SUR DES MODELES NON-ADDITIFS EN THEORIE DES CHOIX INTERTEMPORELS ET DE LA DECISION DANS L'INCERTAIN

Yann Rébillé

Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS I
Discipline : Mathématiques appliquées

présentée et soutenue publiquement

par

Yann RÉBILLÉ

le 19 décembre 2002

SUR DES MODELES NON-ADDITIFS EN THEORIE DES CHOIX INTERTEMPORELS ET DE LA DECISION DANS L'INCERTAIN

Jury

M. Alain Chateauneuf	Professeur	*Directeur*
Mme. Michèle Cohen	Professeur	*Examinateur*
M. Bernard Cornet	Professeur	*Président*
M. Jean-Pascal Gayant	Professeur	*Examinateur*
M. Jean-Yves Jaffray	Professeur	*Rapporteur*
M. Peter Wakker	Professeur	*Rapporteur*

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude envers M. Alain Chateauneuf pour avoir encadré mon travail depuis ces années de thèse avec beaucoup de compétence, d'enthousiasme et de disponibilité. L'enseignement, les nombreux conseils, le soutien et les encouragements qu'il m'a apportés m'ont permis de développer tous mes sujets de recherche.

Mes remerciements vont également à Mme Michèle Cohen pour son appui moral et les marques de sympathie qu'elle m'a témoignées ; M. Bernard Cornet qui m'a fait l'honneur d'être le président de mon jury et M. Pascal Gayant pour sa disponibilité à assister à ma soutenance.

Je veux aussi adresser particulièrement mes remerciements aux rapporteurs, M. Jean-Yves Jaffray, qui a accepté de juger ce travail avec attention et M. Peter Wakker dont les remarques et les questions m'ont donné de nouvelles pistes de recherche.

Ensuite, je remercie ma famille pour son soutien et parfois ses encouragements, et surtout mes parents qui ont cru en mes capacités depuis toutes ces années de thèse et qui ont favorisé ma réussite.

Pour finir, je salue tous mes collègues docteurs et doctorants avec lesquels j'ai passé d'agréables moments au CERMSEM, ainsi que mes amis.

MERCI A TOUS

Table des matières

Introduction

A.1 Introduction générale

Le modèle de Savage (1954) constitue la référence de la théorie de la décision dans l'incertain. Il traite d'une axiomatisation du critère de l'espérance d'utilité subjective, c'est-à-dire qu'un décideur qui satisfait les axiomes de Savage se comporte comme s'il choisissait entre différents actes après les avoir évalués selon leur utilité espérée. Un axiome central est celui de la "chose sûre". Il stipule que deux actes qui ont une partie commune, peuvent être modifiés de la même manière sur cette partie commune sans que cela ne change la direction de la préférence.
En suivant cette méthode axiomatique, une représentation additive peut être obtenue dans différents cadres (Anscombe-Aumann (1963), Wakker (1990)).
En dépit du caractère normatif et attractif des modèles d'espérance d'utilité subjective, des réfutations empiriques apparaissent tout de même très rapidement, et parmi elles, le paradoxe d'Ellsberg (1961). Celui-ci remet directement en question l'existence d'une probabilité subjective. Par conséquent, ce paradoxe exclut d'emblée les modèles additifs. Entre les réponses apportées au paradoxe d'Ellsberg figurent les modèles d'espérance d'utilité à la Choquet qui constituent une classe importante des modèles non-additifs. Désormais un décideur ne possède pas une probabilité subjective mais une capacité subjective, dont l'usage remonte aux travaux de Schmeidler (1982,1989). Ces fonctions d'ensembles ne sont plus nécessairement additives, mais conservent tout de même une propriété de monotonie qui se traduit naturellement dans une situation d'incertitude, comme la relation "plus probable que". Une théorie de l'intégration par rapport aux capacités, introduite par Choquet (1953), et retrouvée puis développée par Schmeidler (1986) permet ainsi de généraliser le critère d'espérance d'utilité ; Gilboa (1987), Schmeidler (1982,1989) proposent respectivement une extension non-additive du modèle de Savage et de celui de

Anscombe-Aumann. Cette généralisation restreint l'axiome de la "chose sûre" aux actes comonotones : ceux qui ont leurs variations dans le même sens. Dans ce cas, deux actes ayant une partie commune peuvent être modifiés dès que l'ordre des résultats n'est pas modifié.
L'axiomatique des modèles d'espérance d'utilité à la Choquet développée dans un cadre d'incertitude peut également s'adapter à un cadre temporel, où un planificateur doit allouer des richesses à différentes générations, ou encore si un agent doit répartir ses ressources au cours du temps. Ainsi l'évaluation d'un flux de revenus peut se réaliser de manière non-additive. Elle peut incorporer les variations entre différentes périodes successives (Gilboa (1989), De Waegenaere et Wakker (2001)), qui peuvent éventuellement entraîner des violations de la monotonie, d'où notre premier chapitre.

Le premier chapitre traite de la représentation intégrale des fonctionnelles comonotones additives et séquentiellement continues par en bas et/ou par en haut. Cette représentation s'appuie sur l'intégrale de Choquet (1953). Elle se base sur la continuité séquentielle, une condition usuelle en théorie de la mesure, et non pas sur la propriété de monotonie traitée par Schmeidler (1986). En conséquence les jeux ici considérés ne sont pas forcément monotones mais continus par en haut et/ou par en bas, propriétés équivalentes à la σ-additivité dans le cas des jeux additifs. Finalement, nous proposons des théorèmes de représentation des préférences qui ne sont pas nécessairement monotones mais séquentiellement continues par en haut ou par en bas.

Le deuxième chapitre propose d'axiomatiser certaines préférences dans un cadre temporel, méthode initiée par Gilboa (1989) et poursuivie par Shalev (1997) dans un cadre à la Anscombe-Aumann (1963). L'approche adoptée ici est similaire à celle de De Waegaenere et Wakker (2001) en considérant des préférences linéaires par rapport à la richesse. Notre approche a pour but de prendre en compte les complémentarités entre différentes périodes successives. Elle s'écarte du modèle standard additif où chaque période est indépendante des autres. Pour cela nous introduisons un axiome d'aversion aux variations, qui conserve l'additivité sur des flux de revenus ayant la propriété de séquentielle comonotonie. L'extension au cas infini dénombrable est réalisée à partir d'un axiome comportemental : la myopie. Finalement nous présentons une généralisation au cas non-additif du modèle d'espérance escomptée, axiomatisé par Koopmans (1972).

Dans le troisième chapitre, on établit un théorème de décomposition à la Yosida-Hewitt(1952) pour les jeux totalement monotones sur $\mathbb{N}$, où tout jeu s'écrit comme somme d'un jeu σ-continu et d'un jeu pur. Si un jeu est une mesure, nous retrouvons la décomposition classique en partie σ-additive et pure.
Pour obtenir cette décomposition, nous appliquons à l'ensemble des fonctions de croyance un théorème de Choquet relatif à la représentation intégrale d'ensembles convexes compacts. Nous en déduisons que tout jeu totalement monotone σ-continu est mis en correspondance de manière biunivoque avec une inverse de Möbius sur $\mathbb{N}$; et que toute intégrale de Choquet d'une fonction bornée sur $\mathbb{N}$ par rapport à un jeu totalement monotone σ-continu s'obtient comme somme d'une série absolument convergente.

Le dernier chapitre traite de la modélisation de la patience dans le cadre de relations de préférence sur des flux dénombrables de revenus.
Dans un premier temps, nous considérons des préférences patientes dans un cadre additif. Ces préférences admettent une représentation intégrale à l'aide de probabilités pures, ce qui coïncide en outre avec les limites de Banach (Banach 1987). Ces limites sont les extensions de la fonctionnelle limite aux suites bornées. Ensuite, nous renforçons la patience en invariance temporelle. Nous obtenons ainsi une représentation qui s'appuie sur les probabilités invariantes, celles-ci s'identifient aux limites de Banach-Mazur.
Enfin nous considérons la patience naïve, ce qui aboutit à un théorème d'impossibilité.
En conséquence, nous développons une extension des résultats obtenus précédemment dans un cadre non-additif. Ainsi nous introduisons un axiome d'additivité non-lisse qui nous permet de représenter les préférences avec une intégrale de Choquet à capacité convexe. Dans ce cas, la patience se traduit par des capacités convexes pures qui partagent les mêmes propriétés que les limites de Banach. Elles forment les extensions non-additives de la fonctionnelle limite aux suites bornées.
De même, l'invariance temporelle s'exprime naturellement en terme de capacités convexes invariantes. En fin de compte, la patience naïve admet comme unique représentation la fonctionnelle limite inférieure.

A.2 Résumé détaillé des résultats

A.2.1 Intégrales de Choquet non-monotones séquentiellement continues

A.2.1.1 Notation et Définitions

Soit S un ensemble non-vide et $\mathcal{S}$ une famille de sous-ensembles de S. Une fonction X définie sur S est dite *$\mathcal{S}$-mesurable* si pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\{X \geq t\}$ appartient à $\mathcal{S}$, où $\{X \geq t\}$ est l'image réciproque de $[t, +\infty[$ par X, cette définition de la mesurabilité est aussi utilisée dans Zhou (1998). X est *bornée*, si $\|X\|$ est fini, où $\|.\|$ est la norme sup.
$B_\infty(S, \mathcal{S})$ désigne l'ensemble des fonctions bornées $\mathcal{S}$-mesurables.
Une fonction d'ensembles v sur $\mathcal{S}$ à valeurs réelles tel que $v(\emptyset) = 0$ est un *jeu*. Un jeu est dit *borné* si $\mathrm{Sup}\{|v(A)|, A \in \mathcal{S}\}$ est fini, noté $\|v\|$.
Un jeu est *continu par en haut* si pour toutes suites décroissantes $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{S}$ tel que $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{S}$, noté $A_n \downarrow A$, $(v(A_n))_{n\geq 1}$ converge vers $v(A)$. Un jeu est *continu par en bas* si pour toutes suites croissantes $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{S}$ tel que $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{S}$, $(v(A_n))_{n\geq 1}$ converge vers $v(A)$. Pour les mesures finies, la σ-additivité, la continuité par en haut et la continuité par en bas sont équivalentes.

Soit v est un jeu défini sur $\mathcal{S}$, et X une fonction $\mathcal{S}$-mesurable, l'*intégrale de Choquet* de X par rapport à v, est notée $\int X dv$, définie par $\int X dv = \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X \geq t\}) d\lambda(t) + \int_{\mathbb{R}^-} (v(\{X \geq t\}) - v(S)) d\lambda(t)$ où λ est la mesure de Lebesgue $\mathbb{R}$, si cette quantité existe. Cette formule peut être interprétée comme une espérance par rapport à une mesure généralisée. Cette intégrale de Lebesgue est bien définie dès que v est continu par en haut et borné, ce que l'on montre dans la prochaine section. Pour $A \in \mathcal{S}$, A^* désigne la fonction caractéristique de A. Deux fonctions X, Y définies sur S sont dites *comonotones* si pour tout $(s,t) \in S^2$, $(X(s) - X(t))(Y(s) - Y(t)) \geq 0$.

Soit I une fonctionnelle définie sur une classe $\mathcal{F}$ de fonctions sur S, on dira que I est *bornée* si $\|I\|_{\mathcal{F}}$=$\mathrm{Sup}\{|I(X)|; X \in \mathcal{F}, \emptyset^* \leq X \leq S^*\}$ est fini, quand $\mathcal{F} = B_\infty(S, \mathcal{S})$ on écrira $\|I\|$. I est *positivement homogène de degré un* si pour tout $X \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda.X \in \mathcal{F}$ alors $I(\lambda.X) = \lambda I(X)$. I est *comonotone additive* si pour tout X, Y comonotones dans $\mathcal{F}$ tel que $X + Y \in \mathcal{F}$ alors $I(X + Y) = I(X) + I(Y)$. Finalement, I est *séquentiellement continue par en haut* (resp. *séquentiellement continue par en bas*) si pour toute suite décroissante (resp. croissante) $(X_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{F}$ qui converge simplement vers X, $X_n \downarrow_{CS} X$

(resp. $X_n \uparrow_{CS} X$), où X appartient à $\mathcal{F}$, alors $(I(X_n))_{n\geq 1}$ converge vers $I(X)$.

A.2.1.2 Résultats préliminaires

On vérifie que l'intégrale de Choquet est bien définie pour tout X dans $B_\infty(S, \mathcal{S})$ lorsque v est borné et continu par en haut. On a,

Lemme A.2.1 *Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$, où $-\infty < a < b < +\infty$. Si f est continue à gauche, alors f est borélienne.*

Lemme A.2.2 *Soit X une fonction sur S et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions sur S, tel que $X_n \downarrow_{CS} X$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{X_n \geq t\} \downarrow \{X \geq t\}$.*

Lemme A.2.3 *Soit v un jeu continu par en haut défini sur $\mathcal{S}$, et $X \in B_\infty(S, \mathcal{S})$. Posons $v_X(t) = v(\{X \geq t\})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors v_X est continue à gauche.*

Proposition A.2.1 *Soit v un jeu borné continu par en haut défini sur $\mathcal{S}$, alors pour tout $X \in B_\infty(S, \mathcal{S})$, $\int X dv$ est bien définie.*

Proposition A.2.2 *Soit I une fonctionnelle sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Supposons que I soit (a) comonotone additive et (b) séquentiellement continue par en haut, alors I est positivement homogène de degré un.*

Une preuve semblable à la proposition suivante peut être trouvée dans Denneberg (1994). Comme l'a observé Wakker (1993), la somme de deux fonctions mesurables n'est pas nécessairement mesurable si $\mathcal{S}$ n'est pas une σ-algèbre.

Proposition A.2.3

(i) Pour tout $X \in B_\infty(S, \mathcal{S})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda.X \in B_\infty(S, \mathcal{S})$.

(ii) Pour tout $X, Y \in B_\infty(S, \mathcal{S})$ comonotones, $X + Y \in B_\infty(S, \mathcal{S})$.

Proposition A.2.4 *Soit I une fonctionnelle comonotone additive et séquentiellement continue par en haut sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Posons $\mathcal{S}^* = \{A^*; A \in \mathcal{S}\}$. Si $\|I\|_{\mathcal{S}^*} < +\infty$ alors $\|I\| < +\infty$. De plus $\|I\|_{\mathcal{S}^*} = \|I\|$.*

A.2.1.3 Résultats principaux

Théorème A.2.1 *Soit I une fonctionnelle bornée sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Supposons que I soit (a) comonotone additive et (b) séquentiellement continue par en haut, alors il existe un unique jeu continu par en haut (de même norme) défini sur $\mathcal{S}$ tel que pour tout X dans $B_\infty(S, \mathcal{S})$ on a,*

$$I(X) = \int X dv \tag{A.1}$$

Réciproquement, si v est un jeu borné, continu par en haut défini sur $\mathcal{S}$, alors l'intégrale de Choquet est une fonctionnelle comonotone additive, séquentiellement continue par en haut (de même norme) sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$.

Un résultat dual existe pour les fonctionnelles comonotones additives et séquentiellement continues par en bas. Pour cela nous modifiions la définition de la $\mathcal{S}$-mesurabilité. Une fonction sera dite $\mathcal{S}$-mesurable si pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\{X > t\}$ appartient à $\mathcal{S}$, où $\{X > t\}$ est l'image réciproque de $]t, +\infty[$ par X. En accord avec cette définition les inégalités larges de l'intégrande de l'intégrale de Choquet seront désormais strictes. Avec les changements adéquats, les résultats préliminaires restent valides.

Théorème A.2.2 *Soit I une fonctionnelle bornée sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Supposons que I soit (a) comonotone additive et (b) séquentiellement continue par en bas, alors il existe un unique jeu continu par en bas (de même norme) défini sur $\mathcal{S}$ tel que pour tout X dans $B_\infty(S, \mathcal{S})$ on a,*

$$I(X) = \int X dv = \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X > t\}) d\lambda(t) + \int_{\mathbb{R}^-} (v(\{X > t\}) - v(S)) d\lambda(t) \tag{A.2}$$

Réciproquement, si v est un jeu borné, continu par en bas défini sur $\mathcal{S}$, alors l'intégrale de Choquet est une fonctionnelle comonotone additive, séquentiellement continue par en bas (de même norme) sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$.

Maintenant si nous considèrons que X est $\mathcal{S}$-mesurable si pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\{X > t\}$ et $\{X \geq t\}$ appartiennent à $\mathcal{S}$ on obtient comme corollaire une caractérisation des fonctionnelles comonotones additives et séquentiellement continues par en haut et par en bas. L'intégrande de l'intégrale de Choquet dans ce cas contient indifféremment des inégalités larges ou strictes. De plus comme l'intégrande admet des limites à droite et à gauche en tout point, l'intégrale de Lebesgue peut être remplacée par une intégrale de Riemann.

Corollaire A.2.1 *Soit I une fonctionnelle bornée sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Supposons que I soit (a) additive comonotone, (b) séquentiellement continue par en bas et (b') séquentiellement continue par en haut, alors il existe un unique jeu continu par en bas et par en haut (de même norme) défini sur $\mathcal{S}$ tel que pour tout X dans $B_\infty(S, \mathcal{S})$ on a,*

$$I(X) = \int X dv = \int_0^{+\infty} v(\{X \geq t\})dt + \int_{-\infty}^0 (v(\{X \geq t\}) - v(S))dt \tag{A.3}$$

Réciproquement, si v est un jeu borné, continu par en bas et par en haut défini sur $\mathcal{S}$, alors l'intégrale de Choquet est une fonctionnelle comonotone additive, séquentiellement continue par en bas et par en haut (de même norme) sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$.

A.2.1.4 Théorème de représentation des préférences

On se place dans un cadre où l'utilité de la richesse est supposée être linéaire et on se propose d'établir un théorème de représentation des préférences.

Une relation binaire $\succeq$ sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$ est dite, *totale* si pour tout $(X, Y) \in B_\infty(S, \mathcal{S})^2$ on a $X \succeq Y$ ou $Y \succeq X$; *transitive* si pour tout $(X, Y, Z) \in B_\infty(S, \mathcal{S})^3$ tel que $X \succeq Y$ et $Y \succeq Z$ alors $X \succeq Z$. Un *préordre total* $\succeq$ sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$ est une relation binaire sur $B_\infty(S, \mathcal{S})$ qui est totale et transitive. On notera $X \succ Y$ pour $X \succeq Y$ et non$(Y \succeq X)$; $X \sim Y$ pour $X \succeq Y$ et $Y \succeq X$. Pour tout X dans $B_\infty(S, \mathcal{S})$, $I(X) \in \mathbb{R}$ est l'*équivalent certain* de X si $I(X)$ est l'unique réel tel que $I(X).S^* \sim X$. Nous énonçons des axiomes qu'une relation binaire est susceptible de vérifier.

A.1 $\succeq$ *est un préordre total.*

A.2 Continuité par rapport à la convergence simple par en haut :

A.2.1 $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S, \mathcal{S}), X_n \succeq Y, X_n \downarrow_{CS} X) \Rightarrow (X \succeq Y)$,

A.2.2 $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S, \mathcal{S}), X_n \preceq Y, X_n \downarrow_{CS} X) \Rightarrow (X \preceq Y)$.

A.3 $S^* \succ \emptyset^*$.

A.4 Comonotone additivité :

$\forall X, Y, Z \in B_\infty(S, \mathcal{S})$ *deux à deux comonotones,* $(X \succeq Y) \Rightarrow (X + Z \succeq Y + Z)$.

A.5 Bornétude : $\exists\, m, M \in \mathbb{R} /\ \forall A \in \mathcal{S}, m.S^* \preceq A^* \preceq M.S^*$.

En particulier, dans *A.4* si $Z = \delta.S^*$ pour $\delta \in \mathbb{R}$ alors on obtient une équivalence à la place d'une implication. L'axiome suivant affirme que $\succeq$ est compatible avec l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

A.3 Monotonie pour les constantes :* $\forall \alpha > \beta$, $\alpha.S^* \succ \beta.S^*$.

A.3 s'obtient à partir de *A.3**. On a une réciproque dans le lemme suivant.

Lemme A.2.4 *Si* $\succeq$ *vérifie* A.1, A.2.1, A.3, A.4*, alors* $\succeq$ *vérifie* A.3**.*

Proposition A.2.5 *Si* $\succeq$ *vérifie* A.1-A.4*, alors tout* X *dans* $B_\infty(S, \mathcal{S})$ *admet un équivalent certain.*

En particulier, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $I(\gamma.S^*) = \gamma$.

Théorème A.2.3 *Une relation binaire* $\succeq$ *sur* $B_\infty(S, \mathcal{S})$ *vérifie* A.1-A.5 *si et seulement si il existe un unique jeu* v *borné, continu par en haut avec* $v(S) = 1$ *tel que tout* $X \in B_\infty(S, \mathcal{S})$ *a pour équivalent certain,* $\int X dv$*.*

De la même manière on peut considérer la version duale de *A.2*,

A'.2 Continuité par rapport à la convergence simple par en bas :

A'.2.1 $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S, \mathcal{S}), X_n \preceq Y, X_n \uparrow_{CS} X) \Rightarrow (X \preceq Y)$,

A'.2.2 $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S, \mathcal{S}), X_n \succeq Y, X_n \uparrow_{CS} X) \Rightarrow (X \succeq Y)$.

Nous obtenons une version duale du Théorème A.2.3, où l'intégrale de Choquet que nous considérons est celle du Théorème A.2.2

Théorème A.2.4 *Une relation binaire* $\succeq$ *sur* $B_\infty(S, \mathcal{S})$ *vérifie* A.1,A'.2,A.3-A.5 *si et seulement si il existe un jeu* v *borné, continu par en bas avec* $v(S) = 1$ *tel que tout* $X \in B_\infty(S, \mathcal{S})$ *a pour équivalent certain,* $\int X dv$*.*

A.2.1.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est d'exposer une approche alternative aux représentations intégrales basées sur une condition de monotonie. Il apparait que la continuité séquentielle, une condition naturelle en théorie de la mesure, peut être une telle alternative. En outre les jeux que nous considérons peuvent être à valeurs négatives, et sont compatibles avec des violations de la monotonie.

A.2.2 Caractérisation de certains modèles multi-périodiques non-additifs

A.2.2.1 Le modèle

Soit $S = \mathbb{N}$ ou $[[0, n]]$ pour $n \in \mathbb{N}$, où $[[a, b]] = [a, b] \cap \mathbb{N}$. S représente un ensemble de dates, et 0 le présent, l'horizon est soit fini si $S = [[0, n]]$, ou infini si $S = \mathbb{N}$. $B_\infty(S)$ désigne l'ensemble des suites bornées définies sur S, et représente les suites de conséquences qu'un décideur doit classer. On supposera que les préférences du décideur sur $B_\infty(S)$ sont données par une relation binaire $\succeq$ sur $B_\infty(S)$. $\succeq$ est dite, *totale* si pour tout $x, y \in B_\infty(S)$ on a $x \succeq y$ ou $y \succeq x$; *transitive* si pour tout $x, y, z \in B_\infty(S)$ tel que $x \succeq y$ et $y \succeq z$ alors $x \succeq z$. Une relation binaire, $\succeq$, est appelée *préordre total* si elle est totale et transitive. On notera $x \succ y$ pour $x \succeq y$ et non$(y \succeq x)$; $x \sim y$ pour $x \succeq y$ et $y \succeq x$. Pour tout $x \in B_\infty(S)$, le nombre réel $I(x)$ sera appelé *équivalent constant* de x, si $I(x)$ est l'unique réel tel que $I(x).S^* \sim x$, où S^* est la fonction caractéristique de S.

Introduisons certains axiomes afin d'obtenir l'existence d'un équivalent constant $I(x)$ pour tout $x \in B_\infty(S)$ qui *représente* $\succeq$ i.e. $\forall\ x, y \in B_\infty(S),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)$.

A.1. $\succeq$ *est un préordre total .*

A.2.(*Monotonie*) : $S^* \succ \emptyset^*, \forall\ x, y \in B_\infty(S), (x \geq y) \Rightarrow (x \succeq y)$.

A.3.(*Constante additivité*) : $\forall\ x, y \in B_\infty(S), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$(x \succeq y) \Rightarrow (x + \alpha.S^* \succeq y + \alpha.S^*)$

A.4.(*Séparabilité*) : $\forall\ x \in B_\infty(S), x\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*,\ \exists\ \alpha(\substack{> \\ <})0\ /\ x\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \alpha.S^*\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*$.

A.1 est un axiome standard, A.2 écarte le cas de la relation triviale. A.3 entraîne la linéarité par rapport aux revenus. A.4 est un axiome plus faible que la continuité uniforme. En effet, A.4 peut être reformulé de façon équivalente,

A.4'. $\forall\ x \in B_\infty(S), x\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n \geq 0}\ (\substack{\downarrow \\ \uparrow})\ 0,\ \exists N\ /\ \alpha_N.S^*\ (\substack{\prec \\ \succ})\ x$,

ou encore,

A.4" $\forall\ x \in B_\infty(S), x\ (\substack{\succeq \\ \preceq})\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n \geq 0}\ (\substack{\downarrow \\ \uparrow})\ 0, [(\forall n \in \mathbb{N}, x(\substack{\preceq \\ \succeq})\alpha_n.S^*) \Rightarrow x \sim \emptyset^*]$

(où $\downarrow$ marque la décroissance).

Remarquons que si $\succeq$ vérifie A.1-A.3 alors $\succeq$ est compatible avec l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

Lemme A.2.5 *Soit* $\succeq$ *qui vérifie A.1-A.3 alors,* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha > \beta) \iff (\alpha.S^* \succ \beta.S^*)$.

Nous obtenons une représentation des préférences $\succeq$,

Proposition A.2.6 *Une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.4 si et seulement si il existe une unique $I : B_\infty(S) \to \mathbb{R}$ où $I(S^*) = 1$ tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(S),\ x \sim I(x).S^* \,;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(S),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y) \,;$$
$$(iii)\ \forall x, y \in B_\infty(S),\ x \geq y \Rightarrow I(x) \geq I(y) \,;$$
$$(iv)\ \forall x, y \in B_\infty(S), \forall \alpha \in \mathbb{R},\ I(x + \alpha.S^*) = I(x) + \alpha.$$

De plus I est uniformément continue.

A.2.2.2 Modèle multi-périodique

Les modèles usuels de représentation de préférences se basent sur l'additivité, là où aucune complémentarité ne peut être prise en considération. En terme de préférence cela ce traduit par l'axiome suivant,

A.5*. (Additivité) $\forall x, y, z \in B_\infty(S),\ (x \sim y) \Rightarrow (x + z \sim y + z)$.

A.5* stipule que si un décideur est indifférent entre x et y alors ajouter z à x et à y ne modifiera pas l'indifférence. A.1-A.4, A.5* donnent comme équivalent constant une espérance par rapport à une probabilité (non nécessairement σ-additive). Toutefois cet axiome ne prend pas en considération les complémentarités entre deux périodes successives.

A la suite de Shalev (1997) et De Waegenaere et Wakker (2001) on dira que x, y sont *séquentiellement comonotones* si $\forall\ n, n+1 \in S,\ (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \geq 0$. Nous introduisons dans notre cadre une version simple d'un axiome apparenté dans Gilboa (1989),

A.5. (Aversion aux variations) $\forall x, y, z \in B_\infty(S),\ \{y, z\}$ *séquentiellement comonotone,* $(x \sim y) \Rightarrow (x + z \succeq y + z)$.

On remarque que l'additivité est conservée pour les profils qui ne modifient pas les complémentarités, puisque si $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ sont séquentiellement comonotones alors $(x \sim y) \Longrightarrow (x + z \sim y + z)$. En revanche, lisser deux revenus successifs peut être considéré comme une amélioration par le décideur, autrement dit si $\{y, z\}$ est séquentiellement comonotone mais pas $\{x, z\}$ alors $x + z \succ y + z$ peut être obtenu.

A.2.2.3 Modèle multi-périodique en horizon fini

On considère le cas fini où $S = [[0, n]]$, ainsi $B_\infty(S)$ peut être identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$. Sous les axiomes A1.-A.5 on obtient une unique fonction qui évalue chaque profil selon les préférences du décideur.

Théorème A.2.5 *Soit $\succeq$ une relation de préférence sur $\mathbb{R}^{n+1}$, $\succeq$ vérifie A.1-A.5 si et seulement si il existe $m_0, \ldots, m_n, m_{0,1}, \ldots, m_{n-1,n} \geq 0$ déterminés de manière unique avec $\sum_{i=0}^{n} m_i + \sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1} = 1$ tel que,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \sim I(x).[[0,n]]^* \,;$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\,;$$

où,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1},\ I(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i.x_i + \sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1}.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}. \tag{A.4}$$

D'après l'égalité (A.4) le décideur exhibe un comportement markhovien, l'impact de chaque composante dans l'évaluation dépend de la composante précédente. L'évaluation de chaque flux de revenus est composée d'une partie additive, i.e. $\sum_{i=0}^{n} m_i.x_i$, et d'une partie markhovienne, i.e.$\sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1}.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}$ où chaque composante x_{i+1} est en complémentarité avec la composante x_i.
(A.4) peut être réécrite $\sum_{i=0}^{n-1}(m_i.x_i + m_{i,i+1}.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}) + m_n x_n$. En posant $p_i = m_i + m_{i,i+1}, \forall i \in \{0, n-1\}$ et $p_n = m_n$, on obtient,

$$I(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(\alpha_i.x_i + (1 - \alpha_i).\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}) + p_n x_n,$$

où $\alpha_i = \frac{m_i}{p_i}$, si $p_i > 0$ et α_i un réel dans $[0, 1]$ sinon. Grâce à cette formule, l'évaluation d'un profil par un décideur peut être interprétée comme celle d'un décideur additif qui n'apprécie pas que son revenu futur soit inférieur à son revenu présent, et remplacerait alors son revenu présent par une combinaison convexe des deux revenus successifs.

Remarquons que la formule (A.4) est une autre expression de formules antérieures obtenues par De Waegenaere et Wakker (2001) dans notre cadre, et de Gilboa (1989) et Shalev (1997) dans un modèle à la "Anscombe-Aumann".
Formulation de De Waegenaere et Wakker :

$$I(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \tau_i (x_{i-1} - x_i)^+$$

Formulation de Gilboa :

$$I(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i |x_i - x_{i-1}|$$

Formulation de Shalev :

$$I(x) = a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - x_{i-1})^+ + \sum_{i=1}^{n} b_i (x_i - x_{i-1})^-$$

où $z \in \mathbb{R}$, $z^+ = \mathrm{Max}(0, z)$, $z^- = \mathrm{Min}(0, z)$. Ces formules peuvent être retrouvées à partir de (A.4) en posant :

pour $i = 0, \ldots, n$	et	pour $j = 1, \ldots, n$
$\lambda_i = m_i + m_{i,i+1}$		$\tau_j = m_{j-1,j}$
$p_i = m_i + \frac{m_{i-1,i}}{2} + \frac{m_{i,i+1}}{2}$		$\delta_j = -\frac{m_{j-1,j}}{2}$
$a_i = \sum_{k=i}^{n} (m_k + m_{k,k+1})$		$b_j = \sum_{k=j}^{n} (m_k + m_{k-1,k})$

où $m_{-1,0} = m_{n,n+1} = 0$.

Maintenant nous examinons l'impact de l'*impatience* (Mas-Colell-Whinston-Green, Chapter 20) i.e. l'avancement des revenus est toujours bénéfique ; $\forall x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $(x_0, \ldots, x_n) \succeq (0, x_0, \ldots, x_{n-1})$. On obtient,

Proposition A.2.7 *Sous A.1-A.5, une relation de préférence $\succeq$ exhibe de l'impatience si et seulement si* $\forall i \in [[0, n-1]]$, $\{i\}^* \succeq \{i+1\}^*$ *et* $\forall i \in [[0, n-2]]$, $\{i, i+1\}^* \succeq \{i+1, i+2\}^*$.

Corollaire A.2.2 *Sous A.1-A.5, une relation de préférence $\succeq$ exhibe de l'impatience si* $m_i \geq m_{i+1}, \forall i \in [[0, n-1]]$ *et* $m_{i,i+1} \geq m_{i+1,i+2}, \forall i \in [[0, n-2]]$.

A.2.2.4 Modèle multi-périodique en horizon infini

Désormais on considère le cas où $S = \mathbb{N}$. Afin d'obtenir une représentation nette de l'expression (A.4) on impose un axiome de continuité. Cet axiome peut en fait être exprimé en terme de myopie, comme dans Brown-Lewis (1981) et Prescott-Lucas(1972).

A.6. (Myopie) $\forall x \in B_\infty^+(\mathbb{N}), \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ x^{\epsilon,n} \succ x$ *où* $x_i^{\epsilon,n} = x_i + \epsilon$, *si* $i \in [[0, n]]$ *et* 0 *si* $i > n$.

Un décideur qui manifeste de la myopie est prêt à abandonner ses revenus futurs pour une amélioration constante à court terme pourvu que le futur "commence" suffisamment tard. Notre axiome de myopie joue le rôle implicite de l'axiome de continuité (temporelle) A.7 (resp. TC) qu'on peut trouver dans Gilboa (1989) (resp. Shalev (1997)). Sous A.1-A.4 le champ d'application de A.6 peut être étendu.

Proposition A.2.8 *Sous A.1-A.4, si A.6 est vérifié alors* $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x^{\epsilon,n} \succ x$

En d'autres termes, soit $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ et $\epsilon > 0$. Sous A.1-A.4, on a $x + \epsilon.\mathbb{N}^* \succ x$. A.6 affirme que la troncature de $x + \epsilon.\mathbb{N}^*$ d'ordre n, $x^{\epsilon,n}$ est encore préférée à x si n est assez grand, c'est précisément ce que Prescott-Lucas(1972) impose sur les préférences.

Nous pouvons étendre l'égalité (A.4) au cas infini où les sommes sont des séries absolument convergentes.

Théorème A.2.6 *Soit* $\succeq$ *une relation de préférence sur* $B_\infty(\mathbb{N})$, $\succeq$ *vérifie A.1-A.6 si et seulement si il existe* $(m_n)_{n\geq 0}, (m_{n,n+1})_{n\geq 0}$ *déterminées de façon unique avec* $m_n, m_{n,n+1} \geq 0$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} m_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1} = 1$ *tel que,*

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\ ;$$

où,

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1}.\text{Min}\{x_n, x_{n+1}\}. \tag{A.5}$$

(A.5) peut être réécrite et admet une interprétation similaire au cas de l'horizon infini. Posons $p_n = m_n + m_{n,n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, et $\alpha_n = \frac{m_n}{p_n}$, si $p_n > 0$ et α_n un réel dans $[0,1]$ sinon, on a :

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n[\alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\text{Min}\{x_n, x_{n+1}\}].$$

Remarquons à nouveau que d'après l'égalité (A.5), les versions infinies de Gilboa et Shalev peuvent être récupérées tout comme pour l'égalité (A.4).
Un tel décideur est *impatient* si, $\forall x \in B_\infty^+(\mathbb{N})$, $(x_0, \ldots, x_n, \ldots) \succeq (0, x_0, \ldots, x_n, \ldots)$.

Proposition A.2.9 *Sous A.1-A.6, une relation de préférence* $\succeq$ *exhibe de l'impatience si et seulement si* $\forall n \in \mathbb{N},\ \{n\}^* \succeq \{n+1\}^*$ *et* $\{n, n+1\}^* \succeq \{n+1, n+2\}^*$.

Corollaire A.2.3 *Sous A.1-A.6, une relation de préférence* $\succeq$ *exhibe de l'impatience si* $(m_n)_n$ *et* $(m_{n,n+1})_n$ *sont décroissantes.*

A.2.2.5 Horizon tronqué

D'après Olson-Bailey (1981), certains individus ne se préoccupent pas du futur. Par exemple il peut leur paraître difficile d'envisager leur vie au delà d'une certaine date. Cette attitude peut être exprimée dans une version renforçée de A-6,

A.6. (Myopie forte)* $\exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ x \in B^+_\infty(\mathbb{N}), \forall\ \epsilon > 0,\ x^{\epsilon,N} \succ x$

Un décideur avec un tel comportement possèderait un horizon subjectivement fini,

Théorème A.2.7 *Soit $\succeq$ une relation de préférence sur $B_\infty(\mathbb{N})$, $\succeq$ vérifie A.1-A.6* si et seulement si il existe $m_0, \ldots, m_N, m_{0,1}, \ldots, m_{N-1,N} \geq 0$ déterminés de façon unique avec $\sum_{n=0}^{N} m_n + \sum_{n=0}^{N-1} m_{n,n+1} = 1$ tel que,*

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\ ;$$

où,

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), I(x) = \sum_{n=0}^{N} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{N-1} m_{n,n+1}.\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}. \tag{A.6}$$

De plus, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (x_0, \ldots, x_N, 0, \ldots)$.

Sous A.1-A.6*, une relation de préférence $\succeq$ exhibe de l'impatience si et seulement si $\forall n \in [[0, N-1]],\ \{n\}^* \succeq \{n+1\}^*$ et $\forall n \in [[0, N-2]], \{n, n+1\}^* \succeq \{n+1, n+2\}^*$, où N est déterminé par A.6*.

Corollaire A.2.4 *Sous A.1-A.6*, une relation de préférence $\succeq$ exhibe de l'impatience si $m_n \geq m_{n+1}$, $\forall n \in [[0, N-1]]$ et $m_{n,n+1} \geq m_{n+1,n+2}, \forall i \in [[0, N-2]]$.*

A.2.2.6 Espérance escomptée généralisée

Dans un cadre multi-périodique une fonctionnelle additive usuelle est l'*espérance escomptée* i.e. il existe un *facteur d'escompte* $\delta \in (0, 1)$ tel que tout $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ a pour équivalent constant $(1-\delta)x_0 + (1-\delta)\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n x_n$. Cette fonctionnelle particulière a été axiomatisée par Koopmans(1972) et s'obtient via un axiome de *stationnarité* et un axiome de *sensibilité*,

(Stationnarité) $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, (x \succeq y) \iff ((\alpha, x) \succeq (\alpha, y))$

où (α, x) est la version décalée de x commençant par α et,

(Sensibilité) $\exists\ x \in B_\infty(\mathbb{N}), \exists\ y_0 \in \mathbb{R},\ /\ x \not\sim (y_0, x_1, x_2, \ldots)$

Cet axiome requiert que le présent doit être pris en compte. Sous A.3 il peut aussi être énoncé de façon équivalente, $\exists\ x \in B_\infty(\mathbb{N})\ /\ x \not\sim (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. De plus si A.4 est vérifié, $x \succ (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, si $x_0 > 0$ ou $x \prec (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, si $x_0 < 0$. Ce qui suggère l'axiome de *sensibilité* suivant ;

A.7. (Sensibilité) $\mathbb{N}_0^* \prec \mathbb{N}^*$.

Où $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \ldots\}$.

Nous introduisons maintenant une version affaiblie de la stationnarité afin d'obtenir une espérance escomptée généralisée non-additive avec un facteur d'escompte δ éventuellement nul.

A.8. (Stationnarité conditionnelle) $\forall x, y \in B_\infty^+(\mathbb{N}), (x \sim y) \Rightarrow ((0, x) \sim (0, y))$.

Proposition A.2.10 *Supposons que $\succeq$ soit représentée par l'équation (A.5), alors (i), (ii), (iii) sont équivalents, (i) : $\exists\ x \in B_\infty(\mathbb{N})\ /\ x \not\sim (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, (ii) : $\mathbb{N}_0^* \prec \mathbb{N}^*$, (iii) : $m_0 + m_{0,1} > 0$.*

Théorème A.2.8 *Soit $\succeq$ une relation de préférence sur $B_\infty(\mathbb{N})$, $\succeq$ vérifie A.1-A.8 si et seulement si il existe $\alpha \in [0, 1], \delta \in [0, 1[$ déterminés de façon unique tel que,*

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^* ;$$
$$\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y) ;$$

où, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N})$,

$$I(x) = (1-\delta)[\alpha(x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n x_n) + (1-\alpha)(\mathrm{Min}\{x_0, x_1\} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\})]. \quad (A.7)$$

De plus $\forall x \in B_\infty^+(\mathbb{N}), (0, x) \sim \delta.x$.

En réécrivant (A.7) on a,

$$I(x) = (1-\delta)[\alpha x_0 + (1-\alpha)\mathrm{Min}\{x_0, x_1\} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n(\alpha x_n + (1-\alpha)\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\})].$$

Corollaire A.2.5 *Dans le Théorème A.2.8, $\delta = 0 \iff \mathbb{N}_0^* \sim \emptyset^*$.*

Corollaire A.2.6 *Dans le Théorème A.2.8, $\alpha = 1 \iff \succeq$ satisfies A.5*.*

Corollaire A.2.7 *Si $\succeq$ vérifie A.1-A.8 alors $\succeq$ vérifie l'impatience.*

Il existe une intime relation entre l'espérance escomptée généralisée (E.E.G.) et l'espérance escomptée (E.E.) lorsqu'elle partage le même facteur d'escompte. On désigne par Δ la probabilité ayant pour facteur d'escompte δ (i.e. $\Delta(\{0\}) = 1-\delta, \Delta(\{n\}) = (1-\delta)\delta^n, \forall n \geq 1$), et E^Δ l'espérance par rapport à Δ. On définit $I^{\alpha,\delta}$ selon l'équation (A.7), et une *espérance* E comme une fonctionnelle linéaire positive normalisée(i.e.$E(\mathbb{N}^*) = 1$).

Proposition A.2.11 *Soit $\delta \in [0,1)$ et $\alpha \in [0,1]$ on a,*
(i) Soit $\gamma \in [0,1)$, $I^{\alpha,\delta} \leq E^\Gamma \iff \gamma = \delta$
(ii) Si $\alpha < 1$ et $\delta > 0$, alors $\forall\ x \in B_\infty(\mathbb{N})$,
$I^{\alpha,\delta}(x) = E^\Delta(x) \iff (x_n)_n$ est croissante.
(iii) Soit E une espérance, alors $(E(x) = I^{\alpha,\delta}(x), \forall (x_n)_n$ croissante$) \iff E = E^\Delta$.

$(i), (ii)$ affirment que l'E.E. E^Δ domine toujours la E.E.G. $I^{\alpha,\delta}$, et qu'elles coïncident seulement sur les suites croissantes lorsque $\alpha < 1$ et $\delta > 0$. Ainsi si un profil n'est pas croissant la E.E.G. donnera une évaluation inférieure à celle de la E.E. ce qui est du à la propriété d'aversion aux variations de la E.E.G.. (i) affirme aussi qu'il existe une seule et unique E.E. qui domine une G.D.E. ; c'est précisément la E.E. ayant le même facteur d'escompte. (iii) garantit que la seule espérance qui prolonge la E.E.G. des suites croissantes à $B_\infty(\mathbb{N})$ est précisément la E.E., cette propriété est utile si on considère un profil croissant comme optimal.

A.2.2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes attachés à montrer que des axiomes simples peuvent modéliser des violations de l'additivité lorsqu'on évalue des flux de revenus. A partir des travaux de Gilboa (1989), Shalev (1997), De Waegenaere et Wakker (2001), nous avons introduit dans notre cadre une version simple de l'aversion aux variations, ce qui nous a permis avec un axiome de myopie, d'obtenir dans un cadre infini, une formulation alternative aisément interprétable du modèle antérieur introduit par Gilboa (1989) dans un cadre à la Anscombe-Aumann, et revisité par Shalev (1997). Nous avons par ailleurs montré que le modèle usuel d'espérance escomptée initialisé par Koopmans (1972), peut être généralisé au cas non-additif. Dans un prochain travail nous envisageons de modéliser des comportements d'aversion aux variations plus généraux à l'aide de fonctions de croyances plus générales que celles considérées ici.

A.2.3 Décomposition à la Yosida-Hewitt des jeux totalement monotones

A.2.3.1 Définitions, notations et résultats préliminaires

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Une fonction d'ensembles à valeurs réelles v sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est appelée *jeu* si $v(\emptyset) = 0$. Un jeu est dit *monotone* si $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \supset B \Rightarrow v(A) \geq v(B)$; ainsi v est *positif* i.e. $v \geq 0$.
Un jeu positif v est une *mesure (finiment additive)* si $\forall A, B \subset \mathbb{N}, A \cap B = \emptyset,\ v(A \cup B) = v(A) + v(B)$. Si de plus $v(\mathbb{N}) = 1$, v est une *probabilité*. Une mesure est dite σ-*additive* si $\forall\ \{A_n\}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, avec $A_n \cap A_m = \emptyset$, pour $m \neq n$, $\ v(\cup_n A_n) = \sum_n v(A_n)$.
Soit $K \geq 2$ un entier, un jeu v est dit *monotone d'ordre* K si $\forall A_1, \ldots, A_K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $v(\cup_{k=1}^K A_k) \geq \sum_{\{I : \emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,K\}\}} (-1)^{|I|+1} v(\cap_{k \in I} A_k)$, où $|I|$ désigne le cardinal de I.
Si un jeu v est monotone et monotone d'ordre K pour tout $K \geq 2$, v est dit *totalement monotone*. Si de plus $v(\mathbb{N}) = 1$, v est une *fonction de croyance*. En particulier une mesure est un jeu totalement monotone.
Un jeu v est dit σ-*continu* si pour toute suite croissante $(A_n)_n$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$, $\lim_\infty v(A_n) = v(\cup_n A_n)$ et si pour toute suite décroissante $(B_n)_n$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$, $\lim_\infty v(B_n) = v(\cap_n B_n)$. Si v est une mesure, alors la σ-continuité est équivalente à la σ-additivité.
D'après Rosenmüller (1972), on sait que si v est monotone d'ordre 2, alors v est σ-continu dès que v est *continu en* $\mathbb{N}$ i.e. si pour toute suite croissante $(A_n)_n$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ tel que $\cup_n A_n = \mathbb{N}$, $\lim_\infty v(A_n) = v(\mathbb{N})$.
Une mesure p est dite *pure* si $\forall \mu$ mesure σ-additive, $0 \leq \mu \leq p \Rightarrow \mu = 0$.
Rappelons le théorème de décomposition des mesures de Yosida-Hewitt (1952).

Théorème :(Yosida-Hewitt) *Soit v une mesure. Alors il existe un unique couple de mesures (v_1, v_2) où v_1 est σ-additive et v_2 est pure tel que $v = v_1 + v_2$.*

Posons $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, les mesures pures sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ peuvent être caractérisées (e.g. Aliprantis-Border (1999)).

Théorème : *Soit p une mesure alors. Alors, p est pure si et seulement si $p_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$.*

Etant donné que nous souhaitons étendre la décomposition de Yosida-Hewitt aux jeux totalement monotones, une définition d'un jeu pur totalement monotone est nécessaire. Un jeu totalement monotone est dit *pur* si pour tout jeu ν, σ-continu totalement monotone, $0 \leq \nu \leq v \Rightarrow \nu = 0$. Comme pour les mesures nous obtenons,

Lemme A.2.6 *Soit v un jeu totalement monotone sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ alors v est pur si et seulement si $v_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$.*

Afin d'obtenir une démonstration de notre théorème de décomposition pour les jeux totalement monotones nous allons utiliser la version suivante du théorème de représentation intégrale de Choquet (voir Lusky-Fuchssteiner(1981) p.268). Rappelons la situation.
Soit K une partie non-vide convexe compacte d'un espace vectoriel localement convexe séparé. Désignons par $A(K)$ l'espace des fonctions affines continues sur K. Une fonction φ est dite *affine* si $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1]$,

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

Un point $x \in K$ est dit *extrême* dans K si $\forall\ y, z \in K, \forall \lambda \in]0,1[, x = \lambda y + (1-\lambda)z \Rightarrow x = y = z$. Notons $ex(K)$ l'ensemble des points extrêmaux de K.

Théorème : (Choquet) *Pour tout $x \in K$, il existe une probabilité σ-additive m_x sur $ex(K)$ (muni de la plus petite σ-algèbre rendant les éléments de $A(K)_{|ex(K)}$ mesurables) tel que pour tout $h \in A(K)$:*

$$h(x) = \int_{ex(K)} h_{|ex(K)} dm_x$$

Soit S un ensemble non-vide. Une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de S est un *filtre* (e.g. Aliprantis-Border (1999) p. 31) si,

(*i*) $\emptyset \notin \mathcal{F}, S \in \mathcal{F}$,

(*ii*) $\forall A, B \in \mathcal{P}(S), [A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}]$,

(*iii*) $\forall A, B \in \mathcal{P}(S), [B \supset A, A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F}]$.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $\mathbb{N}$, définissons le *jeu de filtre* $u_{\mathcal{F}}$,

$$u_{\mathcal{F}}(B) = \begin{cases} 1, & \text{si } B \in \mathcal{F} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier pour $A \neq \emptyset$, on considère le filtre $\{B : A \subset B \subset S\}$, et on lui associe le jeu de filtre u_A dit jeu d'*unanimité*.

D'après Choquet (1953) (pages 260-261), si K est l'ensemble des fonctions de croyances sur $\mathcal{P}(S)$, alors l'ensemble des points extrêmaux de K est constitué des jeux de filtres, c'est-à-dire les fonctions de croyance ne prenant que les valeurs zéro et un.
Nous montrons que :

Lemme A.2.7 *Soit $u_{\mathcal{F}}$ un jeu de filtre sur $\mathbb{N}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes,*
(*i*) $u_{\mathcal{F}}$ *est σ-continu,*
(*ii*) $u_{\mathcal{F}}$ *est un jeu d'unanimité u_A pour une partie non-vide finie A de $\mathbb{N}$.*

Lemme A.2.8 *Soit $u_{\mathcal{F}}$ un jeu de filtre sur $\mathbb{N}$, et A une partie non-vide finie de $\mathbb{N}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes,*
(*i*) $u_{\mathcal{F}}(A) = 1$,
(*ii*) $u_{\mathcal{F}} = u_B$, *où B est une partie non-vide de A.*

A.2.3.2 Décomposition des fonctions de croyance

Théorème A.2.9 *Soit v un jeu totalement monotone sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Alors il existe un unique couple de jeux totalement monotones (v_1, v_2) où v_1 est σ-continu et v_2 est pur tel que $v = v_1 + v_2$.*

On récupère le théorème de décomposition de Yosida-Hewitt (1952) pour les mesures sur $\mathbb{N}$,

Corollaire A.2.8 *Soit v une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ alors il existe un unique couple de mesures (v_1, v_2) où v_1 est σ-additive et v_2 est pure tel que $v = v_1 + v_2$.*

A.2.3.3 Résultats supplémentaires

Soit v un jeu monotone sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Définissons pour tout $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ l'*intégrale de Choquet* de x par rapport à v,

$$\int_{\mathbb{N}} x dv = \int_0^\infty v(\{x \geq t\})\, dt + \int_{-\infty}^0 (v(\{x \geq t\}) - v(\mathbb{N}))\, dt$$

où $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N} / \ x_n \geq t\}$.

Théorème A.2.10 *Soit v une fonction de croyance sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors il existe une σ-algèbre Σ_K sur $ex(K)$ et une probabilité σ-additive m_v sur $ex(K)$ tel que, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N})$,*

$$\int_{\mathbb{N}} x dv = \int_{ex(K)} (\int_{\mathbb{N}} x du_{\mathcal{F}})\, dm_v(u_{\mathcal{F}})$$

Dans le cas fini, pour tout jeu v sur $\mathcal{P}([[0,n]])$, il existe un unique jeu m appelé *inverse de Möbius* de v, défini de la manière suivante, $\forall A \subset [[0,n]]$,

$m(A) = \sum_{B\subset A}(-1)^{|A\setminus B|}v(B)$ et $v(A) = \sum_{B\subset A} m(B)$

Théorème : (Shafer(1981), Chateauneuf et Jaffray (1989)) *Soit v un jeu et m son inverse de Möbius, alors v est un jeu totalement monotone si et seulement si m est positif. De plus, pour tout jeu v,*

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^{[[0,n]]}, \int_{[[0,n]]} xdv = \sum_{A\subset[[0,n]]} m(A).\text{Min } x(A)$$

Avant d'établir dans le théorème suivant un analogue pour les fonctions de croyance sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on dira qu'une famille dénombrable $\{m(A), A \in \mathcal{G}\}$ de réels est *sommable* et de *somme* $\sum_{A\in\mathcal{G}} m(A) = a$ si pour toute série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (m(A))_{A\in\mathcal{G}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge vers a.

Théorème A.2.11 *Soit v une fonction de croyance σ-continue sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors il existe un unique jeu $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ avec,*

$\sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A) = 1$ *et* $m_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})^c} = 0$ *; tel que*

$$\forall\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ v(A) = \sum_{\{B:B\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N}),B\subset A\}} m(B) \qquad (*)$$

et de plus,

$\forall\ A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}),\ m(A) = \sum_{\{B:B\subset A\}}(-1)^{|A\setminus B|}v(B)$

Réciproquement, soit m un jeu positif, nul au vide et sur les parties infinies, avec $\sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A) = 1$. *Définissons un jeu v par $(*)$. Alors v est une fonction de croyance σ-continue sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. De plus,*

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ \int_{\mathbb{N}} x\ dv = \sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A).\ \text{Min } x(A)$$

A.2.3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi un théorème à la Yosida-Hewitt pour les jeux totalement monotones définis sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dans de prochaines recherches on cherchera à savoir si notre méthode, basée sur un théorème de représentation intégrale de Choquet, permet de dépasser le cadre dénombrable. On s'interessera aussi à la robustesse des résultats lorsque l'on substitue la monotonie d'ordre 2 à la monotonie d'ordre infini.

A.2.4 La patience dans certains modèles non-additifs

A.2.4.1 Le modèle

On se place en horizon infini, où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des dates et la date 0 le présent. Soit $B_\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites de revenus bornées qu'un décideur doit classer.
Nous adoptons le cadre suivant, une relation binaire $\succeq$ sur $B_\infty(\mathbb{N})$ est dite, *totale* si pour tout $x, y \in B_\infty(\mathbb{N})$ on a $x \succeq y$ ou $y \succeq x$; *transitive* si pour tout $x, y, z \in B_\infty(\mathbb{N})$ tel que $x \succeq y$ et $y \succeq z$ alors $x \succeq z$. Une relation binaire, $\succeq$, est appelée *préordre total* si elle est totale et transitive. On notera $x \succ y$ pour $x \succeq y$ et non$(y \succeq x)$; $x \sim y$ pour $x \succeq y$ et $y \succeq x$. Par la suite une relation binaire sera aussi appelée *relation de préférence* ou plus simplement une *préférence*. Pour tout $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, le nombre réel $I(x)$ sera appelé *équivalent constant* de x, si $I(x)$ est l'unique réel tel que $I(x).\mathbb{N}^* \sim x$, où $\mathbb{N}^*$ est la fonction caractéristique de $\mathbb{N}$. Introduisons certains axiomes afin d'obtenir l'existence d'un équivalent constant $I(x)$ pour tout $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ qui *représente* $\succeq$ i.e. $\forall\, x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)$.
A.1. $\succeq$ *est un préordre total .*
A.2.(Monotonie) : $\mathbb{N}^* \succ \emptyset^*, \forall\, x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), (x \geq y) \Rightarrow (x \succeq y)$.
A.3.(Constante additivité) : $\forall\, x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$(x \succeq y) \Rightarrow (x + \alpha.\mathbb{N}^* \succeq y + \alpha.\mathbb{N}^*)$
A.4.(Séparabilité) : $\forall\, x \in B_\infty(\mathbb{N}), x \ (\substack{\succ\\ \prec})\ \emptyset^*,\ \exists\ \alpha(\substack{>\\ <})0 \ /\ x\ (\substack{\succ\\ \prec})\ \alpha.\mathbb{N}^*\ (\substack{\succ\\ \prec})\ \emptyset^*$.

A.1 est un axiome standard, A.2 écarte le cas de la relation triviale. A.3 entraîne la linéarité par rapport aux revenus. A.4 est un axiome plus faible que la continuité uniforme. En effet, A.4 peut être reformulé de façon équivalente,

A.4'. $\forall\, x \in B_\infty(\mathbb{N}), x\ (\substack{\succ\\ \prec})\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n\geq 0}\ (\substack{\downarrow\\ \uparrow})\ 0,\ \exists N\ /\ \alpha_N.\mathbb{N}^*\ (\substack{\prec\\ \succ})\ x$,

ou,

A.4" $\forall\, x \in B_\infty(\mathbb{N}), x\ (\substack{\succeq\\ \preceq})\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n\geq 0}\ (\substack{\downarrow\\ \uparrow})\ 0, [(\forall n \in \mathbb{N}, x(\substack{\preceq\\ \succeq})\alpha_n.\mathbb{N}^*) \Rightarrow x \sim \emptyset^*]$ (où $\downarrow$ marque la décroissance).

Remarquons que si $\succeq$ vérifie A.1-A.3 alors $\succeq$ est compatible avec l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$

Lemme A.2.9 *Soit* $\succeq$ *qui vérifie A.1-A.3 alors,* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha > \beta) \iff (\alpha.\mathbb{N}^* \succ \beta.\mathbb{N}^*)$.

Nous obtenons une représentation des préférences $\succeq$,

Proposition A.2.12 *Une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.4 si et seulement si il existe une unique $I : B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ où $I(\mathbb{N}^*) = 1$ tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\ ;$$
$$(iii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \geq y \Rightarrow I(x) \geq I(y)\ ;$$
$$(iv)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \alpha \in \mathbb{R},\ I(x + \alpha.\mathbb{N}^*) = I(x) + \alpha.$$

De plus I est uniformément continue.

Désormais les relations de préférence que nous considèrerons vérifieront A.1-A.4.

A.2.4.2 Les préférences additives

Tout d'abord nous considérons des préférences sur les suites de revenus qui vérifient un axiome d'additivité. Ainsi nous obtenons une représentation à l'aide de fonctionnelles linéaires. Plus précisement à chaque fonctionnelle linéaire sera associée une unique *probabilité* sur $\mathbb{N}$ tel que chaque suite de revenus ait pour équivalent constant son *intégrale* par rapport à cette probabilité. L'axiome est le suivant,

A.5.(Additivité) : $\forall x, y, z \in B_\infty(\mathbb{N}),\ (x \sim y) \Rightarrow (x + z \sim y + z)$.

On dira qu'une fonctionnelle $L : B_\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$, où $L(\mathbb{N}^*) = 1$ est une fonctionnelle linéaire positive si $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), L(x + y) = L(x) + L(y)$ et $L(x) \geq 0$ si $x \geq 0$.

On dira que $p : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ est une *probabilité* si $p(\emptyset) = 0, p(\mathbb{N}) = 1$ and $\forall A, B \subset \mathbb{N},\ p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

Pour $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ on définit l'*intégrale de x par rapport à p*,

$$\int x dp = \int_0^\infty p(\{x \geq t\}) dt + \int_{-\infty}^0 (p(\{x \geq t\}) - 1) dt,$$

où $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N} / x_n \geq t\}$.

Si de plus p est σ-additive i.e. $\forall \{A_n\}_n$ où $A_n \cap A_m = \emptyset$ quand $n \neq m$ on a $p(\cup_n A_n) = \sum_{n=0}^\infty p(A_n)$, alors $\int x dp$ est l'*intégrale de Lebesgue* au sens usuel et $\int x dp = \sum_{n=0}^\infty p(\{n\}) x_n$.

Théorème A.2.12 *Une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.5 si et seulement si il existe une unique probabilité p sur $\mathbb{N}$ tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int x dp).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int x dp \geq \int y dp.$$

Désormais les propriétés de la relation de préférence seront traduites par les propriétés de la probabilité associée.

A.2.4.3 Patience

On dira qu'une permutation π est *finie* si $\{n \,/\, \pi(n) \neq n\}$ est fini. Soit $\Pi_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des permutations finies. Pour $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ et $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$ posons $x_\pi = (x_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. En suivant Marinacci (1998) nous introduisons,

A.6.(Patience) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \pi \in \Pi_f(\mathbb{N}),\ x_\pi \sim x$.

Sous cet axiome n'importe quel sous-ensemble fini de revenus peut être permuté, ainsi quelque soit leur éloignement dans le temps le décideur ne modifiera pas son évaluation. En particulier pour toute *transposition* on a, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall i, j \in \mathbb{N},\ \tau_{ij}(x) \sim x$, où $\tau_{ij}(x)_n = x_n$ si $n \notin \{i, j\}$, $\tau_{ij}(x)_i = x_j$ et $\tau_{ij}(x)_j = x_i$.

La patience peut aussi être traduite en terme de *traitement égal des générations* introduit par Diamond (1965),

(Traitement égal des générations) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall j \in \mathbb{N},\ \tau_{0j}(x) \sim x$.

ou encore,

$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ x + \epsilon.\{n\}^* \sim x + \epsilon.\{0\}^*$.

En effet, toute permutation finie peut être decomposée en un nombre fini de transpositions, qui à leur tour peuvent être décomposées en transpositions élémentaires, car pour tout $i, j \in \mathbb{N},\ \tau_{ij} = \tau_{0i} \circ \tau_{0j} \circ \tau_{0i}$.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \{0\}^* \sim \{n\}^*$. Cette propriété exclut toute représentation par une probabilité σ-additive. Car, si p est une probabilité σ-additive tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ p(\{n\}) = p(\{0\})$ alors, ou $p(\{0\}) > 0$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} p(\{n\}) = +\infty > 1$, ou $p(\{0\}) = 0$ et dans quel cas $\sum_{n=0}^{\infty} p(\{n\}) = 0 < 1$.

Une probabilité p est dite *pure* si $\forall \mu$ mesure σ-additive, $(0 \le \mu \le p) \Rightarrow (\mu = 0)$.

Dans le cas dénombrable une caractérisation des probabilités pures existe. Notons $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ est fini}\}$ et $co(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : A^c \text{ est fini}\}$, ainsi (e.g. Aliprantis-Border(1999)),

Théorème : *Soit p une probabilité alors, p est pure si et seulement si $p_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$.*

De façon équivalente, p est pure ssi $p_{|co(\mathbb{N})} = 1$ ssi $\forall A \subset \mathbb{N}, \forall B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), B \subset A,\ p(A) = p(A \setminus B)$. Il s'avère que ces probabilités sont celles qui traduisent la patience.

Théorème A.2.13 *Une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.5 et la patience A.6 si et seulement si il existe une unique probabilité* pure *p sur $\mathbb{N}$ tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim \left(\int x dp\right).\mathbb{N}^* \,;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \int x dp \ge \int y dp.$$

En particulier, soit $n \in \mathbb{N}$, et $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, si $\forall k \geq n,\ x_k = 0$ alors $\int x dp = 0$.
Cette propriété est aussi partagée par les *limites de Banach* (voir Banach(1987)). Une fonctionnelle L est une (B-)limite de Banach si L est normalisée (i.e. $L(\mathbb{N}^*) = 1$), linéaire et positive sur $B_\infty(\mathbb{N})$ telle que $L(x) = 0$ si, $\exists\, n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n,\ x_k = 0$. Nous obtenons une caractérisation des B-limites,

Proposition A.2.13 *Soit L une B-limite alors il existe une unique probabilité pure p sur $\mathbb{N}$ tel que, $L = \int (.) dp$.*
Réciproquement, si p est une probabilité pure sur $\mathbb{N}$ alors $\int (.) dp$ est une B-limite.

Les préférences qui sont représentées par une probabilité pure vérifient,
(*Insensibilité à la première coordonnée*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall y_0 \in \mathbb{R}, x \sim (y_0, x_1, \ldots)$.
Ce comportement découle de la propiété caractéristique des B-limites (Banach (1987)), une fonctionnelle linéaire positive L est une B-limite si et seulement si $L(x) = \lim_\infty x$ lorsque x converge (i.e. $x \in c$). Autrement dit les B-limites sont les extensions de la fonctionnelle limite. De plus, $\forall x \in c, \forall y \in B_\infty(\mathbb{N}), L(x+y) = \lim_\infty x + L(y)$. Ainsi si L est une B-limit alors, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall y_0 \in \mathbb{R},\ L((y_0, x_1, \ldots)) = L(x) + L((y_0 - x_0, 0, \ldots)) = L(x)$. Il est maintenant clair, que le décideur ne prend en compte que ce qui se passe à la fin.

A.2.4.4 Invariance temporelle

L'insensibilité peut être renforçée en introduisant la *neutralité au délais* (Mas-Colell-Whinston-Green, Chapitre 20)
A.7. (*Neutralité au délais*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ (0, x) \sim x$.
D'après A.7, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ (0, x) \sim x$. Ainsi un décideur peut évaluer $(0, x)$ seulement à partir de x, en négligeant totalement le présent. Ce comportement est manifeste dans l'axiome suivant nommé dans Marinacci (1998),
A.8. (*Invariance temporelle*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x^t \sim x$.
Où $x^t = (x_1, x_2, \ldots)$ est la version *tronquée* de x. Ainsi le court terme est toujours négligé. Les préférences temporellement invariantes exhibent de la patience, soit $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ et $j \in \mathbb{N}$ alors $\tau_{0j}(x) \sim (x_{j+1}, \ldots) \sim x$.
Sous A.3, les axiomes A.7 and A.8 sont équivalents. Soit $x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ (x_0, x_1, \ldots) = (0, x_1 - x_0, \ldots) + x_0.\mathbb{N}^* \sim (x_1 - x_0, \ldots) + x_0.\mathbb{N}^* = (x_1, x_2, \ldots)$.

Si une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.5 et A.8 alors pour une fonctionnelle I qui représente $\succeq$ on aura $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ I(x^t) = I(x)$. Les fonctionnelles linéaires normalisées qui vérifient cette propriété sont connues sous le nom de *limites de Banach-Mazur* (voir Banach(1987)). Nous avons une caractérisation,

Proposition A.2.14 *Soit L une B-M-limite alors il existe une unique probabilité invariante p sur $\mathbb{N}$ i.e. $\forall A \subset \mathbb{N}, p(A+1) = p(A)$ où $A+1 = \{a+1 : a \in A\}$, tel que, $L = \int(.)dp$.*
Réciproquement, si p est une probabilité invariante sur $\mathbb{N}$ alors $\int(.)dp$ est une B-M-limite.

On peut énoncer un théorème de représentation des préférences par des B-M-limites,

Théorème A.2.14 *Une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.5 et l'invariance temporelle A.8 si et seulement si il existe une unique probabilité invariante p sur $\mathbb{N}$ tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdp).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdp \geq \int ydp.$$

De plus la probabilité obtenue pour les préférences temporellement invariantes est aussi pure. Nous pouvons préciser la structure des préférences temporellement invariantes, le respect de l'invariance temporelle implique,

$(Stationnarité)$: $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \sim y \iff (\alpha, x) \sim (\alpha, y)$.

Les préférences temporellement invariantes peuvent être caractérisées,

Proposition A.2.15 *Soit $\succeq$ vérifiant A.1-A.5, alors $\succeq$ vérifie l'invariance temporelle A.8 si et seulement si $\succeq$ vérifie l'insensibilité à la première coordonnée et la stationnarité.*

En fait la stationnarité est fondamentale dans l'axiomatisation de Koopmans (1972) des préférences représentables par une *espérance escomptée*. C'est-à-dire les préférences pour lesquelles il existe un $\delta \in]0,1[$, tel que $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (E^\Delta(x)).\mathbb{N}^*$, où $E^\Delta(x) = (1-\delta)\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n x_n$. On obtient une caractérisation des préférences stationnaires,

Corollaire A.2.9 *Soit $\succeq$ vérifiant A.1-A.5, alors $\succeq$ vérifie la stationnarité si et seulement si $\succeq$ est représentée par une espérance escomptée ou par une limite de Banach-Mazur.*

Si on renforce l'axiome de monotonie,
(*Monotonie forte*) : $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), (x \geq y, x \neq y) \Rightarrow x \succ y$.
Cet axiome est aussi connu dans la littérature comme la *condition forte de Pareto* (Lauwers (1998)). Dans ce cas la préférence est clairement non insensible à la première coordonnée, et on obtient,

Corollaire A.2.10 *Soit $\succeq$ vérifiant A.1-A.5 et la stationnarité alors $\succeq$ vérifie la monotonie forte si et seulement si $\succeq$ est représentée par une espérance escomptée.*

A.2.4.5 Patience naïve

D'après la section A.2.4.3 on sait que les B-limites sont précisément les fonctionnelles linéaires qui coïncident avec la fonctionnelle limite sur l'espace des suites convergentes. La fonctionnelle limite possède une propriété encore plus forte que la patience.

Soient $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ et $\pi \in \Pi(\mathbb{N})$, posons $x_\pi = (x_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\Pi(\mathbb{N})$ est l'ensemble des permutations sur $\mathbb{N}$. Soit x une suite convergente et π une permutation sur $\mathbb{N}$, alors $\lim_\infty x_\pi = \lim_\infty x$. Ceci motive le prochain axiome, nommé dans Marinacci (1998) *patience naïve*,
A.6^s.(Patience naïve) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \pi \in \Pi(\mathbb{N}), x_\pi \sim x$.
Il s'avère qu'il n'existe aucune représentation additive qui vérifie la patience naïve.

Théorème A.2.15 *A.1-A.5 et A.6^s sont incompatibles.*

A.2.4.6 Préférences non-additives

D'après le Théorème A.2.15, il n'existe pas de préférences additives qui satisfassent A.6^s, pour cela nous allons relâcher l'hypothèse d'additivité. Les fonctionnelles que nous obtiendrons ne seront plus linéaires. Désormais, nous utiliserons la représentation intégrale des fonctionnelles non-additives de Schmeidler (1986) pour représenter de telles préférences. Dans ce cas l'additivité est maintenue seulement dans des cas particuliers.
On dira que x, y sont *comonotones* si $\forall n, m \in \mathbb{N}, (x_m - x_n)(y_m - y_n) \geq 0$.
Si x, y sont comonotones l'évaluation par le décideur de $x + y$ ne bénéficiera d'aucun effet de lissage, ceci motive une version affaiblie de l'additivité que l'on peut trouver dans Chateauneuf (1994) (voir aussi Wakker (1990), Chateauneuf (1991)) pour modéliser l'aversion à l'incertitude,

A.5^w. (Additivité Non lisse) $\forall x, y, z \in B_\infty(\mathbb{N}), \{y, z\}$*comonotone* , $(x \sim y) \Rightarrow (x+z \succeq y+z)$.

Sous A.5^w, si $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ sont comonotones alors $(x \sim y)$ entraîne $(x+z \sim y+z)$. L'additivité est maintenue si z ne lisse ni x ni y. Par contre le lissage peut être considéré comme une amélioration par le décideur. Si $\{y, z\}$ comonotone mais pas $\{x, z\}$, alors $x + z \succ y + z$ peut être obtenu.

On dira que $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ est une *capacité convexe* si $v(\emptyset) = 0, v(\mathbb{N}) = 1$ et $\forall A, B \subset \mathbb{N},\ v(A \cup B) + v(A \cap B) \geq v(A) + v(B)$. Si l'égalité est toujours vérifiée on récupère une probabilité. En particulier les capacités convexes sont aussi croissantes par inclusion, soit $B \subset A$ alors $v(A) \geq v(B) + v(A \setminus B) \geq v(B)$.

Pour $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ on définit l'*intégrale de Choquet (1953) de x par rapport à v*,

$$\int x dv = \int_0^\infty v(\{x \geq t\})dt + \int_{-\infty}^0 (v(\{x \geq t\}) - 1)dt$$

où $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N}/x_n \geq t\}$.

Théorème A.2.16 *Soit $\succeq$ une relation de préférence sur $B_\infty(\mathbb{N})$, alors $\succeq$ satisfait A.1-A.4,A.5^w si et seulement si il existe une unique capacité convexe v sur $\mathbb{N}$ tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdv).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdv \geq \int ydv.$$

A.2.4.7 Patience sans additivité

Rappelons l'axiome d'insensibilité,

(*Insensibilité à la première coordonnée*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall y_0 \in \mathbb{R}, x \sim (y_0, x_1, \ldots)$.

Si $\succeq$ est insensible à la première coordonnée alors $\mathbb{N}_0^* \sim \mathbb{N}^*$, où $\mathbb{N}_0 = \{1, \ldots\}$.

Théorème A.2.17 *Soit $\succeq$ une relation de préférence qui vérifie A.1-A.4,A.5^w, alors $\succeq$ vérifie l'insensibilité à la première coordonnée et la patience si et seulement si il existe une unique capacité convexe v sur $\mathbb{N}$ vérifiant $v(\pi(A)) = v(A)$pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$ et $v(\mathbb{N}_0) = 1$ tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdv).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdv \geq \int ydv.$$

Les capacités convexes qui vérifient les conditions du Theorem A.2.17 admettent la caractérisation suivante,

Proposition A.2.16 *Soit* $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ *une capacité convexe alors les assertions (i)-(iv) sont équivalentes,*
(i) $v(\pi(A)) = v(A)$ *pour tout* $A \subset \mathbb{N}$, $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$ *et* $v(\mathbb{N}_0) = 1$,
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, v(\{n\}^c) = 1$,
(iii) $v_{|co(\mathbb{N})} = 1$,
(iv) $\forall A, B \subset \mathbb{N},\ B \subset A,\ B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), v(A \setminus B) = v(A)$.

De telles capacités peuvent être qualifiées de *pures* car elles partagent des propriétés semblables aux probabilités pures. Comme nous considérons des capacités convexes nous nous interesserons à une notion équivalente à la σ-additivité qui est la σ-continuité. On dira qu'une fonction d'ensembles w est σ-*continue* si pour toute suite croissante de sous-ensembles $(A_n)_n$ (i.e.$A_n \subset A_{n+1}$) qui converge vers A (i.e.$\cup_n A_n = A$) on a $\lim_\infty w(A_n) = w(A)$.

Proposition A.2.17 *Soit* $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ *une capacité convexe. Si* v *est pure alors pour toute fonction d'ensembles* σ*-continue convexe* w *sur* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, si* $(0 \leq w \leq v)$ *alors* $w = 0$.

Remarquons que pour obtenir une terminologie simple, nous utilisons dans ce chapitre le terme pure, bien que selon la Proposition A.2.17 la terminologie *fortement pure* aurait été plus appropriée dans la mesure où dans un autre papier (Chateauneuf-Rébillé (2002)), nous nommons pures les capacités qui vérifient simplement la condition nécessaire de la Proposition A.2.17.
De plus les propriétés qui caractérisent les B-limites caractérisent aussi les fonctionnelles non-additives par rapport à des capacités convexes pures.

Proposition A.2.18 *Soit* $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ *une capacité convexe alors les assertions (i)-(iii) sont équivalentes,*
(i) v *est pure,*
(ii) $\forall x \in c,\ \int x dv = \lim_\infty x$,
(iii) $\forall x \in c, \forall y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ \int (x+y) dv = \lim_\infty x + \int y dv$

Il en découle que si v est pure alors $\int (.) dv$ est linéaire sur c. A partir de là le non-respect de l'additivité peut seulement se produire pour des flux de revenus qui ne sont pas convergents.

A.2.4.8 Invariance temporelle sans additivité

De la même manière nous pouvons renforcer les axiomes de patience et d'insensibilité par l'invariance temporelle, ceci se traduit entièrement dans la capacité et fournit une généralisation naturelle des probabilités invariantes,

Théorème A.2.18 *Une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.4,A.5^w et l'invariance temporelle A.8 si et seulement si il existe une unique capacité convexe invariante v sur $\mathbb{N}$ i.e. $\forall A \subset \mathbb{N}, v(A+1) = v(A)$, tel que,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int x dv).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int x dv \geq \int y dv.$$

En particulier si v est invariante et convexe alors par la Proposition A.2.16 v doit être pure, car pour $n \in \mathbb{N}$ alors $v(\{n\}^c) \geq v(\{n+1,\ldots\}) = 1$. Ainsi, les préférences temporellement invariantes sont aussi patientes.

A.2.4.9 Patience naïve et insensibilité à la première coordonnée sans additivité

Contrairement au cas additif, la patience naïve et l'insensibilité à la première coordonnée ne sont pas incompatibles avec les préférences non-additives. Plus précisément, la seule fonctionnelle qui représente de telles préférences est la $\underline{lim}$.

Théorème A.2.19 *Une relation de préférence $\succeq$ vérifie A.1-A.4,A.5^w, la naïve patience A.6^s et l'insensibilité à la première coordonnée si et seulement si*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\underline{lim}\ x).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \underline{lim}\ x \geq \underline{lim}\ y.$$

On remarquera que l'invariance temporelle n'est pas nécessaire pour axiomatiser la $\underline{lim}$, ce qui affine le Théorème 7 de Marinacci (1998).

A.2.4.10 Conclusion.

Dans un cadre simple où les préférences sont additives, nous avons caractérisé la patience à l'aide de probabilités pures. Les fonctionnelles que nous obtenons sont les seules extensions à l'espace des suites bornées de la fonctionnelle limite. L'introduction de l'invariance temporelle correspond aux limites de Banach-Mazur. En considérant une version plus forte de la patience, -la patience naïve- il est impossible de conserver l'additivité. Les préférences non-additives représentées par des intégrales par rapport à des capacités convexes donnent des versions de la patience et de l'invariance temporelle semblables au cas additif. Désormais la patience naïve admet une représentation avec la limite inférieure.

A.3 Bibliographie

Aliprantis, C. and Border, K., 1999, Infinite dimensional analysis : a hitchhiker's guide, Springer, Berlin.

Anscombe, F.J. and Aumann, R.J. , 1963, A Definition of Subjective Probability, Annals of Mathematical Statistics 34, 199-205.

Banach, S., 1987, Theory of Linear Operations, Elsevier, New York.

Brown, D. and Lewis, L., 1981, Myopic economic agents, Econometrica 49, 359-368.

Chateauneuf, A., 1991, On the use of capacities in modeling uncertainty aversion and risk aversion, Journal of Mathematical Economics 20, 343-369.

Chateauneuf, A., 1994, Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral, Annals of Operations Research, 52, 3-20.

Chateauneuf, A. and Jaffray, J-Y., 1989, Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion, Mathematical Social Sciences 17, 263-283.

Chateauneuf, A. and Rébillé, Y., 2002, A Yosida-Hewitt decomposition for totally monotone games. Working paper : University of Paris I.

Choquet, G., 1953-1954, Théorie des capacités, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) 5, 131-295.

De Waegenaere A.M.B. and Wakker P.P., 2001, Nonmonotonic Choquet integrals, Journal of Mathematical Economics 36, 45-60.

Denneberg, P., 1994, Non-Additive Measure and Integral (Kluwer, Dordrecht).

Diamond, P.A., 1965, The evaluation of infinite utility streams, Econometrica 33, 170-177.

Ellsberg, D., 1961, Risk, ambiguity, and the Savage axioms, Quarterly Journal of Economics 75, 643-669.

Fuchssteiner, B. and Lusky, W., 1981. Convex cones. North-Holland.

Gilboa, I., 1987, Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities, Journal of Mathematical Economics 16, 65-88.

Gilboa,I., 1989, Expectation and Variation in Multi-Period Decisions, Econometrica 57, 1153-69.

Koopmans, T.C., 1972, Representations of preference orderings over time. In : McGuire, C.B., Radner, R. (Eds.), Decision and Organization, North-Holland, Amsterdam.

Lauwers, L., 1998, Intertemporal objective functions strong Pareto versus anonymity, Mathematical Social Sciences 35, 37-55.

Marinacci, M., 1998, An axiomatic approach to complete patience and time invariance, Journal of Economic Theory 83, 105-144.

Mas-Colell, A., Whinston, M. and Green, J., 1995, Microeconomic Theory, Oxford University Press, New York.

Olson, M. and Bailey, M., 1981, Positive time préférence, Journal of Political Economy 89, 1-25.

Prescott, E. and Lucas, R., 1972, A note on price systems in infinite dimensional space, International Economic Review 13, 416-422.

Rosenmüller, J., 1972, Some properties of convex set fonctions, Method of Operations Research 17, 287-307.

Savage, L., 1954, The Foundations of Statistics (John Wiley, New-York).

Schmeidler, D., 1986, Integral Representation without Additivity, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.97, No. 2, 255-261.

Schmeidler, D., 1989, Subjective Probability and Expected Utility without Additivity, Econometrica 57, 571-587 ; first version : subjective expected utility without additivity. Foerder Institute Working Paper, 1982.

Shafer, G., 1981, Constructive probability, Synthese 48, 1-59.

Shalev, J., 1997, Loss Aversion in a Multi-Period Model, Mathematical Social Sciences 33, 203-226.

Wakker, P.P., 1989, Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht).

Wakker, P., 1990, Characterizing optimism and pessimism directly through comonotonicity, Journal of Economic Theory 52, 453-463.

Wakker, P.P., 1993, Unbounded Utility for Savage's "Foundations of Statistics", and other models, Mathematical Operations Research 18, 446-86.

Yosida, K. and Hewitt, E., 1952, Finitely additive measures, Transactions of the American Mathematical Society 72, 46-66.

Zhou, L., 1998, Integral Representation of Continuous Comonotonically Additive Functionals, Transactions of the American Mathematical Society 350, 1811-1822.

Chapitre 1

Sequentially continuous non-monotonic Choquet integrals [1]

Abstract

Schmeidler(1986) established an integral representation theorem for functionals satisfying monotonicity and a weaker condition than additivity, namely comonotonic additivity. We give an alternative approach which is based on sequential continuity, a condition equivalent to σ-additivity in measure theory, that allows for non-monotonicity.

Keywords : capacity, game, sequentially upper-continuous functional, Choquet integral, comonotonicity.

JEL Classification : D80, D81.

1.1 Introduction

Choquet (1953) introduced the notion of capacity and a corresponding integral operation known nowadays as Choquet integral. Capacities where supposed to be monotonic set functions and satisfy some continuity conditions. His motivations came from potential theory. Later Schmeidler (1986) provided a characterization of functionals that could be represented as an integral with respect to a capacity which is not necessarily an additive set function but monotonic. More precisely these functionals were supposed to be

[1] Ce chapitre a fait l'objet de présentations à *FUR 2001* (10^{th} *International Conference on the Foundations and Applications of Utility, Risk and Decision Theory, june 2001)* et à *SMAI 2001 (Congrès National de Mathématiques Appliquées et Industrielles, mai 2001).*

monotonic and comonotonically additive. The importance of comonotonic additivity was revealed by Dellacherie (1970). Denneberg (1994) provides an exhaustive survey of the topic. New tools were therefore available and new modelings of individual's behavior under uncertainty have been elaborated (see for instance Schmeidler (1989) , Gilboa (1987), Wakker (1989), Chateauneuf (1994)) extending the subjective expected utility models of Savage (1954) and Anscombe and Aumann (1963). Similarly Gilboa (1989) used the Choquet integral to model decision making in a temporal setting. However violations of monotonicity in multi-period model occur frequently, non-monotonic set functions seem to be better suited (De Waegenaere and Wakker (2001), Shalev (1997)). We establish a representation theorem in the spirit of Schmeidler (1986) relaxing the monotonicity assumption and focusing on continuity assumptions such as upper-continuity, a regularity condition which is central in measure theory. The following section introduces definitions, the third section provides some preliminary results, then we state some representation theorem and provide a preference representation theorem.

1.2 Notation and Definitions

Let S be a nonempty set and $\mathcal{S}$ a family of subsets of S that contains the empty set $\emptyset$ and S. In this paper we shall assume that all the functions defined on S are real-valued. A function X defined on S is said to be $\mathcal{S}$-*measurable* if for every t in $\mathbb{R}$, $\{X \geq t\}$ belongs to $\mathcal{S}$, where $\{X \geq t\}$ stands for the inverse image of $[t, +\infty[$ under X. X is *bounded*, if $\|X\|$ is finite, where $\|.\|$ is the usual supremum norm. A *simple* function is a function that takes only a finite number of values. $B_0(S,\mathcal{S})$, $B_0^+(S,\mathcal{S})$, $B_\infty(S,\mathcal{S})$, $B_\infty^+(S,\mathcal{S})$, denote respectively the set of simple $\mathcal{S}$-measurable functions, of positive simple $\mathcal{S}$-measurable functions, of bounded $\mathcal{S}$-measurable functions, of positive bounded $\mathcal{S}$-measurable functions.

A real-valued set function v on $\mathcal{S}$ such that $v(\emptyset) = 0$ is termed as *game*. A *bounded game* is a game such that $\mathrm{Sup}\{|v(A)|, A \in \mathcal{S}\}$ is finite, this last quantity will be written $\|v\|$. The game v is said to be *upper-continuous* if for every decreasing sequence $(A_n)_{n\geq 1}$ of $\mathcal{S}$, such that $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{S}$, denoted $A_n \downarrow A$, then $(v(A_n))_{n\geq 1}$ converges to $v(A)$. The game v is said to be *lower-continuous* if for every increasing sequence $(A_n)_{n\geq 1}$ of $\mathcal{S}$, such that $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{S}$, denoted $A_n \uparrow A$, then $(v(A_n))_{n\geq 1}$ converges to $v(A)$. For finite measure σ-additivity, upper-continuity, lower-continuity are equivalent.

If v is a game defined on $\mathcal{S}$, and X a $\mathcal{S}$-measurable function, the *Choquet integral* of X with respect to v, denoted $\int X dv$, is defined by $\int X dv = \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X \geq t\}) d\lambda(t) + \int_{\mathbb{R}^-}(v(\{X \geq t\}) - v(S)) d\lambda(t)$ where λ is the usual Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. This formula can be interpreted as an expectation operator with respect to a generalized measure. This Lebesgue integral is well defined as soon as v is upper-continuous and bounded, this will be proved in next section. For $A \in \mathcal{S}$, A^* denotes the characteristic function of A. Two functions X, Y defined on S are said to be *comonotonic* if for all $(s,t) \in S^2$, $(X(s) - X(t))(Y(s) - Y(t)) \geq 0$. Let $\mathcal{M}_X = \{\{X \geq t\},\ t \in \mathbb{R}\}$ equals the weak upper-level sets of X, from Denneberg (1994) we know that X, Y are comonotonic if and only if $\mathcal{M}_X \cup \mathcal{M}_Y$ is a chain for the inclusion relation.

For I a functional defined on a class $\mathcal{F}$ of functions on S, we will say that I is *bounded* if $\|I\|_{\mathcal{F}}=\text{Sup}\{|I(X)|; X \in \mathcal{F}, \emptyset^* \leq X \leq S^*\}$ is finite, when $\mathcal{F} = B_\infty(S, \mathcal{S})$ we will simply write $\|I\|$. I is *positively homogeneous of degree one* if for every $X \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda.X \in \mathcal{F}$ then $I(\lambda.X) = \lambda I(X)$. I is *comonotonically additive* if for all comonotonic X, Y in $\mathcal{F}$ such that $X + Y \in \mathcal{F}$ then $I(X + Y) = I(X) + I(Y)$. Finally, I is *sequentially upper-continuous* (resp. *sequentially lower-continuous*) if for every decreasing (resp. increasing) sequence $(X_n)_{n\geq 1}$ of $\mathcal{F}$ that converges pointwise to X, $X_n \downarrow_P X$ (resp. $X_n \uparrow_P X$), where X belongs to $\mathcal{F}$, then $(I(X_n))_{n\geq 1}$ converges to $I(X)$.

1.3 Preliminary results

As announced we will check that the Choquet integral is well defined for any X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$ when v is bounded and upper-continuous. Some lemmas are therefore established.

Lemma 1 *Let $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, where $-\infty < a < b < +\infty$. Suppose f is left-continuous, then f is a Borel function.*

Proof : With out loss of generality we may take $a = 0$ and $b = 1$. We exhibit a sequence $(f_n)_{n\geq 1}$ of Borel functions which converges pointwise to f. For all $n \geq 1$ and for all k in $\{0, \ldots, 2^n\}$ set $x_k^{(n)} = \frac{k}{2^n}$. Define $f_n = \sum_{k=1}^{2^n} f(x_{k-1}^{(n)})(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]^*$.
If $x^* = 1$, $f_n(x^*) = f(\frac{2^n-1}{2^n})$ tends to $f(1)$, by leftcontinuity at 1.
If $x^* \in (0, 1)$. Let $\epsilon > 0$.
By leftcontinuity, $\exists\, \eta > 0 \,/\, x^* - \eta < x \leq x^* \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \epsilon$.

For n large enough, there is a k_n such that $x^* - \eta < x^{(n)}_{k_n-1} < x^* \leq x^{(n)}_{k_n}$, so $|f(x^{(n)}_{k_n-1}) - f(x^*)| < \epsilon$, that is $|f_n(x^*) - f(x^*)| < \epsilon$. □

Lemma 2 *Let X a function on S and $(X_n)_{n\geq 1}$ a sequence of functions on S, such that $X_n \downarrow_P X$. Then for all t in $\mathbb{R}$, $\{X_n \geq t\} \downarrow \{X \geq t\}$.*

Proof : Take $t \in \mathbb{R}$. $(X_n)_{n\geq 1}$ being a decreasing sequence, $(\{X_n \geq t\})_{n\geq 1}$ is a decreasing sequence also. For every n, $X_n \geq X$ so $\bigcap_{n\geq 1}\{X_n \geq t\} \supset \{X \geq t\}$. $(X_n)_{n\geq 1}$ converging pointwise to X, implies $\bigcap_{n\geq 1}\{X_n \geq t\} \subset \{X \geq t\}$. □

Lemma 3 *Let v be an upper-continuous game defined on $\mathcal{S}$, and X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Define $v_X(t) = v(\{X \geq t\})$, for all t in $\mathbb{R}$. Then v_X is left-continuous.*

Proof : Take t in $\mathbb{R}$. $\{X \geq t\} \in \mathcal{S}$ by $\mathcal{S}$-measurability of X. Let $(t_n)_{n\geq 1}$ be an increasing sequence that converges to t. Set for all $n \geq 1$, $X_n = X + (t - t_n).S^*$, then $X_n \downarrow_P X$. By Lemma 2, $\{X \geq t_n\} = \{X_n \geq t\} \downarrow \{X \geq t\}$, thus by upper-continuity of v, $(v(\{X \geq t_n\}))_{n\geq 1}$ converges to $v(\{X \geq t\})$, so v_X is left-continuous. □

Proposition 1 *Let v be an upper-continuous bounded game defined on $\mathcal{S}$, then for any X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$, $\int X dv$ is well defined.*

Proof : Let X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$, define v^*_X as follow :

$$v^*_X(t) = \begin{cases} v(\{X \geq t\}) & \text{, if } t > 0 \\ v(\{X \geq t\}) - v(S) & \text{, if } t \leq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Lemma 3 insures that v^*_X is left-continuous. By Lemma 1 v^*_X is a Borel function on $[-\|X\|, \|X\|]$. X being bounded guarantees that v^*_X is null outside $[-\|X\|, \|X\|]$, so v^*_X is a Borel function on $\mathbb{R}$. v being bounded v^*_X is bounded. That v^*_X is Lebesgue integrable follows. □

Proposition 2 *Let I be a functional on $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Suppose I is (a) comonotonically additive and (b) sequentially upper-continuous, then I is positively homogeneous of degree one.*

Proof : Suppose it is true on $B^+_\infty(S,\mathcal{S})$, let X be non-positive and $\lambda \in \mathbb{R}^+$, fix $\underline{X} = \mathrm{Inf\ X(S)}(\leq 0)$, we have :

$$\begin{aligned}
I(\lambda.X) &= I(\lambda.(X-\underline{X}S^*)+\lambda\underline{X}.S^*) \\
&= I(\lambda.(X-\underline{X}S^*)+I(\lambda\underline{X}.S^*) \text{ , by (a)} \\
&= \lambda I(X-\underline{X}.S^*)+I(\lambda\underline{X}.S^*) \text{ , by assumption} \\
&= \lambda(I(X)+I(-\underline{X}S^*))+I(\lambda\underline{X}.S^*) \text{ , by (a)} \\
&= \lambda I(X)+I(\lambda(-\underline{X}.S^*))+I(\lambda\underline{X}S^*) \text{ , by (a) and } \underline{\mathrm{X}} \leq 0 \\
&= \lambda I(X). \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Now let X in $B^+_\infty(S,\mathcal{S})$ and $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
By (a), for any $p \in \mathbb{N}$, $I(p.X) = pI(X)$ and for any $q \in \mathbb{N}^*$, $I(X) = I(q(\frac{1}{q}X)) = qI(\frac{1}{q}X)$. Let $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $\alpha = \frac{p}{q}$ for some $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, then $I(\alpha.X) = I(\frac{p}{q}X) = pI(\frac{1}{q}X) = \frac{p}{q}I(X) = \alpha I(X)$. Let $\alpha \in \mathbb{R}^+/\mathbb{Q}^+$, then there is a decreasing sequence $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ of positive rational numbers converging to α, X being positive, $\alpha_n.X \downarrow_P \alpha.X$. Thus by (b),

$$I(\alpha.X) = \lim_{n\to\infty} I(\alpha_n.X) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n I(X) = \alpha I(X). \qquad (1.3)$$

□

A similar proof of the next proposition can be found in Denneberg (1994). As observed in Wakker (1993) the sum of two measurable functions need not be measurable if $\mathcal{S}$ is not a σ-algebra, still it holds that,

Proposition 3

(i) For every $X \in B_\infty(S,\mathcal{S})$ and every $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda.X \in B_\infty(S,\mathcal{S})$.

(ii) For every $X, Y \in B_\infty(S,\mathcal{S})$ that are comonotonic, $X+Y \in B_\infty(S,\mathcal{S})$.

Proof : The proof of (i) is immediate.

For (ii) we will show that $\mathcal{M}_{X+Y} \subset \mathcal{M}_X \cup \mathcal{M}_Y$, and $X+Y \in B_\infty(S,\mathcal{S})$ will follow. For every $t \in \mathbb{R}$, set $\bar{t}_X, \bar{t}_Y, \bar{t}_{X+Y}$ in the following manner,

$$\begin{aligned}
\bar{t}_X &= \mathrm{Inf}\{\mathrm{X(s)}; \mathrm{s} \in \{\mathrm{X+Y \geq t}\}\} \\
\bar{t}_Y &= \mathrm{Inf}\{\mathrm{Y(s)}; \mathrm{s} \in \{\mathrm{X+Y \geq t}\}\} \\
\bar{t}_{X+Y} &= \mathrm{Inf}\{\mathrm{X(s)+Y(s)}; \mathrm{s} \in \{\mathrm{X+Y \geq t}\}\}.
\end{aligned}$$

We assert that as soon as X and Y are comonotonic, $\bar{t}_{X+Y} = \bar{t}_X + \bar{t}_Y$ holds. That $\bar{t}_{X+Y} \geq \bar{t}_X + \bar{t}_Y$ holds is immediate. Suppose the reverse inequality does not hold. Fix $\epsilon = \bar{t}_{X+Y} - \bar{t}_X - \bar{t}_Y$ (> 0), then

$$\exists\ s_X \in \{X+Y \geq t\}\ /\ X(s_X) \in [\bar{t}_X, \bar{t}_X + \frac{\epsilon}{2}),$$

$$\text{and } \exists\ s_Y \in \{X+Y \geq t\}\ /\ Y(s_Y) \in [\bar{t}_Y, \bar{t}_Y + \frac{\epsilon}{2}).$$

We obtain the following inequalities,

$$Y(s_X) \geq \bar{t}_{X+Y} - X(s_X) > \bar{t}_{X+Y} - (\bar{t}_X + \frac{\epsilon}{2}) = \bar{t}_Y + \frac{\epsilon}{2} > Y(s_Y),$$

$$\text{and } X(s_Y) \geq \bar{t}_{X+Y} - Y(s_Y) > \bar{t}_{X+Y} - (\bar{t}_Y + \frac{\epsilon}{2}) = \bar{t}_X + \frac{\epsilon}{2} > X(s_X),$$

so X, Y are not comonotonic.

By construction, $\{X+Y \geq t\} \subset \{X \geq \bar{t}_X\},\ \{Y \geq \bar{t}_Y\}$; as X, Y are comonotonic either $\{X \geq \bar{t}_X\} \subset \{Y \geq \bar{t}_Y\}$ stands, or either $\{X \geq \bar{t}_X\} \supset \{Y \geq \bar{t}_Y\}$ does. Consider the case where $\{X \geq \bar{t}_X\} \subset \{Y \geq \bar{t}_Y\}$, we claim that $\{X+Y \geq t\} = \{X \geq \bar{t}_X\}$. Suppose not, then there is a s_0 such that $X(s_0) + Y(s_0) < t$ and $X(s_0) \geq \bar{t}_X$, so $Y(s_0) \geq \bar{t}_Y$, we get :

$$t > X(s_0) + Y(s_0) \geq \bar{t}_X + \bar{t}_Y = \bar{t}_{X+Y} \geq t,$$

which is impossible. The other case is similar. $\square$

Proposition 4 *Let I be a comonotonically additive and sequentially upper-continuous functional on $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Denote $\mathcal{S}^* = \{A^*;\ A \in \mathcal{S}\}$. If $\|I\|_{\mathcal{S}^*} < +\infty$ then $\|I\| < +\infty$. Moreover $\|I\|_{\mathcal{S}^*} = \|I\|$.*

Proof : By definition, $\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq \|I\|$.

Let X belong to $B_0^+(S, \mathcal{S})$ satisfying $\emptyset^* \leq X \leq S^*$.

There are some $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ and some $A_0, \ldots, A_n$ in $\mathcal{S}$ where $S = A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq \cdots \supsetneq A_n \neq \emptyset$, such that $X = \sum_{i=0}^n \alpha_i . A_i^*$ and $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n \leq 1$.

For all $i \in \{0, \ldots, n\}$, we have, $-\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq I(A_i^*) \leq \|I\|_{\mathcal{S}^*}$

hence, $-(\sum_{i=0}^n \alpha_i)\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq \sum_{i=0}^n \alpha_i I(A_i^*) \leq (\sum_{i=0}^n \alpha_i)\|I\|_{\mathcal{S}^*}$

so by Proposition 2, $-(\sum_{i=0}^n \alpha_i)\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq \sum_{i=0}^n I(\alpha_i . A_i^*) \leq (\sum_{i=0}^n \alpha_i)\|I\|_{\mathcal{S}^*}$

and by comonotonic additivity, $-(\sum_{i=0}^n \alpha_i)\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq I(X) \leq (\sum_{i=0}^n \alpha_i)\|I\|_{\mathcal{S}^*}$

hence $|I(X)| \leq \|I\|_{\mathcal{S}^*}$.

Let X belong to $B_\infty^+(S, \mathcal{S})$ satisfying $\emptyset^* \leq X \leq S^*$.
Consider the following approximation of X in $B_0^+(S, \mathcal{S})$;
for all $n \in \mathbb{N}^*$, let $X_n = \sum_{k=0}^{2^n} \frac{\lambda}{2^n}.\{X \geq k\frac{\lambda}{2^n}\}^*$, and $\|X_n\| \leq \lambda \frac{2^n+1}{2^n}$, where $\lambda = \|X\|$.
We claim that X_n is $\mathcal{S}$-measurable for all n.
By construction the $\{\{X \geq k\frac{\lambda}{2^n}\}\}_{k=0,\ldots,2^n}$ are nested and belong to $\mathcal{S}$ by $\mathcal{S}$-measurability of X. Thus each $\{X \geq k\frac{\lambda}{2^n}\}^*$ is $\mathcal{S}$-measurable and for any $k \geq k'$, $\{X \geq k\frac{\lambda}{2^n}\}^*$, $\{X \geq k'\frac{\lambda}{2^n}\}^*$ are comonotonic. Let $Z_{k,n} = \sum_{k'=0}^{k}\{X \geq k'\frac{\lambda}{2^n}\}^*$. $Z_{0,n}$ is $\mathcal{S}$-measurable. Assume $Z_{k,n}$ being $\mathcal{S}$-measurable with $0 \leq k < 2^n$. $\{X \geq (k+1)\frac{\lambda}{2^n}\}^*$ and $Z_{k,n}$ are comonotonic. So by (ii) of Proposition 3, $Z_{k+1,n} = \{X \geq (k+1)\frac{\lambda}{2^n}\}^* + Z_{k,n}$ is $\mathcal{S}$-measurable. By induction $Z_{2^n,n}$ is $\mathcal{S}$-measurable and X_n is $\mathcal{S}$-measurable by (i) of Proposition 3. Now fix $X'_n = \frac{X_n}{\|X_1\|}$, as $\emptyset^* \leq X'_n \leq S^*$, we have $-\|X'_n\|\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq I(X'_n) \leq \|X'_n\|\|I\|_{\mathcal{S}^*}$, and by Proposition 2, $-\frac{2^n+1}{2^n}\|X\|\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq -\|X_n\|\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq I(X_n) \leq \|X_n\|\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq \frac{2^n+1}{2^n}\|X\|\|I\|_{\mathcal{S}^*}$, so by sequential upper-continuity, $-\|X\|\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq I(X) \leq \|X\|\|I\|_{\mathcal{S}^*}$, hence $|I(X)| \leq \|I\|_{\mathcal{S}^*}$, so $\|I\| \leq \|I\|_{\mathcal{S}^*}$. $\square$

1.4 Main results

Theorem 1 *Let I be a bounded functional on $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Assume that I satisfies (a) comonotonic additivity and (b) sequential upper-continuity, then there is a unique upper-continuous game (with same bound) defined on $\mathcal{S}$ such that for all X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$ we have,*

$$I(X) = \int X dv \tag{1.4}$$

Conversely, if v is a bounded, upper-continuous game defined on $\mathcal{S}$, then the Choquet integral is a comonotonically additive, sequentially upper-continuous functional (with same bound) on $B_\infty(S, \mathcal{S})$.

Proof : First notice that for any X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$, any α in $\mathbb{R}$, and any game on $\mathcal{S}$ we have that $\int(X + \alpha.S^*)dv = \int X dv + \alpha v(S)$. This follows from the change of variable $u = t - \alpha$ in the integral corresponding to $\int(X + \alpha.S^*)dv$. Therefore it suffices to establish that equation (1.4) holds for all X in $B_\infty^+(S, \mathcal{S})$.

We state that $\forall X \in B_\infty(S,\mathcal{S}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, I(X+\alpha.S^*) = I(X) + \alpha I(S^*)$.
By (a) we have $I(X+\alpha.S^*) = I(X) + I(\alpha.S^*)$ and from Proposition 2 we have $I(\alpha.S^*) = \alpha I(S^*)$ for all $\alpha \geq 0$. So the statement is true for positive α. Assume $\alpha \leq 0$, we have :

$$\begin{aligned} I(X) &= I(X+\alpha.S^* - \alpha.S^*) \\ &= I(X+\alpha.S^*) + I(-\alpha.S^*) \text{ , by (a)} \\ &= I(X+\alpha.S^*) + (-\alpha)I(S^*). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Hence, $I(X+\alpha.S^*) = I(X) + \alpha I(S^*)$, and the statement is true for all real α.

For all A in $\mathcal{S}$, define $v(A) = I(A^*)$. By Proposition 4 we have $\|v\| = \|I\|$. (b) implies that v is upper-continuous. Take $(A_n)_{n\geq 1}$ a decreasing sequence in $\mathcal{S}$ that converges to A which is in $\mathcal{S}$, then $A_n \downarrow A$ is equivalent to $A_n^* \downarrow_P A^*$.

Let us first prove (1.4) for positive finite step functions. Take X in $B_0^+(S,\mathcal{S})$. X can be expressed as follows, $X = \sum_{i=0}^n \alpha_i.A_i^*$, where $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ and $S = A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq \cdots \supsetneq A_n \neq \emptyset$ and $A_i \in \mathcal{S}$ for all i.
By (a),

$$I(X) = I(\sum_{i=0}^n \alpha_i.A_i^*) = \sum_{i=0}^n I(\alpha_i.A_i^*). \tag{1.6}$$

By positive homogeneity of degree one,

$$\begin{aligned} I(X) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i I(A_i^*) \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i v(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n ((\alpha_0+\cdots+\alpha_i) - (\alpha_0+\cdots+\alpha_{i-1}))v(A_i) + \alpha_0 v(S). \end{aligned} \tag{1.7}$$

As

$$v(\{X \geq t\}) = \begin{cases} v(S) & \text{, if } t \in [0,\alpha_0] \\ v(A_i) & \text{, if } t \in (\alpha_0+\cdots+\alpha_{i-1}, \alpha_0+\cdots+\alpha_i] \\ 0 & \text{, if } t > \alpha_0+\cdots+\alpha_n \end{cases}$$

we have :

$$I(X) = \int_{[0,\|X\|]} v(\{X \geq t\}) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X \geq t\}) d\lambda(t). \tag{1.8}$$

Now take X in $B_\infty^+(S,\mathcal{S})$.

Consider $(X_n)_{n\geq 1}$ the same sequence of approximations as in Proposition 4, we have $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I(X_n) = \int X_n dv$. $(X_n)_n$ is a sequence in $B_0^+(S,\mathcal{S})$ such that $X_n \downarrow_P X$, thus (b) implies $I(X) = \lim_{n\to\infty} I(X_n)$. As $X_n \downarrow_P X$, Lemma 2 implies that for all $t \in \mathbb{R}^+$ we have $\{X_n \geq t\} \downarrow \{X \geq t\}$, then by upper-continuity of v, $v(\{X_n \geq .\})$ converges pointwise to $v(\{X \geq .\})$ on $[0, \|X_1\|]$. Since $(X_n)_n$ is a decreasing sequence of positive functions, we have that each $v(\{X_n \geq .\})$ is null outside of $[0, \|X_1\|]$ and the same holds for $v(\{X \geq .\})$. Since v is bounded, all $v(\{X_n \geq .\})$ and $v(\{X \geq .\})$ are dominated by $\|v\|[0, \|X_1\|]^*$ which is Lebesgue integrable. By the dominated convergence theorem, we get :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X_n \geq t\}) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X \geq t\}) d\lambda(t), \tag{1.9}$$

thus $I(X) = \int X dv$, and (1.4) holds for all X in $B_\infty(S,\mathcal{S})$.

For the converse, we have to prove that $\int(.)dv$ is a functional that satisfies (a) and (b). That $\|\int(.)dv\| = \|v\|$ holds, is obvious. As noticed previously $\int(X + \alpha.S^*)dv = \int X dv + \alpha v(S)$, for all $\alpha \in \mathbb{R}$. The proof is restricted to $B_\infty^+(S,\mathcal{S})$.

First we show that (b) is satisfied. Take X in $B_\infty^+(S,\mathcal{S})$, and $(X_n)_{n\geq 1}$ a sequence in $B_\infty^+(S,\mathcal{S})$ such that $X_n \downarrow_P X$ (e.g. the approximation used above). By Lemma 2, for every $t \in \mathbb{R}^+$, $\{X_n \geq t\} \downarrow \{X \geq t\}$; by upper-continuity of v, $v(\{X_n \geq .\})$ converges pointwise to $v(\{X \geq .\})$ on $\mathbb{R}^+$. Boundedness of v and X_1 implies $|v(\{X_n \geq .\})| \leq \|v\|.[0, \|X_1\|]^*$. Proposition 1 asserts that $v(\{X \geq .\})$ and each $v(\{X_n \geq .\})$ is Lebesgue integrable. Thus by the dominated convergence theorem, we get :

$$\lim_{n\to\infty} \int X_n dv = \int X dv, \tag{1.10}$$

and (b) is proved.

To prove (a), let $X, Y \in B_0^+(S,\mathcal{S})$ be comonotonic, $\mathcal{M}_X \cup \mathcal{M}_Y$ is a chain in $\mathcal{S}$. This chain contains a finite number of elements and may be written as a decreasing sequence in $\mathcal{S}$, $(C_i)_{i=0,\ldots,n}$, such that $S = C_0 \underset{\neq}{\supset} C_1 \underset{\neq}{\supset} \cdots \underset{\neq}{\supset} C_n \neq \emptyset$. There are some $\alpha_0, ..., \alpha_n, \beta_0, ..., \beta_n \geq 0$ such that $X = \sum_{i=0}^n \alpha_i.C_i^*$ and $Y = \sum_{i=0}^n \beta_i.C_i^*$, where for $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\alpha_i > 0 \Leftrightarrow C_i \in \mathcal{M}_X \text{ and } \beta_i > 0 \Leftrightarrow C_i \in \mathcal{M}_Y. \tag{1.11}$$

Thus $X + Y = \sum_{i=0}^n \gamma_i.C_i^*$, where $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$. By computation we have :

$$\int X + Y dv = \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X + Y \geq t\}) d\lambda(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}((\gamma_0 + \cdots + \gamma_i) - (\gamma_0 + \cdots + \gamma_{i-1}))v(C_i) + \gamma_0 v(S) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i v(C_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v(C_i) + \sum_{i=0}^{n} \beta_i v(C_i) \\
&= \sum_{\{i/C_i \in \mathcal{M}_X\}} \alpha_i v(C_i) + \sum_{\{i/C_i \in \mathcal{M}_Y\}} \beta_i v(C_i) \\
&= \int X dv + \int Y dv. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

Let $X, Y \in B_\infty^+(S, \mathcal{S})$ with X, Y comonotonic. From Proposition 3 we have $X + Y \in B_\infty^+(S, \mathcal{S})$. Fix $\lambda = \|X\|$ and $\mu = \|Y\|$. For all $n \in \mathbb{N}^*$, let $X_n = \sum_{k=0}^{2^n} \frac{\lambda}{2^n}.\{X \geq k\frac{\lambda}{2^n}\}^*$, and let $Y_n = \sum_{k=0}^{2^n} \frac{\mu}{2^n}.\{X \geq k\frac{\mu}{2^n}\}^*$. By construction, for all n, X_n is simple and $\mathcal{M}_X$-measurable, and Y_n is simple and $\mathcal{M}_Y$-measurable. $\mathcal{M}_X \cup \mathcal{M}_Y$ being a chain $\mathcal{M}_{X_n} \cup \mathcal{M}_{Y_n}$ is still a chain, thus X_n, Y_n are still comonotonic and by Proposition 3, $X_n + Y_n \in B_0^+(S, \mathcal{S})$. Thus $\int (X_n + Y_n) dv = \int X_n dv + \int Y_n dv$, for all n in $\mathbb{N}^*$. As $X_n \downarrow_P X$ and $Y_n \downarrow_P Y$, $(X_n + Y_n) \downarrow_P (X + Y)$ also. Finally, (b) implies $\int (X+Y) dv = \int X dv + \int Y dv$. □

A dual result exists for sequentially lower-continuous and comonotonically additive functionals. An appropriate change in the definition of $\mathcal{S}$-measurability is required. A function will be said to be $\mathcal{S}$-measurable if all upper-level sets belong to $\mathcal{S}$, that is, if for every t in $\mathbb{R}$, $\{X > t\}$ belongs to $\mathcal{S}$, where $\{X > t\}$ stands for the inverse image of $]t, +\infty[$ under X. Accordingly, weak inequalities in the integrand of the Choquet integral will be replaced by inequalities. All preliminary results of the previous section hold with appropriate changes.

Theorem 2 *Let I be a bounded functional on $B_\infty(S, \mathcal{S})$. Assume that I satisfies (a) comonotonic additivity and (b') sequential lower-continuity, then there is a unique lower-continuous game (with same bound) defined on $\mathcal{S}$ such that for all X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$ we have,*

$$I(X) = \int X dv = \int_{\mathbb{R}^+} v(\{X > t\}) d\lambda(t) + \int_{\mathbb{R}^-} (v(\{X > t\}) - v(S)) d\lambda(t) \qquad (1.13)$$

Conversely, if v is a bounded, lower-continuous game defined on $\mathcal{S}$, then the Choquet integral is a comonotonically additive, sequentially lower-continuous functional (with same bound) on $B_\infty(S, \mathcal{S})$.

Now if we consider X to be $\mathcal{S}$-measurable if for every t in $\mathbb{R}$, $\{X > t\}$ and $\{X \geq t\}$ belong to $\mathcal{S}$ we obtain as a corollary a characterization of comonotonically additive functionals which are sequentially upper and lower-continuous. The integrand of the Choquet integral in this case can contain indifferently inequalities or weak inequalities. Moreover as the integrand admits left and right limits at every point, the Lebesgue integral can be replaced by a Riemann integral.

Corollary 1 *Let I be a bounded functional on $B_\infty(S,\mathcal{S})$. Assume that I satisfies (a) comonotonic additivity, (b) sequential upper-continuity and (b') sequential lower-continuity, then there is a unique upper and lower-continuous game (with same bound) defined on $\mathcal{S}$ such that for all X in $B_\infty(S,\mathcal{S})$ we have,*

$$I(X) = \int X dv = \int_0^{+\infty} v(\{X \geq t\})dt + \int_{-\infty}^0 (v(\{X \geq t\}) - v(S))dt \tag{1.14}$$

Conversely, if v is a bounded, upper and lower-continuous game defined on $\mathcal{S}$, then the Choquet integral is a comonotonically additive, sequentially upper and lower-continuous functional (with same bound) on $B_\infty(S,\mathcal{S})$.

1.5 Some Preference Representation Theorems

We shall adopt Chateauneuf's (1994) setting, where utility of outcomes is supposed to be linear, and provide a representation theorem for preferences.

A binary relation $\succeq$ on $B_\infty(S,\mathcal{S})$ is said to be, *complete* if for all $(X,Y) \in B_\infty(S,\mathcal{S})^2$ we have $X \succeq Y$ or $Y \succeq X$; *transitive* if for all $(X,Y,Z) \in B_\infty(S,\mathcal{S})^3$ such that $X \succeq Y$ and $Y \succeq Z$ then $X \succeq Z$. A *weak order* $\succeq$ on $B_\infty(S,\mathcal{S})$ is a binary relation on $B_\infty(S,\mathcal{S})$ which is complete and transitive. We shall write $X \succ Y$ for $X \succeq Y$ and not$(Y \succeq X)$; $X \sim Y$ for $X \succeq Y$ and $Y \succeq X$.
For all X in $B_\infty(S,\mathcal{S})$, $I(X) \in \mathbb{R}$ is said to be the *certainty-equivalent* of X if $I(X)$ is the only real number such that $I(X).S^* \sim X$. Now we state some axioms that the binary relation may fulfill.

A.1 $\succeq$ *is a weak order.*

A.2 Continuity with respect to pointwise decreasing convergence :

A.2.1 $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S,\mathcal{S}), X_n \succeq Y, X_n \downarrow_P X) \Rightarrow (X \succeq Y)$, *A.2.2* $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S,\mathcal{S}), X_n \preceq Y, X_n \downarrow_P X) \Rightarrow (X \preceq Y)$.

A.3 $S^* \succ \emptyset^*$.

A.4 Comonotonic additivity :

$\forall X, Y, Z \in B_\infty(S,\mathcal{S})$ *pairwise comonotonic*, $(X \succeq Y) \Rightarrow (X + Z \succeq Y + Z)$.

A.5 Boundedness : $\exists\, m, M \in \mathbb{R} /\ \forall A \in \mathcal{S}, m.S^* \preceq A^* \preceq M.S^*$.

As a particular case, *A.4* states that if $Z = \delta.S^*$ with $\delta \in \mathbb{R}$ then an equivalence can be substituted for the implication. The following axiom states that $\succeq$ is compatible with the natural order on $\mathbb{R}$,

A.3 Constant monotonicity :* $\forall \alpha > \beta$, $\alpha.S^* \succ \beta.S^*$.

A.3 is particular case for *A.3**. We have a converse through the following lemma.

Lemma 4 *If* $\succeq$ *satisfies* A.1, A.2.1, A.3, A.4, *then* $\succeq$ *satisfies* A.3*.

Proof : It suffice to prove that for all $\delta > 0$, we have $\delta.S^* \succ \emptyset^*$.
For $\alpha > \beta$, put $\delta = \alpha - \beta$. We have $\delta.S^* \succ \emptyset^*$ and by *A.4*, $\alpha.S^* \succeq \beta.S^*$. Suppose $\alpha.S^* \sim \beta.S^*$, then by *A.4* adding $-\beta.S^*$ gives $(\alpha - \beta).S^* \sim \emptyset^*$, a contradiction. So $\alpha.S^* \succ \beta.S^*$.
Let us prove it for δ in $\mathbb{N}^*$. *A.3* says it holds for $\delta = 1$. Assume it holds for some $\delta \geq 1$, then by *A.4* $(\delta+1).S^* \succ \delta.S^*$ and $(\delta+1).S^* \succ \emptyset^*$ follows.
For $\delta \in \mathbb{Q}_*^+$, $\delta = \frac{p}{q}$ for some $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Suppose $\emptyset^* \succeq \delta.S^*$ then by *A.4* $\emptyset^* \succeq p.S^*$, which is impossible, so $\delta.S^* \succ \emptyset^*$ holds for $\delta \in \mathbb{Q}_*^+$. Indeed if $\emptyset^* \succeq \delta.S^*$ then by applying *A.4* q times gives, $\emptyset^* \succeq \delta.S^* \succeq 2\delta.S^* \succeq \ldots \succeq q\delta.S^* = p.S^*$. For $\delta \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \mathbb{Q}_*^+$, consider a decreasing sequence $(\delta_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{Q}_*^+$ that converges to δ. For N large enough, $\delta \geq \frac{1}{2^N}$. Hence for $n \geq N$, $\delta_n > \delta \geq \frac{1}{2^N}$. As $\delta_n - \frac{1}{2^N} \in \mathbb{Q}_*^+$ we have $(\delta_n - \frac{1}{2^N}).S^* \succ \emptyset^*$. So by *A.2.1*, $(\delta - \frac{1}{2^N}).S^* \succeq \emptyset^*$, and $\delta.S^* \succeq \frac{1}{2^N}.S^* \succ \emptyset^*$ follows by *A.4*. □

Proposition 5 *If* $\succeq$ *satisfies* A.1-A.4, *then every* X *in* $B_\infty(S,\mathcal{S})$ *admits a certainty-equivalent.*

Proof : At first, will prove that every X in $B_\infty^+(S,\mathcal{S})$ admits a certainty-equivalent, then by *A.4* this will hold for every X in $B_\infty(S,\mathcal{S})$.
We shall denote $I(X)$ the certainty-equivalent of X.

Let X be in $B_\infty^+(S,\mathcal{S})$, set $P(X) = \{\gamma \in \mathbb{R} / \gamma.S^* \succeq X\}$.

We state that $InfP(X)$ is the certainty-equivalent we are looking for.

• $P(X)$ is nonempty.
Otherwise, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X \succ n.S^*$ and by *A.4*, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}.X \succ S^*$; so by *A.2.1*, $\emptyset^* \succeq S^*$ which contradicts *A.3*. Indeed assume $\frac{1}{n}.X \preceq S^*$ then, $\frac{2}{n}.X \preceq S^* + \frac{1}{n}.X \preceq 2.S^*$, first by adding $\frac{1}{n}.X$ then S^* to $\frac{1}{n}.X \preceq S^*$.
Now take $p-1 < n$, suppose $\frac{p-1}{n}.X \preceq (p-1).S^*$. Adding $\frac{1}{n}.X$ gives $\frac{p}{n}.X \preceq (p-1).S^* + \frac{1}{n}.X$, and adding $(p-1).S^*$ to $\frac{1}{n}.X \preceq S^*$ gives $(p-1).S^* + \frac{1}{n}.X \preceq p.S^*$.
• $P(X)$ has a lower bound.
Let us show that $\exists M \in \mathbb{R}$ such that $X \succeq -M.S^*$ that is to say by *A.4* $X + M.S^* \succeq \emptyset^*$.
Suppose that $\forall M \in \mathbb{R}$, $X + M.S^* \prec \emptyset^*$. So for all $n \in \mathbb{N}^*$, we have $\frac{X}{n} + S^* \prec \emptyset^*$. Otherwise $\frac{X}{n} + S^* \succeq \emptyset^*$ entails after applying *A.4* n times $X + n.S^* \succeq (n-1).(\frac{X}{n} + S^*) \succeq \ldots \succeq \emptyset^*$.
Hence by *A.2.2*, $S^* \preceq \emptyset^*$, a contradiction.
$P(X)$ being nonempty and lower-bounded $I(X)$ is well defined.
It remains to show that $I(X)$ is the certainty-equivalent we are looking for.
For $n \in \mathbb{N}^*$, $I(X) + \frac{1}{n} \in P(X)$.
Otherwise $(I(X) + \frac{1}{n}).S^* \prec X$, but for all $\gamma \in P(X)$ we have $\gamma.S^* \succeq X$, hence $\gamma.S^* \succ (I(X) + \frac{1}{n}).S^*$, so by Lemma 4 $\gamma > I(X) + \frac{1}{n}$, that is $I(X) + \frac{1}{n}$ is a lower bound for $P(X)$ greater than $I(X)$ what is impossible. Now by *A.2.1*, $I(X).S^* \succeq X$ follows.
Suppose $I(X).S^* \succ X$. Take $X_n = X + \frac{1}{n}.S^*$ for $n \in \mathbb{N}^*$.
As $X_n \downarrow_P X$, by *A.2.1*, there is an N large enough such that $X_N \prec I(X).S^*$. So by *A.4*, $X \prec (I(X) - \frac{1}{N}).S^*$ (otherwise $X \sim (I(X) - \frac{1}{N}).S^*$ entails $X_N = X + \frac{1}{N}.S^* \sim I(X).S^*$), a contradiction.
We have proved that every X in $B^+_\infty(S, \mathcal{S})$ admits a certainty equivalent and that this certainty equivalent is precisely $InfP(X)$.
Let X be in $B_\infty(S, \mathcal{S}) \setminus B^+_\infty(S, \mathcal{S})$, fix $\underline{X} = \text{Inf X(S)}$.
$X - \underline{X}.S^*$ belongs to $B^+_\infty(S, \mathcal{S})$, so $X - \underline{X}.S^*$ admits a certainty equivalent. We have, $X - \underline{X}.S^* \sim I(X - \underline{X}.S^*).S^*$ and by *A.4*, $X \sim I(X - \underline{X}.S^*).S^* + \underline{X}.S^*$ that is, $X \sim (I(X - \underline{X}.S^*) + \underline{X}).S^*$. $\square$

In particular, it follows from Lemma 4 that for all γ in $\mathbb{R}$, $I(\gamma.S^*) = \gamma$.

Theorem 3 *A binary relation $\succeq$ on $B_\infty(S, \mathcal{S})$ satisfies* A.1-A.5 *if and only if there exists an upper-continuous bounded game v with $v(S) = 1$ such that every X in $B_\infty(S, \mathcal{S})$ has $\int X dv$ for certainty-equivalent.*

Proof : The (if) part is immediate.

According to Proposition 5, every X in $B_\infty(S,\mathcal{S})$ admits a certainty equivalent. Therefore if we prove that this certainty equivalent behaves as a comonotonically additive and sequentially upper-continuous bounded functional we may apply Theorem 1 and conclude.

Let X, Y in $B_\infty(S,\mathcal{S})$ be comonotonic.

As $X \sim I(X).S^*$, *A.4* entails, $X + Y \sim I(X).S^* + Y$;

and as $Y \sim I(Y).S^*$, by *A.4*, $Y + I(X).S^* \sim I(Y).S^* + I(X).S^*$;

hence $X + Y \sim I(X).S^* + I(Y).S^*$; so $I(X+Y) = I(X) + I(Y)$ holds and I is comonotonically additive.

Let $(X_n)_{n\geq 1}$ be a sequence in $B_\infty(S,\mathcal{S})$ such that $X_n \downarrow_P X$ where X is in $B_\infty(S,\mathcal{S})$. Take $\epsilon > 0$.

As previously shown, $I(X + \epsilon.S^*) = I(X) + I(\epsilon.S^*) = I(X) + \epsilon$.

So $X + \epsilon.S^* \succ X$. By *A.2.1*, $\exists N_1 / \forall n \geq N_1$, $X_n \prec X + \epsilon.S^*$; so $I(X_n) < I(X) + \epsilon$.

Likewise, $I(X - \epsilon.S^*) = I(X) - I(\epsilon.S^*) = I(X) - \epsilon$.

So $X - \epsilon.S^* \prec X$. By *A.2.2*, $\exists N_2 / \forall n \geq N_2$, $X_n \succ X - \epsilon.S^*$; so $I(X_n) > I(X) - \epsilon$.

Hence for $n \geq Max\{N_1, N_2\}$, $|I(X) - I(X_n)| < \epsilon$ holds and I is sequentially upper-continuous.

It remains to prove that I is bounded. Accordingly to Proposition 4 it is enough to prove that I is bounded on $\mathcal{S}^*$.

By *A.5*, $\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall A \in \mathcal{S}, m.S^* \preceq A^* \preceq M.S^*$. So $\forall A \in \mathcal{S}$, $m \leq I(A^*) \leq M$. In particular for $A = \emptyset$ we have, $m \leq 0 \leq M$, so $\|I\|_{\mathcal{S}^*} \leq Max\{-m, M\}$. □

In a similar fashion consider the dual version of *A.2*,

A'.2 Continuity with respect to pointwise increasing convergence :

A'.2.1 $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S,\mathcal{S}), X_n \preceq Y, X_n \uparrow_P X) \Rightarrow (X \preceq Y)$,

A'.2.2 $(\forall X_n, X, Y \in B_\infty(S,\mathcal{S}), X_n \succeq Y, X_n \uparrow_P X) \Rightarrow (X \succeq Y)$.

We obtain a dual form of Theorem 3, where the Choquet integral we are dealing with is the one involved in Theorem 2.

Theorem 4 *A binary relation $\succeq$ on $B_\infty(S,\mathcal{S})$ satisfies* A.1,A'.2,A.3-A.5 *if and only if there exists a lower-continuous bounded game v with $v(S) = 1$ such that every X in $B_\infty(S,\mathcal{S})$ has $\int X dv$ for certainty-equivalent.*

1.6 Conclusion

Our goal in this paper is to give an alternative approach to integral representation based on a monotonicity assumption. It appears that sequential continuity, a very natural condition in measure theory, can be such an alternative. Moreover games we are dealing with can take negative values, and accommodate violations of monotonicity.

References

Anscombe, F.J. and Aumann, R.J. , 1963, A Definition of Subjective Probability, Annals of Mathematical Statistics 34, 199-205.

Chateauneuf, A., 1994, Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral, Annals of Operations Research, 52, 3-20.

Choquet, G., 1953-1954, Théorie des capacités, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) 5, 131-295.

Dellacherie, C., 1970, Quelques commentaires sur le prolongement des capacités, Séminaires de Probabilités V, Strasbourg, Lectures Notes in Math., Vol. 191 (Springer Verlag, Berlin).

Denneberg, P., 1994, Non-Additive Measure and Integral (Kluwer, Dordrecht).

De Waegenaere A.M.B. and Wakker P.P., 2001, Nonmonotonic Choquet integrals, Journal of Mathematical Economics 36, 45-60.

Gilboa, I., 1987, Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities, Journal of Mathematical Economics 16, 65-88.

Gilboa,I., 1989, Expectation and Variation in Multi-Period Decisions, Econometrica 57, 1153-69.

Savage, L., 1954, The Foundations of Statistics (John Wiley, New-York).

Schmeidler, D., 1986, Integral Representation without Additivity, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.97, No. 2, 255-261.

Schmeidler, D., 1989, Subjective Probability and Expected Utility without Additivity, Econometrica 57, 571-587.

Shalev, J., 1997, Loss Aversion in a Multi-Period Model, Mathematical Social Sciences 33, 203-226.

Wakker, P.P., 1989, Additive Representations of Preferences, A New Foundation of Decision Analysis (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht).

Wakker, P.P., 1993, Unbounded Utility for Savage's "Foundations of Statistics", and other models, Mathematical Operations Research 18, 446-86.

Chapitre 2

Some characterizations of non-additive multi-periodic models [1]

Abstract

Building upon the works of Gilboa (1989), Shalev (1997) and De Waegenaere and Wakker (2001), we show that a simple version of variation aversion, jointly with a myopia axiom allows to derive in an infinite setting a meaningful expression for evaluating income streams. Furthermore, we prove that the usual additive discounted expectation introduced by Koopmans (1972) can be accommodated in a non-additive way.

Keywords : Variation aversion, myopia, discounted expectation, Schmeidler's model, Möbius inverse.

JEL Classification : D80, D90.

2.1 Introduction

Most of the models that aim at representing preferences over income streams are based on an independence axiom, for instance the discounted utility expectation (DEU) axiomatized in Koopmans (1972) is the reference to evaluate income streams. In the simpler case where utility is linear in outcomes such an axiom becomes an additivity axiom. This

[1]Ce chapitre est constitué d'un article écrit avec Alain Chateauneuf. Il a été présenté au *Bocconi's Centenial : Income Distribution and Welfare* à Milan (mai 2002). Il fait l'objet d'une contribution au programme communautaire *LivinTax (Living standards, Inequality and Taxation)* et a été présenté dans ce cadre au quatrième meeting à Lübeck (septembre 2002).

axiom has since been challenged in the field of decision theory under uncertainty, and new tools have been developed to restrict the range of additivity (Schmeidler (1986)).
If our concern is preferences over sequences of outcomes it seems that the particular structure of time should be taken into account. Indeed the independence between two distinct time periods is questionable, in particular for two successive periods. Therefore some complementarity across successive periods should be integrated in the evaluation function.
We first describe the setting, then building upon Gilboa (1989), Shalev (1997) and De Waegenaere and Wakker (2001) we introduce the way how can complementarities be taken into account. In section 4 we provide an axiomatization in finite horizon. Then via a myopia axiom we derive in section 5 a tractable formula in the infinite case. Strengthening the myopia axiom we obtain in section 6 a truncated horizon, where the finiteness of the horizon is determined solely in a subjective way. Section 7 provides a generalization of the discounted expectation and examine the close relationship of the generalized discounted expectation and the classical discounted expectation. All the proofs are gathered in the Appendix.

2.2 The setting

Let $S = \mathbb{N}$ or $[[0, n]]$ for $n \in \mathbb{N}$, where $[[a, b]] = [a, b] \cap \mathbb{N}$. S is interpreted as a set of dates, and 0 as the present, the horizon is either finite if $S = [[0, n]]$, or infinite if $S = \mathbb{N}$. $B_\infty(S)$ denotes the set of bounded real-valued functions defined on S, and represents sequence of consequences that a D.M. will have to rank, one can also give a welfarist approach, where a social planner has to evaluate streams of incomes (e.g. gross income per capita) .

We assume that preferences of the D.M. over $B_\infty(S)$ are given through a binary relation $\succeq$ on $B_\infty(S)$. $\succeq$ is said to be, *complete* if for all $x, y \in B_\infty(S)$ we have $x \succeq y$ or $y \succeq x$; *transitive* if for all $x, y, z \in B_\infty(S)$ such that $x \succeq y$ and $y \succeq z$ then $x \succeq z$. A *weak order* $\succeq$ on $B_\infty(S)$ is a binary relation on $B_\infty(S)$ which is complete and transitive. We shall write $x \succ y$ for $x \succeq y$ and not$(y \succeq x)$; $x \sim y$ for $x \succeq y$ and $y \succeq x$.
For all $x \in B_\infty(S)$, $I(x) \in \mathbb{R}$ is said to be the *constant equivalent* of x if $I(x)$ is the only real number such that $I(x).S^* \sim x$, where S^* is the characteristic function of S.
Some axioms are now introduced in order to obtain the existence of a constant equivalent $I(x)$ for all $x \in B_\infty(S)$ which *represents* $\succeq$ i.e. $\forall\, x, y \in B_\infty(S),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)$.

A.1. $\succeq$ *is a weak order.*

A.2. (Monotonicity.) $S^* \succ \emptyset^*$, $\forall\ x, y \in B_\infty(S), (x \geq y) \Rightarrow (x \succeq y)$.

A.3. (Constant additivity.) $\forall\ x, y \in B_\infty(S), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$(x \succeq y) \Rightarrow (x + \alpha.S^* \succeq y + \alpha.S^*)$

A.4. $\succeq$ *is Archimedian.* $\forall\ x \in B_\infty(S), x\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*,\ \exists\ \alpha(\substack{> \\ <})0\ /\ x\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \alpha.S^*\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*$.

A.1 is a standard axiom, A.2 discards the case where $\succeq$ ranks all profiles as indifferent. A.3 is the axiom that implies linearity in outcomes, in fact a two way implication holds, A.4 guarantees that there is enough room in $\mathbb{R}$ to rank all the profiles, and is a weaker condition than the uniform continuity. Indeed A.4 can be restated in equivalent forms as follows,

A.4'. $\forall\ x \in B_\infty(S), x\ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n\geq 0}\ (\substack{\downarrow \\ \uparrow})\ 0,\ \exists N\ /\ \alpha_N.S^*\ (\substack{\prec \\ \succ})\ x$,

or,

A.4" $\forall\ x \in B_\infty(S), x\ (\substack{\succeq \\ \preceq})\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n\geq 0}\ (\substack{\downarrow \\ \uparrow})\ 0, [(\forall n \in \mathbb{N}, x(\substack{\preceq \\ \succeq})\alpha_n.S^*) \Rightarrow x \sim \emptyset^*]$ (where $\downarrow$ stands for non-increasing).

Clearly A.4" is a restricted version of uniform continuity.

We can notice that if $\succeq$ satisfies A.1-A.3 then $\succeq$ is compatible with the natural ordering in $\mathbb{R}$,

Lemma 1 *If* $\succeq$ *satisfies A.1-A.3 then,* $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha > \beta) \iff (\alpha.S^* \succ \beta.S^*)$.

We can obtain a representation of the preferences $\succeq$,

Proposition 1 *A preference relation* $\succeq$ *satisfies A.1-A.4 if and only if there exists a unique* $I : B_\infty(S) \to \mathbb{R}$ *with* $I(S^*) = 1$ *such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(S),\ x \sim I(x).S^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(S),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\ ;$$
$$(iii)\ \forall x, y \in B_\infty(S),\ x \geq y \Rightarrow I(x) \geq I(y)\ ;$$
$$(iv)\ \forall x, y \in B_\infty(S), \forall \alpha \in \mathbb{R},\ I(x + \alpha.S^*) = I(x) + \alpha.$$

Moreover I *is uniformly continuous.*

2.3 Multi-periodic model

Usual models of representation of $\succeq$ are based on additivity, where no complementarity across time can be considered. In term of preferences it is embodied in the following axiom, *A.5*. (Additivity)* $\forall x, y, z \in B_\infty(S),\ (x \sim y) \Rightarrow (x + z \sim y + z)$.

A.5* stipulates that if a DM is indifferent between x and y then adding z to both of them will not affect the indifference. A.1-A.4, A.5* gives for constant equivalent an expectation with respect to an additive (not necessarily σ-additive) probability. However this axiom does not take into account complementarities across time between the successive periods, for example a DM could be indifferent between $x = (1, 2 + \epsilon)$ and $y = (2, 1)$ for some $\epsilon > 0$, that is $p_0 = p_1(1 + \epsilon)$, now adding $z = (0, 1)$ could produce $(1, 3 + \epsilon) \prec (2, 2)$ where $y + z$ guarantees at least 2 across all periods, that is $p_1(1 + \epsilon) < p_0$ what is impossible.

A typical function that takes into account the complementarity between time periods 0 and 1 is $\phi_0 : (x_0, x_1) \mapsto m_0x_0 + m_1x_1 + (1 - m_0 - m_1)\mathrm{Min}\{x_0, x_1\}$, where m_0, m_1 are non-negative and $m_0 + m_1 < 1$. This function is *superadditive* i.e. $\forall x, y \in, \phi_0(x + y) \geq \phi_0(x) + \phi_0(y)$. In order to obtain an equality x, y have to be chosen carefully. It turns out that $\phi_0(x + y) = \phi_0(x) + \phi_0(y)$ if and only if $(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \geq 0$. Preferences that can be represented by ϕ_0 are compatible with the previous example.

Following Shalev (1997) and De Waegenaere and Wakker (2001) let us say that x, y are *sequentially comonotonic* (s.c.) if $\forall\ n, n + 1 \in S,\ (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) \geq 0$. Now we introduce in our framework a simple version of a related axiom in Gilboa (1989),

A.5. (Variation aversion) $\forall x, y, z \in B_\infty(S),\ \{y, z\} s.c.,$
$(x \sim y) \Rightarrow (x + z \succeq y + z)$.

Notice that additivity is kept only for profiles which do not alter the complementarities, since if $\{x, z\}$ and $\{y, z\}$ are s.c. then $(x \sim y) \Longrightarrow (x + z \sim y + z)$. On the other hand smoothing two successive incomes can be considered as an improvement by the D.M., in other words if $\{y, z\}$ are s.c. but not $\{x, z\}$ then $x + z \succ y + z$ may be obtained.

2.4 Multi-periodic model with finite horizon

We consider the finite case where $S = [[0, n]]$, therefore $B_\infty(S)$ can be identified with $\mathbb{R}^{n+1}$. Under the axioms A1.-A.5 we get a specific function that evaluates every profile according to the DM preferences.

Theorem 1 *Let $\succeq$ be a preference relation on $\mathbb{R}^{n+1}$, $\succeq$ satisfies A.1-A.5 if and only if there exists $m_0, \ldots, m_n, m_{0,1}, \ldots, m_{n-1,n} \geq 0$ uniquely determined with $\sum_{i=0}^{n} m_i +$*

$\sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1} = 1$ *such that,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \sim I(x).[[0,n]]^* \,;$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\,;$$

where,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1},\ I(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i.x_i + \sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1}.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}. \tag{2.1}$$

From equation (1) the DM exhibits a markhovian behavior, the impact of each time-component in the evaluation depends on the previous time-component. The evaluation of each income stream is composed of an additive part, i.e. $\sum_{i=0}^{n} m_i.x_i$, and a markhovian part, i.e.$\sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1}.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}$ where each time component x_{i+1} is in complementarity with the time component x_i.
(1) can be rewritten as $\sum_{i=0}^{n-1}(m_i.x_i + m_{i,i+1}.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}) + m_n x_n$. Letting $p_i = m_i + m_{i,i+1}, \forall i \in \{0, n-1\}$ and $p_n = m_n$, , we obtain

$$I(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(\alpha_i.x_i + (1-\alpha_i).\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}) + p_n x_n,$$

where $\alpha_i = \frac{m_i}{p_i}$, if $p_i > 0$ and α_i any number in $[0,1]$ otherwise. Thanks to this formula, the D.M. valuation of an income stream can be meaningfully interpreted as the one of an additive D.M. who dislikes decreasingness of his next income when compared to his present one, and who would replace in such a case his present income by a time-depending convex combination of these two successive incomes.

Note that formula (1) is another expression of previous formulas obtained by De Waegenaere and Wakker (2001) in our framework and Gilboa (1989), Shalev (1997) in an "Anscombe-Aumann" setting.
De Waegenaere and Wakker's formula :

$$I(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \tau_i (x_{i-1} - x_i)^+$$

Gilboa's formula :

$$I(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i |x_i - x_{i-1}|$$

Shalev's formula :

$$I(x) = a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - x_{i-1})^+ + \sum_{i=1}^{n} b_i (x_i - x_{i-1})^-$$

For $z \in \mathbb{R}$, $z^+ = \mathrm{Max}(0, z)$, $z^- = \mathrm{Min}(0, z)$. These formulas can be retrieved from formula (1) by setting :

for $i = 0, \ldots, n$	and	for $j = 1, \ldots, n$
$\lambda_i = m_i + m_{i,i+1}$		$\tau_j = m_{j-1,j}$
$p_i = m_i + \frac{m_{i-1,i}}{2} + \frac{m_{i,i+1}}{2}$		$\delta_j = -\frac{m_{j-1,j}}{2}$
$a_i = \sum_{k=i}^{n}(m_k + m_{k,k+1})$		$b_j = \sum_{k=j}^{n}(m_k + m_{k-1,k})$

where $m_{-1,0} = m_{n,n+1} = 0$.

Now we examine the impact of *time impatience* (Mas-Colell-Whinston-Green, Chapter 20) i.e.advancing of income streams is always beneficial ; $\forall x \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $(x_0, \ldots, x_n) \succeq (0, x_0, \ldots, x_{n-1})$. We get,

Proposition 2 *Under A.1-A.5, a preference $\succeq$ is impatient if and only if $\forall i \in [[0, n-1]],\ \{i\}^* \succeq \{i+1\}^*$ and $\forall i \in [[0, n-2]],\ \{i, i+1\}^* \succeq \{i+1, i+2\}^*$.*

Corollary 1 *Under A.1-A.5, a preference $\succeq$ is impatient if $m_i \geq m_{i+1}, \forall i \in [[0, n-1]]$ and $m_{i,i+1} \geq m_{i+1,i+2}, \forall i \in [[0, n-2]]$.*

2.5 Multi-periodic model with infinite horizon

We shall now consider $S = \mathbb{N}$. In order to get a neat expression of equation (1) we need to impose a continuity axiom. Such axiom can in fact be stated in term of myopia, in the spirit of Brown-Lewis (1981) and Prescott-Lucas(1972).

A.6. (Myopia) $\forall x \in B_\infty^+(\mathbb{N}), \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x^{\epsilon,n} \succ x$ where $x_i^{\epsilon,n} = x_i + \epsilon$, if $i \in [[0, n]]$ and 0 if $i > n$.

A DM that exhibits myopia is willing to give up his future outcomes for some steady improvement in the short run as soon as the future "starts" late enough. Note that our axiom of myopia plays the role of the explicit (time) continuity axioms A7 (resp. TC) that can be found in Gilboa (1989) (resp. Shalev (1997)). Under A.1-A.4 the scope of application of A.6 can be widened,

Proposition 3 *Under A.1-A.4, if A.6 holds then* $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x^{\epsilon,n} \succ x$

In other words, consider $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ and $\epsilon > 0$. Under A.1-A.4, $x + \epsilon.\mathbb{N}^* \succ x$ holds, what A.6 states is that the truncation of $x + \epsilon.\mathbb{N}^*$ of order n, namely $x^{\epsilon,n}$ is still preferred to x if n is large enough, this is precisely what Prescott-Lucas(1972) imposes on the preferences.

We can extend equation (1) to the infinite case where the sums are absolutely convergent series.

Theorem 2 *Let* $\succeq$ *be a preference relation on* $B_\infty(\mathbb{N})$ *,* $\succeq$ *satisfies A.1-A.6 if and only if there exists* $(m_n)_{n\geq 0}, (m_{n,n+1})_{n\geq 0}$ *uniquely determined with* $m_n, m_{n,n+1} \geq 0$ *and* $\sum_{n=0}^{\infty} m_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1} = 1$ *such that,*

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\ ;$$

where,

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1}.\text{Min}\{x_n, x_{n+1}\}. \tag{2.2}$$

(2) can be rewritten and admits a similar interpretation as for the finite horizon. Set $p_n = m_n + m_{n,n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, and $\alpha_n = \frac{m_n}{p_n}$, if $p_n > 0$ and α_n any number in $[0, 1]$ otherwise, we have ;

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n[\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)\text{Min}\{x_n, x_{n+1}\}].$$

Note that again from formula (2), the infinite versions of Gilboa's and Shalev's formulas can be retrieved in a similar way as for formula (1).
Such a DM is *impatient* if, $\forall x \in B^+_\infty(\mathbb{N})$, $(x_0, \ldots, x_n, \ldots) \succeq (0, x_0, \ldots, x_n, \ldots)$. We have,

Proposition 4 *Under A.1-A.6, a preference* $\succeq$ *is impatient if and only if* $\forall n \in \mathbb{N},\ \{n\}^* \succeq \{n+1\}^*$ *and* $\{n, n+1\}^* \succeq \{n+1, n+2\}^*$.

Corollary 2 *Under A.1-A.6, a preference* $\succeq$ *is impatient if* $(m_n)_n$ *and* $(m_{n,n+1})_n$ *are non-increasing.*

2.6 Truncated time horizon

Following Olson-Bailey (1981), some individuals make no concern of the future, for instance it may be difficult for them to consider their lives beyond a certain date. This attitude can be translated in a strengthened version of A-6,

A.6. (Rough Myopia)* $\exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ x \in B_\infty^+(\mathbb{N}), \forall\ \epsilon > 0,\ x^{\epsilon,N} \succ x$

With such a behavior the DM has a subjective finite horizon in mind,

Theorem 3 *Let $\succeq$ be a preference relation on $B_\infty(\mathbb{N})$, $\succeq$ satisfies A.1-A.6* if and only if there exists $m_0, \ldots, m_N, m_{0,1}, \ldots, m_{N-1,N} \geq 0$ uniquely determined with $\sum_{n=0}^{N} m_n + \sum_{n=0}^{N-1} m_{n,n+1} = 1$ such that,*

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\ ;$$

where,

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), I(x) = \sum_{n=0}^{N} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{N-1} m_{n,n+1}.\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}. \tag{2.3}$$

Moreover, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (x_0, \ldots, x_N, 0, \ldots)$.

Under A.1-A.6*, a preference $\succeq$ is impatient if and only if $\forall n \in [[0, N-1]],\ \{n\}^* \succeq \{n+1\}^*$ and $\forall n \in [[0, N-2]], \{n, n+1\}^* \succeq \{n+1, n+2\}^*$. where N is determined by A.6*.

Corollary 3 *Under A.1-A.6*, a preference $\succeq$ is impatient if $m_n \geq m_{n+1}, \forall n \in [[0, N-1]]$ and $m_{n,n+1} \geq m_{n+1,n+2}, \forall i \in [[0, N-2]]$.*

2.7 Generalized discounted expectation

In the context of a multi-periodic model the usual additive functional is the discounted expectation i.e. there is a *discount factor* $\delta \in (0, 1)$ such that every $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ has for constant-equivalent $(1-\delta)x_0 + (1-\delta)\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n x_n$. This particular functional axiomatized by Koopmans(1972) is obtained via a *stationarity* and a *sensitivity* axiom,

(Stationarity) $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, (x \succeq y) \iff ((\alpha, x) \succeq (\alpha, y))$

where (α, x) is the shifted profile x starting with α and, *(Sensitivity)* $\exists\, x \in B_\infty(\mathbb{N}), \exists\, y_0 \in \mathbb{R},\ /\ x \not\sim (y_0, x_1, x_2, \ldots)$

This further specification of the model requires that the present should be taken into account. Under A.3 it can be stated equivalently, $\exists\, x \in B_\infty(\mathbb{N})\ /\ x \not\sim (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Furthermore if A.4 is satisfied, $x \succ (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, if $x_0 > 0$ or $x \prec (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, if $x_0 < 0$. This suggests the following *sensitivity* axiom ;

A.7. (Sensitivity) $\mathbb{N}_0^* \prec \mathbb{N}^*$.

Where $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \ldots\}$.

We introduce here a weakened version of stationarity in order to obtain a generalized non-additive discounted expectation with a discount factor δ allowed to equal 0.

A.8. (Conditional Stationarity) $\forall x, y \in B_\infty^+(\mathbb{N}), (x \sim y) \Rightarrow ((0, x) \sim (0, y))$.

Proposition 5 *Assume $\succeq$ is represented by equation (2), then $(i), (ii), (iii)$ are equivalent, $(i) : \exists\, x \in B_\infty(\mathbb{N})\ /\ x \not\sim (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $(ii) : \mathbb{N}_0^* \prec \mathbb{N}^*$, $(iii) : m_0 + m_{0,1} > 0$.*

Theorem 4 *Let $\succeq$ be a preference relation on $B_\infty(\mathbb{N})$, $\succeq$ satisfies A.1-A.8 if and only if there exists $\alpha \in [0, 1], \delta \in [0, 1)$ uniquely determined such that,*

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^* ;$$
$$\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y) ;$$

where, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N})$,

$$I(x) = (1-\delta)[\alpha(x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n x_n) + (1-\alpha)(\mathrm{Min}\{x_0, x_1\} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\})]. \quad (2.4)$$

Moreover $\forall x \in B_\infty^+(\mathbb{N}), (0, x) \sim \delta.x$.

Re-writing (4) gives,

$$I(x) = (1-\delta)[\alpha x_0 + (1-\alpha)\mathrm{Min}\{x_0, x_1\} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n (\alpha x_n + (1-\alpha)\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\})].$$

Corollary 4 *In Theorem 4, $\delta = 0 \iff \mathbb{N}_0^* \sim \emptyset^*$.*

Corollary 5 *In Theorem 4, $\alpha = 1 \iff \succeq$ satisfies A.5*.*

Corollary 6 *If $\succeq$ satisfies A.1-A.8 then $\succeq$ satisfies impatience.*

There is an intimate connection between the generalized discounted expectation (G.D.E.) and the discounted expectation (D.E.) when they share the same discount factor. Let us denote Δ the probability with discount factor δ (i.e. $\Delta(\{0\}) = 1-\delta, \Delta(\{n\}) = (1-\delta)\delta^n, \forall n \geq 1$), and E^Δ the expectation with respect to Δ. Define $I^{\alpha,\delta}$ according to equation (4), and an *expectation* E as a positive normalized(i.e.$E(\mathbb{N}^*) = 1$) linear functional.

Proposition 6 *Let* $\delta \in [0,1)$ *and* $\alpha \in [0,1]$ *we have,*
(i) Let $\gamma \in [0,1)$, $\;I^{\alpha,\delta} \leq E^\Gamma \iff \gamma = \delta$
(ii) If $\alpha < 1$ *and* $\delta > 0$*, then* $\forall\ x \in B_\infty(\mathbb{N})$,
$I^{\alpha,\delta}(x) = E^\Delta(x) \iff (x_n)_n$ *is non-decreasing.*
(iii) Let E *be an expectation, then* $(E(x) = I^{\alpha,\delta}(x), \forall (x_n)_n$ *non-decreasing*$) \iff E = E^\Delta$.

$(i), (ii)$ states that the D.E. E^Δ always majorizes the G.D.E. $I^{\alpha,\delta}$, and they equate only on non-decreasing profile when $\alpha < 1$ and $\delta > 0$. Now if a profile is not non-decreasing the G.D.E. will give a lower evaluation than the D.E. this is due to the variation averse property of the G.D.E.. (i) also states that there is one and only one discounted expectation that majorizes a G.D.E., this is precisely the D.E. with the same discount factor. (iii) insures that the only expectation that extends the G.D.E. from the non-decreasing sequences to $B_\infty(\mathbb{N})$ is precisely the D.E., such property is useful if one treats non-decreasing profiles as optimal.

2.8 Concluding comments

In this paper we aimed at showing that simple axioms can model pertinent deviations from additivity when evaluating income streams. Building upon the works of Gilboa (1989), Shalev (1997), De Waegenaere and Wakker (2001), we introduced in our framework a simple version of variation aversion, which jointly with a myopia axiom allowed us to derive in an infinite setting what we hope to be a meaningful expression of an earlier model introduced in an Anscombe-Aumann setting by Gilboa (1989) and revisited by Shalev (1997). Finally we proved that the usual additive discounted expectation initialized by Koopmans (1972) can therefore be accommodated in a non-additive way. In a future paper we intend to adapt our axioms to the Anscombe-Aumann setting. Another goal would be to model more general variation aversion behaviors, through the use of more general belief functions than those considered here.

2.9 Appendix

Proof of Lemma 1 :

For $n \in \mathbb{N}_0 = \{1, \ldots\}$, $\frac{1}{n}.S^* \succ \emptyset^*$. Otherwise $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}_0$ s.t. $\frac{1}{n_0}.S^* \preceq \emptyset^*$ and by A.3 $\frac{2}{n_0}.S^* \preceq \frac{1}{n_0}.S^* \preceq \emptyset^*$ and by induction $S^* = \frac{n_0}{n_0}.S^* \preceq \ldots \preceq \emptyset^*$, a contradiction. Now for $p, q \in \mathbb{N}_0$, $\frac{p}{q}.S^* \succeq \frac{1}{q}.S^* \succ \emptyset^*$. For $\epsilon \in \mathbb{R}_*^+$, $\exists\ \epsilon_0 \in \mathbb{Q}_*^+ \ /\ \epsilon > \epsilon_0 > 0$, hence by A.2, $\epsilon.S^* \succeq \epsilon_0.S^* \succ \emptyset^*$. Now for $\alpha > \beta$, put $\epsilon = \alpha - \beta$, so $\epsilon.S^* \succ \emptyset^*$ and A.3 gives $\alpha.S^* \succ \beta.S^*$.
$\square$

Proof of Proposition 1 :

(only if)

Let $x \in B_\infty(S)$, set $P(x) = \{\gamma \in \mathbb{R}\ /\ \gamma.S^* \succeq x\}$. We shall prove that $I(x) = \mathrm{Inf}P(x)$ is the constant equivalent we are looking for.

First consider $x \geq 0$. By A.2, $\|x\|_\infty.S^* \succeq x$ so $P(x) \neq \emptyset$. As $x \geq 0$, $x \succeq \emptyset^*$ thus $\forall \gamma \in P(x), \gamma.S^* \succeq \emptyset^*$ hence $\gamma \geq 0$ by Lemma 1, and $P(x)$ is bounded from below. Therefore $\mathrm{Inf}P(x)$ does exist.

Let $\alpha_n \downarrow \alpha,\ \alpha_n \in P(x)$. Suppose $\alpha \notin P(x)$ then $\alpha.S^* \prec x$, that is by A.3, $\emptyset^* \prec x - \alpha.S^*$. As $\alpha_n - \alpha \downarrow 0$ by A.4 $\exists\ n_0\ /\ \emptyset^* \prec (\alpha_{n_0} - \alpha).S^* \prec x - \alpha.S^*$ thus $\alpha_{n_0}.S^* \prec x$ a contradiction. So $\mathrm{Inf}P(x) \in P(x)$ i.e. $I(x).S^* \succeq x$. Assume now that $I(x).S^* \succ x$ then by A.3 $\emptyset^* \succ x - I(x).S^*$ hence by A.4, $\exists\ \alpha < 0\ /\ \emptyset^* \succ \alpha.S^* \succ x - I(x).S^*$, then by A.3 $(\alpha + I(x)).S^* \succ x$ hence $\alpha + I(x) \in P(x)$ but $\alpha < 0$ and this contradicts the minimality of $I(x)$.

Now take $x \in B_\infty(S)$ with $\underline{x} = Inf x < 0$. We have $x - \underline{x}.S^* \geq 0$, so $x - \underline{x}.S^* \sim I(x - \underline{x}.S^*).S^*$, thus by A.3, $x \sim (I(x - \underline{x}.S^*) + \underline{x}).S^*$. But $P(x - \underline{x}.S^*) = P(x) - \underline{x}$, hence $P(x)$ admits a minimum and $I(x) = \mathrm{Min}P(x) = I(x - \underline{x}.S^*) + \underline{x}$, so $x \sim I(x).S^*$. In particular from Lemma 1, $I(S^*) = 1$.

Let $x, y \in B_\infty(S),\ x \geq y$ then $P(x) \subset P(y)$ so $I(x) \geq I(y)$, and I is monotonic. Let $x \in B_\infty(S), \alpha \in \mathbb{R}$. $x \sim I(x).S^*$ thus $x + \alpha.S^* \sim (I(x) + \alpha).S^*$, but $x + \alpha.S^* \sim I(x + \alpha.S^*).S^*$, hence by Lemma 1, $I(x + \alpha.S^*) = I(x) + \alpha$.

For $x \succeq y$, $P(x) \subset P(y)$ so $I(x) \geq I(y)$. If $I(x) \geq I(y)$ then by A.2 $I(x).S^* \geq I(y).S^*$ but $z \sim I(z).S^*$, for $z = x, y$, so $x \succeq y$. Suppose $\exists\ J : B_\infty(S) \to \mathbb{R}$ such that

$\forall x \in B_\infty(S), x \sim J(x).S^*$, as $x \sim I(x).S^*$, we have $J(x).S^* \sim I(x).S^*$ and by Lemma 1, $J(x) = I(x)$.
Let $(x^n)_n$ converge uniformly to x, let $\epsilon > 0$, then $\exists N$ s.t. $\forall n \geq N$, $\forall s \in S$, $|x^n(s) - x(s)| \leq \epsilon$, hence by A.2, $I(x - \epsilon.S^*) \leq I(x^n) \leq I(x + \epsilon.S^*)$ that is $I(x) - \epsilon \leq I(x^n) \leq I(x) + \epsilon$. Therefore I is uniformly continuous.
(if)
A.1 follows from (ii).
Putting $x = \emptyset^*$ and $\alpha = 1$, (iv) gives $I(\emptyset^*) = 0$, so $S^* \succ \emptyset^*$ by (ii), and from (iii) we get A.2. A.3 follows from (iv), and we obtain A.4 by taking $\alpha = \frac{I(x)}{2}$. □

In order to prove Theorem 1, we shall first provide a functional version of it and then use this functional theorem to establish the proof. Some definitions are therefore needed. Consider $I : B_\infty(S) \to \mathbb{R}$ a functional, let us say that I is,
monotonic if $\forall x, y \in B_\infty(S), (x \geq y) \Rightarrow (I(x) \geq I(y))$;
superadditive if $\forall x, y \in B_\infty(S), I(x + y) \geq I(x) + I(y)$;
sequentially comonotonic additive if $\forall x, y \in B_\infty(S), \{x, y\}$ s.c. then $I(x+y) = I(x)+I(y)$.
Let us introduced some material that will be useful to our functional theorem, x, y are said to be *comonotonic* if $\forall i, j \in [[0, n]]$ $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$. Let I be a functional on $\mathbb{R}^{n+1}$, I is said to be *comonotonic additive* if $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, x, y$ comonotonic then $I(x + y) = I(x) + I(y)$.
From Schmeidler (1986), we have the following characterization,

Theorem :(Schmeidler (1986)) *Let $I : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ be a functional with $I([[0, n]]^*) = 1$, if I is monotonic and comonotonic additive, define a* capacity *$v : \mathcal{P}([[0, n]]) \to [0, 1]$ by $v(A) = I(A^*)$ then $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$,*

$$I(x) = x_{(0)} + (x_{(1)} - x_{(0)})v(\{(1), \ldots, (n)\}) + \ldots + (x_{(n)} - x_{(n-1)})v(\{(n)\})(*)$$

where $x_{(0)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ is the non-decreasing arrangement of x.
Conversely, let v be a capacity i.e.$v(\emptyset) = 0, v([[0, n]]) = 1$ and $\forall A \subset B \subset [[0, n]], v(A) \leq v(B)$, then the functional defined by $(*)$ is monotonic, comonotonic additive and satisfies $I([[0, n]]^*) = 1$.

The quantity $(*)$ is called the *Choquet integral* of x w.r.t.v and written $\int x dv$. In particular if v is a probability $(*)$ gives the standard expectation. Furthermore if v is a capacity on $[[0,n]]$, we can define a unique set-function m on $\mathcal{P}([[0,n]])$ such that $\forall A \in \mathcal{P}([[0,n]]), v(A) = \sum_{B \subset A} m(B)$, m is known as the Möbius inverse of v. From Chateauneuf and Jaffray (1989), we have a tractable way to compute the Choquet integral.

Theorem :(Chateauneuf-Jaffray (1989)) *Let $v : \mathcal{P}([[0,n]]) \to [0,1]$ be a capacity and m its Möbius inverse, then $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$ we have ;*

$$\int x dv = \sum_{\emptyset \neq A \subset [[0,n]]} m(A).\text{Min } x(A).$$

We can state the functional theorem,

Theorem A : *Let $I : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ be a functional such that $I([[0,n]]^*) = 1$.*
I is (i) monotonic, (ii) superadditive, (iii) sequentially comonotonic additive, if and only if there exists $m_0, \ldots, m_n, m_{0,1}, \ldots, m_{n-1,n} \geq 0$ uniquely determined with $\sum_{i=0}^{n} m_i + \sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1} = 1$ such that,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1},\ I(x) = \sum_{i=0}^{n} m_i.x_i + \sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1}.\text{Min}\{x_i, x_{i+1}\}. \tag{2.5}$$

Proof : (if) Let $i \in [[0, n-1]]$, consider, $\phi_i : (x_i, x_{i+1}) \mapsto \text{Min}\{x_i, x_{i+1}\}$, ϕ_i is monotonic and superadditive. Let x, y s.c., if $y_i = y_{i+1}$ then $\text{Min}\{x_i+y_i, x_{i+1}+y_{i+1}\} = \text{Min}\{x_i, x_{i+1}\}+ y_i$, if $y_i > (<) y_{i+1}$ by s.c. $x_i \geq (\leq) x_{i+1}$, hence $\text{Min}\{x_i + y_i, x_{i+1} + y_{i+1}\} = x_{i+1} + y_{i+1}$ $(= x_i + y_i) = \text{Min}\{x_i, x_{i+1}\} + \text{Min}\{y_i, y_{i+1}\}$. For $m_i, m_{i,i+1} \geq 0$, I satisfies $(i) - (iii)$.
(only if)
I is s.c. additive thus it is also comonotonic additive, let v be the capacity associated to I and m its Möbius inverse, then

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n+1},\ I(x) = \int x dv = \sum_{\emptyset \neq A \subset [[0,n]]} m(A).\text{Min } x(A).$$

It is enough to show that the Möbius inverse will do the job.
We shall first show that $m(A) = 0$, if $|A| \geq 3$ or if $A = \{i, j\}$ with $|i - j| \geq 2$ where $|A|$ is the cardinal of A. In order to gain some clarity we shall make a slight abuse of notation writing $m(i_1, \ldots, i_l)$ for $m(\{i_1, \ldots, i_l\})$, and $v(i_1, \ldots, i_l)$ for $v(\{i_1, \ldots, i_l\})$.
1^{st}case : $A = \{i, j\}$ with $|i - j| \geq 2$.
$\{i\}^*, \{j\}^*$ are s.c., hence $m(i,j) = v(i,j) - m(i) - m(j) = I(\{i,j\}^*) - I(\{i\}^*) - I(\{j\}^*) = 0$.

<u>2^{nd}case :</u> $|A| = 3$.

a) $A = \{i, j, k\} = \{i, i+1, i+2\}$.

We have, $\int \{i\}^* + 2.\{i+1\}^* + \{i+2\}^* dv = v(i, i+1) + v(i+1, i+2)$ as $\{i, i+1\}^*, \{i+1, i+2\}^*$ are s.c.. Similarly, $\int \{i\}^* + 2.\{i+1\}^* + \{i+2\}^* dv = v(i, i+1, i+2) + v(i+1)$ as $\{i+1\}^*, [[i, i+2]]^*$ are s.c.. Now equalizing the right members we obtain $m(i, i+1, i+2) = 0$.

b) $A = \{i, j, k\} = \{i, i+1, k\}$, avec $i+2 < k$.

$v(i, i+1, k) = \int \{i, i+1, k\}^* dv = \int \{i, i+1\}^* dv + \int \{k\}^* dv$, as $\{i, i+1\}^*, \{k\}^*$ are s.c..

And, $v(i, i+1, k) = m(i) + m(i+1) + m(k) + m(i, i+1) + m(i, k) + m(i+1, k) + m(i, i+1, k) = m(i) + m(i+1) + m(k) + m(i, i+1) + m(i, i+1, k)$, according to the 1^{st} case.

c) $A = \{i, j, k\} = \{i, j, j+1\}$, with $i+1 < j$: idem, since $\{i\}^*, \{j, j+1\}^*$ are s.c..

d) $A = \{i, j, k\}$, with $i < i+1 < j < j+1 < k$.

$v(i, j, k) = m(i) + m(j) + m(k) + m(i, j, k)$, because $|j-i|, |k-i|, |k-j| \geq 2$. And $v(i, j, k) = \int \{i, j, k\}^* dv = v(i) + v(j) + v(k)$, because $\{\{i\}^*, \{j, k\}^*\}$ and $\{\{j\}^*, \{k\}^*\}$ are s.c.. Thus $m(i, j, k) = 0$.

<u>3^{rd}case :</u> $3 < |A| \leq n$.

We assume that it holds for all A with $3 \leq |A| \leq k-1 < n$. Let us prove that it holds for A with cardinality k.

a) A is an interval.

$A = \{i, \ldots, i+(k-1)\}$.

We have, $\int \{i\}^* + 2.\{i+1\}^* + \{i+2\}^* + \ldots + \{i+(k-1)\}^* dv = \int \{i, i+1\}^* dv + \int [[i+1, i+(k-1)]]^* dv$, because $\{i, i+1\}^*, [[i+1, i+(k-1)]]^*$ are s.c..

Similarly, $\int \{i\}^* + 2.\{i+1\}^* + \{i+2\}^* + \ldots + \{i+(k-1)\}^* dv = v([[i, i+(k-1)]]) + v(i+1)$, because $[[i, i+(k-1)]]^*, \{i+1\}^*$ are s.c..

Now equalizing, we obtain

$[m(i) + m(i+1) + m(i, i+1)] + [m(i+1) + \ldots + m(i+(k-1)) + m(i+1, i+2) + \ldots + m(i+k-2, i+k-1)] = [m(i) + \ldots + m(i+(k-1)) + m(i, i+1) + \ldots + m(i+k-2, i+k-1) + m([[i, i+k-1]])] + m(i+1)$, hence $m([[i, i+k-1]]) = 0$.

b) A is not an interval.

A can be decomposed into maximal intervals , that is to say

$A = [[i_1, j_1]] \cup \ldots \cup [[i_l, j_l]]$, with $2 \leq l \leq k$ and , $i_2 - j_1, \ldots, i_l - j_{l-1} \geq 2$.

As $[[i_m, j_m]]^*, \sum_{l'=m+1}^{l} [[i_{l'}, j_{l'}]]^*$ are s.c. for any $m \in [[1, l-1]]$, we get :

$v(A) = v([[i_1, j_1]]) + \ldots + v([[i_l, j_l]])$, and by induction hypothesis, $v(A) = \sum_{i \in [[i_1, j_1]]} m(i) + \sum_{i \in [[i_1, j_1 - 1]]} m(i, i+1) + \ldots + \sum_{i \in [[i_l, j_l]]} m(i) + \sum_{i \in [[i_l, j_l - 1]]} m(i, i+1)$.

We also have, $v(A) = \sum_{i\in A} m(i) + \sum_{i,i+1\in A} m(i,i+1) + m(A)$, by induction hypothesis. Now if $i \in [[i_{l'}, j_{l'}]]$ for some $l' = 1, \ldots, l$ and if $i+1 \in A$ then $i+1 \in [[i_{l'}, j_{l'}]]$(because $j_{l'} + 1 \notin A$).
So, $\sum_{i,i+1\in A} m(i,i+1) = \sum_{i\in[[i_1,j_1-1]]} m(i,i+1) + \ldots + \sum_{i\in[[i_l,j_l-1]]} m(i,i+1)$, hence $m(A) = 0$.
We now take $m_i = m(i), \forall i \in [[0,n]]$ and $m_{i,i+1} = m(i,i+1), \forall i \in [[0,n-1]]$.
From (i), $m_i = I(\{i\}^*) \geq I(\emptyset^*) = 0$, and from (ii), $I(\{i,i+1\}^*) \geq I(\{i\}^*) + I(\{i+1\}^*)$, hence $m_{i,i+1} \geq 0$. $\square$

Proof of Theorem 1 :
(only if)
$\succeq$ satisfies A.1-A.4 then according to Proposition 1, $\exists! I : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ monotonic functional such that $I([[0,n]]^*) = 1$ which represents $\succeq$. Let $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, then $x \sim I(x).[[0,n]]^*$ holds , as $I(x).[[0,n]]^*, y$ are s.c., A.5 gives $x + y \succeq I(x).[[0,n]]^* + y$, and $y \sim I(y).[[0,n]]^*$ so by A.3 $y + I(x).[[0,n]]^* \sim (I(x) + I(y)).[[0,n]]^*$, hence $I(x+y) \geq I(x) + I(y)$ i.e. I is superadditive. Let $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ be s.c., $x \sim I(x).[[0,n]]^*$, and A.3 gives $x + I(y).[[0,n]]^* \sim (I(x) + I(y)).[[0,n]]^*$, as $y \sim I(y).[[0,n]]^*$, x, y s.c. and $x, I(y).[[0,n]]^*$ s.c. A.5 entails $I(x+y).[[0,n]]^* \sim x + y \sim x + I(y).[[0,n]]^*$ so by Lemma 1, $I(x+y) = I(x) + I(y)$. I satisfies $(i) - (iii)$ of Theorem A and so we conclude.
(if)
From Proposition 1, only A.5 remains to be checked. Let $x, y, z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\{y, z\}$ s.c. and $x \sim y$. $x \sim y$ entails that $I(x) = I(y)$, hence $I(x) + I(z) = I(y) + I(z)$. From (iii) of Theorem A comes $I(y) + I(z) = I(y+z)$, and from (ii) of Theorem A comes $I(x+z) \geq I(x) + I(z)$, hence $I(x+z) \geq I(y+z)$ and therefore $x + z \succeq y + z$. $\square$

Proof of Proposition 2 :
(only if) is immediate.
(if) Under A.1-A.5, $\succeq$ can be represented accordingly to Theorem 1.
Let $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, $\exists \gamma_k \geq 0, C_k \subset [[0,n]]$ with $C_1 \subset \ldots \subset C_K$ s.t. $x = \sum_{k=1}^K \gamma_i.C_k^*$, and $(0, x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{k=1}^K \gamma_k.(C_k+1)^*$ where $C_k + 1 = \{k+1 : k \in C_k, k \in [[0,n-1]]\}$.
It suffices to prove that $\forall k, v(C_k) \geq v(C_k+1)$, where v is the capacity associated to the functional I which represents $\succeq$. By s.c. additivity it is sufficient to show it for intervals, i.e. $\forall i \leq j,\ v([[i,j]]) \geq v([[i,j]]+1)$. That is $\forall i \leq j, m_i + m_{i,i+1} \geq m_{j,j+1} + m_{j+1}$, which is equivalent $\forall i \in [[0,n-1]], m_i \geq m_{i+1}$ and $\forall i \in [[0,n-2]], m_i + m_{i,i+1} \geq m_{i+1,i+2} + m_{i+2}$,

thus $\forall i \in [[0,n-1]],\ \{i\}^* \succeq \{i+1\}^*$ and $\forall i \in [[0,n-2]],\ \{i,i+1\}^* \succeq \{i+1,i+2\}^*$ is sufficient. $\square$

Proof of Corollary 1 :
Immediate from the necessary and sufficient condition $m_i \geq m_{i+1}, \forall i \in [[0,n-1]]$ and $m_i + m_{i,i+1} \geq m_{i+1,i+2} + m_{i+2}, \forall i \in [[0,n-2]]$. $\square$

Proof of Proposition 3 :
Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$. If $x \geq 0$, we are done. Suppose $\underline{x} = Inf x < 0$. We have $x - \underline{x}.\mathbb{N}^* \geq 0$, let $\epsilon > 0$, so by A.6, $\exists\ n \ /\ \forall\ n \geq N, (x - \underline{x}.\mathbb{N}^*)^{\epsilon,n} \succ x - \underline{x}.\mathbb{N}^*$ that is $(x_0 - \underline{x} + \epsilon, \ldots, x_n - \underline{x} + \epsilon, 0, \ldots) \succ x - \underline{x}.\mathbb{N}^*$, by A.3 we have
$(x_0 + \epsilon, \ldots, x_n + \epsilon, \underline{x}, \ldots) \succ x$. But $\underline{x} < 0$, so by A.2, $(x_0 + \epsilon, \ldots, x_n + \epsilon, 0, \ldots) \succeq (x_0 + \epsilon, \ldots, x_n + \epsilon, \underline{x}, \ldots)$, hence $x^{\epsilon,n} \succ x$, for $n \geq N$. $\square$

In order to prove Theorem 2, we shall first extend the functional version of Theorem A to the case $S = \mathbb{N}$ and then use this functional theorem to establish the proof. Some continuity condition is therefore needed. Consider $I : B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ a functional, let us say that I is *truncation-continuous* if $\forall x \in B^+_\infty(\mathbb{N})$, $\lim_\infty I(x^n) = I(x)$, where $x^n = (x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots)$.

Theorem B : *Let $I : B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ be a functional such that $I(\mathbb{N}^*) = 1$.*
I is (i) monotonic, (ii) superadditive, (iii) sequentially comonotonic additive,
(iv) truncation-continuous if and only if there exists $(m_n)_{n\geq 0}, (m_{n,n+1})_{n \geq 0}$ uniquely determined with m_n , $m_{n,n+1} \geq 0$ and $\sum_{n=0}^\infty m_n + \sum_{n=0}^\infty m_{n,n+1} = 1$ such that,

$$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1}.\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}. \tag{2.6}$$

Proof : (only if)
Let $N \in \mathbb{N}$, set $B_N = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ /\ x_m = 0, m \geq N+1\}$ and $B^+_N = \{x \in B_N \ /\ x \geq 0\}$. Define $I_N = I_{|B^+_N}$, by construction I_N is monotonic, superadditive, s.c.additive on B^+_N. Now define $\forall x \in \mathbb{R}^{N+1}_+,\ J_N(x_0, \ldots, x_N) = I_N(x_0, \ldots, x_N, 0, \ldots)$. J_N is also monotonic, superadditive, s.c.additive on $\mathbb{R}^{N+1}_+$ ($x, y \in B^+_N$ are s.c. iff $(x_0, \ldots, x_N), (y_0, \ldots, y_N)$ are s.c.). According to Theorem A, there exists $m^N_0, \ldots, m^N_n, m^N_{0,1}, \ldots, m^N_{n-1,n} \geq 0$ uniquely

determined with $\sum_{i=0}^{n} m_i^N + \sum_{i=0}^{n-1} m_{i,i+1}^N = I([[0,N]]^*)$ such that,

$$\forall x \in B_N^+,\ I_N(x) = \sum_{i=0}^{N} m_i^N.x_i + \sum_{i=0}^{N-1} m_{i,i+1}^N.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}.$$

As $\forall N, \forall M > N, I_N = I_{M|B_N^+}$, hence $m_i^N = m_i^M$ for $i = 0, \ldots, N$ and $m_{i,i+1}^N = m_{i,i+1}^M$ for $i = 0, \ldots, N-1$. Fix $m_n = m_n^n$ and $m_{n,n+1} = m_{n,n+1}^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, hence $m_n,\ m_{n,n+1} \geq 0$.
I satisfies (iv), so $1 = I(\mathbb{N}^*) = \lim_{+\infty} I([[0,N]]^*) = \lim_{+\infty} \sum_{i=0}^{N} m_i + \sum_{i=0}^{N-1} m_{i,i+1} = \sum_{n=0}^{\infty} m_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1}$.
So $(m_n)_{n\geq 0}, (m_{n,n+1})_{n\geq 0}$ are absolutely convergent series.
Let $x \in B_\infty^+(\mathbb{N})$, then $(\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\})_{n\geq 0} \in B_\infty^+(\mathbb{N})$, we have
$I(x) = \lim_{+\infty} I(x^N) = \lim_{+\infty} \sum_{i=0}^{N} m_i.x_i + \sum_{i=0}^{N-1} m_{i,i+1}.\mathrm{Min}\{x_i, x_{i+1}\}$
$= \sum_{n=0}^{\infty} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1}.\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}$.
Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ with $\underline{x} = \mathrm{Inf}\, x < 0$. $I(x) = I(x - \underline{x}.\mathbb{N}^*) + I(\underline{x}.\mathbb{N}^*)$, as $I(\underline{x}.\mathbb{N}^*) = \underline{x}$, and $\mathrm{Min}\{x_n - \underline{x}, x_{n+1} - \underline{x}\} = \mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\} - \underline{x}, \forall\ n$; we get $I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1}.\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}$.
(if)
One can check easily $(i) - (iv)$. $\square$

Proof of Theorem 2 :
(if) follows from Theorem B.
(only if)
If $\succeq$ satisfies A.1-A.6, according to Proposition 1 there exists a unique $I : B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ with $I(S^*) = 1$ such that, (i) $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*$; (ii) $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)$ and (iii) $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \geq y \Rightarrow I(x) \geq I(y)$ hold. Hence I is monotonic.
Let $x, y \in B_\infty(\mathbb{N})$ be s.c.. As $x \sim I(x).\mathbb{N}^*$, by A.5 $x + y \sim I(x).\mathbb{N}^* + y$, as $y \sim I(y).\mathbb{N}^*$, we get by A.3, $I(x).\mathbb{N}^* + y \sim (I(x) + I(y)).\mathbb{N}^*$, hence $I(x+y) = I(x) + I(y)$. Now consider $x, y \in B_\infty(\mathbb{N})$, $x \sim I(x).\mathbb{N}^*$ so by A.5 $x + y \succeq I(x).\mathbb{N}^* + y$, and $y \sim I(y).\mathbb{N}^*$ so by A.3 $I(x).\mathbb{N}^* + y \sim (I(x) + I(y)).\mathbb{N}^*$, hence $I(x+y) \geq I(x) + I(y)$ i.e. I is superadditive. It remains to prove that I is truncation-continuous.
Let x be in $B_\infty^+(\mathbb{N})$ and $\epsilon > 0$, by A.6, $\exists\ N \ /\ \forall\ n \geq N, x^{\epsilon,n} \succ x$, hence $I((x_0 + \epsilon, \ldots, x_n + \epsilon, 0, \ldots)) > I(x)$, so from Proposition 1, $(x_0 + \epsilon, \ldots, x_n + \epsilon, 0, \ldots) \leq x^n + \epsilon.\mathbb{N}^*$ implies $I((x_0 + \epsilon, \ldots, x_n + \epsilon, 0, \ldots)) \leq I(x^n) + \epsilon$ and therefore $\epsilon > I(x) - I(x^n) \geq 0$. i.e. I is truncation-continuous. We can now apply Theorem B. $\square$

Proof of Proposition 4 :

(only if) is immediate.

(if) Under A.1-A.6, $\succeq$ can be represented accordingly to Theorem 2.

Let $x \in B^+_\infty(\mathbb{N})$, according to Proposition 2, $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \succeq (0,x)^n$, thus $I(x^n) \geq I((0,x)^n)$ and by truncation-continuity $I(x) \geq I((0,x))$ follows. $\square$

Proof of Corollary 2 :

Immediate. $\square$

Proof of Theorem 3 :

(if) immediate.

(only if)

From Theorem 2 there exists $(m_n)_{n\geq 0}, (m_{n,n+1})_{n\geq 0}$ with $m_n, m_{n,n+1} \geq 0$ and $\sum_{n=0}^\infty m_n + \sum_{n=0}^\infty m_{n,n+1} = 1$ such that, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*$; where, $I(x) = \sum_{n=0}^\infty m_n.x_n + \sum_{n=0}^\infty m_{n,n+1}.\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}$.

Let $\epsilon > 0$. For $n > N$, $(\{n\}^*)^{\epsilon,N} \succ \{n\}^*$, hence $\epsilon \geq I(\epsilon.[[0,N]]^*) > I(\{n\}^*) = m_n$, so $m_n = 0$. Similarly, for $n > N$, $(\{n,n+1\}^*)^{\epsilon,N} \succ \{n,n+1\}^*$, hence $\epsilon \geq I(\epsilon.[[0,N]]^*) > I(\{n,n+1\}^*) = m_n + m_{n,n+1} + m_{n+1} = m_{n,n+1}$, so $m_{n,n+1} = 0$. Finally, $(\{N,N+1\}^*)^{\epsilon,N} \succ \{N,N+1\}^*$, gives $\epsilon + m_N \geq I((\{N,N+1\}^*)^{\epsilon,N}) > m_N + m_{N,N+1} + m_{N+1}$, so $m_{N,N+1} = 0$. $\square$

Proof of Corollary 3 :

Immediate. $\square$

Proof of Proposition 5 :

$(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ is immediate.

It remains to prove $(i) \Rightarrow (iii)$. Assume $x_0 > 0$, then $x \succ (0, x_1, x_2, \ldots)$ hence $m_0x_0 + m_{0,1}\mathrm{Min}\{x_0, x_1\} > m_{0,1}\mathrm{Min}\{0, x_1\}$. If $x_1 \geq x_0$ it turns out $(m_0 + m_{0,1})x_0 > 0$, hence $m_0 + m_{0,1} > 0$. If $x_0 > x_1 > 0$, then $m_0x_0 + m_{0,1}x_1 > 0$ so $m_0 > 0$ or $m_{0,1} > 0$. If $x_1 \leq 0$, then $m_0x_0 > 0$, hence $m_0 > 0$.

Assume $x_0 < 0$, then $x \prec (0, x_1, x_2, \ldots)$ hence $m_0x_0 + m_{0,1}\mathrm{Min}\{x_0, x_1\} < m_{0,1}\mathrm{Min}\{0, x_1\}$. If $x_1 \leq x_0$, then $m_0x_0 < 0$ thus $m_0 > 0$. If $x_0 < x_1 < 0$, then $m_0x_0 + m_{0,1}x_0 < m_{0,1}x_1 \leq 0$ thus $m_0 + m_{0,1} > 0$. If $0 \leq x_1$, then $m_0x_0 + m_{0,1}x_0 < 0$ thus $m_0 + m_{0,1} > 0$. $\square$

Proof of Theorem 4 :

(only if)

If $\succeq$ satisfies A.1-A.6, according to Theorem 2 there exists $(m_n)_{n\geq 0}, (m_{n,n+1})_{n\geq 0}$ with $m_n, m_{n,n+1} \geq 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} m_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1} = 1$ such that,
$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*$and $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)$ where, $I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n.x_n + \sum_{n=0}^{\infty} m_{n,n+1}.\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}$.
Let $x \in B_\infty^+(\mathbb{N})$. We have $I(x) \geq 0$, and $x \sim I(x).\mathbb{N}^*$ so by A.8 we get $(0, x) \sim (0, I(x), I(x), \ldots)$, hence $I((0, x)) = (1 - m_0 - m_{0,1})I(x)$. Now set $\delta = 1 - m_0 - m_{0,1}$, we have $I((0, x)) = \delta I(x)$. From A.7, $\delta < 1$ obtains, hence $\delta \in [0, 1)$. We have proved that for all $x \in B_\infty^+(\mathbb{N})$ it holds that $(0, x) \sim \delta.x$, since the Choquet integral is positively homogeneous.
Now $\{0\}^* \geq 0$ entails $\{1\}^* \sim \delta.\{0\}^*$ hence $m_1 = m_0\delta$, and by induction $m_n = m_0\delta^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Similarly, $\{0, 1\}^* \geq 0$ entails $\{1, 2\}^* \sim \delta.\{0, 1\}^*$ and $m_{1,2} = \delta.m_{0,1}$, and by induction $m_{n,n+1} = m_{0,1}\delta^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Now putting $\alpha = m_0/(m_0 + m_{0,1})$ does the work.
(if) immediate. □

Proof of Corollary 4 :

Immediate from $\delta = 0 \iff 1 - m_0 - m_{0,1} = 0$. □

Proof of Corollary 5 :

Immediate, since A.5* implies additivity. □

Proof of Corollary 6 :

Immediate from $\delta \in [0, 1)$. □

Proof of Proposition 6 :

Let $\mathcal{C}(v) = \{P : P$ probability / $P \geq v\}$ be the *Core* of v, where $v(A) = I^{\alpha,\delta}(A^*), \forall A \subset \mathbb{N}$.
(i) We first prove $(\Leftarrow)$.
Immediate from $\alpha x_n + (1 - \alpha)\mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\} \leq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$(\Rightarrow)$ Let $\gamma \in [0, 1)$. Denote Γ the probability with discount factor γ. Assume $\Gamma \in \mathcal{C}(v)$.
$\Gamma([[1, \infty[[) = \gamma \geq v([[1, \infty[[) = \delta$, hence $\gamma \geq \delta$.
Let us show that $\gamma > \delta$ is impossible.
$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma([[0, n]]) = 1 - \gamma^{n+1} \geq v([[0, n]]) = 1 - \delta^n + \alpha\delta^n(1 - \delta)$, hence $\delta^n(1 - \alpha(1 - \delta)) \geq$

γ^{n+1}. Since $\gamma > \delta$ implies $\gamma > 0$, it comes $(\frac{\delta}{\gamma})^n(1-\alpha(1-\delta)) \geq \gamma$, and $(\frac{\delta}{\gamma})^n$ tends toward 0, leads to a contradiction.

(ii) Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$. $E^\Delta(x) - \int x dv = (1-\delta)(1-\alpha)[(x_0 + \sum_{n=1}^\infty \delta^n x_n) - \mathrm{Min}\{x_0, x_1\} + \sum_{n=1}^\infty \delta^n \mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\}]$. Thus, $E^\Delta(x) - \int x dv = 0$ is equivalent to $\forall n \in \mathbb{N}, x_n - \mathrm{Min}\{x_n, x_{n+1}\} = 0$ i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ is non-decreasing.

(iii) Let E be an expectation, $(\Leftarrow)$ follows from (ii). Let us prove $(\Rightarrow)$.

$E = \int(.)dp$ for some probability p on $\mathbb{N}$. For $m \in \mathbb{N}$, $[[m,\infty[[^*$ is a non-decreasing function, hence $p([[m,\infty[[) = E([[m,\infty[[^*) = I^{\alpha,\delta}([[m,\infty[[^*) = v([[m,\infty[[)$. So $p(\{m\}) = p([[m,\infty[[) - p([[m+1,\infty[[) = v([[m,\infty[[) - v([[m+1,\infty[[) = (1-\delta)\delta^m$, we obtain, $p = \Delta$. $\square$

References

Brown, D. and Lewis, L., 1981, Myopic economic agents, Econometrica 49, 359-368.

Chateauneuf, A., 1994, Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral, Annals of Operations Research, 52, 3-20.

Chateauneuf, A. and Jaffray, J-Y., 1989, Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion, Mathematical Social Sciences 17, 263-283.

De Waegenaere A.M.B. and Wakker P.P., 2001, Nonmonotonic Choquet integrals, Journal of Mathematical Economics 36, 45-60.

Gilboa,I., 1989, Expectation and Variation in Multi-Period Decisions, Econometrica 57, 1153-69.

Koopmans, T.C., 1972, Representations of preference orderings over time. In : McGuire, C.B., Radner, R. (Eds.), Decision and Organization, North-Holland, Amsterdam, pp. 79-100.

Mas-Colell, A., Whinston, M. and Green, J., 1995, Microeconomic Theory, Oxford University Press, New York.

Olson, M. and Bailey, M., 1981, Positive time preference, Journal of Political Economy 89, 1-25.

Prescott, E. and Lucas, R., 1972, A note on price systems in infinite dimensional space, International Economic Review 13, 416-422.

Schmeidler, D., 1986, Integral Representation without Additivity, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.97, No. 2, 255-261.

Shalev, J., 1997, Loss Aversion in a Multi-Period Model, Mathematical Social Sciences

33, 203-226.

Chapitre 3

A Yosida-Hewitt decomposition for totally monotone games [1]

Abstract

We first prove for totally monotone games defined on the set $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ of the subsets of $\mathbb{N}$, a similar decomposition theorem to the famous Yosida-Hewitt's one for finitely additive measures. As a byproduct we both derive for σ-continuous belief functions on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a natural and simple generalization of the Möbius inverse and of a related tractable formula for the Choquet integral.

Keywords : Choquet's integral representation theorem, Yosida-Hewitt decomposition, totally monotone games, Möbius inverse.

JEL Classification : D80.

3.1 Introduction

Among other merits the classical Yosida Hewitt (1952) decomposition theorem allows to separate the σ-additive component of a finitely additive measure from its "pathological" pure part. In some applications as additive (resp. non-additive) valuation of denumerable income streams, σ-additivity of a measure (resp. σ-continuity of a belief function) interprets easily in terms of myopia or impatience (see Brown and Lewis (1981) (resp. Chateauneuf and Rébillé (2002))). This raises the question of knowing if at least on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, some Yosida Hewitt's decomposition theorem could be obtained for totally mo-

[1] Ce chapitre est constitué d'un article écrit avec Alain Chateauneuf.

notone games. The structure of the paper is as follows. Section 2 introduces the needed preliminary material, including the Choquet's integral representation theorem. In section 3 we state and prove for totally monotone games on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a natural generalization of the Yosida Hewitt decomposition theorem for finitely additive measures from which we retrieve the classical one. In section 4 we then derive for σ-continuous belief functions on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a natural and simple generalization of the Möbius inverse and equally of a related tractable formula for the Choquet integral.

3.2 Definitions, notations and preliminary results

Let $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ denote the set of all subsets of $\mathbb{N}$.

A real valued set function v on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is said to be a *game* if $v(\emptyset) = 0$. A game is said to be *monotone* if $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \supset B \Rightarrow v(A) \geq v(B)$; hence v is *non-negative* i.e. $v \geq 0$. A non-negative game v is said to be a *(finitely additive) measure* if $\forall A, B \subset \mathbb{N}, A \cap B = \emptyset,\ v(A \cup B) = v(A) + v(B)$. If furthermore $v(\mathbb{N}) = 1$, v is a *probability*. A measure is said to be σ-*additive* if $\forall\ \{A_n\}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, with $A_n \cap A_m = \emptyset$, when $m \neq n,\ v(\cup_n A_n) = \sum_n v(A_n)$.

Given an integer $K \geq 2$ a game v is said to be *monotone of order* K if $\forall A_1, \ldots, A_K \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), v(\cup_{k=1}^K A_k) \geq \sum_{\{I : \emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,K\}\}} (-1)^{|I|+1} v(\cap_{k\in I} A_k)$, where $|I|$ denotes the cardinal of I.

If a game v is monotone and monotone of order K for all $K \geq 2$, v is said to be totally monotone. If furthermore $v(\mathbb{N}) = 1$, v is a *belief function*. In particular a measure is a totally monotone game.

A game v is said to be σ-continuous if for all non-decreasing sequences A_n of subsets of $\mathbb{N}$, $\lim_\infty v(A_n) = v(\cup_n A_n)$ and for all non-increasing sequences B_n of subsets of $\mathbb{N}$, $\lim_\infty v(B_n) = v(\cap_n B_n)$. If v is a measure, then σ-continuity is equivalent to σ-additivity. From Rosenmüller (1972), we know that if v is monotone of order 2, then v is σ-continuous as soon as v is *continuous at* $\mathbb{N}$ i.e. for all non-decreasing sequences A_n of subsets of $\mathbb{N}$ such that $\cup_n A_n = \mathbb{N}$, $\lim_\infty v(A_n) = v(\mathbb{N})$.

A measure p is said to be *pure* if $\forall \mu$ σ-additive measure, $0 \leq \mu \leq p \Rightarrow \mu = 0$.

We recall Yosida-Hewitt (1952) decomposition theorem for measures.

Theorem :(Yosida-Hewitt) *Let v be a measure then there exists a unique pair of measures (v_1, v_2) with v_1 σ-additive and v_2 pure such that $v = v_1 + v_2$.*

Let $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ denote the finite subsets of $\mathbb{N}$, then pure measures on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ can be characterized (see Aliprantis-Border (1999)),

Theorem : *Let p be a measure then, p is pure if and only if $p_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$.*

Since we wish to extend Yosida-Hewitt decomposition to totally monotone games we need to define what we mean by a pure totally monotone game.

A totally monotone game v is said to be *pure* if $\forall\ \nu$ σ-continuous totally monotone game, $0 \leq \nu \leq v \Rightarrow \nu = 0$.

For $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$ let u_A be the *unanimity* game on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ defined by $u_A(B) = 1$ if and only if $A \subset B$, $u_A(B) = 0$ otherwise, then similarly to pure measures we obtain,

Lemma 1 *Let v be a totally monotone game on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ then v is pure if and only if $v_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$.*

Proof : (only if) Let ν be a σ-continuous totally monotone game, $\nu \leq v$. For all $n \in \mathbb{N}$, $\nu([[0,n]]) \leq v([[0,n]]) = 0$, thus $\nu(\mathbb{N}) = 0$.

(if) Assume there exists $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ such that $v(A) > 0$. Consider $\nu = v(A).u_A$ then $\nu \leq v$, ν is a σ-continuous totally monotone game and $\nu \neq 0$, so v is not pure. □

In order to obtain a proof of our decomposition theorem for totally monotone games we shall use the following version of Choquet's integral representation theorem (see Lusky-Fuchsteiner(1981) p.268). For this we recall the setting.

Let K be a nonempty compact convex subset of a locally convex Hausdorff vector space E. Denote by $A(K)$ the space of affine continuous functions on K. A function φ is said to be *affine* if $\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1]$,

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

A point $x \in K$ is said to be an *extreme point* of K if $\forall\ y, z \in K, \forall \lambda \in]0,1[, x = \lambda y + (1-\lambda)z \Rightarrow x = y = z$. Denote $ex(K)$ the set of extreme points of K.

Theorem : (Choquet) *For every $x \in K$, there is a σ-additive probability m_x on $ex(K)$ (with respect to the smallest σ-algebra making all elements of $A(K)_{|ex(K)}$ measurable) such that for all $h \in A(K)$:*

$$h(x) = \int_{ex(K)} h_{|ex(K)} dm_x$$

Let S be a nonempty set. A family $\mathcal{F}$ of subsets of S is said to be a *filter* (see e.g. Aliprantis-Border (1999) p. 31) if,

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}, S \in \mathcal{F}$,

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(S), [A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}]$,

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(S), [B \supset A, A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F}]$.

Let $\mathcal{F}$ be a filter on $\mathbb{N}$, define the *filter game* $u_{\mathcal{F}}$,

$$u_{\mathcal{F}}(B) = \begin{cases} 1, & \text{if } B \in \mathcal{F} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It turns out (see Choquet (1953) pages 260-261), that for K the set of belief functions on $\mathcal{P}(S)$, one obtains that the set $ex(K)$ of extreme points of K consists of the filter games, in other words of the two-valued belief functions, those that take only the values zero and one.

Finally we prove :

Lemma 2 *Let $u_{\mathcal{F}}$ be a filter game on $\mathbb{N}$, then the following assertions are equivalent,*

(i) *$u_{\mathcal{F}}$ is σ-continuous,*

(ii) *$u_{\mathcal{F}}$ is a unanimity game u_A for some nonempty finite subset A in $\mathbb{N}$.*

Proof : $(ii) \Rightarrow (i)$. According to Rosenmüller (1972) it is sufficient to check the continuity at $\mathbb{N}$. Let $A_n \uparrow \mathbb{N}$, since A is finite, then there exists N large enough such that $A \subset A_N$. Hence $u_A(A_n) = 1$ $\forall n \geq N$, and therefore u_A is continuous at $\mathbb{N}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. We have $\lim_\infty u_{\mathcal{F}}([[0, n]]) = 1$, hence there exists N large enough such that, $|u_{\mathcal{F}}([[0, N]]) - 1| < \frac{1}{2}$. But $u_{\mathcal{F}}$ is $\{0, 1\}$-valued, hence $u_{\mathcal{F}}([[0, N]]) = 1$.

Therefore, there exists B finite $\subset \mathbb{N}$ such that $B \in \mathcal{F}$.

Let $n_0 = \text{Min}\{|B|, B \text{ finite} \in \mathcal{F}\}$, and choose $A \in \mathcal{F}$ such that $|A| = n_0$. It remains to prove that $B \supset A$, for any $B \in \mathcal{F}$. Let $B \in \mathcal{F}$, since $B \cap A \in \mathcal{F}$, and $B \cap A \subset A$, $|B \cap A| \geq n_0 = |A|$ gives the result : $B \supset A$. □

Lemma 3 *Let $u_{\mathcal{F}}$ be a filter game on $\mathbb{N}$, and A be a nonempty finite subset of $\mathbb{N}$, then the following assertions are equivalent :*

(i) *$u_{\mathcal{F}}(A) = 1$,*

(ii) *$u_{\mathcal{F}} = u_B$, where B is a nonempty subset of A.*

Proof : $(ii) \Rightarrow (i)$. Immediate.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Let $n_0 = \text{Min}\{|B|, B \text{ finite} \in \mathcal{F}\}$ and choose $B \in \mathcal{F}$ such that $|B| = n_0$. Hence as for $(i) \Rightarrow (ii)$ of Lemma 2, we obtain $u_{\mathcal{F}} = u_B$. □

3.3 Decomposition of belief functions

Theorem 1 *Let v be a totally monotone game on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ then there exists a unique pair of totally monotone games (v_1, v_2) with v_1 σ-continuous and v_2 pure such that $v = v_1 + v_2$.*

Proof : If $v(\mathbb{N}) = 0$ it is immediate. Without loss of generality we will assume that v is a belief function i.e. $v(\mathbb{N}) = 1$.
Denote by E the linear space of games on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ where $\forall v, w \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), (v+w)(A) = v(A) + w(A)$ and $(\lambda.v)(A) = \lambda v(A)$. Let us endow E with the topology of point-wise convergence, for which a local base at $v_0 \in E$ consists of sets of the form $B(v_0; A_1, \ldots, A_n; \epsilon) = \{v \in E, |v(A_i) - v_0(A_i)| < \epsilon \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$, where $A_i \subset \mathbb{N}$ for $1 \leq i \leq n$ and $\epsilon > 0$. If we call this topology the $\mathcal{E}$-topology on E, it is standard that under this topology the vector space E becomes a locally convex and Hausdorff topological vector space (see Marinacci (1996)).
Denote K the set of belief functions on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Let us now prove that K is a compact convex subset of $(E, \mathcal{E})$. Only compacity remains to be proved.
Denote V_1 the set of all monotone set functions on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ such that $v(\mathbb{N}) \leq 1$. It is known (see e.g. Marinacci (1996), proof of Proposition 1 p.1003) that V_1 is compact for the $\mathcal{E}$-topology.
Clearly $K \subset V_1$, in order to prove that K is compact it suffices to prove that K is closed. So let $(v_\alpha)_{\alpha \in D}$ be a net in K such that $\lim_\alpha v_\alpha = v_0 \in E$. That $v_0(\emptyset) = 0$ and $v_0(\mathbb{N}) = 1$ is immediate. That v_0 is totally monotone i.e. v_0 is non-negative and for every $K \geq 2$ and $A_1, \ldots, A_K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ we have : $v_0(\cup_{k=1}^K A_k) \geq \sum_I (-1)^{|I|+1}\ v_0(\cap_{k \in I} A_k)$ remains to be proved. First assume there exists an $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ such that $v_0(A) < 0$ and take $0 < \epsilon < -v_0(A)$, then $\exists \alpha_0 \in D$ s.t. $v_{\alpha_0} \in B(v_0; A; \epsilon)$ and $v_{\alpha_0}(A) < v_0(A) + \epsilon < 0$, a contradiction. As for the second part of the proof, let us confine to the case where $K = 2$ (the proof straightforwardly generalizes to any $K \geq 2$).
Assume that there exists $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ such that $v_0(A_1 \cup A_2) + v_0(A_1 \cap A_2) < v_0(A_1) + v_0(A_2)$, and let $\epsilon > 0$ be such that $v_0(A_1 \cup A_2) + v_0(A_1 \cap A_2) - v_0(A_1) - v_0(A_2) + \epsilon < 0$. Choose as a neighborhood of v_0 : $B(v_0; A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2; \frac{\epsilon}{4})$.

From $\lim_\alpha v_\alpha = v_0$ it comes that there exists $\alpha_0 \in D$ such that $v_{\alpha_0} \in B(v_0; A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2; \frac{\epsilon}{4})$, thus $v_{\alpha_0}(A_1 \cup A_2) + v_{\alpha_0}(A_1 \cap A_2) - v_{\alpha_0}(A_1) - v_{\alpha_0}(A_2) < v_0(A_1 \cup A_2) + v_0(A_1 \cap A_2) - v_0(A_1) - v_0(A_2) + 4\frac{\epsilon}{4} < 0$, a contradiction.

Recall that the set $ex(K)$ of extreme points of K consists of the filter games. From Lemma 2, we obtain that the set of σ-continuous extremal elements of K consists of the unanimity game with respect to the nonempty finite subsets of $\mathbb{N}$. Let us denote $ex\sigma(K)$ the set of σ-continuous extremal elements of K.

Denote Σ_K the smallest σ-algebra of subsets of $ex(K)$ making all elements of $A(K)_{|ex(K)}$ measurable. We first intend to prove that $ex\sigma(K) \in \Sigma_K$.
Consider the application $h_A : E \longrightarrow \mathbb{R} : v \mapsto v(A)$, where $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. h_A is affine and $\mathcal{E}$-continuous by construction, hence $h_{A|ex(K)}$ is Σ_K-measurable. So $\{h_{A|ex(K)} \geq 1\} = \{u_{\mathcal{F}} : u_{\mathcal{F}}(A) = 1\} \in \Sigma_K$.

Now let $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), A \neq \emptyset$, from Lemma 3 it therefore comes that $\{u_B, B \neq \emptyset, B \subset A\} \in \Sigma_K$. Σ_K being an algebra, it comes by induction on the number of elements in $A \in \mathcal{F}$ that $\{u_A\} \in \Sigma_K$ for any nonempty $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Now Σ_K being a σ-algebra, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ being countable and Lemma 2 give that $ex\sigma(K)$ belongs to Σ_K.

Now according to Choquet's integral representation theorem, there exists a σ-additive measure m_v on $ex(K)$ such that $\forall A \subset \mathbb{N}$,

$$v(A) = \int_{ex(K)} h_{A|ex(K)} \; dm_v = m_v(\{u_{\mathcal{F}} : A \in \mathcal{F}\})$$

Moreover, as it has been proved : $ex\sigma(K), ex\sigma(K)^c \in \Sigma_K$, we get,

$$v(A) = m_v(\{u_{\mathcal{F}} : A \in \mathcal{F}\} \cap ex\sigma(K)) + m_v(\{u_{\mathcal{F}} : A \in \mathcal{F}\} \cap ex\sigma(K)^c)$$

Let us define, $v_i(A) = m_v(\{u_{\mathcal{F}} : A \in \mathcal{F}\} \cap X_i)$ for $i = 1, 2$ where $X_1 = ex\sigma(K)$ and $X_2 = ex\sigma(K)^c$. We shall prove that (v_1, v_2) is the decomposition we are looking for.

We shall prove first that v_i is totally monotone.
Let $K \geq 2$ and $A_1, \ldots, A_K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ and $I \subset \{1, \ldots, K\}, \neq \emptyset$, we have :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_I (-1)^{|I|+1} v_i(\cap_{k \in I} A_k) \quad &= \textstyle\sum_I (-1)^{|I|+1} m_v(\{u_{\mathcal{F}} : \cap_{k \in I} A_k \in \mathcal{F}\} \cap X_i) \\
&= \textstyle\sum_I (-1)^{|I|+1} m_v(\cap_{k \in I} \{u_{\mathcal{F}} : A_k \in \mathcal{F}\} \cap X_i) \\
&= m_v(\cup_{k=1}^K \{u_{\mathcal{F}} : A_k \in \mathcal{F}\} \cap X_i) \text{ , since } m_v \text{ is additive} \\
&\leq m_v(\{u_{\mathcal{F}} : \cup_{k=1}^K A_k \in \mathcal{F}\} \cap X_i) \\
&= v_i(\cup_{k=1}^K A_k).
\end{aligned}$$

That v_i is non-negative hence monotone comes from the non-negativity of m_v.
Let us prove that v_1 is σ-continuous and v_2 is pure. From v_1 totally monotone it comes that v_1 is σ-continuous as soon as v_1 is continuous at $\mathbb{N}$ (Rosenmüller(1972)). In fact it

is sufficient to prove that $\lim_\infty v_1([[0,n]]) = v_1(\mathbb{N})$.
Let $n \in \mathbb{N}$, $v_1([[0,n]]) = m_v(\{u_B : B \neq \emptyset, B \subset [[0,n]]\})$. Now taking the limit gives,

$$\begin{aligned}\lim_\infty v_1(\{0,\ldots,n\}) &= \lim_\infty m_v(\{u_B : B \neq \emptyset, B \subset [[0,n]]\})\\ &= m_v(\{u_B : B \neq \emptyset, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}), \text{ by } \sigma\text{-continuity of } m_v\\ &= m_v(ex\sigma(K))\\ &= v_1(\mathbb{N}).\end{aligned}$$

In order to prove that v_2 is pure, we will show according to Lemma 1 that $v_{2|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$. Let $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \neq \emptyset$. Let $\mathcal{F}$ be a filter which contains A. Then according to lemmas 3 and 2, $u_\mathcal{F} \in ex\sigma(K)$. Hence $\{u_\mathcal{F} : A \in \mathcal{F}\} \cap ex\sigma(K)^c = \emptyset$, and $v_2(A) = 0$ follows.

It remains to prove uniqueness of the decomposition. Let w_1, w_2 be another decomposition, where w_1 is σ-continuous and w_2 is pure.
For $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), v(A) = v_1(A) = w_1(A)$. Now by σ-continuity for any $A \subset \mathbb{N}$ we have,

$$v_1(A) = \lim_{n \mapsto \infty} v_1(A \cap [[0,n]]) = \lim_{n \mapsto \infty} w_1(A \cap [[0,n]]) = w_1(A)$$

Hence $v_1 = w_1$, and $v_2 = w_2$ follows. □

We retrieve Yosida-Hewitt (1952) decomposition theorem for measures on $\mathbb{N}$,

Corollary 1 *Let v be a measure on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ then there exists a unique pair of measures (v_1, v_2) with v_1 σ-additive and v_2 pure such that $v = v_1 + v_2$.*

Proof : Since v is a measure it is also totally monotone and according to Theorem 1 there exists a decomposition (v_1, v_2) where v_1 is σ-continuous and v_2 is pure. Let $A, B \subset \mathbb{N}, A \cap B = \emptyset$. We have $v(A \cup B) = v(A) + v(B) = (v_1(A) + v_2(A)) + (v_1(B) + v_2(B)) = (v_1(A) + v_1(B)) + (v_2(A) + v_2(B)) \leq v_1(A \cup B) + v_2(A \cup B) = v(A \cup B)$, hence v_1, v_2 are measures. Since v_1 is σ-continuous, v_1 becomes σ-additive, and since v_2 vanishes on $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, v_2 is pure. □

3.4 Further results

Let v be a monotone game on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, define for any $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ the *Choquet integral* of x with respect to v as,

$$\int_\mathbb{N} x dv = \int_0^\infty v(\{x \geq t\})\ dt + \int_{-\infty}^0 (v(\{x \geq t\}) - v(\mathbb{N}))\ dt$$

where $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N} /\ x_n \geq t\}$.

Theorem 2 *Let v be a belief function on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, then there exists a σ-algebra Σ_K on $ex(K)$ and a σ-additive probability m_v on $ex(K)$ such that, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N})$,*

$$\int_{\mathbb{N}} xdv = \int_{ex(K)} (\int_{\mathbb{N}} xdu_{\mathcal{F}})\ dm_v(u_{\mathcal{F}})$$

Proof : According to Choquet's theorem it suffices to prove that for all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ the function $\int_{\mathbb{N}} xd(.)$ is affine and continuous on the set K of belief functions on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Affinity is immediate. Let us prove the continuity at $v_0 \in K$.

For any $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, set $\|x\|_\infty = \mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. If x is the null sequence, continuity is trivial since therefore $\int xdv = 0\ \forall v \in K$.
Assume now $\|x\|_\infty > 0$, and let $\epsilon > 0$ be arbitrary chosen.
Let $\alpha = \frac{\epsilon}{3}$, there exists an $x^\alpha \in B_\infty(\mathbb{N})$, finitely valued such that $\|x - x^\alpha\|_\infty \leq \alpha$.
x^α can be written in the following way, $x^\alpha = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}).C_i^* + \alpha_0.\mathbb{N}^*$ where $\mathbb{N} \supsetneq C_1 \supsetneq \ldots \supsetneq C_n \neq \emptyset$, and $\alpha_0 \leq \ldots \leq \alpha_n$, with C_i^* denoting the characteristic function of C_i.
Let $v \in B(v_0; \mathbb{N}, C_1, \ldots, C_n; \frac{\epsilon}{6\|x\|_\infty})$. Proving that $|\int_{\mathbb{N}} xdv - \int_{\mathbb{N}} xdv_0| \leq \epsilon$ will complete the proof. We have,
$\int_{\mathbb{N}} xdv - \int_{\mathbb{N}} xdv_0 = \int_{\mathbb{N}} xdv - \int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv + \int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv - \int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv_0 + \int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv_0 - \int_{\mathbb{N}} xdv_0$
From $x - \alpha.\mathbb{N}^* \leq x^\alpha \leq x + \alpha.\mathbb{N}^*$ comes $|\int_{\mathbb{N}} xdv - \int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv| \leq \alpha = \frac{\epsilon}{3}$ and $|\int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv_0 - \int_{\mathbb{N}} xdv_0| \leq \alpha = \frac{\epsilon}{3}$.
Since $\int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1})v(C_i)$ and $\int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1})v_0(C_i)$, it follows from $v \in B(v_0; \mathbb{N}, C_1, \ldots, C_n; \frac{\epsilon}{6\|x\|_\infty})$ that,

$$|\int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv - \int_{\mathbb{N}} x^\alpha dv_0| \leq \frac{\epsilon}{6\|x\|_\infty} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \frac{\epsilon(\alpha_n - \alpha_0)}{6\|x\|_\infty} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

and therefore $|\int_{\mathbb{N}} xdv - \int_{\mathbb{N}} xdv_0| \leq \epsilon$. $\square$

In the finite case, for any game v on $\mathcal{P}([[0,n]])$, one can compute an unique game m termed the *Möbius inverse* of v, defined in the following manner, $\forall A \subset [[0,n]]$,

$m(A) = \sum_{B\subset A} (-1)^{|A\setminus B|} v(B)$ and $v(A) = \sum_{B\subset A} m(B)$

Theorem : (Shafer(1981), Chateauneuf and Jaffray (1989)) *Let v be a game and m its Möbius inverse, then v is a totally monotone game if and only if m is non-negative. Moreover, for any game v,*

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^{[[0,n]]}, \int_{[[0,n]]} xdv = \sum_{A\subset[[0,n]]} m(A).\mathrm{Min}\ x(A)$$

Before providing in Theorem 3 an analog for belief functions on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ we need to recall : a countable family $\{m(A), A \in \mathcal{G}\}$ of real numbers is said to be *summable* to $a \in \mathbb{R}$ with sum $\sum_{A\in\mathcal{G}} m(A) = a$ if any series $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ such that $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (m(A))_{A\in\mathcal{G}}$, converges to a.

Theorem 3 *Let v be a σ-continuous belief function on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, then there exists a unique game $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ with,*

$$\sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A) = 1 \text{ and } m_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})^c} = 0 \text{ ; such that} \tag{1}$$

$$\forall\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ v(A) = \sum_{\{B:B\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N}),B\subset A\}} m(B) \tag{$*$}$$

furthermore,

$$\forall\ A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}),\ m(A) = \sum_{\{B:B\subset A\}} (-1)^{|A\setminus B|} v(B) \tag{2}$$

Conversely, let m be a non-negative game, null on the empty set and the infinite sets, with $\sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A) = 1$. Define a game v by $(*)$. Then v is a σ-continuous belief function on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Moreover, $\quad \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ \int_{\mathbb{N}} x\ dv = \sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A).\ \mathrm{Min}\ x(A)$

Proof : Let v be a σ-continuous belief function on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Since v is σ-continuous, Theorem 1 entails :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ v(A) = m_v(\{u_B, B \neq \emptyset, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), B \subset A\})$$

Let us set $m(A) = m_v(\{u_A\})$ for every $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), A \neq \emptyset$ and $m(A) = 0$ otherwise. From $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ being countable, m_v being σ-additive, and $v(\mathbb{N}) = 1$, we therefore obtain (1) and $(*)$. Taking A finite, gives (2), hence the uniqueness of m.

For the converse, let m be a non-negative game, null on the empty set and the infinite sets, with $\sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A) = 1$, and let v be defined by $(*)$. Clearly v is monotone. Now denote for all $A \subset \mathbb{N}$, $[A] = \{B : B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), B \subset A\}$. Let $A_1, \ldots, A_K \subset \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & v(\cup_{k=1}^K A_k) + \textstyle\sum_I (-1)^{|I|} v(\cap_{k\in I} A_k) \\ = \ & \textstyle\sum_{[\cup_{k=1}^K A_k]} m(B) + \sum_I (-1)^{|I|} \sum_{[\cap_{k\in I} A_k]} m(B) \\ = \ & \textstyle\sum_{\{B:B\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} (u_B(\cup_{k=1}^K A_k) + \sum_I (-1)^{|I|} u_B(\cap_{k\in I} A_k)) m(B) \end{aligned}$$

and this quantity is non-negative since for $B \neq \emptyset$, u_B is a belief function. Hence v is totally monotone. Since $\forall B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \neq \emptyset$, u_B is σ-continuous, $m(B) \geq 0$ and $\sum_{\{B:B\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(B) = 1$, we have that $v = \sum_{\{B:B\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(B) u_B$ is σ-continuous.

It remains to prove that $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \int_{\mathbb{N}} x\ dv = \sum_{\{A:A\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A).\ \mathrm{Min}\ x(A)$.

From v σ-continuous, comes $m_v(\{u_B, B \neq \emptyset, B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}) = v(\mathbb{N}) = 1$. Hence Theorem 2 implies that :

$$\int_{\mathbb{N}} xdv = \int_{\{u_A, A \neq \emptyset, A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} (\int_{\mathbb{N}} xdu_A) dm_v(u_A)$$

but $\int_{\mathbb{N}} xdu_A = \text{Min } x(A)\ \forall A \neq \emptyset, A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.
Therefore $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ being countable and m_v σ-additive entails :

$$\int_{\mathbb{N}} xdv = \sum_{\{A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})\}} m(A).\text{Min } x(A)$$

□

3.5 Concluding comments

In this paper we confine to prove a Yosida-Hewitt theorem for totally monotone games defined on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. In a future research we intend to explore the ability of our method- based on the Choquet integral representation theorem - to relax the denumerability condition. Let us mention that another open question would be to know if our results are robust to the substitution of 2-monotonicity to ∞-monotonicity, or if some strong form of "additivity" as contained in belief functions is needed.

References

Aliprantis, C. and Border, K., 1999, Infinite dimensional analysis : a hitchhiker's guide, Springer, Berlin.

Brown, D. and Lewis, L., 1981, Myopic economic agents, Econometrica 49, 359-368.

Chateauneuf, A. and Jaffray, J-Y., 1989, Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion, Mathematical Social Sciences 17, 263-283.

Chateauneuf, A. and Rébillé, Y., 2002, Some characterizations of non-additive multi-periodic models. Working paper : University of Paris I.

Choquet, G., 1953-1954, Théorie des capacités, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) 5, 131-295.

Marinacci, M., 1996, Decomposition and representation of coalitional games, Mathematics of Operations Research 21, 1000-1015.

Fuchssteiner, B. and Lusky, W., 1981. Convex cones. North-Holland.

Rosenmüller, J., 1972, Some properties of convex set functions, Methods of Operations Research 17, 287-307.

Shafer, G., 1981, Constructive probability, Synthese 48, 1-59.

Yosida, K. and Hewitt, E., 1952, Finitely additive measures, Transactions of the American Mathematical Society 72, 46-66.

Chapitre 4

Patience in some non-additive models

Abstract

Our aim is to give an axiomatization of preferences over infinite consumption streams. At first we adopt the additive case, and give a characterization of preferences which satisfy patience (Marinacci (1998)) or equivalently what Diamond (1965) named equal treatment of all generations. We then focus on stationary additive preferences. It appears that this class of functionals contains the discounting functionals axiomatized in Koopmans (1972) and what is known as Banach-Mazur limit functionals. Extending the patience condition to naive patience gives an impossibility theorem and this motivates an extension to non-additives preferences.

Keywords : Patience, time neutrality, Schmeidler's model, pure probabilities.

JEL Classification : D80, D81.

4.1 Introduction

In this paper we consider an agent who has to rank infinite sequences of incomes. Such intertemporal problems are encountered for instance by a social planner who has to choose between policies that will affect the situation of the next generations. In this spirit, Koopmans (1972) axiomatization gives the classical discounted expectation criterion. Our first concern deals with patience (Marinacci (1998)) or what Diamond (1965) named equal treatment of all generations, or anonymity (Lauwers (1998)). Next section sets up the framework and provides the basic axioms that a preference shall fulfill. The third section considers additive preferences and their representation through functionals which admit an integral representation. Section 4 introduces patience and a characterization through pure probabilities. Then, dealing with stationary preferences we make the distinction between the discounted case and the undiscounted one. In section 6 is established an impossibility theorem where naive patience is considered, which motivates the introduction of non-additive preferences. Similarly, we give a representation of patience and time invariance in this relaxed setting. We finally give a simple axiomatization of the unique non-additive functional which exhibits naive patience, the inferior limit. All the proofs are gathered in the Appendix.

4.2 The setting

$\mathbb{N}$ is interpreted as a set of dates, and 0 as the present, the horizon is infinite. $B_\infty(\mathbb{N})$ denotes the set of bounded real-valued functions, and represents sequences of incomes that a D.M. will have to rank.

We shall adopt the following setting, a binary relation $\succeq$ on $B_\infty(\mathbb{N})$ is said to be, *complete* if for all $x, y \in B_\infty(\mathbb{N})$ we have $x \succeq y$ or $y \succeq x$; *transitive* if for all $x, y, z \in B_\infty(\mathbb{N})$ such that $x \succeq y$ and $y \succeq z$ then $x \succeq z$. A *weak order* $\succeq$ on $B_\infty(\mathbb{N})$ is a binary relation on $B_\infty(\mathbb{N})$ which is complete and transitive. We shall write $x \succ y$ for $x \succeq y$ and not$(y \succeq x)$; $x \sim y$ for $x \succeq y$ and $y \succeq x$.
For all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, $I(x) \in \mathbb{R}$ is said to be the *constant equivalent* of x if $I(x)$ is the only real number such that $I(x).\mathbb{N}^* \sim x$, where $\mathbb{N}^*$ stands for the characteristic function of $\mathbb{N}$.

Some axioms are now introduced in order to obtain the existence of a constant equivalent $I(x)$ for all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ which *represents* $\succeq$ i.e. $\forall\, x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)$.
A.1. $\succeq$ *is a weak order.*
A.2.(Monotonicity) : $\mathbb{N}^* \succ \emptyset^*, \forall\, x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), (x \geq y) \Rightarrow (x \succeq y)$.
A.3.(Constant additivity) : $\forall\, x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$(x \succeq y) \Rightarrow (x + \alpha.\mathbb{N}^* \succeq y + \alpha.\mathbb{N}^*)$
A.4. $\succeq$ *is Archimedian.* $\forall\, x \in B_\infty(\mathbb{N}), x \ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*,\ \exists\, \alpha (\substack{> \\ <}) 0 \ /\ x \ (\substack{\succ \\ \prec})\ \alpha.\mathbb{N}^* \ (\substack{\succ \\ \prec})\ \emptyset^*$.

A.1 is a standard axiom, A.2 discards the case where $\succeq$ ranks all profiles as indifferent. A.3 is the axiom that implies linearity in outcomes, in fact a two way implication holds, A.4 guarantees that there is enough room in $\mathbb{R}$ to rank all the profiles, and is a weaker condition than the uniform continuity. Indeed A.4 can be restated in equivalent forms as follows,

A.4'. $\forall\ x \in B_\infty(\mathbb{N}), x\ \left(\substack{\succ \\ \prec}\right)\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n\geq 0}\ \left(\substack{\downarrow \\ \uparrow}\right)\ 0,\ \exists N\ /\ \alpha_N.\mathbb{N}^*\ \left(\substack{\prec \\ \succ}\right)\ x$,

or,

A.4" $\forall\ x \in B_\infty(\mathbb{N}), x\ \left(\substack{\succeq \\ \preceq}\right)\ \emptyset^*, \forall\ (\alpha_n)_{n\geq 0}\ \left(\substack{\downarrow \\ \uparrow}\right)\ 0, [(\forall n \in \mathbb{N}, x\left(\substack{\preceq \\ \succeq}\right)\alpha_n.\mathbb{N}^*) \Rightarrow x \sim \emptyset^*]$ (where $\downarrow$ stands for non-increasing).

Clearly A.4" is a restricted version of uniform continuity.

We can notice that if $\succeq$ satisfies A.1-A.3 then $\succeq$ is compatible with the natural ordering in $\mathbb{R}$,

Lemma 1 *If $\succeq$ satisfies A.1-A.3 then,* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha > \beta) \iff (\alpha.\mathbb{N}^* \succ \beta.\mathbb{N}^*)$.

We can obtain a representation of the preferences $\succeq$,

Proposition 1 *A preference relation $\succeq$ satisfies A.1-A.4 if and only if there exists a unique $I : B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ with $I(\mathbb{N}^*) = 1$ such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim I(x).\mathbb{N}^*\,;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff I(x) \geq I(y)\,;$$
$$(iii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \geq y \Rightarrow I(x) \geq I(y)\,;$$
$$(iv)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \alpha \in \mathbb{R},\ I(x + \alpha.\mathbb{N}^*) = I(x) + \alpha.$$

Moreover I is uniformly continuous.

From now on A.1-A.4 will constitute the basic axioms that a preference relation will fulfill.

4.3 Additive preferences

As a first specification of preferences over income streams we introduce an additivity axiom, this way we will obtain a representation through a *linear* functional. More specifically at each linear functional is associated a unique *probability* on $\mathbb{N}$ in such a way that every income stream has for constant equivalent its *integral* w.r.t. this probability. The axiom is the following,

A.5.(Additivity) : $\forall x, y, z \in B_\infty(\mathbb{N}),\ (x \sim y) \Rightarrow (x + z \sim y + z)$.

Let us say that a functional $L : B_\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$, with $L(\mathbb{N}^*) = 1$ is a positive linear functional if $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), L(x + y) = L(x) + L(y)$ and $L(x) \geq 0$ if $x \geq 0$.
$p : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ is said to be a *probability* if $p(\emptyset) = 0, p(\mathbb{N}) = 1$ and $\forall A, B \subset \mathbb{N},\ p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.
For $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ define the *integral of x with respect to p*,

$$\int xdp = \int_0^\infty p(\{x \geq t\})dt + \int_{-\infty}^0 (p(\{x \geq t\}) - 1)dt,$$

where $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N}/x_n \geq t\}$.

If furthermore p is σ-additive i.e. $\forall \{A_n\}_n$ with $A_n \cap A_m = \emptyset$ when $n \neq m$ we have $p(\cup_n A_n) = \sum_{n=0}^\infty p(A_n)$, then $\int xdp$ is a usual *Lebesgue integral* and $\int xdp = \sum_{n=0}^\infty p(\{n\})x_n$.

Theorem 1 *A preference relation $\succeq$ satisfies A.1-A.5 if and only if there exists a unique probability p on $\mathbb{N}$ such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdp).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdp \geq \int ydp.$$

Henceforth specification of the preference will be embodied into properties of the probability.

4.4 Patience

Let us say that a permutation π is *finite* if $\{n \ /\ \pi(n) \neq n\}$ is finite. Denote $\Pi_f(\mathbb{N})$ the set of finite permutations. For $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ and $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$ let $x_\pi = (x_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. In the spirit of Marinacci (1998) we shall introduce,
A.6.(Patience) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \pi \in \Pi_f(\mathbb{N}),\ x_\pi \sim x$.

Under this axiom any finite subset of incomes can be permuted, no matter how spread over time are the incomes, that will not modify the D.M.'s evaluation.

In particular for any *transposition* we have, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall i,j \in \mathbb{N},\ \tau_{ij}(x) \sim x$, where $\tau_{ij}(x)_n = x_n$ if $n \notin \{i,j\}$, $\tau_{ij}(x)_i = x_j$ and $\tau_{ij}(x)_j = x_i$.

Alternatively patience can be stated in term of *equal treatment of all generations* introduced by Diamond (1965),

(*Equal treatment of all generations*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall j \in \mathbb{N},\ \tau_{0j}(x) \sim x$.

Otherwise stated,

$\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ x + \epsilon.\{n\}^* \sim x + \epsilon.\{0\}^*$.

Indeed, any finite permutation can be written as a composition of a finite number of transpositions, where each transposition can in turn be decomposed in elementary transpositions, $\forall i,j \in \mathbb{N},\ \tau_{ij} = \tau_{0i} \circ \tau_{0j} \circ \tau_{0i}$.

In particular, $\forall n \in \mathbb{N}, \{0\}^* \sim \{n\}^*$. Such a property excludes immediately any representation through a σ-additive probability. Indeed, let p be a σ-additive probability such that for all $n \in \mathbb{N},\ p(\{n\}) = p(\{0\})$ then either $p(\{0\}) > 0$ and $\sum_{n=0}^{\infty} p(\{n\}) = +\infty > 1$ or $p(\{0\}) = 0$ in which case $\sum_{n=0}^{\infty} p(\{n\}) = 0 < 1$.

A probability p is termed *purely additive* if $\forall \mu$ σ-additive measure, $(0 \leq \mu \leq p) \Rightarrow (\mu = 0)$.

In the countable case we have a characterization of pure probabilities, set $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ is finite}\}$ and $co(\mathbb{N}) = \{A \subset \mathbb{N} : A^c \text{ is finite}\}$ we have (e.g. Aliprantis-Border(1999)),

Theorem : *Let p be a probability then, p is pure if and only if* $p_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$.

Equivalently, p is pure iff $p_{|co(\mathbb{N})} = 1$ iff $\forall A \subset \mathbb{N}, \forall B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), B \subset A,\ p(A) = p(A \setminus B)$.

Indeed, $p(A \cup B^c) + p(A \setminus B) = p(A) + p(B^c)$, hence $p(A \setminus B) = p(A)$. It turns out that these are the probabilities which express patience.

Theorem 2 *A preference relation $\succeq$ satisfies A.1-A.5 and patience A.6 if and only if there exists a unique* pure *probability p on $\mathbb{N}$ such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdp).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x,y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdp \geq \int ydp.$$

In particular, let $n \in \mathbb{N}$, and $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, if $\forall k \geq n,\ x_k = 0$ then $\int xdp = 0$.

Such a property is shared also by *Banach limits* (see Banach(1987)). A functional L is said to be a Banach limit (B-)if L is a normalized (i.e. $L(\mathbb{N}^*) = 1$) positive linear functional on $B_\infty(\mathbb{N})$ such that $L(x) = 0$ if, $\exists n \in \mathbb{N} / \forall k \geq n,\ x_k = 0$. We get in fact a characterization of B-limits,

Proposition 2 *Let L be a B-limit then there exists a unique pure probability p on $\mathbb{N}$ such that, $L = \int(.)dp$.*
Conversely, if p is a pure probability on $\mathbb{N}$ then $\int(.)dp$ is a B-limit.

Preferences that can be represented by a pure probability satisfy,
(*Insensitivity w.r.t.the first coordinate*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall y_0 \in \mathbb{R}, x \sim (y_0, x_1, \ldots)$.

Such behavior is a by-product of the characteristic property of B-limits (Banach (1987)), a positive linear functional L is a B-limit if and only if $L(x) = \lim_\infty x$ whenever x converges (i.e. $x \in c$). That is B-limits are the extensions of the limit functional. Moreover, $\forall x \in c, \forall y \in B_\infty(\mathbb{N}), L(x+y) = \lim_\infty x + L(y)$. Hence if L is a B-limit then, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall y_0 \in \mathbb{R},\ L((y_0, x_1, \ldots)) = L(x) + L((y_0 - x_0, 0, \ldots)) = L(x)$. It is now clear that what is taken into account by a D.M. is what happens at the end.

4.5 Time invariance

Strengthening the insensitivity property the appreciation of the present can be dropped totally, we introduce a restricted version of *delaying* (Mas-Colell-Whinston-Green, Chapter 20) where we require the indifference to hold,
A.7. (*Delaying neutrality*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ (0, x) \sim x$.
According to A.7, $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ (0, x) \sim x$ this way the D.M. can evaluate $(0, x)$ solely with x, dropping the present totally. This kind of behavior is stressed in the next axiom named in Marinacci (1998),
A.8. (*Time Invariance*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x^t \sim x$.
Where $x^t = (x_1, x_2, \ldots)$ is the *shifted* version of x. This way the short run is always neglected. Time invariant preferences exhibit also patience, let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ and $j \in \mathbb{N}$ then $\tau_{0j}(x) \sim (x_{j+1}, \ldots) \sim x$.
Under A.3, axioms A.7 and A.8 are equivalent. Indeed, for all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, $(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_1 - x_0, \ldots) + x_0.\mathbb{N}^* \sim (x_1 - x_0, \ldots) + x_0.\mathbb{N}^* = (x_1, x_2, \ldots)$.

If a preference relation $\succeq$ satisfies A.1-A.5 and A.8 then for a functional I which represents $\succeq$ we will have $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ I(x^t) = I(x)$. Normalized linear functionals that satisfy this property are known as *Banach-Mazur Limit* (see Banach(1987)). We have a characterization,

Proposition 3 *Let L be a B-M-limit then there exists a unique invariant probability p*

on $\mathbb{N}$ *i.e.* $\forall A \subset \mathbb{N}, p(A+1) = p(A)$ *where* $A+1 = \{a+1 : a \in A\}$, *such that,* $L = \int (.)dp$. *Conversely, if* p *is an invariant probability on* $\mathbb{N}$ *then* $\int (.)dp$ *is a B-M-limit.*

We can now state a preference representation theorem through B-M-limit,

Theorem 3 *A preference relation* $\succeq$ *satisfies A.1-A.5 and time invariance A.8 if and only if there exists a unique invariant probability* p *on* $\mathbb{N}$ *such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdp).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdp \geq \int ydp.$$

Moreover the probability obtained through time invariant preferences is also pure. We can give a deeper insight in the structure of time-invariant preferences, time invariance also implies,

$(Stationarity) : \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \sim y \iff (\alpha, x) \sim (\alpha, y)$.

Time invariant preferences can be characterized,

Proposition 4 *Let* $\succeq$ *satisfy A.1-A.5, then* $\succeq$ *satisfies time invariance A.8 iff* $\succeq$ *satisfies insensitivity w.r.t. the first coordinate and stationarity.*

In fact stationarity is fundamental in Koopmans (1972) axiomatization of preferences representable by a discounted expectation . That is to say, preferences for which there exists a $\delta \in]0, 1[$, such that $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (E^\Delta(x)).\mathbb{N}^*$, where $E^\Delta(x) = (1 - \delta)\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n x_n$. We can obtain a characterization of stationary preferences,

Corollary 1 *Let* $\succeq$ *satisfy A.1-A.5, then* $\succeq$ *satisfies stationarity if and only if* $\succeq$ *is represented either by a discounted expectation or by a Banach-Mazur limit.*

If we strengthen the monotonicity axiom,

$(Strong\ monotonicity) : \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), (x \geq y, x \neq y) \Rightarrow x \succ y$.

Such an axiom is known in the literature as the *strong Pareto condition* (Lauwers (1998)). In which case the preference is clearly not insensitive to the first period, we obtain,

Corollary 2 *Let* $\succeq$ *satisfy A.1-A.5 and stationarity then* $\succeq$ *satisfies strong monotonicity iff* $\succeq$ *is represented by a discounted expectation.*

4.6 Naive patience

From section 4 we know that B-limits are precisely the linear functionals that coincide with the limit functional on the space of convergent sequences. The limit functional exhibits an even stronger property than patience.

For $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ and $\pi \in \Pi(\mathbb{N})$, set $x_\pi = (x_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, where $\Pi(\mathbb{N})$ denotes the set of permutations on $\mathbb{N}$. Let x be a convergent sequence and π a permutation on $\mathbb{N}$, then $\lim_\infty x_\pi = \lim_\infty x$. This can motivate the next axiom, named in Marinacci (1998) *naive patience*,

A.6^s.(Naive Patience) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall \pi \in \Pi(\mathbb{N}), x_\pi \sim x$.

It turns out that no additive representation can embody naive patience.

Theorem 4 *A.1-A.5 and A.6^s are incompatible.*

4.7 Non-additive preferences

According to Theorem 4 there is no additive preferences that satisfy A.6^s, for this we shall relax the hypothesis of additivity. The functional that we shall obtain will not be linear anymore, we shall use Schmeidler (1986) integral representation of non-additive functionals to represent such preferences. In this case additivity is kept only in particular cases.

Let us say x, y are *comonotonic* if $\forall n, m \in \mathbb{N}, (x_m - x_n)(y_m - y_n) \geq 0$.

If x, y are comonotonic the D.M.'s evaluation of $x+y$ will not benefit of any smoothing effect, this motivates a relaxed version of additivity which can be found in Chateauneuf (1994) (see also Wakker (1990), Chateauneuf (1991)) for modeling uncertainty aversion,

A.5^w. (Non smooth-additivity) $\forall x, y, z \in B_\infty(\mathbb{N}), \{y, z\}$*comonotonic* $, (x \sim y) \Rightarrow (x + z \succeq y + z)$.

Under A.5^w, if $\{x, z\}$ and $\{y, z\}$ are comonotonic then $(x \sim y)$ entails $(x + z \sim y + z)$, additivity is kept if z does not smooth x nor y. On the other hand smoothing can be considered as an improvement by the D.M., in other words, if $\{y, z\}$ comonotonic but not $\{x, z\}$ then $x + z \succ y + z$ may be obtained.

$v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ is said to be a *convex capacity* if $v(\emptyset) = 0, v(\mathbb{N}) = 1$ and $\forall A, B \subset \mathbb{N},\ v(A \cup B) + v(A \cap B) \geq v(A) + v(B)$. When the equality holds we retrieve a probability.

In particular convex capacities are also increasing w.r.t. the set inclusion, let $B \subset A$ then $v(A) \geq v(B) + v(A \setminus B) \geq v(B)$.

For $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ define the *Choquet (1953) integral of x with respect to v*,

$$\int x dv = \int_0^\infty v(\{x \geq t\})dt + \int_{-\infty}^0 (v(\{x \geq t\}) - 1)dt$$

where $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N}/x_n \geq t\}$.

Theorem 5 *Let $\succeq$ be a preference relation on $B_\infty(\mathbb{N})$, then $\succeq$ satisfies A.1-A.4,A.5^w if and only if there exists a unique convex capacity v on $\mathbb{N}$ such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdv).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdv \geq \int ydv.$$

4.8 Patience without additivity

Let us recall the insensitivity axiom,

(*Insensitivity w.r.t. the first coordinate*) : $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \forall y_0 \in \mathbb{R}, x \sim (y_0, x_1, \ldots)$.

If $\succeq$ is insensitive w.r.t. the first coordinate then $\mathbb{N}_0^* \sim \mathbb{N}^*$, where $\mathbb{N}_0 = \{1, \ldots\}$.

Theorem 6 *Let $\succeq$ be a preference relation which satisfies A.1-A.4,A.5^w, then $\succeq$ satisfies insensitivity w.r.t. the first coordinate and patience if and only if there exists a unique convex capacity v on $\mathbb{N}$ verifying $v(\pi(A)) = v(A)$ for all $A \subset \mathbb{N}$, $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$ and $v(\mathbb{N}_0) = 1$ such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int xdv).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int xdv \geq \int ydv.$$

Convex capacities which satisfy conditions of Theorem 6 admit the following characterization,

Proposition 5 *Let $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ be a convex capacity then assertions (i)-(iv) are equivalent,*

(i) $v(\pi(A)) = v(A)$ for all $A \subset \mathbb{N}$, $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$ and $v(\mathbb{N}_0) = 1$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, v(\{n\}^c) = 1$,

(iii) $v_{|co(\mathbb{N})} = 1$,

(iv) $\forall A, B \subset \mathbb{N},\ B \subset A,\ B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), v(A \setminus B) = v(A)$.

Such capacities can be termed *pure* for they share similar properties as pure probabilities do. As we now consider convex capacities we shall consider an equivalent notion of σ-additivity which is σ-continuity. Let us say that a set function w is *σ-continuous* if for any increasing sequence of subsets A_n (i.e.$A_n \subset A_{n+1}$) wich converges to A (i.e.$\cup_n A_n = A$) we have $\lim_\infty w(A_n) = w(A)$.

Proposition 6 *Let $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ be a convex capacity. If v is pure then $\forall \sigma$-continuous convex set function w on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, if $(0 \leq w \leq v)$ then $w = 0$.*

Note that in order to get a simple terminology, we use in this paper the term pure, although from Proposition 6 the terminology *strongly pure* would be more appropriate since in another paper (Chateauneuf-Rébillé (2002)), we name pure the convex capacities merely satisfying the necessary condition in Proposition 6.

Moreover the properties which characterize B-limits do also characterize the non-additive functional w.r.t. pure convex capacities.

Proposition 7 *Let $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ be a convex capacity then assertions (i)-(iii) are equivalent,*
(i) v is pure,
(ii) $\forall x \in c,\ \int x dv = \lim_\infty x$,
(iii) $\forall x \in c, \forall y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ \int (x+y) dv = \lim_\infty x + \int y dv$

It follows that if v is pure then $\int (.) dv$ is linear on c. Therefore the departure from additivity can only occur for income streams which are not convergent.

4.9 Time invariance without additivity

Similarly we can strenghten the patience and insensitivity axioms through time invariance, this specification is embodied entirely into the capacity and is the natural generalization of invariant probabilities,

Theorem 7 *A preference relation $\succeq$ satisfies A.1-A.4,A.5^w and time invariance A.8 if and only if there exists a unique convex capacity v on $\mathbb{N}$ satisfying invariance i.e. $\forall A \subset \mathbb{N}, v(A+1) = v(A)$, such that,*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\textstyle\int x dv).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \textstyle\int x dv \geq \int y dv.$$

In particular if v is invariant and convex then by Proposition 5 v has to be pure, for if $n \in \mathbb{N}$ then $v(\{n\}^c) \geq v(\{n+1, \ldots\}) = 1$. Hence, time invariant preferences are also patient.

4.10 Naive patience and insensitivity w.r.t.first coordinate without additivity

On the contrary of the additive case, naive patience and insensibility to the first coordinate are not incompatible with non-additive preferences. More specifically the only functional which can represent such preference is the $\underline{lim}$ functional.

Theorem 8 *A preference relation $\succeq$ satisfies A.1-A.4,A.5^w, naive patience A.6^s and insensitivity w.r.t. first coordinate if and only if*

$$(i)\ \forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\underline{lim}\ x).\mathbb{N}^*\ ;$$
$$(ii)\ \forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \underline{lim}\ x \geq \underline{lim}\ y.$$

We can notice that time invariance is not necessary to axiomatize the $\underline{lim}$, this provides a sharpening of Marinacci's(1998) Theorem 7 .

4.11 Conclusion

In a simple framework where preferences are additive, we have characterized patience through the use of pure probabilities. These functionals we obtain are in fact the only possible extensions of the limit functional to the space of all bounded sequences. The introduction of time invariance gives what is known as Banach-Mazur limit. The consideration of a stronger version of patience, naive patience, is unfortunately impossible to obtain if additivity is kept. Non-additive preferences represented by integral with respect to convex capacities give natural versions of patience and time invariance, and the question of naive patience admits a positive answer, the inferior limit functional.

4.12 Appendix

Proof of Lemma 1 :

For $n \in \mathbb{N}_0 = \{1, \ldots\}$, $\frac{1}{n}.S^* \succ \emptyset^*$. Otherwise $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}_0$ s.t. $\frac{1}{n_0}.S^* \preceq \emptyset^*$ and by A.3 $\frac{2}{n_0}.S^* \preceq \frac{1}{n_0}.S^* \preceq \emptyset^*$ and by induction $S^* = \frac{n_0}{n_0}.S^* \preceq \ldots \preceq \emptyset^*$, a contradiction. Now for $p, q \in \mathbb{N}_0$, $\frac{p}{q}.S^* \succeq \frac{1}{q}.S^* \succ \emptyset^*$. For $\epsilon \in \mathbb{R}_*^+$, $\exists\ \epsilon_0 \in \mathbb{Q}_*^+ \ /\ \epsilon > \epsilon_0 > 0$, hence by A.2, $\epsilon.S^* \succeq \epsilon_0.S^* \succ \emptyset^*$. Now for $\alpha > \beta$, put $\epsilon = \alpha - \beta$, so $\epsilon.S^* \succ \emptyset^*$ and A.3 gives $\alpha.S^* \succ \beta.S^*$.$\Box$

Proof of Proposition 1 :

(only if)

Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, set $P(x) = \{\gamma \in \mathbb{R}\ /\ \gamma.\mathbb{N}^* \succeq x\}$. We shall prove that $I(x) = \mathrm{Inf}P(x)$ is the constant equivalent we are looking for.

First consider $x \geq 0$. By A.2, $\|x\|_\infty.\mathbb{N}^* \succeq x$ so $P(x) \neq \emptyset$. As $x \geq 0$, $x \succeq \emptyset^*$ thus $\forall \gamma \in P(x), \gamma.\mathbb{N}^* \succeq \emptyset^*$ hence $\gamma \geq 0$ by Lemma 1, and $P(x)$ is bounded from below. Therefore $\mathrm{Inf}P(x)$ does exist.

Let $\alpha_n \downarrow \alpha,\ \alpha_n \in P(x)$. Suppose $\alpha \notin P(x)$ then $\alpha.\mathbb{N}^* \prec x$, that is by A.3, $\emptyset^* \prec x - \alpha.\mathbb{N}^*$. As $\alpha_n - \alpha \downarrow 0$ by A.4 $\exists\ n_0\ /\ \emptyset^* \prec (\alpha_{n_0} - \alpha).\mathbb{N}^* \prec x - \alpha.\mathbb{N}^*$ thus $\alpha_{n_0}.\mathbb{N}^* \prec x$ a contradiction. So $\mathrm{Inf}P(x) \in P(x)$ i.e. $I(x).\mathbb{N}^* \succeq x$. Assume now that $I(x).\mathbb{N}^* \succ x$ then by A.3 $\emptyset^* \succ x - I(x).\mathbb{N}^*$ hence by A.4, $\exists\ \alpha < 0\ /\ \emptyset^* \succ \alpha.\mathbb{N}^* \succ x - I(x).\mathbb{N}^*$, then by A.3 $(\alpha + I(x)).\mathbb{N}^* \succ x$ hence $\alpha + I(x) \in P(x)$ but $\alpha < 0$ and this contradicts the minimality of $I(x)$.

Now take $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ with $\underline{x} = Infx < 0$. We have $x - \underline{x}.\mathbb{N}^* \geq 0$, so $x - \underline{x}.\mathbb{N}^* \sim I(x - \underline{x}.\mathbb{N}^*).\mathbb{N}^*$, thus by A.3, $x \sim (I(x - \underline{x}.\mathbb{N}^*) + \underline{x}).\mathbb{N}^*$. But $P(x - \underline{x}.\mathbb{N}^*) = P(x) - \underline{x}$, hence $P(x)$ admits a minimum and $I(x) = \mathrm{Min}P(x) = I(x - \underline{x}.\mathbb{N}^*) + \underline{x}$, so $x \sim I(x).\mathbb{N}^*$. In particular from Lemma 1, $I(\mathbb{N}^*) = 1$.

Let $x, y \in B_\infty(\mathbb{N})$, $x \geq y$ then $P(x) \subset P(y)$ so $I(x) \geq I(y)$, and I is monotonic. Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $x \sim I(x).\mathbb{N}^*$ thus $x + \alpha.\mathbb{N}^* \sim (I(x) + \alpha).\mathbb{N}^*$, but $x + \alpha.\mathbb{N}^* \sim I(x + \alpha.\mathbb{N}^*).\mathbb{N}^*$, hence by Lemma 1, $I(x + \alpha.\mathbb{N}^*) = I(x) + \alpha$.

For $x \succeq y$, $P(x) \subset P(y)$ so $I(x) \geq I(y)$. If $I(x) \geq I(y)$ then by A.2 $I(x).\mathbb{N}^* \geq I(y).\mathbb{N}^*$ but $z \sim I(z).\mathbb{N}^*$, for $z = x, y$, so $x \succeq y$. Suppose $\exists\ J : B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ such that $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), x \sim J(x).\mathbb{N}^*$, as $x \sim I(x).\mathbb{N}^*$, we have $J(x).\mathbb{N}^* \sim I(x).\mathbb{N}^*$ and by Lemma 1, $J(x) = I(x)$.

Let $(x^n)_n$ converge uniformly to x, let $\epsilon > 0$, then $\exists N$ s.t. $\forall n \geq N,\ \|x^n - x\|_\infty \leq \epsilon$, hence

by A.2, $I(x-\epsilon.\mathbb{N}^*) \leq I(x^n) \leq I(x+\epsilon.\mathbb{N}^*)$ that is $I(x)-\epsilon \leq I(x^n) \leq I(x)+\epsilon$. Therefore I is uniformly continuous.
(if)
A.1 follows from (ii).
Putting $x=\emptyset^*$ and $\alpha=1$, (iv) gives $I(\emptyset^*)=0$, so $\mathbb{N}^* \succ \emptyset^*$ by (ii), and from (iii) we get A.2. A.3 follows from (iv), and we obtain A.4 by taking $\alpha=\frac{I(x)}{2}$. □

In order to prove Theorem 1, we shall first provide a functional version of it and then use this functional theorem to establish the proof. Some definitions are therefore needed. Consider $I: B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ a functional, let us say that I is,
monotonic if $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), (x \geq y) \Rightarrow (I(x) \geq I(y))$;
additive if $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), I(x+y) = I(x)+I(y)$;

From Schmeidler's (1986), we have the following characterization,

Theorem A :(Schmeidler (1986)) *Let $I: B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ be a functional such that $I(\mathbb{N}^*) = 1$, if I is monotonic, additive, define a* probability $p: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ *by $p(A) = I(A^*)$ then* $\forall\ x \in B_\infty(\mathbb{N})$,

$$I(x) = \int x dp = \int_0^\infty p(\{x \geq t\})dt + \int_{-\infty}^0 (p(\{x \geq t\})-1)dt \qquad (*),$$

where $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N}/x_n \geq t\}$.
Conversely, let p be a probability, then the functional defined by $(*)$ is monotonic and additive.

Quantity $(*)$ is called the *Choquet integral* of x w.r.t.p and written $\int xdp$.
Proof of Theorem 1 :
(only if)
$\succeq$ satisfies A.1-A.4 then according to Proposition 1, $\exists! I: B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ monotonic functional such that $I(\mathbb{N}^*) = 1$ which represents $\succeq$. Let $x, y \in B_\infty(\mathbb{N})$, then $x \sim I(x).\mathbb{N}^*$ holds , A.5 gives $x+y \sim I(x).\mathbb{N}^* + y$, $y \sim I(y).\mathbb{N}^*$ thus by A.5 $y + I(x).\mathbb{N}^* \sim (I(x)+I(y)).\mathbb{N}^*$, hence $I(x+y) = I(x)+I(y)$ i.e. I is additive. I satisfies the hypothesis of Theorem A and so we conclude.
(if)
immediate. □

Proof of Theorem 2 :

(only if) According to Theorem 1, there exists a unique probability p such that for all $x \in B_\infty(\mathbb{N}), x \sim (\int xdp).\mathbb{N}^*$. By A.6 $\forall n \in \mathbb{N}, \{0\}^* \sim \{n\}^*$ hence $\forall n \in \mathbb{N}, p(\{0\}) = p(\{n\})$, and $p_{|\mathcal{P}_f(\mathbb{N})} = 0$ so p is pure.
(if) Let $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$, put $\overline{N} = \mathrm{Max}\{n/\pi(n) \neq n\}$ then
$x_\pi = (x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(\overline{N})}, x_{\overline{N}+1}, \ldots)$, hence $\int x_\pi dp = \int (x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(\overline{N})}, 0, \ldots)dp + \int (0, \ldots, 0, x_{\overline{N}+1}, \ldots)dp = \int (0, \ldots, 0, x_{\overline{N}+1}, \ldots)dp = \int xdp$. □

Proof of Proposition 2 :

Let L be B-limit then $\exists! p \in ba_1^+(\mathbb{N})$ such that $l = \int (.)dp$, for $n \in \mathbb{N}$, $L(\{n\}^*) = 0$ hence $p(\{n\}) = 0$ and p is pure.
Let $p \in pa_1^+$, for $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\int (x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots)dp = x_0 p(\{0\}) + \ldots + x_n p(\{n\}) = 0$, hence $\int (.)dp$ is a B-limit. □

Proof of Proposition 3 :

Let L be a B-M-limit then according to Theorem A there exists a unique probability p such that $L = \int (.)dp$. Let $A \subset \mathbb{N}$, we have $p(A) = \int A^* dp = \int (A+1)^* dp = p(A+1)$.
For the converse, it suffices to prove that for all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, $\int (0, x)dp = \int xdp$ holds. In this case, for all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$,
$\int x^t dp = \int (0, x_1, \ldots)dp = \int (x_0, 0, \ldots)dp + \int (0, x_1, \ldots)dp = \int xdp$, because B-M-limits are B-limits.
Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, if $t > 0$ then $p(\{(0, x) \geq t\}) = p(\{x \geq t\} + 1) = p(\{x \geq t\})$ by invariance. If $t \leq 0$ then $p(\{(0, x) \geq t\}) = p((\{x \geq t\} + 1) \cup \{0\}) = p(\{x \geq t\} + 1) = p(\{x \geq t\})$, because invariant probabilities are also pure. Now integration gives us the desired result. □

Proof of Theorem 3 :

(only if) According to Theorem 1, there exists a unique probability p such that for all $x \in B_\infty(\mathbb{N}), x \sim (\int xdp).\mathbb{N}^*$. Let $A \subset \mathbb{N}$, A.7 gives, $p(A).\mathbb{N}^* \sim A^* \sim (A+1)^* \sim p(A+1).\mathbb{N}^*$.
(if) Assume that $\succeq$is representable by a probability p satisfying $\forall A \subset \mathbb{N}, p(A+1) = p(A)$. According to Proposition 3, $\int (.)dp$ is a B-M-limit so A.8 follows immediately. □

Proof of Proposition 4 :

It remains to prove the (if) part. From Theorem 1, there exists a probability p such that $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), x \sim (\int xdp).\mathbb{N}^*$. For $A \subset \mathbb{N}$, $A^* \sim p(A).\mathbb{N}^*$, by stationarity $(A+1)^* \sim (0, p(A), p(A), \ldots) \sim p(A).\mathbb{N}_0^*$. But $\mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}_0^*$ by insensitivity w.r.t. the first coordinate, hence $p(A+1).\mathbb{N}^* \sim (A+1)^* \sim p(A).\mathbb{N}^*$. □

Proof of Corollary 1 :

(if) is immediate.

(only if) According to Theorem 1 there exists a probability p such that $x \sim \int xdp$ for all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$. Let $A \subset \mathbb{N}$, $A^* \sim p(A).\mathbb{N}^*$ and by stationarity, $(A+1)^* \sim (0, p(A), p(A), \ldots) \sim p(A).(0, 1, 1, \ldots)$, thus $p(A+1) = p(A)\delta$, where $\delta = p(\mathbb{N}_0)$. By A.2 $\mathbb{N}^* \succ \emptyset^*$ thus by stationarity $\mathbb{N}_0^* \succ \emptyset^*$ follows, hence $\delta > 0$. If $p(\{0\}) > 0$, then $\delta < 1$, and by induction we obtain $p(\{n\}) = p(\{0\})\delta^n$ for $n \geq 1$, hence $\int xdp = E^\Delta(x)$ for all $x \in B_\infty(\mathbb{N})$.
If $p(\{0\}) = 0$, then $\delta = 1$ so $p(A+1) = p(A)$ for all $A \subset \mathbb{N}$ and from Proposition 3, $\int(.)dp$ is a B-M-limit. □

Proof of Corollary 2 :

(if) is immediate.

(only if) Corollary 2 states that $\succeq$ is represented by a B-M-limit or by a discounted expectation. Since $\{0\}^* \geq \emptyset^*, \{0\}^* \neq \emptyset^*$ strong monotonicity entails $\{0\}^* \succ \emptyset^* = (\{0\}^*)^t$, thus $\succeq$ can not satisfy A.8. □

Proof of Theorem 4 :

According to Theorem 2, there exists a unique pure probability p such that for all $x \in B_\infty(\mathbb{N}), x \sim (\int xdp).\mathbb{N}^*$. In particular by A.6 ^{s} all sets that are infinite but not cofinite should have same probability.

Let $A \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \setminus co(\mathbb{N})$, then there exists $B, C \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \setminus co(\mathbb{N})$ such that $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$. Indeed let $A = \{a_0, a_1, \ldots\} \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \setminus co(\mathbb{N})$. Put $B = \{a_0, a_2, \ldots\}$ and $C = \{a_1, a_3, \ldots\}$. So $p(A) = p(B) = p(C)$ and $p(A) = p(B) + p(C)$, thus $p(A) = 0$. As $A \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \setminus co(\mathbb{N})$, we also have $A^c \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \setminus co(\mathbb{N})$ so $p(A^c) = 0$, a contradiction.
□

A proof of Theorem 5 can be found in Chateauneuf (1994) and relies on its functional version established in Schmeidler (1986).

Let I be a functional on $B_\infty(\mathbb{N})$, I is said to be *comonotonic additive* if $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), x, y$ comonotonic then $I(x+y) = I(x)+I(y)$, *superadditive* if $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}), I(x+y) \geq I(x) + I(y)$.

Theorem B : *Let $I : B_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ be a functional such that $I(\mathbb{N}^*) = 1$, if I is monotonic, superadditive and comonotonic additive, define a* capacity $v : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ *by $v(A) = I(A^*)$ then $\forall\ x \in B_\infty(\mathbb{N})$,*

$$I(x) = \int xdv = \int_0^\infty v(\{x \geq t\})dt + \int_{-\infty}^0 (v(\{x \geq t\}) - 1)dt \qquad (**),$$

where $\{x \geq t\} = \{n \in \mathbb{N}/x_n \geq t\}$.

Conversely, let v be a convex capacity, then the functional defined by $(**)$ is monotonic, superadditive and comonotonic additive.

The quantity $(**)$ is called the *Choquet integral* of x w.r.t.v and written $\int xdv$.

Proof of Theorem 6 :

(only if) According to Theorem 5, $\succeq$ can be represented by a Choquet integral w.r.t. a convex capacity, and $v(\mathbb{N}_0) = 1$ follows from insensitivity and $v(\pi(A)) = v(A)$ for all $A \subset \mathbb{N}$, $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$ follows from A.6^s.

(if) Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ and $y_0 \in \mathbb{R}$, with out loss of generality we may suppose that $y_0 > x_0$. If $t \leq x_0$ or $t > y_0$ then $\{(y_0, x_1, \ldots) \geq t\} = \{x \geq t\}$. If $t \in]x_0, y_0]$ then $\{(y_0, x_1, \ldots) \geq t\} = \{x \geq t\} \cup \{0\}$ and $0 \notin \{x \geq t\}$. Set $A_t = \{x \geq t\} \cup \{0\}$, v is convex thus $v(A_t \cup \mathbb{N}_0) + v(A_t \cap \mathbb{N}_0) \geq v(A_t) + v(\mathbb{N}_0)$, but $v(\mathbb{N}_0) = 1$ hence $v(A_t \cap \mathbb{N}_0) = v(A_t)$ that is $v(\{x \geq t\}) = v(\{(y_0, x_1, \ldots) \geq t\})$. Now integrating gives $\int(y_0, x_1, \ldots)dv = \int xdv$, and $\succeq$ is insensitive w.r.t. the first coordinate.

Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$ and $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$. For $t \in \mathbb{R}, \pi(\{x_\pi \geq t\}) = \{x \geq t\}$ now $v(\pi(A)) = v(A)$ for all $A \subset \mathbb{N}$ gives $v(\{x_\pi \geq t\}) = v(\{x \geq t\})$ and by integration $\int x_\pi dv = \int xdv$ follows. □

Proof of Proposition 5 :

We shall prove $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$

Consider the permutation which transpose 0 and n, hence $v(\{n\}^c) = v(\mathbb{N}_0) = 1$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

We will proceed by induction.

Let $A \in co(\mathbb{N})$. Denote $|A^c|$ the cardinal of A^c. If $|A^c| = 1$ then $v(A) = 1$ by hypothesis.

Assume that $v(A) = 1$ for all A such that $|A^c| \leq k$. Let $A \subset \mathbb{N}$ such that $|A^c| = k+1$. Let $b \in A^c$. We have by convexity $v(\mathbb{N}) + v(A) \geq v(A \cup \{b\}) + v(\{b\}^c) = 2$, thus $v(A) = 1$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$
Let $A, B \subset \mathbb{N}$ such that $B \subset A$ and $B \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$.
Convexity gives, $v(A \cup B^c) + v(A \setminus B) \geq v(B^c) + v(A)$, and $B^c \in co(\mathbb{N})$, hence $v(A \setminus B) \geq v(A)$.
$(iv) \Rightarrow (i)$
$v(\mathbb{N}_0) = 1$ is immediate. Let $A \subset \mathbb{N}$ and $\pi \in \Pi_f(\mathbb{N})$. We have $A \setminus \pi(A) \subset \{n/n \neq \pi(n)\} \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, hence $v(A) = v(A \cap \pi(A))$. Similarly, $\pi(A) \setminus A \subset \{\pi(n)/n \neq \pi(n)\} = \pi(\{n/n \neq \pi(n)\}) \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, hence $v(\pi(A)) = v(A \cap \pi(A))$. $\square$

Proof of Proposition 6 :
Let w be a σ-continuous convex set function such that $0 \leq w \leq v$ where v is pure. According to Proposition 5, for all $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ we have $v(\mathbb{N}) \geq v(A) + v(\mathbb{N} \setminus A)$ with $v(\mathbb{N} \setminus A) = 1$, hence $v(A) = 0$. In particular $\forall n \in \mathbb{N}, v(\{0, \ldots, n\}) = 0$, hence $w(\{0, \ldots, n\}) = 0$, and σ-continuity gives $w(\mathbb{N}) = 0$, hence $w = 0$. $\square$

Proof of Proposition 7 :
$(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ is immediate.
$(i) \Rightarrow (iii)$.
Let $x \in c, y \in B_\infty(\mathbb{N})$. Without loss of generality we may assume that $x, y \geq 0$. Suppose that $x_\infty = 0$. Let $\epsilon > 0$, there exists $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, such that $\forall n \geq N_\epsilon$, $0 \leq x_n < \epsilon$. Let $t \geq 0$, then $\{y \geq t\} \cap [[N_\epsilon, \infty[[\subset \{y + x \geq t\} \cap [[N_\epsilon, \infty[[\subset \{y + \epsilon \geq t\} \cap [[N_\epsilon, \infty[[$. As v is pure we obtain, $v(\{y \geq t\}) \leq v(\{y + x \geq t\}) \leq v(\{y + \epsilon \geq t\})$, now integrating gives, $\int y dv \leq \int (x + y) dv \leq \int y dv + \epsilon$.
Suppose that $x_\infty > 0$. Let $x_\infty > \epsilon > 0$.
There exists $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, such that $\forall n \geq N_\epsilon$, $x_\infty - \epsilon < x_n < x_\infty + \epsilon$, hence $y_n + x_\infty - \epsilon < x_n + y_n < y_n + x_\infty + \epsilon$.
Let $t \geq 0$, then $\{y + x_\infty - \epsilon \geq t\} \cap [[N_\epsilon, \infty[[\subset \{y + x \geq t\} \cap [[N_\epsilon, \infty[[\subset \{y + x_\infty + \epsilon \geq t\} \cap [[N_\epsilon, \infty[[$. As v is pure we obtain, $v(\{y + x_\infty - \epsilon \geq t\}) \leq v(\{y + x \geq t\}) \leq v(\{y + x_\infty + \epsilon \geq t\})$, now integrating gives, $(x_\infty - \epsilon) + \int y dv \leq \int (x + y) dv \leq (x_\infty + \epsilon) + \int y dv$. $\square$

Proof of Theorem 7 :

(only if) The same proof as Theorem 3 applies.
(if) v is a convex invariant capacity hence it is also pure. $\forall n \in \mathbb{N}, v(\{n\}^c) \geq v(\{n+1,\ldots\}) = 1$ and by Proposition 5 v is pure.
We will prove that $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}), \int (0,x)dv = \int xdv$.
Let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, if $t > 0$ then $v(\{(0,x) \geq t\}) = v(\{x \geq t\}+1) = v(\{x \geq t\})$ by invariance. If $t \leq 0$ then $v(\{(0,x) \geq t\}) = v((\{x \geq t\}+1) \cup \{0\}) = v(\{x \geq t\}+1) = v(\{x \geq t\})$, by (purity and) invariance of v. Now integration gives us the desired result. □

The proof of Theorem 8 is based on a result in Marinacci (1998), $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N})$, $\underline{lim}\, x = \int xdu_{co(\mathbb{N})}$, where $u_{co(\mathbb{N})}(A) = 1$ if $A \in co(\mathbb{N})$, 0 otherwise.

Proof of Theorem 8 :
(only if) According to Theorem 6 and Proposition 5 there exists a convex capacity satisfying $v_{|co(\mathbb{N})} = 1$ such that $\forall x \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \sim (\int xdv).\mathbb{N}^*$; $\forall x, y \in B_\infty(\mathbb{N}),\ x \succeq y \iff \int xdv \geq \int ydv$. It remains to prove that $v(A) = 0$ if $A \notin co(\mathbb{N})$. If $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, then $v(A) \leq v(\mathbb{N}) - v(A^c) = 0$. If A is neither finite nor cofinite then there exists two disjoint sets B, C which are neither finite nor cofinite such that $A = B \cup C$. By convexity and A.6^s we get $v(A) \geq v(B) + v(C) = 2v(A)$, hence $v(A) = 0$.
(if) A.1-A.4,A.5^w are immediate. Let us prove that A.6^s is fulfilled. Let $A \subset \mathbb{N}, \pi \in \Pi(\mathbb{N})$. $\pi(A)$ and A are of same type that is to say, A and $\pi(A)$ are simultaneously finite, cofinite or infinite not cofinite. Now let $x \in B_\infty(\mathbb{N})$, w.l.o.g. $x \geq 0$, we have $\underline{lim}\ x_\pi = \int_0^{+\infty} u_{co(\mathbb{N})}(\{x_\pi \geq t\})dt = \int_0^{+\infty} u_{co(\mathbb{N})}(\pi^{-1}\{x \geq t\})dt = \int_0^{+\infty} u_{co(\mathbb{N})}(\{x \geq t\})dt = \underline{lim}\ x$, where π^{-1} is the inverse of π. □

References

Aliprantis, C. and Border, K., 1999, Infinite dimensional analysis : a hitchhiker's guide, Springer, Berlin.

Banach, S., 1987, Theory of Linear Operations, Elsevier, New York.

Chateauneuf, A., 1991, On the use of capacities in modeling uncertainty aversion and risk aversion, Journal of Mathematical Economics 20, 343-369.

Chateauneuf, A., 1994, Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral, Annals of Operations Research, 52, 3-20.

Chateauneuf, A. and Rébillé, Y., 2002, A Yosida-Hewitt decomposition for totally monotone games. Working paper : Paris I.

Choquet, G., 1953-1954, Théorie des capacités, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble) 5, 131-295.

Diamond, P.A., 1965, The evaluation of infinite utility streams, Econometrica 33, 170-177.

Koopmans, T.C., 1972, Representations of preference orderings over time. In : McGuire, C.B., Radner, R. (Eds.), Decision and Organization, North-Holland, Amsterdam.

Lauwers, L., 1998, Intertemporal objective functions strong Pareto versus anonymity, Mathematical Social Sciences 35, 37-55.

Marinacci, M., 1998, An axiomatic approach to complete patience and time invariance, Journal of Economic Theory 83, 105-144.

Mas-Colell, A., Whinston, M. and Green, J., 1995, Microeconomic Theory, Oxford University Press, New York

Schmeidler, D., 1986, Integral Representation without Additivity, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.97, No. 2, 255-261.

Wakker, P., 1990, Characterizing optimism and pessimism directly through comonotonicity, Journal of Economic Theory 52, 453-463.

Savage's (1954) model constitutes a main achievement in decision theory under uncertainty. It provides an axiomatization of subjective expected utility. A decision maker who fulfills the Savage's axioms chooses between acts according to their expected utility. Following this axiomatic method, additive representation can be obtained in different settings (Anscombe-Aumann (1963), Wakker (1990)). Despite the normative character of subjective expected utility models, empirical refutations arise quickly, for instance Ellsberg's paradox (1961). Choquet expected utility models can provide a response. Henceforth a decision maker does not have a subjective probability anymore but a subjective capacity (Choquet (1953)), a monotonic set function which is not necessarily additive. An integral theory with respect to capacities introduced by Choquet (1953), rediscovered and developed by Schmeidler (1986,1989) allows a generalization of the expected utility criterion. The axiomatic of Choquet expected utility models elaborated in an uncertainty framework can also be adapted in a temporal one. Hence the evaluation of a stream of incomes can be made in a non-additive way and embody variations between different successives periods (Gilboa (1989), De Waegenaere and Wakker (2001)).

The first chapter deals with the integral representation of comonotonic additive and sequentially continuous from below or from above functionals. This representation through Choquet's (1953) integrals is based on sequential continuity, a natural condition in measure theory, and not on monotonicity as in Schmeidler (1986). Consequently games we consider are not necessarily monotonic but continuous from below or from above, properties which are equivalent to σ-additivity for additive games. Finally, we provide some representation theorems for non-monotonic preferences but sequentially continuous from above or from below.

The second chapter provides an axiomatization of some preferences in a temporal setting, which originates in Gilboa (1989) and carried on in Shalev (1997) in an Anscombe-Aumann's (1963) setting. We adopt here De Waegaenere and Wakker's (2001) method. Our aim is to take into account complementarities between different successive periods. For this we introduce a variation aversion axiom, that keeps additivity on income streams having the property of sequential comonotony. The extension to the infinite case is achieved through a behavioral axiom, myopia. Finally we present a generalization to the non-additive case of the discounted expected utility, axiomatized in Koopmans (1972).

In the third chapter, we establish a Yosida-Hewitt(1952) decomposition theorem for totally monotone games on $\mathbb{N}$, where any game is the sum of a σ-continuous game and a pure game. This decomposition is obtained from an integral representation theorem on the set of belief functions, hence the Choquet (1953) integral of any bounded function, with respect to a totally monotone game admits an integral representation. Finally to every totally monotone σ-continuous game is associated a unique Möbius inverse on $\mathbb{N}$; hence any Choquet integral of a bounded function on $\mathbb{N}$ with respect to a totally monotone σ-continuous game obtains as the sum of an absolutely convergent series.

The last chapter, deals with modelization of patience for countable streams of incomes. At first, we consider preferences that exhibits patience in the additive case. These preferences admit an integral representation with respect to pure probabilities, which coincide with Banach limits (Banach 1987). Then, we strenghten patience into time invariance. Lastly we consider naive patience, which leads to an impossibility theorem. Consequently, we give an extension of the preceeding results in a non-additive framework. We introduce a non-smooth additivity axiom which allows to represent preferences through a Choquet integral with convex capacity. In this case, patience translates into pure convex capacities. Likewise, time invariance expresses naturally in term of invariant convex capacities. Finally, naive patience admits for unique representation the inferior limit functional.

Le modèle de Savage (1954) est une référence dans le domaine de la théorie de la décision dans l'incertain. Il présente une axiomatisation de l'espérance d'utilité subjective. Un décideur qui satisfait aux axiomes de Savage choisit entre différents actes d'après leur évaluation selon leur utilité espérée. En suivant cette méthode axiomatique, une représentation additive peut être obtenue dans différents cadres (Anscombe-Aumann (1963), Wakker (1990)). En dépit du caractère normatif des modèles d'espérance d'utilité subjective, des réfutations empiriques apparaissent rapidement, parmi elles le paradoxe d'Ellsberg (1961). Parmi les réponses apportées au paradoxe d'Ellsberg figurent les modèles d'espérance d'utilité à la Choquet. Désormais un décideur possède non pas une probabilité subjective mais une capacité (Choquet (1953)) subjective, fonction d'ensembles monotone qui n'est plus nécessairement additive. Une théorie de l'intégration par rapport aux capacités introduite par Choquet(1953), retrouvée et développée par Schmeidler (1986,1989) permet ainsi de généraliser le critère d'espérance d'utilité. L'axiomatique des modèles d'espérance d'utilité à la Choquet développée dans un cadre d'incertitude peut s'adapter également à un cadre temporel. Ainsi l'évaluation d'un flux de revenus peut se faire de manière non-additive et incorporer les variations entre différentes périodes successives (Gilboa (1989), De Waegenaere et Wakker (2001)).

Le premier chapitre traite de la représentation intégrale des fonctionnelles comonotones additives et séquentiellement continues par en bas et/ou par en haut. Cette représentation à l'aide de l'intégrale de Choquet (1953) se base sur la continuité séquentielle, une condition usuelle en théorie de la mesure, et non pas sur la propriété de monotonie traitée par Schmeidler (1986). En conséquence les jeux considérés ici ne sont pas forcément monotones mais continus par en haut et/ou par en bas, propriétés équivalentes à la σ-additivité dans le cas des jeux additifs. Finalement, nous proposons des théorèmes de représentation des préférences non-monotones mais séquentiellement continues par en haut ou par en bas.

Le deuxième chapitre se propose d'axiomatiser certaines préférences dans un cadre temporel, méthode initiée par Gilboa (1989) et poursuivie par Shalev (1997) dans un cadre à la Anscombe-Aumann (1963). L'approche adoptée ici est similaire à celle de De Waegaenere et Wakker (2001). Notre approche a pour but de prendre en compte les complémentarités entre différentes périodes successives. Pour cela nous introduisons un axiome d'aversion aux variations, qui conserve l'additivité sur des flux de revenus ayant la propriété de séquentielle comonotonie. L'extension au cas infini est réalisée à partir d'un axiome comportemental : la myopie. Finalement nous présentons une généralisation au cas non-additif du modèle d'espérance escomptée, axiomatisé par Koopmans (1972).

Dans le troisième chapitre, on établit un théorème de décomposition à la Yosida-Hewitt(1952) pour les jeux totalement monotones sur $\mathbb{N}$, où tout jeu s'écrit comme somme d'un jeu σ-continu et d'un jeu pur. Cette décomposition s'obtient à partir d'un théorème de représentation intégrale sur l'ensemble des fonctions de croyance, ainsi l'intégrale de Choquet (1953) de toute fonction bornée, par rapport à un jeu totalement monotone admet une représentation intégrale. Finalement tout jeu totalement monotone σ-continu est mis en correspondance biunivoque avec une inverse de Möbius sur $\mathbb{N}$; ainsi toute intégrale de Choquet d'une fonction bornée sur $\mathbb{N}$, par rapport à un jeu totalement monotone σ-continu s'obtient comme somme d'une série absolument convergente.

Le dernier chapitre, traite de la modélisation de la patience face à des flux dénombrables de revenus. Dans un premier temps, nous exposons les préférences patientes dans un cadre additif. Ces préférences admettent une représentation intégrale à l'aide de probabilités pures, ce qui coïncide en outre avec les limites de Banach (Banach 1987). Ensuite, nous renforçons la patience en invariance temporelle. Enfin nous considérons la patience naïve, ce qui aboutit à un théorème d'impossibilité. Nous développons de ce fait une extension des résultats obtenus précédemment dans un cadre non-additif. Nous introduisons un axiome d'additivité non-lisse qui nous permet de représenter les préférences avec une intégrale de Choquet à capacité convexe. Dans ce cas, la patience se traduit par des capacités convexes pures. De même, l'invariance temporelle s'exprime naturellement en terme de capacités convexes invariantes. En fin de compte, la patience naïve admet comme unique représentation la fonctionnelle limite inférieure.