



HAL
open science

L'application cotangente des surfaces de type général

Xavier Roulleau

► **To cite this version:**

Xavier Roulleau. L'application cotangente des surfaces de type général. Mathématiques [math].
Université d'Angers, 2007. Français. NNT: . tel-00271770

HAL Id: tel-00271770

<https://theses.hal.science/tel-00271770>

Submitted on 10 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université d'Angers
UFR Sciences

**L'APPLICATION COTANGENTE DES SURFACES DE TYPE
GÉNÉRAL**

Thèse de doctorat
Spécialité : Mathématiques
Ecole doctorale d'Angers
Présentée et soutenue publiquement le :
16 novembre 2007
à l'Université d'Angers
par Xavier Roulleau
Devant le jury ci-dessous :

Rapporteurs :
Chris Peters, Professeur à l'Université de Grenoble
Claire Voisin, Directrice de recherche, IHES

Examineurs :
James Alexander, Professeur à l'Université d'Angers
Arnaud Beauville, Professeur à l'Université de Nice
Christoph Sorger, Professeur à l'Université de Nantes

Directeur de thèse :
Igor Reider, Professeur à l'Université d'Angers

Cette thèse a été préparée à l'Université d'Angers sous la direction d'Igor Reider. Au cours de ces années, le thème de recherche qu'il m'a proposé s'est révélé particulièrement porteur : je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Je suis très sensible au fait que Claire Voisin et Chris Peters aient accepté de rapporter ma thèse. Qu'ils trouvent ici mes remerciements les plus vifs pour leurs remarques et leurs commentaires.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à James Alexander, Arnaud Beauville et Christoph Sorger d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie aussi Andeas Høring pour sa lecture de ma thèse et son intérêt encourageant.

La lecture des ouvrages de J. Silverman sur les courbes elliptiques, notamment son chapitre sur les surfaces elliptiques, m'avait donné envie de faire ma thèse en géométrie algébrique. C'est à Michel Granger, lors d'une discussion à ce sujet, que je dois la chance d'avoir rencontré Igor Reider. Je l'en remercie, ainsi que pour sa disponibilité à répondre à mes questions relatives aux procédures administratives.

Je tiens également à remercier Vincent Barré, Laurent Bertrand, Pierre Laforcade, Lahcen Ouhbassi et Claudine Piau-Toffolon pour m'avoir accueilli au département informatique de l'IUT de Laval lors de mes deux années d'ATER. Nos recherches très différentes ne nous ont pas empêché d'échanger et je regrette déjà la cordialité et le dynamisme de toute l'équipe.

Sur un autre plan, bien entendu, je songe avec affection à mes parents et à ma famille qui m'a soutenu et encouragé tout au long de mes études.

Enfin, je pense avec gratitude à mes amis lyonnais, Suzel Mayer et Nathan Calonne, engagés dans le même cursus, quoique dans des domaines tout autres, pour la constance de leur soutien.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.	7
1. Etude de l'application cotangente.	15
1.1. Les définitions de l'application cotangente.	15
1.2. Dimension des fibres et de l'image de l'application cotangente.	18
1.3. Degré de l'application ψ , degré de $\psi_*\pi^*C$, ramification.	20
2. Etude des courbes non-amples.	25
2.1. Critère de contraction, décomposition du fibré cotangent.	25
2.2. Classification et lissité des courbes non-amples.	27
2.3. Application à l'étude des surfaces fibrées.	32
2.4. Remarques sur les configurations des courbes non-amples, borne sur le nombre de courbes elliptiques.	34
3. Surfaces contenant une infinité de courbes non-amples.	37
3.1. Caractérisation de l'image de l'application cotangente.	37
3.2. Compléments du cas d'une surface produit de deux courbes.	44
3.3. Exemple du produit symétrique.	45
4. Exemple des surfaces de Fano.	49
4.1. Fibres de l'application cotangente et courbes non-amples des surfaces de Fano.	49
4.2. Ramification de l'application cotangente, borne sur le nombre de courbes non-amples de la surface de Fano.	53
4.3. Fibrations, automorphismes et courbes non-amples de S .	54
4.4. Surface de Fano de la cubique de Fermat.	58
Références	71

INTRODUCTION.

Le fibré canonique joue un rôle essentiel dans la théorie des courbes lisses projectives. Soit C une telle courbe de genre $g > 1$, la surjection $H^0(C, \Omega_C) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_C$ permet de définir un morphisme du projectivisé du fibré tangent $\mathbb{P}(T_C)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(C, \Omega_C)^*)$. Puisque T_C est un fibré inversible, le fibré projectif $\mathbb{P}(T_C)$ est isomorphe à C et le morphisme obtenu $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C, \Omega_C)^*)$ est le morphisme canonique associé à la courbe C :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(T_C) & \rightarrow & \mathbb{P}(H^0(C, \Omega_C)^*) \\ \parallel & \nearrow \phi & \\ C & & \end{array}$$

Les propriétés de ce morphisme sont bien connues : si la courbe C est hyperelliptique, l'image de ϕ est une courbe rationnelle normale et est de degré $g - 1$, sinon ϕ est un plongement.

Une surface projective lisse S est également étudiée en considérant son fibré canonique i.e. le déterminant du fibré cotangent. Si K est un diviseur canonique de la surface, la dimension de Kodaira $\kappa(S)$ est la plus grande dimension des images de S par les applications rationnelles ϕ_n associées aux systèmes linéaires $|nK|$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Une surface S est dite de type général si $\kappa(S) = 2$. Si S est minimale, il existe un entier n tel que le système linéaire $|nK|$ définisse un plongement en dehors des -2 courbes. Le plus petit entier n vérifiant cette propriété dépend de l'intersection K^2 (cf. [2]).

Cette classification reste malgré tout insatisfaisante en regard des résultats obtenus pour les surfaces de dimension de Kodaira inférieure : l'appellation "de type général" recouvre une trop grande diversité de surfaces.

On se propose d'aborder l'étude des surfaces de type général en suivant l'analogie avec la théorie des courbes. Pour ces dernières, le fibré cotangent et le fibré canonique coïncident. Pour une surface, la différence existe et cela suggère d'étudier non pas son fibré canonique, mais le fibré cotangent lui-même. Quelques conditions supplémentaires sont nécessaires :

Hypothèse 0.1. *Nous travaillerons dans ce qui suit avec une surface S définie sur le corps des complexes, lisse, de type général, dont le fibré cotangent Ω_S est engendré par l'espace de ses sections globales $H^0(\Omega_S)$ et d'irrégularité $q = \dim H^0(\Omega_S)$ vérifiant $q > 3$.*

De telles surfaces se trouvent comme sous-variétés d'une variété abélienne.

Soit S une surface vérifiant les hypothèses 0.1, notons T_S le fibré tangent, $\pi : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow S$ la projection sur S du projectivisé du fibré tangent et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ le fibré inversible tel que $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)) \simeq \Omega_S$. On a une identification naturelle :

$$H^0(\mathbb{P}(T_S), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)) \simeq H^0(\Omega_S),$$

et, par hypothèse, le morphisme $H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \Omega_S$ est surjectif. Le morphisme $H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ est donc également surjectif et définit

un morphisme appelé l'**application cotangente** :

$$\psi : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*) = \mathbb{P}^{g-1}.$$

Ce morphisme est l'objet d'étude de la présente thèse.

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(T_S) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*) \\ \pi \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

est l'analogie de celui des courbes. En gardant le modèle d'étude des courbes à l'esprit, nous cherchons à résoudre les mêmes problèmes : la question de la finitude de ψ , la question de son degré et du degré de son image.

L'application cotangente permet de traduire les propriétés algébriques du fibré cotangent par les propriétés géométriques de son image. Ainsi, le morphisme ψ possède des fibres finies si et seulement si le fibré Ω_S est ample (au sens de Hartshorne [12]), c'est-à-dire, si et seulement si il n'existe pas de courbe irréductible $C \hookrightarrow S$ contenue dans S telle que la restriction $\Omega_{S|C}$ du fibré admette un quotient surjectif trivial.

Si une courbe irréductible C possède un quotient inversible trivial :

$$\Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0,$$

celui-ci détermine une section du morphisme π qui est contractée par l'application cotangente en un point. Un tel point de $\mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$ sera appelé un **point exceptionnel** et une telle courbe sera dite **non-ample**. Nous noterons Δ le lieu des points exceptionnels.

Se pose alors le problème d'établir une classification des courbes non-amples contenues dans la surface ; cette classification se fera suivant les propriétés numériques de ces courbes et permettra de donner un critère pour qu'une courbe non-ample soit lisse.

Après avoir étudié les courbes non-amples isolément, il est naturel d'étudier leurs configurations et en particulier leurs intersections, nous en ferons une brève étude.

Enfin, nous chercherons à caractériser les surfaces possédant une infinité de courbes non-amples, ou encore les surfaces pour lesquelles le lieu des points exceptionnels est de dimension strictement positive.

Contenu de la thèse chapitre par chapitre.

La thèse peut être divisée en deux parties : la première partie (chapitres 1 à 3) est une étude de portée générale de l'application cotangente. La seconde partie (chapitre 4) est un exemple et une illustration des propriétés d'un tel morphisme.

Chapitre 1.

Soit S vérifiant les hypothèses 0.1. Dans ce premier chapitre, nous étudions l'application cotangente de la surface S :

Théorème 0.2. *L'image de l'application cotangente est de dimension 3.*

Soit p un point de \mathbb{P}^{q-1} . La fibre $\psi^{-1}(p)$ est de dimension au plus 1.

Le sous-schéma fermé Δ de \mathbb{P}^{q-1} formé des points p tels que $\dim \psi^{-1}(p) = 1$ est de dimension au plus 1.

Chaque point de Δ est le sommet d'un cône contenu dans l'image de l'application cotangente.

Nous établissons ensuite une borne sur le degré de l'application cotangente et sur le degré de son image en fonction des nombres de Chern $c_1^2[S], c_2[S]$ de la surface (voir proposition 1.18).

Chapitre 2.

Soit p un point de \mathbb{P}^{q-1} . Si la fibre $\psi^{-1}(p)$ est de dimension 1, alors l'image de $\psi^{-1}(p)$ par le morphisme de projection π est une courbe et chaque composante réduite irréductible C de cette courbe possède une section $t : C \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ contractée en un point par l'application cotangente. La proposition suivante relie cette propriété géométrique de la courbe C aux propriétés faisceautiques du fibré cotangent :

Proposition 0.3. *Une courbe $C \hookrightarrow S$ possède une section :*

$$t : C \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$$

contractée en un point par l'application cotangente si et seulement si il existe un morphisme surjectif :

$$\Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C$$

où $\Omega_{S|C}$ est la restriction du fibré cotangent à C .

Soit $C \hookrightarrow S$ une courbe, on appellera suite cotangente de C la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-C) \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C \rightarrow 0.$$

Le théorème suivant classe les courbes non-amples de la surface :

Théorème 0.4. *Soit C une courbe de la surface S , alors :*

a) La courbe C est non-ample et vérifie $C^2 < 0$ si et seulement si C est lisse de genre 1.

b) La courbe C est non-ample et vérifie $C^2 = 0$ si et seulement si C est lisse de genre strictement supérieur à 1 et la suite cotangente est scindée.

c) Si la courbe C est non-ample, lisse et vérifie $C^2 > 0$, alors la suite cotangente de C n'est pas scindée et C est de genre supérieur ou égal à q .

Ce théorème s'obtient à partir d'un critère de lissité de Lipman [13].

Nous appliquons ensuite ce théorème à l'étude d'une surface fibrée $f : S \rightarrow B$ à fibres connexes. Soit B' l'ouvert de B tel que la restriction de f à $S' := f^{-1}B'$ soit une submersion. Notons $\Omega_{S'/B'}$ le faisceau des différentielles relatives de la restriction $f' : S' \rightarrow B'$ et $T_{S'/B'}$ le dual de $\Omega_{S'/B'}$. L'application de Kodaira-Spencer de $f' : S' \rightarrow B'$ est l'application :

$$\delta : T_B \rightarrow R^1 f_*(T_{S/B})$$

déduite de la suite exacte des espaces tangents :

$$0 \rightarrow T_{S/B} \rightarrow T_S \rightarrow f^*T_B \rightarrow 0.$$

Le théorème 0.4 permet de montrer le résultat suivant :

Proposition 0.5. *Soit $f : S \rightarrow B$ une fibration de la surface. Une fibre lisse en un point b de B est non-ample si et seulement si b est un zéro du morphisme de Kodaira-Spencer δ .*

Une surface fibrée $f : S \rightarrow B$ est dite isotriviale si ses fibres lisses sont isomorphes entre-elles. Cette propriété est équivalente au fait que le morphisme de Kodaira-Spencer soit nul, ou encore par le théorème 0.4, cela est équivalent au fait que les fibres lisses de f soient des courbes non-amples.

Chapitre 3.

Ce troisième chapitre est consacré aux surfaces possédant une infinité de courbes non-amples. Le but étant de déterminer ces surfaces et d'appréhender l'image de leur application cotangente.

Rappelons que Δ est le fermé des points exceptionnels i.e. des points p de \mathbb{P}^{q-1} tels que la fibre $\psi^{-1}(p)$ soit de dimension 1.

Théorème 0.6. *Soit S une surface possédant une infinité de courbes non-amples et telle que Δ ne soit pas une droite de \mathbb{P}^{q-1} . L'image de l'application cotangente vérifie alors l'une des deux propriétés suivantes :*

a) *La surface S est une surface fibrée isotriviale dont les fibres sont les courbes non-amples. Le lieu des points exceptionnels Δ est formé de deux courbes et l'image de l'application cotangente est la variété développée par les sécantes de ces deux courbes.*

b) *L'image de l'application cotangente est la variété des sécantes d'une courbe. Une courbe non-ample C de la surface vérifie en ce cas : $C^2 > 0$.*

Le théorème 3.1 donne un énoncé plus précis, mais plus technique. Ce théorème s'obtient en étudiant l'image inverse d'un fermé de dimension 1 de Δ .

Nous étudions ensuite la surface produit symétrique $B^{(2)}$ d'une courbe lisse B de genre strictement supérieur à 3 et non-hyperelliptique. Cette surface vérifie les hypothèses 0.1 et contient une infinité de courbes non-amples C vérifiant $C^2 = 1$.

Chapitre 4.

Un exemple pour lequel l'application cotangente intervient naturellement est celui de la surface de Fano d'une cubique lisse de \mathbb{P}^4 . D'après les travaux de H. Clemens, P. Griffiths [6] et de A. Tjurin [24], [25], une surface de Fano S vérifie les hypothèses 0.1, son irrégularité est $q = 5$ et l'image de son application cotangente ψ est une hypersurface cubique lisse $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$. La surface S est alors le schéma de Hilbert des droites de la cubique F (réciproquement le schéma de Hilbert des droites d'une cubique lisse de \mathbb{P}^4 est une surface de Fano).

En premier lieu, nous étudions les fibres de l'application cotangente d'une surface de Fano S pour montrer la proposition suivante :

Proposition 0.7. *Une courbe $E \hookrightarrow S$ est non-ample si et seulement si elle est lisse de genre 1. En ce cas, elle vérifie : $E^2 = -3$.*

Nous étudions ensuite le diviseur de ramification R de l'application cotangente : celui-ci s'écrit $R = \pi^*\Sigma$ où Σ est un diviseur de la surface linéairement équivalent à $2K$ (K un diviseur canonique). Cette étude permet de borner le nombre de courbes non-amples d'une surface de Fano :

Proposition 0.8. *Une surface de Fano possède au plus 30 courbes lisses de genre 1.*

Soit p le sommet du cône $\psi_*\pi^*E$, soit s un point générique de S , notons X_s le plan contenant le sommet p et la droite $L_s = \psi(\pi^{-1}(s)) \hookrightarrow F$. Le plan X_s découpe la cubique F en trois droites :

- 1) la droite L_s ,
- 2) la droite $L_{\gamma_E(s)}$ (contenue dans le cône) passant par le sommet p et par le point intersection de L_s et du cône $\psi_*\pi^*E$,
- 3) la droite résiduelle $L_{\sigma_E(s)}$ telle que : $X_s F = L_s + L_{\gamma_E(s)} + L_{\sigma_E(s)}$.

Nous avons ainsi défini deux applications rationnelles :

$$\gamma_E : S \rightarrow E, \sigma_E : S \rightarrow S.$$

Lemme 0.9. *Les applications γ_E et σ_E sont des morphismes et σ_E est une involution.*

Cette construction nous permet de calculer l'intersection de deux courbes non-amples :

Lemme 0.10. *Soit E, E' deux courbes non-amples d'une surface de Fano. Le nombre d'intersection EE' vaut 0 ou 1.*

Le groupe engendré par les automorphismes σ_E (E courbe non-ample) permet de déterminer la configuration formé par les courbes non-amples de S . Nous donnons au paragraphe 4.3 les résultats de cette classification (résultats qui font l'objet d'une publication à venir).

La surface de Fano S de la cubique de Fermat $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0$$

est l'unique surface de Fano qui possède 30 courbes elliptiques. Nous en faisons une étude particulière.

Soit μ_3 l'ensemble des racines troisièmes de l'unité et $\alpha \in \mu_3$ une racine primitive, notons Λ_A^* le sous- $\mathbb{Z}[\alpha]$ -module libre de rang 5 de $H^0(\Omega_S)$ engendré par les formes :

$$x_i - \beta x_j \quad (i < j, \beta \in \mu_3).$$

Notons de plus $e_1, \dots, e_5 \in H^0(\Omega_S)^*$ la base duale de x_1, \dots, x_5 . Définissons le produit hermitien de deux formes $\ell, \ell' \in \Lambda_A^*$ par :

$$\langle \ell, \ell' \rangle = \sum_{k=1}^{k=5} \ell(e_k) \overline{\ell'(e_k)},$$

et la norme de ℓ par : $\|\ell\| = \sqrt{\langle \ell, \ell \rangle}$.

Théorème 0.11. *La surface de Fano de la cubique de Fermat possède 30 courbes lisses de genre 1 numérotées :*

$$E_{ij}^\beta, 1 \leq i < j \leq 5, \beta \in \mu_3.$$

1) Chaque courbe lisse de genre 1 contenue dans la surface de Fano est isomorphe à la cubique plane de Fermat : $\mathbb{E} : X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$.

2) Soit E_{ij}^γ et E_{st}^β deux telles courbes, alors :

$$E_{ij}^\beta E_{st}^\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \cap \{s, t\} = \emptyset \\ -3 & \text{si } E_{ij}^\beta = E_{st}^\gamma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3) Le groupe de Néron-Severi $NS(S)$ de la surface S est de rang : $25 = \dim H^1(S, \Omega_S)$. Le sous-réseau de $NS(S)$ engendré par les 30 courbes non-amples est de rang 25 et de discriminant égal à 3^{20} .

4) Pour tout élément ℓ non nul de Λ_A^* , il existe une fibration $\gamma_\ell : S \rightarrow \mathbb{E}$. Soit F_ℓ une fibre de γ_ℓ . L'intersection de F_ℓ et de la courbe $E_{ij}^\beta \hookrightarrow S$ vaut :

$$E_{ij}^\beta F_\ell = |(e_i - \beta e_j)(\ell)|^2.$$

La fibration γ_ℓ est à fibres connexes si les entiers :

$$E_{ij}^\beta F_\ell, 1 \leq i < j \leq 5, \beta \in \mu_3$$

sont premiers entre eux dans leur ensemble.

5) La fibre F_ℓ est de genre :

$$g(F_\ell) = 1 + 3 \|\ell\|^2.$$

6) Soit ℓ et ℓ' deux éléments linéairement indépendants de $\Lambda_A^* \subset H^0(\Omega_S)$. Le morphisme $(\gamma_\ell, \gamma_{\ell'}) : S \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ est de degré $F_\ell F_{\ell'}$ et :

$$F_\ell F_{\ell'} = \|\ell\|^2 \|\ell'\|^2 - \langle \ell, \ell' \rangle \langle \ell', \ell \rangle.$$

Nous étudions ensuite les fibrations γ_ℓ , $\ell \in \Lambda_A^*$ les plus intéressantes.

Notations.

Pour une surface S , on utilisera les notations suivantes :

- $K = K_S$ un diviseur canonique.
- Ω_S le fibré cotangent.
- $H^o(\Omega_S)$ l'espace des sections globales de Ω_S .
- $\mathcal{O}_S(D)$ est le faisceau inversible associé au diviseur D .
- c_1 et c_2 sont les classes de Chern de la surface.
- $c_1^2[S]$ et $c_2[S]$ sont les nombres de Chern de la surface.
- Le symbole \sim (respectivement \equiv) est l'équivalence pour la classe d'équivalence linéaire (respectivement numérique) d'une surface.
- DD' est le nombre d'intersection de deux diviseurs D, D' de S .
- Pour tout diviseur D , on note $g(D)$ le genre arithmétique :

$$g(D) = \frac{1}{2}(D^2 + KD) + 1$$

- Si X est une variété, on confondra les notions de \mathcal{O}_X -module localement libre et de fibré vectoriel sur X .
- Pour H, R, T trois diviseurs d'une variété de dimension 3, on notera (H, R, T) leur intersection.

- Le cardinal d'un ensemble fini T est noté $\#T$.
- Une courbe d'une surface est un diviseur réduit et irréductible.

Dans ce qui suit si S est une surface vérifiant les hypothèses 0.1, alors :

- $q = \dim H^o(\Omega_S)$ désigne l'irrégularité de S .
- $\psi : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ désigne l'application cotangente (définition 1.1).
- F désigne l'image de cette application cotangente.
- $\pi : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow S$ le morphisme de projection (définition 1.1).
- $\mathcal{G} : S \rightarrow G(2, q)$ le morphisme de Gauss (définition 1.8).
- $L_s = \psi(\pi^{-1}s)$ est la droite correspondant au point $\mathcal{G}(s)$ ($s \in S$) (notation 1.7),.
- Δ est le fermé des points exceptionnels i.e. des points p tels que $\dim \psi^{-1}p = 1$ (définition 1.16).

Pour le chapitre 4 relatif aux surfaces de Fano S , nous adopterons les conventions suivantes :

- x_1, \dots, x_5 base des formes $H^o(\Omega_S)$ (paragraphe 4.1.2).
- $e_1, \dots, e_5 \in H^o(\Omega_S)^*$ base duale des formes x_1, \dots, x_5 (paragraphe 4.3).
- $\mathbb{C}v$ (où $v \in H^o(\Omega_S)^*$ est non nul) désigne l'espace engendré par v ou bien le point de \mathbb{P}^4 correspondant : nous préciserons l'aspect "espace" ou "point" suivant les cas (paragraphe 4.4.1).
- $T_{F,p} \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ désigne l'hyperplan projectif tangent au point p de la cubique F (paragraphe 4.3).
- μ_3 est le groupe des racines troisièmes de l'unité.
- $\alpha \in \mu_3$ est une racine primitive.

1. ETUDE DE L'APPLICATION COTANGENTE.

1.1. Les définitions de l'application cotangente. Soit S une surface vérifiant les hypothèses 0.1, c'est-à-dire :

- La surface S est définie sur \mathbb{C} , lisse, de type général, son fibré cotangent Ω_S est engendré par l'espace de ses sections globales $H^0(\Omega_S)$ et elle est d'irrégularité $q > 3$.

Soit $\mathbb{P}(T_S)$ le projectivisé du fibré cotangent, $\pi : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow S$ le morphisme de projection, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ le fibré tautologique qui vérifie :

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)) = \Omega_S.$$

L'espace $H^0(\mathbb{P}(T_S), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1))$ des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ s'identifie à l'espace $H^0(\Omega_S)$. Le fibré cotangent étant engendré par ses sections globales, le morphisme naturel $H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ est surjectif (cf. [11]).

Définition 1.1. *Le morphisme :*

$$\psi : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*) = \mathbb{P}^{q-1}$$

défini par la surjection $H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ est appelé l'application cotangente de la surface .

L'image de l'application cotangente est non-dégénérée dans $\mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$.

Une seconde construction de l'application cotangente est possible et permet d'obtenir une interprétation plus géométrique de ce morphisme.

Considérons une surface lisse S' , soit A sa variété d'Albanese, $\vartheta : S' \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese et $H^0(\Omega_{S'})$ l'espace des sections globales de son fibré cotangent, alors :

Lemme 1.2. *La différentielle $d\vartheta : T_{S'} \rightarrow \vartheta^*T_A = H^0(\Omega_{S'})^* \otimes \mathcal{O}_{S'}$ du morphisme ϑ est le dual du morphisme d'évaluation $H^0(\Omega_{S'}) \otimes \mathcal{O}_{S'} \rightarrow \Omega_{S'}$.*

Démonstration. Voir [10] p.331. \square

Notons $p_r : S' \times H^0(\Omega_{S'})^* \rightarrow H^0(\Omega_{S'})^*$ la projection sur le second facteur. Par définition, le morphisme d'Albanese ϑ est une immersion locale si ϑ est immersif en tout point, c'est-à-dire si le morphisme :

$$p_r \circ d\vartheta_s : T_{S',s} \rightarrow H^0(\Omega_{S'})^*$$

est injectif en tout point s de S . Soit $\mathcal{M}_{S',s} \subset \mathcal{O}_{S',s}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S',s}$. Le lemme 1.2 montre que :

Lemme 1.3. *Le morphisme d'Albanese $\vartheta : S' \rightarrow A$ est une immersion en s si et seulement si le morphisme d'évaluation $H^0(\Omega_{S'}) \rightarrow \Omega_{S',s}/\mathcal{M}_{S',s}\Omega_{S',s}$ est surjectif en s .*

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 1.4. *Le morphisme d'Albanese de la surface S' est une immersion locale si et seulement si le fibré cotangent de S' est engendré par ses sections globales.*

Revenons maintenant à la surface S vérifiant les hypothèses 0.1. Soit $\vartheta : S \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese et :

$$p_r : S \times H^o(\Omega_S)^* \rightarrow H^o(\Omega_S)^*$$

le morphisme de projection. Le corollaire suivant du lemme 1.2 donne une interprétation géométrique de l'application cotangente de la surface :

Corollaire 1.5. *L'application cotangente de S est le projectivisé du morphisme :*

$$p_r \circ d\vartheta : T_S \rightarrow H^o(\Omega_S)^*.$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 1.2 et du corollaire 1.4. \square

L'application cotangente est donc le morphisme qui à un point de la surface et à une direction tangente associe la direction tangente dans la variété d'Albanese.

Après ce second point de vue, regardons les propriétés de la restriction de l'application cotangente en la fibre $\pi^{-1}s$ d'un point s . La fibre en s de la projection π est la courbe $\mathbb{P}(T_{S,s}) \simeq \mathbb{P}^1$. La restriction du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ à la courbe rationnelle $\mathbb{P}(T_{S,s})$ est le fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{S,s})}(1)$ de degré 1 et la restriction de l'application cotangente à $\mathbb{P}(T_{S,s})$ est définie par la surjection :

$$H^o(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{S,s})} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_{S,s})}(1) \rightarrow 0.$$

Ainsi :

Lemme 1.6. *La restriction de l'application cotangente à la fibre $\pi^{-1}s$ ($s \in S$) est un plongement et l'image de $\pi^{-1}s$ est une droite de \mathbb{P}^{q-1} .*

Notation 1.7. *Pour un point s de S , on notera $L_s \hookrightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ l'image de la fibre $\pi^{-1}s$ par l'application cotangente.*

L'image de l'application cotangente est donc la réunion des droites L_s (s point de S). Notons $G(2, q)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $H^o(\Omega_S)^*$. Cette grassmannienne paramètre également les droites de l'espace projectif \mathbb{P}^{q-1} .

Définition 1.8. *Le morphisme de Gauss :*

$$\mathcal{G} : S \rightarrow G(2, q)$$

de la surface S est défini par la surjection $H^o(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \Omega_S$.

Par construction, le point $\mathcal{G}(s)$ représente la droite projective L_s , ou encore :

Corollaire 1.9. *Le morphisme de Gauss est le morphisme qui à un point s de la surface associe l'élément de $G(2, H^o(\Omega_S)^*)$ représentant le plan :*

$$p_r \circ d\vartheta_s(T_{S,s}) \subset H^o(\Omega_S)^*.$$

Démonstration. C'est un corollaire du lemme 1.2. \square

Le morphisme de Gauss de la surface S possède la propriété suivante :

Lemme 1.10. *Le morphisme de Gauss est fini sur son image.*

Démonstration. La surface S est de type général et son fibré cotangent est engendré par ses sections globales : elle vérifie donc les conditions du corollaire 2 de [19], ce qui permet de conclure que le morphisme \mathcal{G} est fini. \square

Remarque 1.11. *Soit K un diviseur canonique de S et U le fibré universel de $G(2, q)$. Le lemme 1.10 implique que le fibré canonique :*

$$\mathcal{O}_S(K) = \mathcal{G}^*(\wedge^2 U^*)$$

est ample.

La configuration que nous avons construit est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(T_S) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*) \\ \pi \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

Plus généralement, pour toute variété X dont le fibré cotangent est engendré par ses sections globales, on peut définir une application cotangente et un morphisme de Gauss. Par exemple si X est une courbe, alors la projection π est un isomorphisme et $\psi \circ \pi^{-1}$ est le morphisme canonique de X .

Le morphisme ψ possède une factorisation qui donne un nouvel éclairage à la situation étudiée :

Soit U le fibré universel de $G(2, q)$, $\mathbb{P}(U)$ le projectivisé de U ,

$$\pi_2 : \mathbb{P}(U) \rightarrow G(2, q)$$

le morphisme de projection et soit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$ le fibré tel que $\pi_{2*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \simeq U^*$.

Notons $\pi_1 : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ la projection naturelle et notons $\tilde{\psi} : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow \mathbb{P}(U)$ le morphisme défini par le quotient :

$$\pi^*\Omega_S = \pi^*\mathcal{G}^*U^* \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1) \rightarrow 0.$$

Le morphisme $\tilde{\psi}$ vérifie $\pi_1 \circ \tilde{\psi} = \psi$ et la situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(T_S) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathbb{P}(U) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^{q-1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_2 & & \\ S & \xrightarrow{\mathcal{G}} & G(2, q) & & \end{array}$$

L'image de ψ est réunion des droites L_s ($s \in S$). Par exemple, si le morphisme de Gauss est un plongement, la surface S possède une propriété modulaire : elle paramètre des droites d'une sous-variété de \mathbb{P}^{q-1} .

1.2. Dimension des fibres et de l'image de l'application cotangente.

Cette section porte sur les fibres de l'application cotangente et la dimension de son image. Nous établissons que ces fibres sont de dimension au plus 1 et qu'il y a au plus une famille de dimension 1 de fibres $\psi^{-1}(p)$ de dimension 1. Nous montrons ensuite que l'image de l'application cotangente est de dimension 3.

Rappelons pour commencer la propriété fonctorielle du fibré projectif $\mathbb{P}(T_S)$:

Proposition 1.12. (cf. [11] chapitre II proposition 7.12). *Soit X une variété et $f : X \rightarrow S$ un morphisme. Il est équivalent de se donner un morphisme :*

$$t : X \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$$

de X dans $\mathbb{P}(T_S)$ au-dessus de S ou de se donner un fibré inversible \mathcal{L} et un morphisme surjectif :

$$f^*\Omega_S \rightarrow \mathcal{L}.$$

Ce morphisme t et ce fibré inversible vérifient :

$$t^*(O_{\mathbb{P}(T_S)}(1)) = \mathcal{L}.$$

Etudions les fibres de l'application cotangente :

Lemme 1.13. *Soit p un point de \mathbb{P}^{q-1} . Le morphisme π est injectif sur les points de la fibre $\psi^{-1}(p)$.*

Démonstration. Soit s un point de S . Si l'intersection de $\pi^{-1}(s)$ et de $\psi^{-1}(p)$ est non vide, cette intersection est nécessairement un point car ψ est un plongement sur la fibre $\pi^{-1}s$ (cf. lemme 1.6). \square

Notons F l'image de l'application cotangente. Si p est un point de \mathbb{P}^{q-1} , nous noterons D_p l'image de la fibre $\psi^{-1}(p)$ par π : le fermé sous-jacent est formé des points s de la surface tels que la droite L_s passe par p .

Proposition 1.14. *Pour tout point p de \mathbb{P}^{q-1} , la fibre $\psi^{-1}(p)$ et le schéma D_p sont de dimension au plus 1.*

Démonstration. L'application cotangente ψ n'est pas constante (c'est un plongement sur chaque fibre de la projection π) donc pour tout point p de \mathbb{P}^{q-1} , la dimension de $\psi^{-1}(p)$ est inférieure ou égale à 2.

Supposons que la fibre de l'application cotangente en un point p soit de dimension 2. Soit S' le schéma réduit associé à la fibre $\psi^{-1}(p)$. Par le lemme 1.13, la restriction $\pi|_{S'}$ du morphisme π à S' est injective sur les points de S' . Puisque π est propre, le morphisme de surfaces :

$$\pi|_{S'} : S' \rightarrow S$$

est surjectif. Le morphisme $\pi|_{S'}$ est bijectif, séparable dans la variété normale S : c'est un isomorphisme (cf. [15] remarque 6.21). Il existe donc un morphisme $t : S' \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ tel que $\pi \circ t : S' \rightarrow S$ soit l'identité. A ce morphisme t correspond un quotient :

$$\Omega_S \rightarrow \mathcal{L}$$

où \mathcal{L} est le fibré inversible qui vérifie $t^*O_{\mathbb{P}(T_S)}(1) = \mathcal{L}$ (cf. proposition 1.12). Le fibré $O_{\mathbb{P}^{q-1}}(1)$ est trivial au point p et puisque $\psi \circ t$ contracte S au point p , cela implique que le fibré :

$$t^*\psi^*O_{\mathbb{P}^{q-1}}(1) = \mathcal{L}$$

est trivial. Ainsi Ω_S possède un quotient d'image un fibré inversible trivial, donc, par dualité le fibré tangent T_S possède une section globale. Cela est impossible car nous avons supposé S de type général : un tel point p n'existe pas et les fibres de ψ sont de dimension au plus 1.

Pour tout point p de \mathbb{P}^{q-1} , l'image de la fibre $\psi^{-1}(p)$ par π est donc également de dimension inférieure ou égale à 1. \square

Soit p un point de \mathbb{P}^{q-1} tel que $D_p = \pi(\psi^{-1}(p))$ soit de dimension 1. Considérons D une composante irréductible de dimension 1 de D_p munie de sa structure réduite, alors :

Proposition 1.15. *L'image par l'application cotangente de la surface réglée $\pi^{-1}(D)$ est un cône de sommet p .*

Démonstration. L'application ψ est injective sur les fibres de π , le fermé irréductible $\psi(\pi^{-1}(D))$ est donc au moins de dimension 1.

Si $\psi(\pi^{-1}(D))$ est de dimension 1, alors c'est une droite projective $L \hookrightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ et pour tout point s de D , on a : $L_s = L$. Mais cela est impossible car le morphisme de Gauss \mathcal{G} est fini (lemme 1.10) et ne peut contracter la courbe D en un point.

Donc $\psi(\pi^{-1}(D))$ est une surface et puisque toutes les droites L_s (s point de D) passent par le point p , c'est un cône de sommet p . \square

Définition 1.16. *Un point p de \mathbb{P}^{q-1} est dit exceptionnel si la fibre $\psi^{-1}(p)$ est de dimension 1.*

Soit Δ l'ensemble des points exceptionnels. Par la proposition 1.15, chaque point de Δ est le sommet d'un cône ; étudions la géométrie de Δ :

Proposition 1.17. *L'image de l'application cotangente est de dimension 3 ; Δ est un fermé de \mathbb{P}^{q-1} vide ou de dimension inférieure ou égale à 1.*

Démonstration. Notons F l'image de l'application cotangente et $\psi|_F$ la restriction de ψ à son image.

Si les fibres générique de $\psi|_F$ sont de dimension 1 alors F est de dimension 2. En ce cas, pour tout point p de F , le schéma D_p est de dimension 1 et le fermé $\psi(\pi^{-1}(D_{p,red}))$ est de dimension 2 contenu dans la surface irréductible F . Cela implique que $\psi(\pi^{-1}(D_{p,red}))$ est égal à F . Ainsi deux points quelconques de F sont sommets de cônes et sont reliés par une droite contenue dans F .

On en déduit que F est un plan projectif. Or la variété F est non-dégénérée dans \mathbb{P}^{q-1} , ainsi : $q = 3$. Mais on a fait l'hypothèse que la surface S est d'irrégularité $q > 3$.

On en déduit que pour un point p générique de l'image de ψ , le schéma D_p

est de dimension nulle et que ψ est génériquement finie sur son image.

Le morphisme ψ étant propre et génériquement fini, l'ensemble des points exceptionnels Δ est un sous-schéma fermé de \mathbb{P}^{q-1} (cf. [11] p.94). \square

1.3. Degré de l'application ψ , degré de $\psi_*\pi^*C$, ramification.

1.3.1. Degré de l'application cotangente et de son image.

Après avoir étudié les fibres de l'application cotangente, nous étudions son degré.

Soit F l'image de l'application cotangente, notons $\deg F$ son degré et $\deg \psi$ le degré de l'application ψ sur son image.

Proposition 1.18. *Soit c_1 et c_2 les classes de Chern de la surface, alors :*

$$\deg F \deg \psi = c_1^2[S] - c_2[S].$$

Démonstration. Soit H une section hyperplane de l'image F de l'application cotangente, notons : $h = \psi^*H$. Par définition des classes de Chern de Ω_S le cycle h vérifie :

$$h^2 - h.\pi^*c_1(\Omega_S) + \pi^*c_2(\Omega_S) = 0.$$

Or $c_1 = -c_1(\Omega_S)$ et $c_2 = c_2(\Omega_S)$, on a donc : $h^3 = -h^2.\pi^*c_1 - h.\pi^*c_2$ et par substitution, on obtient :

$$h^3 = h.\pi^*c_1^2 + \pi^*c_2.\pi^*c_1 - h.\pi^*c_2 = h.\pi^*(c_1^2 - c_2).$$

Le degré du terme de droite est égal à celui de $c_1^2 - c_2$. De plus : $\deg h^3 = \deg H^3 \deg \psi$ et $\deg H^3 = \deg F$, donc :

$$\deg F \deg \psi = c_1^2[S] - c_2[S]$$

où $c_1^2[S]$ et $c_2[S]$ sont les nombres de Chern de la surface. \square

Rappelons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(T_S) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathbb{P}(U) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^{q-1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_2 & & \\ S & \xrightarrow{\mathcal{G}} & G(2, q) & & \end{array}$$

Le morphisme ψ vérifie : $\pi_1 \circ \tilde{\psi} = \psi$. Notons π'_1 la restriction de π_1 à l'image de $\tilde{\psi}$ sur l'image de $\tilde{\psi} \circ \pi_1$ ainsi :

Proposition 1.19. *Le degré de ψ est le produit du degré du morphisme de Gauss \mathcal{G} par le degré de π'_1 .*

Si l'irrégularité q est strictement supérieure à 4, alors le nombre de droites de \mathbb{P}^{q-1} contenues dans F et qui passent par un point p générique est égal au degré de π'_1 .

L'image de l'application cotangente étant non-dégénérée, son degré est supérieur ou égal à $q - 3$, donc :

Corollaire 1.20. *Le degré de la restriction de l'application cotangente $\psi| : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow F$ est majoré par :*

$$\frac{c_1^2[S] - c_2[S]}{q - 3}.$$

1.3.2. Degré du cycle $\psi_*\pi^*C$.

Nous lions dans cette thèse la géométrie de la surface S à la géométrie de l'image de son application cotangente. La proposition suivante met en rapport les propriétés numériques d'une courbe $C \hookrightarrow S$ aux propriétés numériques du cycle $\psi_*\pi^*C$:

Proposition 1.21. *Soit C une courbe contenue dans S ; le degré de $\psi_*\pi^*C$ est égal à KC où K est un diviseur canonique.*

Cette proposition sera utilisée à la proposition 4.3.

Démonstration. Soit H une section hyperplane et $h = \psi^*H$. Par définition, le degré de $\psi_*\pi^*C$ est le degré de l'intersection de H^2 et de $\psi_*\pi^*C$. Le morphisme ψ étant propre, on peut utiliser la formule de projection :

$$\psi_*(h^2.\pi^*C) = H^2.\psi_*\pi^*C.$$

Les degrés de $h^2.\pi^*C$ et de $\psi_*(h^2.\pi^*C)$ étant égaux, il reste à montrer que le degré de $h^2.\pi^*C$ est égal à KC . Les classes de Chern $c_1(\Omega_S), c_2(\Omega_S)$ du fibré Ω_S vérifient :

$$h^2 = h.\pi^*c_1(\Omega_S) - \pi^*c_2(\Omega_S)$$

dans l'anneau de Chow de $\mathbb{P}(T_S)$. D'où :

$$h^2.\pi^*C = h.\pi^*c_1(\Omega_S).\pi^*C - \pi^*c_2(\Omega_S).\pi^*C = h.\pi^*c_1(\Omega_S).\pi^*C,$$

or le degré de $c_1(\Omega_S).C$ est KC . □

1.3.3. Géométrie de $\psi(\pi^{-1}(C))$.

Soit C une courbe contenue dans la surface S .

Proposition 1.22. *La surface $\psi(\pi^{-1}(C))$ est dégénérée dans \mathbb{P}^{q-1} si et seulement si le morphisme de restriction :*

$$H^0(\Omega_S) \rightarrow H^0(C, \Omega_{S|C})$$

possède un noyau non nul. En ce cas, la courbe C vérifie : $C^2 \leq 0$.

Soit Ω_C le faisceau des différentielles de C .

Lemme 1.23. *(Théorème de Kodaira-Ramanujam-Bombieri (6.7) [7]). Si le morphisme $H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_C$ possède un noyau non trivial, alors $C^2 \leq 0$.*

Démonstration. (De la proposition 1.22). Soit $t : C \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ une section et \mathcal{L} le fibré inversible correspondant. Le morphisme $\psi \circ t : C \rightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ est obtenu par le quotient :

$$H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0.$$

Ce quotient se factorise comme suit :

$$H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow H^0(C, \Omega_{S|C}) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0.$$

L'image de $\psi \circ t$ est donc contenue dans l'espace projectif $\mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ image du morphisme rationnel naturel $\mathbb{P}(H^0(C, \Omega_{S|C})^*) \rightarrow \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$.

Puisque C est une courbe, il existe une infinité de sections $C \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$. L'image de la surface $\psi(\pi^{-1}(C))$ par ψ est donc contenue dans \mathbb{P} . Cette image est non dégénérée dans \mathbb{P} .

L'espace \mathbb{P} est strict si et seulement si le morphisme de restriction :

$$H^0(\Omega_S) \rightarrow H^0(C, \Omega_{S|C})$$

possède un noyau non nul. En ce cas, le lemme 1.23 montre que : $C^2 \leq 0$. \square

1.3.4. Diviseur de ramification de ψ .

Nous supposons dans ce paragraphe que l'image F de l'application cotangente est lisse et nous noterons ω_F le fibré canonique de F .

Proposition 1.24. *Soit R le diviseur de ramification du morphisme :*

$$\psi|_F : \mathbb{P}(T_S) \rightarrow F.$$

Le diviseur R vérifie :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(R) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(-2) \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(2K) \otimes (\psi|_F^* \omega_F)^*.$$

Démonstration. Le diviseur R est le schéma des zéros de la section :

$$\det d\psi|_F : \wedge^3 T_{\mathbb{P}(T_S)} \rightarrow \psi|_F^* \wedge^3 T_F,$$

donc :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(R) \simeq \omega_{\mathbb{P}(T_S)} \otimes (\psi|_F^* \omega_F)^*.$$

Il faut donc calculer $\omega_{\mathbb{P}(T_S)}$. Les deux suites suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \pi^* \Omega_S \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(T_S)} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(T_S)/S} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \Omega_{\mathbb{P}(T_S)/S} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(-1) \otimes \pi^* \Omega_S \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sont exactes (cf. [11]), donc :

$$\omega_{\mathbb{P}(T_S)} = \wedge^3 \Omega_{\mathbb{P}(T_S)} \simeq \pi^* \mathcal{O}_S(K) \otimes \Omega_{\mathbb{P}(T_S)/S},$$

et :

$$\Omega_{\mathbb{P}(T_S)/S} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(-2) \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(K).$$

Ainsi :

$$\omega_{\mathbb{P}(T_S)} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(-2) \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(2K)$$

et la proposition en résulte. \square

Nous étudions au chapitre 4 des surfaces telles que l'image de leur application cotangente soit une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^4 , il est donc légitime de regarder "à côté" :

Soit $n \geq 3$, pour $i \in \{1, \dots, n-3\}$, soit d_i un entier positif. Une variété F de dimension 3 de \mathbb{P}^n est dite intersection complète de type (d_1, \dots, d_{n-3})

si F est intersection transverse de $n - 3$ hypersurfaces de degré d_1, \dots, d_{n-3} respectivement.

Corollaire 1.25. *Si l'image de l'application cotangente $F \hookrightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ est une intersection complète, alors F est une des variétés suivantes :*

- 1) $q = 6$, $F \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ est l'intersection de deux quadriques et le diviseur de ramification vérifie : $\mathcal{O}(R) \simeq \pi^* \mathcal{O}_S(2K)$ (K diviseur canonique).
- 2) $q = 5$, $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ est une quadrique et $\mathcal{O}(R) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1) \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(2K)$.
- 3) $q = 5$, $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ est une cubique et $\mathcal{O}(R) \simeq \pi^* \mathcal{O}_S(2K)$.
- 4) $q = 4$, $F = \mathbb{P}^3$ et $\mathcal{O}(R) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(2) \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(2K)$.

Démonstration. Si l'irrégularité q est égale à 4, alors $F = \mathbb{P}^3$.
 Supposons $q > 4$, soit (d_1, \dots, d_{q-4}) le type de $F \hookrightarrow \mathbb{P}^q$. Les entiers d_i vérifient $d_i \geq 2$ car F est non-dégénérée dans \mathbb{P}^{q-1} . Le fibré canonique de $F \hookrightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ est :

$$\omega_F \simeq \mathcal{O}_F \left(\sum_{i=1}^{i=q-4} d_i - q \right)$$

où $\mathcal{O}_F(1)$ est la restriction à F du fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q-1}}(1)$ (cf. [2] Chap. V). Par la proposition précédente :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(R) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(-2) \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(2K) \otimes (\psi|_F^* \omega_F)^*$$

où R est le diviseur de ramification. Puisque : $\psi^* \mathcal{O}_F(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$, on a :

$$\mathcal{O}(R) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(q - 2 - \sum_{i=1}^{i=q-4} d_i) \otimes \pi^* \mathcal{O}_S(2K).$$

Soit s un point de S , puisque le diviseur de ramification R est effectif, le nombre d'intersection :

$$R\pi^{-1}s$$

est positif ou nul, or :

$$R\pi^{-1}s = q - 2 - \sum_{i=1}^{i=q-4} d_i.$$

Donc $q - 2 \geq \sum_{i=1}^{i=q-4} d_i \geq 2(q - 4)$. Ainsi q vérifie : $4 < q \leq 6$. Si $q = 6$, alors $d_1 = d_2 = 2$ et si $q = 5$ alors $d_1 = 2$ ou 3. \square

Remarque 1.26. *La variété qui paramètre les droites contenues dans une intersection complète de deux quadriques de \mathbb{P}^5 est une surface étudiée par Kummer (cf. [26]).*

2. ETUDE DES COURBES NON-AMPLES.

2.1. Critère de contraction, décomposition du fibré cotangent. Soit S une surface vérifiant les hypothèses 0.1 et soit C une courbe de S i.e. un schéma de dimension 1 réduit et irréductible. Supposons que $\psi(\pi^{-1}(C))$ soit un cône, la proposition suivante relie cette propriété géométrique de la courbe C aux propriétés algébriques du faisceau Ω_S :

Proposition 2.1. *Une courbe $C \hookrightarrow S$ possède une section :*

$$t : C \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$$

contractée en un point par l'application cotangente si et seulement si il existe un morphisme surjectif :

$$\Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

où $\Omega_{S|C}$ est la restriction du fibré cotangent à C .

Démonstration. Soit $t : C \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ une section contractée en un point p de \mathbb{P}^{q-1} par l'application cotangente. Soit

$$\Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

le quotient correspondant à la section t . Le fibré inversible \mathcal{L} vérifie : $t^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)) = \mathcal{L}$ (cf. proposition 1.12). Au point p , le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q-1}}(1)$ est trivial et donc le fibré inversible :

$$(\psi \circ t)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q-1}}(1))$$

est trivial. Or :

$$(\psi \circ t)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{q-1}}(1)) = t^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_S)}(1)) = \mathcal{L},$$

donc \mathcal{L} est trivial et le fibré $\Omega_{S|C}$ possède un quotient dont l'image est un fibré inversible trivial.

Réciproquement supposons qu'il existe un morphisme surjectif :

$$q : \Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C$$

et notons $t : C \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ la section qui lui correspond. Le composé $\psi \circ t$ provient du quotient trivial $H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C$ qui est le composé du quotient naturel surjectif :

$$H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_{S|C}$$

avec le quotient surjectif :

$$q : \Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C.$$

Le morphisme $\psi \circ t$ est donc constant, son image est le point de \mathbb{P}^{q-1} correspondant au quotient $H^0(\Omega_S) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C)$. \square

Définition 2.2. *Une courbe $C \hookrightarrow S$ est dite **non-ample** si la restriction du fibré cotangent à C possède un quotient dont l'image est un fibré inversible trivial.*

Soit K un diviseur canonique de la surface, notons $\mathcal{O}_C(K)$ la restriction à C du fibré canonique $\mathcal{O}_S(K)$. Soit C une courbe non-ample, notons $q : \Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C$ le quotient surjectif et \mathcal{F} son noyau.

Proposition 2.3. *Le faisceau \mathcal{F} est isomorphe à $\mathcal{O}_C(K)$ et la suite exacte :*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

est scindée. Le quotient trivial q est unique à multiplication par un élément de \mathbb{C}^ près.*

Démonstration. Le fibré $\Omega_{S|C}$ est engendré par ses sections globales car il est restriction d'un fibré engendré par ses sections globales. Il existe donc une section $t \in H^0(C, \Omega_{S|C})$ telle que $q(t)$ soit une section non nulle de \mathcal{O}_C : cela fournit une section du quotient q .

Le quotient est unique à multiplication par un élément de \mathbb{C}^* près car sinon $\Omega_{S|C}$ serait trivial et le morphisme de Gauss contracterait la courbe C . \square

2.2. Classification et lissité des courbes non-amples. Soit C une courbe réduite irréductible contenue dans la surface et Ω_C le faisceau des différentielles. Puisque C est un diviseur de la variété S , la suite naturelle suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-C) \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C \rightarrow 0$$

est exacte (cf. [11] proposition 8.12). On l'appellera la **suite cotangente** de la courbe C .

Le théorème suivant classe les courbes non-amples C suivant la valeur de l'intersection C^2 :

Théorème 2.4. *Soit $C \hookrightarrow S$ une courbe réduite et irréductible.*

- 1) *La courbe C est une courbe non-ample et vérifie $C^2 < 0$ si et seulement si C est lisse et de genre 1. En ce cas la suite cotangente est scindée.*
- 2) *La courbe C est une courbe non-ample et vérifie $C^2 = 0$ si et seulement si C est lisse, de genre > 1 et la suite cotangente est scindée. En ce cas le fibré normal $\mathcal{O}_C(C)$ est trivial.*
- 3) *Si C est non-ample, lisse et vérifie $C^2 > 0$ alors la suite cotangente n'est pas scindée et C est de genre supérieur ou égal à q .*

Puisque la surface S est lisse, la courbe C est lisse si et seulement si le faisceau Ω_C est localement libre de rang 1 (cf. [11] théorème 8.17, Chap. II). Pour démontrer le théorème 2.4, nous aurons besoin d'un théorème de Lipman qui est la version duale de ce critère de lissité.

Théorème 2.5. *(Lipman [13] théorème 1) Une courbe C définie sur un corps de caractéristique nulle est lisse si et seulement si le faisceau $T_C = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \mathcal{O}_C)$ est un fibré inversible.*

Nous utiliserons également le lemme suivant :

Lemme 2.6. *Notons \mathcal{L} un fibré inversible de degré négatif ou nul sur une courbe C . Le fibré \mathcal{L} est isomorphe au fibré trivial si et seulement si l'espace $H^0(C, \mathcal{L})$ est non nul.*

Démonstration. Ce lemme est dû à Ramanujam (cf. [2], lemme 12.2, Chap. II). Supposons que l'espace $H^0(C, \mathcal{L})$ soit non nul, une section non nulle de cet espace définit un morphisme injectif $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{L}$ dont le conoyau Q est à support fini. Par définition de Q , la suite suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow Q \rightarrow 0$$

est exacte. Puisque la caractéristique d'Euler est additive, nous avons :

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(Q).$$

De plus, le faisceau Q est à support fini donc $\chi(Q) = \dim H^0(C, Q)$ et :

$$\chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_C) = \dim H^0(C, Q)$$

est positif ou nul. Mais, par le théorème de Riemann-Roch :

$$k = \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_C)$$

où k est le degré de \mathcal{L} . Puisque par hypothèse $k \leq 0$, cela montre que nécessairement $k = 0$ et que l'espace $H^0(C, Q)$ est nul. Donc le faisceau Q est nul et le morphisme $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{L}$ est un isomorphisme.

Réciproquement l'espace $H^0(C, \mathcal{O}_C)$ est non nul. \square

Montrons le théorème 2.4 :

Soit C une courbe contenue dans la surface, la suite duale de la suite exacte :

$$\mathcal{O}_C(-C) \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C \rightarrow 0$$

est la suite exacte :

$$0 \rightarrow T_C \xrightarrow{i} T_{S|C} \xrightarrow{q'} \mathcal{O}_C(C)$$

où le faisceau T_C est défini par : $T_C = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C, \mathcal{O}_C)$.

Si C est une courbe non-ample, alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(K) \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

est scindée (proposition 2.3) ; la suite duale est :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{i'} T_{S|C} \xrightarrow{q} \mathcal{O}_C(-K) \rightarrow 0.$$

Considérons le diagramme suivant à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \mathcal{O}_C & & t' \\ & & & & \downarrow i' & & \searrow \\ 0 \rightarrow & T_C & \xrightarrow{i} & T_{S|C} & \xrightarrow{q'} & \mathcal{O}_C(C) & \\ & & \searrow & \downarrow q & & & \\ & & t & \mathcal{O}_C(-K) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

où t et t' rendent le diagramme commutatif.

Notation 2.7. Lorsque par la suite C est une courbe non-ample de S , les notations i, i', t, \dots renvoient à ce diagramme.

Le lemme suivant montre la première affirmation du théorème 2.4 :

Lemme 2.8. Soit C une courbe contenue dans S . Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- a) la courbe C est non-ample et le morphisme t est nul.
- b) la courbe C est non-ample et le morphisme t' est nul.
- c) la courbe C est une courbe lisse de genre 1.
- d) la courbe C est non-ample et $C^2 < 0$.

Si une des assertions est vérifiée, alors la suite cotangente de C est scindée.

Démonstration. Soit $C \hookrightarrow S$ une courbe. Supposons que a) soit vérifié i.e. C est non-ample et le morphisme :

$$t = q \circ i : T_C \rightarrow \mathcal{O}_C(-K)$$

est nul. Montrons que b) est vérifié. Puisque $t = q \circ i$ est nul, par propriété du noyau de q , il existe un morphisme $j : T_C \rightarrow \mathcal{O}_C$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_C \\ & j \nearrow & \downarrow i' \\ T_C & \xrightarrow{i} & T_{S|C} \end{array}$$

commute et tel que j soit injectif (car i est injectif). Puisque le morphisme t' se factorise par q' , t' est nul sur le sous- \mathcal{O}_C -module $j(T_C)$ de \mathcal{O}_C . Le morphisme t' se factorise donc par le quotient de \mathcal{O}_C par $j(T_C)$. Ce quotient est de torsion et puisque $\mathcal{O}_C(C)$ est un fibré inversible, le morphisme :

$$t' : \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C(C)$$

est nul. Nous avons donc montré que a) implique b).

Réciproquement montrons que b) implique a). La situation est symétrique de la précédente implication :

Soit C une courbe non-ample telle que le morphisme $t' = q' \circ i'$ soit nul. Par propriété du noyau de q' , l'injection $i' : \mathcal{O}_C \rightarrow T_{S|C}$ se factorise par un morphisme $j' : \mathcal{O}_C \rightarrow T_C$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_C \\ & j' \swarrow & \downarrow i' \\ T_C & \xrightarrow{i} & T_{S|C} \end{array}$$

commute. Le morphisme j' est de plus injectif car i' est injectif. Puisque le morphisme t se factorise par q , t est nul sur le sous- \mathcal{O}_C -module $j'(\mathcal{O}_C)$ de T_C . Le morphisme t se factorise donc par le quotient de T_C par $j'(\mathcal{O}_C)$. Ce quotient est de torsion et puisque $\mathcal{O}_C(-K)$ est un fibré inversible, le morphisme :

$$t : T_C \rightarrow \mathcal{O}_C(-K)$$

est nul. Nous avons donc montré que b) implique a).

Il y a donc équivalence entre les points a) et b) et de plus, si C est une courbe non-ample vérifiant a) et b), nous avons construit deux morphismes injectifs $j : T_C \rightarrow \mathcal{O}_C$ et $j' : \mathcal{O}_C \rightarrow T_C$. Le composé $j \circ j' : \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C$ est un morphisme injectif, c'est donc un isomorphisme et on en déduit que $j : T_C \rightarrow \mathcal{O}_C$ est un morphisme surjectif. Le faisceau T_C est donc isomorphe à \mathcal{O}_C . Le théorème de Lipman 2.5 permet alors de conclure que la courbe C est lisse.

En ce cas Ω_C est un fibré inversible, donc :

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{O}_C}(T_C, \mathcal{O}_C) = \Omega_C,$$

et puisque T_C est trivial, le fibré Ω_C est trivial. Ainsi C est lisse de genre 1 et nous avons montré que si a) ou b) sont vérifiées, alors c) est vérifiée.

Soit $C \hookrightarrow S$ une courbe vérifiant c) i.e. C est lisse de genre 1. Le quotient naturel $\Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C$ est un quotient trivial et surjectif donc C est une courbe non-ample. De plus, par adjonction : $C^2 + KC = 0$ et puisque le diviseur canonique K est ample (cf. remarque 1.11), on en déduit que nécessairement

C^2 est strictement négatif. Ceci montre que c) entraîne d). (Remarquons de plus que la proposition 2.3 montre que la suite cotangente est scindée).

Soit C une courbe vérifiant l'hypothèse d) i.e. C est non-ample et $C^2 < 0$. En ce cas, le morphisme $t' : \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C(C)$ est une section du fibré $\mathcal{O}_C(C)$. Mais ce fibré est de degré C^2 strictement négatif et le lemme 2.6 montre que $t' = 0$. Nous avons montré que d) entraîne b).

Les quatre assertions a), b), c), d) sont donc équivalentes. \square

Montrons maintenant la seconde affirmation du théorème 2.4.

- Soit $C \hookrightarrow S$ une courbe non-ample vérifiant $C^2 = 0$, montrons que C est lisse de genre > 1 et que la suite cotangente est scindée. Le morphisme :

$$t' = q' \circ i' : \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C(C)$$

est nécessairement non nul car nous avons montré au lemme 2.8 que $t' = 0$ entraîne $C^2 < 0$. Ce morphisme t' peut être considéré comme une section non nulle de l'espace $H^0(C, \mathcal{O}_C(C))$. Puisque le fibré $\mathcal{O}_C(C)$ est de degré $C^2 = 0$, le lemme 2.6 montre que $\mathcal{O}_C(C)$ est trivial. Le morphisme :

$$t' = q' \circ i' : \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C(C) \simeq \mathcal{O}_C$$

est alors un isomorphisme ; le morphisme :

$$q' : T_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C(C) = \mathcal{O}_C$$

est donc surjectif et son noyau T_C est un fibré inversible. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lipman 2.5 et conclure que si C est une courbe non-ample telle que $C^2 = 0$, alors la courbe C est lisse. De plus, la suite suivante :

$$0 \rightarrow T_C \rightarrow T_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C(C) = \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

est exacte et scindée par un multiple du morphisme $i' : \mathcal{O}_C \rightarrow T_{S|C}$ (car $t' = q' \circ i'$ est un isomorphisme). La suite cotangente qui est duale de cette suite est donc scindée.

- Réciproquement, soit C une courbe lisse contenue dans la surface telle que $C^2 = 0$ et telle que la suite cotangente :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-C) \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C \rightarrow 0$$

soit scindée, montrons que C est non-ample. Puisque la suite cotangente est scindée, le fibré $\Omega_{S|C}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_C(-C) \oplus \Omega_C$. Mais $\Omega_{S|C}$ est engendré par restriction des sections globales de Ω_S , donc l'espace $H^0(C, \mathcal{O}_C(-C))$ est non nul. Le fait que le degré de $\mathcal{O}_C(-C)$ soit nul implique alors que $\mathcal{O}_C(-C)$ est trivial (lemme 2.6) donc $\Omega_{S|C} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \Omega_C$ admet un quotient trivial et C est non-ample.

Ceci achève la démonstration de la partie 2) du théorème 2.4.

Montrons la troisième assertion du théorème 2.4.

Soit C lisse non-ample vérifiant $C^2 > 0$. La suite cotangente :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-C) \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C \rightarrow 0$$

ne peut être scindée car $\Omega_{S|C}$ est engendré par ses sections globales mais le fibré $\mathcal{O}_C(-C)$ est de degré $-C^2 < 0$.

En prenant la suite exacte longue associée à la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-C) \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C \rightarrow 0$$

on obtient :

$$0 \rightarrow H^0(C, \Omega_{S|C}) \rightarrow H^0(C, \Omega_C)$$

car $H^0(C, \mathcal{O}_C(-C)) = \{0\}$. L'espace $H^0(C, \Omega_C)$ est donc de dimension supérieure ou égale à celle de $H^0(C, \Omega_{S|C})$.

Le morphisme $H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_C$ se factorise par :

$$H^0(\Omega_S) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow H^0(C, \Omega_{S|C}) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_{S|C} \rightarrow \Omega_C.$$

Puisque $C^2 > 0$, le lemme de Kodaira-Ramanujam-Bombieri 1.23 montre que morphisme de restriction : $H^0(\Omega_S) \rightarrow H^0(C, \Omega_{S|C})$ est injectif. Ainsi la dimension de l'espace $H^0(C, \Omega_C)$ est supérieure ou égale à g (cela est valable pour toute courbe lisse d'auto-intersection strictement positive).

Ceci achève la démonstration du théorème 2.4. \square

2.3. Application à l'étude des surfaces fibrées. Soit S une surface vérifiant les hypothèses 0.1 et telle qu'il existe un morphisme $f : S \rightarrow B$ surjectif à fibres connexes dans une courbe lisse B .

Soit B' l'ouvert de B tel que la restriction f' de f à $S' := f^{-1}(B')$ soit une submersion et soit $\Omega_{S'/B'}$ le faisceau des différentielles relatives. La suite suivante :

$$0 \rightarrow f'^*\Omega_{B'} \rightarrow \Omega_{S'} \rightarrow \Omega_{S'/B'} \rightarrow 0$$

est une suite exacte de fibrés vectoriels et si C est une fibre de f' alors la restriction de $\Omega_{S'/B'}$ à C est isomorphe au fibré canonique Ω_C . L'image par f'_* de la suite duale :

$$0 \rightarrow \Omega_{S'/B'}^* \rightarrow T_{S'} \rightarrow f'^*T_{B'} \rightarrow 0$$

est la suite exacte de fibrés vectoriels :

$$0 \rightarrow f'_*\Omega_{S'/B'}^* \rightarrow f'_*T_{S'} \rightarrow T_{B'} \xrightarrow{\delta} R^1f'_*\Omega_{S'/B'}^*$$

où $R^1f'_*$ est le premier foncteur dérivé de f'_* . Le morphisme de connexion δ est appelé le morphisme de Kodaira-Spencer de la fibration.

Proposition 2.9. *Soit $f : S \rightarrow B$ une surface fibrée vérifiant l'hypothèse 0.1 et $C = C_b$ la fibre lisse en b . Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *La fibre C est une courbe non-ample.*
- 2) *L'espace $H^0(C, T_{S|C})$ est non nul.*
- 3) *Le point b est un 0 du morphisme δ .*

Démonstration. Puisque C est une fibre, on a : $\mathcal{O}_C(-C) \simeq \mathcal{O}_C$. La fibre en b de la suite exacte :

$$0 \rightarrow f'_*\Omega_{S'/B'}^* \rightarrow f'_*T_{S'} \rightarrow T_{B'} \xrightarrow{\delta} R^1f'_*\Omega_{S'/B'}^*$$

est :

$$0 \rightarrow H^0(C, T_C) \rightarrow H^0(C, T_{S|C}) \rightarrow T_B(b) \simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\delta_b} H^1(C, T_C).$$

Cette suite exacte est la suite exacte longue associée à la suite :

$$0 \rightarrow T_C \rightarrow T_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

(suite duale de l'application cotangente). L'espace $H^0(C, T_{S|C})$ est non nul si et seulement si le morphisme δ_b est nul, c'est-à-dire si et seulement si la suite :

$$0 \rightarrow T_C \rightarrow T_{S|C} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

est scindée. Cela est équivalent à dire que la suite cotangente est scindée. Puisque C est lisse de genre > 1 , le théorème 2.4 montre que c'est équivalent au fait que la courbe C soit non-ample. \square

On dispose ainsi d'exemples de surfaces n'ayant qu'un nombre fini de courbes non-amples d'auto-intersection nulle.

Définition 2.10. *Une surface fibrée à fibres connexes $f : S \rightarrow B$ est dite **isotriviale** si ses fibres lisses sont isomorphes.*

Corollaire 2.11. *Soit S une surface vérifiant l'hypothèse 0.1 et munie d'une fibration à fibres connexes $f : S \rightarrow B$. La fibration f est isotriviale si et seulement si ses fibres lisses sont non-amples.*

Démonstration. Une fibration $f : S \rightarrow B$ est isotriviale si et seulement si le morphisme de connexion δ est nul (cf. [23]). Par la proposition 2.9, le morphisme δ est nul si et seulement si les fibres lisses de f sont non-amples. \square

Si $f : S \rightarrow B$ est une fibration, nous avons un critère pour savoir quelles sont les fibres lisses et non-amples. La proposition suivante complète ce critère :

Proposition 2.12. *Soit $f : S \rightarrow B$ une fibration et soit C_1 une courbe non-ample contenue dans une fibre singulière, alors la courbe C_1 est lisse et :*

- a) *Soit $C_1^2 = 0$ et il existe un entier $n > 1$ tel que nC_1 soit une fibre.*
- b) *Soit $C_1^2 < 0$ et C_1 est de genre 1.*

Remarquons qu'une surface S dont le fibré cotangent est engendré par ses sections globales et contenant une courbe elliptique $E \hookrightarrow S$ possède toujours une fibration. En effet, soit $\vartheta : S \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese et soit $\phi : A \rightarrow \text{Pic}^o(S)$ une polarisation, il suffit de regarder le composé :

$$S \rightarrow A \rightarrow \text{Pic}^o(S) \rightarrow \text{Pic}^o(E) \simeq E.$$

2.4. Remarques sur les configurations des courbes non-amples, borne sur le nombre de courbes elliptiques.

2.4.1. Intersection des courbes non-amples.

Dans cette section, nous étudions les configurations formées par les courbes non-amples. Il n'y a pas d'unité dans cette présentation.

Proposition 2.13. *Soit C_1, C_2 deux courbes non-amples. Supposons que C_1 vérifie : $C_1^2 > 0$, en ce cas :*

i) *Si $C_2^2 \geq 0$ alors $C_1C_2 > 0$.*

ii) *Si $C_1C_2 = 0$ alors C_2 est une courbe lisse de genre 1.*

Démonstration. Par le théorème de l'indice de Hodge, l'égalité $C_1C_2 = 0$ entraîne que C_2^2 est négatif ou nul.

a) Supposons $C_1C_2 = 0$ et $C_2^2 = 0$, alors le théorème de Hodge entraîne que C_2 est numériquement équivalente à 0 mais cela n'est pas possible car C_2 est un diviseur effectif.

b) Supposons $C_1C_2 = 0$ et $C_2^2 < 0$, alors la classification du théorème 2.4 montre que C_2 est une courbe lisse de genre 1.

Nous avons donc montré que si $C_2^2 \geq 0$, alors l'intersection C_1C_2 est strictement positive. \square

Soit :

$$\vartheta : S \rightarrow A$$

un morphisme d'Albanese. Supposons que S contienne une courbe elliptique E et notons p_E le sommet du cône $\psi(\pi^{-1}(E))$. Soit s un point de E , l'espace tangent $T_{E,s}$ s'injecte dans $T_{S,s}$ et :

Lemme 2.14. *L'espace vectoriel sous-jacent au point p_E est l'espace :*

$$pr \circ d\vartheta_s(T_{E,s}) \hookrightarrow H^0(\Omega_S)^*$$

où $pr : S \times H^0(\Omega_S)^* \rightarrow H^0(\Omega_S)^*$ est la projection sur le second facteur et $d\vartheta_s$ est la différentielle en s du morphisme ϑ .

En particulier l'espace $pr \circ d\vartheta_s(T_{E,s})$ est indépendant du point $s \in E$ (et du morphisme ϑ).

Démonstration. Le sommet p_E est l'image par ψ de la section $t_E : E \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ provenant du quotient inversible trivial :

$$\Omega_{S|E} \rightarrow \Omega_E,$$

le lemme résulte alors de la proposition 1.9. \square

Considérons maintenant E, E' deux courbes elliptiques de S et notons p_E et $p_{E'}$ les sommets des cônes $\psi(\pi^{-1}(E))$ et $\psi(\pi^{-1}(E'))$.

Proposition 2.15. *Si le morphisme de Gauss est un plongement et $p_E \neq p_{E'}$, alors l'intersection de E et de E' vaut 0 ou 1.*

Si $p_E = p_{E'}$, alors les courbes E et E' sont isogènes. Si de plus le morphisme d'Albanese $\vartheta : S \rightarrow A$ est un plongement alors $EE' = 0$.

Démonstration. Supposons que le morphisme de Gauss \mathcal{G} soit un plongement et $p_E \neq p_{E'}$; si s_o est un point d'intersection de E et E' , alors la droite L_{s_o} est la droite passant par les sommets p_E et $p_{E'}$. Ce point s_o est unique car \mathcal{G} est un plongement. Le lemme 2.14 montre que les espaces tangents en s_o des courbes E et E' sont distincts, l'intersection est donc transverse et $EE' = 1$, ceci montre a).

Si $p_E = p_{E'}$, le lemme 2.14 montre que la courbe $\vartheta(E')$ est translatée de la courbe $\vartheta(E)$ dans A . Les courbes $\vartheta(E)$ et $\vartheta(E')$ sont donc isomorphes et les courbes E, E' sont isogènes.

Si le morphisme d'Albanese de S est un plongement et si $p_E = p_{E'}$, alors la courbe $E' \hookrightarrow A$ est translatée de E dans A et l'intersection est nécessairement vide. \square

2.4.2. *Borne sur le nombre de courbes non-amples de type $C^2 < 0$.*

Nous cherchons ici une borne sur le nombre de courbes elliptiques d'une surface S .

Corollaire 2.16. *Soit S une surface minimale de dimension de Kodaira positive ou nulle et soit E_1, \dots, E_n n courbes lisses de genre 1 telles que le diviseur $Z = \sum E_i$ ne possède que des points doubles ordinaires. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{i=n} KE_i \leq 3c_2[S] - c_1^2[S] + \sum_{i < j} E_i E_j,$$

où K est un diviseur canonique de la surface.

Ce corollaire ne possède un réel intérêt que dans le cas où la surface est de type général car alors une courbe elliptique $E \hookrightarrow S$ vérifie $KE > 0$. (Pour une surface minimale de type général, une courbe irréductible C vérifie $KC \leq 0$ si et seulement si C est une courbe lisse rationnelle vérifiant $C^2 = -2$ (corollaire 2.3 de [2])).

Le corollaire 2.16 implique qu'une surface S minimale de type général et vérifiant :

$$3c_2[S] = c_1^2[S],$$

ne possède pas de courbes elliptiques. En particulier, si une telle surface satisfait l'hypothèse 0.1, alors S ne contient pas de courbes non-amples E avec $E^2 < 0$.

Le corollaire 2.16 résulte d'un théorème de Miyaoka [16] qui généralise un résultat de Sakai [20] :

Théorème 2.17. *(Miyaoka) Soit S' une surface lisse et soit C un diviseur tel que $K + C$ soit numériquement effectif. La courbe C vérifie :*

$$(K + C)^2 \leq 3(c_1^2[S] - e(C)),$$

où $e(C)$ est le nombre d'Euler de C et K un diviseur canonique.

(Un diviseur D est numériquement effectif si pour toute courbe C , $DC \geq 0$. Le théorème de Miyaoka est plus général que celui énoncé ici).

Montrons maintenant le corollaire 2.16 :

Démonstration. Soit $C = \sum_{i=1}^n C_i$ la décomposition en composantes irréductibles d'un diviseur effectif C ne possédant que des points doubles ordinaires. Notons t_i le nombre de points doubles ordinaires de C_i et $g(C_i)$ le genre géométrique de C_i . Le nombre d'Euler de $C = \sum C_i$ est égal à :

$$e(C) = -\left(\sum_{i<j} C_i C_j + \sum_i t_i\right) + \sum 2 - 2g(C_i)$$

(cf [20]). Posons $Z = \sum_{i=1}^n E_i$. Soit $E_j \hookrightarrow S$ une courbe elliptique, on a par adjonction :

$$(K + E_j)E_j = KE_j + E_j^2 = 0.$$

De plus, nous avons supposé que la dimension de Kodaira de S est positive ou nulle, et puisque S est minimale cela est équivalent à : le diviseur canonique K est numériquement effectif (cf. [2]). Ainsi le diviseur $K + Z$ est numériquement effectif et Z vérifie les hypothèses du théorème 2.17.

Pour tout i , la courbe E_i est de genre 1 et ne possède pas de points singuliers, donc :

$$K^2 + 2KZ + \sum_i E_i^2 + 2 \sum_{i<j} E_i E_j \leq 3(c_2[S] - (-\sum_{i<j} E_i E_j)).$$

Or $KE_i + E_i^2 = 0$ et $KZ = \sum KE_i = \sum(-E_i^2)$, donc :

$$K^2 + KZ + 2 \sum_{i<j} E_i E_j \leq 3(c_2[S] + \sum_{i<j} E_i E_j).$$

Ainsi :

$$KZ \leq 3c_2[S] - K^2 + \sum_{i<j} E_i E_j.$$

□

Le chapitre 4 donne un exemple d'une surface et d'une configuration de 12 courbes elliptiques E_1, \dots, E_{12} disjointes telles que :

$$\sum KE_i = 3c_2[S] - c_1^2[S].$$

3. SURFACES CONTENANT UNE INFINITÉ DE COURBES NON-AMPLES.

3.1. **Caractérisation de l'image de l'application cotangente.** Rappelons que nous avons noté Δ le sous-schéma fermé et réduit de \mathbb{P}^{q-1} formé des points exceptionnels i.e. des points p de \mathbb{P}^{q-1} tels que la fibre $\psi^{-1}p$ soit de dimension 1.

Supposons que le fermé Δ contienne une composante irréductible B de dimension 1. En ce cas son image inverse $\psi^{-1}B$ est de dimension 2. Soit S' une composante irréductible de dimension 2 de $\psi^{-1}(B)$ munie de la structure réduite. Notons π' et ψ' les restrictions du morphisme de projection π et de l'application cotangente à S' :

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\psi'} & B. \\ \pi' \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

Rappelons qu'une droite de \mathbb{P}^{q-1} est dite sécante d'une courbe $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ si elle coupe X en au moins deux points. Une sécante de X est dite multisécante si elle coupe cette courbe en 3 points ou plus. Si $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^{q-1}$ est une seconde courbe, une droite est dite sécante de X et de Y si elle passe par X et Y . Nous pouvons maintenant énoncer le théorème caractérisant les surfaces qui contiennent une infinité de courbes non-amples :

Théorème 3.1. *Le morphisme π' est surjectif. Si s est un point générique de S alors la droite L_s coupe B en d_o points où d_o est le degré de π' . De plus :*

1) *Si le degré de π' vérifie $d_o = 1$ et si B n'est pas une droite de \mathbb{P}^{q-1} , alors le morphisme $\pi' : S' \rightarrow S$ est un isomorphisme. Il existe une fibration de la surface S et cette fibration est isotriviale.*

Le lieu des points exceptionnels Δ est en ce cas formé de deux courbes lisses irréductibles C'_1, C'_2 qui sont images de morphismes canoniques de deux courbes.

L'image de l'application cotangente est la réunion des droites sécantes des courbes C'_1 et C'_2 .

2) a) *Si le degré de π' vérifie $d_o \geq 2$, alors l'image de l'application cotangente est la variété des sécantes de B . Une courbe non-ample $C \hookrightarrow S$ vérifie en ce cas : $C^2 > 0$.*

b) *Si de plus une sécante générique de B n'est pas multisécante, alors $d_o = 2$. Une courbe non-ample C vérifie en ce cas : $C^2 = \deg \mathcal{G}$ où $\deg \mathcal{G}$ est le degré de la restriction du morphisme de Gauss à son image T .*

c) *Si la courbe B est lisse, alors le cas 2) b) est vérifié et la surface T est birationnelle au produit symétrique $B^{(2)}$.*

Commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Le morphisme $\pi' : S' \rightarrow S$ est surjectif.*

Démonstration. Supposons que l'image de π' soit une courbe D , alors S' est la surface réglée $\pi^{-1}D$. L'application cotangente ψ est une immersion sur

chaque fibre de π donc la courbe $B = \psi(S')$ est une droite projective et pour tout point s de D , $L_s = B$.

L'image de la courbe D par le morphisme de Gauss est alors le point de la grassmannienne $G(2, q)$ représentant la droite B .

Cela est impossible car \mathcal{G} est un morphisme fini (lemme 1.10). Ainsi la dimension de l'image de π' est égale à 2 et puisque la projection π est un morphisme propre et S' est un fermé, le morphisme π' est surjectif. \square

Le degré d_o de π' est égal au nombre d'intersection dans $\mathbb{P}(T_S)$ de S' et de la fibre $\pi^{-1}s$ en un point générique s de S .

Lemme 3.3. *Soit s un point de la surface. La droite L_s coupe B et si s est générique, alors L_s coupe la courbe B en d_o points.*

Démonstration. Par le lemme 3.2, la fibre $\pi^{-1}s$ coupe S' dans $\mathbb{P}(T_S)$ donc l'image de $\pi^{-1}s$ par ψ coupe l'image de S' par ψ , c'est-à-dire : L_s coupe B . L'application cotangente est un plongement sur $\pi^{-1}s$. Cela implique que si l'intersection de $\pi^{-1}s$ et de S' contient d_o points distincts, alors L_s coupe B en d_o points distincts. \square

Démonstration de la partie 1) du théorème 3.1.

Nous allons démontrer la première partie du théorème, c'est-à-dire le cas où on suppose que le degré d_o de $\pi' : S' \rightarrow S$ vaut 1.

Lemme 3.4. *Si $d_o = 1$ et si B n'est pas une droite, alors le morphisme $\pi' : S' \rightarrow S$ est un isomorphisme et la fibration de Stein associée à la fibration $\psi \circ \pi'^{-1} : S \rightarrow B$ est isotriviale.*

Démonstration. Puisque le degré d_o de π' est égal à 1, le morphisme $\pi' : S' \rightarrow S$ est birationnel (cf. [15] remarque 6.21). La surface S est normale. Le théorème principal de Zariski montre que si l'application rationnelle π'^{-1} n'est pas définie en un point s_o de S , alors l'image inverse $\pi'^{-1}s_o$ est une courbe de $S' \hookrightarrow \mathbb{P}(T_S)$.

En ce cas, la fibre $\pi^{-1}s_o$ est contenue dans S' . Puisque l'application cotangente est un plongement sur $\pi^{-1}s_o$, on en déduit alors que $B = \psi'(S')$ est égal à L_{s_o} . Mais le cas 1) suppose que B n'est pas une droite de \mathbb{P}^{q-1} .

Il existe donc un morphisme $t : S \rightarrow S'$ tel que $\pi' \circ t$ soit l'identité de S . Les composantes lisses irréductibles d'une fibre de $\psi \circ t : S \rightarrow B$ sont des courbes non-amples. En prenant la factorisation de Stein de $\psi \circ t$, nous pouvons appliquer la proposition 2.11 et conclure que la surface S est isotriviale. \square

Il nous reste à caractériser l'image de l'application cotangente. Supposons que la courbe B ne soit pas une droite et que le degré de $\pi' : S' \rightarrow S$ soit égal à 1, alors :

Proposition 3.5. *Le fermé Δ est formé de deux courbes lisses irréductibles C'_1, C'_2 qui sont images de morphismes canoniques de courbes.*

L'image de ψ est la réunion des droites sécantes des courbes C'_1 et C'_2 .

Pour montrer cette proposition, nous allons nous ramener à supposer que S est un produit de deux courbes.

Soit S une surface vérifiant les hypothèses de la proposition 3.5. Le lemme 3.4 montre que S est isotriviale. Il existe en ce cas un morphisme à fibres connexes $f : S \rightarrow C'_2$ dont les fibres lisses sont isomorphes entre elles, notons C_1 une telle fibre, alors :

Lemme 3.6. *Il existe une courbe lisse C_2 et un groupe G agissant algébriquement sur C_1 et C_2 tels que :*

- i) La surface S est birationnelle au quotient $(C_1 \times C_2)/G$.*
- ii) La courbe C'_2 est isomorphe à C_2/G .*
- iii) Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & (C_1 \times C_2)/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ C'_2 & \simeq & C_2/G. \end{array}$$

Ici le groupe G agit sur $C_1 \times C_2$ composante par composante (i.e. $\gamma.(a, b) = (\gamma a, \gamma b)$) et la flèche verticale de droite est la projection naturelle.

Démonstration. Voir [21]. □

Soit S une surface vérifiant l'hypothèse de la proposition 3.5 et :

$$C_1, C_2, G, C'_1, C'_2$$

possédant les propriétés du lemme 3.6.

Une singularité isolée du quotient $(C_1 \times C_2)/G$ se résout par des bandes de Hirzebruch-Jung : ce sont des sommes de -2 courbes. Puisque le fibré canonique d'une surface vérifiant l'hypothèse 0.1 est ample (remarque 1.11), il ne peut contenir de telle courbes. Le quotient $(C_1 \times C_2)/G$ est donc lisse et on peut écrire :

$$S = (C_1 \times C_2)/G.$$

La surface isotriviale $S = (C_1 \times C_2)/G$ admet deux fibrations $g : S \rightarrow C'_1$ et $f : S \rightarrow C'_2$, notons $\tau : S \rightarrow C'_1 \times C'_2$ le morphisme produit de g et de f . On a :

Lemme 3.7. *L'espace des sections globales du fibré cotangent est :*

$$H^0(\Omega_S) = \tau^*(H^0(C'_1, \Omega_{C'_1}) \oplus H^0(C'_2, \Omega_{C'_2})).$$

Démonstration. Voir [21]. □

Soit $\omega_1, \dots, \omega_g$ une base de $H^0(C'_1, \Omega_{C'_1})$, $\omega_{g+1}, \dots, \omega_q$ une base de $H^0(C'_2, \Omega_{C'_2})$ et s_o un point de S , A la variété d'Albanese, $\vartheta : S \rightarrow A$ le morphisme d'Albanese tel que $\vartheta(s_o) = 0$ ($s_o \in S$ fixé). L'égalité :

$$\vartheta(s) = \left(\int_{s_o}^s \tau^* \omega_1, \dots, \int_{s_o}^s \tau^* \omega_q \right) = \left(\int_{\tau(s_o)}^{\tau(s)} \omega_1, \dots, \int_{\tau(s_o)}^{\tau(s)} \omega_q \right)$$

montre que le morphisme d'Albanese se factorise par le morphisme $\tau : S \rightarrow C'_1 \times C'_2$. Nous allons appliquer le lemme suivant aux surfaces S et $S' = C'_1 \times C'_2$:

Lemme 3.8. *Soit S une surface vérifiant l'hypothèse 0.1, notons A sa variété d'Albanese et $\vartheta : S \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese. Supposons que la surface S' image de S par ϑ soit lisse, alors S et S' ont la même variété d'Albanese et $H^0(S, \Omega_S) \simeq H^0(S', \Omega_{S'})$.*

La surface S' vérifie l'hypothèse 0.1 et par l'identification $H^0(S, \Omega_S) \simeq H^0(S', \Omega_{S'})$, l'image de l'application cotangente de S est égale à l'image de l'application cotangente de S' .

Démonstration. Pour le fait que S et S' aient la même variété d'Albanese et $H^0(S, \Omega_S) \simeq H^0(S', \Omega_{S'})$ voir [3] p.85. La surface S' étant contenue dans A , son fibré cotangent est engendré par ses sections globales (voir corollaire 1.4).

Nous avons vu au corollaire 1.5 que l'image de l'application cotangente de S est réunion des droites projectives L_s correspondant aux plans vectoriels $T_{S,s} \hookrightarrow H^0(S, \Omega_S)$. Mais l'injection $T_{S,s} \hookrightarrow H^0(S, \Omega_S)$ se factorise par :

$$T_{S,s} \rightarrow T_{S',\vartheta(s)} \rightarrow H^0(S, \Omega_S) = H^0(S', \Omega_{S'}).$$

Ceci montre deux points :

- La surface S' est de type général car le morphisme de Gauss de S est fini et se factorise par le morphisme de Gauss de S' (donc S' vérifie l'hypothèse 0.1),
- L'image de l'application cotangente de S est la même que celle de S' (cf. corollaire 1.5). \square

Le lemme 3.8 implique donc que :

Corollaire 3.9. *Par l'identification $H^0(S, \Omega_S) \simeq H^0(C'_1 \times C'_2, \Omega_{C'_1 \times C'_2})$, les applications cotangentes de S et du produit $C'_1 \times C'_2$ ont la même image.*

Pour terminer la démonstration de la proposition 3.5, il nous reste à comprendre quelle est l'image de l'application cotangente d'une surface isotriviale $S = C_1 \times C_2/G$ quand $G = \{1\}$ est le groupe trivial. Puisque S est de type général, ces deux courbes sont de genres respectifs g_1, g_2 supérieurs ou égaux à 2. Pour être complet, donnons la réciproque :

Lemme 3.10. *Soit C_1, C_2 de genre $g_1 > 1$ et $g_2 > 1$, alors la surface $C_1 \times C_2$ vérifie l'hypothèse 0.1 et ses nombres de Chern vérifient :*

$$\begin{aligned} c_1^2[S] &= 8(g_1 - 1)(g_2 - 1) \\ c_2[S] &= 4(g_1 - 1)(g_2 - 1) \end{aligned}$$

Démonstration. Voir [3]. \square

Soit donc $S = C_1 \times C_2$ avec C_1, C_2 de genre $g_1 > 1$ et $g_2 > 1$. Notons $\pi_i : S \rightarrow C_i$, $i \in \{1, 2\}$ les projections respectives, le fibré cotangent vérifie :

$$\Omega_S = \pi_1^* \Omega_{C_1} \oplus \pi_2^* \Omega_{C_2},$$

et l'espace des sections globales $H^0(\Omega_S)$ s'identifie à $H^0(C, \Omega_{C_1}) \oplus H^0(C_2, \Omega_{C_2})$. La surface $S = C_1 \times C_2$ est d'irrégularité $g_1 + g_2 > 3$. Pour $i \in \{1, 2\}$, notons $\phi_i : C_i \rightarrow \mathbb{P}^{g_1+g_2-1}$ le composé du morphisme canonique :

$$C_i \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C_i, \Omega_{C_i})^*)$$

avec le plongement naturel :

$$\mathbb{P}(H^0(C_i, \Omega_{C_i})^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(C_1, \Omega_{C_1})^* \oplus H^0(C_2, \Omega_{C_2})^*) = \mathbb{P}^{g_1+g_2-1}.$$

Notons de plus C'_i l'image du morphisme ϕ_i . La proposition suivante caractérise l'image de l'application cotangente de S :

Proposition 3.11. *Soit $s = (p_1, p_2)$ un point de la surface $S = C_1 \times C_2$. La droite L_s passe par les points $\phi_1(p_1)$ et $\phi_2(p_2)$; les courbes lisses C'_1 et C'_2 forment l'ensemble des points exceptionnels.*

Démonstration. Le fibré cotangent de S vérifie :

$$\Omega_S = \pi_1^* \Omega_{C_1} \oplus \pi_2^* \Omega_{C_2}.$$

Soit p_1 un point de C_1 , notons $j_{p_1} : C_2 \hookrightarrow S$ le plongement $j_{p_1}(p) = (p_1, p)$, alors :

$$j_{p_1}^* \Omega_S = (\Omega_{C_1, p_1} / \mathcal{M}_{C_1, p_1} \Omega_{C_1, p_1} \otimes \mathcal{O}_{C_2}) \oplus \Omega_{C_2}.$$

Soit $s_1 : C_1 \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ le morphisme correspondant au quotient inversible trivial :

$$q_1 : j_{p_1}^* \Omega_S \rightarrow \Omega_{C_1, p_1} / \mathcal{M}_{C_1, p_1} \Omega_{C_1, p_1} \otimes \mathcal{O}_{C_2}$$

L'image de $\psi \circ s_1$ est le point $\phi_1(p_1)$.

Soit $s_2 : C_2 \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ le morphisme correspondant au quotient :

$$q_2 : j_{p_1}^* \Omega_S \rightarrow \Omega_{C_2}.$$

L'image de $\psi \circ s_2$ est la courbe C'_2 . Pour tout point s de $j_{p_1}(C_2) = \pi_1^* p_1$, la droite L_s passe par le point $\phi_1(p_1)$ et coupe la courbe C'_2 . Ainsi $\psi_* \pi^* j_{p_1}(C_2)$ est le cône de base C'_2 et de sommet $\phi_1(p_1)$.

La démonstration est la même pour les courbes $\pi_2^* p, p \in C_2$. \square

La première partie du théorème 3.5 est donc démontrée.

Démonstration de la partie 2) du théorème 3.1.

Supposons maintenant que le degré du morphisme $\pi' : S' \rightarrow S$ soit supérieur ou égal à 2.

Soit s un point générique de S . Par le lemme 3.3, la droite L_s passe par au moins deux points de B et il y a trois possibilités :

- i) L'intersection de L_s et de B se fait en deux points variables de B .
- ii) L'intersection de L_s et de B se fait en un point variable de B et un point fixe b_o .
- iii) L'intersection de L_s et de B se fait en deux points fixes de B .

Le cas ii) est exclu car alors ψ aurait une fibre de dimension 2 en b_o , ce qui contredirait le lemme 1.14. Le cas iii) est exclu car alors l'image de l'application cotangente serait une droite.

Ceci montre que l'image de ψ est la variété développée par les sécantes de B . Puisque l'image de ψ est non-dégénérée, la courbe B est non-dégénérée dans \mathbb{P}^{q-1} . Les fibres de π' sont donc finies car si S' contenait une fibre $\pi^{-1}s_o$, alors B serait une droite et l'image de l'application cotangente serait dégénérée dans \mathbb{P}^{q-1} .

Soit b un point de B , la courbe $C_b = \pi(\psi^{-1}b)$ est une courbe non-ample. Si b et b' sont deux points de B , alors C_b et $C_{b'}$ sont numériquement équivalents et $C_b^2 = C_b C_{b'}$. Mais l'intersection $C_b C_{b'}$ est le nombre de points s tels que la droite L_s passe par les points b et b' , ainsi $C_b^2 > 0$; ceci montre 2) a).

Si une sécante générique de B n'est pas multisécante, alors $d_o = 2$ (cf. lemme 3.3). En ce cas une sécante générique L est repérée de manière unique par les deux points b, b' de l'intersection de L et B , et le cardinal des droites L_s telles que $L_s = L$ est égal à $\deg \mathcal{G}$ (voir les diagrammes du paragraphe 1.3.1). Ainsi :

$$C_b^2 = \deg \mathcal{G}.$$

Ceci termine la démonstration de 2)b).

Lemme 3.12. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit X une courbe lisse non-dégénérée de \mathbb{P}^n , si une sécante générique de X est une multisécante, alors $n \leq 2$.*

Démonstration. Supposons que n soit supérieur ou égal à 3. Une courbe lisse de \mathbb{P}^n peut être plongée dans \mathbb{P}^3 par des projection successives (cf. [11] IV proposition 3.5). Ces projections respectent l'alignement et on peut donc supposer $n = 3$. La proposition 3.8 de [11] montre que si X est une courbe lisse de \mathbb{P}^3 dont toutes les sécantes sont multisécantes, alors il existe un point A tel que les droites tangentes :

$$T_{X,x} \hookrightarrow \mathbb{P}^3, x \in X$$

se coupent en ce point A .

Le théorème de Samuel IV 3.9 [11] montre que si X est une courbe lisse de \mathbb{P}^n telle que toutes les tangentes passent par le même point A , alors X est une droite ou une conique en caractéristique 2. Cela montre donc : $n \leq 2$. \square

Si B est lisse, le lemme 3.12 montre qu'une sécante générique n'est pas multisécante, d'où l'affirmation 2)c).

Ceci termine la démonstration du théorème 3.1 \square .

Remarques :

Le cas d'une infinité de courbes non-amples vérifiant $C^2 = 0$ est relativement bien compris : si l'ensemble des points exceptionnels n'est pas une droite, alors S est isotriviale et les courbes non-amples sont des fibres.

Une meilleure caractérisation du cas d'une surface ayant une infinité de courbes non-amples de type $C^2 > 0$ est cependant souhaitable.

Supposons par exemple que la courbe B soit lisse, alors le morphisme de Gauss se factorise par $B^{(2)}$ le produit symétrique de B qui est la surface normalisée de $\mathcal{G}(S)$.

Si la surface S' est lisse, alors le lieu de branchement de $\pi' : S' \rightarrow S$ est formé

des points s tels que la droite L_s soit une droite tangente de B . Il existe en ce cas une involution $\sigma : S' \rightarrow S'$ telle que $\pi' \circ \sigma = \pi'$.
Notons $\tau : S' \rightarrow B \times B$ le morphisme produit :

$$\tau = (\psi', \psi' \circ \sigma).$$

Géométriquement, τ est le morphisme qui à $t \in S'$ associe le couple ordonné (b_1, b_2) tel que b_1 et b_2 soient à l'intersection de $L_{\pi(t)}$ et de B .
Soit b un point de B et soit C_1 la fibre en b de ψ' , C_2 la fibre en b de $\psi' \circ \sigma$, alors $\deg \tau = \deg \mathcal{G} = C_1 C_2$ et la courbe non-ample $\pi'(C_1)$ vérifie :

$$\pi'(C_1) = \pi'_*(C_1) = \pi'_*(C_2).$$

On peut de plus vérifier que :

$$\pi'(C_1)^2 = \deg \mathcal{G}.$$

Si B est de genre > 3 et non hyperelliptique alors $B^{(2)}$ vérifie l'hypothèse 0.1 et possède une infinité de courbes non-amples (cf. proposition 3.15 à venir).
On peut considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S' & \rightarrow & B \times B \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \rightarrow & B^{(2)}. \end{array}$$

Les surfaces S , $B \times B$ et $B^{(2)}$ vérifient alors l'hypothèse 0.1 et possèdent une infinité de courbes non-amples. On peut donc se demander si la fibration $\psi' : S' \rightarrow B$ n'est pas elle-même isotriviale.

Cette discussion nous mène à l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.13. *Soit S une surface vérifiant l'hypothèse 0.1 et possédant une infinité de courbes non-amples, alors il existe deux courbes C_1, C_2 et un groupe d'automorphismes de $C_1 \times C_2$ agissant sans points fixes isolés tels que S soit isomorphe au quotient $C_1 \times C_2 / G$.*

3.2. Compléments du cas d'une surface produit de deux courbes.

Nous pouvons étudier le degré de l'application cotangente dans le cas d'un produit de deux courbes :

Proposition 3.14. *Soit C_1, C_2 deux courbes de genres respectifs g_1, g_2 supérieur ou égal à 2, soit d le degré de l'image F de l'application cotangente de la surface $C_1 \times C_2$, alors :*

a) *Si aucune des courbes $C_i, i \in \{1, 2\}$ n'est hyperelliptique, alors :*

$$d = 4(g_1 - 1)(g_2 - 1).$$

b) *Si une des courbes $C_i, i \in \{1, 2\}$ est hyperelliptique, alors :*

$$d = 2(g_1 - 1)(g_2 - 1).$$

c) *Si les deux courbes $C_i, i \in \{1, 2\}$ sont hyperelliptiques, alors :*

$$d = (g_1 - 1)(g_2 - 1).$$

De plus, suivant les cas a), b) et c), le degré de l'application cotangente est respectivement 1, 2 et 4.

Démonstration. Soit $i \in \{1, 2\}$, notons k_i le degré de C'_i . Si la courbe C_i est hyperelliptique alors $k_i = g_i - 1$, sinon $k_i = 2(g_i - 1)$ (cf. [11]).

Soit $(\omega_1, \omega_2) \in H^0(C_1, \Omega_{C_1}) \times H^0(C_2, \Omega_{C_2})$ deux formes génériques. L'intersection de F avec l'hyperplan $H_1 = \{\omega_1 = 0\}$ est une surface formée des k_1 cônes reliant k_1 points de C'_1 aux points de C'_2 .

L'intersection de $H_1 F$ avec l'hyperplan $H_2 = \{\omega_2 = 0\}$ est formée des droites reliant k_1 points de C_1 à k_2 points de C_2 et est de degré $k_1 k_2$.

Pour le degré de l'application cotangente, on utilise la proposition 1.18 :

$$\deg F \deg \psi = c_1^2[S] - c_2[S],$$

et les égalités $c_1^2[S] = 8(g_1 - 1)(g_2 - 1)$, $c_2[S] = 4(g_1 - 1)(g_2 - 1)$. □

Exemples :

Si $g_1 = g_2 = 2$, les courbes C'_1 et C'_2 qui forment l'ensemble des points exceptionnels sont des droites projectives, $F = \mathbb{P}^3$ et ψ est de degré 4 (c'est également le degré du morphisme de Gauss).

Si $g_1 = 2$ et $g_2 = 3$, F est une hypersurface quadrique ou quartique de \mathbb{P}^4 suivant que C_2 est hyperelliptique ou non.

3.3. Exemple du produit symétrique. Soit C une courbe non hyperelliptique de genre $g > 3$. L'involution :

$$\tau : (P_1, P_2) \rightarrow (P_2, P_1)$$

agit sur la surface C^2 . Notons $S = C^{(2)}$ la surface quotient et $\eta : C \times C \rightarrow C^{(2)}$ le morphisme quotient.

La surface $C^{(2)}$ paramètre les diviseurs effectifs de degré 2. Si (P_1, P_2) est un point de $C \times C$, on notera $P_1 + P_2$ le point $\eta(P_1, P_2)$.

La surface S est lisse et il existe un isomorphisme naturel :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\cdot} : H^0(C, \Omega_C) & \rightarrow & H^0(S, \Omega_S) \\ \omega & \rightarrow & \tilde{\omega} \end{array}$$

appelé morphisme trace. Cet isomorphisme nous permet d'identifier les deux espaces $H^0(\Omega_S)$ et $H^0(C, \Omega_C)$ ainsi que les espaces projectifs :

$$\mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*),$$

et :

$$\mathbb{P}(H^0(C, \Omega_C)^*).$$

Puisque la courbe C n'est pas hyperelliptique, le morphisme canonique :

$$\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$$

est un plongement.

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.15. *Soit C une courbe lisse non-hyperelliptique de genre $g > 3$, alors la surface $S = C^{(2)}$ vérifie l'hypothèse 0.1.*

Pour tout point P de C , la courbe $P + C \hookrightarrow C^{(2)}$ est une courbe non-ample et vérifie $(P + C)^2 = 1$.

L'image de l'application cotangente est la variété des sécantes de $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$.

Notons $\pi_1 : C^2 \rightarrow C$ et $\pi_2 : C^2 \rightarrow C$ les morphismes de projections sur le premier et le second facteur.

L'isomorphisme trace $\tilde{\cdot} : H^0(C, \Omega_C) \rightarrow H^0(S, \Omega_S)$ va nous servir à déterminer l'image par le morphisme de Gauss d'un point de la surface. Nous avons vu à la définition 1.8 du morphisme de Gauss que le point $\mathcal{G}(s) \in G(2, H^0(S, \Omega_S)^*)$ représente l'espace vectoriel des formes $h \in H^0(\Omega_S)^*$ nulles sur l'espace $H^0(S, \mathcal{M}_s \Omega_S)$. On s'intéresse donc à ce dernier espace.

Soit P_1, P_2 deux points de C , notons :

$$H^0(C, \Omega_C(-P_1 - P_2)) \subset H^0(C, \Omega_C)$$

l'espace des formes différentielles holomorphes de C nulles en P_1 et en P_2 (avec multiplicité 2 si $P_1 = P_2$).

Lemme 3.16. *Soit $s = P_1 + P_2$ un point de S , l'image par l'isomorphisme trace de l'espace $H^0(C, \Omega_C(-P_1 - P_2))$ est $H^0(S, \mathcal{M}_s \Omega_S)$.*

Soit $\vartheta : C^{(2)} \rightarrow J(C)$ un morphisme d'Albanese.

Lemme 3.17. *Le morphisme d'Albanese ϑ est un plongement et la surface S est minimale. Le fibré cotangent Ω_S est engendré par ses sections globales.*

Les classes de Chern c_1, c_2 de la surface vérifient les propriétés numériques suivantes :

Lemme 3.18. *Les invariants numériques de $S = C^{(2)}$ sont :*

$$\begin{aligned} c_1^2[S] &= (g-1)(4g-9), \\ c_2[S] &= (g-1)(2g-3), \\ p_g &= \frac{g(g-1)}{2}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour les lemmes 3.16, 3.17 voir [1]. Le lemme 3.18 résulte des lemmes 3.16, 3.17 et de [3] lemme VI. 11. \square

Supposons que C soit non-hyperelliptique de genre supérieur ou égal à 4.

Corollaire 3.19. *La surface $S = C^{(2)}$ vérifie l'hypothèse 0.1 et :*

$$\deg \psi \deg F = 2(g-1)(g-3),$$

où $\deg \psi$ est le degré de l'application cotangente et $\deg F$ celui de son image.

Démonstration. On sait que le fibré cotangent Ω_S est engendré par l'espace de ses sections globales (cf. 3.17) et que S est minimale. Puisque $q = g > 3$, on a $c_1^2 > 0$ et $c_2 > 4$ (cf. lemme 3.18), la surface est donc de type général et vérifie l'hypothèse 0.1.

Le résultat sur le degré est l'application de la proposition 1.18. \square

Rappelons que si s est point de S , L_s est l'image par l'application ψ de $\pi^{-1}s$, c'est également la droite correspondant au point $\mathcal{G}(s)$. Soit :

$$\phi : C \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C, \Omega_C)^*) = \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$$

le plongement canonique de C . Le corollaire suivant complète la démonstration de la proposition 3.15 :

Corollaire 3.20. *Soit $s = P_1 + P_2 \in C^{(2)}$ avec $P_1 \neq P_2$. La droite L_s est la droite passant par les points $\phi(P_1)$ et $\phi(P_2)$.*

Si P est un point de C , la courbe $P + C \hookrightarrow C^{(2)}$ est une courbe non-ample de l'application cotangente ψ . Cette courbe vérifie :

$$(P + C)^2 = 1.$$

L'image de l'application cotangente est la variété des sécantes du plongement canonique de C dans $\mathbb{P}(H^0(C, \Omega_C)^) \simeq \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$.*

Les points de la courbe $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ sont des points exceptionnels.

Démonstration. Nous identifions ici les espaces $H^0(\Omega_S)$ et $H^0(C, \Omega_C)$. Pour un sous-espace vectoriel $H \subset H^0(\Omega_S)$, nous noterons H^\perp l'ensemble des formes linéaires $h \in H^0(\Omega_S)^*$ nulles sur H . Soit P un point de C , on notera :

$$H^0(\Omega_C(-P))$$

l'espace $H^0(C, \Omega_C(-P))$. Le point $\phi(P) \in \mathbb{P}^{g-1}$ représente l'espace :

$$H^0(\Omega_C(-P))^\perp.$$

Soit $P_1 \neq P_2$ deux points de C et $s = P_1 + P_2$. On a :

$$\begin{aligned} H^0(\Omega_C(-P_1))^\perp \oplus H^0(\Omega_C(-P_2))^\perp &= [H^0(\Omega_C(-P_1)) \cap H^0(\Omega_C(-P_2))]^\perp \\ &= H^0(C, \omega_C(-P_1 - P_2))^\perp. \end{aligned}$$

Or $\mathcal{G}(P_1 + P_2)$ est le point de la grassmannienne $G(2, g)$ qui représente l'espace :

$$H^0(S, \mathcal{M}_s \Omega_S)^\perp = H^0(C, \omega_C(-P_1 - P_2))^\perp.$$

La droite L_s passe donc par les points $\phi(P_1)$ et $\phi(P_2)$ d'où la première affirmation.

Soit $P \in C$, pour tout élément s de $P + C$, la droite L_s (correspondant au point $\mathcal{G}(s)$) passe par $\phi(P)$. Le point $\phi(P)$ est donc sommet d'un cône et $P + C$ est une courbe non-ample.

Soit $Q \neq P$ deux points de C , les diviseurs $P + C$ et $Q + C$ sont numériquement équivalents et $(P + C)(Q + C) = 1$ donc $(P + C)^2 = 1$. \square

Remarques.

Une courbe possède un système g_d^n si (par définition) il existe un système linéaire de degré d et de dimension n . Pour montrer que la surface S vérifie l'hypothèse 0.1, nous avons utilisé le fait que C n'est pas hyperelliptique, c'est-à-dire que C ne possède pas de système g_2^1 .

- Par la même méthode qu'au lemme 3.16 et au corollaire 3.17, on peut montrer les deux propositions suivantes (si C n'est pas hyperelliptique) :

a) Le morphisme de Gauss est de degré générique 1, il est injectif si et seulement si C ne possède pas de système g_3^1 (si C est trigonale i.e. si C possède un g_3^1 , alors il existe des droites de \mathbb{P}^{g-1} qui coupent $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ en trois points).

b) Le morphisme de Gauss est une immersion fermée si et seulement si il est injectif et si de plus la courbe $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ ne possède pas de droites bitangentes (c'est par exemple le cas si C ne possède pas de système g_4^1).

- Si $g = 4$, une courbe C générique possède deux g_3^1 et est intersection d'une quadrique lisse Q et d'une cubique dans \mathbb{P}^3 ([11] p. 346). La variété $F = \mathbb{P}^3$ est de degré 1. La surface obtenue par la réunion des droites trisécantes à C est la quadrique Q . Le degré de l'application cotangente est $c_1^2[S] - c_2[S] = 6$.

Si $g = 5$, alors la courbe C possède un g_4^1 et F est une hypersurface de \mathbb{P}^4 . Si C est intersection complète de 3 quadriques, C n'est pas trigonale.

Si C est trigonale, le système g_3^1 est unique et la réunion des droites trisécantes de C est une surface cubique $V \subset \mathbb{P}^4$ ([11] p. 348).

On a alors : $c_1^2[S] = 44$, $c_2[S] = 28$ et $\deg \psi \deg F = c_1^2[S] - c_2[S] = 16$.

4. EXEMPLE DES SURFACES DE FANO.

4.1. Fibres de l'application cotangente et courbes non-amples des surfaces de Fano.

4.1.1. Présentation des surfaces de Fano.

La principale référence sur les surfaces de Fano est le travail de H. Clemens et P. Griffiths [6]. Une surface de Fano S est une surface vérifiant l'hypothèse 0.1, d'irrégularité $q = 5$ et dont l'image de l'application cotangente est une hypersurface cubique lisse $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$. Ce qui caractérise la surface S est le fait qu'elle soit le schéma de Hilbert des droites contenues dans F et que $(\mathbb{P}(T_S), \pi, \psi)$ en soit la famille universelle. Les nombres de Chern de S sont :

$$c_1^2[S] = 45, \quad c_2[S] = 27$$

et puisque F est une cubique, la proposition 1.18 montre que ψ est de degré $6 = \frac{c_1^2[S] - c_2[S]}{3}$ (six droites passent par un point générique de F).

Soit s un point de S , notons C_s le diviseur d'incidence :

$$C_s = \overline{\{t/L_t \cap L_s \neq \emptyset\}}.$$

Le diviseur C_s est ample et vérifie $C_s^2 = 5$. Un diviseur canonique de S est numériquement équivalent à $3C_s$ (s point de S).

Soit $\vartheta : S \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese. C'est un plongement et le diviseur réduit Θ image de $S \times S$ par le morphisme :

$$(s_1, s_2) \rightarrow \vartheta(s_1) - \vartheta(s_2)$$

est une polarisation principale de A ([6], theorem 13.4).

Notons $c_1(D)$ la classe de Chern d'un diviseur D de la variété A .

Proposition 4.1. *La classe $\vartheta^*(c_1(\Theta))$ est égale à la première classe de Chern du diviseur $2C_s$ (s point de S). Soit D et D' deux diviseurs de A , alors :*

$$\vartheta^*(c_1(D))\vartheta^*(c_1(D')) = \int_A \frac{1}{3!} \wedge^3 c_1(\Theta) \wedge c_1(D) \wedge c_1(D').$$

Démonstration. La classe de cohomologie de $\vartheta(S)$ est égale à $\frac{1}{3!}\Theta^3$ ([6], proposition 13.1). □

Un automorphisme τ de la surface induit un automorphisme $\tau' \in \text{Aut}(A)$ de la variété d'Albanese A tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\vartheta} & A \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau' \\ S & \xrightarrow{\vartheta} & A \end{array}$$

soit commutatif. Soit (s_1, s_2) un point de $S \times S$, alors :

$$\tau'(\vartheta(s_1) - \vartheta(s_2)) = \vartheta(\tau(s_1)) - \vartheta(\tau(s_2)),$$

donc :

Lemme 4.2. *L'automorphisme τ' préserve la polarisation : $\tau'^*\Theta = \Theta$.*

4.1.2. Fibres de l'application cotangente et courbes non-amples.

Dans ce qui suit, $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ est une cubique lisse et S désigne sa surface de Fano. On identifiera la cubique F avec l'image de l'application cotangente de la surface S .

La proposition suivante caractérise les courbes non-amples des surfaces de Fano :

Proposition 4.3. *Une courbe $E \hookrightarrow S$ est non-ample si et seulement si elle est lisse de genre 1. En ce cas, elle vérifie : $E^2 = -3$ et $C_s E = 1$ ($s \in S$).*

Construisons un modèle plan \mathcal{S}_p de la fibre en un point $p \in F$ de l'application cotangente.

Notons $x_1, \dots, x_5 \in H^0(\Omega_S)$ des coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$. Soit p un point de la cubique, on peut supposer que $p = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$. Une équation f de la cubique s'écrit en ce cas :

$$f = x_1^2 l(x_2, x_3, x_4, x_5) + x_1 G_2(x_2, x_3, x_4, x_5) + G_3(x_2, x_3, x_4, x_5),$$

où l, G_2, G_3 sont des formes de degrés respectifs 1, 2, 3. Quitte à effectuer un changement de variables, on peut supposer :

$$l = x_2.$$

Soit $q = (x_1 : \dots : x_5)$ un point distinct de p , la droite passant par p et q est contenue dans la cubique si et seulement si la forme :

$$f(a + bx_1, bx_2, \dots, bx_5)$$

est nulle identiquement en a, b , c'est-à-dire, si et seulement si :

$$f(x_1, \dots, x_5) = 2x_1 x_2 + G_2(x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 = 0,$$

ou encore, si et seulement si :

$$x_2 = 0, G_2 = 0, G_3 = 0.$$

L'hyperplan $x_1 = 0$ ne contient pas p et chaque droite passant par p coupe cet hyperplan en un unique point. L'intersection des trois hypersurfaces $x_2 = 0, G_2 = 0, G_3 = 0$ avec l'hyperplan $x_1 = 0$ forme alors un modèle plan :

$$\mathcal{S}_p$$

du schéma $\psi^{-1}(p)$ des droites passant par p .

Lemme 4.4. *Soit p un sommet de cône contenu dans F . Le modèle \mathcal{S}_p est une cubique plane lisse et il existe une équation de la cubique $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ de la forme :*

$$f = x_1^2 x_2 + G_3(x_2, x_3, x_4, x_5).$$

L'hyperplan tangent à F en p est : $\{x_2 = 0\}$ et l'intersection de la cubique et de cet hyperplan est égale au cône.

Démonstration. Notons g_2, g_3 les formes $g_2 = G_2(0, x_3, x_4, x_5)$ et $g_3 = G_3(0, x_3, x_4, x_5)$. Le schéma \mathcal{S}_p est intersection de $g_2 = 0$ et de $g_3 = 0$ dans le plan $\{x_1 = x_2 = 0\}$.

Si les deux formes sont nulles, alors F contient un plan (de degré 1).

Supposons que g_2 et g_3 aient un facteur commun. Si ce facteur est linéaire, alors F contient un plan (de degré 1). Si ce facteur est quadratique, alors le cône des droites passant par p est de degré 2.

Ces trois cas sont impossibles car $Pic(F)$ est le \mathbb{Z} -module libre engendré par la classe d'une section hyperplane H et cette section est de degré 3. Donc $g_2 = 0$ et le cône formé des droites passant par p est une section hyperplane. Puisque $G_2(0, x_3, x_4, x_5) = 0$, il existe $l = l(x_2, x_3, x_4, x_5)$ telle que :

$$G_2(x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 l.$$

Une équation f de la cubique s'écrit :

$$f = x_1^2 x_2 + x_1 x_2 l(x_2, x_3, x_4, x_5) + G_3(x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Le changement de variables $x_1 \rightarrow x_1 + \frac{l}{2}$ permet de supposer $l = 0$.

Pour cette équation, l'hyperplan tangent à F en p est $\{x_2 = 0\}$ et le modèle \mathcal{S}_p est la cubique plane d'équation :

$$G_3(x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 = x_2 = 0.$$

Supposons qu'il existe un point (x_3, x_4, x_5) qui soit une singularité de \mathcal{S}_p : $G_3(0, x_3, x_4, x_5) = 0$. Alors pour tout x_1 et $k \in \{1, 3, 4, 5\}$:

$$f(x_1, 0, x_3, x_4, x_5) = \frac{df}{dx_k}(x_1, 0, x_3, x_4, x_5) = 0.$$

Prenons x_1 tel que :

$$\frac{df}{dx_2}(x_1, 0, x_3, x_4, x_5) = 0,$$

alors le point $(x_1, 0, x_3, x_4, x_5)$ est un point singulier de la cubique F : ce qui est impossible. Donc \mathcal{S}_p est une cubique lisse du plan $x_1 = x_2 = 0$. \square

Terminons la démonstration de la proposition 4.3.

Démonstration. Soit $E \hookrightarrow S$ la courbe lisse de genre 1 qui paramètre les droites du cône de sommet p . Montrons que la courbe E vérifie $E^2 = -3$. Soit $T_{F,p}$ l'hyperplan projectif tangent à F en p . Le degré du cône $\psi_* \pi^* E = T_{F,p} F$ est 3 donc, par la proposition 1.21, $KE = 3$. Or :

$$E^2 + KE = 2g(E) - 2 = 0,$$

et on obtient : $E^2 = -3$.

Soit K un diviseur canonique et soit s un point de S . Le diviseur K est numériquement équivalent à $3C_s$, puisque $KE = 3$, on en déduit que $C_s E = 1$.

Pour terminer, remarquons que si $E' \hookrightarrow S$ est une courbe elliptique, on a vu (théorème 2.4) que E' est non-ample et que $\psi_* \pi^* E'$ est un cône contenu dans la cubique. \square

Remarque 4.5. *Le lemme 4.4 montre que si la cubique possède un cône, alors il existe une équation de F de la forme :*

$$x_1^2 x_2 + G_3(x_2, x_3, x_4, x_5) = 0.$$

Cette équation fait clairement apparaître un automorphisme dont l'interprétation géométrique est la suivante :

Soit p un point de F fixé et soit q un point générique de F . La droite L_q passant par p et q découpe la cubique en un troisième point :

$$FL_q = p + q + t_p(q).$$

Cela définit une application birationnelle $t_p : F \rightarrow F$ qui est une involution. Il est simple de voir que cette application birationnelle est un morphisme si et seulement si p est le sommet d'un cône.

Ces applications birationnelles existent plus généralement pour toute hypersurface cubique. Le groupe engendré par les applications birationnelles d'une surface cubique a été étudié par Y. Manin.

4.2. Ramification de l'application cotangente, borne sur le nombre de courbes non-amples de la surface de Fano. Le corollaire 1.25 montre que le diviseur de ramification R de l'application cotangente s'écrit¹ :

$$R = \psi^*\Sigma,$$

où Σ est un diviseur linéairement équivalent à $2K$ (avec K un diviseur canonique de la surface de Fano). Géométriquement, le diviseur Σ paramètre les points s tels qu'il existe un plan tangent à F le long de L_s , c'est-à-dire un plan X contenu dans tous les hyperplans tangents à F en $p \in L_s$ [6]. (Pour un tel point s et plan X , l'intersection FX se décompose alors de la manière suivante :

$$FX = 2L_s + L'$$

où L' est la droite résiduelle dans le plan X).

Soit $E \hookrightarrow S$ est une courbe lisse de genre 1 plongée dans la surface. Le diviseur π^*E est contenu dans le diviseur de ramification de l'application cotangente car ψ contracte en un point la section $s_E : E \rightarrow \mathbb{P}(T_S)$ correspondante au quotient trivial $\Omega_{S|E} \rightarrow \Omega_E$.

Proposition 4.6. *La surface de Fano S contient au plus 30 courbes lisses de genre 1.*

Si la surface S contient 30 telles courbes, alors la somme de ces diviseurs est le diviseur bicanonique Σ .

Démonstration. Le diviseur de ramification $\pi^*\Sigma$ de ψ contient les surfaces réglées au-dessus des courbes elliptiques contenues dans S .

Soit D le diviseur somme des courbes elliptiques, D' le diviseur résiduel de D dans Σ : $D + D' = \Sigma$ et soit E une courbe elliptique. Par la proposition 4.3, $C_s E = 1$ (où s un point de S) et le nombre de courbes elliptiques de la surface de Fano est donc égal à $C_s D$. Puisque le diviseur C_s est ample et D' est effectif, l'intersection $C_s D'$ est positive ou nulle, et donc le nombre de courbes elliptiques est inférieur ou égal à :

$$C_s D + C_s D' = C_s \Sigma = 6C_s^2 = 30.$$

Si S contient 30 courbes lisses de genre 1, alors nécessairement $D = \Sigma$. \square

Nous allons voir un exemple d'une surface de Fano possédant effectivement 30 courbes elliptiques (cette propriété suffit à la caractériser de manière unique).

¹Signalons le caractère artificiel de notre démonstration : cette propriété est démontrée en [6] pour ensuite montrer que l'image de l'application cotangente est isomorphe à une cubique.

4.3. Fibrations, automorphismes et courbes non-amples de S . Soit $E \hookrightarrow S$ une courbe lisse de genre 1 contenue dans la surface de Fano, notons p le sommet du cône $\psi_*\pi^*E$. Nous conviendrons ici que $T_{F,p} \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ est l'hyperplan projectif tangent à F en p . Rappelons (lemme 4.4) que l'intersection de l'hyperplan tangent à F en p et de la cubique est égale au cône :

$$FT_{F,p} = \psi_*\pi^*E.$$

Soit s un point générique de la surface de Fano. Le plan X_s contenant le point p et la droite L_s découpe la cubique F en trois droites :

- 1) la droite L_s ,
- 2) la droite $L_{\gamma_E(s)}$ (contenue dans le cône) passant par le sommet p et par le point intersection de L_s et de l'hyperplan $T_{F,p}$,
- 3) la droite résiduelle $L_{\sigma_E(s)}$ telle que :

$$X_s F = L_s + L_{\gamma_E(s)} + L_{\sigma_E(s)}.$$

Nous avons ainsi défini deux applications rationnelles :

$$\gamma_E : S \rightarrow E, \quad \sigma_E : S \rightarrow S.$$

L'application γ_E est un morphisme car E est une variété abélienne. L'application σ_E est birationnelle d'ordre 2, c'est de plus un morphisme car S est plongée dans sa variété d'Albanese (cf. [6]).

Soit t un point de la surface S et :

$$C_t = \overline{\{s/L_t \cap L_s \neq \emptyset\}}$$

le diviseur d'incidence. Soit s, t deux points de la courbe $E \hookrightarrow S$. La droite L_s coupe la droite L_t au sommet du cône $\psi_*\pi^*E$: le point s est donc contenu dans le diviseur C_t et il existe un diviseur effectif F_t tel que :

$$C_t = E + F_t.$$

Théorème 4.7. *Soit t un point de $E \hookrightarrow S$, le diviseur F_t est la fibre en t de la fibration $\gamma_E : S \rightarrow E$. Les fibres de γ_E sont de genre 7.*

La fibration γ_E est invariante par σ_E et sa restriction à E est de degré 4.

Si $E' \hookrightarrow S$ est une seconde courbe lisse de genre 1, alors le nombre d'intersection EE' vaut 0 ou 1.

Si $EE' = 1$, alors la fibration γ_E contracte E' en un point.

Si $EE' = 0$, alors E' est une section de γ_E .

Démonstration. Soit t un point de $E \hookrightarrow S$. Si s est un point générique du diviseur F_t , la droite L_s coupe la droite L_t contenue dans le cône donc par définition de γ_E , le point $\gamma_E(s)$ est égal à t . Le point s est un point de la fibre en t et F_t est une composante de la fibre γ_E^*t . Réciproquement, le diviseur F_t vérifie :

$$F_t^2 = (C_t - E)^2 = 5 - 2 + (-3) = 0$$

Le diviseur F_t est donc la fibre de γ_E en t .

Un diviseur canonique K est numériquement équivalent à $3C_t$, donc $KF_t = K(C_t - E) = 12$. Puisque le diviseur F_t est une fibre, on a : $F_t^2 = 0$ et F_t est

de genre $\frac{12+0}{2} + 1$.

Soit s un point générique de S . Le plan X_s est égal au plan $X_{\sigma_E(s)}$ donc $\gamma_E(s) = \gamma_E \sigma_E s$.

Soit F_t la fibre en t de γ_E , on a : $F_t = C_t - E$. Soit E' une courbe elliptique de S , alors :

$$F_t E' = (C_t - E)E' = 1 - EE'.$$

Si $E' = E$, cette égalité montre que γ_E est de degré 4 sur E .

Supposons que E' soit une courbe elliptique distincte de E . Puisque F_t est une fibre, l'intersection $F_t E'$ est positive ou nulle, donc :

$$1 - EE' \geq 0.$$

De plus, le nombre d'intersection EE' est positif ou nul, ainsi : $0 \leq EE' \leq 1$. Si $EE' = 1$, alors $F_t E = 0$ et la courbe E est contenue dans une fibre. Si $EE' = 0$, alors $F_t E' = 1$ et la courbe elliptique E' est une section. \square

Remarquons que le morphisme de Gauss de S est un plongement et que les deux sommets de $\psi_* \pi^* E$ et $\psi_* \pi^* E'$ sont distincts (cf. lemme 4.4). On aurait donc aussi pu utiliser le lemme 2.15 pour montrer que EE' égal 0 ou 1.

Enoncés des résultats sur la classification des courbes non-amples des surfaces de Fano.

Si E est une courbe elliptique d'une surface de Fano S , nous avons vu comment lui attacher un automorphisme σ_E . Notons \mathcal{E} l'ensemble des courbes lisses de genre 1 de S . Le groupe engendré par les automorphismes :

$$\sigma_E, E \in \mathcal{E}$$

permet de classier les surfaces de Fano suivant la configuration formée par les courbes lisses de genre 1. Nous présentons ici les résultats qui seront traités dans un travail en préparation.

Proposition 4.8. *Soit E, E' deux courbes elliptiques. Les automorphismes σ_E et $\sigma_{E'}$ vérifient :*

$$(\sigma_E \sigma_{E'})^{3-EE'} = 1_S$$

où 1_S est l'identité de S .

Notons $Aut(S)$ le groupe d'automorphisme de S . Ce groupe agit sur l'espace $H^0(\Omega_S)$, soit :

$$\begin{array}{ccc} Aut(S) & \rightarrow & GL(H^0(\Omega_S)^*) \\ \tau & \rightarrow & M_\tau \end{array}$$

la représentation duale, et soit $q : GL(H^0(\Omega_S)^*) \rightarrow PGL(H^0(\Omega_S)^*)$ le quotient naturel.

Lemme 4.9. *Le morphisme $\tau \in Aut(S) \rightarrow q(M_\tau)$ est injectif et son image est le groupe $Aut(F)$ des automorphismes de la cubique $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$.*

Démonstration. (Résumé de la démonstration). Pour démontrer ce lemme, on se sert principalement du corollaire 1.5 et du fait que le morphisme M_τ , ($\tau \in \text{Aut}(S)$) est la représentation analytique d'un automorphisme de la variété d'Albanese de S . \square

Lemme 4.10. *Pour tout $E \in \mathcal{E}$, le morphisme $-M_{\sigma_E}$ est une réflexion.*

Notons $M'_S \subset GL(H^0(\Omega_S)^*)$ le groupe engendré par les réflexions :

$$-M_{\sigma_E}, E \in \mathcal{E}.$$

Soit $n > 0$ un entier, notons $\Sigma_n \subset GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices de permutations et $A(3, 3, n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices diagonales, de déterminant 1 et d'ordre 3. Notons de plus $G(3, 3, n)$ le groupe engendré par $A(3, 3, n)$ et Σ_n . On notera $[\]^2$ le groupe engendré par la réflexion d'ordre 2 de l'espace \mathbb{C} .

Le théorème suivant classe les surfaces de Fano suivant la configuration de leurs courbes elliptiques :

Théorème 4.11. *Soit S une surface de Fano, si le groupe M'_S est irréductible, alors il est isomorphe à l'un des groupes suivants :*

groupe	$\{1\}$	$[\]^2$	$G(3, 3, 2)$	Σ_4	Σ_5	$G(3, 3, 5)$
ordre du groupe	1	2	6	24	120	9720
nombre de courbes elliptiques de S	0	1	3	6	10	30

Si M'_S est isomorphe à l'un des groupes suivants :

$[\]^2 \times [\]^2$	$G(3, 3, 2) \times [\]^2$	$G(3, 3, 2) \times G(3, 3, 2)$	$G(3, 3, 3) \times G(3, 3, 2)$
4	12	36	324
2	4	6	12

Soit $E, E' \in \mathcal{E}$, il est possible de calculer l'intersection EE' et de donner un modèle plan de la courbe E .

Démonstration. (Résumé) Pour cette démonstration nous étudions les singularités du diviseur Σ des droites doubles (cf paragraphe 4.2). Nous montrons que si E_1, E_2 et E sont trois courbes lisses de genre 1 telles que $E_1E = E_2E = 1$ alors $E_1E_2 = 0$ et $\sigma_{E_1}(E_2)E = 1$. Cela induit des restrictions sur les groupes de réflexions possibles.

Nous utilisons ensuite la classification [22] de G.C. Shephard et J.A. Todd de ces groupes ; nous cherchons une démonstration plus directe. \square

Exemple : Si M'_S est isomorphe à $G(3, 3, 3) \times G(3, 3, 2)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et des coordonnées homogènes telles que la cubique soit l'hypersurface :

$$F(\lambda) : x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 + x_4^3 + x_5^3 = 0.$$

Soit α une racine primitive troisième de l'unité,

Corollaire 4.12. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que la courbe :*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 = 0$$

soit à multiplication complexe par un ordre de $\mathbb{Q}[\alpha]$, alors le groupe de Néron-Severi de la surface de Fano de la cubique $F(\lambda)$ est de rang : $25 = \dim H^1(S, \Omega_S)$.

Démonstration. (Résumé de la démonstration) La variété d'Albanese de la surface de Fano de la cubique $F(\lambda)$ est isogène à un produit de courbes elliptiques à multiplication complexe par $\mathbb{Q}[\alpha]$, son groupe de Néron-Severi est donc de rang 25.

De plus, pour une surface de Fano S et $\vartheta : S \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese, il est possible de montrer que le morphisme :

$$\vartheta^* : NS(A) \rightarrow NS(S)$$

est injectif (où $NS(X)$ est le groupe de Néron-Severi d'une variété X). \square

Le théorème de classification 4.11 montre l'intérêt de classifier les groupes d'automorphismes agissant sur une surface de Fano. Un premier lemme en vue de cette classification est le suivant :

Lemme 4.13. *Soit S une surface de Fano. Le groupe d'automorphismes $Aut(S)$ agit sur la variété d'Albanese de S et préserve une polarisation, son ordre divise $11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^6 \cdot 2^{23}$.*

Il est donc légitime de chercher les surfaces de Fano possédant un automorphisme d'ordre 11.

Par analogie avec la quartique du plan, nous appellerons ici cubique de Klein la cubique :

$$F : x_1x_5^2 + x_5x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_2^2 + x_2x_1^2 = 0.$$

Soit ξ une racine primitive 11^{ième} de l'unité et soit $\nu = \frac{-1+\sqrt{-11}}{2}$.

Proposition 4.14. *L'automorphisme $f \in PGL_5(\mathbb{C})$ d'ordre onze :*

$$f : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \rightarrow (\xi x_1 : \xi^9 x_2 : \xi^3 x_3 : \xi^4 x_4 : \xi^5 x_5)$$

agit sur la cubique de Klein. Cette cubique est la seule cubique lisse (à isomorphisme près) qui possède un automorphisme d'ordre 11.

La variété d'Albanese A de la surface de Fano S est isomorphe à \mathbb{E}'^5 où \mathbb{E}' est la courbe elliptique : $\mathbb{E}' = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\nu]$. Notons $NS(A)$ le groupe de Néron-Severi de A et $\vartheta : S \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese. L'image du morphisme :

$$\vartheta^* : NS(A) \rightarrow NS(S)$$

est un sous-réseau de rang 25 et de discriminant $2^2 11^{10}$.

Remarque 4.15. *L'automorphisme f fixe 5 points de F . En un point fixe x , l'intersection de F et de l'hyperplan tangent à F en x n'est pas un cône. On en déduit que le nombre de sommets de cônes contenus dans F est un multiple de 11. Le théorème de classification 4.11 implique alors que la cubique de Klein ne possède pas de cônes. Ainsi le fibré cotangent de sa surface de Fano est ample. (A l'aide de l'équation du lemme 4.4, on peut montrer qu'une surface de Fano générique possède un fibré cotangent ample).*

4.4. Surface de Fano de la cubique de Fermat.

4.4.1. Configuration des courbes elliptiques.

Soit S la surface de Fano de la cubique de Fermat $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0.$$

Soit $e_1, \dots, e_5 \in H^0(\Omega_S)^*$ la base duale des formes x_1, \dots, x_5 . Si v est un vecteur non nul,

$$\mathbb{C}v$$

désigne l'espace vectoriel engendré par v ou bien le point de \mathbb{P}^4 correspondant à cet espace ; nous précisons à chaque fois.

Notons μ_3 l'ensemble des racines troisièmes de l'unité et soit $1 \leq i < j \leq 5$, $\beta \in \mu_3$. Le point :

$$p_{ij}^\beta = \mathbb{C}(e_i - \beta e_j) \in \mathbb{P}^4$$

est le sommet d'un cône contenu dans F , son hyperplan tangent est $\{x_i + \beta^2 x_j = 0\}$. On notera $E_{ij}^\beta \hookrightarrow S$ la courbe elliptique correspondant au sommet p_{ij}^β et $\#V$ le cardinal d'un ensemble V .

Théorème 4.16. *La surface de Fano de la cubique de Fermat possède exactement 30 courbes lisses de genre 1 :*

$$E_{ij}^\beta, 1 \leq i < j \leq 5, \beta \in \mu_3.$$

Ces courbes sont isomorphes à la cubique plane de Fermat :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Soit $E_{i,j}^\gamma$ et $E_{s,t}^\beta$ deux courbes elliptiques, alors $E_{i,j}^\gamma E_{s,t}^\beta = 1$ si et seulement si $\#\{i, j, s, t\} = 4$.

Soit $E \hookrightarrow S$ une courbe lisse de genre 1. La fibration γ_E possède 20 sections et contracte 9 courbes elliptiques.

Démonstration. Soit i, j des entiers tels que $1 \leq i < j \leq 5$ et soit $\beta \in \mu_3$. L'intersection de F , de l'hyperplan tangent à F au sommet $p_{ij}^\beta \in F$ et de l'hyperplan $\{x_i - \beta x_j = 0\}$ est un modèle plan de E_{ij}^β (cf. paragraphe 4.1.2). Cette intersection a pour équation :

$$\sum_{k \notin \{i,j\}} x_k^3 = 0$$

dans le plan $\{x_i + \beta^2 x_j = 0\} \cap \{x_i - \beta x_j = 0\}$. La courbe E_{ij}^β est donc isomorphe à la cubique plane de Fermat.

Comme on peut le vérifier, la droite contenant les sommets p_{ij}^γ et p_{st}^β est contenue dans la cubique F si et seulement si $\#\{i, j, s, t\} = 4$. Le point de S correspondant à cette droite est alors un point commun des courbes E_{ij}^γ et E_{st}^β et par le théorème 4.7, l'intersection de E_{ij}^γ et de E_{st}^β vaut 1.

La surface S contient 30 courbes elliptiques et la proposition 4.6 montre que

ce sont les seules.

L'affirmation sur les fibrations résulte également du théorème 4.7. \square

Considérons le graphe suivant : ses 10 sommets sont les sous-ensembles à deux éléments $\{i, j\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et une arête relie le sommet $\{i, j\}$ à $\{s, t\}$ si et seulement si $\#\{i, j, s, t\} = 4$. Ce graphe est appelé graphe de Petersen. Il se représente comme suit : les sommets forment deux pentagones l'un incluant l'autre, on forme des arêtes du pentagone le plus grand mais on dessine l'étoile à 5 branche dans le pentagone le plus petit ; enfin une arête relie chaque sommet du plus grand pentagone au plus proche sommet du pentagone inclus. Pour obtenir le graphe de la configuration des 30 courbes lisses de genre 1 de la surface de Fano S , il suffit de tripler chaque sommet du graphe de Petersen et de former les arêtes en conséquence.

4.4.2. *Etude du groupe d'automorphismes de la cubique de Fermat.*

Le groupe $G(3, 3, 5)$ (cf. notations du théorème de classification 4.11) agit fidèlement sur la cubique de Fermat F , notons $Aut(F)$ le groupe d'automorphismes de F .

Proposition 4.17. *Le groupe $Aut(F)$ est isomorphe à $G(3, 3, 5)$.*

Démonstration. On sait que :

$$q(G(3, 3, 5)) \subset Aut(F)$$

(cf. notations du lemme 4.9), montrons l'inclusion réciproque.

Soit $1 \leq i < j \leq 5$ des entiers. Les trois sommets de cônes $p_{i,j}^\beta, \beta \in \mu_3$ (notations du théorème 4.16) sont alignés sur la droite $L_{i,j}$ passant par les points $\mathbb{C}e_i$ et $\mathbb{C}e_j$. Ces dix droites :

$$L_{i,j}, 1 \leq i < j \leq 5$$

sont d'intersection nulle ou se coupent en les points $\mathbb{C}e_i, 1 \leq i \leq 5$ de \mathbb{P}^4 . Un automorphisme $h(\in PGL(H^0(\Omega_S)^*))$ de la cubique conserve la configuration de ces droites $L_{i,j}$ car l'image par h de trois sommets de cônes alignés est formée de trois sommets alignés.

L'image du point $\mathbb{C}e_i \in \mathbb{P}^4$ est donc un point $\mathbb{C}e_{\sigma(i)}$ où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$.

Identifions σ à un élément de $\Sigma_5 \subset G(3, 3, 5)$; si $h' \in GL_5(\mathbb{C})$ relève h , alors il existe $b_i \in \mathbb{C}$, non nul, tel que $\sigma^{-1}h'(e_i) = b_i e_i$.

Or $q(\sigma)$ est un automorphisme de F , donc $q(\sigma^{-1})h \in Aut(F)$, en particulier l'image par $q(\sigma^{-1})h$ d'un sommet $p_{i,j}^\beta$ est un sommet $p_{s,t}^\gamma$ (avec $1 \leq s < t \leq 5, \gamma \in \mu_3$). Mais :

$$\sigma^{-1}h'(e_i - \beta e_j) = b_i e_i - \beta b_j e_j,$$

donc $s = i, t = j$ et $b_j/b_i \in \mu_3$.

Pour $i \in \{1, \dots, 5\}$, posons $a_i = b_i/b_1$. La matrice diagonale k d'éléments diagonaux :

$$(a_1, \dots, a_5)$$

vérifie : $\sigma^{-1}h' = b_1k$ et (quitte à multiplier k par un élément de μ_3), on peut supposer que le relèvement k de $q(\sigma^{-1})h$ est dans le groupe $A(3, 3, 5)$. L'automorphisme $h = q(\sigma k)$ est alors élément de $q(G(3, 3, 5))$. \square

Remarque 4.18. *Si on accepte le résultat du lemme 4.9, cette proposition montre que le groupe d'automorphismes $Aut(S)$ de S est isomorphe à $G(3, 3, 5)$. On peut alors voir que $Aut(S)$ est engendré par les automorphismes :*

$$\sigma_{E_{ij}^\beta}, i < j, \beta \in \mu_3$$

(cf. notations du paragraphe 4.3).

Le groupe $G(3, 3, 5)$ est un groupe de réflexions complexes, il est engendré par 5 réflexions d'ordre 2 :

$$(12), (23), (34), (45), r$$

où r est le produit de la réflexion (12) par la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux $(\alpha^2, \alpha, 1, 1, 1)$ ($\alpha \in \mu_3, \alpha \neq 1$). Leur diagramme "de Dynkin" est le suivant :



4.4.3. *Etude du groupe de Néron-Severi.*

Soit S la surface de Fano de la cubique de Fermat. La suite exacte de faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{exp}} \mathcal{O}_S^* \rightarrow 0$$

donne un morphisme de connexion :

$$H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Le \mathbb{Z} -module $H^2(S, \mathbb{Z})$ est un réseau unimodulaire modulo la torsion (théorème de dualité de Poincaré). L'espace $H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ s'identifie à $H^2(S, \mathbb{C})$; notons i le morphisme naturel :

$$i : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{C})$$

et $H^2(S, \mathbb{Z})_f$ l'image de i . L'image du morphisme composé $i \circ c_1$ est le groupe de Néron-Severi de S et est noté $NS(S)$. Par commodité, nous confondons une courbe $C \hookrightarrow S$ et la classe qu'elle définit dans $NS(S)$.

Notation 4.19. Pour $1 \leq i < j \leq 5$, notons B_{ij} le diviseur :

$$B_{ij} = \sum_{\beta \in \mu_3} E_{ij}^\beta.$$

Théorème 4.20. *Le groupe de Néron-Severi $NS(S)$ de la surface de Fano de la cubique de Fermat est de rang :*

$$25 = \dim H^1(S, \Omega_S).$$

Une \mathbb{Q} -base de $NS(S)$ est formée des 25 courbes elliptiques différentes des 5 courbes :

$$E_{1,3}^\alpha, E_{1,5}^\alpha, E_{2,4}^\alpha, E_{3,4}^\alpha, E_{4,5}^\alpha$$

(α générateur de μ_3). Le sous-réseau engendré par les 30 courbes elliptiques est de discriminant 3^{20} .

Les relations entre les 30 courbes elliptiques sont engendrées par les relations :

$$B_{jr} + B_{st} = B_{js} + B_{rt} = B_{jt} + B_{rs},$$

pour les indices tels que : $1 \leq j < r < s < t \leq 5$.

Le corollaire 4.27 à venir donne une interprétation géométrique des relations d'équivalence numérique de ce théorème, on y montre que les 3 diviseurs :

$$B_{jr} + B_{st}, B_{js} + B_{rt}, B_{jt} + B_{rs}$$

sont les fibres d'une fibration de S dans une courbe elliptique.

Démonstration. L'espace $H^2(S, \mathbb{C})$ se décompose en la somme :

$$H^2(S, \mathbb{C}) = H^{2,0}(S) \oplus H^{1,1}(S) \oplus H^{0,2}(S)$$

où l'espace $H^{i,j}(S)$ est (canoniquement isomorphe à) l'espace $H^j(S, \wedge^i \Omega_S)$. Le groupe de Néron-Severi est alors égal à $H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z})_f$ (cf. [2] théorème 2.3 chapitre IV), donc le nombre de Picard de S est inférieur ou égal à la dimension de l'espace $H^1(S, \Omega_S)$. Notons $h^{i,j}$ la dimension de $H^j(S, \wedge^i \Omega_S)$,

les nombres de Betti b_i de S sont (cf. [6]) :

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= h^{1,0} + h^{0,1} = h^o(\Omega_S) + h^1(O_S) = 10, \\ b_2 &= h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2} = h^{1,1} + 20, \\ b_3 &= b_1 = 10, \\ b_4 &= 1. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $27 = c_2[S] = \sum(-1)^i b_i = h^{1,1} + 2$, d'où $h^{1,1} = 25$. Ceci montre que le nombre de Picard de S est inférieur ou égal à 25.

Par la proposition 4.3, les courbes elliptiques sont d'auto-intersection -3 . Le théorème 4.16 donne de plus les intersections entre les courbes elliptiques. Notons U la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et I_3 la matrice identité de taille 3. La matrice d'intersection des 30 courbes est la matrice par blocs suivante :

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} -3I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U & U & U \\ 0 & -3I_3 & 0 & 0 & 0 & U & U & 0 & 0 & U \\ 0 & 0 & -3I_3 & 0 & U & 0 & U & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3I_3 & U & U & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & U & -3I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & U \\ 0 & U & 0 & U & 0 & -3I_3 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & U & U & 0 & 0 & 0 & -3I_3 & U & 0 & 0 \\ U & 0 & 0 & U & 0 & 0 & U & -3I_3 & 0 & 0 \\ U & 0 & U & 0 & 0 & U & 0 & 0 & -3I_3 & 0 \\ U & U & 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 & 0 & -3I_3 \end{pmatrix}$$

où les courbes elliptiques sont ordonnées pour chaque couple $1 \leq i < j \leq 5$ par triplets $E_{ij}^1, E_{ij}^\alpha, E_{ij}^{\alpha^2}$ et les 10 couples (i, j) disposés dans cet ordre :

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5).$$

Comme on peut le vérifier (à l'aide d'un ordinateur), la matrice d'intersection \mathcal{I} est de rang 25. Une matrice extraite de taille 25 et de déterminant égal à 3^{20} est obtenue par l'intersection des 25 courbes elliptiques différentes des 5 courbes :

$$E_{1,3}^\alpha, E_{1,5}^\alpha, E_{2,4}^\alpha, E_{3,4}^\alpha, E_{4,5}^\alpha$$

(α générateur de μ_3). Le rang de $NS(S)$ est donc égal à 25 et : $NS(S) \otimes \mathbb{C} = H^{1,1}(S)$. Par le théorème de l'indice, $NS(S)$ est de signature $(1, 24)$ (cela se vérifie également à l'aide de la matrice \mathcal{I}).

Les relations d'équivalences numériques entre les courbes proviennent de la matrice \mathcal{I} . \square

Remarque 4.21. Soit $\alpha \in \mu_3$ une racine primitive, pour $1 \leq i < j \leq 5$ posons :

$$A_{ij} = \frac{1}{3}(E_{ij}^1 + E_{ij}^\alpha + E_{ij}^{\alpha^2}) \in NS(S) \otimes \mathbb{Q}.$$

Ces 10 classes A_{ij} vérifient :

$$\begin{cases} A_{ij}^2 = A_{ij}E_{ij}^\beta = -1 \\ A_{ij}A_{st} = A_{ij}E_{st}^\beta = 0 \text{ si } \#\{i, j, s, t\} = 3 \\ A_{ij}A_{st} = A_{ij}E_{st}^\beta = 1 \text{ si } \#\{i, j, s, t\} = 4 \end{cases}$$

et engendrent un réseau unimodulaire de rang 5 et de signature (1,4) noté $I^{1,4}$. Ces diviseurs rationnels et les 30 courbes elliptiques de la surface engendrent un réseau R de $NS(S) \otimes \mathbb{Q}$ de rang 25 et qui est stable par le groupe d'automorphismes de S .

Soit $\beta \in \mu_3$, le réseau R contient :

$$C_{ij}^\beta = A_{ij} - E_{ij}^\beta.$$

Soit $\beta, \gamma \in \mu_3$, alors pour $1 \leq i < j \leq 5$, $1 \leq s < t \leq 5$:

$$\begin{aligned} (C_{ij}^\beta)^2 &= -2, \\ C_{ij}^\gamma C_{ij}^\beta &= 1 \text{ si } \gamma \neq \beta, \\ C_{ij}^\gamma C_{st}^\beta &= 0 \text{ si } (i, j) \neq (s, t). \end{aligned}$$

De plus $A_{ij}C_{st}^\beta = 0$. Notons Λ le \mathbb{Z} -module \mathbb{Z}^2 muni de la forme d'intersection :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui précède montre que le réseau R est isomorphe à :

$$I^{1,4} \oplus (\Lambda^{\oplus 10})$$

et est de discriminant 3^{10} . Si une des classes A_{ij} est entière, alors $NS(S)$ contient R .

4.4.4. Variété d'Albanese de la surface de Fano de la cubique de Fermat.

Etudions la surface de Fano de la cubique de Fermat au moyen de sa variété d'Albanese A . Notons $\vartheta : S \rightarrow A$ un morphisme d'Albanese. C'est un plongement et cela permet de considérer S comme une sous-variété de A . Le point $p_{ij}^\beta \in \mathbb{P}^4$ correspondant à l'espace de dimension 1 :

$$\mathbb{C}(e_i - \beta e_j)$$

est le sommet du cône $F \cap \{x_i + \beta^2 x_j = 0\}$. Nous avons noté $E_{ij}^\beta \hookrightarrow S$ la courbe elliptique correspondant à ce cône. L'espace tangent de la courbe $E_{ij}^\beta \hookrightarrow A$ translatée en 0 est l'espace $\mathbb{C}(e_i - \beta e_j) \subset H^0(\Omega_S)^*$ (lemme 2.14). Soit $\mathbb{E} \hookrightarrow A$ la courbe elliptique d'espace tangent $\mathbb{C}(e_1 - e_2)$ et soit $\Lambda_A \subset H^0(\Omega_S)^*$ le réseau des périodes de A . La courbe \mathbb{E} (isomorphe à $x^3 + y^3 + z^3 = 0$) est à multiplication complexe par l'anneau principal $\mathbb{Z}[\alpha]$ (où $\alpha \in \mu_3$ une racine primitive). Quitte à normaliser la base e_1, \dots, e_5 en la multipliant par un scalaire, on peut supposer que :

$$\Lambda_A \cap \mathbb{C}(e_1 - e_2) = \mathbb{Z}[\alpha](e_1 - e_2).$$

Un automorphisme τ de la surface induit un automorphisme $\tau' \in \text{Aut}(A)$ de la variété d'Albanese A tel que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\vartheta} & A \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau' \\ S & \xrightarrow{\vartheta} & A \end{array}$$

soit commutatif. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(S) & \rightarrow & \text{Aut}(A) \\ \tau & \rightarrow & \tau' \end{array}$$

est un morphisme injectif de groupes.

Le groupe d'endomorphismes $G(3, 3, 5)$ dans la base e_1, \dots, e_5 de $H^0(\Omega_S)^*$ est la représentation analytique ([4] chapitre 1) de ces automorphismes provenant de S . L'anneau $\mathbb{Z}[G(3, 3, 5)]$ est donc la représentation analytique d'un sous-anneau d'endomorphismes de A .

Notons Λ_A^* le sous- $\mathbb{Z}[\alpha]$ -module libre de rang 5 de $H^0(\Omega_S)$ engendré par les formes :

$$x_1 e_1 + \dots + x_5 e_5 \rightarrow x_i - \beta x_j \quad (i < j, \beta \in \mu_3).$$

Soit ℓ un élément de Λ_A^* . Le morphisme $x \rightarrow \ell(x)(e_1 - e_2)$ est un élément de $\mathbb{Z}[G(3, 3, 5)]$.

Notons $\Gamma_\ell : A \rightarrow \mathbb{E}$ le morphisme de variétés abéliennes dont la différentielle est $x \rightarrow \ell(x)(e_1 - e_2)$ et notons $\gamma_\ell : S \rightarrow \mathbb{E}$ le morphisme $\Gamma_\ell \circ \vartheta$.

Définissons le produit hermitien de deux formes $\ell, \ell' \in \Lambda_A^*$ par :

$$\langle \ell, \ell' \rangle = \sum_{k=1}^{k=5} \ell(e_k) \overline{\ell'(e_k)},$$

et la norme de ℓ par : $\|\ell\| = \sqrt{\langle \ell, \ell \rangle}$.

Théorème 4.22. Soit $\ell \in \Lambda_A^*$ un élément non nul et F_ℓ une fibre de γ_ℓ . L'intersection de F_ℓ et de la courbe $E_{ij}^\beta \hookrightarrow S$ vaut :

$$E_{ij}^\beta F_\ell = |\ell(e_i - \beta e_j)|^2.$$

La fibration est à fibres connexes si les entiers $E_{ij}^\beta F_\ell$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. La fibre F_ℓ est de genre :

$$g(F_\ell) = 1 + 3 \|\ell\|^2.$$

Soit ℓ et ℓ' deux éléments linéairement indépendants de $\Lambda_A^* \subset H^0(\Omega_S)$. Le morphisme $\tau_{\ell, \ell'} = (\gamma_\ell, \gamma_{\ell'}) : S \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ est de degré $F_\ell F_{\ell'}$ et :

$$F_\ell F_{\ell'} = \|\ell\|^2 \|\ell'\|^2 - \langle \ell, \ell' \rangle \langle \ell', \ell \rangle.$$

Remarque 4.23. Ce théorème permet calculer la classe d'équivalence numérique d'une fibre dans la \mathbb{Q} -base mentionnée au théorème 4.20.

Dans les exemples qui suivent, nous montrons comment calculer le diviseur de ramification de $\tau_{\ell, \ell'}$.

Démontrons le théorème 4.22 :

Soit $1 \leq i < j \leq 5$ et $\beta \in \mu_3$. L'intersection $E_{ij}^\beta F_\ell$ est le degré de la restriction de γ_ℓ à $E_{ij}^\beta \hookrightarrow S$. C'est également le degré de la restriction de Γ_ℓ à $E_{ij}^\beta \hookrightarrow A$.

L'espace tangent de la courbe E_{ij}^β translatée en 0 est $\mathbb{C}(e_i - \beta e_j)$. Du fait que $G(3, 3, 5)$ agisse sur Λ_A , on a :

$$\Lambda_A \cap \mathbb{C}(e_i - \beta e_j) = \mathbb{Z}[\alpha](e_i - \beta e_j).$$

Le degré du morphisme Γ_ℓ sur E_{ij}^β est donc égal à $|\ell(e_i - \beta e_j)|^2$. Ainsi : $F_\ell E_{ij}^\beta = |\ell(e_i - \beta e_j)|^2$.

Soit D une fibre de la factorisation de Stein associée à γ_ℓ . Il existe un entier naturel n tel que nD soit numériquement équivalente à F_ℓ . Si les entiers $|\ell(e_i - \beta e_j)|^2$ sont premiers entre eux, alors $n = 1$ et γ_ℓ est connexe.

Etudions maintenant le genre de F_ℓ :

Lemme 4.24. La fibre F_ℓ est de genre $1 + 3 \|\ell\|^2$ et $C_s F_\ell = 2 \|\ell\|^2$ (s point de S , C_s le diviseur d'incidence).

Démonstration. Le diviseur Σ somme des 30 courbes elliptiques de S est un diviseur bicanonique (corollaire 4.6) et :

$$\Sigma F_\ell = \sum_{i,j,\beta} F_\ell E_{ij}^\beta = \sum_{i,j,\beta} |\ell(e_i - \beta e_j)|^2.$$

De plus :

$$\sum_{\beta \in \mu_3, i < j} |\ell(e_i - \beta e_j)|^2 = 3 \sum_{i < j} (|\ell(e_i)|^2 + |\ell(e_j)|^2) = 12 \|\ell\|^2.$$

Puisque F_ℓ est une fibre, on a $F_\ell^2 = 0$ et F_ℓ est de genre $1 + \frac{0+6\|\ell\|^2}{2}$. Par ailleurs, le diviseur $3C_s$ (s point de S) est numériquement équivalent à un diviseur canonique, on en déduit que : $C_s F_\ell = 2\|\ell\|^2$. \square

Considérons le diviseur Θ de la proposition 4.1. On identifie sa classe de Chern $c_1(\Theta)$ à une forme alternée sur l'espace tangent $H^o(\Omega_S)^*$ de la variété abélienne A ([4], theorem 2.12).

Lemme 4.25. *La forme $c_1(\Theta)$ est égale à :*

$$a \frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^5 dx_j \wedge d\bar{x}_j$$

où a est une constante et $i^2 = -1$. De plus :

$$\frac{1}{n!} \wedge^n c_1(\Theta) = \left(\frac{ai}{\sqrt{3}}\right)^n \sum_{j_1 < \dots < j_n} dx_{j_1} \wedge d\bar{x}_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \wedge d\bar{x}_{j_n}.$$

Démonstration. Notons H la matrice dans la base e_1, \dots, e_5 de la forme hermitienne associée à $c_1(\Theta)$ (cf [4], lemma 2.17). Les automorphismes induits par la surface de Fano préservent la polarisation Θ (lemme 4.2). Cela entraîne que pour tout $M = (m_{jk})_{1 \leq j, k \leq 5} \in G(3, 3, 5)$, on a :

$${}^t M H \bar{M} = H$$

(où \bar{M} est la matrice $\bar{M} = (\bar{m}_{jk})_{1 \leq j, k \leq 5}$) et cela permet de vérifier que la forme hermitienne H s'écrit :

$$H = \frac{2}{\sqrt{3}} a I_5$$

où a est une constante et où I_5 est la matrice identité. Ainsi : $c_1(\Theta) = a \frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^5 dx_j \wedge d\bar{x}_j$. \square

Puisque $\Lambda_A \cap \mathbb{C}(e_1 - e_2) = \mathbb{Z}[\alpha](e_1 - e_2)$, le groupe de Néron-Severi de la courbe \mathbb{E} d'espace tangent $\mathbb{C}(e_1 - e_2)$ est le \mathbb{Z} -module engendré par la forme :

$$\eta = \frac{i}{\sqrt{3}} dz \wedge d\bar{z}$$

où z est la coordonnée sur l'espace $\mathbb{C}(e_1 - e_2)$.

Soit $\ell = a_1 x_1 + \dots + a_5 x_5$ un élément de Λ_A^* . L'image inverse de la forme η par le morphisme $\Gamma_\ell : A \rightarrow \mathbb{E}$ est :

$$\Gamma_\ell^* \eta = \frac{i}{\sqrt{3}} d\ell \wedge d\bar{\ell}.$$

Cette forme $\Gamma_\ell^* \eta$ est la classe de Chern du diviseur $\Gamma_\ell^* 0$. La classe $\gamma_\ell^* \eta = \vartheta^* \Gamma_\ell^* \eta$ est la classe de Chern du diviseur F_ℓ .

Lemme 4.26. *Soit ℓ et ℓ' deux éléments de Λ_A^* , alors :*

$$F_\ell F_{\ell'} = \|\ell\|^2 \|\ell'\|^2 - \langle \ell, \ell' \rangle \langle \ell', \ell \rangle$$

et $c_1(\Theta) = \frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{i=1}^5 dx_i \wedge d\bar{x}_i$.

Démonstration. Par la proposition 4.1, $\vartheta^*c_1(\Theta)$ est la classe de Chern du diviseur $2C_s$ ($s \in S$) et :

$$2C_s F_\ell = \vartheta^*c_1(\Theta)\vartheta^*\Gamma_\ell^*\eta = \int_A \frac{1}{3!} \wedge^4 c_1(\Theta) \wedge \Gamma_\ell^*\eta$$

donc :

$$2C_s F_\ell = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^5 \int_A \left(\sum a_j dx_j\right) \wedge \left(\sum \bar{a}_j d\bar{x}_j\right) \wedge 4a^4 \sum_{1 \leq k \leq 5} (\wedge_{j \neq k} (dx_j \wedge d\bar{x}_j))$$

et :

$$2C_s F_\ell = \left(\frac{4}{a} \sum_{k=1}^{k=5} a_k \bar{a}_k\right) \frac{1}{5!} \int_A \wedge^5 c_1(\Theta).$$

Puisque Θ est une polarisation principale, l'entier $\frac{1}{5!} \int_A \wedge^5 c_1(\Theta)$ est égal à 1, ainsi : $2C_s F_\ell = \frac{4}{a} \|\ell\|^2$. On a montré au lemme 4.24 que $C_s F_\ell = 2 \|\ell\|^2$, on en déduit donc que $a = 1$.

Par la proposition 4.1, le nombre d'intersection des fibres F_ℓ et $F_{\ell'}$ est égal à :

$$\int_A \frac{1}{3!} \wedge^3 c_1(\Theta) \wedge \Gamma_\ell^*\eta \wedge \Gamma_{\ell'}^*\eta.$$

Ecrivons $\ell = a_1 x_1 + \dots + a_5 x_5$ et $\ell' = b_1 x_1 + \dots + b_5 x_5 \in \Lambda_A^*$, alors

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2 d\ell \wedge d\bar{\ell} \wedge d\ell' \wedge d\bar{\ell}' \wedge (\wedge^3 c_1(\Theta))$$

est égal à :

$$\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^5 \left(\sum a_j dx_j\right) \wedge \left(\sum \bar{a}_j d\bar{x}_j\right) \wedge \left(\sum b_j dx_j\right) \wedge \left(\sum \bar{b}_j d\bar{x}_j\right) \wedge \sum_{h < j < k} dx_h \wedge d\bar{x}_h \wedge dx_j \wedge d\bar{x}_j \wedge dx_k \wedge d\bar{x}_k$$

qui est égal à :

$$\left(\sum_{k \neq j} a_k \bar{a}_k b_j \bar{b}_j - a_k \bar{a}_j b_j \bar{b}_k\right) \frac{1}{5!} \wedge^5 c_1(\Theta).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F_\ell F_{\ell'} &= \int_A \frac{1}{3!} \wedge^3 c_1(\Theta) \wedge \Gamma_\ell^*\eta \wedge \Gamma_{\ell'}^*\eta = \sum_{k \neq j} a_k \bar{a}_k b_j \bar{b}_j - a_k \bar{a}_j b_j \bar{b}_k \\ &= \sum_{k,j} a_k \bar{a}_k b_j \bar{b}_j - a_k \bar{a}_j b_j \bar{b}_k = \|\ell\|^2 \|\ell'\|^2 - \langle \ell, \ell' \rangle \langle \ell', \ell \rangle. \end{aligned}$$

□

Pour une surface de Fano X , le morphisme naturel $\wedge^2 H^o(\Omega_X) \rightarrow H^o(X, \omega_X)$ est un isomorphisme ([6], lemma 9.13). Soit ℓ et ℓ' deux éléments de Λ_A^* linéairement indépendants. Le degré du morphisme $\tau_{\ell, \ell'} = (\gamma_\ell, \gamma_{\ell'})$ est égal à $F_\ell F_{\ell'}$ car $\tau_{\ell, \ell'}^*(\mathbb{E} \times \{0\}) = F_{\ell'} \in NS(S)$, $\tau_{\ell, \ell'}^*(\{0\} \times \mathbb{E}) = F_\ell \in NS(S)$ et le nombre d'intersection des diviseurs $\{0\} \times \mathbb{E}$ et $\mathbb{E} \times \{0\}$ est égal à 1.

Ceci termine la démonstration du théorème 4.22. □

Soit X une surface, C une courbe lisse, $\gamma : X \rightarrow C$ une fibration à fibres connexes. Un point de X est appelé un **point critique** de γ s'il est un zéro de la différentielle $d\gamma : T_X \rightarrow \gamma^*T_C$. Les **valeurs critiques** de γ (i.e. les images des points critiques) forment un ensemble fini de points de C .

La fibre de γ en un point u est singulière si et seulement si u est une valeur critique (cf. [2] Chapitre III, paragraphe 8).

Supposons que C soit une courbe elliptique. Les points critiques de γ sont alors les zéros de la forme $\gamma^*\omega$ où ω est un générateur du faisceau Ω_C .

Supposons de plus que X vérifie l'hypothèse 0.1. Un point x de X est un point critique si et seulement si la droite $L_x = \psi(\pi^{-1}x)$ (ψ application cotangente, π la projection) est contenue dans l'hyperplan $\{\gamma^*\omega = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$.

Si la fibration est stable (i.e. ses fibres sont réduites, à singularités doubles, et ne contiennent pas de (-1) -courbes), alors le nombre de points critiques est égal à $c_2[X]$ (cf [23] p. 49).

Exemples :

Soit S la surface de Fano de la cubique de Fermat. Soit $1 \leq i \leq 5$ et $j < r < s < t$ tels que $\{i, j, r, s, t\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, notons $\ell_i = (1 - \alpha)x_i \in \Lambda_A^*$.

Corollaire 4.27. *La fibration $\gamma_{\ell_i} : S \rightarrow \mathbb{E}$ est stable à fibres connexes de genre 10 et les 3 diviseurs :*

$$B_{jr} + B_{st}, B_{js} + B_{rt}, B_{jt} + B_{rs}$$

(notations 4.19) sont les seules fibres singulières de γ_{ℓ_i} .

Les 27 points d'intersections des courbes E_{jr}^β et E_{st}^γ ($\beta, \gamma \in \mu_3$) forment l'ensemble des points critiques de cette fibration.

Démonstration. Une fibre de γ_{ℓ_i} est de genre $1 + 3|1 - \alpha|^2 = 10$. Soit $\beta \in \mu_3$, $h, k \in \{j, r, s, t\}$, $h < k$. La forme ℓ_i est nulle sur l'espace $\mathbb{C}(e_h - \beta e_k)$ donc la courbe E_{hk}^β est contractée en un point et est contenue dans une fibre. Le diviseur $D_1 = B_{jr} + B_{st}$ est connexe, de genre 10, ses composantes irréductibles sont contractés par γ_{ℓ_i} et on peut vérifier que $(B_{jr} + B_{st})^2 = 0$. C'est donc une fibre et γ_{ℓ_i} est à fibres connexes. De même les diviseurs $D_2 = B_{js} + B_{rt}$ et $D_3 = B_{jt} + B_{rs}$ sont des fibres de γ_{ℓ_i} .

Les 27 droites contenues dans l'intersection de la cubique de Fermat et de l'hyperplan $\{\ell_i = 0\}$ correspondent aux 27 points d'intersections des courbes E_{hk}^β et E_{lm}^γ telles que : $h < k$, $l < m$ et $\{i, h, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ces 27 points critiques sont contenus dans les fibres D_1, D_2, D_3 . Ces trois fibres sont donc les seules fibres singulières de γ_{ℓ_i} . \square

On peut donner d'autres exemples :

Corollaire 4.28. *Soit $(a_1, \dots, a_5) \in \mu_3^5$ tel que $a_1 \dots a_5 = 1$. Le diviseur :*

$$D = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} E_{ij}^{a_i/a_j}$$

est une fibre singulière de la fibration de Stein associée à γ_ℓ où :

$$\ell = (1 - \alpha)(a_1x_1 + \dots + a_5x_5) \in \Lambda_A^*.$$

Démonstration. Une fibre de γ_ℓ est de genre $1 + 3 \cdot 3 \cdot 5 = 46$. Le diviseur connexe D vérifie $D^2 = 0$ et est de genre 16. Les composantes irréductibles de D sont contractées en un point par γ_ℓ . L'intersection de F et de l'hyperplan $\{\ell = 0\}$ est transverse, elle contient donc 27 droites et le fermé des points critiques de la fibration de Stein associée à γ_ℓ est formé de 27 points. (Le diviseur D contient 15 de ces 27 points). Si γ_ℓ est à fibres connexes, alors $3D$ (de genre 46) est une fibre et D est contenu dans le fermé des points critiques. Ce qui est impossible, et donc D est une fibre de la fibration de Stein de γ_ℓ . \square

On peut montrer à l'aide du théorème 4.29 à venir que la fibration de Stein de γ_ℓ est un morphisme de S dans la courbe $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[3\alpha]$.

- Le fermé des points critiques de la fibration $\gamma_{(1-\alpha)(x_i+\beta x_j)}$ est la courbe $E_{ij}^{\beta^2}$. Les 30 fibrations : $\gamma_{(1-\alpha)(x_i+\beta x_j)}$, $\beta \in \mu_3$, $1 \leq i < j \leq 5$ sont les seules fibrations pour lesquelles le fermé des points critiques est de dimension 1. (On peut montrer à l'aide du théorème 4.29 que ces fibrations sont bien à fibres connexes).

- Le théorème 4.22 permet de construire une infinité de fibrations à fibres connexes possédant 9 sections et qui contractent 9 courbes. Prenons $a \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et $\ell = x_1 - (1 + (1 - \alpha)a)x_2 \in \Lambda_A^*$, alors :

$$|\ell(e_1 - \beta e_3)| = |\ell(e_1 - \beta e_4)| = |\ell(e_1 - \beta e_5)| = 1, (\beta \in \mu_3).$$

Les courbes $E_{13}^\beta, E_{14}^\beta$ et E_{15}^β sont donc des sections de γ_ℓ (ainsi γ_ℓ est à fibres connexes). Puisque :

$$|\ell(e_3 - \beta e_4)| = |\ell(e_3 - \beta e_5)| = |\ell(e_4 - \beta e_5)| = 0, (\beta \in \mu_3),$$

les courbes $E_{34}^\beta, E_{35}^\beta$ et E_{45}^β sont contractées.

- Les fibres de $\gamma_{x_i - \beta x_j}$ sont les mêmes que les fibres de $\gamma_{E_{ij}^\beta}$.

- On peut chercher à construire des fibrations qui ne sont pas stables et qui ne possèdent qu'un nombre fini de points critiques en considérant les formes $\ell \in \Lambda_A^*$ telles que l'intersection de F et de $\{\ell = 0\}$ ne soit pas transverse et ne contienne un nombre fini (différent de 27) de droites de F (prendre par exemple $\ell = (1 - \alpha)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \in \Lambda_A^*$).

- L'image inverse par $\tau_{\ell, \ell'}$ d'un générateur de $H^0(\mathbb{E}^2, \omega_{\mathbb{E}^2})$ est un multiple de la 2-forme $\ell \wedge \ell'$. Puisque $\omega_{\mathbb{E}^2}$ est trivial, le diviseur de ramification de $\tau_{\ell, \ell'}$ est le diviseur canonique associé à la 2-forme $\ell \wedge \ell'$. L'ensemble des points sous-jacents à ce diviseur de ramification est formé points s tels que la droite L_s coupe le plan $\{\ell = \ell' = 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(\Omega_S)^*)$.

Par exemple, pour $1 \leq i < j \leq 5$, $\ell = x_i - x_j$ et $\ell' = x_i - \alpha x_j$, on peut vérifier que ce diviseur canonique est égal à :

$$2B_{ij} + B_{rs} + B_{st} + B_{rt}$$

où $\{i, j, r, s, t\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $r < s < t$ et $B_{uv} = \sum_{\beta \in \mu_3} E_{uv}^\beta$ ($1 \leq u < v \leq 5$).

Signalons le théorème suivant qui sera démontré dans une publication à venir :

Théorème 4.29. *Le réseau des périodes de la variété d'Albanese A est égal au réseau :*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\alpha](e_1 - e_5) &+ \mathbb{Z}[\alpha](e_2 - e_5) + \mathbb{Z}[\alpha](e_3 - e_5) + \mathbb{Z}[\alpha](e_4 - e_5) \\ &+ \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \mathbb{Z}[3\alpha](\alpha^2 e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha e_3 + \alpha e_4 + e_5). \end{aligned}$$

L'image du morphisme $\vartheta^* : NS(A) \rightarrow NS(S)$ est le sous-réseau de rang 25 et de discriminant $2^2 3^{18}$ engendré par les fibres :

$$F_{x_i - \beta^2 x_j} = C_s - E_{ij}^\beta, \quad 1 \leq i < j \leq 5, \quad \beta \in \mu_3$$

et la fibre $\sum_{i < j} E_{ij}^1$.

Démonstration. (Résumé) On montre dans un premier temps qu'il n'y a que 6 réseaux $\Lambda \subset \mathbb{C}^5$ préservés par $G(3, 3, 5)$ et normalisés par la condition :

$$\Lambda \cap \mathbb{C}(e_1 - e_2) = \mathbb{Z}[\alpha](e_1 - e_2).$$

Les 5 réseaux Λ différents de $H_1(A, \mathbb{Z})$ sont écartés par l'une des considérations suivantes :

- La forme bilinéaire alternée $\omega = \frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{k=5} dx_k \wedge d\bar{x}_k$ (cf. lemme 4.26) n'est pas entière sur le réseau Λ .
- Le phaffien de ω dans une base du réseau Λ n'est pas égal à 1 (ce qui contredit le fait que $c_1(\Theta)$ est la classe de Chern d'une polarisation principale).
- En tant que variété abélienne principalement polarisée, la variété abélienne \mathbb{C}^5/Λ est isomorphe à un produit de jacobienes, ce qui contredit un résultat de [6].
- Le réseau Λ est dépendant de la détermination de α tel que $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

Connaissant le réseau $H_1(A, \mathbb{Z})$, on peut calculer une base du groupe de Néron-Severi de A et l'image du morphisme $\vartheta^* : NS(A) \rightarrow NS(S)$. \square

Le théorème 4.29 permet de montrer que si $\gamma : S \rightarrow C$ est une fibration à fibres connexes dans une courbe C , alors C est isomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\alpha]$ ou bien à $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[3\alpha]$. Il permet aussi de déterminer quels sont les morphismes à fibres connexes parmi les morphismes γ_ℓ , $\ell \in \Lambda_A^*$.

A l'origine, l'étude du réseau des périodes était motivée par l'envie de connaître d'autres éléments entiers du groupe $NS(S)$, dans le but d'en avoir une \mathbb{Z} -base. Le cône des diviseurs effectifs de S semble assez compliqué : il contient bien sûr les fibres F_ℓ , $\ell \in \Lambda_A^*$.

RÉFÉRENCES

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, "Geometry of Algebraic Curves I", Grundlehren Mat. Wiss. 267, Springer-Verlag, New-York, (1984).
- [2] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van De Ven, "Compact complex surfaces", *Ergeb. Math. Grenzgeb.* vol.4, seconde édition augmentée, Springer (2004).
- [3] A. Beauville, "Surfaces algébriques complexes", *Astérisque* 54, Société mathématique de France, (1978).
- [4] C. Birkenhake, H. Lange, "Complex abelian varieties", Grundlehren, Vol 302, seconde édition, Springer (1980).
- [5] E. Bombieri, H.P.F. Swinnerton-Dyer, "On the local zeta function of a cubic threefold", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 21 (1967), 1-29.
- [6] H. Clemens, P. Griffiths, "The intermediate jacobian of the cubic threefold", *Annals of Math.* 95 (1972), 281-356.
- [7] F. Catanese, "On the moduli spaces of surfaces of general type", *J. Differential Geometry* 19 (1984) 483-515.
- [8] O. Debarre, "Tores et variétés abéliennes complexes", *Cours Spécialisés* 6, S.M.F. (1999).
- [9] D. Eisenbud, J. Harris, "The geometry of schemes", *G.T.M.* 197, Springer (2000).
- [10] P. Griffiths, J. Harris. "Principles of algebraic geometry", Wiley (1978).
- [11] R. Hartshorne, "Algebraic geometry", Springer *G.T.M.* 52 (1977).
- [12] R. Hartshorne, "Ample vector bundles", *Publi. Math. I.H.E.S.* (1966), 319-350.
- [13] J. Lipman, "Free derivation modules on algebraic varieties", *Amer. J. of Math.*, t.87, (1965), 874-898.
- [14] Y. Manin, "Cubic forms", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1974).
- [15] J. Milne, "Lectures on algebraic geometry", www.math.lsa.umich.edu/~jmilne/.
- [16] Y. Miyaoka. "The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants", *Math. Ann.* 268, (1984), 159-171,
- [17] D. Mumford, "The red book of varieties and schemes", *L.N.M.* 1358, Springer (1999).
- [18] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler. "Vector bundles on complex projective space", *Progress in Mathematics*, vol 3, Birkhäuser, (1980).
- [19] Z. Ran, "The structure of Gauss-like maps", *Comp. Math.* 52 (1984), 171-177.
- [20] F. Sakai, "Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps", *Math. Ann.* 254, (1980) 89-120.
- [21] Serrano, "Isotrivial fibred surfaces", *Annali di Math. Pura et Appli.*, vol 171 (1996).
- [22] G.C. Shephard, J.A. Todd, "Finite unitary reflexion groups", *Canad. J. Math.* 5 (1953), 364-383.
- [23] L. Szpiro (éditeur), "Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux", *Astérisque* 86, SMF (1986).
- [24] A.N. Tjurin, "On the Fano surface of a nonsingular cubic in \mathbb{P}^4 ", *Math. USSR Izv.* 4 (1970), 1207-1214.
- [25] A.N. Tjurin, "The geometry of the Fano surface of a nonsingular cubic $F \subset \mathbb{P}^4$ and Torelli theorems for Fano surfaces and cubics", *Math. USSR Izv.* 5, (1971), 517-546.
- [26] A.N. Tjurin, "On intersection of quadrics", *Rus. Math. Surveys* 30 :6 (1975), 51-105.
- [27] C. Voisin, "Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe", *Cours spécialisés* 10, S.M.F. (2002)

Résumé.

Cette thèse est une étude des surfaces de type général dont le fibré cotangent est engendré par ses sections globales et d'irrégularité q supérieure ou égale à 4.

L'application cotangente est l'objet et le moyen de cette étude. C'est un morphisme du projectivisé du fibré tangent dans l'espace projectif de dimension $q - 1$. Nous étudions l'image de ce morphisme et son degré.

Le fibré cotangent de la surface est ample si et seulement si il n'existe pas de fibres de l'application cotangente de dimension strictement positive.

Si le fibré cotangent n'est pas ample, alors il existe une courbe C contenue dans la surface et il existe une section de C dans le projectivisé du fibré tangent qui est contractée en un point par l'application cotangente. Une telle courbe C est qualifiée de courbe non-ample.

Nous donnons une classification des courbes non-amples suivant leur auto-intersection. Nous donnons ensuite une classification (partielle) des surfaces possédant une infinité de courbes non-amples.

Un exemple pour lequel l'application cotangente intervient naturellement est celui des surfaces de Fano. Nous étudions le diviseur de ramification de leur application cotangente ainsi que leurs courbes non-amples.

Cette étude nous mène à la surface de Fano de la cubique de Fermat qui possède 30 courbes non-amples et dont nous détaillons les propriétés.

Abstract.

We study here surfaces of general type where the cotangent sheaf is generated by its global sections and with an irregularity q at least equal to 4.

Our approach and the object of this study is the cotangent map that is a morphism of the projectivized cotangent sheaf to the projective space of dimension $q - 1$. We study the degree of this morphism and the degree of its image.

The cotangent sheaf is ample if and only if there do not exist fibres of the cotangent map of strictly positive dimension.

If the cotangent sheaf is not ample, then there exists a curve C in the surface and there exists a section of C in the projectivized cotangent sheaf that is mapped to a point by the cotangent map. We call such a curve a non-ample curve.

We classify non-ample curves according to their self-intersection and then proceed to a classification of surfaces possessing an infinite number of non-ample curves.

The Fano surfaces provide an example where the cotangent map normally applies. We study the ramification divisor of such surfaces and their non-ample curves.

The Fano surface of the Fermat's cubic possesses 30 non-ample curves and we describe their properties in detail.

Classification AMS.

14J29, 14J50, 14J70