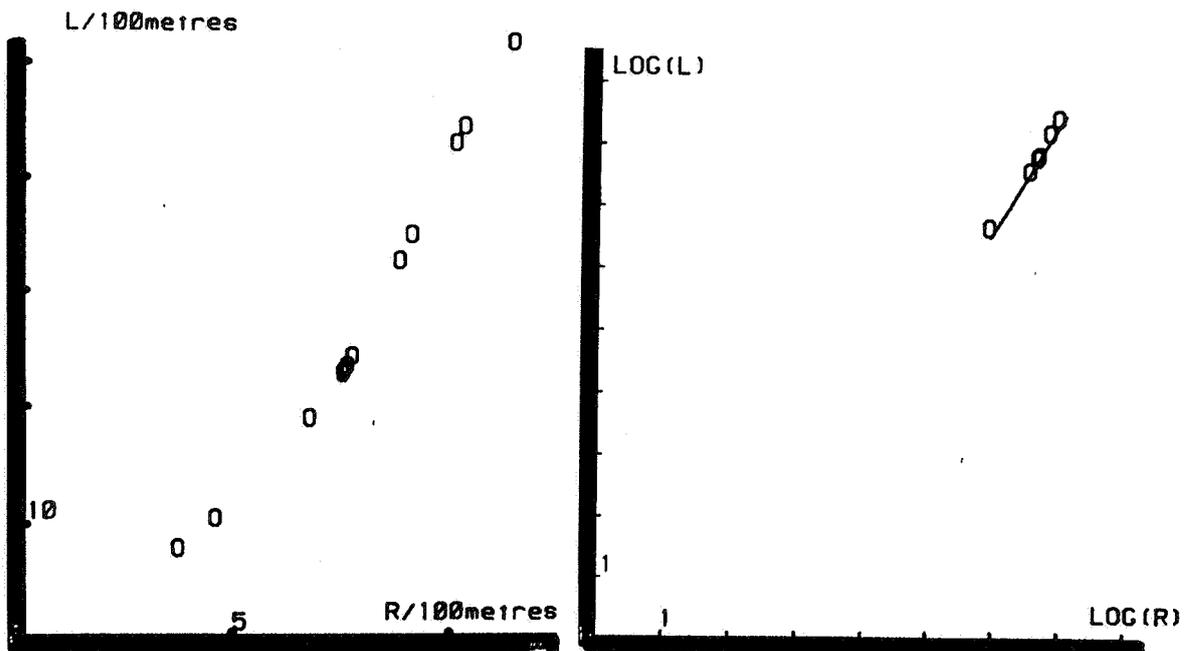
La valeur de n inférieur à un pour la longueur moyenne des tronçons provient de quelques sous ensembles plus interpolés que tout le reste de la structure.

Réseau d'une commune "rurbaine" qui n'a pas atteint sa plénitude unitaire urbaine. Quelques champs encore, 41 % au sens des réseaux souterrains de drainage.



Jonage

Petite commune de l'est lyonnais
de même nom que le canal qui la longe .
Son réseau est isolé du reste de celui de la communauté



$$D = 1.75$$

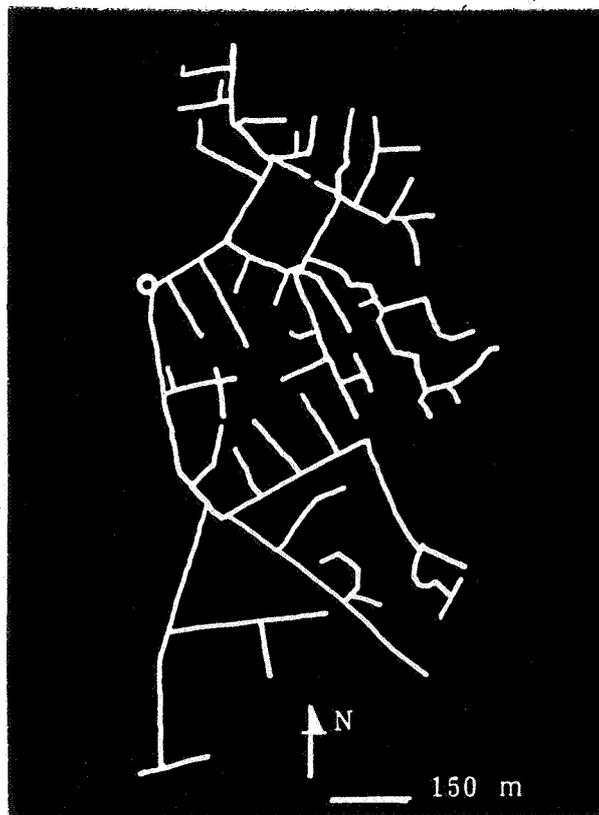
$$A = 0.02$$

R_M	= 1.15 km	$E_1 = E_2$	= 4 %
l_m	= 223 m ; $n = 1.27$	E	= 2 %
l	= 161 m ; $n = 1$		

Ces résultats ont été obtenus en supprimant 1.9 km du réseau initial, répartis sur les deux branches terminales de la partie inférieure de la figure partant de l'exutoire, branches de dimension 1 en série avec l'aval.

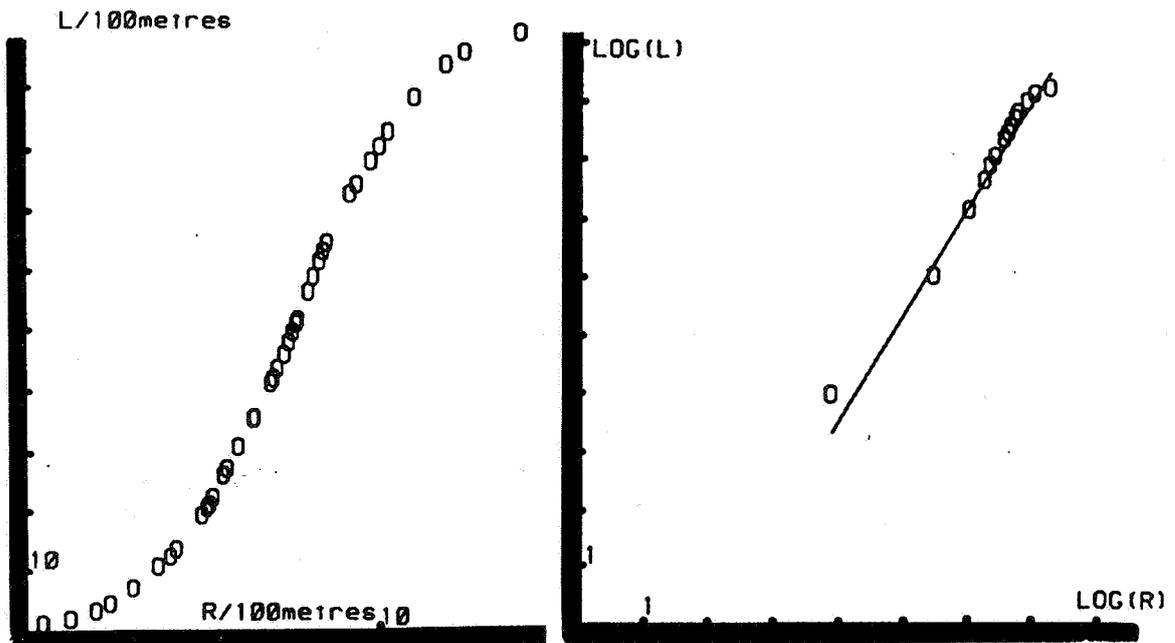
La tendance au parallélisme est faible. Cela est dû à une partie inférieure beaucoup moins interpolée que la partie supérieure.

Ainsi, la figure testée se comporte raisonnablement comme une forme fractale ramifiée unique.



Vaulx en Velin Sud

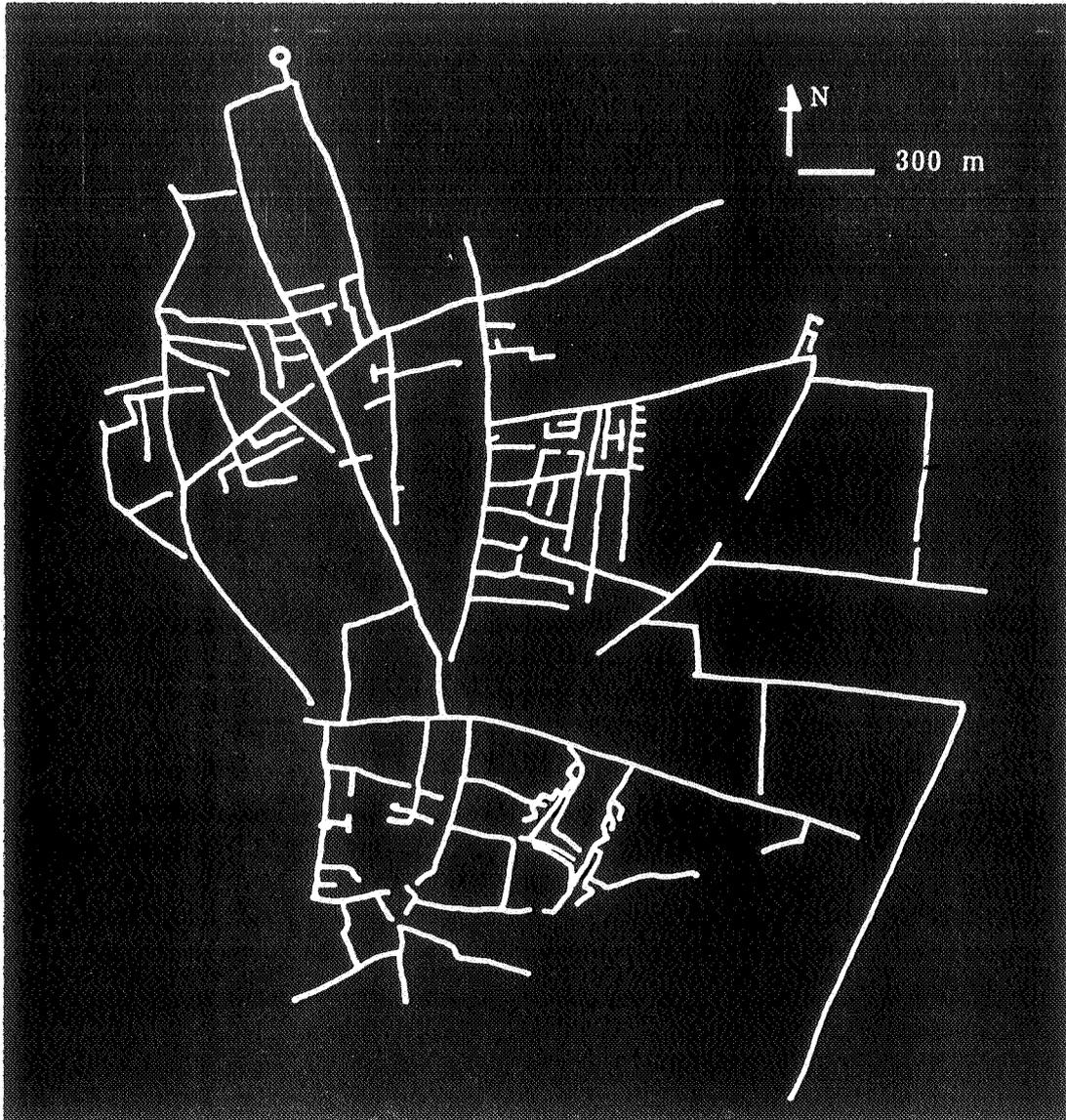
Cette commune de la plaine de l'Est Lyonnais
est située au Nord Ouest de Décines et en est séparée
par le canal de Jonage



$$\begin{array}{l}
 D = 1.85 \\
 \left| \begin{array}{l} R_M = 1.4 \text{ km} \\ 1 \text{ m} = 95 \text{ m} \end{array} \right. ; n = 0.99 \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 A = 0.02 \\
 \left| \begin{array}{l} E_1 = 12 \% \\ E_2 = 11 \% \\ E = 41 \% \end{array} \right.
 \end{array}$$

En enlevant 500 m de la partie amont faiblement ramifiée par rapport au reste de la figure, l'erreur E chute à 7 % environ.

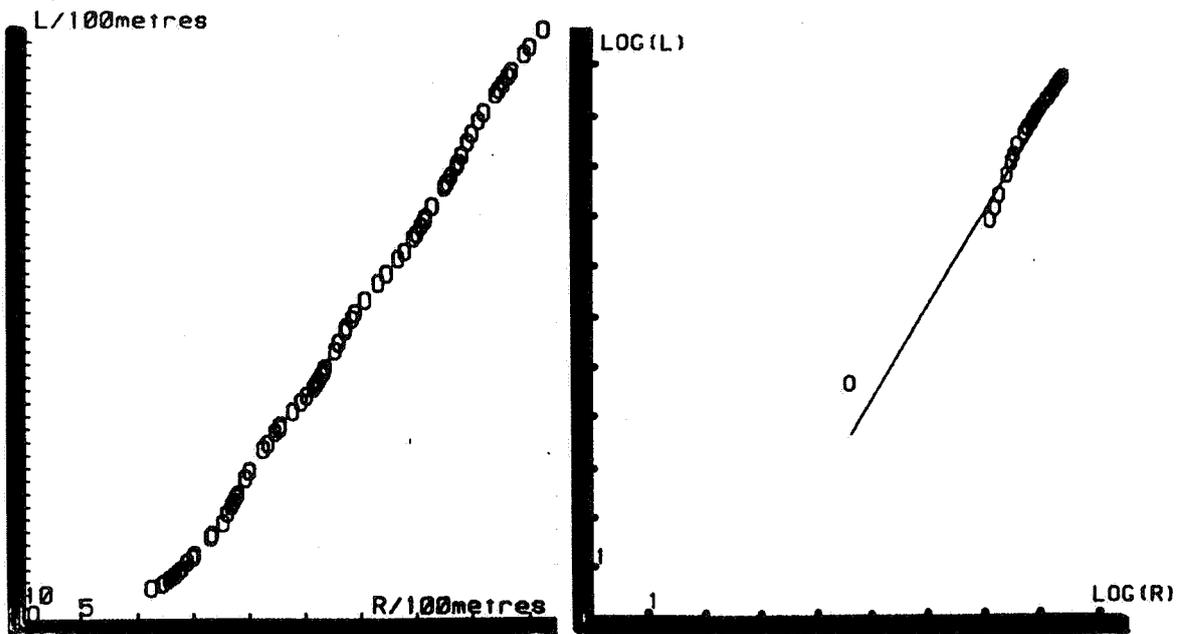
En supprimant cette partie qui provoque l'aplatissement final de la courbe (L,R), le réseau obtenu est fractal et composé d'une seule figure, la longueur moyenne entre tronçons étant la longueur moyenne des parties.



Meyzieu

Cette commune de la plaine de l'est lyonnais a la particularité de posséder un réseau eau pluviale muni de puisards qui sont situés au droit de chaque regard.

De nombreux lotissements la composent, séparés encore par des surfaces agricoles.



$$D = 1.86$$

$$A = 0.007$$

R_M	= 4.7 km	E_1	= 14 %
1	= 180 m ; $n = 0.62$	E_2	= 7 %
1	= 310 m ; $n = 1$	E	= 4 %

. Courbe 1 : En supprimant ce qui est au delà de la dernière bifurcation située au début de la partie amont très linéaire de 2.3 km, les fluctuations de cette courbe sont dues aux disparités structurelles.

. Courbe 2 : Le réseau se comporte raisonnablement comme une figure fractale, sans qu'elle soit composée de deux figures en parallèle comme nous aurions pu le penser a priori.

Comme pour le réseau de la commune "rurbaine" de Chassieu, quelques sous ensembles plus interpolés que le reste.

Entre, des espaces ruraux déjà structurés par des réseaux, mais vierges encore de l'occupation de type urbain.

Réseau à 38 % de son unité.

6. RETOUR AU MODELE

Un modèle initial, théorique, d'une fractalité relevant de l'homothétie stricte, genèse d'un concept pour embrasser la forme mille fois reformée ; geste multiple, discontinuité.

Puis un premier glissement ; une homothétie statistique pour introduire le dissemblable, imiter le réel.

Soit une imitation satisfaisante après vérification, à l'aide d'une base de forme fractale pour une analyse de la dimension des réseaux.

Un second glissement après l'analyse.

Formes urbaines et "rurbaines" en négatif, souterraines imagées par le révélateur (L, R) avec A au départ égal à $n l_m^{1-D}$, n entier, l et n inconnus.

A mesuré, n calculé avec une longueur connue l_m , longueur moyenne entre tronçons.

$$n = \frac{A}{l_m^{1-D}}$$

Deux nombres D et n fractionnaires en général. Le premier, fractal d'après Mandelbrot. Dimension de la-forme, d'homothétie statistique.

Le second, un nombre fractionnaire de figures à partir de la référence l_m .

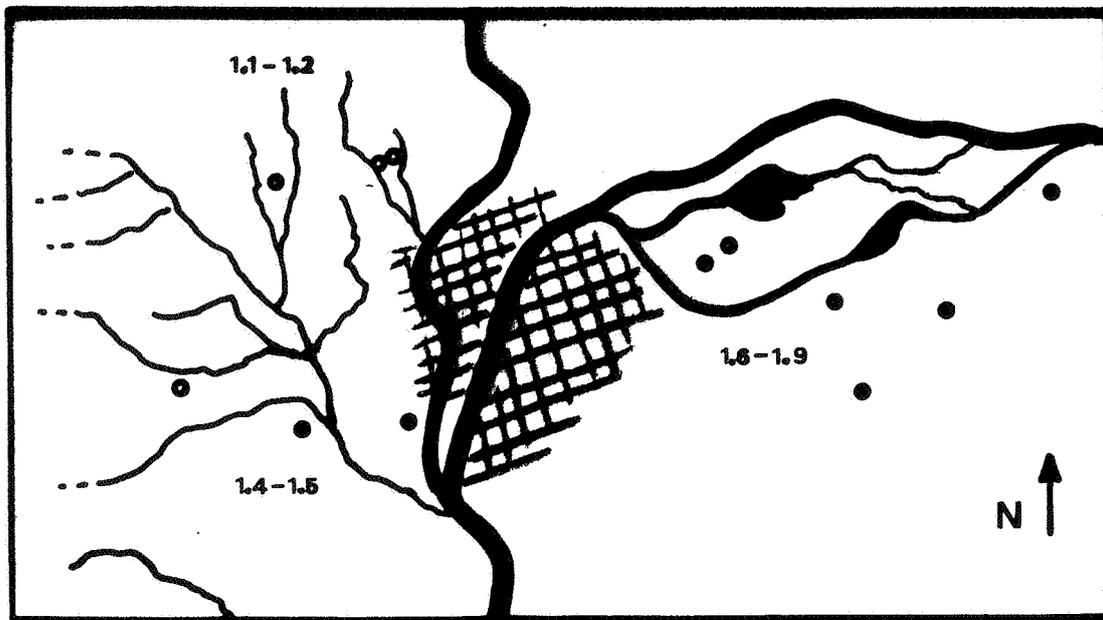
Réseau	D	n	l_m (m)	L_T (km)
Saint Didier au Monts d'Or "Est"	1.16	1.09	366	7.6
Dardilly	1.17	1.75	193	8.8
Craponne	1.19	1.32	139	4.7
Saint Didier au Monts d'Or "Ouest"	1.20	1.05	214	5
Francheville	1.41	1.6	129	8.5
Ste Foy lès Lyon	1.49	1.9	188	13
Décines	1.58	1.4	168	25
Chassieu	1.68	0.59	202	50
Vaulx en Velin "Nord"	1.73	0.47	125	13.5
Jonage	1.75	1.27	223	7
Vaulx en Velin "Sud"	1.85	0.99	95	10
Meyzieu	1.86	0.62	180	50

D est caractéristique d'une forme souterraine et peut-être même d'une géographie urbaine de surface, entre la ligne et le plan pour un habitat groupé. De la vallée ou de la crête à la plaine comme le passage de l'ouest à l'est lyonnais. Simple hasard ou réseau de canalisations épousant un réseau de voiries qui épousent une morphologie terrestre structurée par un réseau hydrographique.

De 1.1 à 1.2 pour ces communes situées au nord ouest et structurées par un relief montagneux.

De 1.4 à 1.5, directement au sud, communes du plateau qui rejoint à l'ouest les Monts du Lyonnais.

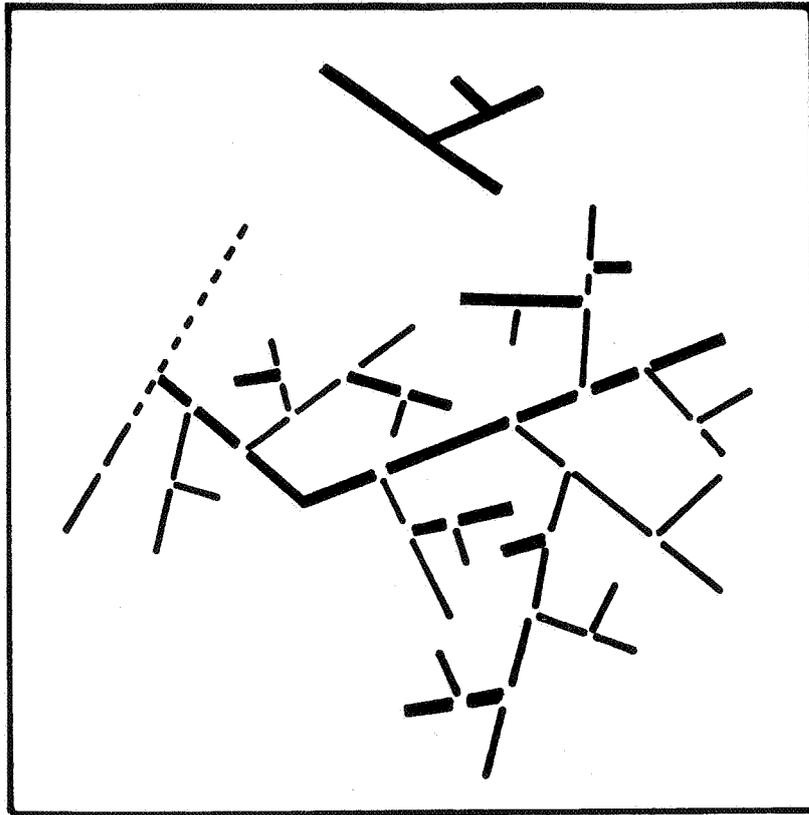
De 1.6 à 1.9, le passage à l'est au delà du Rhône et de la Saône pour une étendue plane, avec le Bugey et les Alpes comme horizon.



réseau hydrographique de la région lyonnaise

n est caractéristique d'un état de la forme urbaine, pas uniquement souterraine peut être.

n entier, forme aboutie qui ne peut s'étendre que par interpolation mais en nombre fini, question de place.



Alors l'extension par extrapolation sérielle et/ou parallélique.

Au début, n fractionnaire, caractéristique d'une évolution potentielle si la géographie terrestre le permet.



D'autant plus proche de l'entier inférieur que la forme rajoutée est très peu interpolée vis-à-vis de la forme complétée et plus proche de l'entier supérieur dans le cas contraire.

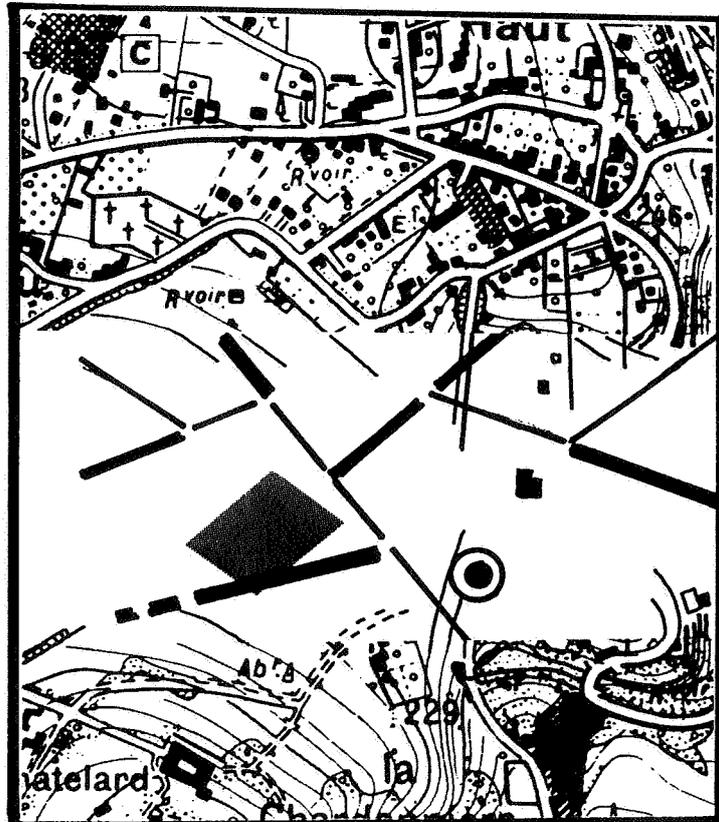
Saint Didier au Mont d'Or, Sainte Foy lès Lyon, Vaulx en Velin Sud, formes abouties, mais pour combien de temps encore ?

Les autres, Meyzieu, Décines, Chassieu, Craponne, etc ..., formes en devenir peut-être.

n entier, instant privilégié de la géographie urbaine, forme stable prête à l'instabilité à moins que le mouvement alentour soit impossible.

Une analyse future à mener, historique pour un nouveau modèle urbain.

• Perspectives complémentaires à celles de ce jour.



PARTIE C

PERSPECTIVES

" HYDROLOGIE URBAINE FRACTALE "

"L'exactitude n'est pas la vérité"

H. MATISSE

"Sur ces vastes espaces plats,
l'eau circule à son gré.
Elle n'est plus sollicitée
par la pente et la pesanteur
mais, semble-t-il,
par un désir"

J. GIONO

Ennemonde et autres caractères

"La trialectique de l'être, du faire,
du devenir est sans doute
le sésame de la représentation,
sinon de la connaissance de l'objet"

J.L. LE MOIGNE

La théorie du système général

Soit à revenir à l'un des rôles fondamentaux des réseaux de drainage, évacuer les flux d'origines météoriques, et à la modélisation hydrologique de ce phénomène perçu comme une transformation quantitative de flux.

Montrer que celle-ci peut être réconciliée avec l'objet réseau jusqu'à ce jour oublié.

Relier deux modélisations que nous avons auparavant qualifiées de structurelle et de fonctionnelle.

Plus précisément :

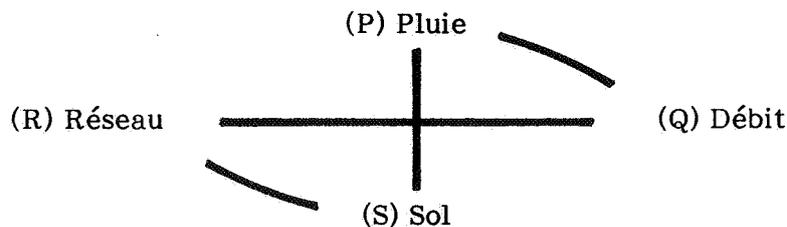
étant donné un modèle de structure compatible avec le fait hydrologique, nous définirons uniquement les implications de cette modélisation sur celle de la transformation de la pluie en débit observable à l'exutoire d'un système macroscopique.

Même si le résultat final est un modèle combinant production et transfert, il illustre simplement les premiers éléments d'une théorie hydrologique de la transformation pluie / débit basée sur un modèle fractal de structure, théorie n'existant pas à ce jour pour les systèmes macroscopiques, les modèles étant en fait soit purement expérimentaux, soit purement conceptuels.

La formulation de ce modèle, générale vis-à-vis du cadre théorique élaboré, devra être approfondie ultérieurement en la confrontant à de multiples expérimentations elles-mêmes définies par le modèle.

Premiers pas.

Soit de nouveau le quadripôle (P, S, R, Q) qui structure la transformation



et une relation (P, Q) en forme de distribution.

$$Q(t) = \langle S(t) \circ R(t), P(t) \rangle$$

avec
$$P(t) = \frac{1}{A} \int_A i(t, x, y) dx dy$$

i : intensité de pluie

A : surface potentiellement drainante

$Q(t)$, débit observable à l'exutoire et symboliquement $S(t)$ opéré par $R(t)$, distributions représentantes du rôle de la surface et du réseau.

Soit trois distributions pour l'obtention d'une quatrième.

La première $P(t)$ à l'étude en cette décennie. Pour certains, la fractalité présente.

La deuxième et la troisième distributions $S(t)$, $R(t)$ combinées à l'image des couplages entre les surfaces drainées et le réseau, chacun de ces tronçons évacuant et l'amont et la surface qui lui est raccordée par un cheminement au sol, nouveau réseau plus complexe encore que le réseau de canalisations.

Soit pour S , une structure aléatoire dont la dimension, si dimension il peut y avoir, oscillerait entre un et deux au gré de l'intensité précipitée.

Autre perspective de recherche.

Vis-à-vis de la transformation étudiée, le sol a une double action.

Il transfère vers le réseau le flot qui n'est pas infiltré ou retenu dans ses dépressions, par la végétation et même évaporé.

Une relation $S \longrightarrow R$ double, de la production et du transfert.

Pour ce rôle premier, de nombreux modèles ont été jusqu'à ce jour établis. Leurs caractéristiques diffèrent selon la modalité du modèle : modélisation simple si la finalité est prévisionnelle, éventuellement plus complexe si la finalité est la simulation d'un système existant.

Modèles que nous prendrons tels quels pour assurer la fonction de production, exemples qui concourent à préciser le sens du modèle hydrologique développé à partir de la troisième distribution, R .

Pour cette dernière, nous avons établi un modèle fractal de structure, le mouvement du flot ayant été notre point de départ.

Modèle purement structurel à ce stade, sa richesse justifiant son existence en dehors même d'une liaison possible avec la dynamique de l'évacuation

des eaux pluviales.

Modèle pour une nouvelle géographie urbaine, une approche historique du développement des villes.

Autres perspectives de recherches initialisées par ce modèle qui permet de représenter la longueur du réseau tronqué à la distance R de l'exutoire par la relation

$$L(R) = n l^{1-D} R^D$$

et qui définit le point de passage entre fonctionnel et structurel, puisque la quatrième et dernière distribution $Q(t)$ est le résultat, en quelque sorte, d'une augmentation progressive dans le temps de la valeur de la surface drainée par rapport à l'exutoire, évolution qui se combine à, et dépend de, la variation des intensités de pluie.

1. SYNTAXE DU MODELE HYDROLOGIQUE

La syntaxe du modèle recherchée résulte de l'approche structurelle que nous avons utilisée et du quadripôle (P, S, R, Q).

Rappelons que notre point de départ pour définir le modèle fractal, fut le fait hydrologique imagé par le rôle d'un réseau constitué de N tronçons, chacun d'eux recevant le même apport surfacique et translatant d'une même quantité temporelle le signal qu'il reçoit à l'amont.

Si $Q_e(t)$ est la somme de N débits entrant dans chacun des tronçons du réseau, le réseau se comporte alors comme un convoluteur, le débit $Q(t)$ à l'exutoire étant obtenu comme suit :

$$Q(t) = O(t) * Q_e(t)$$

$$\text{avec } O(t) = \frac{\int' (t) * N(t)}{N}$$

$N(t)$ étant le nombre de tronçons situés à une distance temporelle t de l'exutoire, N leur nombre total, $\int' (t)$ dérivée de la distribution de Dirac.

A partir de cette image et du modèle de transfert qui lui est associé, fut élaboré par la suite un modèle fractal de structure qui définit avec une

bonne approximation la longueur totale de réseau dont les points extrêmes sont situés à une distance inférieure ou égale à R , quel que soit R , compris entre O et R_M , R_M distance maximum.

La proximité de cette relation avec $N(t)$ définie précédemment, nous incite à formuler le modèle hydrologique à partir d'un modèle de transfert qui soit également un convoluteur

$$Q(t) = O(t) * Q_e(t)$$

L'opérateur O est cette fois nécessairement plus complexe que celui résultant de l'image première puisque les tronçons ne sont pas des transformateurs tous identiques, qu'ils ne reçoivent pas le même apport surfacique et surtout que nous devons tenir compte du transfert induit par l'écoulement de surface.

O se définit alors comme suit :

$$O(t) = \frac{\int' (t) * A(t)}{A_T}$$

avec $A(t)$: distribution de surface contribuant à la formation du débit $Q_S(t)$, A_T surface totale active pour la pluie considérée.

Comme la surface A_T est structurée par le réseau de drainage, la distribution $A(t)$ devrait résulter d'une combinaison de deux distributions traduisant le rôle du sol et du réseau, puisque le réseau est l'objet modélisé, point de notre départ (Relation (S, R, Q)).

$P(t)$ étant la distribution de pluie, celle-ci doit être transformée en une nouvelle distribution $Q_e(t)$ qui traduit l'effet du ruissellement pour la production de ce qui s'écoule effectivement vers le réseau, soit la relation (P, S, R) du quadripôle et un second modèle dit de production (S, P), partie d'un modèle hydrologique qui a la syntaxe suivante :

$$Q = (R \circ S) * (S, P)$$

avec un terme commun S aux deux distributions convoluées qui représente le rôle double du sol.

1.1. Modèle de transfert

Nous dirons qu'un lieu est à une distance t de l'exutoire si le flot ruisselant qui le traverse ou qui commence son parcours à partir de lui met un temps t pour arriver à l'exutoire.

Ainsi, la surface $A(t)$ est constituée de tous les lieux situés à une distance temporelle au plus égale à t .

Nous supposerons que cet ensemble indénombrable est structuré par un réseau de drainage, c'est-à-dire qu'à tout lieu est associé un chemin d'écoulement de longueur t , qui se décompose en deux chemins, le premier de longueur Z correspondant au cheminement réticulaire, et l'autre de longueur $(t - Z)$ correspondant au cheminement sur l'ensemble complémentaire au réseau (intitulé cheminement de surface).

Soit $R(Z)$ la longueur correspondante en réseau et $G(t - Z)$ la longueur du cheminement de surface. La somme $R(Z) + G(t - Z)$ est la longueur du chemin total.

Soit T la plus grande distance temporelle d'une surface active quelconque.

Soit t appartenant à l'intervalle $[0, T]$.

Première hypothèse

Quelle que soit la durée Z appartenant à $[0, T]$, nous pouvons lui associer une longueur en réseau et une longueur de chemin en surface.

Nous considérons alors que la liaison surface réseau n'est plus discrète (bouches d'égouts), mais est continue.

Seconde hypothèse

Quel que soit Z , au temps de parcours en surface complémentaire $t - Z$ est associée une seule distribution $G(t - Z)$ caractéristique de ce parcours. Pour une surface active quelconque, cette distribution représenterait

une largeur moyenne de surface située tout le long du réseau.

Avec ces deux hypothèses, au point du réseau d'abscisse temporelle Z , est associée une surface de drainage infinitésimale.

$$d a(t) = G(t - Z) \cdot R'(Z) dZ \quad (R'(Z) \text{ homogène à une vitesse})$$

Soit maintenant à considérer un réseau qui possède éventuellement plusieurs points distincts situés à l'abscisse Z .

Soit N ce nombre, fonction de $R(Z)$.

Pour un réseau, la surface infinitésimale drainée à l'abscisse Z est la suivante :

$$d A(t) = G(t - Z) \cdot N(R(Z)) \cdot R'(Z) dZ$$

et la surface totale $A(t)$ résulte d'une variation continue de Z de 0 à t , soit :

$$A(t) = \int_0^t G(t - Z) \cdot N(R(Z)) \cdot R'(Z) dZ$$

Nota : Les distributions G et R seront généralement constantes au bout de deux durées distinctes, les réseaux et surfaces actives étant des grandeurs finies.

Soit maintenant à définir N et G à partir du modèle de structure fractale.

1.1.1. Evolution du nombre de terminaisons N en fonction de R

Soit $L(R)$ la longueur totale du réseau à l'abscisse R et $N(R)$ son nombre de terminaisons.

Supposons que L et N soient deux fonctions différentiables.

Avec $dN(R)$ l'accroissement infinitésimal du nombre de terminaisons à la distance R , à $R + dR$ nous avons :

$$L(R + dR) = L(R) + (N(R) + dN(R)) dR$$

dR doit être suffisamment petit pour que la longueur des chemins correspondants soit assimilable à cet élément différentiel.

$N(R)$ est une courbe qui provient d'un lissage d'une fonction en réalité discontinue, c'est-à-dire que $N(R)$ n'est pas nécessairement un nombre entier.

Comme $dN(R) = N'(R) dR$,

$$L(R + dR) = L(R) + N(R) \cdot dR + N'(R) \cdot dR^2$$

Soit lorsque dR tend vers zéro,

$$N(R) = L'(R)$$

1.1.2. Evolution de la surface en fonction de R

Soit $A(R)$ la surface totale liée au réseau de longueur $L(R)$.

Soit un élément différentiel dR et $a(dR)$ sa surface.

De même que précédemment :

$$A(R + dR) = A(R) + [N(R) + dN(R)] a(dR)$$

Hypothèses

- $a(dR) \sim A(dR)$
- $A(R)$ est une fonction continuellement différentiable :

$$A(dR) = A(o) + A'(o) \cdot dR + A''(o) \cdot \frac{dR^2}{2!} + \dots$$

$A(o)$ étant nul, nous obtenons la relation suivante :

$$A(R + dR) = A(R) + [N(R) \cdot dR + N'(R) \cdot dR^2] \cdot [A'(o) + \frac{dR \cdot A''(o)}{2!} + \dots]$$

Soit :

$$A'(R) = N(R) \cdot A'(o) \quad \text{lorsque } dR \text{ tend vers zéro}$$

En utilisant la relation établie précédemment en 1.1.1., nous obtenons finalement :

$$A(R) = A'(o) \cdot L(R)$$

$A'(o)$ correspond à une longueur moyenne située tout au long du réseau.

Cette indépendance de la largeur vis-à-vis de R provient de l'assimilation de $a(dR)$ à $A(dR)$.

Le résultat ainsi obtenu est équivalent à la seconde hypothèse utilisée pour la construction d'un modèle de transfert.

1.1.3. Modèle de transfert fractal

Soit $L(R) = n l^{1-D} R^D$ la relation découlant du modèle de structure fractale et la relation (N,L) précédemment établie.

Si R est paramétré par le temps, ces relations ont la forme suivante :

$$L(R(Z)) = n l^{1-D} R(Z)^D$$

$$N(R(Z)) = L'(R(Z))$$

et la relation établie en 1.1. :

$$dA(t) = G(t-Z) \cdot N(R(Z)) \cdot R'(Z) dZ$$

peut s'écrire comme suit :

$$dA(t) = G(t-Z) \cdot dL(R(Z))$$

En paramétrant directement la longueur du réseau par le temps :

$$dA(t) = G(t-Z) L'(Z) dZ$$

$$A(t) = G(t) * L'(t) = (\int(t) * G(t)) * (\int'(t) * L(t))$$

Si A_T est la surface totale active, l'opérateur de transfert a la forme d'un convoluteur :

$$O(t) = \frac{1}{A_T} \int^n(t) * (G(t) * L(t))$$

G et L étant pris au sens des distributions.

En utilisant la relation (L,R) qui traduit la fractalité du réseau,

$$O(t) = \frac{n \cdot l^{1-D}}{A_T} \int^n(t) * (G(t) * R(t)^D)$$

Si les termes n, l, D, R relèvent du réseau de drainage, G et A_T relèvent de la surface drainée et ne sont pas connus à ce stade de la modélisation.

Ils résultent de la valeur de la surface active qui produit le débit de ruissellement $Q_e(t)$ évacué par le réseau de drainage. Ils sont donc définis par le modèle de production et relie celui-ci au modèle de transfert.

Dépendance des deux modèles formant un modèle hydrologique de ruissellement.

1.2. Modèle de Production

Les pertes à l'écoulement sur des surfaces urbaines ou non, sont en elles-mêmes un phénomène extrêmement complexe [18,12,2].

Cette complexité, accrue par l'hétérogénéité des types de recouvrement est difficile voire impossible à représenter dans son détail. La plupart des chercheurs ont alors élaboré des modèles relativement simples comparativement à cette complexité.

Ces modèles ont pour but le calcul d'un débit ruisselant vers le réseau de drainage.

Les termes conjugués sont le sol et la pluie P(t) telle que :

$$P(t) = \frac{1}{A} \int_A i(t,x,y) dx dy$$

avec A : surface potentiellement drainante

i(t,x,y) : intensité variable dans l'espace et le temps

Afin de compléter le modèle de transfert que nous avons établi, nous chercherons seulement à définir les implications du choix d'un modèle de

la relation :

$$Q_{e1}(t) = P(t) \cdot A_{T1} \cdot [1 - e^{-H(t)/h_0}]$$

Nous pouvons ainsi définir une surface active imperméable qui s'accroît avec le temps.

$$A_1(t) = A_{T1} [1 - e^{-H(t)/h_0}]$$

et lui associer une largeur moyenne de drainage également évolutive dans le temps :

$$G_1(t) = \frac{A_{T1}}{L(R_M)} [1 - e^{-H(t)/h_0}]$$

Pour définir totalement la largeur moyenne qui apparaît dans le modèle de transfert, il faudra lui rajouter celle induite par les surfaces perméables.

b) Surface perméable

Ces surfaces ont un comportement caractérisé par deux types de pertes.

La rétention est également représentée par le modèle de Linsley qui a la forme suivante :

$$h(t) = h_0 \left[1 - e^{-\frac{H(t) - F(t)}{h_0}} \right]$$

avec $F(t)$: hauteur totale infiltrée déterminée grâce au modèle de Horton

[52] :

$$F(t) = \int_0^t f(Z) dZ = \int_0^t (f_c + (f_0 - f_c) e^{-az}) dZ$$

avec f_c : vitesse limite d'infiltration

f_0 : vitesse initiale d'infiltration

a : caractéristique du temps au bout duquel f_c est pratiquement atteinte

De même que précédemment, supposons que la surface perméable

soit décomposable en M types (A_j) caractérisés chacun d'eux par le triplet (F_{cj} , F_{oj} , $a_j = a$).

Soit alors :

$$h_0 = \sum_{j=1}^M A_j \cdot h_j / A_{T2}$$

$$f_c = \sum_{j=1}^M f_{cj} \cdot A_j / A_{T2}$$

$$f_o = \sum_{j=1}^M f_{oj} \cdot A_j / A_{T2}$$

Pour une pluie $P(t)$ quelconque et la surface perméable A_{T2} , la vitesse d'infiltration et la hauteur totale infiltrée se déduisent de la courbe d'infiltration théorique alors définie par la relation moyenne [voir complément 8].

$$f(t) = f_c + (f_o - f_c) e^{-at}$$

L'intensité ruisselante est égale à :

$$P_r(t) = P(t) - h'(t) - f_r(t)$$

avec $f_r(t)$: vitesse d'infiltration réelle.

Tant que l'intensité précipitée $P(t)$ reste inférieure ou égale à la capacité d'infiltration, l'intensité ruisselante $P_r(t)$ est nulle, c'est-à-dire qu'il existe un temps t_1 à partir duquel la surface perméable commence à contribuer au ruissellement de surface.

Pour $t > t_1$, soit la fonction $r(t)$ telle que :

$$h'(t) + f_r(t) = P(t) / r(t)$$

Nous obtenons alors :

$$P_r(t) = P(t) \cdot (1 - r(t)) \cdot Y(t - t_1)$$

avec $Y(t - t_1)$: distribution d'Heaviside.

la relation :

$$Q_{e1}(t) = P(t) \cdot A_{T1} \cdot [1 - e^{-H(t)/h_0}]$$

Nous pouvons ainsi définir une surface active imperméable qui s'accroît avec le temps.

$$A_1(t) = A_{T1} [1 - e^{-H(t)/h_0}]$$

et lui associer une largeur moyenne de drainage également évolutive dans le temps :

$$G_1(t) = \frac{A_{T1}}{L(R_M)} [1 - e^{-H(t)/h_0}]$$

Pour définir totalement la largeur moyenne qui apparaît dans le modèle de transfert, il faudra lui rajouter celle induite par les surfaces perméables.

b) Surface perméable

Ces surfaces ont un comportement caractérisé par deux types de pertes.

La rétention est également représentée par le modèle de Linsley qui a la forme suivante :

$$h(t) = h_0 \left[1 - e^{-\frac{H(t) - F(t)}{h_0}} \right]$$

avec $F(t)$: hauteur totale infiltrée déterminée grâce au modèle de Horton [52] :

$$F(t) = \int_0^t f(Z) dZ = \int_0^t (f_c + (f_0 - f_c) e^{-az}) dZ$$

avec f_c : vitesse limite d'infiltration

f_0 : vitesse initiale d'infiltration

a : caractéristique du temps au bout duquel f_c est pratiquement atteinte

De même que précédemment, supposons que la surface perméable

soit décomposable en M types (A_j) caractérisés chacun d'eux par le triplet (F_{cj} , F_{oj} , $a_j = a$).

Soit alors :

$$h_0 = \sum_{j=1}^M A_j \cdot h_j / A_{T2}$$

$$f_c = \sum_{j=1}^M f_{cj} \cdot A_j / A_{T2}$$

$$f_o = \sum_{j=1}^M f_{oj} \cdot A_j / A_{T2}$$

Pour une pluie $P(t)$ quelconque et la surface perméable A_{T2} , la vitesse d'infiltration et la hauteur totale infiltrée se déduisent de la courbe d'infiltration théorique alors définie par la relation moyenne [voir complément 8].

$$f(t) = f_c + (f_o - f_c) e^{-at}$$

L'intensité ruisselante est égale à :

$$P_r(t) = P(t) - h'(t) - f_r(t)$$

avec $f_r(t)$: vitesse d'infiltration réelle.

Tant que l'intensité précipitée $P(t)$ reste inférieure ou égale à la capacité d'infiltration, l'intensité ruisselante $P_r(t)$ est nulle, c'est-à-dire qu'il existe un temps t_1 à partir duquel la surface perméable commence à contribuer au ruissellement de surface.

Pour $t > t_1$, soit la fonction $r(t)$ telle que :

$$h'(t) + f_r(t) = P(t) / r(t)$$

Nous obtenons alors :

$$P_r(t) = P(t) \cdot (1 - r(t)) \cdot Y(t - t_1)$$

avec $Y(t - t_1)$: distribution d'Heaviside.

$$Q_{e2}(t) = P(t) \cdot A_{T2} [1 - r(t)] \cdot Y(t - t_1)$$

avec $Q_{e2}(t)$: débit ruisselant à partir de la surface perméable A_{T2} et

$$G_2(t) = \frac{A_{T2}}{L(R_M)} [1 - r(t)] Y(t - t_1)$$

largeur moyenne de drainage évolutive dans le temps et se formant à $t = t_1$.

c) Surface active, longueur

La surface active totale A_T qui est utilisée par le modèle de transfert est égale à :

$$A_T = A_{T1} + A_{T2}$$

s'il y a apport des surfaces perméables.

La largeur moyenne est la somme

$$G(t) = G_1(t) + G_2(t)$$

1.3. Perspectives hydrologiques

Nous avons établi un modèle de structure fractale qui rend intelligible la forme des réseaux ramifiés, voire maillés.

Modèle pour une décomposition des réseaux d'agglomération, figures multiformes, en structures homogènes de dimension à homothétie statistique comprise entre un et deux, la ligne et le plan.

Modèle pour une étude de l'état et de la variation de l'état d'une structure homogène.

Figure globalement entière et un développement possible uniquement par interpolation.

Figure globalement non entière, et une forme en devenir par extrapolation.

Modèle de la morphologie qui initialise des perspectives d'études urbanistique, historique, économique, etc ...

Pour ces structures homogènes et uniquement pour celles-ci, ce modèle

de structure induit une modélisation théorique de comportement hydrologique ; soit un modèle de transfert directement issu du modèle morphologique et un modèle de production, quelconque à ce stade de l'étude, qui définit le sens des variables surfaciques présentes dans le premier de ces deux modèles indissociables par le double rôle joué par le sol.

Ce modèle théorique et cognitif relativement aux modèles existants à ce jour, réconcilie fonctionnel et structurel pour une hydrologie fractale maintenant, hydrologie urbaine au départ, mais gageons qu'une étude expérimentale de la forme des réseaux de drainage "naturels" permettra d'étendre le modèle morphologique et ce modèle hydrologique à l'hydrologie rurale et fluviale.

Perspective de réunification future.

Modèle hydrologique théorique pour un retour à la modélisation de la transformation de la pluie en débit.

Cette transformation dépendrait de la morphologie des réseaux mais le degré de dépendance est à définir. Travail de simulation peut être. Premières recherches pour ne pas partir en aveugle et ne plus mélanger, comme cela fut fait jusqu'à ce jour, des structures quelconques pour tester la validité, ou construire un modèle.

Avant tout, ce modèle nous indique qu'il faudrait caractériser le champ expérimental à partir du concept de dimension d'homothétie statistique et après cela comparer les choses comparables pour préciser le rôle respectif de chacun des phénomènes entrant dans la combinaison production transfert. Réouverture éventuelle de l'expérimentation à partir de modèle réduit, les variables d'études étant définies par ce modèle cognitif.

Puis une perspective dernière, plus incertaine ; passer du modèle cognitif pour la simulation de l'existant, à un modèle prévisionnel.

Elle nécessitera de mener de front l'expérimentation hydrologique et le développement des perspectives ouvertes par le modèle morphologique.

2. RETOUR A LA MODELISATION

Le chemin parcouru nécessite la pause, c'est-à-dire le cheminement silencieux de la réflexion, interrogation sur le trajet menant d'une position initiale à celle nouvellement acquise.

Trois paradigmes pour structurer la relation de ce trajet ; les paradigmes mécaniste, structuraliste et, plus loin, à l'horizon, le paradigme du Système Général [64], soit trois termes en relation, structure, activité, évolution à imerger dans l'environnement et un champ de finalités pour une conception de l'objet.

Trois paradigmes, non pas en terme d'évidence quant à l'initialisation de ce travail, mais en rapport de voisinage en nous demandant honnêtement s'il n'y a pas usurpation, détournement ou plutôt réduction de sens du vocabulaire lorsque nous l'utilisons pour concevoir l'objet qui est celui pour lequel la thèse est en ce texte énoncée.

2.1. Position initiale

De prime abord, la conception de l'objet est représentée par un modèle à double articulation, ou atteignant dans son développement deux pôles, celui de l'être et celui du faire, comme le soulignerait peut être J.L. LE MOIGNE à partir d'un schéma trialectique organisant les définitions fonctionnelle, ontologique et génétique d'un objet [64].

L'émergence du modèle, hydrologico-graphique, résulte de la confrontation de deux objets.

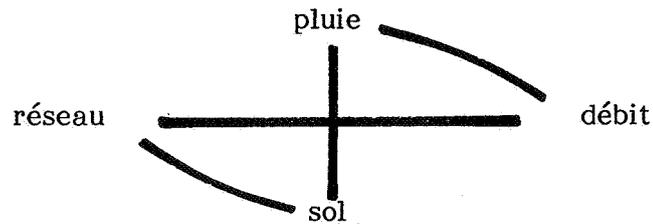
Le premier est théorique et fut développé par B. MANDELBROT autour du concept de dimension fractale. Le second, objet à modéliser, est intitulé par les ingénieurs, système de drainage urbain.

Nous pouvons nous apercevoir maintenant, et le texte de cette thèse en est une illustration, que notre position initiale résulte plus de la tentation, suivie d'une tentative fructueuse, d'éclaircir notre conception de l'objet par le phare du concept de dimension fractale.

Cette démarche, peut être singulière, nous a amené à assimiler dans un premier temps le système de drainage au seul réseau d'assainissement,

objet artificiel dont la forme pouvait avoir quelque connivence avec ceux représentables morphologiquement à l'aide du concept de dimension fractale.

Ainsi, nous avons utilisé le quadripôle structurel de deux façons distinctes et complémentaires



L'émergence de l'imagerie "computationnelle" des réseaux est sans doute la cause (inconsciente ?) de la restriction hydrographique des systèmes de drainage au réseau de canalisations, le réseau d'écoulement en surface n'étant pas humainement représentable. Fallait-il instaurer cette coupure restreignant ainsi notre visée hydrographique (structurelle) au seul objet artificiel conçu en tant que tel pour drainer les eaux d'origine météorique, soit se focaliser initialement sur l'axe réseau — débit ?

Cette coupure est d'importance pour la représentation de l'activité des systèmes de drainage urbain puisque la relation sol — réseau est univoque, c'est-à-dire que nous avons conçu que l'activité hydrologique découlait de la structure du réseau de canalisations et non pas d'une interaction sol / réseau.

Ceci a eu pour conséquence l'élaboration d'un modèle hydrologique où les rôles de production et de transfert du sol sont représentés par une distribution où n'interviennent pas la complexité du processus et l'interaction éventuelle sol / réseau.

De cette coupure résulte une modélisation non interactive entre le pôle structurel et le pôle fonctionnel alors qu'il aurait pu (est-ce certain ?) en être autrement si nous avions initialement focalisé notre regard sur le concept de système de drainage. Sachant que c'est un ensemble d'éléments dont la définition ne peut s'actualiser qu'en considérant l'activité (fonction) pour laquelle cet objet artificiel est conçu, soit l'évacuation des eaux pluviales.

Ce système est décomposable en deux sous ensembles :

- . l'ensemble des éléments constituant le réseau d'assainissement et qui est généralement conçu et géré par les instances de gouverne du milieu urbain.

- . l'ensemble des éléments qui concourent à alimenter le réseau.

Soit un couple que nous avons représenté par la relation sol/réseau.

Cette distinction qui n'a pas de réalité fonctionnelle même si traditionnellement elle fut la source de tous les modèles hydrologiques, est toujours enracinée en nous par l'histoire du génie urbain au sens où le réseau d'assainissement est la partie de l'objet système de drainage qui est directement conçu, géré, organisé par les instances de gouverne.

Notons que le développement de l'hydrologie urbaine moderne incite les concepteurs à prendre part à la définition et l'organisation des éléments autres que le réseau.

Cette définition, basée sur la fonctionnalité de l'objet système et aussi élémentaire qu'elle soit, aurait peut être dû nous inciter à concevoir autrement la structure de l'objet, c'est-à-dire compléter par une flèche de retour le schéma illustratif du paradigme mécaniste

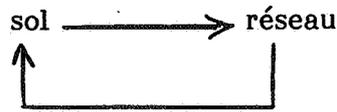


interaction entre deux termes qui signifiera dans un premier temps pour nous même que la structure induit une activité qui induit elle même ce qu'est la structure. En effet, le fonctionnement hydraulique d'un réseau structuré par l'enchaînement et la ramification de ses tronçons peut prendre deux états.

Le premier est caractérisé par une non interaction entre le sol et le réseau ; l'activité du système est alors modélisable à partir d'un modèle de structure de son réseau comme nous l'avons démontré au paragraphe précédent.

L'interaction entre le sol et le réseau peut être la conséquence d'une mise en charge hydraulique de tout ou partie du réseau.

La circulation du flux résulte alors d'un bouclage entre sol et réseau.



De ce fait, la structure du système au sens de son activité n'est plus réductible à celle du réseau.

Le rôle fondamental qu'a joué le champ théorique pour structurer notre travail nous a de plus conduit à écarter du champ de l'objet les réseaux totalement maillés.

Cette position résulte en partie du voisinage morphologique entre ces réseaux et les courbes type Peano non troquées [58], qui ne sont pas des figures fractales puisque caractérisées par un nombre infini de points doubles.

L'utilisation du modèle de structure que nous avons établi revient à assimiler ce genre de réseaux à deux réseaux emboîtés et ramifiés, soit à une courbe tronquée pour ne pas avoir de points doubles.

Cette modélisation structurelle n'est pas compatible avec le comportement hydraulique des réseaux maillés.

Ce rejet, initialement dû à cette non conformité, reflète en fait une différence fondamentale entre les réseaux ramifiés à écoulement unidirectionnel (de l'amont vers l'aval avec éventuellement des bouclages locaux) et les réseaux maillés où l'écoulement n'est plus unidirectionnel.

Si une structure ramifiée peut être décomposée en sous structures ramifiées, il n'en est pas de même pour les réseaux maillés qui forment un tout indisséparable. Vis à vis de leur activité, ces objets derniers sont intermédiaires entre le réseau ramifié et le plan d'eau (réservoir), celui-ci pouvant être considéré comme un réseau maillé possédant un nombre infini de mailles recouvrant ainsi totalement le plan. De ce fait, la modélisation morphologique des réseaux maillés devrait pouvoir se fonder sur la notion de densité comme l'a déjà introduit Mandelbrot pour mesurer la distribution de la matière dans l'univers.

Un réseau maillé est un réservoir en puissance (d). Espérons que la modélisation fonctionnelle d'une telle structure puisse être basée sur cette approche.

Nous ne pouvons pas non plus passer sur le fait que ces deux modélisa-

tions de structure (la dernière n'étant que potentielle à ce jour) devrait recouvrir l'ensemble des réseaux urbains avec infrastructure ;

- . les réseaux ramifiés et localement maillés
- . les réseaux maillés et localement ramifiés.

2.2. Evolution

La morphologie des réseaux ramifiés et localement maillés est représentée à l'aide d'un modèle fractal qui est un processus organisationnel basé sur un principe d'homothétie statistique. La structure de ces réseaux correspond approximativement à celle de l'objet obtenu après un certain nombre d'itérations interpolantes / extrapolantes qui définissent le processus modèle.

Seul le résultat de cette suite d'itérations est comparable à la structure de l'objet réel.

Le processus d'organisation fractal n'a lui-même a priori rien à voir avec les processus organisationnels qui ont produit l'artefact.

En effet, la structure observable résulte d'une combinaison complexe entre ré-organisation, déploiement à partir d'un germe, et enchaînement, ramifications sur un squelette pré-existant [70].

Il y a identification de l'objet produit à un temps t , par sa décomposition totale mais non unique en structures dont les formes s'apparentent à celles produites par un processus organisationnel fractal.

En terme d'identification, la grandeur signifiante est la dimension d'homothétie statistique, la structure de l'objet réel étant ramenée au plan.

En introduisant la longueur réelle moyenne entre ramifications (l_m), la recherche d'identité entre la structure de l'objet et le modèle par le biais de l'instrument test $L = A R^D$, nous a conduit à définir un paramètre n en général non entier.

Il s'apparente à un paramètre d'état morphologique, le référentiel étant le processus organisationnel fractal.

En lui-même, l'artefact conceptuel ne prend pas différents états si ce n'est le nombre d'interpolations extrapolations atteint. Et quel que soit ce nombre, n reste une valeur entière supérieure à l'unité s'il y a composition parallélique statistique.

L'objet réel est toujours structurellement un objet en devenir, alors que les principes structurels de l'objet conceptuel sont fixés.

Le paramètre n mesure en quelque sorte l'écart entre un principe structurel figé et un principe structurel en évolution.

Le réseau de la commune de Meyzieu, par exemple, s'apparente à une forme fractale de dimension 1.8, mais qui ne serait qu'à 70 % de sa croissance si le principe structurel représenté par cette dimension était conservé dans le futur.

Répetons-le, mais sous une autre forme, n quantifie le degré d'incomplétude de l'objet réel vis à vis de l'objet conceptuel.

Au sens du modèle, l'évolution structurelle d'un réseau d'assainissement peut prendre deux formes :

$$\begin{array}{ccc}
 t & \longrightarrow & t + \Delta t \\
 n_1, D_1 & \longrightarrow & n_2, D_1 \\
 n_1, D_1 & \longrightarrow & n_2, D_2
 \end{array}$$

Pour la première de ces deux configurations, l'organisation du réseau se traduit par une évolution structurelle reproduisant le schéma antérieur.

Pour la seconde, l'évolution structurelle est basée sur l'apparition de formes nouvelles qui pourraient conduire à décomposer différemment le nouvel objet pour satisfaire la représentation par le modèle fractal.

Nous n'avons pas modélisé la structure de l'objet en tenant compte du pôle "génétique". Mais le modèle développé permet d'étudier quantitativement l'évolution des réseaux.

Ce modèle fonctionne comme un appareil photographique qui prendrait divers clichés numériques d'un objet au cours de son évolution soit :

$$| n(t), D(t) |$$

C'est sur l'ensemble des "clichés" qu'il serait possible de saisir un type d'évolution.

La trajectoire $| (n, D), t |$ et celle de l'état du système. Elle permettrait de repérer les périodes pour lesquelles l'évolution est continue (pas de modification d'état) et les instants où il y a rupture d'état.

Ce principe de modélisation doit être complété par le fait déjà énoncé que l'étude de l'objet est basée sur une décomposition en "éléments simples" s'apparentant à des structures fractales, qui peut se révéler elle-même évolutive. Les structures qui étaient homogènes vis-à-vis du principe de fractalité, précédemment, ne le sont plus forcément dans le présent et ne le seront peut être pas dans le futur si la structure évolue.

La modélisation de l'objet système de drainage via la structure de son réseau d'assainissement est donc basée sur la triade

$$| t , E , (n , D) |$$

t :	temps	T
E :	espace	E
(n , D) :	forme	F

soit inscrite dans le référentiel T.E.F. de J.L. LE MOIGNE.

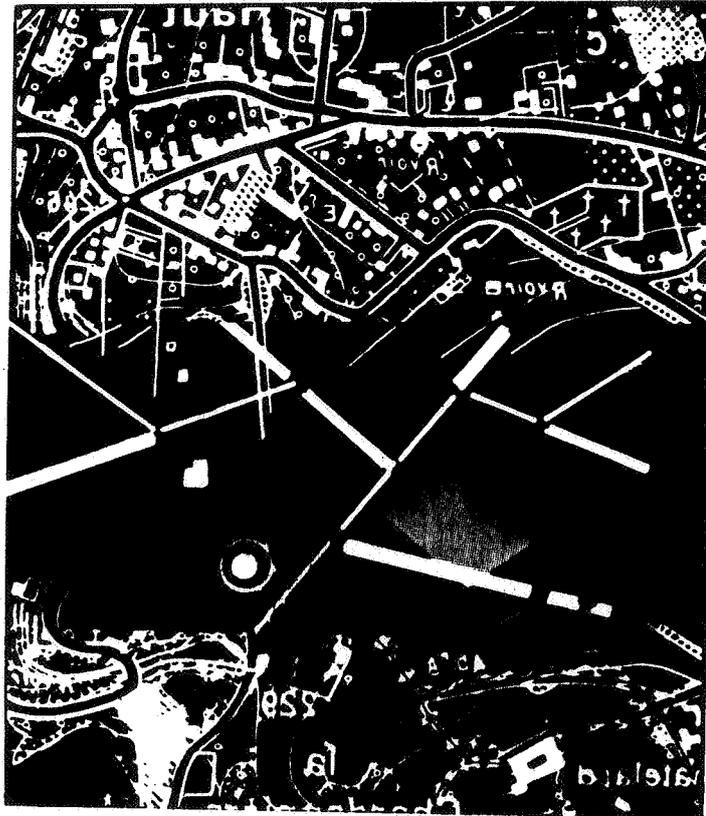
Trois termes, à ce stade, structure / fonction / évolution, articulés entre eux, un paradigme de type structuraliste pour une représentation de l'objet.

Non pas une explication du pourquoi de l'évolution d'une structure mais du comment par le biais d'une trajectoire d'état où les continuités et ruptures illustreront les divers modes organisation répondant à un champ de finalités (socio-économico-hydrologique) fort délicat à cerner dans un environnement changeant (juridique, politique, géographique, urbanistique, écologique ...).

Un modèle de structure, une loi peut être pour les réseaux ramifiés, approximative, mais peut-il en être autrement, vue la complexité du champ de l'urbain ?

Un modèle de fonctionnement, en devenir, macroscopique par la nature même du regard posé sur l'objet et en particulier la coupure entre sol et réseau au niveau de l'interaction possible.

Soit en terme de génie (urbain) un modèle morpho-fonctionnel pour une conception de l'objet réseau (d'assainissement).



COMPLEMENTS & ANNEXES

COMPLEMENT 1

Comportement des bassins versants urbains.

Relations $V(t)$, $Q_S(t)$.

Un bassin versant étant considéré comme un système à état transformateur de flux, trois quantités sont introduites pour représenter son fonctionnement :

$$Q_e(t) = \int_S i(t,x,y) - \rho(t,x,y) dx dy$$

débit de pluie nette

$Q_S(t)$: débit de sortie observé à l'exutoire

$V(t)$: volume stocké

avec $i(t,x,y)$ pluie ; $\rho(t,x,y)$ perte ; S surface.

Le système est alors modélisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_S(t) \\ V(t) = F(Q_S(t), Q_e(t)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{équation de continuité} \\ \text{équation de comportement (1)} \end{array}$$

Comme la durée du débit de pluie nette est inférieure à la durée du débit de sortie, cette dernière étant sensiblement égale à la durée de la variable d'état, le comportement sera étudié au travers du couple $V(t)$, $Q_S(t)$ sans rechercher à formuler la relation (1).

Cette étude et ses résultats dépendent du mode d'obtention de la quantité $Q_e(t)$ puisque :

$$V(t) = \int_0^t (Q_e(Z) - Q_S(Z)) dZ$$

Elle transite donc par une modélisation des pertes, fictive comme la quantité $Q_e(t)$.

I - Le phénomène des pertes : pertes initiales, pertes continues

Aux erreurs de mesures près, les deux quantités fournies par l'observation sont les suivantes :

$Q_S(t)$ mesurée en un point

$i(t, x, y)$ mesurée en un nombre fini de points (x_j, y_j)

En utilisant un modèle de distribution spatiale de la pluie, on définit à partir de $i(t, x_j, y_j)$ une fonction $P(t)$ représentant l'évolution de l'intensité sur la zone.

$$P(t) = \frac{1}{S} \int_S i(t, x, y) dx dy$$

Soient les quantités :

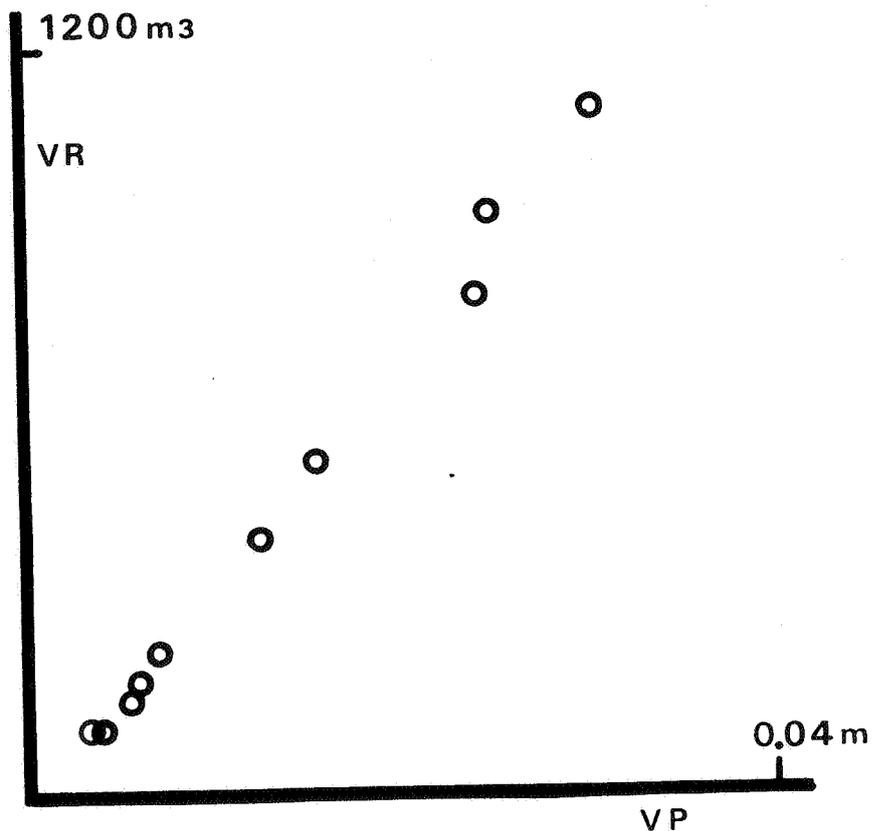
$$V R = \int Q_S(t) dt$$

$$V P = \int P(t) dt$$

Pour un ensemble de pluies, on observe alors des distributions différentes.

A partir de la campagne de mesures de 1968/69 [22], nous avons obtenu les résultats qui suivent :

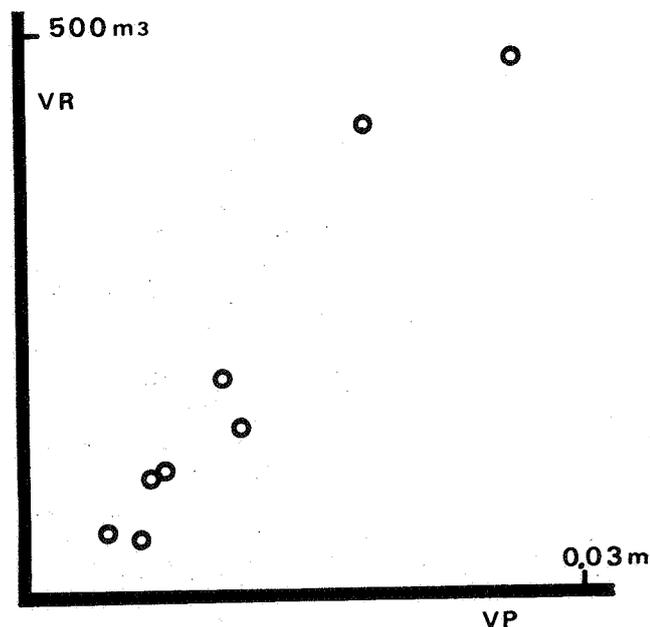
Exemple 1 : Bassin grenoblois de 3.8 hectares (parking de l'usine Caterpillar).



Le bassin étant totalement imperméable et de taille modeste, les points sont suffisamment alignés pour qu'une droite puisse être jugée représentative de la distribution.

Ce n'est pas toujours le cas.

Exemple 2 : Bassin d'Aix les Bains de surface 3 hectares
et dont le taux d'imperméabilisation est de 60 %



La dispersion est due aux phénomènes de pertes plus complexes que dans le cas précédent (présence de surfaces perméables, d'écoulements éventuellement retardés, etc ...).

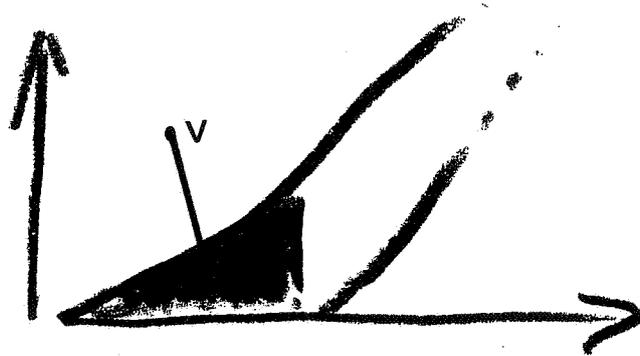
En supposant que la droite (unique ou non) est un modèle satisfaisant, sa pente représente la moyenne des surfaces actives (S_0) vis-à-vis du ruissellement et pour les couples (VP , VR) considérés ;

$$V R = S_0 \cdot V P - B \quad (2)$$

V R est égal à zéro pour une valeur $V P = B / S_0$. Cette hauteur peut être définie comme la hauteur nécessairement perdue pour qu'il y ait ruissellement vers le réseau de drainage. Cette quantité intitulée perte initiale, est composée des pertes par stockage dépressionnaire, par infiltration, par rétention végétale, etc ...

Pour une pluie donnée, comme B / S_0 représente une moyenne de perte

initiale pour l'ensemble des événements considérés, la valeur des pertes initiales pour la pluie considérée est éventuellement différente de B / S_0 , soit $a_1 B / S_0$. En effet, le volume de pluie perdu doit précéder le début du ruissellement observé.



$$\text{Max } a_1 = V / B$$

(3)

Ce volume $a_1 \cdot B$ constitue une partie des pertes globales qui sont pour un événement :

$$(V R - S_0 \cdot V P)$$

si nous supposons que la surface active S_0 est définie par la relation (2) en considérant tout ou partie des événements mesurés.

La différence $V R - S_0 \cdot P - a_1 \cdot B$ est intitulée perte continue et représente à la fois une correction de la surface active, les pertes provenant du stockage, de l'infiltration ... et ce pendant la période de ruissellement.

Le volume $(V R - S_0 \cdot V P)$ se répartit donc en deux volumes :

$$P I \cdot S_0 \quad \text{perte initiale}$$

$$P C \cdot S_0 \quad \text{perte continue}$$

avec $P I = a_1 \cdot B / S_0$ hauteur

$$P C = (V R - S_0 \cdot V P - a_1 \cdot B) / S_0 \quad \text{hauteur.}$$

II - Modélisation des pertes

Deux démarches sont envisageables :

- . Caler un ensemble de modèles préexistants pour représenter les volumes perdus (modèles de Horton ou de Holtan pour l'infiltration, modèle de Linsley pour le stockage dépressionnaire ... ou tout autre modèle [2])
- . Utiliser directement l'approche précédente en déterminant a_1 , le volume de pertes continues et en répartissant ce dernier sur la durée de la pluie.

En ce qui nous concerne, nous avons préféré la seconde démarche, le calage d'une chaîne de modèles préexistants étant fort délicat et qualitativement apportant peu d'informations fiables relativement au but de l'étude.

Le coefficient a_1 est déterminé à chaque événement pour satisfaire la contrainte représentée par la figure (3).

En s'inspirant des travaux de Desbordes [18], deux modèles de répartitions sont définis.

. répartition uniforme

$$P_e(t) = P(t) - P_C / T$$

avec $P_e(t)$: pluie nette

T : durée de pluie à laquelle est ôtée la perte initiale

. répartition proportionnelle à l'intensité $P(t)$

$$P_e(t) = P(t) \cdot \left[1 - \frac{P(t) \cdot P_C}{T \cdot \int_0^T P(Z) dZ} \right]$$

Ces relations établies et calculant $V(t)$ comme suit,

$$V(t) = \int_0^t (S_0 \cdot P_e(Z) - Q_s(Z)) \cdot dZ$$

nous définissons le couple $V(t)$, $Q_s(t)$ pour les pluies et débits observés.

III - Type de comportement

Les résultats que nous avons obtenus à partir des mesures utilisées, convergent tous vers la même tendance. Cela signifie que les erreurs de mesures, l'erreur due à la méconnaissance de la véritable répartition spatiale de la pluie et le caractère fictif du modèle de perte, ne conduisent pas à une dispersion des résultats. Nous supposons donc que la tendance dégagée est significative, d'autant plus qu'il y a stabilité de la tendance lorsque nous modifions certaines valeurs inconnues comme a_1 et S_0 .

Les résultats que nous proposons résultent d'un logiciel de traitement de données que nous avons élaboré [56].

III.1 - Résultats expérimentaux

Nous ne reproduirons dans ce texte que les résultats obtenus à partir de trois bassins versants expérimentaux, l'évolution du comportement étant visualisée à partir de quatre événements pour chacun d'eux. Les pertes continues sont réparties uniformément dans ces exemples (nous obtenons les mêmes résultats avec des pertes continues proportionnelles à l'intensité).

BASSIN 1
ZUP de Grenoble

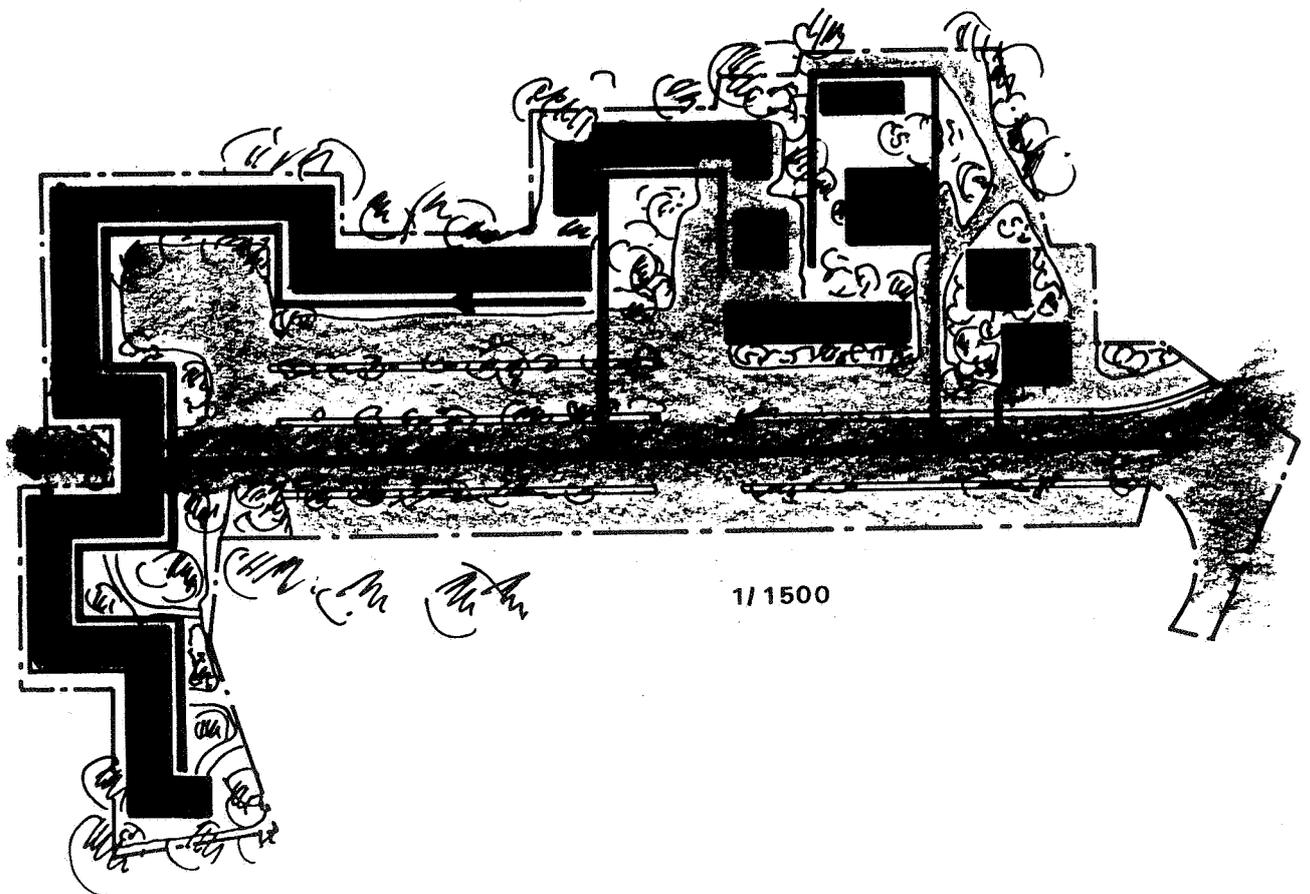
Caractéristiques :

Surface potentiellement drainante : 61 000 m²

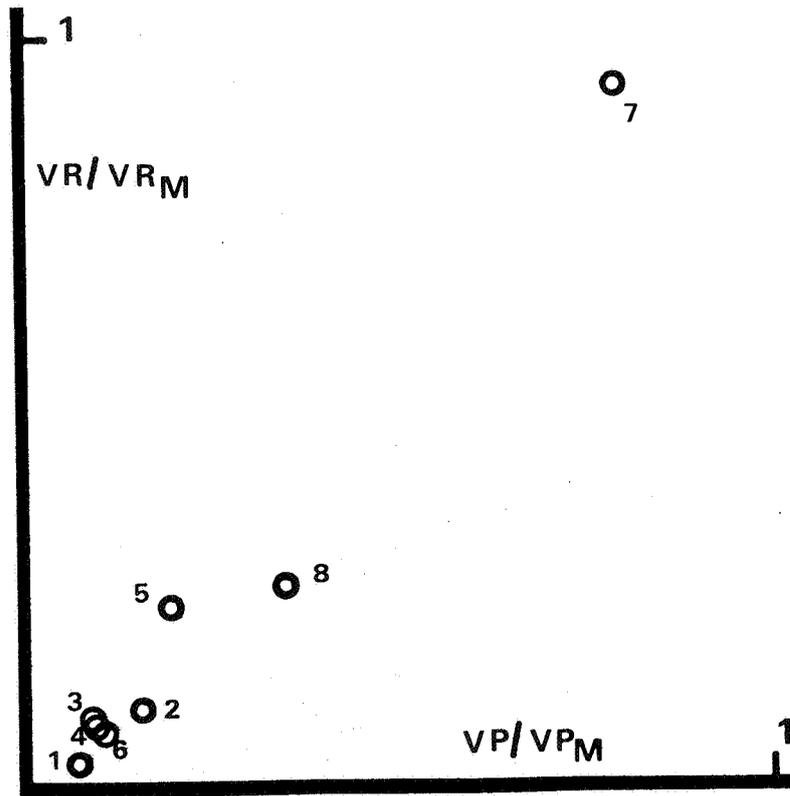
Taux d'imperméabilisation : 76 %

Pente moyenne : 0,6 %

Schéma du bassin versant :



Pour huit événements, points ($V P / V P_{\max}$, $V R / V R_{\max}$)



La dispersion des points résulte de l'hétérogénéité du bassin versant, de l'antériorité pluviométrique, et éventuellement des erreurs de mesure.

Ainsi, la surface active ne semble pas être unique. En utilisant une approximation aux moindres carrés, nous obtenons les résultats suivants, fournis à titre d'exemple :

- Sans pondération des points

$$S_0 = 35\,000 \text{ m}^2$$

Volume de pertes initiales : 49 m^3

- L'événement (8) est affecté d'une pondération de 1/10, les autres étant non pondérées (1)

$$S_0 = 43\,000 \text{ m}^2$$

Volume de pertes initiales 41 m^3

- Avec une pondération de 1/10 pour les événements (2) et (8) et de (5/10) pour l'événement 7

$$S_0 = 58\,000 \text{ m}^2$$

Volume de pertes initiales : 30 m^3

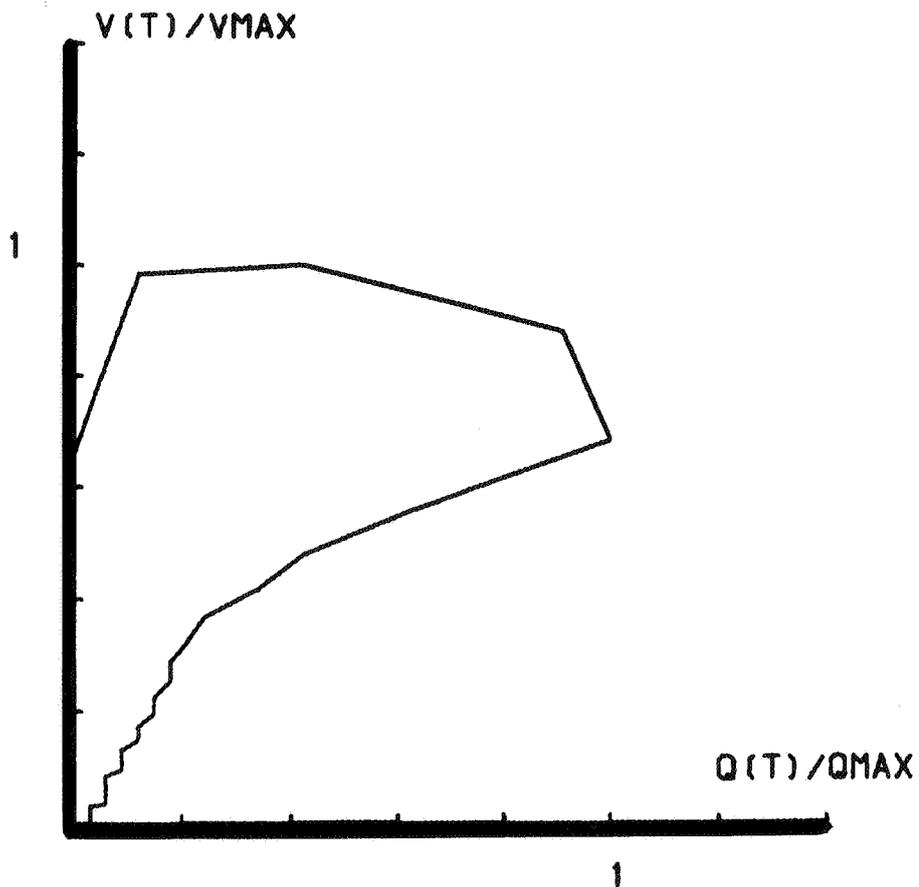
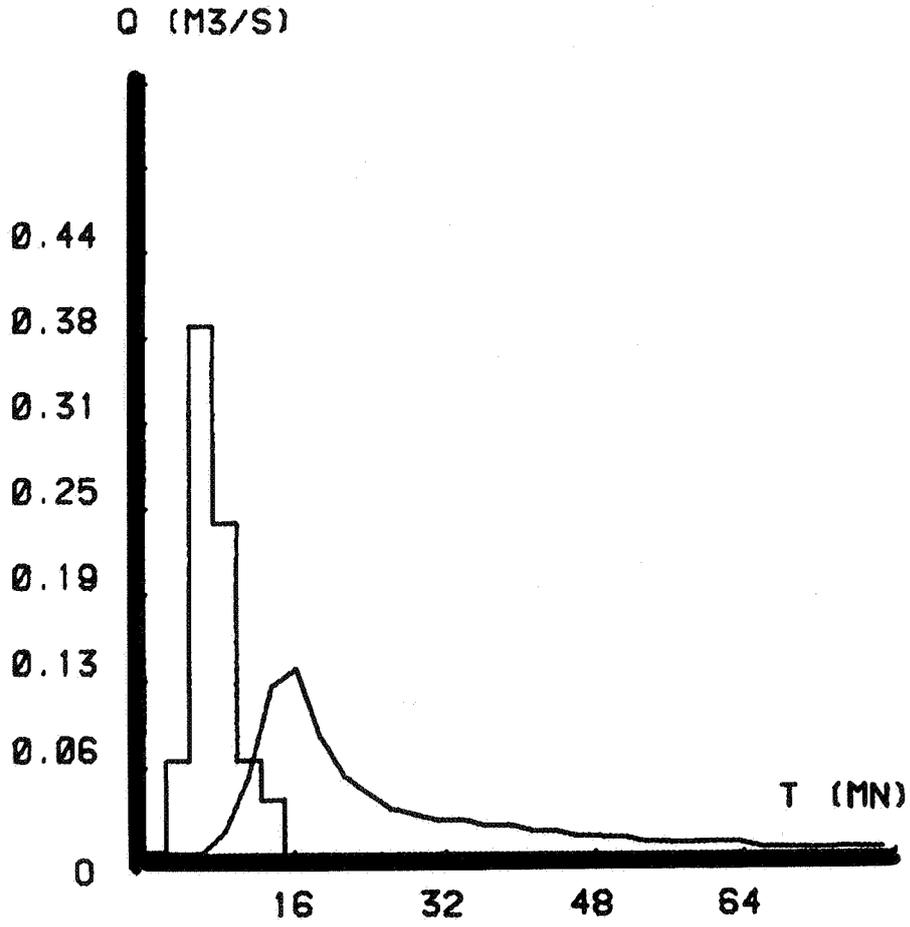
Dans un premier temps, nous avons considéré que la surface active S_0 appartenait à l'intervalle

$$43\,000 \text{ m}^2 \quad , \quad 61\,000 \text{ m}^2$$

La surface imperméable étant de $46\,000 \text{ m}^2$, le passage de $43\,000 \text{ m}^2$ à cette valeur n'introduisant pas de différence dans la relation $V(t)/V_{\max}$, $Q_s(t)/Q_{\max}$, nous avons choisi comme borne inférieure $46\,000 \text{ m}^2$.

Les événements ont été traités avec un ensemble de surfaces actives, cohérent pour chaque événement. Aucune instabilité n'ayant été observée quant à la forme de la relation étudiée, nous en avons déduit que le modèle de pertes fictif (surface active, pertes initiales, pertes continues) était stable vis-à-vis de l'étude.

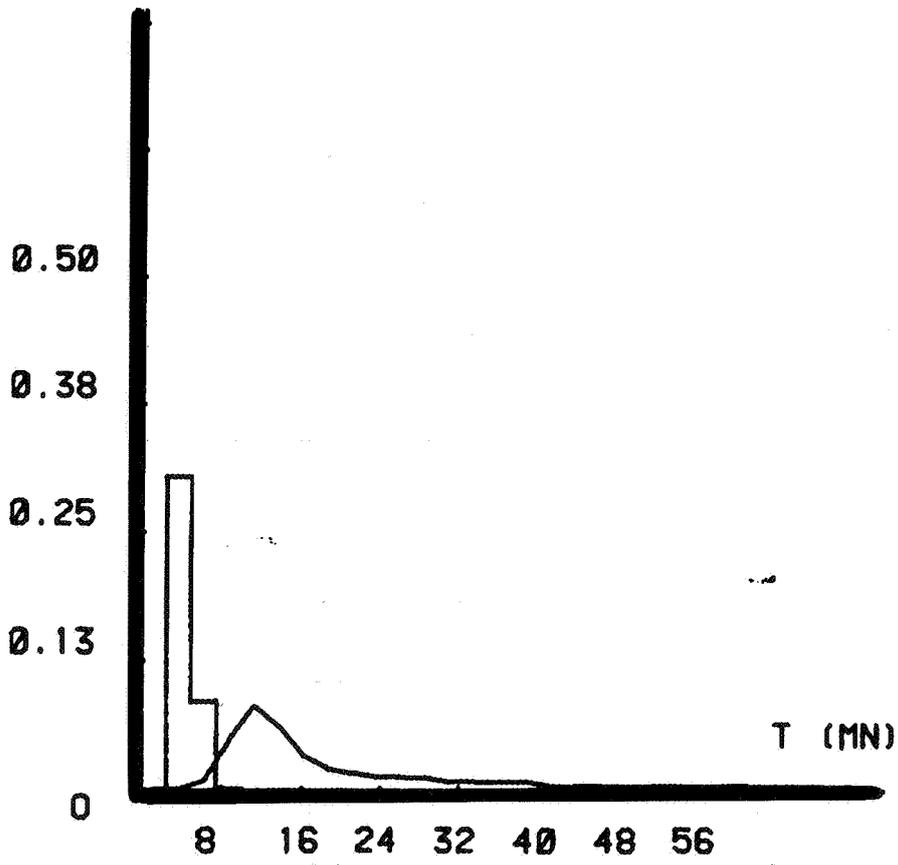
Les figures suivantes représentent la relation débit de pluie nette, débit écoulé afin de mieux cerner l'effet de la forme de ce débit de pluie sur la relation étudiée.



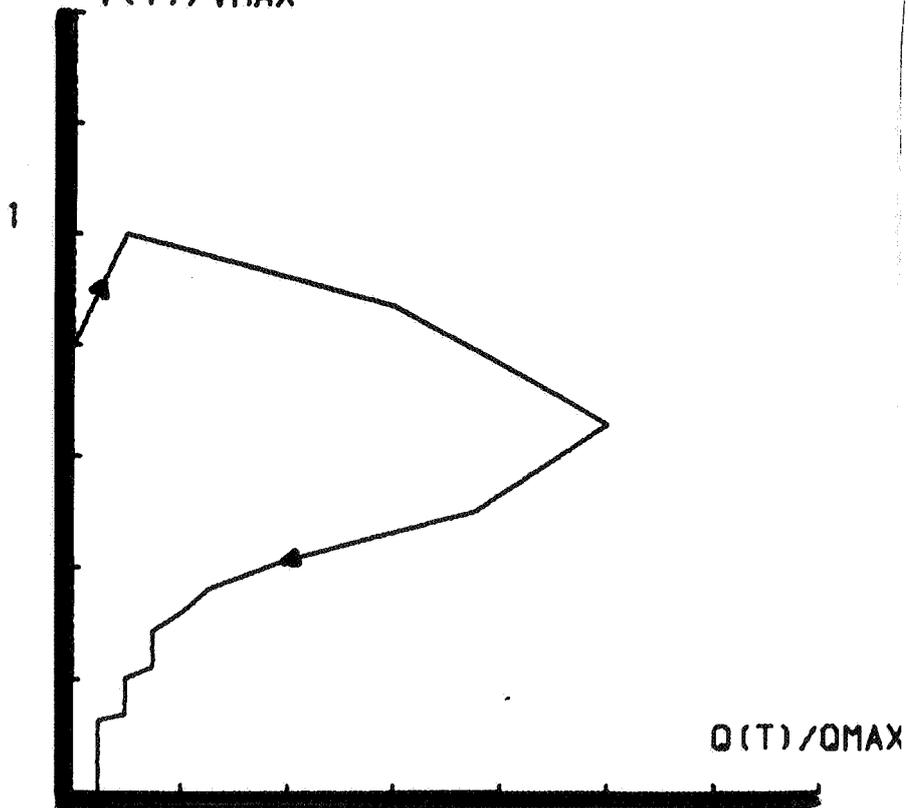
$S_0 = 43\ 000\ m^2$
 $PI = 10\ m^3$

Q (M3/S)

225

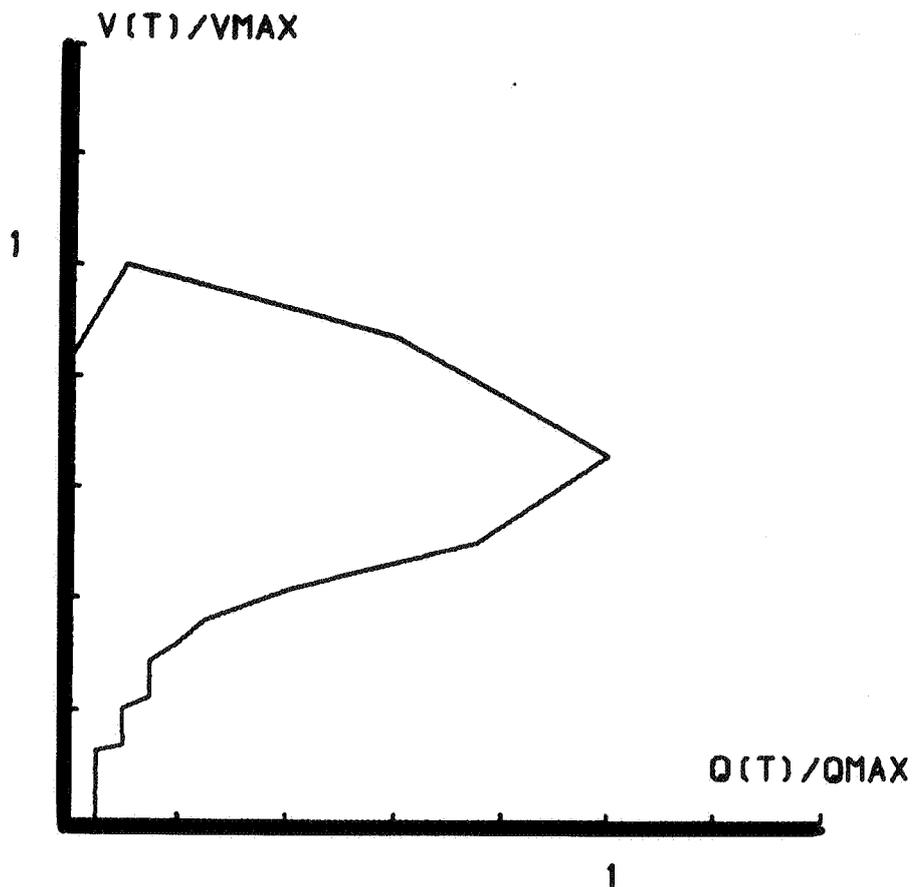
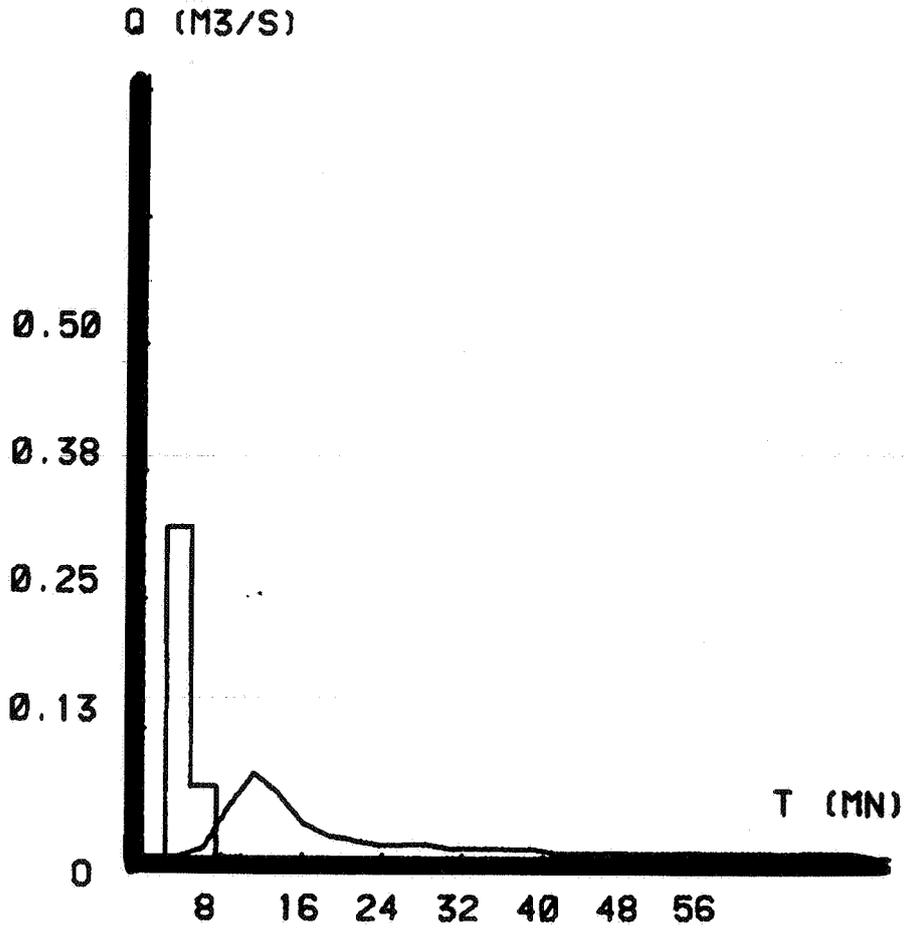


V(T)/VMAX

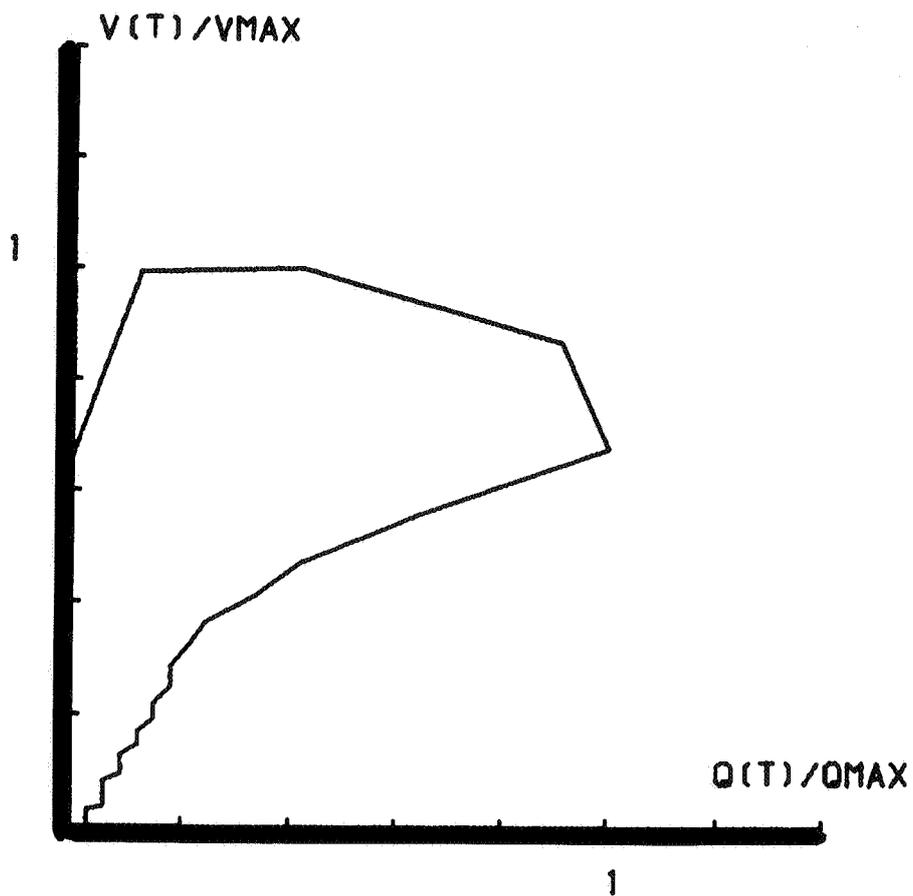
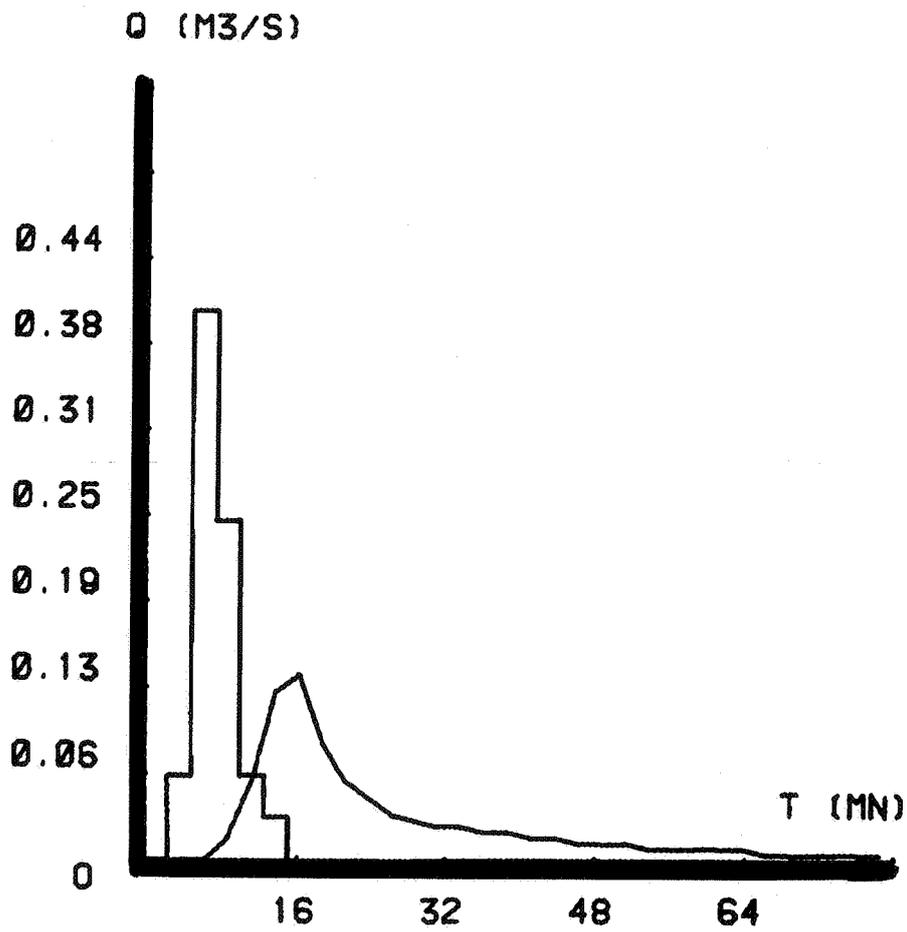


$S_0 = 43\ 000\ m^2$

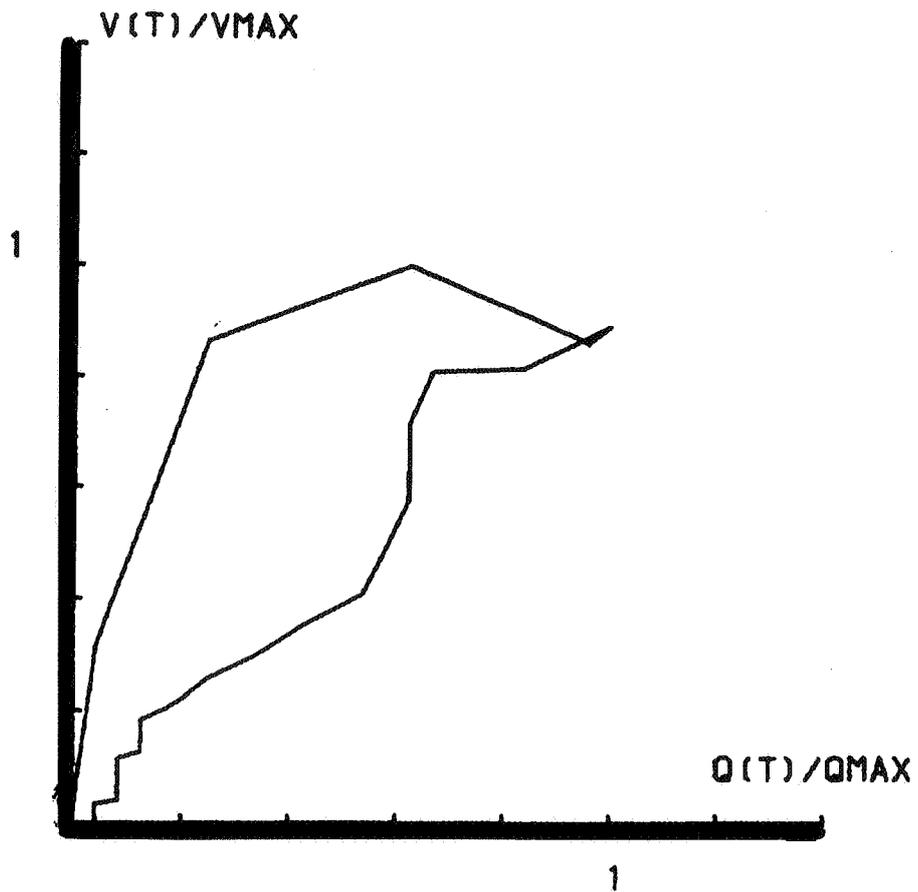
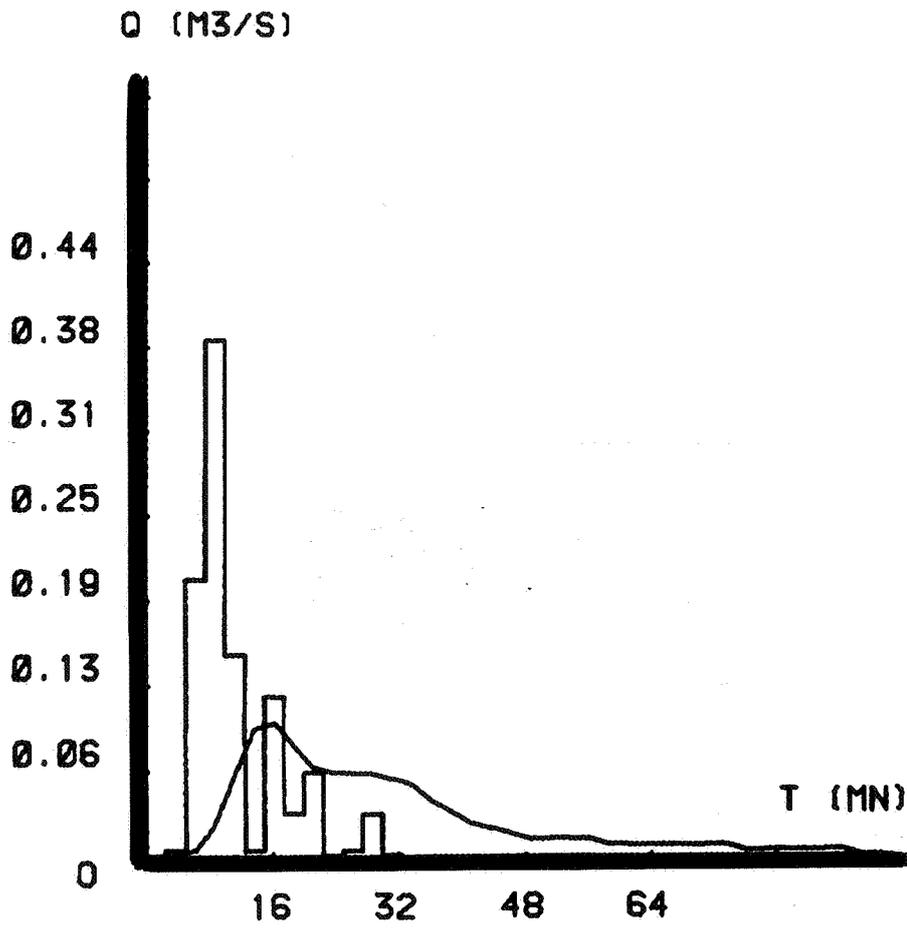
$PI = 40\ m^3$



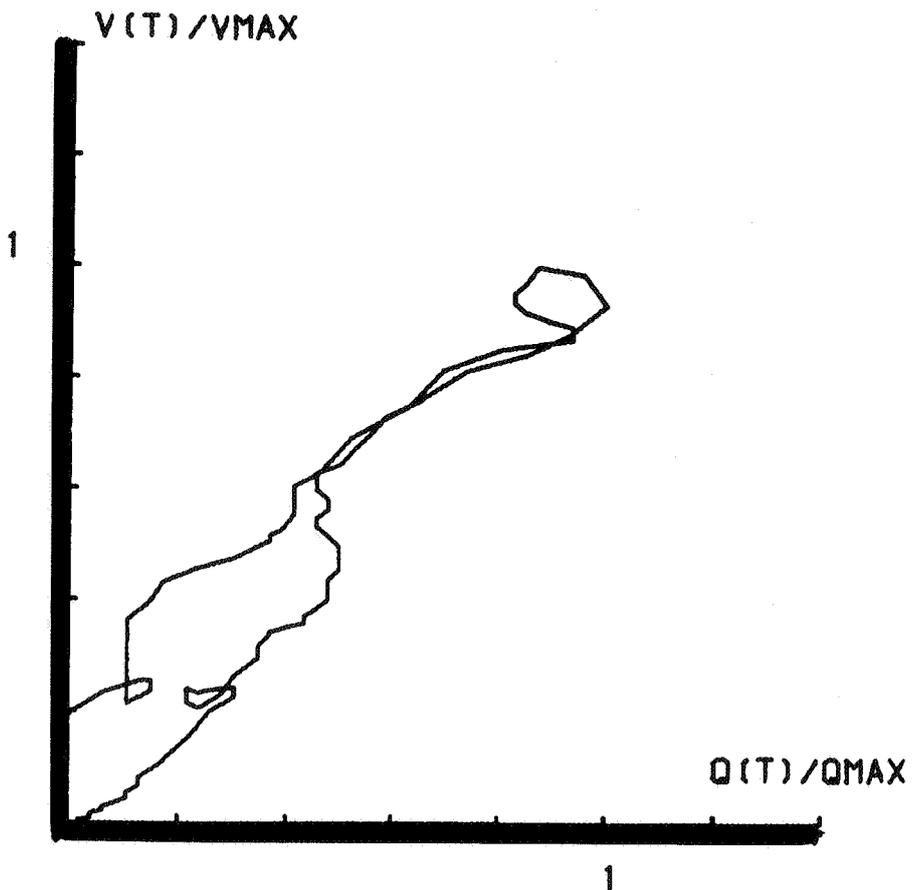
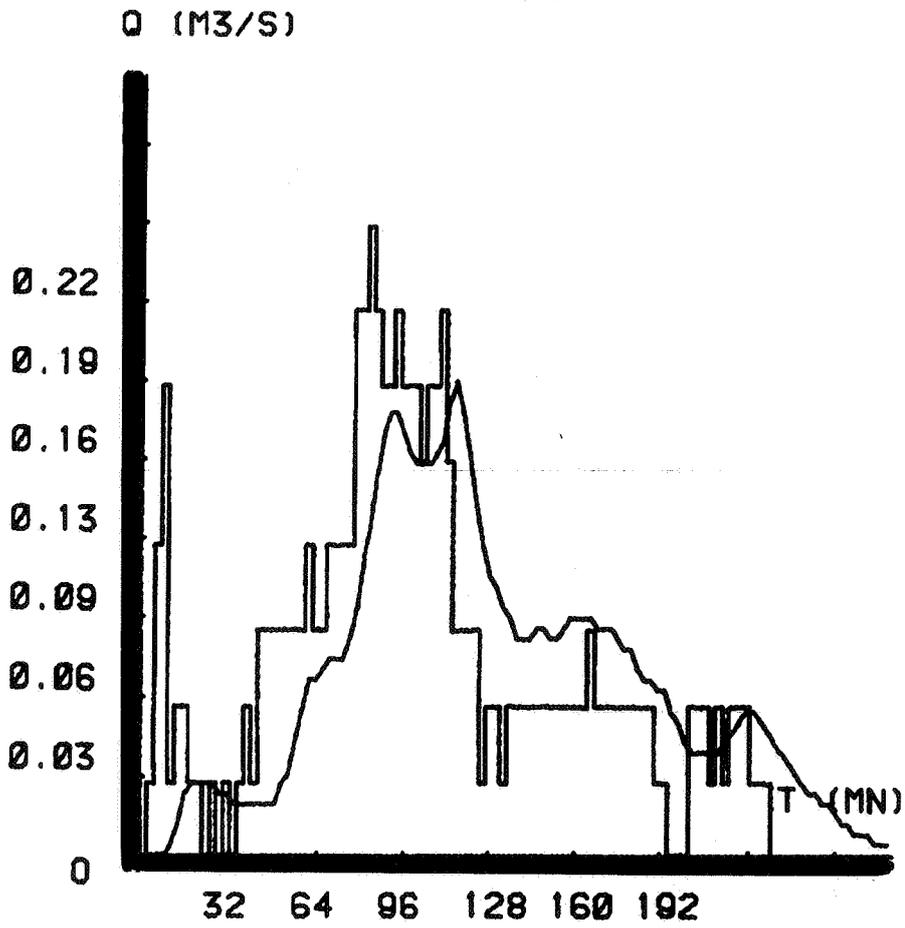
$S_0 = 46\ 000\ m^2$
 $PI = 40\ m^3$



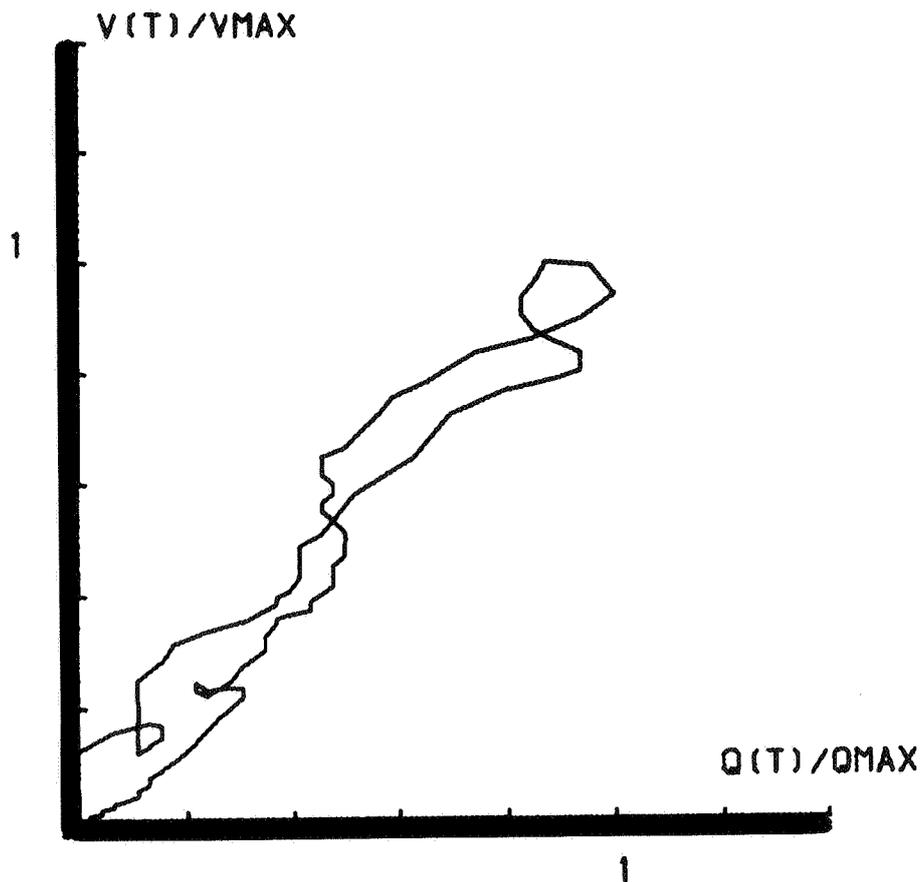
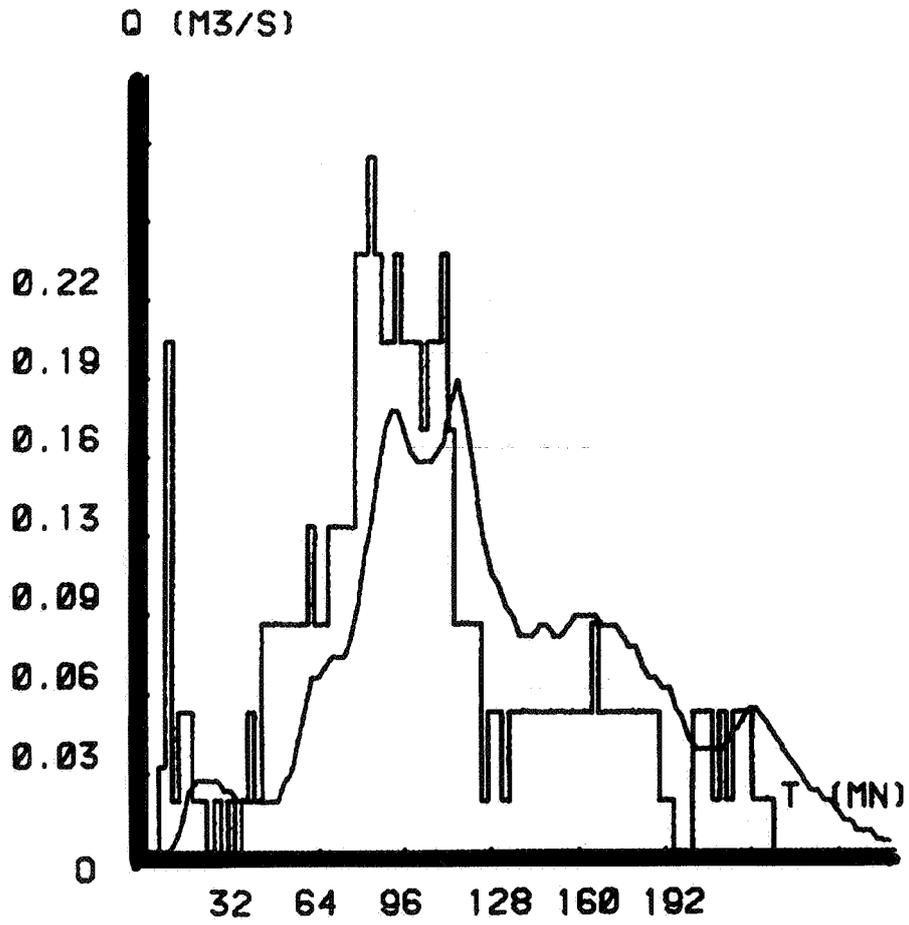
$S_0 = 46\ 000\ m^2$
 $PI = 10\ m^3$



$S_0 = 46\ 000\ m^2$
 $PI = 0\ m^3$

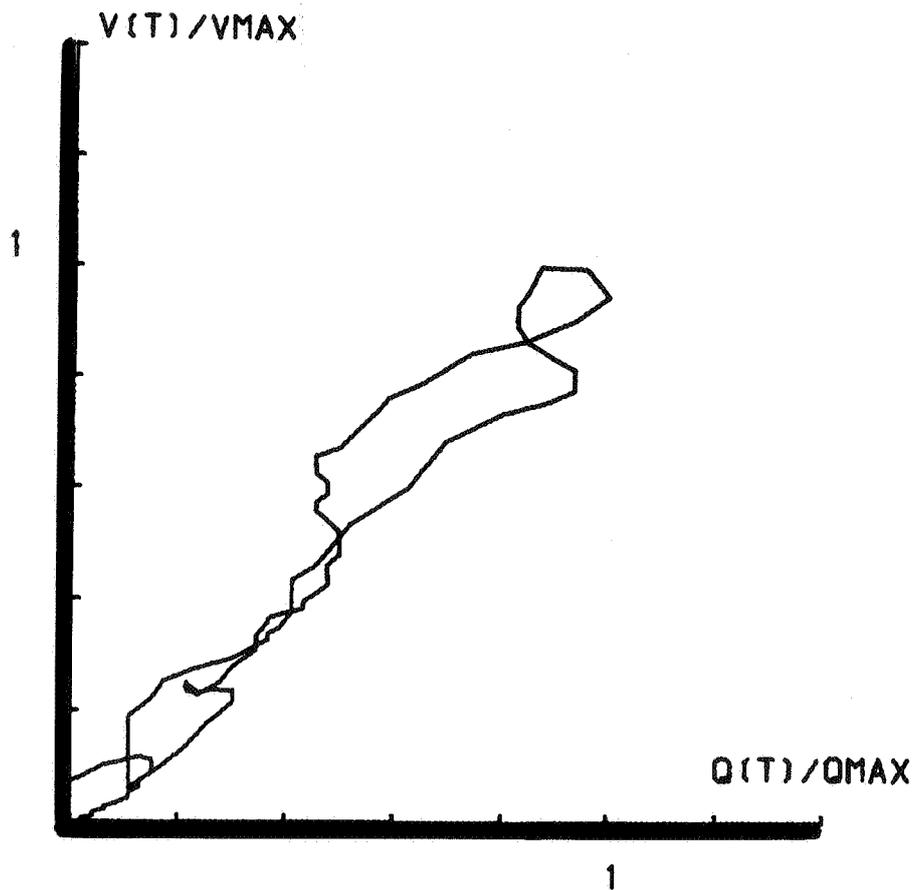
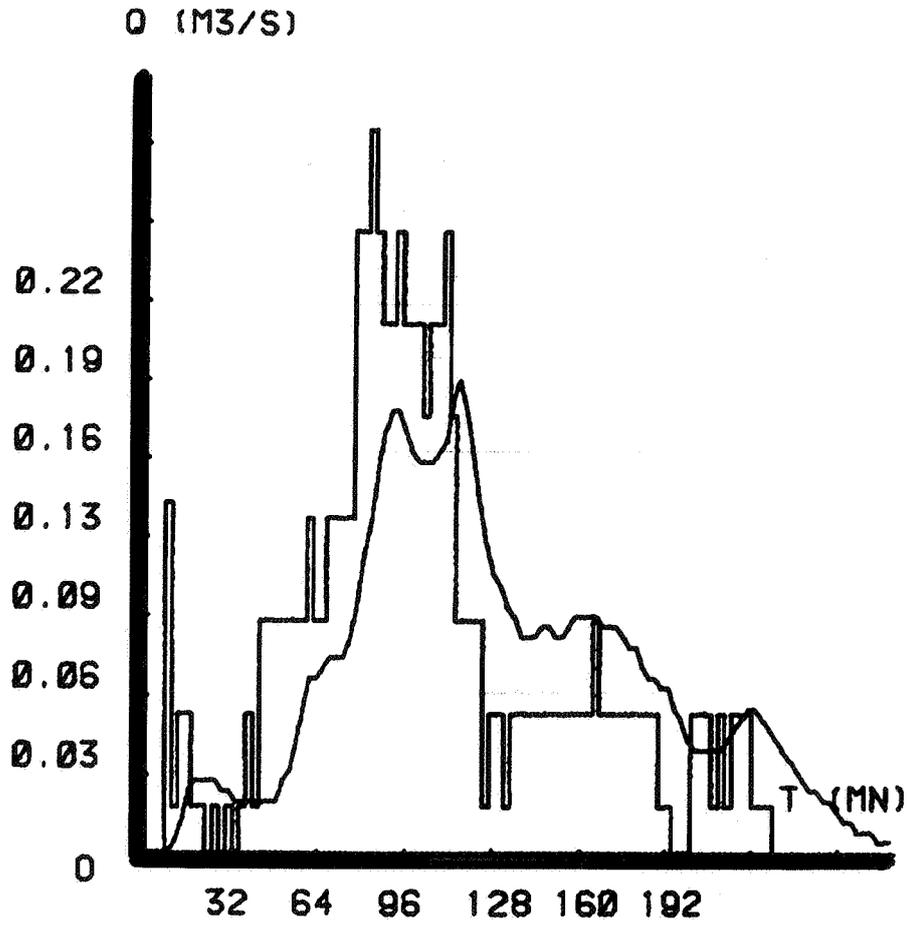


$S_0 = 50\,000\text{ m}^2$
 $PI = 0$



$S_0 = 58\ 000\ m^2$

$PI = 20\ m^3$



$S_0 = 61\ 000\ m^2$

$PI = 40\ m^3$

BASSIN 2

Parking Usine Caterpillar (Grenoble)

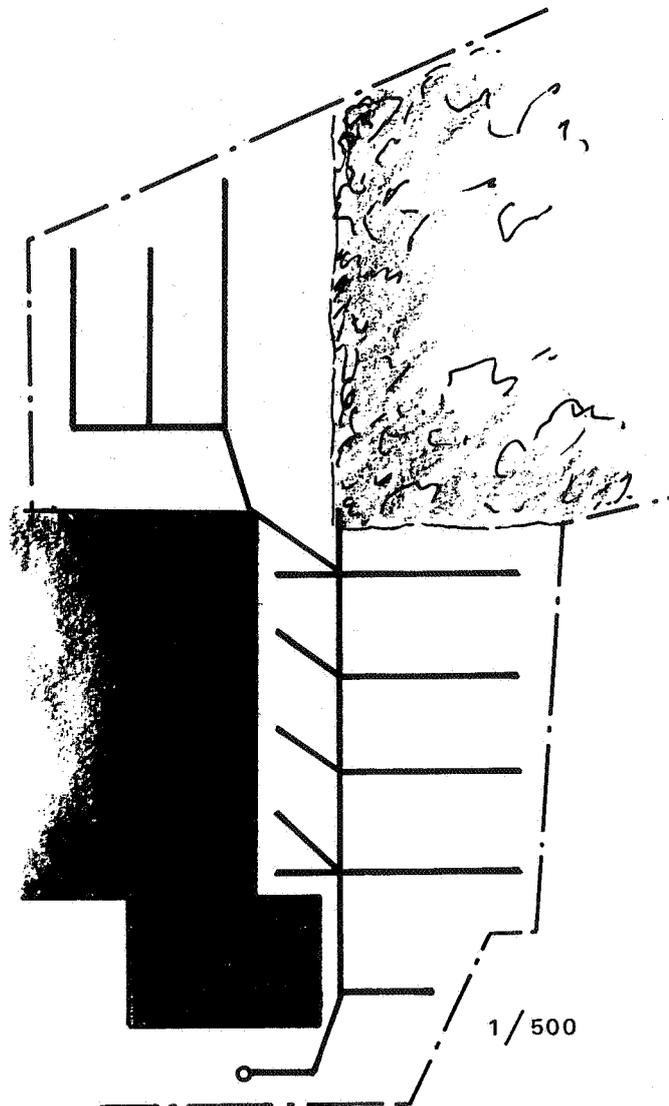
Caractéristiques :

Surface potentiellement drainante : 38 000 m²

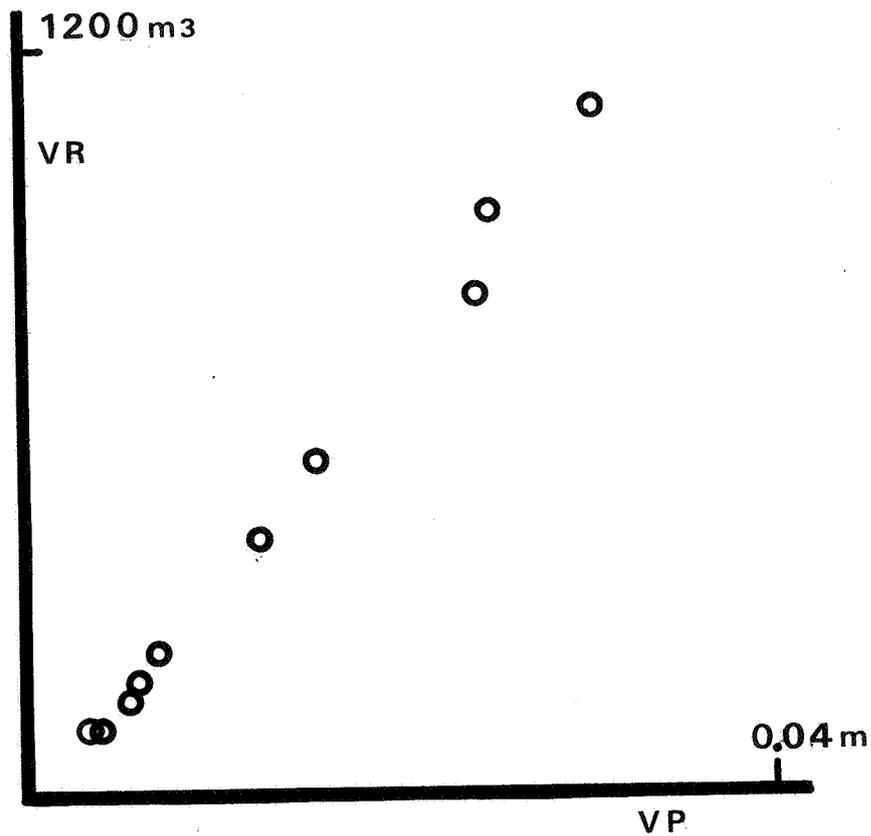
Taux d'imperméabilisation : 100 %

Pente moyenne le long du plus long parcours : 0.4 %

Schéma du bassin versant :



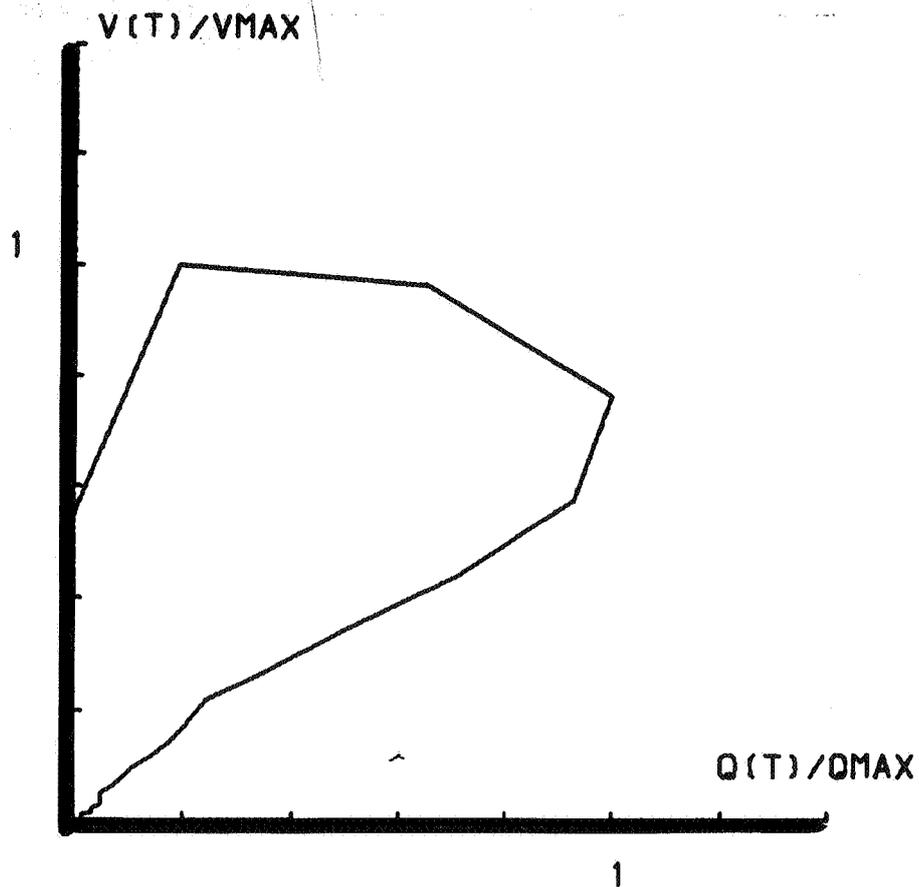
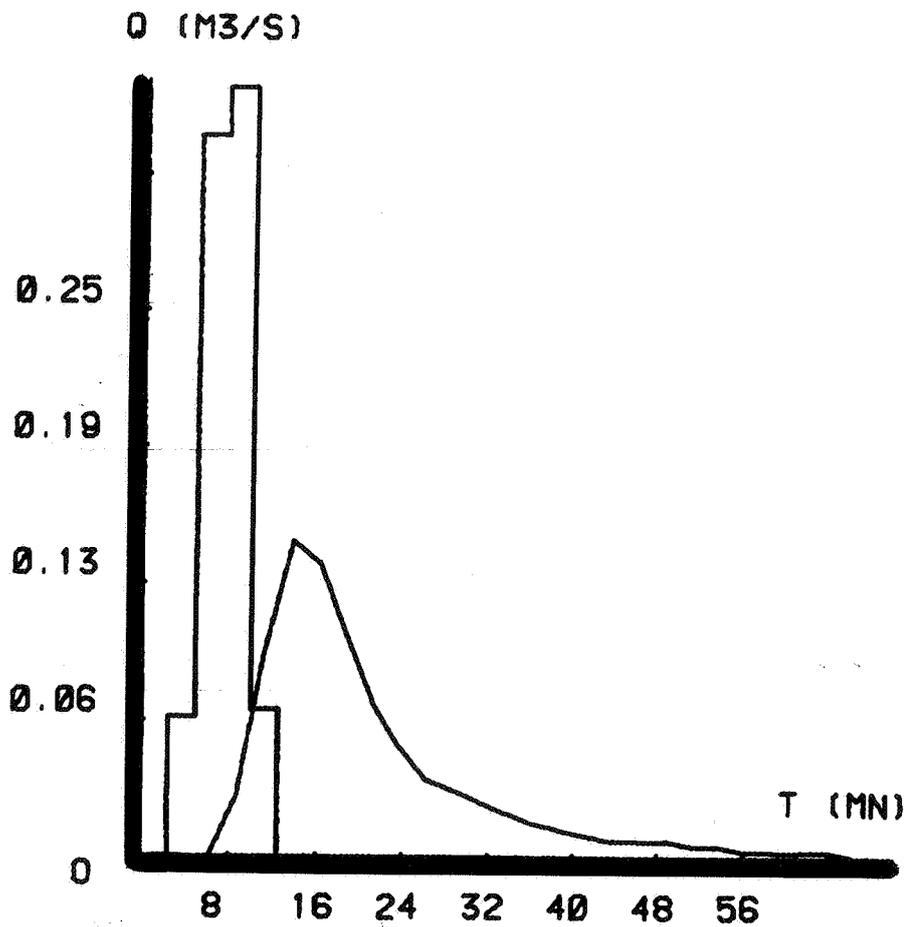
Pour dix événements, points ($V_R / V_{P_{max}}$, $V_R / V_{R_{max}}$)



Surface active moyenne : 37 900 m²

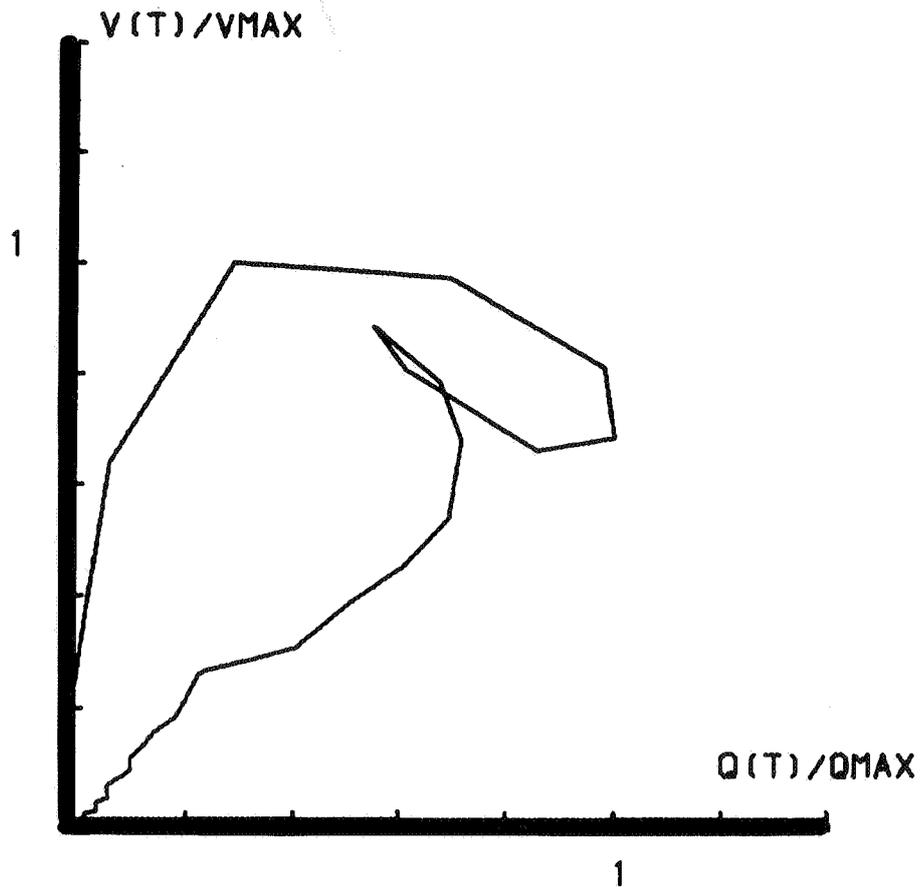
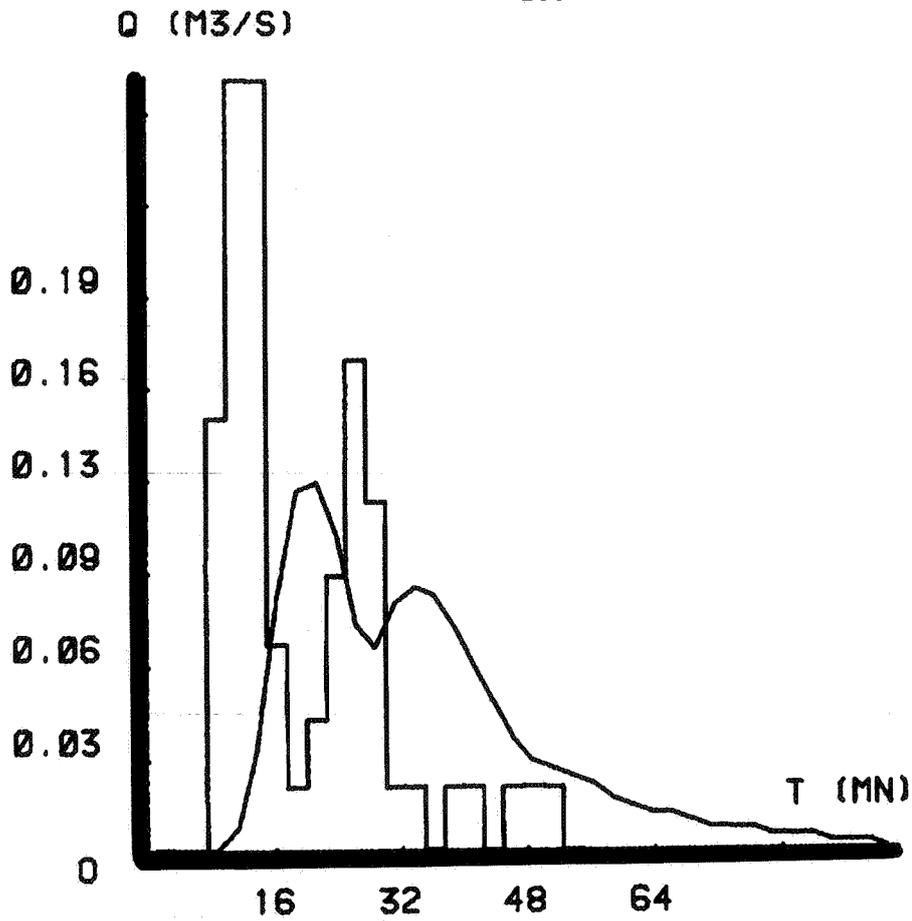
Volume moyen de pertes initiales : 53 m³

Cette surface active étant très voisine de la surface imperméable, nous l'avons retenue comme valeur unique de surface pour tous les événements observés, le volume de pluie brute $S_0 \cdot VP$ étant toujours supérieur au volume de débit écoulé par l'exutoire.

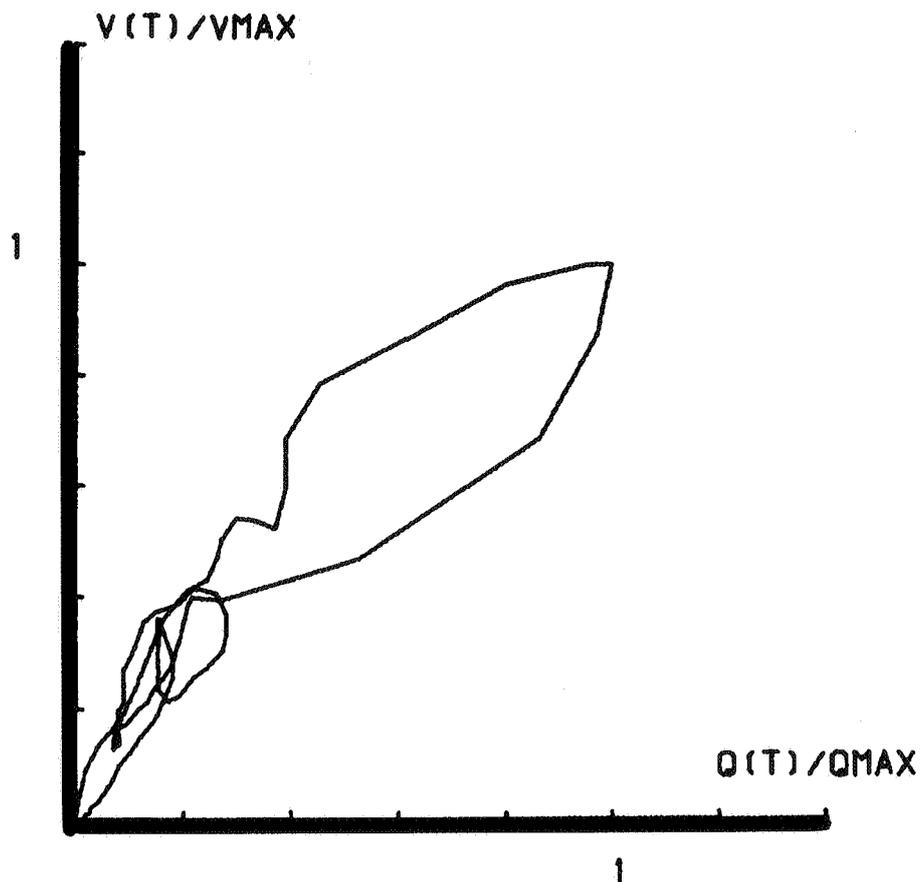
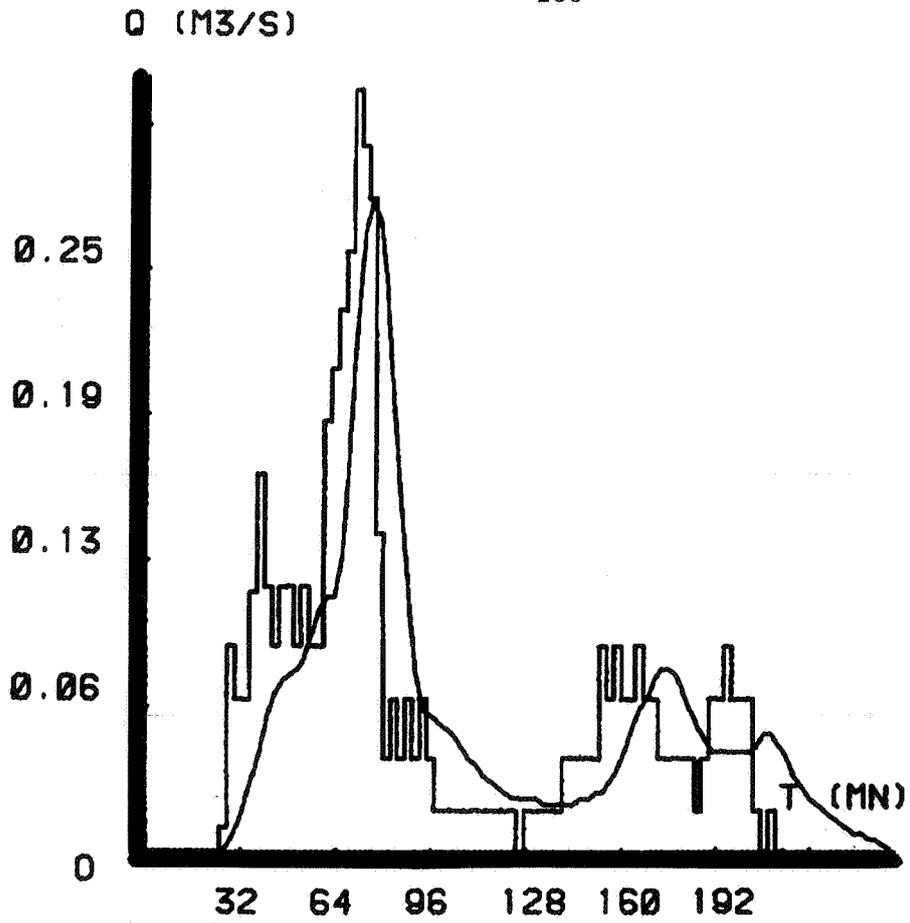


$S_0 = 37\,900 \text{ m}^2$

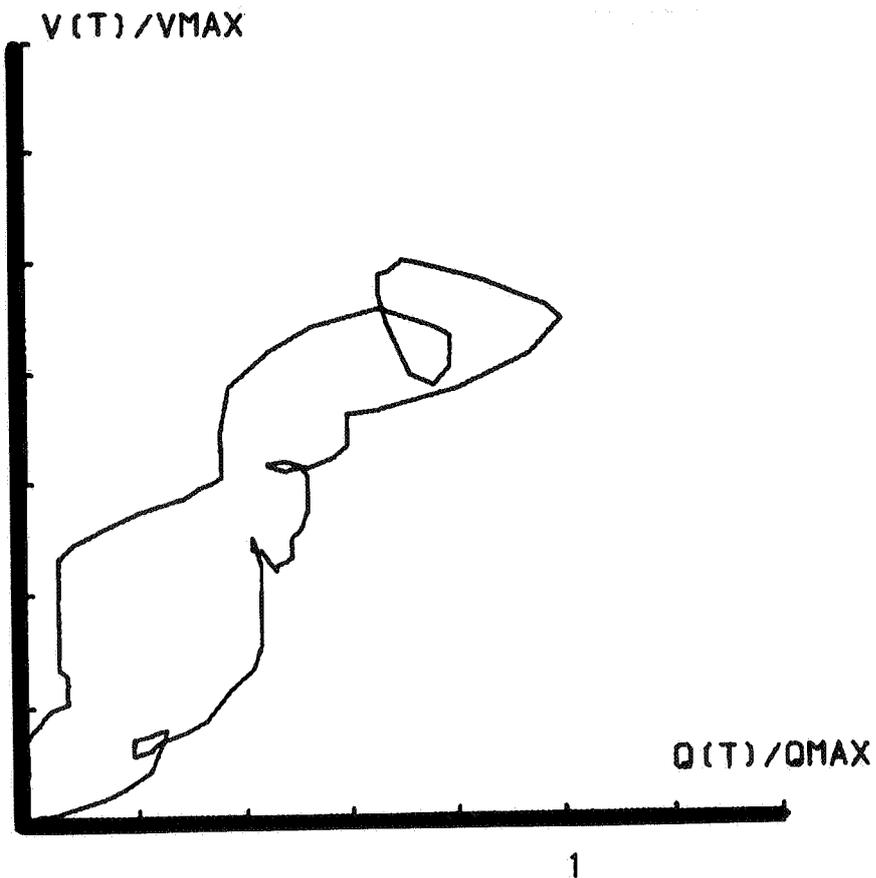
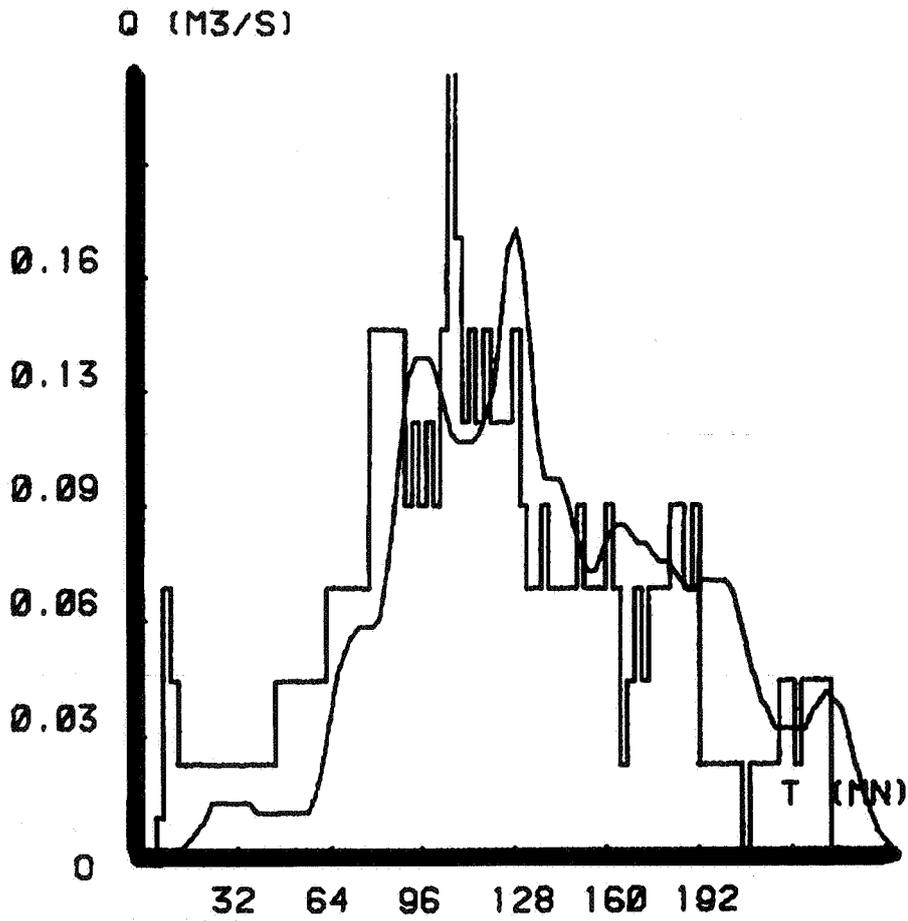
$PI = 40 \text{ m}^3$



$S_0 = 37\,900\text{ m}^2$
 $PI = 53\text{ m}^3$



$S_0 = 37\,900\text{ m}^2$
 $PI = 53\text{ m}^3$



$S_0 = 37\,900\text{ m}^2$
 $PI = 20\text{ m}^3$

BASSIN 3
ZUP Aix les Bains

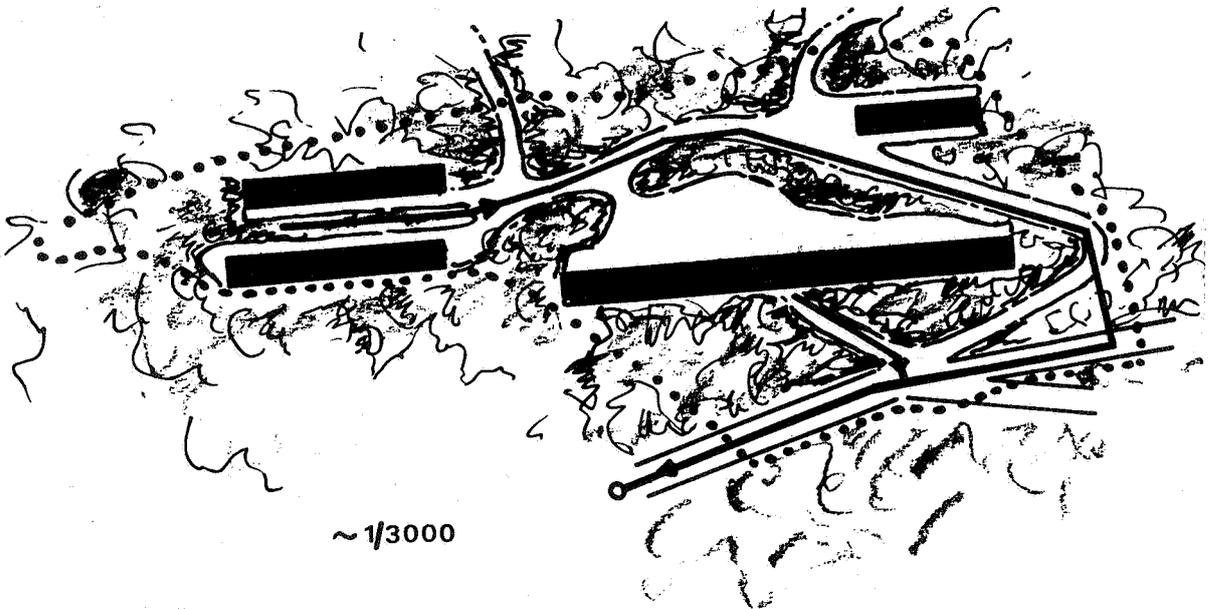
Caractéristiques :

Surface potentiellement drainante : 30 000 m²

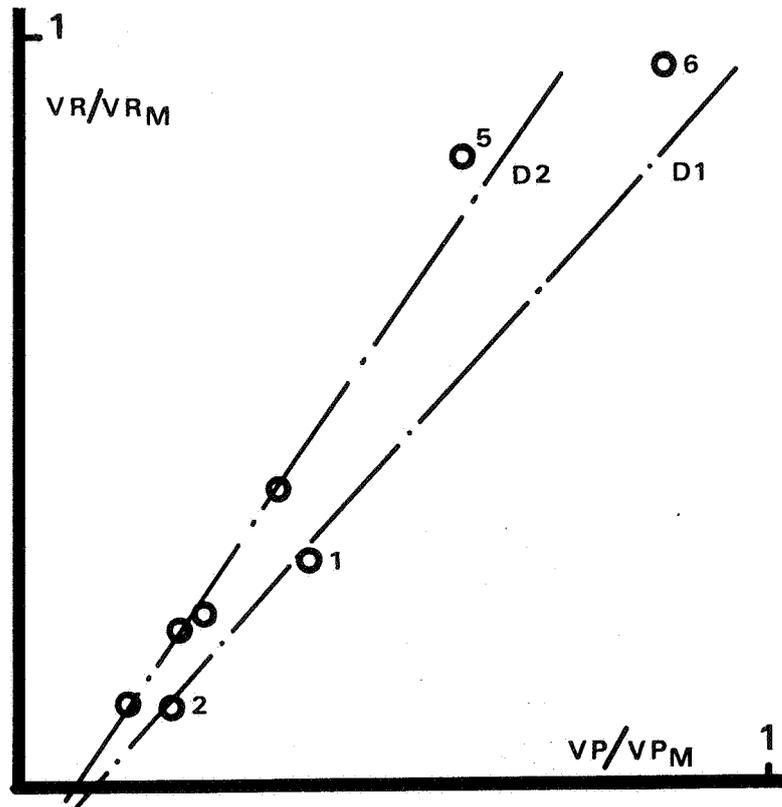
Pente moyenne le long du plus long parcours : 4.7 %

Imperméabilisation : 60 %

Schéma du bassin :



Pour huit événements, points $V R / V R_{\max}$, $V P / V P_{\max}$



La dispersion résulte de l'hétérogénéité du bassin versant, de l'antériorité pluviométrique, des erreurs de mesures.

Nous avons considéré deux droites enveloppes.

D1 : Surface active 21 700 m²

Pertes initiales 85 m³

D2 : Surface active 27 700 m²

Pertes initiales 80 m³

D'après les quelques données et renseignements que nous avons pu obtenir, les points situés sur la courbe D2 semblent correspondre soit à des événements succédant de quelques heures un événement antérieur, soit à des événements de plus longue durée.

Les deux valeurs de surface active déterminées sont toutes deux supérieures à la valeur de la surface imperméabilisée donnée par l'enquête [22] et qui aurait pour valeur 18 000 m².

De ce fait, nous donnons les résultats suivants :

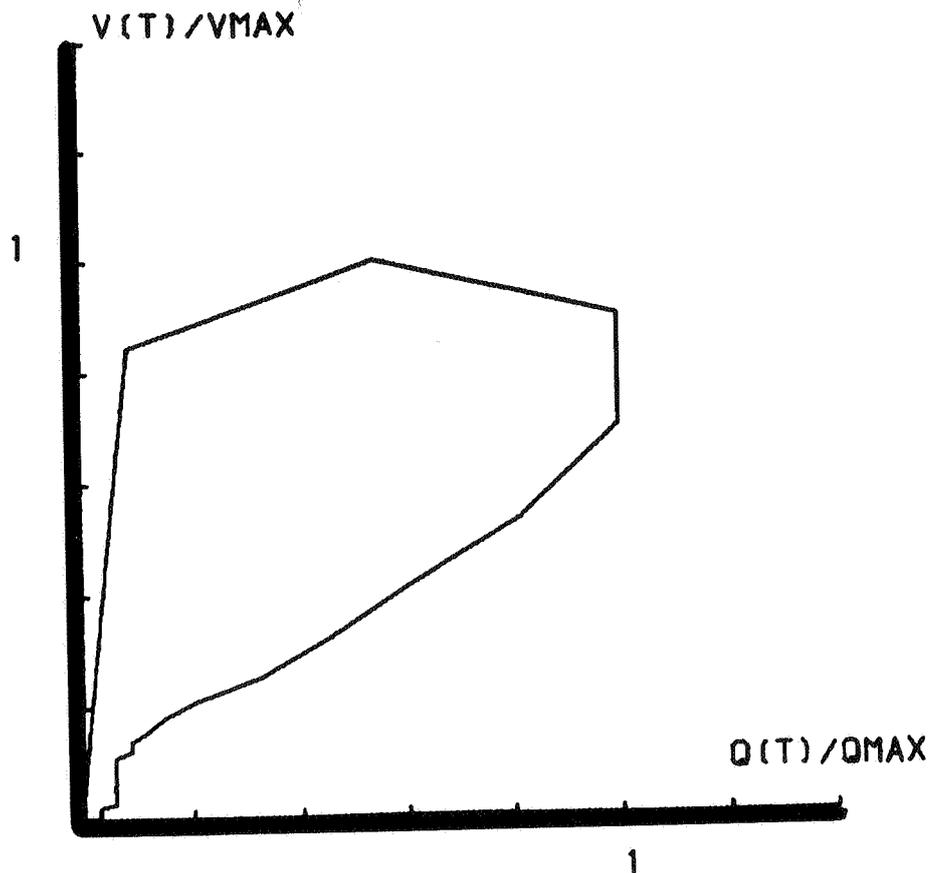
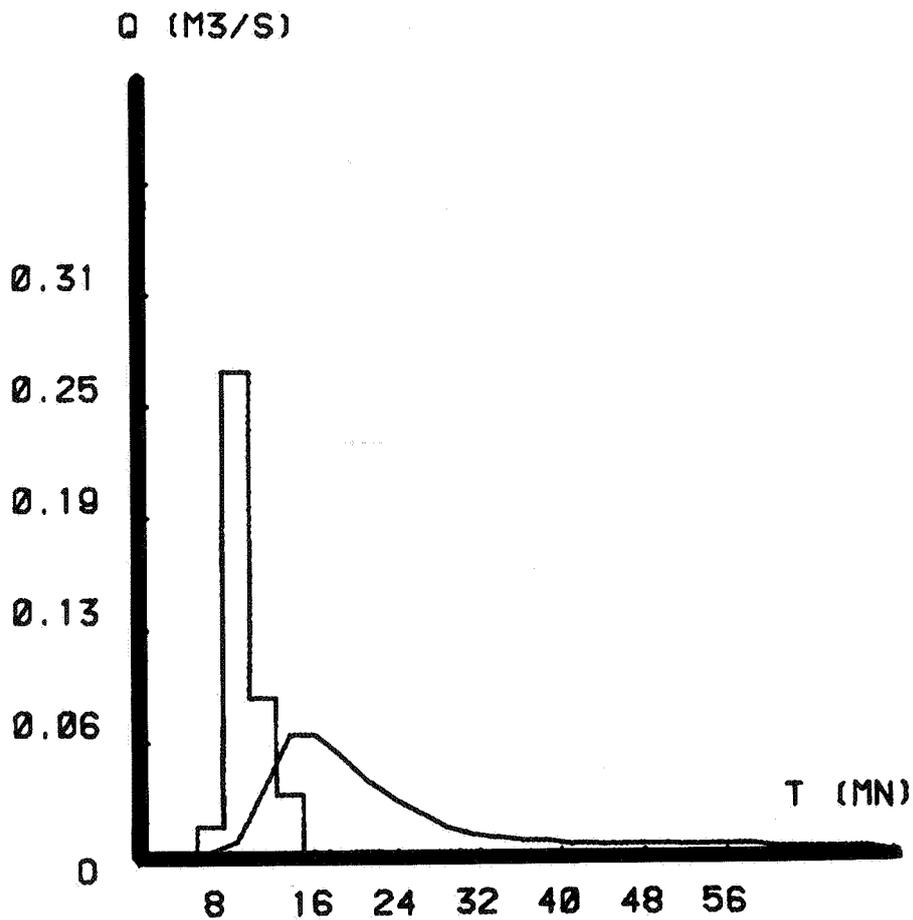
$$\text{événements 1 et 2 : } S_0 = 18\,000 \text{ m}^2$$

$$S_0 = 22\,000 \text{ m}^2$$

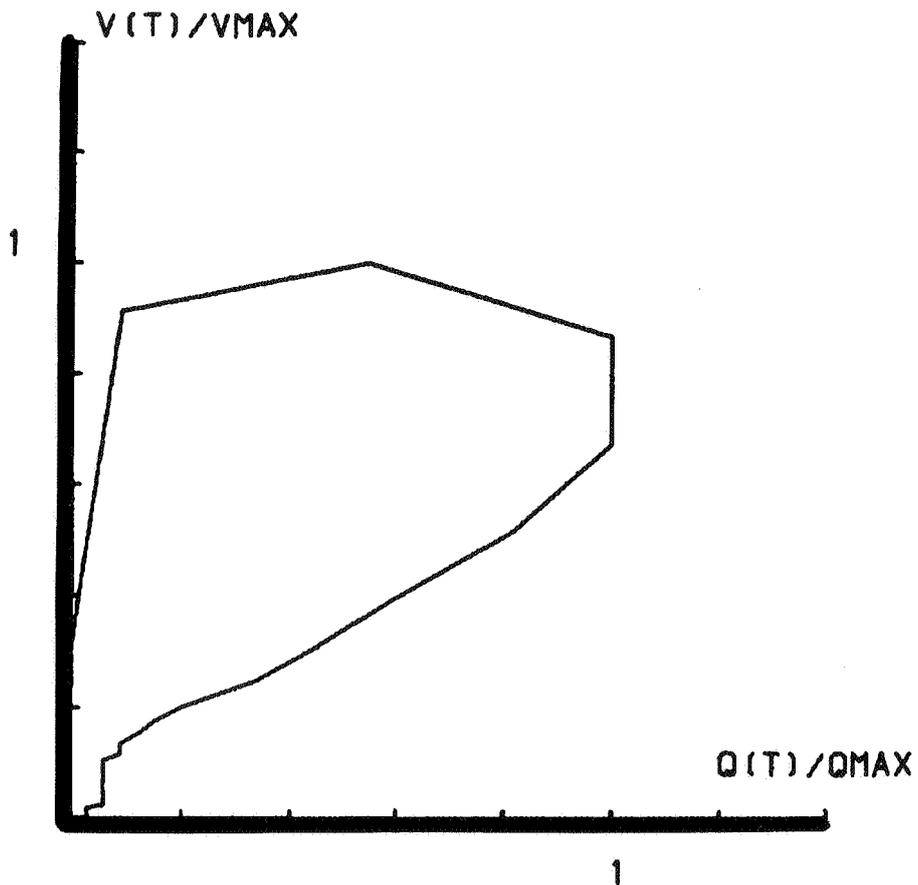
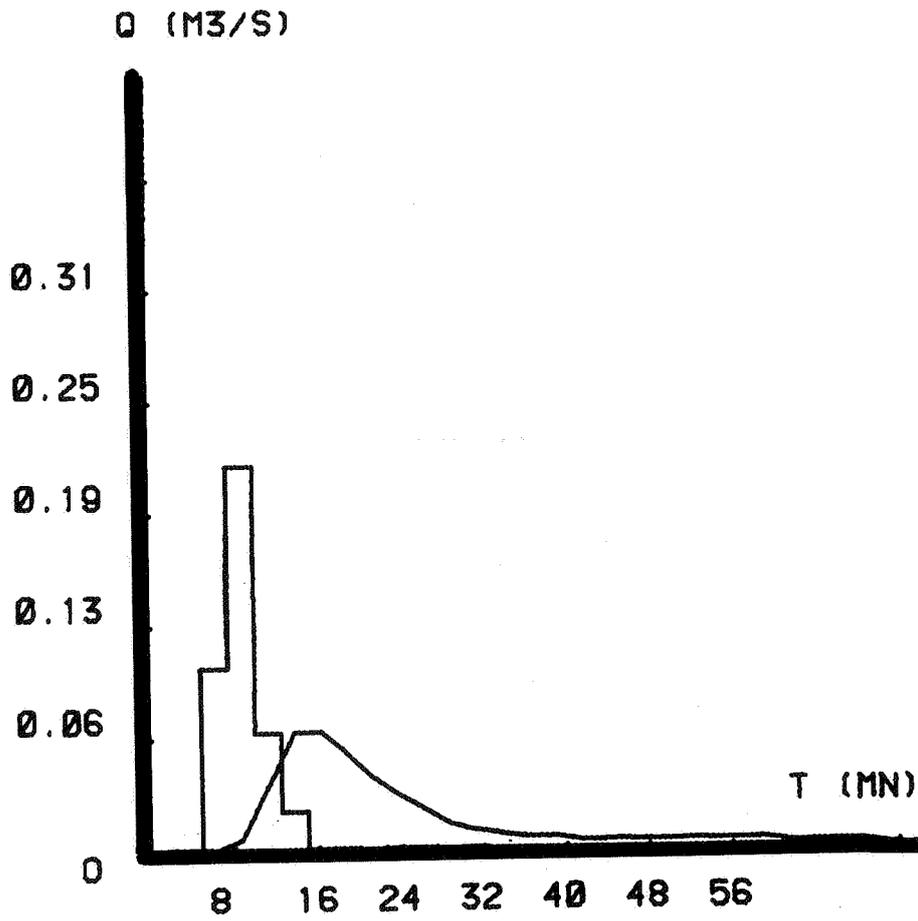
$$\text{événements 5 et 6 : } S_0 = 27\,700 \text{ m}^2$$

Pour ces deux derniers, une surface active de $18\,000 \text{ m}^2$ donne un volume de pluie nette inférieur au volume écoulé. Nous pensons donc que des surfaces perméables ont participé à l'écoulement, en durée et en volume, ces pluies étant plus importantes que celles numérotées 1 et 2.

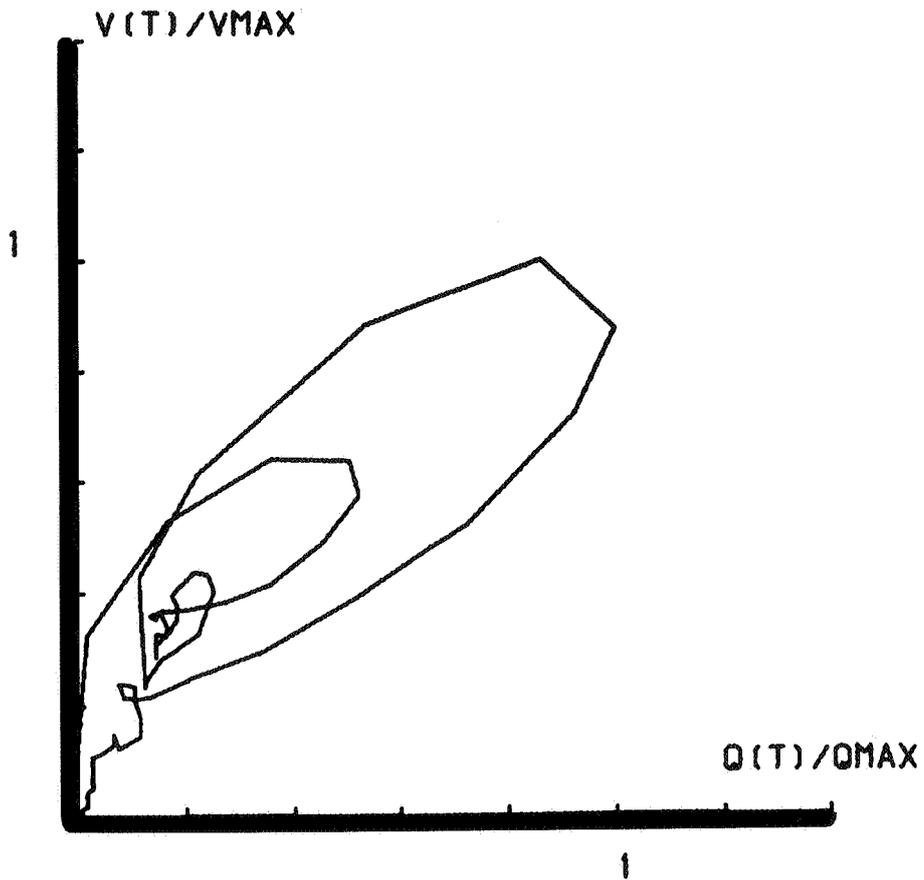
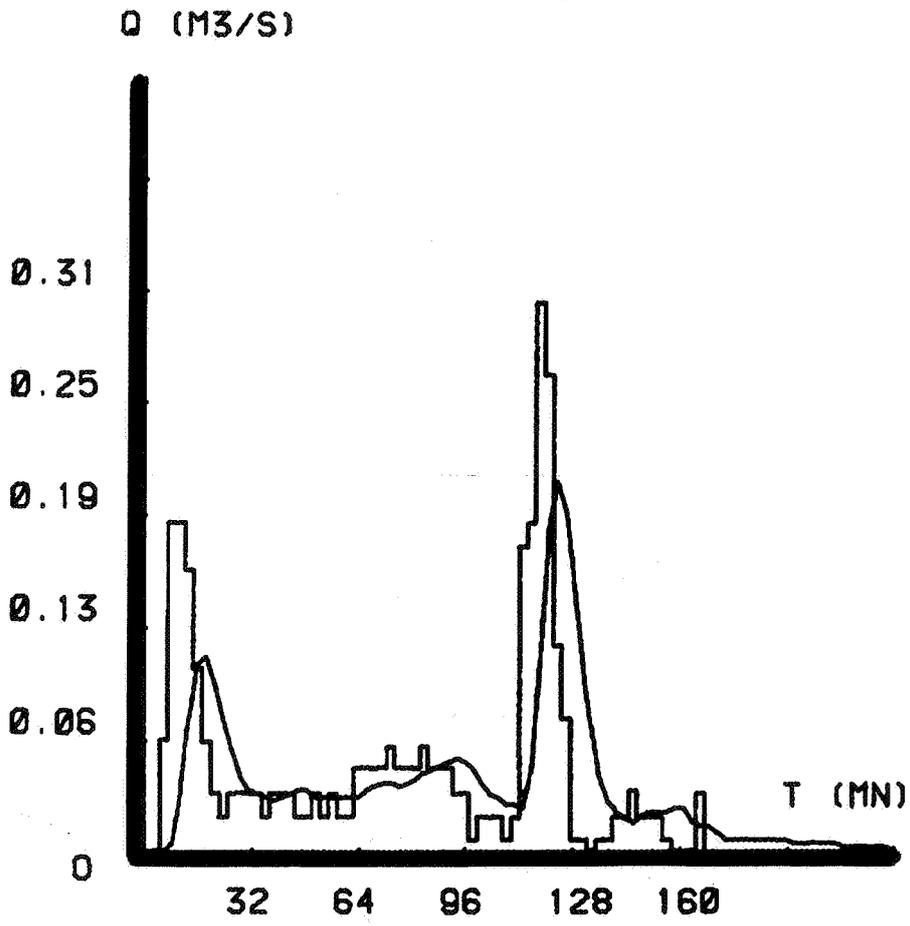
Nous avons pu remarquer une stabilité des formes de relation $V(t)$, $Q_S(t)$ en faisant varier les valeurs de surface active et de pertes initiales.



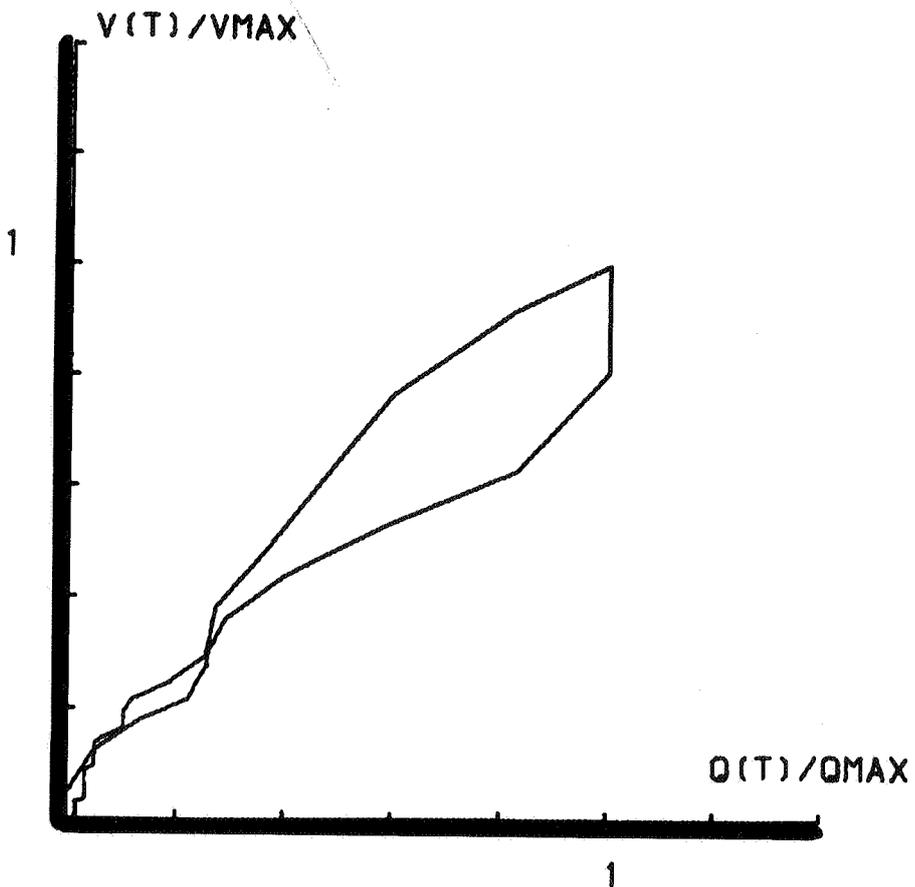
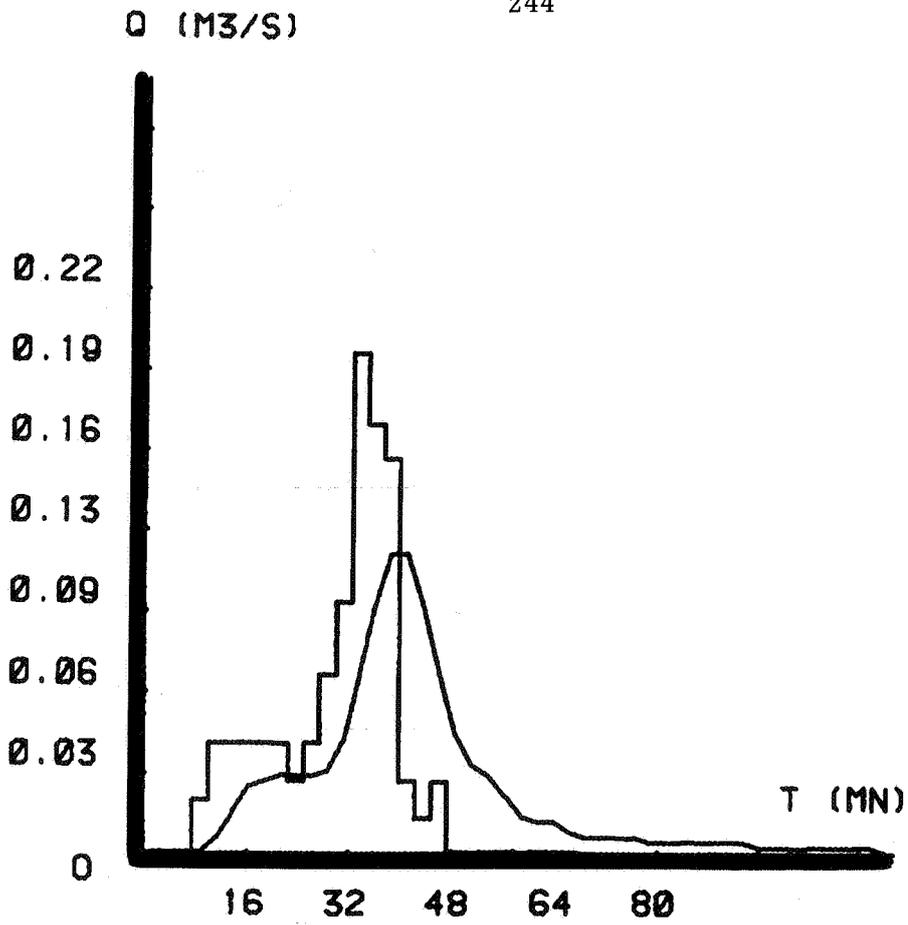
$S_0 = 22\ 000\ m^2$
 $PI = 30\ m^3$



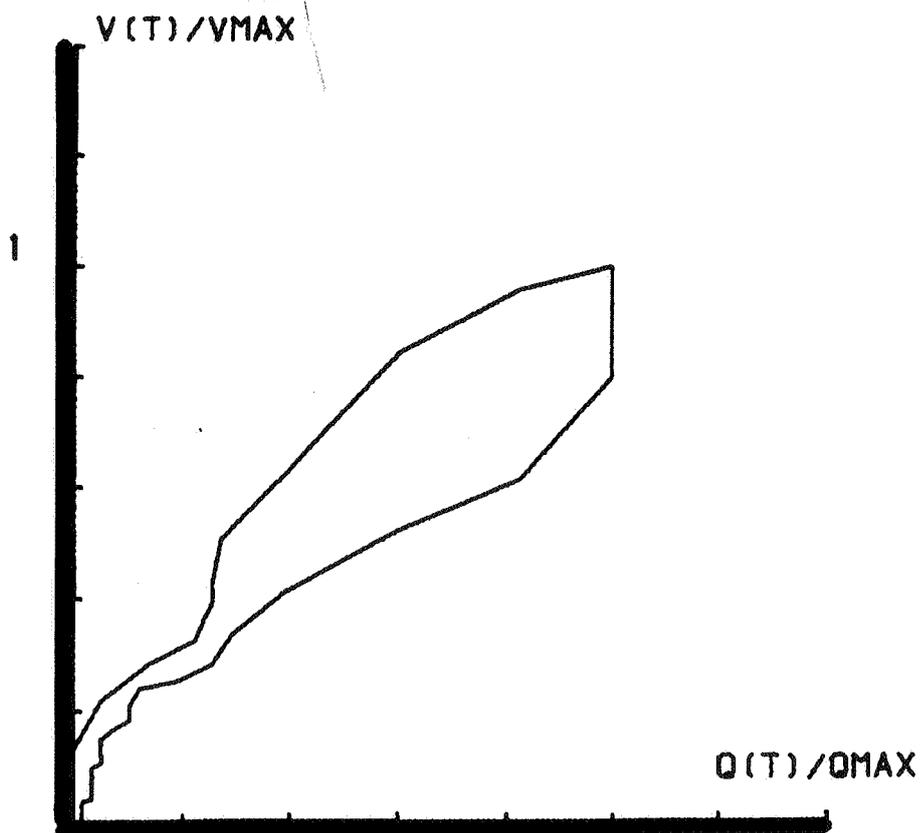
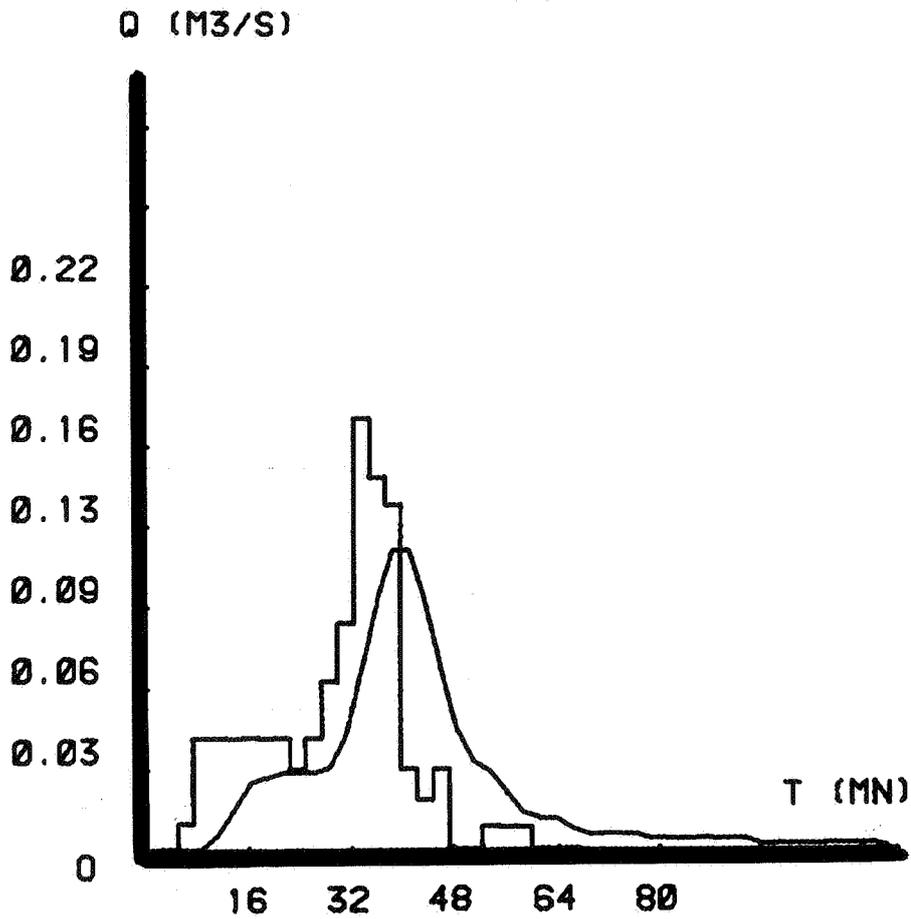
$S_0 = 18\ 000\ m^2$
 $PI = 10\ m^3$



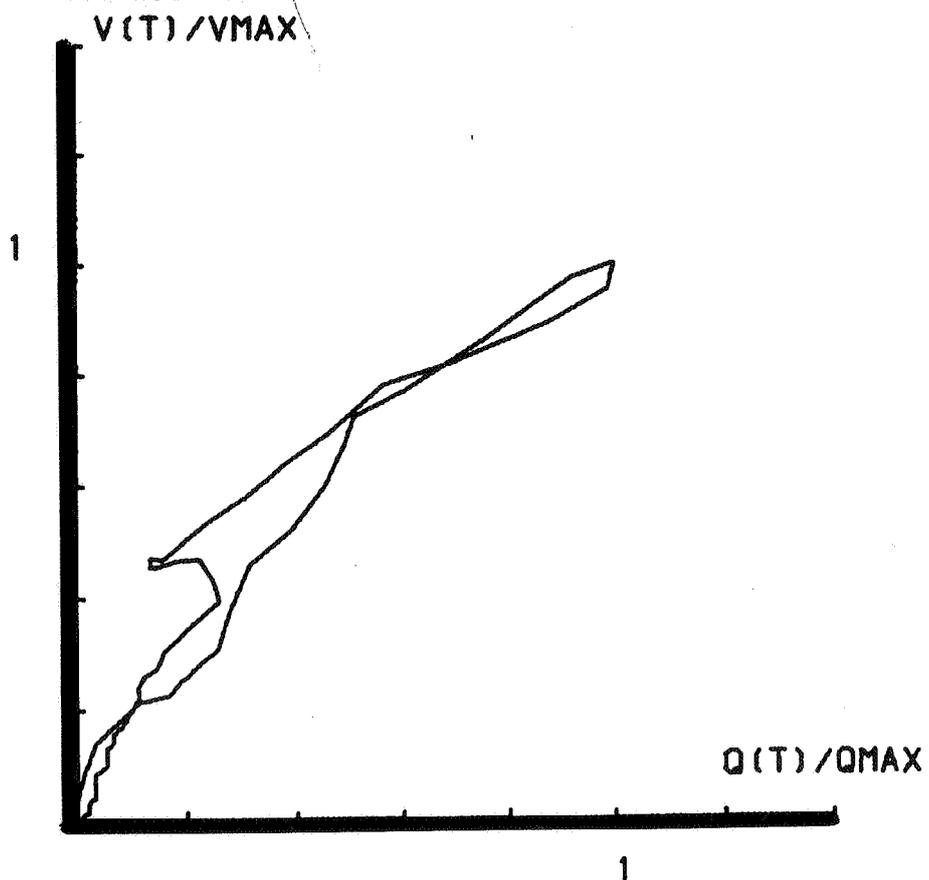
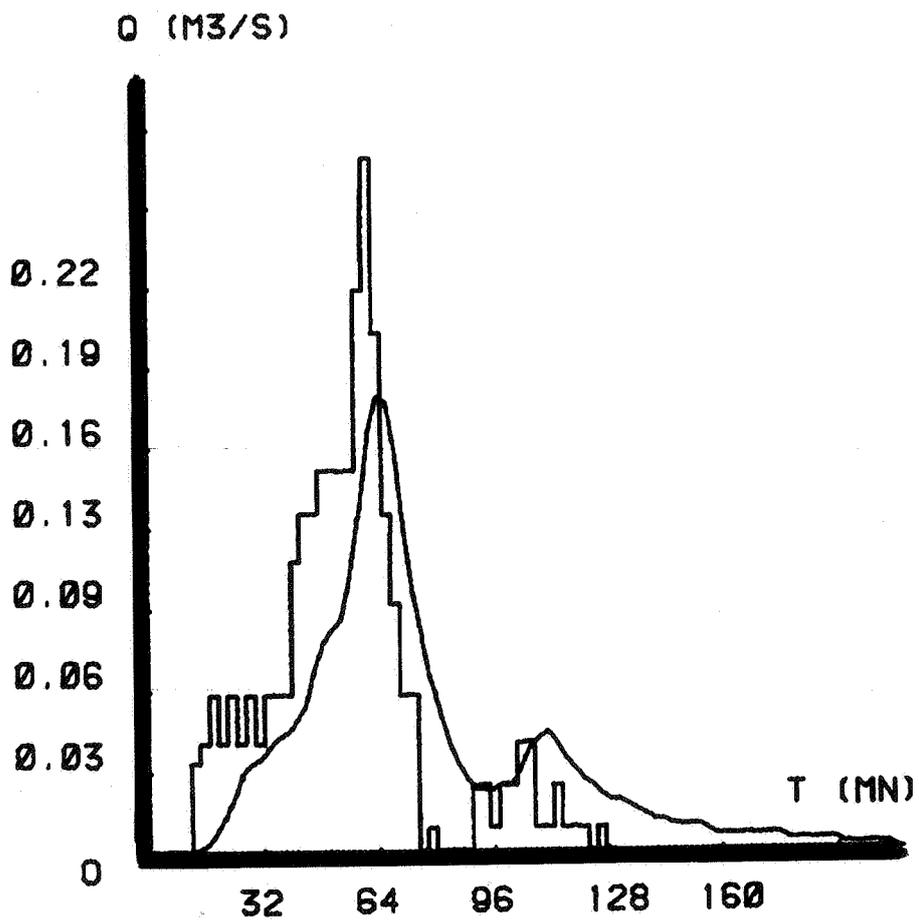
$S_0 = 21\,700\text{ m}^2$
 $PI = 10\text{ m}^3$



$S_0 = 22\ 000\ m^2$
 $PI = 20\ m^3$



$S_0 = 18\ 000\ m^2$
 $PI = 10\ m^3$



$S_0 = 27\,700\text{ m}^2$
 $PI = 20\text{ m}^3$

III.2 - Commentaires

Ces quelques résultats illustrent un comportement dont la tendance se répète dans le traitement des mesures expérimentales que nous avons effectué.

Elle peut être définie comme suit :

plus la pluie est longue, les variations du débit sur le temps faibles, plus est resserrée la courbe de type hystérésis reliant $V(t) / V_{\max}$, $Q_s(t) / Q_{\max}$.

Une hystérésis écartée pouvant être représentée par un noyau $(h)^*n$ et une hystérésis très faiblement écartée par une constante c'est-à-dire un noyau du type $(h)^*0$, la valeur de l'exposant n dépend du couple pluie / bassin, c'est-à-dire du quadripôle que nous avons introduit dans le texte central, et non pas du bassin versant seul. Nous dirons que le comportement est homogène lorsque n peut être égal à zéro (modèle à réservoir linéaire) et hétérogène lorsque l'exposant n est supérieur ou égal à 1 (modèle de Nash par exemple).

Une pluie brève induit un ruissellement qui révèle la complexité du cheminement de l'eau, d'où le qualitatif d'hétérogène.

Au contraire, une pluie longue induit un ruissellement qui homogénéise les cheminements.

Pour un bassin quelconque, le champ potentiel des transformations ne peut pas être représenté par un modèle qui n'intégrerait pas ce passage de l'hétérogène à l'homogène.

A cette étape, nous n'avons pas recherché à formuler la relation n — (pluie / bassin), puisque nous pensons que la genèse d'un modèle doit résulter d'un cheminement qui balaye le quadripôle

pluie — sol — réseau — débit

COMPLEMENT 2

Répartition la plus probable de surfaces de drainage par rapport à un exutoire [25].

Soit une surface composée de N surfaces élémentaires et découpée en n zones à partir de l'exutoire.

Dans la première zone, on peut placer n_1 surfaces élémentaires choisies parmi les N , c'est-à-dire que l'on a $C_{n_1}^N$ possibilités.

Pour la seconde zone, on place n_2 surfaces choisies parmi les $(N - n_1)$ surfaces restantes et l'on a : $C_{n_2}^{N-n_1}$ possibilités.

etc ...

Il y a donc $C_{n_1}^N \cdot C_{n_2}^{N-n_1} \cdot \dots \cdot C_{n_n}^{N-n_1+n_2+\dots}$ possibilités de réaliser la répartition (n_1, n_2, \dots, n_n) .

Soit $E(n_1, \dots, n_n)$ ce nombre

$$E(n_1, \dots, n_n) = \frac{N!}{\prod (n_i!)}$$

En utilisant la fonction eulérienne, soit

$$H(n_1, \dots, n_n) = \text{Log} \Gamma(N+1) - \sum_i \text{Log} \Gamma(n_i+1)$$

fonction qui présente les mêmes caractéristiques que E .

On appellera répartition la plus probable la répartition (n_i) qui satisfait :

$$\left| \begin{array}{l} \sum n_i = N \\ H(n_i) \text{ maximum} \end{array} \right.$$

On peut résoudre ce problème en introduisant une contrainte telle qu'un "coût" moyen à atteindre si est défini un coût par zone ; soit g ce "coût" moyen et g_i le "coût" par zone.

On recherchera (n_i) tel que :

$$\left| \begin{array}{l} \sum n_i = N \\ \sum n_i \cdot g_i = g \cdot N \\ H(n_i) \text{ maximum} \end{array} \right.$$

Ce problème peut être également formulé en considérant une fonction de répartition $f(x)$ et une fonction coût $g(x)$ continues sur un domaine .

$$\int f(x) dx = N$$

$$\int f(x) g(x) dx = g N$$

$$\text{Log } \Gamma(N+1) - \int \text{Log} (\Gamma(f(x)+1)) dx \quad \text{maximum}$$

COMPLEMENT 3

Relation opérateur ; Peigne de Dirac et opérateur exponentiel ; Domaine de validité du modèle à réservoir linéaire ; Linéarité / non linéarité.

$$\text{Soit } O(t) = \sum_{j=1}^N a_j \cdot \delta(t - jT)$$

Premier type de relation

Problème :

$$\text{Passer de } \sum_{j=1}^N a_j \cdot \delta(t - jT) \text{ à } \delta(t - nT), \text{ sachant que}$$

$$\delta(t - nT) \text{ peut être relié à } \frac{1}{nT} e^{-t/nT}$$

Soit la transformation de Laplace (L)

$$L(O) = \sum_{j=1}^N a_j e^{-jTs}$$

$$L(\delta - nT) = e^{-nsT}$$

$$\sum_{j=1}^N a_j e^{-jsT} = \sum_{j=1}^N a_j \left(1 - jsT + \frac{j^2 s^2 T^2}{2!} \dots \right)$$

$$e^{-nsT} = 1 - nsT + \frac{n^2 s^2 T^2}{2!} \dots$$

Nous dirons qu'il y a équivalence du premier ordre si :

$$\sum_{j=1}^N a_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^N j \cdot a_j = n$$

n représente alors l'ordre de la courbe isochrone qui est centre de gravité.

Ainsi, nous passons de l'opérateur type Peigne de Dirac à l'opérateur $\frac{1}{K} e^{-t/K}$ si sur la durée $K = n \cdot T$, le débit varie peu :

$$V(t) = \int_t^{t+nT} Q_S(Z) dZ \sim n.T \cdot Q_S(t)$$

Second type de relation

Problème :

Passer de $\sum_{j=1}^N a_j \mathcal{D}(t - jT)$ directement à $\frac{1}{K} e^{-t/K}$.

Soit la transformation de Laplace

$$L(O) = \sum_{j=1}^N a_j e^{-jsT}$$

Supposons que la suite a_j soit du type : $a_j = ba_{j-1}$

$b < 1$ et puisse être considérée infinie.

$$L(O) = \sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1} a_1 e^{-jsT}$$

$$L(O) = a_1 \cdot \frac{e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}$$

$$\text{Soit } 1/L(O) = \frac{1}{a_1} e^{sT} - \frac{b}{a_1}$$

qui est la transformée de Laplace de O^{*-1} tel que $Q_e(t) = O^{*-1} * Q_S(t)$

$$O^{*-1} = \frac{1}{a_1} \mathcal{D}(t+T) - \frac{b}{a_1} \mathcal{D}(t)$$

$$Q_e(t) = \frac{1}{a_1} Q_S(t+T) - \frac{b}{a_1} Q_S(t)$$

Soit $V(t)$ tel que $\mathcal{D}'(t) * V(t) = Q_e(t) - Q_S(t)$

$$\mathcal{D}'(t) * V(t) = Q_S(t) * \left[\frac{1}{a_1} \mathcal{D}(t+T) - \left(1 + \frac{b}{a_1}\right) \mathcal{D}(t) \right]$$

$$V(t) = Q_S(t) * H(t) * \left[\frac{1}{a_1} \mathcal{D}(t+T) - \left(1 + \frac{b}{a_1}\right) \mathcal{D}(t) \right]$$

avec $H(t)$: distribution d'Heaviside.

$$\text{d'où : } V(t) = \frac{1}{a_1} \int_t^{t+T} Q_S(Z) \cdot dZ + \left(\frac{1-b}{a_1} - 1 \right) \int_0^T Q_S(Z) \cdot dZ$$

La série a_j étant géométrique de raison $b < 1$ et de somme 1, on en tire :

$$a_1 = 1 - b$$

$$\text{d'où : } V(t) = \frac{1}{a_1} \int_t^{t+T} Q_S(Z) \cdot dZ$$

$$\text{si : } \int_t^{t+T} Q_S(Z) \cdot dZ \sim T Q_S(t) \quad \text{alors :}$$

$$Q_S(t) = \frac{T}{a_1} e^{-a_1 t/T} * Q_e(t)$$

Autre interprétation complémentaire

Soit à relier $\frac{1}{K} e^{-t/K}$ et un opérateur "isochrone" particulier $\sum_j a_j \delta(t - j \cdot T)$.

Soit une distribution $f(t)$ quelconque représentant un débit de pluie nette connue sous la forme d'une fonction en escalier de même pas de temps T que l'écart temporel des courbes isochrones.

Le phénomène commençant à $t = 0$, $Q_S(t) = \frac{H(t)}{K} e^{-t/K} * H(t) f(t)$ avec $H(t)$: distribution d'Heaviside.

$$Q_S(t) = \frac{1}{K} \left[\int_0^T e^{-Z/K} \cdot f(t-Z) \cdot dZ + \int_T^{2T} e^{-Z/K} \cdot f(t-Z) \cdot dZ + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} e^{-Z/K} \cdot f(t-Z) \cdot dZ \right]$$

si $t = nT$

Soit $f(0) = 0$

$$Q_S(t) = (1 - e^{-T/K}) \cdot f(t-T) + (1 - e^{-T/K}) \cdot e^{-T/K} \cdot f(t-2T)$$

$$+ \dots + (1 - e^{-T/K}) \cdot e^{-(n-1)T/K} \cdot f(t-nT)$$

$$Q_S(t) = (1 - e^{-T/K}) \sum_{j=1}^n f(t-jT) \cdot e^{-(j-1)T/K}$$

Avec le modèle isochrone, $Q_S(t)$ est calculé comme suit :

$$Q_S(t) = \sum_{j=1}^N a_j \cdot \delta(t-jT) * f(t)$$

avec NT correspondant à la courbe isochrone la plus éloignée de l'exutoire.

$$Q_S(t) = \sum_{j=1}^N a_j \cdot f(t-jT)$$

Soit $M = \min(N, n)$; il y a équivalence entre les deux modèles jusqu'à l'ordre M , si :

$$a_j = (1 - e^{-T/K}) e^{-(j-1)T/K} \quad j = 1 \text{ à } M$$

Soit :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - e^{-T/K} \\ a_2 &= a_1 e^{-T/K} \\ a_3 &= a_1 e^{-2T/K} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_M &= a_1 e^{-(M-1)T/K} \end{aligned}$$

La série est convergente car $e^{-T/K} < 1 \quad \forall T$.

En prenant donc des courbes isochrones espacées d'une durée T égale au pas de temps du débit de pluie nette, le Peigne de Dirac $\sum a_j \delta(t-jT)$ est équivalent à l'opérateur $\frac{1}{K} e^{-t/K}$ si la distribution de surface a_j est définie par une série géométrique de premier terme $1 - e^{-T/K}$ et de raison $e^{-T/K}$.

Cela est une autre illustration convergente du second type de relation que nous avons introduit.

Commentaires

L'utilisation du réservoir linéaire en prenant comme modèle de référence un modèle type Peigne de Dirac, image d'un découpage en courbes isochrones, nécessite que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :

- Soit $n T$ la durée moyenne de transfert avec

$$n = \sum_{j=1}^N j \cdot a_j$$

Si sur cette durée le débit varie très peu, alors en introduisant le volume stocké $V(t)$, on a :

$V(t) \sim n T \cdot Q_S(t)$ et donc un opérateur

$$\frac{1}{nT} e^{-t/nT} *$$

reliant le débit de pluie nette et le débit de sortie (Q_e, Q_s).

- Soit T la durée séparant deux courbes isochrones.

Si la distribution de la surface en courbes isochrones définit une série géométrique de raison inférieure à un et si le débit varie très peu sur la durée T , alors :

$$a_1 V(t) = \int_t^{t+T} Q_S(Z) dZ \sim T Q_S(Z)$$

$$Q_S(t) = \frac{T}{a_1} e^{-a_1 t/T} * Q_e(t)$$

En première approximation, étant donné que la pluie et donc le débit de pluie nette ne sont connus qu'en valeur moyenne par pas de temps ΔT , on doit vérifier pour appliquer le modèle du réservoir linéaire que :

$$n T = K (\text{lagtime}) \lesssim \Delta T$$

La validité de cette hypothèse est naturellement relative à la validité du modèle type Peigne de Dirac.

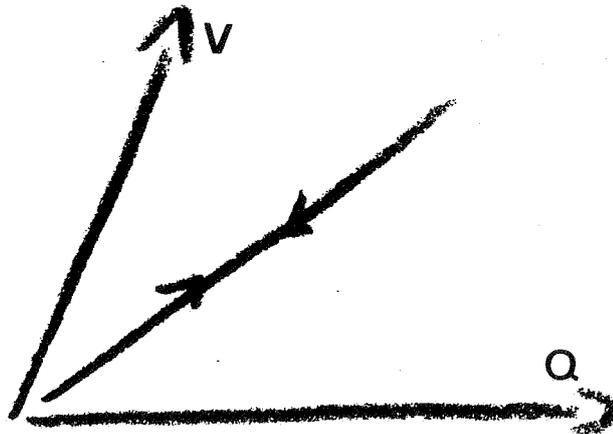
Cela peut expliquer, d'une certaine façon et non pas d'une façon certaine, que le modèle du réservoir linéaire donne dans certains cas des différences lorsqu'on l'applique sur un bassin versant dans sa globalité puis sur une succession de sous bassins le constituant si le modèle de transfert en canalisation nécessaire alors est supposé juste.



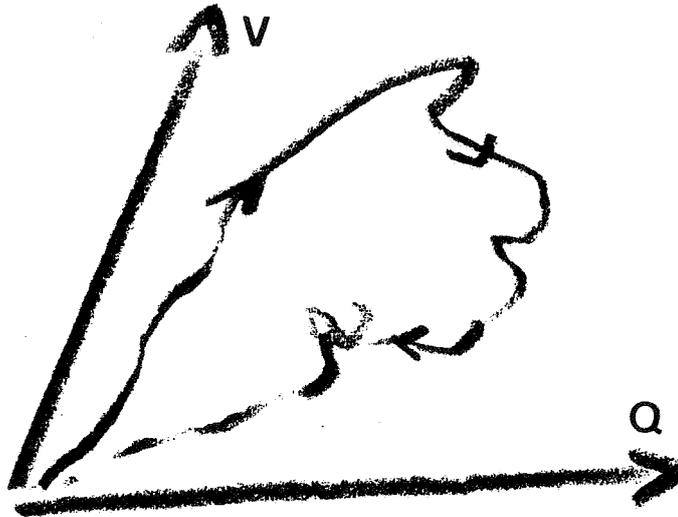
L'hypothèse peut être vérifiée sur chaque partie sans être vérifiée sur le tout.

Cela corrobore le caractère d'incomplétude de ce modèle vis-à-vis de la transformation pluie débit ; c'est le couple $(K, \text{variation de la pluie})$ qui est le nœud de la validité de l'approximation.

Ainsi, les deux types de comportement que nous avons définis dans le texte principal et visualisé par le complément 1 reçoivent des éléments d'explication :



Comportement homogène : les accroissements de $Q_e(t)$ et donc de $Q_s(t)$ sont faibles sur une durée au moins égale au temps moyen de transfert.



$Q_s(t)$ et $Q_e(t)$ varient rapidement.

Un signal entrant type "Dirac" révèle la non linéarité et la complexité du phénomène.

Un signal entrant type "Heaviside" révèle un phénomène perçu comme faiblement complexe et quasi-linéaire.

Interrogation annexe :

Le linéaire serait-il de l'ordre du macroscopique et le non linéaire de l'ordre du microscopique ?

COMPLEMENT 4

Réponse en valeur moyenne du modèle à réservoir linéaire.

La détermination expérimentale de la pluie amène à définir une fonction $i(t, x, y)$ ou $P(t)$ sous la forme d'une courbe en escalier de pas de temps généralement régulier que nous noterons T .

Sur l'intervalle T , l'information dont on dispose est la valeur moyenne des intensités de la précipitation.

Il nous semble incohérent d'utiliser le modèle du réservoir linéaire pour représenter la transformation pluie - débit en calculant les valeurs de débit au temps nT , $n \in [1 \dots]$

Cette incohérence se traduit éventuellement par une non conservation du volume écoulé.

Pour y remédier et puisque cela est très simple, nous proposons une formulation récurrente du modèle, homogène avec la représentation de l'entrée, c'est-à-dire une formule donnant directement les valeurs moyennes de débit de sortie par pas de temps.

$$\text{Soit le modèle } Q_s(t) = \frac{H(t)}{K} e^{-t/K} * H(t) Q_e(t)$$

avec $H(t)$: distribution d'Heaviside

K : temps moyen de parcours

$Q_e(t)$: débit de pluie nette

* Calcul de $Q_s(t+T)$ en fonction de $Q_s(t)$ et $Q_e(t, t+T)$
(valeur moyenne sur la durée T)

$$Q_s(t+T) = \frac{1}{K} \int_0^{t+T} e^{-\frac{(t+T)-Z}{K}} \cdot Q_e(Z) \cdot dZ$$

$$Q_s(t+T) = \frac{1}{K} e^{-\frac{(t+T)}{K}} \int_0^t e^{Z/K} \cdot Q_e(Z) \cdot dZ + \int_t^{t+T} e^{Z/K} \cdot Q_e(Z)$$

$$Q_s(t+T) = Q_s(t) \cdot e^{-T/K} + \frac{1}{K} e^{-\frac{t+T}{K}} \int_t^{t+T} e^{Z/K} \cdot Q_e(Z) \cdot dZ$$

$$Q_S(t+T) = Q_S(t)e^{-T/K} + (1 - e^{-T/K}) \cdot Q_e(t, t+T)$$

* Calcul du débit moyen sur la durée t, t+T en fonction de $Q_S(t)$ et $Q_S(t+T)$.

$$Q_S(t, t+T) = \frac{1}{T} \int_0^T Q_S(t+Z) \cdot dZ$$

Soit

$$V = \int_0^T Q_S(t+Z) dZ = Q_S(t) \cdot \int_0^T e^{-Z/K} \cdot dZ$$

$$+ Q_e(t, t+T) \cdot \int_0^T (1 - e^{-Z/K}) \cdot dZ$$

$$V = Q_S(t) \cdot K \cdot [1 - e^{-T/K}] + T \cdot Q_e(t, t+T)$$

$$- Q_e(t, t+T) \cdot K \cdot [1 - e^{-T/K}] \quad (1)$$

Sachant que $Q_S(t+T) = Q_S(t) \cdot e^{-T/K} + Q_e(t, t+T) \cdot (1 - e^{-T/K})$

$$Q_S(t, t+T) = \frac{V}{T} = Q_e(t, t+T) + \frac{K}{T} [Q_S(t) - Q_S(t+T)]$$

* Calcul de T' tel que $Q_S(t+T') = Q_S(t, t+T)$

$$T' \quad 0, T$$

En utilisant la relation (1),

$$Q_S(t) e^{-T'/K} + Q_e(t, t+T) \cdot (1 - e^{-T'/K}) = Q_S(t) \cdot \frac{K}{T} \cdot (1 - e^{-T/K})$$

$$+ Q_e(t, t+T) \cdot (1 - \frac{K}{T} (1 - e^{-T/K}))$$

$$e^{-T'/K} = \frac{K}{T} \cdot (1 - e^{-T/K})$$

$$T' = K \cdot \ln \left(\frac{T/K}{1 - e^{-T/K}} \right)$$

* Formule récurrente en valeur moyenne

Nous avons établi précédemment que :

$$Q_S(t, t+T) = Q_e(t, t+T) + \frac{K}{T} \cdot (Q_S(t) - Q_S(t+T)) \quad (1)$$

$$Q_S(t, t+T) = Q_e(t, t+T) (1 - e^{-T'/K}) + Q_S(t) e^{-T'/K} \quad (2)$$

avec
$$T' = K \cdot \ln \frac{T/K}{1 - e^{-T/K}}$$

$$(2) \quad Q_S(t) = Q_S(t, t+T) \cdot e^{T'/K} - Q_e(t, t+T) \cdot \left[e^{T'/K} - 1 \right]$$

de même :
$$Q_S(t+T) = Q_S(t+T, t+2T) \cdot e^{T'/K} - Q_e(t+T, t+2T) \cdot \left[e^{T'/K} - 1 \right]$$

En remplaçant $Q_S(t)$ et $Q_S(t+T)$ par leur dernière expression dans la relation (1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_S(t+T, t+2T) &= Q_e(t, t+T) \cdot \left(e^{-T'/K} \left(1 + \frac{T}{K} \right) - 1 \right) \\ &\quad + Q_e(t+T, t+2T) \cdot \left(1 - e^{-T'/K} \right) \\ &\quad + Q_e(t, t+T) \cdot \left(1 - \frac{T}{K} e^{-T'/K} \right) \end{aligned}$$

et en utilisant la relation (3)

$$\begin{aligned} Q_S(t+T, t+2T) &= A \cdot Q_e(t, t+T) + B \cdot Q_e(t+T, t+2T) \\ &\quad + C \cdot Q_S(t, t+T) \end{aligned} \quad (3)$$

avec
$$A = \left(\frac{K}{T} + 1 \right) \left(1 - e^{-T'/K} \right) - 1$$

$$B = 1 - \frac{K}{T} \left(1 - e^{-T'/K} \right)$$

$$C = e^{-T'/K} \quad (4)$$

Si nous étions partis du système de Muskingum qui généralise le modèle du réservoir linéaire ($a = 0$), nous aurions obtenu la même relation (3) avec :

$$A = \left(\frac{K}{T} + 1 \right) \left(1 - e^{-T/K(1-a)} \right) - 1$$

$$B = 1 - \frac{K}{T} \left(1 - e^{-T/K(1-a)} \right)$$

$$C = e^{-T/K(1-a)} \quad (5)$$

Commentaire

Aujourd'hui, nous ne proposons pas d'utiliser la relation (4) puisque le paramètre K n'a pas été calé avec cette relation par Desbordes [18].

Par contre, le modèle de Muskingum qui est l'un des modèles de type système, utilisé pour les écoulements en canalisation, la relation (5) peut être utilisée.

COMPLEMENT 5

Modèle de Bocquillon.

Soit $N = N(S, S_0) = H(S/S_0)$: nombre de surfaces sources S

Soit $L = L(S, S_0) = \sqrt{S_0} \cdot B(S/S_0)$: longueur totale du réseau

Soit $l = G(S, S_0)$: longueur d'un chemin du réseau tronqué reliant l'exutoire à une surface S

Nous supposons que ces trois fonctions de deux variables sont continuellement dérivables et que le bassin versant est à homothétie interne.

I - Relation entre B et H

Soit $L(S, S_0)$ et une variation dS de la valeur de la surface source :

$$L(S + dS, S_0) = L(S, S_0) + N(S + dS, S_0) \cdot L(S + dS, S)$$

L'hypothèse d'homothétie permet de calculer la longueur totale du réseau drainant $S + dS$, relativement à S avec la même fonction L .

$$\begin{aligned} N(S + dS, S_0) &= N(S, S_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{dS^j}{j!} N^{(j)}(S, S_0) \\ L(S + dS, S_0) &= L(S, S_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{dS^j}{j!} L^{(j)}(S, S) \end{aligned} \quad (1)$$

$L(S, S_0) = 0$ d'où :

$$\frac{L(S + dS, S_0) - L(S, S_0)}{dS} = N(S, S_0) \cdot L'(S, S) + dS \cdot B$$

avec B : terme en dS .

Ainsi, lorsque $dS \rightarrow 0$ cette relation donne :

$$L'(S, S_0) = N(S, S_0) \cdot L'(S, S)$$

Comme $L(S, S_0) = \sqrt{S_0} \cdot B(S/S_0)$, la dérivée de $L(S, S_0)$ est égale à :

$$\frac{1}{S_0} B'(S/S_0)$$

Soit pour $S_0 = S$: $L'(S, S) = \frac{1}{\sqrt{S}} B'(1)$ (2)

$$\text{d'où } N(S, S_0) = \frac{B'(S/S_0)}{B'(1)} \cdot \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En supposant que la relation (N,S) est allométrique, soit :

$$\begin{aligned} H(S/S_0) &= (S/S_0)^{-a} & a > 0 \\ B'(S/S_0) &= B'(1) \cdot (S/S_0)^{-(a+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Avec la condition $B(S_0/S_0) = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} B(S/S_0) &= \frac{B'(1)}{\frac{1}{2} - a} \left[\left(\frac{S}{S_0} \right)^{\frac{1}{2}-a} - 1 \right] \\ \text{soit : } L(S, S_0) &= \frac{\sqrt{S_0} B'(1)}{\frac{1}{2} - a} \left[(S/S_0)^{\frac{1}{2}-a} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

II - Calcul de B'(1)

Bocquillon propose la détermination suivante : soit $G(S, S_0)$ la longueur d'un chemin quelconque qui relie une surface source quelconque de valeur S à l'exutoire.

En considérant une variation infinitésimale de S , Bocquillon admet l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} G(S + dS, S_0) &= G(S, S_0) + L(S + dS, S) \\ \text{basée sur l'approximation } G(S + dS, S) &= L(S + dS, S) \end{aligned} \quad (4)$$

Avec le développement (1) et $L(S, S) = 0$, nous obtenons :

$$\frac{G(S + dS, S_0) - G(S, S_0)}{dS} = L'(S, S) + A \cdot dS$$

soit lorsque dS tend vers zéro :

$$G'(S, S_0) = L'(S, S)$$

Avec l'égalité (2), on obtient :

$$G'(S, S_0) = \frac{1}{S} B'(1)$$

En intégrant entre deux valeurs quelconques S_1 et S_2 , $B'(1)$ est donnée par l'égalité :

$$B'(1) = \frac{G(S_2, S_0) - G(S_1, S_0)}{2(S_2^{\frac{1}{2}} - S_1^{\frac{1}{2}})} \quad \forall \begin{array}{l} S_1, S_2 \\ S_1 \neq S_2 \end{array}$$

En prenant $S_2 = S_0$ et $S_1 = S$ valeurs quelconques, $B'(1)$ est déterminée comme suit : ($G(S_0, S_0) = 0$)

$$B'(1) = \frac{-G(S, S_0)}{2(S_0^{\frac{1}{2}} - S^{\frac{1}{2}})} \quad (5)$$

Quel que soit S, B'(1) est une constante si et seulement si toutes les surfaces sources sont équidistantes par rapport à l'exutoire.

C'est un cas de figure très particulier résultant de l'approximation (4) qui se révèle donc fautive dans un cas général.

B'(1) ne peut pas être déterminée par la relation (5) élaborée par Bocquillon.

L'égalité (3) fixant la valeur de B'(1) comme suit :

$$B'(1) = \frac{L(S, S_0)}{\sqrt{S_0}} \times \frac{(\frac{1}{2} - a)}{(S/S_0)^{\frac{1}{2}-a} - 1}$$

Nous dirons qu'il s'agit d'un coefficient de forme dont la constance traduit un principe d'homothétie interne lorsque S varie.

Si ce principe est vérifié, cette constante peut être déterminée par la relation précédente pour n'importe quelle valeur de S si L(S, S₀) et sont connues et en particulier pour la plus petite valeur de surface source S₁, L(S₁, S₀) étant alors la longueur totale du réseau L_T.

$$B'(1) = \frac{L_T}{\sqrt{S_0}} \times \frac{(\frac{1}{2} - a)}{(S_1/S_0)^{\frac{1}{2}-a} - 1}$$

III - Autre relation

A partir de cette approche proposée par Bocquillon, il est possible de construire d'autres relations.

Soit par exemple A(S, S₀) la surface drainée le long du réseau tronqué.

De même que précédemment :

$$A(S + dS, S_0) = A(S, S_0) + N(S + dS, S_0) \cdot A(S + dS, S)$$

Soit avec les mêmes hypothèses :

$$A'(S, S_0) = N(S, S_0) \cdot A'(S, S) \quad (4)$$

Posons A(S, S₀) = S₀ · F(S/S₀) ; la relation (4) nous donne alors :

$$F'(S/S_0) = N(S, S_0) \cdot F'(1)$$

En utilisant la relation d'allométrie pour N,

$$F(S/S_0) = F'(1) \cdot (S/S_0)^{1-a} \cdot \frac{S_0}{1-a} + K$$

Soit :
$$A(S, S_0) = \frac{S_0^2}{1-a} F'(1) \cdot (S/S_0)^{1-a} + K$$

Sachant que $A(S_0, S_0) = 0$; $A(S, S_0)$ est définie par :

$$A(S, S_0) = \frac{S_0^2}{1-a} F'(1) \cdot ((S/S_0)^{1-a} - 1)$$

La constante $F'(1)$ peut être déterminée à partir de la considération suivante :

Soit $S = S_1$ la valeur des plus petites surfaces sources

$$A(S_1, S_0) = \frac{S_0^2}{1-a} F'(1) \cdot ((S_1/S_0)^{1-a} - 1)$$

On a N_1 surfaces S_1 telles que :

$$N_1 = (S_1/S_0)^{-a}$$

et $S_0 = A(S_1, S_0) + N_1 \cdot S_1$

d'où la relation :

$$S_0 = N_1 \cdot S_1 + \frac{S_0^2}{1-a} F'(1) \cdot \left(N_1 \cdot \frac{S_1}{S_0} - 1 \right)$$

et
$$F'(1) = \frac{a-1}{S_0}$$

avec cette valeur de la constante $A(S, S_0) = S_0 \cdot (1 - (S/S_0)^{1-a})$

Comme $N = (S/S_0)^{-a}$, on obtient finalement :

$$A(S, S_0) = S_0 - N S$$

N étant la magnitude du réseau tronqué.

Le réseau tronqué drainant effectivement le complément des surfaces sources, cette relation confirme le bien fondé de la démarche.

COMPLEMENT 6

Le concept de dimension fractale.

La notion de dimension fractale fut développée par Benoît Mandelbrot dans son ouvrage fondamental intitulé : "Les Objets Fractals, Forme, Hasard et Dimension" [43]. Prolongeant diverses formalisations (dimension de contenu, dimension de recouvrement ...), sa récente genèse illustre les développements conceptuels de cette notion de dimension apparus à partir de la fin du dix neuvième siècle.

I - La dimension Euclidienne

Jusqu'à l'avènement de la topologie, la dimension n'avait qu'un sens et était reliée à la géométrie euclidienne dont les figures emblématiques sont le point, la ligne (le segment de droite) et le plan. Nous pouvons dire comme Favard [48], que la notion de dimension euclidienne traduit le nombre d'informations nécessaires à la localisation de n'importe quel lieu (points de l'espace physique) sur ces figures.

Ainsi, pour aller d'un point au même point, aucune information n'est nécessaire ; la dimension euclidienne du point est égale à zéro.

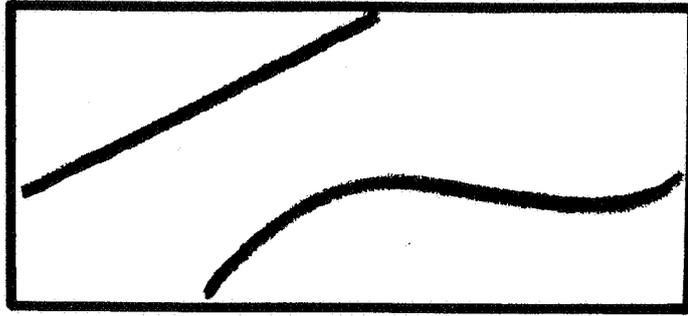
Pour aller d'un lieu situé sur une droite à un autre lieu situé sur cette même droite, une seule information est suffisante ; la droite est de dimension un. Introduisant le repérage de tous lieux d'un plan à partir d'un référentiel constitué de deux droites, cette figure est dite de dimension deux et ainsi de suite.

Ainsi, la dimension issue de la géométrie grecque est reliée aux notions de longueur, surface, volume.

Jusqu'au dix neuvième siècle, la géométrie va tenter de conserver cette formalisation toute pragmatique du concept de dimension euclidienne en l'étendant à des figures autres.

Ceci ne fut possible qu'en référant ces figures aux figures emblématiques de la géométrie euclidienne.

La notion de courbe de Jordan illustre la projection de la dimension euclidienne d'une droite à une figure résultant d'une déformation continue d'une droite.



Jordan formula la conservation de la dimension de l'espace de départ à l'espace d'arrivée si le passage résulte d'une application continue.

Une première brèche apparut dans cette formalisation mathématique unique du concept de dimension lorsque Peano, en 1890, construisit une courbe de Jordan qui peut s'approcher aussi près que l'on veut de tout point d'un carré [48, 49].

Ainsi, une figure de dimension euclidienne un au sens de Jordan "recouvre" une figure de dimension deux.

Cette contradiction avec le sens intuitif du concept de dimension amena les mathématiciens à revoir l'argumentaire mathématique existant qui ne pouvait être qu'incomplet et à repenser les notions de courbes et de dimension "sans heurter le sentiment populaire intuitif, souci qui ne peut être négligé sans souci" [Favard, 48].

II - La dimension topologique

Deux voies de recherche distinctes se sont alors développées et ont conduit à donner plusieurs sens au concept de dimension. L'une, utilisant la topologie naissante, va en fait lever l'ambiguïté introduite par la courbe de Peano en précisant le mode de conservation de la dimension euclidienne pour des figures autres que le point, la droite, le plan etc ...

En partant du fait qu'il n'y a pas de correspondance biunivoque et bicontinue (bijection) entre la courbe de Peano et le plan (présence de points multiples), elle introduit le concept de variété Cantorienne qui généralise les notions de courbes et de surfaces, la "courbe" de Peano n'étant plus une variété Cantorienne de dimension un.

Ainsi, deux espaces ont la même dimension s'ils sont homéomorphes, c'est-à-dire équivalents topologiquement.

La quantification de la dimension d'un ensemble résulte d'un processus basé sur une axiomatique utilisant les concepts développés par la topologie. Ainsi est née la dimension topologique d'un ensemble qui, en fait, précise le processus énoncé par Jordan pour dimensionner une figure autre que les figures élémentaires de la géométrie grecque.

III - Les dimensions de contenu et de recouvrement

L'autre voie, qui se développe surtout sous l'impulsion de Hausdorff au début du vingtième siècle, et tout en étant basée sur l'utilisation d'une topologie métrique pour les ensembles considérés, va dimensionner une figure en introduisant la notion de contenu.

A la différence de la dimension topologique basée, rappelons-le, sur la correspondance homéomorphique entre ensembles, Hausdorff propose une quantification de la dimension basée uniquement sur l'examen du contenu d'une figure, c'est-à-dire sur son mode de recouvrement par un "instrument de mesure".

Cette démarche est radicalement différente de celle précédemment explicitée, car la figure est dimensionnée à partir de ce qu'elle est et non pas à partir d'une proximité morphologique à des figures euclidiennes types.

Le contenu d'une figure finie, c'est-à-dire incluse dans une boule de rayon fini, et constituée d'un ensemble de points sur lequel est définie une métrique, est déterminée au moyen de boules de rayon r . En remarquant que le contenu d'une boule pour un ensemble euclidien de dimension 1 est $2r$ et πr^2 pour un ensemble euclidien de dimension 2, Hausdorff définit le contenu d'une figure quelconque par une relation du type

$$f(d) \cdot \sum_j r_j^d$$

tous les points de la figure étant situés dans une boule au moins de rayon r_j .

La mesure du contenu est obtenue en faisant tendre les r_j vers zéro et en retenant la quantité $(f(d) \cdot \sum_j r_j^d)$ minimum.

Hausdorff remarque qu'il existe une valeur de d , éventuellement non entière, telle que la mesure définie soit non dégénérée, c'est-à-dire produisant un contenu fini et non nul.

Cette valeur est intitulée dimension du contenu.

La dimension de recouvrement procède du même principe ; pour un diamètre de boule donné (r), il existe un nombre minimum $N(r)$ de boules qui recouvrent la figure.

La dimension de recouvrement est alors définie par la relation :

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Log} (N (r))}{\text{Log} (1/r)}$$

La dimension du contenu de Hausdorff, s'obtenant par résolution de la relation $f(d) = \sum_j r_j^d$, ce mode de calcul est indépendant de la taille globale de la figure, c'est-à-dire du rayon r_M de la plus petite boule contenant toute la figure.

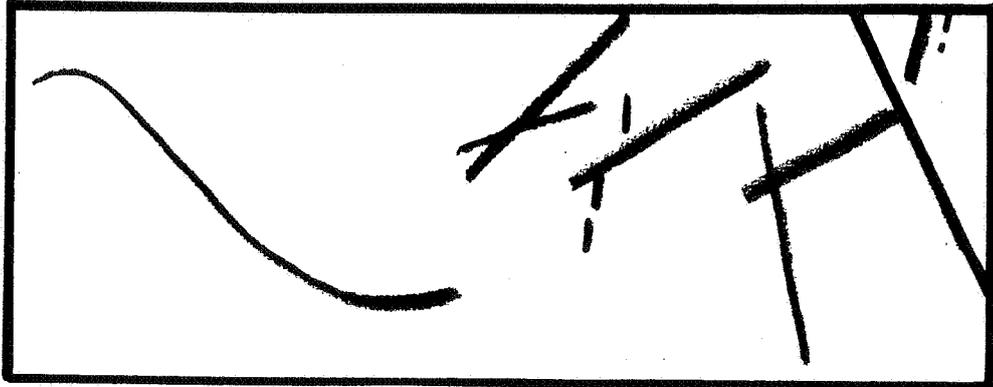
Cette dimension D est la valeur numérique obtenue par passage à la limite nulle des r_j . Le processus de convergence des valeurs de d vers D , pour des r_j non nuls, peut être éventuellement oscillant autour de D .

La dimension de recouvrement, pour être intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la taille globale de la figure (r_M), doit être calculée uniquement à partir d'un passage à la limite de r ; sinon elle dépend de r_M même si le logarithme atténue cette dépendance pour de toutes petites valeurs de r .

IV - La dimension fractale

Elle s'inscrit dans la seconde voie que nous venons d'aborder précédemment.

Si la dimension de Hausdorff et celle de recouvrement sont à considérer comme des dimensions fractales, ce concept recouvre également d'autres formalisations relevant de la même approche comme en particulier la dimension d'homothétie, Mandelbrot nous introduisant surtout dans le monde des figures fractales [43, 44, 57, 58]. Si la géométrie euclidienne est un monde de figures régulières, c'est-à-dire régie par la continuité, la géométrie fractale embrasse l'irrégularité, la discontinuité, le mouvement brownien, l'aléatoire.



Cette irrégularité fondamentale et fondatrice, pour être qualifiée de fractale, n'est pas quelconque. Un ordre structurel sous jacent doit exister, ordre quantifié par la dimension.

Nous pouvons dire qu'en géométrie fractale, l'ordre ne procède pas de la figure ou plus exactement de la perception que nous en avons, mais d'un schéma structurel générateur pour les formes artificielles et d'un ordre possible dans les différentes perceptions que nous pouvons avoir d'une forme naturelle (éventuellement artificielle).

IV.1 - Dimension d'homothétie fractale

Les figures à homothétie interne sont une première illustration du monde des formes fractales.

Considérons les formes suivantes générées par un principe d'homothétie et qui schématisent un système de drainage naturel ou artificiel :

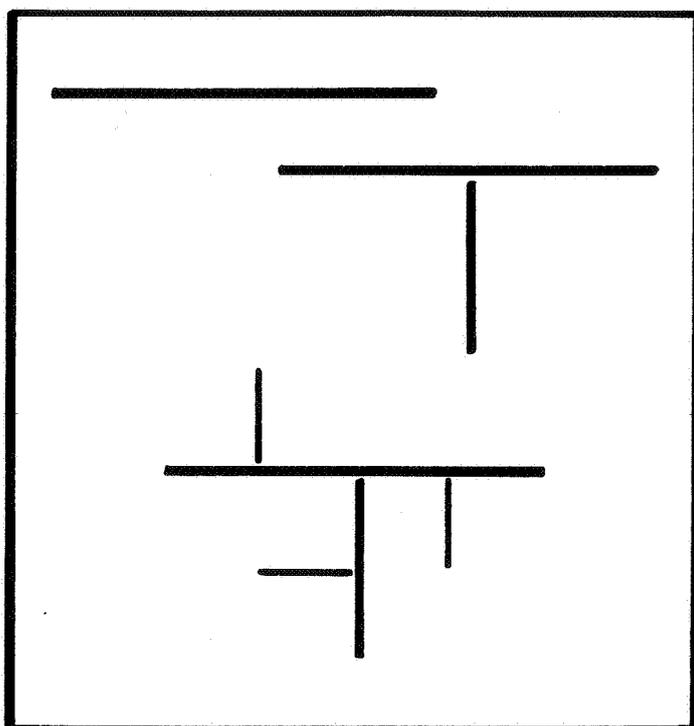


figure 1 : complexification progressive d'un trait initial par un même schéma répétitif basé sur une homothétie interne

Une telle figure n'a pas de points doubles si les segments rajoutés à une étape donnée s'approchent aussi près que l'on veut des segments existants à l'étape précédente. Globalement, une telle figure même sans point double ne possède pas de dimension euclidienne ou topologique.

Pour ces géométries, il s'agit d'un agencement de segments de dimension 1 chacun, et non pas d'une courbe de Jordan ou d'une variété cantorienne d'ordre 1.

Cette figure, qui n'est donc pas une courbe au sens classique du terme, est le résultat d'un principe structurel d'élaboration très simple qui la définit entièrement.

Il doit donc être possible de représenter quantitativement cette figure à partir de ce principe.

Celui-ci étant similaire à ceux de la courbe de Von Koch et de l'ensemble triadique de Cantor par exemple, nous pouvons dire qu'il s'agit d'une figure fractale possédant une dimension d'homothétie éventuellement non entière qui se définit comme suit :

A toute étape, chaque segment ou figure élémentaire est remplacé par N segments ou figures élémentaires ; chacun d'eux étant dans un même rapport ($r < 1$) au segment initial substitué.

La dimension d'homothétie est la quantité suivante :

$$D = \text{Log } (N) / \text{Log } (1/r)$$

Soit $D = \text{Log } (3) / \text{Log } (2) \sim 1.585$, nombre non entier pour la figure 1.

Cette dimension est équivalente à la dimension de recouvrement si celle-ci est définie comme suit et ne varie pas quel que soit :

$$D = \text{Log } N(r) / \text{Log } (r_M/r)$$

avec r_M : rayon de la plus petite boule contenant toute la figure

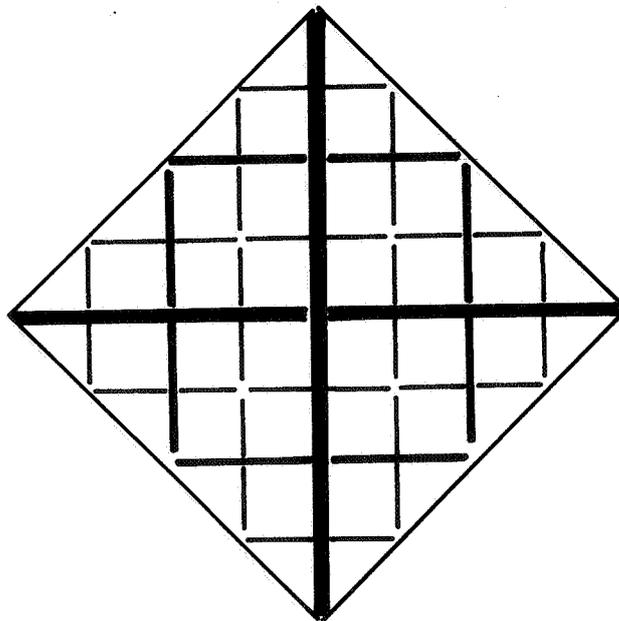
r : rayon $< r_M$

IV.2 - Sens de la dimension fractale

Avec le même principe d'homothétie interne, la droite ou le segment de droite possède une dimension égale à un, car pour cette figure particulière, le produit $N \cdot r$ est égal à l'unité lorsque la droite se conserve.

De même, il est possible de construire des figures dont la dimension s'approche aussi près que l'on veut de 2 et qui n'ont pas de points doubles.

Mandelbrot avait déjà proposé un réseau de drainage fluvial presque partout séparé répondant à ces qualités.



Ainsi, la dimension fractale comprise entre 1 et 2 représente la tendance au recouvrement du plan réalisée par la figure.

La droite est une figure purement linéique.

La figure de Mandelbrot est surfacique. La figure 1, présentée précédemment, est une forme intermédiaire entre la ligne et le plan.

IV.3 - Relativités fractales

En introduisant la relativité de l'observation par rapport à l'instrument de mesure, dans le cas des figures à homothétie interne, la dimension D relie strictement tous les contenus relevés par des observateurs qui utiliseraient des pas d'exploration (r) différents.



En renversant la proposition, une forme n'a pas d'entité propre, mais se révèle différemment selon l'explorateur.

Pour que la figure puisse être qualifiée de fractale, la liaison (contenu / pas d'exploration) doit être régie par un modèle allométrique soit :

$$N = r^{-D}$$

En plus de la relativité de la perception de la forme traduite par la dimension fractale, la dimension elle-même peut être relative au domaine d'observation c'est-à-dire au domaine de variation de .

En effet, dans le cas du réseau de drainage artificiel et en ne considérant que ce réseau vis-à-vis du drainage pluvial, si le pas d'exploration devient plus faible que la plus petite distance séparant deux bifurcations, nous ne verrons plus apparaître de nouvelles branches, toute la figure étant alors décrite, la relation entre N et se modifie.

En considérant un domaine de variation de défini par le chemin de drainage le plus long et la plus petite distance séparant deux bifurcations (si la figure est fractale), on peut définir formellement une dimension d'homothétie ou non que nous qualifierons de macroscopique, la définition de la dimension de Hausdorff relevant, elle, du microscopique.

De toute façon, la tendance au branchement ne peut pas se poursuivre à l'infini, même pour des réseaux de drainage naturel, car au delà d'un certain seuil du pas d'exploration, l'observateur passe du réseau de drainage à la matière ; il y a discontinuité et la dimension ne peut être relative qu'aux domaines sans discontinuités internes.

La dimension fractale se distingue des dimensions mathématiques du contenu et de recouvrement en considérant cette relativité de l'observation.

IV.4 - Dimension fractale et formes réelles

Si la relation allométrique précédente est exacte pour des figures à homothétie stricte, elle peut être simplement approximative pour des figures ne présentant pas cette régularité toute conceptuelle (voir figure 2).

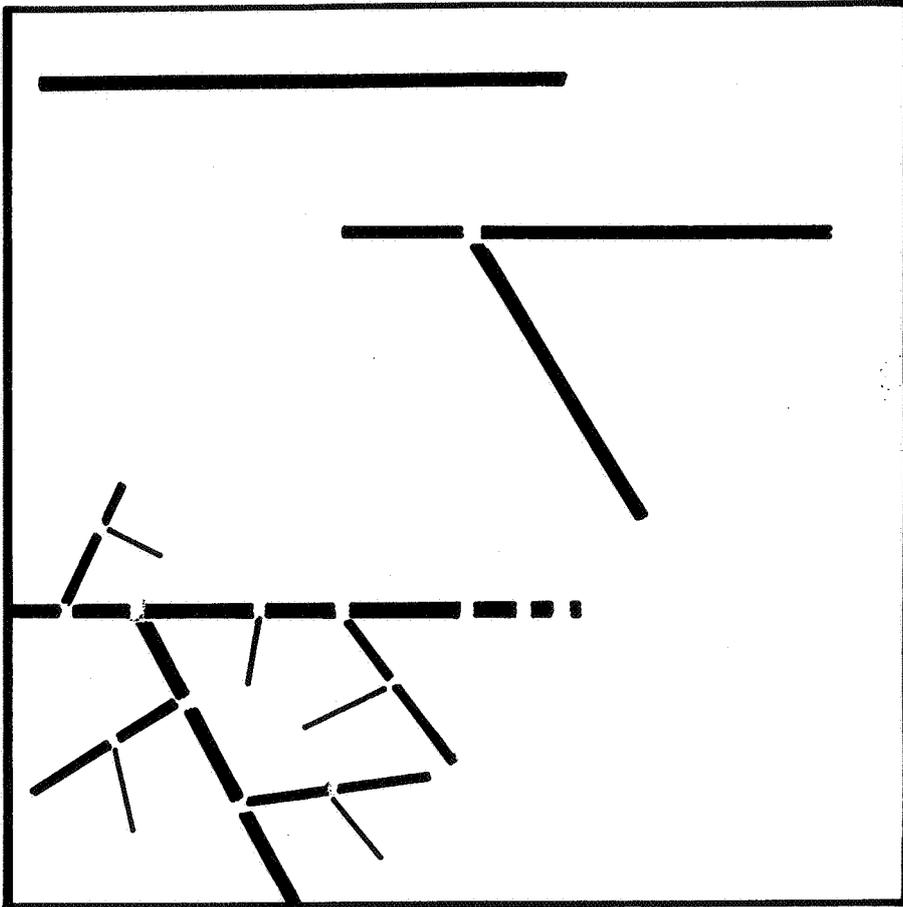


figure 2 : complexification d'un trait initial par un schéma en apparence quelconque

Mandelbrot parle d'homothétie statistique, la relation (N / r) étant alors une loi de distribution hyperbolique pour les figures fractales.

COMPLEMENT 7

Modèle de Saint Venant et morphologie.

Ce modèle est issu de l'équation fondamentale de l'hydrodynamique [59,60].

$$\vec{\gamma} = \frac{-1}{\rho} \text{grad } P^* + F \quad (1)$$

tel que $P^* = P_{at} + \rho \cdot g \cdot (h + Z)$

avec P_{at} : pression atmosphérique

h : hauteur d'eau située au dessus de la particule considérée

Z : altitude de la particule

γ : accélération

F : force de frottement

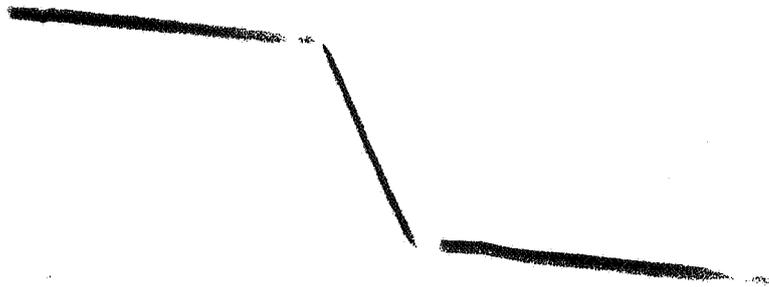
ρ : masse volumique

Il s'agit d'une application particulière au fluide de la relation newtonnienne classique.

$$\vec{F} = M \vec{\gamma}$$

L'accélération étant la dérivée seconde de la trajectoire, le modèle est une égalité entre dérivées de fonctions. Les lieux où ses dérivées ne sont pas définies sont à exclure du domaine d'application du modèle. Ainsi, en appliquant le modèle à une particule située au fond de l'élément de drainage, $\frac{dZ}{dx}$, l'une des fonctions du modèle représente la pente suivant x de cet élément.

Dans cette direction, les lieux de ruptures de pentes sont des lieux où le modèle n'a pas de sens ;



Pour compléter cette rapide investigation du domaine d'application, considérons la genèse du modèle de Saint Venant.

L'idée fondamentale est de modéliser l'écoulement uniquement à partir d'une variable d'espace.

Cela veut dire que la dynamique est unidirectionnelle et que nous nous rapprochons d'une représentation de l'évolution d'un écoulement tranche par tranche, développée par D. Bernouilli.

Ceci est justifié si les dynamiques verticales et transversales sont négligeables.

La forme de l'élément drainant doit être constante ou à évolution lente et n'engendrant pas de dynamique autres que celle dans le sens de l'écoulement.

Sont donc également à exclure du domaine d'application du modèle de Saint Venant, tous les lieux présentant des modifications morphologiques brutales ou rapides, tel que élargissement brusque, modification brutale de forme de section, etc ...

En ce qui concerne les caractéristiques de l'écoulement, cela se traduit par la nécessité de l'hydrostaticité du fluide, l'une des hypothèses pour le passage de l'équation fondamentale à l'équation dynamique de Saint Venant.

Soit la projection de l'équation (1) sur la tangente à la trajectoire de l'écoulement avec V , vitesse

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial s} - F_s$$

Si P^* est une constante et en supposant que le rayon de courbure des trajectoires est pratiquement infini, l'équation dynamique précédente a la forme

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + V(x,t) \cdot \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = g \cdot \left(- \frac{\partial Z}{\partial x} - F_s \right)$$

et est la seule si la projection de l'équation (1) sur la perpendiculaire à la trajectoire

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V_s^2}{R_c} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial n} - F_n \quad (R_c : \text{rayon de courbure})$$

s'annule, la pression étant hydrostatique.

La seule équation dynamique obtenue est complétée par une équation de continuité pour former un système de deux équations à deux inconnues (V,h)

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (V(x,t) \cdot S(x,t))}{\partial x} = q$$

avec $S(x,t)$: section mouillée

q : débit linéique apporté ou perdu

pour laquelle la grandeur q n'a pas d'effet dynamique sur l'écoulement.

En considérant l'hypothèse d'hydrostaticité, celle relative à la non existence de dynamiques transversales et verticales, et celle relative à la continuité, il faut exclure du domaine d'application, les lieux structurellement discontinus et un voisinage de ces lieux où les hypothèses dynamiques ne se vérifient pas.

Pour un réseau d'assainissement, les éléments qui le composent sont à classer en deux sous ensembles disjoints composés respectivement

- des parties de tronçons où les hypothèses de Saint Venant sont vérifiées
- des voisinages de points singuliers (changement de pente, changement de forme de section) et des voisinages d'ouvrages particuliers (regard, déversoirs, seuil, etc ...) dont l'hydrodynamique est actuellement du ressort de l'empirisme.

COMPLEMENT 8

Utilisation d'un modèle de rétention et d'un modèle d'infiltration.

Nous supposerons que l'intensité de la pluie est définie en valeur moyenne par pas de temps Δt constant. Les pertes seront donc calculées également en valeur moyenne.

I - Modèle de rétention

Soit le modèle de Linsley [31]

$$h(t) = h_0 \left(1 - e^{- (H(t) - F(t))/h_0} \right)$$

avec $h(t)$: hauteur d'eau stockée au temps t dans les dépressions

$F(t)$: hauteur d'eau infiltrée au temps t

$H(t)$: hauteur d'eau précipitée au temps t

h_0 : hauteur moyenne potentielle de stockage

$$\frac{d h(t)}{d t} = [P(t) - f(t)] \cdot e^{- (H(t) - F(t))/h_0}$$

avec $P(t) = d H(t) / dt$ et $f(t) = d F(t) / dt$

La valeur moyenne de cette variation de $(n-1)\Delta t$ à $n\Delta t$ est égale à :

$$\overline{\frac{d h(n)}{d t}} = \frac{h(n) - h(n-1)}{\Delta t}$$

avec $h(n)$: hauteur d'eau stockée à $n\Delta t$

$$\overline{\frac{d h(n)}{d t}} = \frac{h_0}{\Delta t} \cdot \left(e^{-\frac{H(n-1) - F(n-1)}{h_0}} - e^{-\frac{H(n) - F(n)}{h_0}} \right)$$

$$\text{Soit } \overline{P(n)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} P(Z) \cdot d Z \quad \text{et} \quad \overline{f(n)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} f(Z) \cdot d Z$$

avec ces valeurs moyennes

$$H(n) = H(n-1) + \Delta t \cdot \overline{P(n)} \quad ; \quad F(n) = F(n-1) + \Delta t \cdot \overline{f(n)}$$

et la valeur moyenne de la variation est définie par :

$$\overline{\frac{dh(n)}{dt}} = \frac{h_0}{\Delta t} e^{-\frac{(h(n-1) - F(n-1))}{h_0}} \cdot \left(1 - e^{-\Delta t/h_0} [\overline{P(n)} - \overline{f(n)}] \right)$$

II - Modèle d'infiltration

Soit le modèle de Horton [52]

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c) e^{-at}$$

avec f_c : vitesse d'infiltration limite en m/s

f_0 : vitesse d'infiltration initiale en m/s

a : paramètre en s^{-1}

et
$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

II.1 - Vitesse d'infiltration moyenne potentielle

$$\overline{f(n)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} (f_c + (f_0 - f_c) \cdot e^{-aZ}) \cdot dZ$$

$$\overline{f(n)} = f_c + \frac{f_0 - f_c}{a \cdot \Delta t} \cdot e^{-an\Delta t} \cdot [e^{a\Delta t} - 1]$$

En calculant la vitesse d'infiltration moyenne sur le $(n - 1)$ pas de temps, ($\overline{f(n-1)}$), nous obtenons la récurrence :

$$\overline{f(n)} = f_c (1 - e^{-a\Delta t}) + \overline{f(n-1)} e^{-a\Delta t}$$

Pour le premier pas de temps Δt ,

$$\overline{f(\Delta t)} = f_c + \frac{f_0 - f_c}{t} \cdot [1 - e^{-a\Delta t}]$$

II.2 - Vitesse d'infiltration moyenne réelle

Soit h la hauteur d'eau moyenne disponible sur le $n^{\text{ième}}$ pas de temps. Elle peut être composée de l'intensité précipitée sur ce pas de temps et de la hauteur d'eau stockée dans les dépressions au pas de temps précédent. Si $\Delta t \cdot f(n)$ est supérieur à h , toute cette eau est infiltrée. Si $\Delta t \cdot f(n)$ est inférieur à h , seule la hauteur $\Delta t \cdot f(n)$ est infiltrée. La capacité d'infiltration n'étant pas totalement satisfaite, elle se retrouve en partie sur le pas de temps suivant, modification entraînant le changement de toutes les valeurs sur les pas de temps succédant $n\Delta t$.

Soit $f_r(n)$ la vitesse d'infiltration réelle égale à h / t sur le $n^{\text{ième}}$ pas de temps.

La vitesse d'infiltration potentielle $f(n)$ qui n'est pas totalement satisfaite se retrouve au pas de temps suivant sur une durée $D T$ telle que :

$$D T = \Delta t (1 - f_r(n) / f(n))$$

En notant a le rapport $D T / t$, les vitesses d'infiltration potentielle sur les pas de temps qui suivent sont alors égales à :

$$\overline{f(K)} = a \overline{f(K-1)} + (1-a) \overline{f(K)}$$

pour $K = n + 1$ à N , N durée totale.

ANNEXE 1

Données expérimentales et résultats :

Le cas du réseau de Saint Didier au Mont d'Or Ouest.

Rappelons que le fichier informatique utilisé contient une description des réseaux, regard par regard, repérés par un numéro.

A chaque regard sont affectées, entre autres, les données suivantes :

- . numéro du descendant
- . numéro du premier antécédent
- . numéro du second antécédent
- . longueur du tronçon aval
- . surface drainée par le point
- . coefficient d'imperméabilisation de la surface

I - SCHEMA DE STRAHLER ET DE HORTON

Pour le réseau présenté, défini par le numéro de la cheminée (regard) prise comme exutoire, les ordonnancements de Strahler et de Horton donnent les résultats suivants :

- ordonnancements de Strahler :

- 10 chemins d'indice 1
- 3 chemins d'indice 2
- 1 chemin d'indice 3

```

*   LONGUEURS   EN M   *
*****
NIVEAU : 1
* 396.50 * 21.20 * 19.90 * 95.20 * 30.20 * 461.20 * 38.10
* 34.80 * 89.70 * 56.90 *
MOYENNE 124.37

NIVEAU : 2
* 201.70 * 1.00 * 500.90 *
MOYENNE 234.53

NIVEAU : 3
*1928.70 *
MOYENNE 1928.70

*   SURFACES   IMPEMEABILISEES EN HA*
*****
NIVEAU : 1
* 0.99 * 0.07 * 0.06 * 0.14 * 0.07 * 0.56 * 0.05
* 0.06 * 0.25 * 0.11 *
MOYENNE 0.24

NIVEAU : 2
* 0.05 * 0.00 * 0.62 *
MOYENNE 0.22

NIVEAU : 3
* 1.98 *
MOYENNE 1.98

```

Ce réseau présente la particularité unique de posséder, au niveau de son image numérique, un chemin d'ordre 2 pratiquement de longueur nulle, et drainant une surface égale à zéro.

Nous ne l'avons pas comptabilisé, modifiant ainsi le nombre de chemins d'ordre 2 (3 → 2) et les moyennes de longueur et de surface.

- ordonnancement de Horton :

```

8   chemins d'indice 1
2   chemins d'indice 2
1   chemin d'indice 3

```

```

*   LONGUEURS   EN M   *
*****
NIVEAU : 1
* 21.20 * 95.20 * 30.20 * 461.20 * 38.10 * 34.80 * 89.70
* 56.90 *
MOYENNE 103.41

NIVEAU : 2
* 397.50 * 500.90 *
MOYENNE 449.20

NIVEAU : 3
*2150.30 *
MOYENNE 2150.30

*   SURFACES   IMPEMEABILISEES EN HA*
*****
NIVEAU : 1
* 0.07 * 0.14 * 0.07 * 0.56 * 0.05 * 0.06 * 0.25
* 0.11 *
MOYENNE 0.16

NIVEAU : 2
* 0.99 * 0.62 *
MOYENNE 0.81

NIVEAU : 3
* 2.09 *
MOYENNE 2.09

```

Pour apprécier la validité des modèles structurels de Horton et de Strahler, nous avons représenté par une droite du type $y = ax$ grâce à une méthode d'approximation aux moindres carrés, les relations :

$$N_w = F(N_{w+1})$$

$$L_w = F(L_{w-1})$$

$$S_w = F(S_{w-1})$$

avec N_w : nombre de chemins d'indice w

L_w : moyenne des longueurs de niveau w

S_w : moyenne des surfaces de niveau w

Pour cet exemple, nous avons obtenu les résultats suivants, présentés dans l'ordre N, L, S.

Schéma de Strahler

SOMME DES CARRÉS DES ECARTS = 7.200
 COEFFICIENTS DES FONCTIONS DE BASE
 COEFF NUM: 1.00 4.40

ABSCISSE	ORDONNEE	APPROX	ECART
2.000	10.000	0.800	1.200
1.000	2.000	4.400	2.400

 ERREUR RELATIVE MOYENNE = 0.32

$R_B \sim 4.4$

SOMME DES CARRÉS DES ECARTS = 96885.404
 COEFFICIENTS DES FONCTIONS DE BASE
 COEFF NUM: 1.00 5.20

ABSCISSE	ORDONNEE	APPROX	ECART
124.000	351.000	644.488	293.488
351.000	1928.000	1824.318	103.682

 ERREUR RELATIVE MOYENNE = 0.19

$R_L \sim 5.2$

SOMME DES CARRÉS DES ECARTS = 0.742
 COEFFICIENTS DES FONCTIONS DE BASE
 COEFF NUM: 1.00 4.51

ABSCISSE	ORDONNEE	APPROX	ECART
0.230	0.330	1.037	0.707
0.330	1.980	1.487	0.493

 ERREUR RELATIVE MOYENNE = 0.53

$R_A \sim 4.5$

Schéma de Horton

SOMME DES CARRÉS DES ECARTS = 3.200
 COEFFICIENTS DES FONCTIONS DE BASE
 COEFF NUM: 1.00 3.00

ABSCISSE	ORDONNEE	APPROX	ECART
2.000	0.000	7.200	0.800
1.000	2.000	2.600	1.600

 ERREUR RELATIVE MOYENNE = 0.25

$R_B \sim 3.6$

SOMME DES CARRÉS DES ÉCARTS = 1856.570
 COEFFICIENTS DES FONCTIONS DE BASE
 COEFF NUM: 1.00 4.77

ABSCISSE	ORDONNÉE	APPROX	ÉCART
103.000	449.000	490.997	41.097
449.000	2150.000	2140.366	9.634

ERREUR RELATIVE MOYENNE = 0.02

 $R_L \sim 4.8$

SOMME DES CARRÉS DES ÉCARTS = 0.140
 COEFFICIENTS DES FONCTIONS DE BASE
 COEFF NUM: 1.00 2.70

ABSCISSE	ORDONNÉE	APPROX	ÉCART
0.160	0.800	0.433	0.367
0.800	2.090	2.163	0.073

ERREUR RELATIVE MOYENNE = 0.18

 $R_A \sim 2.7$

L'erreur relative moyenne est la quantité

$$(\sqrt{E/N}) / Y_m$$

avec N : nombre de points

E : somme des carrés des écarts

Y_m : valeurs moyennes des ordonnées

C'est une valeur pratiquement équivalente à la moyenne pondérée par l'ordonnée, des erreurs relatives de chaque point.

II - MODELE ALLOMETRIQUE EN MAGNITUDE

Nous avons déterminé expérimentalement :

- le nombre N_I de surfaces sources valant S_I telle que $S_I = S_T / (1.1)^I$ avec S_T surface totale.
- la longueur totale du réseau drainant ces surfaces

NOMBRE DE POINTS: 113
 EXUTOIRE: 71464
 SURFACE TOTALE: 50749.46 M2
 LONGUEUR TOTALE: 3917.10 M
 VALEUR DE A: 1.1000

I	N	SURFACE (M2)	LONG TOT (M)	LOG(N)	LOG(S)
1	1	46135.87	374.70	0.000	10.739
2	1	41941.70	803.90	0.000	10.644
3	1	38128.82	803.90	0.000	10.549
4	1	34662.56	803.90	0.000	10.453
5	1	31511.42	823.70	0.000	10.358
6	1	28646.75	901.90	0.000	10.263
7	1	26042.50	901.90	0.000	10.167
8	1	23675.00	1041.20	0.000	10.072
9	1	21522.73	1257.40	0.000	9.977
10	1	19566.11	1303.80	0.000	9.882
11	1	17787.38	1399.60	0.000	9.786
12	1	16170.34	1532.40	0.000	9.691
13	1	14700.31	1599.60	0.000	9.596
14	1	13363.92	1909.60	0.000	9.500
15	1	12149.02	1914.70	0.000	9.405
16	1	11044.56	1928.70	0.000	9.310
17	2	10040.51	1987.20	0.693	9.214
18	2	9127.74	2191.00	0.693	9.119
19	2	8297.94	2273.60	0.693	9.024
20	2	7543.58	2346.00	0.693	8.928
21	2	6857.80	2392.20	0.693	8.833
22	2	6234.37	2451.90	0.693	8.738
23	2	5667.61	2504.60	0.693	8.643
24	3	5152.37	2670.10	1.099	8.547
25	3	4683.97	2757.80	1.099	8.452
26	3	4258.16	2856.60	1.099	8.357
27	3	3871.05	2945.00	1.099	8.261
28	3	3519.14	2974.50	1.099	8.166
29	3	3199.22	2983.60	1.099	8.071
30	3	2908.38	2983.60	1.099	7.975
31	3	2643.98	3025.40	1.099	7.880
32	4	2403.62	3057.20	1.386	7.785
33	4	2185.11	3057.20	1.386	7.689
34	4	1986.46	3128.30	1.386	7.594
35	4	1805.87	3162.60	1.386	7.499
36	5	1641.70	3285.70	1.609	7.403
37	5	1492.46	3354.50	1.609	7.308
38	6	1356.78	3354.50	1.792	7.213
39	6	1233.44	3392.80	1.792	7.118

Pour vérifier l'allométrie de la relation (N , S), nous avons approximé par une droite, la relation (Log(N) , Log(S)) en prenant pour N_I, la plus grande surface S_I.

En ne tenant pas compte de N = 1 et de la surface correspondante afin de déterminer au mieux la surface globale S₀ allométrique, nous avons obtenu les résultats :

SOMME DES CARRÉS DES ECARTS = 0.02			
COEFFICIENTS DES FONCTIONS DE BASE			
COEFF	1	5.68	
COEFF	2	-0.54	
ABSCISSE	ORDONNÉE	APPROX	ECART
10.739	0.000	-0.135	0.135
9.214	0.693	0.690	0.003
8.547	1.099	1.051	0.048
7.785	1.386	1.464	0.078
7.403	1.609	1.670	0.061
7.213	1.792	1.773	0.019
7.022	1.946	1.877	0.069

tel que $\text{Log}(N) = (\text{coef } 2) \times \text{Log}(S) + (\text{coef } 1)$;

coef 2 relatif à l'allométrie.

Nous avons ensuite estimé une erreur relative moyenne N/N .

Si S est la somme des carrés des écarts suivante :

$$S = \sum^M (\text{Log}(N_O) - \text{Log}(N_C))^2$$

avec N_O : N observé

N_C : N calculé

M : nombre de points

L'écart moyen x entre Log (N_O) et Log (N_C) valant $\sqrt{S/M}$, nous avons

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

soit dans le cas présent :

$$\frac{\Delta N}{N} = 6 \%$$

La qualité d'homothétie se détermine à partir des longueurs totales calculées et de S.

Pour un ensemble de ces couples, nous calculons d'abord les valeurs correspondantes de $\rho'(1)$ avec la relation :

$$\rho'(1) = \frac{L(S, S_T) \left(\frac{1}{2} - a\right)}{\sqrt{S_T} \left(\left(\frac{S}{S_T}\right)^{\frac{1}{2}-a} - 1\right)} \quad (1)$$

La moyenne arithmétique de ces valeurs donne ρ'_m , la dispersion des valeurs $\Delta\rho'_m / \rho'_m$ étant représentée par :

$$\left(\sum^M |\rho'(1) / \rho'_m - 1| \right) / M$$

avec M : nombre de points

Les longueurs du réseau tronqué sont ensuite recalculées avec la relation (1) et $\rho'(1) = \rho'_m$, l'erreur relative moyenne $\Delta L/L$ étant estimée en divisant l'écart moyen par la longueur moyenne.

PHI(PRIME)	SURFACE(hect)	LONGUEUR REELLE ET CALCULEE(km)	
-18.65	4.64	0.37	0.13
-18.63	4.19	0.80	0.28
-6.91	2.86	0.90	0.84
-5.97	2.37	1.04	1.12
-6.39	2.15	1.26	1.26
-5.95	1.96	1.30	1.41
-5.80	1.78	1.40	1.55
-5.81	1.62	1.53	1.70
-6.18	1.34	1.91	1.99
-5.27	1.00	1.99	2.42
-5.48	0.91	2.19	2.57
-5.10	0.69	2.39	3.02
-4.85	0.57	2.50	3.32
-4.95	0.52	2.67	3.47
-4.89	0.47	2.76	3.62
-4.81	0.39	2.95	3.93
-4.28	0.26	3.03	4.54
-4.01	0.20	3.13	5.01
-3.95	0.16	3.29	5.33
-3.68	0.11	3.41	5.97
-3.50	0.08	3.52	6.45

$$\rho'_m = -6.43$$

$$L \text{ moyen} = 1.18 \text{ km}$$

$$\frac{\Delta\rho'_m}{\rho'_m} = 37 \%$$

$$\frac{\Delta L}{L} = 56 \%$$

ANNEXE 2

Données expérimentales et résultats :

Cas du réseau de Vaulx en Velin Nord.

Ce réseau ramifié d'une longueur totale de 13.48 km possède 300 regards et 48 jonctions. Le plus grand cheminement en partant de l'exutoire a une longueur de 2.8 km.

Nous avons calculé les longueurs de réseau tronqué à des distances successives correspondant aux jonctions et nous avons obtenu les résultats suivants, les longueurs étant exprimées en mètres.

DISTANCE JONCTION:	456.	LONGUEUR RESEAU:	456.
DISTANCE JONCTION:	842.	LONGUEUR RESEAU:	983.
DISTANCE JONCTION:	908.	LONGUEUR RESEAU:	1115.
DISTANCE JONCTION:	943.	LONGUEUR RESEAU:	1219.
DISTANCE JONCTION:	944.	LONGUEUR RESEAU:	1223.
DISTANCE JONCTION:	992.	LONGUEUR RESEAU:	1462.
DISTANCE JONCTION:	1015.	LONGUEUR RESEAU:	1601.
DISTANCE JONCTION:	1055.	LONGUEUR RESEAU:	1878.
DISTANCE JONCTION:	1092.	LONGUEUR RESEAU:	2124.
DISTANCE JONCTION:	1111.	LONGUEUR RESEAU:	2235.
DISTANCE JONCTION:	1112.	LONGUEUR RESEAU:	2240.
DISTANCE JONCTION:	1141.	LONGUEUR RESEAU:	2440.
DISTANCE JONCTION:	1170.	LONGUEUR RESEAU:	2643.
DISTANCE JONCTION:	1185.	LONGUEUR RESEAU:	2748.
DISTANCE JONCTION:	1195.	LONGUEUR RESEAU:	2805.
DISTANCE JONCTION:	1204.	LONGUEUR RESEAU:	2873.
DISTANCE JONCTION:	1213.	LONGUEUR RESEAU:	2941.
DISTANCE JONCTION:	1230.	LONGUEUR RESEAU:	3095.
DISTANCE JONCTION:	1258.	LONGUEUR RESEAU:	3313.
DISTANCE JONCTION:	1267.	LONGUEUR RESEAU:	3387.
DISTANCE JONCTION:	1425.	LONGUEUR RESEAU:	3975.
DISTANCE JONCTION:	1476.	LONGUEUR RESEAU:	4127.
DISTANCE JONCTION:	1477.	LONGUEUR RESEAU:	4131.
DISTANCE JONCTION:	1485.	LONGUEUR RESEAU:	4171.
DISTANCE JONCTION:	1588.	LONGUEUR RESEAU:	4704.
DISTANCE JONCTION:	1660.	LONGUEUR RESEAU:	5139.
DISTANCE JONCTION:	1681.	LONGUEUR RESEAU:	5283.
DISTANCE JONCTION:	1691.	LONGUEUR RESEAU:	5366.
DISTANCE JONCTION:	1731.	LONGUEUR RESEAU:	5639.
DISTANCE JONCTION:	1742.	LONGUEUR RESEAU:	5801.
DISTANCE JONCTION:	1761.	LONGUEUR RESEAU:	5975.
DISTANCE JONCTION:	1840.	LONGUEUR RESEAU:	6687.
DISTANCE JONCTION:	1847.	LONGUEUR RESEAU:	6750.
DISTANCE JONCTION:	1879.	LONGUEUR RESEAU:	7061.
DISTANCE JONCTION:	1880.	LONGUEUR RESEAU:	7069.
DISTANCE JONCTION:	1907.	LONGUEUR RESEAU:	7352.
DISTANCE JONCTION:	1967.	LONGUEUR RESEAU:	7984.
DISTANCE JONCTION:	1971.	LONGUEUR RESEAU:	8017.
DISTANCE JONCTION:	2045.	LONGUEUR RESEAU:	8753.

DISTANCE JONCTION:	2054.	LONGUEUR RESEAU:	8812.
DISTANCE JONCTION:	2113.	LONGUEUR RESEAU:	9280.
DISTANCE JONCTION:	2185.	LONGUEUR RESEAU:	9806.
DISTANCE JONCTION:	2208.	LONGUEUR RESEAU:	10010.
DISTANCE JONCTION:	2247.	LONGUEUR RESEAU:	10371.
DISTANCE JONCTION:	2290.	LONGUEUR RESEAU:	10768.
DISTANCE JONCTION:	2369.	LONGUEUR RESEAU:	11445.
DISTANCE JONCTION:	2436.	LONGUEUR RESEAU:	11851.
DISTANCE JONCTION:	2444.	LONGUEUR RESEAU:	11904.

Ensuite, nous avons approximé par une méthode numérique dite "aux moindres carrés" les couples longueur distance ($L = F(R)$), pour déterminer les coefficients de la droite $\ln L = d \ln R + a$

La qualité de l'approximation est quantifiée par les deux erreurs relatives définies au chapitre 5.2 de la partie B.

Les résultats de ce traitement sont les suivants :

$$d = 1.73$$

$$a = - 4.29$$

avec une moyenne des écarts relatifs et un écart relatif pondéré valant respectivement :

$$E1 = 17 \%$$

$$E2 = 14 \%$$

Connaissant le nombre M de jonctions (48 pour ce réseau), nous en déduisons la longueur moyenne des branches à partir de la longueur totale L_T du réseau.

$$l_m = L_T / (2 M - 1)$$

Le coefficient n associé à l_m est ensuite calculé comme suit :

$$n = \frac{e^{-a}}{l_m^{1-D}}$$

soit pour le cas présent $n = 0.47$ avec $l_m = 125$ m

L'expression

$$n = e^{-a/l} l^{1-D}$$

permet de déterminer la longueur l des parties correspondant à des valeurs entières de n .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **GIRE (Alain)**
Modèles Mathématiques de Systèmes Evolutifs Héréditaires
Théorie et Applications.
Thèse D.E. - Université Lyon I - 1986, 400 p.
- [2] **THIBAUT (Serge)**
Les Pertes au Ruissellement
MEMENTO HYDROLOGIE URBAINE
Paris, édition prévue pour 1987, 30 p.
- [3] **WALLISER (Bernard)**
Systèmes et Modèles
Paris, Seuil, 1977, 247 p.
- [4] **FEUVRIER (Charles-Valère)**
La Simulation des Systèmes
Paris, Dunod, 1971, 152 p.
- [5] **SIMON (Herbert A.)**
La Science des Systèmes,
Science de l'Artificiel
Paris, E.P.I., 1974, 154 p.
- [6] **FORRESTER (J.W.)**
Principes des Systèmes
Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 1981, 300 p.

- [7] **VOGEL (Théodore)**
Pour une Théorie Mécaniste Renouvelée
Paris, Gauthier-Villars, 1973, 142 p.
- [8] **BRUTER (Claude P.)**
Les Architectures du Feu ; Considérations sur les Modèles
Paris, Flammarion, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, 1982, 234 p.
- [9] **THIBAUT (Serge)**
Eléments pour une Phénoménologie en Hydrologie Urbaine
Thèse D.I., Institut National des Sciences Appliquées de Lyon - Lyon I,
1979, 361 p.
- [10] **ROUBY (Jean Pierre)**
Erreur et Système - L'ERREUR,
Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 1982, p. 131-138
- [11] **MORIN (Edgar)**
Le Jeu de la Vérité et de l'Erreur - L'ERREUR,
Lyon, Presses Universitaires de Lyon, 1982, p. 113-130
- [12] **CHOCAT (Bernard)**
Un Système d'Aide à la Gestion, la Prévision et la Conception
des Equipements Urbains
Thèse D.E. - Institut National des Sciences Appliquées de Lyon - Lyon I,
1981, 313 p.
- [13] **THIBAUT (Serge)**
L'Eau Pluviale en Milieu Urbain,
MEMENTO HYDROLOGIE URBAINE
Paris, édition prévue pour 1987, 20 p.
- [14] **BOURIER (Régis)**
Les Réseaux d'Assainissement
Paris, Technique et Documentation, 1981, 329 p.

- [15] **WISLER (C.O.), BRATER (E.F.)**
Hydrology
New York, J. Wiley and Sons INC, 1959, 408 p.
- [16] **HICK (N.I.)**
A Method of Computing Urban Runoff
Transaction of the American Society of Civil Engineers
1943, n° 2230, p. 1217-1253
- [17] **GUILBOT (A.), MOURADAGHA (A.)**
Modélisation du Ruissellement sur une Parcelle Semi-Urbaine
par un Schéma d'Hydrologie Rurale
T.S.M. Eau, Juillet 1979, p. 405-409
- [18] **DESBORDES (Michel)**
Réflexions sur les Méthodes de Calcul
des Réseaux Urbains d'Assainissement Pluvial
Thèse D.I., Université des Sciences et Techniques du Languedoc, UER IX,
Montpellier, 1974, 220 p.
- [19]
Instruction Technique des Agglomérations
Imprimerie Nationale, 1981,
Ministère de l'Intérieur, Direction Générale des Collectivités Locales
- [20] **DESBORDES (Michel)**
Utilisation de Modèle ; Méthode de Caquot,
MEMENTO HYDROLOGIE URBAINE
Paris, édition prévue pour 1987, 10 p.
- [21] **DESBORDES (Michel)**
Le Ruissellement,
MEMENTO HYDROLOGIE URBAINE
Paris, édition prévue pour 1987, 32 p.

- [22] **NORMAND (D.), VEYRAT (P.), BIAIS (A.)**
Étude Générale du Ruissellement Urbain
Direction Départementale de l'Équipement Isère, France,
Ministère de l'Équipement, 1969, n° R 10 151 A
- [23]
Modèle de Ruissellement Rural, Extension du Programme RERAM,
Paris, Service Technique de l'Urbanisme, Laboratoire d'Hydrologie
Mathématique, 1981, 40 p.
- [24] **SARMA (B.S.P.), DELLEUR (J.W.), RAO (R.A.)**
Conceptual Hydrologic Models for Urbanizing Basins
Journal of Hydraulic Division, 1972, vol. 98, HY7, p. 1205-1219
- [25] **GANGNET (Michel)**
Modèles d'Interaction Spatiale et Tableau de Contingence
Thèse S.C.I., Lyon I, 1978, 140 p.
- [26] **LAURINI (Robert)**
Contributions Systémiques et Informatiques au Multipilotage des Villes
Thèse D.E., Institut National des Sciences Appliquées de Lyon - Lyon I,
1980, 399 p.
- [27] **ARAUD (C.)**
Modèles Mathématiques de Planification Urbaine
Paris, Secrétariat des Missions d'Urbanisme et d'Habitat, 1976, 228 p.
- [28] **REMENIERAS (Gaston)**
L'hydrologie de l'ingénieur
Paris, Eyrolles, 1976, 451 p.
- [29] **THIBAUT (Serge), CHOCAT (Bernard)**
KIT MODELE
Paris, Service Technique de l'Urbanisme,
édition prévue pour 1987, 100 p.

- [30] **QUIMPO (Rafael G.)**
Spatial Heterogeneity and Models of Surface Runoff
Journal of Hydrology, 1984, vol. 68, n° 1/4, p. 19-28
- [31] **LINSLEY (Ray K.), KOHLER (Max A.), PAULHUS (Joseph L.)**
Hydrology for Engineers
U.S.A., Mac Graw Hill, 1982, 508 p.
- [32] **SERVAS (Jean Marie), HUET (Christian), MANDEL (Jean)**
Viscoélasticité
Compte Rendu Académie des Sciences
Paris, 19 novembre 1973, T. 277, série A, p. 1003-1005
- [33] **HUET (Christian)**
Systèmes Héritaires
Compte Rendu Académie des Sciences
Paris, 28 mai 1973, T. 276, série A, p. 1469-1471
- [34] **DISKIN (M.H.), BONEH (A.), GOLAN (A.)**
Identification of a Volterra Series Conceptual Model
Based on a Cascade of Non Linear Reservoirs
Journal of Hydrology, 1984, vol. 68, n° 1/4, p. 231-245
- [35] **NAPIORKOWSKY (J.J.), STRUPCZEWSKI (W.G.)**
The Analytical Determination of the Kernels of the Volterra Series
Describing the Cascade of Non Linear Reservoirs
Journal Hydrology Sciences, 1979, vol. 6, n° 3/4, p. 121-142
- [36] **NAPIORKOWSKY (J.J.), STRUPCZEWSKI (W.G.)**
The Properties of the Kernels of the Volterra Series
Describing Flow Deviations from a Steady State in an Open Channel
Journal of Hydrology, 1981, vol. 52, n° 3/4, p. 185-198
- [37] **SMART (J.S.)**
Channel Networks
Advances in Hydroscience, 1972, vol. 8, p. 305-346

- [38] **GUPTA (Vijay K.), WAYMIRE (E.D.)**
 On the Formulation of an Analytical Approach to Hydrologic Reponse
 and Similarity at the Basin Scale
Journal of Hydrology, 1983, vol. 65, n° 1/3, p. 95-123
- [39] **KIRSHEN (Diawa M.), BRAS (Raphaël L.)**
 The Linear Channel and its Effect on the Geomorphologic
 I.U.H., Journal of Hydrology, 1983, vol. 65, n° 1/3, p. 175-208
- [40] **STRAHLER (A.N.)**
 Quantitative Analysis of Watershed Geomorphology
Trans. Am. Geophy. Union, 1957, vol. 38, n° 6, p. 913-920
- [41] **BOCQUILLON (Claude)**
 Les Petits Ruisseaux Font les Grandes Rivières
 Montpellier, Laboratoire d'Hydrologie Mathématique, Université des
 Sciences et Techniques du Languedoc, U.E.R. IX, 1981, 30 p.
- [42] **KHELIL (Amar)**
 Structure des Réseaux d'Assainissement, Aide à la Modélisation
 Lyon, Mémoire DEA,
 Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1983, 110 p.
- [43] **MANDELBROT (Benoît)**
 Les Objets Fractals, Forme, Hasard et Dimension
 Paris, Flammarion, 1975, 190 p.
- [44] **MANDELBROT (Benoît)**
 Les Objets Fractals, deuxième édition
 Paris, Flammarion, 1984, 203 p.
- [45] **BERTALANFFY (Ludwig)**
 Théorie Générale des Systèmes
 Paris, Dunod, 1973, 296 p.
- [46] **THOM (René)**
 Paraboles et Catastrophes
 Paris, Flammarion, 1983, 189 p.

- [47] **SERRES (Michel)**
Le Passage du Nord-Ouest
Hermès V, Paris, Les Editions de Minuit, 1980, 195 p.
- [48] **FAVARD (J.)**
Espace et Dimension
Paris, Albin Michel, 1950, 302 p.
- [49] **BOREL (Emile)**
Eléments de la Théorie des Ensembles
Paris, Albin Michel, 1949, 320 p.
- [50] **THIRRIOT (Claude)**
L'Egoutier et le Savant, Conte Moral pour Universitaire
en Cure d'Assainissement
La Houille Blanche, 1984, n° 1/2, p. 27-64
- [51] **ARON (Gert)**
Rainfall Abstractions
Urban Storm Water Hydrology, Washington, D.F. KIBLER, 1982, p. 69-84
- [52] **HORTON (Robert E.)**
An Approach Toward a Physical Interpretation of Infiltration Capacity
Soil Science Society Proceedings, 1940, n° 2325, p. 399-417
- [53] **HICKS (W.I.)**
A Method of Computing Urban Runoff
American Society of Civil Engineers Transactions
1943, n° 2230, p. 1217-1268
- [54] **CONSUEGRA (D.), JATON (J.F.), WISNER (P.)**
Etude Comparative de Différentes Fonctions d'Infiltration
OTTAWA - LAUSANNE, Université d'Ottawa Département de Génie
Civil, Ecole Polytechnique de Lausanne Unité Hydrologie et Aménagements,
1984-1985, 77 p.

- [55] **DESBORDES (Michel)**
 Modélisation des Pertes dans les Bassins Urbains
 Montpellier, Laboratoire d'Hydrologie Mathématique, Université des
 Sciences et Techniques du Languedoc, U.E.R. IX, 1985, 20 p.
- [56] **HAMM (Pascal), PASCAL (Sire)**
 De l'Etude Mathématique et du Traitement Informatique d'un Modèle
 Non Linéaire du Phénomène de Ruissellement en Hydrologie Urbaine
 Lyon, Laboratoire Méthodes, INSA, 1981, 250 p.
- [57] **STEWART (Ian)**
 Les Fractals
 Paris - Berlin, 1982, 67 p.
- [58] **MANDELBROT (Benoît)**
 Des Monstres de Cantor et de Peano
 à la Géométrie Fractale de la Nature
Penser les Mathématiques, Paris, Seuil, 1982, p. 226-251
- [59] **CARLIER (M.)**
 Hydraulique Générale et Appliquée
 Paris, Eyrolles, 1972, 560 p.
- [60] **DAUBERT (A.)**
 Quelques Aspects de la Propagation des Crues
La Houille Blanche, 1964, n° 3
- [61]
 Notices d'Utilisation de S.E.R.A.I.L.
 Lyon, 1983, Laboratoire Méthodes,
 Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1000 p.
- [62] **MORIN (E.)**
 La Méthode ; 1. La Nature de la Nature
 Paris, Seuil, 1977, 387 p.

- [63] **ROSNAY (J. de)**
Le Macroscopie, Vers une Vision Globale
Paris, Seuil, 1975, 305 p.
- [64] **LE MOIGNE (J.L.)**
La Théorie du Système Général, Théorie de la Modélisation
Paris, P.U.F., 1977, 258 p.
- [65] **LE MOIGNE (J.L.)**
Les Fondements Epistémologiques Contemporains
des Sciences du Génie
Aix en Provence, GRASCE, 1984,
CNRS / ASTS, ATP 06 931-1012, 60 p.
- [66] **LE MOIGNE (J.L.)**
Conception de la Complexité et Complexité de la Conception
Aix en Provence, GRASCE, 1985, note de recherche 85:02, 25 p.
- [67] **LE MOIGNE (J.L.)**
Culture Technique : Les Paradoxes de l'Ingénieur
Aix en Provence, GRASCE, 1984, note de recherche 84.15.STS, 8 p.
- [68] **DUPUY (G.), KNAEBEL (G.)**
Assainir la Ville Hier et Aujourd'hui
Paris, Dunod, 1982, 92 p.
- [69] **DUPUY (G.)**
Villes, Systèmes et Réseaux,
le Rôle Historique des Techniques Urbaines
Les Annales de la Recherche Urbaine, 1984, n° 23-24, p. 231-241
- [70] **ROUSSE (D.)**
Histoire de l'Assainissement des Communes de la Rive Gauche du Rhône
dans l'Agglomération Lyonnaise de 1854 à 1972
Institut National des Sciences Appliquées de Lyon,
Groupe de Recherches Rhône-Alpes sur les Infrastructures et l'Eau,
1986, 35 p.