



**HAL**  
open science

## Application des systèmes structurés à l'étude du diagnostic : Localisation de capteurs

Sameh Yacoub Agha

► **To cite this version:**

Sameh Yacoub Agha. Application des systèmes structurés à l'étude du diagnostic : Localisation de capteurs. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2007. Français. NNT: . tel-00204100

**HAL Id: tel-00204100**

**<https://theses.hal.science/tel-00204100>**

Submitted on 11 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Institut National Polytechnique de Grenoble

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## **THESE**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE L'INPG**

***Spécialité : AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE***

préparée au Département Automatique de GIPSA-lab Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale :

**Électronique, Électrotechnique, Automatique, Traitement du Signal**

*présentée et soutenue publiquement*

*par*

**Sameh YACOUB AGHA**

*le 16 Novembre 2007*

**Titre :**

**Application des systèmes structurés à l'étude du diagnostic :  
Localisation de capteurs**

***Directeurs de thèse :***

M. Jean-Michel DION	(GIPSA-lab - INPG)
M. Christian COMMAULT	(GIPSA-lab - INPG)

**JURY :**

M. Didier GEORGES	Président
M. Jacob VAN DER WOUDE	Rapporteur
M. Dominique SAUTER	Rapporteur
M. Jean-Jacque LOISEAU	Examineur
M. Jean-Michel DION	Co-directeur de thèse
M. Christian COMMAULT	Co-directeur de thèse



*A mon défunt père...  
A ma chère mère...  
A Johayna...  
Aux oiseaux de paix, qui rendent ma vie heureuse...  
(Alamin, Souad, Omar, Roxane, Roua, Shahed,  
Adam, Siham, Inass, Hasan, Hassan)*

*” Et ne crois pas toujours tes souvenirs,  
N’attends plus les rendez-vous avec la rosée,  
Sois réaliste comme le ciel. Et laisse  
La nostalgie de la cape noire de ton grand-père  
La nostalgie de ta grand-mère qui ne cessait de te soudoyer.  
Elance toi dans le monde comme le poulain.  
Sois toi même où que tu sois,  
Porte le seul poids de ton coeur...  
Et reviens....”*

Mahmoud Darwich "Pourquoi as-tu laissé le cheval à sa solitude"



## Remerciements

*Remercier toutes les personnes que j'ai rencontré (et qu'elles méritent d'être remerciées) durant ces trois ans est impossible... j'espère d'en oublier le moins possible.*

*Toute ma profonde gratitude va aux rapporteurs et examinateurs de ce mémoire. Je les remercie chaleureusement pour le temps précieux qu'ils ont consacré à cette tâche, malgré leurs agendas chargées, et pour leurs remarques qui m'ont permis, je l'espère, d'améliorer la forme définitive du rapport.*

*Toute ma gratitude va à Christian Commault et Jean-Michel Dion (co-directeurs de thèse) qui m'ont pris sous leur responsabilité pendant les trois ans de doctorat. Ils ont été toujours prêt à répondre à mes questions et à transmettre leurs connaissances scientifiques avec beaucoup de disponibilité. La précision qu'ils mettent dans leurs travaux ainsi que la rigueur qui les caractérisent, seront pour moi un exemple dans les années à venir.*

*Je tiens aussi à remercier l'ensemble du personnel du LAG, très particulièrement Marie-Thérèse et Patricia, pour leurs gentillesse et patience.*

*Un grand merci à Hala et Hassan , sans qui je ne serai jamais ce que je suis.*

*Un grand merci à Mouaiad .....*

*Un grand merci à mes frères Hassan, Ali, Ammar, Abed-alilah, la source de ma fierté.*

*Un autre remerciement, non moins important que les précédents, va à mes "compagnons de galère" tous les thésards du LAG.*

*Un merci coloré et parfumé à Roxane ma prof. du français (j'en ai eu plusieurs mais elle était la plus compétente même si elle n'avait que trois ans à l'époque).*

*Un merci parfumé à Marie-Anne pour sa présence exceptionnelle surtout lors de la rédaction de ce mémoire.*



# Table des matières

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>3</b>
<b>1 FORMULATION DES PROBLÈMES</b>	<b>9</b>
1.1 Diagnostic . . . . .	10
1.2 Détection et localisation de défauts (FDI) . . . . .	10
1.2.1 <i>FDI</i> avec une banque de $r$ observateurs . . . . .	12
1.2.2 Placement de capteurs . . . . .	13
1.3 Classification de capteurs pour la détection et localisation de défauts . . . . .	15
<b>2 SYSTÈMES LINÉAIRES STRUCTURÉS</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	18
2.2 Définition . . . . .	19
2.3 Propriété générique . . . . .	20
2.4 Association d'un graphe . . . . .	21
2.4.1 Graphes orientés . . . . .	21
2.4.2 Graphe d'un système structuré . . . . .	22
2.4.3 Etude de propriétés génériques à l'aide des graphes . . . . .	23
2.5 Conclusion . . . . .	28
<b>3 APPROCHE STRUCTURELLE DU PROBLÈME DE DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS (FDI)</b>	<b>29</b>
3.1 Introduction . . . . .	30
3.2 Solubilité générique du problème FDI . . . . .	30
3.3 Conclusion . . . . .	35
<b>4 DECOMPOSITION DU SYSTÈME</b>	<b>37</b>
4.1 Introduction . . . . .	38
4.2 Séparateurs . . . . .	38
4.2.1 Définition . . . . .	38
4.2.2 Exemple . . . . .	39
4.2.3 L'ensemble associé au séparateur . . . . .	40
4.3 Les séparateurs d'entrée . . . . .	41

4.3.1	Le séparateur minimal d'entrée $S^*$ . . . . .	42
4.3.2	Exemples . . . . .	43
4.4	Séparateur minimal de sortie $S_*$ . . . . .	44
4.5	Les séparateurs irréductibles et les séparateurs irréductibles d'entrée . . . . .	46
4.6	Calcul numérique de certains séparateurs d'entrée . . . . .	47
4.7	Structure de treillis de l'ensemble des séparateurs d'entrée . . . . .	53
4.8	Décomposition du système . . . . .	56
4.8.1	Introduction . . . . .	56
4.8.2	Système réduit . . . . .	56
4.8.3	Décomposition du système à l'aide des séparateurs d'entrée . . . . .	60
4.9	Exemples illustratifs . . . . .	67
4.10	Conclusion . . . . .	76
<b>5</b>	<b>CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS</b>	<b>79</b>
5.1	Introduction . . . . .	80
5.2	Caractérisation de capteurs . . . . .	80
5.3	Calcul numérique des ensembles de capteurs des différents types . . . . .	83
5.3.1	Calcul des capteurs essentiels . . . . .	83
5.3.2	Calcul des capteurs inutiles . . . . .	84
5.4	Exemples illustratifs . . . . .	84
5.5	Conclusion . . . . .	89
	<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

Dans ce mémoire nous synthétisons le travail effectué durant trois ans (d'octobre 2004 à septembre 2007) sur le problème de détection et localisation de défauts (*FDI*, Fault Detection and Isolation), étudié sur la classe des systèmes linéaires structurés. Ce travail a été effectué au sein du laboratoire GIPSA-lab, l'ex Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG), sous la direction de Christian COMMAULT et Jean-Michel DION.

Nous nous intéressons au problème de détection et localisation de défauts (*FDI*), qui a reçu une attention considérable durant les dix dernières années. [5; 21]. Le problème de détection et localisation de défauts consiste à construire des résidus à partir des données réelles disponibles, ces résidus sont des variables indicatrices de défauts dans le sens où leur valeur est nulle quand le système est en fonctionnement normal et différente de zéro en cas de défaillance. Quand le problème de détection et localisation de défauts n'a pas de solution avec les capteurs actuels du système, on cherche à ajouter des capteurs additionnels pour rendre le problème soluble [33].

Nous étudions ce problème de détection et localisation de défauts dans le cadre des systèmes linéaires structurés (avec leur graphes associés), voir par exemple [16; 42]. Dans un système linéaire structuré on prend en compte l'existence ou l'absence de relations entre les différentes variables sans s'intéresser à la valeur précise des paramètres [27; 19]. Les systèmes linéaires structurés sont représentés par des représentations d'état où les éléments des matrices sont soit fixés à zéro, soit des paramètres libres. L'existence des paramètres libres correspond aux relations non nulles entre les variables. Pour les systèmes linéaires structurés on étudie des propriétés dites génériques. Ces propriétés sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Un graphe orienté peut être associé à un système linéaire structuré. Dans ce graphe les sommets représentent les différentes variables du système et les arcs correspondent aux paramètres libres des matrices de la représentation d'état donc aux relations non nulles entre les variables. Le graphe orienté associé à un système structuré est un outil visuel qui permet d'étudier facilement les propriétés génériques du système, de nombreux résultats sont disponibles dans la littérature concernant le rang générique de la matrice de transfert d'un système, la commandabilité et l'observabilité génériques ainsi que les problèmes de commande tels que le rejet de perturbation et le découplage par retour d'état [19; 15].

Dans cette thèse nous considérons le problème de détection et localisation de défauts diagonal avec une banque d'observateurs. Nous étudions ce problème sur la classe des systèmes linéaires structurés. Quand on a un système linéaire structuré avec des défauts, on étudie la solubilité du problème à l'aide des graphes orientés associés. Dans [16] on présente une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts soit génériquement soluble. Cette condition est à vérifier sur

---

le graphe orienté associé au système structuré. A partir de cette étude générique du problème *FDI* nous nous intéressons à deux problèmes importants.

- Le premier problème se pose quand la condition de solubilité générique du problème *FDI* n'est pas satisfaite sur le graphe associé au système structuré et donc il faut ajouter des capteurs additionnels pour la remplir. La question ici est : quelles sont les variables qui doivent être mesurées par les nouveaux capteurs. La contribution principale de cette thèse est une décomposition du système afin d'obtenir des informations structurelles sur le placement de capteurs additionnels. Cette décomposition raffine des résultats précédents obtenus dans [8].
- Le deuxième problème consiste à considérer le cas où le problème de détection et localisation de défauts est génériquement soluble pour un système donné, ensuite nous donnons une classification des capteurs selon leur importance pour la solubilité du problème *FDI*. Les capteurs sont classés en trois types, des capteurs inutiles, des capteurs utiles et des capteurs essentiels. La contribution de cette thèse est de donner une caractérisation des capteurs des différents types en utilisant les graphes orientés associés aux systèmes structurés.

L'outil majeur utilisé dans l'étude des deux problèmes, le placement de capteurs et la classification des capteurs, est la notion de séparateur [41]. Nous présentons des séparateurs spécifiques qui ont des rôles importants dans nos études, tels que les séparateurs d'entrée avec lesquels nous décomposons le système afin d'avoir des informations structurelles sur le placement de capteurs additionnels. Ils caractérisent toutes les solutions possibles. Le séparateur minimal de sortie sera utilisé pour caractériser les capteurs dans le cadre du problème de classification.

Ce mémoire de thèse se décompose en cinq chapitres

- Dans le Chapitre 1, nous présentons le problème de détection et localisation de défauts diagonal avec une banque d'observateurs et nous présentons aussi une formulation des deux problèmes traités, le problème de placement de capteurs additionnels, et le problème de classification de capteurs.
- Dans le Chapitre 2, nous présentons la classe des systèmes linéaires structurés et leurs propriétés génériques. Nous montrons comment associer un graphe orienté à un système structuré et nous rappelons quelques résultats concernant l'étude des propriétés génériques des systèmes structurés en utilisant les graphes associés.
- Le Chapitre 3 est consacré à la présentation de la condition de solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts, cette condition s'exprime en termes de chemins défauts-sorties sur le graphe orienté associé. Une illustration sur plusieurs exemples est présentée à la fin du chapitre.

- 
- Dans le Chapitre 4, nous présentons le résultat principal de ce travail, il s’agit d’une décomposition du système afin d’avoir des informations structurelles pour le placement de capteurs additionnels pour le problème *FDI*. Ce chapitre est composé essentiellement de deux parties. Dans la première partie nous présentons l’outil majeur que nous utilisons dans notre étude, *les séparateurs*. Nous définissons la notion générale de séparateur, puis nous présentons nos séparateurs spécifiques, les séparateurs d’entrée et le séparateur minimal de sortie. Dans la deuxième partie nous rappelons un résultat antérieur concernant la décomposition du système obtenu dans [8], ensuite nous présentons notre contribution principale sous forme d’un théorème qui présente une décomposition qui raffine celle de [8] et qui caractérise toutes les solutions possibles pour le problème de placement de capteurs additionnels pour le problème *FDI*. Cette décomposition dépend de l’ensemble des séparateurs d’entrée dans un graphe, où à chaque séparateur d’entrée nous associons une contrainte. L’ensemble des contraintes associées aux séparateurs d’entrée doivent être respectées par tout placement de nouveaux capteurs afin de rendre le problème de détection et localisation de défauts génériquement soluble. Nous illustrons les résultats sur plusieurs exemples académiques.
  - Dans le Chapitre 5, nous abordons la classification de capteurs pour le problème *FDI*. Nous présentons une classification des capteurs d’un système où le problème de détection et localisation de défauts a une solution. Les capteurs sont classés en trois types différents, les capteurs inutiles, les capteurs utiles et les capteurs essentiels. Cette classification permet de prendre en compte l’importance relative des capteurs pour la solubilité du problème *FDI*.

---

Ce travail de thèse a donné lieu aux publications suivantes :

- *A system decomposition for sensor location in fault detection and isolation*, C. COMMAULT, J.M DION et S. YACOUB AGHA, IFAC World Congress 2005, Prague.
- *Application des systèmes structurés à l'étude du diagnostic*, S. YACOUB AGHA, présenté dans le cadre de JDMACS 2005, Lyon.
- *Location of additional sensors for FDI*, C. COMMAULT, J.M DION et S. YACOUB AGHA, 4<sup>th</sup> Workshop on Advanced Control and Diagnosis, 2006, Nancy.
- *Sensor classification for the fault detection and isolation problem*, C. COMMAULT, J.M DION et S. YACOUB AGHA, 3rd IFAC Symposium on System Structure and Control SSSC, 2007, Brazil.
- *Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation*, C. COMMAULT, J.M DION et S. YACOUB AGHA, IFAC Safe Process 2006, Pékin. Une version étendue va paraître dans Automatica.



# Chapitre 1

## FORMULATION DES PROBLÈMES

### 1.1 Diagnostic

Suite à la progression rapide des nouvelles technologies, les systèmes industriels sont de plus en plus complexes et l'opération de diagnostic est devenue indispensable pour assurer la sûreté de fonctionnement et la disponibilité de ces systèmes. Bénéficiant des outils déjà existants en automatique, la recherche dans le domaine du diagnostic a connu une évolution très importante qui lui a permis de développer plusieurs méthodes donnant une solution aux problèmes de la détection et de l'isolation de défauts.

Le diagnostic est un thème de recherche qui peut être approché de façons très différentes suivant le type de connaissances dont nous disposons. L'approche dite à *base de modèle* s'appuie sur l'utilisation d'un modèle analytique du système à diagnostiquer. La communauté scientifique qui étudie le problème de détection et localisation de défauts utilise des techniques provenant de la théorie de la commande et de la décision statistique. Cette approche a produit de nombreux résultats [5; 21; 26].

Le problème de placement de capteurs afin de détecter et localiser les défauts a reçu une attention considérable, et plusieurs résultats sont disponibles, par exemple dans [38] on propose une méthode basée sur l'addition successive des capteurs en prenant en compte les critères de diagnosticabilité. Le principe de cette méthode est d'analyser le modèle physique du système d'un point de vue structurel, et cette approche structurelle est basée sur les relations de redondance analytique [37; 4]. Dans [39] on propose une méthode où on utilise un modèle de comportement du système pour analyser la redondance analytique. Dans [36] on propose une méthode d'optimisation du placement des capteurs en utilisant des algorithmes génétiques. [22] propose une méthode de placement de capteurs afin d'obtenir la détectabilité et l'isolabilité maximale de défauts. Cette méthode est basée sur la décomposition de Dulmage et Mendelsohn. Dans [44] on propose une méthode structurelle pour le placement de capteurs qui satisfait un cahier des charges (diagnostic, détectabilité,...) désiré. Cette méthode n'exige pas de trouver les relations de redondance analytique.

### 1.2 Détection et localisation de défauts (FDI)

Plusieurs types de défauts peuvent toucher un système :

- Les défauts capteurs : ils s'additionneront aux sorties du système et représenteront l'ensemble des problèmes liés à la prise d'information sur l'état du système.
- Les défauts des actionneurs : ils s'additionneront aux commandes du système et concerneront l'ensemble des problèmes liés aux organes qui agissent sur l'état du procédé.
- Les défauts externes : ils causeront un changement non maîtrisable sur l'état du système.

## Chapitre 1. FORMULATION DES PROBLÈMES

---

- Les défauts internes : ils correspondront à une dégradation des composants du système par un changement sur les paramètres internes.

Dans notre travail nous considérons les défauts internes et les défauts des actionneurs. Le problème de détection et localisation de défauts consiste à mesurer des données au cours du fonctionnement réel du système afin de déterminer si le fonctionnement du système est normal ou défaillant. Il existe plusieurs méthodes qui permettent la détection et la localisation de défauts. Pour cela on calcule des signaux indicateurs de défauts nommés les *résidus* dans le sens où leur valeur est nulle lorsque le système est en fonctionnement normal, et différente de zéro en cas de défaillance. Il existe plusieurs méthodes pour la génération des résidus comme montré en Figure 1.1.

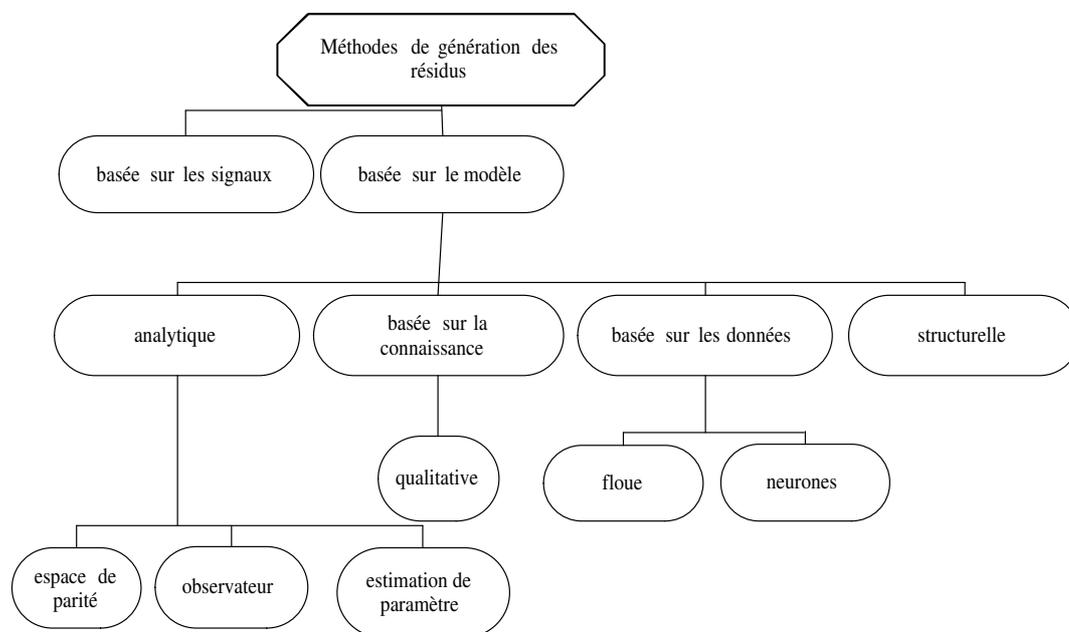


FIG. 1.1 – Différentes méthodes pour la génération des résidus

Dans notre étude nous considérons une approche de type estimation d'état à l'aide d'observateurs, où les résidus sont générés en utilisant une banque d'observateurs afin d'avoir un transfert défauts-résidus diagonal, et nous abordons le problème *FDI* d'un point de vue structurel.

La Figure 1.2 illustre le principe général du problème *FDI*.

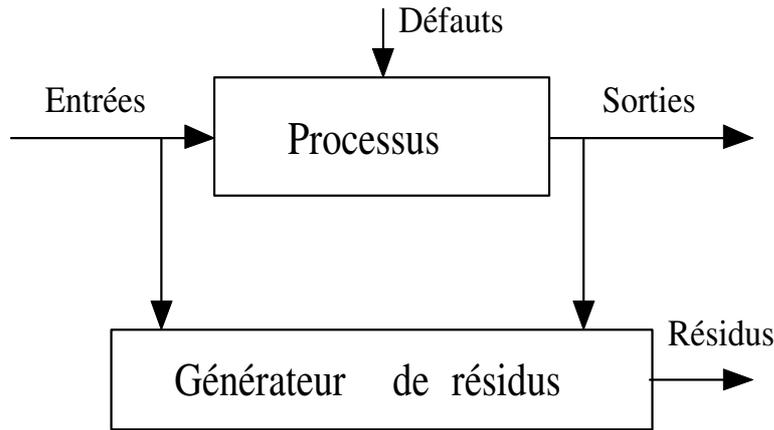


FIG. 1.2 – Le principe général du problème *FDI*

### 1.2.1 *FDI* avec une banque de $r$ observateurs

Considérons un système linéaire avec des défauts, ce système peut être représenté par des équations d'état de la forme suivante.

$$\Sigma_{\Lambda} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_1 f(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_2 f(t) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des états,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des commandes,  $f(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des défauts, et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties.  $A, B, C, D, F_1, F_2$  sont des matrices de dimensions appropriées.

Nous nous intéressons au transfert entre les défauts et les résidus, le générateur de résidus est calculé pour donner à ce transfert une structure particulière. La structure triangulaire est facile à obtenir avec un seul observateur, mais dans une structure diagonale chaque résidu est sensible à un et un seul défaut indépendamment des autres défauts. Donc dans le cas où la structure diagonale ne peut pas être obtenue avec un seul observateur nous pouvons essayer de résoudre le problème avec une banque de  $r$  observateurs. Dans ce cas nous utilisons  $r$  observateurs pour générer les résidus. Pour cela nous considérons le système  $\Sigma^i$  qui peut être obtenu à partir du système (1.2.1) comme suit :

$$\Sigma^i \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_1^i f^i(t) + F_{1i} f_i(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_2^i f^i(t) + F_{2i} f_i(t) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où :

- $f_i(t)$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $f(t)$

## Chapitre 1. FORMULATION DES PROBLÈMES

---

- $f^i(t)$  est le vecteur de défauts  $f(t)$ , en enlevant  $f_i(t)$  la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $f(t)$ .
- $F_{1i}$  (respectivement  $F_{2i}$ ) est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ).
- $F_1^i$  (respectivement  $F_2^i$ ) est la matrice  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ), en enlevant la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ).

Le  $i^{\text{ème}}$  observateur est donné par l'équation :

$$\dot{\hat{x}}^i(t) = A\hat{x}^i(t) + K^i(y(t) - C\hat{x}^i(t) - Du(t)) + Bu(t)$$

$K^i$  est à construire de telle façon que  $\hat{x}^i(t)$  converge asymptotiquement vers  $x(t)$ , lorsqu'il n'y a pas de défaut.

L'erreur d'estimation est :  $e^i(t) = x(t) - \hat{x}^i(t)$ . La dérivée de l'erreur d'estimation sera donnée par l'équation :

$$\dot{e}^i(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}^i(t) = (A - K^i C)e^i(t) + (F_1^i - K^i F_2^i)f^i(t) + (F_{i1} - K^i F_{i2})f_i(t)$$

Le résidu sera donné par l'équation :

$$\rho_i(t) = Q^i(y(t) - C\hat{x}^i(t) - Du(t)) = Q^i C e^i(t) + Q^i F_2^i f^i(t) + Q^i F_{2i} f_i(t)$$

$Q^i$  est une matrice de dimension  $(1 \times p)$ .

Le transfert défaut-résidu sera

$$\rho_i(s) = T_{\rho f}^i(s) f_i(s) = [Q^i C (sI - A + K^i C)^{-1} (F_{i1} - K^i F_{i2}) + Q^i F_{2i}] f_i(s)$$

**Définition 1.2.1.** *Le problème de détection et localisation de défauts diagonal avec une banque de  $r$  observateurs consiste à trouver, si possible, les matrices  $K^i$  et  $Q^i$  de telle sorte que le transfert défauts-résidus soit diagonal, c'est-à-dire de la forme suivante.*

$$\rho(s) = \begin{bmatrix} t_{11}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{22}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{rr}(s) \end{bmatrix} f(s),$$

où  $t_{ii}(s) \neq 0$  pour  $i = 1, 2, \dots, r$ .

### 1.2.2 Placement de capteurs

Considérons à nouveau le système linéaire (1.2.1). Dans le cas où le problème de détection et localisation de défauts n'a pas de solution avec les sorties actuelles du système, nous avons besoin d'ajouter de nouveaux capteurs qui mesurent des variables du système pour que le problème ait une solution. Nous définissons le vecteur  $z(t)$  par l'équation suivante :

$$z(t) = Hx(t) + F_3 f(t),$$

où  $z(t) \in \mathbb{R}^q$ , et  $z_i(t)$  la  $i$ ème composante de  $z(t)$  est la mesure obtenue par le  $i$ ème capteur additionnel.

Le système composé  $\Sigma^c$  est obtenu à partir du système initial (1.2.1) en ajoutant l'équation du  $z(t)$ .

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + F_1 f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + F_2 f(t) . \\ z(t) &= Hx(t) + F_3 f(t) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Quand nous traitons le problème de détection et localisation de défauts sur un système donné, et que nous avons besoin d'ajouter de nouveaux capteurs parce que le problème n'a pas de solution avec les sorties actuelles, les questions majeures qui se posent sont : quel est le nombre minimum de capteurs additionnels nécessaires, quelles sont les variables qui doivent être mesurées par les capteurs additionnels.

Dans les chapitres qui suivent, nous essayerons de donner des réponses à ces questions quand nous étudions le problème de détection et localisation de défauts sur une classe particulière des systèmes linéaires nommés les systèmes linéaires structurés.

### 1.3 Classification de capteurs pour la détection et localisation de défauts

Pour la deuxième problématique, nous restons toujours dans le cadre du problème de détection et localisation de défauts défini précédemment, et nous nous intéressons à la classification de capteurs du système selon leur importance pour le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs.

Dans notre étude nous considérons que le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs a une solution avec les capteurs actuels du système, cela veut dire qu'on n'a pas besoin d'ajouter de nouveaux capteurs additionnels. Ensuite nous allons classer les capteurs en trois types,

- Capteurs essentiels.
- Capteurs inutiles.
- Capteurs utiles.

Cette classification prendra en compte l'importance d'un capteur pour le la solubilité du problème de détection et localisation de défauts. La défaillance d'un capteur essentiel va rendre le problème insoluble, alors que la défaillance d'un capteur inutile n'aura pas effet sur la solubilité du problème.

Nous allons d'abord définir la notion de *Solution pour le problème FDI avec un sous-ensemble de capteurs*.

**Définition 1.3.1.** Soit  $\Sigma$  un système linéaire défini par (1.2.1), et supposons que le problème de détection et localisation de défauts (FDI) de la Définition 1.2.1 a une solution avec l'ensemble de capteurs actuels du système  $Y$ .

Soit  $V$  un sous-ensemble de  $Y$ .  $V$  est une solution pour le problème FDI avec une banque d'observateurs, si le problème FDI reste soluble avec le sous-ensemble de capteurs  $V$ .

En considérant la Définition 1.3.1 Nous allons définir les trois types de capteurs.

**Définition 1.3.2. (Capteur inutile)** Soit  $\Sigma$  un système linéaire défini par (1.2.1). Soit  $y_i$  le  $i$ ème capteur du système et  $V \setminus \{y_i\}$  l'ensemble  $V$  duquel le capteur  $y_i$  a été éliminé.

Le capteur  $y_i$  est un capteur inutile si pour toute solution  $V$  contenant  $y_i$ ,  $V \setminus \{y_i\}$  reste une solution. Tout capteur qui n'est pas inutile est un capteur utile.

Les capteurs d'un système qui ne sont pas inutiles représentent l'ensemble des capteurs utiles. Certains capteurs de l'ensemble des capteurs utiles peuvent être des capteurs essentiels.

**Définition 1.3.3. (Capteur essentiel)** Soit  $\Sigma$  un système linéaire défini par (1.2.1). Soit  $y_i$  un capteur du système.

Le capteur  $y_i$  est un capteur essentiel si il appartient à toute solution  $V$  pour le problème FDI.

La Figure 1.3 illustre les trois types de capteurs possibles dans un système selon leur importance pour le problème *FDI*.

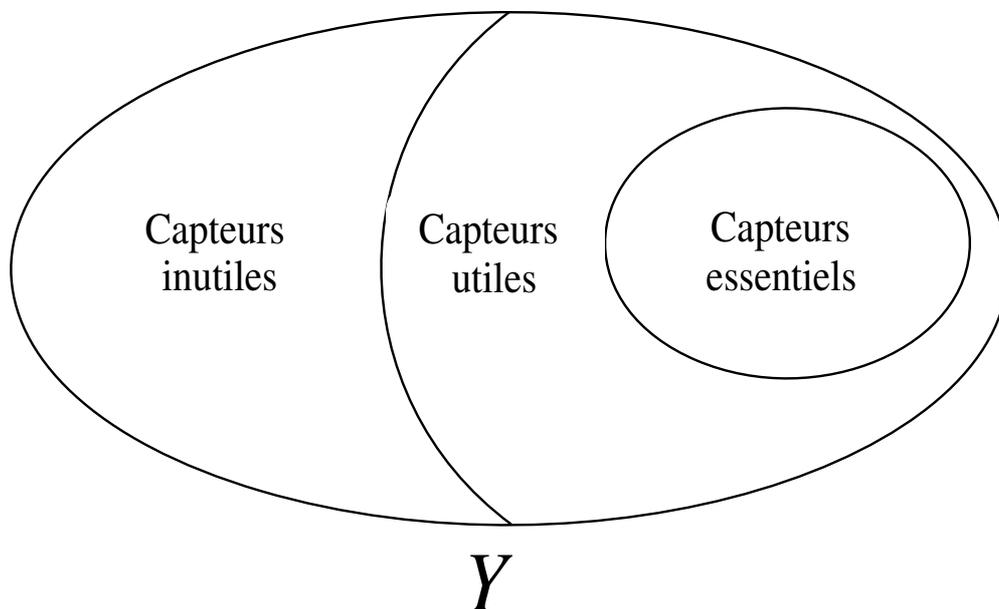


FIG. 1.3 – Les trois types de capteurs possibles

Dans le Chapitre 5 nous allons étudier ce problème de classification de capteurs sur la classe des systèmes linéaires structurés. Nous allons présenter une caractérisation des capteurs inutiles sous forme d'un théorème, et une méthode de calcul pour trouver les différents types de capteurs dans un système donné.

## Chapitre 2

# SYSTÈMES LINÉAIRES STRUCTURÉS

### 2.1 Introduction

Les systèmes linéaires structurés sont des classes particulières de systèmes linéaires multivariables décrits par des équations d'état dont les éléments des matrices sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres. Pour de tels systèmes, des propriétés dites génériques (ou structurelles) qui ne dépendent pas des valeurs des paramètres libres du modèle, mais de l'existence ou de l'absence de ces paramètres, peuvent être étudiées. Des graphes orientés peuvent être associés aux systèmes structurés, où les différentes variables du système correspondent aux sommets du graphe, et les arcs du graphe représentent les paramètres libres des matrices de la représentation d'état. Les graphes orientés associés aux systèmes linéaires structurés offrent un outil visuel pratique pour étudier et vérifier les propriétés génériques d'un système structuré.

Le concept de système linéaire structuré a été introduit par [27] à propos de la commandabilité structurelle d'un système monoentrée, propriété traduite graphiquement en termes de chemins et cycles particuliers dénommés cactus. Cette caractérisation a été généralisée aux systèmes structurés multientrées par [35] et [23], et simplifiée graphiquement par [29].

L'analyse graphique des systèmes structurés s'est dès lors développée dans différentes directions telles que la commandabilité, l'observabilité, le placement de pôles, le rejet de perturbation, le découplage...etc. Le livre [34] donne une première analyse simple de l'étude graphique des systèmes structurés. Le livre [32] donne des résultats généraux aux problèmes de solubilité générique et commandabilité générique.

Une approche utilisant la notion de structure à l'infini [15], [40], a permis de donner des conditions génériques de solubilité à différents problèmes de commande tels le rejet de perturbation par retour d'état [15], ou le découplage statique [18] simplifiant un premier résultat donné par [28]. L'interprétation graphique des ordres essentiels [6] a engendré de nouvelles solutions graphiques au problème de rejet de perturbation par retour de sortie [14].

Une étude de l'observabilité des systèmes structurés est faite dans [17], [3], et une classification des capteurs en termes de préservation de l'observabilité a été présentée dans [17].

## 2.2 Définition

[28] a proposé une définition des systèmes linéaires structurés en termes de "matrice structurée", où apparaissait la notion de paramètres soit fixés à zéro soit inconnus. Cette notion a été reprise par [31] en termes de paramètres soit nuls soit algébriquement indépendants.

En schématisant ce concept, un système linéaire structuré est un système linéaire pour lequel la seule information connue est l'existence ou l'absence de relation entre variables.

**Définition 2.2.1. (*Système structuré*)** Soit le système  $\Sigma_\Lambda$  décrit par la représentation d'état :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) \\ y(t) &= C_\Lambda x(t) \end{cases}, \quad (2.2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des états,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées, et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties.  $A_\Lambda$ ,  $B_\Lambda$ ,  $C_\Lambda$  sont des matrices de dimensions appropriées.

Le système  $\Sigma_\Lambda$  est appelé système linéaire structuré si la matrice

$$\begin{bmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 \end{bmatrix},$$

est une matrice structurée, c'est-à-dire les éléments de cette matrice sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres.

Parfois en partant des modèles dynamiques des systèmes non linéaires, et en linéarisant autour de différents points on peut trouver des modèles qui ont la même structure mais avec des valeurs différentes pour les paramètres, voir Figure 2.1. Un modèle de colonne à distiller a été étudiée dans [7]. de tels modèles qui dépendent de la structure des systèmes ont été abordés dans la littérature, voir par exemple [27; 30; 1]

### Exemple 2.2.1

Considérons le système  $\Sigma_\Lambda$  à trois états, deux entrées et deux sorties, décrit par les équations d'état suivantes :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) \\ y(t) &= C_\Lambda x(t) \end{cases},$$

où

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}$$

Les éléments des matrices de la représentation d'état sont soit des zéros fixes, qui indiquent une absence de relations entre les variables soit des paramètres

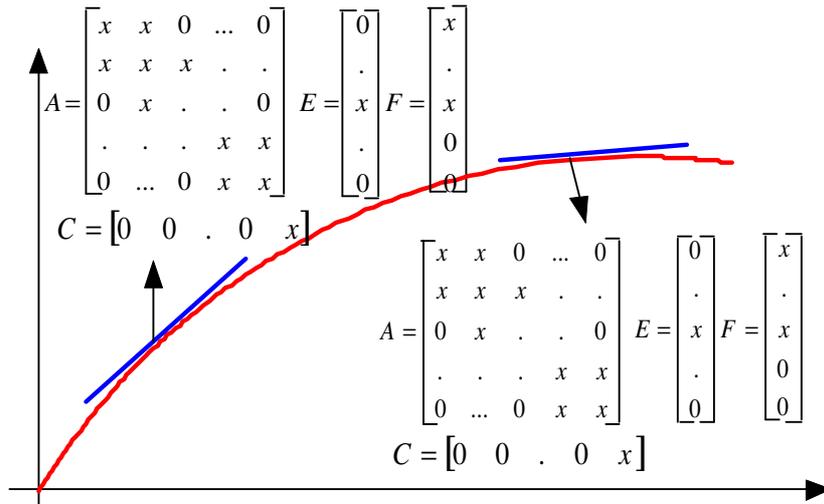


FIG. 2.1 – Un système non linéaire

libres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7$ , qui représentent les différentes relations entre les variables. Nous notons  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7) \in \mathbb{R}^7$  le vecteur des paramètres libres.

Pour cet exemple, la matrice de transfert du système  $\Sigma_\Lambda$  est :

$$T_\Lambda(s) = C_\Lambda(sI - A_\Lambda)^{-1}B_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_3\lambda_5s^{-2} & \lambda_2\lambda_4\lambda_5s^{-2} \\ \lambda_3\lambda_6s^{-1} & \lambda_4\lambda_7s^{-1} \end{bmatrix}.$$

### 2.3 Propriété générique

Une propriété générique est une propriété vraie pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. La notion de propriété générique est fondamentale dans l'étude des systèmes structurés. Ce concept a été présenté de manière théorique, en particulier par [43] et [31].

Pour illustrer cette notion de propriété générique, reprenons le système de l'Exemple 2.2.1. Le déterminant de la matrice de transfert de ce système est :

$$\det [T_\Lambda(s)] = \frac{\lambda_3\lambda_4\lambda_5(\lambda_1\lambda_7 - \lambda_2\lambda_6)}{s^3}.$$

Le rang de cette matrice est plein si :

$$\lambda_3 \neq 0, \lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \neq 0, \lambda_1\lambda_7 - \lambda_2\lambda_6 \neq 0,$$

c'est à dire,  $T_\Lambda(s)$  est non singulière pour presque toute valeur de  $\Lambda \in \mathbb{R}^7$ .

Une variété algébrique  $V \subset \mathbb{R}^7$  est définie comme l'hypersurface caractérisée par les

racines communes d'un nombre fini de polynômes  $p_1, p_2, \dots, p_k$  :

$$V = \{\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7) \mid p_i(\Lambda) = 0, i = 1, 2, \dots, k\}$$

$V$  est propre si  $V \neq \mathbb{R}^\tau$  et  $V$  est nontriviale si  $V \neq 0$ . Pour l'exemple ci dessus

$$V = \{\Lambda \mid \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 (\lambda_1 \lambda_7 - \lambda_2 \lambda_6) = 0\}$$

La notion de genericité peut donc être définie dans le contexte des systèmes structurés.

**Définition 2.3.1. (*Propriété générique*)** Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système linéaire structuré tel que  $\Lambda \in \mathbb{R}^\tau$ . Une propriété  $\Pi$  est dite générique, si  $\Pi$  est vraie pour toute valeur de  $\Lambda$  n'appartenant pas à une variété algébrique propre dans  $\mathbb{R}^\tau$ .

Donc une propriété générique est une propriété qui est vraie pour presque toutes les valeurs de  $\Lambda \in \mathbb{R}^\tau$ . Dans le cadre des systèmes linéaires structurés, plusieurs propriétés génériques peuvent être étudiées telles la commandabilité et l'observabilité, le rejet de perturbation, le découplage par retour d'état et le rang générique de la matrice de transfert d'un système qui sera définie dans la suite. D'autres propriétés génériques seront étudiées et illustrées plus tard dans ce mémoire.

**Définition 2.3.2. (*Rang générique*)** Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système linéaire structuré ayant pour matrice de transfert  $T_\Lambda(s)$ , avec  $\Lambda \in \mathbb{R}^\tau$ . Le rang générique, noté  $g$  – rang de  $T_\Lambda(s)$  est défini comme le rang de  $T_\Lambda(s)$  pour presque toutes les valeurs de  $\Lambda \in \mathbb{R}^\tau$ .

## 2.4 Association d'un graphe

Des graphes orientés peuvent être associés aux systèmes linéaires structurés. L'étude de ces systèmes à l'aide de leurs graphes associés fait partie des atouts majeurs de ce thème de recherche, et l'étude de propriétés génériques des systèmes structurés revient à vérifier certaines conditions sur les graphes associés. Rappelons maintenant quelques notions de base de théorie des graphes [31].

### 2.4.1 Graphes orientés

**Définition 2.4.1. (*Graphe orienté*)** Un graphe orienté  $G = (V, E)$ , est un couple d'ensembles constitué par :

- un ensemble d'éléments  $V = (v_1, \dots, v_k)$  appelés sommets.
- un ensemble  $E = (e_1, \dots, e_l)$  appelés arcs. Un arc  $e_h \in E$  est défini par  $e_h = (v_i, v_j)$  où  $v_i$  est appelé sommet initial, et  $v_j$  est appelé sommet final de l'arc  $e_h$ .

Sur le graphe  $G = (V, E)$ , un *chemin*  $P$  allant du sommet  $v_{\mu_0}$  au sommet  $v_{\mu_q}$  est une séquence d'arcs :

$$P = (v_{\mu_0}, v_{\mu_1}), (v_{\mu_1}, v_{\mu_2}), \dots, (v_{\mu_{q-2}}, v_{\mu_{q-1}}), (v_{\mu_{q-1}}, v_{\mu_q}),$$

telle que  $v_{\mu_t} \in V$  pour tout  $t = 0, \dots, q$ . La longueur d'un chemin est égale au nombre d'arcs le constituant, chaque arc étant compté autant de fois qu'il apparaît dans la séquence. Pour la séquence ci-dessus,  $P$  est de longueur égale à  $q$ . Pour plus de clarté, un chemin sera uniquement décrit par la séquence de sommets le constituant. Par exemple :

$$P = (v_{\mu_0}, v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_{q-1}}, v_{\mu_q}).$$

Si  $v_{\mu_0}$  appartient à  $V_1$  et  $v_{\mu_q}$  appartient à  $V_2$  où  $V_1, V_2$  sont deux sous-ensembles de  $V$  nous appelons  $P$  un  $V_1 - V_2$  chemin, de plus si  $v_{\mu_0}$  est le seul sommet de  $P$  qui appartient à  $V_1$  et  $v_{\mu_q}$  est le seul sommet de  $P$  qui appartient à  $V_2$ , nous appelons  $P$  un *chemin direct* de  $V_1$  à  $V_2$ .

Un chemin  $P$  est dit *simple* s'il ne rencontre pas deux fois le même sommet.

Un chemin  $P$  tel que  $v_{\mu_0} = v_{\mu_q}$  est appelé un *circuit*. Si de plus  $v_{\mu_i} \neq v_{\mu_j}$  pour  $i = 1, \dots, q-2$  et  $j = i+1, \dots, q-1$ , le circuit sera dit élémentaire. Par cohérence vis-à-vis de la traduction anglaise, un circuit élémentaire sera appelé un *cycle*.

Un ensemble de cycles recouvrant tous les sommets du graphe tel que les cycles n'aient aucun sommet commun est appelé une famille de cycles recouvrants.

### 2.4.2 Graphe d'un système structuré

Soit un système structuré  $\Sigma_\Lambda$  décrit par des équations différentielles de la forme (2.2.1).

Un graphe orienté  $G(\Sigma_\Lambda) = (V, E)$  peut être associé à  $\Sigma_\Lambda$  de la manière suivante : ensemble des sommets  $V = U \cup X \cup Y$  où

- $U = (u_1, \dots, u_m)$  correspond aux  $m$  entrées du système.
- $X = (x_1, \dots, x_n)$  correspond aux  $n$  états du système.
- $Y = (y_1, \dots, y_p)$  correspond aux  $p$  sorties du système.

ensemble des arcs  $E = E_{UX} \cup E_{XX} \cup E_{XY}$  où

- $E_{UX} = \{(u_j, x_i), b_{ij} \neq 0\}$  correspond aux relations non nulles entrées-états.
- $E_{XX} = \{(x_j, x_i), a_{ij} \neq 0\}$  correspond aux relations non nulles états-états.
- $E_{XY} = \{(x_j, y_i), c_{ij} \neq 0\}$  correspond aux relations non nulles états-sorties.

avec  $b_{ij}$  (resp.  $a_{ij}, c_{ij}$ ) l'élément  $(i, j)$  de la matrice  $B$  (resp.  $A, C$ ).

Cette représentation est naturelle par rapport à la symbolique d'un système linéaire. Un sommet représente bien une variable du système et un arc correspond bien à une relation de dépendance (directe) entre deux variables.

Un chemin

$$P = (v_{\mu_0}, v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_{q-1}}, v_{\mu_q}),$$

tel que  $v_{\mu_0} \in U$  et  $v_{\mu_q} \in Y$  est appelé un *chemin entrée-sortie*. Un ensemble de chemins entrées-sorties n'ayant aucun sommet en commun sera dit *sommets disjoints*.

### Exemple 2.4.1

Soit le système structuré  $\Sigma_\Lambda$  décrit par la représentation d'état suivante :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}, B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}, C_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 \end{pmatrix}$$

Ce système a deux entrées, trois états et deux sorties. Le graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  a donc pour ensemble de sommets :

$$V = (u_1, u_2, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2).$$

Les arcs sont créés à partir des paramètres libres des matrices  $A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda$  (par exemple, sur le graphe il y a un arc  $(u_1, x_1)$  de poids  $\lambda_1$  puisque  $b_{11} \neq 0$ ). Le graphe associé est représenté sur la Figure 2.2.

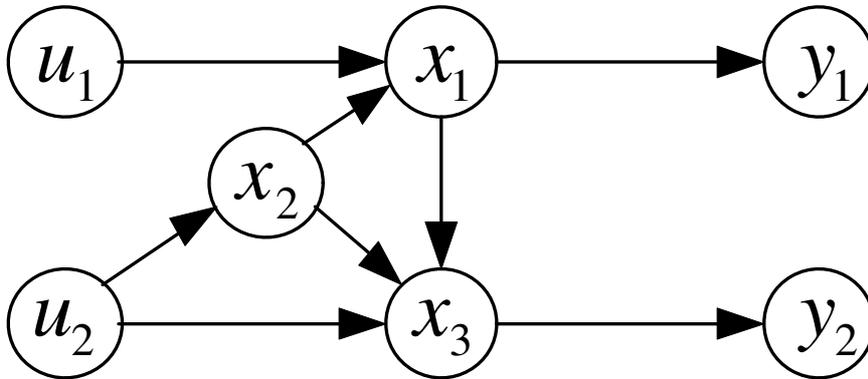


FIG. 2.2 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 2.4.1

### 2.4.3 Etude de propriétés génériques à l'aide des graphes

Les graphes orientés associés aux systèmes structurés présentent un outil efficace pour étudier les propriétés génériques de ces systèmes. Des conditions sont à vérifier sur les graphes afin d'étudier ces propriétés génériques. Une illustration sur le rang générique de la matrice de transfert d'un système et des problèmes de commande sera donnée par la suite.

### Le rang générique

Nous avons vu que le rang générique de la matrice de transfert d'un système structuré est défini comme le rang de la matrice pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Sur un graphe associé à un système structuré, le rang générique peut être calculé de la manière suivante.

**Théorème 2.4.1.** [19] Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système linéaire structuré décrit par (2.2.1) et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé, le rang générique de  $T_\Lambda(s)$  est égal au nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints sur  $G(\Sigma_\Lambda)$ .

#### Exemple 2.4.2

Considérons le système structuré  $\Sigma_\Lambda$  décrit par une représentation d'état dont les matrices sont :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & \lambda_5 & 0 \end{pmatrix}, B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_6 & \lambda_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{13} \end{pmatrix}.$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure 2.3. Pour calculer le rang générique de la matrice de transfert du système, il suffit de calculer le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints sur le graphe. Donc nous avons pour cet exemple trois chemins entrées-sorties sommets disjoints  $(u_1, x_1, x_2, y_1)$ ,  $(u_2, x_3, y_2)$ ,  $(u_3, x_4, x_5, x_6, y_3)$ , d'où le rang générique de la matrice de transfert

$$g - \text{rang} [T_\Lambda(s)] = 3.$$

### L'observabilité générique des systèmes structurés

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré. Le système  $\Sigma_\Lambda$  est génériquement observable s'il est observable pour presque toutes les valeurs des paramètres libres  $\Lambda$ .

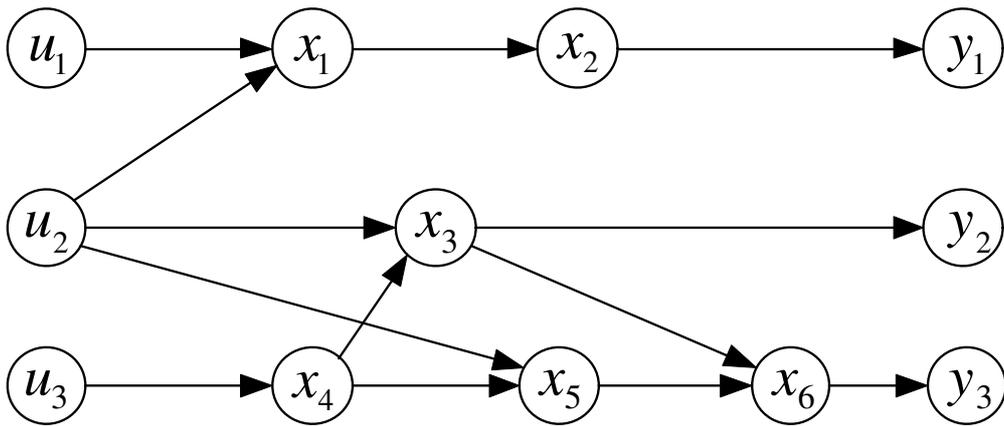


FIG. 2.3 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 2.4.2

L'observabilité générique peut être étudiée comme une propriété duale de la commandabilité générique [19]. Le Théorème 2.4.2 présente une caractérisation graphique de l'observabilité générique.

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système linéaire structuré décrit par (2.2.1) et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Le système  $\Sigma_\Lambda$  est génériquement observable si et seulement si sur le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  :*

- Tous les sommets d'états sont reliés aux sorties  $Y$ .
- Il existe une famille de chemins et circuits sommets disjoints qui couvrent tous les sommets d'états.

Illustrons la propriété de l'observabilité générique sur un exemple.

**Exemple 2.4.3**

Considérons un système structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par son graphe associé illustré sur la Figure 2.4

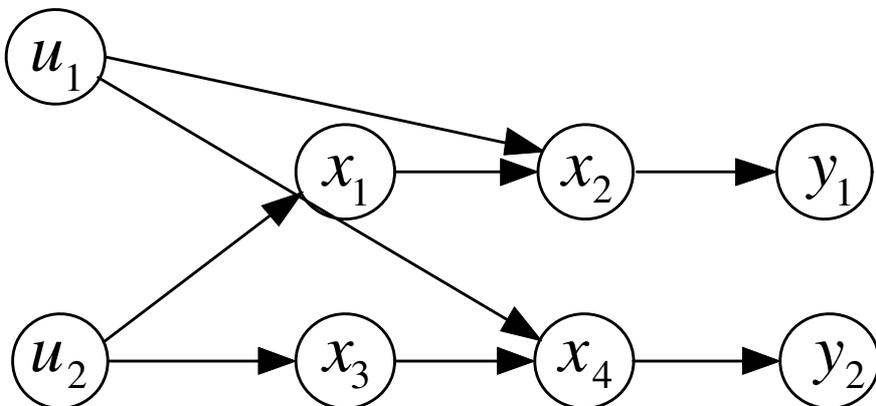


FIG. 2.4 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 2.4.3

Le système  $\Sigma_\Lambda$  est génériquement observable, parce que sur son graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  tous les sommets d'états  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont reliés aux sorties  $y_1$  et  $y_2$ , et il y a deux chemins  $(x_1, x_2, y_1)$ ,  $(x_3, x_4, y_2)$  qui sont des chemins sommets disjoints et qui couvrent tous les états, d'où les deux conditions du Théorème 2.4.2 sont satisfaites et le système est génériquement observable.

### Découplage par retour d'état

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré tel que le nombre de sorties soit égal au nombre d'entrées,  $m = p$ .

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) \\ y(t) &= C_\Lambda x(t) \end{cases},$$

dont le rang de la matrice de transfert est égal au nombre de sorties. Le problème du découplage consiste à déterminer une commande  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ ,  $G$  inversible, de telle sorte que le transfert  $C(sI - A - BF)^{-1}BG$  soit diagonal et non singulier, c'est-à-dire que chaque sortie peut être pilotée indépendamment des autres.

**Théorème 2.4.3.** [24] *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système linéaire structuré décrit par (2.2.1) tel que  $m = p$  et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé, tel que le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints soit égal au nombre de sorties  $p$ .*

*$\Sigma_\Lambda$  est génériquement découplable par un retour d'état  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ ,  $G$  inversible, si et seulement si :*

$$L_p = \sum_{i=1}^p (l_i),$$

où :

- $L_p$  : la longueur minimale de  $p$  chemins entrées-sorties sommets disjoints.
- $l_i$  : la longueur minimale d'un chemin allant des entrées à la sortie  $y_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ).

### Exemple 2.4.4

Prenons le système de l'Exemple 2.4.2, son graphe associé est présenté sur la Figure 2.3. Le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints est égal au nombre de sorties  $p = 3$ .

Vérifions maintenant si le système est génériquement découplable par un retour d'état  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ .

- La longueur minimale de trois chemins entrées-sorties sommets disjoints :  $L_3 = 9$ .
- La longueur minimale d'un chemin d'une entrée à  $y_1$  :  $l_1 = 3$ .
- La longueur minimale d'un chemin d'une entrée à  $y_2$  :  $l_2 = 2$ .
- La longueur minimale d'un chemin d'une entrée à  $y_3$  :  $l_3 = 3$ .

La condition  $L_3 = l_1 + l_2 + l_3$  n'est pas vérifiée, donc il n'existe pas de retour d'état de la forme  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ , qui découple les sorties du système.

### Rejet de perturbation

Soit un système linéaire structuré avec perturbation  $\Sigma_\Lambda^d$ , décrit par la représentation d'état suivante :

$$\Sigma_\Lambda^d \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + B_\Lambda u(t) + E_\Lambda d(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases} . \quad (2.4.1)$$

où :

$d(t)$  : vecteur de perturbation de dimension  $q$ .

$E_\Lambda$  : une matrice structurée de dimension  $n \times q$ .

Le graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda^d) = (V', E')$ , se construit de la même manière que  $G(\Sigma_\Lambda) = (V, E)$  avec :

- $V' = V \cup D$  avec  $D = \{d_1, \dots, d_q\}$ .
- $E' = E \cup E_{DX}$  où  $E_{DX} = \{(d_j, x_i), e_{ij} \neq 0\}$  correspond aux relations non nulles perturbations-états.

Le problème de rejet de perturbation consiste à trouver une commande de la forme  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ , de telle sorte que le transfert  $C(sI - A - BF)^{-1}(BG + E) = 0$ .

**Théorème 2.4.4.** [24] Soit  $\Sigma_\Lambda^d$  un système linéaire structuré avec perturbation décrit par (2.4.1), et  $G(\Sigma_\Lambda^d)$  son graphe associé.  $G(\Sigma_\Lambda)$  est le graphe associé au système sans perturbation.

Le problème de rejet de perturbation est génériquement soluble par un retour d'état et perturbation  $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$  si et seulement si :

- Le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints ( $= r$ ) est le même sur  $G(\Sigma_\Lambda)$  que sur  $G(\Sigma_\Lambda^d)$ .
- La longueur totale minimale de  $r$  chemins entrées-sorties sommets disjoints est la même sur  $G(\Sigma_\Lambda)$  que sur  $G(\Sigma_\Lambda^d)$ .

### Exemple 2.4.5

Soit  $\Sigma_\Lambda^d$  un système linéaire structuré décrit par les matrices :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, E_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_4 \\ 0 \end{pmatrix} C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Les graphes  $G(\Sigma_\Lambda)$  et  $G(\Sigma_\Lambda^d)$  associés aux systèmes  $\Sigma_\Lambda$  et  $\Sigma_\Lambda^d$  sont donnés sur la Figure 2.5.

Le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints est le même sur  $G(\Sigma_\Lambda)$  et  $G(\Sigma_\Lambda^d)$  et est égal à 1.

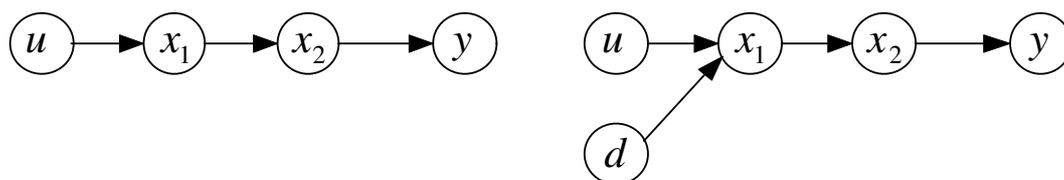


FIG. 2.5 – Graphes associés  $G(\Sigma_\Lambda)$  et  $G(\Sigma_\Lambda^d)$  de l'exemple 2.4.5

La longueur totale minimale de  $r$  chemins entrées-sorties sommets disjoints est la même sur  $G(\Sigma_\Lambda)$  que sur  $G(\Sigma_\Lambda^d)$  et est égale à 3.

Donc le problème de rejet de perturbation par retour d'état est génériquement soluble pour le système structuré de l'exemple 2.4.5.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les systèmes linéaires structurés ont été présentés. La notion de genericité a été abordée puisqu'elle joue un rôle prédominant dans l'étude de tels systèmes. Nous avons montré comment associer des graphes orientés aux systèmes linéaires structurés. Ces graphes représentent un outil intéressant pour l'étude des propriétés génériques des systèmes structurés. Une illustration sur l'étude du rang générique, de l'observabilité générique, du découplage par retour d'état et du rejet de perturbation à l'aide des graphes associés aux systèmes structurés a été présentée à la fin du chapitre.

## Chapitre 3

# APPROCHE STRUCTURELLE DU PROBLÈME DE DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS (FDI)

### **3.1 Introduction**

Dans ce chapitre nous considérons des systèmes linéaires structurés avec des défauts. Nous allons ensuite à partir des graphes associés à ces systèmes présenter une condition de solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts. Une illustration de cette condition sera donnée sur quelques exemples.

### **3.2 Solubilité générique du problème FDI**

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment étudier et vérifier des propriétés génériques des systèmes structurés, telles que le rang générique de la matrice de transfert d'un système, la solubilité des problèmes de rejet de perturbation et de découplage par retour d'état, à partir de leurs graphes associés. Maintenant nous allons considérer le problème de la détection et localisation de défauts. Nous allons utiliser les graphes associés aux systèmes structurés pour donner une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit génériquement soluble.

Un système linéaire structuré avec des défauts peut être représenté par des équations d'état de la forme :

$$\Sigma_{\Lambda} \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{\Lambda}x(t) + F_{\Lambda}f(t) \\ y(t) &= C_{\Lambda}x(t) \end{cases}, \quad (3.2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des états,  $f(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur des défauts, et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des sorties.  $A_{\Lambda}$ ,  $F_{\Lambda}$ ,  $C_{\Lambda}$  sont des matrices de dimensions appropriées, et ces matrices sont toutes des matrices structurées, les éléments de ces matrices sont soit des zéros fixes soit des paramètres libres.

Remarquons que dans le système décrit par (3.2.1), nous n'avons pas considéré les entrées connues comme les commandes  $U$  car dans le problème de détection et localisation de défauts basé sur une approche de type estimation d'état à l'aide d'observateurs, ces entrées connues peuvent être prises en considération dans la structure des observateurs sans aucune perte de généralité.

Nous pouvons associer un graphe orienté à un système linéaire structuré avec des défauts comme nous avons vu dans le Chapitre 3, mais dans ce cas les entrées du graphe sont  $F$ , l'ensemble de sommets qui correspondent aux défauts. Les états et les sorties du système sont représentés par des sommets sur le graphe et les arcs correspondent aux éléments non nuls des matrices  $A_{\Lambda}$ ,  $F_{\Lambda}$ ,  $C_{\Lambda}$ , autrement dit aux relations non nulles entre les différentes variables du système.

Nous présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts soit génériquement soluble.

**Théorème 3.2.1.** [16] *Soit  $\Sigma_{\Lambda}$  un système linéaire structuré observable et  $G(\Sigma_{\Lambda})$  son graphe associé. Le problème de détection et localisation de défauts (FDI) avec une banque*

### Chapitre 3. APPROCHE STRUCTURELLE DU PROBLÈME DE DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS (FDI)

d'observateurs défini dans le Chapitre 2 est génériquement soluble si et seulement si :

$$k = r,$$

où :

- $k$  : est le nombre maximum des chemins défauts-sorties sommets disjoints sur le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$ .
- $r$  : est le nombre de défauts.

Prenons maintenant un exemple pour illustrer ce théorème.

#### Exemple 3.2.1

Considérons le système  $\Sigma_\Lambda$  avec quatre états, trois défauts et trois sorties, décrit par les équations d'état suivantes :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + F_\Lambda f(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases} .$$

où

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}, F_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 & 0 & \lambda_9 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure 3.1.

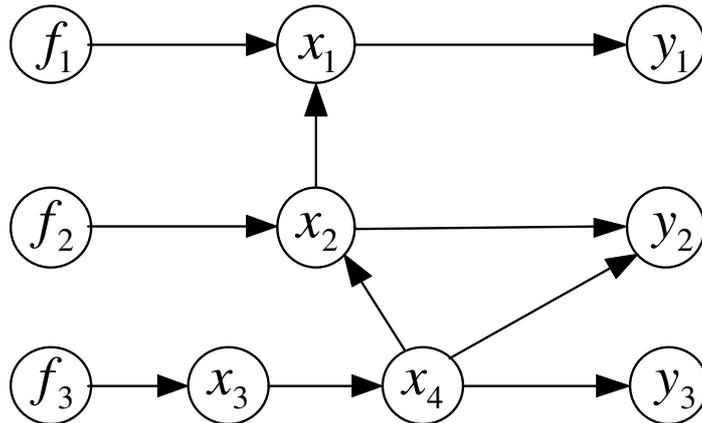


FIG. 3.1 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 3.2.1

Vérifions la condition du Théorème 3.2.1.

### Chapitre 3. APPROCHE STRUCTURELLE DU PROBLÈME DE DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS (FDI)

---

- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est égal à trois i.e  $k = 3$ .
- Le nombre de défauts est égal à trois i.e  $r = 3$

d'où  $k = r = 3$ , et la condition est satisfaite et le problème de détection et localisation de défauts est génériquement soluble sur cette exemple.

Prenons maintenant un autre exemple.

#### Exemple 3.2.2

Considérons le système  $\Sigma_\Lambda$  avec neuf états, cinq défauts et quatre sorties, décrit par les équations d'état suivantes :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Lambda x(t) + F_\Lambda f(t) \\ y(t) = C_\Lambda x(t) \end{cases} .$$

où

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & 0 \end{pmatrix}, F_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{14} & \lambda_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{19} & 0 & 0 & \lambda_{20} & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure 3.2.

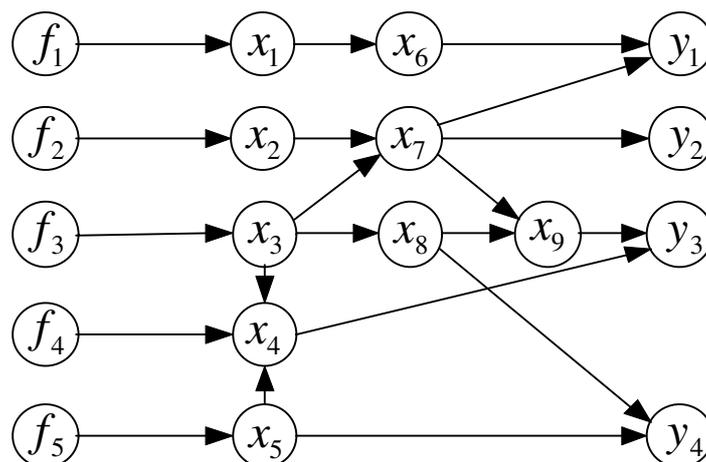


FIG. 3.2 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 3.2.2

Vérifions la condition du Théorème 3.2.1.

- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est égal à quatre i.e  $k = 4$ .
- Le nombre de défauts est égal à cinq i.e  $r = 5$

d'où  $k \neq r$  et la condition du Théorème 3.2.1, n'est pas satisfaite et le problème de détection et localisation de défauts n'est pas soluble.

Dans le cas où la condition  $k = r$  n'est pas satisfaite, nous allons ajouter de nouveaux capteurs afin de satisfaire cette condition. Le but sera toujours d'augmenter le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints. La question qui se pose dans le cas où il faut ajouter de nouveaux capteurs est la suivante : quelle sont les variables qui doivent être mesurées par les nouveaux capteurs.

Pour mieux comprendre cette problématique reprenons l'exemple 3.2.2 où la condition du Théorème 3.2.1 n'est pas satisfaite. Sur cet exemple le nombre de défauts est  $r = 5$ , et le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 4$ . Nous avons besoin d'augmenter ce nombre de chemins défauts-sorties sommets disjoints pour rendre le problème génériquement soluble. Pour cela il nous faut un nouveau capteur  $z_1$ . Les Figures 3.3, 3.4 montrent deux possibilité pour ajouter ce nouveau capteur.

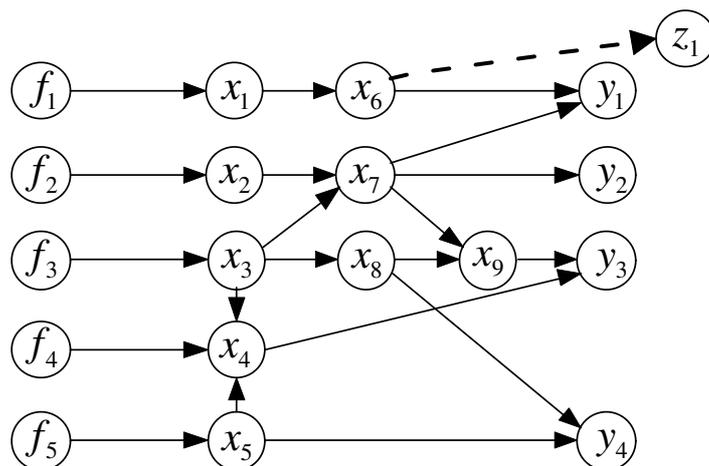


FIG. 3.3 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 3.2.2 avec le nouveau capteur  $z_1$

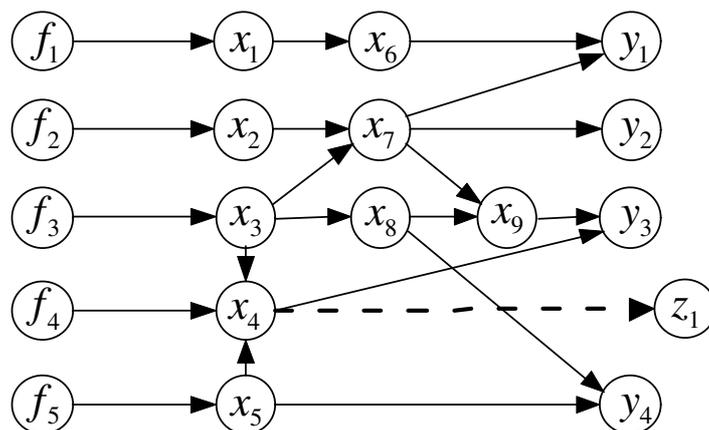


FIG. 3.4 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 3.2.2 avec le nouveau capteur  $z_1$

Sur la Figure 3.3, le nouveau capteur  $z_1$  mesure la variable  $x_6$  et si nous testons à nouveau la condition du Théorème 3.2.1, nous trouvons que le nombre maximum de chemins défaut-sortie sommets disjoints est toujours égal à 4, i.e même avec un nouveau capteur nous n'avons pas rempli la condition de la solubilité générique du problème *FDI*. Par contre sur la Figure 3.4, le nouveau capteur  $z_1$  mesure la variable  $x_4$ . En vérifiant la condition du Théorème 3.2.1, nous trouvons que le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est devenu 5 alors  $k = r = 5$  et la condition est remplie.

D'après ces deux cas, nous pouvons déduire que dans le cas où la condition de la solubilité générique du problème *FDI* n'est pas satisfaite, et nous devons ajouter de nouveaux capteurs pour la remplir, certaines variables du système sont intéressantes à mesurer et nous les appelons les mesures efficaces, d'autres ne le sont pas. Pour savoir quelles sont ces mesures efficaces dans un système, une décomposition du système est présentée dans

### Chapitre 3. APPROCHE STRUCTURELLE DU PROBLÈME DE DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS (FDI)

---

[16]. Cette décomposition donne à partir du système initial un système réduit qui ne contient que les mesures efficaces. Dans le chapitre suivant une décomposition plus fine du système sera présentée, elle donne des informations structurelles sur le placement de nouveaux capteurs nécessaires pour remplir la condition de la solubilité générique du problème *FDI*.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une condition nécessaire et suffisante pour la solubilité générique du problème de la détection et localisation de défauts. Dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite, nous avons besoin d'ajouter de nouveaux capteurs. Nous avons montré comment toutes les variables ne sont pas intéressantes à mesurer. Cela va nous guider pour décomposer le système afin d'avoir des informations structurelles sur le placement de nouveaux capteurs.



## Chapitre 4

# DECOMPOSITION DU SYSTÈME

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter le résultat principal de notre travail. Pour que le problème de détection et localisation de défauts soit génériquement soluble, il faut que la condition du Théorème 3.2.1 soit satisfaite i.e. il faut que le nombre de défauts  $r$  soit égal au nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints dans le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système structuré. Quand cette condition n'est pas satisfaite il faut ajouter de nouveaux capteurs pour la remplir. Sachons que dans ce chapitre nous supposons que les capteurs actuels et additionnels du système sont sans défauts et qu'ils ne tombent pas en panne. Le but est toujours de placer les nouveaux capteurs de manière à augmenter le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints. Nous allons présenter une condition nécessaire et suffisante pour le placement de ces nouveaux capteurs en termes de nombre minimal de capteurs qui doivent mesurer des variables du système qui appartiennent à des ensembles spécifiques.

Nous utilisons pour cela un outil qui s'appelle les *séparateurs*, où un séparateur dans un graphe orienté est un ensemble de sommets du graphe tel que chaque chemin entrée-sortie a au moins un sommet dans cet ensemble. A chaque séparateur nous allons associer un ensemble associé et une contrainte associée. Ensuite parmi tous les séparateur du graphe nous allons nous intéresser à un ensemble spécifique nommé l'ensemble des séparateurs d'entrée et nous allons montrer que dans le cadre du problème de placement de capteurs additionnels, le respect des contraintes associées aux séparateurs d'entrée est une condition nécessaire et suffisante pour rendre le problème de détection et localisation de défauts génériquement soluble.

Le chapitre sera constitué essentiellement de deux parties. La première est consacrée à l'aspect séparateur, la définition d'un séparateur, les séparateurs d'entrée, le calcul numérique de certains séparateurs d'entrée, et nous allons montrer que les séparateurs dans un graphe orienté admettent une relation d'ordre et qu'il y a une structure de treillis qui correspond aux séparateurs d'entrée du graphe orienté. Dans la deuxième partie nous allons aborder la décomposition du système pour le placement de capteurs additionnels. Nous allons rappeler un premier résultat obtenu par [8], puis nous allons présenter la condition nécessaire et suffisante pour le placement de nouveaux capteurs sous forme d'un théorème, ensuite nous allons illustrer les résultats sur plusieurs exemples.

### 4.2 Séparateurs

#### 4.2.1 Définition

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé.

**Définition 4.2.1. (*Séparateur*)** [41] *Un séparateur  $S$  est un ensemble de sommets du*

graphe tel que chaque chemin entrée-sortie a au moins un sommet dans cet ensemble. La dimension d'un séparateur est le nombre de sommets dans  $S$ .

La Figure 4.1 illustre d'une manière générale l'idée de séparateur dans un graphe orienté. Nous remarquons sur cette figure que l'ensemble  $S$  est un passage obligatoire pour tout chemin qui a un sommet d'entrée comme sommet initial et un sommet de sortie comme sommet terminal. Un ensemble  $S$  qui représente un séparateur peut contenir des sommets d'état, des sommets d'entrée, et des sommets de sortie, de plus l'ensemble de sommets d'entrée et l'ensemble de sommets de sortie dans un graphe orienté sont des séparateurs.

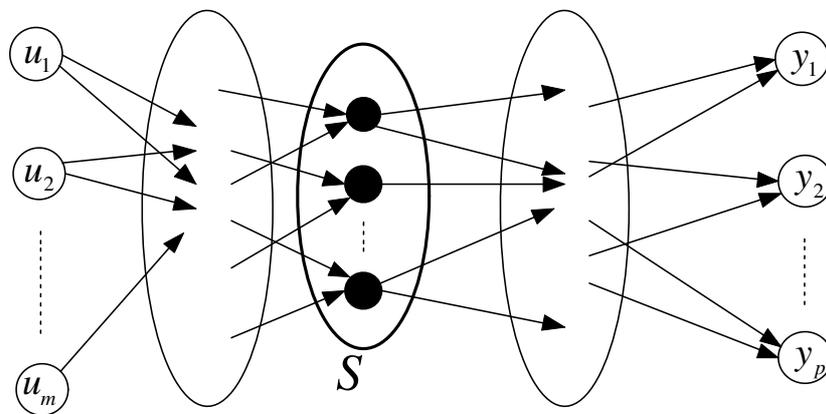


FIG. 4.1 – Séparateur d'un graphe orienté

## 4.2.2 Exemple

Prenons l'exemple suivant.

### Exemple 4.2.1

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré.  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 4.2.

Sur cette figure nous pouvons déduire un certain nombre de séparateurs. Nous en citons quelques uns :

- $\{y_1, y_2, y_3\}$  est un séparateur de dimension 3.
- $\{x_3, x_4\}, \{x_1, x_2\}$  sont deux séparateurs de dimension 2.
- $\{x_3, x_4, x_1, x_2\}$  est un séparateur de dimension 4.
- $\{x_3, x_4, u_1\}, \{x_1, x_2, u_2\}, \{x_1, x_2, x_7\}, \{x_1, x_2, u_4\}$  sont des séparateurs de dimension 3.
- $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  est un séparateur de dimension 4.

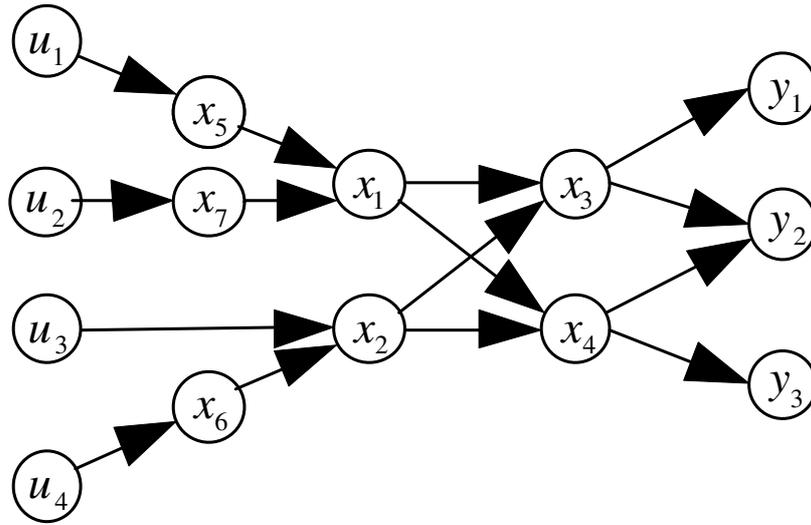


FIG. 4.2 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 4.2.1

### 4.2.3 L'ensemble associé au séparateur

A chaque séparateur  $S$ , nous pouvons associer un ensemble de sommets, que nous allons nommer  $T_S$ .

**Définition 4.2.2. (*Ensemble associé au séparateur*)** Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Soit  $S$  un séparateur de  $G(\Sigma_\Lambda)$ . L'ensemble  $T_S$  associé au séparateur  $S$ , est l'ensemble de tous les sommets qui se trouvent sur un chemin direct des entrées au séparateur  $S$  sauf les sommets du séparateur lui même. Un chemin direct de  $U$  à  $S$  est un chemin qui a seulement son sommet initial dans  $U$  et seulement son sommet terminal dans  $S$ .

#### Exemple 4.2.2

Considérons le système structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par son graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  qui est illustré sur la Figure 4.3.

- L'ensemble associé au séparateur  $\{y_1\}$  est  $\{u_1, u_2, u_3, x_1\}$ .
- L'ensemble associé au séparateur  $\{y_1, x_1\}$  est  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .
- L'ensemble associé au séparateur  $\{y_1, x_1, u_1\}$  est  $\{u_2, u_3\}$ .

Reprenons l'exemple 4.2.1 dont le graphe associé est illustré sur la Figure 4.2.

- L'ensemble associé au séparateur  $\{x_3, x_4\}$  est  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$ .
- L'ensemble associé au séparateur  $\{x_1, x_2\}$  est  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, x_5, x_6, x_7\}$ .
- L'ensemble associé au séparateur  $\{x_1, x_2, u_1\}$  est  $\{u_2, u_3, u_4, x_6, x_7\}$ .
- L'ensemble associé au séparateur  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  est  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, x_5, x_6, x_7\}$ .

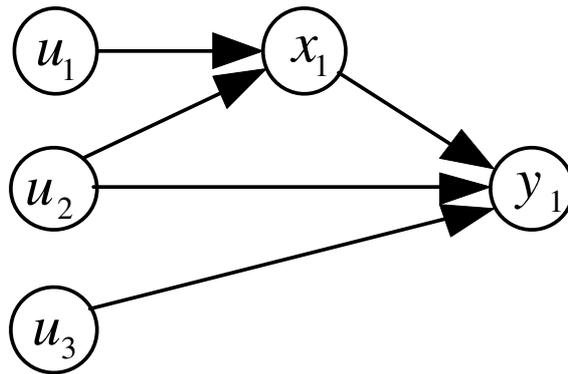


FIG. 4.3 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 4.2.2

Nous remarquons que les deux séparateurs  $\{x_1, x_2\}$ ,  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  ont le même ensemble associé, donc les séparateurs dans un graphe orienté ne peuvent pas être caractérisés par les leurs ensembles associés.

La notion d'ensemble associé au séparateur est un outil que nous allons utiliser dans la suite pour définir une relation d'ordre sur les séparateurs, et aussi quand nous allons décomposer le graphe associé au système pour avoir des informations structurelles sur le placement de capteurs additionnels.

Parmi tous les séparateurs d'un graphe orienté, il y en a certains qui ont des propriétés spécifiques et qui forment des ensembles particuliers tels que les séparateurs d'entrée, les séparateurs irréductibles, les séparateurs irréductibles d'entrée.

Dans le paragraphe suivant nous nous intéressons à l'ensemble des séparateurs d'entrée, car ces séparateurs auront un rôle majeur dans notre étude du problème de placement de capteurs pour la détection et localisation de défauts. Nous allons ensuite donner les définitions d'autres types de séparateurs et un exemple illustratif.

### 4.3 Les séparateurs d'entrée

**Définition 4.3.1. (Séparateur d'entrée)** [13] Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Un séparateur  $S$  de dimension  $d$  est un séparateur d'entrée, si pour tout séparateur  $S'$  différent de  $S$  et de dimension  $d'$ , où tout chemin direct des entrées à  $S$  a un sommet dans  $S'$ , nous avons  $d' > d$ .

Cette définition peut se traduire de la manière suivante : un séparateur  $S$  est un séparateur d'entrées si il n'y a pas d'autre séparateur d'une dimension inférieure ou égale à sa dimension entre les entrées et ce séparateur  $S$ .

### 4.3.1 Le séparateur minimal d'entrée $S^*$

Les séparateurs d'entrée dans un graphe ont des dimensions différentes qui varient entre une dimension maximale qui correspond au séparateur  $U$  dont la dimension est le nombre de sommets d'entrée et une dimension minimale prise par un séparateur nommé le séparateur minimal d'entrée. Il peut être montré que le séparateur minimal d'entrée est unique et il est noté  $S^*$  [41]. La dimension de  $S^*$  est égale à la dimension maximale d'un couplage entrées-sorties dans  $G(\Sigma_\Lambda)$ . En effet  $S^*$  est le premier goulot (*bottleneck*) entre les entrées et les sorties. Pour obtenir ce séparateur minimal d'entrée [41] définit un ensemble nommé l'ensemble de sommets essentiels  $V_{ess}$ .

**Définition 4.3.2. (*Ensemble de sommets essentiels*)** *L'ensemble de sommets essentiels dans un graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  est l'ensemble des sommets qui appartiennent à tout linking entrées-sorties de dimension maximale. Rappelons qu'un linking entrées-sorties de dimension maximale est un ensemble maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints. Nous notons  $V_{ess}$  l'ensemble de sommets essentiels.*

**Définition 4.3.3. (*Séparateur minimal d'entrée  $S^*$* )** *Le séparateur minimal d'entrée dans un graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  est l'ensemble de tous les sommets terminaux de tout chemin direct de  $U$  à  $V_{ess}$  qui est un chemin qui a seulement son sommet initial dans  $U$  et seulement son sommet terminal dans  $V_{ess}$ .*

Le séparateur minimal d'entrée peut être obtenu facilement en utilisant des algorithmes standard de flot maximum tels que l'algorithme de *Ford et Fulkerson*. Le séparateur minimal d'entrée dans ce cas correspond à la coupe minimale associée au flot maximum. Cette méthode sera généralisée ultérieurement pour calculer numériquement un sous-ensemble de séparateurs d'entrée.

Nous pouvons trouver plusieurs séparateurs d'entrée qui ont la même dimension, entre le séparateur minimal d'entrée et le séparateur  $U$  qui eux sont uniques dans un graphe. Nous allons donner maintenant une caractérisation des séparateurs d'entrée.

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé.*

*Un séparateur  $S$  de dimension  $d$  est un séparateur d'entrée si et seulement si :*

- *Il y a un  $U$ - $S$  linking de dimension  $d$  dans  $G(\Sigma_\Lambda)$ .*
- *Pour tout séparateur  $S'$  tel que tous chemin direct de  $U$  à  $S$  a un sommet dans  $S'$ , la dimension maximale d'un  $U$ - $S'$  linking dans  $G(\Sigma_\Lambda)$  est  $d' > d$ .*

#### Démonstration

Condition nécessaire

Supposons que  $S$  est un séparateur d'entrée de dimension  $d$ . Il est clair que le  $U$ - $S$  linking ne peut pas être de dimension supérieure à  $d$ . Supposons maintenant que ce linking soit de dimension inférieure à  $d$ , cela veut dire que le sous système avec  $U$

comme entrées et  $S$  comme sorties contient un séparateur  $S'$  de dimension  $d' < d$  et cela contredit le fait que  $S$  est un séparateur d'entrée. Le  $U$ - $S$  linking est donc de dimension  $d$ . Si il existe un  $U$ - $S'$  linking de dimension inférieure ou égale à  $d$ , il y aura un séparateur  $S''$  tel que tout chemin direct de  $U$  à  $S'$  donc de  $U$  à  $S$ , a un sommet dans  $S''$ . Cela contredit le fait que  $S$  est un séparateur d'entrée de dimension  $d$ .

Condition suffisante

Supposons que  $S$  est un séparateur de dimension  $d$  et que le  $U$ - $S$  linking est de dimension  $d$ . Si  $S$  n'est pas un séparateur d'entrée de dimension  $d$ , il y aura un séparateur d'entrée de dimension inférieure ou égale à  $d$  entre  $U$  et  $S$ . Le linking entre  $U$  et ce séparateur sera aussi de dimension inférieure ou égale à  $d$ , et cela contredit notre supposition. D'où  $S$  est un séparateur d'entrée de dimension  $d$ .  $\square$

### 4.3.2 Exemples

Illustrons maintenant l'idée de séparateur d'entrée sur des exemples.

#### Exemple 4.3.1

Considérons un système linéaire structuré avec 3 entrées et 1 sortie et une variable d'état dont le graphe associé est illustré sur la Figure 4.4.

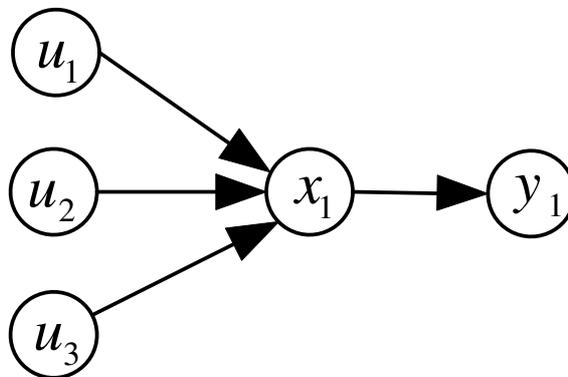


FIG. 4.4 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 4.3.1

- Le linking maximal entre les entrées et la sortie est de dimension 1, donc le séparateur minimal d'entrée est de cette dimension. Dans ce cas  $\{x_1\}$  est le séparateur minimal d'entrée.
- Les séparateurs  $\{x_1, u_1\}, \{x_1, u_2\}, \{x_1, u_3\}$  sont tous des séparateurs d'entrée. Chacun de ces séparateur contient le séparateur minimal d'entrée  $\{x_1\}$ , et cela ne contredit pas le fait qu'ils sont tous des séparateurs d'entrée.

- Le séparateur  $U=\{u_1, u_2, u_3\}$  est le séparateur d'entrée de dimension maximale 3.

**Exemple 4.3.2**

Reprenons le système dont le graphe associé est illustré sur la Figure 4.2. Les séparateurs d'entrée que nous pouvons déduire à partir de ce graphe sont :

- Le séparateur  $\{y_1, y_2, y_3\}$  de dimension 3 n'est pas un séparateur d'entrée car il n'y a pas de linking de dimension 3 entre les entrées et ce séparateur.
- Le séparateur  $\{x_3, x_4\}$  de dimension 2 n'est pas un séparateur d'entrée bien qu'il y ait un linking de dimension 2 entre les entrées et ce séparateur, car il y a le séparateur  $\{x_1, x_2\}$  qui se trouve entre les  $U$  et  $\{x_3, x_4\}$  et qui a la même dimension, donc d'après la Proposition 4.3.1 il ne peut pas être un séparateur d'entrée.
- $\{x_1, x_2\}$  est le séparateur minimal d'entrée  $S^*$ .
- $S_3^1=\{u_1, u_2, x_2\}$ ,  $S_3^2=\{u_3, u_4, x_1\}$  sont deux séparateurs d'entrée de dimension 3.
- $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  est le séparateur d'entrée  $U$  de dimension 4.

**Exemple 4.3.3**

Considérons un système linéaire structuré avec 6 entrées et 3 sorties dont le graphe associé est illustré sur la Figure 4.5. Les séparateurs d'entrée que nous pouvons déduire à partir de ce graphe sont :

- Le séparateur minimal d'entrée est  $\{u_6, y_1, y_2\}$ .
- Les séparateurs d'entrée de dimension 4 sont  $S_4^1=\{y_1, y_2, u_1, u_6\}$ ,  $S_4^2=\{y_1, y_2, x_1, u_6\}$ ,  $S_4^3=\{y_1, y_2, u_2, u_6\}$ ,  $S_4^4=\{y_1, y_2, u_3, u_6\}$ ,  $S_4^5=\{y_1, y_2, u_4, u_6\}$ ,  $S_4^6=\{y_1, y_2, u_5, u_6\}$ .
- Les séparateurs d'entrée de dimension 5 sont  $S_5^1=\{u_1, u_2, u_3, u_6, y_2\}$ ,  $S_5^2=\{y_1, y_2, u_1, u_4, u_6\}$ ,  $S_5^3=\{y_1, y_2, u_1, u_5, u_6\}$ ,  $S_5^4=\{y_1, y_2, u_2, u_4, u_6\}$ ,  $S_5^5=\{y_1, y_2, u_2, u_5, u_6\}$ ,  $S_5^6=\{u_3, u_4, u_5, u_6, y_1\}$ .
- Le séparateur d'entrée de dimension 6 est le séparateur  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ .

## 4.4 Séparateur minimal de sortie $S_*$

Le séparateur minimal de sortie est le dual du séparateur minimal d'entrée.

La notion de séparateur minimal de sortie est un outil que nous allons utiliser quand nous allons étudier le problème de classification de sorties d'un système défini dans le

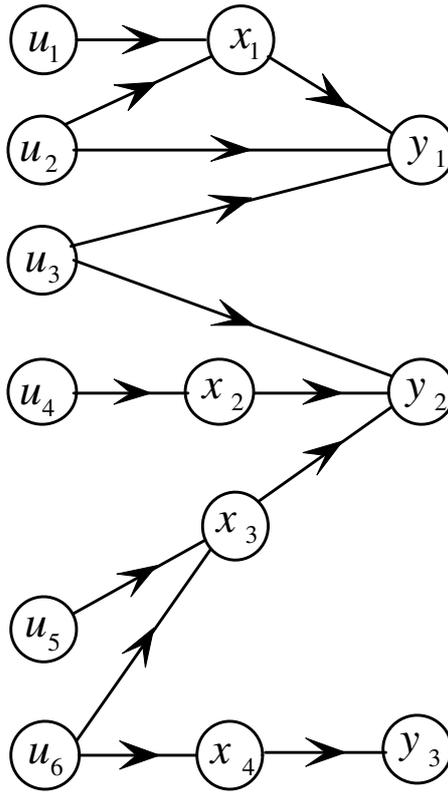


FIG. 4.5 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'exemple 4.3.3

Chapitre 2 afin de déterminer les sorties essentielles.

Pour obtenir le séparateur minimal de sortie, nous pouvons utiliser l'ensemble de sommets essentiels défini par la Définition 4.3.2, donc le séparateur minimal de sortie peut être défini comme suit.

**Définition 4.4.1.** (*Séparateur minimal de sortie  $S_*$* ) *Le séparateur minimal de sortie dans un graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  est l'ensemble de tous les sommets initiaux de tout chemin direct de  $V_{ess}$  à  $Y$  qui est un chemin qui a seulement son sommet initial dans  $V_{ess}$  et seulement son sommet terminal dans les sorties  $Y$ .*

$S_*$  est en fait le dernier *bottleneck* entre les entrées et les sorties.

**Exemple 4.4.1**

Considérons le système structuré dont le graphe associé a été illustré sur la Figure 4.2. L'ensemble de sommets essentiels de ce graphe est  $V_{ess} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

Les chemins directs de  $V_{ess}$  à  $Y$  sont :  $\{x_3, y_1\}, \{x_3, y_2\}, \{x_4, y_2\}, \{x_4, y_3\}$ . D'où le séparateur minimal de sortie  $S_* = \{x_3, x_4\}$ .

Par dualité le séparateur minimal de sortie peut être obtenu de manière semblable au séparateur minimal d'entrée en utilisant des algorithmes standard de flot maximum mais

en inversant le sens des arcs du graphe, dans ce cas le séparateur minimal de sortie correspond à la coupe minimale associée au flot maximum du graphe dual de celui du départ.

### 4.5 Les séparateurs irréductibles et les séparateurs irréductibles d'entrée

Nous avons vu dans le paragraphe précédent l'ensemble de séparateurs d'entrée. Il y a d'autres types de séparateurs qui peuvent se trouver dans un graphe orienté, tels que les séparateurs irréductibles.

**Définition 4.5.1. (Séparateur irréductible)** *Un ensemble de sommets  $S$  dans un graphe orienté est un séparateur irréductible si il n'y a pas un sous-ensemble  $S'$  qui appartient à  $S$  et qui est un séparateur.*

Donc un séparateur irréductible est un séparateur qui ne contient pas d'autre séparateur. Il y a une intersection entre l'ensemble de séparateurs d'entrée et l'ensemble de séparateurs irréductibles. Les séparateurs qui appartiennent à cette intersection sont appelés les séparateurs irréductibles d'entrée. Le séparateur minimal d'entrée  $S^*$  est un exemple d'un séparateur irréductible d'entrée.

Illustrons les notions de séparateur irréductible et séparateur irréductible d'entrée sur l'exemple suivant.

#### Exemple 4.5.1

Considérons un système linéaire structuré avec 3 entrées, 2 sorties et 2 variables d'état dont le graphe associé est illustré sur la Figure 4.6.

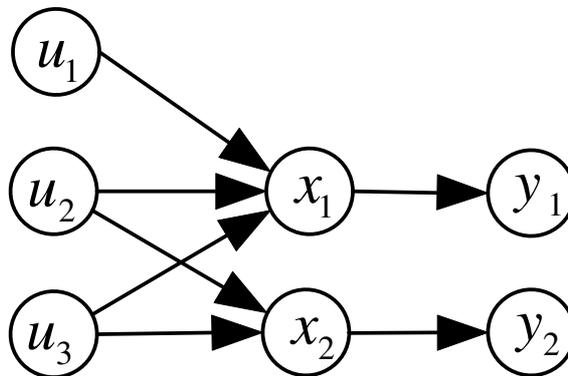


FIG. 4.6 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'Exemple 4.5.1

- Le séparateur  $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$  n'est pas un séparateur irréductible, car il contient un sous-ensemble  $\{x_1, x_2\}$  qui est lui même un séparateur.
- Le séparateur  $\{y_1, y_2\}$  est un séparateur irréductible.
- Le séparateur  $\{x_1, x_2\}$  est un séparateur d'entrée et il ne contient pas un sous-ensemble qui peut être un séparateur, donc  $\{x_1, x_2\}$  est un séparateur irréductible d'entrée.

## 4.6 Calcul numérique de certains séparateurs d'entrée

Dans ce paragraphe nous allons dans un premier temps montrer sur un exemple comment obtenir le séparateur minimal d'entrée en utilisant des algorithmes standard de flot maximum tels que celui de *Ford et Fulkerson* [20; 32; 25] en annexe 1 on trouve un rappel de l'algorithme de Ford et Fulkerson. Ensuite nous allons présenter un algorithme qui généralise cette méthode pour obtenir un certain nombre de séparateurs d'entrée.

### Exemple 4.6.1

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 4.7. A partir de ce graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  nous construisons un graphe

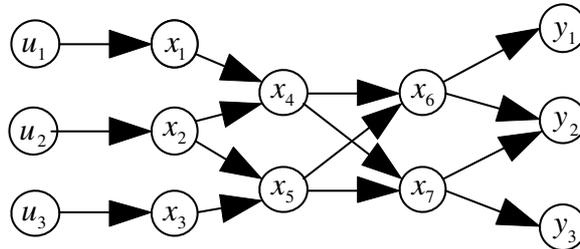


FIG. 4.7 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'Exemple 4.6.1

$G'(\Sigma_\Lambda) = (V', E')$  et nous l'appelons le graphe auxiliaire de  $G(\Sigma_\Lambda)$ , tel que

$$V' = \{s^+\} \cup \{s^-\} \cup U' \cup U'' \cup X' \cup X'' \cup Y' \cup Y''$$

- $s^+$  : la source.
- $s^-$  : le puits.
- $U', U'', X', X'', Y', Y''$  : on éclate les sommets d'entrée  $U$  en deux ensemble  $U'$  et  $U''$ , d'état  $X$  en  $X'$  et  $X''$  et de sortie  $Y$  en  $Y'$  et  $Y''$ , tels qu'il y aura un arc entre  $x'_i$  et  $x''_i$  et un arc entre  $u'_i$  et  $u''_i$  et un arc entre  $y'_i$  et  $y''_i$  et les arcs qui viennent vers  $x_i$  dans  $G(\Sigma_\Lambda)$  viennent vers  $x'_i$  dans  $G'(\Sigma_\Lambda)$  et les arcs qui sortent de  $x_i$  dans  $G(\Sigma_\Lambda)$  sortent de  $x''_i$  dans  $G'(\Sigma_\Lambda)$ .

$$E' = E_{s^+u'_i} \cup E_{u''_ix'_i} \cup E_{x''_ix'_i} \cup E_{x''_iy'_i} \cup E_{y''_is^-} \cup E_{x'_ix''_i} \cup E_{u'_iu''_i} \cup E_{y'_iy''_i}$$

- $E_{s^+u'_i}$  : les arcs de la source vers les entrées.
- $E_{u''_ix'_i}$  : relations entrée-état non nulles.
- $E_{x''_ix'_i}$  : relations état-état non nulles.
- $E_{x''_iy'_i}$  : relations état-sortie non nulles.
- $E_{y''_is^-}$  : les arcs des sorties vers le puits.
- $E_{x'_ix''_i}, E_{u'_iu''_i} \cup E_{y'_iy''_i}$  : les arcs résultant de l'éclatement des sommets d'état, d'entrée et de sortie.

Nous définissons une capacité pour les arcs du graphe auxiliaire  $G'(\Sigma_\Lambda)$  de la façon suivante :

- $c(w) = 1$  pour les arcs  $E_{x'_ix''_i}, E_{u'_iu''_i} \cup E_{y'_iy''_i}$
- $c(w) = \infty$  pour les autres.

Pour le graphe de la Figure 4.7 son graphe auxiliaire est présenté sur la Figure 4.8. En appliquant l'algorithme de *Ford et Fulkerson*, le flot maximum que

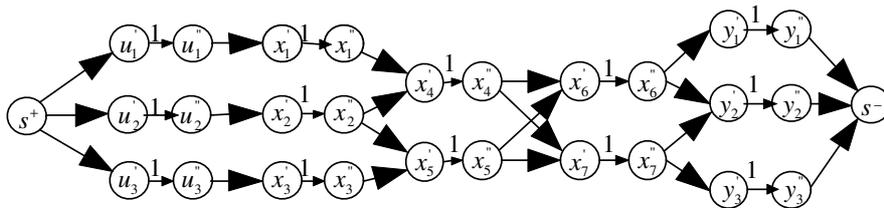


FIG. 4.8 – Graphe auxiliaire du  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'Exemple 4.6.1

l'on peut passer dans ce graphe de la source  $s^+$  vers le puits  $s^-$  est égal à deux. A chaque flot maximum on associe une coupe minimale, cette coupe minimale donne le séparateur minimal d'entrée. En regroupant les sommets qui ont été éclatés nous trouvons pour cet exemple que la coupe minimale associée à ce flot maximum passe par les deux sommets  $x_4, x_5$  comme illustré sur la Figure 4.9, donc l'ensemble  $\{x_4, x_5\}$  est le séparateur minimal d'entrée de cet exemple.

L'obtention d'autres séparateurs d'entrée en utilisant des algorithmes de calcul de flot maximum est possible, car quand les capacités des arcs résultant de l'éclatement des sommets sont égales à 1 la coupe minimale représente le séparateur minimal d'entrée. Nous allons maintenant jouer sur les capacités afin d'obtenir d'autres séparateurs d'entrée. Désormais nous allons définir les capacités directement sur les sommets sans les éclater pour simplifier les figures.

**Algorithme** [11]

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé.

Initialisation : A partir du  $G(\Sigma_\Lambda)$  construire le graphe auxiliaire  $G'(\Sigma_\Lambda)$ ,  $i = 1$ .

**DO**

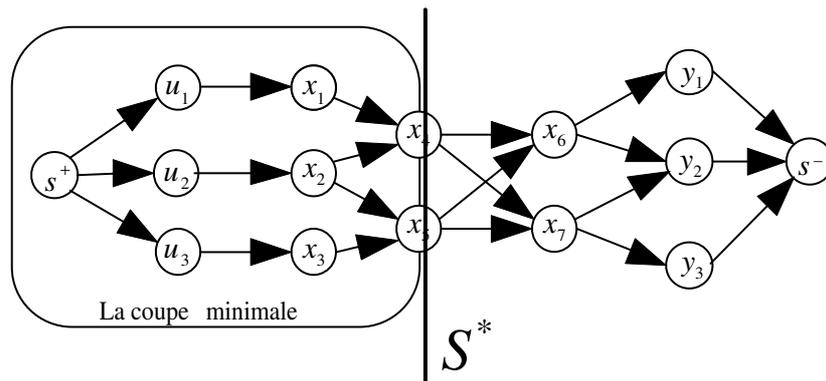


FIG. 4.9 – La coupe minimale et le  $S^*$  du  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'Exemple 4.6.1

- 1- Appliquer l'algorithme de *Ford et Fulkerson* sur  $G'(\Sigma_\Lambda)$  pour calculer le flot maximum et sa coupe minimale associée qui donne le séparateur  $S_i^*$ .
- 2- Définir de capacité  $c(v) = \infty$  pour les sommets  $S_i^* \setminus S_i^* \cap U$  et tous les sommets qui se trouvent sur un chemin direct entre le séparateur  $S_i^*$  et les sorties.
- 3-  $i = i + 1$ .

UNTIL  $S_i^* = U$

Prenons les exemples suivants

**Exemple 4.6.2**

Reprenons le système de l'Exemple 4.6.1, pour  $i = 1$  nous avons trouvé le séparateur  $S_1^* = \{x_4, x_5\}$ . D'après l'algorithme, pour  $i = 2$  les capacités des sommets  $\{x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3\}$  deviennent  $\infty$  comme illustré sur la Figure 4.10. Nous calculons à nouveau le flot maximum et sa coupe minimale, le flot maximum devient 3 et sa coupe minimale passe par les sommets  $\{u_1, u_2, u_3\}$  qui représente le nouveau séparateur d'entrée, ce séparateur est le séparateur  $U$  donc l'algorithme s'arrête et les deux séparateurs d'entrée obtenus sont  $S_1^* = \{x_4, x_5\}$ ,  $S_2^* = \{u_1, u_2, u_3\}$ .

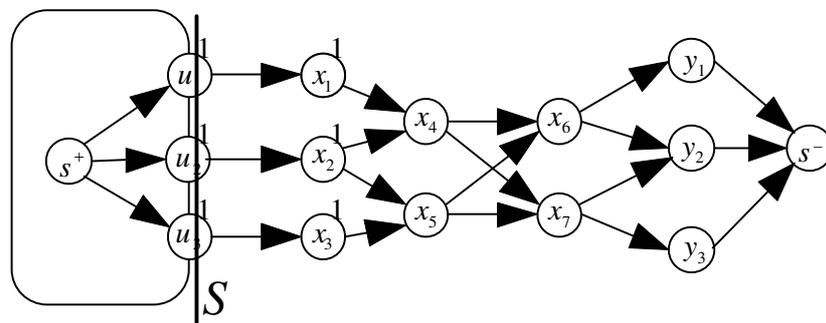


FIG. 4.10 – L'ouverture des capacités des sommets  $\{x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3\}$  et le calcul du séparateur d'entrée suivant

**Exemple 4.6.3**

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 4.11. Cet exemple a été étudié dans un autre contexte dans [31].

Appliquons l'algorithme sur cet exemple. Le graphe auxiliaire est illustré sur

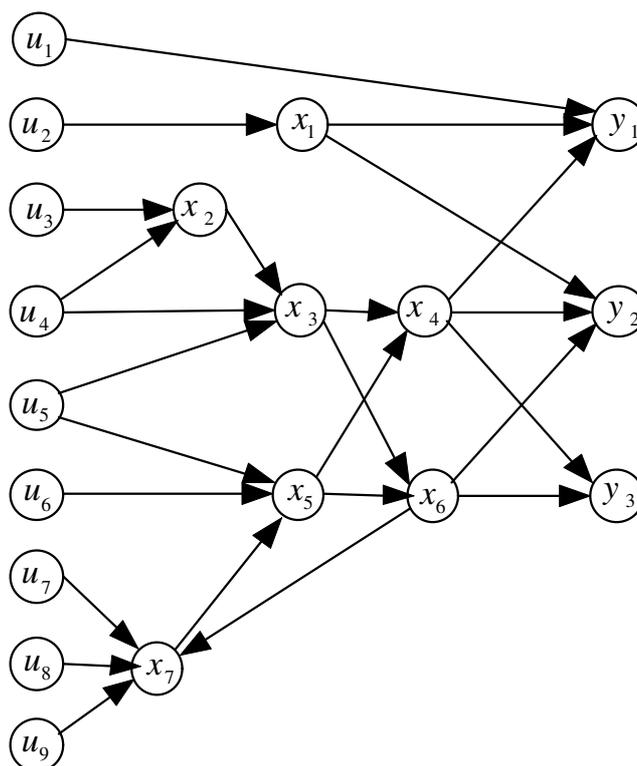


FIG. 4.11 – Graphe associé  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'Exemple 4.6.3

la Figure 4.12.

$i = 1$  en appliquant l'algorithme de *Ford et Fulkerson* nous trouvons que le flot maximum est égal à 3 et le séparateur  $S_1^* = \{y_1, y_2, y_3\}$ .

Les capacités des sommets  $\{y_1, y_2, y_3\}$  deviennent  $\infty$  voir la Figure 4.13.

$S_1^* \neq U$  nous continuons.

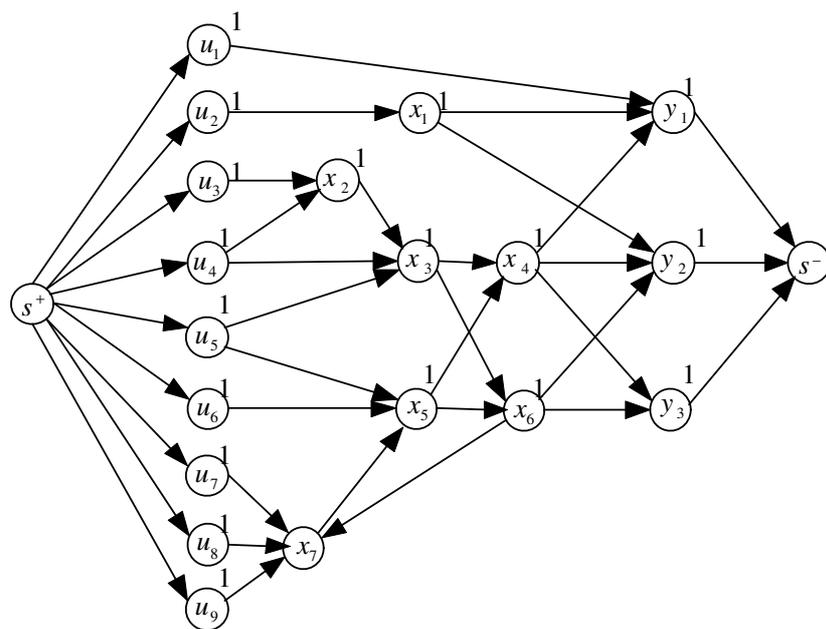


FIG. 4.12 – Le graphe auxiliaire  $G'(\Sigma_\Lambda)$  de  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'Exemple 4.6.3

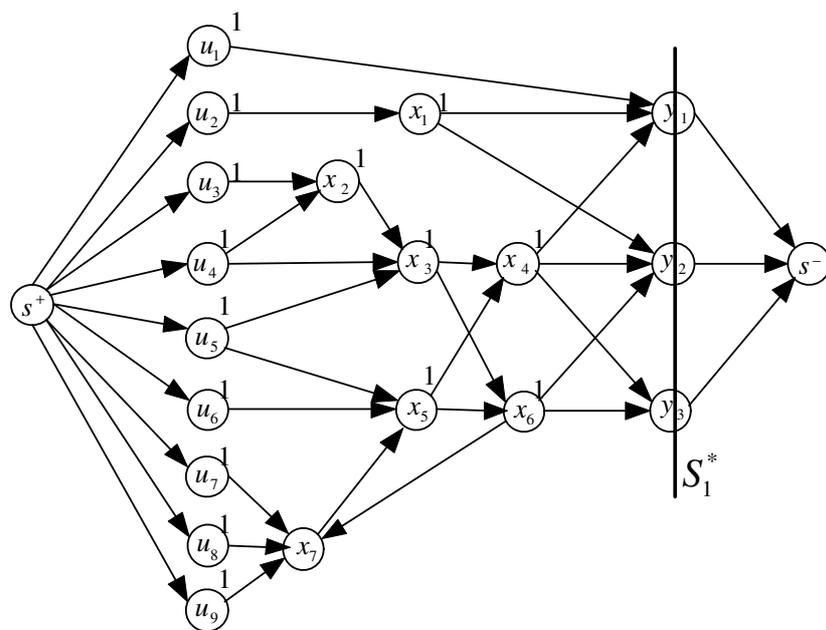


FIG. 4.13 – L'ouverture des capacités des sommets  $\{y_1, y_2, y_3\}$  et le séparateur  $S_1^*$

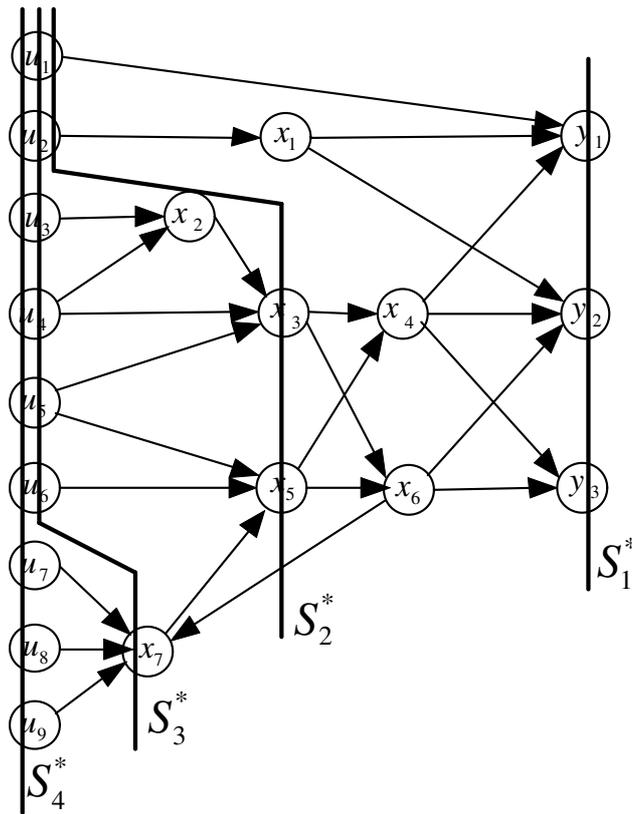


FIG. 4.14 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  et les quatre séparateurs obtenus par l'algorithme

$i = 2$  en appliquant l'algorithme de *Ford et Fulkerson* nous trouvons que le flot maximum est égal à 4 et le séparateur  $S_2^* = \{u_1, u_2, x_3, x_5\}$ .

Les capacités des sommets  $\{x_3, x_5, x_1, x_4, x_6, y_1, y_2, y_3\}$  deviennent  $\infty$ .

$S_2^* \neq U$  nous continuons.

$i = 3$  en appliquant l'algorithme de *Ford et Fulkerson* nous trouvons que le

flot maximum est égal à 7 et le séparateur  $S_3^* = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, x_7\}$ .

Les capacités des sommets  $\{x_7, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3\}$  deviennent  $\infty$ .

$S_3^* \neq U$  nous continuons.

$i = 4$  en appliquant l'algorithme de *Ford et Fulkerson* nous trouvons que le flot maximum est égal à 9 et le séparateur  $S_4^* =$

$\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$ .

$S_4^* = U$  nous arrêtons.

La Figure 4.14 montre les quatre séparateurs obtenus par l'algorithme sur le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$ .

L'algorithme proposé est un algorithme qui nous donne un certain nombre de séparateurs d'entrée qui n'ont pas de sommets communs sauf éventuellement des sommets d'entrées et cela est dû au fait qu'on définit une capacité infinie sur les sommets d'un séparateur pour calculer le suivant et comme les sommets qui se trouvent en amont ont des capa-

cités limitées donc la coupe minimale passe par ces sommets là et non par les sommets du séparateur. Il y a d'autres séparateurs d'entrée qui ne peuvent pas être calculés par l'algorithme comme dans l'Exemple 4.6.3, les deux séparateurs d'entrée de dimension 6  $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, x_5\}, \{u_1, u_2, x_3, u_5, u_6, x_7\}$  ne sont pas donnés par l'algorithme. D'autres séparateurs d'entrée de dimension 5 et de dimension 8 ne sont pas donnés par l'algorithme non plus. Donc l'aspect calcul numérique des séparateurs d'entrée est encore un aspect à développer.

## 4.7 Structure de treillis de l'ensemble des séparateurs d'entrée

Dans ce paragraphe nous allons définir une relation d'ordre sur les ensembles associés aux séparateurs. Ensuite nous allons montrer qu'il y a un treillis qui correspond aux séparateurs d'entrée d'un graphe orienté.

Nous rappelons maintenant quelques éléments de base de la théorie des treillis [2].

**Définition 4.7.1. (Ensemble ordonné)** Un ensemble ordonné  $A$  est un ensemble muni d'une relation d'ordre, c'est-à-dire une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Cette relation sera notée  $\preceq$ .

**Définition 4.7.2. (Majorant, Minorant)** Soit  $A$  un ensemble ordonné muni d'une relation d'ordre  $\preceq$ . Soit  $U$  un sous-ensemble de  $A$ .

- Nous appelons Minorant de  $U$  tout élément  $a$  de  $A$  tel que  $\forall u \in U, a \preceq u$ .
- Nous appelons Majorant de  $U$  tout élément  $a'$  de  $A$  tel que  $\forall u \in U, a' \succeq u$ .

**Définition 4.7.3. (Bornes d'un ensemble)** Un sous-ensemble  $U$  est dit sous-ensemble borné, si il admet un majorant et un minorant. Lorsque l'ensemble des majorants de  $U$  a un plus petit élément, nous l'appelons borne supérieure de  $U$ , et lorsque l'ensemble des minorants de  $U$  a un plus grand élément, nous l'appelons borne inférieure de  $U$ .

**Définition 4.7.4. (Treillis)** Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant.

Définissons maintenant une relation d'ordre à partir des ensembles associés aux séparateurs.

**Définition 4.7.5.** Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Soient  $S$  et  $S'$  deux séparateurs de  $G(\Sigma_\Lambda)$ .  $T_S, T_{S'}$  sont leurs ensembles associés. Le séparateur  $S$  est dit supérieur à  $S'$ ,  $S' \prec S$ , si  $T_S \subset T_{S'}$ .

Prenons l'exemple de la Figure 4.2.

- $\{u_1, u_2, u_3, u_4, x_6\}$  est l'ensemble associé au séparateur  $\{x_2, x_5, x_7\}$ .

- $\{u_1, u_2, u_3, u_4, x_5, x_6, x_7\}$  est l'ensemble associé au séparateur  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

- $\{u_1, u_2, x_5, x_7\}$  est l'ensemble associé au séparateur  $\{x_1, u_3, u_4\}$ .

D'après la Définition 4.7.5 nous pouvons écrire :

- $\{x_2, x_5, x_7\} \succ \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

- $\{x_1, f_3, u_4\} \succ \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .

- $\{x_2, x_5, x_7\}$  et  $\{x_1, u_3, u_4\}$  ne sont pas comparables.

Nous allons maintenant définir une structure de treillis qui correspond aux séparateurs d'entrée d'un graphe orienté, en utilisant la relation d'ordre donnée par la Définition 4.7.5.

**Proposition 4.7.1.** *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. L'ensemble des séparateurs d'entrée a une structure de treillis telle que :*

- *Le plus grand minorant de ce treillis est le séparateur minimal d'entrée  $S^*$ .*
- *Le plus petit majorant de ce treillis est le séparateur  $U$ .*

**Exemple 4.7.1**

Reprenons les deux systèmes linéaires structurés des Exemple 4.3.2 et 4.3.3. Les graphes associés à ces deux systèmes sont illustrés sur les Figures 4.2, 4.5.

Les deux treillis qui correspondent aux deux ensemble de séparateurs d'entrée des deux systèmes sont illustrés sur les Figures 4.15, 4.16.

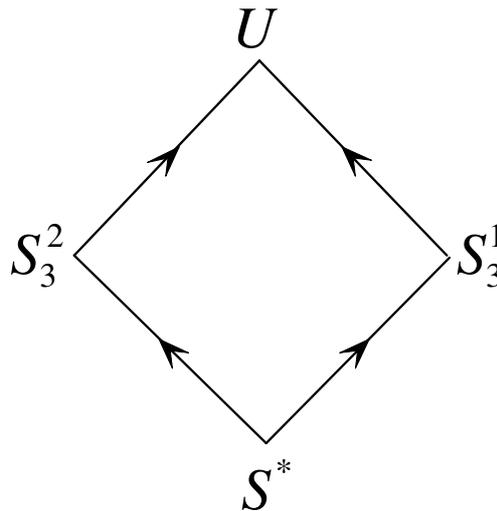


FIG. 4.15 – Treillis correspondant aux séparateurs d'entrée du système de l'Exemple 4.3.2

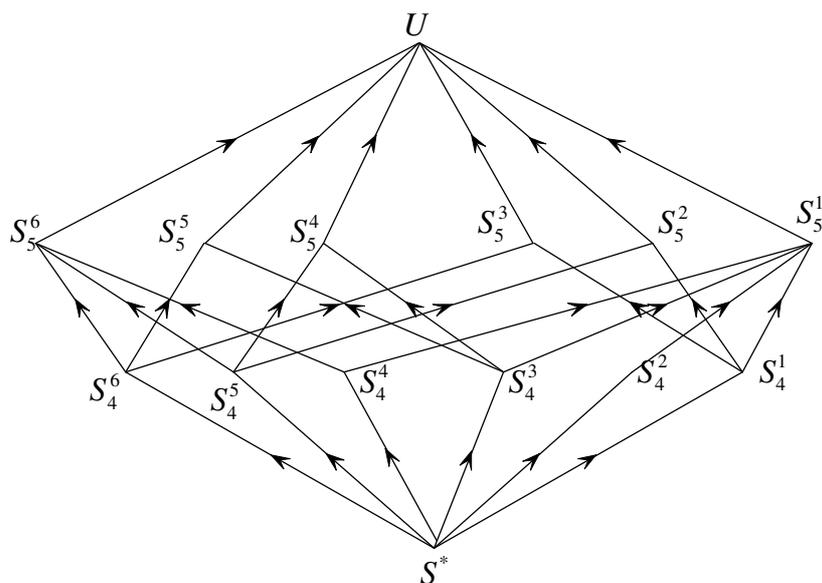


FIG. 4.16 – Treillis correspondant aux séparateurs d’entrée du système de l’Exemple 4.3.3

A l’aide de la relation d’ordre définie sur l’ensemble des séparateur nous pouvons donner une caractérisation pour les séparateurs d’entrée comme illustré par la Proposition 4.7.2.

**Proposition 4.7.2.** *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Soit  $S$  un séparateur de  $G(\Sigma_\Lambda)$  de dimension  $d$ .  $S$  est un séparateur d’entrée si et seulement si pour tout séparateur  $S'$  de dimension  $d'$  tel que  $S' \succ S$  nous avons  $d' > d$ .*

### 4.8 Décomposition du système

#### 4.8.1 Introduction

Dans le Chapitre 4 nous avons présenté une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts soit génériquement soluble dans un système structuré de la forme (3.2.1) avec des défauts. Cette condition est à vérifier sur le graphe orienté associé au système structuré. Quand cette condition n'est pas satisfaite nous avons besoin d'ajouter de nouveaux capteurs (ou capteurs additionnels) pour remplir la condition. La question qui se pose est la suivante : où est-ce que ces nouveaux capteurs doivent être placés, autrement dit, quelles sont les variables du système qui doivent être mesurées par ces nouveaux capteurs.

Dans ce paragraphe nous allons donner sous forme d'un théorème, et en utilisant les séparateurs d'entrée définis précédemment, une condition nécessaire et suffisante sur le placement de nouveaux capteurs. Ceci peut être considéré comme une décomposition du système qui nous donne des informations structurelles sur les variables du système qui doivent être mesurées par les nouveaux capteurs.

Dans un premier temps nous allons rappeler un premier résultat donné en [8] où un système réduit est déduit à partir du système initial, et ce système réduit contient des variables que nous appelons les mesures efficaces.

Dans un deuxième temps nous allons présenter la décomposition du système qui est la contribution principale de notre travail, qui raffine les résultats précédents, et nous donne des informations structurelles sur le placement de nouveaux capteurs. Nous allons ensuite illustrer les résultats sur un exemple.

#### 4.8.2 Système réduit

Dans l'Exemple 3.2.2 étudié dans le Chapitre 4 nous avons trouvé que la condition de solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts n'est pas vérifiée, et donc que nous avons besoin d'ajouter de nouveaux capteurs pour la remplir. Nous avons ensuite essayé sur le graphe associé au système d'ajouter un nouveau capteur  $z_1$ . Pour certains placements de ce nouveau capteur nous avons réussi à remplir la condition en augmentant le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommet disjoints, mais ce n'était pas le cas pour d'autres placements de  $z_1$ . D'où nous pouvons constater que dans le système il y a des variables qui sont intéressantes à mesurer avec les capteurs additionnels car en mesurant ces variables nous augmentons le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints, et nous nommons ces mesures les mesures efficaces, mais il y a d'autres variables qui ne sont pas intéressantes à mesurer car elles ne servent pas à augmenter le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints. Dans [8] on présente une décomposition du système afin d'obtenir à partir du système initial un

système réduit qui ne contient que des mesures efficaces.

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Le système réduit  $\Sigma_{\Lambda R}$  est défini par son graphe  $G(\Sigma_{\Lambda R})$  qui est un sous-graphe de  $G(\Sigma_\Lambda)$  et qui se trouve entre les entrées et le séparateur minimal d'entrée  $S^*$  qui lui a été défini dans le Paragraphe 4.2.

La Figure 4.17 montre d'une manière générale le système réduit d'un système, où :

- $F^* = F \cap S^*$ .
- $F_R = F \setminus F^*$ .
- $Y_R = S^* \setminus F^*$ .
- $X_R$  c'est l'ensemble des sommets d'état qui appartiennent à tout chemin direct de  $F_R$  à  $Y_R$ .

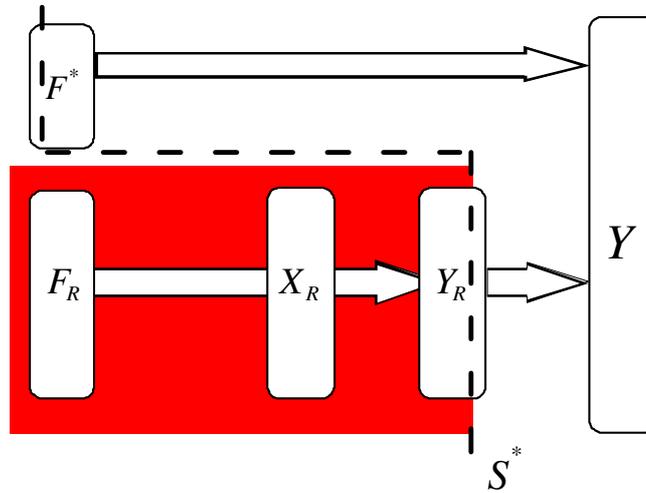


FIG. 4.17 – Le système réduit  $\Sigma_{\Lambda R}$

Le système réduit contient les mesures efficaces dans le sens où, si la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts n'est pas satisfaite, cela veut dire que le nombre de défauts  $r$  et le nombre maximal de chemin entrées-sorties sommets disjoints  $k$  ne sont pas égaux. Il faut donc ajouter de nouveaux capteurs, ces nouveaux capteurs doivent mesurer des variables qui appartiennent au système réduit. Cette information délivrée par le système réduit n'est pas suffisante pour caractériser toutes les solutions possibles pour le placement de capteurs additionnels nécessaires pour remplir la condition de solubilité générique du problème  $FDI$ . Les exemples suivants illustrent cette idée.

**Exemple 4.8.1**

Reprenons l'Exemple 3.2.2. Le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints  $k$  est égal à 4, et le nombre de défauts  $r$  est égal à 5, donc la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts n'est pas satisfaite. Le séparateur minimal d'entrée est

$S^* = \{f_1, x_7, y_3, y_4\}$ , comme illustré sur la Figure 4.18. d'où le système réduit sera entre  $F$  et  $S^*$  comme illustré sur la Figure 4.19.

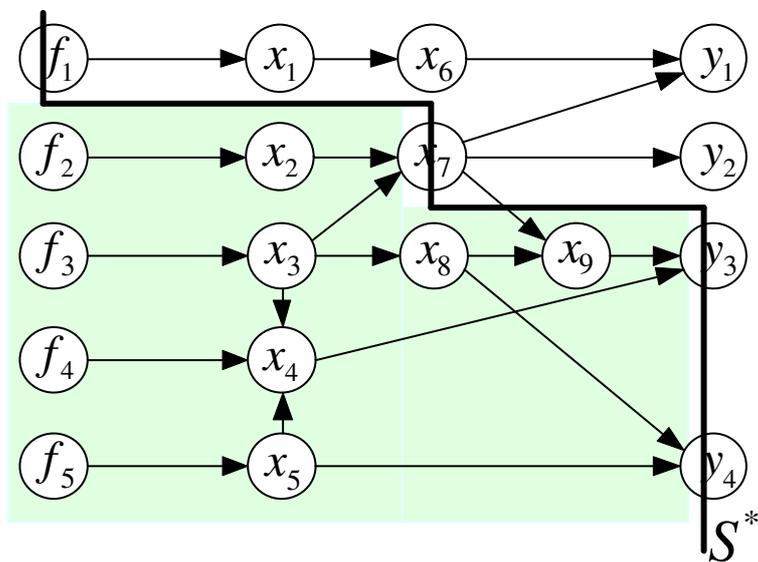


FIG. 4.18 – Le séparateur  $S^*$  du système

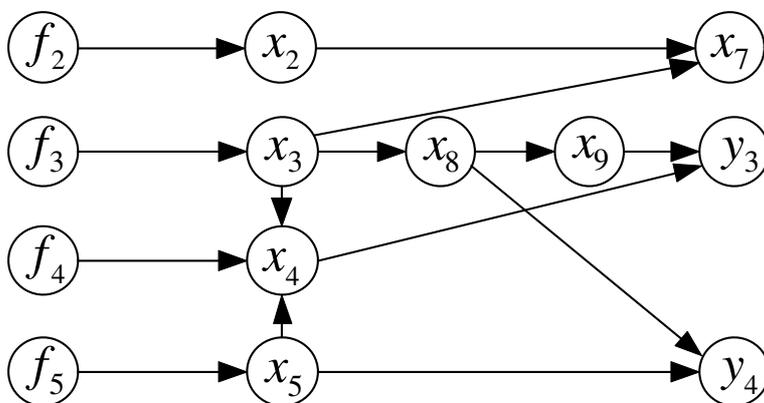


FIG. 4.19 – Le système réduit entre  $F$  et  $S^*$

D'après la Figure 4.18 le capteur additionnel qui doit être ajouté doit mesurer parmi les variables  $\{f_2, f_3, f_4, f_5, x_2, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$  car elles sont les mesures efficaces qui appartiennent au système réduit. Les variables  $\{f_1, x_1, x_6, x_7\}$  sont des mesures inefficaces qui n'appartiennent pas au système réduit et qui ne servent pas à augmenter le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints, et donc à résoudre le problème  $FDI$ .

Dans l'exemple précédent il fallait augmenter le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints d'une unité, ce qui était faisable en ajoutant un seul capteur

qui mesure une des mesures efficaces qui appartiennent au système réduit. Dans ce cas le système réduit nous a donné l'information nécessaire et suffisante pour placer le nouveau capteur d'une manière efficace. Dans l'exemple suivant nous allons montrer un cas où il nous faut ajouter plus qu'un seul capteur pour remplir la condition de la solubilité générique du problème de la détection et localisation de défauts. Il sera montré qu'il nous faut une décomposition plus fine pour avoir plus d'informations structurelles sur le placement de capteurs additionnels.

**Exemple 4.8.2**

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 4 défauts, 3 sorties et 8 variables d'états.  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 4.20. Vérifions la condition

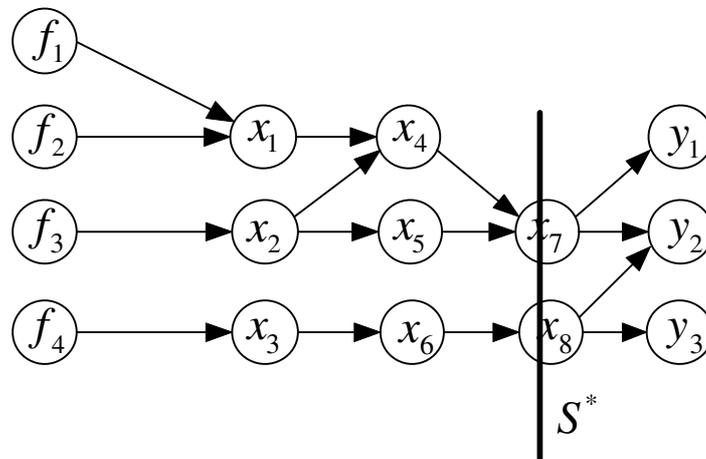


FIG. 4.20 – Le graphe associé au système de l'Exemple 4.8.2 et le séparateur  $S^*$

de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts, nous trouvons le nombre de défauts  $r = 4$ , et le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints  $k = 2$ , donc la condition n'est pas satisfaite et il faut augmenter  $k$  le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints de deux unités. Pour cela il faut ajouter au minimum deux capteurs additionnels. D'après le concept de système réduit ces deux nouveaux capteurs doivent mesurer des variables du système réduit entre  $F$  et le séparateur  $S^*$  qui est illustré sur la Figure 4.20.

Nous allons ajouter deux capteurs additionnels  $\{z_1, z_2\}$ , qui mesurent les variables  $x_1, x_4$  respectivement. Les deux variables  $x_1, x_4$  appartiennent au système réduit, elles sont donc deux mesures efficaces. Si nous vérifions à nouveau la condition de la solubilité générique du problème  $FDI$  sur le système composé avec les nouveaux capteurs présenté sur la Figure 4.21, nous trouvons que le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints  $k = 3$ . Donc, même avec deux capteurs additionnels qui mesurent des variables du système réduit, nous n'avons pas réussi à remplir la condition

de la solubilité du problème *FDI*.

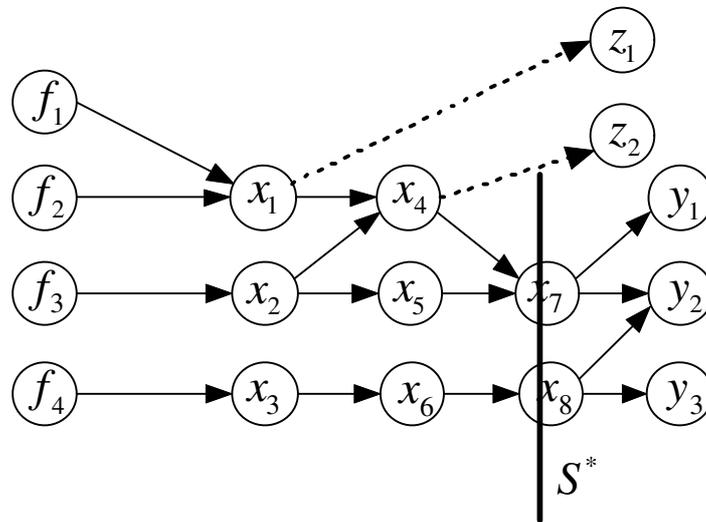


FIG. 4.21 – Le graphe associé au système de l’Exemple 4.8.2 avec les capteurs additionnels et le séparateur  $S^*$

D’après ces deux derniers exemples, nous constatons que dans le cas où la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts n’est pas vérifiée, les nouveaux capteurs additionnels nécessaires pour remplir la condition doivent mesurer des variables qui appartiennent au système réduit. Si nous ajoutons un seul capteur qui mesure des variables dans le système réduit, le nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints sera augmenté d’une unité. Mais quand il nous faut ajouter plusieurs capteurs additionnels, il faut une décomposition plus fine qui donne des informations structurelles sur le placement des nouveaux capteurs.

### 4.8.3 Décomposition du système à l’aide des séparateurs d’entrée

Dans ce paragraphe nous allons présenter le résultat essentiel et la contribution principale de notre travail. Nous allons utiliser les séparateurs d’entrée pour donner une condition nécessaire et suffisante afin de caractériser toutes les solutions possibles pour le problème de placement de capteurs additionnels dont nous avons besoin pour rendre le problème de détection et localisation de défauts génériquement soluble.

Pour tout séparateur  $S$  de dimension  $d$ , il y a une contrainte associée en termes de nombre de capteurs additionnels nécessaire pour la solubilité générique du problème *FDI*. Cette propriété sera donnée sous forme d’un théorème.

**Théorème 4.8.1.** [10] Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré génériquement observable avec  $r$  défauts, défini par (3.2.1), et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Soit  $\Sigma_\Lambda^c$  le système composé avec les capteurs additionnels  $z(t)$  défini par (1.2.3), et  $G(\Sigma_\Lambda^c)$  son graphe associé. Le problème de détection et localisation de défauts (FDI) a une solution sur  $\Sigma_\Lambda^c$  seulement si, pour tout séparateur  $S$  de  $G(\Sigma_\Lambda)$  avec un ensemble associé  $T_S$  défini par la Définition 4.2.2, il y a au minimum  $r-d$  nouveaux capteurs qui mesurent des sommets de  $T_S$ , où  $d$  est la dimension de  $S$ .

**Démonstration**

Supposons que le problème de détection et localisation de défauts a une solution sur  $\Sigma_\Lambda^c$ , et donc que nous avons un linking de dimension  $r$  entre  $F$  et  $Y \cup Z$ .

Soit  $S$  un séparateur d'entrée de dimension  $d$  du graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  et  $T_S$  son ensemble associé. Un linking de dimension  $r$  sur  $G(\Sigma_\Lambda^c)$  est composé de :

- $F - Y$  chemins.
- $F - Z$  chemins dont le dernier arc a son sommet initial dans  $T_S$ .
- $F - Z$  chemins dont le dernier arc n'a pas son sommet initial dans  $T_S$ .

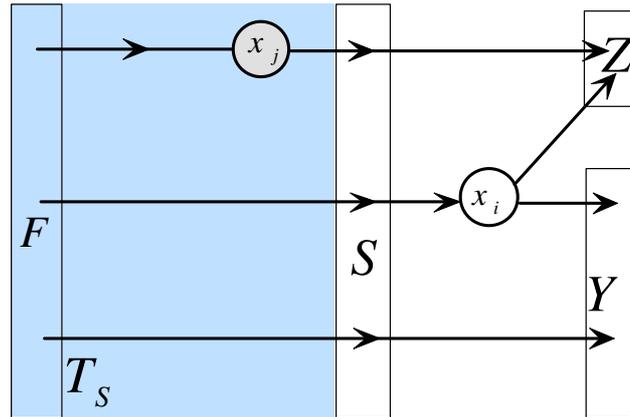


FIG. 4.22 – Les trois types de chemins possibles dans un  $F - Y \cup Z$  linking

Les trois types de chemins sont illustrés sur la Figure 4.22. Considérons un chemin  $F - Z$  dont le dernier arc a un sommet initial  $x_i$  en dehors de  $T_S$ . Il y a un chemin de  $x_i$  à  $Y$  car le système est supposé observable. D'où il y a un chemin  $F - Y$  qui passe par  $x_i$ . D'après les définitions de  $S$  et  $T_S$ , tout chemin  $F - x_i$  a un sommet dans  $S$ , donc dans ce linking les  $F - Y$  chemins et les  $F - Z$  chemins dont le dernier arc n'a pas son sommet initial dans  $T_S$ , ont un sommet dans  $S$  car  $x_i$  n'appartient pas à  $T_S$ . D'où il y a au maximum  $d$  tels chemins. Donc il y a au minimum  $(r-d)$   $F - Z$  chemins dont le dernier arc a un sommet initial dans  $T_S$ . Donc pour tout séparateur d'entrée de dimension  $d$  et pour toute solution du problème  $FDI$ , il y a au minimum  $(r-d)$  nouveaux capteurs qui mesurent des sommets dans  $T_S$ .  $\square$

**Corollaire 4.8.2.** *Le nombre minimal de capteurs additionnels nécessaires pour la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts (FDI) est égal à  $r-k$ , où  $k$  est la dimension du séparateur minimal d'entrée  $S^*$ . Ces capteurs additionnels doivent mesurer des variables dans  $T_{S^*}$ .*

A chaque séparateur nous allons associer une contrainte en termes de nombre de capteurs additionnels qui doivent mesurer des variables qui appartiennent à l'ensemble associé à ce séparateur.

**Définition 4.8.1. (*Contrainte associée au séparateur*)** *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Soit  $S$  un séparateur quelconque de  $G(\Sigma_\Lambda)$ . La contrainte associée à ce séparateur  $S$  est définie comme le nombre minimal de capteurs additionnels qui doivent mesurer des variables qui appartiennent à  $T_S$  l'ensemble associé à  $S$ .*

En utilisant le Théorème 4.8.1 ce nombre minimal de capteurs additionnels est égal à  $r-d$ , où  $r$  est le nombre de défauts et  $d$  la dimension du séparateur.

**Exemple 4.8.3**

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 5 défauts, 3 sorties et 6 variables d'état.  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 4.23.

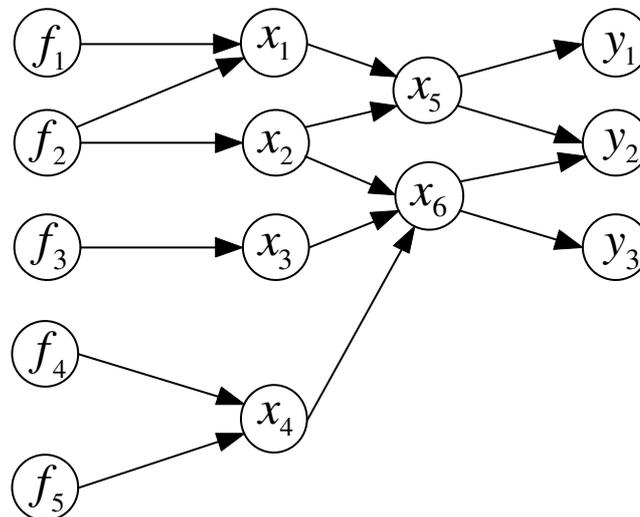


FIG. 4.23 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 4.8.3

A partir de ce graphe nous allons montrer quelques exemples sur les contraintes associées à certains séparateurs de ce système.

- $\{x_5, x_6, y_1, y_2\}$  est un séparateur de dimension 4, et la contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des variable dans l'ensemble associé à ce séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ .
- $\{x_5, x_6\}$  est un séparateur de dimension 2, et la contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum que 3 capteurs additionnels mesurent des variable dans l'ensemble associé à ce séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Remarquons que ce séparateur  $\{x_5, x_6\}$  est le séparateur minimal d'entrée  $S^*$ , donc d'après le Corollaire 4.8.2 ce nombre 3 de capteurs additionnels est le nombre minimal de capteurs additionnels nécessaires pour la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts. Ceci veut dire que le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints est égal à 2, la dimension de  $S^*$ , et comme le nombre de défauts est égal à 5, il faut ajouter au minimum trois nouveaux capteurs pour augmenter le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints à 5, d'après la contrainte associée à  $S^*$  ces trois nouveaux capteurs doivent mesurer des variables dans  $T_{S^*}$ .
- $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  est un séparateur de dimension 4, et la contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des variable dans l'ensemble  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$  associé à ce séparateur.
- $\{f_1, f_2, f_3, x_4\}$  est un séparateur de dimension 4, et la contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des variables dans l'ensemble  $\{f_4, f_5\}$  associé à ce séparateur.

Nous allons maintenant montrer qu'une contrainte associée à un séparateur  $S$  implique toutes les contraintes des séparateurs de dimensions supérieures ou égales à sa dimension et qui se trouvent entre le séparateur  $S$  et les sorties.

**Proposition 4.8.3.** *Soient  $S_1, S_2$  deux séparateurs de dimensions  $d_1, d_2$  respectivement. Si  $S_1 \succ S_2$  et  $d_1 \leq d_2$ . La contrainte associée au séparateur  $S_1$  implique la contrainte associée au séparateur  $S_2$ .*

**Démonstration**

Soient  $T_{S_1}, T_{S_2}$  les deux ensembles associés aux séparateurs  $S_1, S_2$  respectivement. Supposons que  $T_{S_1} \subseteq T_{S_2}$  et que  $d_1 \leq d_2$ . Comparons maintenant les deux contraintes associées aux deux séparateurs  $S_1$  et  $S_2$ . La contrainte associée au séparateur  $S_1$  implique qu'il faut au minimum que  $\nu_1 = r - d_1$  capteurs additionnels mesurent des variables dans  $T_{S_1}$  l'ensemble associé à  $S_1$ . La contrainte associée au séparateur  $S_2$  implique qu'il faut au minimum que  $\nu_2 = r - d_2$  capteurs additionnels mesurent des variables dans  $T_{S_2}$  l'ensemble

associé à  $S_2$ . Nous avons  $d_1 \leq d_2$  donc  $\nu_1 \geq \nu_2$ , et comme  $T_{S_1}$  est un sous-ensemble de  $T_{S_2}$ , ceci implique que, quand la contrainte associée au séparateur  $S_1$  est satisfaite, la contrainte associée au séparateur  $S_2$  sera satisfaite.  $\square$

**Corollaire 4.8.4.** *L'ensemble des contraintes associées à tous les séparateurs d'un graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  est impliqué par l'ensemble des contraintes associées aux séparateurs d'entrée du même graphe.*

**Démonstration**

Soit  $S$  un séparateur de  $G(\Sigma_\Lambda)$  de dimension  $d$ . Si ce séparateur n'est pas un séparateur d'entrée, d'après la Définition 4.3.1, il y a un séparateur d'entrée  $S'$  de dimension  $d' \leq d$  entre  $F$  et  $S$ . D'après la Proposition 4.8.3 la contrainte associée au séparateur  $S'$  implique la contrainte associée au séparateur  $S$ .  $\square$

**Exemple 4.8.4**

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 4 défauts, 3 sorties et 4 variables d'état.  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 4.24.

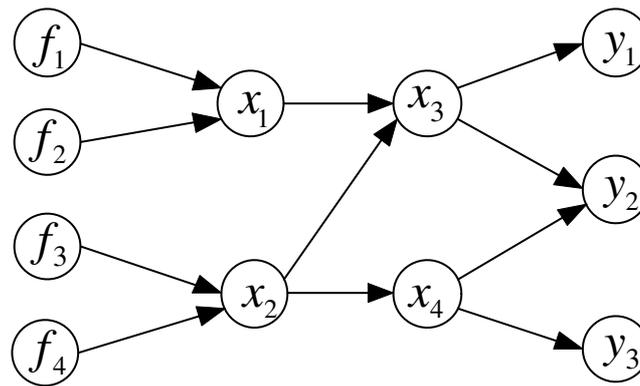


FIG. 4.24 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 4.8.4

Nous allons maintenant comparer les contraintes associées aux différents séparateurs et illustrer comment la contrainte associée à un séparateur  $S$  implique toutes les contraintes associées aux séparateurs qui ont des dimensions supérieures ou égales à sa dimension et qui se trouvent entre ce séparateur  $S$  et les sorties.

- Prenons le séparateur  $\{x_3, x_4\}$  de dimension 2, la contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum que deux capteurs additionnels mesurent des variables dans l'ensemble associé à ce séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, x_1, x_2\}$ . Le séparateur  $\{x_1, x_2\}$  est aussi un séparateur de dimension 2, donc la contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum que deux capteurs additionnels mesurent des variables dans l'ensemble associé à ce séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ . En comparant ces deux contraintes nous pouvons constater que le respect de la

contrainte associée au séparateur  $\{x_1, x_2\}$  implique le respect de celle associée au séparateur  $\{x_3, x_4\}$ . Autrement dit deux capteurs additionnels qui mesurent des variables dans  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  implique le fait qu'il faut que deux capteurs additionnels qui mesurent des variables dans  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, x_1, x_2\}$ , car  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, x_1, x_2\}$  contient  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ . Cela est du au fait que  $\{x_1, x_2\} \succ \{x_3, x_4\}$ .

- Prenons les deux séparateurs  $\{f_1, f_2, x_2\}$ ,  $\{x_1, f_3, f_4\}$ . Ce sont deux séparateurs de dimension 3. La contrainte associée au séparateur  $\{f_1, f_2, x_2\}$  indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des variables dans  $\{f_3, f_4\}$ , et la contrainte associée au séparateur  $\{x_1, f_3, f_4\}$  indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des variables dans  $\{f_1, f_2\}$ . Nous remarquons que aucune des deux contraintes n'implique l'autre et cela est du au fait que les deux séparateurs sont des séparateurs qui "se croisent" et aucun ensemble associé à un des deux séparateurs ne contient l'ensemble associé à l'autre et donc ni  $\{x_1, f_3, f_4\} \succ \{f_1, f_2, x_2\}$ , ni  $\{f_1, f_2, x_2\} \succ \{x_1, f_3, f_4\}$ .

#### Exemple 4.8.5

Reprenons l'Exemple 4.8.3 dont le graphe associé est illustré sur la Figure 4.23. En raisonnant de la même manière que dans l'exemple précédent nous pouvons déduire les résultats suivants :

- La contrainte associée au séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, x_4\}$  qui est de dimension 4 implique les contraintes associées aux séparateurs  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $\{x_5, x_6, f_1, f_2\}$ ,  $\{x_5, x_6, f_1, f_3\}$ ,  $\{x_5, x_6, f_2, f_3\}$ , qui sont tous des séparateurs de dimension 4, car l'ensemble associé à  $\{f_1, f_2, f_3, x_4\}$  est contenu dans chaque ensemble associé à un des séparateurs cités ci dessus, par contre sa contrainte n'implique pas la contrainte associée au séparateur  $\{x_5, x_6, f_4, f_5\}$  car ce sont deux séparateurs de dimension 4 qui se croisent.
- Si nous prenons le séparateur  $\{x_5, x_6\}$  qui est le séparateur minimal d'entrée avec n'importe quel sommet de  $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$  nous obtenons 5 séparateurs de dimension 3 où aucune contrainte associée à un de ces séparateurs n'implique d'autres contraintes associées au reste de ces séparateurs.

Partons du Corollaire 4.8.4 qui illustre que les contraintes associées aux séparateurs d'entrée impliquent les contraintes associées à tous les séparateurs. Nous allons donner un théorème qui est une condition nécessaire et suffisante qui caractérise toutes les solutions du problème de placement de capteurs additionnels nécessaires pour rendre le problème de détection et localisation de défauts génériquement soluble.

**Théorème 4.8.5.** [9] Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré génériquement observable avec  $r$

défauts défini par (3.2.1), et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Soit  $\Sigma_\Lambda^c$  le système composé avec les capteurs additionnels  $z(t)$  défini par (1.2.3), et  $G(\Sigma_\Lambda^c)$  son graphe associé. Le problème de détection et localisation de défauts (FDI) a une solution sur  $\Sigma_\Lambda^c$  si et seulement si pour tout séparateur d'entrée  $S$  de  $G(\Sigma_\Lambda)$  avec un ensemble associé  $T_S$  défini par la Définition 4.2.2, il y a au minimum  $r-d$  nouveaux capteurs qui mesurent des sommets de  $T_S$ , où  $d$  est la dimension de  $S$ .

### Démonstration

Condition nécessaire :

Elle résulte du Théorème 4.8.1.

Condition suffisante :

Supposons qu'après avoir ajouté  $(r-k)$  nouveaux capteurs additionnels, où  $k$  est la dimension du séparateur minimal d'entrée  $S^*$  de  $G(\Sigma_\Lambda)$ , le problème de détection et localisation de capteurs n'a pas de solution. Cela veut dire qu'il n'existe pas de linking de dimension  $r$  entre  $F$  et  $Y \cup Z$ . Le séparateur minimal d'entrée du graphe  $G(\Sigma_\Lambda^c)$  a une dimension  $k_c < r$ .

Notons  $\mu$  la dimension de  $Z \cap S_c^*$ . Définissons l'ensemble  $\bar{S}_c^* = S_c^* \setminus (Z \cap S_c^*)$  de dimension  $k_c - \mu$ . Démontrons maintenant que l'ensemble  $S_c^*$  est un séparateur de  $G(\Sigma_\Lambda)$ .

Supposons qu'il existe un chemin  $F - Y$  qui n'a pas de sommet dans  $\bar{S}_c^*$ . Ce chemin ne peut pas avoir un sommet dans  $Z$ , donc il n'a pas de sommet dans  $S_c^*$ . Cela contredit le fait que  $S_c^*$  est un séparateur de  $G(\Sigma_\Lambda^c)$ . D'où tout chemin de  $F$  à  $Y$  a un sommet dans  $\bar{S}_c^*$  et donc  $\bar{S}_c^*$  est un séparateur de  $G(\Sigma_\Lambda)$ .

Considérons maintenant un capteur additionnel  $z$  qui appartient à  $Z \setminus (Z \cap S_c^*)$ . Supposons qu'un tel capteur mesure des sommets dans  $T_{\bar{S}_c^*}$ . Donc il y aurait un chemin de  $F$  à  $z$  qui n'a pas de sommet dans  $S_c^*$ , et cela contredit le fait que  $S_c^*$  est un séparateur de  $G(\Sigma_\Lambda^c)$ . D'où les capteurs additionnels dans  $Z \setminus (Z \cap S_c^*)$  ne mesurent pas de sommets dans  $T_{\bar{S}_c^*}$ , et le nombre maximal de capteurs qui mesurent des sommets dans  $T_{\bar{S}_c^*}$  est  $\mu$ . La contrainte associée au séparateur  $\bar{S}_c^*$  dit que le nombre minimal de capteurs additionnels qui mesurent des sommets dans  $T_{\bar{S}_c^*}$ , est  $r - \dim(\bar{S}_c^*) = r - (k_c - \mu)$ . Comme  $k_c < r$  ce nombre de nouveaux capteurs est supérieur à  $\mu$  ce qui mène à une contradiction.

En utilisant la Corollaire 4.8.4 nous constatons qu'il existe un séparateur d'entrée dont la contrainte a été violée.  $\square$

D'après le Théorème 4.8.5 nous constatons que l'ensemble des séparateurs d'entrée dans un graphe associé à un système structuré, optimise les informations structurelles qui peuvent être livrées par l'ensemble de tous les séparateurs possibles dans ce graphe, donc les informations structurelles données par l'ensemble des séparateurs d'entrée sont suffisantes pour caractériser toutes les solutions possibles pour le problème de placement de capteurs additionnels nécessaires pour rendre le problème de détection et localisation de défauts génériquement soluble.

Nous allons illustrer maintenant ce résultat sur des exemples.

## 4.9 Exemples illustratifs

### Exemple 4.9.1

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 3 défauts, 1 état et une sortie, et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé illustré sur la Figure 4.25.

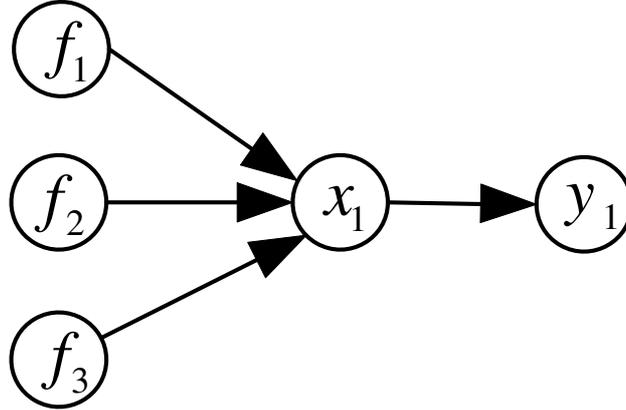


FIG. 4.25 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 4.9.1

Vérifions maintenant la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts du Théorème 3.2.1.

- Le nombre de défauts est  $r = 3$ .
- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 1$ ,

donc  $k < r$ , la condition n'est pas satisfaite et le problème de détection et localisation de défauts n'est pas génériquement soluble sur cet exemple. Il faut ajouter de nouveaux capteurs pour remplir cette condition.

Les séparateurs d'entrée de ce graphe sont les suivants.

- Le séparateur  $\{x_1\}$  est le séparateur minimal d'entrée de dimension 1. La contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum que  $3-1=2$  capteurs additionnels mesurent des sommets dans l'ensemble associé à ce séparateur  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , et d'après le Corollaire 4.8.2, 2 est le nombre minimal de capteurs additionnels nécessaire pour remplir la condition de la solubilité générique du problème *FDI*.
- Les séparateurs d'entrée de dimension 2 sont  $\{x_1, f_1\}$ ,  $\{x_1, f_2\}$ ,  $\{x_1, f_3\}$  et les contraintes associées à ces séparateurs indiquent qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des sommets dans les ensembles  $\{f_2, f_3\}$ ,  $\{f_1, f_3\}$ ,  $\{f_1, f_2\}$ , qui sont les ensembles associés à ces trois séparateurs d'entrée de dimension 2 respectivement.
- $F$  est le séparateur d'entrée de dimension 3.

L'ensemble des contraintes associées aux séparateurs d'entrée caractérisent

selon le Théorème 4.8.5 toutes les solutions possibles. Cela veut dire que si nous prenons deux capteurs additionnels  $z_1, z_2$  qui mesurent des variables du système et qui respectent toutes les contraintes associées aux séparateurs d'entrée le problème de détection et localisation de défauts sur le système étendu sera génériquement soluble car la condition du Théorème 3.2.1 sera remplie.

Nous allons montrer des cas où nous ajoutons deux capteurs additionnels sans remplir la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts et nous allons montrer qu'il y a certaines contraintes associées aux séparateurs d'entrée qui sont violées.

Considérons les deux capteurs additionnels  $z_1, z_2$  qui mesurent des variables du système comme illustré sur la Figure 4.26.

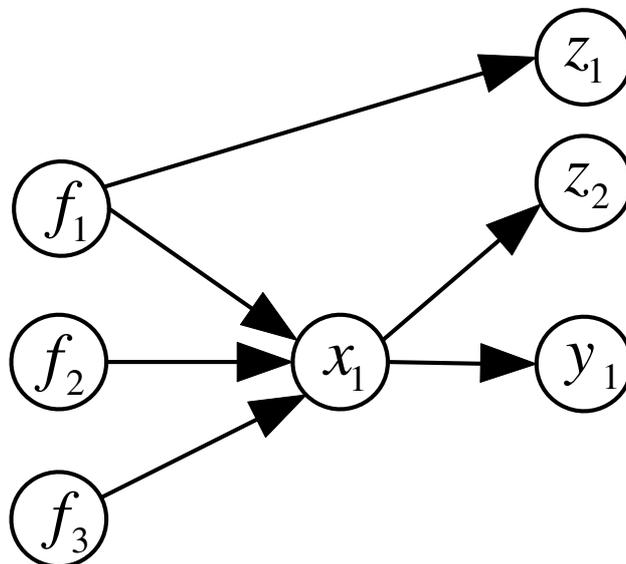


FIG. 4.26 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 4.9.1 avec deux nouveaux capteurs

Cela ne peut pas être une solution, car avec ces deux capteurs le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints devient  $k = 2$ , et il reste inférieur au nombre de défauts et donc la condition  $k = r$  n'est pas satisfaite. Le placement de ces deux capteurs de cette manière ne respecte pas la contrainte associée au séparateur minimal d'entrée  $\{x_1\}$ , qui indique que les deux capteurs additionnels doivent mesurer des variables dans l'ensemble  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , et ce n'est pas le cas dans notre exemple, donc le placement proposé de deux capteurs ne peut pas être une solution.

Considérons une autre proposition pour le placement de  $z_1, z_2$  comme illustré sur la Figure 4.27.

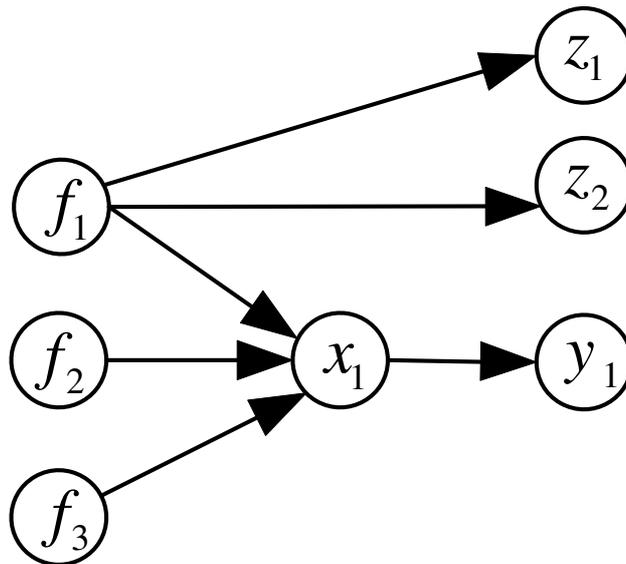


FIG. 4.27 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 4.9.1 avec deux nouveaux capteurs

Ce placement de deux capteurs additionnels n'est pas une solution non plus, car le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 2$  et il est inférieur au nombre de défauts  $r = 3$ . La contrainte associée au séparateur minimal d'entrée  $\{x_1\}$  est bien respectée dans ce cas car les deux capteurs additionnels mesurent des variables dans  $\{f_1, f_2, f_3\}$ , mais aucun capteur ne mesure des variables dans  $\{f_2, f_3\}$ , et cela veut dire que la contrainte associée au séparateur  $\{x_1, f_1\}$  qui implique qu'un capteur additionnel au minimum doit mesurer des variables dans cet ensemble, a été violée. Donc les contraintes associées aux séparateurs  $\{x_1\}$  et  $\{x_1, f_1\}$  (resp.  $\{x_1\}$  et  $\{x_1, f_2\}$ ,  $\{x_1\}$  et  $\{x_1, f_3\}$ ) empêchent que deux capteurs différents mesurent seulement le sommet  $f_1$ , (resp.  $f_2$  ou  $f_3$ ).

### Exemple 4.9.2

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 6 défauts, 6 états et 3 sorties, et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé illustré sur la Figure 4.28.

Vérifions maintenant la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts du Théorème 3.2.1.

- Le nombre de défauts est  $r = 6$ .
- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 3$ ,

donc  $k < r$ , la condition n'est pas satisfaite et le problème de détection et localisation de défauts n'est pas génériquement soluble sur cet exemple. Il faut ajouter de nouveaux capteurs pour remplir cette condition.

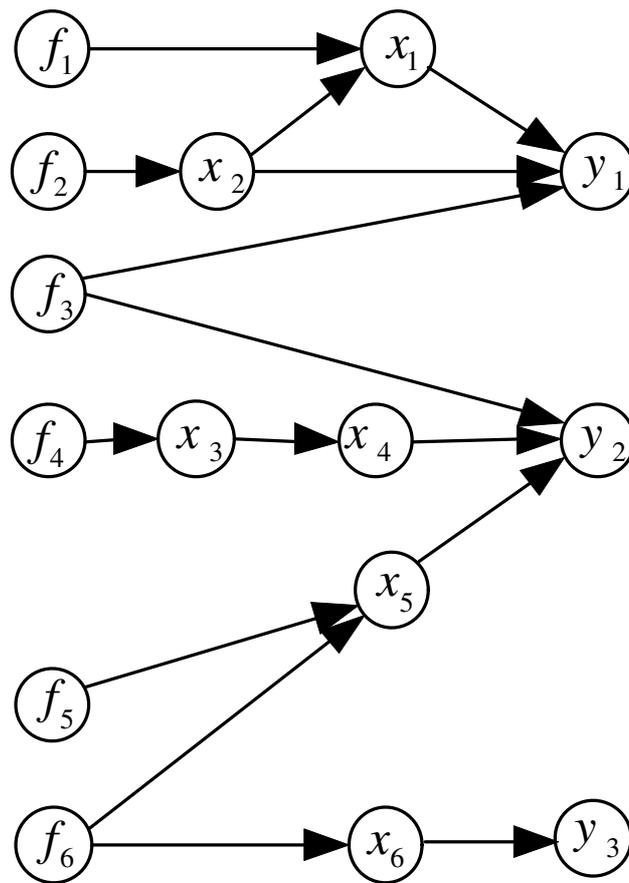


FIG. 4.28 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 4.9.2

Le nombre minimal de capteurs additionnels nécessaires pour rendre le problème de détection et localisation de défauts génériquement soluble est égal à  $r-k=6-3=3$ . Une solution minimale dans cet exemple est une solution avec trois nouveaux capteurs placés d'une telle sorte qu'on augmente le nombre maximal de chemins défauts-sorties sommets disjoints  $k$  de trois unités pour qu'il devienne égal à 6 le nombre de défauts. Tout placement de nouveaux capteurs doit respecter les contraintes associées aux séparateurs d'entrée pour qu'il soit une solution.

Les séparateurs d'entrée dans cet exemple sont :

- Le séparateur  $\{y_1, y_2, f_6\}$  est le séparateur minimal d'entrée de dimension 3. La contrainte associée à ce séparateur indique qu'il faut au minimum que trois capteurs additionnels mesurent des sommets dans l'ensemble associé à ce séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ . Nous déduisons aussi que la variable  $x_6$  est une mesure inefficace.
- Les séparateurs d'entrée de dimension 4 sont

$\{y_1, y_2, f_1, f_6\}, \{y_1, y_2, f_2, f_6\}, \{y_1, y_2, f_3, f_6\}, \{y_1, y_2, f_4, f_6\},$   
 $\{y_1, y_2, f_5, f_6\}, \{y_1, y_2, x_1, f_6\}$ . La contrainte associée à chacun de ces séparateurs indique qu'il faut au minimum que deux capteurs additionnels mesurent des variables dans son ensemble associé.

- Les séparateurs d'entrée de dimension 5 sont  $\{f_1, f_2, f_3, f_6, y_2\}, \{f_3, f_4, f_5, f_6, y_1\}, \{y_1, y_2, f_1, f_4, f_6\}, \{y_1, y_2, f_1, f_5, f_6\}, \{y_1, y_2, f_2, f_4, f_6\}, \{y_1, y_2, f_2, f_5, f_6\}$ . La contrainte associée à chacun de ces séparateurs indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des variables dans son ensemble associé. Par exemple la contrainte associée au séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_6, y_2\}$  indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel mesure des variables dans  $\{f_4, f_5, x_3, x_4, x_5\}$ .
- Le séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$  est le séparateur d'entrée de dimension 6.

Considérons un ensemble de trois capteurs additionnels  $\{z_1, z_2, z_3\}$ , qui mesurent des sommets du système comme illustré sur la Figure 4.29.

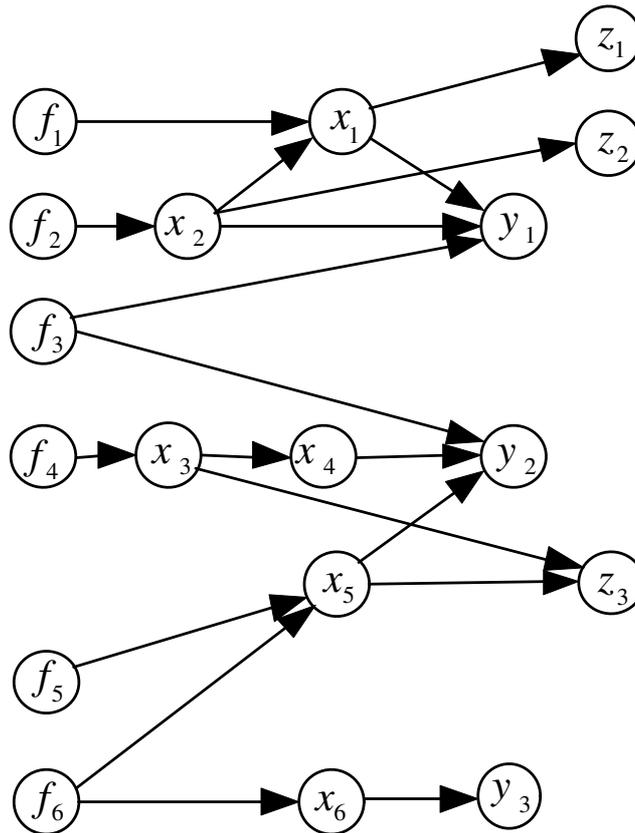


FIG. 4.29 – Une solution avec 3 capteurs additionnels qui rend le problème soluble

Ce placement des trois capteurs additionnels respecte les contraintes associées

aux séparateurs d'entrée, et en vérifiant la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts donnée par le Théorème 3.2.1, Nous trouvons qu'il existe 6 chemins défauts-sorties sommets disjoints, où les sorties sont l'ensemble  $Y$  et les capteurs additionnels  $\{z_1, z_2, z_3\}$ , et le nombre de défauts est égal à 6, donc  $k = 6$ , la condition est satisfaite et le problème est génériquement soluble.

Considérons maintenant un autre placement de ces trois capteurs additionnels  $\{z_1, z_2, z_3\}$ , comme illustré sur la Figure 4.30.

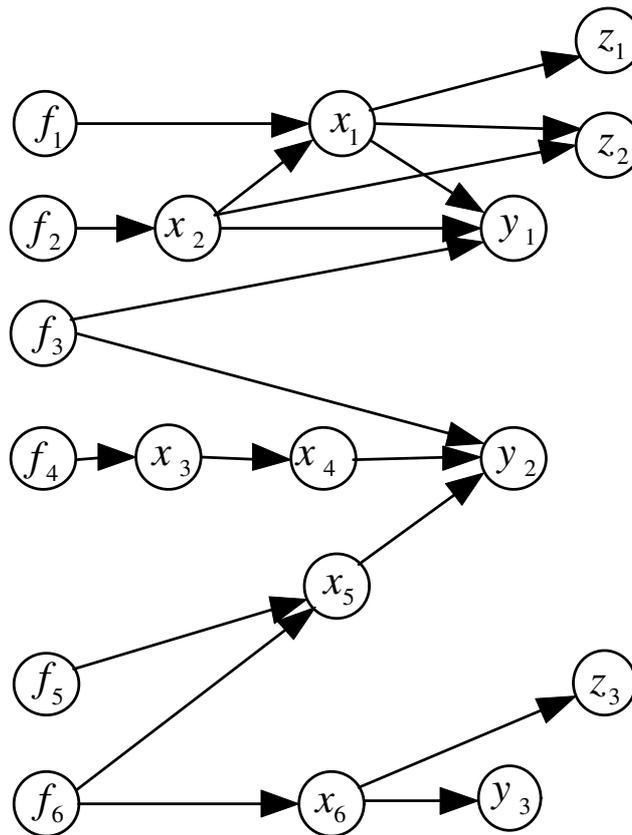


FIG. 4.30 – Un placement de 3 capteurs additionnels qui ne remplit pas la condition du Théorème 3.2.1

Ce placement ne peut pas être une solution, car certaines contraintes associées aux séparateurs d'entrée n'ont pas été respectées, comme la contrainte associée au séparateur minimal d'entrée  $\{y_1, y_2, f_6\}$  car deux capteurs additionnels mesurent des sommets dans son ensemble associé, alors que sa contrainte associée indique qu'il faut au minimum que trois capteurs additionnels mesurent des sommets dans son ensemble associé. La contrainte associée au séparateur d'entrée de dimension 5  $\{f_1, f_2, f_3, f_6, y_2\}$  n'a pas été respectée non plus, car aucun des trois capteurs additionnels

ne mesure des sommets dans l'ensemble associé à ce séparateur, alors qu'il faut au minimum qu'un capteur y mesure des sommets comme l'indique la contrainte associée à ce séparateur. En vérifiant la condition du Théorème 3.2.1 nous trouvons que le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est égal à 5 et il est inférieur au nombre de défauts. Avec ce placement de trois capteurs additionnels la condition de la solubilité générique du problème  $FDI$  n'est pas remplie.

Considérons maintenant un cas plus général avec un ensemble de 5 capteurs additionnels possibles  $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$  qui mesurent des sommets dans  $G(\Sigma_\Lambda)$  comme illustré sur la Figure 4.31.

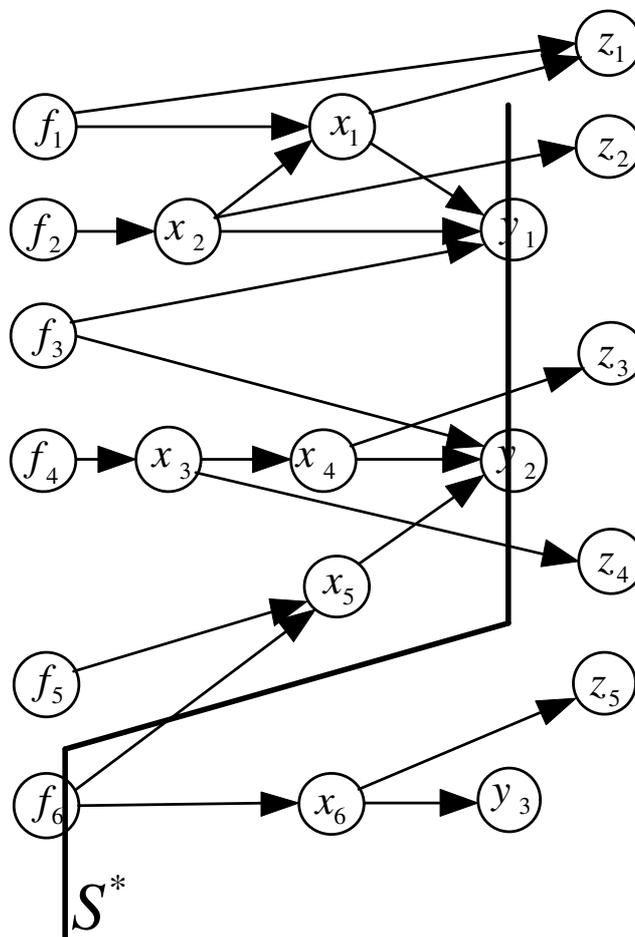


FIG. 4.31 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  avec un placement de 5 capteurs additionnels

A partir de ce graphe nous pouvons déduire que le placement de capteurs additionnels proposé est bien une solution pour rendre le problème de détection et localisation de défauts génériquement soluble, car le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints  $k = 6$  et le nombre de défauts

$r = 6$ , donc  $k = r$  et la condition est satisfaite.

Si nous cherchons à partir de l'ensemble  $Z$  une solution minimale avec trois capteurs additionnels nous constatons que

- Les deux capteurs additionnels  $z_3, z_4$  n'appartiennent pas à une solution minimale en même temps, car la contrainte associée au séparateur  $\{y_1, y_2, f_4, f_6\}$  indique qu'il faut au minimum que deux capteurs additionnels mesurent des sommets dans  $\{f_1, f_2, f_3, f_5, x_1, x_2, x_5\}$  l'ensemble associé à ce séparateur.
- Le capteur  $z_5$  ne mesure que le sommet  $x_6$  qui n'appartient pas à l'ensemble associé au séparateur minimal d'entrée  $S^*$ , donc  $z_5$  n'appartient à aucune solution minimale.
- Il résulte que les deux capteurs additionnels  $z_1, z_2$  appartiennent à toute solution minimale et qu'il y a deux possibilités d'avoir des solutions minimales à partir de ce placement de 5 capteurs proposé, et il s'agit de  $\{z_1, z_2, z_3\}$  et  $\{z_1, z_2, z_4\}$ .

**Exemple 4.9.3**

Reprenons le système de l'Exemple 4.6.3. Le graphe associé à ce système est rappelé sur la Figure 4.32

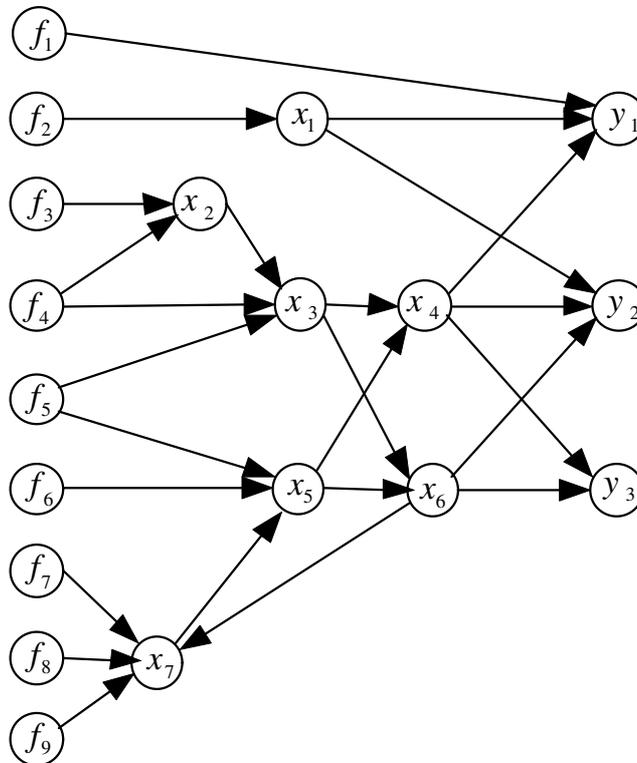


FIG. 4.32 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  de l'Exemple 4.9.3

La condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts du Théorème 3.2.1 n'est pas satisfaite car,

- Le nombre de défauts est  $r = 9$ .
- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 3$ ,

donc  $k \neq r$  et nous avons besoin d'ajouter de nouveaux capteurs pour remplir cette condition.

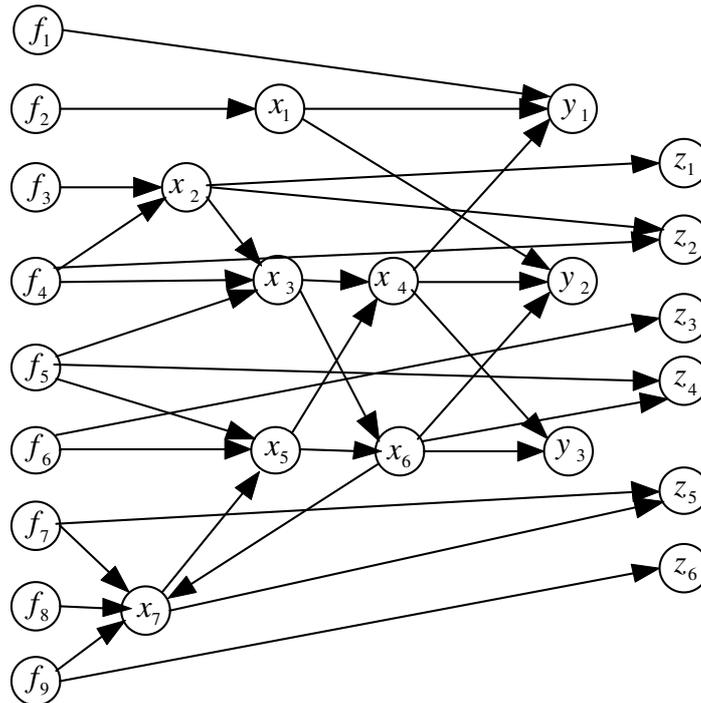


FIG. 4.33 – Une solution avec 6 capteurs additionnels

D'après le Corollaire 4.8.2 le nombre minimal de capteurs additionnels nécessaires pour rendre le problème génériquement soluble est égal à  $r-k=9-3=6$  nouveaux capteurs qui doivent être placés de manière à augmenter le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints de 6 unités. Cela peut être garanti si le placement de nouveaux capteurs respecte toutes les contraintes associées aux séparateurs d'entrée du système. Dans cet exemple nous pouvons trouver un nombre très grand de séparateurs d'entrée de dimensions qui varient entre 3 la dimension du séparateur minimal d'entrée  $\{y_1, y_2, y_3\}$ , et 9 la dimension de séparateur d'entrée  $F$ , par exemple pour les séparateurs d'entrée de dimension 4 nous pouvons trouver le séparateur  $\{f_1, f_2, x_3, x_5\}$ , et les trois sommets du séparateur minimal d'entrée  $\{y_1, y_2, y_3\}$  avec n'importe quel sommet de l'ensemble  $\{f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$  forme aussi un séparateur d'entrée de dimension 4. En faisant le même raisonnement nous pouvons trouver plusieurs séparateurs d'entrée de dimensions

5, 6, 7 et 8, et dans tout placement de capteurs additionnels, si le nombre de capteurs est minimal (i.e.  $r-k$ ) le placement de ces capteurs doit respecter toutes les contraintes associées aux séparateurs d'entrée, et si le nombre de capteurs additionnels est supérieur à  $(r-k)$  il faut au minimum que le placement de  $(r-k)$  capteurs parmi les capteurs additionnels respectent toutes les contraintes associées aux séparateurs d'entrée. D'après ce raisonnement nous pouvons constater que le placement de 6 capteurs additionnels proposé dans la Figure 4.33 est une solution minimale du problème, et que le placement de 7 capteurs additionnels proposé dans la Figure 4.34 n'est pas une solution du problème car la contrainte associée au séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, x_7\}$  n'est pas respectée.

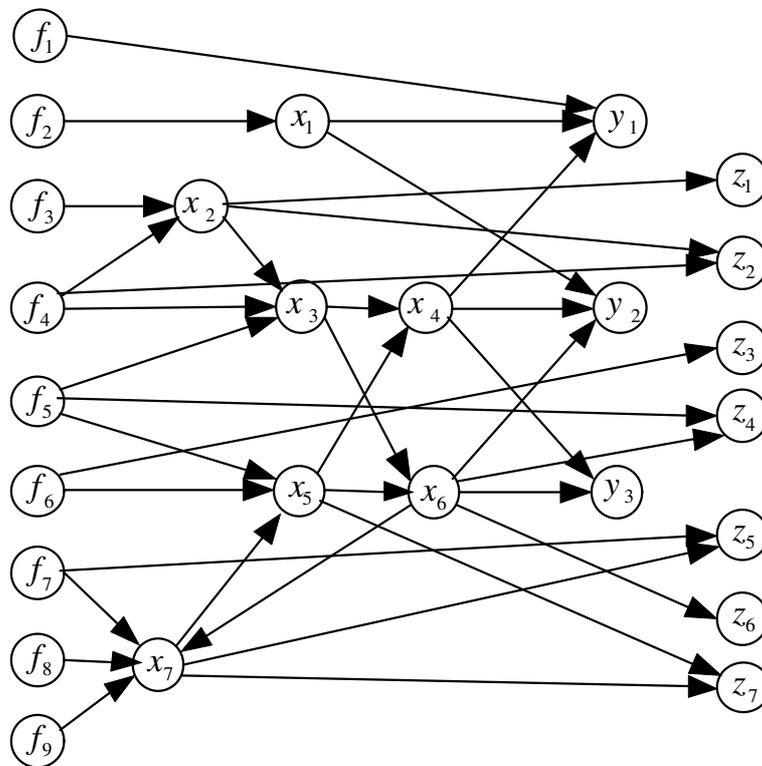


FIG. 4.34 – Placement de 7 capteurs additionnels qui n'est pas une solution

## 4.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une condition nécessaire et suffisante pour le placement de capteurs additionnels en utilisant les contraintes associées aux séparateurs d'entrée du graphe associé au système structuré. Les résultats ont été illustrés sur plusieurs exemples de différentes tailles. A chaque fois où un placement de nouveaux capteurs

ne remplissait pas la condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts, cela était dû au non respect de certaines contraintes associées aux séparateurs d'entrée.



## Chapitre 5

# CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons traiter le problème de classification des capteurs présenté dans le Chapitre 1. Il s'agit de classer les capteurs d'un système où le problème de détection et localisation de défauts, défini dans le Chapitre 1, avec les capteurs actuels a une solution. Cette classification prend en compte l'importance des capteurs pour la solubilité du problème *FDI*, ainsi les capteurs sont classés en trois types, capteurs essentiels, capteurs inutiles et capteurs utiles, dans le sens où la défaillance d'un capteur essentiel rend le problème de détection et localisation de défauts insoluble, mais la défaillance d'un capteur inutile n'a pas d'effet sur la solubilité du problème *FDI*. Rappelons que les différents types de capteurs ont été définis dans le Chapitre 1. Nous nous intéressons à ce problème sur la classe des systèmes linéaires structurés (avec leurs graphes associés). Nous considérons que le problème de détection et localisation de défauts est génériquement soluble, cela veut dire que la condition du Théorème 3.2.1 est satisfaite, donc sur le graphe associé au système structuré le nombre de défauts est égal au nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints. Les principaux résultats de ce chapitre sont une caractérisation des capteurs inutiles et des capteurs essentiels et une méthode de calcul numérique afin de calculer les ensembles de capteurs de différents types.

Nous allons utiliser les graphes associés aux systèmes structurés pour développer nos résultats, et les outils utilisés dans cette étude sont essentiellement, le séparateur minimal de sortie et l'ensemble de sommets essentiels dans un graphe qui ont été présentés dans le chapitre 4. Un problème similaire de classification de capteurs pour l'observabilité a été traité dans [17].

### 5.2 Caractérisation de capteurs

Rappelons maintenant les définitions de l'ensemble de sommets essentiels et du séparateur minimal de sortie qui ont été présentées dans le chapitre 4.

**Définition 5.2.1. (*Ensemble de sommets essentiels*)** *L'ensemble de sommets essentiels dans un graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  est l'ensemble des sommets qui appartiennent à tout couplage entrées-sorties de dimension maximale. Rappelons qu'un couplage entrées-sorties de dimension maximale est un ensemble maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints. Nous notons  $V_{ess}$  l'ensemble de sommets essentiels.*

**Définition 5.2.2. (*Séparateur minimal de sortie  $S_*$* )** *Le séparateur minimal de sortie dans un graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  est l'ensemble de tous les sommets initiaux de tout chemin direct de  $V_{ess}$  à  $Y$ , qui est un chemin qui a seulement son sommet initial dans  $V_{ess}$  et seulement son sommet terminal dans l'ensemble des sorties  $Y$ .*

La Définition 1.3.1 présente une définition d'une solution pour le problème *FDI* avec

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

---

un sous-ensemble de capteurs. En utilisant le Théorème 3.2.1, on peut caractériser les solutions pour le problème *FDI* de la Définition 1.3.1 comme présenté dans la Proposition 5.2.1.

**Proposition 5.2.1.** *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré génériquement observable avec  $r$  défauts et un ensemble de capteurs  $Y$  comme défini par (3.2.1) et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Soit  $V$  un sous-ensemble de  $Y$ .  $V$  est une solution pour le problème *FDI* avec une banque d'observateurs si et seulement si il existe un couplage  $F$ - $V$  de dimension  $r$  dans  $G(\Sigma_\Lambda)$ .*

Le Théorème 5.2.2 présente une caractérisation pour les capteurs inutiles définis par la Définition 1.3.2. Il démontre que quand il n'existe pas, pour un capteur donné  $y_i$ , de chemin qui a un sommet de défaut comme sommet initial et le capteur  $y_i$  comme sommet terminal sur le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$ , le capteur  $y_i$  est un capteur inutile.

**Théorème 5.2.2.** [12] *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré génériquement observable avec  $r$  défauts et un ensemble de capteurs  $Y$  comme défini par (3.2.1) et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. Un capteur  $y_i \in Y$  est un capteur inutile si et seulement si il n'existe pas de chemin  $F$ - $\{y_i\}$  dans  $G(\Sigma_\Lambda)$ , où  $F$  est l'ensemble de défauts*

### Démonstration

Condition suffisante :

Supposons qu'il n'existe pas de chemin  $F$ - $\{y_i\}$  dans  $G(\Sigma_\Lambda)$  et soit  $V$  une solution telle que  $y_i \in V$ . Comme  $V$  est une solution d'après la Proposition 5.2.1, il existe un linking  $F$ - $V$  de dimension  $r$  où  $r$  est le nombre de défauts. Le capteur  $y_i$  ne fait pas partie de ce linking car il n'existe pas de chemin  $F$ - $\{y_i\}$ . Donc ce linking a une dimension  $r$  entre  $F$  et  $V \setminus \{y_i\}$ , d'où  $V \setminus \{y_i\}$  est aussi une solution dans le sens de la Définition 1.3.1 et donc  $y_i$  est un capteur inutile.

Condition nécessaire :

Supposons qu'il existe un chemin  $F$ - $\{y_i\}$ , nous le nommons  $P$ , dans  $G(\Sigma_\Lambda)$ , et considérons un  $F$ - $Y$  linking  $L$  de dimension  $r$  dans  $G(\Sigma_\Lambda)$ , ce linking est donc de dimension maximale. Notons par  $V$  le sous-ensemble de  $Y$  qui appartient au linking  $L$ . D'après la Proposition 5.2.1,  $V$  est bien une solution pour le problème de détection et localisation de défauts. Supposons que  $y_i \in V$ , donc  $V \setminus \{y_i\}$  n'est pas une solution car sa cardinalité est égale à  $(r - 1)$ . Donc  $y_i$  n'est pas un capteur inutile. Supposons maintenant que  $y_i$  n'appartient pas à  $V$ . Un chemin  $F$ - $\{y_i\}$  a forcément des sommets communs avec le linking maximal  $L$  sinon le linking  $L$  ne serait pas maximal. Considérons maintenant le chemin  $L_j$  entre  $F$  et  $Y$  qui appartient au linking  $L$  et qui contient le dernier sommet commun  $z$  entre le linking  $L$  et le chemin  $P$  quand on parcourt le chemin  $P$  de  $F$  à  $y_i$ , voir Figure 5.1.

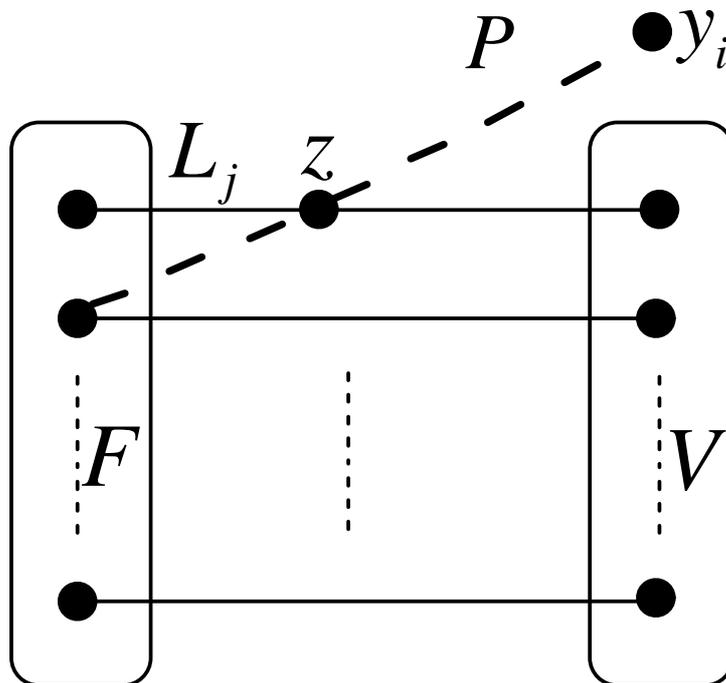


FIG. 5.1 – Le linking  $L$  et le chemin  $P$

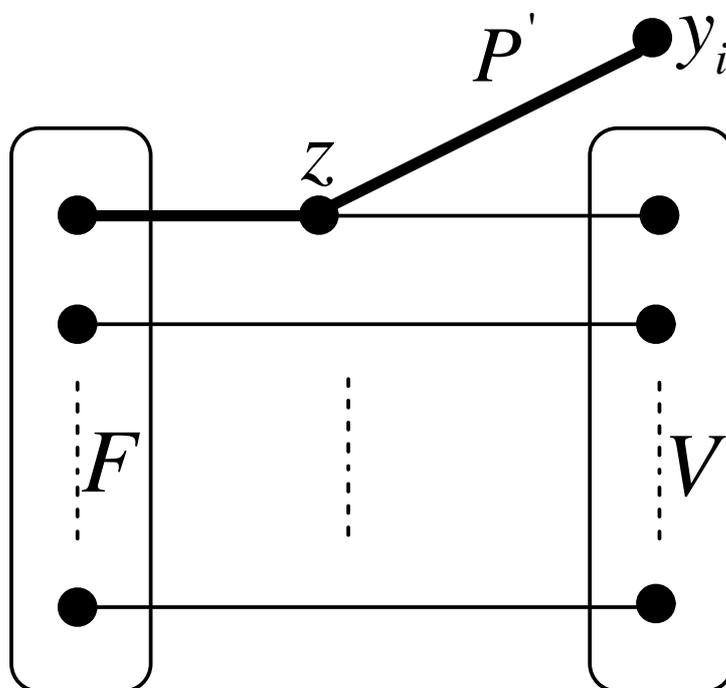


FIG. 5.2 – Le nouveau linking  $L'$

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

---

En prenant la partie du chemin  $L_j$  de  $F$  à  $z$  et la partie de  $P$  de  $z$  à  $y_i$ , nous obtenons un nouveau chemin  $P'$  qui contient  $y_i$  et qui n'a pas de sommet commun avec  $L \setminus L_j$ , donc nous obtenons un nouveau linking  $L' = P' \cup (L \setminus L_j)$  de dimension  $r$  qui contient  $y_i$ , voir Figure 5.2. Donc  $y_i$  appartient à une solution  $V'$  telle que  $V' \setminus y_i$  n'est pas une solution et donc  $y_i$  n'est pas inutile.  $\square$

Comme une caractérisation des capteurs inutiles a été présentée, une caractérisation des capteurs essentiels sera donnée par le théorème suivant. Elle dépend de l'ensemble des sommets essentiels d'un graphe. Il sera montré que l'intersection entre l'ensemble de sommets essentiels et les capteurs caractérise les capteurs essentiels.

**Théorème 5.2.3.** *Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré génériquement observable avec  $r$  défauts et un ensemble de capteurs  $Y$  comme défini par (3.2.1) et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. L'ensemble des capteurs essentiels est  $Y_e = Y \cap V_{ess}$ , où  $V_{ess}$  est l'ensemble des sommets essentiels du graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$ .*

### Démonstration

Condition suffisante :

Supposons que  $y_i$  appartient à  $Y_e = Y \cap V_{ess}$ . Donc tout linking de  $F$  à  $Y$  de dimension  $r$  contient  $y_i$  et tout linking de  $F$  à  $Y \setminus \{y_i\}$  a une dimension inférieure ou égale à  $r - 1$ . Cela est vrai pour tout linking de  $F$  à  $V \setminus \{y_i\}$  où  $V \subseteq Y$  donc  $y_i$  appartient à toute solution et il est un capteur essentiel.

Condition nécessaire :

Si  $y_i$  n'appartient pas à  $Y_e = Y \cap V_{ess}$  donc  $y_i$  n'appartient pas à tout linking maximal. Donc il existe un linking de dimension  $r$  qui ne couvre pas  $y_i$ . L'ensemble  $V$  qui est constitué des sommets terminaux des chemins de ce linking est une solution et ne contient pas  $y_i$ . D'où  $y_i$  n'est pas un capteur essentiel.

## 5.3 Calcul numérique des ensembles de capteurs des différents types

Dans ce paragraphe nous montrons des méthodes du calcul pour déterminer les capteurs essentiels et les capteurs inutiles dans un graphe associé à un système structuré.

### 5.3.1 Calcul des capteurs essentiels

Pour calculer les capteurs essentiels nous allons reformuler le Théorème 5.2.3 en utilisant le concept de séparateur minimal de sortie.

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

**Proposition 5.3.1.** Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé. L'ensemble des capteurs essentiels est donné par  $Y_e = Y \cap S_*$ , où  $Y$  est l'ensemble des capteurs et  $S_*$  est le séparateur minimal de sortie de  $G(\Sigma_\Lambda)$  défini par la Définition 4.4.1.

Donc pour calculer les capteurs essentiels, nous calculons d'abord le séparateur minimal de sortie  $S_*$  en utilisant un algorithme standard pour calculer le flot maximum comme cela a été illustré dans le paragraphe 4.4. L'intersection entre  $S_*$  et  $Y$  donne l'ensemble des capteurs essentiels.

### 5.3.2 Calcul des capteurs inutiles

Pour calculer l'ensemble de capteurs inutiles, nous pouvons suivre une procédure de marquage, où nous partons de l'ensemble de défauts  $F$  et nous marquons tous les sommets qui se trouvent sur des chemins de  $F$  à  $Y$ . Les sommets de sortie qui ne sont pas marqués à la fin de la procédure sont les capteurs inutiles.

Nous allons maintenant illustrer les résultats sur des exemples.

## 5.4 Exemples illustratifs

### Exemple 5.4.1

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 3 défauts, 7 états et 3 sorties, et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 5.3.

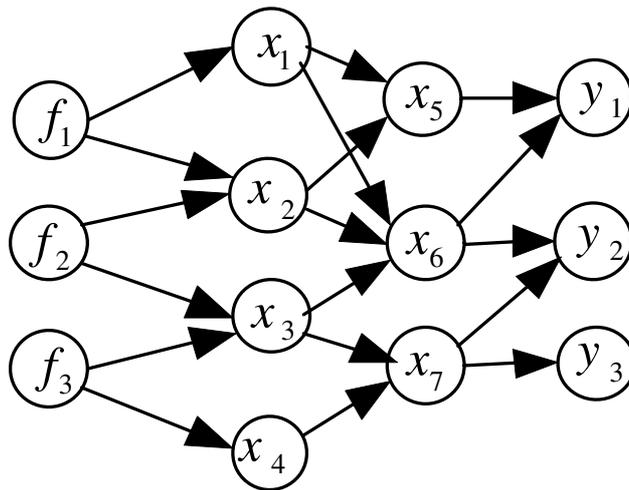


FIG. 5.3 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 5.4.1

La condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts du Théorème 3.2.1 est satisfaite car,

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

- Le nombre de défauts est  $r = 3$ .
- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 3$ ,

donc  $k = r$ . Les trois capteurs actuels du système sont des capteurs essentiels, car la condition est satisfaite et on n'a que trois capteurs et le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est trois, donc la défaillance de n'importe quel capteur parmi les trois va rendre le problème de détection et localisation de défauts insoluble. Cela peut être vérifié en utilisant la Proposition 5.3.1, où l'ensemble des sommets essentiels est  $V_{ess} = \{f_1, f_2, f_3, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3\}$ , et  $S_* = \{y_1, y_2, y_3\}$  comme illustré sur la Figure 5.4.

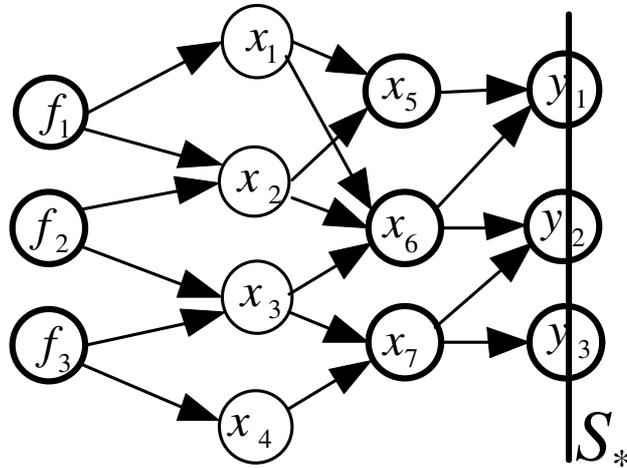


FIG. 5.4 – Le séparateur minimal de sortie et l'ensemble des sommets essentiels du graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$

donc l'ensemble des capteurs essentiels est  $Y_e = Y \cap S_* = \{y_1, y_2, y_3\}$ .

### Exemple 5.4.2

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 6 défauts, 6 états et 8 sorties, et  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 5.5. La condition de la solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts du Théorème 3.2.1 est satisfaite car,

- Le nombre de défauts est  $r = 6$ .
- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 6$ ,

donc  $k = r$ .

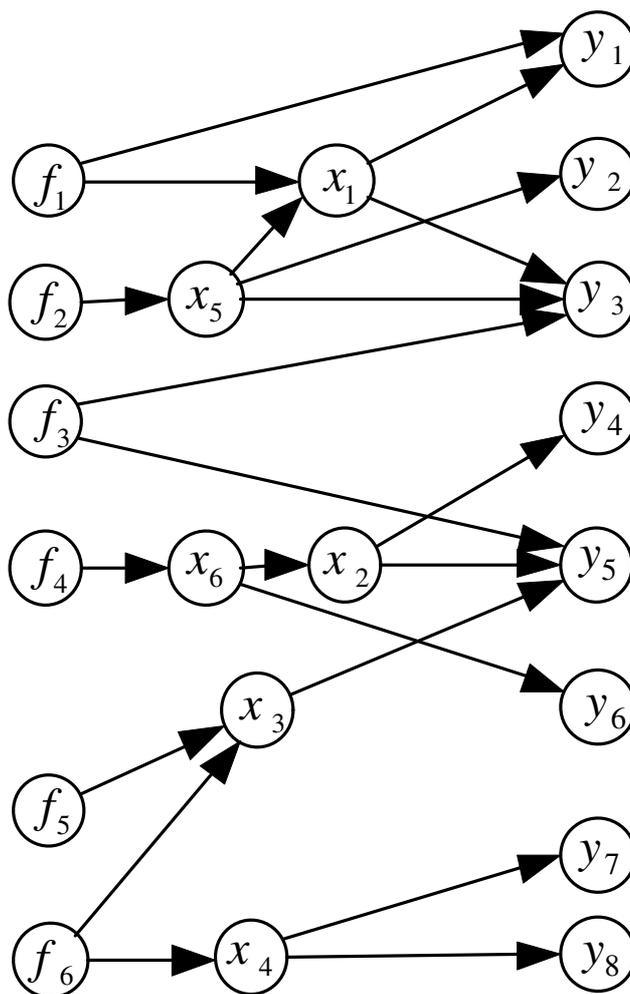


FIG. 5.5 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 5.4.2

L'ensemble de capteurs actuels du système est  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\}$ . Pour trouver l'ensemble de capteurs inutiles dans ce système, nous appliquons la procédure de marquage et nous trouvons qu'il n'existe pas de capteurs inutiles dans ce système car toutes les sorties sont marquées en appliquant la procédure de marquage. Alors nous constatons dans un premier temps que tous les capteurs actuels sont des capteurs utiles pour la solubilité du problème de détection et localisation de défauts. Maintenant pour déterminer l'ensemble des capteurs essentiels qui est un sous-ensemble des capteurs utiles, nous calculons le séparateur minimal de sortie  $S_*$ , il s'agit dans cet exemple de l'ensemble  $\{y_1, y_2, y_3, y_5, x_4, x_6\}$  comme illustré sur la Figure 5.6.

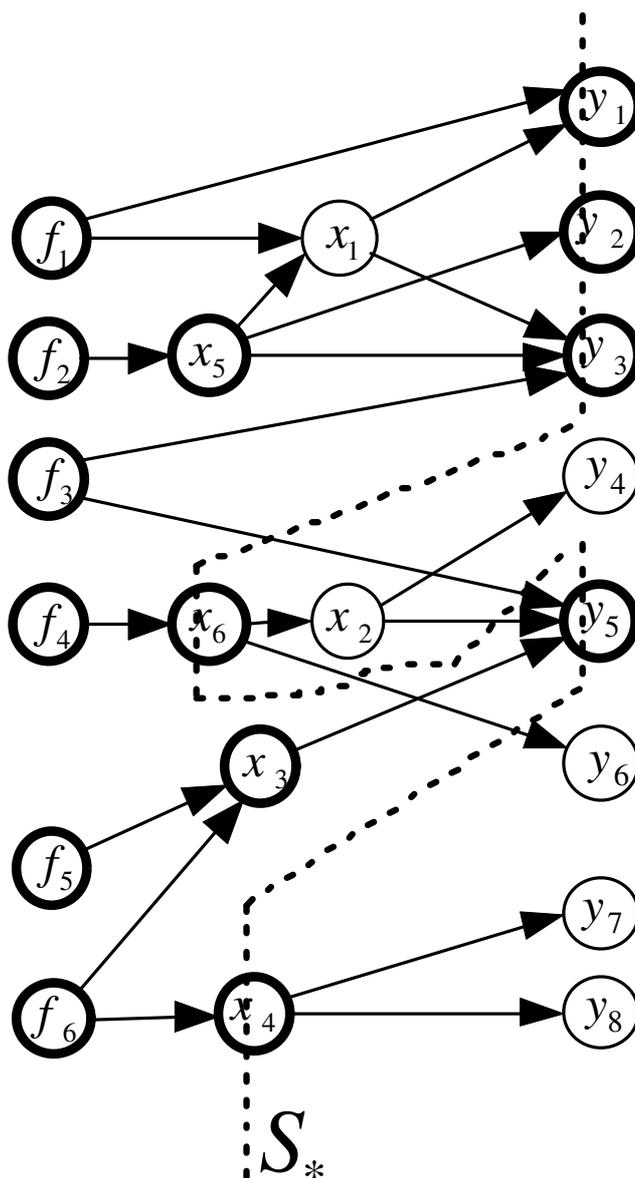


FIG. 5.6 – Le séparateur minimal de sortie et l'ensemble des sommets essentiels du graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$

L'ensemble de capteurs essentiels est  $Y_e = Y \cap S_* = \{y_1, y_2, y_3, y_5\}$ .

### Exemple 5.4.3

Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système structuré avec 6 défauts, 3 entrées de commande 16 états et 10 sorties,  $G(\Sigma_\Lambda)$  son graphe associé est illustré sur la Figure 5.7. La condition de solubilité générique du problème de détection et localisation de défauts du Théorème 3.2.1 est satisfaite car,

- Le nombre de défauts est  $r = 6$ .

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

- Le nombre maximum de chemins défauts-sorties sommets disjoints est  $k = 6$ ,  
donc  $k = r$ .

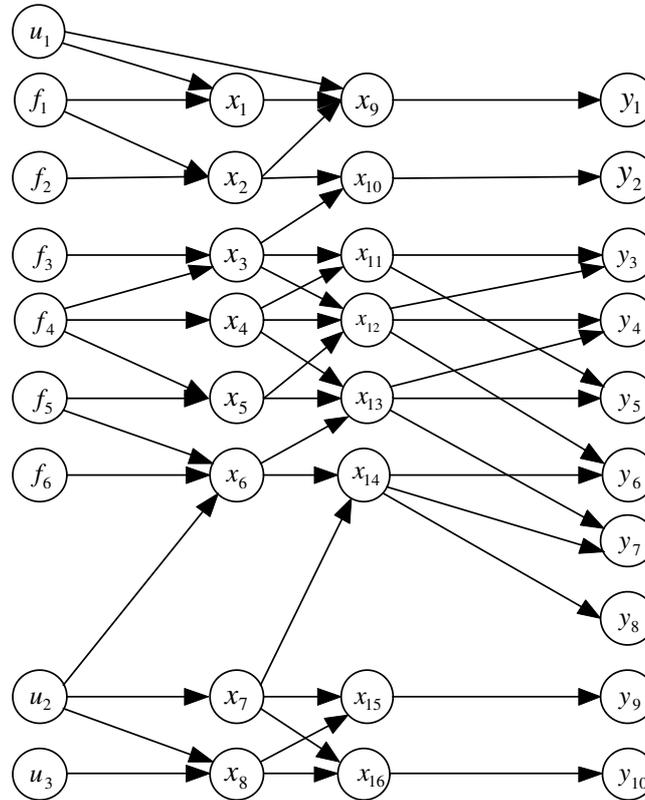


FIG. 5.7 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'Exemple 5.4.3

L'ensemble de capteurs actuels du système est  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}\}$ . Les capteurs inutiles sont  $\{y_9, y_{10}\}$  car en appliquant la procédure de marquage, nous marquons tous les sommets qui se trouvent sur des chemins de  $F$  à  $Y$  où  $F$  est l'ensemble de défauts, l'ensemble de sommets qui ne sont pas marqués à la fin de la procédure est  $\{u_1, u_2, u_3, x_7, x_8, x_{15}, x_{16}, y_9, y_{10}\}$  et les capteurs qui appartiennent à cet ensemble sont les capteurs inutiles, dans le sens où la perte d'un de ces capteurs n'a pas d'effet sur la solubilité du problème de détection et localisation de défauts.

Le reste des capteurs  $\{y_1, \dots, y_8\}$  sont les capteurs utiles et parmi eux, il y a un sous-ensemble de capteurs essentiels. Pour trouver les capteurs essentiels, nous calculons le séparateur minimal de sortie  $S_*$ , il s'agit dans cet exemple de l'ensemble  $\{y_1, y_2, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}$  comme illustré sur la Figure 5.8.

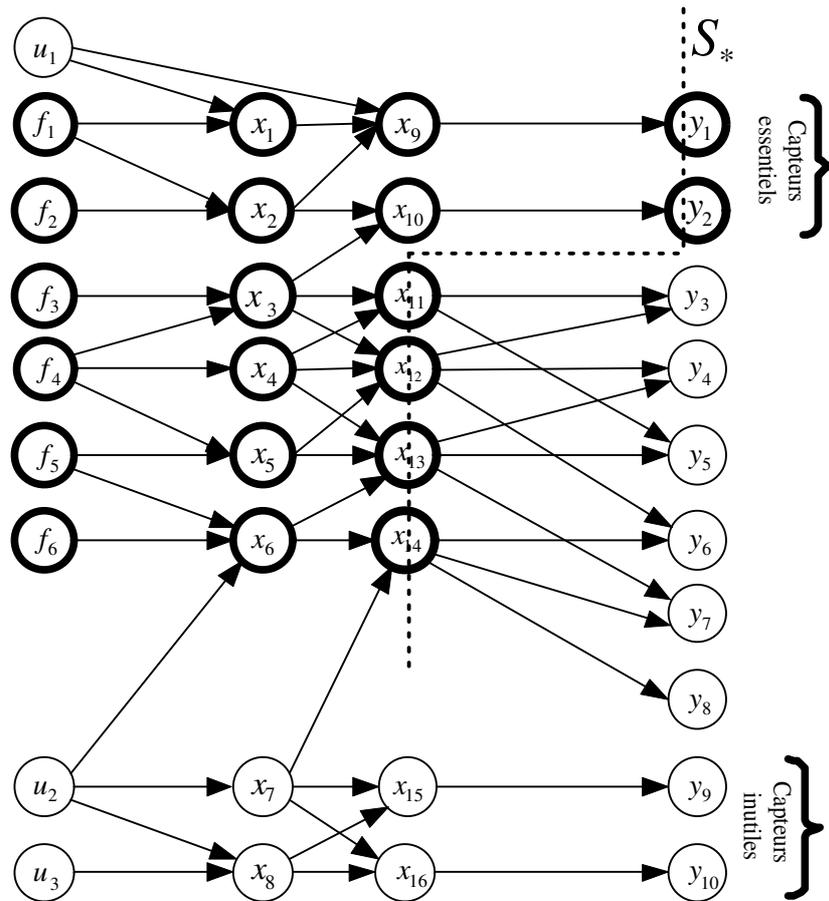


FIG. 5.8 – Le séparateur minimal de sortie et l’ensemble des sommets essentiels du graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$

L’ensemble des capteurs essentiels est  $Y_e = Y \cap S_* = \{y_1, y_2\}$ . La défaillance d’un de ces deux capteurs rend le problème de détection et localisation de défauts insoluble.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité le problème de classification des capteurs dans un système. Nous avons considéré des systèmes structurés où le problème de détection et localisation de défauts est génériquement soluble. Nous avons présenté une classification des capteurs selon leur importance pour la solubilité générique du problème *FDI*. Les capteurs ont été classés en trois types, capteurs essentiels, capteurs inutiles et capteurs utiles. Une caractérisation des capteurs inutiles et des capteurs essentiels a été présentée en utilisant les propriétés des graphes orientés associés aux systèmes structurés. Nous avons présenté une méthode de calcul numérique pour déterminer les différents types de



# CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

---

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont abordé le problème de détection et localisation de défauts (*FDI*, Fault detection and Isolation). Nous avons étudié ce problème dans le cadre des systèmes linéaires structurés. En utilisant les graphes orientés associés aux systèmes linéaires structurés on a rappelé une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts soit génériquement soluble.

Les objectifs principaux des travaux se résument en deux points :

- Le premier point : quand la condition de solubilité générique du problème *FDI* n'est pas vérifiée, de nouveaux capteurs doivent être implantés pour rendre le problème soluble. La contribution de notre travail a été d'approfondir l'analyse structurelle du problème de placement de capteurs et de donner des informations sur les variables du système à mesurer par les nouveaux capteurs. Donc une décomposition du système a été présentée afin d'avoir des informations structurelles sur le placement de nouveaux capteurs. La notion de séparateur d'entrée a été développée, avec l'ensemble des séparateurs d'entrée dans un graphe nous avons pu déterminer le nombre minimal de capteurs additionnels nécessaires et caractériser toutes les solutions possibles concernant le placement de nouveaux capteurs.
- Le deuxième point : nous partons du cas où le problème de détection et localisation de défauts a une solution avec les sorties actuelles du système, et nous avons classé les capteurs, selon leur importance pour la solubilité du problème *FDI*, en trois catégories
  - Capteurs inutiles
  - Capteurs utiles
  - Capteurs essentiels

Nous avons développé la notion de séparateur minimal de sortie qui caractérise les capteurs essentiels sur le graphe associé au système structuré, et avec une procédure de marquage nous avons pu déterminer les capteurs inutiles. Le nombre de capteurs qui sont utiles mais pas essentiels donne une idée sur le degré de redondance concernant le problème *FDI*.

### Perspectives

Afin de compléter nos travaux certaines perspectives peuvent être envisagées. Ces perspectives peuvent, par exemple se fonder sur les idées suivantes.

- La première idée : dans notre étude du problème de placement de capteurs, notre résultat était que tout placement de nouveaux capteurs doit respecter les contraintes associées aux séparateurs d'entrée, nous avons montré que le respect des contraintes associées aux séparateurs d'entrée implique le respect des contraintes associées à tous les séparateurs dans un graphe. Ce qui peut être traduit de la manière suivante. L'ensemble des séparateurs d'entrée résume l'ensemble des séparateurs dans

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

un graphe dans le sens des contraintes associées aux séparateurs qui sont nécessaires pour le placement des capteurs additionnels. Nous allons montrer sur l'exemple suivant que certaines contraintes associées aux séparateurs d'entrée impliquent d'autres contraintes associées à d'autres séparateurs d'entrée, et donc l'ensemble des séparateurs d'entrée peut être réduit aussi.

### Exemple 5.5.1

Prenons un exemple simple pour comprendre comment un ensemble des contraintes associées aux séparateurs d'entrée implique d'autres contraintes associées à d'autres séparateurs d'entrée. La Figure 5.9 représente un système avec 4 défauts et une sortie.

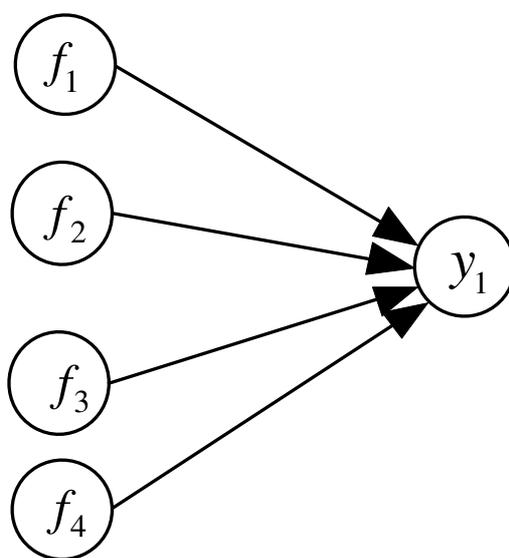


FIG. 5.9 – Le graphe  $G(\Sigma_\Lambda)$  associé au système de l'exemple 5.5.1

Les séparateurs d'entrée dans ce graphe sont  $\{y_1\}$  qui est le séparateur minimal d'entrée,  $\{y_1, f_1\}, \{y_1, f_2\}, \{y_1, f_3\}, \{y_1, f_4\}$  sont des séparateurs d'entrée de dimension 2,  $\{y_1, f_1, f_2\}, \{y_1, f_1, f_3\}, \{y_1, f_1, f_4\}, \{y_1, f_2, f_3\}, \{y_1, f_2, f_4\}, \{y_1, f_3, f_4\}$  sont des séparateurs d'entrée de dimension 3 et enfin le séparateur  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  de dimension 4. Le problème *FDI* n'a pas de solution sur cet exemple et il faut ajouter au minimum 3 capteurs additionnels. D'après le Théorème 4.8.5 il faut que le placement de capteurs additionnels respecte les contraintes associées aux séparateurs d'entrée. Sur cet exemple nous remarquons que le respect des contraintes associées aux séparateurs d'entrée de dimension 2 implique le respect des contraintes associées aux séparateurs d'entrée de dimension 3. Par exemple les contraintes associées aux séparateurs  $\{y_1, f_1\}, \{y_1, f_2\}$ , indiquent qu'il faut au minimum deux capteurs additionnels qui mesurent des sommets dans les ensembles  $\{f_2, f_3, f_4\}, \{f_1, f_3, f_4\}$  respectivement.

## Chapitre 5. CLASSIFICATION DES CAPTEURS POUR LA DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS

---

Une fois que ces deux contraintes sont respectées, la contrainte associée au séparateur  $\{y_1, f_1, f_2\}$ , qui indique qu'il faut au minimum qu'un capteur additionnel qui mesure des sommets dans l'ensemble  $\{f_3, f_4\}$ , résultera des précédentes. Donc l'ensemble des contraintes associées aux séparateurs d'entrée peut être réduit, et cela est une perspective intéressante pour les travaux présentés dans ce mémoire. Surtout que la question du calcul numérique des séparateurs est encore une question très ouverte, et nous n'avons pas encore un algorithme efficace pour les calculer. Nous arrivons seulement à en calculer quelques uns avec un algorithme de complexité polynomiale comme cela a été illustré dans le paragraphe 4.6.

- La deuxième idée est de prendre en compte le coût des capteurs, car le coût des capteurs varie, certains capteurs coûtent plus cher que d'autres, et certaines mesures sont difficiles et coûteuses à effectuer. Donc intégrer la question du coût dans l'analyse du problème de placement de capteurs et essayer de trouver des solutions à coût minimal peut être une perspective intéressante pour nos travaux.

# Bibliographie

- [1] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer-Verlag, 2003.
- [2] T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon Press, Oxford,, 1972.
- [3] T. Boukhoubza, F. Hamelin, and D. Sauter. Observability of structured linear systems in descriptor form : A graph-theoretic approach. *Automatica*, 42 :629–635, 2006.
- [4] J.P. Cassar and M. Staroswiecki. A structural approach for the design of failure detection and identification systems. In *IFAC, IFIP,IMACS Conference on Control of Industrial Systems*, pages 329–334, Belfort, France, 1997.
- [5] J. Chen and R.J. Patton. *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [6] C. Commault, J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay, and M. Malabre. Influence de la structure à l’infini des systèmes linéaires sur la solution des problèmes de commande. *APII Commande des systèmes complexes technologiques*, 20 :207–252, 1986.
- [7] C. Commault and J.M. Dion. Approche structurelle du diagnostic, application à un modèle de colonne à distiller. *CIFA Bordeaux*, 2006.
- [8] C. Commault and J.M. Dion. Sensor location for diagnosis in linear systems : a structural analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2) :155–169, 2007.
- [9] C. Commault, J.M. Dion, and S. Yacoub Agha. Structural analysis for sensor location in fault detection and isolation. *à paraître dans Automatica*.
- [10] C. Commault, J.M. Dion, and S. Yacoub Agha. Structural analysis for sensor location in fault detection and isolation. *IFAC SafeProcess Pekin*, 2006.
- [11] C. Commault, J.M. Dion, and S. Yacoub Agha. A system decomposition for sensor location in fault detection and isolation. *IFAC World Congress Prague*, 2006.

## Bibliographie

---

- [12] C. Commault, J.M. Dion, and S. Yacoub Agha. Sensor classification for the fault detection and isolation problem. *IFAC SSSC Iguassu Falls, Brazil*, 2007.
- [13] C. Commault, J.M. Dion, and S. Yacoub Agha. Location of additional sensors for FDI. *4th Workshop on Automatic Control and Diagnosis*, Nancy 2006.
- [14] C. Commault, J.M. Dion, and M. Benahcène. Output feedback disturbance decoupling : Graph interpretation for structured systems. *Automatica*, 29 :1463–1472, 1993.
- [15] C. Commault, J.M. Dion, and A. Perez. Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36 :884–887, 1991.
- [16] C. Commault, J.M. Dion, O. Sename, and R. Motyeian. Observer-based fault detection and isolation for structured systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(12) :2074–2079, 2002.
- [17] C. Commault, J.M. Dion, and D.H. Trinh. Observability preservation under sensor failure. In *IEEE CDC Conf.*, San Diego, USA, 2006.
- [18] J.M. Dion and C. Commault. Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 38 :1132–1135, 1993.
- [19] J.M. Dion, C. Commault, and J. van der Woude. Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7) :1125–1144, 2003.
- [20] L.R. Ford and D.R. Fulkerson. *Flows in networks*. Princeton University Press, 1962.
- [21] P.M. Frank. Analytical and qualitative model-based fault diagnosis - a survey and some new results. *European Journal of Control*, 2 :6–28, 1996.
- [22] E. Frisk and M. Krysander. Sensor placement for maximum fault isolability. In *18th International Workshop on Principles of Diagnosis (DX-07)*, Nashville, USA, 2007.
- [23] K. Glover and L.M. Silverman. Characterization of structural controllability. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21 :534–537, 1976.
- [24] V. Hovelaque. *Analyse structurelle, géométrique et graphique des systèmes linéaires structurés*. PhD thesis, INPG/LAG, 1997.
- [25] T.C. Hu. *Combinatorial Algorithms*. Addison-Wesley publishing company, 1982.
- [26] R. Isermann and P. Ballé. Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. In *13th IFAC Triennial World Congress*, pages 1–12, San Francisco, USA, 1996.

## Bibliographie

---

- [27] C.T. Lin. Structural controllability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 19 :201–208, 1974.
- [28] A. Linnemann. Decoupling of structured systems. *Systems and Control Letters*, 2 :71–86, 1981.
- [29] H. Mayeda. On structural controllability theorem. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 26 :795–798, 1981.
- [30] M. Meyer, J.M. Le Lann, B. Koehret, and Enjalbert. Optimal sensor location on a complex plant, using a graph oriented approach. *Computers Chem. Eng.*, 18 :535–540, 1994.
- [31] K. Murota. *Systems Analysis by Graphs and Matroids*, volume 3 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag New-York, Inc., 1987.
- [32] K. Murota. *Matrices and Matroids for Systems Analysis*. Algorithms and Combinatorics 20. Springer, 2000.
- [33] R. Raghuraj, M. Bhushan, and R. Rengaswamy. Locating sensors in complex chemical plants based on fault diagnosis observability criteria. *AIChE Journal*, 45(2) :310–322, 1999.
- [34] K.J. Reinschke. *Multivariable control : A graph-theoretic approach*, volume 108 of *Lect. Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, 1988.
- [35] R.W. Shields and J.B. Pearson. Structural controllability of multiinput linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21 :203–212, 1976.
- [36] S. Spanache, T. Escobet, and L. Travé-Massuyès. Sensor placement optimisation using genetic algorithms. In *15th International Workshop on Principles of Diagnosis*, pages 179–183, Carcassonne, 2004.
- [37] M. Staroswiecki and J.P. Cassar. Approche structurelle pour la conception des systèmes de surveillance. In *Ecole d’Eté d’Automatique*, Grenoble, France, 1996.
- [38] L. Travé-Massuyès, T. Escobet, and R. Milne. Model-based diagnosability and sensor placement application to a frame 6 gas turbine subsystem. In *12th Int. Workshop on principles of diagnosis*, pages 205–212, Sansicario, Via Lattea, Italie, 2001.
- [39] L. Travé-Massuyès, T. Escobet, and X. Olive. Diagnosability analysis based on component supported analytical redundancy relations. *IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics*, 36(6), Novembre 2006.
- [40] J.W. van der Woude. A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Math. Control Signals Systems*, 4 :33–40, 1991.

## Bibliographie

---

- [41] J.W. van der Woude. The generic number of invariant zeros of a structured linear system. *SIAM Journal. on Control and Optimisation*, 38 :1–21, 2000.
- [42] C. Verde. Faults isolation for nonlinear Hessenberg systems. *American Control Conference*, Portland 2005.
- [43] W.M. Wonham. *Linear multivariable control : a geometric approach*. Springer-Verlag, New-york, 1985.
- [44] A.A. Yassine, S. Ploix, and J.M. Flaus. New results for sensor placement with diagnosability purpose. In *18th International Workshop on Principles of Diagnosis (DX-07)*, Nashville, USA, 2007.

# Annexe1

## Algorithme de Ford et Fulkerson

**Problème général du flot maximum :** Transporter, dans un réseau dont les conduits sont de capacité limitée, un flot maximum entre deux point du réseau.

Flot = application  $F : E \rightarrow R$ , telle que en chaque sommet  $v$ , la somme des flots entrants = la somme des flots sortants (première loi de Kirchoff ou loi des nœuds). On introduit pour chaque arc  $e$  une **capacité**  $c(e)$ , c'est-à-dire le flot maximum que peut porter cet arc.

Un **flot réalisable** est un flot tel que pour tout arc  $e$  on ait :  $0 \leq f(e) \leq c(e)$ .

### L'algorithme de Ford et Fulkerson :

Structure de l'algorithme :

Initialisation : On part d'un flot réalisable (par exemple 0).

- 1- Procédure de marquage pour la recherche d'une chaine augmentante. Si on n'en trouve pas **STOP**.
- 2- Mise à jour du flot sur la chaine augmentante et retour à 1.

L'algorithme de marquage associe à chaque sommet marqué  $v$  un label  $\delta(v)$  qui représente le flot supplémentaire qu'on peut transporter jusqu'à ce sommet.

### Algorithme de marquage :

*Initialisation:*

$\delta = \delta(\text{source}) = \infty; M = \{\text{source}\};$

*TANTQUE* puits  $\notin M$  et  $\delta > 0$  *FAIRE*

*SI*  $\exists e$  tel que  $I(e) = v \in M, T(e) = y \notin M$  et  $f(e) < c(e)$

$M = M \cup \{y\}; A(y) = e; \delta(y) = \text{Min}[\delta(v), c(e) - f(e)]$

*SINON SI*  $\exists e$  tel que  $T(e) = v \in M, I(e) = y \notin M$  et  $f(e) > 0$

$M = M \cup \{y\}; A(y) = e; \delta(y) = \text{Min}[\delta(v), f(e)]$

*SINON*  $\delta = 0$

*FINSI*

*FINSI*

*FINTANTQUE*

*SI* puits  $\in M$  *FAIRE*  $\delta = \delta(\text{puits})$

*FINSI*

$\delta$  est l'augmentation de flot possible .

**Algorithme d'augmentation du flot si ( $\delta > 0$ ).**

*Initialisation:*  $x = \text{puits}$ ;

*TANTQUE*  $x \neq \text{source}$  *FAIRE*  $e = A(x)$

*SI*  $x = T(e)$  *FAIRE*  $f(e) = f(e) + \delta$ ;  $x = I(e)$ ;

*SINON FAIRE*  $f(e) = f(e) - \delta$ ;  $x = T(e)$ ;

*FINSI*

*FINTANTQUE*

**Variante de l'algorithme de Ford et Fulkerson :** après chaque augmentation de flot on construit un graphe auxiliaire qui se déduit du précédent de la manière suivante

- si  $f(e) < c(e)$  on conserve l'arc  $e = (x, y)$  avec une capacité  $c(e) - f(e)$ .
- si  $f(e) > 0$  on ajoute un arc  $(y, x)$  avec une capacité  $f(e)$ .

Sur le graphe auxiliaire on cherche un chemin augmentant

**Flot maximum et coupe minimale :**

Coupe = partition de l'ensemble des sommets  $E$  en deux ensemble  $S, P$  où  $\text{source} \in S$  et  $\text{puits} \in P$ . Capacité de la coupe =  $\sum c(x, y)$  où  $x \in S$  et  $y \in P$ .

**Théorème :** Le flot maximum dans le graphe est égal à la capacité minimale d'une coupe.

Démonstration : On applique l'algorithme de Ford et Fulkerson à partir du flot 0. Par le principe de l'algorithme, à chaque pas, où le flot augmente au moins d'une unité ou il s'arrête. Si le flot maximum existe il s'arrête en un nombre fini de pas. Lorsque l'algorithme s'arrête tous les arcs sortants sont saturés, tous les arc entrants sont vides, l'ensemble de sommets marqués constitue donc une coupe dont la capacité est égale au flot.



---

## Application des systèmes structurés à l'étude du diagnostic : localisation de capteurs.

---

**Résumé :** Dans cette thèse nous étudions le problème de détection et localisation de défauts (*FDI*) diagonal avec une banque d'observateurs. Nous étudions ce problème sur la classe des systèmes linéaires structurés avec leurs graphes associés. Les systèmes structurés sont une classe particulière des systèmes linéaires où les éléments des matrices sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres. On présente une condition nécessaire et suffisante pour la solubilité générique du problème *FDI*. Cette condition est à vérifier sur le graphe orienté associé au système structuré. Dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée, nous présentons une décomposition du système qui donne des informations structurelles sur le placement de capteurs additionnels qui sont nécessaires pour remplir la condition. Dans le cas où la condition de solubilité générique du problème *FDI* est vérifiée, nous présentons aussi une classification des capteurs selon leur importance pour la solubilité générique du problème *FDI*.

**Mots clefs :** Systèmes linéaires structurés, Graphe orienté, Diagnostic, Détection et localisation de défauts, Placement de capteurs, Classification de capteurs.

---

## Application of structured systems to diagnosis : sensor location.

---

**Abstract :** In this thesis we consider the problem of fault detection and isolation (*FDI*). We deal with this problem when the system under consideration is structured, that is, the entries of system matrices are either fixed zeros or free parameters. With such system one can associate a directed graph. We use the graph to give a condition for the generic solubility of the *FDI* problem. When the condition is not satisfied we present a system decomposition to have structural informations about the location of new sensors needed to satisfy the condition. When the condition is satisfied we present a sensor classification depending on the importance of each sensor for the generic solubility of the *FDI* problem.

**Key words :** Linear structured systems, Directed graph, Diagnosis, Fault detection and isolation, Sensor location, Sensor classification.