Comportement thermomécanique d'éléments de structures composites en milieu cryogénique extrême

Arnaud Alzina

▶ **To cite this version:**

Arnaud Alzina. Comportement thermomécanique d'éléments de structures composites en milieu cryogénique extrême. Mécanique [physics.med-ph]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2005. Français. NNT : . tel-00202309

HAL Id: tel-00202309
https://theses.hal.science/tel-00202309

Submitted on 5 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N^o d'ordre : D.U. **1599**
EDSPIC : **323**

Université BLAISE PASCAL - Clermont II

Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

présentée par

Arnaud ALZINA

Formation Doctorale :

Génie Mécanique et Génie Civil

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité : Génie Mécanique

Comportement thermomécanique d'éléments de structures composites en milieu cryogénique extrême

soutenue publiquement le 26 octobre 2005 devant le jury :

P. HAMELIN	Université de Lyon I	Président
F. HILD	École Normale Supérieure de Cachan	Rapporteur
A. VAUTRIN	École des Mines de Saint-Etienne	Rapporteur
A. BEAKOU	Institut Français de Mécanique Avancée, Clermont-Fd	Examinateur
B. SKOCZEN	Cracow University of Technology, Cracovie, Pologne	Examinateur
E. TOUSSAINT	Université Blaise Pascal, Clermont-Fd	Examinateur

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries,
Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise Pascal

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier Monsieur Claude Hauviller sans qui cette étude n'aurait pu voir le jour. Il m'a permis de travailler au sein du groupe AT-CRI du CERN dont je tiens à remercier tous ses membres pour m'avoir accueilli et encouragé durant ces trois années.

En particulier, je remercie Monsieur Blazej Skoczen pour m'avoir supervisé tout au long de ce travail et aidé à avancer dans l'étude des mécanismes thermiques.

Je voudrais également exprimer mes plus sincères remerciements aux membres du CRYOLAB et en particulier à son directeur Monsieur Tapio Niinikoski pour m'avoir aidé et conseillé dans les mesures de conductivités thermiques à très basses températures, mesures qui ont contribué à la qualité de mon travail et offert ainsi la possibilité d'élargir mes compétences scientifiques.

Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur Alexis Béakou et Mme Evelyne Toussaint qui ont respectivement dirigé et encadré mes travaux. Je leur suis particulièrement reconnaissant pour l'aide, le soutien, la confiance et les encouragements amicaux qu'ils m'ont accordés pendant toute la réalisation de cette étude. Ils ont su m'offrir une grande disponibilité pour discuter de mes problèmes et m'aider à les résoudre, et me faire ainsi profiter de leurs expériences et compétences scientifiques.

Je voudrais ici remercier Monsieur Patrice Hamelin pour m'avoir fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de ma thèse.

J'exprime ma gratitude à Monsieur François Hild et à Monsieur Alain Vautrin pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail et de participer au jury de thèse en tant que rapporteurs.

Je n'oublie pas mes amis du CERN et du LaMI auprès de qui j'ai passé de très agréables moments.

Enfin, je remercie toute ma famille pour m'avoir encouragé durant toutes ces longues années d'études.

Table des matières

Introduction générale **17**

1 Présentation des supports du LHC et méthodologie d'étude **21**
1.1 Le projet LHC 21
1.2 Description des pieds supports et performances requises 23
1.3 Choix des matériaux 25
1.4 Méthode multi-échelle d'étude 26
1.5 Conclusion 27

I Comportement thermique **29**

2 Etat de l'art **31**
2.1 Introduction 31
2.2 Conduction thermique dans les solides et dans les composites unidirectionnels 31
2.2.1 Mécanisme de type électronique 32
2.2.2 Mécanisme de type vibratoire 32
2.2.3 Conductivité thermique dans les matériaux amorphes 34
2.2.4 Conductivité thermique longitudinale dans un composite unidirectionnel 35
2.2.5 Conductivité thermique transversale dans un composite unidirectionnel 36
2.3 Transfert thermique à l'interface de deux solides à très basse température 38
2.3.1 Modélisation du transfert thermique à l'interface 39
2.3.2 Détermination des probabilités de transmission moyennes des phonons avec l'AMM 40
2.3.3 Détermination des probabilités de transmission moyennes des phonons avec le DMM 43
2.3.4 Mesures de la résistance d'interface aux températures cryogéniques 44
2.4 Conclusion 45

3 Homogénéisation d'un composite unidirectionnel avec prise en compte du mécanisme des phonons 47
3.1 Introduction . . . 47
3.2 Développement théorique . . . 48
3.2.1 Introduction à la méthode d'homogénéisation périodique . . . 48
3.2.2 Définition du problème . . . 49
3.2.3 Equation de la chaleur . . . 50
3.2.4 Formulation variationnelle . . . 51
3.2.5 Développement asymptotique à deux échelles . . . 52
3.2.6 Formulation variationnelle de l'équation de la chaleur à l'échelle microscopique . . . 53
3.2.7 Formulation variationnelle de l'équation de la chaleur à l'échelle macroscopique . . . 54
3.3 Résolution numérique . . . 54
3.3.1 Géométrie et maillage du VER périodique . . . 54
3.3.2 Discrétisation de la formulation variationnelle . . . 55
3.3.3 Application des conditions aux limites de périodicité . . . 57
3.4 Résultats et comparaisons . . . 57
3.4.1 Calcul de l'impédance thermique K . . . 58
3.4.2 Influence de l'impédance K sur la conductivité transverse d'un composite UD . . . 58
3.5 Conclusion . . . 60

4 Détermination des conductivités thermiques équivalentes d'un composite tressé 63
4.1 Introduction . . . 63
4.2 Modélisation d'un composite tressé . . . 63
4.2.1 Géométrie et maillage . . . 63
4.2.2 Chargement . . . 66
4.3 Mesure de la conductivité thermique d'un composite tressé à très basse température . . . 67
4.3.1 Théorie de la mesure . . . 67
4.3.2 Dispositif expérimental . . . 68
4.4 Résultats numériques et expérimentaux . . . 71
4.5 Estimation du tenseur de conductivité thermique effective du tissu . . . 73
4.5.1 Détermination de Λ_{11}, Λ_{22} et Λ_{33} . . . 74
4.5.2 Détermination de Λ_{12}, Λ_{23} et Λ_{13} . . . 74
4.5.3 Résultats . . . 75
4.6 Conclusion . . . 75

5 Conclusion **79**

II Comportement mécanique 81

6 Etat de l'art **83**
6.1 Introduction 83
6.2 Comportement thermoélastique des différents constituants 83
6.2.1 La fibre de verre E 83
6.2.2 La résine époxyde 84
6.3 Comportement élastique d'un composite unidirectionnel 85
6.4 Modèles d'estimation du comportement mécanique équivalent d'un composite à renforts textiles 86
6.5 Conclusion 86

7 Etude du comportement thermoélastique d'un composite unidirectionnel par homogénéisation périodique **89**
7.1 Introduction 89
7.2 Développement théorique 90
7.2.1 Formulation forte 90
7.2.2 Formulation variationnelle 91
7.2.3 Développement asymptotique à deux échelles 91
7.2.4 Formulation variationnelle à l'échelle microscopique 92
7.2.5 Formulation variationnelle à l'échelle macroscopique 93
7.3 Résolution numérique 93
7.3.1 Discrétisation des formulations variationnelles 94
7.3.2 Application des conditions aux limites de périodicité 94
7.4 Résultats et comparaisons 95
7.4.1 Conclusion 98

8 Détermination des modules d'élasticité et des déformations thermiques d'un composite tressé **99**
8.1 Introduction 99
8.2 Modélisation d'un composite tressé 99
8.3 Mesure du module d'élasticité d'un composite tressé 101
8.4 Comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques 101
8.5 Estimation de la matrice de rigidité effective du composite tressé . . . 102
8.5.1 Détermination des Q_{ii} 103
8.5.2 Détermination des Q_{ij} 103

8.6 Estimation du vecteur de déformation thermique effective du composite tressé . . . 104
8.7 Résultats . . . 104
8.8 Conclusion . . . 106

9 Conclusion **107**

III Application **109**

10 Supports du LHC **111**
10.1 Introduction . . . 111
10.2 Construction du modèle . . . 111
10.3 Comportement thermique du support . . . 112
10.3.1 Compléments sur la modélisation . . . 112
10.3.2 Mesures de pertes de flux sur le support . . . 113
10.3.3 Résultats et comparaisons . . . 114
10.4 Comportement thermoélastique du support . . . 116
10.4.1 Validation du modèle . . . 116
10.4.2 Etude du pied dans les conditions réelles d'utilisation . . . 117
10.5 Conclusion . . . 119

Conclusion et perspectives **123**

Références bibliographiques **125**

A Influence de l'orientation des mèches d'un composite tressé sur sa rigidité et sa conductivité thermique **131**
A.1 Introduction . . . 131
A.2 Construction de la géométrie du VER . . . 132
A.3 Calcul thermomécanique pour divers composites tressés . . . 133
A.4 Conclusion . . . 135

B Présentation du logiciel **137**
B.1 Introduction . . . 137
B.2 Partie thermique . . . 137
B.3 Partie mécanique . . . 139
B.4 Conclusion . . . 140

Table des figures

1.1 Vue aérienne du tracé du LHC [1]. 22
1.2 Disposition des détecteurs [1]. 22
1.3 Coupe transverse d'un dipôle du LHC [1]. 23
1.4 Supports des dipôles [61]. 24
1.5 Mise en place du renfort dans le moule [61]. 24
1.6 Séquence d'empilement des plis dans le support. 24
1.7 Photo (a) et schéma (b) du support avec son environnement direct. . 25
1.8 Rapport de la conductivité thermique sur le module d'Young en fonction de la température [46]. 26
1.9 Schéma de la méthode multi-échelle : (a) support, (b) composite tressé, (c) microstructure d'une mèche et (d) cellule périodique. . . . 27

2.1 Evolution de la chaleur spécifique de Debye (a) et du libre parcours moyen des phonons (b) avec la température. 34
2.2 Evolution de la conductivité thermique de la résine époxyde (Epikote 828) [38] et de la fibre de verre E (Equerove XRE) [54] en fonction de la température. 35
2.3 Conductivités thermiques longitudinales calculée et expérimentale [54] pour un composite unidirectionnel en verre/époxyde (v_f=0,70). . . . 36
2.4 Représentation de la cellule élémentaire utilisée dans la méthode de Springer et Tsai [63]. 37
2.5 Conductivités thermiques transversales calculées et exprimentales [54] pour un composite unidirectionnel en verre/époxyde ($v_f = 0,77$). . . 38
2.6 Réflection et réfraction d'une onde incidente sur une interface plane. . 41
2.7 Représentation schématique de la propagation d'un phonon incident dans le modèle DMM. 43

3.1 Représentation schématique d'un composite unidirectionnel. 49
3.2 Evolution du champ de température T^ϵ en fonction de la variable d'espace macroscopique $\mathbf{x}^*$. 49
3.3 Schéma de l'interface fibre/matrice. 51

3.4 Représentation schématique du VER. 54
3.5 Maillage du VER microscopique. 55
3.6 Vue éclatée de l'interface entre la fibre et la matrice. 56
3.7 Exemple de répartition du champ χ^1 au sein du VER. 59
3.8 Mise en évidence du seuil de discontinuité du champ χ^1 pour $T^0 = 10$ K. 60
3.9 Conductivité thermique transversale, théorique et expérimentale [54], d'un composite unidirectionnel verre-E/époxyde pour différents taux de fibre. 61
3.10 Conductivité thermique transverse d'un composite unidirectionnel verre-E/époxyde. 62

4.1 Photographie des fibres tressés du matériau composite étudié. 64
4.2 Représentation plane du renfort étudié. 64
4.3 Vue en coupe du composite au microscope électronique à balayage. . 65
4.4 Vue isométrique du renfort. 66
4.5 Vue de face du renfort. 66
4.6 Maillage du renfort. 67
4.7 Maillage du VER_t. 67
4.8 Exemple de détermination de Λ_{11}. 68
4.9 Représentation schématique d'un échantillon. 68
4.10 Schéma et photo du dispositif expérimental. 69
4.11 Evolution de la conductivité thermique pour différentes températures de T_c sur un échantillon de graphite. 71
4.12 Conductivité thermique effective suivant l'axe 3. 72
4.13 Représentation des différents cas de chargement. 77
4.14 Représentation des différentes composantes du tenseur de conductivité thermique. 78

6.1 Evolution du module d'élasticité de la résine époxyde en fonction de la température [29]. 84
6.2 Evolution de la déformation thermique de la résine époxyde en fonction de la température [60]. 84

7.1 Rappel de la représentation schématique d'un composite unidirectionnel. 90
7.2 Rappel de la géométrie du VER (a) et de son maillage (b). 94
7.3 Evolution des modules d'élasticité. 97
7.4 Evolution des coefficients de Poisson. 97
7.5 Evolution des modules de cisaillement. 97

7.6 Evolution des déformations thermiques. 97

8.1 Rappel du maillage du VER_t. 100
8.2 Exemple de conditions aux limites mécaniques. 100
8.3 Dispositif expérimental complet de Air Liquide avec la machine de traction, le cryostat et la console. 101
8.4 Modules de l'ingénieur du composite tressé homogénéisé. 105
8.5 Déformations thermiques du composite tressé homogénéisé. 106

10.1 Géométrie et maillage de la moitié du support. 112
10.2 Evolution de la conductivité thermique de l'aluminium (a) et de l'acier (b) en fonction de la température [13]. 113
10.3 Schéma du dispositif de mesure de flux chaleur d'un support en conditions réelles. 113
10.4 Exemple de répartition du champ de température dans le pied (a) et le long du pied (b). 115
10.5 Schéma du chargement mécanique numérique (a) et expérimental (b) du pied en compression. 117
10.6 Evolution du module d'élasticité de l'aluminium 2214 (a) et de l'acier 304L (b) [19] en fonction de la température. 118
10.7 Chargement réel du pied. 118
10.8 Evolution de la déformation thermique de l'aluminium 2214 (a) et de l'acier 304L (b) [19] en fonction de la température. 119
10.9 Répartition du champ de déformation thermique équivalente dans le support. 119
10.10 Répartition du champ de contrainte de Von Mises dans le support. . . 120

A.1 Géométrie des mèches. 132
A.2 Exemple de géométrie d'un volume élémentaire représentatif d'un composite tressé modélisé sur CATIA. 133
A.3 Exemple de maillage de l'ensemble du volume élémentaire représentatif d'un renfort. 134
A.4 Repésentation des quatre VER. 135
A.5 Evolution de la conductivité thermique (a) et du module d'élasticité (b) suivant 1 en fonction de la température, pour les quatre orientations de mèches. 136

B.1 Copie d'écran de la fenêtre principale de la partie thermique. 138
B.2 Copie d'écran d'un exemple de maillage (35 %). 138

B.3 Copie d'écran de la fenêtre permettant de calculer la barrière thermique d'interface. 139
B.4 Copie d'écran de la fenêtre de post-traitement. 139
B.5 Copie d'écran de la fenêtre principale de la partie mécanique. 140
B.6 Copie d'écran de la fenêtre de post-traitement. 140

Liste des tableaux

3.1 Propriétés mécaniques de la fibre de verre E et de la résine époxyde . 58

4.1 Orientation et taux de fibres des plis pour le modèle stratifié 72

7.1 Caractéristiques mécaniques d'un composite unidirectionnel à température ambiante 96
7.2 Modules d'élasticité d'un composite UD 96

8.1 Bilan des modules d'élasticité 102

10.1 Pertes de flux mesurées et calculées pour le support de dipôle 115
10.2 Déplacement vertical u_{max} de la partie supérieure du pied 116

A.1 Dimensions du VER pour différentes orientations de mèche 134

Introduction générale

Le Centre Européen pour la Recherche Nucléaire (CERN) a été créé en 1954 avec pour mission, l'étude de la structure ultime de la matière. Pour atteindre les objectifs scientifiques associés à cette mission, les ingénieurs et techniciens du CERN conçoivent et construisent des dispositifs expérimentaux qui sont mis à la disposition de la communauté des physiciens des hautes énergies. Le Large Hadron Collider (LHC) en cours de construction est le dernier grand projet expérimental de l'institution. C'est une machine complexe qui utilise des aimants supraconducteurs fontionnant à des températures cryogéniques extrêmes. Les équipements refroidis à très basse température constituent une masse froide qui doit être supportée mécaniquement et reliée à d'autres éléments de structure fonctionnant à température ambiante. La conception de ces pièces de liaison est donc d'une importance capitale car elles doivent supporter le poids des équipements sans déformation excessive et sans endommagement tout en minimisant le flux de chaleur entrant dans la zone refroidie. En effet, une déformation excessive du support entrainerait un décalage des aimants et par conséquent, une modification de la trajectoire des particules. Par ailleurs, les entrées de chaleur dans la masse froide liées à une conductivité thermique élevée des supports augmenteraient la quantité d'hélium à fournir pour maintenir la masse froide à sa température de fonctionnement.

En raison de leur faible conductivité thermique et de leur rigidité spécifique élevée, les matériaux composites à matrice organique constituent une alternative séduisante aux matériaux métalliques tels que le titane pour la fabrication de ces structures. À première vue, la conception de ces pièces de liaison obéit donc aux méthodologies habituelles relatives à l'utilisation des matériaux composites : choix des constituants, architecture, proportion et orientation des renforts en vue de satisfaire les performances requises. Toutefois, l'utilisation des matériaux composites à très basses températures présente certaines particularités dont la plus importante en thermique est le mécanisme des phonons à l'interface entre les fibres et la matrice. Ce mécanisme lié à la propagation de la chaleur dans un matériau hétérogène à très basse température induit une résistance thermique additionnelle qui doit être prise en compte dans l'étude de ces structures [29]. Dans ces conditions, la mise en place de modèles d'estimation du comportement thermomécanique d'éléments de structures composites en environnement cryogénique extrême est d'une grande im-

portance car elle ouvre la voie à la mise en place d'une méthodologie rationnelle de conception de ces produits. C'est cette problématique qui a fait l'objet de ma thèse de doctorat financée par le CERN avec le Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI) de Clermont-Ferrand pour laboratoire universitaire d'accueil.

L'utilisation des matériaux composites à matrice organique pour la réalisation de pièces de liaison entre masses froide et chaude n'est pas une problématique spécifique aux accélérateurs de la physique des hautes énergies. On la retrouve plus généralement dans les applications mettant en œuvre la supraconductivité, dans la suspension ou la manutention des réservoirs de liquides cryogéniques et surtout dans l'industrie spatiale. À titre d'illustration, le satellite Infrared Space Observatory (ISO) possède quatre instruments refroidis à 2 K. Ne pouvant être réapprovisionné, sa durée de vie est limitée par les réserves en hélium liquide de son réservoir de capacité 2300 litres et donc en partie, par la conductivité thermique du support de ce réservoir [6]. Concernant l'exploitation des machines du CERN, elle est assurée par un approvisionnement continu d'hélium liquide. Toutefois, le coût de production du froid, qui représente déjà une part considérable du budget d'exploitation, peut devenir prohibitif en cas d'une conception inappropriée des pièces de liaisons.

On distingue deux catégories de pièces de liaison en matériaux composites : les pièces de type "attache" et celles de type tubulaire. Les pièces de type "attache" sont des composites unidirectionnels à élancement élevé afin de rallonger le chemin de fuite thermique entre les masses froide et chaude. Elles travaillent essentiellement en traction et sont utilisées par groupe de six ou huit dans les équipements de résonance magnétique nucléaire, pour la suspension de réservoirs ou de masses froides en technologie spatiale. Les pièces de liaison tubulaires travaillent en compression. Elles sont constituées d'un cylindre unique ou de plusieurs cylindres fonctionnant en parallèle ou en série. Un exemple de support à deux cylindres concentriques utilisé en technologie spatiale et fonctionnant en parallèle est le "Passive Orbital Disconnect Strut" (PODS) : au lancement du satellite, le cylindre extérieur de grande conductivité thermique et de résistance mécanique importante supporte des efforts de très forte intensité. En orbite, ce cylindre est retiré et le second de faible conductivité thermique assure la liaison entre les masses froide et chaude [57]. Pour augmenter les performances des supports tubulaires, des écrans thermiques sont souvent installés sur le chemin de fuite thermique. Ces innovations technologiques sont nées du savoir-faire des ingénieurs comme cela est souvent le cas dans de nombreux secteurs d'activité et sont toujours validées par des essais complexes et coûteux. Toutefois, cette approche utilisée par le CERN et ses sous-traitants ne permet pas une compréhension des mécanismes responsables des comportements macroscopiques observés et est à renouveler à chaque nouvelle application. Pire, l'optimalité des solutions ne peut

être vérifiée. Pour ces raisons, le CERN a lancé un programme de travail visant à mettre en place un outil d'aide à la conception des pièces de liaison en matériaux composites dans les conditions réelles de fonctionnement et basé sur des modèles efficaces d'estimation des propriétés des matériaux.

L'objectif principal de ma thèse est d'étudier le comportement thermomécanique de pièces de liaison entre masses froide et chaude dans des applications cryogéniques pour une estimation fiable des caractéristiques thermiques et thermoélastiques de ces éléments. L'étude sera de type multi-échelle afin de prendre en compte au niveau des constituants, les mécanismes responsables des comportements macroscopiques observés et plus particulièrement, le mécanisme des phonons. L'approche sera à la fois analytique, numérique et expérimentale. Le support des dipôles magnétiques du LHC fournira un exemple d'application à cette étude.

Ce mémoire qui fait le bilan de mes travaux est subdivisé en trois grandes parties précédées d'un chapitre de description des supports et de présentation de la méthodologie générale d'étude.

La première partie traite du comportement thermique et se compose des chapitres 2,3 et 4. Le chapitre 2 est un état de l'art sur la conductivité thermique des matériaux et sur le mécanisme des phonons à l'interface entre les fibres et la matrice. On y établit les expressions de la résistance thermique d'interface qui sera prise en compte au chapitre 3 consacré au développement théorique, basé sur la méthode d'homogénéisation périodique, de l'équation de la chaleur appliquée à un composite unidirectionnel. Au terme de ce développement, deux formulations variationnelles sont obtenues. La première, correspond à l'équation de la chaleur microscopique tandis que la seconde correspond à l'équation de la chaleur homogénéisée. La première formulation est ensuite programmée et résolue par la méthode des élements finis. Les coefficients homogénéisés sont ensuite déterminés puis comparés à des résultats d'expériences trouvés dans la littérature. Ces coefficients homogénéisés sont utilisés au chapitre 4 pour la détermination des conductivités thermiques équivalentes d'un composite tressé, matériau utilisé pour la fabrication des pieds supports des dipôles du LHC. Les résultats obtenus sont alors comparés à des mesures effectuées à très basse température dans le but de valider l'approche multi-échelle.

La deuxième partie du mémoire traite du comportement mécanique selon un schéma analogue à la partie thermique. Le chapitre 6 fait un état de l'art sur le comportement thermoélastique des matériaux et sur les méthodes d'estimation du comportement thermoélastique équivalent d'un composite unidirectionnel. Le chapitre 7 est consacré à l'estimation du comportement thermoélastique équivalent d'un composite unidirectionnel en utilisant la même méthode d'homogénéisation

périodique que celle développée dans la partie thermique. Les déformations thermiques et les modules d'élasticité équivalents obtenus sont alors utilisés dans une méthode d'homogénéisation afin d'estimer le comportement thermoélastique d'un composite tressé. Cette étude fait l'objet du chapitre 8.

La troisième partie du rapport est relative à l'application. Le chapitre 10 simule les comportements thermique et thermoélastique du support du LHC sous compression puis sous chargement réel.

Le travail s'achève par une conclusion générale et des perspectives de poursuite de recherche.

Chapitre 1

Présentation des supports du LHC et méthodologie d'étude

Créé en 1954, le CERN a été l'une des premières entreprises collectives européennes après la seconde guerre mondiale. Il est maintenant considéré comme un exemple brillant de collaboration à l'échelle internationale. L'organisation, dont la convention constitutive avait été signée à l'origine par 12 pays, compte à présent 20 états membres.

Le CERN emploie environ 2600 personnes, couvrant un large éventail de compétences et de métiers : physiciens, ingénieurs, techniciens, secrétaires, ouvriers qualifiés, administrateurs. Son personnel conçoit et construit des dispositifs expérimentaux pour la physique de haute énergie et met en œuvre des expériences scientifiques complexes. Environ 7000 scientifiques, soit plus de la moitié de l'effectif mondial des physiciens des particules, utilisent les installations du CERN. Ils représentent 500 universités et plus de 80 nationalités.

Le CERN a pour mission d'étudier la structure ultime de la matière en recréant les conditions qui prévalaient dans l'univers juste après le Big-Bang. Il utilise quelques-unes des machines les plus grandes et les plus complexes jamais conçues pour étudier la microstructure de la matière. En provoquant des collisions entre les infimes particules de matière (Hadrons), les physiciens démêlent les lois qui régissent la nature.

1.1 Le projet LHC

Suite au succès du LEP (Le grand collisionneur d'Electrons-Positrons) situé au CERN mais maintenant démantelé, l'ensemble de la communauté des physiciens des hautes énergies a jugé nécessaire d'étudier la matière de manière encore plus précise à l'aide d'un accélérateur encore plus performant : le LHC. Sa mise en marche est prévue pour 2007.

Le LHC est un accélérateur collisionneur de hadrons à très haute énergie situé dans un tunnel de 27 km de circonférence (figure 1.1) utilisant au maximum l'infrastructure existante du CERN.

FIG. 1.1 – Vue aérienne du tracé du LHC [1].

Cet accélérateur circulaire est constitué, entre autres, de cavités accélératrices, d'aimants dipolaires qui ont pour but de courber le faisceau afin qu'il puisse garder une trajectoire circulaire et d'aimants quadripolaires focalisant/défocalisant le faisceau. De plus, ces aimants sont supraconducteurs ce qui permet à chaque faisceau de protons d'atteindre une énergie de 7 TeV après quoi des détections et des mesures d'interactions sont effectuées au moyen de détecteurs géants (Atlas, Alice, CMS et LHC-B). Ces détecteurs ont été installés aux quatre points de croisement des deux faisceaux (figure 1.2).

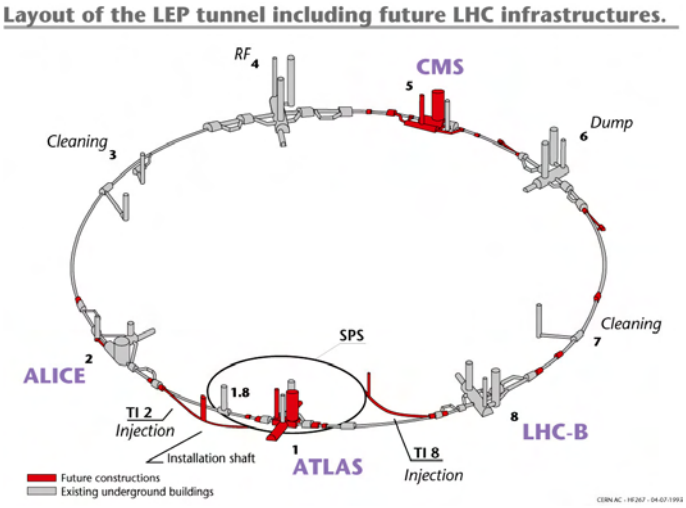


FIG. 1.2 – Disposition des détecteurs [1].

1232 dipôles sont nécessaires pour couvrir 65% de l'anneau, créant ainsi un champ magnétique de plus de 8 T. Chacun des aimants a une longueur magnétique de 14, 3

m et est constitué de deux lignes faisceaux permettant de faire circuler les particules en sens opposés. Ce dipôle est conçu avec deux ouvertures identiques autour desquelles sont disposées deux bobines supraconductrices de 56 mm de diamètre intérieur. Elles sont maintenues par des colliers en acier inoxydable qui forment un carcan continu sur toute leur longueur. Les colliers sont eux-mêmes enserrés dans une culasse magnétique. L'ensemble est comprimé dans un cylindre d'acier. Cet ensemble (bobines, colliers, culasse, cylindre) est appelé la masse froide et est refroidi à $1,9\ K$. Il est monté dans un cryostat d'un diamètre extérieur de 914 mm, muni de différents écrans thermiques et permettant la réalisation d'un vide d'isolation (figure 1.3).

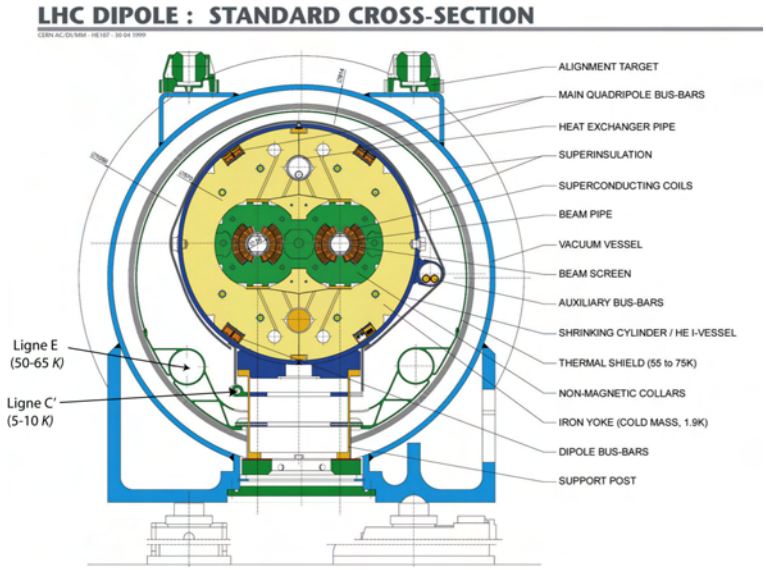


FIG. 1.3 – Coupe transverse d'un dipôle du LHC [1].

Chaque masse froide est soutenue par trois supports en composite. Par conséquent, ces supports sont soumis à des contraintes thermiques et mécaniques très importantes. La présentation de ces supports fait l'objet du paragraphe 1.2.

1.2 Description des pieds supports et performances requises

Les supports utilisés sont de type colonne (figure 1.4) en fibre de verre et résine époxyde (GFRE : Glass Fibre Reinforced Epoxy). Ils sont fabriqués chez EADS CASA ESPACIO par la méthode de Resin Transfer Moulding (RTM). Cette méthode consiste à injecter de la résine sous pression dans un moule dans lequel est placé préalablement le renfort tressé (figure 1.5). Ce renfort est constitué de quatre chaussettes imbriquées les unes dans les autres. Chaque chaussette est un tissu tri-axial

FIG. 1.4 – Supports des dipôles [61].

FIG. 1.5 – Mise en place du renfort dans le moule [61].

tressé d'orientation $0^\circ, \pm 45^\circ$ avec deux fois plus de fibre à 0° qu'à 45°. Les parties inférieure et supérieure du pied sont constituées de l'empilement précédent et de sept plis supplémentaires d'un tissu biaxial. La figure 1.6 représente de manière schématique l'empilement des différents plis dans une vue en coupe du support. Une

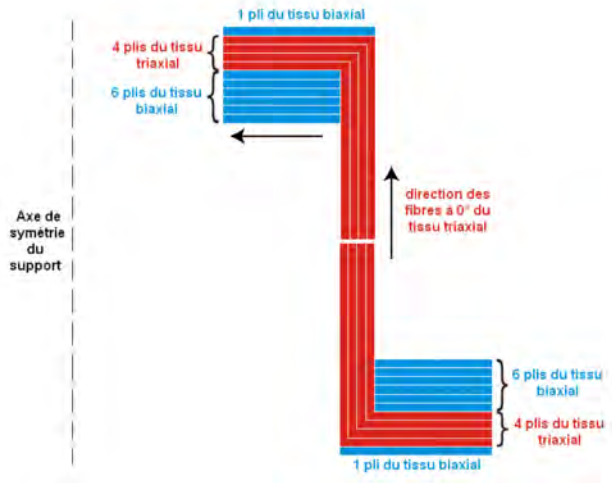


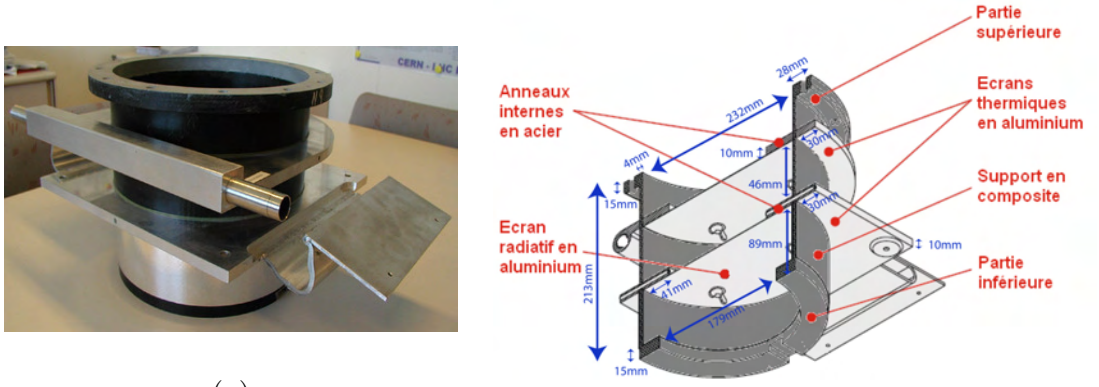
FIG. 1.6 – Séquence d'empilement des plis dans le support.

fois la résine injectée le composite ainsi formé possède un taux de fibre volumique d'environ 50%.

Chaque support doit être capable de maintenir avec précision approximativement un tiers de la masse froide, soit 10 tonnes avec une incertitude de position verticale de $1,3\ mm$. En effet, un léger décalage du pied engendrerait une modification du rayon de courbure des aimants, ce qui modifierait la trajectoire des particules.

De plus, il doit être le plus isolant possible de manière à éviter les entrées de chaleur par conduction au niveau de la masse froide ce qui augmenterait considéra-

blement la quantité d'hélium II servant à la refroidir. Pour limiter cette conduction, deux écrans thermiques ont été placés au contact du support permettant d'absorber au maximum le flux de chaleur provenant de l'enceinte à vide (vacuum vessel, figure 1.3) qui est à $293K$. L'écran le plus proche de la masse froide est relié à la ligne C' qui est à une température comprise entre 5 et $10K$, tandis que l'écran le plus proche de l'enceinte à vide est relié à la ligne E qui est à une température comprise entre 50 et $65K$. Les dimensions du support et des écrans thermiques sont représentées sur la figure 1.7.



(a) (b)

FIG. 1.7 – Photo (a) et schéma (b) du support avec son environnement direct.

En résumé, chaque support doit être capable de supporter des contraintes de compression importantes tout en limitant le transfert de chaleur par conduction le long de celui-ci. Ces performances requises influencent fortement le choix des matériaux qui fait l'objet du paragraphe suivant.

1.3 Choix des matériaux

De nombreux matériaux composites de faibles conductivités thermiques ont été testés au CERN durant plusieurs années [46]. Pour les structures tubulaires de paroi fine et d'un diamètre donné, il est possible d'utiliser un indice de performance défini par le rapport de la conductivité thermique sur le module d'Young. La figure 1.8 compare les indices obtenus, dans la plage de température comprise entre 4 et $300K$, pour les matériaux candidats les plus performants : ULTEM 2300 (Résine Polyetherimide renforcée par de courtes fibres de verre), G-10 (Résine époxyde renforcée par de longues fibres de verre) et acier inoxydable.

Bien que l'acier inoxydable possède les meilleures performances à très basse température, sa haute conductivité thermique au dessus de $20K$ limite son application aux supports. L'ULTEM 2300 possède une très faible conductivité thermique dans

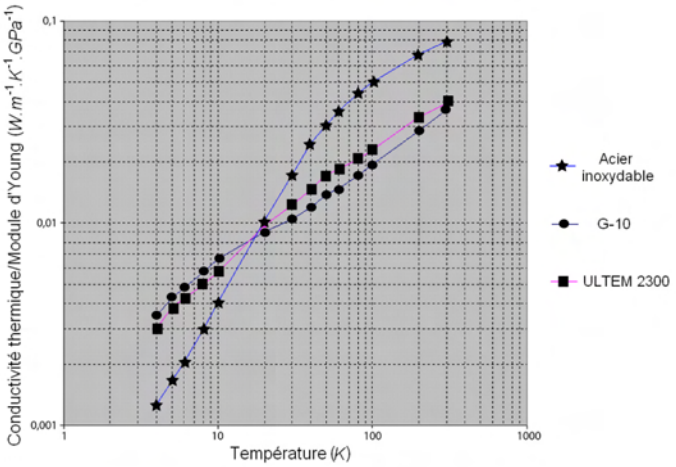


FIG. 1.8 – Rapport de la conductivité thermique sur le module d'Young en fonction de la température [46].

toute la gamme de température mais il est pénalisé par une très faible rigidité. Quand il est comparé au G-10, qui a une rigidité deux fois supérieure, le rapport est du même ordre de grandeur quelle que soit la température.

Il est aussi possible d'utiliser un autre indice de performance I défini par le rapport entre la résistance à la compression spécifique σ et la conductivité thermique moyenne λ ($I = \frac{\sigma}{\rho\lambda}$). Cet indice doit être le plus élevé possible. Les valeurs typiques de I sont données par Horiuchi et al. [34] pour des métaux et des composites à matrice polymère dans une gamme de température comprise entre $4,2\ K$ et $77\ K$. Il apparaît que pour les matériaux composites, cet indice est plusieurs fois supérieur à celui des matériaux métalliques.

Par conséquent, l'utilisation d'un composite à base de résine époxyde renforcée par de longues fibres de verre a été retenue pour la fabrication des supports permettant ainsi de diminuer le coût du refroidissement. Pour améliorer le maintien mécanique et pour éviter le délaminage, un renfort de type tissu constitué de mèches (fibres longues parallèles) a été utilisé.

Le choix des matériaux, du renfort et de la géométrie du support étant effectués, l'objectif à présent est de présenter le modèle permettant d'estimer le comportement thermomécanique du support. Cette présentation fait l'objet du paragraphe suivant.

1.4 Méthode multi-échelle d'étude

Le comportement thermomécanique des supports dépend fortement de celui des fibres, de la résine et de l'interface fibre/matrice. La prise en compte de phénomènes se produisant au niveau de cette interface exige une description à l'échelle des consti-

tuants. Cependant, un calcul complet de la structure exige une puissance de calcul énorme qui dépasse la capacité des ordinateurs actuels. En introduisant une méthode d'homogénéisation multi-échelle, il est possible de découpler l'étude du comportement sur les échelles géométriques associées :

- au support (figure 1.9 (a)) ;
- au composite tressé (figure 1.9 (b)) ;
- à la microstructure des mèches (figure 1.9 (c)) ;
- à la cellule représentative des mèches (figure 1.9 (d)).

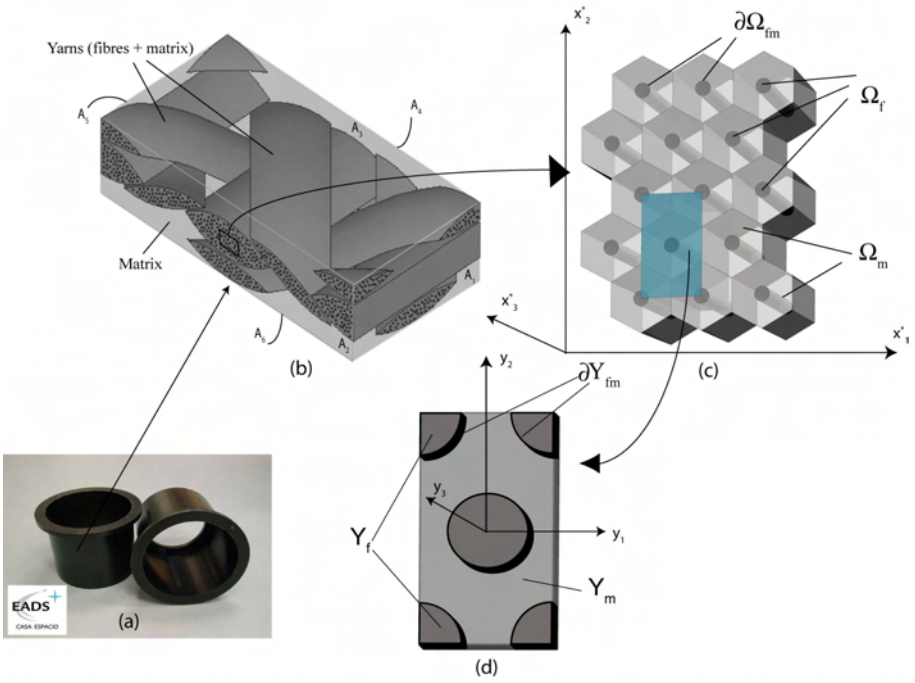


FIG. 1.9 – Schéma de la méthode multi-échelle : (a) support, (b) composite tressé, (c) microstructure d'une mèche et (d) cellule périodique.

Le passage de l'échelle (d) à l'échelle (c) est effectué en utilisant une méthode d'homogénéisation périodique [59], tandis que le passage de l'échelle (c) à l'échelle (b) est effectué en utilisant une méthode d'homogénéisation basée sur le théorème énergétique de Hill [12]. Ces deux étapes sont développées dans la partie thermique (I) d'une part et dans la partie mécanique (II) d'autre part. Le passage de l'échelle (b) à l'échelle (a) est analysé dans le chapitre 10 en considérant le composite tressé (b) comme un matériau homogène équivalent.

1.5 Conclusion

Le contexte de l'étude a été présenté en décrivant le LHC et plus particulièrement ses supports en composite. Ils ont été choisis en résine époxyde renforcée par un tissu

triaxial pour sa grande rigidité et sa faible conductivité thermique par rapport aux matériaux métalliques. Néanmoins, le support est-il optimisé pour les sollicitations thermomécaniques requises ? Dans le but de trouver des éléments de réponse, une étude thermomécanique du composite tressé utilisé dans la fabrication des supports est nécessaire. Elle se présente sous la forme d'une analyse multi-échelle appliquée en thermique dans la partie qui suit.

Première partie

Comportement thermique

Chapitre 2

Etat de l'art

2.1 Introduction

Les performances thermiques requises pour les pieds supports des dipôles du LHC nécessitent une étude approfondie du comportement thermique des matériaux composites en fonction de la température. Cette étude passe par la connaissance du comportement thermique des fibres et de la matrice. De nombreux travaux ont été réalisés dans cette optique [15][27][29][49][53][73]. Ils mettent en évidence la forte influence de la température sur la conductivité thermique. Ce comportement non linéaire est lié au changement de mécanisme du transfert de la chaleur dans les solides. Le paragraphe 2.2 a pour objectif de présenter les différents mécanismes de conduction de la chaleur dans les solides et dans les matériaux composites unidirectionnels. Une description plus approfondie porte sur les deux types de matériau amorphe : la fibre de verre E et la résine époxyde. Une fois assemblés, ces deux constituants forment un composite. Dans le cas du composite unidirectionnel, les méthodes classiques permettant de déterminer la conductivité thermique équivalente sont présentées et comparées avec des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature [54]. Le paragraphe 2.3 est consacré à l'étude du transfert thermique entre deux solides à très basse température. Deux principaux modèles y sont décrits de manière à pouvoir les appliquer au cas du composite unidirectionnel à fibre de verre E et résine époxyde.

2.2 Conduction thermique dans les solides et dans les composites unidirectionnels

D'un point de vue thermodynamique, la conduction de la chaleur est définie comme un transfert d'énergie au sein d'un système sans transport macroscopique

de matière. Lors de ce transfert thermique, qui est le seul possible dans un solide, la chaleur se propage continuellement, sauf lorsque toutes les parties de celui-ci se trouvent à la même température. A l'échelle moléculaire, la conduction thermique est représentée par deux types de mécanisme prépondérants : le mécanisme de type électronique et le mécanisme de type vibratoire. Une présentation détaillée de ces mécanismes figure dans l'ouvrage de Gerl et al. [26] sur lequel s'appuie la brève description qui suit.

2.2.1 Mécanisme de type électronique

Ce mécanisme est prédominant dans les métaux purs à toutes les températures. Il peut être décrit à partir du modèle cinétique des gaz parfaits. En effet, suite à une augmentation de la température, les électrons libres gagnent de l'énergie cinétique ce qui leur permet d'entrer en collision avec le réseau atomique dans une zone plus froide. La relation associée à ce mécanisme permettant de calculer la conductivité électronique λ_e s'écrit sous la forme :

$$\lambda_e = \frac{1}{3} C_e v_e l_e \tag{2.1}$$

où C_e est la chaleur spécifique électronique, v_e et l_e sont respectivement la vitesse et le libre parcours moyen des électrons. Le libre parcours moyen correspond à la distance que parcourt un électron entre deux collisions successives. Il est à noter aussi que contrairement au modèle classique des gaz parfaits, seule une partie des électrons contribue à la chaleur spécifique. Par ailleurs les collisions intermoléculaires qui régissent le libre parcours moyen sont du type électron-imperfection à basse température où les imperfections peuvent être des porosités, des inclusions et des lacunes.

2.2.2 Mécanisme de type vibratoire

Ce mécanisme est prédominant dans les isolants électriques et est dû à la vibration permanente des atomes autour de leur position d'équilibre. Suite à une augmentation de température, ces atomes acquièrent une certaine énergie thermique qui conduit à un accroissement de l'amplitude des vibrations dont la fréquence dépend du module d'élasticité et de la masse volumique du solide. Cette vibration est transmise aux atomes voisins par les forces interatomiques, créant ainsi une onde élastique quantifiable appelée phonon. Ces phonons obéissent à la relation de Bose-Einstein :

$$N(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \tag{2.2}$$

où $N(\omega)$ est le nombre moyen de phonons stockés dans le mode de pulsation ω à la température T, $\hbar\omega$ est l'énergie de l'onde élastique, $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π et k_B la constante de Boltzmann.

Plus la température est élevée et plus le nombre de phonons est grand, par conséquent, le transfert thermique s'effectue principalement de la région chaude vers la région froide. Il est alors possible, tout comme dans le cas du mécanisme de type électronique, d'utiliser la relation cinétique suivante pour déterminer la conductivité thermique λ_{ph} de réseau :

$$\lambda_{ph} = \frac{1}{3} C_D v_{ph} l_{ph} \tag{2.3}$$

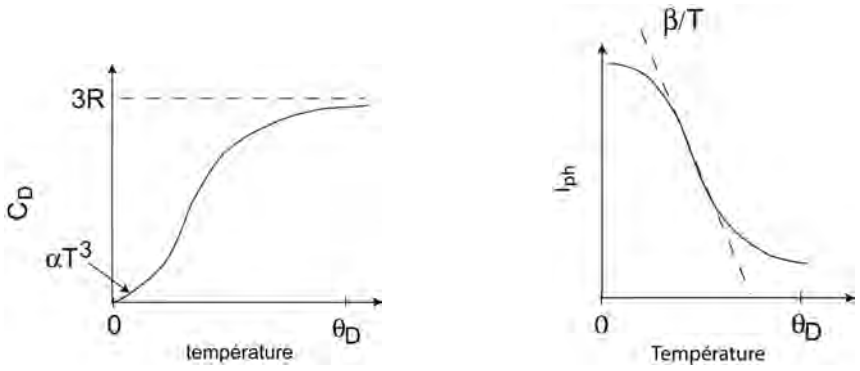
où C_D est la chaleur spécifique de réseau, v_{ph} et l_{ph} sont respectivement la vitesse de groupe (équivalent à la vitesse du son dans le solide) et le libre parcours moyen des phonons.

Selon la théorie de Debye, la chaleur spécifique des matériaux commence à varier sensiblement au-dessous d'une température caractéristique θ_D, appelée température de Debye (figure 2.1 (a)). Il est à noter que cette température n'est donnée en général que pour des éléments de la classification périodique. Néanmoins, dans le cas de la fibre de verre, on peut supposer que sa température de Debye est proche de celle de la silice car c'est l'élément majoritaire de ce matériau, soit environ 625 K.

Lorsque la température du solide est très inférieure à θ_D et supérieure à $1K$, la chaleur spécifique est proportionnelle à T^3. Tandis que si la température est supérieure à θ_D alors la chaleur spécifique est constante et égale à $3R$, R étant la constante universelle des gaz.

Le libre parcours moyen des phonons est aussi influencé par la température (figure 2.1 (b)). En effet, pour des températures proches de la température θ_D, là où la longueur d'onde des phonons est faible, le libre parcours moyen dépend principalement de l'interaction phonons-phonons et de l'interaction phonons-impuretés. C'est dans cette gamme de température que le libre parcours moyen est le plus faible. Ensuite lorsque la température diminue, le libre parcours moyen est proportionnel à $\frac{1}{T}$. Au dessous de 2 K, le libre parcours ne dépend plus alors que des interactions phonons-bords de l'échantillon. Cette dernière interaction est liée à l'augmentation de la longueur d'onde des phonons qui peut atteindre quelques millimètres.

La vitesse de groupe des phonons dépend essentiellement de la nature du solide. En effet, dans le cas de la fibre de verre, elle est supposée indépendante de la température car le module d'élasticité est quasiment indépendant de la température (cf paragraphe 6.2). Par contre, dans le cas de la résine époxyde, elle augmente avec la diminution de température du fait de l'augmentation du module d'élasticité.



(a) (b)

FIG. 2.1 – Evolution de la chaleur spécifique de Debye (a) et du libre parcours moyen des phonons (b) avec la température.

2.2.3 Conductivité thermique dans les matériaux amorphes

Le mécanisme de type vibratoire dans le réseau est prépondérant dans les matériaux amorphes et en particulier dans la fibre de verre et la résine époxyde. En effet, étant de nature isolante électriquement, ils possèdent très peu d'électrons libres. De plus, les atomes constituant les matériaux amorphes ont des positions d'équilibre dans le solide et par conséquent peuvent vibrer autour de ces positions. Il est à noter qu'il existe un autre mécanisme dans ces matériaux lorsque la température est inférieure à $1K$. En effet, ces matériaux ayant une structure moléculaire désordonnée, un atome ou un groupe d'atome peut avoir deux positions d'équilibre représentées par deux minima asymétriques de l'énergie potentielle ou un double puits de potentiel. Le mécanisme permettant à un atome ou un groupe d'atomes de transiter entre ces deux positions d'équilibre est appelé l'effet tunnel [35].

En 1981, Kelham et Rosenberg [38] ont effectué des mesures de conductivité thermique sur une résine époxyde (Epikote 828) pour des températures comprises entre 0,1 K et 80 K. Puis Rosenberg publia avec Radcliffe [54] un article traitant des mesures de conductivité thermique sur des fibres de verre de type E (Equerove XRE) pour des températures comprises entre 2 K et 80 K. La courbe d'évolution de la conductivité thermique en fonction de la température pour ces deux matériaux est présentée figure 2.2.

Les courbes présentent toutes les deux un comportement similaire et typique des matériaux amorphes [27]. En effet, chacune des courbes peut être séparée en trois parties. Dans la première partie, qui est définie pour $T < 3$ K pour l'époxyde et $T < 8$ K pour la fibre de verre, la conductivité thermique est proportionnelle à T^2. Hunklinger [35] expliqua de manière qualitative ce comportement à l'aide de

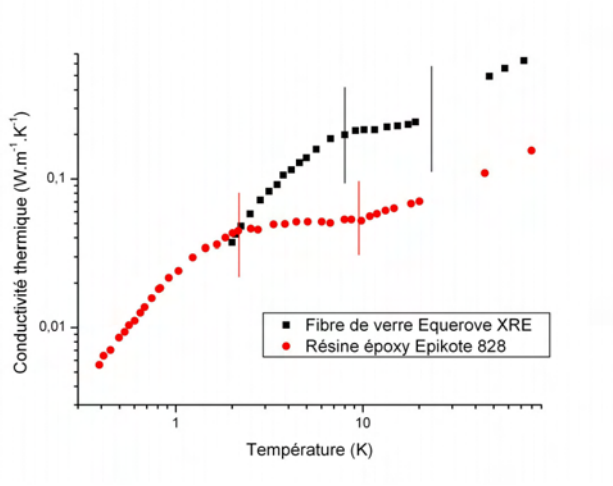


FIG. 2.2 – Evolution de la conductivité thermique de la résine époxyde (Epikote 828) [38] et de la fibre de verre E (Equerove XRE) [54] en fonction de la température.

la loi cinétique (2.3) car C_D est proportionnel à T^3 et l_{ph} évolue en $\frac{1}{T}$. Ensuite, dans une seconde partie, qui est définie pour $3\ K < T < 8\ K$ pour l'époxyde et $8\ K < T < 20\ K$ pour la fibre de verre, la conductivité thermique est quasiment constante. Dans une dernière partie, qui est définie pour $T > 8\ K$ pour l'époxyde et $T > 20\ K$ pour la fibre de verre, la conductivité thermique est proportionnelle à la température. Il n'existe actuellement aucune théorie permettant d'expliquer avec certitude le comportement thermique dans les deux dernières parties [26].

2.2.4 Conductivité thermique longitudinale dans un composite unidirectionnel

Plusieurs méthodes permettent d'estimer la conductivité thermique d'un composite unidirectionnel à fibres longues connaissant les propriétés thermiques de chaque constituant. Dans le cas longitudinal, c'est à dire lorsque la direction du flux thermique est parallèle à celle des fibres, la méthode la plus utilisée est la loi classique des mélanges (ou résistances thermiques en parallèle par analogie avec la mécanique) [9]. Elle s'exprime par la relation suivante :

$$\lambda_{long} = (1 - v_f)\lambda_m + v_f\lambda_f \tag{2.4}$$

où λ_{long} est la conductivité thermique effective du composite unidirectionnel suivant l'axe longitudinal des fibres, λ_m la conductivité thermique de la matrice, λ_f la conductivité thermique des fibres et v_f le taux de fibres volumique.

Ce modèle donne des résultats satisfaisants quelle que soit la température. La figure 2.3 compare des résultats expérimentaux issus de la littérature [54] au modèle 2.4.

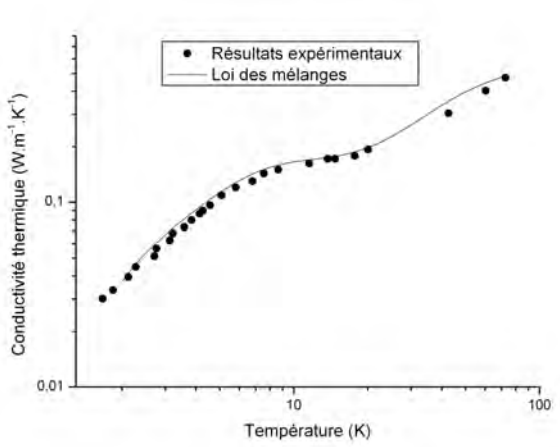


FIG. 2.3 – Conductivités thermiques longitudinales calculée et expérimentale [54] pour un composite unidirectionnel en verre/époxyde (v_f=0,70).

2.2.5 Conductivité thermique transversale dans un composite unidirectionnel

Contrairement à l'estimation de la conductivité thermique longitudinale, plusieurs modèles plus ou moins compliqués existent pour calculer la conductivité transversale. Le modèle le plus simple est la loi des mélanges. Il est basé sur le même principe que pour la conductivité longitudinale avec des résistances thermiques en série :

$$\lambda_{trans} = \frac{1}{\frac{v_f}{\lambda_f} + \frac{(1-v_f)}{\lambda_m}} \tag{2.5}$$

où λ_{trans} est la conductivité thermique effective du composite unidirectionnel suivant l'axe transversal des fibres.

D'autres modèles semi-empiriques basés sur l'utilisation des résistances thermiques ont été développés par Pilling et al. [52], Clayton [50] et Springer et Tsai [63]. Dans ce dernier modèle, le volume élémentaire représentatif (figure 2.4) est bi-dimensionnel de section rectangulaire avec une fibre de section elliptique. Dans ce cas, la conductivité transverse s'écrit :

$$\lambda_{trans} = \lambda_m \left[\left(1 - \frac{S}{2b}\right) + \frac{a}{b} \int_0^S \frac{dy}{(2a-h) + \frac{h\lambda_m}{\lambda_f}} \right] \tag{2.6}$$

Lorsque la fibre est supposée cylindrique ($S = d$ =diamètre) et $a = b$, la relation (2.6) devient :

$$\lambda_{trans} = \lambda_m \left[\left(1 - 2\sqrt{\frac{v_f}{\pi}}\right) + \frac{1}{B} \left(\pi - \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{B^2 v_f}{\pi}}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - (B^2 v_f/\pi)}}{1 + \sqrt{B^2 v_f/\pi}} \right) \right] \tag{2.7}$$

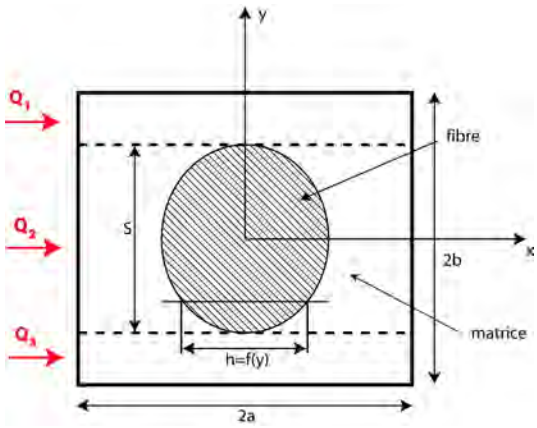


FIG. 2.4 – Représentation de la cellule élémentaire utilisée dans la méthode de Springer et Tsai [63].

avec

$$B = 2\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_f} - 1\right)$$

Rayleigh [55] analysa l'influence d'obstacles circulaires répartis de façon rectangulaire dans un milieu continu à l'aide d'un développement en série de potentiels électriques. En appliquant ce modèle au cas des composites unidirectionnels, la conductivité thermique transversale s'écrit :

$$\lambda_{trans} = \lambda_m \left(1 - \frac{2v_f}{\gamma + v_f - 0,0031\frac{v_f^4\pi^4}{\gamma^2}}\right) \tag{2.8}$$

avec

$$\gamma = \frac{\lambda_m + \lambda_f}{\lambda_m - \lambda_f}$$

La figure 2.5 compare les 3 modèles précédents à des résultats expérimentaux [54] obtenus pour un composite unidirectionnel verre/époxyde et pour un taux de fibres volumique de 77%. Ces modèles donnent de bons résultats (erreurs relatives $\leq$5%) lorsque la température est comprise entre 10 K et 80 K. Par contre, au dessous de 10 K, ces modèles divergent (figure 2.5). L'écart observé entre ces modèles et les résultats expérimentaux à très basse température est lié aux discontinuités acoustiques aux interfaces fibres/matrice [54]. Quelques modèles prennent en compte cette résistance thermique d'interface pour des composites chargés en particules sphériques [48] mais à notre connaissance le cas des composites unidirectionnels n'a pas encore été étudié.

L'étude de cette résistance thermique qui est liée au mécanisme de transfert de la chaleur à l'interface de deux solides à très basse température, fait l'objet du paragraphe suivant.

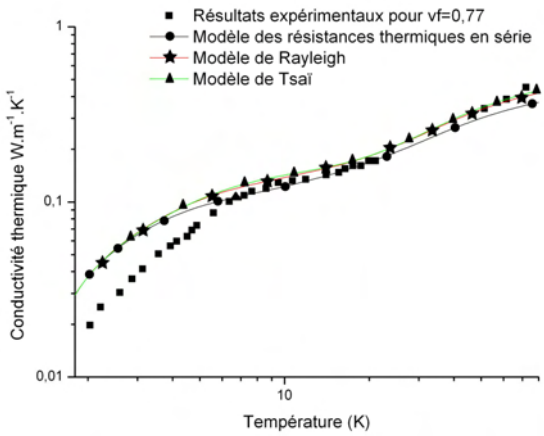


FIG. 2.5 – Conductivités thermiques transversales calculées et exprimentales [54] pour un composite unidirectionnel en verre/époxyde ($v_f = 0,77$).

2.3 Transfert thermique à l'interface de deux solides à très basse température

En 1941, Kapitza [37] observa qu'un transfert de chaleur entre un solide et l'hélium superfluide He II induisait une discontinuité de température à l'interface. En 1952, Khalatnikov [39] proposa un modèle théorique utilisant les résultats de l'élasticité classique et le modèle de Debye. Ce modèle de dispersion acoustique (*Acoustic Mismatch Model* : AMM) prend en compte l'impédance acoustique de chacun des milieux. L'hélium ayant une impédance très faible devant la plupart des solides, les phonons venant de l'hélium sont réfléchis pour des angles d'incidence supérieurs à 10° et transmis pour des angles inférieurs. Par conséquent, seulement une très faible partie des phonons incidents est transmise, ce qui implique que l'interface joue le rôle d'une résistance thermique. Dans le cas de l'interface solide-hélium, cette résistance est communément appelée résistance de Kapitza.

En 1959, Little [45] généralisa cette théorie au cas de l'interface entre deux solides en tenant compte de l'existence d'ondes transverses dans les deux solides. Implicitement, ce modèle suppose que le phénomène de diffusion acoustique n'est pas présent au niveau de l'interface. En 1987, Swartz [66] mesura la résistance thermique d'interface entre des films métalliques et des diélectriques pour des températures comprises entre 0,6 et 200K. Les expériences ont confirmé les estimations obtenues avec l'AMM pour de nombreuses interfaces entre deux solides en dessous de 30K dans le cas où l'interface est soigneusement polie. Pour les interfaces rugueuses, les phonons sont dispersés de façon diffuse à l'interface. De manière à estimer l'effet de la dispersion diffuse des phonons sur la résistance thermique d'interface, Swartz [65]

développa un modèle de dispersion par diffusion (*Diffuse Mismatch Model* : DMM).

Ces deux modèles étant basés sur les mêmes concepts physiques, le flux de chaleur transmis à travers l'interface s'écrit sous la même forme. La différence n'intervient qu'au niveau de l'expression de la probabilité de transmission moyenne.

Un troisième modèle appelé le modèle de couche d'interface (*Interface Layer Model* : ILM) assimile l'interface entre les deux solides à une couche d'épaisseur variable dont la conductivité thermique associée est suffisament faible par rapport à celle des solides [70]. Ce modèle étant fortement influencé par le choix de l'épaisseur et de la conductivité thermique de la couche, il ne sera pas décrit dans ce travail.

2.3.1 Modélisation du transfert thermique à l'interface

Les modèles de dispersion acoustique et de dispersion par diffusion sont présentés dans ce paragraphe. Ces deux modèles sont basés sur la théorie des corps noirs (analogie avec les photons) [45, 65].

Considérons une interface plane entre deux solides 1 et 2. Le flux d'énergie incident par unité de temps dans le milieu 1 à une température T est donné par la relation :

$$\dot{Q}_{1\to2}(T) = \frac{1}{2}\sum_j \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{w_1^{max}} N_{1,j}(\omega,T)\hbar\omega c_{1j}\alpha_{1\to2}(\theta,j,\omega)cos\theta sin\theta d\theta d\omega \qquad (2.9)$$

où :

- c_{1j} est la vitesse de groupe des phonons de mode j dans le solide 1,
- ω la fréquence du phonon et w_1^{max}, la fréquence maximale du phonon dans le solide 1,
- $\alpha_{1\to2}(\theta,j,\omega)$ la probabilité de transmission du phonon du solide 1 vers le solide 2,
- θ l'angle entre le vecteur d'onde du phonon incident et la normale de l'interface,
- $N_{1,j}(\omega,T)d\omega$ le nombre de phonons dans le milieu 1 d'énergie comprise entre $\hbar\omega$ et $\hbar(\omega+d\omega)$.

Pour des solides isotropes, la valeur de $N_{1,j}(\omega,T)d\omega$ est donnée par le nombre de degrés de liberté du réseau et la distribution d'énergie de Bose-Einstein (2.2) :

$$N_{1,j}(\omega,T)d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c_{1j}^3\left[e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right]} \qquad (2.10)$$

A basse température w_1^{max} tend vers l'infini. De plus, en supposant que les probabilités de transmission sont indépendantes de la fréquence du phonon, le flux d'énergie incident peut s'écrire :

$$\dot{Q}_{1\to2}(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3}T^4\left[\frac{\Gamma_{1,l}}{c_{1l}^2}+\frac{\Gamma_{1,t_1}+\Gamma_{1,t_2}}{c_{1t}^2}\right] \qquad (2.11)$$

avec :

$$\Gamma_{1,j} = \int_0^{\pi/2} \alpha_{1\to 2}(\theta, j) \cos\theta \sin\theta d\theta \tag{2.12}$$

où $j = l$ pour une onde incidente longitudinale ; $j = t_1$ pour une onde incidente transversale avec le vecteur déplacement dans le plan d'incidence ; $j = t_2$ pour une onde incidente transversale avec un vecteur déplacement perpendiculaire au plan d'incidence.

Ces deux modèles vérifient le principe de l'équilibre local : lorsque la température est la même de part et d'autre de l'interface, il n'y a pas de flux de chaleur résultant et donc $\dot{Q}_{1\to 2}(T) = \dot{Q}_{2\to 1}(T)$. Ceci implique que :

$$\left[\frac{\Gamma_{1,l}}{c_{1l}^2} + \frac{\Gamma_{1,t_1} + \Gamma_{1,t_2}}{c_{1t}^2}\right] = \left[\frac{\Gamma_{2,l}}{c_{2l}^2} + \frac{\Gamma_{2,t_1} + \Gamma_{2,t_2}}{c_{2t}^2}\right] \tag{2.13}$$

Par contre, lorsque la température de chacun des solides à l'interface est différente, le flux de chaleur résultant qui traverse l'interface est noté :

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{1\to 2}(T_1) - \dot{Q}_{2\to 1}(T_2) = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3}\left[\frac{\Gamma_{1,l}}{c_{1l}^2} + \frac{\Gamma_{1,t_1} + \Gamma_{1,t_2}}{c_{1t}^2}\right](T_1^4 - T_2^4) \tag{2.14}$$

où T_1 et T_2 sont respectivement la température des solides 1 et 2 à l'interface.

Dans le cas où $T_1 - T_2 \ll T_1$, alors : $T_1 \approx T \approx T_2$

$$\dot{Q} \approx \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3}\left[\frac{\Gamma_{1,l}}{c_{1l}^2} + \frac{\Gamma_{1,t_1} + \Gamma_{1,t_2}}{c_{1t}^2}\right] T^3(T_1 - T_2) \tag{2.15}$$

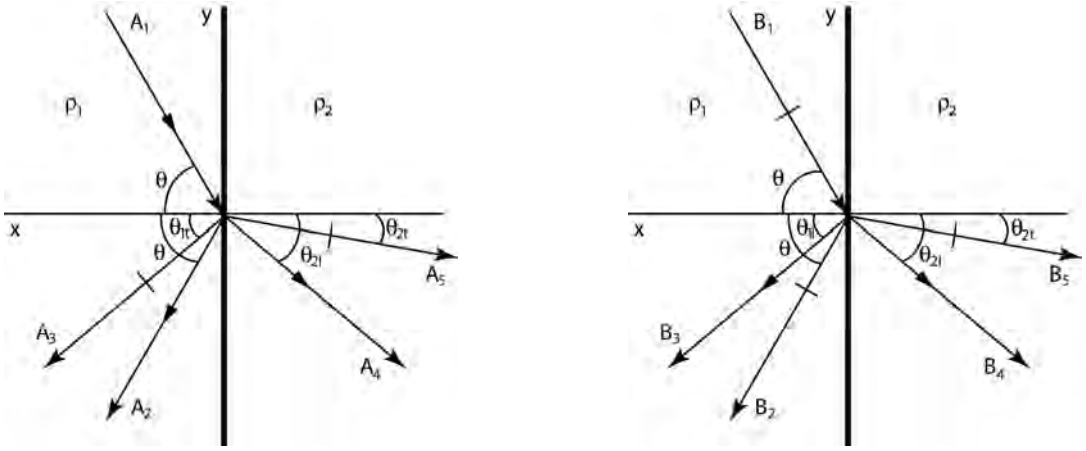
La résistance thermique d'interface solide-solide est donc :

$$R_{s-s} \equiv \frac{(T_1 - T_2)}{\dot{Q}} \approx \frac{15h^3}{8\pi^5 k^4}\left[\frac{\Gamma_{1,l}}{c_{1l}^2} + \frac{\Gamma_{1,t_1} + \Gamma_{1,t_2}}{c_{1t}^2}\right]^{-1} T^{-3} \tag{2.16}$$

Cette résistance thermique dépend des probabilités de transmission moyennes $\Gamma_{1,j}$ qui peuvent être calculées de deux manières différentes. La première manière correspond à l'AMM tandis que la seconde correspond au DMM.

2.3.2 Détermination des probabilités de transmission moyennes des phonons avec l'AMM

Afin de calculer $\Gamma_{1,j}$, le terme $\alpha_{1\to 2}(\theta, j)$ de l'équation (2.9) doit être déterminé en premier. Ce terme correspond à la fraction d'énergie transmise au solide 2 par une onde de mode j incidente dans le solide 1 sur la surface sous un angle θ. De manière générale, lorsqu'une onde est incidente sur une interface plane, quatre ondes sont générées. Deux d'entre elles sont réfractées dans le second solide tandis que les deux



(a) Onde incidente longitudinale (b) Onde incidente transversale

FIG. 2.6 – Réflection et réfraction d'une onde incidente sur une interface plane.

autres sont réfléchies [40]. Ce mécanisme est présent aussi bien dans le cas d'une onde incidente longitudinale (figure 2.6 (a)) que dans celui d'une onde incidente transversale (figure 2.6 (b)).

D'après Kolsky [40], pour chaque mode d'onde incidente, un système de quatre conditions aux limites à l'interface permet de relier les différentes ondes. Elles ont pour objectif d'imposer la continuité des déplacements normaux, des déplacements transverses, des contraintes normales et des contraintes transversales issus de l'ensemble des ondes. En supposant l'onde incidente longitudinale harmonique, le système s'écrit :

$$\begin{cases} (A_1 - A_2)\cos\theta + A_3 \sin\theta_{1t} - A_4 \cos\theta_{2l} - A_5 \sin\theta_{2t} = 0 \\ (A_1 + A_2)\sin\theta + A_3 \cos\theta_{1t} - A_4 \sin\theta_{2l} + A_5 \cos\theta_{2t} = 0 \\ (A_1 + A_2)c_{1l}\cos 2\theta_{1t} - A_3 c_{1t} \sin 2\theta_{1t} - \\ \qquad\qquad A_4 c_{2l}(\rho_2/\rho_1)\cos 2\theta_{2t} - A_5 c_{2t}(\rho_2/\rho_1)\sin 2\theta_{2t} = 0 \\ \rho_1 c_{1t}^2[(A_1 - A_2)\sin 2\theta - A_3(c_{1l}/c_{1t})\cos 2\theta_{1t}] - \\ \qquad\qquad \rho_2 c_{2t}^2[A_4(c_{1l}/c_{2l})\sin 2\theta_{2l} - A_5(c_{1l}/c_{2t})\cos 2\theta_{2t}] = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

où :

- A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont respectivement les amplitudes des ondes incidente longitudinale, réfléchie longitudinale, réfléchie transversale, réfractée longitudinale et réfractée transversale.
- θ, θ_{1t}, θ_{2l} et θ_{2t} sont respectivement les angles de l'onde incidente longitudinale (ou réfléchie longitudinale), réfléchie transversale, réfractée longitudinale et réfractée transversale par rapport à la normale de l'interface.
- ρ_1 et ρ_2 sont respectivement la densité des solides 1 et 2.

Ce système dépend de l'angle associé à chacune des ondes. Néanmoins, en utilisant les relations acoustiques de Snell [40], ce système peut être exprimé uniquement en fonction de l'angle de l'onde incidente :

$$\frac{\sin\theta}{c_{1l}} = \frac{\sin\theta_{1t}}{c_{1t}} = \frac{\sin\theta_{2l}}{c_{2l}} = \frac{\sin\theta_{2t}}{c_{2t}} \tag{2.18}$$

Par un raisonnement analogue, les conditions aux limites à l'interface appliquées à une onde incidente transversale harmonique s'écrivent :

$$\begin{cases} (B_1 - B_2)\sin\theta + B_3\cos\theta_{1l} + B_4\cos\theta_{2l} - B_5\sin\theta_{2t} = 0 \\ (B_1 + B_2)\cos\theta + B_3\sin\theta_{1l} - B_4\sin\theta_{2l} - B_5\cos\theta_{2t} = 0 \\ c_{1t}(B_1 + B_2)\sin 2\theta - B_3 c_{1l}\cos 2\theta + \\ \qquad\qquad B_4 c_{2l}(\rho_2/\rho_1)\cos 2\theta_{2t} - B_5 c_{2t}(\rho_2/\rho_1)\sin 2\theta_{2t} = 0 \\ \rho_1 c_{1t}[(B_1 - B_2)\cos 2\theta - B_3(c_{1t}/c_{1l})\sin 2\theta_{1l}] - \\ \qquad\qquad \rho_2 c_{2t}[(c_{2t}/c_{2l})B_4\sin 2\theta_{2l} + B_5\cos 2\theta_{2t}] = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

où B_1, B_2, B_3, B_4 et B_5 sont respectivement les amplitudes des ondes incidente transversale, réfléchie transversale, réfléchie longitudinale, réfractée longitudinale et réfractée transversale.

Les carrés des rapports des amplitudes des ondes transmises au solide 2 sont proportionnels au flux d'énergie transmis [56]. Par conséquent, après résolution des deux systèmes d'équations (2.17) et (2.19) pour chaque valeur de θ, Cheeke et al. [14] en déduisent la probabilité de transmission $\alpha_{1\to2}(\theta, l)$ suivante :

$$\alpha_{1\to2}(\theta, l) = \left|\frac{A_4}{A_1}\right|^2 \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{c_{2l}}{c_{1l}}\frac{\cos\theta_{2l}}{\cos\theta} + \left|\frac{A_5}{A_1}\right|^2 \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{c_{2t}}{c_{1l}}\frac{\cos\theta_{2t}}{\cos\theta} \tag{2.20}$$

Lorsque l'onde incidente est de mode t_1 cette probabilité de transmission devient :

$$\alpha_{1\to2}(\theta, t_1) = \left|\frac{B_4}{B_1}\right|^2 \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{c_{2l}}{c_{1t}}\frac{\cos\theta_{2l}}{\cos\theta} + \left|\frac{B_5}{B_1}\right|^2 \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{c_{2t}}{c_{1t}}\frac{\cos\theta_{2t}}{\cos\theta} \tag{2.21}$$

Lorsque l'onde incidente est de mode t_2, la probabilité de transmission est plus simple à exprimer du fait de l'absence de conversion de mode à l'interface :

$$\alpha_{1\to2}(\theta, t_2) = \frac{4u}{(1+u)^2} \tag{2.22}$$

où :

$$u = \frac{\rho_2\sin 2\theta_{2t}}{\rho_1\sin 2\theta}$$

Ces trois relations sont introduites dans l'équation (2.12), qui après résolution numérique, permet de déterminer les probabilités de transmission moyennes des phonons avec l'AMM pour chacun des modes.

2.3.3 Détermination des probabilités de transmission moyennes des phonons avec le DMM

Dans le modèle AMM, les phonons ne diffusent pas à l'interface. Cependant ce phénomème existe, en particulier lorsque l'interface est rugueuse, et a été pris en compte par Swartz [65] dans son modèle appelé DMM. Dans ce modèle, réflections et réfractions des phonons à l'interface sont remplacées par une dispersion par diffusion de tous les phonons (figure 2.7).

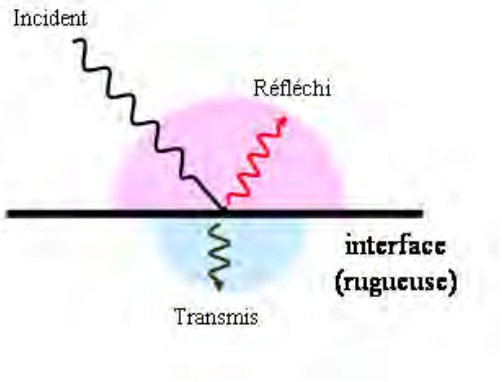


FIG. 2.7 – Représentation schématique de la propagation d'un phonon incident dans le modèle DMM.

D'un point de vue qualitatif, ce modèle se traduit par une indépendance entre les phonons diffusés et les phonons incidents. En conséquence, les lois de Snell (2.18) et les conditions aux limites (2.17) et (2.19) ne sont plus applicables dans le calcul des $\Gamma_{1,j}$. Le modèle DMM est basé sur d'autres hypothèses :

- La probabilité de transmission des phonons $\alpha_{1\to2}(\theta, j)$ du solide 1 vers le solide 2, avec un mode j est indépendante du mode et de l'angle d'incidence :

$$\alpha_{1\to2}(\theta, j) = \alpha_{1\to2} \tag{2.23}$$

- La probabilité de réflection depuis un solide est égale à la probabilité de transmission depuis l'autre solide.

$$\alpha_{1\to2} = 1 - \alpha_{2\to1} \tag{2.24}$$

Finalement, après utilisation du principe de l'équilibre local [65], Swartz en déduit la probabilité de transmission $\alpha_{1\to2}$ suivante :

$$\alpha_{1\to2} = \frac{\left(\frac{1}{c_{2l}^2} + \frac{2}{c_{2t}^2}\right)}{\left(\frac{1}{c_{1l}^2} + \frac{2}{c_{1t}^2} + \frac{1}{c_{2l}^2} + \frac{2}{c_{2t}^2}\right)} \tag{2.25}$$

En introduisant cette relation dans l'équation (2.12), l'expression de la probabilité de transmission moyenne devient :

$$\Gamma_{1,j} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{c_{2l}^2} + \frac{2}{c_{2t}^2}\right)}{\left(\frac{1}{c_{1l}^2} + \frac{2}{c_{1t}^2} + \frac{1}{c_{2l}^2} + \frac{2}{c_{2t}^2}\right)} \tag{2.26}$$

A présent que les deux principaux modèles de calcul de résistance thermique d'interface solide-solide ont été décrits, des mesures de ces résistances effectuées par quelques auteurs [65][74][47] sont présentées dans le paragraphe suivant.

2.3.4 Mesures de la résistance d'interface aux températures cryogéniques

Les premières expériences ont été effectuées dans le but de contrôler la résistance thermique des joints utilisés dans les cryostats. Les résines époxydes sont souvent utilisées pour assembler deux matériaux aussi bien thermiquement que mécaniquement. Quand elles sont chargées avec un matériau de haute conductivité thermique, comme de fines particules de cuivre ou d'argent, elles ont une conductivité thermique plus faible que lorsque qu'elles ne sont pas chargées. Ce phénomène est dû à la résistance thermique d'interface entre les deux matériaux [65]. Les auteurs ont calculé cette résistance à partir des mesures de la conductivité thermique de l'époxyde chargée, non chargée et des particules. Garret et al. [24] ont travaillé sur des résines chargées de particules sphériques en verre, diamant et quartz. Ils ont mesuré la conductivité thermique du composite ainsi formé pour des tailles et des concentrations de particules sphériques différentes. Ils ont observé qu'en dessous de 10 K la conductivité thermique mesurée est inférieure à celle estimée du fait de la résistance d'interface particule/résine. L'écart est d'autant plus important que la différence des vitesses acoustiques dans la matrice et dans les particules est élevée. C'est le cas des particules de diamant pour lesquelles la vitesse du son est 7 fois plus grande que celle de l'époxyde.

La plupart des mesures directes de résistance thermique d'interface solide-solide sont difficilement reproductibles. Les premières mesures directes crédibles vérifiant de manière quantitative le modèle de dispersion acoustique ont été effectuées par Matsumoto et al. [47] pour une plage de température limitée. Une fine couche d'époxyde ($\approx 10\ \mu m$) a été déposée entre deux plaques de cuivre. Les thermomètres ont été placés sur les plaques aussi près que possible de l'interface de manière à mesurer la somme des résistances thermiques cuivre-époxyde et époxyde-cuivre. Les auteurs ont montré que les résistances thermiques ne pouvaient pas être ajoutées simplement. En effet, l'époxyde étant de nature amorphe, seuls les phonons de plus

faible fréquence traversent facilement le sandwich. Plus récemment, des mesures de résistance d'interface solide-solide ont été effectuées pour divers matériaux utilisés comme interface [75][74]. Le système le plus efficace est constitué d'un film de Kapton MT (polyimide contenant des particules d'aluminium) déposé à l'interface de deux blocs de cuivre. Les résultats ont montré qu'à très basse température, la résistance thermique du Kapton devenait insignifiante et que la résistance thermique globale mesurée convergeait vers la résistance des deux interfaces Cu-Kapton MT. Les auteurs ont également évalué les effets de la pression de contact et de l'épaisseur de l'interface sur la résistance thermique.

Comme nous pouvons le constater, la mesure de la résistance thermique d'interface aux températures cryogéniques est extrêmement délicate car ces mesures sont très sensibles à de nombreux paramètres (nature des matériaux, vitesses de propagation du son, épaisseurs de l'interface, rugosité). Ce type d'essai n'a pas été effectué dans le cadre de ma thèse.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les mécanismes de transfert de chaleur dans les solides et plus particulièrement dans les constituants d'un composite unidirectionnel verre-E/époxyde ont été présentés. Le calcul des conductivités thermiques équivalentes de ce composite font l'objet de plusieurs modélisations. Elles donnent des résultats satisfaisants, quelle que soit la température, dans le cas de la conductivité thermique longitudinale. Par contre, dans le cas de la conductivité thermique transversale, ces modèles ont été mis en défaut pour des températures inférieures à 10 K du fait du changement de mécanisme de transfert thermique entre les deux constituants. Les deux principaux modèles, le modèle de dispersion acoustique et le modèle de dispersion par diffusion, expliquant ce mécanisme ont été décrits. Le premier est plus adapté au cas d'une interface de type lisse alors que le deuxième l'est davantage au cas d'une interface rugueuse. L'objectif à présent est de construire un modèle permettant de calculer la conductivité thermique effective d'un composite unidirectionnel (UD) tenant compte du mécanisme des phonons. Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Homogénéisation d'un composite unidirectionnel avec prise en compte du mécanisme des phonons

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de déterminer le tenseur de conductivité thermique équivalent d'un composite unidirectionnel avec prise en compte du mécanisme des phonons à l'interface fibre/matrice. Dans cette optique, une méthode d'homogénéisation périodique avec développement asymptotique du champ de température est développée [2][3]. Elle est basée sur l'hypothèse de la périodicité de la structure à l'échelle microscopique.

Dans le premier paragraphe, le développement théorique de la méthode est présenté. La méthode d'homogénéisation périodique est appliquée à l'équation de la chaleur en régime stationnaire. Ce développement permet d'obtenir deux formulations variationnelles. La première, dite microscopique, correspond à l'équation de la chaleur au sein du volume élémentaire représentatif. La deuxième est dite macroscopique, elle correspond à l'équation de la chaleur pour un matériau homogène équivalent. C'est la résolution de la première formulation qui permet d'obtenir la conductivité thermique équivalente du composite unidirectionnel. Sa résolution par la méthode des éléments finis fait l'objet du second paragraphe. Finalement, dans un dernier paragraphe, les résultats de la modélisation sont comparés à ceux obtenus expérimentalement par Radcliffe et al. [54].

3.2 Développement théorique

3.2.1 Introduction à la méthode d'homogénéisation périodique

Dans ce paragraphe, nous présentons une homogénéisation non linéaire du comportement thermique dans un composite unidirectionnel, en prenant en compte l'impédance de transmission des phonons à l'interface, ce qui n'a jamais été fait dans la littérature à notre connaissance. Un composite unidirectionnel est un matériau isotrope transverse composé de fibres de taille très petite devant la taille réelle du composite. Il est par conséquent indispensable de tenir compte de cette microstructure pour étudier le comportement thermique global du composite. Actuellement, la description détaillée de toute la structure est complexe voire impossible d'un point de vue numérique (grand nombre de noeuds, temps de calcul prohibitif). Néanmoins, il est possible de contourner ce problème en utilisant des informations représentatives du milieu hétérogène. Pour cela, un volume élémentaire représentatif (VER) du matériau est défini, permettant ainsi d'aboutir par des changements d'échelles à des modèles macroscopiques performants. Cette démarche est communément appelée "méthode d'homogénéisation". De très nombreux travaux [12][31][64] ont été effectués sur ces méthodes avec des formalismes mathématiques et des domaines d'applications relativement différents. Lorsque la microstucture est périodique, ce qui est supposé être le cas du composite unidirectionnel, cette démarche est appelée "méthode d'homogénéisation périodique" [8, 59]. Quelques articles de la littérature traitent de ce type d'homogénéisation appliqué à l'étude du comportement thermique. Par exemple, Auriault et Ene [5] ont utilisé cette méthode en prenant en compte une résistance thermique conductive à l'interface de deux matériaux homogènes et ont montré qu'il était possible d'obtenir plusieurs modèles en fonction du nombre de Biot : contact parfait, contact imparfait avec un champ de température et matériaux isolés avec deux champs de température. Le nombre de Biot est représenté par le rapport entre l'impédance thermique d'interface et la conductivité d'un des constituants. Galka et al. [23] ont proposé d'étudier l'équation de la chaleur avec une conductivité thermique qui dépend de la température en utilisant un développement asymptotique à deux échelles. La formulation trouvée est ensuite appliquée au calcul des bornes de la conductivité effective dans le cas général en utilisant les approximations de Padé. Laschet [43] a étudié le problème du transport de chaleur non-linéaire et a développé un programme d'éléments finis spécifiques permettant de déterminer numériquement l'influence de la conception de canaux de refroidissement sur les propriétés thermiques effectives.

3.2.2 Définition du problème

Un composite unidirectionnel de domaine $\mathbf{\Omega}$ peut être assimilé à un composite micropériodique parfait tridimensionnel se rapportant au système de coordonnées $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ avec une dimension caractéristique L et une frontière $\partial\mathbf{\Omega}$ (figure 3.1). La résine et chaque fibre ont pour volume respectif $\mathbf{\Omega}_m$ et $\mathbf{\Omega}_f$; leur interface est notée $\partial\mathbf{\Omega}_{fm}$.

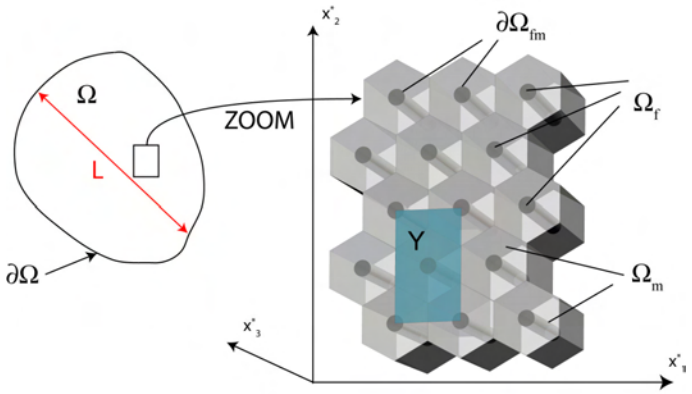


FIG. 3.1 – Représentation schématique d'un composite unidirectionnel.

La dimension l de $\mathbf{Y}$ (domaine du VER microscopique) est très petite comparée à L. On pose alors :

$$\epsilon = \frac{l}{L} \ll 1 \tag{3.1}$$

où ϵ est le rapport d'échelle qui est approximativement de 10^{-3} dans notre étude.

Dans un tel composite, le champ de température T^ϵ oscille autour d'une valeur moyenne en raison de la présence de fibres dans la matrice (figure 3.2).

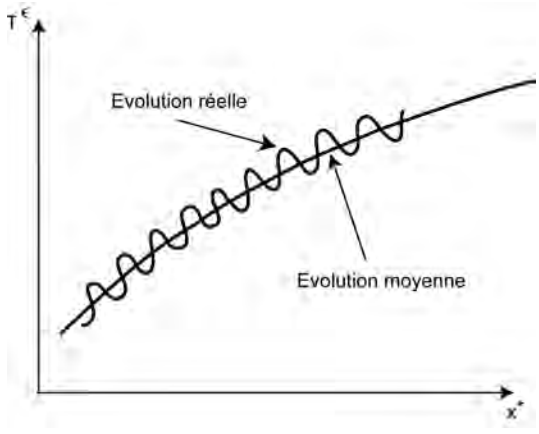


FIG. 3.2 – Evolution du champ de température T^ϵ en fonction de la variable d'espace macroscopique $\mathbf{x}^*$.

Ces fluctuations sont d'autant plus rapides qu'il y a un grand nombre de fibres. Dans ces conditions, le champ de température peut s'écrire sous la forme :

$$T^{\epsilon}(\mathbf{x}^*) = T^0(\mathbf{x}^*) + \epsilon T^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \tag{3.2}$$

où $T^0(\mathbf{x}^*)$ est le champ de température moyen et $\epsilon T^1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ le terme oscillant. Le champ de température T^{ϵ} fait intervenir deux échelles. La première, notée $\mathbf{x}^*$, est liée à la structure (macroscopique) tandis que la deuxième, notée $\mathbf{y}^*$, est liée au VER (microstructure).

3.2.3 Equation de la chaleur

Dans le cas stationnaire sans source de chaleur, le problème de conduction de la chaleur appliqué au composite unidirectionnel $\mathbf{\Omega}$ peut s'exprimer mathématiquement par

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*}\left(\lambda_{ij}^{\epsilon}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon})\frac{\partial T^{\epsilon}}{\partial x_j^*}\right) = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathbf{\Omega_f} \cup \mathbf{\Omega_m} \tag{3.3}$$

où $\lambda_{ij}^{\epsilon}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon})$ est la conductivité thermique non-linéaire dépendant de la nature des constituants :

$$\lambda_{ij}^{\epsilon}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon}) = \begin{cases} \lambda_{ij}^{f\epsilon}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon}) & \text{si} \quad \mathbf{x}^* \in \mathbf{\Omega}_f \quad \text{(Conductivité thermique de la fibre)} \\ \lambda_{ij}^{m\epsilon}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon}) & \text{si} \quad \mathbf{x}^* \in \mathbf{\Omega}_m \quad \text{(Conductivité thermique de la matrice)} \end{cases}$$

A l'interface fibre/matrice $\partial\mathbf{\Omega}_{fm}$, nous supposons :

- qu'il n'y a pas d'espace entre les deux constituants. Par conséquent, les phénomènes de convection et de radiation n'apparaissent pas.

- qu'il n'y a pas de création de chaleur aux interfaces ce qui implique que le flux de chaleur est conservé lors du passage d'un matériau à l'autre, soit :

$$-\lambda_{ij}^{f\epsilon}\frac{\partial T^{f\epsilon}}{\partial x_j^*}n_i = -\lambda_{ij}^{m\epsilon}\frac{\partial T^{m\epsilon}}{\partial x_j^*}n_i \qquad \text{sur} \quad \partial\mathbf{\Omega}_{fm} \tag{3.4}$$

où n_i sont les composantes du vecteur unitaire normal à l'interface $\partial\mathbf{\Omega}_{fm}$ et pointant vers l'extérieur de $\mathbf{\Omega}_f$ (figure 3.3).

En plus de l'équation (3.4), le mécanisme des phonons à l'interface est pris en compte par l'équation suivante :

$$-\lambda_{ij}^{f\epsilon}\frac{\partial T^{f\epsilon}}{\partial x_j^*}n_i = K\left(T^{f\epsilon^4} - T^{m\epsilon^4}\right) \qquad \text{sur} \quad \partial\mathbf{\Omega}_{fm} \tag{3.5}$$

avec

$$K = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3}\left[\frac{\Gamma_{1,l}}{c_{1l}^2} + \frac{\Gamma_{1,t_1} + \Gamma_{1,t_2}}{c_{1t}^2}\right] \tag{3.6}$$

K est l'impédance thermique d'interface obtenue à partir de l'équation (2.14). Afin d'éviter de manipuler des grandeurs de l'ordre de la taille des constituants (μm)

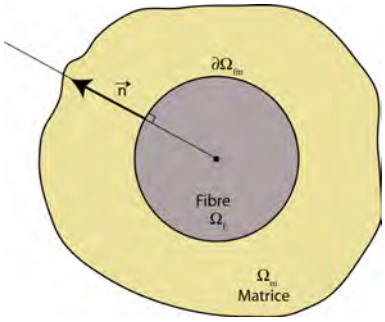


FIG. 3.3 – Schéma de l'interface fibre/matrice.

et du composite unidirectionnel (cm), les nombres adimensionnels suivants sont introduits :

$$\mathbf{y} \equiv \frac{\mathbf{x}^*}{l} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x} \equiv \frac{\mathbf{x}^*}{L} \tag{3.7}$$

où $\mathbf{y}$ et $\mathbf{x}$ sont des variables adimensionnelles respectivement microscopiques et macroscopiques.

Ainsi, les équations (3.3) à (3.5) peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\lambda_{ij}^{\epsilon}(\mathbf{y}, T^{\epsilon})\frac{\partial T^{\epsilon}}{\partial y_j}\right) = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathbf{\Omega_f} \cup \mathbf{\Omega_m} \tag{3.8}$$

$$-\lambda_{ij}^{f\epsilon}\frac{\partial T^{f\epsilon}}{\partial y_j}n_i = -\lambda_{ij}^{m\epsilon}\frac{\partial T^{m\epsilon}}{\partial y_j}n_i \qquad \text{sur} \quad \partial\mathbf{\Omega}_{fm} \tag{3.9}$$

$$-\lambda_{ij}^{f\epsilon}\frac{\partial T^{f\epsilon}}{\partial y_j}n_i = Kl\Big(T^{f\epsilon^4} - T^{m\epsilon^4}\Big) \qquad \text{sur} \quad \partial\mathbf{\Omega}_{fm} \tag{3.10}$$

Ce système d'équations correspond à la formulation forte du problème de conduction de la chaleur. Afin de résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, une formulation faible est introduite et présentée dans le paragraphe suivant.

3.2.4 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (3.8) par une fonction test v^{ϵ}, en appliquant la première forme du théorème de Green [58] et en introduisant les équations (3.9) et (3.10), le problème de conduction de la chaleur devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } T^{\epsilon} \in H_0^1(\mathbf{\Omega}) \\ \int_{\mathbf{\Omega_f}\cup\mathbf{\Omega_m}} \lambda_{ij}^{\epsilon}\frac{\partial T^{\epsilon}}{\partial y_j}\frac{\partial v^{\epsilon}}{\partial y_i}dV + \int_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}} Kl\Big(T^{f\epsilon^4} - T^{m\epsilon^4}\Big)[v^{\epsilon}]_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}}dS = 0 \qquad \forall v^{\epsilon} \in H_0^1(\mathbf{\Omega}) \end{cases} \tag{3.11}$$

où $[v^{\epsilon}]_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}}$ représente le saut de la fonction test v^{ϵ} à l'interface $\partial\mathbf{\Omega}_{fm}$ et $H_0^1(\mathbf{\Omega})$ est l'espace de Sobolev, avec des conditions aux limites homogènes sur $\partial\mathbf{\Omega}$, qui regroupe

les fonctions mesurables dont la valeur et toutes les dérivées partielles sont de carré intégrable sur $\mathbf{\Omega}$:

$$H_0^1(\mathbf{\Omega}) = \left\{ v^\epsilon | v^\epsilon \in L^2(\mathbf{\Omega}); \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_i} \in L^2(\mathbf{\Omega}), i = 1,2,3; v^\epsilon|_{\partial\mathbf{\Omega}} = 0 \right\} \tag{3.12}$$

3.2.5 Développement asymptotique à deux échelles

Le développement asymptotique à deux échelles est présenté dans ce paragraphe. Il permet d'obtenir les deux formulations variationnelles microscopique et macroscopique. Pour cela, le champ de température T^ϵ est cherché sous la forme d'un développement asymptotique en fonction de la puissance ϵ et des variables d'espace $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$:

$$T^\epsilon(\mathbf{y}) = T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = T^0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \epsilon T^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) + o(\epsilon^2) \tag{3.13}$$

où $\mathbf{x} = \epsilon\mathbf{y}$ et les fonctions T^0 et T^1 sont $\mathbf{Y}$-périodiques.

Remarque

Une fonction φ est Y-périodique i.e. les traces de φ sont égales sur les faces opposées de $\mathbf{Y}$.

Le développement précédent est arrêté à l'ordre ϵ de manière à être en accord avec le sens physique décrit dans le paragraphe 3.2.2. Par un raisonnement analogue, la fonction test v^ϵ est cherchée sous la forme :

$$v^\epsilon(\mathbf{y}) = v(\mathbf{x},\mathbf{y}) = v^0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \epsilon v^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.14}$$

Comme le tenseur de conductivité thermique dépend de T^ϵ, un développement de Taylor au voisinage de T^0 est appliqué :

$$\lambda_{ij}^\epsilon(\mathbf{y}, T^\epsilon) = \lambda_{ij}(\mathbf{y}, T(\mathbf{x},\mathbf{y})) = \lambda_{ij}^0 + \epsilon\lambda_{ij}^1 + o(\epsilon^2) \tag{3.15}$$

où les termes λ_{ij}^0, λ_{ij}^1 sont $\mathbf{Y}$-périodiques et définis par :

$$\lambda_{ij}^0 = \lambda_{ij}\big(\mathbf{y}, T^0\big)$$
$$\lambda_{ij}^1 = T^1\Big(\frac{\partial\lambda_{ij}(\mathbf{y},T)}{\partial T}\Big)_{T=T^0}$$

Le développement précédent est arrêté à l'ordre ϵ^0 car la contribution des fluctuations du champ de température (ϵT^1) sur la conductivité thermique est supposée négligeable. Dans les calculs, l'indépendance entre les variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ doit être prise en compte ce qui implique d'utiliser l'opérateur dérivé suivant [4] :

$$\frac{\partial T^\epsilon}{\partial y_j} = \frac{\partial T}{\partial y_j} + \epsilon\frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{3.16}$$

A présent, l'objectif est d'introduire les relations (3.13) à (3.16) dans l'équation (3.11) et de collecter les termes de même puissance en ϵ. Ainsi avec les termes d'ordre ϵ^0, l'équation (3.11) devient :

$$\int_{\mathbf{\Omega_f}\cup\mathbf{\Omega_m}} \lambda_{ij}^0 \frac{\partial T^0}{\partial y_j}\frac{\partial v^0}{\partial y_i} dV + \int_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}} Kl\Big(T^{f0^4} - T^{m0^4}\Big)[v^0]_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}} dS = 0 \tag{3.17}$$

La solution de ce système indique que T^0 est indépendant de la variable d'espace microscopique, soit :

$$T^0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = T^0(\mathbf{x}) \tag{3.18}$$

Les calculs montrent que les termes d'ordre ϵ^1 ne donne pas d'informations supplémentaires. Les termes d'ordre ϵ^2 sont alors collectés et l'équation (3.11) devient :

$$\int_{\mathbf{\Omega_f}\cup\mathbf{\Omega_m}} \lambda_{ij}^0 \Big(\frac{\partial T^1}{\partial y_j}+\frac{\partial T^0}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial v^1}{\partial y_i}+\frac{\partial v^0}{\partial x_i}\Big) dV + \int_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}} 4KlT^{0^3}\Big(T^{f1}-T^{m1}\Big)[v^1]_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}} dS = 0 \tag{3.19}$$

Cette nouvelle formulation variationnelle peut être séparée en deux équations correspondant à chacune des échelles : macroscopique et microscopique. Ces deux formulations sont présentés dans les deux paragraphes suivants.

3.2.6 Formulation variationnelle de l'équation de la chaleur à l'échelle microscopique

En choisissant $v^0 =$ constante, l'équation (3.19) devient :

$$\int_{\mathbf{\Omega_f}\cup\mathbf{\Omega_m}} \lambda_{ij}^0 \Big(\frac{\partial T^1}{\partial y_j} + \frac{\partial T^0}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial v^1}{\partial y_i} dV + \int_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}} 4KlT^{0^3}(T^{f1} - T^{m1})[v^1]_{\partial\mathbf{\Omega}_{fm}} dS = 0 \tag{3.20}$$

Le premier terme de l'intégrale est linéaire et T^1 est alors exprimée par la décomposition suivante :

$$T^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \chi^k(\mathbf{y})\frac{\partial T^0}{\partial x_k} \tag{3.21}$$

où les fonctions $\chi^k(\mathbf{y})$ sont $\mathbf{Y}$-périodiques (figure 3.4). Les domaines de la résine et des fibres dans le VER sont respectivement notés $\mathbf{Y_m}$ et $\mathbf{Y_f}$; leur interface est notée $\partial\mathbf{Y}_{fm}$. Par conséquent, en utilisant la propriété de périodicité [58], nous obtenons la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur à l'échelle microscopique :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \chi^k \in H^1_{per}(\mathbf{Y}) \\ \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} \lambda_{ij}^0 (\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j} + \delta_{jk})\frac{\partial v^1}{y_i} dV + \int_{\partial\mathbf{Y}_{fm}} 4KlT^{0^3}(\chi^{fk} - \chi^{mk})[v^1]_{\partial\mathbf{Y}_{fm}} dS = 0 \\ \forall v^1 \in H^1_{per}(\mathbf{Y}) \end{array}\right. \tag{3.22}$$

où $H^1_{per}(\mathbf{Y})$ est l'espace de Sobolev, avec des conditions limites périodiques sur $\partial\mathbf{Y}$, qui regroupe les fonctions mesurables dont la valeur et toutes les dérivées partielles sont de carré intégrable sur $\mathbf{Y}$.

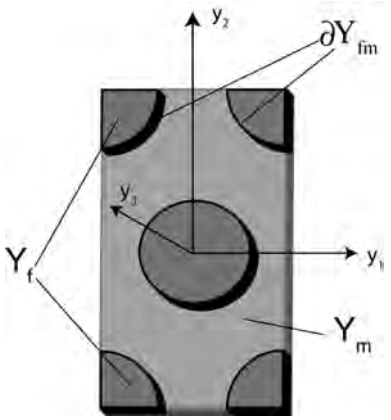


FIG. 3.4 – Représentation schématique du VER.

3.2.7 Formulation variationnelle de l'équation de la chaleur à l'échelle macroscopique

En choisissant $v^1 = v^1(x)$ dans l'équation (3.19), et en utilisant l'équation (3.21) ainsi que la propriété de périodicité, nous obtenons l'équation homogénéisée de la conduction de chaleur dans un composite unidirectionnel :

$$\int_{\mathbf{\Omega}} \lambda_{ik}^{eff}(T^0)\frac{\partial T^0}{\partial x_k}\frac{\partial v^0}{\partial x_i}dV = 0 \tag{3.23}$$

où

$$\lambda_{ik}^{eff}(T^0) = \frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} \lambda_{ij}^0(\frac{\partial \chi^k}{\partial y_j} + \delta_{jk})dV \tag{3.24}$$

$\underline{\underline{\lambda^{eff}}}(T^0)$ est le tenseur de conductivité thermique effective du composite unidirectionnel et $|\mathbf{Y}|$ le volume du VER microscopique.

3.3 Résolution numérique

L'objectif de ce paragraphe est de décrire la méthodologie permettant de calculer numériquement le tenseur de conductivité thermique effective $\underline{\underline{\lambda^{eff}}}(T^0)$ du composite unidirectionnel avec une résistance thermique d'interface. Afin de déterminer cette conductivité, le champ χ^k est calculé en résolvant la formulation variationnelle (3.22) par la méthode des éléments finis.

3.3.1 Géométrie et maillage du VER périodique

Le domaine $\mathbf{Y}$ (figure 3.4) est discrétisée avec des éléments isoparamétriques 3D (hexaèdres) à 8 noeuds. Ce maillage est effectué avec le code d'éléments finis ANSYS et est représenté figure 3.5.

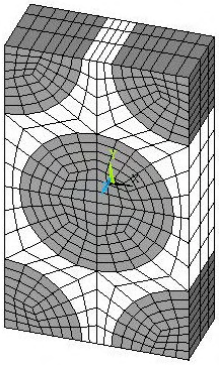


FIG. 3.5 – Maillage du VER microscopique.

Ensuite, ce maillage est exporté sur le logiciel scientifique MATLAB où la formulation variationnelle (3.22) est implémentée.

3.3.2 Discrétisation de la formulation variationnelle

L'équation (3.22) va permettre de trouver le champ χ^k puis la conductivité thermique effective $\underline{\underline{\lambda}}^{eff}(T^0)$ du composite unidirectionnel. En la décomposant en 3 termes (notés E, F et G), elle s'écrit :

$$\underbrace{\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} \lambda^0_{ij}\frac{\partial\chi^k}{\partial y_j}\frac{\partial v^1}{\partial y_i}dV}_{E} + \underbrace{\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} \lambda^0_{ik}\frac{\partial v^1}{\partial y_i}dV}_{F} + \underbrace{\int_{\partial\mathbf{Y}_{fm}} 4Kl(T^0)^3(\chi^{fk}-\chi^{mk})[v^1]_{\partial\mathbf{Y}_{fm}}dS}_{G} = 0 \qquad k=1,2,3 \tag{3.25}$$

La fonction χ^k et la fonction test v^1 sont interpolées en utilisant des fonctions de forme N_i. Elles sont choisies identiques pour les 2 interpolations.

$$\begin{aligned}\chi^k &= \{N\}^T\{\chi^k\}\\ v^1 &= \{N\}^T\{v^1\}\end{aligned} \tag{3.26}$$

où $\{\chi^k\}$ et $\{v^1\}$ sont respectivement les vecteurs constitués des inconnues nodales χ^k_i et v^1_i.

Les deux équations précédentes sont ensuite introduites dans chaque terme de l'équation (3.25). Par conséquent E et F deviennent :

$$E = \left\{v^1\right\}^T \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T[\lambda][B]dV \left\{\chi^k\right\} \tag{3.27}$$

$$F = \left\{v^1\right\}^T \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T \left\{\lambda^k\right\} dV \tag{3.28}$$

où $[B]$ est le tenseur constitué des gradients des fonctions de forme, $[\lambda]$ le tenseur de conductivité thermique et $\left\{\lambda^k\right\}$ le vecteur qui correspond à la colonne k du tenseur de conductivité $[\lambda]$.

Le terme G est plus difficile à discrétiser du fait de sa dépendance en χ^k de part et d'autre de l'interface fibre-matrice. Dans cette perspective, les noeuds sont dédoublés aux interfaces comme on peut le voir sur la figure 3.6.

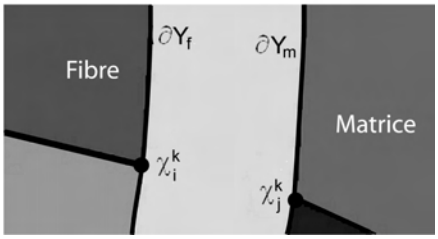


FIG. 3.6 – Vue éclatée de l'interface entre la fibre et la matrice.

Par conséquent, G devient :

$$G = \left\{v^1\right\}^T 4Kl(T^0)^3[\Phi]\left\{\chi^k\right\} \tag{3.29}$$

où

$$[\Phi]\{\chi^k\} = \begin{pmatrix} & & & & | & & & & \\ \dots & 0 & \varphi_i^f & 0 & \dots & 0 & -\varphi_i^f & 0 & \dots \\ & & & & | & & & & \\ \dots & 0 & -\varphi_j^m & 0 & \dots & 0 & \varphi_j^m & 0 & \dots \\ & & & & | & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \chi_i^k \\ | \\ \chi_j^k \\ | \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

φ_i^f et φ_j^m sont respectivement les composantes i et j des vecteurs $\{\varphi^f\}$ et $\{\varphi^m\}$ définis par :

$$\{\varphi^f\} = \int_{\partial \mathbf{Y}_f} \{N\} dS \quad \text{et} \quad \{\varphi^m\} = \int_{\partial \mathbf{Y}_m} \{N\} dS \tag{3.31}$$

En combinant les nouvelles expressions de E, F et G on obtient le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\left(\int_{\mathbf{Y_f} \cup \mathbf{Y_m}} [B]^T[\lambda][B]dV + 4Kl(T^0)^3[\Phi]\right)}_{[H]}\left\{\chi^k\right\} = \underbrace{-\int_{\mathbf{Y_f} \cup \mathbf{Y_m}} [B]^T\left\{\lambda^k\right\} dV}_{\{I^k\}} \tag{3.32}$$

La résolution de cette équation nécessite d'abord la prise en compte des conditions aux limites de périodicité.

3.3.3 Application des conditions aux limites de périodicité

Les conditions aux limites de périodicité sont appliquées sur les bords extérieurs du domaine $\mathbf{Y}$. Ces conditions impliquent que le champ solution χ^k prenne des valeurs identiques aux noeuds en vis-à-vis sur des faces opposées de $\mathbf{Y}$. Afin de coupler ces paires de noeuds, la méthode utilisée est celle des multiplicateurs de Lagrange qui s'exprime mathématiquement par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [H] & [J]^T \\ [J] & [0] \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} \{\chi^k\} \\ \{M\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{I^k\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

où $\{M\}$ est le vecteur constitué des multiplicateurs de Lagrange et $[J]$ le tenseur constitué des équations de couplage.

C'est une méthode qui a l'avantage d'être exacte et relativement facile à implémenter malgré le fait qu'elle rende la matrice $[A]$ singulière lorsque une équation au sein du système (3.33) est répétée. Une résolution de ce système avec une méthode itérative (gradient biconjugué [7]) permet de contourner ce problème. Ce solveur a été choisi pour sa rapidité de convergence dans le problème étudié par rapport aux autres solveurs de MATLAB. Une fois les inconnues nodales χ_i^k calculées, le tenseur de conductivité thermique est déterminé en utilisant la relation suivante directement issue de l'équation (3.24) :

$$[\lambda^{eff}] = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y_f} \cup \mathbf{Y_m}} [\lambda]([B][\chi] + [I])dV \tag{3.34}$$

où $[\chi]$ est le tenseur formé des vecteurs $\{\chi^k\}$.

3.4 Résultats et comparaisons

Plusieurs modèles ont été décrits dans le paragraphe 2.3 afin d'expliquer le phénomène de saut de température à l'interface fibre-matrice. En particulier, la différence entre le modèle de dispersion acoustique (AMM) et le modèle de dispersion par diffusion (DMM) est liée à la rugosité de l'interface. Le but de ce paragraphe est de comparer ces deux modèles avec le contact parfait et les résultats expérimentaux de la littérature [54] de manière à étudier l'influence de la barrière thermique sur la conductivité transverse d'un composite UD en fibre de verre et résine époxyde. Dans une première étape, nous allons déterminer l'impédance thermique d'interface K pour les deux modèles AMM et DMM puis nous verrons son influence sur la conductivité thermique transverse d'un composite UD.

3.4.1 Calcul de l'impédance thermique K

Afin de calculer K définie par l'équation (3.6), il faut connaître au préalable les vitesses acoustiques longitudinales et transversales de chacun des constituants. Elles sont calculées par les relations suivantes à partir des propriétés mécaniques de chacun des constituants :

$$c_{il} = \sqrt{\frac{(1-\nu_i)E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)\rho_i}} \qquad c_{it} = \sqrt{\frac{E_i}{2(1+\nu_i)\rho_i}} \tag{3.35}$$

où E_i est le module d'élasticité, ν_i le coefficient de Poisson et ρ_i la densité du solide i. Les propriétés mécaniques de la fibre de verre E et de la résine époxyde utilisées dans le modèle sont présentées dans le tableau 3.1.

Solides	Densité ρ $(kg.m^{-3})$ [25]	Coefficient de Poisson ν [25]	Module d'élasticité E (GPa) [29]
Fibre de verre E	2600	0,25	70
Résine époxyde	1200	0,4	8

TAB. 3.1 – Propriétés mécaniques de la fibre de verre E et de la résine époxyde

Après implémentation dans le logiciel MATLAB de la relation (3.6) pour chacun des modèles, on en déduit les impédances thermiques suivantes :

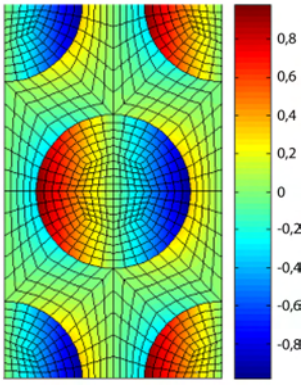
$$K = \begin{cases} 445 \ W.m^{-2}.K^{-4} \text{ (DMM)} \\ 393 \ W.m^{-2}.K^{-4} \text{ (AMM)} \end{cases} \tag{3.36}$$

L'écart relatif entre l'impédance thermique déterminée par le modèle de dispersion acoustique et par le modèle de dispersion par diffusion est de $11,68\%$. L'influence de cet écart sur la conductivité thermique est étudié dans le paragraphe suivant.

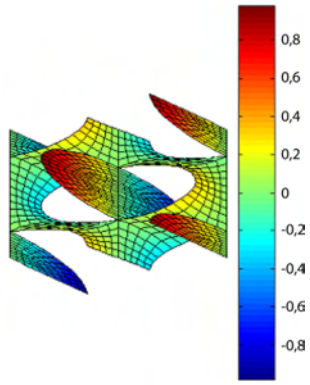
3.4.2 Influence de l'impédance K sur la conductivité transverse d'un composite UD

Les mesures de conductivité thermique, à très basse température, sur les isolants sont très compliquées à effectuer (temps de stabilisation, pertes de flux) surtout dans le cas des fibres de verre. En effet, leur géométrie (diamètre $\approx \mu m$) rend très difficile la fixation de sondes de température [53] et le flux de chaleur à appliquer est très faible (inférieure au μW). Radcliffe et al. [54] ont contourné ce problème en effectuant des mesures sur un ensemble de fibres disposés de manière parallèle les unes aux autres. Dans notre étude, nous interpolons leurs courbes de conductivité thermique (figure 2.2) avec des splines cubiques et utilisons les fonctions, dépendantes de la température, ainsi trouvées dans notre modèle d'homogénéisation.

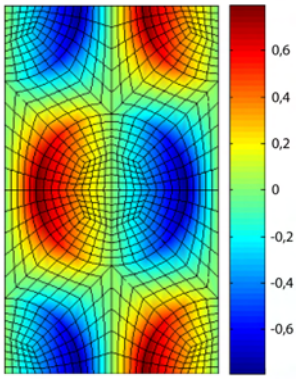
La figure 3.7 présente la répartition du champ χ^1, solution de l'équation (3.22), sur une coupe du VER parallèle au plan (y_1, y_2) pour un taux volumique de fibre de 46%, une impédance de 445 $W.m^{-2}.K^{-4}$ (DMM) et des températures macroscopiques T^0 de $2K$ et $15K$. Cette figure montre que l'impédance thermique crée



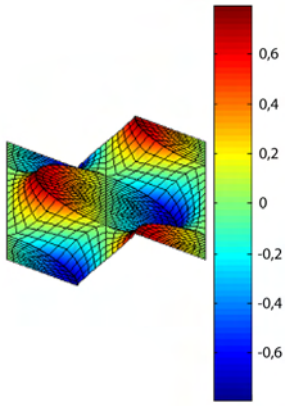
(a) Vue en coupe du champ χ^1 pour $T^0 = 2K$



(b) Vue 3D du champ χ^1 pour $T^0 = 2K$



(c) Vue en coupe du champ χ^1 pour $T^0 = 15K$



(d) Vue 3D du champ χ^1 pour $T^0 = 15K$

FIG. 3.7 – Exemple de répartition du champ χ^1 au sein du VER.

une discontinuité du champ χ^1 à l'interface fibre-matrice pour une température de $2K$ alors qu'il est continu à $15K$. En fait ce phénomène n'apparait que lorsque la température est inférieure à environ $10K$ (figure 3.8), ce qui est cohérent avec l'effet Kapitza. A présent que l'influence de la barrière thermique sur le champ χ^1 a été mis en évidence, regardons l'influence qu'elle peut avoir sur la conductivité thermique transverse. Dans une première série de simulations, le taux de fibre volumique a été fixé à 33%, 46% et 77% (car les données expérimentales disponibles [54] utilisent ces pourcentages) pour une température T^0 comprise entre $2K$ et $60K$.

La figure 3.9 montre que le modèle avec l'impédance thermique d'interface calculée avec le DMM ou l'AMM donne de bons résultats quelle que soit la température.

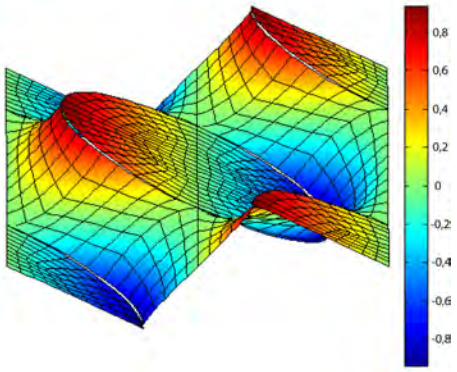


FIG. 3.8 – Mise en évidence du seuil de discontinuité du champ χ^1 pour $T^0 = 10\ K$.

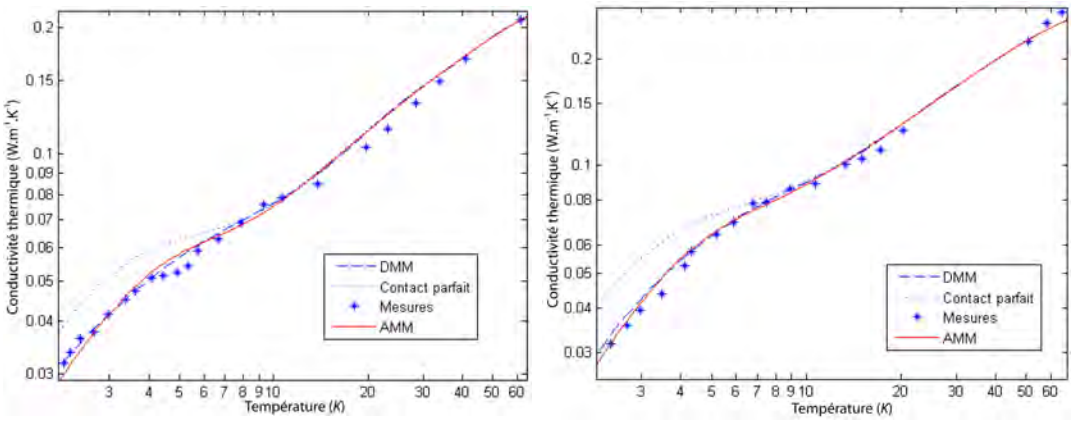
En effet, au dessous de 10K les résultats sont très proches de ceux trouvés expérimentalement par Radcliffe [54] contrairement aux modèles d'estimation classiques qui donnent des résultats similaires au modèle d'homogénéisation avec un contact parfait. En fait, pour des températures élévées, les modèles calculés avec le DMM ou l'AMM convergent vers le modèle avec un contact parfait du fait de l'augmentation très rapide (proportionnelle à T^{0^3}) du second terme de la relation (3.22) avec la température.

Dans le cas de l'interface verre-E/époxyde, les valeurs de l'impédance thermique calculées avec les deux modèles AMM et DMM sont très proches l'une de l'autre. Toutefois, il semblerait que la courbe de conductivité thermique obtenue avec l'AMM soit plus proche de la courbe expérimentale pour $T^0 < 10\ K$ (figure 3.9 c), même si les incertitudes de mesure ne sont pas connues. Par conséquent, c'est ce modèle qui sera adopté pour la suite de l'homogénéisation multi-échelle.

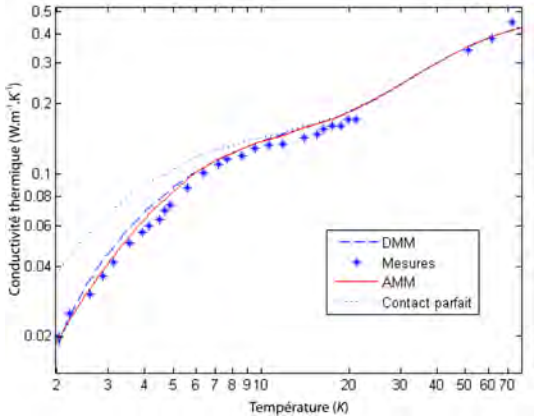
La figure 3.10 présente les résultats de la conductivité thermique transverse théorique et expérimentale pour plusieurs taux de fibre. En dessous d'une température d'environ $3K$, les propriétés thermiques sont totalement inversées. En effet, plus le composite est renforcé et plus il a une conductivité faible. Cette propriété physique est un paramètre de conception très intéressant pour les structures utilisées à très basse température. Ce phénomène est aussi présent dans d'autres types de composite où seule la température d'inversion est différente.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre un modèle basé sur une méthode d'homogénéisation périodique à deux échelles avec développement asymptotique du champ de température et avec prise en compte du mécanisme des phonons a été développé puis programmé en utilisant la méthode des éléments finis sous MATLAB. Ce modèle prend en compte le



(a) $vf = 33\%$ (b) $vf = 46\%$



(c) $vf = 77\%$

FIG. 3.9 – Conductivité thermique transversale, théorique et expérimentale [54], d'un composite unidirectionnel verre-E/époxyde pour différents taux de fibre.

comportement thermique non linéaire en température. Il a été validé avec les deux principaux modèles de transfert thermique à l'interface solide-solide AMM et DMM pour des taux volumiques de fibre de 33%, 46% et 77% et pour des températures supérieures à 10 K. Ce modèle s'est montré très satisfaisant pour les températures comprises entre 2 K et 10 K contrairement aux modèles classiques actuels d'estimation de la conductivité thermique transverse. Pour les températures inférieures à 2 K, le modèle n'a pu être vérifié par manque d'informations sur la conductivité thermique de la fibre de verre E et du composite unidirectionnel.

L'objectif à présent est d'utiliser ce modèle pour estimer le comportement thermique d'une mèche puis d'un composite tressé, en verre-E/époxyde, à très basse température. Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.

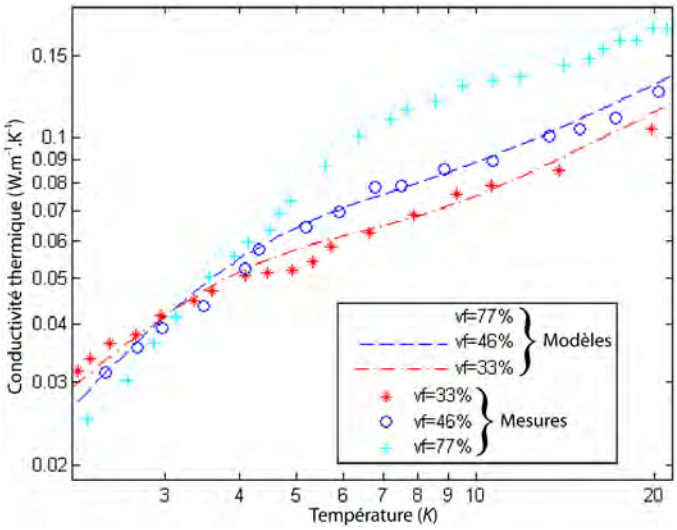


FIG. 3.10 – Conductivité thermique transverse d'un composite unidirectionnel verre-E/époxyde.

Chapitre 4

Détermination des conductivités thermiques équivalentes d'un composite tressé

4.1 Introduction

Un composite à renfort textile peut être considéré comme une structure périodique. Par conséquent l'étude d'une partie représentative de la structure est suffisante pour connaître son comportement global. Cette partie, appelée VER_t, est modélisée sur le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS 8.1. Dans le premier paragraphe, les différents aspects de cette modélisation sont présentés (géométrie, maillage et chargement thermique). De manière à valider ce modèle, des mesures de conductivité thermique à très basses températures ont été menées au CERN. La description du dispositif et du protocole expérimental font l'objet du second paragraphe. Ensuite, une comparaison entre les résultats mesurés et ceux obtenus par les modèles éléments finis d'une part et par la théorie des stratifiés d'autre part est effectuée. Enfin, dans un dernier paragraphe, la méthode d'homogénéisation permettant de déterminer les conductivités équivalentes du composite tressé est présentée.

4.2 Modélisation d'un composite tressé

4.2.1 Géométrie et maillage

La première étape de cette modélisation consiste à reproduire de la manière la plus réaliste possible la géométrie du renfort tressé (figure 4.1). Dans notre étude, le renfort se présente sous la forme d'un sergé 2D orienté à 45°, 2 flottés pour 2 liés avec renfort de fils d'âme. Afin de modéliser ce renfort, un volume

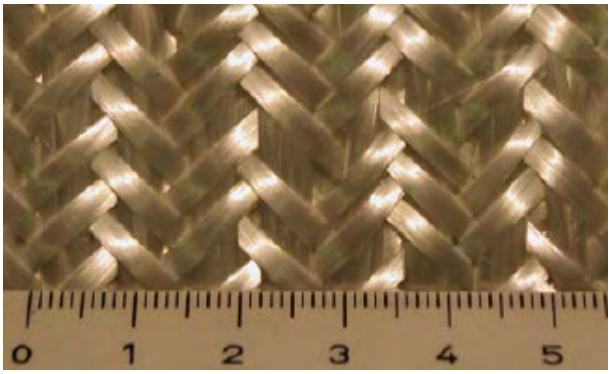
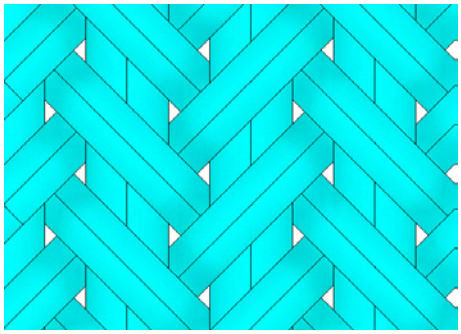
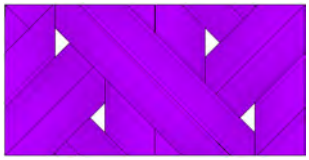


FIG. 4.1 – Photographie des fibres tressés du matériau composite étudié.

élémentaire représentatif est défini. Il s'agit d'identifier le motif du renfort tressé, dont la définition n'est pas unique (possibilité de translation dans le plan), qui par répétition périodique représente le renfort entier. Le motif représenté sur la figure 4.2 sera celui retenu et utilisé pour la modélisation. Malgré le motif complexe du VER_t,



(a) Renfort complet



(b) Renfort du VER_t

FIG. 4.2 – Représentation plane du renfort étudié.

la géométrie est directement construite sur le logiciel ANSYS 8.1. Les paramètres utilisés pour sa construction sont :

1. les dimensions des axes permettant de construire la section d'une mèche. Dans notre étude, la section est de type lenticulaire car elle fait partie des sections les plus réalistes [10] avec la section elliptique. Cette section est ensuite extrudée le long d'une spline de manière à obtenir une mèche ;
2. l'écartement des fils d'âme (mèches à 0°) ;
3. les angles d'orientation des différentes mèches ($\pm 45^\circ$) ;
4. les dimensions de la résine complémentaire ;
5. les coordonnées de points permettant de construire la ligne moyenne d'une mèche afin d'éviter les intersections, éventuelles, entre les différentes mèches.

A ces paramètres géométriques s'ajoutent les deux critères suivants concernant les conductivités thermiques :

1. les conductivités thermiques équivalentes, non-linéaires, des mèches peuvent être considérées, localement, comme celles de composites unidirectionnels avec un taux de fibre volumique élevé (80%) ;
2. la conductivité thermique de la résine est utilisée comme caractéristique thermique dans le reste du VER_t.

L'accès aux paramètres géométriques permettant de décrire le composite tressé est difficile. Tout d'abord, les dimensions à observer sont de l'ordre du dixième de millimètre. Une observation au microscope électronique, effectuée au CERN, ne permet pas de quantifier ces dimensions car lors de la préparation de l'échantillon, il est indispensable de déposer sur la surface à observer une fine couche de matériau possèdant des électrons en quantité suffisante du fait de la nature isolante du composite. Cette métallisation par dépôt d'or, pour nos observations, n'est pas nécessaire avec un microscope environnemental. En raison de ce dépôt, faire la distinction entre les mèches et la matrice est très difficile. De plus, il est très difficile de faire une coupure nette de l'échantillon sans détérioration des fibres ce qui modifie localement leur répartition sur la face observée (figure 4.3).

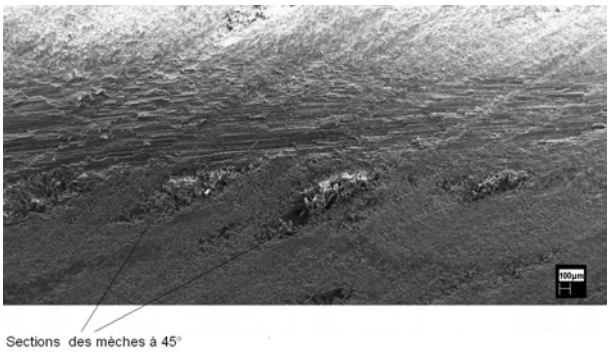


FIG. 4.3 – Vue en coupe du composite au microscope électronique à balayage.

Finalement les paramètres géométriques ont été obtenus par une observation du composite à l'œil nu et avec une loupe. En se placant à ce niveau d'échelle, il est plus aisé de faire une statistique des différentes dimensions.

Les figures (4.4) et (4.5) représentent le renfort du VER_t modélisé sur ANSYS 8.1 avec ses différentes dimensions. L'ensemble des volumes ainsi obtenus est maillé (figure 4.6) avec des éléments tridimensionnels (*solid 70*) de forme hexaédrique de manière générale et de forme prismatique dans les zones présentant des singularités géométriques (coins du VER_t). L'élément *solid 70* a l'avantage d'associer les paramètres matériels (conductivités thermiques) au repère local de l'élément. Cette

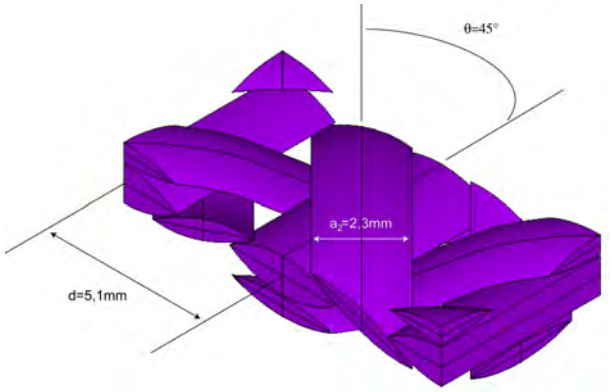


FIG. 4.4 – Vue isométrique du renfort.

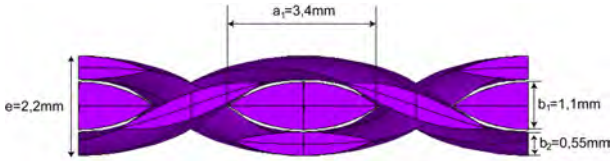


FIG. 4.5 – Vue de face du renfort.

condition est indispensable à l'obtention d'une mèche localement isotrope transverse. Le reste du VER_t (la résine) est complété par des éléments tétraédriques isotropes (figure 4.7).

4.2.2 Chargement

La seconde étape consiste à appliquer les conditions aux limites. Une différence de température ΔT constante est appliquée entre deux surfaces opposées du VER_t (figure 4.8). Ce choix est lié à la procédure expérimentale décrite au paragraphe suivant. Cette différence de température est très petite ($\approx 0,1K$) afin d'éviter les erreurs liées à la dépendance de la conductivité thermique en température. Après résolution, le tenseur de conductivité thermique effective $\left(\underline{\underline{\Lambda}}^{eff}\right)$ du composite tressé est déduit de la relation suivante (démonstration dans le paragraphe 4.3.1) :

$$\Lambda_{ii}^{eff}\left(T_{ini}+\frac{\Delta T}{2}\right)=\frac{Q_i l_i}{A_i \Delta T} \tag{4.1}$$

où Q_i est le flux de chaleur mesuré sur la surface orientée par i (A_i) ; l_i la longueur du VER_t suivant i ; T_{ini} la température au voisinage de laquelle on recherche la conductivité thermique ; Λ_{ii}^{eff} la conductivité thermique équivalente suivant i. Il est à noter que la convention d'Einstein n'est pas utilisée dans cette relation.

En parallèle à ces simulations, des mesures de conductivités thermiques à très basse température ont été menées au sein du CERN, sur des échantillons de com-

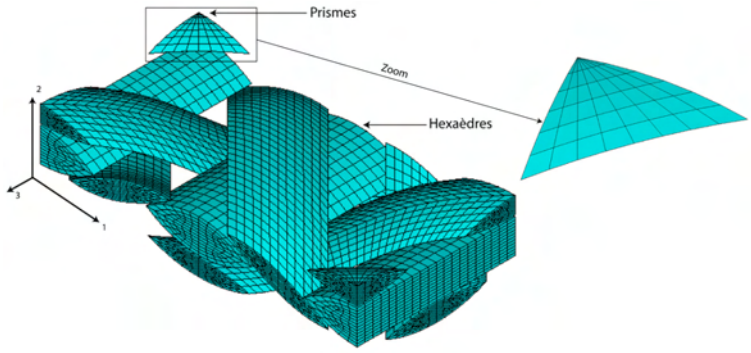


FIG. 4.6 – Maillage du renfort.

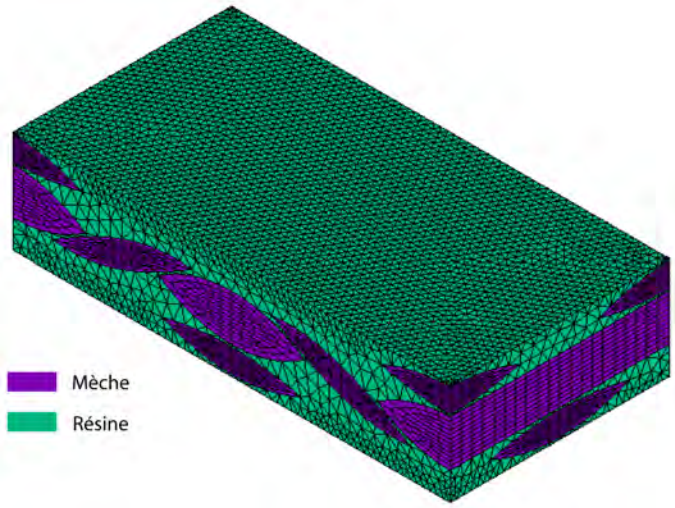


FIG. 4.7 – Maillage du VER_t.

posite tressé. Le dispositif et le protocole expérimental sont présentés dans le paragraphe suivant.

4.3 Mesure de la conductivité thermique d'un composite tressé à très basse température

4.3.1 Théorie de la mesure

La conductivité thermique d'un matériau est déterminée à l'aide d'une méthode dite statique ou stationnaire. Cette méthode consiste à attendre que le système soit dans un état d'équilibre. Dans cet état, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$div(\underline{q}) = 0 \tag{4.2}$$

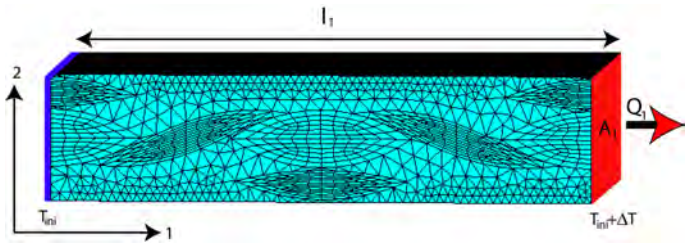


FIG. 4.8 – Exemple de détermination de Λ_{11}.

où $\underline{q}$ est le vecteur de densité de flux thermique défini par :

$$\underline{q} = -\underline{\underline{\Lambda}}^{exp}(T)\underline{grad}(T) \tag{4.3}$$

En appliquant l'équation (4.3) à l'échantillon de composite représenté à la figure 4.9 et en l'intégrant sur la surface constante S, l'équation devient :

$$Q_0 = -\Lambda_{11}^{exp}(T)S\frac{dT}{dL} \tag{4.4}$$

où dL est l'élément de longueur suivant l'axe 1.

Cette équation est communément appelée loi de FOURIER. L'expression de la conductivité thermique équivalente de l'échantillon est obtenue par intégration de l'équation (4.4) le long de l'échantillon :

$$\Lambda_{11}^{exp}\left(T_c + \frac{\Delta T}{2}\right) = \frac{Q_0 L}{S\Delta T} \tag{4.5}$$

Il est à noter que Λ_{11}^{exp} dépend fortement de la température à très basse température, par conséquent en pratique, la différence ΔT doit être aussi petite que possible, afin de considérer la conductivité thermique comme constante sur la longueur L.

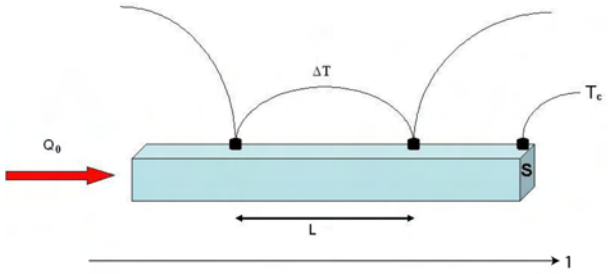


FIG. 4.9 – Représentation schématique d'un échantillon.

4.3.2 Dispositif expérimental

4.3.2.1 Description du dispositif

Afin de vérifier le modèle d'estimation de la conductivité thermique d'un composite tressé, j'ai effectué des mesures de conductivité thermique au CRYOLAB,

laboratoire spécialisé dans la cryogénie situé au sein du CERN. Les matériaux mesurés étant des isolants, ces tests sont très longs. En effet, pour chaque température, il faut attendre la stabilisation du champ de température dans l'échantillon (environ 30 mn pour chaque température). Par conséquent la zone d'étude est limitée aux températures comprises entre 4,5K et 26K. Dans ces conditions, l'utilisation de l'hélium liquide s'avère nécessaire. Celui-ci agit comme un puits de chaleur de 4,2K. Il est stocké dans un dewar (enceinte isolante) qui possède une ouverture à son sommet de manière à pouvoir y introduire une canne (sous vide) dans laquelle est placée l'échantillon à mesurer. La partie de la canne où est placée l'échantillon est représentée à la figure 4.10.

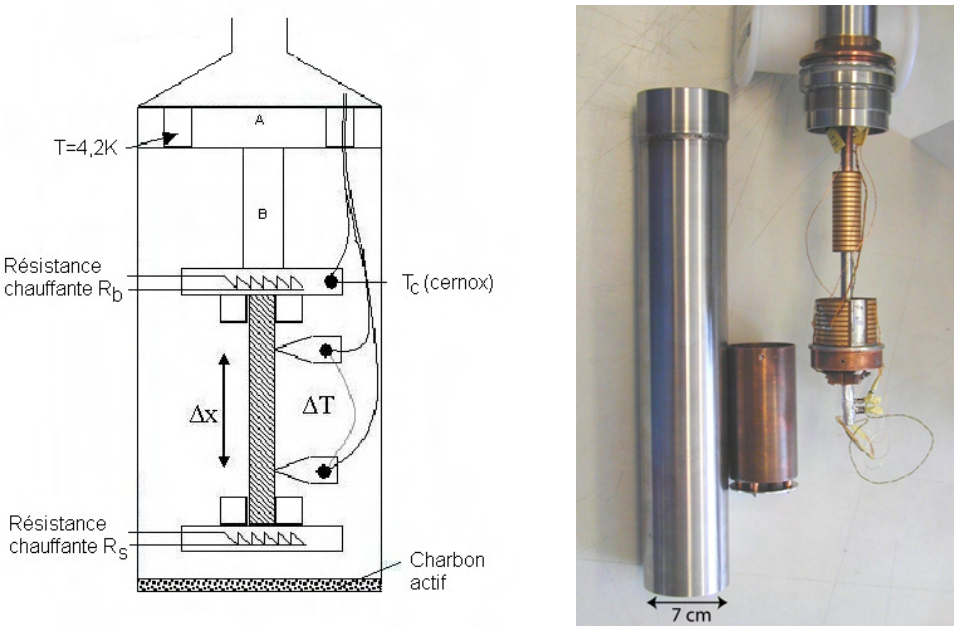


FIG. 4.10 – Schéma et photo du dispositif expérimental.

La partie A est en cuivre et est directement au contact de l'hélium. De conductivité thermique élevée, le cuivre a une température supposée constante et égale à 4,2K. Cette partie est aussi en contact avec la pièce B en cuivre, sur laquelle est fixée une sonde de température (T_c). De plus une résistance électrique ($R_b = 120\ \Omega$) permettant d'augmenter cette température et des mors de fixation de l'échantillon sont placés sur sa partie inférieure. Sur l'autre extrémité de l'échantillon, une petite plaque en cuivre est collée avec de l'Araldite lente (colle résistante aux très basses températures) sur laquelle est fixée une résistance électrique de 10 $k\Omega$ (R_s). Cette résistance permet d'appliquer un flux de chaleur, de manière précise (quelques μW), sur l'échantillon créant ainsi une différence de température ΔT qui est mesurée à l'aide d'un thermocouple (Chromel/Or) utilisé en différentiel. Ce thermocouple est

fixé sur des petits supports en inox qui ont été préalablement insérés dans deux trous ($0,1$ mm de diamètre) percés dans l'échantillon.

Les échantillons utilisés ont une section de $11,6 \times 3,8$ mm^2 et une longueur de 35 mm. La longueur utile pour le calcul de la conductivité thermique, qui est la distance entre les contacts du thermocouple, est de 20 mm.

4.3.2.2 Pertes de flux

Dans le calcul de $\underline{\underline{\lambda^{exp}}}$, le flux de chaleur Q_0 est supposé passer à travers tout l'échantillon. Cependant, en pratique, ce flux peut se dissiper de différentes manières. L'objectif de cette section est d'identifier et de quantifier ces pertes.

- **Pertes par rayonnement :** L'extérieur de la canne étant toujours à 4,2K (bain d'hélium), la chaleur rayonne de l'échantillon vers la canne. Cette quantitité de chaleur peut être quantifiée par la relation suivante [42] :

$$Q_{rad} = \frac{\sigma S_e (T_c^4 - T_{canne}^4)}{\frac{1}{\varepsilon_e} + \frac{S_e}{S_{canne}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{canne}} - 1 \right)} \tag{4.6}$$

  où $\sigma = 5,67e^{-8}$ $W.m^{-2}.K^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann, S_e la surface latérale de l'échantillon et S_{canne} la surface de la canne. T_c et T_{canne} sont les températures de l'échantillon et de la canne, ε_e et ε_{canne} les émissivités respectives. Cette relation est correcte pour des cylindres concentriques infinis, néanmoins elle est utilisée ici pour avoir un ordre de grandeur. Les émissivités sont estimées et non mesurées. ε_{canne} a été fixée à 0,1 sachant que les métaux classiques ont une emissivité de l'ordre de 0,01. Pour ce qui est de l'émissivité de l'échantillon, elle est plus difficile à estimer et par conséquent elle a été prise égale à 1 (cas le plus défavorable). Après calculs, pour les températures comprises dans la zone d'étude, le pourcentage de perte par rayonnement est inférieur à 1%, ce qui permet de les négliger.
- **Pertes par convection :** Le vide dans la canne étant inférieure à 10^{-3} Pa durant toute les mesures, la convection est négligeable.
- **Pertes par conduction dans les fils alimentant la résistance R_s :** Ces fils sont une source de perte de chaleur lorsqu'ils sont fins et longs, tandis qu'ils minimisent la génération de chaleur lorsqu'ils sont courts et larges. Le problème a été résolu en prenant des fils longs et fins, et une résistance R_s très grande (10 $k\Omega$), minimisant ainsi le courant circulant dans les fils et la génération de chaleur.
- **Pertes par conduction dans les fils du thermocouple :** Les thermocouples en Chromel-Or de Lakeshore ont été choisis pour leur haute sensibilité thermoélectrique. Les fils qui les composent ont une section de 0,013 mm^2 et

une longueur de 1,5 m. En limitant les ΔT à environ 0,1 K, les fuites sont supposées négligeables. Des mesures d'étalonnage effectuées au CERN ont permis de vérifier cette hypothèse (paragraphe suivant).

4.3.2.3 Validation du dispositif avec un échantillon de référence

Afin d'étalonner le dispositif expérimental, une première mesure est effectuée sur un échantillon de référence RM 8424 en graphite obtenue auprès du National Bureau of Standards (NBS) [36]. C'est un échantillon cylindrique de 6,4 mm de diamètre et de 50 mm de longueur. La distance entre les deux contacts du thermocouple est de 25 mm. La figure 4.11 représente l'évolution de la conductivité thermique en fonction de la température obtenue au CRYOLAB et par le NBS.

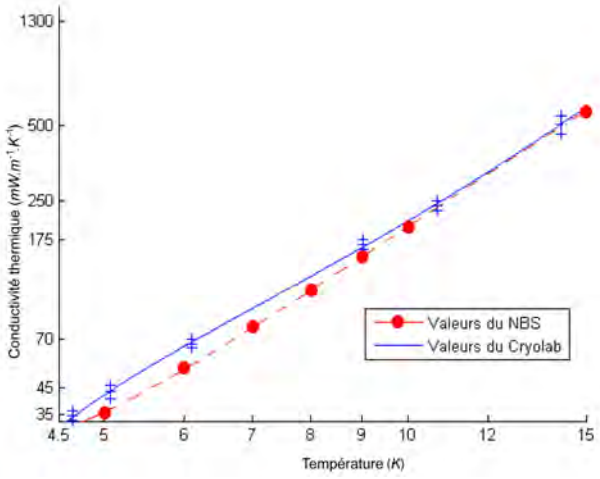


FIG. 4.11 – Evolution de la conductivité thermique pour différentes températures de T_c sur un échantillon de graphite.

Les résultats obtenus respectent bien la courbe d'étalonnage pour des températures supérieures à 10 K avec une erreur relative inférieure à 10 %. Par contre, pour des températures inférieures à 10 K, la différence est supérieure à 20 %. Cette différence est essentiellement due à l'hétérogénéité du graphite d'un échantillon de référence à un autre [36].

4.4 Résultats numériques et expérimentaux

Les résultats théoriques et expérimentaux sont présentés sur la figure 4.12. Les mesures ont été effectuées sur des échantillons coupés dans une plaque de composite qui possède le même renfort tressé que le support de dipôle du LHC. Les incertitudes

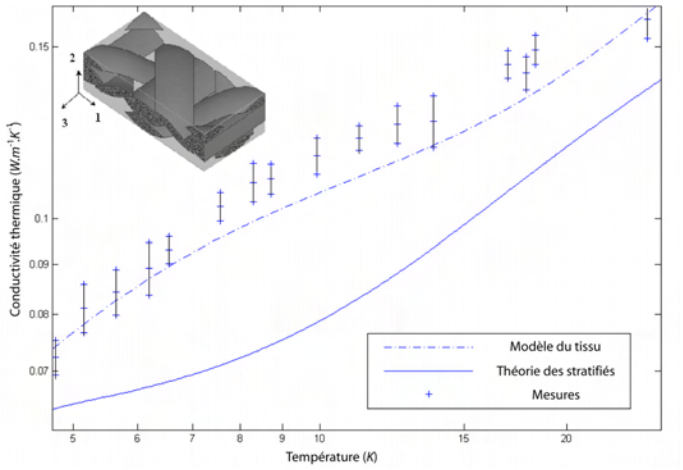


FIG. 4.12 – Conductivité thermique effective suivant l'axe 3.

représentées sur la figure sont celles de mesure (bruit). Les incertitudes de lecture sont supposées négligeables du fait de l'acquisition informatisée du dispositif.

Les résultats expérimentaux sont comparés d'une part aux simulations numériques du composite à renfort tressé et d'autre part à ceux obtenus avec la théorie des stratifiés. Ces deux modèles prennent en compte la résistance thermique d'interface de type AMM. Dans le modèle stratifié, la séquence d'empilement est $[-45/0/45]$ et le taux de fibres est de $31,25\%$ de manière à respecter la même orientation et le même taux volumique de fibres que pour le composite tressé modélisé. Les taux volumiques de fibres des plis sont présentés dans le tableau 4.1.

Orientation (degré)	Taux de fibre (%)
0	46,87
± 45	23,44

TAB. 4.1 – Orientation et taux de fibres des plis pour le modèle stratifié

Finalement, on peut constater que le modèle avec le tissu donne de meilleurs résultats que celui basé sur la théorie des stratifiés malgré un léger offset. Cette différence peut être en partie liée au fait que le taux de fibres utilisé dans le modèle du tissu n'est pas le même que celui de l'échantillon (46%). De manière à obtenir le taux de fibres réel, il serait nécessaire d'augmenter le taux de compactage du modèle numérique. Néanmoins cette modification est très difficile à réaliser à cause du croisement des mèches. La solution serait de reconstruire ce modèle à l'aide d'un logiciel de CAO et d'utiliser des surfaces paramétrées (cette alternative sera mise en œuvre lors de l'étude de l'influence de l'orientation des mèches dans l'annexe A).

4.5 Estimation du tenseur de conductivité thermique effective du tissu

Le modèle de calcul de la conductivité thermique du tissu a été validé par des mesures (paragraphe 4.4). A présent, le tenseur de conductivité thermique effective du tissu est recherché de manière à pouvoir l'utiliser en tant que paramètre matériel dans la modélisation d'une structure. Ce tenseur est calculé en utilisant une méthode d'homogénéisation basée sur différents tests simulés avec un modèle par éléments finis. L'idée est de calculer, par analogie avec la mécanique, la pseudo-énergie thermique W_t pour six cas de chargement différents. Les termes de couplage sont calculés de manière à vérifier si le composite a un comportement orthotrope.

La pseudo-énergie thermique est définie par :

$$2W_t = \frac{1}{V}\int_V \underline{q}.\underline{gradT}dV = \left\langle \underline{q}.\underline{gradT}\right\rangle_V \tag{4.7}$$

où V est le volume du VER_t, $\underline{q}$ le vecteur densité de flux thermique et $\underline{gradT}$ le vecteur gradient de température. Cette pseudo-énergie est directement calculée avec le logiciel ANSYS 8.1.

Le théorème de Hill [12] permettant de relier les grandeurs macroscopiques et microscopiques s'écrit :

$$\left\langle \underline{q}.\underline{gradT}\right\rangle_V = \left\langle \underline{q}\right\rangle_V . \left\langle \underline{gradT}\right\rangle_V \tag{4.8}$$

La pseudo-énergie s'exprime alors par

$$2W_t = \Lambda_{11}G_1^2 + \Lambda_{22}G_2^2 + \Lambda_{33}G_3^2 + 2\Lambda_{12}G_1G_2 + 2\Lambda_{13}G_1G_3 + 2\Lambda_{23}G_2G_3 \tag{4.9}$$

avec le tenseur de conductivité thermique effective du composite tressé $\underline{\underline{\Lambda}}$ défini par :

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{13} & \Lambda_{23} & \Lambda_{33} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Les conditions aux limites en température à appliquer sont les suivantes :

$$T = \underline{G}.\underline{OM} \tag{4.11}$$

où $\underline{G} = (G_1, G_2, G_3)^T$ est un vecteur constant (gradient de température) et $\underline{OM}$ le vecteur position correspondant aux coordonnées des noeuds appartenant aux bords du VER_t.

Différentes conditions de chargement ont été choisies de manière à annuler les termes non recherchés. Ces chargements sont au nombre de six et sont décrits ci-dessous.

4.5.1 Détermination de Λ_{11}, Λ_{22} et Λ_{33}

Une première série de chargements permet de calculer Λ_{11}, Λ_{22} et Λ_{33}. Ces trois termes correspondent aux coefficients situés sur la diagonale de la matrice $\underline{\underline{\Lambda}}$ et par conséquent, ils peuvent être calculés directement sans calculs préliminaires.

- Cas 1 : Calcul de Λ_{11}
  Dans le premier cas de chargement, la température est appliquée sur chaque noeud appartenant aux faces du VER_t (figure 4.13 a) de manière à avoir un gradient thermique constant égal à G_1 suivant la direction 1. Après résolution et simplification de l'équation (4.9), le coefficient Λ_{11} est obtenu avec la relation suivante :
  $$\Lambda_{11} = 2W_t \left(G_1\right)^{-2} \tag{4.12}$$
- Cas 2 : Calcul de Λ_{22}
  Dans le second cas de chargement, la température est appliquée sur chaque noeud appartenant aux faces du VER_t (figure 4.13 b) de manière à avoir un gradient thermique constant égal à G_2 suivant la direction 2. D'où :
  $$\Lambda_{22} = 2W_t \left(G_2\right)^{-2} \tag{4.13}$$
- Cas 3 : Calcul de Λ_{33}
  Dans le troisième cas de chargement, la température est appliquée sur chaque noeud appartenant aux faces du VER_t (figure 4.13 c) de manière à avoir un gradient thermique constant égal à G_3 suivant la direction 3. D'où :
  $$\Lambda_{33} = 2W_t \left(G_3\right)^{-2} \tag{4.14}$$

4.5.2 Détermination de Λ_{12}, Λ_{23} et Λ_{13}

Une seconde série de chargement permet de calculer Λ_{12}, Λ_{23} et Λ_{13}. Ces trois termes correspondent aux coefficients de couplage dans la matrice $\underline{\underline{\Lambda}}$ et par conséquent, les résultats précédents sont indispensables.

- Cas 1 : Calcul de Λ_{12}
  Dans le premier cas de chargement, la température est appliquée sur chaque nœud appartenant aux faces du VER_t (figure 4.13 d) de manière à avoir un gradient thermique constant égal à G_1 suivant la direction 1 et égal à G_2 suivant la direction 2. D'où :
  $$\Lambda_{12} = \frac{2W_t - \Lambda_{11}\left(G_1\right)^2 - \Lambda_{22}\left(G_2\right)^2}{2G_1G_2} \tag{4.15}$$
- Cas 2 : Calcul de Λ_{23}

Dans le second cas de chargement, la température est appliquée sur chaque noeud appartenant aux faces du VER_t (figure 4.13 e) de manière à avoir un gradient thermique constant égal à G_2 suivant la direction 2 et égal à G_3 suivant la direction 3. D'où :

$$\Lambda_{12} = \frac{2W_t - \Lambda_{22}\left(G_2\right)^2 - \Lambda_{33}\left(G_3\right)^2}{2G_2G_3} \tag{4.16}$$

– Cas 3 : Calcul de Λ_{13}
Dans le troisième cas de chargement, la température est appliquée sur chaque noeud appartenant aux faces du VER_t (figure 4.13 f) de manière à avoir un gradient thermique constant égal à G_1 suivant la direction 1 et égal à G_3 suivant la direction 3. D'où :

$$\Lambda_{12} = \frac{2W_t - \Lambda_{11}\left(G_1\right)^2 - \Lambda_{33}\left(G_3\right)^2}{2G_1G_3} \tag{4.17}$$

4.5.3 Résultats

Le tenseur de conductivité thermique $\underline{\underline{\Lambda}}$ a été déterminé pour des températures T_{ini} comprises entre $1,9K$ et $293K$. Tout comme dans le paragraphe 4.3, la différence de température (ΔT) a été fixée à $0,1K$. La figure 4.14 présente les valeurs des composantes de ce tenseur en fonction de la température.

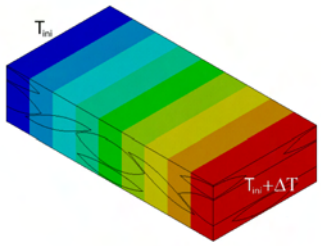
La figure 4.14 (a) montre que la composante Λ_{33} du tenseur de conductivité thermique est légèrement plus élevée. Ce résultat était prévisible car la direction associée à cette composante est la même que celle des mèches à 0°. Ensuite on trouve la composante Λ_{11} qui possède une valeur intermédiaire. Finalement, c'est la composante Λ_{22} qui a la valeur la plus faible du fait qu'aucune mèche ne traverse le VER_t dans la direction associée. On peut remarquer que la moyenne des écarts relatifs entre Λ_{33} et Λ_{22} est de 30 %.

La figure 4.14 (b) montre que les composantes hors diagonale du tenseur de conductivité thermique ont des valeurs très faibles comparées aux termes de la diagonale. L'évolution des grandeurs Λ_{12}, Λ_{13} et Λ_{23} en fonction de la température n'a pas vraiment de signification physique dans la mesure où les valeurs obtenues sont dans le domaine des erreurs numériques. Le comportement thermique du composite tressé peut donc être considéré orthotrope avec les axes 1, 2 et 3 axes d'orthotropie.

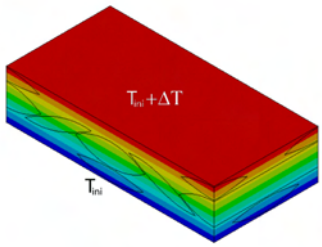
4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un composite tressé a été modélisé par le logiciel de calculs par éléments finis ANSYS 8.1. Ce modèle prend en compte le mécanisme des phonons

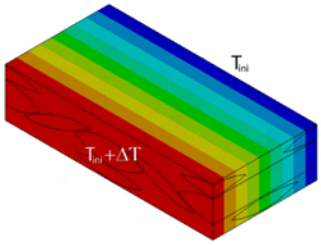
à l'interface fibre/matrice au sein de chaque mèche. Un chargement numérique a été appliqué, comparé et validé avec des résultats expérimentaux obtenus au CERN pour des températures cryogéniques. De plus, la comparaison avec la théorie des stratifiés a permis de montrer qu'une représentation plus réaliste de la géométrie d'un composite tressé donnait des résultats bien plus satisfaisants, quelle que soit la température, que lorsqu'il était considéré comme un empilement de plis undirectionnels. Finalement, une méthode d'homogénéisation a été appliquée sur le VER_t du composite tressé de manière à vérifier son comportement orthotrope d'une part et à déterminer les composantes du tenseur de conductivité thermique effective d'autre part dans l'optique de les utiliser dans un calcul de structure.



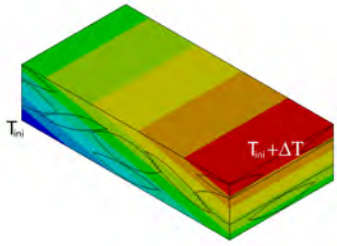
(a) Chargement pour obtenir Λ_{11}



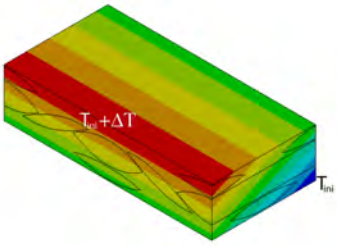
(b) Chargement pour obtenir Λ_{22}



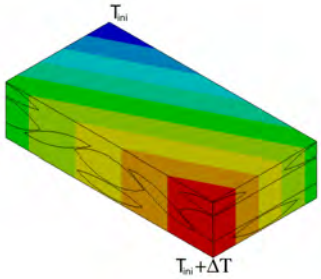
(c) Chargement pour obtenir Λ_{33}



(d) Chargement pour obtenir Λ_{12}

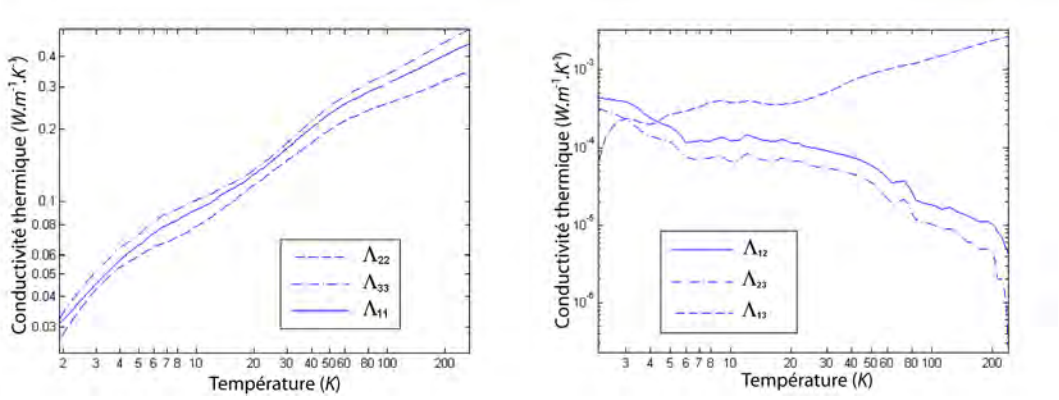


(e) Chargement pour obtenir Λ_{23}



(f) Chargement pour obtenir Λ_{13}

FIG. 4.13 – Représentation des différents cas de chargement.



(a) Composantes sur la diagonale (b) Composantes hors diagonale

FIG. 4.14 – Représentation des différentes composantes du tenseur de conductivité thermique.

Chapitre 5

Conclusion

Dans cette partie, le comportement thermique d'un composite tressé a été étudié à l'aide d'une méthode multi-échelle. En effet, chaque mèche de ce composite a été assimilée localement à un composite unidirectionnel sur lequel une méthode d'homogénéisation asymptotique à double échelle a été appliquée. Cette méthode prend en compte les modifications du transfert thermique au sein des solides à très basse température. Ce sont ces modifications qui font que l'ensemble des modèles classiques d'estimation de la conductivité thermique effective ont été mis en défaut. Plusieurs simulations ont été effectuées sur le modèle puis validées par des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature. Cette validation a permis d'utiliser les coefficients homogénéisés en tant que paramètre matériel du renfort. Celui-ci a été modélisé de la manière la plus réaliste possible et comparé à des essais effectués au CERN. Au final, ce modèle donne des résultats plus satisfaisants que ceux obtenus avec la théorie classique des stratifiés. Ces bons résultats ont permis de continuer l'étude en passant au niveau d'échelle supérieur. Pour cela, une méthode d'homogénéisation a été utilisée de manière à calculer le tenseur de conductivité thermique effective associé au composite tressé. A présent, l'objectif est d'étudier le comportement mécanique de ce composite par une approche similaire.

Deuxième partie

Comportement mécanique

Chapitre 6

Etat de l'art

6.1 Introduction

Dans la partie précédente le comportement thermique du composite tressé utilisé dans la fabrication des supports du LHC a été étudié. L'influence de la température sur la conductivité thermique des fibres, de la matrice et du composite a été montrée. L'objectif de ce chapitre est de décrire l'influence qu'elle peut avoir sur le comportement mécanique des constituants et de présenter les modèles d'estimation du comportement mécanique équivalent des composites unidirectionnels et tressés.

Dans un premier paragraphe, le comportement thermoélastique des différents constituants est étudié en fonction de la température. Une fois ces deux constituants assemblés, ils forment un composite. Dans le cas du composite unidirectionnel, les méthodes classiques permettant de déterminer son comportement thermoélastique équivalent sont présentés dans le deuxième paragraphe. Enfin, des modèles de prédiction du comportement élastique de composites à renforts textiles recensés dans la littérature sont présentés dans le troisième paragraphe.

6.2 Comportement thermoélastique des différents constituants

6.2.1 La fibre de verre E

La fibre de verre E est un matériau isotrope avec des liaisons interatomiques fortes (covalentes) induisant une forte tenue mécanique dans les trois directions. En effet, sa contrainte à la rupture et sa rigidité sont respectivement de $3,2\ GPa$ et $70\ GPa$ à $4,2\ K$ [29]. De plus, ces valeurs sont pratiquement indépendantes de la température [29]. Il en est de même pour la contraction thermique dont la valeur est très faible ($\alpha_f = 4,8 \times 10^{-6} K^{-1}$) et le coefficient de Poisson (0,25).

6.2.2 La résine époxyde

La résine époxyde est un matériau isotrope mais contrairement à la fibre de verre E, son comportement mécanique est fortement influencé par la température. Lors d'une baisse de température, la résine devient plus fragile mais aussi plus rigide. En effet, son module d'élasticité est multiplié par 3 pour une variation de température de 293 K à 4,2 K [29]. La figure 6.1 illustre l'évolution de ce module en fonction de la température.

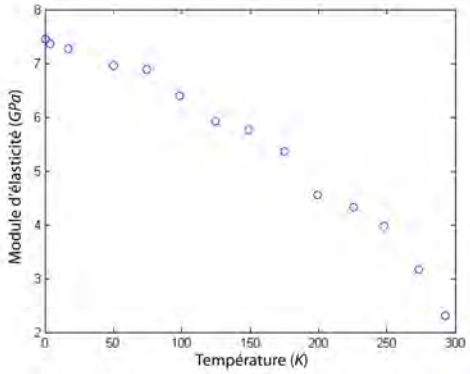


FIG. 6.1 – Evolution du module d'élasticité de la résine époxyde en fonction de la température [29].

Cette figure montre que le module d'élasticité augmente de manière non linéaire avec la baisse de température. Globalement, cette augmentation diminue avec la baisse de température. La déformation thermique de la résine dépend aussi fortement de la température [28]. En effet, elle varie de façon non linéaire et peut quasiment atteindre $-1,2$ % à $4,2$ K (figure 6.2).

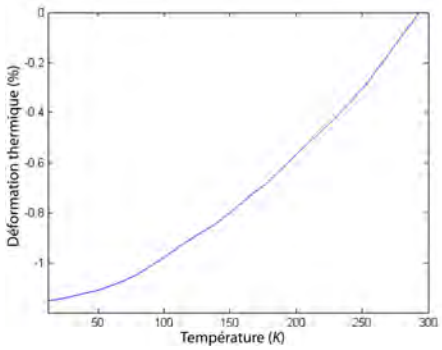


FIG. 6.2 – Evolution de la déformation thermique de la résine époxyde en fonction de la température [60].

Son coefficient de Poisson est supposé constant et égal à 0,4.

L'objectif du paragraphe suivant est de présenter les différents modèles permettant d'estimer le comportement thermoélastique effectif d'un composite unidirectionnel.

6.3 Comportement élastique d'un composite unidirectionnel

Plusieurs méthodes permettent d'estimer les modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel. La première, qui est un modèle simplifié (semi-empirique), est basé sur la loi des mélanges. La construction du modèle longitudinal et transversal est décrit dans le livre de Berthelot [9]. Les expressions des modules équivalents dépendent des modules de la fibre (E_f), de la résine (E_m) et du taux de fibre (v_f). Elles ont une forme similaire à celles des conductivités thermiques équivalentes présentées dans les paragraphes 2.2.4 et 2.2.5 :

$$E_{long} = (1 - v_f)E_m + v_f E_f \tag{6.1}$$

$$E_{trans} = \frac{1}{\frac{v_f}{E_f} + \frac{(1-v_f)}{E_m}} \tag{6.2}$$

Ces relations sont simples et facilement adaptables à la pratique. Néanmoins, elles ne permettent pas une réelle prédiction quantitative des propriétés mais plutôt qualitative.

Ensuite, on trouve les méthodes basées sur la théorie classique de la mécanique des solides déformables, qui ne sont généralement applicables que pour des schémas simplifiés (géométrie de la cellule élémentaire, conditions aux limites, etc). Dans ces méthodes, la résolution peut être analytique ou numérique (éléments finis, différences finies, etc).

Dans la recherche d'expressions limites, on trouve les théorèmes variationnels de l'énergie qui permettent d'obtenir les bornes supérieure et inférieure des modules d'élasticité. De nombreux auteurs ont travaillé dans ce cadre. Hashin [30] et Hill [33] ont étudié ces bornes dans le cas des fibres de différents diamètres réparties au hasard avec une proportion donnée en volume. D'autre part, Hashin et al. [32] ont effectué des travaux analogues dans le cas des fibres de diamètres identiques réparties suivant un arrangement hexagonal. En pratique ces approches sont très peu utilisées car les bornes trouvées sont souvent trop éloignées.

Enfin, on trouve les méthodes d'homogénéisation appliqués aux comportements élastiques [59] et thermoélastiques [72][22]. Une méthode d'homogénéisation thermoélastique périodique non linéaire appliquée à un composite unidirectionnel à fibre de verre-E et résine époxyde sera décrite dans le chapitre suivant. Elle sera basée

sur celle décrite par Ene [22]. L'apport de ce travail par rapport aux travaux antérieurs réside dans la prise en compte de la dépendance en température des constituants, l'introduction de variables d'espace adimensionnelles et l'utilisation d'un développement asymptotique sous forme de formulations variationnelles à la place d'un développement sous forme de formulations fortes.

6.4 Modèles d'estimation du comportement mécanique équivalent d'un composite à renforts textiles

Depuis 30 à 40 ans, de nombreux modèles ont été développés dans le but d'estimer la réponse élastique des composites à renforts textiles [10][11]. Les premiers modèles apparus dans les années 70 sont analytiques. Ils n'étaient utilisables que pour des composites renforcés par des fibres rectilignes orientées suivant deux ou trois directions [51]. Vers les années 80, la méthode des rigidités moyennes a été introduite [41][71] dans laquelle chaque mèche est subdivisée en éléments unidirectionnels. Les propriétés mécaniques associées à cet élément sont ensuite exprimées dans le repère du composite. Enfin les propriétés mécaniques équivalentes du composite sont obtenues en moyennant celles des éléments sur leur volume. Ces modèles ont ensuite été améliorés en tenant compte de l'inclinaison des mèches [20] puis de leurs ondulations [44]. Toutefois, ces modèles ne sont efficaces que pour des composites 2D et biaxiaux. En effet, dans le cas des composites triaxiaux, la description mathématique de la géométrie du renfort s'avère très difficile à effectuer. Il est par conséquent préférable d'utiliser des modèles numériques basés sur la méthode des éléments finis. En couplant ces modèles avec des techniques d'homogénéisation [16][18], le comportement mécanique d'un composite tressé est estimé avec une bonne précision. La plus grande difficulté dans ces modèles est de construire la géométrie du renfort textile.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la forte influence de la température sur le module d'élasticité et la déformation thermique de la résine époxyde ont été présentées ainsi que les principaux modèles permettant d'estimer les modules d'élasticité effectifs des composites unidirectionnels et à renforts textiles. Dans la suite de l'étude un modèle d'homogénéisation thermoélastique est développé et résolu à l'aide des paramètres matériels de chacun des constituants (module d'élasticité et déformation thermique). Il prend en compte la dépendance non linéaire du module d'élasticité et de la

déformation thermique des constituants à la température sur une plage comprise entre 2 K et 293 K. A notre connaissance, dans cette gamme de température, une approche aussi complète incluant des aspects théoriques et numériques n'a pas été trouvée dans la littérature.

Chapitre 7

Etude du comportement thermoélastique d'un composite unidirectionnel par homogénéisation périodique

7.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de déterminer le tenseur de rigidité et de déformation thermique équivalent d'un composite unidirectionnel avec prise en compte de la dépendance en température du module d'élasticité de chacun des constituants. Dans cette optique, une méthode d'homogénéisation périodique avec développement asymptotique du champ des déplacements est mise en oeuvre.

Dans le paragraphe 7.2, le développement théorique de la méthode est présenté. La méthode d'homogénéisation périodique est appliquée à l'équation d'équilibre en statique. Ce développement permet d'obtenir quatre formulations variationnelles dont deux pour l'estimation du tenseur de rigidité équivalent et deux pour l'estimation du tenseur de déformation thermique équivalent du composite unidirectionnel. Pour chacun des cas, la première formulation, dite microscopique, correspond à l'équation d'équilibre au sein du VER et la deuxième, dite macroscopique, correspond à l'équation d'équilibre pour un matériau homogène équivalent. C'est la résolution des premières formulations variationnelles qui permet d'obtenir les modules d'élasticité et les déformations thermiques équivalents du composite unidirectionnel. Leur résolution par la méthode des éléments finis fait l'objet du paragraphe 7.3. Enfin, dans le paragraphe 7.4, les résultats de la modélisation sont comparés à ceux obtenus expérimentalement par Walsh et al. [69] et Hartwig et al. [29].

7.2 Développement théorique

La méthodologie est similaire à celle utilisée en thermique. Les notations sont conservées et le composite unidirectionnel $\mathbf{\Omega}$ étudié est celui représenté sur la figure 7.1.

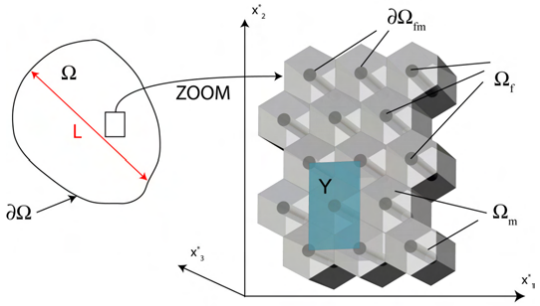


FIG. 7.1 – Rappel de la représentation schématique d'un composite unidirectionnel.

7.2.1 Formulation forte

Dans le cas statique, en négligeant les forces volumiques, les équations d'équilibre statique s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{\epsilon}}{\partial x_j^*} = 0 \qquad \text{dans} \quad \mathbf{\Omega_f} \cup \mathbf{\Omega_m} \tag{7.1}$$

où $\underline{\underline{\sigma^{\epsilon}}}$ est le tenseur des contraintes relié au vecteur déplacement $\underline{u}^{\epsilon}$ par la loi de comportement thermoélastique suivante :

$$\sigma_{ij}^{\epsilon} = C_{ijkl}^{\epsilon}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon})\left[\varepsilon_{kl}^{\epsilon}(\underline{u}^{\epsilon}) - \varepsilon_{kl}^{therm\epsilon}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon})\right] \tag{7.2}$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{C^{\epsilon}}}}}(\mathbf{x}^*, T^{\epsilon})$ est le tenseur de rigidité symétrique dépendant de la température T^{ϵ} et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{therm\epsilon}$ le tenseur des déformations thermiques.

En se plaçant dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, la relation de compatibilité linéarisée entre les déformations mécaniques et le gradient du vecteur déplacement $\underline{u}^{\epsilon}$ s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{\epsilon}(\underline{u}^{\epsilon}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{\epsilon}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^{\epsilon}}{\partial x_i^*}\right) \tag{7.3}$$

A l'interface fibre/matrice $\partial\mathbf{\Omega}_{fm}$, nous supposons qu'il y a continuité du champ de déplacement et continuité du vecteur contrainte :

$$u_j^{f\epsilon} = u_j^{m\epsilon} \qquad \text{sur} \quad \partial\mathbf{\Omega}_{fm} \tag{7.4}$$

$$\sigma_{ij}^{f\epsilon} n_j^f = \sigma_{ij}^{m\epsilon} n_j^f \qquad \text{sur} \quad \partial\mathbf{\Omega}_{fm} \tag{7.5}$$

Introduisons à présent les nombres adimensionnels suivants :

$$\mathbf{y} \equiv \frac{\mathbf{x}^*}{l} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x} \equiv \frac{\mathbf{x}^*}{L} \tag{7.6}$$

Ce changement de variable implique que l'équation (7.1) est homogénéisable si et seulement si le terme $\varepsilon_{kl}^{therm\epsilon} = O(\varepsilon)$[5].

En supposant cette condition vérifiée, le problème de thermoélasticité dans un composite unidirectionnel devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}^{\epsilon}}{\partial y_j} = 0 & \text{dans} \quad \mathbf{\Omega_f} \cup \mathbf{\Omega_m} \\ \sigma_{ij}^{\epsilon} = C_{ijkl}^{\epsilon}(\mathbf{y}, T^{\epsilon}) \left[l^{-1} \varepsilon_{kly}^{\epsilon}(\underline{u}^{\epsilon}) - \epsilon \varepsilon_{kl}^{therm\epsilon}(\mathbf{y}, T^{\epsilon}) \right] \\ \varepsilon_{ijy}^{\epsilon}(\underline{u}^{\epsilon}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{\epsilon}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{\epsilon}}{\partial y_i} \right) \\ u_j^{f\epsilon} = u_j^{m\epsilon} & \text{sur} \quad \partial \mathbf{\Omega}_{fm} \\ \sigma_{ij}^{f\epsilon} n_j^f = \sigma_{ij}^{m\epsilon} n_j^f & \text{sur} \quad \partial \mathbf{\Omega}_{fm} \\ \text{Conditions aux limites de Dirichlet} & \text{sur} \quad \partial \mathbf{\Omega} \end{cases} \tag{7.7}$$

Afin de résoudre ce système par la méthode des éléments finis, une formulation variationnelle est introduite et présentée dans le paragraphe suivant.

7.2.2 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (7.1) par le tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\epsilon}(\underline{v}^{\epsilon})$ associé à un vecteur déplacement test $\underline{v}^{\epsilon}$, en appliquant la première forme du théorème de Green [58] et en introduisant les équations (7.2) à (7.4), la formulation variationnelle associée au problème de thermoélasticité est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u}^{\epsilon} \in H_0^1(\mathbf{\Omega}) \\ \int_{\mathbf{\Omega_f} \cup \mathbf{\Omega_m}} C_{ijkl}^{\epsilon} \left[l^{-1} \varepsilon_{kly}^{\epsilon}(\underline{u}^{\epsilon}) - \epsilon \varepsilon_{kl}^{therm\epsilon} \right] \varepsilon_{ijy}^{\epsilon}(\underline{v}^{\epsilon}) dV = 0 \qquad \forall \underline{v}^{\epsilon} \in H_0^1(\mathbf{\Omega}) \end{cases} \tag{7.8}$$

7.2.3 Développement asymptotique à deux échelles

Dans ce paragraphe, le développement asymptotique à deux échelles est présenté. Il permet d'obtenir les formulations variationnelles microscopiques et macroscopiques. Dans cette optique, le vecteur déplacement $\underline{u}^{\epsilon}$ et le vecteur déplacement test $\underline{v}^{\epsilon}$ sont cherchés sous la forme d'un développement asymptotique en fonction du paramètre ϵ et des variables d'espace $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$:

$$\underline{u}^{\epsilon}(\mathbf{y}) = \underline{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underline{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon \underline{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{7.9}$$

$$\underline{v}^{\epsilon}(\mathbf{y}) = \underline{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underline{v}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon \underline{v}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{7.10}$$

Comme les tenseurs de rigidité et de déformation thermique dépendent de la température T^{ϵ}, un développement de Taylor au voisinage de la température T^0 est effectué :

$$C_{ijkl}^{\epsilon}(\mathbf{y}, T^{\epsilon}) = C_{ijkl}(\mathbf{y}, T(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = C_{ijkl}^0 \tag{7.11}$$

$$\varepsilon_{kl}^{therm\epsilon}(\mathbf{y}, T^{\epsilon}) = \varepsilon_{kl}^{therm}(\mathbf{y}, T(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \varepsilon_{kl}^{therm0} \tag{7.12}$$

où les composantes de $\underset{\equiv\equiv}{C}^0$ et $\underset{\equiv}{\varepsilon}^{therm0}$ sont $\mathbf{Y}$-périodiques et

$$C_{ijkl}^0 = C_{ijkl}\big(\mathbf{y}, T^0\big)$$
$$\varepsilon_{kl}^{therm0} = \varepsilon_{ij}^{therm}\big(\mathbf{y}, T^0\big)$$

Les expressions (7.11) et (7.12) sont arrêtés à l'ordre ϵ^0 car la contribution des fluctuations du champ de température (ϵT^1) sur les modules d'élasticité et sur les déformations thermiques est supposée négligeable.

A présent, l'objectif est d'introduire les relations (7.9)-(7.12) dans la formulation (7.8). L'opérateur dérivée $\frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} + \epsilon\frac{\partial}{\partial x_j}$ est appliqué et les termes de même puissance en ϵ sont collectés. Ainsi avec les termes d'ordre ϵ^0, l'équation (7.8) devient :

$$\int_{\mathbf{\Omega_f}\cup\mathbf{\Omega_m}} C_{ijkl}^{\epsilon}\varepsilon_{kly}^0(\underline{u}^0)\varepsilon_{ijy}^0(\underline{v}^0)dV = 0 \tag{7.13}$$

La solution de ce système met en évidence le fait que $\underline{u}^0$ est indépendant de la variable d'espace microscopique, soit

$$\underline{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \underline{u}^0(\mathbf{x}) \tag{7.14}$$

En collectant les termes d'ordre ϵ^1, l'équation (7.8) devient :

$$\int_{\mathbf{\Omega_f}\cup\mathbf{\Omega_m}} C_{ijkl}^0\left[l^{-1}\left(\varepsilon_{kly}(u^1) + \varepsilon_{klx}(u^0)\right) - \varepsilon_{kl}^{therm0}\right]\left(\varepsilon_{kly}(v^1) + \varepsilon_{klx}(v^0)\right)dV = 0 \tag{7.15}$$

où

$$\varepsilon_{klx}(v^0) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i^{\epsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\epsilon}}{\partial x_i}\Big) \tag{7.16}$$

Cette nouvelle formulation variationnelle peut être séparée en deux équations correspondant à chacune des échelles.

7.2.4 Formulation variationnelle à l'échelle microscopique

Posons v^0 =constante, l'équation (7.15) s'écrit alors :

$$\int_{\mathbf{\Omega_f}\cup\mathbf{\Omega_m}} C_{ijkl}^0\left[l^{-1}\left(\varepsilon_{kly}(u^1) + \varepsilon_{klx}(u^0)\right) - \varepsilon_{kl}^{therm0}\right]\varepsilon_{kly}(v^1)dV = 0 \tag{7.17}$$

Le paramètre x n'intervient dans l'équation (7.17) que par le terme $\varepsilon_{klx}(u^0)$, si bien que, par linéarité nous cherchons le vecteur solution $\underline{u}^1$ de ce système sous la forme :

$$\underline{u}^1 = \varepsilon_{mnx}(\underline{u}^0)\underline{\chi}^{mn}(\mathbf{y}) - l\underline{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{7.18}$$

où les vecteurs $\underline{\chi}^{mn}(\mathbf{y})$ et $\underline{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ sont $\mathbf{Y}$-périodiques.

Le problème réside dans la détermination des vecteurs $\underline{\chi}^{mn}(\mathbf{y})$ et $\underline{\varphi}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. En utilisant la propriété de périodicité [58], nous obtenons les formulations variationnelles du problème thermoélastique à l'échelle microscopique :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \underline{\chi}^{mn} \in H^1_{per}(\mathbf{Y}) \\ \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} C^0_{ijkl}\left[\delta_{mk}\delta_{nl}+\varepsilon_{kly}(\underline{\chi}^{mn})\right]\varepsilon_{ijy}(\underline{v}^1)dV=0 \qquad \forall \underline{v}^1 \in H^1_{per}(\mathbf{Y}) \end{array}\right. \tag{7.19}$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \underline{\varphi} \in H^1_{per}(\mathbf{Y}) \\ \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} C^0_{ijkl}\left[\varepsilon^{therm0}_{kl}+\varepsilon_{kly}(\underline{\varphi})\right]\varepsilon_{ijy}(\underline{v}^1)dV=0 \qquad \forall \underline{v}^1 \in H^1_{per}(\mathbf{Y}) \end{array}\right. \tag{7.20}$$

7.2.5 Formulation variationnelle à l'échelle macroscopique

En posant $v^1 = v^1(x)$ dans l'équation (7.15), en utilisant l'équation (7.18) et la propriété de périodicité, nous obtenons l'équation homogénéisée du problème thermoélastique :

$$\int_{\mathbf{\Omega}} C^{eff}_{ijmn}(T^0)\left[l^{-1}\varepsilon_{mnx}(\underline{u}^0)-\varepsilon^{thermeff}_{mn}\right]\varepsilon_{ijx}(\underline{v}^0)dV=0 \tag{7.21}$$

où

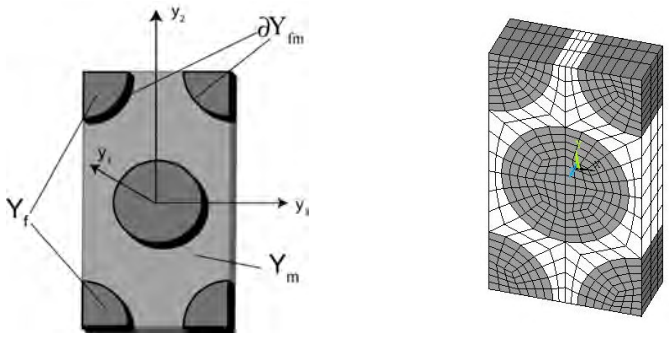
$$C^{eff}_{ijmn}(T^0)=\frac{1}{|\mathbf{Y}|}\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} C^0_{ijkl}\left[\delta_{mk}\delta_{nl}+\varepsilon_{kly}(\underline{\chi}^{mn})\right]dV \tag{7.22}$$

$$\varepsilon^{thermeff}_{mn}(T^0)=\frac{\left[C^{eff}_{ijmn}(T^0)\right]^{-1}}{|\mathbf{Y}|}\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} C^0_{ijkl}\left[\varepsilon^{therm0}_{kl}+\varepsilon_{kly}(\underline{\varphi})\right]dV \tag{7.23}$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{eff}(T^0)$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{thermeff}(T^0)$ sont respectivement le tenseur de rigidité effective et le tenseur de déformation thermique effective du composite unidirectionnel.

7.3 Résolution numérique

L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer la méthodologie de résolution par éléments finis présentée dans le paragraphe 3.3 pour le calcul des tenseurs homogénéisés $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{eff}(T^0)$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{thermeff}(T^0)$. Afin de trouver ces tenseurs, les vecteurs $\underline{\chi}^{mn}$ et $\underline{\varphi}$ sont calculés en résolvant les formulations variationnelles (7.19) et (7.20). La géométrie du domaine $\mathbf{Y}$ est toujours celle représentée sur la figure 7.2 (a) et son maillage celui représenté sur la figure 7.2 (b).



(a) (b)

FIG. 7.2 – Rappel de la géométrie du VER (a) et de son maillage (b).

7.3.1 Discrétisation des formulations variationnelles

Les vecteurs $\underline{\chi}^{mn}$, $\underline{\varphi}$ et les vecteurs tests $\underline{v}^1$ associés sont interpolés par des fonctions de forme N_{ij}. Ces fonctions de forme sont choisies identiques pour les 3 vecteurs :

$$\begin{aligned} \underline{\chi}^{mn} &= [N]\{\chi^{mn}\} \\ \underline{\varphi} &= [N]\{\varphi\} \\ \underline{v}^1 &= [N]\{v^1\} \end{aligned} \tag{7.24}$$

où $\{\chi^{mn}\}$, $\{\varphi\}$ et $\{v^1\}$ sont respectivement les vecteurs constitués des inconnues nodales χ_i^{mn}, φ_i et v_i^1.

Les trois équations précédentes sont alors introduites dans chaque terme des formulations variationnelles (7.19) et (7.20) qui deviennent après contraction des indices :

$$\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T\{C^{0k}\}dV + \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T[C^0][B]\{\chi^k\}dV = 0 \tag{7.25}$$

$$\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T[C^0]\{\varepsilon^{therm}\}dV + \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T[C^0][B]\{\varphi\}dV = 0 \tag{7.26}$$

où $[C^0]$ est la matrice de rigidité et $\{C^{0k}\}$ le vecteur qui correspond à la colonne k de ce tenseur ; $\{\varepsilon^{therm}\}$ est le vecteur associé aux déformations thermiques ; [B] est la matrice constituée des dérivées des fonctions de forme.

7.3.2 Application des conditions aux limites de périodicité

Les conditions aux limites sont périodiques. Comme dans la partie thermique (paragraphe 3.3.3), elles sont prises en compte en utilisant des multiplicateurs de Lagrange. Le système à résoudre est le même que celui présenté dans l'équation

(3.33), soit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [H] & [J]^T \\ [J] & [0] \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} \{\chi^k\} \\ \{M\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{I^k\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

avec

$$\begin{array}{l} \{I^k\} = -\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T \{C^k\} dV \\ [H] = \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T [C][B] dV \end{array} \tag{7.28}$$

dans le cas de la relation (7.25) et

$$\begin{array}{l} \{I^k\} = -\int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T [C] \{\varepsilon^{therm}\} dV \\ [H] = \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [B]^T [C][B] dV \\ \{\chi^k\} = \{\varphi\} \end{array} \tag{7.29}$$

dans le cas de la relation (7.26).

Les deux systèmes sont aussi résolus avec le solveur itératif (car la matrice $[A]$ est singulière) basé sur la méthode du gradient biconjugué pour sa rapidité par rapport aux autres solveurs dans notre cas. Une fois les inconnues nodales χ_i^k calculées, les tenseurs homogénéisés $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{eff}(T^0)$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^{thermeff}(T^0)$ peuvent être déterminés en utilisant respectivement les relations suivantes :

$$[C^{eff}] = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [C]([I] + [B][\chi]) dV \tag{7.30}$$

$$\{\varepsilon^{thermeff}\} = \frac{[C^{eff}]^{-1}}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y_f}\cup\mathbf{Y_m}} [C](\{\varepsilon^{therm}\} + [B]\{\chi^k\}) dV \tag{7.31}$$

7.4 Résultats et comparaisons

Dans le but de valider le modèle précédent, les modules de l'ingénieur ont été calculés puis comparés à ceux trouvés expérimentalement par Berthelot [9]. Ce composite unidirectionnel étudié à température ambiante est constitué de 60% de fibres de verre E et de 40% de résine époxyde. Leur module d'élasticité et leur coefficient de Poisson ont été fixés respectivement à 73 GPa et 0,22 GPa pour les fibres et à 3,45 GPa et 0,3 pour la résine [9]. Les propriétés mécaniques du composite unidirectionnel associé sont reportées dans le tableau 7.1.

Les résultats montrent que les modules d'élasticité longitudinal E_L, transversal E_T et de cisaillement G_{LT} sont biens décrits par le modèle d'homogénéisation. L'écart entre les valeurs expérimentales et numériques n'excède pas 11,5%. Le coefficient de Poisson ν_{LT} est quant à lui moins bien décrit. Cette différence est certainement due au fait que le coefficient de Poisson expérimental de la fibre de verre a été déterminé sur un échantillon de verre massif.

Modules de l'ingénieur	Composite UD (expérimental)[9]	Composite UD (modèle)
E_L (GPa)	46	$44,9$
E_T (GPa)	10	$11,3$
ν_{LT}	$0,31$	$0,25$
G_{LT} (GPa)	$4,6$	$4,55$

TAB. 7.1 – Caractéristiques mécaniques d'un composite unidirectionnel à température ambiante

A présent, l'objectif est de valider ce modèle pour les températures cryogéniques. Dans cette optique, les résultats numériques sont comparés avec ceux trouvés dans la littérature. Quelques auteurs ont effectué des mesures du module longitudinal et transversal d'un composite unidirectionnel à fibre de verre E et résine époxyde pour des températures de $77K$ et $4,2K$. Les propriétés mécaniques des constituants utilisés dans ce modèle (et ceux qui suivent) sont celles du paragraphe 6.2. Le tableau 7.2 présente l'ensemble des résultats.

Sens	Auteurs	Température (K)	v_f (%)	Module expérimental (GPa)	Module calculé (GPa)
Longitudinal	[29], [69]	4,2	60	45	44,8
Longitudinal	[69]	77	60	44	44,5
Transversal	[69]	4,2	60	21	23,6

TAB. 7.2 – Modules d'élasticité d'un composite UD

D'après ce tableau et le tableau précédent, on peut remarquer que les modules longitudinaux sont très peu dépendants de la température. En effet, le composite ne se rigidifie que très légèrement avec la baisse de température. Ce résultat s'explique par le fait que dans le sens longitudinal le comportement mécanique du composite est essentiellement lié à celui de la fibre qui est quasiment indépendant de la température. Dans le sens transversal, le module augmente fortement car dans ce cas c'est la résine qui joue un rôle prépondérant.

Enfin, le modèle donne des résultats satisfaisants aussi bien dans le sens longitudinal que transversal et quelle que soit la température. Par conséquent, le modèle peut être utilisé pour estimer le comportement thermoélastique équivalent d'une mèche imprégnée, utilisée comme renfort dans le composite tressé des supports de dipôle du LHC. La mèche est assimilée localement à un composite UD avec un taux de fibre de 80 %. L'évolution des différents paramètres thermoélastiques, en fonction de la température, obtenus dans ce cas sont représentés sur les figures 7.3 à 7.6.

L'évolution des modules d'élasticité de la figure 7.3 s'explique de la même manière que pour le tableau 7.2. D'après la figure 7.4, le coefficient de Poisson longitudinal

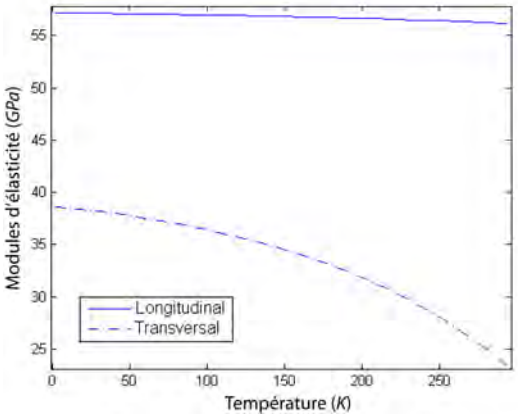


FIG. 7.3 – Evolution des modules d'élasticité.

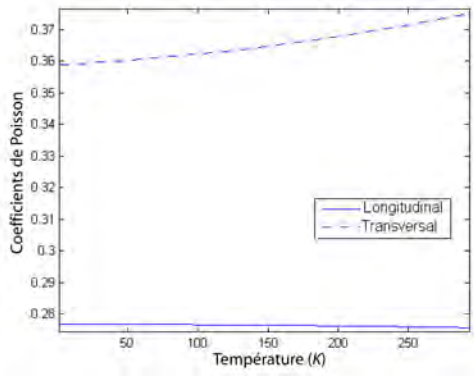


FIG. 7.4 – Evolution des coefficients de Poisson.

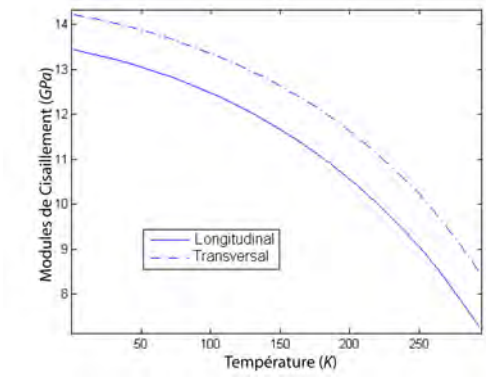


FIG. 7.5 – Evolution des modules de cisaillement.

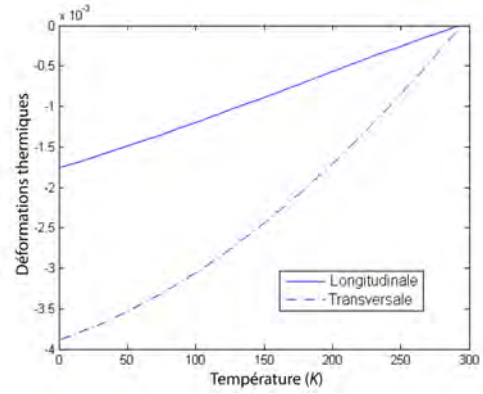


FIG. 7.6 – Evolution des déformations thermiques.

(ν_{LT}) est toujours inférieur au coefficient transversal ($\nu_{TT'}$) et sont tous deux quasiment indépendants de la température. Les modules de cisaillement représentés sur la figure 7.5 ont un comportement similaire. Le comportement du module de cisaillement transversal avec la température est justifiable car il est proportionnel au module d'élasticité transverse du fait de la quasi indépendance du coefficient de Poisson transversal. Le comportement des déformations thermiques avec la température représentées sur la figure 7.6 était aussi prévisible. En effet, la déformation thermique longitudinale est inférieure à la déformation transversale car dans cette dernière la déformation thermique de la résine est prépondérante et est très supérieure à celle de la fibre.

7.4.1 Conclusion

Dans ce chapitre un modèle d'homogénéisation périodique en thermoélasticité a été développé puis programmé en utilisant la méthode des éléments finis sous MATLAB. Ce modèle prend en compte la dépendance en température du module d'élasticité et de la déformation thermique de chacun des constituants. Il a été validé à température ambiante et à très basse température en comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature [9][29][69]. L'objectif à présent est d'utiliser les résultats des évolutions des paramètres matériels, en fonction de la température, dans l'étude du comportement thermoélastique d'un composite tressé. Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 8

Détermination des modules d'élasticité et des déformations thermiques d'un composite tressé

8.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement thermoélastique équivalent d'un composite tressé. La méthode est similaire à celle utilisée en thermique dans le chapitre 4. Dans le premier paragraphe, les différents aspects de la modélisation sont présentés. De manière à valider ce modèle, des essais mécaniques ont été menés par Air Liquide à 77 K et 4,2 K, et au CERN à 293 K. Une brève description de ces tests fait l'objet du deuxième paragraphe. Dans un troisième paragraphe, les résultats obtenus expérimentalement et numériquement sont comparés. Enfin, dans les deux derniers paragraphes les méthodes d'homogénéisation permettant de déterminer tous les termes du tenseur de rigidité équivalent puis du tenseur de déformation thermique équivalent du composite tressé sont présentées.

8.2 Modélisation d'un composite tressé

La méthodologie est similaire à celle utilisée en thermique. Le VER_t du composite tressé étudié est celui repésenté sur la figure 8.1. Le maillage est identique, seul le type d'élément et les paramètres matériels sont changés. L'élément thermique *solid 70* est remplacé par un élément thermoélastique isoparamétrique à 8 noeuds nommé *solid 45*. Les paramètres d'entrée de cet élément sont les modules d'élasticité, de cisaillement, les coefficients de Poisson et les déformations thermiques du paragraphe 7.4 pour le renfort ainsi que le module d'Young représenté sur la figure 6.1 et un coefficient de Poisson de 0,25 pour la résine pure.

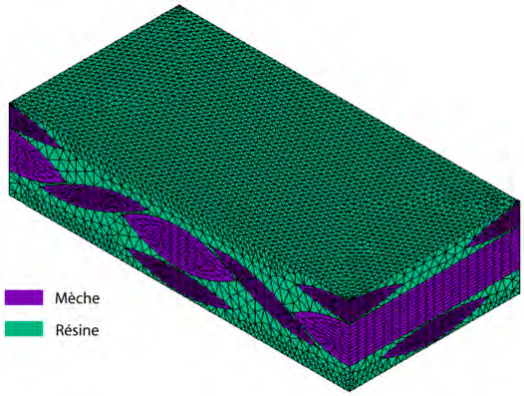


FIG. 8.1 – Rappel du maillage du VER_t.

De manière à valider le modèle numérique par la suite avec des résultats expérimentaux (cf paragraphe 8.4), des conditions aux limites simulant un essai de traction sont appliquées sur le VER_t. Dans ce but, une différence de déplacement Δu est appliquée entre deux surfaces opposées du VER_t (figure 8.2) tandis que les autres surfaces restent libres (vecteur contrainte nul). Ce choix de conditions aux limites est lié au protocole d'essai présenté au paragraphe suivant.

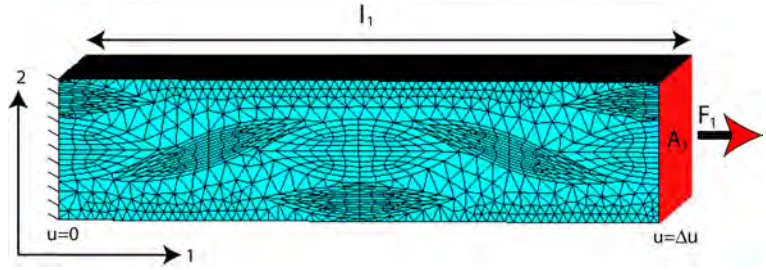


FIG. 8.2 – Exemple de conditions aux limites mécaniques.

Après résolution, le module de traction E_{ti} est calculé à l'aide de la relation suivante :

$$E_{ti}(T_{ini}) = \frac{F_i l_i}{A_i \Delta u} \tag{8.1}$$

où F_i est la force mesurée sur la surface A_i orientée par l'axe i ; l_i la longueur du VER_t suivant i ; T_{ini} la température au voisinage de laquelle on recherche le module de traction. Il est à noter que dans cette équation les indices sont francs.

En parallèle à ces simulations, des mesures de modules de traction à température ambiante et à très basse température ont été effectuées respectivement par le CERN et par Air Liquide. Ces essais ont été menés sur des échantillons de composite tressé découpés dans une plaque de même renforcement que dans les supports du LHC. Les dispositifs expérimentaux sont présentés dans le paragraphe suivant.

8.3 Mesure du module d'élasticité d'un composite tressé

Les essais ont été effectués par Air Liquide, à Grenoble, [62] sur des échantillons de forme parallélépipédique, sans talons, de dimensions $250mm \times 25mm \times 4mm$ suivant la norme ISO 527-4. Des trous ont été rajoutés à leurs extrémités afin d'éviter les phénomènes de glissement entre les mors rencontrés lors de tests préliminaires. Le dispositif expérimental est constitué d'une machine de traction hydraulique INSTRON 8502 équipée d'un extensomètre MTS de type 632.11 C21. Tous deux sont reliés à un ordinateur permettant ainsi un pilotage, en déplacement, et une acquisition automatique (figure 8.3).

FIG. 8.3 – Dispositif expérimental complet de Air Liquide avec la machine de traction, le cryostat et la console.

Pour les tests à $4,2\ K$ et $77\ K$, les échantillons sont respectivement immergés dans un bain d'hélium liquide et un bain d'azote liquide. Les tests à $293\ K$ ont été réalisés au CERN, par El-Kallassi [21], sur des échantillons de forme parallélépipédique, avec talons, de dimensions $150mm \times 20mm \times 4mm$ suivant la norme ISO 527-1 et 527-4. La machine utilisée est une UTS, pilotée en déplacement, dont la force maximale est $200\ kN$.

8.4 Comparaisons entre les résultats expérimentaux et numériques

Le tableau 8.1 présente les résultats obtenus numériquement et expérimentalement suivant les directions 1 et 3.

Température (K)	Modules expérimentaux (GPa)		Modules calculés (GPa)	
	E_1	E_3	E_1	E_3
4,2	17,83 16,85 17,02 moyenne : 17,23	24,21 26,15 23,50 moyenne : 24,62	16,5	23,8
77	16,04 17,66 15,68 moyenne : 16,46	-	15,4	23
293	7,4 8,2 8,4 moyenne : 8	18,6 17,7 19,1 moyenne : 18,47	8,07	17,7

Tab. 8.1 – Bilan des modules d'élasticité

Suite à des problèmes de mesures de module de traction, aucun essai de traction n'a été effectué dans le sens 3 à $77K$. Quelle que soit la température, le modèle donne des résultats satisfaisants aussi bien dans le sens 1 que dans le sens 3 avec une erreur relative inférieure à $6,8\%$. Aucun essai de traction n'a été effectué dans le sens 2, car il correspond à un chargement suivant l'épaisseur (faible) de l'échantillon.

L'augmentation de rigidité de la résine avec la baisse de température a un impact direct sur celle du composite tressé. En effet, sa rigidité suivant la direction 1 a doublé lors du passage de 293 K à 4,2 K. C'est dans ce cas que l'augmentation est la plus forte. Elle se justifie par le fait que dans cette direction le rôle de la résine est plus important car il n'y a aucune mèche qui traverse l'échantillon, contrairement à la direction 3.

8.5 Estimation de la matrice de rigidité effective du composite tressé

Le modèle mécanique du tissu a été validé par des mesures (cf paragraphe 8.4). A présent, les rigidités effectives du composite tressé sont recherchées de manière à pouvoir les utiliser en tant que paramètres matériels dans la modélisation du comportement élastique d'une structure. Ces coefficients sont déterminés en utilisant une méthode d'homogénéisation, similaire à celle utilisée en thermique, basée sur le calcul de l'énergie de déformation élastique W_e.

W_e est définie par :

$$2W_e = \frac{1}{V}\int_V \underline{\sigma}.\underline{\varepsilon}(\underline{u})dV = \langle \underline{\sigma}.\underline{\varepsilon}(\underline{u})\rangle_V \tag{8.2}$$

Cette énergie élastique est directement calculée avec le logiciel ANSYS.

En introduisant le théorème de Hill [12], l'énergie élastique devient alors :

$$2W_e = Q_{ik}E_kE_i \qquad\qquad i = 1,..,6 \quad k = 1,..,6 \tag{8.3}$$

avec les conditions aux limites en déplacement suivantes :

$$\underline{u} = \underline{\underline{E}}\,\underline{OM} \tag{8.4}$$

où $\underline{\underline{Q}}$ est le tenseur de rigidité effective du composite tressé, $\underline{\underline{E}}$ un tenseur (de déformation) à coefficients constants, $\underline{E} = (E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{23}, 2E_{13}, 2E_{12})^T$ son vecteur associé et $\underline{OM}$ le vecteur position correspondant aux coordonnées des noeuds appartenant aux bords du VER_t. L'avantage de telles conditions aux limites est que nous obtenions, en fin de compte, que $\langle \underline{\varepsilon}(\underline{u})\rangle_V = \underline{E}$ et qu'il suffira de choisir des formes simples pour ce tenseur.

Différentes conditions de chargement ont été choisies de manière à annuler certains de ces termes. Ces chargements sont au nombre de 21 (car il y a 21 coefficients différents dans $\underline{\underline{Q}}$) et sont décrits ci-dessous.

8.5.1 Détermination des Q_{ii}

Une première série de chargement permet de calculer les Q_{ii} (indices francs dans tout ce paragraphe). Ces six termes correspondent aux composantes situées sur la diagonale de $\underline{\underline{Q}}$ et par conséquent, ils peuvent être calculés directement. Pour chaque terme, le chargement à appliquer est le suivant de telle façon à isoler Q_{ii} :

$$E_i = cte \ \text{ et } \ E_j = 0 \ \text{ pour } \ j(\neq i) = 1,..,6$$

D'où d'après l'équation (8.2)

$$Q_{ii} = 2W_eE_i^{-2} \tag{8.5}$$

8.5.2 Détermination des Q_{ij}

Une seconde série de chargements permet de calculer les Q_{ij} avec i différent de j. Ces quinze termes correspondent aux coefficients de couplage dans la matrice $\underline{\underline{Q}}$ et par conséquent, les résultats précédents sont indispensables. Pour chaque terme, le chargement à appliquer est le suivant de telle façon à isoler Q_{ij} :

$$E_i = cte, E_j = cte \ \text{ et } \ E_k = 0 \ \text{ pour } \ k(\neq i \neq j) = 1,..,6$$

D'où d'après l'équation (8.2)

$$Q_{ij} = \frac{2W_e - Q_{ii}E_i^{-2} - Q_{jj}E_j^{-2}}{2E_iE_j} \tag{8.6}$$

où i et j sont des indices francs.

8.6 Estimation du vecteur de déformation thermique effective du composite tressé

Le vecteur de déformation thermique effective peut être déterminé en utilisant le protocole suivant :

1. Application de déplacements nuls $\underline{u} = \underline{0}$ sur les bords du VER$_t$. Cette condition aux limites permet d'annuler le terme $\langle \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \rangle_V$.
2. Application d'une température constante T^0 en tout point du VER$_t$. On obtient la loi de comportement moyennée dans le volume :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_V = \underbrace{\underline{\underline{Q}} : \langle \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \rangle_V}_{=0} - \underline{\underline{Q}} : \underline{\varepsilon}^{thermeff}(T^0) \tag{8.7}$$

3. Après résolution, les contraintes moyennes dans le volume sont calculées :

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma} dV \tag{8.8}$$

4. Connaissant le tenseur de rigidité effective (cf. paragraphe précédent), l'équation suivante permet d'identifier le vecteur de déformation thermique effective $\underline{\varepsilon}^{thermeff}$ recherché :

$$\underline{\varepsilon}^{thermeff} = \underline{\underline{Q}}^{-1} \langle \underline{\sigma} \rangle_V (T^0) \tag{8.9}$$

8.7 Résultats

Dans ce composite, les mèches sont orientées à $0^\circ, \pm 45^\circ$ et par conséquent on peut s'attendre à avoir un comportement orthotrope de ce matériau par analogie avec la théorie des stratifiés. Dans ce but, la matrice de rigidité effective $\underline{\underline{Q}}$ est inversée de manière à obtenir la matrice de souplesse $\underline{\underline{S}}$ dont les composantes de la diagonale, S_{12}, S_{13} et S_{23} sont comparées à celles obtenues lors de l'inversion de la matrice $\underline{\underline{Q}}$ où Q_{14}, Q_{24}, Q_{34}, Q_{15}, Q_{25}, Q_{35}, Q_{45}, Q_{16}, Q_{26}, Q_{36}, Q_{46} et Q_{56} sont nulles. Cette comparaison est effectuée pour plusieurs températures comprises entre $1,9$ K et 293 K. Les résultats indiquent que la variation relative de ces modules est inférieure à 0,01 % quelle que soit la température. Par conséquent, le composite

tressé est considéré comme un matériau orthotrope dont l'évolution des modules de l'ingénieur associés, en fonction de T^0, est représentée sur la figure 8.4 et l'évolution des déformations thermiques sur la figure 8.5.

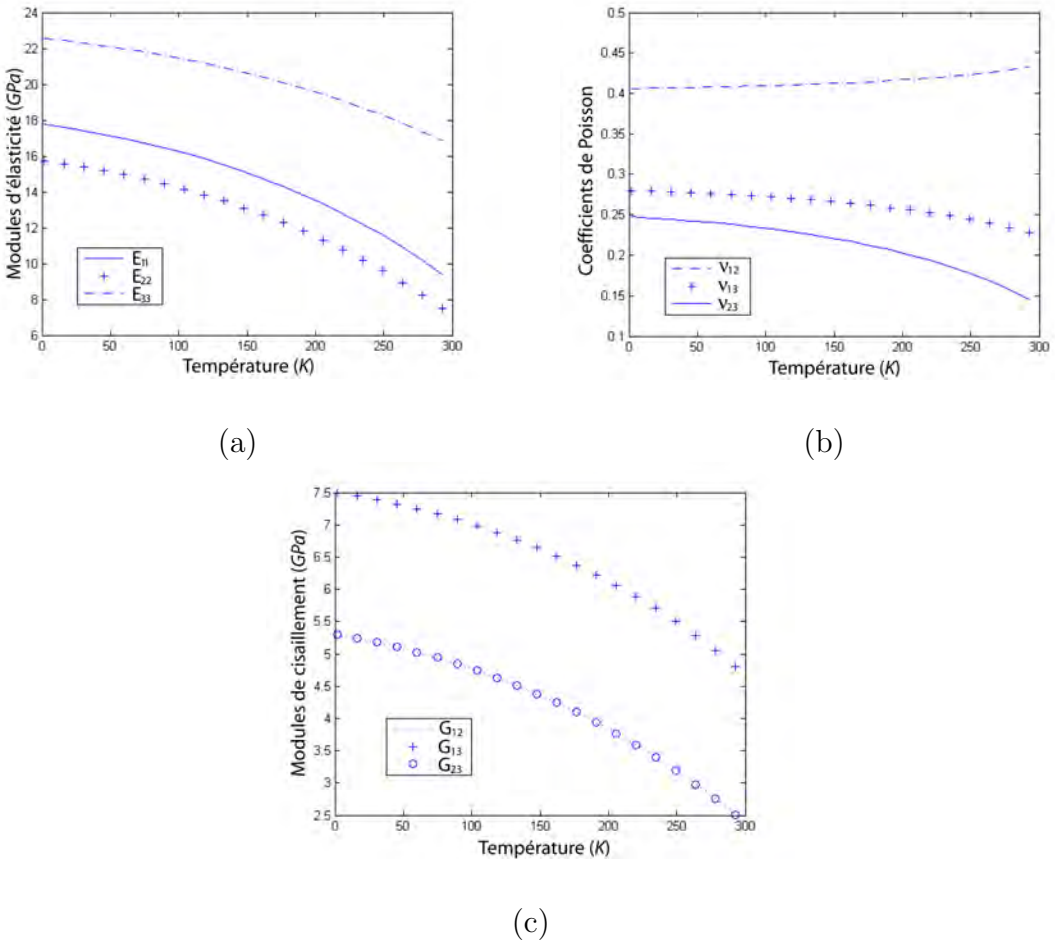


FIG. 8.4 – Modules de l'ingénieur du composite tressé homogénéisé.

La figure 8.4 (a) montre que la composante E_{33} du tenseur de rigidité est la plus élevée. Ce résultat était prévisible car la direction associée à cette composante est la même que celle des mèches à 0°. Ensuite on trouve la composante E_{11} qui possède une valeur intermédiaire. Enfin, c'est la composante E_{22} qui a la valeur la plus faible du fait qu'aucune mèche ne traverse le VER_t dans la direction associée. De plus, on peut remarquer que l'évolution de ces composantes avec la température est similaire. Cette dernière remarque est aussi valable pour les modules de cisaillement (8.4 c).

Par un raisonnement analogue à celui exposé dans l'analyse des composantes du tenseur de rigidité, la déformation thermique suivant la direction 2 est la plus grande suivie de celle suivant la direction 1 puis suivant la direction 3 (figure 8.5). Ces trois déformations, tout comme celle de la résine et de la fibre, convergent vers 0 lorsque la température tend vers 293 K (température de référence).

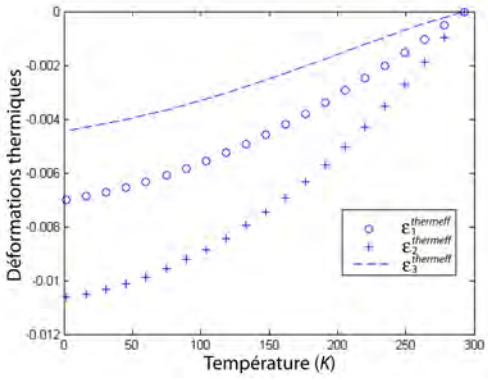


FIG. 8.5 – Déformations thermiques du composite tressé homogénéisé.

8.8 Conclusion

Dans ce chapitre, le comportement thermoélastique d'un composite tressé a été étudié. Les résultats obtenus lors de la simulation d'essais de traction sur ANSYS ont été comparés puis validés avec ceux obtenus expérimentalement au CERN et par Air Liquide. Ainsi, nous avons pu appliquer une méthode d'homogénéisation sur le VER_t du composite tressé de manière à vérifier son comportement mécanique orthotrope d'une part et à déterminer les composantes du tenseur de rigidité et des déformations thermiques effectives d'autre part dans l'optique de les utiliser dans un calcul de structure.

Chapitre 9

Conclusion

Dans cette partie, le comportement thermoélastique d'un composite tressé a été étudié à l'aide d'une méthode multi-échelle similaire à celle développée dans la partie thermique. L'étude a débuté par une homogénéisation périodique avec développement asymptotique du champ de température et du vecteur déplacement permettant d'estimer le comportement thermoélastique équivalent d'un composite unidirectionnel. L'utilisation d'une telle méthode a permis de tenir compte de la forte thermodépendance non linéaire du module d'élasticité et de la déformation thermique de la résine époxyde. Les coefficients homogénéisés ainsi obtenus ont été utilisés en tant que paramètres matériels dans un modèle de composite tressé. Des résultats de simulations d'essais de traction à température ambiante, 77 K et à 4,2 K ont permis de valider le modèle en les comparant à ceux obtenus par certains auteurs de la littérature. Ce qui a permis d'appliquer une méthode d'homogénéisation basée sur le théorème de Hill puis d'estimer le comportement thermoélastique équivalent du composite tressé.

A présent que les comportements thermique et thermoélastique du composite tressé utilisé dans la fabrication des supports du LHC ont été étudiés, l'analyse complète de ces éléments de structure est alors possible. Leur étude en conditions réelles de chargement est développée dans la partie suivante.

Troisième partie

Application

Chapitre 10

Supports du LHC

10.1 Introduction

L'objectif de cette partie est d'estimer le comportement thermoélastique des supports en composite des cryodipôles du LHC en conditions réelles. Dans ce but, un modèle par éléments finis représentant le support avec son environnement proche est construit sur le logiciel ANSYS. Dans un premier paragraphe, le modèle géométrique et son maillage sont présentés. Ensuite dans un deuxième paragraphe le comportement thermique du pied est analysé de manière à déterminer la répartition du champ de température. Dans un troisième paragraphe le comportement thermoélastique du support est étudié. Cette étude débute par la modélisation d'un essai de compression du support à température ambiante suivi d'une comparaison avec les résultats d'un essai. Enfin, le comportement thermoélastique en compression du support et dans un environnement cryogénique est présenté.

10.2 Construction du modèle

Ce support est entièrement modélisé sur ANSYS avec des éléments de coque à 6 degrés de liberté de type *shell* 131 pour la partie thermique et *shell* 181 pour la partie thermoélastique. Le choix des éléments du type coque est lié au fait que l'épaisseur de la colonne est très inférieure à sa hauteur (rapport égal à 53). Les grandeurs géométriques du modèle et le maillage associé à la moitié du support sont représentées sur la figure 10.1. Les propriétés thermiques et mécaniques des éléments composites ont été respectivement déterminées dans les parties I et II du manuscrit. Les pièces en acier et en aluminium sont supposées isotropes et dépendantes de la température. Leurs paramètres matériels sont décrits dans les paragraphes 10.3 et 10.4.

Un chargement thermique sur ce modèle permet d'étudier la répartition du

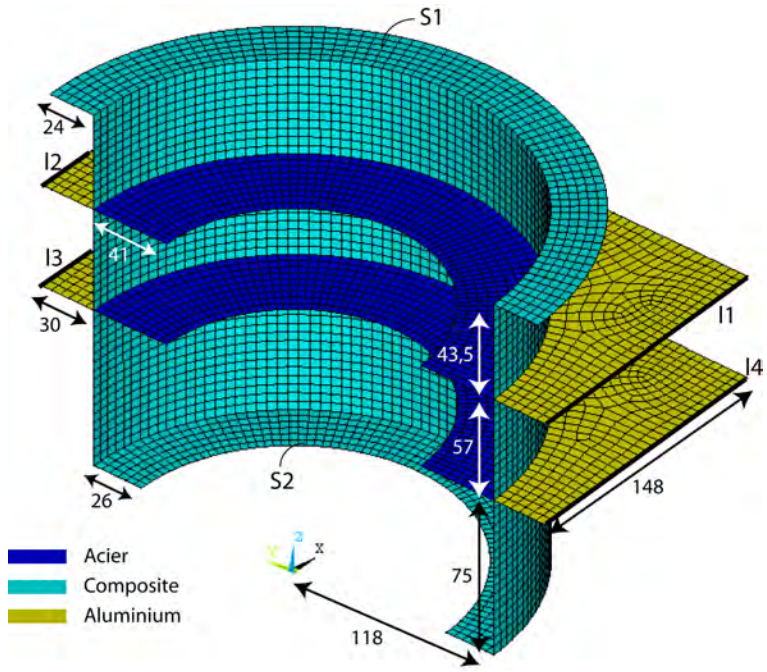


FIG. 10.1 – Géométrie et maillage de la moitié du support.

champ de température et du flux thermique dans le pied en condition de fonctionnement du LHC. Cette étude fait l'objet du paragraphe suivant.

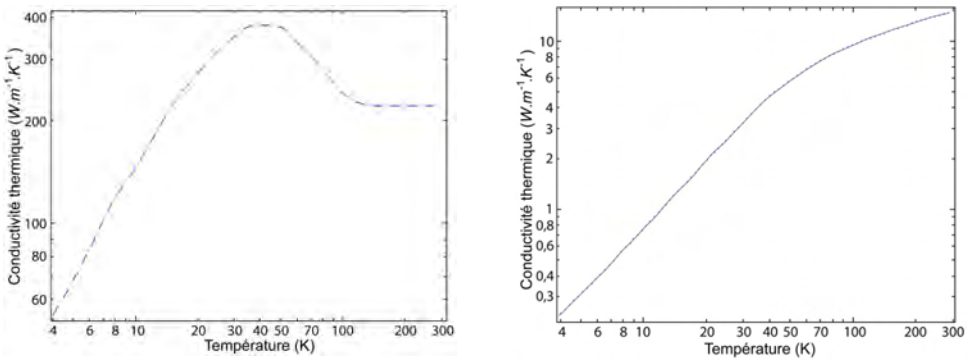
10.3 Comportement thermique du support

10.3.1 Compléments sur la modélisation

Dans cette première étape d'une étude thermoélastique, la conduction non linéaire de l'acier et de l'aluminium sont prises en compte dans le modèle. Leurs conductivités thermiques sont présentées sur la figure 10.2.

Le modèle ne prend pas en compte le rayonnement thermique dans la partie inférieure du support du fait de la présence d'un film ($0,1\ mm$) en mylar aluminisé collé sur sa paroi interne et externe qui fait diminuer l'emissivité de la paroi de $0,8$ à $0,15$ pour une température de $50\ K$ [13]. Dans la partie supérieure du pied, la température étant inférieure à $50\ K$, les émissivités de l'ensemble des constituants sont inférieures à $0,1$ rendant ainsi le rayonnement thermique négligeable.

Les conditions aux limites de type température sont appliquées sur les surfaces $S1$, $S2$ et sur les lignes $l1$, $l2$, $l3$ et $l4$ de la figure 10.1. Leur valeurs sont reportées dans le tableau 10.1. Dans le but de valider ce modèle, des mesures de pertes de flux ont été effectuées par Castoldi et al. [13] au CRYOLAB.



(a) (b)

FIG. 10.2 – Evolution de la conductivité thermique de l'aluminium (a) et de l'acier (b) en fonction de la température [13].

10.3.2 Mesures de pertes de flux sur le support

Afin de déterminer le comportement thermique réel des supports, le dispositif expérimental doit reproduire au mieux l'environnement de fonctionnement du cryostat du cryodipôle. Cependant, le système de mesure perturbe cet environnement, par conséquent un compromis entre la précision des mesures et les perturbations induites par les conditions de fonctionnement doit être fait. Dans le dispositif, illustré schématiquement dans la figure 10.3, les appareils permettant de mesurer le flux sont montés entre les écrans thermiques du support et les sources de froid.

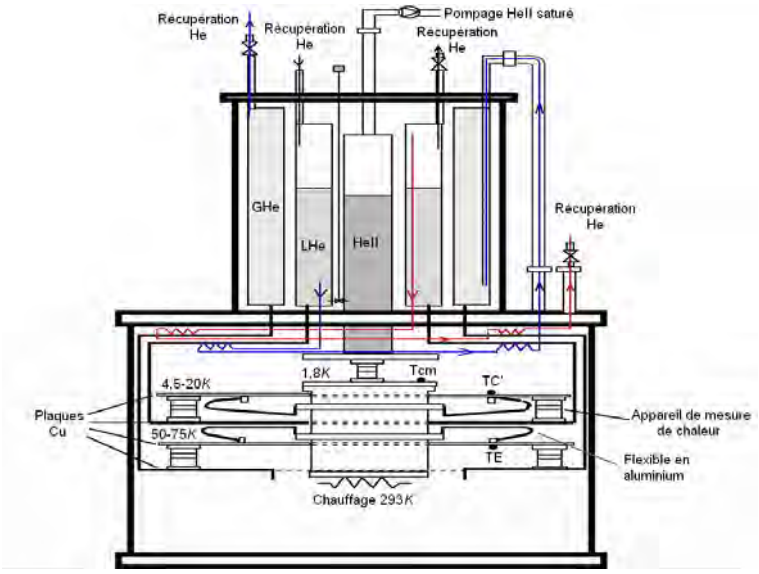


FIG. 10.3 – Schéma du dispositif de mesure de flux chaleur d'un support en conditions réelles.

Ces appareils sont des impédances thermiques calibrées [17] qui mesurent la

différence de température induite par le flux de chaleur. L'utilisation de ce type d'appareil ajoute une impédance thermique, entre les écrans et les sources de froid, ce qui crée un décalage de la température associée aux écrans du support. Par conséquent une correction de cet effet doit être prise en compte dans le traitement des résultats.

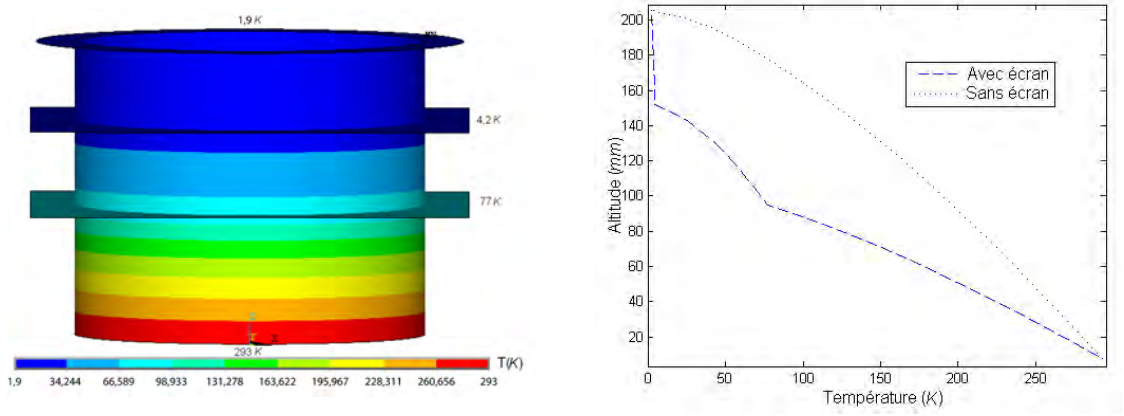
Le support est monté dans un cryostat vertical constitué d'un tube central cylindrique à l'intérieur duquel sont placés les tubes concentriques contenant l'hélium II saturé, l'helium I liquide et gazeux (ou azote liquide). Ces différents tubes sont reliés respectivement à la partie supérieure du pied (représentant la masse froide), à l'écran thermique supérieur du pied (représentant la ligne C') et l'écran thermique inférieur (représentant la ligne E). La partie inférieure du pied est quant à elle reliée à une plaque en aluminium maintenue à 293 K par une résistance électrique chauffante. La comparaison entre la puissance appliquée sur la base du pied et la somme des flux de chaleur mesurés permet de vérifier la précision des mesures, aidant dans la détection des fuites thermiques parasites. Les sondes de température sont montées sur les boucliers thermiques en cuivre au niveau de la connection des liens en aluminium, ou sur la plaque en contact avec la partie supérieure du pied.

Quelques problèmes ont été rencontrés durant les mesures. Les appareils permettant de mesurer le flux de chaleur au niveau du bouclier représentant la ligne C' sont équipés de résistances en carbone dont la sensibilité à 20 K est très faible (dR/dT=5,5Ω/K). Par conséquent, les erreurs de lecture à cette température sont très grandes et l'étalonnage de ces appareils peu fiable. De plus, le temps exigé pour que le support soit en équilibre thermique est très long ($\approx$ 10 h) et comparable à l'autonomie du cryostat.

Le paragraphe suivant présente les résultats obtenus sur deux supports de présérie et sont comparés à ceux déterminés numériquement.

10.3.3 Résultats et comparaisons

La figure 10.4 illustre la répartition du champ de température obtenue dans le pied et le long du pied. La figure 10.4 (a) montre que la variation de la température est fonction uniquement de la hauteur. Ceci s'explique par le fait que les pertes latérales par convection sont négligées, le pied support et la masse froide étant confinés à l'intérieur du cryostat où règne un vide d'isolation. Dans le cas où les écrans sont utilisés, le gradient thermique le plus élevé est situé entre la base du pied et l'écran thermique inférieur. Dans cette zone, la température varie de manière quasi linéaire ainsi que dans la zone comprise entre les deux écrans lorsque la température est supérieure à 50K et dans la zone située au dessus de l'écran supérieur. La seule zone où la répartition de la température est non linéaire se situe entre 4,2K et 50K.



(a) (b)

FIG. 10.4 – Exemple de répartition du champ de température dans le pied (a) et le long du pied (b).

Cette répartition est liée au fait que les conductivités Λ_{xx}, Λ_{yy} et Λ_{zz} subissent de fortes variations dans cette plage de température (figure 4.14 (a)). Lorsque le support n'a pas d'écran thermique, le champ de température est réparti de manière plus homogène. Dans la zone comprise entre 80 mm et 160 mm, la température est beaucoup plus élevée qu'avec les écrans et par conséquent le fait de mettre des écrans thermiques, surtout celui au contact de la ligne E, absorbe le flux thermique. Le tableau 10.1 présente les flux déterminés expérimentalement et calculés numériquement pour deux cas de chargement en température avec écrans.

Cas		Masse froide (S1)		Ligne C' (l1, l2)		Ligne E (l3, l4)		Cryostat (S2)	
		Mesures	Calculs	Mesures	Calculs	Mesures	Calculs	Mesures	Calculs
1	Température (K)	$1,7$	$1,7$	$6,4$	$6,4$	$63,3$	$63,3$	295	295
	Pertes de flux (W)	51×10^{-3}	16×10^{-3}	$0,66$	$0,55$	$3,3$	$2,79$	4	$3,36$
2	Température (K)	$1,7$	$1,7$	$5,9$	$5,9$	$53,3$	$53,3$	295	295
	Pertes de flux (W)	41×10^{-3}	14×10^{-3}	$0,53$	$0,41$	$3,4$	$3,02$	4	$3,45$

TAB. 10.1 – Pertes de flux mesurées et calculées pour le support de dipôle

Les résultats numériques des pertes de flux sous-estiment les résultats expérimentaux. La plus grande différence relative entre les résultats apparait aux basses températures (masse froide et ligne C'). Les raisons sont multiples, la première est liée au fait que le modèle ne tient pas compte du rayonnement thermique. En effet, en présence de ce rayonnement, les pertes de flux seraient plus importantes au niveau de la ligne E. Néanmoins, il ne devrait y avoir aucune influence (ou très peu) sur les pertes de flux au niveau de la masse froide et de la ligne C' à cause des faibles emissivités des matériaux aux températures associées. Le problème viendrait alors

des conductivités du composite. Cependant ces conductivités ont été validées avec des essais à très basses température (cf paragraphe 4.4). Une autre explication serait que les mesures présentent un offset expérimental lié à l'étalonnage des appareils des mesures de chaleur peu fiable (cf 10.3.2).

Malgré quelques incertitudes sur ces résultats, on peut conclure d'un point de vue qualitatif que l'utilisation des ces écrans thermiques fait diminuer les entrées de chaleur dans la masse froide. En effet on peut considérer que ces entrées sont inférieures à $0,1\ W$ en présence des écrans et de l'ordre de $2\ W$ sans ces écrans (résultat numérique). La conséquence directe de cette baisse de flux sur le projet LHC est de diminuer la consommation d'hélium II saturé servant au refroidissement de la masse froide et par conséquent son budget. Ce liquide réfrigérant étant beaucoup plus cher à fabriquer que l'hélium liquide et surtout l'hélium gazeux ou l'azote liquide.

A présent que le transfert thermique dans le pied a été étudié, la répartition du champ de température va être utilisée dans l'analyse thermoélastique du support. Cette analyse fait l'objet du paragraphe suivant.

10.4 Comportement thermoélastique du support

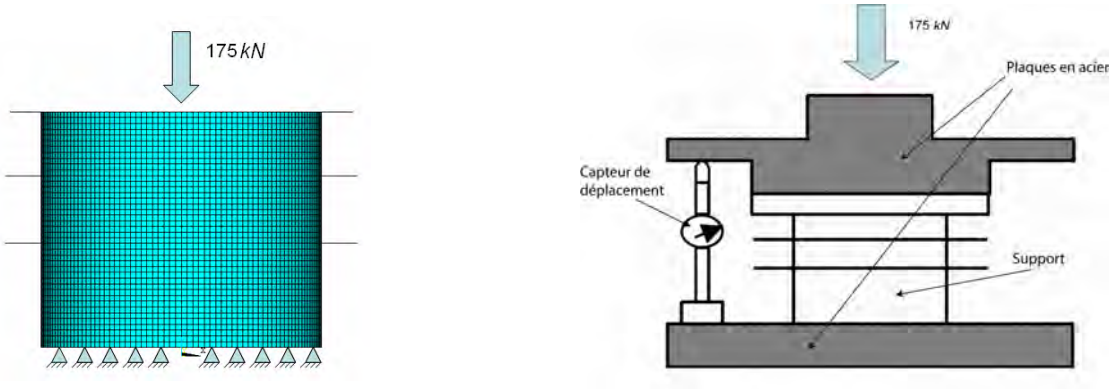
10.4.1 Validation du modèle

Lors du transport des cryodipôles, un chargement statique vertical (F) exceptionnel de 175 kN peut apparaître au niveau de chaque pied support agissant comme une compression verticale. L'objectif du calcul qui suit est d'appliquer ce chargement mécanique au modèle par éléments finis du support en fixant la température à $293K$. En effet, lors du transport, le système cryodipôle-supports est à température ambiante. La figure 10.5 illustre ces conditions aux limites. Après résolution, le déplacement vertical du haut du pied est estimé puis comparé à celui obtenu expérimentalement par CASA [61][67]. Le déplacement expérimental est mesuré à l'aide d'un capteur de déplacement placé comme sur la figure 10.5 (b). Les efforts sont appliqués sur une plaque en acier rigide et épaisse. Le tableau 10.2 présente les résultats obtenus.

Déplacement expérimental (mm)	Déplacement numérique (mm)
$-0,59 \pm 2,5\%$	-0,65

TAB. 10.2 – Déplacement vertical u_{max} de la partie supérieure du pied

Le modèle numérique surestime le déplacement réel de $9,2\%$. Cette différence entre les résultats est sans doute due à une certaine variation de la rigidité d'un pied



(a) (b)

FIG. 10.5 – Schéma du chargement mécanique numérique (a) et expérimental (b) du pied en compression.

à un autre et aux éléments coques utilisés dans le modèle qui sont plus souples que les éléments solides.

Le module d'élasticité vertical équivalent du pied dans ces conditions est défini par la relation suivante :

$$E = \frac{Fl}{Su_{max}} = 18GPa \tag{10.1}$$

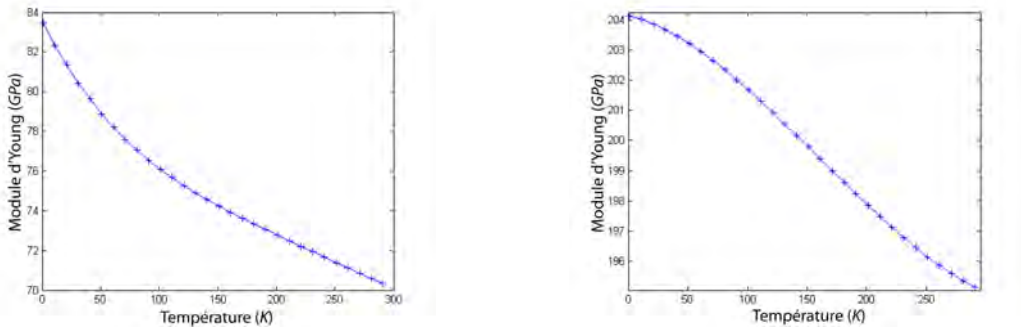
où $S = 2,97 \times 10^{-3} m^2$ est la section du cylindre représentant le support seul et l la hauteur du pied. Le modèle étant validé en compression, l'objectif à présent est de déterminer le déplacement vertical du haut du support lors du chargement réel.

10.4.2 Etude du pied dans les conditions réelles d'utilisation

Un chargement mécanique en compression de $125kN$ est appliqué à la partie supérieure du pied combiné avec la même répartition du champ de température que dans la figure 10.4 (a). Dans une première simulation, la déformation thermique des différents constituants n'est pas prise en compte de manière à déterminer le module d'élasticité longitudinal équivalent du pied. Les évolutions des modules d'élasticité en fonction de la température de l'aluminium et de l'acier utilisées dans ce calcul sont présentées dans la figure 10.6. Leur coefficient de Poisson est supposé indépendant de la température et est pris respectivement égal à 0,345 et 0,3.

La figure 10.7 illustre ces conditions aux limites. Après résolution, le déplacement vertical de la partie supérieure du pied est de $-0,38\ mm$. En utilisant l'équation (10.1), on en déduit le module d'élasticité vertical équivalent du pied qui est de 22 GPa. Par conséquent sous chargement réel, la structure est rigidifiée d'environ 22, 2 %.

Dans une seconde simulation, nous appliquons les mêmes conditions aux limites



(a) (b)

FIG. 10.6 – Evolution du module d'élasticité de l'aluminium 2214 (a) et de l'acier 304L (b) [19] en fonction de la température.

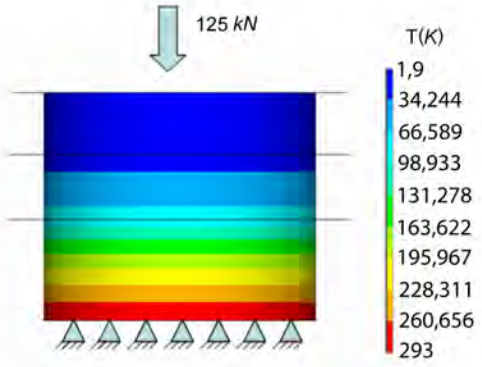
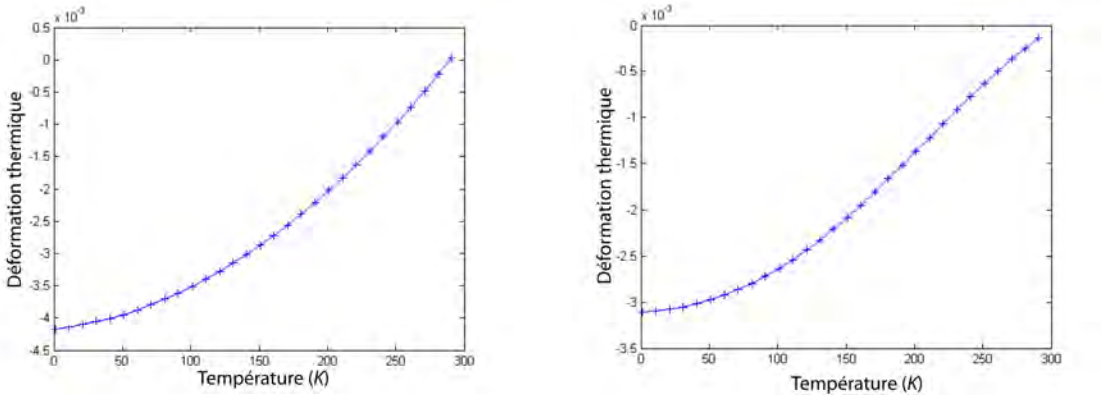


FIG. 10.7 – Chargement réel du pied.

que précédemment en prenant en compte les déformations thermiques de tous les matériaux. Les déformations thermiques des écrans thermiques en aluminium et en acier proviennent de la note technique de Disdier et al. [19]. Leur évolution est représentée sur la figure 10.8.

Après résolution, le déplacement vertical de la partie supérieure du pied est de $-1,08\ mm$. Ce déplacement inclut le déplacement engendré par le chargement mécanique ($-0,38\ mm$) et le déplacement engendré par la contraction thermique qui est de $-0,7\ mm$. La répartition du champ de déformation thermique équivalente dans le pied est représenté sur la figure 10.9. Cette figure montre que la déformation thermique est quasiment constante entre l'écran inférieur et le haut du support. C'est dans cette zone que la température est la plus faible et par conséquent la déformation thermique y est la plus importante ($0,4\%$). Le critère de rupture de Tsai-Wu [9] est le plus adapté à l'étude des composites. Toutefois, ne disposant pas des résistances mécaniques à la rupture en traction, en compression et en cisaillement du composite tressé, le critère de Von Mises représenté sur la figure 10.10 est utilisé



(a) (b)

FIG. 10.8 – Evolution de la déformation thermique de l'aluminium 2214 (a) et de l'acier 304L (b) [19] en fonction de la température.

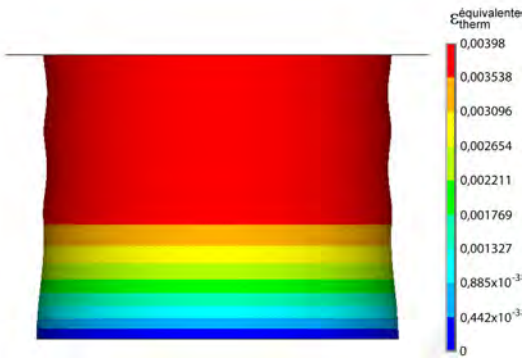


FIG. 10.9 – Répartition du champ de déformation thermique équivalente dans le support.

à titre indicatif.

Cette figure montre que les contraintes les plus élevées sont situées au niveau des anneaux intérieurs du fait de la contraction thermique radiale très importante. Les valeurs de ces contraintes sont surévaluées car en réalité, une couche de colle époxyde comprise entre $0,1$ et $0,3$ mm est présente entre ces anneaux et la colonne en composite. Néanmoins, il est très difficile d'en tenir compte pour des raisons numériques (élements trop petits).

10.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle thermique du support de cryodipôle du LHC a été construit sur ANSYS. Il a été comparé et validé qualitativement par des mesures de pertes de flux au niveau des écrans radiatifs dans des conditions les plus réalistes

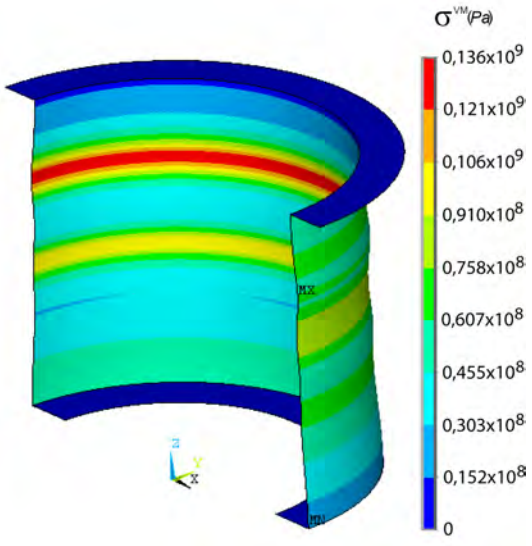


FIG. 10.10 – Répartition du champ de contrainte de Von Mises dans le support.

possibles. Ensuite, un essai de compression a été simulé à température ambiante puis validé à l'aide d'un essai de compression réel effectué par CASA. Dans une dernière simulation, la répartition du champ de température est combinée à un essai de compression. Ce chargement a permis d'estimer le comportement thermomécanique des supports dans les conditions réelles de fonctionnement du LHC. Les résultats ont montré que les écrans thermiques permettent de diminuer considérablement les entrées de chaleur dans la masse froide d'une part et de maintenir un bon comportement mécanique d'autre part. En effet, ces écrans sont comprimés sous l'effet de la contraction thermique du support limitant ainsi une déformation excessive qui pourrait engendrer du flambement sous le poids de la masse froide.

Conclusion et perspectives

Les supports des cryodipôles du LHC sont soumis à des contraintes thermomécaniques fortes. Le principal objectif de cette thèse était d'étudier l'influence qu'elles pouvaient avoir sur le comportement thermique et mécanique des supports. Dans cette optique, une méthode multi-échelle a été développée dans laquelle certains phénomènes locaux ont été pris en compte.

La première partie du travail a consisté à développer un modèle d'homogénéisation périodique permettant d'estimer le comportement thermique équivalent d'un composite unidirectionnel. Dans ce modèle, la non linéarité de la conductivité thermique des fibres et de la matrice par rapport à la température a été prise en compte ainsi que le mécanisme des phonons à l'interface fibres/matrice qui joue un rôle très important pour les températures inférieures à 10 K. La prise en compte de cette interface est l'un des principaux apports de cette thèse. Elle a été effectuée à l'aide de deux modèles : l'*Acoustic Mismatch Model* (AMM) et le *Diffuse Mismatch Model* (DMM). Le modèle d'homogénéisation périodique a été implémenté dans MATLAB à l'aide de la méthode des éléments finis en 3D. Les conductivités thermiques équivalentes ainsi obtenues ont été validées par des mesures provenant de la littérature. De plus, dans le cas d'un composite verre E/époxyde, les résultats ont montré que le choix entre l'AMM et le DMM n'influençait pas de manière signifactive les conductivités thermiques équivalentes. En assimilant localement une mèche à un composite unidirectionnel, les résultats précédents ont été utilisés dans la modélisation d'un composite tressé triaxial par la méthode d'homogénéisation basée sur le théorème énergétique de Hill. La résolution du problème par la méthode des éléments finis a permis de déterminer les conductivités thermiques équivalentes. Nous avons effectué au CRYOLAB du CERN des mesures de conductivité thermique sur le composite tressé. Ces mesures se sont avérées relativement délicates du fait du caractère isolant du composite étudié. Néanmoins les précautions utilisées dans le protocole expérimental ont permis d'obtenir des résultats de bonne qualité qui ont servi à valider les résultats numériques.

Dans la deuxième partie du travail, une approche multi-échelle similaire à celle décrite dans la partie précédente a été appliquée en thermoélasticité. Sur la plage de température étudiée, comprise entre 1,9 K et 293 K, les propriétés thermiques et mécaniques des constituants varient en fonction de la température. En raison de

cette thermodépendance, les méthodes classiques utilisées pour l'homogénéisation des coefficients de dilatation thermique n'ont pas pu être mises en œuvre dans ce travail. Par conséquent, un tenseur de déformation thermique effectif a été déterminé par une méthode d'homogénéisation périodique au même titre que les constantes élastiques du composite unidirectionnel. Cette approche analytique et numérique s'est avérée pertinente compte tenue d'une bibliographie très peu fournie sur le sujet. Les résultats sur les constantes élastiques homogénéisées ont été validés avec des mesures issues de la littérature. Ces résultats ont ensuite été utilisés dans l'estimation du comportement thermoélastique équivalent d'un composite tressé triaxial. Des mesures ont été effectuées chez Air Liquide et au CERN sur des échantillons de ce composite. Ces mesures ont servi à valider les résultats numériques.

Les deux premières parties ont permis de développer une méthodologie d'étude efficace du comportement thermomécanique d'un composite tressé aux températures cryogéniques. Dans la troisième partie de ce travail, une application a été mise en œuvre. Elle est relative aux supports des cryodipôles du LHC. Ils ont été modélisés par éléments finis en prenant en compte les propriétés thermomécaniques homogénéisées obtenues dans les deux premières parties du mémoire. Les résultats numériques ont été validés à partir de mesures de pertes de flux effectuées au CERN et des mesures de déplacement sous compression axiale menées par CASA.
Ces trois années de thèse m'ont permis de mettre en place des modèles efficaces d'estimation des propriétés thermomécaniques des composites à très basse température. Ce travail ouvre la voie à la mise en place d'un outil d'aide à la conception des pièces de liaison en environnement cryogénique. Toutefois, de nombreuses interrogations scientifiques restent en suspens, justifant une poursuite de ce travail.

Dans la méthode multi-échelle, il serait intéressant de tenir compte d'autres phénomènes locaux comme par exemple l'influence du taux d'humidité sur le comportement thermomécanique des composites à renforts textiles aux très basses températures. En effet, cette problématique est une des préoccupations du CERN car dans les conditions de stockage actuelles des supports, de fortes variations du taux d'humidité ont été observées pouvant engendrer une diminution notable de leur performance mécanique. Par ailleurs, une interface imparfaite résultante d'une mauvaise imprégnation des fibres ou un taux de porosité élevé dans la matrice peut avoir des conséquences néfastes sur les performances thermiques et mécaniques des supports. Une étude de ces phénomènes mériterait d'être conduite à la suite de ce travail.

Enfin la méthodologie développée dans cette thèse peut s'appliquer à d'autres types de matériau comme les composites à base de fibre de carbone et de résine époxyde couramment utilisés dans le domaine de l'aérospatiale. Néanmoins il serait nécessaire de tenir compte des propriétés thermomécaniques particulières de la fibre de carbone.

Bibliographie

[1] *Site internet du cern*, (www.cern.ch).

[2] A. Alzina, A. Béakou, E. Toussaint, and B. Skoczen, *The influence of phonon transmission impedance on the thermal conductivity in a composite material for cryogenic structures*, Proceedings of the 11th European Conference on Composite Materials (ECCM-11), 1 (2004), pp. 409–410.

[3] A. Alzina, E. Toussaint, A. Béakou, and B. Skoczen, *Multiscale modelling of thermal conductivity in composite materials for cryogenic structures*, Composite Structures (Article in press), (2005), pp. 1–1.

[4] Y. Asakuma, S. Miyauchi, T. Yamamoto, H. Aoki, and T. Miura, *Homogenization method for effective thermal conductivity of metal hybride bed*, International Journal of Hydrogen Energy, In press, corrected proof.

[5] J. L. Auriault and H. I. Ene, *Macroscopic modelling of heat transfer in composites with interfacial thermal barrier*, Int. J. Heat Mass Transfer, 37 (1994), pp. 2885–2892.

[6] H. Bansemir and O. Haider, *Fibre composite structures for space applications-recent and future developments*, Cryogenics, 38 (1998), pp. 51–59.

[7] R. Barret, M. Berry, T. F. Chan, and al., *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[8] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for the periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[9] J. Berthelot, *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures (4˚Ed)*, TEC-DOC / Lavoisier, Paris, 2005.

[10] D. Bigaud, *Description géométrique pour la caractérisation mécanique multi-échelles de matériaux composites à renforts textiles 2D et 3D*, PhD Thesis, Université Lyon I, 1997.

[11] D. Bigaud and P. Hamelin, *Stiffness and failure modelling of 2d and 3d textile-reinforced composites by means of imbricate-type elements approaches*, Computers and Structures, 80 (2002), pp. 2253–2264.

[12] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini, *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*, Hermes Science, Paris, 2001.

[13] M. Castoldi and V. Parma, *Thermal performance calculation model for the lhc cold supports*, LHC-CRI Technical Note 98-18, (1998), pp. 1–7.

[14] J. Cheeke, B. Hebral, and C. Martinon, *Transfert de chaleur entre deux solides en dessous de 100 k*, J. Phys., 34 (1973), pp. 257–272.

[15] C. L. Choy and D. Greig, *The low temperature thermal conductivity of isotropic and oriented polymers*, J. Phys. C : Solid State Phys., 10 (1977), pp. 169–179.

[16] P. W. Chung, K. K. Tamma, and R. R. Namburu, *Asymptotic expansion homogenization for heterogeneous media : computational issues and applications*, Composites : Part A, 32 (2001), pp. 1291–1301.

[17] H. Danielsson, P. Lebrun, and J. M. Rieubland, *Precision heat inleak measurements on cryogenic components at 80k, 4.2k and 1.8k*, Cryogenics, 32 (1992), pp. 215–218.

[18] A. Dasgupta, R. K. Agarwal, and S. M. Bhandarkar, *Three-dimensional modeling of woven-fabric composites for effective thermo-mechanical and thermal properties*, Composites Science and Technology, 56 (1996), pp. 209–223.

[19] C. Disdier, V. Parma, and J. Pastor, *Lhc cold supports for cryodipôle and short straight section : thermo-mechanical verification by finite element calculation*, LHC-CRI Technical Note 98-17, (1999), pp. 1–49.

[20] G. W. Du, T. W. Chou, and P. Popper, *Analysis of three-dimensional textile preforms for multidirectional reinforcement of composites*, Journal of Materials Science, 26 (1991), p. 3438.

[21] P. El-Kallassi, *Tensile tests on gfre composite material at room temperature of the support posts of the lhc cold masses*, CERN(EDMS :529432), (2004), pp. 1–3.

[22] H. I. Ene, *On linear thermoelasticity of composite materials*, Int. J. Sci., 21 (1983), pp. 443–448.

[23] A. Galka, J. Telega, and S. Tokarzewski, *Heat equation with temperature-dependent conductivity coefficients and macroscopic properties of microheterogeneous media*, Math. Comput. Modell., 33 (2001), pp. 927–942.

[24] K. W. Garret and H. M. Rosenberg, *The thermal conductivity of epoxy-resin/powder composite materials*, J. Phys. D : Appl. Phys., 7 (1974), pp. 1247–1258.

[25] D. Gay, *Matériaux composites*, Hermes Science, Paris, 1987.

[26] M. Gerl and J. Issi, *Physique des matériaux*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.

[27] D. Greig, *Low temperature thermal conductivity of polymers*, Cryogenics, 28 (1988), pp. 243–247.

[28] G. Hartwig, *Thermal expansion of fibre composites*, Cryogenics, 28 (1988), pp. 255–266.

[29] G. Hartwig and S. Knaak, *Fibre-epoxy composites at low temperatures*, Cryogenics, 24/11 (1984), pp. 639–647.

[30] Z. Hashin, *On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse plane geometry*, J. Mech. Phys. Solids., 13 (1965), p. 119.

[31] ——, *Analysis of composite materials : a survey*, J. of Appl. Mech., 50 (1983), pp. 481–505.

[32] Z. Hashin and B. W. Rosen, *The elastic moduli of fiber-reinforced materials*, J. Appl. Mech., (1964), pp. 223–232.

[33] R. Hill, *Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials : I elastic behavior*, J. Mech. Phys. Solids., 12 (1964), p. 199.

[34] T. Horiuchi and T. Ooi, *Cryogenic properties of composite materials*, Cryogenics, 35 (1995), pp. 677–679.

[35] S. Hunklinger, *Tunneling in amorphous solids*, Cryogenics, 28 (1988), pp. 224–229.

[36] J. G. Hust and A. B. Lankford, *Graphite thermal conductivity (λ) and electrical resistivity (ρ) as a function of temperature (ipts-68 and nbs p2-20) from 5 to 2500 k*, NBS REPORT OF INVESTIGATION RESEARCH MATERIALS 8424, 8425, and 8426, (1984).

[37] P. L. Kapitza, *The study of heat transfer in helium ii*, J. Phys. (U.S.S.R), 4 (1941), p. 181.

[38] S. Kelham and H. M. Rosenberg, *The thermal conductivity and specific heat of epoxy-resin from 0.1-80k*, J. Phys. C : Solid State Phys., 14 (1981), pp. 1737–1749.

[39] I. M. Khalatnikov, *Introduction to the theory of superfluidity*, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R), 22 (1952), p. 687.

[40] H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*, Oxford University Press, London, 1953.

[41] A. F. Kregers and Y. G. Melbardis, *Determination of the deformation of three dimensionnaly reinforced composites by the stiffness averaging method*, Polymer Mechanics, 1 (1978), p. 3.

[42] A. Kuijper, *Measuring thermal conductivity of insulators*, Report of internship at CERN, (2001), pp. 1–27.

[43] G. Laschet, *Homogenization of the thermal properties of transpiration cooled multi-layer plates*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191 (2002), pp. 4535–4554.

[44] S. K. Lee, J. H. Byun, and S. H. Hong, *Analytical model for thermal expansion coefficients of plain woven fabric composites*, Compte-rendus du symposium "Textile Composites in Building Construction", (1996), p. 177.

[45] W. A. Little, *The transport of heat between dissimilar solids at low temperatures*, Can. J. Phys., 37 (1959), pp. 334–349.

[46] M. Mathieu, T. Renaglia, and C.Disdier, *Supportage de la masse froide du lhc*, EST-ESM Technical Note, (1996).

[47] D. Matsumoto, C. Reynolds, and A. Anderson, *Thermal boundary resistance at metal-epoxy interfaces*, Phys. Rev. B, 16 (1977), pp. 3303–3307.

[48] R. E. Meredith and C. W. Tobias, J. appl. Phys., 31 (1960), pp. 1270–1273.

[49] G. J. Morgan and D. Smith, *Thermal conduction in glasses and polymers at low temperatures*, J. Phys. C : Solid State Phys., 7 (1974), pp. 649–664.

[50] J. T. Mottram and R. Taylor, *Thermal conductivity of fibre-phenolic resin composite. part ii : Numerical evaluation*, Compos. Sci. Technol., 29 (1987), pp. 211–232.

[51] B. Olofsson, *A general model of fabric as a geometrical mechanical structure*, Journal of Textiles Institutes, 55 (1964), p. 541.

[52] M. W. Pilling, B. Yates, M. A. Black, and P. Tattersall, *The thermal conductivity of carbon fiber-reinforced composites*, Journal of material science, 14 (1979), pp. 1326–1338.

[53] L. Piraux, J. P. Issi, and P. Coopmans, *Apparatus for thermal conductivity measurements of thin fibres*, Measurement, 5 (1987), pp. 2–5.

[54] D. Radcliffe and H. Rosenberg, *The thermal conductivity of glass-fibre and carbon-fibre/epoxy composites from 2 to 80 k*, Cryogenics, (1982), pp. 245–249.

[55] L. Rayleigh, *On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium*, Phil. Mag., 34 (1892).

[56] ——, *The Theory of sound*, Dover Publications, New York, 1945.

[57] R. P. Reed and M. Golda, *Cryogenic properties of unidirectional composites*, Cryogenics, 34 (1994), p. 909.

[58] R. P. A. Rocha and M. E. Cruz, *Computation of the effective conductivity of unidirectional fibrous composites with an interfacial thermal resistance*, Numerical Heat Transfer, 39 (2001), pp. 179–203.

[59] J. Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia, *Introductions aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation - Application à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1992.

[60] G. Schwarz, *Thermal expansion of polymers from 4.2 k to room temperature*, Cryogenics, 28 (1988), pp. 248–254.

[61] F. Seyvet, V. Parma, and D. Simek, *Enhanced stiffness at cryogenic temperature of the glass-fibre/epoxy material of the lhc magnet supports*, AT-CRI Technical Note, (2004), pp. 1–11.

[62] D. Simek, *Visit report*, CERN(EDMS :478277), (2004), pp. 1–8.

[63] G. S. Springer and S. W. Tsai, *Thermal conductivities of unidirectional materials*, J. Composite Materials, 1 (1967), pp. 166–173.

[64] P. Suquet, *Plasticité et Homogénéisation*, Thèse d'Etat, Univ. Pierre et Marie Curie, 1982.

[65] E. Swartz and R. Pohl, *Thermal boundary resistance*, Rev. Mod. Phys., 61 (1989), pp. 605–667.

[66] E. T. Swartz, *Solid-solid thermal boundary resistance*, PhD Thesis, Cornell University, 1987.

[67] J. Trigo, *Lhc cryomagnets gfre support posts-f388*, Technical Note-HRM 10543, (2003), pp. 1–15.

[68] S. W. Tsai and H. T. Hahn, *Introduction to composite materials*, Technomic, 1980.

[69] R. Walsh, J. McColskey, and R. Reed, *Low temperature properties of a unidirectionnally reinforced epoxy fibreglass composite*, Cryogenics, 35/11 (1995), pp. 723–725.

[70] J. Wu, C. Shih, and H. Chu, *Influence of thermal boundary resistance on bolometric response of high-t_c superconducting films*, Cryogenics, 38 (1998), pp. 881–892.

[71] J. M. Yang, C. L. Ma, and T. W. Chou, *Elastic stiffness of biaxial and trixial woven composites*, Compte-rendus du 29$^{\text{ème}}$ symposium national SAMPE, (1984), p. 292.

[72] Q. Yu and J. Fish, *Multiscale asymptotic homogenization for multiphysics problems with multiple spatial and temporal scales : a coupled thermo-viscoelastic example problem*, Int. J. Solids Struct., 39 (2002), pp. 6429–6452.

[73] R. C. Zeller and R. O. Pohl, *Thermal conductivity and specific heat of noncrystalline solids*, Physical Review, 4 (1971), pp. 2029–2041.

[74] L. Zhao and P. Phelan, *Thermal contact conductance across filled polyimide films at cryogenic temperatures*, Cryogenics, 39 (1999), pp. 803–809.

[75] L. Zhao, P. Phelan, E. Niemann, and R. Weber, *Thermal resistance across a copper kapton copper/kapton/copper interface at cryogenic temperatures*, Advances in Cryogenic Engineering, 43 (1998), pp. 1359–1367.

Annexe A

Influence de l'orientation des mèches d'un composite tressé sur sa rigidité et sa conductivité thermique

A.1 Introduction

Dans les parties thermique et mécanique, le composite tressé utilisé dans les supports des cryodipôles du LHC a été modélisé sur ANSYS. Or ce logiciel n'étant pas spécialisé dans la construction d'une géométrie complexe (surfaces paramétrées), il ne nous a pas permis de représenter le VER_t de la manière la plus réaliste possible. En effet, les rayons de courbure des mèches à leurs croisements sont trop faibles, ce qui augmente la surface du VER_t dans le plan (1,3) (figure 4.6). La conséquence directe de cette augmentation est que la quantité de résine est surestimée, c'est pour cette raison que dans le modèle représentant le composite tressé du support le taux volumique de fibres est de $31,25$ % au lieu de 46 %. Malgré cette différence, les résultats numériques et expérimentaux sont très proches et ne justifient pas de reconstruire la géométrie sur un logiciel de CAO. Par contre, si l'on veut étudier l'influence de paramètres comme l'orientation des mèches, une modélisation plus fine de la géométrie s'avère nécessaire. Dans ce but, la géométrie d'un composite tressé permettant d'effectuer des changements d'orientation de mèches (contrairement au VER_t du composite du support) est construite sur le logiciel de CAO CATIA. Ensuite cette géométrie est maillée sur le logiciel IDEAS. Ces deux étapes font l'objet d'un premier paragraphe qui est suivi par une étude de la conductivité thermique et de la rigidité pour plusieurs orientations de mèches à taux volumique de fibres constant.

A.2 Construction de la géométrie du VER

Le composite étudié est constitué d'un renfort dont les mèches sont orientées à 0° et à $\pm\theta^\circ$. Les mèches à 0° correspondent aux mèches d'âme et sont construites à partir d'une section lenticulaire extrudée le long de sa normale. Les mèches à θ° sont quant à elles plus compliquées à construire et c'est dans ce cas que l'utilisation du logiciel CATIA montre son intérêt. Pour construire une demi-période de ces mèches, cinq sections lenticulaires sont utilisées. Les coordonnées et les orientations (3 angles) de ces sections sont paramétrées de manière à ajuster la disposition des demi-périodes pour qu'elle soit la plus réaliste possible. Ces sections sont ensuite reliées par plusieurs splines permettant de construire, après un balayage, la surface latérale de la demi-période. Un remplissage de la partie intérieure permet d'obtenir le volume de la demi-période. Ce volume est finalement répété plusieurs fois en utilisant des translations et des symétries de manière à former les mèches à θ° et à $-\theta^\circ$. La figure A.1 présente la géométrie des différentes mèches. Toutes ces mèches sont

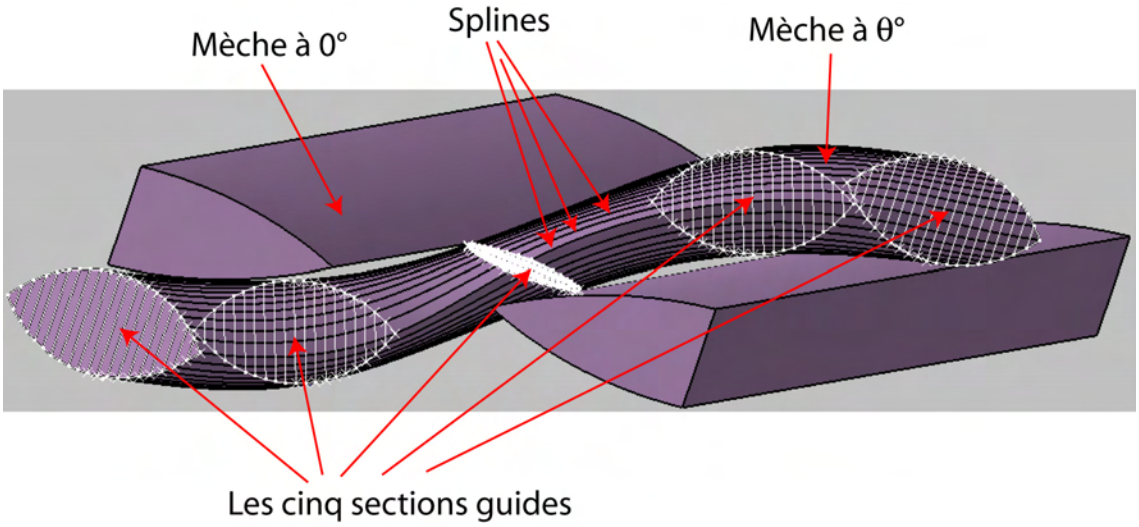


FIG. A.1 – Géométrie des mèches.

prolongées de manière à créer un tissu dans lequel on extrait un volume élémentaire représentatif du renfort. Ce volume est ensuite complété par de la résine formant ainsi le VER du composite tressé. La figure A.2 présente le VER du composite tressé pour des mèches orientées à $\pm 30^\circ$. Ce VER est ensuite maillé avec le logiciel IDEAS. En effet, initialement la géométrie a été importée dans ANSYS mais il s'est avéré impossible de la mailler suite à des incompatibilités entre les surfaces paramétrées et la fonction *vsweep* permettant d'effectuer le maillage d'un volume en balayant une surface maillée à l'intérieur de celui-ci.

Le maillage des mèches est effectué en deux étapes :

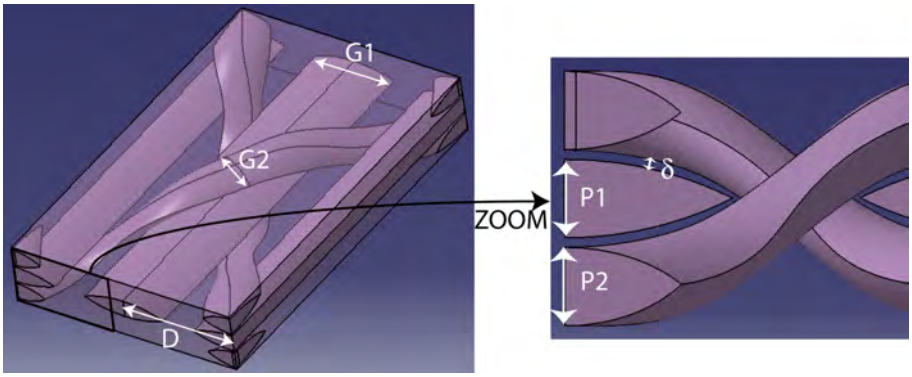


FIG. A.2 – Exemple de géométrie d'un volume élémentaire représentatif d'un composite tressé modélisé sur CATIA.

1. Les surfaces latérales des mèches sont maillées avec des éléments quadrangulaires à 4 nœuds.
2. La surface lenticulaire d'entrée est maillée puis balayée le long de la ligne moyenne de la mèche. Les éléments volumiques utilisés sont des briques à 8 nœuds.

En procédant de cette manière, l'isotropie transverse des mèches est conservée. Le reste du VER (résine pure) est quant à lui maillé en suivant ces deux étapes :

1. Les surfaces en contact avec les mèches sont maillées de la même manière que les surfaces latérales des mèches.
2. Le reste du volume est maillé librement avec des éléments tétraédriques à 8 noeuds.

Le maillage d'un exemple de VER du renfort où les mèches sont orientées à $\pm 60^{\circ}$ est illustré sur la figure A.3. Ce maillage est ensuite exporté vers le logiciel ANSYS dans lequel le calcul de la conductivité thermique et du module d'élasticité longitudinale est effectué. Les résultats pour diverses orientations de mèches sont présentés dans le paragraphe suivant.

A.3 Calcul thermomécanique pour divers composites tressés

Dans une première série de simulations, la conductivité thermique et le module d'élasticité longitudinale d'un composite tressé sont calculés pour quatre orientations de mèches différentes. Lors du passage d'une orientation à une autre, le taux volumique de mèches et la proportion de mèches à 0° sont conservés. Cette condition n'est satisfaite que si les dimensions des mèches d'âme, leur écartement, et l'espace

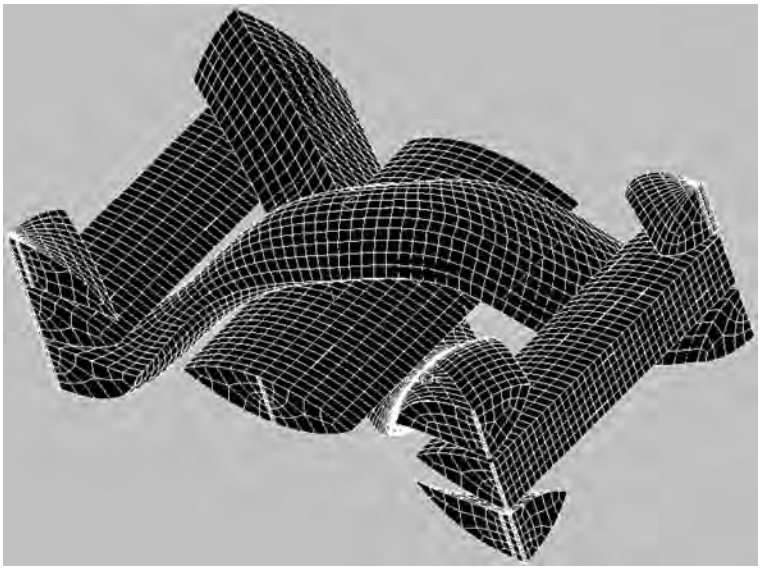


FIG. A.3 – Exemple de maillage de l'ensemble du volume élémentaire représentatif d'un renfort.

δ sont modifiés. Le tableau A.1 présente les différentes dimensions utilisées pour construire la géométrie dans chacun des quatre cas.

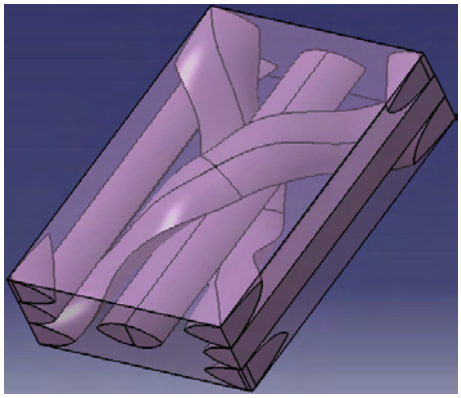
Orientation	Mèche d'âme (mm)		Mèche à $\pm\theta$ (mm)		δ	D	Taux volumique	Proportion de mèche
(°)	G1	P1	G2	P2	(mm)	(mm)	de fibre %	d'âme (%)
30	2,7	1,4	3	1,4	0,03	4,35	31,7	44,4
40	3,2	1,4	3	1,4	0,07	4,9	31,6	44,4
50	4	1,4	3	1,4	0,1	5,8	32	44,6
60	5	1,4	3	1,4	0,17	6,9	32	44,2

TAB. A.1 – Dimensions du VER pour différentes orientations de mèche

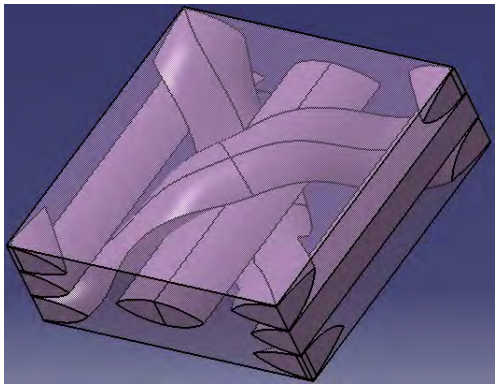
La figure A.4 présente la géométrie des quatre VER. Après maillage et résolution, la conductivité thermique et le module d'élasticité longitudinal sont calculés dans chacun des cas pour des températures comprises entre 1,9 K et 273 K. La figure A.5 illustre les résultats obtenus.

Lors du passage de 30° à 60°, la conductivité thermique longitudinale diminue de manière générale. C'est dans la zone de température $10 - 40$ K que la diminution est la plus faible (2,5%) tandis qu'à température ambiante, elle est la plus grande (7,5%). Tout comme la conductivité thermique, la rigidité longitudinale diminue lors du passage de 30° à 60°. Elle est de l'ordre de 4,5 % (30 $GPa \rightarrow$ 28,7 GPa) pour les basses températures et de l'ordre de 11,7% (19,7 $GPa \rightarrow$ 17,4 GPa) pour les températures proches de 293 K.

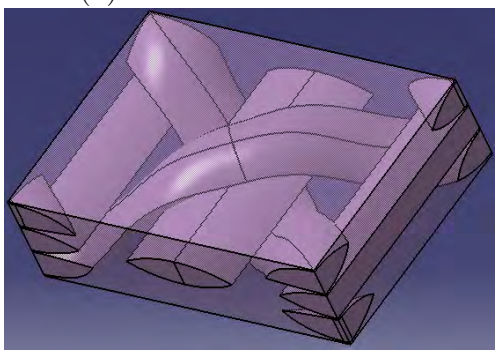
Les variations étant globalement faibles aux basses températures, l'influence de



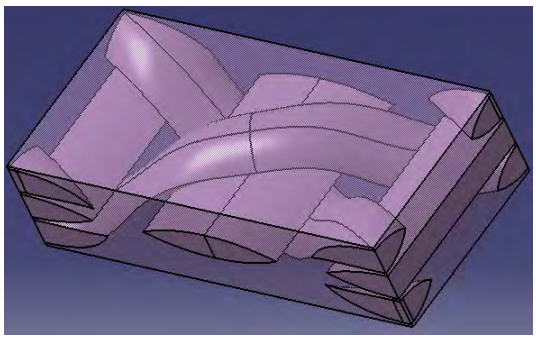
(a) Mèches orientées à $\pm 30^{\circ}$



(b) Mèches orientées à $\pm 40^{\circ}$



(c) Mèches orientées à $\pm 50^{\circ}$



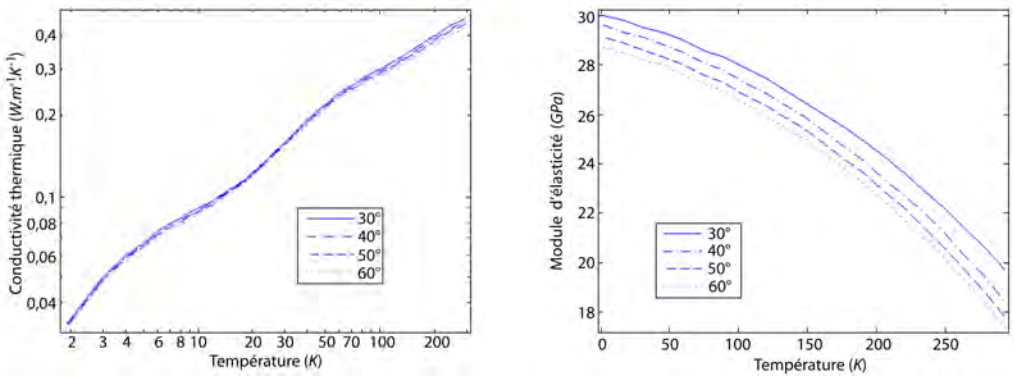
(d) Mèches orientées à $\pm 60^{\circ}$

FIG. A.4 – Repésentation des quatre VER.

l'orientation des mèches sur les propriétés thermomécaniques n'est pas significative. A température ambiante, la différence est beaucoup plus marquée, en particulier, sur la rigidité longitudinale. C'est donc cette dernière qui est prépondérante lors de la conception d'un composite tressé.

A.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'accent a été porté sur l'analyse de l'influence de l'orientation des mèches sur les propriétés thermomécaniques d'un composite tressé. Dans cette optique, une méthode permettant de représenter la géométrie d'un composite tressé sur CATIA puis son maillage sur IDEAS a été développée. L'utilisation de ces deux logiciels a permis d'obtenir une représentation du motif beaucoup plus réaliste (VER du composite plus compacte) que celle obtenue sur ANSYS en augmentant les rayons de courbure des splines. Après simulations, les conductivités thermiques et les rigidités équivalentes ont été comparées pour différentes orientations de mèches et différentes températures. Les résultats montrent qu'à très basse température, l'influence de l'orientation des mèches est moins significative contrai-



(a) (b)

FIG. A.5 – Evolution de la conductivité thermique (a) et du module d'élasticité (b) suivant 1 en fonction de la température, pour les quatre orientations de mèches.

rement au cas où la température est proche de 293 K. Par conséquent, pour des chargements en température mixtes (basse et haute) sur une structure à base du composite tressé étudié, le paramètre de conception déterminant est finalement la rigidité. Pour étendre ce résultat à un cas plus général, il serait intéressant d'étudier l'influence de l'orientation des mèches pour d'autres motifs.

Annexe B

Présentation du logiciel

B.1 Introduction

Le but de ce logiciel est de déterminer le comportement thermique et thermoélastique équivalent d'un composite unidirectionnel à l'aide d'un modèle d'homogénéisation périodique. Ce modèle est implémenté sous MATLAB 7 à l'aide de la méthode des éléments finis. Il prend en compte la dépendance en température des modules d'élasticité, des déformations thermiques et des conductivités thermiques de chacun des constituants (fibre et matrice). De plus, les modèles de résistance thermique de dispersion acoustique (AMM) et de dispersion par diffusion ont été implémentés. Ce logiciel permet aussi d'utiliser les résultats de cette homogénéisation pour le calcul du comportement thermomécanique équivalent des stratifiés. Ce logiciel est séparé en deux parties qui font l'objet des deux paragraphes suivants.

B.2 Partie thermique

Lorsque la partie thermique est choisie, on obtient la fenêtre représenté figure B.1. Elle est séparée en trois zones. La première nommée *Choix du taux de fibre volumique (v_f)* permet de sélectionner un taux de fibre compris entre 35 % et 45 % par incrément de 5 % dans le composite unidirectionnel. La géométrie du VER et de son maillage pour les différents taux de fibres sont déjà présents dans le logiciel afin d'éviter un couplage avec le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS qui compliquerait fortement sa programmation. La figure B.2 présente le maillage obtenu pour v_f =35 %. La seconde zone, permet de tenir compte ou non de la résistance thermique d'interface de type "Kapitza". Dans le cas où il n'y en a pas, le flux thermique est conservé et la température est identique de part et d'autre de l'interface. Dans le cas où il y a une résistance thermique, la nouvelle fenêtre représentée figure B.3 s'ouvre.

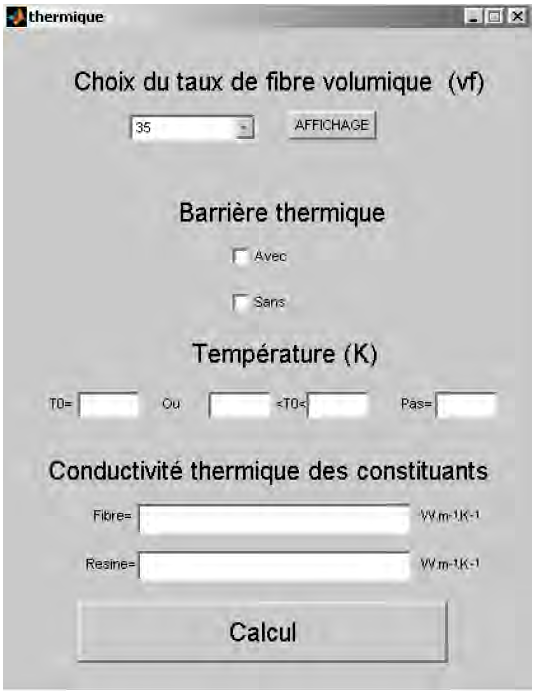


FIG. B.1 – Copie d'écran de la fenêtre principale de la partie thermique.

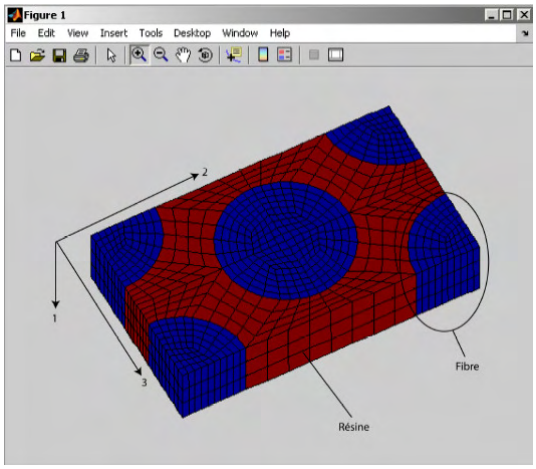


FIG. B.2 – Copie d'écran d'un exemple de maillage (35 %).

Cette barrière peut être calculée de deux manières différentes. La première méthode consiste à entrer, la vitesse acoustique longitudinale et transversale de chacun des constituants tandis que l'autre méthode consiste à entrer le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et la densité de chacun des constituants. Une fois les différents champs remplis, on peut choisir de calculer la résistance thermique à l'aide de l'équation suivante (équation (2.16)) :

$$R_{s-s} \equiv \frac{(T_1 - T_2)}{\dot{Q}} = \frac{15h^3}{8\pi^5 k^4} \left[\frac{\Gamma_{1,l}}{c_{1l}^2} + \frac{\Gamma_{1,t_1} + \Gamma_{1,t_2}}{c_{1t}^2} \right]^{-1} T^{-3}$$

Cette barrière peut être calculée soit avec le modèle de dispersion acoustique (AMM) soit avec le modèle de dispersion par diffusion (DMM). Une fois validé (bouton sauvegarde), on retombe sur la fenêtre représentée en figure B.1. On choisit les températures pour lesquelles on veut calculer la conductivité thermique équivalente du composite unidirectionnel. Pour finir, on rentre les conductivités thermiques, dépendantes de la température, des différents contituants. Quand le calcul est terminé la fenêtre représentée sur la figure B.4 s'ouvre.

Dans cette fenêtre, on a la possibilité de directement tracer l'évolution des conductivités thermiques longitudinales et transversales en fonction de la température ou de les utiliser pour calculer puis tracer les conductivités thermiques équivalentes d'un stratifié. Il est à noter que toutes les données sont sauvegardées dans des fichiers

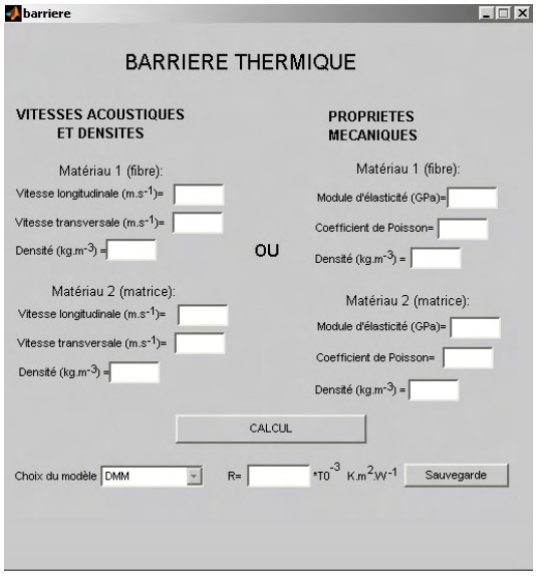


FIG. B.3 – Copie d'écran de la fenêtre permettant de calculer la barrière thermique d'interface.

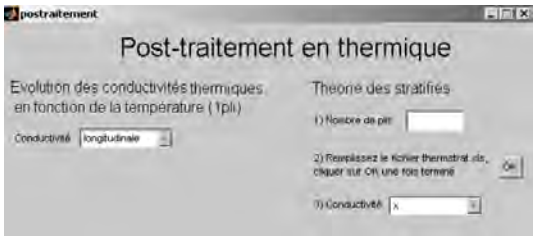


FIG. B.4 – Copie d'écran de la fenêtre de post-traitement.

de type excel.

La seconde partie du logiciel qui traite du comportement thermoélastique d'un composite unidirectionnel et d'un stratifié font l'objet du paragraphe suivant.

B.3 Partie mécanique

Lorsque cette partie est choisie, on obtient la fenêtre représenté figure B.5. Comme dans la partie thermique, le taux de fibre et la plage de température sont à choisir. Ensuite, les propriétés mécaniques (module d'élasticité, coefficient de Poisson et déformation thermique) de chacun des constituants sont rentrés. Ces paramètres peuvent être dépendants de la température. Une fois le calcul terminé, la fenêtre de post-traitement (figure B.6) s'ouvre automatiquement dans laquelle les rigidités et les modules de l'ingénieur équivalents d'un composite unidirectionnel peuvent être tracés en fonction de la température.

Dans la zone *théorie des stratifiés*, les propriétés thermoélastiques équivalentes

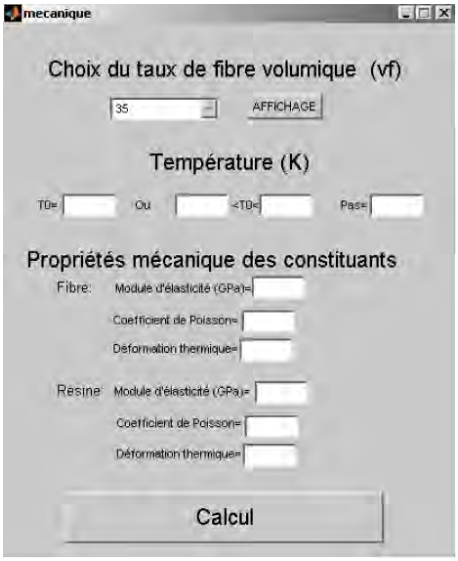


FIG. B.5 – Copie d'écran de la fenêtre principale de la partie mécanique.

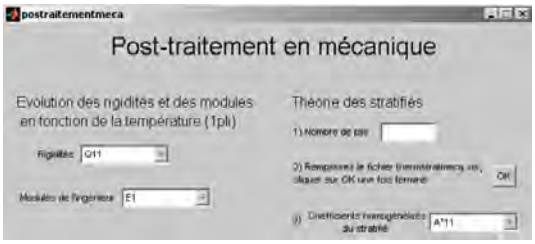


FIG. B.6 – Copie d'écran de la fenêtre de post-traitement.

d'un composite unidirectionnel sont utilisées dans le calcul des matrices de membranes A^*, de flexion B^*, de couplage C^* normées [68] et des déformations thermiques équivalentes d'un stratifié. L'évolution de leurs coefficients en fonction de la température peuvent être tracés. Il est à noter que toutes les valeurs de chacun des coefficients sont stockées dans des fichiers de type excel.

B.4 Conclusion

Un logiciel permettant de calculer les propriétés thermomécaniques des composites unidirectionnels et des stratifiés a été développé. Ce logiciel est aussi utilisable aux températures cryogéniques car il tient compte de la dépendance en température des différents constituants et de la résistance thermique d'interface fibre/matrice de type "Kapitza". Une extension de ce logiciel serait de le coupler avec un mailleur puissant (IDEAS) de manière à pouvoir estimer le comportement équivalent des composite à renfort textile.