HAL
open science

Influence de la topographie sur les ondes de surface

Florent Chazel

To cite this version:

Florent Chazel. Influence de la topographie sur les ondes de surface. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2007. Français. NNT : . tel-00200419v2

HAL Id: tel-00200419

https://theses.hal.science/tel-00200419v2

Submitted on 21 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

$N°$ d'ordre : 3436

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Florent CHAZEL

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

****

INFLUENCE DE LA TOPOGRAPHIE SUR LES ONDES DE SURFACE

****

Soutenue le : 25 Septembre 2007

Après avis de :

MM.	Jean-Claude SAUT	Professeur, Université Paris-Sud	**Rapporteurs**
	Didier BRESCH	Directeur de Recherche, Université de Savoie	

Devant la commission d'examen formée de :

MM.	Jean-Claude SAUT	Professeur, Université Paris-Sud	**Président**
	Didier BRESCH	Directeur de Recherche, Université de Savoie	**Rapporteur**
	Philippe BONNETON	Directeur de Recherche, Université Bordeaux 1	**Examinateurs**
	David GERARD-VARET	Chargé de Recherche, Ecole Normale Supérieure	
	David LANNES	Chargé de Recherche, Université Bordeaux 1	
	Alain-Yves LE ROUX	Professeur, Université Bordeaux 1	

- 2007 -

Remerciements

La réalisation d'une thèse est loin d'être un long fleuve tranquille. Aux moments de joie, de satisfaction, de fierté même parfois, se succèdent des moments de doute, de perte de motivation, d'autocritique destructive, et l'on finit par se demander si l'on aura la force d'aller jusqu'au bout. Cette force, on la puise dans le soutien sans faille de nos proches, dans le souvenir de ceux qui ont un jour crû en nous et dans la volonté de ne pas les décevoir. Sans ces personnes, je n'aurai certainement pas mené cette thèse à son terme, et je tiens à ce qu'ils en soient tous ici remerciés.

Tout d'abord mon directeur de thèse, David Lannes. David, je ne te remercierai jamais assez pour ta disponibilité et ta patience avec moi. Je t'ai donné beaucoup de fil à retordre, souvent déçu je pense, mais tu ne m'as jamais laissé tomber et tu as toujours su me pousser et me remotiver au moment où il le fallait. Ta stoïcité devant mes retards incessants mériterait que l'on érige une statue en ton nom ! Je mesure plus que jamais la chance de t'avoir eu comme directeur de thèse, tant d'un point de vue scientifique qu'humain.

Je voudrais ensuite remercier Jean-Claude Saut et Didier Bresch pour leur gentillesse et pour m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse. Je remercie également Philippe Bonneton, David Gerard-Varet et Alain-Yves Le Roux d'avoir eu l'amabilité d'accepter de faire partie de mon jury de thèse.

Un grand remerciement aux deux énergumènes que sont Paul Vigneaux et Ludovic Gatard, avec qui j'ai eu le bonheur de partager le bureau 282 de l'IMB. Sans vous deux, ces trois ans auraient été interminables, et je garde précieusement en mémoire nos nombreux délires et autres joutes humoristiques ! Je vous souhaite une bonne continuation, en espérant vous recroiser un jour et, qui sait, travailler ensemble.

Je tiens à ce qu'ici soit solenellement remercié Franck Boyer, non seulement pour ses excellents cours particuliers à l'époque où je n'étais encore qu'un petit taupin, mais surtout pour m'avoir fort justement aiguillé vers le DEA de Mathématiques Appliquées de Bordeaux, et de m'avoir ainsi détourné de ma folle idée d'aller faire de la cryptologie à Limoges... Un grand merci à toi Franck ! J'espère pouvoir te remercier de vive voix très bientôt, de préférence autour d'une bonne bouillabaisse !

Un merci infini à toute ma famille sans laquelle je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui. Tout d'abord à mes parents, qui ont sû dans leur infinie sagesse me donner le goût des

études, et qui m'ont toujours poussé à aller plus loin dans celles-ci. Ensuite, et surtout, à ma tendre femme Eléonore. Chaque jour qui passe, je me rends compte un peu plus de la chance incommensurable que j'ai de t'avoir à mes côtés. Tu m'as toujours soutenu durant ces trois longues années, à chaque heure, chaque minute, chaque seconde. Tu m'as toujours poussé à aller de l'avant, et toujours réconforté dans les moments difficiles. Sans toi, cette thèse n'aurait jamais vu le jour et si il n'y avait qu'une seule personne à remercier, ce serait toi. Puisse cette thèse être le début de l'accomplissement de tous nos rêves !

Pour finir, je tiens à dédier cette thèse à deux personnes très chères à mon coeur qui nous ont quitté beaucoup trop tôt, mon grand-père René et Michel. Votre souvenir restera à jamais gravé dans ma mémoire.

Table des matières

Introduction générale **1**

Partie I Construction de modèles de type Boussinesq pour différentes échelles de variations topographiques

1 Asymptotic expansion of the Dirichlet-Neumann operator **21**
1.1 Elliptic equations on a strip 21
1.2 Application to $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$ 32
1.3 Derivation of preliminary models 35

2 Boussinesq-like models for slightly varying bottoms **37**
2.1 Derivation of a first class of equivalent systems 37
2.2 A non-linear change of variable 40
2.3 The completely symmetric systems 41

3 Boussinesq-like models for high topographical variations **45**
3.1 A revised strategy 45
3.2 A new class of equivalent systems 47
3.3 The final class of symmetric models 50

Partie II Sur l'approximation de Korteweg-de Vries pour fond non plat

4 The uncoupled KdV approximation **55**
4.1 Derivation of the approximation 55
4.2 Validity of the approximation for sufficiently decaying topographies 58

5 A topographically modified KdV approximation **63**
5.1 Discussion on the validity of the approximation 63
5.1.1 The case of a step 65

5.1.2 The case of a sinusoidal bottom 67
5.2 A topographically modified approximation 68

Partie III Simulations numériques

6 Numerical comparison of the models 75
6.1 Numerical schemes 75
6.1.1 Numerical scheme for the KdV equations 75
6.1.2 Numerical scheme for the Boussinesq system 76
6.1.3 Initial data 78
6.1.4 Validation of the numerical method 79
6.2 Numerical results and comments 79
6.2.1 Numerical results 79
6.2.2 Comments 95

7 Simulation numérique des équations de Green-Naghdi 97
7.1 Présentation des méthodes numériques 97
7.1.1 Introduction 97
7.1.2 Construction du schéma numérique 99
7.1.3 Validation du schéma en fond plat 106
7.2 Comparaison numérique des modèles de Green-Naghdi et de Boussinesq (Σ) 107
7.2.1 Le cas d'une marche 109
7.2.2 Le cas d'une pente douce 121

Conclusions et perspectives 127

Introduction générale

La modélisation des écoulements littoraux représente actuellement un enjeu scientifique de taille en ingénierie côtière. Les processus hydrodynamiques liés à la transformation de la houle en milieu peu profond tels que les effets non-linéaires, dispersifs ou encore bathymétriques sont complexes à étudier, et leur compréhension est indispensable si l'on veut être en mesure de prévoir l'impact de phénomènes à grande échelle tels que la propagation d'ondes de type tsunami ou encore l'impact d'éventuels aménagements. A ce jour, l'analyse et la simulation des équations fondamentales et complètes de la physique associées à ces écoulements se revêlent être des tâches ardues, voire même utopiques sur les échelles qui nous intéressent ici. En effet, les domaine d'études sont typiquement de l'ordre de quelques kilomètre carrés à quelques centaines de kilomètres carrés, et il est dès lors impératif d'essayer de réduire la complexité du problème. De nombreux modèles approchés ont ainsi vu le jour dans le but d'appréhender les processus hydrodynamiques prépondérants dans des cadres physiques simplifiés. La construction des premiers modèles de ce type remonte à la fin du XIXème siècle et ceux-ci ont été depuis cette époque largement utilisés et améliorés, même si le problème de leur justification mathématique ne fut abordé qu'à partir de la fin du siècle dernier. De plus, ceux-ci se restreignent souvent au cadre d'un fond plat, et ne permettent donc pas de rendre compte de phénomènes primordiaux tels que les transformations non-linéaires de la houle liées aux variations bathymétriques.

L'objectif de cette thèse est de proposer de nouveaux modèles d'écoulements littoraux permettant de rendre compte de l'influence de la topographie des fonds marins sur les ondes de surface. La réalisation de cet objectif est divisé en trois parties d'égale importance : une partie de modélisation, où les méthodes de construction seront présentées de façon détaillée, une partie d'analyse mathématique, où les modèles obtenus seront systématiquement et rigoureusement justifiés, et enfin une partie de simulation numérique où ces modèles seront implémentés puis comparés sur des cas classiques de topographie. Le domaine physique d'application de ces modèles se situe typiquement en eau peu profonde, de plusieurs kilomètres au large jusqu'à la zone de levée, en amont de la zone de surf interne. Le phénomène de déferlement ne sera donc pas abordé ici.

Tout travail de modélisation nécessite en premier lieu la mise en place d'un cadre physique spécifique. Nous nous intéresserons ici au cas d'un fluide idéal, incompressible, irrotationnel et sous la seule influence de la gravité. Ce type d'hypothèses simplificatrices est classiquement utilisé en océanographie et peuvent être aisément justifiées sur les grandes échelles spatiales qui nous intéressent. En effet, les hypothèses de fluide idéal et d'incompressibi-

lité sont particulièrement adaptées à l'eau, pour laquelle la viscosité et les variations de masse volumiques sont très faibles, l'hypothèse d'irrotationnalité venant du fait que l'on ne s'intéresse pas ici aux zones de surf et de swash où les effets rotationnels ne sont plus négligeables. Le domaine d'étude se présente de la manière suivante :

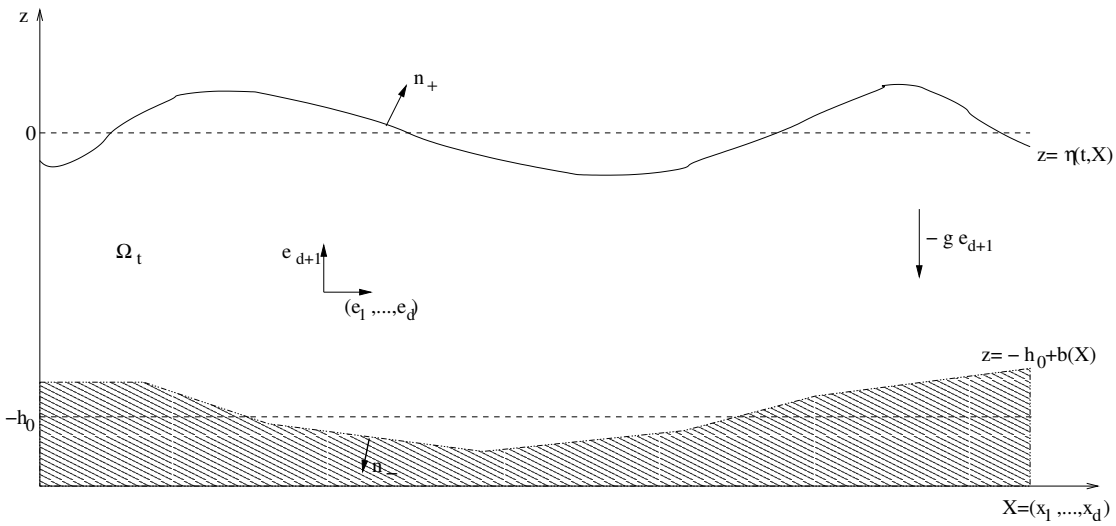


FIG. 0.0.1 – Domaine d'étude

Dans cette thèse, nous travaillerons, sauf mention contraire, indifféremment en deux ou trois dimensions d'espace. On note $X \in \mathbb{R}^d$ la variable transverse, d étant physiquement égal à 1 ou 2. Dans le cas bidimensionnel correspondant à $d = 1$, que l'on appellera 1-D de surface afin d'unifier nos abréviations avec celles classiques d'océanographie, $X = x$ correspond à la coordonnée selon la direction primaire de l'écoulement ; dans le cas tridimensionnel correspondant à $d = 2$, appelé 2-D de surface, $X = (x, y)$ représente les coordonées horizontales. Nous restreignons notre étude au cas où la surface libre et les variations topographiques peuvent être paramétrisées par deux fonctions $(t, X) \to \eta(t, X)$ et $X \to b(X)$ définies respectivement par rapport à la surface au repos $z = 0$ et à la profondeur moyenne $z = -h_0$ elle aussi au repos. La variable temporelle est classiquement notée t. Le domaine occupé par le fluide, noté Ω_t, est donc défini de la manière suivante pour tout temps $t \geq 0$:

$$\Omega_t = \{(X, z),\ X \in \mathbb{R}^d,\ -h_0 + b(X) \leq z \leq \eta(t, X)\} \ .$$

Dans le but d'écarter certains cas physiques tels que la présence d'îles ou de plages, on impose une condition classique de profondeur d'eau minimale : il existe ainsi une constante h_{min} strictement positive tel que :

$$\eta(t, X) + h_0 - b(X) \geq h_{min} \ , \ \ (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ . \tag{0.0.1}$$

Sous les précédentes hypothèses, les équations fondementales de la physique se réduisent au système d'équations suivant, communément appelées équations d'Euler surface libre ou

encore équations des water waves, qui permettent de décrire l'évolution de la surface libre η du fluide et du champ de vitesse V associé à l'écoulement :

$$\begin{cases} \partial_t V + V \cdot \nabla_{X,z} V = -g e_z - \nabla_{X,z} P & \text{dans } \Omega_t, \ \ t \geq 0 \ , \\ \nabla_{X,z} \cdot V = 0 & \text{dans } \Omega_t, \ \ t \geq 0 \ , \\ \nabla_{X,z} \times V = 0 & \text{dans } \Omega_t, \ \ t \geq 0 \ , \\ \partial_t \eta - \sqrt{1 + |\nabla_X \eta|^2}\, \mathbf{n}_+ \cdot V|_{z=\eta(t,X)} = 0 & \text{pour } t \geq 0, \ X \in \mathbb{R}^d \ , \\ P_{|_{z=\eta(t,X)}} = 0 & \text{for } t \geq 0, \ X \in \mathbb{R}^d \ , \\ \mathbf{n}_- \cdot V|_{z=-h_0+b(X)} = 0 & \text{pour } t \geq 0, \ X \in \mathbb{R}^d \ , \end{cases} \tag{0.0.2}$$

où $\mathbf{n}_+ = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}(-\nabla\eta, 1)^T$ et $\mathbf{n}_- = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla b|^2}}(\nabla b, -1)^T$ désignent respectivement le vecteur normal extérieur à la surface et le vecteur normal extérieur au fond. La première équation correspond à l'équation d'Euler pour un fluide parfait sous la seule influence de la gravité, caractérisée par le terme $-ge_z$ où e_z désigne le vecteur unitaire selon la direction verticale. Les seconde et troisième équations expriment les conditions d'incompressibilité et d'irrotationnalité du fluide. Enfin, les deux dernières correspondent aux conditions aux limites imposées à la surface libre et au fond. Ces deux conditions sont de type surface bornantes car elles spécifient toutes deux qu'aucune particule de fluide ne traverse la surface qui leur est associée. La surface libre dépendant du temps, la condition correspondante est dite de type cinématique. Pour finir, on néglige ici les effets liés à la tension de surface et on suppose la pression P constante à la surface. Quitte à renormaliser celle-ci, on peut donc la considérer nulle.

La modélisation mathématique impose, en plus de la construction rigoureuse des modèles, de justifier l'approximation qu'ils fournissent. Cette justification se traduit en les termes suivants : le problème de départ est-il bien posé, autrement dit y a-t-il existence et unicité de solutions sur les échelles de temps considérées, et le modèle fournit-il une bonne approximation de ces solutions. La réponse à la première question passe par l'analyse mathématique des équations (0.0.2), qui se révèle complexe non seulement du fait du caractère non-linéaire et strictement non-hyperbolique de celles-ci, mais aussi de l'évolution temporelle du domaine Ω_t occupé par le fluide. Le caractère bien posé de ces équations a ainsi été l'objet de nombreuses recherches. Les travaux fondateurs sur ce problème en 1-D de surface remontent à Nalimov ([54], 1974), Ovsjannikov ([57], 1976), Yoshihara ([72], 1982) et Craig ([20], 1985). Il faut attendre la percée de Wu ([70], 1997 et [71], 1999) et Lannes ([41], 2005) pour que le caractère bien posé soit prouvé sans condition restrictive, respectivement en profondeur infinie et finie. Il est à noter que des extensions de ce résultat ont été démontrées par Ambrose et Masmoudi ([5], 2005) dans le cas incluant la tension de surface, et par Coutand et Shkoller ([19], 2005) et Shatah et Zeng ([63], 2006) dans le cas rotationnel pour d'une boule de liquide dans un espace sans gravité. Le caractère bien

posé des équations (0.0.2) est finalement démontré en temps long par Alvarez-Samaniego et Lannes ([3], 2007), ce qui nous fournit un cadre théorique parfaitement défini pour le problème qui nous intéresse ici. Néanmoins, la description qualitative et quantitative des solutions demeure très complexe, et la simulation numérique des équations d'Euler surface libre reste une tâche ardue, spécialement en 2-D de surface et aux échelles considérées. Ces observations ont ainsi conduit les physiciens et les mathématiciens à recourir à la construction de modèles approchés permettant de décrire de manière satisfaisante les solutions du problème. Pour ce faire, une méthode classique consiste à se placer dans un régime physique spécifique afin de construire, par analyse asymptotique, de nouvelles équations simplifiées dont les solutions fournissent une approximation de celles du problème initial. Ce type de modèle, communément appelés modèles asymptotiques, nécessite un adimensionnement des équations afin de faire apparaître un ou plusieurs petits paramètres, en fonction desquels des développements asymptotiques de quantités ad-hoc pourront être réalisés.

Le régime physique considéré ici est celui d'ondes longues de faible amplitude, autrement appelé weakly non-linear shallow water regime. Pour définir ce régime, on introduit les grandeurs caractéristiques suivantes : soient λ la longueur d'onde typique des ondes de surface, a l'amplitude caractéristique des ondes de surface et b_0 l'amplitude caractéristiques des variations bathymétriques. On rappelle que h_0 est la profondeur moyenne calculée à partir de l'état au repos.

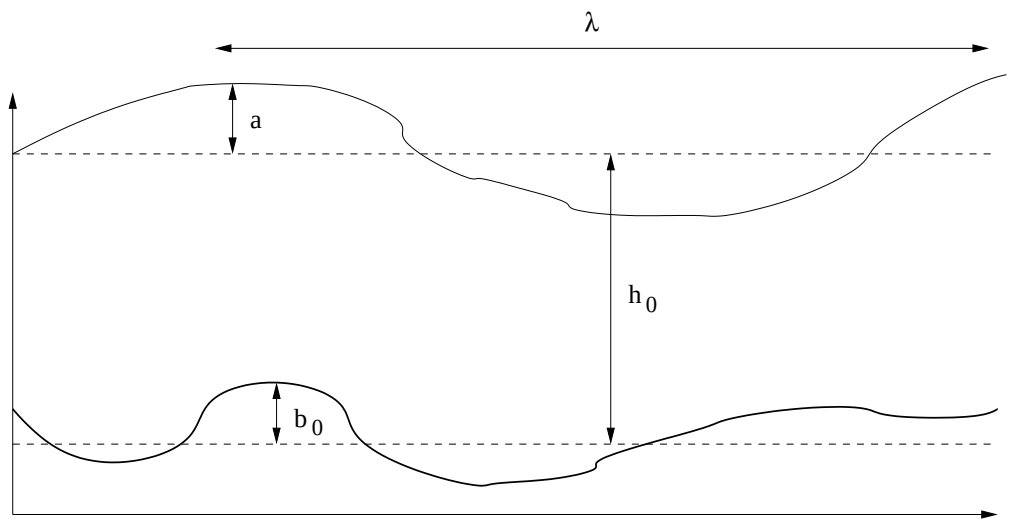


FIG. 0.0.2 – Grandeurs caractéristiques du régime d'ondes longues

Pour finir, on définit les paramètres sans dimension suivants :

$$\epsilon = \frac{a}{h_0} \ ; \ \mu = \frac{h_0^2}{\lambda^2} \ ; \ S = \frac{a\lambda^2}{h_0^3} = \frac{\varepsilon}{\mu} \ ; \ \beta = \frac{b_0}{h_0} \ ,$$

Dans le cadre du régime d'ondes longues de faible amplitude, l'amplitude a est supposée petite devant la profondeur h_0, elle-même petite devant la longueur d'onde λ, et le nombre

de Stokes est pris de l'ordre de $O(1)$. Ce régime est donc caractérisé par les relations suivantes :

$$\varepsilon \ll 1 \ ; \ \ \mu \ll 1 \ ; S = O(1) \ .$$

Le paramètre ε est souvent appelé paramètre de non-linéarité car il permet de quantifier les effets non-linéaires dans les écoulements considérés. De même, μ est communément appelé paramètre de dispersion. Le fait que le nombre de Stokes S soit de l'ordre de $O(1)$ implique que dans ce régime, les effets non-linéaires sont du même ordre que les effets dispersifs. Cet équilibre permet par exemple la génération et la propagation d'ondes de type soliton. Le domaine d'application physique de ce régime est double : il permet naturellement de considérer des écoulements littoraux mais aussi de s'intéresser à la propagation d'ondes de type tsunami. Dans le cadre des écoulements côtiers, où la profondeur est typiquement de l'ordre d'une dizaine de mètres et la longueur d'onde de l'ordre d'une centaine de mètres, on aura pour une houle de $50cm$ des valeurs de 0.01 pour μ et de 0.05 pour ε. De même, si l'on considère le tsunami de décembre 2005 dans l'Océan Indien, l'ampitude de celui-ci était de $0.2m$ au large, la profondeur de $6km$ et la longueur d'onde de $100km$: ces valeurs nous donnent $\varepsilon = 0.0003$ et $\mu = 0.0036$.

La littérature regorge de modèles construits spécifiquement pour ce régime d'ondes longues, et ce depuis la fin du XIXème siècle. En ce qui concerne les modèles en fond plat, l'un des plus connu est en réalité le plus ancien : le modèle de Boussinesq ([15], 1871 et [16], 1872) fut le premier à prendre en compte à la fois les effets non-linéaires et dispersifs. La construction de ce modèle se base sur une intégration du champ de vitesse selon la verticale, permettant de réduire le problème à un système de deux équations. La justification de ce modèle dût attendre les travaux de Craig ([20], 1985) et Kano et Nishihada ([36], 1986) en 1-D de surface et pour des données initiales petites. Il faut attendre les perçées majeures de Bona, Chen et Saut ([13], 2002) en 1-D de surface puis de Bona, Colin et Lannes ([14], 2005) et [3] en 2-D de surface pour obtenir une justification complète de ce modèle de Boussinesq. Ces travaux, sur lesquels nous reviendrons ultérieurement, permettent également de construire en fond plat de nouvelles classes de modèles de type Boussinesq aux propriétés mathématiques intéressantes. De nombreuses extensions de ce modèle au cas d'un fond non plat ont vu le jour durant la seconde moitié de XXème siècle, la plupart visant à améliorer la relation de dispersion du modèle original via l'utilisation du développement de Padé sur la vitesse de phase linéaire (la référence historique de cette méthode revenant à Witting ([68] ,1984) en fond plat) et la recherche de termes d'ordre supérieur dans les approximations. Citons les premiers modèles de Mei et Leméhauté ([50], 1966), Peregrine ([59], 1967), Madsen et Mei ([44], 1969) et Dingemans ([24], 1973). Vinrent ensuite plus récemment les modèles très utilisés de Madsen, Murray et Sorensen ([45], 1991), Nwogu ([56], 1993), Schäffer et Madsen ([60], 1995, et [61], 1998), Wei, Kirby, Grilli et Subramanya ([66], 1995), et enfin Madsen, Bingham et Liu ([47], 2002). Malgré la richesse de la littérature sur ces modèles de Boussinesq en fond non plat, ces travaux restent principalement des travaux de modélisation et à notre connaissance, seul le modèle de Peregrine ([3]) a été justifié rigoureusement.
A partir de ces modèles de type Boussinesq, il est possible de retrouver deux autre modèles classiques en régime d'ondes longues : l'équation de Korteweg-de Vries (KdV, [39], 1895),

et l'équation de Benjamin-Bona-Mahony (BBM, [7], 1972). Ces modèles 1-D de surface ont été historiquement construits par le biais d'approximations au premier ordre des équations de Boussinesq, afin de simuler l'évolution d'une onde unidirectionnelle à la surface du fluide. Ces modèles unidirectionnels ont par la suite donné naissance à des modèles découplés célèbres tels que l'approximation de KdV en 1-D de surface, et l'approximation de Kadomtsev-Petviashvili (KP, [35], 1970) en 2-D de surface pour des ondes faiblement transverses. L'approximation de KdV stipule que la surface libre du fluide peut être décrite comme la somme de deux ondes se propageant en sens opposé, chacune étant régie par une équation de KdV. Cette approximation a été l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels nous pouvons citer ceux de Craig ([20], 1985), Kano et Nishihada ([36], 1986), Schneider et Wayne ([62], 2000), Bona, Colin et Lannes ([14], 2005) ou encore Wright ([69], 2005), et sa justification est désormais complète en fond plat. En revanche, l'extension et la justification de cette approximation en fond non plat n'a, à notre connaissance, fait l'objet que du seul travail d'Iguchi ([30]) sur lequel nous reviendrons ultérieurement. En ce qui concerne l'approximation de KP, celle-ci prédit le même type de comportement que l'approximation de KdV, à ceci près que deux équations de KP se substituent aux deux équations de KdV. La justification de cette approximation a été récemment établie par Lannes et Saut ([43], 2006) et confirmée dans [3].

Cet état de l'art sur les principaux modèles utilisés dans le régime d'ondes longues de faible amplitude n'a pas l'ambition d'être exhaustif. Néanmoins, il a selon nous le mérite de montrer clairemant le manque de travaux rigoureusement justifiés de modélisation en fond non plat. Il semble dès lors judicieux de s'intéresser de plus près au cas de bathymétries variables, et plus précisément de proposer des extensions en fond non plat de modèles historiques tels que ceux de Boussinesq ou de KdV, de les analyser mathématiquement, de justifier rigoureusement l'approximation qu'ils fournissent, et enfin de les simuler numériquement. Telle est l'ambition de cette thèse. L'étude de l'influence de la topographie se fera via le paramètre β dont nous n'avons pas encore parlé : celui-ci permet de quantifier l'amplitude des variations bathymétriques, et par là-même de mesurer les effets non-linéaires liés aux interactions entre la bathymétrie et les ondes de surface. Nous nous intéresserons ici essentiellement à deux cas de figures : le cas de faibles variations topographiques caractérisé par $\beta = O(\varepsilon)$ et celui de fortes variations caractérisé par $\beta = O(1)$. Avant d'exposer le plan général de cette thèse, nous allons dans un premier lieu reformuler de manière classique les équations (0.0.2) afin d'obtenir une forme plus adéquate à son analyse asymptotique.

La première étape de cette reformulation des équations (0.0.2) consiste à exprimer ces équations en fonction non plus de la vitesse V mais du potentiel des vitesses que l'on notera ϕ. Les conditions d'irrotationnalité et d'incompressibilité assurent l'existence et l'unicité de ce potentiel tel que l'on ait $V = \nabla_{X,z}\phi$ et $\Delta_{X,z}\phi = 0$. Par souci de clarté, nous utiliserons désormais les notations $\nabla = \nabla_X$ et $\Delta = \Delta_X$. En écrivant les équations (0.0.2)

en fonction du potentiel ϕ, on obtient la formulation suivante, dite de Bernoulli :

$$\begin{cases} \partial_t\phi + \dfrac{1}{2}\left[\,|\nabla\phi|^2 + |\partial_z\phi|^2\,\right] + gz = -P & \text{in } \Omega_t,\ \ t \geq 0\ , \\ \Delta\phi + \partial_z^2\phi = 0 & \text{in } \Omega_t,\ \ t \geq 0\ , \\ \partial_t\eta - \sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\,\partial_{\mathbf{n}_+}\phi|_{z=\eta(t,X)} = 0 & \text{for } t \geq 0,\ X \in \mathbb{R}^d\ , \\ \partial_{\mathbf{n}_-}\phi|_{z=-h_0+b(X)} = 0 & \text{for } t \geq 0,\ X \in \mathbb{R}^d\ , \end{cases} \tag{0.0.3}$$

où l'on a utilisé les notations $\partial_{\mathbf{n}_-} = \mathbf{n}_- \cdot \begin{pmatrix} \nabla \\ \partial_z \end{pmatrix}$ et $\partial_{\mathbf{n}_+} = \mathbf{n}_+ \cdot \begin{pmatrix} \nabla \\ \partial_z \end{pmatrix}$. En séparant les dérivées partielles en X et en z, et en prenant projetant le système précédent sur la surface libre, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta\phi + \partial_z^2\phi = 0 & \text{in } \Omega_t,\ \ t \geq 0\ , \\ \partial_t\phi + \dfrac{1}{2}\left[\,|\nabla\phi|^2 + |\partial_z\phi|^2\,\right] + g\eta = 0 & \text{at } z = \eta(t,X),\ X \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0\ , \\ \partial_t\eta + \nabla\eta\cdot\nabla\phi - \partial_z\phi = 0 & \text{at } z = \eta(t,X),\ X \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0\ , \\ \nabla b\cdot\nabla\phi - \partial_z\phi = 0 & \text{at } z = -h_0 + b(X),\ X \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0\ . \end{cases} \tag{0.0.4}$$

A ce stade, il est judicieux de procéder à un adimensionnement de ces équations en utilisant les grandeurs caractéristiques a,h_0,λ et b_0 précédemment définies, mais en introduisant également les valeurs typiques suivantes : $t_0 = \dfrac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ le temps caractéristique de l'écoulement et $\phi_0 = \dfrac{\lambda a}{h_0}\sqrt{gh_0}$. De telles valeurs viennent du fait que la linéarisation des équations autour de l'état au repos débouche sur une équations des ondes classique de vitesse $\sqrt{gh_0}$. Il est également à noter que l'adimensionnement de la variable d'espace X s'effectue indifféremment en x et en y via la quantité λ : on ne s'intéressera donc pas au cas d'ondes faiblement transverses, régime qui débouche naturellement sur l'approximation de KP. Nous obtenons ainsi la forme adimensionnée suivante des équations (0.0.4) en fonction des paramètres ε, μ et β précédemment introduit, le nombre de Stokes S étant pris égal à 1 afin d'alléger l'écriture :

$$\begin{cases} \varepsilon\,\Delta\phi + \partial_z^2\phi = 0 & -1 + \beta\, b \leq z \leq \varepsilon\eta,\ X \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0\ , \\ \partial_t\phi + \dfrac{1}{2}\left[\,\varepsilon|\nabla\phi|^2 + |\partial_z\phi|^2\,\right] + g\eta = 0 & \text{at } z = \varepsilon\eta,\ X \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0\ , \\ \partial_t\eta + \varepsilon\,\nabla\eta\cdot\nabla\phi - \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_z\phi = 0 & \text{at } z = \varepsilon\eta,\ X \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0\ , \\ \partial_z\phi - \varepsilon\beta\,\nabla b\cdot\nabla\phi = 0 & \text{at } z = -1 + \beta\, b,\ X \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0\ . \end{cases} \tag{0.0.5}$$

L'étape finale consiste à reformuler ces dernières équations selon l'idée de Zakharov ([73], 1968), qui se résume à l'introduction de la trace du potentiel ϕ sur la surface libre, que l'on notera ψ :

$$\psi(t,X) = \phi(t,X,\varepsilon\,\eta(t,X)) \ ,$$

et de l'opérateur de Dirichlet-Neumann $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)$ qui à la quantité ψ fait correspondre $\partial_z\phi|_{z=\varepsilon\,\eta}$. Cet opérateur est défini pour tout $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)f : \left(\begin{array}{ccl} H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & \partial_z u_{|_{z=\varepsilon\eta}} \quad \text{with } u \text{ solution of :} \\ & & \varepsilon\,\Delta u + \partial_z^2 u = 0, \quad -1+\beta\,b \le z \le \varepsilon\eta\ , \\ & & \partial_z u - \varepsilon\beta\,\nabla b\cdot\nabla u = 0, \quad z = -1+\beta b\ , \\ & & u(X,\varepsilon\eta) = f, \quad X \in \mathbb{R}^d\ . \end{array}\right) . \tag{0.0.6}$$

En utilisant cet opérateur et en calculant les dérivées partielles de ϕ en fonction de celles de ψ et η, on obtient la formulation finale (S_0) du problème d'Euler surface libre s'écrivant :

$$(S_0)\left\{\begin{array}{l} \partial_t\psi - \varepsilon\partial_t\eta Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)\psi + \dfrac{1}{2}\left[\varepsilon|\nabla\psi - \varepsilon\nabla\eta Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)\psi|^2 + |Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)\psi|^2\right] + \eta = 0\,, \\ \\ \partial_t\eta + \varepsilon\nabla\eta\cdot[\nabla\phi - \varepsilon\nabla\eta Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)\psi] = \dfrac{1}{\varepsilon}Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)\psi\,. \end{array}\right. \tag{0.0.7}$$

Le travail présenté dans cette thèse s'articule autour de trois parties. La première partie concerne la construction et la justification de nouveaux modèles 2-D de type Boussinesq pour les deux échelles de variations topographiques $\beta = 0(\varepsilon)$ et $\beta = O(1)$ précédemment introduites. La seconde partie s'intéressera à la validité de l'approximation de KdV en 1-D de surface dans le cadre de faibles variations topographiques et une nouvelle approximation adaptée à des bathymétries générales sera présentée. Enfin, la troisième et dernière partie sera l'occasion de valider et de comparer numériquement les précédents modèles en 1-D de surface, et d'y ajouter la simulation numérique des équations de Green-Naghdi qui permettent une généralisation de ces modèles au cas du régime dit de shallow water où l'hypothèse de petitesse de ε disparaît. Exposons plus en détail le contenu des différents chapitres.

Partie I : Construction de modèles de type Boussinesq pour différentes échelles de variations topographiques

Le chapitre 1 est consacré au développement asymptotique de l'opérateur de Dirichlet-Neumann $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta,\beta b)$ dans les deux régimes de variations topographiques $\beta = 0(\varepsilon)$ et $\beta = O(1)$. Dans le cadre du régime d'ondes longues de faible amplitude considéré ici, il apparaît naturel de chercher ce développement en fonction du petit paramètre ε. Cette étape est très classique dans la dérivation de modèles asymptotiques mais revêt une importance primordiale : du résultat et de la justification de ce développement dépendront

la construction et la justification des modèles obtenus dans les chapitres suivants. Ce type d'opérateur permet comme son nom l'indique de transformer une condition de Dirichlet associée à un problème elliptique défini sur une bande infinie en une condition de Neumann. L'idée de base de ce chapitre est de proposer une méthode générale et rigoureuse de construction de développements asymptotiques d'opérateurs de Dirichlet-Neumann tels que $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$. Pour ce faire, on considére le cas général d'un problème aux limites elliptique quelconque sur un domaine $\Omega = \{(X,z) \in \mathbb{R}^{d+1}/X \in \mathbb{R}^d, -h_0 + B(X) < z < \eta(X)\}$ défini par :

$$-\nabla_{X,z} \,.\, P\, \nabla_{X,z}\, u = 0 \quad \text{ in } \Omega \ ,$$

$$u_{\,|z=\eta(X)} = f \quad \text{and} \quad \partial_n\, u_{\,|z=-h_0+B(X)} = 0 \ ,$$

où P est une matrice diagonale à coefficients strictements positifs. Après avoir redressé le domaine Ω afin de formuler un problème équivalent sur une bande droite $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d \times [-1, 0]$, nous démontrons le théorème général suivant permettant de construire et justifier, sous certaines conditions, le développement asymptotique de l'opérateur de Dirichlet-Neumann associé au problème.

Theorème 0.1. *Soient $p \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*$, $\eta \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $B \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et u_{app} tels que*

$$-\nabla_{X,z} \cdot \underline{P}\, \nabla_{X,z}\, u_{app} = \varepsilon^p\, R^\varepsilon \quad \textit{sur} \quad \mathcal{S} \ ,$$

$$u_{app\,|z=0} = f \quad , \quad \partial_n\, u_{app\,|z=-1} = \varepsilon^p\, r^\varepsilon \ ,$$

où $(R^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ et $(r^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ sont bornés indépendamment de ε dans respectivement $H^{k+1,0}(\mathcal{S})$ et $H^{k+1}(\mathbb{R}^d)$.
Si l'on suppose que h_{min} est indépendant de ε et que les coefficients $(p_i)_{1\le i\le d+1}$ de P sont tels que $(\frac{p_i}{p_{d+1}})_{1\le i\le d}$ sont bornés par une constante γ indépendante de ε, alors on a

$$\left| Z(\eta, B)f - \frac{1}{\eta + h_0 - B}\,(\partial_z u_{app})_{\,|z=0} \right|_{H^{k+\frac{1}{2}}} \le \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\, C_{k+2}\, (||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}} + |r^\varepsilon|_{H^{k+1}}) \ ,$$

où $C_{k+2} = C(|\eta|_{W^{k+2,\infty}}, |B|_{W^{k+2,\infty}})$ et C est une fonction non décroissante et indépendante des coefficients $(p_i)_{1\le i\le d+1}$.

où $\underline{P}$ est la matrice caractéristique du problème elliptique équivalent formulé sur la bande $\mathcal{S}$, et h_{min} est la hauteur d'eau minimale tel que spécifié dans (0.0.1). La démonstration de ce théorème se base sur l'utilisation d'une norme anisotrope ad-hoc et sur des estimations d'énergie permettant de contrôler efficacement l'erreur liée au développement asymptotique. Ce théorème est ensuite appliqué à l'opérateur $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$ dans les deux régimes de variations topographiques considérés et les deux développements asymptotiques correspondant sont ainsi rigoureusement construits. Au final, nous construisons et justifions la cohérence au sens de [14] des solutions de (0.0.7) avec deux premiers modèles $(\mathcal{B}_1)$ et $(\mathcal{B}_2)$de type Boussinesq, un pour chaque régime de variations bathymétriques. Il est à noter que le modèle $(\mathcal{B}_1)$ est équivalent à la formulation traditionnelle des équations de Boussinesq

en fond non plat, telle par exemple celle construite par Dingemans dans [23]. De même, le modèle $(\mathcal{B}_2)$ est équivalent au modèle historique proposé par Peregrine dans [59] en 1967. L'étude se poursuit dans les chapitres suivants en analysant séparément les deux régimes topographiques.

Le Chapitre 2 est consacré au régime de faibles variations topographiques $\beta = O(\varepsilon)$ et propose une généralisation au cas d'un fond non plat des résultats de Bona, Chen et Saut [13] et Bona, Colin et Lannes [14]. En partant du modèle de Boussinesq $(\mathcal{B}_1)$, un premier changement de variable est effectué, permettant d'exprimer les équations non plus en fonction de la vitesse du fluide à la surface mais en fonction de la vitesse du fluide V_θ à n'importe quelle hauteur $z = -1 + \theta(1 + \varepsilon(\eta - b))$ où $\theta \in [0, 1]$. L'expression de ce changement de variable se trouve facilement grâce à la précédente construction du développement asymptotique de l'opérateur $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$ et nous donne $V_\theta = (1 + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \theta^2)\Delta)\, V$. Il est ensuite fait usage de l'astuce historiquement associée à Benjamin, Bona et Mahony, qui consiste à se servir de l'approximation au premier ordre des équations afin d'introduire deux nouveaux paramètres λ_1 et λ_2 et des termes dispersifs dans la première équation. Cette technique permet la construction d'une classe entière de modèles de Boussinesq équivalents, au changement de variable précédent près, au modèle $(\mathcal{B}_1)$ et de la forme suivante :

$$(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b}) \begin{cases} (1 - \varepsilon a_2 \Delta)\partial_t V_\theta + \nabla\eta + \varepsilon \left[\frac{1}{2}\nabla|V_\theta|^2 + a_1 \Delta\nabla\eta\right] = 0 \ , \\ \\ (1 - \varepsilon a_4 \Delta)\partial_t \eta + \nabla \cdot V_\theta + \varepsilon\Big[\nabla \cdot \Big((\eta - b)\, V_\theta\Big) + a_3 \Delta\nabla \cdot V_\theta\Big] = 0 \ , \end{cases}$$

où les coefficients $(a_i)_{1\le i\le 4}$ dépendent exclusivement des paramètres $\theta, \lambda_1, \lambda_2$. A ce stade, et étant donné que l'introduction de ces paramètres permet de symétriser les termes dispersifs des équations, il apparaît naturel d'introduire un second changement de variable non-linéaire visant à symétriser les termes non-linéaires, sous la forme $\tilde{V} = (1 + \frac{\varepsilon}{2}(\eta - b))\, V_\theta$. Une seconde classe de modèles équivalents, au changements de variables précédents près, au modèle $(\mathcal{B}_1)$ est ainsi formellement construite :

$$(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b}) \begin{cases} (1 - \varepsilon a_2 \Delta)\, \partial_t \tilde{V} + \nabla\eta + \varepsilon\Big[\frac{1}{4}\nabla|\eta|^2 + \frac{1}{4}\nabla|\tilde{V}|^2 + \frac{1}{2}(\tilde{V} \cdot \nabla)\tilde{V} + \frac{1}{2}\,\tilde{V}\,\nabla \cdot \tilde{V} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{2}\, b\, \nabla\eta + a_1 \Delta\nabla\eta\Big] = 0 \ , \\ \\ (1 - \varepsilon a_4 \Delta)\, \partial_t \eta + \nabla \cdot \tilde{V} + \varepsilon \left[\frac{1}{2}\nabla \cdot \Big((\eta - b)\, V\Big) + a_3 \Delta\nabla \cdot \tilde{V}\right] = 0 \ , \end{cases}$$

de laquelle on peut extraire une sous-classe Σ^b non vide de modèles complétement symétriques. L'intérêt de tels systèmes est qu'ils fournissent une théorie d'existence de solutions suffisante au processus de justification de ceux-ci en tant que modèles asymptotiques. Nous construisons ainsi une solution approchée $(V_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon)$ du problème (0.0.7) à partir de la solution $(V_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$ de n'importe lequel de ces systèmes symétriques, en inversant successivement les deux changements de variables précédents. Il est finalement prouvé que les

fonctions ainsi construites fournissent une approximation en temps long des solutions de (0.0.7) via le théorème suivant :

Theorème 0.2. *Soient* $T_1 \geq 0$, $s \geq \frac{d}{2} + 1$, $\sigma \geq s + 3$ *et* $(\nabla\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)$ *dans* $H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1}$. *Soit* $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ *une famille de solutions de (0.0.7) de données initiales* $(\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$, *telle que*
$(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ *soit borné dans* $W^{1,\infty}([0, \frac{T_1}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$. *On définit* $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$ *et on choisit* $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$ *tel que le système* $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^b) \in \Sigma^b$. *Alors pour tout* $\varepsilon < \varepsilon_0$, *il existe* $T \leq T_1$ *tel que l'on ait :*

$$\forall t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}] \ , \quad |V^\varepsilon - V^\varepsilon_{app}|_{L^\infty([0,t];H^s)} + |\eta^\varepsilon - \eta^\varepsilon_{app}|_{L^\infty([0,t];H^s)} \leq C\,\varepsilon^2 t \ .$$

L'analyse de ces modèles est donc complète en 1-D et 2-D de surface. Le principal avantage de cette classe de modèles est que n'importe quel système symétrique de la sous-classe Σ^b permet de construire une solution approchée du problème des water waves.

Le Chapitre 3 est consacré au régime de fortes variations topographiques $\beta = O(1)$ et propose une adaptation de la méthode introduite dans le Chapitre 1 afin de prendre correctement en compte la forte influence de la bathymétrie dans ce régime. En effet, cette influence se fait sentir dès les termes d'ordre $O(1)$ dans le modèle $(\mathcal{B}_2)$ et il est dès lors impératif de considérer une approche légérement différente. Cette nouvelle méthode consiste à effectuer en premier lieu un changement de variable non-linéaire visant à symétriser à la fois les termes non-linéaires mais aussi les termes d'ordre $O(1)$. Ce changement de variable s'écrit sous la forme $\tilde{V} = (\sqrt{h} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\sqrt{h}})\,V$ avec $h = 1 - b$. Il permet de construire un premier modèle intermédiaire (S_h) cohérent, au changement de variable précédent près, au modèle $(\mathcal{B}_1)$:

$$(S_h)\begin{cases} \partial_t\tilde{V} + \sqrt{h}\,\nabla\eta + \frac{\varepsilon}{2}F_h\begin{pmatrix}\tilde{V}\\ \eta\end{pmatrix} = 0 \ , \\ \partial_t\eta + \nabla(\sqrt{h}\cdot\tilde{V}) + \frac{\varepsilon}{2}\Big[f_h\begin{pmatrix}\tilde{V}\\ \eta\end{pmatrix} - \nabla\cdot\Big(\frac{h^3}{3}\nabla\nabla\cdot(\frac{\tilde{V}}{\sqrt{h}}) - h^2\nabla\nabla\cdot(\sqrt{h}\,\tilde{V})\Big)\Big] = 0 \ , \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} F_h\begin{pmatrix}\tilde{V}\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{h}}\Big(\frac{1}{2}\nabla\eta^2 + \frac{1}{2}\nabla|\tilde{V}|^2 + (\tilde{V}\cdot\nabla)\tilde{V} + \tilde{V}\nabla\cdot\tilde{V} \\ &\quad + \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{2}(\nabla h\cdot\tilde{V})\tilde{V} - |\tilde{V}|^2\nabla h\Big)\Big) \ , \\ f_h\begin{pmatrix}\tilde{V}\\ \eta\end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{h}}\Big(\nabla\cdot(\eta\tilde{V}) - \frac{\eta}{2h}\nabla h\cdot\tilde{V}\Big) \ . \end{cases}$$

A ce stade, nous pouvons désormais effectuer le changement de variable sur la vitesse permettant d'exprimer comme dans le Chapitre 2 les équations en fonction de la vitesse à la hauteur $z = -1 + \theta(1 + \varepsilon(\eta - b))$. D'après la construction du développement asymptotique

de l'opérateur $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$ dans le régime $\beta = O(1)$, il vient le changement de variable adéquat $V_\theta = [1 - \frac{\varepsilon}{2}(\theta - 1)(\theta\nabla(h^2\nabla\cdot\ ) + \nabla\nabla\cdot(h^2\ .\ ))]\,\tilde{V}$. En effectuant ce changement de variable, il apparaît que l'astuce de Benjamin-Bona-Mahony doit inclure un paramètre λ_3 additionnel afin d'obtenir des systèmes possiblement symétriques. Il vient finalement les modèles suivants, tous équivalents aux changements de variables précédents près au modèle $(\mathcal{B}_1)$:

$$(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}^{\ b})\begin{cases} \Big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}_h^1\Big)\,\partial_t V_\theta + \sqrt{h}\,\nabla\eta + \frac{\varepsilon}{2}\Big[\,F_h\begin{pmatrix} V_\theta \\ \eta \end{pmatrix} + b_1\sqrt{h}\nabla\nabla\cdot(h^2\nabla\eta) \\ +b_2\sqrt{h}\nabla(h\nabla h\cdot\nabla\eta) + b_3\nabla h\nabla\cdot(h\sqrt{h}\nabla\eta) + b_4\sqrt{h}\nabla h(\nabla h\cdot\nabla\eta)\Big] = 0\ , \\ \Big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}_h^2\Big)\,\partial_t\eta + \nabla(\sqrt{h}\cdot V_\theta) + \frac{\varepsilon}{2}\Big[\,f_h\begin{pmatrix} V_\theta \\ \eta \end{pmatrix} + \nabla\cdot\Big(c_1 h^2\nabla\nabla\cdot(\sqrt{h}V_\theta) \\ +c_2 h\nabla h\nabla\cdot(\sqrt{h}V_\theta) + c_3 h\sqrt{h}\nabla(\nabla h\cdot V_\theta) + c_4\sqrt{h}\nabla h(\nabla h\cdot V_\theta)\Big)\Big] = 0\ . \end{cases}$$

où les opérateurs $\mathcal{P}_h^1$ et $\mathcal{P}_h^2$ sont définis par

$$\begin{cases} \mathcal{P}_h^1 = (1-\theta)\Big((1-\lambda_1)(\theta+1)\nabla(h^2\nabla\cdot\quad) + 2(1-\lambda_2)\nabla(h\nabla h\cdot\quad)\Big)\ , \\ \mathcal{P}_h^2 = (1-\lambda_3)\Big((\theta^2 - \frac{1}{3})\nabla\cdot(h^2\nabla\quad) + (\frac{3}{2}\theta^2 - \frac{7}{6})\nabla\cdot(h\nabla h\times\quad)\Big)\ , \end{cases}$$

et les coefficients $(a_i)_{1\le i\le 4}, (b_i)_{1\le i\le 4}$ dépendent exclusivement des paramètres $\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Tout comme dans le Chapitre 1, on peut extraire de la classe formée par ces systèmes une sous-classe Σ^h non vide de systèmes complétement symétriques. Grâce à la positivité des opérateurs $\mathcal{P}_h^1$ et $\mathcal{P}_h^2$, nous prouvons l'existence et l'unicité de solutions bornées indépendemmant de ε dans $W^{k,\infty}([0,T_0]; H^{s-3k}(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ à ces systèmes symétriques, ceci en temps court dans le cas général, et en temps long si l'on adjoint l'hypothèse de variations lentes du fond $\nabla b = O(\varepsilon)$. Il est dès lors possible de construire une solution approchée $(V_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon)$ du problème (0.0.7) à partir de la solution $(V_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$ de n'importe lequel de ces systèmes symétriques, en inversant successivement les deux changements de variables. A ce stade final, il nous possible de justifier l'approximation que cette solution approchée fournit via le théorème final suivant :

Theorème 0.3. *Soient $T_1 \ge 0$, $s \ge \frac{d}{2} + 1$, $\sigma \ge s + 3$ et $(\nabla\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1}$. Soit $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ une famille de solutions de (0.0.7) de données initiales $(\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$, telle que $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ soit bornée $W^{1,\infty}([0,T_1]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$. On définit $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$ et on choisit $(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in [0,1]\times\mathbb{R}^3$ tel que le système $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}^{\ b}) \in \Sigma^h$.*
Alors pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, il existe un temps $T \le T_1$ tel que l'on ait :

$$|V^\varepsilon - V_{app}^\varepsilon|_{L^\infty([0,T];H^s)} + |\eta^\varepsilon - \eta_{app}^\varepsilon|_{L^\infty([0,T];H^s)} \le C\,\varepsilon^2$$

De plus, si l'on suppose que $\nabla h = O(\varepsilon)$ alors $(V_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon)$ fournissent une approximation des solutions du problème des water waves en temps long :

$$\forall t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]\ ,\quad |V^\varepsilon - V_{app}^\varepsilon|_{L^\infty([0,t];H^s)} + |\eta^\varepsilon - \eta_{app}^\varepsilon|_{L^\infty([0,t];H^s)} \le C\,\varepsilon^2 t$$

Ce théorème permet de justifier complétement ces modèles en temps court dans le cas général, et en temps long si l'on suppose que le fond est lentement variable.

Partie II : Sur l'approximation de Korteweg-de Vries en fond non plat

Le Chapitre 4 est consacré à l'étude de l'approximation de KdV classique dans le cadre d'un fon non plat à petites variations. Cette approximation a été justifiée en 2000 par Schneider et Wayne [62] en fond plat, et étendue au fond non plat par Iguchi [30] en 2005. Dans ce travail, Iguchi propose deux modèles de type KdV dans le cadre de variations topographiques du même ordre que celles de la surface libre : un modèle couplé pour des bathymétries générales dans $W^{k,\infty}$ pour k relativement grand, et un modèle découplé identique à l'approximation KdV classique pour des fonds réguliers décroissants à l'infini à une vitesse spécifique. Il apparaît dès lors intéressant de se pencher sur ce modèle découplé et d'étudier plus en détail la validité de celui-ci pour des bathymétries plus générales. Dans un premier temps, nous montrons comment l'on peut retrouver cette approximation de KdV classique à partir de n'importe lequel des systèmes symétriques construits et justifiés dans le Chapitre 2, que l'on note (Σ). Pour ce faire, la méthode consiste à tout d'abord diagonaliser le système afin dans un second temps de chercher des solutions approchées du système diagonalisé. Ces solutions sont cherchées sous la forme d'un couple d'ondes (U_0, N_0) se propageant en sens inverse, plus des termes correcteurs (U_1, N_1) vérifiant une condition classique de croissance sous-linéaire. Via l'utilisation d'un outil classique de découplage, nous obtenons le groupe d'équations suivants : un système d'équations de KdV découplées, similaires à celles d'Iguchi, modulant lentement en temps la dynamique des termes prépondérants U_0 and N_0 :

$$(\Sigma_{KdV}) \begin{cases} \partial_T U_0 + \dfrac{3}{8}\partial_x U_0^2 + \dfrac{1}{6}\,\partial_x^3 U_0 = 0\ , \\ \partial_T N_0 + \dfrac{3}{8}\partial_x N_0^2 - \dfrac{1}{6}\,\partial_x^3 N_0 = 0\ , \end{cases}$$

où $T = \varepsilon t$, et un sytème d'équations de transport inhomogènes sur les termes correcteurs U_1 et N_1 :

$$(\Sigma_{corr}) \begin{cases} (\partial_t + \partial_x)U_1 = -\dfrac{1}{8}\partial_x N_0^2 - \dfrac{1}{4}\partial_x(U_0 N_0) + \dfrac{1}{2}b\partial_x U_0 + \dfrac{1}{4}U_0\partial_x b \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4}N_0\partial_x b + \dfrac{a_2 - a_4}{2}\,\partial_x^3 N_0\ , \\ (\partial_t - \partial_x)N_1 = -\dfrac{1}{8}\partial_x U_0^2 - \dfrac{1}{4}\partial_x(U_0 N_0) - \dfrac{1}{2}b\partial_x N_0 - \dfrac{1}{4}U_0\partial_x b \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{4}N_0\partial_x b - \dfrac{a_2 - a_4}{2}\,\partial_x^3 U_0\ . \end{cases}$$

Il est ainsi possible de construire une approximation des solutions de (Σ) en introduisant le couple $(v^\varepsilon_{KdV}, \eta^\varepsilon_{KdV}) = \Big(\dfrac{U_0 + N_0}{2}, \dfrac{U_0 - N_0}{2}\Big)$. Nous retrouvons ainsi l'approximation de KdV classique. La validité de cette approximation est ensuite prouvée pour des données initiales et des topographies très régulières prises dans des espaces de Sobolev à poids $H^{s,\alpha}$

définis par : $H^{s,\alpha} = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}) \,/\, |u|^2_{H^{s,\alpha}} \equiv \sum_{k=0}^{s} \left| (1+x^2)^{\alpha/2} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty \right\}$, via le théorème suivant :

Theorème 0.4. *Soient $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0, \eta_0) \in H^{\sigma,1}(\mathbb{R})^2$ et $b \in H^{s+4,1}(\mathbb{R})$. Soit $(v^\varepsilon_\Sigma, \eta^\varepsilon_\Sigma)_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ une famille de solutions de (Σ) de donnée initiale (v_0, η_0). On définit enfin $(u_0, n_0) = (v_0 + \eta_0, v_0 - \eta_0)$. Alors la solution (U_0, N_0) du système (Σ_{KdV}) de donnée initiale (u_0, n_0) est borné dans $L^\infty([0,T_0]; H^{\sigma,1}(\mathbb{R}))$. De plus, on a l'estimation d'erreur suivante pour tout $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$:*

$$\left| (v^\varepsilon_\Sigma, \eta^\varepsilon_\Sigma) - (v^\varepsilon_{KdV}, \eta^\varepsilon_{KdV}) \right|_{L^\infty([0,t]; H^s(\mathbb{R}))} \leq C\varepsilon(1+\varepsilon t)\,,$$

Il est intéressant de noter que ce théorème - similaire à celui proposé par Iguchi - fournit également une approximation des solutions du problème des water waves (0.0.7), étant donné que l'on peut aisément déduire du Chapitre 2 que l'erreur entre les solutions $(v^\varepsilon_\Sigma, \eta^\varepsilon_\Sigma)$ du système symétrique (Σ) et les solutions de (0.0.7) est de l'ordre de $O(\varepsilon(1+\varepsilon t))$.

Le Chapitre 5 est consacré à une discussion sur la validité de l'approximation de KdV pour des bathymétries non tiviales. Nous remarquons qu'étudier cette validité revient à vérifier si la condition de croissance sous-linéaire sur les termes correcteurs (U_1, N_1) est bel et bien vérifiée. Une analyse de ces termes est menée, et nous montrons alors que l'on peut affaiblir les conditions de régularités du précédent théorème sur les données initiales et la topographie. De ces observations découle le théorème suivant qui précise que l'approximation de KdV reste valide sans la condition de décroissance à l'infini à une vitesse spécifique, mais pour des fonds relativement réguliers et avec une précision moindre :

Theorème 0.5. *Soient $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0, \eta_0) \in H^{\sigma}(\mathbb{R})^2$ et $b \in H^{s+4}(\mathbb{R})$. Soit $(v^\varepsilon_\Sigma, \eta^\varepsilon_\Sigma)_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ une famille de solutions de (Σ) de donnée initiale (v_0, η_0). On définit enfin $(u_0, n_0) = (v_0 + \eta_0, v_0 - \eta_0)$. Alors la solution (U_0, N_0) du système (Σ_{KdV}) de donnée initiale (u_0, n_0) est borné dans $L^\infty([0,T_0]; H^{\sigma}(\mathbb{R}))$. De plus, on a l'estimation d'erreur suivante pour tout $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$:*

$$\left| (v^\varepsilon_\Sigma, \eta^\varepsilon_\Sigma) - (v^\varepsilon_{KdV}, \eta^\varepsilon_{KdV}) \right|_{L^\infty([0,t]; H^s(\mathbb{R}))} \leq C\varepsilon(1+\varepsilon\sqrt{t})\,.$$

Cependant, il apparaît clairement de l'analyse précédente que de plus générales bathymétries peuvent à priori invalider ce modèle de KdV, et ce point est vérifié au travers de deux exemples de topographies : celui d'un fond en forme de marche et celui d'un fond sinusoïdal lentement variable. Chacun de ces deux exemples est construit afin que les termes correcteurs (U_1, N_1) ne vérifient plus la condition de croissance sous-linéaire, et nous montrons dans ce cas que l'approximation diverge pour les deux exemples. Nous proposons alors une formulation topographiquement modifiée de l'approximation de KdV classique, en rajoutant les termes de topographie problématiques de (U_1, N_1) dans la définition de

l'approximation. Ce nouveau modèle s'écrit donc comme suit :

$$\begin{cases} v_{KdV}^{\varepsilon,b} = \dfrac{U_0+N_0}{2} + \dfrac{\varepsilon}{4}\Big[\partial_x U_0(T,x-t)\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)ds \\ \qquad -\partial_x N_0(T,x+t)\displaystyle\int_0^t b(x+t-s)ds \\ \qquad +\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x-t+s)N_0(T,x-t+2s)ds \\ \qquad -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x+t-s)U_0(T,x+t-2s)ds \\ \qquad +\dfrac{1}{2}U_0(T,x-t)\left(b(x)-b(x-t)\right) \\ \qquad +\dfrac{1}{2}N_0(T,x+t)\left(b(x+t)-b(x)\right)\Big] \quad , \\ \eta_{KdV}^{\varepsilon,b} = \dfrac{U_0-N_0}{2} + \dfrac{\varepsilon}{4}\Big[\partial_x U_0(T,x-t)\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)ds \\ \qquad -\partial_x N_0(T,x+t)\displaystyle\int_0^t b(x+t-s)ds \\ \qquad +\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x-t+s)N_0(T,x-t+2s)ds \\ \qquad -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x+t-s)U_0(T,x+t-2s)ds \\ \qquad +\dfrac{1}{2}U_0(T,x-t)\left(b(x)-b(x-t)\right) \\ \qquad +\dfrac{1}{2}N_0(T,x+t)\left(b(x+t)-b(x)\right)\Big] \quad . \end{cases}$$

où U_0 and N_0 sont toujours solutions du système (Σ_{KdV}). Nous prouvons alors que cette nouvelle approximation reste valide en temps long pour une large classe de bathymétries via le théorème suivant :

Theorème 0.6. *Soient $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0,\eta_0) \in H^\sigma(\mathbb{R})^2$ et soit $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Soit $(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ une famille de solutions de (Σ) de donnée initiale (v_0,η_0). On définit enfin $(u_0,n_0) = (v_0+\eta_0, v_0-\eta_0)$. Alors la solution (U_0,N_0) du système (Σ_{KdV}) de donnée initiale (u_0,n_0) est borné dans $L^\infty([0,T_0];H^\sigma(\mathbb{R}))$. De plus, on a l'estimation d'erreur suivante pour tout $t \in [0,\dfrac{T_0}{\varepsilon}]$:*

$$\left|(v_\Sigma^\varepsilon,\eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^{\varepsilon,b},\eta_{KdV}^{\varepsilon,b})\right|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{R}))} \leq C\varepsilon\sqrt{t}(1+\varepsilon t)\,,$$

Pour finir ce chapitre, une extension de cette approximation au cas périodique est proposée et sa validité est également prouvée.

Partie III : Simulations numériques

Le Chapitre 6 est consacré à la simulation numérique en 1-D de surface des trois modèles suivants : le modèle de Boussinesq symétrique (Σ) construit et justifié dans le Chapitre 2, l'approximation de KdV classique reconstruite dans le Chapitre 4 et enfin l'approximation de KdV topographiquement modifiée introduite dans le Chapitre 5. Le but est ici de comparer ces modèles entre eux sur deux topographies différentes, d'observeur leur stabilité et d'évaluer leur capacité à rendre compte des phénomènes topographiques attendus. Les deux topographies considérées ici sont celles correspondant aux exemples présentés dans le Chapitre 5 : celui d'un fond en forme de marche et celui d'un fond sinusoïdal lentement variable. Dans un premier temps, nous présentons les méthodes numériques utilisés pour simuler ces différents modèles. Nous avons ici opté pour des schémas en différences finies de type Crank-Nicholson couplés avec une méthode de relaxation introduite par Besse et Bruneau [10] et jusitifée ultérieurement par Besse [8] avec termes prédicteurs. Cette méthode présente l'intérêt de pouvoir s'affranchir du couteux traitement des non-linéarités présentes dans les trois modèles, via l'utilisation d'un terme prédicteur. Les schémas numériques sont ainsi construits afin de préserver au niveau discret les quantités conservées par les équations de KdV d'un côté, et les équations de Boussinesq de l'autre. Le schéma associée à l'approximation de KdV classique est ensuite validée numériquement en fond plat sur le cas d'une onde solitaire se propageant vers la droite, par comparaison avec la solution analytique connue d'un tel problème. Il a été choisi de simuler le cas de la marche pour différentes valeurs de ε égales successivement à $0.05, 0.1$ et 0.2, et ce sur un temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon^{3/2})$ afin d'observer le comportement des modèles au-delà de leur limite théorique de validité. En ce qui concerne le cas d'un fond sinusoidal lentement variable, les simulations ont été réalisée pour les valeurs $\varepsilon = 0.05$ et $\varepsilon = 0.1$ et sur des temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon)$. Les résultats des simulations numériques sur les deux topographies sont ensuite présentés et les courbes d'erreur entre les différents modèles sont tracées. Ces résultats sont finalement discutés et commentés.

Le Chapitre 7 correspond à un travail réalisé en collaboration avec Fabien Marche et David Lannes. Il est consacré à la simulation numérique des équations de Green-Naghdi et à leur comparaison numérique avec le modèle (Σ). L'intérêt de ce modèle de Green-Naghdi est d'une part qu'il englobe dans une certaine mesure tous les modèles précédents, et d'autre part qu'il permet d'étendre leur validité physique en s'affranchissant de l'hypothèse de petitesse de ε. En effet, ce modèle a été construit dans le cadre du régime dit de shallow water, où seule une hypothèse de petitesse sur μ est nécessaire. Aucune hypothèse de ce type n'est faite sur les paramètres ε et β. On peut donc facilement dégénérer ce modèle vers un modèle de type Boussinesq en prenant de petites valeurs de ε, et donc faire de même au niveau des simulations numériques. Ce modèle de Green-Naghdi a été justifié récemment par Alvarez-Samaniego et Lannes [3] sur des temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon)$ avec une précision de l'ordre de $O(\mu^2/\varepsilon)$. Nous choisissons de travailler ici avec leur formulation de ces équations, qui se révèle adaptée à la construction d'un schéma numérique. Nous optons une nouvelle fois pour un schéma en différences finies de type Crank-Nicholson couplé avec la méthode de relaxation introduite par Besse et Bruneau. Afin de construire un schéma adéquat, nous prouvons tout d'abord une conservation d'énergie spécifique sur les équations. Cette conservation est à priori incompatible avec la méthode de relaxation

choisie dans le sens où l'on montre qu'elle est préservée à un reste d'ordre $O(\varepsilon(\mu+\varepsilon)$ près. Même si ce reste n'est pas en théorie satisfaisant, nous justifions l'utilité d'un tel reste dans le cadre qui nous intéresse. Un schéma est alors construit pour ce modèle et la quasi-conservation précédente est démontrée. Ce schéma est ensuite validé numériquement en fond plat par comparaison des résultats avec la solution analytique connue des équations sans termes de topographie. Les simulations numériques sont ensuite effectués sur deux topographies différentes : le cas d'une marche tel que dans le Chapitre 6, et le cas d'une plage en pente douce tel que présenté par Grilli et collaborateurs dans [29]. Deux modèles sont simulés, celui de Green-Naghdi et le modèle de Boussinesq symétrique (Σ) où l'on a réintroduit la nombre de Stokes S et la constante β_0. Ces simulations sont effectuées pour différentes valeurs indépendantes de ε, μ et β afin d'observer les limites de validité du modèle (Σ). Pour finir, les résultats de ces simulations sont discutés et commentés.

PARTIE I

Construction de modèles de type Boussinesq pour différentes échelles de variations topographiques

Chapitre 1

Asymptotic expansion of the Dirichlet-Neumann operator

This chapter is devoted to the asymptotic expansion of the previously defined Dirich-let-Neumann operator $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$ as ε goes to 0, and for both topographical regimes $\beta = O(\varepsilon)$ and $\beta = O(1)$. To this end, we first enounce some general results about elliptic equations on a strip : our final theorem provides a rigorous method for determining an approximation of the Dirichlet-Neumann operator involved in such boundary value problems. We then apply this result to the case of the operator $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$ and obtain asymptotic expansions of this latter for both regimes of topography. Finally, two preliminary asymptotic Boussinesq-like models with topographical effects are derived.

1.1 Elliptic equations on a strip

In this section, we study a general elliptic equation on a domain Ω given by :

$$\Omega = \{(X, z) \in \mathbb{R}^{d+1} / X \in \mathbb{R}^d, -h_0 + B(X) < z < \eta(X)\} \ ,$$

where the functions B and η satisfy the following condition :

$$\exists\, h_{min} > 0 \ , \ \forall X \in \mathbb{R}^d \ , \ \eta(X) - B(X) + h_0 \geq h_{min} \ . \tag{1.1.1}$$

Let us consider the following general elliptic boundary value problem set on the domain Ω

$$-\nabla_{X,z} \,.\, P\, \nabla_{X,z}\, u = 0 \quad \text{ in } \Omega \ , \tag{1.1.2}$$

$$u_{|_{z=\eta(X)}} = f \quad \text{and} \quad \partial_n\, u_{|_{z=-h_0+B(X)}} = 0 \ , \tag{1.1.3}$$

where P is a diagonal $(d+1)\times(d+1)$ matrix whose coefficients $(p_i)_{1\leq i\ \leq d+1}$ are constant and strictly positive. Straightforwardly, P is coercive. We denote by $\partial_n\, u_{|z=-h_0+B(X)}$ the outward conormal derivative associated to P of u at the lower boundary $\{z=-h_0+B(X)\}$, namely :

$$\partial_n\, u_{|z=-h_0+B(X)} = -\mathbf{n}_- \cdot P\,\nabla_{X,z}\, u_{|z=-h_0+B(X)} \ ,$$

where $\mathbf{n}_-$ denotes the outward normal vector to the lower boundary of Ω. For the sake of simplicity, the notation ∂_n always denotes the outward conormal derivative associated to the elliptic problem under consideration.

Remark 1.1.1. *When no confusion can be made, we denote ∇_X by ∇.*

As in [55, 14, 41] we transform the boundary value problem (1.1.2)(1.1.3) into a new boundary problem defined over the flat band

$$\mathcal{S} = \{(X,z)\in\mathbb{R}^{d+1}/X\in\mathbb{R}^d, -1<z<0\} \ .$$

Let S be the following diffeomorphism mapping $\mathcal{S}$ to Ω :

$$S\ :\ \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \Omega \\ (X,z) & \longmapsto & \Big(X, s(X,z) = (\eta(X)-B(X)+h_0)\,z+\eta(X)\Big) \end{array}\right) \ . \tag{1.1.4}$$

Remark 1.1.2. *As shown in [41], a more complex "regularizing" diffeomorphism must be used instead of $(\mathcal{S})$ to obtain a sharp dependence on η in terms of regularity, but since the trivial diffeomorphism $(\mathcal{S})$ suffices for our present purpose, we use it for the sake of simplicity.*

Clearly, if v is defined over Ω then $\underline{v}=v\circ S$ is defined over $\mathcal{S}$. As a consequence, we can set an equivalent problem to (1.1.2)(1.1.3) on the flat band $\mathcal{S}$ using the following proposition (see [40, 41] for a proof) :

Proposition 1.1.3. *u is solution of (1.1.2)(1.1.3) if and only if $\underline{u}=u\circ S$ is solution of the boundary value problem*

$$-\nabla_{X,z}\cdot\underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\underline{u}=0 \quad in \quad \mathcal{S} \ , \tag{1.1.5}$$

$$\underline{u}_{|z=0}=f \quad and \quad \partial_n\,\underline{u}_{|z=-1}=0 \ , \tag{1.1.6}$$

where $\underline{P}(X,z)$ is given by

$$\underline{P}(X,z)=\frac{1}{\eta+h_0-B}\ M^T\,P\,M \ ,$$

$$with\ \ M(X,z)=\left(\begin{array}{cc} (\eta+h_0-B)I_{d\times d} & -(z+1)\,\nabla\eta+z\,\nabla B \\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Consequently, let us consider boundary value problems belonging to the class (1.1.5)-(1.1.6). From now on, all references to the problem set on $\mathcal{S}$ will be labelled with an underscore.

It is well kwnown that elliptic boundary value problems of the form (1.1.5)(1.1.6) are well posed under appropriate assumptions : assuming that $\underline{P}$ and all its derivatives are bounded on $\mathcal{S}$, if $f \in H^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d)$ then there exists a unique solution $u \in H^{k+2}(\mathcal{S})$ to (1.1.5)(1.1.6). The proof is very classical and we omit it here.

As previously seen, we need to consider the following operator $Z(\eta, B)$ which maps the value of u at the upper bound to the value of $\partial_z u|_{z=\eta}$:

$$Z(\eta, B) : \left(\begin{array}{ccl} H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & \partial_z u|_{z=\eta} \quad \text{with } u \text{ solution of (1.1.2)(1.1.3)} \end{array} \right) .$$

Remark 1.1.4. *The operator Z_ε defined in (0.0.6) corresponds to the operator Z in the case where $P = \begin{pmatrix} \varepsilon I_d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in* (1.1.2)(1.1.3).

To construct an approximation of this operator $Z(\eta, B)$, we need the following lemma which gives a coercitivity result taking into account the anisotropy of (1.1.2)(1.1.3).

Lemma 1.1.5. *Let $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and $B \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Then for all $V \in \mathbb{R}^{d+1}$:*

$$(V\,,\,\underline{P}\,V) \;\geq\; c_0(\,||\eta||_{W^{1,\infty}}, ||B||_{W^{1,\infty}})\;|\sqrt{P}\,V|^{\,2} \;\;,$$

where c_0 is a strictly positive function given by

$$c_0(x,y) = \frac{h_{min}}{(d+1)^2}\,\min\left(1, \frac{1}{h_{min}(x+h_0+y)}, \frac{\min\limits_{1\leq i\leq d}\frac{p_{d+1}}{p_i}}{(x+y)^2}\right) .$$

Proof. Using Proposition 1.1.3 , we can write, with $\delta(X) = \eta(X) + h_0 - B(X)$:

$$\begin{aligned} (V\,,\,\underline{P}\,V) &= \Big(\frac{1}{\delta}\,V\,,\,M^T\,P\,M\,V\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{\delta}\,M\,V\,,\,P\,M\,V\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{\delta}\,\sqrt{P}\,M\,V\,,\,\sqrt{P}\,M\,V\Big) \\ &= \Big|\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\mathcal{M}\,(\sqrt{P}\,V)\Big|^2 \end{aligned}$$

where $\mathcal{M} = \sqrt{P}\, M\, (\sqrt{P})^{-1}$. Thanks to condition (1.1.1), we deduce the invertibility of M and hence of $\mathcal{M}$. This yields the following inequality : for all $U \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$|U| \leq (d+1) \left| \sqrt{\delta}\, \mathcal{M}^{-1} \right|_\infty \left| \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, \mathcal{M}\, U \right| \quad ,$$

with

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta}\, I_{d\times d} & \frac{1}{\delta\sqrt{p_{d+1}}}\, \sqrt{P^d}\, ((z+1)\, \nabla\eta - z\, \nabla B) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

where $|A|_\infty = \sup\limits_{1\leq i,j\leq d+1} |a_{i,j}|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ and P^d is the $d \times d$ diagonal matrix whose coefficients are $(p_i)_{1\leq i\leq d}$.
If we apply the previous inequality to our problem, one gets :

$$(V\, ,\, \underline{P}\, V) \geq \frac{1}{(d+1)^2 \left| \sqrt{\delta}\, \mathcal{M}^{-1} \right|_\infty^2} \left| \sqrt{P}\, V \right|^2 \quad .$$

Thanks to the expression of $\mathcal{M}^{-1}$ given above, we obtain the following inequality :

$$(V\, ,\, \underline{P}\, V) \geq c_0(\, ||\eta||_{W^{1,\infty}}, ||B||_{W^{1,\infty}})\, |\sqrt{P}\, V|^2 \quad ,$$

where c_0 is as in the statement of the Lemma 1.1.5. □

Let us introduce the space $H^{k,0}(\mathcal{S})$:

$$H^{k,0}(\mathcal{S}) = \{v \in L^2(\mathcal{S}),\ ||v||_{H^{k,0}} := \left(\int_{-1}^{0} |v(\cdot, z)|^2_{H^k(\mathbb{R}^d)} dz \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\} \quad .$$

We can now state the main result of this chapter, which gives a rigourous method for deriving asymptotic expansions of $Z(\eta, B)$. Of course, P, and thus $\underline{P}$, as well as the boundaries η and B, can depend on ε in the following theorem. In such cases, the proof can be easily adapted just by remembering that $0 < \varepsilon < 1$.

Theorem 1.1.6. *Let $p \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*$, $\eta \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and $B \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Let $0 < \varepsilon < 1$ and u_{app} be such that*

$$-\nabla_{X,z} \cdot \underline{P}\, \nabla_{X,z}\, u_{app} = \varepsilon^p\, R^\varepsilon \quad \text{in} \quad \mathcal{S} \quad , \tag{1.1.7}$$

$$u_{app\,|_{z=0}} = f \quad , \quad \partial_n\, u_{app\,|_{z=-1}} = \varepsilon^p\, r^\varepsilon \quad , \tag{1.1.8}$$

where $(R^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ *and* $(r^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ *are bounded independently of* ε *respectively in* $H^{k+1,0}(\mathcal{S})$ *and* $H^{k+1}(\mathbb{R}^d)$.
Assuming that h_{min} *is independent of* ε *and that the coefficients* $(p_i)_{1\le i\le d+1}$ *of* P *are such that* $(\frac{p_i}{p_{d+1}})_{1\le i\le d}$ *are bounded by a constant* γ *independent of* ε, *we have*

$$\left| Z(\eta,B)f - \frac{1}{\eta+h_0-B}\,(\partial_z u_{app})_{|z=0}\right|_{H^{k+\frac12}} \le \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,C_{k+2}\,(||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}} + |r^\varepsilon|_{H^{k+1}}) \quad ,$$

where $C_{k+2} = C(|\eta|_{W^{k+2,\infty}}, |B|_{W^{k+2,\infty}})$ *and* C *is a non decreasing function of its arguments, independent of the coefficients* $(p_i)_{1\le i\le d+1}$.

Proof. In this proof, we often use the notation $C_k = C(|\eta|_{W^{k,\infty}}, |B|_{W^{k,\infty}}, h_0, h_{min}, k, d, \gamma)$ where C is a nondecreasing function of its arguments. The notation C_k can thus refer to different constants, but of the same kind. When no confusion can be made, we denote by L^2 the norm $L^2(\mathcal{S})$.

A simple computation shows that $Z(\eta,B)$ can be expressed in terms of the solution u of (1.1.5)(1.1.6) via the following relation :

$$Z(\eta,B)f = \frac{1}{\eta+h_0-B}\partial_z \underline{u}_{|z=0} \quad .$$

Using this fact, we can write

$$Z(\eta,B)f - \frac{1}{\eta+h_0-B}\,\partial_z u_{app\,|z=0} = \frac{1}{\eta+h_0-B}\,\partial_z(\underline{u}-u_{app})_{|z=0} \quad .$$

Introducing $\varphi := u_{app} - \underline{u}$ we use a trace theorem (see Metivier [52] p.23-27) to get

$$|\,Z(\eta,B)f - \frac{1}{\eta+h_0-B}\,(\partial_z u_{app})_{|z=0}|_{H^{k+\frac12}} \le C_{k+1}(||\partial_z\varphi||_{H^{k+1,0}} + ||\partial_z^2\varphi||_{H^{k,0}}) \quad . \tag{1.1.9}$$

It is clear that the proof relies on finding an adequate control of $||\partial_z\varphi||_{H^{k+1,0}}$ and $||\partial_z^2\varphi||_{H^{k,0}}$. The rest of this proof will hence be devoted to the estimate of both terms.

1. Let us begin with the estimate of $||\partial_z\varphi||_{H^{k+1,0}}$. To deal correctly with this problem, we introduce the following norm $||.||_{\dot H^1}$ defined by :

$$||\varphi||_{\dot H^1} := ||\sqrt{P}\,\nabla_{X,z}\varphi||_{L^2} \quad .$$

First remark that for all $\alpha\in\mathbb{N}^d$ such that $|\alpha|\le k$, $\partial^\alpha\varphi$ solves :

$$\begin{cases} -\nabla_{X,z}\cdot \underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi = \varepsilon^p\,\partial^\alpha R^\varepsilon + \nabla_{X,z}\cdot[\partial^\alpha,\underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi \quad , \\ \partial^\alpha\varphi_{\,|z=0} = 0\ , \qquad \partial_n(\partial^\alpha\varphi)_{\,|z=-1} + \partial_n^{[\partial^\alpha,\underline{P}]}\varphi_{\,|z=-1} = \varepsilon^p\,\partial^\alpha r^\varepsilon \quad . \end{cases} \tag{1.1.10}$$

In order to get an adequate control of the norm $||\partial_z\varphi||_{H^{k+1,0}}$, we prove the following estimate by induction on $|\alpha| \leq k$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \ / \ |\alpha| \leq k, \quad ||\partial^\alpha \varphi||_{\dot{H}^1} \leq \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}} C_{k+1} \left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} + |r^\varepsilon|_{H^k} \right) \ . \tag{1.1.11}$$

The proof of (1.1.11) is hence divided into two parts : initialization of the induction and heredity.

• Initialization : $|\alpha| = 0$.
Taking $\alpha = 0$, multiplying (1.1.10) by φ and integrating by parts leads to :

$$(\underline{P} \nabla_{X,z} \varphi, \ \nabla_{X,z} \varphi)_{L^2} + \int_{\mathbb{R}^d} \partial_n \varphi_{|z=0} \varphi_{|z=0} - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_n \varphi_{|z=-1} \varphi_{|z=-1} = (\varepsilon^p R^\varepsilon, \ \varphi)_{L^2} \ .$$

The boundary term at the free surface vanishes because of the condition $\varphi_{|z=0} = 0$ and using the condition at the bottom leads to :

$$(\underline{P} \nabla_{X,z} \varphi, \ \nabla_{X,z} \varphi)_{L^2} = (\varepsilon^p R^\varepsilon, \ \varphi)_{L^2} + \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} r^\varepsilon \varphi_{|z=-1} \ .$$

Finally, using Cauchy-Schwarz inequality, one gets :

$$(\underline{P} \nabla_{X,z} \varphi, \ \nabla_{X,z} \varphi)_{L^2} \leq \varepsilon^p \, ||R^\varepsilon||_{L^2} \, ||\varphi||_{L^2} + \varepsilon^p \, |r^\varepsilon|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \, |\varphi_{|z=-1}|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \ . \tag{1.1.12}$$

Recalling that $\varphi_{|z=0} = 0$ and that the band $\mathcal{S}$ is bounded in the vertical direction, one can use Poincaré inequality so that $||\varphi||_{L^2} \leq ||\partial_z \varphi||_{L^2}$ and $|\varphi_{|z=-1}|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq ||\partial_z \varphi||_{L^2}$. Therefore, (1.1.12) yields

$$(\underline{P} \nabla_{X,z} \varphi, \ \nabla_{X,z} \varphi)_{L^2} \quad \leq \quad \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}} \, ||R^\varepsilon||_{L^2} \, ||\varphi||_{\dot{H}^1} + \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}} \, |r^\varepsilon|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \, ||\varphi||_{\dot{H}^1} \ . \tag{1.1.13}$$

Using Lemma 1.1.5 to bound $(\underline{P} \nabla_{X,z} \varphi, \ \nabla_{X,z} \varphi)_{L^2}$ from below, one finally gets :

$$c_0(\, |\eta|_{W^{1,\infty}}, |B|_{W^{1,\infty}}) ||\varphi||^2_{\dot{H}^1} \leq \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}} \, \left(||R^\varepsilon||_{H^{0,0}} + |r^\varepsilon|_{H^0} \right) \, ||\varphi||_{\dot{H}^1} \ .$$

Since $c_0(\, |\eta|_{W^{1,\infty}}, |B|_{W^{1,\infty}})$ depends only on h_{min}, d and γ through the quantity $\min\limits_{1 \leq i \leq d} \dfrac{p_{d+1}}{p_i}$ (by Lemma 1.1.5), and since the function c_0 is a decreasing function of its arguments (again by Lemma 1.1.5), we get the following estimate :

$$||\varphi||_{\dot{H}^1} \leq \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}} C_1 \, \left(||R^\varepsilon||_{H^{0,0}} + |r^\varepsilon|_{H^0} \right) \ ,$$

which ends the initialization of the induction.

• Heredity : for $m \in \mathbb{N}^*$ fixed such that $m \leq k$, we suppose that (1.1.11) is verified for all $\alpha \in \mathbb{N}^d$ such that $|\alpha| \leq m - 1$.

Let $\alpha \in \mathbb{N}^d$ such that $|\alpha| = m$. Multiplying (1.1.10) by $\partial^\alpha \varphi$ and integrating by parts on $\mathcal{S}$ leads to :

$$\begin{aligned}
&(\,\underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2} + \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha\varphi_{|z=0}\,\partial_n\partial^\alpha\varphi_{|z=0} - \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha\varphi_{|z=-1}\,\partial_n\partial^\alpha\varphi_{|z=-1} \\
&= (\,\varepsilon^p\,\partial^\alpha R^\varepsilon,\ \partial^\alpha\varphi\,)_{L^2} - (\,[\partial^\alpha, \underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2} - \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha\varphi_{|z=0}\,\partial_n^{[\partial^\alpha,\underline{P}]}\varphi_{|z=0} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha\varphi_{|z=-1}\,\partial_n^{[\partial^\alpha,\underline{P}]}\varphi_{|z=-1}\ .
\end{aligned}$$

The boundary terms at $z = 0$ vanish because of the condition $\partial^\alpha\varphi_{\,|z=0} = 0$, and using the second boundary condition $\partial_n(\partial^\alpha\varphi)_{\,|z=-1} + \partial_n^{[\partial^\alpha,\underline{P}]}\varphi_{\,|z=-1} = \varepsilon^p\partial^\alpha r^\varepsilon$, one gets :

$$\begin{aligned}
(\,\underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2} \quad &= \quad (\,\varepsilon^p\,\partial^\alpha R^\varepsilon,\ \partial^\alpha\varphi\,)_{L^2} + \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha\varphi_{|z=-1}\,\partial^\alpha r^\varepsilon \\
&\quad - (\,[\partial^\alpha, \underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2}\quad ,
\end{aligned}$$

and with Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
&(\,\underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2} \\
&\qquad \le\ \varepsilon^p\,||\partial^\alpha R^\varepsilon||_{L^2}\,||\partial^\alpha\varphi||_{L^2} + \varepsilon^p\,|\partial^\alpha r^\varepsilon|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,|\partial^\alpha\varphi_{|z=-1}|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad\quad + \big|(\,[\partial^\alpha, \underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2}\big|\,.
\end{aligned}$$

By using the same method and arguments as in the initialization, the following inequality arises :

$$\begin{aligned}
c_0(\,|\eta|_{W^{1,\infty}}, |B|_{W^{1,\infty}})||\partial^\alpha\varphi||_{\dot{H}^1}^{\,2} \quad &\le \quad \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} + |r^\varepsilon|_{H^k})\,||\partial^\alpha\varphi||_{\dot{H}^1} \\
&\quad + \big|(\,[\partial^\alpha, \underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial_\alpha\varphi\,)_{L^2}\big|\,. \qquad (1.1.14)
\end{aligned}$$

Let us now focus on the second term of the left hand side of (1.1.14). In order to get an adequate control of this term, we have to write explicitly the commutator $[\partial^\alpha, \underline{P}]$:

$$[\partial^\alpha, \underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi = \sum_{\substack{\alpha'+\alpha''=\alpha \\ \alpha'\neq 0}} C(|\alpha'|, |\alpha''|)\partial^{\alpha'}\underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\partial^{\alpha''}\varphi\ ,$$

where C is a constant depending only on $|\alpha'|$ and $|\alpha''|$. This leads to the expression

$$\begin{aligned}
&(\,[\partial^\alpha, \underline{P}]\nabla_{X,z}\,\varphi,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2} \\
&\qquad = \sum_{\substack{\alpha'+\alpha''=\alpha \\ \alpha'\neq 0}} C(|\alpha'|, |\alpha''|)\,\Big(\,\partial^{\alpha'}\underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\partial^{\alpha''}\varphi\ ,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,\Big)_{L^2}\quad .
\end{aligned}$$

From now on, we just consider a single term of this sum. Using Proposition 1.1.3 we derive the explicit expression of $\underline{P}$ and deduce from it the explicit expression of $\partial^{\alpha'}\underline{P}$:

$$\partial^{\alpha'}\underline{P} = \begin{pmatrix} \left(\partial^{\alpha'}\eta - \partial^{\alpha'}B\right) P_d & P_d\, \partial^{\alpha'}\mathcal{U} \\ \left(P_d\, \partial^{\alpha'}\mathcal{U}\right)^T & \partial^{\alpha'}\left(\dfrac{p_{d+1} + \mathcal{U}\cdot P_d\,\mathcal{U}}{\eta + h_0 - B}\right) \end{pmatrix} ,$$

where P_d is the diagonal $(d\times d)$ matrix whose coefficents are $(p_i)_{1\le i\le d}$, and $\mathcal{U}$ the vector defined by $\mathcal{U} = -(z+1)\nabla\eta + z\nabla B$. Using this expression, one easily gets (with $\nabla = \nabla_X$) :

$$\begin{aligned}\left(\partial^{\alpha'}\underline{P}\,\nabla_{X,z}\,\partial^{\alpha''}\varphi\,,\ \nabla_{X,z}\,\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} &= \left((\partial^{\alpha'}\eta - \partial^{\alpha'}B)P_d\nabla\partial^{\alpha''}\varphi\,,\,\nabla\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} \\ &+ \left(\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi P_d\,\partial^{\alpha'}\mathcal{U}\,,\,\nabla\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} + \left(P_d\,\partial^{\alpha'}\mathcal{U}\cdot\nabla\partial^{\alpha''}\varphi\,,\,\partial_z\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} \\ &+ \left(\partial^{\alpha'}\left(\frac{p_{d+1} + \mathcal{U}\cdot P_d\,\mathcal{U}}{\eta + h_0 - B}\right)\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi\,,\,\partial_z\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} . \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

If we focus on the first term of the right hand side of this equality, we easily get the following intermediate control using Cauchy-Schwarz inequality and the definition of $||.||_{\dot{H}^1}$:

$$\begin{aligned}\left((\partial^{\alpha'}\eta - \partial^{\alpha'}B)P_d\nabla\partial^{\alpha''}\varphi, \nabla\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} &\le \left(|\eta|_{W^{|\alpha'|,\infty}} + |B|_{W^{|\alpha'|,\infty}}\right)||\sqrt{P_d}\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2} \\ &\quad ||\sqrt{P_d}\,\nabla\partial^{\alpha}\varphi||_{L^2} \\ &\le \left(|\eta|_{W^{k,\infty}} + |B|_{W^{k,\infty}}\right)||\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot{H}^1}||\partial^{\alpha}\varphi||_{\dot{H}^1} \\ &\le \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,C_{k+1}\left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} + |r^\varepsilon|_{H^k}\right)||\partial^{\alpha}\varphi||_{\dot{H}^1} . \end{aligned}$$

To derive the last inequality, we used the induction hypothesis on $||\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot{H}^1}$ since $|\alpha''| \le m-1$.
Let us now focus on the second term of the right hand side of (1.1.15). Using the same arguments as previously and Poincaré inequality, the following controls arise :

$$\begin{aligned}\left(\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi P_d\,\partial^{\alpha'}\mathcal{U}\,,\,\nabla\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} &\le ||\sqrt{P_d}\partial^{\alpha'}\mathcal{U}||_\infty||\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}||\sqrt{P_d}\,\nabla\partial^{\alpha}\varphi||_{L^2} \\ &\le \sqrt{\frac{||P_d||_\infty}{p_{d+1}}}\left(|\eta|_{W^{|\alpha'|+1,\infty}} + |B|_{W^{|\alpha'|+1,\infty}}\right)||\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot{H}^1} \\ &\quad ||\partial^{\alpha}\varphi||_{\dot{H}^1} \\ &\le \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,C_{k+1}\left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} + |r^\varepsilon|_{H^k}\right)||\partial^{\alpha}\varphi||_{\dot{H}^1} , \end{aligned}$$

since $\dfrac{||P_d||_\infty}{p_{d+1}} \le \gamma$.
The control of the third term of the right hand side of (1.1.15) comes in the same way :

$$\left(P_d\,\partial^{\alpha'}\mathcal{U}\cdot\nabla\partial^{\alpha''}\varphi\,,\,\partial_z\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2} \le \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,C_{k+1}\left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} + |r^\varepsilon|_{H^k}\right)||\partial^{\alpha}\varphi||_{\dot{H}^1} .$$

The next step consists in controlling the last term of the right hand side of (1.1.15). We need to do some preliminary work on this term before attempting to bound it adequately. A straightforward computation gives :

$$\begin{aligned}\partial^{\alpha'}\left(\frac{p_{d+1}+\mathcal{U}\cdot P_d\mathcal{U}}{\eta+h_0-B}\right) &= \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\alpha'\\ \beta_1\neq 0}} C(|\beta_1|,|\beta_2|)\partial^{\beta_1}\left(\mathcal{U}\cdot P_d\mathcal{U}\right)\partial^{\beta_2}\left(\frac{1}{\eta+h_0-B}\right)\\ &\quad +\mathcal{U}\cdot P_d\mathcal{U}\,\partial^{\alpha'}\left(\frac{1}{\eta+h_0-B}\right)+p_{d+1}\,\partial^{\alpha'}\left(\frac{1}{\eta+h_0-B}\right),\end{aligned}$$

from which one deduces :

$$\begin{aligned}&\left(\partial^{\alpha'}\left(\frac{p_{d+1}+\mathcal{U}\cdot P_d\,\mathcal{U}}{\eta+h_0-B}\right)\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi,\partial_z\partial^{\alpha}\varphi\right)_{L^2}\\ &\qquad\leq ||P_d||_\infty\, C_{k+1}\,||\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\,||\partial_z\partial^{\alpha}\varphi||_{L^2}\\ &\qquad\quad + C_{k+1}\,||\sqrt{p_{d+1}}\,\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}||\sqrt{p_{d+1}}\,\partial_z\partial^{\alpha}\varphi||_{L^2}\\ &\qquad\leq \frac{||P_d||_\infty}{p_{d+1}}\,C_{k+1}\,||\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot H^1}||\partial^{\alpha}\varphi||_{\dot H^1}+C_{k+1}\,||\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot H^1}\,||\partial^{\alpha}\varphi||_{\dot H^1}\\ &\qquad\leq \frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,C_{k+1}\,\left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}}+|r^\varepsilon|_{H^k}\right)||\partial^\alpha\varphi||_{\dot H^1}\quad,\end{aligned}$$

where we once more used the induction hypothesis.
Gathering the four previous estimates of each term of the right hand side of (1.1.15) and using the explicit expression of the commutator $[\partial^\alpha,\underline{P}]$ leads to the final estimate of $|([\partial^\alpha,\underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi\ ,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2}|$:

$$\left|([\partial^\alpha,\underline{P}]\,\nabla_{X,z}\,\varphi\ ,\ \nabla_{X,z}\,\partial^\alpha\varphi\,)_{L^2}\right|\leq\frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,C_{k+1}\,\left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}}+|r^\varepsilon|_{H^k}\right)\,||\partial^\alpha\varphi||_{\dot H^1}\quad.$$

The last step simply consists in pluging this last estimate into (1.1.14), which gives :

$$c_0(\,|\eta|_{W^{1,\infty}},|B|_{W^{1,\infty}})||\partial^\alpha\varphi||^2_{\dot H^1}\leq\frac{\varepsilon^p}{\sqrt{p_{d+1}}}\,||R^\varepsilon||_{H^{k,0}}\,||\partial^\alpha\varphi||_{\dot H^1}\quad. \tag{1.1.16}$$

As in the initialization, this last estimate leads to the desired result, which ends the heredity and hence the proof of (1.1.11).

To conclude this first part of the proof, we use the fact that :

$$\begin{aligned}||\partial_z\varphi||_{H^{k+1,0}} &\leq C(k+1)\sup_{|\alpha|\leq k+1}||\partial_z\partial^\alpha\varphi||_{L^2}\\ &\leq \frac{C(k+1)}{\sqrt{p_{d+1}}}\sup_{|\alpha|\leq k+1}||\partial^\alpha\varphi||_{\dot H^1}\quad,\end{aligned}$$

and the estimate (1.1.11) we just proved to finally get :

$$||\partial_z\varphi||_{H^{k+1,0}}\leq\frac{\varepsilon^p}{p_{d+1}}\,C_{k+2}\,\left(||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}}+|r^\varepsilon|_{H^{k+1}}\right)\quad, \tag{1.1.17}$$

which ends the first part of the proof.

2. In this second part, we aim at controlling the quantity $||\partial_z^2\varphi||_{H^{k,0}}$. To this end, we prove with a direct method the following estimate :

$$||\partial_z^2\varphi||_{H^{k,0}} \leq \frac{\varepsilon^p}{p_{d+1}} C_{k+2} \left(||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}} + |r^\varepsilon|_{H^{k+1}}\right) \quad . \tag{1.1.18}$$

We first use the equation satisfied by φ in order to express $\partial_z^2\varphi$ in terms of other derivatives of φ such as $\nabla\varphi, \partial_z\varphi, \nabla\partial_z\varphi$ or $\Delta\varphi$:

$$\partial_z^2\varphi \quad = \quad \left(\frac{\eta + h_0 - B}{p_{d+1} + \mathcal{U}\cdot P_d\mathcal{U}}\right)\left[-\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi - \frac{\partial_z\left(\mathcal{U}\cdot P_d\mathcal{U}\right)}{\eta + h_0 - B}\,\partial_z\varphi - \varepsilon^p\,R^\varepsilon\right] ,$$

where $Q = \begin{pmatrix} (\eta + h_0 - B)\,P_d & P_d\mathcal{U} \\ (P_d\mathcal{U})^T & 0 \end{pmatrix}$.

The following estimates arise (using $||u||_{H^{k,0}} \leq C(k) \sup\limits_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha u||_{L^2}$) :

$$\begin{aligned}
||\partial_z^2\varphi||_{H^{k,0}} \quad &\leq \quad \frac{1}{p_{d+1}} C_k \Big[||\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi||_{H^{k,0}} + C_{k+1}\,||P_d||_\infty\,||\partial_z\varphi||_{H^{k,0}} \\
&\qquad + \varepsilon^p||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} \Big] \quad , \\
&\leq \quad \frac{1}{p_{d+1}} C_{k+1} \Big[C(k) \sup_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha\left(\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi\right)||_{L^2} \\
&\qquad + \frac{||P_d||_\infty}{\sqrt{p_{d+1}}} C(k) \sup_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha\varphi||_{\dot{H}^1} + \varepsilon^p||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} \Big] \quad , \\
&\leq \quad \frac{1}{p_{d+1}} C_{k+1} \sup_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha\left(\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi\right)||_{L^2} \\
&\qquad + \frac{\varepsilon^p}{p_{d+1}} \frac{||P_d||_\infty}{p_{d+1}} C_{k+1} \left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} + |r^\varepsilon|_{H^k}\right) + \frac{\varepsilon^p}{p_{d+1}} C_{k+1}\,||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} \quad , \\
&\leq \quad \frac{1}{p_{d+1}} C_{k+1} \sup_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha\left(\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi\right)||_{L^2} \\
&\qquad + \frac{\varepsilon^p}{p_{d+1}} C_{k+1} \left(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}} + |r^\varepsilon|_{H^k}\right) \quad ,
\end{aligned}$$

where we used (1.1.11) and the fact that $\dfrac{||P_d||_\infty}{p_{d+1}} \leq \gamma$.

The last part of the initialization aims at correctly controlling the norm $||\partial^\alpha\left(\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi\right)||_{L^2}$. The identity

$$\partial^\alpha\left(\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi\right) = \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} C(|\alpha'|,|\alpha''|)\left(\nabla_{X,z}\cdot\partial^{\alpha'}Q\,\nabla_{X,z}\,\partial^{\alpha''}\varphi\right) \quad ,$$

and the expression of Q furnishes the following estimates :

$$
\begin{aligned}
||\nabla_{X,z}\cdot\partial^{\alpha'}Q\,\nabla_{X,z}\,\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2} &\leq C_{|\alpha'|}\,||\nabla\cdot P_d\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\\
&\quad +C_{|\alpha'|+1}\,||\sqrt{P_d}||_\infty\,||\sqrt{P_d}\,\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\\
&\quad +C_{|\alpha'|+2}\,||P_d||_\infty\,||\partial_z\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\\
&\quad +C_{|\alpha'|+1}\,||P_d||_\infty\,||\partial_z\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\ )\\
&\leq C_{k+2}\,(\,||\nabla\cdot P_d\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\\
&\quad +||\sqrt{P_d}||_\infty\,||\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot{H}^1}+\frac{||P_d||_\infty}{\sqrt{p_{d+1}}}||\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot{H}^1}\ )\\
&\leq C_{k+2}\,\Big(\,||\nabla\cdot P_d\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\\
&\quad +\varepsilon^p\,C_{k+1}\,(||R^\varepsilon||_{H^{k,0}}+|r^\varepsilon|_{H^k})\,)\quad . \qquad (1.1.19)
\end{aligned}
$$

We estimate the term $||\nabla\cdot P_d\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}$ using the following technique :

$$
\begin{aligned}
||\nabla\cdot P_d\nabla\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2} &\leq ||\sqrt{P_d}||_\infty\sum_{1\leq i\leq d}||\sqrt{p_i}\partial^2_{x_i}\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\\
&\leq ||\sqrt{P_d}||_\infty\sum_{1\leq i\leq d}||\partial_{x_i}\partial^{\alpha''}\varphi||_{\dot{H}^1}\\
&\leq d\,||\sqrt{P_d}||_\infty\sup_{|m|=|\alpha''|+1}||\partial^m\varphi||_{\dot{H}^1}\\
&\leq d\,||\sqrt{P_d}||_\infty\sup_{|m|\leq k+1}||\partial^m\varphi||_{\dot{H}^1}\\
&\leq \varepsilon^p\,C_{k+2}\,(||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}}+|r^\varepsilon|_{H^{k+1}})\quad .
\end{aligned}
$$

We plug this result in (1.1.19) to obtain

$$
||\nabla_{X,z}\cdot\partial^{\alpha'}Q\,\nabla_{X,z}\partial^{\alpha''}\varphi||_{L^2}\leq\varepsilon^p\,C_{k+2}\,(||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}}+|r^\varepsilon|_{H^{k+1}})\quad ,
$$

which finally leads to

$$
||\partial^\alpha\,(\nabla_{X,z}\cdot Q\,\nabla_{X,z}\varphi)\,||_{L^2}\leq\varepsilon^p\,C_{k+2}\,(||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}}+|r^\varepsilon|_{H^{k+1}})\quad .
$$

This way, we get our desired estimate of $||\partial^2_z\varphi||_{H^{k,0}}$:

$$
||\partial^2_z\varphi||_{H^{k,0}}\leq\frac{\varepsilon^p}{p_{d+1}}\,C_{k+2}\,(||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}}+|r^\varepsilon|_{H^{k+1}})\quad .
$$

Gathering (1.1.17) and (1.1.18) in (1.1.9) ends the proof of the theorem. □

1.2 Application to $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$

We recall that by definition, $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)f = \partial_z u_{|_{z=\varepsilon\eta}}$ where u is solution of the boundary value problem

$$\varepsilon\,\Delta u + \partial_z^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega \ , \tag{1.2.1}$$

$$u_{|_{z=\varepsilon\eta}} = f \quad , \quad (\partial_z u - \varepsilon\beta\nabla b \cdot \nabla u)_{|_{z=-1+\beta b}} = 0 \ , \tag{1.2.2}$$

This elliptic problem (1.2.1)-(1.2.2) belongs to the class of general elliptic problems (1.1.2)-(1.1.3) defined in the previous section. The corresponding matrix P is here designed by P^ε :

$$P^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon\, I_{d\times d} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{1.2.3}$$

The upper boundary of Ω is here defined by $\{z = \varepsilon\eta\}$ and the lower one by $\{z = -1+\beta b\}$. We make the additionnal assumption that ε and β are bounded in the following sense : $0 < \varepsilon < 1$ and there exists a strictly positive constant β_0 such that and $0 < \beta < \beta_0$. Furthermore, condition (1.1.1) is here verified thanks to condition (0.0.1). And finally, we remark that $(\dfrac{p_i}{p_{d+1}})_{1\le i\le d}$ are bounded by 1 since $0 < \varepsilon < 1$. Our goal is here to apply the previous theorem to get asymptotic estimates on $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$.

We recall that we are here interested in two differerent regimes depending on the β parameter. The first one, namely $\beta = O(\varepsilon)$, refers to the physical case of a bottom with variations of slow amplitude. The second one, namely $\beta = O(1)$, refers on the contrary to variations of high amplitude of the bottom. In order to improve the readability, we take $\beta_0 = 1$: we thus write $\beta = \varepsilon$ for the first regime and $\beta = 1$ for the second one.

The regime $\beta = \varepsilon$: small variations of bottom topography

The boundaries of the domain Ω are here defined by $\{z = \varepsilon\eta\}$ and $\{z = -1 + \varepsilon b\}$ while the matrix P^ε remains as in (1.2.3). Thanks to Proposition 1.1.3 we are able to set an equivalent problem to (1.2.1)(1.2.2) defined over the flat band $\mathcal{S}$: $\underline{u} = u \circ S$ solves the problem :

$$-\nabla_{X,z} \cdot \underline{P}^\varepsilon\, \nabla_{X,z}\, \underline{u} = 0 \quad \text{in } \mathcal{S} \ , \tag{1.2.4}$$

$$\underline{u}_{|_{z=0}} = f \quad , \quad \partial_n\, \underline{u}_{|_{z=-1}} = 0 \ . \tag{1.2.5}$$

where the matrix $\underline{P}^\varepsilon$ is given by

$$\underline{P}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon(1+\varepsilon(\eta-b))\, I_{d\times d} & -\varepsilon^2[(z+1)\nabla\eta - z\nabla b] \\ -\varepsilon^2[(z+1)\nabla\eta - z\nabla b]^T & \dfrac{1+\varepsilon^3\,|(z+1)\nabla\eta - z\nabla b|^2}{1+\varepsilon(\eta-b)} \end{pmatrix} \ .$$

The following result gives a rigourously justified asymptotic expansion of $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)f$ as ε goes to 0 :

Proposition 1.2.1. *Let $k \in \mathbb{N}$, $\eta \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and $b \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Then for all f such that $\nabla f \in H^{k+6}(\mathbb{R}^d)$, we have :*

$$\left|Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)f - (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2)\right|_{H^{k+1/2}} \leq \varepsilon^3 C_{k+2} \left|\nabla f\right|_{H^{k+6}} ,$$

with :

$$\begin{cases} Z_1 := -\Delta f \ , \\ Z_2 := -\dfrac{1}{3}\Delta^2 f - (\eta - b)\Delta f + \nabla b \cdot \nabla f \ . \end{cases}$$

Proof. To prove this proposition, we use essentially Theorem 1.1.6 with $p = 3$. We know that $\left(\dfrac{p_i}{p_{d+1}}\right)_{1\leq i\leq d}$ are bounded by 1. Thus, in order to derive an asymptotic expansion of $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)f$, we only need to compute an approximate solution u_{app} which satisfies the hypothesis of Theorem 1.1.6 for $p = 3$. This approximate solution u_{app} can be constructed as in [14] using a classical WKB method, which consists in looking for u_{app} under the form $u_{app} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$. We want this function to verify the properties required by Theorem 1.1.6, that is to say :

$$-\nabla_{X,z} \cdot \underline{P^\varepsilon}\, \nabla_{X,z}\, u_{app} = \varepsilon^p\, R^\varepsilon \quad \text{in} \quad \mathcal{S} \ , \tag{1.2.6}$$

$$u_{app\,|z=0} = f \quad , \quad \partial_n\, u_{app\,|z=-1} = \varepsilon^p r^\varepsilon \ . \tag{1.2.7}$$

where $(R^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ and $(r^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ are bounded independently of ε respectively in $H^{k+1,0}(\mathcal{S})$ and $H^{k+1}(\mathbb{R}^d)$.
We decompose the matrix $\underline{P^\varepsilon}$ under the form $\underline{P^\varepsilon} = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_\varepsilon$ where P_0, P_1, P_2 are independent of ε, and if we plug the desired expression of u_{app} into this problem, we get $R^\varepsilon = \nabla \cdot T^\varepsilon$ and $r^\varepsilon = \mathbf{e_z} \cdot T^\varepsilon_{|_{z=-1}}$ where $T^\varepsilon = P_2 \nabla_{X,z} u_1 + P_1 \nabla_{X,z} u_2 + P_\varepsilon \nabla_{X,z}(u_o + u_1 + u_2)$, and the following system of equations and boundary conditions on u_0, u_1, u_2 :

$$\begin{cases} \partial_z^2 u_0 = 0 \ , \\ \partial_z^2 u_1 + \left(\Delta - (\eta - b)\partial_z^2\right) u_0 = 0 \ , \\ \partial_z^2 u_2 + \left(\Delta - (\eta - b)\partial_z^2\right) u_1 + (\eta - b)\Delta u_0 - 2\left[(z+1)\nabla f - z\nabla b\right] \cdot \\ \nabla \partial_z u_0 - \left[(z+1)\Delta f - z\Delta b\right] \cdot \partial_z u_0 - (\eta - b)^2 \partial_z^2 u_0 = 0 \ , \end{cases}$$

$$\text{with} \quad \begin{cases} u_{0|_{z=0}} = f \ , \\ u_{i|_{z=0}} = 0, \quad 1 \leq i \leq 2 \ , \\ \partial_z u_{i|_{z=-1}} = 0, \quad 0 \leq i \leq 1 \ , \\ \partial_z u_{2|_{z=-1}} - \nabla b \cdot \nabla u_{0|_{z=-1}} = 0 \ . \end{cases}$$

We can verify that the following values of u_0, u_1, u_2 satisfy the previous equations and boundary conditions :

$$\begin{aligned} u_0 &= f \ , \\ u_1 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{(z+1)^2}{2}\right)\Delta f \ , \\ u_2 &= \left(\frac{(z+1)^4}{24} - \frac{(z+1)^2}{4} + \frac{5}{24}\right)\Delta^2 f + \left(1-(z+1)^2\right)(\eta - b)\Delta f + z\nabla b \cdot \nabla f \ . \end{aligned}$$

Using these values of u_0, u_1 and u_2, one can easily obtain the following estimates of R^ε and r^ε :

$$||R^\varepsilon||_{H^{k+1,0}} \leq C_{k+2}\,|\nabla f|_{H^{k+6}} \ , \quad |r^\varepsilon|_{H^{k+1}} \leq C_{k+2}\,|\nabla f|_{H^{k+3}} \ .$$

Thus u_{app} satisfies the properties required to apply Theorem 1.1.6. The last steps of the proof consists in computing $\dfrac{1}{1+\varepsilon(\eta-b)}\partial_z u_{app|_{z=0}}$ using the explicit expression of u_{app} previously determined, and then apply Theorem 1.1.6. An easy Taylor expansion of $\dfrac{1}{1+\varepsilon(\eta-b)}\partial_z u_{app|_{z=0}}$ then yields the result. □

Remark 1.2.2. *The method developped here to get and prove our asymptotic expansion is improved compared to the one developped in [14] since we do not need here to compute the term u_3.*

Remark 1.2.3. *If we take $b = 0$ - i.e. if we consider a flat bottom - , we of course get the same expansion as the ones proved in [14].*

The regime $\beta = 1$: strong variations of bottom topography

The boundaries of the domain Ω are here defined by $\{z = \varepsilon\eta\}$ and $\{z = -1 + b\}$. Using again Proposition 1.1.3, we set an equivalent problem to (1.2.1)(1.2.2) defined over the flat band $\mathcal{S}$: this new problem is the same as the one defined in the first regime, at the exception of the matrix $\underline{P}^\varepsilon$ which is now given by

$$\underline{P}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon(1+\varepsilon\eta-b)\,I_{d\times d} & -\varepsilon[\varepsilon(z+1)\nabla\eta - z\nabla b] \\ -\varepsilon[\varepsilon(z+1)\nabla\eta - z\nabla b]^T & \dfrac{1+\varepsilon\,|\varepsilon(z+1)\nabla\eta - z\nabla b|^2}{1+\varepsilon\eta-b} \end{pmatrix} \ .$$

As in the first regime we give a rigourously justified asymptotic expansion of $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)f$ in the present regime.

Proposition 1.2.4. *Let $k \in \mathbb{N}$, $\eta \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ and $b \in W^{k+2,\infty}(\mathbb{R}^d)$. Then for all f such that $\nabla f \in H^{k+6}(\mathbb{R}^d)$, we have :*

$$\left|Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)f - (\varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2)\right|_{H^{k+1/2}} \leq \varepsilon^3 C_{k+2} \left|\nabla f\right|_{H^{k+6}} ,$$

with :

$$\begin{cases} Z_1 := -\nabla \cdot \Big((1-b)\,\nabla f\Big) \ , \\ Z_2 := \dfrac{1}{2}\,\nabla \cdot \left(\dfrac{1}{3}(1-b)^3\,\nabla\Delta f - (1-b)^2\,\nabla\nabla \cdot \Big((1-b)\,\nabla f\Big)\right) - \eta\Delta f \ . \end{cases}$$

Proof. The proof of this proposition follows exactly the same steps as the proof of Proposition 1.2.1. The following values of u_0, u_1, u_2 are found :

$$\begin{aligned} u_0 &= f \ , \\ u_1 &= \frac{(1-b)^2}{2}(1-(z+1)^2)\Delta f + z\,(1-b)\nabla b \cdot \nabla f \ , \\ u_2 &= \frac{(1-b)^4}{24}\,\Delta^2 f\, z^4 + \frac{(1-b)^3}{6}\,\Delta\nabla \cdot \Big((1-b)\nabla f\Big)\, z^3 - (1-b)\eta\Delta f\, z^2 \\ &\quad + \Big[\frac{(1-b)}{2}\,\nabla \cdot \left(\frac{(1-b)^3}{3}\nabla\Delta f - (1-b)^2\nabla\nabla \cdot \Big((1-b)\nabla f\Big)\right) \\ &\quad -\eta\Big(2(1-b)\Delta f + \nabla b \cdot \nabla f\Big)\Big]\, z \ . \end{aligned}$$

The error bound is derived in the same way and the previous values lead to the result. □

Remark 1.2.5. *By formally taking $b = \varepsilon b$, we recover the result of Proposition 1.2.1.*

1.3 Derivation of preliminary models

We recall the Zakharov formulation of the water waves equations, from which we intend to derive new systems using the previous results :

$$(S_0)\begin{cases} \partial_t\psi + \eta - \varepsilon\partial_t\eta Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)\psi + \dfrac{1}{2}\Big[\,\varepsilon\,|\nabla\psi - \varepsilon\,\nabla\eta Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)\psi|^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + |Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)\psi|^2\Big] = 0 \ , \\ \partial_t\eta + \varepsilon\nabla\eta \cdot \Big[\,\nabla\psi - \varepsilon\nabla\eta Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)\psi\,\Big] = \dfrac{1}{\varepsilon}\,Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)\psi \ . \end{cases}$$

As in [14], we introduce the notion of consistency.

Definition 1.3.1. *Let $\sigma, s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, $T > 0$ and let $(V^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be bounded in $W^{1,\infty}([0, \frac{T}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ independently of ε. This family is called consistent (at order s) with a system (S) if and only if it is solution of (S) with a residual of order ε^2 in $L^\infty\Big([0, \frac{T}{\varepsilon}]; H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}\Big)$.*

We are now able to state the following results which show the consistency of two Boussinesq-like systems with the system (S_0). We introduce here the quantity $h = 1 - b$ which corresponds to the non-dimensional still water depth. From now on, this quantity is considered as a topography term since it only depends on b.

Proposition 1.3.2 (Small variations regime $\beta = \varepsilon$). *Let $T > 0$, $s \geq 0$, $\sigma \geq s$ and $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (0.0.7) such that $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded with respect to ε in $W^{1,\infty}([0, \frac{T}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ with σ large enough. We define $V^\varepsilon := \nabla\psi^\varepsilon$. Then the family $(V^\varepsilon, \eta)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the following system :*

$$(\mathcal{B}_1)\begin{cases} \partial_t V + \nabla\eta + \dfrac{\varepsilon}{2}\nabla|V|^2 = 0 \ , \\[2ex] \partial_t\eta + \nabla\cdot V + \varepsilon\left[\nabla\cdot\Big((\eta - b)\,V\Big) + \dfrac{1}{3}\,\Delta\nabla\cdot V\right] = 0 \ . \end{cases}$$

Proof. This is clear thanks to the asymptotic expansion of the operator $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$: plugging this in system (0.0.7), neglecting the terms of order $O(\varepsilon^2)$, and taking the gradient yields the result. □

Proposition 1.3.3 (Strong variations regime $\beta = 1$). *Let $T > 0$, $s \geq 0$, $\sigma \geq s$ and $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (0.0.7) such that $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded with respect to ε in $W^{1,\infty}([0, \frac{T}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ with σ large enough. We define $V^\varepsilon := \nabla\psi^\varepsilon$. Then the family $(V^\varepsilon, \eta)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the following system (with $h = 1 - b$) :*

$$(\mathcal{B}_2)\begin{cases} \partial_t V + \nabla\eta + \dfrac{\varepsilon}{2}\nabla|V|^2 = 0 \ , \\[2ex] \partial_t\eta + \nabla\cdot(h\,V) + \varepsilon\left[\nabla\cdot(\eta V) - \dfrac{1}{2}\nabla\cdot\left(\dfrac{h^3}{3}\nabla\nabla\cdot V - h^2\nabla\nabla\cdot(h\,V)\right)\right] = 0 \ . \end{cases}$$

These results close the first chapter of this part. In the next two chapters, we separately study the two regimes $\beta = \varepsilon$ and $\beta = 1$. The Boussinesq-like systems $(\mathcal{B}_1)$ and $(\mathcal{B}_2)$ are respectively the starting points of these studies.

Chapitre 2

Boussinesq-like models for slightly varying bottoms

In this chapter, we intend to derive a new class of symmetric Boussinesq-like models in the regime of slight topographical variations $\beta = O(\varepsilon)$. To this end, we start from the previously derived system $(\mathcal{B}_1)$ and adapt the global strategy exposed by Bona-Colin-Lannes in [14] to the case of uneven bottoms. A first change of variable on the velocity field V permits the derivation of a whole class of equivalent systems via the introduction of three arbitrary parameters. We then perform a well-suited nonlinear change of variable and derive a new class of systems that can be made completely symmetric by chosing appropriate values for the previous parameters. These symmetric systems are proved to be well-posed and to provide a good approximation - up to the inversion of the previous changes of variables - of the water waves solutions on a long time scale.

2.1 Derivation of a first class of equivalent systems

We recall the previously derived Boussinesq-like system $(\mathcal{B}_1)$ on which we base our analysis :

$$(\mathcal{B}_1) \begin{cases} \partial_t V + \nabla\eta + \dfrac{\varepsilon}{2}\nabla|V|^2 = 0 \ , \\ \\ \partial_t \eta + \nabla\cdot V + \varepsilon\left[\nabla\cdot\Big((\eta-b)\,V\Big) + \dfrac{1}{3}\,\Delta\nabla\cdot V\right] = 0 \ . \end{cases}$$

We now follow the method put forward in [13] and [14] to derive equivalent systems to $(\mathcal{B}_1)$ in the meaning of consistency. The rigourous justifications of the derivation of these systems is adressed in Section 2 in [14].
As in [13] (for the 1-D surface case) and in [14], we define :

$$V_\theta = \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\Big)\ V \ ,$$

which corresponds to the approximation at the order ε^2 of the horizontal component of the velocity field at the height $-1+\theta(1+\varepsilon(\eta-b))$ for $\theta\in[0,1]$. If we remark that $V_\theta=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}(\theta^2-1)\Delta\right)^{-1}V+O(\varepsilon^2)$, the expression of V_θ in terms of V comes in the following way by supposing V regular enough :

$$V=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}(\theta^2-1)\Delta\right)V_\theta+O(\varepsilon^2)\ ,$$

where $O(\varepsilon^2)$ is to be taken in the $L^\infty([0,\frac{T}{\varepsilon}],H^s(\mathbb{R}^d))$ norm.
Plugging this relation into the system $(\mathcal{B}_1)$ leads to :

$$\begin{cases}\partial_tV_\theta+\nabla\eta+\frac{\varepsilon}{2}\Big(\nabla|V|^2+(\theta^2-1)\Delta\partial_tV_\theta\Big)=O(\varepsilon^2)\ ,\\ \partial_t\eta+\nabla\cdot V_\theta+\varepsilon\left[\nabla\cdot\Big((\eta-b)\,V\Big)+\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\Delta\nabla\cdot V_\theta\right]=O(\varepsilon)^2\ .\end{cases}$$

At this point we use the classical BBM trick which consists in using the equations to write :

$$\partial_tV_\theta=-\nabla\eta+O(\varepsilon)=(1-\lambda_2)\partial_tV_\theta-\lambda_2\nabla\eta+O(\varepsilon)\ ,$$

$$\nabla\cdot V_\theta=-\partial_t\eta+O(\varepsilon)=\lambda_1\nabla\cdot V_\theta-(1-\lambda_1)\partial_t\eta+O(\varepsilon)\ ,$$

where λ_1 and λ_2 are two real parameters.
We plug these relations into the dispersive terms of the last system to get :

$$\begin{cases}\partial_tV_\theta+\nabla\eta+\frac{\varepsilon}{2}\left[\nabla|V_\theta|^2-\lambda_2(\theta^2-1)\Delta\nabla\eta-(\lambda_2-1)(\theta^2-1)\Delta\partial_tV_\theta\right]=O(\varepsilon^2)\ ,\\ \partial_t\eta+\nabla\cdot V_\theta+\varepsilon\left[\nabla\cdot\Big((\eta-b)V_\theta\Big)+\lambda_1\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\Delta\nabla\cdot V_\theta\right.\\ \qquad\qquad\left.-(1-\lambda_1)\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\Delta\partial_t\eta\right]=O(\varepsilon^2)\ .\end{cases}$$

We then introduce the class $\mathcal{S}^b$ of all the systems of the previous form : these systems are denoted by $(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ and can be rewritten in compact form :

$$(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})\begin{cases}(1-\varepsilon a_2\Delta)\partial_tV_\theta+\nabla\eta+\varepsilon\left[\frac{1}{2}\nabla|V_\theta|^2+a_1\Delta\nabla\eta\right]=0\ ,\\ (1-\varepsilon a_4\Delta)\partial_t\eta+\nabla\cdot V_\theta+\varepsilon\Big[\nabla\cdot\Big((\eta-b)\,V_\theta\Big)+a_3\Delta\nabla\cdot V_\theta\Big]=0\ .\end{cases}$$

with

$$a_1=-\lambda_2\frac{\theta^2-1}{2},\quad a_2=(\lambda_2-1)\frac{\theta^2-1}{2}\ ,$$
$$a_3=\lambda_1\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right),\quad a_4=(1-\lambda_1)\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{1}{6}\right)\ .$$

On this class $\mathcal{S}^b$, the previous computations give us the following two consistency results :

Proposition 2.1.1. *Let $\theta \in [0,1]$ and $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (0.0.7) such that $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded with respect to ε in $W^{1,\infty}([0, \frac{T}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ with σ large enough. We define $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$ and $V^\varepsilon_\theta = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right) V^\varepsilon$. Then for all $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, the family $(V^\varepsilon_\theta, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the system $(S^{\ b}_{\theta,\lambda_1,\lambda_2})$.*

Proof. We saw in the previous chapter that if $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is a family of solutions of (0.0.7), then the family $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the system $(\mathcal{B}_1)$. Thanks to the previous computations, and since the choice of the parameters (λ_1, λ_2) is totally free, it is clear that $(V^\varepsilon_\theta, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with any system $(S^{\ b}_{\theta,\lambda_1,\lambda_2})$. □

Proposition 2.1.2. *Up to a change of variables, all the systems belonging to the class $\mathcal{S}^b$ are equivalent in the meaning of consistency.*

Proof. Let $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$ and $(V^\varepsilon_\theta, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ a family consistent with $(S^{\ b}_{\theta,\lambda_1,\lambda_2})$. We then define, for $\theta_1 \in [0,1]$,

$$V^\varepsilon_{\theta_1} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta_1^2)\Delta\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right) V^\varepsilon_\theta \ ;$$

using the fact that $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right) V^\varepsilon_\theta = V^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ and the previous proposition, we easily deduce that the family $(V^\varepsilon_{\theta_1}, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with any system $(S^{\ b}_{\theta_1,\lambda_1,\lambda_2})$ for any $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. □

Remarks 2.1.3.

- *By taking $\theta = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, we remark that the previously derived Boussinesq system $(\mathcal{B}_1)$ is actually a member of the class $\mathcal{S}^b$*
- *By taking $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ and $\theta^2 = 2/3$, we get $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1/12$, so that the dispersive part of the correponding system $(S^{\ b}_{\theta,\lambda_1,\lambda_2})$ is symmetric. However, the nonlinear terms, that are not affected by the choice of $\theta, \lambda_1, \lambda_2$, are not symmetric : this problem is adressed in the next section.*
- *In [18], Chen formally studied in 1-D surface the case of slightly variable bottoms and derived the same class of systems at the exception that she considered time-dependent bottoms : her systems thus contain additionnal time derivative terms on the bottom that does not appear here but could be easily obtained for a time dependent bottom.*

2.2 A non-linear change of variable

Adapting the nonlinear change of variables of [14] to the present case of variable depth, we introduce $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}(\eta - b)\Big)\, V \ .$$

This nonlinear change of variable symetrizes the nonlinear part of the equations.

This change of variables only affects the nonlinear terms and not the dispersive terms. If $(V^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with a system $(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ of the class $\mathcal{S}^b$, then $\tilde{V}^\varepsilon = (1+\frac{\varepsilon}{2}\eta^\varepsilon)\, V^\varepsilon$ and η^ε satisfy the following equations :

$$\begin{cases} (1-\varepsilon a_2\Delta)\,\partial_t\tilde{V}^\varepsilon + \nabla\eta^\varepsilon + \varepsilon\Big[\frac{1}{4}\nabla|\eta^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\nabla|\tilde{V}^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\tilde{V}^\varepsilon\,\nabla\cdot\tilde{V}^\varepsilon - \frac{1}{2}b\,\nabla\eta^\varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_1\Delta\nabla\eta^\varepsilon\Big] = O(\varepsilon^2)\ , \\ (1-\varepsilon a_4\Delta)\,\partial_t\eta^\varepsilon + \nabla\cdot\tilde{V}^\varepsilon + \varepsilon\left[\frac{1}{2}\nabla\cdot\Big((\eta^\varepsilon - b)\,\tilde{V}^\varepsilon\Big) + a_3\Delta\nabla\cdot\tilde{V}^\varepsilon\right] = O(\varepsilon^2)\ . \end{cases}$$

As observed in [14], if we consider a two-dimensional domain, that is to say $d = 1$, the nonlinear terms are actually symmetric. But this is not the case in a three-dimensional domain. However we can deal with this problem for $d = 2$ using the following remark coming from [40] :

$$\frac{1}{2}\nabla|\tilde{V}^\varepsilon|^2 = \frac{1}{4}\nabla|\tilde{V}^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}(\tilde{V}^\varepsilon\cdot\nabla)\tilde{V}^\varepsilon + \frac{1}{2}\tilde{V}^\varepsilon\wedge(\nabla\times\tilde{V}^\varepsilon)$$

Assuming that $\nabla\times\tilde{V}^\varepsilon = O(\varepsilon)$, one formally derives the following system :

$$\begin{cases} (1-\varepsilon a_2\Delta)\,\partial_t\tilde{V}^\varepsilon + \nabla\eta^\varepsilon + \varepsilon\left[\frac{1}{4}\nabla|\eta^\varepsilon|^2 + \frac{1}{4}\nabla|\tilde{V}^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}(\tilde{V}^\varepsilon\cdot\nabla)\tilde{V}^\varepsilon\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}\,\tilde{V}^\varepsilon\,\nabla\cdot\tilde{V}^\varepsilon - \frac{1}{2}\,b\,\nabla\eta^\varepsilon + a_1\Delta\nabla\eta^\varepsilon\right] = O(\varepsilon^2)\ , \\ (1-\varepsilon a_4\Delta)\,\partial_t\eta^\varepsilon + \nabla\cdot\tilde{V}^\varepsilon + \varepsilon\left[\frac{1}{2}\nabla\cdot\Big((\eta^\varepsilon - b)\,\tilde{V}^\varepsilon\Big) + a_3\Delta\nabla\cdot\tilde{V}^\varepsilon\right] = O(\varepsilon^2)\ . \end{cases}$$

The nonlinear terms of the previous system are now symmetric regardless of the dimension. This previous computations are summed up in the following proposition :

Proposition 2.2.1. *Let $(V^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be a family consistent with a system $(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ and $\tilde{V}^\varepsilon = \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\eta^\varepsilon\Big)\, V^\varepsilon$. If $\nabla\times\tilde{V}^\varepsilon = O(\varepsilon)$, then the family $(\tilde{V}^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the following system :*

$$(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})\begin{cases} (1-\varepsilon a_2\Delta)\,\partial_t V + \nabla\eta + \varepsilon\Big[\frac{1}{4}\nabla|\eta|^2 + \frac{1}{4}\nabla|V|^2 + \frac{1}{2}(V\cdot\nabla)V + \frac{1}{2}\,V\,\nabla\cdot V \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{2}\,b\,\nabla\eta + a_1\Delta\nabla\eta\Big] = 0\ , \\ (1-\varepsilon a_4\Delta)\,\partial_t\eta + \nabla\cdot V + \varepsilon\left[\frac{1}{2}\nabla\cdot\Big((\eta - b)\,V\Big) + a_3\Delta\nabla\cdot V\right] = 0\ . \end{cases}$$

We introduce the class $\mathcal{T}^b$ composed with the systems $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ for any $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}^2$. Using this result, we prove the following proposition :

Proposition 2.2.2. *Let $\theta\in[0,1]$ and $(\psi^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (0.0.7) such that $(\nabla\psi^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded with respect to ε in $W^{1,\infty}([0,\frac{T}{\varepsilon}];\,H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ with σ large enough.*
We define $\tilde{V}^\varepsilon=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}(\eta-b)\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right)\nabla\psi^\varepsilon$. Then for all $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, the family $(\tilde{V}^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$.

Proof. Thanks to Proposition 2.1.1, the family $(V_\theta^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the system $(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ for all $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, where $V_\theta^\varepsilon=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right)V^\varepsilon$ and $V^\varepsilon=\nabla\psi^\varepsilon$. We then use the following remark : by hypothesis, the tridimensionnal velocity field V_{euler}^ε of the fluid is irrotationnal, thus using the introduction notations : $\nabla\times\nabla\phi^\varepsilon=\nabla\times\nabla\psi^\varepsilon=0$ and hence $\nabla\times V^\varepsilon=0$. We easily deduce that $\nabla\times V_\theta^\varepsilon=O(\varepsilon)$ and $\nabla\times\tilde{V}^\varepsilon=O(\varepsilon)$. Applying the previous proposition yields the result. □

2.3 The completely symmetric systems

We remarked in the first section that there exists values of $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ such that the dispersive terms are symmetric. Consequently, the corresponding system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ of the class $\mathcal{T}^b$ is completely symmetric since both its dispersive terms and nonlinear terms are symmetric. We thus introduce the non-empty subclass of $\mathcal{T}^b$ denoted by Σ^b composed with the systems of the form $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2})^{\ b}$ for which we have $a_1=a_3$, $a_2\geq 0, a_4\geq 0$. The first condition $a_1=a_3$ symetrizes the nonlinear terms and the last ones $a_2\geq 0, a_4\geq 0$ ensure the well-posedness of these completely symmetric systems. Indeed, one of the great advantages of these systems belonging to Σ^b is that we have a well-posedness over a large time scale :

Proposition 2.3.1. *Let $s>\frac{d}{2}+1$ and $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)$ be such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ belongs to the class Σ^b.*
Then for all $(V_0,\eta_0)\in H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}$, there exists a time $T_0\geq 0$ independent of ε and a unique solution $(V,\eta)\in C([0,\frac{T_0}{\varepsilon}];H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1})\cap C^1([0,\frac{T_0}{\varepsilon}];H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ to the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ such that $(V,\eta)_{|t=0}=(V_0,\eta_0)$.
Furthermore, this unique solution is bounded independently of ε in the following sense : there exists a constant C_0 independent of ε such that for all k verifying $s-3k>\frac{d}{2}+1$, we have :

$$|(V,\eta)|_{W^{k,\infty}([0,\frac{T_0}{\varepsilon}];H^{s-3k}(\mathbb{R}^d)^{d+1})}\leq C_0\ .$$

Proof. This theorem is a very classical result on hyperbolic symmetric quasilinear systems, and we omit the proof here. □

As in [14], we are now able to rigorously construct approximate solutions to the water waves problem from the solutions of any of these symmetric systems.
More precisely, let us consider a solution $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$ to the initial system (0.0.7) with initial data $(\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)$ such that $(\nabla\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon) \in H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}$ for a suitably large value of s. We define $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$ and $V_0^\varepsilon = \nabla\psi_0^\varepsilon$. From this solution of the water waves problem, we construct an approximate solution as follows :

- We first construct what we call here approximate initial data, by applying the two successive changes of variable on the data $(V_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)$:
$$\begin{cases} V_{\Sigma,0}^\varepsilon = \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}(\eta_0^\varepsilon - b)\Big)\ \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\Big)\ V_0^\varepsilon \ , \\ \eta_{\Sigma,0}^\varepsilon = \eta_0^\varepsilon \ . \end{cases}$$
- We then choose the parameters $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$ such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^b)$ belongs to the class Σ^b of completely symmetric systems (this choice is always possible as we saw previously). Using Proposition 2.3.1, we know that there exists a unique solution to this system with initial data $(V_{\Sigma,0}^\varepsilon, \eta_{\Sigma,0}^\varepsilon)$: we denote this solution by $(V_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$.
- From this exact solution of the symmetric system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^b)$, we finally construct an approximate solution of the water waves problem by successively and approximatively inverting the two changes of variable as shown below :
$$\begin{cases} V_{app}^\varepsilon &= \Big(1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\Big)\ \Big[\Big(1 - \frac{\varepsilon}{2}(\eta_\Sigma^\varepsilon - b)\Big) V_\Sigma^\varepsilon\Big] \ , \\ \eta_{app}^\varepsilon &= \eta_\Sigma^\varepsilon \ . \end{cases}$$

This formal construction of an approximate solution founds its mathematical justification in the following theorem which is the last result of this chapter.

Theorem 2.3.2. *Let $T_1 \geq 0$, $s \geq \frac{d}{2} + 1$, $\sigma \geq s+3$ and $(\nabla\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)$ be in $H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1}$. Let $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (0.0.7) with initial data $(\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ such that $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded in $W^{1,\infty}([0, \frac{T_1}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$. We define $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$ and choose $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$ such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^b) \in \Sigma^b$. Then for all $\varepsilon < \varepsilon_0$, there exists $T \leq T_1$ such that we have :*
$$\forall t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}] \ , \quad |V^\varepsilon - V_{app}^\varepsilon|_{L^\infty([0,t];H^s)} + |\eta^\varepsilon - \eta_{app}^\varepsilon|_{L^\infty([0,t];H^s)} \leq C\,\varepsilon^2 t \ .$$

Proof. We follow in this proof the strategy put forward in [14]: estimates are done on the symmetric system that provides the approximate solution rather than on the initial system (0.0.7).
To this end, we take $(\theta, \lambda_1, \lambda_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$ such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ belongs to the class Σ^b of completely symmetric systems.
Since $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is a family of solutions of (0.0.7) such that $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded with respect to ε in $W^{1,\infty}([0, \frac{T_1}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$, using Proposition 2.1.1 implies that $(V_\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ - where $V_\theta^\varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)\Delta\right) V^\varepsilon$ - is consistent with the system $(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$.
Moreover, Proposition 2.2.1 states that any family $(V^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ consistent with the system $(S_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ is, up to the aforementionned nonlinear change of variables, consistent with the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$. Applying this result to $(V_\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ shows that the family $(\tilde{V}_\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$, where $\tilde{V}_\theta^\varepsilon = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(\eta^\varepsilon - b)\right) V_\theta^\varepsilon$, is actually consistent with the symmetric system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$.
Thanks to Proposition 2.3.1, we know that there exists a time T_0 such that there exists a unique solution $(V_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$ to this system with initial data $(V_{\Sigma,0}^\varepsilon, \eta_{\Sigma,0}^\varepsilon)$ (defined in the previous formal construction of the approximate solution). We are now interested in computing the error estimates between $(\tilde{V}_\theta^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$ and $(V_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$. To this end we define $V = \tilde{V}_\theta^\varepsilon - V_\Sigma^\varepsilon$ and $\eta = \eta^\varepsilon - \eta_\Sigma^\varepsilon$. Writing the equations satisfied by V and η and performing standard energy estimates on it leads to the following estimate :

$$\forall t \in [0, \frac{T_1}{\varepsilon}] \ , \quad |V|_{L^\infty([0,t];H^s)} + |\eta|_{L^\infty([0,t];H^s)} \leq C\,\varepsilon^2 t$$

where $T = \min(T_0, T_1)$. Inverting the nonlinear change of variables and the pseudo-differential one yields the final result. □

Remarks 2.3.3.

- *The construction of the approximated solution of the water waves problem relies on the choice of the three parameters $\theta, \lambda_1, \lambda_2$ such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ is completely symmetric. A great advantage of this method is that this choice is totally free : we are indeed allowed to choose any suitable triplet $(\theta, \lambda_1, \lambda_2)$ we want, and contruct our approximate solution from the exact solution of the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$. In other words, approximate solutions of the water waves problem can be constructed starting from the exact solution of* **any symmetric system** *of the class Σ^b.*

- *Our theorem relies implicitly on the existence of a family $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ of solutions to the water waves problem in Sobolev spaces : in 1-D surface, this existence have been already proved by Craig [20], Schneider-Wayne [62] ; besides, Borys Alvarez-Samaniego and David Lannes proved in [3] the well posedness of the water waves problem on a long time scale in any dimension. The justification of the present Boussinesq-like systems with uneven bottoms is hence complete in both 1-D and 2-D surface.*

Chapitre 3

Boussinesq-like models for high topographical variations

In this chapter, attention is paid to the regime of highly variable topographies $\beta = O(1)$. Like in the previous chapter, we aim at deriving asymptotic symmetric models, constructing approximate solutions of the water waves problem, and justifying this approximation. However, the previously exposed method cannot be applyied in the exact same way : this regime is indeed much more complex because of the greater influence of the topographical terms. These terms introduce new difficulties which compell us to revise and adapt our strategy. A new nonlinear change of variable is first performed and a single equivalent system is obtained. Adapting the first change of variable of the previous chapter, we are finally able to derive a class of equivalent systems via the introduction of four parameters this time. These ones can be chosen such that the systems are fully symmetric : they are proved to be well-posed and to provide a good approximation of the water waves solutions on a long time scale, under the assumption that the bottom is slowly variable.

3.1 A revised strategy

We recall the Boussinesq-like system $(\mathcal{B}_2)$ derived in Chapter 1, and the fact that solutions of the water waves problem are consistent with this system.

$$(\mathcal{B}_2)\begin{cases} \partial_t V + \nabla\eta + \dfrac{\varepsilon}{2}\nabla|V|^2 = 0 \ , \\ \\ \partial_t\eta + \nabla\cdot(h\,V) + \varepsilon\Big[\nabla\cdot(\eta V) - \dfrac{1}{2}\nabla\cdot\Big(\dfrac{h^3}{3}\nabla\nabla\cdot V - h^2\nabla\nabla\cdot(h\,V)\Big)\Big] = 0 \ . \end{cases}$$

First remark that the bottom term h (recall that $h = 1 - b$ is the non-dimensional still water depth) appears in the first order term of the second equation of $(\mathcal{B}_2)$ whereas it is

not present in the first one. This fact becomes important when it comes to the BBM trick which is unlikely to symetrize these terms. To correctly deal with this regime, we have to invert the order of the change of variables, and proceed with an adapted nonlinear change of variables first that symetrizes both order one terms and non-linear terms.

Taking into account the fact that we have to symmetrize both order one terms and nonlinear terms, we introduce the following change of variables :

$$\tilde{V} = \left(\sqrt{h} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\sqrt{h}}\right) V \ .$$

so that

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{h\sqrt{h}}\right) \tilde{V} + O(\varepsilon^2) \ .$$

Assuming that $\nabla \times \tilde{V} = O(\varepsilon)$, we formally derive the following system of equations satisfied by $\tilde{V}$ and η :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \tilde{V} + \sqrt{h}\nabla\eta + \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{h}}\Big[\dfrac{1}{2}\nabla\eta^2 + \dfrac{1}{2}\nabla|\tilde{V}|^2 + (\tilde{V}\cdot\nabla)\tilde{V} + \tilde{V}\nabla\cdot\tilde{V} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \dfrac{1}{h}\Big(\dfrac{1}{2}(\nabla h\cdot\tilde{V})\tilde{V} - |\tilde{V}|^2\nabla h\Big)\Big] = O(\varepsilon^2) \ , \\ \partial_t\eta + \nabla(\sqrt{h}\cdot\tilde{V}) + \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{h}}\Big[\nabla\cdot(\eta\tilde{V}) - \sqrt{h}\nabla\cdot\Big(\dfrac{h^3}{3}\nabla\nabla\cdot(\dfrac{\tilde{V}}{\sqrt{h}}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -h^2\nabla\nabla\cdot(\sqrt{h}\,\tilde{V})\Big) - \dfrac{\eta}{2h}\nabla h\cdot\tilde{V}\Big] = O(\varepsilon^2) \ . \end{array}\right.$$

We introduce the system (Γ_h) that corresponds to the homogeneous version of the previous system :

$$(S_h)\left\{\begin{array}{l} \partial_t V + \sqrt{h}\,\nabla\eta + \dfrac{\varepsilon}{2}F_h\begin{pmatrix} V \\ \eta \end{pmatrix} = 0 \ , \\ \partial_t\eta + \nabla(\sqrt{h}\cdot V) + \dfrac{\varepsilon}{2}\Big[f_h\begin{pmatrix} V \\ \eta \end{pmatrix} - \nabla\cdot\Big(\dfrac{h^3}{3}\nabla\nabla\cdot(\dfrac{V}{\sqrt{h}}) - h^2\nabla\nabla\cdot(\sqrt{h}\,V)\Big)\Big] = 0 \ , \end{array}\right.$$

where

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_h\begin{pmatrix} V \\ \eta \end{pmatrix} & = & \dfrac{1}{\sqrt{h}}\Big(\dfrac{1}{2}\nabla\eta^2 + \dfrac{1}{2}\nabla|V|^2 + (V\cdot\nabla)V + V\nabla\cdot V \\ & & +\dfrac{1}{h}\Big(\dfrac{1}{2}(\nabla h\cdot V)V - |V|^2\nabla h\Big)\Big) \ , \\ f_h\begin{pmatrix} V \\ \eta \end{pmatrix} & = & \dfrac{1}{\sqrt{h}}\Big(\nabla\cdot(\eta V) - \dfrac{\eta}{2h}\nabla h\cdot V\Big) \ . \end{array}\right.$$

On this new system (S_h), we have the following consistency result :

Proposition 3.1.1. *Consider a family* $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ *of solutions of (0.0.7) such that* $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ *is bounded with respect to* ε *in* $W^{1,\infty}([0, \frac{T}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ *with* σ *large enough. Then the family* $(V^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ *is consistent with the system* (S_h)*, where* $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$*.*

Proof. First remark that since the velocity field V^ε is irrotationnal, we have $\nabla\times\tilde{V}^\varepsilon = O(\varepsilon)$. And since $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the Boussinesq-like system $(\mathcal{B}_2)$, the previous computations yield directly the result. □

3.2 A new class of equivalent systems

In the previous chapter, we saw that a suitable change of variable comes from considering V_θ, the horizontal component of the velocity at the height $-1+\theta(1+\varepsilon(\eta-b)$ with $\theta \in [0,1]$, instead of the horizontal component of the velocity field at the free surface. We can remark that the link between these two variables (and hence the adequate change of variables) can be derived from the expression of u_{app} computed during the asymptotic expansion process of the operator $Z_\varepsilon(\varepsilon\eta, \beta b)$, which implies that we must adapt the change of variable for the strong variations regime since the expression of u_{app} now strongly depends on the topography.

We saw in the Chapter 1 that the computation of the asymptotic expansion of $Z_\varepsilon(\eta, b)\psi$ relies on finding an approximate solution of the elliptic problem (H) on the band $\mathcal{S} = [-1,0]\times\mathbb{R}^2$. Starting from the truncation of the computed value of u_{app} at the order $O(\varepsilon^2)$,

$$u_{app} = \psi + \varepsilon\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{(z+1)^2}{2}\right) h^2\,\Delta\psi - zh\nabla h\cdot\nabla\psi\right] + O(\varepsilon^2)\ ,$$

where ψ is the value of the velocity potential at the free surface, shows that $\nabla u_{app}(\cdot, z)$ gives an approximation at order ε^2 of the horizontal component of the velocity field, namely $V(\cdot, z) = \nabla\phi(\cdot, z)$ at height $z \in [-1,0]$.
Consequently, in presence of large bottom variations, the adequate change of variables is given by :

$$V_\theta = \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(\theta-1)(\theta\nabla(h^2\nabla\cdot\,) + \nabla\nabla\cdot(h^2\,.\,))\right] V\ ,$$

so that

$$V = \left[1 + \frac{\varepsilon}{2}(\theta-1)(\theta\nabla(h^2\nabla\cdot\,) + \nabla\nabla\cdot(h^2\,.\,))\right] V_\theta + O(\varepsilon^2)\ .$$

From this change of variables, we easily compute the expressions of $\partial_t V$ and $\nabla\cdot\sqrt{h}V$ which we plug into the system (S_h). By rewriting carefully the topography terms in order

to make the quantity $\sqrt{h}$ appear, one gets the following system :

$$\begin{cases} \partial_t V_\theta + \sqrt{h}\,\nabla\eta + \frac{\varepsilon}{2}\Big[F_h\begin{pmatrix} V_\theta \\ \eta \end{pmatrix} + \nabla\Big((\theta^2-1)h^2\nabla\cdot\partial_t V_\theta + 2(\theta-1)h\nabla h\cdot\partial_t V_\theta\Big)\Big] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = O(\varepsilon^2)\ , \\ \partial_t\eta + \nabla(\sqrt{h}\cdot V_\theta) + \frac{\varepsilon}{2}\Big[f_h\begin{pmatrix} V_\theta \\ \eta \end{pmatrix} - \nabla\cdot\Big((\theta^2-\frac{1}{3})h^2\nabla\nabla\cdot(\sqrt{h}V_\theta) \\ \qquad\qquad +(\frac{3}{2}\theta^2-\frac{7}{6})h\nabla h\nabla\cdot(\sqrt{h}V_\theta) - \frac{(\theta-2)^2}{2}\sqrt{h}\nabla h(\nabla h\cdot V_\theta) \\ \qquad\qquad -(\frac{\theta^2}{2}-2\theta+\frac{7}{6})h\sqrt{h}\nabla(\nabla h\cdot V_\theta)\Big)\Big] = O(\varepsilon^2)\ . \end{cases}$$

At this point a new problem arises. Applying the BBM trick in the exact same way as in the previous regime leads to a system that is never symmetric for any values of the parameters θ, λ_1 and λ_2. Indeed, this requires the resolution of an over-determined numerical system on the unknowns θ, λ_1 and λ_2. To handle this problem, we simply introduce an additionnal unknown during the BBM trick process :

$$\begin{cases} \partial_t V_\theta = (1-\lambda_1)\partial_t V_\theta - \lambda_1\sqrt{h}\nabla\eta + O(\varepsilon)\ , \\ \partial_t V_\theta = (1-\lambda_2)\partial_t V_\theta - \lambda_2\sqrt{h}\nabla\eta + O(\varepsilon)\ , \\ \nabla\cdot(\sqrt{h}V_\theta) = \lambda_3\nabla\cdot(\sqrt{h}V_\theta) - (1-\lambda_3)\partial_t\eta + O(\varepsilon)\ , \end{cases}$$

and we use the first relation on the term $(\theta^2-1)h^2\nabla\cdot\partial_t V_\theta$ and the second relation on the term $2(\theta-1)h\nabla h\cdot\partial_t V_\theta$.

Finally, we formally derive a new class $\mathcal{T}^h$ of systems, and we easily prove that if a family $(V^\varepsilon,\eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the system (S_h) then $(V^\varepsilon_\theta,\eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ - where $V^\varepsilon_\theta = \Big[1-\frac{\varepsilon}{2}(\theta-1)(\theta\nabla(h^2\nabla\cdot\ ) + \nabla\nabla\cdot(h^2\,.\,))\Big]V^\varepsilon$ - is consistent with any of the following systems $(T^{\ b}_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3})$:

$$(T^{\ b}_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3})\begin{cases} \Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}^1_h\Big)\partial_t V + \sqrt{h}\,\nabla\eta + \frac{\varepsilon}{2}\Big[F_h\begin{pmatrix} V \\ \eta \end{pmatrix} + b_1\sqrt{h}\nabla\nabla\cdot(h^2\nabla\eta) \\ +b_2\sqrt{h}\nabla(h\nabla h\cdot\nabla\eta) + b_3\nabla h\nabla\cdot(h\sqrt{h}\nabla\eta) + b_4\sqrt{h}\nabla h(\nabla h\cdot\nabla\eta)\Big] = 0\ , \\ \Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}^2_h\Big)\partial_t\eta + \nabla(\sqrt{h}\cdot V) + \frac{\varepsilon}{2}\Big[f_h\begin{pmatrix} V \\ \eta \end{pmatrix} + \nabla\cdot\Big(c_1h^2\nabla\nabla\cdot(\sqrt{h}V) \\ +c_2h\nabla h\nabla\cdot(\sqrt{h}V) + c_3h\sqrt{h}\nabla(\nabla h\cdot V) + c_4\sqrt{h}\nabla h(\nabla h\cdot V)\Big)\Big] = 0\ . \end{cases}$$

where the operators $\mathcal{P}^1_h$ and $\mathcal{P}^2_h$ are defined by

$$\begin{cases} \mathcal{P}^1_h = (1-\theta)\Big((1-\lambda_1)(\theta+1)\nabla(h^2\nabla\cdot\quad) + 2(1-\lambda_2)\nabla(h\nabla h\cdot\quad)\Big)\ , \\ \mathcal{P}^2_h = (1-\lambda_3)\Big((\theta^2-\frac{1}{3})\nabla\cdot(h^2\nabla\quad) + (\frac{3}{2}\theta^2-\frac{7}{6})\nabla\cdot(h\nabla h\times\quad)\Big)\ , \end{cases}$$

and the parameters $(a_i)_{1\le i\le 4}, (b_i)_{1\le i\le 4}$ have the following expressions :

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1(1-\theta^2); & c_1 = \lambda_3(\theta^2 - \frac{1}{3}); \\ b_2 = (1-\theta)(2\lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_1(1+\theta)); & c_2 = \lambda_3(\frac{3}{2}\theta^2 - \frac{7}{6}); \\ b_3 = \frac{\lambda_1}{2}(1-\theta^2); & c_3 = -\frac{1}{2}\theta^2 + 2\theta - \frac{7}{6}; \\ b_4 = (1-\theta)(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2}(1+\theta)); & c_4 = \frac{1}{2}(\theta-2)^2; \end{cases}$$

The previous computations are summed up in the following proposition.

Proposition 3.2.1. *Let $\theta \in [0,1]$ and $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ a family of solutions of (0.0.7) such that $(\nabla\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded with respect to ε in $W^{1,\infty}([0,\frac{T}{\varepsilon}]; H^\sigma(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ with σ large enough. We define $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$ and*

$$\tilde{V}^\varepsilon = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}(\theta-1)(\theta\nabla(h^2\nabla\cdot\,) + \nabla\nabla\cdot(h^2\,.\,))\right)\left(\sqrt{h} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\sqrt{h}}\right)V^\varepsilon.$$

Then for all $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, the family $(\tilde{V}^\varepsilon, \eta^\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is consistent with the system $(T^b_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3})$.

Moreover, we have the following proposition on the existence of a subclass of $\mathcal{T}^h$ composed with fully symmetric systems.

Proposition 3.2.2. *There exists at least one value of $(\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ such that the system $(T^b_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3})$ is fully symmetric.*

Proof. We are concerned here with the resolution of the following system :

$$\begin{cases} b_1 = c_1\ , \\ b_2 = -c_2\ , \\ b_3 = c_3\ , \\ b_4 = -c_4\ . \end{cases}$$

This system on $(\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ have at least one solution that gives the following approximate values :

$$\begin{cases} \theta \approx 0.6318\ , \\ \lambda_1 \approx -0.3416\ , \\ \lambda_2 \approx -2.8209\ , \\ \lambda_3 \approx -3.1157\ , \end{cases}$$

which ends the proof. □

From now on, we only consider this solution and its approximate values.

3.3 The final class of symmetric models

Thanks to Proposition 3.2.2, we know that some of the systems $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{}^b)$ of the class $\mathcal{T}^h$ are completely symmetric : we hence denote by Σ^h the non-empty subclass of $\mathcal{S}^b$ composed with these symmetric systems. Unfortunately, we do not have the same kind of existence theory on these systems as in the previous regime. Indeed, the main difference consists in the order one terms of the two equations $\begin{pmatrix} \sqrt{h}\nabla\eta \\ \nabla\cdot(\sqrt{h}V) \end{pmatrix}$. In order to focus on the problem, we rewrite these terms $A(X,\partial_X)\begin{pmatrix} V \\ \eta \end{pmatrix}$ where $A(X,\partial_X) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{h}\nabla_X \\ \nabla_X\cdot(\sqrt{h}\times\ ) & 0 \end{pmatrix}$. The proof of the existence of solutions on a short time scale is not modified by these terms, the classical proof is still valid. However, the fact that the matrix A depends on the bottom term h is a real problem as far as the large time existence is concerned : indeed, one crucial point of the proof here relies on the size of the quantity $\dfrac{\nabla h}{\varepsilon}$ on which we have no piece of information. The only case wherein we are surely able to demonstrate the large time existence is the case where ∇h is of order $O(\varepsilon)$: the term $\dfrac{\nabla h}{\varepsilon}$ is then of order $O(1)$ and we can conclude. In all other cases, the classical proof fails to provide a rigourous demonstration of the long time existence of solutions to these symmetric systems. Nevertheless, we are able to state the following proposition :

Proposition 3.3.1. *Let $s > \dfrac{d}{2}+1$ and $(\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ be such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{}^b)$ belongs to the class Σ^h.*
Then for all $(V_0,\eta_0)\in H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}$, there exists a time T_0 independant of ε and a unique solution $(V,\eta)\in C([0,T_0];H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1})\cap C^1([0,T_0];H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ to the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{}^b)$ such that $(V,\eta)_{|t=0}=(V_0,\eta_0)$.
Furthermore, this unique solution is bounded independently of ε in the following sense : there exists a constant C_0 independent of ε such that for all k verifying $s-3k>\dfrac{d}{2}+1$, we have :

$$|(V,\eta)|_{W^{k,\infty}([0,T_0];H^{s-3k}(\mathbb{R}^d)^{d+1})}\leq C_0 \ .$$

Besides, if we suppose that $\nabla b = O(\varepsilon)$, the previous result becomes valid on the long time interval $[0,\dfrac{T_0}{\varepsilon}]$.

Proof. The key point of the proof is to demonstrate that the elliptic operator $1-\dfrac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_h^1 \\ \mathcal{P}_h^2 \end{pmatrix}$ is a positive one. We first focus on $\mathcal{P}_h^1$:

$$(1-\frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}_h^1 V,V) = |V|_2^2+\frac{\varepsilon}{2}(1-\theta^2)(1-\lambda_1)|h\nabla\cdot V|_2^2+\varepsilon(1-\theta)(1-\lambda_2)(\nabla h\cdot V,h\nabla\cdot V)$$

Using the following inequality (satisfied for all $a\in\mathbb{R}$) :

$$\Big|(\nabla h\cdot V,h\nabla\cdot V)\Big|\leq\frac{a^2}{2}|h\nabla\cdot V|_2^2+\frac{1}{2a^2}|\nabla h\cdot V|_2^2 \ ,$$

and taking $a^2 = \dfrac{(1+\theta)(1-\lambda_1)}{1-\lambda_2}$ leads to :

$$(1-\frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}_h^1 V, V) \geq |V|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{(1-\theta)(1-\lambda_2)^2}{(1+\theta)(1-\lambda_1)}|\nabla h \cdot V|_2^2$$

Using the classical Cauchy-Schwarz inequality leads finally to :

$$(1-\frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}_h^1 V, V) \geq \Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\frac{(1-\theta)(1-\lambda_2)^2}{(1+\theta)(1-\lambda_1)}|\nabla h|_2^2\Big)\,|V|_2^2 \ ,$$

At this point, if we take a small enough value of ε, f.e. $\varepsilon \leq \dfrac{2(1+\theta)(1-\lambda_1)}{(1-\theta)(1-\lambda_2)^2\,|\nabla h|_2^2}$, it ensures the global positivity of $\mathcal{P}_h^1$. On $\mathcal{P}_h^2$, we use the same method :

$$(1-\frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}_h^2\eta, \eta) = |\eta|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda_3)(\theta^2-\frac{1}{3})|h\nabla\eta|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}(1-\lambda_3)(\frac{3}{2}\theta^2-\frac{7}{6})(\eta\nabla h, h\nabla\eta)$$

Using the same ideas as previously, one gets :

$$(1-\frac{\varepsilon}{2}\mathcal{P}_h^2\eta, \eta) \geq \Big(1-\frac{\varepsilon}{8}\frac{(1-\lambda_3)(\frac{3}{2}\theta^2-\frac{7}{6})^2}{\theta^2-\frac{1}{3}}\,|\nabla h|_2^2\Big)\,|\eta|_2^2 \ ,$$

Once more, if we take f.e. $\varepsilon \leq \dfrac{8(\theta^2-\frac{1}{3})}{(1-\lambda_3)(\frac{3}{2}\theta^2-\frac{7}{6})^2\,|\nabla h|_2^2}$, we have the global positivity of $\mathcal{P}_h^2$.

Consequently, taking $\varepsilon \leq \min(\dfrac{2(1+\theta)(1-\lambda_1)}{(1-\theta)(1-\lambda_2)^2\,|\nabla h|_2^2}, \dfrac{8(\theta^2-\frac{1}{3})}{(1-\lambda_3)(\frac{3}{2}\theta^2-\frac{7}{6})^2\,|\nabla h|_2^2})$ ensures that the operator $1-\dfrac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix}\mathcal{P}_h^1 \\ \mathcal{P}_h^2\end{pmatrix}$ is positive.

At this point, using this result and performing usual energy estimates on the system proves the existence of a time T such that there exists an unique solution $(V,\eta) \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}) \cap C^1([0,T]; H^{s-3}(\mathbb{R}^d)^{d+1})$ to the system. □

This result gives an efficient theoretical background to contruct approximate solutions of the water waves problem on a time scale $O(1)$, and $O(\dfrac{1}{\varepsilon})$ in the case $\nabla h = O(\varepsilon)$.

This contruction follows the same steps - but in a different order - as the contruction of approximate solutions for the first regime : we consider a solution $(\psi^\varepsilon, \eta^\varepsilon)$ to the formulation (0.0.7) of the water waves problem. We take initial data $(\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)$ such that $(\nabla\psi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon) \in H^s(\mathbb{R}^d)^{d+1}$ for a suitably large value of s. We then define $V^\varepsilon = \nabla\psi^\varepsilon$ and $V_0^\varepsilon = \nabla\psi_0^\varepsilon$: we first contruct the data $(V_{\Sigma,0}^\varepsilon, \eta_{\Sigma,0}^\varepsilon)$ by applying the two successive changes of variable on the data $(V_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon)$. We then choose the parameters $(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in [0,1] \times \mathbb{R}^3$ such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}^b)$ is completely symmetric. Using Proposition 3.3.1, we know that there exists a unique solution to this system with initial data $(V_{\Sigma,0}^\varepsilon, \eta_{\Sigma,0}^\varepsilon)$: we denote this solution by $(V_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$. From this exact solution of the symmetric system

$(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}^{\ b})$, we finally construct an approximate solution of the water waves problem by successively and approximatively inverting the two changes of variable as shown below (which is possible if ε is small enough) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} V_{app}^{\varepsilon} & = & \left(\dfrac{1}{\sqrt{h}} - \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{\eta^{\varepsilon}}{h\sqrt{h}}\right)\Big(1 + \dfrac{\varepsilon}{2}(\theta-1)(\theta\nabla(h^2\nabla\cdot V_{\Sigma}^{\varepsilon}) + \nabla\nabla\cdot(h^2\,V_{\Sigma}^{\varepsilon}))\Big) \\ \eta_{app}^{\varepsilon} & = & \eta_{\Sigma}^{\varepsilon} \end{array}\right.$$

We are now able to state our final result :

Theorem 3.3.2. *Let $T_1 \geq 0$, $s \geq \dfrac{d}{2} + 1$, $\sigma \geq s+3$ and $(\nabla\psi_0^{\varepsilon}, \eta_0^{\varepsilon})$ be in $H^{\sigma}(\mathbb{R}^d)^{d+1}$. Let $(\psi^{\varepsilon}, \eta^{\varepsilon})_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (0.0.7) with initial data $(\psi_0^{\varepsilon}, \eta_0^{\varepsilon})_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ such that $(\nabla\psi^{\varepsilon}, \eta^{\varepsilon})_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ is bounded in $W^{1,\infty}([0,T_1]; H^{\sigma}(\mathbb{R}^d)^{d+1})$. We define $V^{\varepsilon} = \nabla\psi^{\varepsilon}$ and choose $(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in [0,1] \times \mathbb{R}^3$ such that the system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}^{\ b}) \in \Sigma^h$.*
Then for all $\varepsilon < \varepsilon_0$, there exists a time $T \leq T_1$ such that we have :

$$|V^{\varepsilon} - V_{app}^{\varepsilon}|_{L^{\infty}([0,T];H^s)} + |\eta^{\varepsilon} - \eta_{app}^{\varepsilon}|_{L^{\infty}([0,T];H^s)} \leq C\,\varepsilon^2$$

Besides, if we suppose that $\nabla h = O(\varepsilon)$ then $(V_{app}^{\varepsilon}, \eta_{app}^{\varepsilon})$ approximates the water waves solutions on a large time scale :

$$\forall t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]\,, \quad |V^{\varepsilon} - V_{app}^{\varepsilon}|_{L^{\infty}([0,t];H^s)} + |\eta^{\varepsilon} - \eta_{app}^{\varepsilon}|_{L^{\infty}([0,t];H^s)} \leq C\,\varepsilon^2 t$$

Proof. The proof is an adaptation of the one of Theorem 2.3.2, and we omit it here. □

Remark 3.3.3. *In the general case, where we have no piece of information on the size of the quantity $\dfrac{\nabla h}{\varepsilon}$, our analysis is only complete on a short time scale. We have indeed an approximation on this interval of time, and we know from Lannes [41] the existence of solutions to the water waves problem on a short time scale in 1-D and 2-D surface. However, if we suppose that $\nabla h = O(\varepsilon)$, this analysis is totally complete - like in the first regime - since we know from Alvarez-Samaniego and Lannes [3] the existence of solutions to the water waves problem on a long time scale in 1-D and 2-D surface.*

Remark 3.3.4. *The regime of long wave ($\varepsilon = \mu \ll 1$ where $\mu = \dfrac{h^2}{\lambda^2}$) and strong topography variations ($\beta = O(1)$) considered here can be seen as a particular case of the Green-Naghdi regime ($\mu \ll 1$ and no particular assumption on ε and β) derived in [27] and fully justified in [3, 4].*

PARTIE II

Sur l'approximation de Korteweg-de Vries pour fond non plat

Chapitre 4

The uncoupled KdV approximation

In this chapter, we recover the usual uncoupled KdV approximation justified by Schneider and Wayne in [62] for flat botoms, and by Iguchi in [30] for slightly varying bottoms. To this end, we start with any of the symmetric Boussinesq system $(T_{\theta,\lambda_1,\lambda_2}^{\ b})$ derived in Chapter 2 that we denote by (Σ) for the sake of clarity. We look for approximate solutions of the diagonalized version of (Σ) under the form of two waves moving in opposite directions. Each wave is shown to be slightly modulated in time with a dynamic governed by a KdV equation, while the correcting terms must solve an inhomogeneous transport equation. The sum of these two waves is proved to give an approximation of the solutions of (Σ) for sufficiently decaying initial data and topography.

4.1 Derivation of the approximation

Let us recall the expression of (Σ) :

$$(\Sigma)\begin{cases} (1-\varepsilon a_2\partial_x^2)\partial_t v+\partial_x\eta+\varepsilon\Big[\dfrac{1}{2}\eta\partial_x\eta+\dfrac{3}{2}v\partial_x v-\dfrac{1}{2}b\partial_x\eta+a_1\partial_x^3\eta\Big]=0\,,\\ (1-\varepsilon a_4\partial_x^2)\partial_t\eta+\partial_x v+\varepsilon\Big[\dfrac{1}{2}\partial_x\left((\eta-b)v\right)+a_3\partial_x^3 v\Big]=0\,,\end{cases}$$

with $a_2\geq 0$ and $a_4\geq 0$. We point out that that such a system is well posed for sufficiently smooth initial data and provides an approximation of the water waves problem of order $O(\varepsilon)$ for times of order $O(1/\varepsilon)$ (see Part I and [3] for further details).
In order to recover the KdV approximation, we first diagonalize (Σ) by introducing the following unknowns :

$$U=v+\eta\ \ ;\ \ N=v-\eta$$

Pluging the relations $v = \dfrac{U+N}{2}$ and $\eta = \dfrac{U-N}{2}$ into (Σ) yields the following coupled system (Γ) in terms of U and N :

$$(\Gamma)\begin{cases} \partial_t U + \partial_x U + \varepsilon\left[\dfrac{1}{8}\partial_x(3U^2+N^2+2UN) - \dfrac{1}{2}b\partial_x U - \dfrac{1}{4}\partial_x b(U+N)\right. \\ \qquad\qquad \left. -\dfrac{a_2}{2}\partial_x^2\partial_t(U+N) - \dfrac{a_4}{2}\partial_x^2\partial_t(U-N) + a_1\partial_x^3 U\right] = 0\,, \\ \partial_t N - \partial_x N + \varepsilon\left[\dfrac{1}{8}\partial_x(U^2+3N^2+2UN) + \dfrac{1}{2}b\partial_x N + \dfrac{1}{4}\partial_x b(U+N)\right. \\ \qquad\qquad \left. -\dfrac{a_2}{2}\partial_x^2\partial_t(U+N) + \dfrac{a_4}{2}\partial_x^2\partial_t(U-N) - a_1\partial_x^3 N\right] = 0\,. \end{cases}$$

At this step, we choose to look for approximate solutions (U_{app}, N_{app}) of (Γ) of the form :

$$\begin{cases} U_{app}(t,x) = U_0(T, x-t) + \varepsilon U_1(T,t,x)\ , \\ N_{app}(t,x) = N_0(T, x+t) + \varepsilon N_1(T,t,x)\ , \end{cases} \tag{4.1.1}$$

where T is the slow time variable $T = \varepsilon t$. The use of two different time scales is useful in capturing both the short time evolution of the wave and the nonlinear and dispersive dynamics which occur for larger time scales.
We complement this ansatz with two initial conditions on (U_{app}, N_{app}) and a classical sublinear growth condition on the correctors (U_1, N_1) :

$$U_{app\,|t=0} = U_{|t=0}\ \ ;\ \ N_{app\,|t=0} = N_{|t=0}\ ,$$

and for all $T_0 \geq 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\ |\,U_1(.\,,t,.)|_{L^\infty([0,T_0];L^2(\mathbb{R}))} = 0\ , \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t}\ |\,N_1(.\,,t,.)|_{L^\infty([0,T_0];L^2(\mathbb{R}))} = 0\ . \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Such a condition on the correctors is quite usual in multiscales expansions and has been first introduced in the context of nonlinear geometric optics by Joly, Métivier and Rauch in [34]. It forces the correctors εU_1 and εN_1 to be small on the large time scale associated to the KdV dynamics ; namely, it ensures that $\varepsilon U_1 = o(1)$ and $\varepsilon N_1 = o(1)$ in $L^\infty([0, \dfrac{T_0}{\varepsilon}]; L^2(\mathbb{R}))$.

Pluging this ansatz into (Γ) and neglecting the terms of order $O(\varepsilon)$ yields the following system :

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x)U_1 = f(T, x-t) - \dfrac{1}{8}\partial_x N_0^2 - \dfrac{1}{4}\partial_x(U_0N_0) + \dfrac{1}{2}b\partial_x U_0 + \dfrac{1}{4}U_0\partial_x b \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4}N_0\partial_x b + \dfrac{a_2-a_4}{2}\,\partial_x^3 N_0\ , \\ (\partial_t - \partial_x)N_1 = g(T, x+t) - \dfrac{1}{8}\partial_x U_0^2 - \dfrac{1}{4}\partial_x(U_0N_0) - \dfrac{1}{2}b\partial_x N_0 - \dfrac{1}{4}U_0\partial_x b \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{4}N_0\partial_x b - \dfrac{a_2-a_4}{2}\,\partial_x^3 U_0\ , \end{cases} \tag{4.1.3}$$

$$\text{where} \quad \begin{cases} f(T,x-t) = -\partial_T U_0 - \dfrac{3}{8}\partial_x U_0^2 - (a_1 + \dfrac{a_2+a_4}{2})\,\partial_x^3 U_0 \ , \\ g(T,x+t) = -\partial_T N_0 - \dfrac{3}{8}\partial_x N_0^2 + (a_1 + \dfrac{a_2+a_4}{2})\,\partial_x^3 N_0 \ . \end{cases} \tag{4.1.4}$$

N.B. : For the sake of simplicity and readability, we have kept here the notations ∂_x on U_0 and N_0 while we should have written rigorously $\partial_{X_-}U_0$ and $\partial_{X_+}N_0$ with $X_- = x-t$ and $X_+ = x+t$.

At this step, an explicit resolution of (4.1.3) in terms of U_0 and N_0 shows that U_1 and N_1 have the simplified form :

$$\begin{cases} U_1(T,t,x) = t \times f(T,x-t) + h_b^1(U_0(T,x-t), N_0(T,x+t)) \ , \\ N_1(T,t,x) = t \times g(T,x+t) + h_b^2(U_0(T,x-t), N_0(T,x+t)) \ , \end{cases}$$

the complete expression of (U_1, N_1) being given at the end of this chapter in (4.2.2).
Such expressions of U_1 and N_1 include terms that grow linearly in time, which is inconsistent with the sublinear growth conditions (4.1.2). It follows that both $f(T,x-t)$ and $g(T,x-t)$ must be null quantities for all $(T,t,x) \in [0,T_0] \times \mathbb{R}^2$. Writing explicitly this result, remarking that $a_1+(a_2+a_4)/2 = (a_1+a_3+a_2+a_4)/2 = 1/6$ and pluging it into (4.1.3), one obtains the following uncoupled KdV equations on (U_0, N_0) and inhomogeneous transport equations on the correctors (U_1, N_1) :

$$(\Sigma_{KdV}) \quad \begin{cases} \partial_T U_0 + \dfrac{3}{8}\,\partial_x U_0^2 + \dfrac{1}{6}\,\partial_x^3 U_0 = 0 \ , \\ \partial_T N_0 + \dfrac{3}{8}\,\partial_x N_0^2 - \dfrac{1}{6}\,\partial_x^3 N_0 = 0 \ , \end{cases} \tag{4.1.5}$$

and

$$(\Sigma_{corr}) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x)U_1 = -\dfrac{1}{8}\partial_x N_0^2 - \dfrac{1}{4}\partial_x(U_0N_0) + \dfrac{1}{2}b\partial_x U_0 + \dfrac{1}{4}U_0\partial_x b \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4}N_0\partial_x b + \dfrac{a_2-a_4}{2}\,\partial_x^3 N_0 \ , \\ (\partial_t - \partial_x)N_1 = -\dfrac{1}{8}\partial_x U_0^2 - \dfrac{1}{4}\partial_x(U_0N_0) - \dfrac{1}{2}b\partial_x N_0 - \dfrac{1}{4}U_0\partial_x b \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{4}N_0\partial_x b - \dfrac{a_2-a_4}{2}\,\partial_x^3 U_0 \ . \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Finally, we can construct an approximation of the solutions of the initial system (Σ) in a natural way : let $(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)_{0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (Σ) with initial data (v_0, η_0). One defines $u_0 = v_0 + \eta_0$ and $n_0 = v_0 - \eta_0$, and let (U_0, N_0) be the solutions of the uncoupled KdV equations (Σ_{KdV}) with initial data (u_0, n_0). In the end, the uncoupled KdV approximation of the solutions of (Σ) is given by :

$$(\mathcal{M}) \quad : \quad v_{KdV}^\varepsilon = \frac{U_0+N_0}{2} \quad ; \quad \eta_{KdV}^\varepsilon = \frac{U_0-N_0}{2} \ . \tag{4.1.7}$$

This approximation corresponds to the one proposed by Schneider-Wayne for flat bottoms and by Iguchi for uneven bottoms.

4.2 Validity of the approximation for sufficiently decaying topographies

Recalling that (U_{app}, N_{app}) are given by (4.1.1), we now introduce the following quantities :

$$v_{app}^{\varepsilon} = \frac{U_{app} + N_{app}}{2} \quad ; \quad \eta_{app}^{\varepsilon} = \frac{U_{app} - N_{app}}{2} \ . \tag{4.2.1}$$

in order to prove the following proposition.

Proposition 4.2.1. *Let $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0, \eta_0) \in H^{\sigma}(\mathbb{R})$ and $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Let $(v_{\Sigma}^{\varepsilon}, \eta_{\Sigma}^{\varepsilon})_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ be a family of solutions of (Σ) with initial data (v_0, η_0). We define $(u_0, n_0) = (v_0 + \eta_0, v_0 - \eta_0)$. Then there exists a unique solution (U_0, N_0) to the system (Σ_{KdV}) with initial data (u_0, n_0) and this solution is bounded in $L^{\infty}([0, T_0]; H^{\sigma}(\mathbb{R}))$.*
Moreover, we have the following error estimate for all $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$:

$$\left| (v_{\Sigma}^{\varepsilon}, \eta_{\Sigma}^{\varepsilon}) - (v_{app}^{\varepsilon}, \eta_{app}^{\varepsilon}) \right|_{L^{\infty}([0,t]; H^s(\mathbb{R}))} \leq C \, |(U_1, N_1)|_{L^{\infty}([0,T_0] \times [0,t]; H^{s+3}(\mathbb{R}))} \, \varepsilon^2 t \, ,$$

where $(v_{app}^{\varepsilon}, \eta_{app}^{\varepsilon})$ is defined in (4.2.1).

Proof. The result on the system (Σ_{KdV}) is a very classical result on the KdV equation and we omit the proof here.
The leading terms (U_0, N_0) and the correcting terms (U_1, N_1) have been chosen such that (U_{app}, N_{app}) is solution of the system (Γ) with a residual of order $O(\varepsilon^2)$. This residual denoted by $(\varepsilon^2 R_1, \varepsilon^2 R_2)$ can be computed explicitly and we get :

$$\begin{aligned} R_1 = & -\frac{3}{4}\partial_x(U_0 U_1) - \frac{1}{4}\partial_x(N_0 N_1) - \frac{1}{4}\partial_x(U_0 N_1) - \frac{1}{4}\partial_x(U_1 N_0) + \frac{1}{2} b \partial_x U_1 \\ & + \frac{1}{4}(U_1 + N_1)\partial_x b - a_1 \partial_x^3 U_1 + \frac{a_2 + a_4}{2}\partial_x^2 \partial_t U_1 + \frac{a_2 - a_4}{2}\partial_x^2 \partial_t N_1 \\ & + \frac{a_2 + a_4}{2}\partial_x^2 \partial_T U_0 + \frac{a_2 - a_4}{2}\partial_x^2 \partial_T N_0 + \varepsilon \left[\frac{3}{8}\partial_x U_1^2 + \frac{1}{8}\partial_x N_1^2 + \frac{1}{4}\partial_x(U_1 N_1) \right] . \end{aligned}$$

with a similar expression holding for the residual R_2 of the second equation of (Γ). Using the equations (Σ_{KdV}) and (Σ_{corr}) to express $\partial_T U_0$, $\partial_T N_0$, $\partial_t U_1$, $\partial_t N_1$ in terms of spatial derivatives of U_0, N_0, U_1, N_1 and using the fact that $s \geq 2$, this expression yields easily for all $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$:

$$|(R_1, R_2)|_{L^{\infty}([0,t]; H^s(\mathbb{R}))} \leq C \, |(U_1, N_1)|_{L^{\infty}([0,T_0] \times [0,t]; H^{s+3}(\mathbb{R}))} \ ,$$

with C depending only on $|(U_0, N_0)|_{L^{\infty}([0,T_0]; H^{s+3}(\mathbb{R}))}$ and $|b|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}$. Inverting the diagonalization by pluging the relations $U_{app} = v_{app} + \eta_{app}$ and $N_{app} = v_{app} - \eta_{app}$ into (Γ), we easily deduce that $(v_{app}^{\varepsilon}, \eta_{app}^{\varepsilon})$ is solution of the system (Σ) with a residual bounded by

$C\varepsilon^2 \left|(U_1, N_1)\right|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t];H^{s+3}(\mathbb{R}))}$. Standard energy estimates applied on the symmetric Boussinesq system (Σ) yield easily :

$$|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon)|_{L^\infty([0,t];H^{s+3}(\mathbb{R}))} \leq C\left|(U_1, N_1)\right|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t];H^s(\mathbb{R}))} \varepsilon^2 t\,,$$

which ends the proof. □

An easy extension of this proposition is the following corollary which gives an error bound for the KdV approximation.

Corollary 4.2.2. *Under the same hypothesis as in Proposition 4.2.1, we have the following error estimate for all* $t \in [0, \dfrac{T_0}{\varepsilon}]$ *:*

$$\Big|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)\Big|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{R}))} \leq C\left|(U_1, N_1)\right|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t];H^{s+3}(\mathbb{R}))} \varepsilon(1+\varepsilon t)\,,$$

where $(v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)$ *is the uncoupled KdV approximation defined in (4.1.7).*

Proof. One has :

$$\begin{aligned}(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon) &= (v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon) + (v_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)\\ &= (v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon) + \varepsilon\Big(\frac{U_1+N_1}{2}, \frac{U_1+N_1}{2}\Big)\end{aligned}$$

Using this relation and the error estimate coming from Proposition 4.2.1 yields the result. □

This corollary clearly states that the validity of the uncoupled KdV approximation only depends on the control of the correcting terms (U_1, N_1) in $L^\infty\Big([0,T_0]\times[0,t];\ H^{s+3}(\mathbb{R})\Big)$ norm on the large time scale $1/\varepsilon$. From now on, these correctors become the center of our analysis.
As we saw earlier, the inhomogeneous transport equations that govern the evolution of the correctors (U_1, N_1) can be solved explicitly in terms of U_0 and N_0. We thus get the following expression :

$$\begin{aligned}U_1(t,x) &= -\frac{1}{16}(N_0^2(x+t) - N_0^2(x-t)) - \frac{a_2-a_4}{2}(\partial_x^2 N_0(x+t)\\ &\quad -\partial_x^2 N_0(x-t)) - \frac{1}{8}U_0(x-t)(N_0(x+t) - N_0(x-t))\\ &\quad +\frac{1}{4}U_0(x-t)(b(x) - b(x-t)) - \frac{1}{4}\partial_x U_0(x-t)\\ &\quad \int_0^t N_0(x-t+2s)ds + \frac{1}{2}\partial_x U_0(x-t)\int_0^t b(x-t+s)ds\\ &\quad +\frac{1}{4}\int_0^t \partial_x b(x-t+s)N_0(x-t+2s)ds\,, \qquad (4.2.2)\end{aligned}$$

and a similar expression holds for N_1. We here only deal with the case of U_1 since all the method can easily be adapted to the case of N_1.
The corrector U_1 is analysed in the following way : let $T_0 \geq 0$, $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$ and (u_0, n_0) in $H^\sigma(\mathbb{R})$. We know that the solutions (U_0, N_0) of the problem (Σ_{KdV}) with initial data (u_0, n_0) are bounded in $L^\infty([0,T_0]; H^\sigma(\mathbb{R}))^2$. We suppose here that the bottom topography b is bounded in $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Under these circumstances, it clearly appears that the first four terms of the expression of U_1 are bounded in $L^\infty([0,T_0] \times [0,t]; H^{s+3}(\mathbb{R}))$. Only the last four terms can be problematic and deserve a precise treatment.
If (U_0, N_0) and b come with a sufficient decay rate at infinity, we can straightforwardly control these terms. To this end and following [62], we introduce the following weighted Sobolev space $H^{s,\alpha}$ for all $s \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$H^{s,\alpha} = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}) \,/\, |u|^2_{H^{s,\alpha}} \equiv \sum_{k=0}^{s} \left| (1+x^2)^{\alpha/2} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty \right\}$$

We can now state our first theorem on the validity of the approximation for sufficiently decaying initial data and bottom topography.

Theorem 4.2.3. *Let $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0, \eta_0) \in H^{\sigma,1}(\mathbb{R})^2$ and $b \in H^{s+4,1}(\mathbb{R})$. Let $(v^\varepsilon_\Sigma, \eta^\varepsilon_\Sigma)_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ be a family of solutions of (Σ) with initial data (v_0, η_0). We define $(u_0, n_0) = (v_0 + \eta_0, v_0 - \eta_0)$. Then the solution (U_0, N_0) of the system (Σ_{KdV}) with initial data (u_0, n_0) is bounded in $L^\infty([0,T_0]; H^{\sigma,1}(\mathbb{R}))$. Moreover, we have the following error estimate for all $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$:*

$$\left| (v^\varepsilon_\Sigma, \eta^\varepsilon_\Sigma) - (v^\varepsilon_{KdV}, \eta^\varepsilon_{KdV}) \right|_{L^\infty([0,t]; H^s(\mathbb{R}))} \leq C\varepsilon(1+\varepsilon t)\,,$$

where $(v^\varepsilon_{KdV}, \eta^\varepsilon_{KdV})$ is the uncoupled KdV approximation defined in (4.1.7).

Proof. We know from [37] and [62] that the KdV equation propagates the regularity of initial data taken in weighted Sobolev spaces and we omit the proof here. The end of the proof is devoted to the estimate of
$|(U_1, N_1)|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t]; H^{s+3}(\mathbb{R}])^2}$. The work of Lannes in [42] is here very useful to control this quantity. Indeed, using the equations (Σ_{corr}), the fact that $U_0(T,.)$, $N_0(T,.)$ and b are bounded in $H^{\sigma,1}(\mathbb{R})$, and Proposition 3.5 of [42], one finally obtains the estimate :

$$|(U_1, N_1)|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t]; H^{s+3}(\mathbb{R}])^2} \leq C(|b|_{H^{\sigma,1}(\mathbb{R})}, (U_0, N_0)_{L^\infty([0,t]; H^{\sigma,1}(\mathbb{R}))^2})\,.$$

Pluging this last estimate into the result of Proposition 2.2 ends the proof. □

Remark 4.2.4. *This theorem gives us the same kind of result as the one proposed by Iguchi in [30] who proved a convergence estimate of order $O(\varepsilon)$, and a better one than in [62] who proved an error of order $O(\varepsilon^{1/4})$. However, we need here a little less regularity on the bottom b : we only require $b \in H^{s+4,1}(\mathbb{R})$ while the result of Iguchi requires $b \in W^{m+9,\infty}(\mathbb{R}) \cap H^{m+2,2}(\mathbb{R})$ with $m \geq 4$.*

Remark 4.2.5. *As specified in [14], this approximation diverges on a large time scale in the periodic framework unless we specify a zero mass assumption on the initial data* u_0 *and* n_0*. This drawback is dealt with at the end of the next chapter. Until then, the results provided can be extended to the periodic framework with this zero mass hypothesis.*

Remark 4.2.6. *It is worth pointing out that the validity of the uncoupled KdV approximation for the Boussinesq system* (Σ) *is enough to demonstrate its validity regarding the water waves problem. Indeed, we can deduce from Part I that the error estimate between the solutions* $(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$ *of* (Σ) *and the solutions of the water waves problem is of order* $O(\varepsilon(1+\varepsilon t))$*. An error estimate between the solutions of the water waves problem and the KdV approximation* $(v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)$ *can thus be immediately deduced from the results of this paper.*

Chapitre 5

A topographically modified KdV approximation

In this chapter we discuss the validity of the previously derived uncoupled KdV approximation on a large time scale for different bottom topographies. We demonstrate its validity for less restrictive bottoms, but provide two examples of simple bottoms for which the approximation diverges. A new approximation that takes the bottom into account is finally derived.

5.1 Discussion on the validity of the approximation

Starting from the previous theorem, it is worth wondering if this one holds for less restrictive initial data and bottoms, i.e. without any condition of a sufficient decay rate at infinity. In this view, we focus in a more general way on the last three terms of U_1 by supposing that (u_0, n_0) is bounded in $L^\infty([0,t]; H^\sigma(\mathbb{R}))^2$, which is propagated by the KdV equation on (U_0, N_0) (see [38]). Using the classical Cauchy-Schwarz inequality on the first two terms and the proposition 3.2 of [42] on the last term, we can write the following controls for all $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$, $s \geq 2$ and $\sigma \geq s+5$:

$$\Big|\partial_x U_0(T, . - t) \int_0^t N_0(T, . - t + 2s) ds\Big|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_1 \sqrt{t} \ ,$$

$$\Big|\partial_x U_0(T, . - t) \int_0^t b(. - t + s) ds\Big|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_2 \, |b|_{L^2(\mathbb{R})} \sqrt{t} \ ,$$

$$\Big| \int_0^t \partial_x b(. - t + s) N_0(T, . - t + 2s) ds\Big|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C_3 \, |\partial_x b|_{H^s(\mathbb{R})} \sqrt{t} \ ,$$

where the constants C_1, C_2, C_3 depend exclusively on $|(U_0, N_0)|_{L^\infty([0,t];H^\sigma(\mathbb{R}))^2}$.
These preliminary estimates are at the heart of the proof of the following theorem.

Theorem 5.1.1. *Let $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0, \eta_0) \in H^\sigma(\mathbb{R})^2$, $b \in H^{s+4}(\mathbb{R})$ and $(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (Σ) with initial data (v_0, η_0). We define $(u_0, n_0) = (v_0 + \eta_0, v_0 - \eta_0)$. Then the solution (U_0, N_0) of the system (Σ_{KdV}) with initial data (u_0, n_0) is bounded in $L^\infty([0, T_0]; H^\sigma(\mathbb{R}))$. Moreover, we have the following error estimate for all $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$:*

$$\left|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)\right|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{R}))} \leq C\varepsilon\sqrt{t}(1+\varepsilon t)\,,$$

where $(v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)$ are as defined in (4.1.7).

Proof. Using the three previous inequalities, one obtains :

$$|(U_1, N_1)|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t];H^{s+3}(\mathbb{R}))} \leq C\sqrt{t}\,.$$

where $C = C(|b|_{H^{s+4}(\mathbb{R})}, (U_0, N_0)_{L^\infty([0,t];H^\sigma(\mathbb{R}))^2})$. The final result follows from Corollary 1.1.6. □

Remark 5.1.2. *The difference between this theorem and Theorem 4.2.3 lies in the assumption made on the bottom topography b. Here, we just need to suppose $b \in H^{s+4}(\mathbb{R})$ whereas we supposed $b \in H^{s+4,1}(\mathbb{R})$ in the first theorem. The following function b defined as*

$$b(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{27/4}}$$

is an example of bottom which is in $H^6(\mathbb{R})$ but not in $H^{6,1}(\mathbb{R})$.

This theorem proves that the approximation is less precise on a large time scale if we weaken the assumptions on the initial data and bottom, that is to say if we remove the assumption of a sufficient decay rate at infinity. And yet, it is worth pointing out that the regularity imposed on b in this theorem excludes many physical cases of interest. We focus from now on two simple examples of bottoms which do not fall into the scope of Theorem 5.1.1 : a regular step, and a slowly varying sinusoidal bottom. Our goal is to emphasize the fact that the approximation $(v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)$ diverges from the exact solution $(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)$ in these two simple cases. A topographically modified KdV approximation which is still valid for such topographies is derived at the end of this chapter.
In order to simplify the analysis, we only consider the approximation corresponding to $a_1 = 1/6, a_2 = 0, a_4 = 0$ which is obtained for $\theta = \sqrt{2/3}, \lambda = 1, \mu = 1$, and the case of a wave propagating to the right. This last condition is realized by taking $n_0 = 0$, which implies that $N_0 = N = 0$.

5.1.1 The case of a step

We consider here a bottom whose shape corresponds to a regular step. The interest of such an example is that in this case, $b \notin L^2(\mathbb{R})$.
The bottom is defined as follows :

$$b(x) = \begin{cases} 0 \ , \ \ \forall x \leq 0 \ , \\ \dfrac{A}{2}\left(1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{l}(x - \dfrac{l}{2})\right)\right) \ , \ \ \forall x \in [0, l] \ , \\ A \ , \ \ \forall x \geq l \ . \end{cases} \tag{5.1.1}$$

For a right going wave, the system (Σ_{KdV}) is reduced to the simple KdV equation :

$$\partial_T U_0 + \frac{3}{8}\partial_x U_0^2 + \frac{1}{6}\partial_x^3 U_0 = 0 \ ,$$

and we chose the initial condition u_0 such that the solution of this equation is a positive soliton which propagates to the right.
We write the explicit expression of the corrector U_1 when $N_0 = 0$:

$$U_1(t,x) = \frac{1}{4}U_0(x-t)(b(x) - b(x-t)) + \frac{1}{2}\partial_x U_0(x-t)\int_0^t b(x-t+s)ds \ .$$

In this expression, the only possibly secularly growing term is $\partial_x U_0(T, x-t)\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)ds$. The time evolution in amplitude of this term is obviously led by the evolution of $\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)$ for all $x \in \mathbb{R}$. When the bottom is a step as defined in (5.1.1), this integral essentially grows linearly in time. We now prove that because of this, $|U_1|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t];H^{s+3}(\mathbb{R}))}$ grows linearly in time. Let $s \geq 2$ and $\sigma \geq s+5$. Starting from the expression of U_1, we get for all $t \in [0, \dfrac{T_0}{\varepsilon}]$ the following estimates :

$$\begin{aligned} |U_1(T,t,\cdot)|_{H^{s+3}(\mathbb{R})} &= \Big|\frac{1}{4}U_0(T,\cdot - t)\Big(b(\cdot) - b(\cdot - t)\Big) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\partial_x U_0(T,\cdot - t)\int_0^t b(\cdot - t + s)ds\Big|_{H^{s+3}(\mathbb{R})}, \\ &\geq \Big|\frac{1}{2}\partial_x U_0(T,\cdot - t)\int_0^t b(\cdot - t + s)ds\Big|_{H^{s+3}(\mathbb{R})} - C \ , \end{aligned}$$

with $C = \Big|\frac{1}{4}U_0(T,\cdot - t)(b(\cdot) - b(\cdot - t))\Big|_{H^{s+3}} \leq \frac{1}{8}|b|_{L^\infty}|U_0|_{L^\infty([0,t];H^{s+3})} \equiv C_0$,

$$\begin{aligned}
|U_1(T,t,\cdot)|_{H^{s+3}(\mathbb{R})} &\geq \frac{1}{2}|\partial_x U_0(T,\cdot - t)\int_0^t b(\cdot - t + s)ds|_{L^2(\mathbb{R})} - C_0 \ , \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\int_0^\infty |\partial_x U_0(T,x-t)|^2 \Big|\int_0^t b(x-t+s)ds\Big|^2 dx} - C_0 \ , \\
&\quad \text{since} \int_0^t b(x-t+s)ds = 0 \ , \ \forall x \leq 0 \ , \\
&\geq \frac{1}{2}\sqrt{\int_{l+t}^\infty |\partial_x U_0(T,x-t)|^2 \Big|\int_{x-t}^x b(s)ds\Big|^2 dx} - C_0 \ , \\
&\geq \frac{1}{2}At\sqrt{\int_{l+t}^\infty |\partial_x U_0(T,x-t)|^2 dx} - C_0 \ , \\
&\quad \text{since} \int_{x-t}^x b(s)ds = At \ , \ \forall x \geq l+t \ , \\
&\geq \frac{1}{2}A\,t\sqrt{\int_l^\infty |\partial_x U_0(T,x)|^2 dx} - C_0 \ ,
\end{aligned}$$

which implies that

$$|U_1|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t];H^{s+3}(\mathbb{R}))} \geq C_1 t - C_0 \ , \tag{5.1.2}$$

where the last constant C_1 only depends on $|\partial_x U_0|_{L^2(\mathbb{R})}$.
This linear growth of $|U_1|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t];H^{s+3}(\mathbb{R}))}$ is sharp since it follows from the explicit expression of U_1 that this growth is at most linear. If follows therefore from Proposition 1.1.3 that there exists a constant C_2 such that for all $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$:

$$\Big|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon)\Big|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{R}))} \leq C_2(1+t)\varepsilon^2 t \ . \tag{5.1.3}$$

Furthermore, we recall that

$$(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon) = (v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{app}^\varepsilon, \eta_{app}^\varepsilon) + \varepsilon\left(\frac{U_1+N_1}{2}, \frac{U_1-N_1}{2}\right) \ . \tag{5.1.4}$$

Using this relation, (5.1.2) and (5.1.3), we get that there exists a constant C_3 such that $\forall t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$,

$$\Big|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)\Big|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{R}))} \geq C_3(1+t)\varepsilon - C_2(1+t)\varepsilon^2 t \ .$$

We finally deduce that there exists two constants C and C' such that $\forall t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$,

$$\Big|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)\Big|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{R}))} \geq C\varepsilon t(C' - \varepsilon t) \ .$$

This proves that in this study case, the error is of order $O(1)$ on times of order $O(1/\varepsilon)$, and the usual KdV approximation is not valid for such a topography.

5.1.2 The case of a sinusoidal bottom

We consider here a bottom defined as follows :

$$b(x) = A\sin(\varepsilon x)\ ,\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ . \tag{5.1.5}$$

We mention that such a type of periodic bottom varying on a slow spatial scale has been studied in [21] by Craig-Guyenne-Nicholls-Sulem, with the difference that the authors authorized the bottom to vary also on a small spatial scale.

Again, the amplitude of the term $\partial_x U_0(T, x-t)\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)ds$ evolves in time according to $\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)ds$. Let us have a look at this quantity for all $x \in \mathbb{R}$ and $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t b(x-t+s)ds &= \int_{x-t}^x b(s)ds \\
&= A\int_{x-t}^x \sin(\varepsilon x)ds \\
&= -\frac{A}{\varepsilon}\left[\cos(\varepsilon x) - \cos(\varepsilon(x-t))\right] \\
&= \frac{2A}{\varepsilon}\sin\left(\varepsilon(x-\frac{t}{2})\right)\sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)
\end{aligned}$$

We can see that the amplitude of this term is of order $O(1/\varepsilon)$. We now demonstrate that it is also the case for the corrector U_1 :

$$\begin{aligned}
|U_1(T,t,\cdot)|_{H^{s+3}(\mathbb{R})} &\geq \left|\frac{1}{2}\partial_x U_0(T,\cdot-t)\int_0^t b(\cdot-t+s)ds\right|_{H^{s+3}(\mathbb{R})} - C_0\ , \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\partial_x U_0(T,\cdot-t)\int_0^t b(\cdot-t+s)ds\right|_{L^2(\mathbb{R})} - C_0\ , \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_x U_0(T,x-t)|^2\left|\int_0^t b(x-t+s)ds\right|^2 dx} - C_0\ , \\
&= \frac{A}{\varepsilon}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_x U_0(T,x-t)|^2\sin^2\left(\varepsilon(x-\frac{t}{2})\right)\sin^2\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)dx} - C_0\ , \\
&= \frac{A}{\varepsilon}|\sin^2\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right)|\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_x U_0(T,x-t)|^2\sin^2\left(\varepsilon(x-\frac{t}{2})\right)dx} - C_0\ .
\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

At this point, we remark that

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty}|\partial_x U_0(T,x-t)|^2\sin^2\left(\varepsilon(x-\frac{t}{2})\right)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}|\partial_x U_0(T,x-t)|^2\,dx\ ,$$

and thus that

$$0 \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x U_0(T, x-t)|^2 \sin^2\left(\varepsilon(x - \frac{t}{2})\right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x U_0(T, x-t)|^2 dx} \leq 1 .$$

We hence deduce that for all $t \geq 0$ there exists $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x U_0(T, x-t)|^2 \sin^2\left(\varepsilon(x - \frac{t}{2})\right) dx = \sin^2(\alpha(t)) \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x U_0(T, x-t)|^2 dx .$$

Pluging this one into (5.1.6) leads to

$$|U_1(T, t, \cdot)|_{H^{s+3}(\mathbb{R})} \geq \frac{A}{\varepsilon} \left|\sin^2\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right) \sin^2(\alpha(t))\right| \left|\partial_x U_0(T, \cdot)\right|_{L^2(\mathbb{R})} - C_0 ,$$

which finally implies that there exists a constant C_1 such that

$$|U_1|_{L^\infty([0,T_0]\times[0,t]; H^{s+3}(\mathbb{R}))} \geq \frac{C_1}{\varepsilon} - C_0 .$$

The estimate (5.1.3) holds again since the time growth of U_1 is still at most linear. Consequently, using the last estimate,(5.1.3) and the relation (5.1.4) leads to the existence of C_3 and C_4 such that

$$\left|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)\right|_{L^\infty([0,t]; H^s(\mathbb{R}))} \geq C_3 - \varepsilon C_4 - C_2(1+t)\varepsilon^2 t .$$

We finally deduce that there exists three constants C,C' and C'' such that $\forall t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$,

$$\left|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^\varepsilon, \eta_{KdV}^\varepsilon)\right|_{L^\infty([0,t]; H^s(\mathbb{R}))} \geq C - C'\varepsilon^2 t^2 - C''\varepsilon(1+\varepsilon t) ,$$

which proves that the uncoupled KdV approximation diverges on a large time scale in this case too.

5.2 A topographically modified approximation

Both examples clearly show the invalidity of the approximation on a large time scale if we consider general bottoms topographies b which do not have specific decay properties at infinity. Therefore, we obviously need to modify the usual KdV approximation to be able to handle general bathymetries.

The explicit expression of U_1 has shown that the two terms that may exhibit a secular growth are $\frac{1}{2}\partial_x U_0(T, x-t) \int_0^t b(x-t+s)ds$ and $\frac{1}{4}\int_0^t \partial_x b(x-t+s) N_0(T, x-t+2s)ds$. As far as N_1 is concerned, the same possibly problematic terms are $\frac{-1}{2}\partial_x N_0(T, x+t) \int_0^t b(x+t-s)ds$ and $\frac{-1}{4}\int_0^t \partial_x b(x+t-s) U_0(T, x+t-2s)ds$. The idea is as follows : rather than

treating these terms as correcting terms, we can include them with the leading order one terms U_0 and N_0 in the approximation.

This idea leads us to propose the following topographically modified KdV approximation which is an alternative version of $(\mathcal{M})$:

$$(\mathcal{M}_b)\left\{\begin{array}{rcl} v_{KdV}^{\varepsilon,b} & = & \dfrac{U_0+N_0}{2}+\dfrac{\varepsilon}{4}\Big[\partial_x U_0(T,x-t)\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)ds \\ & & -\partial_x N_0(T,x+t)\displaystyle\int_0^t b(x+t-s)ds \\ & & +\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x-t+s)N_0(T,x-t+2s)ds \\ & & -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x+t-s)U_0(T,x+t-2s)ds \\ & & +\dfrac{1}{2}U_0(T,x-t)\left(b(x)-b(x-t)\right) \\ & & +\dfrac{1}{2}N_0(T,x+t)\left(b(x+t)-b(x)\right)\Big] \ , \\ \eta_{KdV}^{\varepsilon,b} & = & \dfrac{U_0-N_0}{2}+\dfrac{\varepsilon}{4}\Big[\partial_x U_0(T,x-t)\displaystyle\int_0^t b(x-t+s)ds \\ & & -\partial_x N_0(T,x+t)\displaystyle\int_0^t b(x+t-s)ds \\ & & +\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x-t+s)N_0(T,x-t+2s)ds \\ & & -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \partial_x b(x+t-s)U_0(T,x+t-2s)ds \\ & & +\dfrac{1}{2}U_0(T,x-t)\left(b(x)-b(x-t)\right) \\ & & +\dfrac{1}{2}N_0(T,x+t)\left(b(x+t)-b(x)\right)\Big] \ . \end{array}\right. \tag{5.2.1}$$

where U_0 and N_0 are still solutions of the system $(\Sigma_{KdV}^{\varepsilon})$.

Remark 5.2.1. *We have here also included the terms $U_0(T,x-t)\left(b(x)-b(x-t)\right)$ and $N_0(T,x+t)\left(b(x+t)-b(x)\right)$ even if these terms remain bounded indepently of ε for all time. The reason of this choice is that we are interested in their physical meaning. Indeed, we further see - in Part III - that they are responsible for the reproduction of the phenomenon of shoaling. We hence decided to include these terms in the approximation.*

The main advantage of this modification relies in the following remark : now that the bottom terms have been included with the leading order terms in the approximation, we can easily see that the correcting terms U_1 and N_1 solve a different equation. Indeed, the equation on U_1 becomes :

$$(\Sigma_{corr}^{b})\left\{\begin{array}{l} (\partial_t+\partial_x)U_1=-\dfrac{1}{8}\partial_x N_0^2-\dfrac{1}{4}\partial_x(U_0N_0)+\dfrac{a_2-a_4}{2}\,\partial_x^3 N_0 \ , \\ (\partial_t-\partial_x)N_1=-\dfrac{1}{8}\partial_x U_0^2-\dfrac{1}{4}\partial_x(U_0N_0)-\dfrac{a_2-a_4}{2}\,\partial_x^3 U_0 \ . \end{array}\right. \tag{5.2.2}$$

It is clear here that all the possibly secularly growing terms of the correctors (U_1, N_1) have been removed. We can now state our final theorem.

Theorem 5.2.2. *Let $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0, \eta_0) \in H^\sigma(\mathbb{R})^2$, $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ and $(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (Σ) with initial data (v_0, η_0). We define $(u_0, n_0) = (v_0 + \eta_0, v_0 - \eta_0)$. Then the solution (U_0, N_0) of the system (Σ_{KdV}) with initial data (u_0, n_0) is bounded in $L^\infty([0, T_0]; H^\sigma(\mathbb{R}))$. Moreover, we have for all $t \in [0, \frac{T_0}{\varepsilon}]$:*

$$\left|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^{\varepsilon,b}, \eta_{KdV}^{\varepsilon,b})\right|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{R}))} \leq C\varepsilon\sqrt{t}(1+\varepsilon t)\,,$$

where $(v_{KdV}^{\varepsilon,b}, \eta_{KdV}^{\varepsilon,b})$ is as defined in (5.2.1).

Proof. The proof is straightforward using the previous remark and adapting the prooves of Theorems 4.2.3 and 5.1.1. □

Remark 5.2.3. *This modified version is quite interesting numerically since the topographical terms are computed explicitly from the solution of the KdV equations. We thus expect the numerical simulation of this model to be faster than the one of the symmetric Boussinesq model (Σ). This point is checked in Part III.*

In the periodic framework, we saw that the usual approximation is not valid on a large time scale because of the linear growth in time of the term $\partial_x U_0(T, x-t)\int_0^t N_0(T, x-t+2s)ds$ in U_1, unless we specify a zero mass assumption on the initial data u_0 and n_0. Once more, we can propose a valid approximation just by including this term in the order one terms of the ansatz. We conclude this chapter with the proposition of a new approximation that remains valid in the periodic framework :

$$(\mathcal{M}_b^{per})\left\{\begin{array}{rcl} v_{KdV}^{\varepsilon,b\,per} & = & v_{KdV}^{\varepsilon,b} - \frac{\varepsilon}{8}\Big[\partial_x U_0(T,x-t)\int_0^t N_0(T,x-t+2s)ds \\ & & +\partial_x N_0(T,x+t)\int_0^t U_0(T,x+t-2s)ds\Big]\ , \\ \eta_{KdV}^{\varepsilon,b\,per} & = & \eta_{KdV}^{\varepsilon,b} - \frac{\varepsilon}{8}\Big[\partial_x U_0(T,x-t)\int_0^t N_0(T,x-t+2s)ds \\ & & -\partial_x N_0(T,x+t)\int_0^t U_0(T,x+t-2s)ds\Big]\ . \end{array}\right. \tag{5.2.3}$$

Concerning this approximation, the previous theorem remains true and we can even state an improved version :

Theorem 5.2.4. *Let $s \geq 2$, $\sigma \geq s+5$, $(v_0, \eta_0) \in H^\sigma(\mathbb{T})^2$, $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ and $(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ be a family of solutions of (Σ) with initial data (v_0, η_0). We define $(u_0, n_0) = (v_0 + \eta_0, v_0 - \eta_0)$. Then the solution (U_0, N_0) of the system (Σ_{KdV}) with initial data (u_0, n_0) is bounded in $L^\infty([0, T_0]; H^\sigma(\mathbb{T}))$. Besides, we have for all $t \in [0, \dfrac{T_0}{\varepsilon}]$:*

$$\left|(v_\Sigma^\varepsilon, \eta_\Sigma^\varepsilon) - (v_{KdV}^{\varepsilon,b\,per}, \eta_{KdV}^{\varepsilon,b\,per})\right|_{L^\infty([0,t];H^s(\mathbb{T}))} \leq C\varepsilon(1+\varepsilon t)\,,$$

This theorem remains true in the nonperiodic framework, which means that we have a better precision with this model than with the model $(\mathcal{M}_b)$.

PARTIE III

Simulations numériques

Chapitre 6

Numerical comparison of the models

This chapter is devoted to the numerical comparison of the different models involved in this article. We compare here three models : the symmetric Boussinesq system (Σ) coming from Chapter 2, the usual uncoupled KdV approximation justified by Schneider-Wayne ([62], flat bottoms) and Iguchi ([30], uneven bottoms), and finally the topographically modified KdV approximation. The aim is here to compare these three models for two non trivial examples of topography : a step and a slowly varying sinusoidal bottom.

6.1 Numerical schemes

Our goal is to compare three models, the symmetric Boussinesq one, the usual KdV approximation ($\mathcal{M}$) and its topographically modified version ($\mathcal{M}_b$). The comparison is made for a solitary wave propagating to the right above two topographies : a step and a slowly varying sinusoidal bottom. We use for the Boussinesq system (Σ) and the KdV equations (Σ_{KdV}) a Crank-Nicholson scheme combined with a relaxation method coming from Besse-Bruneau in [10] and justified by Besse in [8]. This type of scheme is of order two in space and time, which is appropriate for our purpose.

6.1.1 Numerical scheme for the KdV equations

Due to the identical structure of the two KdV equations of (Σ_{KdV}), we only present the numerical scheme for the first equation. Defining $u(t,x) = U_0(T, x-t)$, we can reformulate this equation as follows

$$\partial_t u + \partial_x u + \varepsilon \left[\frac{3}{4} u \partial_x u + \frac{1}{6} \partial_x^3 u \right] = 0 \ . \tag{6.1.1}$$

We use a Crank-Nicholson scheme and the relaxation method introduced by Besse-Bruneau in [10] and justified by Besse in [8] which replace the costly numerical treatment of the nonlinear term by a predictive step. This provides us with the following semi-discretized in time equation :

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1}-u^n}{dt} &+ \partial_x\left(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right)+\varepsilon\left[\frac{3}{4}\left(\alpha u^{n+\frac{1}{2}}\partial_x\left(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right)\right.\right.\\ &+ \left.\left.(1-\alpha)\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\partial_x u^{n+\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{6}\partial_x^3\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right]=0\ ,\end{aligned}$$

where the predictive term $u^{n+\frac{1}{2}}$ is defined as follows

$$u^n=\frac{u^{n+\frac{1}{2}}+u^{n-1/2}}{2}\ .$$

The discretization of the nonlinear term $u\partial_x u$ here takes advantage of the two possible discretizations $u^{n+\frac{1}{2}}\partial_x\left(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right)$ and $\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\partial_x u^{n+\frac{1}{2}}$ by introducing a parameter $\alpha\in[0,1]$ and taking a convex combination of these possibilities. Keeping in mind that we want to preserve the semi-discrete L^2 norm, an easy integration by parts gives us the appropriate value $\alpha=2/3$. We then choose the spatial discretization so that the discrete L^2 norm is preserved by the complete scheme, which gives the final discretization of (6.1.1) :

$$\begin{aligned}&\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\delta t}+\left(D_1\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right)_i+\varepsilon\left[\frac{1}{4}\left(u_i^{n+\frac{1}{2}}+\frac{u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}+u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right)\right.\\ &\left.\left(D_1\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right)_i+\frac{1}{4}\frac{u_i^{n+1}+u_i^n}{2}\left(D_1u^{n+\frac{1}{2}}\right)_i+\frac{1}{6}\left(D_3\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\right)_i\right]=0\ ,\end{aligned}\tag{6.1.2}$$

where the matrix D_1 and D_3 are to the classical centered discretizations of the derivatives ∂_x and ∂_x^3.

6.1.2 Numerical scheme for the Boussinesq system

As far as the discretization of the Boussinesq system (Σ) is concerned, we consider the same ideas. Using a Crank-Nicholson scheme and the same relaxation method, we aim here at preserving the specific norm $|(v,\eta)|^2_{H^1_\varepsilon}=|v|^2_{L^2}+|\eta|^2_{L^2}+\varepsilon a_2|\partial_x v|^2_{L^2}+\varepsilon a_4|\partial\eta|^2_{L^2}$. This quantity is indeed conserved by (Σ) (see [14] for more details). To this end, the nonlinear terms $v\partial_x v$, $\eta\partial_x\eta$, $\eta\partial_x v$ and $v\partial_x\eta$ are discretized in order to preserve both this specific discrete norm and their symmetric structure. Remarking that the equalities

$$(v\partial_x v,v)_{L^2}=0\ \ ;\ \ (\eta\partial_x\eta,v)_{L^2}+(\eta\partial_x v,\eta)_{L^2}+(v\partial_x\eta,\eta)_{L^2}=0\ ,$$

hold for (Σ) and using the same kind of method as for the KdV equation leads to the following semi-discretization of the nonlinear terms :

$$\begin{cases} v\partial_x v(n\delta t) \approx \dfrac{2}{3} v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}) + \dfrac{1}{3} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} \partial_x v^{n+\frac{1}{2}} \ , \\ \eta\partial_x \eta(n\delta t) \approx \dfrac{2}{3} \eta^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (\dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}) + \dfrac{1}{3} \dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2} \partial_x \eta^{n+\frac{1}{2}} \ , \\ \eta\partial_x v(n\delta t) \approx \dfrac{2}{3} \eta^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}) + \dfrac{1}{3} \dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2} \partial_x v^{n+\frac{1}{2}} \ , \\ v\partial_x \eta(n\delta t) \approx \dfrac{2}{3} v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (\dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}) + \dfrac{1}{3} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} \partial_x \eta^{n+\frac{1}{2}} \ . \end{cases}$$

We then choose the spatial discretization so that the discrete H^1_ε norm is conserved, and these ruminations yield this final scheme :

$$\begin{cases} \left((I-\varepsilon a_2 D_2)\dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t}\right)_i + \left((I-\dfrac{\varepsilon}{2}B)D_1 \dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\right)_i \\ \qquad +\varepsilon\left[\left(M_1 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i + \left(M_2 \dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\right)_i \right. \\ \qquad\qquad \left. +a_1\left(D_3 \dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\right)_i\right] = 0 \\ \left((I-\varepsilon a_4 D_2)\dfrac{\eta^{n+1}-\eta^n}{\delta t}\right)_i + \left((I-\dfrac{\varepsilon}{2}B)D_1 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i \\ \qquad +\varepsilon\left[\left(M_3 \dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\right)_i + \left(M_4 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i \right. \\ \qquad\qquad \left. +a_1\left(D_3 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i\right] = 0 \ , \end{cases} \tag{6.1.3}$$

where the matrix $(M_i)_{1\leq i\leq 4}$ are as follows :

$$\begin{cases} \left(M_1\,\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i = \dfrac{1}{2}(v_i^{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{v_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}+v_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2})\left(D_1\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{2}\left(D_1 v^{n+\frac{1}{2}}\right)_i \dfrac{v_i^{n+1}+v_i^n}{2}\ , \\ \left(M_2\,\dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\right)_i = \dfrac{1}{3}\eta_i^{n+\frac{1}{2}}\left(D_1\dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\right)_i \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{6}\left(D_1\eta^{n+\frac{1}{2}}\right)_i \dfrac{\eta_i^{n+1}+\eta_i^n}{2}\ , \\ \left(M_3\,\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i = \dfrac{1}{3}\dfrac{\eta_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}+\eta_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\left(D_1\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{3}\left(D_1\eta^{n+\frac{1}{2}}\right)_i \dfrac{\eta_{i+1}^n+\eta_{i-1}^n-\eta_i^n}{2}\ , \\ \left(M_4\,\dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\right)_i = \dfrac{1}{6}(v_i^{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{v_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}+v_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2})\left(D_1\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\right)_i \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{6}\left(D_1 v^{n+\frac{1}{2}}\right)_i \dfrac{v_i^{n+1}+v_i^n}{2}\ . \end{cases}$$

The matrix D_1 and D_3 are as defined in the KdV scheme, and the matrix D_2 is the classical centered discretization of the derivative ∂_x^2.

6.1.3 Initial data

Let us now talk about the initialization of the two schemes. First, all the prevision terms are initialized with a simple explicit integration of the equations on a half-step in time. Then, the initial conditions are chosen such that the simulated wave is unidirectional and propagating to the right. To this end, we first take the initial data of the second KdV equation to be zero. Then the system (Σ_{KdV}) reduces to the equation (6.1.1) for which we know the existence of solitary waves expressed as follows :

$$u(t,x) = \frac{\alpha}{\cosh^2\big(k(x-ct+l)\big)}\ , \tag{6.1.4}$$

with $c = 1+\dfrac{\varepsilon\alpha}{4}$, $k=\sqrt{\dfrac{3\alpha}{8}}$ and α, l being arbitrary.
It is hence natural to specify the initial condition for the KdV equation (6.1.1) as follows :

$$u(t=0,x) = u_0(x) = \frac{\alpha}{\cosh^2\big(k(x+d)\big)}\ . \tag{6.1.5}$$

Finally, and because of the way the KdV approximation was constructed from the Boussinesq model, we specify the initial conditions for this latter as follows :

$$v(t=0,x) = \eta(t=0,x) = \frac{1}{2}\,u_0(x)\ .$$

6.1.4 Validation of the numerical method

With the initial data (6.1.5), the KdV scheme is expected to propagate the corresponding solitary wave to the right, without any deformation for all time. In order to validate this scheme, the numerical results obtained with the initial data (6.1.5) have been compared with the analytical solution (6.1.4). The following relative errors on the free surface have been computed in the L^∞ norm for several values of epsilon and for computation times $T = 1/\varepsilon$:

ε	T	L	δx	δt	relative error
0.05	20	80	0.03	0.03	$1.5546.10^{-3}$
0.1	10	80	0.04	0.04	$1.3717.10^{-3}$
0.2	5	80	0.05	0.05	$1.0534.10^{-3}$

where L is the length of the computational domain and δx,δt are respectively the spatial and time discretization steps. These results allow to validate the scheme proposed for the KdV equations.

6.2 Numerical results and comments

6.2.1 Numerical results

As specified in Chapter 2, the choice of the parameters a_1, a_2, a_4 is very interesting in a numerical point of view. Indeed, the parameter a_1 controls the presence of the dispersive terms $\partial_x^3 v$ and $\partial_x^3 \eta$ whereas the parameters a_2 and a_4 correspond to the terms $\partial_x^2 \partial_t v$ and $\partial_x^2 \partial_t \eta$. These last terms have the main advantage of being regularizing terms analytically and numerically speaking, they smooth in some way the solution because they provide a control of the quantities $\partial_x v$ and $\partial_x \eta$ in the L^2 norm. We decided to use here the system (Σ) corresponding to $a_1 = a_2 = a_4 = 1/12$ because it is likely to provide the better results.

All the forthcoming results are expressed in non-dimensionalized variables. We recall that both the free surface and the bottom are of size ε : $z = \varepsilon\eta$ for the free surface and $z = -1 + \varepsilon b$ for the bottom. However, in order to get clear and readable results, we have plotted a rescaled free surface $z = \eta$ and a rescale bottom $z = -1 + b$. A quick word on the duration T of the simulations : the previous chapters provided us with a justification of the models on large time scales of order $O(1/\varepsilon)$. We have decided - only in the first example of the step - to overtake this large time scale and simulate the models on the very large time $T = 1/\varepsilon^{3/2}$, in order to see if the model remains stable on such time scales.

The three models have been tested on two different examples of bottom. The first one

correspond to a step at the bottom, defined similarly to [25] by

$$b(x) = \begin{cases} 0\ , \ \ \forall x \in \left[0, \dfrac{L}{2} - \dfrac{3}{2}\right]\ , \\ \dfrac{\beta_0}{2}\left(1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}(x - \dfrac{L}{2})\right)\right)\ , \ \ \forall x \in \left[\dfrac{L}{2} - \dfrac{3}{2}, \dfrac{L}{2} + \dfrac{3}{2}\right]\ , \\ \beta_0\ , \ \ \forall x \in \left[\dfrac{L}{2} + \dfrac{3}{2}, L\right]\ , \end{cases} \tag{6.2.1}$$

where β_0 is an arbitrary constant of order $O(1)$ and L is the length of the computation domain.
The second example corresponds to a slowly varying sinusoidal bottom, defined as follows :

$$b(x) = b_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{l}x\right)\ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}\ , \tag{6.2.2}$$

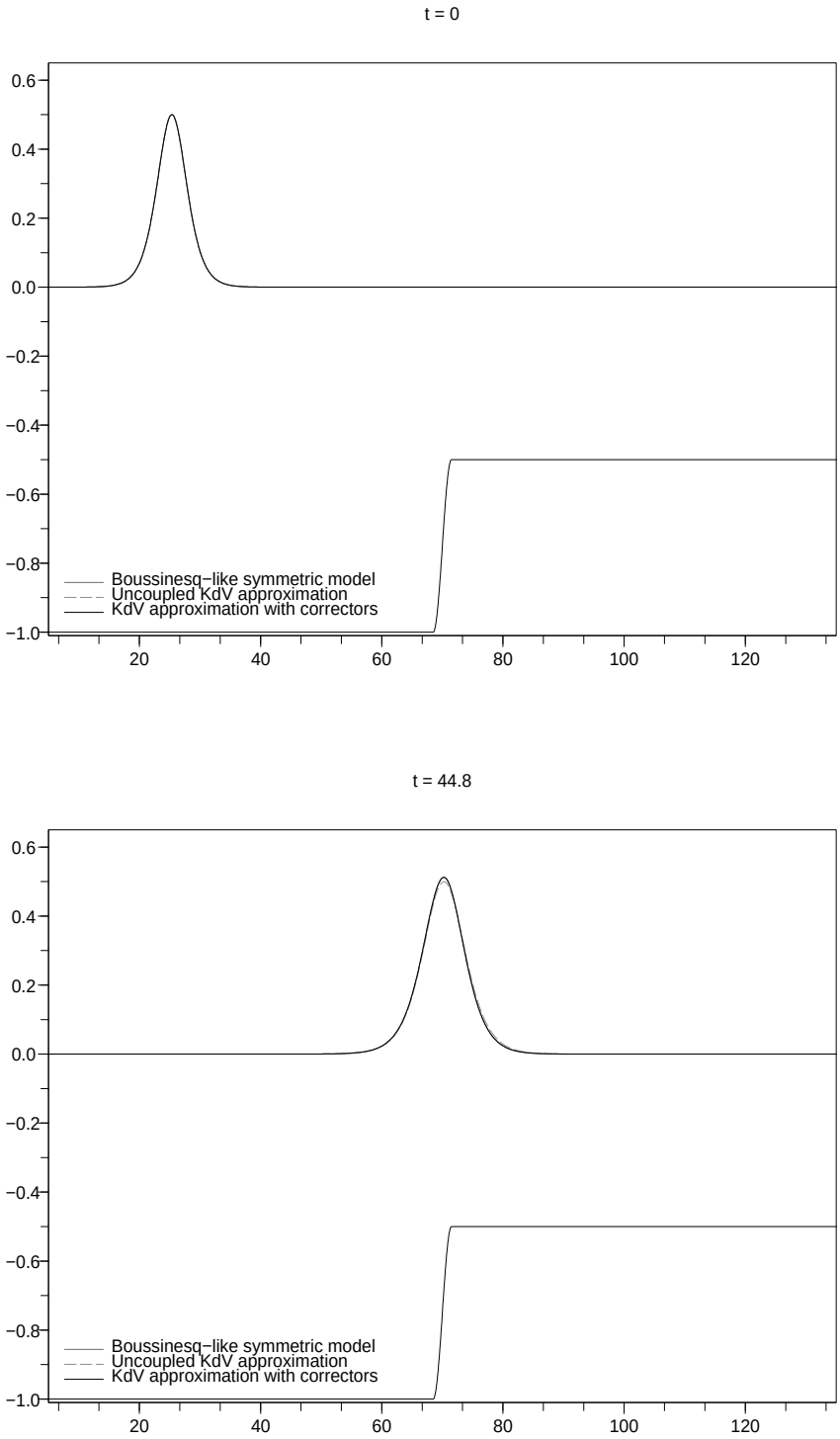
where l is defined by $l = \dfrac{1 + \varepsilon\alpha/4}{\varepsilon}$ and α is the amplitude of the initial data defined in (6.1.5).

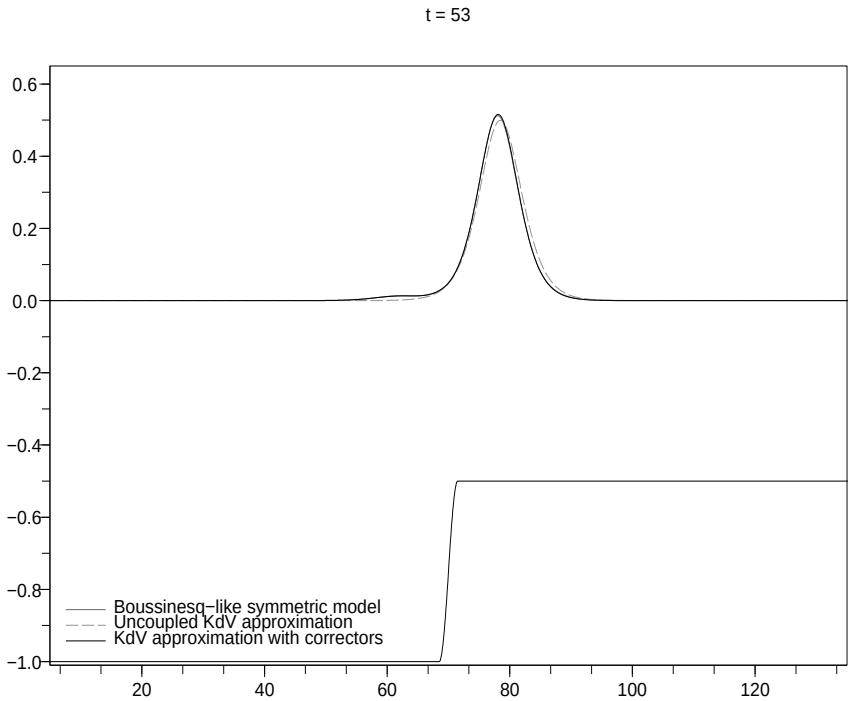
The following results show the snapshots of the simulations at different times - so that the time evolution is relatively visible - and the evolution of the relative L^∞ error between the free surfaces obtained with the Boussinesq model and respectively the KdV approximation and the topographically modified approximation. The three models have been systematically plotted together in the same pictures in order to compare efficiently their respective behaviours. The numerical simulations have been performed for different values of ε in the case (6.2.1) of a step : $\varepsilon = 0.05$, $\varepsilon = 0.1$ and $\varepsilon = 0.2$, which are typical values of the upper part of the range of validity of the long waves approximation. As far as the case (6.2.2) is concerned, we simulated the models for the values $\varepsilon = 0.05$ and $\varepsilon = 0.1$. For all the simulations, the amplitude α of the initial free surface and the constant β_0 linked to the bottom have been taken equal to 0.5. Here is a global tabular precising all the values of interest used in the simulations.

Figure	Bottom	ε	T	L	δx	δt
6.2.1	step	0.05	89	140	0.03	0.03
6.2.3	step	0.1	31	80	0.04	0.04
6.2.5	step	0.2	12	80	0.05	0.05
6.2.7	sinusoidal	0.05	20	40	0.03	0.03
6.2.9	sinusoidal	0.1	10	20	0.04	0.04

The figures 6.2.2, 6.2.4, 6.2.6, 6.2.8, 6.2.10 show the relative error between the computed free surfaces of the different models for each value of ε and for the two cases of bottom.

Figure 6.2.1: Influence of the step for $\varepsilon = 0.05$




t = 53
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
20
40
60
80
100
120
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

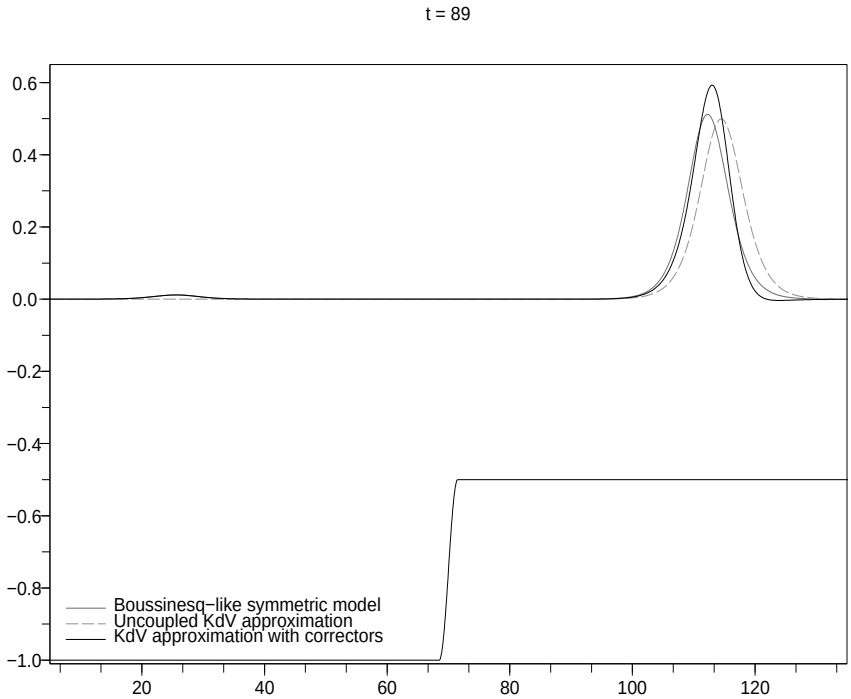
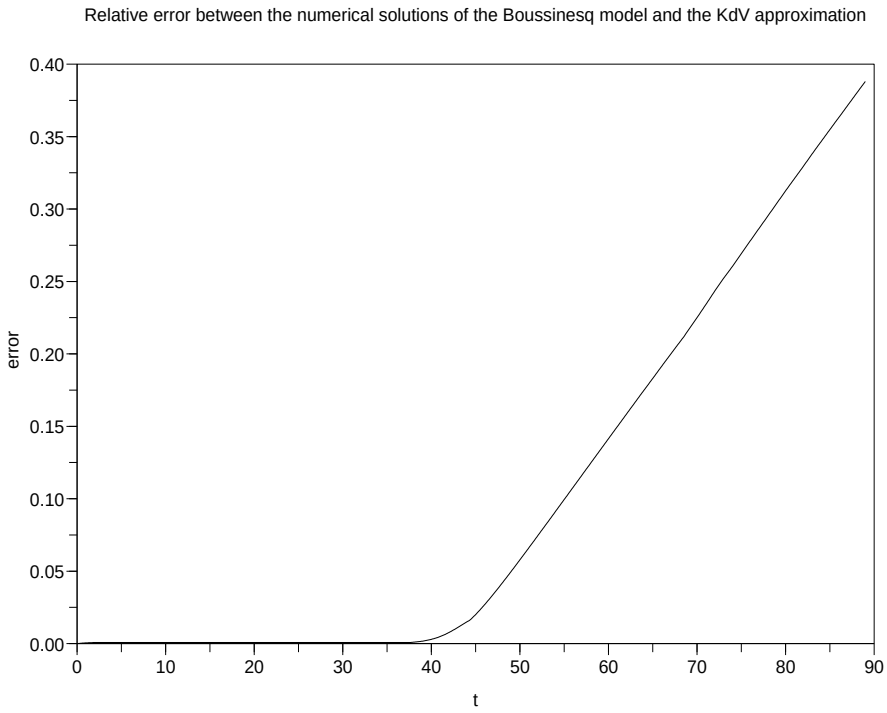

t = 89
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
20
40
60
80
100
120
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

Figure 6.2.2: Relative L^∞ error between the free surfaces for $\varepsilon = 0.05$



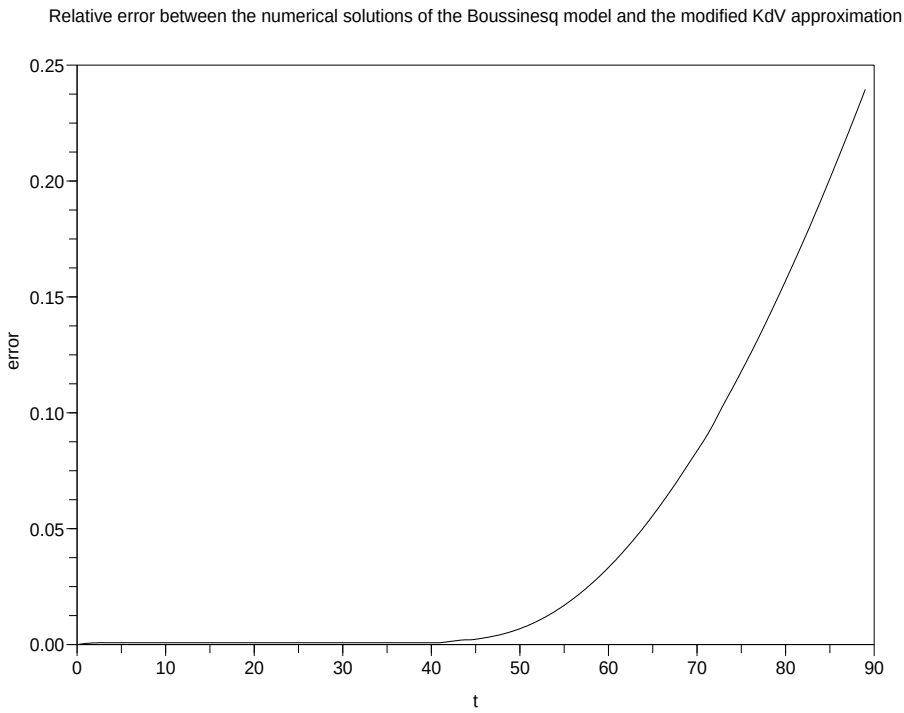
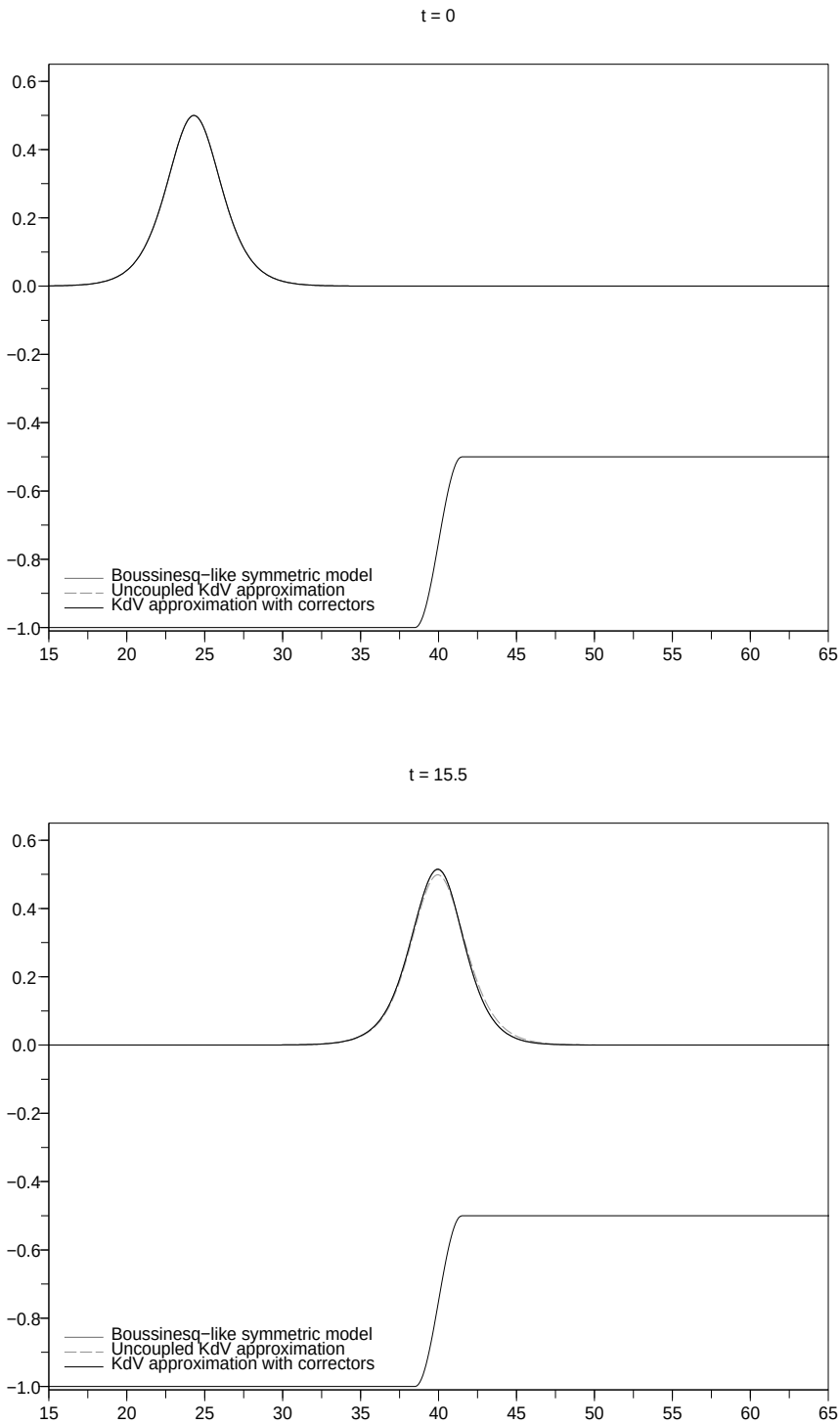
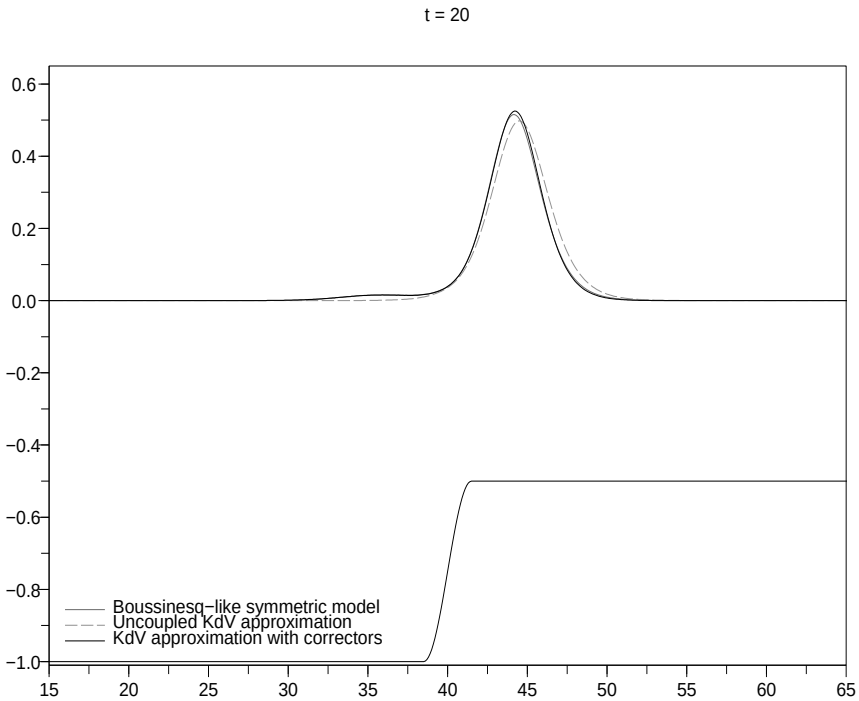


Figure 6.2.3: Influence of the step for $\varepsilon = 0.1$




t = 20
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

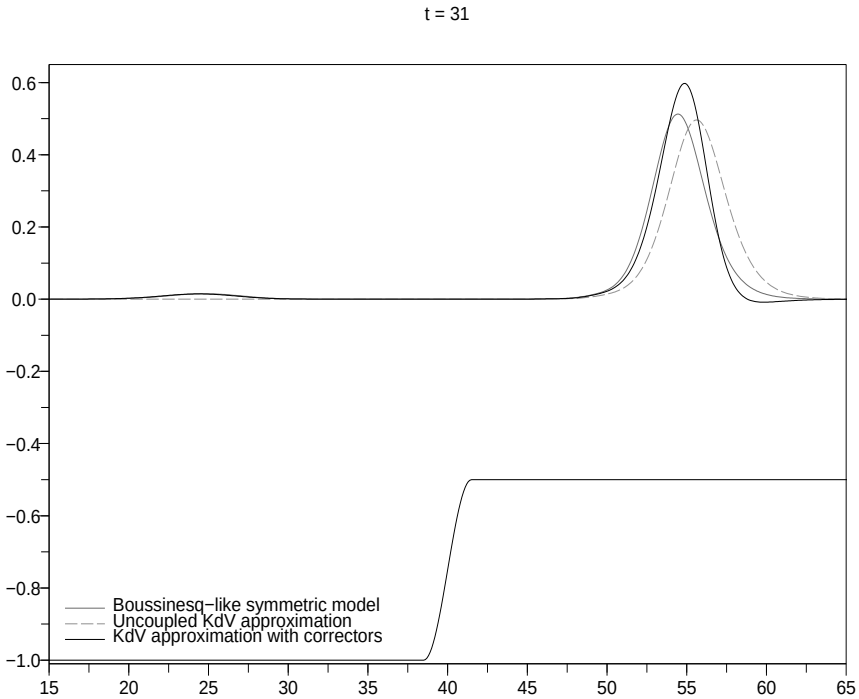
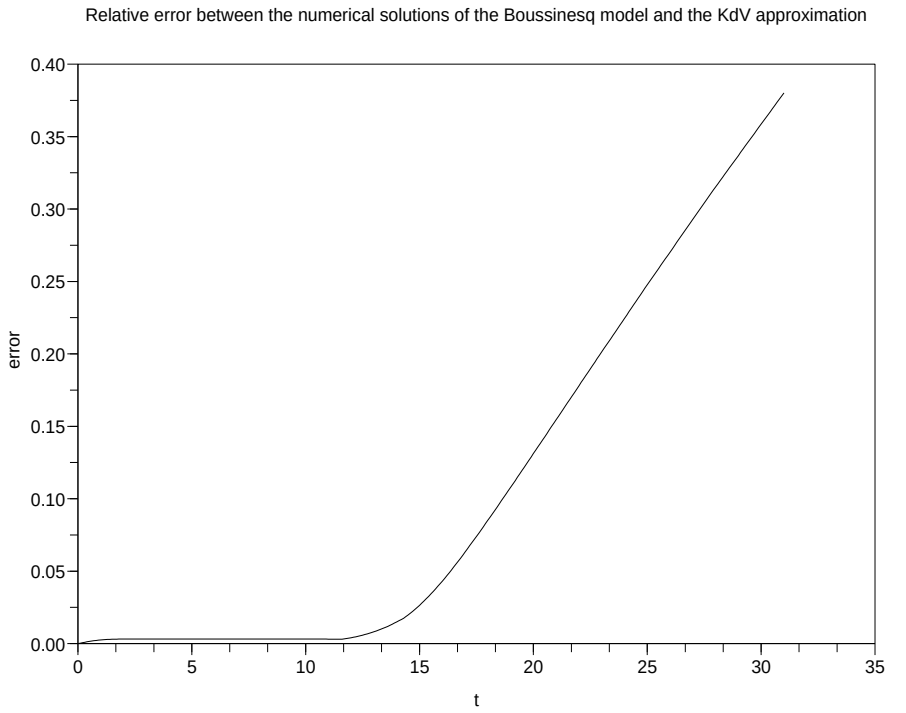

t = 31
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

Figure 6.2.4: Relative L^∞ error between the free surfaces for $\varepsilon = 0.1$



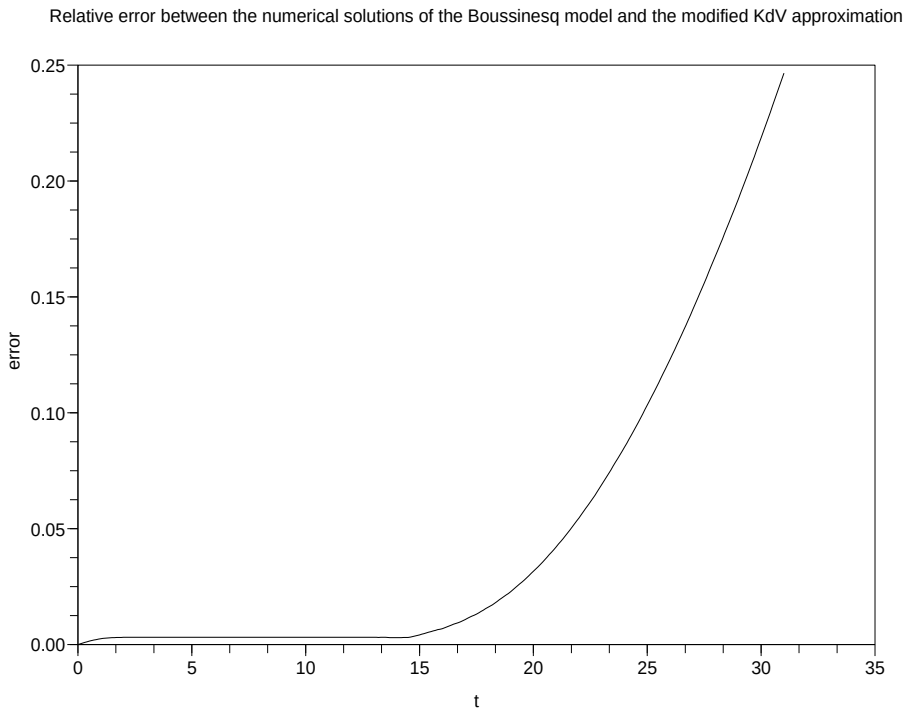
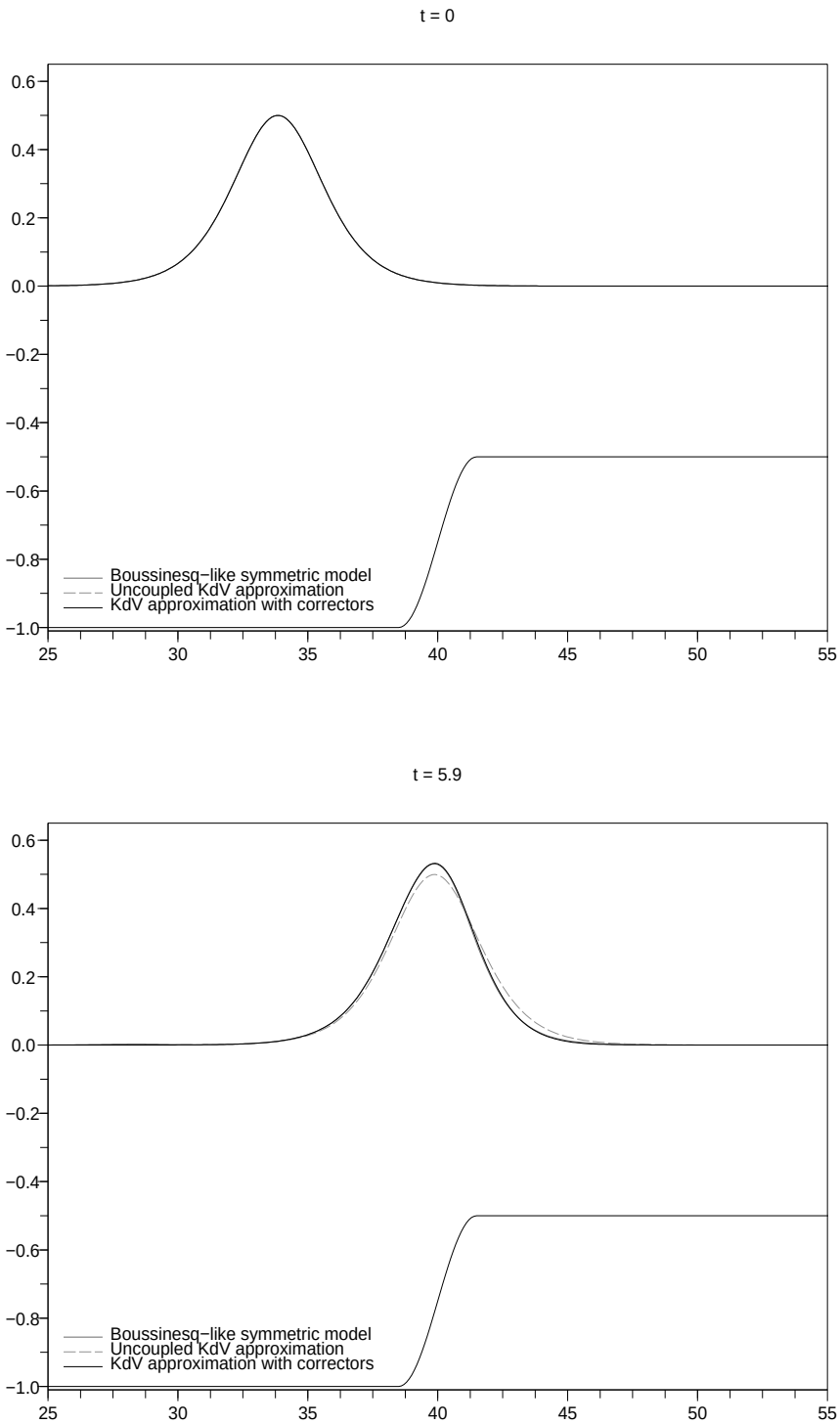
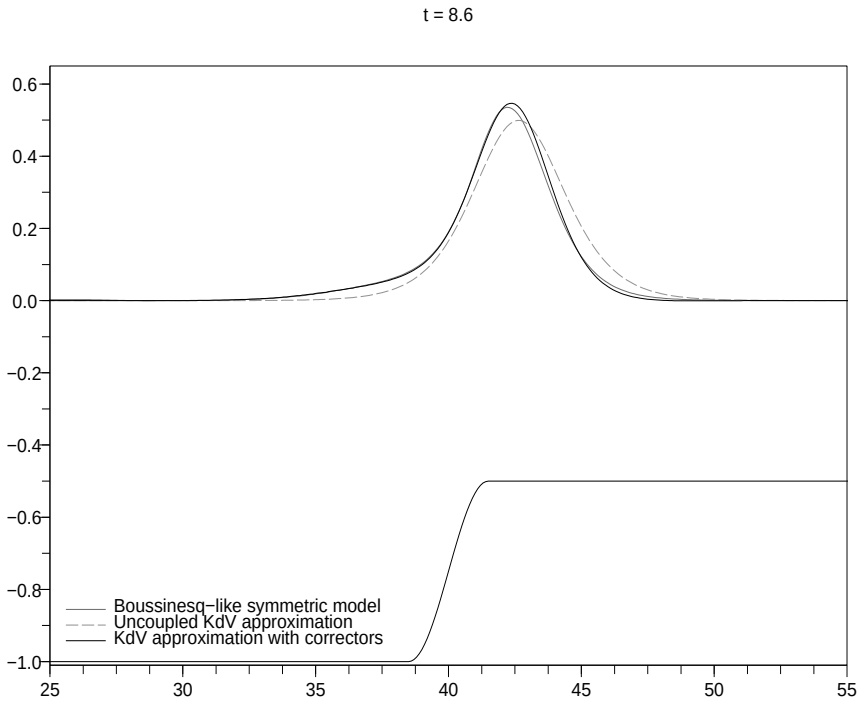


Figure 6.2.5: Influence of the step for $\varepsilon = 0.2$




t = 8.6
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
25
30
35
40
45
50
55
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

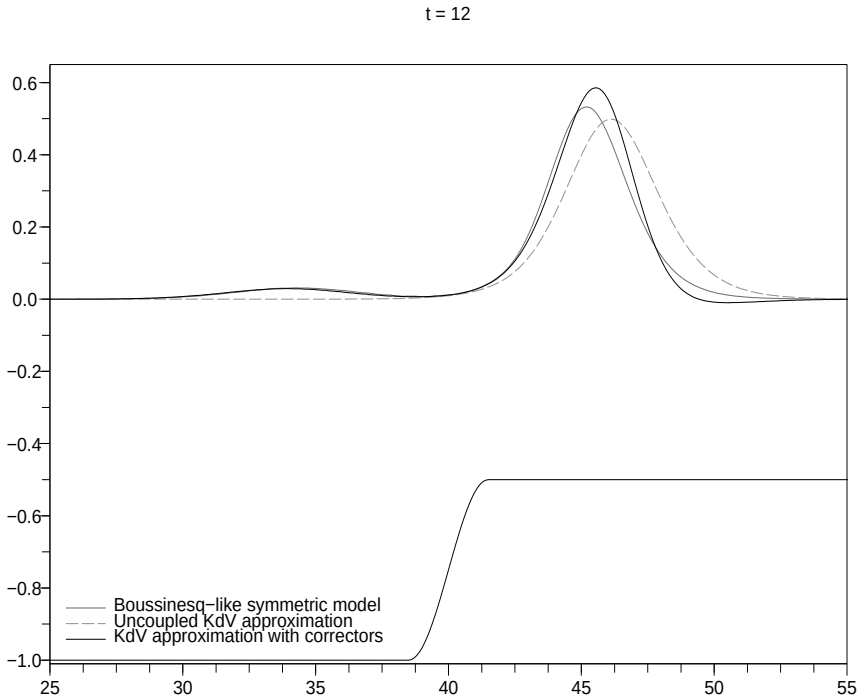
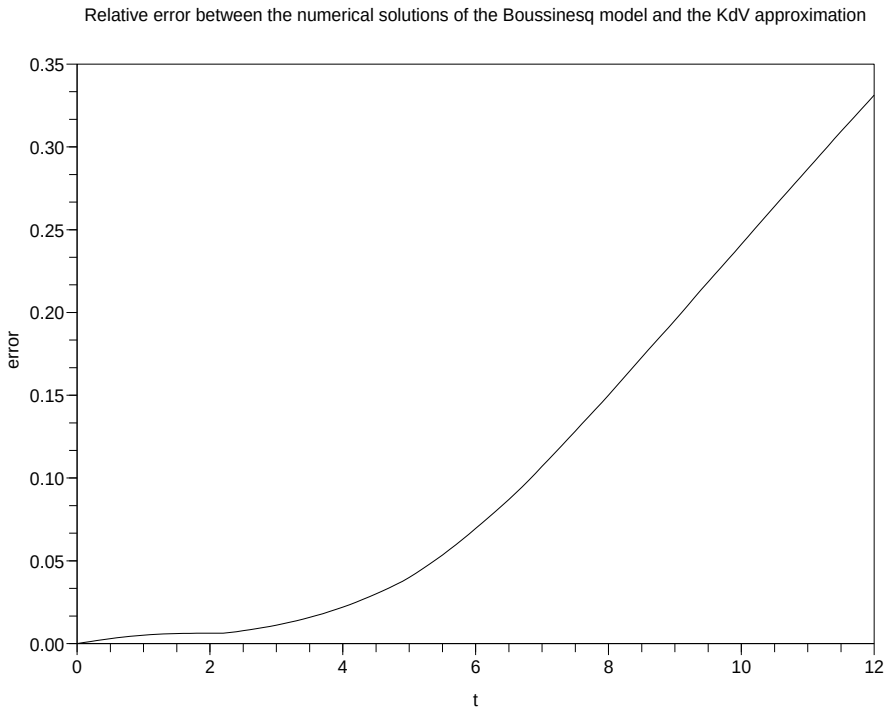

t = 12
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
25
30
35
40
45
50
55
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

Figure 6.2.6: Relative L^∞ error between the free surfaces for $\varepsilon = 0.2$



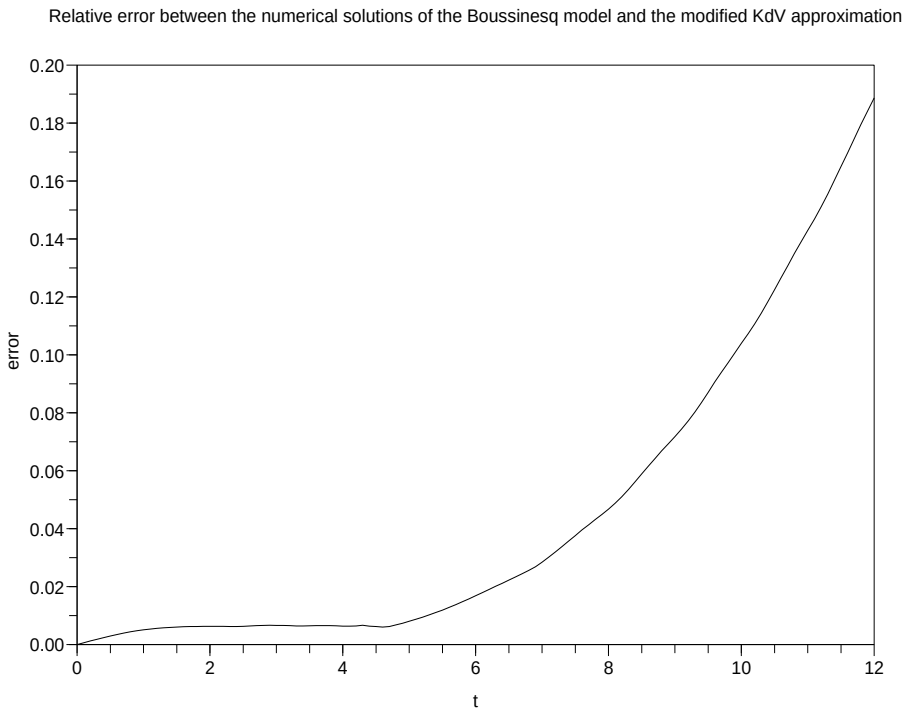
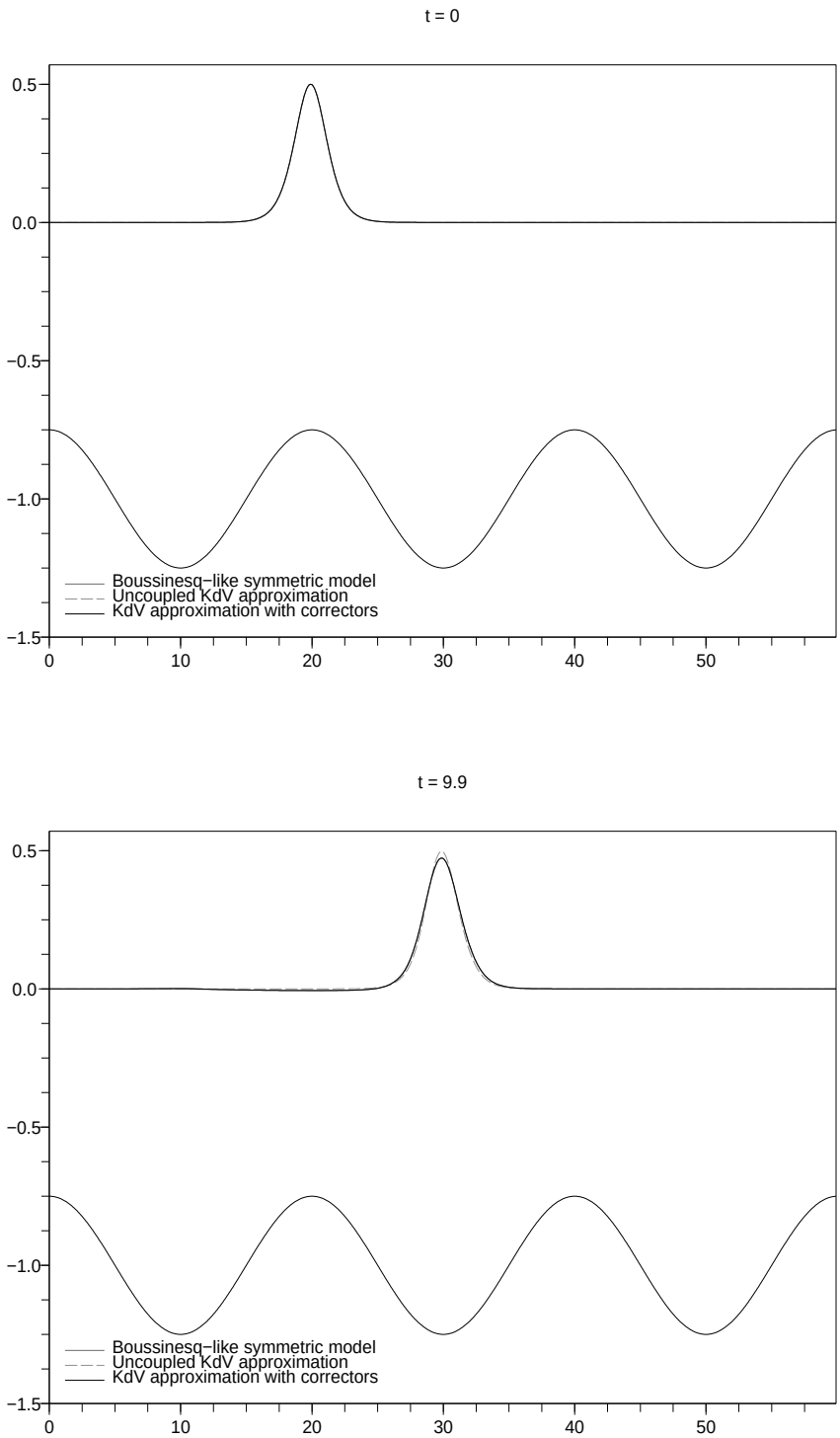


Figure 6.2.7: Influence of a slow sinusoidal bottom for $\varepsilon = 0.05$



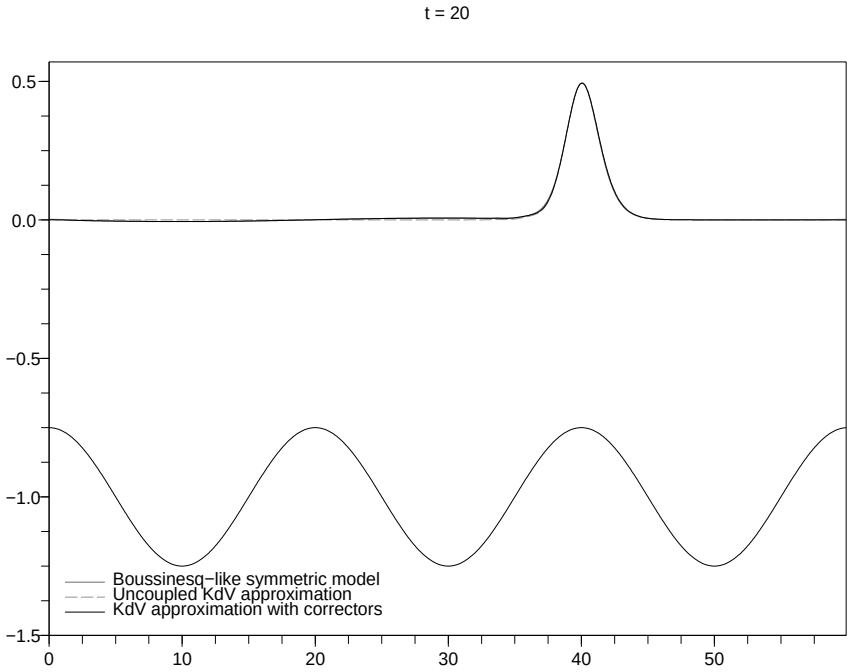
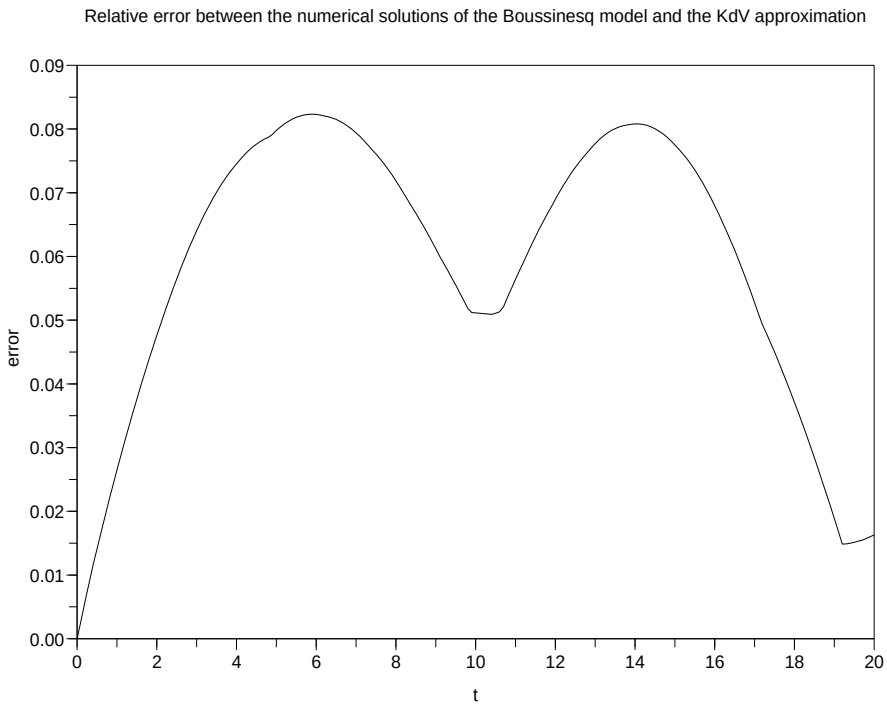


Figure 6.2.8: Relative L^∞ error between the free surfaces for $\varepsilon = 0.05$



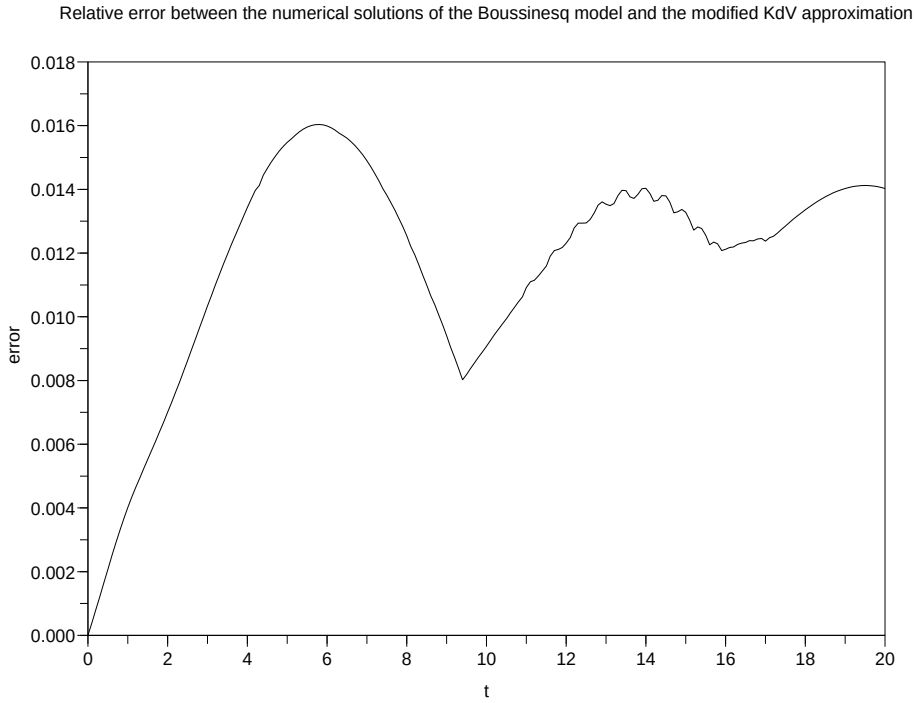
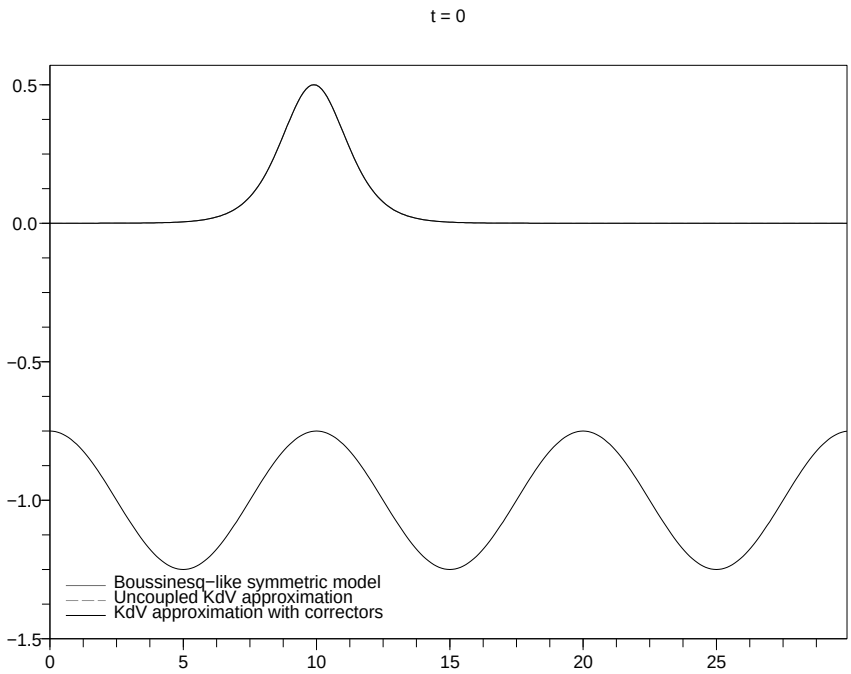
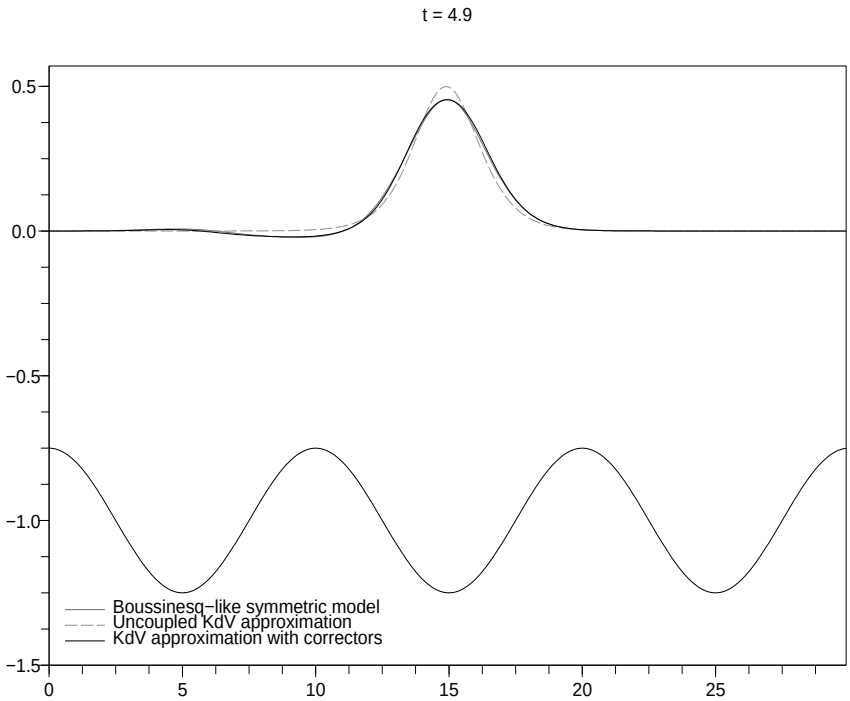


Figure 6.2.9: Influence of a slow sinusoidal bottom for $\varepsilon = 0.1$




t = 4.9
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0
5
10
15
20
25
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

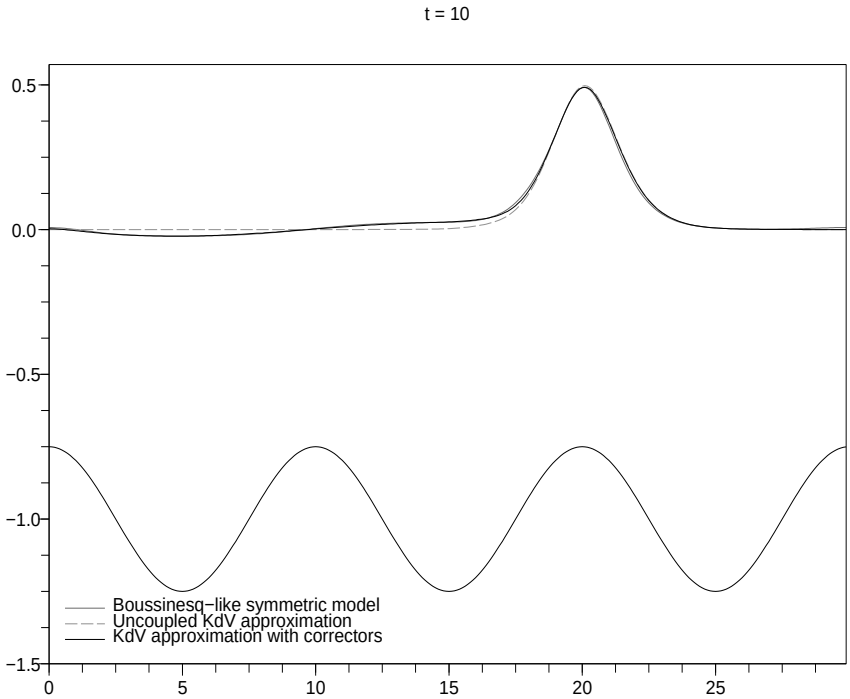
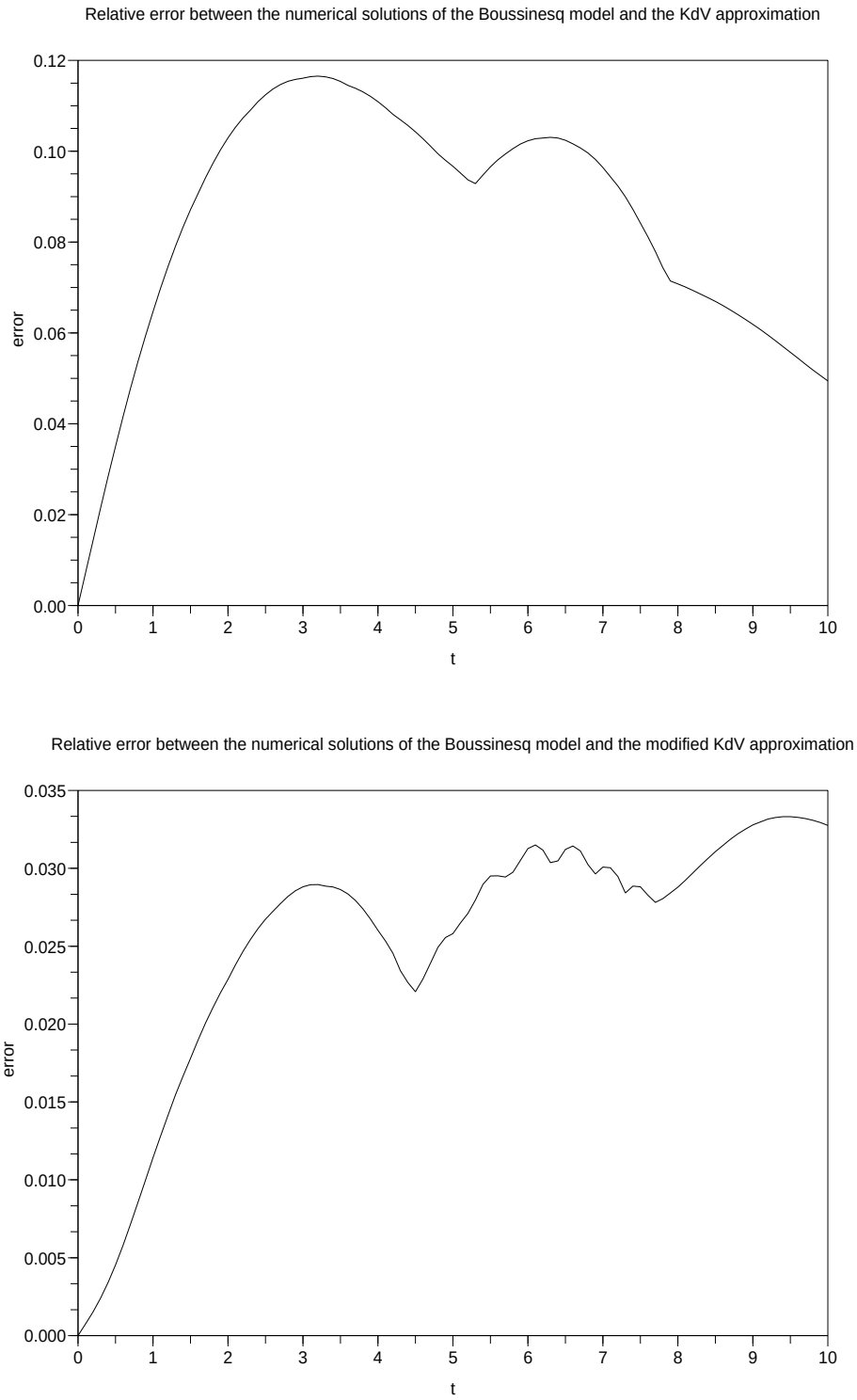

t = 10
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0
5
10
15
20
25
Boussinesq−like symmetric model
Uncoupled KdV approximation
KdV approximation with correctors

Figure 6.2.10: Relative L^∞ error between the free surfaces for $\varepsilon = 0.1$



6.2.2 Comments

For the sake of readability, we call the computed waves as follows : $\mathcal{B}$ denotes the wave coming from the Boussinesq model (Σ), $\mathcal{K}_{topo}$ denotes the wave produced by the topographically modified KdV approximation ($\mathcal{M}_b$), and finally $\mathcal{K}$ denotes the solitary wave resulting from the usual KdV approximation ($\mathcal{M}$).

In the case of the step, we observe that for all tested values of ε, both the Boussinesq model and alternative version of the KdV approximation succeed in reproducing the phenomenon of reflexion on the bathymetry : a smaller solitary wave appears when the main wave goes over the step. This reflected wave propagates to the left at the same speed as the main wave. The classical uncoupled KdV model cannot - of course - reproduce this phenomenon seing that it does not depend anywhere on the bottom topography. Moreover, the Boussinesq and topographically modified KdV models successfully describe the following expected physical phenomenons : the shoaling which corresponds to the growth in amplitude of the wave after the step ; the deceleration of the wave after the step : the waves $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$ are behind the wave $\mathcal{K}$ which propagates at a constant speed ; and finally the loss of symmetry and the narrowing of the wave, which can be remarked by comparing the distances between several points of the resulting waves at different heights : the solitary wave $\mathcal{K}$ propagates without any deformation and remains symmetric, whereas the symmetry and width of $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$ are modified by the step. All these phenomenons are the premisses of the process of wave breaking, and they are all successfully reproduced by the Boussinesq and new KdV models.

A very interesting remark on our KdV model is that the role of each correcting term in the approximation can be intuitively identified, and these intuitions have been confirmed with several simulations - that are not presented here - in the case of the step. Indeed, it appears clearly that :

- the correcting term $\frac{\varepsilon}{8}\int_0^t \partial_x b(x-t+s)U_0(x-t+2s)ds$ is responsible for the birth and propagation of the reflected wave, and for the very beginning of the shoaling effect,
- the correcting term $\frac{\varepsilon}{8}U_0(x-t)(b(x)-b(x-t))$ clearly reproduces the pursuit of the shoaling after the step,
- the correcting term $\frac{\varepsilon}{4}\partial_x U_0(x-t)\int_0^t b(x-t+s)ds$ is reponsible for the deceleration and loss of width and symmetry of the main wave after the step.

In the case of a slowly varying sinusoidal bottom, the effect of the bottom is also clearly visible on $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$. To understand the speed variations of these waves, we have to keep in mind that the comparison is made with the wave $\mathcal{K}$ which evolves as if the bottom was flat and located at the height $z = -1$. Consequently, when $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$ propagate above the downward part of the sinusoidal gap, they cross two different areas : a first area - for a time $t \leq T/4$ - where the depth is lower than for a flat bottom located at $z = -1$, and

a second area - for $t \leq T/2$ - where this is the contrary. This explains why the waves $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$ are located for $t = T/2$ at the same position as $\mathcal{K}$: the waves $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$ have speeded up over the first area in comparison with $(\mathcal{K})$, and then have decelerated over the second area. However, we can see that these waves are larger than $(\mathcal{K})$ at $t = T/2$: this is due to the loss of amplitude of the waves $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$ during this downward part which makes the waves be naturally wider. About this loss of amplitude, it is explained by the fact that the amplitude of the bottom decreases over the downward part of the sinusoid, which produces the inverse effect of the shoaling from the previous case of the step. In addition, we can see a reflected wave for $\mathcal{B}$ and $\mathcal{K}_{topo}$ - a depression this time - which goes to the left at the same speed as the main wave, which corresponds to the same phenomenon of bathymetric reflexion as in the case of the step : the amplitude of the bottom decreases and thus produces a depression wave that propagates in the opposite direction. We can see that this depression wave is here larger than for a step because of the slow variations of the bottom. As far as the upward part of the sinusoid is concerned, all the previously described effects happen in an inverted way, and we finally recover three identical main waves for the three models. At this final point, the only remaining visible effects of the crossed topography are the reflected waves.

As specified earlier, we decided to simulate the models on the very large time $T = 1/\varepsilon^{3/2}$ in the case of the step. All these models have been proved to be valid on the time scale $O(1/\varepsilon)$ and it is interesting to check numerically their validity - or not - on larger time scales. For a time $T = 1/\varepsilon^{3/2}$, we can observe that the wave $\mathcal{K}_{topo}$ goes on growing more and more in amplitude, and that a depression wave deepens in front of the main wave. These effects are obviously not physical and can be explained by the fact that the size of the correcting term $\frac{\varepsilon}{4}\partial_x U_0(x-t)\int_0^t b(x-t+s)ds$ evolves in time like ε/t as we saw in Chapter 5 : on a time $T = 1/\varepsilon^{3/2}$, this size become of order $O(1/\sqrt{\varepsilon})$, which explains why this model diverges from the other models on this time scale. This is the main restriction of this model, in comparison with the Boussinesq one which seems to remain stable on very large time scales. An interesting perspective would be to look for higher order terms - like Wright in [69] - in the approximation to deal with this problem.

To sum up, the results on these two examples of bottom show that both Boussinesq and topographically modified KdV models are able to reproduce the expected physical phenomenons : reflection, shoaling, loss of speed and symmetry. This is of course not the case for the usual KdV approximation which is independent from the bottom topography. Even if we can isolate the role of each correcting terms with our modified KdV aproximation, this one diverges when time goes over the theoretical limit time of validity $T = 1/\varepsilon$. The Boussinesq does not have this drawback and remains stable on time scales of order $O(1/\varepsilon^{3/2})$.

Chapitre 7

Simulation numérique des équations de Green-Naghdi

Ce chapitre correspond à un travail réalisé en collaboration avec Fabien Marche et David Lannes. Nous nous intéressons ici à la simulation numérique des équations de Green-Naghdi en 1-D de surface pour différentes topographies. L'intérêt de ce modèle est qu'il permet d'élargir le cadre de validité physique des modèles de type Boussinesq, tout en les englobant dans une certaine mesure. Après avoir briévement présenté les équations et démontré une conservation d'énergie spécifique, nous contruisons un schéma adéquat de type Crank-Nicholson avec méthode de relaxation permettant, au niveau semi-discret, de préserver cette conservation d'énergie à un reste d'ordre $\varepsilon(1+\mu)\delta_t$ près. Nous justifions que ce reste, non satisfaisant en apparence, est en réalité suffisant pour nos besoins. Ce schéma est ensuite validé en fond plat par comparaison avec la solution analytique connue de ces équations. Pour finir, le modèle de Green-Naghdi est comparé numériquement au modèle de Boussinesq (Σ) dans le cadre de deux topographies distinctes : le cas d'une marche et celui d'une pente douce. Ces résultats permettront d'observer les capacités du modèle de Green-Naghdi mais aussi de déterminer le régime de validité du modèle (Σ).

7.1 Présentation des méthodes numériques

7.1.1 Introduction

Commençons ce chapitre par une brève présentation des équations de Green-Naghdi. Ce modèle s'inscrit dans le cadre du régime physique dit d'eau peu profonde, plus communément appelé régime de shallow-water. Ce régime est en réalité une généralisation de celui d'ondes longues de faible amplitude qui nous a intéressé dans les chapitres précédents. En effet, le régime de shallow-water est caractérisé par une seule hypothèse de petitesse, celle de la profondeur d'eau moyenne h_0 par rapport à la longueur d'onde caractéristique λ de

l'écoulement. Cette hypothèse revient donc à supposer $\mu \ll 1$. Aucune hypothèse de petitesse n'est faite sur les autres paramètres que sont ε, le nombre de Stokes S ou encore β. Nous pouvons donc dans ce régime considérer aussi bien des petites valeurs de ε et de β que des valeurs de l'ordre de $O(1)$. Ce régime est ainsi dit faiblement dispersif du fait de la petitesse de μ. Selon l'hypothèse faite sur ε, on lui adjoint le qualificatif de fortement non-linéaire pour $\varepsilon = O(1)$, modérément non-linéaire pour $\varepsilon = O(\sqrt{\mu})$ et faiblement non-linéaire pour $\varepsilon = O(\mu)$. Nous retrouvons dans cette dernière hypothèse celle caractérisant le régime d'ondes longues de faible amplitude : il est donc clair que ce régime n'est autre qu'un régime particulier de celui de shallow-water.

Les équations de Green-Naghdi ont été historiquement construites ([27], 1976) dans le cadre du régime général de shallow-water, c'est à dire pour $\mu \ll 1$ et sans aucune hypothèse sur ε et β. Cette construction est intéressante dans le sens où elle permet, partant des équations de Green-Naghdi et via l'adjonction d'une hypothèse sur ε, de retrouver des modèles tels que ceux de Serre dans le cas modérément non-linéaire ou ceux de Boussinesq dans le cas faiblement non-linéaire. Ce caractère général des équations de Green-Naghdi leur confère un grand intérêt aux niveaux modélisation et simulation numérique. Il est également à souligner que ces équations sont une extension de celles, très utilisées, de Saint-Venant (autrement appelées équations de shallow-water). En effet, leur construction telle que présentée dans [3] passe par le développement asymptotique en fonction de μ d'un opérateur de Dirichlet-Neumann. Or cette construction impose de prendre en compte dans ce développement les termes d'ordre $O(\mu^2)$, au contraire des équations de Saint-Venant qui ne tiennent compte que des termes d'ordre $O(\mu)$. Ceci conduit en particulier à l'apparition de termes dispersifs dans les équations de Green-Naghdi, termes non présents dans les équations de Saint-Venant et à l'origine de nombreuses controverses physiques sur la validité de ces équations dans la zone de levée. Nous utiliserons ici la formulation des équations de Green-Naghdi proposée dans [3] pour des raisons qui apparaîtront clairement par la suite. Celles-ci s'écrivent en 1-D de surface sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_x (hv) = 0 \ , \\ (1 + \dfrac{\mu}{h}\mathcal{T}_\beta[h,b])\partial_t v + \partial_x \eta + \varepsilon v \partial_x v + \dfrac{\mu\varepsilon}{h}\mathcal{Q}_\beta[h,b]v = 0 \ , \end{cases} \tag{7.1.1}$$

où $h = 1 + \varepsilon\eta - \beta b$ correspond à la hauteur du fluide.
L'opérateur linéaire $\mathcal{T}_\beta[h,b]$ est défini par $\mathcal{T}_\beta[h,b]v = \mathcal{T}_0[h]v + \beta\mathcal{T}_1[h,b]v + \beta^2\mathcal{T}_2[h,b]v$ avec :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_0[h]v = -\dfrac{1}{3}\partial_x(h^3\partial_x v) \ , \\ \mathcal{T}_1[h,b]v = \dfrac{1}{2}[\partial_x(h^2\partial_x bv) - h^2\partial_x b\partial_x v] \ , \\ \mathcal{T}_2[h,b]v = h(\partial_x b)^2 v \ , \end{cases}$$

L'opérateur non-linéaire $\mathcal{Q}_\beta[h,b]$ est défini par $\mathcal{Q}_\beta[h,b]v = \mathcal{Q}_0[h]v + \beta\mathcal{Q}_1[h,b]v + \beta^2\mathcal{Q}_2[h,b]v$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_0[h]v = -\dfrac{1}{3}\partial_x[h^3(v\partial_x^2 v - (\partial_x v)^2)] \ , \\ \mathcal{Q}_1[h,b]v = \dfrac{1}{2}[\partial_x(h^2 v\partial_x(v\partial_x b) - h^2\partial_x b(v\partial_x^2 v - (\partial_x v)^2))] \ , \\ \mathcal{Q}_2[h,b]v = h\partial_x b(v\partial_x(v\partial_x b)) \ . \end{cases}$$

Il est à noter aussi que la vitesse v dans ces équations ne correspond pas à la vitesse horizontale du fluide à la surface, mais peut être exprimée en fonction de celle-ci grâce à la relation :

$$v = (1 - \frac{\mu}{h}\mathcal{T}_\beta[h,b])\nabla\psi \ . \tag{7.1.2}$$

On vérifie facilement que cette vitesse v correspond en réalité à la vitesse horizontale intégrée sur la hauteur du fluide, à un terme d'ordre $O(\mu^2)$ près.

Il est important de noter que l'on peut facilement retrouver le modèle de Boussinesq $(\mathcal{B}_1)$ du Chapitre 1 à partir de ces équations. En effet, si l'on fait l'hypothèse d'ondes longues $\varepsilon = 0(\mu)$ et l'hypothèse de petites variations topographiques $\beta = O(\varepsilon)$, alors en utilisant la relation $v = (1 - \frac{\mu}{h}\mathcal{T}_\beta[h,b])\nabla\psi$ et en négligeant les termes d'ordre $O(\varepsilon^2)$, il vient le système suivant, exprimé en fonction de la vitesse horizontale $\overline{v}$ à la surface :

$$\begin{cases} \partial_t\eta + \partial_x\overline{v} + \varepsilon\Big[\partial_x((\eta - b)\overline{v}) + \dfrac{1}{3}\partial_x^3\overline{v}\Big] = 0 \ , \\ \partial_t\overline{v} + \partial_x\eta + \varepsilon\overline{v}\partial_x\overline{v} = 0 \ . \end{cases}$$

Ce système correspond exactement au modèle $(\mathcal{B}_1)$ construit dans le Chapitre 1. Cette remarque montre que le modèle de Green-Naghdi englobe, aux changements de variables du Chapitre 2 près, le modèle de Boussinesq symétrique (Σ), et permet d'étendre le régime de validité physique de ce dernier au cadre plus général du régime de shallow-water.

7.1.2 Construction du schéma numérique

Présentons maintenant la construction du schéma numérique pour ces équations. Nous avons opté comme dans le Chapitre 6 pour un schéma en différences finies de type Crank-Nicholson associée à la méthode de relaxation de Besse et Bruneau [10]. Cette méthode de relaxation se révèle ici particulièrement utile du fait des nombreuses non-linéarités présentes dans les équations, et permet ainsi de s'affranchir d'un traitement couteux de celles-ci.

Avant de construire le schéma numérique pour les équations (7.1.1), nous allons nous intéresser aux éventuelles quantités conservées par ces équations. Pour ce faire, il s'avère judicieux de tirer partie de la forme de l'opérateur linéaire $\mathcal{T}_\beta[h,b]$. On vérifie aisément que celui-ci peut être reformulé de la manière suivante :

$$\mathcal{T}_\beta[h,b] = \mathcal{T}_1^* h\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2^* h\mathcal{T}_2$$

où $\mathcal{T}_1^*$ et $\mathcal{T}_2^*$ désigne les opérateurs adjoints des opérateurs linéaires $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ définis par :

$$\mathcal{T}_1 v := \frac{h}{\sqrt{3}}\partial_x v - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\partial_x b v \ , \ \text{ et } \ \mathcal{T}_2 v := \frac{1}{2}\beta\partial_x b\, v \ . \tag{7.1.3}$$

L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet d'avoir un contrôle sur les quantités $(hv, v)_{L^2(\mathbb{R})}$, $(h\mathcal{T}_1 v, \mathcal{T}_1 v)_{L^2(\mathbb{R})}$ et $(h\mathcal{T}_2 v, v)_{L^2(\mathbb{R})}$. Plus précisément, on montre via la proposition suivante que l'on a une conservation d'énergie sur les équations (7.1.1) :

Proposition 7.1.1. *Soit (η, v) un couple de solutions des équations (7.1.1). Alors on a la conservation d'énergie suivante :*

$$\partial_t\Big(|\eta|^2 + (hv, v) + \mu\left((h\mathcal{T}_1 v, \mathcal{T}_1 v) + (h\mathcal{T}_2 v, \mathcal{T}_2 v)\right)\Big) = 0 \tag{7.1.4}$$

où $|.|$ et $(.,.)$ désignent respectivement la norme et le produit scalaire $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. En multipliant la première équation de (7.1.1) par η et la seconde par hv, en intégrant sur $\mathbb{R}$, et en additionnant il vient :

$$\frac{1}{2}\partial_t|\eta|^2 + (\partial_x(hv), \eta) + (\partial_t v, hv) + \mu(\mathcal{T}\partial_t v, v) + (\partial_x \eta, hv) + \varepsilon(v\partial_x v, hv) + \mu\varepsilon(\mathcal{Q}v, v) = 0 \ ,$$

et donc :

$$\frac{1}{2}\partial_t|\eta|^2 + \frac{1}{2}\partial_t(hv, v) - \frac{1}{2}(\partial_t h, v^2) + \varepsilon(v\partial_x v, hv) + \mu(\mathcal{T}\partial_t v, v) + \mu\varepsilon(\mathcal{Q}v, v) = 0 \ .$$

En utilisant le fait que $h = 1 + \varepsilon\eta - \beta b$ et la première équation, il vient que :

$$-\frac{1}{2}(\partial_t h, v^2) + \varepsilon(v\partial_x v, hv) = -\frac{\varepsilon}{2}(\partial_x(hv), v^2) + \varepsilon(v\partial_x v, hv) = 0 \ .$$

Il reste donc :

$$\frac{1}{2}\partial_t|\eta|^2 + \frac{1}{2}\partial_t(hv, v) + \mu(\mathcal{T}\partial_t v, v) + \mu\varepsilon(\mathcal{Q}v, v) = 0 \ . \tag{7.1.5}$$

Regardons de plus près le terme $\mu(\mathcal{T}\partial_t v, v)$:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{T}\partial_t v, v) &= \mu(\mathcal{T}_1^* h\mathcal{T}_1\partial_t v, v) + \mu(\mathcal{T}_2^* h\mathcal{T}_2\partial_t v, v) \ , \\
&= \mu(h\mathcal{T}_1\partial_t v, \mathcal{T}_1 v) + \mu(h\mathcal{T}_2\partial_t v, \mathcal{T}_2 v) \ , \\
&= \mu(h(\partial_t(\mathcal{T}_1 v) - \partial_t\mathcal{T}_1 v), \mathcal{T}_1 v) + \mu(h\partial_t(\mathcal{T}_2 v), \mathcal{T}_2 v) \ ,
\end{aligned}$$

puisque b et donc $\mathcal{T}_2$ ne dépendent pas de t. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{T}\partial_t v, v) &= \frac{\mu}{2}\partial_t(h\mathcal{T}_1 v, \mathcal{T}_1 v) - \frac{\mu}{2}(\partial_t h, (\mathcal{T}_1 v)^2) - \mu(h\partial_t\mathcal{T}_1 v, \mathcal{T}_1 v) \\
&\quad + \frac{\mu}{2}\partial_t(h\mathcal{T}_2 v, \mathcal{T}_2 v) - \frac{\mu}{2}(\partial_t h, (\mathcal{T}_2 v)^2) \ , \\
&= \frac{\mu}{2}\partial_t(h\mathcal{T}_1 v, \mathcal{T}_1 v) + \frac{\mu}{2}\partial_t(h\mathcal{T}_2 v, \mathcal{T}_2 v) - \frac{\mu}{2}(\partial_t h, (\mathcal{T}_1 v)^2 + (\mathcal{T}_2 v)^2) \\
&\quad - \mu(h\partial_t\mathcal{T}_1 v, \mathcal{T}_1 v) \ .
\end{aligned}$$

Injectons ce résultat dans (7.1.5) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_t\Big[|\eta|^2+(hv,v)+\mu(h\mathcal{T}_1v,\mathcal{T}_1v)+\mu(h\mathcal{T}_2v,\mathcal{T}_2v)\Big] &= \mu\Big(\frac{1}{2}(\partial_t h,(\mathcal{T}_1v)^2+(\mathcal{T}_2v)^2)\\ &\quad +(h\partial_t\mathcal{T}_1v,\mathcal{T}_1v)-\varepsilon(\mathcal{Q}v,v)\Big)\,.\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

En remarquant que $h\partial_t\mathcal{T}_1v=\partial_t h(\mathcal{T}_1v+\sqrt{3}\mathcal{T}_2v)$, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial_t h,(\mathcal{T}_1v)^2+(\mathcal{T}_2v)^2)+(h\partial_t\mathcal{T}_1v,\mathcal{T}_1v) &= \frac{1}{2}\Big(\partial_t h,3(\mathcal{T}_1v)^2+(\mathcal{T}_2v)^2+2\sqrt{3}\mathcal{T}_2v\mathcal{T}_1v\Big)\,,\\ &= \frac{1}{2}\Big(\partial_t h,(\sqrt{3}\mathcal{T}_1v+\mathcal{T}_2v)^2\Big)\,,\\ &= \varepsilon\Big(v,\frac{h}{2}\partial_x(\sqrt{3}\mathcal{T}_1v+\mathcal{T}_2v)^2\Big)\,,\end{aligned}$$

grâce à la première équation de (7.1.1). Muni de ce résultat et de (7.1.6), il vient au final :

$$\frac{1}{2}\partial_t\Big[|\eta|^2+\partial_t(hv,v)+\mu(h\mathcal{T}_1v,\mathcal{T}_1v)+\mu(h\mathcal{T}_2v,\mathcal{T}_2v)\Big]=\mu\varepsilon\Big(\frac{h}{2}\partial_x(\sqrt{3}\mathcal{T}_1v+\mathcal{T}_2v)^2-\mathcal{Q}v,v)\Big)\,. \tag{7.1.7}$$

On vérifie alors facilement que $\Big(\frac{h}{2}\partial_x(\sqrt{3}\mathcal{T}_1v+\mathcal{T}_2v)^2-\mathcal{Q}v,v\Big)=0$, ce qui fournit le résultat escompté. □

On voit bien ici tout l'intérêt d'avoir choisi la formulation (7.1.1) plutôt que la formulation historique. Cette conservation d'énergie donne en effet un contrôle, entre autre, des quantités (hv,v), $(h\mathcal{T}_1v,\mathcal{T}_1v)$ et $(h\mathcal{T}_2v,\mathcal{T}_2v)$, ce qui implique la présence d'effets régularisants similaires à ceux de l'équations de Benjamin,Bona et Mahony [7]. D'un point de vue numérique, on peut également s'attendre à un effet stabilisateur du terme $\frac{\mu}{h}\mathcal{T}_\beta[h,b]\partial_t v$ sur le schéma, ce qui représente un atout considérable. De plus, la formulation (7.1.3) présente l'avantage de simplifier la discrétisation de ce terme : il suffit en effet de discrétiser les opérateurs différentiels du premier ordre $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ pour en déduire directement la discrétisation adéquate de $\mathcal{T}$.

A ce stade, il nous est malheureusement apparu que la préservation de (7.1.4) au niveau semi-discret n'était pas, à priori, compatible avec le schéma et la méthode de relaxation de Besse et Bruneau. Cette conservation est *peut-être* préservée par ce type de schéma, mais nous avons pu démontrer mieux qu'une conservation à un reste d'ordre $O(\varepsilon(\mu+\varepsilon)\delta t)$ près, où δt est le pas de temps du schéma. Ce reste n'est évidemment pas satisfaisant si l'on considère le régime de validité des équations de Green-Naghdi, ε pouvant être à priori pris de l'ordre de $O(1)$, mais deux arguments plaident en sa faveur. Le premier est que dans la réalité, et dans les zones géographiques qui nous intéressent, il est extrêmement rare de voir ε atteindre des valeurs de l'ordre de $O(1)$. En effet, nous ne nous intéressons pas aux zones de déferlement que sont les zones de surf interne et de swash. Or ces zones sont les seules dans lesquelles ε peut attendre des valeurs de l'ordre de $O(1)$. En amont de ces

zones, ε ne dépasse pas en général la valeur 0.3. Deuxièmement, nous comparerons dans la section suivante le modèle de Green-Naghdi avec le modèle de Boussinesq symétrique (Σ) pour différentes valeurs de μ et ε. Il ne semble ainsi pas absurde de désirer la préservation de cette conservation d'énergie **au moins pour des faibles valeurs de** ε. De telle sorte, on assurera une certaine stabilité du schéma lors de la comparaison avec le modèle (Σ) pour ε petit. Cette stabilité ne sera cependant pas à priori assurée pour des valeurs plus élevées, mais nous nous cantonnerons à une valeur maximale de 0.3 sur ε afin de limiter les risques d'instabilités. Pour revenir à la construction du schéma, nous procéderons donc comme suit : après avoir introduit une variante de la méthode de relaxation de Besse et Bruneau, nous présenterons le schéma numérique semi-discrétisé choisi, et nous vérifierons que la conservation (7.1.4) est préservée au niveau du semi-discrétisé à un reste d'ordre $O(\varepsilon(\mu+\varepsilon)\delta t)$ près.

Commençons par les définitions usuelles : on notera L la longueur horizontale du domaine et T le temps pour lequel les simulations seront effectuées. On définit δx le pas d'espace, δt le pas de temps et :

$$v_i^n = v(n\delta t, i\delta_x) \ ; \ \eta_i^n = \eta(n\delta t, i\delta_x) \ ; \ h_i^n = h(n\delta t, i\delta_x) \ , \ \forall t \in [0, N_x], \forall n \in [0, N_t]$$

avec $N_x = E[\dfrac{L}{dx}]$ et $N_t = E[\dfrac{T}{dt}]$.
Nous utiliserons ici une méthode de relaxation où les termes prédicteurs $v^{n+\frac{1}{2}}$, $\eta^{n+\frac{1}{2}}$ et $h^{n+\frac{1}{2}}$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} v^n = \dfrac{v^{n+\frac{1}{2}} + v^{n-1/2}}{2} \\ \eta^{n+\frac{1}{2}} = \eta^n - \dfrac{dt}{2}\partial_x(h^n v^n) \\ h^{n+\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon\eta^{n+\frac{1}{2}} - \beta b \end{cases} \tag{7.1.8}$$

où l'on utilise la notation $w^k = (w_i^k)_{0\le i\le N_x}$ et $b = (b_i)_{0\le i\le N_x}$.
La définition du terme prédicteur $\eta^{n+\frac{1}{2}}$ tire clairement avantage de la première équation de (7.1.1). L'intérêt de cette définition alternative apparaîtra clairement par la suite. Introduisons maintenant le schéma semi-discrétisé choisi pour les équations (7.1.1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\eta^{n+1}-\eta^n}{\delta t} + \partial_x\Big(h^{n+\frac{1}{2}}\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big) = 0 \ , \\ \Big(1 + \dfrac{\mu}{h^{n+\frac{1}{2}}}\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac{1}{2}}, b]\Big)\dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t} + \partial_x\Big(\dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\Big) + \varepsilon\Big[\alpha v^{n+\frac{1}{2}}\partial_x\Big(\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big) \\ +(1-\alpha)\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\partial_x v^{n+\frac{1}{2}}\Big] + \dfrac{\mu\varepsilon}{h^{n+\frac{1}{2}}}\mathcal{Q}_\beta[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, b]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} = 0 \ , \end{cases} \tag{7.1.9}$$

où α est un paramètre à déterminer (voir le Chapitre 6 pour plus de détails sur la discrétisation du terme $v\partial_x v$) et où l'opérateur linéaire $\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac{1}{2}}, b]$ est défini par $\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac{1}{2}}, b] =$

$(\mathcal{T}_1^{n+\frac{1}{2}})^* h^{n+\frac{1}{2}} \mathcal{T}_1^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{T}_2^* h^{n+\frac{1}{2}} \mathcal{T}_2$ avec :

$$\mathcal{T}_1^{n+\frac{1}{2}} v := \frac{h^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \partial_x v - \frac{\sqrt{3}}{2} \beta \partial_x b \, v \ ,$$

et l'opérateur non-linéaire $\mathcal{Q}_\beta[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, b]$ par $\mathcal{Q}_\beta[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, b]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} =$
$\mathcal{Q}_0[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} + \beta \mathcal{Q}_1[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, b]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} + \beta^2 \mathcal{Q}_2[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, b]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}$
avec :

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_0[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} = \dfrac{1}{3}\partial_x \Big[{h^{n+\frac{1}{2}}}^3 (\partial_x v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} - v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x^2 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}) \Big], \\ \mathcal{Q}_1[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, b]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} = \dfrac{1}{2}\Big[\partial_x ((h^{n+\frac{1}{2}})^2 v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} \partial_x b) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - {h^{n+\frac{1}{2}}}^2 \partial_x b (v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x^2 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} - \partial_x v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}) \Big] \\ \mathcal{Q}_2[h^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, b]\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} = h^{n+\frac{1}{2}} \partial_x b (v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} \partial_x b)) \, . \end{cases}$$

Nous prouvons maintenant notre affirmation sur la quasi-préservation par ce schéma semi-discrétisé de la conservation d'énergie (7.1.4) via la proposition suivante :

Proposition 7.1.2. *Pour la valeur $\alpha = 2/3$, on a sur le schéma semi-discrétisé (7.1.9) la quasi-conservation suivante :*

$$\begin{aligned} &|\eta^{n+1}|^2 + (h^{n+1} v^{n+1}, v^{n+1}) + (h^{n+1} \mathcal{T}_1^{n+1} v^{n+1}, \mathcal{T}_1^{n+1} v^{n+1}) + (h^{n+1} \mathcal{T}_2^{n+1} v^{n+1}, \mathcal{T}_2^{n+1} v^{n+1}) \\ &= |\eta^n|^2 + (h^n v^n, v^n) + (h^n \mathcal{T}_1^n v^n, \mathcal{T}_1^n v^n) + (h^n \mathcal{T}_2^n v^n, \mathcal{T}_2^n v^n) + O(\varepsilon(\mu+\varepsilon)\delta t) \ , \end{aligned} \tag{7.1.10}$$

où $O(\varepsilon(\mu+\varepsilon)\delta t)$ est à comprendre au sens de la norme $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. On multiplie la première équation de (7.1.1) par $\dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}$ et la seconde par $h^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}$, on intègre sur $\mathbb{R}$ et on additionne pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\eta^{n+1}-\eta^n}{\delta t}, \frac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\Big) + \Big(\partial_x (h^{n+\frac{1}{2}} \frac{v^{n+1}+v^n}{2}), \frac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\Big) \\ &+ \Big(\frac{v^{n+1}-v^n}{\delta t}, h^{n+\frac{1}{2}} \frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big) + \mu \Big(\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac{1}{2}}, b] \frac{v^{n+1}-v^n}{\delta t}, \frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big) \\ &+ \Big(\partial_x (\frac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}), h^{n+\frac{1}{2}} \frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big) + \varepsilon \Big(\alpha v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x \Big(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big) \\ &+ (1-\alpha) \frac{v^{n+1}+v^n}{2} \partial_x v^{n+\frac{1}{2}}, h^{n+\frac{1}{2}} \frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big) = O(\varepsilon\mu) \end{aligned}$$

soit après simplification et multiplication par $2\delta t$:

$$\begin{aligned}&|\eta^{n+1}|^2-|\eta^n|^2+\Big(v^{n+1}-v^n,h^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)+\mu\Big(\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac12},b](v^{n+1}-v^n),v^{n+1}+v^n\Big)\\&+\delta t\,\varepsilon\Big(\alpha v^{n+\frac12}\partial_x\Big(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)+(1-\alpha)\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\partial_x v^{n+\frac12},h^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)=O(\varepsilon\mu\,\delta t)\end{aligned}\tag{7.1.11}$$

A ce stade nous montrons que la contribution du terme discrétisé de $v\partial_x v$ est d'ordre $O(\varepsilon^2\,\delta t)$:

$$\begin{aligned}&\delta t\,\varepsilon\Big(\alpha v^{n+\frac12}\partial_x\Big(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)+(1-\alpha)\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\partial_x v^{n+\frac12},h^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)=\\&\delta t\,\varepsilon\Big(\alpha v^{n+\frac12}\partial_x\Big(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)+(1-\alpha)\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\partial_x v^{n+\frac12},(v^{n+1}+v^n)\Big)+O(\varepsilon^2\,\delta t)\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $h^{n+\frac12}=1+\varepsilon\eta^{n+\frac12}-\beta b$. Or nous avons vu dans le Chapitre 6 que le produit scalaire restant est nul si $\alpha=2/3$, ce qui correspond à l'hypothèse de départ. Il reste donc dans (7.1.11) :

$$\begin{aligned}&|\eta^{n+1}|^2-|\eta^n|^2+\Big(v^{n+1}-v^n,h^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)\\&+\mu\Big(\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac12},b](v^{n+1}-v^n),v^{n+1}+v^n\Big)=O(\varepsilon(\mu+\varepsilon)\,\delta t)\end{aligned}\tag{7.1.12}$$

Analysons maintenant le terme $\Big(v^{n+1}-v^n,h^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)$:

$$\begin{aligned}\Big(v^{n+1}-v^n,h^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)&=\Big(h^{n+1}v^{n+1},v^{n+1}\Big)-\Big(h^nv^n,v^n\Big)\\&\quad-\Big(h^{n+1}-h^{n+\frac12},(v^{n+1})^2\Big)-\Big(h^{n+\frac12}-h^n,(v^n)^2\Big)\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{cases}h^{n+\frac12}-h^n=-\dfrac{\varepsilon\,\delta t}{2}\partial_x(h^nv^n)\ \text{ par définition de } \eta^{n+\frac12}\ ,\\ h^{n+1}-h^n=-\varepsilon\,\delta t\partial_x\Big(h^{n+\frac12}\dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)\ \text{ d'après le schéma (7.1.9) .}\end{cases}\tag{7.1.13}$$

Il vient donc que :

$$\begin{aligned}\Big(h^{n+\frac12}-h^n,(v^n)^2\Big)&=-\frac{\varepsilon\,\delta t}{2}\Big(\partial_x(h^nv^n),(v^n)^2\Big)\\&=-\frac{\varepsilon\,\delta t}{2}\Big(\partial_xv^n,(v^n)^2\Big)+O(\varepsilon^2\,\delta t)\\&=O(\varepsilon^2\,\delta t)\end{aligned}$$

et en soustrayant les deux égalités de (7.1.13) :

$$\begin{aligned}\Big(h^{n+1}-h^{n+\frac12},(v^{n+1})^2\Big)&=-\varepsilon\,\delta t\Big(\partial_x\Big(h^{n+\frac12}\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)-\frac12\partial_x(h^nv^n),(v^{n+1})^2\Big)\\&=-\varepsilon\,\delta t\Big(\partial_x\Big(\frac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)-\frac12\partial_xv^n,(v^{n+1})^2\Big)+O(\varepsilon^2\,\delta t)\\&=-\frac{\varepsilon\,\delta t}{2}\Big(\partial_xv^{n+1},(v^{n+1})^2\Big)+O(\varepsilon^2\,\delta t)\\&=O(\varepsilon^2\,\delta t)\end{aligned}$$

On obtient ainsi grâce à ces deux résultats :

$$\Big(v^{n+1}-v^n, h^{n+1}(v^{n+1}+v^n)\Big) = \Big(h^{n+1}v^{n+1}, v^{n+1}\Big) - \Big(h^n v^n, v^n\Big) + O(\varepsilon^2\,\delta t) \qquad (7.1.14)$$

Passons maintenant au terme $\mu\Big(\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac12}, b](v^{n+1}-v^n), v^{n+1}+v^n\Big)$. On obtient facilement d'après la définition de $\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac12}, b]$ que :

$$\begin{aligned}\mu\Big(\mathcal{T}_\beta[h^{n+\frac12}, b](v^{n+1}-v^n), v^{n+1}+v^n\Big) &= \mu\Big(h^{n+\frac12}\mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}-v^n), \mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)\\ &\quad+\mu\Big(h^{n+\frac12}\mathcal{T}_2(v^{n+1}-v^n), \mathcal{T}_2(v^{n+1}+v^n)\Big)\end{aligned} \qquad (7.1.15)$$

En utilisant le fait que l'opérateur $\mathcal{T}_2$ est linéaire et la même méthode que pour le terme $\Big(v^{n+1}-v^n, h^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)$ (le coefficient μ en facteur accélère ici l'obtention du résultat), il vient facilement que :

$$\begin{aligned}\mu\Big(h^{n+\frac12}\mathcal{T}_2(v^{n+1}-v^n), \mathcal{T}_2(v^{n+1}+v^n)\Big) &= \mu\Big(h^{n+1}\mathcal{T}_2 v^{n+1}, \mathcal{T}_2 v^{n+1}\Big) - \mu\Big(h^n\mathcal{T}_2 v^n, \mathcal{T}_2 v^n\Big)\\ &\quad+O(\mu\varepsilon\,\delta t)\end{aligned} \qquad (7.1.16)$$

Terminons par le terme $\mu\Big(h^{n+\frac12}\mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}-v^n), \mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)$ que l'on traite comme suit :

$$\begin{aligned}&\mu\Big(h^{n+\frac12}\mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}-v^n), \mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big)\\ &= \mu\Big(h^{n+1}\mathcal{T}_1^{n+1}v^{n+1}, \mathcal{T}_1^{n+1}v^{n+1}\Big) - \mu\Big(h^n\mathcal{T}_1^n v^n, \mathcal{T}_1^n v^n\Big)\\ &\quad-\mu\Big(h^{n+1}-h^{n+\frac12}, (\mathcal{T}_1^{n+\frac12}v^{n+1})^2\Big) - \mu\Big(h^{n+\frac12}-h^n, (\mathcal{T}_1^{n+\frac12}v^n)^2\Big)\\ &\quad-\mu\Big(h^n(\mathcal{T}_1^{n+\frac12}-\mathcal{T}_1^n)v^n, (\mathcal{T}_1^{n\frac12}+\mathcal{T}_1^n)v^n\Big)\\ &\quad-\mu\Big(h^{n+1}(\mathcal{T}_1^{n+1}-\mathcal{T}_1^{n+\frac12})v^{n+1}, (\mathcal{T}_1^{n+1}+\mathcal{T}_1^{n+\frac12})v^{n+1}\Big)\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $h^{n+\frac12}-h^n = O(\varepsilon\,\delta t)$ et $h^{n+1}-h^{n+\frac12} = O(\varepsilon\,\delta t)$, il vient facilement d'après la définition de $\mathcal{T}_1^n$ que $\mathcal{T}_1^{n+\frac12}-\mathcal{T}_1^n = O(\varepsilon\,\delta t)$ et $\mathcal{T}_1^{n+1}-\mathcal{T}_1^{n+\frac12} = O(\varepsilon\,\delta t)$. En intégrant ces résultats dans l'égalité précédente, on obtient directement :

$$\begin{aligned}\mu\Big(h^{n+\frac12}\mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}-v^n), \mathcal{T}_1^{n+\frac12}(v^{n+1}+v^n)\Big) &= \mu\Big(h^{n+1}\mathcal{T}_1^{n+1}v^{n+1}, \mathcal{T}_1^{n+1}v^{n+1}\Big)\\ &\quad-\mu\Big(h^n\mathcal{T}_1^n v^n, \mathcal{T}_1^n v^n\Big) + O(\mu\varepsilon\,\delta t)\end{aligned}$$

Muni de cette dernière égalité, de (7.1.16), de (7.1.15) et de (7.1.14), on obtient depuis l'égalité (7.1.11) que :

$$\begin{aligned}&|\eta^{n+1}|^2 + (h^{n+1}v^{n+1}, v^{n+1}) + (h^{n+1}\mathcal{T}_1^{n+1}v^{n+1}, \mathcal{T}_1^{n+1}v^{n+1}) + (h^{n+1}\mathcal{T}_2^{n+1}v^{n+1}, \mathcal{T}_2^{n+1}v^{n+1})\\ &= |\eta^n|^2 + (h^n v^n, v^n) + (h^n\mathcal{T}_1^n v^n, \mathcal{T}_1^n v^n) + (h^n\mathcal{T}_2^n v^n, \mathcal{T}_2^n v^n) + O(\varepsilon(\mu+\varepsilon)\delta t)\ ,\end{aligned}$$

ce qui clôt la démonstration. □

Pour terminer, nous pouvons écrire le schéma numérique complet des équations de Green-Naghdi (7.1.1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\eta_i^{n+1}-\eta_i^n}{\delta t} + \Big(D_1 h^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)_i = 0 \ , \\ \Big((I + \dfrac{\mu}{h^{n+\frac{1}{2}}} T^{n+\frac{1}{2}}) \dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t}\Big)_i + \Big(D_1 \dfrac{\eta^{n+1}+\eta^n}{2}\Big)_i + \dfrac{\mu\varepsilon}{h_i^{n+\frac{1}{2}}} \Big(Q^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)_i \\ +\varepsilon\Big[\dfrac{1}{3}(v_i^{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{v_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}+v_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2})\Big(D_1 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2}\Big)_i + \dfrac{1}{3}\Big(D_1 v^{n+\frac{1}{2}}\Big)_i \dfrac{v_i^{n+1}+v_i^n}{2}\Big] = 0 \ , \end{cases} \tag{7.1.17}$$

où la matrice $T^{n+\frac{1}{2}}$ est définie par $T^{n+\frac{1}{2}} = (T_1^{n+\frac{1}{2}})^T h^{n+\frac{1}{2}} T_1^{n+\frac{1}{2}} + (T_2^{n+\frac{1}{2}})^T h^{n+\frac{1}{2}} T_2^{n+\frac{1}{2}}$ avec :

$$\begin{cases} T_1 \dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t} = \dfrac{h^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} D_1 \dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta D_1 b \cdot \dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t} \ , \\ T_2 \dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t} = \dfrac{1}{2}\beta D_1 b \cdot \dfrac{v^{n+1}-v^n}{\delta t} \ , \end{cases}$$

et la matrice $Q^{n+\frac{1}{2}}$ est définie par $Q^{n+\frac{1}{2}} = Q_0^{n+\frac{1}{2}} + \beta Q_1^{n+\frac{1}{2}} + \beta_2 Q_2^{n+\frac{1}{2}}$ avec :

$$\begin{cases} Q_0^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} = -\dfrac{1}{3} D_1 \Big[(h^{n+\frac{1}{2}})^3 (v^{n+\frac{1}{2}} D_2 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} - D_1 v^{n+\frac{1}{2}} \cdot D_1 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2})\Big] \ , \\ Q_1^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} = \dfrac{1}{2}\Big[D_1((h^{n+\frac{1}{2}})^2 v^{n+\frac{1}{2}} D_1(\partial_x b \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2})) \\ \qquad -(h^{n+\frac{1}{2}})^2 D_1 b (v^{n+\frac{1}{2}} D_2 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} - D_1 v^{n+\frac{1}{2}} \cdot D_1 \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2})\Big] \ , \\ Q_2^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2} = h^{n+\frac{1}{2}} D_1 b (v^{n+\frac{1}{2}} D_1(\partial_x b \dfrac{v^{n+1}+v^n}{2})) \ . \end{cases}$$

7.1.3 Validation du schéma en fond plat

Les équations de Green-Naghdi (7.1.1) possédent une solution analytique en fond plat dont l'expression est la suivante :

$$\begin{cases} \eta(t,x) = \dfrac{\alpha}{\cosh^2\big(k(x-ct+l)\big)} \ , \\ v(t,x) = \dfrac{c\eta(t,x)}{1+\varepsilon\eta(t,x)} \end{cases} \tag{7.1.18}$$

où les constantes k et c sont données par $k = \sqrt{\dfrac{3\alpha\varepsilon}{4\mu(1+\alpha\varepsilon)}}$ et $c = \sqrt{1+\alpha\varepsilon}$, α et l étant des constantes arbitrairement choisies.

Afin de valider le schéma (7.1.17) en fond plat, on spécifie naturellement les conditions initiales de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta(0,x) = \dfrac{\alpha}{\cosh^2\big(k(x+l)\big)} \ , \\ v(0,x) = \dfrac{c\eta(0,x)}{1+\varepsilon\eta(0,x)} \end{cases} \tag{7.1.19}$$

Pour de telles données initiales, le schéma (7.1.17) des équations de Green-Naghdi est supposé propager le soliton (7.1.18) sans déformation. Dans le but de valider le schéma, les résultats numériques obtenus ont été comparés avec la solution analytique (7.1.18) pour différentes valeurs de ε et μ . Les simulations ont été réalisées sur des temps $T = 1/\varepsilon$ et pour une valeur de l'amplitude α égale à 0.25. Nous avons remarqué l'apparition de légères instabilités en arrière du soliton sur des temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon)$ et pour des ratios ε/μ élevés, et le fait de diminuer l'amplitude α permet de supprimer ces instabilités sans avoir à raffiner de façon importante le maillage. Les erreurs relatives sur la surface libre et sur la vitesse ont été calculées en norme L^∞ et le tableau suivant donne un aperçu des résultats obtenus :

ε	μ	T	L	δx	δt	erreur relative en η	erreur relative en v
0.05	0.02	20	80	0.04	0.02	$7,7865.10^{-3}$	$7,6794.10^{-3}$
0.05	0.1	20	80	0.05	0.05	$1,5828.10^{-3}$	$1,5363.10^{-3}$
0.05	0.2	20	80	0.05	0.05	$5,614.10^{-4}$	$5,415.10^{-4}$
0.1	0.02	10	80	0.04	0.02	$1,03475.10^{-2}$	$1,00933.10^{-2}$
0.1	0.1	10	80	0.05	0.05	$2,1035.10^{-3}$	$2,0193.10^{-3}$
0.1	0.2	10	80	0.05	0.05	$7,461.10^{-4}$	$7,118.10^{-4}$
0.3	0.02	4	80	0.04	0.02	$1,73807.10^{-2}$	$1,63797.10^{-2}$
0.3	0.1	4	80	0.05	0.05	$3,5333.10^{-3}$	$3,277.10^{-3}$
0.3	0.2	4	80	0.05	0.05	$1,2531.10^{-3}$	$1,1552.10^{-3}$

Nous voyons bien ici la confirmation de la remarque précédente : on obtient les plus grandes erreurs lorsque le rapport ε/μ devient grand. Ces valeurs sont néanmoins suffisantes pour valider le schéma numérique (7.1.17). Passons maintenant aux simulations en fond non plat.

7.2 Comparaison numérique des modèles de Green-Naghdi et de Boussinesq (Σ)

L'objet de cette ultime section est de simuler les équations de Green-Naghdi (7.1.1) et le modèle de Boussinesq (Σ) sur deux topographies classiques, le cas d'une marche et celui

d'une pente douce, et ce pour différentes valeurs indépendantes de ε et μ. Le but d'une telle comparaison est non seulement d'observer la capacité du modèle de Green-Naghdi à reproduire les phénomènes physiques attendus pour une étendue relativement importante de valeurs de ε et β, mais aussi de déterminer les limites de validité du modèle (Σ) sur ces mêmes paramètres.

Avant de considérer les deux cas de topographie qui nous intéressent, il convient de se rappeler des hypothèses simplificatrices que nous avons faites lors de la construction du modèle de Boussinesq (Σ). Par souci de lisibilité, nous avions pris le nombre de Stokes S égal à 1, tout comme la constante β_0, de telle manière que pour ce modèle les valeurs de μ et β soient égales exactement à ε. En toute rigueur, il convient de refaire apparaître ces constantes, de manière à pouvoir ici faire varier μ, ε et β de manière indépendante. On utilisera donc ici la formulation rigoureuse de (Σ) suivante :

$$(\Sigma)\begin{cases} (1-\dfrac{\varepsilon}{S}a_2\partial_x^2)\partial_t v+\partial_x\eta+\varepsilon\Big[\dfrac{1}{2}\eta\partial_x\eta+\dfrac{3}{2}v\partial_x v-\dfrac{\beta_0}{2}b\partial_x\eta+\dfrac{a_1}{S}\partial_x^3\eta\Big]=0\,,\\ (1-\dfrac{\varepsilon}{S}a_4\partial_x^2)\partial_t\eta+\partial_x v+\varepsilon\Big[\dfrac{1}{2}\partial_x\left((\eta-\beta_0 b)v\right)+\dfrac{a_3}{S}\partial_x^3 v\Big]=0\,,\end{cases}$$

Dans les simulations numériques, nous utiliserons leur définition respective afin de calculer S et β_0 : $S=\varepsilon/\mu$ et $\beta_0=\beta/\varepsilon$. Comme dans le Chapitre 6, nous prenons $(\theta,\lambda_1,\lambda_2)=(\sqrt{2/3},1/2,1/2)$ de telle sorte à avoir $a_1=a_2=a_3=a_4=1/12$.

Terminons par un mot rapide sur les conditions initiales. Nous considérons pour les deux topographies le cas d'une onde solitaire se propageant vers la droite du domaine. Nous avons donc conservé pour les équations de Green-Naghdi les données initiales (7.1.19) définies précédemment. Pour ce qui est du modèle de Boussinesq (Σ), la donnée initiale en η reste naturellement la même, mais la donnée initiale sur la vitesse v mérite approfondissement. En effet, la vitesse v des équations de Boussinesq (Σ) correspond à la vitesse horizontale du fluide à la hauteur $-1+\theta(1+\varepsilon\eta-\beta b)$, avec $\theta=\sqrt{2/3}$ ici. En revanche, celle des équations de Green-Naghdi n'est autre que la vitesse horizontale moyennée sur la hauteur, à un reste d'ordre $O(\mu^2)$ près. Il convient donc, si l'on veut pouvoir comparer ces deux modèles, d'exprimer la condition initiale sur la vitesse v des équations de Boussinesq en fonction de celle imposée sur les équations de Green-Naghdi. Pour ce faire, il suffit d'inverser la relation (7.1.2) entre la vitesse des équations de Green-Naghdi et la vitesse horizontale à la surface, pour ensuite appliquer successivement les deux changements de variables du Chapitre 2. On obtient ainsi la formule suivante :

$$v_\Sigma(0,x)=\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}(\eta(0,x)-\beta b(x))\Big)\Big(1+\frac{\mu}{6}\partial_x^2\Big)\Big(1-\mu\mathcal{T}_\beta[h(0,x),b]\Big)v_{GN}(0,x)\ ,$$

où $v_{GN}(0,x)$ désigne la condition initiale (7.1.19). L'amplitude α de la surface libre a été gardée égale à 0.25. Venons en maintenant aux simulations numériques.

7.2.1 Le cas d'une marche

On s'intéresse ici à la comparaison des modèles de Green-Naghdi (7.1.1) et de Boussinesq (Σ) dans le cas d'une marche telle que définie dans le Chapitre 6. Nous rappelons ici cette définition :

$$b(x) = \begin{cases} 0\ , \ \ \forall x \in \left[0, \dfrac{L}{2} - \dfrac{3}{2}\right]\ , \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}(x - \dfrac{L}{2})\right)\right)\ , \ \ \forall x \in \left[\dfrac{L}{2} - \dfrac{3}{2}, \dfrac{L}{2} + \dfrac{3}{2}\right]\ , \\ 1\ , \ \ \forall x \in \left[\dfrac{L}{2} + \dfrac{3}{2}, L\right]\ , \end{cases}$$

où L est la longueur du domaine.

Résultats numériques

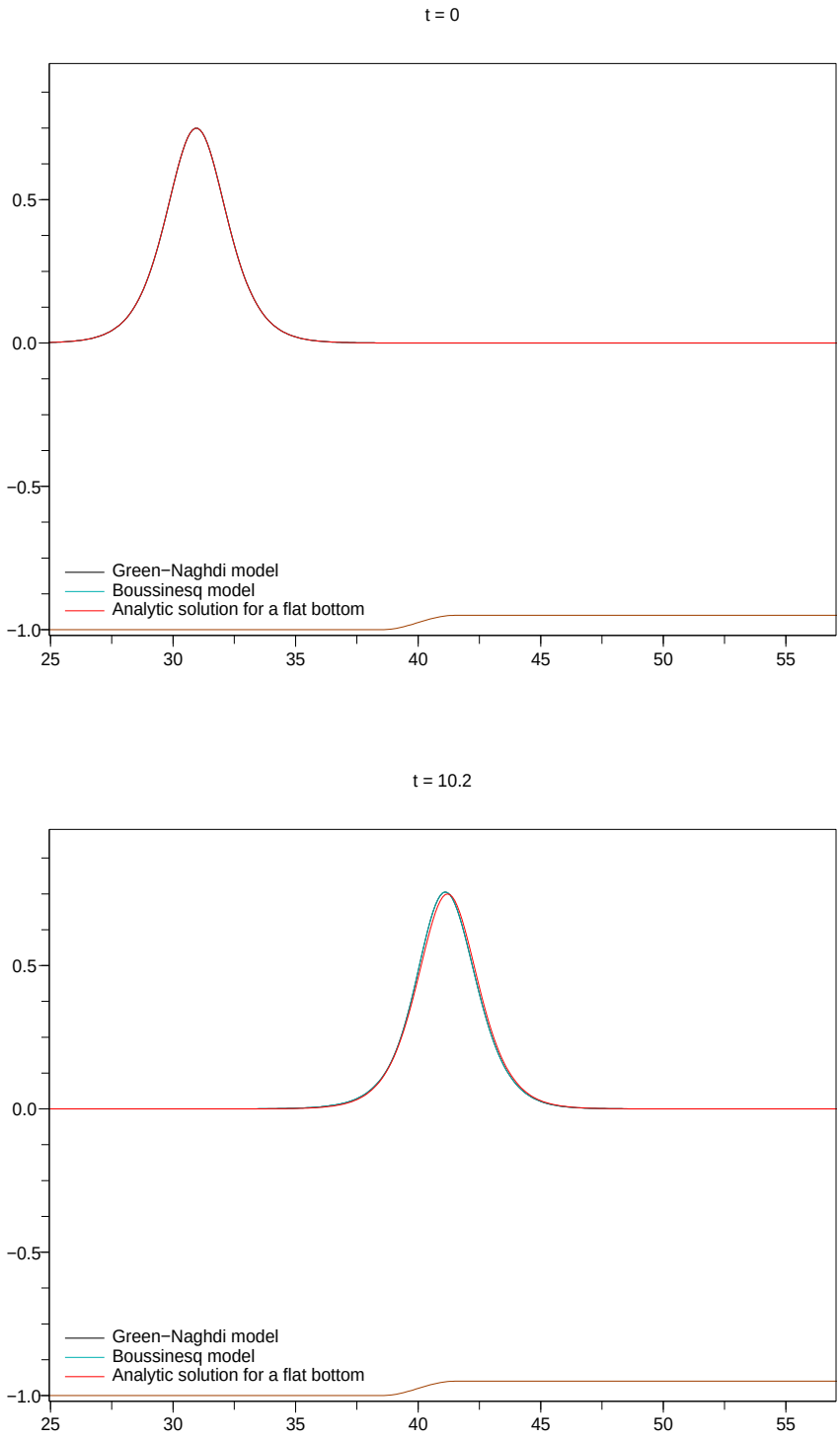
Les figures suivantes montrent les résultats obtenus à différents temps t ainsi que les courbes d'erreurs sur la surface libre entre les deux modèles de Green-Naghdi (7.1.1) et de Boussinesq symétrique (Σ). Ces erreurs sont des erreurs relatives calculées en norme $L^\infty(\mathbb{R})$. Les solutions numériques des deux modèles ont été systématiquement superposées dans les figures afin de faciliter la comparaison. Nous avons rajouté sur ces figures la courbe de la solution analytique (7.1.18) en fond plat, afin de pouvoir observer efficacement les effets liés aux changements bathymétriques.

Ces simulations ont été réalisées pour différentes valeurs des paramètres allant de 0.02 à 0.2 pour μ, de 0.05 à 0.3 pour ε et enfin de 0.05 à 0.5 pour β. Les résultats sont tous exprimés en variables adimensionnées. Cependant, afin d'accroître la lisibilité des courbes, nous avons choisi de tracer les surfaces libres correspondant à $z = 3\eta(t,x)$ au lieu de $z = \varepsilon\eta(t,x)$. Le tracé du fond correspond quant à lui classiquement à $z = -1 + \beta b(x)$. Les temps T de simulations des modèles ont été pris égaux à $1/\varepsilon$ hormis pour les cas où il était nécessaire de monter jusqu'à $T = 2/\varepsilon$ pour avoir des résultats intéressants. Le tableau suivant récapitule les paramètres utilisés lors de ces simulations :

Figure	μ	ε	β	T	L	δx	δt
7.2.1	0.02	0.05	0.05	20	80	0.04	0.02
7.2.3	0.02	0.3	0.1	8	80	0.04	0.02
7.2.5	0.1	0.1	0.5	20	80	0.05	0.05
7.2.7	0.2	0.3	0.3	8	80	0.05	0.05
7.2.9	0.2	0.05	0.5	20	80	0.05	0.05

Les figures 7.2.2, 7.2.4, 7.2.6, 7.2.8, 7.2.10 montrent quant à elles les erreurs relatives sur la surface libre entre les deux modèles.

FIG. 7.2.1 – Résultats obtenus pour $\mu = 0.02$, $\varepsilon = 0.05$ et $\beta = 0.05$



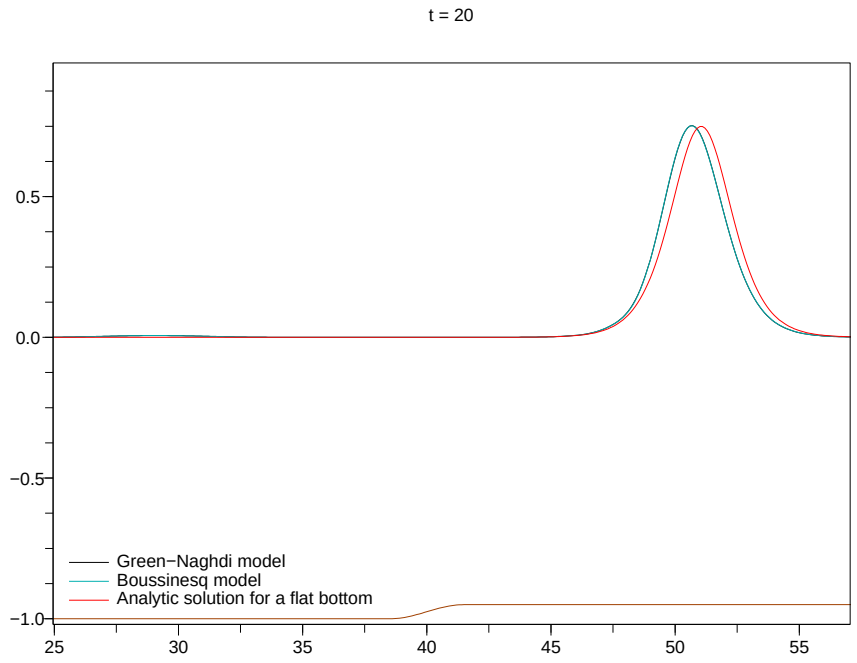


FIG. 7.2.2 – Erreur relative sur η pour $\mu = 0.02$, $\varepsilon = 0.05$ et $\beta = 0.05$

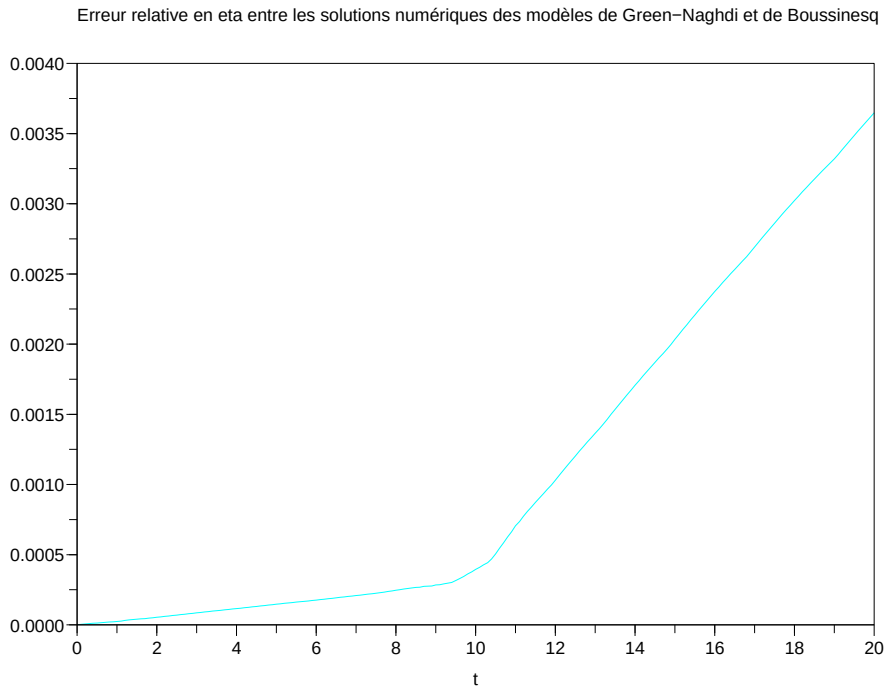
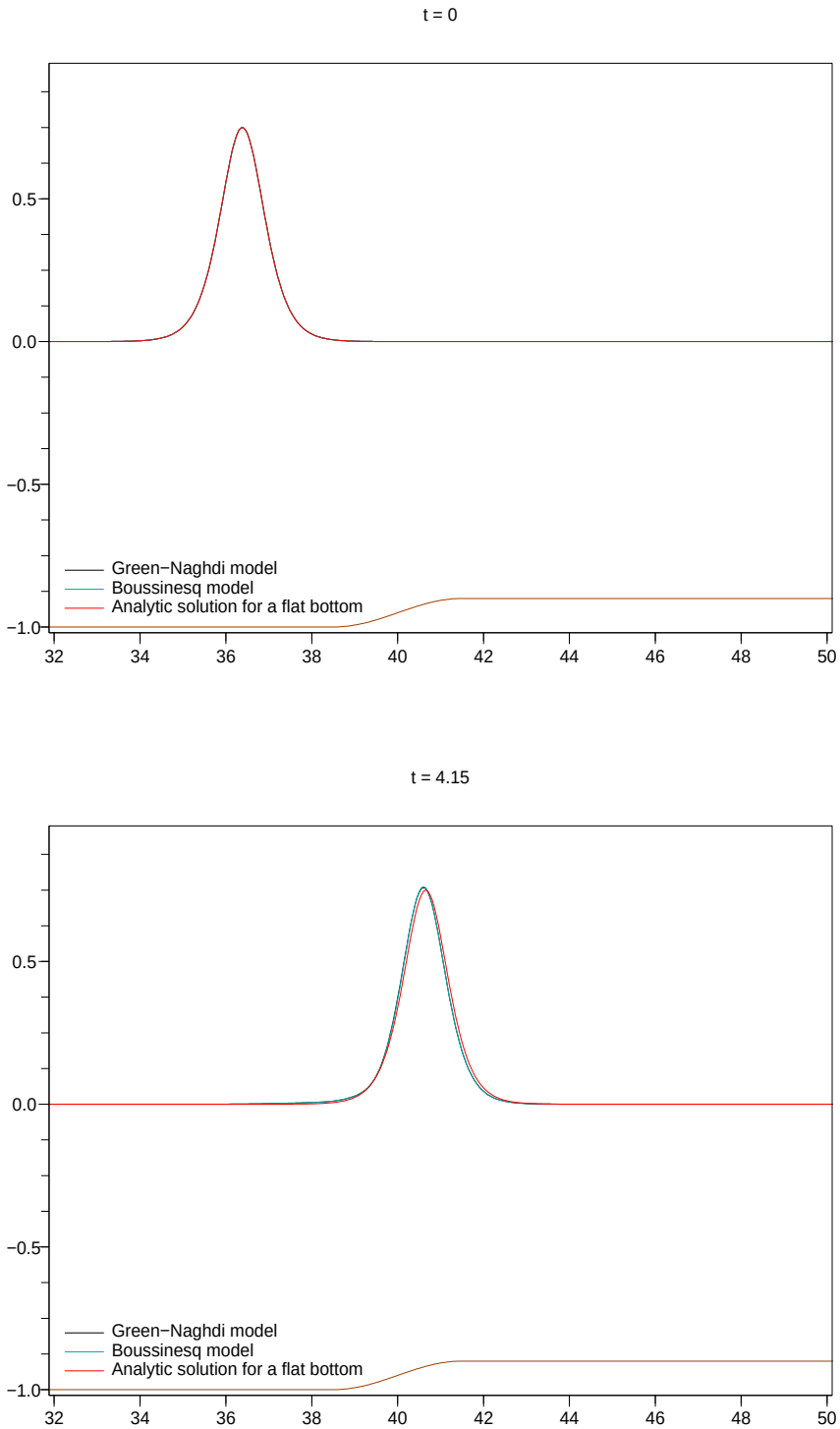


FIG. 7.2.3 – Résultats obtenus pour $\mu = 0.02$, $\varepsilon = 0.3$ et $\beta = 0.1$



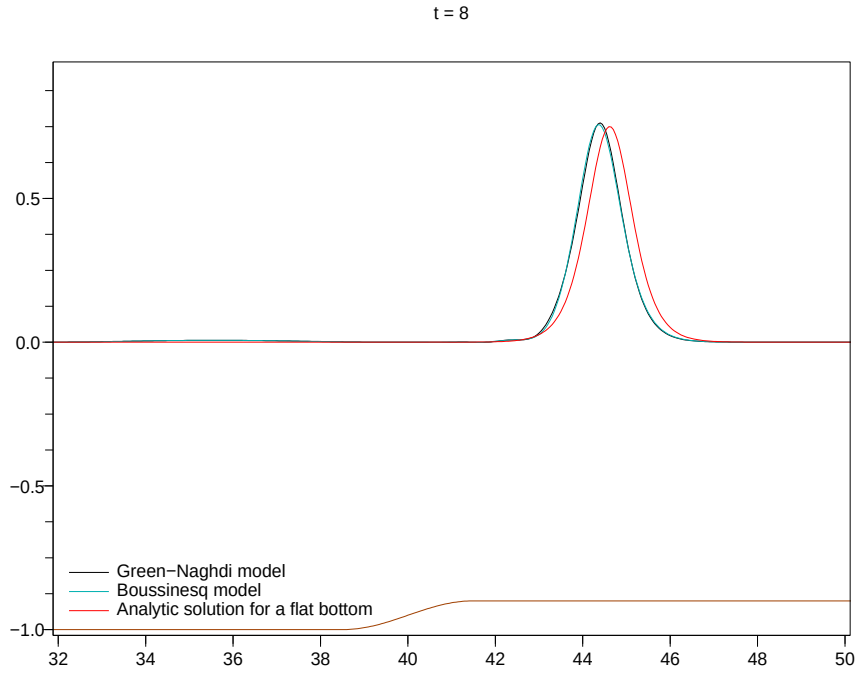


FIG. 7.2.4 – Erreur relative sur η pour $\mu = 0.02$, $\varepsilon = 0.3$ et $\beta = 0.1$

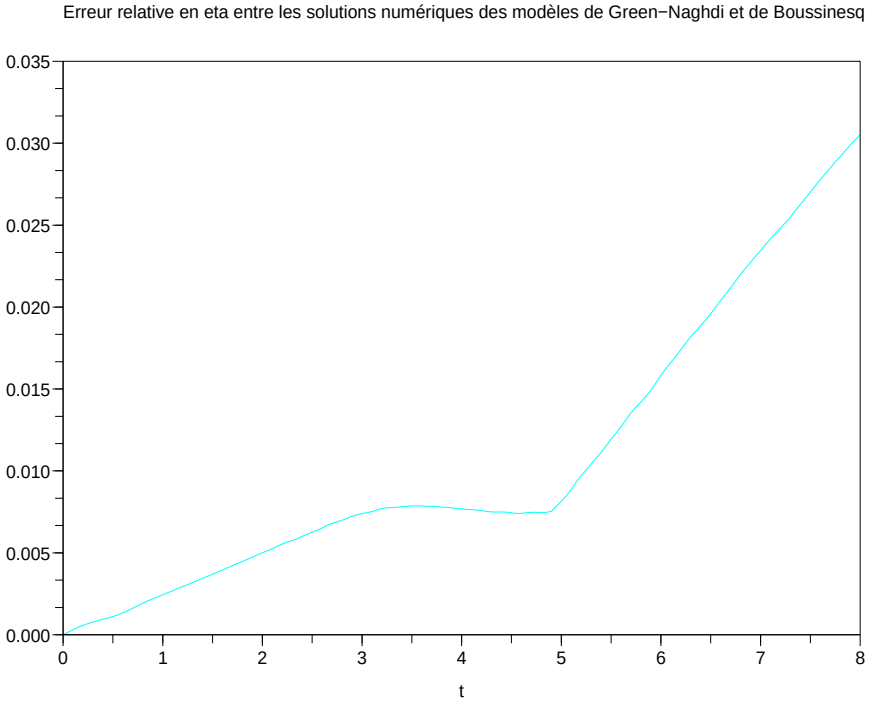
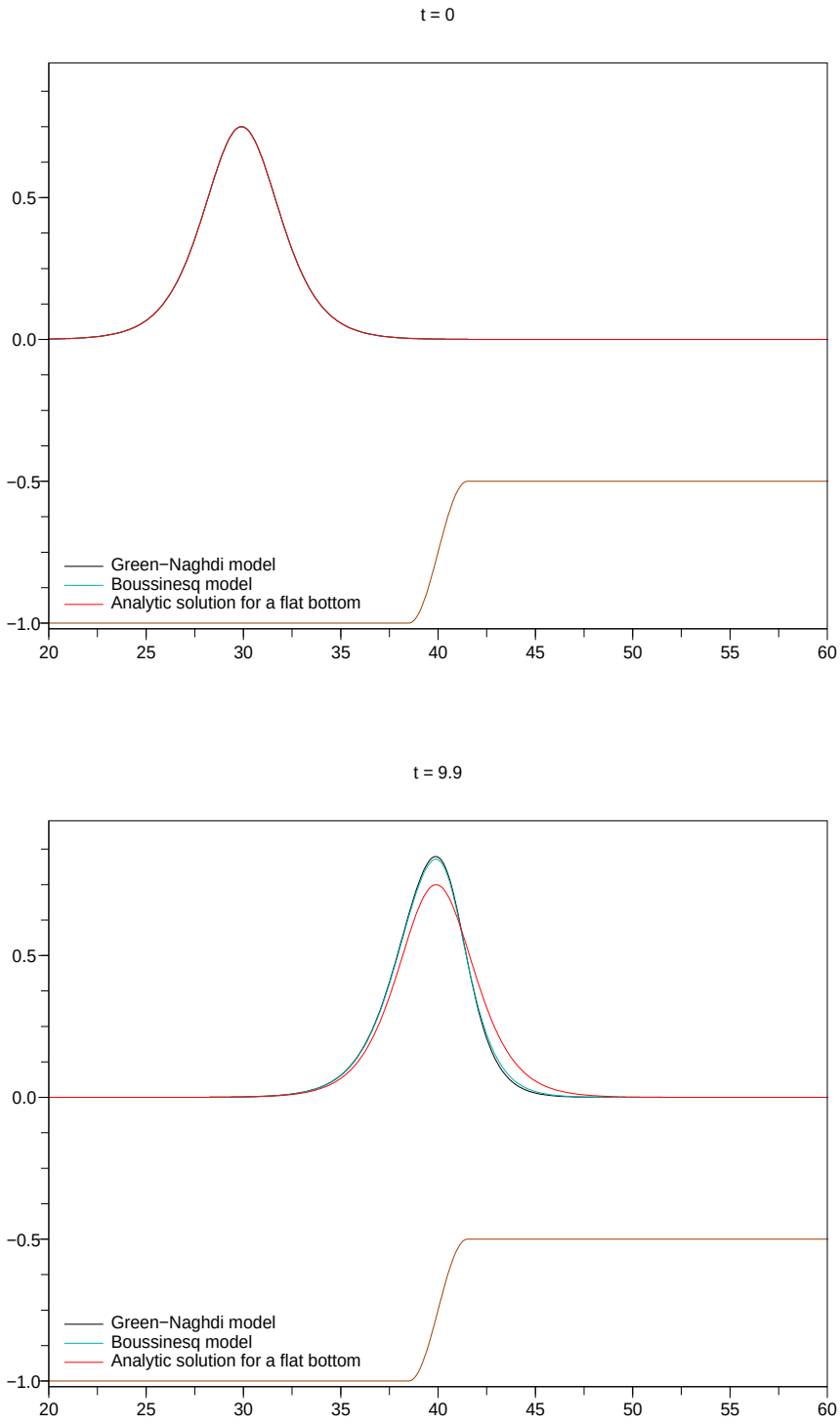


FIG. 7.2.5 – Résultats obtenus pour $\mu = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$ et $\beta = 0.5$



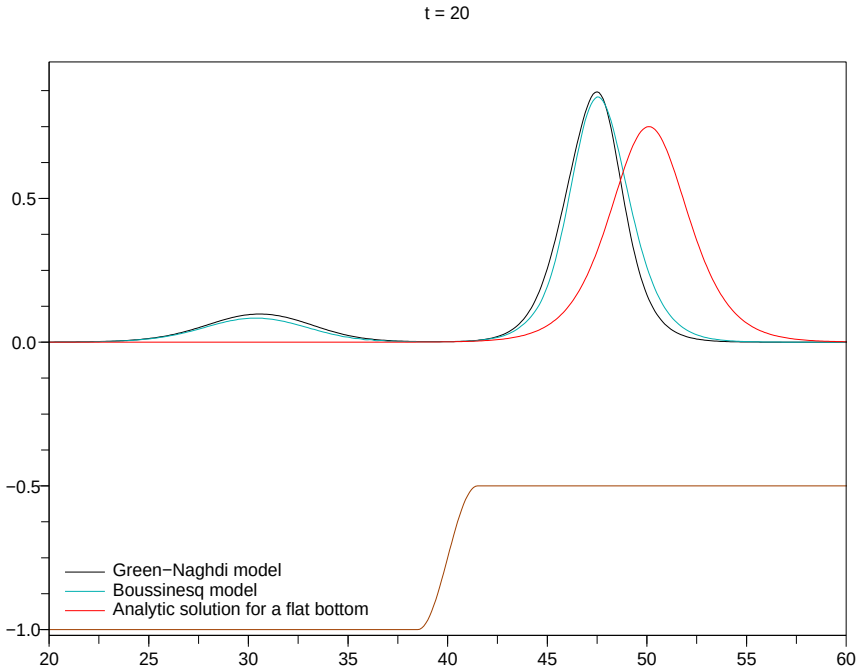


FIG. 7.2.6 – Erreur relative sur η pour $\mu = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$ et $\beta = 0.5$

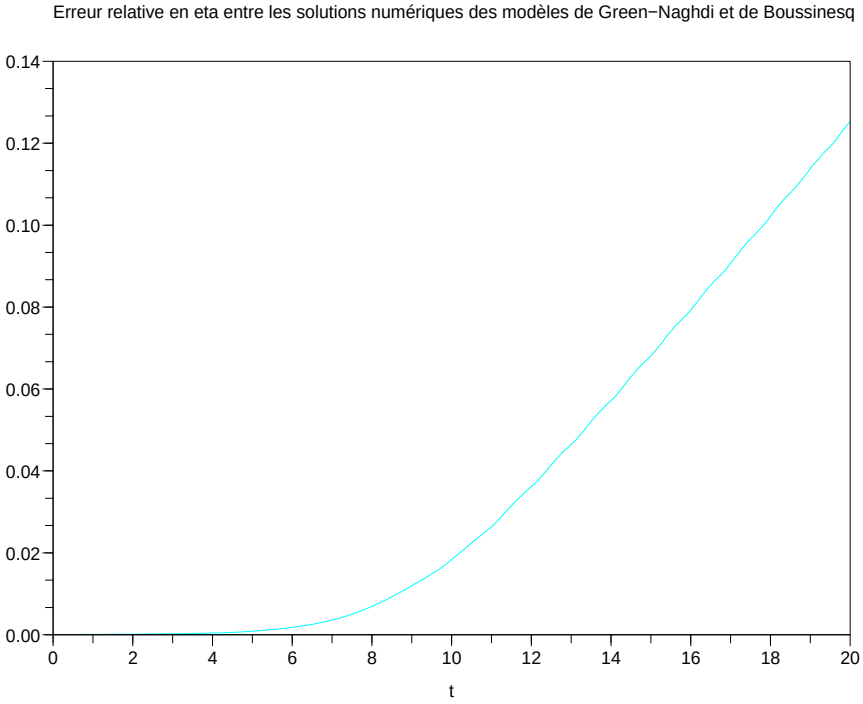
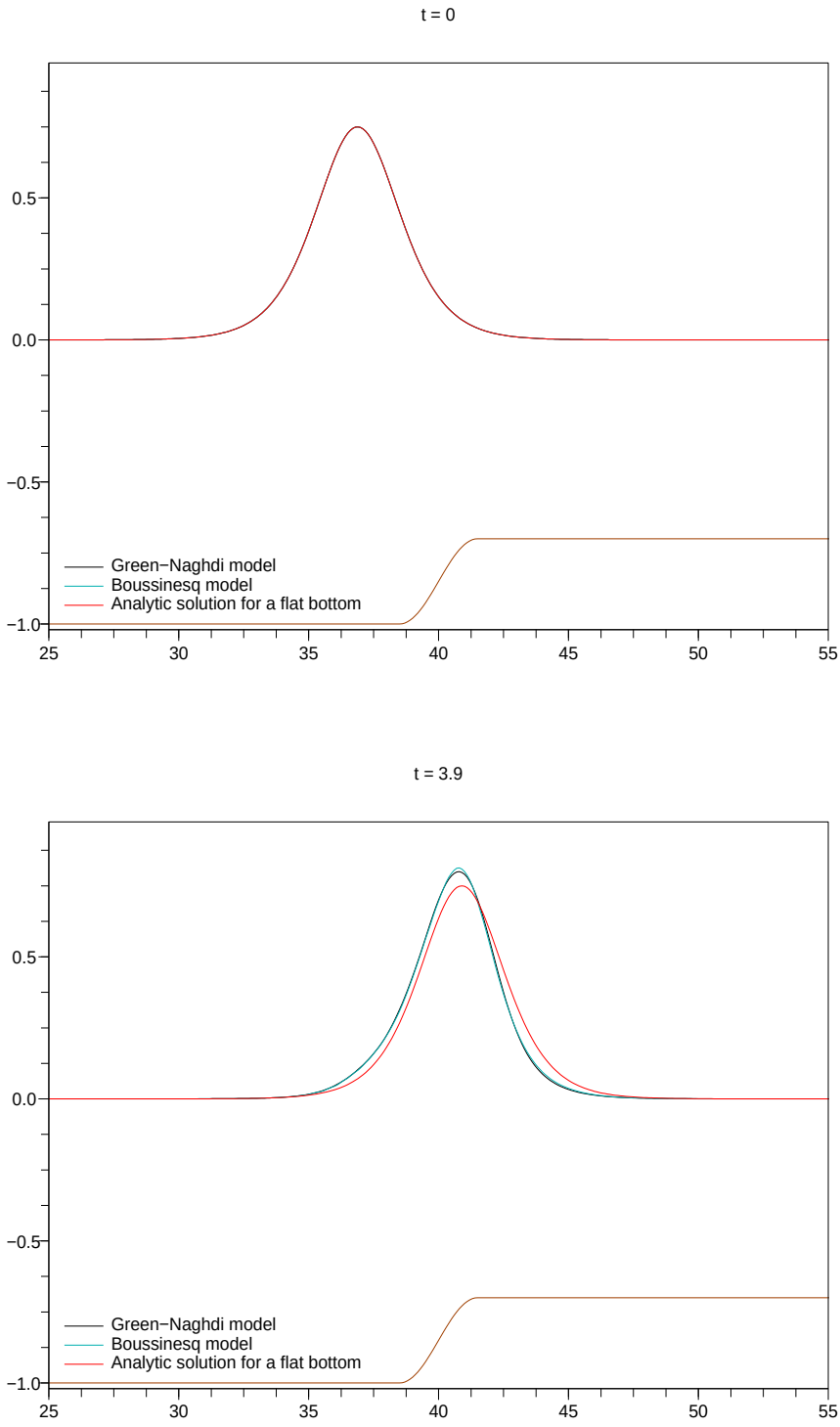


FIG. 7.2.7 – Résultats obtenus pour $\mu = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$ et $\beta = 0.3$



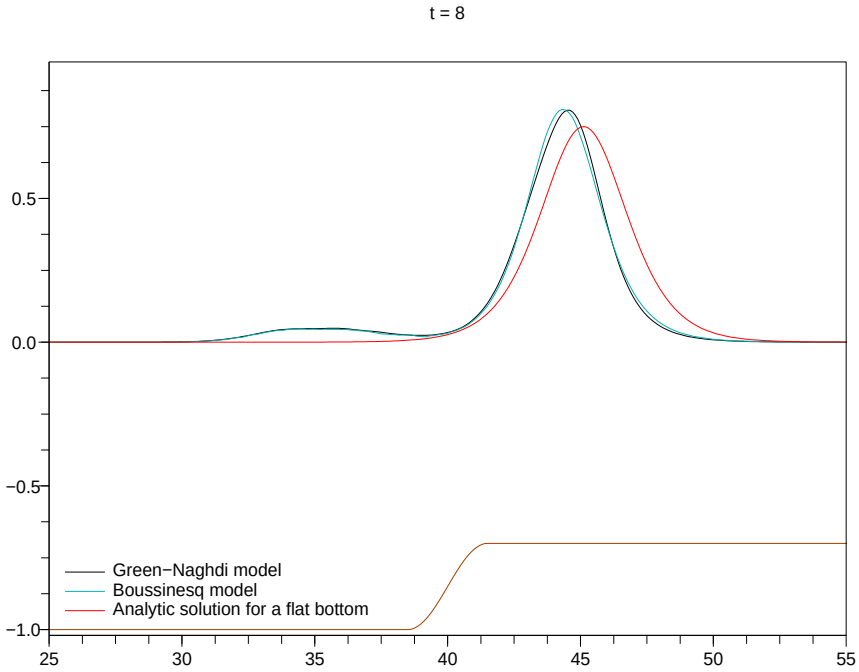


FIG. 7.2.8 – Erreur relative sur η pour $\mu = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$ et $\beta = 0.3$

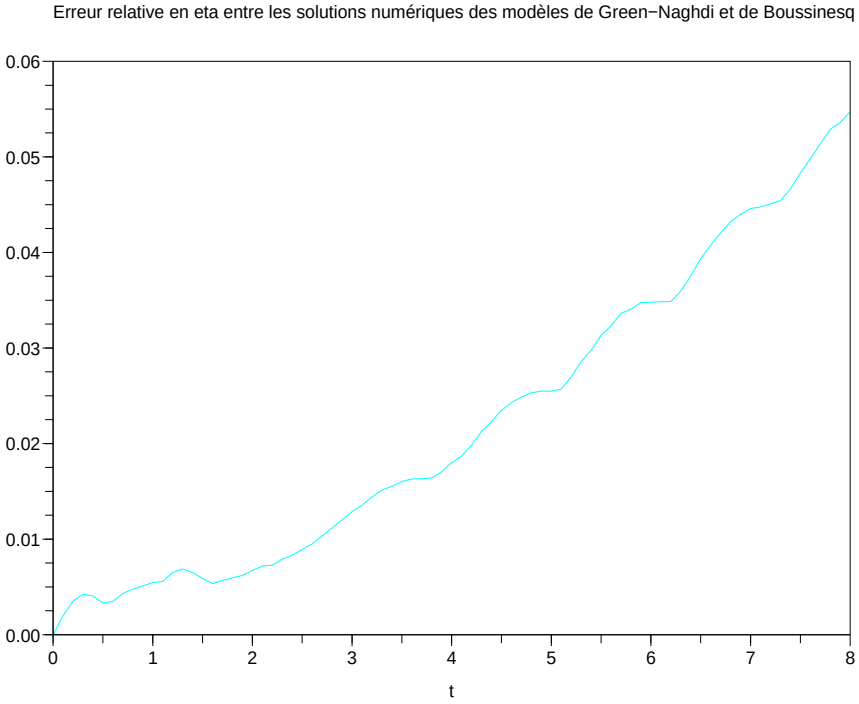
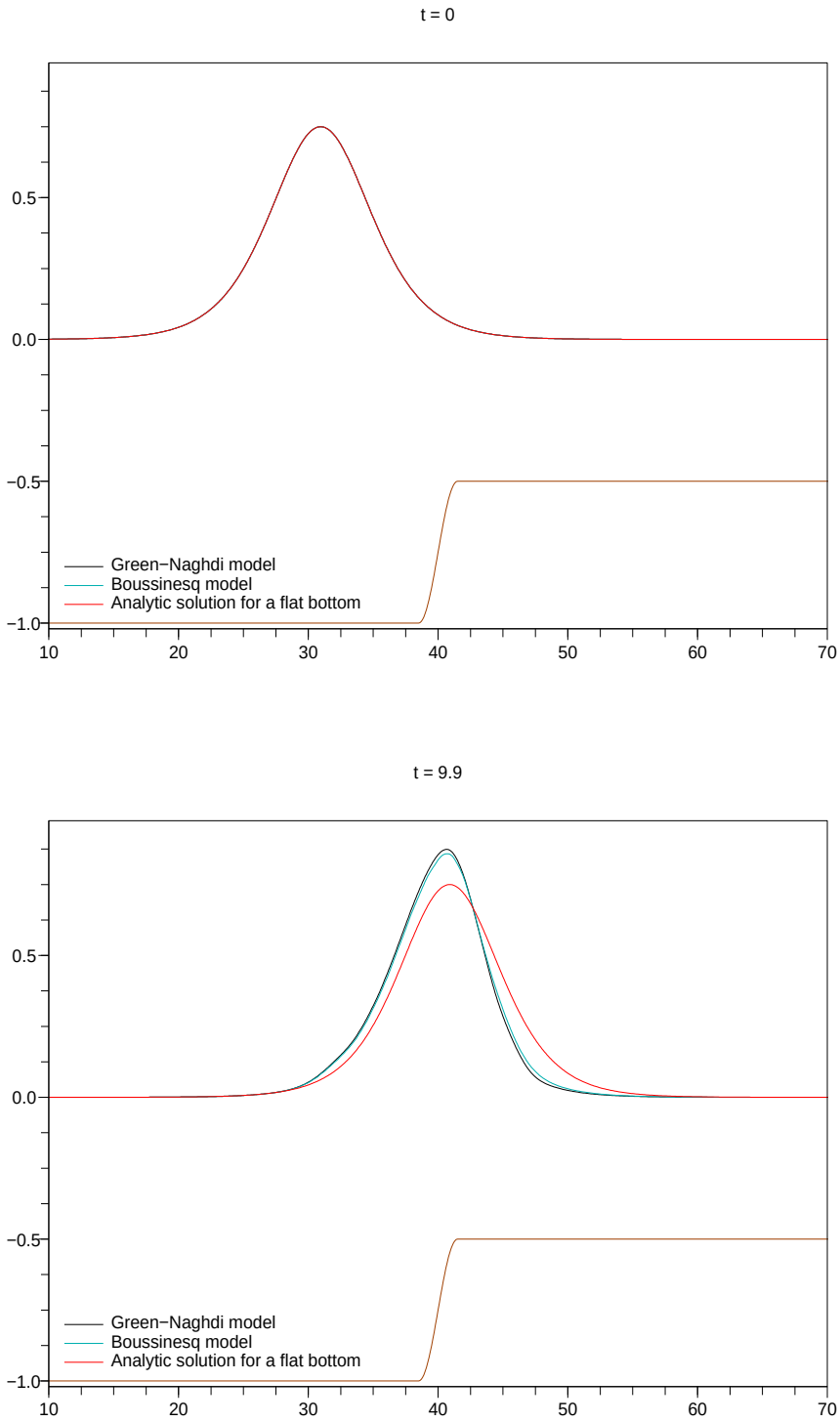


FIG. 7.2.9 – Résultats obtenus pour $\mu = 0.05$, $\varepsilon = 0.2$ et $\beta = 0.5$



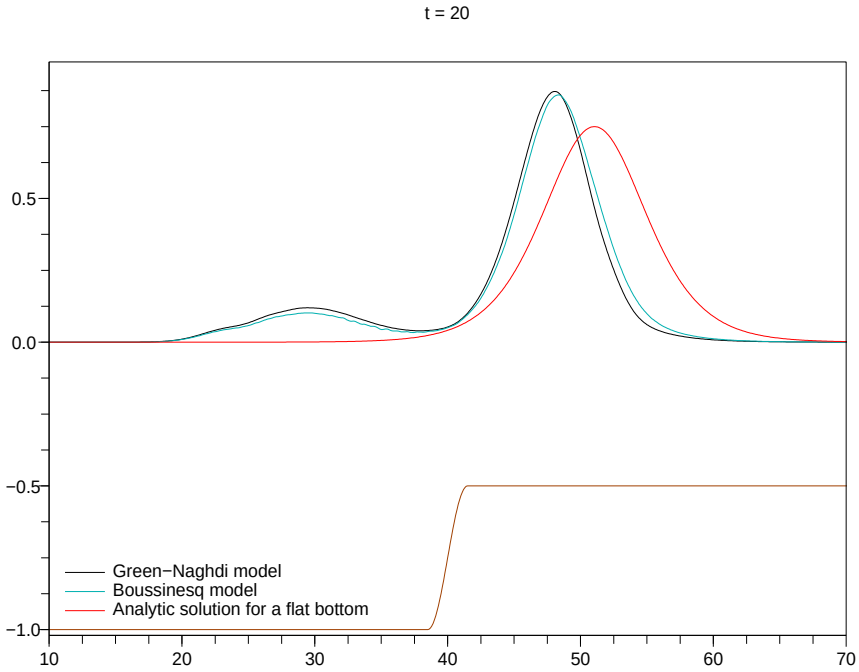
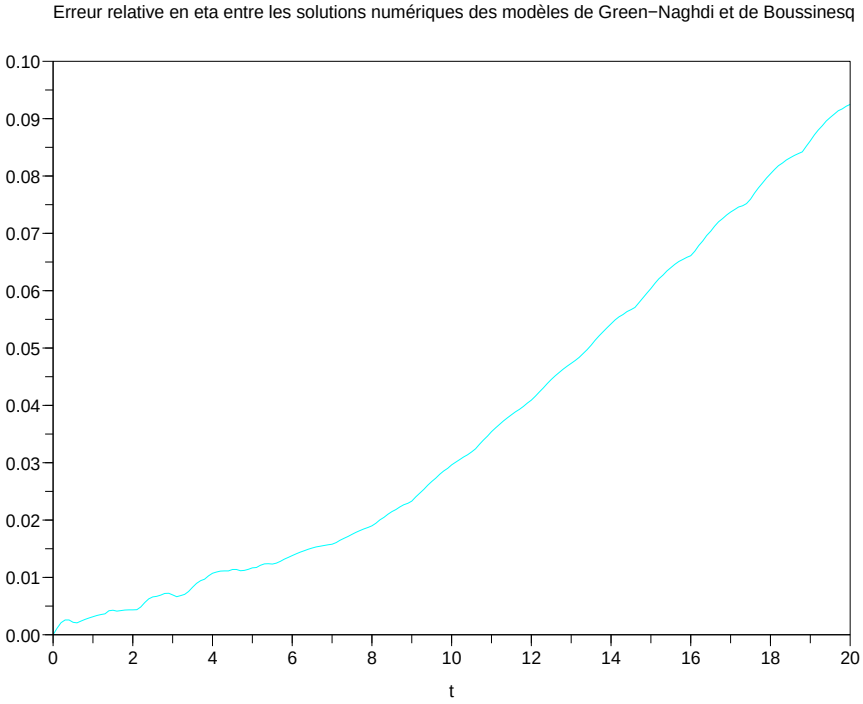


FIG. 7.2.10 – Erreur relative sur η pour $\mu = 0.05$, $\varepsilon = 0.2$ et $\beta = 0.5$



Commentaires

Analysons tout d'abord les résultats du modèle de Green-Naghdi seul. La première remarque importante est que ce modèle rend parfaitement compte des effets liés à la bathymétrie en forme de marche. Quelque soient les paramètres μ, ε et β on retrouve ici les phénomènes décrits dans le Chapitre 6, que sont les effets de shoaling, de réflexion bathymétrique et de perte de vitesse et de symétrie de l'onde après la marche. Cette perte de symétrie est ici encore plus claire pour des fortes valeurs du paramètre β, par exemple dans les figures 7.2.5 et 7.2.9 : on peut même pour ces figures parler de raidissement caractérisé de la surface libre, qui constitue un des prémices du phénomène de déferlement. Ainsi, et conformément aux attentes, l'augmentation du paramètre β amplifie les phénomènes précédents : alors que l'onde réfléchie apparaît difficilement sur les figures 7.2.1 et 7.2.3 pour $\beta = 0.05$ et $\beta = 0.01$, elle atteint environ 1/6ème de l'amplitude initiale de l'onde pour $\beta = 0.5$ dans les figures 7.2.5 et 7.2.9. Ce facteur de 1/6ème se retrouve aussi au niveau du shoaling. Ces phénomènes bathymétriques sont également amplifiés par l'augmentation de μ, et dans une moindre mesure, pas celle de ε. Ceci s'explique facilement par les facteurs μ et $\varepsilon\mu$ devant les opérateurs $\mathcal{T}_\beta[h,b]$ et $\mathcal{Q}_\beta[h,b]$ dans les équations, ces opérateurs dépendant fortement de la topographie. Une remarque intéressante à ce sujet peut être faite en comparant les figures (7.2.5) et 7.2.9 : pour un même paramètre β, les valeurs de ε et μ ont été choisies de manière à avoir un valeur plus grande de μ sur la figure 7.2.9 tout en conservant la même valeur de $\varepsilon\mu$. Il en résulte une onde réfléchie de moindre amplitude dans la figure 7.2.5 et un shoaling identique sur les deux figures. On peut ainsi penser que l'opérateur $\mathcal{T}_\beta[h,b]$ est en partie responsable de l'onde réfléchie tandis que l'effet de shoaling est à priori géré par l'opérateur $\mathcal{Q}_\beta[h,b]$.

Passons maintenant à la comparaison des deux modèles. Il est tout d'abord à noter que la réintroduction du nombre de Stokes S et de la constante de topographie β_0 dans les équations (Σ) n'a pas modifié la stabilité du schéma, et particulier lorsque ces constantes sortent du cadre en $O(1)$ imposé lors de la construction du modèle. Les résultats obtenus pour ce modèle sont fidèles à ceux obtenus dans le Chapitre 6 et montrent donc une bonne aptitude à rendre compte des effets de topographie. En ce qui concerne la comparaison des deux modèles, regardons dans le détail chaque figure. La figure 7.2.1 présente le cas où les paramètres ε, μ et β vérifient les hypothèses du régime d'ondes longues de faible amplitude pour un fond à faibles variations topographiques, c'est à dire $\mu = O(\varepsilon)$ et $\beta = O(\varepsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$. On voit sur cette figure une très bonne concordance des résultats, tant au niveau visuel qu'au niveau de l'erreur relative sur la surface libre de l'ordre de 3.10^{-3} selon la figure 7.2.2. Ce résultat est bien entendu conforme aux attentes. Dans la seconde configuration, correspondant aux figures 7.2.3 et 7.2.4, nous avons examiné le cas où le rapport ε/μ, autrement dit le nombre de Stokes, n'est plus de l'ordre de $O(1)$, tout en gardant de faibles variations bathymétriques. On voit ici une très bonne concordance pour des temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon)$, puis une brusque augmentation de l'erreur relative à partir de $t = 5$. L'erreur finale reste malgré tout relativement faible, de l'ordre de 3.10^{-2}. Le modèle (Σ) semble donc donner de bons résultats lorsque l'on sort du cadre du régime d'ondes longues, mais tout en restant dans le cas de faibles variations topographiques et pour des temps en $1/\varepsilon$. Ce modèle semble diverger progressivement pour des temps supérieurs. Le troisième cas (figures 7.2.5

et 7.2.6) a permis d'étudier le cas où ε et μ vérifient l'hypothèse du régime d'ondes longues de faible amplitude sur une topographie en revanche à fortes variations : le rapport β/ε, soit β_0, sort ici du cadre en $O(1)$. C'est à ce stade qu'apparaissent les premières différences notables entre les modèles. Visuellement, le modèle de Boussinesq semble ici avoir plus de difficultés que le modèle de Green-Naghdi à gérer le phénomène de raidissement de l'onde solitaire au passage de la marche topographique. Le shoaling est également un peu moins important avec ce modèle, tout comme l'amplitude de l'onde réfléchie. L'erreur entre les deux modèles croît linéairement en temps pour atteindre au final une valeur de l'ordre de $1,2.10^{-1}$, ce qui correspond à une erreur relativement importante. Dans notre avant-dernier cas, correspondant aux figures 7.2.7 et 7.2.8, explore le cas $\varepsilon \approx \mu \approx \beta$ pour des valeurs assez importantes de ces paramètres. Les résultats sont cette fois-ci plus en accord, avec cependant encore une fois des difficultés visibles au niveau du raidissement de l'onde pour le modèle (Σ). Les ondes réfléchies sont quant à elles identiques, mais l'analyse du shoaling montre une légère accélération de ce phénomène pour le modèle de Boussinesq. L'erreur globale évolue quasi-linéairement en temps pour atteindre 5.10^{-2}, soit une erreur de l'ordre de 10^{-2} pour un temps $1/\varepsilon$, ce qui ne constitue pas une erreur dramatique à ce niveau. Pour terminer, les deux dernières figures 7.2.9 et 7.2.10 s'intéressent au cas d'un petit nombre de Stokes accompagné de fortes variations topographiques. Les remarques ici sont identiques à celles formulées sur les figures 7.2.5 et 7.2.6, à ceci près que les différences entre les deux modèles sont ici légérement amplifiées. Il faut cependant noter que le temps de simulation est ici de $1/\varepsilon$, soit deux fois moins que pour les simulations correspondant aux figures 7.2.5 et 7.2.6. Il semble donc clair que c'est dans ce cas précis que l'erreur entre les deux modèles est la plus importante.

Pour résumer, nous pouvons tirer les conclusions suivantes sur cet exemple de bathymétrie. Premièrement, le modèle de Green-Naghdi démontre une très bonne capacité à reproduire les phénomènes bathymétriques attendus. Deuxièmement, les résultats sont, comme on pouvait s'y attendre, en parfait accord dans le régime spécifique au modèle de Boussinesq, c'est à dire celui du régime d'ondes longues de faible amplitude pour de faibles variations topographiques. Pour de telles variations, cette concordance n'est que très peu mise à mal lorsque l'on sort du cadre du régime d'ondes longues pour s'inscrire dans celui plus vaste de shallow-water. En revanche, des différences sensibles entre les deux modèles apparaissent lorsque l'on s'intéresse à de fortes variations topographiques, en particulier en niveau du raidissement de l'onde. Il semble dès lors que le cadre de validité du modèle de Boussinesq (Σ) est plus large en ε et μ qu'il ne l'est en β.

7.2.2 Le cas d'une pente douce

Nous nous intéressons maintenant au cas de la propagation d'une onde solitaire sur une zone côtière en pente douce. Ce cas a été introduit par Grilli et collaborateurs ([29], 1994) puis repris par Wei ([65], 1995). Il présente l'intérêt de pouvoir simuler le comportement des modèles jusqu'à la limite du déferlement. Conformément à [29], nous avons pris ici une valeur de $\varepsilon = 0.3$ et une pente de coefficient $1/15$, et nous aurons donc ici une topographie à fortes variations de paramètre β égal à 1. Le paramètre μ a été pris égal à 0.05, de manière à avoir un nombre de Stokes élevé. Cette topographie en pente douce est définie

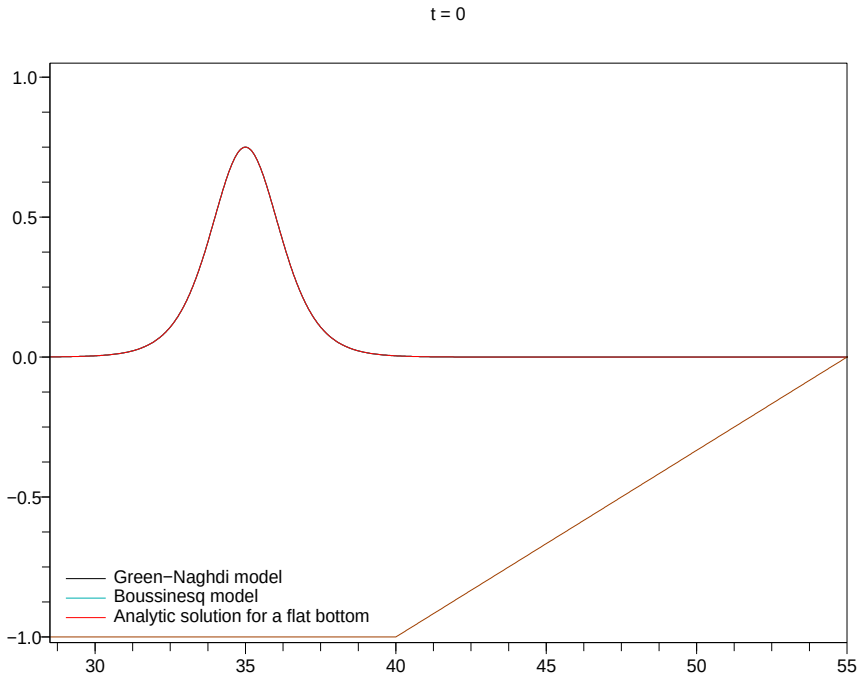
de la manière suivante :

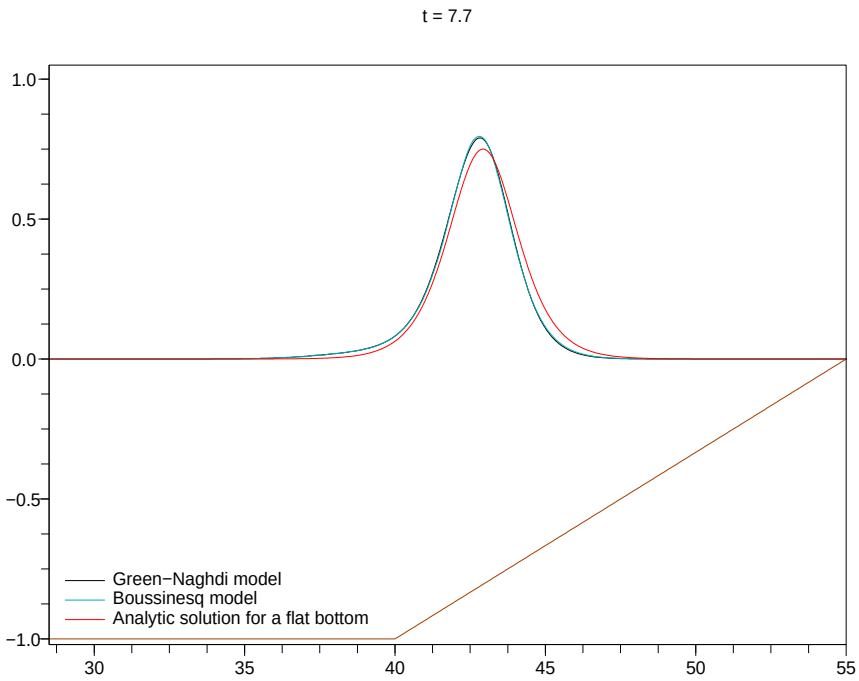
$$b(x) = \begin{cases} 0\ , \quad \forall x \in \left[0, \dfrac{L}{2}\right]\ , \\ \dfrac{x}{15} - \dfrac{L}{30}\ , \quad \forall x \in \left[\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2} + 15\right]\ , \\ 1\ , \quad \forall x \in \left[\dfrac{L}{2} + 15, L\right]\ , \end{cases} \tag{7.2.1}$$

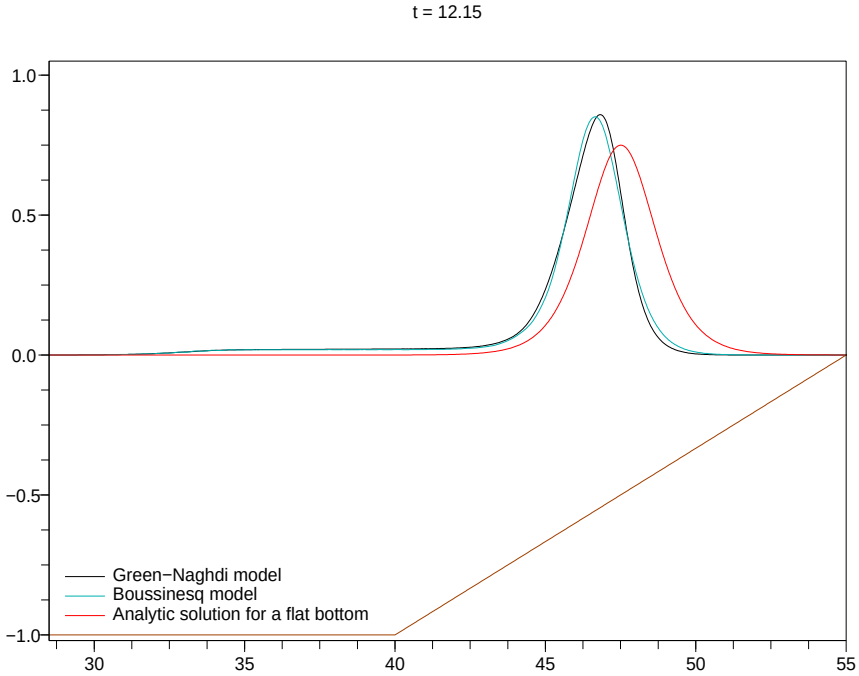
Résultats numériques

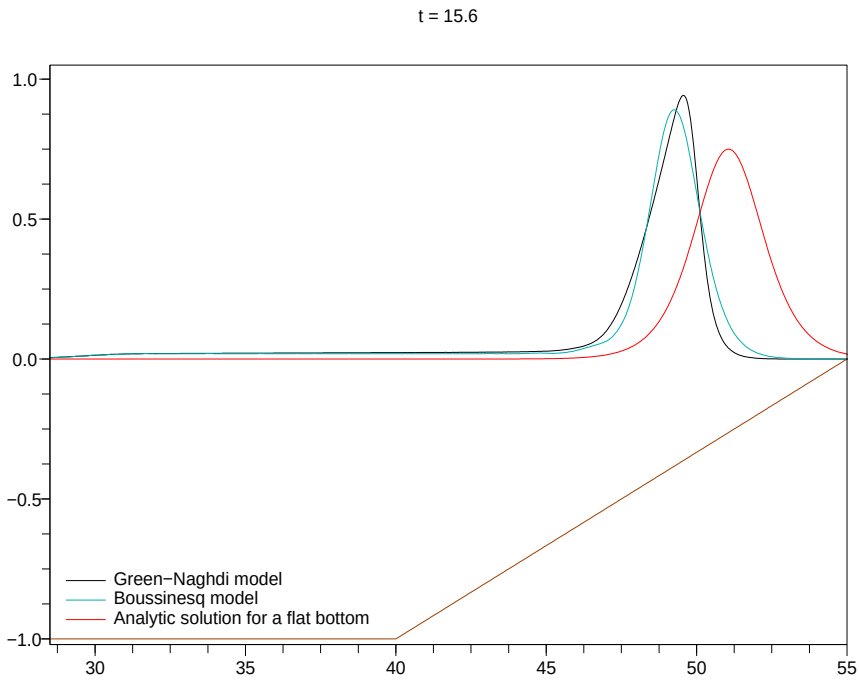
Les conditions initiales et le coefficient d'échelle sur la surface libre sont identiques à ceux du cas précédent. En ce qui concerne le temps T de simulation, il a été pris égal à 18, soit un temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon^2)$. Un tel temps est en effet nécessaire si l'on veut que l'onde solitaire se propage sur une distance suffisante au-dessus de la pente, et ainsi pousser les modèles jusqu'à la limite du déferlement , et ce même si les deux modèles ne sont en théorie valables que pour des temps de l'ordre de $O(1/\varepsilon)$. Les pas de discrétisation δx et δt ont été pris égaux à 0.05. Les figures suivantes montrent les résultats obtenus à différents temps t, ainsi que la courbe d'erreur sur la surface libre entre les deux modèles.

FIG. 7.2.11 – Le cas d'une pente douce




t = 7.7
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
30
35
40
45
50
55
Green−Naghdi model
Boussinesq model
Analytic solution for a flat bottom


t = 12.15
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
30
35
40
45
50
55
Green−Naghdi model
Boussinesq model
Analytic solution for a flat bottom


t = 15.6
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
30
35
40
45
50
55
Green−Naghdi model
Boussinesq model
Analytic solution for a flat bottom

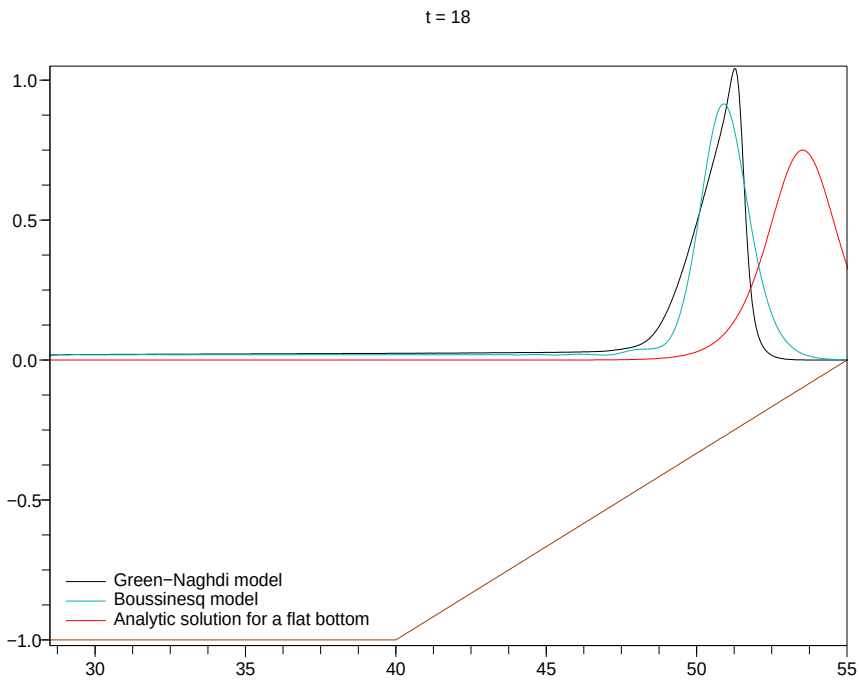
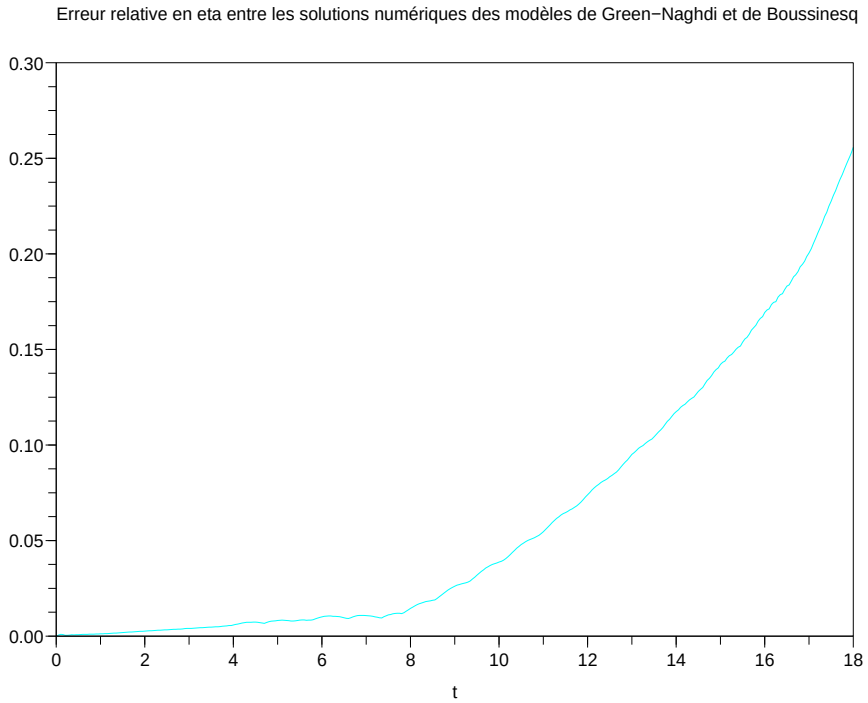

t = 18
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
30
35
40
45
50
55
Green−Naghdi model
Boussinesq model
Analytic solution for a flat bottom

FIG. 7.2.12 – Erreur relative sur la surface libre entre les deux modèles



Commentaires

L'étude de ce cas s'avère extrêmement intéressante et riche d'enseignements, à la fois sur les capacités du modèle de Green-Naghdi et sur le cadre de validité du modèle de Boussinesq (Σ). Ce cas a été choisi pour deux raisons majeures. La première est qu'il présente l'intérêt physique de simuler les modèles jusqu'à la limite du déferlement. La seconde est que la topographie en pente peut être interprétée comme une augmentation progressive du paramètre β au fur et à mesure que l'on avance dans la simulation. Outre la mesure des capacités du modèle de Green-Naghdi, il permet donc d'observer les limites de validité en β du modèle de Boussinesq, tout en se positionnant dans le cadre général du régime de shallow-water avec un grand nombre de Stokes.

Il ressort de cette simulation plusieurs remarques importantes. La première est l'excellente reproduction par le modèle de Green-Naghdi du raidissement progressif de l'onde à fur et à mesure de la diminution de la hauteur d'eau. Il apparaît en effet clairement que l'onde incidente perd totalement son caractère symétrique, la partie antérieure de l'onde présentant une pente de plus en plus importante et terminant quasiment verticale à la fin de la simulation. Nous observons également une augmentation régulière de l'amplitude de l'onde, une perte de vitesse importante et un rétrécissement conséquent de celle-ci. Tous ces phénomènes décrivent parfaitement le processus de début de déferlement de la vague. La seconde remarque est que le modèle de Boussinesq échoue dans la reproduction

de ce processus, tant au niveau du shoaling, qui reste très inférieur à celui généré par le modèle de Green-Naghdi, qu'au niveau du raidissement de l'onde, où la différence est flagrante entre les deux modèles. La perte de symétrie de l'onde n'est en effet que très légère avec le modèle de Boussinesq. Notre troisième remarque vient compenser les observations précédentes, dans la mesure où l'on voit une bonne gestion du run-up par les deux modèles. Ce phénomène, qui correspond à une augmentation du niveau d'eau moyen après le passage de l'onde, s'observe très facilement ici. Nous voyons en effet très clairement un niveau d'eau supérieur au niveau d'eau moyen à l'arrière de l'onde et ce sur une grande distance. Les deux modèles reproduisent très bien, et quasiment à l'identique, ce phénomène.

En regardant de plus près l'évolution de l'erreur entre les deux modèles selon la figure 7.2.12, on remarque que celle-ci reste faible (de l'ordre de 10^{-2}) jusqu'à $t = 8$. Or cet instant correspond au moment où l'onde se situe au début de la pente, aux environs de $z = -0.75$. Au-delà, nous remarquons une brusque augmentation de l'erreur pour atteindre au final une erreur très importante de l'ordre de $2,5.10^{-1}$. Si l'on avait arrêté la simulation au temps $t = 8$, nous aurions donc eu une erreur relative assez faible entre les deux modèles, et ce pour un nombre de Stokes élevé et un paramètre β d'approximativement 0.25. Cette observation précédente vient confirmer la remarque précédente comme quoi la validité du modèle de Boussinesq (Σ) est nettement plus sensible à l'augmentation du paramètre β qu'elle ne l'est sur les paramètres ε et μ. Tout ceci nous amène à la conclusion suivante : le modèle (Σ) semble rester valable pour des valeurs de ε et μ correspondant au régime de shallow-water, mais il n'est en revanche plus valable pour des valeurs de β supérieures à 0.25. Ce modèle semble en effet incapable de réproduire convenablement les phénomènes liés aux variations bathymétriques au-delà de cette valeur.

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au problème d'Euler surface libre sur un domaine à fond non plat en 1-D et 2-D de surface. Nous nous étions fixés trois objectifs complémentaires. Le premier était un objectif de modélisation visant à construire, dans le cadre du régime d'ondes longues de faible amplitude, de nouveaux modèles prenant en compte les variations topographiques. Le second était un objectif de justification mathématique des modèles construits, via la preuve de leur caractère bien posé et de la démonstration rigoureuse de l'approximation qu'ils fournissent. Le dernier objectif était quant à lui un objectif numérique, où il s'agissait de simuler les modèles précédents afin de procéder à leur évaluation et leur comparaison. Ces objectifs ont été remplis et des éléments de réponse sur la validité des modèle obtenus ont été avancés.

La première partie de cette thèse a été consacrée à la construction et la justification de nouveaux modèles de type Boussinesq pour deux échelles topographiques distinctes, celle de faibles variations bathymétriques et celle de fortes variations. En premier lieu, nous avons rigoureusement justifié une méthode générale de construction du développement asymptotique de l'opérateur de Dirichlet-Neumann associé à un problème aux limites elliptique quelconque. Cette méthode de construction peut être appliquée à de nombreux problèmes impliquant la présence d'un tel opérateur, ce qui constitue un résultat intéressant. Après avoir appliqué cette méthode dans le cas de notre problème d'Euler surface libre, deux premiers modèles de type Boussinesq incluant des termes de topographie ont été construits. Par la suite, il a été proposé une extension au cas d'un fond non plat de la stratégie introduite par Bona, Colin et Lannes dans [14] pour chaque régime de variations bathymétriques. Cette stratégie se décompose en trois temps mais elle varie selon le régime étudié. Dans le cas de faibles variations topographiques, nous avons premièrement effectué un changement de variable permettant d'exprimer les équations en fonction de la vitesse horizontale du fluide à une hauteur arbitraire dépendant d'un paramètre spécifique. Dans un second temps, nous avons utilisé la technique d'approximations au premier ordre des équations, historiquement associée à Benjamin-Bona-Mahony [7], afin d'introduire deux paramètres supplémentaires gérant la structure des termes dispersifs du système. Enfin, il a été proposé

un second changement de variable non-linéaire visant à symétriser la partie non-linéaire du système. Au final, nous avons obtenu toute une classe de modèles de type Boussinesq dépendant de trois paramètres arbitraires. De cette classe a été extraite une sous-classe non vide de modèles complétement symétriques et bien posés permettant de construire, à partir de la solution de n'importe lequel de ces systèmes, une approximation des solutions du problème d'Euler surface libre par inversion successive des deux changements de variables. Pour terminer, cette approximation a été justifiée en temps long. Dans le cas de fortes variations bathymétriques, la stratégie a dû être modifiée afin de prendre en compte l'influence accrue des termes de topographie. Les changements de variables ont ainsi été reformulés de manière adéquate et leur ordre a été inversé, la méthode commençant dans ce cas par le changement de variable non-linéaire. Comme dans le premier régime, nous avons ainsi pu obtenir une sous-classe de modèles complétement symétriques permettant de construire des solutions approchées du problème initial. Cette approximation a été justifiée en temps court dans le cas général et en temps long pour des bathymétries lentement variables. L'intérêt d'une telle classe de modèles symétriques est qu'elle permet au niveau numérique de choisir le ou les modèles présentant les propriétés les plus intéressantes et régularisantes. Ce travail constitue, à notre connaissance, le seul travail de modélisation justifié d'un point de vue mathématique sur les modèles de type Boussinesq en fond non plat.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés à l'approximation classique de KdV dans le cadre d'un fond non plat à faibles variations topographiques. Dans un premier temps, nous avons montré comment retrouver cette approximation à partir de n'importe quel système de Boussinesq symétrique construit dans la partie précédente. Cette méthode passe par la recherche de solutions approchées du système diagonalisé sous la forme de deux ondes unidirectionnelles se propageant en sens opposé plus des termes correcteurs vérifiant une condition classique de croissance sous-linéaire. L'approximation a ainsi été retrouvée puis justifiée dans le cadre de bathymétries décroissant à l'infini à une vitesse spécifique, permettant ainsi de retrouver le résultat énoncé par Iguchi en fond non plat [30]. Une discussion a ensuite été menée sur la validité de cette approximation pour des bathymétries moins restrictives. Notre analyse a montré que cette validité dépendait exclusivement de la vérification de la condition de croissance sous-linéaire des correcteurs. Via l'étude de deux exemples de topographie, le cas d'une marche et celui d'un fond sinusoïdal lentement variable, nous avons clairement montré que cette approximation n'était plus valide dans un cadre bathymétrique général. Partant de cette observation, nous avons ainsi proposé une version modifiée de l'approximation de KdV en incluant les termes topographiques à croissance potentiellement linéaire dans l'approximation. Cette nouvelle approximation a ainsi été justifiée en temps long dans le cadre de bathymétries très générales. Pour terminer, une extension de cette approximation au cas périodique a été proposée et sa validité en temps long a été démontrée. L'avantage d'un point de vue numérique de ce modèle réside dans le fait que les termes de topographie rajoutés se calculent de manière explicite en fonction de la solution des équations classiques de KdV.

La troisième et dernière partie a été consacrée à la simulation numérique en 1-D de surface des modèles précédents. Dans un premier temps, nous avons procédé à la comparaison

numérique de trois modèles : le modèle de Boussinesq symétrique construit dans la première partie pour de faibles variations topographiques, l'approximation de KdV classique, et notre version topographiquement modifiée de celle-ci. Après avoir présenté et validé les méthodes numériques choisies, nous nous sommes intéressés à la propagation en temps long d'une onde solitaire sur les deux exemples de topographie introduits dans la seconde partie. Les trois modèles ont ainsi été simulés pour différentes valeurs du paramètre ε. Il en est ressorti une bonne capacité des deux modèles à reproduire les phénomènes physiques attendus, tels que le shoaling, la réflexion bathymétrique ou encore le raidissement de l'onde. Nous avons en revanche observé que notre modèle de KdV avec termes de topographie divergeait sur des temps de l'ordre de $1/\varepsilon^{3/2}$, au contraire du modèle de Boussinesq qui lui semble rester stable sur de telles échelles de temps. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique des équations de Green-Naghdi, qui présentent l'avantage d'être valides dans le cadre plus général du régime de shallow-water. Ce régime constitue une extension du régime d'ondes longues de faible amplitude dans la mesure où il n'implique qu'une hypothèse de petitesse sur le paramètre de dispersion μ et aucune hypothèse sur les paramètres de non-linéarité ε et de topographie β. Le modèle de Green-Naghdi présente en outre l'intérêt de pouvoir retrouver, via certaines hypothèses sur ε et β, tous les modèles précédents. Après avoir présenté et validé la construction d'un schéma adéquat pour ce modèle, nous avons mené une comparaison numérique de celui-ci avec le modèle de Boussinesq symétrique précédent, et ce dans le cadre de deux topographies distinctes : le cas d'une marche et le cas de Grilli et collaborateurs [28] d'une zone côtière en pente douce. Cette comparaison a été réalisée pour plusieurs valeurs bien choisies de μ, ε et β afin de juger des capacités du modèle de Green-Naghdi, mais aussi de déterminer le domaine de validité du modèle de Boussinesq sur ces paramètres. De ces simulations sont ressorties les conclusions suivantes. Tout d'abord, le modèle de Green-Naghdi possède une excellente capacité à reproduire les phénomènes physiques attendus, en particulier au niveau du raidissement progressif de l'onde sur le cas d'une pente douce. Enfin, nous avons pu déterminer que le cadre de validité du modèle de Boussinesq était plus large en les paramètres μ et ε qu'il ne l'est en β. Ce modèle fournit en effet de bons résultats dans le cadre du régime général de shallow-water mais uniquement pour de faibles variations topographiques, celui-ci étant incapable de gérer correctement les effets de bathymétrie pour des valeurs de β supérieures à 0.25.

Perspectives

Les perspectives et pistes de recherche ouvertes sont les suivantes.

Au niveau de la modélisation, une perspective intéressante serait d'étendre les modèles de Boussinesq au cas d'un fond dépendant du temps, dans le but de coupler ce modèle avec un modèle de transport de particules sédimentaires. Il serait ainsi possible de modéliser l'évolution morphodynamique du littoral via des phénomènes tels que le déplacements de bancs de sables, la modification des embouchures d'estuaire ou encore la formation de barres sableuses. Il pourrait être également intéressant de modifier le problème initial afin d'inclure la tension de surface dans les équations. Enfin, nous aimerions étendre ces modèles jusqu'à la zone de swash afin de modéliser le déferlement des vagues, mais cette entreprise

reste assez ambitieuse comme l'ont prouvé un certain nombre de travaux sur le sujet.

Au niveau de la justification mathématique, une piste de recherche serait de tenter de lever l'hypothèse de bathymétrie lentement variable sur les modèles de Boussinesq à fortes variations topographiques, afin de pouvoir justifier complétement ces modèles en temps long. Nous pourrions également essayer de généraliser la seconde partie au cas 2-D de surface avec les équations de KP remplaçant les équations de KdV.

En ce qui concerne les perspectives numériques, la première serait bien entendu de proposer une extension des simulations numériques au cas 2-D. Ce travail est actuellement en cours dans le cadre d'une collaboration avec Fabien Marche et David Lannes pour les équations de Green-Naghdi, et il est envisagé pour les modèles de Boussinesq. Ensuite, nous aimerions évidemment simuler numériquement le modèle de Boussinesq construit pour de fortes variations bathymétriques, ce travail n'ayant pas encore pu être réalisé à ce jour. Enfin, il serait intéressant de monter en ordre dans les schémas proposés sur les modèles de Boussinesq et de Green-Naghdi, afin de pouvoir s'affranchir des légères instabilités remarquées pour des ondes d'une certaine amplitude.

Bibliographie

[1] Y. Agnon, P.A. Madsen, H.A. Schäffer, A new approach to high-order Boussinesq models, Journal of Fluid Mechanics 399 (1999), 319-333.

[2] S. Alinhac, P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Savoirs Actuels. InterEditions, Paris ; Editions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Meudon, 190 pp, 1991.

[3] B. Alvarez-Samaniego, D. Lannes, *Large time existence for 3D water-waves and asymptotics*, Technical report (http ://fr.arxiv.org/abs/math/0702015v1), Université Bordeaux I, IMB, 2007.

[4] B. Alvarez-Samaniego, D. Lannes, *A Nash-Moser theorem for singular evolution equations. Application to the Serre and Green-Naghdi equations*, Preprint (http ://arxiv.org/abs/math.AP/0701681v1), to appear in Indiana University Mathematical Journal, 2007.

[5] D.M. Ambrose, N. Masmoudi, *The zero surface tension limit of two-dimensional water waves*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. LVIII (2005), 1287-1315.

[6] E. Barthelemy, *Nonlinear shallow water theories for coastal waves*, Surveys in Geophysics, 25 (2004), 315-337.

[7] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 272 (1972), 47-78.

[8] C. Besse, *Schéma de relaxation pour l'équation de Schrödinger non linéaire et les systèmes de Davey et Stewartson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, Vol. 326, No. 12, (1998), 1427-1432.

[9] C. Besse, *A relaxation scheme for Nonlinear Schrödinger Equation*, Siam J. Numer. Anal., Vol. 42, No. 3, (2004), 934-952.

[10] C. Besse, C.H. Bruneau, *Numerical study of elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system : dromions simulation and blow-up*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 8, No. 8 (1998), 1363-1386.

[11] J.L. Bona, M. Chen, *A Boussinesq system for two-way propagation of nonlinear dispersive waves*, Physica D 116 (2004), 191-224.

[12] J.L. Bona, M. Chen, J.C. Saut, *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media. I : Derivation and Linear Theory*, J. Nonlinear Sci. 12 (2002), 283-318.

[13] J.L. Bona, M. Chen, J.C. Saut, *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media. II : Nonlinear Theory*, Nonlinearity 17 (2004), 925-952.

[14] J.L. Bona, T. Colin, D. Lannes, *Long Waves Approximations for Water Waves*, Arch. Rational Mech. Anal. 178 (2005) 373-410.

[15] J.V. Boussinesq, *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 72 (1871), 755-759.

[16] J.V. Boussinesq, *Théorie de des ondes et remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, J. Math. Pures Appl. 17 (1872), no. 2, 55-108.

[17] F. Chazel, *Influence of Bottom Topography on Long Water Waves*, Recommended for publication in M2AN, Preprint (http ://arxiv.org/abs/math.AP/0701227), 2007.

[18] M. Chen, *Equations for bi-directional waves over an uneven bottom*, Mathematical and Computers in Simulation 62 (2003), 3-9.

[19] D. Coutand, S. Shkoller, *Well-posedness of the free-surface incom pressible Euler equations with or without surface tension*, Preprint (http ://arxiv.org/abs/math.AP/0511236), 2005.

[20] W. Craig, *An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-de Vries scaling limits*, Comm. Partial Differential Equations 10 (1985), no. 8, 787-1003.

[21] W. Craig, P. Guyenne, D.P. Nicholls, C. Sulem, *Hamiltonian long-wave expansions for water waves over a rough bottom*, Proc. R. Soc. A 461 (2005) 839-873.

[22] M.W. Dingemans, *Water Wave Propagation over uneven bottoms. Part I : Linear Wave Propagation*, Adanced Series on Ocean Engineering 13 (1997), World Scientific.

[23] M.W. Dingemans, *Water Wave Propagation over uneven bottoms. Part II : Nonlinear Wave Propagation*, Adanced Series on Ocean Engineering 13 (1997), World Scientific.

[24] M.W. Dingemans, *Water waves over an uneven bottom : a discussion of long-wave equations*, Rep. R 729-H. Delf : The Netherlands : Delft Hydraulics Lab, 1973.

[25] D. Dutykh, F. Dias, *Dissipative Boussinesq equations*, Accepted to the special issue of C. R. Acad. Sci. Paris, dedicated to J.V. Boussinesq., 2007.

[26] C. Fochesato, F. Dias, *A fast method for nonlinear three-dimensional free-surface waves*, Proceedings of the Royal Society of London A 462 (2006), 2715-2735.

[27] A.E. Green, P.M. Naghdi, *A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth*, J. Fluid Mech. 78 (1976), 237-246.

[28] S. Grilli, P. Guyenne, F. Dias, *A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 35 (2001), 829-867.

[29] S. Grilli, R. Subramanya, I.A. Svendsen, J. Veeramony, *Shoaling of Solitary Waves on Plane Beaches*, Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering, 120-6 (1994), 609-628.

[30] T. Iguchi, *A long wave approximation for capillary-gravity waves and an effect of the bottom*, preprint (2005).

[31] T. Iguchi, *A mathematical justification of the forced Korteweg-de Vries equation for capillary-gravity waves*, Kyushu J. Math., 60 (2006), 267-303.

[32] J.T. Kirby, *Gravity Waves in Water of Finite Depth*, J. N. Hunt (ed). Advances in Fluid Mechanics, 10, 55-125, Computational Mechanics Publications, 1997.

[33] J.L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves*, Duke Math. J. 70 (1993), 373-404.

[34] J.L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Diffractive nonlinear geometric optics with rectification*, Indiana Univ. Math. J. 47 (1998), 1167-1241.

[35] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, *On the stability of solitary waves in weakly dispersing media*, Sov. Phys., Dokl. 15 (1970), 539-541.

[36] T. Kano, T. Nishida, *A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves*, Osaka J. Math. 23 (1986), 389-413.

[37] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Studies in applied mathematics, 93-128. Advances in Mathematics, Supplementary Studies, 8. Academic, New York-London, 1983.

[38] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation.*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), no. 2, 323-347.

[39] D.G. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in the rectangular canal and a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. 39 (1895), 422-443.

[40] D. Lannes, *Sur le caractère bien posé des équations d'Euler avec surface libre*, Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique (2004), Exposé no. XIV.

[41] D. Lannes, *Well-posedness of the water-waves equations*, J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), 605-654.

[42] D. Lannes, *Secular growth estimates for hyperbolic systems*, Journal of Differential Equations 190 (2003), no. 2, 466-503.

[43] D. Lannes, J.C. Saut, *Weakly transverse Boussinesq systems and the Kadomtsev-Petviashvili approximation*, Nonlinearity 19 (2006), 2853-2875.

[44] O.S. Madsen, C.C. Mei, *The Transformation of a Solitary Wave Over an Uneven Bottom*, J Fluid Mech., 39 (1969), 781-791.

[45] P.A. Madsen, R. Murray, O.R. Sorensen, *A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics : Part 1)*, Coastal Eng. 15 (1991), 371-388.

[46] P.A. Madsen, O.R. Sorensen, *A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics : Part 2. A slowly varying bathymetry*, Coastal Eng. 18 (1992), 183-204.

[47] P.A. Madsen, H.B. Bingham, H. Liu, *A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water*, Journal of Fluid Mechanics 462 (2002), 1-30.

[48] P.A. Madsen, H.A. Schäffer, *Higher order Boussinesq-type equations - derivation and analysis*, Philosophical Transactions, The Royal Society of London, Series A, Vol. 356 (1998), 1-59.

[49] F. Marche, *Theoretical and numerical study of shallow water models. Applications to nearshore hydrodynamics*, Thèse soutenue le 13 Décembre 2005 à l'Université de Bordeaux I.

[50] C.C. Mei, B. LeMehaute, *Note on the Equations of Long Waves Over an Uneven Bottom*, J. Geophys. Res. (1966), 71-393.

[51] C.C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific (1989).

[52] G. Métivier, *Small Viscosity and Boundary Layer Methods : Theory, Stability Analysis, and Applications*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2004.

[53] R.J. Murray, *Short wave modelling using new equations of Boussinesq type*, 9th Australian Conference on Coastal and Ocean Engineering Institution of Engineers, Adelade, Australia (1989), 331-336.

[54] V.I. Nalimov, *The Cauchy-Poisson problem.* (Russian) Dinamika Splošn. Sredy Vyp. 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami, (1974), 104-210, 254.

[55] D.P. Nicholls, F. Reitich, *A new approach to analyticity of Dirichlet-Neumann operators*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A, 131 (2001), 1411-1433.

[56] O. Nwogu, *Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation*, J.Waterw. Port Coastal Eng. ASCE 119 (1993) No. 6, 618-638.

[57] L.V. Ovsjannikov, *To the shallow water theory foundation*, Arch. Mech. 26 (1974), 407-422.

[58] L.V. Ovsjannikov, *Cauchy problem in a scale of Banach spaces and its application to the shallow water theory justification*, Appl. Methods Funct. Anal. Probl. Mech., IUTAM/IMU-Symp. Marseille 1975, Lect. Notes Math. 503 (1976), 426-437.

[59] D.H. Peregrine, *Long waves on a beach*, J. Fluid Mech., 27 (2005) No. 4, 815-827.

[60] H.A. Schäffer P.A. Madsen, *Further enhancements of Boussinesq-type equations*, Coastal Engineering 26 (1995), 1-15.

[61] H.A. Schäffer, P.A. Madsen, *Discussion of 'A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth' by Beji and Nadaoka*, Ocean Engineering, Vol. 25, No. 6 (1998), 497-500.

[62] G. Schneider, C.E. Wayne, *The long-wave limit for the water-wave problem. I. The case of zero surface tension.*, Comm. Pure Appl. Math., 162 (2002), no. 3, 247-285.

[63] J. Shatah, C. Zeng, *Geometry and a priori estimates for free boundary problems of the Euler's equation*, Preprint (http ://www.citebase.org/abstract ?id=oai :arXiv.org :math/0608428), 2006.

[64] G. Wei, J.T. Kirby, *A time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations*, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 120 (1995), 251-261.

[65] G. Wei, J.T. Kirby, S.T. Grilli, R. Subramanya, *A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear, unsteady waves*, Journal of Fluid Mechanics, 294 (1995), 71-92.

[66] G. Wei, J.T. Kirby, M.F. Gobbi, *A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2.*, Journal of Fluid Mechanics, 405 (2000), 181-210.

[67] C.E. Wayne, J.D. Wright, *Higher order corrections to the KdV approximations for a Boussinesq equation*, SIAM Journal of Applied Dynamical Systems v. 1 (2002), 272-302.

[68] J.M. Witting, *A unified model for the evolution of nonlinear water waves*, Journal of Computational Physics, 56, 2 (1984), 203-236.

[69] J.D. Wright, *Corrections to the KdV approximation for water waves*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, v. 37, no. 4 (2005), 1161-1206.

[70] S. Wu, *Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in* 2-*D*, Invent. Math. 130, no. 1 (1997), 39-72.

[71] S. Wu, *Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in* 3-*D*, J. Amer. Math. Soc. 12, no. 2 (1999), 445-495.

[72] H. Yosihara, *Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 18, no. 1 (1982), 49-96.

[73] V.E. Zakharov, *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2 (1968), 190-194.

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons le problème d'Euler surface libre sur un domaine à fond non plat, dans le cadre du régime d'ondes longues de faible amplitude. L'objectif est de construire, justifier et comparer de nouveaux modèles asymptotiques pour ce problème, permettant de prendre en compte les effets liés aux variations bathymétriques. En premier lieu, nous construisons rigoureusement deux classes de modèles de Boussinesq symétriques dans le cadre de deux régimes topographiques distincts, celui de faible variations bathymétriques et celui de fortes variations. Dans un second temps, nous retrouvons et discutons dans le cas de faibles variations topographiques l'approximation classique de Korteweg-de Vries, et proposons une nouvelle approximation via l'ajout de termes bathymétriques. Dans une troisième partie, ces deux modèles, ainsi que les modèles de Boussinesq construits dans la première partie, sont simulés numériquement et comparés sur des cas tests de topographie. Enfin, il est présenté une étude numérique des équations de Green-Naghdi, dont le domaine de validité physique est plus étendu, ainsi qu'une comparaison numérique de ce modèle avec les modèles précédents sur des bathymétries spécifiques.

Mots-clés : Equations d'Euler surface libre, bathymétries variables, ondes longues, opérateur de Dirichlet-Neumann, développements asymptotiques, modèles asymptotiques, systèmes hyperboliques quasi-linéaires, modèles de Boussinesq, approximation de Korteweg-de Vries, équations de Green-Naghdi.

Abstract

This work deals with the water waves problem for uneven bottoms in the long-wave framework. We aim here at constructing, justifying and comparing new asymptotic models taking into account the bottom topography. First, two new classes of symmetric Boussinesq-like models are rigorously derived for two different topographical regimes, one for small bathymetrical variations and one for strong variations. In a second part, we recover and discuss the classical Korteweg-de Vries approximation in the regime of small topographical variations. A new approximation is then proposed by adding correcting terms linked to the bathymetry. In the last part, all the previous models are integrated and compared numerically on two classical examples of bathymetry. Finally, we present a numerical study of the Green-Naghdi equations, whose range of validity is wider, and this model is compared numerically to the previous ones on specific bathymetries.

Keywords : Water waves, uneven bottoms, long waves, Dirichlet-Neumann operator, asymptotic expansions, asymptotic models, hyperbolic quasilinear systems, Boussinesq models, Korteweg-de Vries approximation, Green-Naghdi equations.