



**HAL**  
open science

**Contribution à l'étude des bruits acoustiques générés  
lors de l'association machines électriques-convertisseurs  
statiques de puissance. Application à la machine  
asynchrone**

Arnaud Hubert

► **To cite this version:**

Arnaud Hubert. Contribution à l'étude des bruits acoustiques générés lors de l'association machines électriques-convertisseurs statiques de puissance. Application à la machine asynchrone. Automatique / Robotique. Université de Technologie de Compiègne, 2000. Français. NNT: . tel-00212283

**HAL Id: tel-00212283**

**<https://theses.hal.science/tel-00212283>**

Submitted on 22 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de l'UTC  
Spécialité : Contrôle des systèmes

---

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES BRUITS  
ACOUSTIQUES GÉNÉRÉS LORS DE  
L'ASSOCIATION MACHINES ÉLECTRIQUES -  
CONVERTISSEURS STATIQUES DE PUISSANCE.  
APPLICATION À LA MACHINE ASYNCHRONE

---

Soutenue le 13 décembre 2000  
devant le jury composé de :

J.M. BIEDINGER (Président, LEC, Compiègne)

J.F. BRUDNY (Rapporteur, LSEE, Béthune)

S. DEROU (PSA, Vélizy)

G. FRIEDRICH (Directeur de thèse, LEC, Compiègne)

M. GABSI (Rapporteur, LESIR, Cachan)

B. NOGAREDE (LEEI, Toulouse)

P. WAGSTAFF (Roberval, Compiègne)

Arnaud HUBERT

12 janvier 2001



# Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Guy FRIEDRICH, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, pour avoir proposé et surtout encadré cette étude. Pour son aide, son soutien constant et sa disponibilité, je souhaite lui exprimer toute ma reconnaissance.

Qu'il me soit également permis de remercier Monsieur J.M. BIEDINGER, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne et directeur du Laboratoire d'Électromécanique de Compiègne, pour avoir accepté de présider le jury, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et surtout pour l'intérêt qu'il a pu porter à mon travail en répondant toujours aux différentes questions que j'ai pu lui poser au cours de ma thèse.

Je souhaite tout particulièrement remercier Monsieur J.F. BRUDNY, Professeur à l'Université d'Artois (Béthune) pour avoir bien voulu juger ce travail en tant que rapporteur.

Je remercie également Monsieur M. GABSI, Maître de Conférences habilité à diriger des recherches à l'École Normale Supérieure de Cachan, non seulement pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail mais aussi pour les discussions intéressantes que nous avons pu avoir lors de nos différentes rencontres.

Qu'il me soit permis de remercier vivement Monsieur P. WAGSTAFF, enseignant chercheur à l'Université de Technologie de Compiègne pour les différents travaux et essais que nous avons pu réaliser ensemble et pour sa vision de *mécanicien* sur le travail réalisé lors du jury de la thèse. Je tiens, de même, à remercier les membres de son équipe qui ont participé à cette collaboration, en particulier Messieurs J.C. HENRIO et R. DIB.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur B. NOGAREDE, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse qui, malgré un emploi du temps plus que chargé, a bien voulu s'intéresser à cette étude. Je tiens à le remercier pour sa participation au jury, ses remarques constructives et l'accueil très chaleureux fait à ce travail.

Je désire également remercier Madame S. DEROU, ingénieur de recherches chez PSA Vélizy pour sa participation au jury et à l'intérêt porté à ce travail.

Je souhaite de même remercier tous les membres du laboratoire pour leur accueil et les conditions de travail agréables qu'ils m'ont apportés. Parmi ces personnes, je tiens tout particulièrement à remercier François, Joseph-André, Christophe, Agnès et surtout Patrice pour son aide et son amitié ainsi que son apport dans la conception du schéma de MACRET. Je tiens également à remercier toutes les personnes cotoyées au cours de ses différentes années à l'Université et notamment les personnes du Laboratoire d'Acoustique et de Vibrations Industrielles qui ont mis à ma disposition, non seulement leurs moyens matériels, mais également leurs compétences techniques, scientifiques et pédagogiques.

Enfin, je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à mes parents et aux différent(e)s ami(e)s qui m'ont épaulé(e)s tout au long de ces années : Vincent (*Billoute*) et Cyrille (*les supers copains*), Nicolas, Alex et Séverine (*les Courtisiens*), Catherine, Sophie, Stéphanie, Stéphane (*Zam*), Damien, Pascal(ou), Régis, Éric (*le chef*), Joanny (*Jojo*) (encore merci pour la relecture du manuscrit), Yann (*JWI*), la rue de l'Oise, les bretons, les cadavres... et encore bien d'autres dont je ne peux citer tous les noms. Merci à tous.

# Table des matières

|   |            |
|---|------------|
| <b>Notations</b>  | <b>vii</b> |
| <b>Introduction</b>                                       | <b>1</b>   |
| <b>1 Analyse bibliographique préliminaire</b>             | <b>5</b>   |
| 1.1 Stratégie et réduction du bruit . . . . .             | 6          |
| 1.2 Classification . . . . .                              | 6          |
| 1.3 Stratégies de réduction du bruit . . . . .            | 7          |
| 1.4 Stratégies aléatoires de réduction du bruit . . . . . | 8          |
| 1.5 Conclusion . . . . .                                  | 8          |
| 1.6 Orientation retenue . . . . .                         | 9          |
| 1.7 Choix effectués . . . . .                             | 9          |
| <b>2 Méthodologie</b>                                     | <b>11</b>  |
| 2.1 Prise en compte du convertisseur . . . . .            | 11         |
| 2.2 Conversion électromécanique . . . . .                 | 12         |
| 2.3 Comportement mécanique et vibratoire . . . . .        | 14         |
| 2.3.1 Analyse modale . . . . .                            | 15         |
| 2.3.2 Synthèse . . . . .                                  | 23         |
| 2.4 Développement d'un modèle de rayonnement . . . . .    | 24         |
| 2.5 Conclusion . . . . .                                  | 25         |
| <b>3 Conversion électromécanique</b>                      | <b>27</b>  |
| 3.1 Revue et intérêts . . . . .                           | 27         |
| 3.2 Schéma électrique . . . . .                           | 28         |
| 3.2.1 Les modèles existants . . . . .                     | 29         |
| 3.2.2 Compléments et résolution . . . . .                 | 33         |
| 3.3 Calcul des champs magnétiques . . . . .               | 35         |
| 3.3.1 Calcul de la fmm . . . . .                          | 36         |
| 3.3.2 Calcul de $H$ et $B$ . . . . .                      | 46         |
| 3.4 Calcul des efforts . . . . .                          | 49         |
| 3.4.1 Calcul des couple . . . . .                         | 50         |
| 3.4.2 Calcul des efforts radiaux . . . . .                | 50         |
| 3.5 Expérimentation et validation . . . . .               | 52         |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.5.1    | Validation du schéma équivalent . . . . .            | 52         |
| 3.5.2    | Courbe de couple . . . . .                           | 54         |
| 3.5.3    | Charge variable . . . . .                            | 56         |
| 3.5.4    | Spectre des champs . . . . .                         | 61         |
| 3.6      | Résumé . . . . .                                     | 63         |
| <b>4</b> | <b>Comportement vibratoire</b>                       | <b>65</b>  |
| 4.1      | Quelques rappels . . . . .                           | 65         |
| 4.1.1    | Approche classique . . . . .                         | 66         |
| 4.1.2    | Approche énergétique . . . . .                       | 68         |
| 4.1.3    | Modes et fréquences propres . . . . .                | 69         |
| 4.2      | État de l'art et synthèse . . . . .                  | 71         |
| 4.2.1    | Constitution . . . . .                               | 71         |
| 4.2.2    | Déformés modales . . . . .                           | 72         |
| 4.2.3    | Comparaison et vérification des hypothèses . . . . . | 74         |
| 4.2.4    | Dynamique d'un anneau . . . . .                      | 78         |
| 4.3      | Analyse modale . . . . .                             | 82         |
| 4.3.1    | Réponse d'extension . . . . .                        | 83         |
| 4.3.2    | Réponse de flexion . . . . .                         | 88         |
| 4.4      | Vérifications expérimentales . . . . .               | 95         |
| 4.4.1    | Valeurs et vecteurs propres . . . . .                | 95         |
| 4.4.2    | Superposition modale . . . . .                       | 101        |
| 4.5      | Résumé . . . . .                                     | 105        |
| <b>5</b> | <b>Rayonnement acoustique</b>                        | <b>109</b> |
| 5.1      | Quelques rappels . . . . .                           | 109        |
| 5.1.1    | Équations fondamentales . . . . .                    | 110        |
| 5.1.2    | Équations énergétiques . . . . .                     | 111        |
| 5.1.3    | Caractérisation des sources . . . . .                | 113        |
| 5.2      | Modèle de rayonnement . . . . .                      | 115        |
| 5.2.1    | Position du problème . . . . .                       | 115        |
| 5.2.2    | Modèle proposé . . . . .                             | 115        |
| 5.3      | Autres Modèles . . . . .                             | 123        |
| 5.4      | Vérifications expérimentales . . . . .               | 125        |
| 5.4.1    | Vérification des hypothèses . . . . .                | 126        |
| 5.4.2    | Validation expérimentale du modèle . . . . .         | 131        |
| 5.4.3    | Fréquences de découpage variables . . . . .          | 134        |
| 5.5      | Résumé . . . . .                                     | 136        |
|          | <b>Conclusion</b>                                    | <b>139</b> |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>A</b> | <b>Notions de spectre</b>                                   | <b>143</b> |
| A.1      | Fonctions simplement périodiques . . . . .                  | 143        |
| A.1.1    | Spectre en cos et sin . . . . .                             | 144        |
| A.1.2    | Spectre en cosinus . . . . .                                | 145        |
| A.1.3    | Spectre en exponentiel . . . . .                            | 146        |
| A.1.4    | Spectre en demi-exponentiel . . . . .                       | 148        |
| A.2      | Fonctions doublement périodiques . . . . .                  | 149        |
| <b>B</b> | <b>Compléments d'électromécanique</b>                       | <b>153</b> |
| B.1      | Tensions rotoriques . . . . .                               | 153        |
| B.1.1    | Position du problème . . . . .                              | 153        |
| B.1.2    | Tensions induites . . . . .                                 | 154        |
| B.1.3    | Fmm créées par le rotor . . . . .                           | 157        |
| B.1.4    | Tensions ré-induites au stator . . . . .                    | 159        |
| B.2      | Éléments du schéma . . . . .                                | 160        |
| B.2.1    | Rappel du schéma . . . . .                                  | 160        |
| B.2.2    | Résistances . . . . .                                       | 160        |
| B.2.3    | Inductances de fuites . . . . .                             | 162        |
| B.2.4    | Rapports de transformation . . . . .                        | 162        |
| B.2.5    | Inductances de magnétisation . . . . .                      | 162        |
| B.3      | Couples . . . . .   | 167        |
| B.3.1    | Formulation générale . . . . .                              | 167        |
| B.3.2    | Champs tournants . . . . .                                  | 167        |
| B.4      | Forces et Tenseur de Maxwell . . . . .                      | 170        |
| B.4.1    | Définition . . . . .  | 170        |
| B.4.2    | Discussion . . . . .  | 172        |
| <b>C</b> | <b>Complément de vibrations</b>                             | <b>173</b> |
| C.1      | Poutre en vibrations transversales . . . . .                | 173        |
| C.1.1    | Approche classique . . . . .                                | 174        |
| C.1.2    | Approche énergétique . . . . .                              | 176        |
| C.1.3    | Modes et fréquences propres . . . . .                       | 176        |
| C.1.4    | Inertie et cisaillement . . . . .                           | 179        |
| C.2      | Anneau mince . . . . .                                      | 182        |
| C.2.1    | Équation différentielle de la ligne élastique . . . . .     | 182        |
| C.2.2    | Déformation de flexion . . . . .                            | 183        |
| C.2.3    | Déformation d'extension . . . . .                           | 188        |
| C.3      | Réponse du mode de corps rigide . . . . .                   | 190        |
| C.3.1    | Equation aux dérivées partielles de flexion . . . . .       | 191        |
| C.3.2    | Equation différentielle d'un mouvement d'ensemble . . . . . | 192        |
| C.3.3    | Conclusion . . . . .  | 193        |

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| <b>D Montage</b>                      | <b>197</b> |
| D.1 Machine d'étude . . . . .         | 197        |
| D.2 Dispositif expérimental . . . . . | 197        |

# Notations

## Définition des notations utilisées

|                             |   |  |
|-----------------------------|---|--|
| $\{x\}$                     | : | série des valeurs discrètes de $x$                                 |
| $\{\hat{x}\}$               | : | série des valeurs de la transformée de FOURIER discrète de $\{x\}$ |
| $[X]$                       | : | matrice $X$  |
| $x^*$                       | : | complexe conjugué de $x$   |
| $\bar{x}$                   | : | valeur moyenne de $x$  |
| $x^T$                       | : | transposée du vecteur $x$  |
| $\mathbf{x}$                | : | tenseur $x$ (ordre 1 : vecteur, ou 2 : matrice)                    |
| $\dot{x}$                   | : | dérivée première de $x$ par rapport au temps                       |
| $x_s, x_r, x_\mu, x_\sigma$ | : | grandeur du stator, rotor, de magnétisation, de fuite              |
| $(x, y, z)$                 | : | coordonnées cartésiennes dans un repère lié au stator              |
| $(r, \theta, z)$            | : | coordonnées cylindriques dans un repère lié au stator              |
| $(r, \tilde{\theta}, z)$    | : | coordonnées cylindriques dans un repère lié au rotor               |
| $\tilde{x}$                 | : | grandeur définie dans le repère lié au rotor                       |
| $x', x''$                   | : | grandeur ramenée au primaire, au secondaire                        |
| $j$                         | : | nombre complexe, imaginaire pur $\sqrt{-1}$                        |

## Définition des grandeurs électrotechniques

|               |   |  |
|---------------|---|--|
| $f$           | : | fréquence  |
| $\omega$      | : | pulsation temporelle   |
| $C$           | : | couple   |
| $B$           | : | densité de flux magnétique                                     |
| $H$           | : | champ d'intensité magnétique ( $A/m$ )                         |
| $\mathcal{W}$ | : | énergie électromagnétique                                      |
| $n$           | : | rang d'une harmonique de temps                                 |
| $m$           | : | rang d'une harmonique d'espace                                 |
| $\mu_0$       | : | perméabilité du vide   |
| $l_f$         | : | longueur de fer de la machine (empilage des tôles magnétiques) |
| $\Phi, \phi$  | : | flux magnétique  |
| $\zeta$       | : | coefficients de bobinage                                       |
| $e$           | : | tension induite  |
| $\alpha_y$    | : | angle entre deux barres de rotor                               |

|                  |   |  |
|------------------|---|--|
| $\gamma$         | : | inclinaison d'encoche rotorique                                |
| $J_k$            | : | courant de la maille k   |
| $V(U)$           | : | tension simple (composée)                                      |
| $R, L, X$        | : | résistance, inductance, réactance                              |
| $\delta_r$       | : | distance d'entrefer  |
| $R_0$            | : | rayon moyen d'entrefer   |
| $T$              | : | densité de force par unité de surface                          |
| $N$              | : | nombre de spires d'une bobine                                  |
| $p_0$            | : | nombre de paires de pôles d'une machine                        |
| $Z$              | : | nombre de phases d'une machine                                 |
| $Z_E$            | : | nombre d'encoches – dents – d'une armature d'une machine       |
| $fmm$            | : | force magnétomotrice   |
| $k_c$            | : | coefficient de CARTER  |
| $\lambda$        | : | conduction magnétique (perméance par unité de surface)         |
| $\Omega_s$       | : | pulsation de synchronisme                                      |
| $\Omega_{rotor}$ | : | pulsation mécanique du rotor                                   |
| $g, s$           | : | glissement (slip)  |
| $I(t), i(t)$     | : | courant électrique (A)   |
| $r(\theta)$      | : | fonction de répartition (fmm pour un courant continu unitaire) |

## Définition des grandeurs mécaniques

|                            |   |   |
|----------------------------|---|---|
| $(u, v, w)$                | : | déplacement suivant les trois coordonnées définies par le repère                |
| $p_i, \omega_i$            | : | pulsation propre (modale)   |
| $U_i, V_i, W_i$            | : | <i>parties spatiales</i> des déplacements, vecteurs propres (déformées modales) |
| $\phi_i(t)$                | : | <i>partie temporelle</i> des déplacements                                       |
| $\lambda_p$                | : | valeur propre   |
| $\sigma$                   | : | contrainte  |
| $\varepsilon$              | : | déformation   |
| $\gamma$                   | : | accélération  |
| $\rho$                     | : | masse volumique   |
| $k$                        | : | raideur   |
| $c$                        | : | amortissement   |
| $m_0$                      | : | masse   |
| $\lambda, \mu$             | : | coefficients de LAMÉ  |
| $h, b$                     | : | épaisseur et largeur d'une section  |
| $n, m$                     | : | rang des fréquences propres radiales et longitudinales                          |
| $\kappa$                   | : | coefficient de correction dû au cisaillement (poutre de TIMOSHENKO)             |
| $e$                        | : | distance entre fibre neutre et centre de gravité                                |
| $m_c$                      | : | coefficient de correction d'une poutre épaisse                                  |
| $E, G$                     | : | module de YOUNG, de cisaillement  |
| $\mathcal{T}, \mathcal{V}$ | : | énergie cinétique, énergie de déformation                                       |
| $\mathcal{U}, \mathcal{D}$ | : | énergie interne, fonction de dissipation  |
| $\mathcal{A}, \mathcal{L}$ | : | intégrale d'action, Lagrangien  |

|           |   |  |
|-----------|---|--|
| $N$       | : | effort normal à la section             |
| $T$       | : | effort tranchant                       |
| $f, q$    | : | densité d'effort                       |
| $F$       | : | résultante d'effort                    |
| $M$       | : | moment                                 |
| $I_{G_z}$ | : | moment quadratique (moment de flexion) |
| $R$       | : | rayon de courbure                      |
| $A$       | : | aire d'une section                     |

### Définition des grandeurs acoustiques

|                                    |   |   |
|------------------------------------|---|---|
| $v$                                | : | vitesse vibratoire ou particulaire  |
| $p$                                | : | pression acoustique   |
| $\rho_0$                           | : | masse volumique au repos  |
| $k$                                | : | nombre d'onde   |
| $\lambda$                          | : | longueur d'onde   |
| $c$                                | : | célérité du son   |
| $a$                                | : | dimensions de la source   |
| $q$                                | : | débit masse du fluide   |
| $\mathbf{f}$                       | : | force de volume du fluide   |
| $S$                                | : | entropie  |
| $n, m$                             | : | rangs de temps ou espace (série de FOURIER)                               |
| $L_p$                              | : | niveau de pression acoustique   |
| $L_{\mathcal{P}}$                  | : | niveau de puissance acoustique  |
| $\mathcal{P}$                      | : | puissance acoustique  |
| $\mathcal{E}$                      | : | énergie acoustique totale   |
| $\mathcal{F}$                      | : | flux acoustique   |
| $\Pi = \mathcal{I} + j\mathcal{J}$ | : | intensité acoustique  |
| $J_m, N_m$                         | : | Fonction de BESSEL et de NEUMANN d'ordre $m$                              |
| $H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$             | : | Fonction de HANKEL de 1 <sup>e</sup> et 2 <sup>e</sup> espèce d'ordre $m$ |



# Introduction

En matière d'entraînement électromécanique, les achats industriels s'orientent principalement vers les machines électriques asynchrones. Ces types de machines sont réputés pour leur robustesse et leur entretien quasi nul. Leur simplicité de conception en font des outils performants et économiques.

Le problème de bruit de ces machines est loin d'être récent et il suffit de se rapporter à quelques ouvrages de référence pour s'apercevoir qu'il est traité depuis de nombreuses années [JORDAN50]. Les spécifications d'utilisation ont cependant évolué ainsi que les modes d'utilisation. Les contraintes économiques poussent à la réalisation de machines de plus en plus compactes et légères, ce qui ne favorise pas la réduction du bruit. Il est également de plus en plus courant, non pas d'alimenter ces machines directement par un réseau polyphasé mais à l'aide d'une électronique de puissance. Ce type d'alimentation permet un contrôle plus *fin* de la machine ce qui donne la possibilité de faire varier le couple et la vitesse de rotation. Cette association *machines - convertisseurs statiques de puissance* se généralise d'autant plus que l'électronique de puissance progresse rapidement et que ses coûts diminuent.

Bien sûr, ces évolutions ne vont pas sans l'apparition de problèmes inédits en ce qui concerne le bruit et les vibrations. Ces *nouvelles* sources de bruit acoustique sont généralement regroupées sous le terme de *bruit d'origine magnétique*<sup>1</sup>. Ces sources viennent en compléments de toutes les sources qui font déjà l'objet de nombreuses études, telles que les bruits aérodynamiques, l'excentricité, les bruits de roulements... et dont nous ne parlerons pas dans cette étude. Un isolement – capitonnage – de la machine est parfois mis en place pour limiter les nuisances sonores mais il peut conduire à des problèmes d'échauffement ou d'encombrement. Il est beaucoup plus pertinent d'éviter l'émission acoustique en contrôlant *à la source* le comportement vibro-acoustique de la machine, c'est-à-dire en contrôlant les sources de vibrations d'origine électromagnétique.

Depuis quelques années, le laboratoire d'électromécanique de l'Université de Technologie de Compiègne (*LEC*) a orienté l'ensemble de ses activités de recherche autour d'un domaine de compétence unique : *actionneurs*

---

<sup>1</sup>et parfois, sous le terme *impropre* de *bruit magnétique*

*électriques et systèmes de motricité à énergie embarquée*<sup>2</sup>. Ses activités de recherche comportent en particulier deux thèmes :

1. conception, modélisation et optimisation d'actionneurs électriques
2. interaction de l'électronique de puissance et des machines électriques

L'étude des nuisances acoustiques produites lors de l'association *machine - convertisseur* constitue un élément essentiel pour la conception et l'optimisation d'actionneurs électriques et plus encore dans les applications à énergie embarquée où le critère bruit devient essentiel pour la diffusion de la technologie.

Un convertisseur statique de puissance est un système électronique qui permet d'appliquer une succession de créneaux de tension aux bornes de la machine. Le *motif* de ces créneaux permet de contrôler *en moyenne*<sup>3</sup> la valeur des tensions appliquées à la machine avec un bon rendement mais aux prix d'une forte augmentation des *harmoniques*. Pour toute une gamme de puissance de moteurs, ces harmoniques vont se situer dans la gamme des fréquences *audibles* (20 à 20 kHz). Ces harmoniques de tension et de courant vont être à l'origine de champs magnétiques *parasites*, sources inévitables de vibrations et de bruit.

Dans ces conditions, la réduction du bruit à la source ne peut pas être étudiée par un unique spécialiste en vibro-acoustique car elle résulte de l'interaction de diverses spécialités qui vont de la commande et électronique de puissance à l'acoustique en passant par la conception électromécanique et la caractérisation vibratoire. Les domaines d'études successifs sont représentés par le schéma de la FIG 1.

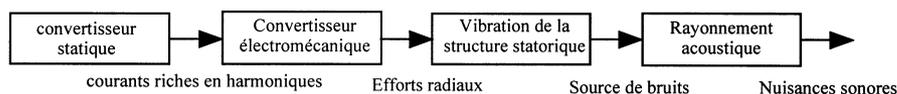


FIG. 1 – chaîne d'émission acoustique *globale* d'un ensemble *machine électrique asynchrone-convertisseur statique de puissance*

Le problème *global* est complexe et il est délicat d'en cerner tous les aspects. Le travail en commun de spécialistes de chaque domaine donnera de bons résultats mais un *électromécanicien* ou un *électronicien de puissance* n'a pas forcément la *culture* pour utiliser les travaux des spécialistes en acoustique et réciproquement ces derniers ne maîtrisent pas forcément les domaines de l'*électrotechnique* au sens large. C'est pourquoi il est important de dresser des *passerelles* entre ces deux domaines de compétences.

<sup>2</sup> véhicules électriques, hybrides, alterno-démarrateurs. . .

<sup>3</sup> *en moyenne* pour un actionneur à courant continu et en valeur *fondamentale* pour un actionneur à courant sinusoïdal

Notre travail consistera à développer des outils, à la fois, simples et suffisamment précis, pour coupler la chaîne entière d'émission acoustique. Ce travail doit, non seulement, permettre au concepteur de machine d'introduire dans ces paramètres la notion de bruit, mais également, à l'électronicien de puissance d'adapter sa stratégie de commande et de conversion statique à la machine dans une perspective de réduction du bruit. Ce travail est également l'occasion pour nous, *électrotechniciens*, de rencontrer et de travailler avec des *spécialistes de vibro-acoustique*. Le travail présenté, orienté dans une optique de conception est le résultat d'une première étude menée dans notre laboratoire. Sa synthèse se présentera sous la forme de cinq chapitres :

1. Analyse bibliographique préliminaire et orientation de l'étude  
Ce chapitre va définir les limites et les objectifs de l'étude en nous appuyant sur une analyse bibliographique. Celle-ci va nous permettre de cerner les différents travaux déjà effectués sur le sujet et les solutions qui ont été retenues pour maîtriser les nuisances sonores générées lors de l'association *machine électrique-convertisseur statique*.
2. Méthodologie proposée pour traiter le problème  
Ce chapitre est un exposé synthétique des différents domaines de la physique rencontrés (cf. FIG. 1). Il permettra de dégager les choix de modélisation retenus afin de coupler tous ces domaines et de pouvoir ainsi estimer le niveau de bruit en partant de la connaissance de la stratégie de conversion statique. Les différents choix seront repris en détail dans chacun des chapitres suivants.
3. Conversion électromécanique d'énergie  
Ce chapitre abordera tous les aspects *purement électrotechniques* de l'étude en décrivant et modélisant la conversion d'énergie électromécanique de la machine asynchrone. Pour cela, nous partirons des tensions appliquées à ses bornes et nous irons jusqu'à la détermination des champs de force conduisant aux vibrations de la machine. Entre ces deux extrémités, il aura été nécessaire de déterminer les courants dans tous les conducteurs de la machine ainsi que les différents champs magnétiques présents dans l'entrefer. Nous développerons également le calcul des couples pulsants créés par cette machine.
4. Comportement vibratoire d'une structure statorique  
Après un rappel des techniques de modélisation pour les non-spécialistes du domaine de la mécanique vibratoire, ce chapitre fera une synthèse des travaux existants sur la vibration des stators de machines électriques. Ceci nous permettra de développer un modèle de comportement naturel – libre – du stator puis à l'aide des techniques de superposition modale, nous estimerons le comportement forcé de cette structure soumise aux efforts d'origine électromagnétique.
5. Rayonnement acoustique d'une structure statorique  
De même que dans le chapitre précédent, celui-ci débutera par un rap-

pel des notions fondamentales d'acoustique linéaire. Nous développerons ensuite un modèle de rayonnement acoustique adapté au comportement vibro-acoustique de la machine asynchrone. Nous ferons également un exposé sur les principaux modèles utilisés dans la littérature.

Le nombre d'hypothèses étant *nécessairement* élevé, chacun des modèles proposés sera vérifié expérimentalement.

# Chapitre 1

## Analyse bibliographique préliminaire et orientation de l'étude

La réduction du bruit dans les machines électriques est bien antérieure à l'apparition de l'idée même d'alimenter la machine à partir de semi-conducteurs puisque H. FRITZ rédigea un ouvrage sur ce thème dès 1921 [FRITZ21] et CHAPMAN traitait du bruit dans les machines asynchrones en 1922 [CHAPMAN22]. Des articles de synthèse étaient publiés dès les années 1930. On pourra remarquer l'excellent article et sa bibliographie complète de LIWSCHITZ en 1942 [LIWSCHITZ42]. Certains ouvrages de références y sont proposés et l'on notera l'ouvrage de messieurs ARNOLD et LACOUR datant de 1909 [ARNOLDLACOUR09]...

Il serait également inconcevable de ne pas citer l'ouvrage de P.L. ALGER qui constitue encore aujourd'hui un élément de base pour l'étude du bruit dans les machines asynchrones. Cet ouvrage, publié en 1951, avait, de l'aveu même de son auteur été envisagé trente ans plus tôt afin d'établir une synthèse complétée des travaux de messieurs ADAMS, ARNOLD, BEHREND et STEINMETZ [ALGER51].

Le bruit acoustique généré par l'association machine-convertisseur est plus récent. Ce phénomène a été étudié dès la généralisation de l'utilisation des convertisseurs électroniques. La première référence traitant de l'association machine asynchrone-convertisseur est due à P.L. TIMAR en 1977 [TIMAR77]. On remarquera également l'ouvrage de S.J. YANG [YANG81] qui effectue une synthèse des travaux réalisés durant une quinzaine d'année avec A.J. ELLISON. Celui-ci constitue une très bonne base de départ pour l'étude du bruit dans les machines électriques mais seule l'influence d'un convertisseur type *commutateur de courant* est envisagée.

Le sujet demeure néanmoins d'une grande actualité comme le montre le nombre d'articles publiés récemment. Certains de ces auteurs remettent en

question les normes de mesures actuelles [LISNERTIMAR99] ou proposent de nouvelles grandeurs caractéristiques des machines électriques (*Noise versus Harmonic Characteristics*) [KAKUMIYASHITASONE99].

## 1.1 Les stratégies de modulation *PWM* et la réduction du bruit

L'étude des stratégies de modulation *PWM* constitue un axe important du *LEC*. Celui-ci, initié par J.P. VILAIN au début des années 80 s'est traduit par une première thèse [FRIEDRICH86] qui proposait une stratégie de modulation pour charge monophasée permettant d'obtenir une onde de *bonne qualité* avec une fréquence de découpage faible. Cette stratégie fut ensuite généralisée au contrôle d'un pont triphasé [LESBROUSSART97].

Une stratégie de modulation consiste à déterminer *au mieux* les ordres de commande d'interrupteurs en fonction d'une grandeur de consigne (tension ou courant) à injecter dans la charge (monophasée ou triphasée) afin d'optimiser un certain nombre de critères. L'exemple le plus courant consiste à optimiser la forme d'onde de sortie (spectre ou distorsion harmonique) pour un *stress* minimal des composants<sup>1</sup>.

De nombreux autres critères peuvent également être optimisés : suppression des périodes de conduction ou de blocage trop courtes, transition des formes d'ondes sinusoïdales vers des formes d'ondes rectangulaires, réduction du bruit. . .

Une des méthodes de réduction du bruit utilisée par les électroniciens de puissance a longtemps été de travailler à des fréquences supérieures à  $20kHz$ , c'est à dire largement au-dessus de la gamme audible pour l'humain. Cette méthode, bien que très efficace, sollicite de manière importante les composants. Ceci se traduit par des pertes en commutation importantes qui augmentent la taille des dissipateurs et réduisent la fiabilité. Cette méthode demeure, en outre, délicate à mettre en œuvre pour des puissances supérieures à  $50kW$  et ceci même avec des composants performants. La recherche de stratégies de commutation générant peu de bruits acoustique à fréquences réduites a donc été rapidement un axe de recherche pour les électroniciens de puissance.

## 1.2 Classification des stratégies de modulation

Le nombre de stratégies de modulation et de ses variantes est important mais il est tout de même possible d'en établir une classification. Nous reprendrons celle proposée par C. LESBROUSSART [LESBROUSSART97] qui est

---

<sup>1</sup>Un *stress* minimal correspond généralement à une fréquence de commutation réduite et un temps *relativement long* entre deux commutations successives.

reproduite figure 1.1.

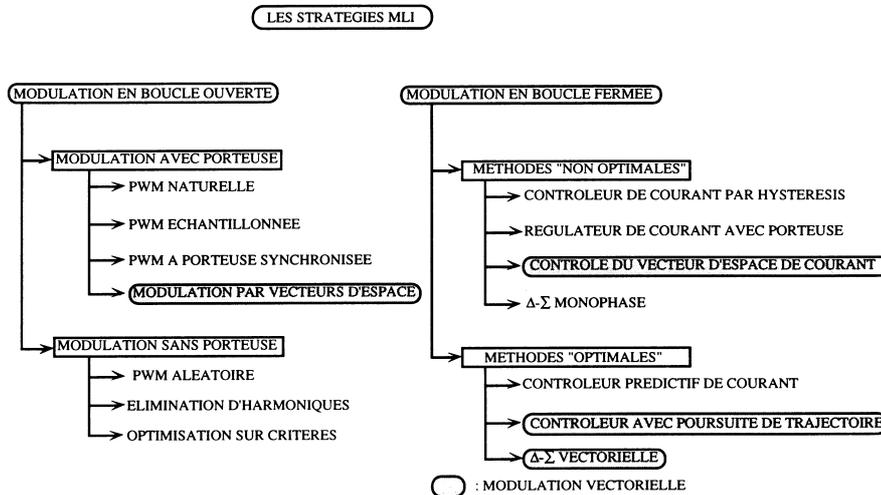


FIG. 1.1 – un classement des stratégies MLI (*PWM*)

Cette classification est basée entre autres critères, sur la structure du modulateur (*boucle ouverte* ou *boucle fermée*) et les notions de modulation *avec porteuse* ou *sans porteuse*. La notion de modulation *vectorielle*, approche globale de l'onduleur triphasé en opposition avec le contrôle *bras par bras*, y apparaît également clairement. Le rappel du principe de chacune de ces familles dépasserait le cadre que nous nous sommes fixés mais le lecteur intéressé pourra se reporter à [LESBROUSSART97].

### 1.3 Les stratégies de modulation qui visent à obtenir un faible bruit acoustique

La classification précédente permet de mettre en évidence un paramètre essentiel dans la recherche de stratégies de commutation peu bruyantes. Les stratégies *avec porteuse* se caractérisent par un fonctionnement à fréquence de découpage constante<sup>2</sup> alors que les stratégies *sans porteuse* sont caractérisées par un fonctionnement à fréquence variable donc un contenu spectral *étalé* (*spread spectrum*). Les stratégies de modulation avec porteuse se caractérisent par un ensemble de raies au voisinage de la fréquence de découpage et de ses multiples. Le bruit produit est donc monochromatique (*tonal*) et est donc plus difficilement supportable par l'être humain. À contrario, les stratégies *sans porteuse* se caractérisent par un spectre *étalé*,

<sup>2</sup>ce qui fait apparaître un spectre à composantes discrètes

le bruit est donc multi-fréquence (*harmonique*) et est finalement plus facilement supportable pour un niveau global identique<sup>3</sup>.

Cette remarque, bien que partiellement injustifiée, a conduit ces dernières années à un grand nombre de publications tout particulièrement dans la famille des modulations sans porteuse aléatoires (*Random Pulse Width Modulation*). Il est à noter que ces modulations aléatoires ne sont pas les seules à présenter un *spectre étalé*. La stratégie  $\Delta\Sigma$  *vectorielle* développée au LEC [VILAINOTERO95] ou du type *optimal* [GARCIALESBROUSSART95] présente ce type de caractéristiques mais font l'objet de moins de publications.

## 1.4 Les stratégies de modulation aléatoires visant à obtenir un faible bruit acoustique

Une grande diversité de techniques de modulation existent. Là encore, il est possible d'en tenter une classification. On peut discerner deux types d'articles :

1. les articles visant à modifier aléatoirement une des grandeurs de modulation
2. les articles traitant des méthodes de génération de la grandeur aléatoire

On remarquera également les articles de synthèse d'une équipe danoise [TRZYNADLOWSKIBLAAJBERGO94] et de [BECHPEDERSONBLAABJERG96]. L'ensemble de ces articles souffrent néanmoins d'un défaut commun : ils considèrent que le fait d'avoir un spectre étalé réduit le niveau sonore. Seul BECH et BLAAJBERG dans [BECHPEDERSONBLAABJERG96] souligne le défaut essentiel de ces stratégies qui consistent à solliciter toutes les fréquences mécaniques du système étudié et donc également leurs résonances. . .

On notera finalement que le principe d'excitation par un signal aléatoire est parfois utilisé par les mécaniciens pour déterminer les fonctions de transfert et donc les éventuelles résonances du système mécanique.

## 1.5 Conclusion sur l'analyse bibliographique

La majorité des publications portant sur les stratégies de modulation visant à la réduction du bruit acoustique partent du fait qu'un spectre étalé génère un bruit acoustique réduit. Si l'*impression* de bruit généré par ce type de stratégie est effectivement plus *supportable* qu'un bruit purement tonal (monochromatique), il n'en demeure pas moins vrai que le niveau global n'est généralement pas réduit. De plus, ces stratégies présentent le défaut majeur d'exciter la structure mécanique sur une large bande de fréquence. Ce défaut peut ne pas en être un sur des structures mécaniques simples (banc de

---

<sup>3</sup>La notion de supportable ou non, renvoie ici aux notions qualitatives de psycho-acoustique, cf. par exemple [RABINOWITZ91], [KRYTER85] ou [LIÉNARDFRANÇOIS83].

test de laboratoire) mais peut tout aussi bien devenir catastrophique sur des systèmes complexes (véhicules ou chaîne de montage). Les études dissocient généralement la partie *mécaniques* de la partie *électronique*, ce qui semble inopportun pour ce type de problème. Un nombre plus réduit de publications tente d'analyser le couplage machine-convertisseur dans une approche globale. Certains phénomènes sont calculés de manière analytique et d'autres numériques. R. BELMANS, dont les travaux font références dans le domaine, propose en 1991 une approche analytique dans laquelle les forces sont calculées à partir du contenu spectral du courant et des données de la machine. La réponse mécanique (modes et fréquences propres) est déterminée numériquement [BELMANSVERDYCKGEYSENFINDLAY91]. On remarquera, plus récemment, des auteurs qui proposent l'utilisation du contenu spectral du courant afin de réduire l'effet des vibrations dues à l'encochage rotor et stator [CORTONSAWEZYNBELKHAYATBRUDNY00].

De manière générale, la quasi totalité des articles cités réduisent l'analyse du bruit émis à l'étude des vibrations statoriques ou bien mesurent la pression acoustique générée en un point unique au voisinage immédiat du stator sans tenir compte des notions incontournables de directivité acoustique. Ces approches sont là-encore insuffisantes pour une caractérisation acoustique de l'ensemble *machine-convertisseur*.

## 1.6 Orientation de l'étude à l'issue de l'analyse bibliographique préliminaire

Comme il a été précisé dans l'introduction, le travail présenté s'inscrit dans une optique de pré-dimensionnement d'un ensemble machine associée à son convertisseur statique. Malgré la très grande diversité des stratégies de modulation, leurs performances (tant que les phénomènes sont considérés comme stationnaires) peuvent être exprimés en terme de spectre (à composantes discrètes ou continues). Le prédimensionnement interdit toute solution numérique *lourde* car de telles méthodes imposent de disposer d'un modèle d'ores et déjà établi. Les couplages numériques entre les différents domaines (électromagnétisme-vibrations-acoustique) ne sont pas encore parfaitement développés. L'étude acoustique ne peut se résumer en une étude vibratoire. Un modèle simple devra permettre d'estimer le passage des données vibratoires vers le rayonnement acoustique de l'ensemble.

## 1.7 Choix effectués pour la suite de l'étude

1. les stratégies de commutation seront caractérisées par le *spectre de tension* appliquée sur une phase. Cette approche permet la modélisation de l'ensemble des stratégies existantes sous réserve de disposer d'un

modèle performant de la machine asynchrone permettant d'en déduire les courants.

2. nous nous interdirons tout recours à des solutions numériques *lourdes* de type éléments finis sauf pour valider des modèles et résultats analytiques afin de conserver un modèle *souple* de pré-dimensionnement.
3. nous tenterons d'établir une modélisation acoustique et non seulement vibratoire du processus.
4. le nombre d'hypothèses nécessaires à une telle approche étant important, une validation expérimentale effectuée en chambre sourde tentera de valider les modèles proposés.

## Chapitre 2

# Méthodologie proposée pour traiter le problème

Les méthodes de calcul par éléments finis (*E.F.*) sont de plus en plus utilisées en modélisation dans des domaines aussi variés que le dimensionnement électromécanique, le domaine vibratoire ou bien encore l'acoustique. Cependant, de par la taille et les temps de calculs mis en jeu, cet outil n'est pas forcément adapté au pré-dimensionnement des actionneurs électromécaniques et de leurs alimentations. Des tentatives prometteuses de couplage par E.F. entre plusieurs domaines de la physique commencent à voir le jour <sup>1</sup> mais ces méthodes restent encore l'apanage des spécialistes en modélisation. Notre travail, certainement plus modeste, consiste à concevoir un outil simple et néanmoins efficace d'aide à la conception d'ensemble *machine – convertisseur* qui permettrait d'évaluer le niveau sonore en fonction du type d'alimentation retenue. Notre approche s'appuie sur un outil utilisé depuis longtemps dans la résolution des problèmes régis par des équations aux dérivées partielles : l'approche de Fourier. Cette technique consiste à projeter les variables dans l'espace fréquentiel (dans notre cas, projection des variables temps et espace). Cette projection permet de faire facilement des filtrages et ainsi de ne faire apparaître que les éléments importants ce qui est vital pour le pré-dimensionnement d'un ensemble complexe.

### 2.1 Prise en compte du convertisseur

Le dimensionnement d'un actionneur électrotechnique se limite généralement à la machine seule bien que cette dernière soit maintenant pratiquement toujours associée à un convertisseur statique. Les difficultés de modélisation proviennent du fait que les constantes de temps mises en jeu

---

<sup>1</sup>Notons la prise en compte du convertisseur dans le calcul électromécanique par E.F. de [ITOKAWABATAJAJIMA97] ou bien encore le couplage E.F. magnéto-mécano-acoustique développé par [BAUERHENNEBERGER99]

dans les différents domaines (électronique de commutation, phénomènes magnétiques quasi-statiques, évolution thermique) peuvent être complètement différentes, ce qui rend les calculs longs et imprécis. Une approche fréquentielle permet de ne conserver que les paramètres de grande importance.

Le convertisseur est l'élément qui permet d'appliquer une tension à la machine. Ainsi sa prise en compte au niveau fréquentiel conduit à appliquer non pas une consigne (en régime permanent) mais tout un spectre de tension résultant du convertisseur et de sa stratégie de modulation (pleine onde, PWM à échantillonnage naturel, synchrone, asynchrone, optimisé, aléatoire...). Les différentes stratégies ayant été traitées au chapitre 1, dans la suite de nos travaux, nous utiliserons la stratégie de découpage à échantillonnage naturel synchrone que nous prendrons en compte via son spectre de tension simple qui est bien connu des électroniciens de puissance. La figure 2.1 représente ce spectre pour une consigne sinusoïdale de 9 V rms et de fréquence 50 Hz en utilisant une stratégie de découpage à échantillonnage naturel pour une fréquence de découpage de 1500 Hz.

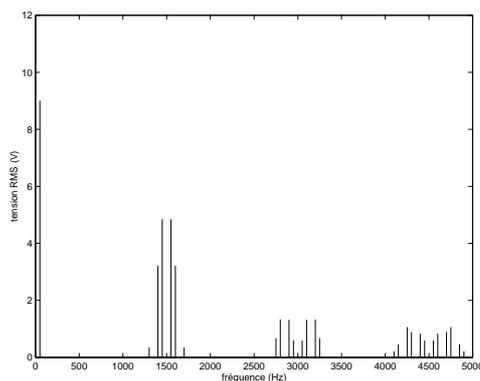


FIG. 2.1 – spectre de tension résultant d'une conversion statique PWM

## 2.2 Conversion électromécanique

Pour conserver l'approche fréquentielle, nous avons utilisé la théorie dite *des champs tournants* (*Winding Field Theorie*) qui consiste à modéliser les différents champs magnétiques créés comme la superposition de champs harmoniques élémentaires qui tournent dans l'entrefer de la machine. Cette théorie, couramment utilisée en électrotechnique, nécessite quelques hypothèses de linéarité (comme la non saturation des matériaux magnétiques). Ces hypothèses peuvent être critiquables, il n'en reste pas moins qu'au stade du pré-dimensionnement, elles sont acceptables.

L'utilisation de cette théorie nécessite cependant la connaissance des courants qui circulent dans les différents enroulements (de même qu'un calcul

magnétostatique par éléments finis). Mais la stratégie de conversion statique ne fixe pas les courants mais les tensions. Il sera donc nécessaire de développer un modèle de schéma électrique complet qui permette d'abord d'évaluer les spectres des courants dans les bobinages statoriques et rotoriques puis de pouvoir calculer les champs tournants. Les différents courants et champs magnétiques devront tenir compte des harmoniques de temps (tension), des harmoniques d'espace (répartition des bobinages) ainsi que de la variation de perméance (ouverture des encoches)<sup>2</sup>.

La connaissance des différents champs tournants nous permettra de définir les couples moyens et pulsants par interaction des champs statoriques et rotoriques [CHATELAIN83] ainsi que des efforts radiaux déterminés à l'aide du tenseur de Maxwell [HELLERHAMATA77]. À tous les stades de la modélisation, nous pouvons toujours nous ramener à une nouvelle combinaison de champs tournants harmoniques (par utilisation des relations trigonométriques) et c'est ainsi que nous modéliserons les efforts électromagnétiques radiaux à l'origine de bruits et de vibrations comme une superposition d'efforts harmoniques radiaux tournant dans l'entrefer.

La figure 2.2 donne un exemple d'un spectre de tension appliquée ainsi que du courant résultant qui circule dans une phase de stator d'une machine électrique.

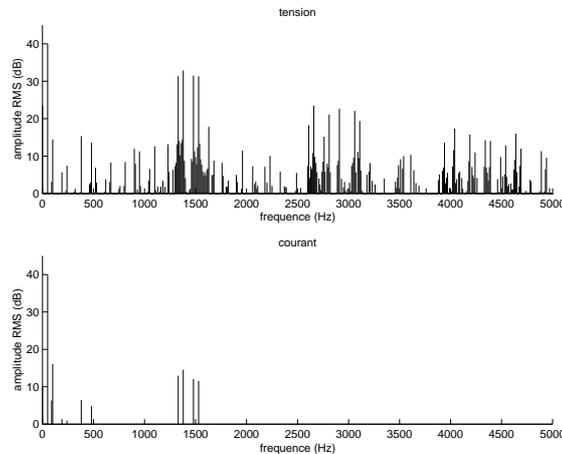


FIG. 2.2 – spectre de tension résultant d'une conversion statique PWM et courant statorique absorbé par la machine (Echelle exprimée en dB et niveau max fixé à 40dB)

Au niveau des champs tournants qui traversent l'entrefer (force magnéto-motrice, intensité magnétique, densité de flux magnétique, densité d'effort),

<sup>2</sup>Les schémas que nous développons sont des versions enrichies des schémas électriques qui tiennent comptes des harmoniques d'espace que l'on trouve par exemple dans [ALGER51] et [CHAVERNOZPASDELOUP69]

ces champs tournants dépendent des variables espace et temps. Leurs spectres doivent donc dépendre du rang de temps et du rang d'espace. Ceci nous conduit naturellement à utiliser un *spectre en deux dimensions* pour représenter le contenu spectral de ces différents champs <sup>3</sup>. La première dimension représente le classique spectre temporel alors que la seconde représente le spectre d'espace c'est-à-dire l'allure spatiale du champ tournant (c.f. figure 2.3).

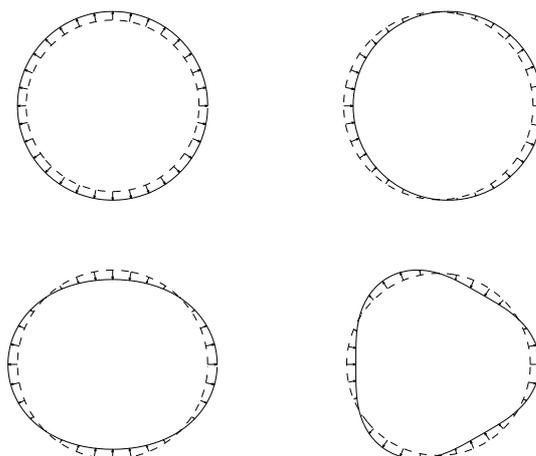


FIG. 2.3 – *allure spatiale* des champs tournants harmoniques pour un rang d'espace (nombre d'onde) variant de 0 à 3

C'est ainsi qu'à un rang d'espace  $m$  et un rang de temps  $n\omega$  de notre spectre deux dimensions correspondra un champ harmonique  $\cos(n\omega t + m\theta)$  – où plutôt  $e^{j(n\omega t + m\theta)}$  avec la notation exponentielle –, tournant dans l'entrefer à la vitesse  $\Omega = \frac{n\omega}{m}$ . Ceci dans le cas de la machine utilisée pour construire la figure 2.2 conduit à un spectre deux dimensions de la pression mécanique exercée sur le stator (*Maxwell Stress Tensor*) représenté par la figure 2.4.

Pour plus de détails, sur l'analyse spectrale et sur les notions de champs harmoniques, le lecteur pourra se reporter à l'annexe A.

## 2.3 Comportement mécanique et vibratoire

À l'aide de la modélisation électromécanique évoquée à la section 2.2, nous déterminons les efforts radiaux comme une superposition de champs

<sup>3</sup>Cette notion de spectre deux dimensions est très utilisée en acoustique pour décrire les phénomènes d'ondes progressives ou stationnaires, on la retrouve également dans quelques travaux relatif au sujet abordé dans ce mémoire, par exemple dans [MIKAMIDETAKAHASHI99]

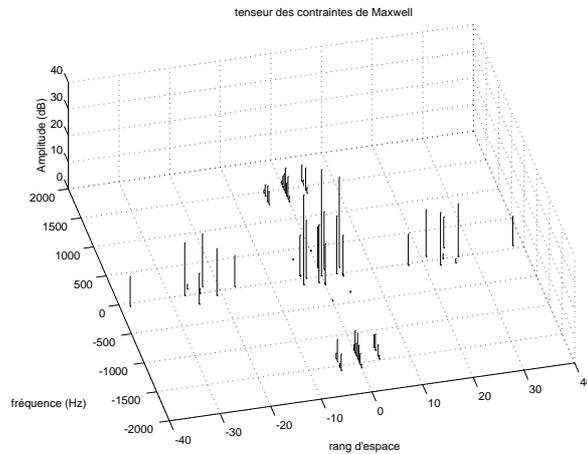


FIG. 2.4 – spectre deux dimensions du tenseur de Maxwell (temps et espace)

tournants harmoniques. Les vibrations (et donc le bruit) générées par une machine électrique vont être réduites de manière significative si les forces produites pendant le fonctionnement normal ne peuvent exciter de résonances mécaniques du stator. Ainsi, une détermination précise des caractéristiques et fréquences de résonance du stator des machines semble pour le moins inévitable. En ayant à sa disposition un modèle de comportement vibratoire, le concepteur pourra estimer le niveau de vibration et optimiser sa conception de machine et de convertisseur dans la perspective de réduction du bruit et des vibrations. En regard de l'allure des efforts résultant de la conversion électromécanique (champs tournants sinusoïdaux), la méthode qui apparaît immédiatement comme la plus adaptée semble être la méthode de superposition modale. Un rappel du principe de cette méthode de modélisation mécanique permettra d'étayer cette affirmation.

### 2.3.1 Notions d'analyse et de superposition modales

Dans cette sous-section, nous allons expliquer les fondements de l'analyse modale et en quoi elle paraît bien adaptée à notre cas d'étude. Pour introduire les notions nouvelles pour les *électrotechniciens*, nous partirons d'un système discret simple que nous étudierons d'abord sans amortissement puis avec. Nous généraliserons ensuite au cas d'un système continu.

#### Mise en équation d'un système à deux degrés de liberté (2 DDL)

Les structures mécaniques réelles sont analysées de manière courante en utilisant un modèle de systèmes vibratoires comportant de multiples degrés de liberté. Ainsi, les propriétés d'un système continu peuvent être simulées avec le degré de précision voulu en le remplaçant par un système approchant

ayant un nombre fini de degrés de liberté (système discret ou discrétisé).

En partant de l'exemple d'un système à deux degrés de liberté représenté sur la FIG 2.5, nous développerons la construction des équations du mouvement.

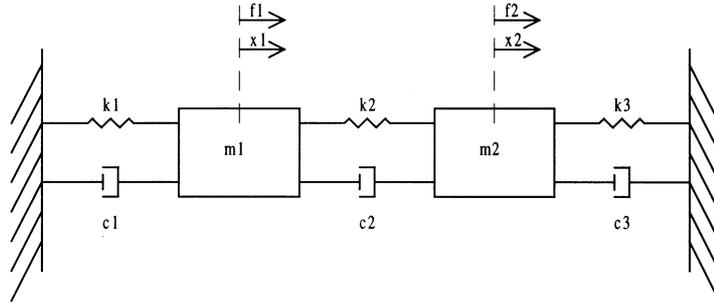


FIG. 2.5 – exemple d'un système discret à deux degrés de liberté

Pour ce système, les équations du mouvement peuvent être obtenues, soit en utilisant le principe de NEWTON – D'ALEMBERT –, soit en utilisant le principe de HAMILTON – les équations de LAGRANGE.

1. NEWTON :  $\sum f = m \cdot \gamma$ , D'ALEMBERT :  $\sum f + f_{inertie} = 0$ . Pour chacune des deux masses du système, en utilisant l'un ou l'autre de ces principes, nous trouvons :

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \cdot \dot{x}_1 - c_2 \cdot \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 = f_1 \quad (2.1)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (c_2 + c_3) \cdot \dot{x}_2 - c_2 \cdot \dot{x}_1 + (k_2 + k_3) \cdot x_2 - k_2 \cdot x_1 = f_2 \quad (2.2)$$

ce qui peut s'écrire de manière *matricielle* :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\} \quad (2.4)$$

2. HAMILTON :  $\delta \mathcal{A} = \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \right) = 0$ , équations de LAGRANGE. Pour utiliser ces principes, il est nécessaire de développer des fonctionnelles d'énergie :

(a) énergie cinétique :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2 \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{\dot{x}\}^T \cdot [m] \cdot \{\dot{x}\} \quad (2.6)$$

(b) énergie potentielle :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_3 \cdot x_2^2 \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{x\}^T \cdot [k] \cdot \{x\} \quad (2.8)$$

(c) fonction de dissipation :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_3 \cdot \dot{x}_2^2 \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \{\dot{x}\}^T \cdot [c] \cdot \{\dot{x}\} \quad (2.10)$$

Ces trois fonctions conduisent aux mêmes équations que (2.4), si nous utilisons les équations de LAGRANGE solution du problème de minimisation de HAMILTON dans le cas où apparait une fonction dissipative [GERADINRIXEN96] [LESUEUR88].  $q_i$  représente une des coordonnées généralisées –  $x_1$  ou  $x_2$  dans notre exemple :

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} + f_i = 0 \quad (2.11)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \\ + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

*L'une ou l'autre de ces deux méthodes peuvent être utilisées pour obtenir les équations de n'importe quel système discret ou discrétisé – système continu que l'on discrétise plus ou moins en fonction de la précision recherchée.*

### Analyse et superposition modale d'une structure conservative

Dans un premier temps, nous allons étudier le cas d'un système sans amortissement. L'analyse du système discret peut se poser sous forme matricielle :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\} \quad (2.13)$$

où  $\{x\}$  correspond aux vecteurs des coordonnées généralisées du système discrétisé. Lorsque l'on veut résoudre un tel système, la difficulté vient du couplage entre les différentes coordonnées du système car les différentes matrices sont en général *pleines* – non diagonales. Si ce système pouvait être

découplé, on obtiendrait des matrices diagonales pour la masse et la raideur ainsi chaque équation (ligne du système d'équation) deviendrait similaire à un système à un seul degré de liberté indépendant des autres. Le processus consistant à transformer le système couplé en un jeu d'équations découplées est appelé l'*analyse modale* [EWINS84].

Pour résoudre cette équation pour des petites oscillations libres, c'est-à-dire en partant de l'équation (2.13) sans excitation :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \quad (2.14)$$

Nous cherchons une solution particulière dans laquelle toutes les coordonnées généralisées suivent, à une constante près, la même loi temporelle :

$$x = X \cdot \phi(t) \quad (2.15)$$

$X$  est un vecteur de constantes constituant ce que l'on appelle la *forme propre du mouvement*<sup>4</sup>. En remplaçant cette solution dans l'équation (2.14), on obtient :

$$\ddot{\phi}(t) \cdot [m]\{X\} + \phi(t) \cdot [k]\{X\} = 0 \quad (2.16)$$

Soit encore, l'égalité :

$$[k]\{X\} = -\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} \cdot [m]\{X\} \quad (2.17)$$

Comme  $[m]$  et  $[k]$  sont non-nulles et que cette équation doit être vérifiée quel que soit  $t$ , les seules solutions non-triviales conduisent à :

$$-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \lambda_p \quad (2.18)$$

et

$$[k]\{X\} = \lambda_p \cdot [m]\{X\} \quad (2.19)$$

Pour des raisons de *stabilité* de la solution, on peut montrer que  $\lambda_p$  est forcément réelle et positive. Posons  $\lambda_p = \omega^2$ .

1. l'analyse de  $\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \cdot \phi(t) = 0$  nécessite une dépendance *harmonique* de  $\phi(t)$  par rapport à la variable  $t$  :

$$\phi(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \quad (2.20)$$

---

<sup>4</sup>propre dans le sens que *le rapport de deux coordonnées est indépendant du temps et toujours égal au rapport des éléments correspondants de  $X$*  [GERADINRIXEN96]

2. l'analyse de  $[k]\{X\} = \omega^2 \cdot [m]\{X\}$  nous conduit à résoudre le problème  $([k] - \omega^2 \cdot [m]) \cdot \{X\} = 0$  qui n'est autre qu'un problème de *valeurs propres*. L'équation  $\det([k] - \omega^2 \cdot [m]) = 0$  est appelée l'*équation aux valeurs propres*  $\omega_i^2$ . Les vecteurs  $X_i$  sont les *vecteurs propres* – ou *modes propres* – associés à chacune des valeurs propres  $\omega_i^2$ . Le nombre de valeurs propres est égal à la dimension  $N$  de  $\{X\}$  donc au nombre de coordonnées généralisées.

Intuitivement, la recherche des vecteurs propres va revenir à trouver la *base* qui diagonalise le système (2.14). On pourra obtenir les solutions de ce système, non pas en résolvant *en bloc* ce système *couplé* d'ordre  $N$  mais en résolvant un système *équivalent* de  $N$  systèmes d'ordre un découplés. La base des  $N$  vecteurs propres  $X$  est une base complète dans laquelle, il est possible d'exprimer les solutions  $x$ . En appelant  $\eta$  les coordonnées dans la *base modale* :

$$\{x\} = [X]\{\eta\} \quad (2.21)$$

où  $[X] = [X_1 X_2 \cdots X_N]$  est appelé la *matrice modale*,  $\{X_i\}$  est le vecteur des *déformées modales* – vecteur propre – et enfin  $\{\eta\}$  est le vecteur des *coordonnées modales*. Finalement, en reportant dans (2.14), nous trouvons :

$$[m][X]\{\ddot{\eta}\} + [k][X]\{\eta\} = \{f\} \quad (2.22)$$

En pré-multipliant les deux cotés de l'équation (2.22) par la transposée de la matrice modale,  $[X]^T$  et en utilisant les propriétés d'orthogonalité de la matrice modale qui se traduisent par les relations <sup>5</sup> :

$$\begin{aligned} [X]^T[m][X] &= [M_i] \\ [X]^T[k][X] &= [K_i] \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec  $[M_i]$  et  $[K_i]$  matrices diagonales, on obtient le jeu d'équations indépendantes suivant :

$$[M_i]\{\ddot{\eta}\} + [K_i]\{\eta\} = [X]^T\{f\} = \{F\} \quad (2.24)$$

Nous nous ramenons donc à un système composé de  $N$  équations différentielles indépendantes, chacune traduisant le mouvement d'un système à un degré de liberté  $(M_{ii}, K_{ii})$ , excité par une force généralisée  $F_i$ . On sait qu'un vecteur propre est défini à une constante près, en choisissant judicieusement cette constante, on peut s'arranger pour obtenir  $[M_i]$  égale à la matrice identité. On dit alors que l'on a normalisé les vecteurs par rapport à la masse

<sup>5</sup>Pour la démonstrations de ces propriétés, nous renverrons le lecteur aux ouvrages classiques de mécanique vibratoire [TIMOSHENKOYOUNGWEAVER74] [MEIROVITCH97] [GERADINRIXEN96]

(cf. [TIMOSHENKOYOUNGWEAVER74]). On obtient le système suivant pour chaque indice  $i$  :

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \cdot \eta_i = F_i \quad (2.25)$$

La réponse de déplacement modal – sur chacun des modes – correspond à la fonction de réponse d'un système du second ordre. Sous excitation harmonique, la réponse d'un tel système est bien connue, elle correspond à la réponse reportée à la FIG 2.6 pour un amortissement nul ( $\varepsilon = 0$ ).

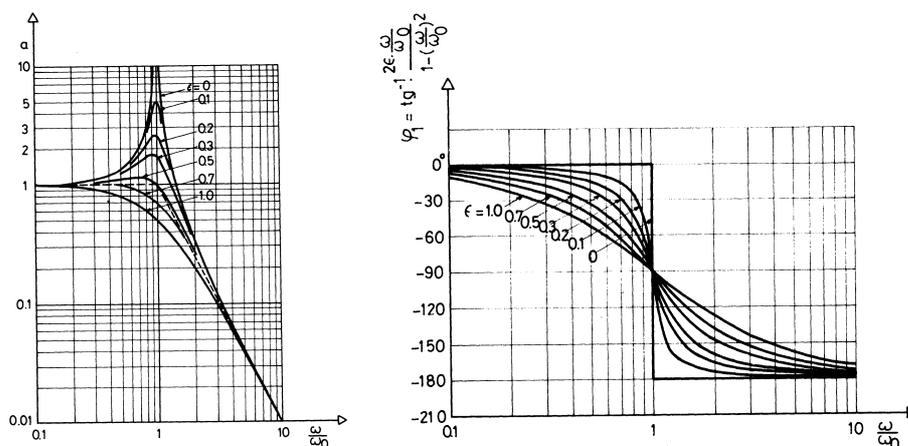


FIG. 2.6 – fonction de réponse en fréquence (amplitude et phase) pour un système du second ordre à un degré de liberté

Cette approche permet de traiter le problème en deux temps :

1. éviter les coïncidences fréquentielles entre la fréquence propre d'un mode et les forces projetées sur ce mode – forces modales. Cette coïncidence conduirait à une forte résonance, limitée seulement par l'amortissement de la structure et on sait qu'une structure telle qu'un stator est très faiblement amortie. Cette première action permettra de réduire fortement les sources de bruits puisque ces coïncidences correspondront aux déplacements maximaux donc aux vibrations maximales<sup>6</sup>.
2. le deuxième temps consistera à prédéterminer les sources de bruits résiduelles – hors résonances. Dans ce cas, l'amortissement joue un rôle faible dans la réponse comme on peut l'observer sur la FIG 2.6, suffisamment loin de la résonance.

Pour connaître la réponse dans la base initiale, c'est-à-dire dans la base des coordonnées initiales  $\{x\}$ , il suffit de ramener les coordonnées  $\{\eta\}$  cal-

<sup>6</sup>on notera que le calcul exacte des réponses proches d'une résonance nécessite la détermination des coefficients d'amortissements. Ceci sera traité à la sous-section suivante

culées par résolution de (2.25) de la base modale vers la base initiale, c'est-à-dire en utilisant l'équation inverse de (2.21) qui devient :

$$\{\eta\} = [X]^{-1}\{x\} \quad (2.26)$$

### Analyse et superposition modales d'une structure dissipative

Partons maintenant de l'équation dynamique avec amortissement :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \quad (2.27)$$

Le comportement d'un tel système est beaucoup plus complexe que le précédent, pour une étude plus complète, on pourra se reporter à [GERADINRIXEN96] p 95.

Conservons  $\omega_i$ ,  $X_i$  et  $\eta_i$  les valeurs, vecteurs et coordonnées modales du problème sans amortissement. Si nous reconstruisons l'équation modale à partir de ces paramètres, nous obtenons :

$$[M_i]\{\ddot{\eta}\} + [X]^T[c][X]\{\dot{\eta}\} + [K_i]\{\eta\} = \{F\} \quad (2.28)$$

En normalisant par rapport à la masse, on obtient pour chaque indice  $i$  :

$$\ddot{\eta}_i + \sum_{j=1}^N \frac{X_i \cdot c_{ij} \cdot X_j}{M_{ii}} \cdot \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \cdot \eta_i = F_i \quad (2.29)$$

Du fait que les amortissements peuvent être répartis d'une manière très différente des masses et des raideurs, les coefficients  $X_i \cdot c_{ij} \cdot X_j$  sont en général non nuls, ce qui fait que l'approche modale perd beaucoup de son sens puisque les équations modales restent couplées par les termes d'amortissements. Les seules méthodes de résolution de l'équation (2.27) sont alors les méthodes d'intégrations directes de ces équations du mouvement. Si nous voulons continuer à utiliser les méthodes modales, nous sommes contraints d'utiliser l'hypothèse d'amortissement diagonal qui n'est possible que dans la cas d'un amortissement faible.

Pour cela, nous partons de l'hypothèse que les forces de dissipation sont réparties comme les forces d'inertie ou les forces élastiques, ce qui revient à négliger les termes  $X_i \cdot c_{ij} \cdot X_j$  lorsque  $i \neq j$ . On obtient alors une matrice d'amortissement diagonale. Cette hypothèse ne repose sur aucune justification physique mais il peut être montré qu'elle est cohérente avec l'hypothèse d'une structure faiblement dissipative (cf. [GERADINRIXEN96] pour la démonstration). En notant  $[C_i]$  la matrice ne contenant que les termes diagonaux de  $[X]^T \cdot [c] \cdot [X]$ , on se ramène au système :

$$[M_i]\{\ddot{\eta}\} + [C_i]\{\dot{\eta}\} + [K_i]\{\eta\} = \{F\} \quad (2.30)$$

qui correspond à  $N$  systèmes à un degré de liberté découplés du second ordre en temps. La manière classique pour construire cette matrice d'amortissement diagonale dans la base des modes propres consiste à réaliser une somme pondérée des termes de masses et de raideurs, ceci est appelé l'*amortissement proportionnel*.

$$c = a \cdot k + b \cdot m \quad (2.31)$$

### Analyse et superposition modale d'une structure continue

Dans les deux sous-sections précédentes, nous nous sommes intéressés aux structures discrètes ou discrétisées car une structure continue peut souvent être ramenée à une structure discrète équivalente. Parfois, il existe des cas où l'on préfère travailler directement avec des structures continues, soit parce que nous connaissons des solutions, soit parce que nous travaillons avec des méthodes variationnelles qui sont bien adaptées à ce genre de problèmes. Dans le cas où le nombre de degrés de liberté tendrait vers l'infini, le problème discret tend vers celui d'un problème continu, ainsi, les principes de la méthode d'analyse modale vont rester valides pour une structure continue. Pour obtenir les équations du mouvement, on part généralement de considérations énergétiques mais pour des cas simples, on peut également partir du principe de NEWTON ou de D'ALEMBERT. L'équation du mouvement ne prend pas forcément la forme de l'équation (2.4) mais fait généralement intervenir un opérateur d'espace traduisant le type de déformations rencontrées (extension, flexion...). Cet opérateur peut être d'ordre deux (élongation pure), quatre (flexion pure) ou autre (comportements couplés). Quelques exemples seront traités au chapitre 4 et C.

En considérant les solutions comme harmoniques en temps, on obtient une équation des fréquences à nombre infini de solutions – analogue au problème de valeurs propres discret. Une fois, les valeurs et vecteurs propres déterminés, nous les utilisons comme base de projection pour découpler les équations du mouvement. Pour un système continu, la projection ne peut être obtenue par des matrices de changement de base – matrices modales – mais ceci est réalisé par un *produit scalaire* entre l'équation du mouvement et chacun des modes propres<sup>7</sup>. Bien que dans la forme, les techniques soient différentes du cas discret, sur le fond, les cas discrets et continus d'analyse et de superposition modales sont complètement analogues.

---

<sup>7</sup>un produit scalaire *continu* entre une fonction  $f$  et  $g$  sur un domaine  $S$  peut être calculé par l'intégrale  $\int_S f \cdot g \, dS$ . On utilise alors des outils type *calculs des variations* ou *travaux virtuels*

### 2.3.2 Synthèse des techniques d'analyse et de superposition modale

Pour terminer cette section, il nous a semblé intéressant de citer un paragraphe de Mr C. Lesueur, spécialiste français des vibrations, qui, dans son ouvrage [LESUEUR88], fait une très bonne description de l'intérêt que peuvent apporter les techniques d'analyse modale :

*Pourquoi passer dans la base propre, ce qui alourdit la démarche ? Au stade projet, cette méthodologie a l'avantage de faire apparaître les déplacements propres à chaque configuration et les pulsations propres ; il est donc possible d'éviter les résonances si l'excitation est connue ou de placer les forces excitatrices aux endroits où le vecteur propre est voisin de zéro (nœuds de vibrations). De sorte que sans faire de calculs de réponse, l'obtention du schéma modal (fréquences propres, vecteurs propres et caractéristiques généralisées  $M_{ii}$ ,  $K_{ii}$ ,  $C_{ii}$ ), rend possible une action souvent décisive.*

Cette technique a déjà été utilisée en éléments finis pour le calcul des vibrations de machines électriques [VERDYCKBELMANS94] [LEFÈVRE97], nous tenterons d'en développer une version analytique qui nous permettra de déterminer la réponse dynamique de la structure sur chacune des coordonnées modales sans avoir à inverser tout le système (2.4).

Pour tenir compte de l'amortissement complet, la seule méthode exacte est la méthode d'intégration directe. Au niveau conception, la méthode modale est beaucoup plus pertinente, c'est donc cette dernière que nous devons utiliser. Les matrices d'amortissement doivent alors utiliser l'hypothèse d'amortissement proportionnel qui est acceptable puisque les amortissements sont faibles dans les structures statoriques. À ce stade, il est nécessaire de remarquer que les amortissements ne peuvent bien souvent être déterminés qu'expérimentalement, ce qui rend leurs utilisations lors de la conception tout à fait impossible.

*La grande force de nos travaux est que l'on va tenter de contrôler l'emplacement des excitations<sup>8</sup>. Ainsi, si nous sommes en mesure de placer les excitations suffisamment loin de chaque fréquence propre, la réponse à chacun de ces efforts dans la base modale sera relativement indépendantes des amortissements (cf. FIG 2.6), nous pourrons alors estimer la réponse dynamique en négligeant les amortissements.*

---

<sup>8</sup>par un contrôle du convertisseur statique et de toute la chaîne de conversion électromécanique

## 2.4 Développement d'un modèle de rayonnement

Notre étude ne s'intéressera qu'au rayonnement direct du stator bien qu'il soit démontré de plus en plus souvent qu'une part importante du bruit provient de la transmission des vibrations aux éléments environnants (bâti, fixations...) qui rayonnent à leur tour. Ce bruit indirect connu sous le nom de *bruit solidien* ou d'*origine solidienne* (*structure borne sound*) ne sera pas pris en compte dans cette étude<sup>9</sup>.

Différents modèles ont été proposés pour approcher le rayonnement d'un stator de machine électrique. Le choix entre les différents modèles dépend en grande partie de la géométrie de la machine. Ainsi,

1. pour les machines *cylindriques* et *longues*, nous pouvons considérer que le stator rayonne comme un cylindre de longueur infini. C'est, par exemple, ce qui a été proposé par [ALGER51].
2. pour les machines *courtes*, nous pouvons considérer, que le stator rayonne comme une sphère pulsante, c'est par exemple ce qui a été proposé par [JORDAN50].
3. dans un cas intermédiaire, nous pouvons considérer le moteur comme un cylindre d'une certaine longueur comme le modèle proposé par [YANG81]
4. finalement, nous pouvons modéliser la géométrie complète et donc le rayonnement en utilisant des techniques de calculs variationnels simplifiés (distributions de dipôles et monopôles) [GABSILOYAULOVAT99].

Si nous voulons conserver notre approche analytique (dans l'optique de pré-dimensionnement), le rayonnement du stator devra être approché par des formes rayonnantes simples : cylindres, sphères, ..., soumis à une superposition de vibrations sinusoïdales en temps et en espace (le long de la périphérie). La pression acoustique sera déterminée en résolvant une équation des ondes, soit en coordonnées cylindriques, soit en coordonnées sphérique suivant le modèle retenu<sup>10</sup>. Pour notre part, nous développerons des modèles en coordonnées cylindriques.

La solution qui nous intéresse correspond à un rayonnement en champ libre causé par les vibrations de la surface du stator. Ce choix fixe les deux conditions aux limites qui vont nous permettre de trouver la valeur de la pression acoustique et de la vitesse particulière.

1. la vitesse vibratoire est égale à la vitesse acoustique (*particulière*) à la périphérie du cylindre.

---

<sup>9</sup>Quelques études de ce type de bruit commencent à voir le jour pour des machines électriques : [DIBHENRIOHUBERT<sup>+</sup>00]

<sup>10</sup>Quelques modèles de rayonnement simples peuvent être trouver dans les ouvrages classiques tels que [CREMERHECKLUNGAR88] où [JUNGERFEIT72]

2. application de la condition de rayonnement de Sommerfeld (rayonnement en champ libre = pas de réflexion).

## 2.5 Conclusion sur la méthodologie

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à choisir des outils qui seront, non seulement, utilisables en pré-dimensionnement mais qui doivent également être bien adaptés au couplage des différents phénomènes étudiés. Notre approche s'est donc naturellement portée sur une approche de Fourier appliquée à chacun des domaines :

1. utilisation des spectres de tension pour représenter le convertisseur.
2. utilisation d'un schéma électrique équivalent et d'une modélisation par champs tournants harmoniques pour la conversion d'énergie électromécanique.
3. utilisation des techniques de superpositions modales pour la partie mécanique.
4. enfin, utilisation de formule analytique de rayonnement de surface simple pour modéliser le rayonnement d'un stator en fonction de la géométrie de ce dernier.



## Chapitre 3

# Conversion électromécanique d'énergie

L'arrivée d'outils très puissants de modélisation numérique de type éléments finis (E.F.) dans le domaine électromécanique a permis de déterminer précisément les champs créés au sein même des machines électriques. Ces logiciels restent cependant mal adaptés pour la conception de systèmes électromécaniques lorsqu'il s'agit de choisir les paramètres élémentaires<sup>1</sup>, du fait de leurs temps de calcul importants qui empêchent encore une optimisation efficace du choix de ces paramètres. C'est pour ces raisons que les techniques plus classiques de *modélisations en champs tournants* sont encore couramment utilisées. Dans ce document, notre contribution s'est portée sur le choix optimum d'un ensemble *machine-convertisseur statique* en vue de la réduction des pulsations de couple et de la réduction du rayonnement acoustique. Le but de ce chapitre, après avoir passé en revue les différents travaux qui utilisent la description en champs tournants pour l'étude des vibrations, est de dégager une systématisation de la méthode des champs tournants bien adaptée à la résolution numérique.

### 3.1 Revue des différents travaux sur les champs tournants et intérêts de cette modélisation

La méthode de modélisation en champs tournants harmoniques (*winding field theory*) est une technique relativement ancienne puisqu'elle apparaît déjà dans la littérature dans les années 40 [LIWSCHITZ42] et est encore utilisée dans des articles récents [HADJ AMORTIMARPOLOUJADOFF95]. Elle est particulièrement bien adaptée pour les applications de réduction de bruit et les ouvrages de référence [YANG81] [TIMAR<sup>+</sup>89] en font un usage

---

<sup>1</sup>ces paramètres peuvent être par exemple la taille, le nombre d'encoches, épaisseur d'entrefer, nombre de conducteurs. . .

systématique pour identifier les bruits d'origine électromagnétique. Nous ne reviendrons pas sur l'explication complète de cette technique puisqu'elle est particulièrement bien introduite, pour les machines asynchrones dans l'ouvrage de P.L. ALGER [ALGER51] et également dans l'ouvrage de HELLER [HELLERHAMATA77] dont la bibliographie semble une des plus exhaustives sur le sujet. Nous montrerons que cette méthode est particulièrement bien adaptée au couplage des machines avec leurs convertisseurs statiques et qu'un traitement informatisé à l'aide de *transformée de Fourier discrète* et de *calcul matriciel* la rendra extrêmement *légère et souple* à utiliser<sup>2</sup>.

L'intérêt de la modélisation en champs tournants par rapport à un calcul *spatial* des champs dans la machine (type E.F.) est qu'à l'aide du théorème des *Travaux Virtuels*, on montrera aisément qu'un couple ne peut être créé que lorsqu'un champ statorique interagit avec un champ rotorique ayant la même *répartition spatiale* (nombre d'onde). Ceci nous permet donc, dès la conception d'identifier les harmoniques à supprimer pour réduire, par exemple, les pulsations de couple.

Au niveau de la réduction du bruit, la grande majorité des travaux consultés utilise la contrainte mécanique d'origine magnétique établie à l'aide du *tenseur de Maxwell* [LEFÈVRE97], [NEVESCARLSON<sup>+</sup>99]. Nous montrerons comment utiliser cette formulation de contrainte et pourquoi elle est bien adaptée à l'utilisation futur des techniques de superposition modale pour le comportement vibratoire.

### 3.2 Construction d'un schéma électrique pour connaître les courants en fonction des tensions appliquées à la machine

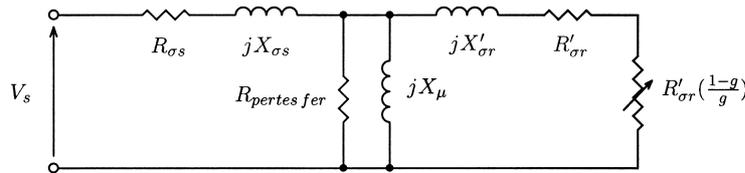
Au chapitre 1, nous avons vu que la prise en compte du convertisseur statique pouvait se faire au travers du spectre de tension que ce dernier applique à la machine électrique. Un problème s'est alors posé : la *méthode des champs tournants* est une méthode qui permet de calculer les différents champs dans l'entrefer à partir de la *géométrie* de la machine et des *courants* qui circulent dans les bobinages, or, si nous utilisons le convertisseur à partir du spectre de tension qu'il applique, nous ne connaissons pas le courant absorbé par la machine au stator et encore moins le courant qui circule au rotor. Pourtant ces données sont indispensables pour utiliser la méthode des champs tournants. De ce fait, il est *nécessaire* de développer une modélisation qui fera le *passage* entre tensions et courants.

---

<sup>2</sup>en comparaison de l'utilisation classique à *la main* qui impose de manipuler un grand nombre d'indices et des expressions *lourdes*

### 3.2.1 Les modèles existants tension-courant

Avant de proposer nos propres modèles, il est intéressant d'effectuer un tour d'horizon des modèles qui existent déjà et leurs utilités. Rappelons que notre modèle se veut un modèle de prédiction des nuisances sonores en fonctionnement stationnaire, c'est-à-dire que nous excluons l'étude des régimes transitoires (démarrage ou autres...). Les modèles de comportement dynamique tels que les modèles de PARK ou de KU ne nous intéressent donc pas directement (cf. par exemple les ouvrages suivants : [WHITEWOODSON59] [LESENNE NOTELETSEGUIER81]). Pour modéliser une machine asynchrone en régime permanent, on utilise le plus souvent le modèle de schéma équivalent monophasé à cinq ou six éléments de type *transformateur* très courant dans la littérature. Pour ne pas alourdir l'exposé et pour sa construction, nous renverrons le lecteur aux ouvrages classiques tels que [SEGUIER NOTELET96] et nous utiliserons directement le schéma donné à la FIG. 3.1.

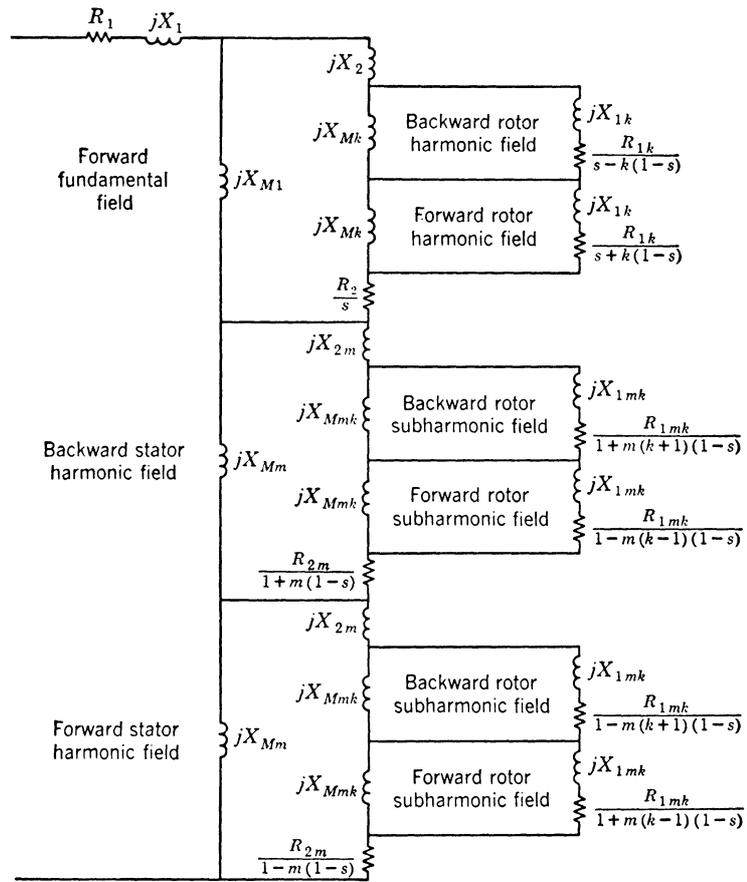


Tension simple appliquée à une phase du stator :  $V_s$   
 Résistance et réactance de fuite du stator :  $R_{\sigma s}, jX_{\sigma s}$   
 Résistance et réactance de fuite du rotor ramenées au stator :  $R'_{\sigma r}, jX'_{\sigma r}$   
 Résistance correspondant à la puissance sur l'arbre :  $R'_{\sigma r}(\frac{1-g}{g})$   
 Résistance représentant les pertes fer et réactance de magnétisation :  $R_{pertes fer}, jX_{\mu}$

FIG. 3.1 – schéma monophasé *simple* d'une machine asynchrone

Ce schéma équivalent classique est bien sûr très simplifié puisqu'il ne comprend que le fondamental. Pour obtenir les pulsations de couples ou les efforts d'attraction électromagnétique, il faut être capable de rendre compte des harmoniques et des pertes parasites. Pour cela, des schémas équivalents *complets* ont été développés. Nous pouvons citer, par exemple, le schéma proposé par P.L. ALGER p 290 de [ALGER51] représenté sur la FIG. 3.2 ou bien encore celui de R. CHAVERNOZ et M. PASDELOUP page 69 de [CHAVERNOZPASDELOUP69] représenté sur la FIG. 3.3. Pour comprendre et analyser ces schémas, les explications données par R. CHAVERNOZ et M. PASDELOUP semble tout à fait appropriées :

*Les harmoniques de perméance sont en série avec la branche magnétisante, ils ne sont donc traversés que par le courant magnétisant. Par contre, les harmoniques de f.m.m. sont parcourus par le courant total. Tous sont associés par paires comme on l'avait vu en développant le produit PM [Perméance que multiplie force magnétomotrice].*

FIG. 3.2 – schéma *complet* de P.L. ALGER d'une machine asynchrone

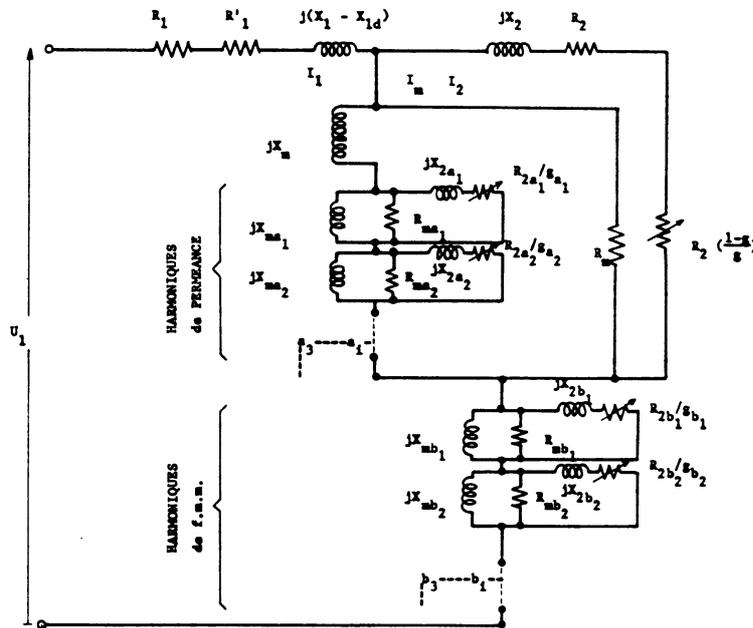


FIG. 3.3 – schéma complet de R. CHAVERNOZ et M. PADELOUP d'une machine asynchrone

Chacun des harmoniques est en fait un petit moteur asynchrone avec sa réactance magnétisante  $X_m$ , sa résistance  $R_m$  représentant les pertes fer, sa réactance de fuite  $X_2$  et sa résistance rotorique  $R_2/g$  ( $g$ =glissement). Pour le fondamental, cette résistance est décomposée en  $R_2$  pour les pertes rotor et  $R_2 \frac{1-g}{g}$  pour la puissance mécanique sur l'arbre.

Le schéma de chaque harmonique permet d'atteindre les couples harmoniques, les ondes de force pour le bruit, etc. [...] on note que la réactance différentielle  $X_{1d}$  a été retranchée de la réactance de fuite statorique de la figure 5 [correspondant à la FIG. 3.1 de cette section] du fait que  $X_{1d}$  est pris en compte par les branches harmoniques.

Un dernier point,  $R'_1$  représente les pertes parasites à fréquence fondamentale dues aux flux de fuite d'extrémité, au flux de fuite d'encoche statorique et au flux de fuite d'inclinaison d'encoches.

Sur ces deux schémas, on constate des phénomènes de différents ordres :

1. les éléments du premier ordre correspondent au fondamental, c'est-à-dire au schéma de la FIG. 3.1. Ce sont eux qui vont fixer les phénomènes principaux, couple moyen, courants fondamentaux, niveau de saturation...

2. les phénomènes de second ordre correspondent aux harmoniques d'espace du champ statorique qui sont parfois regroupés dans les schémas simplifiés en une inductance *différentielle*.
3. enfin, il existe des phénomènes de troisième ordre qui correspondent aux sous-harmoniques dues à la réaction du rotor.

Il est évident que les éléments de second ordre ne peuvent être négligés puisque ce sont principalement eux qui produisent les pulsations de couples ainsi que les efforts radiaux à l'origine des vibrations statoriques. Quant aux phénomènes de troisième ordre, on montrera dans l'annexe B.1 que ces sous-harmoniques dues à la réaction du rotor peuvent être négligés. Leur contribution est en fait très faible et ceci, que nous étudions des moteurs à rotors à cage ou à rotors bobinés. Sans perdre beaucoup de précision, nous pouvons utiliser un schéma qui se situerait entre le schéma simple et le schéma complet ; qui conserverait les phénomènes de second ordre mais pas ceux du troisième. Le schéma ainsi transformé est d'ailleurs celui qui est le plus souvent utilisé dans la littérature pour inclure les harmoniques d'espace. Nous pouvons citer à titre d'exemple le second schéma proposé par P.L. ALGER dans [ALGER51] p 82 sur la FIG. 3.4 (a) et celui de l'ouvrage de B. HELLER et V. HAMATA dans [HELLERHAMATA77] p 110 représenté à la FIG. 3.4 (b).

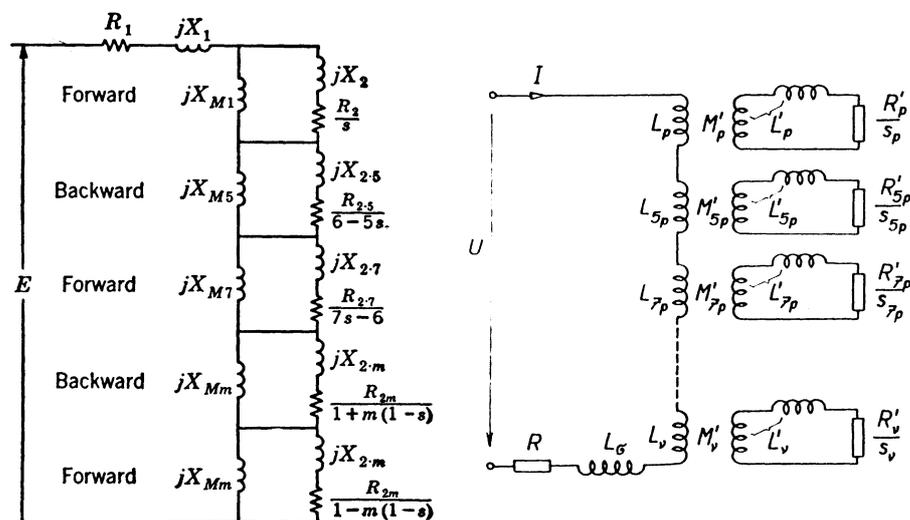


FIG. 3.4 – schéma *semi-complet* d'une machine asynchrone. (a) tiré de P.L. ALGER (enroulements secondaires ramenés au primaire), (b) de B. HELLER et V. HAMATA (même schéma mais enroulements secondaires non ramenés au primaire)

### 3.2.2 Compléments aux modèles existants tension-courant et résolution

Les schémas ainsi modifiés représentent la première étape qui est la prise en compte des harmoniques d'espace pour le calcul des courants. N'oublions pas, cependant, que le but de nos travaux est de prendre en compte un convertisseur statique et donc une tension qui n'est pas purement sinusoïdale mais riche en harmoniques de temps.

Pour inclure ces harmoniques de temps, il va falloir non pas utiliser un schéma *semi-complet* mais un pour chaque harmonique de temps. Ainsi à chaque schéma sera associée une tension et une pulsation différentes donc des réactances différentes puisque  $X = L\omega$ . Les inductances peuvent, sous certaines hypothèses, être considérées comme *presque* les mêmes pour chaque schéma puisqu'elles ne sont liées qu'à la géométrie donc aux harmoniques d'espace et non aux harmoniques de temps<sup>3</sup>. Finalement, nous aurons autant de schémas *semi-complets* empilés qu'il y a d'harmoniques de temps<sup>4</sup>. Cette représentation conduira à l'*empilage* de schémas représenté FIG. 3.5.

À chaque sous-schéma représentant un *petit moteur asynchrone* – cf. commentaires de R. CHAVERNOZ et M. PADELOUP –, correspond un champ tournant élémentaire qui dépendra du rang de temps  $n\omega$  et du rang d'espace  $m$  et qui tournera dans l'entrefer à la vitesse  $\Omega_{champ} = \frac{n\omega}{m}$  à laquelle on associera le glissement :

$$g(n\omega, m) = \frac{\Omega_{champ} - \Omega_{rotor}}{\Omega_{champ}} = 1 - \frac{m}{n\omega} \Omega_{rotor} \quad (3.1)$$

En utilisant le formalisme que nous avons développé et pour systématiser l'utilisation de la méthode des champs tournants, nous avons développé une méthode originale de calcul des inductances basée sur une formulation énergétique. Cette méthode est présentée en annexe B.2 avec le calcul des différents composants apparaissant dans le schéma de la FIG. 3.5.

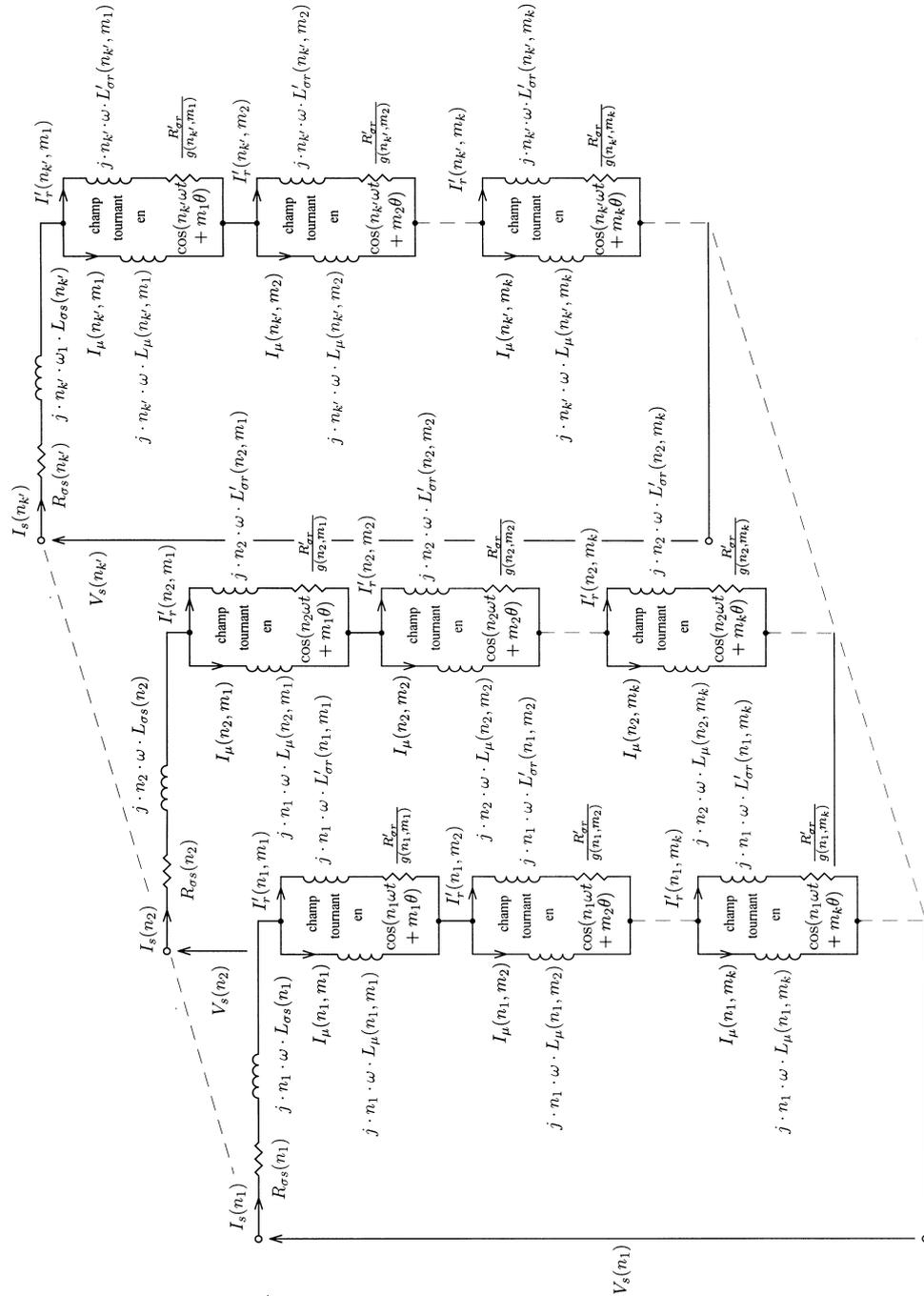
Une fois les éléments du schéma équivalent calculés pour toutes les harmoniques de temps et d'espace, la résolution du problème revient à résoudre

---

<sup>3</sup> ceci n'est pas rigoureusement vrai pour les deux raisons suivantes :

1. les fréquences des harmoniques sont parfois élevées auquel cas l'effet pelliculaire – de peau – ne peut plus être négligé ; résistances et inductances s'en trouvent donc modifiées
2. Lorsque la machine est saturée, il est évident que les inductances dépendent du niveau de saturation et donc de la tension appliquée

<sup>4</sup> On notera qu'un article de A. GROUD et al. [GROUDGERBAUDROGNONROUDET98] utilise également la superposition de schémas équivalents pour déterminer les harmoniques de courant dûes aux convertisseurs statiques, cependant, les schémas utilisés sont des schémas *simples* et n'incluent pas les harmoniques d'espace



Les noms des différents éléments de ce schéma sont identiques à ceux utilisés dans la FIG. 3.1. Cependant, au lieu d'un composant unique, il y a maintenant autant de composants que d'harmoniques de temps et d'harmoniques d'espace :  $n$  varie de 1 à  $N$  et  $m$  varie de 1 à  $M$ .

FIG. 3.5 – empilage de schémas *semi-complets* qui représentent le fonctionnement d'une machine asynchrone alimentée par une source de tension riche en harmoniques de temps – chaque *couche* correspond au fonctionnement pour *une* harmonique de temps  $n_i\omega$

$n$  schémas équivalents pour les  $n$  moteurs superposés, eux mêmes constitués de  $m$  petits moteurs asynchrones en série.

Pour chaque fréquence  $n\omega$ , nous obtenons un schéma équivalent qui revient à poser et résoudre le système suivant :

1. une équation de maille globale

$$\begin{aligned} (R_s + jn\omega L_{\sigma s}) \cdot I_s + \sum_m jn\omega L_{\mu}(m) \cdot I_{\mu}(m) &= V_s \\ Z_s \cdot I_s + \sum_m Z_{\mu}(m) \cdot I_{\mu}(m) &= V_s \end{aligned} \quad (3.2)$$

2.  $m$  équations de nœuds

$$I_s - I_{\mu}(m) - I'_r(m) = 0 \quad (3.3)$$

3.  $m$  équations de maille correspondant aux  $m$  petits moteurs asynchrones

$$\begin{aligned} jn\omega L_{\mu}(m) \cdot I_{\mu}(m) - (jn\omega L'_{\sigma r}(m) + \frac{R'_r(m)}{1 + \frac{m}{n\omega} \cdot \Omega_{rotor}}) \cdot I'_r(m) &= 0 \\ Z_{\mu}(m) \cdot I_{\mu}(m) - Z'_r(m) \cdot I'_r(m) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ces  $(2m + 1)$  équations peuvent être regroupées sous forme matricielle afin d'en faciliter la manipulation et la résolution numérique.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_s \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Z_{\mu}(-m) & \cdots & Z_{\mu}(m) \\ -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Z_{\mu}(-m) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Z_{\mu}(m) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -Z'_r(-m) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -Z'_r(m) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s \\ I_{\mu}(-m) \\ \vdots \\ I_{\mu}(m) \\ I'_r(-m) \\ \vdots \\ I'_r(m) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Une fois ces  $n$  systèmes matriciels inversés – un pour chaque harmonique de temps  $n\omega$  –, nous connaissons toutes les harmoniques de courants qui circulent aussi bien au stator qu'au rotor. Il nous est alors possible d'utiliser la méthode des champs tournants harmoniques pour déterminer les champs créés par le stator et ceux créés par le rotor.

### 3.3 Calcul des champs magnétiques

Avant de déterminer les efforts appliqués sur la structure, il est d'abord nécessaire de connaître les champs magnétiques et densité de flux magnétique qui sont créés dans l'entrefer de la machine. Ces différents champs dépendent non seulement du courant et de la répartition des bobinages mais également

de l'entrefer puisqu'il est évident que la *distance de circulation* du champ dans l'entrefer est différente en face d'une dent ou en face d'une encoche. Afin de séparer les problèmes, on préfère, dans un premier temps, ne tenir compte que du courant et de la répartition du bobinage ce qui conduit au calcul d'une fonction appelée *force magnétomotrice*. La distance de circulation est ensuite introduite à l'aide d'une fonction de la géométrie d'entrefer appelée *fonction de perméance* ce qui permet de calculer les champs magnétiques puis les champs de densité de flux magnétique.

Finalement, à l'aide de ces champs, nous serons capables de déterminer les efforts qui sont appliqués sur la structure. Le plan de cette section suivra donc les étapes que nous venons de décrire et qui peuvent être représentées graphiquement sur la FIG. 3.6.

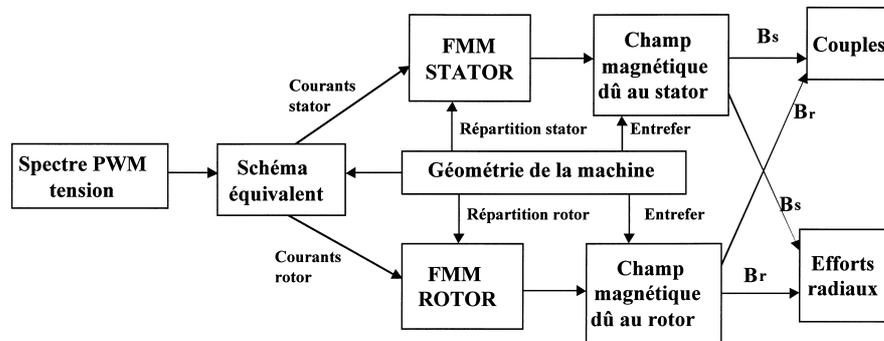


FIG. 3.6 – étapes de calculs nécessaires pour la détermination des efforts à partir d'un spectre de tension appliqué sur les phases d'une machine asynchrone

### 3.3.1 Calcul de la force magnétomotrice

Cette fonction de force magnétomotrice est utilisée dans pratiquement tous les ouvrages d'électrotechnique (citons par exemple [SEGUIERNOTELET96]) et définit quelque chose qui s'apparente à la *répartition surfacique de courant* le long de l'entrefer : soit, à un facteur  $1/2$  près, un *courant* que multiplie la *répartition des bobinages* (*winding function*) le long de l'entrefer. Nous commencerons par calculer cette force magnétomotrice pour un courant monochromatique et un enroulement à répartition sinusoïdale puis nous la compléterons en prenant en compte tout d'abord l'influence des encoches – non continuité de la répartition des bobinages – puis les courants réels résultants de la conversion PWM.

### Calcul de la force magnétomotrice dans le cas d'un courant et d'une répartition purement sinusoïdale

**Rappel 3.3.1 (bobinage à répartition sinusoïdale)** *Un bobinage est dit à répartition purement sinusoïdale si le champ magnétique qui apparaît dans un entrefer lisse lorsque le bobinage est alimenté par un courant continu est une fonction purement sinusoïdale de la position angulaire  $\theta$  le long de cet entrefer.*

Mathématiquement, on écrit que la fonction de répartition est de la forme  $r(\theta) = r_m \cdot \cos(m\theta + \varphi_m)$  avec  $m = p_0$  le nombre de paires de pôles du bobinage et  $r_m = N$  le nombre de spires du bobinage.

Suivant cette définition, la force magnétomotrice peut être définie à partir du courant sinusoïdal de pulsation  $n\omega$  et de cette fonction de répartition :

$$fmm(t, \theta) = \frac{1}{2} \cdot i_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n) \cdot r_m \cdot \cos(m\theta + \varphi_m) \quad (3.6)$$

Cette description de la force magnétomotrice correspond à un champ stationnaire – pulsant – dans l'entrefer, c'est-à-dire un champ dont la forme de sa répartition *spatiale* est indépendante du temps mais dont l'amplitude dépend sinusoïdalement du temps à la pulsation  $n\omega$ . Pour diverses valeurs du nombre de paires de pôles  $p_0$ , la FIG. 3.7 représente cette *allure spatiale*. L'expression de ce champ stationnaire peut s'écrire en utilisant les nota-

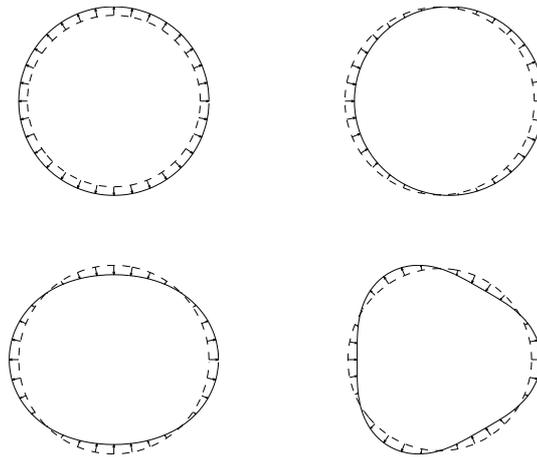


FIG. 3.7 – *allure spatiale* des champs harmoniques stationnaires pour un rang d'espace (nombre d'onde) variant de 0 à 3

tions exponentielles (cf. équation (3.8)) et être également représenté par un

spectre à deux dimensions tel que défini dans l'annexe A<sup>5</sup>.

$$fmm(t, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\hat{i}_n^*}{2} e^{-j \cdot n \omega t} + \frac{\hat{i}_n}{2} e^{+j \cdot n \omega t} \right) \cdot \left( \frac{\hat{r}_m^*}{2} e^{-j \cdot m \theta} + \frac{\hat{r}_m}{2} e^{+j \cdot m \theta} \right) \quad (3.8)$$

avec  $\hat{r}_m$  et  $\hat{i}_n$ , nombres complexes valant respectivement  $r_m \cdot e^{j \cdot \varphi_m}$  et  $i_n \cdot e^{j \cdot \varphi_n}$ . En réalité, une machine électrique n'est pas composée d'une seule phase mais de plusieurs. Soit  $Z_s$ , ce nombre<sup>6</sup> et soit le système polyphasé constitué de ces  $Z_s$  bobinages déphasés de  $\frac{2\pi}{p_0 \cdot Z_s}$  les uns par rapport aux autres, dans lesquels circulent des courants eux même déphasés de  $\frac{2\pi}{Z_s}$  les uns par rapport aux autres. Le champ de force magnétomotrice résultant des  $Z_s$  phases n'est que la résultante des  $Z_s$  champs de force magnétomotrice stationnaires créés par chacune des phases du système. La résultante pour chaque bobinage ayant été calculée au paragraphe précédent, il suffit d'appliquer ce calcul à chacune des  $Z_s$  phases en tenant compte de leur déphasage par rapport à la référence choisie puis de faire la somme *vectorielle* des différents *phaseurs*.

Pour un harmonique de temps de rang  $n\omega$  et un harmonique d'espace de rang  $m$ , la résultante du champ de force magnétomotrice n'est autre que la superposition du champ de force magnétomotrice créé par chacune des  $Z_s$  phases :

$$\begin{aligned} fmm(t, \theta) &= fmm_1(t, \theta) + \dots + fmm_k(t, \theta) + \dots + fmm_{Z_s}(t, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (r_1(\theta) \cdot i_1(t) + \dots + r_k(\theta) \cdot i_k(t) + \dots + r_{Z_s}(\theta) \cdot i_{Z_s}(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

En utilisant les notations précédentes, nous définissons la force magnétomotrice de la phase  $k$  avec les notations exponentielles :

$$\begin{aligned} fmm(t, \theta) &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\hat{i}_n^*}{2} e^{-j \cdot n(\omega t - k \frac{2\pi}{Z_s})} + \frac{\hat{i}_n}{2} e^{+j \cdot n(\omega t - k \frac{2\pi}{Z_s})} \right) \cdot \\ &\quad \left( \frac{\hat{r}_m^*}{2} e^{-j \cdot m(\theta - k \frac{2\pi}{p_0 \cdot Z_s})} + \frac{\hat{r}_m}{2} e^{+j \cdot m(\theta - k \frac{2\pi}{p_0 \cdot Z_s})} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

<sup>5</sup>on rencontre parfois, une autre notation très utilisée en *acoustique* :

$$fmm(t, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \Re \left( \left( \frac{\hat{r}_m^*}{2} e^{-j \cdot m \theta} + \frac{\hat{r}_m}{2} e^{+j \cdot m \theta} \right) \cdot \hat{i}_n \cdot e^{+j n \omega t} \right) \quad (3.7)$$

Cette notation est identique pour décrire une seule onde mais elle n'est plus adaptée lorsque l'on voudra multiplier deux ondes entre elles.

<sup>6</sup>la plupart des machines courantes sont triphasées mais ce n'est pas obligatoire

$$\begin{aligned}
fmm(t, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left( \right. & + \frac{\hat{i}_n^*}{2} \cdot \frac{\hat{r}_m^*}{2} \cdot e^{-jm\theta - jn\omega t + jk \frac{2\pi}{Z_s} \cdot (\frac{m}{p_0} + n)} \\
& + \frac{\hat{i}_n}{2} \cdot \frac{\hat{r}_m^*}{2} \cdot e^{-jm\theta + jn\omega t + jk \frac{2\pi}{Z_s} \cdot (\frac{m}{p_0} - n)} \\
& + \frac{\hat{i}_n^*}{2} \cdot \frac{\hat{r}_m}{2} \cdot e^{+jm\theta - jn\omega t - jk \frac{2\pi}{Z_s} \cdot (\frac{m}{p_0} - n)} \\
& \left. + \frac{\hat{i}_n}{2} \cdot \frac{\hat{r}_m}{2} \cdot e^{+jm\theta + jn\omega t - jk \frac{2\pi}{Z_s} \cdot (\frac{m}{p_0} + n)} \right) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Examinons ce que produit la résultante de ces  $Z_s$  termes, en accord avec [SEGUIERNOTELET96] :

1. si  $\frac{m}{p_0} \pm n$  n'est pas multiple de  $Z_s$ , les  $Z_s$  termes vont créer un système  $Z$ phasé équilibré donc de résultante nulle.
2. si  $\frac{m}{p_0} \pm n$  est multiple de  $Z_s$ , les déphasages entre les  $Z_s$  forces magnétomotrices seront nuls (modulo  $2\pi$ ) et donc leur résultante vaudra  $Z_s$  fois la résultante d'une phase.
  - (a) si c'est  $\frac{m}{p_0} + n$  qui est multiple de  $Z_s$ , alors la résultante est un champ tournant inverse (de vitesse  $-\frac{\|n \cdot \omega\|}{\|m\|}$ ) :

$$\begin{aligned}
fmm(t, \theta) &= \frac{1}{2} \cdot Z_s \cdot \left( \frac{\hat{r}_m^*}{2} \cdot \frac{\hat{i}_n^*}{2} \cdot e^{-j(n\omega t + m\theta)} + \frac{\hat{r}_m}{2} \cdot \frac{\hat{i}_n}{2} \cdot e^{+j(n\omega t + m\theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot Z_s \cdot r_m \cdot i_n \cdot \cos(n\omega t + m\theta + \varphi_n + \varphi_m) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

- (b) si c'est  $\frac{m}{p_0} - n$  qui est multiple de  $Z_s$ , alors la résultante est un champ tournant direct (de vitesse  $+\frac{\|n \cdot \omega\|}{\|m\|}$ ) :

$$\begin{aligned}
fmm(t, \theta) &= \frac{1}{2} \cdot Z_s \cdot \left( \frac{\hat{r}_m^*}{2} \cdot \frac{\hat{i}_n^*}{2} \cdot e^{-j(n\omega t - m\theta)} + \frac{\hat{r}_m}{2} \cdot \frac{\hat{i}_n}{2} \cdot e^{+j(n\omega t - m\theta)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot Z_s \cdot r_m \cdot i_n \cdot \cos(n\omega t - m\theta + \varphi_n - \varphi_m) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

- (c) si, enfin,  $\frac{m}{p_0} - n$  et  $\frac{m}{p_0} + n$  sont multiples de  $Z_s$  en même temps, alors la résultante est la réunion des deux cas précédents, ce qui conduit à un champ stationnaire (pulsant).

*On voit finalement, que c'est la combinaison des champs stationnaires créés par chacune des phases qui va faire apparaître – ou non – un champ tournant harmonique de force magnétomotrice.*

FIG. 3.8 – répartition pour un enroulement à pas diamétral, décomposition en deux fonctions et répartition *équivalente* pour un conducteur

La fonction pour chaque conducteur (troisième graphe de la FIG. 3.8) doit bien sûr être pondérée d'un signe fonction du sens du courant et d'un entier fonction du nombre de spires dans ce conducteur.

*Nous pouvons dès lors reconstruire n'importe quelle fonction de répartition associée à n'importe quel type de bobinage en considérant qu'elle n'est que la superposition de la répartition de chacun des conducteurs la composant.*

Dans la pratique, on représentera la fonction de répartition d'un conducteur par une série de points de discrétisation de longueur  $N \cdot Z_E$  – multiple du nombre d'encoches  $Z_E$  – représentée par un vecteur  $\{r\}$ . Un second conducteur décalé de  $K$  encoches aura pour fonction de répartition une permutation circulaire de  $N \cdot K$  points du vecteur  $\{r\}$  pondérée par le sens du courant si

---

<sup>7</sup>cette *allure* est déjà donnée dès 1958 dans [BURBIDGE58] en tenant compte de la largeur *finie* de l'encoche et a encore été utilisée récemment dans [JOKSIMOVIĆDUROVIĆOBRADOVIĆ99]

ce conducteur fait partie de l'enroulement et zéro sinon.

$$\{r_k\} = \text{permutation circulaire de } N.K \text{ points de } \{r_1\} \quad (3.14)$$

· (sens du courant ou zéro) · (nombre de spires)

La fonction de répartition du bobinage est constituée par assemblage – addition – de chaque vecteur  $\{r_k\}$ .

$$\begin{aligned} \{r_{total}\} &= \{r_1\} + \{r_2\} + \cdots + \{r_k\} + \cdots + \{r_{Z_E}\} \\ &= \sum_{k=1}^{Z_E} \{r_k\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pour connaître les harmoniques d'espace, il faut connaître le contenu spectral de cette fonction de répartition. Ceci sera réalisé simplement en calculant la *Transformée de Fourier Discrète (TFD)* du vecteur  $\{r_{total}\}$ .

$$TFD(\{r_{total}\}) = \{\hat{r}_{total}\} \quad (3.16)$$

Cette façon de procéder pourra s'appliquer à n'importe quel type de bobinage. En particulier pour les rotors à cage, nous avons utilisé la modélisation en terme de courant de mailles développée entre autre par M. Poloujadoff dans [POLOUJADOFF82] [POLOUJADOFF87] ainsi que [TOLIYATLIPOWHITE91] et [MUÑOZLIPO99]. Ainsi, à deux barres adjacentes, nous affectons une phase avec son courant de maille associé. Le courant *réel* dans une barre sera calculé par sommation des courants des mailles qui appartiennent à cette barre. Il y a donc autant de phases que de barres et la répartition d'une phase est la répartition de deux barres adjacentes (cf. FIG. 3.9 et FIG. 3.10).

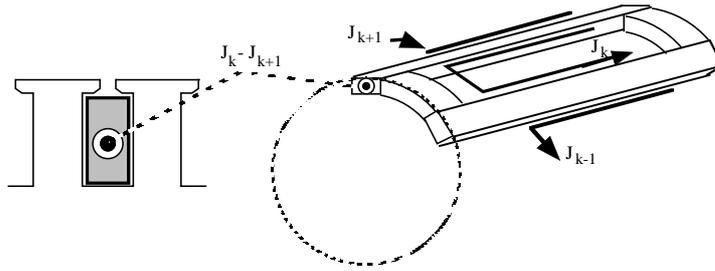


FIG. 3.9 – définition d'une phase d'un rotor à cage

À l'aide des outils que nous venons de construire pour calculer la fonction de répartition d'un bobinage, nous allons pouvoir traiter quelques exemples et ainsi montrer de manière plus *pratique* l'utilité d'un tel outil. Sur la FIG. 3.11, nous avons représenté la répartition de bobinage pour trois types d'enroulements assez représentatifs des enroulements que l'on peut rencontrer dans la construction des machines électriques courantes :

FIG. 3.10 – définition des courants de mailles d'un rotor à cage

1. bobinage (a) : bobines simples à pas diamétral pour une machine à deux paires de pôles
2. bobinage (b) : bobinage *classique* de machine asynchrone : machine à deux paires de pôles, 24 encoches, deux couches et pas raccourci
3. bobinage (c) : une phase d'un rotor à cage telle que définie précédemment

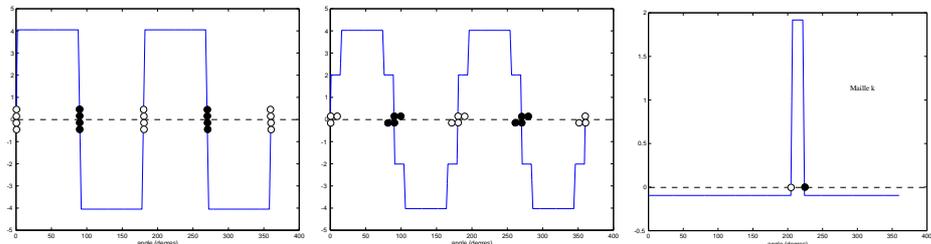


FIG. 3.11 – répartition totale pour une phase d'un stator à 2 paires de pôles à pas diamétral (a) – pour une phase d'un stator à deux paires de pôles, 24 encoches et pas raccourci (b) – pour une phase d'un rotor à cage telle que définie précédemment (c)

Enfin, sur la FIG. 3.12, nous avons calculé le spectre de ces trois bobinages par *TFD* et affiché l'amplitude. On retombe sur les *allures* bien connues que nous résumerons pour chacun des trois bobinages :

1. bobinage (a) : spectre en  $\frac{1}{m}$ , avec  $m$  le rang de l'harmonique d'espace
2. bobinage (b) : réductions des harmoniques du bobinage (a) grâce à l'utilisation de plusieurs encoches par pôles et par phases et même

quasi suppression des harmoniques  $5p_0$  et  $7p_0$  grâce au pas raccourci

- bobinage (c) : spectre en  $\frac{1}{m} \sin(m\frac{\alpha_y}{2})$ , avec  $\alpha_y$  l'angle entre deux barres adjacentes (cf. [HELLERHAMATA77] p 14–15)

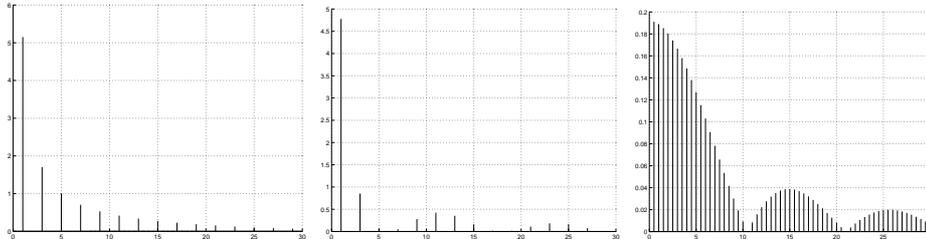


FIG. 3.12 – spectre des répartitions (a), (b) et (c) présentées à la FIG. 3.11 en fonction du rang d’harmonique d’espace  $m'$  avec  $m = m' \cdot p_0$  ( $p_0 = 2$  dans les bobinages (a) et (b) mais  $p_0 = 1$  dans le bobinage (c))

Aux FIG. 3.11 et FIG. 3.12, nous voyons que nous avons tout intérêt à bien construire notre bobinage et à augmenter le nombre d’encoches par pôle et par phase si l’on veut réduire au maximum les harmoniques d’espaces. Il est également fortement conseillé d’utiliser les *astuces* de bobinage telles que *pas raccourcis* et *pas fractionnaires*.

### Calcul de la force magnétomotrice dans le cas d’un courant et d’une répartition périodiques mais non sinusoïdaux

Notre calcul de force magnétomotrice va maintenant être complété pour tenir compte du convertisseur statique. La force magnétomotrice créée par des courants non sinusoïdaux et des répartitions de bobinage non sinusoïdales a déjà été traité dans [SEGUIERNOTELET96]. Cet ouvrage montre comment apparaissent – ou non – certains champs tournants. Ces calculs sont de même nature que celui que nous avons effectué précédemment pour un champ monochromatique, la différence vient maintenant du fait que désormais  $m$  et  $n$  prendront autant de valeurs qu’il y a d’harmoniques de temps et d’espace.

À l’aide des spectres des courants résultant de la conversion *PWM* et des spectres de fonctions de répartition définis précédemment, nous allons systématiser le calcul de champs tournants résultants en utilisant des outils d’analyse. Ainsi, comme il a été montré que la résultante de force magnétomotrice de toutes les phases n’est autre que la *somme vectorielle* (phaseur) de la force magnétomotrice de chacune des phases, en conservant notre description vectorielle mais dans l’espace de Fourier pour chacune des phases et chacun des courants, nous allons montrer que la résultante peut être calculée par *multiplication matricielle*.

Soit un courant et une répartition de bobinage et leur spectre associé pour la phase  $k$  :

$$\{\hat{i}_k\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{i}_n^*}{2} e^{-jnk \frac{2\pi}{Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{i}_1^*}{2} e^{-jk \frac{2\pi}{Z}} \\ \frac{\hat{i}_1}{2} e^{+jk \frac{2\pi}{Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{i}_n}{2} e^{+jnk \frac{2\pi}{Z}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vecteur spectre de courant de la} \\ \text{phase } k \end{array} \quad (3.17)$$

$$\text{base}(\{\hat{i}\}) = \begin{pmatrix} e^{-jn\omega t} \\ \vdots \\ e^{-j\omega t} \\ e^{+j\omega t} \\ \vdots \\ e^{+jn\omega t} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{base dans laquelle est exprimée le} \\ \text{vecteur spectre de courant de la} \\ \text{phase } k : i_k(t) = \{\hat{i}_k\}^T \cdot \text{base}(\{\hat{i}\}) \end{array} \quad (3.18)$$

$$\{\hat{r}_k\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{r}_m^*}{2} e^{-jmk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{r}_1^*}{2} e^{-jk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \\ \frac{\hat{r}_1}{2} e^{+jk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{r}_m}{2} e^{+jmk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vecteur spectre de répartition de la} \\ \text{phase } k \end{array} \quad (3.19)$$

$$\text{base}(\{\hat{r}\}) = \begin{pmatrix} e^{-jm\theta} \\ \vdots \\ e^{-j\theta} \\ e^{+j\theta} \\ \vdots \\ e^{+jm\theta} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{base dans laquelle est exprimée le} \\ \text{vecteur spectre de répartition de la} \\ \text{phase } k : r_k(\theta) = \{\hat{r}_k\}^T \cdot \text{base}(\{\hat{r}\}) \end{array} \quad (3.20)$$

Comme nous avons vu que, pour *une seule* harmonique de temps et d'espace,  $\hat{F}mm = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^Z \hat{r}_k \cdot \hat{i}_k$ , si nous posons  $[\hat{i}] = [\{\hat{i}_1\} \{\hat{i}_2\} \cdots \{\hat{i}_k\} \cdots \{\hat{i}_Z\}]$ , la matrice constituée des  $Z$  spectres de courants –  $Z$  étant le nombre de phases de la machine – et  $[\hat{r}] = [\{\hat{r}_1\} \{\hat{r}_2\} \cdots \{\hat{r}_k\} \cdots \{\hat{r}_Z\}]$ , la matrice constituée des  $Z$  spectres de répartitions, alors pour  $n$  harmoniques de temps

et  $m$  harmoniques d'espace, exprimées *vectoriellement*, cela conduit à la formulation de la force magnétomotrice sous forme matricielle<sup>8</sup> :

$$[\hat{F}mm] = \frac{1}{2} [\hat{r}] \cdot [\hat{i}]^T \quad (3.21)$$

Un des éléments de l'*intérieur* de cette matrice correspond donc à la force magnétomotrice pour *un seul* harmonique de temps et d'espace :

$$[\hat{F}mm] = m \begin{pmatrix} & n\omega & \\ & \vdots & \\ \dots & \hat{F}mm(n\omega, m) & \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

On voit également que chaque valeur non-nulle de cette matrice correspond à une raie dans le spectre 2D de la force magnétomotrice (cf. exemples dans la section suivante).

Avec une telle formulation, il est extrêmement facile de ne conserver que les termes d'importances puisque par utilisation du théorème de PARSEVAL, on voit immédiatement que dans l'espace de Fourier, on peut négliger tous les termes d'amplitude *trop faible* et ainsi réduire les dimensions des vecteurs et donc des matrices.

### Exploitation graphique de la matrice de force magnétomotrice sous forme de spectre 2D

Dans les trois paragraphes qui vont suivre, nous allons illustrer l'utilisation des outils que nous venons de développer (calcul de force magnétomotrice par multiplication matricielle et affichage des *amplitudes* sous forme de spectre 2D<sup>9</sup>) pour trois niveaux de complexité d'une machine triphasée à deux paires de pôles :

1. machine à répartition sinusoïdale alimentée par un courant monochromatique
2. même machine dans le cas où on tient compte de ses harmoniques d'espace (bobinage de la FIG 3.11 (b) : 24 encoches et pas raccourci)
3. même machine que précédemment mais alimenté par un convertisseur statique de type PWM

---

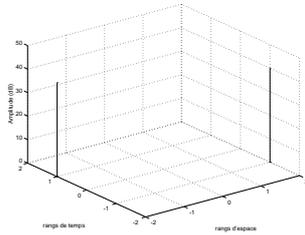
<sup>8</sup>on notera qu'un article récent utilise une technique approchante à base de multiplications matricielles pour déterminer les forces magnétomotrices créées par une machine alternative, cependant cet article vise à concevoir un enroulement à pas fractionnaire alors que nos travaux visent à déterminer toutes les forces magnétomotrices en tenant également compte des harmoniques de courant [WACH98]

<sup>9</sup>pour de plus amples renseignements sur la notion de spectre 2D, on pourra se reporter à l'annexe A

**machine (a)** Dans ce cas, le champ global de force magnétomotrice ne correspond qu'à un champ unique à  $p_0 = 2$  paires de pôles et tournant dans l'entrefer à la vitesse constante  $\Omega = \frac{\omega}{p_0}$ .

$$\begin{aligned} fmm(t, \theta) &= fmm \cdot \cos(p_0\theta - \omega t + \varphi) \\ &= \frac{\hat{f}mm^*}{2} \cdot e^{-j(p_0\theta - \omega t)} + \frac{\hat{f}mm}{2} \cdot e^{+j(p_0\theta - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

ce qui correspond à la matrice de force magnétomotrice et au spectre d'amplitude 2D de la FIG 3.13.



$$[\hat{F}mm] = \begin{matrix} -\omega & +\omega \\ -p_0 & \hat{f}mm^* \\ +p_0 & \hat{f}mm & 0 \end{matrix} \quad (3.24)$$

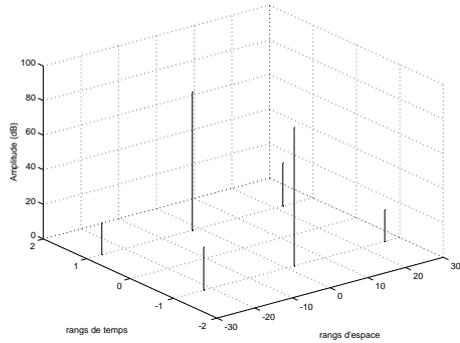
FIG. 3.13 – spectre d'amplitude 2D (en dB par rapport au fondamental + 40 dB) et matrice de la force magnétomotrice pour un courant sinus (rang de temps = 1) et une répartition sinusoïdale (rang d'espace =  $p_0 = 2$ )

**machine (b)** Le bobinage utilisé est celui de la FIG 3.11 (b) : 24 encoches et pas raccourci. Ce bobinage va donc faire apparaître un certain nombre d'harmoniques d'espace supplémentaires. Ces harmoniques seront les multiples impaires du fondamental  $p_0 = 2$  sauf les multiples du nombre de phases (ici 3). Les astuces de bobinage – double couche, pas raccourcis... – vont réduire (ou faire disparaître) certaines harmoniques et notamment les rangs  $5p_0$  et  $7p_0$ . Le spectre d'amplitude sera représenté à la FIG 3.14.

**machine (c)** Ce dernier cas reprend la machine du cas (b) – mêmes rangs d'espace – mais prend en compte le convertisseur statique PWM. Ce convertisseur augmente fortement la richesse du spectre de courant aux alentours de la fréquence de découpage et de ses multiples. Ceci fera apparaître des harmoniques de temps dans le spectre 2D d'amplitude de la force magnétomotrice. Ce spectre sera représenté sur la FIG 3.15.

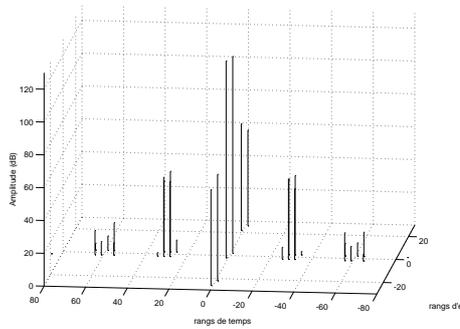
### 3.3.2 Calcul du champ magnétique $H$ et de la densité de flux $B$

Par utilisation de la formulation *matricielle*, on voit également une application directe au calcul du champ de densité de flux  $B$  en introduisant la fonction *bien connue* de *perméance* (liant le flux à la force magnétomotrice)



1. champ tournant dans le sens *direct* :  $p_0 = 2$ ,  $7p_0 = 14$  (non présent) et  $13p_0 = 26$
2. champ tournant dans le sens *inverse* :  $5p_0 = 10$  (non présent) et  $11p_0 = 22$
3. aucun champ stationnaire

FIG. 3.14 – spectre d’amplitude 2D (en dB par rapport au fondamental + 80 dB) et champs correspondants de la force magnétomotrice pour un courant sinus (rang de temps = 1) et une répartition non sinusoïdale ( $p_0 = 2$  et ses multiples impaires)



1. on retrouve les mêmes raies que le spectre de la FIG 3.14 pour les rangs de temps  $n = \pm 1$
2. on observe de nouvelles raies autour de la fréquence de découpage et de ses multiples
3. il peut y avoir des champs stationnaires si  $n$  et  $m \cdot p_0$  sont multiples du nombre de phases  $Z_s$  en même temps

FIG. 3.15 – spectre d’amplitude 2D (en dB par rapport au fondamental + 120 dB) et champs correspondants de la force magnétomotrice pour un courant PWM (rang de la fréquence de découpage = 30) et une répartition non sinusoïdale ( $p_0 = 2$  et ses multiples impaires)

ou bien de *conduction magnétique*  $\lambda$  (liant la densité de flux à la force magnétomotrice : cf. [HELLERHAMATA77]). La chute de flux face à une encoche peut être prise en compte par une formulation analytique telle que définie par exemple dans [JUFER87] ou bien être recalculée par E.F. Après diverses simplifications (reportées dans [HELLERHAMATA77] page 60–67), on peut formuler cette chute de flux en face des encoches au moyen de la fonction de conduction magnétique et en négligeant les termes de second ordre comme<sup>10</sup> :

$$\lambda(\theta) = \delta_r \cdot \lambda_s(\theta) \cdot \lambda_r(\theta - \theta_{rotor}) \quad (3.25)$$

avec  $\lambda$ , la conduction magnétique totale,  $\lambda_s$  la conduction magnétique traduisant la chute de flux en face d'une encoche statorique,  $\lambda_r$  la conduction magnétique traduisant la chute de flux en face d'une encoche rotorique, soit, en utilisant la notation vectorielle, on peut définir le *vecteur spectre* de cette fonction de conduction magnétique comme :

$$\{\hat{\lambda}\} = TFD(\{\lambda\}) \quad (3.26)$$

où  $\{\lambda\}$  est la discrétisation de la fonction continue  $\lambda(\theta)$  en face d'une encoche. Comme il y a  $Z_{E,s}$  encoches statoriques et  $Z_{E,r}$  encoches rotoriques et vu la forme de la fonction  $\lambda(\theta)$  dans l'équation (3.25), on voit immédiatement que le *vecteur rang d'espace* associé à ce *vecteur spectre* aura l'allure :

$$\{m_s \cdot Z_{E,s} + m_r \cdot Z_{E,r}\} \quad m_s, m_r \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

et que le *vecteur rang de temps* aura l'allure :

$$\{-m_r \cdot Z_{E,r} \cdot \Omega_{rotor}\} \quad (3.28)$$

Le terme de rang zéro de  $\{\hat{\lambda}\}$  (valeur moyenne) correspond à l'inverse de l'entrefer corrigé par le *coefficient de Carter* ( $\frac{1}{\delta_r \cdot k_c} = \frac{1}{\delta_0}$ ). En ré-écrivant notre matrice de force magnétomotrice sous la forme d'un vecteur associé à un *vecteur rangs d'espace* et à un *vecteur rangs de temps*, on peut immédiatement exprimer le spectre de densité de flux magnétique  $B$  sous la forme matricielle<sup>11</sup> :

$$[\hat{B}] = \mu_0 \cdot \{\hat{\lambda}\} \cdot \{\hat{F}mm\}^T \quad (3.29)$$

<sup>10</sup>Heller a montré que dans le cas le plus défavorable, ces approximations conduisaient à des erreurs d'à peine quelques pour-cents

<sup>11</sup>le spectre d'une fonction quadratique – et donc également le spectre de la multiplication de deux fonctions – peut être obtenu simplement en utilisant des multiplications matricielles, lorsque l'on connaît le spectre de la fonction de départ – des deux fonctions de départ. L'explication et la mise en œuvre ont été montrées dans l'annexe A

associé à ces deux *matrices de rangs d'espace et de temps*

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{matrice rang de} \\ \text{temps de } B \end{array} \right] &= \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang de} \\ \text{temps de conduc-} \\ \text{tance} \end{array} \right\} \cdot \overbrace{\{1 \cdots 1\}}^{\substack{\text{taille du vecteur} \\ \{\hat{F}mm\}}} \\ &+ \overbrace{\{1 \cdots 1\}^T}^{\substack{\text{taille du vecteur rang} \\ \text{temps conductance}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang de} \\ \text{temps de } \{\hat{F}mm\} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{matrice rang d'es-} \\ \text{pace de } B \end{array} \right] &= \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang d'es-} \\ \text{pace de conduc-} \\ \text{tance} \end{array} \right\} \cdot \overbrace{\{1 \cdots 1\}}^{\substack{\text{taille du vecteur} \\ \{\hat{F}mm\}}} \\ &+ \overbrace{\{1 \cdots 1\}^T}^{\substack{\text{taille du vecteur rang} \\ \text{espace conductance}}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang d'es-} \\ \text{pace de } \{\hat{F}mm\} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.31)$$

Cette matrice  $[\hat{B}]$  peut être vue de manière identique à la matrice de force magnétomotrice de l'équation (3.22) où maintenant, à un rang de temps  $n'$  et un rang d'espace  $m'$  correspond un champ harmonique de densité de flux tournant dans l'entrefer à la vitesse  $\frac{n'\omega}{m'}$ . On peut également utiliser l'outil graphique de spectre en 2D pour représenter le champ de densité de flux.

Cette matrice  $[\hat{B}]$  va être utilisée dans la section suivante pour calculer les harmoniques de couple ainsi que les efforts radiaux à l'origine des nuisances acoustiques.

### 3.4 Calcul des efforts d'origine magnétique

Dans cette section, nous allons montrer comment apparaissent les différents efforts créés par les champs magnétiques précédemment calculés. La perméabilité des matériaux ferromagnétiques classiques étant très supérieure à celle de l'air – plusieurs milliers de fois –, il est *raisonnable* de considérer que le champ magnétique dans le fer est négligeable devant le champ magnétique dans l'entrefer. Ainsi, la conversion d'énergie magnéto-mécanique se fera principalement dans l'entrefer et il n'y aura pas d'effet d'origine électrostatique. Nous négligerons donc les efforts créés à l'intérieur du fer et notamment les forces *magnétostrictives* ainsi que les efforts d'origine *électrostatiques*. Les efforts produits seront décomposés suivant deux dimensions :

1. les efforts *tangentiels* qui vont être à l'origine de la création du couple
2. les efforts *radiaux* qui vont *attirer* le stator et ainsi être à l'origine des vibrations statoriques et donc du bruit rayonné à l'extérieur de la machine

### 3.4.1 Calcul des couples

La démonstration complète de la formulation des couples est reportée dans l'annexe B.3. Dans cette sous-section, nous rappellerons simplement les principaux résultats.

Dans les sections précédentes, nous avons tenté de formuler les différents champs magnétiques comme la superposition de *champs tournants harmoniques*. Ces champs sont soit créés par le stator, soit par le rotor. On peut montrer à l'aide du théorème des *Travaux Virtuels* qu'il ne peut y avoir création de couple que si la *répartition spatiale* du champ créée par le stator est identique à celle créée par le rotor c'est-à-dire que le *rang d'espace* est identique au rotor et au stator ( $m_s = m_r = m$ ). Soit pour un champ *élémentaire* statorique et rotorique de la forme :

$$\begin{aligned} H_s(t, \theta) &= \hat{H}_s(n_s, m) \cdot \sin(n_s \omega t + m\theta) \\ H_r(t, \theta) &= \hat{H}_r(n_r, m) \cdot \sin(n_r \omega t + m(\theta + \varphi_{rs})) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le couple créée par l'*interaction* de ces deux champs prendra la forme suivante (cf. annexe B.3) :

$$C = + \frac{\mu_0}{2} \cdot l_f \cdot R_0 \cdot \delta_r \cdot 2\pi \cdot \frac{\hat{H}_s(n_s, m) \cdot \hat{H}_r(n_r, m)}{2} \cdot m \cdot \sin((n_s \pm n_r)\omega t \mp \varphi_{rs}) \quad (3.33)$$

Il apparaît dans l'équation (3.33) que si  $n_s = \pm n_r$ , alors nous avons création d'un *couple moyen constant* non nul. Tous les autres cas conduisent à la création de couples sinusoidaux, à moyenne nulle qu'on appelle *couples pulsants*.

*Finalement, nous constatons que l'utilisation des champs rotoriques et statoriques sous forme de champs tournants harmoniques conduit à une formulation très pratique des couples. Nous pouvons déterminer de manière simple les pulsations de couples et savoir quels champs magnétiques modifier pour réduire ces pulsations et s'approcher ainsi le plus possible d'un couple constant.*

### 3.4.2 Calcul des efforts radiaux d'origine magnétique

Pour calculer les efforts radiaux appliqués à la structure, nous avons utilisé la formulation du *tenseur de Maxwell*. De même que pour le calcul des couples, nous avons rejeté dans l'annexe B.4 les détails de construction de ce tenseur. Nous y avons également ajouté une discussion concernant la pertinence de l'utilisation de cet outil. Dans cette sous-section, nous considérerons ce tenseur comme une *bonne approximation* de la densité surfacique d'effort

appliquée à la surface interne du stator. Ce tenseur peut finalement se simplifier sous l'écriture standard :

$$f_{radial} \approx T_{radial} = \frac{B_{radial}^2}{2\mu_0} \quad (3.34)$$

On constate que ce qui va créer la force n'est pas l'interaction entre le champ statorique et rotorique mais une forme quadratique du champ global dans l'entrefer, c'est-à-dire la réunion de ces deux champs. Ainsi, à partir des calculs précédents de densité de flux magnétique, on va regrouper – superposer – sous un même *vecteur spectre* les deux champs – stator et rotor<sup>12</sup>.

$$\{\hat{B}_{total}\} = \text{superposition de } \{\hat{B}_s\} \text{ et de } \{\hat{B}_r\} \quad (3.35)$$

On fait de même pour les *vecteurs* rang de temps et rang d'espace du spectre du champ de densité de flux magnétique total dans l'entrefer, ce qui nous permet d'utiliser de nouveau des multiplications matricielles pour obtenir les spectres de densité de force radiale :

$$[f_{radial}] = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \{\hat{B}_{total}\} \cdot \{\hat{B}_{total}\}^T \quad (3.36)$$

ainsi que les *matrices de rangs* associés à cette matrice de spectre de la densité d'effort surfacique appliquée au stator :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{matrice rang de} \\ \text{temps de } f_{radial} \end{array} \right] &= \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang de} \\ \text{temps de } B_{total} \end{array} \right\} \cdot \overbrace{\{1 \dots 1\}}^{\text{taille du vecteur } B_{total}} \\ &+ \overbrace{\{1 \dots 1\}^T}^{\text{taille du vecteur } B_{total}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang de} \\ \text{temps de } B_{total} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{matrice rang d'es-} \\ \text{pace de } f_{radial} \end{array} \right] &= \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang d'es-} \\ \text{pace de } B_{total} \end{array} \right\} \cdot \overbrace{\{1 \dots 1\}}^{\text{taille du vecteur } B_{total}} \\ &+ \overbrace{\{1 \dots 1\}^T}^{\text{taille du vecteur } B_{total}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteur rang d'es-} \\ \text{pace de } B_{total} \end{array} \right\}^T \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ainsi, à un certain rang d'espace  $m''$  et de temps  $n''$  correspondra un effort d'allure spatiale identique à la FIG 3.7 et qui tourne dans l'entrefer à la vitesse  $\frac{n''\omega}{m''}$ .

*Cette façon de définir les efforts surfaciques en terme de champs tournants harmonique va se révéler très pratique pour calculer le réponse dynamique – vibratoire – de la structure. Cette modélisation sera traitée dans le*

<sup>12</sup>Dans le cas de champs statoriques et rotoriques ayant la même pulsation  $n_s\omega$  et le même nombre d'onde  $m$ , on superpose ces deux champs (addition des amplitudes complexes), ce qui revient à retrouver le champ de magnétisation

*chapitre suivant qui présentera les outils de modélisation mécanique puis le couplage entre le comportement électromécanique traité dans ce chapitre et le comportement vibratoire d'un stator de machine asynchrone.*

### 3.5 Expérimentation sur prototype et validation des différents modèles proposés

Dans cette section, nous allons appliquer les différents modèles proposés à une machine électrique existante associée à son convertisseur de puissance (cf. annexe D). Nous confronterons les résultats de modélisation aux mesures qu'il est possible de faire, ceci nous permettra de valider nos développements et de bien comprendre les phénomènes qui prennent naissance dans la machine. La machine qui servira de test est une machine asynchrone qui avait été réalisée par le laboratoire d'électromécanique de Compiègne dans le cadre d'une motorisation de robot. L'alimentation a également été développée par le laboratoire, c'est un convertisseur PWM triphasé piloté par un DSP et un micro-ordinateur ce qui permet de contrôler parfaitement la stratégie de modulation de largeur d'impulsion.

Cette machine est triphasée à deux paires de pôles, 27 encoches au stator (pas fractionnaire) et rotor à cage de 21 encoches. Nous allons, dans un premier temps valider le schéma équivalent de notre machine puis nous exposerons sous forme de spectre en deux dimensions les différents champs créés dans l'entrefer : champ de force magnétomotrice, champ de densité de flux et tenseur de Maxwell.

#### 3.5.1 Validation du schéma équivalent

Les éléments du schéma équivalent simple (résistances et inductances de fuite) ont été estimés à partir de calculs classiques empiriques (cf. annexe B.2). Les résistances dépendent de la température et comme nous n'avons développé aucun modèle thermique, il apparaît nécessaire de vérifier ces valeurs. De même, le calcul des inductances de fuite – dispersion d'encoche – n'étant pas l'objet principal de nos travaux, ces dernières seront peut-être un peu sous-évaluées, c'est pourquoi nous allons vérifier la valeur de ces éléments par la méthode classique d'identification (essai à vide, en court-circuit...). La détermination précise des inductances de fuite est primordiale pour notre modèle d'empilage de schémas *semi-complet*, car lorsque le rang des harmoniques de temps  $n$  augmente, le glissement tend vers 1<sup>13</sup>, la valeur de  $\frac{R'_r}{g}$  tend vers  $R'_r$ , ce qui fait que les réactances  $n\omega \cdot L_{\sigma_s}$  et  $n\omega \cdot L'_{\sigma_r}$  deviennent prépondérantes devant les résistances. Voici les valeurs estimées

---

<sup>13</sup>on rappelle que pour un rang de temps  $n$  et un rang d'espace  $m$ , le glissement vaut  $1 - \frac{n\omega}{m} \cdot \Omega_{rotor}$

par notre modèle :

$$\begin{aligned}
 R_s &= 0.2129 \Omega \\
 L_{\sigma s} &= 0.223 \cdot 10^{-3} H \\
 R_r &= 0.251 \cdot 10^{-3} \Omega \\
 L_{\sigma r} &= 0.487 \cdot 10^{-6} H \\
 L_\mu &= 8.552 \cdot 10^{-3} H
 \end{aligned}$$

Pour passer les éléments du secondaire à  $Z_r$  phases au primaire à  $Z_s$  phases, nous utilisons les spectres des fonctions de répartition du stator et du rotor (cf. FIG 3.16) et la formule du rapport de nombre de spires de l'équation (3.39) :

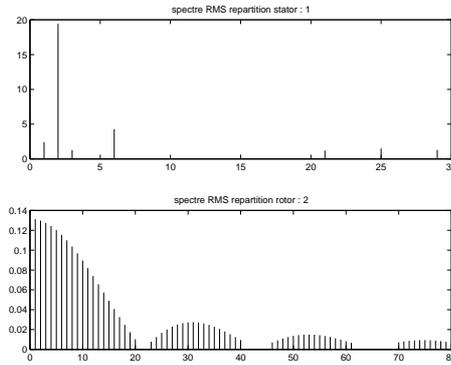


FIG. 3.16 – spectre des répartitions stator et rotor de notre machine (en valeur RMS, soit la valeur crête divisée par  $\sqrt{2}$ )

$$\begin{aligned}
 m_t^2 &= \left( \frac{N_s \cdot Z_s}{N_r \cdot Z_r} \right)^2 = \left( \frac{r_s(m = p_0) \cdot Z_s}{r_r(m = p_0) \cdot Z_r} \right)^2 \\
 &= \left( \frac{19.417 \cdot 3}{0.1297 \cdot 21} \right)^2 = 456.9179
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

On obtient, pour les valeurs ramenées au primaire :

$$\begin{aligned}
 R'_r &= 0.1146 \Omega \\
 L'_{\sigma r} &= 0.222 \cdot 10^{-3} H
 \end{aligned}$$

Après recalage des valeurs du schéma monophasé équivalent simple – sans harmoniques – à partir d'essais à vide et en court-circuit sur le réseau  $50Hz$ ,

nous obtenons :

$$R_s = 0.2767\Omega$$

$$L_{\sigma s} = 0.481 \cdot 10^{-3}H$$

$$R'_r = 0.15\Omega$$

$$L'_{\sigma r} = 0.480 \cdot 10^{-3}H$$

$$L_\mu = 8.55 \cdot 10^{-3}H$$

qui permet de tracer la FIG 3.17.

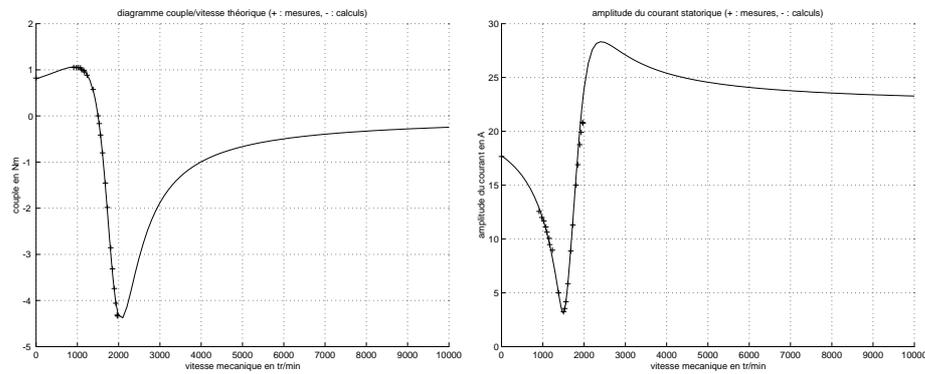


FIG. 3.17 – courbes de couple et de courant calculées après recalage des paramètres identifiés – comparaison avec les points de mesures expérimentales

Nous observons une différence de l'ordre de 30% pour les résistances par rapport aux premières estimations. Ceci est certainement dues aux résistances de contact en comparaison de la faible valeur des résistances considérées. L'erreur sur les fuites est plus importante, notre modèle devra être complété notamment au niveau des fuites de têtes de bobines qui n'ont pas été prises en compte. On constate une très bonne validation du calcul de l'inductance de magnétisation ainsi que du rapport de transformation pour passer d'un rotor à 21 cages à un système triphasé équivalent ramené au primaire.

### 3.5.2 Courbe de couple en tenant compte des harmoniques

À partir des paramètres recalés, nous avons calculé la courbe de couple de notre machine en fonction de la vitesse mécanique – du glissement – en tenant compte des harmoniques d'espace et des harmoniques de temps lorsque la machine est alimentée par un convertisseur PWM à échantillonnage naturel de fréquence fondamentale 50 Hz et  $9V_{RMS}$  pour une fréquence de découpage de 1500 Hz. Le principe de la conversion statique à échantillonnage naturel est de comparer les consignes des trois phases avec une porteuse

triangulaire et ainsi de déterminer les instants de commutation des interrupteurs électroniques alimentant chacune des phases de la machine (cf. FIG 3.18).

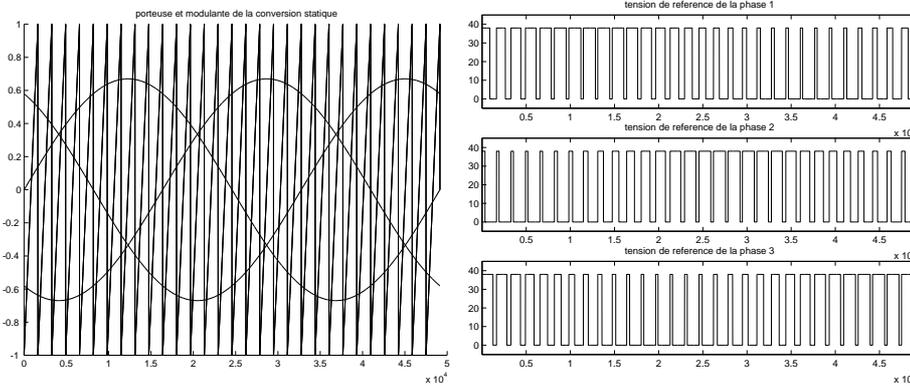


FIG. 3.18 – principe de fonctionnement de la conversion PWM : comparaison avec une porteuse et schéma de commutation résultant sur chacune des trois phases

Notre machine est une machine triphasée branchée en étoile trois fils. Nous n'avons pas forcément accès au neutre des trois phases ni aux tensions simples mais uniquement aux tensions de références – par rapport au potentiel de référence de la carte de puissance – et aux tensions composées. Dans un schéma monophasé équivalent, il nous faut connaître la tension simple appliquée à chacune des phases, ainsi nous devons la déduire et en calculer le spectre. Ce dernier est relativement bien connu pour ce type de stratégie de modulation de largeur d'impulsions (cf. FIG 3.19).

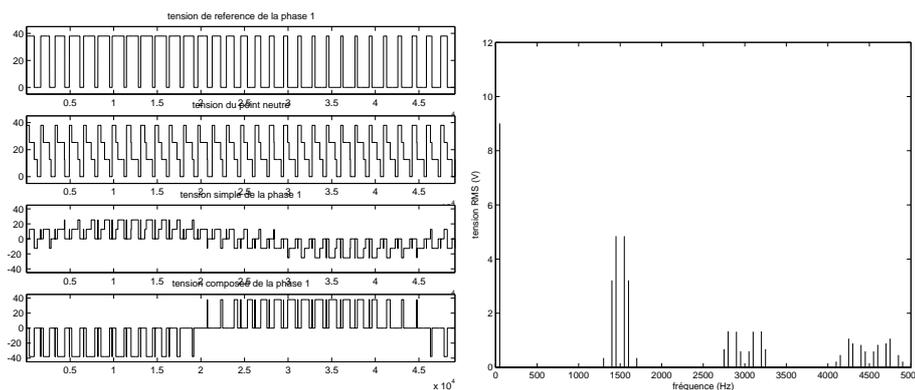


FIG. 3.19 – (a) tension de référence appliquée à une phase, tension du neutre des trois phases, tension simple appliquée à une phase de la machine et tension composée entre deux phases – (b) spectre de la tension simple

Ce spectre de tension simple est appliqué à notre machine pour différentes valeurs du glissement – vitesse mécanique –, nous avons ainsi pu tracer la courbe de couple en tenant compte des harmoniques de temps et d’espace (cf. FIG 3.20).

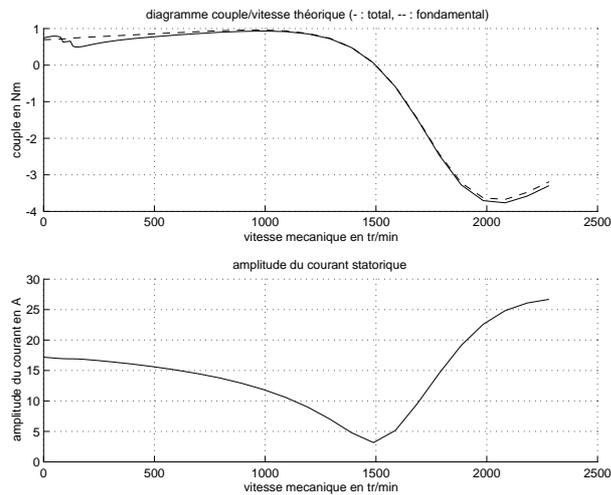


FIG. 3.20 – couple en fonction de la vitesse mécanique avec prise en compte de tous les harmoniques

De même que dans la littérature, on trouve l’allure des couples avec une chute due au harmoniques d’espace – de répartition – aux vitesses de synchronisme de ces différents champs tournants harmoniques (*crawling and locking*). On constate que le couple moyen total est inférieur au couple moyen créé par le fondamental mais la différence est assez faible car la machine n’a que peu d’harmoniques d’espace en raison de l’utilisation d’un pas fractionnaire.

### 3.5.3 Fonctionnement à différentes charges

Nous avons voulu vérifier les résultats de notre modélisation à partir d’un fonctionnement pour différentes charges – glissements – et comparer les valeurs des courants, de leurs spectres et des couples moyens avec les valeurs que nous avons pu mesurer sur la machine réelle.

Trois essais ont été réalisés dans des conditions d’alimentation sensiblement identiques :

1.  $V_{consigne} = 10 \text{ V}$
2.  $f_{consigne} = 50 \text{ Hz}$
3.  $f_{decoupage} = 1450 \text{ Hz}$

La vitesse de synchronisme est de  $1500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ , nous avons effectué ces essais pour trois charges correspondant aux trois vitesses mécaniques suivantes :

1.  $\Omega_{rotor} = 1399 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$
2.  $\Omega_{rotor} = 1190 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$
3.  $\Omega_{rotor} = 1058 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$

Sur la FIG 3.21, nous visualisons tout d'abord l'allure des tensions PWM<sup>14</sup> et le courant résultant pour chacun des essais.

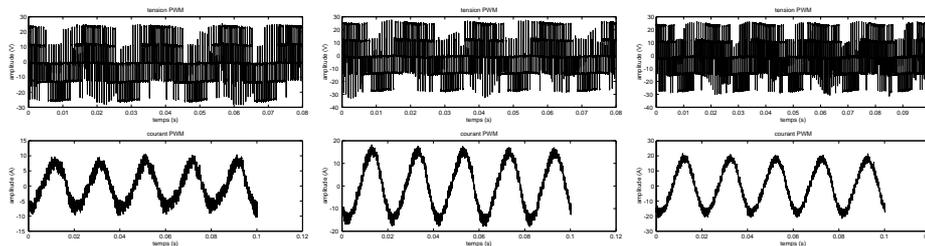


FIG. 3.21 – mesures des courants et tensions pour chacun des trois essais

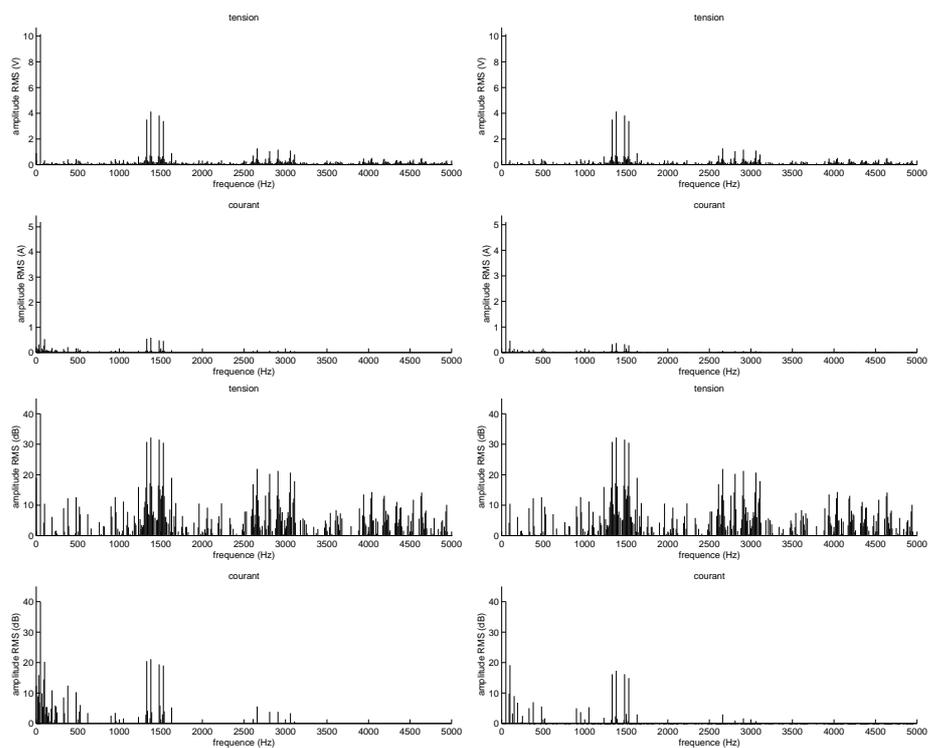
Dans les FIG 3.22, 3.23 et 3.24, on exposera pour chacun des essais les spectres des tensions (mesurés) avec les spectres des courants (mesurés et calculés) alors qu'un tableau récapitulera les différentes mesures et calculs.

Notre modèle est précis à plus de 1% pour déterminer les amplitudes du courant fondamental, il l'est un peu moins pour les harmoniques, cependant les valeurs restent tout de même acceptables (entre 10 et 20% d'erreur pour les harmoniques de rang 30). Le couple moyen total est différent du couple fondamental que calculerait un schéma simplifié et lorsque le courant est suffisamment élevé, le modèle donne des résultats tout à fait corrects (0.5% d'erreurs)<sup>15</sup>.

*Si l'on est capable d'estimer avec une bonne précision les paramètres du schéma équivalent simplifié, on obtiendra avec l'empilage de schémas semi-complets de bons résultats pour la détermination des spectres de courant et la valeur du couple moyen.*

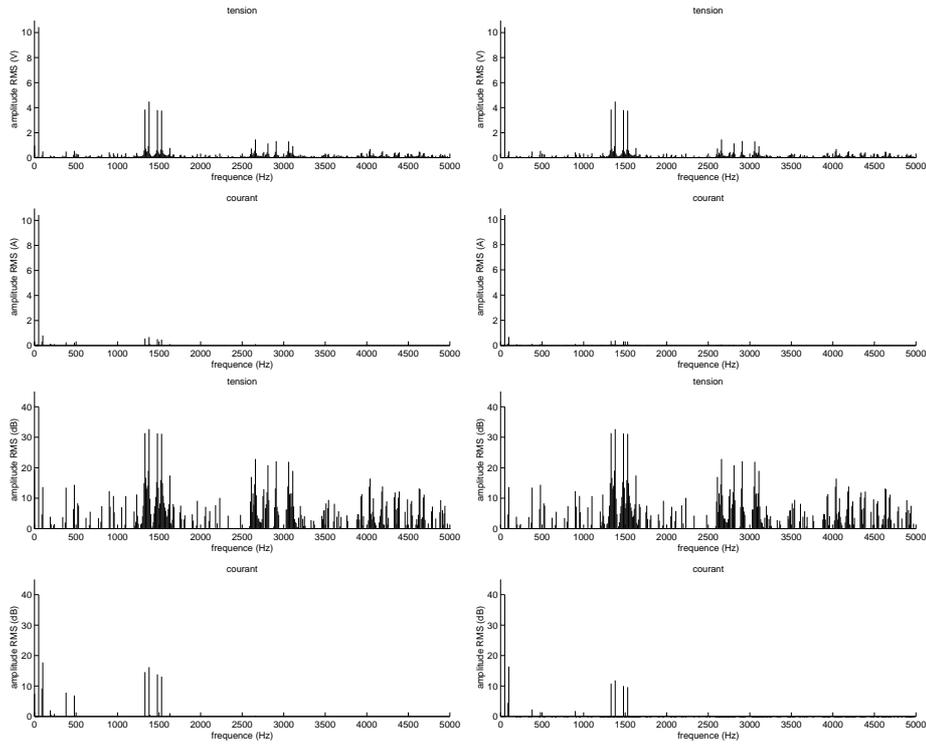
<sup>14</sup>l'allure des tension PWM n'est pas une succession de créneaux très propres comme on a l'habitude de les rencontrer dans la littérature car l'acquisition s'est faite à une fréquence d'échantillonnage très élevée –  $1 \text{ MS/s}$  – et l'on visualise tous les parasites de commutation.

<sup>15</sup>pour des courants faibles, la concordance entre le couple mesuré et le couple calculé est moins bonne pour une raison évidente. Nous comparons un couple mécanique (couple mesuré) avec un couple électromagnétique (couple calculé). La différence entre ces deux valeurs correspond aux pertes mécaniques et pour un couple de charge faible, ces pertes ne sont plus négligeables



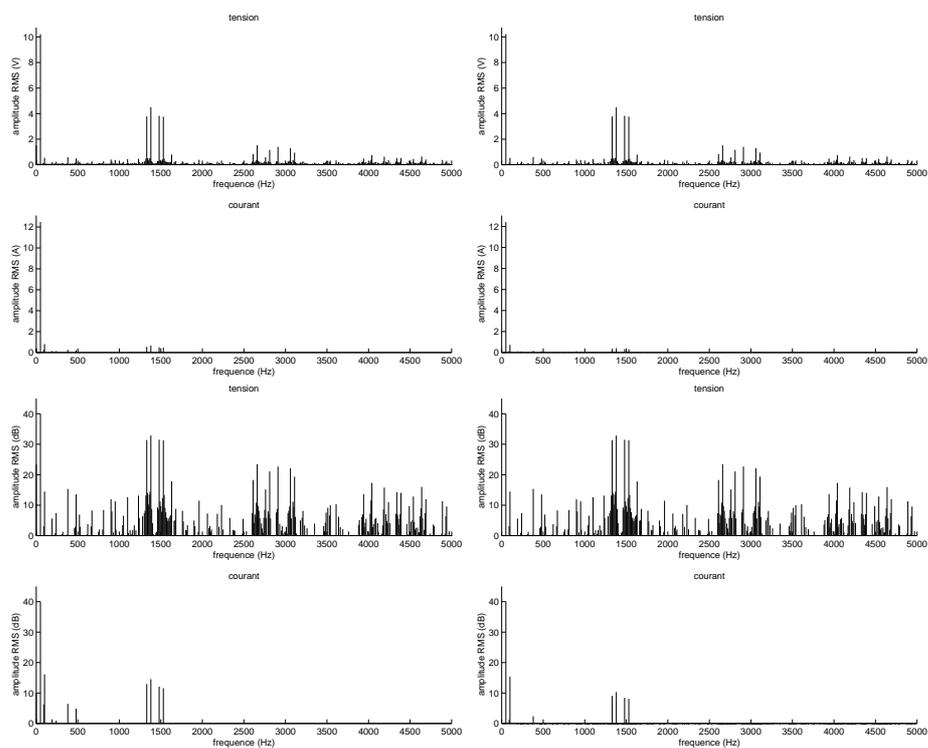
|                                  | Mesures | Calculs |
|----------------------------------|---------|---------|
| $V_{\text{fondamental}}$ (V)     | 10.18   | 10.155  |
| $V_{\text{rms}}$ (V)             | 13.9    | 13.817  |
| $I_{\text{fondamental}}$ (A)     | 5.19    | 5.11    |
| $I_{\text{rms}}$ (A)             | 5.63    | 5.19    |
| $C_{\text{fondamental}}$ (N · m) |         | 0.5631  |
| $C_{\text{total}}$ (N · m)       | 0.35    | 0.519   |

FIG. 3.22 – essai à  $1399 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  : spectres de mesures des tensions et courants (gauche) et spectre de courant calculé (droite) en échelle linéaire puis logarithmique et enfin tableau récapitulatif



|                                      | Mesures | Calculs |
|--------------------------------------|---------|---------|
| $V_{\text{fondamental}} (V)$         | 10.46   | 10.437  |
| $V_{\text{rms}} (V)$                 | 14.72   | 14.44   |
| $I_{\text{fondamental}} (A)$         | 10.42   | 10.35   |
| $I_{\text{rms}} (A)$                 | 10.46   | 10.41   |
| $C_{\text{fondamental}} (N \cdot m)$ |         | 1.146   |
| $C_{\text{total}} (N \cdot m)$       | 1.02    | 1.048   |

FIG. 3.23 – essai à  $1190 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  : spectres de mesures des tensions et courants (gauche) et spectre de courant calculé (droite) en échelle linéaire puis logarithmique et enfin tableau récapitulatif



|                                  | Mesures | Calculs |
|----------------------------------|---------|---------|
| $V_{\text{fondamental}}$ (V)     | 10.28   | 10.22   |
| $V_{\text{rms}}$ (V)             | 14.6    | 14.12   |
| $I_{\text{fondamental}}$ (A)     | 10.4    | 10.42   |
| $I_{\text{rms}}$ (A)             | 10.4    | 10.47   |
| $C_{\text{fondamental}}$ (N · m) |         | 1.196   |
| $C_{\text{total}}$ (N · m)       | 1.09    | 1.086   |

FIG. 3.24 – essai à  $1058 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  : spectres de mesures des tensions et courants (gauche) et spectre de courant calculé (droite) en échelle linéaire puis logarithmique et enfin tableau récapitulatif

### 3.5.4 Spectre des champs d'entrefer

À l'aide des harmoniques de courant déterminées à la sous-section précédente, nous allons maintenant visualiser les différents champs créés dans l'entrefer de la machine sous forme de spectres deux dimensions (temps et espace).

La FIG 3.25 représente le champ de force magnétomotrice créé par le stator lorsqu'il est alimenté par le courant PWM de la sous section précédente. On constate que la *qualité* du bobinage ne laisse apparaître que peu d'harmoniques d'espace essentiellement aux rangs  $(11 \cdot p_0)$  et  $(13 \cdot p_0)$ . On voit également apparaître les harmoniques de temps aux alentours de la fréquence de découpage ( $1500 \text{ Hz}$ ).

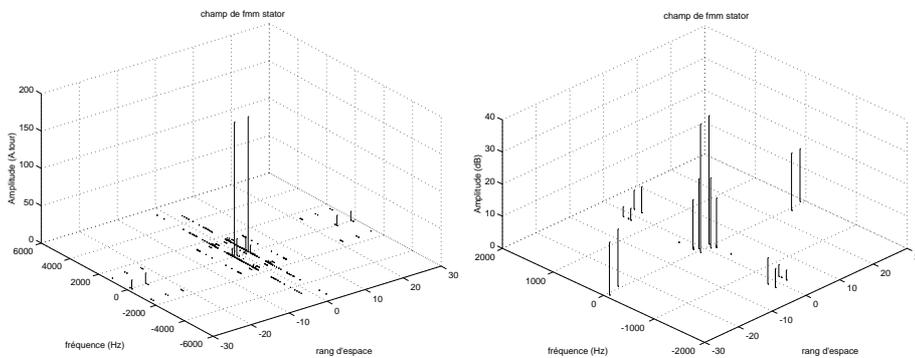


FIG. 3.25 – spectre 2D du champ de force magnétomotrice du stator en échelle linéaire et logarithmique

La FIG 3.26 représente le champ de force magnétomotrice créée par le rotor. Si on avait constaté que la répartition d'une maille de rotor à cage présentait un spectre très riche (cf. FIG 3.16), on avait également noté que seules les harmoniques multiple du nombre de phase  $\pm 1$  créaient un champ tournant, c'est pourquoi finalement, avec 21 encoches<sup>16</sup>, assez peu d'harmoniques de champs tournants sont créées par le rotor.

La FIG 3.27 représente le champ de densité de flux  $B$  dans l'entrefer. Celui-ci a été calculé à l'aide du champ de force magnétomotrice et de la fonction de perméance. On constate que cette dernière fait apparaître de nouveaux harmoniques liés à la présence des encoches au rotor et au stator et à leurs interactions.

Finalement, la dernière FIG 3.28 représente le spectre 2D du tenseur de

<sup>16</sup>on rappelle que pour le rotor, on a pris une modélisation par des mailles pour chaque couple de barres adjacentes, il y donc autant de phases que de mailles et donc que d'encoches

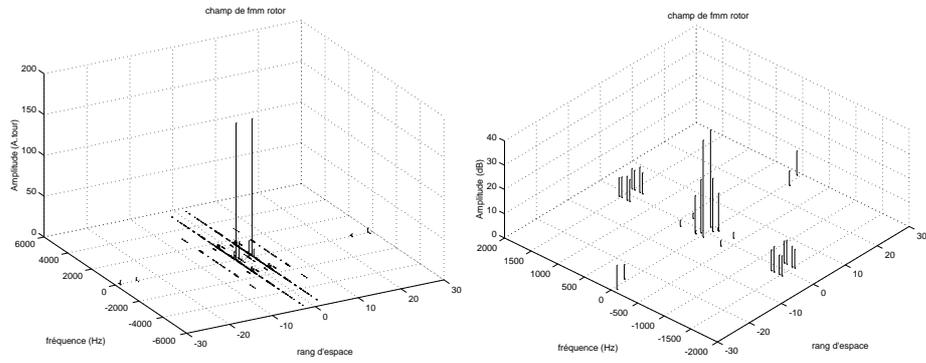


FIG. 3.26 – spectre 2D du champ de force magnétomotrice du rotor en échelle linéaire et logarithmique

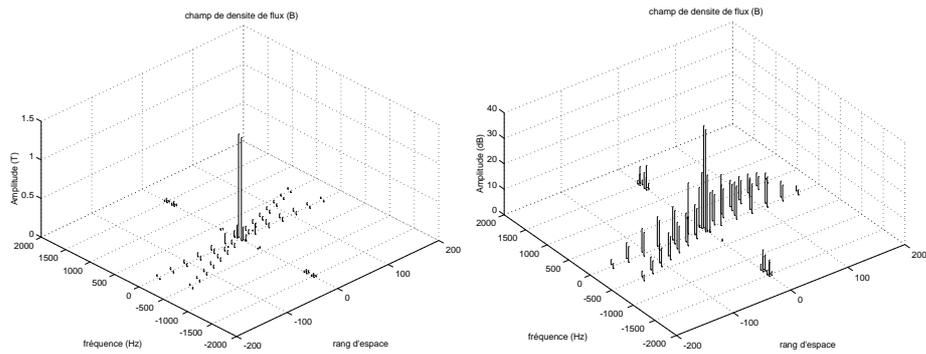


FIG. 3.27 – spectre 2D du champ de densité de flux dans l'entrefer en échelle linéaire et logarithmique

MAXWELL. Comme ce tenseur est calculé à partir d'une forme quadratique du champ de densité de flux  $B$ , on sait – et on constate – que ce champ d'effort a un spectre totalement différent des champs précédents (densité de flux et force magnétomotrice). Jusqu'ici les rangs d'espace principaux étaient les rang  $\pm p_0 = \pm 2$ , désormais ce sont les rangs  $\pm 2 \cdot p_0 = \pm 4$  et 0. Ce sont donc principalement les champs de ces rangs d'espace qui seront à l'origine de la vibration statorique.

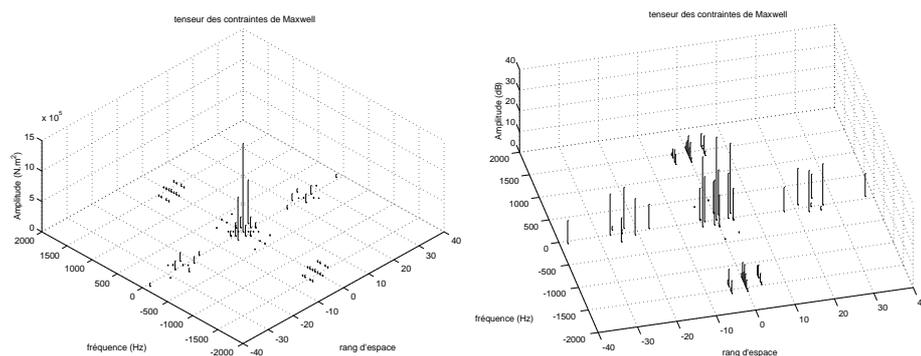


FIG. 3.28 – spectre 2D du tenseur de MAXWELL en échelle linéaire et logarithmique

On aurait également pu faire des mesures pour confirmer ces spectres, mais nous ne possédons pas l'appareillage nécessaire pour mesurer les densités de flux (spires supplémentaires), ni les efforts surfaciques, c'est pourquoi nous confirmerons ces spectres dans le chapitre suivant lorsque nous serons capable de mesurer les accélérations vibratoires – donc les déplacements – et à l'aide du modèle mécanique inverse, nous remonterons au champ de force appliqué et donc au tenseur de MAXWELL.

### 3.6 Résumé de la conversion électromécanique d'énergie dans une machine asynchrone

Dans ce chapitre, nous avons expliqué le fonctionnement et le calcul des différents champs qui prenaient forme dans l'entrefer d'une machine électrique asynchrone alimentée par un convertisseur statique PWM. Nous avons montré que :

1. pour pouvoir utiliser les outils de modélisations en champs tournants, il fallait connaître les courants circulants dans tous les conducteurs. Ceci nous a obligé à construire un schéma équivalent de la machine pour déterminer tous les courants à partir des tensions appliquées aux bornes de la machine par le convertisseur

2. à partir de la connaissance de ces courants et de la géométrie de la machine, nous avons pu utiliser la technique de modélisation en champs tournants. Cette technique a été *systematisée* en utilisant des algorithmes de Transformée de Fourier Discrète et des outils d'analyse matricielle
3. la connaissance des différents champs en terme de superposition de champs harmoniques tournants dans l'entrefer, nous a permis de formuler aisément l'expression des différents efforts – couples et efforts radiaux – qui prenaient naissance dans l'entrefer
4. l'analyse harmonique ayant également été utilisée pour les efforts, cela nous permet de connaître les couples pulsants et ainsi d'avoir un outil permettant de les minimiser.

Finalement, et c'est ce qui nous interessait le plus, nous avons réussi à formuler les efforts radiaux appliqués à la structure statorique, comme une superposition de champs tournants élémentaires. La connaissance de ces efforts va nous permettre au chapitre suivant de connaître les efforts d'excitations mécaniques et ainsi de pouvoir déterminer le comportement vibratoire de notre machine.

## Chapitre 4

# Comportement vibratoire d'une structure statorique

L'analyse du comportement vibratoire des machines électriques n'est pas un sujet récent. Des études ont été menées de manière importante dès les années 40/50 par des chercheurs américains [DEN HARTOG85] [ALGER51] ainsi que par toute une série de chercheurs allemands [HOLZMAN72] [JORDAN50] [FROHNE59]. La tendance actuelle est à l'utilisation de méthodes de RITZ et d'éléments finis [VERMAWILLIAMSSINGAL89] [COLBYMOTTIERMILLER96] pour déterminer les fréquences propres d'un stator et son comportement vibratoire. Afin de conserver une approche plus *intuitive* du problème et suite aux remarques du chapitre 1, nous nous sommes surtout intéressés aux méthodes analytiques. Dans un premier temps, nous débiterons ce chapitre par un rappel sur la mise en œuvre de telles techniques pour des *systèmes continus simples*, puis à partir des différents travaux consultés, nous tenterons de faire une synthèse sur les simplifications qu'il est possible d'envisager et sur les conséquences qu'elles apportent dans la modélisation analytique d'un stator. Nous finirons enfin, en exposant l'approche que nous avons retenue pour le calcul des modes propres et la mise en œuvre de la superposition modale telle qu'elle a été présentée dans le chapitre 2.

### 4.1 Quelques rappels et notions de vibrations des systèmes continus

Cette section effectuera un rappel des techniques de mise en équation et de résolution d'un problème vibratoire dans le cas d'un *système continu simple*. Elle permettra en outre de préciser les notations utilisées. Pour cela, nous nous appuyerons sur l'exemple *type* rencontré dans la littérature : le problème de vibrations longitudinales d'une poutre continue. Pour le lecteur intéressé, nous exposerons également dans l'annexe C.1, le problème de vibrations transversales de cette même poutre car nous verrons dans la suite

du chapitre, que les vibrations du stator sont une *combinaison* de ces deux types de vibrations.

Cette section s'articulera autour des deux grandes techniques de mise en équation :

1. l'approche *classique*, qui utilise la notion d'équilibre des forces et le Principe de D'ALEMBERT
2. l'approche *énergétique*, qui utilise le Principe de HAMILTON et les équations de LAGRANGE<sup>1</sup>

À partir des équations aux dérivées partielles ainsi obtenues, nous introduirons les notions de *modes* et *fréquences propres* qui sont complètement liés aux notions de *conditions aux limites*.

Dans nos travaux, nous utiliserons l'*hypothèse des petites perturbations*<sup>2</sup>. Pour caractériser l'élongation du matériau, nous considérerons que le matériau est linéaire – élastique – et isotrope. Nous pouvons dès lors utiliser la loi de HOOKE (proportionalité entre contrainte et déformation).

Soit une barre représentée sur la FIG. 4.1, de longueur  $l$  soumis à un effort d'extension  $N$  et aucun effort extérieur de volume excepté son poids.

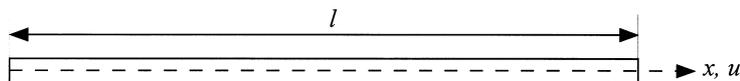


FIG. 4.1 – barre en extension

#### 4.1.1 Approche classique : équilibre des forces et théorème de d'Alembert

Considérons un élément de longueur  $dx$  et de section  $A$  représenté FIG. 4.2. Posons  $\rho$  comme sa masse volumique et  $u$  comme son déplacement longitudinal. Cet élément est soumis à des efforts de tension  $N$  à ces deux extrémités  $x$  et  $x + dx$ .

**Théorème 4.1.1 (Principe de d'Alembert)** *Si nous définissons une nouvelle force, la force d'inertie, comme la négation du produit de la masse fois l'accélération, alors, pour un corps soumis à différents efforts (de contact, volumique ou d'inertie), ces efforts sont tels que le système de forces est en équilibre.*

<sup>1</sup>L'approche par fonctionnelle d'énergie est *fondamentale* puisqu'elle conduit à l'utilisation du calcul des variations et à toutes les techniques de type Éléments Finis

<sup>2</sup>cette hypothèse implique que les déplacements sont très petits devant les dimensions de la structure et que les déformations sont très inférieures à un. Ceci permet de supprimer les termes *quadratiques* dans la relation entre déplacement et déformation et d'obtenir une relation linéaire

En vertu du Principe de D'ALEMBERT, la somme de tous les efforts exercés sur cet élément de barre doit être nulle. Nous obtenons donc :

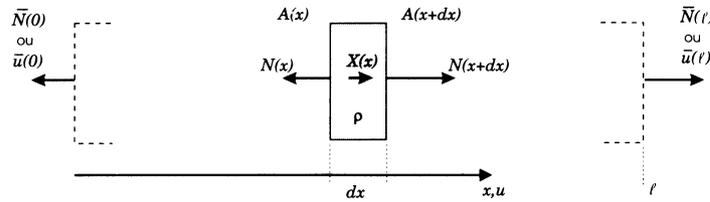


FIG. 4.2 – équilibre des efforts d'une barre en extension

$$N + \frac{\partial N}{\partial x} dx - N - \rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

En utilisant la loi de Hooke, on peut exprimer  $N$  en fonction de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  et de l'extension axiale  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$  (ou plus simplement ici  $\sigma$  et  $\varepsilon$  puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté). Nous avons donc :

$$N = A \cdot \sigma \quad (4.2)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.3)$$

où  $E$  est le module de YOUNG. Ceci permet d'arranger l'équation (4.1) pour obtenir finalement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

où  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Cette équation est une *équation d'onde* à une dimension. Ses solutions sont la superposition d'ondes qui se propagent dans les deux directions  $x$  et  $-x$  à la vitesse  $a$ . Pour pouvoir résoudre complètement cette équation, il faut lui adjoindre deux *conditions aux limites* qui caractérisent ce qui se passe à chaque extrémité, c'est-à-dire en  $x = 0$  et  $x = l$ <sup>3</sup> ainsi que de deux *conditions initiales* qui tiennent compte de la *configuration* à l'instant  $t = 0$ .

<sup>3</sup>ces conditions aux limites peuvent être de plusieurs types :

1. libre :  $N = 0$
2. encastré :  $u = 0$
3. cas intermédiaire comme le rappel par un ressort

### 4.1.2 Approche énergétique : énergie cinétique, potentielle, Principe de Hamilton et équations de Lagrange

Nous allons maintenant déduire les équations de vibrations de cette poutre en utilisant une approche énergétique.

**Théorème 4.1.2 (Énergie cinétique)** *L'énergie cinétique  $\mathcal{T}$  est définie comme la moitié de l'intégrale sur toute la barre de la quantité de mouvement  $p$  que multiplie la dérivée par rapport au temps du déplacement (soit la vitesse).*

Nous obtenons donc avec  $p = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$  :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \rho \cdot A \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \quad (4.5)$$

**Théorème 4.1.3 (Énergie de déformation)** *L'énergie de déformation  $\mathcal{V}$  est définie comme la moitié de l'intégrale sur toute la barre des efforts de déformations  $N$  que multiplie la dérivée par rapport à l'espace du déplacement (soit la déformation).*

Nous obtenons donc avec  $N = A \cdot \sigma$  et  $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$  :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l E \cdot A \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \quad (4.6)$$

**Théorème 4.1.4 (Principe de Hamilton)** *Soit le Lagrangien  $\mathcal{L}$  défini comme l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle d'un système mécanique, alors tout mouvement ne peut prendre forme que si l'action définie comme l'intégrale  $\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$  reste stationnaire pour n'importe quelle variation arbitraire de la configuration du système lorsque nous fixons la configuration initiale  $t_1$  et finale  $t_2$  du système.*

Les équations de LAGRANGE découlent directement de ce principe puisqu'elles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale d'action soit stationnaire :  $\delta\mathcal{A} = 0$ .

Par application du Principe de HAMILTON ou encore en utilisant les équations de LAGRANGE<sup>4</sup>, on obtient finalement l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E \cdot A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.7)$$

qui se transforme en notant que notre barre à une section constante sur toute sa longueur et en utilisant les notations du paragraphe précédent ( $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

<sup>4</sup>Pour de plus amples renseignements sur l'utilisation de ces théorèmes, on pourra se reporter à l'ouvrage [LANCZOS86] et pour l'application à des structures continues à l'ouvrage [GERADINRIXEN96]

Il faut de même ajouter deux conditions aux limites et deux conditions initiales pour définir complètement le comportement dynamique.

*Les deux techniques – classique et énergétique – conduisent finalement à la même équation aux dérivées partielles qui va régir le comportement dynamique de la structure.*

### 4.1.3 Introduction à la notion de modes et fréquences propres

**Théorème 4.1.5 (Conditions aux limites)** *Les notions de modes et fréquences propres sont indissociables de la notion de conditions aux limites. Ainsi à des conditions aux limites différentes correspondent des modes et fréquences propres différents.*

Nous n'allons pas traiter de manière exhaustive tous les cas de conditions aux limites, nous nous contenterons de traiter un cas unique qui servira d'exemple. Prenons le cas où les conditions aux extrémités sont toutes les deux libres.

Les solutions de l'équation en terme d'ondes ne sont souhaitables que dans certains cas particuliers tels que chocs ou impulsions de courtes durées. Pour le problème général des vibrations et des fréquences propres, on se contente généralement de regarder les solutions stationnaires, c'est-à-dire les solutions dont on peut séparer les variables de temps et d'espace<sup>5</sup>. Dans l'hypothèse des mouvements harmoniques, de telles solutions prennent la forme suivante :

$$u(x, t) = U(x) \cdot (A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)) \quad (4.9)$$

Les dérivées par rapport à l'espace ne vont alors s'appliquer qu'au terme de gauche  $U(x)$ , alors que les dérivées par rapport au temps ne s'appliquent qu'aux termes de droite. Nous obtenons pour la fonction spatiale  $U(x)$ <sup>6</sup> une équation de la forme :

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \cdot U(x) = 0 \quad (4.10)$$

Les solutions d'une telle équation sont de la forme :

$$U(x) = C \cdot \cos\left(\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot x\right) + D \cdot \sin\left(\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot x\right) \quad (4.11)$$

Les conditions aux limites *libres* sous-entendent qu'il n'y pas d'effort exercé aux extrémités. Nous avons vu précédemment que l'effort était relié à la

<sup>5</sup>la notion de *stationnarité*, ici, peut aussi être définie comme une solution dont la vitesse de propagation de l'énergie est nulle. Les *vitesse de phase* valent toujours  $\pm a$  mais la *vitesse de groupe* est nulle

<sup>6</sup>la fonction  $U(x)$  définit la *forme* du mode naturel de vibration. On appelle généralement cette fonction : fonction naturelle, principale, propre ou encore normale

déformation (la dérivé par rapport à l'espace du déplacement), nous aurons donc :

$$\left(\frac{\partial U(x)}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad (4.12)$$

et  
 $x = l$

Pour trouver les valeurs des paramètres  $C$  et  $D$ , on utilise les solutions (4.11) qui satisfont l'équation (4.12) :

1. en  $x = 0$ , il est *nécessaire* que  $D = 0$
2. en  $x = l$ , il faut  $C \neq 0$  (solution non triviale) et  $\sin\left(\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot x\right) = 0$

Cette dernière condition est ce que l'on appelle l'*équation des fréquences*. Elle conduit au calcul des fréquences propres  $\omega_i$  associé au mode  $U_i(x)$ . Les premiers modes propres seront représentés sur la FIG. 4.3.

$$\omega_i = \frac{a \cdot i \cdot \pi}{l} = \frac{i \cdot \pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.13)$$

$$U_i(x) = C_i \cdot \cos\left(\left(\frac{\omega_i}{a}\right) \cdot x\right) \quad (4.14)$$

On remarque sur la figure FIG. 4.3, que le mode  $U_0$  correspond à un

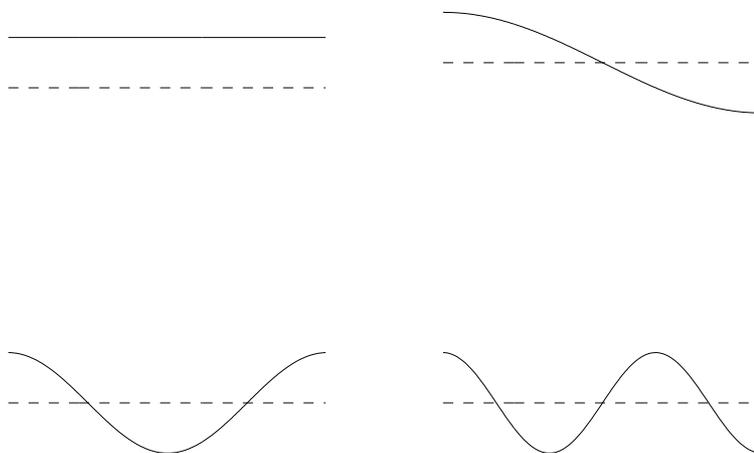


FIG. 4.3 – *allure* des quatre premiers modes propres  $U_i(x)$  des vibrations longitudinales de la barre ( $0 \leq i \leq 3$ )

déplacement  $u$  constant quelque soit la position. Ce type de mouvement est appelé mouvement de *corps rigide*, c'est-à-dire qu'il y a déplacement sans déformation. Ce mouvement est tout à fait possible puisque nous avons posé des conditions aux limites *libre-libre* ce qui implique que rien n'empêche la barre de se déplacer longitudinalement dans un mouvement d'*ensemble*

sans subir de déformation. La valeur de  $C$  est choisie *arbitrairement*, en la *normalisant* suivant un certain critère<sup>7</sup>. Prenons pour cet exemple  $C_i = 1$ . Par superposition de tous les modes ( $0 \leq i \leq \infty$ ), la solution complète est finalement :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \cos\left(\frac{i \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \cdot \left( A_i \cdot \cos\left(\frac{i \cdot \pi \cdot a}{l} \cdot t\right) + B_i \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot a}{l} \cdot t\right) \right) \right) \quad (4.15)$$

Les deux constantes  $A_i$  et  $B_i$  sont déterminées par les conditions initiales, c'est-à-dire la valeur de  $u(x, t)$  à  $t = 0$ .

## 4.2 État de l'art et synthèse sur l'étude de la structure statorique d'une machine alternative

### 4.2.1 Constitution d'une structure statorique

Un stator n'est pas uniquement composé d'un empilage de tôles, il possède également une carcasse externe sur laquelle viennent se greffer les ailettes de refroidissement (cf. FIG. 4.4).

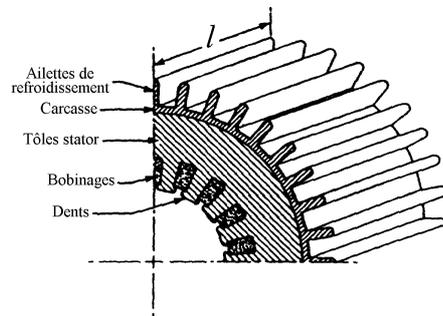


FIG. 4.4 – dessin d'un stator de machine asynchrone

Cette carcasse a généralement été négligée dans les études anciennes, cependant une étude assez récente [VERMAWILLIAMSSINGAL89] a confirmé que le comportement de la structure *tôles plus carcasse plus bobinages* était très proche du comportement de la structure *tôles plus bobinages* seuls. Cela indique que le comportement des *tôles plus bobinages* prédomine sur l'influence de la *carcasse* et nous pouvons la négliger sans perdre trop de précision.

<sup>7</sup>Le critère le plus souvent retenu est de normaliser le produit vectoriel de deux modes propres par rapport à la masse, c'est-à-dire de forcer  $\int_0^l U_i \cdot m_0 \cdot U_j dx = \delta_{ij}$ , avec  $\delta_{ij}$ , le symbole de Kronecker (qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon)

De même, si initialement, on ne tenait pas compte des bobinages – enroulements. Il est maintenant d’usage de négliger la rigidité apportée par les enroulements mais pas leur masse. Ceci a été confirmé expérimentalement et nous constatons également que les enroulements augmentent fortement les amortissements et contribuent à limiter les résonances dues aux dents (mouvement de rotation sur elles mêmes : *tooth rocking mode*). Ces résonances sont d’ailleurs négligeables dans le bruit rayonné car elles sont de fréquences très souvent supérieures à la gamme audible. L’influence majeure des enroulements est donc d’augmenter la masse de la structure et ainsi de baisser les fréquences des modes de type *anneau* [BELMANSHAMEYER98].

Dans la majorité des publications rencontrées, on constate que les calculs sont effectués en deux dimensions. On néglige donc l’influence de la longueur de la machine. Concernant ce paramètre, l’étude de S.P. VERMA citée ci-dessus montre assez clairement que la troisième dimension ne peut être négligée sans un minimum de précautions car à chaque mode radial peut être associé plusieurs modes longitudinaux (cf. FIG. 4.5 [SEIDE75]). L’étude

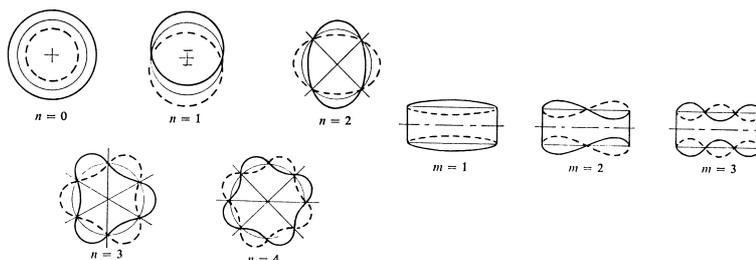


FIG. 4.5 – Exemples de déformations : (a) circonférentielles - radiales – et (b) longitudinales – axiales – d’une coque cylindrique circulaire simplement supportée à ces extrémités

de S.P. VERMA conclut cependant que pour une structure feuilletée – comme c’est le cas d’un stator –, les modes *antisymétriques* ( $m = 1, 3, 5 \dots$ ) disparaissent. Ce résultat est confirmé par [LONGZHUHOWE98] qui indique également que le feuilletage influe fortement sur le module de YOUNG et de cisaillement longitudinal mais quasiment pas sur ces modules dans le plan de la tôle. Ainsi, si la machine est relativement courte, le seul mode *longitudinal* important dans la gamme audible reste le mode  $m = 0$ . La déformation ne dépend alors plus de la variable longitudinale et le calcul en trois dimensions peut se ramener à un calcul en deux dimensions.

#### 4.2.2 Allure des déformées modales

D’après les remarques du paragraphe précédent, pour les machines asynchrones, on peut souvent se ramener à un calcul en deux dimensions, d’ailleurs, dans la littérature, rares sont les études en 3 dimensions du comporte-

ment vibratoire d'une structure statorique. Les études par éléments finis ont montré que la prise en compte des dents n'apportait que peu de changement [BELMANS HAMEYER98] et les modes apportés étaient à des fréquences bien souvent supérieures à la gamme *audible*. Les bobinages ayant tendance à amortir les modes apportés par les dents, il ne reste bien souvent, plus que des déformées de type *anneau 2D* comme le montre la plupart des calculs par éléments finis. Si les modes ont souvent des déformées proches de sinusoides à différents nombre de nœuds, pour un certain nombre  $2n$ , on constate qu'il y a généralement deux déformées, une associée à la fonction sin et une seconde associée à la fonction cos<sup>8</sup> (cf. FIG. 4.6). Dans le cas d'une structure parfaitement *axi-symétrique*, la fréquence propre associée à chacun de ces deux modes est exactement *identique*. Les dents contrarient cependant souvent cette *axi-symétrie*, ce qui fait que les deux fréquences propres sont légèrement décalées. On parle alors de *résonances duales* [GIRGIS VERMA81].

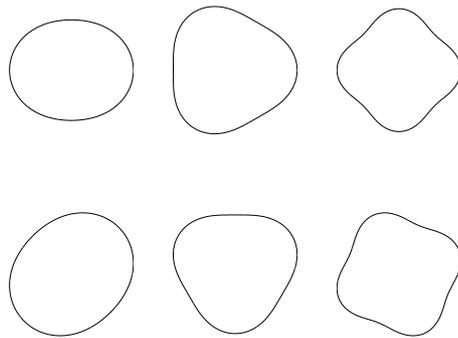


FIG. 4.6 – Exemples de modes duaux pour les rangs  $n = 2$ ,  $n = 3$  et  $n = 4$

Pour un nombre de dents élevé, comme c'est le cas des machines asynchrones, ce phénomène est marginal et on observe généralement qu'une seule fréquence associée à un rang  $n$ <sup>9</sup>. Les conditions aux limites utilisées dans la plupart des articles consultés sont du type *libre-libre*, c'est-à-dire que le moteur n'est fixé à aucun bâti et que les surfaces externe et interne du stator sont libres de contraintes. Finalement, les *allures* des résonances présentes dans la gamme audible peuvent être décomposées en trois phénomènes physiques différents :

1. mode d'extension pure (parfois appelé mode de gonflement ou de respiration) :  $n = 0$ . On constate qu'il n'y a pas de déformation de flexion.
2. mode de corps rigide :  $n = 1$ . On constate qu'il n'y a ni déformation

<sup>8</sup>ces *allures* sont en fait les mêmes mais elles sont déphasées de  $\frac{\pi}{2}$

<sup>9</sup>dans le cas de machine à faible nombre de dents comme c'est le cas des machines à reluctance variable, ce phénomène est très marqué au point de croire parfois que l'on a deux modes différents

d'extension, ni déformation de flexion mais uniquement déplacement d'ensemble de la structure.

3. mode de flexion sans élongation : cas où  $n$  est supérieur ou égal à 2.

*Finalement, il semble que les allures des résonances d'une structure statorique soient sensiblement identiques à celle d'une coque cylindrique en 3D ou bien d'un anneau en 2D. Nous allons voir dans la section suivante comment modifier le calcul du comportement d'un anneau pour modéliser le comportement propre d'un stator.*

### 4.2.3 Comparaison stator -anneau et vérification des hypothèses

#### Calcul 2D ou 3D

Si nous voulons calculer analytiquement le comportement en 3D (sensiblement celui d'une *coque cylindrique*), nous devons faire l'hypothèse d'une coque mince en considérant que la déformation de cisaillement ne contribue pas à la déformation totale. Il existe alors dans la littérature des opérateurs – et notamment dans [LESUEUR88] et [CREMERHECKLUNGAR88] celui de DONNELL –, qui permettent de modéliser le comportement dynamique des coques cylindriques. Ces opérateurs sont cependant assez délicats à manipuler de part leurs complexités. Dans le cas où un stator serait assez court et feuilleté, nous avons vu précédemment qu'il n'apparaît qu'un mode longitudinal, celui de rang  $m = 0$  – déformation axiale uniforme. Les modes qui nous intéressent sont donc ceux présent dans le plan d'une tôle. Nous pouvons donc calculer ces modes en deux dimensions. De plus, cette hypothèse nous évite d'avoir à exprimer le module de YOUNG et de cisaillement longitudinal qui est fortement dépendant de la *pression d'empilage* des tôles. L. CREMER et M. HECKL notent cependant dans leur ouvrage cité ci-dessus que pour les coques courtes – ce qui est le cas d'une tôle de machine électrique –, la valeur des fréquences d'un anneau (2D) et d'une coque (3D) diffèrent légèrement en raison du coefficient de POISSON qui couple les déformations longitudinales aux contraintes radiales et inversement. Cependant, ces auteurs donnent dans leur ouvrage la valeur des corrections à utiliser pour déterminer les fréquences d'une coque à partir de la valeur des fréquences d'un anneau. Nous pouvons donc remplacer le calcul 3D par un calcul 2D.

#### Influence des dents et des enroulements

Nous avons vu précédemment que les modes propres apportés par les dents (*tooth rocking mode*) étaient fortement atténués par la présence d'un bobinage et généralement en dehors des spectres audibles. Comme il a été noté dans [DEN HARTOG85] p 166, la présence des dents influe fortement sur l'énergie cinétique totale mais peu sur l'énergie de déformation. Nous

pouvons donc les négliger pour leur apport de rigidité de flexion mais pas pour leur apport de masse. Si le stator est imprégné, la masse du bobinage peut également influencer sur l'énergie cinétique. L'imprégnation rend d'ailleurs la structure si compacte qu'elle fait disparaître les modes qui pourraient être apportés par la denture. La masse volumique sera donc modifiée pour tenir compte des dents et éventuellement du bobinage :

$$\rho_{modifiée} = \frac{masse_{anneau} + masse_{dents} (+masse_{bobinages})}{Rayon_{externes\ tôles}^2 - Rayon_{fond\ encoches}^2} \quad (4.16)$$

La masse volumique *non modifiée* de ce type de tôle est de  $7650 \text{ kg/m}^3$ . Il faut également tenir compte du *foisonnement* qui vaut généralement 0,95 pour ce type de tôles<sup>10</sup>. Pour les valeurs du module de YOUNG et de cisaillement dans le plan de la tôle, nous utiliserons les valeurs constructeurs (FeV 350–35HA)

$$E_x = E_y = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad (4.17)$$

$$G_{xy} = 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \quad (4.18)$$

### Utilisation d'un modèle d'anneau épais ou mince

À priori, nous pouvons penser qu'un stator se comporte plus comme un *anneau épais* que comme un *anneau mince*. Nous nous sommes donc, dans un premier temps, intéressés au modèle analytique d'un anneau épais. Pour la mise en équation, notre stator va d'abord être assimilé à une poutre courbe de section constante et d'épaisseur non nulle. Ce problème doit être abordé comme un problème bidimensionnel en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et de déplacement  $(u, v)$  dans ce repère. À partir du Principe de D'ALEMBERT appliqué à un élément infinitésimal de poutre, on arrive à la formulation des équations d'équilibre en coordonnées polaires<sup>11</sup> :

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{R} + f_r \quad (4.19)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \cdot \frac{\sigma_{r\theta}}{R} + f_\theta \quad (4.20)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions aux limites :

1. pas d'effort – de contrainte – normal à la surface interne et externe de l'anneau
2. structure périodique en  $\theta = 2\pi$

<sup>10</sup>on rappelle que le *foisonnement* correspond à la perte de masse apportée par le vernis isolant entre chaque tôle

<sup>11</sup>cf. l'ouvrage de S.P. TIMOSHENKO [TIMOSHENKO87]

Pour résoudre ce jeu d'équation, on utilise la loi de HOOKE qui lie les contraintes aux déformations dans un matériau *isotrope*.

$$\sigma_x = \lambda \cdot \Delta + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{xx} \quad \text{idem en } y \quad (4.21)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \cdot \varepsilon_{xy} \quad \text{avec } \Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.22)$$

On se rend compte que la résolution analytique d'un tel problème n'est pas *simple*, les coordonnées polaires nécessitant l'utilisation de fonctions de Bessel<sup>12 13</sup>.

Ces équations sont désormais rarement résolues analytiquement, elles entrent dans une formulation variationnelle qui conduit à une résolution par des techniques de type éléments finis. Si ce problème est résolu par E.F., alors rien ne nous empêche de tenir compte des dents et les simplifications apportées perdent tout leur sens. De plus, ces résolutions numériques n'étant pas le sujet de nos travaux, nous n'irons pas plus loin dans leur étude.

*En conclusion, nous pouvons dire que par une approche analytique, nous nous heurtons vite à un problème difficile si nous voulons modéliser notre stator comme un anneau épais. N'y aurait-il pas des simplifications acceptables conduisant à des expressions plus simples. En fait, peut-on considérer notre anneau comme suffisamment mince pour pouvoir négliger son épaisseur et ainsi étudier uniquement les déplacements de sa ligne neutre ?*

### Influence de l'épaisseur d'un anneau sur la courbure

Nous allons tout d'abord regarder l'influence de l'épaisseur de l'anneau sur la variation de courbure en prenant comme hypothèse que la déformation due au cisaillement est négligeable (cf. annexe C.1.4). Lorsque nous confronterons les mesures expérimentales aux résultats des modèles développés, nous verrons s'il est acceptable de conserver cette hypothèse.

Dans les barres courbes, la répartition des contraintes n'obéit plus à une loi linéaire comme dans le cas des barres rectilignes mais à une loi hyperbolique. L'axe neutre n'est plus sur le centre de gravité de la section mais se déplace vers le centre de courbure (cf. FIG. 4.7)<sup>14</sup>.

<sup>12</sup>pour la résolution analytique complète de ce jeu d'équation, on pourra se reporter à l'ouvrage de A.E.H. LOVE [LOVE44]

<sup>13</sup>Une références aux livres *modernes* de mécanique des milieux continus conduit à une formulation plus systématique (cf. par exemple [SALENÇON95]) : en fait, tout problème de mécanique des milieux continus consiste en la résolution de l'équation d'équilibre dynamique :

$$\operatorname{div}(\sigma) = \rho \cdot (\vec{\gamma} - \vec{f}) \quad (\text{dans le volume}) \quad (4.23)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = T \quad (\text{à la surface}) \quad (4.24)$$

Si on calcule  $\operatorname{div}(\sigma)$  dans un repère polaire – cylindrique –, on constate qu'on retrouve exactement le jeu d'équations (4.19) et (4.20)

<sup>14</sup>pour l'étude complète, on pourra se reporter au chapitre 12 : barres courbes de

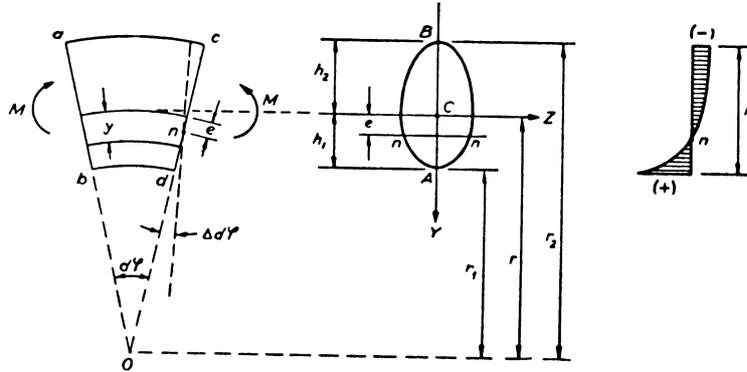


FIG. 4.7 – comportement *statique* d'une barre courbe en flexion - répartitions des contraintes dans une section

En fait, par rapport à une poutre droite, il apparaît deux nouvelles inconnues qui sont  $e$ , la distance entre la fibre neutre et le centre de gravité et  $\Delta\partial\varphi$ , la variation de courbure due à la flexion par rapport à la courbure initiale. Ces deux termes peuvent être exprimés en fonction d'une variable  $m_c$  fonction de la section<sup>15</sup> :

$$e = r \cdot \frac{m_c}{m_c + 1} \quad (4.25)$$

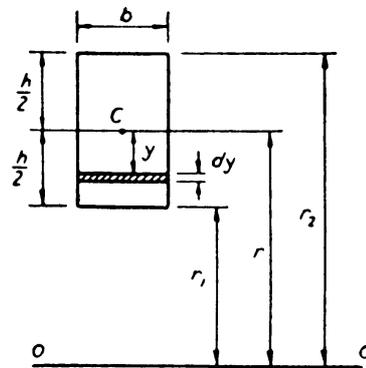
$$\frac{\Delta\partial\varphi}{\partial s} = \frac{M \cdot (m_c + 1)}{m_c \cdot r^2 \cdot A \cdot E} \quad (4.26)$$

Dans le cas d'une section rectangulaire comme le sont les tôles magnétiques, nous obtenons les paramètres  $m_c$  et  $e$  décrits dans la FIG. 4.8.

*En conclusion, nous pouvons corriger l'influence de l'épaisseur de l'anneau sur la courbure en faisant intervenir les deux coefficients  $e$  et  $m_c$  qui dépendent de la section de la poutre courbe – de l'anneau. Nous conserverons également l'hypothèse de déformation de cisaillement négligeable. Cette dernière ne sera vérifiée que lors de la confrontation aux mesures expérimentales. Nous pouvons ainsi conserver une modélisation d'anneau mince pour représenter notre stator.*

[TIMOSHENKO68]

<sup>15</sup>si l'épaisseur de la poutre est faible devant  $r$  le rayon du centre de gravité, on voit que  $m_c$  tend vers zero et  $m_c \cdot r^2 \cdot A$  tend vers le moment quadratique  $I_{Gz}$  de la section. On retrouve donc le cas d'une poutre droite, soit la distance  $e = 0$  et la variation de courbure  $\frac{\Delta\partial\varphi}{\partial s} = \frac{M}{E \cdot I_{Gz}}$



$$m_c = \frac{r}{h} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - 1 \quad (4.27)$$

$$e = r - \frac{h}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (4.28)$$

FIG. 4.8 – comportement d'une barre courbe de section rectangulaire

#### 4.2.4 Étude du comportement dynamique d'un anneau

Aux sections précédentes, nous avons montré que sous certaines hypothèses et en introduisant quelques coefficients correcteurs, il était possible d'estimer le comportement naturel d'un stator en l'approchant par le comportement naturel d'un anneau mince. Le comportement de ce dernier sera étudié en profondeur dans l'annexe C.2, nous rappellerons dans cette section uniquement les points principaux. Dans un premier temps, nous avons considéré les conditions aux limites *habituelles libre-libre*, c'est-à-dire que les surfaces internes et externes de l'anneau sont libres de contraintes : le stator n'est *porté* par rien.  $u$  et  $v$  sont définis comme les déplacements radiaux et tangentiels.

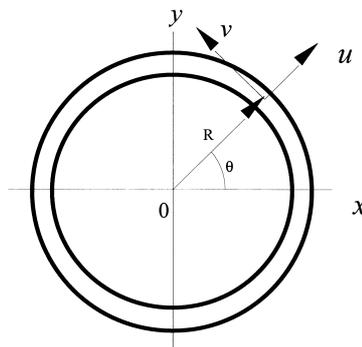


FIG. 4.9 – définition de l'anneau mince

### Étude du mode d'extension

Pour les modes d'extension, nous avons, suivant les deux approches – classique ou énergétique – un jeu d'équation aux dérivées partielles (EDP) ou bien une expression pour l'énergie cinétique et potentielle :

1. approche classique :

$$\rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E \cdot A}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \right) = 0 \quad (4.29)$$

$$\rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{E \cdot A}{R} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (4.30)$$

2. approche énergétique :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l E \cdot A \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 ds \quad (4.31)$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \rho \cdot A \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 ds \quad (4.32)$$

L'utilisation de l'une ou l'autre de ces méthodes, conduit pour les conditions aux limites *libre-libre* à une infinité de pulsations et de modes propres :

$$\omega_n^2 = \frac{E \cdot A}{\rho \cdot A \cdot R^2} \cdot (1 + n^2) \quad (4.33)$$

$$U_n(\theta) = A_n \cdot \sin(n\theta) + B_n \cdot \cos(n\theta) \quad (4.34)$$

$$V_n(\theta) = n \cdot \left( A_n \cdot \cos(n\theta) - B_n \cdot \sin(n\theta) \right) \quad (4.35)$$

Nous ne conservons que le premier mode ( $n = 0$ ), qui satisfait exactement l'équation de mouvement et qui est généralement le seul situé dans la gamme audible<sup>16</sup>. On constate alors que  $U_0$  et  $V_0$  ne dépendent plus de  $\theta$  – sont constants – ce qui signifie que  $u$  et  $v$  ne dépendent que de  $t$  et non de  $\theta$ . Ce mode est appelé *mode de gonflement* et est représenté FIG. 4.10.

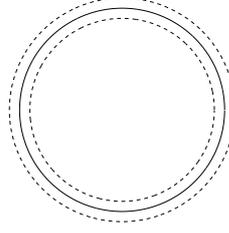
$$\omega_0^2 = \frac{E \cdot A}{\rho \cdot A \cdot R^2} = \frac{E}{\rho \cdot R^2} \quad (4.36)$$

$$U_0(\theta) = U_0 \quad (\text{indépendant de } \theta) \quad (4.37)$$

$$V_0(\theta) = 0 \quad (\text{pas de déplacement tangentiel}) \quad (4.38)$$

---

<sup>16</sup>on notera que les fréquences propres d'extension sont toujours situées à des fréquences beaucoup plus élevées que les fréquences propres de flexion étudiées ci-après. Pour ces raisons, seule le mode fondamentale d'extension est généralement étudiée, les harmoniques étant à des fréquences trop importantes pour être *gênantes*

FIG. 4.10 – mode d'extension d'un anneau pour  $n = 0$ 

### Étude du mode de flexion

Pour le mode de flexion, nous obtenons :

1. approche classique : jeu de trois équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} + N - \rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial \theta} - T - \rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \theta} + T \cdot R - I_m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

2. approche énergétique :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right)^2 R d\theta \quad (4.40)$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho \cdot A \cdot \left( \dot{u}^2 + \dot{v}^2 \right) R d\theta \quad (4.41)$$

Pour les conditions *libre-libre*, nous obtenons finalement :

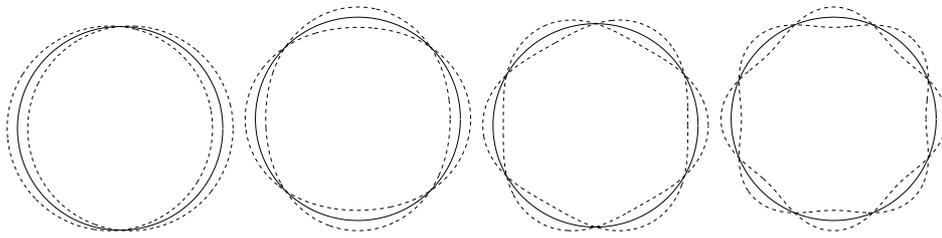
$$\omega_n^2 = \frac{E \cdot I \cdot n^2 \cdot (n^2 - 1)^2}{\rho \cdot A \cdot R^4 \cdot (n^2 + 1)} \quad (4.42)$$

$$U_n(\theta) = +C_n \cdot \cos(n\theta) \quad (4.43)$$

$$V_n(\theta) = -\frac{C_n}{n} \cdot \sin(n\theta) \quad (4.44)$$

Ces différents modes propres de flexion seront représentés sur la FIG. 4.11 pour  $1 \leq n \leq 4$ .

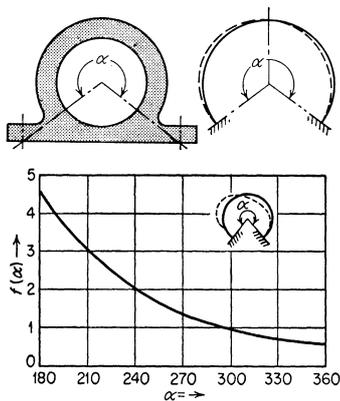
On montre en annexe C.3 que le mode  $n = 1$  correspond en 2D à un mode de *corps rigide* pour des conditions aux limites *libre-libre*. L'anneau peut se déplacer *sans déformation* de manière libre, ce qui doit correspondre à une fréquence propre nulle. C'est bien ce que nous obtenons avec l'équation (4.43) pour  $n = 1$ . L'équation dynamique du mouvement de flexion englobe donc le mode de corps rigide.

FIG. 4.11 – modes de flexion d'un anneau pour  $1 \leq n \leq 4$ 

Les fréquences que nous venons de calculer sont utilisées depuis relativement longtemps pour le calcul des fréquences propres de stator (cf. [DEN HARTOG85], [ALGER51] et [VIJAYRAGHAVANKRISHNAN99]). La reconstruction détaillée du calcul n'est cependant pas inutile puisqu'elle nous permet de faire apparaître les paramètres *pertinents*, c'est à dire l'influence de paramètres tels que masse, moment quadratique, hauteur, rayon sur la valeur des fréquences naturelles.

### Étude d'autres conditions aux limites

Certains auteurs ont établi des formules qui permettent de prendre en compte d'autres conditions aux limites. Citons à ce sujet J.P. DEN HARTOG, dans [DEN HARTOG85] qui a calculé à partir d'une méthode de RAYLEIGH la valeur de la fréquence propre fondamentale d'un moteur posé sur des pieds comme une modification de la formule des fréquences propres de flexion donnée par l'équation (4.43) (cf. FIG. 4.12 et équation modifiée (4.45)). Cette modification n'est cependant valide que pour un moteur fixé par des *pièdes* et non pour un moteur fixé par les *flasques*.



$$\omega_n = \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A \cdot R^4}} \cdot f(\alpha) \quad (4.45)$$

FIG. 4.12 – modifications apportées par les supports du moteur sur la fréquence propre fondamentale de flexion d'un stator

*Dans cette section, nous avons vu comment on pouvait approcher analytiquement le comportement naturel d'un stator en faisant certaines hypothèses et en utilisant des coefficients permettant de nous ramener au calcul d'un anneau mince. À partir des remarques et calculs de cette section, nous allons pouvoir utiliser le comportement naturel – sans excitation – pour décrire le comportement forcé de la structure – soumise à une excitation – en faisant usage des techniques de superposition modale que nous avons introduites dans le chapitre 2.*

### 4.3 Problème aux valeurs propres : analyse et superposition modale

Nous avons vu dans la section précédente, que le comportement d'un stator pouvait être approché par celui d'un anneau mince. Le comportement naturel d'un anneau mince a été rappelé et nous avons pu séparer son comportement en trois comportements distincts régis par des équations aux dérivées partielles différentes dont le troisième n'est qu'un cas particulier du deuxième :

1. déformation de type extension pure (mode de *gonflement*)
2. déformation de type flexion pure.
3. déplacement sans déformation (mouvement de corps rigide). Cas particulier du comportement de flexion.

À partir de ces trois comportements, nous allons développer l'analyse modale de notre structure à partir d'un problème de valeurs propres puis nous étudierons le comportement forcé, c'est à dire le comportement lorsque nous soumettons notre structure à des efforts tels qu'ils ont été calculés dans le chapitre 3. Ce comportement forcé sera étudié en utilisant la technique de *superposition modale*.

Dans le chapitre 2, nous avons exposé cette technique tout d'abord sans amortissement puis avec. Si, en réalité, toutes les structures sont dissipatives, on sait qu'en pratique, il est extrêmement difficile d'estimer la valeurs des coefficients d'amortissement sans avoir recours à des techniques d'identification comme celles qui sont exposées par D.J. EWINS dans son ouvrage [EWINS84]. Pour utiliser des techniques d'identification, il faut *nécessairement* avoir construit la structure, ce qui ne peut être le cas lors de la conception. Nous avons également noté que si nous étions en mesure de *placer* les excitations suffisamment loin des résonances, les amortissements pouvaient être négligés. En première approximation, nous allons appliquer la technique de superposition modale à notre structure statorique en considérant qu'elle n'est pas amortie. Cette hypothèse implique que les réponses que nous déterminerons ne seront *faibles* qu'à condition que les fréquences d'excitation – les efforts appliqués à la structure – soient suffisamment *éloignées* des fréquences na-

turelles, puisque nous venons de dire que près de la résonance, le comportement est fortement lié à l'amortissement alors qu'il ne l'est pratiquement pas *assez loin*. Nos modèles seront valables à condition de pouvoir *placer* nos excitations suffisamment loin des résonances mécaniques de la structure.

Nous étudierons séquentiellement chacun des trois comportements. Par utilisation du théorème de superposition, nous pourrons alors reconstruire le comportement complet de la structure en notant qu'il n'est que la superposition de chacun des comportements calculé pour chacun des modes soumis à chacun des efforts.

Le plan de cette section sera identique pour chacun des comportements. Après un rappel de l'équation aux dérivées partielles qui régit le comportement dynamique, nous résoudrons le problème de valeur propre qui n'est autre que le calcul du régime naturel – fréquences et modes propres. Nous projeterons ensuite les efforts d'origine électromagnétique dans la base constituée des vecteurs propres, nous résoudrons le problème en régime permanent dans cette base propre et nous ramènerons enfin la solution dans la base initiale<sup>17</sup>.

#### 4.3.1 Réponse dynamique de la structure sur son mode d'extension

L'équation aux dérivées partielles (EDP) qui régit le comportement d'extension est d'après la section précédente et l'annexe C.2 :

$$-\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E \cdot A}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) = 0 \quad (4.46)$$

#### Résolution du problème de valeurs propres

Pour résoudre un tel problème, faisons l'hypothèse de séparation des variables, c'est à dire que la solution sera de type stationnaire – non propagative. La solution sera de la forme :

$$u(t, \theta) = \phi(t) \cdot U(\theta) \quad (4.47)$$

Écrivons l'équation (4.46) en utilisant la solution à variables séparables, on trouve, en utilisant  $U'(\theta) = \frac{dU}{d\theta}$  :

$$\rho \cdot \ddot{\phi}(t) \cdot U(\theta) = \frac{E}{R^2} \cdot \left( \phi(t) \cdot U''(\theta) - \phi(t) \cdot U(\theta) \right) \quad (4.48)$$

---

<sup>17</sup>plutôt que de projeter les équations dynamiques dans la base des vecteurs propres comme nous allons le faire ici, certains auteurs utilisent le théorème des travaux virtuels en prenant un déplacement virtuel ayant la *forme* d'une fonction normale. C'est par exemple ce qu'utilise S.P. TIMOSHENKO dans [TIMOSHENKOYOUNGWEAVER74]. Ces deux façons de procéder sont cependant totalement *équivalentes* et conduisent au même résultat pour l'expression du déplacement

ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\rho \cdot \frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \frac{E}{R^2} \cdot \frac{U''(\theta) - U(\theta)}{U(\theta)} \quad (4.49)$$

Les variables  $t$  et  $\theta$  étant indépendantes l'une de l'autre, les parties droite et gauche de l'équation (4.49) doivent être satisfaites indépendamment l'une de l'autre, ce qui conduit à *poser* qu'on a à la fois :

$$K = \rho \cdot \frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} \quad (K \text{ constante}) \quad (4.50)$$

$$K = \frac{E}{R^2} \cdot \frac{U''(\theta) - U(\theta)}{U(\theta)} \quad (\forall t \text{ et } \theta) \quad (4.51)$$

Pour que la solution soit *physique*, il faut que  $\frac{K}{\rho}$  soit négatif – stabilité de la partie temporelle. Posons  $-\frac{K}{\rho} = p_n^2$  où  $p_n$  a les dimensions d'une pulsation, nous obtenons alors :

$$-\frac{U''(\theta) - U(\theta)}{U(\theta)} = p_n^2 \cdot \rho \cdot \frac{R^2}{E} \quad (4.52)$$

Posons  $p_n^2 \cdot \rho \cdot \frac{R^2}{E} = \lambda_p$  et cherchons les solutions de  $-\frac{U''(\theta) - U(\theta)}{U(\theta)} = \lambda_p$ . Les solutions d'une telle équation différentielle sont des fonctions exponentielles imaginaires pures de la forme  $U(\theta) = \sum_i \hat{A}_i \cdot e^{j \cdot i \theta}$ . En remplaçant par la solution, on trouve finalement pour une valeur  $n$  de  $i$  :

$$\lambda_p = n^2 + 1 \quad (4.53)$$

ce qui nous conduit finalement en utilisant l'équation (4.52) aux fréquences et vecteurs propres du système :

$$p_n^2 = \frac{E \cdot (n^2 + 1)}{\rho \cdot R^2} \quad (4.54)$$

$$U_n(\theta) = A_n \cdot \sin(n\theta) \quad (4.55)$$

Ces vecteurs propres sont définis à une constante multiplicative près. On a coutume en *élastodynamique* de les normer par rapport à la masse, de telle sorte que :

$$\int_{\Omega} U_i \cdot m_0 \cdot U_j \, d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \quad (\text{orthogonalité}) \\ 1 & \text{si } i = j \quad (\text{normalisation}) \end{cases} \quad (4.56)$$

Ceci nous permet d'obtenir la valeur des  $A_n$  pour  $n \neq 0$  :

$$\int_0^{2\pi} A_n \cdot \sin(n\theta) \cdot \rho \cdot A \cdot A_n \cdot \sin(n\theta) R \, d\theta = 1 \quad (4.57)$$

$$A_n = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A \cdot R \cdot \pi}} \quad (n \neq 0) \quad (4.58)$$

et la valeur de  $A_0$  :

$$\int_0^{2\pi} A_0 \cdot \rho \cdot A \cdot A_0 R d\theta = 1 \quad (4.59)$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A \cdot R \cdot 2\pi}} \quad (4.60)$$

On a donc défini une base orthonormée de fonctions  $U_n(\theta) = A_n \cdot \sin(n\theta)$  sur laquelle, on va maintenant projeter l'équation d'équilibre dynamique.

### Réponse à une excitation dans la base modale

Soit le système précédent soumis à une excitation  $q(\theta, t)$ , l'équation aux dérivées partielles se transforme en l'équation forcée suivante :

$$-\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E \cdot A}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) + q(\theta, t) = 0 \quad (4.61)$$

Projetons cette équation sur chacune des composantes de la base modale définie précédemment, soit pour la coordonnée  $n$  :

$$\int_{\Omega} (\text{équation d'équilibre}) \cdot U_n d\Omega = 0 \quad (4.62)$$

$$\int_0^{2\pi} \left( -\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E \cdot A}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) + q(\theta, t) \right) \cdot U_n R d\theta = 0 \quad (4.63)$$

En *intégrant par partie*, on peut montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot U_n d\theta = \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot U_n \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial U_n}{\partial \theta} d\theta \quad (4.64)$$

La première partie du second membre est nulle puisque  $U_n$  et  $u$  sont périodiques de période  $2\pi$ , ainsi il ne reste plus que la seconde partie du second membre que l'on transforme une nouvelle fois par *intégration par partie*. La première partie du *nouveau* second membre sera une nouvelle fois nulle et il ne restera finalement plus que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot U_n d\theta = + \int_0^{2\pi} u \cdot \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} d\theta \quad (4.65)$$

Cette identité est introduite dans l'équation d'équilibre projetée (4.63) ce qui conduit à :

$$\int_0^{2\pi} -\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot U_n + \frac{E \cdot A}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} - U_n \right) \cdot u + q \cdot U_n R d\theta = 0 \quad (4.66)$$

La base modale étant *complète*,  $u(\theta, t)$  peut être exprimé dans cette base :

$$u(\theta, t) = \sum_i \phi_i(t) \cdot U_i(\theta) \quad (4.67)$$

Remplaçons cette expression dans l'équation (4.66) :

$$\int_0^{2\pi} -\rho \cdot A \cdot \sum_i \ddot{\phi}_i(t) \cdot U_i(\theta) \cdot U_n + \frac{E \cdot A}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} - U_n \right) \cdot \sum_i \phi_i(t) \cdot U_i(\theta) + q \cdot U_n R d\theta = 0 \quad (4.68)$$

Par résolution du problème de valeur propre, nous savons que  $-\left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} - U_n\right) = \lambda_p \cdot U_n = (n^2 + 1) \cdot U_n$  et que les fonctions  $U_n$  sont orthogonales entre elles et normées par rapport à  $m_0 = \rho \cdot A$ . Dans l'équation (4.68), il ne reste plus que les composantes en  $n$ , ce qui donne :

$$-\ddot{\phi}_n - \frac{E \cdot A}{R^2} \cdot (n^2 + 1) \cdot \phi_n + \int_0^{2\pi} q \cdot U_n R d\theta = 0 \quad (4.69)$$

Nous avons également posé que  $\frac{E \cdot A}{R^2} \cdot (n^2 + 1) = p_n^2$ , la pulsation propre du système, ceci nous conduit donc à :

$$\ddot{\phi}_n + p_n^2 \cdot \phi_n = \int_0^{2\pi} q \cdot U_n R d\theta \quad (4.70)$$

Le second membre correspond à la force projetée sur la composante  $n$  de la base modale, soit la force généralisée *modale*  $Q_n$ .

Nous avons vu dans le chapitre 3, que nous étions capable d'exprimer l'effort surfacique d'origine électromagnétique appliqué à la structure statorefer. Cette démonstration va nous être forte utile dans cette section car on peut alors exprimer l'effort  $q$  comme une superposition de ces champs harmoniques, soit de la forme :

$$q = \sum_i q_i \cdot \sin(\omega_i t \pm i\theta) \quad (4.71)$$

Nous savons également qu'un seul de ces efforts contribue à exciter la déformation d'extension, c'est celui qui ne dépend pas de  $\theta$  puisque tous les autres vont exciter une déformation de flexion qui correspondra à une autre équation aux dérivées partielles traitée à la sous-section suivante. Cet effort excitant le mode d'extension correspond à  $i = 0$ . La force prend la forme :

$$q = q_0 \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (4.72)$$

Pour ce cas, la force modale  $Q_n$  devient :

$$Q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \int_0^{2\pi} q \cdot U_0 R d\theta & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

ce qui correspond pour le cas  $n = 0$  à :

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_0^{2\pi} q_0 \cdot \sin(\omega_0 t) A_0 R d\theta \\ &= q_0 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot 2\pi}{\rho \cdot A}} \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Il n'y a donc régime forcé que sur la composante  $n = 0$ , tous les autres cas correspondront à un régime libre. Sur cette coordonnée  $n = 0$ , l'équation d'équilibre dynamique est donc transformée sur la coordonnée 0 de la base modale en :

$$\ddot{\phi}_0(t) + p_0^2 \cdot \phi_0(t) = q_0 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot 2\pi}{\rho \cdot A}} \sin(\omega_0 t) \quad (4.75)$$

Pour résoudre cette équation, nous ne nous intéresseront qu'au régime *permanent*, c'est-à-dire aux solutions de la forme :

$$\phi_0(t) = \hat{\phi}_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.76)$$

ce qui conduit à la solution :

$$\hat{\phi}_0 = \frac{q_0 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot 2\pi}{\rho \cdot A}}}{p_0^2 - \omega_0^2} \quad (4.77)$$

soit pour  $\phi_0(t)$  :

$$\phi_0(t) = \frac{q_0 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot 2\pi}{\rho \cdot A}}}{p_0^2 - \omega_0^2} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (4.78)$$

La solution  $u(\theta, t)$  est construite à partir de l'équation (4.67) :

$$\begin{aligned} u(\theta, t) &= \phi_0(t) \cdot U_0(\theta) \\ &= \frac{q_0 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot 2\pi}{\rho \cdot A}}}{p_0^2 - \omega_0^2} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A \cdot R \cdot 2\pi}} \end{aligned} \quad (4.79)$$

La solution finale est donc :

$$u(\theta, t) = \frac{q_0}{\rho \cdot A \cdot (p_0^2 - \omega_0^2)} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (4.80)$$

En passant par la base modale, on a donc réussi à transformer un système dynamique couplé, en une infinité – autant que de modes propres – de systèmes découplés du second ordre en temps. Sur cette infinité de systèmes découplés, un seul est soumis à une force modale, les autres seront des régimes libres. Ce système forcé est facilement résolu lorsque l'excitation est de forme sinusoïdale en temps. A l'aide de la solution dans la base modale, il est aisé de revenir dans la base initiale pour obtenir l'expression analytique de  $u(t, \theta)$ . Dans l'introduction de cette section, lorsque nous avons fait l'hypothèse d'une structure non dissipative – sans amortissement – nous avons supposé que les fréquences des excitations devaient être éloignées des fréquences de résonances, ceci est confirmé par la forme de la réponse en  $\frac{1}{p_0^2 - \omega_0^2}$  qui tend vers l'infini lorsque la fréquence d'excitation  $\omega_0$  tend vers la fréquence de résonance  $p_0$ .

### 4.3.2 Réponse dynamique de la structure sur ses modes de flexion

L'équation aux dérivées partielles (EDP) qui régit le comportement de flexion de l'anneau est d'après la section précédente et l'annexe C.2 :

$$-\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \left( u - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (4.81)$$

avec  $I_{Gz}$  le moment quadratique – de flexion – de la section<sup>18 19</sup>

#### Résolution du problème de valeurs propres

De même que pour le calcul en extension, on fait l'hypothèse de séparation des variables de la solution (solution stationnaire). On pose :

$$u(t, \theta) = \phi(t) \cdot U(\theta) \quad (4.82)$$

L'équation devient, en utilisant la notation  $U^{(i)} = \frac{\partial^i U}{\partial \theta^i}$  :

$$-\rho \cdot A \cdot \left( \ddot{\phi}(t) \cdot U(\theta) - \ddot{\phi}(t) \cdot U^{(2)}(\theta) \right) + \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \left( \phi(t) \cdot U^{(6)}(\theta) + 2 \cdot \phi(t) \cdot U^{(4)}(\theta) + \phi(t) \cdot U^{(2)}(\theta) \right) = 0 \quad (4.83)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \frac{U^{(6)}(\theta) + 2 \cdot U^{(4)}(\theta) + U^{(2)}(\theta)}{U(\theta) - U^{(2)}(\theta)} \quad (4.84)$$

<sup>18</sup> soit pour une section carré comme c'est le cas dans les tôles de machines électrique :  $I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12}$  avec  $h$  la hauteur de la tôle sans les dents et  $b$  l'épaisseur d'une tôle

<sup>19</sup> on remarque que l'on peut également diviser l'équation par l'épaisseur d'une tôle, ce qui revient à remplacer  $A$  par  $h$  et  $I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12}$  par  $I'_{Gz} = \frac{h^3}{12}$

$\theta$  et  $t$  étant des variables indépendantes, il faut *nécessairement* que les équations (droite et gauche) soient vérifiées indépendamment, c'est-à-dire que si :

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = K \quad \forall t \quad (4.85)$$

il faut également que

$$\frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \frac{U^{(6)}(\theta) + 2 \cdot U^{(4)}(\theta) + U^{(2)}(\theta)}{U(\theta) - U^{(2)}(\theta)} = K \quad \forall \theta \quad (4.86)$$

Posons  $-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = p^2$  où  $p$  a les dimensions d'une pulsation<sup>20</sup>. De même que précédemment en posant :

$$-\frac{U^{(6)}(\theta) + 2 \cdot U^{(4)}(\theta) + U^{(2)}(\theta)}{U(\theta) - U^{(2)}(\theta)} = \lambda_p \quad (4.87)$$

on obtient :

$$\lambda_p = -K \cdot \frac{R^4}{E \cdot I_{Gz}} = p^2 \cdot \frac{\rho \cdot A \cdot R^4}{E \cdot I_{Gz}} \quad (4.88)$$

Cherchons les solutions de l'équation (4.87). Ces solutions sont des fonctions exponentielles complexes. La condition aux limites de continuité en  $2\pi$  (cylindre entier :  $u(t, \theta) = u(t, \theta + 2\pi)$ ) exclue les solutions de types *hyperboliques*, il ne reste alors que les solutions trigonométriques – imaginaires pures. Aucun point n'est fixé en rotation autour de l'axe de symétrie, cela signifie que l'angle de phase n'est pas fixé, on peut donc prendre une solution de la forme  $U(\theta) = \sum_i A_i \cdot \sin(i\theta + \varphi_i)$  avec  $\varphi_i$  quelconque. En conservant la notation exponentielle, on pose  $U(\theta) = \sum_i \hat{A}_i \cdot e^{j \cdot i\theta}$  qu'on introduit dans l'équation (4.87) pour une valeur  $n$  de  $i$  :

$$-\frac{\hat{A}_n \cdot (jn)^6 \cdot e^{jn\theta} + 2 \cdot \hat{A}_n \cdot (jn)^4 \cdot e^{jn\theta} + \hat{A}_n \cdot (jn)^2 \cdot e^{jn\theta}}{\hat{A}_n \cdot e^{jn\theta} - \hat{A}_n \cdot (jn)^2 \cdot e^{jn\theta}} = \lambda_p \quad (4.89)$$

Ce qui conduit, en utilisant la relation entre  $K$  et  $p$  de l'équation (4.88), aux fréquences et vecteurs propres :

$$p_n^2 = \frac{E \cdot I_{Gz}}{\rho \cdot A \cdot R^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)} \quad (4.90)$$

$$U_n(\theta) = A_n \cdot \sin(n\theta + \varphi_n) \quad (4.91)$$

---

<sup>20</sup>cf. la sous-section précédente sur l'extension sur la notion de stabilité et donc la nécessaire valeur négative de  $\frac{K}{\rho \cdot A}$

Nous avons finalement résolu le problème de valeurs propres :

$$- \overbrace{(U^{(6)}(\theta) + 2 \cdot U^{(4)}(\theta) + U^{(2)}(\theta))}^{\text{opérateur } D_1} = \lambda_p \overbrace{(U(\theta) - U^{(2)}(\theta))}^{\text{opérateur } D_2} \quad (4.92)$$

$$- \frac{D_1}{D_2}(U(\theta)) = \lambda_p \cdot U(\theta) \quad (4.93)$$

On sait qu'un vecteur propre n'est défini qu'à une constante près, il est courant en *élastodynamique* de normaliser les vecteurs propres par rapport à la masse :

$$\int_{\Omega} U_i \cdot m_0 \cdot U_j \, d\Omega = \delta_{ij} \quad (4.94)$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de KRONECKER. De même que pour la sous-section sur l'extension ceci conduit à déterminer les  $A_n$  qui prennent ici la valeur :

$$A_n = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A \cdot R \cdot \pi}} \quad (4.95)$$

On a donc défini une base orthonormée de fonctions  $U_n(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A \cdot R \cdot \pi}} \cdot \sin(n\theta + \varphi_n)$  sur laquelle, on va maintenant projeter l'équation d'équilibre dynamique.

### Réponse à une excitation dans la base modale

On reprend l'équation d'équilibre dynamique (4.81) et on y ajoute un effort extérieur  $q(t, \theta)$ , on obtient la nouvelle équation :

$$-\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \left( u - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + q(t, \theta) = 0 \quad (4.96)$$

La résolution du problème de valeurs propres a montré que les vecteurs propres normalisés formaient une base sur laquelle on pouvait projeter les équations. En utilisant le même procédé que pour les déformations d'extension, on obtient la projection :

$$\int_0^{2\pi} \left( -\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \left( u - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \left( \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + q(t, \theta) \right) \cdot U_n \, R \, d\theta = 0 \quad (4.97)$$

En intégrant par partie comme dans la sous-section d'extension, on démontre que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} \cdot U_n(\theta) R d\theta = \int_0^{2\pi} u(\theta) \cdot \frac{\partial^6 U_n}{\partial \theta^6} R d\theta \quad (4.98)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \cdot U_n(\theta) R d\theta = \int_0^{2\pi} u(\theta) \cdot \frac{\partial^4 U_n}{\partial \theta^4} R d\theta \quad (4.99)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cdot U_n(\theta) R d\theta = \int_0^{2\pi} u(\theta) \cdot \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} R d\theta \quad (4.100)$$

$$(4.101)$$

En utilisant ces résultats, on obtient finalement pour l'équation d'équilibre projetée sur  $U_n$ <sup>21</sup> :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} -\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \left( u \cdot U_n - u \cdot \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right) \\ & + \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \left( u \cdot \frac{\partial^6 U_n}{\partial \theta^6} + 2 \cdot u \cdot \frac{\partial^4 U_n}{\partial \theta^4} + u \cdot \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right) \\ & + q(t, \theta) \cdot U_n R d\theta = 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Ce qui peut se simplifier en utilisant les résultats du problème de valeurs propres et notamment l'équation (4.92) :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left( U_n(\theta) - \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left( -\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \lambda_{p,n} \cdot u \right) \\ & + q(t, \theta) \cdot U_n R d\theta = 0 \end{aligned} \quad (4.103)$$

En utilisant l'expression du vecteur propre de l'équation (4.91), on a directement  $\frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} = -n^2 \cdot U_n$ . On décompose  $u(t, \theta)$  sur la base propre, c'est à dire que  $u(t, \theta) = \sum_i \phi_i(t) \cdot U_i(\theta)$  et on l'introduit dans l'équation précédente, ce qui donne finalement, en utilisant les propriétés d'orthogonalité et de normalisation entre les vecteurs propres :

$$(1 + n^2) \cdot \left( -\ddot{\phi}_n(t) - \frac{E \cdot I_{Gz}}{\rho \cdot A \cdot R^4} \cdot \lambda_{p,n} \cdot \phi_n \right) + Q_n(t, \theta) = 0 \quad (4.104)$$

où  $Q_n$ , la force modale, est la projection de la force  $q$  sur le mode  $U_n$ , soit  $\int_0^{2\pi} q(t, \theta) \cdot U_n R d\theta$ . Finalement, pour chaque coordonnée  $n$ , on obtient l'équation du second ordre en temps :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_n(t) + \lambda_{p,n} \cdot \frac{E \cdot I_{Gz}}{\rho \cdot A \cdot R^4} \cdot \phi_n &= \frac{1}{1 + n^2} \cdot Q_n(\theta, t) \\ \ddot{\phi}_n(t) + p_n^2 \cdot \phi_n &= \frac{1}{1 + n^2} \cdot Q_n(\theta, t) \end{aligned} \quad (4.105)$$

---

<sup>21</sup> on rappelle que  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u) \cdot U_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u \cdot U_n)$  puisque  $U_n$  ne dépend pas de  $t$

Dans la suite de cette section, nous allons étudier les forces modales ainsi que la réponse de la structure à ces excitations. Dans le chapitre 3, nous avons décrit les efforts d'origine électromagnétique comme une superposition de champs tournants harmoniques. Parmi ces champs tournants harmoniques, les champs de rang d'espace zéro ont été utilisés dans la section précédente pour calculer la réponse d'extension pure de la structure. Tous les autres efforts – de rang d'espace non nuls – contribueront à exciter la structure sur ces modes de flexion radiaux. Ils vont donc être utilisés dans cette section comme efforts d'excitation de la structure.

$$q = \sum_i q_i \cdot \sin(\omega_i t \pm i\theta) \quad (i \neq 0) \quad (4.106)$$

Nous savons que ces champs sont des champs tournants à la vitesse  $\frac{\omega_i}{\mp i}$ , ils ne sont donc, par définition, stationnaire – pour un rang  $i$ , on ne peut pas séparer l'effort en une fonction qui ne dépend que du temps et une fonction qui ne dépend que de l'espace. Quand nous avons résolu le problème de valeurs propres de flexion du stator pour des conditions aux limites *libre-libre*, nous avons remarqué que le vecteur propre  $U_n$  était défini à une constante près non seulement pour son amplitude  $A_n$  mais également pour sa phase  $\varphi_n$ . Ceci signifie qu'à une fréquence propre peut correspondre tous les vecteurs propres de même allure – de même rang  $n$  – mais décalés d'un angle  $\varphi_n$  dans l'espace (cf. FIG. 4.13 pour le rang  $n = 2$  et plusieurs valeurs de  $\varphi$ )<sup>22</sup>. On peut donc dire qu'à n'importe quel effort harmonique, il existe un

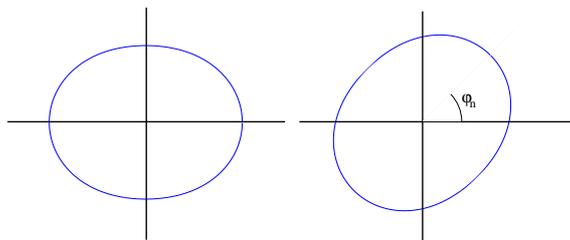


FIG. 4.13 – même vecteur propre  $n = 2$  mais pour différentes valeurs de  $\varphi_n$

vecteur propre qui sera en phase avec lui.

Dans un premier temps, on peut *poser* que l'effort appliqué est stationnaire – à variables séparables – et lorsqu'on aura complètement calculé la réponse de la structure, on modifiera cette réponse pour, non plus avoir une réponse stationnaire, mais pour avoir une réponse qui tourne à la vitesse de

<sup>22</sup> ceci n'est plus forcément vrai pour d'autres conditions aux limites, par exemple si un point du stator est fixé *rigidement* sur un bâti *parfaitement* fixe. Dans le cas d'un stator fixé, non sur des pieds mais par un de ces flasques, l'hypothèse libre-libre est *relativement* correcte

départ de l'effort d'excitation. Ainsi, dans un premier temps, les efforts d'origine électromagnétique peuvent être *transformés* en des efforts stationnaires  $\check{q}$  :

$$\check{q} = \sum_i q_i \cdot \sin(\omega_i t) \cdot \sin(i\theta) \quad (i \neq 0) \quad (4.107)$$

Calculons la force modale – généralisée – de cette effort *transformé*  $\check{q}$  sur la coordonnée  $U_n$  :

$$\check{Q}_n = \int_0^{2\pi} \check{q}(t, \theta) \cdot U_n R d\theta \quad (4.108)$$

$$\check{Q}_n = \int_0^{2\pi} \sum_i q_i \cdot \sin(\omega_i t) \cdot \sin(\pm i\theta) \cdot A_n \cdot \sin(n\theta) R d\theta \quad (4.109)$$

Par orthogonalité des fonctions trigonométriques, on sait que  $\check{Q}_n$  ne sera différente de zéro que si  $i = n$ . On obtient finalement :

$$\check{Q}_n = q_n \cdot \frac{R \cdot \pi}{\rho \cdot A} \cdot \sin(\omega_n t) \quad (4.110)$$

L'équation d'équilibre dynamique est donc pour chaque valeur de  $n$  :

$$\check{\phi}_n'' + p_n^2 \cdot \check{\phi}_n = \frac{1}{1 + n^2} \cdot q_n \cdot \frac{R \cdot \pi}{\rho \cdot A} \cdot \sin(\omega_n t) \quad (4.111)$$

Pour résoudre cette équation, nous ne nous intéresserons qu'au *régime permanent*, c'est à dire aux solutions de la forme :

$$\check{\phi}_n(t) = \hat{\phi}_n \cdot \sin(\omega_n t) \quad (4.112)$$

ce qui conduit à la solution :

$$\hat{\phi}_n = \frac{q_n \cdot \sqrt{\frac{R \cdot 2\pi}{\rho \cdot A}}}{(1 + n^2) \cdot (p_n^2 - \omega_n^2)} \quad (4.113)$$

soit pour  $\check{\phi}_n(t)$  :

$$\check{\phi}_n(t) = \frac{q_n \cdot \sqrt{\frac{R \cdot 2\pi}{\rho \cdot A}}}{(1 + n^2) \cdot (p_n^2 - \omega_n^2)} \cdot \sin(\omega_n t) \quad (4.114)$$

La solution  $\check{u}(t, \theta)$  est reconstruite à partir de la base modale :

$$\begin{aligned} \check{u}(\theta, t) &= \sum_i \check{\phi}_i(t) \cdot U_i(\theta) \\ &= \sum_i \frac{q_i \cdot \sqrt{\frac{R \cdot \pi}{\rho \cdot A}}}{(1 + i^2) \cdot (p_i^2 - \omega_i^2)} \cdot \sin(\omega_i t) \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A \cdot R \cdot \pi}} \cdot \sin(i\theta) \\ &= \sum_i \frac{q_i}{\rho \cdot A \cdot (1 + i^2) \cdot (p_i^2 - \omega_i^2)} \cdot \sin(\omega_i t) \cdot \sin(i\theta) \end{aligned} \quad (4.115)$$

Cette solution correspond à l'excitation par l'effort à *variables séparables*  $\check{q}$ , or nous savons que l'effort réel est un effort tournant à la vitesse  $\frac{\omega n}{\mp n}$  pour le rang  $n$ , ainsi la vraie solution prendra la forme :

$$u(\theta, t) = \sum_i \frac{q_i}{\rho \cdot A \cdot (1 + i^2) \cdot (p_i^2 - \omega_i^2)} \cdot \sin(\omega_i t \pm i\theta) \quad (4.116)$$

Le cas  $i = 1$  ( $n = 1$  qui correspond à un déplacement sans déformation – mouvement de corps rigide) est un cas particulier de ce comportement de flexion. Une étude plus poussée de ce mode a été réalisée, mais afin de ne pas alourdir le document, nous avons préféré la reporter en annexe C.3. Cette étude montre que ce mode  $n = 1$  peut avoir une fréquence propre non nulle contrairement à ce qui a été calculée dans cette section si nous étudions le stator comme une coque et non plus comme un anneau.

*Cette section nous a permis de calculer analytiquement la réponse de flexion du stator soumis à une superposition d'efforts tournants harmoniques. La réponse est, elle aussi, tournante harmonique. Elle peut aisément être représentée en terme de spectre deux dimensions – fonction du rang d'espace et de temps. On note, de même que pour le comportement en extension, que cette solution n'est valable que pour des efforts de rang d'espace  $n$  de fréquence assez éloignée de la fréquence propre de rang  $n$  puisque nous avons négligé l'amortissement et que sinon, cela conduirait à une réponse infinie, forcément fausse.*

*On notera également que seuls les efforts de même rang qu'un mode peuvent être projetés sur ce dernier. Ceci semble dire que l'on peut avoir un effort de fréquence identique à une fréquence propre à condition qu'il n'y ait pas coïncidence spatiale (spatial coincidence)<sup>23</sup>, c'est-à-dire que les rangs d'espace de la force et du mode soient différents.*

*Finalement, on notera également que, comme la réponse est en  $\frac{1}{1+n^2}$ , plus le rang augmente, plus la réponse modale sur ce dernier sera faible. On peut alors utiliser le filtrage modal en ne conservant que la réponse sur les modes de rangs faibles et négliger tous les autres. C'est ce qui est d'ailleurs souvent fait dans la littérature sans toujours être expliqué.*

---

<sup>23</sup>le terme coïncidence spatiale est utilisé pour décrire l'analogue spatial du phénomène de résonance temporelle : cf. [CREMERHECKLUNGAR88] p 444

## 4.4 Vérifications expérimentales des différents modèles de comportement vibratoire

### 4.4.1 Vérifications expérimentales des valeurs et vecteurs propres

Pour valider nos modèles, nous avons utilisé la machine asynchrone déjà utilisée dans le chapitre 3. Pour calculer les valeurs et vecteurs propres du stator, nous avons développé une méthode analytique, les résultats donnés par cette méthode seront comparés aux valeurs données par un calcul par éléments finis et par deux techniques d'identifications expérimentales – un essai au choc et une technique d'analyse modale (*modal testing*).

#### Méthode analytique

Dans les sections précédentes, nous avons donné la valeur des fréquences propres en fonction du nombre de noeuds de ce modes dans les hypothèses suivantes :

1. les dents ne sont pas prises en compte au niveau rigidité de flexion mais seulement au niveau apport de masse ce qui ramène le calcul à celui d'une coque cylindrique de masse volumique modifiée. La masse volumique *non modifiée* de ce type de tôle est de  $7650 \text{ kg/m}^3$  et le *foisonnement* vaut 0,95 (cf. sous-section 4.2.3).

$$\begin{aligned} \rho_{modifiée} &= K_{foisonnement} \cdot \frac{\text{masse}_{anneau} + \text{masse}_{dents} (+\text{masse}_{bobinages})}{\text{Rayon}_{externes\ tôles}^2 - \text{Rayon}_{fond\ encoches}^2} \\ &= 10613 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

2. le feuilletage faisant disparaître pratiquement tous les mode longitudinaux, seules les modes dans le plan de l'anneau sont calculés. Ces derniers sont calculés en 2D puis recalés en 3D à l'aide des coefficients données par L. CREMER dans [CREMERHECKLUNGAR88] p 190.

(a) mode propre d'extension :

$$\omega_0^2 = \frac{E \cdot A}{\rho \cdot A \cdot R^2} = \frac{E}{\rho \cdot R^2}$$

$$f_0 = 14859 \text{ Hz}$$

- (b) mode de corps rigide : nous avons vu qu'en 3D, ce mode correspondait soit au mouvement d'ensemble du stator, soit au mode de poutre du stator. Nous ne connaissons pas les caractéristiques des supports du moteur ni le comportement axial d'un ensemble feuilleté, nous ne pouvons pas calculer cette fréquence avec notre méthode analytique. Nous l'identifierons à l'aide de méthodes expérimentales.

- (c) mode de flexion radiale dans le plan d'une tôle : dans le cas d'un calcul 2D, nous avons :

$$\omega_n^2 = \frac{E \cdot I \cdot n^2 \cdot (n^2 - 1)^2}{\rho \cdot A \cdot R^4 \cdot (n^2 + 1)}$$

Les valeurs de ces pulsations doivent être corrigées par les coefficients de CREMER pour tenir compte de l'influence de la troisième dimension :

$$K_2 = 1.14$$

$$K_3 = 1.04$$

$$K_4 = 1.02$$

$$1 \leq K_{\geq 5} \leq 1.015$$

Ce qui conduit finalement aux fréquences :

$$f_2 = 2478 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 6396 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 12028 \text{ Hz}$$

### Méthode de calcul par éléments finis

Le but de ces travaux n'est pas de se placer en tant qu'utilisateurs de logiciels d'éléments finis, cependant pour valider nos modèles, il nous a semblé intéressant de confronter notre modélisation avec les résultats d'un calcul éléments finis de l'anneau. Les calculs avaient été effectués dans [HUBERT97]. Le logiciel utilisé est IDEAS équipé du module de calculs vibro-acoustiques. Voici les fréquences les plus basses des modes dans le plan d'une tôle que nous avons obtenues :

$$f_0 = 14656 \text{ Hz}$$

$$f_1 = 0 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 2364 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 6473 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 11898 \text{ Hz}$$

Les modes de poutres peuvent être également obtenus à condition de connaître les conditions aux limites et les caractéristiques longitudinales de l'empilement des tôles, ceci nécessiterait des compléments d'études et un recalage expérimental tels que ceux réalisés dans [LONGZHUHOWE98] pour une machine à reluctance variable (*switched reluctance motors*).

### Méthode d'essais aux chocs

La méthode la plus commune et la plus utilisée pour la détermination expérimentale des modes propres et sans aucun doute la méthode dite d'*essais aux chocs*.

Le principe de cette méthode est très simple. Pour caractériser une structure, il faut connaître la fonction de réponse en fréquence (*FRF*) entre force et déplacement, vitesse ou accélération. Or nous savons qu'une fonction de réponse en fréquence n'est autre que la transformée de FOURIER de la réponse impulsionnelle d'un système. Si nous sommes capables d'appliquer à la structure une excitation suffisamment proche d'une impulsion, on pourra en déduire sa fonction de réponse en fréquence. Mécaniquement, ce qui se rapproche le plus d'une impulsion de force est un choc. Ainsi on applique un choc à la structure et on visualise son spectre de manière à obtenir quelque chose de très proche d'un bruit blanc sur la bande de fréquence qui nous intéresse. On relève la réponse de la structure. Puis, en faisant le rapport réponse sur choc dans le domaine fréquentiel grâce à un analyseur de spectre, on obtient la fonction de réponse en fréquence de la structure mécanique. Nous avons appliqué cette technique à notre structure pour différentes configurations :

1. les modes de résonances qui nous intéressent sont ceux du stator, ainsi il faut faire attention de placer le choc à un endroit qui excitera bien le stator. De même la réponse doit être relevée à un endroit où on mesure bien la réponse du stator et où il y a peu de chance de tomber sur un noeud de vibration.
2. avec ces deux contraintes, nous avons fait plusieurs essais et la configuration qui nous a semblé la plus satisfaisante est celle où :
  - (a) le choc doit être appliqué au centre du stator sur la structure extérieure normalement à la surface. L'embout du marteau doit être en acier de manière à exciter la structure jusqu'à des fréquences suffisamment importantes. Il est nécessaire de visualiser le spectre du choc afin de savoir s'il est *réussi*.
  - (b) le meilleur endroit pour relever la réponse de la structure semble être également le milieu du stator. La position angulaire doit être légèrement décalée de celle du choc (10 à 15°) de manière à ne pas tomber sur les noeuds de vibration des premiers modes.
  - (c) quand on visualise la fonction de réponse en fréquence sur l'analyseur de spectre, il est impératif de visualiser également la fonction de cohérence. Cette fonction indique le niveau de linéarité entre entrée et sortie, si cette fonction diffère de un, c'est que il y a un problème de non-linéarité dans les mesures : soit un défaut dans l'appareillage ou dans les manipulations, soit une résonance ou bien un bruit excessif sur les mesures.

3. en s'appuyant sur le même principe, il nous a semblé intéressant d'essayer de relever la déformée modale pour chaque résonance. Pour une fréquence de résonance, on applique toujours le choc au même endroit mais on déplace régulièrement l'accéléromètre sur la périphérie du stator de manière à avoir le niveau de réponse pour plusieurs positions. On obtient ainsi une image de la déformée modale associée à chaque fréquence de résonance. Malheureusement, avec notre montage, on distingue facilement les fréquences de résonances mais l'image de la déformée n'est pas suffisamment nette pour dire à combien de noeuds correspond chaque résonance. Nous reprendrons cette tentative de détermination de la déformée modale dans l'essai suivant qui utilisera du matériel plus *adapté*.

On observe un assez grand nombre de fréquences de résonance, les plus importantes sont les suivantes [HUBERT97] :

$$f = 1200 \text{ Hz}$$

$$f = 2400 \text{ Hz}$$

$$f = 6100 \text{ Hz}$$

$$f = 11700 \text{ Hz}$$

Le problème de l'essai au choc avec un seul accéléromètre est que si l'on est capable de déterminer la fréquence propre d'une résonance, on n'est pas capable de connaître le mode propre associé – la déformée modale. Pour cela, il faudrait être capable de relever la valeur de la réponse tout autour du stator pour caractériser à la fois la fréquence et la déformée. Ceci a déjà été réalisé par l'équipe de S.P. VERMA dans [VERMASINGALWILLIAMS87] et [VERMAWILLIAMSINGAL89] pour confirmer et recalibrer les résolutions données par leur logiciel de calcul des caractéristiques modales d'un stator de machine électrique. Ce type d'essai nécessite un matériel et une compétence importante en mesures vibratoires. Nous avons pu réaliser ces essais avec l'aide d'un laboratoire de vibrations de l'Université de Technologie de Compiègne. Ceci sera détaillé dans la sous-section suivante.

### Méthode d'analyse modale

Cette série de mesures a été effectuée en collaboration avec messieurs P. WAGSTAFF, R. DIB et J.C. HENRIO du laboratoire ROBERVAL de l'UTC auxquels je tiens à exprimer tous mes remerciements. Les mesures ont été effectuées en utilisant un système d'acquisition *LMS Roadrunner* à 8 voies. L'excitation a été réalisée à l'aide d'un pot vibrant appliqué au centre du

stator et l'acquisition a été relevée à l'aide de trois accéléromètres sur un total de 17 points de mesures distribués tout autour de la section centrale de la structure statorique. Le calcul des fonctions de réponse en fréquence (FRF) et tout le traitement des données d'acquisitions a été réalisée par le logiciel *LMS Modal*. Ces mesures ont été réalisées sur une bande de fréquence de zéro à 10 kHz, c'est pourquoi, nous n'aurons pas d'information au delà de cette limite. Nous avons observé l'émergence des trois premiers modes de flexion d'une coupe du stator (2D). L'allure des déformées modales et la fréquence de chacun de ces trois modes est représentée sur la FIG 4.14 pour le rang  $n = 1$ , sur la FIG 4.15 pour le rang  $n = 2$  et sur la FIG 4.16 pour le rang  $n = 3$ .

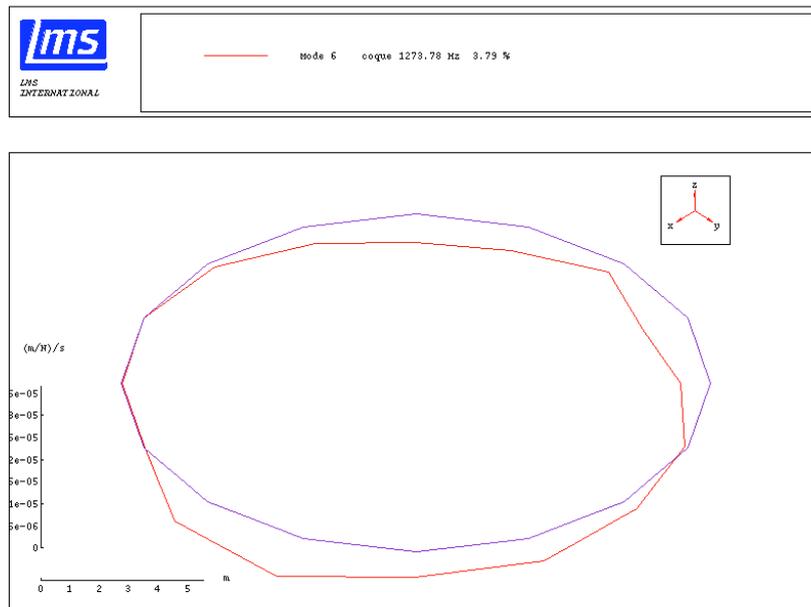


FIG. 4.14 – *déformée modale* du mode de corps rigide du stator ( $n = 1$ , 2 noeuds) obtenue par le système d'analyse modale *LMS* :  $f_1 = 1278 \text{ Hz}$

Sur ces trois figures, on peut clairement dénombrer le nombre de noeuds de chaque mode et ainsi affecter le rang  $n$  qui est la moitié du nombre de noeuds. Les fréquences propres associées sont très proches des valeurs obtenues par les méthodes précédentes.

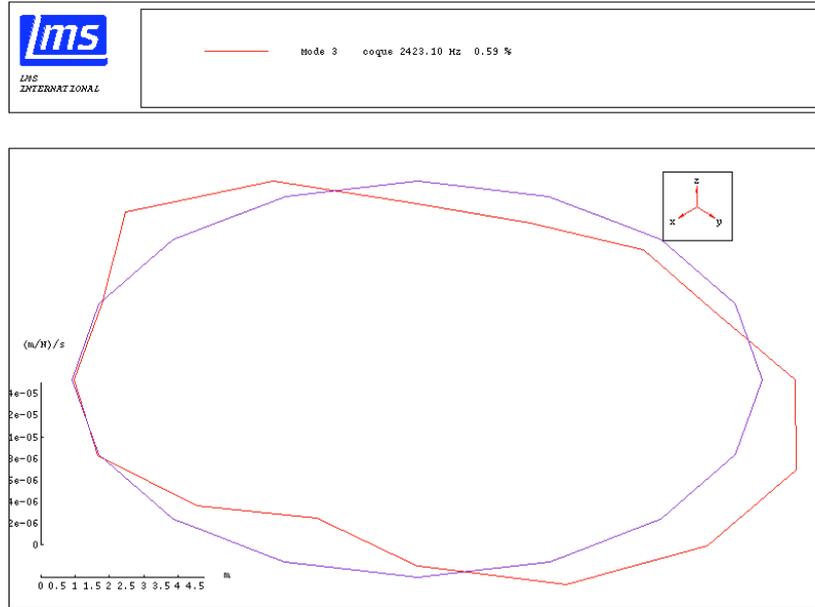


FIG. 4.15 – *déformée modale* du mode fondamental de flexion du stator ( $n = 2, 4$  noeuds) obtenue par le système d'analyse modale *LMS* :  $f_2 = 2423 \text{ Hz}$

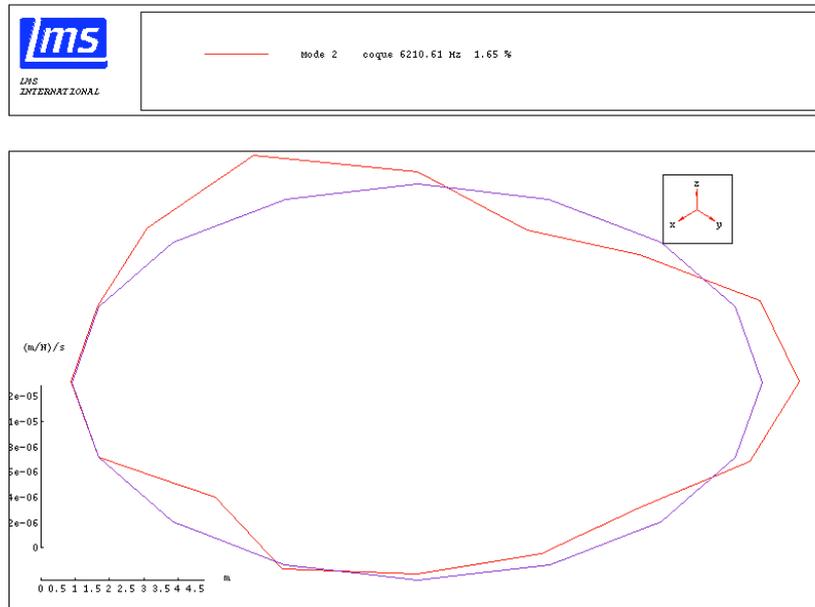


FIG. 4.16 – *déformée modale* du second mode de flexion du stator ( $n = 3, 6$  noeuds) obtenue par le système d'analyse modale *LMS* :  $f_3 = 6210 \text{ Hz}$

### Synthèse des résultats

Afin de comparer les résultats obtenus par chacune des méthodes, nous avons reporté les valeurs des fréquences propres de chaque mode dans un tableau de synthèse à la FIG 4.17

| Numéro du mode | Méthode analytique | Éléments finis | Essai aux chocs | Analyse modale |
|----------------|--------------------|----------------|-----------------|----------------|
| 0              | 14859              | 14656          |                 |                |
| 1              | 0                  | 0              | 1200            | 1273           |
| 2              | 2478               | 2364           | 2400            | 2423           |
| 3              | 6396               | 6473           | 6100            | 6210           |
| 4              | 12028              | 11898          | 11700           |                |

FIG. 4.17 – tableau de synthèse du calcul des fréquences propres en Hertz pour les rangs variant de 0 à 4

À la lecture de ce tableau, on constate que le calcul analytique des fréquences propres de résonance est très proche de la valeur réelle (analyse modale) avec des erreurs inférieures à 3%. Avec la méthode d'analyse modale, les fréquences n'ont été déterminées que jusqu'à 10000 Hz, c'est pourquoi, nous n'avons pas reporté la valeur des fréquences du mode 4 et 0. La valeur de la fréquence du mode de rang 1 n'étant pas déterminable avec notre méthode analytique, nous utiliserons la valeur trouvée expérimentalement. Les forces électromagnétiques de rang 1 étant rares pour une machine à deux paires de pôles, la connaissance de cette valeur n'est pas primordiale lors de la conception de la machine, c'est à dire lorsque nous n'avons pas accès à des mesures expérimentales.

*La détermination analytique de la valeur des fréquences propres étant satisfaisante, nous allons maintenant utiliser ces valeurs pour la détermination des déplacements, vitesses et accélérations vibratoires par la méthode de superposition modale et ainsi les comparer aux accélérations vibratoires que l'on peut relever à l'aide d'accéléromètres lorsque la machine est alimentée par le convertisseur statique PWM.*

#### 4.4.2 Vérification expérimentale de la superposition modale

Nous allons dans un premier temps, décrire le mode opératoire qui nous a permis d'effectuer ces mesures. Le moteur a été suspendu à des ressorts de très faibles raideurs afin de s'approcher des conditions aux limites libre-libre<sup>24</sup>. Le moteur est alimenté avec un convertisseur PWM à échantillonnage

<sup>24</sup>Un objet supporté par des ressorts de raideurs très faibles aura un mouvement d'ensemble de fréquence très faible et au delà de cette fréquence, il pourra être considéré

naturel dont on peut faire varier la fréquence de découpage  $f_d$ . L'accélération vibratoire est relevée à l'aide d'un accéléromètre piezo-électrique fixé au milieu du stator.

La première série de mesure a été réalisée pour une fréquence de découpage de 1111 Hz (cf. le spectre de tension simple et de courant représenté sur la FIG 4.18). À l'aide de notre modèle, nous avons calculé les spectres 2D des champs de densité de flux  $B$  et du tenseur de MAXWELL qui sont représenté sur la même figure.

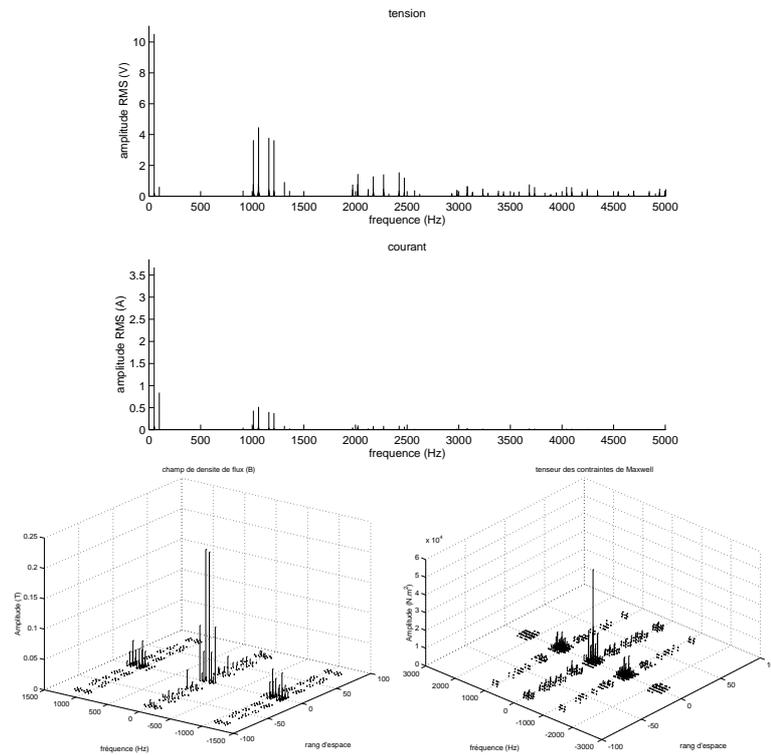


FIG. 4.18 – condition de fonctionnement de l'essai pour une fréquence de découpage de 1111 Hz

Les fréquences principales du spectre du tenseur des contraintes de MAXWELL se situent essentiellement autour de zéro hertz, de deux fois la fréquence fondamentale, de la fréquence de découpage  $f_d$  et du double de cette dernière  $2 \cdot f_d$ . En regardant de plus près ce spectre, on constate que pour les fréquences autour de  $f_d$  et  $2f_d$ , seuls des champs à zéro ou quatre paires de pôles sont créés ( $n = 0$  ou  $n = 4$ ). Ces derniers sont représentés sur la FIG 4.19 : les spectres du haut représentent le *spectre temporel* du tenseur de MAXWELL

comme ayant des conditions aux limites libre-libre (cf. la photographie représentant le montage sur la FIG. 5.5

pour le rang d'espace  $n = 0$  (gauche) et  $n = 4$  (droite)<sup>25</sup>.

Les spectres du milieu de la FIG 4.19 correspondent aux spectres des accélérations calculées pour ces deux rangs  $n = 0$  (gauche) et  $n = 4$  (droite).

Il est à noter que de part l'orthogonalité des fonctions sinus de pulsations différentes et suite aux démonstrations des sections précédentes, un effort de rang  $n_1$  ne peut exciter une accélération de rang  $n_2 \neq n_1$ . C'est pourquoi, nous n'avons de réponses non nulles qu'autour des fréquences  $f_d$  et  $2f_d$  que pour les rangs d'espace  $n = 0$  et  $n = 4$ . Le déplacement étant de la forme  $\frac{A}{\omega^2 - \omega_{propre}^2} \cdot \sin(\omega t)$ , plus on se rapprochera des fréquences propres, plus la réponse sera importante – résonance. Les fréquences de résonances pour  $n = 0$  et  $n = 4$  valent respectivement 14859 et 12028 Hz, le modèle sans amortissement est acceptable puisque l'on sait que pour du fer, l'amortissement est faible et que pour cette fréquence de découpage, les excitations sont loin de ces deux fréquences de résonances. L'accélération étant la dérivée seconde du déplacement, celle ci vaudra  $-\frac{A \cdot \omega^2}{\omega^2 - \omega_{propre}^2} \cdot \sin(\omega t)$ . Plus on augmente en fréquence, plus l'accélération est importante, c'est pourquoi les accélérations à basses fréquences sont quasiment nulles.

Lorsque l'on visualise le spectre de mesure de l'accélération sur la machine d'étude (spectre du bas de la FIG 4.19), on constate tout d'abord que l'ordre de grandeur des accélérations ( $0.5 \text{ ms}^{-2}$ ) est respecté par rapport aux prédictions en dehors d'une forte résonance à 2465 Hz qui correspond à la résonance du mode de rang  $n = 2$ . Or dans notre spectre d'excitation, il n'existe aucune excitation de rang 2 et le rappel des formules d'orthogonalités (4.117) et (4.118)

$$\int_0^{2\pi} \phi_0(t) \cdot \phi_2(t) \cdot \sin(2\theta) d\theta = 0 \quad (4.117)$$

$$\int_0^{2\pi} \phi_4(t) \cdot \sin(4\theta) \cdot \phi_2(t) \cdot \sin(2\theta) d\theta = 0 \quad (4.118)$$

montre l'impossibilité *théorique* d'exciter un mode 2 avec des efforts de rang 0 ou 4 même si les fréquences de ces excitations coïncident avec la fréquence de résonance du mode 2. On constate cependant qu'en pratique, il n'en est rien et qu'il existe un couplage entre ces excitations de rang 0 et 4 et le mode de rang 2. Dans cette remarque, nous rejoignons les résultats décrits par S.P. VERMA et A. BALAN dans [VERMABALAN98] qui constatent également un couplage entre l'excitation de rang 4 et le mode de rang 2. De par les niveaux similaires d'amplitudes des excitations de rang 0 et 4, nous ne sommes cependant pas en mesure d'affirmer que c'est l'excitation de rang 4 et non celle de rang 0 qui est couplée avec le mode de rang 2.

---

<sup>25</sup>les fréquences négatives correspondent aux champs tournants directs, les fréquences positives aux champs tourants inverses

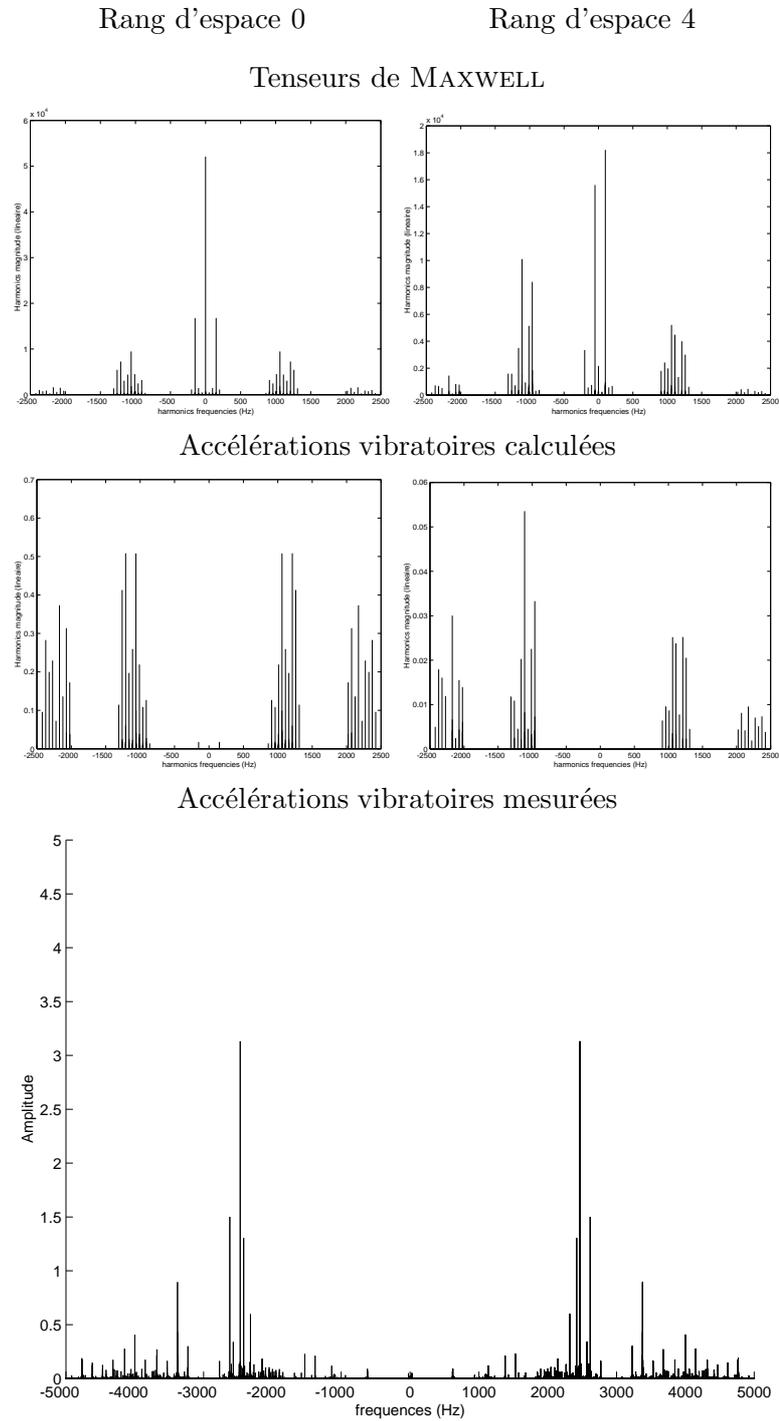


FIG. 4.19 – essai à  $f_d = 1111 \text{ Hz}$ . Figures du haut : spectres temporels du tenseur de *Maxwell* pour le rang d'espace 0 (gauche) et 4 (droite). Figures du centre : spectres temporels de l'accélération vibratoire calculé pour le rang d'espace 0 (gauche) et 4 (droite). Figure du bas : mesure expérimentale du spectre temporel de l'accélération vibratoire de la structure statorique

Afin de confirmer ces remarques, nous avons effectué d'autres essais en faisant varier la fréquence de découpage :  $f_d = 1500 \text{ Hz}$  (FIG 4.20) et  $f_d = 2000 \text{ Hz}$  (FIG 4.21).

Pour une fréquence de découpage de 1500 Hz, nous augmentons la fréquence des forces d'excitation *autour* de 1500 et 3000 Hz. Ces fréquences étant plus éloignées de la fréquence de résonance du mode 2 (2465 Hz) que lors de l'essai précédent, les efforts excitent beaucoup moins ce mode. La raie à la fréquence de résonance du mode 2 n'a pas complètement disparu cependant son amplitude est fortement réduite. Elle est divisée par plus de 3 – elle passe de  $3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  à environ  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . *Qualitativement*, le bruit a également été fortement réduit.

Pour la fréquence de découpage de 2000 Hz, nous obtenons des fréquences d'excitation qui se rapproche de la fréquence de résonance du mode 2 à 2465 Hz. Pour cette fréquence de découpage, nous obtenons la résonance maximale (accélération d'environ  $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) et le bruit le plus important.

## 4.5 Résumé du comportement mécanique de la structure statorique soumise aux efforts d'origine électromagnétique

Dans ce chapitre, nous avons pu décomposer et analyser le mouvement du stator lorsqu'il était soumis à un certain nombre d'efforts d'origine électromagnétique. Ces différents mouvements ont été séparés en trois mouvements différents dont le dernier n'est qu'un cas particulier du second :

1. le mouvement d'extension
2. les mouvements de flexion
3. le mouvement de corps rigide

Parmi les déplacements que va prendre la structure statorique, seule la composante radiale sera à l'origine du rayonnement de bruit si l'on considère l'air environnant comme *non visqueux*. Le mouvement d'extension étant purement radial, il devrait être très rayonnant. Nous avons montré que les déplacements associés aux modes de flexion évoluaient en  $\frac{1}{1+n^2}$  ce qui confirme que plus le rang  $n$  augmente, plus le déplacement associé est faible. Ceci nous permettra de négliger l'influence des modes de rangs trop élevés. À partir de la formulation analytique des déplacements de la structure en terme de rang d'espace et de temps – analyse spectrale en deux dimensions –, nous pouvons déterminer la vitesse vibratoire de la structure et ainsi estimer le rayonnement sonore de notre moteur. Ceci sera réalisé dans le chapitre suivant.

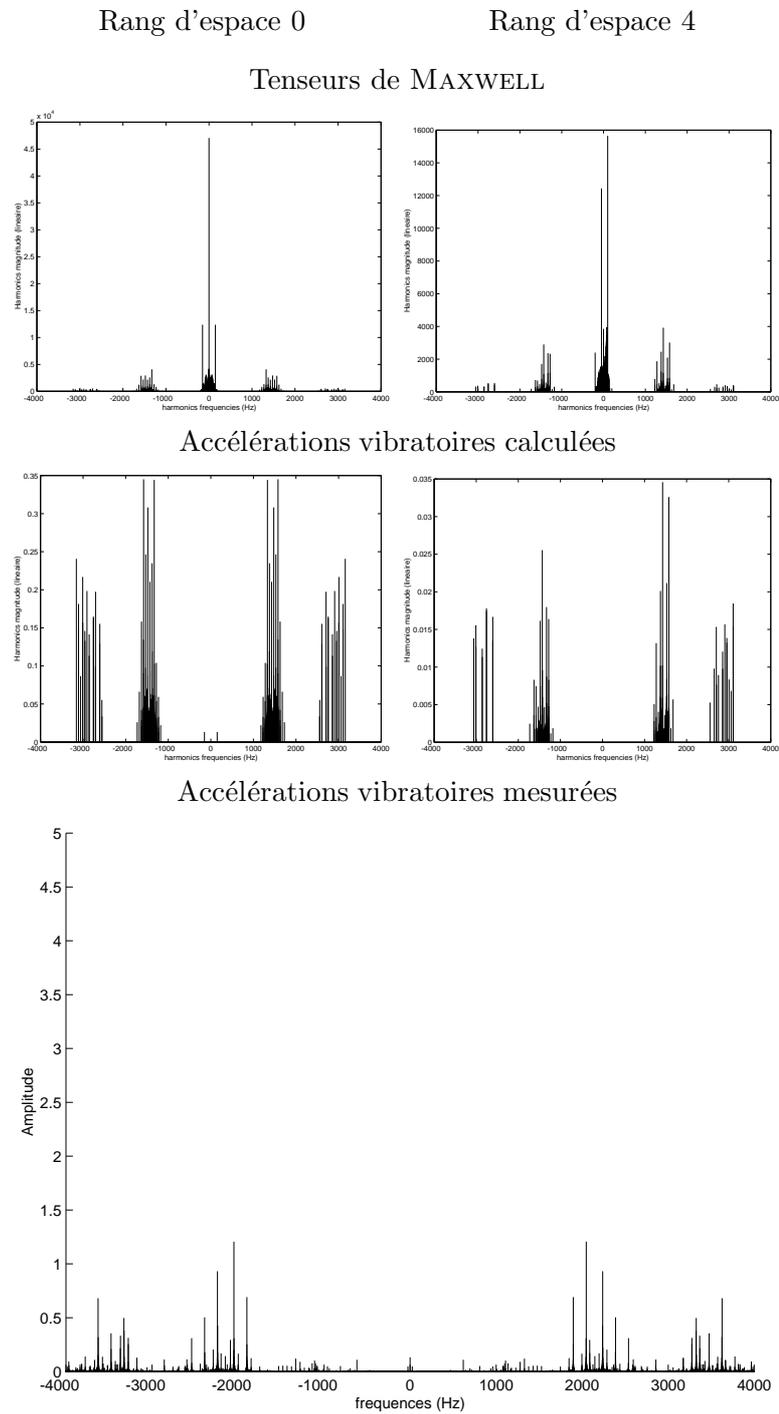


FIG. 4.20 – essai à  $f_d = 1500 \text{ Hz}$ . Figures du haut : spectres temporels du tenseur de *Maxwell* pour le rang d'espace 0 (gauche) et 4 (droite). Figures du centre : spectres temporels de l'accélération vibratoire calculés pour le rang d'espace 0 (gauche) et 4 (droite). Figure du bas : mesure expérimentale du spectre temporel de l'accélération vibratoire de la structure statorique

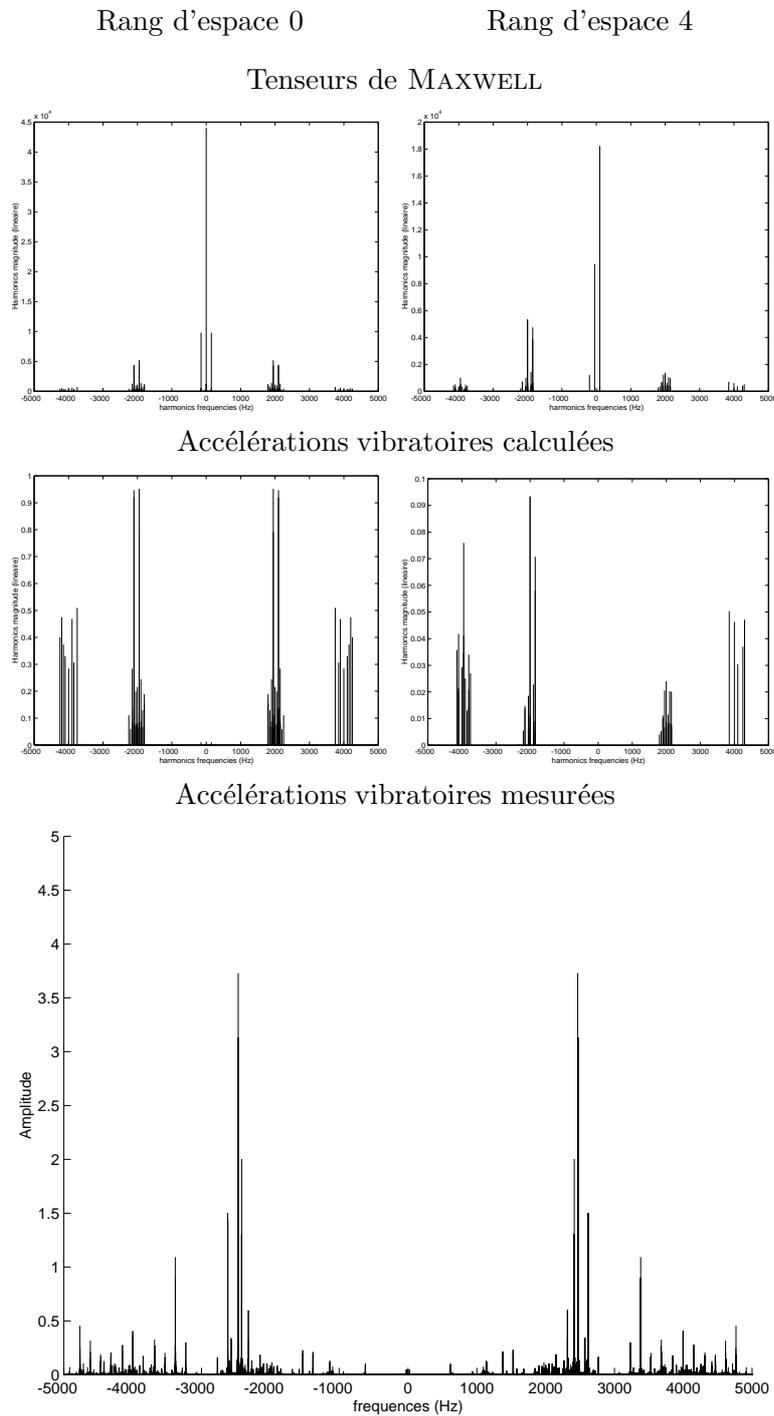


FIG. 4.21 – essai à  $f_d = 2000 \text{ Hz}$ . Figure du haut : spectres temporels du tenseur de *Maxwell* pour le rang d'espace 0 (gauche) et 4 (droite). Figures du centre : spectres temporels de l'accélération vibratoire calculés pour le rang d'espace 0 (gauche) et 4 (droite). Figures du bas : mesure expérimentale du spectre temporel de l'accélération vibratoire de la structure statorique

Les hypothèses retenues – déformation de cisaillement négligée et comportement proche de celui d’une coque cylindrique – semblent validées en regard de la bonne précision sur la détermination des fréquences naturelles du stator. Si le modèle analytique développé pour calculer le régime naturel – les fréquences propres – est parfaitement validé par l’expérience, nous constatons cependant que la superposition modale ne marche bien qu’à condition que tous les modes soient parfaitement découplés. Dans les essais réalisés, nous avons pu montrer que ceci n’était pas le cas pour le mode propre de rang 2 – celui justement qui est dans la gamme de fréquence la plus gênante. Ces couplages sont peut-être dûs aux amortissements ou à des conditions aux limites que nous avons mal estimées. Ces couplages faussent les résultats obtenus pour les déplacements de la structure s’il existe une coïncidence fréquentielle. Cela nous oblige à *éviter* toutes les coïncidences fréquentielles même s’il n’y a pas de coïncidence spatiale pour éviter les résonances qui conduisent au bruit maximum. Pour expliquer ces couplages, il sera nécessaire de compléter nos modèles ou bien de déterminer la fonction de réponse en fréquence de manière expérimentale<sup>26</sup>.

---

<sup>26</sup>Les méthodes d’identification de fonctions de réponse en fréquence sont décrites dans les ouvrages de D.J. EWINS [EWINS84] et [EWINS00]. On trouve également quelques articles ayant identifié ces fonction de réponse en fréquence pour des machines à *reluctance variable* [GABSI-CAMUS-BESBES99]

## Chapitre 5

# Rayonnement acoustique d'une structure statorique

Ce chapitre traitera du rayonnement acoustique d'un stator de machine électrique. Nous ne nous intéresserons qu'au rayonnement direct du stator (*air borne sound*) et non au rayonnement indirect lié à la propagation des vibrations à la structure environnante puis à son rayonnement (*structure borne sound*) puisque nous ne pouvons connaître la structure sur laquelle sera accouplé le moteur. Nous considérerons également ce rayonnement comme un rayonnement en champ libre – pas de réflexion. Avant d'exposer les différents modèles, il est important de faire un rappel des équations de l'acoustique ainsi que des différentes notions que nous utiliserons dans la suite de notre rédaction. Nous proposerons ensuite un modèle en accord avec les formulations trouvées pour le comportement vibratoire de notre stator afin d'*estimer* son rayonnement acoustique. Nous comparerons également nos développements avec les formules et synthèses existantes. Nous finirons en exposant les vérifications expérimentales des hypothèses et modèles proposés.

### 5.1 Quelques rappels et notions de rayonnement acoustique

Cette section se propose de faire un rappel des équations qui régissent le comportement acoustique linéaire d'un fluide ainsi que les différentes notions couramment employées en acoustique linéaire. Pour les lecteurs désirant un approfondissement des notions rappelées ici, nous préférons les renvoyer aux ouvrages classiques tels que [LESUEUR88] [MORSEINGARD86].

### 5.1.1 Équations fondamentales de l'acoustique linéaire

L'*acoustique linéaire* est une branche de la *mécanique des fluides* utilisant les hypothèses suivantes : fluides parfaits, pas de viscosité, pas de conduction thermique. Nous ne nous intéressons qu'aux perturbations autour d'un point d'équilibre, soit pour un point  $M$  repéré en coordonnées d'EULER, tous les paramètres seront écrits sous la forme :

$$x(M, t) = x_0(M, t) + \delta x \quad (5.1)$$

L'acoustique linéaire est caractérisée par les deux équations fondamentales suivantes :

1. conservation de la masse par unité de volume ( $\rho$ ) :

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = \int_v q dV \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = q \quad (5.3)$$

$q$  est le débit-masse par unité de volume

2. conservation de la quantité de mouvement par unité de volume ( $\rho \cdot \mathbf{v}$ ) :

$$\int_V \frac{d}{dt}(\rho \cdot \mathbf{v}) dV = \int_v \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{T} dS \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot v_i) + \text{div}(\rho \cdot v_i) \cdot \mathbf{v} = f_i + \text{div}(\sigma_i) \quad (5.5)$$

avec  $\mathbf{f}$  les forces de volume et  $\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n}$ ,  $\sigma$  le tenseur des contraintes.

Ces deux équations sont complétées par une équation d'état *thermodynamique* qui définit la valeur de la célérité du son dans le fluide :

$$c = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \quad (5.6)$$

Aux fréquences qui nous intéressent (fréquences audibles), on peut considérer que les mouvements sont adiabatiques – pas d'échange de chaleur et entropie  $S$  sensiblement constante :

$$p \cdot \mathbf{v}^\gamma = \text{constante} \quad (5.7)$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (5.8)$$

avec  $\gamma = \frac{7}{5}$  pour les gaz diatomiques comme l'air ( $N_2, O_2 \dots$ ).

Dans les hypothèses de l'acoustique classique – linéaire –, on considère le fluide comme parfait, il n'y a pas de cisaillement et le mouvement est à potentiel sans tourbillonnement (à *rotationnel* nul). Le milieu est homogène et isotrope et nous n'avons que des petits mouvements ( $\delta p = p_A$  et  $p_A \ll p_0$ ),

ce qui conduit finalement, si le fluide est au repos ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ) et en supprimant les termes de sources, à :

$$p_A = c^2 \cdot \rho_A \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \rho_0 \cdot \operatorname{div}(\mathbf{v}_A) = 0 \quad (5.10)$$

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_A}{\partial t} + \mathbf{grad} p_A = 0 \quad (5.11)$$

On peut combiner ces trois équations pour montrer que chacun des termes  $p_A$ ,  $\mathbf{v}_A$  obéit à une équation des ondes :

$$\Delta p_A(M, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p_A(M, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.12)$$

$$\Delta \mathbf{v}_A(M, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{v}_A(M, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.13)$$

où  $\Delta = \nabla^2$  est le *Laplacien*.

### 5.1.2 Équations énergétiques de l'acoustique linéaire

Les équations précédentes sont suffisantes pour résoudre le problème de rayonnement acoustique, cependant, on utilise souvent l'équation de *conservation de l'énergie*. Si nous définissons les énergies cinétiques et potentielles par unité de volume d'un élément de fluide comme<sup>1</sup> :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 \quad (5.14)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{\rho_0 \cdot c^2} \quad (5.15)$$

et si l'on pose  $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$  comme la densité volumique d'énergie,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{p^2}{\rho_0 \cdot c^2} + \rho_0 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot \left( \left( \frac{p}{\rho_0 \cdot c} \right)^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \right) \quad (5.16)$$

Nous obtenons pour la loi de conservation de l'énergie dans le cas où il n'y a pas de sources, les équations (5.17) et (5.18) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathcal{E} dV = - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}) = -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) \quad (5.18)$$

---

<sup>1</sup>En acoustique, seules les variations autour d'un point d'équilibre sont intéressantes (seules les variables  $x_A$  sont utiles). Ainsi, comme nous n'étudions que les termes de variation  $x_A$ , pour des raisons de simplification d'écriture, nous supprimerons désormais les indices  $A$  et nous ne considérerons que les variations des termes  $x$

Le second membre correspond à la puissance fournie au système par l'extérieur. On appelle généralement la quantité  $\mathcal{F} = p\mathbf{v}$  le flux acoustique – la densité surfacique de flux de puissance acoustique. Dans le cas où des sources sont présentes par l'intermédiaire des paramètres  $q$  et  $\mathbf{f}$  définis précédemment, la loi de *conservation de l'énergie* prend la forme de l'équation (5.19) :

$$\left(\frac{p \cdot q}{\rho_0} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\right) = \nabla \cdot (p\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}) \quad (5.19)$$

En général, ces notions d'énergie sont utilisées en *moyenne*. Pour le cas particulier d'ondes sinusoïdales, en posant  $\bar{x}$  comme la valeur moyenne de  $x$ , on peut montrer qu'en *dehors des sources* [LESUEUR88] :

$$\bar{\mathcal{I}} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* \quad (5.20)$$

$$\bar{\mathcal{V}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{p \cdot p^*}{\rho_0 \cdot c^2} \quad (5.21)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{I}} - \bar{\mathcal{V}} \quad (5.22)$$

En posant  $\Pi = \frac{1}{2} \cdot p\mathbf{v}^*$  comme l'intensité acoustique que l'on décompose ensuite en une partie réelle et une partie imaginaire  $\Pi = \mathcal{I} + j\mathcal{J}$ , on peut montrer également que [LESUEUR88] :

$$\nabla \cdot \mathcal{I} = 0 \quad (5.23)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = -2\omega \cdot \mathcal{L} \quad (5.24)$$

Ces deux quantités sont utilisées pour caractériser les sources, ainsi si nous reprenons le calcul en incluant les termes de sources, on obtient pour la puissance de ces sources une partie active et une partie réactive  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_a + j\mathcal{P}_r$  qui sont liées aux intensités acoustiques par les relations :

$$\mathcal{P}_a = - \int_S \mathcal{I} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.25)$$

$$\mathcal{P}_r = - \int_V 2\omega \cdot \mathcal{L} dV - \int_S \mathcal{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.26)$$

La quantité  $\Pi$  est l'intensité qui est un vecteur traduisant localement la puissance moyenne sur le temps par unité de surface.  $\mathcal{I}$  est l'intensité active ou propagative,  $\mathcal{J}$  l'intensité réactive ou non propagative.  $\mathcal{I}$  a un caractère conservatif. On peut donc choisir n'importe quelle surface qui entoure la source pour mesurer la puissance acoustique de cette dernière.

### 5.1.3 Caractérisation des sources en acoustique

Pour caractériser la puissance rayonnée par une source, on s'intéresse surtout à la partie propagative de la puissance, c'est à dire à  $\mathcal{I}^2$ .

$$\mathcal{P}_a = \int_S \mathcal{I} d\mathbf{S} = \int_S \mathcal{I} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.27)$$

Ainsi, en se plaçant dans une chambre anéchoïque – sans écho – et en effectuant des mesures suffisamment loin de la source<sup>3</sup>, on peut assimiler le champ à une onde plane :

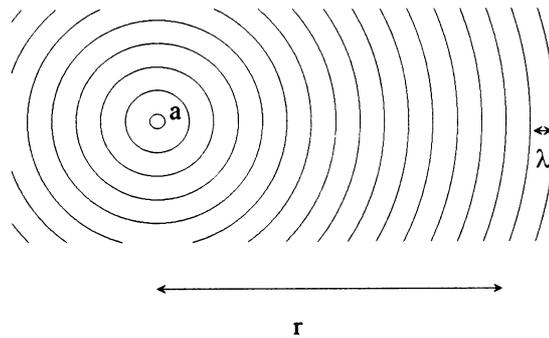


FIG. 5.1 – exemple d'approximation en onde plane d'un champ sphérique

$$p = \rho_0 \cdot c \cdot \|\mathbf{v}\| \quad (5.28)$$

$$\mathcal{I} = p \cdot \bar{\mathbf{v}}^* = \frac{p_{rms}^2}{\rho_0 \cdot c} \quad (5.29)$$

<sup>2</sup>le signe devant l'intégrale est parfois positif ou négatif suivant la convention de signe adoptée pour la normale à la surface. Dans la suite de l'étude on conservera une signe positif devant l'intégrale en se rappelant que la puissance provient de la source à l'intérieur de cette surface

<sup>3</sup>par suffisamment loin, on entend pouvoir faire l'hypothèse du champ lointain ( $r \gg a$ ,  $\lambda$  avec  $r$  distance d'observation de la source,  $a$  taille de la source et  $\lambda$  longueur d'onde du champ rayonné), cela signifie qu'à cette distance le champ peut être assimilé, localement, à une onde plane sur une région dont la dimension est de l'ordre de  $\lambda$  (cf. FIG 5.1)

Si nous mesurons la pression efficace (*Root Mean Square*)  $p_{rms} = \bar{p}^2$ , la puissance rayonnée vaudra<sup>4</sup> :

$$\mathcal{P}_a = \frac{1}{\rho_0 \cdot c} \cdot \int_S p_{rms}^2 dS \quad (5.30)$$

$$= \frac{1}{\rho_0 \cdot c} \cdot \sum_i p_{rms,i}^2 \cdot S_i \quad (5.31)$$

Pour effectuer ces mesures, on se définit généralement un *maillage* d'une surface entourant la source<sup>5</sup>. Ces surfaces peuvent être semi-sphériques, cubiques, parallélépipédiques (cf. FIG 5.2). En chacun des *noeuds* du *maillage*, on

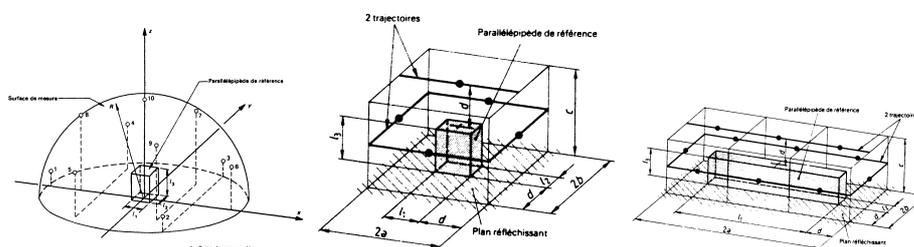


FIG. 5.2 – exemples de surface de mesure de l'intensité en fonction des dimensions de la source

relève  $\mathcal{I}$  – ou simplement  $p$  si nous pouvons faire l'approximation de champ lointain. À l'aide de ces relevés de mesure, on peut caractériser la *distribution spatiale* du champ acoustique rayonné par la source. Ces mesures nous donnent accès à :

1. la *directivité* de la source : ces directions d'émission privilégiées
2. le *spectre* du champ acoustique : sa nuisance sonore (bruit blanc, rose, monochromatique...)
3. la *puissance* acoustique de la source : contrairement à la pression qui dépend de la distance d'audition, la puissance est une donnée intrinsèque de la source

Dans la pratique, on utilise généralement des échelles logarithmiques pour exprimer les différentes grandeurs. Ceci permet d'introduire les notions

<sup>4</sup>plutôt que d'utiliser l'approximation en onde plane, la tendance actuelle est d'utiliser des méthodes intensimétriques qui permettent de mesurer directement  $\mathcal{I} = p\vec{v}^*$  en mesurant  $p$  à l'aide d'une moyenne sur deux microphones et de déduire  $\vec{v}$  à partir d'une approximation du gradient de pression entre ces deux microphones. Cette méthode permet de travailler avec des quantités vectorielles, ce qui permet de pouvoir se rapprocher de la source et également de ne plus avoir besoin de chambre anéchoïque (cf. par exemple [FAHY95])

<sup>5</sup>le type de surface a peu d'influence puisque l'intensité est conservative en dehors des sources, l'intégrale de surface de l'intensité acoustique sera donc identique quelle que soit la surface choisie

de *niveau de pression* ou de *niveau de puissance*<sup>6</sup> :

$$L_p = 10 \cdot \log \left( \frac{p_{rms}}{p_0} \right)^2 \quad (dB) \quad (\text{avec } p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (5.32)$$

$$L_{\mathcal{P}} = 10 \cdot \log \left( \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \right) \quad (dB) \quad (\text{avec } \mathcal{P}_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W}) \quad (5.33)$$

## 5.2 Développement d'un modèle de rayonnement du stator

### 5.2.1 Position du problème

Après discussion sur les différentes hypothèses de simplifications possibles dans le chapitre 4, nous avons considéré un modèle 2D de vibration de notre stator. Pour rester cohérent avec ces calculs, nous allons poursuivre le développement d'un modèle de rayonnement acoustique en considérant toujours un modèle 2D<sup>7</sup>. Si cette hypothèse est en pratique acceptable *en face* du centre de la machine, elle est fautive aux extrémités et au delà puisque la machine est de longueur finie. Afin de compléter le calcul du rayonnement pour tenir compte de la longueur finie de la machine, nous proposerons d'autres modèles qui seront exposés dans la section 5.3.

### 5.2.2 Modèle de rayonnement 2D du stator

Notre modèle de stator étant celui d'un anneau (coque), il est *logique* d'utiliser des coordonnées cylindriques pour l'étude de son rayonnement. Dans la section 5.1, nous avons montré que la pression acoustique était régie par une équation d'onde :

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.34)$$

où  $\Delta = \nabla^2$  est le *Laplacien*. Ce dernier peut être exprimé en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\Delta p(r, \theta, z, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (5.35)$$

ce qui conduit à l'équation aux dérivées partielles en coordonnées cylindriques régissant  $p(r, \theta, z, t)$  :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p(M, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.36)$$

<sup>6</sup>Ces niveaux sont parfois pondérés par des coefficients dits *dBA*, *B* ou *C*. Ces corrections sont des termes qui tiennent compte de la réponse en fréquence de l'oreille humaine et permettent ainsi une meilleure représentation de la *sensation* de nuisance sonore (cf. [YANGELLISON85] et [LIÉNARDFRANÇOIS83])

<sup>7</sup>cette hypothèse revient à considérer que la longueur n'intervient pas sur le rayonnement, on a donc l'équivalent du rayonnement d'un cylindre infini

En utilisant l'hypothèse de séparation des variables et en considérant la solution comme harmonique en temps – utilisation de la notation en demi exponentielle  $e^{j\omega t}$ , nous obtenons une solution de la forme :

$$p(r, \theta, z, t) = e(t) \cdot f(\theta) \cdot g(r) \cdot h(z) \quad (5.37)$$

avec chacune des fonctions  $e(t)$ ,  $f(\theta)$ ,  $g(r)$  et  $h(z)$  exprimable comme [LESUEUR88]<sup>8</sup> :

$$e(t) = e^{j\omega t} \quad (5.38)$$

$$f(\theta) = D_{1m} \cdot \cos(m\theta) + D_{2m} \cdot \sin(m\theta) \quad (5.39)$$

$$g(r) = \begin{cases} A_{1m} \cdot J_m(k_r \cdot r) + A_{2m} \cdot N_m(k \cdot r) : \text{ondes stationnaires} \\ B_{1m} \cdot H_m^{(1)}(k_r \cdot r) : \text{ondes progressives convergentes} \\ B_{2m} \cdot H_m^{(2)}(k_r \cdot r) : \text{ondes progressives divergentes} \end{cases} \quad (5.40)$$

$$h(z) = C_1 \cdot e^{-jk_z z} + C_2 \cdot e^{-jk_z z} \quad (5.41)$$

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f(\theta) \cdot g(r) \cdot h(z) \cdot e(t) \quad (5.42)$$

avec  $m$  entier, variant de 0 à l'infini,  $H_m^{(1)} = J_m + jN_m$ ;  $H_m^{(2)} = J_m - jN_m$  : fonction de HANKEL d'ordre  $m$  de 1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> espèce.  $J_m$  et  $N_m$ , fonction de BESSEL et de NEUMANN d'ordre  $m$ . À ces équations, il faut ajouter la relation de dispersion :

$$k_r^2 = k^2 - k_z^2 \quad (5.43)$$

avec  $k$  le nombre d'onde dans l'air, c'est à dire  $\frac{\omega}{c}$ .

Dans nos hypothèses de calcul en deux dimensions, on considère que la pression ne dépend pas de  $z$  – qu'elle est uniforme suivant  $z$  –, ce qui revient à considérer la longueur d'onde suivant  $z$  comme infinie – ou le nombre d'onde  $k_z$  comme nul. On obtient la nouvelle relation de dispersion :

$$k_r^2 = k^2 \quad (\text{avec } k = \frac{\omega}{c}) \quad (5.44)$$

Les ondes stationnaires sont des ondes qui ne peuvent être créées que dans des cavités (notion de résonance) ce qui n'est pas le cas dans nos hypothèses de rayonnement à l'infini. Pour les mêmes raisons, les ondes convergentes – qui convergent vers la source – et qui correspondent à une réflexion sur une paroi, ne peuvent exister. Il ne reste que les ondes divergentes purement radiales créées par la vibration radiale de notre source statorique (cf. FIG 5.3).

---

<sup>8</sup>attention, car certains auteurs ([MORSEINGARD86] [LIÉNARDFRANÇOIS83]) utilise la convention de notation négative en demi exponentielle  $e^{-j\omega t}$  pour la dépendance en temps, ce qui implique l'inversion pour  $g(r)$  :  $B_{1m} \cdot H_m^{(1)}(k_r \cdot r)$  devient l'onde progressive divergente et  $B_{2m} \cdot H_m^{(2)}(k_r \cdot r)$  devient l'onde progressive convergente

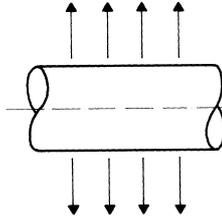


FIG. 5.3 – champ de pression généré par un cylindre infini à vitesse radiale périodique et nombre d’onde axial nul

Dans le cas où la vibration du stator est stationnaire, nous pouvons déterminer le rayonnement en champ libre en utilisant les travaux reportés dans [CREMERHECKLUNGAR88] p 505. Nous verrons ensuite comment modifier ce champ pour tenir compte des vibrations propagatives suivant la direction  $\theta^9$  – champ de déplacement radial du stator qui tourne autour de l’axe de la machine.

Soit  $\check{v}$ , la vitesse stationnaire de déplacement radial de la surface du stator :

$$\check{v}(\theta, t) = \sum_i \hat{v}_i \cdot \phi_i(t) \cdot V_i(\theta) \quad (5.45)$$

avec

$$\phi_i(t) = \cos(\omega_i t) \quad (5.46)$$

$$V_i = \cos(i\theta) \quad (5.47)$$

Dans un premier temps, nous traiterons du cas d’une seule fréquence ( $i = m$ ) puis nous généraliserons en utilisant les transformées de FOURIER. Nous devons trouver la solution de  $\check{v}$  qui satisfasse l’équation d’onde en coordonnées cylindriques et les deux conditions aux limites en  $r = a^{10}$  et en  $r = \infty$ .

1. condition aux limites en  $r = a$  : la vitesse vibratoire de la source (le stator) est égale à la vitesse particulaire (du fluide) sur la surface de la source. En utilisant l’équation (5.11) :

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} p = 0 \quad (5.48)$$

<sup>9</sup>on rappelle qu’au chapitre précédent, nous avons montré que les déplacements pouvaient être exprimés comme une superposition de champs harmoniques tournants suivant  $\theta$

<sup>10</sup>en acoustique, on a coutume de définir la taille de la source par la lettre  $a$ , ainsi dans le cas d’une source cylindrique, cette dimension prend la valeur du rayon de la source, soit  $R$

que l'on utilise pour la vitesse stationnaire en régime harmonique de pulsation  $\omega$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\check{v}(\theta, t)) \\ &= \hat{v} \cdot V(\theta) \cdot \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \\ &= \hat{v} \cdot V(\theta) \cdot j\omega \phi(t) \\ &= j\omega \cdot \check{v}(\theta, t)\end{aligned}\quad (5.49)$$

ce qui nous permet d'obtenir la relation entre  $\check{v}$  et  $\check{p}$  :

$$-j\omega\rho_0\check{v} = \frac{\partial \check{p}}{\partial r} \quad (\text{en } r = a) \quad (5.50)$$

2. condition aux limites en  $r = \infty$  : cette condition aux limites est ce que l'on appelle la *condition de rayonnement de SOMMERFELD* qui a montré que le champ de pression à l'infini devait évoluer en :

$$\check{p}(r, \theta) \sim \frac{1}{\sqrt{k \cdot r}} e^{-jk \cdot r} \quad (5.51)$$

Nous avons vu précédemment que la solution propagative divergente d'un champ de pression en coordonnées cylindriques pouvait s'exprimer en terme de fonctions sinusoidales de la variable  $\theta$ , de fonctions exponentielles du temps et de fonctions de HANKEL de secondes espèces pour la variable  $r$  :

$$\check{p}(r, \theta, t) = \sum_i \hat{p}_i \cdot \cos(i\theta) \cdot H_i^{(2)}(k \cdot r) \cdot e^{j\omega_i t} \quad (5.52)$$

soit pour  $i = m$ , la condition aux limites en  $r = a$  conduit à :

$$\hat{p}_m = -\frac{j\rho_0 \cdot c \cdot \hat{v}_m}{H_m^{(2)'}(k \cdot a)} \quad (5.53)$$

avec  $H_m^{(2)'}(k \cdot a) = \left( \frac{\partial H_m^{(2)}(k \cdot r)}{\partial(k \cdot r)} \right)_{r=a}$ , ce qui donne finalement<sup>11</sup> :

$$\check{p}(r, \phi, t) = -\hat{v}_m \cdot \frac{j \cdot \rho_0 \cdot c}{H_m^{(2)'}(k \cdot a)} \cdot \cos(m\theta) \cdot H_m^{(2)}(k \cdot r) \cdot e^{j\omega_i t} \quad (5.55)$$

<sup>11</sup>Les dérivées d'une fonction de Bessel, Neumann ou Hankel peuvent être déduites de la même relation de récurrence (cf. [ABRAMOWITZSTEGUN72]) :

$$\frac{\partial H_m^{(2)}(x)}{\partial(x)} = H_m^{(2)'}(x) = \frac{1}{2} \cdot (H_{m-1}^{(2)}(x) - H_{m+1}^{(2)}(x)) \quad (5.54)$$

La puissance acoustique rayonnée en champ lointain par unité de longueur vaut alors :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\rho_0 \cdot c} \cdot \int_0^{2\pi} |p_{rms}(r, \theta)|^2 r d\theta \quad (5.56)$$

soit pour le cas  $m = 0$  :

$$\mathcal{P} = 2 \cdot |\hat{v}_0|^2 \frac{\rho_0 \cdot c}{|H_0^{(2)'}(k \cdot a)|^2} \quad (5.57)$$

et pour  $m > 0$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) :

$$\mathcal{P} = 2 \cdot \left| \frac{\hat{v}_m}{\sqrt{2}} \right|^2 \frac{\rho_0 \cdot c}{|H_m^{(2)'}(k \cdot a)|^2} \quad (5.58)$$

Dans ces conditions, le *facteur de rayonnement* (*radiation efficiency*)  $\sigma_m$ <sup>12</sup> vaudra :

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\mathcal{P}}{\rho_0 \cdot c \cdot A \cdot \bar{\mathbf{v}}^2} \quad (A : \text{aire de l'enveloppe}) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{k \cdot a \cdot |H_m^{(2)'}(k \cdot a)|^2} \end{aligned} \quad (5.60)$$

avec la valeur moyenne  $\bar{\mathbf{v}}^2$  définie comme une moyenne quadratique sur le temps et la surface de la source :

$$\bar{\mathbf{v}}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |\hat{v}_m \cdot \cos(m\theta)|^2 d\theta \quad (5.61)$$

Dans la FIG 5.4 tiré de [CREMERHECKLUNGAR88], on présente une image du champ d'ondes de pression à proximité d'un cylindre vibrant pour différentes valeurs de  $m$ . Cette figure nous permet de nous représenter le champ de rayonnement d'un cylindre. Si la vibration est de rang 0, on constate que le cylindre rayonne comme un monopôle (rayonnement omni-directionnel), si la vibration est de rang 1 et stationnaire – direction de rayonnement indépendante du temps – le cylindre rayonne comme un dipôle avec une direction de rayonnement privilégiée. La direction perpendiculaire à cette dernière ne rayonne pas en champ lointain. Le nombre de directions de rayonnement augmente avec le rang de la vibration et nous constatons qu'à partir d'un certain rang, le champ décroît si rapidement qu'il devient nul en champ lointain. Pour le rang 6, on constate qu'il n'y a déjà plus qu'un champ proche. Ces cas d'excitations conduisent à des rayonnements pratiquement nuls dès qu'on s'éloigne de la source.

<sup>12</sup>on rappelle que le *facteur de rayonnement* est le rapport entre la puissance rayonnée par la source et la puissance rayonnée par une onde plane de même surface d'enveloppe que l'objet vibrant, soit :

$$\sigma = \frac{\mathcal{P}}{\rho_0 \cdot c \cdot A \cdot \bar{\mathbf{v}}^2} \quad (\text{avec } A \text{ l'aire de l'enveloppe de la source}) \quad (5.59)$$

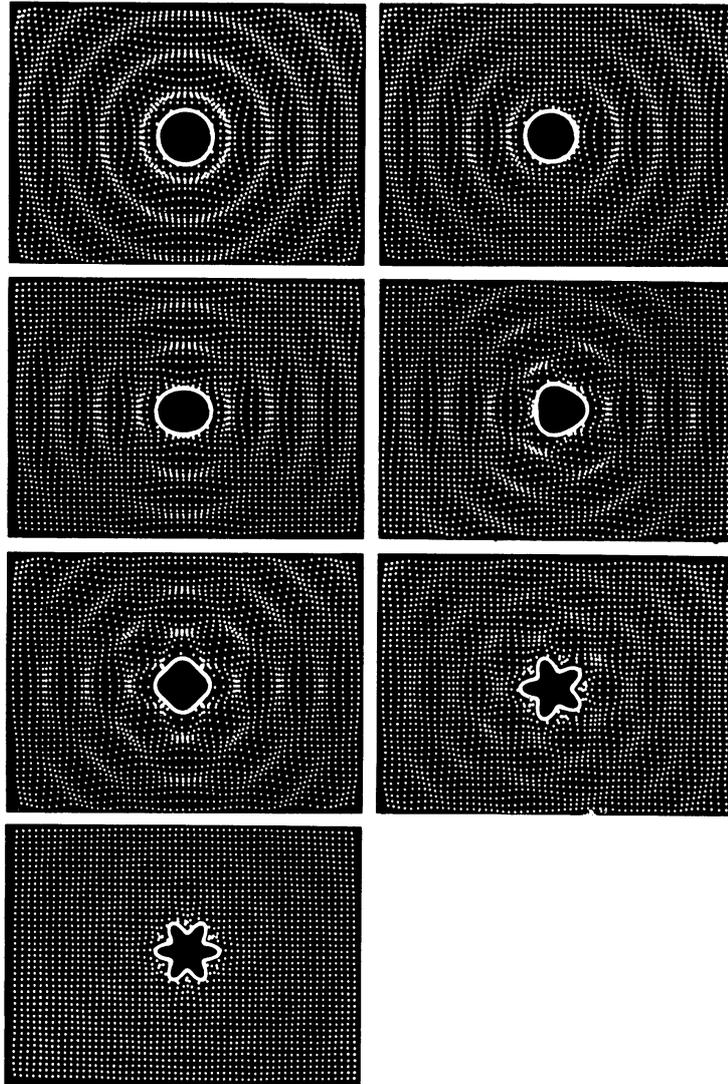


FIG. 5.4 – champ d’ondes de pression à proximité d’un cylindre vibrant ( $k \cdot a = 4$ ) pour différentes distributions sinusoïdales circonférentielles de rangs  $m$  variant de 0 à 6

Ces calculs ont été réalisés pour une vitesse vibratoire stationnaire – champ de déplacement non tournant – mais les calculs des chapitres précédents ont montré que pour les rangs  $m > 0$ , le champ de déplacement – et donc celui des vitesses – du stator tournait suivant la variable  $\theta$ . L'équation (5.45) doit être modifiée en :

$$v(\theta, t) = \sum_i \hat{v}_i \cdot \cos(\omega_i t \pm i\theta) \quad (5.62)$$

La solution de  $p$ , non stationnaire en  $\theta$  devient pour le rang  $m$  :

$$p(r, \theta, t) = -\hat{v}_m \cdot \frac{j \cdot \rho_0 \cdot c}{H_m^{(2)'}(k \cdot a)} \cdot \cos(\omega_m t \pm m\theta) \cdot H_m^{(2)}(k \cdot r) \quad (5.63)$$

Nous avons également dit qu'il n'y avait pas un unique champ harmonique de déplacement du stator mais que nous pouvions l'exprimer comme une superposition de tels champs à l'aide de séries de FOURIER suivant le temps et l'espace. Dans ce cas, la pression rayonnée sera également une superposition de champs de pression pour chaque déplacement harmonique de la structure statorique. En utilisant la notation vectorielle des spectres déjà utilisée précédemment, on obtient pour une vitesse de déplacement de la forme :

$$\{\hat{v}\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{v}_{n_{max}, m_{max}}^*}{2} \\ \vdots \\ v_{0,0} \\ \vdots \\ \frac{\hat{v}_{n_{max}, m_{max}}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{vecteur spectre de la vitesse vibratoire } v(t, \theta) \quad (5.64)$$

$$base(\{\hat{v}\}) = \begin{pmatrix} e^{-j(n_{max}\omega_0 t)} \\ \vdots \\ e^{j0} = 1 \\ \vdots \\ e^{+j(n_{max}\omega_0 t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-j(m_{max}\theta)} \\ \vdots \\ e^{j0} = 1 \\ \vdots \\ e^{+j(m_{max}\theta)} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{base dans laquelle est} \\ \text{exprimé le vecteur} \\ \text{spectre de de la fonc-} \\ \text{tion } v(t, \theta) : \\ v(t, r) = \{\hat{v}\}^T \cdot \\ \text{base}(\{\hat{v}\}) \end{array} \quad (5.65)$$

On sait également que dans l'air  $\omega$  et  $k$  ne sont pas indépendants puisqu'ils sont liés par la relation de dispersion (5.44) :  $k = \frac{\omega}{c}$ , soit ici pour un rang  $(n, m)$  :  $k = \frac{n\omega_0}{c}$  où  $\omega_0$  est la fréquence fondamentale de la série de FOURIER. À chaque harmonique de vitesse vibratoire de rang  $(n, m)$  correspondra un champ de pression :

$$p_{n,m}(t, r, \theta) = \frac{\hat{p}_{n,m}}{2} \cdot e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{jm\theta} \cdot H_m^{(2)}\left(\frac{n\omega_0}{c} \cdot r\right) \quad (5.66)$$

avec <sup>13</sup> :

$$\hat{p}_{n,m} = \begin{cases} -\hat{v}_{n,m} \cdot \frac{j \cdot \rho_0 \cdot c}{H_m^{(2)'}(\frac{n\omega_0}{c} \cdot a)} & \text{si } n > 0 \\ -\hat{v}_{n,m} \cdot \frac{j \cdot \rho_0 \cdot c}{H_m^{(1)'}(\frac{n\omega_0}{c} \cdot a)} & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

On peut noter la pression sous la forme vectorielle :

$$\{\hat{p}\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}_{n_{max},m_{max}}^*}{2} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{\hat{p}_{n_{max},m_{max}}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{vecteur spectre de la pression acous-} \quad (5.68)$$

tique  $p(t, r, \theta)$

$$base(\{\hat{p}\}) = \begin{pmatrix} e^{-j(n_{max}\omega_0 t)} \\ \vdots \\ e^{j0} = 1 \\ \vdots \\ e^{+j(n_{max}\omega_0 t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-j(m_{max}\theta)} \\ \vdots \\ e^{j0} = 1 \\ \vdots \\ e^{+j(m_{max}\theta)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_{m_{max}}^{(1)}(\frac{n_{max}\omega_0}{c} \cdot r) \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ H_{m_{max}}^{(2)}(\frac{n_{max}\omega_0}{c} \cdot r) \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

base dans laquelle est exprimé le *vecteur* spectre de de la fonction  $p(t, r, \theta) : p(t, r, \theta) = \{\hat{p}\}^T \cdot base(\{\hat{p}\})$

Avec la notation vectorielle, on peut facilement généraliser le calcul des valeurs efficaces (*Root Mean Square*), la puissance acoustique vaudra alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{\rho_0 \cdot c} \cdot \int_0^{2\pi} |p_{rms}(r, \theta)|^2 r d\theta \\ &= \frac{1}{\rho_0 \cdot c} \cdot \{\hat{p}\}^{*T} * \{\hat{p}\} \end{aligned} \quad (5.70)$$

*Le modèle de rayonnement que nous venons de développer permet à partir de la connaissance de la vitesse vibratoire à la surface du stator de déterminer la pression acoustique ainsi que les caractéristiques énergétiques – puissance et facteur de rayonnement. La formulation à l'aide de vecteurs et de multiplications matricielles rend cette approche élégante et peut être facilement résolue numériquement.*

<sup>13</sup> suite à une note précédente concernant le choix de la fonction de HANKEL pour obtenir une onde divergente, on remarquera que pour  $n > 0$ , on choisira  $H_m^{(2)}(\frac{n\omega_0}{c} \cdot r)$  et que pour  $n < 0$ , on devra prendre  $H_m^{(1)}(\frac{n\omega_0}{c} \cdot r)$

### 5.3 Présentation d'autres modèles de rayonnement du stator

Comme nous l'avons fait remarquer au début de ce chapitre, un modèle 2D (cylindre infini), n'est valable que pour l'estimation de la pression face au centre de la machine. Plus on s'éloignera vers les extrémités, moins notre modèle sera bon. Pour un calcul plus précis, il faudrait tenir compte de la longueur finie de notre stator. C. LESUEUR, dans son ouvrage [LESUEUR88] p 155 donne un exemple de calcul du rayonnement d'une coque mince appuyée à ces extrémités et bafflée – rigide – au delà. Cette méthode, relativement pointue, se décompose en trois étapes :

1. trouver le schéma modal de la structure dans le vide. Pour cela, l'auteur utilise l'opérateur de DONNELL dont nous avons déjà parlé dans le chapitre 4
2. exprimer la pression  $p$  à l'aide d'une fonction de GREEN
3. développer la pression dans la base des modes propres de la structure dans le vide

Le développement analytique est délicat et le calcul complet nécessite une résolution numérique, c'est pourquoi nous renverrons le lecteur intéressé directement à l'ouvrage de C. LESUEUR. On peut cependant noter qu'il apparaît des couplages par rayonnement entre les modes longitudinaux pour un mode circonférentiel donné et que cette méthode est bien adaptée si le fluide n'a pas une densité trop importante.

Un autre travail intéressant est celui exposé dans l'ouvrage de S.J. YANG [YANG81] qui a également développé un modèle de rayonnement de stator en utilisant celui d'une coque mince finie pour différents rapports longueur sur rayon. De même, les formulations sont relativement complexes mais un travail très intéressant de comparaison entre différents modèles a été réalisé. Il nous permet de voir la validité des hypothèses retenues pour chacun des trois modèles suivants :

1. modèle de P.L. ALGER [ALGER51] : sensiblement les mêmes hypothèses que nos travaux de la section précédente – cylindre infini
2. modèle de H. JORDAN : modèle de rayonnement d'une sphère<sup>14</sup>. Cette méthode fait encore l'objet d'études, on citera à ce sujet la thèse de L. BOUCHET [BOUCHET96]
3. Modèle développé par S.J. YANG

---

<sup>14</sup>comme il a été remarqué dans l'ouvrage [LESUEUR88], en-deçà d'une fréquence caractéristique de la source – ou d'un  $ka$  –, le facteur de rayonnement  $\sigma$  définit globalement la personnalité acoustique de chaque objet immergé. En revanche, au-delà de cette fréquence,  $\sigma$  tend asymptotiquement vers 1, c'est à dire que l'objet se comporte globalement comme une sphère équivalente

Pour différentes valeurs de  $m$ , l'auteur donne des tableaux de comparaison pour la valeur du coefficient relatif d'intensité acoustique ( $\frac{\mathcal{I}_{\text{stator}}}{\mathcal{I}_{\text{onde plane}}}$ ). Ceci doit permettre d'estimer assez rapidement le niveau de puissance acoustique d'une machine électrique lorsque nous connaissons la vitesse vibratoire de la surface rayonnante.

La tendance actuelle en matière de calcul de rayonnement acoustique est d'utiliser l'intégrale de HELMHOLTZ associée à une fonction de GREEN. Cette intégrale est obtenue à partir de l'équation d'onde de pression que l'on multiplie par une solution fondamentale  $G$  appelée fonction de GREEN pour obtenir une équation intégrale. Par utilisation du second théorème de GREEN et de l'équation de EULER en régime harmonique ( $-j\omega\rho_0v = \frac{\partial p}{\partial n}$ ), on obtient l'expression suivante :

$$p(M) = \int_S p(M_0) \cdot \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} + j \cdot \rho_0 \cdot \omega \cdot v(M_0) \cdot G(M, M_0) dS(M_0) \quad (5.71)$$

$v(M_0)$  et  $p(M_0)$  sont respectivement la vitesse vibratoire et la pression pariétale – à la surface de la paroi – en un point courant  $M_0$  de la structure.  $G(M, M_0)$  est la fonction de propagation de GREEN associée au domaine fluide considéré.

$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}$  est la dérivée normale de la fonction de GREEN au point  $M_0$  sur la structure.

$S$  est la surface de la structure vibrante et  $dS$  un élément de cette surface.

Cette intégrale comporte deux termes, le premier dépendant de la pression pariétale est extrêmement complexe à calculer, le deuxième, dans le cas où l'on connaît la vitesse vibratoire, est facilement déterminable.

En discrétisant cette équation, on arrive aux techniques d'Éléments Finis de Frontière (*Boundary Element Method*). Ces techniques commencent à être de plus en plus utilisées pour le rayonnement de systèmes électromécaniques (cf. par exemple les articles [BAUERMONZELHENNEBERGER98] ainsi que [RAMESOHLBAUERHENNEBERGER98] et [BAUERHENNEBERGER99]. On notera également, plus récemment, les articles [CARLSONNEVESNSADOWSKI00], [KAEHLERHENNEBERGER00] et, toujours par les personnes du même laboratoire [MONZELBAUERHENNEBERGER00]).

Sous certaines conditions liées aux fréquences et à la distance d'observation – champ proche ou lointain –, on peut simplifier l'expression de l'équation (5.71) ce qui conduit à représenter le rayonnement de notre source par une distribution de *monopôles* et de *dipôles* acoustiques sur la surface de la source. Les calculs sont alors fortement réduits par rapport à la méthode d'éléments finis de frontière et conduisent à des résultats tout à fait acceptables (cf. [LOVATLOYAUBARBRY97] [GABSLOYAULO VAT99] et [LOYAUBARBRYGABSICAMUS00]).

## 5.4 Vérifications expérimentales des hypothèses et modèles développés

La suite de ce chapitre se consacrera à une vérification expérimentale des différentes hypothèses que nous nous sommes fixées pour développer nos modèles. Nous confronterons ensuite nos modèles avec le rayonnement de la machine d'étude déjà utilisée aux chapitres précédents. Dans un premier temps, nous allons décrire les conditions expérimentales. Les mesures ont été conduites en chambre semi-anéchoïque, le moteur a été suspendu à des ressorts de faibles raideurs pour satisfaire aux conditions aux limites *libre-libre*<sup>15</sup>. Le moteur est alimenté par le convertisseur statique déjà utilisé aux chapitres précédents. Les mesures acoustiques ont été effectuées avec un microphone permettant de mesurer les pressions acoustiques. Une photographie du dispositif expérimental est reportée sur la FIG 5.5.

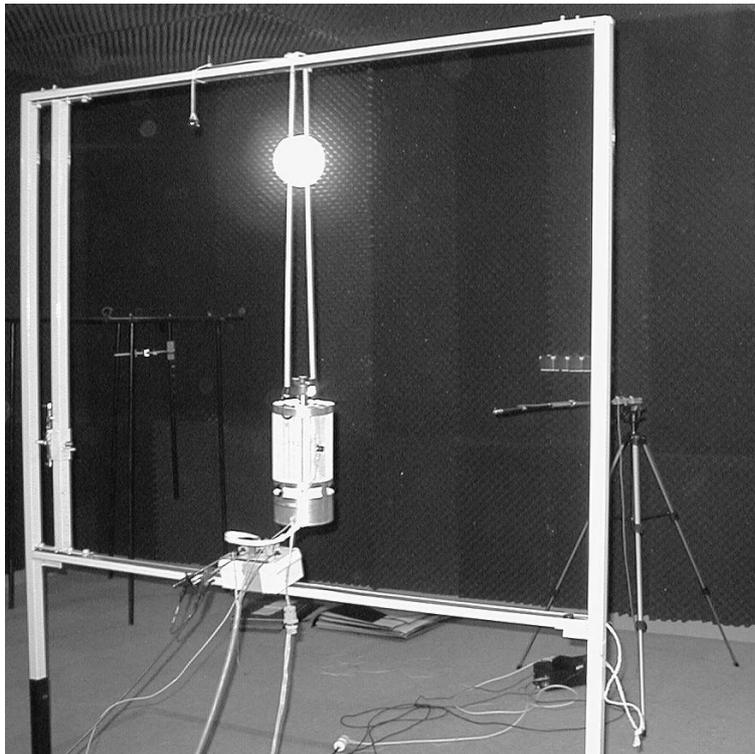


FIG. 5.5 – photographie du dispositif expérimental : moteur suspendu en chambre semi-anéchoïque

---

<sup>15</sup>Le moteur oscillera avec un mouvement d'ensemble de fréquence très faible et au delà de cette fréquence, on pourra considérer l'ensemble comme ayant des conditions aux limites *libre-libre*

### 5.4.1 Vérification des hypothèses : rayonnement radial et tournant

#### Vérification de l'hypothèse de rayonnement d'un champ tournant

Nos modèles ont été développés en considérant que les déplacements radiaux de la structure étaient une superposition de champs tournants suivant l'axe de la machine. S'il en est ainsi, il ne doit exister aucune direction radiale de rayonnement privilégiée – le moteur rayonne dans toutes les directions radiales avec les mêmes valeurs RMS. Afin de confirmer cette hypothèse, nous avons effectué des mesures de pression en fonctionnement à une distance de un mètre de la machine pour différentes positions angulaires : avec un angle de 0 degré, 22,5 degrés, 45 degrés et 67,5 degrés (cf.FIG 5.6).

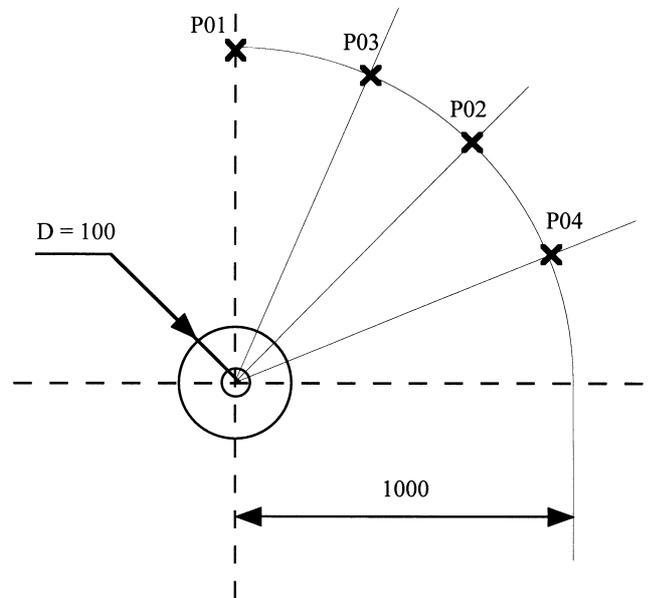


FIG. 5.6 – position des points de mesures pour la vérification des champs tournants (cotes en mm, échelles non respectées)

Pour chacun des points de mesures, nous avons relevé le spectre des niveaux de pression acoustique. Ces différents spectres sont reportés à la FIG 5.7, on constate qu'aux fluctuations de mesures près, ils ont tous le même contenu spectral et les mêmes amplitudes, ce qui confirme bien la présence des champs tournants. Cette série de mesures nous permet de ne relever les niveaux de pressions que pour une seule position de  $\theta$ , les niveaux de pression des autres positions angulaires n'étant qu'un spectre identique aux déphasages près.

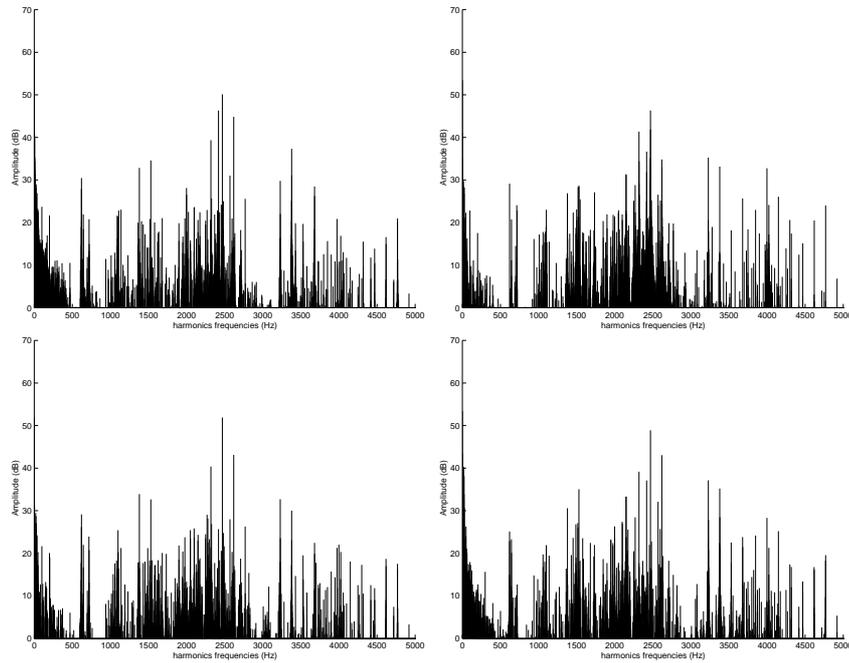


FIG. 5.7 – spectres des niveaux de pression pour les quatre points de mesures pour les différentes positions angulaires

Il est possible d’augmenter la stabilité et la précision des mesures acoustiques en effectuant des moyennes (estimation de la densité spectrale de puissance par la méthode de WELCH ou autre), mais les moyennages et la forme scalaire d’une puissance nous ferait perdre l’information de phase. En outre, le moyennage, pour des mesures sur une machine asynchrone n’est pas simple puisque si l’on se synchronise sur la vitesse de rotation, on perd la synchronisation sur les courants en raison du glissement et inversement. Pour ces raisons, nous avons préféré effectuer des mesures les plus longues possibles – jusqu’à 40000 points – et utiliser des algorithmes classiques de FFT sans moyennage pour déterminer les contenus spectraux.

### Vérification de l’hypothèse de rayonnement radial du champ de pression

Nos modèles ont été développés en considérant un rayonnement purement radial de notre machine puis une décroissance rapide – non modélisée – au delà des limites axiales de la machine. Ceci nous a conduit à ne calculer que le rayonnement d’une coupe 2D de notre stator. Afin de confirmer ce choix, nous avons relevé la pression rayonnée à une distance de un mètre de la machine pour différentes positions axiales et pour une fréquence de découpage de 1111 Hz (cf. FIG 5.8).

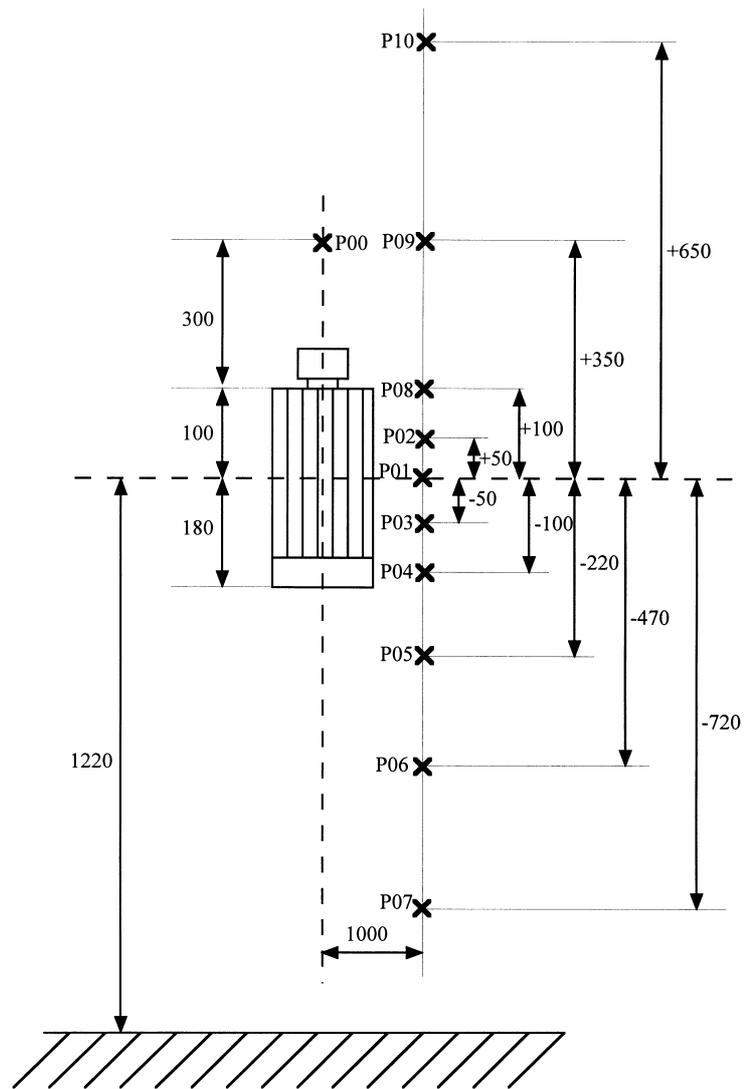


FIG. 5.8 – position des points de mesures pour la vérification des champs de rayonnement radiaux (cotes en mm, échelles non respectées)

Pour chaque point de mesure PXX, nous avons relevé le spectre de niveau de pression acoustique. Conformément à l'étude vibratoire qui a été effectuée au chapitre 4 pour cette fréquence de découpage, la raie d'amplitude maximale apparaît pour une fréquence de 2465 Hz. La FIG 5.9 représente ce spectre pour différents points de mesures. Les contenus spectraux pour les différents points de mesures sont similaires mais les amplitudes dépendent de la position axiale.

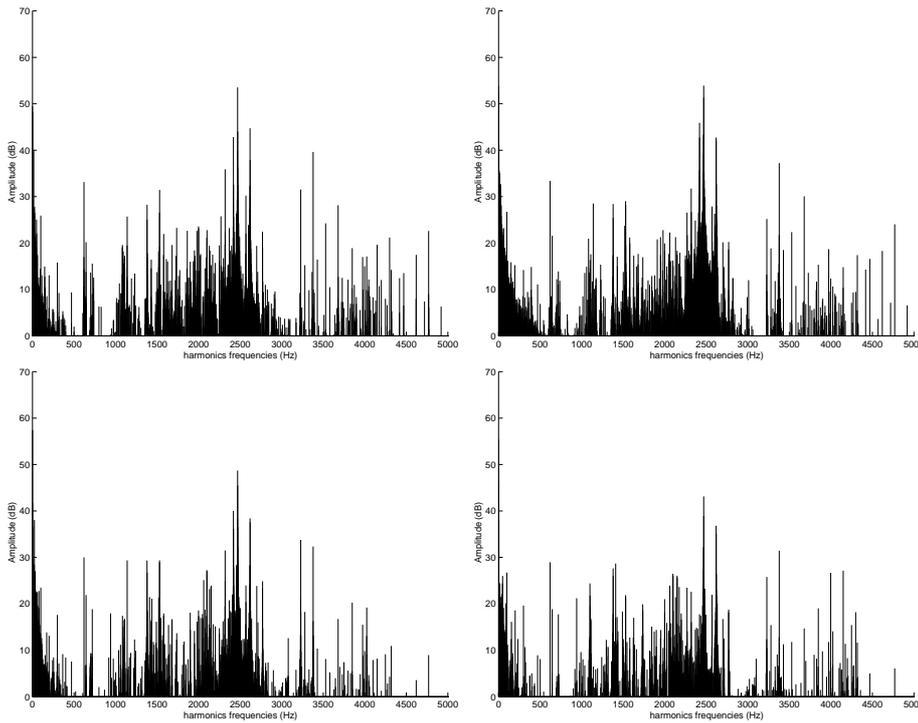


FIG. 5.9 – spectre des niveaux de pression pour quatre points de mesures suivant la direction axiale : P01, P02, P06, P07

Pour la fréquence de 2465 Hz, nous avons tracé le niveau de pression en fonction de la position axiale par rapport au point P01 situé face au centre de la machine. Ce tracé est reporté à la FIG 5.10 sur laquelle, nous avons également signalé l'emplacement de la machine. On constate que le champ rayonné est bien un champ radial qui a une amplitude pratiquement constante face à la machine puis décroît rapidement sur les extrémités axiales. Nous avons également relevé le niveau de pression au dessus de l'arbre moteur à une distance de 300 mm (P00). Ce spectre reporté à la FIG 5.11 montre des composantes totalement différentes de celles de la FIG 5.9 et avec des amplitudes largement inférieures.

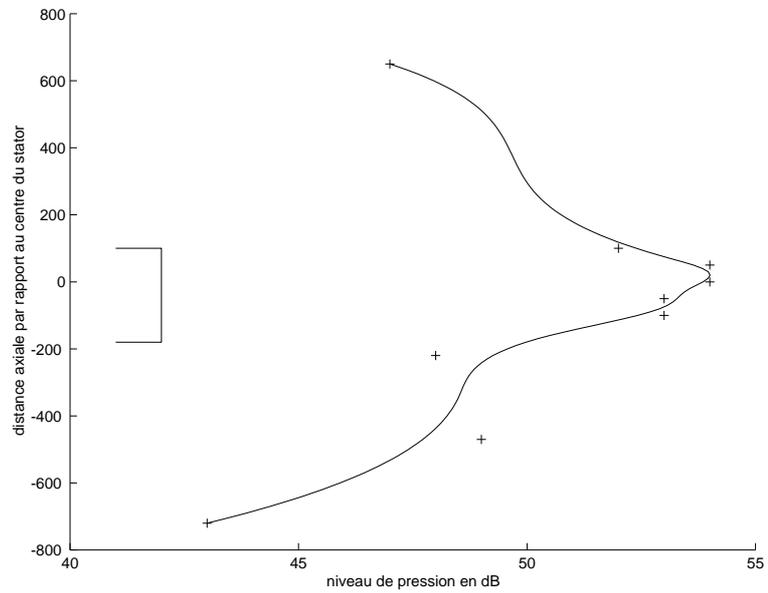


FIG. 5.10 – Niveaux de pression acoustiques mesurés en fonction de la position axiale d'observation – emplacement de la machine

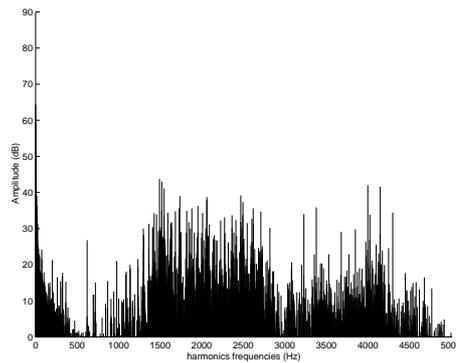


FIG. 5.11 – spectre des niveaux de pression pour le point P00 situé à 300 mm au dessus de l'arbre moteur

*Nous pouvons conclure que le champ de pression acoustique rayonné par la machine électrique est, d'une part une superposition de champs tournants suivant l'axe de la machine et que, d'autre part, ces champs sont rayonnés de manière radiale et pratiquement uniquement entre les deux extrémités axiales de la machine. Notre modèle de rayonnement reposant sur le calcul 2D du rayonnement d'une section de stator repose sur des hypothèses confirmées par l'expérience.*

### 5.4.2 Validation expérimentale du modèle de rayonnement en 2D

Cette validation s'est appuyée sur des mesures effectuées à la fréquence de découpage de 1111 Hz. Pour cette fréquence, dans le chapitre précédent, nous avons montré les différences qui existaient entre le calcul des accélérations vibratoires et la mesure de ces accélérations en raison d'un couplage entre le mode de rang 2 et les efforts d'excitations de rang 4. Pour contourner ce problème, nous avons validé notre modèle à partir des relevés expérimentaux de vitesses vibratoires et non à partir des calculs de ces vitesses. La FIG 5.12, reporte l'accélération vibratoire mesurée à la périphérie du stator.

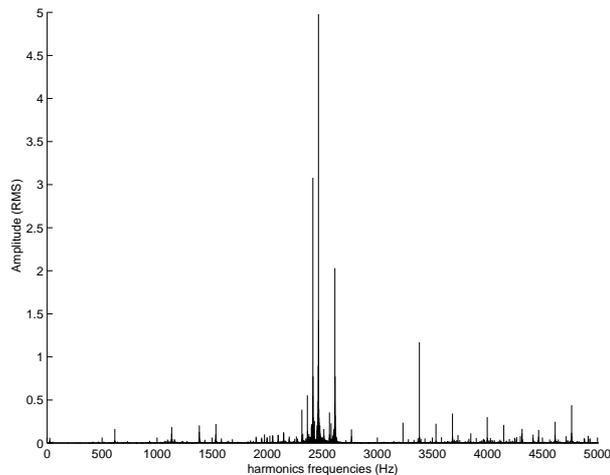


FIG. 5.12 – spectre de l'accélération vibratoire à la périphérie de la machine pour une fréquence de découpage de 1111 Hz

La vibration principale est obtenue à 2465 Hz, nous confronterons notre modèle pour cette fréquence. Le problème rencontré si l'on part d'une accélération relevée expérimentalement est que cette dernière a été faite pour un unique point de mesure – un seul accéléromètre. En raison du couplage entre le mode de rang 2 et l'excitation de rang 4, nous ne savons pas si cette vibration correspond à une déformée de rang 2 ou 4. Ainsi, nous avons calculé le rayonnement pour une vibration de rang  $m$  compris entre 0 et 6 (cf.

FIG 5.4 représentant l'image du champ de pression rayonné par chacun de ces modes pour une excitation stationnaire suivant  $\theta$ ) et nous identifierons à quel type de rayonnement correspond cette fréquence de vibration<sup>16</sup>. Pour la fréquence de 2465 Hz, nous avons relevé une accélération RMS de  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Nous en déduisons les valeurs suivantes :

$$\omega = 15519 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\hat{v} = 4,364 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

À 20 degrés CELSIUS, nous avons une vitesse du son dans l'air  $c$  de  $344 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour une masse volumique  $\rho_0$  de  $1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . La valeur de  $a$  est égale au rayon de la source, soit  $5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Ceci nous permet de déterminer les caractéristiques du rayonnement :

$$k = \frac{\omega}{c} = 45,11 \text{ m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 13,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$k \cdot a = 2,255$$

Nous avons relevé les niveaux de pression acoustique pour différentes distances de mesures  $r$  de 50 mm à 2 m. Les positions des points de mesures sont reportés sur la FIG 5.13.

Sur la FIG 5.14, nous avons reporté le calcul des niveaux de pression rayonnée en fonction de la distance  $r$  pour les différentes valeurs de  $m$ , nous avons également reporté d'une croix les points de mesures expérimentales.

Ce rayonnement a été calculé pour la fréquence de 2465 Hz. Nous savons que cette fréquence correspond à la fréquence propre du mode de rang 2. Le rayonnement doit donc *nécessairement* être un rayonnement de rang 2.

Nous constatons sur la FIG 5.14 que le modèle proposé est bien en accord avec les points relevés même s'il surévalue les amplitudes. Dans son ouvrage [YANG81], S.J. YANG avait déjà noté qu'un modèle de rayonnement de cylindre infini – modèle proche de nos développements – conduisait à un résultat un peu surévalué.

Nous retiendrons cependant que l'allure du rayonnement en fonction de la distance d'observation est correctement reproduite et qu'elle permet d'avoir une première estimation du rayonnement.

<sup>16</sup>attention, contrairement à la FIG 5.4, le champ rayonné par une machine électrique est un champ tournant suivant  $\theta$ , les directions d'émissions privilégiées tournent donc à la vitesse du champ vibratoire et passe donc successivement par toutes les positions  $\theta$

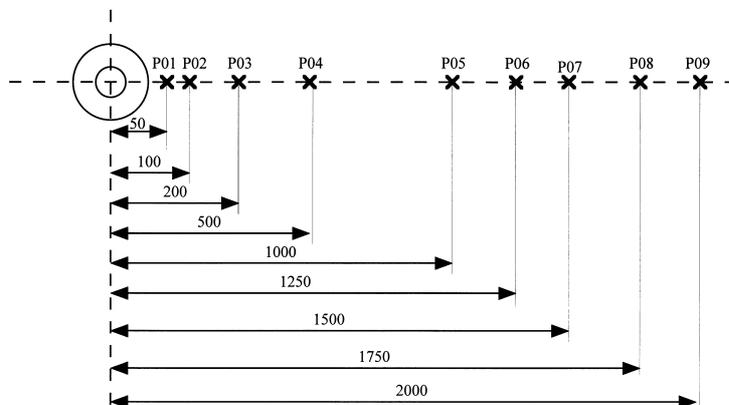


FIG. 5.13 – positions des points de mesures pour la vérification modèle en fonction de la distance  $r$  (cotes en mm, échelles non respectées)

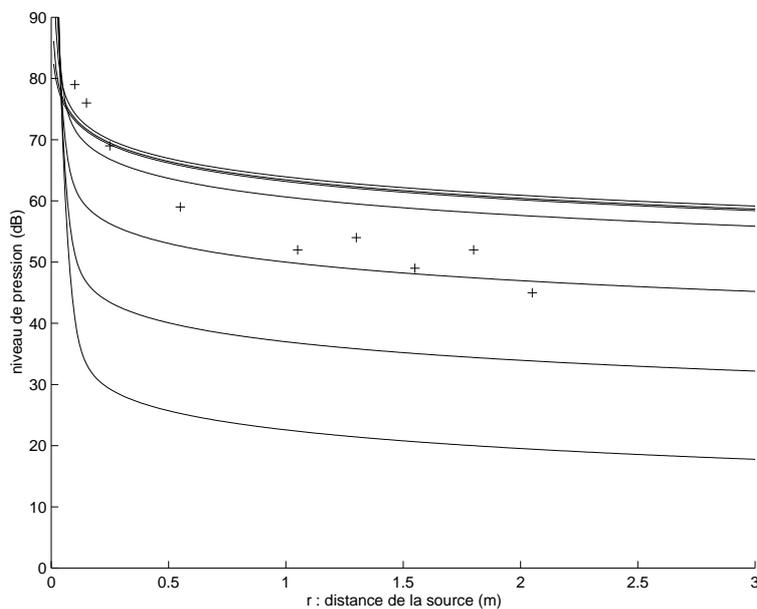


FIG. 5.14 – calcul des niveaux de pression rayonnée pour différentes valeurs de  $m$  (de haut en bas,  $m = 2, 1, 0, 3, 4, 5$  et  $6$ ). Les rangs 2,1 et 0 ont pratiquement les mêmes niveaux. Les croix représentent les points de mesures expérimentaux

La différence d'amplitude peut s'expliquer par les différentes hypothèses utilisées :

1. le rayonnement a été considéré comme un rayonnement infini ce qui ne peut être rigoureusement correct même dans une chambre sourde
2. nous avons dû négliger l'amortissement apporté par l'air
3. nous avons également négligé la présence des ailettes de refroidissement qui perturbe le champ proche. Ces dernières ne doivent cependant avoir qu'une faible influence puisqu'il a été montré que le champ était purement radial
4. enfin, par l'hypothèse d'un rayonnement en deux dimensions, nous négligeons les effets de bords introduits par la longueur finie de la machine

Finalement, ce graphe met en évidence l'importance des modes de rayonnement 0, 1, 2 et 3 par rapport aux rangs supérieurs. En effet, le rang 4 rayonne déjà avec un niveau de pratiquement  $-15$  dB par rapport à ces 4 rangs. Les rangs 5 et 6 ont des niveaux respectifs de  $-25$  et  $-40$  dB par rapports aux quatre premiers rangs. Il est parfaitement légitime de négliger les rayonnements de rangs élevés. Les rangs 0, 1 et 2 ont pratiquement les mêmes niveaux. Nous n'utilisons généralement que ces trois termes pour caractériser une source en champ lointain. Ces trois *formes* de rayonnement sont alors appelées un *monopôle*, un *dipôle* et un *quadripôle*. Dans notre cas, ils ne sont pas *stationnaires* mais tournent autour de l'axe de la machine à la vitesse de rotation du champ d'effort.

### 5.4.3 Validation expérimentale pour des fréquences de découpage variables

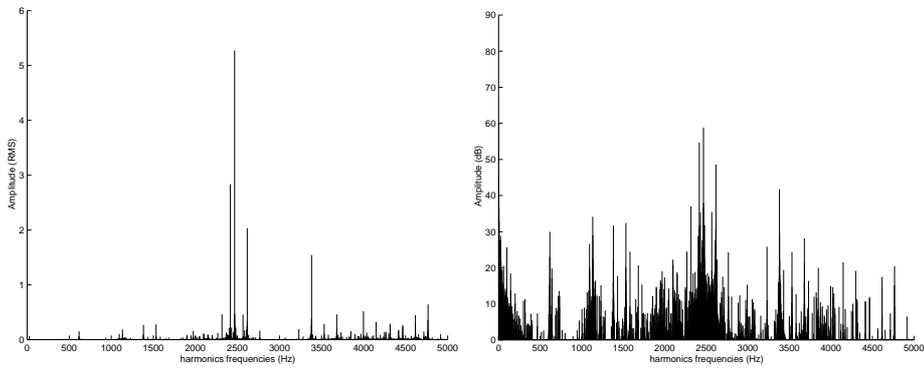
Pour cet essai, nous avons conservé les fréquences de découpage déjà utilisées au chapitre 4, après 1111 Hz utilisée dans les sections précédentes, nous réglerons ce paramètre à 1500, 2000 et 2500 Hz.

Nous avons constaté précédemment que la fréquence de découpage qui conduisait à la vibration maximale était 2000 Hz puisqu'il apparaissait alors un fort couplage – et donc une résonance – avec le mode de rang 2. Les deux autres fréquences  $f_d = 1500$  et 2500 Hz excitent beaucoup moins cette résonance ce qui conduit à des niveaux de vibrations bien inférieurs. Sur la FIG 5.15, nous allons reporter les spectres d'accélération et de niveaux de pression correspondants relevés à un mètre de la machine pour les fréquences de découpage de 2000 et 2500 Hz.

Sur ces essais pour trois fréquences de découpage différentes, nous constatons que l'essai qui conduit aux vibrations maximales est bien celui qui conduit au bruit maximum. Cet essai ( $f_d = 2000$  Hz) excite de manière

Accélération vibratoire du stator      Niveaux de pression acoustique

$$f_d = 2000 \text{ Hz}$$



$$f_d = 2500 \text{ Hz}$$

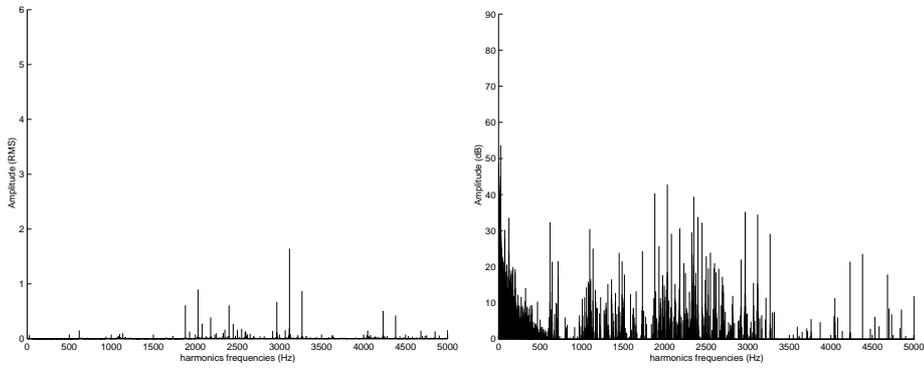


FIG. 5.15 – spectre des accélérations et niveaux de pression correspondant à un mètre pour une fréquence de découpage de 2000 puis 2500 Hz

importante la résonance du mode de rang 2 qui – nous l'avons vu à la sous-section précédente – est un mode qui rayonne fortement. Le niveau maximum de pression est alors de 59 dB à 2465 Hz à une distance de 1 m de la machine.

Une variation assez faible de la fréquence de découpage réussit à *déplacer* l'excitation suffisamment loin de cette résonance pour baisser fortement le niveau maximal de bruit. Une modification de la fréquence de découpage de 500 Hz soit une variation de 20 %, réduit la raie principale de pression de plus de 16 dB (cf. FIG. 5.16)

| fréquence de découpage ( $f_d$ ) (Hz) | fréquence de la raie principale de pression (Hz) | Amplitude du niveau de pression (dB) |
|---------------------------------------|--|--------------------------------------|
| 1500                                  | 2047   | 48                                   |
| 2000                                  | 2465   | 59                                   |
| 2500                                  | 2030   | 43                                   |

FIG. 5.16 – tableau de variation des niveaux de pression acoustique à un mètre de la machine en fonction de la fréquence de découpage du convertisseur

Nous pouvons également remarquer qu'un spectre de vibration ne *correspond* pas exactement à son spectre de niveau de pression si, à ces fréquences, correspondent des modes différents. Ainsi, pour l'essai à une fréquence de découpage de 2500 Hz, l'accélération maximale vaut  $1,6 m \cdot s^{-2}$  à 3120 Hz (soit une vitesse de  $v = \frac{a}{\omega} = 82 \cdot 10^{-6} m \cdot s^{-1}$ ) et le niveau de bruit vaut 34 dB alors que pour une accélération de seulement  $0,9 m \cdot s^{-2}$  à 2030 Hz (soit une vitesse de  $v = \frac{a}{\omega} = 71 \cdot 10^{-6} m \cdot s^{-1}$ ), on obtient un niveau de bruit bien supérieur (43 dB).

## 5.5 Résumé du rayonnement acoustique de la structure statorique soumise aux efforts d'origine électromagnétique

En partant de l'hypothèse du rayonnement d'un cylindre infini, nous avons pu développer un modèle de rayonnement qui était bien adapté à la *forme* des vitesses vibratoires à la surface du stator. Ces calculs ont été réalisés en considérant que le stator rayonnait en champ libre de manière radiale. Si ces modèles sont acceptables en face du centre de la machine – ce qui nous permettra de connaître les valeurs majorantes de la pression rayonnée dues aux vibrations d'origine électromagnétique –, ces valeurs de-

viennent fausses lorsque nous nous éloignons de la section centrale de la machine.

Les différentes hypothèses que nous avons formulées ont été vérifiées expérimentalement. Le modèle de rayonnement développé surévalue un peu les niveaux de pression mais il permet d'avoir une première estimation et de se faire une *idée* de l'évolution du champ de pression en fonction de la distance d'observation et du rang de distribution de la vibration. Pour des niveaux de précision plus élevés, nous devons utiliser d'autres modèles. Les modèles de distribution de monopôles et de dipôles à la surface du stator semblent être un bon compromis temps de calcul/précision et restent *relativement* faciles à mettre en œuvre. Nous avons également pu mettre en évidence qu'un simple calcul vibratoire n'était pas toujours suffisant et qu'une estimation – ou une mesure – du rayonnement acoustique restait *nécessaire* pour minimiser les nuisances acoustiques générées par la machine électrique asynchrone alimentée par convertisseur statique de puissance.



# Conclusion

Comme il a été précisé dans l'introduction, le travail présenté s'inscrit dans une optique de conception d'un ensemble machine associée à son convertisseur statique. Le pré-dimensionnement interdisant toute solution numérique *lourde* – de telles méthodes imposant de disposer d'un modèle d'ores et déjà établi – nous nous sommes concentrés sur une approche de FOURIER. Celle-ci est peut-être moins précise que certaines méthodes numériques mais elle permet de coupler plus facilement les différents domaines de la physique rencontrés (cf. FIG. 5.17). Les méthodes de type éléments finis ont été, éventuellement, réservées pour des validations de modèles.

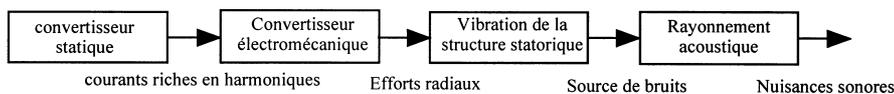


FIG. 5.17 – chaîne d'émission acoustique *globale* d'un ensemble *machine électrique asynchrone-convertisseur statique de puissance*

Les stratégies de commutation des convertisseurs statiques ont été caractérisées par leur *spectre de tension* appliquée sur une phase de la machine. Cette approche permet la modélisation de l'ensemble des stratégies existantes sous réserve de disposer d'un modèle performant de la machine asynchrone qui permette d'en déduire les courants. Pour cela, nous avons généralisé les modèles de machine asynchrone qui existent et qui tiennent compte des harmoniques d'espace afin qu'ils puissent également prendre en compte les harmoniques de temps apportés par le convertisseur. Ceci nous a permis de développer un modèle qui donne directement les spectres des courants dans les différents conducteurs – statoriques et rotoriques – en tenant compte des phénomènes d'harmoniques de temps et d'espace.

À l'aide des courants calculés, nous avons utilisé la méthode dite des *champs tournants* (*Winding field theory*) pour déterminer les champs présents dans l'entrefer comme une superposition de champs harmoniques tournant à différentes vitesses. Bien que basé sur une approche de FOURIER, les différents calculs sont réalisés numériquement en utilisant des algorithmes

de Transformée de Fourier Discrète et de calculs matriciels. Cette méthode est mise en œuvre en tenant compte des harmoniques de temps – conversion statique –, des harmoniques d’espace – répartition non continue des conducteurs – et des phénomènes d’encoches – chute de flux dans l’entrefer face à une encoche.

Ce calcul de conversion électromécanique nous permet de déterminer les pulsations de couples ainsi que les efforts radiaux d’attraction entre le stator et le rotor à l’origine des vibrations statoriques, sources de bruit. Les modèles ont été validés expérimentalement au niveau des courants et des couples moyens.

Après une étude bibliographique sur le comportement vibratoire des stators de machines électriques, nous avons développé une méthode analytique de détermination des fréquences propres de la structure. Cette méthode a été validée expérimentalement par différentes méthodes et s’est révélée très précise (quelques pour-cent d’erreurs sur la détermination des fréquences propres).

En contrôlant la conception de la machine et la stratégie du convertisseur, nous sommes en mesure de *placer* les excitations vibratoires d’origine électromagnétique en dehors des résonances – suffisamment loin des fréquences propres. Hors résonances, il nous est alors possible d’utiliser les techniques de superposition modale en négligeant l’amortissement de la structure. Ceci nous permet de déterminer la réponse vibratoire de la structure statorique. Les expérimentations réalisées ont cependant fait apparaître des couplages entre différents modes<sup>17</sup> qui limitent la portée de nos modèles. Ces couplages conduisent à des fortes résonances pour certaines fréquences de découpages qu’il convient d’éviter *soigneusement*.

Même si d’autres auteurs [VERMABALAN98] ont mis en évidence le même phénomène de couplage et en ont tirés les mêmes conclusions, il serait intéressant de compléter nos modèles à l’aide de méthodes d’identifications – prise en compte de l’amortissement – et de les appliquer à d’autres machines asynchrones pour confirmer la présence de ces couplages.

L’analyse acoustique nous a permis d’acquérir un *savoir-faire* et de développer un modèle intéressant pour la dimensionnement et la conception de l’association *machine-convertisseur*, même s’il s’est avéré que le modèle développé surestimait – majorait – les niveaux de pressions obtenus par rapport aux mesures expérimentales.

Bien que cette étude nous ait apporté de nombreux éléments de réponse et un *savoir-faire* indéniable, les perspectives restent grandes. En effet,

---

<sup>17</sup>ou plus exactement, entre la projection d’un effort sur un mode – la force modale – et la réponse sur un second mode

les phénomènes rencontrés restent complexes et nécessiteront encore beaucoup de travail pour une compréhension totale. Nous pouvons citer à titre d'exemple le travail qu'il reste à effectuer pour améliorer les performances de la détermination des réponses forcées de déplacement. Cette question nécessite peut-être de se reposer des questions sur l'applicabilité de la superposition modale lorsque des modes peuvent être couplés. Nous pourrions également refaire des mesures sur d'autres machines pour confirmer ou infirmer les conclusions de cette première étude et notamment en effectuant plus de mesures en charges.

Le banc de mesure est actuellement repensé pour permettre l'ajout d'une charge qui ne perturberait pas la mesure du bruit et des vibrations de la machine d'étude. Nous pensons également au remplacement du système de contrôle du convertisseur actuel<sup>18</sup> par un système plus performant<sup>19</sup> qui permettrait plus de souplesse dans le choix des stratégies de commutation.

Ces modifications sont également effectuées dans l'optique d'une collaboration déjà commencée avec messieurs P. WAGSTAFF, J.C. HENRIO et R. DIB de l'Université de Technologie de Compiègne [DIBHENRIOHUBERT<sup>+</sup>00]. Leurs activités de recherche concernent la propagation des vibrations aux bancs et aux éléments de support du moteur. Le travail réalisé s'appuie sur l'identification et l'utilisation des fonctions de réponse en fréquence de la structure d'accueil du moteur par des méthodes inverses. Cette propagation des vibrations aux éléments environnants conduit ces derniers à rayonner de manière parfois plus importante que la source elle-même (dans notre cas, le moteur)<sup>20</sup>.

---

<sup>18</sup>contrôlé par une carte dSPACE programmée en MATLAB SIMULINK

<sup>19</sup>processeur de signal spécialisé 320C240

<sup>20</sup>Cette propagation des vibrations aux structures environnantes et leurs rayonnements sont parfois regroupés dans la littérature sous le terme de bruits *solidiens* ou d'*origine solidienne* (*structure borne sound*). Pour plus d'informations, sur ces notions de *bruits solidiens*, on pourra se reporter au colloque [INRS99]



## Annexe A

# Rappel sur la notion de représentation spectrale en temps et en espace

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les différentes notions concernant la représentation de FOURIER d'une fonction pour les deux cas suivants :

1. fonctions périodiques par rapport à la variable de temps ou d'espace
2. fonctions périodiques non seulement par rapport à la variable de temps mais également par rapport à la variable d'espace – Notions de champs et ondes harmoniques

### A.1 Fonctions périodiques par rapport à la variable de temps ou d'espace

**Théorème A.1.1** *Une fonction  $f$  peut toujours être représentée par une série de FOURIER à condition qu'elle soit périodique. Ainsi si cette fonction dépend du temps :  $f = f(t)$ , le passage dans le domaine de FOURIER de cette fonction fera apparaître une nouvelle fonction :  $\hat{f} = \hat{f}(\omega)$  dépendant d'une variable  $\omega$  appelée la pulsation temporelle ou d'une variable  $f_0$  appelée la fréquence telle que  $\omega = 2\pi f_0$ .*

De manière analogue, une fonction  $f(x)$  ou  $f(\theta)$  périodique suivant la variable d'espace  $x$  (linéaire) ou  $\theta$  (rotation) fera apparaître dans le domaine de FOURIER une nouvelle fonction  $\hat{f} = \hat{f}(k)$  où  $k$  est appelée la *pulsation spatiale* (en acoustique, on appelle généralement cette pulsation spatiale le *nombre d'onde*).

Suivant les types d'utilisateurs de la transformée de FOURIER (mathématiciens, physiciens, électrotechniciens...), différentes représentations existent dans le

domaine de FOURIER, elles sont pourtant totalement identiques. Les habitudes de chacun ont contribué à développer des variantes adaptées à chaque domaine d'application et à chaque utilisateur. Pour familiariser le lecteur, nous avons choisi de présenter quelques unes de ces variante puisqu'au cours de cet article, il nous arrivera parfois de passer de l'une à l'autre de ces différentes représentations.

Nous allons appliquer ces différentes représentations à une des fonctions périodiques les plus simples et les plus courantes : une fonction trigonométrique.

Soit  $f$  une fonction périodique *monochromatique* (une seule pulsation) sinusoïdale définie par l'équation (A.1)<sup>1</sup>.

$$f(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (\text{A.1})$$

### A.1.1 Spectre en cos et sin

La représentation la plus simple de la fonction  $f$  dans le domaine de FOURIER est évidemment d'associer à la pulsation  $\omega$ , l'amplitude  $A$  pour la fonction cosinus et  $B$  pour la fonction sinus. Ceci conduit à la figure A.1.

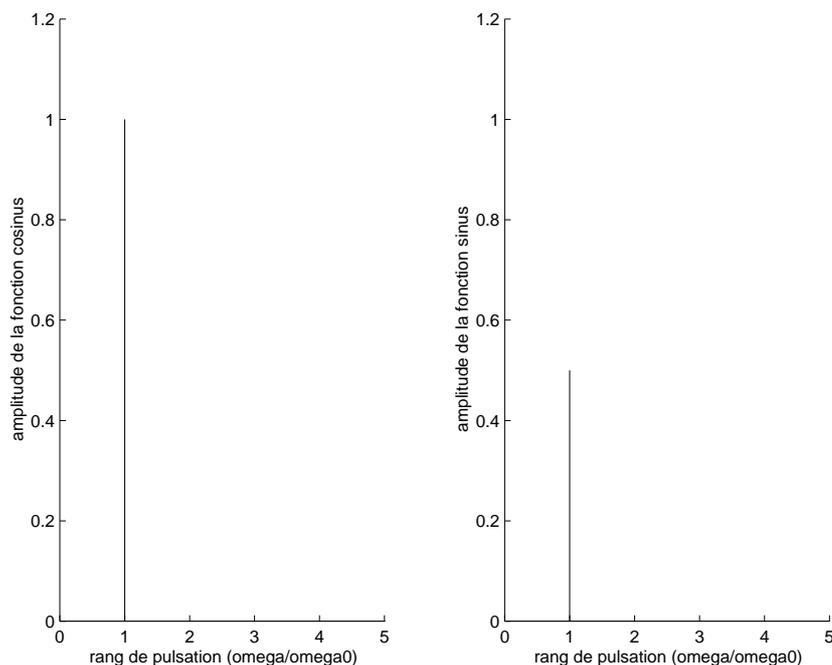


FIG. A.1 – spectre en cos et sin de la fonction  $f$  pour  $A = 1$  et  $B = 0.5$

<sup>1</sup>Par la suite, nous allons travailler avec une fonction dépendant de la variable temps, il est bien évident que tout ce qui suit est également applicable si l'on remplace la variable temps par la variable espace.

### A.1.2 Spectre en cos

Nous pouvons montrer qu'une fonction sinus n'est autre qu'une fonction cosinus déphasée. En posant  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  et  $\varphi = \arctan \frac{B}{A}$ , la fonction  $f$  de l'équation (A.1) peut se réécrire sous la forme :

$$f(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{A.2})$$

Dès lors, il est évident que la représentation la plus adaptée dans le domaine de FOURIER est d'associer à la pulsation  $\omega$  le *nombre complexe*  $\hat{C}$  d'amplitude  $C$  (sa norme) et de phase  $\varphi$ . Cette nouvelle représentation conduit à la figure A.2.

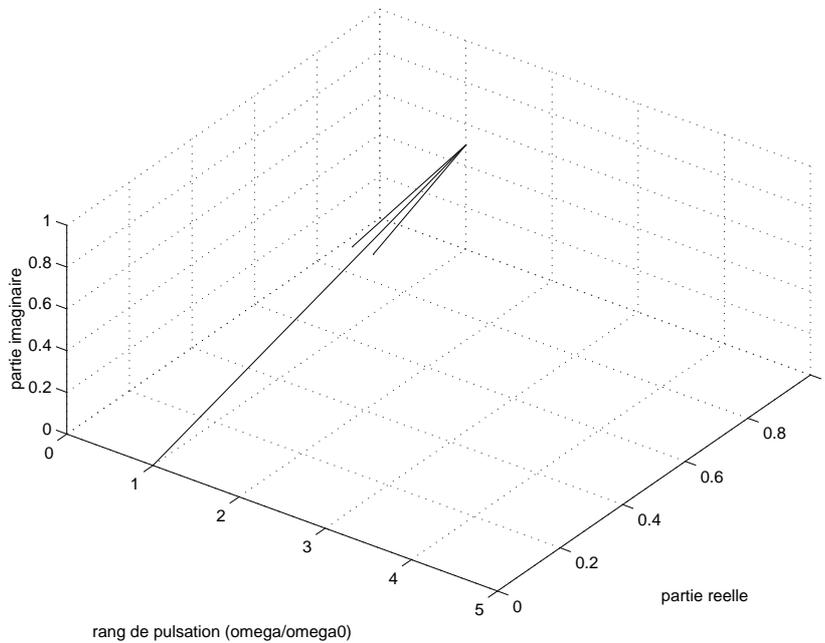


FIG. A.2 – spectre en amplitude et phase pour l'exemple de la figure A.1

Dans le cas où on aurait à calculer des *formes quadratiques* d'une telle fonction, nous obtiendrions :

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \left( C \cos(\omega t + \varphi) \right)^2 \\ &= \left( \frac{C}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left( 1 + \cos(2\omega t + 2\varphi) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Le spectre de cette fonction quadratique n'a donc plus la même composition spectrale que la fonction initiale  $f(t)$ . Les formes quadratiques font

apparaître des spectres différents<sup>2</sup>, il faudra donc être vigilant dans nos travaux aux changements de spectres qu'apportent les formes quadratiques<sup>3</sup>. La valeur efficace (*Root Mean Square*) du signal  $f(t)$  n'est autre que la racine carré de la valeur moyenne de la forme quadratique. La valeur moyenne d'une fonction sinusoidale étant nulle, seule la composante de fréquence zéro contribuera à cette valeur moyenne, on obtient alors<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned}
 f_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) d\omega t} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{C}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \underbrace{(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi))}_{=0} d\omega t} \\
 &= \frac{C}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

### A.1.3 Spectre en exponentiel

En utilisant l'identité mathématique suivante  $\cos a = \frac{1}{2}(e^{ja} + e^{-ja})$  avec  $j = \sqrt{-1}$  et en posant  $\hat{C} = Ce^{j\varphi}$ , la fonction de l'équation (A.1) peut se réécrire sous la forme de l'équation (A.5)

$$f(t) = \frac{\hat{C}^*}{2} e^{-j\omega t} + \frac{\hat{C}}{2} e^{+j\omega t} \tag{A.5}$$

Cette notation fait apparaître la notion *non physique* de pulsation négative. Cette écriture est la plus utilisée par les mathématiciens, c'est elle qui est utilisée dans les algorithmes numériques de calculs de transformée de Fourier et notamment dans la transformée de Fourier rapide (*FFT*). Elle peut être représentée par la figure A.3.

Une façon *élégante* de présenter ce spectre lorsqu'il est composé de plusieurs fréquences et d'une valeur moyenne non nulles est de le poser sous forme vectorielle en lui associant une base formé des exponentielles com-

<sup>2</sup>si notre signal avait été composé de deux fonctions sinusoidales aux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , le spectre de la fonction quadratique serait composé de fonctions sinusoidales aux pulsations  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $0$ ,  $\omega_2 \pm \omega_1$

<sup>3</sup>cette remarque est importante, car nous verrons dans le cours de nos travaux qu'une forme quadratique apparaît lors de l'utilisation du tenseur de MAXWELL

<sup>4</sup>pour une fonction constituée de plusieurs pulsations, seules les composantes de rang zéro de  $f^2(t)$  contribueraient à la valeur efficace, on obtiendrait  $f_{RMS} = \sum_i \frac{C_i}{\sqrt{2}}$ . Ce résultat confirme bien le théorème de PARSEVAL

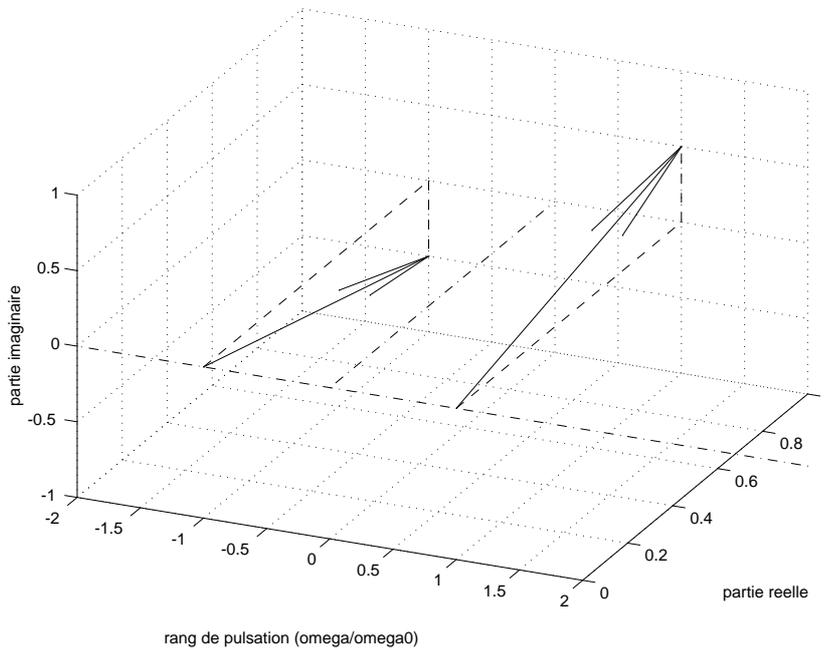


FIG. A.3 – spectre en amplitude et phase de fonctions exponentielles pour l'exemple de la figure A.1

plexes à toutes les pulsations :

$$\{\hat{f}\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{C}_n^*}{2} \\ \vdots \\ \frac{\hat{C}_1^*}{2} \\ C_0 \\ \frac{\hat{C}_1}{2} \\ \vdots \\ \frac{\hat{C}_n}{2} \end{pmatrix} \quad \text{vecteur spectre de la fonction } f(t) \quad (\text{A.6})$$

$$\text{base}(\{\hat{f}\}) = \begin{pmatrix} e^{-jn\omega t} \\ \vdots \\ e^{-j\omega t} \\ e^{j0} = 1 \\ e^{+j\omega t} \\ \vdots \\ e^{+jn\omega t} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{base dans laquelle est exprimé le} \\ \text{vecteur spectre de de la fonction} \end{array} \quad (\text{A.7})$$

$f(t) : f(t) = \{\hat{f}\}^T \cdot \text{base}(\{\hat{f}\})$

Dans le cas d'une forme quadratique de  $f(t)$  contenant une seule pulsation, nous avons :

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \left( \frac{\hat{C}^*}{2} e^{-j\omega t} + \frac{\hat{C}}{2} e^{+j\omega t} \right)^2 \\ &= \frac{\hat{C}^*}{2} \cdot \frac{\hat{C}^*}{2} \cdot e^{-j2\omega t} + 2 \cdot \frac{\hat{C}^*}{2} \cdot \frac{\hat{C}}{2} \cdot e^{j0} + \frac{\hat{C}}{2} \cdot \frac{\hat{C}}{2} \cdot e^{+j2\omega t} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Le calcul du spectre de la fonction quadratique pour une fonction  $f(t)$  contenant plusieurs pulsations peut être réalisé très *élégamment* en utilisant les vecteurs définis ci-avant de la façon suivante :

$$\{\hat{f}^2\} = \{\hat{f}\} * \{\hat{f}\}^{*T} \quad (\text{A.9})$$

exprimé dans la base associée à  $f^2(t)$  :

$$base(\{\hat{f}^2\}) = base(\{\hat{f}\}) * base(\{\hat{f}\})^{*T} \quad (\text{A.10})$$

et la valeur de  $f_{RMS}$  sera facilement calculée par :

$$f_{RMS} = \{\hat{f}\}^{*T} * \{\hat{f}\} \quad (\text{A.11})$$

*Cette méthode sera très pratique pour calculer les spectres de fonctions quadratiques dont le spectre d'origine est très riche. On remarque également qu'elle peut être utilisée pour calculer le spectre d'une fonction qui est la multiplication de deux autres fonctions dont on connaît déjà les spectres.*

#### A.1.4 Spectre en demi-exponentiel

En remarquant la *symétrie conjuguée* de la notation précédente, nous pouvons ne représenter qu'une moitié du spectre. On écrit alors :

$$f(t) = \Re(\hat{C}e^{+j\omega t}) \quad (\text{A.12})$$

Cette représentation est beaucoup utilisée par les électrotechniciens. On parle généralement de *phaseurs* (lorsque la variable est l'espace au lieu du temps, on parle de *vecteur d'espace*).

Si cette notation semble plus concise que la notation précédente, elle n'est cependant pas adaptée lorsque l'on travaillera avec des formes quadratiques ou bien des multiplications de fonctions puisque s'il est exacte que :

$$\left( \cos(\omega t) \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} \cdot e^{+j\omega t} \right)^2 \quad (\text{A.13})$$

il est en revanche faux que

$$\left( \cos(\omega t) \right)^2 = \Re \left( \left( e^{+j\omega t} \right)^2 \right) \quad (\text{A.14})$$

## A.2 Fonctions périodiques par rapport à la variable de temps et d'espace – Notions de champs et ondes harmoniques

Dans les sections précédentes, nous avons traité le cas de fonctions harmoniques soit en temps, soit en espace. Un champ – ou une onde – harmonique est une grandeur qui possède une périodicité suivant les deux variables  $t$  et  $x - \theta$  – en même temps. Cette double périodicité peut donc être décomposée en spectre suivant ces deux variables. Ainsi, dans le cas d'une onde plane monochromatique en temps et en espace, c'est-à-dire n'ayant qu'une seule composante harmonique en temps et en espace, l'onde peut être décrite sous la forme de l'équation (A.15).

$$f(t, x) = C \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \quad (\text{A.15})$$

$C$  est l'amplitude,  $\omega$  la pulsation temporelle,  $k$  le nombre d'onde et  $\varphi$  la phase de cette onde. Dans le cas où le signe dans le cosinus est positif ( $f(t, x) = C \cos(\omega t + kx + \varphi)$ ), nous nous trouvons dans le cas d'une onde progressant dans le sens des  $x$  décroissant, c-à-d qu'au bout d'un temps  $\Delta t$ , l'onde se sera reproduite identiquement à elle-même à la position  $\Delta x$  négative telle que :

$$\Delta x = -\frac{\omega \Delta t}{k} \quad (\text{A.16})$$

Dans l'équation (A.16), on définit alors le rapport  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  comme la *vitesse de phase*.

$$\Omega_{\text{phase}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\omega}{k} \quad (\text{A.17})$$

L'équation (A.17) confirme bien la vitesse négative de propagation. Pour avoir une onde qui progresse dans le sens des  $x$  croissants, il faut avoir  $f(t, x) = C \cos(\omega t - kx + \varphi)$ , ce qui conduit à un signe opposé pour la vitesse de phase.

En utilisant les outils développés dans les sections précédentes, on voit que l'on peut généraliser l'étude spectrale en deux dimensions, c'est-à-dire en obtenant non pas un spectre classique mais un spectre en *deux dimensions* (temps et espace). Dans le cas de l'onde monochromatique à vitesse négative (*inverse*) définie précédemment et en utilisant la notation exponentielle, nous obtenons :

$$f(t, x) = \frac{\hat{C}^*}{2} e^{-j(\omega t + kx)} + \frac{\hat{C}}{2} e^{+j(\omega t + kx)} \quad (\text{A.18})$$

Soit, une raie d'amplitude  $C$ , de phase  $-\varphi$  aux rangs de temps  $-\omega$  et d'espace  $-k$  et une seconde raie, également d'amplitude  $C$  mais de phase

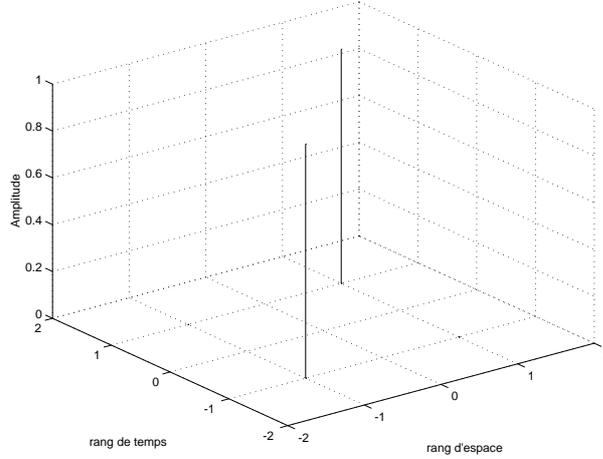


FIG. A.4 – amplitude du spectre en deux dimensions d’une onde plane *inverse* d’amplitude 1, de pulsation spatiale et temporelle 1 ( $\omega = \pm 1$  et  $k = \pm 1$ )

$\varphi$  aux rangs de temps  $\omega$  et d’espace  $k$ . Ce qui correspond pour le spectre d’amplitude exprimé en terme de fonctions exponentielles à la figure A.4.

Nous pouvons, comme pour les fonctions qui ne dépendent que d’une variable, utiliser la notation vectorielle généralisée pour deux dimensions. Nous obtenons pour une onde plane progressant dans le sens des  $x$  décroissants de pulsation  $\omega$ , de nombre d’onde  $k$  et d’amplitude  $C$  :

$$\{\hat{f}\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{C}^*}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\hat{C}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{vecteur spectre de la fonction } f(t, x) \quad (\text{A.19})$$

$$\text{base}(\{\hat{f}\}) = \begin{pmatrix} e^{-j(\omega t + kx)} \\ e^{-j(\omega t - kx)} \\ e^{j0} = 1 \\ e^{+j(\omega t - kx)} \\ e^{+j(\omega t + kx)} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{base dans laquelle est exprimé le} \\ \text{vecteur spectre de de la fonction} \end{array} \quad (\text{A.20})$$

$$f(t) : f(t) = \{\hat{f}\}^T \cdot \text{base}(\{\hat{f}\})$$

Dans le cas de champs tournants dans l’entrefer d’une machine, la variable d’espace n’est plus  $x$  mais  $\theta$ . Nous avons *nécessairement* une périodicité sur un tour, nous pouvons conserver la même description que pour une onde plane. Ainsi, pour un champ tournant inverse d’amplitude  $C$ , de nombre

d'onde  $k$  et de pulsation  $\omega$ , ce dernier peut être exprimé sous la forme :

$$f(t, \theta) = \frac{\hat{C}^*}{2} e^{-j(\omega t + k\theta)} + \frac{\hat{C}}{2} e^{+j(\omega t + k\theta)} \quad (\text{A.21})$$

La vitesse de rotation  $\Omega$  de ce champ vaudra  $-\frac{\omega}{k}$  et le nombre de noeuds vaudra  $2k^5$ .

Dans les figures qui vont suivre, nous visualiserons le spectre 2D ainsi que la représentation *spatiale* d'un champ pour différentes valeurs de  $k$  et de  $\omega$  dans les cas où ce champ est composé d'un seul champ élémentaire – monochromatique – ou de plusieurs – harmoniques.

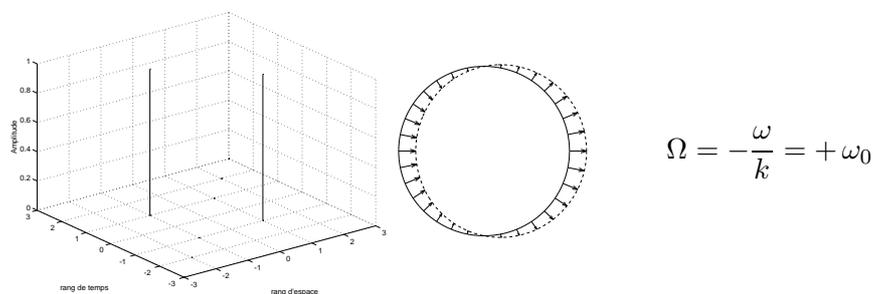


FIG. A.5 – champ tournant direct monochromatique :  $n = \pm 1$  ( $\omega = \pm 1 \cdot \omega_0$ ) et  $k = \mp 1$

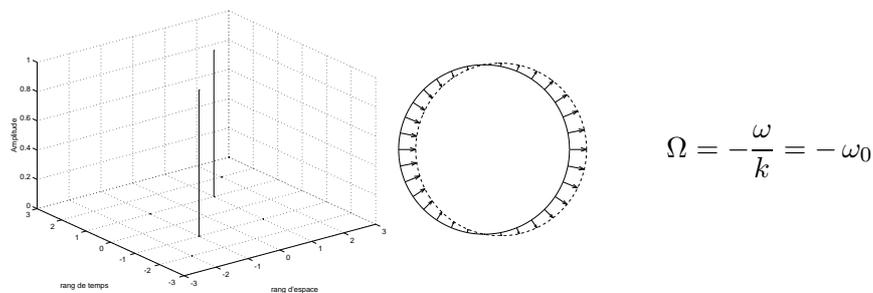


FIG. A.6 – champ tournant inverse monochromatique :  $n = \pm 1$  ( $\omega = \pm 1 \cdot \omega_0$ ) et  $k = \pm 1$

---

<sup>5</sup>on rappelle qu'un noeud est un point où l'amplitude du champ est nulle

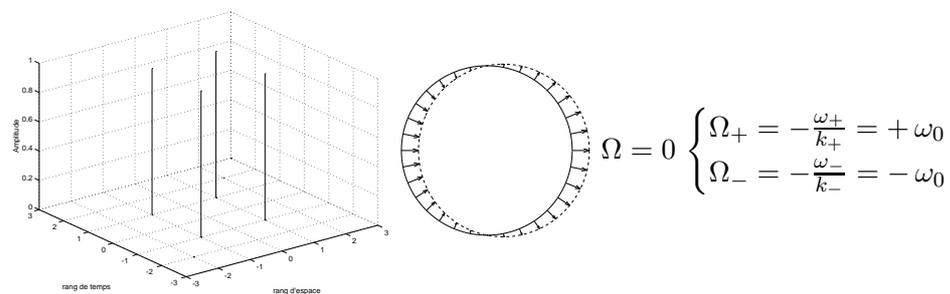


FIG. A.7 – champ stationnaire monochromatique, réunion des deux cas précédents pour une même amplitude

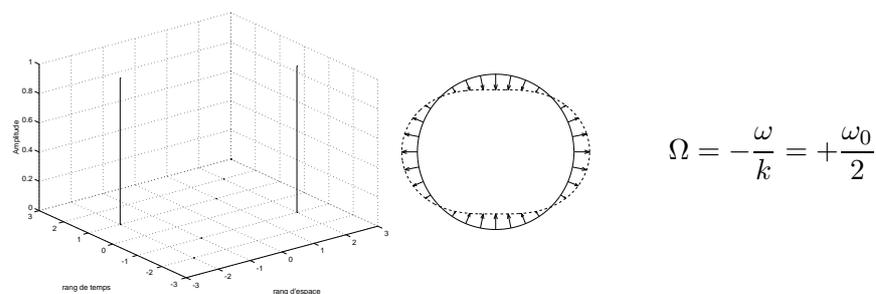


FIG. A.8 – champ tournant direct monochromatique :  $n = \pm 1$  ( $\omega = \pm 1 \cdot \omega_0$ ) et  $k = \mp 2$

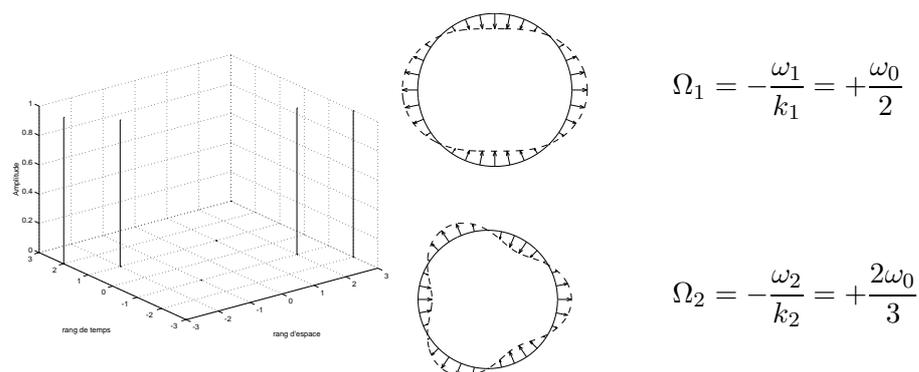


FIG. A.9 – superposition de deux champs tournants (champ 1 :  $n = \pm 1$  ( $\omega_1 = \pm 1 \cdot \omega_0$ ) et  $k_1 = \mp 2$ , champ 2 :  $n = \pm 2$  ( $\omega_2 = \pm 2 \cdot \omega_0$ ) et  $k_2 = \mp 3$ )

## Annexe B

# Compléments au chapitre sur la conversion d'énergie électromagnétique

Cette annexe regroupe les différents calculs qui complètent le chapitre 3 mais qui n'y ont pas été insérés afin d'en faciliter la lecture. Cette annexe regroupe principalement des démonstrations et des approfondissements de calculs qui peuvent être évités en première lecture. De plus, ces approfondissements font parfois appel à des techniques qui ne sont vues que plus loin dans la rédaction du chapitre 3, c'est pourquoi, il est préférable de lire ces annexes après une lecture complète du chapitre 3.

### B.1 Tensions induites au rotor et champs créés par ce dernier

Cette section regroupe un complément à la sous section 3.2.1. Le but est de calculer les tensions induites au rotor d'une machine asynchrone en fonction des harmoniques de champs créés par le stator. Une fois, ces tensions induites calculées, on essaiera de montrer que ces harmoniques de tensions créent à leur tour des harmoniques de *réaction rotoriques* – soit des phénomènes de troisième ordre – qui apparaissent au stator. On montrera cependant que ces phénomènes sont suffisamment faibles pour être négligés. Ceci permettra dans la suite du chapitre 3, la simplification des schémas pour la réalisation d'un modèle tensions-courants pour la machine asynchrone.

#### B.1.1 Position du problème

Dans le cas d'une machine à double alimentation (machine synchrone ou à courant continu), on injecte des courants séparés au rotor et au stator. On peut donc contrôler indépendamment ces deux paramètres. Puis, à l'aide de

la méthode décrite dans la section 3.3, nous pouvons connaître les champs magnétiques provenant du stator ou du rotor. La machine asynchrone est une machine à simple alimentation, c'est-à-dire que seul le courant statorique peut être contrôlé directement. Le courant rotorique résulte de l'apparition d'une force électromotrice (ou tension induite) produite par sa variation par rapport aux bobinages situés au rotor du flux statorique traversant l'entrefer. On ne peut donc contrôler le courant au rotor indépendamment de celui du stator.

Dans un premier temps, nous allons calculer le contenu spectral des tensions induites au rotor afin de connaître le contenu spectral des courants qui circulent dans le rotor. Nous montrerons ensuite, comment ce courant va, à son tour, créer un champ de force magnétomotrice dans l'entrefer – et donc un champ d'induction magnétique – qui créera également des harmoniques de tension au stator.

### B.1.2 Tensions induites au rotor

Pour faire apparaître une tension induite (force électromotrice) aux bornes d'un bobinage, il faut faire varier le flux magnétique qui le traverse. En conséquence, si le stator crée un champ tournant à vitesse fixe dans l'entrefer (par exemple celle du synchronisme), il faut nécessairement que les bobinages (et donc le rotor) tournent à une vitesse différente de ce champ pour qu'il y ait une variation du flux traversant le bobinage et donc une force électromotrice induite. Ce mode de fonctionnement est à l'origine du nom de la machine étudiée puisque pour fonctionner correctement (fournir un couple) le rotor sera nécessairement asynchrone par rapport au champ statorique principal.

Dans le cas de notre machine (rotor à cage), les phases ne pouvant être parfaitement définies, elles seront remplacées par  $Z_r$  mailles élémentaires constituées par deux barres adjacentes et des morceaux de couronnes de court-circuit qui les relie (il y a donc autant de mailles que de barres au rotor). Pour connaître le courant d'une barre, il suffit de faire la somme des courants des mailles qui incluent cette barre.

Soit un champ tournant élémentaire créé par le stator :

$$B_s = B_s(n, m) \cos(n\omega t + m\theta + \varphi(n, m)) \quad (\text{B.1})$$

Nous allons calculer la tension que ce champ va induire aux bornes de la maille  $k$ . Pour cela, écrivons  $B_s$  sous sa forme exponentielle (cf. annexe A) :

$$B_s = \frac{\hat{B}_s^*(n, m)}{2} e^{-j(n\omega t + m\theta)} + \frac{\hat{B}_s(n, m)}{2} e^{+j(n\omega t + m\theta)} \quad (\text{B.2})$$

avec  $\hat{B}_s(n, m)$  nombre complexe valant  $B_s(n, m)e^{j\varphi(n, m)}$ . Si on désire connaître le champ créé en un point  $M$  de l'entrefer, on peut exprimer la position de

ce point dans le repère lié au stator  $\mathfrak{R}_0$  ou bien dans un repère lié au rotor  $\tilde{\mathfrak{R}}_0$ .

$\mathfrak{R}_0$  est le repère lié au stator : le point  $M$  est repéré par sa position  $\theta$ .  
 $\tilde{\mathfrak{R}}_0$  est le repère lié au rotor, centré sur la maille 0 : le point  $M$  est repéré par sa position  $\tilde{\theta}_0$ .  
 $\tilde{\mathfrak{R}}_k$  est le repère lié au rotor, centré sur la maille  $k$  : le point  $M$  est repéré par sa position  $\tilde{\theta}_k$ .

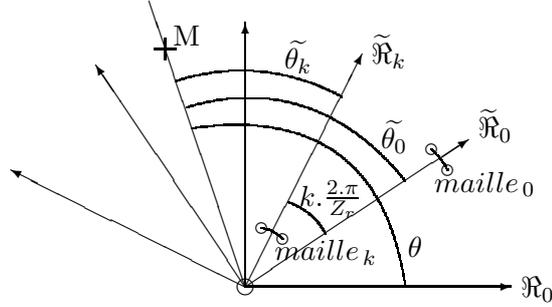


FIG. B.1 – Présentation des différents repères utilisés pour localiser la position d'un point  $M$  situé au centre de l'entrefer

Si nous désignons par  $\alpha_y = \frac{2\pi}{Z_r}$  l'angle entre deux barres rotorique adjacentes,  $R_0$  le rayon moyen d'entrefer,  $l_f$  la longueur de fer de la machine, on peut exprimer le flux vu par la maille  $k$  comme l'intégrale de surface dans le repère  $\tilde{\mathfrak{R}}_k$  :

$$\Phi_k = \int_{-l_f/2}^{+l_f/2} \int_{-\alpha_y/2}^{+\alpha_y/2} B_s(\tilde{\theta}_k, t) R_0 d\tilde{\theta}_k dz \quad (\text{B.3})$$

Soit, en utilisant le changement de repère qui permet de passer du repère *statique* lié au stator au repère lié à la  $k^{ieme}$  maille rotorique :

$$\theta = \Omega_{rotor} \cdot t + k \cdot \frac{2\pi}{Z_r} + \tilde{\theta}_k \quad (\text{B.4})$$

ainsi qu'en utilisant le formalisme exponentiel qui est mieux adapté à l'intégration que les fonctions sinusoïdales :

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{-l_f/2}^{+l_f/2} \int_{-\alpha_y/2}^{+\alpha_y/2} \left( \frac{\hat{B}_s^*(n, m)}{2} e^{-j(n\omega t + m \cdot (\Omega_{rotor} \cdot t + k \cdot \frac{2\pi}{Z_r} + \tilde{\theta}_k))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{B}_s(n, m)}{2} e^{+j(n\omega t + m \cdot (\Omega_{rotor} \cdot t + k \cdot \frac{2\pi}{Z_r} + \tilde{\theta}_k))} \right) R_0 d\tilde{\theta}_k dz \\ &= l_f \cdot R_0 \cdot \alpha_y \cdot \frac{\sin(\frac{m \cdot \alpha_y}{2})}{(\frac{m \cdot \alpha_y}{2})} \cdot \left( \frac{\hat{B}_s^*(n, m)}{2} e^{-j(n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{B}_s(n, m)}{2} e^{+j(n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right) \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

Dans le cas où nous utiliserions un rotor dont les encoches seraient *inclinaées* d'un angle  $\gamma$ , les bornes angulaires seraient liées à la variable  $z$  telles que :

$$\Phi_k = \int_{-l_f/2}^{+l_f/2} \int_{-\alpha_y/2 + \frac{\gamma}{R_0} \cdot z}^{+\alpha_y/2 + \frac{\gamma}{R_0} \cdot z} B_s(\tilde{\theta}_k, t) R_0 d\tilde{\theta}_k dz \quad (\text{B.6})$$

ce qui conduit à la nouvelle solution :

$$\begin{aligned} \Phi_k = l_f \cdot R_0 \cdot \alpha_y \cdot \frac{\sin\left(\frac{m \cdot \alpha_y}{2}\right)}{\left(\frac{m \cdot \alpha_y}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{m \cdot \gamma \cdot l_f}{2 \cdot R_0}\right)}{\left(\frac{m \cdot \gamma \cdot l_f}{2 \cdot R_0}\right)} \left( \frac{\hat{B}_s^*(n, m)}{2} e^{-j(n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right. \\ \left. + \frac{\hat{B}_s(n, m)}{2} e^{+j(n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right) \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

Posons  $\zeta_{\alpha_y, m} = \frac{\sin\left(\frac{m \cdot \alpha_y}{2}\right)}{\left(\frac{m \cdot \alpha_y}{2}\right)}$  qui n'est autre que le *coefficient de bobinage* d'un rotor à cage,  $\zeta_{\gamma, m} = \frac{\sin\left(\frac{m \cdot \gamma \cdot l_f}{2 \cdot R_0}\right)}{\left(\frac{m \cdot \gamma \cdot l_f}{2 \cdot R_0}\right)}$  qui n'est autre que le *facteur d'inclinaison des encoches rotor (skew factor)* et déduisons en la tension induite au bornes de la maille  $k$  du rotor.

$$\begin{aligned} e_{r,k} &= -\frac{d\Phi_k}{dt} \\ &= \frac{1}{j^2} \cdot l_f \cdot R_0 \cdot \alpha_y \cdot \zeta_{\alpha_y, m} \cdot \zeta_{\gamma, m} \cdot \\ &\quad \left( -\frac{\hat{B}_s^*(n, m)}{2} \cdot j(n\omega + m \cdot \Omega_{rotor}) \cdot e^{-j(n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hat{B}_s(n, m)}{2} \cdot j(n\omega + m \cdot \Omega_{rotor}) \cdot e^{+j(n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right) \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

qui prend la forme du terme sinusoïdal :

$$\begin{aligned} e_{r,k} &= l_f \cdot R_0 \cdot \alpha_y \cdot \zeta_{\alpha_y, m} \cdot \zeta_{\gamma, m} \cdot B_s(n, m) \cdot (n\omega + m \cdot \Omega_{rotor}) \cdot \\ &\quad \sin\left((n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor} \cdot t) + \varphi(n, m) + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r}\right) \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

L'observation de  $e_{r,k}$  conduit aux remarques suivantes :

1. les  $Z_r$  tensions  $e_{r,k}$  forment un système polyphasé équilibré de tensions
2. ce système est en quadrature avec le champ  $B_s$  qui lui a donné naissance
3. il y a autant d'harmoniques de temps dans ce système qu'il y a d'harmoniques d'espace dans la répartition de bobinage du stator : une harmonique de temps  $n\omega$  du courant statorique induit donc, non pas *une* mais *des* harmoniques de temps de rangs  $(n\omega + m \cdot \Omega_{rotor})$  où  $m$  désigne le rang des harmoniques d'espace du champ statorique (donc de la répartition du bobinage statorique)

Dans le cas d'un stator à répartition non sinusoïdale,  $m$  prenant plusieurs valeurs, les courants rotoriques seront inévitablement plus riches en harmoniques de temps que le courant statorique ne l'était. Nous remarquerons finalement que, par *réaction d'induit*, cette *richesse* est ensuite ré-induite au stator via le champ rotorique et ce jusqu'à créer un état d'équilibre final. Ce phénomène de *contre-réaction* correspond en fait au phénomène de troisième ordre qui est pris en compte dans le schéma de ALGER FIG. 3.2 et de CHAVERNOZ et PADELOUP FIG. 3.3. Ces phénomènes de *réaction* du rotor sont assez complexes, nous allons montrer dans la sous-section suivante que les sous-harmoniques de tensions ré-induites au stator sont suffisamment faibles pour être négligées sans faire *trop* d'erreurs et ainsi nous ne conserverons que le fondamental de ces sous-harmoniques.

### B.1.3 Champ de force magnétomotrice créé par le rotor

Dans la sous-section précédente, nous avons montré quel contenu spectral allaient prendre les tensions induites au rotor. Le comportement électrique de la machine étant supposé linéaire (pas de saturation), les courants dans les différentes mailles du rotor auront donc les mêmes composantes spectrales avec cependant une amplitude et un déphasage différents. Le courant dans la maille  $k$  prendra donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} i_{r,k} &= i_r(n, m) \cdot \sin \left( (n\omega t + m \cdot \Omega_{rotor}) + \varphi(n, m) + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r} + \varphi_{e_{r,k} \rightarrow i_{r,k}} \right) \\ &= -\frac{\hat{i}_r^*(n, m)}{2j} \cdot e^{-j((n\omega + m \cdot \Omega_{rotor}) \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \\ &\quad + \frac{\hat{i}_r(n, m)}{2j} \cdot e^{+j((n\omega + m \cdot \Omega_{rotor}) \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

avec  $\hat{i}_r(n, m)$  nombre complexe valant  $i_r(n, m) \cdot e^{j(\varphi(n, m) + \varphi_{e_{r,k} \rightarrow i_{r,k}})}$  dans lequel  $\varphi_{e_{r,k} \rightarrow i_{r,k}}$  définit le déphasage entre tension induite dans une maille du rotor  $e_{r,k}$  et courant qui y circule  $i_{r,k}$ .

De même qu'à la sous-section 3.3.1, nous utilisons la définition de la fonction de répartition pour chaque maille  $k$  du rotor ainsi que le spectre d'espace associé défini dans le repère  $\mathfrak{R}_k$ .

La fonction de répartition pouvant être définie comme le nombre de spires corrigé par les *coefficients de bobinage* associés à chaque rang d'espace ; au rang  $\tilde{m}$  correspondra une répartition du rotor – et donc un nombre de spires – de la forme :

$$\begin{aligned} r_r(\tilde{\theta}_k) &= r_r(\tilde{m}) \cos(\tilde{m} \cdot \tilde{\theta}_k + \varphi_{\tilde{m}}) \\ &= \frac{\hat{r}_r^*(\tilde{m})}{2} \cdot e^{-j\tilde{m} \cdot \tilde{\theta}_k} + \frac{\hat{r}_r(\tilde{m})}{2} \cdot e^{+j\tilde{m} \cdot \tilde{\theta}_k} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

avec toujours  $\hat{r}_r(\tilde{m})$  nombre complexe valant  $r_r(n, m) \cdot e^{j(\varphi_{\tilde{m}})}$ . De même que dans la sous-section 3.3.1, le champ de force magnétomotrice créé par une

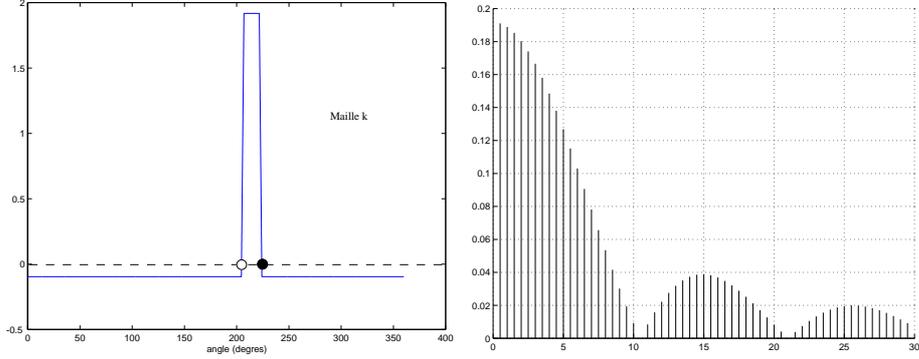


FIG. B.2 – répartition pour une phase d'un rotor à cage et spectre associé

phase du rotor (maille  $k$ ) vaut :  $fmm_{r,k}(t, \tilde{\theta}_k) = \frac{1}{2} \cdot r_r(\tilde{\theta}_k) \cdot i_{r,k}$  dans le repère  $\tilde{\mathfrak{R}}_k$  (repère lié au centre de cette maille). Soit en utilisant la notation exponentielle :

$$fmm_{r,k}(t, \tilde{\theta}_k) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\hat{r}_r^*(\tilde{m})}{2} \cdot e^{-j\tilde{m} \cdot \tilde{\theta}_k} + \frac{\hat{r}_r(\tilde{m})}{2} \cdot e^{+j\tilde{m} \cdot \tilde{\theta}_k} \right) \cdot \left( -\frac{\hat{i}_r^*(n, m)}{2j} \cdot e^{-j((n\omega + m \cdot \Omega_{rotor}) \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} + \frac{\hat{i}_r(n, m)}{2j} \cdot e^{+j((n\omega + m \cdot \Omega_{rotor}) \cdot t + m \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right) \quad (\text{B.12})$$

Utilisons le changement de variable qui permet de passer de  $\tilde{\theta}_k$  à  $\theta$  ( $\theta = \Omega_{rotor} \cdot t + k \cdot \frac{2\pi}{Z_r} + \tilde{\theta}_k$ ). Cette substitution permet d'exprimer le champ dans le repère  $\mathfrak{R}_0$  (lié au stator et de variable  $\theta$ ).

$$fmm_{r,k}(t, \theta) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\hat{r}_r^*(\tilde{m})}{2} \cdot \frac{\hat{i}_r^*(n, m)}{2j} \cdot e^{-j(n \cdot \omega t + \tilde{m} \theta + (m - \tilde{m}) \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + (m - \tilde{m}) \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} + \frac{\hat{r}_r^*(\tilde{m})}{2} \cdot \frac{\hat{i}_r(n, m)}{2j} \cdot e^{+j(n \cdot \omega t - \tilde{m} \theta + (m + \tilde{m}) \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + (m + \tilde{m}) \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} - \frac{\hat{r}_r(\tilde{m})}{2} \cdot \frac{\hat{i}_r^*(n, m)}{2j} \cdot e^{-j(n \cdot \omega t - \tilde{m} \theta + (m + \tilde{m}) \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + (m + \tilde{m}) \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} + \frac{\hat{r}_r(\tilde{m})}{2} \cdot \frac{\hat{i}_r(n, m)}{2j} \cdot e^{+j(n \cdot \omega t + \tilde{m} \theta + (m - \tilde{m}) \cdot \Omega_{rotor} \cdot t + (m - \tilde{m}) \cdot k \cdot \frac{2\pi}{Z_r})} \right) \quad (\text{B.13})$$

De même qu'à la sous-section 3.3.1, nous pouvons montrer qu'un déphasage non nul des termes exponentiels conduit à un système polyphasé équilibré

de force magnétomotrice, la résultante est alors toujours nulle. Inversement, un déphasage nul (modulo  $2\pi$ ) conduit à  $Z_r$  termes identiques, la résultante est, dans ce cas, égale à  $Z_r$  fois le terme dû à une phase. La résultante n'est donc différente de zéro que si  $(m \pm \tilde{m})$  est un multiple de  $Z_r$ . En choisissant *arbitrairement* dans cette démonstration  $\tilde{m}$  de même signe que  $m$ , seul  $(m - \tilde{m})$  multiple de  $Z_r$  peut créer un champ résultant.

1. multiplicité nulle :  $(m - \tilde{m}) = 0$  implique  $m = \tilde{m}$
2. multiplicité non nulle :  $(m - \tilde{m}) = z_0 \cdot Z_r$ , avec  $z_0 \in \mathbb{Z}^*$ .

Finalement, ces deux cas sont les seuls qui peuvent conduire à la création d'un champ tournant de force magnétomotrice par le rotor.

#### B.1.4 Sous-harmoniques de tensions induites au stator par le rotor

Dans la sous-section précédente, nous avons vu que seuls les cas de multiplicité  $(m - \tilde{m}) = z_0 \cdot Z_r$ , avec  $z_0 \in \mathbb{Z}$  pouvaient conduire à la création d'un champ tournant par le rotor. C'est donc uniquement ces champs là qui peuvent induire des tensions au stator. Chaque  $z_0$  correspondra alors à l'apparition d'un nouveau champ de rang de répartition  $\tilde{m} = (m - z_0 \cdot Z_r)$ . Dans le cas d'un rotor bobiné *bien construit*, les amplitudes des harmoniques d'espace (spectre de la fonction de répartition) sont relativement faibles devant l'amplitude du fondamental. Ainsi la valeur de  $r_r(\tilde{m})$  pour  $z_0$  différent de zéro est souvent négligeable devant le fondamental correspondant à  $z_0 = 0$ . De même, pour un rotor à cage dont le spectre de répartition est représenté sur la FIG. B.2, les harmoniques décroissent moins rapidement que pour un rotor bobiné mais comme le nombre de phases est égal au nombre de barres et que ce dernier est assez élevé (dans notre exemple  $Z_r = 21$ ), si  $\tilde{m}$  est de l'ordre de multiples du nombre de barre  $Z_r$  ( $\tilde{m} = (m - z_0 \cdot Z_r)$ ), l'amplitude  $r_r(\tilde{m})$  associée est suffisamment faible pour être négligée. La résultante de force magnétomotrice créée par le rotor n'est donc finalement plus qu'un champ tournant de même forme et tournant à la même vitesse que le champ magnétique d'induction statorique qui lui a donné naissance – qui correspond à  $m = \tilde{m}$ .

$$fmm_{r,total}(t, \theta) = \frac{1}{2} \cdot Z_r \cdot \left( - \frac{\hat{r}_r^*(\tilde{m})}{2} \cdot \frac{\hat{i}_r^*(n, m)}{2j} \cdot e^{-j(n \cdot \omega t + \tilde{m} \theta)} + \frac{\hat{r}_r(\tilde{m})}{2} \cdot \frac{\hat{i}_r(n, m)}{2j} \cdot e^{+j(n \cdot \omega t + \tilde{m} \theta)} \right) \quad (\text{B.14})$$

ce qui donne, en remplaçant  $\tilde{m}$  par  $m$  :

$$fmm_{r,total}(t, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_r}{2} \cdot r_r(m) \cdot i_r(n, m) \cdot \sin(n \cdot \omega t + m \theta + \varphi_{\tilde{m}=m} + \varphi(n, m) + \varphi_{e_{r,k} \rightarrow i_{r,k}}) \quad (\text{B.15})$$

Pour obtenir le champ d'induction magnétique  $B_r$  créé par le rotor, il suffit de se reporter à la section 3.3 et d'utiliser la fonction de conduction magnétique définie pour le stator. Dans le repère fixe  $\mathfrak{R}_0$ , la position dans l'entrefer est définie de manière unique par les variables  $(t, \theta)$ , la distance d'entrefer – ou son inverse, la conduction magnétique – à appliquer pour passer des champs de force magnétomotrice  $fmm_r$  et  $fmm_s$  aux densités d'induction magnétique  $B_r$  et  $B_s$  est donc identique que ce soit pour le stator ou le rotor pourvu que ces deux champs de force magnétomotrice soient exprimés dans le même repère  $\mathfrak{R}_0$ .

*En conclusion, nous pouvons dire que si, seules les harmoniques de force magnétomotrice d'importance créées par le rotor sont celles telles que  $m = \tilde{m}$ , c'est à dire, de mêmes rangs que les harmoniques de stator qui leur ont donné naissance. Ainsi, comme il en est de même pour le champ magnétique et le flux créé par le rotor, cela signifie qu'il est parfaitement raisonnable de négliger les sous harmoniques de tensions induites par le rotor au stator. Cela correspond à négliger les phénomènes de troisième ordre et il est finalement légitime de ne retenir qu'un schéma semi-complet dans la sous section 3.2.1 au lieu d'un schéma complet.*

## B.2 Calcul des éléments du schéma équivalent

Cette section explique les techniques utilisées pour déterminer tous les éléments présents dans le schéma équivalent utilisé dans la sous section 3.2.2.

### B.2.1 Rappel du schéma

Le schéma utilisé est basé sur un schéma *semi complet* pour chaque harmonique de temps. Les sous harmoniques de tension ré-induites au stator sont négligées (cf. annexe B.1). Cette représentation conduit à l'*empilage* de schémas représenté sur la FIG. B.3.

### B.2.2 Calcul des résistances

Le calcul des résistances  $R_s$  et  $R_r$  se fera de manière classique, c'est-à-dire en déterminant la longueur totale d'un enroulement puis, en connaissant la section et la résistivité des matériaux utilisés, à calculer la résistance globale.

Pour le rotor à cage, on remarquera qu'un enroulement correspond à deux barres adjacentes plus les morceaux de couronnes de court-circuit qui les relient (cf. FIG. B.4).

Dans nos modèles, nous avons tenu compte de l'évolution de résistivité en fonction de la température. Nous avons également tenu compte de l'effet pelliculaire – de peau –, car si cet effet est souvent négligeable pour les basses fréquences, il n'en est pas de même pour les hautes fréquences et notamment

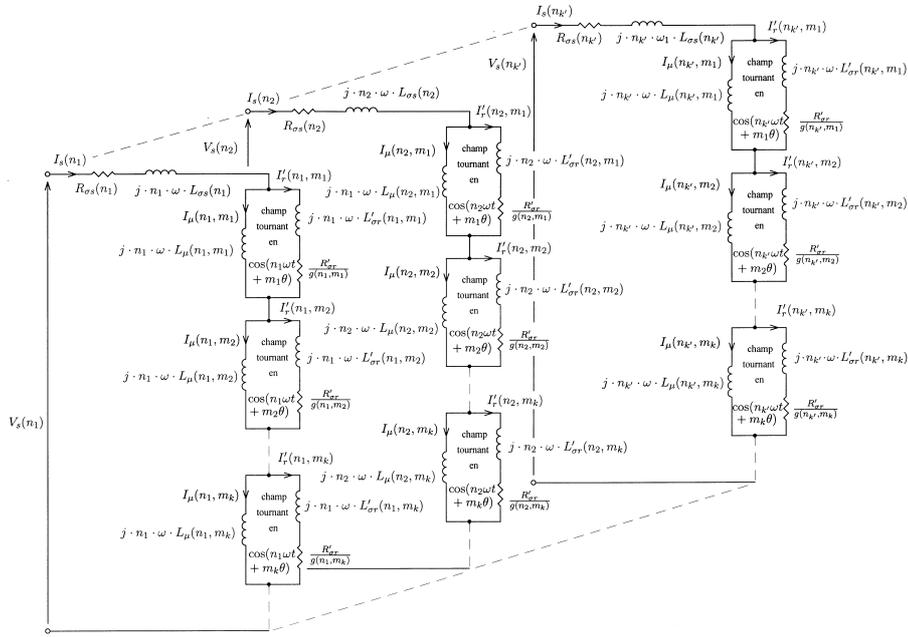


FIG. B.3 – empilage de schémas *semi-complets* représentant le fonctionnement d’une machine asynchrone alimentée par une source de tension riche en harmoniques de temps – chaque *couche* correspond au fonctionnement pour *un seul* harmonique de temps  $n_i\omega$

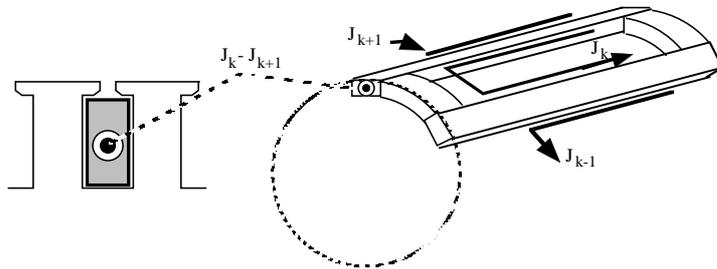


FIG. B.4 – définition d’une phase d’un rotor à cage

celles liées aux harmoniques. Les coefficients de correction ont été tirés de l'ouvrage de M. LIWSCHITZ [LIWSCHITZ67] en fonction de la géométrie des encoches.

### B.2.3 Calcul des inductances de fuites

Les inductances de fuites  $L_{\sigma s}$  et  $L_{\sigma r}$  caractérisent les fuites magnétiques. Ces fuites correspondent aux lignes de champs qui se referment autour d'un bobinage sans traverser l'entrefer. Ces fuites sont parfois appelées *dispersion d'encoche*. Le calcul exact de ces fuites est extrêmement complexe mais peut être approché par des formules empiriques d'assez bonne précision si l'on connaît la géométrie exacte de l'encoche. Pour leurs déterminations, nous nous sommes également reportés à l'ouvrage de M. LIWSCHITZ [LIWSCHITZ67] dans lequel ce phénomène est traité de manière très précise.

### B.2.4 Rapports de transformation : rapport du nombre de spires entre rotor et stator

Les deux sous-sections précédentes permettent de calculer la résistance et l'inductance de fuite au rotor mais ces deux valeurs physiques doivent être ramenées au primaire du schéma équivalent pour être utilisées. Ceci se fait par l'intermédiaire du rapport de nombre de spires entre primaire et secondaire. Par utilisation de la *fonction de répartition* dans le chapitre 3, nous avons montré que notre fonction de répartition était équivalente à un nombre de spires corrigé par les *coefficients de bobinage* pour chaque rang d'espace. Ainsi à un rang d'espace  $m$  – donc à une inductance de magnétisation et à son schéma rotorique associé – correspondent le nombre de spires  $N_s \cdot \zeta_s = r_s(m)$  et  $N_r \cdot \zeta_r = r_r(m)$ . Il faut également remarquer que les nombres de phases du stator et du rotor sont différents puisque d'un côté, nous avons un stator bobiné et de l'autre, un rotor à cage. Le calcul de la force magnétomotrice pour un stator ou un rotor montre la proportionnalité entre nombre de phases et amplitude du champ d'entrefer créé (cf. 3.3.1), nous devons par conséquent tenir compte du rapport de nombre de phases dans le rapport de transformation. Finalement nous obtenons :

$$\text{Rapport de transformation du sous-} \\ \text{schéma de rang d'espace } m = m_t(m) = \frac{Z_s \cdot \hat{r}_s(m)}{Z_r \cdot \hat{r}_r(m)} \quad (\text{B.16})$$

### B.2.5 Calcul des inductances de magnétisation

Nous allons, dans un premier temps, exposer les formules classiques de calculs de l'inductance de magnétisation fondamentale, puis nous essayerons de trouver une formulation généralisée qui permette de tenir compte des harmoniques et ainsi de déterminer toutes les valeurs des inductances de magnétisation du schéma de la FIG B.3.

### Formules classiques pour le fondamental

Dans le cas d'un schéma classique, l'inductance de magnétisation ramenée au primaire  $L_\mu$  est le rapport du flux d'entrefer sur un des courants statoriques. Pour une machine triphasée, on peut utiliser la formulation tirée de la littérature [DEROUANE95] [CHATELAIN83] :

$$L_\mu = \frac{3}{2} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{\pi \cdot R_0 \cdot l_f}{p_0 \cdot k_c \cdot \delta_r} \cdot (N_s \cdot \zeta)^2 \quad (\text{B.17})$$

Écrivons cette inductance avec les différents paramètres que nous avons utilisés dans cette étude. Nous remplaçons 3 par le nombre de phases  $Z_s$ , nous faisons apparaître  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  et nous remplaçons  $k_c \cdot \delta_r$  par la valeur moyenne de la distance de circulation dans l'entrefer  $\delta_0$  (inverse de la conduction magnétique moyenne  $\lambda_0$ ).

$$\begin{aligned} L_\mu &= \frac{Z_s}{2} \cdot \frac{4 \cdot \mu_0}{\pi} \cdot \frac{\pi \cdot R_0 \cdot l_f}{p_0 \cdot \delta_0} \cdot (N_s \cdot \zeta)^2 \\ &= \frac{Z_s \cdot \mu_0 \cdot \pi \cdot R_0 \cdot l_f}{8 \cdot \delta_0} \cdot \left( \frac{4}{\pi} \cdot \zeta \cdot \frac{N_s}{p_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

À l'aide d'une méthode que nous avons développée, nous allons maintenant calculer l'inductance de magnétisation dans le cas général – en tenant compte de tous les harmoniques de temps et d'espace – et nous montrerons que dans le cas du champ fondamental ( $m = p_0$ ), notre calcul se ramène à la formulation de l'inductance de magnétisation dans le cas classique ci-dessus. En étudiant les travaux de B. HELLER et V. HAMATA [HELLERHAMATA77], nous avons décidé de calculer l'inductance de magnétisation à partir d'une formulation énergétique du champ dans l'entrefer. En effet, nous avons d'une part l'énergie magnétique dans l'entrefer  $\mathcal{W}$  qui peut être définie à partir de l'inductance de magnétisation et d'autre part cette même énergie peut être connue à partir des différents champs dans l'entrefer.

### Expression de l'énergie à partir de $L_\mu$

Nous savons que l'énergie magnétique stockée dans une bobine peut être définie par :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \cdot Z_s \cdot L_\mu \cdot (\text{valeur eff. de } i(t))^2 \quad (\text{B.19})$$

soit, avec  $i(t) = \sum_n i_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$  et  $i_n = \sqrt{2} \cdot i_{n,RMS}$

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \cdot Z_s \cdot L_\mu \cdot \sum_n (i_{n,RMS})^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot Z_s \cdot L_\mu \cdot \sum_n \left(\frac{i_n}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot Z_s \cdot L_\mu \cdot \sum_n (i_n)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

On peut également utiliser la notation *exponentielle* décrite dans l'annexe A et la notation *vectorielle* de la section 3.3 pour une représentation plus synthétique dans le cas d'un courant  $i(t)$  périodique mais non sinusoïdal :

$$\{\hat{i}_k\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{i}_n^*}{2} e^{-jnk \frac{2\pi}{Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{i}_1^*}{2} e^{-jk \frac{2\pi}{Z}} \\ \frac{\hat{i}_1}{2} e^{+jk \frac{2\pi}{Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{i}_n}{2} e^{+jnk \frac{2\pi}{Z}} \end{pmatrix} \quad \text{vecteur spectre de courant de la phase } k \quad (\text{B.21})$$

$$\text{base}(\{\hat{i}\}) = \begin{pmatrix} e^{-jn\omega t} \\ \vdots \\ e^{-j\omega t} \\ e^{+j\omega t} \\ \vdots \\ e^{+jn\omega t} \end{pmatrix} \quad \text{base dans laquelle est exprimée le vecteur spectre de courant de la phase } k : i_k(t) = \{\hat{i}_k\}^T \cdot \text{base}(\{\hat{i}\}) \quad (\text{B.22})$$

ce qui revient à écrire l'énergie comme :

$$\mathcal{W} = Z_s \cdot L_\mu \cdot \{\hat{i}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{i}_k\} \quad (\text{B.23})$$

### Expression de l'énergie à partir du champ magnétique $H$

En accord avec l'annexe B.3, nous savons que l'énergie électromagnétique dans l'entrefer  $\mathcal{W}$  se définit par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \cdot \int \int \int_V H \cdot B \, dV \\ &= \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \delta_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \mu_0 \cdot H^2 \, d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

En utilisant tout le travail qui a été réalisé dans le chapitre 3, nous pouvons réécrire  $H$  comme une superposition de champs tournants et ainsi calculer cette intégrale volumique.

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \delta_0 \cdot \mu_0}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \left( \frac{Z_s}{2 \cdot \delta_0} \cdot \sum_n \sum_m \left( \right. \right. \\ & + \frac{\hat{r}^*(m)}{2} \cdot \frac{\hat{i}^*(n)}{2} \cdot e^{-j(n\omega t + m\theta)} \\ & + \frac{\hat{r}(m)}{2} \cdot \frac{\hat{i}(n)}{2} \cdot e^{+j(n\omega t + m\theta)} \\ & \left. \left. \right) \right)^2 d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

ce qui peut se simplifier en utilisant les propriétés d'orthogonalités et le théorème de PARSEVAL en :

$$\mathcal{W} = \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \mu_0 \cdot Z_s^2 \cdot \pi}{32 \cdot \delta_0} \cdot \sum_n i_n^2 \cdot \sum_m r_m^2 \quad (\text{B.26})$$

En utilisant les notations exponentielles et vectorielles définies précédemment pour  $i(t)$  et celle pour  $r(\theta)$  définies ci-dessous :

$$\{\hat{r}_k\} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{r}_m^*}{2} e^{-jmk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{r}_1^*}{2} e^{-jk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \\ \frac{\hat{r}_1}{2} e^{+jk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \\ \vdots \\ \frac{\hat{r}_m}{2} e^{+jmk \frac{2\pi}{p_0 Z}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vecteur spectre de répartition de la} \\ \text{phase } k \end{array} \quad (\text{B.27})$$

$$\text{base}(\{\hat{r}\}) = \begin{pmatrix} e^{-jm\theta} \\ \vdots \\ e^{-j\theta} \\ e^{+j\theta} \\ \vdots \\ e^{+jm\theta} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{base dans laquelle est exprimée le} \\ \text{vecteur spectre de répartition de la} \\ \text{phase } k : r_k(\theta) = \{\hat{r}_k\}^T \cdot \text{base}(\{\hat{r}\}) \end{array} \quad (\text{B.28})$$

Nous remarquons que  $\sum_n i_n^2 = 4 \cdot \{\hat{i}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{i}_k\}$  et que  $\sum_m r_m^2 = 4 \cdot \{\hat{r}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{r}_k\}$ , on peut ainsi écrire l'expression de l'énergie comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \mu_0 \cdot Z_s^2 \cdot \pi}{32 \cdot \delta_0} \cdot 4 \cdot \{\hat{i}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{i}_k\} \cdot 4 \cdot \{\hat{r}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{r}_k\} \\ &= \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \mu_0 \cdot Z_s^2 \cdot \pi}{2 \cdot \delta_0} \cdot \{\hat{i}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{i}_k\} \cdot \{\hat{r}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{r}_k\} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

### Comparaison entre les deux expressions de l'énergie

Comparons alors les deux expressions de l'énergie  $\mathcal{W}$  trouvées précédemment :

1. calculée à partir de l'inductance :

$$\mathcal{W} = Z_s \cdot L_\mu \cdot \{\hat{i}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{i}_k\} \quad (\text{B.30})$$

2. calculée à partir du champ  $H$  :

$$\mathcal{W} = \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \mu_0 \cdot Z_s^2 \cdot \pi}{2 \cdot \delta_0} \cdot \{\hat{i}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{i}_k\} \cdot \{\hat{r}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{r}_k\} \quad (\text{B.31})$$

Par identification, nous trouvons finalement que :

$$L_\mu = \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \mu_0 \cdot Z_s \cdot \pi}{2 \cdot \delta_0} \cdot \{\hat{r}_k\}^{*T} \cdot \{\hat{r}_k\} \quad (\text{B.32})$$

De l'équation B.32, nous remarquons que  $L_\mu$  peut être décomposée en une somme d'inductances élémentaires  $L_\mu(m)$  associées à chacun des champs tournants de rang d'espace  $m$  :  $L_\mu = \sum_m L_\mu(m)$ , avec  $L_\mu(m)$  définie comme  $\frac{l_f \cdot R_0 \cdot \mu_0 \cdot Z_s \cdot \pi}{2 \cdot \delta_0} \cdot (r(m))^2 = \frac{l_f \cdot R_0 \cdot \mu_0 \cdot Z_s \cdot \pi}{8 \cdot \delta_0} \cdot (r(m))^2$ .

En comparant avec l'expression de l'équation (B.18), pour un bobinage à  $p_0$  paires de pôles, nous obtenons pour le fondamental ( $m = p_0$ ),  $r(p_0) = \frac{4}{\pi} \cdot \zeta \cdot \frac{N_s}{p_0}$ , qui correspond bien à la valeur du nombre de spires corrigé dans la définition de la force magnétomotrice fondamentale d'un tel bobinage (cf. par exemple [SEGUIERNOTELET96]). Nous confirmons ainsi que notre fonction  $r(m)$  est bien équivalente au nombre de spires  $N_s$  corrigé par les *coefficients de bobinage* qui tiennent compte de la répartition discrète des encoches et du type de bobinage.

On peut également souligner, qu'avec notre approche, on calcule aisément l'inductance différentielle par  $L_{diff} = \sum_{m, m \neq p_0} L_\mu(m)$ .

*Finalement, nous sommes capables de calculer tous les éléments du schéma équivalent et ce quels que soient les rangs d'espace  $m$  et de temps  $n$  associés à ces composants. Le paragraphe précédent a même permis de redémontrer que notre spectre de fonction de répartition défini à partir d'une Transformée de Fourier Discrète ( $\{\hat{r}\}$ ) correspondait bien à l'équivalent du nombre de spires corrigé par les coefficients de bobinages en fonction du rang des harmoniques d'espace. On peut donc indifféremment utiliser la méthode des coefficients de bobinage ou bien celle développée dans ces travaux pour le calcul de la force magnétomotrice. Cette dernière est cependant plus systématique, est facilement informatisable et s'adapte à tous les bobinages, même aux plus complexes (pas raccourcis et fractionnaires).*

## B.3 Formulation des couples

Cette section traite de la détermination des couples créés par une machine électrique et plus particulièrement, nous nous intéresserons au cas particulier où les champs statoriques et rotoriques peuvent être définis sous la forme de champs tournants harmoniques.

### B.3.1 Formulation générale

Nous pouvons déterminer le couple créé dans l'entrefer d'une machine en utilisant le théorème des *Travaux Virtuels* qui peut s'énoncer ainsi <sup>1</sup> :

**Théorème B.3.1 (Travaux Virtuels)** *La variation d'énergie électromagnétique due à la variation virtuelle de position du rotor est égale à l'opposé du couple créé par la machine.*

ce qui se traduit mathématiquement par :

$$C = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Theta} \quad (\text{B.33})$$

où  $\mathcal{W}$  correspond à l'énergie électromagnétique dans l'entrefer et  $\Theta$  correspond à un déplacement angulaire *virtuel* du rotor. On sait par ailleurs que cette énergie correspond à une intégrale volumique dans l'entrefer du champ magnétique et de la densité de flux magnétique :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \cdot \int \int \int_V H \cdot B dV \quad (\text{B.34})$$

### B.3.2 Application au cas particulier des champs tournants

Dans les sections précédentes, nous avons tenté de formuler les différents champs magnétiques comme la superposition de *champs tournants harmoniques*. Ces champs sont soit créés par le stator, soit par le rotor. Étudions la forme que prendrait le couple dans le cas particulier où le champ statorique et le champ rotorique sont exprimables sous la forme de champs tournants harmoniques. Ce calcul va nous permettre de légitimer l'utilisation et l'utilité de la représentation en champs tournants pour décrire les différents champs d'entrefer.

Soient les champs *élémentaires* statoriques et rotoriques qui peuvent être exprimés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} H_s(t, \theta) &= \hat{H}_s(n_s, m_s) \cdot \sin(n_s \omega t + m_s \theta) \\ H_r(t, \theta) &= \hat{H}_r(n_r, m_r) \cdot \sin(n_r \omega t + m_r(\theta - \varphi_{rs})) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

---

<sup>1</sup>cf. B. HELLER et V. HAMATA [HELLERHAMATA77] où bien J. CHATELAIN [CHATELAIN83]

En étudiant  $C = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Theta}$ , on remarque tout d'abord qu'un *déplacement virtuel* du rotor suivant la variable angulaire revient, pour le rotor, à une variation suivant l'angle  $\varphi_{rs}$ . Cette variation virtuelle revient donc à dériver par rapport à ce déphasage. On remarque ensuite que le champ statorique ne dépend pas de cette variable  $\varphi_{rs}$ , sa variation virtuelle sera donc *nécessairement* nulle. Dès lors, nous pouvons écrire le couple comme :

$$C = -\frac{\mu_0}{2} \cdot \int_{-l_f/2}^{+l_f/2} \int_{R_0-\delta_r/2}^{R_0+\delta_r/2} \int_0^{2\pi} (H_s + H_r) \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi_{rs}} r d\theta dr dz \quad (\text{B.36})$$

L'entrefer étant suffisamment faible et la machine suffisamment longue, on peut considérer que le champ d'entrefer ne dépend ni de  $z$  ni de  $r$ , le champ ne dépend plus que de  $\theta^2$ .

$$\begin{aligned} C &= -\frac{\mu_0}{2} \cdot \int_{-l_f/2}^{+l_f/2} dz \cdot \int_{R_0-\delta_r/2}^{R_0+\delta_r/2} r dr \cdot \int_0^{2\pi} (H_s + H_r) \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi_{rs}} d\theta \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \cdot l_f \cdot R_0 \cdot \delta_r \cdot \int_0^{2\pi} (H_s + H_r) \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi_{rs}} d\theta \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Dans les calculs, nous utilisons la notation exponentielle car elle est très bien adaptée à la combinaison – multiplication – de fonctions trigonométriques.

$$\begin{aligned} H_s(t, \theta) &= -\frac{\hat{H}_s^*(n_s, m_s)}{2j} \cdot e^{-j(n_s \cdot \omega t + m_s \cdot \theta)} \\ &\quad + \frac{\hat{H}_s(n_s, m_s)}{2j} \cdot e^{+j(n_s \cdot \omega t + m_s \cdot \theta)} \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

$$\begin{aligned} H_r(t, \theta) &= -\frac{\hat{H}_r^*(n_r, m_r)}{2j} \cdot e^{-j(n_r \cdot \omega t + m_r \cdot \theta - m_r \cdot \varphi_{rs})} \\ &\quad + \frac{\hat{H}_r(n_r, m_r)}{2j} \cdot e^{+j(n_r \cdot \omega t + m_r \cdot \theta - m_r \cdot \varphi_{rs})} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Le déplacement suivant  $\Theta$  revient à un déplacement suivant  $\varphi_{rs}$  pour le champ rotorique, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial \Theta} &= \frac{\partial H_r}{\partial \varphi_{rs}} = -\frac{\hat{H}_r^*(n_r, m_r)}{2j} \cdot (j \cdot m_r) \cdot e^{-j(n_r \cdot \omega t + m_r \cdot \theta - m_r \cdot \varphi_{rs})} \\ &\quad + \frac{\hat{H}_r(n_r, m_r)}{2j} \cdot (-j \cdot m_r) \cdot e^{+j(n_r \cdot \omega t + m_r \cdot \theta - m_r \cdot \varphi_{rs})} \\ &= -\frac{\hat{H}_r^*(n_r, m_r)}{2} \cdot m_r \cdot e^{-j(n_r \cdot \omega t + m_r \cdot \theta - m_r \cdot \varphi_{rs})} \\ &\quad - \frac{\hat{H}_r(n_r, m_r)}{2} \cdot m_r \cdot e^{+j(n_r \cdot \omega t + m_r \cdot \theta - m_r \cdot \varphi_{rs})} \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

<sup>2</sup>Cette hypothèse s'entend, bien entendu, dans le cas d'un rotor à encoches non *inclinaées* sinon le champ rotorique dépendra *forcement* de  $z$ . Dans le cas d'un entrefer important et en tenant compte de la variation du champ suivant  $r$ , l'intégration analytique fera apparaître des fonctions de *Bessel* qui rendent l'intégration délicate.

Le calcul complet de l'intégrale donne huit termes exponentiels qui en les combinant deux à deux redonnent les fonctions trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned}
C = & + \frac{\mu_0}{2} \cdot l_f \cdot R_0 \cdot \delta_r \cdot \int_0^{2\pi} \left( \right. \\
& + \frac{H_s \cdot H_r}{2} \cdot m_r \cdot \sin \left( (n_s + n_r) \cdot \omega t + (m_s + m_r) \cdot \theta - m_r \cdot \varphi_{rs} \right) \\
& + \frac{H_s \cdot H_r}{2} \cdot m_r \cdot \sin \left( (n_s - n_r) \cdot \omega t + (m_s - m_r) \cdot \theta + m_r \cdot \varphi_{rs} \right) \\
& \left. + \frac{H_r \cdot H_r}{2} \cdot m_r \cdot \sin \left( 2 \cdot n_r \cdot \omega t + 2 \cdot m_r \cdot \theta - 2 \cdot m_r \cdot \varphi_{rs} \right) \right) d\theta
\end{aligned} \tag{B.41}$$

L'intégrale d'une fonction trigonométrique entre zéro et  $2\pi$  est *forcément* nulle puisqu'une telle fonction est périodique de période  $2\pi$ . L'unique moyen pour que cette intégrale soit différente de zéro est que la fonction trigonométrique ne dépende plus de la variable  $\theta$  (elle peut toutefois dépendre de  $t$ ). Pour satisfaire cette condition, deux cas sont à distinguer :

1.  $m_r = m_s = 0$  : ce qui est *impossible* puisque l'on sait qu'une machine asynchrone ne crée pas de champ homopolaire ( $m = 0$ ). Un tel champ n'aurait, en effet, d'autre alternative que de se refermer sur les paliers de la machine pour satisfaire la conservation du flux. Sa distance de circulation très importante limiterait considérablement son amplitude
2.  $m_r \pm m_s = 0$  : ce cas reste donc le cas *unique* à l'origine des couples créés par la machine asynchrone

L'expression du couple prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
C & = \frac{\mu_0}{2} \cdot l_f \cdot R_0 \cdot \delta_r \cdot 2\pi \cdot \frac{\hat{H}_s(n_s, m) \cdot \hat{H}_r(n_r, m)}{2} \cdot m \cdot \\
& \quad \sin \left( (n_s \pm n_r) \omega t + (m_s \pm m_r) \mp \varphi_{rs} \right) \\
& = \frac{\mu_0}{2} \cdot l_f \cdot R_0 \cdot \delta_r \cdot 2\pi \cdot \frac{\hat{H}_s(n_s, m) \cdot \hat{H}_r(n_r, m)}{2} \cdot m \cdot \\
& \quad \sin \left( (n_s \pm n_r) \omega t \mp \varphi_{rs} \right)
\end{aligned} \tag{B.42}$$

En analysant l'équation (B.42), nous remarquons que si  $n_s = \pm n_r$ , nous avons création d'un *couple moyen constant* non nul et tous les autres cas conduisent à la création de couples sinusoïdaux, donc à moyenne nulle qu'on appelle *couples pulsants*.

*Finalement, nous constatons que l'utilisation des champs rotoriques et statoriques sous forme de champs tournants harmoniques conduit à une formulation très pratique des couples. Nous pouvons déterminer de manière*

simple les pulsations de couples et savoir quels champs magnétiques modifier pour réduire ces pulsations et s'approcher ainsi le plus possible d'un couple constant.

## B.4 Forces et Tenseur de Maxwell

Cette section s'intéresse à la détermination des densités d'efforts créées par un champ magnétique, à la définition des différents outils permettant de les calculer et notamment de la notion de *tenseur de Maxwell* (*Maxwell Stress Tensor*)<sup>3</sup>.

### B.4.1 Définition du tenseur de Maxwell

Deux approches inverses sont généralement adoptées, soit la force d'origine magnétique est définie à partir du champ de densité de flux  $B$ , soit inversement, c'est cette densité de flux qui est définie à partir de la force qui est créée. Dans les deux cas, la relation qui lie force exercée sur une charge libre  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  et champs de densité de flux  $\vec{B}$  est la définition de la *force de Lorentz*<sup>4</sup>.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{B.43})$$

La densité de force par unité de volume  $\vec{f}$  est alors définie en utilisant la notion de densité de courant  $\vec{J}$ .

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (\text{B.44})$$

Ces différentes grandeurs sont bien sûr définies en *moyenne*, c'est-à-dire à l'échelle *macroscopique* et non *microscopique*. Quand le matériau est homogène et a une perméabilité constante ( $B = \mu H$ ), en utilisant la loi d'ampère en régime *quasi-statique* ( $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ ), la densité d'effort peut être écrite comme<sup>5</sup> :

$$\mathbf{f} = \mu(\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} \quad (\text{B.45})$$

Ceci est une identité vectorielle qui peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{f} = \mu(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H} - \frac{\mu}{2}\nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \quad (\text{B.46})$$

<sup>3</sup>pour de plus amples renseignements, le lecteur pourra se reporter à l'excellent ouvrage de H.H. WOODSON et J.R. MELCHER [WOODSONMELCHER68]

<sup>4</sup>dans cette expression, nous ne tenons ni compte des *forces magnétostrictives* exercées sur le matériau ferromagnétique, ni des forces d'origines électro-statiques

<sup>5</sup>dans la suite de la section, pour des raisons de commodité d'écriture et de lisibilité, on supprimera les *flèches* sur les vecteurs et on les notera en gras, les composantes des différents vecteurs seront reconnaissables à leurs indices

En utilisant la convention de sommation sur les indices répétés – dite notation de EINSTEIN – qui simplifie les écritures suivantes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_n}{\partial x_n} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \\ \mathbf{H} \cdot \nabla = H_n \frac{\partial}{\partial x_n} = H_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + H_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + H_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

et la fonction de KRONECKER delta  $\delta_{mn}$  définie comme :

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{quand } m = n; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

On écrit l'équation (B.46) pour la  $m^{\text{ième}}$  composante de la densité d'effort  $f$  :

$$f_m = \mu H_n \frac{\partial H_m}{\partial x_n} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} (H_k H_k) \quad (\text{B.49})$$

et en utilisant la propriété du delta de KRONECKER, nous obtenons :

$$f_m = \frac{\partial}{\partial x_n} (\mu H_n H_m - \frac{\mu}{2} \delta_{mn} H_k H_k) - H_m \frac{\partial \mu H_n}{\partial x_n} \quad (\text{B.50})$$

Le terme de droite est nul en respectant la loi de conservation du flux magnétique :

$$H_m \frac{\partial \mu H_m}{\partial x_n} = H_m (\nabla \cdot \mu \mathbf{H}) = H_m (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (\text{B.51})$$

On peut finalement écrire :

$$f_m = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_n} \quad (\text{B.52})$$

avec  $T_{mn}$  appelé *tenseur de Maxwell* (*Maxwell stress tensor*) défini comme :

$$T_{mn} = \mu H_n H_m - \frac{\mu}{2} \delta_{mn} H_k H_k \quad (\text{B.53})$$

Ce tenseur est symétrique ( $T_{mn} = T_{nm}$ ) et nous pouvons voir que la connaissance de  $\mathbf{H}$  – ou de  $\mathbf{B}$  – en un point de l'espace, nous permet de définir parfaitement ce tenseur. Ainsi, la force d'origine magnétique peut être définie à l'aide de ce tenseur de MAXWELL pour la  $m^{\text{ième}}$  composante :

$$F_m = \int_V f_m dV = \int_V \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_n} dV \quad (\text{B.54})$$

On voit également que par utilisation du théorème de la divergence nous obtenons, en définissant  $n_n$  la  $n^{\text{ième}}$  composante du vecteur normal à la surface  $S$  :

$$F_m = \oint_S T_{mn} \cdot n_n da \quad (\text{B.55})$$

On voit finalement qu'on est capable de calculer la force totale appliquée à un volume  $V$  en connaissant uniquement le champ sur une surface  $da$  qui entoure ce volume.

### B.4.2 Discussion sur l'utilisation du tenseur de Maxwell

On a vu dans l'équation (B.55) que  $T_{mn}$  a les dimensions d'un effort par unité de surface. Il est alors tentant de définir le tenseur de MAXWELL comme la force par unité de surface appliquée sur notre matériau magnétique. Ceci est *faux* en toute rigueur, seule l'intégration sur toute la surface a une légitimité physique. Ainsi des travaux tel que [REYNE87] ou bien encore [MEDEIROSREYNEMEUNIER97] ont notamment montré la différence dans la répartition surfacique d'effort suivant le type de représentation utilisée : tenseur de MAXWELL, courants équivalents, travaux virtuels... On notera également que le tenseur de MAXWELL est défini à *une constante près*, c'est-à-dire qu'en ajoutant une fonction *bien choisie* à  $T_{mn}$ , on peut avoir une *répartition surfacique d'effort* totalement différente et néanmoins le même effort *global*  $\mathbf{F}$  après intégration de l'équation (B.55). Cependant, ces différences concernent surtout les matériaux ferromagnétiques durs, c'est-à-dire de type *aimants permanents*. Ainsi, dans certaines conditions – faible saturation, matériau ferromagnétique faible... –, on peut tout de même considérer ce tenseur comme approchant suffisamment bien la densité surfacique *réelle* d'effort pour être utilisée *comme telle* (cf. [LEFÈVRE88] ou [BELAHCENARKKIO00]). C'est pourquoi, il est courant d'utiliser ce tenseur comme la densité surfacique d'effort *réelle* et ainsi avoir une formulation qui pourra être utilisée par la suite pour connaître la réponse dynamique – vibratoire – de la structure [LEFÈVRE97] [BELMANSHAMEYER98].

*Partant de ces hypothèses, nous considérerons le tenseur de MAXWELL comme suffisamment proche de la densité surfacique d'effort pour être utilisé dans nos modèles. Ainsi, en nous intéressant à la composante radiale de l'effort appliquée sur le stator d'une machine électrique, l'expression de l'équation (B.53) peut se simplifier en :*

$$f_{radial} \approx T_{radial} = \frac{B_{radial}^2}{2\mu_0} \quad (\text{B.56})$$

*qui est souvent appelée, dans la littérature, la force de MAXWELL ou MAXWELLIENNE.*

## Annexe C

# Compléments de mécanique vibratoire

Cette annexe regroupe quelques calculs qui complètent le chapitre 4. Nous allons tout d'abord traiter analytiquement les vibrations transversales d'une *poutre continue* puis nous traiterons le comportement vibratoire d'un *anneau mince continu*.

### C.1 Comportement vibratoire d'une poutre en vibrations transversales

On considère la même poutre qu'à la section 4.1 définie sur la FIG. C.1 Ce paragraphe reprendra la même structure que la section 4.1 en simplifiant

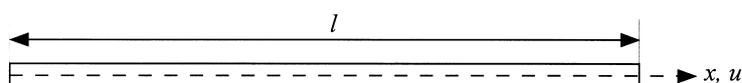


FIG. C.1 – barre en flexion

les notions qui ont été expliquée et en développant des nouvelles. Dans un premier temps, nous utiliserons le modèle de poutre d'EULER qui lie la *courbure* au *moment de flexion* ainsi que l'hypothèse de BERNOULLI consistant à négliger la déformation en *cisaillement*. On verra par la suite un modèle plus précis de poutre qui tient compte de l'*inertie de rotation* et de la *déformation de cisaillement*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>ce modèle plus complet est connu sous le nom de poutre de TIMOSHENKO

### C.1.1 Approche classique : équilibre des forces et théorème de d'Alembert

Les hypothèses cinématiques sont les suivantes :

1. les déplacements sont limités aux déplacements dans le plan ( $Oxy$ )
2. la section droite de la poutre est *indéformable*
3. la composante axiale de déplacement provient uniquement de la rotation de la section droite et cette rotation est telle que les sections droites restent orthogonales à la fibre neutre :

$$u(x, y) = -y \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{C.1})$$

avec  $v$  le déplacement suivant  $y$

4. les déformations de cisaillement sont négligées :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv 0 \quad (\text{C.2})$$

Toutes ces hypothèses correspondent aux hypothèses de BERNOLLI) qui sont représentées sur la FIG. C.2

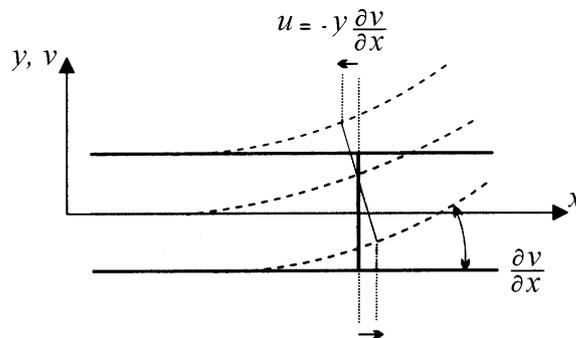


FIG. C.2 – hypothèse de BERNOLLI pour la flexion d'une poutre

Nous avons un élément de poutre soumis aux efforts représentés FIG. C.3, où  $M$  représente le moment de flexion et  $T$  l'effort de cisaillement (*effort tranchant*). La condition d'équilibre dynamique pour les forces suivant la direction  $y$  donne :

$$T - \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - \rho \cdot A \cdot dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.3})$$

La condition d'équilibre pour les moment donne, si nous négligeons l'inertie de rotation de l'élément  $dx$  :

$$-T \cdot dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx \approx 0 \quad (\text{C.4})$$

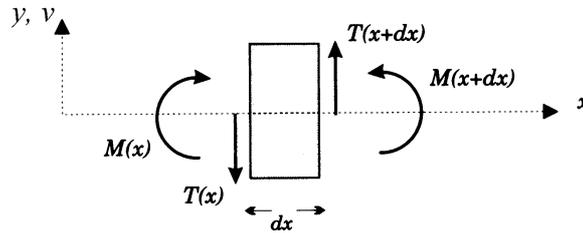


FIG. C.3 – élément de poutre soumis à des efforts de flexion

La théorie de flexion élémentaire dans le cas de la poutre d'EULER-BERNOULLI forme l'hypothèse que la courbure est proportionnelle au moment fléchissant :

$$M = E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{C.5})$$

$I_{Gz} = \int_A y^2 dA$  est le *moment quadratique* de la section – encore appelé *moment de flexion* –,  $E \cdot I_{Gz}$  la *rigidité de flexion* et  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  la courbure.

La combinaison de ces trois équations donne finalement :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \cdot dx = -\rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{C.6})$$

Pour notre poutre *prismatique*, la rigidité de flexion ne dépend pas de  $x$ , on peut écrire l'équation (C.6) sous la forme :

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{C.7})$$

où  $a$  vaut maintenant  $\sqrt{\frac{E \cdot I_{Gz}}{\rho \cdot A}}$ . Le degré en *temps* de l'équation différentielle est deux, il faut donc deux conditions initiales. De même le degré en *espace* étant quatre, il faudra spécifier quatre conditions aux limites qui peuvent être les suivantes :

1. libre :
  - (a) moment de flexion nul :  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$
  - (b) effort de cisaillement nul :  $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$
2. simplement supporté (posé) :
  - (a) déplacement nul :  $v = 0$
  - (b) moment de flexion nul :  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$
3. fixé :
  - (a) déplacement nul :  $v = 0$
  - (b) déformation nulle :  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

### C.1.2 Approche énergétique : énergie cinétique, potentielle, Principe de Hamilton et Équation de Lagrange

Dans le cas d'une barre en flexion, l'énergie de déformation est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \cdot \int_A \int_0^l E \cdot y^2 \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx dA \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^l E \cdot I_{Gz} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

L'énergie cinétique est définie en négligeant l'énergie cinétique de rotation des sections droites. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \cdot \int_A \int_0^l \rho \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx dA \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \rho \cdot A \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

On applique encore les équations de LAGRANGE ou bien le Principe de HAMILTON, on trouve finalement la même équation qu'avec un calcul *classique*, soit :

$$\rho \cdot A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (\text{C.10})$$

qu'il faut de nouveau compléter par des conditions aux limites et initiales adéquates.

### C.1.3 Modes et fréquences propres de la poutre en vibration transversale

Étudions le cas où la rigidité de flexion  $E \cdot I_{Gz}$  et la masse par unité de longueur restent constantes sur la longueur de la poutre (section constante). Pour trouver l'équation des fréquences, on considère toujours que la poutre vibre sur un de ses modes principaux et que le déplacement varie harmoniquement avec le temps. On effectue une séparation des variables  $x$  et  $t$  :

$$v(x, t) = V(x) \cdot (A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)) \quad (\text{C.11})$$

On obtient alors, pour  $V(x)$ , une équation d'ordre quatre de la forme :

$$\frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} - \left( \frac{\omega}{a} \right)^2 \cdot V(x) = 0 \quad (\text{C.12})$$

On pose généralement  $\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 = k^4$ , et on trouve que la solution d'une telle équation est la combinaison linéaire de fonctions *exponentielles complexes*. Ces fonctions exponentielles peuvent aussi être représentées par des fonctions *harmoniques* (sin et cos) et *hyperboliques* (sinh et cosh).

De même qu'à la section 4.1, nous n'allons pas traiter tous les cas de conditions aux limites mais simplement le cas le plus courant, celui de la poutre simplement supportée – appuyée – aux deux extrémités. Ce cas conduit aux conditions aux limites suivantes :

1. déplacement nul en  $x = 0$  et  $x = l$  :

$$v(0, t) = v(l, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{C.13})$$

2. moment de flexion nul en  $x = 0$  et  $x = l$  :

$$\frac{\partial^2 v(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{C.14})$$

La solution sera de la forme :

$$V(x) = C_1 \cdot \cos(kx) + C_2 \cdot \sin(kx) + C_3 \cdot \cosh(kx) + C_4 \cdot \sinh(kx) \quad (\text{C.15})$$

Calculons les dérivées premières et secondes par rapport à la variable d'espace  $x$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -C_1 \cdot k \cdot \sin(kx) + C_2 \cdot k \cdot \cos(kx) \\ &\quad + C_3 \cdot k \cdot \sinh(kx) + C_4 \cdot k \cdot \cosh(kx) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} &= -C_1 \cdot k^2 \cdot \cos(kx) - C_2 \cdot k^2 \cdot \sin(kx) \\ &\quad + C_3 \cdot k^2 \cdot \cosh(kx) + C_4 \cdot k^2 \cdot \sinh(kx) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Injectons ces termes dans les conditions aux limites et déduisons en la valeur des paramètres  $C_i$  :

1. en  $x = 0$ , nous obtenons directement :

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (\text{C.18})$$

2. en  $x = l$ , nous trouvons un système de deux équations à deux inconnues :

$$0 = +C_2 \cdot \sin(kl) + C_4 \cdot \sinh(kl) \quad (\text{C.19})$$

$$0 = -C_2 \cdot k^2 \cdot \sin(kl) + C_4 \cdot k^2 \cdot \sinh(kl) \quad (\text{C.20})$$

que nous pouvons écrire sous forme *matricielle* :

$$\begin{pmatrix} \sin(kl) & \sinh(kl) \\ -k^2 \cdot \sin(kl) & k^2 \cdot \sinh(kl) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Ce système admet une *infinité* de solutions qui correspondent à chacun des modes propres si et seulement si le système n'est pas de CRAMER. Pour cela il faut *nécessairement* que le déterminant de la matrice soit nul.

$$\begin{vmatrix} \sin(kl) & \sinh(kl) \\ -k^2 \cdot \sin(kl) & k^2 \cdot \sinh(kl) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot k^2 \sin(kl) \cdot \sinh(kl) = 0 \quad (\text{C.22})$$

Cette équation est l'*équation caractéristique des fréquences propres*, les solutions non triviales – différentes de zéro – sont :

$$k_i = \frac{i \cdot \pi}{l} \quad (\text{C.23})$$

Nous savons également que  $k$  est lié à  $\omega$  donc :

$$\omega_i = k_i^2 \cdot a = \left(\frac{i \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_{Gz}}{\rho \cdot A}} \quad (\text{C.24})$$

$$V_i(x) = C_i \cdot \sin(k_i x) = C_i \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi}{l} x\right) \quad (\text{C.25})$$

Les fonctions propres de l'équation (C.25) seront représentées FIG. C.4.

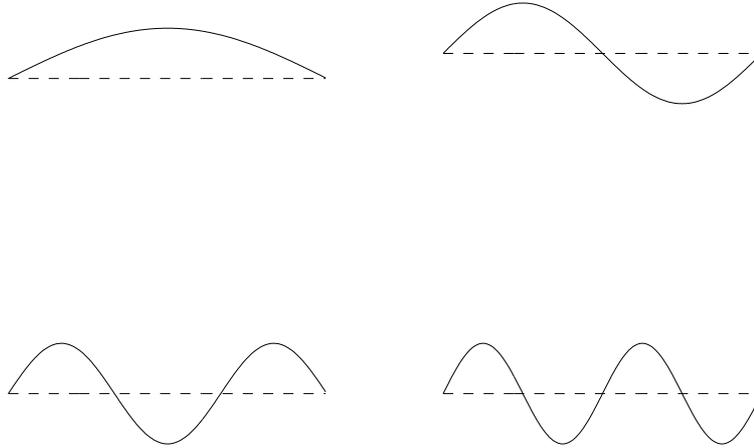


FIG. C.4 – *allure* des quatre premiers modes propres  $V_i(x)$  des vibrations transversales de la barre ( $1 \leq i \leq 4$ )

La solution complète est obtenue à partir des fonctions propres de l'équation (C.25) et de l'équation (C.11), ce qui donne finalement, en posant *arbitrairement*  $C_i = 1$  :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(\frac{i \cdot \pi}{l} x\right) \cdot (A_i \cdot \cos(\omega_i t) + B_i \cdot \sin(\omega_i t)) \quad (\text{C.26})$$

#### C.1.4 Prise en compte de la déformation de cisaillement et de l'inertie de rotation

Les équations qui ont été décrites dans la section précédente sont liées à un modèle simplifié de poutre appelé poutre d'EULER-BERNOULLI. Ce modèle suffit dans le cas où la poutre est très fine par rapport à sa longueur. Cependant dans certains cas, le modèle doit être complété pour tenir compte de deux phénomènes négligés. Le premier est la prise en compte de l'inertie de rotation d'un élément de poutre (négligeable lorsque l'épaisseur est faible). La seconde est la prise en compte de la déformation due à l'effort de cisaillement où il résulte qu'après déformation, les sections ne restent plus perpendiculaires à la fibre moyenne. Nous allons, dans un premier temps, montrer les changements qu'apporte l'inertie de rotation dans l'équation aux dérivées partielles puis nous verrons ce qu'apporte la déformation de cisaillement.

##### Prise en compte de l'énergie cinétique de rotation

De même que précédemment, la condition d'équilibre dynamique pour les forces suivant la direction  $y$  donne :

$$T - \left( T - \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - \rho \cdot A \cdot dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.27})$$

La condition d'équilibre pour les moments donne maintenant, sans négliger l'inertie de rotation de l'élément  $dx$  ( $\theta$  étant l'angle entre la section avant et après déformation) :

$$-T \cdot dx - \frac{\partial M}{\partial x} dx - \rho \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \cdot dx = 0 \quad (\text{C.28})$$

On conserve toujours l'hypothèse que la courbure est proportionnelle au moment fléchissant :

$$M = E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{C.29})$$

et nous savons également que  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$ . La combinaison de ces quatre équations conduit à la nouvelle équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{E \cdot I_{Gz}}{\rho \cdot A} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{I_{Gz}}{A} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (\text{C.30})$$

On peut montrer qu'avec les mêmes conditions aux limites que précédemment, les pulsations propres ont un peu évoluées par rapport au paragraphe précédent<sup>2</sup> :

$$\omega'_i = \frac{\omega_i}{\sqrt{1 + \frac{I}{A} \cdot \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2}} \quad (\text{C.31})$$

<sup>2</sup>Pour plus de détail, on pourra se reporter à [COURBON84]

### Prise en compte de l'inertie de rotation et de la déformation de cisaillement due à l'effort tranchant

Ce modèle est plus connu sous le nom de modèle de poutre de TIMOSHENKO – du nom de son auteur. Ce modèle prend en compte le fait que la déformation soit aussi induite par un cisaillement de la poutre. Ainsi les sections qui, jusqu'alors, étaient perpendiculaires à la fibre neutre<sup>3</sup> ne le sont plus. La déformation est donc désormais la somme des deux déformations reportées sur la FIG. C.5<sup>4</sup>.

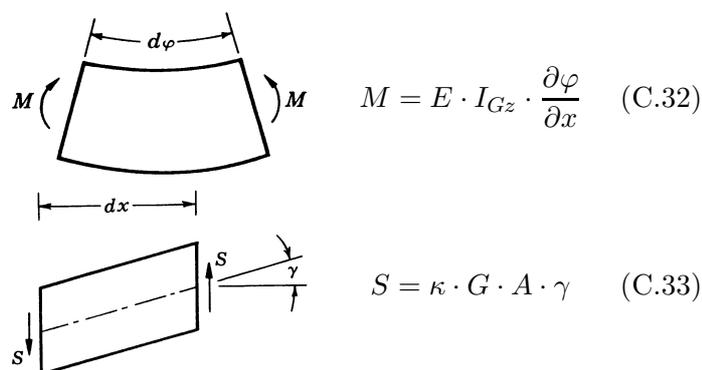


FIG. C.5 – relations constitutives du comportement élastique de la poutre de TIMOSHENKO

Cependant, on ne peut pas avoir de *cisaillement uniforme* sur la section car les deux faces supérieures et inférieures sont libres de contrainte, ceci implique que la force de cisaillement est distribuée de manière non uniforme – distribution parabolique. Pour pouvoir conserver un modèle monodimensionnel, on utilise un moyennage sur la section qui est introduit par le facteur  $\kappa$ . Ce facteur dépend de la section et du type de moyennage. Nous obtenons avec  $\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi$  la déformation de la FIG. C.6

Écrivons les différentes équations pour les nouvelles hypothèses : prise en compte de l'inertie de rotation et de la déformation de cisaillement :

1. Principe de D'ALEMBERT :

(a) translation :

$$-\frac{\partial T}{\partial x} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.34})$$

<sup>3</sup>on rappelle que la fibre neutre est la fibre longitudinale qui ne subit ni élévation, ni compression

<sup>4</sup>on pourra trouver de plus amples renseignements dans l'ouvrage de S.H. Crandall p 344 [CRANDALL<sup>+</sup>68]

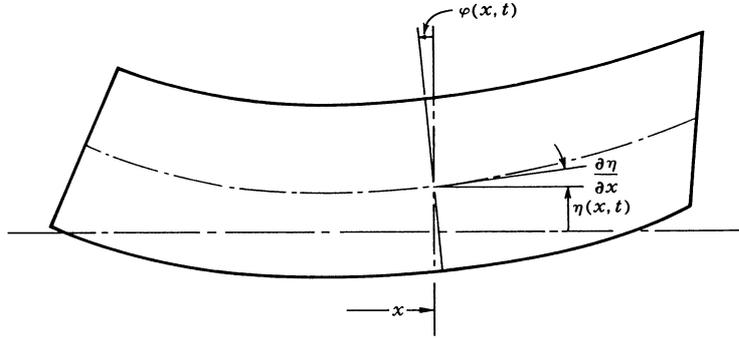


FIG. C.6 – modèle de poutre continue de TIMOSHENKO

(b) rotation :

$$-\frac{\partial M}{\partial x} - T + \rho \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.35})$$

2. relation de flexion avec prise en compte de la déformation de cisaillement :

$$T = \kappa \cdot G \cdot A \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) \quad (\text{C.36})$$

$$M = E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{C.37})$$

Ce qui conduit à un système de deux équations couplées :

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \cdot G \cdot A \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) \right) \quad (\text{C.38})$$

$$\rho \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( E \cdot I_{Gz} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa \cdot G \cdot A \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) \quad (\text{C.39})$$

Pour une poutre uniforme, on peut sortir  $\varphi$  du système d'équation et il reste :

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left( \frac{\rho}{\kappa \cdot G} + \frac{\rho}{E} \right) \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \left( \frac{\rho \cdot A}{E \cdot I_{Gz}} \right) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left( \frac{\rho}{\kappa \cdot G} \cdot \frac{\rho}{E} \right) \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 \quad (\text{C.40})$$

On peut également raisonner à partir des valeurs des énergies cinétiques et potentielles qui valent maintenant :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l E \cdot I_{Gz} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \kappa \cdot G \cdot A \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right)^2 dx \quad (\text{C.41})$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \rho \cdot A \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \rho \cdot I_{Gz} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{C.42})$$

et de nouveau utiliser le Théorème de HAMILTON ou les équations de LAGRANGE, on obtiendrait finalement les mêmes équations.

*On a vu que la prise en compte de ces éléments compliquait considérablement les équations. La prise en compte uniquement de l'énergie cinétique de rotation conduit à une équation moins complexe mais toutes les études montrent que ce phénomène était d'importance moindre que la déformation de cisaillement, il est donc logique de prendre en compte l'inertie de rotation après la déformation due au cisaillement. Dans le cas d'une poutre mince, c'est-à-dire d'épaisseur bien inférieure à la longueur, l'influence de ces deux paramètres reste cependant faible et il est donc acceptable de les négliger et de revenir au modèle de poutre d'EULER-BERNOULLI.*

## C.2 Comportement vibratoire d'un anneau mince

Pour cette étude, nous n'étudierons que la déformation de la fibre moyenne. Dans le cas où l'épaisseur apporte une contribution, cette dernière sera prise en compte au niveau des paramètres  $m_c$  et  $e$  décrits dans la section 4.2 qui modifierons la valeur du moment quadratique et donc également la variation de courbure. Après calcul de l'équation différentielle de la ligne élastique, nous traiterons d'abord du cas de la déformation d'extension puis de la déformation de flexion en utilisant toujours les deux approches – classique ou énergétique.

### C.2.1 Équation différentielle de la ligne élastique

Nous allons étudier l'équation différentielle de la ligne élastique d'une barre courbe mince, à fibre moyenne circulaire. La longueur initiale d'un élément et sa courbure initiale valent :

$$ds = R d\theta \quad (\text{C.43})$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{R \cdot d\theta} = \frac{1}{R} \quad (\text{C.44})$$

Pour une flèche assez faible, après déformation, la courbure est donnée par l'équation (C.45) et la FIG C.7 :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta + \Delta d\theta}{ds + \Delta ds} \quad (\text{C.45})$$

L'angle correspondant à la section  $n_1$  vaut  $\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2} ds$  d'où  $\Delta d\theta = \frac{d^2u}{ds^2} ds$ . La variation de longueur est sensiblement égale à  $\Delta ds = -u d\theta = -\frac{u ds}{R}$ .

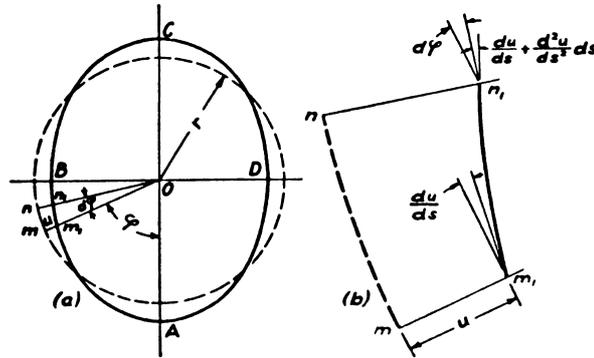


FIG. C.7 – Déformation de la section d'une poutre courbe (notations de la FIG par rapport au texte :  $r_1 = R_1$ ,  $r = R$  et  $\varphi = \theta$ )

On obtient finalement<sup>5</sup> :

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = -\frac{M}{E \cdot I_{Gz}} = \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{R^2} \quad (\text{C.46})$$

### C.2.2 Déformation de flexion

#### Approche classique : forces, déplacements et principe de d'Alembert

Contrairement au cas d'une poutre droite, la courbure initiale apporte un couplage entre les déplacements radiaux  $u$  et tangentiels  $v$ . Ils faut donc calculer ces deux paramètres en même temps.

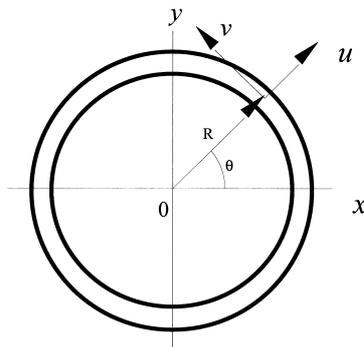


FIG. C.8 – anneau mince

<sup>5</sup> ces différents calculs peuvent être retrouvés dans des ouvrages de résistance des matériaux tels que [TIMOSHENKO68] Tome I p 383–385

Soit  $N$ , l'effort normal à une section,  $T$  l'effort tranchant,  $R$  le rayon initial de l'anneau,  $\rho \cdot A$  la masse par unité de longueur de l'anneau,  $M$  le moment fléchissant et  $h$  l'épaisseur de l'anneau.

En supposant, le rayon  $R$  suffisamment grand devant l'épaisseur  $h$ , nous obtenons à l'aide du principe de D'ALEMBERT le jeu de trois équations suivantes<sup>6 7</sup> :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} + N - \rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.47})$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} - T - \rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{C.48})$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + T \cdot R - I_m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \right) = 0 \quad (\text{C.49})$$

Ces trois équations sont complétées par la condition d'*inextension* de la ligne centrale  $\frac{\partial v}{\partial \theta} = u$  et l'équation différentielle de la ligne élastique que nous avons exprimée précédemment et qui prend maintenant la forme :

$$M = \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (\text{C.50})$$

Pour pouvoir résoudre cette équation analytiquement, on conserve l'hypothèse déjà utilisée pour les barres droites qui consiste à négliger l'inertie de rotation. Cette hypothèse est admise car nous travaillons sur des poutres minces. Nous obtenons :

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} + T \cdot R \approx 0 \quad (\text{C.51})$$

Grâce à ce jeu d'équation, on peut trouver l'équation différentielle pour  $u$  et pour  $v$ . On exprime tout d'abord  $T$  en fonction de  $v$ , nous obtenons :

$$T = -\frac{E \cdot I_{Gz}}{R^3} \cdot \left( \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{C.52})$$

Puis, on en déduit  $N$  :

$$\begin{aligned} N &= \rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial \theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ &= \rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial \theta} - \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^3} \cdot \left( \frac{\partial^5 v}{\partial \theta^5} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

En replaçant le tout dans la dernière équation non utilisée, nous obtenons une équation différentielle pour  $v$  de la forme :

$$\frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \left( \frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2 \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( v - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \quad (\text{C.54})$$

<sup>6</sup>deux en translation (suivant  $\vec{e}_R$  et  $\vec{e}_\theta$ ) et une en rotation (autour de  $\vec{e}_z$ )

<sup>7</sup>ce jeu d'équation a été obtenu par l'auteur à partir du travail réalisé par A.E.H. LOVE sur la vibration des *tores*, dans son ouvrage [LOVE44]

Pour déterminer les *fonctions normales* des vibrations propres, on doit considérer  $v$  comme fonction stationnaire, sinusoïdale en temps. Soit :

$$v(t, \theta) = V(\theta) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{C.55})$$

L'équation (C.54) s'écrit pour  $V(\theta)$  :

$$\frac{\partial^6 V}{\partial \theta^6} + 2 \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot A \cdot R^4 \cdot \omega^2}{E \cdot I_{Gz}}\right) + V \cdot \left(\frac{\rho \cdot A \cdot R^4 \cdot \omega^2}{E \cdot I_{Gz}}\right) = 0 \quad (\text{C.56})$$

La solution d'une telle équation ne peut être que trigonométrique :

$$V(\theta) = \sum_{\nu=1}^3 \left( A_{\nu} \cdot \cos(n_{\nu}\theta) + B_{\nu} \cdot \sin(n_{\nu}\theta) \right) \quad (\text{C.57})$$

Avec les trois  $n_{\nu}$ , racines de l'équation :

$$n^2 \cdot (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1) \cdot \frac{\rho \cdot A \cdot R^4 \cdot \omega^2}{E \cdot I_{Gz}} \quad (\text{C.58})$$

D'après la condition de continuité – anneau entier –,  $n$  doit forcément être *entier* supérieur à l'unité, les pulsations propres sont donc données par l'équation :

$$\omega_n^2 = \frac{E \cdot I_{Gz}}{\rho \cdot A \cdot R^2} \cdot \frac{n^2 \cdot (n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)} \quad (\text{C.59})$$

L'équation pour  $u$  est obtenue en utilisant  $\frac{\partial v}{\partial \theta} = u$ , ainsi, il y a un déphasage spatial de  $\frac{\pi}{2}$  entre  $u$  et  $v$  – les sinus deviennent des cos et inversement. De plus, pour  $n = 1$ , on constate que la pulsation propre est nulle, ceci s'explique par l'allure de la déformée de la FIG C.9 où l'on constate qu'on a un *mode de corps rigide* – un déplacement sans déformation – qui ne peut qu'avoir une pulsation propre nulle pour des conditions aux limites libre-libre. Pour  $n = 2$ , l'anneau est déformé sous son mode fondamental

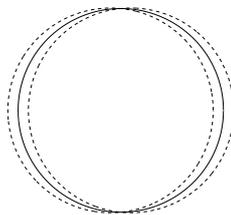


FIG. C.9 – mode de corps rigide de l'anneau –  $n = 1$

de flexion. Le nombre de noeuds<sup>8</sup> augmente alors comme deux fois  $n$  (cf. FIG C.10).

<sup>8</sup>un noeud est un *point* où la déformée est nulle, un ventre est un *point* où la déformée est maximale

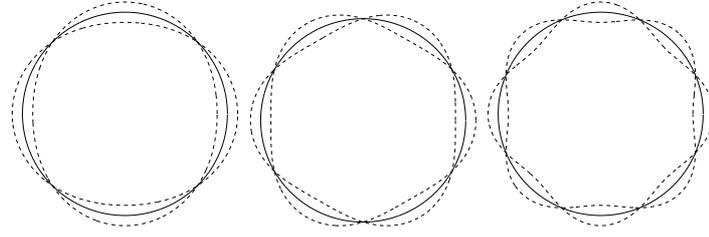


FIG. C.10 – modes de flexion de l'anneau : (a)  $n = 2$ , (b)  $n = 3$ , (c)  $n = 4$

### Approche énergétique : énergie cinétique, potentielle, principe de Hamilton et équations de Lagrange .

On a vu lors de l'étude de l'équation différentielle de la ligne élastique que l'élongation unitaire de la ligne centrale valait  $\varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{u}{R} + \frac{\partial v}{R\partial\theta}$  et que la variation de courbure valait<sup>9</sup> :

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I_{Gz}} = \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{R^2} = \frac{d^2 u}{R^2 \cdot d\theta^2} + \frac{u}{R^2} \quad (\text{C.60})$$

Nous avons pu montrer précédemment que pour le cas le plus général d'une vibration de flexion, nous pouvions exprimer le déplacement  $u$  sous forme d'une série trigonométrique :

$$u(t, \theta) = a_1 \cdot \cos(\theta) + a_2 \cdot \cos(2\theta) + \dots + b_1 \cdot \sin(\theta) + b_2 \cdot \sin(2\theta) + \dots \quad (\text{C.61})$$

où tous les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont des fonctions du temps.

De même que précédemment, on peut considérer les flexions sans extension, on a alors  $\varepsilon_{\theta\theta} = 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial\theta} = u$ , ce qui nous donne pour  $v$  :

$$v(t, \theta) = -a_1 \cdot \sin(\theta) - \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) - \dots + b_1 \cdot \cos(\theta) + \dots \quad (\text{C.62})$$

À partir du moment de flexion de n'importe quelle section  $M = \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u \right)$ , on déduit l'énergie potentielle de flexion, soit :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{E \cdot I_{Gz}}{R^4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u \right)^2 R d\theta \quad (\text{C.63})$$

<sup>9</sup>contrairement à la section sur le calcul de l'équation différentielle de la ligne élastique, on considère dans cette section que  $u$  est défini positif vers l'extérieur de l'anneau, ce qui change les signes de l'équation (C.60)

Les fonctions trigonométriques sont orthogonales entre elles, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos(n_1\theta) \cdot \cos(n_2\theta) d\theta &= 0 & (n_1 \neq n_2) \\
\int_0^{2\pi} \sin(n_1\theta) \cdot \sin(n_2\theta) d\theta &= 0 & (n_1 \neq n_2) \\
\int_0^{2\pi} \cos(n_1\theta) \cdot \sin(n_1\theta) d\theta &= 0 \\
\int_0^{2\pi} \cos^2(n_1\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin^2(n_1\theta) d\theta = \pi
\end{aligned}
\tag{C.64}$$

On obtient donc en remplaçant  $u$  et  $v$  par leurs séries trigonométriques :

$$\mathcal{V} = \frac{E \cdot I_{Gz} \cdot \pi}{2 \cdot R^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^2)^2 \cdot (a_n^2 + b_n^2)
\tag{C.65}$$

L'énergie cinétique prend la forme suivante :

$$\mathcal{T} = \frac{\rho \cdot A}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) R d\theta
\tag{C.66}$$

On obtient de nouveau en remplaçant  $u$  et  $v$  par leurs séries trigonométriques :

$$\mathcal{T} = \frac{\rho \cdot A \cdot R \cdot \pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot (\dot{a}_n^2 + \dot{b}_n^2)
\tag{C.67}$$

Une fois les énergies cinétiques et potentielles connues, on calcule le Lagrangien  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$  que l'on reporte dans les équations de LAGRANGE, solutions du problème de minimisation de l'intégrale d'action  $\mathcal{A}$  pour un système conservatif – n'ayant pas de fonction de dissipation.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right) = 0
\tag{C.68}$$

Les fonctions  $a_n$  et  $b_n$  jouant le rôle des coordonnées généralisées  $q$ . On obtient pour ces deux coordonnées exactement la même équation :

$$\begin{aligned}
\pi \cdot R \cdot \rho \cdot A \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \ddot{q} + \frac{E \cdot I_{Gz} \cdot \pi}{R^3} \cdot (1 - n^2)^2 \cdot q &= 0 \\
\ddot{q} + \frac{E \cdot I_{Gz} \cdot n^2 \cdot (1 - n^2)^2}{\rho \cdot A \cdot R^4 \cdot (1 + n^2)} \cdot q &= 0 & (q = a_n \text{ ou } q = b_n)
\end{aligned}
\tag{C.69}$$

La pulsation propre associée à chaque mode  $n$  est alors définie par :

$$\omega^2 = \frac{E \cdot I_{Gz} \cdot n^2 \cdot (1 - n^2)^2}{\rho \cdot A \cdot R^4 \cdot (1 + n^2)}
\tag{C.70}$$

On retrouve donc exactement la même équation qu'avec la méthode directe. De même pour  $n = 1$ , on obtient  $\omega_1 = 0$ , on a donc  $u = a_1 \cdot \cos(\theta)$  et  $v = a_1 \cdot \sin(\theta)$  : l'anneau tourne avec un mouvement de corps rigide. Pour  $n = 2$ , l'anneau est déformé sous son mode fondamental de flexion.

### C.2.3 Déformation d'extension

#### Approche classique : forces, déplacements et principe de d'Alembert

La vibration d'un anneau comprend également une vibration d'extension analogue à celle d'une poutre droite – vibration longitudinale. L'extension de la ligne centrale  $\varepsilon_{\theta\theta}$  et la tension – force d'extension –  $N$  valent désormais :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \right) \quad (\text{C.71})$$

$$N = E \cdot A \cdot \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{E \cdot A}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \right) \quad (\text{C.72})$$

Les valeurs de la force de cisaillement et du moment fléchissant sont d'ordre quatre de l'épaisseur alors que la force normale est d'ordre deux, on peut donc en première approximation négliger ces deux efforts devant la force normale. Le jeu d'équation ainsi obtenu sera :

$$\rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E \cdot A}{R} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \right) = 0 \quad (\text{C.73})$$

$$\rho \cdot A \cdot R \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{E \cdot A}{R} \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{C.74})$$

De même que précédemment, nous avons un mouvement harmonique en temps et en espace de la forme :

$$u(t, \theta) = \left( A_n \cdot \sin(n\theta) + B_n \cdot \cos(n\theta) \right) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{C.75})$$

$$v(t, \theta) = n \cdot \left( A_n \cdot \cos(n\theta) - B_n \cdot \sin(n\theta) \right) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{C.76})$$

où les pulsations propres valent désormais :

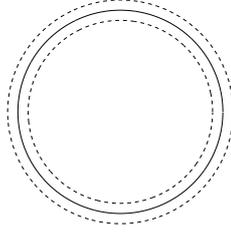
$$\omega_n^2 = \frac{E \cdot A}{\rho \cdot A \cdot R^2} \cdot (1 + n^2) \quad (\text{C.77})$$

On remarque que quand  $n = 0$ ,  $v$  devient nul,  $u$  est indépendant de  $\theta$  et l'équation du mouvement est exactement satisfaite<sup>10</sup>. l'anneau vibre radialement et la ligne centrale forme un cercle de rayon variable périodiquement. Les sections bougent alors radialement sans rotation suivant la FIG C.11.

#### Approche énergétique : énergie cinétique, potentielle, principe de Hamilton et équations de Lagrange .

Dans la section précédente, nous avons vu qu'il y avait une infinité de mode d'extension de l'anneau mais que nous ne conservions que le premier,

<sup>10</sup>Les valeurs des pulsations propres d'extension ne sont connues analytiquement exactement que pour le mode  $n = 0$ , pour les autres valeurs de  $n$ , la formule (C.77) n'est qu'une solution approchée (cf. [LOVE44])

FIG. C.11 – déformation d'extension de l'anneau –  $n = 0$ 

c'est à dire celui correspondant à  $n = 0$  et  $v = 0$ . Dans ce cas, l'allongement unitaire de l'anneau dans la direction de circonférence (contrainte d'extension) est égale à  $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{u}{R}$ . L'énergie potentielle de déformation est, dans ce cas, l'énergie de déformation d'une extension simple, soit avec  $N = A \cdot \sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{\theta\theta} = E \cdot \varepsilon_{\theta\theta} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^l E \cdot A \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 ds \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} E \cdot A \left( \frac{u}{R} \right)^2 R d\theta \\ &= \frac{E \cdot A \cdot u^2}{2 \cdot R^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

Pour l'énergie cinétique, avec la quantité de mouvement valant  $\rho \cdot A \frac{\partial u}{\partial t}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \rho \cdot A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 ds \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \rho \cdot A \left( \dot{u} \right)^2 R d\theta \\ &= \frac{\rho \cdot A \cdot \dot{u}^2}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

Nous savons que les pulsations propres se calculent pour un mouvement sinusoïdal en temps ce qui implique qu'avec  $\omega$  la pulsation propre, on ait  $\dot{u}_{max} = \omega \cdot u_{max}$ . La pulsation propre correspond à la pulsation qui rend égale l'énergie maximale cinétique et potentielle :  $\mathcal{T}_{max} = \mathcal{V}_{max}$ . En égalisant les deux expressions de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}$ , on trouve finalement que<sup>11</sup> :

$$\omega_0^2 = \frac{E \cdot A}{\rho \cdot A \cdot R^2} = \frac{E}{\rho \cdot R^2} \quad (\text{C.80})$$

<sup>11</sup>L'utilisation du théorème d'égalité des énergies cinétique et potentielle est couramment utilisé, on le trouve pour le même calcul que ci-dessus dans [TIMOSHENKOYOUNGWEAVER74] et il a également été utilisé par R.S. COLBY pour le calcul du premier mode propre de flexion d'un stator de machine à reluctance variable [COLBYMOTTIERMILLER96]

On trouve bien la même pulsation propre d'extension (pour  $n = 0$ ) que celle calculée par la *méthode classique*. On constate que dans ce cas, la méthode énergétique est beaucoup plus simple qu'une méthode directe puisqu'elle n'a pas besoin d'exprimer la valeur de tous les efforts.

*En conclusion, dans cette section, on a mis en évidence les différents comportements d'un anneau mince en vibration, modes d'extension, modes de corps rigides et modes de flexion, le comportement global est alors une superposition de ces différents cas en fonctions des conditions initiales. Les deux méthodes – classique ou énergétique – conduisent exactement aux mêmes résultats, l'utilisation de l'une ou l'autre reste au choix de l'utilisateur. La méthode énergétique est plus rapide car nous ne sommes pas obligés de définir tous les efforts, cependant cette technique nécessite une bonne intuition du comportement de la structure et, en cela, elle reste moins courante pour les calculs analytiques. Elle est, cependant, très utilisée pour les calculs utilisant des méthodes numériques (calcul des variations).*

### C.3 Réponse dynamique de la structure sur le mode de corps rigide

Le mode de corps rigide n'est, d'après tout ce que nous avons vu, qu'un cas particulier du comportement en flexion pure pour le rang d'espace  $n = 1$ . Afin de le confirmer et de comprendre précisément comment prend forme ce mouvement d'ensemble nous allons étudier ce mouvement par deux méthodes, tout d'abord en partant de l'équation aux dérivées partielles qui régit le comportement en flexion pure puis en utilisant l'équation différentielle qui régit le comportement dynamique d'une structure rigide.

Nous avons vu que ce mouvement prenait forme lorsqu'il était soumis à un champ de force harmonique dont le rang d'espace était 1. Nous commencerons l'étude en posant que le champ de force est un champ de force stationnaire<sup>12</sup> représenté par la FIG. C.12 :

$$\vec{q}(t, \theta) = q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\theta + \varphi_1) \cdot \vec{e}_r \quad (\text{C.81})$$

Pour le cas  $\varphi_1 = \pi/2$ , l'expression de  $\vec{q}(t, \theta)$  peut s'écrire en terme de sin au lieu de cos :

$$\vec{q}(t, \theta) = q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e}_r \quad (\text{C.82})$$

Exprimons ce champ, non pas suivant le vecteur radial  $\vec{e}_r$  comme il a été calculé à partir du tenseur de MAXWELL, mais dans le repère  $R_0(x, y)$  fixe

---

<sup>12</sup> nous verrons à la fin de cette section la généralisation quand le champ de force est, non pas stationnaire, mais tournant

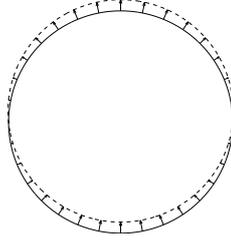


FIG. C.12 – champ de force stationnaire de rang d'espace 1 et de phase  $\varphi_1 = \pi/2$

par rapport au stator :

$$\begin{aligned}\vec{q} &= q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e}_r \\ &= q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) \cdot (\cos(\theta) \cdot \vec{e}_x + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_y)\end{aligned}\quad (\text{C.83})$$

Soit sous la forme vectorielle dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  :

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}\quad (\text{C.84})$$

Calculons la résultante – force totale – de ce champ de force dans le repère  $R_0(x, y)$  :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_0^{2\pi} \vec{q} R d\theta \\ \vec{F} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} R d\theta \\ \vec{F} &= \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot R \cdot \pi \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (\text{C.85})$$

La résultante de ce champ est donc portée par la *direction* de la phase de ce champs dans l'équation (C.81), soit pour le cas  $\varphi_1 = \pi/2$ , par l'axe  $y$ .

### C.3.1 Démonstration à partir de l'équation aux dérivées partielles de flexion

Si nous voulons montrer qu'il se produit un mouvement de corps rigide, alors il faudra montrer que pour chaque point  $M$  du stator, le déplacement est indépendant de ce point et est porté par l'axe de la force qui a créé ce déplacement, soit dans le cas  $\varphi_1 = \pi/2$ , par l'axe  $y$ .

Dans la section précédente, nous avons montré que pour le mouvement de flexion pure, pour le rang d'espace  $n = 1$ , la fréquence propre était nulle

pour des conditions aux limites *libre-libre*. Suivant la direction radiale  $\vec{e}_r$ , ce déplacement s'exprimait par  $u(\theta, t)$ <sup>13</sup> :

$$\begin{aligned} u(\theta, t) &= \frac{q_n}{\rho \cdot A \cdot (1 + n^2) \cdot (p_n^2 - \omega_n^2)} \cdot \sin(\omega_n t) \cdot \sin(n\theta) \\ &= \frac{q_1}{\rho \cdot A \cdot 2 \cdot (-\omega_1^2)} \cdot \sin(\omega_1 t) \cdot \sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

En flexion pure, on a formulé l'hypothèse qu'il y a flexion sans élongation, soit  $u = -\frac{\partial v}{\partial \theta}$ , ce qui permet d'exprimer le déplacement  $v$  suivant la direction tangentielle  $\vec{e}_\theta$  :

$$v(\theta, t) = \frac{q_1}{\rho \cdot A \cdot 2 \cdot (-\omega_1^2)} \cdot \sin(\omega_1 t) \cdot \cos(\theta) \quad (\text{C.87})$$

$(u, v)$  étant exprimés dans le repère  $R1(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , exprimons les dans le repère  $R_0(x, y)$  par utilisation du changement de repère suivant :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \quad (\text{C.88})$$

soit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{q_1}{\rho \cdot A \cdot 2 \cdot (-\omega_1^2)} \cdot \sin(\omega_1 t) \cdot \sin(\theta) \\ \frac{q_1}{\rho \cdot A \cdot 2 \cdot (-\omega_1^2)} \cdot \sin(\omega_1 t) \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{q_1}{\rho \cdot A \cdot 2 \cdot \omega_1^2} \cdot \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

L'équation (C.89) confirme que le déplacement de chaque point  $M$  est bien porté par l'axe  $y$  et ne dépend pas de la position de ce point – indépendant de  $\theta$  – ce qui correspond bien à un mouvement de corps rigide.

### C.3.2 Démonstration à partir de l'équation différentielle d'un mouvement d'ensemble encore appelé mouvement de corps rigide

Pour notre démonstration, on peut également partir de l'équation dynamique d'un corps rigide et montrer que nous arrivons aux mêmes expressions du déplacement que dans l'équation (C.89).

<sup>13</sup>Dans cette démonstration, nous considérons la force comme stationnaire, le déplacement que nous devons utiliser, devrait être noté  $\tilde{u}$  et non  $u$  mais pour des raisons de facilité d'écriture, nous le noterons tout de même  $u$

Un corps rigide est un corps qui obéit à la loi de NEWTON dans son ensemble. Soit pour son déplacement  $\vec{u}$  :

$$m_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}_{m_0}}{\partial t^2} = \vec{F} \quad (\text{C.90})$$

avec  $m_0$  la masse de l'ensemble de la structure,  $\vec{F}$  la résultante de force appliquée à cet ensemble et  $\vec{u}_{m_0}$  le déplacement d'ensemble. Pour notre anneau,  $m_0$  peut être obtenue comme :

$$m_0 = \int_0^{2\pi} \rho \cdot A R d\theta = \rho \cdot A \cdot R \cdot 2\pi \quad (\text{C.91})$$

La résultante  $\vec{F}$  a été calculée au début de cette sous-section suivant  $x$  et  $y$  pour  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  :

$$\rho \cdot A \cdot R \cdot 2\pi \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} u_{m_0,x} \\ u_{m_0,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \cdot \sin(\omega t) \cdot R \cdot \pi \end{pmatrix} \quad (\text{C.92})$$

En intégrant deux fois cette équation et en posant comme conditions initiales qu'à  $t = 0$ , le stator est fixe<sup>14</sup> on obtient :

$$\begin{pmatrix} u_{m_0,x} \\ u_{m_0,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{q_1}{2 \cdot \rho \cdot A \cdot c \cdot \omega_1^2} \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{C.93})$$

On trouve que le mouvement d'ensemble est identique au mouvement de chacun des points  $M$  calculé précédemment et que ce mouvement est bien porté par l'axe  $y$ . Il est également fonction sinusoidalement du temps à la pulsation du champ d'effort.

### C.3.3 Conclusion sur le mouvement de corps rigide

On a montré dans ces deux sous-sections, soit en partant de l'équation aux dérivées partielles qui régit le comportement de flexion, soit en partant de l'équation différentielle d'un corps rigide en mouvement, que pour une force harmonique stationnaire de rang d'espace  $n = 1$ , on obtient un mouvement rigide d'ensemble porté par la direction de la force résultante. Si à la place d'un champ stationnaire, nous avons un champ tournant – ce qui est le cas pour les champs de force d'origine électromagnétique – le déplacement instantané d'ensemble sera donc porté par la direction instantanée de la force d'excitation. Ainsi, à un effort tournant à la vitesse  $\omega_1$ , nous obtiendrons un déplacement d'ensemble du stator tournant également à la vitesse  $\omega_1$ .

La fréquence propre de ce mode de corps rigide pour une section a été calculée égale à zéro Hertz. Cependant, nous avons effectué le calcul

<sup>14</sup>ces conditions initiales permettent d'annuler les constantes qui apparaissent lors des intégrations successives

en considérant uniquement le cas bi-dimensionnel – une section – avec des conditions aux limites *libre-libre*. Dans le cas d’une étude en trois dimensions, on verra que ce mode peut correspondre à différents modes longitudinaux :

1. mode longitudinal de rang zéro : la déformée du stator est uniforme suivant la direction axiale. Pour des conditions aux limites *libre-libre*, cela conduit à une fréquence propre de corps rigide nulle, il est bien évident que dans la réalité, si le moteur est fixé à un support par l’intermédiaire d’un élément ayant une certaine raideur  $k_{support}$ , on aura toujours un mouvement de corps rigide pour le stator – mouvement d’ensemble. Par rapport au support, nous aurons, pour chaque direction, un mouvement masse - ressort ( $m_0, k_{support}$ ) d’un système à *un degré de liberté* dont la pulsation propre vaudra  $\sqrt{\frac{k_{support}}{m_0}}$  (cf. FIG. C.13).

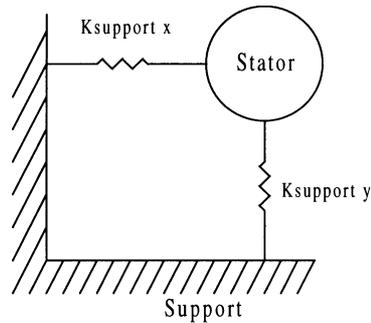


FIG. C.13 – mouvement masse-ressort du stator rigide fixé par l’intermédiaire d’une certaine raideur à son support

2. mode longitudinal dit *de poutre (bending mode)* : suivant la variable axiale, le stator se déforme comme une poutre en flexion (cf. annexe C.1). Chaque section de la poutre ne subit aucune déformation mais un mouvement d’ensemble transversal tel que celui de la FIG C.14.

Lorsqu’on étudie le stator en trois dimensions et non plus uniquement en deux dimensions (juste une *section* du stator), le mode propre de corps rigide d’une section ne correspond plus forcément à un mode de corps rigide de l’ensemble du stator. En pratique, on mesurera une fréquence propre du mode de flexion 2D de rang  $n = 1$  différente de zéro.

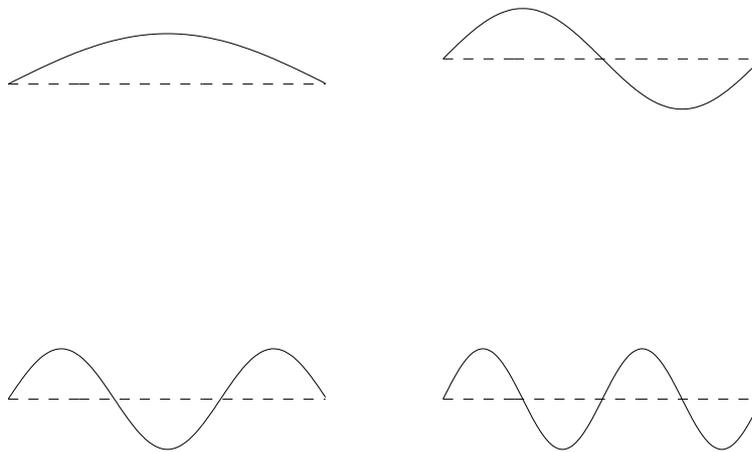


FIG. C.14 – *allure* des quatre premiers modes propres de vibrations transversales d'une poutre ( $1 \leq i \leq 4$ )



## Annexe D

# Description de la machine utilisée et du dispositif expérimental

L'objectif de cette annexe est de présenter la machine utilisée dans les différents essais ainsi que le dispositif expérimental.

### D.1 Description de la machine étudiée

La machine utilisée dans les essais est une machine développée par le Laboratoire d'Électromécanique de Compiègne. Notre choix s'est porté sur cette machine car nous en connaissions parfaitement les caractéristiques géométriques.

Il s'agit d'une machine asynchrone triphasée de faible tension d'alimentation (entre 9 et 12 V) d'environ 700 W. Le nombre de paires de pôles est 2, ce qui donne une vitesse de synchronisme sur le réseau 50 Hz de 1500 tours/min.

Le stator est un stator à 27 encoches, à double couche et à pas fractionnaire comme on peut le voir sur la FIG. D.1.

Le rotor est un rotor à cage plus *classique*. Il se compose de 21 encoches rondes telles que décrites sur la FIG. D.1.

### D.2 Dispositif expérimental

La FIG. D.2 représente le dispositif expérimental utilisé pour effectuer les mesures de validation des modèles développés.

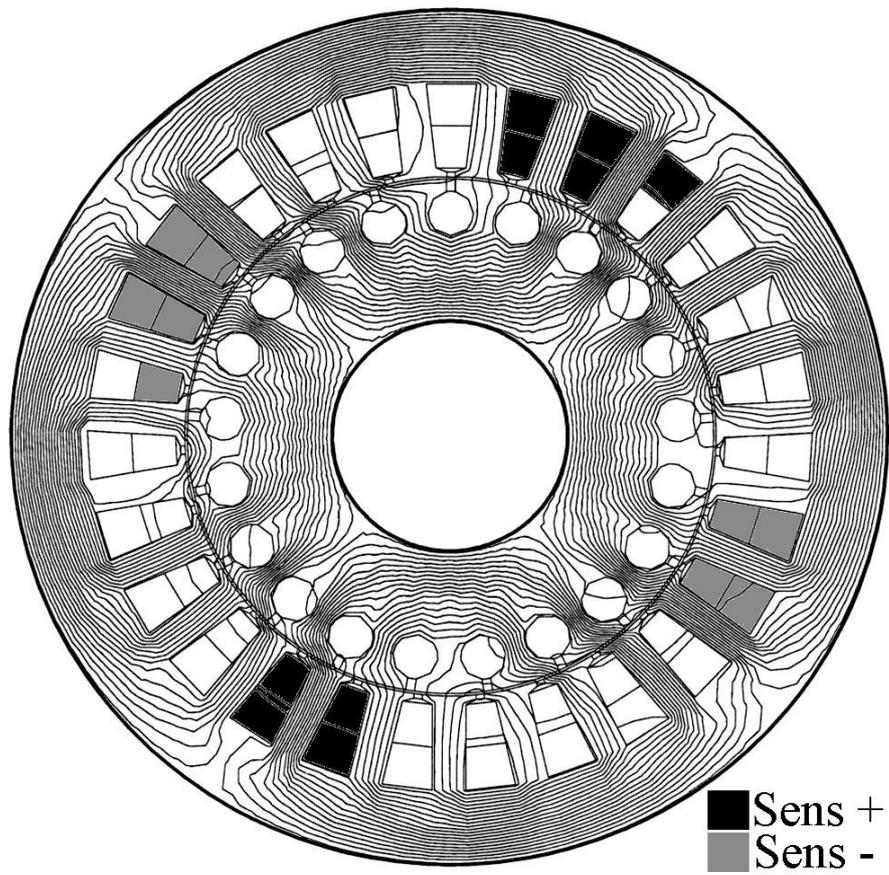


FIG. D.1 – description de la machine d'étude

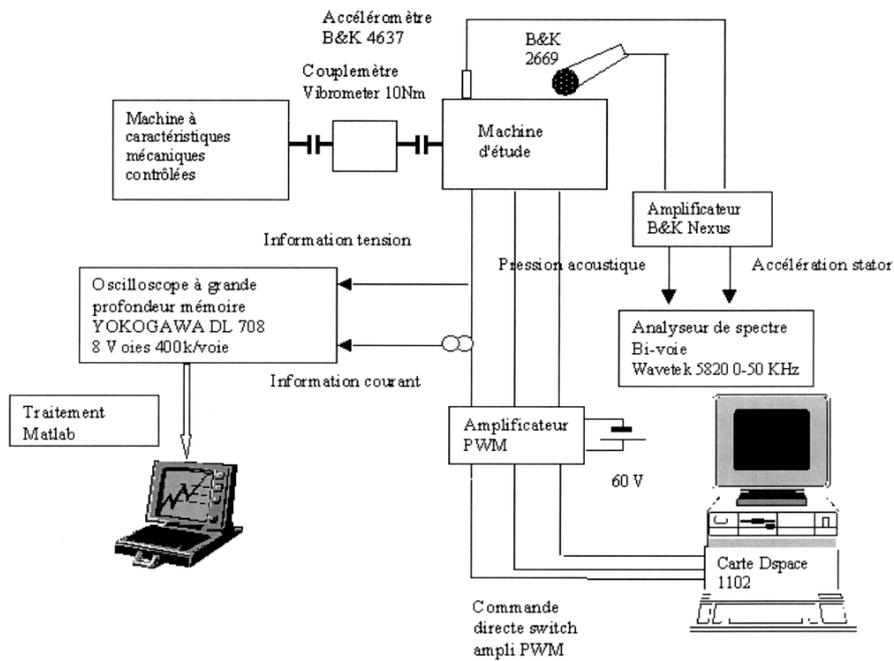


FIG. D.2 – description du dispositif expérimental

Pour les essais *électromécaniques*, le dispositif est exactement celui de la FIG. D.2, en revanche, pour les essais *vibratoires* et *acoustiques*, nous avons désaccoupler la machine de son banc – et donc de la machine de charge puis nous l'avons suspendu sur des ressorts de faibles raideurs afin de mieux *simuler* les conditions aux limites *libre-libre*. Les essais *acoustiques* ont, de plus, été réalisés en chambre semi-anéchoïque (cf. FIG. D.3). Les relevés vibratoires et acoustiques ont été réalisés à l'aide de l'oscilloscope numérique YOKOGAWA puis transférés sur micro-ordinateur pour un traitement numérique sous MATLAB.

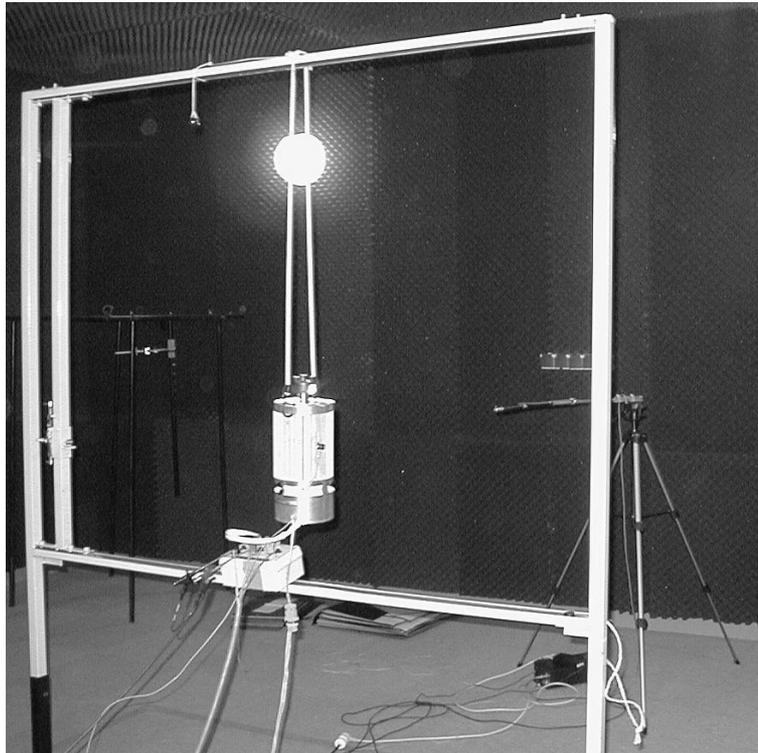


FIG. D.3 – photographie du dispositif expérimental : moteur suspendu en chambre semi-anéchoïque

# Bibliographie

- [ABRAMOWITZSTEGUN72] M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN. *Handbook of mathematical functions*. Dover publications Inc. (Originally published : National Bureau of standards 1964), 1972.
- [ALGER51] P.L. ALGER. *The Nature Polyphase of Induction Machines*. John Wiley & Sons, 1951.
- [ARNOLDLACOUR09] E. ARNOLD and J.L. LACOUR. *Induction motors*, volume 5. Springer Verlag, 1909.
- [BAUERHENNEBERGER99] T. BAUER and G. HENNEBERGER. Three-dimensional calculation and optimization of the acoustic field of an induction furnace caused by electromagnetic forces. *IEEE Trans. Mag.*, 35(3), May 1999.
- [BAUERMONZELHENNEBERGER98] T. BAUER, C. MONZEL, and G. HENNEBERGER. Three-dimensional calculation of the acoustic behavior of electrical machines using boundary element method. In *International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 1998.
- [BECHPEDERSONBLAABJERG96] M.M. BECH, J.K. PEDERSON, and F. BLAABJERG. Random modulation techniques in power conversion—an update. In *PEMC'96*, volume 3, pages 357–365, 1996.
- [BELAHCENARKKIO00] A. BELAHCEN and A. ARKKIO. Local force calculation for vibration and noise analysis of a synchronous generator. In *2<sup>nd</sup> International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 2000.
- [BELMANSHAMEYER98] R. BELMANS and K. HAMEYER. Impact of inverter supply and numerical calculation techniques in audible noise problems. In *International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 1998.
- [BELMANSVERDYCKGEYSENFINDLAY91] R. BELMANS, VERDYCK, . GEYSEN, and . FINDLAY. Electromechanical analysis of the audible noise of an inverter fed squirrel cage induction motor. *IEEE I.A.S.*, 27(3), May/June 1991.

- [BOUCHET96] L. BOUCHET. *Calcul du rayonnement acoustique de structures à partir de données vibratoires par une méthode de sphère équivalente*. PhD thesis, Institut National de Science Appliquées de Lyon, 1996.
- [BURBIDGE58] R.F. BURBIDGE. A rapid method of analysing the m.m.f. wave of a single or polyphase winding. *Monograph of the institution of electrical engineers*, 280 S, Jan. 1958.
- [CARLSONNEVESNSADOWSKI00] R. CARLSON, C.G.C. NEVES, and N.S. SOEIRO N. SADOWSKI. Calculation of electromagnetic-mechanic-acoustic behavior of a squirrel-cage induction motor. In *2<sup>nd</sup> International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 2000.
- [CASSORETBRUDNYMICHAX97] B. CASSORET, J.F. BRUDNY, and R. MICHAX. Bruit magnétique des machines asynchrones, caractérisation, réduction. In *Journée Vibrations et bruit acoustique des machines électriques*, 1997.
- [CHAPMAN22] . CHAPMAN. The production of noise and vibrations by certain squirrel cage induction motors. *Journal of institution of electrical engineering*, 1922.
- [CHATELAIN83] J. CHATELAIN. *traité d'électricité de l'EPFL vol X : Machines électriques*. Presses polytechniques romandes, 1983.
- [CHAVERNOZPASDELOUP69] R. CHAVERNOZ and M. PASDELOUP. Les pertes parasites dans les moteurs d'induction. *Bulletin de la direction des études et recherches EDF*, série B(2), 1969.
- [COLBYMOTTIERMILLER96] R.S. COLBY, F. MOTTIER, and T. MILLER. Vibration modes and acoustic noise in a four-phase switched reluctance motor. *IEEE Trans. on I.A.*, 32, Nov./Dec. 1996.
- [CORTONSAWEZYNBELKHAYATBRUDNY00] R. CORTON, H. SAWEZYN, D. BELKHAYAT, and J.F. BRUDNY. Principe of magnetic noise active reduction using three phase systems due to pwm inverter switching. In *2<sup>nd</sup> International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 2000.
- [COURBON84] J. COURBON. Vibrations transversales. *Les techniques de l'ingénieur*, C2045, 1984.
- [CRANDALL<sup>+</sup>68] S.H. CRANDALL et al. *Dynamics of mechanical and electromechanical systems*. Mc Graw-Hill, 1968.
- [CREMERHECKLUNGAR88] L. CREMER, M. HECKL, and E.E. UNGAR. *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, 1988.
- [DEN HARTOG85] J.P. DEN HARTOG. *Mechanical vibrations 4<sup>th</sup> ed*. Dover publications Inc. (Originally published : McGraw-Hill 1956), 1985.

- [DEROUANE95] B. DEROUANE. *Contribution à l'étude de la machine électrique asynchrone destinée à la motorisation d'un mobile avec source d'énergie embarquée*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1995.
- [DIBHENRIOHUBERT<sup>+</sup>00] R. DIB, J.C. HENRIO, A. HUBERT, G. FRIEDRICH, and P. WAGSTAFF. Analysis of the noise, vibration and transmission characteristics of induction motors. In *Proc. of INTER-NOISE 2000*, 2000.
- [EWINS84] D.J. EWINS. *Modal testing : theorie and practice*. Research Studies Press Ltd (John Wiley & Sons), 1984.
- [EWINS00] D.J. EWINS. *Modal testing 2*. Research Studies Press Ltd (John Wiley & Sons), 2000.
- [FAHY95] F.J. FAHY. *Sound intensity 2<sup>th</sup> ed.* E & FN Spon (Chapman & Hall), 1995.
- [FRIEDRICH86] G. FRIEDRICH. *Contribution à l'étude des possibilités de l'amplification à découpage en puissance élevée*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1986.
- [FRITZ21] H. FRITZ. Noise in electrical machines. *Archiv für elektrotechnik*, 10, 1921.
- [FROHNE59] H. FROHNE. *Über die primären Bestimmungsgrößen der Lautstärke bei Zsynchronmaschinen*. PhD thesis, Technical University of Hannover, 1959.
- [GABSI CAMUS BESBES99] M. GABSI, F. CAMUS, and M. BESBES. Computation and measurement of magnetically induced vibrations of switched reluctance machine. *IEE PROC. Elec. Power Appl.*, 146(5), Sept. 1999.
- [GABSI LOYAU LOVAT99] M. GABSI, T. LOYAU, and G. LOVAT. Comportement vibroacoustique d'un moteur électrique dans son environnement. In *Colloque EF'99*, 1999.
- [GARCIA LESBROUSSART95] GARCIA and C. LESBROUSSART. Une nouvelle stratégie de modulation du vecteur d'espace par un onduleur de tension : la stratégie  $\Delta\Sigma$  vectorielle. *Journal de physique III*, page 1075, Juillet 1995.
- [GERADIN RIXEN96] M. GERADIN and D. RIXEN. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures 2<sup>e</sup> édition*. Masson, recherche en mécanique, 1996.
- [GIRGIS VERMA81] R.S. GIRGIS and S.P. VERMA. Method for accurate determination of resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines. *IEE PROC.*, 128(1), Jan. 1981.

- [GROUDGERBAUDROGNONROUDET98] A. GROUD, L. GERBAUD, J.P. ROGNON, and J. ROUDET. Problems in computing spectra generated by pwm inverters for optimization of electrical drives. *Electric machines and power systems*, 26 :415–429, 1998.
- [HADJ AMORTIMARPOLOUJADOFF95] A. HADJ AMOR, P.L. TIMAR, and M. POLOUJADOFF. Induction squirrel cage machine design with minimization of electromagnetic noise. *IEEE Trans. on E.C.*, 10(4), Dec. 1995.
- [HELLERHAMATA77] B. HELLER and V. HAMATA. *Harmonic field effects in induction machines*. Elsevier, 1977.
- [HOLZMAN72] F. HOLZMAN. Eigenfrequenzen des blechpaketes von drehschrittmotoren unter berucksichtigung des schwingungsverhaltens der zahne. *ETZ-A*, 93, 1972.
- [HUBERT97] A. HUBERT. Rapport de projet de DEA : contribution à l'étude des bruits générés lors de l'association machine convertisseur électronique. Master's thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [INRS99] INRS, editor. *Concevoir plus silencieux : comment choisir ses composants*, 1999.
- [ITOKAWABATATAJIMA97] M. ITO, K. KAWABATA, and F. TAJIMA. Coupled magnetic field analysis with circuit and kinetics modelings of brushless motors. *IEEE Trans. Mag.*, 33(2), March 1997.
- [JOKSIMOVIĆDUROVIĆOBRADOVIĆ99] G.M. JOKSIMOVIĆ, M.D. DUROVIĆ, and A.B. OBRADOVIĆ. Skew and linear rise of mmf across slot modeling–winding function approach. *IEEE Trans. on E.C.*, 14(3), Sept. 1999.
- [JORDAN50] H. JORDAN. *Geraüscharme Elektromotoren*. W. Girardet, 1950.
- [JUFER87] M. JUFER. Brushless dc motors - gap permeance and pm mmf distribution analysis. In *Proc. of 16<sup>th</sup> annual symposium on incremental motion, control system and drives*, 1987.
- [JUNGERFEIT72] M.C. JUNGER and D. FEIT. *Sound, structures, and their interaction*. MIT Press, 1972.
- [KAEHLERHENNEBERGER00] C. KAEHLER and G. HENNEBERGER. Calculation of the differences in the acoustical behaviour of a claw-pole alternator when connected in delta and star. In *2<sup>nd</sup> International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 2000.
- [KAKUMIYASHITASONE99] B. KAKU, I. MIYASHITA, and S. SONE. A novel prediction method of acoustic magnetic noise based on induction motor's nhcc function. *IEEE I.E.*, 46(2), April 1999.

- [KRYTER85] K.D. KRYTER. *The effect of noise on man*, 2<sup>e</sup> édition. Academic Press, 1985.
- [LANCZOS86] C. LANCZOS. *The variational principles of mechanics 4<sup>th</sup> ed.* Dover publications Inc. (Originally published : University of Toronto Press 1970), 1986.
- [LEFÈVRE97] Y. LEFÈVRE. De la modélisation des vibrations d'origine magnétique à la conception des machines silencieuses. In *Journée Vibrations et bruit acoustique des machines électriques*, 1997.
- [LEFÈVRE88] Y. LEFÈVRE. *Étude de la répartition des efforts électromagnétiques dans les machines synchrones à aimants permanents et à commutation électronique. Détermination des vibrations d'origine électromagnétique.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1988.
- [LESBROUSSART97] C. LESBROUSSART. *Étude d'une stratégie de modulation de largeur d'impulsions pour un onduleur de tension triphasé à deux ou trois niveaux : la modulation  $\Delta\Sigma$  vectorielle.* PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [LESENNENOTELETSEGUIER81] J. LESENNE, F. NOTELET, and G. SEGUIER. *Introduction à l'électrotechnique approfondie.* Technique et documentation, 1981.
- [LESUEUR88] C. LESUEUR. *Rayonnement acoustique des structures—Vibroacoustique, Interaction fluide-structure.* Editions EYROLLES, collection de la direction des études et recherche d'électricité de France, 1988.
- [LIÉNARDFRANÇOIS83] P. LIÉNARD and P. FRANÇOIS. *Acoustique industrielle et environnement - acoustique physique et perceptive.* Editions EYROLLES, collection de la direction des études et recherche d'électricité de France, 1983.
- [LISNERTIMAR99] R.P. LISNER and P.L. TIMAR. A new approach to electric motor acoustic noise standards and test procedures. *IEEE Trans. on E.C.*, 14(3), Sept. 1999.
- [LIWSCHITZ42] M. LIWSCHITZ. Fields harmonics in induction motors. *Electrical engineering transactions*, 61, Nov. 1942.
- [LIWSCHITZ67] M. LIWSCHITZ. *Calcul des machines électriques.* Éditions SPES, 1967.
- [LONGZHUHOWE98] S.A. LONG, Z.Q. ZHU, and D. HOWE. Influence of stator lamination on natural frequencies of switched reluctance motors. In *International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 1998.

- [LOVATLOYAUBARBRY97] G. LOVAT, T. LOYAU, and J.L. BARBRY. Diagnostic acoustique d'une électro-pompe à l'aide d'une méthode simplifiée de calcul du rayonnement acoustique à partir de données vibratoires. In *Journée Vibrations et bruit acoustique des machines électriques*, 1997.
- [LOVE44] A.E.H. LOVE. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover publications Inc., 1944.
- [LOYAUBARBRYGABSI-CAMUS00] T. LOYAU, J.L. BARBRY, M. GABSI, and F. CAMUS. Calcul des vibrations et du bruit acoustique d'un moteur électrique. In *Colloque GEVIQ'2000*, 2000.
- [MEDEIROSREYNEMEUNIER97] L.H. MEDEIROS, G. REYNE, and G. MEUNIER. Force électromagnétique sur les matériaux ferromagnétiques durs. In *Journée Vibrations et bruit acoustique des machines électriques*, 1997.
- [MEIROVITCH97] L. MEIROVITCH. *Principles and techniques of vibrations*. Prentice-Hall international Inc., 1997.
- [MIKAMIIDE-TAKAHASHI99] H. MIKAMI, K. IDE, and M. TAKAHASHI. Dynamic harmonic field analysis of an inverter-fed induction motor for estimating harmonic secondary current and electromagnetic force. *IEEE Trans. E.A.*, 14(3), Sept. 1999.
- [MONZELBAUERHENNEBERGER00] C. MONZEL, T. BAUER, and G. HENNEBERGER. Numerical aspects of advanced calculation techniques concerning 3d boundary element problems in applied acoustics. In *2<sup>nd</sup> International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 2000.
- [MORSEINGARD86] P.M. MORSE and K.U. INGARD. *Theoretical acoustics*. Princeton University Press (Originally published : McGraw-Hill Inc. 1968), 1986.
- [MUÑOZLIP099] A.A. MUÑOZ and T.A. LIPO. Complex vector model of the squirrel-cage induction machine including instantaneous rotor bar currents. *IEEE Trans. on I.A.*, 35(6), Nov./Dec. 1999.
- [NEVESCARLSON<sup>+</sup>99] C.G.C. NEVES, R. CARLSON, et al. Experimental and numerical analysis of induction motor vibrations. *IEEE Trans. Mag.*, 35(3), May 1999.
- [POLOUJADOFF82] M. POLOUJADOFF. General rotating mmf theory of squirrel cage induction machines with non uniform air gap and several non sinusoidally distributed windings. *IEEE Trans. on P.A.S.*, 101(3), March 1982.
- [POLOUJADOFF87] M. POLOUJADOFF. The theory of three phase induction squirrel cage motors. *Electric machines and power systems*, 13 :245–264, 1987.

- [RABINOWITZ91] J. RABINOWITZ. Les effets psychologiques du bruit. *La recherche*, pages 178–187, Fev. 1991.
- [RAMESOHLBAUERHENNEBERGER98] I. RAMESOHL, T. BAUER, and G. HENNEBERGER. Calculation procedure of the sound field caused by magnetic excitations of the claw-pole alternator. In *International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery*, 1998.
- [REYNE87] G. REYNE. *Analyse théorique et expérimentale des phénomènes vibratoires d'origine électromagnétique*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1987.
- [SALENÇON95] J. SALENÇON. *Mécanique du continu*. Ellipses, 1995.
- [SEGUIERNOTELET96] G. SEGUIER and F. NOTELET. *Électrotechnique industrielle*. Lavoisier Technique & documentation, 1996.
- [SEIDE75] P. SEIDE. *Small elastic deformations of thin shells*. Noordhoff International Publishing, 1975.
- [TIMAR77] P.L. TIMAR. Effect of application of semi-conductors on vibrations and noise of slip ring induction motors. *Elektrotechnika*, 70(3), March 1977.
- [TIMAR<sup>+</sup>89] P.L. TIMAR et al. *Noise and vibrations of electrical machines*. Elsevier, 1989.
- [TIMOSHENKO68] S.P. TIMOSHENKO. *Résistance des matériaux*. Dunod, 1968.
- [TIMOSHENKO87] S.P. TIMOSHENKO. *Theory of elasticity*. Mc Graw-Hill Inc, 1987.
- [TIMOSHENKOYOUNGWEAVER74] S. TIMOSHENKO, D.H. YOUNG, and W. WEAVER. *Vibration problems in engineering 4<sup>th</sup> ed.* John Wiley & Sons Inc, 1974.
- [TOLIYATLIPOWHITE91] H.A. TOLIYAT, T.A. LIPO, and J.C. WHITE. Analysis of concentrated winding induction machine for adjustable speed drive application. *IEEE Trans. on E.C.*, 6(4), Dec. 1991.
- [TRZYNADLOWSKIBLAAJBERGO94] A.M. TRZYNADLOWSKI, F. BLAAJBERG, and Others. Random pulse width modulation techniques for converter fed drive systems, a review. *IEEE I.A.S.*, 30(5), Sept./Oct. 1994.
- [VERDYCKBELMANS94] D. VERDYCK and R. BELMANS. An acoustic model for a permanent magnet machine : modal shapes and magnetic forces. *IEEE I.A.*, 30(6), Nov./Dec. 1994.
- [VERMABALAN98] S.P. VERMA and A. BALAN. Experimental investigations on the stators of electrical machines in relation to vibration and noise problems. *IEE PROC. Elec. Power Appl.*, 145(5), Sept. 1998.

- [VERMASINGALWILLIAMS87] S.P. VERMA, R.K. SINGAL, and K. WILLIAMS. Vibration behaviour of stators of electrical machines. *Journal of Sound and Vibrations*, 115, 1987.
- [VERMAWILLIAMSINGAL89] S.P. VERMA, K. WILLIAMS, and R.K. SINGAL. Vibration of long and short laminated stator of electrical machines. *Journal of Sound and Vibrations*, 129, 1989.
- [VIJAYRAGHAVANKRISHNAN99] P. VIJAYRAGHAVAN and R. KRISHNAN. Noise in electric machines : a review. *IEEE Trans. on I.A.*, 35(5), Sept./Oct. 1999.
- [VILAINOTERO95] J.P. VILAIN and OTERO. Une nouvelle stratégie de modulation du vecteur d'espace par un onduleur de tension : la stratégie  $\Delta\Sigma$  vectorielle. *Journal de physique III*, page 1075, July 1995.
- [WACH98] P. WACH. Algorithmic method of design and analysis of fractionnal-slot windings of ac machines. *Electrical Engineering*, 81, 1998.
- [WHITEWOODSON59] D.C. WHITE and H.H. WOODSON. *Electromechanical energy conversion*. John Wiley & sons, 1959.
- [WOODSONMELCHER68] H.H. WOODSON and J.R. MELCHER. *Electromechanical dynamics*. John Wiley & sons, 1968.
- [YANG81] S.J. YANG. *Low-noise electrical motors*. Clarendon Press, Oxford University Press, 1981.
- [YANGELLISON85] S.J. YANG and A.J. ELLISON. *Machinery noise measurement*. Clarendon Press, Oxford University Press, 1985.