



**HAL**  
open science

# Parameter dependent design by finite dimensional LMI optimisation: application to the design of trade-off dependent controllers

Marc Dinh

► **To cite this version:**

Marc Dinh. Parameter dependent design by finite dimensional LMI optimisation: application to the design of trade-off dependent controllers. Automatique / Robotique. Université de Caen, 2005. Français. NNT: . tel-00253863

**HAL Id: tel-00253863**

**<https://theses.hal.science/tel-00253863>**

Submitted on 13 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE**

**U.F.R. : SCIENCES CAEN**

**ECOLE DOCTORALE : SIMEM**

**THÈSE**

présentée par

**M. Marc DINH**

et soutenue

**le 02 décembre 2005**

en vue de l'obtention du

**DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE**

**Spécialité : Automatique, robotique**

**(Arrêté du 25 avril 2002)**

TITRE :

**SYNTHÈSE DÉPENDANT DE PARAMÈTRES  
PAR OPTIMISATION LMI DE DIMENSION FINIE :  
APPLICATION A LA SYNTHÈSE  
DE CORRECTEURS RÉRÉGLABLES**

MEMBRES du JURY

<b>MM. C. Dubuc</b>	Professeur des Universités à l'Université de Caen (Président)
<b>V. Fromion</b>	Chargé de Recherche à l'INRA de Jouy-en-Josas (Co-encadrant)
<b>D. Mehdi</b>	Professeur des Universités à l'Université de Poitiers (Rapporteur)
<b>M. M'Saad</b>	Professeur des Universités à l'ENSICAEN (Directeur de thèse)
<b>G. Scorletti</b>	Maître de Conférences à l'Université de Caen (Co-encadrant)
<b>M. Zasadzinski</b>	Professeur des Universités à l'IUT de Longwy (Rapporteur)



*À toute ma famille.  
À tous mes amis.*



## Remerciements

Les travaux présentés dans ce document ont été effectués dans le cadre d'une allocation de recherche du Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie (contrat n° 7088–2002) et en collaboration entre l'Équipe Automatique du GREYC (Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation, UMR CNRS 6072) de Caen dirigé par Monsieur M. M'Saad et le LASB (Laboratoire d'Analyse des Systèmes et Biométrie), INRA de Montpellier, dirigé par Monsieur P. Vila. Je tiens à les remercier pour leur accueil au sein de leur laboratoire respectif. Les encadrants ont été Messieurs M. M'Saad et G. Scorletti pour le GREYC et Monsieur V. Fromion pour le LASB.

Je tiens à remercier Messieurs D. Mehdi et M. Zasadzinski pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ce document. Je suis honoré que Monsieur C. Dubuc ait accepté de présider le jury de thèse.

Mes chaleureux remerciements à Messieurs G. Scorletti et V. Fromion pour leur précieux temps consacré à l'encadrement de cette thèse. Je les remercie pour l'apport autant scientifique qu'humain qu'ils ont su me transmettre. Je tiens aussi à remercier Mademoiselle A. Goelzer pour sa participation active à la partie canaux.

Je remercie Monsieur Éric Magarotto pour avoir été mon tuteur de monitorat à l'Université de Caen/Basse-Normandie (contrat n° 02–21206) pendant ces trois années, ainsi que les personnes avec qui j'ai pu travaillé en tant qu'enseignant. En vrac : M. M'Saad, O. Gehan, E. Pigeon, M. Pouliquen, P. Dorleans...

Je remercie également tous les doctorants et les membres de l'Équipe Automatique du GREYC. Ainsi que toutes les personnes qui m'ont soutenu et/ou aidé durant cette thèse. Un grand merci aux secrétaires pour leur aide.



<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
<b>1 Vérification d'inégalités dépendant de paramètres</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Introduction à travers l'étude des propriétés des systèmes linéaires stationnaires . . . . .	20
1.3 Représentation LFT des systèmes interconnectés . . . . .	25
1.4 Étude des propriétés d'interconnexions de gains dépendant de paramètres . . . . .	27
1.4.1 Étude de la performance d'interconnexions de gains dépendant de paramètres . . . . .	28
1.4.2 Étude du bien posé d'interconnexions de gains dépendant de paramètres . . . . .	37
1.4.3 Étude de deux cas d'interconnexions de gains dépendant de paramètres . . . . .	41
1.5 Représentation LFT des fonctions rationnelles . . . . .	46
1.6 Inégalités dépendant rationnellement de paramètres . . . . .	50
1.7 Conclusion . . . . .	53
<b>2 Optimisation LMI dépendant de paramètres</b>	<b>55</b>
2.1 Introduction . . . . .	55
2.2 Optimisation LMI indépendant de paramètre . . . . .	56
2.2.1 Problème d'optimisation indépendant de paramètre . . . . .	56
2.2.2 Problèmes d'optimisation LMI indépendant de paramètre . . . . .	57
2.2.3 Variables de décision matricielles . . . . .	60
2.3 Optimisation LMI dépendant de paramètres . . . . .	60
2.3.1 Problèmes d'optimisation LMI dépendant de paramètres . . . . .	61
2.3.2 Variables de décision matricielles . . . . .	62
2.3.3 Définition des problèmes considérés . . . . .	63
2.3.4 Variables de décision rationnelles : pertinence et choix du degré . . . . .	66
2.3.5 L'objectif : une transformation . . . . .	68
2.4 Résultats existants de transformation . . . . .	68
2.4.1 Méthodes de transformation d'une infinité d'inégalités . . . . .	71
2.4.1.1 Fonctions affines . . . . .	71
2.4.1.2 Fonctions multi affines . . . . .	72

2.4.1.3	Fonctions quadratiques . . . . .	72
2.4.1.4	Fraction de deux fonctions multi affines . . . . .	75
2.4.1.5	Un ensemble de fonctions plus général . . . . .	76
2.4.1.6	Fonctions rationnelles . . . . .	77
2.4.1.7	Fonctions continues . . . . .	77
2.4.2	Bilan sur les méthodes de transformation et choix d'une méthode . . . . .	78
2.4.3	Méthodes de transformation d'une infinité d'inégalités et LMI dépendant de paramètres . . . . .	80
2.5	Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre . . . . .	83
2.5.1	Solution efficace et commentaires . . . . .	85
2.5.2	Astuces de mise en œuvre . . . . .	88
2.5.3	Exemple numérique . . . . .	92
2.6	Solution efficace à la LMI dépendant de plusieurs paramètres . . . . .	94
2.6.1	Énoncé de la solution et commentaires . . . . .	94
2.6.2	Mise en œuvre pour la synthèse d'un observateur dépendant de paramètres . . . . .	96
2.7	Conclusion . . . . .	100
<b>3</b>	<b>Conception de correcteurs dépendant de paramètres</b>	<b>103</b>
3.1	Introduction . . . . .	103
3.2	Conception de correcteurs dépendant de paramètres . . . . .	104
3.2.1	Formulation des problèmes considérés . . . . .	104
3.2.2	Transformation du Problème $H_\infty$ dépendant d'un paramètre en un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant d'un paramètre . . . . .	107
3.2.2.1	Résultat d'analyse $H_\infty$ pour un système dépendant d'un paramètre . . . . .	108
3.2.2.2	Application du résultat d'analyse au système en boucle fermée . . . . .	109
3.2.2.3	Transformation du problème BMI en un problème LMI et formule explicite de construction . . . . .	109
3.2.3	Résultat de conception d'un correcteur $H_\infty$ dépendant d'un paramètre par optimisation LMI indépendant de paramètre . . . . .	112
3.3	Mise en œuvre pour la conception de correcteurs remplissant un ensemble continu de compromis . . . . .	116
3.3.1	Compromis et Pareto-optimalité . . . . .	117
3.3.2	Détermination et paramétrisation d'un ensemble continu de compromis par la méthode de synthèse $H_\infty$ . . . . .	120
3.3.3	Formulation et solution du problème de conception d'un correcteur reréglable . . . . .	128
3.4	Exemples numériques . . . . .	129
3.4.1	Exemple illustratif . . . . .	130
3.4.1.1	Comparaison avec une approche de type polytopique . . . . .	131
3.4.1.2	Comparaison avec une approche utilisant une fonction de stockage indépendant du paramètre . . . . .	137
3.4.2	Commande d'un moteur à courant continu . . . . .	141
3.5	Conclusion . . . . .	145

<b>4</b>	<b>Mise en œuvre pour la commande des canaux d'irrigation</b>	<b>149</b>
4.1	Introduction . . . . .	149
4.2	Explications relatifs au canal . . . . .	151
4.2.1	Le canal et un modèle . . . . .	152
4.2.2	Quantification des spécifications . . . . .	153
4.2.3	Politiques de commande . . . . .	154
4.2.4	Détermination d'un compromis par la méthode de synthèse $H_\infty$ . . . . .	156
4.3	Conception d'un correcteur reréglable . . . . .	159
4.3.1	Cahier des charges et choix des pondérations . . . . .	159
4.3.2	Calcul d'un correcteur reréglable et analyse . . . . .	161
4.4	Conclusion . . . . .	166
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>169</b>
A.1	Annexes au Chapitre 1 . . . . .	169
A.1.1	Démonstration du Théorème 1.1, page 28 . . . . .	169
A.1.2	Résultats d'analyse convexe [Roc70] . . . . .	171
A.1.3	Démonstration du Théorème 1.3, page 37 . . . . .	172
A.1.4	Démonstration du Lemme 1.7, page 42 . . . . .	172
A.1.5	Opérations sur les LFTs . . . . .	175
A.2	Annexes au Chapitre 3 . . . . .	176
A.2.1	Compléments de résultats sur le Problème $H_\infty$ dépendant d'un paramètre . . . . .	176
A.2.1.1	Outils pour la transformation d'un problème BMI en un problème LMI . . . . .	177
A.2.1.2	Résultats de conception d'un correcteur $H_\infty$ dépendant d'un paramètre par optimisation LMI dépendant d'un paramètre . . . . .	180
A.2.1.3	Résultats de conception d'un correcteur $H_\infty$ dépendant d'un paramètre par optimisation LMI indépendant d'un paramètre . . . . .	188
A.2.2	Solution du Problème $H_2$ dépendant d'un paramètre . . . . .	192
A.2.3	Solution du Problème de placement de pôles dépendant d'un paramètre . . . . .	202
A.2.4	Solution du Problème multi-critères dépendant d'un paramètre . . . . .	210
A.2.5	Approche alternative de type polytopique . . . . .	214
	<b>Bibliographie</b>	<b>217</b>



## Notations, symboles et abréviations

$\mathbb{R}$ ( $\mathbb{C}$ )	ensemble des nombres réels (complexes)
$\mathbb{R}^n$ ( $\mathbb{C}^n$ )	ensemble des vecteurs de dimension $n$ dans $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{C}$ )
$\mathbb{R}_*$ ( $\mathbb{C}_*$ )	ensemble des nombres réels (complexes) non nuls
$\mathbb{R}^{n \times m}$ ( $\mathbb{C}^{n \times m}$ )	ensemble des matrices réelles (complexes) de dimension $n \times m$
$I_l$ ( $I$ )	matrice identité de dimension $l \times l$ (appropriées)
$0_{l \times c}$ ( $0$ )	matrice nulle de dimension $l \times c$ (appropriées)
$X > 0$ ( $\geq 0$ )	$X$ définie positive (semi définie positive)
$X < 0$ ( $\leq 0$ )	$X$ définie négative (semi définie négative)
$X^T$ ( $X^*$ )	transposée (transposée conjuguée) de la matrice $X$
$X_\perp$	matrice vérifiant $XX_\perp = 0$ et $\begin{bmatrix} X^T & X_\perp \end{bmatrix}$ de rang plein
$X^\dagger$	pseudo inverse de Moore-Penrose de la matrice $X$
$(\cdot)^T$	transposée du bloc symétrique
$\star$	produit étoile de Redheffer
$\otimes$	produit de Kronecker
$\triangleq$	égal par définition
$p$	variable de Laplace
$n_w$	taille de $w$ lorsque $w$ est un vecteur
$\mathcal{L}(A, B, C, D, M, \mathcal{M})$	$\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \mathcal{M} \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}$
BMI	inégalité matricielle bilinéaire (de l'anglais Bilinear Matrix Inequality)
KYP	Kalman Yakubovich Popov
LFT	représentation linéaire fractionnaire (de l'anglais Linear Fractional Transformation)
LMI	inégalité matricielle linéaire (de l'anglais Linear Matrix Inequality)
LPV	linéaire à paramètres variants (de l'anglais Linear Parameter Varying)
LTI	linéaire stationnaire (de l'anglais Linear Time Invariant)



Durant les douze dernières années, l'optimisation convexe sous contraintes LMIs (Linear Matrix Inequalities) a émergé comme un outil incontournable en Automatique [BEFB94]. Son émergence est en partie le résultat de la prise de conscience au sein des chercheurs en commande robuste de la place centrale de la complexité algorithmique pour la mise au point de méthodes d'analyse et/ou de commande des systèmes. Une contrainte LMI est définie par l'ensemble de vecteurs (variables de décision) suivant :

$$\left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \mid F_0 + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i F_i > 0 \right\} \quad (1)$$

où les  $F_i$  sont des matrices carrées symétriques et où  $> 0$  désigne définie positive. Les problèmes d'optimisation convexe sous contrainte LMI ont le grand intérêt d'avoir des algorithmes de résolution efficace, largement disponibles dans les logiciels de calcul scientifiques généraux.

Un des premiers résultats fut l'obtention d'une approche unifiée et élégante pour la commande des systèmes Linéaires Temps Invariants (LTI) (voir par exemple [Iwa93, Chi96]). En effet, il est apparu que la très grande majorité des problèmes d'analyse et de commande de systèmes LTI pouvant être résolus efficacement se formulent comme des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI.

Ce qui est remarquable, c'est que l'émergence de l'optimisation LMI marqua le renouveau de l'approche entrée/sortie des systèmes y compris dans ses aspects les plus théoriques. Au delà des systèmes LTI, il est devenu possible par cette même technique d'aborder de classes importantes de systèmes tels que certains systèmes Linéaires Temps Variant (LTV) et/ou non linéaires et/ou de dimension infinie (voir par exemple [Sco97]). Parmi le foisonnement de résultats nouveaux qui sont alors apparus, on peut par exemple citer la commande des systèmes à paramètres variants, une classe particulière des systèmes LTV.

Pour un nombre significatif de problèmes d'analyse et de commande LTI, la formulation sous forme de problèmes d'optimisation LMI pouvait être (parfois avantageusement) remplacée par des formulations utilisant par exemple des équations de Lyapunov ou de Riccati. Par contre, contrairement à l'optimisation LMI, ces outils alternatifs n'ont pas permis de formuler un large spectre de problèmes sortant du cadre LTI « classique ».

Enfin, un point tout à fait remarquable est qu'il a été possible d'identifier des démarches de recherche de formulation de problèmes d'Automatique sous forme de problèmes d'optimisation LMI (si elle existe). Ce succès est dû au profond ancrage de ces démarches dans les concepts fondamentaux de l'Automatique, y compris dans ses aspects les plus traditionnels.

La mise en évidence de cette « démarche LMI » a ouvert des possibilités telles qu'il est devenu possible d'aborder des problèmes d'analyse et/ou de commande jusque-là non envisageables. La mise en œuvre de la « démarche LMI » sur ces nouveaux problèmes a mené à des formulations sous forme de problèmes d'optimisation sous contraintes LMI *dépendant de paramètres* : dans l'expression (1), les matrices  $F_i$  et les variables de décision  $\xi$  sont maintenant des fonctions rationnelles de paramètres réels, que l'on notera  $\theta$  et qui appartiennent à un ensemble compact  $\mathbb{P}$  :

$$\left\{ \xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi} \left| F_0(\theta) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i(\theta) F_i(\theta) > 0 \right. \right\} \quad (2)$$

Sous cette forme, malheureusement, on ne retrouve pas l'un des grands intérêts de l'optimisation LMI qui est l'existence d'algorithmes de résolution efficaces. Face à ce problème, l'approche généralement adoptée pour le problème d'Automatique particulier considéré consiste à essayer de définir l'ensemble des fonctions (2) ou un sous ensemble de (2) par une contrainte LMI indépendant de  $\theta$ .

Dans cette thèse, nous nous proposons d'aborder de façon générale ce problème. Nous montrerons qu'il est possible de le traiter en considérant le problème intermédiaire suivant. Étant donnée une matrice symétrique dépendant de  $\theta$ ,  $T(\theta)$ , on considère l'ensemble (infini) d'inégalités réelles défini par :

$$(I) \quad \forall \theta \in \mathbb{P}, \quad T(\theta) > 0.$$

Peut-on obtenir un ensemble fini d'inégalités matricielles, noté (II), comprenant éventuellement des variables de décision réelles, tel que la vérification de (II) implique la vérification de (I) (« suffisance ») ? Dans quels cas ces inégalités sont-elles équivalents, c'est-à-dire que (I) est vérifiée si et seulement si (II) l'est (« nécessité et suffisance ») ? Dans quels cas l'ensemble fini d'inégalités matricielles (II) est-il défini par une contrainte LMI indépendant de  $\theta$  ? Ces questions seront traitées dans le premier chapitre pour une classe très générale de fonctions  $T(\theta)$  grâce à une caractérisation précise des différents cas. Elles seront ensuite approfondies dans le cas où  $T(\theta)$  est une fonction rationnelle en  $\theta$  puisque c'est le problème qui nous intéresse. La contribution par rapport à des thèses précédentes ayant portées sur des sujets connexes est que la nécessité est ici étudiée.

En se basant sur la solution développée pour le problème intermédiaire, nous proposons une solution au problème de définir l'ensemble (ou un sous ensemble) des variables de décision vérifiant une contrainte LMI dépendant (rationnellement) de  $\theta$  par une contrainte LMI indépendant de  $\theta$ . Nous mettrons en évidence les cas où il est possible de définir l'ensemble complet des variables de décision par une contrainte LMI indépendant de  $\theta$  et les cas où il n'est possible de définir qu'un sous ensemble. Nous verrons qu'il s'agit d'une contribution importante de nos travaux par rapport aux résultats existants qui, tout en se concentrant sur des problèmes spécifiques de LMI dépendant de  $\theta$ , ne permettent de définir

que des sous ensembles de variables de décision vérifiant une contrainte LMI dépendant de  $\theta$  plus restreints que le nôtre.

Au delà du développement de notre solution, l'étude présentée dans les deux premiers chapitres présente des éléments d'appréciation sur la pertinence théorique de notre solution. Le chapitre trois est consacré à l'application de notre solution à une classe importante de problèmes d'Automatique et le chapitre quatre à sa mise en œuvre sur une application réaliste.

Rappelons que la solution que nous proposons permet d'obtenir la mise sous forme de problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMIs (indépendant de  $\theta$ ) pour tous les problèmes d'Automatique qui se formulent comme des problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs dépendant de  $\theta$ . Plutôt que de se lancer dans une énumération de problèmes de fait résolus, il nous a semblé plus pertinent de nous concentrer sur un problème nouveau et important afin d'évaluer complètement les potentialités de notre solution y compris dans ces aspects d'Automatique les plus appliqués.

Pour cela, dans le chapitre trois, la solution sous forme de problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMIs (indépendant de  $\theta$ ) sera développée pour la synthèse de correcteurs de systèmes dépendant de paramètres. Ils sont supposés appartenir à un ensemble et être constants dans le temps. D'autre part, les matrices de la représentation d'état du correcteur sont des fonctions rationnelles de ces paramètres. Ce problème apparaît par exemple dans la mise au point de correcteurs par séquençement de gains (classique). Le cas de la synthèse d'un correcteur  $H_\infty$  est étudié dans le chapitre trois; les autres cas (correcteurs  $H_2$ , par placement de pôles et multi-critères) étant présentés en Annexe de la thèse.

La solution proposée au problème de synthèse dépendant de paramètres a été mise en œuvre pour la synthèse de correcteurs reréglables. À notre connaissance, c'est la première fois que ce problème important est traité dans tous ses aspects, c'est-à-dire, énoncé, formalisé, résolu et mis en œuvre. Ce traitement complet a été envisageable du fait des résultats présentés dans les deux premiers chapitres. Il s'agit donc d'une contribution importante de la thèse.

En quoi consiste un correcteur reréglable? Dans certaines applications, pour un système donné, le problème important est de rerégler le correcteur sur site afin d'assurer un cahier des charges différent. Un tel réglage peut intervenir pendant l'exploitation du correcteur [Ala01]. Dans ces conditions, une nouvelle synthèse par un ingénieur automaticien doit être évitée. Une solution prometteuse est la mise au point d'un correcteur reréglable. Un ensemble continu de cahiers des charges intéressants pour l'application considérée est défini. Un élément de cet ensemble est alors déterminé par (au moins) un paramètre  $\theta$ . Le correcteur reréglable est alors un correcteur dont les paramètres sont des fonctions explicites (rationnelles) de  $\theta$ . Rerégler le correcteur consiste alors à simplement changer la valeur du paramètre ce qui ne nécessite pas l'intervention d'un ingénieur automaticien.

Un correcteur reréglable peut-il être commodément obtenu à l'aide des méthodes de synthèse de correcteurs courantes? Dans le cas des méthodes classiques de synthèse fréquentielle, quand le cahier des charges peut être assuré par un correcteur de faible complexité (par exemple P.I.), des règles de réglage peuvent être obtenues en explorant les relations entre les paramètres du correcteur et les spécifications du cahier des charges

(temps de réponse, etc.). Ces relations, en général plutôt qualitatives<sup>1</sup>, peuvent être obtenues en se basant par exemple sur le savoir-faire, les règles de l'Automatique fréquentielle classique, etc.. Par contre, pour des cahiers des charges plus complexes, pour la mise au point de correcteurs multivariables, les méthodes de synthèse modernes telles que le LQG, la synthèse  $H_\infty$ , etc. sont alors incontournables. Les correcteurs obtenus par ces méthodes sont en général définis par un nombre très important de paramètres dont les liens avec les spécifications du cahier des charges ne sont pas explicités. La synthèse de correcteurs reréglables ne peut donc pas se traiter par les méthodes de synthèse "conventionnelles" existantes.

Notre solution basée sur la synthèse dépendant de paramètres sera développée dans le chapitre 3. Elle sera mise en œuvre sur deux exemples afin d'étudier la pertinence de notre approche des problèmes d'optimisation LMI dépendant de  $\theta$  par rapport à des approches alternatives basées sur les résultats (partiels) de la littérature. Cette mise en œuvre sera l'occasion de mesurer la qualité de la solution que nous proposons par rapport au problème d'Automatique lui-même. Comparées à d'autres, c'est un des intérêts de cette application de la synthèse dépendant de paramètres.

Une application possible des correcteurs reréglables est par exemple la modulation de la performance de la rejection des perturbations dues aux vagues sur un bateau en fonction de l'état de la mer, etc [KYM<sup>+</sup>01]... Une autre application intéressante est la commande des canaux d'irrigation. C'est l'application que nous avons choisie de développer dans le chapitre 4 de ce document de thèse. Le développement de la commande des canaux d'irrigation a permis de diminuer la consommation totale d'eau tout en assurant le même service aux utilisateurs. Accroître la rapidité du service aux utilisateurs nécessite une augmentation de la consommation totale d'eau. La ressource disponible en eau varie au cours de l'année. Afin d'assurer le meilleur service aux utilisateurs, il est donc nécessaire de modifier la rapidité du service en fonction de la ressource en eau disponible [LF05]. Ceci peut être réalisé par l'utilisation d'un correcteur reréglable.

---

<sup>1</sup>Sauf peut être dans une bonne douzaine de cas.

## Organisation du document

L'organisation du document est schématisé sur la Figure 1.

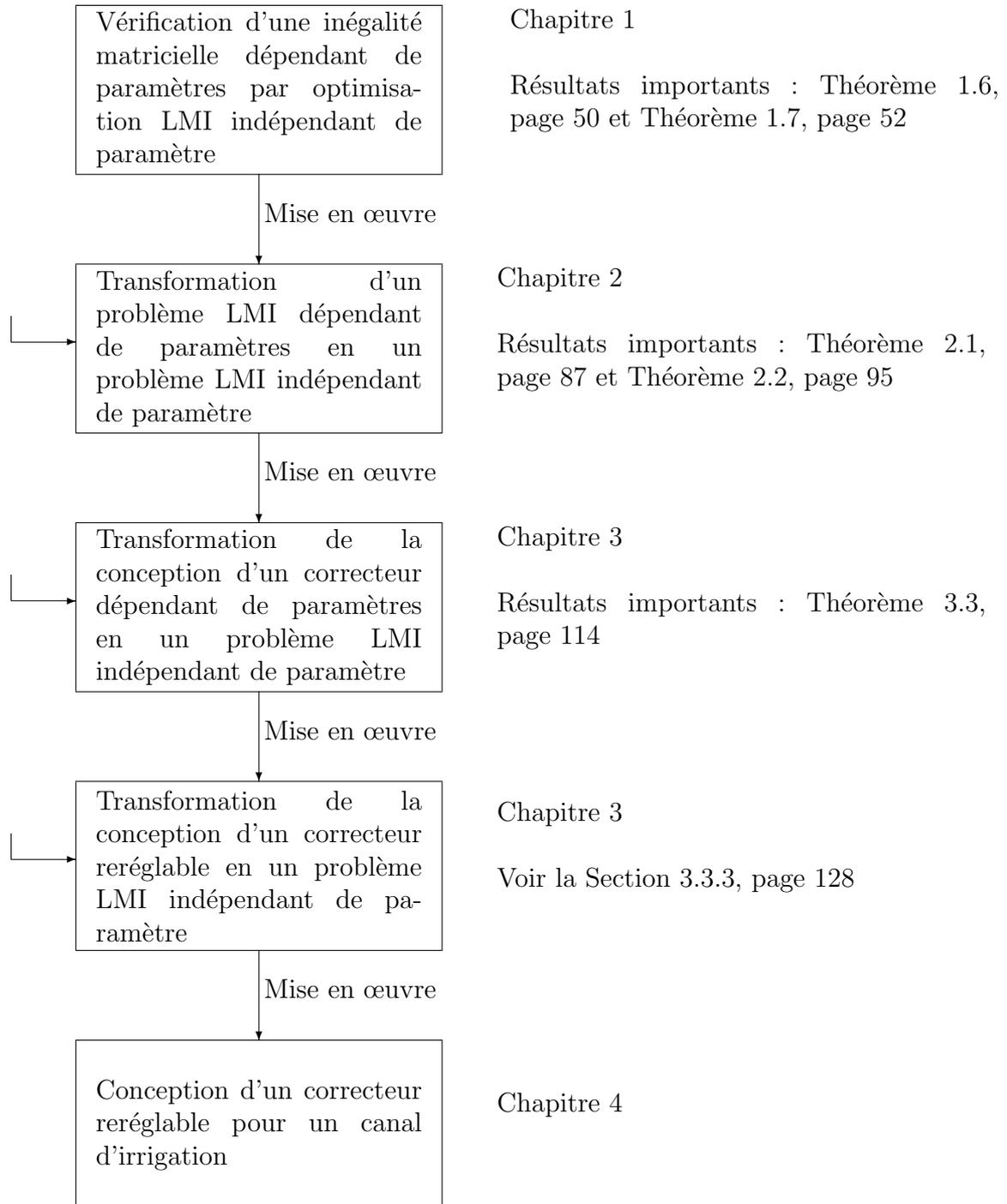


FIG. 1 – Organisation du document

## Publications personnelles

### Article de journal

« Parameter dependent  $H_\infty$  control by finite dimensional LMI optimisation : application to trade-off dependent control », M. Dinh, G. Scorletti, V. Fromion et E. Magarotto, International Journal of Robust and Nonlinear Control, numéro 15, pages 383–406, 2005

### Articles de conférence avec comité de lecture

« Parameter dependent  $H_\infty$  control by finite dimensional LMI optimisation : application to trade-off dependent control », M. Dinh, G. Scorletti, V. Fromion et E. Magarotto, 16<sup>th</sup> IFAC World congress, Prague, République tchèque, 4–8 juillet 2005

« Parameterized  $H_\infty$  controller design for adaptive trade-off by finite LMI optimisation », M. Dinh, G. Scorletti, V. Fromion et E. Magarotto, Proceedings of the European Control Conference, Cambridge, UK, 1–3 septembre 2003

# CHAPITRE 1

## Vérification d'inégalités dépendant de paramètres

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la vérification efficace d'inégalités matricielles dépendant rationnellement de paramètres, soit la vérification d'une infinité d'inégalités matricielles. Ce type de vérification est un problème majeur en Automatique puisqu'il permet de garantir des propriétés pour une famille de modèles : on parle aussi de propriétés robustes. Un exemple apparaît en analyse de la stabilité robuste pour un système avec des incertitudes paramétriques : garantir la stabilité robuste revient à vérifier une inégalité de Lyapunov dépendant de paramètres. Ce type de vérification apparaît déjà en analyse et commande des systèmes linéaires stationnaires (ou LTI de l'anglais Linear Time-Invariant) où l'on cherche à garantir une propriété sur tout l'axe imaginaire.

Nous cherchons à transformer ce type de vérification en la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes inégalités matricielles linéaires (ou LMI de l'anglais Linear Matrix Inequality). Cette résolution peut se faire efficacement [BEFB94, NG94, GNLC95, BTN01]. Nous nous intéressons au cas de paramètres réels.

Une approche fondamentale en Automatique et plus généralement en Systémique est de modéliser un système comme une interconnexion de sous-systèmes élémentaires. Un sous-système est élémentaire dans le sens où l'on sait caractériser ses propriétés. La question qui se pose alors est, connaissant les propriétés de chaque sous-système, d'étudier une propriété du système interconnecté [Saf83, Sco97]. Le fait d'interconnecter des sous-systèmes élémentaires permet de faire émerger au niveau du système interconnecté des propriétés de performance qui ne sont pas trivialement reliées aux propriétés de performance des sous-systèmes.

Nous allons voir une mise en œuvre de cette idée pour l'étude des propriétés d'une classe de systèmes, dits statiques [SP96b], définis comme des interconnexions de gains dépendant de paramètres. Un fait important est que cette étude peut se faire par la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre lorsque les propriétés sont décrites par des contraintes quadratiques.

Une fonction rationnelle pouvant être représentée par une interconnexion de gains dépendant de paramètres, une inégalité matricielle dépendant rationnellement de paramètres peut être interprétée comme une propriété sur cette interconnexion. L'objectif de ce chapitre est ainsi atteint grâce à l'étude développée sur ce type d'interconnexion.

L'organisation de ce chapitre est comme suit. Dans un premier temps, nous illustrons l'approche utilisée dans ce document (l'idée d'interconnexion ainsi que les outils associés) par l'étude des propriétés de performance des systèmes linéaires stationnaires à travers l'utilisation des contraintes quadratiques (Section 1.2, page 20). Nous verrons ensuite comment elle peut être mise en œuvre pour l'étude des propriétés d'interconnexions de gains dépendant de paramètres (Section 1.4, page 27) en les ayant définies au préalable (Section 1.3, page 25). Nous verrons alors qu'une fonction rationnelle peut être représentée par une interconnexion de gains dépendant de paramètres (Section 1.5, page 46). Enfin, nous regroupons tous ces résultats afin de transformer la vérification d'inégalités matricielles dépendant rationnellement de paramètres en la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre (Section 1.6, page 50). La Section 1.7, page 53, conclut le chapitre.

## 1.2 Introduction à travers l'étude des propriétés des systèmes linéaires stationnaires

L'utilisation de l'optimisation convexe sous contraintes LMIs tient une place centrale dans l'étude des propriétés (de stabilité ou de performance) des systèmes linéaires stationnaires, voire non stationnaires et non linéaires [BEFB94, GA94, MR97, FSF99, Sco97]. Cette importance est due au rôle central des contraintes quadratiques.

**Définition 1.1.** Soit une matrice symétrique  $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (respectivement hermitienne  $\Pi \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ).

La fonction  $\sigma$  de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ) dans  $\mathbb{R}$ , qui à  $s$  associe  $s^T \Pi s$  (resp.  $s^* \Pi s$ ), est appelée forme quadratique réelle (resp. complexe). Les inégalités (égalité)  $\sigma(s) \geq 0$ ,  $\sigma(s) > 0$ ,  $\sigma(s) \leq 0$ ,  $\sigma(s) < 0$  ( $\sigma(s) = 0$ ) définissent des contraintes quadratiques.  $\Pi$  est définie positive si pour tout  $s \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (resp. pour tout  $s \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ),  $\sigma(s) > 0$ .  $\Pi$  est semi définie positive si pour tout  $s \in \mathbb{R}^n$  (resp. pour tout  $s \in \mathbb{C}^n$ ),  $\sigma(s) \geq 0$ .

Des outils fondamentaux, comme la séparation des graphes [Saf80] et la  $\mathcal{S}$ -procédure [Jaker], ont émergé comme des outils incontournables pour formuler la vérification des propriétés des systèmes comme la résolution de problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI [Sco97]. Cette section permet de les introduire à travers un problème simple.

Il s'agit d'étudier les propriétés vérifiées par une fonction de transfert discrète stable définie par la matrice de fonction de transfert  $G$ . Si  $N$  et  $D$  sont des facteurs premiers à droite de  $G$  ( $G = ND^{-1}$ ) [Vid93], un certain nombre de critères de performance classiques d'un système linéaire stationnaire stable se ramène à tester si une matrice dépendant de la fréquence  $\omega$  est définie négative pour toute pulsation  $\omega \in [-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}]$  avec  $T_s$  la période d'échantillonnage, c'est-à-dire à vérifier que

$$\forall \omega \in [-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}], \quad \begin{bmatrix} N(e^{j\omega T_s}) \\ D(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} N(e^{j\omega T_s}) \\ D(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix} < 0$$

où  $M$  est une matrice symétrique donnée. Avec

$$\Phi(e^{j\omega T_s}) = \begin{bmatrix} N(e^{j\omega T_s}) \\ D(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix},$$

cela se réécrit :

$$\forall \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad \Phi(e^{j\omega T_s})^* M \Phi(e^{j\omega T_s}) < 0. \quad (1.1)$$

Si le graphe du système de  $G$  correspond au vecteur constitué par les sorties et les entrées de  $G(e^{j\omega T_s})$  :

$$\begin{bmatrix} z(e^{j\omega T_s}) \\ w(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix}$$

avec  $z(e^{j\omega T_s}) = G(e^{j\omega T_s})w(e^{j\omega T_s})$ , l'intérêt de  $\Phi(e^{j\omega T_s})$  est de pouvoir générer le graphe de  $G$  comme la sortie de  $\Phi(e^{j\omega T_s})$  à une entrée fictive  $\nu(e^{j\omega T_s})$ , c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} z(e^{j\omega T_s}) \\ w(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N(e^{j\omega T_s}) \\ D(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix}}_{\Phi(e^{j\omega T_s})} \nu(e^{j\omega T_s}).$$

Afin d'alléger les notations, la notation de la dépendance en  $\omega$  des différents vecteurs est omise dans la suite.

Le choix de  $M$  permet de définir des critères de performance différents. On peut citer les deux plus connus :

1. la norme  $H_\infty$  de  $G$  est strictement inférieure à  $\gamma$  si la condition (1.1) est vérifiée avec

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix};$$

2.  $G$  est strictement passif si la condition (1.1) est vérifiée avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

La question est donc, pour une propriété de performance donnée par  $M$  et un système  $G$ , de vérifier si  $G$  possède la propriété définie par  $M$  en testant si la condition (1.1) est vérifiée. La difficulté étant ici que l'on doit vérifier qu'une infinité de matrices dépendant de  $\omega$  sont définies négatives. Nous allons voir que ce problème peut se ramener à la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de la pulsation  $\omega$ , en utilisant les outils rattachés aux contraintes quadratiques.

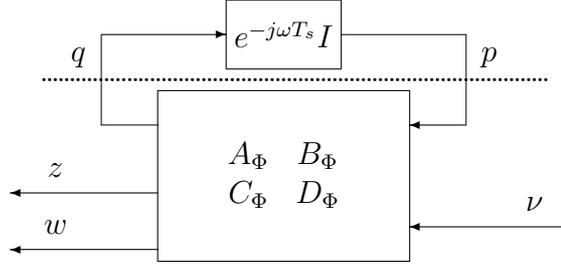
Pour cela, le système à étudier est réécrit comme une interconnexion de sous-systèmes élémentaires. Un sous-système est élémentaire dans le sens où l'on sait caractériser ses propriétés. Une propriété du système est ensuite reliée aux propriétés des sous-systèmes. Les propriétés sont ici définies par des inégalités fréquentielles du type (1.1).

Dans notre cas, il est intéressant de travailler sur la matrice des facteurs premiers puisque le critère de performance considéré s'écrit naturellement sur celle-ci. Une matrice de fonctions de transfert peut se réécrire à l'aide d'une représentation d'état (minimale ou non) :

$$\Phi(e^{j\omega T_s}) = D_\Phi + C_\Phi (e^{-j\omega T_s} I) (I - A_\Phi (e^{-j\omega T_s} I))^{-1} B_\Phi,$$

soit encore :

$$\Phi(e^{j\omega T_s}) \begin{cases} q & = & A_\Phi p + B_\Phi \nu \\ \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} & = & C_\Phi p + D_\Phi \nu \\ p & = & (e^{-j\omega T_s} I) q \end{cases} \quad (1.2)$$

FIG. 1.1 –  $\Phi(e^{j\omega T_s})$  comme une interconnexion de sous-systèmes

Comme le montre la Figure 1.1,  $\Phi$  peut être représentée par l'interconnexion de  $(e^{-j\omega T_s} I)$  sur la matrice de gains :

$$\begin{bmatrix} A_{\Phi} & B_{\Phi} \\ C_{\Phi} & D_{\Phi} \end{bmatrix}.$$

Il s'agit donc d'un système interconnecté où les  $(e^{-j\omega T_s} I)$  jouent le rôle des sous-systèmes et la matrice de gains exprime l'influence des sous-systèmes sur les entrées et les sorties du système. Les  $(e^{-j\omega T_s} I)$  sont bien des sous-systèmes car on peut définir *a priori* un ensemble de contraintes quadratiques vérifiées par leurs entrées et leurs sorties. En effet, pour toute matrice symétrique  $\tilde{P}$ , on a  $\tilde{P} - e^{j\omega T_s} \tilde{P} e^{-j\omega T_s} = 0$ . On a donc aussi l'inégalité suivante :

$$\forall \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad \begin{bmatrix} e^{-j\omega T_s} I \\ I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\omega T_s} I \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

$(e^{-j\omega T_s} I)$  et  $I$  étant des facteurs premiers de  $(e^{-j\omega T_s} I)$ , cette matrice semi-définie positive définit alors une contrainte quadratique sur le graphe des sous-systèmes  $(e^{-j\omega T_s} I)$ , c'est-à-dire sur les signaux d'entrée  $p$  et de sortie  $q$  de  $(e^{-j\omega T_s} I)$  :

$$\forall \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.3)$$

avec  $p$  et  $q$  tels que  $p = (e^{-j\omega T_s} I) q$ . En réalité, comme  $\tilde{P}$  est une matrice symétrique quelconque, il s'agit d'un ensemble de contraintes quadratiques. L'idée est alors de remplacer le graphe des sous-systèmes par l'ensemble des vecteurs défini par l'une de ces contraintes quadratiques. Il s'agit d'une opération d'*immersion* puisque l'ensemble des vecteurs qui vérifient (1.3) contient le graphe des sous-systèmes sans forcément coïncider avec ; en d'autres termes : pour toute matrice symétrique  $\tilde{P}$ , on a

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| p = (e^{-j\omega T_s} I) q \right\} \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \right\}.$$

Pour une matrice symétrique  $\tilde{P}$  quelconque, on considère donc le nouveau système défini par les équations :

$$\begin{cases} q & = A_{\Phi} p + B_{\Phi} \nu \\ \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} & = C_{\Phi} p + D_{\Phi} \nu \end{cases} \quad (1.4)$$

avec  $p$  et  $q$  tels que

$$\forall \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} -\tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (1.5)$$

Du fait de l'immersion, si ce nouveau système vérifie

$$\forall \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (1.6)$$

alors forcément la contrainte (1.1) est vérifiée par le système de départ puisqu'elle se réécrit aussi sous la forme (1.6) avec les  $z$  et  $w$  qui vérifient l'équation (1.2). Or l'ensemble de ces  $z$  et  $w$  qui vérifient l'équation (1.2) est inclus dans l'ensemble des  $z$  et  $w$  qui vérifient l'équation (1.4) et la contrainte quadratique (1.5).

Le lien entre la contrainte (1.6) et la contrainte (1.5) est donné par l'équation (1.4) de l'interconnexion : il s'agit donc de vérifier si la contrainte quadratique

$$\begin{bmatrix} p \\ \nu \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \nu \end{bmatrix} < 0$$

est vérifiée pour tout  $p$  et  $\nu$  tels que la contrainte quadratique

$$\begin{bmatrix} p \\ \nu \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \nu \end{bmatrix} \geq 0$$

est vérifiée, où  $\tilde{P}$  est une matrice symétrique qu'il reste à déterminer.

Il est alors possible d'appliquer la  $\mathcal{S}$ -procédure [Jaker, BEFB94, BTN01] pour se ramener à un problème de forme quadratique définie et donc à un problème d'optimisation sous contraintes LMI.

**Lemme 1.1** ( $\mathcal{S}$ -procédure). *Soient les formes quadratiques :*

$$\sigma_0(s) = s^T \Pi_0 s \quad \text{et} \quad \sigma_1(s) = s^T \Pi_1 s$$

où  $\Pi_0$  et  $\Pi_1$  sont deux matrices réelles symétriques et de même dimension.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout vecteur  $s$  tel que  $\sigma_1(s) \geq 0$ , on a  $\sigma_0(s) < 0$  ;
- (ii) il existe un réel positif  $\tau$  tel que  $\Pi_0 + \tau \Pi_1 < 0$ .

Dans notre cas, les deux propositions sont équivalentes. On parle de  $\mathcal{S}$ -procédure sans perte. Ce lemme reste vérifié quand la contrainte quadratique inégalité  $\sigma_1(s) \geq 0$  est remplacée par une contrainte quadratique égalité  $\sigma_1(s) = 0$  ; dans ce cas,  $\tau$  est un réel non nécessairement positif. Ce résultat s'étend au cas où dans la condition (i) le vecteur  $s$  doit satisfaire plusieurs contraintes quadratiques inégalités. Néanmoins la condition (i) n'implique alors plus la condition (ii) : la  $\mathcal{S}$ -procédure n'est plus sans perte.

La  $\mathcal{S}$ -procédure permet donc de relier les contraintes quadratiques décrivant le graphe des sous-systèmes ou un sur-ensemble à la contrainte quadratique qui est testée pour le graphe du système.

En résumé, on a montré que la contrainte quadratique

$$\forall \omega \in \left[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}\right], \quad \begin{bmatrix} N(e^{j\omega T_s}) \\ D(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} N(e^{j\omega T_s}) \\ D(e^{j\omega T_s}) \end{bmatrix} < 0$$

est vérifiée s'il existe une matrice symétrique  $P$  (en effectuant le changement  $P = \tau\tilde{P}$ ) telle que :

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

Le point intéressant est que le second problème peut être aisément résolu puisqu'il s'agit d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de la pulsation où la matrice symétrique  $P$  est la variable de décision. Le problème est qu'il donne une condition qui est *a priori* simplement suffisante. La suffisance est liée au fait que le graphe des sous-systèmes a été remplacé par un sur-ensemble par le procédé d'immersion.

En réalité, pour le problème considéré ici, la condition obtenue n'est rien d'autre que la condition du Lemme de Kalman Yakubovich Popov en discret, condition qui a été démontrée être aussi nécessaire ; en effet, nous avons

**Lemme 1.2** (Kalman Yakubovich Popov KYP discret). *Soient  $M$  une matrice symétrique,  $A_\Phi$ ,  $B_\Phi$ ,  $C_\Phi$  et  $D_\Phi$  des matrices de tailles compatibles telles que, pour tout  $\omega \in [-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}]$ , on a  $\det(e^{j\omega T_s} I - A_\Phi) \neq 0$  et*

$$\Phi(e^{j\omega T_s}) = D_\Phi + C_\Phi (e^{j\omega T_s} I - A_\Phi)^{-1} B_\Phi.$$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la contrainte quadratique

$$\forall \omega \in [-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}], \quad \Phi(e^{j\omega T_s})^* M \Phi(e^{j\omega T_s}) < 0$$

est vérifiée ;

(ii) il existe  $P = P^T$  telle que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.7)$$

**Démonstration** Par utilisation de la transformée bilinéaire, le Lemme KYP discret est directement obtenu à partir du Lemme KYP continu [Wil71, Ran96] qui est le Lemme 1.3 énoncé ci-dessous.

**Lemme 1.3** (Kalman Yakubovich Popov KYP continu). *Soient  $M$  une matrice symétrique,  $A_\Phi$ ,  $B_\Phi$ ,  $C_\Phi$  et  $D_\Phi$  des matrices de tailles compatibles telles que, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , on a  $\det(j\omega I - A_\Phi) \neq 0$  et*

$$\Phi(j\omega) = D_\Phi + C_\Phi (j\omega I - A_\Phi)^{-1} B_\Phi.$$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la contrainte quadratique

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \Phi(j\omega)^* M \Phi(j\omega) < 0$$

est vérifiée ;

(ii) il existe  $P = P^T$  telle que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

Deux corollaires de ce lemme sont sans doute plus fameux que le lemme lui-même : le lemme réel borné et le lemme réel positif. Pour un système linéaire stationnaire continu asymptotiquement stable  $G(j\omega) = D_G + C_G(j\omega I - A_G)^{-1}B_G$ , on peut choisir :

$$\Phi(j\omega) = \begin{bmatrix} G(j\omega) \\ I \end{bmatrix}.$$

Le lemme réel borné et le lemme réel positif s'énoncent alors comme suit :

1. **le lemme réel borné** [BEFB94] : tester si  $G$  a une norme  $H_\infty$  strictement inférieure à  $\gamma$  consiste à appliquer le Lemme 1.3 avec

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

ce qui revient à demander qu'il existe une matrice symétrique  $P$  telle que

$$\begin{bmatrix} A_G^T P + P A_G + C_G^T C_G & P B_G + C_G^T D_G \\ B_G^T P + D_G^T C_G & D_G^T D_G - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0;$$

2. **le lemme réel positif** [BEFB94] : tester si  $G$  est strictement positif ou passif consiste à appliquer le Lemme 1.3 avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui revient à demander qu'il existe une matrice symétrique  $P$  telle que

$$\begin{bmatrix} A_G^T P + P A_G & P B_G - C_G^T \\ B_G^T P - C_G & -D_G^T - D_G \end{bmatrix} < 0.$$

□

En utilisant la démarche illustrée dans cette section, il est possible d'obtenir des extensions du Lemme de Kalman Yakubovich Popov à des classes de systèmes autres que les systèmes linéaires stationnaires. Ceci est vrai à condition d'être capable de déterminer un ensemble de contraintes quadratiques vérifiées par le graphe des sous-systèmes ou un sur-ensemble. Les conditions alors obtenues sont suffisantes. Néanmoins, l'exemple des systèmes linéaires stationnaires discrets illustre que, dans certains cas, elles peuvent être aussi nécessaires. Dans la suite de ce chapitre, nous allons mettre en œuvre et discuter plus profondément de cette approche pour des systèmes interconnectés dont les sous-systèmes sont définis par des matrices de gains dépendant de paramètres.

### 1.3 Représentation LFT des systèmes interconnectés

Le résultat précédent a été possible à travers l'écriture du système linéaire stationnaire comme l'interconnexion de sous-systèmes avec une matrice de gains. En changeant la nature des sous-systèmes considérés, il est ainsi possible de traiter de nombreuses classes de systèmes [MR97, Sco97] : nous nous intéressons aux interconnexions de gains dépendant de paramètres. Dans cette section, nous définissons les interconnexions de gains dépendant de paramètres.

Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, l'interconnexion est directement obtenue à partir de la représentation d'état. L'utilisation de la représentation LFT (de l'anglais Linear Fractional Transformation), définie à partir du produit de Redheffer, permet d'élargir la notion de représentation à des systèmes interconnectés dont les sous-systèmes ne sont pas simplement des retards ou des intégrateurs.

**Définition 1.2** (Produit de Redheffer de deux matrices). *Soient*

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

deux matrices partitionnées en quatre éléments de tailles compatibles.

Dans le cas où les matrices  $(I - H_{22}G_{11})$  et  $(I - G_{11}H_{22})$  sont inversibles, le produit de Redheffer ou produit étoile de  $H$  par  $G$ , noté  $H \star G$ , est défini par la matrice suivante :

$$H \star G = \begin{bmatrix} H_{11} + H_{12}G_{11}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{21} & H_{12}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \\ G_{21}(I - H_{22}G_{11})^{-1}H_{21} & G_{22} + G_{21}H_{22}(I - G_{11}H_{22})^{-1}G_{12} \end{bmatrix}.$$

Au lieu de considérer des matrices, le produit de Redheffer peut être défini en faisant intervenir des opérateurs, des fonctions de transfert, etc.. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons aux matrices dépendant de paramètres.

La matrice  $H \star G$  peut être vue comme une application qui à un vecteur d'entrée  $[w_1^T \ w_2^T]^T$  associe le vecteur de sortie  $[z_1^T \ z_2^T]^T$ . L'intérêt du produit de Redheffer est qu'il est possible de lui associer un schéma interconnecté (voir la Figure 1.2). À ce schéma

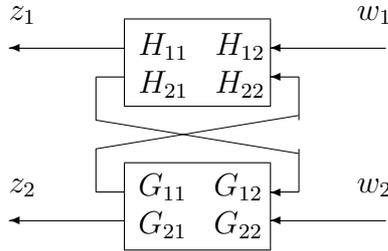


FIG. 1.2 – Interconnexion associée au produit de Redheffer

est ainsi associée une expression algébrique compacte et élégante dont les possibilités d'utilisation sont très nombreuses [DPZ91, Fon95, ZDG96]. Il permet ainsi de définir la représentation LFT d'un système interconnecté.

**Définition 1.3** (LFT). *Soient  $\Delta$  une matrice de  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et*

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

une matrice réelle avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ .

Dans le cas où  $(I - A_\Phi\Delta)$  est inversible, la LFT de  $\Delta$  par  $\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$  est le produit de Redheffer défini par :

$$\Delta \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = D_\Phi + C_\Phi\Delta(I - A_\Phi\Delta)^{-1}B_\Phi.$$

Lorsque  $(I - A_\Phi \Delta)$  est inversible, la LFT  $\Delta \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$  est dite bien posée. On appelle  $n_{A_\Phi}$  l'ordre de la LFT.

Comme pour le produit de Redheffer, il est possible d'associer à une LFT un schéma interconnecté (voir la Figure 1.3). Dans la suite du document, le bloc  $\Delta$  regroupera donc

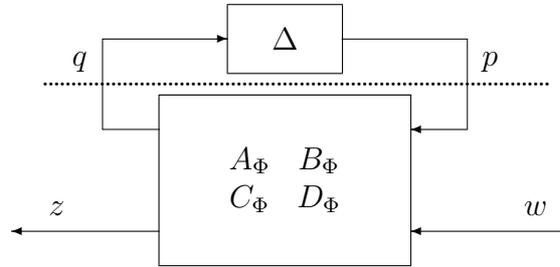


FIG. 1.3 – Interconnexion associée à la LFT

les sous-systèmes et la matrice  $\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$  les gains de l'interconnexion.

Il est alors possible de définir une interconnexion de gains dépendant de paramètres.

**Définition 1.4** (Interconnexion de gains dépendant de paramètres). Soient  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

une matrice avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ .

Dans le cas où pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $(I - A_\Phi \Delta(\theta))$  est inversible, l'interconnexion de gains  $\Delta(\theta)$  dépendant de paramètres par  $\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$  est définie par la LFT :

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = D_\Phi + C_\Phi \Delta(\theta) (I - A_\Phi \Delta(\theta))^{-1} B_\Phi. \quad (1.8)$$

Lorsque, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $(I - A_\Phi \Delta(\theta))$  est inversible, la LFT (1.8) est dite bien posée sur  $\mathbb{P}$ .

## 1.4 Étude des propriétés d'interconnexions de gains dépendant de paramètres

L'approche illustrée dans la Section 1.2, page 20, va être maintenant développée pour l'analyse des propriétés d'interconnexions de gains dépendant de paramètres. L'objectif de cette section est d'étudier la « performance » d'interconnexions de gains dépendant de paramètres. Comme dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, la performance est ici traduite en terme de contrainte quadratique inégalité :

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right)^T M \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right) < 0. \quad (1.9)$$

L'objectif de cette section est donc de ramener la vérification de cette contrainte quadratique inégalité à la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ .

Pour cela, nous supposerons dans un premier temps que l'interconnexion de gains dépendant de paramètres considérée est bien posée sur  $\mathbb{P}$ . Nous verrons ensuite comment il est possible de ramener la vérification du bien posé à la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ . Nous étudierons ensuite les deux cas d'interconnexions de gains dépendant de paramètres que nous rencontrerons par la suite.

### 1.4.1 Étude de la performance d'interconnexions de gains dépendant de paramètres

L'approche illustrée dans la Section 1.2, page 20, repose sur la possibilité de caractériser le graphe des sous-systèmes ou un sur-ensemble par un ensemble de contraintes quadratiques. La question suivante se pose alors :

1. Le fait de caractériser le graphe des sous-systèmes par un ensemble de contraintes quadratiques est-il limitatif ?

Nous verrons que ce n'est pas le cas. Cependant, les conditions obtenues ne sont pas sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ . La question est alors :

2. Comment peut-on garantir que l'inégalité (1.9) est vérifiée en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$  ?

Nous verrons comment ceci est possible. Cependant, la résolution de ce problème d'optimisation est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire. La question est alors :

3. Comment peut-on garantir que la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$  est équivalente à la vérification de (1.9) ?

La première question est explorée par le Théorème 1.1, la deuxième par le Corollaire 1.1 et la troisième par le Théorème 1.2.

**Question 1** Le théorème suivant indique que vouloir établir une contrainte quadratique pour le graphe du système à partir des contraintes quadratiques sur les graphes des sous-systèmes est une approche pertinente puisque conduisant à des conditions nécessaires et suffisantes.

**Théorème 1.1.** *Soient  $M$  une matrice réelle symétrique,  $\mathbb{P}$  un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et*

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

*une matrice réelle avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  telle que la LFT*

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

*soit bien posée sur  $\mathbb{P}$ .*

*Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) la contrainte quadratique

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right)^T M \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right) < 0$$

est vérifiée ;

(ii) il existe  $W = W^T$  telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.10)$$

et telle que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.11)$$

**Démonstration** Voir les Annexes, Section A.1.1, page 169.  $\square$

Ce théorème est fondamental. La condition (1.10) exprime que le graphe des sous-systèmes vérifie une contrainte quadratique définie par la matrice  $W$  :

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \forall \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \mid p = \Delta(\theta)q \right\}, \quad \text{on a } \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0$$

Le théorème exprime donc que le graphe du système interconnecté décrit par la LFT (1.8) vérifie la contrainte quadratique définie par la matrice  $M$  (contrainte (1.6)) si et seulement s'il existe une contrainte quadratique vérifiée par le graphe des sous-systèmes et définie par  $W$  telle qu'une condition du type KYP (contrainte (1.11)) soit vérifiée.

Les contraintes (1.10) et (1.11) sont des contraintes LMI en la matrice  $W$ . La seconde est du même type que la condition du Lemme KYP discret (Lemme 1.2) et ne dépend pas des paramètres  $\theta$ . En revanche, la contrainte (1.10) dépend des paramètres  $\theta$  et le problème de sa vérification n'est pas immédiat. La proposition (ii) de ce théorème n'est donc pas un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ .

**Question 2** La question est maintenant de savoir s'il est possible de garantir une contrainte quadratique sur le graphe du système en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ . Pour étudier ce problème, introduisons l'ensemble de matrices symétriques suivant :

$$\mathbb{W} = \left\{ W = W^T \mid \forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right\}.$$

La proposition (ii) du Théorème 1.1 se réécrit alors : il existe  $W \in \mathbb{W}$  telle que la contrainte (1.11) est vérifiée. Afin de se ramener à un problème de faisabilité LMI, l'idée est de rechercher  $W$  dans un sous-ensemble convexe  $\mathbb{W}_{sea}$  de  $\mathbb{W}$ . Remarquons que  $\mathbb{W}_{sea}$  existe toujours (un choix, certes dégénéré mais toujours possible, de  $\mathbb{W}_{sea}$  est le singleton nul). À ce moment-là, la condition n'est plus que suffisante.

**Corollaire 1.1.** Soient  $M$  une matrice réelle symétrique,  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

une matrice réelle avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  telle que la LFT

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

soit bien posée sur  $\mathbb{P}$ . Soit  $\mathbb{W}_{sea}$  un ensemble convexe tel que  $\mathbb{W}_{sea} \subseteq \mathbb{W}$ .

Alors la proposition (ii) implique la proposition (i) :

(i) la contrainte quadratique

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right)^T M \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right) < 0$$

est vérifiée ;

(ii) il existe  $W \in \mathbb{W}_{sea}$  telle que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.12)$$

**Démonstration** Ce corollaire est une conséquence directe du Théorème 1.1.  $\square$

De façon générale, ce sous-ensemble convexe  $\mathbb{W}_{sea}$  peut être défini de façon implicite ou explicite. Dans le cas de la définition implicite, les éléments de  $\mathbb{W}_{sea}$  peuvent être définis comme vérifiant un ensemble fini de contraintes LMI indépendant de paramètre.

Suivant la fonction  $\Delta(\theta)$  utilisée, il est possible d'appliquer l'une des techniques présentée dans la Section 2.4.1, page 71, pour transformer la contrainte (1.10) en des contraintes indépendantes de  $\theta$ . Par exemple, lorsque

$$\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}] \quad (1.13)$$

avec, pour tout  $i$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  finies et lorsque

$$\Delta(\theta) = \text{diag}(\theta_1 I_{k_1}, \dots, \theta_{n_\theta} I_{k_{n_\theta}}), \quad (1.14)$$

il est possible d'utiliser la notion de convexité directionnelle ([GAC96] ou voir la Section 2.4.1, page 71) pour définir implicitement un ensemble  $\mathbb{W}_{sea}$  [Iwa97]. En effet, en partitionnant la matrice  $W$

$$W = \begin{bmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & \cdots & W_{1,n_\theta} \\ W_{1,2}^T & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & W_{n_\theta-1,n_\theta} \\ W_{1,n_\theta}^T & \cdots & \cdots & W_{n_\theta-1,n_\theta}^T & W_{n_\theta,n_\theta} \end{bmatrix}$$

de manière compatible avec la structure de  $\Delta(\theta)$ , c'est-à-dire  $W_{i,i} \in \mathbb{R}^{k_{n_i} \times k_{n_i}}$ , et en notant  $\mathbb{V}$  l'ensemble des sommets de  $\mathbb{P}$ , un ensemble  $\mathbb{W}_{sea}$  peut être défini par

$$\mathbb{W}_{sea} = \left\{ W = W^T \mid \forall i = 1, \dots, n_\theta, W_{i,i} \leq 0 \text{ et } \forall \theta \in \mathbb{V}, \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right\}.$$

Le problème est que ces contraintes se rajouteront à la contrainte (1.12) et que leur nombre est une fonction exponentielle de  $n_\theta$  puisqu'égal à  $2^{n_\theta} + n_\theta$ . La taille du problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$  sera rapidement problématique si  $n_\theta$  est trop grand.

Dans le cas de la définition explicite de  $\mathbb{W}_{sea}$ , il s'agit de déterminer *a priori* et explicitement  $\mathbb{W}_{sea}$ , c'est-à-dire de déterminer  $l + 1$  matrices  $W_{sea}^i$  telles que :

$$\mathbb{W}_{sea} = \left\{ W = W^T \mid \exists w_i \in \mathbb{R}, W = W_{sea}^0 + \sum_{i=1}^l w_i W_{sea}^i \right\}.$$

Dans ce cas, l'existence de  $W$  est remplacée par l'existence des  $w_i$ . En remplaçant  $W$  par son expression, la contrainte (1.12) devient alors une contrainte LMI indépendant de paramètre en les variables de décision  $w_i$ .

Un tel ensemble sera présenté dans le Lemme 1.6, page 41, pour le cas où  $\mathbb{P}$  est un intervalle bornée de  $\mathbb{R}$  et où  $\Delta(\theta)$  vaut  $\theta I$  et dans le Lemme 1.8, page 44, pour le cas où  $\mathbb{P}$  et  $\Delta(\theta)$  sont définis par (1.13) et (1.14).

**Question 3** L'inconvénient du Corollaire 1.1 est qu'il énonce des conditions qui sont *a priori* suffisantes pour la vérification de la contrainte quadratique (1.9). Cependant, dans le cas particulier de l'étude de la performance d'un système linéaire stationnaire, les lemmes KYP discret et continu montrent qu'il n'est pas restrictif de rechercher  $W$  dans  $\mathbb{W}_{sea}$  plutôt que dans  $\mathbb{W}$  lorsque  $\mathbb{W}_{sea}$  est choisi judicieusement. Un tel ensemble vaut

$$\left\{ W = W^T \mid \exists P = P^T \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}, W = \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \right\}$$

dans le cas du KYP discret (Lemme 1.2, page 24) et vaut

$$\left\{ W = W^T \mid \exists P = P^T \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}, W = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

dans le cas du KYP continu (Lemme 1.3, page 24). La question est maintenant de savoir ce que doit vérifier  $\mathbb{W}_{sea}$  pour avoir une telle propriété. Nous allons voir que les conditions présentées dans la définition ci-dessous offrent une réponse à cette question.

**Définition 1.5** (Ensemble sans perte). *Soient  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$  et  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ .*

*Un ensemble non vide  $\mathbb{W}_{cns}$  de matrices symétriques est dit sans perte pour  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$  s'il est tel que :*

(a) le graphe de  $\Delta(\theta)$  défini par

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{A_\Phi}} \mid \exists \theta \in \mathbb{P}, p = \Delta(\theta)q \right\}$$

coïncide avec l'ensemble défini par

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{A_\Phi}} \mid \forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \right\};$$

- (b)  $\mathbb{W}_{cns}$  est convexe et est tel que, pour tout  $\tau > 0$  et pour tout  $W \in \mathbb{W}_{cns}$ , on a  $\tau W \in \mathbb{W}_{cns}$  ;  
(c) pour toute matrice non nulle semi-définie positive  $H$  telle que

$$\forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \text{Trace}(HW) \geq 0,$$

il existe  $m$  vecteurs  $h_i$  où  $m$  est le rang de  $H$  tels que

$$\begin{cases} H = \sum_{i=1}^m h_i h_i^T \\ \forall i = 1, \dots, m, \forall W \in \mathbb{W}_{cns}, h_i^T W h_i \geq 0. \end{cases}$$

Pour un cas particulier de l'ensemble  $\mathbb{P}$  et de la fonction  $\Delta$ , un ensemble  $\mathbb{W}_{cns}$  satisfaisant les conditions de cette définition n'existe pas forcément. D'autre part, s'il existe, il est nécessaire de le déterminer et de démontrer que les conditions de la définition sont satisfaites. La difficulté majeure est la vérification de la condition (c) qui peut être extrêmement technique. Un exemple complet sera développé en détail dans la démonstration du Lemme 1.6, page 41, pour un cas particulier de l'ensemble  $\mathbb{P}$  et de la fonction  $\Delta$ .

Même si les conditions ci-dessus semblent très techniques, on peut néanmoins donner un début d'interprétation. Dors et déjà, nous pouvons indiquer que la condition (a) assure que le graphe de  $\Delta(\theta)$  appartient à l'intersection de tous les ensembles de vecteurs définis par les contraintes quadratiques engendrées par tous les  $W \in \mathbb{W}_{cns}$ . La condition (b) assure que  $\mathbb{W}_{cns}$  est un cône convexe [Roc70]. La suite du document permettra de donner une interprétation plus profonde aux conditions (b) et (c) notamment.

Le choix de l'ensemble  $\mathbb{W}_{cns}$  permet d'obtenir un résultat similaire au Corollaire 1.1 mais cette fois-ci avec une condition qui est *nécessaire* en plus d'être suffisante.

**Théorème 1.2.** Soient  $M$  une matrice réelle symétrique,  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

une matrice réelle avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  telle que la LFT

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

soit bien posée sur  $\mathbb{P}$ . Soit  $\mathbb{W}_{cns}$  un ensemble sans perte pour  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$ .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la contrainte quadratique

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right)^T M \left( \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \right) < 0$$

est vérifiée ;

(ii) il existe  $W \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.15)$$

La démonstration du Théorème 1.2 est basée sur le lemme suivant dû à Iwasaki [IMF00]. Ce lemme peut être vu, sous un certain angle, comme une formulation généralisée des versions sans perte de la  $\mathcal{S}$ -procédure.

**Lemme 1.4.** Soient  $\Theta \in \mathbb{R}^{p \times p}$  une matrice symétrique et  $\mathbb{S}$  un ensemble non vide de matrices réelles symétriques de dimension  $p \times p$  tel que :

- (a)  $\mathbb{S}$  est convexe et est tel que, pour tout  $\tau > 0$  et pour tout  $S \in \mathbb{S}$ , on a  $\tau S \in \mathbb{S}$  ;
- (b) pour toute matrice non nulle semi-définie positive  $H$  telle que

$$\forall S \in \mathbb{S}, \text{Trace}(HS) \geq 0,$$

il existe  $m$  vecteurs  $h_i \in \mathbb{R}^p$  où  $m$  est le rang de  $H$  tels que

$$\begin{cases} H = \sum_{i=1}^m h_i h_i^T \\ \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall S \in \mathbb{S}, h_i^T S h_i \geq 0. \end{cases}$$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout vecteur  $h \in \{h \in \mathbb{R}^p \mid \forall S \in \mathbb{S}, h^T S h \geq 0\}$ , on a  $h^T \Theta h < 0$  ;
- (ii) il existe  $S \in \mathbb{S}$  telle que  $\Theta + S < 0$ .

En réalité, ce résultat d'Iwasaki présente une caractérisation de tous les ensembles  $\mathbb{S}$  pour lesquels la  $\mathcal{S}$ -procédure est sans perte (pour plus de précision, se référer à l'article [IH05]). Du fait de son grand intérêt, la démonstration du Lemme 1.4 est maintenant présentée.

### Démonstration

**Suffisance** Démontrons  $((ii) \Rightarrow (i))$ . La proposition (ii) implique qu'il existe  $S_0 \in \mathbb{S}$  tel que pour tout vecteur  $h \in \{h \in \mathbb{R}^p \mid h^T S_0 h \geq 0\}$ , on a  $h^T \Theta h < 0$ . Comme  $\{h \in \mathbb{R}^p \mid \forall S \in \mathbb{S}, h^T S h \geq 0\} \subseteq \{h \in \mathbb{R}^p \mid h^T S_0 h \geq 0\}$ , la proposition (i) est obtenu.

**Nécessité** Démontrons  $((i) \Rightarrow (ii))$  par l'absurde. Supposons que la proposition (ii) n'est pas vérifiée alors que la proposition (i) l'est.

La démonstration est basée sur un résultat fondamental d'analyse convexe qui est que lorsque deux ensembles convexes sont disjoints, ils peuvent être séparés par un hyperplan [Roc70]. La Figure 1.4 illustre ce résultat. De plus, si l'un des deux ensemble est un cône alors les deux ensembles sont séparés par un hyperplan contenant 0 [Roc70]. Ces deux résultats sont formellement présentés dans les Annexes, Section A.1.2, page 171.

Le lemme suivant correspond à la mise en œuvre de ce résultat dans l'ensemble des matrices symétriques. Dans cet ensemble, pour deux matrices de mêmes dimensions  $A$  et  $B$ ,  $\text{Trace}(AB)$  définit leur produit scalaire. D'autre part, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices semi-définies positives alors  $\text{Trace}(AB) \geq 0$ . Par suite, pour une matrice  $H = H^T$ , l'ensemble  $\{S \mid \text{Trace}(HS) = 0\}$  définit un hyperplan contenant 0.

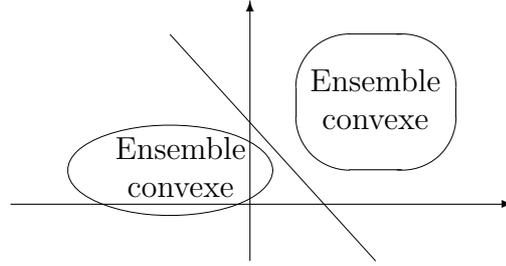


FIG. 1.4 – Illustration de la séparation de deux ensembles convexes par un hyperplan

Soit  $F$  une fonction affine d'un sous-ensemble convexe  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  dans l'ensemble des matrices symétriques  $\mathbb{R}^{p \times p}$ . On désire exprimer qu'il n'existe pas d'élément dans  $\mathcal{E}$  pour lequel son image par  $F$  est définie négative (condition (i) du lemme ci-dessous).

Cela peut s'interpréter comme le fait que l'ensemble des matrices définies négatives est disjoint de l'image de  $\mathcal{E}$  par  $F$ . Comme ces deux ensembles sont convexes et que l'ensemble des matrices définies négatives est un cône, cela est équivalent à exprimer l'existence d'un hyperplan passant par 0 tel que les deux ensembles soient séparés : il existe  $H = H^T$  tel que :

- le premier demi-espace défini par l'hyperplan contient l'ensemble des matrices définies négatives : c'est-à-dire que pour toute matrice définie négative  $S$ , on a

$$\text{Trace}(HS) < 0.$$

Cette propriété sera vérifiée si et seulement si  $H$  est une matrice non nulle et semi-définie positive ;

- le second demi-espace contient l'image de  $\mathcal{E}$  par  $F$  :

$$\forall E \in \mathcal{E}, \quad \text{Trace}(HF(E)) \geq 0.$$

La condition (ii) du lemme suivant est ainsi obtenue. Il s'agit de la restriction d'un lemme présenté dans [MSF97] de l'ensemble des matrices complexes à l'ensemble des matrices réelles. Dû à son grand intérêt pour nos développements, il est présenté ci-dessous.

**Lemme 1.5.** Soient  $\mathcal{E}$  un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  et  $F$  une fonction affine de  $\mathcal{E}$  dans l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathbb{R}^{p \times p}$ .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) il n'existe pas d'élément  $E \in \mathcal{E}$  pour lequel

$$F(E) < 0 ;$$

- (ii) il existe une matrice non nulle  $H = H^T \geq 0$  telle que

$$\forall E \in \mathcal{E}, \quad \text{Trace}(HF(E)) \geq 0.$$

Appliquons maintenant le Lemme 1.5 dans le cadre de la démonstration du Lemme 1.4 en prenant  $\mathcal{E} = \mathbb{S}$ ,  $E = S$  et  $F(E) = \Theta + S$ . La condition (ii) du Lemme 1.4 n'est pas vérifiée s'il existe une matrice  $H$  non nulle et semi-définie positive telle que

$$\forall S \in \mathbb{S}, \quad \text{Trace}(H(\Theta + S)) \geq 0.$$

Du fait de la propriété (a) du Lemme 1.4, ceci implique

$$\begin{cases} \text{Trace}(H\Theta) \geq 0 \\ \forall S \in \mathbb{S}, \quad \text{Trace}(HS) \geq 0. \end{cases}$$

Enfin, du fait de la propriété (b) du Lemme 1.4, il existe  $m$  vecteurs  $h_i \in \{h \in \mathbb{R}^p \mid \forall S \in \mathbb{S}, h^T S h \geq 0\}$  tels que :

$$\text{Trace}(H\Theta) = \sum_{i=1}^m h_i^T \Theta h_i.$$

Or comme  $\text{Trace}(H\Theta) \geq 0$ , il existe un  $i$  pour lequel  $h_i^T \Theta h_i \geq 0$  et  $h_i \in \{h \in \mathbb{R}^p \mid \forall S \in \mathbb{S}, h^T S h \geq 0\}$ . La contradiction avec la proposition (i) du Lemme 1.4 est donc obtenue.

□

**Interprétation du Lemme 1.4** Les éléments de la démonstration du Lemme 1.4 permettent de donner une interprétation des conditions du lemme. La condition (a) indique que l'ensemble  $\mathbb{S}$  est un cône convexe [Roc70], ce qui est nécessaire pour assurer la séparation par un hyperplan passant par 0.

La proposition (i) peut se récrire de la façon suivante :  $\text{Trace}(H\Theta) < 0$  pour toute matrice  $H \geq 0$ , de rang 1, telle que :

$$\forall S \in \mathbb{S}, \quad \text{Trace}(HS) \geq 0.$$

Cela découle du fait que  $h^T \Theta h = \text{Trace}(hh^T \Theta)$  et que  $hh^T$  décrit l'ensemble des matrices semi-définies positives et de rang 1 quand  $h$  décrit l'ensemble des vecteurs.

Cette proposition traduit donc que, dans l'ensemble des matrices symétriques, tout hyperplan passant par 0 défini par la matrice  $H \geq 0$  qui est de rang 1, telle que l'ensemble  $\mathbb{S}$  soit contenu dans le demi-espace défini par  $\{S \mid \text{Trace}(HS) \geq 0\}$ , sépare forcément cet ensemble  $\mathbb{S}$  de la matrice  $\Theta$ .

La condition (b) du Lemme 1.4 indique que pour tout hyperplan défini par la matrice  $H \geq 0$  telle que l'ensemble  $\mathbb{S}$  soit contenu dans le demi-plan défini par  $\text{Trace}(HS) \geq 0$ , il est possible de remplacer cet hyperplan par  $m$  hyperplans définis par une matrice qui est de rang 1, avec  $m$  qui est le rang de  $H$ .

L'intérêt apparaît quand on examine le Lemme 1.5. Grâce à la condition (b), l'application de ce lemme à la démonstration par l'absurde du Lemme 1.4 mène à un résultat qui aurait été obtenu si dans le Lemme 1.5, la matrice  $H$  pouvait être prise directement de rang égal à 1. En effet, à ce moment là, si la proposition (ii) du Lemme 1.4 est supposée non vérifiée, on obtient un hyperplan défini par une matrice  $H \geq 0$  de rang 1 tel que l'ensemble  $\mathbb{S}$  et la matrice  $\Theta$  soient simultanément contenus dans le demi-espace défini par  $\{S \mid \text{Trace}(HS) \geq 0\}$ .

Il est donc possible maintenant de présenter la démonstration du Théorème 1.2 par application du Lemme 1.4. Elle est basée sur le fait que s'il existe un ensemble  $\mathbb{W}_{cns}$  sans perte pour  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$  alors d'après les conditions de la Définition 1.5, la caractérisation des hyperplans définis par une matrice non nulle  $H \geq 0$  telle que l'ensemble  $\mathbb{W}_{cns}$  soit contenu dans le demi-espace défini par  $\{S \mid \text{Trace}(HS) \geq 0\}$  peut se ramener à une caractérisation où les matrices  $H$  se factorisent comme le produit de la transposée d'un vecteur du graphe de  $\Delta$  multiplié par lui-même.

**Démonstration du Théorème 1.2**

**Suffisance** Démontrons  $((ii) \Rightarrow (i))$ . L'implication découle directement du fait que, pour toute matrice  $W \in \mathbb{W}_{cns}$ , on a l'inclusion

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{A_\Phi}} \mid \exists \theta \in \mathbb{P}, p = \Delta(\theta)q \right\} \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{A_\Phi}} \mid \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \right\}.$$

Ensuite, le raisonnement est similaire à celui présenté Section 1.2, page 20.

**Nécessité** Démontrons  $((i) \Rightarrow (ii))$ . D'après le Théorème 1.1, la proposition (i) du Théorème 1.2 implique qu'il existe  $W_0 = W_0^T$  telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W_0 \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0$$

et

$$\mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W_0) < 0$$

avec la notation

$$\mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W_0) = \begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W_0 \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}.$$

Par suite, cette dernière inégalité étant stricte, il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T (W_0 + \epsilon I) \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} > 0 \quad (1.16)$$

et

$$\mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W_0 + \epsilon I) < 0.$$

L'ensemble  $\mathbb{W}_{cns}$  étant par hypothèse sans perte pour  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$ , nous avons d'après la Définition 1.5 l'égalité d'ensemble suivant

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{A_\Phi}} \mid \exists \theta \in \mathbb{P}, p = \Delta(\theta)q \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{A_\Phi}} \mid \forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

La condition (1.16) est donc équivalente à : pour tout

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_{A_\Phi}} \mid \forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \right\},$$

on a

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T (W_0 + \epsilon I) \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} > 0.$$

En prenant  $\mathbb{S} = \mathbb{W}_{cns}$ , les hypothèses du Lemme 1.4 sont satisfaites. Il existe donc une matrice  $W \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que  $W < W_0 + \epsilon I$ . Or de l'implication

$$W_1 \leq W_2 \Rightarrow \mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W_1) \leq \mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W_2),$$

on en déduit qu'il existe  $W \in \mathbb{W}_{cns}$  tel que

$$\mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W) < 0.$$

La proposition (ii) du Théorème 1.2 est donc démontrée.  $\square$

### 1.4.2 Étude du bien posé d'interconnexions de gains dépendant de paramètres

Les résultats de la section précédente suppose que l'interconnexion de gains dépendant de paramètres considérée est bien posée. Nous étudions donc dans cette section comment ramener la vérification du bien posé d'une interconnexion de gains dépendant de paramètres à la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ . Nous verrons aussi que, dans certains cas, les conditions proposées dans les résultats de la section précédente implique le bien posé de l'interconnexion de gains dépendant de paramètres. Il n'est alors pas nécessaire de vérifier le bien posé de l'interconnexion considérée lors de l'application des résultats de la section précédente.

Comme dans la section précédente, le théorème suivant indique qu'il est pertinent d'étudier le bien posé d'une interconnexion de gains dépendant de paramètres à partir des contraintes quadratiques vérifiées par le graphe des sous-systèmes. En effet, cette approche conduit à des conditions nécessaires et suffisantes.

**Théorème 1.3.** *Soient  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et*

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

*une matrice avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ .*

*Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la LFT*

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

*est bien posée sur  $\mathbb{P}$  ;*

(ii) *il existe  $W = W^T$  telle que*

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.18)$$

*et*

$$\begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.19)$$

**Démonstration** Voir les Annexes, Section A.1.3, page 172. □

**Interprétation des conditions du Théorème 1.3** Le bien posé de la LFT (1.17) sur  $\mathbb{P}$  est équivalent à

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad (I - A_\Phi \Delta(\theta)) \text{ est inversible}$$

ou encore

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( \exists q \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi}}, (I - A_\Phi \Delta(\theta))q = 0 \Rightarrow q = 0 \right).$$

Autrement dit, en notant  $p = \Delta(\theta)q$ ,

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( \exists q \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi}}, \exists p \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi}}, \begin{cases} p = \Delta(\theta)q \\ q = A_\Phi p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \right).$$

Cette condition peut s'interpréter en terme de graphes. Pour un  $\theta \in \mathbb{P}$  donné, l'intersection du graphe de  $\Delta(\theta)$  et du graphe inverse de  $A_\Phi$  est le singleton nul :

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| p = \Delta(\theta)q \right\} \cap \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| q = A_\Phi p \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.20)$$

On dit alors que le graphe de  $\Delta(\theta)$  et le graphe inverse de  $A_\Phi$  sont disjoints ou (topologiquement) séparés [Saf80].

Les conditions (1.18) et (1.19) garantissent que les graphes sont topologiquement séparés. En effet, en post et pré multipliant la condition (1.18) par  $q$ , il vient

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| p = \Delta(\theta)q \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \right).$$

C'est-à-dire, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , les signaux du graphe de  $\Delta(\theta)$  vérifient

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0;$$

alors que les signaux non nuls du graphe inverse de  $A_\Phi$  vérifient

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} < 0$$

puisque, en post et pré multipliant la condition (1.19) par  $p$  non nul, il vient

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } q = A_\Phi p \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} < 0.$$

Les graphes ne peuvent donc s'intersecter que pour  $\begin{bmatrix} p^T & q^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ . La condition (1.20) est donc satisfaite.

Il est possible de donner une interprétation géométrique très simple des conditions (1.18) et (1.19) quand  $p$  et  $q$  sont de dimension un. Sur la Figure 1.5, la zone hachurée correspond à l'ensemble

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} < 0 \right\}$$

alors que la zone non hachurée correspond à l'ensemble

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} > 0 \right\}.$$

Pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , le graphe de  $\Delta(\theta)$  est donc contenu dans la zone non hachurée alors que le graphe inverse de  $A_\Phi$  est strictement contenu dans la zone hachurée. Leur intersection ne peut donc se produire qu'à l'origine.

Bien sûr, vérifier la séparation des graphes par une contrainte quadratique peut sembler limitatif. Cependant, comme il est énoncé dans le Théorème 1.3, vérifier la séparation des graphes par une contrainte quadratique est en fait une condition nécessaire et suffisante de bien posé sur  $\mathbb{P}$  de la LFT (1.17).

On peut ramener la vérification du bien posé d'une interconnexion de gains dépendant de paramètres à la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ . Ceci conduit à des conditions suffisantes.

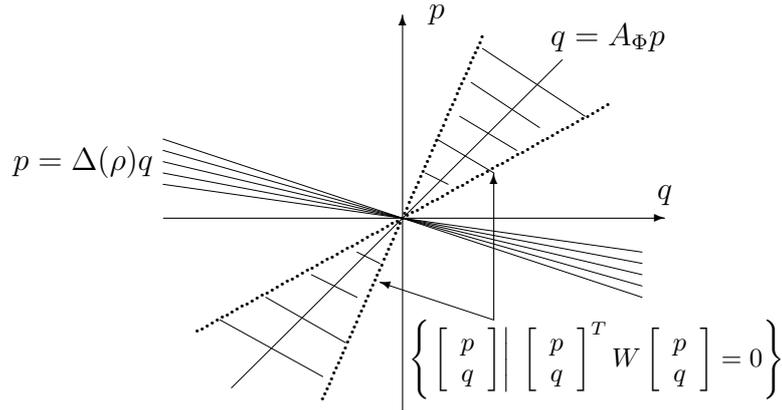


FIG. 1.5 – Illustration de la séparation des graphes

**Corollaire 1.2.** Soient  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

une matrice réelle avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ . Soit  $\mathbb{W}_{sea}$  un ensemble convexe tel que  $\mathbb{W}_{sea} \subseteq \mathbb{W}$ .

Alors la proposition (ii) implique la proposition (i) :

(i) la LFT

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

est bien posée sur  $\mathbb{P}$  ;

(ii) il existe  $W \in \mathbb{W}_{sea}$  telle que

$$\begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.21)$$

Dans certains cas, il est possible de ramener de façon équivalente la vérification du bien posé d'une interconnexion de gains dépendant de paramètres à la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ .

**Théorème 1.4.** Soient  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

une matrice réelle avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ . Soit  $\mathbb{W}_{cns}$  un ensemble sans perte pour  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$ .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la LFT

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

est bien posée sur  $\mathbb{P}$  ;

(ii) il existe  $W \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\begin{bmatrix} I \\ A_\phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I \\ A_\phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.22)$$

**Démonstration** Elle est obtenue par une adaptation directe de la démonstration du Théorème 1.2.  $\square$

Dans certains cas, il est possible que les conditions présentées pour l'étude de la performance impliquent le bien posé de l'interconnexion de gains dépendant de paramètres considérée. Il est alors plus nécessaire de vérifier le bien posé lors de l'application des Théorèmes 1.3 ou 1.4 ou du Corollaire 1.2. Le théorème suivant précise ceci.

**Théorème 1.5.** Soient  $M$  une matrice réelle symétrique,  $\mathbb{P}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Delta$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$  et

$$\begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

une matrice réelle avec  $A_\Phi$  appartenant à  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ .

Alors la LFT

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

est bien posée sur  $\mathbb{P}$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a) la contrainte quadratique

$$C_\Phi^T M C_\Phi \geq 0 \quad (1.23)$$

est vérifiée ;

(b) les conditions (1.10) et (1.11) ou la condition (1.12) ou la condition (1.15) sont vérifiées.

**Démonstration** Supposons que la condition (1.23) est vérifiée. Démontrons alors que les conditions (1.10) et (1.11) impliquent les conditions (1.18) et (1.19), qui sont équivalentes à ce que la LFT  $\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$  soit bien posée sur  $\mathbb{P}$ .

En fait, les conditions (1.10) et (1.18) sont identiques. La condition (1.11) implique que

$$C_\Phi^T M C_\Phi + \begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

Cette dernière condition implique la condition (1.19) du fait de la condition (1.23).

La démonstration des deux autres cas (les conditions (1.23) et (1.12) impliquent la condition (1.21), les conditions (1.23) et (1.15) impliquent la condition (1.22)) est omise car très similaire.  $\square$

### 1.4.3 Étude de deux cas d'interconnexions de gains dépendant de paramètres

Dans l'étude de la performance et du bien posé d'une interconnexion de gains dépendant de paramètres, l'obtention d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre repose sur la description du graphe des sous-systèmes ou un sur-ensemble par des contraintes quadratiques générées par les matrices symétriques d'un ensemble convexe (les ensembles  $\mathbb{W}_{sea}$  et  $\mathbb{W}_{cns}$ ). Dans cette section, nous donnons une définition explicite de ces ensembles de matrices symétriques pour les deux cas de figure que nous rencontrerons dans la suite de ce document :

1. les sous-systèmes sont identiques et correspondent à un gain  $\theta$  prenant toute valeur dans l'intervalle  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :
  - $n_\theta = 1$  et  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est un intervalle bornée de  $\mathbb{R}$ , *i.e.*  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies ;
  - $\Delta(\theta) = \theta I$  ;
2. les sous-systèmes sont de même nature et correspondent à différents gains  $\theta_i$  prenant toute valeur dans l'intervalle  $[\underline{\theta}_i; \bar{\theta}_i]$  :
  - $n_\theta$  est un entier strictement plus grand que 1 et  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  est un polytope borné de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , *i.e.*, pour tout  $i$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies ;
  - $\Delta(\theta) = \text{diag}(\theta_1 I, \dots, \theta_{n_\theta} I)$ .

**Premier cas** Dans le premier cas, il est possible de construire un ensemble  $\mathbb{W}_{cns}$  sans perte pour l'ensemble  $\mathbb{P}$  et la fonction  $\Delta$  considérés.

**Lemme 1.6.** Soient  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , *i.e.*  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies, et  $\Delta(\theta) = \theta I_{n_{A_\Phi}}$ .

Alors l'ensemble

$$\mathbb{W}_{cns}(n_{A_\Phi}) = \left\{ W = W^T \left| \begin{array}{l} \exists \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}, \mathcal{D} > 0, \exists \mathcal{G} = -\mathcal{G}^T \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}, \\ W = \begin{bmatrix} -2\mathcal{D} & (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} + \mathcal{G} \\ (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} - \mathcal{G} & -2\underline{\theta}\bar{\theta}\mathcal{D} \end{bmatrix} \end{array} \right. \right\}$$

est sans perte pour  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$ .

Il est alors possible de transformer de façon équivalente l'étude des performances et du bien posé de telles interconnexions de gains dépendant de paramètres en la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

**Démonstration** La démonstration consiste à vérifier que l'ensemble  $\mathbb{W}_{cns}$  défini dans le lemme satisfait les trois conditions de la Définition 1.5. Pour cela, les propriétés suivantes de la Trace sont utilisées :  $\text{Trace}(AB) = \text{Trace}(BA)$  et

$$\text{Trace} \left( \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \right) = \text{Trace}(A_{11}B_{11}) + \text{Trace}(A_{12}B_{12}) + \dots \\ \dots + \text{Trace}(A_{21}B_{21}) + \text{Trace}(A_{22}B_{22}).$$

**Condition (a)** Il faut montrer que l'ensemble

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2n_{A\Phi}} \mid \exists \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], p = \theta q \right\}$$

coïncide avec l'ensemble

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{2n_{A\Phi}} \mid \forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right]^T W \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right] \geq 0 \right\}.$$

Montrons que le premier ensemble est inclus dans le second. Soit  $\left[ \begin{array}{cc} p^T & q^T \end{array} \right]^T$  un élément du premier ensemble. Alors pour  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,

$$\left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right]^T W \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right] = q^T (2(\theta - \underline{\theta})(\bar{\theta} - \theta)\mathcal{D} + \theta(\mathcal{G} + \mathcal{G}^T)) q.$$

Comme  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $\mathcal{D} > 0$  et  $\mathcal{G} + \mathcal{G}^T = 0$ , on a

$$\left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right]^T W \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right] \geq 0$$

Par suite,  $\left[ \begin{array}{cc} p^T & q^T \end{array} \right]^T$  est un élément du second ensemble.

Montrons maintenant que le second ensemble est inclus dans le premier. Soit  $\left[ \begin{array}{cc} p^T & q^T \end{array} \right]^T$  un élément du second ensemble. Alors

$$\forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right]^T W \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right] \geq 0.$$

Cette expression est équivalente à

$$\forall \mathcal{D} > 0, \forall \mathcal{G} = -\mathcal{G}^T, \text{Trace} \left( \left[ \begin{array}{cc} -2\mathcal{D} & (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} + \mathcal{G} \\ (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} - \mathcal{G} & -2\underline{\theta}\bar{\theta}\mathcal{D} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} p^T & q^T \end{array} \right] \right) \geq 0,$$

soit, pour tout  $\mathcal{D} > 0$  et pour tout  $\mathcal{G} = -\mathcal{G}^T$ ,

$$\text{Trace}((-2\underline{\theta}\bar{\theta}qq^T + (\underline{\theta} + \bar{\theta})(qp^T + pq^T) - 2pp^T)\mathcal{D}) + \text{Trace}((pq^T - qp^T)\mathcal{G}) \geq 0.$$

Comme cette dernière expression est vraie pour tout  $\mathcal{D} > 0$  et pour tout  $\mathcal{G} = -\mathcal{G}^T$ , elle est équivalente à

$$\begin{cases} -2\underline{\theta}\bar{\theta}qq^T + (\underline{\theta} + \bar{\theta})(qp^T + pq^T) - 2pp^T \geq 0 \\ pq^T - qp^T = qp^T - pq^T = 0. \end{cases}$$

La proposition (ii) du lemme suivant permet de conclure qu'il existe un scalaire  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  tel que  $p = \theta q$ .

**Lemme 1.7.** Soient  $F$  et  $G$  deux matrices réelles de même dimensions,  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  deux réels tels que  $\underline{\theta} < \bar{\theta}$ .

Alors les deux propositions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $GG^T - FF^T \geq 0$  et  $FG^T - GF^T = 0$  si et seulement s'il existe une matrice  $U = U^T$  telle que  $-I \leq U \leq I$  et  $F = GU$  ;
- (ii)  $-2\bar{\theta}\underline{\theta}GG^T + (\underline{\theta} + \bar{\theta})(FG^T + GF^T) - 2FF^T \geq 0$  et  $FG^T - GF^T = 0$  si et seulement s'il existe une matrice réelle  $U = U^T$  telle que  $\underline{\theta}I \leq U \leq \bar{\theta}I$  et  $F = GU$ .

**Démonstration** Voir les Annexes, Section A.1.4, page 172. □

Par suite,  $[p^T \quad q^T]^T$  est un élément du premier ensemble. La condition (a) est donc vérifiée.

**Condition (b)** Cette condition est satisfaite puisque  $\mathbb{W}_{cns}$  est un cône convexe.

**Condition (c)** Il faut montrer que pour toute matrice non nulle semi-définie positive  $H$  telle que

$$\forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \text{Trace}(HW) \geq 0, \quad (1.24)$$

il existe  $m$  vecteurs  $h_i \in \mathbb{R}^p$  où  $m$  est le rang de  $H$  tels que

$$\begin{cases} H = \sum_{i=1}^m h_i h_i^T \\ \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall W \in \mathbb{W}_{cns}, h_i^T W h_i \geq 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Soient  $H_1$  et  $H_2$  des matrices telles que  $[H_1^T \quad H_2^T]^T$  soit de rang  $m$  et telles que  $H = [H_1^T \quad H_2^T]^T [H_1^T \quad H_2^T]$ . Nous avons alors  $\text{Trace}(HW)$  qui est égal à :

$$\text{Trace}((-2\underline{\theta}\bar{\theta}H_2H_2^T + (\underline{\theta} + \bar{\theta})(H_1H_2^T + H_2H_1^T) - 2H_1H_1^T)\mathcal{D}) + \text{Trace}((H_2H_1^T - H_1H_2^T)\mathcal{G}).$$

D'après la condition (1.24), cette dernière expression est positive pour tout  $\mathcal{D} > 0$  et pour tout  $\mathcal{G} = -\mathcal{G}^T$ . La condition (1.24) est donc équivalente à

$$\begin{cases} -2\underline{\theta}\bar{\theta}H_2H_2^T + (\underline{\theta} + \bar{\theta})(H_1H_2^T + H_2H_1^T) - 2H_1H_1^T \geq 0 \\ H_2H_1^T - H_1H_2^T = H_1H_2^T - H_2H_1^T = 0 \end{cases}$$

ce qui par application de la proposition (ii) du Lemme 1.7 est équivalent à l'existence d'une matrice  $U = U^T$  telle que  $\underline{\theta}I \leq U \leq \bar{\theta}I$  et telle que  $H_1 = H_2U$ .

Soit la décomposition spectrale de la matrice  $U$  :

$$U = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T \text{ avec } \sum_{i=1}^m u_i u_i^T = I \text{ et } \forall i = 1, \dots, m, \underline{\theta} \leq \lambda_i \leq \bar{\theta}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T & H_2^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \sum_{i=1}^m u_i u_i^T \begin{bmatrix} H_1^T & H_2^T \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^m \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} u_i \right) \left( \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} u_i \right)^T \\
&= \sum_{i=1}^m \left( H_2 \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} u_i \right) \left( H_2 \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} u_i \right)^T \\
&= \sum_{i=1}^m \left( H_2 \begin{bmatrix} \lambda_i u_i \\ u_i \end{bmatrix} \right) \left( H_2 \begin{bmatrix} \lambda_i u_i \\ u_i \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \lambda_i \xi_i \\ \xi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i \xi_i^T & \xi_i^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De plus, comme pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $\underline{\theta} \leq \lambda_i \leq \bar{\theta}$ , nous avons bien

$$\forall i = 1, \dots, m, \forall W \in \mathbb{W}_{cns}, \begin{bmatrix} \lambda_i \xi_i^T & \xi_i^T \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} \lambda_i \xi_i \\ \xi_i \end{bmatrix} \geq 0.$$

La condition (1.25) est donc satisfaite avec

$$h_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \xi_i \\ \xi_i \end{bmatrix}.$$

□

**Second cas** Dans le second cas, il est possible de construire un ensemble  $\mathbb{W}_{sea}$  pour l'ensemble  $\mathbb{P}$  et la fonction  $\Delta$  considérés.

**Lemme 1.8.** Soient  $n_\theta$  un entier strictement supérieur à 1,  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  un compact borné de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , i.e. pour tout  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies, et  $\Delta(\theta) = \text{diag}(\theta_1 I_{k_1}, \dots, \theta_{n_\theta} I_{k_{n_\theta}})$ . Notons  $k$  le vecteur  $[k_1 \ \dots \ k_{n_\theta}]^T$ .

Alors pour tout  $W \in \mathbb{W}_{sea}(k)$  avec  $\mathbb{W}_{sea}(k)$  défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n_\theta, \exists \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i^T \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \mathcal{D}_i > 0, \exists \mathcal{G}_i = -\mathcal{G}_i^T \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \\ W_{11} = \text{diag}(-2\mathcal{D}_1, \dots, -2\mathcal{D}_{n_\theta}), \\ W_{12} = \text{diag}((\underline{\theta}_1 + \bar{\theta}_1)\mathcal{D}_1 + \mathcal{G}_1, \dots, (\underline{\theta}_{n_\theta} + \bar{\theta}_{n_\theta})\mathcal{D}_{n_\theta} + \mathcal{G}_{n_\theta}), \\ W_{22} = \text{diag}(-2\underline{\theta}_1 \bar{\theta}_1 \mathcal{D}_1, \dots, -2\underline{\theta}_{n_\theta} \bar{\theta}_{n_\theta} \mathcal{D}_{n_\theta}) \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

la condition

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0$$

est vérifiée.

**Démonstration** Soient  $W \in \mathbb{W}_{sea}(k)$  et  $\theta \in \mathbb{P}$ . En développant, il vient

$$\begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} = \text{diag}(L_1(\theta), \dots, L_{n_\theta}(\theta))$$

avec

$$L_i(\theta) = 2(\theta_i - \underline{\theta}_i)(\bar{\theta}_i - \theta_i)\mathcal{D}_i + \theta_i(\mathcal{G}_i + \mathcal{G}_i^T).$$

Comme pour tout  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $\theta_i \in [\underline{\theta}_i; \bar{\theta}_i]$ ,  $\mathcal{D}_i > 0$  et  $\mathcal{G}_i + \mathcal{G}_i^T = 0$

$$\forall i = 1, \dots, n_\theta, \quad L_i(\theta) \geq 0.$$

Par suite, la condition

$$\begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0$$

est vérifiée. □

Le Lemme 1.8 ne donne pas d'information sur le fait que l'ensemble  $\mathbb{W}_{sea}(k)$  soit ou non sans perte pour les  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$  considérés. Nous allons montrer par l'absurde que ce n'est pas le cas si  $n_\theta$  est quelconque, en utilisant le fort lien qui existe entre le problème de bien posé d'une représentation LFT sur  $\mathbb{P}$  et le problème de  $\mu$ -analyse [Doy82]. En effet, la démonstration est basée sur le fait qu'un problème de  $\mu$ -analyse réel [BYDM94, Fu97] peut toujours être transformé en un problème de bien posé d'une interconnexion de gains dépendant de paramètres.

Le problème de  $\mu$ -analyse réel peut se formuler comme le problème suivant : soient  $\hat{\theta} > 0$ ,  $\mathbb{P} = [-\hat{\theta}; \hat{\theta}] \times \dots \times [-\hat{\theta}; \hat{\theta}]$ ,  $X$  une matrice complexe et  $\Delta(\theta) = \text{diag}(\theta_1 I, \dots, \theta_{n_\theta} I)$ , vérifier si

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad (I - X\Delta(\theta)) \text{ est inversible.}$$

Notons  $X_R$  la partie réelle de  $X$  et  $X_I$  la partie imaginaire de  $X$ . Le problème de  $\mu$ -analyse réel peut alors se reformuler de la façon suivante : vérifier si

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \left( I - \begin{bmatrix} X_R & -X_I \\ X_I & X_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(\theta) & 0 \\ 0 & \Delta(\theta) \end{bmatrix} \right) \text{ est inversible.}$$

En permutant judicieusement les lignes et les colonnes de cette dernière matrice, ce problème est exactement un problème de bien posé sur  $\mathbb{P}$  d'une interconnexion de gains dépendant de paramètres.

Maintenant, supposons que l'ensemble  $\mathbb{W}_{sea}(k)$  défini dans le Lemme 1.8 soit sans perte pour les  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$  considérés. Avec l'utilisation du Théorème 1.4, il serait alors possible d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la vérification du bien posé d'une représentation LFT sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI [BEFB94]. Or le problème de  $\mu$ -analyse réel est  $\mathcal{NP}$ -complet [BYDM94, Fu97] ; le problème de bien posé d'une représentation LFT l'est donc aussi. Les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI sont des problèmes  $\mathcal{P}$  et ne sont donc pas des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complet. D'où la contradiction. L'ensemble  $\mathbb{W}_{sea}(k)$  défini dans le Lemme 1.8 n'est pas sans perte pour les  $\mathbb{P}$  et  $\Delta$  considérés lorsque  $n_\theta$  est quelconque.

**Remarque 1.1.** *Nous avons supposé que l'ensemble des problèmes  $\mathcal{NP}$ -complet et dis-joints de l'ensemble des problèmes  $\mathcal{P}$ . C'est une hypothèse largement admise [GJ79].*

## 1.5 Représentation LFT des fonctions rationnelles

Dans la suite du document, nous étudierons des inégalités qui dépendent rationnellement de  $\theta$ . Afin de pouvoir appliquer les résultats précédents, il est nécessaire de pouvoir construire une représentation LFT de matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ .

**Définition 1.6.** Soient  $n_\theta$  un entier naturel,  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $\Phi(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{l \times c}$ ,  $\Delta(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ , et  $A_\Phi \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}$ ,  $B_\Phi \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times c}$ ,  $C_\Phi \in \mathbb{R}^{l \times n_{A_\Phi}}$  et  $D_\Phi \in \mathbb{R}^{l \times c}$  des matrices.

Si  $\Delta(\theta)$ ,  $A_\Phi$ ,  $B_\Phi$ ,  $C_\Phi$  et  $D_\Phi$  sont telles que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = \Phi(\theta),$$

la LFT

$$\Delta(\theta) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix}$$

est dite être une représentation LFT de  $\Phi(\theta)$ .

La question est de savoir sous quelles conditions une fonction rationnelle admet une représentation LFT. Nous nous intéressons aux deux cas de figure suivants :

1.  $\Phi(\theta)$  est une fonction rationnelle d'une variable :  $n_\theta = 1$  ;
2.  $\Phi(\theta)$  est une fonction rationnelle de plusieurs variables :  $n_\theta$  est un entier strictement plus grand que 1.

**Premier cas** Le lemme suivant énonce qu'une fonction rationnelle d'une variable admet une représentation LFT si et seulement si elle est bien posé en 0 [ZDG96].

**Lemme 1.9.** Soient  $N$  un entier naturel et  $\Phi(\theta)$  une matrice de fonctions rationnelles en  $\theta$  :

$$\Phi(\theta) = \frac{T(\theta)}{c(\theta)} = \frac{\sum_{j=0}^N T_j \theta^j}{\sum_{j=0}^N c_j \theta^j}$$

où les  $c_j$  sont des réels.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe un entier naturel  $n_{A_\Phi}$  et des matrices  $A_\Phi$ ,  $B_\Phi$ ,  $C_\Phi$  et  $D_\Phi$  avec  $\dim(A_\Phi) = n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}$  telles que

$$(\theta I_{n_{A_\Phi}}) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = \Phi(\theta);$$

- (ii)  $\Phi(\theta)$  est bien posée en 0, i.e.  $c_0 \neq 0$ .

Dans la suite du document, nous supposons sans perte de généralité que  $c_0 = 1$ .

### Démonstration

**Nécessité** Démontrons ((i)  $\Rightarrow$  (ii)). Nous avons

$$\Phi(0) = \frac{T_0}{c_0} = D_\Phi.$$

Ce qui implique  $c_0 \neq 0$ .

**Suffisance** Démontrons  $((ii) \Rightarrow (i))$  par construction d'une représentation LFT de la fonction  $\Phi(\theta)$ . Elle peut se récrire  $T(\theta)(c(\theta)I)^{-1}$ . Une représentation LFT de  $\Phi(\theta)$  peut être obtenue si on est capable de construire une représentation LFT de la matrice de polynômes  $T(\theta)$  et une représentation LFT inversible de la matrice de polynômes  $c(\theta)I$  puisque le produit de deux LFTs est une LFT et que l'inverse d'une LFT, si elle existe, est une LFT (voir les opérations sur les LFTs définies dans les Annexes, Section A.1.5, page 175).

Une matrice de polynômes étant une concaténation de polynômes, et la concaténation de LFTs étant une LFT, une représentation LFT d'une matrice de polynômes peut être obtenue à partir de la représentation LFT d'un polynôme. Un polynôme étant la somme de monômes, et la somme de LFTs étant une LFT, une représentation LFT d'un polynôme peut être obtenue à partir de la représentation LFT d'un monôme. Un monôme étant le produit de monômes de degré 1, et le produit de LFTs étant une LFT, une représentation LFT d'un monôme peut être obtenue à partir de la représentation LFT d'un monôme de degré 1. Or un monôme de degré 1 admet la représentation LFT suivante

$$\theta = \theta \star \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est à noter qu'en construisant ainsi une représentation LFT d'une matrice de polynômes, la matrice  $\Delta(\theta)$  est diagonale et est donc égal à  $\theta I$ .

Soit une représentation LFT de  $c(\theta)I$  :

$$c(\theta)I = (\theta I) \star \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}.$$

Donc  $c(0)I = c_0I = D_c$ .  $c_0$  étant un réel non nul,  $D_c$  est inversible et l'inverse de la représentation LFT de  $c(\theta)I$  existe.  $\square$

Lorsqu'une fonction rationnelle d'une variable admet une représentation LFT, cette représentation LFT n'est pas unique. Parmi toutes les représentations LFT possibles, il est intéressant d'en chercher une pour laquelle l'ordre (la valeur  $n_{A_\Phi}$ ) est le plus petit possible. On dit alors que l'on cherche une représentation LFT minimale de  $\Phi(\theta)$ .

**Définition 1.7** (Minimalité d'une représentation LFT). *Soit  $\Phi(\theta)$  une fonction de  $\theta$ . Soit une représentation LFT de  $\Phi(\theta)$  :*

$$(\theta I_{n_{A_\Phi}}) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = \Phi(\theta).$$

*Cette représentation LFT de  $\Phi(\theta)$  est dite minimale si pour toute autre représentation LFT de  $\Phi(\theta)$  :*

$$(\theta I_k) \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \Phi(\theta)$$

*on a*

$$k \geq n_{A_\Phi}.$$

Dans le présent cas ( $n_\theta = 1$ ), il est possible de faire une analogie formelle entre une représentation LFT de  $\Phi(\theta)$  comme une LFT de  $\theta I$  par une matrice constante et une

représentation d'état d'un système LTI discret. En effet, un système LTI discret peut être représenté par une fraction rationnelle en  $z^{-1}$  :

$$\frac{\sum_{j=0}^N T_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^N c_j z^{-j}}.$$

Il peut aussi être représenté par sa représentation d'état, qui est en fait une représentation LFT

$$D + C(zI - A)^{-1}B = D + C(z^{-1}I) (I - A(z^{-1}I))^{-1} B = (z^{-1}I) \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Basée sur cette analogie formelle et la définition d'une représentation d'état minimale [ZDG96], il est possible d'utiliser les représentations d'état minimale des systèmes LTI discrets (par exemple, les représentations canoniques) pour les fonctions rationnelles en  $\theta$ . Dans la suite du document, la fonction rationnelle

$$\begin{bmatrix} \frac{I_p \theta^N}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \\ \vdots \\ \frac{I_p}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \end{bmatrix}$$

apparaîtra souvent. Le lemme suivant en donne une représentation LFT minimale.

**Lemme 1.10.** *Soient  $N$  un entier naturel et  $\Phi(\theta)$  une fonction rationnelle en  $\theta$  :*

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{I_p \theta^N}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \\ \vdots \\ \frac{I_p}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \end{bmatrix}$$

où les  $c_j$  sont des réels.

Alors une représentation LFT minimale de  $\Phi(\theta)$  est donnée par

$$(\theta I_{Np}) \star J_p(c_j) = \Phi(\theta)$$

avec

$$J_p(c_j) = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_p & 0 \\ -c_N I_p & \cdots & \cdots & \cdots & -c_1 I_p & I_p \\ \hline I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_p & 0 \\ -c_N I_p & \cdots & \cdots & \cdots & -c_1 I_p & I_p \end{array} \right].$$

**Démonstration** La démonstration est basée sur l'analogie formelle avec la représentation d'état des systèmes LTI discrets. Une représentation LFT minimale de  $\Phi(\theta)$  se déduit directement d'une représentation d'état minimale du système LTI discret suivant

$$\Phi(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{I_p z^{-N}}{1 + \sum_{j=1}^N c_j z^{-j}} \\ \vdots \\ \frac{I_p}{1 + \sum_{j=1}^N c_j z^{-j}} \end{bmatrix}.$$

Or une représentation d'état minimale de ce système est bien  $(z^{-1}I_{Np}) \star J_p(c_i)$ .  $\square$

**Second cas** Le lemme suivant énonce qu'une fonction rationnelle de plusieurs variables admet une représentation LFT si et seulement si elle est bien posé en 0 [ZDG96].

**Lemme 1.11.** Soient  $n_\theta$  un entier naturel strictement supérieur à 1 et  $N_j, j = 1, \dots, n_\theta$ , des entiers naturels et  $\Phi(\theta)$  une matrices de fonctions rationnelles en  $\theta = [\theta_1 \ \dots \ \theta_{n_\theta}]^T$  :

$$\Phi(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \dots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \dots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \dots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \dots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}$$

où les  $c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$  sont des réels.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe des entiers naturels  $k_i, i = 1, \dots, n_\theta$ , et des matrices  $A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi$  et  $D_\Phi$  telles que

$$\text{diag}(\theta_1 I_{k_1}, \dots, \theta_{n_\theta} I_{k_{n_\theta}}) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = \Phi(\theta);$$

- (ii)  $\Phi(\theta)$  est bien posé en 0, i.e.  $c_{(0, \dots, 0)} \neq 0$ .

Dans la suite du document, nous supposons sans perte de généralité que  $c_{(0, \dots, 0)} = 1$ .

**Démonstration** La démonstration suit les mêmes lignes que la démonstration du Lemme 1.9 à ceci près que la matrice  $\Delta(\theta)$  obtenue est diagonale en les éléments de  $\theta$ . En réordonnant les  $\theta_i$ , il est alors possible de trouver une représentation LFT de  $\Phi(\theta)$  avec  $\Delta(\theta)$  de la forme  $\text{diag}(\theta_1 I_{k_1}, \dots, \theta_{n_\theta} I_{k_{n_\theta}})$ . Ce réordonnement revient à permuter des lignes et des colonnes dans la représentation LFT (voir l'opération de changement de base dans l'espace « d'état » dans les Annexes, Section A.1.5, page 175, avec  $T_q = T_p$  une matrice de permutation adéquate).  $\square$

Comme dans le cas des fonctions rationnelles d'une variable, il est intéressant de rechercher une représentation LFT minimale. Cependant, la difficulté est qu'il n'est plus possible de faire une analogie formelle avec la représentation d'état d'un système linéaire stationnaire. Dans le cas des fonctions à plusieurs variables, le problème de la minimalité d'une représentation LFT est un problème difficile et reste largement ouvert (voir [Fon95] pour une discussion).

**Cas d'une fraction rationnelle mal posée en 0** L'approche développée dans ce chapitre suppose l'existence d'une représentation LFT. Or dans le cas d'une fonction rationnelle, nous venons de voir qu'une représentation LFT n'existe que si la fonction rationnelle est bien posée en 0. Une question se pose alors : est-il possible de vérifier l'inégalité

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \Phi(\theta)^T M \Phi(\theta) < 0$$

où  $\Phi(\theta)$  est une fonction rationnelle bien posée sur  $\mathbb{P}$  avec  $\mathbb{P}$  ne contenant pas 0, mais où  $\Phi(\theta)$  est mal posée en 0 ?

En fait, il est possible de se ramener au cas précédent où  $\Phi(\theta)$  est bien posée en 0 en faisant un changement de paramètre :

$$\theta_{new} = \theta - \theta_b$$

où  $\theta_b \in \mathbb{P}$  avec le nouvel ensemble

$$\mathbb{P}_{new} = \{\theta_{new} \mid \exists \theta \in \mathbb{P}, \theta_{new} = \theta - \theta_b\}.$$

Sans perte de généralité, nous supposons dans la suite de ce document que toutes les fonctions rationnelles rencontrées admettent une représentation LFT, *i.e.* sont bien posées en 0.

## 1.6 Inégalités dépendant rationnellement de paramètres

Dans cette section, nous voulons transformer le problème de vérifier une inégalité dépendant rationnellement de paramètres (un problème *a priori* difficile) en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Cette transformation est intéressante puisque ces derniers problèmes peuvent se résoudre efficacement. Pour cela, nous regroupons les résultats précédemment énoncés dans ce chapitre. Comme depuis le début de ce chapitre, nous considérons les deux cas de figure suivants :

1. l'inégalité dépend rationnellement d'un paramètre :  $n_\theta = 1$  et  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est un intervalle bornée de  $\mathbb{R}$ , *i.e.*  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies ;
2. l'inégalité dépend rationnellement de plusieurs paramètres :  $n_\theta$  est un entier strictement plus grand que 1 et  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  est un polytope borné de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , *i.e.*, pour tout  $i$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies.

**Premier cas** Pour le cas d'une inégalité dépendant rationnellement d'un paramètre, le théorème suivant énonce que la vérification de cette inégalité se transforme, de façon équivalente, en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

**Théorème 1.6** (KYP réel). *Soient  $M$  une matrice symétrique,  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , *i.e.*  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies,  $N$  un entier naturel et  $\Phi(\theta)$  une matrice de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :*

$$\Phi(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N T_j \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j}$$

où les  $c_j$  sont des réels. Soient une représentation LFT de  $\Phi(\theta)$

$$(\theta I_{n_{A_\Phi}}) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = \Phi(\theta)$$

et  $\mathbb{W}_{cns}(n_{A_\Phi})$  l'ensemble défini par

$$\mathbb{W}_{cns}(n_{A_\Phi}) = \left\{ W = W^T \left| \begin{array}{l} \exists \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}, \mathcal{D} > 0, \exists \mathcal{G} = -\mathcal{G}^T \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi} \times n_{A_\Phi}}, \\ W = \begin{bmatrix} -2\mathcal{D} & (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} + \mathcal{G} \\ (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} - \mathcal{G} & -2\underline{\theta}\bar{\theta}\mathcal{D} \end{bmatrix} \end{array} \right. \right\}.$$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) la contrainte quadratique

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \Phi(\theta)^T M \Phi(\theta) < 0$$

est vérifiée ;

(ii) il existe  $W \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0. \quad (1.26)$$

**Démonstration** Par application du Théorème 1.2, page 32, en conjonction avec le Lemme 1.6, page 41.  $\square$

Le Théorème 1.6 peut être vu comme une extension du Lemme de Kalman Yakubovich Popov (voir le Lemme 1.2, page 24). D'ailleurs, les problèmes sont formellement similaires : d'un côté la vérification d'une inégalité dépendant rationnellement d'un paramètre réel  $\theta$  ; de l'autre côté la vérification d'une inégalité dépendant rationnellement d'un paramètre complexe  $e^{j\omega T_s}$ . Les hypothèses sont aussi très similaires :  $\Phi(\theta)$  est une matrice de fonctions rationnelles en  $\theta$  alors que  $\Phi(e^{j\omega T_s})$  est une matrice de fonctions rationnelles en  $e^{j\omega T_s}$  ;  $\Phi(\theta)$  est bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , c'est-à-dire pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $\det(I - A_\Phi \theta I) \neq 0$  alors que  $\Phi(e^{j\omega T_s})$  est bien posée sur  $[-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}]$ , c'est-à-dire pour tout  $\omega \in [-\frac{\pi}{T_s}, \frac{\pi}{T_s}]$ ,  $\det(e^{j\omega T_s} I - A_\Phi) \neq 0$ . La condition (1.26) obtenue est aussi très similaire à la condition (1.7). Cette similitude est d'autant plus frappante si l'on considère que  $\theta$  est de module inférieur ou égal à 1 (i.e.  $\underline{\theta} = -1$  et  $\bar{\theta} = 1$ ) comme pour  $e^{j\omega T_s}$ . La condition (1.26) devient alors

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2\mathcal{D} & \mathcal{G} \\ -\mathcal{G} & 2\mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

La matrice  $\mathcal{G}$  sert à prendre en compte le fait que  $\theta$  est réel. Dans le cas de  $e^{j\omega T_s}$  qui est complexe, la variable de décision  $\mathcal{G}$  n'existe donc pas. En enlevant  $\mathcal{G}$ , la dernière condition (avec  $P = 2\mathcal{D}$ ) est la condition obtenue dans le Lemme de Kalman Yakubovich Popov qui est rappelée ici :

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

Du fait de ces applications potentielles importantes, d'autres extensions du Lemme de Kalman Yakubovich Popov ont été récemment étudiées, avec un accent sur la nécessité [IMF00, IH03, Sch03]. Une forte relation peut être faite avec le calcul de la valeur de  $\mu$  [Doy82] pour des ensembles particuliers d'incertitudes où la borne supérieure de  $\mu$  [FTD91, MSF97] donne en fait la véritable valeur de  $\mu$  (voir aussi la Section 1.4.3, page 41).

De plus, des résultats récents sur des algorithmes dédiés à la résolution des conditions LMI du KYP (voir [VBWH03] et les références citées) font apparaître qu'il existe des algorithmes bien plus efficaces qu'une application directe des algorithmes de résolution généraux de LMI comme celui de [GNLC95].

Un autre intérêt du Lemme de Kalman Yakubovich Popov est qu'il peut s'interpréter en terme de graphe, de même pour son extension. Nous avons donc résolu un problème hors Automatique avec des concepts d'Automatique, ce qui peut grandement faciliter l'assimilation du résultat par un lecteur Automaticien.

**Second cas** Pour le cas d'une inégalité dépendant rationnellement de plusieurs paramètres, la vérification de cette inégalité se transforme aussi en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. En revanche, les conditions obtenues ne sont plus nécessaires.

**Théorème 1.7.** *Soient  $M$  une matrice symétrique,  $n_\theta$  un entier strictement supérieur à 1 et  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  un compact borné de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , i.e. pour tout  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies,  $n_\theta$  entiers naturels  $N_j$  et  $\Phi(\theta)$  une matrices de fonctions rationnelles en  $\theta = [\theta_1 \ \cdots \ \theta_{n_\theta}]^T$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$  :*

$$\Phi(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}$$

où les  $c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$  sont des réels avec  $c_{(0, \dots, 0)} = 1$ . Soient une représentation LFT de  $\Phi(\theta)$

$$\text{diag}(\theta_1 I_{k_1}, \dots, \theta_{n_\theta} I_{k_{n_\theta}}) \star \begin{bmatrix} A_\Phi & B_\Phi \\ C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} = \Phi(\theta)$$

et  $\mathbb{W}_{\text{sea}}(k_i)$  l'ensemble défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n_\theta, \exists \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i^T \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \mathcal{D}_i > 0, \exists \mathcal{G}_i = -\mathcal{G}_i^T \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \\ W_{11} = \text{diag}(-2\mathcal{D}_1, \dots, -2\mathcal{D}_{n_\theta}), \\ W_{12} = \text{diag}((\underline{\theta}_1 + \bar{\theta}_1)\mathcal{D}_1 + \mathcal{G}_1, \dots, (\underline{\theta}_{n_\theta} + \bar{\theta}_{n_\theta})\mathcal{D}_{n_\theta} + \mathcal{G}_{n_\theta}), \\ W_{22} = \text{diag}(-2\underline{\theta}_1 \bar{\theta}_1 \mathcal{D}_1, \dots, -2\underline{\theta}_{n_\theta} \bar{\theta}_{n_\theta} \mathcal{D}_{n_\theta}) \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

Alors la proposition (ii) implique la proposition (i) :

(i) la contrainte quadratique

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \Phi(\theta)^T M \Phi(\theta) < 0$$

est vérifiée ;

(ii) il existe  $W \in \mathbb{W}_{sea}(k_i)$  telle que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

**Démonstration** Par application du Corollaire 1.1, page 30, en conjonction avec le Lemme 1.8, page 44.  $\square$

## 1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une mise en œuvre de l'idée d'interconnexion a permis d'étudier les performances quadratiques d'interconnexions de gains dépendant de paramètres, soit le problème purement mathématique de la vérification d'inégalités quadratiques dépendant de paramètres. Cette mise en œuvre a mis en avant une notion fondamentale en Automatique, celle de graphe, et de l'outil associé, la  $\mathcal{S}$ -procédure. Elle a permis d'étendre un résultat important en Automatique, le Lemme de Kalman Yakubovich Popov qui permet l'étude des performances quadratiques des systèmes interconnectés par des intégrateurs ou des retards, à la classe des interconnexions considérées. La mise en œuvre a abouti à l'obtention d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Ces problèmes ont un rôle fondamental et peuvent être résolu facilement.

Le prochain chapitre est consacré à une mise en œuvre possible des résultats obtenus dans ce chapitre au problème intéressant de la transformation d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de paramètres en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre.



## 2.1 Introduction

Beaucoup de problèmes d'Automatique pour les systèmes LTI peuvent se formuler sous forme de problèmes d'optimisation sous contraintes LMI [BEFB94, GA94, SGC97, CG96, Chi96]. Ces problèmes sont intéressants car il est possible de les résoudre efficacement [BEFB94, NG94, GNLC95, BTN01]. Cependant, un certain nombre d'autres problèmes peut se formuler comme un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de paramètres. Ces problèmes sont des problèmes d'optimisation convexe mais de dimension infinie : les variables de décision sont des fonctions (inconnues) des paramètres et les contraintes, dépendant des paramètres, définissent une infinité de contraintes. La nature infinie de ces problèmes empêchent un calcul direct de leur solution.

Des instances particulières de ces problèmes apparaissent, par exemple, en analyse de la robustesse avec des incertitudes paramétriques [FAG96, GAC96] et en analyse ou commande des systèmes Linéaires à Paramètres Variants dans le temps (LPV) [Pac94, AGB95]. Pour ces problèmes particuliers, des résultats permettant de les résoudre existent qui peuvent être interprétés comme la transformation des contraintes LMI dépendant de paramètres en des contraintes LMI indépendant de paramètre. L'inconvénient majeur est que ces résultats concernent des problèmes particuliers et donc des instance particulières des problèmes d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de paramètres.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème plus général des problèmes d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de paramètres. Il s'agit de problèmes appartenant au domaine de l'Optimisation des Mathématiques Appliquées. Ces problèmes peuvent intéresser d'autres branches des Sciences de l'Ingénieur [BTN01] que l'Automatique. Pour pouvoir les résoudre, l'idée est de les transformer en des problèmes d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Une étape importante est alors le choix d'ensembles de fonctions pour les variables de décision. Dans l'interprétation des résultats existants, le choix le plus général est l'ensemble des fonctions rationnelles avec un dénominateur fixé *a priori*. Ici, l'ensemble des fonctions choisi est l'ensemble des fonctions rationnelles avec un dénominateur *libre*, c'est-à-dire que l'on optimise aussi sur le dénominateur. Ce choix permet une grande amélioration des résultats existants car il n'existe pas d'indication pour choisir le dénominateur *a priori*.

Notre approche est basée sur une application des extensions du Lemme de Kalman Yakubovich Popov obtenues dans le chapitre précédent (voir la Section 1.6, page 50) et

une propriété élémentaire des polynômes réels. Cette application est dans la continuité des efforts des encadrants pour la transformation des problèmes d'optimisation dépendant de paramètres en problèmes d'optimisation indépendant des paramètres [SE98, BGSA01, RSF01, RSF03, SRF04].

L'organisation de ce chapitre est comme suit. Dans la Section 2.2, page 56, nous présentons les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre et des aspects importants. Nous définissons ensuite les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de paramètres ainsi que l'objectif à atteindre dans la Section 2.3, page 60. Un état de l'art sur les résultats existants, interprétés en tant que méthodes de transformation, sera détaillé dans la Section 2.4, page 68. Dans le cas d'un seul paramètre, la transformation est donnée, discutée et illustrée dans la Section 2.5, page 83. Nous ferons de même pour le cas de plusieurs paramètres dans la Section 2.6, page 94. La Section 2.7, page 100, conclut le chapitre.

## 2.2 Optimisation LMI indépendant de paramètre

Dans cette section, nous présentons des aspects importants des problèmes d'optimisation et particulièrement des problèmes d'optimisation sous contrainte inégalité matricielle affine (ou LMI de l'anglais Linear Matrix Inequality) indépendant de paramètre. En effet, ces derniers sont (quasi) convexes et forment l'un des ensemble de problèmes d'optimisation les plus larges qui possèdent des algorithmes de résolution efficaces. Enfin nous définissons trois problèmes d'optimisation sous contrainte LMI généralement considérés dans la littérature.

### 2.2.1 Problème d'optimisation indépendant de paramètre

Un problème d'optimisation indépendant de paramètre de dimension finie est définie de la manière suivante.

**Définition 2.1** (Problème d'optimisation). *Soient  $n_\xi$  un entier naturel non nul,  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_\xi}$  un ensemble non vide et*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^{n_\xi} \rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto f(\xi) \end{aligned}$$

*Alors un problème d'optimisation s'écrit :*

$$\min_{\xi \in \mathbb{D}} f(\xi)$$

où

- $\mathbb{D}$  est appelé l'ensemble des contraintes ;
- $\xi = [\xi_1 \ \cdots \ \xi_{n_\xi}]^T$  est appelé le vecteur des variables de décision ;
- $f$  est appelée la fonction de coût.

On dit que :

- $\xi_{opt} \in \mathbb{D}$  est un optimum local s'il existe un voisinage ouvert  $\mathbb{U}$  de  $\xi_{opt}$  tel que, pour tout  $\xi \in \mathbb{U} \cap \mathbb{D}$ , on a  $f(\xi_{opt}) \leq f(\xi)$  ;
- $\xi_{opt} \in \mathbb{D}$  est un optimum global si, pour tout  $\xi \in \mathbb{D}$ , on a  $f(\xi_{opt}) \leq f(\xi)$ .

Résoudre ce problème signifie trouver un optimum global (et la valeur de  $f$  en ce point).

On distingue des classes de problèmes d'optimisation en fonction des propriétés de  $f$  et de  $\mathbb{D}$ . Deux classes de problèmes importantes sont celle des problèmes d'optimisation convexes et celle des problèmes d'optimisation quasi-convexes.

**Définition 2.2.** *Un problème d'optimisation est dit convexe si*

- $\mathbb{D}$  est un ensemble convexe : pour tout  $\xi_1 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a  $(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \in \mathbb{D}$  ;
- $f$  est une fonction convexe : pour tout  $\xi_1 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a  $f(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \leq \lambda f(\xi_1) + (1 - \lambda)f(\xi_2)$ .

*Un problème d'optimisation est dit quasi-convexe si*

- $\mathbb{D}$  est un ensemble convexe : pour tout  $\xi_1 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a  $(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \in \mathbb{D}$  ;
- $f$  est une fonction quasi-convexe : pour tout  $\xi_1 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\xi_2 \in \mathbb{D}$ , pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a  $f(\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) \leq \max \{f(\xi_1), f(\xi_2)\}$ .

Pour ces deux classes de problèmes d'optimisation, la fonction de coût a la propriété que tout minimum local est un minimum global sur l'ensemble de définition de la fonction. Ceci implique que tout optimum local est un optimum global. Cette propriété est importante car, pour résoudre les problèmes d'optimisation, des algorithmes de résolution numérique sont généralement utilisés. Ces algorithmes nécessitent un point d'initialisation dans  $\mathbb{D}$  et permettent, à partir de ce point d'initialisation, de trouver un optimum local. Pour les problèmes d'optimisation convexes et quasi-convexes, ces algorithmes permettent donc de trouver un optimum global et donc de les résoudre.

Un autre point important des problèmes d'optimisation convexes et quasi-convexes est qu'ils sont « faciles » à résoudre numériquement [BTN01], *i.e.* il existe au moins un algorithme de résolution, dit « efficace », dont le temps de résolution (temps de calcul nécessaire à cet algorithme pour se terminer) est « raisonnable ». Un algorithme de résolution permet effectivement de résoudre un problème d'optimisation particulier, mais surtout il permet de résoudre tous les problèmes d'optimisation de la même classe. Dans ce cadre, une mesure usuelle du temps de résolution d'un algorithme est l'évolution de ce temps de résolution en fonction de la « taille » du problème d'optimisation qu'il résout. Un algorithme est dit efficace si l'évolution de son temps de résolution est bornée par une fonction polynômiale de la taille du problème d'optimisation. Nous ne développerons pas plus cet aspect. Les lecteurs intéressés pourront se référer au livre [GJ79] pour une introduction à la complexité algorithmique.

## 2.2.2 Problèmes d'optimisation LMI indépendant de paramètre

Du fait qu'ils peuvent être résolus efficacement, les problèmes d'optimisation convexes et quasi-convexes sont donc intéressants. Des sous-problèmes importants sont les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. D'une part, ces problèmes apparaissent actuellement comme des problèmes importants pour lesquels des algorithmes de résolution efficaces ont été programmés dans les logiciels de calcul scientifique généraux comme `Matlab` [GNLC95] ou `Scilab`. D'autre part, les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI ont d'importantes applications en Sciences de l'Ingénieur (en Automatique [BEFB94] ou dans d'autres domaines [BTN01]).

**Définition 2.3** (Contrainte LMI indépendant de paramètre). *Soient  $n_\xi$  un entier naturel non nul et  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $i = 0, \dots, n_\xi$ , des matrices symétriques.*

Une contrainte LMI indépendant de paramètre est définie comme l'ensemble de vecteurs suivant

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \mid F(\xi) > 0\} \quad (2.1)$$

avec

$$F(\xi) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i F_i. \quad (2.2)$$

Les matrices  $F_i$ ,  $i = 0, \dots, n_\xi$ , sont appelées les données et le vecteur  $\xi$  est appelé le vecteur des variables de décision de la contrainte LMI indépendant de paramètre.

Dans l'expression (2.1),  $F(\xi) > 0$  signifie que  $F(\xi)$  est définie positive (de la même façon,  $F(\xi) < 0$  signifie que  $F(\xi)$  est définie négative). Une contrainte est une contrainte LMI lorsque  $\xi$  apparaît de façon affine dans  $F(\xi)$ . Dans la suite de ce document, l'expression  $F(\xi) > 0$  sera aussi appelée contrainte LMI indépendant de paramètre.

Si dans la Définition 2.1, l'ensemble des contraintes  $\mathbb{D}$  est défini par l'expression (2.1), le problème d'optimisation est alors appelé un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Ces problèmes seront écrits plus simplement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}} \quad & f(\xi) \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) > 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il est ainsi possible de définir plusieurs problèmes selon le choix de  $f$ . Deux choix sont généralement considérés :  $f$  est linéaire ou  $f$  est la valeur propre généralisée de deux matrices. Un autre problème important est le problème de faisabilité qui consiste à trouver  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que  $F(\xi) > 0$ . En résumé, on a les trois problèmes suivants.

**Problème de faisabilité** Tester s'il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que  $F(\xi) > 0$ , et si oui, déterminer un tel  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  :<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \text{trouver} \quad & \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire** Tester s'il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que  $F(\xi) > 0$ , et si oui, déterminer  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que  $F(\xi) > 0$  et qui minimise  $c^T \xi$  où  $c \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  est un vecteur donné :

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}} \quad & c^T \xi \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale** Tester s'il existe  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que  $F(\xi) > 0$  et  $H(\xi) > 0$  où  $H(\xi)$  est de la forme (2.2), et si oui, déterminer  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que  $F(\xi) > 0$  et  $H(\xi) > 0$  et qui minimise la valeur propre généralisée maximale  $\lambda_{\max}(G(\xi), F(\xi))$  de  $F(\xi)$  et  $G(\xi)$  où  $G(\xi)$  est de la forme (2.2) et

<sup>1</sup>Ce problème peut se formuler comme un problème d'optimisation au sens de la Définition 2.1. Il revient au problème d'optimisation suivant :  $\min_{(\xi, t) \in \mathbb{D}} t$  avec  $\mathbb{D} = \{(\xi, t) \mid F(\xi) + tI > 0\}$ . Si la valeur minimale de  $t$  est strictement positive, alors le Problème de faisabilité (2.4) n'a pas de solution ; si elle est négative ou nulle, alors le Problème de faisabilité (2.4) a une solution donnée par la valeur de  $\xi_{opt}$  pour laquelle  $(\xi_{opt}, t)$  est un optimum global.

où  $\lambda_{max}(G(\xi), F(\xi))$  est la valeur minimale de  $\lambda$  pour laquelle  $\lambda F(\xi) - G(\xi)$  est définie positive<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}} \quad & \lambda_{max}(G(\xi), F(\xi)) \\ \text{tel que} \quad & F(\xi) > 0 \text{ et } H(\xi) > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Remarque 2.1.** *Lorsqu'il y a plusieurs contraintes LMI  $F_i(\xi) > 0, i = 1, \dots, n_F$  (comme dans le Problème (2.6)), il est toujours possible de les réécrire sous une seule contrainte :*

$$F(\xi) \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\xi) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_{n_F}(\xi) \end{bmatrix} > 0.$$

*Il n'y a donc pas de perte de généralité à définir les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI avec une seule contrainte LMI.*

**Remarque 2.2.** *Il est aussi possible de rencontrer des contraintes de type égalité :  $E(\xi) = 0$  où  $E(\xi)$  est de la forme (2.2). Ce sont des contraintes égalités matricielles affines (ou LME de l'anglais Linear Matrix Equality). De la même manière que pour les LMIs, il est possible de réécrire plusieurs LMEs en une seule. Il n'y a donc pas de perte de généralité en définissant l'ensemble des contraintes suivante avec une seule LME :*

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \mid E(\xi) = 0 \text{ et } F(\xi) > 0\}. \quad (2.7)$$

*La contrainte  $E(\xi) = 0$  correspond à un système de  $m(m+1)/2$  équations linéaires à  $n_\xi$  inconnues. Il existe trois cas de figure :*

1.  *$E(\xi) = 0$  n'a pas de solution : l'ensemble des contraintes défini par (2.7) est alors vide ;*
2.  *$E(\xi) = 0$  a une solution unique  $\xi_{nul}$  : si  $F(\xi_{nul})$  est définie positive alors l'ensemble des contraintes défini par (2.7) se réduit à un singleton, sinon il est vide ;*
3.  *$E(\xi) = 0$  a une infinité de solution : l'ensemble  $\mathbb{A} = \{\xi \mid E(\xi) = 0\}$  est alors un espace affine de dimension finie, de dimension  $n_{\xi_{new}} \leq n_\xi$ . En choisissant  $n_{\xi_{new}}$  vecteurs  $e_i$  formant une base de l'espace vectoriel associé à  $\mathbb{A}$  et en choisissant  $\xi_0$  n'importe quel élément de  $\mathbb{A}$ , on a : pour tout  $\xi \in \mathbb{A}$ , il existe  $n_{\xi_{new}}$  uniques scalaires  $\xi_{new_i}$  tels que  $\xi = \xi_0 + \sum_{i=1}^{n_{\xi_{new}}} \xi_{new_i} e_i$ . Par suite,*

$$F(\xi) = F(\xi_0) + \sum_{i=1}^{n_{\xi_{new}}} \xi_{new_i} (F(e_i) - F_0) \triangleq F_{new}(\xi_{new}).$$

*L'ensemble des contraintes (2.7) peut donc être généré grâce à l'ensemble suivant :*

$$\{\xi_{new} \in \mathbb{R}^{n_{\xi_{new}}} \mid F_{new}(\xi_{new}) > 0\}.$$

*Il est donc toujours possible d'éliminer une contrainte LME dans un problème d'optimisation sous contrainte LMI. Par la suite, on parlera aussi de problèmes d'optimisation sous contrainte LMI en référence à ces problèmes.*

<sup>2</sup> $\lambda_{max}(A, B)$  est aussi définie comme la plus grande valeur propre de  $B^{-1/2}AB^{-1/2}$  et n'est définie que dans le cas où  $B$  est définie positive. Dans le problème d'optimisation (2.6),  $F(\xi) > 0$  est une contrainte du problème ; ce problème est donc bien posé.

### 2.2.3 Variables de décision matricielles

Jusqu'à présent, nous avons considéré une contrainte LMI avec un vecteur de variables de décision scalaires. En Automatique, il est plus courant et naturel d'utiliser des variables de décision matricielles. L'expression (2.2) peut se récrire (et inversement) sous la forme :

$$F(\xi) \triangleq F_c + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g \mathcal{R}_i(\xi) F_i^d + \left( F_c + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g \mathcal{R}_i(\xi) F_i^d \right)^T \quad (2.8)$$

où  $F_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $F_i^g \in \mathbb{R}^{m \times a_i}$  et  $F_i^d \in \mathbb{R}^{b_i \times m}$  sont données et où les  $\mathcal{R}_i(\xi) \in \mathbb{R}^{a_i \times b_i}$ ,  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ , linéaires et possiblement structurées en  $\xi$ , sont les variables de décision matricielles. Par exemple, l'expression (2.8) peut être trouvée à partir de l'expression (2.2) en choisissant  $F_c = \frac{1}{2}F_0$ ,  $F_i^g$  et  $F_i^d$  telles que  $F_i^g F_i^d = \frac{1}{2}F_i$  et  $\mathcal{R}_i(\xi) = \xi_i I$ .

## 2.3 Optimisation LMI dépendant de paramètres

Nous allons maintenant étendre les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI indépendant de paramètre au cas où la contrainte LMI dépend de paramètres. Cette dernière contrainte est définie comme suit.

**Définition 2.4** (Contrainte LMI dépendant de paramètres). *Soient  $n_{\xi}$  et  $n_{\theta}$  des entiers naturels non nul,  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$  et, pour  $i = 0, \dots, n_{\xi}$ ,*

$$\begin{aligned} F_i &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta &\mapsto F_i(\theta) \end{aligned}$$

des matrices de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$  telles que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $F_i(\theta) = F_i(\theta)^T$ .

Une contrainte LMI dépendant de  $\theta$  est alors définie comme l'ensemble de vecteurs de fonctions suivant

$$\{\xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\xi}} \mid \forall \theta \in \mathbb{P}, F(\xi(\theta), \theta) > 0\} \quad (2.9)$$

où  $\xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\xi}}$  est un vecteur de fonctions et avec

$$F(\xi(\theta), \theta) \triangleq F_0(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\xi}} \xi_i(\theta) F_i(\theta). \quad (2.10)$$

Les matrices de fonctions  $F_i(\theta)$ ,  $i = 0, \dots, n_{\xi}$ , sont appelées les données et le vecteur de fonctions  $\xi(\theta)$  est appelée le vecteur des variables de décision de la contrainte LMI dépendant de  $\theta$ .

Dans la suite de ce document, l'expression  $\forall \theta \in \mathbb{P}, F(\xi(\theta), \theta) > 0$  sera aussi appelée contrainte LMI dépendant de  $\theta$ .

Nous pouvons d'ores et déjà énoncer un résultat qui nous permet de restreindre la recherche des variables de décision dans l'ensemble des fonctions continues sans perte de généralité [Bli04].

**Lemme 2.1** (Existence d'une solution continue). *Soient  $n_{\xi}$  un entier naturel non nul,  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$  et, pour  $i = 0, \dots, n_{\xi}$ ,*

$$\begin{aligned} F_i &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta &\mapsto F_i(\theta) \end{aligned}$$

des matrices de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$  telles que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $F_i(\theta) = F_i(\theta)^T$ .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , il existe un vecteur  $\xi_\theta$  de  $\mathbb{R}^{n_\xi}$  telles que

$$F_0(\theta) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_{\theta_i} F_i(\theta) < 0 ;$$

(ii) il existe un vecteur  $\xi(\theta)$  de fonctions continues en  $\theta$  sur  $\mathbb{P}$  tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, F_0(\theta) + \sum_{i=1}^{n_\xi} \xi_i(\theta) F_i(\theta) < 0.$$

**Remarque 2.3.** Les coefficients de  $F(\xi(\theta), \theta)$  sont donc des fonctions continues en  $\theta$  sur  $\mathbb{P}$ . Les valeurs propres d'une matrice étant des fonctions continues de ses coefficients [HJ85], les valeurs propres de  $F(\xi(\theta), \theta)$  sont des fonctions continues en  $\theta$  sur  $\mathbb{P}$ . Or une matrice définie positive étant caractérisée par le fait que toutes ses valeurs propres sont positives, nous avons par compacité de  $\mathbb{P}$  que la contrainte LMI dépendant de  $\theta$  définie par (2.9) est égal à l'ensemble suivant

$$\{\xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi} \mid \exists \epsilon > 0, \forall \theta \in \mathbb{P}, F(\xi(\theta), \theta) \geq \epsilon I\}.$$

### 2.3.1 Problèmes d'optimisation LMI dépendant de paramètres

Il est alors possible de définir des problèmes d'optimisation sous contrainte LMI dépendant de  $\theta$ . Le problème de faisabilité se définit de la manière suivante.

**Problème de faisabilité** Tester s'il existe un vecteur de fonctions continues  $\xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $F(\xi(\theta), \theta) > 0$ , et si oui, déterminer un tel  $\xi(\theta)$  :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi} \\ &\text{tel que } \forall \theta \in \mathbb{P}, F(\xi(\theta), \theta) > 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le Problème (2.11) est une extension naturelle du Problème (2.4). L'extension des Problèmes (2.5) et (2.6) n'est pas aussi naturelle : il faut définir un indicateur scalaire sur les fonctions de coût ( $c(\theta)^T \xi(\theta)$  et  $\lambda_{\max}(G(\xi(\theta), \theta), F(\xi(\theta), \theta))$ ) car ces dernières sont elles-mêmes des fonctions. Plusieurs indicateurs scalaires peuvent être définis dont l'intégrale et le maximum de ces fonctions sur  $\mathbb{P}$ . L'intégrale permet d'obtenir une valeur moyenne sur  $\mathbb{P}$  alors que le maximum permet d'obtenir une borne dure pour toutes les valeurs de  $\theta$  dans  $\mathbb{P}$  (le pire cas sur  $\mathbb{P}$ ). Pour l'utilisation que nous allons en faire (voir le Chapitre 3), le maximum est un indicateur intéressant. Nous venons de définir les deux problèmes suivants.

**Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire** Tester s'il existe un vecteur de fonctions continues  $\xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $F(\xi(\theta), \theta) > 0$ , et si oui, déterminer  $\xi(\theta)$  qui minimise le maximum sur  $\mathbb{P}$  de  $c(\theta)^T \xi(\theta)$  où  $c(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}$  est un vecteur de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$  donné :

$$\begin{aligned} &\min_{\xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}} \max_{\theta \in \mathbb{P}} c(\theta)^T \xi(\theta) \\ &\text{tel que } \forall \theta \in \mathbb{P}, F(\xi(\theta), \theta) > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

**Problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale** Tester s'il existe un vecteur de fonctions continues  $\xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}$  tel que pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $F(\xi(\theta), \theta) > 0$  et  $H(\xi(\theta), \theta) > 0$  où  $H(\xi(\theta), \theta)$  est de la forme (2.10), et si oui, déterminer  $\xi(\theta)$  qui minimise le maximum sur  $\mathbb{P}$  de la valeur propre généralisée maximale  $\lambda_{\max}(G(\xi(\theta), \theta), F(\xi(\theta), \theta))$  de  $F(\xi(\theta), \theta)$  et  $G(\xi(\theta), \theta)$  où  $G(\xi(\theta), \theta)$  est de la forme (2.10) :

$$\begin{aligned} & \min_{\xi(\theta): \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi}} \max_{\theta \in \mathbb{P}} \lambda_{\max}(G(\xi(\theta), \theta), F(\xi(\theta), \theta)) \\ & \text{tel que } \forall \theta \in \mathbb{P}, \quad F(\xi(\theta), \theta) > 0 \text{ et } H(\xi(\theta), \theta) > 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Importance du problème de faisabilité** De ces trois problèmes, le Problème (2.11) est le plus important. En effet, il est possible de résoudre les Problèmes (2.12) et (2.13) par la résolution d'une série de Problèmes (2.11).

Du fait de la (quasi) convexité de la fonction de coût et de la convexité de l'ensemble des contraintes des Problèmes (2.12) et (2.13), il est possible d'approcher une solution de ces problèmes par itération sur la valeur de la fonction de coût. Si, par exemple, une dichotomie est utilisée pour l'itération, la solution du Problème (2.12) peut être approchée par l'algorithme suivant :

1. choisir un niveau de tolérance  $tol$  et deux valeurs  $\underline{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  telle que pour  $\lambda = \bar{\lambda}$  le problème de faisabilité

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi} \\ & \text{tel que } \forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \lambda > c(\theta)^T \xi(\theta) \text{ et } F(\xi(\theta), \theta) > 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

admet une solution et telle que, pour  $\lambda = \underline{\lambda}$ , le Problème (2.14) n'admet pas de solution.

2. tester si pour  $\lambda = \frac{\underline{\lambda} + \bar{\lambda}}{2}$ , le Problème (2.14) admet une solution. Si oui alors  $\bar{\lambda} = \lambda$  sinon  $\underline{\lambda} = \lambda$ ;
3. si  $(\bar{\lambda} - \underline{\lambda}) > tol$  retourner à l'étape 2 ;
4. construire une solution pour la dernière valeur de  $\lambda$  pour laquelle le Problème (2.14) admet une solution.

Pour le Problème (2.13), l'algorithme serait le même en remplaçant le Problème (2.14) par le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } \xi(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\xi} \\ & \text{tel que } \forall \theta \in \mathbb{P}, \quad \lambda F(\xi(\theta), \theta) - G(\xi(\theta), \theta) > 0 \\ & \quad \forall \theta \in \mathbb{P}, \quad F(\xi(\theta), \theta) > 0 \text{ et } H(\xi(\theta), \theta) > 0. \end{aligned}$$

Il est donc possible pour les Problèmes (2.12) et (2.13) de se ramener à la résolution d'une série de Problèmes de faisabilité (2.11). Dans la suite du document, nous nous concentrons sur ce dernier problème.

### 2.3.2 Variables de décision matricielles

Comme pour les problèmes d'optimisation sous contrainte LMI indépendant de paramètre, il est aussi possible et plus naturel d'utiliser des variables de décision matricielles. L'expression (2.10) peut se réécrire (et inversement) sous la forme :

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\xi(\theta)) F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\xi(\theta)) F_i^d(\theta) \right)^T < 0$$

où  $F_c(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $F_i^g(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times a_i}$ ,  $F_i^d(\theta) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{b_i \times m}$  et  $\mathcal{R}_i(\xi(\theta)) : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{a_i \times b_i}$ ,  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ , linéaires et possiblement structurées en  $\xi(\theta)$  (et donc continues sur  $\mathbb{P}$ ) sont les variables de décision matricielles. Pour simplifier l'écriture, les variables de décision matricielles seront notées  $\mathcal{R}_i(\theta)$ .

Le problème de faisabilité peut donc se réécrire.

**Problème 2.1** (Problème de faisabilité LMI dépendant de paramètres). *Soient  $n_\theta$  et  $n_{\mathcal{R}}$  des entiers naturels non nul,  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$  et pour  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ ,*

$$\begin{array}{lll} F_c : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} & F_i^g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times a_i} & F_i^d : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{b_i \times m} \\ \theta \mapsto F_c(\theta) & \theta \mapsto F_i^g(\theta) & \theta \mapsto F_i^d(\theta) \end{array}$$

*des matrices de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$ .*

*Trouver, si elles existent, pour  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ ,*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{R}_i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{a_i \times b_i} \\ \theta \mapsto \mathcal{R}_i(\theta) \end{array}$$

*des matrices (possiblement structurées) de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$  telles que*

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) \right)^T < 0.$$

*Les matrices de fonctions  $F_c(\theta)$ ,  $F_i^g(\theta)$  et  $F_i^d(\theta)$ ,  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ , sont appelées les données et les matrices de fonctions  $\mathcal{R}_i(\xi(\theta))$ ,  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ , sont appelées les variables de décision de la contrainte LMI dépendant de  $\theta$ .*

### 2.3.3 Définition des problèmes considérés

Dans l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des fonctions polynômiales et l'ensemble des fonctions rationnelles occupent une place fondamentale. En effet, toute fonction continue peut être approchée avec une précision arbitrairement fixée sur un compact par une fonction polynômiale ou une fonction rationnelle [Che82]. Comme l'évaluation de ces fonctions pour une valeur de son argument d'entrée revient à effectuer des additions, multiplications et inversions, opérations élémentaires que tout calculateur peut réaliser, on dispose ainsi d'une méthode efficace pour évaluer toute fonction continue avec un certain degré de précision à partir de ces opérations élémentaires. D'autre part, si on considère une fonction polynômiale et une fonction rationnelle qui approchent avec une même précision une fonction continue, l'évaluation de la fonction rationnelle nécessite un nombre d'opérations beaucoup plus faible que l'évaluation de la fonction polynômiale [Che82]. En effet, l'évaluation d'une fonction polynômiale et l'évaluation d'une fonction rationnelle de même degré nécessitent le même nombre d'opérations coûteuses. À degré égal, une fonction rationnelle a un « pouvoir d'approximation » beaucoup plus important. Cheney [Che82] donne l'ordre de grandeur suivant : une fonction rationnelle dont le numérateur est de degré  $n$  et dont le dénominateur est de degré  $m$  (elle est donc de degré  $\max\{m, n\}$ ) a le pouvoir d'approximation d'une fonction polynômiale de degré  $n + m$ . Il est donc particulièrement pertinent de travailler sur l'ensemble des fonctions rationnelles. Nous choisissons donc des fonctions rationnelles pour les données et les variables de décision de la contrainte LMI dépendant de paramètres. Ce choix a un fort impact à deux niveaux.

Le premier niveau d'impact concerne les résultats de ce chapitre. Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons la transformation d'un problème d'optimisation LMI dépendant de  $\theta$  en un problème d'optimisation LMI indépendant de  $\theta$ . La taille de ce dernier problème d'optimisation (taille des données et nombre de variables de décision de la contrainte LMI indépendant de  $\theta$ ) va être une fonction polynômiale du degré des fonctions polynômiales ou des fonctions rationnelles considérées. Dans les deux cas des fonctions polynômiales et rationnelles, les fonctions définissant la taille du problème d'optimisation indépendant de  $\theta$  obtenu après transformation ont le même terme dominant. Par suite, les fonctions rationnelles permettant une meilleure approximation, travailler sur les fonctions rationnelles mène à des problèmes d'optimisation LMI de taille moins importante que travailler sur les fonctions polynômiales, ce qui améliore l'efficacité.

Le second niveau d'impact concerne les problèmes d'Automatique que l'on peut formuler comme des problèmes d'optimisation LMI dépendant rationnellement de paramètres. Dans ces problèmes, les paramètres  $\theta$  sont des paramètres du système (au sens large) ou de la propriété considérée (de stabilité ou de performance). Les données définissant la contrainte LMI sont construites à partir du modèle du système à analyser ou à commander. Elles dépendent aussi de la propriété considérée. Les variables de décision définissent des fonctions de Lyapunov, de stockage, multiplicateurs, *etc.*, garantissant que la propriété est satisfaite. Dans le cas d'un problème de commande, elles contiennent de plus les paramètres du correcteur mis au point.

Pour de nombreux systèmes à analyser ou à commander, les modèles sont très souvent rationnels en les paramètres de la propriété considérée (de stabilité ou de performance). Une telle propriété est d'ailleurs à l'origine du développement important de la  $\mu$ -analyse (analyse de la robustesse des systèmes incertains [Doy82]) durant ces vingt dernières années. Si ce n'est pas le cas, un modèle rationnel en les paramètres peut quand même être obtenu puisque les fonctions rationnelles ont un bon pouvoir d'approximation.

Dans le cas d'un problème de commande, il est important que les paramètres du correcteur soient des fonctions rationnelles en les paramètres  $\theta$  du fait de la simplicité de l'évaluation de ces fonctions par des opérations élémentaires. Ce peut être par exemple pour une implémentation du correcteur (voir le Chapitre 3, Section 3.2.1, page 104).

Nous considérons donc dans la suite du document deux cas de figure intéressants et pertinents :

1. les données et les variables de décision de la contrainte LMI dépendant de  $\theta$  sont des fonctions rationnelles d'une variable :  $n_\theta = 1$ ,  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , *i.e.*  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies ;
2. les données et les variables de décision de la contrainte LMI dépendant de  $\theta$  sont des fonction rationnelles de plusieurs variables :  $n_\theta$  est un entier strictement supérieur à 1,  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  un compact borné de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , *i.e.*, pour tout  $i$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies.

**Problème d'optimisation LMI dépendant d'un paramètre considéré** Dans le cas où la contrainte LMI ne dépend que d'un paramètre, le Problème 2.1 se réécrit de la manière suivante.

**Problème 2.2** (LMI dépendant d'un paramètre). Soient  $n_{\mathcal{R}}$  un entier naturel non nul,  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , i.e.  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies, et pour  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ ,

$$\begin{array}{lll} F_c : [\underline{\theta}; \bar{\theta}] & \rightarrow & \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta & \mapsto & F_c(\theta) \end{array} \quad \begin{array}{lll} F_i^g : [\underline{\theta}; \bar{\theta}] & \rightarrow & \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta & \mapsto & F_i^g(\theta) \end{array} \quad \begin{array}{lll} F_i^d : [\underline{\theta}; \bar{\theta}] & \rightarrow & \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta & \mapsto & F_i^d(\theta) \end{array}$$

des matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  et admettant une représentation LFT. Soit  $N$  un entier naturel.

Trouver, si elles existent, pour  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ ,

$$\mathcal{R}_i(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \mathcal{R}_{ij} \theta^j}{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j} \quad (2.15)$$

des matrices (possiblement structurées) de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telles que

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) \right)^T < 0. \quad (2.16)$$

**Remarque 2.4.** Si  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  contient 0, sans perte de généralité, on peut prendre  $d_0 = 1$ . De plus, ceci évite la sur-paramétrisation des variables de décision.

Il est à remarquer que les  $\Upsilon_i$  et les  $d_j$  sont libres et que seul le degré  $N$  des variables de décision a été fixé *a priori*. Le degré d'une fonction rationnelle d'une variable est définie comme suit.

**Définition 2.5** (Degré d'une fonction rationnelle d'une variable). Le degré d'une fonction rationnelle d'une variable est le maximum du degré de son numérateur et du degré de son dénominateur.

**Problème d'optimisation LMI dépendant de plusieurs paramètres considéré**  
Dans le cas où la contrainte LMI dépend de plusieurs paramètres, le Problème 2.1 se réécrit de la manière suivante.

**Problème 2.3** (LMI dépendant de plusieurs paramètres). Soient  $n_{\theta}$  un entier strictement supérieur à un,  $n_{\mathcal{R}}$  un entier naturel non nul,  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_{n_{\theta}}; \bar{\theta}_{n_{\theta}}]$  un polytope bornée de  $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$ , i.e. pour tout  $i = 1, \dots, n_{\theta}$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies, et pour  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ ,

$$\begin{array}{lll} F_c : \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta & \mapsto & F_c(\theta) \end{array} \quad \begin{array}{lll} F_i^g : \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta & \mapsto & F_i^g(\theta) \end{array} \quad \begin{array}{lll} F_i^d : \mathbb{P} & \rightarrow & \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta & \mapsto & F_i^d(\theta) \end{array}$$

des matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$  et admettant une représentation LFT. Soient  $n_{\theta}$  entiers naturels  $N_j$ .

Trouver, si elles existent, pour  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ ,

$$\mathcal{R}_i(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \dots \sum_{i_{n_{\theta}}=0}^{N_{i_{n_{\theta}}}} \mathcal{R}_{i(i_1, \dots, i_{n_{\theta}})} \theta_1^{i_1} \dots \theta_{n_{\theta}}^{i_{n_{\theta}}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \dots \sum_{i_{n_{\theta}}=0}^{N_{i_{n_{\theta}}}} d_{(i_1, \dots, i_{n_{\theta}})} \theta_1^{i_1} \dots \theta_{n_{\theta}}^{i_{n_{\theta}}}}$$

des matrices (possiblement structurées) de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$ , telles que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) \right)^T < 0. \quad (2.17)$$

**Remarque 2.5.** Si  $\mathbb{P}$  contient 0, sans perte de généralité, on peut prendre  $d_{(0,\dots,0)} = 1$ . De plus, ceci évite la sur-paramétrisation des variables de décision.

Il est à remarquer que les  $d_{(i_1,\dots,i_{n_{\theta}})}$  sont libres et que seuls les  $N_j$  ont été fixés *a priori*.

### 2.3.4 Variables de décision rationnelles : pertinence et choix du degré

La discussion sur la pertinence des fonctions rationnelles était générale. Pour les variables de décision, il est possible de justifier cette pertinence de façon plus précise par l'intermédiaire du résultat suivant. Il énonce que s'il existe une solution, alors elle peut être choisie polynômiale en  $\theta$  et de degré fini<sup>3</sup> [Bli04].

**Lemme 2.2** (Existence d'une solution polynômiale). Soient  $n_{\theta}$  et  $n_{\mathcal{R}}$  des entiers naturels non nuls,  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_{\theta}}$  et pour  $i = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ ,

$$\begin{array}{lll} F_c : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} & F_i^g : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} & F_i^d : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta \mapsto F_c(\theta) & \theta \mapsto F_i^g(\theta) & \theta \mapsto F_i^d(\theta) \end{array}$$

des matrices de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$ .

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , il existe  $n_{\mathcal{R}}$  matrices  $R_{i\theta}$  telles que

$$F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) R_{i\theta} F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) R_{i\theta} F_i^d(\theta) \right)^T < 0 ;$$

(ii) il existe  $n_{\mathcal{R}}$  matrices  $\mathcal{R}_i(\theta)$  de fonctions polynômiales en  $\theta$ , de degré fini, telles que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) \right)^T < 0.$$

Ce lemme est donc vrai aussi si l'on considère des fonctions rationnelles puisque les fonctions polynômiales sont des fonctions rationnelles particulières. De ce même argument, on en déduit qu'il n'y a pas de perte à travailler avec des fonctions rationnelles.

L'inconvénient du Lemme 2.2 est qu'il n'indique pas le degré des fonctions à utiliser. En effet, il peut être important de connaître ce degré *a priori*. On peut considérer deux cas possibles :

- le degré est fixé par des considérations extérieures au problème d'optimisation sous contrainte LMI dépendant de paramètres lui-même ;

<sup>3</sup>Ce lemme a d'abord été énoncé dans le cas complexe (les données et les variables de décision sont complexes) dans [CTB99].

- le degré n'est pas fixé par des considérations extérieures au problème d'optimisation sous contrainte LMI dépendant de paramètres lui-même.

Le premier cas se produit, par exemple, lorsque le problème d'optimisation provient d'un problème de commande d'un système. Dans ce cas, les variables de décision servent à construire les matrices de la représentation d'état d'un correcteur, qui sont elles-mêmes des matrices de fonctions rationnelles. Pour des raisons d'implémentation, il est intéressant de limiter la complexité du correcteur, *i.e.* limiter le degré des matrices de sa représentation d'état. Ceci induit une limitation des degrés des variables de décision. Dans ce cadre, le fait de pouvoir fixer *a priori* le degré des variables de décision est un avantage.

Le second cas se produit, par exemple, lorsque le problème d'optimisation provient d'un problème d'analyse d'un système. Dans ce cas, le problème d'optimisation sert à vérifier si le système à analyser a ou non une certaine propriété. Le degré des variables de décision n'a alors pas de raison d'être limité *a priori*. Cependant, il est tout de même intéressant de connaître le degré à utiliser *a priori*. En effet, si l'on ne connaît pas ce degré *a priori* et si en utilisant un certain degré pour les variables de décision, il apparaît que le problème d'optimisation n'a pas de solution, il n'est pas possible de savoir si le système a ou non la propriété étudiée. Il se peut que le degré utilisé n'était pas assez grand.

Des résultats explicitent ce degré pour des problèmes particuliers. À notre connaissance, deux tels résultats existent. Le premier résultat provient de l'étude de la stabilité robuste d'une matrice affine en  $\theta$ .

**Lemme 2.3** (Connaissance *a priori* du degré des fonctions polynômiales [Zha02]). *Soient  $n_\theta$  et  $n$  des entiers naturels non nuls,  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $n_\theta$  matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  avec  $A_i$  de rang  $r_i < n$ . Définissons*

$$A(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} A_i \theta_i.$$

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , il existe une matrice  $\mathcal{P}_\theta$  définie positive telle que  $A(\theta)^T \mathcal{P}_\theta + \mathcal{P}_\theta A(\theta) < 0$ ;
- (ii) il existe une matrice  $\mathcal{P}(\theta)$  de fonctions polynômiales en  $\theta$

$$P(\theta) = \sum_{i_1=0}^{2nr_1-r_1^2} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{2nr_{i_{n_\theta}}-r_{i_{n_\theta}}^2} P_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}$$

telle que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $\mathcal{P}(\theta)$  est définie positive et  $A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) < 0$ .

Le second résultat concerne l'indépendance de la solution en  $\theta$  et est une version simplifiée du résultat obtenu dans [Hel03].

**Lemme 2.4** (Indépendance en  $\theta$  de la solution). *Soit  $n_\theta$  un entier naturel non nul,  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $F_1^g \in \mathbb{R}^{m \times a_1}$  et  $F_1^d \in \mathbb{R}^{b_1 \times m}$  des matrices quelconques et*

$$\begin{aligned} F_c & : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \\ & \theta \mapsto F_c(\theta) \end{aligned}$$

une matrice de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$ .

Alors il existe une matrice  $R_1 \in \mathbb{R}^{a_1 \times b_1}$  (non structurée) telle que

$$F_c(\theta) + F_1^g R_1 F_1^d + (F_c(\theta) + F_1^g R_1 F_1^d)^T < 0$$

si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall \theta \in \mathbb{P}, (F_1^d)_{\perp}^T (F_c(\theta) + F_c(\theta)^T) (F_1^d)_{\perp} < 0;$
- $\forall \theta \in \mathbb{P}, (F_1^{gT})_{\perp}^T (F_c(\theta) + F_c(\theta)^T) (F_1^{gT})_{\perp} < 0;$
- $(F_1^d)_{\perp}^T (F_c(\theta) + F_c(\theta)^T) (F_1^{gT})_{\perp}$  est indépendant de  $\theta$ .

Malheureusement, ces deux derniers résultats ne s'appliquent qu'à des problèmes très particuliers. De plus, le Lemme 2.3 ne permet pas de conclure à la non existence d'une matrice de fonctions polynômiales ou rationnelles de degré plus faible. De telles matrices conduirait à un temps de résolution plus faible. Il est donc intéressant de rechercher les variables de décision dans l'ensemble des fonctions rationnelles pour les Problèmes 2.2 et 2.3 qui sont généraux.

**Remarque 2.6.** Nous verrons page 88 que l'approche proposée dans ce document permet aussi de considérer des sous-ensembles de l'ensemble des fonctions rationnelles, comme l'ensemble des fonctions polynômiales ou constantes. Ceci est vrai aussi bien pour les variables de décision que pour les données.

### 2.3.5 L'objectif : une transformation

L'objectif est de transformer la LMI dépendant d'un paramètre (respectivement la LMI dépendant de plusieurs paramètres) en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre (qui est facile), désignons-le par Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre (respectivement Solution efficace à la LMI dépendant de plusieurs paramètres), qui a les propriétés suivantes :

1. il existe une solution à la LMI dépendant d'un paramètre (respectivement à la LMI dépendant de plusieurs paramètres) s'il existe une solution à la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre (respectivement solution efficace à la LMI dépendant de plusieurs paramètres) ;
2. il est possible de construire explicitement une solution à la LMI dépendant d'un paramètre (respectivement à la LMI dépendant de plusieurs paramètres) à partir d'une solution à la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre (respectivement solution efficace à la LMI dépendant de plusieurs paramètres).

## 2.4 Résultats existants de transformation

La LMI dépendant d'un paramètre et la LMI dépendant de plusieurs paramètres (Problèmes 2.2 et 2.3) n'ont pas encore été considérés dans la littérature. De plus, leur transformation en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre n'a pas été non plus considérée en tant que telle<sup>4</sup>. Cependant de nombreux résultats existants peuvent s'interpréter en terme de méthode de transformation. Avant de développer la méthode de transformation que nous proposons, nous présentons un état de l'art sur les méthodes existantes.

<sup>4</sup>À l'exception de [AT98]. Le résultat obtenu dans cet article est néanmoins limité.

Les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de paramètres apparaissent dans de nombreux problèmes d'Automatique, par exemple en analyse de la robustesse de systèmes avec des incertitudes paramétriques ou en analyse et commande des systèmes Linéaires à Paramètres Variant dans le temps (LPV) (voir le Tableau 2.1). Chaque problème d'Automatique donne lieu à une structure particulière de la contrainte

Sujet	Articles
Analyse de la robustesse	[FAG96, dOBG99, DS98, DS00, Bli02, TA02] [BBTN03, RP02]
Analyse de systèmes LPV	[GAC96, TdS01, IS01, LH97, LH02, Sch98, GCG93]
Conception de correcteurs LPV	[AGB95, YS97, BPPB93, BP94, Pac94, Hel95] [AG95, SE98, Sch01, TdS02, Bec95, WYPB96] [Lim99, Bli03, MKS98, KJS98, KJ99, WB02]

TAB. 2.1 – LMI dépendant de paramètres en Automatique

LMI. Par structure particulière, nous entendons que les contraintes considérées peuvent s'écrire sous la forme de la contrainte (2.16) du Problème 2.2, page 64, ou de la contrainte (2.17) du Problème 2.3, page 65, avec des choix particuliers des données et des variables de décision (voir la Section 2.4.3, page 82). À notre connaissance et contrairement à ceux que nous proposons dans ce chapitre, aucun résultat existant ne concerne une structure générale de la contrainte LMI. De plus, même avec ces structures particulières, les ensembles de fonctions considérés pour les données et les variables de décision sont aussi des cas particuliers de celui considéré dans le Problème 2.2, page 64, ou dans le Problème 2.3, page 65 (voir la Section 2.4.3, page 81). Les Problèmes 2.2 et 2.3 englobent donc les problèmes considérés jusqu'à présent en terme de structure de la contrainte LMI dépendant de paramètres, d'ensembles de fonctions considérés pour les données et pour les variables de décision.

Pour ces problèmes d'optimisation LMI dépendant de paramètres particuliers, plusieurs méthodes ont alors été proposées afin de les transformer en des problèmes d'optimisation LMI indépendant de paramètre. L'un des points difficiles de ces transformations est la vérification de la contrainte LMI dépendant de paramètres pour une infinité de valeurs de ces paramètres, soit la vérification d'une infinité d'inégalités matricielles. L'idée est alors de transformer la vérification de cette infinité d'inégalités matricielles en la vérification d'un nombre fini d'inégalités matricielles. Cette section détaillera aussi les méthodes existantes (voir la Section 2.4.1, page 71). Un bilan de ces méthodes (voir la Section 2.4.2, page 78) nous permettra alors de justifier l'intérêt de la méthode que nous avons développée (celle que nous avons détaillée dans le chapitre précédent et qui a conduit au Théorème 1.6, page 50, et au Théorème 1.7, page 52). En effet, malgré l'apparente diversité de ces méthodes, nous mettrons en évidence qu'elles reposent uniquement sur quatre mécanismes élémentaires. Nous pouvons alors comparer ces quatre mécanismes.

Dans cette section, nous discutons directement du cas où il y a plusieurs paramètres :  $\theta = [\theta_1 \ \cdots \ \theta_{n_\theta}]^T$  est un vecteur. Nous définissons maintenant des termes utilisés dans cet état de l'art.  $T(\theta)$ , une matrice de fonctions de  $\theta$ , est dit être

**constante** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\{T(\theta) \mid \exists T, T(\theta) = T\} ;$$

**affine** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \left| \exists T_0, \exists T_i, T(\theta) = T_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} T_i \theta_i \right. \right\};$$

**multi affine** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \left| \exists T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, T(\theta) = \sum_{i_1=0}^1 \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^1 T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}} \right. \right\};$$

**quadratique** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \left| \exists T_0, \exists T_i, \exists T_{(i,j)}, \exists T_{(i,i)}, T(\theta) = T_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} T_i \theta_i + \sum_{i < j} T_{(i,j)} \theta_i \theta_j + \sum_{i=1}^{n_\theta} T_{(i,i)} \theta_i^2 \right. \right\};$$

**polynômiale** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \left| \exists T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, T(\theta) = \sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}} \right. \right\};$$

**rationnelle à dénominateur fixé** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \left| \exists T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, T(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}} \right. \right\}$$

où les  $d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$  sont des scalaires données ;

**rationnelle** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \left| \exists T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, \exists d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \in \mathbb{R}, T(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}} T_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}} d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}} \right. \right\};$$

**générée par une base de dimension finie** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \left| \exists T_i, T(\theta) = \sum_{i=1}^{n_b} T_i b_i(\theta) \right. \right\}$$

où les  $b_i(\theta)$  sont des fonctions continues en  $\theta$  sur  $\mathbb{P}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ;

**continu** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\{ T(\theta) \mid T(\theta) \text{ est une matrice de fonctions de } \theta \text{ continues sur } \mathbb{P} \};$$

**affine par morceaux** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\left\{ T(\theta) \text{ continue} \left| \begin{array}{l} \exists \mathbb{P}_i \text{ des sous-ensembles fermées de } \mathbb{P}, \exists T_i(\theta) \text{ affine en } \theta, \\ \bigcup_i \mathbb{P}_i = \mathbb{P}, \forall i \neq j, \text{ intérieur}(\mathbb{P}_i) \cap \text{intérieur}(\mathbb{P}_j) = \emptyset, \\ \forall \theta \in \mathbb{P}_i, T(\theta) = T_i(\theta) \end{array} \right. \right\}$$

où intérieur( $\mathbb{P}_i$ ) désigne l'intérieur de  $\mathbb{P}_i$  ;

**spline** en  $\theta$  si  $T(\theta)$  appartient à l'ensemble suivant

$$\{ T(\theta) \mid T(\theta) \text{ est obtenue par interpolation de } T(\theta_i) \text{ par une spline} \},$$

une spline est une fonction d'interpolation polynômiale par morceaux avec des contraintes de continuité sur les dérivées successives de  $T(\theta)$  [Sch98, MKS98].

Dans cette section,  $T(\theta)$  pourra représenter les données, les variables de décision ou la contrainte LMI dépendant de paramètres.

### 2.4.1 Méthodes de transformation d'une infinité d'inégalités

Considérons donc l'inégalité suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, T(\theta) < 0 \quad (2.18)$$

où  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  est un polytope bornée de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , *i.e.*, pour tout  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies, et où  $T(\theta)$  est une matrice de fonctions continues sur  $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \\ \theta &\mapsto T(\theta) \end{aligned}$$

telle que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $T(\theta) = T(\theta)^T$ . Notons  $\mathbb{V}$  l'ensemble des sommets de  $\mathbb{P}$ .

L'inégalité dépend de  $\theta$  et définit de fait une infinité d'inégalités. Le but des méthodes de transformation est de trouver des conditions indépendantes de  $\theta$  et en nombre fini qui, si elles sont vérifiées, impliquent (voire sont équivalentes à) la vérification de l'inégalité (2.18). De plus, les conditions indépendantes de  $\theta$  et en nombre fini doivent être aisément vérifiables. Dans certains cas, ces conditions sont sous la forme d'un problème de faisabilité. Ce problème de faisabilité est heureusement un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ .

Nous présentons les méthodes existantes par ensemble de fonctions considéré pour  $T(\theta)$ . Le Tableau 2.2, page 78, présente les articles dans lesquels ces résultats ont été utilisés.

#### 2.4.1.1 Fonctions affines

Il est supposé ici que  $T(\theta)$  est affine en  $\theta$ .

**Propriété aux sommets** L'idée est de vérifier la condition (2.18) pour des valeurs particulières de  $\theta$ . Ces valeurs particulières sont les sommets de  $\mathbb{P}$  [BPPB93, BP94, AGB95, KJS98, WB02].

**Lemme 2.5.** *Soit  $T(\theta)$  une fonction affine en  $\theta$ .*

*Alors la condition (2.18) est équivalente à*

$$\forall \theta \in \mathbb{V}, T(\theta) < 0. \quad (2.19)$$

L'intérêt de cette méthode est qu'elle énonce des conditions nécessaires et suffisantes. Par ailleurs, elle est simple. Le défaut est que le nombre de conditions défini par (2.19) croît de façon exponentielle avec  $n_\theta$  :  $\mathbb{V}$  a  $2^{n_\theta}$  éléments.

**Théorème « matrix cube »** L'idée est de majorer chaque matrice  $T_i\theta_i$  par une matrice constante  $\hat{\theta}M_i$  indépendant de  $\theta_i$ . Si ces matrices sont telles que  $T_0 + \hat{\theta} \sum_{i=1}^{n_\theta} M_i < 0$ , alors l'inégalité (2.18) est vérifiée [BBTN03].

**Lemme 2.6.** Soient  $T(\theta)$  une fonction affine en  $\theta$ ,  $\hat{\theta} > 0$  et supposons que

$$\forall i = 1, \dots, n_\theta, \underline{\theta}_i = -\hat{\theta}, \bar{\theta}_i = \hat{\theta}.$$

Alors l'inégalité (2.18) est vérifiée s'il existe  $n_\theta$  matrices  $M_i$  telles que

$$\begin{cases} \forall i = 1, \dots, n_\theta, T_i \leq M_i, \text{ et } -T_i \leq M_i \\ T_0 + \hat{\theta} \sum_{i=1}^{n_\theta} M_i < 0 \end{cases}$$

Les conditions ne sont plus équivalentes. L'avantage est que le nombre de conditions à vérifier croît raisonnablement en fonction de  $n_\theta$  : il y a  $2n_\theta + 1$  conditions.

### 2.4.1.2 Fonctions multi affines

Il est supposé ici que  $T(\theta)$  est multi affine en  $\theta$ .

**Propriété aux sommets** Le Lemme 2.5 est aussi vrai dans le cas où  $T(\theta)$  est multi affine [BPPB93, BP94, AGB95, KJS98]. Ainsi, il y a les mêmes avantages et les mêmes inconvénients.

**Lemme 2.7.** Soit  $T(\theta)$  une fonction multi affine en  $\theta$ .

Alors la condition (2.18) est équivalente à

$$\forall \theta \in \mathbb{V}, T(\theta) < 0.$$

### 2.4.1.3 Fonctions quadratiques

Il est supposé ici que  $T(\theta)$  est quadratique en  $\theta$ .

**Convexité directionnelle** L'idée est la même que pour le Lemme 2.5, à savoir vérifier l'inégalité (2.18) pour les sommets de  $\mathbb{P}$ . Cependant, dans le cas d'une fonction quadratique, des conditions supplémentaires doivent être introduites [GAC96, Iwa97, AT98].

**Lemme 2.8.** Soit  $T(\theta)$  une fonction quadratique en  $\theta$  et supposons que

$$\forall i = 1, \dots, n_\theta, \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta_i^2} = T_{(i,i)} \geq 0. \quad (2.20)$$

Alors la condition (2.18) est équivalente à

$$\forall \theta \in \mathbb{V}, T(\theta) < 0.$$

L'hypothèse (2.20) est en fait un raffinement de l'hypothèse de convexité de  $T(\theta)$ . La convexité est obtenue lorsque

$$\frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} = \begin{bmatrix} T_{(1,1)} & T_{(1,2)} & \cdots & \cdots & T_{(1,n_\theta)} \\ T_{(1,2)} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & T_{(n_\theta-1,n_\theta)} \\ T_{(1,n_\theta)} & \cdots & \cdots & T_{(n_\theta-1,n_\theta)} & T_{(n_\theta,n_\theta)} \end{bmatrix} \geq 0$$

ce qui implique l'hypothèse (2.20). Ce lemme peut être retrouvé par utilisation du lemme de Schur [Iwa97]. Il a été étendu au cas où  $T(\theta)$  est polynômiale en  $\theta$  [AT98] par une application successive du Lemme 2.8. Il est à noter que lorsque  $T(\theta)$  est affine ou multi affine, l'hypothèse (2.20) est toujours vérifiée. On retrouve alors les Lemmes 2.5 et 2.7.

Le Lemme 2.8 n'énonce que des conditions suffisantes pour la vérification de (2.18). Comme pour le Lemme 2.5, un autre désavantage est la croissance exponentielle du nombre de conditions avec  $n_\theta$  : il y en a  $2^{n_\theta}$ .

**Monotonicité** Pour éviter cette croissance exponentielle du nombre de conditions, un argument de monotonicité peut être utilisé. En effet, considérons que  $T(\theta)$  est une fonction scalaire d'une variable ( $n_\theta = 1$ ) et que  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . Si  $T(\theta)$  est décroissante sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , alors  $T(\theta)$  est définie négative si et seulement si  $T(\underline{\theta})$  est définie négative. Si  $T(\theta)$  est croissante sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , alors  $T(\theta)$  est définie négative si et seulement si  $T(\bar{\theta})$  est définie négative. Cette idée a été reprise dans [TA02] pour le cas de plusieurs paramètres et a aboutit au lemme suivant.

**Lemme 2.9.** *Soit  $T(\theta)$  une fonction quadratique en  $\theta$ . Notons  $\tau$  la valeur suivante :  $\sum_{i=1}^{n_\theta} \bar{\theta}_i - \underline{\theta}_i$ .*

*Alors l'inégalité (2.18) est vérifiée si l'une de ces conditions est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & T \left( \left[ \underline{\theta}_1 \quad \dots \quad \underline{\theta}_{n_\theta} \right]^T \right) < 0 \text{ et} \\
 & \text{– soit} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n_\theta} T_{(i,j)} \underline{\theta}_j + T_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_\theta \\ \sum_{j=1}^{n_\theta} T_{(i,j)} \underline{\theta}_j + T_i + \tau T_{(i,l)} \leq 0 \quad i, l = 1, \dots, n_\theta \end{array} \right. \\
 & \text{– soit} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n_\theta} T_{(i,j)} \underline{\theta}_j + T_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_\theta \\ T_{(i,j)} \leq 0 \quad 1 \leq i \leq j \leq n_\theta \end{array} \right. \\
 & \text{– soit} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n_\theta} T_{(i,j)} \bar{\theta}_j + T_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_\theta \\ T_{(i,j)} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq j \leq n_\theta \end{array} \right. \\
 (ii) \quad & T \left( \left[ \bar{\theta}_1 \quad \dots \quad \bar{\theta}_{n_\theta} \right]^T \right) < 0 \text{ et} \\
 & \text{– soit} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n_\theta} T_{(i,j)} \underline{\theta}_j + T_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n_\theta \\ \sum_{j=1}^{n_\theta} T_{(i,j)} \underline{\theta}_j + T_i + \tau T_{(i,l)} \geq 0 \quad i, l = 1, \dots, n_\theta \end{array} \right. \\
 & \text{– soit} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n_\theta} T_{(i,j)} \bar{\theta}_j + T_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_\theta \\ T_{(i,j)} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq j \leq n_\theta \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Ce lemme a été étendu au cas où  $T(\theta)$  est polynômiale en  $\theta$  [TA02] par une application successive de ce même lemme.

Le Lemme 2.9 n'énonce que des conditions suffisantes pour la vérification de (2.18). Pour chaque ensemble de conditions, il y a au plus  $n_\theta^2 + n_\theta + 1$  conditions à vérifier. Cependant elles doivent être vérifiées successivement.

**Majoration** Il est supposé ici que  $T_0$  et les  $T_i$  sont des matrices nulles. L'idée est, comme pour le Lemme 2.6, une majoration à la différence près que la majoration ne se fait pas avec une matrice  $M_i$  quelconque mais avec la matrice  $\alpha I$  avec  $\alpha$  positif. Nous avons alors le lemme suivant [RP02].

**Lemme 2.10.** *Soit  $T(\theta)$  une fonction quadratique en  $\theta$  et supposons que  $T_0 = 0$  et que*

$$\forall i = 1, \dots, n_\theta, \theta_i \geq 0, T_i = 0.$$

Alors l'inégalité (2.18) est vérifiée si

$$\begin{cases} \forall i = 1, \dots, n_\theta - 1, \forall j = i + 1, \dots, n_\theta, T_{(i,j)} < \frac{2}{n_\theta - 1} I \\ \forall i = 1, \dots, n_\theta, T_{(i,i)} < -I. \end{cases}$$

Ce lemme est basée sur le fait que

$$-2 \sum_{i < j} \theta_i \theta_j + (n_\theta - 1) \sum_{i=1}^{n_\theta} \theta_i^2 = \sum_{i < j} (\theta_i - \theta_j)^2$$

est positif.

Le Lemme 2.10 n'énonce que des conditions suffisantes pour la vérification de (2.18). Il y a  $\frac{n_\theta(n_\theta + 1)}{2}$  conditions à vérifier.

**Immersion** Il est supposé ici que

$$\forall i = 1, \dots, n_\theta, \underline{\theta}_i = 0, \bar{\theta}_i = 1.$$

Nous expliquons l'idée de cette méthode de transformation dans le cas où  $n_\theta = 1$ . L'inégalité (2.18) devient alors :

$$\forall \theta \in [0, 1], T_0 + T_1 \theta + T_{(1,1)} \theta^2 < 0.$$

Cette inégalité est impliqué par l'inégalité

$$\forall \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{T}, T_0 + T_1 \alpha_1 + T_{(1,1)} \alpha_2 < 0$$

avec  $\mathbb{T}$  le triangle défini par les sommets  $[0 \ 0]^T$ ,  $[0 \ 0,5]^T$  et  $[1 \ 1]^T$ . Ceci se comprend bien à partir de la Figure 2.1 où il est tracé la fonction  $f(\theta) = \theta^2$  et les bordures de  $\mathbb{T}$ . Comme cette dernière inégalité est affine en  $[\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ , elle est vérifiée sur tout  $\mathbb{T}$  si elle est vérifiée aux sommets de  $\mathbb{T}$ . En généralisant cette idée au cas de plusieurs paramètres, nous avons le lemme suivant [YS97].

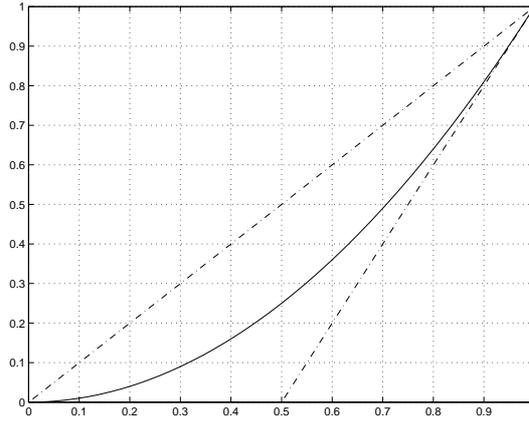


FIG. 2.1 – Embedding

**Lemme 2.11.** Soit  $T(\theta)$  une fonction quadratique en  $\theta$  et supposons que

$$\forall i = 1, \dots, n_\theta, \underline{\theta}_i = 0, \bar{\theta}_i = 1.$$

Alors la condition (2.18) est vérifiée si

$$T_0 + \sum_{i=1}^{n_\theta} T_i \theta_i + \sum_{i < j} T_{(i,j)} \theta_{ij} + \sum_{i=1}^{n_\theta} T_{(i,i)} \theta_{ii} < 0$$

pour

$$\left[ \begin{array}{cc} \theta_k & \theta_{kk} \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right], \quad I_k = 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} 0.5 & 0 \end{array} \right], \quad I_k = 1 \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \right], \quad I_k = 2 \end{array} \right\}, \quad \theta_{ij} = \theta_i \theta_j; \quad I_k = 0, 1, 2; \quad k, i, j = 1, \dots, n_\theta.$$

Cette idée peut être vue comme un affinement d'une idée largement utilisée en commande des systèmes flous [TS94] où il est considéré que  $\alpha_1 \in [0, 1]$  et  $\alpha_2 \in [0, 1]$ . Le Lemme 2.11 n'énonce que des conditions suffisantes pour la vérification de (2.18). Un autre désavantage de cette méthode est la croissance exponentielle du nombre de conditions avec  $n_\theta$  : il y en a plus de  $3^{n_\theta}$ .

#### 2.4.1.4 Fraction de deux fonctions multi affines

Il est supposé ici que  $T(\theta)$  est de la forme suivante :

$$T(\theta) = \frac{N(\theta)}{d(\theta)}$$

où  $N(\theta)$  est une fonction multi affine et où  $d(\theta)$  est une fonction multi affine scalaire.

**Propriété aux sommets** Le Lemme 2.5 est aussi vrai dans le cas où  $T(\theta)$  est la fraction de deux fonctions multi affines [GCG93].<sup>5</sup> Ainsi, il y a les mêmes avantages et les mêmes inconvénients.

<sup>5</sup>Dans cet article, il est en fait considéré une fonction rationnelle. Pour pouvoir appliquer le Lemme 2.12, cette fonction a d'abord été immergée dans une fraction de deux fonctions multi affines.

**Lemme 2.12.** *Soit  $T(\theta)$  une fonction de la forme*

$$T(\theta) = \frac{N(\theta)}{d(\theta)}$$

où  $N(\theta)$  est une fonction multi affine et où  $d(\theta)$  est une fonction multi affine scalaire.

Alors la condition (2.18) est équivalente à

$$\forall \theta \in \mathbb{V}, T(\theta) < 0.$$

#### 2.4.1.5 Un ensemble de fonctions plus général

Il est supposé ici que  $T(\theta)$  est définie de la manière suivante :

$$T(\theta) = L(\theta)^T W(\theta) L(\theta) \tag{2.21}$$

où  $W(\theta)$  est une matrice de fonctions affines sur  $\mathbb{P}$  telle que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $W(\theta) = W(\theta)^T$  et où  $L(\theta)$  doit vérifier une condition technique que nous verrons dans le lemme suivant.

Comme pour le Lemme 2.11, l'idée est de transformer l'inégalité (2.18) en une inégalité affine afin de pouvoir utiliser le Lemme 2.5. Dans [dOBG99, TdS01, TdS02], la transformation peut s'interpréter comme une utilisation particulière du lemme d'élimination [BEFB94]. Le lemme d'élimination est généralement utilisé pour éliminer des variables de décision. Ici, il est utilisé dans le sens « inverse » pour créer des variables de décision afin de « casser » le produit  $L(\theta)$  and  $W(\theta)$ . Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 2.13** (Élimination réciproque). *Soit  $T(\theta)$  une fonction de la forme (2.21). Supposons que  $W(\theta)$  est affine en  $\theta$ , que  $L(\theta)$  est une matrice qui a plus de lignes que de colonnes, de rang plein, et qu'il existe une matrice  $N(\theta)$  affine en  $\theta$  telle que*

$$N(\theta)L(\theta) = 0. \tag{2.22}$$

Alors l'inégalité (2.18) est vérifiée s'il existe une matrice  $\mathcal{X}$  telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{V}, W(\theta) + \mathcal{X}N(\theta) + N(\theta)^T \mathcal{X}^T < 0.$$

Ce lemme permet des fonctions assez générales pour  $L(\theta)$ .  $L(\theta)$  peut être rationnelles mais, devant vérifier l'hypothèse (2.22), doit cependant avoir une structure particulière. Par exemple, dans [TdS02], les fonctions  $L(\theta)$  et  $N(\theta)$  considérées sont de la forme suivante :

$$L(\theta) = \begin{bmatrix} I \\ Z_1(\theta)^{-1}Z_2(\theta) \\ Z_3(\theta)^{-1}Z_4(\theta) \end{bmatrix} \text{ and } N(\theta) = \begin{bmatrix} -Z_2(\theta) & Z_1(\theta) & 0 \\ -Z_4(\theta) & 0 & Z_3(\theta) \end{bmatrix}$$

où  $Z_1(\theta)$ ,  $Z_2(\theta)$ ,  $Z_3(\theta)$  et  $Z_4(\theta)$  sont des fonctions affines en  $\theta$ .

Les conditions ne sont que suffisantes. Pour que les conditions soient aussi nécessaires, il faudrait que  $N(\theta)_\perp = L(\theta)$ , i.e.  $N(\theta)L(\theta) = 0$  et  $\begin{bmatrix} N(\theta)^T & L(\theta) \end{bmatrix}$  de rang plein, et que  $\mathcal{X}$  soit une fonction de  $\theta$  (pour plus de détails, voir le Lemme A.4, page 179). Un autre désavantage est la croissance exponentielle du nombre de conditions avec  $n_\theta$  : il y en a  $2^{n_\theta}$ .

### 2.4.1.6 Fonctions rationnelles

Il est supposé ici que  $T(\theta)$  est définie de la manière suivante :

$$T(\theta) = \Phi(\theta)^T M \Phi(\theta) \quad (2.23)$$

où  $M$  est une matrice symétrique et où  $\Phi(\theta)$  est rationnelle en  $\theta$ .

**Remarque 2.7.** *La matrice de fonctions  $T(\theta)$  définie par (2.21) peut sembler plus générale que celle définie par l'équation (2.23). Cependant, il est toujours possible de réécrire l'équation (2.21) sous la forme de l'équation (2.23); alors que l'inverse n'est pas toujours possible car  $L(\theta)$  doit vérifier l'hypothèse (2.22).*

Pour des cas plus ou moins particuliers de  $T(\theta)$  définie par (2.23) ( $M$  et  $\Phi(\theta)$  sont plus ou moins particuliers), plusieurs résultats existent pour la vérification de (2.18) [Pac94, AG95, Hel95, SE98, Sch01, LH97, DS98, FAG96, KJ99, Bli03, IS01]. Tous ces résultats peuvent être retrouvés en utilisant une paramétrisation quadratique de graphes et en utilisant la  $\mathcal{S}$ -procédure (voir notamment le Théorème 1.7, page 52). Les résultats obtenus dans [Pac94, AG95] peuvent aussi être obtenus par application du Théorème 1.7, page 52, avec les matrices anti symétriques  $\mathcal{G}_i$  nulles. Les résultats obtenus dans [Hel95, SE98, LH97, FAG96, KJ99, Bli03] peuvent aussi être obtenus par application du Théorème 1.7, page 52. Les résultats obtenus dans [DS98, IS01] peuvent aussi être obtenus par application du Théorème 1.1. Le résultat obtenu dans [Sch01] est étroitement lié au Théorème 1.1 :  $\Phi(\theta)$  y est définie de façon implicite et non de façon explicite.

L'intérêt du Théorème 1.1, page 28, est qu'il énonce des conditions nécessaires et suffisantes pour la vérification de l'inégalité (2.18); le désavantage étant qu'il n'est pas aisé de vérifier les conditions énoncées. L'intérêt du Théorème 1.7, page 52, est qu'il n'y a pas de croissance exponentielle du nombre de conditions avec  $n_\theta$ ; le désavantage est que les conditions énoncées ne sont plus que suffisantes. Lorsque  $n_\theta = 1$ , l'intérêt du Théorème 1.7 (qui se réduit en fait au Théorème 1.6, page 50) est qu'il énonce des conditions nécessaires et suffisantes.

### 2.4.1.7 Fonctions continues

Il est supposé ici que  $T(\theta)$  est une fonction continue.

L'idée est alors de mailler les paramètres : il est défini  $g_i$  points tels que

$$\forall i = 1, \dots, n_\theta, \underline{\theta}_i = \theta_{i1} < \dots < \theta_{ig_i} = \overline{\theta}_i. \quad (2.24)$$

Le maillage est alors défini par l'ensemble

$$\mathbb{X} = \{\theta \mid \forall i = 1, \dots, n_\theta, \exists j = 1, \dots, g_i, \theta_i = \theta_{ij}\}.$$

Il est alors vérifié

$$\forall \theta \in \mathbb{X}, T(\theta) < 0.$$

Le désavantage de cette méthode est qu'elle ne permet pas de vérifier que l'inégalité (2.18) est vérifiée pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , sauf si le maillage est assez fin (c'est-à-dire si la distance entre deux points successifs dans l'expression (2.24) est assez petite). L'inconvénient est que cette distance ne peut pas être déterminée *a priori* sauf dans des cas particuliers [WYPB96, SB92]. Le nombre de points de  $\mathbb{X}$  peut alors extrêmement grand.

propriétés aux sommets	[BPPB93, BP94, AGB95, KJS98, GCG93]
convexité directionnelle	[GAC96, KJ99, IS01, Lim99, LH02, WB02]
monotonicité	[TA02]
immersion	[YS97, GCG93]
majoration	[BBTN03, RP02]
élimination réciproque	[dOBG99, TdS01, TdS02, DS00]
graphes et $\mathcal{S}$ -procédure	[AG95, Hel95, SE98, Sch01, LH97, DS00, DS98] [FAG96, WB02, KJ99, Bli03, IS01]
maillage	[Bec95, WYPB96, MKS98, Sch98, SB92]

TAB. 2.2 – Transformation d’une infinité d’inégalités en un problème de dimension finie

## 2.4.2 Bilan sur les méthodes de transformation et choix d’une méthode

Il existent donc un certain nombre de méthodes pour transformer la vérification d’une infinité d’inégalités en un problème de dimension finie. Ces méthodes peuvent cependant être classées en quatre classes seulement : le maillage, la majoration, la vérification en des points particuliers, la paramétrisation quadratique de graphe avec la  $\mathcal{S}$ -procédure.

**Maillage** L’idée de base dans cette approche est de mailler  $\mathbb{P}$ , et d’assurer que l’inégalité dépendant de  $\theta$  est vérifiée en tous les points définis par le maillage [Bec95, WYPB96, MKS98, Sch98]. Il s’agit de la méthode présentée dans la Section 2.4.1.7.

L’avantage de cette méthode est que sa mise en œuvre est vraiment simple. Le désavantage est que cette méthode ne garantit pas que l’inégalité dépendant de  $\theta$  est vérifiée pour toutes les valeurs possibles de  $\theta$  sauf si le maillage est assez fin. Une taille de maillage a été donnée dans [WYPB96]. Cependant, le nombre de points défini par le maillage est alors extrêmement grand, entraînant un temps de résolution extrêmement grand.

**Majoration** L’idée est de majorer les parties dépendant de  $\theta$  par des termes indépendants de  $\theta$  (voir les Lemmes 2.6 et 2.10).

L’avantage de ces méthodes est que les calculs sont simples et que le temps de résolution reste raisonnable même avec plusieurs paramètres. Le désavantage est que les conditions obtenues ne sont que suffisantes et qu’elle ne s’applique qu’à des fonctions particulières pour  $T(\theta)$  (affine ou quadratique). Ceci entraîne que les données de la contrainte LMI dépendant de paramètres sont des fonctions particulières (voir la Section 2.4.3, page 80) ; ce qui peut être restrictif (voir la Section 3.4.1.1, page 131).

**Vérification pour des valeurs particulières des paramètres** Il s’agit en fait ici des Lemmes 2.5, 2.7, 2.8, 2.9, 2.11, 2.12 et 2.13. Elles visent toutes à vérifier une inégalité dépendant de paramètres pour des valeurs particulières de ces paramètres. Il peut s’agir de l’inégalité de départ (Lemmes 2.5, 2.7, 2.8, 2.9 et 2.12) ou d’une autre inégalité obtenue par transformation. Deux transformations sont possibles : par immersion (Lemme 2.11) ou par l’utilisation du lemme d’élimination réciproque (Lemme 2.13).

L’avantage de cette classe est qu’elle permet des calculs assez simples et qu’elle utilise un nombre minimum de variables de décision (sauf avec le Lemme 2.13). Le désavantage

est que les conditions obtenues ne sont que suffisantes (sauf pour les Lemme 2.5, 2.7 et 2.12 qui sont en fait les mêmes) et que le nombre fini de contraintes croît de façon exponentielle avec le nombre de paramètres (sauf pour le Lemme 2.9). De plus pour une utilisation directe de ces méthodes, des dépendances spécifiques (généralement quadratique) doivent être considérées. Nous verrons dans l'exemple de la Section 3.4.1.1, page 131, que ceci peut être restrictif.

**Paramétrisation quadratique de graphe et  $\mathcal{S}$ -procédure** Le dernière classe est celle que nous utiliserons et que nous avons expliquée en détail dans le chapitre précédent. Cette méthode a conduit au Théorème 1.6, page 50, et au Théorème 1.7, page 52.

C'est l'une des rares méthodes (avec les Lemmes 2.6, 2.9 et 2.10) pour lesquelles le nombre de conditions ne croît pas de façon exponentielle avec le nombre de paramètres. De plus elle concerne des fonctions très générales (contrairement aux Lemmes 2.6, 2.9 et 2.10). Par ailleurs, c'est la seule méthode qui énonce des conditions nécessaires et suffisantes (avec les Lemmes 2.5, 2.7 et 2.12 qui ne peut être utilisé que pour des fonctions spécifiques) dans le cas d'un paramètre (voir le Théorème 1.6, page 50). Elles s'interprètent de plus avec des concepts d'Automatique dans le cadre des outils de la commande robuste.

Cette méthode de transformation peut être vu comme une extension du Lemme de Kalman Yakubovich Popov et les conditions obtenues sont très similaires à celles du Lemme de Kalman Yakubovich Popov (voir la Section 1.6, page 51). Il existe des algorithmes utilisant la structure particulière des conditions proposées dans le Lemme de Kalman Yakubovich Popov (voir [VBWH03] et les références citées). Ces algorithmes sont bien plus efficaces que les algorithmes généraux de résolution comme [GNLC95]. Nous espérons que ces algorithmes spécifiques au Lemme de Kalman Yakubovich Popov pourront être adaptés pour son extension.

C'est pour ces raisons que nous l'avons choisie.

**Combiner plusieurs méthodes de transformation** Il est bien sûr possible de combiner plusieurs classes de méthode en même temps. Par exemple, lorsque  $T(\theta)$  est quadratique, il est possible d'utiliser la convexité directionnelle avec la majoration. En effet la condition (2.18) est assurée par l'existence d'une matrice  $T_{ub}(\theta)$  qui majore  $T(\theta)$  et qui est elle-même définie négative :

$$\begin{cases} \forall \theta \in \mathbb{P}, T(\theta) \leq T_{ub}(\theta) \\ \forall \theta \in \mathbb{P}, T_{ub}(\theta) < 0. \end{cases}$$

La première condition peut être assurée en choisissant  $T_{ub}(\theta) = T(\theta) + \sum_{i=1}^{n_\theta} M_i \theta_i^2$  avec  $M_i \geq 0$ . La seconde condition peut être assurée en appliquant les conditions du Lemme 2.8 à  $T_{ub}(\theta)$ . Ceci nous donne le lemme suivant [GAC96].

**Lemme 2.14.** *L'inégalité (2.18) est vérifiée s'il existe  $n_\theta$  matrices  $M_i$  semi-définies positives telles que*

$$\begin{cases} \forall i = 1, \dots, n_\theta, T_{(i,i)} + M_i \geq 0 \\ \forall \theta \in \mathbb{V}, T_{ub}(\theta) < 0. \end{cases}$$

De la même façon, il est possible d'utiliser le Lemme 1.1 page 28 avec le Lemme 2.8. En effet la condition (1.10) est quadratique en  $\theta$ . Le Lemme 2.8 peut alors être appliqué (voir [Iwa97] ou page 31).

Les résultats obtenus dans [DS00, WB02] peuvent aussi être retrouvés par l'utilisation des graphes et par l'utilisation d'une méthode de vérification pour des valeurs particulières des paramètres (Lemme 2.13 pour [DS00] et Lemme 2.5 pour [WB02]). En fait, dans [GCG93], une fonction rationnelle est considérée au départ. Cette fonction rationnelle a ensuite été immergée dans une fraction de deux fonctions multi affines.

### 2.4.3 Méthodes de transformation d'une infinité d'inégalités et LMI dépendant de paramètres

Une contrainte LMI dépendant de  $\theta$  peut être caractérisée par l'ensemble de fonctions considéré pour ses données, par l'ensemble de fonctions considéré pour ses variables de décision et par sa structure. Dans cette section, nous commençons d'abord par classer les résultats de la littérature selon ces trois caractéristiques et nous verrons que les contraintes considérées dans la littérature sont des cas particuliers de celle que nous considérons. Nous verrons ensuite pourquoi la contrainte LMI dépendant de paramètres considéré dans un résultat de la littérature a telle ou telle caractéristique en fonction du choix de la méthode de transformation d'une inégalité dépendant de paramètres utilisée dans ce résultat.

**Ensembles de fonctions considérés pour les données** Ici, nous classons les résultats de la littérature selon l'ensemble de fonctions considéré pour les données. Nous montrons alors que ces ensembles sont des sous-ensembles de l'ensemble que nous considérons, celui des fonctions rationnelles.

Pour comparaison, une classification des ensembles de fonctions considérés pour les données dans les résultats existants est présentée dans le Tableau 2.3.

Articles	Fonctions considérées
[AGB95, GAC96, FAG96, TA02, KJS98, KJ99] [YS97, dOBG99, TdS01, Bli02, BBTN03, RP02]	Affine
[BPPB93, BP94, Bec95]	Multi affine
[Bli03]	Polynômiale
[Pac94, Hel95, AG95, SE98, Sch01, GCG93] [DS00, DS98, TdS02, IS01, KJ99, WB02]	Rationnelle
[Bec95, WYPB96, Sch98]	Continue
[Lim99, LH97, LH02, MKS98]	Affine par morceaux

TAB. 2.3 – Type de fonctions considérées pour les données

Dans le Tableau 2.3, l'ensemble de fonctions rationnelles, en choisissant judicieusement le dénominateur, est un sur-ensemble de tous les autres ensembles : les fonctions affines par morceaux peuvent être vues comme des approximations des fonctions rationnelles ; nous ne considérons pas les fonctions continues car la seule méthode de transformation d'une infinité d'inégalités associée (le maillage) n'est pas satisfaisante (voir la Section 2.4.1.7, page 77) ; de plus les fonctions rationnelles pouvant approcher une fonction continue

à n'importe quelle précision, il n'est pas nécessaire de considérer ces fonctions (voir la Section 2.3.3, page 63).

L'ensemble de fonctions que nous considérons pour les données est aussi l'ensemble des fonctions rationnelles. C'est donc un sur-ensemble non strict des ensembles considérés jusqu'à présent. Nous verrons dans les exemples du chapitre 3 que ces fonctions conviennent aux problèmes d'Automatique et que d'autres fonctions, comme les fonctions affines peuvent ne pas convenir (voir la Section 3.4.1, page 130).

**Ensembles de fonctions considérés pour les variables de décision** Ici, nous classons les résultats de la littérature selon l'ensemble de fonctions considéré pour les variables de décision. Nous montrons alors que ces ensembles sont des sous-ensembles de l'ensemble que nous considérons, celui des fonctions rationnelles.

Pour comparaison, une classification des ensembles de fonctions considérés pour les variables de décision dans les résultats existants est présentée dans le Tableau 2.4.

Articles	Fonctions considérées
[BPPB93, BP94, Pac94, Hel95, AG95, SE98] [Sch01, GCG93, KJS98, WB02, BBTN03]	Constante
[AGB95, GAC96, FAG96, TA02, YS97, dOBG99] [WB02, KJ99, RP02]	Affine
[DS00]	Multi affine
[Tds01]	Quadratique
[Bli02, Bli03]	Polynômial
[DS98, Tds02, IS01]	Rationnelle à dénominateur fixé
[Bec95, WYPB96]	Générée par une base de dimension finie
[Lim99, LH97, LH02]	Affine par morceaux
[MKS98, Sch98]	Spline

TAB. 2.4 – Type de fonctions considérées pour les variables de décision

Pour les mêmes raisons que dans le cas des données (la méthode de transformation d'une infinité d'inégalités n'est pas satisfaisante lorsqu'une fonction générée par une base de dimension finie est considérée, les fonctions affines par morceaux et les splines sont considérées comme des approximations des fonctions rationnelles), l'ensemble des fonctions rationnelles à dénominateur fixé, en choisissant judicieusement le dénominateur, est un sur-ensemble de tous les autres ensembles.

L'ensemble de fonctions que nous considérons pour les variables de décision est l'ensemble des fonctions rationnelles (à dénominateur libre). C'est donc un sur-ensemble strict des ensembles considérés jusqu'à présent. La différence avec l'ensemble de fonctions rationnelles à dénominateur fixé est importante : il n'y a pas d'indication *a priori* pour choisir le dénominateur « correctement » (ceci sera illustré dans l'exemple de la Section 3.4.2, page 141). Une contribution importante de cette thèse est d'utiliser un ensemble de fonctions qui englobe ceux considérés jusqu'à présent et, surtout, qui convient pour des problèmes d'Automatique (voir la Section 3.4.1, page 130, et la Section 3.4.2, page 141).

**Structure de la contrainte LMI dépendant de paramètres** Ici, nous montrons que les structures considérées dans les résultats existants sont des cas particuliers de la structure générale de la contrainte LMI dépendant de paramètres que nous considérons, à savoir la contrainte (2.17) qui est rappelée ici :

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) \right)^T < 0$$

où les  $\mathcal{R}_i(\theta)$  sont les variables de décision. En fait, nous ne détaillerons pas toutes les structures considérées jusqu'à présent mais deux d'entre elles qui sont souvent rencontrées.

La première structure particulière de contrainte souvent rencontrée est la suivante :

$$A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) < 0$$

où la variable de décision est  $\mathcal{P}(\theta)$ . Cette contrainte apparaît beaucoup en analyse de la stabilité robuste [DS98, FAG96, Bli02] puisqu'il s'agit d'une inégalité de Lyapunov dépendant de paramètres. Cette contrainte a une structure particulière en ce sens qu'elle est homogène en la variable de décision, *i.e.* la contrainte est linéaire et non pas affine en la variable de décision. Elle peut se réécrire sous la forme (2.17) avec  $n_{\mathcal{R}} = 1$ ,  $F_c(\theta) = 0$ ,  $F_1^g(\theta) = A(\theta)^T$ ,  $F_1^d(\theta) = I$  et  $\mathcal{R}_1(\theta) = P(\theta)$ .

La seconde structure particulière de contrainte souvent rencontrée est la suivante :

$$\mathcal{N}_P(\theta)^T \begin{bmatrix} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} \mathcal{N}_P(\theta) < 0$$

où la variable de décision est  $\mathcal{P}(\theta)$ . Cette structure apparaît en analyse et en commande des systèmes LPV [AGB95, BP94, Sch01]. Elle peut se réécrire sous la forme de la contrainte (2.17) avec  $n_{\mathcal{R}} = 1$ ,

$$F_c(\theta) = \mathcal{N}_P(\theta)^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} I & 0 \\ C(\theta) & D(\theta) & -\frac{\gamma}{2} I \end{bmatrix} \mathcal{N}_P(\theta), \quad F_1^g(\theta) = \mathcal{N}_P(\theta)^T \begin{bmatrix} A(\theta)^T \\ B(\theta)^T \\ 0 \end{bmatrix},$$

$F_1^d(\theta) = [ I \ 0 \ 0 ] \mathcal{N}_P(\theta)$  et  $\mathcal{R}_1(\theta) = \mathcal{P}(\theta)$ .

Toutes les structures rencontrées jusqu'à présent sont des cas particuliers de la structure considérée dans le Problème 2.3 (et aussi dans le Problème 2.2). De fait, cette dernière est la plus générale possible. À notre connaissance, aucun résultat existant ne concerne une structure générale de la contrainte LMI dépendant de  $\theta$ .

**Influence des méthodes de transformation d'une inégalité dépendant de paramètres sur les caractéristiques d'une contrainte LMI dépendant de paramètres** Nous allons maintenant voir en quoi les méthodes de transformation d'une inégalité dépendant de paramètres influent sur les caractéristiques des contraintes LMI dépendant de paramètres.

Ceci est particulièrement vrai pour les ensembles de fonctions considérés pour les données et les variables de décision. Les structures particulières rencontrées dans la

littérature viennent plus du fait que les contraintes LMI dépendant de paramètres n'ont pas été considérés en tant que telle. Elles résultaient des conditions obtenues pour certains problèmes d'Automatique.

L'influence sur les ensembles de fonctions est directe lorsque la transformation d'une infinité d'inégalités n'introduit pas de matrices supplémentaires (ce qui n'est pas le cas de l'approche avec le lemme d'élimination réciproque ainsi qu'avec l'approche par paramétrisation quadratique de graphe et  $\mathcal{S}$ -procédure). Dans ce cas, seul l'ensemble de fonctions considéré pour l'inégalité dépendant de paramètres influe. Par exemple, supposons que nous utilisons une méthode de transformation qui considère que  $T(\theta)$  est affine en  $\theta$ . Dans le cadre de notre problème,  $T(\theta)$  représente en fait une contrainte LMI dépendant de  $\theta$ . Une contrainte LMI s'écrit de façon générale

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) + \left( F_c(\theta) + \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{R}}} F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta) \right)^T < 0$$

où les  $\mathcal{R}_i(\theta)$  sont les variables de décision. Pour que cette contrainte LMI soit affine en  $\theta$  et ainsi pouvoir utiliser les méthodes de transformation d'une infinité d'inégalités pour les fonctions affines, il faut que  $F_c(\theta)$  et  $F_i^g(\theta) \mathcal{R}_i(\theta) F_i^d(\theta)$  soient affines en  $\theta$ . Les données ne peuvent être qu'affine. Par ailleurs  $F_i^g(\theta)$  et  $F_i^d(\theta)$  ne peuvent pas être tous deux affines (ce qui explique en partie les structures particulières considérées dans les résultats existants). Si l'une des deux est affine,  $\mathcal{R}_i(\theta)$  ne peut être que constant ; alors que si toutes deux sont constantes en  $\theta$ ,  $\mathcal{R}_i(\theta)$  peut être affine en  $\theta$ .

L'influence est moins directe lorsque la transformation d'une infinité d'inégalités introduit des variables de décision supplémentaires (ce qui est le cas de l'approche avec le lemme d'élimination réciproque ainsi qu'avec l'approche par paramétrisation quadratique de graphe et  $\mathcal{S}$ -procédure). En appliquant ces transformations à une contrainte LMI dépendant de paramètres, il ne faut pas faire apparaître de produit entre ces variables de décision supplémentaires et les variables de décision de la contrainte de départ. Sans une transformation supplémentaire, dans le cas de variables de décision rationnelles, cela n'est possible qu'en fixant le dénominateur.

## 2.5 Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre

Nous allons maintenant transformer la LMI dépendant d'un paramètre (Problème 2.2, page 64) en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Nous réécrivons tout d'abord la contrainte (2.16) sous une autre forme qui convient mieux. Cette forme est

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0$$

où  $\Upsilon(\theta)$ , la variable de décision, est une matrice (possiblement structurée) de fonctions rationnelles en  $\theta$  de degré  $N$  et bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\Upsilon(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \Upsilon_j \theta^j}{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}.$$

La contrainte (2.16) peut toujours se réécrire (et inversement) sous cette forme avec des choix particuliers de  $H_1(\theta)$ ,  $H_2(\theta)$ ,  $C$  et  $\Upsilon(\theta)$ . Par exemple, un choix possible est :

$$H_1(\theta) = [ F_c(\theta) \quad F_1^g(\theta) \quad \cdots \quad F_{n_{\mathcal{R}}}^g(\theta) ]$$

$$C = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_1(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{R}_{n_{\mathcal{R}}}(\theta) \end{bmatrix}, \quad H_2(\theta) = \begin{bmatrix} I \\ F_1^d(\theta) \\ \vdots \\ F_{n_{\mathcal{R}}}^d(\theta) \end{bmatrix}.$$

Nous reformulons la LMI dépendant d'un paramètre et, à strictement parler, c'est le problème suivant que nous allons transformer.

**Problème 2.4** (LMI dépendant d'un paramètre). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , i.e.  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies,*

$$\begin{array}{ll} H_1 : [\underline{\theta}; \bar{\theta}] & \rightarrow \mathbb{R}^{m \times a} & H_2 : [\underline{\theta}; \bar{\theta}] & \rightarrow \mathbb{R}^{b \times m} \\ \theta & \mapsto H_1(\theta) & \theta & \mapsto H_2(\theta) \end{array}$$

deux matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  et admettant une représentation LFT, et  $C \in \mathbb{R}^{a \times b}$ . Soit  $N$  un entier naturel.

Trouver, si elle existe,

$$\Upsilon(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \Upsilon_j \theta^j}{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}$$

une matrice (possiblement structurée) de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telle que

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0. \quad (2.25)$$

En examinant ce problème, il apparaît au moins une difficulté empêchant l'obtention directe de la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre : la contrainte (2.25) dépend de  $\theta$  et définit de fait une infinité de contraintes. Cette difficulté a été discutée dans la section précédente et nous avons choisi la méthode utilisant les graphes et la  $\mathcal{S}$ -procédure. Elle conduit au KYP réel (Théorème 1.6, page 50), qui est rappelé ici : la contrainte quadratique

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \Phi(\theta)^T M \Phi(\theta) < 0 \quad (2.26)$$

est vérifiée si et seulement s'il existe  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T > 0$  et  $\mathcal{G} = -\mathcal{G}^T$  telles que

$$\begin{bmatrix} C_{\Phi}^T \\ D_{\Phi}^T \end{bmatrix} M [ C_{\Phi} \quad D_{\Phi} ] + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{\Phi} & B_{\Phi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2\mathcal{D} & (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} + \mathcal{G} \\ (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} - \mathcal{G} & -2\underline{\theta}\bar{\theta}\mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{\Phi} & B_{\Phi} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

avec  $A_{\Phi}$ ,  $B_{\Phi}$ ,  $C_{\Phi}$  et  $D_{\Phi}$  telles que

$$\theta I \star \begin{bmatrix} A_{\Phi} & B_{\Phi} \\ C_{\Phi} & D_{\Phi} \end{bmatrix} = \Phi(\theta).$$

Cette méthode permet de transformer un inégalité dépendant de  $\theta$  en un problème d'optimisation LMI indépendant de  $\theta$ . Pour appliquer ce théorème, il faut donc pouvoir réécrire la contrainte (2.25) sous la forme (2.26). Or il apparaît que l'expression (2.27) est affine en  $M$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{G}$ . Donc si la réécriture de (2.25) sous la forme (2.26) a les propriétés suivants :

- $M$  est affine en  $\Upsilon_j$  et en  $d_j$  ;
- $\Phi(\theta)$  ne contient aucun  $\Upsilon_j$  ni aucun  $d_j$  ;

alors par application du KYP réel (Théorème 1.6, page 50), nous aurons transformé la contrainte (2.25) en une contrainte LMI indépendant de paramètre. Nous aurons donc trouvé la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre et cette solution aura bien les propriétés définies dans la Section 2.3.5, page 68. De plus, dans le cas présent, pour la première propriété, il s'agit d'une équivalence et non pas seulement d'une implication : il existe une solution à la LMI dépendant d'un paramètre si et seulement s'il existe une solution à la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre.

La difficulté majeure ici est en fait de réécrire la contrainte (2.25) sous la forme désirée. Nous allons voir que ceci est possible en utilisant une propriété élémentaire des polynômes réels. Après avoir énoncer et commenter la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre, qui est un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ , nous discuterons des possibilités afin de limiter le nombre de variables de décision supplémentaires introduits par  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{G}$ . Ceci a l'intérêt de limiter le temps de résolution de la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre. Enfin un exemple numérique sera présenté.

### 2.5.1 Solution efficace et commentaires

Pour trouver la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre, il faut considérer **le bien posé** : transformer le fait que la variable de décision est bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  en une contrainte LMI indépendant de  $\theta$  ;

**la contrainte (2.25)** : transformer la contrainte LMI (2.25) dépendant de  $\theta$  en une contrainte LMI indépendant de  $\theta$ .

Nous expliquons comment ceci est possible. Cette explication servira aussi de démonstration.

**Transformation du bien posé** Le bien posé de  $\Upsilon(\theta)$  sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est équivalent à ce que le polynôme réel  $\sum_{j=0}^N d_j \theta^j$  ne s'annule pas sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . La propriété élémentaire que nous utilisons est que ce polynôme réel, ne s'annulant pas sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , a un signe constant sur cet intervalle. Introduisons des réels  $c_j$  tels que le polynôme  $\sum_{j=0}^N c_j \theta^j$  ne s'annule pas sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . Sans perte de généralité, on peut prendre  $c_0 = 1$ . Le bien posé de  $\Upsilon(\theta)$  sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est alors équivalent à ce que la fonction rationnelle

$$\frac{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j}$$

ne s'annule pas sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . Elle a donc un signe constant sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . Sans perte de généralité, ce signe peut être choisi positif. Le bien posé de  $\Upsilon(\theta)$  sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est donc équivalent à :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \frac{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} + \left( \frac{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \right)^T > 0. \quad (2.28)$$

Or

$$\frac{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} = \mathcal{R}_{d,1} \phi_1(\theta, c_j)$$

avec

$$\mathcal{R}_{d,p} = \begin{bmatrix} d_N I_p & \cdots & d_1 I_p & d_0 I_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_p(\theta, c_j) = \begin{bmatrix} \frac{I_p \theta^N}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \\ \vdots \\ \frac{I_p}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \end{bmatrix}.$$

L'inégalité (2.28) se récrit alors

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_1(\theta, c_i) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{R}_{d,1} \\ -\mathcal{R}_{d,1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_1(\theta, c_i) \end{bmatrix} < 0.$$

Par application du Théorème 1.6, page 50, avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{R}_{d,1} \\ -\mathcal{R}_{d,1}^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_1(\theta, c_i) \end{bmatrix},$$

nous obtenons une première contrainte LMI indépendant de  $\theta$  qui assure le bien posé de la matrice  $\Upsilon(\theta)$  sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ .

**Transformation de la contrainte (2.25)** Pour la contrainte (2.25), il est possible de l'écrire sous la forme  $\Phi(\theta)^T M \Phi(\theta) < 0$ . En effet, en la multipliant par  $\frac{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j}$  qui est strictement positif, cette contrainte est équivalente à

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad & H_1(\theta) \frac{\sum_{j=0}^N (\Upsilon_j + d_j C) \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} H_2(\theta) + \cdots \\ & \cdots + \left( H_1(\theta) \frac{\sum_{j=0}^N (\Upsilon_j + d_j C) \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} H_2(\theta) \right)^T < 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Or il est toujours possible de trouver une matrice  $\mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j)$ , affine en  $\Upsilon_j$  et en  $d_j$ , et  $\bar{H}(\theta)$  une fonction rationnelle en  $\theta$  bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , indépendant de  $\Upsilon_j$  et  $d_j$ , telles que

$$\frac{(\Upsilon_0 + C) + \sum_{j=1}^N \theta^j (\Upsilon_j + d_j C)}{1 + \sum_{j=1}^N \theta^j c_j} = \mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j) \bar{H}(\theta).$$

Par exemple, une factorisation possible est  $\bar{H}(\theta) = \phi_p(\theta, c_i)$ , avec  $p$  le nombre de colonnes de  $\Upsilon(\theta)$ , et  $\mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j) = \begin{bmatrix} \Upsilon_N + d_N C & \cdots & \Upsilon_0 + d_0 C \end{bmatrix}$ . Cette factorisation n'est pas unique. La condition (2.29) est alors équivalente à

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta) H_2(\theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j) \\ \mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta) H_2(\theta) \end{bmatrix} < 0. \quad (2.30)$$

Par application du Théorème 1.6, page 50, avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j) \\ \mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j)^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi(\theta) = \begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta) H_2(\theta) \end{bmatrix},$$

nous obtenons une deuxième contrainte LMI indépendant de  $\theta$  qui assure la condition (2.25).

Nous pouvons alors énoncer la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre où les notations suivantes sont utilisées

$$\mathbb{W}_{cns}(k) = \left\{ W = W^T \left| \begin{array}{l} \exists \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \mathcal{D} > 0, \exists \mathcal{G} = -\mathcal{G}^T \in \mathbb{R}^{k \times k}, \\ W = \begin{bmatrix} -2\mathcal{D} & (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} + \mathcal{G} \\ (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} - \mathcal{G} & -2\underline{\theta}\bar{\theta}\mathcal{D} \end{bmatrix} \end{array} \right. \right\}$$

et

$$\mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W) = \begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}.$$

**Théorème 2.1** (Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , i.e.  $\underline{\theta}$  et  $\bar{\theta}$  sont finies,*

$$\begin{array}{ll} H_1 : [\underline{\theta}; \bar{\theta}] & \rightarrow \mathbb{R}^{m \times a} & H_2 : [\underline{\theta}; \bar{\theta}] & \rightarrow \mathbb{R}^{b \times m} \\ & \theta \mapsto H_1(\theta) & & \theta \mapsto H_2(\theta) \end{array}$$

deux matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  et admettant une représentation LFT, et  $C \in \mathbb{R}^{a \times b}$ . Soient  $N$  un entier naturel et  $N$  réels  $c_j$  tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{j=1}^N \theta^j c_j \neq 0$ .

Alors, il existe

$$\Upsilon(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \Upsilon_j \theta^j}{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j} \quad (2.31)$$

une matrice (possiblement structurée) de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telle que

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0 \quad (2.32)$$

si et seulement s'il existe  $N + 1$  matrices  $\Upsilon_j$  (possiblement structurées) et  $N + 1$  réels  $d_j$  tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i) il existe  $\mathcal{W}_d \in \mathbb{W}_{cns}(N)$  telle que :

$$\mathcal{L} \left( \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_N & \cdots & \cdots & \cdots & -c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -c_N & \cdots & \cdots & \cdots & -c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \cdots \\ \cdots \left[ - \begin{bmatrix} d_N & \cdots & d_1 & d_0 \end{bmatrix}^T \quad - \begin{bmatrix} d_N & \cdots & d_1 & d_0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \right], \mathcal{W}_d \right) < 0$$

(ii) il existe  $\mathcal{W} \in \mathbb{W}_{cns}(n_{A_H})$  où  $n_{A_H}$  est la taille de  $A_H$  telle que :

$$\mathcal{L} \left( A_H, B_H, C_H, D_H, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j) \\ \mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j)^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W} \right) < 0$$

où

$$\theta I \star \begin{bmatrix} A_H & B_H \\ C_H & D_H \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta)H_2(\theta) \end{bmatrix}$$

et où  $\mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j)$  est affine en  $\Upsilon_j$  et en  $d_j$  telle que

$$\mathcal{U}(\Upsilon_j, d_j)\bar{H}(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \theta^j (\Upsilon_j + d_j C)}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j}.$$

**Remarque 2.8.** Le choix des réels  $c_j$  n'affecte pas le résultat du théorème tant que le polynôme  $1 + \sum_{j=1}^N \theta^j c_j$  ne s'annule pas sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ .

Nous avons bien obtenu des conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ . Ces conditions sont nécessaires et suffisantes. L'intérêt est que,  $N$  étant donnée, il est possible de répondre positivement ou négativement à la question de l'existence de la matrice  $\Upsilon(\theta)$ .

Dans la LMI dépendant d'un paramètre (Problème 2.4, page 84), les données et les variables de décision sont des fonctions rationnelles en  $\theta$ . Nous avons justifié l'intérêt des fonctions rationnelles par le fait, qu'en choisissant judicieusement leur degré  $N$ , l'ensemble de ces fonctions est un sur-ensemble des ensembles de fonctions considérés dans les résultats existants. Cependant, dans certains cas, les données et les variables de décision peuvent appartenir à un ensemble strictement inclus dans l'ensemble des fonctions rationnelles. Par exemple, les données peuvent être naturellement des fonctions affines en  $\theta$ . Par exemple, si les conditions du Lemme 2.4, page 67, sont vérifiées, alors les variables de décision peuvent être choisies comme des fonctions constantes sans perte de généralité. L'approche présentée dans ce chapitre, qui a abouti au Théorème 2.1, peut aussi être appliquée si l'on considère les ensembles de fonctions considérés dans les résultats existants.

Pour les données, notre approche suppose qu'elles puissent être représentées par des LFTs. Or sans perte de généralité (voir la Section 1.5, page 50), nous avons supposé que c'est le cas pour les fonctions rationnelles. Les fonctions considérés dans les résultats existants étant des fonctions rationnelles particulières, ces fonctions peuvent aussi être représentées par des LFTs.

Nous avons considéré des variables de décision rationnelles en  $\theta$ , soit de la forme (2.31). En fait, l'approche présentée dans ce chapitre permet aussi de fixer tout ou partie des réels  $d_j$  et/ou tout ou partie des matrices  $\Upsilon_j$ . En effet, dans le Théorème 2.1, les conditions obtenues sont sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ . En fixant tout ou partie des réels  $d_j$  et/ou tout ou partie des matrices  $\Upsilon_j$ , les conditions obtenues restent sous la forme d'un problème de faisabilité LMI indépendant de  $\theta$ . Ceci permet de moduler l'ensemble de fonctions que nous avons considéré pour les variables de décision et ainsi le faire coïncider avec tous ceux considérés jusqu'à présent dans les résultats existants. Par exemple, pour le faire coïncider avec l'ensemble des fonctions polynômiales, il faut annuler tous les  $d_j$  sauf  $d_0$ .

L'approche présentée dans ce chapitre peut donc être appliquée si l'on considère les ensembles de fonctions considérés dans les résultats existants.

## 2.5.2 Astuces de mise en œuvre

L'intérêt du Théorème 2.1 est qu'il donne des conditions numériquement vérifiables sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Lors

de sa mise en œuvre, il est intéressant de limiter la taille du problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre obtenu dans le théorème, ce qui permet de limiter son temps de résolution. Cette taille dépend, entre autre, du nombre de contraintes LMI indépendant de paramètre, du nombre de variables de décision et de la taille des contraintes LMI indépendant de paramètre.

Nous allons voir que la limitation du nombre de contraintes LMI indépendant de paramètre est structurelle : dans certains cas, la contrainte (i) disparaît.

Lors de la mise en œuvre du théorème, il faut factoriser la contrainte considérée sous la forme de la contrainte (2.32) et choisir les réels  $c_j$ . La factorisation et le choix des réels n'étant pas unique et ne changeant pas le résultat, il est alors possible de factoriser et de choisir les réels  $c_j$  « au mieux ». Nous allons voir que cette factorisation et que ce choix, judicieusement effectués, permettent de limiter le nombre de variables de décision supplémentaires introduites ainsi que la taille des contraintes. Le nombre de variables de décision supplémentaires introduites par  $\mathcal{W}_d$  et  $\mathcal{W}$  est égal à  $N^2 + n_{A_H}^2$ . De plus, plus  $n_{A_H}$  est grand, plus la taille de la contrainte (ii) est grande. Il est donc intéressant de limiter  $n_{A_H}$  qui est l'ordre d'une représentation LFT de

$$\begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta)H_2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, nous ne nous intéressons qu'à la contrainte (ii) du Théorème 2.1, soit au nombre de variables de décision scalaires supplémentaires qu'introduit  $\mathcal{W}$ . En plus de la factorisation et du choix des réels  $c_j$ , nous discuterons de la présence de plusieurs contraintes LMI dépendant de paramètres.

**Élimination de la contrainte (i)** Si la contrainte (2.29) implique la contrainte (2.28), la condition (i) du théorème disparaît. Ceci est le cas lorsque la matrice  $H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T$  a un terme sur la diagonale que l'on sait *a priori* être strictement négatif.

Typiquement, nous rencontrerons dans le prochain chapitre des contraintes LMI dépendant de paramètres dont un élément de leur diagonale est  $-\gamma$  avec  $\gamma > 0$ . La contrainte (2.29) fait alors apparaître sur un des éléments de sa diagonale la contrainte

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad -\gamma \left( \frac{\sum_{j=0}^N d_j \theta^j}{1 + \sum_{j=1}^N c_j \theta^j} \right) < 0.$$

Ce qui implique bien la contrainte (2.28).

**Choix des  $c_j$**  Ici nous supposons que nous avons déjà obtenu

$$\begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta)H_2(\theta) \end{bmatrix}$$

et que nous cherchons un choix des  $c_j$  qui limite  $n_{A_H}$ , l'ordre d'une représentation LFT de cette matrice.  $\bar{H}(\theta)$  est en fait une fonction rationnelle de dénominateur  $1 + \sum_{j=1}^N \theta^j c_j$ . L'idée est alors de choisir les  $c_j$  pour que  $\bar{H}(\theta)$  ait les mêmes pôles que  $H_1(\theta)$ .

Par exemple, supposons que

$$\begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta)H_2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_G(\theta) \\ C_G(\theta) \\ \frac{\phi_n(\theta, c_j)}{C_G(\theta)} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

avec

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta) \\ C_G(\theta) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} A_{G0} \\ C_{G0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{G1} \\ C_{G1} \end{bmatrix} \theta}{1 + 3\theta} \quad \text{et avec} \quad \phi_n(\theta, c_j) = \begin{bmatrix} \frac{I_n \theta}{1 + c_1 \theta} \\ \frac{I_n}{1 + c_1 \theta} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Alors en choisissant  $c_1 = 3$ , le pôle de  $\phi_n(\theta, c_j)$  est le même que celui de  $A_G(\theta)$  et de  $C_G(\theta)$ , ce qui permet l'écriture suivante

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta) \\ C_G(\theta) \\ \phi_n(\theta, c_j) \\ C_G(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{G1} & A_{G0} \\ C_{G1} & C_{G0} \\ I_n & 0 \\ 0 & I_n \\ C_{G1} & C_{G0} \end{bmatrix} \phi_n(\theta, c_j).$$

En utilisant la représentation minimale de  $\phi_n(\theta, c_j)$  présentée dans le Lemme 1.10, page 48, la variable  $\mathcal{W}$  introduit  $n^2$  variables de décision scalaires supplémentaires.

En choisissant  $c_1 \neq 3$ , cette dernière écriture n'est plus possible et la variable  $\mathcal{W}$  introduit plus de  $n^2$  (pour être exact  $4n^2$ ) variables de décision scalaires supplémentaires.

Cette exemple montre qu'un choix pertinent des réels  $c_j$  permet de limiter  $n_{AH}$  et donc le nombre de variables supplémentaires introduites par  $\mathcal{W}$ .

**Factorisation sous la forme (2.32)** La factorisation d'une contrainte LMI dépendant de  $\theta$  sous la forme de la contrainte (2.32) n'est pas unique. Le choix d'une factorisation peut avoir d'importantes répercussions. Nous illustrons ceci à travers l'exemple de la contrainte simple suivante :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad A_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_G(\theta) + C_G(\theta)^T C_G(\theta) < 0$$

où  $A_G(\theta)$  et  $C_G(\theta)$  sont les données et sont définies par (2.34) et où  $\mathcal{P}(\theta)$  est la variable de décision avec  $N = 1$ .

Il existe plusieurs possibilités pour factoriser cette contrainte sous la forme de la contrainte (2.32) dont deux sont naturelles et semblent *a priori* équivalentes :

1. la première :  $H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) = A_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \frac{1}{2}C_G(\theta)^T C_G(\theta)$  ;
2. la seconde :  $H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) = \mathcal{P}(\theta)A_G(\theta) + \frac{1}{2}C_G(\theta)^T C_G(\theta)$ .

Avec la première possibilité, nous obtenons la factorisation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_G(\theta)^T & C_G(\theta)^T \end{bmatrix}}_{H_1(\theta)} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}}_C + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Upsilon(\theta)} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ C_G(\theta) \end{bmatrix}}_{H_2(\theta)},$$

ce qui donne l'expression définie par (2.33). En choisissant  $c_1 = 3$ ,  $n^2$  variables de décision scalaires supplémentaires sont donc introduites par  $\mathcal{W}$ .

Avec la seconde possibilité, nous obtenons la factorisation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & C_G(\theta)^T \end{bmatrix}}_{H_1(\theta)} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}}_C + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Upsilon(\theta)} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} A_G(\theta) \\ C_G(\theta) \end{bmatrix}}_{H_2(\theta)},$$

ce qui donne

$$\begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta)H_2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ C_G(\theta) \\ \frac{\phi_n(\theta, c_j)A_G(\theta)}{C_G(\theta)} \end{bmatrix}.$$

Quelque soit le choix de  $c_1$ ,  $4n^2$  variables de décision scalaires supplémentaires sont introduites par  $\mathcal{W}$ .

Même sur cette exemple simple, la factorisation sous la forme de la contrainte (2.32) est délicate puisque la seconde possibilité introduit quatre fois plus de variables de décision supplémentaires que la première ; alors que ces deux possibilités semblaient équivalentes au départ. Il est donc important de bien choisir cette factorisation en fonction de la contrainte LMI dépendant de  $\theta$  considérée.

**Plusieurs contraintes LMI dépendant de  $\theta$**  Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des problèmes de faisabilité avec une seule contrainte LMI dépendant de  $\theta$ . Nous avons justifié ceci par la Remarque 2.1, page 59 : il est toujours possible de réécrire plusieurs contraintes LMI en une seule. D'un point de vue numérique, cette réécriture n'est pas forcément judicieuse.

Pour simplifier la discussion, nous ne considérons que deux contraintes LMI dépendant de  $\theta$  :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad LMI_1(\theta) < 0 \quad (2.35)$$

et

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad LMI_2(\theta) < 0 \quad (2.36)$$

où ces deux contraintes ont les mêmes variables de décision.

Pour transformer ces deux contraintes, il y a deux possibilités :

1. appliquer le Théorème 2.1 à la contrainte (2.35) puis à la contrainte (2.36), en sachant qu'en choisissant les  $c_j$  identiques dans ces deux applications, la condition (i) du théorème est identique dans ces deux applications ;
2. appliquer le Théorème 2.1 à la contrainte suivante

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \begin{bmatrix} LMI_1(\theta) & 0 \\ 0 & LMI_2(\theta) \end{bmatrix} < 0.$$

Avec la première possibilité, la condition (i) du Théorème 2.1 introduit  $N^2$  variables de décision scalaires supplémentaires. Maintenant, supposons que la condition (ii) du Théorème 2.1 en introduise  $n_{A_{\Phi_1}}^2$  pour la contrainte (2.35) et  $n_{A_{\Phi_2}}^2$  pour la contrainte (2.36), soit un total de  $N^2 + n_{A_{\Phi_1}}^2 + n_{A_{\Phi_2}}^2$ , avec les factorisations sous la forme de (2.32) et le choix des  $c_j$  effectués judicieusement.

La seconde possibilité introduit alors  $N^2 + (n_{A_{\Phi_1}} + n_{A_{\Phi_2}})^2$  variables de décision scalaires supplémentaires.

La seconde possibilité introduit  $2n_{A_{\Phi_1}}n_{A_{\Phi_2}}$  plus de variables supplémentaires que la première. Il est donc préférable de privilégier la première possibilité.

### 2.5.3 Exemple numérique

Nous développons maintenant un exemple de mise en œuvre du Théorème 2.1. On considère  $\mathbb{E}(\theta)$  une famille d'ellipses paramétrisée par  $\theta \in [-1; 1]$ . Une ellipse est donnée par l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) < 1\}$$

où  $P$  est une matrice définie positive et où  $x_c$  est le centre de l'ellipse. On considère une famille d'ellipses paramétrisée par  $\theta \in [-1; 1]$  et définie par :

$$\mathbb{E}(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_c(\theta))^T P(\theta)^{-1}(x - x_c(\theta)) < 1\}$$

avec  $P(\theta) = \frac{0,4}{(1+\theta^2)^2} \begin{bmatrix} 2\theta & \\ & \theta^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\theta & \theta^2 - 1 \end{bmatrix} + \frac{0,1}{(1+\theta^2)^2} \begin{bmatrix} 1 - \theta^2 & \\ & 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \theta^2 & 2\theta \end{bmatrix}$  et  $x_c(\theta) = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^2 - 1 \end{bmatrix}$ . Nous considérons aussi un disque  $\mathbb{O}$  de centre l'origine et rayon 0,7 :

$$\mathbb{O} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T x < 0,7^2\}.$$

Sur la Figure 2.2 sont représentés les ellipses, les centres correspondants pour différentes valeurs de  $\theta$  et le disque  $\mathbb{O}$ .

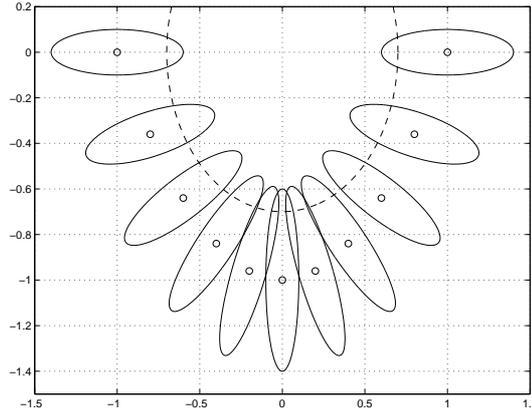


FIG. 2.2 –  $\mathbb{E}(\theta)$ ,  $x_c(\theta)$  pour  $\theta \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$  et  $\mathbb{O}$

Nous cherchons  $x(\theta)$  une fonction explicite de  $\theta$  et de faible complexité telle que, pour tout  $\theta \in [-1; 1]$ ,  $x(\theta)$  est dans l'intersection de l'ellipse  $\mathbb{E}(\theta)$  et du disque  $\mathbb{O}$ . Le problème est donc le suivant : trouver  $x(\theta) : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction explicite de  $\theta$  telle que

$$\forall \theta \in [-1; 1], \begin{cases} (x(\theta) - x_c(\theta))^T P(\theta)^{-1}(x(\theta) - x_c(\theta)) < 1 \\ x(\theta)^T x(\theta) < 0,7^2. \end{cases}$$

Par manipulations, la contrainte pour tout  $\theta \in [-1; 1]$ ,  $(x(\theta) - x_c(\theta))^T P(\theta)^{-1}(x(\theta) - x_c(\theta)) < 1$  est équivalente à la contrainte

$$\forall \theta \in [-1; 1], \begin{bmatrix} -1 & (x(\theta) - x_c(\theta))^T \\ x(\theta) - x_c(\theta) & -P(\theta) \end{bmatrix} < 0$$

qui est réécrite sous la forme de la contrainte (2.32) :

$$\forall \theta \in [-1; 1], H_{11}(\theta)(C_1 + \Upsilon_1(\theta))H_{21}(\theta) + (H_{11}(\theta)(C_1 + \Upsilon_1(\theta))H_{21}(\theta))^T < 0 \quad (2.37)$$

avec

$$H_{11}(\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -x_c(\theta) & I_2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \Upsilon_1(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x(\theta) & 0 \end{bmatrix}, H_{21}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}P(\theta) \end{bmatrix}.$$

De même, la contrainte pour tout  $\theta \in [-1; 1]$ ,  $x(\theta)^T x(\theta) < 0,7^2$  est équivalente à la contrainte

$$\forall \theta \in [-1; 1], \begin{bmatrix} -0,7^2 & x(\theta)^T \\ x(\theta) & -I_2 \end{bmatrix} < 0$$

qui est réécrite sous la forme de la contrainte (2.32) :

$$\forall \theta \in [-1; 1], H_{12}(\theta)(C_2 + \Upsilon_2(\theta))H_{22}(\theta) + (H_{11}(\theta)(C_1 + \Upsilon_1(\theta))H_{21}(\theta))^T < 0 \quad (2.38)$$

avec

$$H_{12}(\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{0,7^2}{2} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \Upsilon_2(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x(\theta) & 0 \end{bmatrix}, H_{22}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I_2 \end{bmatrix}.$$

Comme  $P(\theta)$  et  $x_c(\theta)$  sont rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[-1; 1]$ , et admettent une représentation LFT, il est possible d'appliquer le Théorème 2.1.

Pour la résolution du problème de faisabilité, nous choisissons  $N = 2$  (au vu de la Figure 2.2, nous conjecturons qu'il existe une solution parabolique mais qu'il n'en existe pas qui soit affine, il faut alors choisir  $N$  au moins égal à 2) et  $1 + c_1\theta + c_2\theta^2 = 1$  (ce qui permet de limiter le temps de résolution car  $x_c(\theta)$  a le même dénominateur). De plus, nous pouvons choisir sans perte de généralité  $d_0 = 1$ . Nous obtenons alors

$$x(\theta) = \frac{1}{1 - 0,17\theta^2} \begin{bmatrix} 0,52\theta \\ -0,69 + 0,7\theta^2 \end{bmatrix}.$$

La Figure 2.3 représente les points  $x(\theta)$  trouvés pour plusieurs valeurs de  $\theta$ . Pour toutes

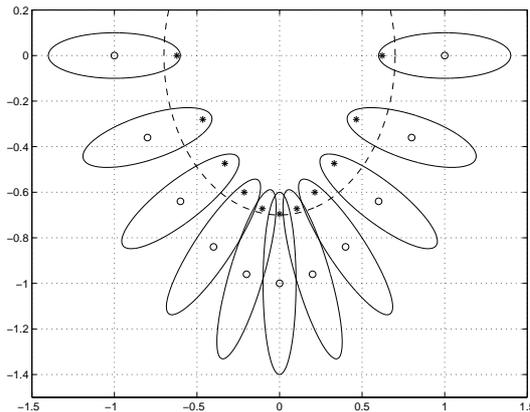


FIG. 2.3 – Résultat pour  $\theta \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$

ces valeurs,  $x(\theta)$  est bien à l'intersection de  $\mathbb{E}(\theta)$  et de  $\mathbb{O}$ .

**Remarque 2.9.** *Pour ce problème, il existe une infinité de solutions. La résolution numérique du problème d'optimisation n'en donne évidemment qu'une. En revanche,  $N$  étant donné, le problème de faisabilité lui-même (celui obtenu par application du Théorème 2.1 sur les contraintes (2.37) et (2.38)) paramétrise toutes les solutions.*

## 2.6 Solution efficace à la LMI dépendant de plusieurs paramètres

Nous considérons maintenant le cas où  $\theta = [\theta_1 \ \cdots \ \theta_{n_\theta}]^T$  est un vecteur de  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \overline{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \overline{\theta}_{n_\theta}]$ , un polytope borné de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ . La démarche présentée dans la Section 2.5 peut être reconduite. Nous reformulons tout d'abord la LMI dépendant de plusieurs paramètres. Puis nous énoncerons la Solution efficace à la LMI dépendant de plusieurs paramètres. Enfin, un exemple de mise en œuvre numérique est présenté.

La reformulation de la LMI dépendant de plusieurs paramètres donne le problème suivant.

**Problème 2.5** (LMI dépendant de plusieurs paramètres). *Soient  $n_\theta$  un entier strictement supérieur à un,  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \overline{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \overline{\theta}_{n_\theta}]$  un polytope bornée de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , i.e. pour tout  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\overline{\theta}_i$  sont finies,*

$$\begin{aligned} H_1 &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times a} & H_2 &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{b \times m} \\ \theta &\mapsto H_1(\theta) & \theta &\mapsto H_2(\theta) \end{aligned}$$

deux matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$  et admettant une représentation LFT, et  $C \in \mathbb{R}^{a \times b}$ . Soit  $n_\theta$  entiers naturels  $N_j$ .

Trouver, si elle existe,

$$\Upsilon(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} \Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}$$

une matrice (possiblement structurée) de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$ , telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0.$$

### 2.6.1 Énoncé de la solution et commentaires

La démarche pour trouver la Solution efficace à la LMI dépendant d'un paramètre présentée dans la section précédente peut être reconduite excepté qu'au lieu d'appliquer le Théorème 1.6, page 50, il est appliqué le Théorème 1.7, page 52. Cette démarche conduit à la transformation suivante dans laquelle les notations suivantes sont utilisées :  $\mathbb{W}_{sea}(k)$  est l'ensemble défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n_\theta, \exists \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i^T \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \mathcal{D}_i > 0, \exists \mathcal{G}_i = -\mathcal{G}_i^T \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \\ W_{11} = \text{diag}(-2\mathcal{D}_1, \dots, -2\mathcal{D}_{n_\theta}), \\ W_{12} = \text{diag}((\underline{\theta}_1 + \overline{\theta}_1)\mathcal{D}_1 + \mathcal{G}_1, \dots, (\underline{\theta}_{n_\theta} + \overline{\theta}_{n_\theta})\mathcal{D}_{n_\theta} + \mathcal{G}_{n_\theta}), \\ W_{22} = \text{diag}(-2\underline{\theta}_1\overline{\theta}_1\mathcal{D}_1, \dots, -2\underline{\theta}_{n_\theta}\overline{\theta}_{n_\theta}\mathcal{D}_{n_\theta}) \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

où les  $k_i$  sont les éléments du vecteur  $k$ , i.e.  $k = [k_1 \ \cdots \ k_{n_\theta}]$ , et

$$\mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, M, W) = \begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}.$$

**Théorème 2.2** (Solution efficace à la LMI dépendant de plusieurs paramètres). *Soient  $n_\theta$  un entier strictement supérieur à un,  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  un polytope bornée de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ , i.e. pour tout  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $\underline{\theta}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont finies,*

$$\begin{aligned} H_1 &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times a} & H_2 &: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^{b \times m} \\ &\theta \mapsto H_1(\theta) & &\theta \mapsto H_2(\theta) \end{aligned}$$

*deux matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$  et admettant une représentation LFT, et  $C \in \mathbb{R}^{a \times b}$ . Soient  $n_\theta$  entiers naturels  $N_j$  et  $c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$ ,  $i_j = 0, \dots, N_j$ ,  $j = 0, \dots, n_\theta$ ,  $c_{(0, \dots, 0)} = 1$ , des réels tels que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}} \neq 0$ .*

*Alors, il existe*

$$\Upsilon(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} \Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}$$

*une matrice (possiblement structurée) de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$ , telle que*

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0 \quad (2.39)$$

*s'il existe des matrices  $\Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$  (possiblement structurée) et des réels  $d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$  tels que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *il existe  $\mathcal{W}_d \in \mathbb{W}_{sea}(k)$  telle que :*

$$\mathcal{L} \left( A_P, B_P, \begin{bmatrix} 0 \\ C_P \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ D_P \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{T}(d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}) \\ -\mathcal{T}(d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})})^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_d \right) < 0$$

*où  $\mathcal{T}(d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})})$  est une fonction affine de  $d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$  telle que*

$$\mathcal{T}(d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}) \times \begin{bmatrix} \theta_1 I_{k_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \theta_i I_{k_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \theta_{n_\theta} I_{k_{n_\theta}} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix} \triangleq \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{n_\theta}} c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}} \quad (2.40)$$

*pour des entiers  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n_\theta$  ;*

(ii) *il existe  $\mathcal{W} \in \mathbb{W}_{sea}(l)$  telle que :*

$$\mathcal{L} \left( A_H, B_H, C_H, D_H, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{U}(\Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}) \\ \mathcal{U}(\Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})})^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W} \right) < 0$$

*où*

$$\begin{bmatrix} \theta_1 I_{l_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \theta_i I_{l_i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \theta_{n_\theta} I_{l_{n_\theta}} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} A_H & B_H \\ C_H & D_H \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} H_1(\theta)^T \\ \bar{H}(\theta) H_2(\theta) \end{bmatrix}$$

pour des entiers  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, n_\theta$  et où  $\mathcal{U}(\Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})})$  est une fonction affine de  $\Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$  et de  $d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}$ ,  $i_j = 0, \dots, N_j$ ,  $j = 0, \dots, n_\theta$  telle que

$$\mathcal{U}(\Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}, d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})}) \bar{H}(\theta) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} (\Upsilon_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} + d_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} C) \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}{\sum_{i_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{i_{n_\theta}=0}^{N_{i_{n_\theta}}} c_{(i_1, \dots, i_{n_\theta})} \theta_1^{i_1} \cdots \theta_{n_\theta}^{i_{n_\theta}}}. \quad (2.41)$$

Les conditions sont suffisantes : il n'est pas possible de répondre négativement à la question de l'existence d'une matrice  $\Upsilon(\theta)$ .

**Remarque 2.10.** Les factorisations (2.40) et (2.41) sont toujours possibles bien que non uniques.

La condition (i) introduit  $\sum_{i=1}^{n_\theta} k_i^2$  variables de décision supplémentaires, alors que la condition (ii) en introduit  $\sum_{i=1}^{n_\theta} l_i^2$  supplémentaires. Pour limiter le temps de résolution, il est intéressant de limiter  $\sum_{i=1}^{n_\theta} (k_i^2 + l_i^2)$ .

## 2.6.2 Mise en œuvre pour la synthèse d'un observateur dépendant de paramètres

Ici, nous nous proposons d'illustrer l'utilisation des LMIs dépendant de plusieurs paramètres et l'application du Théorème 2.2 dans le cas de la synthèse, pour un système dépendant de plusieurs paramètres, d'un observateur dépendant explicitement de ces paramètres, soit une infinité d'observateurs.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B_u(\theta)u(t) + B_w(\theta)w(t) \\ y(t) = C_y(\theta)x(t) + D_v(\theta)v(t) \end{cases}$$

où  $\theta \in \mathbb{P}$  avec  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  un compact borné de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ .  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système.  $w(t)$  et  $v(t)$  sont respectivement le bruit sur l'état et sur la sortie vérifiant

$$\mathcal{E} \left( \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t-\tau)^T & v(t-\tau) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & R_0 \end{bmatrix} \delta(\tau)$$

avec  $\mathcal{E}$  l'espérance mathématique,  $Q_0 \geq 0$ ,  $R_0 \geq 0$  et  $\delta(t)$  l'impulsion. Toutes les matrices sont rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$ , et admettent une représentation LFT.

On considère un observateur dépendant des paramètres défini par les équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(\theta)\hat{x}(t) + B_u(\theta)u(t) + M(\theta)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_y(\theta)\hat{x}(t) \end{cases}$$

où  $M(\theta)$  est une matrice rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $\mathbb{P}$ .

L'objectif est de trouver l'observateur (c'est-à-dire  $M(\theta)$ ) qui minimise le pire cas sur la variance pondérée de l'erreur d'observation  $\mathcal{E}(e(t)W_0e(t)^T)$  avec  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  et  $W_0 \geq 0$ , soit :  $\min_{M(\theta)} \max_{\theta \in \mathbb{P}} \mathcal{E}(e(t)W_0e(t)^T)$ .

Ce problème peut se formaliser comme un problème de minimisation du pire cas de la norme  $H_2$  d'un système [SP96a] :  $\min_{M(\theta)} \max_{\theta \in \mathbb{P}}$  de la norme  $H_2$  de

$$\begin{cases} \dot{e}(t) &= (A(\theta) - M(\theta)C_y(\theta))e(t) + \begin{bmatrix} B_w(\theta)Q_0^{1/2} & M(\theta)D_v(\theta)R_0^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_f(t) \\ v_f(t) \end{bmatrix} \\ e_f(t) &= W_0^{1/2}e(t) \end{cases} \quad (2.42)$$

En étendant un résultat d'analyse de la norme  $H_2$  [BEFB94], ce problème peut se résoudre grâce à un problème d'optimisation dépendant de paramètres : minimiser  $\gamma$  tel qu'il existe  $M(\theta)$ ,  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$  et  $\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{T}(\theta)^T$  telle que pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) - C_y(\theta)^T M(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) - \mathcal{P}(\theta) M(\theta) C_y(\theta) & ()^T \\ \begin{bmatrix} Q_0(\theta)^{T/2} B_w(\theta)^T \\ R_0(\theta)^{T/2} D_v(\theta)^T M(\theta)^T \end{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & W_0(\theta)^{T/2} \\ W_0(\theta)^{1/2} & \mathcal{T}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \\ & \text{Trace}(\mathcal{T}(\theta)) < \gamma. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $\mathcal{O}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)M(\theta)$ , ce problème est équivalent à : minimiser  $\gamma$  tel qu'il existe  $\mathcal{O}(\theta)$ ,  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$  et  $\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{T}(\theta)^T$  telle que pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$

$$\begin{aligned} (i) & \begin{bmatrix} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) - C_y(\theta)^T \mathcal{O}(\theta)^T + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) - \mathcal{O}(\theta) C_y(\theta) & ()^T & ()^T \\ Q_0(\theta)^{T/2} B_w(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -I & 0 \\ R_0(\theta)^{T/2} D_v(\theta)^T \mathcal{O}(\theta)^T & 0 & -I \end{bmatrix} < 0; \\ (ii) & \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & W_0(\theta)^{T/2} \\ W_0(\theta)^{1/2} & \mathcal{T}(\theta) \end{bmatrix} > 0; \\ (iii) & \text{Trace}(\mathcal{T}(\theta)) < \gamma. \end{aligned}$$

Ces trois contraintes sont des contraintes LMI dépendant de  $\theta$ . Il est donc possible de les récrire sous la forme de la contrainte (2.39). Le dernier problème d'optimisation est alors équivalent à : minimiser  $\gamma$  tel qu'il existe  $\mathcal{O}(\theta)$ ,  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$  et  $\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{T}(\theta)^T$  telles que (i) pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $H_{11}(\theta)(C_1 + \Upsilon_1(\theta))H_{21}(\theta) + (H_{11}(\theta)(C_1 + \Upsilon_1(\theta))H_{21}(\theta))^T < 0$  avec

$$\begin{aligned} H_{11}(\theta) &= \begin{bmatrix} A(\theta)^T & -C_y(\theta)^T & 0 & 0 \\ Q_0^{1/2} B_w(\theta)^T & 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \\ 0 & R_0^{1/2} D_v(\theta)^T & 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_1(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & 0 & 0 \\ \mathcal{O}(\theta)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H_{21}(\theta) = I; \end{aligned}$$

(ii) pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $H_{12}(\theta)(C_2 + \Upsilon_2(\theta))H_{22}(\theta) + (H_{12}(\theta)(C_2 + \Upsilon_2(\theta))H_{22}(\theta))^T < 0$  avec

$$\begin{aligned} H_{12}(\theta) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}I & 0 & -W_0^{T/2} \\ 0 & -\frac{1}{2}I & 0 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_2(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & 0 \\ 0 & \mathcal{T}(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H_{22}(\theta) = I; \end{aligned}$$

(iii) pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $H_{13}(\theta)(C_3 + \Upsilon_3(\theta))H_{23}(\theta) + (H_{13}(\theta)(C_3 + \Upsilon_3(\theta))H_{23}(\theta))^T < 0$  avec

$$H_{13}(\theta) = [1 \quad \cdots \quad 1 \quad -1], \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_3(\theta) = \begin{bmatrix} t_{nn}(\theta) \\ \vdots \\ t_{11}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } H_{23}(\theta) = 1$$

où  $t_{ii}(\theta)$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale de  $\mathcal{T}(\theta)$ .

Si  $\mathcal{P}(\theta)$  et  $\mathcal{O}(\theta)$  existent,  $M(\theta)$  est alors construit avec la formule  $M(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^{-1}\mathcal{O}(\theta)$ , qui peut être obtenu par une multiplication et une inversion de représentations LFT (voir les opérations sur les représentations LFT définies en annexe du Chapitre 1, Section A.1.5, page 175).

Ce problème est un problème de minimisation de coût linéaire. Pour minimiser la valeur de  $\gamma$ , il est possible d'appliquer une itération sur  $\gamma$  : nous avons programmé l'algorithme proposé en page 62. Dans cet algorithme, il est appliqué le Théorème 2.2.

**Exemple d'application** Nous prenons comme exemple un système masse-ressort. La masse est reliée au ressort qui lui-même est relié à un bâti. La masse est soumise à des frottements visqueux et à une force que l'on applique. On mesure la position de la masse et on estime la vitesse de la masse. Ce système peut se modéliser de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] x(t) \end{cases}$$

avec  $x = \begin{bmatrix} \text{position de la masse} \\ \text{vitesse de la masse} \end{bmatrix}$ ,  $y$  la position de la masse,  $u$  la force appliquée sur la masse.  $m$  est la masse du ressort (en  $kg$ ),  $k$  la constante de raideur du ressort (en  $Nm^{-1}$ ) et  $f$  le coefficient de frottements visqueux (en  $Nsm^{-1}$ ).

Pour ce type de système, nous voulons construire un observateur qui dépende de la masse et de la constante de raideur du ressort. Nous supposons cependant que le coefficient de frottements visqueux est constant pour des masses différents. Nous considérons donc que  $m \in [\underline{m}; \overline{m}]$ ,  $k \in [\underline{k}; \overline{k}]$ . En prenant  $\theta_1 = \frac{1}{m}$  et  $\theta_2 = k$ , nous obtenons la représentation suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_1\theta_2 & -f\theta_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] x(t) \end{cases}$$

avec  $\theta_1 \in [1/\overline{m}; 1/\underline{m}]$  et  $\theta_2 \in [\underline{k}; \overline{k}]$ . Pour simplifier, nous considérons que les bruits agissent sur l'état et sur la mesure à travers  $B_w(\theta) = I$ ,  $D_v(\theta) = 1$ .

En ce qui concerne les valeurs numériques, nous avons  $\underline{m} = 0,1$ ,  $\overline{m} = 0,3$ ,  $\underline{k} = 2$ ,  $\overline{k} = 3$ ,  $f = 0,6$ ,  $Q_0 = 10^{-2}I$ ,  $R_0 = 10^{-2}$  et  $W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^2 \end{bmatrix}$ .

Pour l'optimisation, nous choisissons  $N_1 = N_2 = 1$  (par simplicité) et  $1 + c_{10}\theta_1 + c_{01}\theta_2 + c_{11}\theta_1\theta_2 = 1$  (ce choix permet de limiter le temps de résolution car  $A(\theta)$  a le même dénominateur). De plus, nous avons imposé  $d_{(0,0)} = 1$  pour éviter la sur-paramétrisation des variables de décision. Nous trouvons après résolution numérique  $\gamma = 2,55$ .

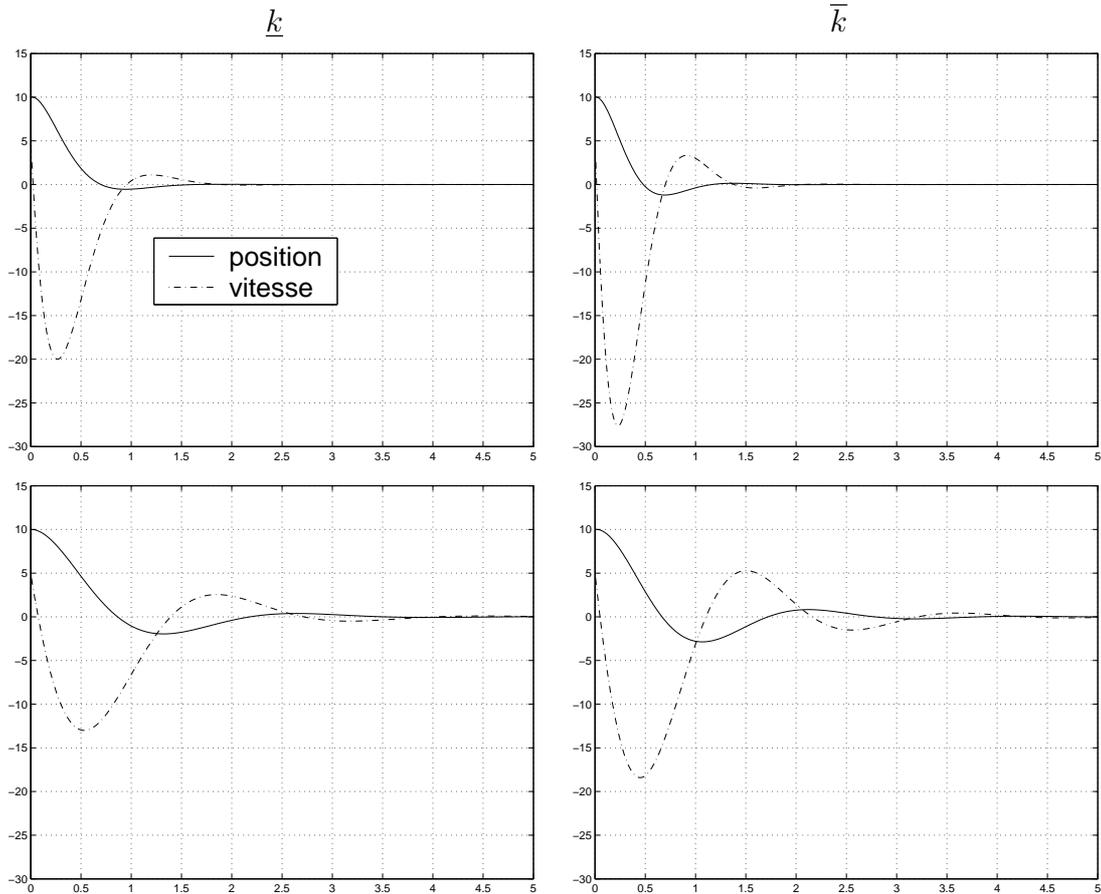


FIG. 2.4 – Erreurs d'estimation (pour  $m = \underline{m}$  en haut, pour  $m = \bar{m}$  en bas)

On vérifie la convergence de l'observateur. Les erreurs d'estimation obtenues pour les combinaisons possibles des valeurs extrêmes de  $m$  et  $k$  sont représentées sur la Figure 2.4. Dans toutes ces simulations, la condition initiale du système est égale à  $[ 0 \ 0 ]^T$  et celle de l'observateur est égale à  $[ 10 \ 5 ]^T$ .

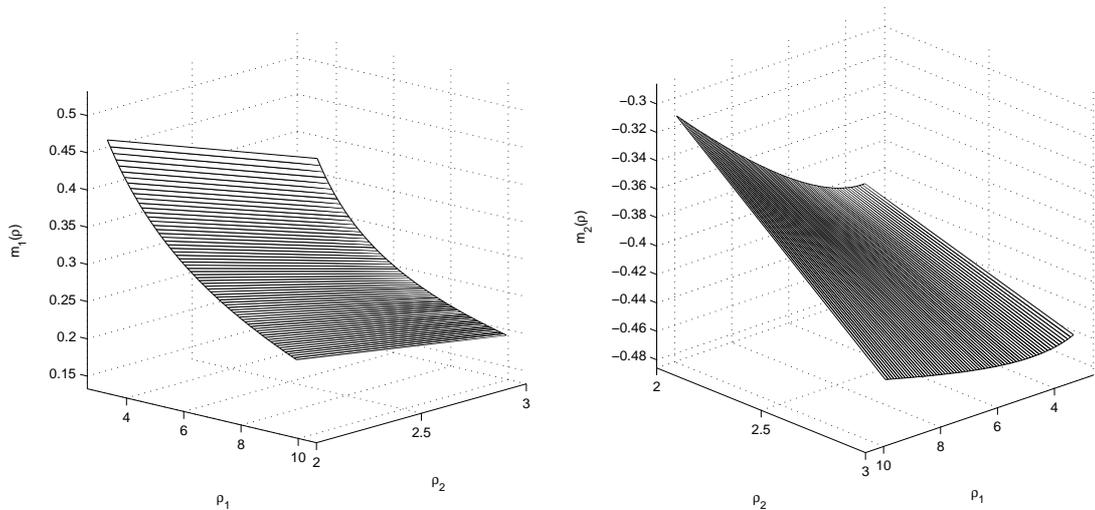


FIG. 2.5 – Évolution des coefficients de  $M(\theta)$

L'évolution des coefficients de la matrice  $M(\theta)$  en fonction de  $\theta$  est représentée sur la

Figure 2.5. On peut remarquer que la matrice  $M(\theta)$  évolue beaucoup puisque, par exemple, pour le premier coefficient de  $M(\theta)$ , il y a un facteur 2 entre les valeurs extrêmes.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de paramètres a été transformé en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Ceci est intéressant puisque ces derniers problèmes peuvent être résolus efficacement. Dans le cas où le paramètre est scalaire, cette transformation est effectuée de façon équivalente : la faisabilité du problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre est une condition nécessaire et suffisante à la faisabilité du problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant d'un paramètre.

Beaucoup de résultats de la littérature s'interprètent comme une telle transformation. Le problème considéré dans ce chapitre englobe les problèmes considérés jusqu'à présent en terme de structure, d'ensembles de fonctions considérés pour les données et pour les variables de décision. La structure considérée ici est générale alors que ce n'était pas le cas dans les résultats de la littérature. Nous avons considéré l'ensemble des fonctions rationnelles pour les données alors que certains résultats existants considèrent des ensembles très particuliers. Nous verrons dans un des exemples du prochain chapitre que ce point est extrêmement important. Enfin, nous avons considéré l'ensemble des fonctions rationnelles (avec un dénominateur libre) alors que les résultats existants considèrent au mieux l'ensemble des fonctions rationnelles à dénominateur fixé *a priori*. Cette différence est importante car il n'y a pas d'indication a priori pour choisir le dénominateur.

Les fonctions rationnelles ont plusieurs représentations possibles, dont :

1. le produit d'une matrice de polynômes par l'inverse d'une matrice de polynômes ;
2. la division d'une matrice de polynômes par un polynôme ;
3. la représentation LFT.

Nous avons choisi la deuxième représentation pour les variables de décision car ce choix permet de transformer une contrainte LMI dépendant de paramètres en un problème convexe et de dimension finie. À notre connaissance, ceci n'est pas possible avec les deux autres représentations.

Cependant, dans certains cas, il est intéressant d'obtenir les variables de décision sous une représentation LFT. C'est par exemple le cas qui est développé dans le chapitre suivant. Dans ce cas-là, il est nécessaire de convertir la représentation adoptée en une représentation LFT, ce qui est toujours possible (voir la Section 1.5, page 46). Néanmoins, un inconvénient possible est d'obtenir une représentation LFT d'ordre plus grand que nécessaire. Ce problème aurait pu être évité si on avait pris comme variables de décision la représentation LFT elle-même : malheureusement, dans ce cas-là, le problème d'optimisation obtenu n'est pas convexe et dimension finie. Par rapport aux objectifs que nous nous sommes fixés, notre choix est donc le meilleur.

De plus, nous voulons signaler que le problème considéré dans ce chapitre permet de résoudre plusieurs autres problèmes.

Les résultats que nous avons obtenus permettent de résoudre des problèmes d'optimisation robuste sous contraintes LMI. Un problème d'optimisation est dit robuste lorsque les données dépendent de paramètres et lorsque les variables de décision n'en dépendent

pas [BTN01, GOL98]. Dans notre cas, ces problèmes se résument à choisir  $N$  (dans le cas d'un paramètre) ou les  $N_j$  (dans le cas de plusieurs paramètres) nuls.

Nous avons considéré le cas où les contraintes LMI sont réelles. Il est possible d'appliquer le même démarche dans le cas complexe. Une possibilité alternative est d'utiliser le résultat, présenté par exemple dans [IMF00], qui permet de transformer une contrainte LMI complexe en une contrainte LMI réelle.

Les équations de Riccati dépendant de paramètres [SA78, BPD02] ont été intensivement étudiées. Des résultats d'existence et d'analyticité d'une solution ont été trouvés (voir [Del84, RR88] et les références citées). Mais à notre connaissance, aucune méthode efficace n'a encore été donnée pour calculer une solution. Les problèmes qui se formulent avec de telles équations peuvent, en général, aussi se formuler avec des inégalités de Riccati dépendant de paramètres. De telles inégalités apparaissent aussi en commande des systèmes non linéaires [HK96], en commande des systèmes saturés [Meg96]. Sous certaines hypothèses techniques, ces inégalités de Riccati peuvent être transformées en LMI dépendant de paramètres. De telles inégalités apparaissent aussi en commande des systèmes non linéaires [LD95] et en commande des systèmes spatialement invariant [dCP02]. L'approche proposée dans ce chapitre peut alors être appliquée. Nous espérons que notre approche permettra de résoudre les problèmes contenant des inégalités de Riccati dépendant de paramètres.

Le prochain chapitre est consacré à une mise en œuvre possible des résultats obtenus dans ce présent chapitre au problème intéressant de la conception de correcteurs dépendant de paramètres.



## CHAPITRE 3

# Conception de correcteurs dépendant de paramètres

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une solution au problème de conception de correcteurs linéaires stationnaires (LTI) dépendant de paramètres (de façon explicite) pour un système, dit augmenté, LTI dépendant de paramètres sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre en appliquant les résultats du chapitre précédent.

Dans ce problème, le système augmenté comporte le système à commander et prend en compte les performances désirées pour le système en boucle fermée. Ce problème est intéressant car sa mise en œuvre permet de traiter de nombreux problèmes en Automatique selon ce que représente ces paramètres et selon la partie du système augmenté qui dépend des paramètres. Par exemple, une mise en œuvre particulièrement étudiée dans la littérature est la commande des systèmes non linéaires par séquençement de gains [Rug91, FS03, SR99, RS00, Sha88]. Dans ce type de commande, un ensemble de correcteurs est conçu pour un ensemble de linéarisations, autour d'un ensemble de points de fonctionnement, du système non linéaire. Si l'on paramétrise l'ensemble des points de fonctionnement, le problème revient alors au problème de conception d'un correcteur LTI dépendant de paramètres pour un système à commander LTI dépendant de paramètres.

Nos développements sont motivés par un problème intéressant de conception de correcteurs. Durant ces vingt dernières années, d'énormes progrès ont été réalisés dans la conception d'un correcteur LTI pour un système à commander LTI. Cependant les méthodes existantes se focalisent sur la conception d'un correcteur pour un compromis particulier du cahier des charges.

Dans certaines applications, pour un système à commander donné, il est important de pouvoir rerégler le correcteur afin de garantir différents compromis du cahier des charges et ceci sur le site d'exploitation. C'est le cas des canaux d'irrigation, exemple que nous développerons dans le prochain chapitre. Ce reréglage peut se faire lors de l'exploitation du correcteur [Ala01]. Dans ces conditions, une nouvelle conception de correcteur par un ingénieur en Automatique doit être évitée. Une solution satisfaisante à ce problème pratique est la conception d'un correcteur reréglable, *i.e.* un correcteur dont les gains sont une fonction explicite du compromis appartenant à un ensemble continu. Le reréglage du correcteur revient simplement à choisir le compromis, ce qui est facile et qui peut

être effectué par un utilisateur sans expertise en Automatique. Une autre application possible est le reréglage en ligne du compromis pour, par exemple, la commande des navires pour la réjection des perturbations engendrées par les vagues qui dépend des conditions de navigation [KYM<sup>+</sup>01], la commande des suspensions actives pour les adaptées aux conditions de la route [FB98]. Dans ces cas, les conditions sont dans un continuum. Ceci est le point clé pour l'utilisation d'un correcteur reréglable et non, par exemple, d'un nombre fini de correcteurs.

En paramétrisant l'ensemble continu de compromis, ce problème revient à la conception d'un correcteur dépendant des paramètres pour un système augmenté dépendant des paramètres dans lequel le système à commander est indépendant de paramètre mais dans lequel le critère de performance dépend des paramètres.

Le problème de conception d'un correcteur dépendant de paramètres pour un système augmenté dépendant de paramètres peut être vu comme une extension directe du problème de conception d'un correcteur LTI indépendant de paramètre pour un système augmenté LTI indépendant de paramètre. Dans ce dernier cas, des conditions de conception peuvent être obtenues sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre [GA94, SGC97, CGA99]. Lorsque le système augmenté et le correcteur dépendent de paramètres, des conditions de conception peuvent être obtenues sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de ces mêmes paramètres. En utilisant les résultats du chapitre précédent, il est alors possible d'obtenir une solution efficace en transformant les conditions obtenues en des conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

L'organisation du chapitre est comme suit. Dans la Section 3.2, page 104, il est présenté le problème de conception d'un correcteur dépendant de paramètres ainsi qu'une solution efficace à ce problème. Le problème de conception d'un correcteur dépendant du compromis est développé dans la Section 3.3, page 116. Enfin, deux exemples numériques sont présentés dans la Section 3.4, page 129. La Section 3.5, page 145, conclut le chapitre.

## 3.2 Conception de correcteurs dépendant de paramètres

Nous considérons dans cette section le problème de conception de correcteurs dépendant de paramètres pour un système augmenté dépendant de paramètres. L'objectif est de trouver des conditions vérifiables efficacement qui permettent de construire ces correcteurs. Pour des raisons d'implémentation, nous nous intéressons à la complexité des correcteurs obtenus (mesurée en terme d'ordre de la représentation LFT des matrices de la représentation d'état des correcteurs).

### 3.2.1 Formulation des problèmes considérés

Nous considérons le système, dit augmenté, suivant :

$$P(p, \theta) \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_w(\theta)w(t) + B_u(\theta)u(t) \\ z(t) &= C_z(\theta)x(t) + D_{zw}(\theta)w(t) + D_{zu}(\theta)u(t) \\ y(t) &= C_y(\theta)x(t) + D_{yw}(\theta)w(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état de  $P(p, \theta)$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  l'entrée de commande,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  la sortie de mesure,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  l'entrée de perturbation,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  la sortie commandée et  $\theta \in \mathbb{P}$  un vecteur de paramètres constants avec  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}_1; \bar{\theta}_1] \times \cdots \times [\underline{\theta}_{n_\theta}; \bar{\theta}_{n_\theta}]$  un polytope bornée de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ . Les matrices de la représentation d'état de  $P(p, \theta)$  sont des fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$ , admettant une représentation LFT.

Pour ce système, il est recherché un correcteur  $K(p, \theta)$  pour que le système en boucle fermée vérifie certaines propriétés. Le correcteur recherché, un retour de sortie, s'écrit de la façon suivante :

$$K(p, \theta) \begin{cases} \dot{x}_K(t) &= A_K(\theta)x_K(t) + B_K(\theta)y(t) \\ u(t) &= C_K(\theta)x_K(t) + D_K(\theta)y(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $x_K(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état de  $K(p, \theta)$  et où les matrices de la représentation d'état du correcteur  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  and  $D_K(\theta)$  sont des fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $\mathbb{P}$ , admettant une représentation LFT d'ordre limité.

Ces matrices sont recherchées ainsi pour des raisons d'implémentation. D'une part, les fonctions rationnelles admettant une représentation LFT d'ordre fini sont faciles à implémenter. Considérer d'autres types de fonctions (exponentielles, logarithmiques...) est inutile puisqu'il faudrait les approcher par des fonctions rationnelles pour pouvoir les implémenter. D'autre part, limiter l'ordre des représentations LFT de ces fonctions rationnelles est intéressant puisque cela permet de limiter l'espace mémoire allouée au stockage de ces fonctions et de limiter le nombre d'opérations nécessaires à l'évaluation de ces fonctions et donc de limiter le risque d'erreurs numériques.

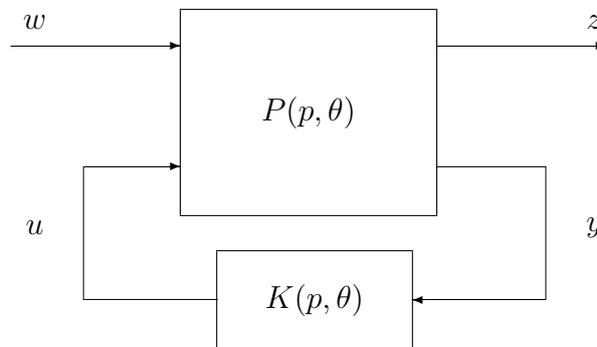


FIG. 3.1 – Système en boucle fermée

Nous considérons tout d'abord une propriété de norme  $H_\infty$ . Le problème consiste alors à déterminer, s'il existe, un correcteur dépendant de  $\theta$  garantissant que la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée est inférieure à une certaine borne pour toutes les valeurs de  $\theta \in \mathbb{P}$ .

**Problème 3.1** (Problème  $H_\infty$  dépendant de paramètres). *Soient  $\mathbb{P}$  un compact de  $\mathbb{R}^{n_\theta}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1) et  $\gamma$  un réel strictement positif.*

*Trouver, s'il existe, un correcteur  $K(p, \theta)$  défini par (3.2) tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$  :*

1. *le système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ;*

2. la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée est strictement inférieure à  $\gamma$  :

$$\|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_\infty < \gamma$$

avec par définition

$$\|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(P(j\omega, \theta) \star K(j\omega, \theta))$$

où  $\bar{\sigma}$  désigne la valeur singulière maximale.

Ce problème peut être vu comme une extension du problème  $H_\infty$  standard dans lequel un correcteur LTI indépendant de paramètre  $K(p)$  est recherché pour un système augmenté LTI indépendant de paramètre  $P(p)$ . Ici, le système augmenté et le correcteur dépendent de paramètres.

**Remarque 3.1.** Dans le Problème  $H_\infty$  dépendant de paramètres (Problème 3.1),  $\gamma$  majore le pire cas sur la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$  (voir page 61) :

$$\gamma \geq \max_{\theta \in \mathbb{P}} \|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_\infty.$$

La propriété de norme  $H_\infty$  est une des propriétés habituellement considérées dans la littérature [DGKF89, GA94, SGC97, CG96]. Il est possible de définir d'autres problèmes en considérant d'autres propriétés usuelles comme la norme  $H_2$  [DGKF89, SGC97], la localisation des pôles dans une région de type LMI [SGC97, CG96] et le multi-critères [SGC97, CG96]. La résolution de ces derniers problèmes étant très similaires à celle du Problème  $H_\infty$  dépendant de paramètres (Problème 3.1), elles seront développées dans les Annexes pour ne pas alourdir le corps du texte (dans la Section A.2.2, page 192, pour le problème associé à la norme  $H_2$ , dans la Section A.2.3, page 192, pour le problème associé à la localisation des pôles et dans la Section A.2.4, page 192, pour le problème associé au multi-critères).

De plus, nous ne nous intéresserons plus qu'au cas où  $\theta$  est un scalaire pour des raisons de simplicité d'écriture. Cependant, rappelons que l'approche utilisée dans ce document permet aussi de traiter le cas où  $\theta$  est un vecteur. Nous considérons donc dans la suite de ce chapitre que  $\mathbb{P} = [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ .

Le Problème  $H_\infty$  dépendant de paramètres (Problème 3.1) se divise en deux parties. La première partie consiste à vérifier si un correcteur dépendant de  $\theta$  qui garantisse les propriétés désirées existe. L'objectif est de trouver des conditions, faciles à vérifier numériquement, qui permettent de tester l'existence d'un correcteur. Si un correcteur existe, la seconde partie consiste à en construire un. Là encore, l'objectif est que cette construction se fasse facilement, toujours d'un point de vue numérique.

Le premier objectif peut être atteint en suivant les deux étapes :

1. trouver des conditions d'existence d'un correcteur dépendant de  $\theta$  sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  ;
2. transformer le problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  obtenu en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

La première étape peut être vue comme une extension de la démarche usuelle pour transformer un problème de conception d'un correcteur indépendant de paramètre pour un système augmenté indépendant de paramètre en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre [DGKF89, BEFB94, SGC97, CG96]. Plusieurs approches sont possibles pour cette première étape. La seconde étape repose sur l'application du Théorème 2.1, page 87, obtenu dans le chapitre précédent, qui permet une telle transformation.

Si un correcteur dépendant de  $\theta$  existe, le second objectif peut être atteint par deux approches différentes. La première approche consiste en les deux étapes suivantes :

1. trouver des conditions de construction d'un correcteur dépendant de  $\theta$  sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  ;
2. transformer le problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  obtenu en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

La première étape peut être vue comme une extension de l'approche utilisée pour construire un correcteur indépendant de paramètre par la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre [Sco97]. La seconde étape repose sur l'application du Théorème 2.1, page 87, obtenu dans le chapitre précédent, qui permet une telle transformation. La seconde approche consiste à

1. trouver une formule explicite (dépendant de  $\theta$ ) de construction du correcteur, *i.e.* une formule explicite reliant les matrices d'état du correcteur aux variables de décision ;
2. calculer cette expression en utilisant les opérations sur les LFTs définies à la Section A.1.5, page 175.

La première étape peut être vue comme une extension de l'approche utilisée pour construire un correcteur indépendant de paramètre par formule explicite [SMN90, IS94, Gah96, SGC97].

Il existe donc plusieurs approches possibles pour tester l'existence puis pour construire un correcteur dépendant de  $\theta$ . Dans le corps du texte, nous ne discuterons que d'une seule approche pour tester l'existence d'un correcteur, celle dite par changement de variables paramétrisé. De même, nous ne discutons que d'une seule approche possible pour la construction d'un correcteur, celle par formule explicite dépendant de  $\theta$ . Ces deux approches sont celles que nous utiliserons dans la suite du document pour traiter les exemples. Les autres approches possibles sont discutées en annexe, Section A.2.1, page 176.

### 3.2.2 Transformation du Problème $H_\infty$ dépendant d'un paramètre en un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant d'un paramètre

Ici, nous nous intéressons aux conditions d'existence d'un correcteur dépendant de  $\theta$  sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  ainsi qu'à la formule explicite de construction dépendant de  $\theta$ . La transformation du problème d'existence est divisée en trois sous-étapes :

1. pour un système dépendant de  $\theta$ , trouver les conditions d'analyse de la norme  $H_\infty$  sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  ;

2. appliquer ces conditions d'analyse au système en boucle fermée : les conditions obtenues sont alors sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes inégalités matricielles bilinéaires (ou BMI de l'anglais Bilinear Matrix Inequality) dépendant de  $\theta$  ;
3. transformer ce problème de faisabilité sous contraintes BMI dépendant de  $\theta$  en un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ .

Pour la dernière sous-étape, il existe plusieurs approches. Nous utiliserons celle dite par changement de variables paramétrisé. Ce changement de variables permet d'obtenir une formule de construction explicite d'un correcteur.

### 3.2.2.1 Résultat d'analyse $H_\infty$ pour un système dépendant d'un paramètre

Nous nous intéressons ici à la première sous-étape. Considérons le système :

$$G(p, \theta) \begin{cases} \dot{x}_G(t) &= A_G(\theta)x_G(t) + B_G(\theta)w(t) \\ z(t) &= C_G(\theta)x_G(t) + D_G(\theta)w(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

où les matrices de la représentation d'état  $A_G(\theta)$ ,  $B_G(\theta)$ ,  $C_G(\theta)$  et  $D_G(\theta)$  sont des fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , admettant une représentation LFT. Pour ce système, nous cherchons à analyser sa norme  $H_\infty$  pour chaque valeur de  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  par la résolution d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ .

Cette analyse est possible par la résolution du problème de faisabilité présenté dans le résultat suivant.

**Lemme 3.1** (Analyse  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $G(p, \theta)$  le système défini par (3.3) et  $\gamma$  un réel strictement positif.*

*Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $G(p, \theta)$  est asymptotiquement stable et  $\|G(p, \theta)\|_\infty < \gamma$  ;*
- (ii) *il existe  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$  (une matrice de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ) telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,*

$$\mathcal{P}(\theta) > 0 ; \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_G(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_G(\theta) & C_G(\theta)^T \\ B_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_G(\theta)^T \\ C_G(\theta) & D_G(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.5)$$

**Démonstration** Pour chaque valeur de  $\theta \in \mathbb{P}$ , par application du lemme réel borné [GA94] ou du Lemme 1.3, page 24, en le modifiant légèrement, nous avons :  $\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , il existe  $\mathcal{P}_\theta = \mathcal{P}_\theta^T$  telle que  $\mathcal{P}_\theta > 0$  et

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta)^T \mathcal{P}_\theta + \mathcal{P}_\theta A_G(\theta) & \mathcal{P}_\theta B_G(\theta) & C_G(\theta)^T \\ B_G(\theta)^T \mathcal{P}_\theta & -\gamma I & D_G(\theta)^T \\ C_G(\theta) & D_G(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

Les hypothèses du Lemme 2.2, page 66, étant vérifiées, son application mène au résultat.  $\square$

La proposition (ii) de ce lemme étant bien un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ , l'objectif est atteint.

**Remarque 3.2.** Dans l'hypothèse où l'on ne voudrait qu'étudier la norme  $H_\infty$  du système, il est intéressant de transformer le problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  obtenu dans le Lemme 3.1 en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Pour ce faire, il est appliqué le Théorème 2.1, page 87.

Il faut donc factoriser les deux contraintes LMI dépendant de  $\theta$  sous la forme de l'expression (2.32), page 87, à savoir :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0.$$

La contrainte (A.5) se factorise simplement et la contrainte (A.6) peut se factoriser sous cette forme avec

$$H_1(\theta) = \begin{bmatrix} A_G(\theta)^T & 0 & C_G(\theta)^T \\ B_G(\theta)^T & -\frac{\gamma}{2}I_{n_w} & D_G(\theta)^T \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2}I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad \Upsilon(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et  $H_2(\theta) = I_{n+n_w+n_z}$ . Par application du Théorème 2.1, des conditions sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre, que l'on peut vérifier efficacement, sont ainsi obtenues.

### 3.2.2.2 Application du résultat d'analyse au système en boucle fermée

Nous nous intéressons ici à la deuxième sous-étape. Pour appliquer le résultat d'analyse obtenu au système en boucle fermée, il faut construire sa représentation d'état. Elle est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta) & B_G(\theta) \\ C_G(\theta) & D_G(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & 0 & B_w(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ C_z(\theta) & 0 & D_{zw}(\theta) \end{bmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{bmatrix} 0 & B_u(\theta) \\ I_n & 0 \\ 0 & D_{zu}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ C_y(\theta) & 0 & D_{yw}(\theta) \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons donc des matrices de fonctions rationnelles  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$ ,  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  et  $D_K(\theta)$  telles que les conditions (3.4) et (3.5) soient vérifiées. La difficulté majeure est que, dans ce cas, les matrices  $A_G(\theta)$ ,  $B_G(\theta)$ ,  $C_G(\theta)$  et  $D_G(\theta)$  sont des fonctions des variables de décision  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  et  $D_K(\theta)$ . Il y a donc un produit entre certaines variables de décision. Les conditions obtenues sont sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes BMI dépendant de  $\theta$ . La difficulté est que l'ensemble des problèmes d'optimisation sous contraintes BMI contient des problèmes difficiles à résoudre numériquement [TO95].

### 3.2.2.3 Transformation du problème BMI en un problème LMI et formule explicite de construction

Nous nous intéressons ici à la troisième sous-étape : transformer le problème de faisabilité sous contraintes BMI dépendant de  $\theta$  obtenue en un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ . Ceci est possible en utilisant le résultat présenté dans [Bli04] et en étendant le résultat présenté dans [SGC97]. Avec cette approche, on obtient aussi une formule explicite de construction d'un correcteur.

**Théorème 3.1** (Synthèse  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre par changement de variables paramétrisé). Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1) et  $\gamma$  un réel strictement positif.

Alors il existe un correcteur dépendant de  $\theta$

$$K(p, \theta) = \frac{1}{p} I_n \star \begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :

1. le système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ;
2.  $\|P(p, \theta) \star K(s, \theta)\|_\infty < \gamma$

si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  ;
- des matrices  $\mathcal{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $\mathcal{C}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  et  $\mathcal{D}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$  rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (3.7) et (3.8) soient vérifiées :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T + \dots & & & \\ B_u(\theta)\mathcal{C}(\theta) + (B_u(\theta)\mathcal{C}(\theta))^T & & & \\ \hline \mathcal{A}(\theta) + \dots & A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) + \dots & & \\ (A(\theta) + B_u(\theta)\mathcal{D}(\theta)C_y(\theta))^T & \mathcal{B}(\theta)C_y(\theta) + (\mathcal{B}(\theta)C_y(\theta))^T & & \\ \hline (B_w(\theta) + B_u(\theta)\mathcal{D}(\theta)D_{yw}(\theta))^T & (\mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) + \mathcal{B}(\theta)D_{yw}(\theta))^T & -\gamma I & \\ C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{C}(\theta) & C_z(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{D}(\theta)C_y(\theta) & D_{zw}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{D}(\theta)D_{yw}(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.8)$$

où  $(.)^T$  désigne la transposée du bloc symétrique.

Si les matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$ ,  $\mathcal{A}(\theta)$ ,  $\mathcal{B}(\theta)$ ,  $\mathcal{C}(\theta)$  et  $\mathcal{D}(\theta)$  existent, un correcteur peut être construit :

$$\begin{aligned} D_K(\theta) &= \mathcal{D}(\theta) \\ C_K(\theta) &= (\mathcal{C}(\theta) - D_K(\theta)C_y(\theta)\mathcal{X}(\theta))M(\theta)^{-T} \\ B_K(\theta) &= N(\theta)^{-1}(\mathcal{B}(\theta) - \mathcal{Y}(\theta)B_u(\theta)D_K(\theta)) \\ A_K(\theta) &= N(\theta)^{-1} \times \left( \mathcal{A}(\theta) - N(\theta)B_K(\theta)C_y(\theta)\mathcal{X}(\theta) - \mathcal{Y}(\theta)B_u(\theta)C_K(\theta)M(\theta)^T + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \mathcal{Y}(\theta)(A(\theta) + B_u(\theta)D_K(\theta)C_y(\theta))\mathcal{X}(\theta) \right) M(\theta)^{-T} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $N(\theta)$  et  $M(\theta)$  sont telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $M(\theta)N(\theta)^T = I - \mathcal{X}(\theta)\mathcal{Y}(\theta)$ .

**Démonstration** Voir la Section A.2.1.3, page 182. □

L'intérêt de ce théorème est double. Le premier intérêt est qu'il présente des conditions nécessaires et suffisantes sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  pour l'existence d'un correcteur dépendant de  $\theta$ . Nous savons qu'il sera possible de transformer ce problème en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre et ainsi d'obtenir des conditions d'existence d'un correcteur dépendant de  $\theta$  qui sont numériquement vérifiables. Le second intérêt de ce théorème est

qu'il donne une formule explicite de construction dépendant de  $\theta$  pour la construction d'un correcteur. Quelques commentaires sont à faire à propos de cette formule.

À partir de cette formule explicite de construction, on peut constater que rechercher un correcteur avec des matrices de représentation d'état, qui sont rationnelles en  $\theta$ , n'est pas limitatif. En effet, dans le théorème, les matrices de la représentation d'état du correcteur peuvent être des fonctions quelconques de  $\theta$ , dépendant du choix de  $N(\theta)$  et de  $M(\theta)$ . Or il est toujours possible<sup>1</sup> de choisir  $N(\theta)$  et  $M(\theta)$  rationnelles en  $\theta$  (par exemple, un choix possible est  $N(\theta) = \mathcal{X}(\theta)^{-1} - \mathcal{Y}(\theta)$  et  $M(\theta) = \mathcal{X}(\theta)$ ). Les matrices de la représentation d'état du correcteur sont alors rationnelles en  $\theta$ . En plus d'être pertinent du point de vue de l'implémentation du correcteur, le fait de rechercher les matrices de la représentation d'état du correcteur comme des fonctions rationnelles n'est pas limitatif.

De plus, en utilisant les représentations LFT des matrices entrant dans cette formule explicite, il est possible de construire une représentation LFT de

$$\begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

en utilisant les opérations définies sur les LFTs (voir la Section A.1.5, page 175). En effet, toutes les opérations nécessaires (somme, multiplication, inversion et concaténation) sont définies pour les LFTs et résultent en une LFT. Lorsque les représentations LFT sont connues, la construction du correcteur se fait donc facilement : le second objectif est atteint.

La formule de construction explicite donnée par (3.9) est une transcription directe de la formule donnée dans [SGC97]. Cette formule n'est cependant pas la plus intéressante. En effet, en plus d'obtenir une représentation LFT de (3.10), nous voulons qu'elle soit d'ordre limité. Or, lorsqu'une opération (somme, multiplication et concaténation) est effectuée sur deux représentations LFT, l'ordre de la représentation LFT résultante est égal à la somme des ordres des deux représentations LFT de départ. Pour obtenir une représentation LFT qui est au final d'ordre limité, on peut, d'une part, utiliser des variables de décision avec des représentations LFT d'ordre faible et, d'autre part, limiter le nombre d'opérations nécessaires à l'obtention d'une représentation LFT de (3.10), c'est-à-dire que l'on peut factoriser la formule (3.9).

La première possibilité pose quelques difficultés théoriques. Le Théorème 3.1 est obtenu à partir du Lemme 3.1. Il y a donc un lien entre les variables de décision des deux problèmes de faisabilité. Les variables de décision  $\mathcal{X}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  sont en fait directement reliées à la variable de décision  $\mathcal{P}(\theta)$  par la relation (pour le choix  $N(\theta) = \mathcal{X}(\theta)^{-1} - \mathcal{Y}(\theta)$  et  $M(\theta) = \mathcal{X}(\theta)$ )

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\theta) & \mathcal{X}(\theta)^{-1} - \mathcal{Y}(\theta) \\ \mathcal{X}(\theta)^{-1} - \mathcal{Y}(\theta) & \mathcal{Y}(\theta) - \mathcal{X}(\theta)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Comme dans le résultat d'analyse, la variable de décision  $\mathcal{P}(\theta)$  sert à vérifier que le système a ou non une propriété de norme  $H_\infty$ , il n'y a pas de raison de limiter *a priori* son ordre. Il n'y a donc pas de raison de limiter *a priori* l'ordre des variables de décision  $\mathcal{X}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$ . Rien ne garantit que l'on obtienne de bons résultats en limitant l'ordre de  $\mathcal{X}(\theta)$  et de  $\mathcal{Y}(\theta)$ . Cependant, nous verrons dans les exemples des Sections 3.4.1, 3.4.2 et du Chapitre 4 que le choix d'un ordre petit (par le choix d'un degré  $N$  petit) donne de bons résultats.

<sup>1</sup>En fait, elles sont forcément rationnelles. Voir la démonstration du Théorème 3.1 en Annexes, Section A.2.1, page 182.

Pour la seconde possibilité, avec le choix  $N(\theta) = \mathcal{X}(\theta)^{-1} - \mathcal{Y}(\theta)$  et  $M(\theta) = \mathcal{X}(\theta)$ , on trouve la factorisation suivante.

**Théorème 3.2** (Construction d'un correcteur  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre par formule explicite). *Une représentation d'état du correcteur dépendant d'un paramètre peut être obtenue avec*

$$\begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\theta) & -J(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_u} \end{bmatrix} \times \dots \left( \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B_u(\theta) \\ 0 & I_{n_u} \end{bmatrix} \mathcal{V}(\theta) \begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta)^{-1} & 0 \\ -C_y(\theta) & I_{n_y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.11)$$

où

$$\begin{bmatrix} L(\theta) & -J(\theta) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) \begin{bmatrix} I_n & \mathcal{Y}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & I_n \end{bmatrix} \right) \star I_n$$

et où

$$\mathcal{V}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\theta) & \mathcal{B}(\theta) \\ \mathcal{C}(\theta) & \mathcal{D}(\theta) \end{bmatrix}.$$

**Démonstration** Par évaluation de cette formule, on retrouve l'expression (3.9).  $\square$

L'ordre le plus petit que l'on puisse trouver pour une représentation LFT de la matrice (3.10) est par définition l'ordre d'une représentation LFT minimale de cette matrice. La factorisation que nous venons d'effectuer est en fait la première étape pour obtenir cette représentation minimale. En effet, réduire l'ordre d'une représentation LFT de la matrice (3.10), en factorisant la formule (3.9), revient à diminuer le nombre de fois où les matrices dépendant de  $\theta$  apparaissent dans la formule explicite de construction. Par exemple,  $\mathcal{D}(\theta)$  n'apparaît plus qu'une fois dans la formule explicite (3.11) au lieu de quatre dans la formule explicite (3.9). Pour le choix des matrices  $N(\theta)$  et  $M(\theta)$  que nous avons fait, la factorisation obtenue est la meilleure en ce sens que le nombre d'apparitions des matrices dépendant de  $\theta$  est minimal [Fon95]. En fait, le choix des matrices  $N(\theta)$  et  $M(\theta)$  est motivé par la factorisation obtenue. La seconde étape pour obtenir une représentation LFT minimale est numérique : elle ne peut donc être obtenue que lorsque les matrices dépendant de  $\theta$  dans la formule explicite sont connues. Par exemple, lorsque  $\mathcal{X}(\theta)^{-1}$  et  $C_y(\theta)$  ont les mêmes pôles, il est possible d'obtenir une représentation LFT d'ordre plus faible que l'ordre de celle obtenue en appliquant directement l'opération de concaténation (pour plus de détails, voir le choix des  $c_j$  dans la Section 2.5.2, page 88).

### 3.2.3 Résultat de conception d'un correcteur $H_\infty$ dépendant d'un paramètre par optimisation LMI indépendant de paramètre

Des deux objectifs fixés, le second a été atteint à travers la formule explicite de construction. Il reste le premier qui consiste à trouver des conditions numériquement vérifiables pour tester l'existence d'un correcteur. Le Théorème 3.1 énonce des conditions d'existence sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ . Le premier objectif est alors atteint en transformant ce problème en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

Pour cela, nous choisissons des variables de décision de la forme suivante :

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{V}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{V}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad (3.12)$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ . Il est à noter que dans ces expressions, seul le degré  $N$  est choisi *a priori*. L'intérêt évident de telles variables de décision est qu'il est alors possible d'appliquer le Théorème 2.1, page 87, obtenu dans le chapitre précédent. L'application de ce théorème permet d'effectuer la transformation nécessaire à l'atteinte du premier objectif.

La difficulté majeure de la transformation est en fait la mise en forme des contraintes LMI dépendant de  $\theta$  que nous avons sous la forme utilisée dans le Théorème 2.1, page 87, à savoir :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0.$$

Voir la Section 2.5.2, page 88, pour plus de détails. Avant d'énoncer le résultat, quelques notations sont introduites ou rappelées :

$$J_p(c_i) = \left[ \begin{array}{cccccc|c} 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_p & 0 \\ -c_N I_p & \cdots & \cdots & \cdots & -c_1 I_p & I_p \\ \hline I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_p & 0 \\ -c_N I_p & \cdots & \cdots & \cdots & -c_1 I_p & I_p \end{array} \right],$$

$$\mathcal{R}_X = [ \mathcal{X}_N \quad \cdots \quad \mathcal{X}_1 \quad \mathcal{X}_0 ],$$

$$\mathcal{R}_Y = [ \mathcal{Y}_N \quad \cdots \quad \mathcal{Y}_1 \quad \mathcal{Y}_0 ],$$

$$\mathcal{R}_V = [ \mathcal{V}_N \quad \cdots \quad \mathcal{V}_1 \quad \mathcal{V}_0 ],$$

$$\mathcal{R}_{d,p} = [ d_N I_p \quad \cdots \quad d_1 I_p \quad d_0 I_p ],$$

$$\mathbb{W}_{cns}(k) = \left\{ \mathcal{W} = \mathcal{W}^T \left| \begin{array}{l} \exists \mathcal{D} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \mathcal{D} > 0, \exists \mathcal{G} = -\mathcal{G}^T \in \mathbb{R}^{k \times k}, \\ \mathcal{W} = \begin{bmatrix} -2\mathcal{D} & (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} + \mathcal{G} \\ (\underline{\theta} + \bar{\theta})\mathcal{D} - \mathcal{G} & -2\bar{\theta}\mathcal{D} \end{bmatrix} \end{array} \right. \right\}$$

et

$$\mathcal{L}(A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi, D_\Phi, \mathcal{M}, \mathcal{W}) = \begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} \mathcal{M} [ C_\Phi \quad D_\Phi ] + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \mathcal{W} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}.$$

Les conditions d'existence d'un correcteur dépendant de  $\theta$  sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre sont énoncées dans le théorème suivant.

**Théorème 3.3** (Existence d'un correcteur  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre par changement de variables paramétrisé en dimension finie). *Soient  $N$  un entier positif et  $N$  réels  $c_i$  tels que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ .*

*Alors il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$  et  $\mathcal{V}(\theta)$  définies par (3.12) telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les contraintes (3.7) et (3.8) sont vérifiées si et seulement s'il existe*

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , et des matrices  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ;
- des réels  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_0}, B_{\Omega_0}, C_{\Omega_0}, D_{\Omega_0}, \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_0 \\ -\mathcal{M}_0^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_0 \right) < 0 \quad (3.13)$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} \quad \text{et avec} \quad \theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_0} & B_{\Omega_0} \\ \hline C_{\Omega_0} & D_{\Omega_0} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} I_{2n} & \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1(\gamma) \\ \mathcal{M}_1(\gamma)^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0 \quad (3.14)$$

avec

$$\mathcal{M}_1(\gamma) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{R}_x & \mathcal{R}_{d,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_y & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{R}_{d,n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{d,n_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \mathcal{R}_{d,n_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \mathcal{R}_{d,n_z} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\theta)^T \\ F_2(\theta) F_3(\theta) \end{bmatrix}$$

où

$$F_1(\theta) = \left[ \begin{array}{cc|cc|cccc} 0 & B_u(\theta) & A(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 & A(\theta)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_w(\theta)^T & B_w(\theta)^T & 0 & -\frac{1}{2}I_{n_w} & 0 \\ 0 & D_{zu}(\theta) & C_z(\theta) & 0 & 0 & D_{zw}(\theta) & 0 & -\frac{1}{2}I_{n_z} \end{array} \right]$$

$$F_2(\theta) = \left[ \begin{array}{c|ccc} \theta I \star J_{n+n_y}(c_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta I \star J_{n_z}(c_i) \end{array} \right]$$

$$F_3(\theta) = \left[ \begin{array}{cccc} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) & 0 \\ \hline & & & I_{n+n+n_w+n_z} \end{array} \right].$$

**Démonstration** La condition (i) est obtenu à partir de la condition (3.7) du Théorème 3.1, page 110, en appliquant le Théorème 2.1, page 87. La condition (ii) est obtenu à partir de la condition (3.8) du Théorème 3.1, page 110, en appliquant le Théorème 2.1, page 87.

Considérons d'abord la condition (3.8). Cette condition peut se factoriser sous la forme de l'expression (2.32), page 87 :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0$$

avec  $H_1(\theta) = F_1(\theta)$ ,  $H_2(\theta) = F_3(\theta)$  et

$$C + \Upsilon(\theta) = \left[ \begin{array}{c|cccc} \mathcal{V}(\theta) & & & & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{X}(\theta) & I_n & 0 & 0 \\ & 0 & \mathcal{Y}(\theta) & 0 & 0 \\ \hline & I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_w} & 0 \\ & 0 & 0 & \gamma I_{n_w} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \gamma I_{n_z} \end{array} \right].$$

Le Théorème 2.1, page 87, est alors appliqué avec  $\bar{H}(\theta) = F_2(\theta)$  et  $\mathcal{U}(\Upsilon_i, d_i) = \mathcal{M}_1(\gamma)$ . Dans le cas de la condition (3.8), il apparaît sur la diagonale  $-\gamma$  avec  $\gamma > 0$ . D'après la discussion de la Section 2.5.2, page 88, la condition (i) du Théorème 2.1 disparaît. Il ne reste donc que la condition (ii) du Théorème 2.1, page 87, qui donne la condition (ii) du Théorème 3.3.

Considérons maintenant la condition (3.7). Elle peut se factoriser sous la forme de l'expression (2.32), page 87 :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta) + (H_1(\theta)(C + \Upsilon(\theta))H_2(\theta))^T < 0$$

avec  $H_1(\theta) = I$ ,  $H_2(\theta) = I$  et

$$C + \Upsilon(\theta) = \left[ \begin{array}{cc} -\mathcal{X}(\theta) & -2I_n \\ 0 & -\mathcal{Y}(\theta) \end{array} \right].$$

Le Théorème 2.1, page 87, est alors appliqué avec  $\bar{H}(\theta) = \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix}$  et  $\mathcal{U}(\Upsilon_i, d_i) = -\mathcal{M}_0$ . Il est à noter que les mêmes réels  $c_i$  ont été utilisés pour les deux conditions (3.7) et (3.8). Ici encore, il ne reste que la condition (ii) dans le Théorème 2.1, page 87, qui donne la condition (i) du Théorème 3.3.  $\square$

Ce théorème énonce effectivement des conditions pour l'existence d'un correcteur  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Le degré  $N$  des variables de décision étant fixé, ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Ce degré  $N$  doit être choisi *a priori*. Ceci peut paraître un désavantage ; c'est au contraire un avantage, celui de contrôler l'ordre d'une représentation LFT des matrices de la représentation d'état du correcteur.

Dans la prochaine section, nous allons voir comment le problème de conception d'un correcteur dépendant d'un paramètre peut être mis en œuvre pour un nouveau problème que nous formulons.

### 3.3 Mise en œuvre pour la conception de correcteurs remplissant un ensemble continu de compromis

Habituellement, un correcteur est conçu pour un unique compromis du cahier des charges et pour un système  $G(p)$  donné. Jusqu'à son utilisation, on peut distinguer plusieurs étapes successives :

1. un compromis est choisi par un ou plusieurs « décideurs ». C'est un choix de nature économique ;
2. un ou plusieurs « concepteurs » conçoivent un correcteur qui remplit ce compromis pour le système  $G(p)$  dans un bureau d'études ;
3. un ou plusieurs « œuvrants » mettent en œuvre le correcteur conçu sur un site d'exploitation ;
4. un ou plusieurs « utilisateurs » utilisent enfin le correcteur mise en œuvre sur le site d'exploitation.

Cependant, pour certaines applications, le compromis évolue dans le temps. C'est le cas par exemple des canaux d'irrigation, exemple que nous détaillerons dans le Chapitre 4. Lorsqu'il y a un changement de compromis, les trois premières étapes doivent être effectuées à nouveau avant que le ou les « utilisateurs » ne puissent utiliser le nouveau correcteur sur le site d'exploitation : le ou les « décideurs » doivent choisir le nouveau compromis, le ou les « concepteurs » doivent concevoir un nouveau correcteur pour le nouveau compromis et le ou les « œuvrants » doivent mettre en œuvre le nouveau correcteur. La difficulté est que les « décideurs », les « concepteurs » et les « œuvrants » ne sont pas forcément les mêmes personnes et, de surcroît, ne travaillent pas forcément au même endroit. Effectuer à nouveau les trois premières étapes peut donc entraîner un surcroît de travail long, fastidieux et coûteux. Ceci reste le cas même si les « décideurs », les « concepteurs » et les « œuvrants » sont les mêmes personnes.

Dans cette section, nous souhaitons concevoir un correcteur qui, lorsqu'il y a un changement de compromis, ne nécessitent pas d'effectuer à nouveau les trois premières étapes

entraînant ainsi un gain important en terme de temps, de travail et d'argent. Ceci est possible en concevant un correcteur qui remplit, non pas un compromis, mais un ensemble continu de compromis pour un système  $G(p)$  donné. Nous appellerons un tel correcteur un correcteur reréglable et le problème de conception d'un tel correcteur est un problème nouveau. On peut distinguer alors les étapes suivantes :

1. un ensemble continu de compromis est choisi par un ou plusieurs « décideurs ». C'est un choix de nature économique ;
2. l'ensemble continu de compromis est paramétrisé par un paramètre  $\theta$  (par convention  $\theta \in [0, 1]$ ). Un ou plusieurs « concepteurs » conçoivent un correcteur dépendant explicitement de  $\theta$  qui remplit le compromis, pour toutes les valeurs de  $\theta$ , pour le système  $G(p)$  dans un bureau d'études. Ce correcteur est un correcteur reréglable ;
3. un ou plusieurs « œuvrants » mettent en œuvre le correcteur conçu sur un site d'exploitation ;
4. un ou plusieurs « utilisateurs » utilisent enfin le correcteur mise en œuvre sur le site d'exploitation.

Lorsqu'il y a un changement de compromis, il suffit de changer la valeur de  $\theta$ .

Dans la suite de cette section, nous formalisons la notion de compromis d'un cahier des charges. Ceci permettra alors de formaliser la notion d'ensemble continu de compromis d'un cahier des charges et ainsi de formaliser le problème de conception d'un correcteur reréglable. L'ensemble continu de compromis étant paramétrisé par  $\theta$ , la conception d'un correcteur reréglable revient à la conception d'un correcteur dépendant explicitement de  $\theta$ . Lorsqu'un compromis est déterminé par la méthode de synthèse  $H_\infty$ , le problème de conception d'un correcteur reréglable se formule alors comme la conception d'un correcteur  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre pour un système augmenté dépendant d'un paramètre (voir le Problème 3.1, page 105). Les résultats de la section précédente donnent des conditions efficaces pour la résolution du problème de conception d'un correcteur reréglable.

### 3.3.1 Compromis et Pareto-optimalité

Nous expliquons d'abord ce qu'est un compromis pour un cahier des charges. Nous reprenons les explications et les définitions (avec une légère modification) du livre de Boyd et Barrat [BB91]. Considérons le cas de la conception d'un correcteur LTI  $K(p)$  pour un système LTI  $G(p)$ .

Un cahier des charges est un ensemble de spécifications. On peut distinguer deux types de spécifications :

- les spécifications booléennes (stabilité asymptotique du système en boucle fermée, rejet asymptotique de perturbations de type échelon...);
- les  $n_{spec}$  spécifications quantifiables (temps de réponse inférieur à  $t_{max}$ , pulsation de coupure d'une fonction de transfert supérieure (inférieure) à  $\omega_{min}$  ( $\omega_{max}$ ), limitation de l'énergie de commande, marge de module supérieure à 6 dB...).

**Remarque 3.3.** *Dans la suite de ce document, un cahier des charges comportera toujours par défaut la stabilité asymptotique du système en boucle fermée comme spécification booléenne.*

Les spécifications booléennes peuvent être représentées par une fonctionnelle  $Q_{b,G(p)}$  de l'ensemble des correcteurs  $K(p)$  dans l'ensemble  $\{0; 1\}$  :

$$\begin{aligned} Q_{b,G(p)} &: \mathbb{H} &\rightarrow & \{0; 1\} \\ K(p) &\mapsto & Q_{b,G(p)}(K(p)) \end{aligned}$$

où  $\mathbb{H}$  est l'ensemble des matrices de fonctions de transfert et avec  $Q_{b,G(p)}(K(p))$  valant 1 lorsque toutes les spécifications booléennes sont remplies. On note  $\mathbb{B}$  l'ensemble des correcteurs satisfaisant toutes les spécifications booléennes :

$$\mathbb{B} = \{K(p) \in \mathbb{H} \mid Q_{b,G(p)}(K(p)) = 1\}. \quad (3.15)$$

Par exemple si les spécifications booléennes se résument à la stabilité asymptotique,  $\mathbb{B}$  est l'ensemble des  $K(p) \in \mathbb{H}$  telles que la boucle fermée est asymptotiquement stable.

Pour les spécifications quantifiables, on associe à une spécification  $i$  la quantité définie par une fonctionnelle

$$\begin{aligned} Q_{i,G(p)} &: \mathbb{H} &\rightarrow & \mathbb{R} \\ K(p) &\mapsto & Q_{i,G(p)}(K(p)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Une spécification quantifiable se mesure par une borne  $b_i$  sur la valeur de  $Q_{i,G(p)}(K(p))$  :

$$Q_{i,G(p)}(K(p)) \leq b_i.$$

Par exemple, le temps de réponse (ou l'énergie de commande ou la pulsation de coupure) est inférieur à tant. Pour les spécifications de type marge de module supérieure à  $-6$  dB, il est possible de les spécifier par l'opposée de la marge de module inférieure à 6 dB.

Notons  $b$  le vecteur  $[b_1 \ \cdots \ b_{n_{spec}}]^T$ . Le vecteur  $b$  représente alors les bornes sur les spécifications quantifiables. On donne la définition de l'atteignabilité de  $b$ .

**Définition 3.1** (Borne atteignable). *Soient  $G(p)$  un système LTI,  $\mathbb{B}$  défini par (3.15),  $Q_{i,G(p)}$  définie par (3.16),  $i = 1, \dots, n_{spec}$  et  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n_{spec}$ , les bornes sur les spécifications quantifiables d'un cahier des charges.*

*On dit que la borne  $b = [b_1 \ \cdots \ b_{n_{spec}}]^T$  est atteignable s'il existe  $K(p) \in \mathbb{B}$  tel que*

$$\forall i = 1, \dots, n_{spec}, \quad Q_{i,G(p)}(K(p)) \leq b_i.$$

Une borne atteignable est donc une borne sur les spécifications quantifiables pour laquelle il existe un correcteur qui remplit cette borne.

Intuitivement, un compromis est une borne atteignable que l'on ne peut pas améliorer. Dans ce cadre, parmi les spécifications quantifiables, on distingue :

- les spécifications molles, les  $m_{spec}$  premières, sont celles sur lesquelles on peut jouer pour respecter le cahier des charges. Il est possible de faire varier les bornes  $b_i$  associées ;
- les spécifications dures, les  $n_{spec} - m_{spec}$  dernières, sont celles que l'on veut absolument respectées. Les bornes  $b_i$  associées sont alors fixées.

Par exemple, un choix habituel de spécification dure est le temps de réponse : la borne associée est égale à  $t_{max}$ . Par exemple, un choix habituel de spécification molle est la limitation de l'énergie de commande : il est possible de faire varier la borne associée. Un compromis peut alors se définir comme suit.

**Définition 3.2** (Borne Pareto–optimale ou compromis). Soient  $G(p)$  un système LTI,  $\mathbb{B}$  défini par (3.15),  $Q_{i,G(p)}$  définie par (3.16),  $i = 1, \dots, n_{\text{spec}}$ .

On dit que la borne  $b = [b_1 \ \dots \ b_{n_{\text{spec}}}]^T$  est Pareto-optimale (ou un compromis) si

– pour toute borne  $\bar{b} = [\bar{b}_1 \ \dots \ \bar{b}_{m_{\text{spec}}} \ b_{m_{\text{spec}}+1} \ \dots \ b_{n_{\text{spec}}}]^T$  telle que

$$\forall i = 1, \dots, m_{\text{spec}}, b_i < \bar{b}_i,$$

$\bar{b}$  est atteignable ;

– pour toute borne  $\underline{b} = [\underline{b}_1 \ \dots \ \underline{b}_{m_{\text{spec}}} \ b_{m_{\text{spec}}+1} \ \dots \ b_{n_{\text{spec}}}]^T$  telle que

$$\forall i = 1, \dots, m_{\text{spec}}, \underline{b}_i < b_i,$$

$\underline{b}$  n'est pas atteignable.

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons de façon interchangeable les termes borne Pareto–optimale et compromis. Cette définition est intéressante car, en plus de définir formellement un compromis, elle permet de distinguer un ensemble de bornes atteignables et un ensemble de bornes non atteignables (voir la Figure 3.2 pour le cas de deux spécifications quantifiables).

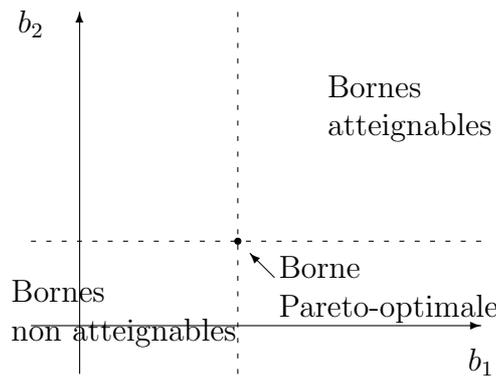


FIG. 3.2 – Borne Pareto–optimale, bornes atteignables et bornes non atteignables

Pour concevoir un correcteur qui remplit un compromis du cahier des charges, il faut donc :

- déterminer une borne Pareto–optimale ;
- concevoir un correcteur qui remplisse cette borne Pareto–optimale.

Un changement de compromis revient à rechercher une nouvelle borne Pareto–optimale et un correcteur associé.

Maintenant, pour concevoir un correcteur reréglable, il faut déterminer un ensemble de bornes Pareto–optimales et le paramétrer par un paramètre  $\theta$ . Comme dans le cas d'une seule borne Pareto–optimale, l'ensemble des bornes Pareto–optimales permet de distinguer un ensemble de bornes atteignables et un ensemble de bornes non atteignables. L'ensemble des bornes Pareto–optimales est en fait la frontière entre les bornes atteignables et les bornes non atteignables (voir la Figure 3.3 pour le cas de deux spécifications quantifiables). Pour notre problème, nous ne voulons pas concevoir un correcteur pour toute la frontière mais pour une partie de celle-ci, par exemple celle qui est entre les points  $M$  et  $N$ . Déterminer cette partie de frontière n'est pas forcément évident dans la mesure où elle constitue une infinité de bornes Pareto–optimales.

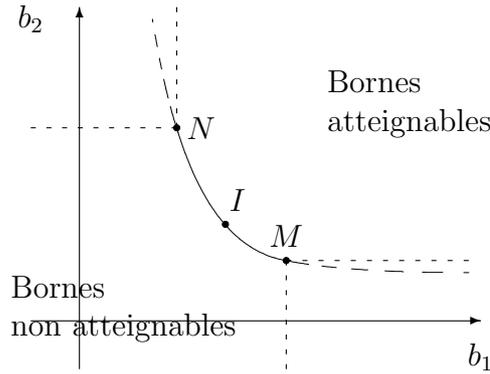


FIG. 3.3 – Frontière entre bornes atteignables et bornes non atteignables

**Définition 3.3** (Ensemble de compromis). Soient  $G(p)$  un système LTI,  $\mathbb{B}$  défini par (3.15),  $Q_{i,G(p)}$  définie par (3.16),  $i = 1, \dots, n_{\text{spec}}$ .

On dit que  $b(\theta) = [b_1(\theta) \ \dots \ b_{n_{\text{spec}}}(\theta)]^T$ , un vecteur de fonctions définies sur  $[0; 1]$ , est un ensemble de compromis si, pour tout  $\theta \in [0; 1]$ , la borne  $b(\theta)$  est Pareto-optimale.

### 3.3.2 Détermination et paramétrisation d'un ensemble continu de compromis par la méthode de synthèse $H_\infty$

La méthode de synthèse  $H_\infty$  est une méthode fréquentielle basée sur les principes des méthodes fréquentielles dites classiques [SP96a, SF05, DF99]. Les méthodes fréquentielles reposent sur l'hypothèse qu'un cahier des charges peut être traduit par un cahier des charges avec que des spécifications fréquentielles. Une spécification fréquentielle sur une fonction de transfert en boucle fermée est définie par des gabarits (fréquentiels) sur une certaine gamme de pulsations.

**Définition 3.4** (Spécification fréquentielle). Soit  $T(p)$  une fonction de transfert en boucle fermée.

Une spécification fréquentielle sur  $T(p)$  est définie par  $n_g$  fonctions  $Gab_j(\omega)$  strictement positives sur  $[\underline{\omega}_j; \bar{\omega}_j]$  où  $\underline{\omega}_j < \bar{\omega}_j$ , où  $\underline{\omega}_j$  peut être nulle et où  $\bar{\omega}_j$  peut être infini.

La spécification fréquentielle sur  $T(p)$  est alors la suivante :<sup>2</sup>

$$\forall j = 1, \dots, n_g, \forall \omega \in [\underline{\omega}_j; \bar{\omega}_j], |T(j\omega)| < Gab_j(\omega).$$

Les bornes sur les spécifications quantifiables d'un cahier des charges sont reliées à des caractéristiques des gabarits.

**Exemple 3.1.** Par exemple, sur la Figure 3.4, il est tracé trois gabarits fréquentiels sur la fonction de transfert en boucle fermée  $S(p) = (1 + G(p)K(p))^{-1}$ . Pour un système  $G(p)$  monovarié commandé par un correcteur à un degré de liberté, ces gabarits permettent de prendre en compte plusieurs spécifications. Le premier gabarit

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega)| < Gab_1(\omega)$$

<sup>2</sup>Une spécification fréquentielle peut aussi porter sur la phase de la fonction de transfert en boucle fermée. Il est, en général, possible de réécrire une spécification sur la phase comme une spécification sur le module. Nous ne considérons dans ce document que ce dernier type de spécifications fréquentielles.

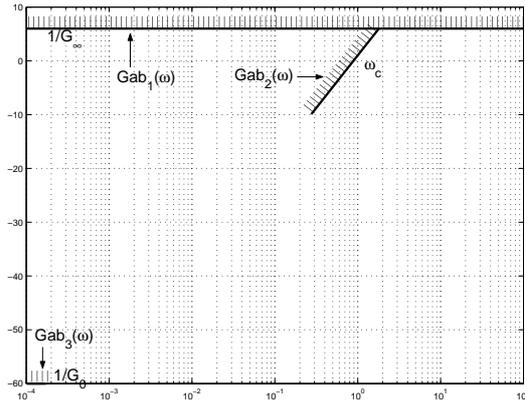


FIG. 3.4 – Exemples de gabarits

permet de prendre en compte que la marge de module en dB est supérieure à  $-20 \log(G_\infty)$ .  
Le deuxième gabarit

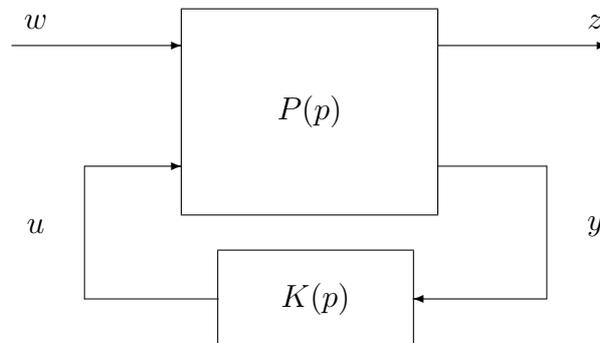
$$\forall \omega \in [0, 3; 2], \quad |S(j\omega)| < Gab_2(\omega)$$

permet de prendre en compte la rapidité du suivi de trajectoire de référence. Plus  $\omega_c$  (la pulsation pour laquelle le gabarit vaut 0 dB) est grand, plus la rapidité garantie est importante. Le troisième gabarit

$$\forall \omega \in [0; 2 \cdot 10^{-4}], \quad |S(j\omega)| < Gab_3(\omega)$$

permet de prendre en compte que l'erreur statique en pourcentage est inférieure à l'inverse de  $G_0$ .

Nous allons maintenant voir ce qu'est la méthode de synthèse  $H_\infty$  [Zam81] et comment elle peut être mise en œuvre pour déterminer une borne atteignable. Nous commencerons par le cas d'une seule spécification fréquentielle avant de considérer le cas de plusieurs spécifications fréquentielles. Nous verrons ensuite comment déterminer une borne Pareto-optimale avec la méthode de synthèse  $H_\infty$ . Il est alors possible de déterminer un nombre fini de compromis. Nous verrons comment à partir de ce nombre fini de compromis, il est possible de déterminer un ensemble continu de compromis.

FIG. 3.5 – Système en boucle fermée pour le problème  $H_\infty$  standard

**La méthode de synthèse  $H_\infty$**  Soient le système augmenté  $P(p)$  défini par sa représentation d'état

$$P(p) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases}$$

et  $\gamma$  un réel strictement positif. La méthode de synthèse  $H_\infty$  permet de tester, de façon efficace, l'existence d'un correcteur décrit par sa représentation d'état

$$K(p) \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases}$$

qui garantisse les deux propriétés suivantes :

1. le système en boucle fermée  $P(p) \star K(p)$  est asymptotiquement stable ;
2. la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée est strictement inférieure à  $\gamma$  :

$$\|P(p) \star K(p)\|_\infty < \gamma.$$

Si un tel correcteur existe, la méthode de synthèse  $H_\infty$  permet d'en construire un.

**Mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$  pour la détermination d'une borne atteignable dans le cas d'une spécification fréquentielle** Dans le cas d'un cahier des charges fréquentiel avec une seule spécification fréquentielle, le problème est alors de savoir s'il existe un correcteur tel que

$$\forall j = 1, \dots, n_g, \forall \omega \in [\underline{\omega}_j, \bar{\omega}_j], |T(j\omega)| < Gab_j(\omega). \quad (3.17)$$

Il est possible de regrouper tous les gabarits dans l'inverse du module d'une fonction de transfert. Elle est appelée pondération et on la note  $W(p)$ . Cette fonction de transfert est choisi pour « coller » au mieux aux gabarits et ainsi garantir la propriété suivante : si la propriété

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |T(j\omega)| < \frac{1}{|W(j\omega)|} \quad (3.18)$$

est vérifiée, alors la propriété (3.17) est vérifiée, c'est-à-dire que le module de la fonction de transfert en boucle fermée est bien en dessous des gabarits fréquents.

**Exemple 3.2.** Par exemple, pour les gabarits de la Figure 3.4,  $W(p)$  peut être choisie de la façon suivante [Fon95]

$$W(p) = \frac{1}{p} \star \left[ \frac{-\omega_c \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}}{|G_0^2 - 1|} \mid \frac{(G_0 - G_\infty) \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}}{G_\infty} \right].$$

Le tracé du module de l'inverse de cette pondération est représenté sur la Figure 3.6 : si le module de la fonction de transfert en boucle fermée est en dessous du module de l'inverse de la pondération, alors elle sera aussi en dessous des gabarits.

En choisissant des fonctions de transfert  $W_s(p)$  et  $W_e(p)$  telles que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |W(j\omega)| = |W_s(j\omega)W_e(j\omega)|,$$

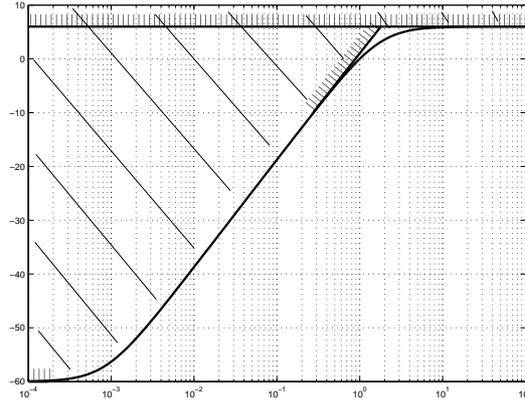


FIG. 3.6 – Exemple de pondération

la relation (3.18) peut se réécrire

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |W_s(j\omega)T(j\omega)W_e(j\omega)| < 1.$$

La fonction de transfert  $W_s(p)$  (respectivement  $W_e(p)$ ) est appelée pondération en sortie (respectivement en entrée) et peut être interprétée comme la description des signaux de sortie (respectivement d'entrée). Par définition de la norme  $H_\infty$ , ceci se réécrit

$$\|W_s(p)T(p)W_e(p)\|_\infty < 1.$$

Finalement, le fait qu'une fonction de transfert en boucle fermée est en dessous de ses gabarits est donc traduit par le fait que la norme  $H_\infty$  de cette fonction de transfert augmentée de pondérations est inférieure à 1. Or il est toujours possible d'écrire  $W_s(p)T(p)W_e(p)$  comme le bouclage d'un système augmenté (des pondérations) sur le correcteur :

$$W_s(p)T(p)W_e(p) = P(p) \star K(p) \quad \text{avec} \quad P(p) = \begin{bmatrix} W_s(p) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^w(p) \begin{bmatrix} W_e(p) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

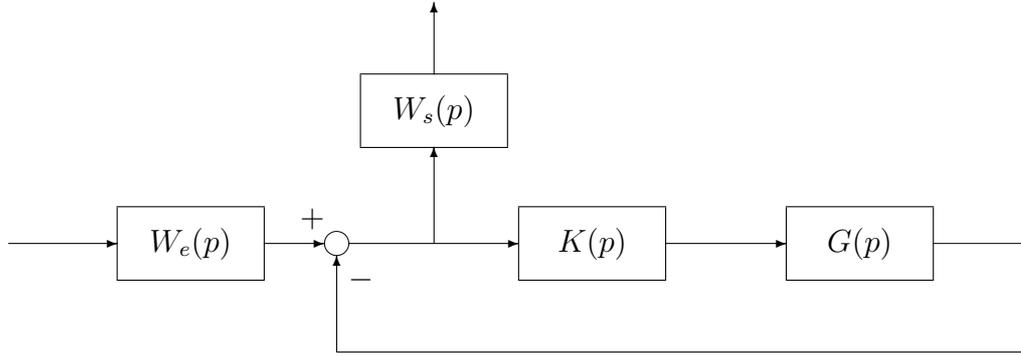
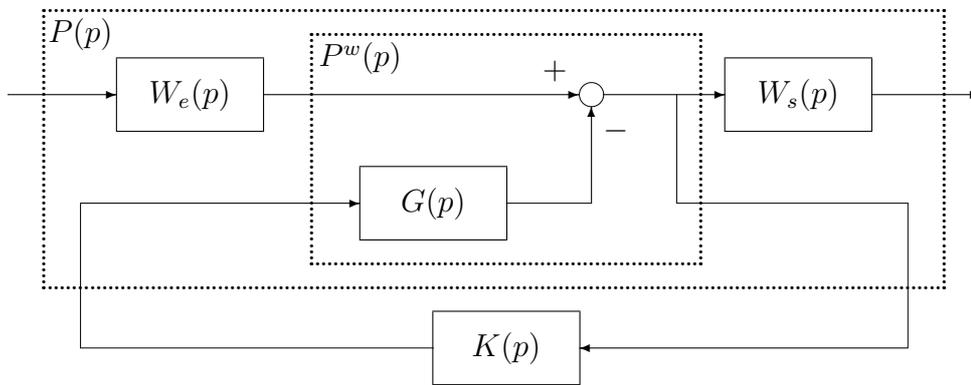
où  $P^w(p)$  détermine la fonction de transfert en boucle fermée considérée et ne dépend que de  $G(p)$ .

**Exemple 3.3.** Par exemple, dans le cas où  $T(p)$  est la fonction de transfert en boucle fermée  $S(p)$ , la fonction de transfert  $W_s(p)T(p)W_e(p)$  est représentée sur la Figure 3.7. Ce schéma peut se manipuler et être retracé comme sur la Figure 3.8. Dans ce cas, on peut constater que  $P(p)$  vaut

$$P(p) = \begin{bmatrix} W_s(p) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^w(p) \begin{bmatrix} W_e(p) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad P^w(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [ 1 \quad -G(p) ].$$

Le problème est donc de savoir s'il existe un correcteur tel que la norme  $H_\infty$  de  $P(p) \star K(p)$  soit inférieure à 1. La méthode de synthèse  $H_\infty$  permet de résoudre ce problème de façon efficace.

**Mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$  pour la détermination d'une borne atteignable dans le cas de plusieurs spécifications fréquentielles** De façon plus générale, la méthode de synthèse  $H_\infty$  considère un problème avec plusieurs fonctions de transfert en boucle fermée et plusieurs pondérations en sortie et en entrée. Considérons

FIG. 3.7 – Problème  $H_\infty$  un blocFIG. 3.8 – Problème standard  $H_\infty$  un bloc

le schéma de la Figure 3.9. Dans ce schéma, les fonctions de transfert en boucle fermée considérées sont déterminées par  $P^w(p)$  (qui ne dépend que de  $G(p)$ ) et les pondérations en sortie et en entrée sont respectivement regroupés dans  $W_s(p)$  et dans  $W_e(p)$ . En calculant  $P(p)$

$$P(p) = \begin{bmatrix} W_s(p) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P^w(p) \begin{bmatrix} W_e(p) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

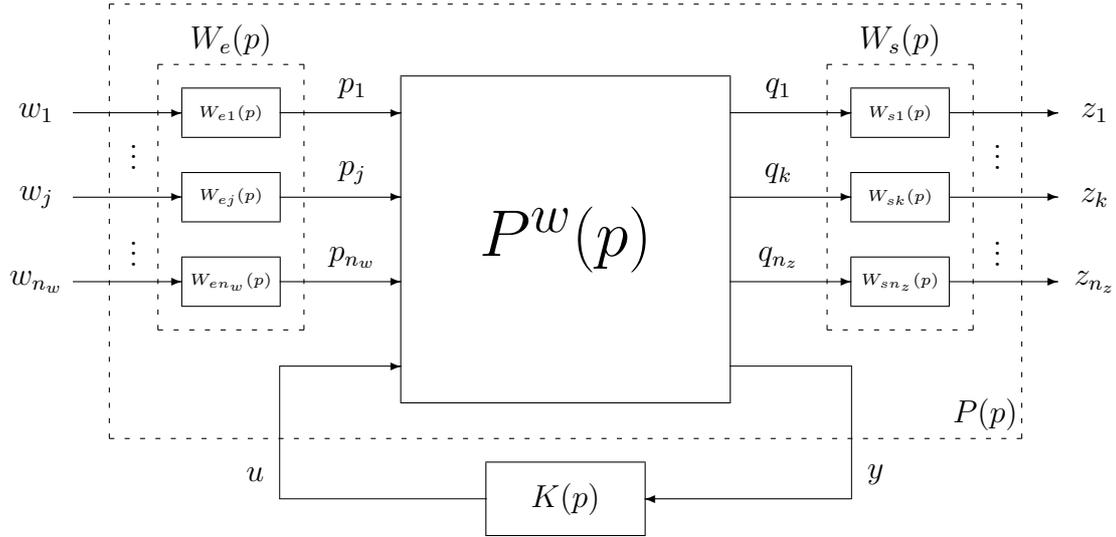
la forme standard est obtenue. La méthode de synthèse  $H_\infty$  permet de répondre de façon efficace à la question : existe-t-il un correcteur  $K(p)$  qui garantisse la stabilité asymptotique de  $P(p) \star K(p)$  et qui garantisse que la norme  $H_\infty$  de  $P(p) \star K(p)$  est inférieur à 1 :

$$\|P(p) \star K(p)\|_\infty < 1.$$

Nous allons maintenant voir que cette mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$  permet de déterminer une borne atteignable dans le cas de plusieurs ( $n_T$ ) spécifications fréquentielles. En effet, il est plus réaliste de considérer ce cas de figure que le cas d'une seule spécification fréquentielle.

D'un côté, pour plusieurs spécifications fréquentielles, le problème est de savoir s'il existe un correcteur tel que

$$\forall i = 1, \dots, n_T, \forall j = 1, \dots, n_{gi}, \forall \omega \in [\underline{\omega}_{ij}; \bar{\omega}_{ij}], |T_i(j\omega)| < Gab_{ij}(\omega).$$

FIG. 3.9 – Mise en œuvre générale de la méthode de synthèse  $H_\infty$ 

En regroupant tous les gabarits sur une même fonction de transfert en boucle fermée dans une pondération, le problème est donc de savoir s'il existe un correcteur tel que

$$\forall i = 1, \dots, n_T, \forall \omega \in \mathbb{R}, |T_i(j\omega)| < \frac{1}{|W_i(j\omega)|}.$$

Ce problème est dit multi-critères.

De l'autre côté, la méthode de synthèse  $H_\infty$  permet de tester l'existence d'un correcteur tel que la propriété

$$\|P(p) \star K(p)\|_\infty < 1 \quad (3.19)$$

est vérifiée. Or cette propriété implique la propriété

$$\forall j = 1, \dots, n_w, \forall k = 1, \dots, n_z, \|T_{w_j \rightarrow z_k}(p)\|_\infty < 1$$

où  $T_{w_i \rightarrow z_j}(p)$  désigne la fonction de transfert de  $w_i$  vers  $z_j$ . Cette dernière propriété est équivalente à la propriété

$$\forall j = 1, \dots, n_w, \forall k = 1, \dots, n_z, \forall \omega \in \mathbb{R}, |T_{p_j \rightarrow q_k}(j\omega)| < \frac{1}{|W_{sk}(j\omega)W_{ej}(j\omega)|}. \quad (3.20)$$

En choisissant judicieusement les fonctions de transfert en boucle fermée (par le biais de  $P^w(p)$ ) ainsi que les pondérations dans la mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$ , il est possible de trouver une solution au problème multi-critères en trouvant une solution au problème  $H_\infty$ . Nous ne détaillerons pas ici ce choix, pour cela le lecteur pourra se référer à [SP96a, SF05, DF99]. Ce choix sera expliqué pour chaque exemple numérique de ce document.

**Mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$  pour la détermination d'un compromis** Pour pouvoir déterminer un compromis, il faut pouvoir déterminer lorsqu'une borne est atteignable ou non. Si  $\|P(p) \star K(p)\|_\infty < 1$ , alors la méthode de synthèse  $H_\infty$  garantit que la borne associée est atteignable. En revanche, si ce n'est pas le cas, cela ne

veut pas forcément dire que la borne associée est non atteignable. Ceci vient du fait que la propriété définie par (3.19) implique la propriété définie par (3.20), mais que l'implication inverse n'est généralement pas vraie. D'un point de vue théorique, la méthode de synthèse  $H_\infty$  n'est donc pas adéquat pour la détermination d'un compromis. D'un point de vue pratique, elle est intéressante et permet dans certains cas de déterminer approximativement un compromis [SFF03].

Supposons que les fonctions de transfert en boucle fermée ainsi que les pondérations en sortie et en entrée ont déjà été choisies : le système  $P(p)$  est déjà connu. Il est alors minimiser  $\gamma$  tel qu'il existe un correcteur  $K(p)$  qui garantisse la stabilité asymptotique de  $P(p) \star K(p)$  et qui garantisse que la norme  $H_\infty$  de  $P(p) \star K(p)$  est inférieur à  $\gamma$  :

$$\|P(p) \star K(p)\|_\infty < \gamma.$$

Cette dernière relation implique

$$\forall j = 1, \dots, n_w, \forall k = 1, \dots, n_z, \forall \omega \in \mathbb{R}, |T_{p_j \rightarrow q_k}(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_{sk}(j\omega)W_{ej}(j\omega)|}.$$

La valeur minimale de  $\gamma$  obtenue s'interprète alors de la manière suivante :

- si elle est inférieure à 1, le module de toutes les fonctions de transfert en boucle fermée sont en dessous du gabarit défini par la pondération correspondante. Ici, il est de plus possible de modifier les gabarits pour imposer des bornes plus faibles sur toutes les spécifications : le choix des pondérations traduit donc une borne atteignable mais non Pareto–optimale. Il faut alors changer les pondérations et recommencer le processus ;
- si elle est voisine de 1, le module de toutes les fonctions de transfert en boucle fermée sont en dessous ou légèrement au dessus du gabarit défini par la pondération correspondante. De plus, comme il s'agit de la valeur minimale de  $\gamma$ , il existe une ou plusieurs pondérations qu'il n'est pas possible de modifier pour imposer une borne plus faible sur l'une des spécifications. D'un point de vue pratique, on considère que le choix des pondérations traduit approximativement une borne Pareto–optimale ;
- si elle est supérieure à 1, le module d'au moins une des fonctions de transfert en boucle fermée ne se situe pas totalement en dessous du gabarit défini par la pondération correspondante. De plus, comme il s'agit de la valeur minimale de  $\gamma$ , il n'est pas possible de trouver un correcteur pour que le module de toutes les fonctions de transfert en boucle fermée soit en dessous du gabarit correspondant. D'un point de vue pratique, on considère en général que le choix des pondérations traduit une borne non atteignable. Il faut alors changer les pondérations et recommencer le processus.

D'un point de vue pratique, il est en général possible de déterminer approximativement un compromis par mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$ .

**Détermination d'un ensemble continu de compromis par interpolation/approximation d'un ensemble fini de compromis** En mettant en œuvre la méthode de synthèse  $H_\infty$  plusieurs fois, il est possible d'obtenir un nombre fini de compromis (approximativement), par exemple les points  $M$ ,  $N$  et  $I$  sur la Figure 3.3. Nous allons maintenant voir comment il est alors possible de déterminer approximativement un ensemble continu de compromis. La démarche est schématisée sur la Figure 3.10.

D'après ce que nous venons de voir, les bornes sur les spécifications quantifiables d'un cahier des charges sont reliées aux caractéristiques des pondérations en sortie et en entrée

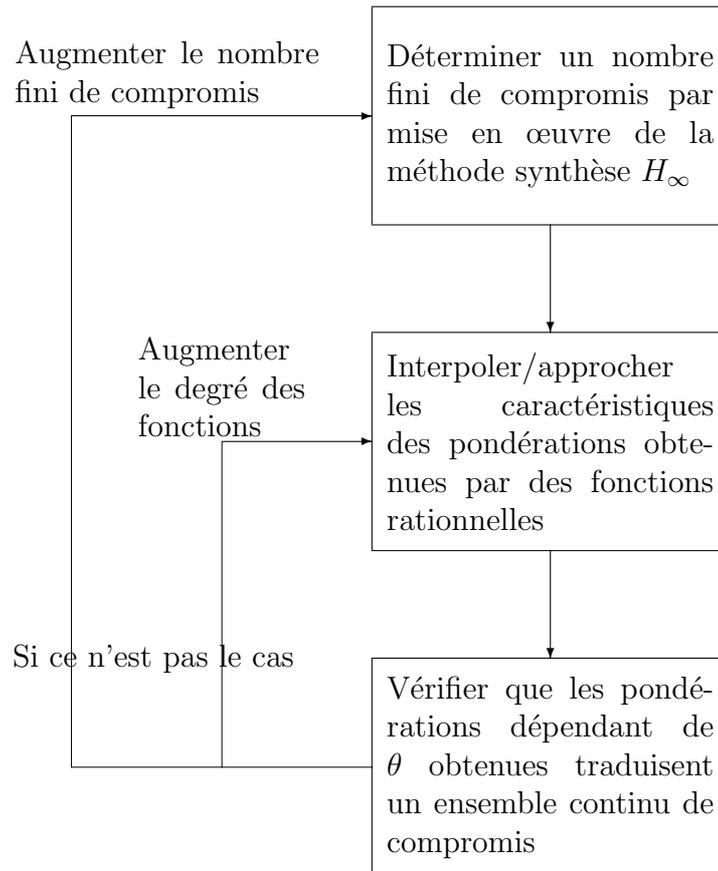


FIG. 3.10 – Détermination d'un ensemble continu de compromis

dans la mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$ . Ainsi, un ensemble continu de compromis paramétrisé par  $\theta$  est en fait un ensemble de pondérations dont les caractéristiques (pulsation pour laquelle elle vaut  $0\text{ dB}$ , valeur à l'infini, valeur en  $0\dots$ ) sont continûment paramétrisées par  $\theta$ . Pour chacun des compromis précédemment trouvés, la valeur  $\theta_i$  de  $\theta$  est connu puisque cette valeur reflète le compromis. À ce niveau, on distingue la caractéristique directement reliée à  $\theta$  des autres. En effet,  $\theta$  reflète un compromis et les caractéristiques reflètent des bornes.  $\theta$  est ainsi une des caractéristiques, à une transformation affine près. Les autres caractéristiques, comme fonctions continues de  $\theta$ , sont obtenues par interpolation/approximation de leurs valeurs connues. Nous utiliserons des fonctions rationnelles pour l'interpolation/approximation. L'interpolation/approximation ne garantit pas, notamment pour les valeurs intermédiaires de  $\theta$ , que les pondérations paramétrisées par  $\theta$  obtenues reflètent effectivement un ensemble de compromis. Si ce n'est pas le cas, on peut augmenter le degré des fonctions rationnelles d'approximation ou/et augmenter le nombre fini de compromis obtenus par la méthode de synthèse  $H_\infty$  et ensuite interpoler/approcher à nouveau les caractéristiques des pondérations. Pour la formalisation du problème de conception de correcteurs reréglables, il est important de noter que les matrices de la représentation d'état de  $W_e(p, \theta)$  et de  $W_s(p, \theta)$  ainsi obtenues sont des fonctions rationnelles en  $\theta$ .

Pour vérifier que les pondérations paramétrisées par  $\theta$  obtenues déterminent effectivement un ensemble de compromis, il suffit de déterminer que, pour toutes les valeurs  $\theta_i$  de  $\theta$ , les pondérations, pour ces valeurs  $\theta_i$ , déterminent un compromis. Pour tout  $\theta_i \in [0; 1]$ , il est donc minimisé  $\gamma$  tel qu'il existe un correcteur  $K_{\theta_i}(p)$  qui garantisse la stabilité

asymptotique de  $P(p, \theta_i) \star K_{\theta_i}(p)$  et qui garantisse la propriété de norme  $H_\infty$

$$\|P(p, \theta_i) \star K_{\theta_i}(p)\|_\infty < \gamma.$$

La valeur minimale de  $\gamma$  ainsi obtenue est notée  $\gamma_{\theta_i}$  et un correcteur  $K_{\theta_i}(p)$  associé est appelé « correcteur–point » dans la suite de ce document. Si, pour toutes les valeurs  $\theta_i \in [0; 1]$ ,  $\gamma_{\theta_i}$  est voisin de 1, alors les pondérations paramétrisées par  $\theta$  déterminent effectivement un ensemble continu de compromis. Bien sûr, cette vérification est difficile à mettre en œuvre. Cependant, il est possible d’effectuer une vérification approximative en choisissant « beaucoup » de valeurs  $\theta_i$ . La vérification est alors effectuée non plus sur  $[0; 1]$  mais pour toutes les valeurs de  $\theta_i$  choisies. Ici, il s’agit donc de vérifier que, pour toutes les valeurs  $\theta_i$  choisies, on a  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$  ;

La phase d’interpolation se fait facilement puisque les caractéristiques des pondérations sont des scalaires. Il est intéressant de limiter l’ordre de la représentation LFT des matrices de leur représentation d’état : ceci limite l’ordre de la représentation des matrices de la représentation d’état de  $P(p, \theta)$ , limitant ainsi la taille du problème d’optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$  obtenu dans la section précédente (Théorème 3.3, page 114). Enfin, travailler sur les fonctions de transfert est intéressant car ce sont des fonctions de transfert d’ordre faible avec peu de caractéristiques.

### 3.3.3 Formulation et solution du problème de conception d’un correcteur reréglable

Supposons maintenant que les pondérations

$$W_e(p, \theta) = \frac{1}{p} I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{W_e}(\theta) & B_{W_e}(\theta) \\ \hline C_{W_e}(\theta) & D_{W_e}(\theta) \end{array} \right] \quad \text{et} \quad W_s(p, \theta) = \frac{1}{p} I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{W_s}(\theta) & B_{W_s}(\theta) \\ \hline C_{W_s}(\theta) & D_{W_s}(\theta) \end{array} \right], \quad (3.21)$$

où les matrices sont rationnelles en  $\theta$  et bien posées sur  $[0; 1]$ , ont été choisies et qu’elles déterminent bien un ensemble continu de compromis. La Figure 3.11 montre le système

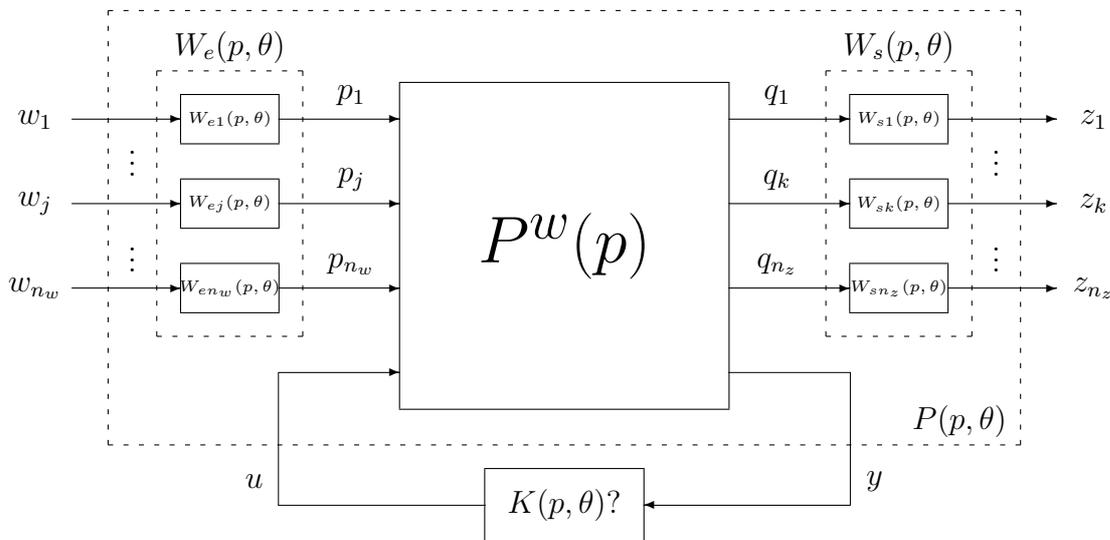


FIG. 3.11 – Problème de conception d’un correcteur reréglable

$P$ . Il dépend maintenant de  $\theta$  et est défini par :

$$P(p, \theta) = \begin{bmatrix} W_s(p, \theta) & 0 \\ 0 & I_{n_y} \end{bmatrix} P^w(p) \begin{bmatrix} W_e(p, \theta) & 0 \\ 0 & I_{n_u} \end{bmatrix}.$$

Le problème de conception d'un correcteur reréglable est alors de trouver, s'il existe, un correcteur  $K(p, \theta)$  qui garantisse, pour tout  $\theta \in [0; 1]$ , la stabilité asymptotique de  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  et la propriété de norme  $H_\infty$

$$\|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_\infty < \gamma$$

avec  $\gamma$  voisin de 1. Les matrices de la représentation d'état des pondérations étant des fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[0; 1]$ , les matrices de la représentation d'état de  $P(p, \theta)$  le sont également. Le problème de conception d'un correcteur reréglable est donc un cas particulier du Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre (Problème 3.1, page 105). Le résultat obtenu dans la section précédente peut donc être appliqué pour la résolution.

### 3.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous illustrons la conception d'un correcteur reréglable avec deux exemples. Nous voulons évaluer la pertinence de notre approche (formalisation avec le Problème 3.1, page 105, et solution avec le Théorème 3.3, page 114) par rapport au problème de conception d'un correcteur reréglable. La formalisation est un cas particulier de la conception d'un correcteur dépendant de paramètres. Pour ce dernier problème, notre solution repose sur la transformation d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de paramètres en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Il est ainsi possible d'adapter d'autres méthodes de transformation afin de donner une solution alternative au problème de conception d'un correcteur dépendant de paramètres. Ces autres méthodes donnent potentiellement de moins bons résultats. Elles sont en général plus simples que la nôtre ou peuvent en être un cas particulier, conduisant ainsi à un problème d'optimisation de plus faible dimension et donc à un temps de résolution plus faible. Nous les comparons alors à notre méthode, ce qui nous permettra de savoir si la différence de temps de résolution entre les méthodes est justifiée par une large différence de résultats.

Pour cela, nous définissons un critère d'évaluation. L'idée de ce critère est de comparer le meilleur résultat obtenu avec une certaine méthode au meilleur résultat possible. Dans le problème dépendant de  $\theta$ , il est possible de minimiser la valeur de  $\gamma$ . Le meilleur résultat obtenu avec une méthode est évalué en calculant la valeur minimale de  $\gamma$ , notée  $\gamma_r$ , obtenue avec cette méthode (dans la nôtre, les variables de décision sont rationnelles de degré limité). Le meilleur résultat possible est évalué en calculant la valeur minimale de  $\gamma$ , notée  $\gamma_{best}$  et appelée « meilleure performance atteignable », obtenue lorsqu'il n'y a pas de restriction sur les variables de décision (elles sont rationnelles sans limite sur le degré). Pour une valeur  $\theta_i$  de  $\theta$  donné,  $\gamma_{\theta_i}$  est la meilleure valeur possible. Sur  $[0; 1]$ , la meilleure performance atteignable est donc donnée par

$$\gamma_{best} = \max_{\theta_i \in [0; 1]} \gamma_{\theta_i}.$$

Le calcul effectif de  $\gamma_{best}$  est un problème ouvert. Une estimation (une borne inférieure) de  $\gamma_{best}$  est alors obtenue simplement en choisissant « beaucoup » de valeurs  $\theta_i$  :  $\gamma_{best} \approx$

$\max_{\theta_i} \gamma_{\theta_i}$ . Le critère d'évaluation est alors donné en pourcentage

$$100 \frac{\gamma_r - \gamma_{best}}{\gamma_{best}}.$$

En utilisant l'estimation de  $\gamma_{best}$  au lieu de sa vraie valeur, il est obtenu une borne supérieure sur le critère d'évaluation.

Dans le cas de notre méthode par exemple, ce critère s'interprète de la façon suivante. Nous avons limité le degré des variables de décision afin d'obtenir un correcteur dont les matrices de la représentation d'état sont des fonctions raisonnablement complexes de  $\theta$ . Or, nous ne savons pas quelle est la complexité d'un correcteur reréglable. Le critère évalue la perte occasionnée par le fait de vouloir un correcteur peu complexe.

Tous les problèmes d'optimisation de ce document (y compris ceux sur la commande des canaux d'irrigation du Chapitre 4) sont résolus en utilisant `Matlab` 6.5 avec LMI control toolbox [GNLC95].

### 3.4.1 Exemple illustratif

Dans ce premier exemple, nous voulons évaluer l'intérêt des fonctions rationnelles pour les données et l'intérêt des fonctions rationnelles de degré limité pour les variables de décision d'une contrainte LMI dépendant de  $\theta$ .

Dans la formalisation du problème de conception d'un correcteur reréglable, les pondérations sont sensées refléter un ensemble continu de compromis. Nous savons que ceci est possible (en approximation) lorsque les matrices de la représentation d'état de ces pondérations peuvent être rationnelles (c'est le cas de notre approche). La question est : est-ce nécessaire ? Cette question peut se poser en terme d'optimisation : est-il nécessaire de considérer des fonctions rationnelles pour les données d'une contrainte LMI dépendant d'un paramètre par rapport à des fonctions plus simples (affine par exemple) ?

Notre solution considère l'ensemble des fonctions rationnelles pour les variables de décision. Nous savons que ceci est intéressant. La question est : jusqu'à quel point ?

Pour cela, nous comparons notre approche avec deux approches alternatives, adaptations d'approches largement répandues dans la littérature, et avec la meilleure performance atteignable. Dans la première approche alternative, les données et les variables de décision sont des fonctions rationnelles particulières et, dans la seconde, les variables de décision sont des fonctions rationnelles particulières. Nous présentons les approches alternatives séparément.

Nous détaillons d'abord l'exemple. Considérons un système du premier ordre  $G(p)$  :

$$G(p) = \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p} \star \left[ \begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]$$

commandé par un correcteur à un degré de liberté. Le but est de concevoir un correcteur reréglable garantissant les performances suivantes :

- le système en boucle fermée est capable de suivre des signaux de référence en forme d'échelons avec différents temps de réponse (de 5,4 s pour  $\theta = 0$  à 1,1 s pour  $\theta = 1$ ) ou en forme de sinusoides basses fréquences ;
- l'énergie de commande doit être limitée au maximum ;

– le correcteur doit assurer une marge de module d'au moins  $-6$  dB.

Le compromis se fait entre le temps de réponse et l'énergie de commande. Ce problème peut se résoudre grâce aux choix des fonctions en boucle fermée et aux pondérations de la Figure 3.12 (voir [SP96a]). Pour un compromis donnée, c'est-à-dire pour une valeur  $\theta_i$

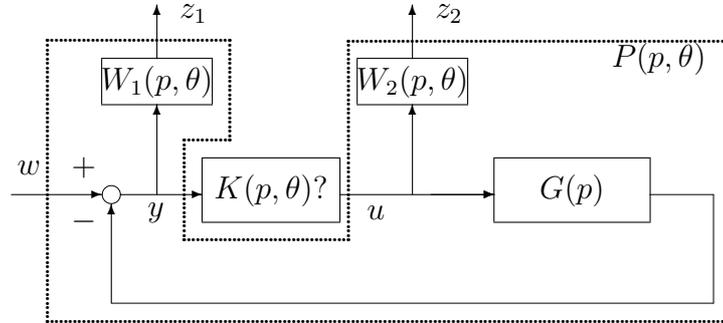


FIG. 3.12 – Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre deux blocs

donnée de  $\theta$ , un compromis est déterminé lorsque  $\gamma_{\theta_i}$  est voisin de 1,  $\gamma_{\theta_i}$  étant la valeur minimale de  $\gamma$  tel qu'il existe un correcteur  $K_{\theta_i}(p)$  garantissant la stabilité asymptotique de la boucle fermée et garantissant la propriété de norme  $H_\infty$

$$\left\| \begin{array}{l} W_1(p, \theta_i) \frac{1}{1 + G(p)K_{\theta_i}(p)} \\ W_2(p, \theta_i) \frac{K_{\theta_i}(p)}{1 + G(p)K_{\theta_i}(p)} \end{array} \right\|_\infty < \gamma. \quad (3.22)$$

### 3.4.1.1 Comparaison avec une approche de type polytopique

L'exemple traité est simple, voire académique. Cela vient du fait que, pour pouvoir appliquer la première approche alternative, des hypothèses fortes sur la représentation d'état du système  $P(p, \theta)$  (par exemple,  $A(\theta)$  est une fonction constante en  $\theta$ , les matrices sont rationnelles de degré un en  $\theta$ ) doivent être satisfaites. Ces hypothèses imposent aux matrices de la représentation d'état des pondérations d'être au mieux rationnelle de degré un avec le même dénominateur. Ceci nous permettra de discuter de l'intérêt des fonctions rationnelles pour les matrices de la représentation d'état de  $P(p, \theta)$  (et donc de  $W_e(p, \theta)$  et de  $W_s(p, \theta)$ ) dans notre approche : la question est de savoir si avec des fonctions plus restreintes, les pondérations peuvent déterminer un ensemble continu de compromis.

Basées sur une approche polytopique, des conditions alternatives peuvent être proposées. Les détails de cette première approche alternative sont présentés en annexe, Section A.2.5, page 214. Un cas particulier de cette approche alternative peut être interprétée comme une extension de l'approche présentée dans [GAC96]. Un point important est que les variables de décision sont restreintes à être des fonctions spécifiques (rationnelles de degré un). Nous pouvons alors discuter de l'intérêt des fonctions rationnelles pour les variables de décision dans notre approche.

**Choix des pondérations** Pour pouvoir appliquer cette première approche alternative, seuls les numérateurs de  $W_1(p, \theta)$  et de  $W_2(p, \theta)$  peuvent être des fonctions non constantes en  $\theta$ . Pour une valeur donnée  $\theta_i \in [0; 1]$  :

1.  $W_1$  est choisie pour assurer le suivi de trajectoire :

$$W_1(p, \theta_i) = k \frac{p + \beta_{\theta_i}}{p + \epsilon} \quad (3.23)$$

où

- (a)  $\epsilon$  est fixée à une valeur petite (0,0017) pour assurer une petite erreur de poursuite statique ;
- (b)  $\beta_{\theta_i}$  est fixée en accord avec le temps de réponse désiré : plus  $\beta_{\theta_i}$  est grand et plus faible est le temps de réponse ;
- (c)  $k$  est une borne inférieure sur la marge de module :  $k = 0,5$  pour une marge module d'au moins -6 dB.

2.  $W_2$  est choisie pour assurer la limitation de l'énergie de commande :

$$W_2(p, \theta_i) = \frac{b_{\theta_i} p + c_{\theta_i}}{p + a} \quad (3.24)$$

$W_2$  est telle que son inverse est passe-bas. Plus la bande passante est faible et plus l'énergie de commande est faible.

Dans notre problème, un compromis est défini par les choix de  $\beta_{\theta_i}$  et de la bande passante de  $W_2$  (qui dépende de  $b_{\theta_i}$  et de  $c_{\theta_i}$ ). Nous considérons les deux compromis extrêmes :

- 1. pour  $\theta_i = 0$ , une réponse lente avec une énergie de commande faible :  $\beta_0 = 0,86$  assure un temps de réponse de 5,4 s et  $a = 1580$ ,  $b_0 = 1800$  et  $c_0 = 504$  assure que  $\gamma_0 = 1,04 \approx 1$  ;
- 2. pour  $\theta_i = 1$ , une réponse rapide avec une énergie de commande élevée :  $\beta_1 = 3,45$  assure un temps de réponse de 1,1 s et  $a = 1580$ ,  $b_1 = 100$  et  $c_1 = 500$  assure que  $\gamma_1 = 1,035 \approx 1$ .

Rappelons que lorsque  $\gamma_{\theta_i}$  est voisin de 1, les pondérations choisies déterminent un compromis du cahier des charges. Le choix précédent détermine donc un compromis pour les valeurs extrêmes de  $\theta$ . Notons qu'entre les deux compromis extrêmes, il y a un facteur 4 entre les deux valeurs de  $\beta$ . Les pondérations  $W_1(p, \theta)$  et  $W_2(p, \theta)$ , pour des compromis intermédiaires, sont obtenues en interpolant de façon affine les coefficients du numérateur de chaque pondération :

$$W_1(p, \theta) = k \frac{p + ((1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1)}{p + \epsilon} \quad \text{et} \quad W_2(p, \theta) = \frac{((1-\theta)b_0 + \theta b_1)p + ((1-\theta)c_0 + \theta c_1)}{p + a}.$$

Une interpolation affine a été choisie pour pouvoir appliquer la première approche alternative. Les pondérations ainsi obtenues sont tracées sur la Figure 3.13 pour plusieurs valeurs de  $\theta$ .

Remarquons qu'avec cette interpolation, il n'y a pas de garantie que les pondérations dépendant de  $\theta$  déterminent un ensemble continu de compromis, c'est-à-dire que, pour toutes les valeurs de  $\theta_i \in ]0; 1[$ , on a  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$ . En fait, ce n'est pas le cas (voir la Figure 3.14). Malheureusement avec une interpolation affine, il n'est pas possible de faire autrement.

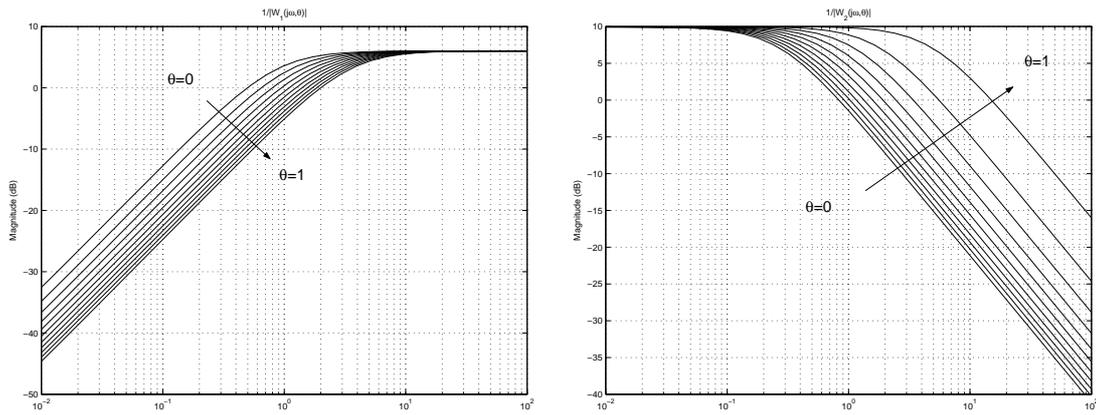


FIG. 3.13 –  $\frac{1}{|W_1(j\omega, \theta)|}$  et  $\frac{1}{|W_2(j\omega, \theta)|}$  par pas de 0,1 en  $\theta$

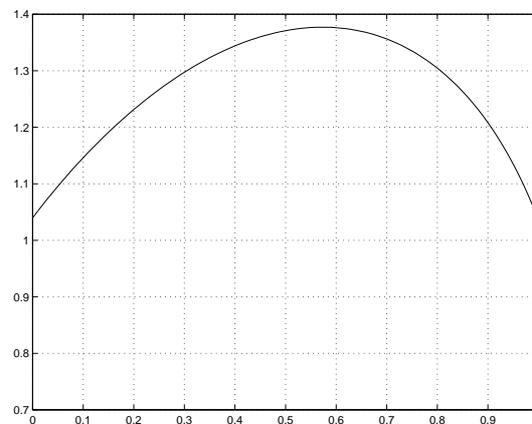


FIG. 3.14 – Courbe de la meilleure performance atteignable :  $\gamma_{\theta_i}(\theta_i)$

**Calcul des correcteurs reréglables** Nous appliquons deux approches : la première approche alternative (Théorème A.23, page 215) avec des fonctions affines ( $d = 0$ ) et notre approche (Théorème 3.3, page 114) avec des fonctions rationnelles de degré un et quatre. Pour  $N = 1$ , nous avons choisi  $1 + c_1\theta = 1 + 0,5\theta$  et pour  $N = 4$ , nous avons choisi  $1 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3 + c_4\theta^4 = (1 + 2\theta)(1 + 3\theta)(1 + 5\theta)$ . Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 3.1 avec  $\gamma_{best}$  valant approximativement 1,38 (calculé avec un pas de 0,01 entre chaque valeur de  $\theta_i$ ).

Remarquons le mauvais résultat obtenu avec la première approche alternative (Théorème A.23, page 215) : une grande amélioration a été obtenue avec notre approche (Théorème 3.3, page 114) en considérant des variables de décision rationnelles de degré un ( $N = 1$ ). Il y a deux raisons à cela : le Théorème A.23 est basé sur des conditions suffisantes alors que

TAB. 3.1 – Comparaison avec la première approche alternative : résultats

	Théorème A.23 $d = 0$	Théorème 3.3 $N = 1$	Théorème 3.3 $N = 4$
$\gamma_r$	1,92	1,7	1,4
$100 \frac{\gamma_r - \gamma_{best}}{\gamma_{best}}$ (borne supérieure)	$\approx 39\%$	$\approx 16\%$	$\approx 1,5\%$

le Théorème 3.3 est basé sur des conditions *nécessaires* et suffisantes ; pour les variables de décision, l'ensemble utilisé dans le Théorème 3.3 contient celui utilisé dans le Théorème A.23.

Remarquons aussi l'excellent résultat obtenu avec notre approche, Théorème 3.3, en considérant des variables de décision rationnelles de degré 4 ( $N = 4$ ).  $\gamma_r$ , la performance obtenue avec notre approche, est très proche de  $\gamma_{best}$ , la meilleure performance atteignable, les résultats sont donc très proches de ceux obtenus sans restriction sur les variables de décision. L'exemple souligne le grand intérêt des fonctions rationnelles et de l'optimisation de leur dénominateur. Ce second point sera illustré dans l'exemple de la Section 3.4.2.

**Analyse des performances de la boucle fermée** Comparons d'abord les performances obtenues avec le correcteur de l'approche alternative (Théorème A.23) avec celles obtenues avec le correcteur de notre approche (Théorème 3.3 avec  $N = 4$ ). Nous comparons, par exemple, les performances de suivi de trajectoire en examinant les tracés de Bode de  $S(p, \theta_i) = (1 + G(p)K(p, \theta_i))^{-1}$ ,  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$ , représentés sur la Figure 3.15 pour les deux correcteurs. La bande passante de  $|S|$  est seulement multipliée par 1,3 entre

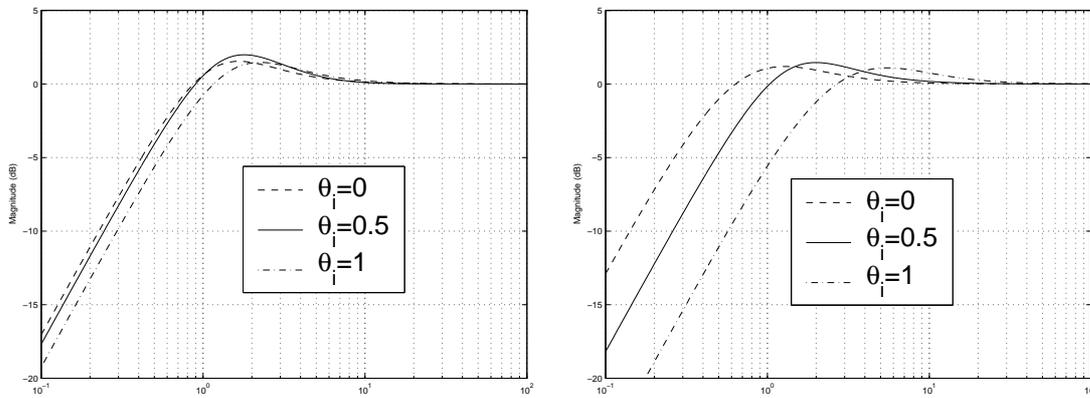
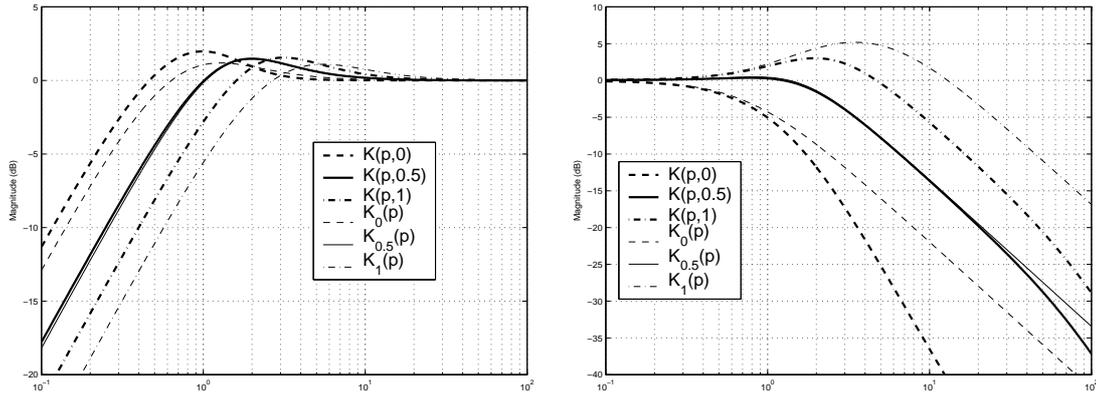


FIG. 3.15 –  $|S(p, \theta_i)|$ ,  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$ , approche alternative (à gauche) et notre approche ( $N = 4$ ) (à droite)

les deux valeurs extrêmes de  $\theta$  pour le correcteur de l'approche alternative (Théorème A.23) alors qu'elle est multipliée par 4 (comme désiré) dans le cas du correcteur de notre approche (Théorème 3.3). Le correcteur reréglable obtenu avec l'approche alternative ne recouvre donc pas les performances du correcteur–point, alors que cela a l'air d'être le cas avec le correcteur reréglable obtenu avec notre approche.

Pour vérifier ceci, comparons maintenant les performances obtenues avec le correcteur de notre approche avec ceux d'un correcteur–point (sans dépendance imposée sur les matrices de la représentation d'état) en examinant le module de  $S(p, \theta_i)$  et de  $K(p, \theta_i)S(p, \theta_i)$ ,  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$ , représenté sur la Figure 3.16 (les lignes en gras représentent les tracés obtenus avec le correcteur de notre approche et les lignes en fin ceux obtenus avec les correcteurs–point). Pour  $\theta = 0,5$ , les mêmes performances sont obtenues par les deux correcteurs. Pour une valeur  $\theta_i$ , la bande passante de  $S(p, \theta)$  pour le correcteur dépendant du compromis est plus petite que celle du correcteur–point. Les réponses temporelles pour les valeurs extrêmes de  $\theta$  sont alors plus lentes avec le correcteur dépendant du compromis qu'avec les correcteurs–point.

**En conclusion** Même sur cet exemple académique, l'approche alternative n'est pas pertinente par rapport au problème de conception d'un correcteur reréglable :

FIG. 3.16 –  $|S|$  (à gauche) and  $|KS|$  (à droite),  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$ 

1. il est nécessaire de choisir une dépendance en  $\theta$  spécifique pour les pondérations : les pondérations ne déterminent pas un ensemble de compromis. Cependant, nous avons choisi une interpolation affine ( $d = 0$ ) alors que l'approche alternative permet de choisir  $d$  quelconque. Il est alors peut-être possible, en choisissant mieux la valeur de  $d$ , d'obtenir que les pondérations déterminent effectivement un ensemble continu de compromis, c'est-à-dire de trouver  $W_1(p, \theta)$  et  $W_2(p, \theta)$  telles que pour tout  $\theta_i \in [0; 1]$ ,  $\gamma_{\theta_i}$  vaut approximativement 1. Pour ce faire, une solution intéressante est d'introduire des paires de pondérations pour des valeurs supplémentaires de  $\theta_i$  telles que  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$ . Nous choisissons donc une troisième paire de pondérations pour  $\theta = 0,6$  :<sup>3</sup>

$$W_1(p, 0,6) = 0,5 \frac{p + 1,73}{p + 0,0017} \quad W_2(p, 0,6) = 500 \frac{p + 1}{p + 1580}.$$

Nous obtenons  $\gamma_{0,6} = 1,03$ . Pour pouvoir appliquer l'approche alternative (Théorème A.23), nous considérons une approximation avec des fonctions rationnelles de degré un. Il faut noter que les dénominateurs des différentes fonctions doivent être les mêmes. Une méthode de type moindre carrée est utilisée sur  $\begin{bmatrix} C_{W_1}(\theta) & D_{W_1}(\theta) \\ C_{W_2}(\theta) & D_{W_2}(\theta) \end{bmatrix}$  avec  $\begin{bmatrix} A_{W_1} & B_{W_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0017 & 1,32 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} A_{W_2} & B_{W_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1580 & 397 \end{bmatrix}$ . Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} C_{W_1}(\theta) & D_{W_1}(\theta) \\ C_{W_2}(\theta) & D_{W_2}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,14 & 0,5 \\ -7170 & 1800 \end{bmatrix} + \frac{\theta}{1 + 1,17\theta} \begin{bmatrix} 2,27 & 0 \\ 7330 & -3700 \end{bmatrix}.$$

Sur la Figure 3.17,  $\gamma_{\theta_i}$  a été tracé en fonction de  $\theta_i$  (trait continu) pour des valeurs de  $\theta_i$  espacée de 0,01. Malheureusement, nous n'avons pas  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$ . Il est donc nécessaire de considérer des fonctions rationnelles de plus haut degré ou des fonctions rationnelles qui n'ont pas le même dénominateur pour l'approximation. L'approche alternative (Théorème A.23) ne peut alors plus être appliquée. Même sur cet exemple académique, il n'est donc pas possible avec cette première approche alternative de choisir des pondérations dépendant de  $\theta$  pour qu'elles déterminent un ensemble continu de compromis ;

2. la performance atteinte est éloignée de la meilleure performance atteignable ;
3. le correcteur reréglable ne recouvre pas les performances du correcteur-point.

<sup>3</sup>Cette valeur correspond au pire cas avec une interpolation affine.

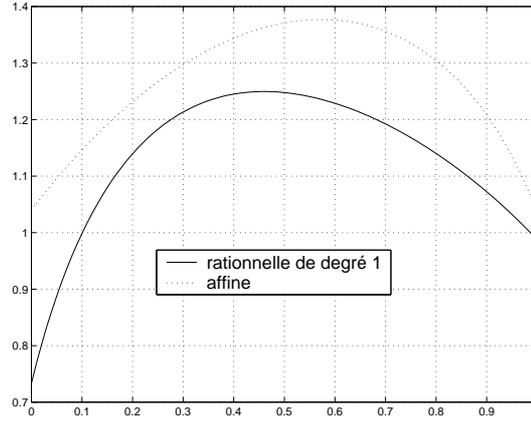


FIG. 3.17 – Courbe de la meilleure performance atteignable :  $\gamma_{\theta_i}(\theta_i)$

Notre approche donne de meilleurs résultats que l'approche alternative :

1. ici, nous avons gardé les mêmes pondérations dépendant de  $\theta$  que celles utilisées pour l'approche alternative pour pouvoir comparer les deux points suivants. Par opposition avec l'approche alternative, il est heureusement possible de choisir des pondérations pour qu'elles déterminent effectivement un ensemble continu de compromis. Ce point sera discuté dans la suite de cet exemple ;
2. la performance atteinte est très proche de la meilleure performance atteignable : notre approche donne de très bons résultats ;
3. bien que le problème d'optimisation donne un résultat intéressant, le correcteur reréglable obtenu ne recouvre pas les performances du correcteur-point.

Avec notre approche, il y a une grande différence entre les deux derniers points : alors qu'en terme d'optimisation on ne peut faire guère mieux, le correcteur-point n'assure pas les performances désirées pour les valeurs extrêmes de  $\theta$ . Cette différence vient du choix des pondérations  $W_1(p, \theta)$  et  $W_2(p, \theta)$  pour  $\theta \in ]0; 1[$ . En effet, le correcteur reréglable garantit la propriété suivante : pour tout  $\theta_i \in [0; 1]$ , pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{1}{1 + G(j\omega)K(j\omega, \theta_i)} \right| < \frac{\gamma_r}{|W_1(j\omega, \theta_i)|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{K(j\omega, \theta_i)}{1 + G(j\omega)K(j\omega, \theta_i)} \right| < \frac{\gamma_r}{|W_2(j\omega, \theta_i)|}$$

alors que le correcteur-point garantit : pour tout  $\theta_i \in [0; 1]$ , pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{1}{1 + G(j\omega)K_{\theta_i}(j\omega)} \right| < \frac{\gamma_{\theta_i}}{|W_1(j\omega, \theta_i)|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{K_{\theta_i}(j\omega)}{1 + G(j\omega)K_{\theta_i}(j\omega)} \right| < \frac{\gamma_{\theta_i}}{|W_2(j\omega, \theta_i)|}.$$

Lorsque  $\gamma_r$  est voisin de  $\gamma_{\theta_i}$  les deux correcteurs garantissent donc la même performance pour cette valeur  $\theta_i$  de  $\theta$ . Comme  $\gamma_r \approx \gamma_{0,5}$ , ceci explique que les deux types de correcteurs garantissent la même performance pour cette valeur de  $\theta$ . Lorsque  $\gamma_r$  est différent de  $\gamma_{\theta_i}$  les deux correcteurs ne garantissent pas la même performance pour cette valeur  $\theta_i$  de  $\theta$ . Comme  $\gamma_r$  est différent de  $\gamma_0$  et de  $\gamma_1$ , ceci explique les différences de performance constatées pour ces valeurs de  $\theta$ . Si l'on veut que le correcteur reréglable assure les performances désirées pour toutes les valeurs de  $\theta$ , il faut donc que, pour tout  $\theta_i \in [0; 1]$ ,  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$ . Or avec le choix des pondérations effectué dans cet exemple, ceci n'est pas vrai (voir la Figure 3.14).

La première approche alternative, plus simple que notre approche, n'est donc pas satisfaisante pour ce problème académique. Si nous adaptions les approches de [AGB95, FAG96,

TA00, YS97, dOBG99, BPPB93, BP94, TdS01, GCG93] à notre problème, des fonctions affines seraient alors considérées pour l'approximation/interpolation des pondérations : le même problème surviendrait.

Ce point montre l'importance du choix des pondérations comme fonctions de  $\theta$ .

Cet exemple a aussi montré l'intérêt des fonctions rationnelles pour les variables de décision.

### 3.4.1.2 Comparaison avec une approche utilisant une fonction de stockage indépendant du paramètre

Dans cette section, nous proposons un choix des pondérations  $W_1(p, \theta)$  et  $W_2(p, \theta)$  adapté aux spécifications de performances pour toutes les valeurs de  $\theta \in [0; 1]$ . Un correcteur reréglable est conçu par utilisation de notre approche (Théorème 3.3, page 114).

Il est alors comparé à un correcteur conçu avec une seconde approche alternative. Dans le cadre de la seconde approche alternative, il est utilisé une fonction de stockage quadratique indépendant de  $\theta$  (les variables de décision  $\mathcal{X}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  sont en fait des fonctions constantes en  $\theta$ ). La conception de correcteurs dépendant d'un paramètre a été intensivement considérée pour la commande de systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV). Dans le contexte LPV, beaucoup d'approches utilisent des fonctions de stockage quadratique mais indépendant du paramètre [Pac94, BP94, AG95, AGB95, SE98, Sch01]. Le problème d'optimisation obtenu est de plus faible dimension que le nôtre mais au prix de moins bons résultats. En contraste, nous utilisons une fonction de stockage quadratique et dépendant du paramètre et obtenons des conditions plus complexes mais avec de meilleurs résultats. Nous cherchons à déterminer l'intérêt de notre approche par rapport à cette approche alternative. Cette approche alternative peut en fait être vu comme un cas particulier de notre approche (voir à la page 88).

Nous évaluerons aussi la pertinence de ces deux approches en les comparant à la meilleure performance atteignable.

**Choix des pondérations** Pour obtenir des pondérations adaptées au problème, nous utilisons les mêmes paires de pondérations qu'avant mais approchons séparément  $C_{W_1}$  et  $[C_{W_2} \ D_{W_2}]$ . Nous obtenons :

$$C_{W_1}(\theta) = 0,33 + \frac{0,33\theta}{1 - 0,67\theta}$$

et

$$[C_{W_2}(\theta) \ D_{W_2}(\theta)] = [-7170 \ 1800] + \frac{\theta}{1 + 1,17\theta} [14670 \ -3680] .$$

Les pondérations ainsi obtenues sont tracées sur la Figure 3.18 pour plusieurs valeurs de  $\theta$ .

Sur la Figure 3.19,  $\gamma_{\theta_i}$  a été tracé en fonction de  $\theta_i$  (trait continu) pour des valeurs de  $\theta_i$  espacée de 0,01. Nous avons bien  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$  : entre 1,02 pour  $\theta = 0,3$  et 1,045 pour  $\theta = 0,9$ .

Il est donc possible que les pondérations déterminent effectivement un ensemble continu de compromis en utilisant, lors de l'interpolation/approximation des pondérations, des fonctions rationnelles.

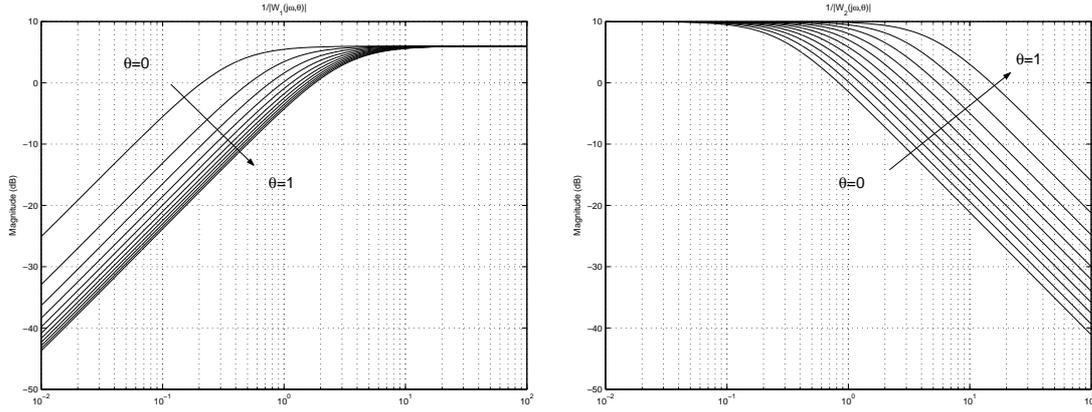


FIG. 3.18 –  $\frac{1}{|W_1(j\omega, \theta)|}$  et  $\frac{1}{|W_2(j\omega, \theta)|}$  par pas de 0,1 en  $\theta$

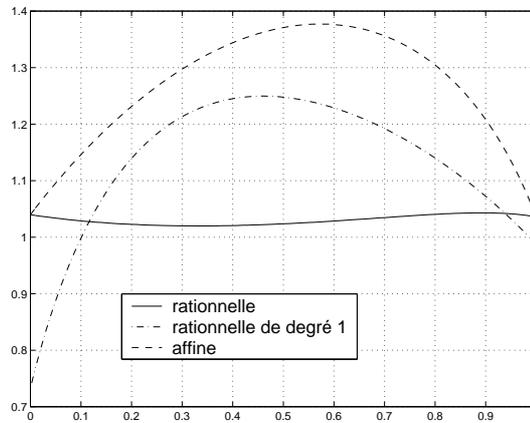


FIG. 3.19 – Courbe de la meilleure performance atteignable :  $\gamma_{\theta_i}(\theta_i)$

**Calcul des correcteurs reréglables** Afin de calculer un correcteur reréglable avec une fonction de stockage indépendante de  $\theta$ , nous avons légèrement modifié le Théorème 3.3 et avons considéré :

$$\mathcal{X}(\theta) = \mathcal{X}_0, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \mathcal{Y}_0, \quad \mathcal{V}(\theta) = \frac{\mathcal{V}_0 + \theta\mathcal{V}_1 + \theta^2\mathcal{V}_2}{1 + d_1\theta + d_2\theta^2}$$

avec les  $d_i$  fixés *a priori* :  $1 + d_1\theta + d_2\theta^2 = (1 - 0,67\theta)(1 + 1,17\theta)$ . Ce choix de dénominateur est naturel puisqu'il correspond à celui trouvé lors de l'interpolation des pondérations.

Nous avons aussi appliqué notre approche, Théorème 3.3, avec  $N = 2$  et  $1 + c_1\theta + c_2\theta^2$  le polynôme trouvé lors de l'approximation :  $(1 - 0,67\theta)(1 + 1,17\theta)$ . Ce choix permet de limiter l'ordre de la réalisation LFT, c'est-à-dire la taille des matrices  $A_\Omega$ ,  $B_\Omega$  et  $C_\Omega$  dans le Théorème 3.3. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 3.2 avec l'estimation de  $\gamma_{best}$  valant 1,045.

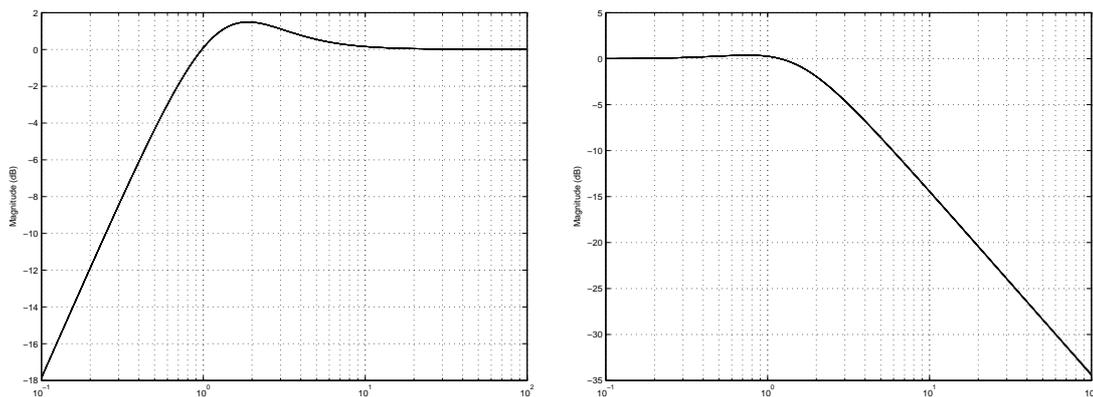
Remarquons que le Théorème 3.3 avec  $N = 2$  donne un bon résultat ( $\gamma_r$  est très proche de  $\gamma_{best}$ ). Le résultat obtenu avec une fonction de stockage indépendante de  $\theta$  est vraiment mauvais.

**Analyse des performances de la boucle fermée** Nous analysons tout d'abord les performances obtenues avec le correcteur avec une fonction de stockage indépendante de  $\theta$

TAB. 3.2 – Comparaison avec la seconde approche alternative : résultats

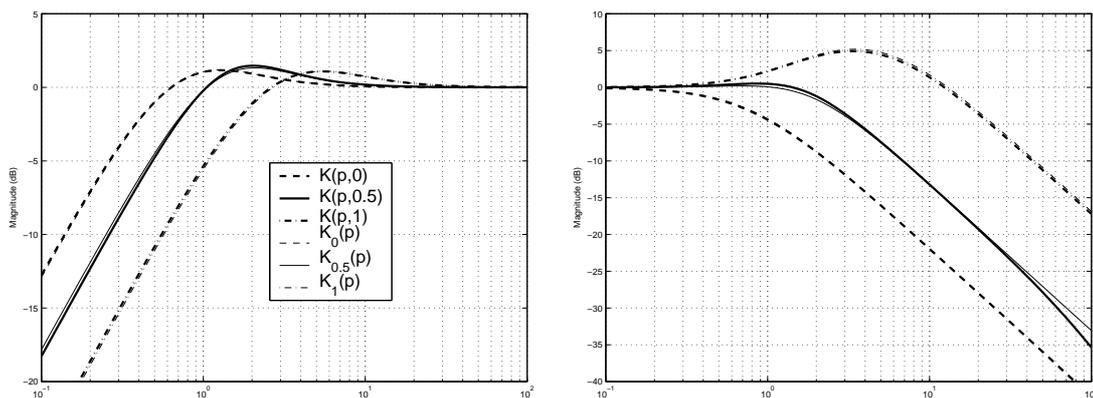
	Fonction de stockage indépendant de $\theta$	Théorème 3.3 $N = 2$
$\gamma_r$	2.26	1.07
$100 \frac{\gamma_r - \gamma_{best}}{\gamma_{best}}$ (borne supérieure)	$\approx 115\%$	$\approx 2,5\%$

en examinant les tracés de Bode de  $S(p, \theta_i)$  et de  $K(p, \theta_i)S(p, \theta_i)$  ( $\theta_i \in \{0; 0,1; \dots; 0,9; 1\}$ ), voir la Figure 3.20. Les fonctions de transfert pour les onze valeurs ont le même module :

FIG. 3.20 –  $|S(p, \theta)|$  et  $|K(p, \theta)S(p, \theta)|$  par pas de 0,1 en  $\theta$ 

de façon surprenante, le correcteur ne varie pas en fonction du compromis. Le résultat est vraiment très pauvre.

Analysons maintenant les résultats obtenues avec le correcteur reréglable de notre approche (Théorème 3.3 et  $N = 2$ ). Nous avons tracé sur la Figure 3.21 le module de

FIG. 3.21 –  $|S|$  (à gauche) et  $|KS|$  (à droite),  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$ 

$S(p, \theta_i)$  et de  $K(p, \theta_i)S(p, \theta_i)$ , les réponses temporelles en boucle fermée sur la Figure 3.22 et les tracés de Bode de  $K(s, \theta_i)$  sur la Figure 3.23. Sur ces figures, les traits en gras sont obtenus avec le correcteur reréglable; les traits en fin sont obtenus avec les correcteurs–point. Nous constatons que les tracés obtenus avec le correcteur reréglable sont très proches de ceux obtenus avec les correcteurs–point : nous avons recouvert les performances souhaitées et ceci avec des fonctions rationnelles de faible degré pour les variables de décision; ce qui est vraiment excellent.

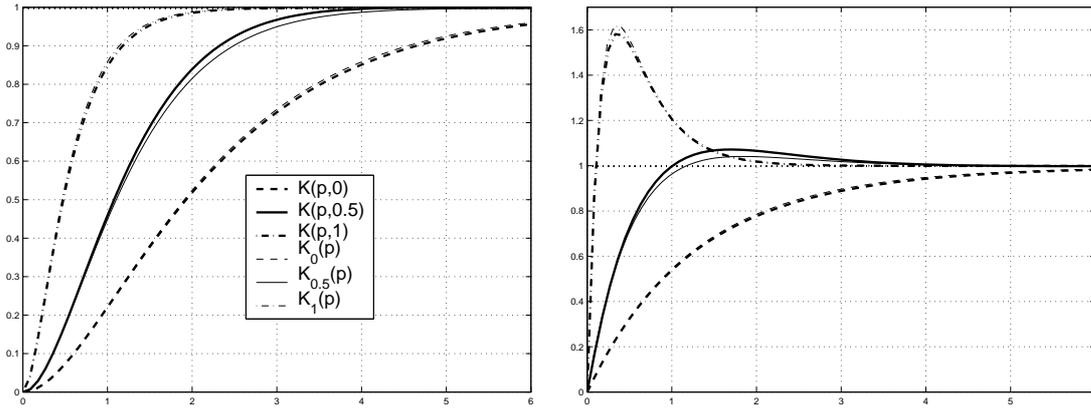


FIG. 3.22 – Sortie (à gauche) et commande (à droite) avec  $K(p, \theta_i)$  et  $K_{\theta_i}(p)$ ,  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$

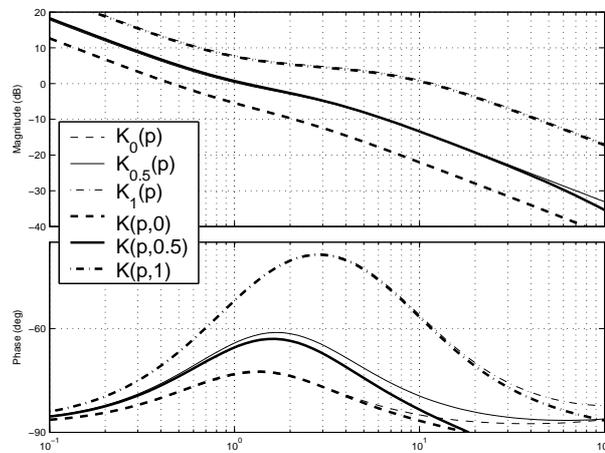


FIG. 3.23 – Diagrammes de Bode des correcteurs,  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$

**En conclusion** Cette seconde approche alternative n'est pas intéressante par rapport au problème de conception d'un correcteur reréglable :

1. les pondérations déterminent un ensemble continu de compromis ;
2. la performance atteinte est très éloigné de la meilleure performance atteignable (plus de 100% d'écart) ;
3. le correcteur obtenu n'évolue pas en fonction du compromis : l'approche alternative est vraiment très mauvais.

Notre approche donne de meilleures résultats que l'approche alternative et elle est pertinente par rapport au problème de conception d'un correcteur reréglable :

1. les pondérations déterminent un ensemble continu de compromis ;
2. la performance atteinte est très proche de la meilleure performance atteignable ;
3. le correcteur reréglable et le correcteur-point assurent les performances.

Cette seconde comparaison souligne l'importance du choix des pondérations comme fonctions de  $\theta$ . En effet, dans la comparaison précédente, bien que notre approche donne de bons résultats en terme d'optimisation ( $\gamma_r$  est proche de  $\gamma_{best}$ ), ce n'était pas le cas en terme d'Automatique (le correcteur reréglable et le correcteur-point n'assuraient pas les

mêmes performances). Ici, notre approche donne de bons résultats en terme d'optimisation et d'Automatique. La différence entre les deux vient de ce que, dans la première comparaison, les pondérations dépendant de  $\theta$  étaient mal choisies alors qu'ici elles sont bien choisies. Ici, on constate que, comme les pondérations déterminent un ensemble continu de compromis, un bon résultat en terme d'optimisation donne aussi un bon résultat en terme d'Automatique. Ceci montre donc l'intérêt des fonctions rationnelles pour les matrices de la représentation d'état du système augmenté, c'est-à-dire pour les données d'une contrainte LMI dépendant d'un paramètre.

Cette comparaison souligne aussi l'intérêt des variables de décision comme fonctions rationnelles en  $\theta$ .

Dans cet exemple, nous avons interpolé/approché les caractéristiques des pondérations sans nous soucier de l'interprétation du paramètre. Dans le prochain exemple, nous illustrons que l'interpolation/approximation peut s'effectuer avec une interprétation claire du paramètre.

### 3.4.2 Commande d'un moteur à courant continu

L'intérêt de fonctions rationnelles pour les données (c'est-à-dire pour les matrices de la représentation d'état de  $P(p, \theta)$ ) et pour les variables de décision d'une contrainte LMI dépendant de  $\theta$  a été illustré dans l'exemple précédent. Dans cet exemple, nous nous intéressons à l'intérêt d'optimiser sur le dénominateur de ces fonctions rationnelles (pour les variables de décision). Pour cela, nous comparons notre approche (Théorème 3.3, page 114) avec une approche alternative, conduisant à un problème d'optimisation de plus faible dimension que le nôtre, dans laquelle les variables de décision sont aussi rationnelles mais avec des dénominateurs fixés *a priori*. Cette approche alternative peut être vue comme un cas particulier de notre approche (voir à la page 88) mais donne potentiellement de moins bons résultats. La question est : est-il intéressant de pouvoir optimiser sur le dénominateur des variables de décision par rapport au temps de résolution supplémentaire que cela apporte ?

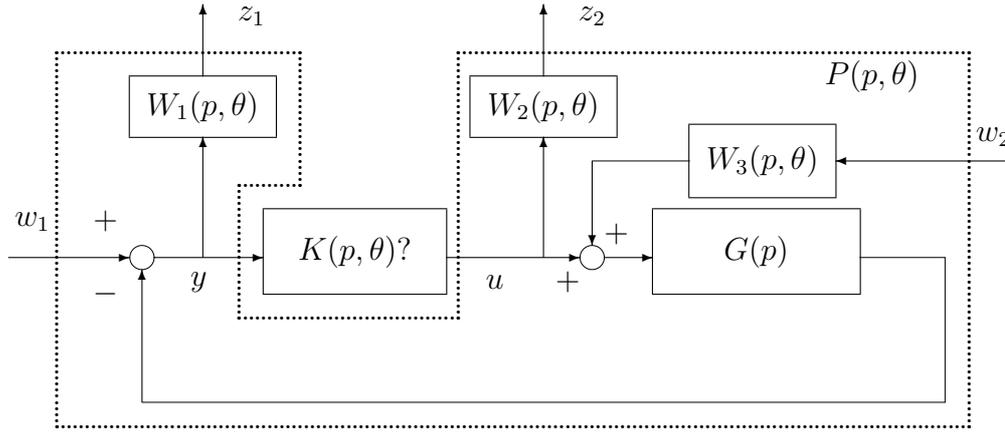
Nous détaillons maintenant l'exemple. Le système considéré est un moteur à courant continu qui peut être modélisé par :

$$G(p) = \frac{235}{p(\frac{p}{66} + 1)} = \frac{1}{p} I \star \left[ \begin{array}{cc|c} -66 & 0 & 32 \\ 32 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{array} \right].$$

Il est commandé par un correcteur à un degré de liberté. Le but est de synthétiser un correcteur dépendant du compromis garantissant les performances suivantes :

- le système en boucle fermée est capable de suivre des signaux de référence en forme d'échelon avec différents temps de réponse (de 0,06 s pour  $\theta = 0$  à 0,02 s pour  $\theta = 1$ ) ou en forme de sinusoïde basses fréquences ;
- le système en boucle fermée doit être capable de rejeter des perturbations d'entrée en forme d'échelon ou en forme de sinusoïde basses fréquences ;
- l'énergie de commande doit être limitée au maximum ;
- le correcteur doit assurer une marge de module d'au moins  $-6$  dB.

Le compromis se fait entre le temps de réponse et l'énergie de commande et le temps de rejet de perturbation. Ce problème peut se résoudre grâce aux choix des fonctions en boucle fermée et aux pondérations de la Figure 3.24 (voir [SP96a]). Pour un compromis

FIG. 3.24 – Problème  $H_\infty$  quatre blocs

donnée, c'est-à-dire pour une valeur  $\theta_i$  donnée de  $\theta$ , un compromis est déterminé lorsque  $\gamma_{\theta_i}$  est voisin de 1,  $\gamma_{\theta_i}$  étant la valeur minimale de  $\gamma$  tel qu'il existe un correcteur  $K_{\theta_i}(p)$  garantissant la stabilité asymptotique de la boucle fermée et garantissant la propriété de norme  $H_\infty$

$$\left\| \begin{array}{cc} W_1(p, \theta_i) S_{\theta_i}(p) & W_1(p, \theta_i) G(p) S_{\theta_i}(p) W_3(p, \theta_i) \\ W_2(p, \theta_i) K_{\theta_i}(p) S_{\theta_i}(p) & W_2(p, \theta_i) T_{\theta_i}(p) W_3(p, \theta_i) \end{array} \right\|_\infty < \gamma$$

avec  $S_{\theta_i}(p) = (1 + G(p)K_{\theta_i}(p))^{-1}$  et  $T_{\theta_i}(p) = (1 + G(p)K_{\theta_i}(p))^{-1}G(p)K_{\theta_i}(p)$ .

**Choix des pondérations** Les pondérations  $W_i(p, \theta)$ ,  $i \in \{1; 2\}$  peuvent s'écrire sous la forme suivante [Fon95] :

$$W_i(p, \theta) = \frac{1}{p} \star \left[ \begin{array}{c|c} -\omega_{ci}(\theta) \sqrt{\frac{|G_{\infty i}^2 - 1|}{|G_{0i}^2 - 1|}} & (G_{0i} - G_{\infty i}) \sqrt{\frac{|G_{\infty i}^2 - 1|}{|G_{0i}^2 - 1|}} \\ \hline \omega_{ci}(\theta) & G_{\infty i} \end{array} \right]$$

où  $G_{0i} = |W_i(0, \theta)|$ ,  $G_{\infty i} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_i(j\omega, \theta)|$  (avec  $(G_{0i} - 1)(G_{\infty i} - 1) < 0$ ) et où  $\omega_{ci}(\theta) > 0$  est la pulsation de coupure telle que  $|W_i(j\omega_{ci}(\theta), \theta)| = 1$ . Pour une valeur donnée  $\theta_i \in [0; 1]$  :

1.  $W_1(p, \theta)$  est choisie pour assurer le suivi de trajectoire :
  - (a) le compromis peut être défini par  $\omega_{c1}$ , car  $\omega_{c1}$  est relié au temps de réponse (20 rad/s pour 0,06 s jusqu'à 80 rad/s pour 0,02 s).  $\omega_{c1}$  peut donc être choisi comme  $\omega_{c1}(\theta) = 20 + 60\theta$ . Le paramètre  $\theta$  peut donc s'interpréter comme la fréquence de coupure de  $W_1(p, \theta)$ , à une transformation affine près,
  - (b)  $G_{01}$  est une borne supérieure sur l'erreur statique de suivi de trajectoire : nous l'avons fixé à 40 dB,
  - (c)  $G_{\infty 1}$  est une borne inférieure sur la marge de module : nous l'avons fixé à -6 dB;
2.  $W_2(p, \theta)$  est choisie pour assurer la limitation de l'énergie de commande : plus  $\omega_{c2}$  est petit et plus l'énergie de commande est faible. Nous avons d'abord déterminé la plus petite valeur de  $\omega_{c2}$  pour trois valeurs de  $\theta$  (23,33 rad/s et  $\gamma_0 = 0,991$  pour  $\theta = 0$ , 180 rad/s et  $\gamma_{0,5} = 0,986$  pour  $\theta = 0,5$ , 700 rad/s et  $\gamma_1 = 0,992$  pour  $\theta = 1$ ).

En utilisant une méthode de type moindre carrée, nous avons approché ces valeurs et avons obtenu  $\omega_{c2}(\theta) = 23,33 + \frac{204\theta}{1 - 0,7\theta}$ . De plus, nous avons fixé  $20 \log(G_{02})$  à  $-10 \text{ dB}$  et  $20 \log(G_{\infty 2})$  à  $60 \text{ dB}$  ;

3.  $W_3(p, \theta)$  est choisie afin de spécifier le rejet de perturbation. Pour simplifier,  $W_3(p, \theta)$  a été choisie constant :  $W_3(p, \theta) = 0,05$ .

Rappelons que lorsque  $\gamma_{\theta_i}$  est voisin de 1, les pondérations choisies déterminent un compromis du cahier des charges. Le choix précédent détermine donc un compromis pour ces trois valeurs de  $\theta$ . Les pondérations ainsi obtenues sont tracées sur la Figure 3.25 pour plusieurs valeurs de  $\theta$ .  $P(p, \theta)$  peut alors être calculé. Notons que seules les matrices  $A(\theta)$

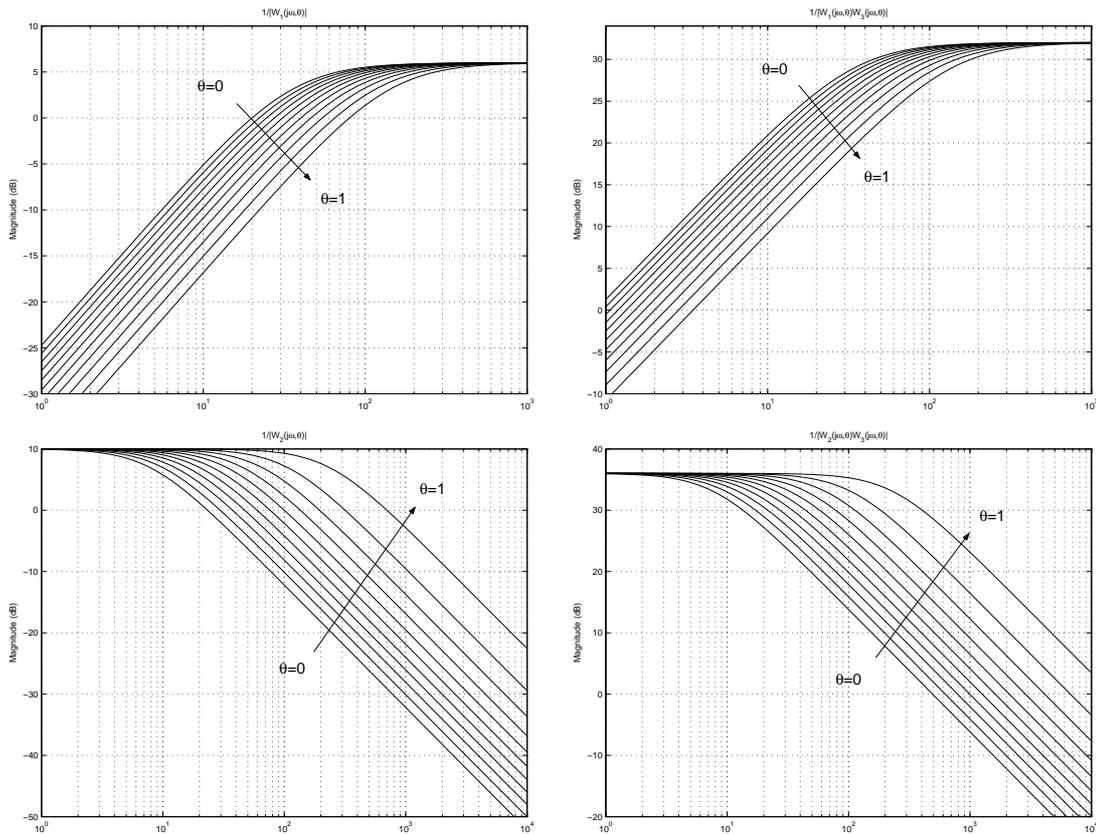


FIG. 3.25 –  $\frac{1}{|W_1(j\omega, \theta)|}$ ,  $\frac{1}{|W_1(j\omega, \theta)W_3(j\omega, \theta)|}$ ,  $\frac{1}{|W_2(j\omega, \theta)|}$  et  $\frac{1}{|W_2(j\omega, \theta)W_3(j\omega, \theta)|}$  par pas de 0,1 en  $\theta$

et  $C_z(\theta)$  dépendent de  $\theta$  : ce sont des fonctions rationnelles de degré deux avec comme dénominateur  $1 - 0,7\theta + 0\theta^2$ .

Avec ces pondérations,  $\gamma_{\theta_i}$  a été calculée pour plusieurs valeurs de  $\theta_i \in [0, 1]$  (par pas de 0,01) : nous vérifions que  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$  : entre 0,96 pour  $\theta = 0,15$  et 0,998 pour  $\theta = 0,8$ , avec une variation de 4%.

**Calcul des correcteurs reréglables** Les correcteurs dépendant du compromis sont obtenus en appliquant le Théorème 3.3 selon trois possibilités :

1. avec  $N = 2$  et le dénominateur des variables de décision fixé *a priori*. Un choix naturel est  $1 - 0,7\theta + 0\theta^2$  : c'est le dénominateur des matrices  $A(\theta)$  et  $C_z(\theta)$  ;

2. avec  $N = 2$  pour évaluer l'intérêt d'optimiser sur le dénominateur des variables de décision ;
3. avec  $N = 3$  pour améliorer le résultat précédent.

Pour améliorer le calcul numérique, nous avons choisi  $1 + c_1\theta = 1 - 0,7\theta$ ,  $c_2 = 0$ , pour  $N = 2$  et  $1 + c_1\theta + c_2\theta^2 = (1 - 0,7\theta)(1 + 3\theta)$ ,  $c_3 = 0$ , pour  $N = 3$ . La partie  $(1 - 0,7\theta)$  sert à limiter la taille des matrices  $A_\Omega$ ,  $B_\Omega$  et  $C_\Omega$  alors que la partie  $(1 + 3\theta)$  est arbitraire. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 3.3 avec l'estimation de  $\gamma_{best}$  valant

TAB. 3.3 – Comparaison avec une approche à dénominateur fixé : résultats

	Théorème 3.3 $N = 2$ dénominateur fixé <i>a priori</i>	Théorème 3.3 $N = 2$	Théorème 3.3 $N = 3$
$\gamma_r$	1,105	1,06	1
$100 \frac{\gamma_r - \gamma_{best}}{\gamma_{best}}$ (borne supérieure)	$\approx 11\%$	$\approx 6\%$	$< 1\%$

0,998.

Remarquons qu'avec un dénominateur fixé *a priori*, le résultat obtenu est assez correct avec une borne supérieure du critère de performance de 11%. Cependant lorsque l'on optimise sur le dénominateur, avec le même degré, le résultat est fortement amélioré avec une valeur du critère de performance de 6%, soit une division par 2 environ. Notons aussi que dans ce cas le dénominateur des variables de décision est  $1 - 1,12\theta + 3,37\theta^2$ , soit un polynôme avec des racines complexes, et est vraiment différent du dénominateur de  $A(\theta)$  et  $C_z(\theta)$ . Il aurait été difficile de choisir un tel polynôme *a priori*. Avec  $N = 3$ , le correcteur reréglable est vraiment très proche de la meilleure performance atteignable.

**Analyse des performances de la boucle fermée** Comparons maintenant le correcteur reréglable obtenu (Théorème 3.3,  $N = 3$ ) avec les correcteurs-point en examinant le module de  $S(s, \theta_i)$ , de  $K(s, \theta_i)S(s, \theta_i)$ , de  $G(s, \theta_i)S(s, \theta_i)$  et  $T(s, \theta_i)$  (voir Figure 3.26), les réponses temporelles (suivi de trajectoire d'un échelon de consigne, réjection d'une perturbation échelon) (voir Figure 3.27) et le diagramme de Bode de  $K(s, \theta_i)$  (voir Figure 3.28) (pour toutes ces figures  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$ , les traits en gras représentent les tracés obtenus avec le correcteur reréglable et les traits en fin représentent les tracés obtenus avec les correcteurs-point). Le correcteur reréglable et le correcteur-point assurent parfaitement les mêmes performances en utilisant des fonctions rationnelles de degré faible, ce qui est excellent.

**En conclusion** Avec le même degré, en optimisant sur le dénominateur des variables de décision, on arrive à diviser par 2 environ la différence entre la performance atteinte et la meilleure performance atteignable (par rapport à ne pas optimiser sur le dénominateur). Ce qui est excellent est que ce gain se fait de plus sans augmenter la complexité du correcteur reréglable obtenu. Si l'on se permet d'augmenter un peu cette complexité, on arrive à recouvrir parfaitement les performances des correcteurs-point, et ceci avec un faible degré pour les variables de décision. Ce qui est tout aussi excellent.

Un point intéressant est à remarquer. À partir de la Figure 3.28, on peut voir que la structure des correcteurs est, à strictement parler, un Proportionnel Intégral (PI) avec une

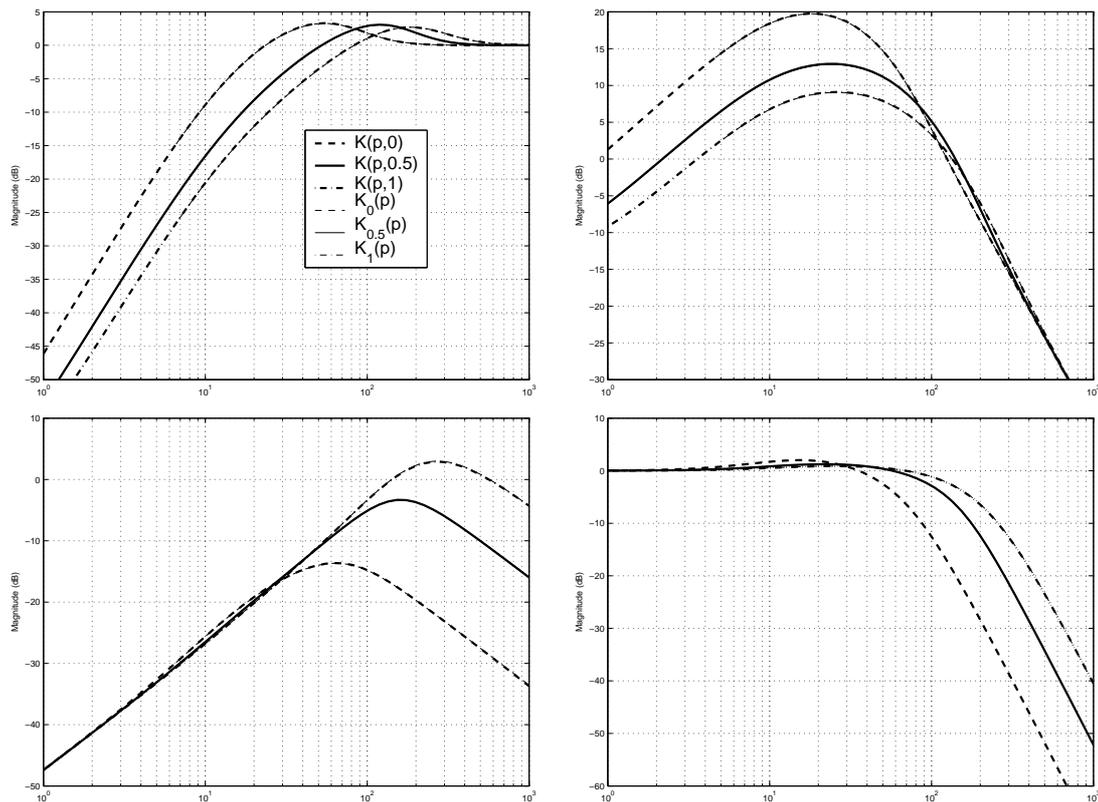


FIG. 3.26 – Diagramme de Bode de  $S$  (en haut à gauche),  $GS$  (en haut à droite),  $KS$  (en bas à gauche) et  $T$  (en bas à droite) pour  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$

avance de phase (et un filtre passe-bas). Cependant pour  $\theta = 0$ , l'avance de phase est petite et peut être négligée. Alors que pour  $\theta = 1$ , l'avance de phase est importante et ne peut pas être négligée. Il est connu qu'un moteur à courant continu peut être commandé par un PI si les performances temporelles désirées sont assez lentes. Des réponses temporelles plus rapides demande un PI avec une avance de phase. En utilisant les règles de l'Automatique fréquentielle classique, savoir-faire, etc., un lien qualitatif entre les spécifications désirées et les gains du correcteur peut être établi. L'intérêt de notre approche est qu'elle donne la structure du correcteur et une expression explicite des gains du correcteur comme une fonction analytique des performances désirées, c'est-à-dire un lien quantitatif.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré le problème de conception d'un correcteur dépendant de paramètres pour un système augmenté dépendant de paramètres. Nous en avons donné une solution efficace grâce à la transformation d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de paramètres en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Nous avons ensuite considéré une nouvelle mise en œuvre de ce problème : celle de la conception d'un correcteur pour un ensemble continu de compromis. La solution proposée permet de trouver un correcteur dont les gains sont des fonctions explicites des performances désirées pour la boucle fermée, ce qui est un net avantage de notre approche. Les illustrations numériques ont montré l'intérêt de notre solution par rapport à de nombreuses solutions alternatives, basées aussi sur la transformation d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de paramètres en un

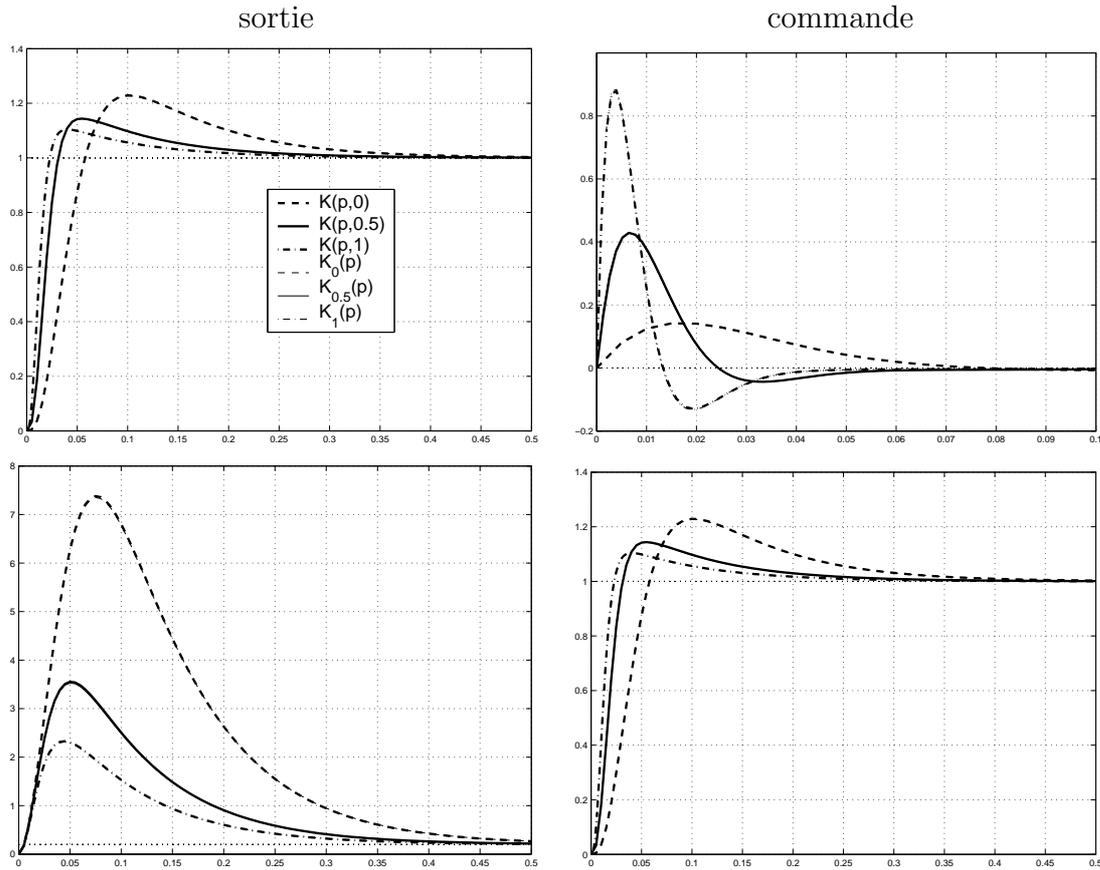


FIG. 3.27 – Réponses temporelles à un signal de référence de type échelon unitaire (en haut) et à un signal de perturbation de type échelon unitaire (en bas) pour  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$  (la figure du haut à droite a des échelles différentes)

problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

Une autre solution alternative, non basée sur ce type de transformation, peut aussi être discutée. Notre solution nécessite l'interpolation des pondérations. Pourquoi alors ne pas directement interpoler les correcteurs mis au point pour différentes valeurs des paramètres ? C'est d'ailleurs une technique utilisée en séquençement de gains. L'inconvénient majeur est que l'interpolation de correcteurs est un problème difficile. À notre connaissance, seules des méthodes d'interpolation garantissant la stabilité asymptotique du système

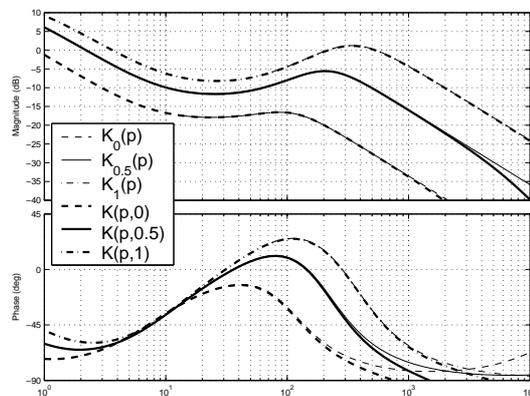


FIG. 3.28 – Diagrammes de Bode des correcteurs pour  $\theta_i \in \{0; 0,5; 1\}$

en boucle fermée ont été proposées [SR99, SR00]. Cette garantie est d'autant plus dérisoire que dans notre cas le système à commander est LTI et ne dépend pas de paramètre : un correcteur indépendant de paramètre est suffisant pour cette garantie. Notre solution permet de concevoir un correcteur dépendant des paramètres garantissant des performances, en plus de la stabilité asymptotique. En effet, les pondérations sont des fonctions de transfert d'ordre faible avec peu de caractéristiques scalaires : leur interpolation est très aisée, d'autant que leur phase n'intervient pas. Elles ont de plus un lien direct avec le cahier des charges.

Pour conclure, nous voudrions préciser d'une part que les résultats présentés dans ce chapitre peuvent permettre de donner une solution à d'autres problèmes

- la commande des systèmes lentement variant dans le temps [Des69, SA90, KKT89]. Dans [SA90, KKT89], le problème est de concevoir un correcteur stabilisant variant dans le temps. Il est prouvé qu'un tel correcteur existe, sous certaines conditions techniques, si pour toutes les valeurs fixes du temps, il existe un retour d'état stabilisant le système, qui est maintenant considéré LTI. L'approche proposée est basée sur les systèmes « figés » du système temps variant. Le temps peut alors être considéré comme un paramètre ;
  - la commande des systèmes dépendant de paramètres lentement variant dans le temps [SB92, Iwa97, IS01]. Ici encore, l'approche est basée sur la commande des systèmes obtenues en figeant les paramètres ;
- et d'autre part que le problème considéré permet d'en résoudre d'autres
- l'identification pour la commande à faible coût énergétique [BSG<sup>+</sup>04]. Dans ce cas, il est donné un cahier des charges pour un système que l'on doit identifier. L'identification à faible coût énergétique permet d'identifier un système nominal ainsi qu'un ensemble d'incertitudes. Pour déterminer le coût énergétique, il faut être capable de concevoir un correcteur remplissant le cahier des charges pour toutes les valeurs possibles des incertitudes ;
  - la commande des systèmes à entrées saturées. Grossièrement, dans [Meg96], l'idée est de concevoir un correcteur dont les gains diminuent lorsque la norme de l'état augmente. Ceci permet d'éviter la saturation de la commande si les gains du retour d'état sont bien choisis. En considérant la norme de l'état comme un paramètre, le problème revient donc à la conception d'un correcteur dépendant de ce paramètre.



## CHAPITRE 4

# Mise en œuvre pour la commande des canaux d'irrigation

### 4.1 Introduction

Dans le cadre de la commande des canaux d'irrigation, un problème de conception d'un correcteur reréglable se pose naturellement.

L'extrait suivant de la page Internet de l'Organisation des Nations Unies pour l'Alimentation et l'Agriculture, AGL Division de la mise en valeur des terres et des eaux, Eaux-ressources mise en valeur et aménagement, énonce clairement l'importance de l'irrigation : « The world's food production depends on the availability of water, a precious but finite resource. Today, irrigation covers about 20 percent of the world's cropland, and it contributes 40 percent of total food production. Irrigated agriculture is responsible for approximately 70 percent of all the freshwater withdrawn in the world, and more water will be used for irrigation in the future, as world food production continues to increase to meet demand. The challenge for irrigated agriculture today is to contribute to the world's food production and improvement of food security through a more efficient, cleaner and integrated use of water. ».<sup>1</sup> L'irrigation se faisant par l'intermédiaire des canaux d'irrigation, ceci montre l'importance de la commande de ces canaux. Cette commande est d'autant plus importante que la ressource en eau est limitée.

Schématiquement, un canal d'irrigation est une succession de biefs, un bief étant une partie de canal se situant entre deux ouvrages de régulation ou vannes (voir la Figure 4.1). Les utilisateurs du canal prélèvent de l'eau au moyen des prises d'eau qui se trouvent le long des biefs où il est garanti un débit. Dans ce cadre, il est important d'asservir la cote de l'eau au niveau des prises d'eau : elles sont gravitaires, le débit est donc fonction de la cote d'eau. Pour ce faire, on joue sur les débits qui passent d'un bief au suivant à travers les vannes.

---

<sup>1</sup>La production mondiale d'aliments dépend de la quantité disponible d'eau, une ressource précieuse mais finie. Aujourd'hui, l'irrigation couvre environ 20 pourcent des terres cultivées, et contribue à 40 pourcent de la production totale d'aliments. L'agriculture irriguée consomme approximativement 70 pourcent de l'eau douce utilisée dans le monde, et l'irrigation utilisera plus d'eau dans le futur car la production mondiale d'aliments augmente afin de satisfaire la demande. Le défi d'aujourd'hui pour l'agriculture irriguée est de contribuer à la production mondiale d'aliments et à l'amélioration de la sécurité alimentaire à travers une utilisation plus efficace, propre et intégrée de l'eau.

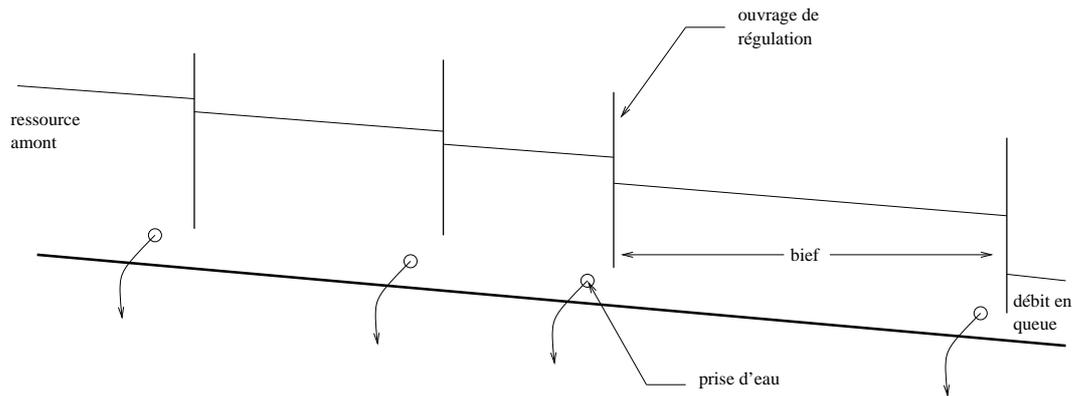


FIG. 4.1 – Schéma d'un canal d'irrigation

Une technique de commande ancestrale consiste à définir des tours d'eau, c'est-à-dire à imposer aux utilisateurs des horaires pendant lesquels ils peuvent prélever une quantité maximale d'eau. La politique de commande est alors simple : mettre à disposition la quantité nécessaire à la consommation des utilisateurs en amont du canal. On cherche maintenant à affranchir les utilisateurs de cette contrainte d'horaire. Pour simplifier la discussion qui suit, nous nous restreignons à la commande d'un seul bief et nous supposons qu'il n'est asservi que la cote de l'eau en fin de bief et que le prélèvement d'eau se fait en fin de bief : de façon simplifiée, un prélèvement le long d'un bief est vu comme un prélèvement en fin de bief décalé dans le temps. On distingue alors la vanne amont et la

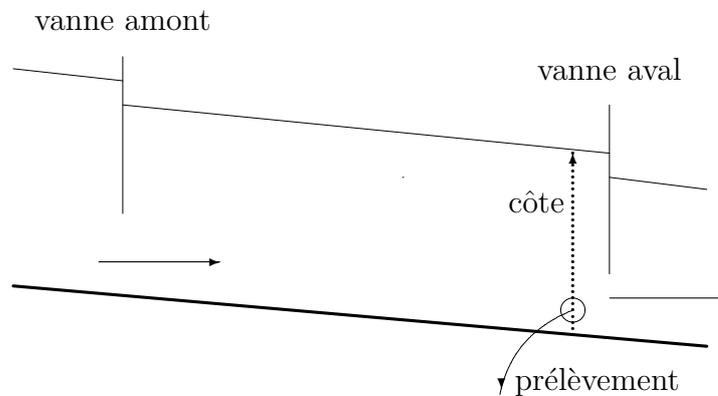


FIG. 4.2 – Schéma d'un bief

vanne aval (voir la Figure 4.2). En terme d'Automatique, les prélèvements d'eau sont vus comme des perturbations non mesurées sur le débit en aval du bief. Asservir la cote d'eau est donc un problème de rejet de perturbations.

Deux politiques extrêmes de commande peuvent être considérées : la commande aval distant et la commande amont local. Nous allons voir qu'il y a un compromis entre le service vis-à-vis des utilisateurs et la consommation en eau. Le service est mesuré lors d'un prélèvement en calculant le volume d'eau non fournie. La consommation d'eau est mesurée lors de l'arrêt d'un prélèvement : quelle est la quantité d'eau non utilisée qui part du bief ?

De façon simplifiée, dans le cas de la commande aval distant, le rejet du prélèvement d'eau se fait en amenant dans le bief la quantité d'eau prélevée par action sur la vanne

amont uniquement. Le rejet du prélèvement d'eau est lent puisqu'il faut attendre le temps de transport de l'eau de l'amont du bief jusqu'à l'aval du bief : plus le bief est long et plus le rejet du prélèvement est lent. Le service est donc limité. De façon symétrique, lorsque le prélèvement s'arrête, la vanne aval ne bouge toujours pas. Il n'y a donc pas d'eau perdue. La politique aval distant mène donc à des correcteurs peu performants vis-à-vis des utilisateurs mais très économiques en eau.

De façon simplifiée, dans le cas de la commande amont local, le rejet du prélèvement d'eau se fait en retenant dans le bief la quantité d'eau prélevée par action sur la vanne aval uniquement. Le rejet du prélèvement d'eau est donc rapide puisque le débit passant à travers la vanne aval joue directement (il faut comprendre qu'il n'y a pas de temps de transport d'eau) sur la côte au niveau de la prise d'eau. Le service est donc bon. De façon symétrique, lorsque le prélèvement s'arrête, la vanne s'ouvre pour laisser passer toute l'eau en excès. La politique amont local mène donc à des correcteurs performants vis-à-vis des utilisateurs mais très dépen-siers en eau.

De ces deux politiques de commande, il apparaît un compromis à réaliser entre la gestion de la ressource en eau et le service vis-à-vis des utilisateurs. Ce compromis est dû au fait que, d'un côté, la ressource en eau est limitée et que, de l'autre côté, les utilisateurs veulent un débit constant. Un cahier des charges doit donc prendre en compte explicitement ce compromis. Les politiques amont local et aval distant ne permettent pas de prendre en compte ce compromis puisque la politique amont local force le meilleur service et puisque la politique aval distant force l'économie maximale en eau. Une politique de commande, proposée récemment dans [LF03, LF05], permet de prendre en compte le compromis. Il s'agit de la politique mixte qui est en fait une combinaison des avantages des politiques amont local (rapide) et aval distant (économe en eau). Nous verrons que la politique mixte est intrinsèquement meilleure que la politique amont local.

La ressource en eau change cependant en fonction des conditions météorologiques, de la saison, des autres fonctions de cette ressource en eau... Lorsque la ressource en eau diminue, la décision de diminuer les performances garanties aux utilisateurs peut être prise. Au contraire, lorsque la ressource en eau augmente, la décision d'augmenter les performances garanties aux utilisateurs peut être prise. Dans ces deux cas, il y a changement de compromis. Pour éviter la conception d'un nouveau correcteur à chaque changement de compromis, il est possible de concevoir un correcteur reréglable. Dans ce chapitre, nous développons la conception d'un correcteur reréglable qui recouvre les performances allant de celles obtenues avec un correcteur aval distant jusqu'à celles obtenues avec un correcteur mixte.

L'organisation de ce chapitre est comme suit. La Section 4.2, page 151, explique comment concevoir un correcteur qui remplisse un unique compromis du cahier des charges par mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$ . Un correcteur reréglable est alors conçu dans la Section 4.3, page 159. La Section 4.4, page 166, conclut le chapitre.

## 4.2 Explications relatifs au canal

Dans cette section, nous allons présenter les divers éléments qui nous permettrons dans la prochaine section de concevoir un correcteur reréglable. Dans un premier temps, nous donnerons un modèle LTI pour le canal, puis nous quantifierons les spécifications de service vis-à-vis des utilisateurs et de consommation d'eau. Nous décrirons et discuterons

ensuite des politiques de commande pour le canal. Nous finirons par la détermination d'un compromis par une mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$ . La majeure partie des explications proviennent de l'article [LF05].

### 4.2.1 Le canal et un modèle

Le canal commandé est celui du Hydraulics and Canal Control Center de l'Université d'Évora, Portugal. Il s'agit d'un canal expérimental comportant un seul bief. Il est représenté sur la Figure 4.3 où  $y$  est la côte en  $m$ ,  $u_1$  est un débit en  $m^3/s$ ,  $u_2$  est l'ouver-

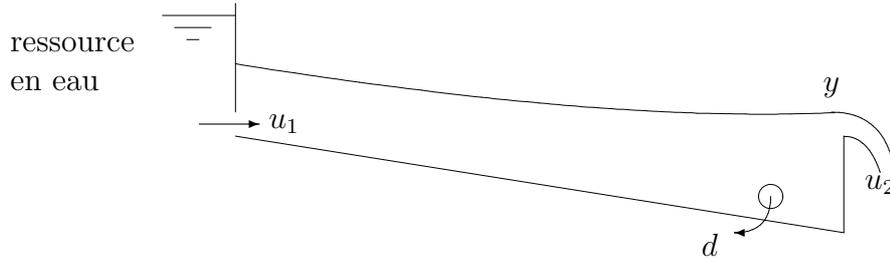


FIG. 4.3 – Schéma du canal d'Évora

ture de la vanne<sup>2</sup> aval en % et  $d$  est le prélèvement en  $m^3/s$ . Tous ces signaux sont des variations autour d'un régime d'équilibre.

Un modèle linéaire stationnaire de ce canal a été proposé dans [LF03, LF05]. Le comportement hydraulique d'un bief est décrit par les équations de Saint-Venant qui sont des équations non linéaires et aux dérivées partielles. En linéarisant ces équations autour d'un régime d'équilibre, il est obtenu un modèle linéaire stationnaire reliant  $y$  aux débits en amont et en aval du canal :

$$y = \begin{bmatrix} g_1(p) & g_2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ q(X) \end{bmatrix}$$

où  $q(X)$  désigne le débit en aval. En fait,  $d$  et  $q(X)$  influe de la même façon sur la côte. Nous avons donc :

$$y = \begin{bmatrix} g_1(p) & g_2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ q(X) + d \end{bmatrix}.$$

En linéarisant les équations hydrauliques de la vanne aval autour d'un régime d'équilibre, il est obtenu un modèle linéaire stationnaire reliant le débit en aval à  $u_2$  et à  $y$  :

$$q(X) = k_1 y + k_2 u_2$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes positives. En combinant ces deux modèles, un modèle complet du canal est obtenu :

$$y = G_1(p)u_1 + G_2(p)u_2 + \tilde{G}(p)d$$

avec

$$G_1(p) = \frac{g_1(p)}{1 - k_1 g_2(p)}, \quad G_2(p) = \frac{k_2 g_2(p)}{1 - k_1 g_2(p)} \quad \text{et} \quad \tilde{G}(p) = \frac{G_2(p)}{k_2} = \frac{g_2(p)}{1 - k_1 g_2(p)}.$$

<sup>2</sup>Il s'agit en fait d'un seuil. Nous ne ferons pas de distinction avec une vanne.

Par approximation,  $g_2(p)$  est un intégrateur et  $g_1(p)$  est un intégrateur retardé (dû au transport de l'eau) :

$$g_1(p) = \frac{e^{-\tau p}}{a_d p} \quad \text{et} \quad g_2(p) = -\frac{1}{a_d p}$$

où  $a_d$ , une constante positive, est l'inverse de la sensibilité de la côte d'eau  $y$  à un débit entrant au niveau de la vanne aval et où  $\tau$ , une constante positive, est le retard. Nous avons finalement comme modèle

$$y = G_1(p)u_1 + G_2(p)u_2 + \tilde{G}(p)d$$

avec

$$G_1(p) = \frac{e^{-\tau p}}{a_d p + k_1}, \quad G_2(p) = -\frac{k_2}{a_d p + k_1} \quad \text{et} \quad \tilde{G}(p) = -\frac{1}{a_d p + k_1}$$

où  $\tau$ ,  $a_d$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes positives. Ce modèle est valide jusqu'à  $2 \times 10^{-2}$  rad/s. Les valeurs numériques sont les suivantes :  $\tau = 55$  s,  $a_d = 40$  m<sup>2</sup>,  $k_1 = 0,4146$  m<sup>2</sup>/s et  $k_2 = 0,4146$  m<sup>3</sup>/s. Pour le retard, nous considérons dans la suite son approximation de Padé d'ordre 1 qui est aussi valide jusqu'à  $2 \times 10^{-2}$  rad/s.

Un point important à garder en mémoire est que les grandeurs  $y$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  et  $d$  sont des variations autour de valeurs d'équilibre. Par exemple,  $u_1 = 0$  ne signifie pas qu'il n'y a pas d'eau qui passe à travers la vanne amont ; cela signifie que le débit qui passe à travers la vanne amont est égal au débit qui passe à travers cette vanne au régime d'équilibre considéré.

#### 4.2.2 Quantification des spécifications

Un cahier des charges pour un canal d'irrigation doit contenir les deux spécifications contradictoires que sont le service vis-à-vis des utilisateurs et la consommation d'eau. Pour évaluer un correcteur, nous allons quantifier ces deux spécifications.

Lors d'un prélèvement d'eau, la côte d'eau diminue. Il n'y a donc pas d'eau en excès, donc il n'y a pas d'eau perdue. Il est possible de quantifier le service aux utilisateurs. Les utilisateurs désirent un débit constant. Ce débit étant relié à la côte d'eau, le service est alors quantifié en mesurant le débit qui n'a pas été fourni pendant que la côte est en dessous de la valeur de consigne. Il est donc mesuré par la valeur absolue de l'intégrale de l'erreur sur la côte d'eau. Nous considérons que le débit fourni est correct lorsque la côte est revenue autour de sa valeur de consigne, soit 0, à 10% du prélèvement près :

$$SC = \left| \int_{\text{début du prélèvement}}^{\text{côte autour de 0 à 10\% du prélèvement}} (r(t) - y(t)) dt \right|, \quad \text{lors d'un prélèvement}$$

où  $r$  est le signal de référence de la côte d'eau. Pour un prélèvement de  $0.01$  m<sup>3</sup>/s commençant à 0, les bornes de cette intégrale sont donc 0 et le moment où la côte reste entre  $-0.001$  et  $0.001$  m. Plus  $SC$  est petit, meilleur est le service aux utilisateurs.  $SC$  est proportionnelle à un volume.

Lors d'un arrêt de prélèvement, la côte d'eau augmente. Il y a de l'eau en excès par rapport à la demande des utilisateurs. Cette eau en excès peut donc être perdue. Il n'y a pas de service aux utilisateurs. Il est possible de quantifier la consommation d'eau. Elle

est mesurée par la quantité d'eau non utilisée qui part du canal. À un instant donné, cette quantité peut se mesurer par l'ouverture de la vanne aval. La quantité total peut se mesurer par l'intégrale de l'ouverture de la vanne aval :

$$EP = \left| \int u_2(t) dt \right|, \quad \text{lors d'un arrêt de prélèvement.}$$

Plus  $EP$  est petit, et plus la consommation d'eau est petite. Bien sûr, pour la politique aval distant qui n'utilise pas la vanne aval,  $EP$  est nulle.  $EP$  est proportionnel à un volume.

### 4.2.3 Politiques de commande

Nous discutons des politiques de commande par rapport aux deux spécifications de service et de consommation d'eau.

**Politique de commande aval distant** La politique de commande aval distant consiste à asservir la côte par action sur la vanne amont uniquement. Le système en boucle fermée est donc donné par

$$\begin{cases} e &= r - y \\ u_1 &= K_d(p)e \\ y &= G_1(p)u_1 + \tilde{G}(p)d \end{cases}$$

où  $r$  est le signal de référence de la côte d'eau et où  $e$  est le signal d'erreur de poursuite.

Lorsqu'un utilisateur prélève de l'eau, la côte d'eau diminue. Le correcteur réagit alors en augmentant le débit en amont  $u_1$  afin de compenser le prélèvement et ainsi de maintenir la côte d'eau à sa valeur de référence. Le service garanti par un tel correcteur est structurellement limité dû au transport de l'eau de l'amont à l'aval du bief. Plus formellement, il peut être mesuré par le module de la fonction de transfert en boucle fermée

$$e = \tilde{G}(p)S_d(p)d$$

avec  $S_d(p) = (1 + G_1(p)K_d(p))^{-1}$ . Définissons le service comme la pulsation  $\omega_s$  telle que le module de  $S_d(p)$  soit inférieur à 1 :

$$\omega_s = \max \{ \omega_1 \mid \forall \omega < \omega_1, |S_d(j\omega)| < 1 \}.$$

Alors, on a (voir, par exemple, la référence [SP96a]) :

$$\omega_s < \frac{\pi}{3\tau} \approx \frac{1}{\tau}.$$

Lorsqu'il y a arrêt du prélèvement, la côte d'eau augmente. Le correcteur réagit alors en diminuant le débit en amont  $u_1$ . La vanne aval ne s'ouvre pas, ni se ferme. Il n'y a donc pas d'eau perdue.

La politique de commande aval distant conduit donc à une gestion économe en eau mais à un service limité. Elle ne permet pas de régler un compromis.

**Politique de commande amont local** La politique de commande amont local consiste à asservir la côte par action sur la vanne aval uniquement. Le système en boucle fermée est donc donné par

$$\begin{cases} e &= r - y \\ u_2 &= K_l(p)e \\ y &= G_2(p)u_2 + \tilde{G}(p)d \end{cases}$$

et le service peut être mesuré par le module de la fonction de transfert en boucle fermée

$$e = \tilde{G}(p)S_l(p)d$$

avec  $S_l(p) = (1 + G_2(p)K_l(p))^{-1}$ .

Lorsqu'un utilisateur prélève de l'eau, la côte d'eau diminue. Le correcteur réagit alors en diminuant l'ouverture de la vanne aval  $u_2$  ( $u_2$  est une variation autour d'une ouverture « d'équilibre ») afin de diminuer le débit en aval. Ceci permet de retenir de l'eau dans le bief pour compenser le prélèvement et ainsi maintenir la côte d'eau à sa valeur de référence. Le service garanti par un tel correcteur, en opposition avec un correcteur obtenu avec la politique aval distant, n'est pas structurellement limitée. En effet, la fonction de transfert  $G_2(p)$  ne contient ni retard ni zéro à partie réelle positive (voir, par exemple, la référence [SP96a] pour les limitations imposées par un zéro à partie réelle positive). Elle est cependant limitée en pratique par les dynamiques des vannes, les incertitudes en hautes fréquences... Ceci explique pourquoi la politique amont local conduit à un correcteur garantissant de meilleurs services que la politique aval distant.

Lorsqu'il y a un arrêt de prélèvement, la côte d'eau augmente. Le correcteur réagit alors en ouvrant la vanne aval pour laisser passer toute l'eau en excès.

La politique de commande amont local conduit donc à une gestion dépensière en eau mais à un bon service. Elle ne permet pas de régler un compromis.

**Politique de commande mixte** Les politiques classiques amont local et aval distant mènent à des correcteurs monovariabiles. L'intérêt est qu'il est alors possible d'utiliser les outils fréquentiels classiques pour concevoir le correcteur. L'inconvénient majeur est qu'il n'est pas possible de régler un compromis avec ces politiques puisque le compromis est déterminé par la politique de commande elle-même. Dans le cas de la politique aval distant, le compromis réalisé est l'économie maximale de la ressource en eau ; dans le cas de la politique amont local, le compromis réalisé est le meilleur service vis-à-vis des utilisateurs.

Pour commander le canal, l'idée est de combiner les avantages des politiques amont local et aval distant : on utilise la politique mixte [LF03, LF05]. Ici nous envisageons donc la conception d'un correcteur multivariable :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_d(p) \\ K_l(p) \end{bmatrix} (r - y). \quad (4.1)$$

La structure de correcteur considérée dans la politique aval distant (respectivement amont local) est retrouvée en fixant  $K_l(p) = 0$  (respectivement  $K_d(p) = 0$ ). La combinaison se fait sur deux échelles de temps différentes : pendant le régime transitoire, la vanne aval est utilisée ; pour le régime permanent, la vanne amont est utilisée. Cette politique est physiquement motivée puisque la vanne aval est un actionneur rapide mais qui manque de « puissance » : l'eau provient de l'amont du canal. La vanne amont est un actionneur

lent mais qui a de la puissance. Ceci sous entend, qu'en régime permanent, la vanne aval doit revenir à son ouverture d'origine : en régime permanent,  $u_2 = 0$ . En quelque sorte, l'action de la vanne amont va se substituer à celle de la vanne aval. Cette politique de commande permet effectivement de régler un compromis : plus la vanne aval réagit rapidement, meilleur est le service ; mais cela suppose de consommer plus d'eau.

Par ailleurs, cette politique de commande est intrinsèquement meilleure que la politique amont local. Une simulation avec un correcteur mixte permet d'illustrer ce point. Sur la Figure 4.4, l'évolution de l'ouverture de la vanne aval dans le cas d'un arrêt de prélèvement

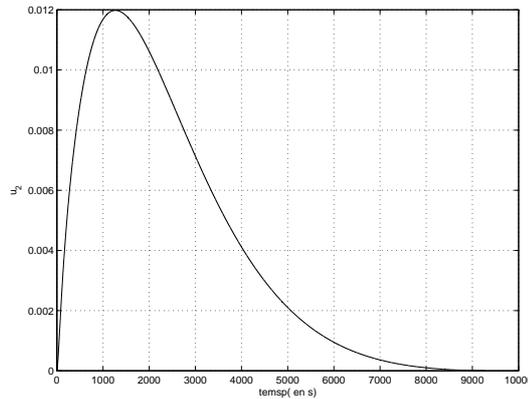


FIG. 4.4 – Évolution de l'ouverture de la vanne aval

est représentée. Comme l'ouverture de la vanne aval revient à 0, la consommation d'eau sera forcément plus faible qu'avec un correcteur amont local puisque celui-ci laisse passer toute l'eau en excès. En ce qui concerne le service vis-à-vis des utilisateurs, dans ces deux politiques, il est relié à la rapidité de réaction de la vanne aval. Cette rapidité peut être la même pour les deux politiques. La politique mixte peut donc garantir le même service que la politique amont local tout en étant plus économe. Nous ne discuterons plus de la politique amont local.

#### 4.2.4 Détermination d'un compromis par la méthode de synthèse $H_\infty$

Nous décrivons maintenant un critère  $H_\infty$  qui permet de prendre en compte les spécifications de service vis-à-vis des utilisateurs et de consommation d'eau. Ce critère  $H_\infty$  permet aussi de prendre en compte le fait que la vanne aval n'agit qu'en transitoire :  $u_2$  est nulle en régime permanent.

La politique de commande mixte peut être vue comme une substitution d'actionneurs et peut être prise en compte par une structure de correcteur en cascade [SP96a]. La commande (rapide)  $u_2$  est utilisée pour asservir la côte  $y$  :

$$u_2 = K_l(p)(r - y)$$

et la commande (lente)  $u_1$  est utilisée pour asservir  $u_2$  à une référence  $r_{u_2}$  ( $r_{u_2}$  est nulle en régime permanent) :

$$u_1 = K_{db}(p)(r_{u_2} - u_2).$$

La structure du correcteur est représentée sur la Figure 4.5. Lorsque  $r_{u_2}$  est nulle, on obtient le correcteur multivariable défini par (4.1) avec  $K_d(p) = -K_{db}(p)K_l(p)$ .

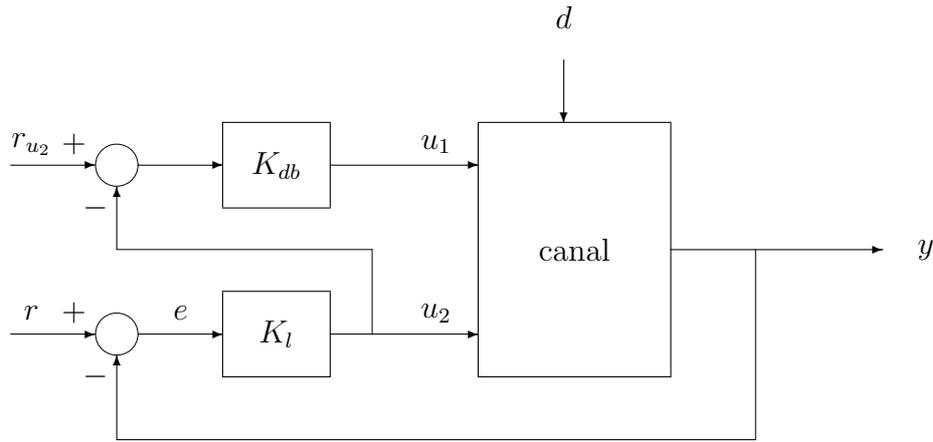


FIG. 4.5 – Structure de commande cascade

Cette structure peut être formulée dans le cadre  $H_\infty$  de la façon suivante. Considérons le système :

$$\begin{bmatrix} y \\ u_2 \end{bmatrix} = G_a(p) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \tilde{G}_a(p)d$$

où

$$G_a(p) = \begin{bmatrix} G_1(p) & G_2(p) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et où} \quad \tilde{G}_a(p) = \begin{bmatrix} \tilde{G}(p) \end{bmatrix}.$$

On construit pour le système  $G_a(p)$  un correcteur  $K_a(p)$  :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = K_a(p) \begin{bmatrix} r - y \\ r_{u_2} - u_2 \end{bmatrix}.$$

Afin d'imposer à  $u_2$  d'être nulle en régime permanent,  $r_{u_2} - u_2$  est considérée comme une erreur de poursuite pour le correcteur  $K_a(p)$ . Ainsi, en imposant un gain faible à la fonction de transfert entre  $r_{u_2}$  et  $r_{u_2} - u_2$  en basses pulsations, on impose une valeur faible à  $u_2$  en basses pulsations. En fonctionnement normal,  $r_{u_2}$  est nulle. Un correcteur  $K(p)$  pour le canal peut alors être construit à partir de  $K_a(p)$  :

$$K(p) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} K_a(p) \right) \star (-1).$$

Le système qui relie la référence  $\bar{r} = [r \ r_{u_2}]^T$  et la perturbation  $d$  à l'erreur de poursuite  $\bar{e} = [r - y \ r_{u_2} - u_2]^T$  et à la commande  $u = [u_1 \ u_2]^T$  est donné par

$$\begin{bmatrix} \bar{e} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_a(p) & S_a(p)\tilde{G}_a(p) \\ K_a(p)S_a(p) & K_a(p)S_a(p)\tilde{G}_a(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ d \end{bmatrix}$$

où  $S_a(p) = (I + G_a(p)K_a(p))^{-1}$  est la fonction de sensibilité pour le système  $G_a(p)$ . Ainsi le problème  $H_\infty$  qu'il faut résoudre est : trouver  $K_a(p)$  tel que

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(p)S_a(p)W_3(p) & W_1(p)S_a(p)\tilde{G}_a(p) \\ W_2(p)K_a(p)S_a(p)W_3(p) & W_2(p)K_a(p)S_a(p)\tilde{G}_a(p) \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

où

$$W_1(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & 0 \\ 0 & W_{12}(p) \end{bmatrix}, \quad W_2(p) = \begin{bmatrix} W_{21}(p) & 0 \\ 0 & W_{22}(p) \end{bmatrix}$$

et où

$$W_3(p) = \begin{bmatrix} W_{31}(p) & 0 \\ 0 & W_{32}(p) \end{bmatrix}.$$

Le critère est représenté sur la Figure 4.6. Dans ce critère, les pondérations sont choisies

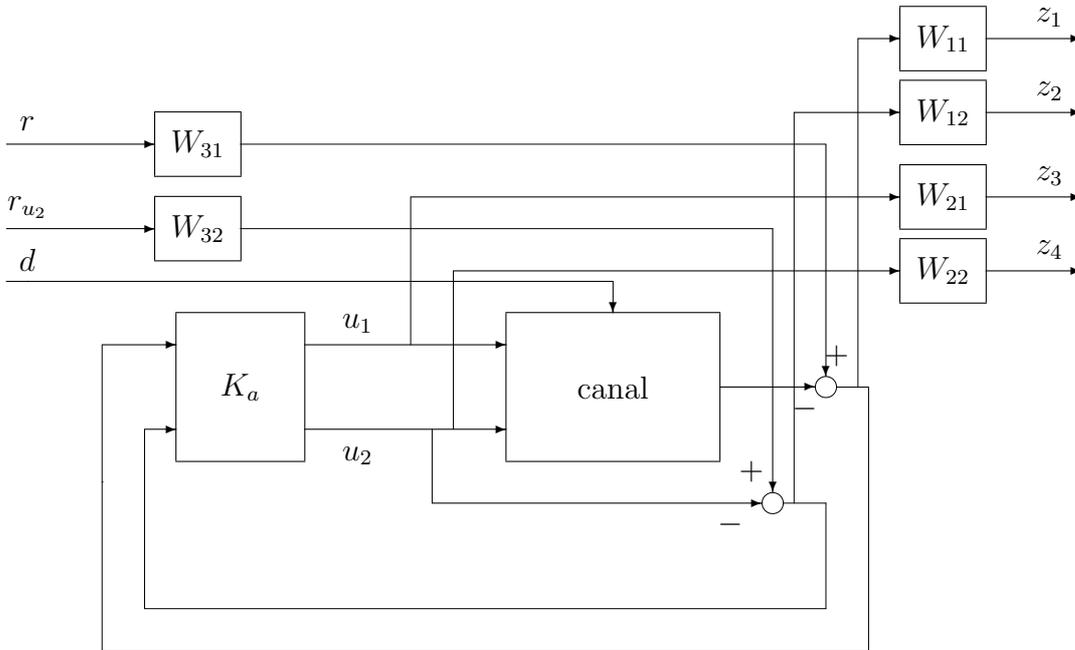


FIG. 4.6 – Problème  $H_\infty$  pour le canal

de la façon suivante :

1.  $W_{11}(p)$  spécifie la performance globale du système en boucle fermée vis-à-vis des utilisateurs, soit la rapidité du rejet de prélèvement. Elle doit être choisie pour que son inverse soit passe-haut et de façon compatible avec la spécification de rapidité de réaction de la vanne aval. Plus la pulsation de coupure du passe-haut est élevée, plus la rapidité est grande ;
2.  $W_{12}(p)$  spécifie la rapidité de substitution des deux vannes. Elle doit être choisie pour que son inverse soit passe-haut et de façon compatible avec la spécification de rapidité de réaction de la vanne amont. Plus la pulsation de coupure du passe-haut est élevée, plus la substitution est rapide. Cette pulsation de coupure doit être compatible avec le retard du système : elle doit être inférieure à l'inverse du retard ;
3.  $W_{21}(p)$  spécifie la rapidité de réaction de la vanne amont. Elle doit être choisie pour que son inverse soit un passe-bas et de façon compatible avec la spécification de substitution des vannes. Plus la pulsation de coupure du passe-bas est élevée et plus la rapidité de réaction de la vanne amont est grande. Pour la compatibilité avec la spécification de substitution, la pulsation de coupure est approximativement égale ou supérieure à dix fois la pulsation de coupure de  $W_{12}(p)$  ;
4.  $W_{22}(p)$  spécifie la rapidité de réaction de la vanne aval. Elle spécifiera donc la consommation d'eau. Elle doit être choisie pour que son inverse soit passe-bas et

de façon compatible avec la spécification de rapidité du rejet de prélèvement. Plus la pulsation de coupure est élevée et plus la vitesse de réaction de la vanne aval est grande. Pour la compatibilité avec la spécification de rejet de prélèvement, la pulsation de coupure est approximativement égale ou supérieure à dix fois la pulsation de coupure de  $W_{11}(p)$  ;

5. pour simplifier,  $W_{31}(p)$  et  $W_{32}(p)$  sont choisies constantes et égales.

Les modèles des vannes ne sont pas tout à fait corrects : leur gain réel peut être différent du gain de leur modèle. Il est donc intéressant de prendre en compte une marge de gain en entrée du système. Cependant, cette marge ne peut pas être pris en compte directement dans le cadre du critère  $H_\infty$  que nous venons d'expliquer. Il peut être pris en compte indirectement [LF05]. Pour obtenir des valeurs plus précises, il est possible d'analyser, après la conception du correcteur, cette marge de gain en utilisant des techniques de  $\mu$ -analyse [SP96a, DF99].

### 4.3 Conception d'un correcteur reréglable

Il est possible de concevoir un correcteur garantissant un compromis, entre le service vis-à-vis des utilisateurs et la consommation d'eau, du cahier des charges avec la méthode de synthèse  $H_\infty$ . Ce compromis dépend de la quantité d'eau que l'on souhaite consommer, ou de façon équivalente du service vis-à-vis des utilisateurs. Or ce compromis peut évoluer dans le temps selon la quantité d'eau disponible en amont du canal. Cette quantité peut dépendre des saisons, des conditions météorologiques, des autres fonctions de la ressource en eau... Pour les canaux d'irrigation, il est donc intéressant de concevoir un correcteur reréglable.

Dans ce cas, nous voulons concevoir un correcteur reréglable qui recouvre les performances d'un correcteur de type aval distant (pour  $\theta = 0$ ) et qui recouvre les performances d'un correcteur mixte (pour  $\theta = 1$ ) que nous allons déterminer. En effet, le service est moins bon avec un correcteur de type aval distant qu'avec un correcteur mixte mais il est aussi plus économe en eau. Lorsque le service est suffisant, il n'est pas nécessaire de considérer un correcteur mixte. Nous cherchons donc un correcteur  $K(p, \theta)$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_d(p, \theta) \\ K_l(p, \theta) \end{bmatrix} (r - y)$$

tel que, pour  $\theta = 0$ , la vanne aval ne bouge pas :  $u_2 = 0$ .

#### 4.3.1 Cahier des charges et choix des pondérations

Nous considérons un cahier des charges avec les deux spécifications contradictoires :

- le système en boucle fermée est capable de rejeter des prélèvements en forme d'échelon avec un service différent (le meilleur service possible avec une consommation d'eau nulle  $EP = 0$  pour  $\theta_i = 0$  et le meilleur service possible compte-tenu de la gamme de pulsations pour laquelle le modèle est valide pour  $\theta_i = 1$ ) ;
- le système en boucle fermée doit consommer le moins d'eau possible.

Nous écrivons les pondérations de la façon suivante [Fon95]

$$W_{ij}(p, \theta) = \frac{1}{p} \star \left[ \begin{array}{c|c} -\omega_{cij}(\theta) \sqrt{\frac{|G_{\infty ij}^2 - 1|}{|G_{0ij}^2 - 1|}} & \sqrt{\frac{|G_{\infty ij}^2 - 1|}{|G_{0ij}^2 - 1|}} \\ \hline (G_{0ij} - G_{\infty ij}) \omega_{cij}(\theta) & G_{\infty ij} \end{array} \right]$$

où  $G_{0ij} = |W_{ij}(0, \theta)|$ ,  $G_{\infty ij} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_{ij}(j\omega, \theta)|$  (avec  $(G_{0ij} - 1)(G_{\infty ij} - 1) < 0$ ) et où  $\omega_{cij}(\theta) > 0$  est la pulsation de coupure telle que  $|W_{ij}(j\omega_{cij}(\theta), \theta)| = 1$ . Pour le cahier des charges précédemment décrit et afin d'obtenir une valeur de  $\gamma_{\theta_i}$  voisine de 1 pour toutes les valeurs de  $\theta_i$ , nous avons d'abord choisi les pondérations pour trois valeurs de  $\theta_i$  (0, 0,5 et 1). Puis nous avons interpolé leurs caractéristiques. Elles sont alors choisies de la façon suivante :

1.  $W_{11}(p, \theta)$  spécifie la rapidité du rejet de prélèvement :
  - (a)  $\omega_{c11}$  est directement relié à cette rapidité ( $0, 2 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$  pour 6500 s jusqu'à  $0, 8 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$  pour 1000 s).  $\omega_{c11}$  peut être choisi comme  $\omega_{c11}(\theta) = (0, 2 + 0, 6\theta)10^{-3}$ . La paramètre  $\theta$  peut donc s'interpréter comme la pulsation de coupure de  $W_{11}(p, \theta)$  à une transformation affine près,
  - (b)  $G_{011}$  est une borne supérieure sur l'erreur statique de poursuite de  $r$  : nous l'avons fixé à 40 dB,
  - (c) nous avons fixé  $G_{\infty 11}$  à -9 dB ;
2.  $W_{12}(p, \theta)$  spécifie la substitution des actionneurs :
  - (a)  $\omega_{c12}$  est directement relié à la substitution. Pour  $\theta = 0$ , il n'y a pas de substitution puisque la vanne aval ne doit pas bouger ; ceci peut être vu comme une substitution lente. Nous l'avons fixé à  $5 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$  pour  $\theta_i = 0$ , à  $0, 13 \text{ rad/s}$  pour  $\theta_i = 0, 5$  et à  $0, 2 \text{ rad/s}$  pour  $\theta_i = 1$ . En interpolant, nous trouvons : 
$$\omega_{c12}(\theta) = \frac{(5 + 17, 86\theta)10^{-5}}{1 + 0, 1429\theta},$$
  - (b)  $G_{012}$  est une borne supérieure sur l'erreur statique de poursuite de  $r_{u_2}$  : nous l'avons fixé à 40 dB,
  - (c) nous avons fixé  $G_{\infty 12}$  à -20 dB ;
3.  $W_{21}$  est choisie pour spécifier la vitesse de réaction de la vanne amont. Cette vitesse n'a aucune raison de changer puisque le service vis-à-vis des utilisateurs ainsi que la consommation d'eau ne dépendent pas de cette vitesse de réaction. Cette pondération ne dépend donc pas de  $\theta$ . Cette vitesse est réglée au maximum ; ce qui donne  $\omega_{c21} = 10^{-3} \text{ rad/s}$ ,  $G_{021} = -20 \text{ dB}$  et  $G_{\infty 21} = 40 \text{ dB}$  ;
4.  $W_{22}$  est choisie pour spécifier la rapidité de réaction de la vanne aval. Pour  $\theta = 0$ , la vanne aval ne doit pas bouger ; ceci peut être vu comme une rapidité de réaction petite. Nous avons donc fixé  $\omega_{c22}$  à  $5 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$  pour  $\theta = 0$ , à  $5 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$  pour  $\theta = 0, 5$  et à  $10^{-2} \text{ rad/s}$  pour  $\theta = 1$ . En interpolant, nous obtenons 
$$\omega_{c22}(\theta) = \frac{5 \times 10^{-5} + 9, 85 \times 10^{-3}\theta}{1 - 0, 01\theta}.$$
 De plus, nous avons fixé  $20 \log(G_{022})$  à -20 dB et  $20 \log(G_{\infty 22})$  à 40 dB ;
5. pour simplifier,  $W_{31}(p, \theta)$  et  $W_{32,\theta}(p)$  sont choisies constantes et égales à  $\frac{2}{3}$ .

Avec ces pondérations, nous obtenons  $\gamma_{\theta_i}$  voisin de 1 pour ces trois valeurs de  $\theta_i$ . Sur la Figure 4.7, nous n'avons tracé que le module de l'inverse des quatre pondérations de sortie afin de ne pas surcharger la figure.

Avec ces pondérations,  $\gamma_{\theta_i}$  est calculée pour plusieurs valeurs de  $\theta_i \in [0 ; 1]$  (par pas de 0,01) : nous vérifions que  $\gamma_{\theta_i} \approx 1$  (entre 0,97 pour  $\theta = 0$  et 1,025 pour  $\theta = 0, 2$  avec une variation de 5 %).

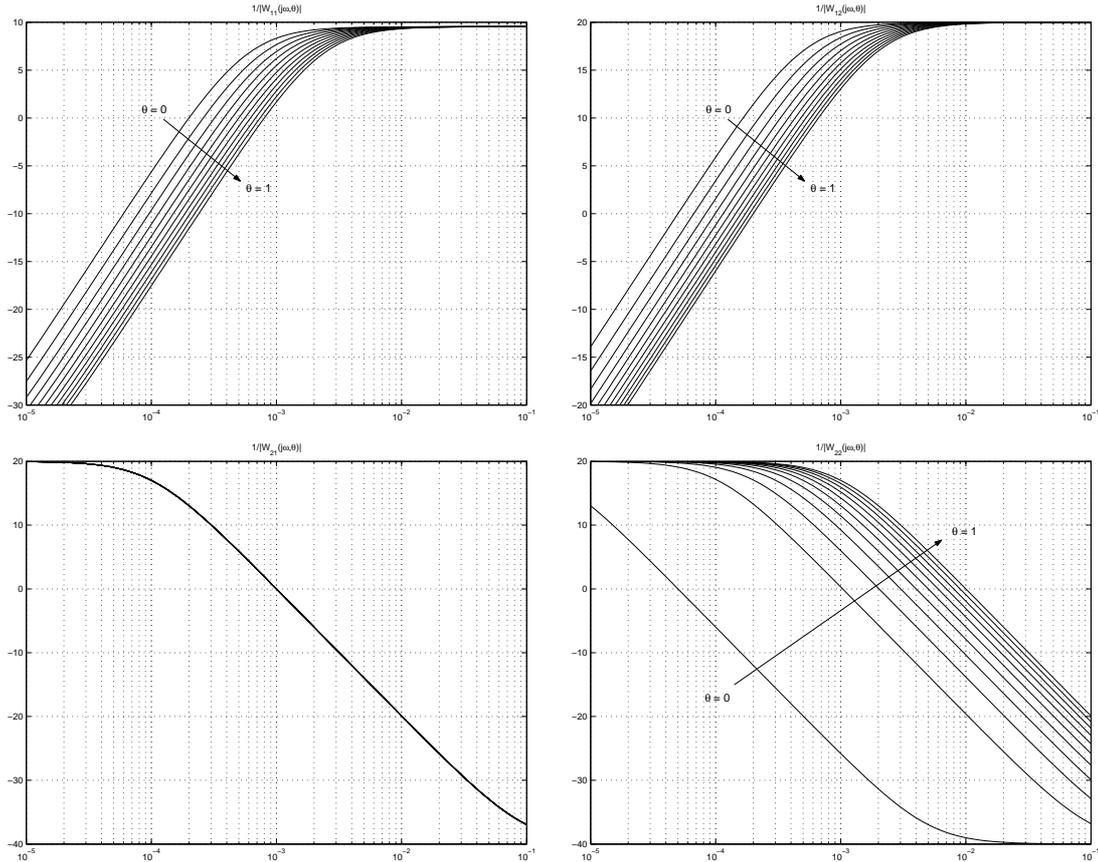


FIG. 4.7 –  $\frac{1}{|W_{11}(j\omega, \theta)|}$ ,  $\frac{1}{|W_{12}(j\omega, \theta)|}$ ,  $\frac{1}{|W_{21}(j\omega, \theta)|}$  et  $\frac{1}{|W_{22}(j\omega, \theta)|}$  par pas de 0,1 en  $\theta$

### 4.3.2 Calcul d'un correcteur reréglable et analyse

Un correcteur dépendant du compromis est obtenu en appliquant le Théorème 3.3 avec  $N = 2$  et  $1 + c_1\theta + c_2\theta^2 = 1 - 0,01\theta + 0\theta^2$  : ce choix permet d'améliorer le calcul numérique car c'est le produit des dénominateurs obtenus pour  $\omega_{c11}$  et  $\omega_{c12}$ . Le résultat obtenu est présenté dans le Tableau 4.1. avec l'estimation de  $\gamma_{best}$  valant 1,022. Nous voyons qu'en

TAB. 4.1 – Canal : résultat de l'optimisation

	Théorème 3.3 $N = 2$
$\gamma_r$	1,04
$100 \frac{\gamma_r - \gamma_{best}}{\gamma_{best}}$ (borne supérieure)	$\approx 1,4\%$

terme d'optimisation, le résultat est une fois de plus excellent, et ceci toujours avec un dénominateur de faible degré ( $N$  petit).

**Valeurs des variables de décision** Les valeurs obtenues pour les variables de décision sont présentées pour illustration. Elles permettent aussi aux lecteurs intéressés d'effectuer les simulations. Cela montre aussi que le correcteur obtenu est bien une fonction explicite de  $\theta$ . Pour  $\mathcal{X}(\theta)$ , nous avons obtenu :

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_1\theta + \mathcal{X}_2\theta^2}{1 + d_1\theta + d_2\theta^2}$$

avec

$$\mathcal{X}_0 = \begin{bmatrix} 15,24 & 0,077 & 293,04 & 50,96 & -7,46 & 0,75 \\ 0,077 & 1,52 & -1,63 & 123,76 & -0,044 & 0,002 \\ 293,04 & -1,63 & 5783,5 & 624,6 & -129,02 & -0,18 \\ 50,96 & 123,76 & 624,6 & 10324 & -33,23 & 2,5 \\ -7,46 & -0,044 & -129,02 & -33,23 & 7,41 & 0,036 \\ 0,75 & 0,002 & -0,18 & 2,5 & 0,036 & 9,61 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_1 = \begin{bmatrix} 115,06 & 39 & 198,9 & 166,58 & -106,74 & -23,35 \\ 39 & 106,45 & 75,85 & 154,01 & -16,87 & -0,78 \\ 198,9 & 75,85 & 44982 & -10700 & -1445,8 & -265,15 \\ 166,58 & 154,01 & -10700 & 34221 & -487,8 & -190,39 \\ -106,74 & -16,87 & -1445,8 & -487,8 & 129,51 & 19,76 \\ -23,35 & -0,78 & -265,15 & -190,39 & 19,76 & -25,78 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{X}_2 = \begin{bmatrix} 47,36 & 11,54 & 767,83 & -17,72 & -146,87 & -55,06 \\ 11,54 & 98,3 & -352,51 & -9,15 & 27,82 & -11,3 \\ 767,83 & -352,51 & 137200 & -33,16 & -390,37 & -867,15 \\ -17,72 & -9,15 & -33,16 & -253,66 & 11,02 & -76,54 \\ -146,87 & 27,82 & -390,37 & 11,02 & 587,05 & 187,39 \\ -55,06 & -11,3 & -867,15 & -76,54 & 187,39 & 411,42 \end{bmatrix},$$

 $d_1 = 68,32$  et  $d_2 = 11,92$ .Pour  $\mathcal{Y}(\theta)$ , nous avons obtenu :

$$\mathcal{Y}(\theta) = \frac{\mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_1\theta + \mathcal{Y}_2\theta^2}{1 + d_1\theta + d_2\theta^2}$$

avec

$$\mathcal{Y}_0 = \begin{bmatrix} 3,4569 \times 10^7 & -14321 & 0,054 & 0,73 & 0,028 & -0,015 \\ -14321 & 3,8857 \times 10^7 & -4,38 \times 10^{-4} & 0,023 & -0,0014 & 6,15 \times 10^{-4} \\ 0,054 & -4,38 \times 10^{-4} & 2,8108 \times 10^7 & 5,45 & -0,26 & -0,42 \\ 0,73 & 0,23 & 5,45 & 2,0988 \times 10^7 & -0,36 & -0,31 \\ 0,028 & -0,0014 & -0,26 & -0,36 & 1,075 & 0,71 \\ -0,015 & 6,15 \times 10^{-4} & -0,42 & -0,31 & 0,71 & 3,47 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1,2012 \times 10^7 & -48141 & -0,27 & -0,92 & -0,27 & 0,093 \\ -48141 & 1,4604 \times 10^7 & -0,029 & 1,8 & 0,017 & -0,012 \\ -0,27 & -0,029 & 1,0324 \times 10^7 & 21,58 & -4,45 & -11,43 \\ -0,92 & 1,8 & 21,58 & 1,0106 \times 10^7 & 0,81 & -0,16 \\ -0,27 & 0,017 & -4,45 & 0,81 & 14,54 & 12,74 \\ 0,093 & -0,012 & -11,43 & -0,16 & 12,74 & 54,15 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Y}_2 = \begin{bmatrix} 8,29 \times 10^6 & -58636 & -1,57 & 0,036 & 0,63 & -0,58 \\ -58636 & 1,02 \times 10^7 & 0,12 & -1,7 & -0,036 & 0,037 \\ -1,57 & 0,12 & 7,29 \times 10^6 & 17,57 & -6,25 & -14,69 \\ 0,036 & -1,7 & 17,57 & 5,75 \times 10^6 & -8,21 & -19,13 \\ 0,63 & -0,036 & -6,24 & -8,21 & 80,59 & 66,28 \\ -0,58 & 0,037 & -14,69 & -19,13 & 66,28 & 289,94 \end{bmatrix},$$

 $d_1 = 68,32$  et  $d_2 = 11,92$ .

Pour  $\mathcal{V}(\theta)$ , nous avons obtenu :

$$\mathcal{V}(\theta) = \frac{\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1\theta + \mathcal{V}_2\theta^2}{1 + d_1\theta + d_2\theta^2}$$

avec

$$\mathcal{V}_0 = \begin{bmatrix} -0,0011 & 1,29 \times 10^{-4} & -0,038 & 0,045 & -0,002 & 0,007 & -325930 & 142,49 \\ 0,001 & 3,88 \times 10^{-5} & 0,0053 & 0,023 & 3,72 \times 10^{-4} & 0,016 & 135,03 & -386640 \\ -1,08 \times 10^{-6} & -4,89 \times 10^{-8} & 9,2 \times 10^{-5} & -9,29 \times 10^{-6} & -0,0049 & 0,0094 & -5,03 \times 10^{-4} & 8,88 \times 10^{-6} \\ 1,4 \times 10^{-4} & 8,94 \times 10^{-5} & -0,0095 & 0,032 & -7,42 \times 10^{-4} & 0,033 & 0,0024 & -0,0033 \\ 7,2 \times 10^{-9} & -6,69 \times 10^{-10} & 9,1 \times 10^{-8} & 5,05 \times 10^{-7} & 0,006 & -0,02 & -0,25 & 1,38 \times 10^{-5} \\ 3,89 \times 10^{-8} & -2,71 \times 10^{-9} & 6,06 \times 10^{-7} & 1,4 \times 10^{-6} & 0,07 & -0,061 & -0,44 & -5,83 \times 10^{-6} \\ 0,29 & -0,0016 & 5,77 & 0,62 & -0,13 & -1,95 \times 10^{-4} & -1,99 \times 10^{-9} & 1,2 \times 10^{-10} \\ 0,0025 & 0,0062 & 0,033 & 0,5 & -0,0019 & -0,0042 & -0,0014 & 4,34 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}_1 = \begin{bmatrix} 0,23 & 0,067 & 1,84 & 1,5 & -0,28 & 0,2 & -113250 & 479,12 \\ -0,0072 & 0,0022 & -0,21 & -0,3 & -0,013 & -0,092 & 454,14 & -145320 \\ -6,55 \times 10^{-5} & -1,92 \times 10^{-5} & 6,85 \times 10^{-4} & -6 \times 10^{-4} & -0,16 & 0,31 & 0,0026 & 2.7458 \times 10^{-4} \\ 0,51 & 0,048 & 5,16 & 1,053 & -0,67 & -0,62 & 5,48 & -0,13 \\ -1,25 \times 10^{-6} & -1,84 \times 10^{-7} & -1,18 \times 10^{-5} & -1,33 \times 10^{-5} & 0,13 & -0,35 & -2,94 & -1,69 \times 10^{-4} \\ -5,2 \times 10^{-6} & -9,51 \times 10^{-7} & -4,89 \times 10^{-5} & -5,33 \times 10^{-5} & 1,03 & -1,09 & -5,26 & 1,24 \times 10^{-4} \\ 1,99 & 0,076 & 44,81 & -10,69 & -1,44 & -0,27 & -1,12 \times 10^{-6} & -3,47 \times 10^{-7} \\ 0,58 & 1,29 & 5,52 & 103,33 & -0,33 & 0,1 & -0,082 & -0,022 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}_2 = \begin{bmatrix} -0,49 & -0,41 & -2,54 & -10,06 & -0,42 & -1,76 & -78159 & 583,35 \\ 0,015 & -0,048 & 1,26 & 0,54 & 0,015 & 0,064 & 552,51 & -1,01 \times 10^5 \\ 3,5 \times 10^{-5} & 1,43 \times 10^{-5} & 0,0068 & 7,13 \times 10^{-4} & -0,2 & 0,37 & 0,015 & -0,0013 \\ -0,51 & -0,92 & 4,12 & -28,83 & -0,053 & 19,2 & 2,21 & 4,18 \\ 6,07 \times 10^{-8} & -2,07 \times 10^{-7} & -4,07 \times 10^{-7} & 6,19 \times 10^{-6} & 0,66 & -1,82 & -16,84 & 3,52 \times 10^{-4} \\ 7,21 \times 10^{-7} & -3,6 \times 10^{-7} & 2,46 \times 10^{-6} & 3,11 \times 10^{-5} & 5,58 & -5,67 & -30,1 & -3,79 \times 10^{-4} \\ 0,77 & -3,52 & 136,35 & -0,033 & -3,9 & -0,87 & \times 10^{-6} & 4,18 \times 10^{-7} \\ 16,42 & 15,22 & -106,16 & 337,39 & -4,83 & -2,48 & 0,21 & 0,071 \end{bmatrix},$$

$$d_1 = 68,32 \text{ et } d_2 = 11,92.$$

**Analyse du correcteur reréglable** Analysons maintenant les performances obtenues avec le correcteur reréglable.

Nous montrons tout d'abord que le correcteur est bien un correcteur reréglable : il réalise des compromis différents selon la valeur de  $\theta$  (voir la Figure 4.8). L'évolution du

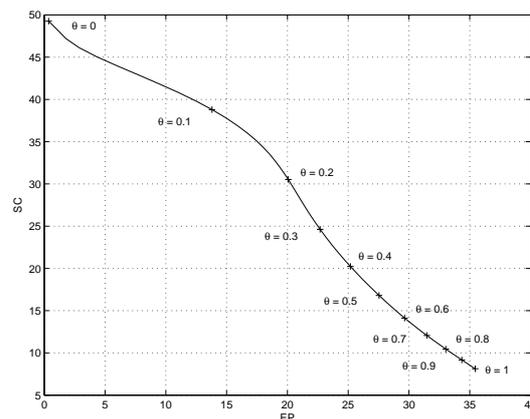


FIG. 4.8 – Compromis réalisé par le correcteur reréglable en fonction de  $\theta$

compromis est dans le sens désirée : pour  $\theta$  croissant, la consommation d'eau est de plus en plus grande et le service vis-à-vis des utilisateurs est amélioré. De plus, le compromis réalisé est bien une fonction continue de  $\theta$ . Par ailleurs, pour  $\theta = 0$ , la consommation d'eau est presque nulle, le correcteur reréglable est, comme désiré, très proche d'un correcteur de type aval distant. Enfin pour  $\theta = 1$ , on constate que le service vis-à-vis des utilisateurs est de 8,1. Ce correcteur reréglable satisfait donc le cahier des charges.

Analysons maintenant le module des fonctions de transfert en boucle fermée. Nous ne montrons que les trois fonctions qui nous intéressent ici : celle du prélèvement vers l'erreur sur la côte ( $T_{d \rightarrow e}$ ), celle du prélèvement vers la commande de la vanne amont ( $T_{d \rightarrow u_1}$ ) et celle du prélèvement vers la commande de la vanne aval ( $T_{d \rightarrow u_2}$ ) (voir la Figure 4.9). Cette figure confirme que le compromis réalisé par le correcteur reréglable évolue

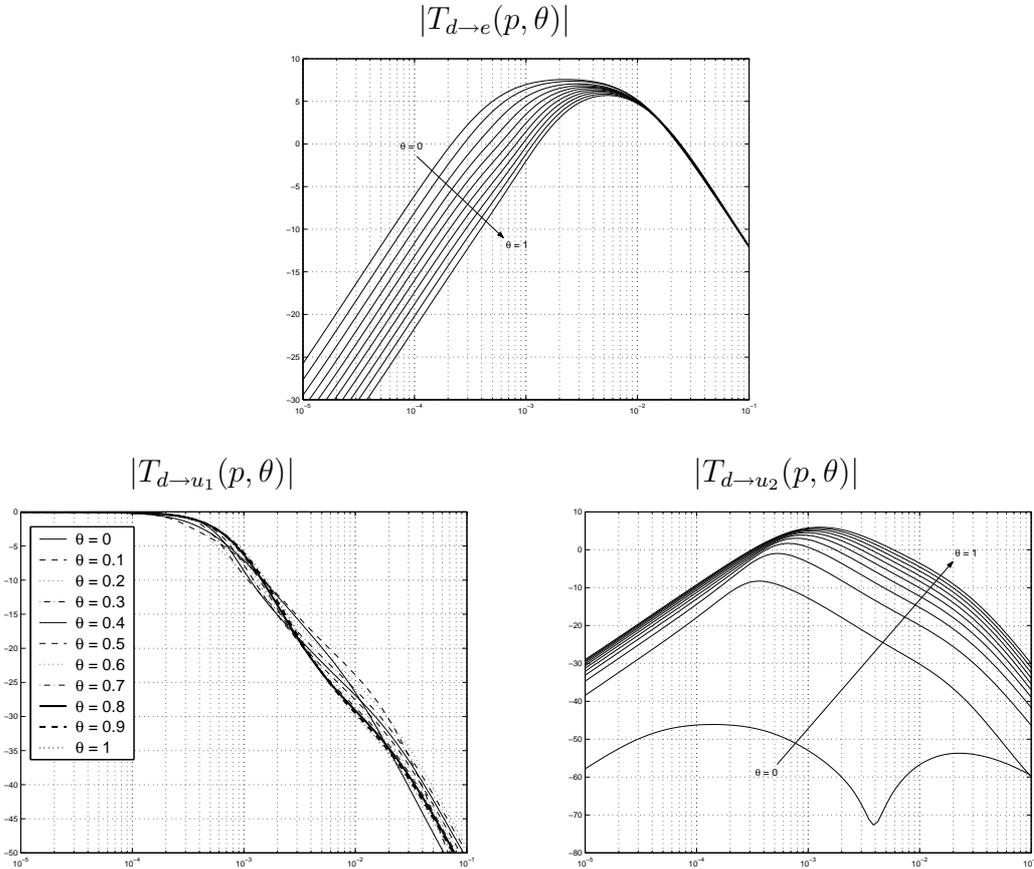


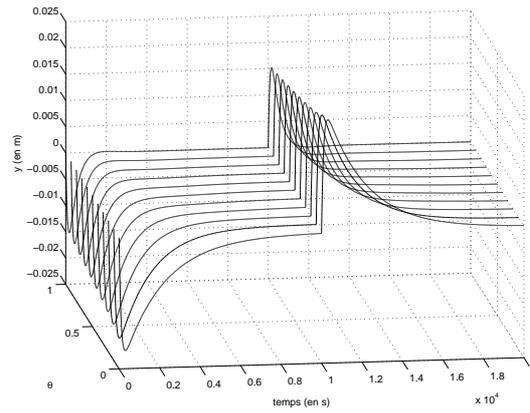
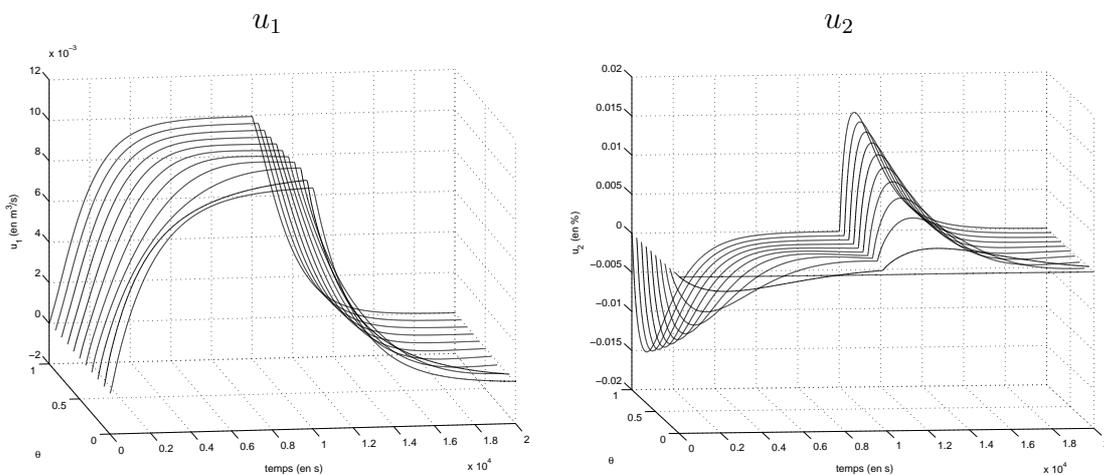
FIG. 4.9 – Canal : évolution du module de fonctions de transfert en boucle fermée en fonction de  $\theta$  (par pas de 0,1)

continûment dans le sens désiré. Elle confirme aussi la consommation presque nulle du correcteur reréglable pour  $\theta = 0$  : le module de  $T_{d \rightarrow u_2}(p, 0)$  est presque nul. On constate que le module de  $|T_{d \rightarrow u_1}|$  évolue peu : cela signifie que la commande  $u_1$  évolue peu en fonction de  $\theta$ . Ceci est intéressant puisque cette commande n'a pas de raison d'évoluer.

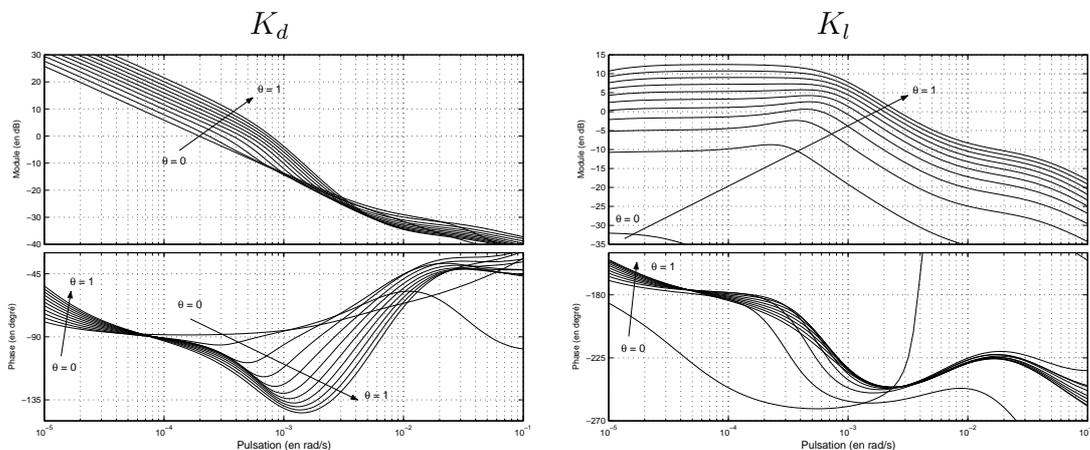
Cette analyse est confirmée par les réponses temporelles (voir la Figure 4.10 pour la sortie et la Figure 4.11 pour les commandes).

Le correcteur reréglable est lui aussi continu en  $\theta$  (voir la Figure 4.12). On peut constater, à partir de cette figure, que  $K_d$  comporte un intégrateur mais que ce n'est pas le cas pour  $K_l$ . L'intégrateur assure une erreur statique nulle (ou presque) : ceci est normal puisque le régime permanent doit être assuré par la vanne amont.

Enfin, nous donnons des bornes sur les marges de gain en entrée assurées par le correcteur reréglable (voir la Figure 4.13). On constate que ces bornes diminuent avec  $\theta$ , ce qui est raisonnable. Le cas le plus favorable se produit pour  $\theta = 0$  : la marge de gain supérieure est plus grande que 28 dB et la marge de gain inférieure est plus petite que -5,8

FIG. 4.10 – Canal : évolution de la sortie en fonction de  $\theta$ FIG. 4.11 – Canal : évolution des commandes en fonction de  $\theta$ 

$dB$ . Le système en boucle fermée reste alors stable pour des gains réels des vannes amont et aval valant séparément jusqu'à environ 50 % en dessous ou jusqu'à 2600 % au dessus des valeurs utilisées lors des calculs. Le cas le plus défavorable se produit pour  $\theta = 1$  : la marge de gain supérieure est plus grande que 10  $dB$  et la marge de gain inférieure est plus petite que -4,6  $dB$ . Le système en boucle fermée reste alors stable pour des gains

FIG. 4.12 – Canal : évolution du correcteur en fonction de  $\theta$

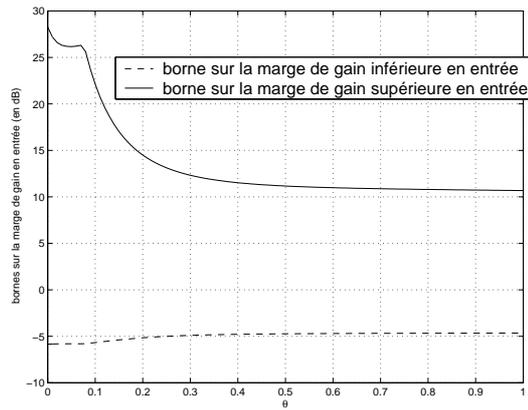


FIG. 4.13 – Canal : évolution des bornes sur les marges de gain en entrée en fonction de  $\theta$  (par pas de 0,01)

réels des vannes amont et aval valant séparément jusqu'à 40 % en dessous ou jusqu'à 340 % au dessus des valeurs utilisées lors des calculs. La marge de gain supérieure en entrée est toujours supérieure à 10  $dB$ , elle est donc vraiment grande.

Un fait intéressant est que le correcteur reréglable est en fait monovariante pour  $\theta = 0$  : la vanne aval ne bouge (presque) pas, le correcteur est un correcteur de type aval distant. Alors que pour  $\theta = 1$ , il est multivariable : le correcteur est un correcteur mixte. Notre approche permet donc de concevoir un correcteur dont la structure externe (ici le nombre de commandes) évolue comme nous l'avons spécifiée.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'un problème de conception de correcteur reréglable apparaît naturellement lors de la commande des canaux d'irrigation. Un compromis doit être réalisé entre le service vis-à-vis des utilisateurs et la consommation d'eau et ce compromis évolue. Nous avons alors appliqué les résultats obtenus dans le chapitre précédent et nous avons obtenu un correcteur reréglable. Ce correcteur reréglable réalise un compromis qui évolue continûment et qui respecte le cahier des charges.

Ce correcteur reréglable recouvre les performances allant de ceux d'un correcteur aval distant, qui est monovariante, jusqu'à ceux d'un correcteur mixte, qui est multivariable. Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence que notre approche permet de concevoir un correcteur dont la structure interne change. Ici, il est mis en évidence que notre approche permet de concevoir un correcteur dont la structure externe change.

Ce document peut se scinder en deux parties. La première partie, que l'on pourrait intitulée « de l'Automatique à l'Optimisation », utilise des concepts d'Automatique (les interconnexions et les graphes) afin de résoudre un problème d'Optimisation. La seconde partie, que l'on pourrait intitulée « de l'Optimisation à l'Automatique », utilise les résultats obtenus dans la première partie pour résoudre des problèmes d'Automatique.

Le problème traité dans la première partie est nouveau : il s'agit de la transformation d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant rationnellement de paramètres en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

Le point de départ des résultats est l'étude des propriétés quadratiques des interconnexions dépendant de paramètres. Dans le cas général de ces interconnexions, une propriété quadratique peut être vérifiée, de façon équivalente, par la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI ; il y a alors une infinité d'inégalités à vérifier mais les variables de décision ne sont pas des fonctions des paramètres. Il est ensuite possible de transformer ce problème en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Nous avons caractérisé les cas où cette dernière transformation est effectuée de façon équivalente. Dans le cas où ces interconnexions représentent des fonctions rationnelles, nous avons explicité les conditions obtenues. Dans le cas de fonctions rationnelles d'un paramètre, ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour la vérification d'une propriété quadratique. Dans le cas général de fonctions rationnelles de plusieurs paramètres, nous savons que des conditions nécessaires et suffisantes sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre ne peuvent pas être obtenues.

Nous avons ensuite pu transformer un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant rationnellement de paramètres en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Dans le cas d'un paramètre, cette transformation est effectuée de façon équivalente. Dans le cas général de plusieurs paramètres, nous savons qu'une transformation équivalente n'existe pas. Dans ces deux cas, nous avons discuté des moyens possibles pour obtenir un problème final de taille faible dont le temps de résolution est donc court. Un autre intérêt de cette transformation est qu'elle est basée sur des concepts d'Automatique, ce qui peut en faciliter l'assimilation (pour des chercheurs en Automatique).

Dans la seconde partie, nous avons traité deux problèmes d'Automatique. Le premier

est la conception de correcteurs dépendant rationnellement de paramètres. Il est général dans le sens où il permet de résoudre d'autres problèmes tel que le séquençement de gains. Nous avons structurellement simplifié au maximum le correcteur obtenu pour des raisons d'implémentation. Cette considération pratique nous a permis de discuter d'une limitation de la méthode de transformation proposée dans la première partie par rapport au problème d'Automatique lui-même.

Le second problème est plus ciblé dans la mesure où il s'agit de la conception de correcteurs dépendant du compromis. Ce problème apparaît dans la commande des canaux d'irrigation. Il s'agit d'un problème nouveau que nous avons formalisé, traité et illustré par des exemples numériques. Les solutions de ces deux problèmes sont basées sur les transformations obtenues dans la première partie.

Les exemples numériques ont mis en évidence plusieurs points. La majorité des résultats existants, interprétés comme des méthodes de transformation, ne conviennent absolument pas pour le premier exemple, qui est pourtant académique : ils ne permettent pas de formaliser le problème de conception de correcteurs reréglables et/ou les correcteurs obtenus ne sont pas reréglables. Ces exemples ont au contraire mis en évidence que notre approche est pertinente : les correcteurs obtenus sont vraiment reréglables et remplissent les cahiers des charges. De plus, dans ces exemples, nous avons conçu un correcteur dont la structure interne change et un autre dont la structure externe change. Et ceci avec des correcteurs de faible complexité.

L'exemple des canaux d'irrigation montre enfin que nos résultats peuvent s'appliquer pour des procédés industriels.

La poursuite de ce travail peut s'effectuer dans plusieurs directions :

**sensibilité d'une LFT aux erreurs numériques** dans cette thèse, nous avons intensément utilisé la représentation LFT des fonctions rationnelles. Dans l'idée de programmer quelque chose de systématique, il est intéressant de rechercher une représentation LFT qui soit le moins sensible possible aux inévitables erreurs numériques ;

**réduction du correcteur** comme dans le cas d'un correcteur ne dépendant pas de paramètre, le problème de sa réduction peut être posé. Dans le cas indépendant de paramètre, le correcteur est en fait une LFT en des intégrateurs. Le problème de sa réduction consiste à réduire le nombre d'intégrateurs apparaissant dans une représentation LFT en gardant les mêmes propriétés pour le système en boucle fermée. Dans notre cas, le correcteur dépendant de paramètres obtenu est en fait une LFT en les paramètres et des intégrateurs. Le problème est alors de réduire le nombre de fois où apparaissent les paramètres et/ou le nombre de fois où apparaissent les intégrateurs en gardant les mêmes propriétés pour le système en boucle fermée ;

**séquencement de gains** une mise en œuvre possible de la conception de correcteurs dépendant de paramètres est le séquençement de gains. Dans ce cadre, les paramètres représentent un point de fonctionnement. Le séquençement de gains est une pratique répandue chez les ingénieurs ;

**commande LPV** dans l'état de l'art, une grande partie des résultats proviennent de la commande des systèmes LPV. Une autre direction de recherche possible est donc la commande des systèmes LPV. Ceci revient à faire varier les paramètres dans le temps.

## A.1 Annexes au Chapitre 1

### A.1.1 Démonstration du Théorème 1.1, page 28

**Suffisance** Démontrons  $((ii) \Rightarrow (i))$ . L'implication découle directement du fait que la condition (1.10) implique l'inclusion :

$$\left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \mid \exists \theta \in \mathbb{P}, p = \Delta(\theta)q \right\} \subset \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \right\}.$$

Ensuite, le raisonnement est similaire à celui présenté dans la Section 1.2, page 20.

**Nécessité** Démontrons  $((i) \Rightarrow (ii))$  par construction d'une matrice  $W = W^T$  vérifiant les conditions (1.10) et (1.11).

La proposition

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \text{ on a } \Phi(\theta)^T M \Phi(\theta) < 0$$

est équivalente à la proposition

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \forall \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi}} \times \mathbb{R}_*^{n_w} \mid \exists q \in \mathbb{R}^{n_{A_\Phi}}, p = \Delta(\theta)q \text{ et } q = A_\Phi p + B_\Phi w \right\},$$

on a

$$\begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{A.1})$$

Comme pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , on a

$$p = \Delta(\theta)q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ w \end{bmatrix} = 0,$$

par application de la  $\mathcal{S}$ -procédure (voir le Lemme 1.1, page 23, et le commentaire qui suit ou [BEFB94]), la condition (A.1) est équivalente à : pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , il existe  $\tau_\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi^T \\ D_\Phi^T \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \left( \tau_\theta \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

Comme  $\mathbb{P}$  est un compact et  $\Delta$  est une fonction continue de  $\theta$ , le résultat présenté dans [Bli04] permet de choisir  $\tau_\theta$  fonction polynômiale (et donc continue) de  $\theta$  et qui est notée  $\tau(\theta)$ . En la réécrivant, la dernière inégalité est donc équivalente à : il existe  $\tau(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , on a

$$\begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \\ I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \left[ \begin{array}{c|c} M & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & \tau(\theta) \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \\ I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

Soit  $[\mu_1 \ \mu_2]$  telle que

$$[\mu_1 \ \mu_2]_\perp = \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \\ I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}.$$

Alors par application du lemme de Finsler [BEFB94], nous avons : il existe  $\tau(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , il existe  $\eta_\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\left[ \begin{array}{c|c} M & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & \tau(\theta) \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} \end{array} \right] + \eta_\theta \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \end{bmatrix} [\mu_1 \ \mu_2] < 0.$$

Une fois encore, il est possible de choisir  $\eta_\theta$  fonction continue de  $\theta$ . Par suite,  $\mathbb{P}$  étant un compact, l'inégalité précédente peut se récrire avec  $\eta_\theta$  remplacé par  $\eta$  indépendant de  $\theta$  tel que  $\eta \leq \min_{\theta \in \mathbb{P}} \eta_\theta$  : il existe  $\tau(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}$  et un réel  $\eta$  tels que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , on a

$$\left[ \begin{array}{c|c} M & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & \tau(\theta) \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} \end{array} \right] + \eta \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \end{bmatrix} [\mu_1 \ \mu_2] < 0.$$

Par application du lemme de Schur [BEFB94], cette dernière condition est équivalente à : il existe  $\tau(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}$  et un réel  $\eta$  tels que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , on a

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \mu_1^T \mu_1 < 0 \\ \tau(\theta) \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} + \eta \mu_2^T \mu_2 - \eta \mu_2^T \mu_1 \left( \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \mu_1^T \mu_1 \right)^{-1} \eta \mu_1^T \mu_2 < 0 \end{cases}$$

La deuxième condition peut se récrire : il existe  $\tau(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}$  et un réel  $\eta$  tels que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , il existe un réel strictement positif  $\epsilon_\theta$  tel que

$$\tau(\theta) \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} + \eta \mu_2^T \mu_2 - \eta \mu_2^T \mu_1 \left( \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \mu_1^T \mu_1 \right)^{-1} \eta \mu_1^T \mu_2 + \epsilon_\theta I < 0.$$

Une fois de plus, il est possible de choisir  $\epsilon_\theta$  fonction continue de  $\theta$ . Par suite,  $\mathbb{P}$  étant un compact,  $\epsilon_\theta$  atteint son minimum sur  $\mathbb{P}$  :  $\epsilon = \min_{\theta \in \mathbb{P}} \epsilon_\theta$  avec  $\epsilon > 0$ . L'inégalité précédente

peut se récrire : il existe  $\tau(\theta)$  une fonction continue de  $\mathbb{P}$  dans  $\mathbb{R}$ , un réel  $\eta$  et un réel strictement positif  $\epsilon$  tels que, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , on a

$$\tau(\theta) \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} + \eta \mu_2^T \mu_2 - \eta \mu_1^T \mu_1 \left( \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \mu_1^T \mu_1 \right)^{-1} \eta \mu_1^T \mu_2 + \epsilon I < 0.$$

Choisissons maintenant

$$W = -\eta \mu_2^T \mu_2 + \eta \mu_1^T \mu_1 \left( \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \mu_1^T \mu_1 \right)^{-1} \eta \mu_1^T \mu_2 - \epsilon I.$$

Alors la condition (1.10) est vérifiée avec ce choix de  $W$  puisque, pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ , on a

$$0 = \tau(\theta) \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I \\ -\Delta(\theta)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\Delta(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}.$$

De plus, il existe  $0 < \epsilon_1 < \epsilon$  tel que

$$W + \eta \mu_2^T \mu_2 - \eta \mu_1^T \mu_1 \left( \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \mu_1^T \mu_1 \right)^{-1} \eta \mu_1^T \mu_2 + \epsilon_1 I < 0.$$

Avec le fait que  $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \eta \mu_1^T \mu_1 < 0$ , ceci implique par application du lemme de Schur [BEFB94] que

$$\left[ \begin{array}{cc|c} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ \hline 0 & & W + \epsilon_1 I \end{array} \right] + \eta \begin{bmatrix} \mu_1^T \\ \mu_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} < 0.$$

Alors par application du lemme de Finsler [BEFB94], nous avons que

$$\begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \\ \hline I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & \\ \hline 0 & & | & W + \epsilon_1 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\Phi & D_\Phi \\ 0 & I \\ \hline I & 0 \\ A_\Phi & B_\Phi \end{bmatrix} < 0.$$

Ce qui implique la proposition (ii).

### A.1.2 Résultats d'analyse convexe [Roc70]

On dit qu'un hyperplan sépare deux ensembles non vides  $C_1$  et  $C_2$  de  $\mathbb{R}^n$  si l'un est contenu dans un demi plan défini par l'hyperplan et l'autre dans son opposé. Ils sont séparés proprement si  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas tous les deux inclus dans l'hyperplan [Roc70].

**Théorème A.1.** [Roc70, page 97] Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux ensembles convexes non vides de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe un hyperplan séparant proprement  $C_1$  et  $C_2$  si et seulement si les intérieurs relatifs de  $C_1$  et  $C_2$  sont disjoints.

Le théorème suivant présente un cas où l'hyperplan peut être choisi passant par le point 0.

**Théorème A.2.** [Roc70, page 100] Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux sous ensembles non vides de  $\mathbb{R}^n$ , l'un d'entre eux étant un cône. S'il existe un hyperplan qui sépare proprement  $C_1$  et  $C_2$  alors il existe un hyperplan séparant proprement  $C_1$  et  $C_2$  et passant par l'origine.

### A.1.3 Démonstration du Théorème 1.3, page 37

**Suffisance** Démontrons  $((ii) \Rightarrow (i))$  par l'absurde. Supposons que la proposition  $(i)$  n'est pas satisfaite alors que la proposition  $(ii)$  l'est.

Il existe donc  $\theta_0 \in \mathbb{P}$  tel que  $(I - A_\Phi \Delta(\theta_0))$  n'est pas inversible. C'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $q_0$  non nul tel que  $(I - A_\Phi \Delta(\theta_0))q_0 = 0$ . Notons  $p_0 = \Delta(\theta_0)q_0$ . Alors  $q_0 = A_\Phi p_0$  et  $p_0$  est non nul. En post et pré multipliant la condition (1.18) par  $q_0$  et sa transposée pour  $\theta = \theta_0$  d'une part, et en post et pré multipliant la condition (1.19) par  $p_0$  et sa transposée d'autre part, nous obtenons

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

ce qui est une contradiction.

**Nécessité** Démontrons  $((i) \Rightarrow (ii))$  par construction d'une matrice  $W = W^T$  vérifiant les conditions (1.18) et (1.19).

La condition pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$ ,  $(I - A_\Phi \Delta(\theta))$  est inversible est équivalente à

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -A_\Phi^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_\Phi & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} > 0.$$

Par compacité de  $\mathbb{P}$  et par continuité de  $\Delta(\theta)$  sur  $\mathbb{P}$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{P}, \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -A_\Phi^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_\Phi & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix} \geq \epsilon \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta(\theta) \\ I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Choisissons maintenant

$$W = \begin{bmatrix} -A_\Phi^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_\Phi & I \end{bmatrix} - \epsilon I.$$

Avec ce choix de  $W$ , la condition (1.18) est satisfaite du fait de l'inégalité (A.2). De plus, on a

$$\begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix}^T W \begin{bmatrix} I \\ A_\Phi \end{bmatrix} = -\epsilon(I + A_\Phi^T A_\Phi).$$

La condition (1.19) est donc satisfaite.

### A.1.4 Démonstration du Lemme 1.7, page 42

**Démonstration de la proposition  $(ii)$**  La proposition  $(ii)$  se déduit de la proposition  $(i)$ . En effet, les conditions

$$\begin{cases} -2\bar{\theta}\underline{\theta}GG^T - (\underline{\theta} + \bar{\theta})(FG^T + GF^T) - 2FF^T \geq 0 \\ FG^T - GF^T = 0 \end{cases}$$

sont équivalentes à

$$\begin{cases} ((\bar{\theta} - \underline{\theta})G)((\bar{\theta} - \underline{\theta})G)^T - (2F - (\bar{\theta} + \underline{\theta})G)(2F - (\bar{\theta} + \underline{\theta})G)^T \geq 0 \\ (2F - (\bar{\theta} + \underline{\theta})G)((\bar{\theta} - \underline{\theta})G)^T - ((\bar{\theta} - \underline{\theta})G)(2F - (\bar{\theta} + \underline{\theta})G)^T = 0 \end{cases}$$

Par application de la proposition (i), ces conditions sont équivalentes à l'existence d'une matrice réelle  $\bar{U} = \bar{U}^T$  telle que  $-I \leq \bar{U} \leq I$  et  $2F - (\bar{\theta} + \underline{\theta})G = (\bar{\theta} - \underline{\theta})G\bar{U}$ . Par manipulation, il vient  $F = GU$  avec

$$U = \frac{\bar{\theta} - \underline{\theta}}{2}\bar{U} + \frac{\bar{\theta} + \underline{\theta}}{2}I.$$

$U$  est bien telle que  $U = U^T$  et  $\underline{\theta}I \leq U \leq \bar{\theta}I$ .

**Démonstration de la proposition (i)** La suffisance de la proposition (i) est évidente. Nous ne démontrons que la nécessité. Supposons que

$$\begin{cases} GG^T - FF^T \geq 0 \\ FG^T - GF^T = 0. \end{cases}$$

La condition  $FF^T - GG^T \leq 0$  implique qu'il existe  $\bar{U}$  une matrice réelle telle que  $\bar{U}\bar{U}^T \leq I$  et  $F = G\bar{U}$ . Ce résultat a été démontré par [Ran96] pour le cas de matrices complexes : la démonstration s'étend sans difficulté au cas de matrices réelles.

La condition  $FG^T - GF^T = 0$  implique alors que  $G(\bar{U} - \bar{U}^T)G^T = 0$ .

Si  $G^T G > 0$ , cette dernière condition implique que

$$\bar{U} - \bar{U}^T = 0$$

et la nécessité est démontrée par le choix de  $U = \bar{U}$ .

Si  $G^T G$  n'est pas définie positive, nous construisons une matrice  $U$  qui a les propriétés désirées [IMF00]. Il existe une matrice réelle  $V$  telle que  $VV^T = I$  et telle que  $GV = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \end{bmatrix}$  avec  $G_1$  de rang plein. Définissons alors les matrices  $R$  et  $S$  ( $R$  étant une matrice carrée de même dimension que le rang de  $G_1$ ) de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} R & S \\ * & * \end{bmatrix} = V^T \bar{U} V$$

où  $*$  désigne un terme quelconque. Les conditions  $\bar{U}\bar{U}^T \leq I$  et  $G(\bar{U} - \bar{U}^T)G^T = 0$  impliquent

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T \\ S^T \end{bmatrix} \leq I \\ R - R^T = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Il existe alors une matrice réelle symétrique  $Q$  telle que

$$\begin{bmatrix} R & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & S \\ S^T & Q^T \end{bmatrix} \leq I. \quad (\text{A.4})$$

L'intérêt est que, si une telle matrice  $Q$  existe,  $U$  peut être alors choisi de la façon suivante :

$$U = V \begin{bmatrix} R & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} V^T.$$

Nous avons alors que  $U$  est symétrique.  $U$  a donc toutes ses valeurs propres réelles. De plus, la norme de  $U$  est inférieure à 1, et donc  $-I \leq U \leq I$ . Enfin

$$F = G\bar{U} = GVV^T\bar{U}VV^T = GV \begin{bmatrix} R & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} V^T = GU.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à démontrer que la condition (A.3) implique l'existence d'une matrice symétrique  $Q$  telle que la condition (A.4) soit vérifiée. C'est le cas en choisissant

$$Q = -S^T R(I - RR)^{\dagger} S$$

où  $\dagger$  désigne le pseudo inverse de Moore–Penrose [HJ85].

En effet, nous démontrons d'abord que  $Q$  est symétrique. Soit la décomposition en valeurs singulières de  $R$  :

$$R = X\Sigma Y^T = Y\Sigma X^T = R^T.$$

Nous avons alors  $(I - RR)^{\dagger} = X(I - \Sigma\Sigma)^{\dagger} X^T = Y(I - \Sigma\Sigma)^{\dagger} Y^T$  et

$$\begin{aligned} R(I - RR)^{\dagger} &= X\Sigma Y^T Y(I - \Sigma\Sigma)^{\dagger} Y^T \\ &= X\Sigma(I - \Sigma\Sigma)^{\dagger} Y^T \\ &= X(I - \Sigma\Sigma)^{\dagger} \Sigma Y^T \\ &= X(I - \Sigma\Sigma)^{\dagger} X^T X\Sigma Y^T \\ &= (I - RR)^{\dagger} R \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $(I - \Sigma\Sigma)^{\dagger}$  et  $\Sigma$  sont des matrices diagonales pour les commuter.  $Q$  est donc symétrique.

Nous démontrons maintenant que la condition (A.4) est vérifiée. Comme  $I - RR \geq SS^T$  est semi-définie positive, il existe une unique matrice  $\Omega$  symétrique et semi-définie positive [HJ85] telle que

$$I - RR = \Omega\Omega$$

avec  $\Omega = X(I - \Sigma\Sigma)^{1/2} X^T = Y(I - \Sigma\Sigma)^{1/2} Y^T$ . On note  $\Sigma_0$  la partie non nulle de  $I - \Sigma\Sigma$  :

$$I - \Sigma\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix}.$$

De plus  $SS^T \leq \Omega\Omega$  implique [Ran96] qu'il existe une matrice  $C$  telle que

$$\begin{cases} CC^T \leq I \\ S = \Omega C \end{cases}$$

Or

$$\begin{bmatrix} R & S \\ S^T & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & \Omega \\ \Omega & \hat{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

où  $\hat{Q} = -\Omega R(I - RR)^{\dagger} \Omega$  est symétrique. Comme  $CC^T \leq I$ , pour démontrer que la condition (A.4) est vérifiée, il suffit de montrer que la condition suivante

$$\begin{bmatrix} R & \Omega \\ \Omega & \hat{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \Omega \\ \Omega & \hat{Q} \end{bmatrix} \leq I$$

est vérifiée. En développant, il vient

$$\begin{bmatrix} R & \Omega \\ \Omega & \hat{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \Omega \\ \Omega & \hat{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RR + \Omega\Omega & R\Omega + \Omega\hat{Q} \\ \Omega R + \hat{Q}\Omega & \Omega\Omega + \hat{Q}\hat{Q} \end{bmatrix}.$$

Le terme hors diagonal vaut

$$\begin{aligned} R\Omega + \Omega\hat{Q} &= R\Omega - \Omega\Omega R(I - RR)^\dagger\Omega \\ &= R\Omega - (I - RR)R(I - RR)^\dagger\Omega \\ &= R\Omega - R(I - RR)(I - RR)^\dagger\Omega \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (I - RR)(I - RR)^\dagger\Omega &= X(I - \Sigma\Sigma)X^T X(I - \Sigma\Sigma)^\dagger X^T X(I - \Sigma\Sigma)^{1/2} X^T \\ &= X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0^{1/2} \end{bmatrix} X^T \\ &= X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0^{1/2} \end{bmatrix} X^T \\ &= \Omega \end{aligned}$$

Donc  $R\Omega + \Omega\hat{Q} = 0$ . Il reste alors à démontrer que  $RR + \Omega\Omega \leq I$  et que  $\Omega\Omega + \hat{Q}\hat{Q} \leq I$ . Or  $RR + \Omega\Omega = I$  et donc  $RR + \Omega\Omega \leq I$ , et

$$\begin{aligned} \Omega\Omega + \hat{Q}\hat{Q} &= \Omega\Omega + \Omega R(I - RR)^\dagger\Omega R(I - RR)^\dagger\Omega \\ &= (I - RR) + \Omega R(I - RR)^\dagger(I - RR)R(I - RR)^\dagger\Omega \\ &= (I - RR) + \Omega R(I - RR)^\dagger R(I - RR)(I - RR)^\dagger\Omega \\ &= (I - RR) + \Omega R(I - RR)^\dagger R\Omega \\ &= X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} X^T + \dots \\ &\quad \dots + X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0^{1/2} \end{bmatrix} X^T X \Sigma Y^T Y \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0^{-1} \end{bmatrix} Y^T Y \Sigma X^T X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0^{1/2} \end{bmatrix} X^T \\ &= X \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Sigma \Sigma \right) X^T \\ &= X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} X^T \end{aligned}$$

Nous avons donc bien que  $\Omega\Omega + \hat{Q}\hat{Q} \leq I$ .

### A.1.5 Opérations sur les LFTs

#### Addition de LFTs

$$\left( \Delta_1 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \right) + \left( \Delta_2 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \right) = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \star \left[ \begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

### Produit de LFTs

$$\left( \Delta_1 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \right) \times \left( \Delta_2 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \right) = \left[ \begin{array}{cc} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{array} \right] \star \left[ \begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right]$$

### Inversion de LFTs

$$\left( \Delta_1 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \right)^{-1} = \Delta_1 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_1^{-1} C_1 & B_1 D_1^{-1} \\ \hline -D_1^{-1} C_1 & D_1^{-1} \end{array} \right]$$

Cette opération n'est bien définie que lorsque  $D_1$  est inversible.

### Concaténation de LFTs

$$\left[ \begin{array}{cc} \Delta_1 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] & 0 \\ 0 & \Delta_2 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{array} \right] \star \left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{array} \right]$$

**Changement de base dans l'espace « d'état »** Soient  $T_q$  et  $T_p$  deux matrices inversibles. Alors

$$\Delta_1 \star \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] = (T_p^{-1} \Delta_1 T_q) \star \left[ \begin{array}{cc} T_q^{-1} A_1 T_p & T_q^{-1} B_1 \\ \hline C_1 T_p & D_1 \end{array} \right].$$

Si  $T_q$  et  $T_p$  sont deux matrices de permutation, cette opération revient à faire des déplacements de lignes et de colonnes dans la représentation LFT.

## A.2 Annexes au Chapitre 3

### A.2.1 Compléments de résultats sur le Problème $H_\infty$ dépendant d'un paramètre

Dans cette annexe, nous développons les différentes approches pour transformer le Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre en un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

Dans un premier temps, nous considérons la transformation de ce problème en un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant d'un paramètre. En fait, nous l'avons déjà transformé en un problème de faisabilité sous contraintes BMI dépendant d'un paramètre (voir la Section 3.2.2.2, page 109). Il a été obtenu par application du lemme d'analyse  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre au système en boucle fermée : trouver, si elles existent,  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$ ,  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  et  $D_K(\theta)$  des matrices rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\mathcal{P}(\theta) > 0; \tag{A.5}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} A_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_G(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_G(\theta) & C_G(\theta)^T \\ B_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_G(\theta)^T \\ C_G(\theta) & D_G(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0. \tag{A.6}$$

avec

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|c} A_G(\theta) & B_G(\theta) \\ \hline C_G(\theta) & D_G(\theta) \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c|c} A(\theta) & 0 & B_w(\theta) \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline C_z(\theta) & 0 & D_{zw}(\theta) \end{array} \right] + \dots \\ &\dots + \left[ \begin{array}{c|c} 0 & B_u(\theta) \\ \hline I_n & 0 \\ \hline 0 & D_{zu}(\theta) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 0 & I_n & 0 \\ \hline C_y(\theta) & 0 & D_{yw}(\theta) \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La difficulté est que l'ensemble des problèmes d'optimisation sous contraintes BMI contient des problèmes non-convexes. L'objectif est alors de transformer ce problème de faisabilité sous contraintes BMI dépendant de  $\theta$  en un problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ . Nous donnerons d'abord les outils utilisés pour cette transformation avant de les appliquer.

Dans un second temps, nous considérerons les conditions sous la forme d'un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre.

### A.2.1.1 Outils pour la transformation d'un problème BMI en un problème LMI

Lorsque les matrices sont constantes, il existe de façon générale plusieurs outils permettant la transformation d'un problème de faisabilité sous contraintes BMI en un problème de faisabilité sous contraintes LMI :

1. changement de base dans l'ensemble des vecteurs ;
2. changement de variables de décision ;
3. élimination de variables de décision ;
4. introduction de variables de décision supplémentaires.

Deux approches sont habituellement considérées dans la littérature : la première combine un changement de base dans l'espace des vecteurs et un changement de variables de décision [SGC97] ; la seconde utilise une élimination de variables de décision (Lemme d'élimination [BEFB94, GA94]). Nous expliquons en quoi consiste ces trois outils

**Changement de base dans l'ensemble des vecteurs** Soit  $L$  une matrice symétrique de  $\mathbb{R}^{p \times p}$ . Cette matrice est définie négative si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, \quad x^T L x < 0.$$

Posons  $x = Tz$  avec  $T$  une matrice inversible. La matrice  $T$  représente donc un changement de base dans l'ensemble des vecteurs. Nous avons alors que  $L$  est définie négative si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, \quad z^T T^T L T z < 0,$$

ce qui équivaut à  $T^T L T$  définie négative. Cette opération de changement de base peut aussi être vu comme une opération de congruence.

**Lemme A.1** (Changement de base). *Soient  $T$  une matrice inversible et  $L$  une matrice symétrique.*

*Alors  $L$  est définie négative si et seulement si  $T^T L T$  est définie négative.*

**Changement de variables de décision** L'idée est de trouver une application surjective d'un ensemble de matrices dans un autre ensemble de matrices qui linéarise la contrainte. Par exemple, considérons la contrainte BMI suivante :

$$AQ + QA^T + BKQ + Q^T K^T B < 0$$

ou les variables de décision sont la matrice symétrique définie positive  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et la matrice  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ . En considérant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} CV : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n_u \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n_u \times n} \\ (Q, K) &\mapsto (Q, \mathcal{Y}) = (Q, KQ), \end{aligned}$$

la contrainte BMI est linéarisé en la contrainte LMI

$$AQ + QA^T + B\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^T B < 0.$$

De plus, comme l'application  $CV$  est surjective, si  $(Q, \mathcal{Y})$  existe, alors  $(Q, K)$  existe forcément :  $K = \mathcal{Y}Q^{-1}$ .

**Élimination de variables de décision** Considérons la contrainte suivante

$$G + U^T \mathcal{K}^T V + V^T \mathcal{K} U < 0$$

où  $\mathcal{K}$  est la variable de décision *non structurée*. L'idée est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de  $\mathcal{K}$  sans faire intervenir  $\mathcal{K}$ . On dit que l'on a éliminé la variable  $\mathcal{K}$ . En substance, le résultat suivant, dit lemme d'élimination [BEFB94, GA94], énonce de telles conditions.

**Lemme A.2** (Lemme d'élimination). *Soient  $G = G^T$ ,  $U$  et  $V$  des matrices de tailles compatibles.*

*Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe  $\mathcal{K}$  une matrice de taille compatible telle que*

$$G + U^T \mathcal{K}^T V + V^T \mathcal{K} U < 0;$$

(ii) *la condition suivante est vérifiée*

$$\begin{cases} U_{\perp}^T G U_{\perp} < 0 \\ V_{\perp}^T G V_{\perp} < 0 \end{cases}$$

*où  $U_{\perp}$  est telle que  $U U_{\perp} = 0$  et telle que  $\begin{bmatrix} U^T & U_{\perp} \end{bmatrix}$  est de rang plein ;*

(iii) *il existe un réel  $\sigma$  tel que*

$$\begin{cases} G - \sigma U^T U < 0 \\ G - \sigma V^T V < 0 \end{cases} .$$

Dans notre cas, les matrices sont des fonctions de  $\theta$ . Il est possible d'utiliser les mêmes approches que dans le cas où les matrices sont constantes. Pour cela, nous étendons les résultats précédents.

**Changement de base paramétrisé dans l'ensemble des vecteurs** Le Lemme A.1 s'étend directement de la façon suivante.

**Lemme A.3** (Changement de base paramétrisé). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $T(\theta)$  une matrice de fonctions telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $T(\theta)$  est inversible et  $L(\theta)$  une matrice de fonctions telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $L(\theta)$  est symétrique.*

*Alors, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $L(\theta)$  est définie négative si et seulement si, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $T(\theta)^T L(\theta) T(\theta)$  est définie négative.*

**Changement de variables de décision paramétrisé** Dans le cas de fonctions de  $\theta$ , l'application surjective va d'un ensemble de fonctions vers un autre ensemble de fonctions. Dans notre cas, ces ensembles de fonctions seront des ensembles de fonctions rationnelles. Par exemple, considérons la contrainte BMI suivante :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad A(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta)^T + B(\theta)K(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)^T K(\theta)^T B(\theta) < 0$$

ou les variables de décision sont la matrice de fonctions rationnelles  $Q(\theta)$  définie positive pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  et la matrice de fonctions rationnelles  $K(\theta)$ . En considérant le changement de variables suivant :

$$CV : \begin{array}{ccc} ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}) \times ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n}) & \rightarrow & ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}) \times ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n}) \\ (\mathcal{Q}(\theta), K(\theta)) & \mapsto & (\mathcal{Q}(\theta), \mathcal{Y}(\theta)) = (\mathcal{Q}(\theta), K(\theta)Q(\theta)), \end{array}$$

la contrainte BMI dépendant de  $\theta$  est linéarisé en la contrainte LMI dépendant de  $\theta$

$$A(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta)^T + B(\theta)\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)^T B(\theta) < 0.$$

L'application est bien surjective et va bien d'un ensemble de fonctions rationnelles vers un autre ensemble de fonctions rationnelles. Comme l'application  $CV$  est surjective, si  $(\mathcal{Q}(\theta), \mathcal{Y}(\theta))$  existe, alors  $(\mathcal{Q}(\theta), K(\theta))$  existe forcément :  $K(\theta) = \mathcal{Y}(\theta)Q(\theta)^{-1}$ .

**Élimination paramétrisé de variables de décision** Il est possible d'étendre le lemme d'élimination au cas où les matrices sont des fonctions de  $\theta$ .

**Lemme A.4** (Lemme d'élimination paramétrisée). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$  et des matrices  $G(\theta) = G(\theta)^T$ ,  $U(\theta)$  et  $V(\theta)$  de tailles constantes et compatibles, fonctions continues en  $\theta$  sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ .*

*Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe  $\mathcal{K}(\theta)$ , une matrice de taille compatible, fonction rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telle que*

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad G(\theta) + U(\theta)^T \mathcal{K}(\theta)^T V(\theta) + V(\theta)^T \mathcal{K}(\theta) U(\theta) < 0 ;$$

(ii) *la condition suivante est vérifiée*

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \begin{cases} U(\theta)_\perp^T G(\theta) U(\theta)_\perp < 0 \\ V(\theta)_\perp^T G(\theta) V(\theta)_\perp < 0 \end{cases} ;$$

(iii) *il existe un réel  $\sigma$  tel que*

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad \begin{cases} G(\theta) - \sigma U(\theta)^T U(\theta) < 0 \\ G(\theta) - \sigma V(\theta)^T V(\theta) < 0 \end{cases} .$$

**Démonstration** Par application du Lemme 2.2, page 66, la condition (i) est équivalente à : pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , il existe une matrice  $\mathcal{K}_\theta$  telle que

$$G(\theta) + U(\theta)^T \mathcal{K}_\theta^T V(\theta) + V(\theta)^T \mathcal{K}_\theta U(\theta) < 0.$$

Par application du Lemme A.2, cette dernière condition est équivalente aux deux propositions suivantes :

- pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $U(\theta)_\perp^T G(\theta) U(\theta)_\perp < 0$  et  $V(\theta)_\perp^T G(\theta) V(\theta)_\perp < 0$  ;
- pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , il existe  $\sigma_\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $G(\theta) - \sigma_\theta U(\theta)^T U(\theta) < 0$  et  $G(\theta) - \sigma_\theta V(\theta)^T V(\theta) < 0$ .

La première condition est en fait identique à la condition (ii) du Lemme A.4. Par application du Lemme 2.1, page 60, la seconde condition est équivalente à la condition suivante : il existe une fonction  $\sigma(\theta)$  continue sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , on a  $G(\theta) - \sigma(\theta) U(\theta)^T U(\theta) < 0$  et  $G(\theta) - \sigma(\theta) V(\theta)^T V(\theta) < 0$ . Cette dernière condition est équivalente à la condition (iii) du Lemme A.4. La condition (iii) du Lemme A.4 implique cette dernière condition en choisissant  $\sigma(\theta) = \sigma$ . L'implication inverse est obtenue en choisissant  $\sigma$  supérieur ou égal à  $\max_{\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]} \sigma(\theta)$ . Alors, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , on a  $\sigma U(\theta)^T U(\theta) \geq \sigma(\theta) U(\theta)^T U(\theta)$  et  $\sigma V(\theta)^T V(\theta) \geq \sigma(\theta) V(\theta)^T V(\theta)$ , d'où le résultat.  $\square$

### A.2.1.2 Résultats de conception d'un correcteur $H_\infty$ dépendant d'un paramètre par optimisation LMI dépendant d'un paramètre

Afin d'obtenir des conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  pour le Problème  $H_\infty$  dépendant de  $\theta$ , nous allons maintenant utiliser les outils que nous avons décrits dans la section précédente.

Avant de les appliquer à notre problème, nous illustrons les deux approches sur un exemple de synthèse plus simple : notre problème dans le cas d'un retour d'état. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B_u(\theta)u(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) = C_z(\theta)x(t) + D_{zu}(\theta)u(t) + D_{zw}(\theta)w(t) \end{cases}$$

où toutes les matrices sont des fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . Il est cherché un retour d'état

$$u(t) = K(\theta)x(t),$$

avec  $K(\theta)$  une fonction rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , pour que le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A(\theta) + B_u(\theta)K(\theta))x(t) + B_w(\theta)w(t) \\ z(t) = (C_z(\theta) + D_{zu}(\theta)K(\theta))x(t) + D_{zw}(\theta)w(t) \end{cases}$$

soit, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , asymptotiquement stable et ait, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , une norme  $H_\infty$  inférieure à  $\gamma$ ,  $\gamma > 0$  étant donné. Par application du Lemme 3.1, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un tel retour d'état est : il existe  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$  une fonction rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , et  $K(\theta)$  une fonction rationnelle en  $\theta$ , bien

posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telles que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} (A(\theta) + B_u(\theta)K(\theta))^T \mathcal{P}(\theta) + \dots & \mathcal{P}(\theta)B_w(\theta) & (C_z(\theta) + D_{zu}(\theta)K(\theta))^T \\ \dots + \mathcal{P}(\theta)(A(\theta) + B_u(\theta)K(\theta)) & & \\ B_w(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) + D_{zu}(\theta)K(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

La seconde contrainte est une contrainte BMI dépendant de  $\theta$ . Ce dernier problème est donc un problème d'optimisation sous contraintes BMI. Il est possible, par transformation, de trouver un problème d'optimisation sous contraintes LMI équivalent.

**Approche par changement de variables paramétrisé** Nous présentons d'abord l'approche par changement de variables paramétrisé et changement de base paramétrisé dans l'ensemble des vecteurs. L'idée est de trouver une application surjective (fonctions des variables de décision  $K(\theta)$  et  $\mathcal{P}(\theta)$ ) qui linéarise la contrainte BMI. Pour cela, un changement de base dans l'espace des vecteurs est généralement effectué au préalable.

En effectuant le changement de base avec  $T(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^{-1}$  pour la première contrainte et avec

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

pour la seconde contrainte (nous utilisons le Lemme A.1), la contrainte (A.8) est équivalent à : pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\theta)^{-1} > 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\theta)^{-1}(A(\theta) + B_u(\theta)K(\theta))^T + \dots & B_w(\theta) & \mathcal{P}(\theta)^{-1}(C_z(\theta) + D_{zu}(\theta)K(\theta))^T \\ \dots + (A(\theta) + B_u(\theta)K(\theta))\mathcal{P}(\theta)^{-1} & & \\ B_w(\theta)^T & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ (C_z(\theta) + D_{zu}(\theta)K(\theta))\mathcal{P}(\theta)^{-1} & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. .$$

En effectuant le changement de variables paramétrisé suivant

$$CV : ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}) \times ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n}) \rightarrow ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}) \times ([\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n_u \times n}) \\ (\mathcal{P}(\theta), K(\theta)) \mapsto (\mathcal{Q}(\theta), \mathcal{Y}(\theta)) = (\mathcal{P}(\theta)^{-1}, K(\theta)\mathcal{P}(\theta)^{-1})$$

avec  $\mathcal{Q}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  des fonctions rationnelles, la dernière contrainte est équivalente à : pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(\theta)A(\theta)^T + A(\theta)\mathcal{Q}(\theta) + \dots & B_w(\theta) & \mathcal{Q}(\theta)C_z(\theta)^T + \mathcal{Y}(\theta)^T D_{zu}(\theta)^T \\ \mathcal{Y}(\theta)^T B_u(\theta) + B_u(\theta)\mathcal{Y}(\theta) & & \\ B_w(\theta)^T & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta)\mathcal{Q}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{Y}(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right.$$

qui est une contrainte LMI dépendant de  $\theta$ . Un retour d'état stabilisant et garantissant une borne sur la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée existe si et seulement si  $\mathcal{Q}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  existent.

Dans le cas où  $\mathcal{Q}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  existent, du fait du changement de variable, un retour d'état stabilisant et garantissant une borne sur la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée est donné par

$$K(\theta) = \mathcal{Y}(\theta)\mathcal{Q}(\theta)^{-1}.$$

$K(\theta)$  est bien rationnelle en  $\theta$  puisque  $\mathcal{Y}(\theta)$  et  $\mathcal{Q}(\theta)$  sont rationnelles en  $\theta$ . De plus, comme  $\mathcal{Q}(\theta)$  est définie positive sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $K(\theta)$  est bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . Il est à noter que l'existence d'un correcteur est testée en même temps que sa construction (au changement de variable près).

**Remarque A.1.** *Lorsque l'on recherche un retour d'état non forcément rationnel en  $\theta$ , il est possible de démontrer par application du Lemme 2.2, page 66, que si un retour d'état existe, alors il peut toujours être choisi rationnel en  $\theta$ .*

Il est possible d'appliquer la même approche au Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre (Problème 3.1). Le problème est alors un problème de retour de sortie. Il est plus complexe que le problème de retour d'état. Des conditions peuvent tout de même être trouvées (voir le Théorème 3.3, page 114). Nous donnons maintenant la démonstration de ce théorème.

**Démonstration du Théorème 3.3, page 114** Nous avons utilisé le changement de base et de variables donnés dans [SGC97]. Partitionnons les matrices  $\mathcal{P}(\theta)$  et  $\mathcal{P}(\theta)^{-1}$  de la façon suivante :

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\theta) & N(\theta) \\ N(\theta)^T & * \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & M(\theta) \\ M(\theta)^T & * \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $N(\theta)$  et  $M(\theta)$  sont donc forcément rationnelles en  $\theta$  de l'intervalle  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  dans l'ensemble des matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

La condition (3.7) est alors obtenue à partir de la condition (A.5) par application du Lemme A.3, page 179 (changement de base paramétrisé), avec

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & I \\ M(\theta)^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que la première colonne de  $T(\theta)$  est la première colonne de  $\mathcal{P}(\theta)^{-1}$ , ce qui permet de simplifier l'expression en utilisant la relation  $\mathcal{P}(\theta)\mathcal{P}(\theta)^{-1} = \mathcal{P}(\theta)^{-1}\mathcal{P}(\theta) = I$ .

La condition (3.8) est alors obtenue à partir de la condition (A.6) par application du Lemme A.3, page 179 (changement de base paramétrisé), avec

$$T(\theta) = \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathcal{X}(\theta) & I & 0 & 0 \\ M(\theta)^T & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right]$$

puis en effectuant le changement de variables paramétrisé suivant

$$\mathcal{D}(\theta) = D_K(\theta)$$

$$\mathcal{C}(\theta) = C_K(\theta)M(\theta)^T + D_K(\theta)C_y(\theta)\mathcal{X}(\theta)$$

$$\mathcal{B}(\theta) = N(\theta)B_K(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)B_u(\theta)D_K(\theta)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\theta) = & N(\theta)A_K(\theta)M(\theta)^T + N(\theta)B_K(\theta)C_y(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)B_u(\theta)C_K(\theta)M(\theta)^T + \dots \\ & \dots + \mathcal{Y}(\theta)(A(\theta) + B_u(\theta)D_K(\theta)C_y(\theta))\mathcal{X}(\theta). \end{aligned}$$

La formule explicite de construction du correcteur est obtenue en exprimant les matrices  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  et  $D_K(\theta)$  à partir du changement de variables précédent.

**Élimination paramétrisée** Nous présentons maintenant l'approche par élimination paramétrisée de variables de décision, c'est-à-dire en utilisant le lemme d'élimination paramétrisée (voir le Lemme A.4, page 179). L'idée est de tester l'existence des matrices de la représentation d'état du correcteur sans les calculer explicitement, au contraire de l'approche par changement de variables où l'existence d'un correcteur est testée en même temps que son calcul est effectué (à un changement de variables près). Dans cette approche, les matrices de la représentation d'état du correcteur n'interviennent plus dans la condition d'existence du correcteur.

Revenons à l'exemple du retour d'état. Il est possible d'appliquer le Lemme A.4 à la deuxième inégalité de (A.8) avec

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad U(\theta)^T = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) B_u(\theta) \\ 0 \\ D_{zu}(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}(\theta) = K(\theta) \quad \text{et} \quad V(\theta) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la condition (ii) du Lemme A.4 avec

$$U(\theta)_\perp = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u(\theta)^T & 0 & D_{zu}(\theta)^T \end{bmatrix}_\perp \quad \text{et avec} \quad V(\theta)_\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

et en permutant des lignes et des colonnes, on trouve que la condition (A.8) est équivalente à l'existence de  $\mathcal{P}(\theta)$  telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \end{array} \right]_\perp & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} A(\theta) \mathcal{P}(\theta)^{-1} + \mathcal{P}(\theta)^{-1} A(\theta)^T & \mathcal{P}(\theta)^{-1} C_z(\theta)^T \\ \hline C_z(\theta) \mathcal{P}(\theta)^{-1} & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \end{array} \right]_\perp & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right.$$

Or la condition  $\mathcal{P}(\theta) > 0$  est équivalente à  $\mathcal{P}(\theta)^{-1} > 0$ . En effectuant le changement de variables de décision  $\mathcal{Q}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^{-1}$ , cette dernière condition est équivalente à l'existence de  $\mathcal{Q}(\theta)$  rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \end{array} \right]_\perp & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{c|c} A(\theta) \mathcal{Q}(\theta) + \mathcal{Q}(\theta) A(\theta)^T & \mathcal{Q}(\theta) C_z(\theta)^T \\ \hline C_z(\theta) \mathcal{Q}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \end{array} \right]_\perp & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right.$$

qui est une condition LMI en  $\mathcal{Q}(\theta)$ .

En appliquant le Lemme A.4, il est possible d'utiliser la condition (iii). Nous obtenons la condition : il existe un réel  $\sigma_1$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] - \sigma_1 \left[ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\theta) B_u(\theta) \\ 0 \\ D_{zu}(\theta) \end{array} \right] \left[ B_u(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) \ 0 \ D_{zu}(\theta)^T \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] - \sigma_1 \left[ \begin{array}{c} I \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[ I \ 0 \ 0 \right] < 0 \end{array} \right.$$

qui est en fait équivalente à la condition : il existe un réel  $\sigma$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] - \sigma \left[ \begin{array}{c} \mathcal{P}(\theta) B_u(\theta) \\ 0 \\ D_{zu}(\theta) \end{array} \right] \left[ B_u(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) \ 0 \ D_{zu}(\theta)^T \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right.$$

L'implication est évidente en choisissant  $\sigma = \sigma_1$ . La réciproque est obtenue en notons que la dernière condition implique par continuité et compacité qu'il existe un réel  $\tilde{\sigma}$  tel que

$$\left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] - \tilde{\sigma} \left[ \begin{array}{c} I \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[ I \ 0 \ 0 \right] < 0.$$

Ceci peut être vérifié en appliquant une version paramétrisée du lemme de Schur [BEFB94]. La réciproque est obtenue en choisissant  $\sigma_1 \geq \max \{ \sigma, \tilde{\sigma} \}$ . Après deux changements de base paramétrisés et un changement de variable évident, nous trouvons les conditions suivantes : il existe une matrice  $\mathcal{Q}(\theta)$  rationnelle en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , et un réel  $\sigma$  tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} A(\theta) \mathcal{Q}(\theta) + \mathcal{Q}(\theta) A(\theta)^T & \mathcal{Q}(\theta) C_z(\theta)^T & B_w(\theta) \\ C_z(\theta) \mathcal{Q}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta) \\ B_w(\theta)^T & D_{zw}(\theta)^T & -\gamma I \end{array} \right] - \sigma \left[ \begin{array}{c} B_u(\theta) \\ 0 \\ D_{zu}(\theta) \end{array} \right] \left[ B_u(\theta)^T \ 0 \ D_{zu}(\theta)^T \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

qui est une condition LMI en  $\mathcal{Q}(\theta)$  et  $\sigma$ .

Lorsqu'un retour d'état existe, il existe deux possibilités pour en construire un. La première possibilité consiste à construire  $\mathcal{P}(\theta)$  ( $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{Q}(\theta)^{-1}$ ) et à chercher  $K(\theta)$  telle que la condition (A.8) soit vérifiée. Cette condition est maintenant une contrainte LMI dépendant de  $\theta$  puisque  $\mathcal{P}(\theta)$  est maintenant déterminée.  $K(\theta)$  peut alors toujours être choisi rationnelle en  $\theta$ . La seconde possibilité consiste à utiliser une formule explicite de construction pour  $K(\theta)$ . Pour cela, il existe plusieurs possibilités, voir notamment [SMN90, IS94, Gah96]. Dans le cas du retour d'état, une formule explicite est

$$K(\theta) = -\frac{\sigma}{2} B_u(\theta)^T \mathcal{Q}(\theta)^{-1}$$

où  $\sigma$  est telle que la condition (A.9) est vérifiée. Ici aussi,  $K(\theta)$  est bien rationnelle en  $\theta$ .

Il est possible d'appliquer la même approche au problème de retour de sortie (Problème 3.1). Les conditions d'existence d'un correcteur dépendant de  $\theta$  sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  sont énoncées dans le théorème suivant.

**Théorème A.3** (Existence d'un correcteur  $H_\infty$  dépendant de  $\theta$  par élimination paramétrisée). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1) et  $\gamma > 0$ .*

*Alors il existe un correcteur dépendant de  $\theta$*

$$K(p, \theta) = \frac{1}{p} I_n \star \left[ \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right]$$

tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :

1. le système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ;
2.  $\|P(p, \theta) \star K(s, \theta)\|_\infty < \gamma$

si et seulement s'il existe des matrices symétriques  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telles que l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

(i) pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.10), (A.11) et (A.12) soient vérifiées :

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \right] > 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{\perp} & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right] \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{\perp}^T \left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & \mathcal{X}(\theta)C_z(\theta)^T & B_w(\theta) \\ C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta) \\ B_w(\theta)^T & D_{zw}(\theta)^T & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{\perp} & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right] \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{\perp} & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right] \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{\perp}^T \left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) & \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cc} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{\perp} & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right] \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] < 0 ; \quad (\text{A.12})$$

(ii) il existe un réel  $\sigma$ , tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.13), (A.14) et (A.15) soient vérifiées :

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \right] > 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & \mathcal{X}(\theta)C_z(\theta)^T & B_w(\theta) \\ C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta) \\ B_w(\theta)^T & D_{zw}(\theta)^T & -\gamma I \end{array} \right] - \sigma \left[ \begin{array}{c} B_u(\theta) \\ D_{zu}(\theta) \\ 0 \end{array} \right] \left[ B_u(\theta)^T \ D_{zu}(\theta)^T \ 0 \right] < 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) & \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{array} \right] - \sigma \left[ \begin{array}{c} C_y(\theta)^T \\ D_{yw}(\theta)^T \\ 0 \end{array} \right] \left[ C_y(\theta) \ D_{yw}(\theta) \ 0 \right] < 0. \quad (\text{A.15})$$

**Démonstration** Nous démontrons d'abord la condition (i) du théorème. Les conditions (A.11) et (A.12) sont obtenues à partir de la condition (A.6) du Lemme 3.1, page 108, par application du Lemme A.4 avec la forme (ii) et en permutant des lignes et des colonnes. La condition (A.10) est obtenue à partir de la condition (A.5) par application du résultat suivant, qui est une extension du lemme de Packard [Pac94].

**Lemme A.5.** Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{Y} : \begin{array}{l} [\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ \theta \mapsto \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathcal{X} : \begin{array}{l} [\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ \theta \mapsto \mathcal{X}(\theta) \end{array}$$

deux matrices rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ .

Alors il existe

$$N : \begin{array}{l} [\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ \theta \mapsto N(\theta) \end{array} \quad \text{et} \quad M : \begin{array}{l} [\underline{\theta}; \bar{\theta}] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ \theta \mapsto M(\theta) \end{array}$$

deux matrices rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\theta) & N(\theta) \\ N(\theta)^T & N(\theta)^T(\mathcal{Y}(\theta) - \mathcal{X}(\theta)^{-1})^{-1}N(\theta) \end{bmatrix}$$

est définie positive et la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & M(\theta) \\ M(\theta)^T & * \end{bmatrix}$$

est l'inverse de  $\mathcal{P}(\theta)$  si et seulement si, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{bmatrix} > 0.$$

La condition (ii) du théorème est obtenue de la même façon que la condition (i) sauf qu'il est utilisé la forme (iii) du Lemme A.4 au lieu de la forme (ii) ainsi que quelques manipulations supplémentaires.  $\square$

**Remarque A.2.** Habituellement, lorsque le lemme d'élimination est utilisé, c'est la condition (i) du théorème qui est donnée. Lorsque les matrices ne dépendent pas de  $\theta$ , il est possible de calculer  $[B_u^T \ D_{zu}^T]_{\perp}$  et  $[C_y \ D_{yw}]_{\perp}$  de façon systématique avec **Matlab**. Cependant, lorsque ces matrices dépendent de  $\theta$ , une méthode systématique de calcul n'a pas encore été développée à notre connaissance. Même si nous n'avons pas développée ce point, nous pensons qu'il est possible de trouver une méthode systématique lorsque ces matrices sont de rang constants et lorsqu'elles peuvent être représentées par des LFTs.

Les conditions (A.14) et (A.15) ne nécessitent pas un tel calcul est peuvent donc toujours être directement appliquées mais ajoutent  $\sigma$  comme variable de décision supplémentaire.

Lorsqu'un correcteur dépendant de  $\theta$  existe, c'est-à-dire lorsque l'une des deux conditions (i) ou (ii) du Théorème A.3 est vérifiée, il est possible d'en construire un. Il y a deux possibilités. La première consiste à construire une matrice  $\mathcal{P}(\theta)$  à partir de  $\mathcal{X}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  et à appliquer le Lemme 3.1.

**Théorème A.4** (Construction d'un correcteur  $H_{\infty}$  dépendant de  $\theta$  par problème LMI dépendant de  $\theta$ ). Les matrices de la représentation d'état de  $K(p, \theta)$  sont données par la

solution du problème suivant : il existe  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  et  $D_K(\theta)$  telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (A.6), page 176, est vérifiée avec  $\mathcal{P}(\theta)$  donnée par

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\theta) & N(\theta) \\ N(\theta)^T & N(\theta)^T(\mathcal{Y}(\theta) - \mathcal{X}(\theta)^{-1})^{-1}N(\theta) \end{bmatrix}$$

où  $N(\theta)$  est n'importe quelle matrice rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $N(\theta)$  est inversible et avec

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta) & B_G(\theta) \\ C_G(\theta) & D_G(\theta) \end{bmatrix}$$

donnée par l'équation (A.7), page 177.

La seconde possibilité consiste à utiliser une formule explicite de construction. Nous utilisons l'approche de [Gah96]. Pour simplifier les formules, nous imposons l'hypothèse suivante [DGKF89] :

$$\left[ \begin{array}{c|c} D_{zw}(\theta) & D_{zu}(\theta) \\ \hline D_{yw}(\theta) & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_u} \\ \hline 0 & I_{n_y} & 0 \end{array} \right].$$

Le théorème suivant donne alors une formule explicite de construction pour la construction d'un correcteur dépendant de  $\theta$ .

**Théorème A.5** (Construction d'un correcteur  $H_\infty$  dépendant de  $\theta$  par formule explicite). Une formule explicite est donnée par la formule explicite du Théorème 3.2, page 112, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\theta) &= \begin{bmatrix} -A(\theta)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots + \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) & C_y(\theta)^T \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\gamma}I_{n_w-n_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_y} \\ \hline 0 & I_{n_y} & -\gamma I_{n_y} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} B_w(\theta)^T & 0 \\ 0 & I_{n_y} \end{array} \right] + \dots \\ &\dots + \left[ \begin{array}{c|c} C_z(\theta)^T & 0 \\ \hline 0 & I_{n_y} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\gamma}I_{n_z-n_u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_u} \\ \hline 0 & -I_{n_u} & -\gamma I_{n_u} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) & 0 \\ B_u(\theta)^T & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

**Comparaison des approches par changement de variables paramétrisé et par élimination paramétrisée** Le schéma de la Figure A.1 résume les possibilités pour concevoir un correcteur. Pour l'existence du correcteur, la forme « basique » est celle par élimination sans la variable  $\sigma$ . En effet, en utilisant plusieurs fois le Lemme d'élimination paramétrisée, il est possible de se ramener à ces conditions : par exemple, les conditions du Théorème A.3 peuvent être retrouvées en appliquant le Lemme d'élimination paramétrisée aux conditions du Théorème 3.1, page 110.

En ce qui concerne la construction du correcteur, l'approche par formule explicite permet de prévoir à l'avance la complexité du correcteur (en terme d'ordre de la représentation LFT obtenue pour les matrices de sa représentation d'état) en utilisant les opérations définies sur les LFTs définies en annexe du Chapitre 1, Section A.1.5, page 175. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser l'approche par changement de variables paramétrisé car la complexité du correcteur est alors moindre.

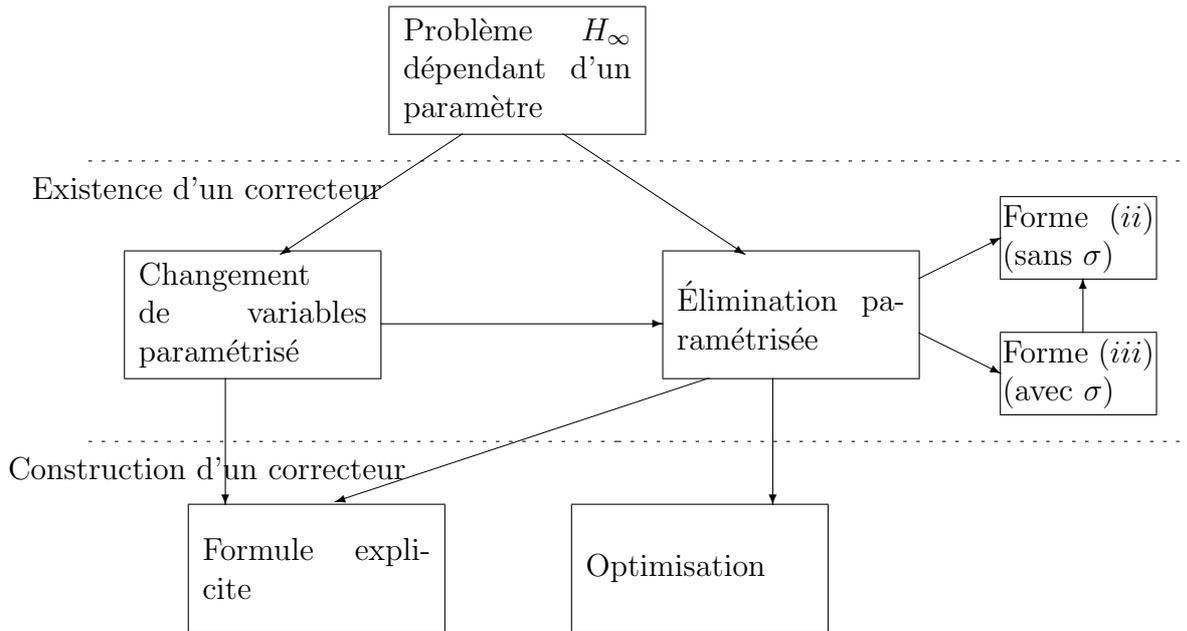


FIG. A.1 – Récapitulatif des possibilités pour concevoir un correcteur

Avec l'approche par optimisation, ceci n'est plus possible. En effet, même s'il est possible de prévoir un ordre maximal pour la représentation LFT des matrices de la représentation d'état du correcteur (voir le Théorème A.5), l'approche que nous utilisons ne permet pas de travailler directement sur la représentation LFT mais sur la représentation fraction rationnelle de ces matrices (voir la conclusion du Chapitre 2, page 100). Or travailler sur la représentation fraction rationnelle revient à travailler sur la représentation LFT avec une représentation particulière. L'avantage de l'approche par optimisation est qu'elle permet d'imposer des conditions supplémentaires sur les matrices de la représentation d'état du correcteur. Par exemple, il est possible de limiter leur valeur singulière maximale pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . Ceci peut améliorer le conditionnement de la matrice. Limiter la valeur singulière maximale à la valeur  $\lambda$  revient à vérifier :

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \left[ \begin{array}{cc} -\sqrt{\lambda}I & \begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{bmatrix} & -\sqrt{\lambda}I \end{array} \right] < 0.$$

### A.2.1.3 Résultats de conception d'un correcteur $H_\infty$ dépendant d'un paramètre par optimisation LMI indépendant d'un paramètre

Ici, nous nous intéressons aux conditions d'existence d'un correcteur sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  obtenues avec l'approche par élimination paramétrisée (voir le Théorème A.3, page 185). Nous voulons les transformer en des problèmes d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$ .

Pour le premier problème d'optimisation (condition (i) du Théorème A.3), la transformation est donnée dans le théorème suivant. Dans ce théorème, il est utilisé les notations présentées à la page 113.

**Théorème A.6** (Existence d'un correcteur  $H_\infty$  étendue par élimination (forme (i)) en dimension finie). Soient  $N$  un entier positif et des scalaires  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ . Supposons que  $\begin{bmatrix} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \end{bmatrix}_\perp$  et  $\begin{bmatrix} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \end{bmatrix}_\perp$  sont de tailles constantes et sont rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , et admettent une représentation LFT.

Alors il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  définies par

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les contraintes (A.10), (A.11) et (A.12) sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ;
- des réels  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_0}, B_{\Omega_0}, C_{\Omega_0}, D_{\Omega_0}, \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_0 \\ -\mathcal{M}_0^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_0 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{R}_X & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_Y \end{bmatrix} \quad \text{et avec} \quad \theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_0} & B_{\Omega_0} \\ \hline C_{\Omega_0} & D_{\Omega_0} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} I_{2n} & \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0 \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_X & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d,n_z} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{d,n_w} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} A(\theta)^T & C_z(\theta)^T & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} I_{n_z} & 0 \\ B_w(\theta)^T & D_{zw}(\theta)^T & -\frac{\gamma}{2} I_{n_w} \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_{n_z}(c_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T \end{bmatrix}_\perp & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix};$$

(iii) il existe  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_2}, B_{\Omega_2}, C_{\Omega_2}, D_{\Omega_2}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_2 \right) < 0 \quad (\text{A.17})$$

avec

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_y & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d,n_w} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{d,n_z} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_2} & B_{\Omega_2} \\ \hline C_{\Omega_2} & D_{\Omega_2} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} I_{n_w} & 0 \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\frac{\gamma}{2} I_{n_z} \\ \hline \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_{n_z}(c_i) \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} [C_y(\theta) & D_{yw}(\theta)]_{\perp} & 0 \\ \hline 0 & I_{n_z} \end{array} \right].$$

**Démonstration** La démonstration est omise car très similaire à la démonstration de la transformation du problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  du Théorème 3.1, page 110, en le problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$  du Théorème 3.3, page 114.  $\square$

Pour le deuxième problème d'optimisation (condition (ii) du Théorème A.3), la transformation est donnée dans le théorème suivant. Dans ce théorème, il est utilisé les notations présentées à la page 113.

**Théorème A.7** (Existence d'un correcteur  $H_{\infty}$  étendue par élimination (forme (ii)) en dimension finie). Soient  $N$  un entier positif et des scalaires  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ .

Alors il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$  et un réel  $\sigma$  définis par

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , et où  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les contraintes (A.13), (A.14) et (A.15) sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, N$  ;
- des réels  $\bar{\sigma}$  et  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_0}, B_{\Omega_0}, C_{\Omega_0}, D_{\Omega_0}, \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_0 \\ -\mathcal{M}_0^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_0 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} \quad \text{et avec} \quad \theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_0} & B_{\Omega_0} \\ \hline C_{\Omega_0} & D_{\Omega_0} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} I_{2n} \\ \hline \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d,n_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{d,n_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma} I_{n_u} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} F_{11}(\theta)^T \\ F_{12}(\theta) F_{13}(\theta) \end{bmatrix}$$

où

$$F_{11}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & 0 & B_w(\theta) & B_u(\theta) \\ C_z(\theta) & -\frac{\gamma}{2} I_{n_z} & D_{zw}(\theta) & D_{zu}(\theta) \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2} I_{n_w} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{12}(\theta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_z}(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n_u} \end{array} \right]$$

$$F_{13}(\theta) = \left[ \begin{array}{ccc} I_{n+n_z+n_w} \\ B_u(\theta)^T & D_{zu}(\theta)^T & 0 \end{array} \right];$$

(iii) il existe  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_2}, B_{\Omega_2}, C_{\Omega_2}, D_{\Omega_2}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_2 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d,n_w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_{d,n_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\sigma} I_{n_y} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_2} & B_{\Omega_2} \\ \hline C_{\Omega_2} & D_{\Omega_2} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} F_{21}(\theta)^T \\ F_{22}(\theta) F_{23}(\theta) \end{bmatrix}$$

où

$$F_{21}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta)^T & 0 & C_z(\theta)^T & C_y(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T & -\frac{\gamma}{2} I_{n_w} & D_{zw}(\theta)^T & D_{yw}(\theta)^T \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2} I_{n_z} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{22}(\theta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_{n_z}(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n_y} \end{array} \right]$$

$$F_{23}(\theta) = \left[ \begin{array}{ccc} I_{n+n_w+n_z} \\ C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) & 0 \end{array} \right].$$

**Démonstration** La démonstration est très similaire à la démonstration de la transformation du problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  du Théorème 3.1, page 110, en le problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de  $\theta$  du Théorème 3.3, page 114, au détail près suivant. Pour transformer les contraintes (A.14) et (A.15), nous multiplions ces contraintes par

$$\frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i},$$

ce qui donne les contraintes

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i} G_U(\theta) - \left( \sigma \frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i} \right) U(\theta)^T U(\theta) &< 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i} G_V(\theta) - \left( \sigma \frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i} \right) V(\theta)^T V(\theta) &< 0 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G_U(\theta) &= \begin{bmatrix} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & \mathcal{X}(\theta)C_z(\theta)^T & B_w(\theta) \\ C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta) \\ B_w(\theta)^T & D_{zw}(\theta)^T & -\gamma I \end{bmatrix}, \\ G_V(\theta) &= \begin{bmatrix} A(\theta)^T \mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) & \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) & C_z(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T \mathcal{Y}(\theta) & -\gamma I & D_{zw}(\theta)^T \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & -\gamma I \end{bmatrix}, \\ U(\theta) &= [ B_u(\theta)^T \quad D_{zu}(\theta)^T \quad 0 ] \end{aligned}$$

et

$$V(\theta) = [ C_y(\theta) \quad D_{yw}(\theta) \quad 0 ].$$

Or ces deux dernières contraintes sont équivalentes par continuité et compacité à l'existence d'un réel  $\bar{\sigma}$  tel que

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i} G_U(\theta) - \bar{\sigma} U(\theta)^T U(\theta) &< 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i} G_V(\theta) - \bar{\sigma} V(\theta)^T V(\theta) &< 0 \end{aligned}$$

Soit

$$\alpha = \max_{\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]} \frac{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}{1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i}.$$

L'implication est alors obtenue en choisissant  $\bar{\sigma}$  supérieur ou égal à  $\sigma \alpha$ . La réciproque est obtenue en choisissant  $\sigma$  inférieure ou égal à  $\frac{\bar{\sigma}}{\alpha}$ . Il est alors appliqué le Théorème 1.6, page 50.  $\square$

## A.2.2 Solution du Problème $H_2$ dépendant d'un paramètre

Dans cette annexe, nous considérons le problème dépendant d'un paramètre associé à la norme  $H_2$ . Ce problème consiste à déterminer, s'il existe, un correcteur garantissant que la norme  $H_2$  du système en boucle fermée est inférieure à une certaine borne pour toutes les valeurs de  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ .

**Problème A.1** (Problème  $H_2$  dépendant d'un paramètre). Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, et  $\gamma$  un réel strictement positif.

Trouver, s'il existe, un correcteur  $K(p, \theta)$  défini par (3.2) tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :

1. le système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ;
2. la norme  $H_\infty$  du système en boucle fermée est strictement inférieure à  $\gamma$  :

$$\|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_2 < \gamma$$

avec par définition

$$\|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_2 = \frac{1}{2\pi} \text{Trace} \left( \int_0^\infty (P(j\omega, \theta) \star K(j\omega, \theta))^* (P(j\omega, \theta) \star K(j\omega, \theta)) d\omega \right).$$

**Remarque A.3.** Dans ce problème,  $\gamma$  majore le pire cas sur la norme de  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{P}$  (voir page 61) : nous avons

$$\gamma \geq \max_{\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]} \|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_2.$$

Nous en développons la solution. Nous suivons les mêmes étapes que pour la solution du Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre (Problème 3.1, page 105). Les démonstrations sont omises car très similaires à celles données pour le Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre.

**Résultat d'analyse  $H_2$  pour un système dépendant d'un paramètre** Nous donnons donc d'abord le lemme d'analyse correspondant. Les conditions nécessaires et suffisantes sont sous la forme d'un problème d'optimisation dépendant de  $\theta$ . Il s'agit d'une extension du résultat d'analyse pour le cas indépendant de paramètre [BEFB94].

**Lemme A.6** (Analyse  $H_2$  dépendant de  $\theta$ ). Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $G(p, \theta)$  le système défini par (3.3), page 108, et  $\gamma$  un réel strictement positif.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $G(p, \theta)$  est asymptotiquement stable et  $\|G(p, \theta)\|_2 < \gamma$  ;
- (ii)  $D_G(\theta) = 0$  et il existe  $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta)^T$  et  $\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{T}(\theta)^T$  (deux matrices de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ) telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) + \mathcal{P}(\theta) A_G(\theta) & \mathcal{P}(\theta) B_G(\theta) \\ B_G(\theta)^T \mathcal{P}(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\theta) & C_G(\theta)^T \\ C_G(\theta) & \mathcal{T}(\theta) \end{bmatrix} > 0; \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Trace}(\mathcal{T}(\theta)) - \gamma < 0. \quad (\text{A.20})$$

**Résultats de synthèse d'un correcteur  $H_2$  dépendant d'un paramètre par optimisation LMI dépendant d'un paramètre** Il est alors possible de donner des conditions d'existence d'un correcteur (et de construction) en utilisant soit un changement de variables paramétrisé, soit en utilisant le lemme d'élimination paramétrisé.

Nous considérons d'abord l'approche par changement de variables paramétrisé. Pour simplifier l'écriture, nous imposons l'hypothèse suivante : pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $D_{zw}(\theta) = 0$ . Remarquons que cette hypothèse est moins forte que celles généralement faites [DGKF89]. Par ailleurs, elle n'est pas restrictive car il suffit de filtrer les sorties  $z$  pour que cette hypothèse soit vérifiée. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un correcteur, sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ , sont alors énoncées dans le théorème suivant. Ce théorème donne aussi une formule explicite de construction d'un correcteur.

**Théorème A.8** (Synthèse  $H_2$  dépendant de  $\theta$  par changement de variables paramétrisé). Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, avec  $D_{zw}(\theta) = 0$  et  $\gamma$  un réel strictement positif.

Alors il existe un correcteur dépendant de  $\theta$

$$K(p, \theta) = \frac{1}{p} I_n \star \left[ \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right]$$

tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :

1. le système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ;
2.  $\|P(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_2 < \gamma$

si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  ;
- des matrices  $\mathcal{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  et  $\mathcal{C}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  ;
- une matrice symétrique  $\mathcal{T}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  rationnelles en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.21), (A.22) et (A.23) soient vérifiées :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T + \dots & \mathcal{A}(\theta)^T + A(\theta) & B_w(\theta) \\ \hline B_u(\theta)\mathcal{C}(\theta) + (B_u(\theta)\mathcal{C}(\theta))^T & & \\ \hline \mathcal{A}(\theta) + A(\theta)^T & A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) + \dots & \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) + \dots \\ \hline & \mathcal{B}(\theta)\mathcal{C}_y(\theta) + (\mathcal{B}(\theta)\mathcal{C}_y(\theta))^T & \mathcal{B}(\theta)D_{yw}(\theta) \\ \hline B_w(\theta)^T & (\mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) + \mathcal{B}(\theta)D_{yw}(\theta))^T & -I \end{array} \right] < 0; \quad (\text{A.21})$$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \mathcal{X}(\theta) & I & (C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{C}(\theta))^T \\ \hline I & \mathcal{Y}(\theta) & C_z(\theta)^T \\ \hline C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{C}(\theta) & C_z(\theta) & \mathcal{T}(\theta) \end{array} \right] > 0; \quad (\text{A.22})$$

$$\text{Trace}(\mathcal{T}(\theta)) - \gamma < 0. \quad (\text{A.23})$$

Si les matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$ ,  $\mathcal{A}(\theta)$ ,  $\mathcal{B}(\theta)$ ,  $\mathcal{C}(\theta)$  et  $\mathcal{T}(\theta)$  existent, un correcteur peut être construit en utilisant la formule explicite du Théorème 3.2, page 112, avec  $\mathcal{D}(\theta) = 0$ .

**Remarque A.4.** La contrainte  $D_G(\theta) = 0$  du Lemme A.6 s'écrit  $D_{zw}(\theta) + D_{zu}(\theta)\mathcal{D}(\theta)D_{yw}(\theta) = 0$ . Lorsque  $D_{zw}(\theta) = 0$ , une solution est alors  $\mathcal{D}(\theta) = 0$ . C'est pourquoi par rapport au Théorème 3.1, la variable  $\mathcal{D}(\theta)$  a disparu dans le problème d'optimisation, alors que pour la construction d'un correcteur, on l'a choisie nulle.

Nous considérons maintenant l'approche par élimination paramétrisée. Pour simplifier, nous imposons les hypothèses suivantes : pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $D_{zw}(\theta) = 0$  et  $D_{zu}(\theta) = 0$ . Ces hypothèses ne sont pas restrictives car il suffit de filtrer les sorties  $z$  pour les vérifier. Les conditions nécessaires et suffisantes sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ , d'existence d'un correcteur sont alors données dans le théorème suivant.

**Théorème A.9** (Existence d'un correcteur  $H_2$  dépendant de  $\theta$  par élimination paramétrisée). Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, avec  $D_{zw}(\theta) = 0$  et  $D_{zu}(\theta) = 0$ , et  $\gamma$  un réel strictement positif.

Alors il existe un correcteur dépendant de  $\theta$

$$K(p, \theta) = \frac{1}{p} I_n \star \left[ \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right]$$

tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :

1. le système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ;
2.  $\|P(p, \theta) \star K(s, \theta)\|_2 < \gamma$

si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  ;
- une matrice symétrique  $\mathcal{T}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

telles que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (i) pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.24), (A.25), (A.26) et (A.27) soient vérifiées ;

$$\left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)_\perp^T & 0 \\ 0 & I \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & B_w(\theta) \\ B_w(\theta)^T & -I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)_\perp^T & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\left[ \begin{array}{cc} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \end{array} \right]_\perp^T \left[ \begin{array}{cc} A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) & \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) \\ B_w(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & -I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \end{array} \right]_\perp < 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\theta) & I & \mathcal{X}(\theta)C_z(\theta)^T \\ I & \mathcal{Y}(\theta) & C_z(\theta)^T \\ C_z(\theta)\mathcal{X}(\theta) & C_z(\theta) & \mathcal{T}(\theta) \end{array} \right] > 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\text{tr}(\mathcal{T}(\theta)) - \gamma < 0; \quad (\text{A.27})$$

- (ii) il existe un réel  $\sigma(\theta)$ , rationnel en  $\theta$ , bien posé sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.28), (A.29), (A.26) et (A.27) soient vérifiées.

$$\left[ \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & B_w(\theta) \\ B_w(\theta)^T & -I \end{array} \right] - \sigma \left[ \begin{array}{c} B_u(\theta) \\ 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} B_u(\theta)^T & 0 \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\left[ \begin{array}{cc} A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) + \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) & \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) \\ B_w(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & -I \end{array} \right] - \sigma \left[ \begin{array}{c} C_y(\theta)^T \\ D_{yw}(\theta)^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \end{array} \right] < 0. \quad (\text{A.29})$$

Si un correcteur existe, il y a deux possibilités pour en construire un : par résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  ou par formule explicite. La construction d'un correcteur par problème d'optimisation est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème A.10** (Construction d'un correcteur  $H_2$  dépendant de  $\theta$  par problème LMI dépendant de  $\theta$ ). *Les matrices de la représentation d'état de  $K(p, \theta)$  sont données par la solution du problème suivant : il existe  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$  et  $C_K(\theta)$  telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.18), (A.19) et (A.20) soient vérifiées avec  $\mathcal{P}(\theta)$  donnée par*

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\theta) & N(\theta) \\ N(\theta)^T & N(\theta)^T(\mathcal{Y}(\theta) - \mathcal{X}(\theta)^{-1})^{-1}N(\theta) \end{bmatrix}$$

où  $N(\theta)$  est n'importe quelle matrice rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $N(\theta)$  est inversible et avec

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta) & B_G(\theta) \\ C_G(\theta) & D_G(\theta) \end{bmatrix}$$

donnée par l'équation (A.7) page 177 où  $D_K(\theta) = 0$ .

La construction d'un correcteur par formule explicite est donnée dans le théorème suivant. Pour simplifier les formules, nous imposons en plus l'hypothèse suivante [DGKF89] :

$$D_{yw}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_y} \end{bmatrix}.$$

Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème A.11** (Construction d'un correcteur  $H_2$  dépendant de  $\theta$  par formule explicite). *Une formule explicite est donnée par la formule explicite du Théorème 3.2), page 112, avec*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\theta) = & \begin{bmatrix} -A(\theta)^T & 0 \\ -\frac{\sigma}{2}B_u(\theta)^T & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\theta)B_w(\theta) & C_y(\theta)^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|c} -I_{n_w-n_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_y} \\ \hline 0 & I_{n_y} & -I_{n_y} \end{array} \right] \begin{bmatrix} B_w(\theta)^T & 0 \\ 0 & I_{n_y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où  $\sigma(\theta)$  est tel que les conditions (A.28) et (A.29) sont vérifiées.

**Résultats de synthèse d'un correcteur  $H_2$  dépendant d'un paramètre par optimisation LMI indépendant de paramètre** Il reste maintenant à transformer les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  obtenus dans le paragraphe précédent en problèmes d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Les notations utilisées sont celles de la page 113 avec en plus les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_N & \dots & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{R}_T &= \begin{bmatrix} \mathcal{T}_N & \dots & \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{R}_{\mathcal{T}_{jj}} &= \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{jjN} & \dots & \mathcal{T}_{jj1} & \mathcal{T}_{jj0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre obtenues après transformation sont énoncées dans le théorème suivant pour l'approche par changement de variables paramétrisé (Théorème A.8).

**Théorème A.12** (Existence d'un correcteur  $H_2$  dépendant de  $\theta$  par changement de variables paramétrisé en dimension finie). *Soit  $N$  un entier positif et des scalaires  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ .*

*Alors il existe des variables  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$ ,  $\mathcal{V}(\theta)$  (avec  $\mathcal{D}(\theta) = 0$ ) et  $\mathcal{T}(\theta)$  de la forme suivante :*

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{T}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{T}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

$$\mathcal{V}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\theta) & \mathcal{B}(\theta) \\ \mathcal{C}(\theta) & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{V}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ ,  $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i^T \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.21), (A.22) et (A.23) sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{T}_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ , et des matrices  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ ,  $i = 0, \dots, N$ , avec

$$\mathcal{V}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_i \\ \mathcal{C}_i & 0 \end{bmatrix};$$

- des réels  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0 \quad (\text{A.30})$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_{d,n_w} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} F_{11}(\theta)^T \\ F_{12}(\theta) F_{13}(\theta) \end{bmatrix}$$

où

$$F_{11}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & B_u(\theta) & A(\theta) & 0 & B_w(\theta) \\ I_n & 0 & 0 & A(\theta)^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I_{n_w} \end{bmatrix}$$

$$F_{12}(\theta) = \begin{bmatrix} \theta I \star J_{n+n_y}(c_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) \end{bmatrix}$$

$$F_{13}(\theta) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \\ \hline I_{n+n+n_w} \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_2}, B_{\Omega_2}, C_{\Omega_2}, D_{\Omega_2}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_2 \right) < 0 \quad (\text{A.31})$$

avec

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_x & \mathcal{R}_{d,n} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d,n} & \mathcal{R}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{R}_T \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_2} & B_{\Omega_2} \\ \hline C_{\Omega_2} & D_{\Omega_2} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & D_{zu}(\theta)^T \\ \frac{1}{2}I_n & 0 & C_z(\theta)^T \\ 0 & \frac{1}{2}I_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I_{n_z} \\ \hline \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_{n_z}(c_i) \end{bmatrix};$$

(iii) il existe  $\mathcal{W}_3 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_3}, B_{\Omega_3}, C_{\Omega_3}, D_{\Omega_3}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_3(\gamma) \\ \mathcal{M}_3(\gamma)^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_3 \right) < 0 \quad (\text{A.32})$$

avec

$$\mathcal{M}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{T_{11}} \\ \vdots \\ \mathcal{R}_{T_{n_z n_z}} \\ \gamma \mathcal{R}_{d,1} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_3} & B_{\Omega_3} \\ \hline C_{\Omega_3} & D_{\Omega_3} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ \theta I \star J_1(c_i) \end{bmatrix}$$

où  $\mathcal{T}_{jj}(\theta)$  est le jème élément de la diagonale de  $\mathcal{T}(\theta)$  :

$$\mathcal{T}_{jj}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{T}_{jj}^i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}.$$

Les conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendantes de paramètre obtenues après transformation sont énoncées dans le théorème suivant pour l'approche par élimination paramétrisée (condition (i) du Théorème A.9).

**Théorème A.13** (Existence d'un correcteur  $H_2$  dépendant de  $\theta$  par élimination (forme (i)) en dimension finie). *Soit  $N$  un entier positif et des scalaires  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ . Supposons que  $B_u(\theta)_\perp^T$  et  $\begin{bmatrix} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \end{bmatrix}_\perp$*

sont de taille constante et sont rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , et admettent une représentation LFT.

Alors il existe des variables  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$  et  $\mathcal{T}(\theta)$  de la forme suivante :

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \theta^i \mathcal{X}_i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{T}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{T}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i^T \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.24), (A.25), (A.26) et (A.27) sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{T}_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,
- des réels  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d, n_w} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} A(\theta)^T & 0 \\ B_w(\theta)^T & -\frac{1}{2} I_{n_w} \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u(\theta)_\perp^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_2}, B_{\Omega_2}, C_{\Omega_2}, D_{\Omega_2}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_2 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_y & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d, n_w} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_2} & B_{\Omega_2} \\ \hline C_{\Omega_2} & D_{\Omega_2} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) \\ 0 & -\frac{1}{2} I_{n_w} \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) \end{bmatrix}_\perp;$$

(iii) il existe  $\mathcal{W}_3 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_3}, B_{\Omega_3}, C_{\Omega_3}, D_{\Omega_3}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_3^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_3 \right) < 0 \quad (\text{A.33})$$

avec

$$\mathcal{M}_3 = \left[ \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_x & \mathcal{R}_{d,n} & 0 \\ \mathcal{R}_{d,n} & \mathcal{R}_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathcal{R}_T \end{array} \right]$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_3} & B_{\Omega_3} \\ \hline C_{\Omega_3} & D_{\Omega_3} \end{array} \right] \triangleq \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}I_n & 0 & C_z(\theta)^T \\ 0 & \frac{1}{2}I_n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I_{n_z} \\ \hline \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & \theta I \star J_{n_z}(c_i) \end{array} \right];$$

(iv) il existe  $\mathcal{W}_4 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_4}, B_{\Omega_4}, C_{\Omega_4}, D_{\Omega_4}, \left[ \begin{array}{cc} 0 & \mathcal{M}_4(\gamma) \\ \mathcal{M}_4(\gamma)^T & 0 \end{array} \right], \mathcal{W}_4 \right) < 0 \quad (\text{A.34})$$

avec

$$\mathcal{M}_4(\gamma) = \left[ \begin{array}{c} \mathcal{R}_{\mathcal{T}_{11}} \\ \vdots \\ \mathcal{R}_{\mathcal{T}_{n_z n_z}} \\ \gamma \mathcal{R}_{d,1} \end{array} \right]$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_4} & B_{\Omega_4} \\ \hline C_{\Omega_4} & D_{\Omega_4} \end{array} \right] \triangleq \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ \theta I \star J_1(c_i) \end{array} \right]$$

où  $\mathcal{T}_{jj}(\theta)$  est le  $j$ ème élément de la diagonale de  $\mathcal{T}(\theta)$  :

$$\mathcal{T}_{jj}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \theta^i \mathcal{T}_{jji}}{1 + \sum_{i=1}^N \theta^i d_i}.$$

Les conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre obtenues après transformation sont énoncées dans le théorème suivant pour l'approche par élimination paramétrisée (condition (ii) du Théorème A.9).

**Théorème A.14** (Existence d'un correcteur  $H_2$  dépendant de  $\theta$  par élimination (forme (ii)) en dimension finie). Soit  $N$  un entier positif et des scalaires  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ .

Alors il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$ ,  $\mathcal{T}(\theta)$  et un réel  $\sigma$  de la forme suivante :

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{T}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{T}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i^T \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.28), (A.29), (A.26) et (A.27) sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{T}_i \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,
- des réels  $\bar{\sigma}$  et  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{\mathcal{X}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d, n_w} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} I_{n_u} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} F_{11}(\theta)^T \\ F_{12}(\theta) F_{13}(\theta) \end{bmatrix}$$

où

$$F_{11}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) & B_u(\theta) \\ 0 & -\frac{1}{2} I_{n_w} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{12}(\theta) = \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+n_w} \\ B_u(\theta)^T \quad 0 \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_2}, B_{\Omega_2}, C_{\Omega_2}, D_{\Omega_2}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_2 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_y & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{d, n_w} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} I_{n_y} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_2} & B_{\Omega_2} \\ \hline C_{\Omega_2} & D_{\Omega_2} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} F_{21}(\theta)^T \\ F_{22}(\theta) F_{23}(\theta) \end{bmatrix}$$

où

$$F_{21}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta)^T & 0 & C_y(\theta)^T \\ B_w(\theta)^T & -\frac{1}{2} I_{n_w} & D_{yw}(\theta)^T \end{bmatrix}$$

$$F_{22}(\theta) F_{23}(\theta) = \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & \theta I \star J_{n_w}(c_i) & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+n_w} \\ C_y(\theta) \quad D_{yw}(\theta) \end{bmatrix};$$

(iii) il existe  $\mathcal{W}_3 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que la condition (A.33) est vérifiée ;

(iii) il existe  $\mathcal{W}_4 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que la condition (A.34) est vérifiée.

### A.2.3 Solution du Problème de placement de pôles dépendant d'un paramètre

Dans cette annexe, nous considérons le problème dépendant d'un paramètre associé à la localisation des pôles. Ce problème consiste à déterminer, s'il existe, un correcteur garantissant que tous les pôles du système en boucle fermée sont dans une certaine région  $R(\theta)$  du plan complexe pour toutes les valeurs de  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . La famille  $R(\theta)$  de régions LMI est définie par (voir [CG96, Chi96] pour les différentes régions que peut représenter  $R(\theta)$ )

$$R(\theta) = \{z \in \mathbb{C} \mid L(\theta) + zM(\theta) + z^*M(\theta)^T < 0\} \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \quad R(\theta) \subset \mathbb{C}^- \quad (\text{A.35})$$

où  $L(\theta) = L(\theta)^T$  et  $M(\theta)$  sont des fonctions rationnelles de  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  dans  $\mathbb{R}^{r \times r}$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , qui admettent une représentation LFT et où  $\mathbb{C}^-$  est l'ensemble des complexes à partie réelle strictement négative.

**Problème A.2** (Problème de placement de pôles dépendant d'un paramètre). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, et  $R(\theta)$  une famille de régions LMI définie par (A.35).*

*Trouver, s'il existe, un correcteur  $K(p, \theta)$  défini par (3.2) tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , tous les pôles de  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  sont localisés dans  $R(\theta)$ .*

Nous en développons la solution. Nous suivons les mêmes étapes que pour la solution du Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre (Problème 3.1, page 105). Les démonstrations sont omises car très similaires à celles données pour le Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre.

**Résultat d'analyse de la localisation des pôles pour un système dépendant d'un paramètre** Nous donnons donc d'abord le lemme d'analyse correspondant. Les conditions nécessaires et suffisantes sont sous la forme d'un problème d'optimisation dépendant de  $\theta$ . Il s'agit d'une extension du résultat d'analyse pour le cas indépendant de paramètre [CG96, Chi96].

**Lemme A.7** (Analyse de la localisation des pôles dépendant d'un paramètre). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $G(p, \theta)$  le système défini par (3.3), page 108, et la famille de régions  $R(\theta)$  définie par (A.35), page 202.*

*Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , tous les pôles de  $G(p, \theta)$  sont dans  $R(\theta)$  ;*
- (ii) *il existe  $\mathcal{P}(\theta)$  (une matrice de fonctions rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ) telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$*

$$\mathcal{P}(\theta)^T > 0 \quad (\text{A.36})$$

$$L(\theta) \otimes \mathcal{P}(\theta) + M(\theta) \otimes (\mathcal{P}(\theta)A_G(\theta)) + M(\theta)^T \otimes (\mathcal{P}(\theta)A_G(\theta))^T < 0 \quad (\text{A.37})$$

où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker.

**Résultats de synthèse d'un correcteur pour le placement de pôles dépendant d'un paramètre par optimisation LMI dépendant d'un paramètre** Il est alors possible de donner des conditions d'existence d'un correcteur (et de construction) en utilisant soit un changement de variables paramétrisé, soit en utilisant le lemme d'élimination paramétrisé.

Nous considérons d'abord l'approche par changement de variables paramétrisé. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un correcteur, sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ , sont alors énoncées dans le théorème suivant. Ce théorème donne aussi une formule explicite de construction d'un correcteur.

**Théorème A.15** (Synthèse pour le placement de pôles dépendant d'un paramètre par changement de variables paramétrisé). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, et une famille de régions LMI  $R(\theta)$  défini par (A.35), page 202.*

Alors il existe un correcteur dépendant de  $\theta$

$$K(p, \theta) = \frac{1}{p} I_n \star \left[ \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right]$$

tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , tous les pôles du système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  sont dans la région  $R(\theta)$  si et seulement si il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ;
- des matrices  $\mathcal{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $\mathcal{C}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  et  $\mathcal{D}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.38) et (A.39) soient vérifiées :

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \right] > 0; \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} & L(\theta) \otimes \left[ \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \right] + \dots \\ M(\theta) \otimes \left[ \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + B_u(\theta)\mathcal{C}(\theta) & A(\theta) + B_u(\theta)\mathcal{D}(\theta)\mathcal{C}_y(\theta) \\ \mathcal{A}(\theta) & \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) + \mathcal{B}(\theta)\mathcal{C}_y(\theta) \end{array} \right] + \dots \\ & M(\theta)^T \otimes \left[ \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) + B_u(\theta)\mathcal{C}(\theta) & A(\theta) + B_u(\theta)\mathcal{D}(\theta)\mathcal{C}_y(\theta) \\ \mathcal{A}(\theta) & \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) + \mathcal{B}(\theta)\mathcal{C}_y(\theta) \end{array} \right]^T < 0. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Si les matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$ ,  $\mathcal{A}(\theta)$ ,  $\mathcal{B}(\theta)$ ,  $\mathcal{C}(\theta)$  et  $\mathcal{D}(\theta)$  existent, un correcteur peut être construit en utilisant la formule explicite du Théorème 3.2, page 112.

Nous considérons maintenant l'approche par élimination paramétrisé. Dans le cas général, il n'est pas possible d'appliquer le lemme d'élimination. En effet, à cause du produit de Kronecker qui apparaît dans le résultat d'analyse, les variables de décision relatif au correcteur apparaissent plusieurs fois. Ceci entraîne qu'il faudrait éliminer une matrice qui a une structure : ce n'est pas possible. Dans la cas où  $M(\theta)$  est de rang un, les matrices à éliminer apparaissent une seule et il est possible de les éliminer. Des

régions définies par  $R(\theta)$  avec  $M(\theta)$  une matrice de rang un sont par exemple l'ensemble des complexes dont la partie réelle est inférieure à  $-a(\theta)$  et l'ensemble des complexes de module inférieure à  $m(\theta)$ . Ces ensembles sont respectivement définis par [CG96, Chi96] :

$$R(\theta) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2a(\theta) + z + z^* < 0\} \quad (\text{A.40})$$

et

$$R(\theta) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \begin{bmatrix} -m(\theta) & 0 \\ 0 & -m(\theta) \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z^* \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T < 0 \right\}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ , d'existence d'un correcteur sont alors données dans le théorème suivant.

**Théorème A.16** (Existence d'un correcteur pour le placement de pôles dépendant de  $\theta$  par élimination paramétrisé). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, et une famille de régions LMI  $R(\theta)$  défini par (A.35), page 202, avec  $M(\theta)$  de rang un. Soient  $M_1(\theta)M_2(\theta)^T$  une factorisation de rang plein de  $M(\theta)$ .*

Alors il existe un correcteur dépendant de  $\theta$

$$K(p, \theta) = \frac{1}{s} I_n \star \left[ \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right]$$

tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , tous les pôles du système en boucle fermée  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  sont dans la région  $R(\theta)$  si et seulement s'il existe des matrices symétriques  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telles que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

(i) pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.41), (A.42) et (A.43) soient vérifiées ;

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.41})$$

$$M_2(\theta)^T \otimes \begin{array}{ccc} 0 & I_n & \\ B_u(\theta)^T & 0 & \perp \\ & & \end{array} \begin{array}{c} L(\theta) \otimes \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \\ + M(\theta) \otimes \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) & A(\theta) \\ 0 & \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) \end{array} \\ + \dots \end{array} < 0 \quad (\text{A.42})$$

$$\dots + M(\theta)^T \otimes \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & 0 & \\ A(\theta)^T & A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & \\ & & \end{array} \begin{array}{c} M_1(\theta)^T \otimes \begin{array}{cc} 0 & I_n \\ B_u(\theta)^T & 0 \\ & \perp \end{array} \\ < 0 \end{array}$$

$$M_1(\theta)^T \otimes \begin{array}{ccc} I_n & 0 & \\ 0 & C_y(\theta) & \perp \\ & & \end{array} \begin{array}{c} L(\theta) \otimes \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \\ + M(\theta) \otimes \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) & A(\theta) \\ 0 & \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) \end{array} \\ + \dots \end{array} < 0 \quad (\text{A.43})$$

$$\dots + M(\theta)^T \otimes \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & 0 & \\ A(\theta)^T & A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & \\ & & \end{array} \begin{array}{c} M_2(\theta)^T \otimes \begin{array}{cc} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta) \\ & \perp \end{array} \\ < 0 \end{array}$$

(ii) il existe un réel  $\sigma$  tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.44), (A.45) et (A.46) :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.44})$$

$$L(\theta) \otimes \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} + M(\theta) \otimes \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) & A(\theta) \\ 0 & \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) \end{array} + M(\theta)^T \otimes \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & 0 & \\ A(\theta)^T & A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & \\ & & \end{array} + \dots < 0$$

$$\dots - \sigma \begin{array}{ccc} M_1(\theta) \otimes \begin{array}{cc} 0 & B_u(\theta) \\ I_n & 0 \end{array} & M_1(\theta) \otimes \begin{array}{cc} 0 & B_u(\theta) \\ I_n & 0 \end{array} \\ < 0 \end{array} \quad (\text{A.45})$$

$$L(\theta) \otimes \begin{array}{cc} \mathcal{X}(\theta) & I \\ I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} + M(\theta) \otimes \begin{array}{cc} A(\theta)\mathcal{X}(\theta) & A(\theta) \\ 0 & \mathcal{Y}(\theta)A(\theta) \end{array} + M(\theta)^T \otimes \begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\theta)A(\theta)^T & 0 & \\ A(\theta)^T & A(\theta)^T\mathcal{Y}(\theta) & \\ & & \end{array} + \dots < 0$$

$$\dots - \sigma \begin{array}{ccc} M_2(\theta) \otimes \begin{array}{cc} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta)^T \end{array} & M_2(\theta) \otimes \begin{array}{cc} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta)^T \end{array} \\ < 0 \end{array} \quad (\text{A.46})$$

Si un correcteur existe, il y a deux possibilités pour en construire un : par résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  ou par formule explicite. La construction d'un correcteur par problème d'optimisation est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème A.17** (Construction d'un correcteur pour le placement de pôles dépendant d'un paramètre par problème LMI dépendant de  $\theta$ ). *Les matrices de la représentation d'état de  $K(p, \theta)$  sont données par la solution du problème suivant : il existe  $A_K(\theta)$ ,  $B_K(\theta)$ ,  $C_K(\theta)$  et  $D_K(\theta)$  telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (A.39) soit vérifiée avec  $\mathcal{P}(\theta)$  donnée par*

$$\mathcal{P}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(\theta) & N(\theta) \\ N(\theta)^T & N(\theta)^T(\mathcal{Y}(\theta) - \mathcal{X}(\theta)^{-1})^{-1}N(\theta) \end{bmatrix}$$

où  $N(\theta)$  est n'importe quelle matrice rationnelle en  $\theta$ , bien posée sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $N(\theta)$  est inversible et avec

$$\begin{bmatrix} A_G(\theta) & B_G(\theta) \\ C_G(\theta) & D_G(\theta) \end{bmatrix}$$

donnée par l'équation (A.7) page 177.

La construction d'un correcteur peut aussi se faire par l'utilisation d'une formule explicite. Une telle formule est difficile à trouver dans le cas général. Il est possible d'en trouver une pour des cas particulier. Par exemple, dans le cas où  $R(\theta)$  est la région définie par (A.40), une formule explicite est donnée par la formule explicite du Théorème 3.2, page 112, avec

$$\mathcal{V}(\theta) = \begin{bmatrix} -A(\theta)^T - 2a(\theta)I_n & -\frac{\sigma}{2}C_y(\theta)^T \\ -\frac{\sigma}{2}B_u(\theta)^T & 0 \end{bmatrix}$$

où  $\sigma$  est tel que les conditions (A.45) et (A.46) sont vérifiées.

**Résultats de synthèse d'un correcteur pour le placement de pôles dépendant d'un paramètre par optimisation LMI indépendant de paramètre** Il reste maintenant à transformer les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  obtenus dans le paragraphe précédent en problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Les notations utilisées sont celles de la page 113.

Les conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre obtenues après transformation sont énoncées dans le théorème suivant pour l'approche par changement de variables paramétrisé (Théorème A.15).

**Théorème A.18** (Existence d'un correcteur pour le placement de pôles dépendant de  $\theta$  par changement de variables en dimension finie). *Soient  $N$  un entier positif et des réels  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ .*

*Alors il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$  et  $\mathcal{V}(\theta)$  de la forme suivante :*

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{V}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\theta) & \mathcal{B}(\theta) \\ \mathcal{C}(\theta) & \mathcal{D}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{V}_i \theta^i}{\sum_{i=1}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_v)}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.38) et A.39 sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et des matrices  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ ,  
 $i = 0, \dots, N$ ;
- des réels  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_0}, B_{\Omega_0}, C_{\Omega_0}, D_{\Omega_0}, \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_0 \\ -\mathcal{M}_0^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_0 \right) < 0 \quad (\text{A.47})$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} \quad \text{et avec} \quad \theta I \star \left[ \frac{A_{\Omega_0} \mid B_{\Omega_0}}{C_{\Omega_0} \mid D_{\Omega_0}} \right] \triangleq \begin{bmatrix} I_{2n} & \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0 \quad (\text{A.48})$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} I_r \otimes \mathcal{R}_y & 0 & 0 \\ 0 & I_r \otimes \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \otimes \mathcal{R}_{d,n} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \frac{A_{\Omega_1} \mid B_{\Omega_1}}{C_{\Omega_1} \mid D_{\Omega_1}} \right] \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\theta)^T \\ F_2(\theta) F_3(\theta) \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta) &= \left[ M(\theta) \otimes \begin{bmatrix} 0 & B_u(\theta) \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \mid \dots \right. \\ &\quad \dots \frac{1}{2} L(\theta) \otimes I_{2n} + M(\theta) \otimes \begin{bmatrix} A(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + M(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(\theta)^T \end{bmatrix} \mid \dots \\ &\quad \left. \dots -M(\theta) \otimes \begin{bmatrix} A(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$F_2(\theta) = \begin{bmatrix} I_r \otimes (\theta I \star J_{n+n_y}(c_i)) & 0 & 0 \\ 0 & I_r \otimes \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \otimes (\theta I \star J_n(c_i)) \end{bmatrix}$$

$$F_3(\theta) = \begin{bmatrix} I_r \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta) \end{bmatrix} \\ I_{2nr} \\ I_r \otimes \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Les conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre obtenues après transformation sont énoncées dans le théorème suivant pour l'approche par élimination paramétrisée (condition (i) du Théorème A.16).

**Théorème A.19** (Existence d'un correcteur pour le placement de pôles étendue par élimination (forme (i)) en dimension finie). *Soient  $N$  un entier positif et des réels  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ . Supposons que*

$$\left( M_2(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ B_u(\theta)^T & 0 \end{bmatrix} \right)_{\perp} \quad \text{et} \quad \left( M_1(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta) \end{bmatrix} \right)_{\perp}$$

sont de taille constante et sont rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  et admettent une représentation LFT.

Alors il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta)$  et  $\mathcal{Y}(\theta)$  de la forme suivante :

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (3.7), page 110), (A.42) et (A.43) sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,
- des réels  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_0}, B_{\Omega_0}, C_{\Omega_0}, D_{\Omega_0}, \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_0 \\ -\mathcal{M}_0^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_0 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} \quad \text{et avec} \quad \theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_0} & B_{\Omega_0} \\ \hline C_{\Omega_0} & D_{\Omega_0} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} I_{2n} & \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} I_r \otimes \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_r \otimes \mathcal{R}_{d,n} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} E(\theta) \\ -M(\theta)^T \otimes [A(\theta)^T \ 0] \\ I_r \otimes \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix} \\ I_r \otimes [0 \ \theta I \star J_n(c_i)] \end{bmatrix} \left( M_1(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ B_u(\theta)^T & 0 \end{bmatrix} \right)_{\perp}$$

avec

$$E(\theta) = \frac{1}{2}L(\theta)^T \otimes I_{2n} + M(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} A(\theta)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + M(\theta) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(\theta) \end{bmatrix};$$

(iii) il existe  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_2}, B_{\Omega_2}, C_{\Omega_2}, D_{\Omega_2}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_2 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} I_r \otimes \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I_r \otimes \mathcal{R}_{d,n} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_2} & B_{\Omega_2} \\ \hline C_{\Omega_2} & D_{\Omega_2} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} E(\theta) \\ -M(\theta)^T \otimes [A(\theta)^T \ 0] \\ I_r \otimes \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix} \\ I_r \otimes [0 \ \theta I \star J_n(c_i)] \end{bmatrix} \left( M_2(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta) \end{bmatrix} \right)_{\perp}.$$

Les conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre obtenues après transformation sont énoncées dans le théorème suivant pour l'approche par élimination paramétrisée (condition (ii) du Théorème A.9).

**Théorème A.20** (Existence d'un correcteur pour le placement de pôles dépendant de  $\theta$  par élimination (forme (ii)) en dimension finie). Soient  $N$  un entier positif et des réels  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ .

Alors il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$  et un réel  $\sigma$  de la forme suivante :

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.44), (A.45) et (A.46) sont vérifiées si et seulement s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,
- des réels  $\bar{\sigma}$  et  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

(i) il existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_0}, B_{\Omega_0}, C_{\Omega_0}, D_{\Omega_0}, \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{M}_0 \\ -\mathcal{M}_0^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_0 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} \quad \text{et avec} \quad \theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_0} & B_{\Omega_0} \\ \hline C_{\Omega_0} & D_{\Omega_0} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} I_{2n} \\ \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix};$$

(ii) il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_1}, B_{\Omega_1}, C_{\Omega_1}, D_{\Omega_1}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_1 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} I_r \otimes \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I_r \otimes \mathcal{R}_{d,n} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\sigma} I_{2nr} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_1} & B_{\Omega_1} \\ \hline C_{\Omega_1} & D_{\Omega_1} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} E(\theta) \\ -M(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} A(\theta)^T & 0 \end{bmatrix} \\ M_1(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ B_u(\theta)^T & 0 \end{bmatrix} \\ \hline I_r \otimes \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix} \\ I_r \otimes \begin{bmatrix} 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix} \\ M_1(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ B_u(\theta)^T & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

avec

$$E(\theta) = \frac{1}{2} L(\theta)^T \otimes I_{2n} + M(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} A(\theta)^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + M(\theta) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(\theta) \end{bmatrix};$$

(iii) il existe  $\mathcal{W}_2 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que

$$\mathcal{L} \left( A_{\Omega_2}, B_{\Omega_2}, C_{\Omega_2}, D_{\Omega_2}, \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{W}_2 \right) < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} I_r \otimes \begin{bmatrix} \mathcal{R}_x & 2\mathcal{R}_{d,n} \\ 0 & \mathcal{R}_y \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I_r \otimes \mathcal{R}_{d,n} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\sigma} I_{2nr} \end{bmatrix}$$

et avec

$$\theta I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{\Omega_2} & B_{\Omega_2} \\ \hline C_{\Omega_2} & D_{\Omega_2} \end{array} \right] \triangleq \begin{bmatrix} E(\theta) \\ -M(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} A(\theta)^T & 0 \end{bmatrix} \\ M_2(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta) \end{bmatrix} \\ \hline I_r \otimes \begin{bmatrix} \theta I \star J_n(c_i) & 0 \\ 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix} \\ I_r \otimes \begin{bmatrix} 0 & \theta I \star J_n(c_i) \end{bmatrix} \\ M_2(\theta)^T \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C_y(\theta) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

### A.2.4 Solution du Problème multi-critères dépendant d'un paramètre

Dans cette annexe, nous considérons le problème dépendant d'un paramètre associé au multi-critères. Ce problème consiste à déterminer, s'il existe, un correcteur garantissant que le système en boucle fermée a plusieurs ( $n_p$ ) propriétés pour toutes les valeurs de  $\theta \in \mathbb{P}$ . Pour la  $i^{\text{ème}}$  propriété, on sélectionne certaines composantes de  $w$  regroupées dans  $w^i$  ( $w^i = E_i^d w$ ) et certaines composantes de  $z$  regroupées dans  $z^i$  ( $z^i = E_i^g z$ ) qui nous intéressent, ce qui nous donne le système suivant

$$P_i(p, \theta) = E_i^g P(p, \theta) E_i^d \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B_{wi}(\theta)w(t) + B_u(\theta)u(t) \\ z(t) = C_{zi}(\theta)x(t) + D_{zwi}(\theta)w(t) + D_{zui}(\theta)u(t) \\ y(t) = C_y(\theta)x(t) + D_{ywi}(\theta)w(t) \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

avec  $C_{zi}(\theta) = E_i^g C_z(\theta)$ ,  $D_{zui}(\theta) = E_i^g D_{zu}(\theta)$ ,  $D_{zwi}(\theta) = E_i^g D_{zw}(\theta) E_i^d$ ,  $B_{wi}(\theta) = B_w(\theta) E_i^d$  et  $D_{ywi}(\theta) = D_{yw}(\theta) E_i^d$ . Un correcteur  $K(p, \theta)$  est alors recherché pour que  $P_i(p, \theta) \star K(p, \theta)$  ait la propriété  $i$ , pour tout  $i$ . Le correcteur  $K(p, \theta)$  doit aussi garantir, pour toutes les valeurs de  $\theta \in \mathbb{P}$ , la stabilité asymptotique du système en boucle fermée ou la localisation des pôles du système en boucle fermée dans une région LMI.

**Définition A.1** (Problème multi-critères dépendant d'un paramètre). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, s'il y a lieu  $R(\theta)$  une famille de régions LMI définie par (A.35), page 202 et les données de toutes les propriétés  $i$ , c'est-à-dire  $P_i(p, \theta)$  les systèmes augmentés définis par (A.49) et  $\gamma_i$  des réels strictement positifs.*

*Trouver, s'il existe, un correcteur  $K(p, \theta)$  défini par (3.2) tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :*

1.  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ou tous les pôles de  $P(p, \theta) \star K(p, \theta)$  sont localisés dans  $R(\theta)$  ;
2. pour  $i = 1, \dots, n_p$ ,  $\|P_i(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_\infty < \gamma_i$  si la propriété  $i$  est une norme  $H_\infty$  ou  $\|P_i(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_2 < \gamma_i$  si la propriété  $i$  est une norme  $H_2$ .

Nous en développons la résolution. Nous suivons les mêmes étapes que pour la solution du Problème  $H_\infty$  dépendant d'un paramètre (Problème 3.1, page 105). Les démonstrations sont omises.

#### Résultat d'analyse multi-critères pour un système dépendant d'un paramètre

Nous donnons donc d'abord le lemme d'analyse correspondant. Pour l'analyse multi-critères, il faut sélectionner des entrées et des sorties pour la propriété  $i$ . On a alors  $G_i(p, \theta) = E_i^g G(p, \theta) E_i^d$  défini par :

$$G_i(p, \theta) \begin{cases} \dot{x}_G(t) = A_G(\theta)x_G(t) + B_{Gi}(\theta)w(t) \\ z(t) = C_{Gi}(\theta)x_G(t) + D_{Gi}(\theta)w(t) \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

avec  $C_{Gi}(\theta) = E_i^g C_G(\theta)$ ,  $D_{Gi}(\theta) = E_i^g D_G(\theta) E_i^d$  et  $B_{Gi}(\theta) = B_G(\theta) E_i^d$ . Nous avons alors le lemme suivant.

Le lemme suivant est alors immédiat. Il énonce des conditions nécessaires et suffisantes sous la forme d'un problème d'optimisation dépendant de  $\theta$ .

**Lemme A.8** (Analyse multi-critères dépendant de  $\theta$ ). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $G(p, \theta)$  le système défini par (3.3), page 108, et les données de toutes les propriétés  $i$ ,  $i = 1, \dots, n_p$ , soit  $G_i(p, \theta)$  les systèmes définis en (A.50) et  $\gamma_i$  des entiers strictement positifs. S'il y a lieu, soit une famille de régions LMI  $R(\theta)$  définie par (A.35), page 202.*

*Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :*

(i)  $G(p, \theta)$  a les deux propriétés suivantes :

1.  $G(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ou tous les pôles de  $G(p, \theta)$  sont localisés dans  $R(\theta)$ ,
2. pour  $i = 1, \dots, n_p$ ,  $\|G_i(p, \theta)\|_\infty < \gamma_i$  si la propriété  $i$  est une norme  $H_\infty$  ou  $\|G_i(p, \theta)\|_2 < \gamma_i$  si la propriété  $i$  est une norme  $H_2$  ;

(ii) les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. s'il y a lieu, il existe  $\mathcal{P}(\theta)$  telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.36) et (A.37, page 202, soient vérifiées,
2. pour  $i = 1, \dots, n_p$ , il existe  $\mathcal{P}_i(\theta)$  telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.5) et (A.6), page 176, soient vérifiées avec  $\mathcal{P}(\theta)$  remplacée par  $\mathcal{P}_i(\theta)$  si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_\infty$  ou il existe  $\mathcal{P}_i(\theta)$  et  $\mathcal{T}_i(\theta)$  telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les conditions (A.21), (A.22) et (A.23), page 194, soient vérifiées avec  $\mathcal{P}(\theta)$  et  $\mathcal{T}(\theta)$  remplacées par  $\mathcal{P}_i(\theta)$  et  $\mathcal{T}_i(\theta)$  si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_2$ .

Ce lemme est une concaténation des lemmes précédents. Cependant, il faut remarquer que les variables de décision  $\mathcal{P}_i(\theta)$  des problèmes d'optimisation pour chaque propriété  $i$  ne sont pas les mêmes pour toutes les propriétés.

**Résultats de synthèse d'un correcteur multi-critères dépendant d'un paramètre par optimisation LMI dépendant d'un paramètre** Il est alors possible de donner des conditions d'existence d'un correcteur (et de le construire) en utilisant un changement de variables. Ce n'est pas possible, de façon directe, en utilisant le lemme d'élimination (nous l'expliquerons à la fin de ce paragraphe).

Nous considérons d'abord l'approche par changement de variables paramétrisé. Les conditions *suffisantes* d'existence d'un correcteur, sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ , sont alors énoncées dans le théorème suivant. Au contraire des autres théorèmes énoncés précédemment, les conditions trouvées ici ne sont que suffisantes. Dans le résultat d'analyse, les  $\mathcal{P}_i(\theta)$  sont différents les uns des autres. Donc, des conditions nécessaires et suffisantes conduiraient à des variables  $\mathcal{X}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{A}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{B}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{C}_i(\theta)$  et  $\mathcal{D}_i(\theta)$  pour chaque propriété  $i$ . Ces dernières matrices doivent de plus donner le même correcteur par la formule explicite. Au vu de cette formule (voir le Théorème 3.2, page 112), il est alors difficile de faire autrement que d'imposer aux matrices  $\mathcal{X}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{A}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{B}_i(\theta)$ ,  $\mathcal{C}_i(\theta)$  et  $\mathcal{D}_i(\theta)$  d'être les mêmes pour tous les  $i$ . Ceci conduit alors à des conditions suffisantes mais non nécessaires sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$ . Ce théorème donne aussi une formule explicite de construction d'un correcteur.

**Théorème A.21** (Synthèse d'un correcteur multi-critères dépendant d'un paramètre par changement de variables paramétrisé). *Soient  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ ,  $P(p, \theta)$  le système augmenté défini par (3.1), page 104, et les données de toutes les propriétés  $i$ ,*

$i = 1, \dots, n_p$ , soit  $P_i(p, \theta)$  les systèmes augmentés définis par (A.49), page 210, et  $\gamma_i$  des réels strictement positifs. S'il y a lieu, soit une famille de régions LMI  $R(\theta)$  définie par (A.35), page 202.

Alors il existe un correcteur dépendant de  $\theta$

$$K(p, \theta) = \frac{1}{p} I_n \star \left[ \begin{array}{c|c} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ \hline C_K(\theta) & D_K(\theta) \end{array} \right]$$

tel que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  :

1.  $P_i(p, \theta) \star K(p, \theta)$  est asymptotiquement stable ou tous les pôles de  $P_i(p, \theta) \star K(p, \theta)$  sont localisés dans  $R(\theta)$ ,
2. pour  $i = 1, \dots, n_p$ ,  $\|P_i(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_\infty < \gamma_i$  si la propriété  $i$  est une norme  $H_\infty$  ou  $\|P_i(p, \theta) \star K(p, \theta)\|_2 < \gamma_i$  si la propriété  $i$  est une norme  $H_2$  ;

s'il existe

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  ;
- des matrices  $\mathcal{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ ,  $\mathcal{C}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  et  $\mathcal{D}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$

telles que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. s'il y a lieu, les conditions (A.38) et (A.39), page 203, soient vérifiées ;
2. pour  $i = 1, \dots, n_p$ , les conditions (3.7) et (3.8) soient vérifiées si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_\infty$  ou il existe  $\mathcal{T}_i(\theta) = \mathcal{T}_i(\theta)^T$  telle que les conditions (A.21), (A.22) et (A.23), page 194, soient vérifiées avec  $\mathcal{T}(\theta)$  remplacée par  $\mathcal{T}_i(\theta)$  si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_2$ .

Si les matrices  $\mathcal{X}(\theta)$ ,  $\mathcal{Y}(\theta)$ ,  $\mathcal{A}(\theta)$ ,  $\mathcal{B}(\theta)$ ,  $\mathcal{C}(\theta)$ ,  $\mathcal{D}(\theta)$  et  $\mathcal{T}(\theta)_i$  existent, un correcteur peut être construit en utilisant la formule explicite du Théorème 3.2, page 112.

**Remarque A.5.** La condition

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{X}(\theta) & I \\ \hline I & \mathcal{Y}(\theta) \end{array} \right] > 0$$

est répétée plusieurs fois. Il suffit qu'elle n'apparaisse qu'une fois. Elle n'est pas nécessaire si l'une des propriétés est une propriété de norme  $H_2$  puisqu'elle est impliqué par la condition (A.22).

Si l'une des propriétés  $i$  est une norme  $H_2$ , alors  $\mathcal{D}(\theta) = 0$ .

Il n'est pas possible d'utiliser le Lemme d'élimination paramétrisé A.4, page 179, pour résoudre le Problème multi-critères dépendant d'un paramètre aussi directement qu'avec un changement de variables. La difficulté étant qu'en concaténant les conditions présentées précédemment en une seule comme dans la remarque 2.1, page 59, il n'est pas possible de factoriser la condition obtenue sous la forme du lemme d'élimination paramétrisé car la variable à éliminer aurait alors une structure. Par exemple, considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t)$$

avec  $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ . Et supposant que l'on veuille trouver pour ce système un retour d'état

$$u(t) = K(\theta)x(t),$$

avec  $K(\theta)$  continue en  $\theta$ , pour que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , le système bouclé

$$\dot{x}(t) = (A(\theta) + B(\theta)K(\theta))x(t)$$

soit stable et ait un taux de décroissance supérieure à  $a$  ( $a > 0$ ). Une condition nécessaire et suffisante est de trouver  $\mathcal{P}_1(\theta) = \mathcal{P}_1(\theta)^T$ ,  $\mathcal{P}_2(\theta) = \mathcal{P}_2(\theta)^T$  et  $\mathcal{K}(\theta)$  des fonctions continues de  $\theta$  telles que

$$\forall \theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}], \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1(\theta) > 0 \\ \mathcal{P}_2(\theta) > 0 \\ (A(\theta) + B(\theta)K(\theta))^T \mathcal{P}_1(\theta) + \mathcal{P}_1(\theta)(A(\theta) + B(\theta)K(\theta)) < 0 \\ 2a\mathcal{P}_2(\theta) + (A(\theta) + B(\theta)K(\theta))^T \mathcal{P}_2(\theta) + \mathcal{P}_2(\theta)(A(\theta) + B(\theta)K(\theta)) < 0 \end{array} \right. .$$

On voudrait éliminer  $K(\theta)$ . On cherche donc à factoriser  $K(\theta)$  dans les deux dernières conditions. Il vient : pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1(\theta) > 0 \\ \mathcal{P}_2(\theta) > 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} A(\theta)^T \mathcal{P}_1(\theta) + \mathcal{P}_1(\theta) A(\theta) & 0 \\ 0 & 2a\mathcal{P}_2(\theta) + A(\theta)^T \mathcal{P}_2(\theta) + \mathcal{P}_2(\theta) A(\theta) \end{array} \right] + \dots \\ \dots + \left[ \begin{array}{cc} B(\theta)^T \mathcal{P}_1(\theta) & 0 \\ 0 & B(\theta)^T \mathcal{P}_2(\theta) \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} K(\theta) & 0 \\ 0 & K(\theta) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{array} \right] + \dots \\ \dots + \left[ \begin{array}{cc} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} K(\theta) & 0 \\ 0 & K(\theta) \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} B(\theta)^T \mathcal{P}_1(\theta) & 0 \\ 0 & B(\theta)^T \mathcal{P}_2(\theta) \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. .$$

Il faudrait donc éliminer  $\left[ \begin{array}{cc} K(\theta) & 0 \\ 0 & K(\theta) \end{array} \right]$ . Or ceci n'est pas possible car cette matrice a une structure (voir le Lemme A.4, page 179).

Une façon indirecte pour résoudre le Problème multi-critères dépendant d'un paramètre avec une approche par élimination est d'utiliser une approche mono-critère. On cherche une seule propriété qui implique toutes les propriétés du multi-critères (voir le paragraphe sur la mise en œuvre de la méthode de synthèse  $H_\infty$  pour la détermination d'une borne atteignable dans le cas de plusieurs spécifications fréquentielles à la page 123). Dans notre exemple, le problème mono-critère est évident : il suffit que le système en boucle fermée ait un taux de décroissance supérieure à  $a$  ; il s'agit même d'une équivalence.

**Résultats de synthèse d'un correcteur pour le placement de pôle dépendant d'un paramètre par optimisation LMI indépendant de paramètre** Il reste maintenant à transformer le problème de faisabilité sous contraintes LMI dépendant de  $\theta$  obtenus dans le paragraphe précédent en un problème de faisabilité sous contraintes LMI indépendant de paramètre. Les notations utilisées sont celles de la page 113.

Les conditions sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes LMI indépendant de paramètre obtenues après transformation sont énoncées dans le théorème suivant pour l'approche par changement de variables paramétrisé (Théorème A.21).

**Théorème A.22** (Existence d'un correcteur multi-critères dépendant d'un paramètre par changement de variables paramétrisé en dimension finie). *Soit  $N$  un entier positif et des scalaires  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tels que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ ,  $1 + \sum_{i=1}^N c_i \theta^i \neq 0$ .*

*Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) il existe des matrices  $\mathcal{X}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{B}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $\mathcal{C}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  et  $\mathcal{D}(\theta) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ , rationnelles en  $\theta$ , bien posées sur  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  de la forme suivante :

$$\mathcal{X}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{X}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{Y}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i}, \quad \mathcal{V}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\theta) & \mathcal{B}(\theta) \\ \mathcal{C}(\theta) & \mathcal{D}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^N \mathcal{V}_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

où  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$  et  $d_i \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 0, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. s'il y a lieu, les conditions (A.38) et (A.39), page 203, soient vérifiées,
2. pour  $i = 1, \dots, n_p$ , les conditions (3.7) et (3.8) soient vérifiées si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_\infty$  ou il existe  $\mathcal{T}_i(\theta) = \mathcal{T}_i(\theta)^T$  telle que les conditions (A.21), (A.22) et (A.23), page 194, soient vérifiées avec  $\mathcal{T}(\theta)$  remplacée par  $\mathcal{T}_i(\theta)$  de la forme suivante

$$\mathcal{T}_i(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^N \mathcal{T}_{ij} \theta^j}{\sum_{i=0}^N d_i \theta^i},$$

si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_2$  ;

- (ii) il existe :

- des matrices symétriques  $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , et des matrices  $\mathcal{V}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_u) \times (n+n_y)}$ ,  $i = 0, \dots, N$  ;
- des réels  $d_i$ ,  $i = 0, \dots, N$

tels que

1. s'il y a lieu, les deux conditions suivantes soient vérifiées :
  - il existe  $\mathcal{W}_0 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (A.47) soit vérifiée,
  - il existe  $\mathcal{W}_1 \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (A.48),
2. pour  $i = 1, \dots, n_p$ , les conditions suivantes soient vérifiées
  - il existe  $\mathcal{W}_{i0} \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (3.13), page 114, soit vérifiée avec  $\mathcal{W}_0$  remplacée par  $\mathcal{W}_{i0}$ ,
  - il existe  $\mathcal{W}_{i1} \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (3.14), page 114, soit vérifiée avec  $\mathcal{W}_1$  remplacée par  $\mathcal{W}_{i1}$
 si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_\infty$  ou les conditions suivantes soient vérifiées
  - il existe  $\mathcal{W}_{i1} \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (A.30), page 197, soit vérifiée avec  $\mathcal{W}_1$  remplacée par  $\mathcal{W}_{i1}$ ,
  - il existe  $\mathcal{W}_{i2} \in \mathbb{W}_{cns}$  telle que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (A.31), page 198, soit vérifiée avec  $\mathcal{W}_2$  remplacée par  $\mathcal{W}_{i2}$ ,
  - il existe  $\mathcal{W}_{i3} \in \mathbb{W}_{cns}$  et des matrices  $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ij}^T \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $j = 0, \dots, N$ , telles que, pour tout  $\theta \in [\underline{\theta}; \bar{\theta}]$ , la condition (A.32), page 198, soit vérifiée avec  $\mathcal{W}_3$  et les  $\mathcal{T}_i$  remplacées par  $\mathcal{W}_{i3}$  et les  $\mathcal{T}_{ij}$
 si la propriété  $i$  est une propriété de norme  $H_2$ .

### A.2.5 Approche alternative de type polytopique

Dans cet annexe, nous développons l'approche alternative utilisée dans la Section 3.4.1.1, page 131, dans le cas de dépendance affine et rationnelles de degré un. Nous

considérons un système généralisé  $P(p, \theta)$  dont les matrices de la représentation d'état dépendent de  $\theta$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z(\theta)x(t) + D_{zw}(\theta)w(t) + D_{zu}(\theta)u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) \end{cases} . \quad (\text{A.51})$$

Une telle représentation d'état peut être obtenue lorsque seulement les pondérations de sortie sont dépendant de  $\theta$  de la façon suivante :

$$W_s(p, \theta) = \frac{1}{p} I \star \left[ \begin{array}{c|c} A_{W_s} & B_{W_s} \\ \hline C_{W_s}(\theta) & D_{W_s}(\theta) \end{array} \right]. \quad (\text{A.52})$$

Notons que c'est le cas dans l'exemple de la Section 3.4.1.1. De plus la matrice

$$\begin{bmatrix} C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & D_{zu}(\theta) \end{bmatrix}$$

est supposée être rationnelle de degré un en  $\theta$ , c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & D_{zu}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{z0} & D_{zw0} & D_{zu0} \end{bmatrix} + \frac{\theta}{1+d\theta} \begin{bmatrix} C_{z1} & D_{zw1} & D_{zu1} \end{bmatrix}$$

avec  $1+d\theta \neq 0$  ne s'annulant pas sur  $[0; 1]$ .

Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème A.23.** *Il existe  $\mathcal{X}(\theta) = \mathcal{X}_0 + \frac{\theta}{1+d\theta}\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{Y}(\theta) = \mathcal{Y}_0 + \frac{\theta}{1+d\theta}\mathcal{Y}_1$  et*

$$\mathcal{V}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 \\ \mathcal{C}_0 & \mathcal{D}_0 \end{bmatrix} + \frac{\theta}{1+d\theta} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_1 \end{bmatrix}$$

telles que pour tout  $\theta \in [0, 1]$  les contraintes (3.7) et (3.8) sont vérifiées si

1.

$$C_{z1}\mathcal{X}_1 + D_{zu1}\mathcal{C}_1 = 0 \quad D_{zu1}\mathcal{D}_1 = 0 ; \quad (\text{A.53})$$

2. pour  $\alpha \in \{0, 1\}$  :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}_0 + \frac{\alpha}{1+d\alpha}\mathcal{X}_1 & I \\ I & \mathcal{Y}_0 + \frac{\alpha}{1+d\alpha}\mathcal{Y}_1 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.54})$$

$$T_0 + \frac{\alpha}{1+d\alpha}T_1 < 0 \quad (\text{A.55})$$

où

$$T_0 = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} A\mathcal{X}_0 + \mathcal{X}_0 A^T + \dots & (\mathcal{A}_0)^T + A + B_u \mathcal{D}_0 C_y & B_w + B_u \mathcal{D}_0 D_{yw} & (C_{z0}\mathcal{X}_0 + D_{zu0}\mathcal{C}_0)^T \\ \hline B_u \mathcal{C}_0 + (B_u \mathcal{C}_0)^T & & & \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c|c} A_0 + (A + B_u \mathcal{D}_0 C_y)^T & A^T \mathcal{Y}_0 + \mathcal{Y}_0 A + \dots & \mathcal{Y}_0 B_w + \mathcal{B}_0 D_{yw} & (C_{z0} + D_{zu0} \mathcal{D}_0 C_y)^T \\ \hline (B_w + B_u \mathcal{D}_0 D_{yw})^T & \mathcal{B}_0 C_y + (\mathcal{B}_0 C_y)^T & -\gamma I & (D_{zw0} + D_{zu0} \mathcal{D}_0 D_{yw})^T \\ \hline C_{z0}\mathcal{X}_0 + D_{zu0}\mathcal{C}_0 & C_{z0} + D_{zu0} \mathcal{D}_0 C_y & D_{zw0} + D_{zu0} \mathcal{D}_0 D_{yw} & -\gamma I \end{array} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.56})$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} A\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1 A^T + \dots & (\mathcal{A}_1)^T + B_u \mathcal{D}_1 C_y & B_u \mathcal{D}_1 D_{yw} & (C_{z1}\mathcal{X}_0 + C_{z0}\mathcal{X}_1)^T + \dots \\ \hline B_u \mathcal{C}_1 + (B_u \mathcal{C}_1)^T & & & (D_{zu1}\mathcal{C}_0 + D_{zu0}\mathcal{C}_1)^T \end{array} \\ \begin{array}{c|c|c|c} A_1 + (B_u \mathcal{D}_1 C_y)^T & A^T \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_1 A + \dots & \mathcal{Y}_1 B_w + \mathcal{B}_1 D_{yw} & (C_{z1})^T + \dots \\ \hline (B_u \mathcal{D}_1 D_{yw})^T & \mathcal{B}_1 C_y + (\mathcal{B}_1 C_y)^T & -\gamma I & ((D_{zu1}\mathcal{D}_0 + D_{zu0}\mathcal{D}_1)C_y)^T \\ \hline C_{z1}\mathcal{X}_0 + C_{z0}\mathcal{X}_1 + \dots & C_{z1} + \dots & D_{zw1} + \dots & (D_{zw1})^T + \dots \\ \hline D_{zu1}\mathcal{C}_0 + D_{zu0}\mathcal{C}_1 & (D_{zu1}\mathcal{D}_0 + D_{zu0}\mathcal{D}_1)C_y & (D_{zu1}\mathcal{D}_0 + D_{zu0}\mathcal{D}_1)D_{yw} & ((D_{zu1}\mathcal{D}_0 + D_{zu0}\mathcal{D}_1)D_{yw})^T \\ \hline & & & -\gamma I \end{array} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.57})$$

**Remarque A.6.** *Même si les données et des variables de décision sont affines en  $\theta$  ( $d = 0$ ), les matrices de la représentation du correcteur obtenu ne sont pas affines mais rationnelles en  $\theta$ .*

**Démonstration** Considérons la condition (3.8). Dans ce cas, elle peut se récrire :

$$\forall \theta \in [0, 1], T_0 + \frac{\theta}{1+d\theta} T_1 + \left( \frac{\theta}{1+d\theta} \right)^2 T_2 < 0. \quad (\text{A.58})$$

où  $T_0$  et  $T_1$  sont respectivement définies dans les expressions (A.56) et (A.57) et où

$$T_2 = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & (C_{z1}\mathcal{X}_1 + D_{zu1}\mathcal{C}_1)^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & (D_{zu1}\mathcal{D}_1\mathcal{C}_y)^T \\ \hline 0 & 0 & 0 & (D_{zu1}\mathcal{D}_1D_{yw})^T \\ \hline C_{z1}\mathcal{X}_1 + D_{zu1}\mathcal{C}_1 & D_{zu1}\mathcal{D}_1\mathcal{C}_y & D_{zu1}\mathcal{D}_1D_{yw} & 0 \end{array} \right]. \quad (\text{A.59})$$

Les conditions égalités (A.53) imposent  $T_2 = 0$ . La condition (A.58) est alors équivalent à la condition (A.55) par application du résultat suivant [GCG93] (voir aussi la partie bibliographique, notamment le Lemme 2.12, page 76).

**Lemme A.9.** *Soit une matrice symétrique  $T(\theta)$  rationnelle de degré un en  $\theta$ .*

*Alors  $T(\theta)$  est définie positive pour tout  $\theta \in [0; 1]$  si et seulement si  $T(\alpha)$  est définie positive pour  $\alpha \in \{0; 1\}$ .*

La condition (3.7) est directement équivalent à la condition (A.54) par application du Lemme A.9.  $\square$

- [AG95] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled  $H_\infty$  controllers. *IEEE Transactions Automatic Control*, 40(5) :853–864, May 1995.
- [AGB95] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems : a design example. *Automatica*, 31(9) :1251–1261, September 1995.
- [Ala01] D. Alazard. Extracting physical tuning potentiometers from a complex control law : application to flexible aircraft flight control. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, August 2001.
- [AT98] P. Apkarian and H.D. Tuan. Parametrized LMIs in control theory. In *Conference on Decision and Control*, pages 152–157, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [BB91] S. Boyd and C. Barratt. *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice-Hall, 1991.
- [BBTN03] F.D. Barb, A. Ben-Tal, and A. Nemirovski. Robust dissipativity of interval uncertain linear systems. 41(6) :1661–1695, 2003.
- [Bec95] G. Becker. Parameter-dependent control of an under-actuated mechanical system. In *Conference on Decision and Control*, pages 543–548, New Orleans, LA, USA, December 1995.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, USA, June 1994.
- [BGSA01] X. Bombois, M. Gevers, G. Scorletti, and B.D.O. Anderson. Robustness analysis tools for an uncertainty set obtained by prediction error identification. *Automatica*, 37(10) :1629–1636, 2001.
- [Bli02] P-A. Bliman. Nonconservative LMI approach to robust stability for systems with uncertain scalar parameters. In *Conference on Decision and Control*, pages 305–310, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.
- [Bli03] P-A. Bliman. Stabilization of LPV systems. In *Conference on Decision and Control*, pages 6103–6108, Maui, Hawaii, USA, December 2003.
- [Bli04] P-A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems and Control Letters*, 51(3-4) :165–169, March 2004.

- [BP94] G. Becker and A. Packard. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems and Control Letters*, 23(3) :205–215, September 1994.
- [BPD02] B. Bamieh, F. Paganini, and M.A. Dahleh. Distributed control of spatially-invariant systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 47(7) :1091–1107, July 2002.
- [BPPB93] G. Becker, A. Packard, D. Philbrick, and G. Balas. Control of parametrically-dependent linear systems : a single quadratic Lyapunov approach. In *American Control Conference*, pages 2795–2799, San Fransisco, California, USA, June 1993.
- [BSG<sup>+</sup>04] X. Bombois, G. Scorletti, M. Gevers, R. Hildebrand, and P. Van den Hof. Data-based controller design at the cheapest experimental cost. In *Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
- [BTN01] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. *Lectures on Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Series on Optimization. MPS/SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2001.
- [BYDM94] R.P. Braatz, P.M. Young, J.C. Doyle, and M. Morari. Computational complexity of  $\mu$  calculation. *IEEE Transactions Automatic Control*, 39(5) :1000–1002, May 1994.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions Automatic Control*, 41(3) :358–367, March 1996.
- [CGA99] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions Automatic Control*, 44(12) :2257–2270, December 1999.
- [Che82] E.W. Cheney. *Approximation theory*. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, second edition, 1982.
- [Chi96] M. Chilali. *Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, Paris, France, 1996.
- [CTB99] Y.-S. Chou, A.L. Tits, and V. Balakrishnan. Stability multipliers and  $\mu$  upper bounds : connections and implications for numerical verification of frequency domain conditions. *IEEE Transactions Automatic Control*, 44(5) :906–913, 1999.
- [dCP02] G. Ayres de Castro and F. Paganini. Convex synthesis of localized controllers for spatially invariant systems. *Automatica*, 38(3) :445–456, March 2002.
- [Del84] D.F. Delchamps. Analytic feedback control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions Automatic Control*, 29(11) :1031–1033, November 1984.
- [Des69] C.A. Desoer. Slowly varying system  $\dot{x} = A(t)x$ . *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-14(6) :780–781, dec 1969.
- [DF99] G. Duc and S. Font. *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse : des outils pour la robustesse*. Hermès, 1999.
- [DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 34(8) :831–847, August 1989.

- [dOBG99] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, 37(4) :261–265, July 1999.
- [Doy82] J.C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *Proceedings of IEE*, 129-D(6) :242–250, November 1982.
- [DPZ91] J.C. Doyle, A. Packard, and K. Zhou. Review of LFT's, LMI's and  $\mu$ . In *Conference on Decision and Control*, pages 1227–1232, Brighton, UK, December 1991.
- [DS98] M. Dettori and C.W. Scherer. Robust stability analysis for parameter dependent systems using full block S-procedure. In *Conference on Decision and Control*, pages 2798–2799, December 1998.
- [DS00] M. Dettori and C.W. Scherer. New robust stability and performance conditions based on parameter-dependent multipliers. In *Conference on Decision and Control*, pages 4187–4192, Sydney, Australia, December 2000.
- [FAG96] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions Automatic Control*, 41(7) :1041–1046, July 1996.
- [FB98] I. Fialho and G. Balas. Adaptive vehicle suspension design using LPV methods. In *Conference on Decision and Control*, pages 469–474, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [Fon95] S. Font. *Méthodologie pour Prendre en Compte la Robustesse des Systèmes Asservis : Optimisation  $H_\infty$  et Approche Symbolique de la Forme Standard*. PhD thesis, Université de Paris-Sud et Ecole Supérieure d'Electricité, France, April 1995.
- [FS03] V. Fromion and G. Scorletti. A theoretical framework for gain scheduling. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13 :951–982, February 2003.
- [FSF99] V. Fromion, G. Scorletti, and G. Ferreres. Nonlinear performance of a PI controlled missile : an explanation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9 :485–518, February 1999.
- [FTD91] M. K. H. Fan, A. L. Tits, and J. C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions Automatic Control*, 36(1) :25–38, January 1991.
- [Fu97] M. Fu. The real structured singular value is hardly approximable. *IEEE Transactions Automatic Control*, 42(9) :1286–1288, September 1997.
- [GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4) :421–448, October 1994.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions Automatic Control*, 41(3) :436–442, March 1996.
- [Gah96] P. Gahinet. Explicit controller formulas for LMI-based  $H_\infty$  synthesis. *Automatica*, 32(7) :1007–1014, July 1996.
- [GCG93] F. Garofalo, G. Celentano, and L. Glielmo. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms. *IEEE Transactions Automatic Control*, 38(2) :281–284, February 1993.

- [GJ79] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability : a guide to the theory of NP-completeness*. A series of books in the mathematical sciences. W.H. Freeman and Company, New York, U.S.A., 1979.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox*. The Mathworks Partner Series. The Mathworks, Inc., 1995.
- [GOL98] L. El Ghaoui, F. Oustry, and H. Lebret. Robust solutions to uncertain semi-definite programs. *SIAM J. Optimization*, 9(1) :33–52, January 1998.
- [Hel95] A. Helmersson.  $\mu$  synthesis and LFT gain scheduling with mixed uncertainties. In *European Control Conference*, pages 153–158, Roma, Italy, July 1995.
- [Hel03] A. Helmersson. On synthesis of practically valid gain-scheduled controllers. Technical report, Linköping University, <http://www.control.isy.liu.se/andersh/>, June 2003.
- [HJ85] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [HK96] T. Hiroe and P.P. Khargonekar. Stability and  $H_\infty$  performance analysis of gain scheduled nonlinear control systems with  $\mathcal{D}$ -implementation under slowly varying command inputs. In *Conference on Decision and Control*, pages 1656–1662, Kobe, Japan, December 1996.
- [IH03] T. Iwasaki and S. Hara. Generalization of Kalman-Yakubovich-Popov lemma for restricted frequency inequalities. In *American Control Conference*, pages 3828–3833, Denver, Colorado, USA, June 2003.
- [IH05] T. Iwasaki and S. Hara. Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions Automatic Control*, 50(1) :41–59, January 2005.
- [IMF00] T. Iwasaki, G. Meinsma, and M. Fu. Generalized  $\mathcal{S}$ -procedure and finite frequency KYP lemma. *Mathematical Problems in Engineering*, 6 :305–320, December 2000.
- [IS94] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general  $H_\infty$  control problem : LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8) :1307–1317, August 1994.
- [IS01] T. Iwasaki and G. Shibata. LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 46(8) :1195–1208, August 2001.
- [Iwa93] T. Iwasaki. *A Unified Matrix Inequality Approach to Linear Control Design*. PhD thesis, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, December 1993.
- [Iwa97] T. Iwasaki. Robust stability analysis with quadratic separator : Parametric time-varying uncertainty cases. In *Conference on Decision and Control*, pages 4880–4885, San Diego, California, US, December 1997.
- [Jaker] V.A. Jakubovič. The  $\mathcal{S}$ -procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad Univ. (russian) Vestnik Leningrad Univ. Math. (amer.)*, 4 (amer.)(1 (russian)), 1971 (russian) 1977 (amer.).
- [KJ99] I.E. Köse and F. Jabbari. Control of LPV systems with partly measured parameters. *IEEE Transactions Automatic Control*, 44(3) :658–663, March 1999.

- [KJS98] I.E. Köse, F. Jabbari, and W.E. Schmitendorf. A direct characterization of  $L_2$ -gain controllers for LPV systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 43(9) :1302–1307, September 1998.
- [KKT89] E.W. Kamen, P.P. Khargonekar, and A. Tannebaum. Control of slowly-varying linear systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 34(12) :1283–1285, December 1989.
- [KYM<sup>+</sup>01] M.R. Katebi, I. Yamamoto, M. Matsuura, M.J. Grimble, H. Hirayama, and N. Okamoto. Robust dynamic ship positioning control system design and applications. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11(13) :1257–1284, 2001.
- [LD95] W.M. Lu and J.C. Doyle.  $H_\infty$  control of nonlinear systems : a convex characterization. *IEEE Transactions Automatic Control*, pages 1668–1675, September 1995.
- [LF03] X. Litrico and V. Fromion. Advanced control politics and optimal performance for an irrigation canal. In *European Control Conference*, Cambridge, UK, December 2003.
- [LF05] X. Litrico and V. Fromion.  $H_\infty$  control of an irrigation canal pool with a mixed control politics. may, accepted for publication 2005.
- [LH97] S. Lim and J.P. How. Analysis of LPV systems using a piecewise affine parameter-dependent Lyapunov function. In *Conference on Decision and Control*, pages 978–983, San Diego, California, USA, December 1997.
- [LH02] S. Lim and J.P. How. Analysis of linear parameter-varying systems using a non-smooth dissipative systems framework. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(12) :1067–1092, October 2002.
- [Lim99] S. Lim. *Analysis and control of linear parameter-varying systems*. PhD thesis, Stanford University, California, USA, 1999.
- [Meg96] A. Megretski.  $L_2$  BIBO output feedback stabilization with saturated control. In *IFAC World Congress*, pages 435–440, June 1996.
- [MKS98] I. Masubuchi, A. Kume, and E. Shimemura. Spline-type solution to parameter-dependent LMIs. In *Conference on Decision and Control*, pages 1753–1758, Tampa, Florida, USA, December 98.
- [MR97] A. Megretski and A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE Transactions Automatic Control*, pages 819–830, June 1997.
- [MSF97] G. Meinsma, Y. Shrivastava, and M. Fu. A dual formulation of mixed  $\mu$  and on the losslessness of  $(d, g)$  scaling. *IEEE Transactions Automatic Control*, 42(7) :1032–1036, July 1997.
- [NG94] A. Nemiroskii and P. Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. In *American Control Conference*, 1994.
- [Pac94] A. Packard. Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems and Control Letters*, 22 :79–92, 1994.
- [Ran96] A. Rantzer. On te kalman-yakubovich-popov lemma. *Systems and Control Letters*, 28(1) :7–10, June 1996.
- [Roc70] R.T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1970.

- [RP02] D.C.W. Ramos and P.L.D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 47(4) :675–678, April 2002.
- [RR88] A.C.M. Ran and L. Rodman. On parameter dependence of solutions of algebraic Riccati equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1 :269–284, 1988.
- [RS00] W.J. Rugh and J.S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10) :1401–1425, October 2000.
- [RSF01] L. Rossignol, G. Scorletti, and V. Fromion. Filter design under magnitude constraints is a finite dimensional convex optimization problem. In *Conference on Decision and Control*, pages 3575–3580, Orlando, Florida, USA, December 2001.
- [RSF03] L. Rossignol, G. Scorletti, and V. Fromion. Filter design : a finite dimensional convex optimization approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13 :1317–1335, October 2003.
- [Rug91] W.J. Rugh. Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control Systems Magazine*, 11(1) :79–84, January 1991.
- [SA78] M. G. Safonov and M. Athans. Robustness and computation aspects of nonlinear stochastic estimators and regulators. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-23(4) :717–725, August 1978.
- [SA90] J.S. Shamma and M. Athans. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions Automatic Control*, 35(8) :898–907, August 1990.
- [Saf80] M. G. Safonov. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems*. MIT Press, Cambridge, 1980.
- [Saf83] M. G. Safonov. Propagation of conic model uncertainty in hierarchical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, pages 388–396, June 1983.
- [SB92] S.M. Shahrzad and S. Behtash. Design of controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 168 :195–217, 1992.
- [Sch98] C.W. Scherer. Robust performance analysis for parameter dependent systems using tensor product splines. In *Conference on Decision and Control*, pages 2216–2221, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [Sch01] C.W. Scherer. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 73(3) :361–375, March 2001.
- [Sch03] C.W. Scherer. When are multiplier relaxations exact? In *IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2003.
- [Sco97] G. Scorletti. *Approche Unifiée de l'Analyse et de la Commande des Systèmes par Formulation LMI*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, juin 1997.
- [SE98] G. Scorletti and L. El Ghaoui. Improved LMI conditions for gain scheduling and related problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(10) :845–877, August 1998.
- [SF05] G. Scorletti and V. Fromion. Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle  $H_\infty$ . Cours de 3A Instrumentation–Automatique de l'ENSI de Caen, France, October 2005.

- [SFF03] G. Scorletti, V. Fromion, and S. Font. Automatique fréquentielle : des critères graphiques à l'optimisation LMI. *JESA*, 37 :161–185, 2003.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective Output-Feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions Automatic Control*, 42(7) :896–911, July 1997.
- [Sha88] J.S. Shamma. *Analysis and design of gain scheduled control systems*. PhD thesis, M.I.T., Dept. of Mechanical Engineering, 1988.
- [SMN90] M. Sampei, T. Mita, and M. Nakamichi. An algebraic approach to  $H_\infty$  output feedback control problems. *Systems and Control Letters*, 14(1) :13–24, 1990.
- [SP96a] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 1996.
- [SP96b] R. Smith and A. Packard. Optimal control of perturbed linear static systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 41(4) :579–584, April 1996.
- [SR99] D.J. Stilwell and W.J. Rugh. Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE Transactions Automatic Control*, 44(6) :1225–1229, June 1999.
- [SR00] D.J. Stilwell and W.J. Rugh. Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers. *Automatica*, 36(5) :665–671, May 2000.
- [SRF04] G. Scorletti, L. Rossignol, and V. Fromion. Frequency dependent model phase reduction using convex optimization. In *Conference on Decision and Control*, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
- [TA00] H.D. Tuan and P. Apkarian. Monotonic relaxation for robust control : new characterization. In *American Control Conference*, pages 1914–1918, Chicago, Illinois, USA, June 2000.
- [TA02] H.D. Tuan and P. Apkarian. Monotonic relaxations for robust control : new characterizations. *IEEE Transactions Automatic Control*, 47(2) :378–384, February 2002.
- [TdS01] A. Trofino and C.E. de Souza. Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 46(8) :1303–1307, August 2001.
- [TdS02] A. Trofino and C.E. de Souza. Guaranteed cost control for rational parameter-dependent discrete-time systems. In *Conference on Decision and Control*, pages 1870–1875, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.
- [TO95] O. Toker and H. Ozbay. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback. In *American Control Conference*, pages 2525–2526, Seattle, Washington, USA, June 1995.
- [TS94] K. Tanaka and M. Sano. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2(2) :119–134, may 1994.
- [VBWH03] L. Vandenberghe, V. Balakrishnan, R. Wallin, and A. Hansson. On the implementation of primal-dual interior-point methods for semidefinite programming problems derived from the KYP lemma. In *Conference on Decision and Control*, pages 4658–4663, Hawaii, December 2003.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, second edition, 1993.

- [WB02] F. Wang and V. Balakrishnan. Improved stability analysis and gain-scheduled controller synthesis for parameter-dependent systems. *IEEE Transactions Automatic Control*, 47(5) :720–734, May 2002.
- [Wil71] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-16(6) :621–634, December 1971.
- [WYPB96] F. Wu, X.H. Yang, A. Packard, and G. Becker. Induced  $l_2$ -norm control for LPV systems with bounded parameter variations rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10) :983–998, November 1996.
- [YS97] J. Yu and A. Sideris.  $H_\infty$  control with parametric Lyapunov functions. *Automatica*, 30(1) :57–69, January 1997.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity : model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions Automatic Control*, AC-26(2) :301–320, April 1981.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1996.
- [Zha02] X. Zhang. *Parameter-dependent Lyapunov functions stability analysis of linear parameter-dependent dynamical systems*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, December 2002.



*Synthèse dépendant de paramètres par optimisation LMI de dimension finie : application à la synthèse de correcteurs reréglables*

**Résumé de la thèse** Ce travail permet de résoudre des problèmes d'optimisation LMI dépendant rationnellement d'un ou plusieurs paramètres. Ce résultat est fondamental car il offre une solution efficace à la classe extrêmement large des problèmes se formulant comme un problème d'optimisation LMI dépendant de paramètres.

En Automatique, une telle classe de problèmes comprend celle de la conception de correcteurs dépendant de paramètres. Un cas particulier important est celui de la commande des systèmes non linéaires par séquençement de gains.

Au départ, cette classe de problèmes d'Automatique a été motivé par une nouvelle application possible : la conception de correcteurs dont les gains sont une fonction explicite du cahier des charges, baptisés « correcteurs reréglables ». L'intérêt est de permettre un reréglage aisé sur site d'exploitation par un utilisateur néophyte en Automatique, voire un reréglage automatique. Ce travail a permis de formaliser ce problème de reréglage, d'en proposer une solution complète et de la valider.

**Mots-clés** optimisation LMI dépendant de paramètres, séquençement de gains, commande  $H_\infty$ ,  $H_2$ , par placement de pôles et multi-critères dépendant de paramètres, synthèse de correcteurs reréglables, fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres.

---

*Parameter dependent design by finite dimensional LMI optimisation : application to the design of trade-off dependent controllers*

**Abstract of the thesis** This work allows to solve LMI optimisation problems that rationally depend on one or several parameters. This result is fundamental since it offers an efficient solution to the extremely large class of problems that can be formulated as a parameter dependent LMI optimisation problem.

In Automatic Control, such a class of problems is the one of designing parameter dependent controllers. This class of problems encompasses many important problems such as the one of the command of non linear systems by gain scheduling.

This class of problems was first motivated by a new possible application : the design of controllers whose gains are explicit functions of the specifications, named “trade-off dependent controllers”. The interest is to allow an easy on line retuning, or even by automatic rules. This work has formalised this problem of retuning, has proposed a complete solution and has validated it.

**Keywords** parameter dependent LMI optimisation, gain scheduling, parameter dependent  $H_\infty$ ,  $H_2$ , pole placement and multi-objectives control, design of trade-off dependent controllers, parameter dependent Lyapunov functions.

---

**Discipline** Automatique, robotique

Groupe de Recherche en Informatique, Image, Automatique et Instrumentation de Caen  
6, Boulevard du Maréchal Juin  
F14050 Caen cedex  
France