HAL
open science

Modélisation, simulation et optimisation en génie côtier

Damien Isèbe

To cite this version:

Damien Isèbe. Modélisation, simulation et optimisation en génie côtier. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2007. Français. NNT : . tel-00260682

HAL Id: tel-00260682

https://theses.hal.science/tel-00260682

Submitted on 4 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

T H È S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE MONTPELLIER II

Discipline	:	Mathématiques Appliquées
Formation Doctorale	:	Mathématiques
Ecole Doctorale	:	Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement le 28 novembre 2007 par

Damien ISÈBE

MODÉLISATION, SIMULATION NUMÉRIQUE ET OPTIMISATION EN GÉNIE CÔTIER

JURY

M. Dominique ASTRUC	, Institut National Polytechnique de Toulouse	, Rapporteur
M. Pascal AZERAD	, Univ. Montpellier II	, Co-Directeur
M. Philippe BONNETON	, Univ. Bordeaux I	, Président
M. Frédéric BOUCHETTE	, Univ. Montpellier II	, Examinateur
M. Jérôme DRONIOU	, Univ. Montpellier II	, Examinateur
M. Nicolas FRAYSSE	, Bas-Rhône Languedoc ingénierie	, Examinateur
M. Thierry GALLOUËT	, Univ. Aix-Marseille I	, Rapporteur
M. Bijan MOHAMMADI	, Univ. Montpellier II	, Directeur

RAPPORTEURS

M. Dominique ASTRUC	, Institut National Polytechnique de Toulouse
M. Thierry GALLOUËT	, Univ. Aix-Marseille I

Á mon grand-père André,

Á ma Lollipop,...

Remerciements

Cette thèse est le résultat de trois ans de travaux consacrés principalement à l'application de méthodes mathématiques d'optimisation de formes pour l'étude de la dynamique des littoraux sableux et la protection des plages. Cette approche novatrice a permis d'entrouvrir une porte en matière d'aménagement littoral en sortant des approches traditionnelles. Il s'agit d'une première étape qui offre de nombreuses perspectives de recherche et champs d'applications.

Ce travail est un travail mathématique qui demande un important effort de compréhension des phénomènes morphodynamiques et hydrodynamiques liés à la houle. De ce fait, il aurait été difficile d'obtenir des résultats cohérents sans une collaboration et une entente cordiale avec des océanographes et naturalistes dont les conseils et soutiens permanents dans mes démarches se sont avérés fondamentaux.

Avant tout, ma gratitude va à Bijan Mohammadi et Pascal Azerad qui ont dirigé ces travaux pendant ces 3 années et sans qui ils n'auraient jamais pu voir le jour. Le pari était osé mais ils ont su me faire confiance et faire naître en moi des envies et prédispositions que je n'aurais jamais envisagés sans leur soutien. Merci Bijan pour les responsabilités que vous m'avez octroyées, le savoir que vous m'avez transmis. En espérant que ce ne soit qu'un début... Merci Pascal pour votre rigueur, votre disponibilité s'agissant de discuter de mathématiques et votre patience notamment lors des relectures de mes proses *in inglishe*...

Je voudrais ensuite ardemment remercier Frédéric Bouchette pour sa disponibilité, son ouverture d'esprit et sa connaissance inébranlable de la dynamique littorale. Il a été bien plus qu'un collaborateur de travail au cours de ces trois années. Son investissement, ses efforts d'explication lorsque j'avais du mal à comprendre certains phénomènes (ah, ces fameuses tensions de radiations ! !) et surtout son incroyable énergie ont vraiment été salutaires pour moi. Et comment oublier toutes ces discussions passionnantes lors de missions ou autres coding-party...

Je tiens à remercier les professeurs Thierry Gallouët et Dominique Astruc qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. L'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail et leurs remarques avisées m'ont grandement touchés.

Je remercie aussi Nicolas Fraysse de Bas-Rhône Languedoc ingénierie, Philippe Bonneton (les déplacements à Bordeaux pour le Groupe de Travail MAMNO, organisé conjointement par les laboratoires EPOC et IMB, furent toujours un réel plaisir) et Jérôme Droniou de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Je dois bien sûr remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de collaborer durant ces années de thèse. En premier lieu, Benjamin Ivorra, ancien membre de choc du 319*'s* et exilé à Madrid, qui m'a accueilli dans son (mon ?) bureau à bras ouverts il y a 3 ans. Merci aussi à Nathaël Alibaud qui m'a fait l'honneur de travailler avec moi et de me transmettre sans retenue tout son savoir sur l'étude des EDP non-linéaires. Tous les moments passés à travailler ("Quoi ! Il est 4 heures du mat' et on est encore au bureau ! !"), à déconner, à se soutenir mutuellement font que cette thèse restera un moment unique.

Que toutes les personnes que j'ai eu la chance de rencontrer au cours de missions COPTER, congrès, programmes nationaux ou autres groupes de travail soient toutes remerciées pour leur précieux conseils et leur soutien. Je pense notamment à Patrick Redont, Michel Cuer, Borys Alvarez-Samaniego (I3M), Jesús Ildefonso Díaz et Ángel Manuel Ramos del Olmo (Madrid), Nans Bujan, Cléa Denamiel, Yann Leredde (Géosciences Montpellier), Raphaël Certain (Perpignan), Fabien Marche (fraîchement arrivé à Montpellier), David Lannes (Bordeaux), Hervé Michallet et les membres du LEGI (Grenoble), Eric Chateauminois et François Carnus (BRLi), l'équipe du BRGM de Bastia (Eric Palvadeau, Yvan Caballero de la Reza) ainsi que Yann Balouin (BRGM Montpellier), François Sabatier (Cerege). Je remercie aussi vivement l'Agence Nationale de la Recherche de nous avoir donné la possibilité d'aller au bout de nos idées à travers le projet COPTER.

Merci aussi à tous les membres administratifs du département, en particulier Bernadette Lacan toujours disponible et souriante, pour l'aide administrative qu'ils m'ont fourni. Un grand merci aussi aux techniciens du labo : Baptiste Chapuisat pour ses conseils et dépannages informatiques (et il y en a eu ! !) et Eric Hugounenq pour sa disponibilité en particulier lorsqu'il a fallu tirer d'urgence des exemplaires de ma thèse quelques heures avant la soutenance.

Bien sûr, ce travail n'aurait pu être effectué sans l'appui moral de tous mes amis. Au sein du laboratoire, tout d'abord, où l'ambiance entre thésards, ATER et post-doc a toujours été conviviale : *El gringo* Julien co-fondateur du 319*'s* parti à l'Aventure pour son plus grand bonheur, Jérôme le roi de la night et nouvellement débarqué au pays du Soleil Levant, Jean-Marc, Miquele, Kuuu (kop khun !), Hassène, Sylvie, Marie-Jo, Kevin, Emily, Miguel et Ely (l'invitation à Santiago tient toujours, je n'ai pas oublié ;-)), et la nouvelle vague de joyeux lurons Hilde, Benoît, Olivier, Nadia,... à qui je souhaite bonne chance pour l'avenir. Je remercie également toute la bande des DOCTISS'05 pour les bons moments passés ensemble.

Un "Big Up" pour les amis catalans, spectateurs à distance de mon aventure doctorale mais ô combien importants à mes yeux ! Á Thierry, mon pote de toujours à chaque fois au rendez-vous pour des virées nocturnes mémorables et interminables à Montpellier, Nico, Marielle, Mélanie, Guillaume, Benji, Séb et j'en oublie surêment..., à tout ce beau monde je dis du fond du cœur un grand MERCI ! ! ! ! ! ! !

Un grand merci également à mon petit Chewy, présent depuis mon arrivée à Montpellier. Nos joutes tennistiques du vendredi à la Motte Rouge resteront dans la légende et les nombreuses soirées passées ensemble à refaire le monde ont contribué à élargir ma vision de la vie. Merci également à Tim et Tom qui complètent la fameuse *MPT Team* du jeudi soir. Alors, on en est où de la cagnotte ?

Une **S**péciale **A**nnonce **P**our Fab, *Pitchouf* Chris, *Wilko* David, *Cπe*6 Sébi, Maxou, Titi et tous les autres potes et dirigeants du RSPP XV. Sans eux, j'aurais sûrement "pété un cable" à un moment ou un autre. Avec eux, j'ai connu parallèlement à ma thèse des joies sportives inoubliables comme cette fameuse aventure 2005-2006 qui nous a amené au titre de Champion du Roussillon Honneur (la légendaire troisième mi-temps qui a suivi restera à jamais un moment fort !).

Quand à vous Papa, Maman, mon frère Loïc, mes petits papis et mamies Marie, Louisette, André et Joseph, mes oncles et tantes, mes cousins Xavier, Alex et Carine, Anasthasia, Jérémy, Fanny et Anaïs ainsi que ma belle-famille Jo et Josette, Ginette et

Pierrot, Marjo, Fab et le petit ange Enzo, cette page entière ne suffirait pas pour vous dire combien je vous aime ! Merci à mes parents de m'avoir toujours soutenu et poussé à aller de l'avant.

Enfin, je dédie ce manuscrit à celle qui tient la place la plus importante dans ma vie et dans mon cœur, qui depuis le début me supporte, me porte parfois, me soutient toujours, me conseille et m'encourage, ...

À Séverine, en mémoire de tous les moments de rigolade (ha, le fameux "Merci, à bientôt, au revoir!!" qui nous a accompagné chaque semaine pendant ces trois ans), de complicité, de tendresse, d'amour. Merci pour tout...

氣

Table des matières

Remerciements **i**

1 Motivations, rappels sur la théorie de la houle et modèles utilisés **1**
1.1 Introduction : le problème de l'érosion des plages 2
1.1.1 Les techniques du génie côtier 3
1.1.2 Les méfaits des techniques "dures" : la généralisation de l'effet "domino" 3
1.2 Une approche novatrice 5
1.2.1 Le projet COPTER 6
1.2.2 La plateforme technologique GLADYS 6
1.3 La propagation des vagues 7
1.3.1 Les équations de la théorie linéaire 8
1.3.2 Les solutions d'Airy : représentation de petites vagues au dessus d'un fond plat 9
1.3.3 Introduction de la non-linéarité : houle de Stokes à l'ordre 2 10
1.3.4 Profondeur relative et vitesse de vague 12
1.3.5 Réflexion + diffraction + réfraction = scattering 13
1.3.6 L'équation de pente douce 17
1.3.7 Un modèle parabolique de propagation de houle 20

2 Présentation des travaux et principaux résultats **29**
2.1 Optimisation d'ouvrages de défense en eaux profondes 29
2.1.1 Position du problème 29
2.1.2 Le modèle utilisé 30
2.1.3 Les paramètres d'optimisation 31
2.1.4 Les ouvrages efficaces pour le problème considéré 32
2.2 Optimisation de tubes géotextile pour la protection des plages : Application au Lido de Sète 36
2.2.1 Position du problème 36
2.2.2 Le modèle utilisé 39
2.2.3 Les paramètres d'optimisation 40
2.2.4 Les ouvrages efficaces pour le problème considéré 41
2.3 Etude d'un modèle non-local pour l'évolution morphodynamique des dunes 43
2.3.1 Présentation du modèle 43
2.3.2 Problématique 50

2.3.3 Apports théoriques 50

3 Shape optimization in deep water 53
3.1 Introduction 54
3.2 Hydrodynamic assumptions 55
3.3 Coastal structures modelling 56
3.3.1 Reflection condition on Γ_0 57
3.3.2 Radiation condition on Γ_1 58
3.3.3 Periodic Boundary Condition on $\Gamma_{2,a}$ and $\Gamma_{2,b}$ 59
3.4 Optimization problem 59
3.4.1 Objective 60
3.4.2 Parameterization of structure 61
3.4.3 Cost function definition 62
3.5 Results and discussion 63
3.5.1 Orders of magnitude for the amplitude and wavelength 63
3.5.2 Optimization with feasibility constraints 64
3.5.3 Sensitivity to small perturbations in the directions 72
3.5.4 Enriching the control space 72
3.5.5 Optimal shapes design obtained for different wave periods 75
3.6 Conclusion 75
3.7 Acknowledgements 76

4 Shape optimization for beach protection 79
4.1 Introduction 80
4.2 The studied zone and the project of coastal management 80
4.2.1 The lido de Sète morphology and morphodynamics 80
4.2.2 Beach nourishment and deployment of geotextile submerged LCS . 83
4.2.3 Available bathymetry and hydrodynamic data 84
4.3 Flow model 85
4.3.1 nonlinear combined refraction/diffraction model 87
4.4 Optimization problem 88
4.4.1 Reduction of wave data 88
4.4.2 Geotextile tubes parameterization 89
4.4.3 Cost function 91
4.5 Application to beach erosion control 92
4.5.1 A preliminary result 92
4.5.2 Shape optimization in the ELS 94
4.5.3 Improvement in another sandy beach 99
4.6 Conclusion 102
4.7 Acknowledgements 102

5 A non-monotone conservation law for dune morphodynamics. 103
5.1 Introduction 104
5.2 Preliminaries 107
5.2.1 Integral formula for $\mathcal{I}$ 107

5.2.2 Main properties on the kernel K of $\mathcal{I} - \partial_{xx}^2$ . . . 109
5.3 Duhamel's formula . . . 112
5.4 Uniqueness of a solution . . . 114
5.5 Existence of a regular solution . . . 115
5.6 Failure of the maximum principle . . . 122
5.7 Numerical simulations . . . 124
5.7.1 Maximum principle for the viscous Burgers equation . . . 124
5.7.2 Erosive effect of the nonlocal term . . . 126
5.8 Appendix : some technical lemmas. . . . 128

6 Conclusions et perspectives 131

A OPTI$_3$M : guide d'utilisation 135
A.1 Introduction . . . 136
A.1.1 Qu'est ce que OPTI$_3$M . . . 136
A.1.2 Le module de génération d'ouvrage . . . 136
A.1.3 Le module hydrodynamique . . . 136
A.1.4 Le module d'optimisation . . . 137
A.2 Organisation . . . 137
A.3 Installation . . . 137
A.3.1 Linux . . . 137
A.3.2 Windows . . . 137
A.4 Configuration . . . 138
A.4.1 Linux . . . 138
A.4.2 Windows . . . 139
A.5 Démarrage de OPTI$_3$M . . . 139
A.6 Menu principal . . . 140
A.7 La module BATHY/OUVRAGE . . . 140
A.7.1 Choix de la topobathymétrie initiale . . . 141
A.7.2 Visualiser la topobathymétrie . . . 143
A.7.3 Générer des ouvrages . . . 143
A.8 La module CALCUL . . . 144
A.9 Le module POST-PROCESS . . . 146
A.9.1 Visualisation du domaine entier . . . 147
A.9.2 Visualisation d'un sous-domaine . . . 147
A.10 Le module OPTIMISATION . . . 150
A.10.1 Chargement de la topobathymétrie initiale . . . 150
A.10.2 Détermination des régimes de houle dans le domaine . . . 150
A.10.3 Nombre d'ouvrages à optimiser - contraintes sur les ouvrages (facultatif) . . . 151
A.10.4 Domaine admissible et paramètres initiaux . . . 153
A.10.5 Critère d'optimisation . . . 153
A.10.6 Méthode d'optimisation . . . 154

B Global optimization method **157**
B.1 Optimization method 157
B.1.1 General method 157
B.2 Application to benchmark functions 159
B.2.1 1st or 2nd order systems 159
B.2.2 Modified Rastrigin function 160
B.2.3 Non-connected search spaces 162

Bibliographie **164**

Résumé/Summary **171**

Chapitre 1

Motivations, rappels sur la théorie de la houle et modèles utilisés

Cette thèse regroupe différents travaux, numériques et théoriques, s'inscrivant dans la thématique générale de l'étude de la dynamique des systèmes littoraux.

Dans ce cadre, deux axes de recherche ont été abordés :

- Une approche hydrodynamique où, pour la première fois, des techniques d'optimisation de formes portant sur la conception d'ouvrages de défense en mer sont utilisées dans des problèmes du génie côtier. Le Chapitre 3 concerne la protection d'une zone portuaire. Dans ce cas, le modèle utilisé sollicite des équations simplifiés pour la propagation de la houle. Le Chapitre 4 traite un problème de protection de plage sableuse concret, sujet à plusieurs contraintes industrielles. Cette étude a été réalisée en collaboration avec le bureau d'étude *BRL ingénierie*. Le modèle de propagation dans ce cas est basé sur des équations paraboliques prenant en compte les phénomènes de réfraction et diffraction de la houle à proximité des ouvrages.

- Une approche morpho-sédimentaire (i-e, la réponse du matériel sédimentaire à l'action de l'eau) où nous avons étudié théoriquement un modèle d'évolution de dunes immergées. Dans le Chapitre 5, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution régulière pour la forme du fond à partir d'une dune initiale caractérisée par une fonction à valeur dans $L^2(\mathbb{R})$. Des simulations numériques appuient les résultats théoriques obtenus.

Le Chapitre 2 fait la synthèse des résultats obtenus. Afin de mettre en évidence les points importants, nous avons souvent donné des énoncés simplifiés des résultats dans ce chapitre. Pour des énoncés plus complets, nous invitons le lecteur à se référer aux chapitres concernés.

Dans ce premier Chapitre, nous mettons en lumière les motivations qui ont permis d'aboutir à la réalisation de cette thèse. Des rappels sur la théorie de la houle ainsi qu'une présentation des modèles utilisés sont aussi présentés.

1.1 Introduction : le problème de l'érosion des plages

L'érosion des plages s'inscrit dans le phénomène plus large d'érosion du littoral. Ce phénomène naturel s'est amplifié, de manière parfois catastrophique, depuis une vingtaine d'années. Selon Bird [8], sur l'ensemble de la planète, 70% des plages reculent alors que seulement 10% ont tendance à avancer. A titre d'exemple, le Languedoc-Roussillon (voir Figure 1.1), qui comprend quatre départements ouverts sur la mer (Gard, Hérault, Aude et Pyrénées-Orientales), offre 76 kilomètres de linéaire côtier en érosion non contrôlée sur une totalité de 356 kilomètres. Sur le linéaire côtier français, la région du Languedoc-Roussillon

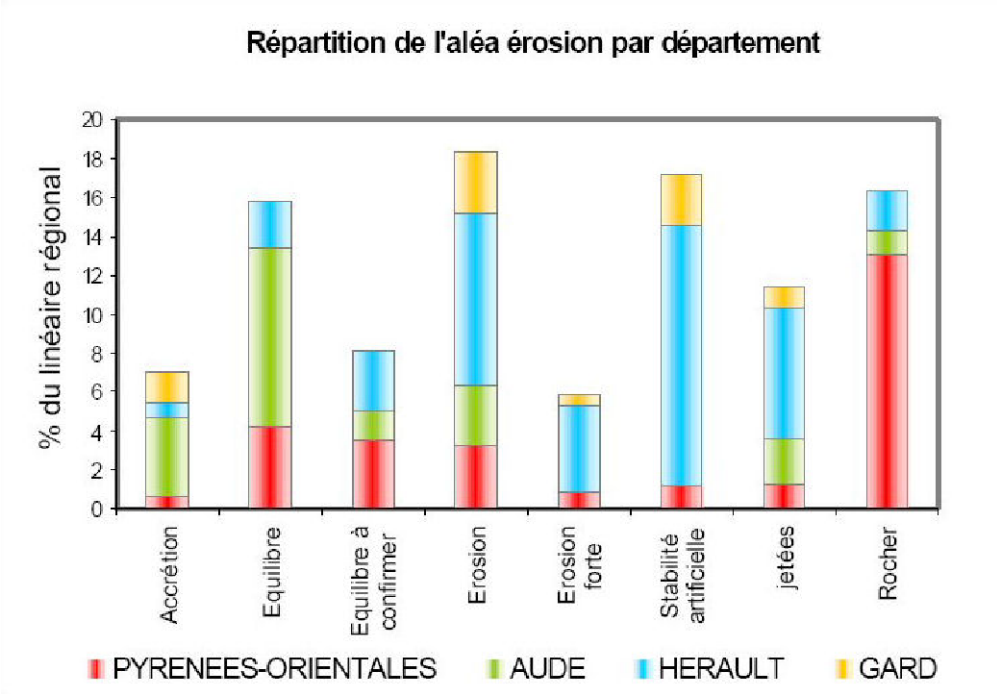


FIG. 1.1 – La répartition sur le linéaire côtier languedocien des zones en érosion, en accrétion et déjà totalement aménagées. Il apparaît clairement que les problèmes d'érosion sont un enjeu majeur pour cette région. On voit également que l'érosion a déjà entraîné de nombreux aménagements qui ont dénaturé le littoral (source : Institut français de l'environnement ; Corinne Erosion côtière, 1999).

n'est pas un cas isolé et la majorité des stations balnéaires françaises est confrontée au phénomène d'érosion. Par exemple, aux Saintes-Marie-de-la-Mer en Camargue, le littoral recule en moyenne de 2.5 mètres par an et jusqu'à 12 mètres par an localement.
De multiples facteurs sont à l'origine de ce phénomène, parmi lesquels le tarissement des apports sédimentaires (par les fleuves et/ou les dérives littorales), l'élévation du niveau moyen des mers due au réchauffement et enfin (et peut-être surtout...) l'aménagement du littoral. En effet, les structures en béton, enrochements, port artificiels, digues et jetées, favorisent la réflexion de l'énergie des vagues au lieu de son atténuation et provoquent

l'arrachage du sédiment. De plus, elles ont un effet de barrage mécanique qui empêche le transit littoral naturel.

De nombreux et ambitieux programmes de recherche s'efforcent de mesurer, analyser et modéliser ce phénomène dans sa complexité (citons à titre d'exemple DELOS, LITEAU, PATOM,...).

1.1.1 Les techniques du génie côtier

En génie côtier, on distingue deux familles de techniques. Les techniques "dures" et les techniques "douces".

- Les techniques "douces" sont de nature biologique : plantations d'oyats, de ganivelles (palissades de châtaignier qui font obstacle au vent) pour fixer les dunes. Elles sont efficaces mais agissent surtout sur l'érosion par le vent. Les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans le cadre de la lutte et la compréhension des mécanismes d'érosion par la mer, ces techniques sont donc hors de propos.
- Les techniques "dures" sont la mise en place d'ouvrages d'art tels que : épis (barres perpendiculaires au trait de côte), brise-lames (barres parallèles au trait de côte) et enrochements (murs construits sur le rivage). Ces techniques ont cependant une efficacité sujette à caution. Après une phase d'amélioration rapide, elles aboutissent souvent à une aggravation de l'érosion des secteurs adjacents, ce qui demande une installation de nouveaux ouvrages d'art et un cercle vicieux s'installe (voir la figure 1.2). En d'autres termes, elles permettent de résoudre localement le phénomène d'érosion côtière mais s'avèrent non appropriées lorsqu'il s'agit de protéger un linéaire côtier dans son ensemble.

Une alternative consiste à pratiquer des techniques de dragage de sable. Il s'agit d'une méthode qui consiste à aller puiser du sable dans la mer dans des gisements appropriés et le déposer sur la plage (voir par exemple le programme BEACHMED-E [1]). Le problème est qu'il faut renouveler souvent l'opération si la plage subit une érosion chronique et le coût de l'opération s'avère très élevé. C'est pourquoi la construction d'ouvrages d'art est l'outil de défense privilégié traditionnellement.

1.1.2 Les méfaits des techniques "dures" : la généralisation de l'effet "domino"

La construction d'ouvrages s'est généralisée dans les années 70, du fait de la forte urbanisation des littoraux sableux. Cependant, l'efficacité de ces méthodes du génie côtier s'avère limitée, voire faible sur certains sites. En effet, plusieurs exemples sur des sites aussi différents qu'éloignés illustrent ces méfaits. Citons tout d'abord le constat de Paul Durand (Laboratoire rhodanien de Géomorphologie, Université Lumière Lyon 2) sur un cas de déstabilisation anthropique d'un système sableux, la plage de Valras, près de Béziers (Hérault). "Les équipements implantés à la fin des années soixante à Valras-Plage ont entraîné une déstabilisation spectaculaire du littoral de cette commune. Ainsi, l'interception d'une partie du transit sédimentaire dominant par les jetées construites à l'embouchure de l'Orb a déclenché une forte érosion sur la plage de la station balnéaire, située immédiatement en aval dans le sens de la dérive littorale. En outre, l'édification

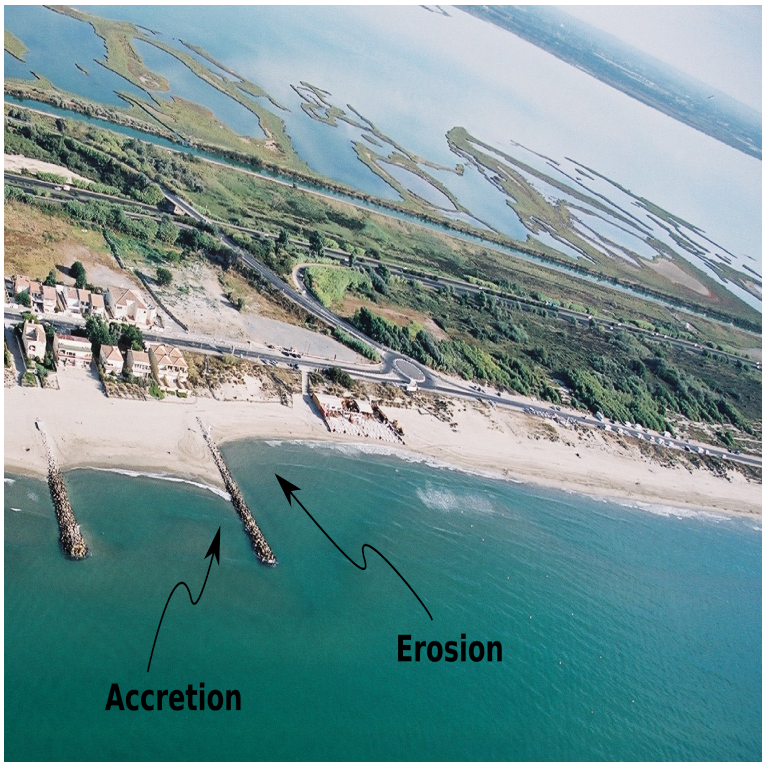


FIG. 1.2 – Une exemple d'implantation classique d'épis, perpendiculaires à la côte. On peut apercevoir un mécanisme érosif du côté amont (par rapport à la dérive littorale) de l'ouvrage, alors qu'une accrétion de sable se développe de l'autre côté (Crédits : *Hugues Heurtefeux, EID-MED*).

en 1985 d'un brise-lames pour enrayer ce recul a accru le déséquilibre. Il a enclenché un véritable engrenage de la protection lourde. En vertu du principe des dominos, la protection localisée assurée par cet ouvrage a eu comme corollaire l'apparition d'un recul en aval dans le sens de la dérive, nécessitant la mise en place de nouveaux brise-lames, et ainsi de suite . . .Aujourd'hui, la plage est protégée pratiquement dans son intégralité par une batterie de dix brise-lames. Seuls 500 mètres de rivage restent non défendus, mais on peut craindre qu'il ne soit nécessaire de les protéger à leur tour, avec pour conséquence un report de l'érosion sur les rivages voisins de Vendres" (voir la Figure 1.3-Gauche).
Le phénomène auquel fait référence P. Durand est généralement connu sous le nom "d'effet domino". L'exemple du lido de Frontignan (Hérault) en est un des plus marquants : Le premier épi, perpendiculaire au trait de côte, a été construit dans ce secteur en 1948 pour lutter contre les phénomènes érosifs. Mais depuis, on dénombre une quarantaine d'épis ou brise-lames supplémentaires qui ont été rajoutés les uns après les autres en aval de la dérive littorale afin de lutter à chaque fois contre les nouveaux problèmes d'érosion créés par la construction de l'épi précédent (voir la Figure 1.3-Droite). La construction systématique d'ouvrages identiques successifs est donc le signe d'une prise en compte déficiente

des impacts sur les zones environnantes, même si localement une protection est assurée.

FIG. 1.3 – (Gauche)- La succession de 10 brise-lames le long de la plage de Valras ; (Droite)- Le lido de Frontignan avec sa succession spectaculaire d'une quarantaine d'ouvrages.

1.2 Une approche novatrice

Nous proposons d'envisager le problème de la lutte contre l'érosion littorale, et plus généralement la gestion des littoraux sableux, sous l'angle de l'optimisation de forme. A notre connaissance, il n'existe à ce jour aucun travail académique ni aucune initiative en matière d'optimisation de forme en domaine littoral, y compris au niveau international. Le terme *optimisation de forme* fait référence à l'ensemble des techniques d'optimisation numérique qui permettent la modification progressive de la forme d'un domaine quelconque (un linéaire côtier, un ensemble de digues, une plage immergée avec des barres sableuses,...) soumis à des processus physiques (houle, courants,...), en fonction de critères d'optimisation judicieusement choisis (minimisation de l'énergie de houle, de l'élévation de la surface libre, maximisation du courant normal à la côte,...). Pour faire une analogie, nous cherchons à optimiser des profils / formes qui favorisent l'accrétion un peu à

la manière dont on optimise le profil d'une aile d'avion pour augmenter la portance et diminuer la traînée. Nous utiliserons pour cela les méthodes de l'optimisation de forme dans les fluides.

1.2.1 Le projet COPTER

une entente universitaire fédératrice...

Le caractère novateur de cette approche a abouti à un regroupement inédit entre l'*Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier* et le laboratoire *Géosciences Montpellier*. Ainsi, au cours de mes trois années de thèse, j'ai eu le privilège d'être en contact permanent avec des chercheurs spécialistes des aspects modélisations hydrodynamiques et mesures topobathymétriques[1]. Cette entente a permis la mise en place d'un projet de recherche, financé par l'Agence Nationale de la Recherche à hauteur de 340.000 Euros. Ce projet s'intitule "Conception, Optimisation et ProtoTypage d'ouvrage de protection des plages contre l'ERosion ". Il a pour ambition le développement de méthodes d'optimisation de forme adaptées à des problèmes d'hydrodynamique littorale précis, ainsi que la mise au point d'outils d'optimisation couplés à des modèles hydrodynamiques réalistes qui pourront aider à la décision pour l'aménagement littoral.

...et une collaboration industrielle fondatrice

Un des atouts majeurs du projet COPTER concerne la collaboration industrielle. Il nous offre donc la possibilité d'appliquer les méthodes sur des problèmes industriels réels et concrets, mais surtout d'envisager la validation des résultats d'optimisation par l'expérience.
Nous avons collaboré avec le bureau d'étude Bas-Rhône Languedoc ingénierie (BRLi), qui possède une expertise dans la maîtrise d'oeuvre en zone littorale et un savoir faire dans le dimensionnement de structures artificielles en zone littorales. En particulier, cet organisme est responsable du grand projet de réaménagement du Mont Saint Michel. Plus proche de nous, BRLi est aussi prestataire principal dans le projet de restructuration du Lido de Sète à Marseillan (Hérault, France) dont les travaux doivent débuter courant 2008. Il s'agit d'un site confronté à une érosion intensive avec une perte totale de sable d'environ 1Ha/an depuis 50 ans. Nous avons calculé la taille et la position optimale d'ouvrages immergées, plus précisément de tubes en géotextile, à partir d'une étude d'avant-projet réalisée par BRLi. Nous présentons ces travaux au chapitre 4. Dès Janvier 2008, une validation expérimentale des résultats obtenus doit débuter en canal à houle (2D) et bassin à houle (3D) dans le cadre de collaboration avec le LEGI et la SOGREAH à Grenoble.

1.2.2 La plateforme technologique GLADYS

La région Languedoc-Roussillon est également partenaire au travers de la plateforme technologique GLADYS (Groupe LAnguedoc-Roussillon d'étude de la DYnamique Sédi-

[1]La bathymétrie est la mesure des profondeurs de l'océan pour déterminer la topographie du sol sur le fond de la mer.

mentaire littorale). En effet, depuis le début de l'année 2007, une plateforme technologique regroupant en Languedoc-Roussillon les activités de recherche en matière d'hydrodynamique et de dynamique sédimentaire littorale est opérationnelle. Elle a pour mission, entre autres, de développer à l'échelle régionale les collaborations entre les structures de recherche et la société civile. Des informations sur les différents axes et travaux de recherche, et notamment sur les travaux effectués dans le cadre de cette thèse, sont disponibles sur le site *www.gladys-littoral.org*.

1.3 La propagation des vagues

La houle fait référence à un mouvement ondulatoire de la mer qui est en fait une succession de vagues créées par le vent. Ces vagues se propagent jusqu'à proximité de la côte. La houle existe encore lorsque le vent générateur a disparu et peut se propager très loin de la zone où elle a été générée. Lorsque la hauteur devient trop élevée par rapport à la profondeur, elle déferle. Les oscillations de la surface de l'eau sont caractérisées par 4 grandeurs principales : leur hauteur H (la dénivelation entre un creux et une crête dans l'oscillation), leur longueur d'onde L (la distance séparant deux creux ou deux crêtes successifs), leur période T (le temps séparant le passage de deux crêtes successives le long d'une verticale fixe) et leur direction de propagation θ. A titre indicatif, les mesures *in-situ* montrent que la hauteur de houle H varie en moyenne de 0 à 25 m lors des tempêtes les plus fortes. Les périodes varient de 0 à 20 s et les longueurs d'ondes de 0 à plus de 500 m. Un résultat important, issu de l'observation, est que la période T de la houle est pratiquement constante durant la propagation vers la rivage, contrairement à tous les autres paramètres (L,H,...).
A partir du XIXième siècle, les premiers travaux d'hydrauliques maritimes virent le jour. En 1804, Gerstner met au point une première théorie pour les houles circulant dans un fluide de profondeur infinie. Ensuite, une théorie linéaire complète de la houle est établie par Airy en 1845, suivie d'un premier pas vers la généralisation par Stokes (1847) avec une théorie de houle du second ordre, i.e. non-linéaire et approximée au second ordre. Boussinesq développe sa théorie de la houle longue en 1872, et Michel (1893) et McCowan (1894) établissent une théorie dite de houle de faible amplitude. Puis vint ensuite Rossby dans les années 1930-1945, ainsi que Sverdrup et Munk (1947). Plus récemment, nous pouvons citer les travaux de Phillips (1977), Mei (1989), Komon (1994), Komar (1998) et Young (1999). On se propose dans cette partie de rappeler les fondements nécessaires à la compréhension des différents phénomènes créés par l'action de la houle. Il ne s'agit pas de présenter ici les différentes théories de la houle mais de montrer quelle est leur base commune. Ce passage en revue commence par un bref rappel des bases de la théorie linéaire de la houle d'Airy. On introduit ensuite certains phénomènes clefs tels que la diffraction, la réfraction et la réflexion... Ceci nous permettra de mieux comprendre les modèles utilisés pour les différentes applications. Pour plus de détails concernant ces théories, le lecteur peut se référer au cours très complet de F. Ardhuin [4] ou encore à F. Bouchette [11] .

1.3.1 Les équations de la théorie linéaire

Cette théorie repose sur les deux hypothèses suivantes pour le fluide : $a << L$ et $a << h$, où $a = \frac{H}{2}$ est l'amplitude des vagues et h est la profondeur locale.

De plus, on considère que le fond est localement plat, donc que h est constant. L'avantage de cette théorie est sa linéarité. Ainsi, on peut représenter une houle réaliste comme la superposition d'un spectre de houles monochromatiques.

On se place donc dans un domaine Ω de longueur L, comme décrit à la figure 1.4, où la position est donnée par le vecteur horizontal à deux composantes $\mathbf{x} = (x, y)$ et la position verticale z, les vitesses sont leurs dérivées temporelles $\mathbf{u} = (u, v)$ et w et $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ est la surface libre.

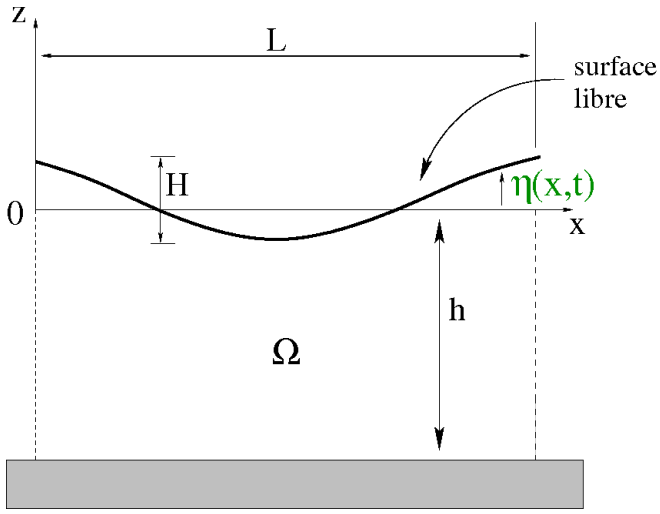


FIG. 1.4 – Dans un domaine de longueur L, le potentiel des vitesse $\Phi(\mathbf{x}, z, t)$ est solution d'un problème à valeur aux limites.

On considère l'eau incompressible de densité constante ρ et surtout le mouvement irrotationnel, de sorte que la vitesse dérive d'un potentiel Φ, tel que $\mathbf{u} = -\nabla\Phi$ et $w = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ (cette hypothèse a été confirmée par de nombreuses observations de vagues naturelles, sauf dans certains cas particuliers come au moment du déferlement). Sous ces hypothèses, les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse appliquées à l'océan permettent d'obtenir le problème aux limites suivant pour le potentiel Φ dans le domaine Ω [52, 21, 22],

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 & \text{pour } -h \leq z \leq \eta(\mathbf{x},t), \quad (1.1) \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 & \text{sur } z = -h\ , \quad (1.2) \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = \dfrac{\partial\eta}{\partial t} - \nabla\Phi\cdot\nabla\eta & \text{sur } z = \eta(\mathbf{x},t), \quad (1.3) \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}[|\nabla\Phi|^2 + (\dfrac{\partial\Phi}{\partial z})^2] + g\eta + \dfrac{p}{\rho} = 0 & \text{sur } z = \eta(\mathbf{x},t). \quad (1.4) \end{cases}$$

Le potentiel Φ est donc solution de l'équation de Laplace entre $-h$ et $\eta(\mathbf{x},t)$ où la surface libre η caractérise les modulations de la houle autour de l'axe $x = 0$. Les équations (1.2)-(1.3)-(1.4) fournissent des conditions aux limites au fond et à la surface. En effet, au fond, on considère la condition de glissement libre (1.2). La condition cinématique (1.3) modélise la continuité des vitesses en surface (la surface est une ligne de courant telle que toute particule qui s'y trouve y reste). L'équation (1.4) est la condition de Bernoulli à la surface.

1.3.2 Les solutions d'Airy : représentation de petites vagues au dessus d'un fond plat

En dérivant (1.4) par rapport au temps et en utilisant (1.3), on obtient une seule condition à la surface,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = g\nabla\Phi\cdot\nabla\eta + \nabla\Phi\cdot\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial z} \quad \text{sur} \quad z = \eta. \tag{1.5}$$

Pour de petites vagues, i.e. pour des oscillations de faible amplitude, la linéarisation de (1.5) donne,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{sur} \quad z = 0. \tag{1.6}$$

Ainsi, Φ est désormais solution du problème (1.1)-(1.2)-(1.6).
Nous avons vu qu'une première approximation de la houle réelle consiste à la traiter comme une superposition finie de sinusoïdes différentes caractérisées par une unique hauteur, longueur et période (houle monochromatique). Ainsi, la surface libre $\eta(\mathbf{x},t)$ s'exprime comme une fonction de la phase $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$, où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la fréquence angulaire de la houle et $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k\cos\theta, k\sin\theta)$ est le vecteur d'onde (k est le nombre d'onde et θ la direction de propagation). 0n considère donc des vagues périodiques en temps et en espace telles que,

$$\eta(\mathbf{x},t) = a.e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \tag{1.7}$$

Par la méthode de séparation des variables, on obtient des solutions d'Airy pour le problème (1.1)-(1.2)-(1.6) de la forme,

$$\Phi(\mathbf{x},z,t) = -\frac{ig\eta(\mathbf{x},t)}{\omega}f(z) \tag{1.8}$$

où $f(z)$ est défini par

$$f(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}. \tag{1.9}$$

De plus, on obtient également la relation de dispersion suivante,

$$\omega^2 = gk \tanh kh. \tag{1.10}$$

En effet, la linéarisation de l'équation (1.3) pour de faibles amplitudes donne,

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{pour} \quad z = 0. \tag{1.11}$$

Or, d'après (1.7) et (1.8), on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -ik\frac{g}{\omega}\frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

et

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega a e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}.$$

En remplaçant dans (1.11), on retrouve bien $\omega^2 = gk \tanh kh$.

L'équation (1.10) rend compte de la dispersion en établissant une relation liant la bathymétrie h, la longueur d'onde L (par l'intermédiaire du nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{L}$) et la période T (par l'intermédiaire de la fréquence $\omega = \frac{2\pi}{T}$).

Dans la pratique, on s'intéresse à la partie réelle des solutions. Ainsi, on a :

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) := \Re\left[\Phi(\mathbf{x}, z, t)\right] = \frac{Hg}{2\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t\right). \tag{1.12}$$

1.3.3 Introduction de la non-linéarité : houle de Stokes à l'ordre 2

La théorie linéaire présentée précédemment repose sur deux hypothèses principales : 1) on considère des houles de faibles amplitudes (le niveau d'eau moyen est assimilé à $\eta = 0$), 2) on néglige les termes non-linéaires dans (1.5). Stokes, en 1847 [52, 21], a étendue le raisonnement de manière à chercher des solutions plus conformes au modèle mathématiques initial (1.1)-(1.2)-(1.3)-(1.4).

En introduisant les variables adimensionnées suivantes dans (1.1)-(1.2)-(1.3)-(1.4),

$$\mathbf{X} = k\mathbf{x}; \quad Z = kz$$

$$\Pi = \frac{\eta}{a}; \quad \Psi = \frac{k\Phi}{a\sqrt{gk}}; \quad T = \sqrt{gk}t$$

$$\sigma = \frac{\omega}{\sqrt{gk}}; \quad P = \frac{kp}{\rho g}$$

on obtient le problème suivant,

$$\begin{cases} \nabla^2\Psi + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} = 0 & \text{pour } -kh \leq Z \leq ka\Pi, \quad (1.13) \\ -\dfrac{\partial\Psi}{\partial Z} = 0 & \text{sur } Z = -kh, \quad (1.14) \\ -\dfrac{\partial\Psi}{\partial Z} = \dfrac{\partial\Pi}{\partial T} - (ka)\nabla\Psi\cdot\nabla\Pi & \text{sur } Z = ka\Pi, \quad (1.15) \\ -(ka)\dfrac{\partial\Psi}{\partial T} + (ka)^2\left[\dfrac{|\nabla\Psi|^2 + (\frac{\partial\Psi}{\partial Z})^2}{2}\right] + Z + P = 0 & \text{sur } Z = ka\Pi. \quad (1.16) \end{cases}$$

La produit ka, mis en évidence dans cette approche, est la cambrure de la houle. Dans la suite, on peut supposer que P est nul à la surface de l'eau (P est déterminé à une constante près). En regardant le problème (1.13)-(1.14)-(1.15)-(1.16), on s'aperçoit que la théorie linéaire consiste à négliger les termes de l'ordre de $(ka)^2$ par rapport à ceux de l'ordre de (ka). L'approche de Stokes suppose que la solution dépend de la cambrure de la houle ka. On suppose $ka << 1$ (on note dans la suite $\varepsilon = ka$), et que les différentes variables peuvent être développées en série de puissances dépendant de ε,

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + \varepsilon\Pi_2 + \varepsilon^2\Pi^3 + ... \\ \Psi &= \Psi_1 + \varepsilon\Psi_2 + \varepsilon^2\Psi^3 + ... \\ \sigma &= \sigma_1 + \varepsilon\sigma_2 + \varepsilon^2\sigma^3 + ... \end{aligned}$$

En introduisant ces perturbations dans (1.13) -(1.14)-(1.15)-(1.16) et en ne retenant que les termes du premier ordre en ε, on obtient le problème aux limites suivant[2],

$$\begin{cases} \nabla^2\Psi_1 + \dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial Z^2} + \varepsilon\left(\nabla^2\Psi_2 + \dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial Z^2}\right) = 0 & \text{pour } -kh \leq Z \leq 0, \\ -\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial Z} - \varepsilon\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial Z} = 0 & \text{sur } Z = -kh, \\ -\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial Z} - \varepsilon\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial Z} - \dfrac{\partial\Pi_1}{\partial T} - \varepsilon\dfrac{\partial\Pi_2}{\partial T} + \varepsilon\nabla\Psi_1\cdot\nabla\Pi_1 - \varepsilon\Pi_1\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial Z^2} = 0 & \text{sur } Z = 0, \\ -\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial T} - \varepsilon\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial T} + \dfrac{\varepsilon}{2}\left[|\nabla\Psi_1|^2 + (\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial Z})^2\right] + \Pi_1 + \varepsilon\Pi_2 - \varepsilon\Pi_1\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial T\partial Z} = 0 & \text{sur } Z = 0. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon = 0$, on retrouve le problème linéaire de la section 1.3.1, dont les solutions au premier ordre sont

$$\Psi_1 = -\frac{1}{\sigma}\frac{\cosh(Z+kh)}{\cosh kh}\sin(X - \sigma T), \quad (1.17)$$

$$\Pi_1 = \cos(X - \sigma T). \quad (1.18)$$

[2]Le développement de Taylor, $\Psi(\mathbf{X}, \varepsilon\Pi, T) = \Psi(\mathbf{X}, 0, T) + (\varepsilon\Pi)\frac{\partial\Psi}{\partial Z}(\mathbf{X}, 0, T) + \cdots$ permet de "travailler" dans le domaine de fluide au repos $-kh \leq Z \leq 0$.

Il reste donc à obtenir les solutions d'ordre ε que sont Ψ_2 et Π_2. On a le problème suivant,

$$\begin{cases} \nabla^2\Psi_2 + \dfrac{\partial^2\Psi_2}{\partial Z^2} = 0 & \text{pour } -kh \leq Z \leq 0, \\ -\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial Z} = 0 & \text{sur } Z = -kh, \\ -\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial Z} - \dfrac{\partial\Pi_2}{\partial T} + \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Pi_1 - \Pi_1\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial Z^2} = 0 & \text{sur } Z = 0, \\ -\dfrac{\partial\Psi_2}{\partial T} + \dfrac{1}{2}\left[|\nabla\Psi_1|^2 + (\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial Z})^2\right] + \Pi_2 - \Pi_1\dfrac{\partial^2\Psi_1}{\partial T\partial Z} = 0 & \text{sur } Z = 0. \end{cases}$$

Les solutions de ce problème sont,

$$\Psi_2 = -\frac{3\sigma}{8}\frac{\cosh 2(Z+kh)}{\sinh^2 kh}\sin 2(X-\sigma T), \tag{1.19}$$

$$\Pi_2 = \frac{\partial\Psi_2}{\partial T} - \frac{1}{2}\left[|\nabla\Psi_1|^2 + (\frac{\partial\Psi_1}{\partial Z})^2\right] + \Pi_1\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial T\partial Z}. \tag{1.20}$$

En revenant aux variables initiales, on obtient finalement les houles du second ordre suivantes,

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{Hg}{2\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t) \\ &- \frac{3}{32}H^2 g\frac{\cosh 2k(z+h)}{\sinh^4 kh}\sin 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t), \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t) + \frac{H^2 k}{16}\frac{\cosh kh}{\sinh^3 kh}(2+\cosh 2kh)\cos 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t) \tag{1.22}$$

La grande majorité des codes de houles utilisent des houles de Stokes du second ordre comme houle incidente. Pour plus de détails sur cette approche non-linéaire de Stokes, nous invitons le lecteur à se référer à [52, 21].

1.3.4 Profondeur relative et vitesse de vague

La *profondeur relative* est le produit adimensionné kh de la profondeur par le nombre d'onde. Cette quantité permet de classifier les vagues et leur propagation en 3 catégories :

- Si $kh << \frac{\pi}{10}$ ($h << \frac{L}{20}$), on fait référence à une propagation en eaux peu profondes (*shallow water* en anglais). Dans ce cas, la vitesse au fond, générée par les vagues à la surface, n'est pas nulle et il y a interaction entre les courants générés par les vagues et le fond marin. De plus, l'équation de dispersion (1.10) s'écrit de façon explicite
$$\omega^2 = gk^2h. \tag{1.23}$$
- Si $\frac{\pi}{10} < kh < \pi$ ($\frac{L}{20} << h << \frac{L}{2}$), on fait référence à une propagation en eaux intermédiaires.

– Si $kh >> \pi$ ($h >> \frac{L}{2}$), on fait référence à une propagation en eaux profondes (*deep water* en anglais). Dans ce cas, la houle n'interagit pas avec le fond. De plus, l'équation de dispersion (1.10) s'écrit

$$\omega^2 = gk, \tag{1.24}$$

ou également, $L = \frac{g}{2\pi}T^2 \approx 1,52T^2$.

Ceci nous montre qu'il existe une loi d'échelle dans la transformation de la houle lors de sa propagation. Par exemple, une houle de hauteur 20 cm et de longueur d'onde 3 m se propageant sur un fond de bathymétrie 1 m évolue de la même manière qu'une houle de hauteur 20 m de haut et de longueur d'onde 300 m se propageant sur un fond à 100 m de profondeur.

La *vitesse de phase* définie par $C = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T}$ est la vitesse à laquelle la crête des vagues progresse. L'expression de C permet d'obtenir une expression équivalente pour l'équation de dispersion (1.10)

$$C^2 = \frac{g}{k}\tanh kh = g\left(\frac{L}{2\pi}\right)\tanh\left(\frac{2\pi}{L}\right)h. \tag{1.25}$$

Ainsi, la diminution de la vitesse de phase C est le résultat d'un raccourcissement de la longueur d'onde L. ceci explique le phénomène de dispersion de la houle à l'approche du rivage.

La *vitesse de groupe* définie par

$$C_g = \frac{C}{2}(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}) \tag{1.26}$$

est la vitesse de propagation d'un groupe de vagues contenant des fréquences différentes mais proches [52, 21, 22]. C'est aussi la vitesse de propagation de l'énergie.

1.3.5 Réflexion + diffraction + réfraction = scattering

Le terme anglais *scattering* fait référence à la modification des paramètres L, θ et H de la houle incidente lors de sa propagation vers la côte. Il englobe plusieurs phénomènes tel que la la réflexion, la réfraction ou la diffraction de la houle.

En effet, tant que la bathymétrie est grande, la houle se propage sans déformation majeure. Cependant, à l'approche du rivage ou contre des ouvrages immergés ou émergés, la propagation de la houle se trouve modifiée. Dans ce qui suit, nous présentons brièvement les phénomènes cités précédemment.

La réflexion

Lorsque la houle bute contre un objet vertical dans une zone où la variation de bathymétrie est très rapide, la houle est partiellement ou totalement réfléchie. On observe un train de houle de mêmes caractéristiques que le train de houle incident, mais repartant dans la direction opposée. Dans la zone de réflexion près de l'obstacle, les oscillations sont totalement déformées.

La réfraction

Lorsqu'on observe d'avion la propagation d'une houle dont les lignes de crêtes sont parallèles entre elles mais obliques par rapport à la plage, on constate que, près de la côte, ces lignes ont tendance à devenir parallèles à la direction moyenne de la côte et ne plus être parallèles entre elles. Lorsqu'une houle croise un objet peu profond ou émergé, les lignes de crêtes convergent localement vers cet obstacle. De même, si la houle croise une zone de bathymétrie localement plus importante, les lignes de crêtes divergent par rapport à ce non-obstacle.

La réfraction est donc la modification de la forme et de la direction de propagation de la houle en fonction de variations topographiques (voir figure 1.5). C'est un phénomène observé à la surface de l'eau qui résulte de l'interaction entre le fluide et le fond marin.

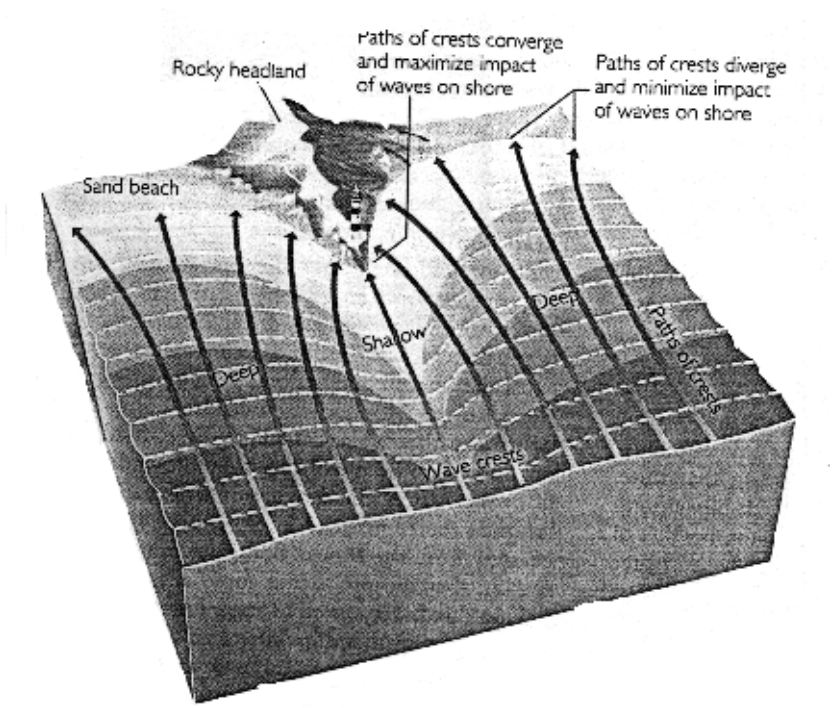


FIG. 1.5 – La réfraction sur le fond-marin. Les vecteurs indiquent le sens de propagation des lignes de crêtes vers la côte. On constate que ces lignes de crêtes se parallélisent par rapport à la forme moyenne de la côte. Ceci est dû à la réfraction de la houle sur le fond marin, c'est à dire la variation de célérité en chaque point d'une ligne de crête en fonction de la bathymétrie. (*source* : Press & Siever (1998)).

La réfraction dans les fluides obéit à une loi similaire à la loi de Snell-Descartes en optique. Une démonstration élégante est donnée dans ([21], 4.8.2). En effet, pour une houle incidente monochromatique, on définie la fonction de phase $S(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$.

Ainsi, le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ peut être vu comme,

$$\mathbf{k} = \nabla S$$

où, $\mathbf{k} = (k\cos\theta, k\sin\theta)$. On a donc,

$$\nabla \times \mathbf{k} = \frac{\partial(k\sin\theta)}{\partial x} - \frac{\partial(k\cos\theta)}{\partial y} = 0. \tag{1.27}$$

Pour faire l'analogie avec la réfraction par dioptre plan, plaçons nous dans une bathymétrie invariante par translation $y \mapsto y + const$ tel que $h(x, y) = h(x)$ (voir figure 1.7). Dans ce cas, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(x)$ et l'équation (1.27) est réduite à,

$$\frac{d(k\sin\theta)}{dx} = 0. \tag{1.28}$$

En divisant (1.28) par ω, on obtient finalement

$$\frac{\sin\theta}{C} = \text{ constante } = \frac{\sin\theta_0}{C_0} \tag{1.29}$$

où, θ_0 et C_0 sont respectivement la direction et la vitesse de la houle incidente au large.

En optique, pour un rayon lumineux passant d'un milieu d'indice n_1 dans un milieu d'indice n_2, on rappelle que le loi de Snell-Descartes s'écrit,

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

où, θ_1 et θ_2 sont respectivement les angles des rayons incident et réfracté par rapport à la normale au point d'incidence. Comme le montre la figure 1.6, plus l'indice du second milieu augmente, plus le rayon se rapproche de la normale.

L'équation (1.29) montre que l'on a un comportement similaire pour la houle, où l'indice de réfraction est égal à l'inverse de la vitesse de phase. Or, d'après (1.25), C est monotone en h. Ainsi, lorsqu'on se rapproche de la côte, h et donc C diminuent et la houle devient parallèle au rivage (voir figure 1.7).

La diffraction

Lorsqu'une houle se propage à proximité d'ouvrages émergés, par exemple une digue marquant l'entrée d'un port, la propagation directe de la houle, même en tenant compte de la réflexion et la réfraction, est censée préserver des zones d'ombres (i.e. non perturbées par la même oscillation). Néanmoins, ces zones d'ombres sont souvent perturbées par la genèse d'un très grand nombre de houles superposées se propageant dans toute direction formant un angle inférieur à 90° par rapport à la direction initiale de propagation (voir figure 1.8).

En d'autres termes, au voisinage d'obstacles tels que des digues ou des brise-lames, l'amplitude des vagues et les propriétés du milieu où elles se propagent peuvent varier considérablement par rapport à la période et la longueur d'onde. Ce phénomène est appelé diffraction de la houle.

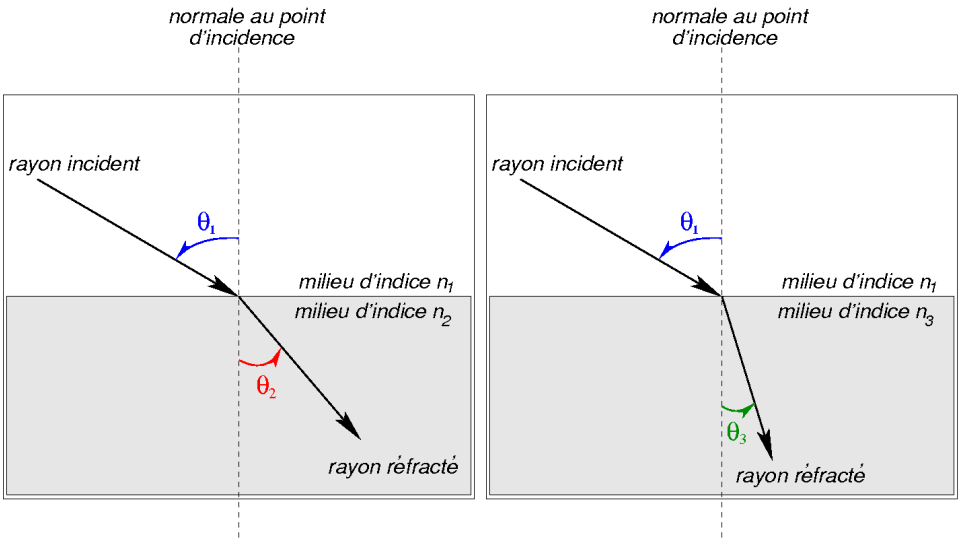


FIG. 1.6 – Illustration de la réfraction d'un rayon lumineux dans deux milieux d'indice différent ($n_2 < n_3$).

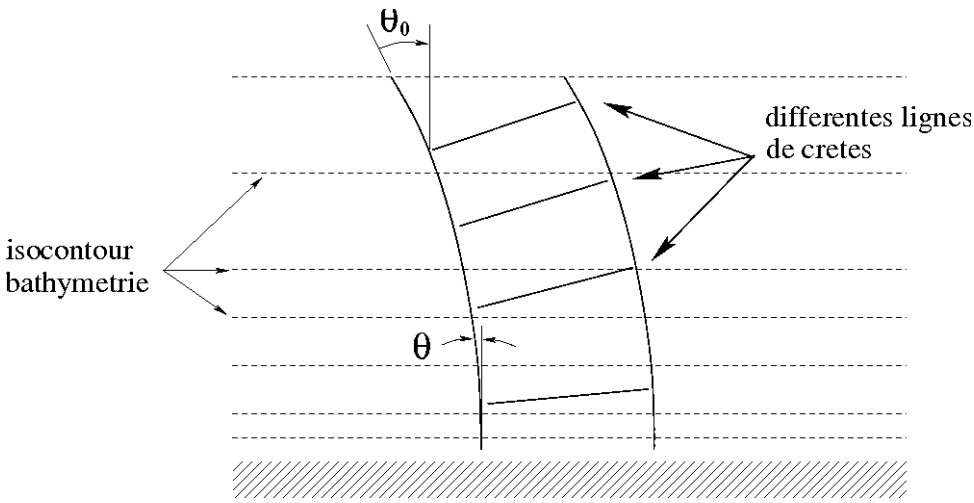


FIG. 1.7 – Illustration de la réfraction d'un train de houle à l'approche de la côte.

Sur un fond plat et en présence d'obstacle, on peut utiliser pour des vagues de faible amplitude les équations linéarisées présentées à la section 1.3.2. Ainsi on peut supposer que Φ est de la forme

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \eta(\mathbf{x}) \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} e^{-i\omega t} \tag{1.30}$$

où $\omega^2 = gk_0 \tanh k_0 h$. Dans ce cas, l'équation de Laplace (1.1) se réduit à l'équation

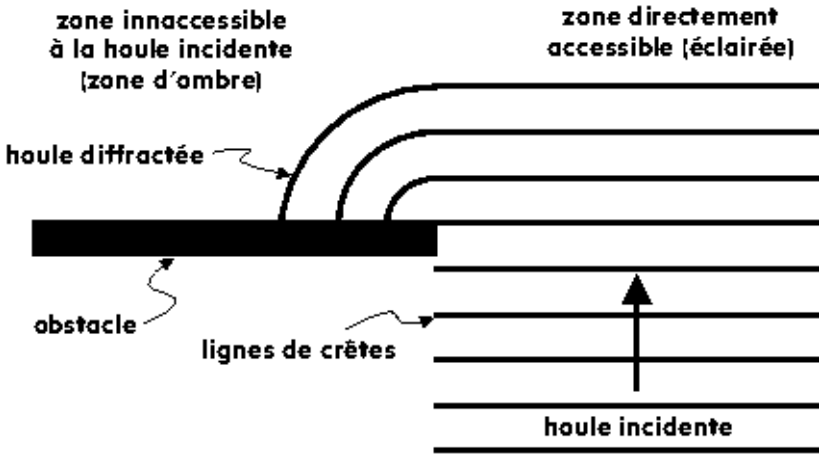


FIG. 1.8 – La diffraction de la houle. Le parallélépipède noir représente un obstacle indéformable émergé dont les parois forment des à-pics. Les houles incidentes arrivant directement sur cet obstacle sont réfléchies (non représentées). Les houles passant loin de l'obstacle se propagent normalement jusqu'à la côte (zone éclairée, par analogie avec l'optique). Leurs lignes de crêtes sont représentées par des lignes parallèles entre elles. La zone d'ombre située derrière l'obstacle noir est atteinte uniquement par la houle diffractée, générée au niveau de la discontinuité créée dans le champ de houle au bord droit de l'obstacle noir.

d'Helmholtz

$$\nabla^2\eta + k_0^2\eta = 0. \tag{1.31}$$

Cette équation permet de calculer l'élévation de la surface libre de vagues avec de petites amplitudes se propageant sur un fond plat.

1.3.6 L'équation de pente douce

En 1972, Berkhoff a eu l'idée d'étendre les propriétés de réfraction/diffraction, valable pour une profondeur constante, à des profondeurs variables $h(\mathbf{x})$ moyennant une hypothèse de pente douce. Plus précisément, le "petit" paramètre suivant est introduit,

$$\mu = O(\frac{\nabla h}{kh}) \ll 1 \tag{1.32}$$

La condition (1.32) assure que les variations de profondeur sont petites par rapport à la profondeur relative. Berkhoff suppose que, pour des profondeurs variables vérifiant cette condition, le potentiel peut encore s'écrire sous la forme,

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = -\frac{ig\eta(\mathbf{x})}{\omega} f(z) e^{-i\omega t} \tag{1.33}$$

où,

$$f(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}. \tag{1.34}$$

Dans la suite, on notera encore $\Phi(\mathbf{x}, z) = -\frac{ig\eta(\mathbf{x})}{\omega} f(z)$, il n'y a pas risque de confusion avec l'équation (1.33).

Néanmoins, Φ est maintenant solution du problème suivant,

$$\begin{cases} \nabla^2\Phi + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 & \text{pour } -h(\mathbf{x}) \leq z \leq 0, \quad (1.35) \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = +\nabla h \cdot \nabla\Phi & \text{sur } z = -h(\mathbf{x}), \quad (1.36) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} - \dfrac{\omega^2}{g}\Phi = 0 & \text{sur } z = 0, \quad (1.37) \end{cases}$$

et f vérifie le problème suivant,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^2 f = 0 & \text{pour } -h(\mathbf{x}) \leq z \leq 0 \quad (1.38) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 & \text{sur } z = -h(\mathbf{x}) \quad (1.39) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\omega^2}{g} f = 0 & \text{sur } z = 0. \quad (1.40) \end{cases}$$

La différence avec le problème (1.1)-(1.2)-(1.6) apparaît dans la condition limite (1.36), où l'on voit apparaître les variations du fond.

En multipliant (1.35) par $f(z)$ puis en intégrant sur la colonne d'eau (i.e. pour $-h(\mathbf{x}) < z < 0$), on obtient

$$\int_{-h(x)}^{0} f(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \nabla^2\Phi)\, dz = 0 \tag{1.41}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-h(\mathbf{x})}^{0} f\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} dz &= -\int_{-h(x)}^{0} \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial z}\Phi_{|z=0} + f(\nabla h \cdot \nabla\Phi)_{|z=-h(\mathbf{x})}, \\ &= -\left(-\int_{-h(\mathbf{x})}^{0} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Phi\, dz + [\frac{\partial f}{\partial z}\Phi]_{-h(\mathbf{x})}^{0}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\Phi_{|z=0} + f(\nabla h \cdot \nabla\Phi)_{|z=-h(\mathbf{x})} \\ &= \int_{-h(\mathbf{x})}^{0} k^2 f\Phi\, dz + f(\nabla h \cdot \nabla\Phi)_{|z=-h(\mathbf{x})}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

L'équation (1.41) donne donc,

$$\int_{-h(x)}^{0} k^2 f\Phi + f\nabla^2\Phi\, dz = -f(\nabla h \cdot \nabla\Phi)_{|z=-h(\mathbf{x})}. \tag{1.43}$$

A partir de (1.33), on obtient

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= -\frac{ig}{\omega}(f\nabla\eta + \eta\frac{\partial f}{\partial h}\nabla h), \\ \nabla^2\Phi &= -\frac{ig}{\omega}(f\nabla^2\eta + 2\frac{\partial f}{\partial h}\nabla\eta \cdot \nabla h + \eta\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(\nabla h)^2 + \eta\frac{\partial f}{\partial h}\nabla^2 h), \end{aligned}$$

et l'équation (1.43) s'écrit,

$$\int_{-h(x)}^{0} \left[f^2\nabla^2\eta + 2f\frac{\partial f}{\partial h}\nabla\eta\cdot\nabla h + \eta f\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(\nabla h)^2 + \eta f\frac{\partial f}{\partial h}\nabla^2 h + k^2\eta f^2 \right] dz$$
$$= -\nabla h\cdot\nabla\eta f^2{}_{|z=-h(\mathbf{x})} - \eta(\nabla h)^2 f\frac{\partial f}{\partial h}{}_{|z=-h(\mathbf{x})}. \quad (1.44)$$

D'après la règle d'intégration de Leibniz, on a

$$\int_{-h(x)}^{0} (f^2\nabla^2\eta)\, dz = \nabla\cdot\int_{-h(x)}^{0} (f^2\nabla\eta)\, dz - 2\int_{-h(x)}^{0} f\frac{\partial f}{\partial h}\nabla\eta\cdot\nabla h\, dz - \nabla h\cdot\nabla\eta f^2{}_{|z=-h(\mathbf{x})}. \quad (1.45)$$

Ainsi, l'équation (1.44) devient,

$$\nabla\cdot\int_{-h(x)}^{0} (f^2\nabla\eta)\, dz + \int_{-h(x)}^{0} k^2\eta f^2\, dz$$
$$= -\eta(\nabla h)^2 f\frac{\partial f}{\partial h}{}_{|z=-h(\mathbf{x})} - \int_{-h(x)}^{0} \eta f\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}(\nabla h)^2\, dz - \int_{-h(x)}^{0} \eta f\frac{\partial f}{\partial h}\nabla^2 h\, dz \quad (1.46)$$

Formellement, la condition (1.32) implique que tous les termes à droite dans (1.46) sont négligeables (de l'ordre de $O(\mu^2)$).

On obtient donc l'équation suivante,

$$\nabla\cdot\left(\int_{-h(x)}^{0} f^2\, dz\right)\nabla\eta + k^2\left(\int_{-h(x)}^{0} f^2\, dz\right)\eta = 0 \quad (1.47)$$

Or, le calcul de $\int_{-h(x)}^{0} f^2\, dz$ donne[3],

$$\int_{-h(x)}^{0} f^2\, dz = \frac{\omega^2}{gk^2}\frac{1}{2}\left[1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right]. \quad (1.48)$$

Finalement, on obtient l'*équation de pente douce* (ou équation de Berkhoff) suivante,

$$\nabla\cdot(CC_g\nabla\eta) + \omega^2\left(\frac{C_g}{C}\right)\eta = 0 \quad (1.49)$$

où C et C_g sont respectivement la vitesse de phase et la vitesse de groupe des vagues définis en 1.3.4 [6].

Il est intéressant de voir qu'en *eaux profondes*, i.e. lorsque la profondeur relative kh est grande et qu'il n'y pas d'interaction entre la houle et le fond, l'équation de Berkhoff se ramène à l'équation d'Helmholtz. En effet, lorsque $kh >> \pi$, l'équation (1.26) donne,

$$C_g \approx \frac{C}{2}. \quad (1.50)$$

[3] Astuce : utiliser $\int_0^{kh} \cosh^2\xi d\xi = \frac{1}{4}(\sinh 2kh + 2kh)$.

En remplaçant dans (1.49) et en utilisant $C = \frac{\omega}{k}$, on obtient donc

$$\nabla^2\eta + k^2\eta = 0. \tag{1.51}$$

L'équation de pente douce (1.49) est donc une extension de l'équation d'Helmholtz à une faible pente du fond. L'équation (1.49) et ses formes dérivées sont très largement utilisées en génie côtier pour determiner la propagation de la houle dans les ports par exemple.

1.3.7 Un modèle parabolique de propagation de houle

Pour la modélisation de la propagation de la houle vers la côte sur une bathymétrie arbitraire, nous utilisons un modèle basé sur une extension parabolique de l'équation de pente douce (1.49) [43, 44]. Ce modèle a été développé au laboratoire Center for Applied Coastal Research (University of Delaware, USA) par J.T. Kirby et R.A. Dalprymple. C'est un code métier que nous avons utilisé en "boite noire" par l'intermédiaire du code REF/DIF [46, 45, 42]. Il calcule la propagation et la transformation d'une houle quelconque sur une topographie modérément irrégulière . En particulier, il gère à la fois la diffraction et la réfraction de la houle sur la topographie, en considérant une forme non-linéaire de l'équation de Berkhoff (1.49), modifiée pour tenir compte de la diffraction telle qu'elle a été définie par Yue & Mei [54]. Il gère également la dissipation de l'énergie de la houle induite à l'interface eau/air, dans la masse fluide [63], à l'interface eau/sédiment [21, 22] et par le déferlement. La limitation majeure de ce modèle est qu'il ne gère pas la réflexion. Il doit donc être utilisé sur des domaines à limites dissipatives, comme les plages du Golfe du Lion (Mer Méditerranée, France). Ce modèle a été largement validé par la communauté scientifique [79, 14, 65]. Il est particulièrement bien adapté aux travaux présentés au Chapitre 4 de ce mémoire. Après avoir rapidement introduit les fondements de l'approche de la diffraction par Yue & Mei, nous présentons dans cette section le modèle de réfraction-diffraction, ainsi que des exemples d'applications et de résultats obtenus par REF/DIF sur des topobathymétries réalistes.

Une approximation pour la diffraction

On considère la propagation d'une houle linéaire en direction de la côte et rencontrant un obstacle vertical. On suppose qu'autour de l'obstacle, la profondeur est constante. De plus, on considère une propagation en eau peu profonde, donc kh est petit. Enfin, la propagation s'effectue dans le sens des x et l'obstacle est un corps fin disposé le long de l'axe des x.

Initialement, la méthode utilisé par Mei & Tuck concerne une houle linéaire et utilise le fait que les variations de l'amplitude sont plus brutales dans la direction transverse, par rapport à l'obstacle, que dans la direction longitudinale. Donc, on considère que la surface libre peut s'écrire sous la forme,

$$\eta(x, y) = A(x, y)e^{ikx} \tag{1.52}$$

où A est l'amplitude complexe de la houle. Les variations de A dans le sens des x sont faibles par rapport à la longueur d'onde mais peuvent varier considérablement dans le

sens des y à proximité de l'ouvrage. Or, nous avons vu que η est solution de l'équation d'Helmholtz dans cette configuration (voir section 1.3.5). Donc, nous obtenons l'équation suivante pour le comportement de A [53],

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \tag{1.53}$$

Or, puisque les variations de l'amplitude sont plus brutales dans la direction transverse que dans la direction longitudinale, on peut approximer cette équation par,

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2k}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \tag{1.54}$$

Plus tard, Yue & Mei ont établi une autre équation basée cette fois sur la propagation d'une houle de Stokes non-linéaire. On obtient ainsi l'équation de Schrödinger non-linéaire 1D suivante [54],

$$2i\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{k}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - K'|A|^2 A = 0, \tag{1.55}$$

où,

$$K' = k^3\left(\frac{C}{C_g}\right)\frac{\cosh 4kh + 8 - 2\tanh^2 kh}{8\sinh^4 kh}. \tag{1.56}$$

Le modèle non-linéaire pour la réfraction/diffraction

On dispose donc d'une approximation parabolique (1.55) pour la diffraction d'une houle non-linéaire de Stokes sur les ouvrages. De plus, Radder [64, 10] a développé un extension parabolique de l'équation de pente douce (1.49), donnée par

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(ik - \frac{1}{2kCC_g}\frac{\partial(kCC_g)}{\partial x}\right)\eta + \frac{i}{2kCC_g}\frac{\partial}{\partial y}\left(CC_g\frac{\partial \eta}{\partial y}\right). \tag{1.57}$$

En combinant l'équation (1.57) et l'équation (1.55), nous obtenons l'approximation parabolique non-linéaire suivante, valable pour un fond variable vérifiant l'hypothèse de pente-douce (1.32),

$$2ikCC_g\frac{\partial A}{\partial x} + 2k\left(k - k_0\right)\left(CC_g\right)A + iA\frac{\partial\left(kCC_g\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(CC_g\frac{\partial A}{\partial y}\right)}{\partial y} - k\left(CC_g\right)K'|A|^2 A = 0 \tag{1.58}$$

où k_0 est le nombre d'onde de référence issu des conditions de la houle incidente venant du large. A l'instar de l'équation 1.55, la direction principale de propagation est l'axe des x.

Ce modèle fournit une bonne approximation des paramètres de la houle lors de sa propagation vers la côte.

Le modèle REF/DIF

En utilisant les travaux de Booij [9] et Radder [64] sur les effets des courants générés par la houle, Kirby et Dalrymple étendent ensuite l'équation (1.58) à un modèle permettant de tolérer des variations de direction de l'ordre de 70° par rapport à la direction initiale [46, 45, 42]. L'équation utilisée dans le modèle REF/DIF est la suivante,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(A) \;=\; & (C_g+U)\frac{\partial A}{\partial x} - 2\Delta_1 V\frac{\partial A}{\partial y} + i\left(\bar{k}-a_0k\right)(C_g+U)A + \left\{\frac{\omega}{2}\frac{\partial\frac{C_g+U}{\omega}}{\partial x} - \Delta_1\omega\frac{\partial\frac{V}{\omega}}{\partial y}\right\}A \\
& +i\Delta'\frac{\partial\left[(P-V^2)\left(\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial y}\right)\right]}{\partial y} - i\Delta_1\left\{\frac{\partial\left[UV\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial y}\right]}{\partial x} + \frac{\left[UV\frac{\frac{A}{\omega}}{\partial x}\right]}{\partial y}\right\} + \underbrace{\frac{i\omega k^2}{2}D|A|^2A}_{nonlinear\ term} \\
& -\frac{b_1}{k}\left\{\frac{\partial\left[(p-V^2)\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial y}\right]}{\partial x\partial y} + 2i\frac{\left(\omega V\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial y}\right)}{\partial x}\right\} \\
& +b_1\beta\left\{2i\omega' U\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial x} + 2i\omega V\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial y} - 2UV\frac{\partial^2\frac{A}{\omega}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\left[(p-V^2)\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial y}\right]}{\partial y}\right\} \\
& -\frac{i}{k}b_1\left(\frac{\partial\omega' V}{\partial y} + 3\frac{\partial\omega' U}{\partial x}\right)\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial x} - \Delta_2\left\{\omega' U\frac{\partial\frac{A}{\omega}}{\partial x} + \frac{1}{2}\omega'\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{A}{\omega}\right)\right\} \\
& +ik\omega' U\left(a_0-1\right)\left(\frac{A}{\omega}\right) = 0
\end{aligned} \tag{1.59}$$

où $p = CC_g$, U (resp. V) est la vitesse moyenne du courant dans le sens des x (resp. y), w' est un facteur de dissipation. a_0, a_1, b_1 sont des constantes permettant de prendre en compte des variations de la houle incidente jusqu'à 70° [45].

Ce modèle est non-linéaire de part le terme en $|A|^2A$ dans l'équation (1.59). Cette non-linéarité est due à l'utilisation d'une houle de Stokes du troisième ordre pour l'approximation de la diffraction.

Concernant la résolution numérique de l'équation (1.59), un schéma aux différences finies est utilisé en chaque point (x, y) d'un domaine de taille (mr, nr). On définie donc $x_i = (i-1) * \Delta x$ et $y_j = (j-1) * \Delta y$ où Δx et Δy sont les pas d'espace dans chaque direction. Une remarque importante pour la stabilité du modèle : il est nécessaire de choisir les pas d'espace de façon à avoir au minimum 5 points de maillage pour représenter la longueur d'onde. La ligne $x = 0$ représente le large et la propagation se fait dans le sens des i croissant. Les conditions au bord sur les frontières latérales peuvent prendre en compte soit des conditions de réflexion, soit des conditions de frontière ouverte. Les discrétisations des dérivées premières et secondes sont telles que,

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i,j}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{\Delta y}$$

et

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{2\Delta y}.$$

Le calcul est ensuite réalisé à l'aide d'un schéma de Crank-Nicolson (x jouant le rôle habituel de t) tel que, pour une ligne i, on ait,

$$aA_{i+1,j+1} + bA_{i+1,j} + cA_{i+1,j-1} = dA_{i,j+1} + eA_{i,j} + fA_{i,j-1} \tag{1.60}$$

où les coefficients a, b, c, d, e et f sont des coefficients variants dans le plan complexe. L'équation (1.60) est résolue par une méthode d'inversion de matrice tri-diagonale [12].

L'équation de dispersion (1.10) est résolue à chaque pas d'espace par une méthode itérative de Newton-Raphson.

Concernant la bathymétrie, on dispose d'une grille de maillage de dimension (mr, nr). En chaque point du maillage (i, j) on a une valeur $h(i, j)$ qui correspond à la distance entre le fond marin et le niveau de l'eau. Par exemple, on peut aisément définir une topobatymétrie linéaire telle que $h(i, j) = (mr - i) * \Delta x * \tan\alpha$ où α est l'angle de la pente. Pour les exemples qui vont suivre et les applications présentées dans la Chapitre 4, nous utilisons des topobathymétries réalistes issues de campagnes effectuées par GLADYS. Ces données, établies par sondage du fond marin, permettent donc de visualiser le relief du fond marin avec des Δx et Δy pouvant aller jusqu'à une précision de 1 m (il est évident que les temps de calcul augmentent lorsqu'on diminue ces valeurs de précision). Le logiciel GMT (Generic Mapping Tools), disponible en libre accès, permet aussi de générer des cartes avec une précision donnée à partir de coordonnées GPS [77, 78].

Test sur des bathymétrie réalistes

Dans cette partie, on se propose d'illustrer les propriétés du modèle REF/DIF énoncées précédemment par des exemples.

On considère dans un premier temps la bathymétrie présentée dans la figure 1.9. Il s'agit d'une topobathymétrie classique représentative d'une plage sableuse (on y retrouve les deux barres sableuses naturelles proches du rivage. On reviendra sur ce point au chapitre 4). On y intègre un obstacle à une distance d'environ 700 m de la ligne de côte. Cet ouvrage a une forte pente pour ses parois et ses extrémités sont sujettes à des phénomènes de diffraction.

On calcule la propagation d'une houle incidente perpendiculaire à la côte, de période $T = 9$ s et de hauteur $H = 3$ m. Sur la figure 1.10, on visualise l'évolution de la surface libre au voisinage de l'obstacle. On y distingue très clairement un phénomène de diffraction dans la zone d'ombre située derrière l'obstacle. Ces franges de diffraction se créent au niveau des extrémités de l'ouvrage.

On considère maintenant la topobathymétrie de la figure 1.11. On y distingue une avancée au niveau de la ligne de côte en forme de flèche. En considérant une houle incidente normale à la côte, de période 5 secondes et de hauteur 3 mètres, on cherche à visualiser un phénomène de réfraction losque la houle arrive à proximité de la côte. On visualise la surface libre sur la figure 1.12. On voit clairement que les lignes de crêtes ont tendances à devenir parallèles à la direction moyenne de la côte. Au niveau de la flèche notamment, les lignes de crêtes convergent localement vers cet obstacle.

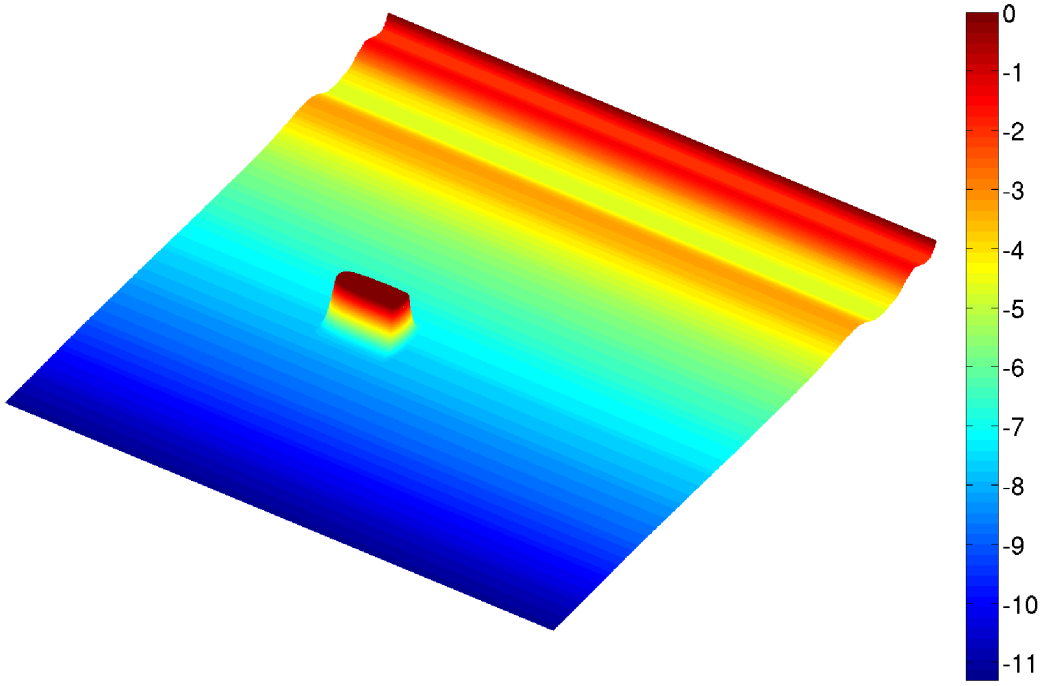


FIG. 1.9 – Une exemple de bathymétrie réaliste à laquelle on a rajouté un obstacle émergé. La distance du large à la côte est de 1200 m et le pas d'espace est de 1 m. L'obstacle est disposé à environ 700 m de la côte (7.5 m de profondeur). Il fait 80 m de large à sa base. De plus, l'extrémité gauche de l'ouvrage est plus arrondie que l'extrémité droite.

Ces résultats illustrent donc les phénomènes de diffraction et de réfraction de la houle, pris en compte par le code REF/DIF. Par ces exemples, associés aux différents tests de validité du code réalisés notamment dans [79, 14, 65], on peut voir que le code REF/DIF permet de modéliser correctement la propagation et la transformation de la houle au large des plages sableuses. En particulier, il peut rendre compte des effets d'un ouvrage proche du linéaire côtier sur des houles incidentes.

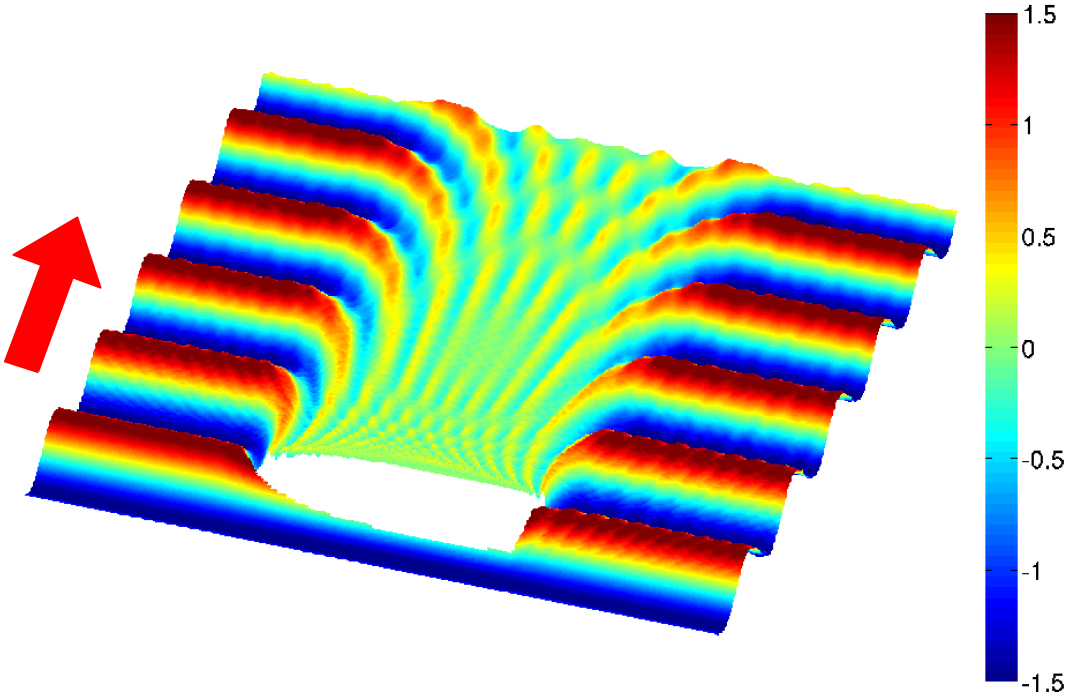


FIG. 1.10 – Observation du phénomène de diffraction à l'aide du code REF/DIF pour une houle incidente perpendiculaire à la côte, de période $T = 9$ s et de hauteur $H = 3$ m (Zoom au niveau de l'ouvrage).

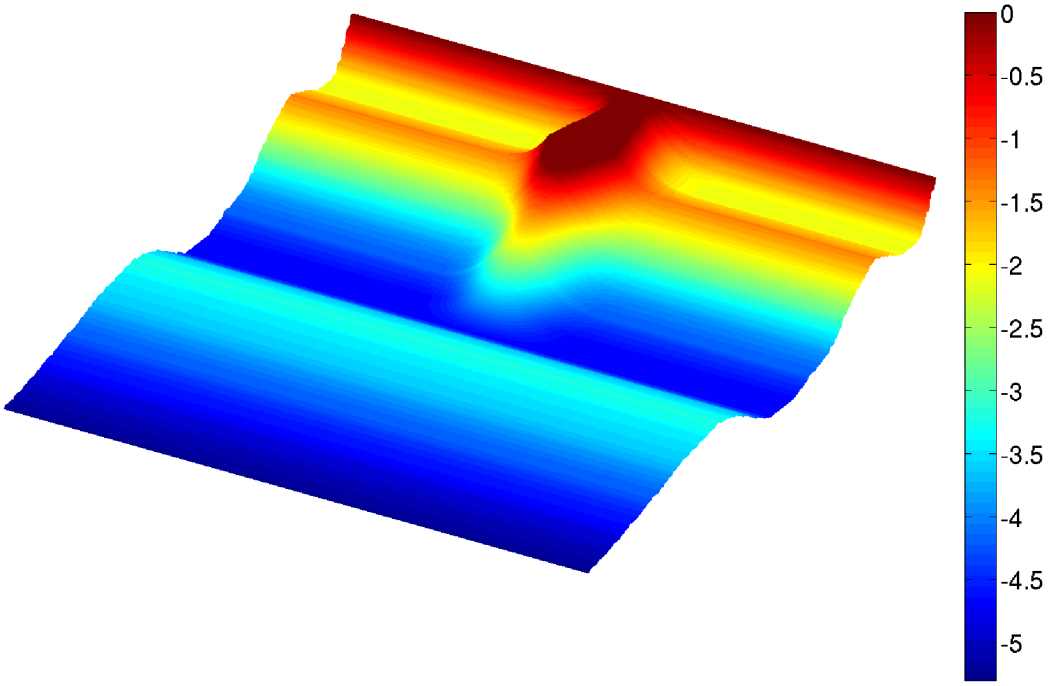


FIG. 1.11 – Une bathymétrie classique à deux barres sableuses comportant une flèche sableuse en mer.

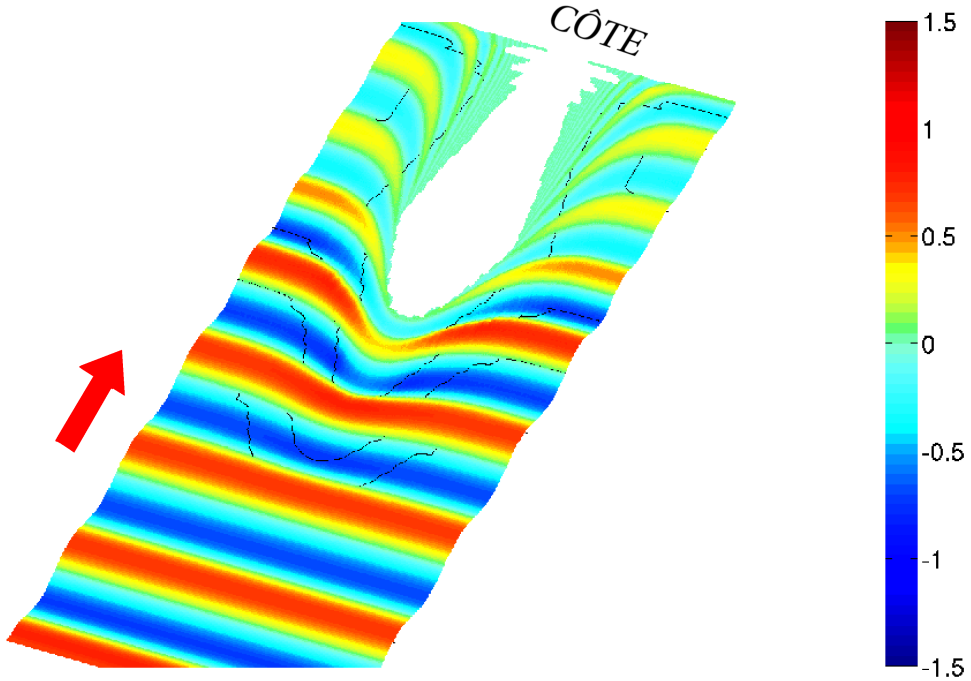


FIG. 1.12 – Observation du phénomène de réfraction à l'aide du code REF/DIF pour une houle incidente perpendiculaire à la côte, de période $T = 5$s et de hauteur $H = 3$ m.

Chapitre 2

Présentation des travaux et principaux résultats

2.1 Optimisation d'ouvrages de défense en eaux profondes

Cette section fait la synthèse des résultats du Chapitre 3. Ces travaux ont fait l'objet d'un article [33], co-écrit avec Pascal Azérad, Frédéric Bouchette et Bijan Mohammadi, accepté dans *Coastal Engineering*.

2.1.1 Position du problème

On s'intéresse à l'étude de la forme de structures de défense, en présence de vagues, par la minimisation d'une fonction coût. Nous considérons la propagation de vagues dans un port, en direction d'une falaise ou d'un mur vertical. Les ouvrages sont des structures émergées verticales qui sont la cause de phénomènes de réflexion et de diffraction. La propagation des vagues s'effectue ici en *eaux profondes* (voir section 1.3.4). C'est à dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les vagues et le fond. La profondeur est constante. Les vagues incidentes sont des houles d'Airy (voir section 1.3.2).

La démarche consiste donc à modéliser la propagation de vagues en direction d'un mur muni d'ouvrages verticaux et de modifier la forme des ouvrages afin de réduire uniformément l'énergie des vagues dans une zone prédéfinie proche du mur. Nous étudions dans cette étude deux types de problèmes.

Dans le premier, nous imposons des contraintes de faisabilité sur les ouvrages afin de rester dans le cadre d'ouvrages classiques utilisés dans la plupart des problèmes du génie côtier. Ainsi, nous travaillons avec des ouvrages traditionnels "rectangulaires" (similaires à des épis ou des brise-lames) et nous cherchons à optimiser leur angle à la côte ainsi que leur longueur et leur largeur. De plus, l'optimisation est effectuée pour une unique direction de propagation incidente, mais également pour un spectre de directions incidentes (la période et l'amplitude des vagues étant fixées dans ce cas). Il est intéressant de comparer les formes obtenues et leur efficacité suivant telle ou telle direction. Différentes formes sont aussi présentées pour des vagues incidentes avec des périodes différentes. Enfin, une

étude sur la stabilité des ouvrages optimisés par rapport aux directions de propagation est réalisée.

Dans la deuxième application, nous n'imposons plus aux ouvrages une forme rectangulaire. On s'autorise l'obtention de formes en 'zig-zag' totalement originales. On s'aperçoit que leur efficacité est immédiatement augmentée et qu'il est donc important de s'intéresser à la forme de l'ouvrage en elle-même et pas uniquement à son angle à la côte.

2.1.2 Le modèle utilisé

On considère le domaine présenté dans la figure 2.1.

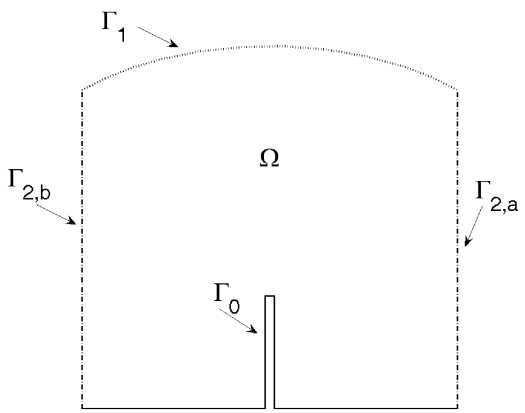


FIG. 2.1 – Le domaine de calcul : Γ_0 représente la frontière réfléchissante incluant le mur et l'ouvrage, Γ_1 est une frontière ouverte matérialisée par des conditions de radiation, alors que sur les frontières latérales, des conditions périodiques sont appliquées .

L'idée consiste à considérer le champ total ξ dans le domaine comme la somme d'un champ incident ξ^i et d'un champ transmis ξ^s. Le champ incident est une houle monochromatique unidirectionnelle $\eta^i(\mathbf{x}, t) = \xi^i(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ où,

$$\xi^i(\mathbf{x}) = ae^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{2.1}$$

Ici, ω est la pulsation d'onde égale à $\frac{2\pi}{T}$, $a = \frac{H}{2}$ est l'amplitude et $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = k\mathbf{e}_\theta$ le vecteur d'onde où $\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ représente la direction de propagation et k le nombre d'onde.

En eaux profondes, la profondeur relative kh est grande et l'équation de dispersion est réduite à $k \simeq \frac{\omega^2}{g}$. Ainsi, pour des profondeurs vérifiant $h > \frac{L}{2}$, le champ réfléchi est

solution du problème aux limites suivant,

$$\begin{cases} \Delta\xi^s + k^2\xi^s = 0 \text{ dans } \Omega, & (2.2) \\ \dfrac{\partial\xi^s}{\partial\mathbf{n}} = -\dfrac{\partial\xi^i}{\partial\mathbf{n}} \text{ sur } \Gamma_0, & (2.3) \\ \dfrac{\partial\xi^r}{\partial\mathbf{n}} - ik\xi^r = 0 \text{ sur } \Gamma_1, & (2.4) \\ \xi^s{}_{|\Gamma_{2,a}} = \xi^s{}_{|\Gamma_{2,b}}. & (2.5) \end{cases}$$

2.1.3 Les paramètres d'optimisation

La paramétrisation d'une structure

Concernant les ouvrages de défense rattachés à la frontière Γ_0, nous ne savons pas à priori quelle forme d'ouvrage permet d'obtenir de meilleurs résultats pour un critère donné. Nous présentons une paramétrisation générique en forme d'arbre pour les structures permettant l'obtention d'une grande variété de formes comme on peut le voir sur la figure 2.2. Plus précisément, la paramétrisation d'une structure s'apparente à un arbre.

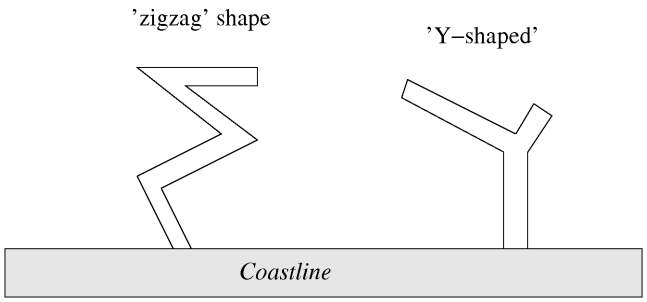


FIG. 2.2 – Exemples de formes admissibles par la paramétrisation : à gauche, une forme en 'zigzag' ; à droite, une forme en Y.

Nous définissons un tronc par un ensemble de $M-1$ segments $(s_i)_{1\leq i\leq M-1}$ connectés entre eux. Chaque nœud i est ensuite associé à un entier n_i définissant le nombre de branches secondaires partant de ce nœud. De plus, on rajoute comme paramètre d'optimisation la distance entre la racine de 2 structures successives.

Le critère d'optimisation

On considère dans cette étude qu'une structure est efficace si elle diminue l'énergie mécanique de la houle (au sens de la norme L^2) de ξ dans un domaine admissible Ω_{ad} [1]. On choisit de prendre en compte pour Ω_{ad} une bande de 10 m de large le long du mur

[1] L'énergie de la houle dans Ω_{ad} est égale à $\int_{\Omega_{ad}} \rho g \xi^2$, qui coïncide, à une constante près, avec le carré de la norme L^2.

vertical. Bien sur, cette région peut varier et on peut être amené à considérer une bande plus large, suivant la zone où on cherche à atténuer la hauteur de houle.

Ainsi, pour une direction incidente θ donnée, on veut minimiser la fonctionnelle suivante,

$$J(\mathbf{x}) = J_\theta(\mathbf{x}) = \| \xi_\theta(\mathbf{x}) \|^2_{L^2(\Omega_{ad})} + \| \nabla\xi_\theta(\mathbf{x}) - \overline{\nabla\xi_\theta(\mathbf{x})} \|^2_{L^2(\Omega_{ad})} \tag{2.6}$$

où le second terme contribue à maintenir la gradient de la solution le plus uniforme possible dans la zone Ω_{ad}.

On impose en plus que la solution soit la plus uniforme possible proche du mur.
De plus, dans les applications, l'optimisation consiste à trouver des structures les plus efficaces possible pour un spectre de vagues incidentes. Nous considérons donc un spectre de N directions de propagation $\{\theta_j\}_{1\leq j\leq N}$ pondérées par des fréquences d'observation $\{\omega_j\}_{1\leq j\leq N}$. Dans ce cas, la fonctionnelle à minimiser est de la forme

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j J_{\theta_j}(\mathbf{x}). \tag{2.7}$$

2.1.4 Les ouvrages efficaces pour le problème considéré

Cas 1 : optimisation avec contraintes de faisabilité

Dans cette application, nous considérons le domaine Ω de la figure 2.1 auquel nous incluons deux structures sur la frontière Γ_0. Concernant les ouvrages, le tronc dans la paramétrisation est défini par un seul segment afin d'imposer aux structures une forme traditionnelle "rectangulaire" et le nombre de branches secondaires dans la paramétrisation est fixé à zéro pour chaque structure. Nous cherchons à optimiser l'angle α des structures avec le mur ainsi que leur longueur L et largeur l (voir figure 2.3).

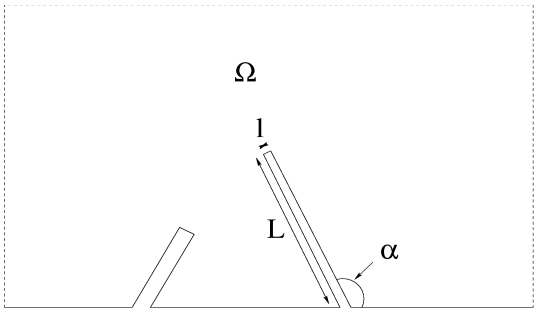


FIG. 2.3 – Les paramètres de contrôle (α, L, l) pour chaque structure.

Nous étudions différentes configurations suivant les paramètres a, T et θ :

- Concernant l'amplitude, le système d'état (2.2)-(2.5) est linéaire en a et la fonctionnelle J est quadratique en a. Ainsi, les formes obtenues pour une valeur donnée de a sont optimales pour toutes les valeurs de a (les autres paramètres T et θ restant fixés). On choisit pour les applications des vagues incidentes d'amplitude $a = 0.5$

m.

- Différents calculs d'optimisation sont réalisés pour des houles incidentes ayant des périodes comprises entre 2 et 6 secondes. Nous détaillons les résultats pour $T = 2$ s, et nous effectuons une comparaison avec les formes obtenues pour des périodes allant de 3 à 6 secondes.
  Nous présentons dans la Table 2.2 les différentes formes obtenues, ainsi que les valeurs de J correspondantes (normalisées par rapport à la configuration du mur non-protégé). Une optimisation spécifique pour une période fixée est appelée optimisation *mono-périodique*. Nous pouvons voir que pour chaque période, la forme obtenue réduit considérablement la valeur de la fonction coût J, donc la valeur de l'énergie de l'onde ξ dans la zone Ω_{ad}. De plus, nous avons également cherché une forme qui soit la plus efficace possible pour toutes les périodes allant de 2 à 6 secondes (appelée optimisation *multi-périodique*). Nous remarquons que pour une période donnée, cette forme d'ouvrage est moins efficace que la forme obtenue spécifiquement pour cette période. Ceci révèle que l'optimisation d'ouvrage de défense pour ce problème est caractéristique du régime de houle pris en compte. Néanmoins, il est également possible d'obtenir une forme qui soit raisonnablement efficace pour un spectre de période, même si son efficacité est moins prononcée pour une période donnée par rapport à l'optimisation mono-périodique.

mono-period	$T = 2$ s	$T = 3$ s	$T = 4$ s	$T = 5$ s	$T = 6$ s
$a = 0,5$ m Direction = Northwest	$J_{2s} = 0,16$ (-84%)	$J_{3s} = 0,19$ (-81%)	$J_{4s} = 0,4$ (-60%)	$J_{5s} = 0,14$ (-86%)	$J_{6s} = 0,06$ (-94%)
multi-period	$T = 2,3,4,5,6$ s				
$a = 0,5$ m Direction = Northwest	$J_{glob} = 0,46$ (-54%)				
	$J_{2s} = 0,64$	$J_{3s} = 0,62$	$J_{4s} = 0,6$	$J_{5s} = 0,11$	$J_{6s} = 0,29$

TAB. 2.1 – Les différentes formes obtenues pour les différentes périodes incidentes ($a = 0.5$ m et θ =Nord-Ouest étant fixés). Les valeurs de J ont été normalisées par rapport à la configuration du mur non-protégé.

- Pour $T = 2$ s et $a = 0.5$ m fixés, nous cherchons une structure optimale pour une vague incidente de direction Nord-Ouest (nous parlerons ici d'optimisation *monodirectionnelle*) mais également pour un spectre de 3 vagues incidentes (Nord-Ouest, Nord, Nord-Est) (appelée optimisation *multidirectionnelle*). Nous montrons que l'ouvrage optimisé spécifiquement pour la direction Nord-Ouest est évidemment plus efficace pour cette direction que celui optimisé pour le spectre de direction, mais

que, par contre, il est beaucoup moins efficace pour les autres directions (Nord et Nord-Est).

Un résultat d'optimisation multi-directionnelle ainsi qu'une analyse sur la stabilité des ouvrages par rapport à la direction de propagation sont également développés.

Optimisation libre sur la forme des structures

Dans cette application, nous considérons le domaine Ω de la figure 2.1 auquel nous incluons une seule structure sur la frontière Γ_0. Concernant les ouvrages, le tronc dans la paramétrisation est défini par 15 points, i.e. par 14 segments, et le nombre de branches secondaires dans la paramétrisation est fixé à zéro.

Concernant le régime de vague pris en compte, nous étudions la réflexion issue d'une houle incidente de Nord-Ouest de période $T = 2$ s et d'amplitude $a = 0.5$ m. La forme optimale obtenue est donnée dans la figure 2.4. Il s'agit d'un ouvrage original en 'zig-zag'.

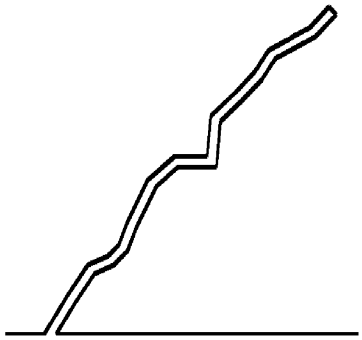


FIG. 2.4 – Forme optimale pour la protection d'un mur vertical d'une houle de direction Nord-Ouest, de période $T = 2$ s et d'amplitude $a = 0.5$m.

Cet ouvrage diminue la valeur de J de plus de 90% par rapport au mur non-protégé. La figure 2.5-(b) montre le champ $|\xi|$ proche du mur dans le cas d'ouvrages optimisés. Pour comparaison, on affiche également celui obtenu dans le cas d'ouvrages classiques rectangulaires 2.5-(a), ainsi que celui resultant de la propagation vers des ouvrages ayant le même angle que l'ouvrage optimisé mais de forme droite 2.5-(c).

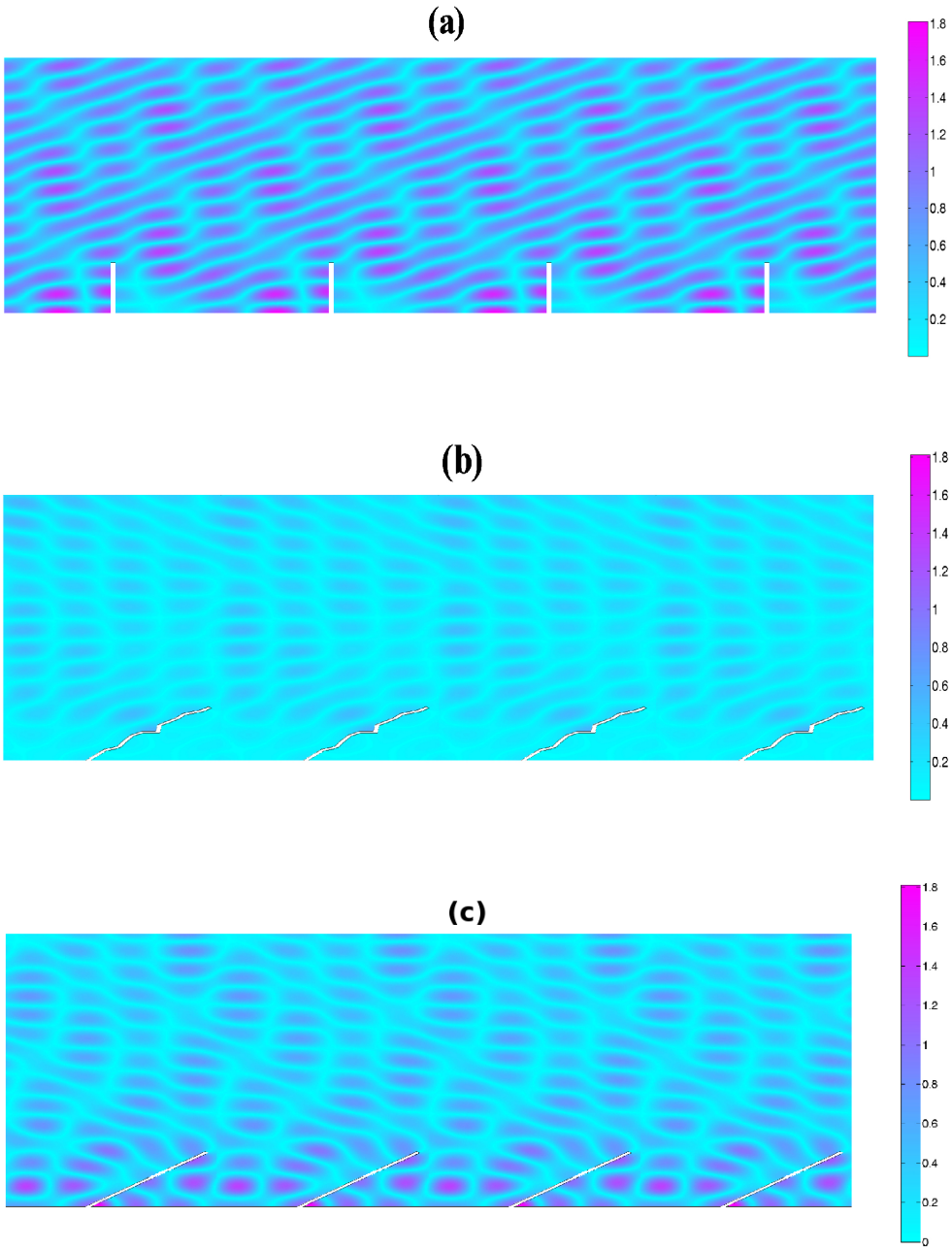


FIG. 2.5 – **Représentation de $|\xi|$ proche du mur** (**a**) pour des structures "rectangulaires" perpendiculaires au mur, (**b**) sur les structures optimisées, (**c**) sur des structures avec le même angle que les structures optimisés mais "rectangulaires".(Vagues incidentes de Nord-Ouest avec $T = 2$ s et $a = 0.5$ m)

2.2 Optimisation de tubes géotextile pour la protection des plages : Application au Lido de Sète

Cette section fait la synthèse des résultats du Chapitre 4. Ces travaux ont fait l'objet d'un article [32], co-écrit avec Pascal Azérad, Frédéric Bouchette, Benjamin Ivorra et Bijan Mohammadi, accepté pour publication dans *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.

2.2.1 Position du problème

Cette étude sur le projet de réaménagement de la plage du Lido de Sète (Nord-Ouest de la Mer Méditerranée, Languedoc-Roussillon, France) a été, pour ainsi dire, le fil conducteur de cette thèse. Le bureau d'étude *BRL ingénierie* est porteur d'un projet de grande envergure visant à réaménager le plage du Lido de Sète (voir la figure 2.6-haut) sujette à une érosion intense. Un déploiement sur site de la solution adoptée est prévu avant la fin 2008.

Le Lido de Sète est une barre de terre de 20 km de long soumises à des houles modérées. Il sépare la mer de l'Etang de Thau. A l'Est du lido surplombe le mont Saint-Clair tandis qu'à l'Ouest, on retrouve la côte volcanique d'Agde. Cette configuration restreint les apports/pertes de sable par des courants *longshores*[2] sur la zone même du lido. Toutefois, le transport de sédiment proche de la côte se fait en direction de l'Ouest et la côte Est du lido en est directement la source.

Le long d'un profil *cross-shore*[3], la morphologie du site est la suivante : un fond marin sableux classique composé de 2 barres sableuses linéaires (voir figure 2.7), une plage sableuse émergée de 20 à 120 m de large puis une lagune de 1 kilomètre de large (Etang de Thau). Du point de vue de l'érosion, la plage est particulièrement vulnérable lors des tempêtes. En particulier, on peut noter un recul d'environ 50 m du trait de côte depuis 1967 (1m/an). Actuellement, la ligne de côte a atteint un tel niveau de recul que la route longeant la côte est régulièrement détruite (voir la figure 2.6-bas).

BRL ingénierie propose d'utiliser une nouvelle génération d'ouvrage immergé atténuateur de houle, agissant directement sur la dynamique naturelle de la plage. Il s'agit de tubes en géotextile remplis de sable.

La démarche de réaménagement du lido est la suivante (voir figure 2.8) :

1) un apport de sable directement sur la plage pour la reconstruire,
2) un rechargement en sable des deux barres naturelles dans le but d'augmenter la volume de sable près de la côte,
3) la disposition d'un ensemble de deux rangées de tubes géotextile immergés disposés côte-à-côte. Pour la modélisation, nous assimilerons les deux tubes géotextile à un seul tube géotextile deux fois plus large.

Cette barre artificielle devra donc agir directement sur les houles de tempêtes afin de les atténuer et d'empêcher ainsi l'arrachage de sédiment. Elle doit être initiatrice de la déposition de sédiments à la côte en modifiant les courants et les vitesses orbitales proche

[2]les courants longshores sont des courants parallèles à la ligne de côte.

[3]Un profil cross-shore fait référence à un profil de plage perpendiculaire à la ligne de côte.

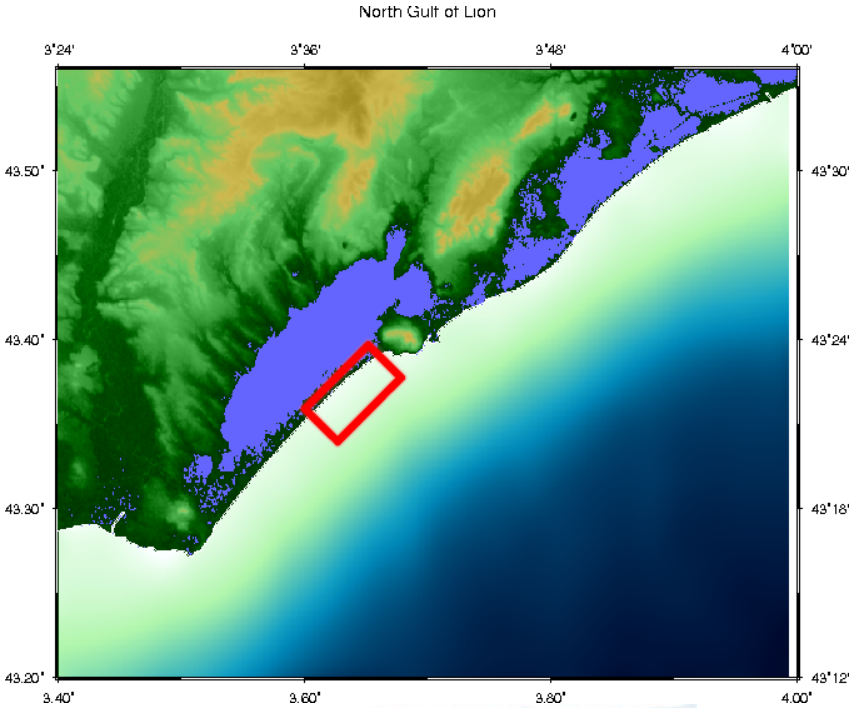


FIG. 2.6 – En haut : le lido de Sète à Marseillan ; En bas : Les répercutions d'une houle de tempête sur la route longeant le lido.

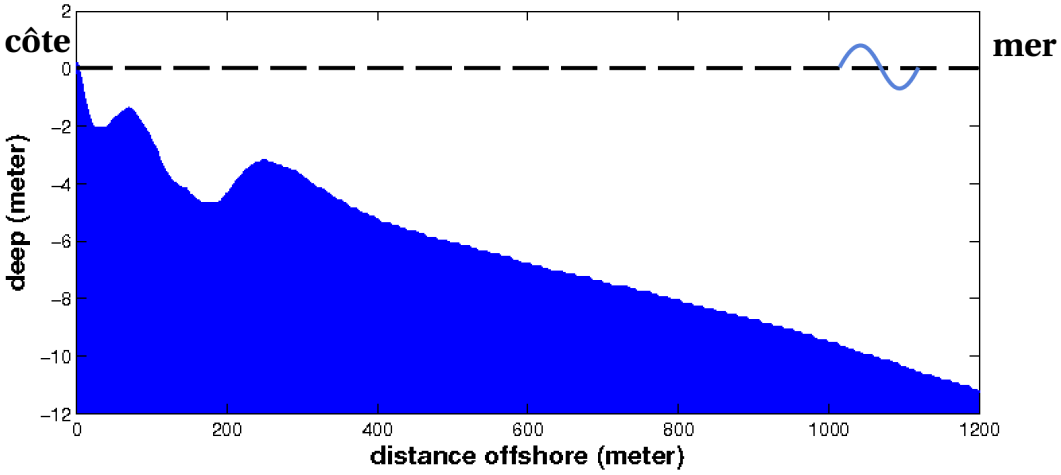


FIG. 2.7 – Le profil topobathymétrique de la plage de Sète. On y retrouve les 2 barres sableuses naturelles.

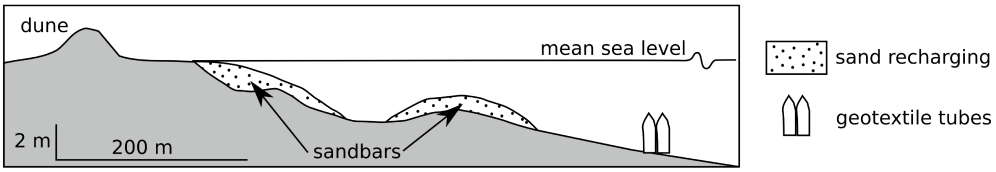


FIG. 2.8 – Le réaménagement prévu sur le site de Sète.

de la côte. Leur position et leur dimensionnement reste cependant à définir. Cette étude porte sur la **recherche de paramètres optimaux pour la forme et la position de la rangée de tubes géotextile dans le but de réduire l'énergie responsable de la mise en suspension des sédiments**.

les données de houle sur le site d'étude

Les données du houlographe mouillé au large de Sète (hauteur, période et fréquence d'observation de la houle) ont été récupérées auprès du CETMEF (Centre d'Etudes Techniques Maritimes Et Fluviales) et la base de données CANDHIS (Centre d'Archivage National de Données de Houle In-Situ) (voir figure 2.9).

On voit clairement que les houles avec des hauteurs significatives H_s inférieures à 2 mètres sont beaucoup plus fréquentes que les houles ayant des hauteurs significatives supérieures à 2 mètres. Néanmoins, ce sont ces houles, telles que $H_s > 2$ m, qui sont responsables de l'érosion car elles génèrent une forte énergie mécanique qui détache le sable du fond et facilite sa mise en mouvement par les courants associés. Ces houles sont appelées *houles destructrices*. Les houles telles que $H_s < 2$ m, dites *houles constructrices*,

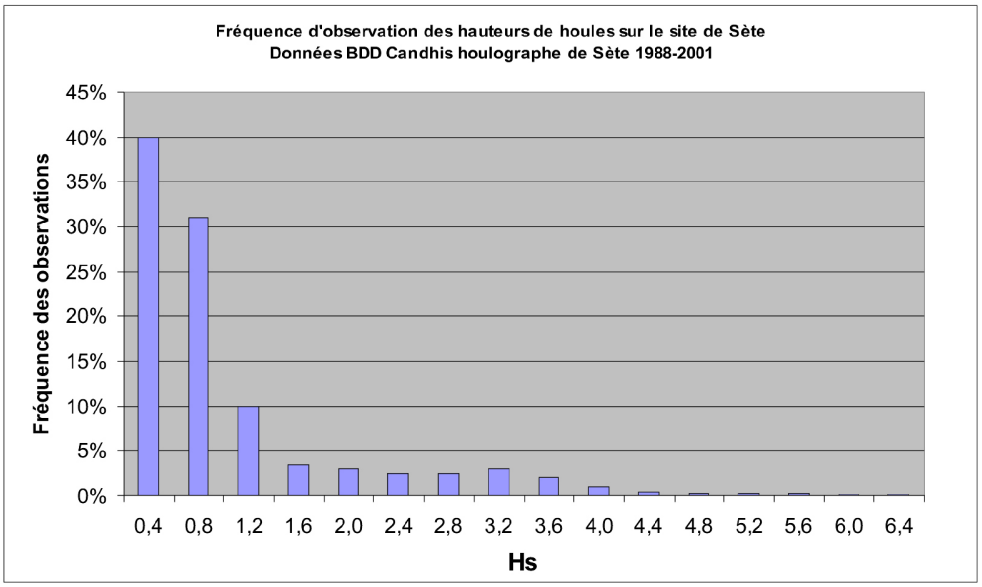


FIG. 2.9 – Caractéristiques des houles au large du site de Sète.

sont quand à elles bénéfiques pour la dynamique naturelle de la plage et l'ouvrage se doit d'être transparent vis-à-vis de ces houles. Les tubes géotextile devront donc agir sur le spectre de houle comme un filtre "passe-bas".

Nous avons établi, pour les quatres directions de propagation présentes sur le site (Sud, Sud Sud Est, Est Sud Est, Est), des données de houles constructrices et destructrices significatives (voir table 2.2).

	South	South South East	East South East	East
houles constructrices	$H_s = 0.76$m $T_s = 4.96$s $p = 24.66\%$	$H_s = 0.85$m $T_s = 5.21$s $p = 22.75\%$	$H_s = 0.85$m $T_s = 5.21$s $p = 22.75\%$	$H_s = 0.66$m $T_s = 4.99$s $p = 17.5\%$
houles destructrices	$H_s = 2.91$m $T_s = 7.54$s $p = 2.84\%$	$H_s = 3.233$m $T_s = 7.78$s $p = 3.25\%$	$H_s = 3.233$m $T_s = 7.78$s $p = 3.25\%$	$H_s = 3.55$m $T_s = 8.03$s $p = 2.5\%$

TAB. 2.2 – Les données hydrodynamiques moyennées sur le Lido de Sète.

2.2.2 Le modèle utilisé

Pour modéliser la propagation de la houle sur le lido de Sète, nous utilisons le code REF/DIF présenté à la section 1.3.7. Il est approprié pour cette étude car la topographie du site vérifie l'hypothèse de pente douce. Les houles incidentes au large sont données par la table 2.2. Le domaine de calcul concerne la partie Est du lido de Sète. Il représente une distance *longshore* de 2.4 km et la distance de fermeture au large est de 1.2 km (voir

figure 2.10). Le pas *cross-shore* est de 1 m tandis que le pas *longshore* est de 5 m.

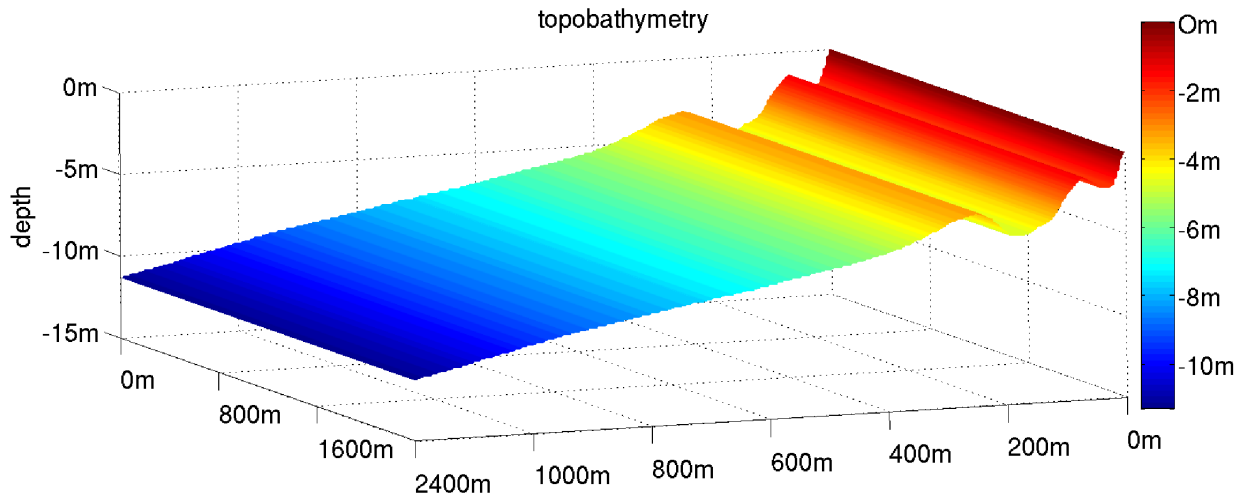


FIG. 2.10 – La topobathymétrie de la plage du lido de Sète.

2.2.3 Les paramètres d'optimisation

La paramétrisation d'un tube géotextile

L'objectif est d'optimiser la forme et la position des ouvrages en géotextile dans le domaine comme le montre la figure 2.11.

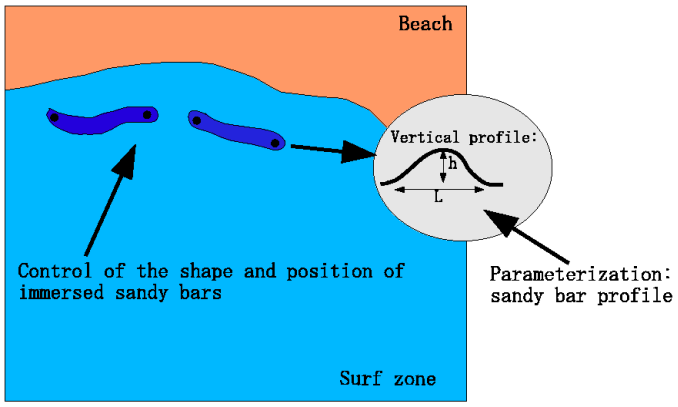


FIG. 2.11 – La paramétrisation à envisager pour les tubes géotextile.

Pour ce faire, nous utilisons tout d'abord des points de contrôle permettant de déterminer la position et ,la forme de l'ouvrage dans le domaine (2 points de contrôle permettent d'obtenir un ouvrage rectiligne alors que 3 points de contrôle ou plus, définissent des formes d'ouvrages originales par l'utilisation de splines).

La profil vertical de l'ouvrage est ensuite défini en utilisant une fonction Gaussienne de la forme $f(x) = C_1 e^{-C_2 x^2}$, ce qui rajoute 2 paramètres supplémentaires contrôlant la hauteur et la largeur de l'ouvrage.

Ce problème étant soumis à plusieurs contraintes industrielles (réalisation de l'ouvrage, déploiement sur site, coût,...), certaines restrictions sont imposées concernant les ouvrages :

- Les tubes en géotextile ont une longueur imposée de 50 m. Afin de couvrir tout le linéaire côtier à protéger, les tubes géotextile nécessaires seront liés les uns aux autres par simple superposition des extrémités. Pour la modélisation, nous supposerons avoir un seul tube géotextile couvrant l'ensemble du linéaire côtier.

- La largeur d'un tube géotextile est de 6 m.

- Les ouvrages sont parallèles à la côte.

- Une distance de 2 m est à respecter entre le sommet d'un tube géotextile et la surface de l'eau, pour permettre la navigation des bateaux (tirant-d'eau).

Le critère d'optimisation

Comme nous l'avons déjà dit, on considère dans cette étude qu'une structure est efficace si elle diminue l'énergie de mise en suspension des sédiments dans une zone D prédéfinie. Nous chercherons à diminuer cette énergie entre la première et la deuxième barre sableuse naturelle, i.e. dans une bande comprise entre 100 et 250 m de la côte.

Nous considérons la fonction coût suivante,

$$J_\theta = \frac{\int_D E_{H>2m} dS}{\int_D E_{H<2m} dS} + (\|U_{orb}\| - \|U_{orb}^{initial}\|)_+ + (\int_D E_{H<2m} dS - \int_D E_{H<2m}^{initial} dS)_+ \tag{2.8}$$

où $(x)_+ = \max(x, 0)$ et *initial* fait référence à la topobathymétrie initiale non-modifiée. U_{orb} correspond à la vitesse orbitale de la houle, c.a.d la vitesse au fond (notation : $\|U_{orb}\| = \|U_{orb}\|_{L^2(D)}$).

Cette fonctionnelle a pour objectif de minimiser l'énergie pour les houles destructrices tout en étant transparente vis-à-vis des houles constructrices. Egalement, on lui impose la contrainte que les vitesses au fond ainsi que l'énergie des houles constructrices soient inférieures à celles obtenues pour la configuration initiale.

Enfin, comme nous considérons une optimisation multi-directionnelle, nous rappelons que la fonctionnelle totale s'écrit,

$$J = \sum \omega_\theta J_\theta \tag{2.9}$$

où ω_θ est la fréquence d'observation dans une direction donnée.

2.2.4 Les ouvrages efficaces pour le problème considéré

Du fait des contraintes imposées par les industriels, les paramètres à optimiser sont réduits à la distance à la côte et la hauteur de l'ouvrage.

Une étude préliminaire a été réalisée en fixant la hauteur de l'ouvrage à 3 m. Ainsi, en échantillonnant la distance à la côte (avec un pas de 10 m), on obtient une courbe montrant l'évolution de la fonction coût en fonction de la position de l'ouvrage (voir figure 2.12). On remarque que la fonctionnelle est clairement non-convexe et qu'il n'est donc pas du tout évident d'assurer l'obtention d'un minimum global en utilisant un algorithme d'optimisation classique. Il est donc crucial d'utiliser un algorithme d'optimisation globale et nous détaillons brièvement en Annexe de ce mémoire la méthode d'optimisation utilisée.

Concernant l'allure de la fonctionnelle, on s'apperçoit que pour une hauteur d'ouvrage de 3 m, la position optimale semble se situer aux alentours de 350 m de la côte.

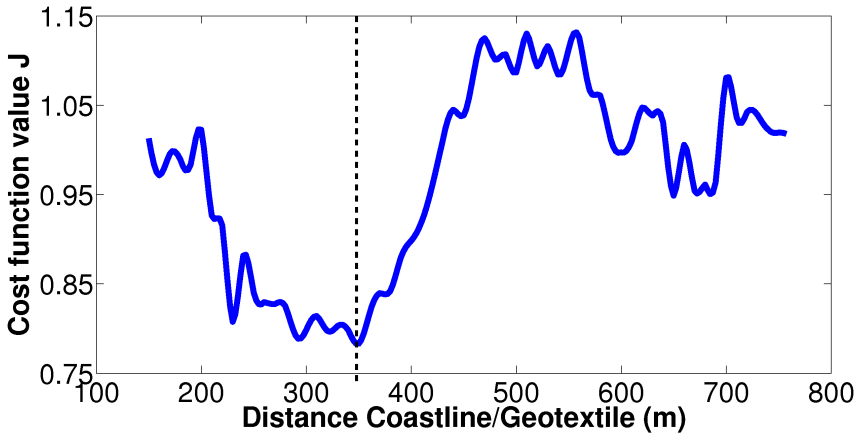


FIG. 2.12 – Evolution de J en fonction de la distance de l'ouvrage à la côte (hauteur du tube géotextile fixée à 3 m).

Fort de cette première indication, nous appliquons ensuite la méthode d'optimisation aux paramètres distance et hauteur du tube géotextile. Nous obtenons la configuration optimale suivante : la rangée de tubes géotextile doit être disposée à 353 m de la côte et le tube géotextile a une hauteur de 2.5 m. Cette configuration produit les résultats décrits dans la table 2.3. Le tube géotextile optimisé diminue globalement la fonction coût de 24% (avec un maximum de 30% pour les houles destructrices de direction Sud Sud Est). De plus, l'ouvrage est bien transparent vis à vis des houles constructrices ce qui permet de préserver la dynamique naturelle de la plage. Ces résultats sont détaillś au Chapitre 4. De plus, une autre application, non soumise à des contraintes industrielles, est aussi présentée. on remarque que pour des formes originales d'ouvrages, les résultats sont nettement améliorés.

	Sud	Sud Sud Est	Est Sud Est	Est
houles constructrices	==	==	==	==
fréq. obs.	24.66%	22.75%	22.75%	17.5%
houles destructrices	−15%	−30%	−16%	−17%
fréq. obs.	2.84%	3.25%	3.25%	2.5%
gain total	−24%			

TAB. 2.3 – La variation des énergies de mise en suspension du sédiments (houles constructives et destructrices) pour les différentes directions de propagation incidentes (issue de l'optimisation multi-directionnelle). (==) signifie que les quantités sont quasiment inchangées (variation inférieure à 0.1%).

2.3 Etude d'un modèle non-local pour l'évolution morphodynamique des dunes

Les Chapitres 3 et 4 font référence à des travaux d'optimisation de formes pour des ouvrages de protection de ports ou de plages.

Cependant, comme on a pu le voir dans le cas d'ouvrages immergés au large des plages sableuses, rajouter un ouvrage revient à modifier localement la topobathymétrie. Pour des problèmes d'optimisation, il paraît judicieux de travailler directement sur des modèles d'évolution pour le fond marin afin d'optimiser la forme de celui-ci.

Cette étude s'inscrit dans cette optique. Le problème que nous allons étudier modélise l'évolution de *dunes* immergées en régime fluvial. C'est un premier pas vers une morphodynamique mathématiques des barres sableuses en mer.

La section 2.3.1 vise à éclairer le lecteur sur la modélisation de l'évolution de *dunes* immergées en régime fluvial. Les sections 2.3.2 et 2.3.3 font la synthèse du Chapitre 5 de ce manuscript. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec Nathaël Alibaud et Pascal Azérad et font l'objet d'un article [2] en préparation.

2.3.1 Présentation du modèle

Les dunes : qu'est ce que c'est ?

Les *dunes* sont des formes particulières du sol qui apparaissent sous l'action d'un fluide turbulent sur un substrat érodable.

L'exemple le plus frappant se produit dans le désert, les tempêtes de sable produisant une large variété de formes (dunes linéaires, dunes transverses ou des dunes plus exotiques comme des dunes étoilées ou les dunes "barkhanes", ...).

Egalement, on peut voir apparaître des *dunes* dans les rivières, pour les mêmes raisons. Seulement, comme l'écoulement du fluide est supposé unidirectionel dans ce cas, des

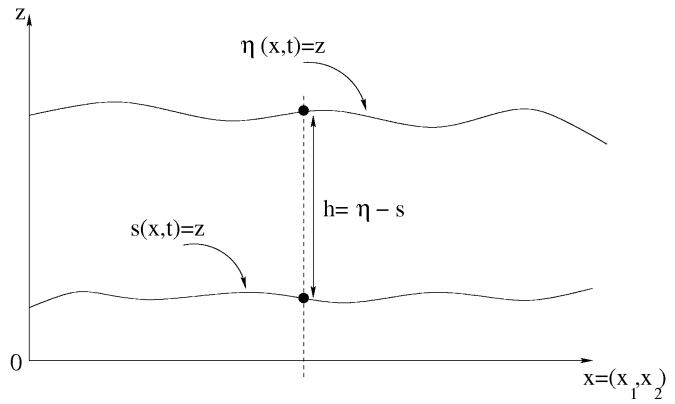


FIG. 2.13 – La géométrie pour le modèle de dune. Un fluide de hauteur h sur un fond érodable $z = s$.

formes exotiques ne se produisent pas. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre au cas de dunes de rivière.

Au cours de l'évolution de dunes, des phénomènes érosifs peuvent apparaître du fait de l'interaction du fluide avec le fond. En rivière, le matériel au fond (sable,...) est transporté par charriage[4] (ce phénomène est appelé *bedload* en anglais) suite au cisaillement sur le fond (*shear stress* en anglais) généré par le fluide. Lorsqu'une perturbation au niveau du fond apparaît, la contrainte de cisaillement est altéré, et donc le transport par charriage aussi.

La définition la plus couramment utilisée pour exprimer la contrainte de cisaillement sur la fond impose que celle-ci soit maximale au sommet de la dune. Or, ceci n'est pas très conforme aux observations puisque en réalité, le cisaillement atteint son maximum sur la face amont de la dune (par rapport au sens de propagation du fluide). Le modèle ci-dessous présente une expression pour le cisaillement au fond qui n'est pas en phase avec la forme du fond.

On obtiendra un modèle non-local, dérivé de l'équation d'Exner (équation de transport modélisant l'évolution du fond), permettant de prendre en compte des instabilités de sorte que le principe du maximum ne soit plus respecté et que des phénomènes érosifs puissent être observés.

Ce modèle a été établi par A.C. Fowler. Nous nous limiterons à l'essentiel dans ce manuscrit et le lecteur peut se référer à [29, 30] pour plus de détails.

Un point de départ : l'équation d'Exner pour l'évolution du fond

On considère le domaine de la figure 2.13.

La surface libre est $z = \eta$, où z est la coordonnée verticale, et le fond est la ligne $z = s$. On considère un mouvement en deux dimensions pour simplifier, tel que $s = s(x, t)$ et

[4] Le charriage est un processus de déplacement des sédiments sous l'effet du vent ou de l'eau. Il affecte les particules les plus massives qui restent en contact avec le sol, se déplacent de manière relativement lente et discontinue.

$\eta = \eta(x,t)$. La hauteur d'eau est alors

$$h = \eta - s. \tag{2.10}$$

L'évolution du fond est décrite de manière classique par l'équation d'Exner. Elle décrit la conservation de la masse pour les sédiments en régime fluvial tel que les rivières.

$$(1-n)\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{2.11}$$

où, n représente la porosité au fond et q le transport de matériel par charriage au fond. Une première hypothèse consiste à dire que ce transport est directement lié aux contraintes de cisaillement τ_f sur le fond. Par exemple, la formule suivante [56]

$$q = q(\tau_f) = C[\tau_f - (\tau_f)_c]_+^{3/2} \tag{2.12}$$

est couramment utilisée, où $[x]_+ = \max(x,0)$ et $(\tau_f)_c$ est une valeur critique au dessus de laquelle le transport opère (appelée *Shield stress* en anglais) [69].

Pour un fond plat, la contrainte de cisaillement est rigoureusement définie par,

$$\tau_f = \mu \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=s} \tag{2.13}$$

où μ est un coefficient de viscosité. Néanmoins, dans le cas d'un écoulement turbulent au dessus d'une paroi, on utilise couramment l'expression suivante pour τ_f,

$$\tau_f = f\rho\overline{u}^2 \tag{2.14}$$

où ρ est la densité de l'eau et f un facteur de friction (il varie légèrement suivant la vitesse du fluide ou la nature du fond mais est considéré comme constant dans la suite). D'après (2.12) et (2.14), le transport de matériel au fond q est donc une fonction croissante de τ_f, qui lui-même dépend de la vitesse moyenne du fluide $\overline{u}$.

Concernant le mouvement du fluide pour $s \leq z \leq \eta$, il est gouverné par les équations de Saint-Venant suivante,

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\overline{u}) = 0 \\ \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = g(S - \frac{\partial \eta}{\partial x}) - \frac{f\overline{u}^2}{h} \end{cases} \tag{2.15}$$

où, $S = \sin\alpha$ (α est l'angle entre la tangente à la pente et l'horizontale) et $\overline{u}$ est la vitesse moyenne sur une colonne d'eau telle que,

$$\overline{u} = \frac{1}{h}\int_\eta^s u\,dz \tag{2.16}$$

On remarquera que l'hypothèse (2.14) est utilisée pour l'expression de τ_f dans les équations de Saint-Venant. On notera dans la suite $\overline{u} = u$ pour alléger les notations.

En adimensionnant les équations (2.15) et (2.11) par,

$$x, s, h, \eta \sim h_0; \quad q \sim q_0$$

$$u \sim u_0; \quad t \sim \frac{h_0^2}{q_0(1-n)}$$

$$gS \sim \frac{fu_0^2}{h_0}; \quad uh \sim u_0 h_0 = Q_0$$

où, Q_0 est le flux d'eau (par unité de largeur), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \\ F^2(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}) = -\frac{\partial \eta}{\partial x} + \delta(1 - \frac{u^2}{h}). \end{cases} \tag{2.17}$$

Les paramètres ε, F et δ sont définis par,

$$\varepsilon = \frac{(1-n)q_0}{Q_0}, \quad F = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}, \quad \delta = S.$$

F est le nombre de Froude. En regime fluvial, on suppose $F < 1$. La paramètre sans dimension ε peut être vu comme le rapport du débit en sédiment sur le débit en eau. On suppose $\varepsilon << 1$. La pente du fond δ est supposée faible. Donc, en faisant tendre ε et δ vers 0, on obtient le système stationnaire approché suivant pour le fluide (*shallow water approximation*),

$$\begin{cases} hu = 1 \qquad \text{(débit)} \\ \frac{1}{2}F^2u^2 + \eta = \frac{1}{2}F^2 + 1 \qquad \text{(Bernoulli)} \end{cases} \tag{2.18}$$

L'état de base correspondant est tel que $u = h = 1$ et $s = 0$.

D'après (2.10) et (2.18), on obtient une expression de s en fonction de u,

$$s = s(u) = 1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}F^2(1-u^2). \tag{2.19}$$

Ainsi, on a $q = q(\tau_f) = q(u) = q(s)$ et l'équation d'Exner devient,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + q'(s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \tag{2.20}$$

Cependant, d'après (2.19), on peut voir que $\frac{du}{ds} = \frac{u^2}{1-F^2u^3}$. A l'état de base $u = 1$, on a donc $du/ds = 1/(1-F^2) > 0$ pour $F < 1$. Ainsi, u et donc d'après (2.14) τ_f sont exactement en phase avec s (dans le sens où τ_f est maximum quand s l'est).

Ceci n'est pas le cas dans la réalité. En effet, si l'on considère une perturbation du fond par une dune, au cours de la propagation du fluide, la contrainte de cisaillement τ_f, due à la friction, est maximale sur la face amont de la dune. Pour faire une analogie, on peut dire que le fluide "voit" la dune un peu comme un conducteur freine avant le bouchon.

L'idée est donc de remplacer l'expression (2.14) par,

$$\tau_f = u^2|_{x+l}, \; l > 0. \tag{2.21}$$

On introduit un décalage dans la prise d'information de sorte que au point x la vitesse u , et donc d'après (2.19) la forme du fond s, soient déterminés par les contraintes de cisaillement aux points $x - l$, $l > 0$ [40]. Du point de vue mathématiques, nous verrons que la condition (2.21) transgresse, en quelque sorte, le principe du maximum qui était satisfait dans l'équation (2.20). On verra donc apparaître des instabilités dans la forme de la solution permettant de rendre compte de phénomènes érosifs, notamment le fait que la dune peut se creuser en régime fluvial.

Effet du fond sur les contraintes de cisaillement

Afin de prendre en compte les effets du fond sur le cisaillement, on introduit le modèle de Navier-Stokes turbulent suivant pour le fluide,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_T \nabla^2 u + gS \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu_T \nabla^2 w - g \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

où, $\nu_T = \frac{\mu_T}{\rho}$ est la viscosité turbulente et $p \approx \rho g(\eta - z)$ est l'approximation hydrostatique. Les conditions aux interfaces sont,

$$p = 0; \quad w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \rho[\nu_T \frac{\partial u}{\partial z}] = 0 \quad \text{sur } z = \eta,$$

$$u = 0; \quad w = \frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x}; \quad \text{sur } z = s.$$

Les conditions $w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x}$ sur $z = \eta(x,t)$ et $w = \frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x}$ sur $z = s(x,t)$ modélisent la continuité des vitesses en surface et au fond. Les interfaces eau/sédiment et eau/air sont supposées "matérielles" (toute particule qui s'y trouve suit cette ligne de courant).

L'objectif est donc de calculer

$$\tau_f \approx \mu_T \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=s} \tag{2.23}$$

pour des petites variations du fond ($s \neq 0$).

En adimensionnant (2.22) et en faisant tendre ε et δ vers 0 comme précédemment , on obtient

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R}\nabla^2 u + \frac{S}{F^2} \\ u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R}\nabla^2 w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} + 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

où, R est le nombre de Reynolds

$$R = \frac{u_0 h_0}{\nu_T}. \tag{2.25}$$

A l'état de base $s = 0$, on obtient une champ des vitesses de la forme

$$u = U(z) = 3\left(z - \frac{1}{2}z^2\right) \qquad \text{(écoulement de type Poiseuille)}, \tag{2.26}$$

Dans ce cas, i.e. en absence de dunes, il est toujours cohérent de considérer le cisaillement défini par (2.14). L'idée de Fowler est ici de perturber le champ des vitesses et de voir ce que cela induit sur la contrainte de cisaillement. On introduit donc une perturbation ψ au champ de vitesse $\vec{u} = (U(z), 0)$ telle que

$$\vec{u} = (u, v) = (U(z) + \psi_z, -\psi_x).$$

La droite ψ =Cte est une ligne de courant de la perturbation de vitesse notée ici $u' = (\psi_z, -\psi_x)$. On remplace le champ de vitesse dans le système d'équation (2.24), puis on effectue les transformations de Fourier suivantes,

$$s = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s} e^{ikx} dk$$

et

$$\psi = -C_{u_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s} e^{ikx} \Psi(z, k) dk.$$

où C_{u_0} est une constante qui ne dépend que de u_0.

On peut voir que Ψ est solution de l'équation de Orr-Sommerfeld suivante,

$$\begin{cases} ik\left[U(\Psi'' - k^2\Psi) - U''\Psi\right] = R^{-1}\left[\Psi^{(4)} - 2k^2\Psi + k^4\Psi\right] \\ \Psi = \Psi'''' = 0 \text{ sur } z = 1 \\ \Psi = 0,\ \Psi' = 1 \text{ sur } z = 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

La résolution de ce système est non-triviale. Nous ne rentrons pas dans les détails ici et plus de précision sur les méthodes utilisées sont disponibles dans [72, 27, 68, 25].

Au final, on obtient l'expression suivante pour la contrainte de cisaillement,

$$\tau_f \approx f\rho u^2 \left[1 - s + \mu \int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial s}{\partial x}(x - \xi, t) d\xi\right]. \tag{2.28}$$

Le cisaillement est corrigé par une pondération qui augmente sa valeur en amont des valeurs maximales de s.

De plus, l'approximation des équations de Saint-Venant (2.18) pour le fluide reste valable pour $F < 1$ et on obtient,

$$u \approx \frac{1}{1 - s}. \tag{2.29}$$

L'équation (2.28) devient donc,

$$\tau_f \approx \frac{1}{1 - s} + \frac{1}{(1 - s)^2} \int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial s}{\partial x}(x - \xi, t) d\xi. \tag{2.30}$$

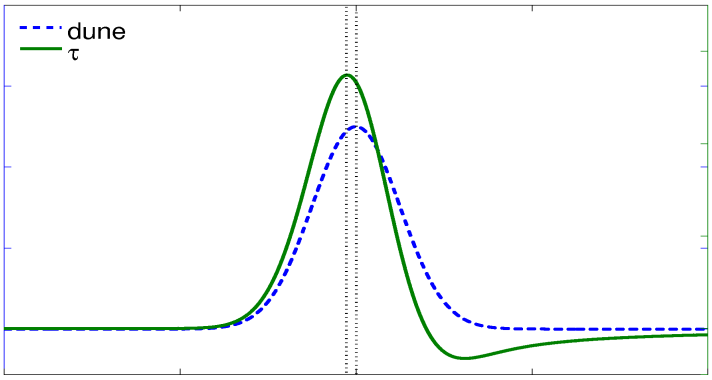


FIG. 2.14 – Visualisation de la contrainte de cisaillement τ_f le long d'une dune. On remarque que celui-ci atteint son maximum sur la pente amont de la dune.

La figure 2.14 montre l'évolution du cisaillement au fond τ_f le long d'une dune classique. On observe que τ_f atteint son maximum sur la pente amont de la dune, juste avant son sommet.

Enfin, sur un grain de taille donnée s'exerce en plus la poussée d'Archimède dont la projection sur l'axe des x est donnée par,

$$\tau_g = -g\Delta\rho D\frac{\partial s}{\partial x} \tag{2.31}$$

où, g est la gravité, $\Delta\rho = \rho_s - \rho_w$ est la différence entre la densité du sédiment et la densité de l'eau et D est le diamètre du grain. La contrainte totale de cisaillement au fond τ est donc donnée par,

$$\tau = \tau_f + \tau_g \tag{2.32}$$

En incluant (2.32) dans l'équation d'Exner $\frac{\partial s}{\partial t} + q'(\tau)\frac{\partial \tau}{\partial x}$, on obtient le modèle suivant pour la modélisation de l'évolution de dunes,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{1}{2}s^2 + \int_0^{+\infty} \xi^{-\frac{1}{3}}\frac{\partial s}{\partial X}(X-\xi,t)d\xi - \frac{\partial s}{\partial X}\right] = 0 \tag{2.33}$$

où, $X = x - q'(1)t$.

Les travaux qui vont suivre s'intéressent à l'étude de cette EDP. Nous montrons l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation (2.33), pour des conditions initiales à valeurs dans l'espace des fonctions de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$. Nous démontrons également que des phénomènes érosifs sont observés pour ce type de conditions initiales. Enfin, des simulations numériques, basées sur un schéma explicite en différences finies, seront présentées.

2.3.2 Problématique

On considère le modèle suivant[5],

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x(\frac{u^2}{2})(t,x) + \mathcal{I}[u(t,\cdot)](x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0 & t \in (0,T), x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.34}$$

où, T est un temps positif, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{I}$ est vu comme un opérateur non-local défini par : pour toute fonction de Schwartz $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{I}[\varphi](x) := \int_0^{+\infty} |\zeta|^{-\frac{1}{3}} \varphi''(x-\zeta) d\zeta. \tag{2.35}$$

Ce modèle est intéressant du point de vue théorique par la présence d'un opérateur non-local anti-diffusif $\mathcal{I}$ défini par (2.35). En effet, $\mathcal{I}$ est une moyenne pondérée de dérivées secondes de u avec un mauvais signe. La principale conséquence est sûrement le fait que l'équation (2.34) ne satisfait pas le principe du maximum (voir plus bas pour plus de détails). Néanmoins, on peut voir que l'opérateur diffusif $-\partial^2_{xx}$ contrôle les instabilités produites par $\mathcal{I}$ et assure l'existence et l'unicité d'une solution régulière pour des temps positifs.

2.3.3 Apports théoriques

Les résultats d'existence et d'unicité d'une solution régulière de (2.34) sont obtenus pour des solutions initiales dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour l'instant, l'extension de ces résultats au cadre $L^\infty(\mathbb{R})$ reste ouverte.

Diverses formulations pour $\mathcal{I}$

Le point de départ dans l'étude du problème (2.34) est l'obtention d'une formulation pseudo-différentielle pour l'opérateur $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left(\mathcal{I}[\varphi] - \varphi''\right)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\left(\psi_{\mathcal{I}}(\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi)\right), \tag{2.36}$$

où $\psi_{\mathcal{I}}(\xi) = 4\pi^2\xi^2 - a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}$ ($a_{\mathcal{I}}$ et $b_{\mathcal{I}}$ sont des constantes positives). Le symbole $4\pi^2\xi^2$ correspond à l'opérateur de diffusion $-\partial^2_{xx}$, tandis que $-a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}$ est le symbole de l'opérateur non-local $\mathcal{I}$. On peut voir que la partie réelle de $\psi_{\mathcal{I}}(\xi)$ se comporte comme ξ^2 lorsque $\xi \to +\infty$ et donc l'équation (2.34) a un effet régularisant sur la solution initiale (même si u_0 est seulement L^2, la solution u devient C^∞ pour des temps positifs.).

Formulation Duhamel et propriétés du noyau de $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$

Pour une solution initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, nous définissons une notion de *mild* solution basée sur la formule de Duhamel. En effet une fonction $u \in L^\infty((0,T); L^2)$ est une *mild*

[5] $s(t,x) = u(t, x + q'(1)t)$ dans l'équation (2.33)

solution de (2.34) si,

$$u(t,\cdot) = K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * u^2(s,\cdot)ds, \tag{2.37}$$

où K est le noyau de $\mathcal{I} - \partial_{xx}^2$ défini par

$$K(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\psi_{\mathcal{I}}})(x). \tag{2.38}$$

Pour tout $t > 0$, $K(t,\cdot)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et vérifie des propriétés de régularités similaires à celles satisfaites par le noyau de l'équation de la chaleur. Néanmoins, il a la particularité d'avoir une partie négative non nulle. Ceci a pour conséquence le non respect du principe du maximum pour (2.34).

Existence et unicité

On a le résultat suivant,

Theoreme 1. *Soit $T > 0$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe une unique solution $u \in L^\infty((0,T);L^2(\mathbb{R}))$ de (2.34) au sens de la formule de Duhamel. De plus,*

i) $u \in C^\infty((0,T]\times\mathbb{R})$ et pour tout $t_0 \in (0,T]$, u ainsi que toutes ses dérivées appartiennent à $C([t_0,T];L^2(\mathbb{R}))$.

ii) u satisfait $u_t + (\frac{u^2}{2})_x + \mathcal{I}[u] - u_{xx} = 0$, sur $(0,T]\times\mathbb{R}$, au sens classique.

iii) $u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$ et $u(0,.) = u_0$ presque partout.

L'unicité d'une solution dans $L^\infty((0,T);L^2)$ est obtenue en utilisant la formulation *mild* (2.37). L'utilisation d'une telle formulation permet également de prouver l'existence locale en temps à l'aide d'un théorème de point fixe contractant. L'existence globale en temps est ensuite obtenue à partir d'une estimation d'énergie L^2 (multiplication de l'équation par u et intégration par partie). Enfin, les effets régularisants sur la solution initiale sont démontrés par un théorème de point fixe sur la formulation Duhamel pour obtenir une régularité H^1 en espace dans un premier temps, puis on réitère pour obtenir plus de régularité. Ces méthodes ont notamment été utilisées dans les travaux de Droniou *et al.* [26] sur l'étude de lois de conservations fractionnaires monotones.

Non-principe du maximum

Un résultat important est probablement la violation du principe du maximum pour l'équation (2.34). Nous exhibons des dunes positives qui deviennent négatives en temps fini (le fond se creuse en aval[6] de la dune). Nous avons le résultat suivant,

Theoreme 2. *On suppose une solution initiale $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$ positive telle qu'il existe $x_* \in \mathbb{R}$ avec $u_0(x_*) = u_0'(x_*) = u_0''(x_*) = 0$ et*

$$\int_{-\infty}^0 \frac{u_0(x_*+z)}{|z|^{7/3}}\,dz > 0.$$

Alors, il existe $t_* > 0$ et $x_* \in \mathbb{R}$ tels que $u(t_*,x_*) < 0$.

[6] par rapport au sens de propagation de la dune

La preuve du théorème précédent est basée sur la formulation intégrale suivante pour l'opérateur $\mathcal{I}$,

$$\mathcal{I}[u](x) = C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{u(x+z) - u(x) - u'(x)z}{|z|^{7/3}}\, dz,$$

où $C_{\mathcal{I}}$ est une constante positive. On note que d'autres travaux ont été effectués sur des lois de conservation non-monotones, tels que ceux de Tadmor sur l'équation de Kuramoto-Sivashinsky [74], mais aucune preuve du non respect du principe du maximum n'est donnée.

Résultats numériques

Des résultats numériques, obtenus à partir d'un schéma explicite centré pour (2.34), illustrent notamment la création de phénomènes érosifs pour l'évolution d'une dune initiale vérifiant les hypothèses du théorème 2. On montre dans la figure 2.15 un exemple d'évolution d'une telle dune initiale.

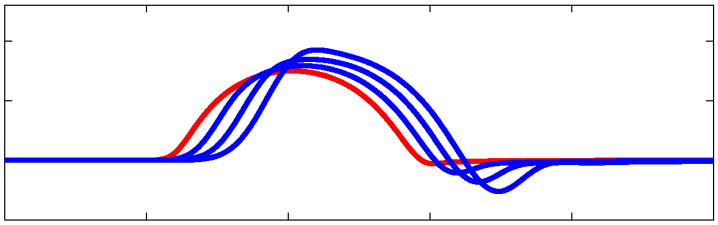


FIG. 2.15 – Evolution d'une dune initiale

Chapitre 3

Shape optimization in deep water

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués en collaboration avec Pascal Azérad, Frédéric Bouchette et Bijan Mohammadi. Ils ont fait l'objet d'un article accepté pour publication dans *Coastal Engineering* [33].

3.1 Introduction

Shape optimization belongs to the category of inverse problems. It means that simulation or experimental approaches are used not only to find the solution of a given system but also to discover the set of parameters of the system producing a suitable solution. For instance, knowing that the flow interacts with a given structure, the structure is modified to obtain a targeted flow [50, 5, 58, 57]. To our knowledge, despite the fact that beach erosion becomes a major problem [66], shape optimization techniques have never been used in coastal engineering. Groynes, breakwaters, jetties and many other structures are used to attenuate water waves or to control sediment flows but their shapes are usually determined using simple hydrodynamical assumptions, structural strength laws and empirical considerations.
In this study, we consider shape design for structures of defences in deep water. This is a feasibility study in order to show that shape optimization can be efficiently applied to ocean engineering. In deep water, the relative depth kh is large and there is no interaction between the water wave propagation and the sea bottom (see Chapter 1.3.4). So, the two main phenomenon what we can observe on emergent structure are reflection and diffraction. This is an underlying guiding principle for the design of harbors or offshore breakwaters (see Figure 3.1).

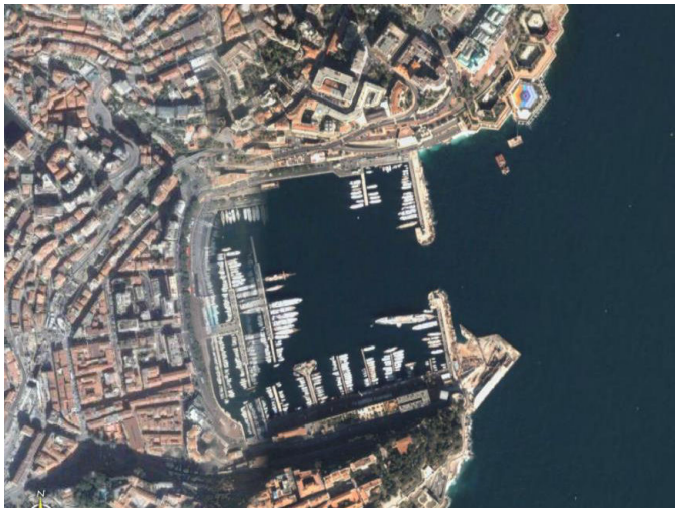


FIG. 3.1 – The harbor of Monaco ; an example of application for this study. We can imagine the shape design of structures at the entry of the harbor (*source Google Earth*).

We consider a linear incident wave derived from the Airy's theory for small amplitude waves. The scattering towards the structure is modelled by the Helmholtz equation. We couple this model with the optimization algorithm in order to minimize the potential water function ξ along a vertical sea cliff or wall. From a mathematical point of view an important issue in this paper is the use of a global optimization algorithm, more efficient than a classical gradient method. Actually, we will see that this class of problem have

local minima and this approach allows us to find the best optimum for the set of considered parameters without being trapped by the first found optimum (local) as a classical gradient method would be [51, 59]. The global optimization method used is described in the Appendix of this report
The hydrodynamic assumptions and the state equations describing short waves propagation are given in section 3.2. In section 3.3, we present the boundary conditions to model the scattered field. The aim of the optimization method, the functional and the parameterization used for the optimization are described in section 3.4. Finally, in section 3.5 we illustrate and comment the results for the different structures obtained.

3.2 Hydrodynamic assumptions

An incident monochromatic unidirectional plane wave is characterized by its height H, its wavelength L, its wave period T and its direction θ. In this study, the linear wave theory assumptions are retained.
The free surface elevation $\eta(\mathbf{x}, t)$ is thus derived retaining only first order terms in the trigonometric development [52].
Hence, for $\mathbf{x} = (x, y)$, we describe incident water waves by the following expression,

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x})e^{-i\sigma t}$$

where the space component is

$$\xi(\mathbf{x}) = ae^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{3.1}$$

with σ being the angular frequency equal to $\frac{2\pi}{T}$, $a = \frac{H}{2}$ being the amplitude and $\mathbf{k} = (k_1, k_2) = k\mathbf{e}_\theta$ the wave number vector with $\mathbf{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ representing the propagation direction of η in the domain and k being the wave number.

In this setting, the wave number k is related to the water depth h by the dispersion equation

$$\sigma^2 = gk\tanh(kh) \tag{3.2}$$

For the motion of linear water waves, we consider the well-known two-dimensional elliptic *mild slope equation* [6]

$$\nabla \cdot [CC_g\nabla_h\eta] + \sigma^2(\frac{C_g}{C})\eta = 0 \tag{3.3}$$

where $C = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}$ and $C_g = C\frac{(1+\frac{2kh}{\sinh 2kh})}{2}$ are respectively the phase and group velocity.

To keep things as simple as possible, we reduce Equation (3.3) to the following Helmholtz equation by considering the case of large relative depth (i.e. when $kh >> \pi$, $C \approx \sqrt{\frac{g}{k}}$ and $C_g \approx \frac{C}{2}$) (see Chapter 1.3.6),

$$\Delta\xi(\mathbf{x}) + k^2\xi(\mathbf{x}) = 0. \tag{3.4}$$

This equation does not depend on phase information $e^{-i\sigma t}$ and models the plane wave propagation in deep water. This mean that the model is validated for

$$h > \frac{L}{2}. \tag{3.5}$$

Then in this case $k \simeq \frac{\sigma^2}{g}$ and this corresponds to the propagation of *short water waves*. Moreover, this equation is also valid in shallow water for constant depth (i.e., $kh << \frac{\pi}{10}$). In this case, $k \simeq \frac{\sigma^2}{gh}$ and this refers to *long water waves* propagation.
Here, we focus our attention on the deep water case and we consider the typical case of a vertical sea cliff or wall, with reflective emergent vertical structures which we seek to optimize. The response of the structures to a given incident wave is assumed periodically reproduced longshore. Hence, we model the reflection on only one structure by using periodic lateral conditions (See figure 3.2). The depth h in domain Ω is supposed constant and satisfying condition (3.5).

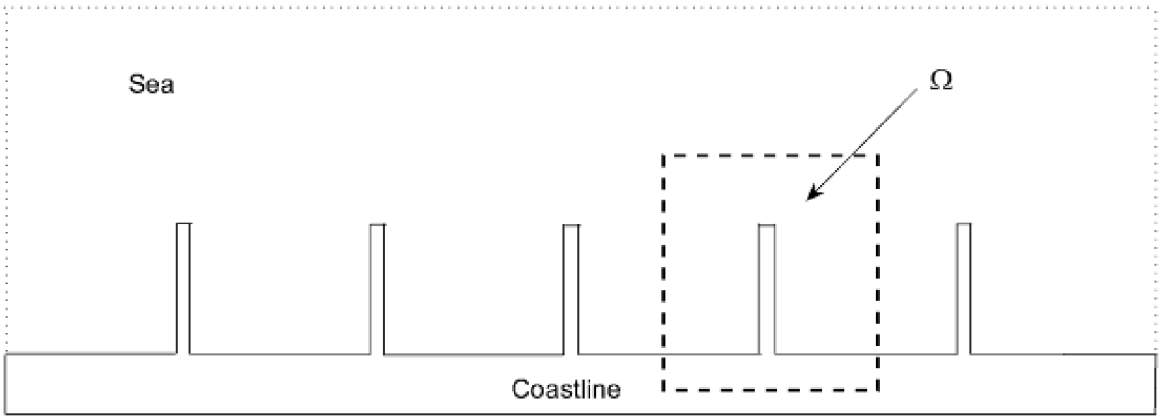


FIG. 3.2 – The vertical wall (or cliff) with five defense structures

To compute the scattered free surface elevation, the idea is to see the total field like a sum $\xi = \xi^i + \xi^s$ where ξ^i is the given incident wave and ξ^s the scattered wave solution of a boundary value problem (BVP) described in the next section.

3.3 Coastal structures modelling

In this section, we model the computation of the scattered water wave ξ^s. The domain Ω is described in figure 3.3 where Γ_0 is a fully reflective boundary, Γ_1 a open boundary and $\Gamma_{2,(a,b)}$ periodic boundary. According to section 3.2, we model the incident water wave by

$$\xi^i(\mathbf{x}) = ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$$

where the wave amplitude a and the wave number vector $\mathbf{k}$ are given.
In Ω, the scattered water wave ξ^s is solution of the elliptic Helmholtz equation (3.4). This equation can be treated in the same way as Laplace's equation [17, 16] and is associated with the following boundary conditions.

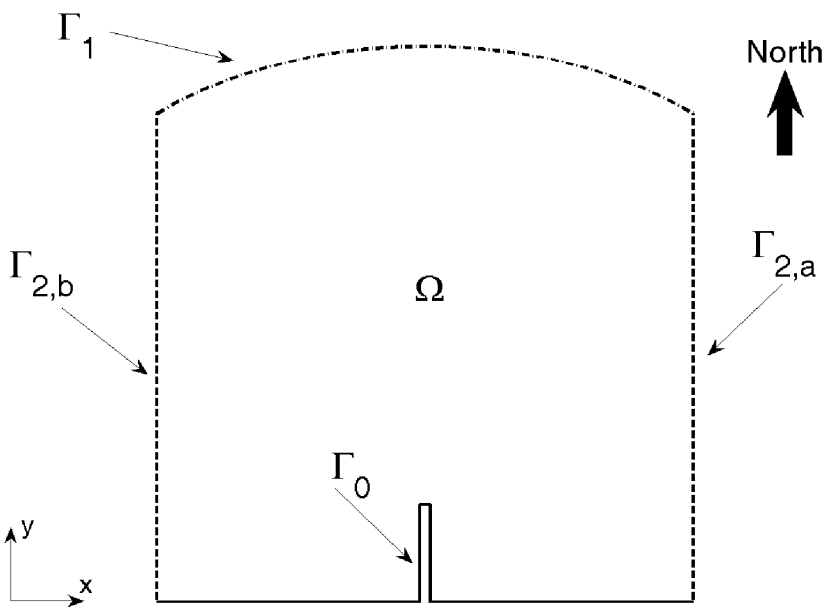


FIG. 3.3 – Domain Ω for the computation.

3.3.1 Reflection condition on Γ_0

Γ_0 represents a vertical wall with one or more structures. It is a fully reflective boundary and ξ^i is reflected on this border. For the total field ξ, the boundary condition on this solid border is the homogeneous Neumann boundary condition $\dfrac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} = 0$ where $\mathbf{n}$ designates the unit outer normal vector and $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla$. It implies the following reflection condition for ξ^s on Γ_0 [20] :

$$\frac{\partial \xi^s}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \xi^i}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{on } \Gamma_0 \tag{3.6}$$

We note that this condition represents an impermeability condition for the velocity, since $\overrightarrow{u} = -\nabla\phi$ and $\phi(\mathbf{x}, z, t) = i\frac{g}{\sigma}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\eta(\mathbf{x}, t)$ [22].

Remark 1. *One can easily understand why this boundary condition ensures wave reflection. We consider a half-space and an incident wave* $\xi^i = e^{ik\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_\theta}$ *where* $\boldsymbol{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$. *We assume that the scattered wave is given by* $\xi^s = e^{ik\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_{\theta'}}$ *where the reflected direction is* $\boldsymbol{e}_{\theta'} = (\cos\theta', \sin\theta')$ *(See figure 3.4). Since* $\boldsymbol{n} = (0, -1)$, *we have* $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} = -\frac{\partial}{\partial y}$. *Thus implies that* $ik\sin\theta e^{ik\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_\theta} = -ik\sin\theta' e^{ik\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_{\theta'}}$ *for all* $\boldsymbol{x} = (x, 0)$. *This amounts to* $ik\sin\theta e^{ik\,x\cdot\cos\theta} = -ik\sin\theta' e^{ik\,x\cdot\cos\theta'}$ *for all* x. *Thus, we obtain the system,*

$$\begin{cases} \sin\theta = -\sin\theta' \\ \cos\theta = \cos\theta' \end{cases}$$

which implies that $\theta = -\theta'$. *This is exactly the reflection property.*

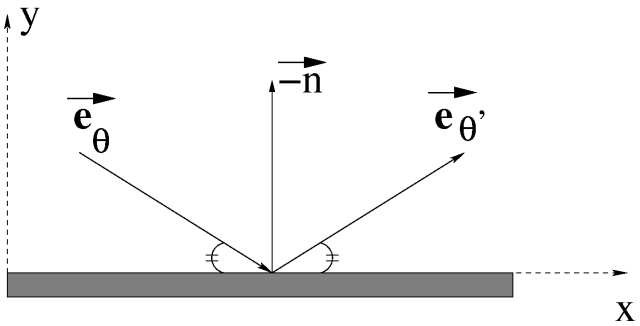


FIG. 3.4 – Reflection on a solid wall.

3.3.2 Radiation condition on Γ_1

Γ_1 models a transparent open sea boundary in the sense that it should not generate any parasitic scattered waves in Ω. Such conditions are usually called non-reflecting. We use the classical *Sommerfeld outward radiation condition* [73, 16]

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{\partial\xi^s(\mathbf{x})}{\partial r} - ik\xi^s(\mathbf{x})\right) = 0, \qquad r = \mid \mathbf{x} \mid \tag{3.7}$$

uniformly in all directions $\frac{\mathbf{x}}{r}$ (r is called the radial distance from the object), where m is the spatial dimension of the problem.
For the implementation of the model, we represent the open boundary Γ_1 by a half-circle in order to have $\frac{\partial}{\partial r} \cong \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$. Hence Sommerfeld outward condition can be approximated by :

$$\frac{\partial\xi^r}{\partial\mathbf{n}} - ik\xi^r \cong 0 \ \text{ on } \ \Gamma_1 \tag{3.8}$$

Remark 2. *Let us briefly explain why expression (3.7) is an outward condition. Considering the progressive expression of the scattered wave $\eta^s(\boldsymbol{x},t) = \xi^s(\boldsymbol{x})e^{-i\sigma t}$, we have*

$$\frac{\partial\eta^s}{\partial r} = e^{-i\sigma t}\frac{\partial\xi^s}{\partial r} \quad \textit{and} \quad \frac{\partial\eta^s}{\partial t} = -i\sigma\eta^s.$$

Let $r \to \infty$ in (3.7), ξ^s satisfies $\frac{\partial\xi^s}{\partial r} \approx ik\xi^s$. Hence $\frac{\partial\eta^s}{\partial r} \approx ik\eta^s$. Since $k = \frac{\sigma}{c}$,

$$\frac{\partial\eta^s}{\partial r} \approx i\frac{\sigma}{c}\eta^s.$$

Thus η^s approximately satisfies the following one-way wave equation :

$$\frac{\partial\eta^s}{\partial t} + c\,\frac{\partial\eta^s}{\partial r} \approx 0$$

which allows scattered waves to travel only in the increasing r direction (see figure 3.5). One can show under condition (3.7) that a positive amount of energy flows in a period T through a large sphere in the outward direction ([16],IV.5.2).

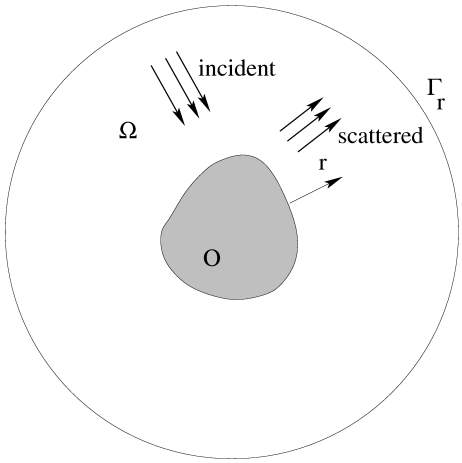


FIG. 3.5 – The scattered wave leaves the domain passing by Γ_r.

3.3.3 Periodic Boundary Condition on $\Gamma_{2,a}$ and $\Gamma_{2,b}$

The dependence between $\Gamma_{2,a}$ and $\Gamma_{2,b}$ is marked by the use of periodic boundary conditions. For that, we define a constraint that makes ξ equals on this two borders.

$$\xi^i + \xi^s{}_{|\Gamma_{2,a}} = \xi^i + \xi^s{}_{|\Gamma_{2,b}} \tag{3.9}$$

In conclusion, ξ^s solves the BVP (3.4)-(3.6)-(3.8)-(3.9). This is a well-posed problem [15]

and this will be the state equations of the optimization process.

3.4 Optimization problem

A shape optimization problem consists in the minimization of a functional $J \in \mathbb{R}$, also called *cost function*, corresponding to the physical criteria to optimize. This function depends on $\mathbf{x}$, a design parameter[1] defining the shape within the admissible set X, also called *control space* [59]. We have a direct calculation loop for the functional : from a parameterization $\mathbf{x}$ we define a domain $\Omega(\mathbf{x})$ on which we compute the state equation solution $\xi(\Omega(\mathbf{x}))$ and finally, the value of the cost function $J(\xi(\Omega(\mathbf{x})))$.

$$J : \mathbf{x} \in X \mapsto \Omega(\mathbf{x}) \mapsto \xi(\Omega(\mathbf{x})) \mapsto J(\mathbf{x}, \Omega(\mathbf{x}), \xi(\Omega(\mathbf{x})))$$

In other words, in the applications presented here, a given set of parameters $\mathbf{x}$ defines a new shape for the structures, so a new domain $\Omega(\mathbf{x})$ for the computation. Then by using the model presented in section 3.3, we compute the resulting free surface elevation ξ in Ω and thus, the value of a cost function J, depending of the solution ξ.

The functional J can be written to include geometric and state constraints. To find numerically the minimum of J, it is necessary to use a minimization algorithm (e.g., steepest descent, genetic algorithms...). In this work, we use a new global recursive algorithm

[1] not to be confused with $\mathbf{x} = (x, y)$ of sections 3.2-3.3

[57, 36, 37] (briefly presented in the Appendix of this report) which has the advantage of finding the best optimal global solution for a given problem.

We present below different parameterizations for vertical emergent structures and cost function allowing to control the free surface elevation along the wall. One should insist on the fact that the functionals, parameterization and state equations which can be considered in the minimization problem are not limited to those presented here and that the approach is fully generic.

3.4.1 Objective

One aims to prove that the free surface elevation of water waves along the vertical wall can be monitored by the shape of the defense structures and the distance between two successive structures. We parameterize the structures using a tree configuration (see section 3.4.2) and we control the distance d_a (respectively d_b) between the structure in Ω and the boundary $\Gamma_{2,a}$ (respectively $\Gamma_{2,b}$) (See figure 3.6).The sum $d_a + d_b$ represents the distance between two successive structures.

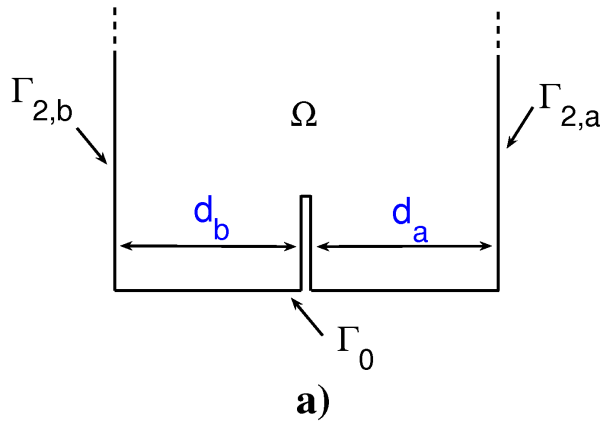


FIG. 3.6 – Control of the distance $d = d_a + d_b$ between two successive structures.

Then we look for the best set of parameters for two particular modes (see section 3.4.3) :

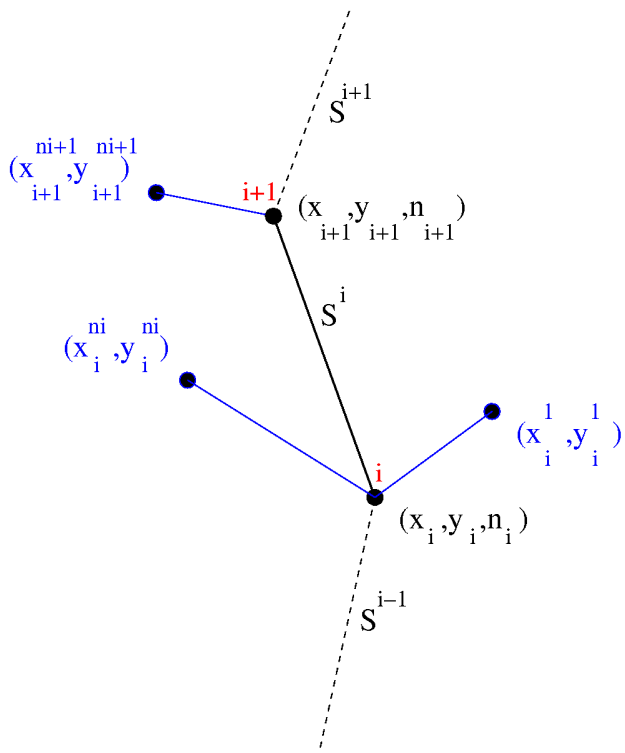
1. an unidirectional incident water wave from northwest direction (mono-directional case),
2. a set of weighted incident wave directions (from northwest, north and northeast) (multidirectional case).

Numerically, the northwest direction refers to a propagation towards the vertical wall with an angle of 135 degrees from the x-axis. Obviously, the direction are nominal and refer to the choice of the coordinate axis (southeast and southwest would give the same picture

by rotational symmetry). There is also a natural symmetry about the shoreline normal, if the weights are properly switched.

3.4.2 Parameterization of structure

The choice of control parameters is very important for the quality of the optimization. Indeed, we must define a suitable control space and correctly account for constraints in order to reach optimal realistic structures. Concerning the control space, we assume that there are no preferred shape of structures to optimize. Thus we consider a free individual parameterization which allows different original and non-intuitive shapes. Practically, a generic structure is a tree, described by its trunk by a set of $M-1$ connected principal edges $s_i = [(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})]_{1 \leq i \leq M-1}$. Each node i is associated with an integer n_i which denotes the number of secondary branches leaving from this point with ending points coordinates $\{(x_i^j, y_i^j), j = 1, .., n_i\}$. We allow principal and secondary edges to vanish by merging two points (see figure 3.7). Both angular and thickness constraints are easy to handle. This parameterization gives a large freedom in the considered shapes.



b)

FIG. 3.7 – The free parameterization ($n_i = 2$ and $n_{i+1} = 1$)

3.4.3 Cost function definition

We consider that the shape of the structure is efficient if it decreases the energy norm L^2 of water waves free surface elevation $\eta(\mathbf{x}, t)$ in an admissible domain Ω_{ad} representing a strip of prescribed width, located between two successive structures. In the presented examples we take a ten meter offshore wide strip as we want the defense impact to be mainly local and permit the wave height to increase offshore (see figure 3.8). In cases we are interested in decreasing the offshore wave height as well one should consider a larger strip, even covering the whole domain, and this will obviously lead to a different shape. It is also very easy to assign different weights to nearshore or offshore wave energy.

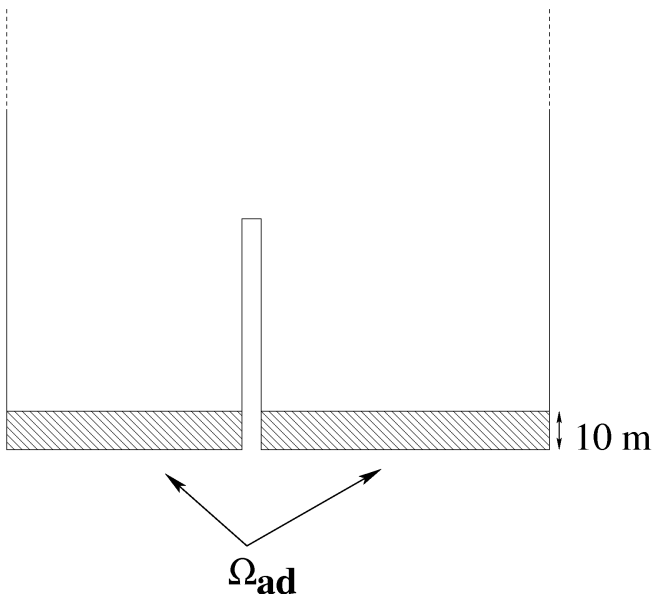


FIG. 3.8 – Area, named Ω_{ad}, where the cost function J is computed.

However, as we can see in section 3.2, to minimize the norm $L^2$of η is equivalent to minimize the norm L^2 of ξ. In addition, we ask for the solution to be as uniform as possible near the wall by requiring the slope of the solution through its standard deviation $\| \nabla\xi(\mathbf{x}) - \overline{\nabla\xi(\mathbf{x})} \|_{L^2(\Omega_{ad})}$ where $\overline{\nabla\xi(\mathbf{x})} = (\overline{\frac{\partial\xi}{\partial x}}, \overline{\frac{\partial\xi}{\partial y}})$ is a 2-dimensional average. Thus, for the total water wave $\xi_\theta(\mathbf{x})$ resulting from the incident water wave of direction θ in the domain defined by the parameterization $\mathbf{x}$, we want to minimize the following cost function $J : X \to \mathbb{R}$,

1. in the mono-directional case θ

$$J(\mathbf{x}) = J_\theta(\mathbf{x}) = \| \xi_\theta(\mathbf{x}) \|^2_{L^2(\Omega_{ad})} + \| \nabla\xi_\theta(\mathbf{x}) - \overline{\nabla\xi_\theta(\mathbf{x})} \|^2_{L^2(\Omega_{ad})} \tag{3.10}$$

2. in the multidirectional case :$\{\theta_j\}_{1\leq j\leq N}$ where N defines the number of considered directions

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j J_{\theta_j}(\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Moreover, from observations we know that waves coming from some directions are more frequent. Thus we assign different weights ω_j to the values J_{θ_j} in order to account for this anisotropy. The values we consider correspond to those observed in Mediterranean sea near Montpellier (France) : northwestern waves 60%, northern waves 10% and northeastern waves 30%. Thus, we choose to favor the northwest propagation. These weighted wave directions can be changed to adapt to other sea conditions with the consequence that the resulting shape will be different and suitable for the corresponding wave pattern.

We recall that for a field u the L^2-norm is defined by

$$\| u \|_{L^2} = (\int\int_{\Omega} u^2(x,y)dxdy)^{\frac{1}{2}}$$

The L^2-norm in the cost function definition (3.10) ensures us to obtain the smallest wave height in the whole domain Ω_{ad} (i.e., very close to the wall).

These cost functions can be upgraded adding terms to account for constraints on structural mechanics, coastal land use, sand resources, economical and environmental issues.

3.5 Results and discussion

3.5.1 Orders of magnitude for the amplitude and wavelength

It is well known that the classical linear wave theory is based on the following assumption

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \ll \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \tag{3.12}$$

where $\mathbf{u} = (u, v, w)$ designates the flow velocity. Since $U \sim a/T$, $\frac{\partial U}{\partial t} \sim U/T$ and $\nabla U \sim U/L$ we obtain the following validity condition for the amplitude a and the wavelength L [49]

$$a \ll L. \tag{3.13}$$

Therefore we should take suitable values for a and L respecting this order of magnitude.

The computations were performed for periods T ranging from 2 to 6 seconds. As pictures are more illustrative for short wavelength, results presented in sections 3.5.2 and 3.5.4 discuss of shape design obtained for $T = 2s$ which is roughly a wavelength $L = 15$ m verifying condition (3.13). However, in section 3.5.5, we also show the shapes obtained for periods ranging from $3s$ to $6s$.

With regards to the amplitude a, one should mention that the governing equation (3.4) being linear in a (doubling a doubles η) and the cost function J quadratic in a. So, we present in this paper results for $a = 0.5$ meters and the shapes obtained in this configuration (other parameters being frozen) are optimal for all a (analogy : x^2 and $4x^2$ reach their minimum at the same point $x = 0$).

Finally, concerning the design of structures, we choose two different configurations. In section 3.5.2, we restrict ourselves with classical forms (i.e., we preserve the rectangular shape and we optimize the angle, the length and the width of the structure), whereas

in section 3.5.4, we relieve all the feasibility constraints and we obtain innovating and non-intuitive forms. In each configurations, the system (3.4)-(3.6)-(3.8)-(3.9) is solved on a finite element mesh using a unsymmetric-pattern multifrontal method and direct sparse LU factorization [19, 18].

3.5.2 Optimization with feasibility constraints

We consider a periodic cell including two rectangular structures and we optimize their angle α and their length L to width l ratio (see figure 3.9). We permit the structures to have a length L ranging between 15 and 60 meters and a width l ranging between 1 and 5 meters.

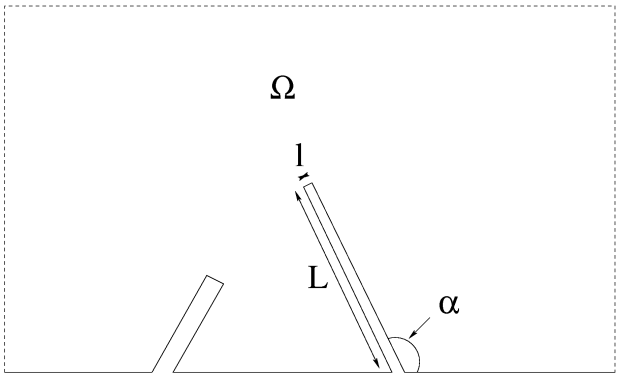


FIG. 3.9 – Control parameters (α, L, l) for each structure during the optimization.

The lower bound at 15 m comes from the fact that structures need have their length larger than the wavelength in order for the scattering to have significant impacts on the shoreline [15]. This is confirmed by the fact that all optimal results found here have their length larger than 50 m. In absence of the upper bound at 60 m the structures would grow in order to seal the domain. Obviously, this is something we would like to avoid.

Case 1 : NW incident water wave

In the first case, we obtain an optimal configuration as depicted in figure 3.10.

In order to show the effectiveness of theses structures, in particular the importance of the angle, we will compare them with structures having the same lengths and widths, located at the same place on the vertical wall but perpendicular to the wall. As we study the scattering in periodic cells for two structures, we can extend the phenomenon to several structures by periodicity (see figure 3.11 for solution in three successive periodic cells).

For structures perpendicular to the wall, having the same dimensions as the optimized ones and located at the same place, we observe that the absolute value $|\xi|$ along the

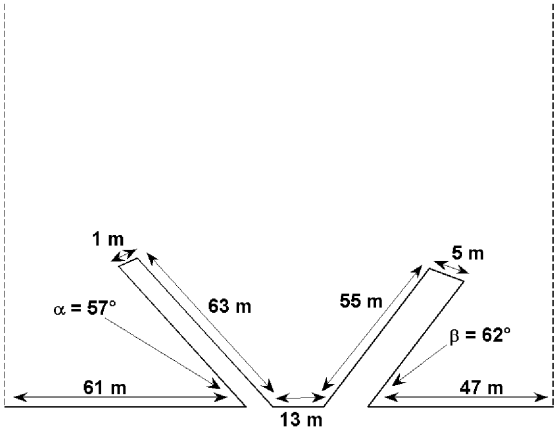


FIG. 3.10 – Optimal dimensions for the structures

vertical wall can be amplified by the structures, in particular in zone 2 (figure 3.11-(a)). This phenomenon is neutralized by the use of optimized structures (figure 3.11-(b)). Optimizing the shape of two structures in a single periodic cell allows us to take into account the effect of each structure on the incident wave as well as the interaction between the two structures and their combined effects on the wave.

More precisely, this result highlights the crucial role of the angle. In fact, we have the following values for the cost function $J_{optimized} = 0.16$ and $J_{perpendicular} = 0.47$ (all the cost function values are normalized w.r.t. the unprotected vertical wall). Although, the perpendicular groins are 53% more efficient than an unprotected vertical wall, the optimization allows an extra gain of 66% compared to the perpendicular case. We show in figure 3.12 the longshore profile along the wall for the two previous cases. Zone 1 and 2 represent the area described in figure 3.11.

We observe a significant decrease of $|\xi|$ along the wall, in particular in zone 2. The variations of $|\xi|$ are between 0 and 0.35 meters for the optimized shape whereas $|\xi|$ lies between 0 and 0.9 meters for structures perpendicular to the wall. CPU time on a PC for this case was about 12 hours.

Case 2 : Multidirectional incident water wave

In this part, following the mono-directional optimization, we seek to optimize two structures periodically for three weighted incident different directions. In other words, we seek optimal dimensions for structures which are effective for incidental waves coming from the northwest (as in Case 1) and from the north and northeast.

We obtained an optimal configuration described in figure 3.13 (solid line). For comparison, we also show the optimal configuration for the unidirectional case (dashed line).

We can observe that the two structures are not exactly the same. First, one of the

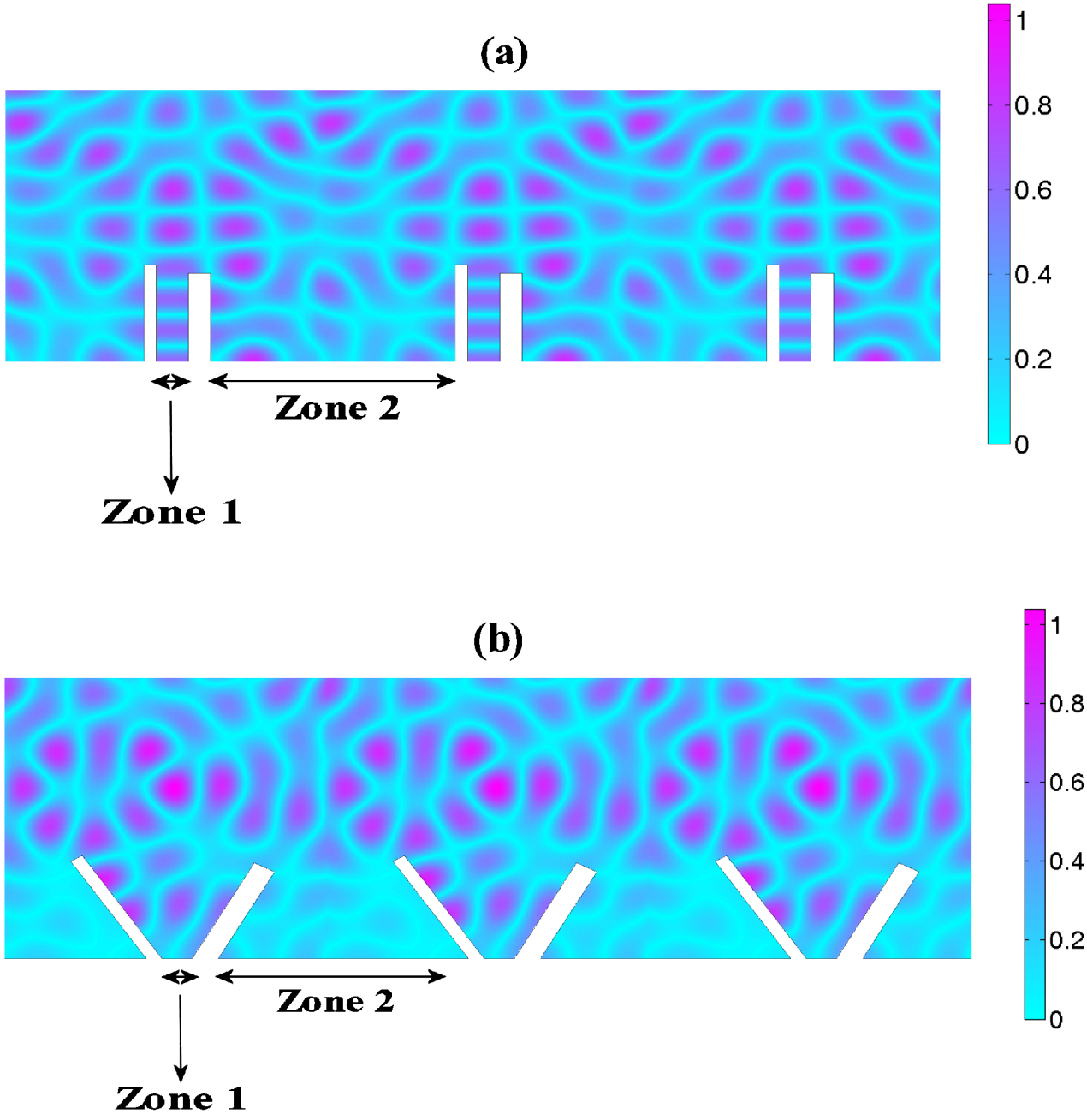


FIG. 3.11 – **Absolute value of ξ resulting from scattering** (**a**) on rectangular structures perpendicular to the wall, (**b**) on optimized structures. (NW incoming waves with $T = 2$ s and $a = 0.5$ m)

reason is that we attribute different weights according to the chosen direction (60% for northwest propagation, 10% for north propagation and 30% for northeast propagation). So, the northwest and the northeast do not have the same weight. This implies that

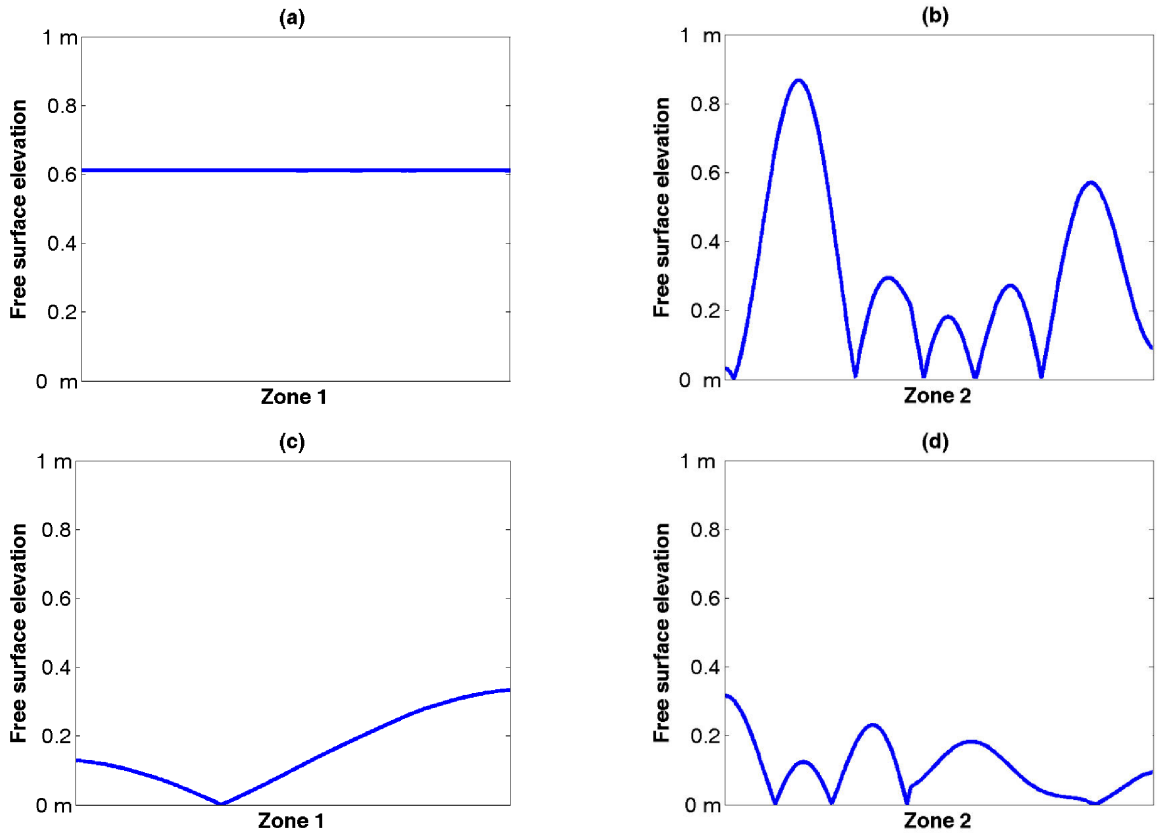


FIG. 3.12 – **Longshore profile of absolute value of ξ. Top :** for rectangular structures perpendicular to the wall, **Bottom :** for optimized structures. See Fig 3.11 for the zone correspondence.(NW incoming waves with $T = 2$ s and $a = 0.5$ m)

the multidirectional optimization is not symmetric with respect to North. Secondly, the structure obtained by multidirectional optimization has to be as efficient as possible for each wave direction N, NE and NW, whereas, for the mono-directional optimization, the structure obtained is specific for the NW propagation. We do not display information about the efficiency of this structure for northern or northeastern propagation. Note that even if the three directions have the same weight, there are no guarantees that there may be a symmetry with respect to North. The CPU time was roughly equal to 36 hours for this case.

Figure 3.14 shows the absolute value of ξ for the reflection resulting from a northwest incident wave. The shapes obtained for the mono-directional optimization (see 3.5.2) are logically more efficient than structures optimized for a wide range of directions. However, for the northwest direction, the values of the mono-directional and multidirectional cost functions differ only by 10%. This is almost negligible and shows that multidirectional optimization makes it possible to obtain better results for a directional spectra of incident waves.

Indeed, shapes obtained after multidirectional optimization are globally more efficient than those resulting from unidirectional studies. Specifically, for northern incidental waves, the structures obtained in this part have almost the same efficiency as those of

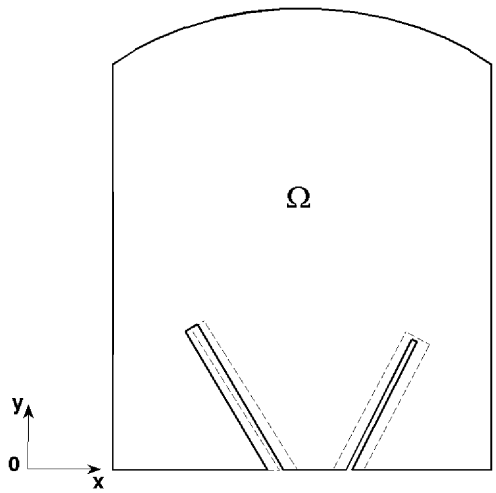


FIG. 3.13 – (—) Optimized shapes for the multidirectional case, (- -) the mono-directional case (Northwest).

the mono-directional optimization (see figure 3.15). We observe a negligible difference of 4% on the cost function value. Whereas for incidental waves from the northeast, these structures produce an effect on the surface variation ξ along the vertical wall 80% more effective than the structures obtained by mono-directional optimization of part 3.5.2 (see figure 3.16).

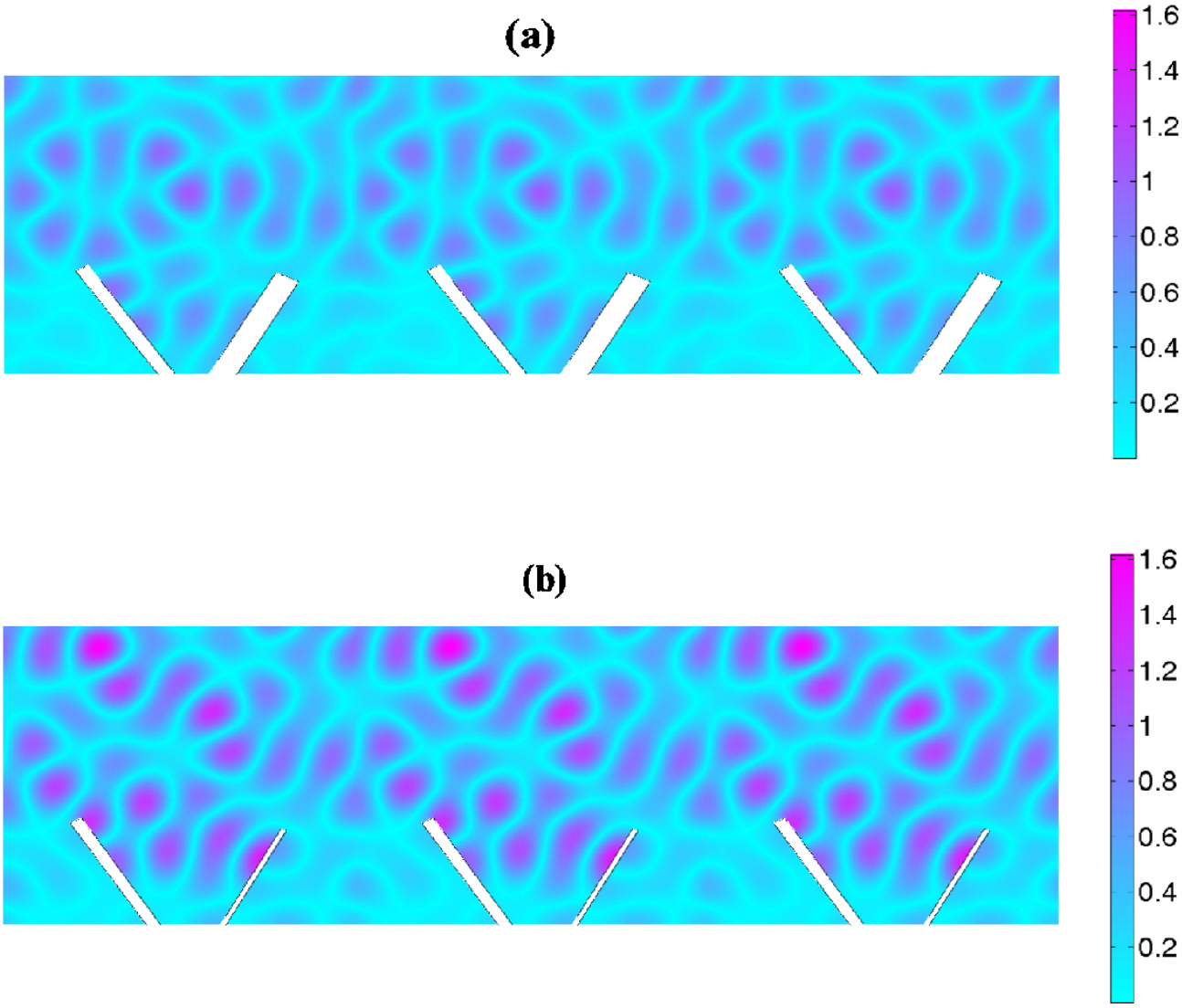


FIG. 3.14 – **Absolute value of** ξ (**a**) on optimized structures for the mono-directional case, (**b**) on optimized structures for the multidirectional case. (NW incoming waves with $T = 2$ s and $a = 0.5$ m)

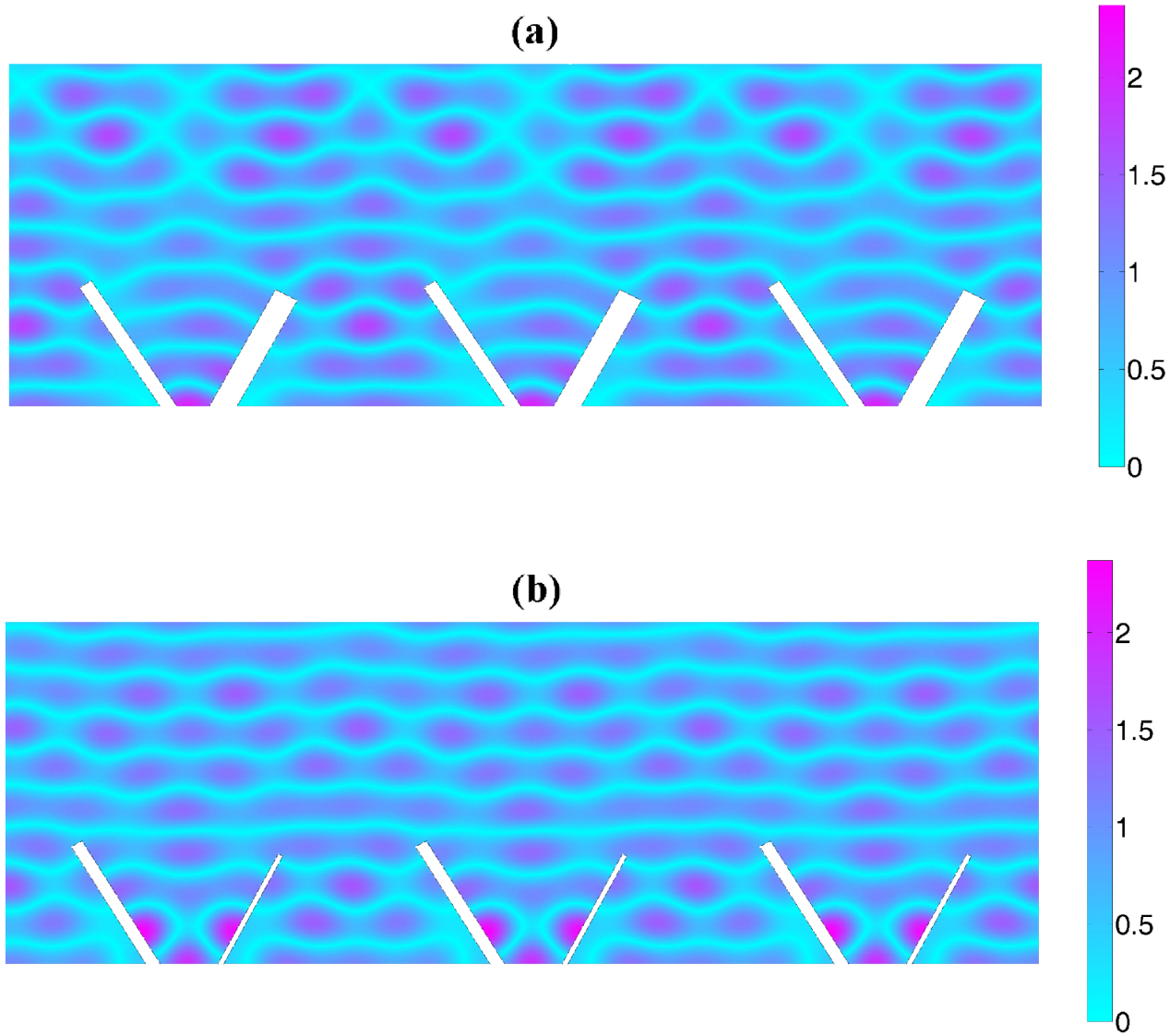


FIG. 3.15 – **Absolute value of** ξ (**a**) on optimized structures for the mono-directional case, (**b**) on optimized structures for the multidirectional case. (N incoming waves with $T = 2$ s and $a = 0.5$ m)

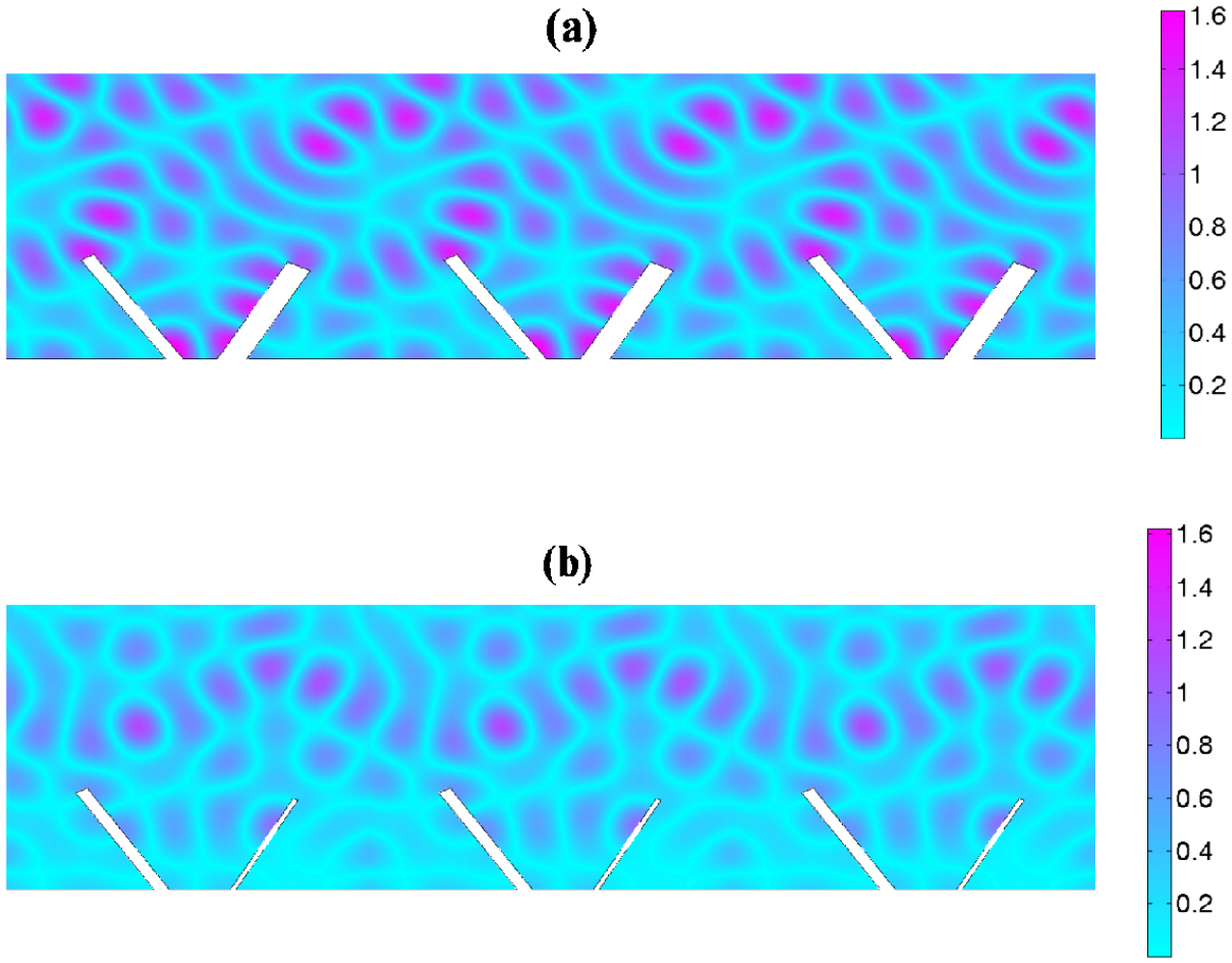


FIG. 3.16 – **Absolute value of** ξ (**a**) on optimized structures for the mono-directional case, (**b**) on optimized structures for the multidirectional case. (NE incoming waves with $T = 2$ s and $a = 0.5$ m)

3.5.3 Sensitivity to small perturbations in the directions

Robustness is linked to the sensitivity of the functional to small perturbations of wave directions around the values for which design have been performed. Normalized sensitivities for perturbations in Northwest and Northeast directions are shown in figure 3.17 for the shape obtained in section 3.5.2. The curves are flat around the optimum which means the design is robust for small perturbation in the wave directions.

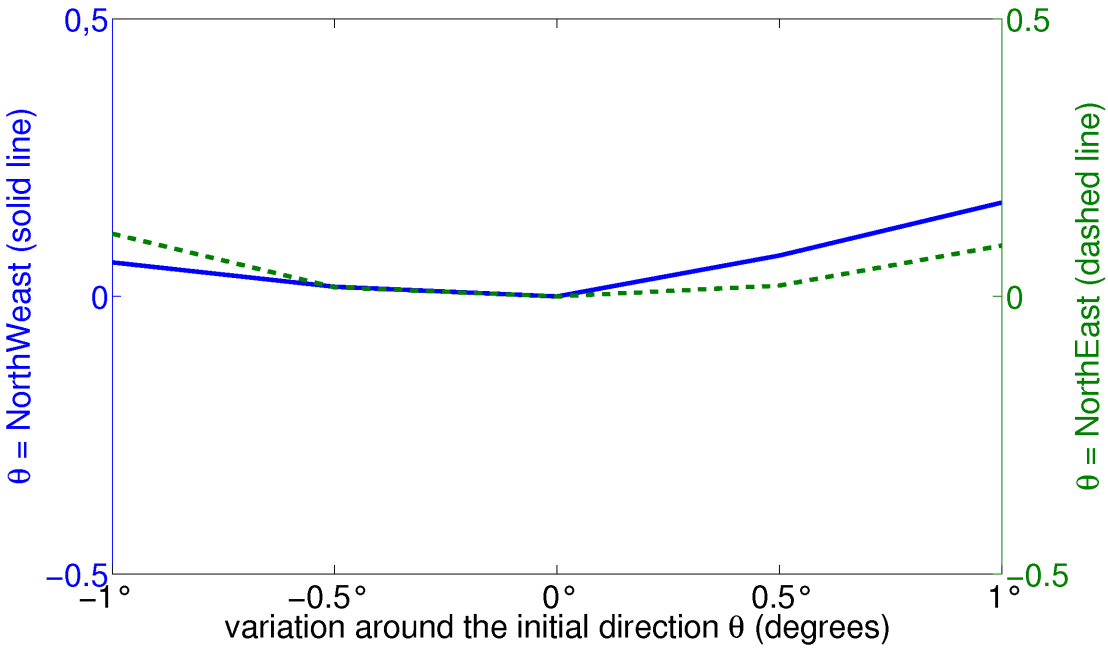


FIG. 3.17 – Functional sensitivities w.r.t. perturbation in wave directions.

3.5.4 Enriching the control space

Therefore, in this section, we would like to see the kind of structures one obtains if the shapes are not necessary rectangular. We consider a periodic configuration and study one cell and one structure. Of course, this is not mandatory and other geometric configurations and boundary conditions can be considered. We consider different situations :

- various unidirectional incident water waves (NE,N,NW),
- multidirectional incident water waves
- various indices N and n_i for the parameterization described in part 3.4.2.

Here one only shows the results for northwest unidirectional incident waves.

Unidirectional NW incident wave

The structure is parameterized by 15 points (i.e., the trunk is defined by 14 principal edges) and we assume that there are no secondary branches leaving from trunk nodes (see section 3.4.2).

Optimization reveals an original and nonintuitive optimized shape as shown in figure 3.18 close to a straight structure with small variations (we come back to this point later).

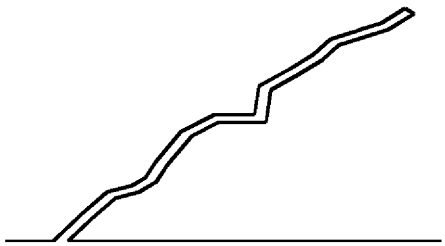


FIG. 3.18 – Optimized shape resulting from the free optimization on the structure.

Figure 3.19 shows the cost function convergence during the optimization process. This graph highlights that several local minima have been visited (i.e. plateau in the history) by the algorithm. Starting from a given point in an attraction basin [2] a classical descent method would have been captured by the corresponding local minimum.

To highlight the effectiveness of this structure, we compare it with a traditional structure (rectangular and perpendicular to the wall). There are large discrepancies between upstream and downstream amplitudes in the perpendicular case. This phenomena is related the decreasing effectiveness of classical structures.

The optimal shape reduces drastically the surface variations along the vertical wall. The absolute value $|\xi|$ is shown in figure 3.20-(b). In this case, the cost function decreases by more than 93% compared to rectangular structures perpendicular to the wall (see figure 3.20-(a)).

The longshore profiles $|\xi|$ along the vertical wall for these two cases are given in figure 3.21. For an incident wave from the northwest, the scattered free surface elevation is strongly amplified to the left (westward) of each structure and smoothed toward its right (eastward).

Figures 3.20-(b) and (c) show a comparison of the present and a straight structure making the same angle than the optimized shape at the wall. For this former case, the cost function is 60% higher. This means that the small perturbations around the straight

[2]Attraction basin : The set of points in the space of system variables such that initial conditions chosen in this set dynamically evolve to a particular attractor. An attractor is a set of states towards which neighboring states converge in the course of dynamic evolution.

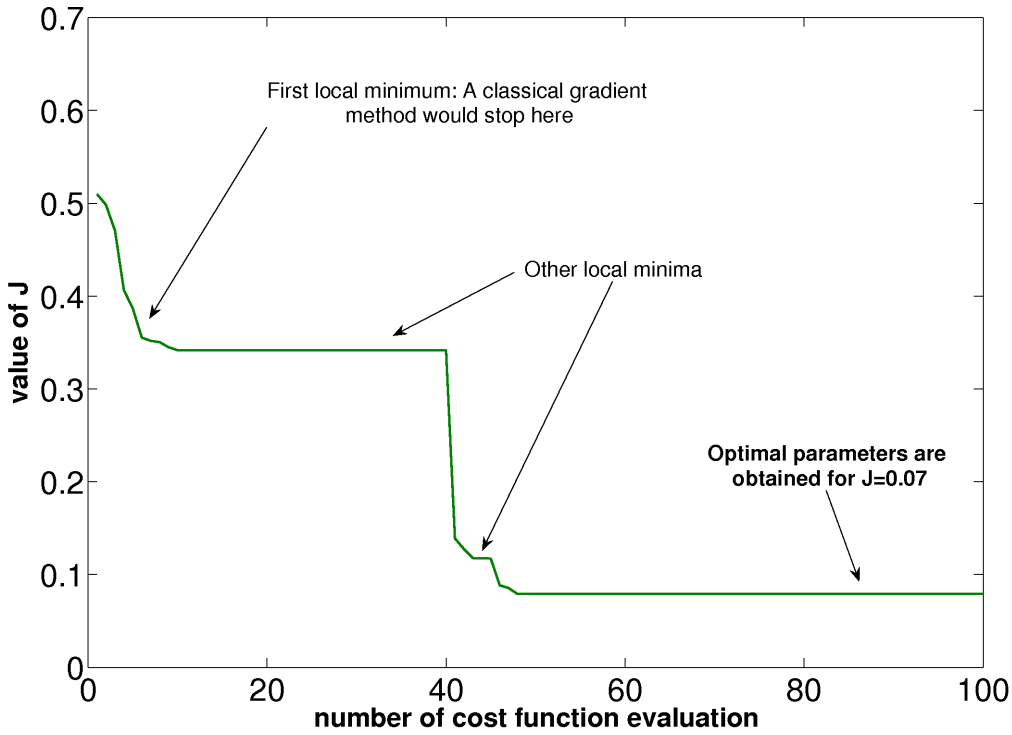


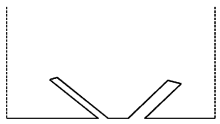
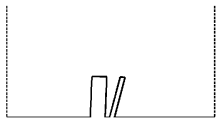
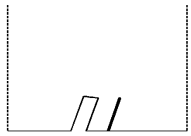
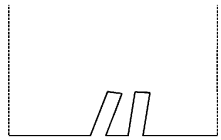
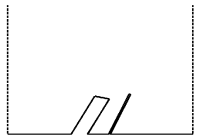
FIG. 3.19 – Cost function evolution during the optimization process (history of convergence).

shape are of great importance.This shows the importance of searching, when possible, the optimum in a larger admissible space.

To summarize, if one looks for multi-branch complex structures the approach provides optimal shapes for multi-point configurations.

3.5.5 Optimal shapes design obtained for different wave periods

The study above was performed for a period of 2s. One can perform the design for different wave period following the sea condition. Here one shows the shapes obtained for periods ranging from 3s to 6s. One keeps the amplitude and direction to 0.5m and NW. Table 3.1 shows mono and multi-period (with all weights set to one) designs. One sees that the multi-period design is efficient for all periods, even though a dedicated mono-period design is superior for the given period.

mono-period	$T = 2$ s	$T = 3$ s	$T = 4$ s	$T = 5$ s	$T = 6$ s
$a = 0,5$ m Direction = Northwest	$J_{2s} = 0,16$ (-84%) 	$J_{3s} = 0,19$ (-81%) 	$J_{4s} = 0,4$ (-60%) 	$J_{5s} = 0,14$ (-86%) 	$J_{6s} = 0,06$ (-94%) 
multi-period	$T = 2, 3, 4, 5, 6$ s				
$a = 0,5$ m Direction = Northwest	$J_{glob} = 0,46$ (-54%) 				
	$J_{2s} = 0,64$	$J_{3s} = 0,62$	$J_{4s} = 0,6$	$J_{5s} = 0,11$	$J_{6s} = 0,29$

TAB. 3.1 – Different shapes obtained for different periods T ($a = 0,5$ m and northwest wave direction). Cost function values have been normalized by corresponding unprotected situations. One sees that the multi-period design is efficient for all periods but, as expected, less efficient than dedicated mono-period designs.

3.6 Conclusion

According to our knowledge, defense structures design for minimizing short wave impact has been considered from the point of view of shape optimization for the first time. Deep water waves propagating towards reflective emergent vertical structures have been modelled by a Helmholtz equation with suitable boundary conditions. A generalized parameterization has been introduced for the shape of the structures. Water wave impact along a vertical sea cliff or wall has been minimized with a global semi-deterministic algorithm. The results highlight that shape optimization can be successfully applied to ocean engineering in the sense that the free surface elevation of short water waves along the wall can be monitored by the shape of the defense structures and the distance between two successive structures. Moreover, the paper demonstrates that global optimization is necessary because of the presence of local minima in the optimization problem.
We are currently working on substantial improvements of the hydrodynamic model to

include more realistic effects. First of all, we will introduce the refraction phenomena by considering a realistic bathymetry. Thus, refraction-diffraction effects will be accounted for in the model as well as source terms such as wind input, wave breaking, nonlinear energy transfers [76]. At this time, the revised model addresses sandy mild slope coasts modelled with a wave refraction-diffraction model [41]. This model describes the propagation of water waves over a weakly irregular sea bottom taking into account shoaling, refraction, diffraction, and energy dissipation. Our application deals with the study of a sandy beach protection in the Gulf of Lions (NW Mediterranean, France).

3.7 Acknowledgements

This work is part of the COPTER research project (2006-2009) NT05 - 2-42253 supported by French National Research Agency, which we gratefully acknowledge. D. Isèbe is granted by the Ministère de la Recherche (MNRT fellowship 2005-2008).

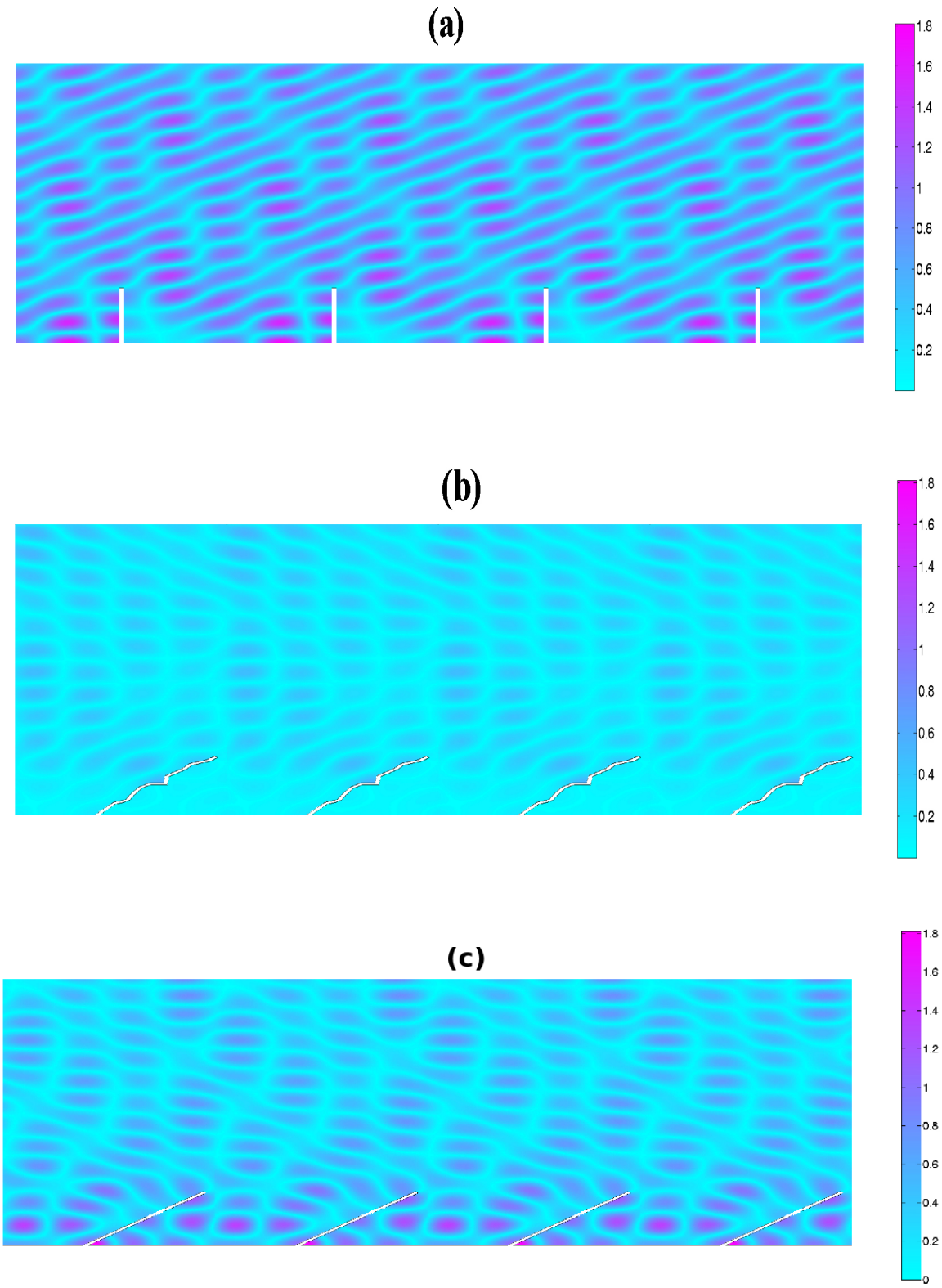


FIG. 3.20 – **Absolute value of ξ resulting from reflection** (**a**) on rectangular structures perpendicular to the wall, (**b**) on optimized structures with no feasibility constraints, (**c**) on structures with same angle that the optimized ones but straight. (NW incoming waves with $T = 2$ s and $a = 0.5$ m)

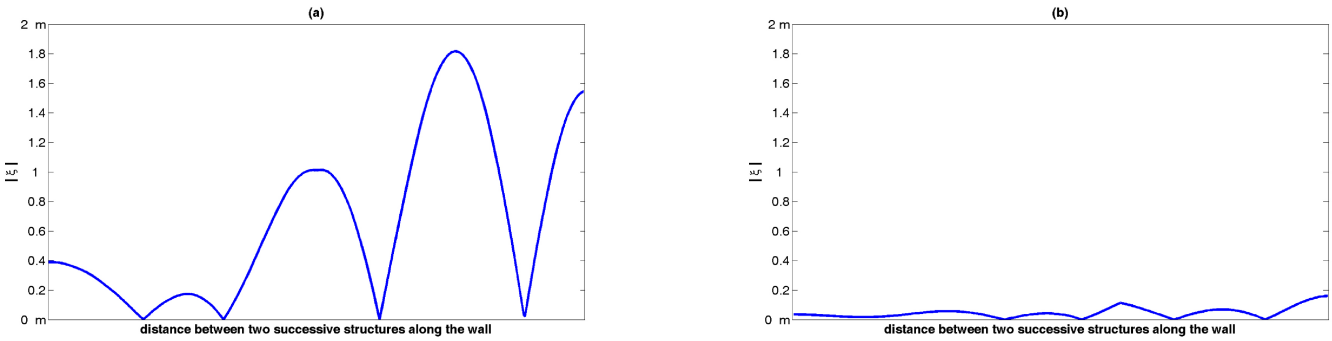


FIG. 3.21 – **Longshore profile along the vertical wall of the absolute value of ξ (a)** for straight rectangular structures and (**b**) for optimized free structures. (NW incoming waves with $T = 2$ s and $a = 0.5$ m)

Chapitre 4

Shape optimization for beach protection

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués en collaboration avec Pascal Azérad, Frédéric Bouchette, Benjamin Ivorra et Bijan Mohammadi. Ils ont fait l'objet d'un article accepté pour publication dans *International Journal for Numerical Methods in Engineering* [32].

4.1 Introduction

Beach erosion problems bring increasing engineering demand. Indeed, about 70% of world beaches are crossing an erosion phase, 20% are stable and 10% show signs of fattening [60, 61]. Obviously, this has major economical and environmental impacts.

We study in this chapter a large-scale industrial problem referring to beach protection, submitted to several feasibility constraints, in the point of view of shape design. The studied zone concerns a piece of the lido de Sète (Mediterranean sea, France).

Our aim is to take advantage of shape optimization techniques to propose new solutions to tackle this problem. This approach is fully innovative in coastal engineering.

Also, efficient global optimization algorithms are necessary to avoid the design to converge to local minima. Indeed, we will see that the related functionals have several local minima. Moreover, the search space is often non-connected. We use a semi-deterministic algorithm to allow global optimization of systems governed by PDEs with a low calculation complexity [35, 37]. This optimization method is briefly described in Appendix B.

In section 4.2, we present the studied zone, the main cause of the beach erosion process and the solution planned. Section 4.3 recalls the flow model used for the water waves propagation. Section 4.4 is dedicated to the description of the optimization problem. In particular, we discuss the parameterization for the structures and the cost function. Finally, section 4.5 displays and discusses optimization results for two beach protection studies in Northwestern Mediterranean sea with the aim of reducing the energy available for sediment transport.

4.2 The studied zone and the project of coastal management

The problem refers to the defence of the lido de Sète, a piece of coast between Sète and Agde (Northwestern Mediterranean sea, Languedoc-Roussillon, France). More precisely, the paper concerns a 3 km long zone straight to the West of Sète (see figure 4.1) termed Eastern Lido de Sète (ELS).

4.2.1 The lido de Sète morphology and morphodynamics

The lido de Sète is a 20 km long sand barred beach characterized by a very low tidal excursion and moderate waves; its orientation is roughly SW-NE. The lido de Sète is flanked by the Saint Clair cliff to the East and by the volcanic coast of Agde to the West. Both Saint Clair cliff and Agde rocky coast form headlands that restrict on both sides longshore sediment supplies and losses. Within this sedimentary cell, the longshore sediment transport in the nearshore zone is predominantly towards the West. From a source to sink point of view, the ELS is thus the source of a sedimentary cell.

Estimates of longshore sediment fluxes along the ELS from the analysis of shoreface profiles and Digital Elevation Model[1] vary from -60000 m3 (loss) to +39000 m^3 (supply) for different periods concerning one or several storms with Hs $>$ 4m in deep water [31].

[1] A digital elevation model (DEM) is a digital representation of ground surface topography or terrain.

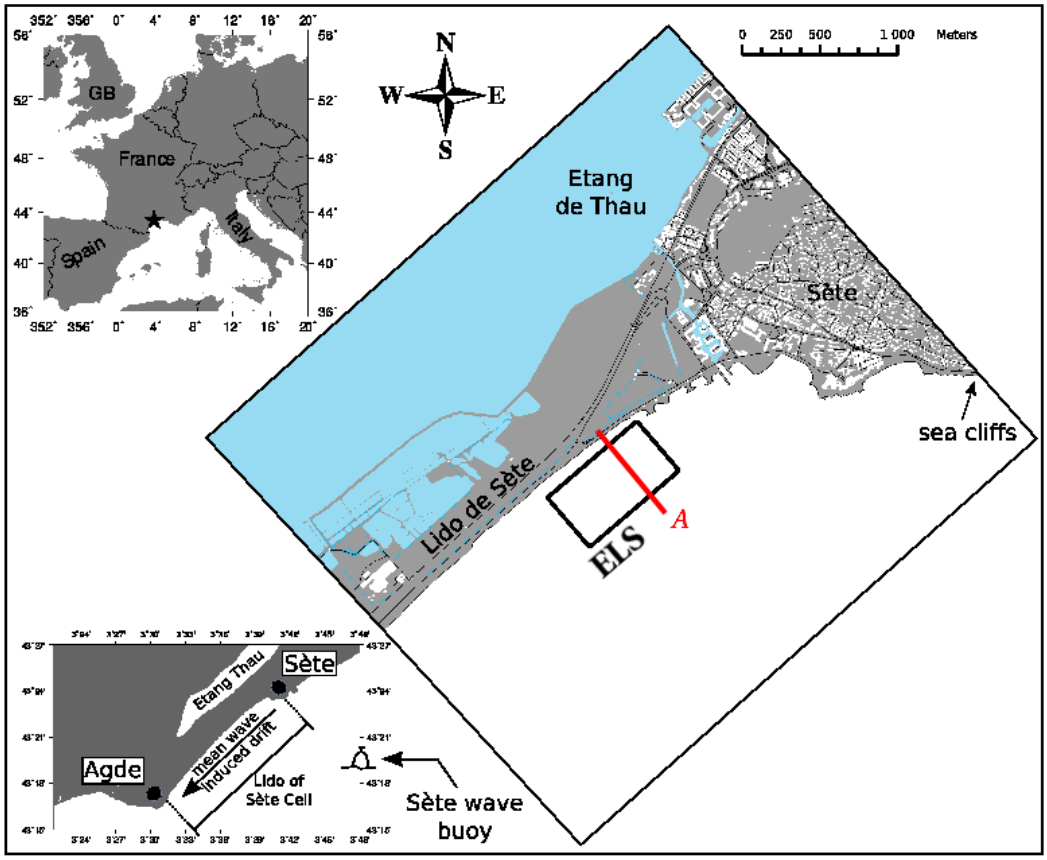


FIG. 4.1 – Location of the Lido de Sète sedimentary cell including ELS site (Eastern Lido de Sète ; the Lido de Sète sedimentary cell is about 20 km long ; the coastal drift orientation is toward the West (the line A refers to the cross-shore profile described in figure 4.2).

Net averaged loss of sediment calculated since 1989 is of the order of 30000 m^3 (ranging from $21 m^3/ml/an$ to 49 $m^3/ml/an$).

Along a cross-shore profile, the coastal tract of the ELS consists of

1) a shoreface with two linear sand bars (see picture 4.2),
2) a 20 to 120 meters wide emerged beach and aeolian dunes zone including a roadway and a railroad,
3) a kilometer wide and 10-m deep lagoon termed Etang de Thau.

The mean nearshore slope between the high-water line and the outer margin of the nearshore bar zone at a depth of about 10 m below the mean water level is about 1 :100. The median grain size is of the order of 320 microns in the upper shoreface decreasing to 130 microns in the lower shoreface [13].

The beach is often eroded during storms and the coastline has recorded a shoreward displacement of about 50 m since 1967 with a rate of shore retreat of about 1 $m/year$ since 10 years [13]. In reply to this erosion, classical beach fills in the form of hundreds of meter

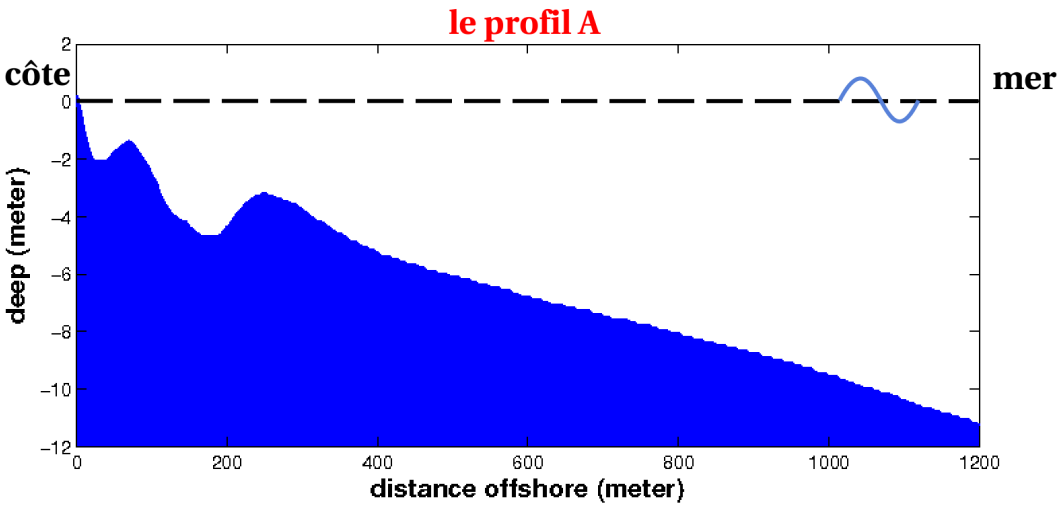


FIG. 4.2 – The mean cross-shore of ELS. We observe the inner and outer linear sand bars.

long flat-topped berm were regularly constructed along the coast, but were destroyed soon after by major winter storms (*e.g.* that of 2004, december 1st). Presently, the shoreline has retreated to the highway revetment and the railroad may be locally threatened in a near future (see figure 4.3).

FIG. 4.3 – The roadway along the ELS after a storm.

Many artificial structures must be considered now to decimate the water waves impact and to reduce erosion. The structures most constructed along the Languedoc-Roussillon coast are emerged breakwaters or groins. However, they are expensive and they are known to shift the long-term erosion at other places along the coastline instead of reducing it. As a consequence, it has been recently proposed to deploy a narrow Low Crested coastal defence Structure (LCS) made of geotextile tubes (see figure 4.4), and to reshape with allochtonous sand the submerged beach of the ELS (the most eroded zone, at the source of the sedimentary cell).

FIG. 4.4 – A geotextile tube before submersion. This LCS is a long cylinder made of synthetic textile and filled up with sand.

4.2.2 Beach nourishment and deployment of geotextile submerged LCS

Defence structures planned for the ELS are shown in figure 4.5.

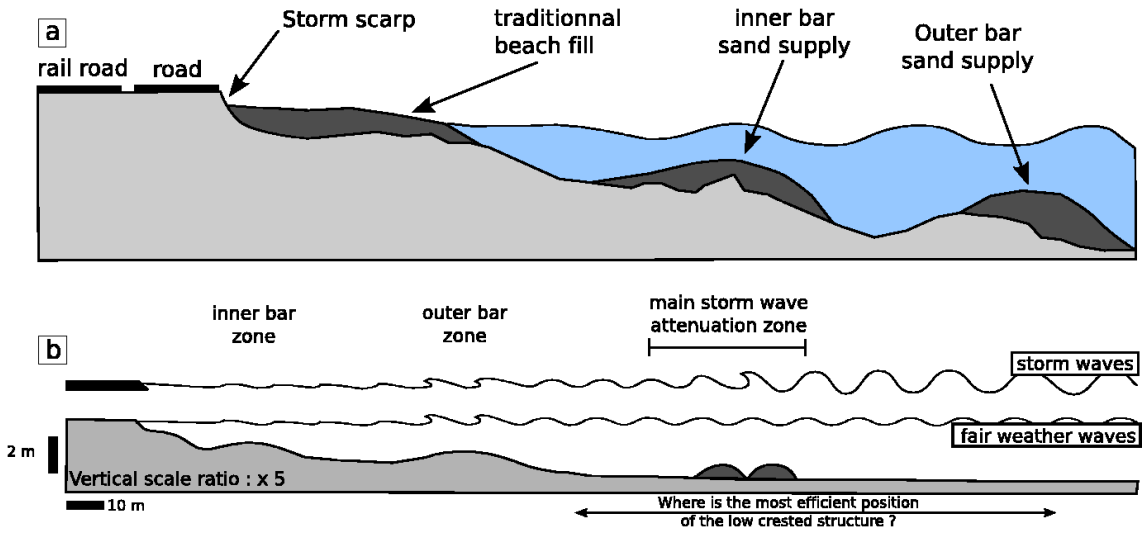


FIG. 4.5 – Classical defence structures planned for the lido de Sète : (a) a beach fill on the emerged beach, sand nourishments both on the inner and the outer bars (b) a low-crested structure has to be placed in the shoreface. This LCS may let the shorter waves propagate to the beach with no attenuation and may smooth the longer waves occurring during storms. Consequently, the inner and outer bars may be submitted to fair weather conditions even when storms occur. The hydrodynamics may induce a natural sand supply to the upper shoreface, as observed during summer hydrodynamics conditions.

The defence project consists 1) to supply sand to the beach for immediate use, 2) to

supply sand to the inner and outer bars to increase the sand volume of the shoreface, 3) to construct a submerged LCS ; these geotextile tubes would be placed side-by-side in two files cross-shore, and would be placed one behind another longshore. The resulting artificial outer bar may operate as a wave attenuator device : it may let the shorter waves propagate to the beach with no attenuation and may smooth the longer waves occurring during storms, as a low-pass filter of the wave energy may do. The main function of this structure is to initiate sediment deposition at the shoreline through the modification of nearshore wave orbital velocities and currents. The structure may reduce the amount of storm wave energy in its lee ; in the same time, the structure may maintain in its lee the incoming energy of fair-weather waves, useful for the construction of sand bars and the migration of sand towards the shoreline. It is a new generation of soft structure having less impact on coastal hydro-sedimentary system. Submerged LCS (not only made of geotextile) have been already described in [75], [48], [39], [47] and their deployment resulted in beach widening [80]. More recently, [67] reviewed the deployments of submerged LCS (including narrow ones) and stated a more mitigated opinion, presented and discussed later in this chapter.

In this context, the following constraints had to be taken into account :

- 50 meter long geotextile tubes are placed one behind another in two files along the shoreline, forming a 2.4 km long submerged narrow LCS ;
- The width of the LCS cannot exceed 12 m, and the distance between the shoreline and the crest of the LCS has to range between 250 m and 850 m for policy, security and aesthetic reasons ;
- the hydrodynamic data must be processed so that erosive waves (the longer and higher waves) and constructive waves (the shorter and lower waves) may be clearly distinguished ;
- a 2 meter safety distance must be preserve between the sealevel and the top of the LCS for tourism navigation constraints.
- The geotextile LCS may be parallel to the coast to favor the feasibility.

This is an large-scale industrial project under strict feasibility constraints. The *Bas-Rhône Languedoc* Company (BRLi) is in charge of the device layout and installation. This company has a great experience of land-use management and development in Languedoc-Roussillon in order to perform engineering studies and advisory services. An agreement for this project is in progress, for a deployment by 2008.

4.2.3 Available bathymetry and hydrodynamic data

Bathymetric data

The bathymetric data available for this study consisted of series of echosounding data obtained from numerous monitorings since 2000 [13, 55, 31]. The soundings were carried out along tracks perpendicular to a reference coastline with a spacing of about 100 m. They extended from the foredune to the outer margin of the nearshore bars at a depth of about 20m. The vertical accuracy of the soundings is less than 0.4 meters with a corresponding horizontal accuracy of about 10 meters (see figure 4.6-(a)). More specifically, in the ELS,

typical profiles and Digital Elevation Model display a very small rectilinear inner bar in a water depth of 1 m at 150m from the coast, a 2 m high outer bar at about 300 m from the coastline (see figure 4.6-(b)). During a storm, the profile may be locally altered by the wave impact ; but successives storms tend to strongly minimize the modifications of the mean profile [13]. As a consequence, to the first order, the main features of the nearshore domain in the ELS are summarized in figure 4.6-(c).

Wind and wave data

An analysis of existing wind data is displayed in figure 4.7.

The wave data available are from CANDHYS (Centre d'Archivage National de Données de Houle In-Situ) database and from previous reports [31]. These data concern the coastal zone in the central part of the Gulf of Lion in the vicinity of Sète. According to these general data, the mean annual significant offshore wave height at the 20 m isobath is less than 1 m and the mean annual significant offshore wave period is about 4 s. During major storms (less than 2% of observed waves), H increases to 3-4 m with corresponding T of about 5 s to 10 s. These storms waves are usually from the SE, but SW storms have been reported to induce important modifications of the nearshore morphology. Amplitude of tides is about 30 cm with no significant effect [70].

Moreover, an instrumented field study was conducted in 2000 on the shoreface of the eastern lido de Sète [55]. This study provided numerous spectra of wave energy density measured for four distinct winter storms. An adapted data processing allowed the calculus of the significant wave heights respectively at the lower shoreface and in the troughs at the lee of the sand bars. At the lower shoreface, the significant wave heights recorded during the major storms were 3.1 m, 2.7 m, 2.7 m and 1.9 m and their corresponding mean significant periods were 10.4 s, 7.7 s, 8.3 s and 8.2 s. These data recorded at the exact location of the defence project confirm those mentioned above, determined with less specific data.

Dominant winds are from North and NW and result in sea breeze in the nearshore zone. NW wind (Tramontane) represents 60%, with mean wind velocities at about 10 - 12 m/s. In the vicinity of Sète, NE Wind (Mistral) blow 20% of the time. SE wind (including Le Marin from South) are usually lower breeze with the exception of the SSE wind (Le Grec) that may blow at more than 20 m/s. The highest velocities recorded are 32 m/s in 2003 during a storm, and 25 m/s on 2002, november 14th. Usually, the winds oriented shoreward generate wind waves which azimuths are consistant with that of the dominant swell azimuths. The winds oriented seaward counterbalance the swell and usually tend to minimize their effect [24].

4.3 Flow model

The propagation of water waves over linear irregular bottom bathymetry and around islands involves many processes such that shoaling, refraction, energy dissipation and diffraction.

To compute the water wave propagation in the ELS, we use the REF/DIF code. REF/DIF is a open source software designed for modelling wave propagation over a weakly

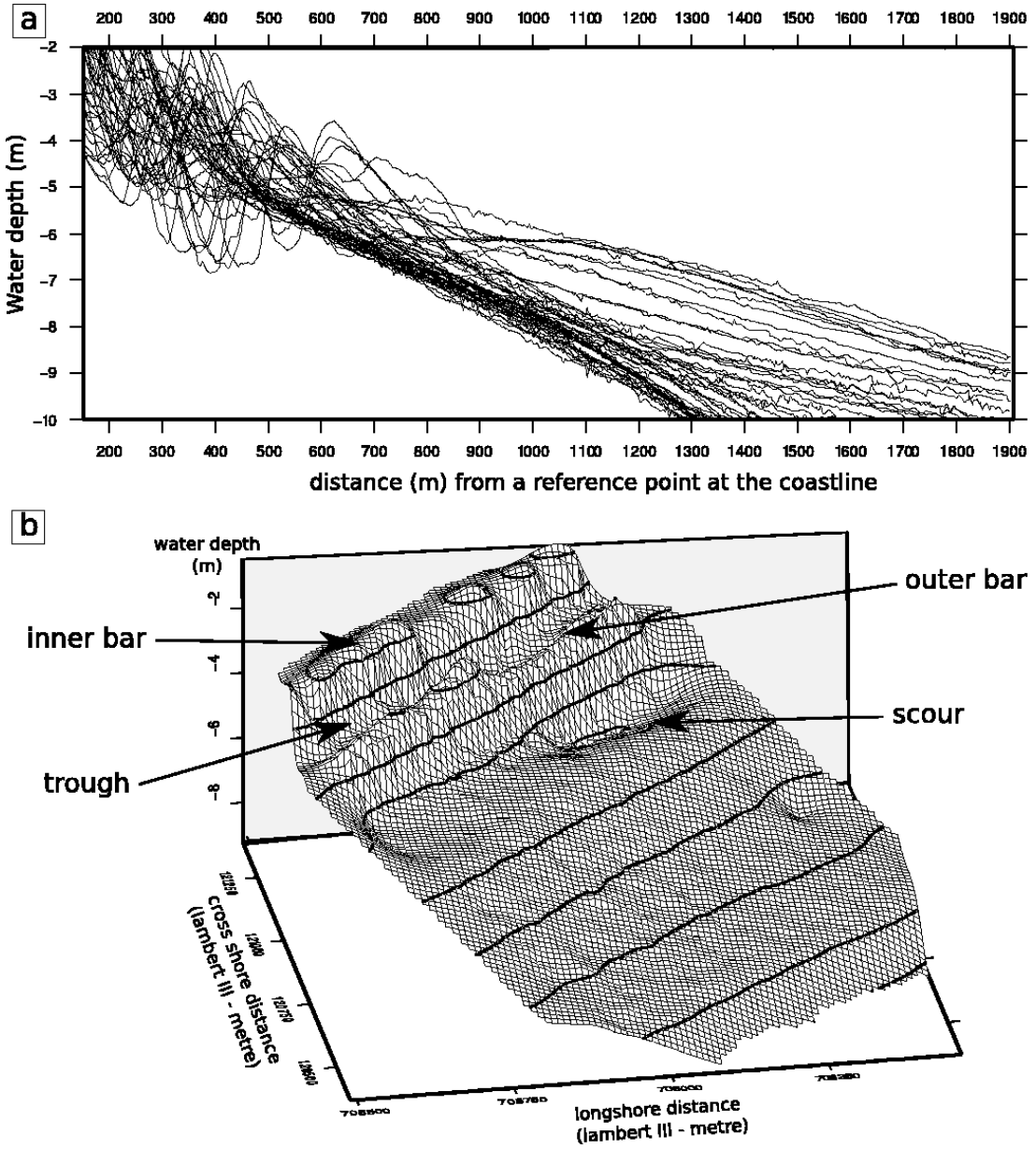


FIG. 4.6 – (a) Seabottom cross shore profiles made with bathymetric surveys of EID (Entente Interdépartementale pour la Démoustication du littoral méditerranéen) (2002) and SMNLR (Service Maritime et de Navigation du Languedoc - Roussillon) (2004). The profiles concern the shoreface from Lez river to Orb river (see figure 1). Some of them were acquired at Eastern Lido de Sète. Along the Gulf of Lion coast, the position of the outer sand bar ranges from 350 meters to 700 meters far from the coast. (b) Digital Elevation Model of the shoreface along the Eastern Lido de Sète during a survey on 2000, march 16th, by Certain (2002). This DEM has been re-processed with GMT ([71]) for this study. The shoreface is characterized by two sand bars and a gently slope.

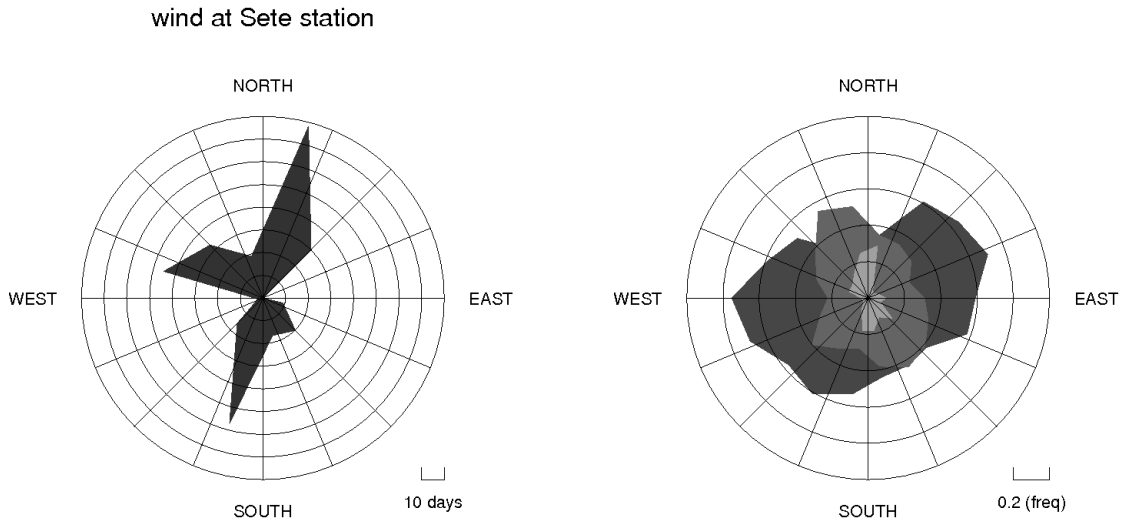


FIG. 4.7 – Left : main wind azimut. Right : moderate wind distribution.

varying seabottom. It takes into account both refraction and diffraction phenomena or wave attenuation but it does not manage wave reflection nor process-based wave breaking over sand bars. It would be problematic if we consider water waves propagation in a harbor with vertical emergent structures but in ours applications, referring to propagation in a sandy beach, the reflection could be neglected. Moreover, the model has been tested and validated on various experimental test cases [79, 14, 65].

REF/DIF is based on a parabolic weakly nonlinear combined refraction and diffraction model which incorporates all of the effects mentioned above [43, 42]. This model combines the essential features of the two specific approaches, a mild slope model [6, 64] and a diffraction model [53]. In this section, we briefly present the nonlinear combined refraction/diffraction model. For more details, see section 1.3.7 of Chapter 1.

4.3.1 nonlinear combined refraction/diffraction model

Kirby & Dalrymple, at the Center for Applied Coastal Research (University of Delaware, US), developed a more general formulation governing waves in a domain with slow but arbitrary depth variations [43, 44]. The following parabolic approximation for refraction/diffraction is obtained,

$$2ikCC_g\frac{\partial A}{\partial x} + 2k\left(k-k_0\right)\left(CC_g\right)A + iA\frac{\partial\left(kCC_g\right)}{\partial x} \tag{4.1}$$

$$+\frac{\partial\left(CC_g\frac{\partial A}{\partial y}\right)}{\partial y} - k\left(CC_g\right)K'|A|^2A = 0$$

where

$$C = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh} \quad \text{(phase speed)}, \tag{4.2}$$

$$C_g = C\frac{(1+\frac{2kh}{\sinh 2kh})}{2} \quad \text{(group velocity)}, \tag{4.3}$$

$$K' = k^3\left(\frac{C}{C_g}\right)\frac{\cosh 4kh + 8 - 2\tanh^2 kh}{8\sinh^4 kh}, \tag{4.4}$$

$h(x,y)$ is the local water depth and g the gravity. The local wave number, $k(x,y)$, is related to the angular frequency of the waves, ω, and the water depth h by the nonlinear dispersion relationship

$$\omega^2 = gk\tanh kh. \tag{4.5}$$

k_0 is a reference wave number related to the incoming condition $x = 0$ of the incident wave, $x = 0$ being the offshore boundary.

In the model (4.1), $A = A(x,y)$ is the complex amplitude related to the water surface displacement by

$$\eta(x,y) = A(x,y)e^{ikx} \tag{4.6}$$

and equation (4.1) is numerically solved by an implicit finite difference method [41, 42]. On lateral boundaries, open boundary conditions are considered.

4.4 Optimization problem

This chapter discusses shape and location *optimizations* of geotextile tubes for the protection of sandy beach of the Eastern Lido de Sète presented before. Because of strict industrial constraints, we restrict the set of control parameters for the design of the LCS.

Moreover, at the end of the study, we present other results concerning a higher dimension design problem.

In this section, we presents the wave data used for the optimization, the parameterization of geotextile LCS and the cost function.

4.4.1 Reduction of wave data

As we have said in section 4.2.2, oceanographer observations of erosion show that the water waves can be roughly sorted in two categories according to their height H, below or above a critical value H_{lim}. Basically, those above H_{lim}, mainly present during storms, are erosive. They generate large mechanical energy. On the other hand, when $H < H_{lim}$, waves foster the reconstruction of eroded beaches. In that follows, the first class of water waves will be called *erosive* and the second class *constructive*. In the ELS, the critical value H_{lim} is taken to 2 m.

However, as we can see in picture 4.8, the constructive water waves (i.e. with $H_s < 2$ m) are most frequent. The frequency of observations for the erosive waves is lower than 5%.

Thus, an analysis of the wave data allows us to establish the table 4.1. For the four wave direction considered (South, South South East, East South East and East), we extract a significative height, a mean period and a mean frequency of observation for the two categories of waves, the constructive and the erosive ones.

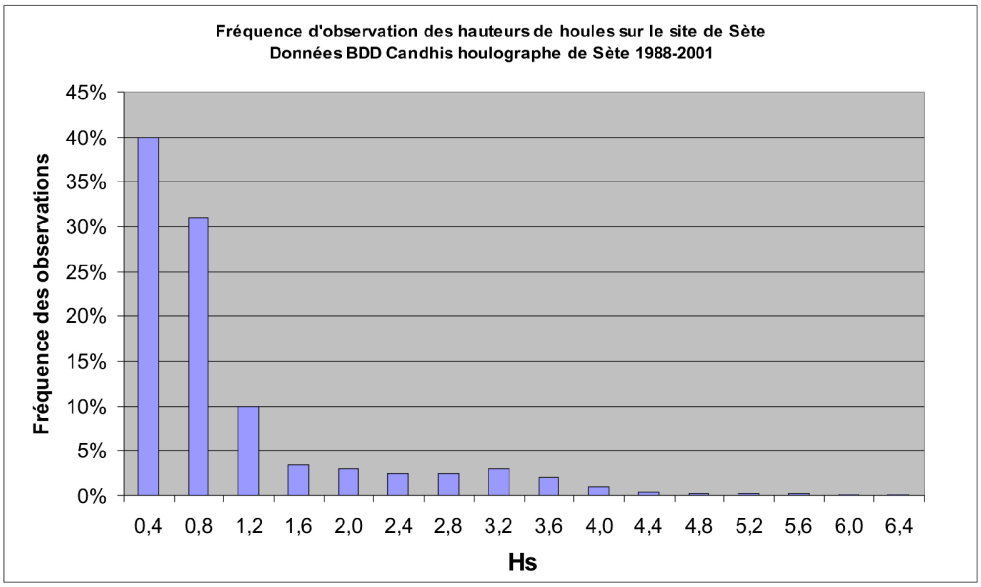


FIG. 4.8 – Offshore wave data in the ELS.

	South	South South East	East South East	East
constructive water waves	$H_s = 0.76$m $T_s = 4.96$s $p = 24.66\%$	$H_s = 0.85$m $T_s = 5.21$s $p = 22.75\%$	$H_s = 0.85$m $T_s = 5.21$s $p = 22.75\%$	$H_s = 0.66$m $T_s = 4.99$s $p = 17.5\%$
erosive water waves	$H_s = 2.91$m $T_s = 7.54$s $p = 2.84\%$	$H_s = 3.233$m $T_s = 7.78$s $p = 3.25\%$	$H_s = 3.233$m $T_s = 7.78$s $p = 3.25\%$	$H_s = 3.55$m $T_s = 8.03$s $p = 2.5\%$

TAB. 4.1 – Typical hydrodynamic data used in our simulations . Significative height H_s, mean period T_s and mean frequency of observation p for four significant directions of propagation.

4.4.2 Geotextile tubes parameterization

Geotextile tubes will merely be represented by local modification of the topobathymetry. The initial topobathymetry corresponds to a 2.4 km longshore and 1.2 km offshore domain. The x-axis refers to the offshore direction and in each node of the discrete domain, we have a given value for the initial topobathymetry. The step is of $\Delta y = 5$ m in the longshore direction and $\Delta x = 1$ m in the cross-shore direction (The grid dimension is thus $(mr = 1201, nr = 481)$). We recall that in each node (i, j), we have an initial value $h(i, j)$ for the topobathymetry. We expose in picture 4.9 the initial bathymetry of ELS.

Creating a geotextile LCS in the domain consists to add a value $h_\star$ to the value h on the nodes where the modification appears. We parameterize the position of the LCS by a series of N control points $(x_k, y_k)_{k\in\{1,\dots N\}}$ in the domain. If we take two control points, we obtain a classical straight structure, but with 3 or more control points, cubic splines

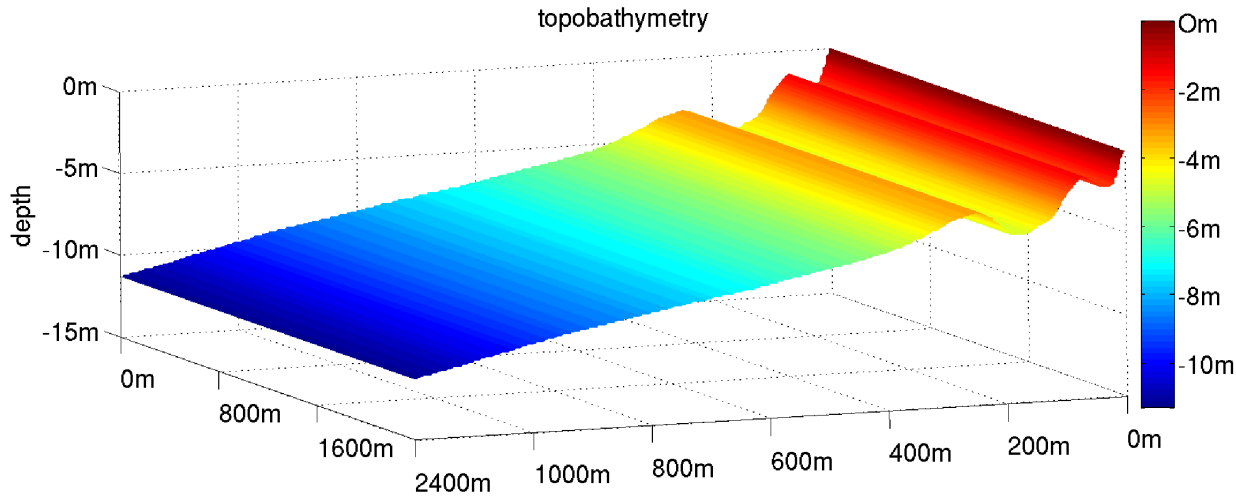


FIG. 4.9 – The initial topobathymetry of the ELS.

are used to connect these points and original shape are defined (see picture 4.10).

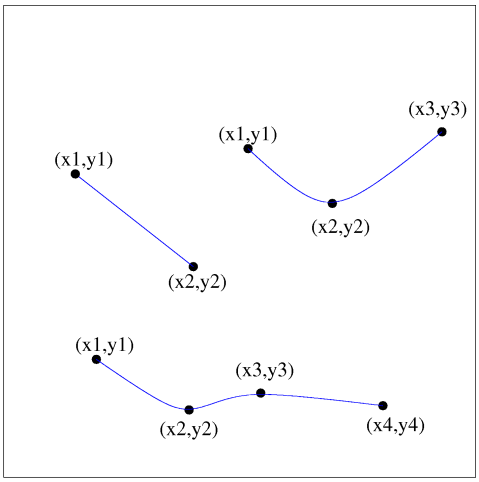


FIG. 4.10 – The position of the geotextile LCS in the domain is determined by 2 or more set of control points.

Once the location known, the vertical shape of the geotextile LCS is given by a Gaussian function of the form $f(d) = Ke^{-sd^2}$ where d is the normal distance to the spline. This adds two additional parameters (s, K) for the control of the height and width of the geotextile tubes. Thus, we have in each node a modification of the topobathymetry (see figure 4.11) which accounts for the presence of the geotextile tubes. At the extremity of the LCS, a smoothing function is used in order to round off the corners.

We expose in picture 4.12 an example of modified topobathymetry.

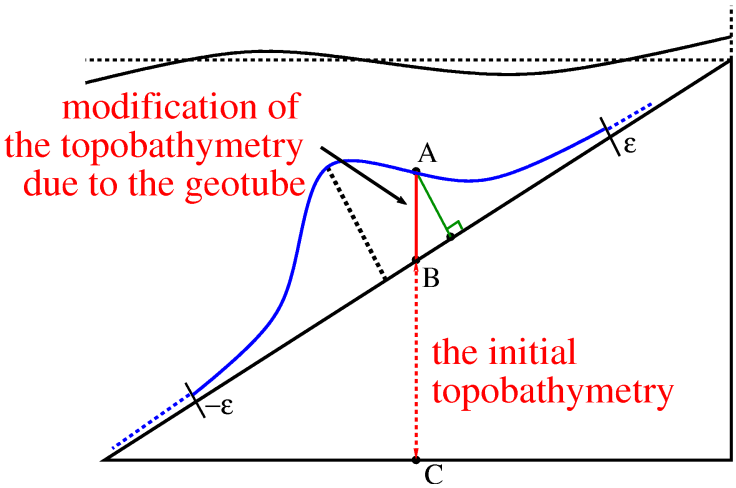


FIG. 4.11 – The profile parameterization for the geotextile tube in an academic linear topography.

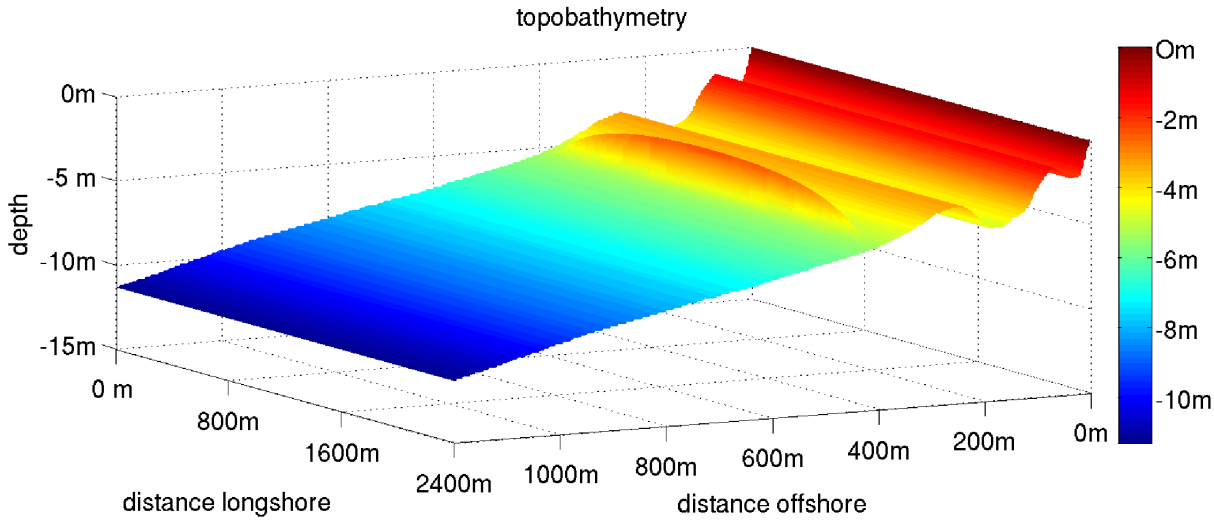


FIG. 4.12 – Implementation of a LCS in the topobathymetry. Note that both ends are smoothed by a suitable function.

4.4.3 Cost function

In section 4.2.2, we have seen that the geotextile LCS, which play the role of an artificial outer bar, may operate as a wave attenuator device : it may let the shorter waves propagate to the beach with no attenuation and may smooth the longer waves occurring during storms, as a low-pass filter of the wave energy may do.

So, knowing the height H of the wave is crucial for the study of the erosion problem. Indeed, the remobilization of sand, driven by erosive water wave action, is the main mechanism of erosion process in sandy coasts. The remobilization of sand is essentially

linked to the associated water wave mechanical energy $E = \frac{1}{8}\rho g H^2$ where ρ is the water density, $H = 2A$ and g is the gravity acceleration [52, 21].

Another important issue for the modified geometry (i.e. after addition of the geotextile tube) is that the structure initiates sediment deposition at the shoreline through the modification of nearshore wave orbital velocities and currents. So, the LCS should not increase the sea bottom fluid particle velocity[2] shoreward. For a water wave propagation in the x-direction, the stationary bottom orbital velocity U_{orb} is given by [53]

$$U_{orb} = \frac{Agk}{\omega} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \tag{4.7}$$

After discussions with oceanographers, we choose to reduce the mechanical energy in the scour between the inner and outer sandy bars. This corresponds to a strip between 100 and 250 meters far from the coastline. In the following, we call the area where the cost function is minimize D.

Hence, for a given direction of propagation θ, the following cost function is considered

$$J_\theta = \frac{\int_D E_{H_s > H_{lim}} dS}{\int_D E_{H_s < H_{lim}} dS} + (\|U_{orb}\| - \|U_{orb}^{initial}\|)_+ + (\int_D E_{H_s < H_{lim}} dS - \int_D E_{H_s < H_{lim}}^{initial} dS)_+ \tag{4.8}$$

where $(x)_+ = \max(x, 0)$ is a regularized max operator in order to have J_θ differentiable and *initial* is related to the initial unmodified sea bottom. Hence, the first term of J_θ aims to maximize the constructive waves and minimize destructive ones (as a low-pass filter for waves). The second (resp. third) term penalizes orbital velocity energy (resp. energy produced by constructive waves) greater than their initial values (i.e. for the unperturbed region).

As we are interested by multi-directional optimization, we consider the following weighted combination

$$J = \sum p_\theta J_\theta \tag{4.9}$$

where p_θ is the observation frequency for a given wave direction. This last point again brings the importance of global minimization tools.

4.5 Application to beach erosion control

4.5.1 A preliminary result

Because of industrial constraints presented in section 4.2.2, the parameters to optimize are reduced to the distance to the coast and the height of the LCS. A first feeling consists to fix the height to 3 m, which is the common dimension of geotextile tubes, and to sample the offshore distance between 100 and 750 m seaward with a step of 10 m. Thus we can compute the cost function (4.9) along one dimension w.r.t. the position if the geotextile LCS. The result is depicted in figure 4.13. The minimum is obtained for a geotextile tube located at around 350 m from the coastline (we come back to this simulation in the following section). Also, we clearly see that the cost function is non-convex and it is important to use a global optimization method to treat this type of industrial problems.

[2] Also called bottom orbital velocity

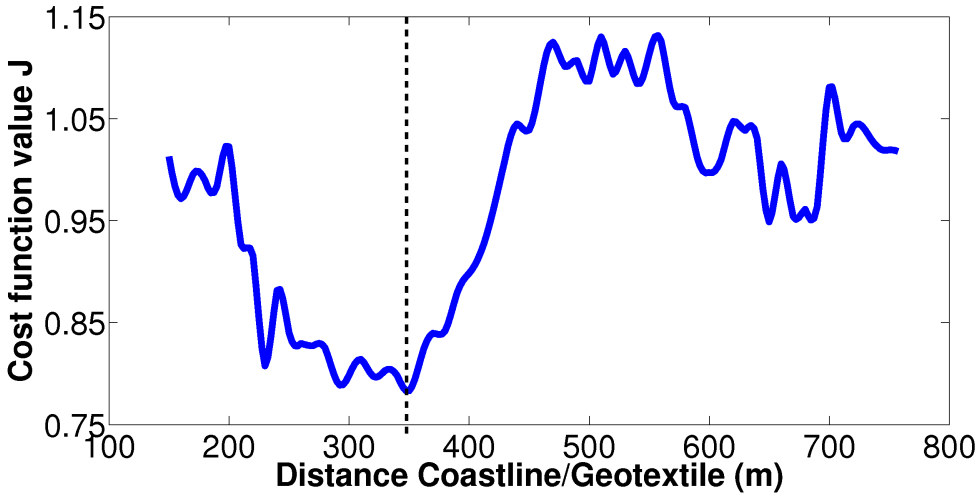


FIG. 4.13 – Cost function evolution w.r.t to the geotextile tube position. This is difficult to solve with a local minimization algorithm.

This result is a first indication concerning the position of the geotextile LCS. If we focuss on a given incident direction (S, SSE, ESE, E), we observe that this behavior is confirmed for the erosive waves (see picture 4.14). Moreover, for the constructive waves, picture 4.15 shows that the energy is preserved for the constructive waves. The geotextile LCS seems to be efficient as we said in section 4.2.2.

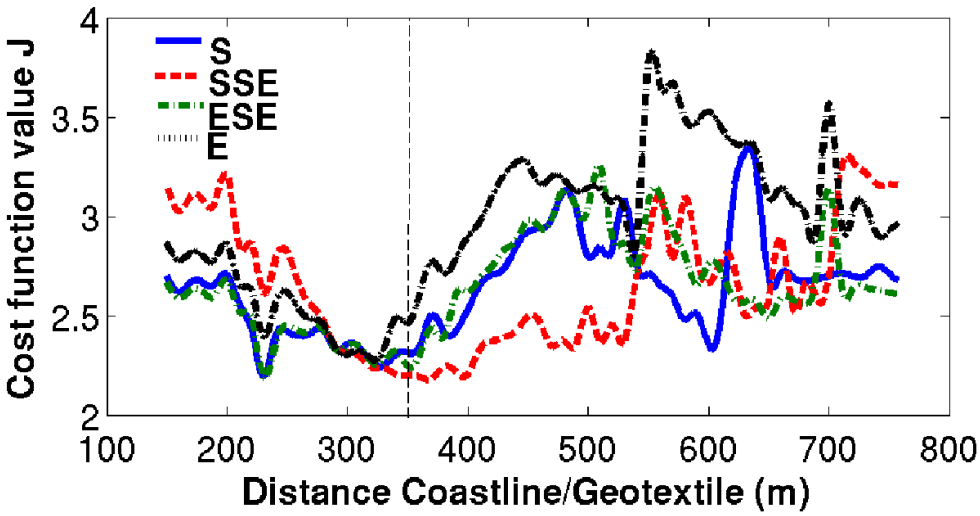


FIG. 4.14 – Erosive waves : Cost function evolution w.r.t to the LCS position for each incident direction.

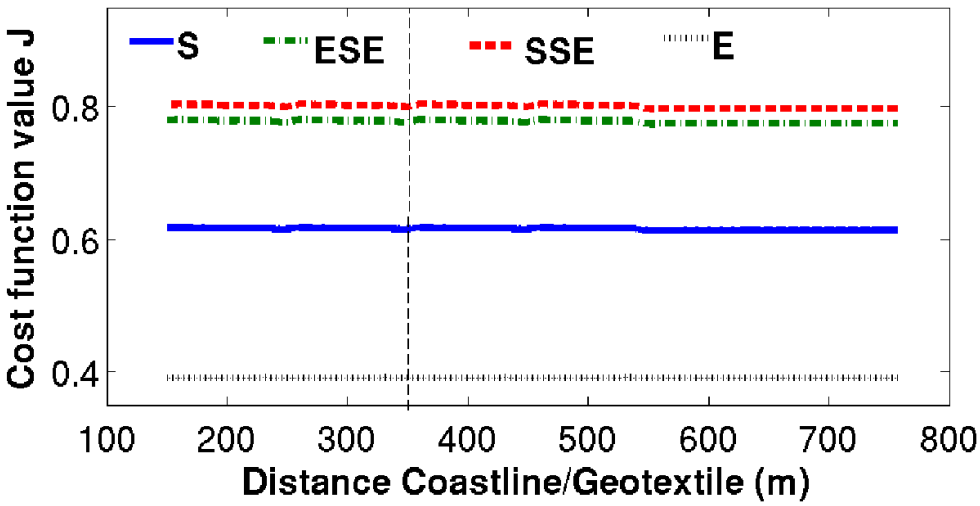


FIG. 4.15 – Constructive waves : Cost function evolution w.r.t to the LCS position for each incident direction.

4.5.2 Shape optimization in the ELS

In this section, we take the distance and the height of the LCS free (as the tube was already pre-designed, the width is fixed to 12 m) and we apply the optimization algorithm, briefly described in the Appendix B, to PDE based shape optimization problems arising in the design of beach protection device.

The multi-directional optimization is performed with the set of data described in section 4.4.1. Recreational sailing and tourism navigation constraints due to local topo-bathymetry imply that the search space for the distance $[100\text{ m}, 200\text{ m}] \cup [300\text{ m}, 850\text{ m}]$ is disconnected. This because no tube should be placed on the second natural sandy bar (see figure 4.5) to keep a minimum depth of 2 m. Concerning the height of the LCS, we authorize an optimized height between 2 and 6 m.

We recall that the calculus zone for J is the strip between 100 and 250 meters far from the coastline (denoted by D in the cost function definition). This zone corresponds to the gap between the first and the second natural sand bar.

Coastal engineering first guess would suggest to set the geotextile tube around 550 m from the coast to recreate the third natural sand bar which is missing in this site. Available geotextile tubes are 3 m high which leaves an acceptable depth of water to float ships. The optimization procedure locates the geotextile tubes at 353 m far from the coast with a height of 2.5 m. This result is confirmed by the sampling of figure 4.13.

Table 4.2 confirms that the optimized geotextile tubes is inactive for the constructive water waves and reduces the erosive ones. In addition, because of the multi-point problem considered, this is true for all studied propagation directions : the geotextile tube plays its low-pass filter role.

Global functional histories for the current and best element found are shown in figure 4.16.

	South	South South East	East South East	East
constructive water waves	==	==	==	==
weights	24.66%	22.75%	22.75%	17.5%
erosive water waves	−15%	−30%	−16%	−17%
weights	2.84%	3.25%	3.25%	2.5%
overall gain	−24%			

TAB. 4.2 – Multi-point optimization : variations of constructive and destructive energies for various incidences θ. (==) means that the quantity is almost unchanged, less than 0.1% variation.

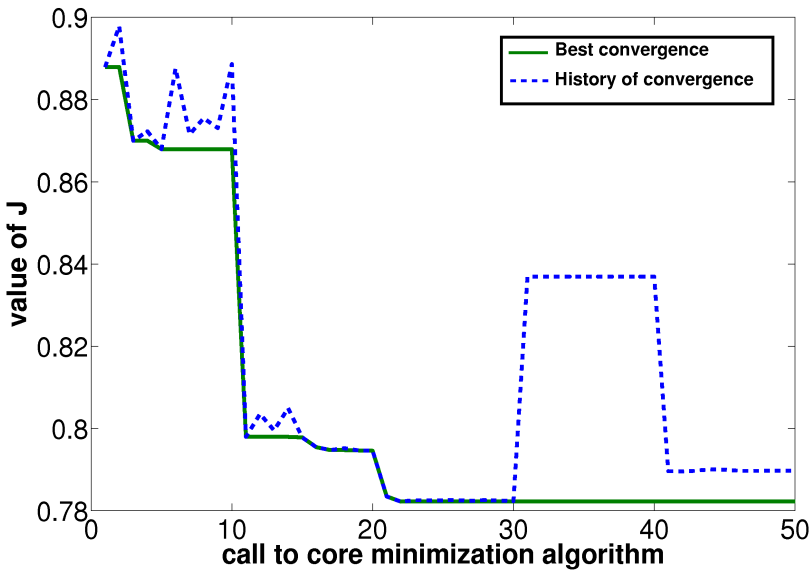


FIG. 4.16 – Functional values history for the best element found by the core minimization algorithm and the current value of the functional. One sees that the optimization algorithm is not a descent method.

We plot the output of the core minimization algorithm for different initializations provided by our multi-layer construction. Several local attraction basins have been visited. The core minimization algorithm has been called about 50 times. Overall the optimization has required about 700 functional evaluations. Each state evaluation requires about 15 min on a (3 GHz - 1 GB) personal computer. Figure 4.17 shows the water wave height for the protected and unprotected beaches for erosive S, SSE, ESE and E conditions (See Table 3.1). Picture 4.18 exposes the free surface elevation for the erosive East condition

in the two configurations. The black box represents the region D.

This shows that a geotextile tube set immediately before the second natural sand bar makes it possible to break the water waves, therefore attenuating their energy in the nearshore zone. More precisely, this study reveals that the geotextile tube must break the water waves sufficiently far away from the coastline but not too far, otherwise the wave recreates itself. In addition, results ensure us that the optimized configuration does not increase the bottom orbital velocity compared to the initial configuration (see picture 4.19 for the SSE erosive condition), which guarantees that bottom shear-stress is not amplified (see section 4.4.3).

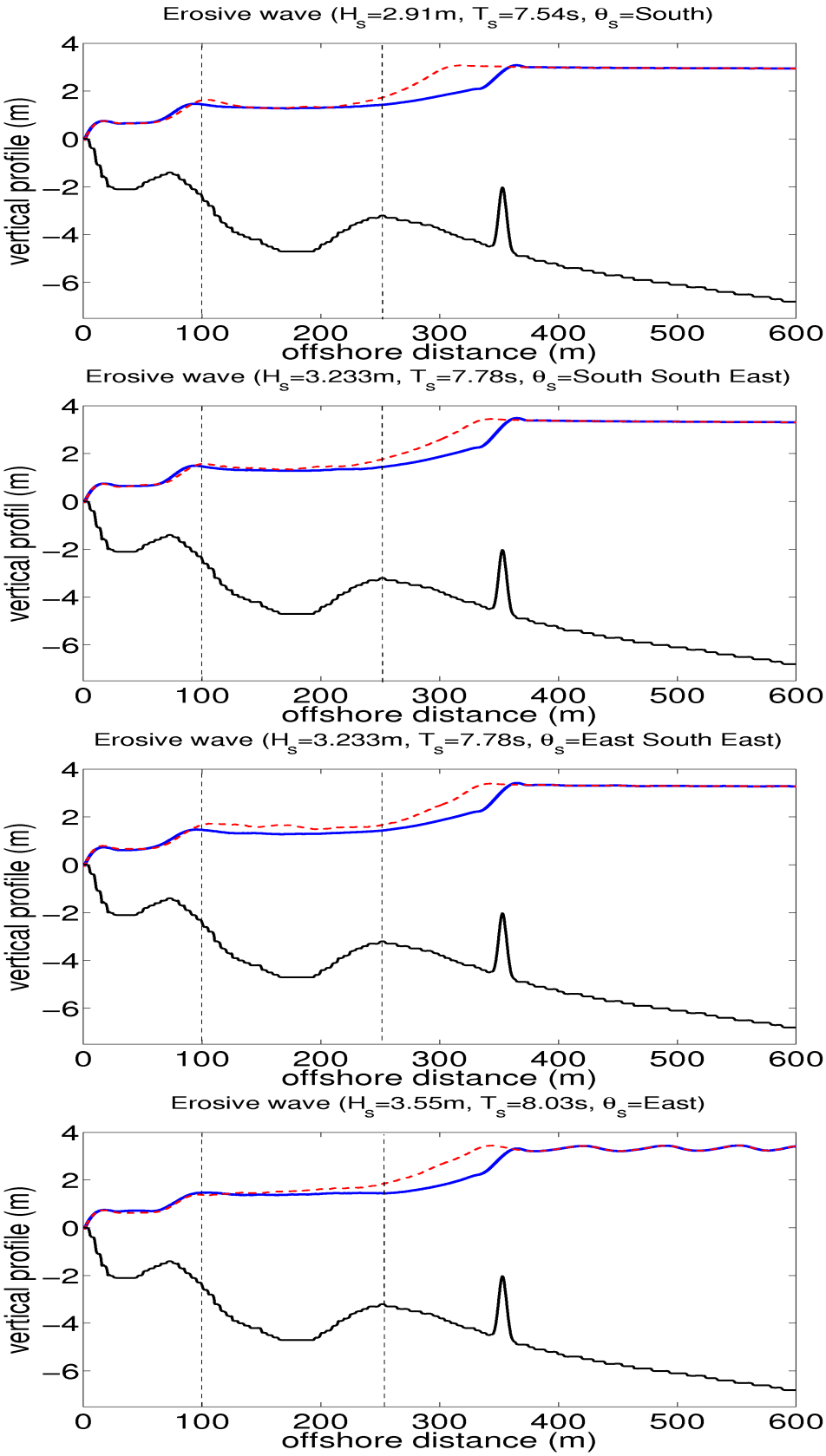


FIG. 4.17 – In each figure, bottom curve : cross-shore optimized topobathymetry. Solid top curve : water height compared to the original height (dashed line).

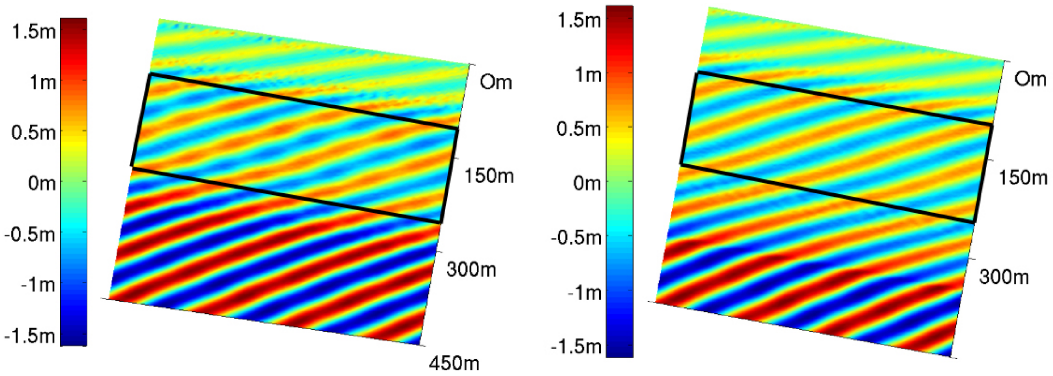


FIG. 4.18 – Free surface elevation for East erosive condition ; Left : initial configuration. Right : optimized configuration.

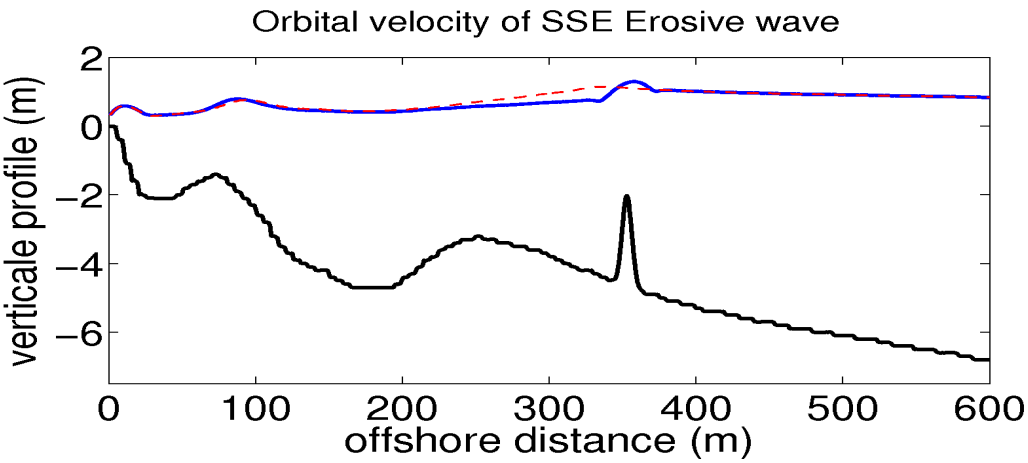


FIG. 4.19 – Bottom curve : cross-shore topobathymetry. Solid top curve : orbital velocity compared to the velocity on the unprotected beach (dashed line).

4.5.3 Improvement in another sandy beach

The shape design for the protection of the East Lido de Sète is submitted to industrial constraints. This justifies that the reduction of the cost function in the preceding section does not exceed 30%.

In this section, we present a new beach protection application to the end of the Gulf of*Aigues-Mortes* beach (see figure 4.20). This problem leads to a higher dimension design problem, as we shall see below.

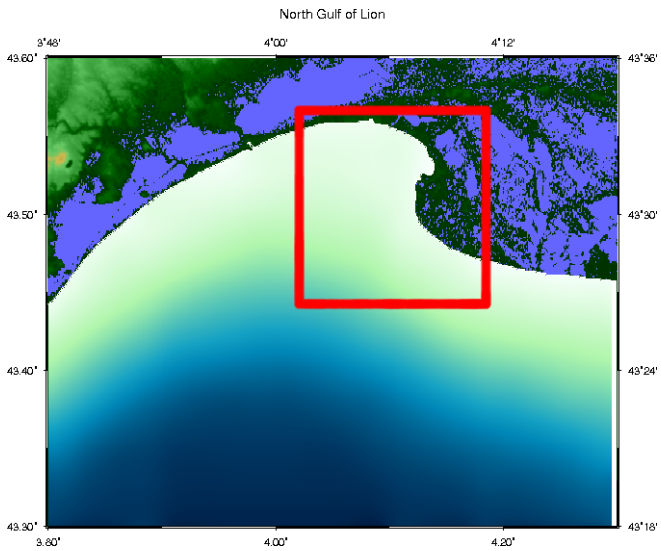


FIG. 4.20 – the end of the Gulf of *Aigues-Mortes*.

The topobathymetry is the one of the end of the Gulf of *Aigues-Mortes* (Northwestern Mediterranean sea, Languedoc-Roussillon, France). The studied area corresponds to a 3 km longshore and 4.4 km seaward zone with a mesh size of 5 m. We consider the design of one geotextile tube defined by 8 control parameters. A spline is defined passing by 3 nodes (this makes 6 parameters). The two remaining parameters are height and width of the tubes, which are let free as well. The length of the tube is required to remain between 500 m and 2000 m far from the coast.

The cost function (4.8) is minimized in the region D, which lies between 100 et 250 m offshore, depicted in figure 4.21-(Left). For computation time reasons, we only consider a mono-directional south incident water wave with a period T= 8 s and an amplitude A= 3 m.

The optimized geotextile tube is 1.5 km long with a height of 13 m and a width of 70 m. Its location is represented in figure 4.21-(Right). This optimized configuration reduces drastically the energy available for sediment resuspension. In this case, the cost function decreases by more than 65% compared to the unmodified topobathymetry. In practice, it is obvious that putting this optimized geotextile tube into construction won't be easy, owing to its size. But in this section, the objective is to highlight the efficiency of the global optimization algorithm.

We display in figure 4.22 the water height H in the whole domain for the two configurations. We observe that, in the region D (close to the east coast), the water height is reduced from $2m$ to $1m$ by the use of the optimized geotextile tube. As well, we observe a significative decreasing of the bottom orbital velocity in the optimized configuration (see figure 4.23). And finally, focussing on the region D, the resulting free surface elevation for the optimized case is clearly not as large as the one of the initial case (see figure 4.23).

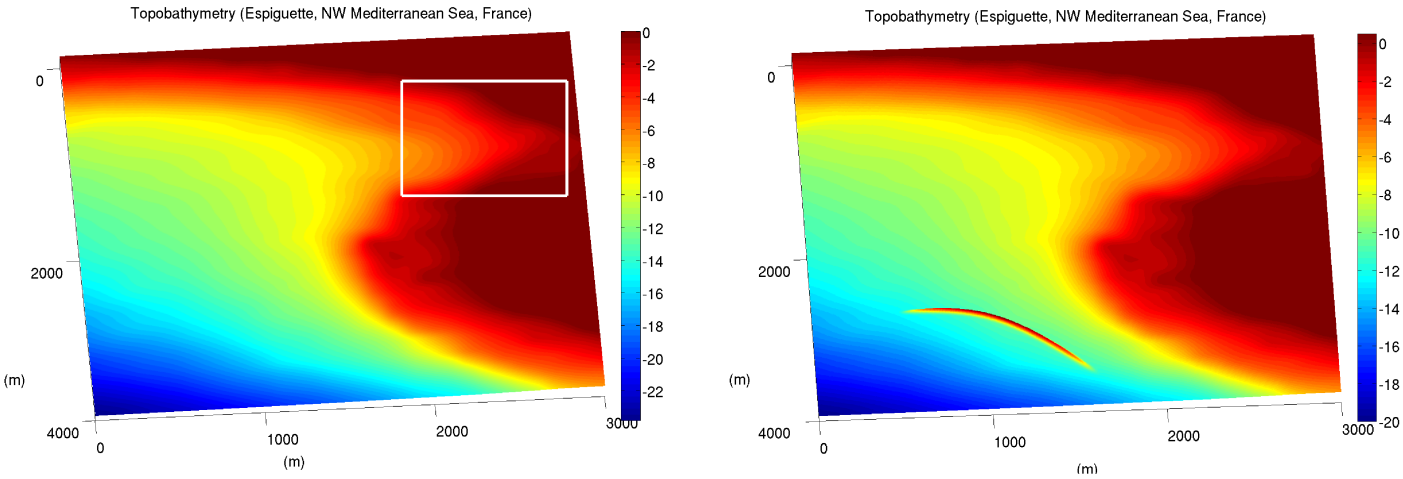


FIG. 4.21 – (Top) : The initial topobathymetry where the white box represents the region D for the cost function computation ; (Down) : The modified topobathymetry with the optimized geotextile tube.

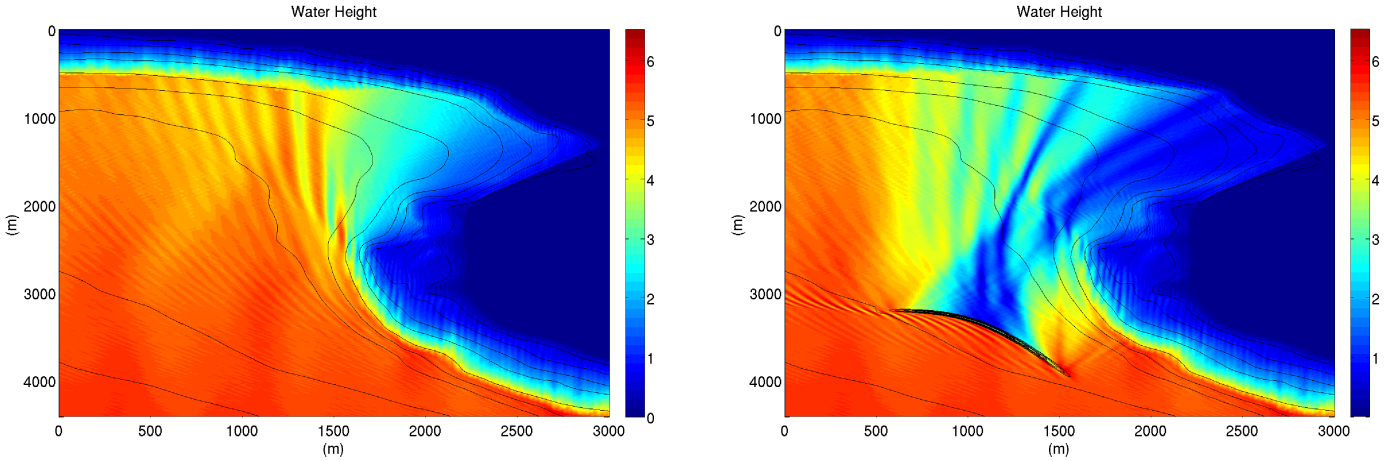


FIG. 4.22 – The water height H in the whole domain : (Top) for the initial configuration, (Down) for the optimized configuration.

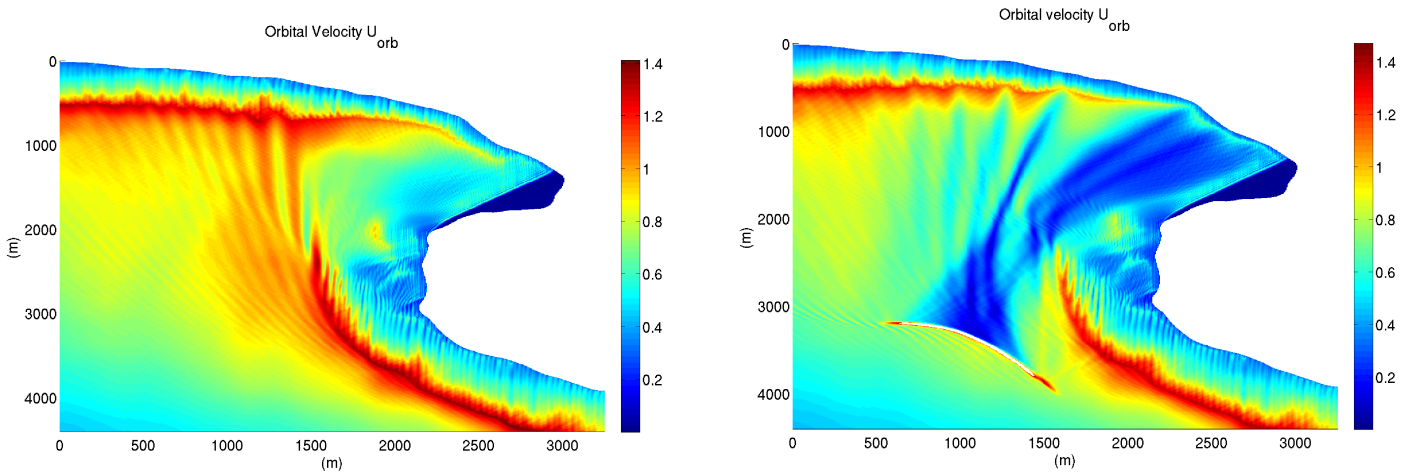


FIG. 4.23 – The bottom orbital velocity in whole domain : (Top) for the initial configuration, (Down) for the optimized configuration.

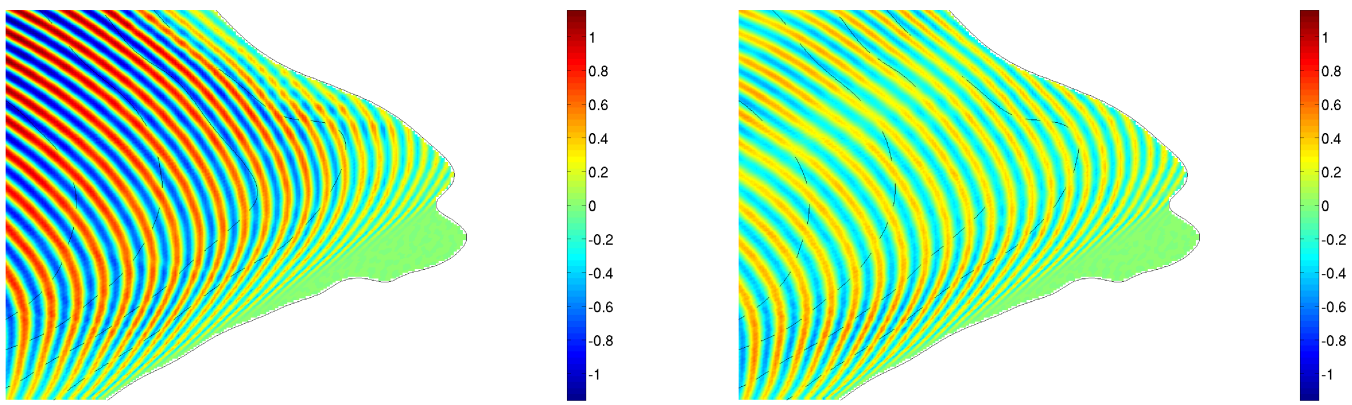


FIG. 4.24 – The free surface elevation in the cost function region D : (Top) for the initial configuration, (Down) for the optimized configuration.

4.6 Conclusion

A global optimization method has been applied in coastal engineering for sandy beach protection. Results have shown that geotextile tube can be designed to reduce beach erosion. Moreover, coastal navigation has been preserved by keeping a minimum water height. These results are satisfactory from the point of view of energy reduction. Moreover, experimental tests in basin will be carried out in 2008 in order to prepare the life-size achievement in the long run.

4.7 Acknowledgements

This work is part of the COPTER research project (2006-2009) NT05 - 2-42253, supported by the French National Research Agency. The authors would like to thank the Bas-Rhône Languedoc Engineering Co. for their feedbacks during this work realization.

Chapitre 5

A non-monotone conservation law for dune morphodynamics

Le travail présenté dans ce chapitre a été effectué en collaboration avec Nathaël Alibaud et Pascal Azerad.

ABSTRACT. We investigate a non-local non linear conservation law, first introduced by A.C. Fowler to describe morphodynamics of dunes, see [29, 30]. A remarkable feature is the violation of the maximum principle, which allows for erosion phenomenon. We prove well-posedness for initial data in L^2 and give explicit counterexample for the maximum principle. We also provide numerical simulations corroborating our theoretical results.

5.1 Introduction

We investigate the following Cauchy problem :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right)(t,x) + \mathcal{I}[u(t,.)](x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0 & t \in (0,T), x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.1}$$

where T is any given positive time, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ and $\mathcal{I}$ is a non-local operator defined as follows : for any Schwartz function $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and any $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{I}[\varphi](x) := \int_0^{+\infty} |\zeta|^{-\frac{1}{3}} \varphi''(x-\zeta) d\zeta.$$

Remark 3. *Equation* (5.1) *can also be written in conservative form*

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} + \mathcal{L}[u] - \partial_x u \right) = 0$$

where

$$\mathcal{L}[\varphi](x) := \int_0^{+\infty} |\zeta|^{-\frac{1}{3}} \varphi'(x-\zeta) d\zeta.$$

Equation (5.1) appears in the work of Fowler [29, 30] on the evolution of *dunes* ; the term dunes refers to instabilities in landforms, which occur through the interaction of a turbulent flow with an erodible substrate. Equation (5.1) is valid for a river flow (from left to the right) over an erodible bottom $u(t,x)$ with slow variation. For more details on the physical background, we refer the reader to [29, 30].

Roughly speaking, $\mathcal{I}[u]$ is a weighted mean of second derivatives of u with the bad sign ; hence, this term has a deregularizing effect and the main consequence is probably the fact that (5.1) does not satisfy the maximum principle (see below for more details). Nevertheless, one can see that the diffusive operator $-\partial^2_{xx}$ controls the instabilities produced by $\mathcal{I}$ and ensures the existence and the uniqueness of a smooth solution for positive times. The starting point to establish these facts is the derivation of a new formula for the operator $\mathcal{I}$, namely (5.3). This result allows first to show easily that $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$ is a pseudo-differential operator with symbol $\psi_{\mathcal{I}}(\xi) = 4\pi^2\xi^2 - a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}$, where $a_{\mathcal{I}}$ and $b_{\mathcal{I}}$ are positive constants (see (5.4)). The symbol $4\pi^2\xi^2$ corresponds to the diffusive operator $-\partial^2_{xx}$ and $-a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}$ is the symbol of the nonlocal operator $\mathcal{I}$. Notice that this last symbol contains a fractional anti-diffusion $-a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}}$ (recall that this is the symbol of $-(-\partial^2_{xx})^{\frac{4}{6}}$, up to a positive multiplicative constant) and a fractional drift $i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}$.

Because of the fact that the fractional anti-diffusion is of order $\frac{4}{3}$, the real part of $\psi_{\mathcal{I}}(\xi)$ behaves as ξ^2, up to a positive multiplicative constant, as $\xi \to +\infty$. A consequence is that Equation (5.1) has a regularizing effect on the initial data : even if u_0 is only L^2, the solution u becomes C^∞ for positive times. The uniqueness of a $L^\infty((0,T);L^2)$ solution is obtained by the use of a mild formulation (see Definition 1) based on Duhamel's formula (5.12), in which appears the kernel K of $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$. The use of such a formula also allows to prove local-in-time existence with the help of a contracting fixed point theorem. Such an approach is quite classical ; we refer the reader, for instance, to the book of Pazy [62] and the references therein on the application of the theory of semigroups of linear operators to partial differential equations. We also refer the reader to the work of Droniou *and al.* in [26] for fractal conservation laws of the form

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) + (-\partial^2_{xx})^{\frac{\lambda}{2}}[u] = 0, \tag{5.2}$$

where f is locally Lipschitz continuous and $\lambda \in (1,2]$, and to the work of Tadmor [74] on the Kuramoto-Sivashinsky equation :

$$\partial_t u + \frac{1}{2}|\partial_x u|^2 - \partial^2_{xx} u = (-\partial^2_{xx})^2[u].$$

In fact, fractal conservation law (5.2) is monotone and the global existence of a L^∞ solution is based on the fact that the L^∞ norm of u does not increase. In our case, this is not true and we have to use a classical energy estimate to get a global L^2 estimate. The regularizing effect on the initial data are first proved by a fixed point theorem on the Duhamel's formula to get H^1 regularity in space and next by a bootstrap method to get further regularity. This technique has already been used in [26].

On the other hand, one of our main result is probably the proof of the failure of the maximum principle for (5.1) : more precisely, we exhibit positive dunes which take negative values in finite time, since we establish that the bottom is eroded downstream from the dune. We also give some numerical results that illustrate this fact (for more precision, see Remark 4 and Section 5.7). The proof of the failure of the maximum principle is based on the integral formula (5.3). Roughly speaking, this formula means that $\mathcal{I}$ is a Lévy operator with a bad sign, see [7]. Notice that the Kuramoto-Sivashinsky equation is also non-monotone, but no proof of the failure of the maximum principle is given in [74].

The paper is organized as follows. In Section 5.2, we give the integral and pseudo-differential formula for $\mathcal{I}$; we also establish the properties on the kernel K of $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$ that will be needed. In Section 5.3, we define the notion of mild solution for (5.1). Sections 5.4 and 5.5 are, respectively, devoted to the proof of the uniqueness and the existence of a mild solution ; Section 5.5 also contains the proof of the regularity of the solution. The proof of the failure of the maximum principle is given in Section 5.6. Finally, we give in Section 5.7 some numerical simulations that illustrate the theory of the preceding sections.

Here are our main results.

Theorem 1. *Let $T > 0$ and $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. There exists a unique mild solution $u \in L^\infty((0,T);L^2(\mathbb{R}))$ of (5.1) (see Definition 1). Moreover,*

i) $u \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R})$ *and for all* $t_0 \in (0,T]$, u *and all its derivatives belong to* $C([t_0,T]; L^2(\mathbb{R}))$.
ii) u *satisfies* $\partial_t u + \partial_x(\frac{u^2}{2}) + \mathcal{I}[u] - \partial^2_{xx} u = 0$, *on* $(0,T] \times \mathbb{R}$, *in the classical sense* ($\mathcal{I}[u]$ *being properly defined by* (5.3) *and* (5.4)).
iii) $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ *and* $u(0,.) = u_0$ *almost everywhere (a.e. for short).*

Proposition 1 (L^2-stability)**.** *Let* (u,v) *be solutions to* (5.1) *with respective* L^2 *initial data* (u_0, v_0), *we have :*

$$||u-v||_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}))} \leq C\left(T, M, ||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}, ||v_0||_{L^2(\mathbb{R})}\right) ||u_0 - v_0||_{L^2(\mathbb{R})}$$

where $M := \max\left(||u||_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}))}, ||v||_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}))}\right)$.

Theorem 2 (Failure of the maximum principle)**.** *Assume that* $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$ *is nonnegative and such that there exist* $x_* \in \mathbb{R}$ *with* $u_0(x_*) = u_0'(x_*) = u_0''(x_*) = 0$ *and*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{u_0(x_* + z)}{|z|^{7/3}}\, dz > 0.$$

Then, there exists $t_* > 0$ *with* $u(t_*, x_*) < 0$.

Remark 4. *Hypothesis of the theorem above are satisfied, for instance, for non-negative* $u_0 \in C^2(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$ *such that there exists* $x_* \in \mathbb{R}$ *with* $u_0(x_*) = u_0'(x_*) = u_0''(x_*) = 0$ *and*

$$\forall x \leq x_*,\ u_0(x) \geq 0 \quad \textit{and} \quad \exists x_0 < x_* \textit{ s.t. } u_0(x_0) > 0.$$

A simple example of such an initial dune is shown in Figure 5.1. Observe that the bottom is eroded downstream from the dune (recall that the nonlinear convective term propagates a positive dune from the left to the right).

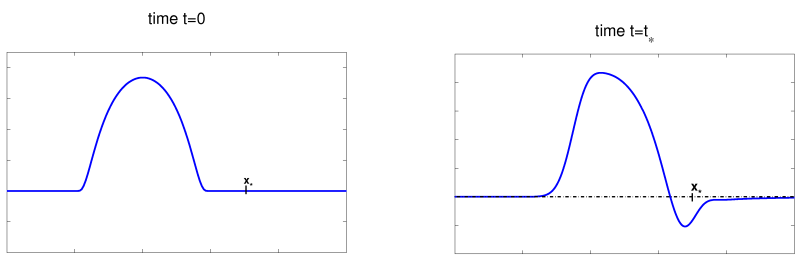


FIG. 5.1 – Evolution of a dune, at $t = 0$ and $t = t_*$. We can observe that $u(t_*, x_*) < 0$ and that $\int u(t,x)\, dx$ remains constant.

Notations : In the following, we let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform defined for $f \in L^1(\mathbb{R})$ by : for all $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\,\pi x \xi} f(x) dx.$$

We also let $\mathcal{F}$ define the extension of the preceding operator from L^2 to L^2. In the sequel, we only consider Fourier transform with respect to (w.r.t. for short) the space variable ; in order to simplify the presentation, for any $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$, we let $\mathcal{F}u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ denote the function

$$t \in [0,T] \to \mathcal{F}(u(t,\cdot)) \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

5.2 Preliminaries

In Subsection 5.2.1, we give the integral and the pseudo-differential formula for $\mathcal{I}$ and in Subsection 5.2.2 we give the properties on the kernel of $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$.

5.2.1 Integral formula for $\mathcal{I}$

Proposition 2. *For all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and all $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{I}[\varphi](x) = C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \varphi'(x)z}{|z|^{7/3}}\, dz, \tag{5.3}$$

with $C_{\mathcal{I}} = \frac{4}{9}$.

Démonstration. The proof is an easy consequence of Taylor-Poisson's formula and Fubini's Theorem ; notice that the regularity of φ ensures the validity of the computations that follow. We have :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \varphi'(x)z}{|z|^{7/3}}\, dz &= \int_{-\infty}^{0} |z|^{-\frac{7}{3}} \left(\int_0^1 (1-\tau)\varphi''(x+\tau z) z^2 d\tau \right) dz, \\
&= \int_0^1 (1-\tau) \left(\int_{-\infty}^{0} |z|^{-\frac{1}{3}} \varphi''(x+\tau z) dz \right) d\tau, \\
&= \int_0^1 (1-\tau)\tau^{-\frac{2}{3}} \left(\int_0^{+\infty} |\zeta|^{-\frac{1}{3}} \varphi''(x-\zeta) d\zeta \right) d\tau,
\end{aligned}$$

thanks to the change of variable $\tau z = -\zeta$. Then,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \varphi'(x)z}{|z|^{7/3}}\, dz = \int_0^1 (1-\tau)\tau^{-\frac{2}{3}} d\tau\, \mathcal{I}[\varphi](x) = \frac{9}{4}\mathcal{I}[\varphi](x).$$

The proof is now complete. □

Corollary 1. *There are positive constants $a_{\mathcal{I}}$ and $b_{\mathcal{I}}$ such that for all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and all $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}[\varphi] - \varphi''\right)(\xi) = \psi_{\mathcal{I}}(\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi), \tag{5.4}$$

where $\psi_{\mathcal{I}}(\xi) = 4\pi^2\xi^2 - a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}$.

Démonstration. We have

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}[\varphi]\right)(\xi) = C_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{0} e^{-2i\pi x\xi} \frac{\varphi(x+z) - \varphi(x) - \varphi'(x)z}{|z|^{7/3}}\, dz dx.$$

Notice that Proposition 2 ensures that for $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{I}[\varphi] \in L^1(\mathbb{R})$ and thus its Fourier transform is well-defined. By Fubini's theorem, we can first integrate w.r.t x to deduce that

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{I}[\varphi]\right)(\xi) = C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathcal{F}\left(\mathcal{T}_{-z}\varphi\right)(\xi) - \mathcal{F}\varphi(\xi) - \mathcal{F}(\varphi')(\xi)z}{|z|^{7/3}}\, dz,$$

where we let $\mathcal{T}_{-z}\varphi$ denote the (translated) function $x \to \varphi(x+z)$. Classical formulae on Fourier transform imply that $\mathcal{F}\left(\mathcal{I}[\varphi]\right)(\xi) = \psi(\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi)$, where

$$\psi(\xi) = C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2i\pi\xi z} - 1 - 2i\pi\xi z}{|z|^{7/3}}\, dz.$$

Simple computations show that

$$\psi(\xi) = C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos\left(2\pi\xi z\right) - 1}{|z|^{7/3}}\, dz + i\, C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin\left(2\pi\xi z\right) - 2\pi\xi z}{|z|^{7/3}}\, dz.$$

It is immediate that the real part of $\psi(\xi)$ is even, non-positive, non-identically equal to 0 and homogeneous of degree $\frac{4}{3}$ (the last property can be seen by changing the variable by $z' = \xi z$). Moreover, the imaginary part of $\psi(\xi)$ is odd, negative and homogeneous of degree $\frac{4}{3}$ on $\mathbb{R}_*^-$. There then exist positive constants $a_{\mathcal{I}}$ and $b_{\mathcal{I}}$ such that

$$\psi(\xi) = -a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}$$

and, in particular, $\mathcal{F}\left(\mathcal{I}[\varphi]\right)(\xi) = \left(-a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\, b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}}\right)\mathcal{F}\varphi(\xi)$. Since $\mathcal{F}(-\varphi'')(\xi) = 4\pi^2\xi^2\mathcal{F}\varphi(\xi)$, the proof of Corollary 1 is complete. □

Remark 5. *1. Since $\mathcal{I}[\varphi] = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}|\cdot|^{-\frac{1}{3}} * \varphi''$, we have $\mathcal{F}(\mathcal{I}[\varphi]) = \mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}|\cdot|^{-\frac{1}{3}})\cdot(-4\pi^2|\xi|^2)\cdot \mathcal{F}(\varphi)$. Elementary computations give $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}|\cdot|^{-\frac{1}{3}}) = \Gamma(\frac{2}{3})\left(\frac{1}{2} - i\,\mathrm{sign}(\xi)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)|\xi|^{-\frac{2}{3}}$. Hence $a_{\mathcal{I}} = \Gamma(\frac{2}{3})\frac{1}{2}$ and $b_{\mathcal{I}} = \Gamma(\frac{2}{3})\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

2. Let $s \in \mathbb{R}$. If $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, one can also define $\mathcal{I}[\varphi]$ through its Fourier transform by

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}[\varphi])(\xi) := -4\pi^2\Gamma(\frac{2}{3})\left(\frac{1}{2} - i\,\mathrm{sign}(\xi)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)|\xi|^{\frac{4}{3}}.$$

Thus, if $\varphi \in H^s$, we have that $\mathcal{I}[\varphi] \in H^{s-\frac{4}{3}}$ and $||\mathcal{I}[\varphi]||_{H^{s-\frac{4}{3}}} \leq 4\pi^2\Gamma(\frac{2}{3})||\varphi||_{H^s}$. This implies in particular that $\mathcal{I} : H^2(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, since by Sobolev embedding $H^{\frac{2}{3}} \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

3. Corollary 1 implies that $\mathcal{I} - \partial_{xx}^2 : C^2(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ with $\mathcal{I}$ which satisfies both formula (5.3) and (5.4).

5.2.2 Main properties on the kernel K of $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$

By Corollary 1, we see that the semi-group generated by $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$ is formally given by the convolution with the kernel (defined for $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}$)

$$K(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\psi_{\mathcal{I}}})(x).$$

Proposition 3. *$K(t,\cdot)$ is a L^1 real valued continuous function.*

Démonstration. $K(t,\cdot)$ is a L^1 real valued continuous function as inverse Fourier transform of a $W^{2,1}$ function with an even real part and an odd imaginary part. □

In the sequel, we only consider real valued solution of (5.1). We expose in Figure 5.2 the evolution of $K(t,\cdot)$ for different times. Note that $K(t,\cdot)$ is not compactly supported but that $K(t,x) \leq \frac{C(t)}{x^2}$, for $|x| \geq 1$ with $C(t) = \frac{1}{4\pi^2}||\partial^2_{\xi\xi}\mathcal{F}(K(t,.))(\xi)||_{L^1}$

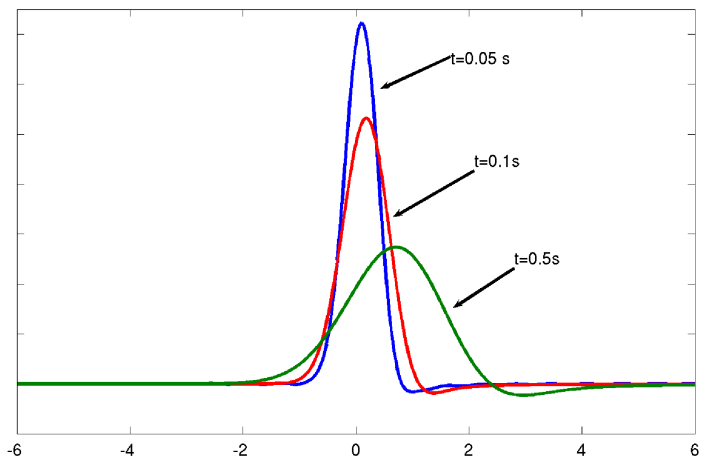


FIG. 5.2 – The kernel of $\mathcal{I} - \partial^2_{xx}$ for $t = 0.05, 0.1$ and 0.5 s.

Proposition 4. *The kernel K has a non-zero negative part.*

Démonstration. Let us assume that K is nonnegative, then

$$|e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}| \leq ||\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\psi_{\mathcal{I}}})||_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |K(t,.)|$$
$$= \int_{\mathbb{R}} K(t,.) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\psi_{\mathcal{I}}})\right)(0) = e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(0)} = 1$$

for all $\xi \in \mathbb{R}$; hence, since $|e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}| = e^{-t(4\pi^2|\xi|^2 - a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}})} > 1$ for $0 < |\xi| < \frac{a_{\mathcal{I}}^{\frac{3}{2}}}{8\pi^3}$, this gives us a contradiction. □

The main consequence of this is the failure of the maximum principle for the equation

$$\partial_t u + \mathcal{I}[u] - \partial^2_{xx} u = 0; \tag{5.5}$$

that is to say, there exists a non-negative initial condition u_0 such that, for some $t > 0$, $u(t,.) := K(t,.) * u_0$ has a non-zero negative part, see section 5.6 below. Nevertheless, K enjoys many properties similar than those one satisfied by the kernel of the heat equation and that ensure that Equation (5.5) has a regularizing effect on the initial condition : if $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ for some $p \in [1, +\infty)$, then u is C^∞ for positive times, see section 5.5.

Let us precise here the properties that will be needed in this paper. Since $K(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, the family of bounded linear operators $\{u_0 \in L^2(\mathbb{R}) \to K(t,\cdot) * u_0 \in L^2(\mathbb{R})\}_{t>0}$ is well-defined. Moreover, it is a strongly continuous semi-group of convolution, that is to say :

$$\begin{array}{c} \forall t, s > 0,\ K(s,\cdot) * K(t,\cdot) = K(s+t,\cdot), \\ \forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}),\ \lim_{t\to 0} K(t,\cdot) * u_0 = u_0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}). \end{array} \tag{5.6}$$

Next, the kernel K is smooth on $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ and we have :

$$\forall T > 0,\ \exists \mathcal{K}_0 \text{ s.t. } \forall t \in (0,T],\ ||\partial_x K(t,.)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \mathcal{K}_0 t^{-\frac{3}{4}}, \tag{5.7}$$

$$\forall T > 0,\ \exists \mathcal{K}_1 \text{ s.t. } \forall t \in (0,T],\ ||\partial_x K(t,.)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq \mathcal{K}_1 t^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.8}$$

$$\forall t, s > 0,\ K(s,\cdot) * \partial_x K(t,\cdot) = \partial_x K(s+t,\cdot). \tag{5.9}$$

Proof of these properties. The semi-group property (5.6) and (5.9) are immediate consequences of Fourier formula. Let us prove the strong continuity. By Plancherel's formula,

$$\begin{aligned} ||K(t,\cdot) * u_0 - u_0||^2_{L^2(\mathbb{R})} &= ||\mathcal{F}(K(t,\cdot) * u_0) - \mathcal{F}u_0||^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= ||e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}u_0 - \mathcal{F}u_0||^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |e^{-t\psi_{\mathcal{I}}} - 1|^2 \, |\mathcal{F}u_0|^2. \end{aligned} \tag{5.10}$$

The function $|e^{-t\psi_{\mathcal{I}}} - 1|^2 \, |\mathcal{F}u_0|^2$ converges pointwise to 0 on $\mathbb{R}$, as $t \to 0$. Recalling that $\min \mathrm{Re}(\psi_{\mathcal{I}})$ is finite, we infer that $|e^{-t\psi_{\mathcal{I}}} - 1|^2 \, |\mathcal{F}u_0|^2 \leq C|\mathcal{F}u_0|^2$ and the dominated convergence theorem implies that the last term of (5.10) tends to 0 as $t \to 0$. This completes the proof of (5.6). Let us now prove the estimates on the gradient. The smoothness of K is an immediate consequence of the theorem of derivation under the integral sign applied to the definition of K by Fourier transform. We get in particular :

$$\partial_x K(t,\cdot) = \partial_x \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \to 2i\pi\xi e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}\right).$$

Since the function $\xi \to 2i\pi\xi e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}$ is L^2, $\partial_x K(t,\cdot)$ is L^2 and we have :

$$||\partial_x K(t,.)||^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2\xi^2 |e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2\xi^2 e^{-2t(4\pi^2|\xi|^2 - a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}})} d\xi.$$

Let us change the variable by $\xi' = t^{\frac{1}{2}}\xi$. We get :

$$\begin{aligned} ||\partial_x K(t,.)||^2_{L^2(\mathbb{R})} &= t^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2|\xi'|^2 e^{-2(4\pi^2|\xi'|^2 - t^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{I}}|\xi'|^{\frac{4}{3}})} d\xi', \\ &\leq t^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2|\xi'|^2 e^{-2(4\pi^2|\xi'|^2 - T^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{I}}|\xi'|^{\frac{4}{3}})} d\xi', \end{aligned}$$

for all $t \in (0,T]$. The proof of (5.7) is now complete. To prove (5.8), we have to derive a "homogeneity-like" property for K. Easy computations show that

$$\begin{aligned} K(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\,\pi x\xi} e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)} d\xi, \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\,\pi x\xi} e^{-t(4\pi^2|\xi|^2 - a_{\mathcal{I}}|\xi|^{\frac{4}{3}} + i\,b_{\mathcal{I}}\xi|\xi|^{\frac{1}{3}})} d\xi, \\ &= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\,\pi(t^{-\frac{1}{2}}x)\xi'} e^{-(4\pi^2|\xi'|^2 - t^{\frac{1}{3}}a_{\mathcal{I}}|\xi'|^{\frac{4}{3}} + i\,t^{\frac{1}{3}}b_{\mathcal{I}}\xi'|\xi'|^{\frac{1}{3}})} d\xi', \end{aligned}$$

by changing the variable by $\xi' = t^{\frac{1}{2}}\xi$. Then,

$$\begin{aligned} K(t,x) &= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\,\pi(t^{-\frac{1}{2}}x)\xi'} e^{-(4\pi^2|\xi'|^2 - a_{\mathcal{I}}|\xi'|^{\frac{4}{3}} + i\,b_{\mathcal{I}}\xi'|\xi'|^{\frac{1}{3}})} e^{-(1-t^{\frac{1}{3}})(a_{\mathcal{I}}|\xi'|^{\frac{4}{3}} - i\,b_{\mathcal{I}}\xi'|\xi'|^{\frac{1}{3}})} d\xi', \\ &= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\,\pi(t^{-\frac{1}{2}}x)\xi'} e^{-\psi_{\mathcal{I}}(\xi')} e^{-(1-t^{\frac{1}{3}})(a_{\mathcal{I}}|\xi'|^{\frac{4}{3}} - i\,b_{\mathcal{I}}\xi'|\xi'|^{\frac{1}{3}})} d\xi'. \end{aligned}$$

For $t < 1$, define $G((1-t^{\frac{1}{3}}),\cdot) := \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(1-t^{\frac{1}{3}})(a_{\mathcal{I}}|\xi'|^{\frac{4}{3}} - i\,b_{\mathcal{I}}\xi'|\xi'|^{\frac{1}{3}})}\right)$. It is readily seen that G is L^1 as inverse Fourier transform of a $W^{2,1}$ function. Moreover, for $t_0 \in (0,1)$ and all $t \in (0,t_0]$,

$$||G((1-t^{\frac{1}{3}}),\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \left|\left| e^{-(1-t^{\frac{1}{3}})(a_{\mathcal{I}}|\cdot|^{\frac{4}{3}} - i\,b_{\mathcal{I}}\cdot|\cdot|^{\frac{1}{3}})} \right|\right|_{W^{2,1}(\mathbb{R},\mathbb{C})} \leq C(t_0),$$

where $C(t_0)$ only depends on t_0. Classical formula on Fourier transform then give :

$$K(t,x) = t^{-\frac{1}{2}} \left(K(1,\cdot) * G((1-t^{\frac{1}{3}}),\cdot)\right)(t^{-\frac{1}{2}}x).$$

Observe now that $\partial_x K(1,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \to 2i\,\xi\pi e^{-\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}\right)$ is L^1 as inverse Fourier transform of a $W^{2,1}$ function. Then,

$$\partial_x K(t,x) = t^{-1} \left(\partial_x K(1,\cdot) * G((1-t^{\frac{1}{3}}),\cdot)\right)(t^{-\frac{1}{2}}x)$$

is L^1 and its L^1 norm can be computed by the change of variable $x' = t^{-\frac{1}{2}}x$ as follows :

$$||\partial_x K(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} = t^{-\frac{1}{2}}||\partial_x K(1,\cdot) * G((1-t^{\frac{1}{3}}),\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq t^{-\frac{1}{2}}||\partial_x K(1,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} C(t_0),$$

for any $t \in (0,t_0]$. Since

$$||\partial_x K(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \leq C||\xi \to 2i\,\xi\pi e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}||_{W^{2,1}(\mathbb{R},\mathbb{C})} \leq C(t_0,T),$$

for all $t \in [t_0,T]$, the proof of (5.8) is now complete. □

Remark 6. *For any $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ and $t > 0$,*

$$||K(t,\cdot) * u_0||_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\omega_0 t}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{5.11}$$

where $\omega_0 = -\min \mathrm{Re}(\psi_{\mathcal{I}})$.

Démonstration. This is readily established with Plancherel's formula, like in (5.10). □

5.3 Duhamel's formula

Using Fourier transform and Corollary 1, we formally see that any solution to (5.1) satisfies Duhamel's formula (5.12) (see also the proof of Lemma 3, which justifies the computations). This observation is the starting point of the definition of mild solution below.

Definition 1. *Let $T > 0$ and $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. We say that $u \in L^\infty((0,T); L^2(\mathbb{R}))$ is a mild solution to (5.1) if for a.e. $t \in (0,T)$,*

$$u(t,\cdot) = K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * u^2(s,\cdot)ds. \tag{5.12}$$

The following proposition shows that all the terms in (5.12) are well-defined and that Equation (5.1) generates a (non-linear) semi-group.

Proposition 5. *Let $T > 0$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ and $v \in L^\infty((0,T); L^1(\mathbb{R}))$. Then, the function*

$$u : t \in (0,T] \to K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v(s,\cdot)ds \in L^2(\mathbb{R}), \tag{5.13}$$

is well-defined and belongs to $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ (being extended at $t = 0$ by the value $u(0,.) = u_0$).
(Semi-group property) Moreover, for all $t_0 \in (0,T)$ and all $t \in [0, T - t_0]$,

$$u(t_0 + t, .) = K(t,\cdot) * u(t_0,\cdot) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v(t_0+s,\cdot)ds.$$

Démonstration. By (5.6), it is classical that the function $t \in (0,T] \to K(t,\cdot) * u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ is continuous and can be continuously extended by the value $u(0,\cdot) = u_0$ at $t = 0$. What is left to prove is thus the continuity of the function

$$w : t \in [0,T] \to \int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v(s,\cdot)ds \in L^2(\mathbb{R}).$$

Let us extend $\partial_x K$ and v for all times the following way :

$$\mathcal{H}(t,\cdot) := \begin{cases} \partial_x K(t,\cdot) & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if not} \end{cases} \quad \text{and} \quad \mathcal{V}(t,\cdot) := \begin{cases} v(t,\cdot) & \text{if } t \in (0,T), \\ 0 & \text{if not.} \end{cases}$$

Then we have

$$w(t,\cdot) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(t-s,\cdot) * \mathcal{V}(s,\cdot)ds.$$

It is immediate that $\mathcal{V} \in L^\infty(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}))$. Moreover, (5.7) implies that

$$||\mathcal{H}(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \mathbf{1}_{\{0<t<T\}}\mathcal{K}_0 t^{-\frac{3}{4}} \tag{5.14}$$

and it follows that $\mathcal{H} \in L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$. Young's Inequalities imply that for all $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} ||\mathcal{H}(t-s,\cdot) * \mathcal{V}(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} ds &\leq \int_{\mathbb{R}} ||\mathcal{H}(t-s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} ||\mathcal{V}(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} ds, \\ &\leq ||\mathcal{H}||_{L^1(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}))} \, ||\mathcal{V}||_{L^\infty(\mathbb{R};L^1(\mathbb{R}))}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

This implies, in particular, that the function w is well-defined. Let us now take $t, s \in \mathbb{R}$ and define

$$I := \left|\left| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(t-\tau,\cdot) * \mathcal{V}(\tau) d\tau - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(s-\tau,\cdot) * \mathcal{V}(\tau) d\tau \right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

We have

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\mathbb{R}} ||(\mathcal{H}(t-\tau,\cdot) - \mathcal{H}(s-\tau,\cdot)) * \mathcal{V}(\tau)||_{L^2(\mathbb{R})} \, d\tau, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} ||\mathcal{H}(t-\tau,\cdot) - \mathcal{H}(s-\tau,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} ||\mathcal{V}(\tau)||_{L^1(\mathbb{R})} d\tau, \end{aligned}$$

thanks to Young's Inequalities. It follows that

$$I \leq \int_{\mathbb{R}} ||\mathcal{H}(t-\tau,\cdot) - \mathcal{H}(s-\tau,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} d\tau \, ||\mathcal{V}||_{L^\infty(\mathbb{R};L^1(\mathbb{R}))}.$$

Since the translation are continuous in $L^1(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$, we see that $I \to 0$ as $|t-s| \to 0$. In particular, the function w is continuous and this completes the proof of the continuity of u.

Let us now prove the semi-group property. By (5.6) and (5.9), we infer that

$$\begin{aligned} u(t_0+t,\cdot) &= K(t,\cdot) * K(t_0,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \partial_x K(t+t_0-s,\cdot) * v(s,\cdot) ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t+t_0} \partial_x K(t+t_0-s,\cdot) * v(s,\cdot) ds, \\ &= K(t_0,\cdot) * K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^{t_0} K(t,\cdot) * \partial_x K(t_0-s,\cdot) * v(s,\cdot) ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^{t} \partial_x K(t-s',\cdot) * v(t_0+s',\cdot) ds', \end{aligned}$$

thanks to the change of variable $s' = s - t_0$ to compute the last integral term. Then,

$$\begin{aligned} u(t_0+t,\cdot) &= K(t,\cdot) * K(t_0,\cdot) * u_0 - K(t,\cdot) * \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \partial_x K(t_0-s,\cdot) * v(s,\cdot) ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^{t} \partial_x K(t-s',\cdot) * v(t_0+s',\cdot) ds', \\ &= K(t,\cdot) * \left(K(t_0,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \partial_x K(t_0-s,\cdot) * v(s,\cdot) ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^{t} \partial_x K(t-s',\cdot) * v(t_0+s',\cdot) ds', \\ &= K(t,\cdot) * u(t_0,\cdot) - \frac{1}{2}\int_0^{t} \partial_x K(t-s',\cdot) * v(t_0+s',\cdot) ds'. \end{aligned}$$

The proof of the semi group property is now complete. □

Remark 7. *For $v \in L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))$, $u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$ defined in* (5.13) *satisfies :*

$$||u||_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}))} \leq e^{\omega_0 T}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mathcal{K}_0 T^{\frac{1}{4}}||v||_{L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))}. \tag{5.16}$$

Démonstration. Indeed, with (5.14) and (5.15), we estimate the integral term of (5.13) and with (5.11), we estimate the L^2 norm of $K(t,\cdot) * u_0$. □

5.4 Uniqueness of a solution

Let us state a lemma that will be needed later.

Lemma 1. *Let $T > 0$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. For $i = 1, 2$, let $v_i \in L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))$ and define $u_i \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$ as in Proposition 5 by*

$$u_i(t,\cdot) := K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v_i(s,\cdot)ds.$$

Then we have the estimate

$$||u_1 - u_2||_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}))} \leq 2\mathcal{K}_0 T^{\frac{1}{4}}\, ||v_1 - v_2||_{L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))}. \tag{5.17}$$

Démonstration. For all $t \in [0,T]$, we have

$$u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot) = -\frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * (v_1(s,\cdot) - v_2(s,\cdot))ds.$$

Hence,

$$\begin{aligned} ||u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2}\left|\left|\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * (v_1(s,\cdot) - v_2(s,\cdot))ds\right|\right|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t ||\partial_x K(t-s,.) * (v_1(s,.) - v_2(s,.))||_{L^2(\mathbb{R})}\, ds. \end{aligned} \tag{5.18}$$

By (5.7),

$$\begin{aligned} ||\partial_x K(t-s,.) * (v_1(s,\cdot) - v_2(s,\cdot))||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq ||\partial_x K(t-s,\cdot)\,||_{L^2(\mathbb{R})}||v_1(s,\cdot) - v_2(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \mathcal{K}_0(t-s)^{-\frac{3}{4}}||v_1(s,\cdot) - v_2(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Inequality (5.18) then gives

$$\begin{aligned} ||u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \frac{\mathcal{K}_0}{2}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}ds\, ||v_1 - v_2||_{L^\infty((0,t);L^1(\mathbb{R}))}, \\ &= 2\mathcal{K}_0 t^{\frac{1}{4}}\, ||v_1 - v_2||_{L^\infty((0,t);L^1(\mathbb{R}))}. \end{aligned}$$

In particular, for all $s \in [0,t]$

$$||u_1(s,\cdot) - u_2(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\mathcal{K}_0 s^{\frac{1}{4}}\, ||v_1 - v_2||_{L^\infty((0,s);L^1(\mathbb{R}))} \leq 2\mathcal{K}_0 t^{\frac{1}{4}}\, ||v_1 - v_2||_{L^\infty((0,t);L^1(\mathbb{R}))}$$

and we have proved that

$$||u_1 - u_2||_{C([0,t];L^2(\mathbb{R}))} \leq 2\mathcal{K}_0 t^{\frac{1}{4}}\, ||v_1 - v_2||_{L^\infty((0,t);L^1(\mathbb{R}))}. \tag{5.19}$$

□

Proposition 6. *Let $T > 0$ and $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. There exists at most one $u \in L^\infty((0,T); L^2(\mathbb{R}))$ which is a mild solution to* (5.1).

Démonstration. Let $u, v \in L^\infty((0,T); L^2(\mathbb{R}))$ be two mild solutions. Let $t \in [0,T]$. With Lemma 1 applied to $v_1 = u^2$ and $v_2 = v^2$, we get

$$||u - v||_{C([0,t];L^2(\mathbb{R}))} \leq 2\mathcal{K}_0 t^{\frac{1}{4}} \, ||u^2 - v^2||_{L^\infty((0,t);L^1(\mathbb{R}))}. \tag{5.20}$$

Since $||u^2 - v^2||_{L^\infty((0,t);L^1(\mathbb{R}))} \leq M||u-v||_{C([0,t];L^2(\mathbb{R}))}$ with $M = ||u||_{C([0,T],L^2(\mathbb{R}))} + ||v||_{C([0,T],L^2(\mathbb{R}))}$, we get :

$$||u - v||_{C([0,t];L^2(\mathbb{R}))} \leq 2M\mathcal{K}_0 t^{\frac{1}{4}} \, ||u - v||_{C([0,t];L^2(\mathbb{R}))}.$$

We then have established that $u = v$ on $[0,t]$ for any $t \in (0,T]$ such that $t < (2M\mathcal{K}_0)^{-4}$. Notice that since u and v are continuous with values in L^2, $u = v$ on $[0, T_*]$ with $T_* = (2M\mathcal{K}_0)^{-4} > 0$. To prove that $u = v$ on $[0,T]$, let us define $t_0 := \sup\{t \in (0,T]$ s.t. $u = v$ on $[0,t]\}$ and let us assume that $t_0 \neq T$. The continuity of u and v implies that $u(t_0, \cdot) = v(t_0, \cdot)$. The semi-group property of Proposition 5 thus implies that $u(t_0 + \cdot, \cdot)$ and $v(t_0 + \cdot, \cdot)$ are mild solutions of (5.1)with the same initial condition ; that is to say $u(t_0 + 0, \cdot) = v(t_0 + 0, \cdot)$. The first step of the proof then implies that $u(t_0 + \cdot, \cdot) = v(t_0 + \cdot, \cdot)$ on $[0, \min\{T_*, T - t_0\}]$; hence, we get a contradiction with the definition of t_0 and we deduce that $t_0 = T$. The proof of the uniqueness is now complete. □

5.5 Existence of a regular solution

This section is devoted to the proof of the existence of a solution $u \in C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R})$to (5.1) ; that is to say, u is C^2 in space and C^1 in time. We first need the following technical result :

Lemma 2. *Let $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ and $T > 0$. Let $v \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R})) \cap C((0,T]; W^{1,1}(\mathbb{R}))$ that satisfies*

$$\sup_{t \in (0,T]} t^{\frac{1}{2}} ||\partial_x v(t, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty. \tag{5.21}$$

Let $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ be the function defined in (5.13). *Then, $u \in C((0,T]; H^1(\mathbb{R}))$ with*

$$\sup_{t \in (0,T]} t^{\frac{1}{2}} ||\partial_x u(t, \cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \mathcal{K}_1 ||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{\mathcal{K}_0 I}{2} \, T^{\frac{1}{4}} \sup_{t \in (0,T]} t^{\frac{1}{2}} ||\partial_x v(t, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}, \tag{5.22}$$

where I is a constant equal to $\int_0^1 (1-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds = B(1/2, 1/4)$, B being the beta function. Moreover, let $v_i \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R})) \cap C((0,T]; W^{1,1}(\mathbb{R}))$ satisfy (5.21) *and define u_i by* (5.13) *(with u and v replaced, respectively, by u_i and v_i) for $i = 1, 2$. Then,*

$$\sup_{t \in (0,T]} t^{\frac{1}{2}} ||\partial_x (u_1 - u_2)(t, \cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\mathcal{K}_0 I}{2} \, T^{\frac{1}{4}} \sup_{t \in (0,T]} t^{\frac{1}{2}} ||\partial_x (v_1 - v_2)(t, \cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{5.23}$$

Démonstration. Recall that Proposition 5 ensures that $u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}))$. It is easy to check that the distribution derivative of u w.r.t. the space variable satisfies : for any $t \in (0,T]$,

$$\partial_x u(t,\cdot) = \partial_x K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * \partial_x v(s,\cdot)ds.$$

Let us verify that all the terms are well-defined in L^2. Since $\partial_x K(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, it is obvious that $\partial_x K(t,\cdot) * u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Moreover, define

$$w(t,\cdot) := \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * \partial_x v(s,\cdot)ds.$$

Young's Inequalities and (5.7) give

$$\begin{aligned} ||\partial_x K(t-s,\cdot) * \partial_x v(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq ||\partial_x K(t-s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}||\partial_x v(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}, \\ &= ||\partial_x K(t-s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}}||\partial_x v(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}, \\ &\leq \mathcal{K}_0 (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} \sup_{\tau\in(0,T]} \tau^{\frac{1}{2}}||\partial_x v(\tau,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Since $\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds < \infty$, by (5.21) we deduce that $w(t,\cdot)$ is well-defined in L^2 and thus for all $t \in (0,T]$, $\partial_x u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$. Let us now prove that $\partial_x u$ is continuous on $(0,T]$ with values in L^2. For $\delta > 0$ and $t \in (0,T]$, define

$$w_\delta(t,\cdot) := \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * \left(\mathbf{1}_{\{s>\delta\}}\partial_x v(s,\cdot)\right) ds.$$

Since $\mathbf{1}_{\{s>\delta\}}\partial_x v(s,\cdot) \in L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}))$, Proposition 5 ensures that w_δ is continuous on $[0,T]$ with values in L^2. Moreover, for any $t_0 \in (0,T]$, $\delta \leq t_0$ and $t \in [t_0,T]$,

$$\begin{aligned} ||w(t,\cdot) - w_\delta(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \frac{1}{2}\int_0^\delta ||\partial_x K(t-s,\cdot) * \partial_x v(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}ds, \\ &\leq \frac{\mathcal{K}_0}{2}\int_0^\delta (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \sup_{s\in(0,T]} s^{\frac{1}{2}}||\partial_x v(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{by (5.24)}, \\ &\leq \frac{\mathcal{K}_0}{2}\int_0^\delta (t_0-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \sup_{s\in(0,T]} s^{\frac{1}{2}}||\partial_x v(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

It follows that

$$\sup_{t\in[t_0,T]} ||w(t,\cdot) - w_\delta(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\mathcal{K}_0}{2}\int_0^\delta (t_0-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \sup_{s\in(0,T]} s^{\frac{1}{2}}||\partial_x v(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \to 0,$$

as $\delta \to 0$. We deduce that $w \in C((0,T];L^2(\mathbb{R}))$ as local uniform limit of continuous functions. Moreover,

$$\partial_x K(t,\cdot) * u_0 = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \to 2i\,\pi\xi e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}\mathcal{F}u_0(\xi)\right).$$

The dominated convergence theorem immediately implies that for any $t_0 > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} 4\pi^2|\xi|^2 \left|e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)} - e^{-t_0\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}\right|^2 |\mathcal{F}u_0(\xi)|^2 d\xi \to 0, \quad \text{as } t \to t_0.$$

This means that $t > 0 \to \left(\xi \to 2i\,\pi\xi e^{-t\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}\mathcal{F}u_0\right) \in L^2(\mathbb{R})$ is continuous and, since $\mathcal{F}$ is an isometry of L^2, we deduce that $t > 0 \to \partial_x K(t,\cdot) * u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ is continuous. We then have established that $\partial_x u \in C((0,T]; L^2(\mathbb{R}))$. Let us now estimate how the L^2 norm of $\partial_x u$ can explode at $t = 0$. By (5.24),

$$\begin{aligned} ||w(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \frac{\mathcal{K}_0}{2}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \sup_{\tau\in(0,T]} \tau^{\frac{1}{2}} ||\partial_x v(\tau,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \frac{\mathcal{K}_0 I}{2} t^{-\frac{1}{4}} \sup_{\tau\in(0,T]} \tau^{\frac{1}{2}} ||\partial_x v(\tau,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

where $I = \int_0^1 (1-s')^{-\frac{3}{4}} s'^{-\frac{1}{2}} ds' = B(1/2, 1/4)$; notice that the last integral term has been computed with the help of the change of variable $s' = \frac{s}{t}$. Moreover, (5.8) and Young's Inequalities imply that

$$||\partial_x K(t,\cdot) * u_0||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \mathcal{K}_1 t^{-\frac{1}{2}} ||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

We deduce that for any $t \in (0,T]$,

$$||\partial_x u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \mathcal{K}_1 t^{-\frac{1}{2}} ||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{\mathcal{K}_0 I}{2} t^{-\frac{1}{4}} \sup_{s\in(0,T]} s^{\frac{1}{2}} ||\partial_x v(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})},$$

which implies immediately (5.22).

Let us now prove (5.23). For any $t \in (0,T]$,

$$\begin{aligned} ||\partial_x(u_1-u_2)(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \frac{1}{2}\int_0^t ||\partial_x K(t-s,.) * \partial_x(v_1-v_2)(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} ds, \\ &\leq \frac{\mathcal{K}_0}{2}\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds \sup_{s\in(0,T]} s^{\frac{1}{2}} ||\partial_x(v_1-v_2)(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}, \\ &= \frac{\mathcal{K}_0 I}{2} t^{-\frac{1}{4}} \sup_{s\in(0,T]} s^{\frac{1}{2}} ||\partial_x(v_1-v_2)(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

which implies immediately (5.23). □

Remark 8. *Let u_0, T, v and u that satisfy assumptions of Lemma 2. Then, we have established that for any $t \in (0,T]$,*

$$\partial_x u(t,\cdot) = \partial_x K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * \partial_x v(s,\cdot) ds.$$

Let us now prove the local-in-time existence of a regular solution.

Proposition 7. *Let $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. There exists $T_* > 0$ that only depends on $||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}$ such that (5.1) admits a (unique) mild solution $u \in C([0,T_*]; L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T_*]; H^2(\mathbb{R}))$ on $(0,T_*)$such that*

$$\sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||\partial_x u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty \quad \textit{and} \quad \sup_{t\in(0,T_*]} t||\partial^2_{xx} u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Moreover, u belongs to $C^{1,2}((0,T_*] \times \mathbb{R})$ and satisfies the PDE in (5.1) in the classical sense.

Démonstration. We use a contracting fixed point theorem. For $u \in C([0,T_*]; L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T_*]; H^1(\mathbb{R}))$, define the norm

$$|||u||| := ||u||_{C([0,T_*];L^2(\mathbb{R}))} + \sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||\partial_x u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{5.25}$$

Define the space

$$X := \left\{u \in C([0,T_*]; L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T_*]; H^1(\mathbb{R})) \text{ s.t. } u(0,\cdot) = u_0 \text{ and } |||u||| < +\infty\right\}.$$

It is readily seen that X is a complete metric space endowed with the distance induced by the norm $|||\cdot|||$. For $u \in X$, define the function

$$\Theta u : t \in [0,T_*] \to K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * u^2(s,\cdot)ds \in L^2(\mathbb{R}). \tag{5.26}$$

By Proposition 5, $\Theta u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ and satisfies $\Theta u(0,\cdot) = u_0$. Define $v := u^2$. We have $\partial_x v = 2u\partial_x u$. Therefore that $v \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R})) \cap C((0,T]; W^{1,1}(\mathbb{R}))$ and that (5.21) holds true. By Lemma 2, we deduce that $\Theta u \in X$. Let us take $R > ||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_1||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}$ and assume that $|||u||| \leq R$. Since $||u^2||_{L^\infty((0,T_*);L^1(\mathbb{R}))} = ||u||^2_{C([0,T_*];L^2(\mathbb{R}))}$, estimate (5.16) of Remark 7 implies that

$$\begin{aligned} ||\Theta u||_{C([0,T_*];L^2(\mathbb{R}))} &\leq e^{\omega_0 T_*}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mathcal{K}_0 T_*^{\frac{1}{4}}\, ||u||^2_{C([0,T_*];L^2(\mathbb{R}))}, \\ &\leq e^{\omega_0 T_*}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + 2\mathcal{K}_0 T_*^{\frac{1}{4}}\, R^2. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Estimate (5.22) of Lemma 2, implies that

$$\begin{aligned} \sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||\partial_x(\Theta u(t,\cdot))||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \mathcal{K}_1||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{\mathcal{K}_0 I}{2}\, T_*^{\frac{1}{4}} \sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||\partial_x(u^2)(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}, \\ &\leq \mathcal{K}_1||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_0 I\, T_*^{\frac{1}{4}} R^2, \end{aligned}$$

by Cauchy-Schwarz inequality. Adding this inequality with (5.27), we get :

$$|||\Theta u||| \leq e^{\omega_0 T_*}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_1||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + (2+I)\,\mathcal{K}_0 T_*^{\frac{1}{4}} R^2.$$

For $T_* \in (0,T]$ sufficiently small such that

$$e^{\omega_0 T_*}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_1||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} + (2+I)\,\mathcal{K}_0 T_*^{\frac{1}{4}} R^2 \leq R, \tag{5.28}$$

we deduce that $|||\Theta u||| \leq R$. To sum-up, we have established that for any $T_* \in (0,T]$ such that (5.28) holds true, Θ (defined by (5.26)) maps $\overline{B}_R$ into itself, where $\overline{B}_R$ denotes the ball of X (endowed with the $|||\cdot|||$ norm) centered at the origin and of radius R. Let us now prove that Θ is a contraction. For $u,v \in \overline{B}_R$, Estimate (5.17) of Lemma 1 implies that

$$||\Theta u - \Theta v||_{C([0,T_*];L^2(\mathbb{R}))} \leq 4R\mathcal{K}_0 T_*^{\frac{1}{4}}\, ||u-v||_{C([0,T_*];L^2(\mathbb{R}))}, \tag{5.29}$$

where we again used $||u^2 - v^2||_{C([0,T_*];L^1(\mathbb{R}))} \leq (||u||_{C([0,T_*],L^2(\mathbb{R}))} + ||v||_{C([0,T_*],L^2(\mathbb{R}))})||u - v||_{C([0,T_*];L^2(\mathbb{R}))}$. Moreover, Estimate (5.23) of Lemma 2 implies that

$$\sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||\partial_x(\Theta u - \Theta v)(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \mathcal{K}_0 I T_*^{\frac{1}{4}} \sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||(u\partial_x u - v\partial_x v)(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Since

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}}||(u\partial_x u - v\partial_x v)(t,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} &\leq t^{\frac{1}{2}}||\partial_x v(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}||(u-v)(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + t^{\frac{1}{2}}||u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}||\partial_x(u-v)(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}, \\ &\leq |||v|||\, ||(u-v)(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + |||u|||\, t^{\frac{1}{2}}||\partial_x(u-v)(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}, \\ &\leq R|||u-v|||, \end{aligned}$$

we get : $\sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||\partial_x(\Theta u - \Theta v)(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq R\mathcal{K}_0 I T_*^{\frac{1}{4}}|||u-v|||$. Adding this inequality with (5.29), we find that

$$|||\Theta u - \Theta v||| \leq (4+I)R\mathcal{K}_0 T_*^{\frac{1}{4}}|||u-v|||.$$

Consequently, for any $T_* > 0$ sufficiently small such that (5.28) holds true and $(4+I)R\mathcal{K}_0 T_*^{\frac{1}{4}} < 1$, Θ is a contraction from $\overline{B}_R$ into itself. The Banach fixed point theorem then implies that Θ admits a (unique) fixed point $u \in C([0,T_*];L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T_*];H^1(\mathbb{R}))$ satisfying $\sup_{t\in(0,T_*]} t^{\frac{1}{2}}||\partial_x u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$ which is, of course, a mild solution to (5.1).

To prove the H^2 regularity of u, we have to use again a contracting fixed point theorem. But, this is now the gradient of the solution which is searched as a fixed point. Let $t_0 \in (0,T_*)$. For any $t \in (0, T_* - t_0]$, define $\overline{u}(t,\cdot) := u(t_0 + t, \cdot)$. Let $T_*' \in (0, T_* - t_0]$. We still endow $C([0,T_*'];L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T_*'];H^1(\mathbb{R}))$ with the norm $|||\cdot|||$ defined in (5.25) with T_* replaced by T_*'. Define the complete metric space

$$X' := \left\{ v \in C([0,T_*'];L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T_*'];H^1(\mathbb{R})) \text{ s.t. } v(0,\cdot) = v_0 \text{ and } |||v||| < +\infty \right\},$$

where $v_0 := \partial_x \overline{u}(0,\cdot)$. For $v \in X'$, define the function

$$\Theta' v : t \in [0,T_*'] \to K(t,\cdot) * v_0 - \int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * (\overline{u}v)(s,\cdot)ds \in L^2(\mathbb{R}). \tag{5.30}$$

Arguing as in the first step of the proof, we claim that Proposition 5, Remarks 7 and 1 and Lemma 2 imply that Θ' maps X' into itself with : for any $u,v \in X'$,

$$|||\Theta' v||| \leq e^{\omega_0 T_*'}||v_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_1||v_0||_{L^2(\mathbb{R})} + C T_*'^{\frac{1}{4}}|||v|||,$$

$$|||\Theta' v - \Theta' w||| \leq C T_*'^{\frac{1}{4}} |||v - w|||,$$

for some nonnegative constant C that only depends on $\mathcal{K}_0$ and $||\overline{u}||_{C([t_0,T_*];H^1(\mathbb{R}))}$. Let us take R' such that

$$R' > e^{\omega_0 T_*'} ||v_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_1 ||v_0||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

If $T_*' > 0$ satisfies

$$e^{\omega_0 T_*'} ||v_0||_{L^2(\mathbb{R})} + \mathcal{K}_1 ||v_0||_{L^2(\mathbb{R})} + C T_*'^{\frac{1}{4}} R' \leq R' \quad \text{and} \quad C T_*'^{\frac{1}{4}} < 1,$$

then Θ' maps $\overline{B}_{R'}(X')$ into itself and is a contraction. Let v denote its unique fixed point. Observe now that $\Theta' \partial_x \overline{u} = \partial_x \overline{u}$, thanks to Remark 8. But, similar arguments than these ones used to prove the uniqueness of a mild solution in the preceding section allow to show that there exists at most one function $w \in L^\infty((0,T_*'); L^2(\mathbb{R}))$ that satisfies $\Theta' w = w$. It follows that $\partial_x \overline{u} = v \in X'$ on $(0,T_*')$; hence, we deduce that $u \in C(t_0, t_0 + T_*']; H^2(\mathbb{R}))$. To sum-up, we have proved that for all $t_0 \in (0,T_*]$, there exists $T_*' \in (0, T_* - t_0]$ such that $u \in C((t_0, T_*']; H^2(\mathbb{R}))$. This completes the proof of the continuity of u on $(0,T_*]$ with values in H^2. The proof of the $C^{1,2}$ regularity is postponed to Lemma 3 in the next section, where it will be useful for the maximum principle failure. □

We can finally prove the global-in-time existence.

Proposition 8. *Let $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ and $T > 0$. There exists a (unique) mild solution $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R})) \cap C((0,T]; H^2(\mathbb{R}))$ to (5.1) such that*

$$\sup_{t \in (0,T]} t^{\frac{1}{2}} ||\partial_x u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty \quad \textit{and} \quad \sup_{t \in (0,T]} t ||\partial_{xx}^2 u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Moreover, u belongs to $C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R})$ and satisfies the PDE in (5.1) in the classical sense.

Démonstration. We have to derive first a L^2 estimate on the local regular solution u constructed in Proposition 7. Multiplying (5.1) by u and integrating w.r.t. the space variable, we get :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{I}[u] - \partial_{xx}^2 u) u dx = 0. \tag{5.31}$$

Indeed, the following computations show that the nonlinear term equals 0 :

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) u dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{2} \partial_x u dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u (\partial_x u u) dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u \, \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) dx.$$

But, Corollary 1 implies that

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{I}[u] - \partial_{xx}^2 u) u dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\psi_{\mathcal{I}} \mathcal{F} u) u dx = \int_{\mathbb{R}} \psi_{\mathcal{I}} |\mathcal{F} u|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}(\psi_{\mathcal{I}}) |\mathcal{F} u|^2 d\xi,$$

since $\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{I}[u] - \partial_{xx}^2 u) u dx$ is real. It follows that,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{I}[u] - \partial_{xx}^2 u) u dx &\geq \min \mathrm{Re}(\psi_{\mathcal{I}}) \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F} u|^2 d\xi, \\ &= \min \mathrm{Re}(\psi_{\mathcal{I}}) \int_{\mathbb{R}} u^2 dx, \end{aligned}$$

thanks to Plancherel's Equality. Equation (5.31) then implies that

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx \leq \omega_0 \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

and by Gronwall's Lemma, we deduce that for all $t \in [0, T_*]$

$$||u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\omega_0 t}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Define now

$$t_0 := \sup\{t > 0 \text{ s.t. there exists a (unique) mild sol. to (5.1) on } (0,t) \text{ that satisfies the regularity of Proposition 8}\}$$

and let us assume that $t_0 < T$ (recall that Proposition 7 ensures that $t_0 > 0$). By Proposition 7, there exists $T_* > 0$ such that for any initial data v_0 that satisfy $||v_0||_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\omega_0 t_0}||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}$, (5.1) admits a regular mild solution on $(0, T_*)$ with initial datum v_0. Hence, if we define $v_0 = u(t_0 - T_*/2)$, then (5.1) admits a mild solution v that satisfies the regularity of Proposition 8. Using the uniqueness and the semi-group property, it is now easy to show that $u(t_0 - T_*/2 + t, \cdot) = v(t, \cdot)$ for all $t \in [0, T_*/2]$ and that the function $\widetilde{u}$ defined by $\widetilde{u} = u$ on $[0, t_0]$ and $\widetilde{u}(t_0 - T_*/2 + t, \cdot) = v(t, \cdot)$ for $t \in [T_*/2, T_*]$ is still a mild solution to (5.1) that satisfies the regularity of proposition 8. Since the solution $\widetilde{u}$ lives on $[0, t_0 + T_*/2]$, this gives us a contraction. We conclude that $t_0 \geq T$ and this completes the proof of the global existence of a regular solution. □

Remark 9. *To sum-up, we have proved Theorem 1 with the $C^{1,2}$ regularity of u. To obtain further regularity, we claim that we can use the same method by arguing by induction.*

Now we prove the L^2-stability stated in Proposition 1.

Proof of Proposition 1 . Let (u, v) be solutions to (5.1) with respective L^2 initial data (u_0, v_0). let $T > 0$ and $t \in [0, T]$. Substracting

$$u(t,\cdot) = K(t,\cdot) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * u^2(s,\cdot)ds$$

and

$$v(t,.) = K(t,\cdot) * v_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v^2(s,\cdot)ds$$

we get

$$u(t,\cdot) - v(t,\cdot) = K(t,\cdot) * (u_0 - v_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * (u^2(s,\cdot) - v^2(s,\cdot))ds. \quad (5.32)$$

Hence, by (5.11) of Remark 6 and Young inequality

$$||u(t,\cdot)-v(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\omega_0 T}||u_0-v_0||_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{1}{2}\int_0^t ||\partial_x K(t-s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}||u^2(s,\cdot)-v^2(s,\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})}\, ds.$$

Taking $M = \max\left(||u||_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}))}, ||v||_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}))}\right)$, we can bound

$$\begin{aligned} ||u(t,\cdot) - v(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq e^{\omega_0 T}||u_0 - v_0||_{L^2(\mathbb{R})} + M\int_0^t ||\partial_x K(t-s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}\, ds \\ &\leq e^{\omega_0 T}||u_0 - v_0||_{L^2(\mathbb{R})} + M\mathcal{K}_0\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}}||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}\, ds, \end{aligned}$$

thanks to (5.7). With lemma 4, the proof is finished. □

5.6 Failure of the maximum principle

We now investigate the proof of Theorem 2. We first need a regularity result which ensures that if the initial data is regular then so is the solution up to the time $t = 0$.

Lemma 3. *Let $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ and $T > 0$. Assume that u is a mild solution to (5.1) that satisfies the regularity of Proposition 7. Then, u is in fact $C([0,T]; H^2(\mathbb{R})) \cap C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R})$ and satisfies the PDE in (5.1) in the classical sense. Moreover, if $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, then $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ and satisfies the PDE up to the time $t = 0$.*

Démonstration. First, we leave it to the reader to verify that the continuity with values in H^2 up to the time $t = 0$ can be proved again by the use of a contracting fixed point theorem. Note that the regularity of u_0 allows to work in a space of continuous functions with values in H^2 up to the time $t = 0$; more precisely, we argue as in the proof of Proposition 7, but we can directly use the $C([0,T_*]; H^2)$ norm instead of the $|||\cdot|||$ norm defined in (5.25). Let us now prove that u is a classical solution to (5.1). Taking the Fourier transform w.r.t. the space variable in (5.12), we get : for all $t \in [0,T]$,

$$\mathcal{F}(u(t,\cdot)) = e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}u_0 - \int_0^t i\,\pi \cdot e^{-(t-s)\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}(u^2(s,\cdot))ds. \tag{5.33}$$

Since $u^2 \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}))$, we know that $\mathcal{F}(u^2) \in C([0,T]; C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}))$. For any $\xi \in \mathbb{R}$, the function $t \in [0,T] \to \mathcal{F}(u^2(t,\cdot))(\xi) \in \mathbb{C}$ is thus continuous. Define

$$w(t,\xi) := -\int_0^t i\,\pi\xi e^{-(t-s)\psi_{\mathcal{I}}(\xi)}\mathcal{F}(u^2(s,\cdot))(\xi)ds.$$

Classical results on ODE then imply that w is derivable w.r.t. the time variable with

$$\partial_t w(t,\xi) + \psi_{\mathcal{I}}(\xi)w(t,\xi) = -i\,\pi\xi\mathcal{F}(u^2(t,\cdot))(\xi) = -\mathcal{F}\left(\partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)(t,\cdot)\right)(\xi). \tag{5.34}$$

Let us prove that all these terms are continuous with values in L^2. First, $u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}))$ therefore $\partial_x(u^2) \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ and we deduce that $\mathcal{F}(\partial_x(\frac{u^2}{2}))$ is continuous with values in L^2. Moreover, Equation (5.33) implies that

$$\psi_{\mathcal{I}}\, w(t,\cdot) = \psi_{\mathcal{I}}\left(\mathcal{F}(u(t,\cdot)) - e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}u_0\right).$$

Since $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ and $\psi_{\mathcal{I}}$ behaves at infinity as $|\cdot|^2$, $\psi_{\mathcal{I}} w$ is continuous with values in L^2. All the terms in (5.33) then are continuous with values in L^2 and this implies $w \in C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ with

$$\frac{d}{dt}(w(t,\cdot)) + \psi_{\mathcal{I}}\, w(t,\cdot) = -\mathcal{F}\left(\partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)(t,\cdot)\right).$$

Moreover, it is easy to see that $t \in [0,T] \to e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}u_0 \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ is C^1 with

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}u_0\right) + \psi_{\mathcal{I}} e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}u_0 = 0.$$

From Equation (5.33), we infer that $\mathcal{F}u$ is C^1 on $[0,T]$ with values in L^2 with

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathcal{F}(u(t,\cdot))) = -\psi_{\mathcal{I}} w(t,\cdot) - \psi_{\mathcal{I}} e^{-t\psi_{\mathcal{I}}}\mathcal{F}u_0 - \mathcal{F}\left(\partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)(t,\cdot)\right)\\ = -\psi_{\mathcal{I}}\mathcal{F}(u(t,\cdot)) - \mathcal{F}\left((u\partial_x u)(t,\cdot)\right).\end{aligned}$$

Since $\mathcal{F}$ is an isometry of L^2, we deduce that $u \in C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ and that

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u(t,.)) &= -\partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)(t,\cdot) - \mathcal{F}^{-1}\left(\psi_{\mathcal{I}}\mathcal{F}(u(t,\cdot))\right),\\ &= -\partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right)(t,\cdot) - \mathcal{I}[u(t,\cdot)] + \partial^2_{xx}u(t,\cdot),\end{aligned}$$

where we used Corollary 1 to compute the pseudo-differential term. In particular, u satisfies the PDE of (5.1) in the distribution sense. What is left to prove is the C^2 regularity in space of u. Differentiating (5.12) two times w.r.t. the space variable, we get : for any $t \in [0,T]$,

$$\partial^2_{xx}u(t,\cdot) = K(t,\cdot) * u_0'' - \int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v(s,\cdot)ds. \tag{5.35}$$

where $v = (\partial_x u)^2 + u\partial^2_{xx}u$. By the Sobolev imbedding $H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^1_b(\mathbb{R})$, we know that $v \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$. By Lemma 5, we know that for all $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\partial_x K(t-s,\cdot)*v(s,\cdot)(x) - \partial_x K(t-s,\cdot)*v(s,\cdot)(y)| \le ||\partial_x K(t-s)||_{L^2(\mathbb{R})}||\mathcal{T}_{(x-y)}(v(s,\cdot)) - v(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

By (5.7), we deduce that for all $t \in [0,T]$ and all $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v(s,\cdot)(x)ds - \int_0^t \partial_x K(t-s,\cdot) * v(s,\cdot)(y)ds\right|\\ &\le \int_0^t \mathcal{K}_0(t-s)^{-\frac{3}{4}}||\mathcal{T}_{(x-y)}(v(s,\cdot)) - v(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}ds \le 4T^{\frac{1}{4}} \sup_{s\in[0,T]} ||\mathcal{T}_{(x-y)}(v(s,\cdot)) - v(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

By Lemma 6, we deduce that the second term of (5.35) is continuous w.r.t. the space variable independently of the time variable (equicontinuity w.r.t. the time variable). Moreover, we already know that this term is continuous on $[0,T]$ with values in L^2 (by Proposition 5) and Lemma 7 implies that it is continuous w.r.t. the couple (t,x) on $[0,T] \times \mathbb{R}$. We now leave it to the reader to verify that $(t,x) \to K(t,\cdot) * u_0''(x)$ is continuous on $(0,T] \times \mathbb{R}$ when $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ and continuous on $[0,T] \times \mathbb{R}$ when moreover $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$. The proof of Lemma 3 is complete. □

The proof of Theorem 2 is now an immediate consequence of the integral formula (5.3).

Proof of Theorem 2. Lemma 3 and Proposition 2 imply that the solution u to (5.1) is $C^{1,2}$ up to the initial time $t = 0$ and that

$$u_t(0, x_*) + u_0(x_*)u_0'(x_*) + C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{u_0(x_* + z) - u_0(x_*) - u_0'(x_*)z}{|z|^{7/3}}\, dz - u_0''(x_*) = 0.$$

It follows that

$$u_t(0, x_*) = -C_{\mathcal{I}} \int_{-\infty}^{0} \frac{u_0(x_* + z)}{|z|^{7/3}}\, dz < 0.$$

There then exists $t_* > 0$ such that $u(t_*, x_*) < 0$. The proof of Theorem 2 is now complete. □

5.7 Numerical simulations

The aim of this part is to show some numerical simulations for (5.1). An explicit discretization gives results in line with the theoretical study (see Remark 4).

We write (5.1) with a viscous coefficient $\varepsilon > 0$ as follows :

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} + \mathcal{L}[u] \right) - \varepsilon \partial_{xx}^2 u = 0, \tag{5.36}$$

where for any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}[\varphi](x) := \int_0^{+\infty} |\zeta|^{-\frac{1}{3}} \varphi'(x - \zeta) d\zeta.$$

The viscous coefficient is taken sufficiently small, in order to magnify the erosive effect of the non-local term. The new definition of the non-local term ($\mathcal{I}[u] = \partial_x \mathcal{L}[u]$) follows [29], which interpretes $\mathcal{L}[u]$ as a flow. Notice that in [29, 30], the bottom is, in fact, $s(t, x) = u(t, x + q'(1)t)$, where q is the bedload transport of sediments ; for the sake of simplicity, we continue to work with u.

To shed light on the effect of the nonlocal term, we compare the evolution of the solution of (5.36) with the solution of the viscous Burgers equation :

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) - \varepsilon \partial_{xx}^2 u = 0. \tag{5.37}$$

5.7.1 Maximum principle for the viscous Burgers equation

It is well-known that (5.37) satisfies the maximum principle : for any initial data $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, ess-inf$u_0 \leq u \leq$ ess-supu_0. As a consequence, (5.37) cannot take into account erosion phenomena. To simulate the evolution of u, we define a regular discretization of $[0, L]$ with a spatial step Δx such that $L = M\Delta x$, and a discretization of $[0, T]$ with a time step Δt such that $T = N\Delta t$. We let x_i, t_n and u_i^n respectively denote the point $i\Delta x$,

the time $n\Delta t$ and the computed solution at the point $(n\Delta t, i\Delta x)$. We use the following explicit centered scheme :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left[-\frac{1}{2}\frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2\Delta x} + \varepsilon \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right]. \tag{5.38}$$

It is well-known that this scheme is stable under the CFL-Peclet condition :

$$\Delta t = \min\left(\frac{\Delta x}{|u|}, \frac{\Delta x^2}{2\varepsilon}\right). \tag{5.39}$$

To convince the reader, let us simulate the evolution of the well-known following travelling waves of (5.37) for $\varepsilon = 1$:

$$u(t,x) := \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}t\right)\right)\right].$$

We expose in Figure 5.3 both analytic and numerical solutions. We observe an error of the order of 10^{-4} between these solutions. Let us now take, as an initial dune, the following

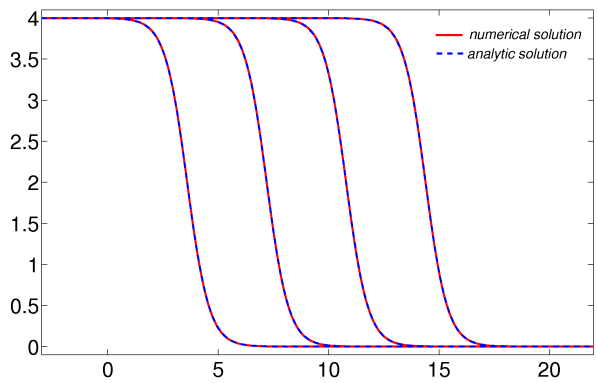


FIG. 5.3 – Numerical and analytic travelling waves of the viscous Burgers equation.

small regular perturbation on the bottom :

$$u_0(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-(x-\frac{L}{2})^2}} & \text{if } \frac{L}{2} - 1 < x < \frac{L}{2} + 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.40}$$

We describe its evolution in Figure 5.4. The dune propagates, but as mentioned above the erosion phenomena are not taken into account since u remains positive (because of the maximum principle).

Remark 10. *Equation* (5.1) *also admits travelling wave solutions, see [3].*

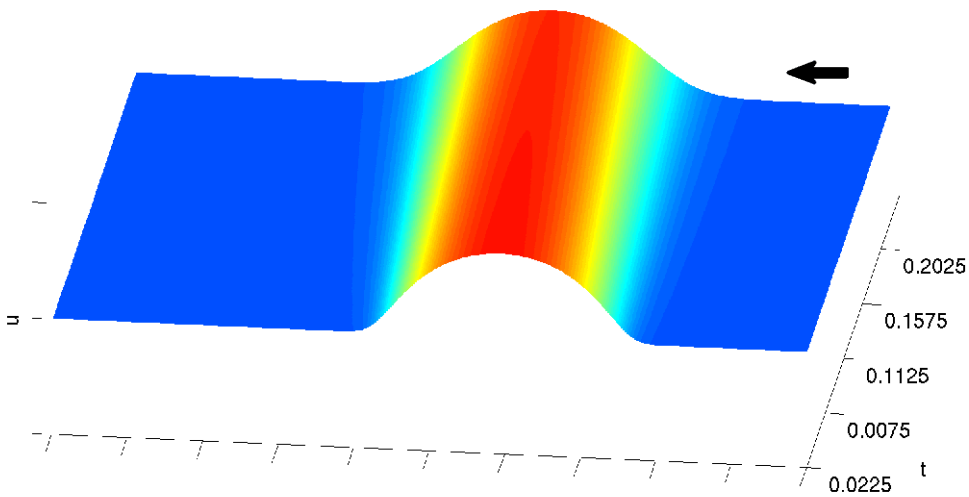


FIG. 5.4 – Evolution of the solution of (5.37) with u_0 defined in (5.40) ($L = 30$, $M = 4001$ and $\varepsilon = 0.1$).

5.7.2 Erosive effect of the nonlocal term

Let us return to the study of (5.36). We add the discretization of the non-local operator $\mathcal{L}$ to the explicit centered scheme (5.38). It is natural to consider the following discretization :

$$\mathcal{L}[u_i^n] \approx \sum_{j=0}^{+\infty} |j\Delta x|^{-\frac{1}{3}} \frac{u_{i-j+1}^n - u_{i-j-1}^n}{2\Delta x},$$

Instead we will approximate

$$\mathcal{L}[u_i^n] \approx \sum_{j=0}^{i} |j\Delta x|^{-\frac{1}{3}} \frac{u_{i-j+1}^n - u_{i-j-1}^n}{2\Delta x}.$$

This is based on the assumption that for $x \in [0, L]$,

$$\mathcal{L}[u(t,\cdot)](x) \approx \int_0^x |\zeta|^{-\frac{1}{3}} \partial_x u(t, x-\zeta) d\zeta. \tag{5.41}$$

This fact is not true for general u, but if we assume that the initial profile u_0 satisfies $u_0(x) = 0, \forall x \leq 0$ and semi-discretize in time Equation (5.36), we get :

$$u(t+\Delta t, x) = u(t,x) + \Delta t \left(-\partial_x(\frac{u^2}{2}) - \partial_x \mathcal{L}[u(t,.)] + \varepsilon \partial_{xx}^2 u \right).$$

We observe that $u(t+\Delta t, x) = 0,\ \forall x \leq 0$ and by induction $u(t_n, x) = 0\ \forall x \leq 0,\ \forall n$. Now

$$\mathcal{L}[u(t_n, .)] = \int_0^x |\zeta|^{-\frac{1}{3}} \partial_x u(t_n, x-\zeta) d\zeta.$$

Actually, we take $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ and $\text{supp}(u_0) \subset\subset (0, L)$ (see Figure 5.5). Moreover, Lemma

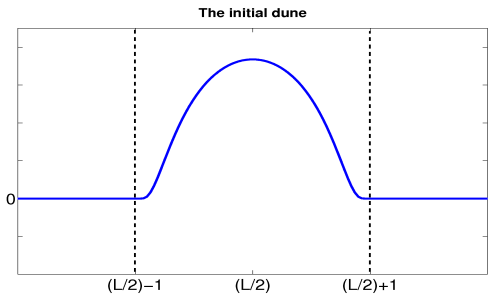


FIG. 5.5 – The initial dune defined in (5.40).

3 suggests that all the derivatives of u are continuous with values in L^2 w.r.t. the time variable up to the time $t = 0$. It then is natural to expect that (at least for small times) Equation (5.41) is a good approximation.

We then use the following explicit scheme for (5.36) :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left[-\frac{1}{2} \frac{(u_{i+1}^n)^2 - (u_{i-1}^n)^2}{2\Delta x} - \frac{\mathcal{L}[u_{i+1}^n] - \mathcal{L}[u_{i-1}^n]}{2\Delta x} + \varepsilon \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right].$$

As far as the stability condition, one can numerically see that (5.39) is still ensuring stability for small Δx. The evolution of the initial dune (5.40) is given in Picture 5.6. As the solutions of the viscous Burgers equation, the dune is propagated downstream but we now observe an erosive process behind the dune : the bottom is eroded downstream from the dune, as shown in Remark 4.

Let us make a final remark. We are aware of that the fact that these numerical simulations are a first crude attempt. To tackle rigorously the non local term would need further study, which will be reported elsewhere.

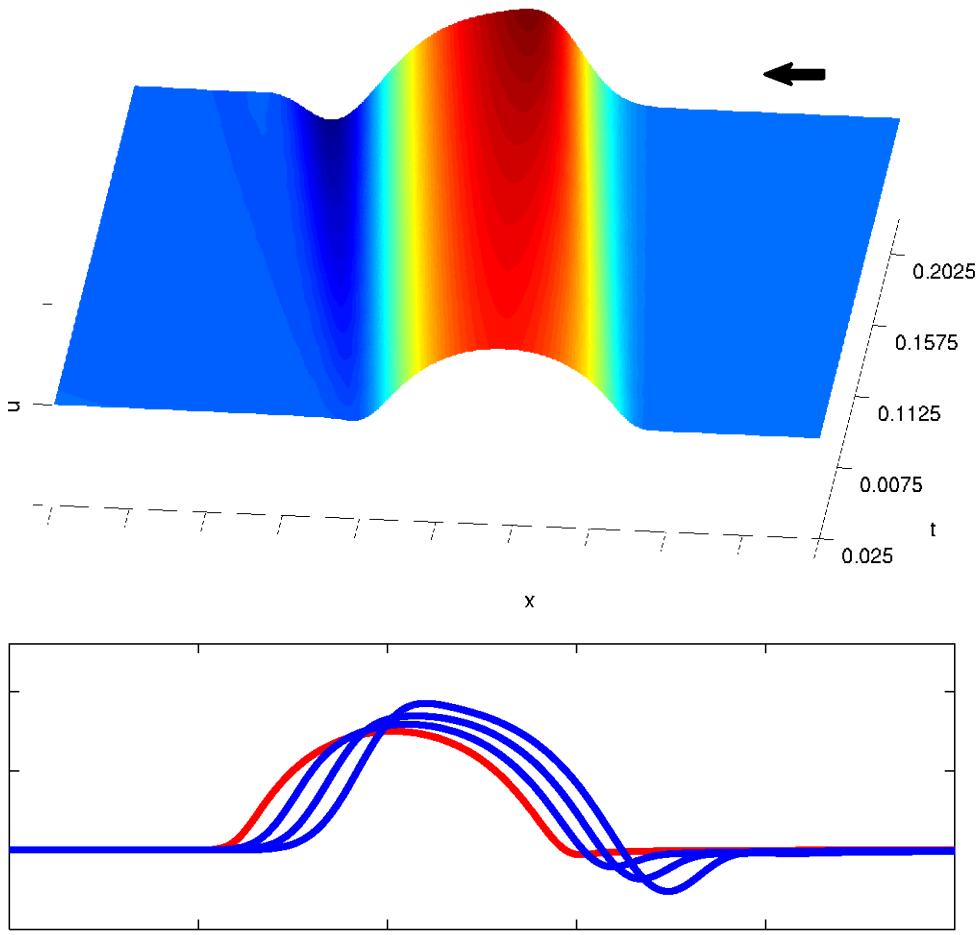


FIG. 5.6 – Evolution of an initial dune, by using the non-local model (5.36) ($L = 30$, $M = 4001$ and $\varepsilon = 0.1$).

5.8 Appendix : some technical lemmas.

We first recall a generalization of Gronwall's lemma proved e.g. in [28].

Lemma 4. *Let $g : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ be a bounded measurable function and suppose that there are positive constants C, A and $\theta > 0$ such that, for all $t \leq T$,*

$$g(t) \leq A + C \int_0^t (t-s)^{\theta-1} g(s)\, ds.$$

Then,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} g(t) \leq C_T A,$$

where constant C_T does not depend on A.

Lemma 5. *Let $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Then, $f * g \in C(\mathbb{R})$ and for all $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|f * g(x) - f * g(y)| \leq ||\mathcal{T}_{(x-y)} f - f||_{L^2(\mathbb{R})} ||g||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. The result is immediate if f and g are smooth ; indeed,

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-z) g(z) dz - \int_{\mathbb{R}} f(y-z) g(z) dz \right|, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-z) - f(y-z) g(z)| dz, \\ &\leq ||\mathcal{T}_{(x-y)} f - f||_{L^2(\mathbb{R})} ||g||_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

The result for general f and g only L^2, is then obtained by density. □

Lemma 6. *Let $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$. Then, $\sup_{t \in [0,T]} ||\mathcal{T}_h(u(t,\cdot)) - u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$, as $h \to 0$.*

Démonstration. The function u is uniformly continuous with values in L^2 as a continuous function on a compact set $[0,T]$. For any $\varepsilon > 0$, there then exist finite a sequence $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ such that for any $t \in [0,T]$, there exists $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ with

$$||u(t,\cdot) - u(t_j,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{T}_h(u(t,\cdot)) - u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq\ & ||\mathcal{T}_h(u(t,\cdot)) - \mathcal{T}_h(u(t_j,\cdot))||_{L^2(\mathbb{R})} \\ & + ||\mathcal{T}_h(u(t_j,\cdot)) - u(t_j,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} + ||u(t_j,\cdot) - u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Since $||\mathcal{T}_h(u(t,\cdot)) - \mathcal{T}_h(u(t_j,\cdot))||_{L^2(\mathbb{R})} = ||u(t,\cdot) - u(t_j,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}$, we get :

$$\begin{aligned} ||\mathcal{T}_h(u(t,\cdot)) - u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} &\leq ||\mathcal{T}_h(u(t_j,\cdot)) - u(t_j,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} + 2||u(t_j,\cdot) - u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}, \\ &\leq ||\mathcal{T}_h(u(t_j,\cdot)) - u(t_j,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

By the continuity of the translation in $L^2(\mathbb{R})$, $||\mathcal{T}_h(u(t_j,\cdot)) - u(t_j,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$, as $h \to 0$. Then,

$$\limsup_{h \to 0} ||\mathcal{T}_h(u(t,\cdot)) - u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\varepsilon.$$

Taking the infimum w.r.t. $\varepsilon > 0$ implies the result. □

Lemma 7. *Let $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ such that u is continuous w.r.t. the variable x uniformly in t. Then, $u \in C([0,T] \times \mathbb{R})$.*

Démonstration. Let $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Let $\varepsilon > 0$. By the regularity of u w.r.t. the space variable, we know that there exists $\eta > 0$ such that for any $t \in [0,T]$ and all $x, y \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$\begin{aligned} |u(t_0,x_0) - u(t,x)| &\leq |u(t_0,x_0) - u(t_0,y)| + |u(t_0,y) - u(t,y)| + |u(t,y) - u(t,x)|, \\ &\leq \varepsilon + |u(t_0,y) - u(t,y)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

If we integrate w.r.t. $y \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, then we get :

$$2\eta|u(t_0,x_0)-u(t,x)| \leq 4\varepsilon\eta+\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta}|u(t_0,y)-u(t,y)|dy \leq 4\varepsilon\eta(2\eta)^{\frac{1}{2}}||u(t_0,\cdot)-u(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R})}.$$

By the continuity of u with values in L^2,

$$\limsup_{(t,x)\to(t_0,x_0)} |u(t_0,x_0) - u(t,x)| \leq 2\varepsilon.$$

Taking the infimum w.r.t. $\varepsilon > 0$ completes the proof. □

Acknowledgements. We thank B. Mohammadi for advice on the numerical scheme. P. Azerad and D. Isèbe are supported by the ANR (project COPTER NT05-2-42253).

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

Idées principales

La thématique centrale de ce travail était la recherche de solutions favorisant la diminution du processus d'érosion des plages à partir d'une méthode d'optimisation de formes. Nous avons axé les recherches sur l'optimisation d'ouvrages de défense (épis, brise-lames, LCS) car ces techniques restent de nos jours les plus utilisées.

Dans le choix des modèles, n'ayant pas trouver de consensus sur la physique qui contrôle la morphodynamique littorale[1], il est important de préciser que nous avons volontairement privilégié l'étude hydrodynamique de la houle à une approche morphodynamique.

L'originalité réside donc dans les méthodes utilisées pour rechercher les solutions "optimales" d'un problème de protection des plages. Tout d'abord, une technique d'optimisation globale est utilisée pour la recherche d'optimum. Pour ce genre de problèmes, ce choix s'avère nécessaire car les contraintes industrielles et/ou économiques lors de la conception des ouvrages ou la variabilité topobathymétrique du site d'étude favorisent la présence de plusieurs minima locaux. Ensuite, l'élaboration d'une paramétrisation fine pour les ouvrages considérés permet d'obtenir des formes totalement originales et non-intuitives. Enfin le choix du ou des critères physiques à minimiser oriente la finalité du problème d'optimisation. Plusieurs critères hydrodynamiques ont été testés au cours de ce travail (surface libre, énergie mécanique responsable de la mise en suspension des sédiments,...) mais une analyse plus fine des phénomènes responsables d'un processus érosif est toujours d'actualité.

Un travail de recherche plus "théorique" en analyse des EDP a également été effectué sur un modèle original d'évolution de dunes immergées en régime fluvial obtenu par A.C. Fowler. Plus précisément, il s'agit d'une équation de Burgers avec un terme de diffusion classique et un terme non-local anti-diffusif qui force la solution à ne pas respecter le principe du maximum. Ceci permet de modéliser des phénomènes morpho-sédimentaires érosifs.

[1] voir la disparité des résultats fournis par les différents modèles morphodynamiques existant sur les benchmarks.

Apports de ces travaux

Les résultats obtenus montrent que des techniques d'optimisation de forme pour la protection des plages et des ports peuvent être utilisées avec succès dans des problèmes du génie côtier.

La première application (Chapitre 3) traite le cas d'une zone portuaire, la propagation de la houle s'effectuant en eaux profondes où les interactions avec le fond sont négligées. Les formes obtenues pour les ouvrages de défense sont originales, surprenantes et intrinsèquement liées au régime de houle considéré. L'intérêt de prendre en compte plusieurs types de houles incidentes ainsi que l'efficacité et la convenance de la méthode d'optimisation ont été mis en lumière. Néanmoins, une analyse sur la variabilité des résultats par rapport aux choix du critère d'optimisation devra être prise en considération.

La deuxième application (Chapitre 4) traite un problème industriel concret (la protection de la plage du Lido de Sète, mer Méditerranée, France) en collaboration avec le bureau d'étude *BRL ingénierie*. Un modèle hydrodynamique réaliste de réfraction-diffraction (REF/DIF) est utilisé pour optimiser des tubes en géotextile sur un bathymétrie complexe. L'optimisation est menée pour un spectre directionnel de houles incidentes où les caractéristiques d'une houle constructrice et d'une houle destructrice ont été assimilées. Les résultats obtenus montrent, malgré la restriction des paramètres d'optimisation par des contraintes industrielles, une réduction d'environ 25% de l'énergie de la houle. De plus, la mise en évidence de nombreux minima locaux conforte l'utilisation d'une technique d'optimisation globale.

Enfin, le Chapitre 5 donne un résultat d'existence et d'unicité dans $L^2(\mathbb{R})$ de solution pour un modèle morphodynamique de dunes de rivière. De plus, un résultat original montre que l'équation a un effet régularisant sur la solution mais qu'elle ne vérifie pas le principe du maximum. Egalement, des résultats numériques reflètent la dynamique du modèle, notamment l'apparition d'un creusement à l'aval de la dune .

Perspectives à court et moyen termes

Les formes obtenues pour la protection de la plage du Lido de Sète sont en cours de prototypage. Dès Janvier 2008, des essais en canal à houle (2D) et bassin à houle (3D) seront effectués à Grenoble dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire LEGI et la SOGREAH (voir figure 6.1). Ces expériences devraient permettre, du point de vue hydrodynamique, de confirmer les résultats obtenus au Chapitre 4 mais également de traiter la question de la réponse morphodynamique de la plage de Sète en configuration optimale. Ces expériences s'inscrivent dans le cadre du projet COPTER mais également bénéficient de collaborations à des programmes nationaux (MODLIT, MICROLIT, LEFE/IDAO). En parallèle, d'autres simulations à partir d'un modèle de circulation quasi-3D utilisant les courants intégrés sur la verticale (SHORECIRC) seront effectuées pour observer le rôle des courants après la remise en suspension du sédiment à proximité des structures optimales [34].

L'outil d'optimisation OPTI$_3$M sera également enrichi. La paramétrisation, actuellement restreinte à la conception d'ouvrages, sera étendue. Nous envisageons directement l'optimisation du trait de côte et/ou du fond marin afin d'aborder les problèmes de protec-

tion littorale autrement que par la construction systématique d'ouvrages artificiels. Ainsi, pour traiter un problème d'érosion sur un site donné, on pourrait se poser la question de savoir quelle forme de linéaire côtier permet de converger vers une situation optimale. Egalement, la prise en compte de critères économiques, voire politiques, dans les fonctionnelles d'optimisation s'avère délicate mais naturelle tant ces facteurs sont primordiaux dans les problèmes d'aménagement littoral.

L'étude mathématique du modèle d'évolution de dunes en régime fluvial nous a permis d'acquérir une expérience sur la compréhension des flux sédimentaires. Ceci est un premier pas vers le développement et l'étude de nouveaux modèles d'évolution de barres sableuses en mer. Pour revenir à l'équation de Fowler étudiée au chapitre 5, une réflexion peut également être posée sur l'existence et l'unicité de solution dans le cadre plus général des fonctions $L^\infty(\mathbb{R})$.

FIG. 6.1 – *En haut à gauche* : La partie offshore du canal à houle du LEGI - Le batteur sert à générer la houle au large ; *En haut à droite* : Vue de côté du canal à houle du LEGI - Le sable (en rouge) est transporté par la houle. *En bas à gauche* : Déferlement de la houle à l'approche du rivage ; *En bas à droite* : Le bassin à houle de la SOGREAH (30m x 30m) où la plage de Sète sera reproduite en échelle réduite.

Annexe A

OPTI$_3$M : guide d'utilisation

Dans le cadre des travaux d'optimisation de formes en domaine littoral, nous avons évidemment été amené à développer des outils nécessaires à l'élaboration d'un problème d'optimisation. Parallèlement aux travaux de recherche, j'ai pris un réel plaisir à mettre en place une série d'interfaces graphiques permettant d'utiliser le plus simplement et le plus rapidement possible ces différents outils (modèle hydrodynamique, générateur d'ouvrages de défenses, algorithme d'optimisation,...). Ces programmes, regroupés sous le nom d'OPTI$_3$M, sont opérationnels sous MatLab et sont un premier pas vers l'élaboration d'un outil d'optimisation complet accessible à un large public du domaine du génie côtier.

Nous donnons dans cette Annexe, un guide d'utilisation de la dernière version d'OPTI$_3$M.

A.1 Introduction

A.1.1 Qu'est ce que OPTI$_3$M

Le programme OPTI$_3$M, utilisable à partir du logiciel MatLab®, est destiné à la modélisation, la simulation numérique et l'optimisation en génie côtier.

Plus précisément, OPTI$_3$M permet les fonctions suivantes :

- **Charger une topobathymétrie** à partir d'une librairie existante ;
- **Générer des ouvrages de défense** sur une topobathymétrie donnée ;
- **Simuler la propagation de la houle** à partir du modèle hydrodynamique REF/DIF [41, 42] ;
- **Configurer et résoudre des problèmes d'optimisation d'ouvrages** de défense relatifs au génie côtier ;
- **Traiter les résultats** obtenus.

De plus, son utilisation est rendue aisée par la présence d'interfaces graphiques.

A.1.2 Le module de génération d'ouvrage

Le module de génération d'ouvrage inclu dans OPTI$_3$M permet d'intégrer, dans une topobathymétrie donnée, un ou plusieurs ouvrages de défense de type épis ou brise-lames à partir d'un simple jeu de paramètres (points de contrôle pour la position et les dimensions de l'ouvrage).

A.1.3 Le module hydrodynamique

Le calcul de la propagation de la houle sur une topobathymétrie variable est effectué à partir du modèle de transformation de la houle non-linéaire REF/DIF [41, 42]. Il s'agit d'un modèle non linéaire de "réfraction-diffraction" qui permet de la transformation de la houle lorsque celle ci s'approche du rivage (refraction sur des plateaux rocheux, barres en croissant..) ou rencontre des structures artificielles (diffraction par des brises lames, des jetées..).

A.1.4 Le module d'optimisation

Le module d'optimisation fait appel à l'algorithme GOP (Global Optimisation Platform)[36, 37] développé à l'université Montpellier II. Il s'agit d' un algorithme d'optimisation globale qui améliore l'efficacité d'un algorithme cœur (par exemple la méthode du gradient) par une recherche multi-linéaire de conditions initiales optimales.

Cette méthode d'optimisation est intéressante et efficace pour les problèmes du génie côtier considérés par OPTI$_3$M.

Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter le site web *http ://www.mat.ucm.es/~ivorra/*

A.2 Organisation

Le répertoire **OPTI3M** contient tous les fichiers nécessaires à l'utilisation de OPTI$_3$M (figure A.1).

Le sous-répertoire ***input*** comprend les différentes topobathymétries disponibles, déjà intégrées dans OPTI$_3$M.

Le sous-répertoire ***output*** regroupe les résultats du code de propagation de houle REF/DIF.

Le sous-répertoire ***source*** centralise le code de propagation de houle REF/DIF, l'algorithme d'optimisation GOP, le programme servant à générer les ouvrages de défense ainsi que les différents programmes pour traiter les résultats.

Dans le répertoire **OPTI3M** se trouvent également 2 fichiers MatLab (.m). Le premier, *OPTI3M.m*, sert à démarrer OPTI$_3$M à partir de la fenêtre de commandes MatLab, alors que *mkpath.m* comprend la liste des différents chemins MatLab nécessaires au fonctionnement d'OPTI$_3$M.

A.3 Installation

!! important !!
- Le logiciel MatLab® doit être installé sur l'ordinateur.
- Pour les utilisateurs de Windows, Cygwin doit également être installé sur l'ordinateur.

A.3.1 Linux

Copier le répertoire **OPTI3M** dans le répertoire courant de l'utilisateur, par exemple "/home/toto/OPTI3M" pour l'utilisateur "toto" (figure A.2).

A.3.2 Windows

Copier le répertoire **OPTI3M** sur le disque dur de l'ordinateur, par exemple "C :/Progs/OPTI3M".

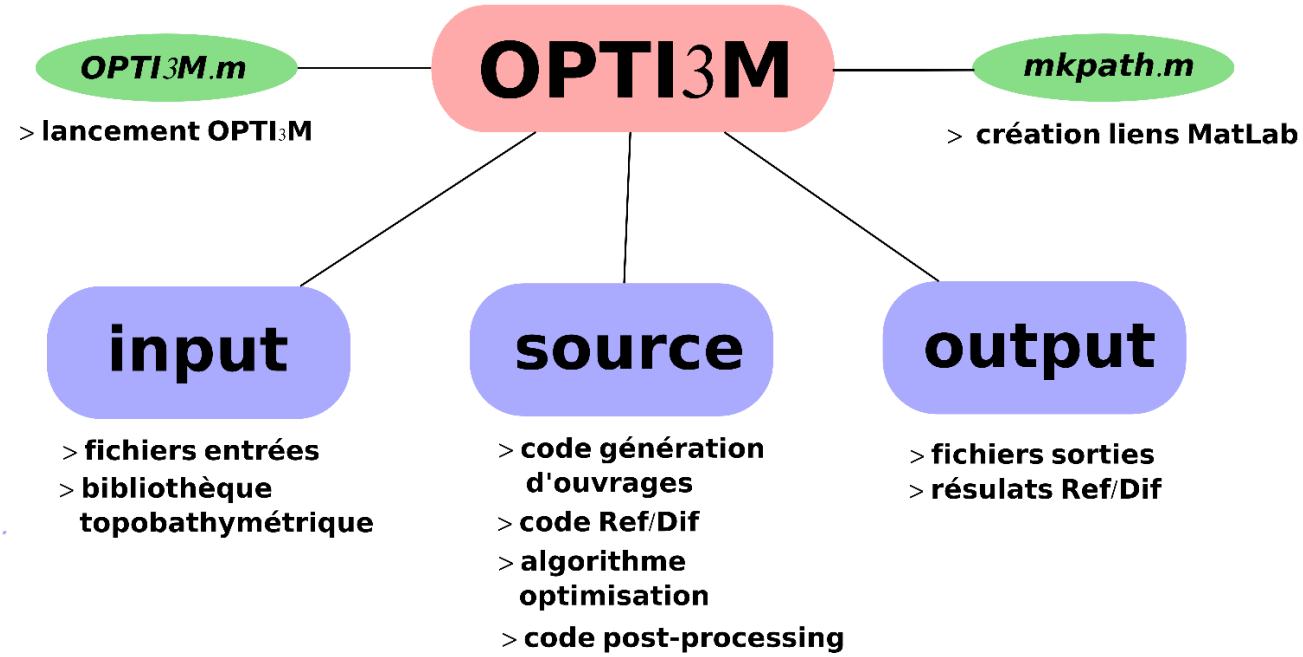


FIG. A.1 – L'organigramme du répertoire OPTI3M

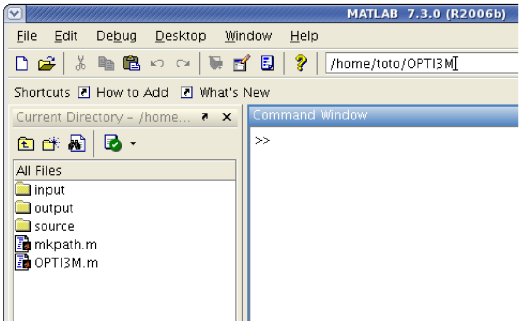


FIG. A.2 – Le contenu du répertoire OPTI3M

A.4 Configuration

Lors de la **première utilisation** de OPTI$_3$M, la configuration des différents chemins qui permettront à OPTI$_3$M de fonctionner correctement est **OBLIGATOIRE**.

A.4.1 Linux

Pour configurer les chemins MatLab (utilisateur "toto") :

- Démarrer MatLab® et aller dans le répertoire "/home/toto/OPTI3M",
- Ouvrir le fichier *mkpath.m* à partir de l'éditeur (File>Open>mkpath.m),
- Remplacer les ***** par le nom d'utilisateur de la machine. Pour gagner du temps, utiliser la fonction 'Find and Replace' dans l'onglet 'Edit', comme le montre la figure

A.3.

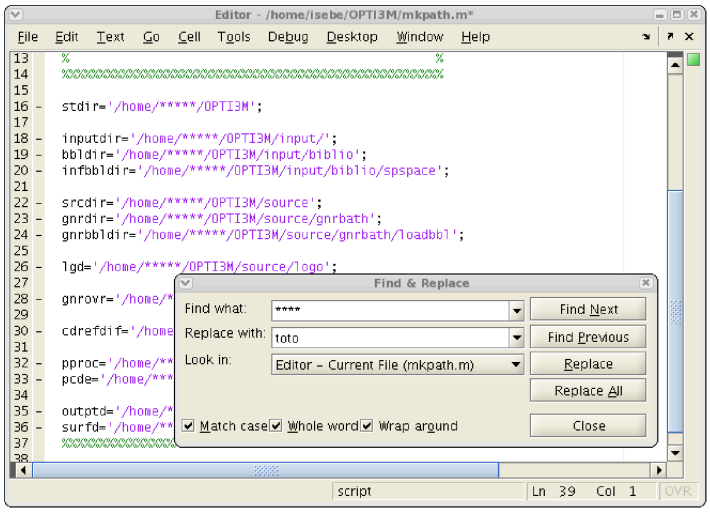


FIG. A.3 – Modification des chemins MatLab

A.4.2 Windows

- Démarrer MatLab® et aller dans le répertoire où est installé OPTI$_3$M (par exemple, "C :/Progs/OPTI3M"),
- Ouvrir le fichier *mkpath.m* à partir de l'éditeur,
- Remplacer les ***** par le chemin menant au répertoire OPTI3M à partir du disque *C* : (par exemple , "C :/Progs/OPTI3M").

A.5 Démarrage de OPTI$_3$M

- Démarrer MatLab® et aller dans le répertoire OPTI3M,
- Taper OPTI3M dans la fenêtre de commandes et appuyer sur <Entrée> (figure A.4),

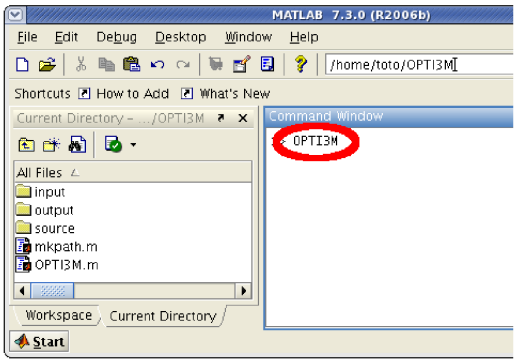


FIG. A.4 – Lancement de OPTI$_3$M à partir de la fenêtre de commandes MatLab.

– Si l'interface d'accueil apparaît (figure A.5), OPTI$_3$M est correctement installé.

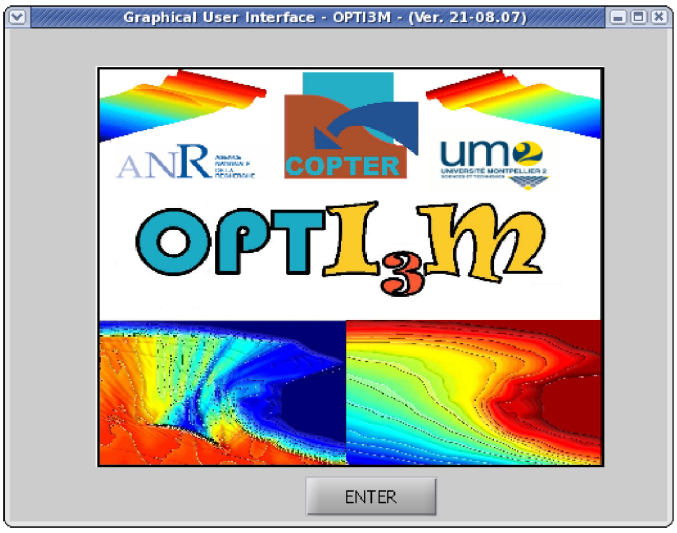


FIG. A.5 – OPTI$_3$M - Interface d'accueil.

– Appuyer sur le bouton ENTREE de l'interface d'accueil. L'utilisation de OPTI$_3$M peut maintenant commencer.

A.6 Menu principal

On retrouve ici les quatres principaux modules de OPTI$_3$M (figure A.6) :

– `BATHY` : **Charger/créer** une topobathymétrie et **générer** un (des) ouvrage(s) dans la topobathymétrie (se reporter à la section A.7) ;

– `CALCUL` : **Executer** le code de propagation de houle REF/DIF (se reporter à la section A.8) ;

– `OPTIMISATION` : **Configurer** et **résoudre** un problème d'optimisation d'ouvrages (se reporter à la section A.10) ;

– `POST-PROCESS` : **Traiter** et **visualiser** les résultats de REF/DIF (se reporter à la section A.9).

A.7 La module BATHY/OUVRAGE

Choisir l'onglet `BATHY` dans le menu principal permet, dans un premier temps, de définir une topobathymétrie initiale.

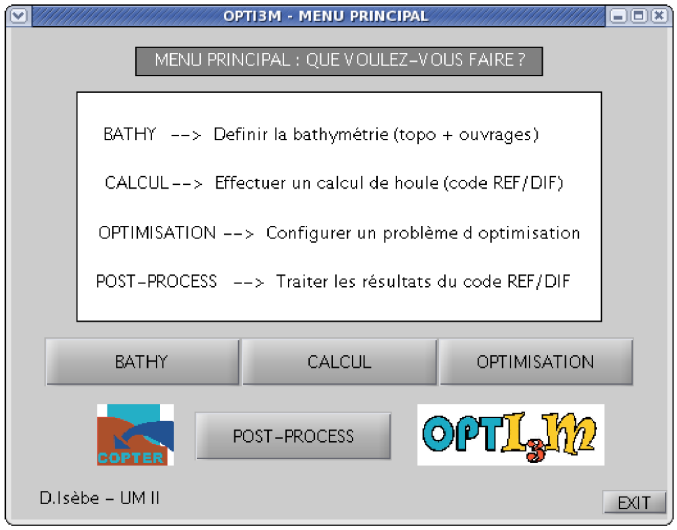


FIG. A.6 – OPTI$_3$M - Menu principal.

A.7.1 Choix de la topobathymétrie initiale

Pour calculer la propagation de la houle sur un fond variable donnée, le module hydrodynamique (REF/DIF) utilise comme données topobathymétriques un fichier d'entrée au format **.dat** (nommée *topo.dat*) de taille $mr \times nr$. La première ligne du fichier *topo.dat*, $i = 0$, correspond aux profondeurs au large tandis que la ligne $i = mr$ fait référence aux profondeurs à la côte (la propagation s'effectue dans le sens des i croissants).

Pour définir une topobathymétrie initiale, plusieurs fonctionnalités sont à disposition de l'utilisateur (figure A.7) :

- `CREER` : Création d'une topobathymétrie académique (linéaire, polynômiale,...). Il suffit, dans ce cas, de donner une profondeur au large ;

- `CHARGER` : Chargement d'une topobathymétrie à partir d'une librairie existante. Des fichiers peuvent être rajoutés par l'utilisateur à la librairie afin d'être réutilisés ultérieurement.

- `GMT` : Extraction une topobathymétrie à l'aide du logiciel GMT (Generic Mapping Tools). IMPORTANT : Le logiciel doit être installé sur l'ordinateur pour avoir accès à cette fonctionnalité.

- `CONVERTIR` : Conversion d'un fichier topobathymétrique au format .txt au format .dat.

- `PROFIL` : Création d'une topobathymétrie à partir d'un profil de base.

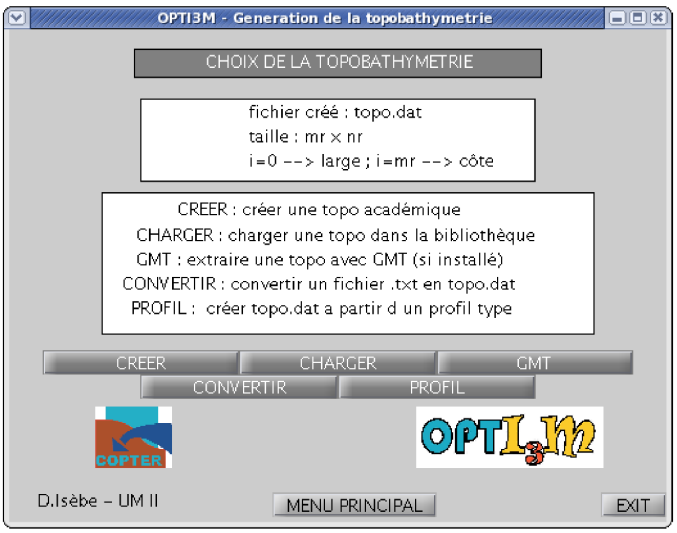


FIG. A.7 – OPTI$_3$M - Génération de la topobathymétrie.

Chargement à partir de la bibliothèque

- Depuis l'interface 'Génération de la topobathymétrie' (figure A.7), cliquer sur `CHARGER` ;
- Choisir un fichier dans la bibliothèque (voir figure A.8) ;

FIG. A.8 – OPTI$_3$M - Bibliothèque de topobathymétrie.

- Une fois la topobathymétrie choisie, l'interface suivante apparaît
  L'utilisateur a ensuite le choix entre :
  - `VISUALISER` : Visualiser la topobathymétrie choisie ;
  - `OUVRAGES` : Générer un (des) ouvrage(s) sur la topobathymétrie choisie ;
  - `MENU` : Retourner au menu principal.

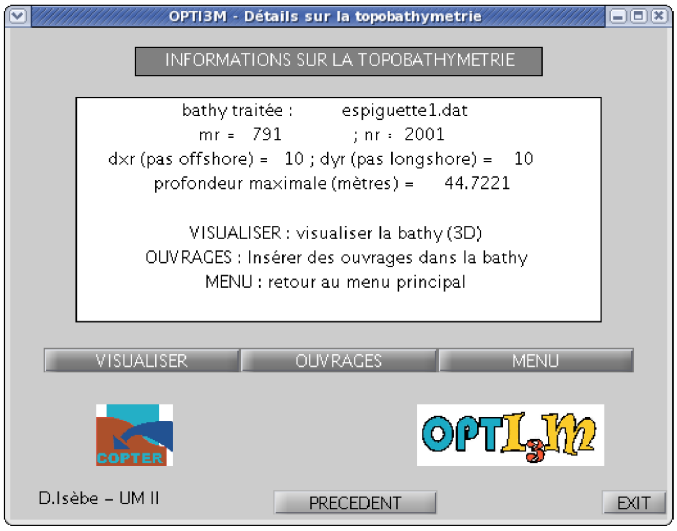


FIG. A.9 – OPTI$_3$M - Interface donnant des détails sur la topobathymétrie choisie. Elle permet également de passer à la génération d'ouvrage(s).

A.7.2 Visualiser la topobathymétrie

- Depuis l'interface 'Détails sur la topobathymétrie' (figure A.9), cliquer sur `VISUALISER` ;
- La topobathymétrie (vue 3D) apparaît alors dans une fenêtre (voir figure A.10). Pour revenir au menu précédent, cliquer sur FERMER.

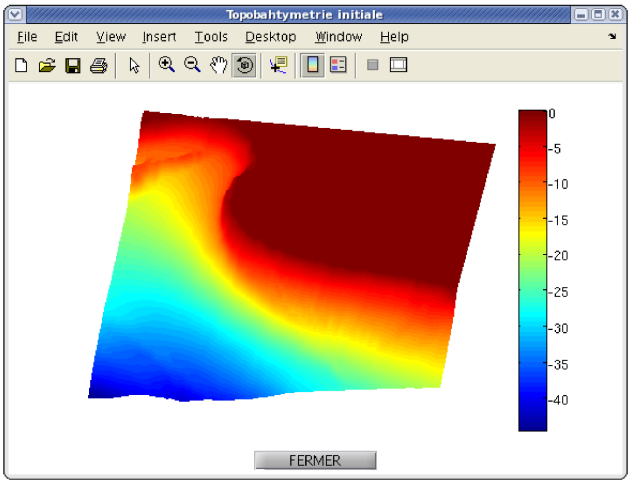


FIG. A.10 – OPTI$_3$M - Visualisation de la topobathymétrie.

A.7.3 Générer des ouvrages

- Depuis l'interface 'Détails sur la topobathymétrie' (figure A.9), cliquer sur `OUVRAGES` ;
- Redirection vers l'interface 'Définition des ouvrages' (voir figure A.11) ;

L'utilisateur peut :

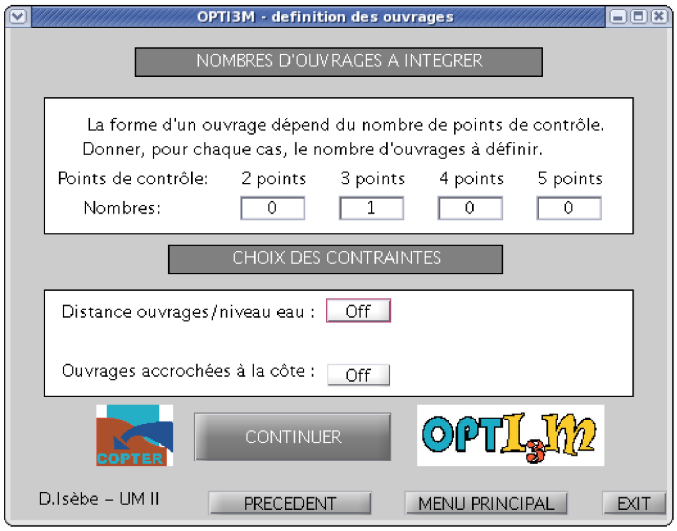


FIG. A.11 – OPTI$_3$M - Définition du nombre d'ouvrages. Ici, on veut générer 1 ouvrage, dont la position est définie par trois points de contrôles.

- **définir le nombre d'ouvrages** à générer ainsi que le nombre de points de contrôle pour chaque ouvrage ;
- **activer (ou non) des contraintes sur les ouvrages** telles que :
  1) distance minimale entre le sommet de l'ouvrage et la surface l'eau ;
  2) obligation pour les ouvrages d'être rattachés à la côte.
- Pour passer à l'étape suivante, l'utilisateur doit cliquer sur `CONTINUER`.

- Redirection vers l'interface 'Paramétrisation des ouvrages' (voir figure A.12).
  L'utilisateur donne les paramètres pour chaque ouvrage (coordonnées pour la position, valeurs pour la hauteur et la largeur).
  Les coordonnées pour la position des ouvrages sont lues directement sur la barthymétrie à l'aide de la souris (voir figure A.12-Haut-Droite).
  Pour passer générer les ouvrages, l'utilisateur doit cliquer sur `FINALISER`.

- Redirection vers l'interface 'Détails sur la topobathymétrie' (figure A.9) et cliquer sur `MENU` pour retourner au menu principal.

A.8 La module CALCUL

Une fois la topobathymétrie définie (voir section A.7), il est alors possible de calculer directement la propagation de houle à partir du modèle REF/DIF.

Les résultats seront stockés dans le sous-répertoire **output**.

IMPORTANT : Avant de lancer un calcul REF/DIF, s'assurer que les valeurs *ixr* et *iyr* dans le fichier *param.h* (OPTI3M/source/refdif/param.h) soient respectivement supérieures ou égales à *mr* et *nr*.

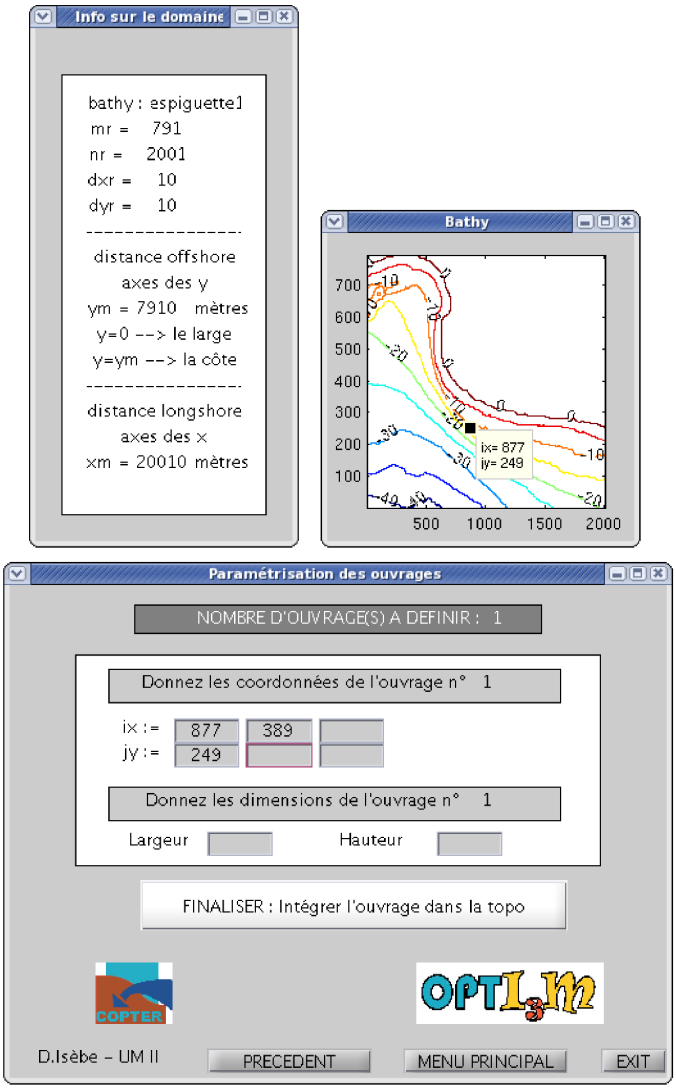


FIG. A.12 – OPTI$_3$M - Paramétrisation des ouvrages. Définition des paramètres pour chaque ouvrage (coordonnées pour la position + hauteur + largeur).

- Depuis le menu principal (figure A.6), L'utilisateur doit cliquer sur `CALCUL` ;
- L'utilisateur est ensuite redirigé vers l'interface 'Données de houle pour REF/DIF' (voir figure A.13)

  L'utilisateur donne les caractéristiques de la houle à simuler (hauteur, période et direction) puis démarre le calcul en cliquant sur `REF/DIF` ;

- Une barre de progression fait état de l'avancement du calcul (figure A.14) ;
- Une fois le calcul terminé, l'utilisateur est redirigé vers le menu principal.

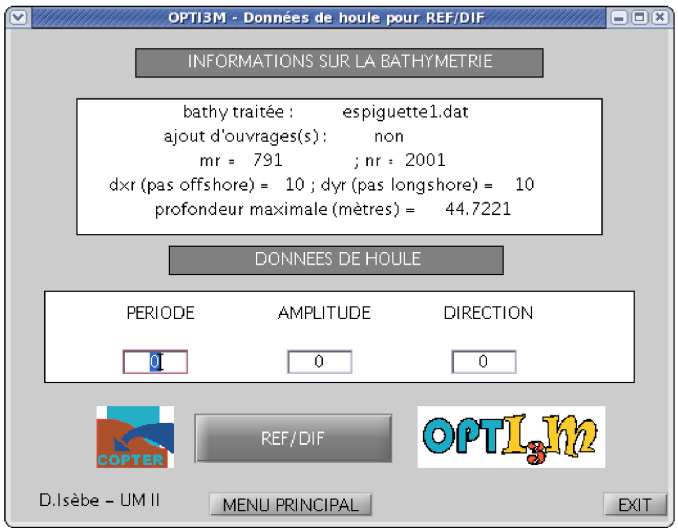


FIG. A.13 – OPTI$_3$M - Données de houle pour REF/DIF.

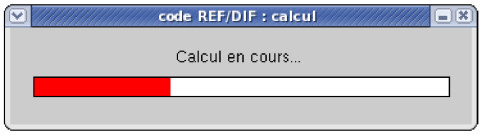


FIG. A.14 – OPTI$_3$M - Barre de progression lors du calcul REF/DIF.

A.9 Le module POST-PROCESS

Après chaque calcul de propagation de houle avec le modèle REF/DIF (voir section A.8), il est possible de visualiser les résultats avec OPTI$_3$M :

- Depuis le menu principal (voir figure A.6), cliquer sur `POST-PROCESS` ;
- Redirection vers l'interface 'Post-processing' (figure A.15) ;

- Il est possibles de visualiser les phénomènes suivants,
  - `HAUTEUR` : Visualisation de la hauteur de houle dans le domaine ;
  - `VITESS ORB.` : Visualisation de la vitesse au fond dans le domaine ;
  - `SURF. LIBRE` : Visualisation de l'élévation de la surface libre dans le domaine ;
  - `BATHY` : Visualisation de la topobathymétrie dans le domaine ;
  - `ANGLE` : Visualisation de la direction de houle dans le domaine.

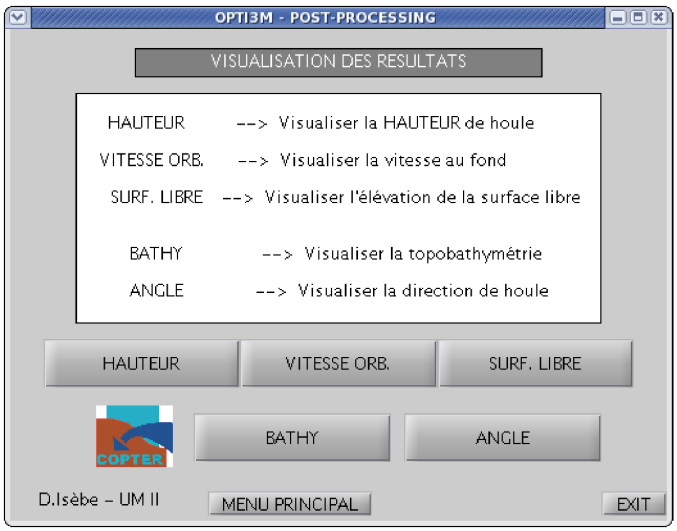


FIG. A.15 – OPTI$_3$M - Post-processing. Plusieurs possibilités pour la visualisation des résultats.

A.9.1 Visualisation du domaine entier

- Après avoir choisi un des onglets (`HAUTEUR`, `VITESS. ORB`, `SURF. LIBRE`, `BATHY`, `ANGLE`) depuis l'interface 'Post-processing' (figure A.15), la fenêtre suivante apparaît,

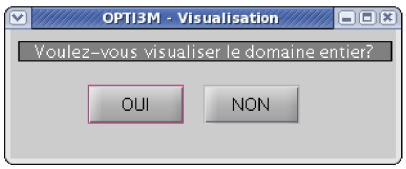


FIG. A.16 – OPTI$_3$M - Voulez-vous visualiser le domaine entier ?

- L'utilisateur doit cliquer sur `OUI` pour visualiser les résultats sur le domaine entier ;

- Les sorties numériques apparaîssent dans une nouvelle fenêtre (figure A.17) ;

- L'utilisateur doit ensuite cliquer sur `FERMER` pour revenir à l'interface 'Post-processing'.

A.9.2 Visualisation d'un sous-domaine

- En cliquant sur `NON` depuis la fenêtre A.16, l'utilisateur peut visualiser les résultats sur une partie du domaine de calcul ;

- L'utilisateur est redirigé vers l'interface 'Découpage du domaine' (figure A.18) ;

- L'utilisateur donne ensuite les bornes du domaine à extraire puis clique sur `Valider` ;

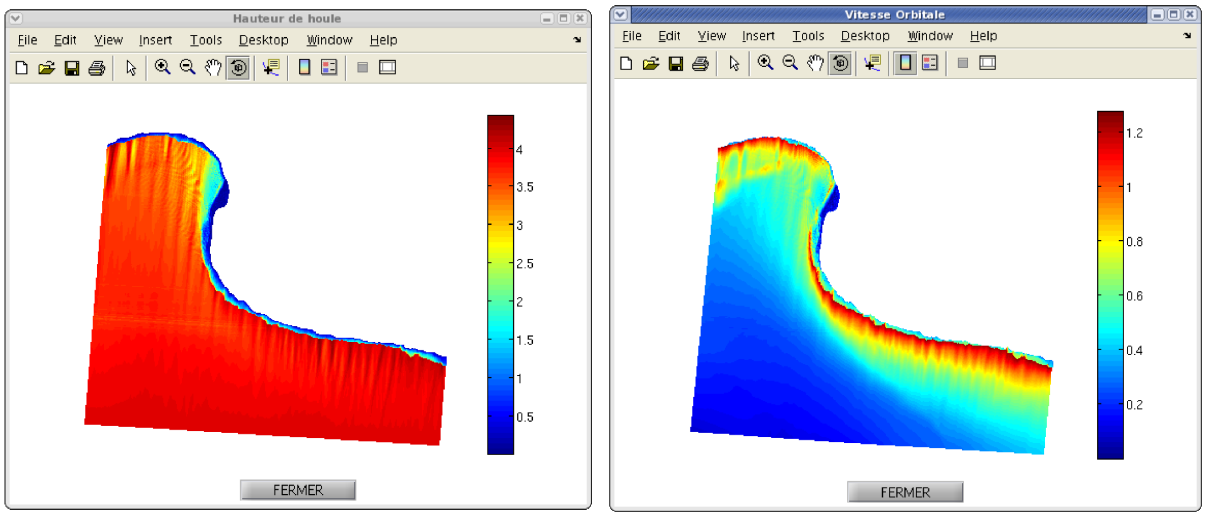


FIG. A.17 – OPTI$_3$M - Exemple de visualisation de résultats - (Gauche) La hauteur de houle ; (Droite) La vitesse au fond.

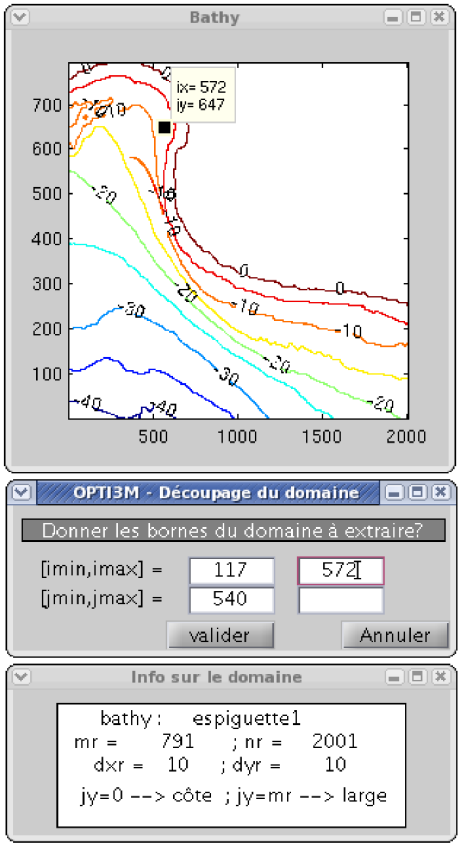


FIG. A.18 – OPTI$_3$M - Découpage du domaine.

- Les sorties numériques apparaîssent dans une nouvelle fenêtre (figure A.19) ;
- L'utilisateur doit cliquer sur `FERMER` pour revenir à l'interface 'Post-processing'.

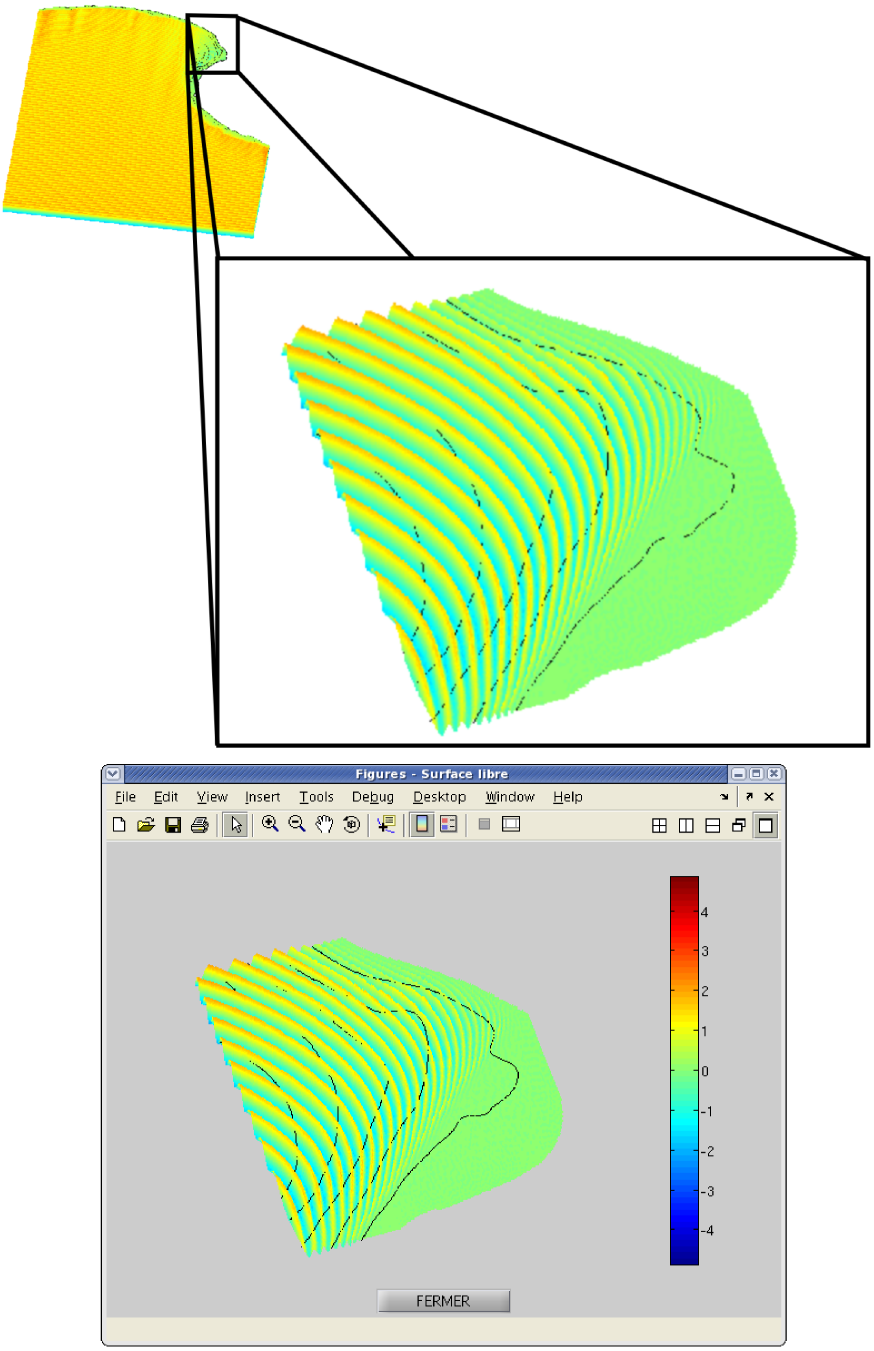


FIG. A.19 – OPTI$_3$M - Exemple de visualisation d'un sous-domaine (ici, on représente la surface libre)- (Haut) Zone à extraire. Les coordonnées dans la fenêtre 'Découpage du domaine' doivent correspondent ; (Droite) Le résultat affiché par OPTI$_3$M.

A.10 Le module OPTIMISATION

Choisir l'onglet `OPTIMISATION` dans le menu principal (figure A.6) permet de configurer de manière très simple un problème d'optimisation en domaine littoral.

A.10.1 Chargement de la topobathymétrie initiale

Dans un premier temps, il faut choisir une topobathymétrie initiale qui permet de définir le domaine sur lequel l'optimisation d'un ou plusieurs ouvrages sera effectuée. Pour cela, l'utilisateur doit choisir un fichier dans la bibliothèque existante (voir figure A.20) puis cliquer sur `OK`.

FIG. A.20 – OPTI$_3$M - Bibliothèque de topobathymétrie.

A.10.2 Détermination des régimes de houle dans le domaine

- L'utilisateur est ensuite redirigé vers l'interface "Données de houle pour l'optimisation" (voir figure A.21).
- L'utilisateur détermine ensuite le ou les régimes de houle pour le site choisi[1], en cliquant sur `AJOUTER` une fois les valeurs "période", "amplitude" et "direction" données.
- Pour passer à l'étape suivante, l'utilisateur doit ensuite cliquer sur le bouton `ETAPE SUIVANTE`.

[1] un régime de houle étant défini ici par une direction, une amplitude et une période

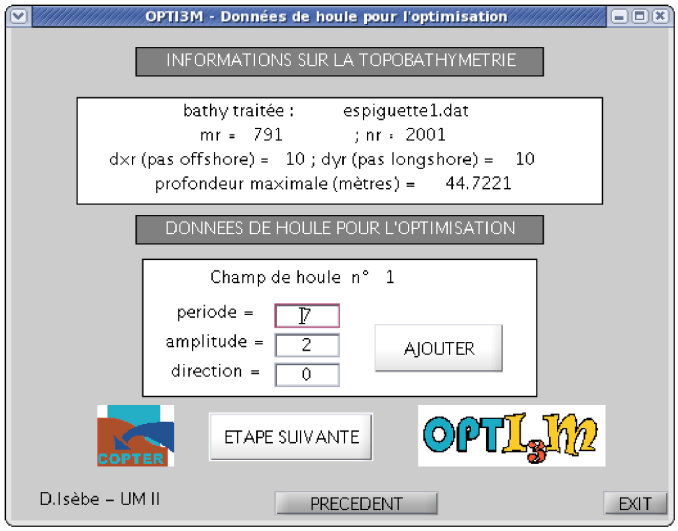


FIG. A.21 – OPTI$_3$M - Determination des données de houle.

A.10.3 Nombre d'ouvrages à optimiser - contraintes sur les ouvrages (facultatif)

– L'utilisateur est ensuite redirigé vers l'interface "Ouvrages pour l'optimisation" (voir figure A.22).

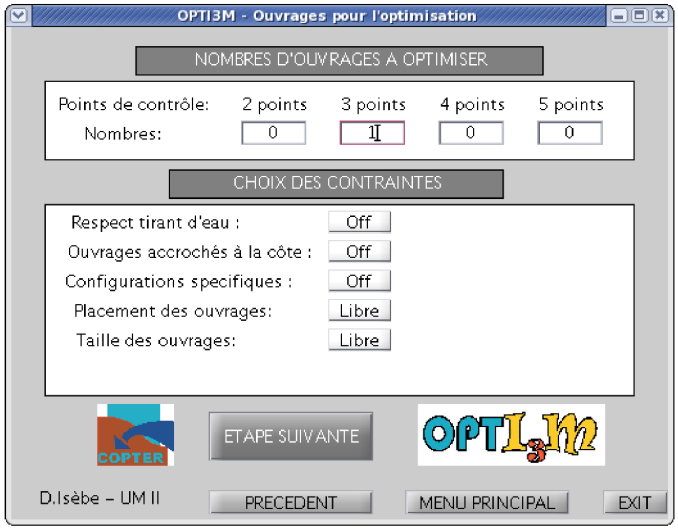


FIG. A.22 – OPTI$_3$M - Determination des données de houle.

– L'utilisateur choisit d'optimiser un ou plusieurs ouvrages définis par 2, 3, 4 ou 5 points de contrôles pour la forme dans le plan. Un ouvrage défini par 2 points de contrôle a une forme rectiligne alors qu'un ouvrage défini par 3 points ou plus aura une forme plus originale obtenue à l'aide de splines passant par ces points.
– L'utilisateur peut également imposer des contraintes sur les ouvrages. Les différents contraintes disponibles dans OPTI3M sont décrites dans le tableau A.23.

Respect tirant d'eau	Off	La hauteur de l'ouvrage est libre (ouvrages émergés ou immergés).
	On Distance: 0	Distance entre le sommet de l'ouvrage et le niveau de l'eau (ouvrages immergés uniquement).
Ouvrages accrochés à la côte	Off	Positionnement libre dans le domaine.
	On	Les ouvrages sont obligatoirement en contact avec le trait de côte (ouvrages de type *épis*).
Configurations spécifiques (permet de gagner du temps)	Off	Pas de configuration spécifique prédéfinie.
	On Config – Lido de Sète	Les ouvrages sont parallèles à la côte avec une largeur fixée. L'optimisation porte sur la distance à la côte et la hauteur des ouvrages (utilisée pour le Lido de Sète).
Placements des ouvrages	Libre	Positionnement libre dans le domaine.
	Aligné	Les ouvrages sont alignés les uns par rapport aux autres (ATTENTION : il faut au moins 2 ouvrages pour l'optimisation).
	Suiv. côte	Les ouvrages sont positionnés parallèlement au trait de côte.
Taille des ouvrages	Libre	Pas de contraintes sur la taille.
	Max val. max.	Les ouvrages n'excèdent pas une taille maximale.
	Min val. min.	Les ouvrages excèdent une taille minimale.
	Min/... val. max. val. min.	Les ouvrages ont une taille comprise entre une taille *min* et une longueur *max*.
	Fixe val. fixe	Les ouvrages ont une taille fixe.

FIG. A.23 – Liste des différentes contraintes sur les ouvrages.

– Pour passer à l'étape suivante, l'utilisateur doit ensuite cliquer sur le bouton `ETAPE SUIVANTE`.

A.10.4 Domaine admissible et paramètres initiaux

– L'utilisateur est ensuite redirigé vers l'interface "Boîte de contrôle" (voir figure A.24).

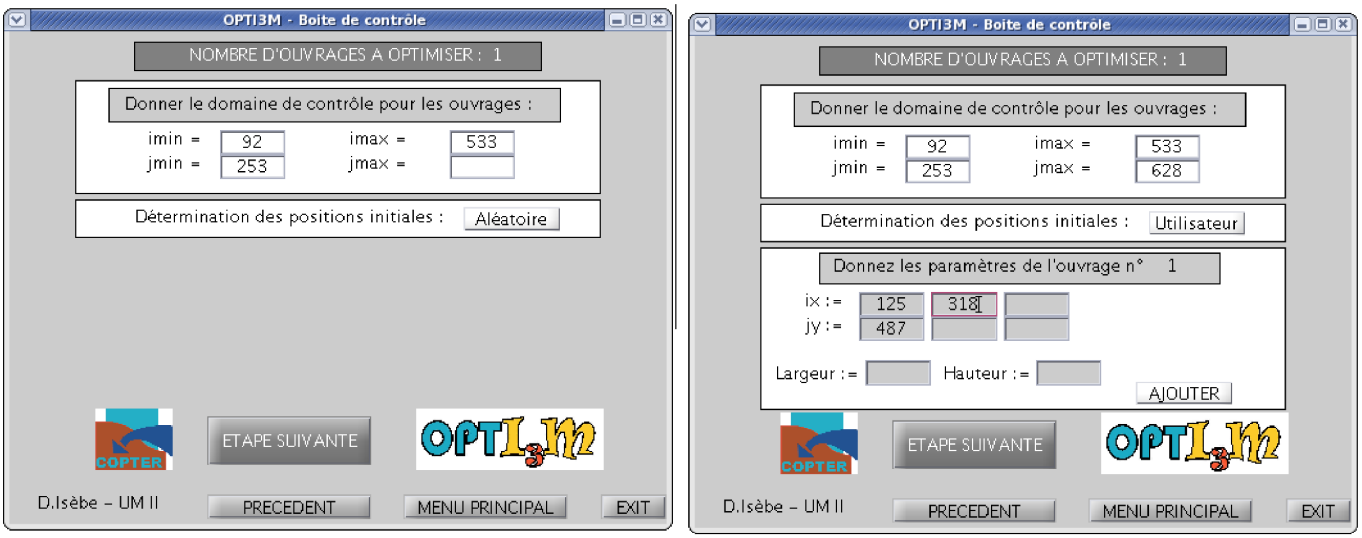


FIG. A.24 – OPTI$_3$M - Boite de contrôle - Coordonnées du domaine admissible + Détermination des positions/dimensions initiales des ouvrages (*Gauche* : de manière aléatoire ; *Droite* : par l'utilisateur).

– L'utilisateur donne les coordonnées du **domaine admissible** pour les paramètres ($imin$, $imax$, $jmin$, $jmax$).
– L'utilisateur détermine ensuite les **paramètres initiaux** (position+dimension) pour chaque ouvrage à optimiser :
  – mode `ALEATOIRE` (figure A.24-Gauche) : Les paramètres initiaux sont pris au hasard dans le domaine admissible défini précédemment ;
  – mode `UTILISATEUR` (figure A.24-Droite) : Les paramètres initiaux sont donnés par l'utilisateur. Cliquer sur `AJOUTER` pour passer à l'ouvrage suivant.
– Pour passer à l'étape suivante, l'utilisateur doit ensuite cliquer sur le bouton `ETAPE SUIVANTE`.

A.10.5 Critère d'optimisation

– L'utilisateur est ensuite redirigé vers l'interface "Définition de la fonction coût" (voir figure A.27).
– L'utilisateur choisit le critère d'optimisation pour le problème. Nous listons dans le tableau A.26 les différentes fonctions coût disponibles dans OPTI3M.
– Pour passer à l'étape suivante, l'utilisateur doit ensuite cliquer sur le bouton `OPTIMISEUR`.

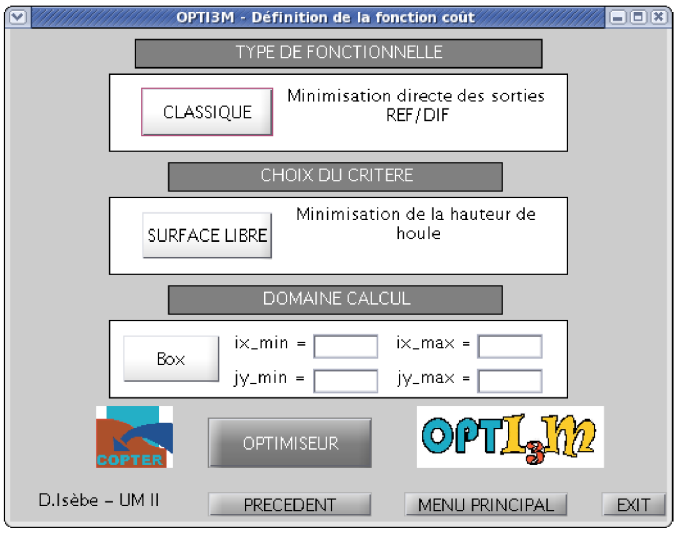


FIG. A.25 – OPTI$_3$M - Définition de la fonction coût - Choix du type de fonction coût - Choix du critère d'optimisation - Choix de la zone à traiter.

A.10.6 Méthode d'optimisation

- L'utilisateur est ensuite redirigé vers l'interface "Global Optimisation" (voir figure A.27).
- L'utilisateur configure les données pour l'algorithme d'optimisation. Pour plus de détails, voir *http ://www.mat.ucm.es/~ivorra/*.
- Pour démarrer l'optimisation, cliquer ensuite sur `START`.

Type	Critère	
CLASSIQUE utilisation des sorties REF/DIF	SURFACE LIBRE	minimisation de la hauteur de houle.
	VITESSE	minimisation de la vitesse orbitale.
SPECIAL utilisation de critères élaborés	ENERGIE	minimisation de l'énergie de mise en suspension du sédiment.
	TRANSPORT	minimisation du transport de sédiment longshore.

FIG. A.26 – Liste des différentes fonctions coût.

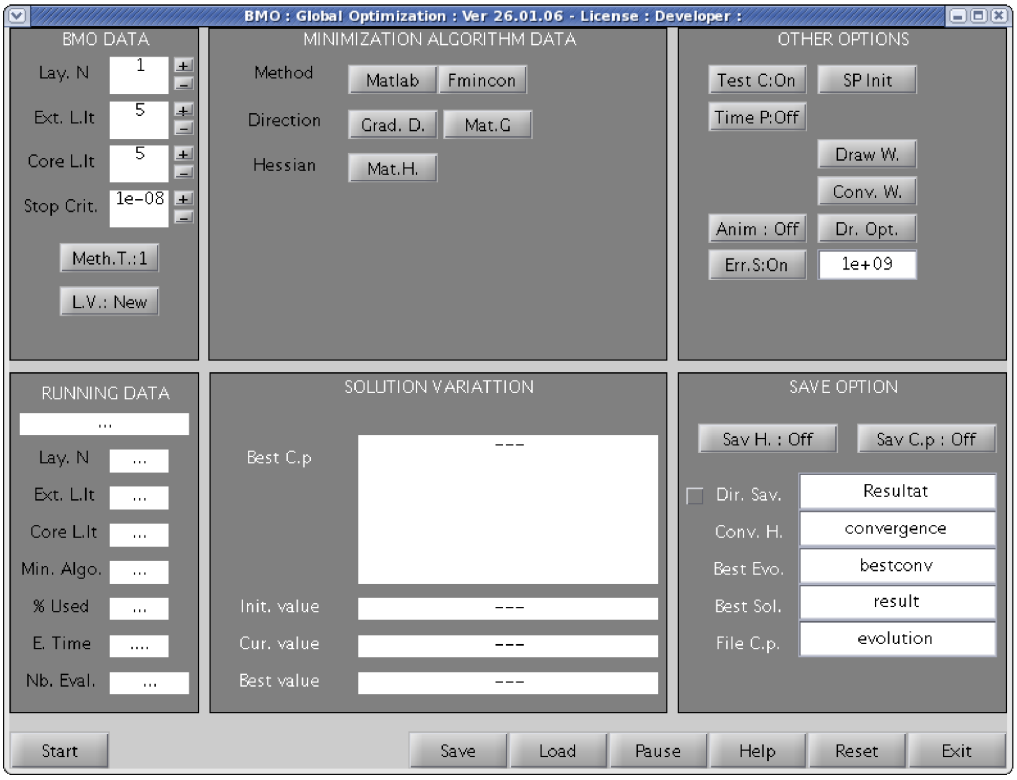


FIG. A.27 – OPTI$_3$M - GOP Plate-forme d'optimisation globale.

Annexe B

Global optimization method

Pour plus de détails sur cette méthode d'optimisation globale, nous invitons le lecteur á se référer aux travaux de Benjamin Ivorra [35].

B.1 Optimization method

In this appendix, we briefly present the global optimization method used for the design of coastal structures. As we said in Chapters 3 and 4, shape design in coastal engineering problems requires a global method because the related cost functions have several local mimima. Moreover, the search space is often non-connected. For example, the optimization of the position for coastal structures is subject to practical, economical or local political impedimenta which may forbid construction on a given zone.

The method, presented here, refers to a multi-layers algorithm which improves the efficiency of a core optimization method. More precisely, the initial condition v of the core optimization algorithm (for example the steepest descent method) is seen as a solution of a recursive minimization algorithm (each external layer uses a secant method to perform the line search). Finally, we show results for two benchmark cases, in particular for non-connected search spaces.

B.1.1 General method

We consider the following minimization problem

$$\min_{x\in\Omega} J(x) \tag{B.1}$$

where $J : \Omega \to \mathbb{R}$ is the cost function, x is the optimization parameter belonging to an admissible space $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, with $N \in \mathbb{N}$. Replacing J by $J - J_{min}$, where J_{min} is the minimum of J, we can assume that $\min_{x\in\Omega} J(x) = 0$.

In this section, we give a short presentation of an original global optimization method used to solve (B.1) (a full description can be found in [35]) :

Consider any optimization algorithm (gradient, Newton, etc...) to solve (B.1). This we call core optimization algorithm. It has an output denoted by $A_0(v_0, N_0, \varepsilon) \in \Omega$ where $v_0 \in \Omega$ is one of its initial condition, $N_0 \in \mathbb{N}^+$ is the number of iterations and $\varepsilon \in \mathbb{R}$

defining the stopping criterion. The parameters N_0 and ε are fixed at the beginning of the optimization process. In the sequel, we denote $A_0(v_0, N_0, \varepsilon)$ by $A_0(v_0)$.

We assume that there exists an initial condition $v_\varepsilon \in \Omega$ such that $A_0(v_\varepsilon)$ approximate the solution of (B.1) with a precision $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. The general idea of the optimization method presented here is to improve the efficiency of any particular core optimization algorithm A_0 by making it global. So, we consider that the minimization problem is solved if and only if the initial condition v_0 lies in the global minimum attraction basin of J. To find such an initial condition, we consider $v_0 = s$ as a new variable and solve the following optimization problem, which is a reformulation of (B.1),

$$\min_{s\in\Omega} J(A_0(s)). \tag{B.2}$$

To perform the minimization (B.2), we propose to use a two-layer semi-deterministic algorithm (here, we use the simplified notation SDA) based on the secant method [59].

The first layer algorithm $A_1(v_1, N_1, \varepsilon)$, where the number of iterations $N_1 \in \mathbb{N}^+$ is fixed, requests the algorithm A_0. It reads :

- `Input :` v_1, N_1, ε
- v_2 `chosen randomly`

`For` i `going from 1 to` N_1
  - $o_i = A_0(v_i)$
  - $o_{i+1} = A_0(v_{i+1})$
  - `If` $J(o_i) = J(o_{i+1})$ `EndFor`
  - `If` $min\{J(o_k)_{k=1,\dots,i}\} < \varepsilon$
    `EndFor`
  - $v_{i+2} = v_{i+1} - J(o_{i+1}) \frac{v_{i+1}-v_i}{J(o_{i+1})-J(o_i)}$

`EndFor`
- `Output :` $A_1(v_1, N_1, \varepsilon) := argmin\{J(o_k), k = 1, ..., i\}$

Note that the step $v_{i+2} = v_{i+1} - J(o_{i+1}) \frac{v_{i+1}-v_i}{J(o_{i+1})-J(o_i)}$ is the secant method applied to the new functional $v \mapsto J(A_0(v))$.

However, as this line search minimization algorithm might fail, an external level A_2 is added to the algorithm A_1 to have a multidimensional search. Hence, $v_1 = w$ is seen as a new variable in A_1 and solve the following optimization problem, which is a reformulation of (B.2),

$$\min_{w\in\Omega} J(A_1(w)). \tag{B.3}$$

To perform the minimization (B.3), we consider a two-layer algorithm, with an output called $A_2(w_1, N_2, \varepsilon)$, where the number of iterations $N_2 \in \mathbb{N}^+$ is fixed, which calls algorithm A_1 (which in turn calls A_0). It reads :

- `Input :` w_1, N_2, ε
- w_2 `chosen randomly`

`For` i `going from 1 to` N_2

- $p_i = A_1(w_i)$
- $p_{i+1} = A_1(w_{i+1})$
- `If` $J(p_i) = J(p_{i+1})$ `EndFor`
- `If` $\min\{J(p_k)_{k=1,\dots,i}\} < \varepsilon$
  `EndFor`
- $w_{i+2} = w_{i+1} - J(p_{i+1}) \frac{w_{i+1}-w_i}{J(p_{i+1})-J(p_i)}$

`EndFor`

- `Output` : $A_2(w_1, N_2, \varepsilon) := argmin\{J(p_k), k = 1, ..., i\}$

Again, the step $w_{i+2} = w_{i+1} - J(p_{i+1}) \frac{w_{i+1}-w_i}{J(p_{i+1})-J(p_i)}$ is the secant method applied to the new functional $w \mapsto J(A_1(w))$.

In practice, we randomly choose the initial condition $w_1 \in \Omega$ and we consider $(N_0, N_1, N_2) = (10, 5, 5)$. These values give a good compromise between computation complexity and result accuracy. This algorithm was first described in [59], along with mathematical background. It has been validated on various benchmark test cases (see the works of B. Ivorra [35]) and industrial applications [37, 36, 23, 38].

To illustrate the method, we expose in picture B.1 a sketch of one iteration of the algorithm A_1 and, in picture B.2, a graphical representation of one iteration of the algorithm A_2 (We denote the functional $v \mapsto J(A_0(v))$ by $h(v)$).

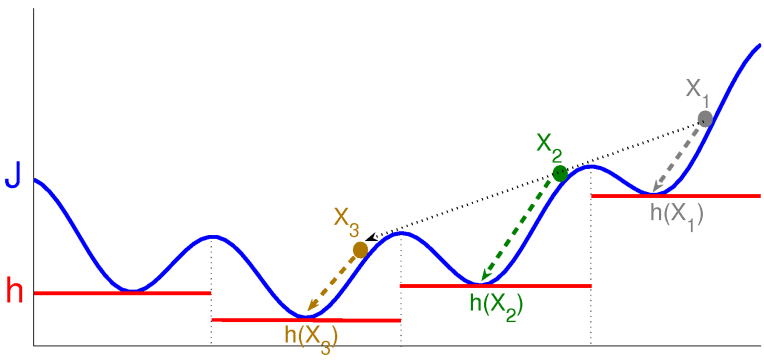


FIG. B.1 – Sketch of one iteration of the algorithm A_1 with the secant method for line-search and the steepest descent method as core optimization method. $h(X_2) = J(A_0(X_2))$ is lower than $h(X_1) = J(A_0(X_1))$, thus X_3 is built starting from X_2 and considering the direction $\vec{X_1X_2}$.

B.2 Application to benchmark functions

B.2.1 1st or 2nd order systems

Algorithm A_2 is applied to the minimization of two functions (see figure B.3) :

$$J_1(x) = x^2 + 10\sin(2\pi x), \quad J_2(x) = 10(1 - \cos(\frac{\pi}{6}x)) - 10\cos(2\pi x) + 10, \quad x \in [-10, 10]$$

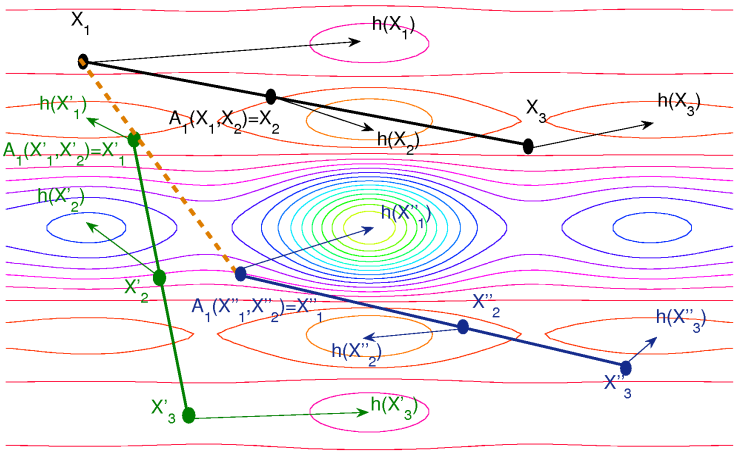


FIG. B.2 – Graphical representation of one iteration of the algorithm A_2 with the secant method for linesearch in both layers and the steepest descent method as core optimization method. $A_1(X_1')$ is lower than $A_1(X_1)$, thus X_1'' is built starting from X_1' and considering the direction $\vec{X_1'X_1}$.

The second functional is more difficult to minimize. Intermediate results given by the algorithm are shown in the picture B.3. For the first functional minimization J_1, algorithms based on the discretization of either first ($\eta = 0$) or second order dynamical systems are efficient, while minimizing J_2 is only successful with a core minimization based on the discretization of a second order dynamical system. This example shows the advantage of considering core optimization methods coming from the discretization of second order dynamical systems.

B.2.2 Modified Rastrigin function

We apply the algorithm A_2 to the minimization of a modified Rastrigin function (this is tougher than the original Rastrigin function $J(x) = \sum_{j=1}^{n}(x_j^2 - \cos(\alpha x_j)), \alpha \in \mathbb{R}$) :

$$J(x) = \sum_{j=1}^{n}(sin(x_j)^2 - \cos(18x_j)), \qquad x \in [-2, 2]^n \tag{B.4}$$

The minimum of J is $J_m = 0$ and it is reached at the origin. A two-dimensional representation of this function is given in figure B.4.

Picture B.5 shows that the complexity of the algorithm remains low even for large dimension minimization problems. The application of this algorithm to other academic test cases is available in [35].

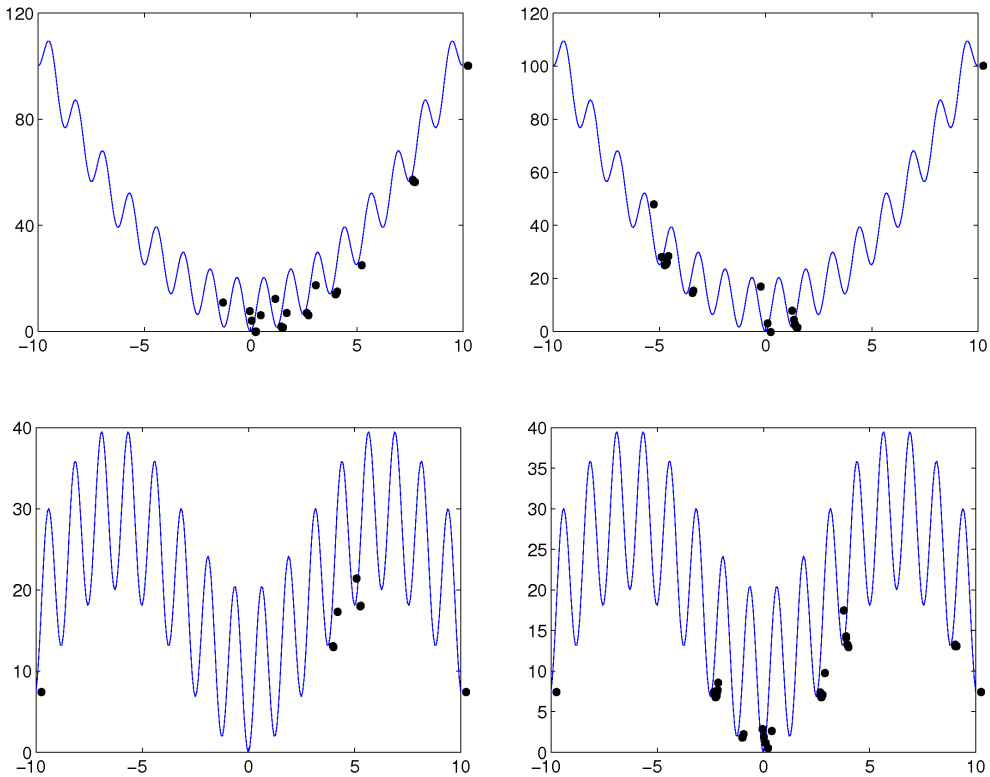


FIG. B.3 – Behavior of the recursive algorithm for two non-convex functionals using 1st (left column) and 2nd (right column) order dynamical systems as core minimization algorithms. Dots show intermediate visited minima.

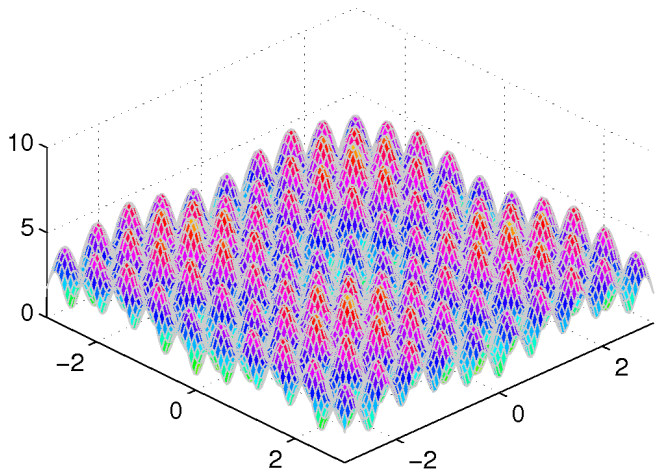


FIG. B.4 – Modified Rastrigin functional in two dimensions.

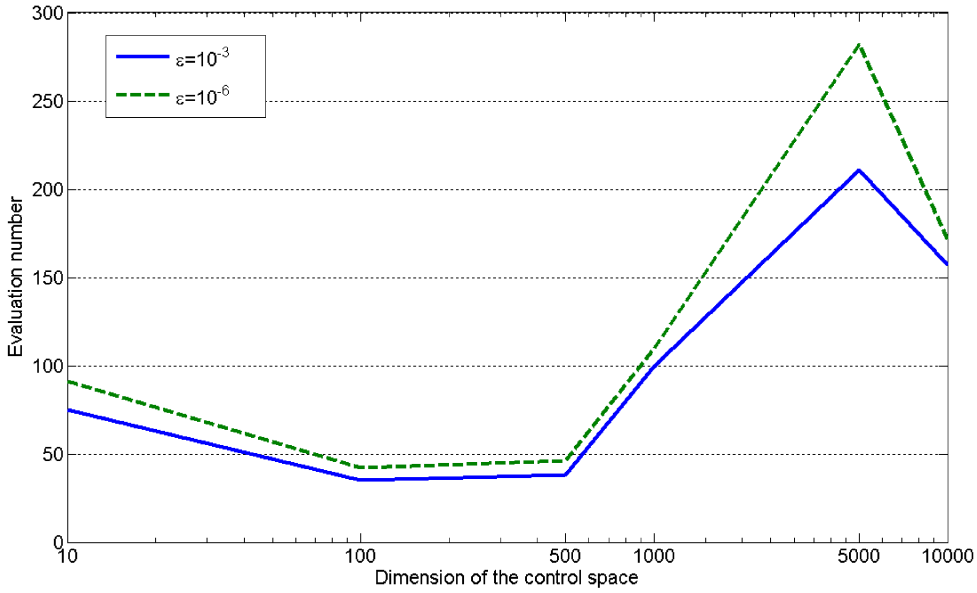


FIG. B.5 – Modified Rastrigin function. Total number of functional evaluations vs. the parameter space dimension for two required accuracy $\varepsilon = 10^{-3}$ and $\varepsilon = 10^{-6}$.

B.2.3 Non-connected search spaces

The search space was obviously connected in the previous examples. In applications this is not always the case. Most important, the disconnectedness is not a priori and explicitly known. For instance, it might be defined by an implicit constraint. In cases where the search space is a priori known to be disconnected, one can introduce extra variables making the search space connected. But, still this is not a competitive option for large dimension problems.

One advantage of our approach is to permit direct treatment of disconnected search spaces. This is illustrated minimizing $J(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2$ defined on an unconnected domain K_{ad} shown in figure B.6. The starting point is chosen voluntarily in component X_1 of the domain, while the infimum is reached in component X_2. To demonstrate the behavior of the algorithm the descent step size is forced to 10^{-5} and $\eta = 0$. The steepest descent method alone is trapped in domain X_1 (figure B.7-*Left*). The trajectory follows the border in X_1 due to the projected gradient approach and reaches the point $(-2, 0)$ which is the global minimum in X_1 but only a local minimum over K_{ad}. On the other hand, with algorithm A_2 the global minimum is found (figure B.7-*Right*).

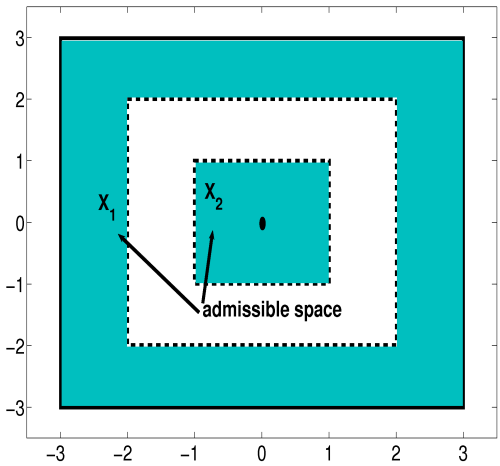


FIG. B.6 – In grey, the admissible space K_{ad}.

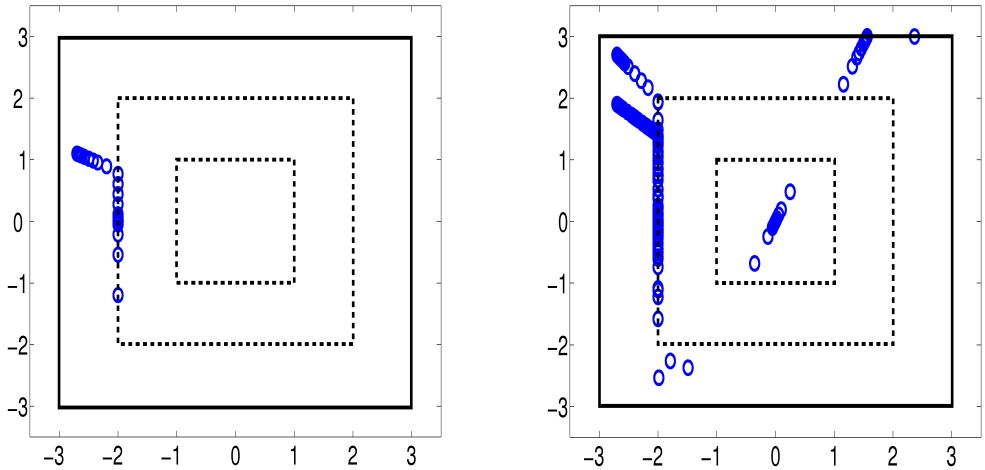


FIG. B.7 – Trajectories of the steepest descent alone (*Left*) and using SDA (*Right*).

Bibliographie

[1] http ://www.beachmed.it.

[2] N. Alibaud, P. Azerad, and D. Isèbe. A non-monotone conservation law for dune morphodynamics. *Preprint*, 2007.

[3] B. Alvarez-Samaniego and P. Azerad. Travelling-wave solutions of the Fowler equation for dunes. *In preparation*, 2007.

[4] F. Ardhuin. Les vagues : hydrodynamique. *http ://www.shom.fr/fr_page/fr_act_oceano/vagues/PLUS/COURS/cours_vagues_2004.pdf.*

[5] E. Arian and S. Ta'asan. Analysis of the hessian for aerodynamic optimization : inviscid flow. *Compt. & Fluids*, 28(7) :853–877, 1999.

[6] J.C.W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In ASCE., editor, *Proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vancouver*, pages 471–490, 1972.

[7] J. Bertoin. *Lévy Processes.* Cambridge Univ. Press, 1996.

[8] E.C.F. Bird. *Coastline changes, A global review.* Wiley, Chischester, 1985.

[9] N. Booij. Gravity waves on water with non-uniform depth and current. *(PhD thesis) Technical University of Delft, The Netherlands*, 1981.

[10] N. Booij. A note on the accuracy of the mild slope equation. *Coastal Engineering*, 7 :191–203, 1983.

[11] F. Bouchette. Interaction houle / sédiment La rampe carbonatée du bassin du Sud-Est au Jurassique terminal. *PhD Thesis, Université de Montpellier II*, 2001.

[12] B. Carnahan, H.A. Luther, and J.O. Wilkes. Applied numerical methods. *Wiley, New-York*, 1969.

[13] R. Certain. Morphodynamique d'une côte sableuse microtidale à barres : le Golfe du Lion (Languedoc-Roussillon). *Unpublished thesis, Université de Perpignan*, (2002) :1–209.

[14] A. Chawla, H.T. Ozkan-Haller, and J.T. Kirby. Spectral model for wave transformation over irregular bathymetry. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 124 :189–198, 1998.

[15] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory.* Springer-Verlag, 1992.

[16] C. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol II.* Interscience Publishers, 1962.

[17] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol I.* Interscience Publishers, 1953.

[18] T.A. Davis. A column pre-ordering strategy for the unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 30(2) :165–195, 2004.

[19] T.A. Davis and I.S. Duff. An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse lu factorization. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18(1) :140–158, 1997.

[20] A.T. de Hoop. *Handbook of Radiation and Scattering of Waves.* Academic Press, 1995.

[21] R.G. Dean and R.A. Dalrymple. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. Vol 2.* World Scientific Publishing, 1991.

[22] R.G. Dean and R.A. Dalrymple. *Coastal Processes with Engineering Applications.* Cambridge University Press, 2004.

[23] L. Debiane, B. Ivorra, B. Mohammadi, F. Nicoud, T. Poinsot, A. Ern, and H. Pitsch. A low-complexity global optimization algorithm for temperature and pollution control of a complex chemistry flame. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 20(2) :93–98, 2006.

[24] C. Denamiel. Modélisation Hydrodynamique 3D en zone pré-littorale : Caractérisation des effets des houles de tempête sur la circulation océanique. *PhD Thesis, Université de Montpellier II*, 2006.

[25] P.G. Drazin and W.H. Reid. Hydrodynamic stability. *C.U.P, Cambrige*, 1981.

[26] J. Droniou, T. Gallouet, and J. Vovelle. Global solution and smoothing effect for a non-local regularization of an hyperbolic equation. *J. Evol. Equ.*, 3(3) :499–521, 2003.

[27] F. Engelund. Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.*, 42 :225–244, 1970.

[28] J. Fontbona. Nonlinear martingale problems involving singular integrals. *J. Funct. Anal.*, 200 :198–236, 2003.

[29] A.C. Fowler. Dunes and drumlins. *Geomorphological fluid mechanics, eds. A. Provenzale and N. Balmforth, Springer-Verlag, Berlin*, 211 :430–454, 2001.

[30] A.C. Fowler. Evolution equations for dunes and drumlins. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A. Mat*, 96(3) :377–387, 2002.

[31] N. Fraysse. Aménagement du lido de sète à marseillan. protection de la partie nord du lido : étude comparative de solutions. *Technical report, Bas-Rhône Languedoc Ingénierie*, 2006.

[32] D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Ivorra, and B. Mohammadi. Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering (To appear)*, 2007.

[33] D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, and B. Mohammadi. Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. *Coastal Engineering*, 55(1) :35–46, 2007.

[34] D. Isèbe, F. Bouchette, P. Azerad, B. Ivorra, B. Mohammadi, and R. Certain. An introduction to the design of beach defence structures by numerical shape optimization. *In preparation*, 2007.

[35] B. Ivorra. Optimisation globale semi-déterministe et applications industrielles. *PhD Thesis. Université de Montpellier II*, 2006.

[36] B. Ivorra, B. Mohammadi, L. Dumas, P. Redont, and O. Durand. Semi-Deterministic vs. Genetic Algorithms for Global Optimization of Multichannel Optical Filters. *International Journal of Computational Science and Engineering*, 2(3) :170– 178, 2006.

[37] B. Ivorra, B. Mohammadi, D.E. Hertzog, and J.G. Santiago. Semi-deterministic and genetic algorithms for global optimization of microfluidic protein-folding devices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley InterScience*, 66(2) :319–333, 2006.

[38] B. Ivorra, A.M. Ramos Del Olmo, and B. Mohammadi. A semi-deterministic global optimization method. application to a control problem of the burger equation, comparing with other methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 135(1), 2007.

[39] L.A. Jackson, R. Tomlinson, J. McGrath, and I. Turner. Monitoring of a multifunctional submerged geotextile reef breakwater. *Proc. 28th International Conference on Coastal Engineering*, pages 1923–1935, 2002.

[40] J.F. Kennedy. The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels. *J. Fluid Mech.*, 16 :521–544, 1963.

[41] J. T. Kirby and R. A. Dalrymple. Combined Refraction/Diffraction Model REF/DIF 1, version 2.5. documentation and user's manual. *Research Report No. CACR-94-22,Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark*, 1994.

[42] J. T. Kirby and R. A. Dalrymple. REFDIF1 v2.5 Refraction Diffraction model. *Technical report, CACR. Short A.D 1999. Beach and Shoreface Morphodynamics*, Wiley :380, 1995.

[43] J.T. Kirby and R.A. Dalrymple. A parabolic equation for the combined refraction diffraction of stokes waves by mildly varying topography. *J. Fluid. Mechanics*, 136 :443–466, 1983.

[44] J.T. Kirby and R.A. Dalrymple. Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves. *Coastal Engineering*, 8 :219–232, 1984.

[45] J.T. Kirby and R.A. Dalrymple. Combined refraction/diffraction model REF/DIF 1, user's manual. *Coastal and Offshore Engineering and Research, Inc., Newark, DE., January*, 1985. (Revised June, 1986).

[46] J.T. Kirby and R.A. Dalrymple. Wave modification in the vicinity of islands. REF/DIF 1 documentation manual. *Coastal and Offshore Engineering and Research, Inc., Newark, DE., January*, 1985. (Revised June, 1986).

[47] A. Lamberti, R. Archetti, M. Kramer, D. Paphitis, C. Mosso, and M. Di Risio. European experience of low crested structures for coastal management. *Coastal Engineering*, 52(11-12) :841–866, 2005.

[48] A. Lamberti and A. Mancinelli. Italian experience on submerged barriers as beach defence structures. *Proc. 25th International Conference on Coastal Engineering. ASCE, Orlando, USA*, 2 :2352–2365, 1996.

[49] L. Landau and E. Lifschitz. *Fluids Mechanics course of theoritical physics.* Pergamon Press, 1959.

[50] J.L. Lions. *Controle des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod, 1968.

[51] J.L. Lions and R. Dautray. *Analyse Mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* Masson, 1984.

[52] C.C. Mei. *The applied dynamics of ocean surface waves. Vol I.* World Scientific Publishing, 1989.

[53] C.C. Mei and E.O. Tuck. Forward scattering by long thin bodies. *SIAM J. Appl. Math.*, 39(1) :178–191, 1980.

[54] C.C. Mei and D.K.P. Yue. Forward diffraction of stokes waves by a thin wedge. *J. Fluid Mech.*, 99(1) :33–52, 1980.

[55] S. Meulé, V. Rey, R. Certain, and C. Pinazo. Wave transformation on a microtidal barred beach (Sète,France). *Journal of Marine System*, 38 :19–34, 2005.

[56] E. Meyer-Peter and R. Muller. Formulas for bed-load transport. *IAHSR, Stockholm*, pages 39–64, 1948.

[57] B. Mohammadi. Optimization of aerodynamics and acoustic performances of supersonic civil transports. In CA.In Press, editor, *Proceeding of the Summer Program*, Center for Turbulence Research, Stanford University, USA, 2002.

[58] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied shape optimisation for fluids.* Oxford University Press, 2001.

[59] B. Mohammadi and J-H. Saiac. *Pratique de la simulation numérique.* Dunod, 2003.

[60] R. Paskoff. *Côtes en danger.* Ed. Masson., 1993.

[61] R. Paskoff. *Les plages vont-elles disparaître ?* Le Pommier, 2006.

[62] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, 1983.

[63] O.M. Phillips. The dynamics of the upper ocean. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1966.

[64] A. C. Radder. On the parabolic equation method for water-wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 95(1) :159–176, 1979.

[65] A. W. Raichle. Numerical predictions of surfing conditions at mavericks, california. *Shore and Beach*, 66(2) :26–30, 1998.

[66] Ramoge. *La défense des plages contre l'érosion. Guide à l'attention des maîtres d'ouvrages.* www.ramoge.org, 2002.

[67] R. Ranasinghe and I.L. Turner. Shoreline response to submerged structures : a review. *Coastal Engineering*, 53 :65–79, 2006.

[68] W.H. Reid. Composite approximations to the solution of the orr-sommerfeld equation. *Stud. Appl. Math.*, 51 :341–368, 1972.

[69] A. Shields. Application of similarity principles and turbulence research to bed load movement. *US Dept of Agr., Soil Conservation Service Cooperative Laboratory, California Institute of Technology, Passsadena, Calif*, 1936.

[70] S.H.O.M. Tide tables. tome 1, french harbors. *Edition 2003.*

[71] J. R. Smith and P. Wessel. Isostatic consequences of giant landslides on the hawaiian ridge. *Pure Appl. Geophys.*, 157(B12) :1097–1114, 2000.

[72] J.D. Smith. Stability of a sand bed subjected to a shear flow of low froude number. *J. Geophys. Res.*, 75 :5928–5940, 1970.

[73] A. Sommerfeld. *Partial differential equations in Physics.* Academic Press, 1949.

[74] E. Tadmor. The well-posedness of the kuramoto-sivashinsky equation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 17 :884–893, 1986.

[75] U. Tomasscicchio. Submerged breakwaters for the defence of the shoreline at ostia : field experiences, comparison. *Proc. 25th International Conference on Coastal Engineering. ASCE, Orlando, USA*, pages 2404–2417, 1996.

[76] C.L. Vincent and M.J. Briggs. Refraction-diffraction of irregular waves over a mound. *Coastal and Ocean Eng.*, J.Waterway(115) :269–284, 1989.

[77] P. Wessel and W. H. F. Smith. Free software helps map and display data. *EOS Trans. AGU*, 72(441), 1991.

[78] P. Wessel and W. H. F. Smith. New improved version of the generic mapping tools released. *EOS Trans. AGU*, 79(579), 1998.

[79] P.A. Work and J.M. Kaihatu. Wave transformation at pensacola pass, florida. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 123 :314–321, 1997.

[80] B. Zanuttigh, L. Martinelli, A. Lamberti, P. Moschella, S. Hawkins, S. Marzetti, and V.U. Ceccherelli. Environmental design of coastal defence in lido di dante, italy. *Coastal Engineering*, 52 :1089–1125, 2005.

Résumé - Cette thèse est divisée en deux parties, la première étant principalement basée sur des simulations numériques en génie côtier alors que la deuxième a une saveur plus théorique. Dans la première partie, des techniques d'optimisation de formes, portant sur la conception d'ouvrages de défense en mer, sont utilisées dans des problèmes du génie côtier. La protection d'une zone portuaire, dont le modèle sollicite des équations simplifiés pour la propagation de la houle, est d'abord étudiée. Ensuite, en collaboration avec le bureau d'étude Bas-Rhône Languedoc ingénierie, nous traitons un problème de protection de plage sableuse concret (Lido de Sète, Mer Méditerrannée, France). Le modèle utilisé tient compte des phénomènes de réfraction et diffraction de la houle proche des ouvrages. Dans la seconde partie, un modèle non local d'évolution de dunes immergées, initialement introduit par A.C. Fowler d'après la propagation de vagues en régime fluvial, a été étudié. L'existence et l'unicité d'une solution régulière pour la forme du fond sont obtenues à partir d'une dune initiale dans L^2. Notons que cette loi de conservation enfreint le principe du maximum.

Mots-clés : *optimisation de formes, simulation numérique, scattering, propagation de la houle, génie côtier, loi de conservation non-linéaire, opérateur non-local, principe du maximum.*

Summary - This thesis is divided in two parts, the first one consisting mainly in numerical simulation for coastal engineering, whereas the second one has a more theoretical flavor. In the first part, shape optimization techniques, focusing on coastal structures design, are used to solve coastal engineering problem. First, we study the issue of the protection of a harbor or an offshore structure. This problem is based on simplified equations for the water waves propagation. Then, in collaboration with the Bas-Rhône Languedoc Engineering Company, we consider an actual sandy beach protection problem (Lido de Sète, Mer Méditerrannée, France). The physical model takes into account both refraction and diffraction phenomena close to structures. In the second part, a non-local non linear conservation law, first introduced by A.C. Fowler, for submerged dunes is studied. We show existence and uniqueness of a regular solution based on an initial dune characterized by a L^2 function. Note that, due to the non-local term, this conservation law violates the maximum principle.

Key-words : *shape optimisation, numerical simulation, water wave propagation, coastal engineering, non-local model, non linear conservation law, non local operator, maximum principle.*

Isèbe Damien

Université Montpellier II
Laboratoire I3M- CNRS UMR 5149
CC 051 - Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5 (France)
email : isebe@math.univ-montp2.fr