



HAL
open science

Stabilité des systèmes à retard de type neutre

Salvador Antonio Rodriguez Paredes

► **To cite this version:**

Salvador Antonio Rodriguez Paredes. Stabilité des systèmes à retard de type neutre. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2003. Français. NNT: . tel-00197541

HAL Id: tel-00197541

<https://theses.hal.science/tel-00197541>

Submitted on 14 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Automatique-Productique

préparée au Laboratoire d'Automatique de Grenoble

dans le cadre de l'Ecole Doctorale

Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal

présentée et soutenue publiquement par

Salvador Antonio RODRÍGUEZ PAREDES

le 6 octobre 2003

Titre :

STABILITÉ DES SYSTÈMES À RETARD DE TYPE NEUTRE

Directeurs de Thèse :

Jean Michel DION et Luc DUGARD

JURY

M. Didier GEORGES	Président
M. Jean-Pierre RICHARD	Rapporteur
M. Sophie TARBOURIECH	Rapporteur
M. Vladimir KHARITONOV	Examineur
M. Jean-Michel DION	Directeur de thèse
M. Luc DUGARD	Directeur de thèse

À Claudia, Maricarmen (A K-II) et Dálet Amanda.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	v
RÉSUMÉ EN FRANÇAIS	ix
RÉSUMÉ EN ANGLAIS	x
REMERCIEMENTS	xi
SYMBOLES	xiii
NOTATIONS	xv
INTRODUCTION	1
1 MODÈLES DE SYSTÈMES À RETARD DE TYPE NEUTRE	7
1.1 INTRODUCTION	8
1.2 COLONNE CHROMATOGRAPHIQUE	9
1.2.1 SIMULATION	12
1.3 LIGNE DE TRANSMISSION SANS PERTES	13
1.3.1 SIMULATION	15
1.4 BARRE FLEXIBLE COUPLÉE À UNE CHARGE	17
1.4.1 SIMULATION	19
1.5 CIRCUITS ÉQUIVALENTS DES ÉLÉMENTS PARTIELS PEEC . .	21
1.5.1 SIMULATIONS	22
1.6 CONCLUSIONS	24
2 LE PROBLÈME DE LA VALEUR INITIALE ET SOLUTIONS POUR SYSTÈMES DE TYPE NEUTRE	27
2.1 INTRODUCTION	28
2.2 L'ÉTAT DANS L'ESPACE DES FONCTIONS CONTINUES	29
2.3 L'ÉTAT DANS L'ESPACE DES FONCTIONS ABSOLUMENT CONTI- NUES	33

2.4	L'ÉTAT DANS LE PRODUIT DES ESPACES	35
2.5	SOLUTION DE SYSTÈMES NEUTRES LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE PAS À PAS	38
2.6	SOLUTION DE SYSTÈMES NEUTRES LINÉAIRES PAR SA REPRÉSENTATION DE CAUCHY	39
2.6.1	EXEMPLE	42
2.7	CONCLUSIONS	44
3	STABILITÉ ET STABILITÉ ROBUSTE POUR LES SYSTÈMES NEUTRES: UN TOUR GUIDÉ	45
3.1	INTRODUCTION	46
3.2	STABILITÉ DE SYSTÈMES NEUTRES	46
3.3	TRANSFORMATIONS DE MODÈLES	52
3.3.1	TRANSFORMATIONS DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL	52
3.3.2	TRANSFORMATIONS DANS LE DOMAINE TEMPOREL	53
3.4	STABILITÉ INDÉPENDANTE DE LA TAILLE DU RETARD.	57
3.5	STABILITÉ DÉPENDANTE DE LA TAILLE DU RETARD	59
3.6	CONCLUSIONS	61
4	STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES NEUTRES AVEC DYNAMIQUE ADDITIONNELLE	63
4.1	INTRODUCTION	64
4.2	PROBLÈME	65
4.3	TRANSFORMATION DE MODÈLE AVEC DYNAMIQUE ADDITIONNELLE	66
4.4	STABILITÉ ROBUSTE DÉPENDANT DE LA TAILLE DU RETARD AVEC DYNAMIQUE ADDITIONNELLE	67
4.5	EXEMPLES	73
4.6	CONCLUSIONS	76
5	STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES NEUTRES SANS DYNAMIQUE ADDITIONNELLE	77
5.1	INTRODUCTION	78
5.2	PROBLÈME	78
5.3	TRANSFORMATION DE MODÈLE SANS DYNAMIQUE ADDITIONNELLE	80
5.4	STABILITÉ ROBUSTE DÉPENDANTE DE LA TAILLE DU RETARD SANS DYNAMIQUE ADDITIONNELLE	82
5.5	CONCLUSIONS	93

6	STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES NEUTRES: UNE APPROCHE CONSTRUCTIVE	95
6.1	INTRODUCTION	96
6.2	PRÉLIMINAIRES	97
6.3	CONSTRUCTION DES FONCTIONNELLES DE LYAPUNOV - KRASOVSKII	103
6.4	STABILITÉ ROBUSTE	107
6.5	EXEMPLE	110
6.6	CONCLUSIONS	112
	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	113
	BIBLIOGRAPHIE	119
	ANNEXE	129

RÉSUMÉ EN FRANÇAIS

Ce mémoire est principalement dédié à la stabilité robuste des systèmes à retard de type neutre et plus particulièrement à l'obtention de conditions de stabilité qui dépendent de la taille des retards. On considère des systèmes décrits par des équations différentielles fonctionnelles ayant des retards sur l'état instantané et sa dérivée, avec des incertitudes bornées non linéaires variantes dans le temps sur l'état instantané et l'état instantané retardé, et des incertitudes bornées quasilineaires variantes dans le temps sur l'opérateur de différence. L'analyse est faite par une approche combinant les techniques LMI (inégalités matricielles linéaires) et les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, et par une approche constructive de Lyapunov-Krasovskii. Dans la première partie, on obtient des conditions suffisantes de stabilité robuste en termes de l'existence de solutions positives de LMIs. Dans la deuxième partie, on propose une méthode qui permet de calculer des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour une classe de systèmes linéaires neutres; en s'appuyant sur les fonctionnelles proposées, on obtient de nouvelles conditions de stabilité robuste. Les conditions de stabilité obtenues généralisent des résultats existants à la classe très générale des systèmes neutres.

RÉSUMÉ EN ANGLAIS

STABILITY OF TIME-DELAY SYSTEMS OF NEUTRAL TYPE

ABSTRACT: This thesis focuses on the delay-dependent robust stability of linear neutral delay systems. The systems under consideration are described by functional differential equations, with norm bounded time varying nonlinear uncertainties in the "state", in the delayed "state" and norm bounded time varying quasilinear uncertainties in the difference operator. The analysis is performed in the time domain using a combined LMI Lyapunov-Krasovskii approach and a new Lyapunov-Krasovskii constructive approach. First, sufficient conditions for robust stability are given in terms of the existence of positive definite solutions of LMIs and we extend some previous results on the subject. Second we propose a method to compute a Lyapunov-Krasovskii functional for a given class of linear neutral systems; based on the proposed Lyapunov-Krasovskii functionals, new robust stability conditions are given.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG) sous la direction conjointe de MM. Jean-Michel DION et Luc DUGARD, Directeurs de Recherche au CNRS. Je voudrais leur exprimer ma profonde gratitude pour les conseils, la grande expérience de la recherche et leurs encouragements qui m'ont beaucoup apporté tout au long de ce travail.

Je veux exprimer aussi ma profonde reconnaissance à M. Vladimir KHARITONOV, Professeur au Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politecnico Nacional (CINVESTAV-IPN) au Mexique, pour sa collaboration dans ce travail, pour ses commentaires et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être examinateur dans le Jury.

Je voudrais adresser mes remerciements à M. Didier GEORGES, Professeur à l'INPG, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le Jury de cette thèse.

Je tiens à remercier vivement M. Jean-Pierre RICHARD, Professeur à l'École Centrale de Lille, d'avoir accepté d'être rapporteur et de participer au Jury. Ses nombreuses remarques et ses conseils pertinents m'ont permis d'améliorer grandement mon manuscrit de thèse.

Je suis également très honoré de la participation de Mlle Sophie TARBOURIECH, Directeur de Recherche au CNRS au LAAS à Toulouse, pour ses remarques et ses commentaires sur mon travail de thèse et pour avoir accepté d'être rapporteur et membre du Jury.

Je veux adresser mes remerciements à M. le Professeur Angel HERRERA NAUM pour son encouragement et sa compréhension, qu'il repose en paix.

Je veux remercier aussi M. Fadi IBRAHIM pour ses commentaires sur le modèle de la colonne chromatographique et pour son amitié.

Je veux adresser mes remerciements à M. Dan Ivanescu pour sa collaboration dans un travail commun.

Je veux remercier toutes celles et tous ceux qui ont rendu mon séjour agréable au sein du LAG et tous mes professeurs et amis, trop nombreux pour que je puisse les citer ici.

Je veux remercier mes parents M. Galdino RODRÍGEZ LUNA et Mme Marcela PAREDES SANCHEZ pour leur amour, leurs encouragements et la compréhension qu'ils m'ont prodigués tout au long de ma vie.

Finalement, je voudrais adresser mes remerciements au peuple du Mexique et le Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (CONACYT) qui m'a fait bénéficier d'une bourse pour mon doctorat.

SYMBOLES

\square	une démonstration est finie
\mathbb{Z}	l'ensemble des nombres entiers
\mathbb{R} (resp. \mathbb{C})	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
\mathbb{Z}^+	l'ensemble des nombres entiers positifs
\mathbb{R}^+	l'ensemble des nombres réels positifs
\mathbb{R}^n	l'espace Euclidien de dimension n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	l'ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
$r \in \mathbb{R}^+$	un retard non négatif
$x(\cdot), y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$	des vecteurs de dimension n
$x_t, y_t, \phi, \varphi, \psi$	fonctionnelles sur $[-r, 0]$
$0_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	la matrice de zéros
$I_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	la matrice identité
$A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$	des matrices constantes
$\lambda_{\max}(M)$	la valeur propre maximale de $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\lambda_{\min}(M)$	la valeur propre inférieure de $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$M^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$	la transposée de $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$P = P^\top > 0$	une matrice symétrique et positive
$X > Y$ ($X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$)	la matrice $X - Y$ est définie positive
LMI(s)	inégalité(s) linéaire(s) matricielle(s)
E	un domaine de \mathbb{R} , on ne considère que des ouverts non vides
\mathcal{O}	un ensemble ouvert de \mathbb{R}
Ω	en général un domaine ouvert de \mathbb{R}
$\mathcal{C}(E, \mathbb{R}^n)$	l'espace des fonctions continues $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$
$\mathcal{C}^k(E, \mathbb{R}^n)$	les fonctions qui ont k dérivées continues

$\mathcal{C}, \mathcal{C}([-r,0], \mathbb{R}^n)$	l'espace de Banach des fonctions continues
$\mathcal{C}([-r,0], \mathbb{R}^{n \times n})$	l'espace de Banach des fonctions continues
$\mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$	l'espace des applications linéaires bornées
\mathcal{H}	un ouvert dans $E \times \mathcal{C}([-r,0], \mathbb{R}^n)$
$\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$	l'espace de Lebesgue sur $[-r,0]$
$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$	l'espace de Lebesgue sur Ω
$\mathcal{L}_1^{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$	l'espace des fonctions localement intégrables
\mathcal{M}_p	l'espace produit $\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$
p.p. dans E	presque partout dans E
$\mathcal{W}, \mathcal{W}([-r,0], \mathbb{R}^n)$	l'espace des fonctions absolument continues
$\mathcal{W}_p^1, \mathcal{W}_p^1([-r,0], \mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$	l'espace de Sobolev d'ordre 1
$\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$	l'espace des fonctions de test
$\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$	l'espace de distributions
$T(\cdot) = \langle T, \cdot \rangle$	la distribution T
$\delta_p(\cdot) = \langle \delta_p, \cdot \rangle$	la distribution δ_p de Dirac au point p
$[f](\cdot) = \langle [f], \cdot \rangle$	la distribution régulière $[f]$
$\ \cdot\ $	la 2-norme d'un vecteur ou la norme induite d'une matrice
$\ \phi\ _{\mathcal{C}} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \ \phi(\theta)\ $	la norme supremum
$\ \phi\ _{\mathcal{L}_p} = \left[\int_{-r}^0 \ \phi(\theta)\ ^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}}$ si $p \in [1, \infty)$	la norme \mathcal{L}_p
$\ \phi\ _{\mathcal{L}_\infty} = \text{ess sup}_{\theta \in [-r,0]} \ \phi(\theta)\ $ si $p = \infty$	la norme \mathcal{L}_∞
$\ \phi\ _{\mathcal{W}_p^1} = \left[\ \phi(0)\ ^p + \int_{-r}^0 \ \dot{\phi}(\theta)\ ^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}}$ si $p \in [1, \infty)$	la norme \mathcal{W}_p^1
$\ \phi\ _{\mathcal{W}_\infty^1} = \max \{ \ \phi(0)\ , \text{ess sup}_{\theta \in [-r,0]} \ \dot{\phi}(\theta)\ \}$ si $p = \infty$	la norme \mathcal{W}_∞^1
$\dot{f}(\cdot)$	la dérivée de f par rapport au temps
$\frac{df^+}{d\xi}$	la dérivée à droite de f
$\frac{df^-}{d\xi}$	la dérivée à gauche de f
$f'(\cdot)$	la dérivée supérieure à droite de f
$[f]'$	la dérivée de la distribution régulière $[f]$

NOTATIONS

Dans cette annexe, on donne un aperçu de la notation standard, définitions et théorèmes qui sont utilisés dans ce mémoire, avec comme objectif de faciliter la lecture de ce travail. Un certain nombre de définitions et de résultats sont tirés de [105], [1], [77], [14].

Une **sous-division partielle** d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une collection $S = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$ d'ensembles fermés tels que:

i) $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_l \subseteq I$;

ii) par chaque $k, \kappa = 1, 2, \dots, l$ avec $k \neq \kappa$, $I_k \cap I_\kappa$ est soit vide ou consiste en un point simple qui est un point frontière de \bar{I}_k et \bar{I}_κ (ici \bar{I} est d'adhérence dans \mathbb{R} de l'ensemble I).

Soit $(\mu_{i,j}) : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) une fonction matricielle, soit $S = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$ une sous-division partielle de $[-r, 0]$ et pour chaque $k = 1, 2, \dots, l$, soit $I_k := [a_k, b_k]$. Alors, on peut associer à $\mu_{i,j}, [-r, 0], S$ la quantité $\text{Var}_{[-r, 0], S}(\mu_{i,j})$ définie par

$$\text{Var}_{[-r, 0], S}(\mu_{i,j}) = \sum_{k=1}^l |\mu_{i,j}(b_k) - \mu_{i,j}(a_k)|.$$

On considère maintenant l'ensemble $\text{Var}_{[-r, 0]}(\mu_{i,j}) = \{\text{Var}_{[-r, 0], S}(\mu_{i,j}) : S \text{ est une sous-division partielle de } [-r, 0]\}$. On remarque que $\text{Var}_{[-r, 0], S}(\mu_{i,j})$ ne peut pas être négatif, alors 0 est une borne inférieure de $\text{Var}_{[-r, 0]}(\mu_{i,j})$. La plus petite borne supérieure de $\text{Var}_{[-r, 0]}(\mu_{i,j})$ est appelée la **variation totale** de $\mu_{i,j}$ sur $[-r, 0]$, et est dénotée $\text{TVar}_{[-r, 0]}(\mu_{i,j})$. On a $0 \leq \text{TVar}_{[-r, 0]}(\mu_{i,j}) \leq \infty$ pour n'importe quel $\mu_{i,j}$ et $[-r, 0]$, mais si $\text{TVar}_{[-r, 0]}(\mu_{i,j})$ est un nombre positif, alors $\mu_{i,j}$ est dite de **variation bornée** sur $[-r, 0]$. La fonction matricielle $\mu = (\mu_{i,j})$ est de variation bornée sur $[-r, 0]$ si chaque $\mu_{i,j}$ est de variation bornée sur $[-r, 0]$.

Supposons $\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) de variation bornée sur \mathbb{R} et non décroissante i.e. $\varphi_i(\alpha) \leq \varphi_i(\beta)$ si $\alpha \leq \beta$. Alors la μ -**mesure de Radon** d'un intervalle I sur \mathbb{R} avec des points frontières $\{a, b\}$ de \bar{I} est définie par:

$$\begin{aligned}\mu([a, b]) &:= \varphi^\top(b^+) - \varphi^\top(a^-), & \mu((a, b]) &:= \varphi^\top(b^+) - \varphi^\top(a^+), \\ \mu([a, b)) &:= \varphi^\top(b^-) - \varphi^\top(a^-), & \mu((a, a)) &:= 0,\end{aligned}$$

et si $a < b$ $\mu((a, b)) := \varphi^\top(b^-) - \varphi^\top(a^+)$.

On utilise quelques espaces de Banach, que l'on rappelle dans la suite.

L'**espace des fonctions vectorielles continues** définies sur $[-r, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n est noté par $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ ou simplement \mathcal{C} . Cet espace est un espace de Banach muni de la norme supremum $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$, i.e. si la fonctionnelle $\phi \in \mathcal{C}$ alors

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|.$$

Si en plus chaque composante de ϕ , ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) satisfait: pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que pour n'importe quelles sous-divisions partielles de $S = \{I_1, I_2, \dots, I_l\}$, il est vérifié que

$$\sum_{k=1}^l (a_k, b_k) < \delta \Rightarrow \text{Var}_{[-r, 0], S}(\phi_i) = \sum_{k=1}^l |\phi_i(b_k) - \phi_i(a_k)| < \varepsilon,$$

alors ϕ est dite **absolument continue** et on dénote cet espace $\mathcal{W}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ ou \mathcal{W} .

On dit qu'une propriété est vérifiée presque partout sur un sous-ensemble E de \mathbb{R} si elle est vérifiée dans $E \subset \mathbb{R}$ en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

\mathcal{L}_p ou $\mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ (avec $1 \leq p \leq \infty$) représente l'**espace de Lebesgue** des classes (pour l'égalité presque partout) de fonctions de $[-r, 0]$ dans \mathbb{R}^n , vérifiant: p fois Lebesgue intégrable sur $[-r, 0]$ si $p < \infty$ ou essentiellement bornées si $p = \infty$. L'espace de Lebesgue est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}_p} = \left[\int_{-r}^0 \|\phi(\theta)\|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}}, \text{ si } p \in [0, \infty)$$

et

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}_p} = \text{ess sup}_{\theta \in [-r, 0]} \|\phi(\theta)\|, \text{ si } p = \infty, \phi \in \mathcal{L}_p.$$

De même, on peut définir des espaces de Lebesgue sur des domaines ouverts Ω , $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$) ou des espaces où les fonctions sont seulement **localement intégrables** $\mathcal{L}_1^{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$), i.e. des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (resp. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$) telles que $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{L}_1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^{n \times n})$) pour n'importe quel \mathcal{O} strictement contenu dans Ω Lebesgue intégrable. Par exemple la fonction $1/x$ est localement intégrable sur $(0,1)$, mais n'est pas intégrable. La même fonction n'est pas localement intégrable sur $(-1,1)$.

La définition d'un espace dual a été donnée par Riesz en 1910: L'espace dual d'un espace topologique \mathcal{X} dénoté \mathcal{X}' , est l'espace où ses éléments sont des fonctions continues linéaires sur \mathcal{X} . Dans la suite, on donne les théorèmes de représentation de Riesz qui permettent de représenter de forme unique une fonctionnelle linéaire $F(\phi) \in \mathcal{L}'_p \forall \phi \in \mathcal{L}_p$.

THÉORÈME 0.0.1. *Pour chaque fonctionnelle linéaire $F(\phi) \in \mathcal{L}'_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$ il existe un unique élément $\varphi \in \mathcal{L}_q([-r,0], \mathbb{R}^n)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tel que pour n'importe quelle fonctionnelle $\phi \in \mathcal{L}_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$ on a*

$$F(\phi) = \int_{-r}^0 \varphi^\top(\theta) \phi(\theta) d\theta.$$

THÉORÈME 0.0.2. *Pour le cas $p = \infty$, l'espace dual $\mathcal{L}'_\infty([-r,0], \mathbb{R}^n)$ est isomorphe à l'espace de mesures de Radon μ sur $[-r,0]$. Alors pour chaque $F(\phi) \in \mathcal{L}'_\infty([-r,0], \mathbb{R}^n)$, on a*

$$F(\phi) = \int_{-r}^0 d\mu(\theta) \phi(\theta).$$

$\mathcal{L}'_\infty([-r,0], \mathbb{R}^n)$ contient $\mathcal{L}_1([-r,0], \mathbb{R}^n)$ comme sous-espace.

Ensuite, on rappelle un résultat qui relie l'espace \mathcal{W} et \mathcal{L}_1 .

THÉORÈME 0.0.3. *Soit $\phi \in \mathcal{W}([-r,0], \mathbb{R}^n)$, alors ϕ est continue et de variation bornée sur $[-r,0]$, il existe $\varphi \in \mathcal{L}_1([-r,0], \mathbb{R}^n)$ tel que la formule de Leibnitz est vérifiée:*

$$\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \varphi(\theta) d\theta$$

pour n'importe quel $(a,b) \subset [-r,0]$ et $\dot{\phi} = \varphi$ p.p. sur $(-r,0)$.

Le théorème 0.0.3 montre qu'une fonction absolument continue sur $[-r,0]$ est dérivable presque partout sur $(-r,0)$.

Dans la suite on introduit des espaces plus généraux qui permettront de dériver des fonctions et formes linéaires dans le sens des distributions.

Soit l'espace des fonctions de test $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ infiniment dérivables sur Ω ($u \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \forall k \in \mathbb{Z}^+$) à support compact $K \subset \Omega$ (de même on peut définir $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$). L'espace dual des fonctions de test est l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n)$, espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n . Pour tout (T, u) de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $T(u)$ appartient à \mathbb{R}^n et on dénote $T(u) = \langle T, u \rangle$ (de même, on peut définir $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$). Par exemple si $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$, alors $[f] : \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n}) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ définie comme la intégrale

$$\langle [f], u \rangle = \int_{\Omega} f(\xi) u(\xi) d\xi$$

est une distribution. Ce type de distribution qui se réécrit sous la forme d'une intégrale est appelée **distribution régulière** associée à la fonction f . Par exemple la **distribution de Dirac** $\delta_{\vartheta} : \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n}) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par

$$\langle \delta_{\vartheta}, u \rangle = u(\vartheta)$$

pour n'importe quel $\vartheta \in \Omega$ est une distribution, mais n'est pas régulière.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} , $[f]$ un élément de $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$: on appelle **dérivée de la distribution régulière** $[f]$ ou **dérivée faible** de $[f]$ et on note $[f]'$ l'application:

$$\langle [f]', u \rangle = - \int_{\Omega} f(\xi) u'(\xi) d\xi.$$

Cette dérivée permet de définir l'espace de Sobolev d'ordre 1.

Soit p un élément de $[1, \infty]$, $\Omega \subset \mathbb{R}$. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1, et on note $\mathcal{W}_p^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble:

$$\mathcal{W}_p^1(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid [u]' \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{R}^n)\}.$$

L'espace des fonctions absolument continues \mathcal{W} et l'espace de Sobolev $\mathcal{W}_p^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sont reliées dans le théorème suivant:

THÉORÈME 0.0.4. *Soit $(-r, 0) \subset \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{W}_p^1(((-r, 0), \mathbb{R}^n))$. Alors la fonction $u \in \mathcal{W}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Plus précisément, u peut être modifiée sur un ensemble de mesure nulle de $(-r, 0)$ pour obtenir une fonction absolument continue.*

Ce résultat indique qu'il existe une **injection** de l'espace $\mathcal{W}_p^1((-r,0),\mathbb{R}^n)$ dans l'espace $\mathcal{W}([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Voilà pourquoi l'**espace de Sobolev** d'ordre 1 dénoté $\mathcal{W}_p^1, \mathcal{W}_p^1([-r,0],\mathbb{R}^n)$, est défini comme l'espace des fonctions absolument continues sur l'intervalle $[-r,0]$ une dérivée faible intégrable au sens \mathcal{L}_p sur $[-r,0]$. Si $\phi \in \mathcal{W}_p^1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ donc

$$\begin{aligned} \langle [\phi]', u \rangle &= - \langle [\phi], u \rangle, \\ - \int_{-r}^0 \phi(\xi) u'(\xi) d\xi &= \int_{-r}^0 \phi'(\xi) u(\xi) d\xi, \forall u \in \mathcal{D}((-r,0),\mathbb{R}^{n \times n}). \end{aligned}$$

$\mathcal{W}_p^1([-r,0],\mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|\phi\|_{\mathcal{W}_p^1} = \left[\|\phi(0)\|^p + \int_{-r}^0 \|\dot{\phi}(\theta)\|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

et

$$\|\phi\|_{\mathcal{W}_p^1} = \max \left\{ \|\phi(0)\|, \text{ess sup}_{\theta \in [-r,0]} \|\phi'(\theta)\| \right\}, \text{ si } p = \infty,$$

\mathcal{W}_p^1 est un espace de Banach.

Finalement on dénote les autres dérivées utilisées dans ce travail: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La dérivée supérieure à droite de f est définie par $f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [f(\xi+h) - f(\xi)]$, $\xi \in \mathbb{R}$ et la dérivée inférieure à droite de f est définie par $\lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} [f(\xi+h) - f(\xi)]$, $\xi \in \mathbb{R}$. Si ces deux dérivées sont égales, f a une dérivée à droite en ξ dénotée $\frac{df^+}{d\xi}$. De même pour la dérivée à gauche de f en $\xi \in \mathbb{R}$ quand $h \rightarrow 0^-$, dénotée $\frac{df^-}{d\xi}$.

INTRODUCTION

De nombreux systèmes dynamiques pratiques présentent des retards, mais qui sont souvent négligés par simplicité. Cependant, la présence des retards peut induire des mauvaises performances et des instabilités dans les systèmes de commande, il est donc important de les prendre en compte.

Les systèmes à retard forment une classe de systèmes de dimension infinie largement utilisée pour la modélisation et l'analyse de phénomènes de transport et propagation (de matière, d'énergie ou d'information). Ils apparaissent naturellement dans la modélisation de processus rencontrés en physique, mécanique, économie, chimie, biologie, dynamique des populations, écologie, physiologie, épidémiologie, etc. [59], [68], [33] [58], [83]. Par ailleurs, même si le procédé lui-même ne contient pas de retard, le système en boucle fermée peut engendrer des retards non négligeables (avec les capteurs, les actionneurs et le temps de calcul) [92].

Un système à retard de type retardé est modélisé par un système dans lequel la dérivée de "l'état" au temps présent est fonction des valeurs de "l'état passé" dans un intervalle. Un système à retard de type neutre est une classe de systèmes plus générale que les systèmes retardés, dans le sens où il est décrit par un modèle dans lequel la dérivée de "l'état" au temps présent est fonction non seulement des valeurs de "l'état passé", mais aussi de la dérivée de "l'état passé" dans un intervalle. Du point de vue mathématique, ces systèmes sont décrits soit par des équations différentielles fonctionnelles, soit sur des espaces abstraits (systèmes de dimension infinie [7]).

La littérature sur les systèmes linéaires à retards est importante aussi bien sur les aspects modélisation que sur les aspects stabilisation (voir, par exemple [51], [92], [84]). Par contre il n'y pas beaucoup de résultats de stabilité pour les systèmes neutres linéaires; en fait, même pour le système neutre linéaire scalaire le plus simple:

$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r) + c\dot{x}(t-r)$ avec $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+$, il n'y pas de solution analytique au problème de stabilité dépendante du retard r .

L'étude rigoureuse de la stabilité des systèmes retardés a commencé vers la fin des années 50 quand Krasovskii a étendu la deuxième méthode de Lyapunov aux systèmes retardés [66], [67]. Il s'est passé plus d'une dizaine d'années pour avoir des théorèmes d'existence et d'unicité pour les systèmes neutres [37], et une extension de la méthode directe de Lyapunov pour les systèmes à retard de type neutre par M. Cruz et J. Hale [19].

Quelques travaux ont été développés sur la stabilité des systèmes neutres dans le domaine temporel, voir par exemple [40], [112], [80], [81], ou dans le domaine fréquentiel voir par exemple [16], [112]. Mais ces travaux concernent la stabilité indépendante de la taille du retard, les résultats sont donc conservatifs quand le retard est inconnu. Alors il est intéressant de considérer l'analyse de stabilité dépendante de la taille du retard, voir [16], [48].

Dans la pratique, les paramètres du modèle ne sont pas bien connus, il est donc nécessaire de considérer la stabilité robuste par rapport aux paramètres [51], [22], [32]. Dans ce cas là, les systèmes neutres peuvent être représentés par des modèles avec incertitudes, voir par exemple [80], [81], [59] (la ligne de transmission sans pertes peut avoir des incertitudes dans les paramètres).

Ce rapport peut être considéré comme la suite des travaux sur les systèmes à retard qui ont été démarrés au Laboratoire en 1992, concrétisés par la soutenance de trois thèses (S. Niculescu [79], D. Ivanescu [46] et A. Fattouh [29]), de nombreuses publications [24] et par l'organisation de manifestations scientifiques (Workshop IFAC 1998, École d'Été 2000 [24]).

Comme on l'a vu, l'étude de la stabilité robuste et de la stabilité dépendante de la taille du retard est de première importance, parce qu'en pratique les paramètres d'un système ne sont pas bien connus et parce que la présence d'un retard peut induire l'instabilité. Dans ce mémoire, on a analysé pour la première fois ces deux types de stabilité en même temps, i.e. la stabilité robuste dépendante de la taille du retard des systèmes neutres linéaires par rapport aux paramètres et par rapport aux retards. Dans ce travail, tous les systèmes à retard étudiés sont décrits par des

équations différentielles fonctionnelles et analysés dans une approche temporelle.

Dans ce travail de thèse, on a obtenu tout d'abord des conditions suffisantes de stabilité robuste; les résultats sont présentés en termes d'inégalités matricielles linéaire LMIs, (théorèmes: 4.4.1, 5.4.1 et 5.4.2) et en termes d'inégalités matricielles non linéaires (théorème 6.4.1). L'étude de la stabilité est faite dans une approche de type Lyapunov-Krasovskii, pour cette étude, on a soit utilisé des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii déjà proposées dans la littérature (chapitre 5), soit étendu ce type de fonctionnelles (chapitre 4), soit proposé pour la première fois une méthode constructive de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour les systèmes neutres (chapitre 6). Par rapport aux aspects LMI [97], où les conditions de stabilité robuste sont faciles à vérifier, cette étude forme une des contributions principales de ce travail et généralise des résultats sur l'étude de la stabilité avec un seul paramètre de retard et des hypothèses restrictives sur la partie neutre [94]; et dans un cas plus général [96] mais avec de conditions de stabilité robuste non linéaires difficiles à vérifier. En ce qui concerne la méthode constructive de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour les systèmes neutres, on a travaillé en collaboration avec le professeur V. Kharitonov, on a développé une méthode constructive systématique de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii bien adaptées à l'étude de la stabilité robuste des systèmes neutres [99]. Ces résultats qui forment également une contribution principale de ce travail étendent les résultats de [55] aux cas neutres.

CONTENU DE LA THESE:

Dans le **Chapitre 1**, les systèmes linéaires à retard de type retardé sont d'abord introduits, puis sont définis les systèmes linéaires à retard de type neutre, appelés plus simplement systèmes neutres. On présente un procédé modélisé par un système à retard: une colonne chromatographique et trois procédés modélisés par des systèmes neutres: une ligne de transmission sans pertes, une barre flexible couplée à une charge et un circuit électronique dit à éléments "partiels" (PEEC). Dans ce chapitre, les modèles sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles, on ne les considère pas comme des modèles avec paramètres incertains et on n'entre pas dans les détails mathématiques (ces aspects seront développés dans les chapitres suivants), mais on présente les bases nécessaires pour approfondir le sujet.

Dans le **Chapitre 2**, on présente le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutres, on rappelle ce problème dans trois espaces: l'espace des fonctions continues \mathcal{C} , l'espace de Sobolev \mathcal{W}_p^1 et l'espace abstrait $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$. On rappelle aussi les solutions des systèmes neutres linéaires, la représentation de Cauchy et la matrice fondamentale associée aux systèmes neutres linéaires. On propose deux manières de trouver la matrice fondamentale où, pour l'une d'elles, on utilise l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$, qui a l'avantage d'être général pour résoudre les problèmes où "l'état" x n'est ni différentiable ni même continu, comme c'est le cas de la solution de la matrice fondamentale, un exemple dans $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}_p$ est présenté.

Le **Chapitre 3** a pour objectif de familiariser le lecteur avec la stabilité des systèmes neutres. On présente un panorama rapide sur la stabilité des systèmes neutres. Dans ce chapitre, on présente d'abord quelques définitions de stabilité et des théorèmes de base sur la stabilité des systèmes neutres. On pose un nouveau problème de stabilité robuste très général avec deux retards constants et inconnus, l'un dans "l'état retardé" et l'autre dans l'opérateur de différence. On présente également certaines transformations qu'on utilise pour démontrer la stabilité ou une propriété importante des systèmes neutres. Finalement, on présente un tour guidé sur la stabilité dépendante et indépendante de la taille du retard pour les systèmes neutres.

Dans le **Chapitre 4**, on aborde la stabilité robuste dépendante de la taille du retard des systèmes neutres linéaires, avec incertitudes sur les paramètres et les retards. Les systèmes considérés sont décrits par des équations différentielles fonctionnelles avec des incertitudes non linéaires et variantes dans le temps, concernant les paramètres des matrices d'état et d'état retardé, et incertitudes variantes dans le temps et quasilineaires pour l'opérateur de différence. L'analyse de stabilité présentée est effectuée grâce à une approche par fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

Le **Chapitre 5**, comme le chapitre précédent, traite de la stabilité robuste dépendante de la taille du retard des systèmes neutres linéaires avec incertitude dans les paramètres et les retards. Les systèmes considérés sont décrits par des équations différentielles fonctionnelles avec incertitudes non linéaires et variantes dans le temps

dans "l'état" et "l'état retardé", et incertitudes variantes dans le temps et quasili-néaires dans l'opérateur de différence. Dans ce chapitre, à la différence du précédent, on évite d'ajouter au système la dynamique associée à la transformation utilisée dans le Chapitre 4, en étendant la transformation par intégration sur un intervalle [65]: système (3.3.6), au cas neutre avec incertitudes: système (5.2.1)-(5.2.7).

Dans le **Chapitre 6**, on présente pour la première fois une approche constructive des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii appliquée aux systèmes neutres linéaires. Cette approche consiste d'une part en la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii "bien adaptées" aux systèmes neutres linéaires et d'autre part, on utilise ces fonctionnelles pour montrer la stabilité robuste de systèmes neutres linéaires avec incertitudes.

Des **conclusions et perspectives** terminent la thèse.

CONTRIBUTIONS DE LA THESE

Les contributions de la thèse sont les suivantes:

- L'obtention d'un modèle à retard simple de la colonne chromatographique, développé en collaboration avec M. Fadi Ibrahim, doctorant au LAG, une version de la ligne de transmission sans pertes [98], similaire à [11], [59] et quelques remarques pour la simulation des circuits PEEC [5], voir aussi [99].
- Une méthode pour obtenir la matrice fondamentale dans l'espace abstrait $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$ et sa solution analytique.
- Deux transformations de modèle pour les systèmes neutres. Pour la première, il s'agit de transformer le système neutre (3.3.7) en un système à retard classique (3.3.9) et on donne un résultat de stabilité: Théorème 3.4.1 [98]. La deuxième transformation revient à utiliser la règle de Leibnitz pour l'opérateur de différence (3.3.14), [96], qui transforme une classe de modèles de systèmes neutres plus générale que l'utilisation de la règle de Leibnitz seulement sur l'état. Ceci permet d'avoir des solutions avec discontinuités, tandis que l'opérateur de différence reste différentiable (presque partout). En fait, pour utiliser cette transformation, on se place dans des espaces intéressants par rapport à la stabilité [98] où le problème de la valeur initiale est bien posé par exemple $\mathcal{W}_p^1([-r,0], \mathbb{R}^n)$ [42], $\mathcal{C}([-r,0], \mathbb{R}^n)$ [40], $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$ [13].

- Une des contributions principales de ce travail est le Chapitre 4, basé sur [98] qui généralise les travaux antérieurs [94], [96] fondés sur les incertitudes variantes dans le temps et quasilineaires dans l'opérateur de différence, et on assure l'obtention de conditions de stabilité robuste (faciles à vérifier) qui s'expriment en termes de l'existence de solutions positives d'une LMI.
- Une autre des contributions de ce travail est le Chapitre 5; l'apport est l'analyse de stabilité via une approche de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii en évitant la dynamique ajoutée par la transformation utilisée dans le Chapitre 4, en étendant la transformation par intégration sur un intervalle [65] au cas neutre avec incertitudes.
- La dernière contribution de ce travail est donnée dans le Chapitre 6; la nouveauté concerne la méthode constructive des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii avec une grande partie dédiée aux propriétés de la matrice de Lyapunov, ce travail a fait l'objet d'une collaboration avec le Pr. Vladimir Kharitonov.

Chapitre 1

MODÈLES DE SYSTÈMES À RETARD DE TYPE NEUTRE

Dans ce chapitre, on introduit d'abord les systèmes à retard de type retardé linéaires puis les systèmes à retard de type neutre, linéaires ou plus simplement systèmes neutres linéaires [62]; dans le prochain chapitre une classe plus générale de systèmes neutres est définie. On présente un procédé modélisé par un système retardé (une colonne chromatographique), et trois procédés modélisés par des systèmes neutres (une ligne de transmission sans pertes, une barre flexible couplée à une charge et un circuit électronique dit à éléments "partiels" (PEEC)). Dans ce chapitre, on ne considère pas les modèles avec des paramètres incertains et on n'entre pas dans les détails mathématiques (ces aspects seront développés dans les chapitres suivants), mais on présente les bases nécessaires pour approfondir le sujet.

L'apport de ce chapitre est l'obtention d'un modèle retardé simple de la colonne chromatographique, développé en collaboration avec Fadi Ibrahim, étudiant de doctorat du LAG, une version de la ligne de transmission sans pertes [98], similaire à [11], [59]. Une démonstration alternative à celle proposée dans [41] pour l'existence de solutions asymptotiquement stables pour les systèmes neutres linéaires qui ne sont pas exponentiellement stables est donnée ainsi que quelques remarques sur la simulation des circuits PEEC [5], [99].

Dans ce chapitre, on veut présenter quelques systèmes réels qui se modélisent bien avec des systèmes à retard (la plupart de type neutre) pour motiver le lecteur.

Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons à l'analyse de ces systèmes et en particulier à la stabilité robuste.

1.1 INTRODUCTION

Les systèmes à retard forment une classe de systèmes de dimension infinie largement utilisée pour la modélisation et l'analyse de phénomènes de transport et de propagation (de matière, d'énergie ou d'information). Ils apparaissent naturellement dans la modélisation de processus rencontrés en physique, mécanique, économie, chimie, biologie, dynamique des populations, écologie, physiologie, épidémiologie, etc. [59], [68], [33], [58]. Par ailleurs, même si le procédé lui-même ne contient pas de retard, le système en boucle fermée peut engendrer des retards non négligeables (avec les capteurs, les actionneurs et le temps de calcul) [92].

Soit $r > 0$, $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, h une fonction continue sur \mathbb{R} . Un système dans lequel la dérivée de la solution à l'instant t est fonction des valeurs de la solution à l'instant $t - r$ dans un intervalle est un système retardé linéaire s'il a la structure [40]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + h(t), t > 0, r > 0.$$

Un système dans lequel la dérivée de la solution à l'instant t est fonction non seulement des valeurs de la solution à l'instant $t - r$ dans un intervalle, mais aussi de la dérivée de la solution à l'instant $t - r$, est un système neutre linéaire s'il est décrit par [40]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + C\dot{x}(t-r) + h(t), t > 0, r > 0.$$

Un système en boucle ouverte $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ qui n'a pas de retard intrinsèque peut en avoir en boucle fermée:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r), t > 0, r > 0,$$

(à cause des possibles retards introduits par les capteurs, les actionneurs et le temps de calcul).

Cependant en pratique, beaucoup de systèmes retardés peuvent être déduits à partir de modèles de type équations aux dérivées partielles de type parabolique, par exemple [106]:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g, \quad (1.1.1)$$

où ($u = u(x,y)$ et a, b, c, d, e, f, g peuvent être fonctions de x ou y)

$$b^2 - ac = 0,$$

et les systèmes neutres proviennent souvent de modèles aux dérivées partielles de type hyperbolique, par exemple (1.1.1) avec

$$b^2 - ac > 0.$$

Dans la suite, on illustre cela avec quatre exemples: une colonne chromatographique, une ligne de transmission sans pertes, une barre flexible couplée à une charge et un circuit électronique à éléments partiels.

1.2 COLONNE CHROMATOGRAPHIQUE

Ici on montre comment transformer un modèle linéaire simple d'un procédé chromatographique en un système retardé. Ici "linéaire" signifie linéarité de la relation d'équilibre entre la phase liquide et la phase solide. On considère un modèle simple pour une colonne chromatographique sans dispersion axiale [27], [8] Figure 1.1. À l'entrée de la colonne, on injecte un mélange avec concentration C_{in} de composants A et B mélangés en phase liquide. À la sortie de la colonne, le composant A a la concentration C_{out} tandis que le composant B est absorbé en phase solide sur les parois de la colonne.

Ce système est décrit par des équations aux dérivées partielles de type parabolique :

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{\partial q_i}{\partial t} + u \frac{\partial c_i}{\partial x} = 0, \quad i \in \{A, B\}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (1.2.1)$$

et par un isotherme linéaire (cette hypothèse est très satisfaisante pour de nombreux procédés industriels)

$$q_i = K_i c_i, \quad K_i = \text{constante}, \quad (1.2.2)$$

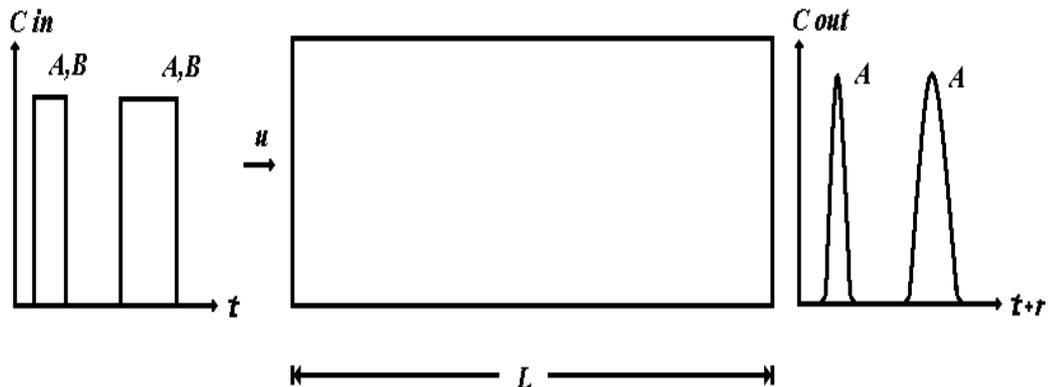


FIG. 1.1 – Schéma de principe de la colonne.

où L est la longueur de la colonne, c_i est la concentration du composant i dans la phase liquide, en g/cm^3 , q_i est la concentration du composant i dans la phase solide, en g/cm^2 , u est la vitesse du fluide en cm/s ; ϵ la fraction du vide de la colonne et K_i le coefficient de Henry du composant i sont des nombres sans dimension.

La condition initiale est:

$$c_i(0, x) = c_i^i(x), \quad (1.2.3)$$

où c_i^i est la concentration initiale du composant i .

La condition limite est:

$$c_i(t, 0) = c_i^e(t), \quad (1.2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial c_i}{\partial x}(t, x) = 0, \quad (1.2.5)$$

et la condition limite de commande (voir [59] pour $k_i = 0$) est PI:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}(t, 0) = -k_p [c_i(t, L) - c_i^d] - k_i \int_{t-r}^t [c_i(\tau, L) - c_i^d] d\tau, \quad (1.2.6)$$

où c_i^e est la concentration limite du composant i , c_i^d est la concentration désirée du composant i à la fin de la colonne ($x = L$) dans la phase liquide; k_p , k_i sont des coefficients constants.

La solution générale de (1.2.1)-(1.2.2) est:

$$c_i(t, x) = \psi_i \left(\frac{u}{\gamma} t - x \right), \quad \gamma := \left(1 + \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} K_i \right), \quad (1.2.7)$$

où ψ_i est une fonction à déterminer. De la première condition limite (1.2.4), on obtient

$$c_i(t,0) = \psi_i\left(\frac{u}{\gamma}t\right),$$

ce qui implique

$$c_i(t,x) = c_i^e\left(t - \frac{\gamma}{u}x\right), t \geq 0, 0 \leq x \leq L.$$

Alors, à l'extrémité de la colonne ($x = L$), on a

$$c_i(t,L) = c_i^e\left(t - \frac{\gamma}{u}L\right), t \geq 0. \quad (1.2.8)$$

Si on définit maintenant la vitesse de propagation w_i du composant i à l'intérieur de la colonne comme dans [27]:

$$w_i := -\frac{\partial c_i}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{u}{\gamma},$$

alors, dans cette simple approche, la colonne chromatographique est considérée comme un simple retard¹ dans (1.2.8):

$$c_i(t,L) = c_i^e(t - r), r := \frac{L}{w_i}, t \geq 0, \quad (1.2.9)$$

avec la condition initiale obtenue par (1.2.3) et (1.2.5)

$$c_i^e(\theta) = \begin{cases} c_i^i\left(-\frac{u}{\gamma}\theta\right) & \text{si } \theta \in [-r,0], \\ 0 & \text{si } \theta \in (-\infty, -r]. \end{cases}$$

Pour la commande de (1.2.9), on considère encore une fois la condition limite (1.2.6), elle donc peut être représentée par le système retardé suivant:

$$\dot{c}_i^e(t) = -k_p [c_i^e(t - r) - c_i^d] - k_i \int_{t-r}^t [c_i^e(\tau - r) - c_i^d] d\tau, \quad (1.2.10)$$

où k_p et k_i sont des constantes à ajuster.

Dans la suite, on montre une simulation "didactique" de la colonne chromatographique.

1. Le retard $r = L/w_i$ a été proposé dans [27], où une approche par équations aux dérivées partielles est utilisée.

1.2.1 SIMULATION

Soit le système décrit par l'équation (1.2.10) où $k_p = 1$, $k_i = 0$, $r = 1$ et la référence $c_i^d = 0$, on a alors:

$$\dot{c}_i^e(t) = -c_i^e(t-1), t \geq 0. \quad (1.2.11)$$

Avec la condition initiale suivante

$$c_i^e(\theta) = 1, \theta \in [-r, 0], r = 1. \quad (1.2.12)$$

L'évolution du système est donnée par la courbe présentée dans la Figure 1.2.

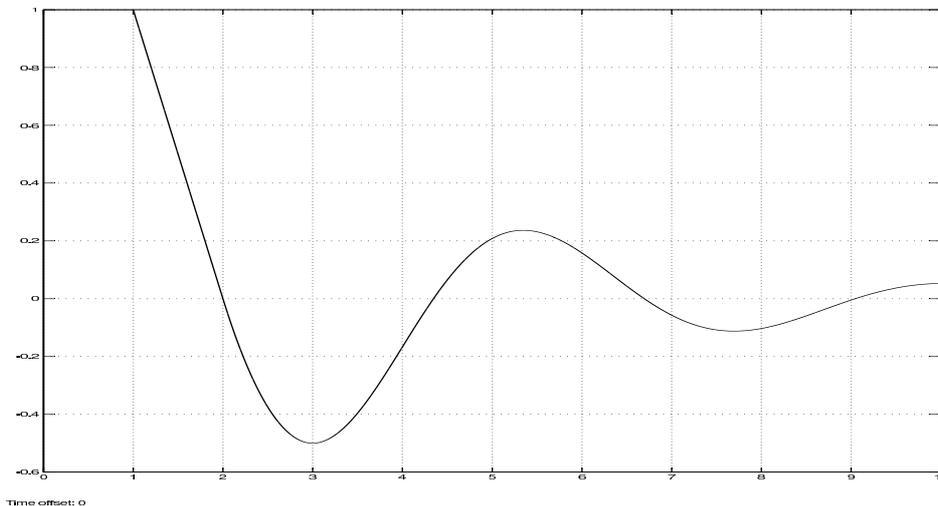


FIG. 1.2 – Évolution de $c_i^e(t-r)$ en fonction de t .

Ce système d'équations (1.2.11)-(1.2.12) est un système retardé qui a été analysé partiellement dans [24] par J.-P. Richard et M. Dambrine. Par la simplicité de (1.2.11)-(1.2.12), il est facile à construire les solutions analytiques, intervalle par intervalle, en utilisant la méthode pas à pas [59], décrite dans le prochain chapitre (Section 2.5). Les solutions trouvées sur les intervalles sont:

$$\begin{aligned} c_i^e(t) &= 1, & si \quad -1 \leq t \leq 0, \\ c_i^e(t) &= 1 - t, & si \quad 0 \leq t \leq 1, \\ c_i^e(t) &= \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2}, & si \quad 1 \leq t \leq 2, \\ c_i^e(t) &= -\frac{t^3}{6} + \frac{3}{2}t^2 - 4t + \frac{17}{6}, & si \quad 2 \leq t \leq 3, \dots \end{aligned}$$

La solution de (1.2.11)-(1.2.12) devient de plus en plus régulière quand t croît. En fait $c_i^e(t)$ n'est pas dérivable en zéro

$$\frac{d^- c_i^e}{dt}(0) = 0 \neq \frac{d^+ c_i^e}{dt}(0) = -1,$$

mais elle l'est en $t = 1$,

$$\frac{d^- c_i^e}{dt}(1) = -1 = \frac{d^+ c_i^e}{dt}(1).$$

Par contre, $c_i^e(t)$ n'est pas dérivable deux fois en $t = 1$,

$$\frac{d^{2-} c_i^e}{dt^2}(1) = 0 \neq \frac{d^{2+} c_i^e}{dt^2}(1) = 1,$$

mais elle l'est en $t = 2$,

$$\frac{d^{2-} c_i^e}{dt^2}(2) = 1 = \frac{d^{2+} c_i^e}{dt^2}(2) \dots$$

Cette propriété de "régularité" est caractéristique des systèmes retardés [83], [58]; cependant elle n'est pas satisfaite pour les systèmes neutres comme on le montre par la suite.

1.3 LIGNE DE TRANSMISSION SANS PERTES

On considère maintenant l'exemple suivant [98], similaire à [11], [59], (voir aussi [10]), qui traite une ligne de transmission sans pertes; à une extrémité ($x = 0$), il y a une source de tension constante E et à l'autre extrémité ($x = l$) une capacité est branchée en parallèle avec une diode tunnel (ce genre de diodes est utilisé dans les amplificateurs haute fréquence de circuits oscillants électroniques par exemple) comme on le voit Figure 1.3 [50].

Le courant $i(\cdot, \cdot)$ et la tension $v(\cdot, \cdot)$ sont des fonctions de t et x , qui satisfont l'équation du télégraphe, une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique,

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad C \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3.1)$$

avec les conditions limites suivantes:

$$E = Ri(t, 0) + v(t, 0), \quad i(t, l) = C_l \frac{\partial v(t, l)}{\partial t} + i_d(v(t, l)), \quad (1.3.2)$$

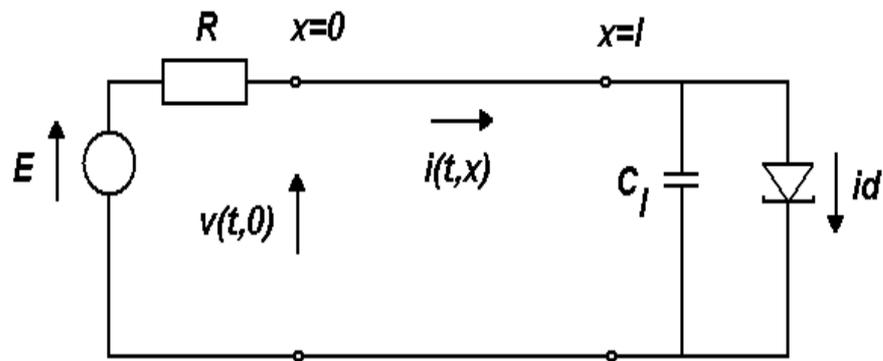


FIG. 1.3 – *Circuit de la ligne de transmission*

où l est la longueur de la ligne, L , C sont l'inductance et la capacité du conducteur par unité de longueur, R est la résistance à l'entrée, C_l est la capacité en parallèle avec la diode tunnel, $i_d(v)$ est la courbe caractéristique courant-tension de la diode (une fonction polynômiale non linéaire), donnée Figure 1.4 [18].

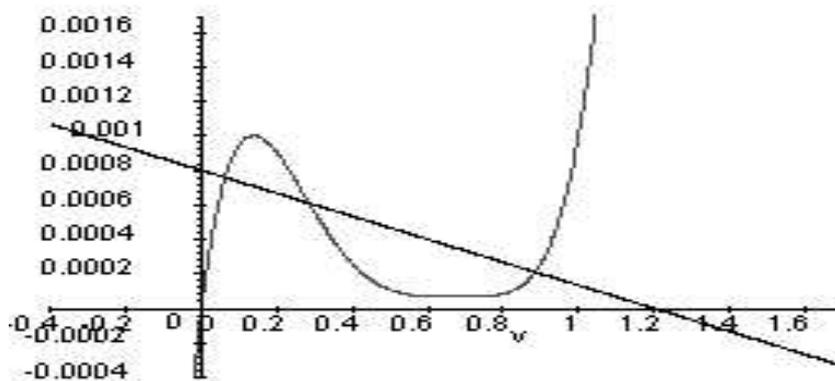


FIG. 1.4 – *Courbe caractéristique courant-tension et ligne de charge de la diode tunnel.*

Les points d'équilibre (v_0, i_0) satisfont une équation linéaire donnée par:

$$E = v_0 + Ri_0, \quad i_0 = i_d(v_0).$$

On suppose que le point du fonctionnement est donné par l'approximation du premier ordre

$$i(v_d) \approx i(v_0) + m(v_d - v_0), \quad (1.3.3)$$

avec m constante positive. La solution générale de (1.3.1) est donnée par la formule de d'Alembert

$$\begin{aligned} v(t,x) - v_0 &= \varphi(t - bx) + \psi(t + bx), \\ i(t,x) - i_0 &= Z^{-1} [\varphi(t - bx) - \psi(t + bx)], \\ b &:= \sqrt{LC}, \quad Z := \sqrt{LC^{-1}}. \end{aligned}$$

Avec la première condition limite (1.3.2), on a $\varphi(t) = (R_0 - Z)(R_0 + Z)^{-1} \psi(t)$. La seconde condition (1.3.2) donne le système linéaire neutre suivant

$$\frac{d\psi}{d\xi}(\xi) - C \frac{d\psi}{d\xi}(\xi - r) = A\psi(\xi) + B\psi(\xi - r), \quad (1.3.4)$$

avec $A = \frac{m - \sqrt{\frac{C}{L}}}{C\ell}$, $B = -\frac{(\sqrt{\frac{L}{C}} - R_0)(m + \sqrt{\frac{C}{L}})}{(\sqrt{\frac{L}{C}} + R_0)C\ell}$, $C = \frac{(\sqrt{\frac{L}{C}} - R_0)}{(\sqrt{\frac{L}{C}} + R_0)}$, $r = 2\sqrt{LC}\ell$, $\xi := t - b\ell$. Cela montre une transformation de l'équation différentielle partielle (1.3.1) de type hyperbolique en un système à retard de type neutre ou système neutre (1.3.4). Cette transformation n'est pas unique [40], [59]; dans [59] la même méthode est utilisée avec

$$i(v_d) \approx i(v_0) - m(v_d - v_0) - p(v_d - v_0)^2,$$

avec m et p constantes positives au lieu de (1.3.3), mais le modèle proposé par [59] ne peut pas être mis sous la forme (1.3.4) quand $p = 0$ (il y a l'annulation de l'état).

Ensuite, on montre une simulation pour une ligne de transmission "didactique".

1.3.1 SIMULATION

Maintenant on montre une "réponse impulsionnelle" pour la ligne de transmission sans pertes modélisée par:

$$\frac{d\psi}{d\xi}(\xi) - 0.5 \frac{d\psi}{d\xi}(\xi - 0.5) = -\psi(\xi) - 0.5\psi(\xi - 0.5). \quad (1.3.5)$$

Dans la Figure 1.5, la condition initiale est

$$\psi(\xi) \equiv 0 \text{ pour } \xi < 0 \text{ et } \psi(0) = 1. \quad (1.3.6)$$

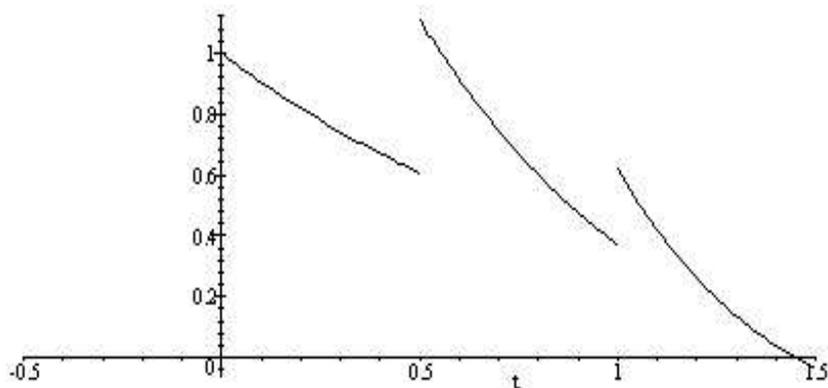


FIG. 1.5 – Réponse impulsionnelle pour la ligne de transmission sans pertes.

La Figure 1.5 montre que la dynamique pour un système linéaire neutre est très différente de celle d'un système à retard (voir la simulation précédente, Figure 1.2) ou d'un système linéaire invariant dans le temps. En fait, la solution de (1.3.5)-(1.3.6) n'est pas différentiable aux instants 0, 0.5, 1.5, ... et la solution de (1.3.5)-(1.3.6) ne devient pas régulière quand t grandit, comme cela est vérifié pour les systèmes retardés.

Les solutions analytiques de (1.3.5)-(1.3.6) sont données, intervalle par intervalle (voir la méthode pas à pas section 2.5). Les solutions sont:

$$\begin{aligned} 0, & \quad \text{si } -1 \leq \xi < 0, \\ e^{-t}, & \quad \text{si } 0 \leq t < 0.5, \\ \frac{1}{2}e^{-(t-\frac{1}{2})} + e^{-t} - e^{-(t-\frac{1}{2})} (t - \frac{1}{2}), & \quad \text{si } 0.5 \leq t < 1, \dots \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

On remarque que la solution $\psi(\xi)$ est différentiable partout à droite; par contre $\frac{d^- \psi}{d\xi}(\xi)$ n'est pas finie lors des sauts: en $\xi = 0$

$$\frac{d^- \psi}{d\xi}(0) = +\infty \neq \frac{d^+ \psi}{d\xi}(0) = -1,$$

en $\xi = 0.5$

$$\frac{d^- \psi}{d\xi}(0.5) = +\infty \neq \frac{d^+ \psi}{d\xi}(0) = -2.1065,$$

en général dans tous les sauts $\left| \frac{d^+ \psi}{d\xi} \right| < \infty$. Alors les solutions (1.3.7) satisfont (1.3.5)-(1.3.6) partout sauf aux points $\xi = kr$, $k = 1, 2, \dots$

Il est facile de vérifier que la différence $[\psi(\xi) - 0.5\psi(\xi - r)]$, $r = 0.5$, est continue pour $\xi > 0$. Finalement pour (1.3.5), la solution est exponentiellement stable parce que le coefficient de la partie dérivée retardée, la matrice $C = 0.5$, est Schur-Cohn stable [4] (les valeurs propres sont à l'intérieur du disque unitaire dans \mathbb{C}). Donc, l'amplitude $\|C^k\|$, des sauts aux points kr , $k = 1, 2, \dots$ décroît, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \|C^k\| = 0$ (voir section 2.6, lemme 2.6.2). L'exemple suivant montre un système pour lequel cette propriété n'est pas vérifiée.

1.4 BARRE FLEXIBLE COUPLÉE À UNE CHARGE

On considère le comportement d'une barre flexible soumise à un couple appliqué à une extrémité, avec une masse attachée à l'autre extrémité. Ce système est décrit par une équation d'onde (équation aux dérivées partielles de type hyperbolique) voir [101]. La commande est le couple appliqué et le couple de réaction est dû à l'effet de la masse attachée à l'autre extrémité [78], [30]:

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, z) = \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}(\tau, z) \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}(\tau, 0) = -u(\tau), \quad \frac{\partial q}{\partial z}(\tau, L) = -J \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, L)$$

$$q(0, z) = q_0(z), \quad \frac{\partial q}{\partial \tau}(0, z) = q_1(z).$$

Ici $q(\tau, z)$ est le déplacement angulaire au point $z \in [0, L]$ et au temps $\tau \geq 0$, comme le montre la Figure 1.6; L est la longueur de la barre, σ est l'inverse de la vitesse de propagation de l'onde, J est le moment d'inertie de la masse, $u(\tau)$ est le couple de commande, et q_0, q_1 sont respectivement les positions et vitesses angulaires.

La solution générale de (1.4.1) est donnée par la formule de d'Alembert:

$$q(\tau, z) = \varphi(\tau + \sigma z) + \phi(\tau - \sigma z)$$

où φ, ψ sont des fonctions arbitraires d'une variable réelle. L'objectif de la commande est un suivi de trajectoire pour l'angle de la masse; la sortie est donc

$$y(\tau) = q(\tau, L).$$

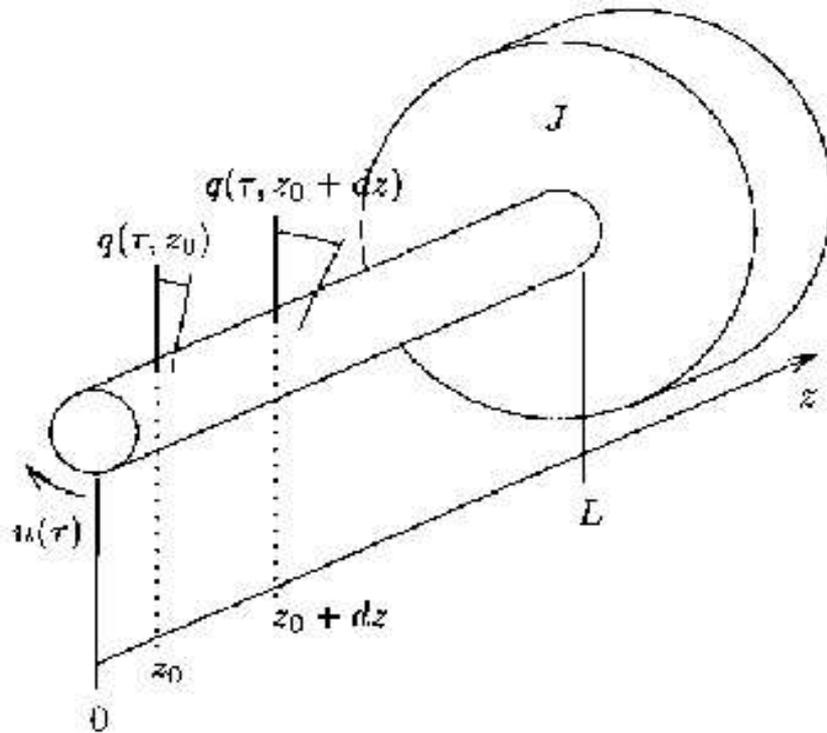


FIG. 1.6 – Barre flexible couplée à une charge.

Pour $t = (\sigma/J) \tau$, $v(t) = (2J/\sigma^2) u(t)$ et $T = \sigma L$, de simples calculs, similaires à l'exemple précédent (voir [78] pour les détails) donnent le système neutre suivant:

$$\dot{\psi}(t) - C \dot{\psi}(t-r) = A\psi(t) + B\psi(t-r) + Dv\left(t - \frac{r}{2}\right),$$

où $r = 2T$, $\psi^\top(t) = \begin{pmatrix} y(t) & \dot{y}(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce système est caractérisé par le coefficient de la dérivée retardée C , non Shur-Cohn stable. Cette propriété est importante car elle est nécessaire pour avoir une solution exponentiellement stable, comme il est montré dans la suite avec un système similaire au précédent mais réduit au cas scalaire.

1.4.1 SIMULATION

Dans cette simulation on présente le phénomène des solutions non exponentiellement stables pour les systèmes neutres. Par souci de simplicité, on considère le système neutre $\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1) = -ax(t)$, réécrit dans la forme de Hale [41]:

$$\frac{d}{dt}[x(t) + x(t-1)] = -ax(t), \quad a > 0, \quad t \geq 0, \quad (1.4.2)$$

avec la condition initiale, au moins continue

$$x(t) = g(t), \quad \text{si } -1 \leq t \leq 0. \quad (1.4.3)$$

Une simulation est présentée Figure 1.7.

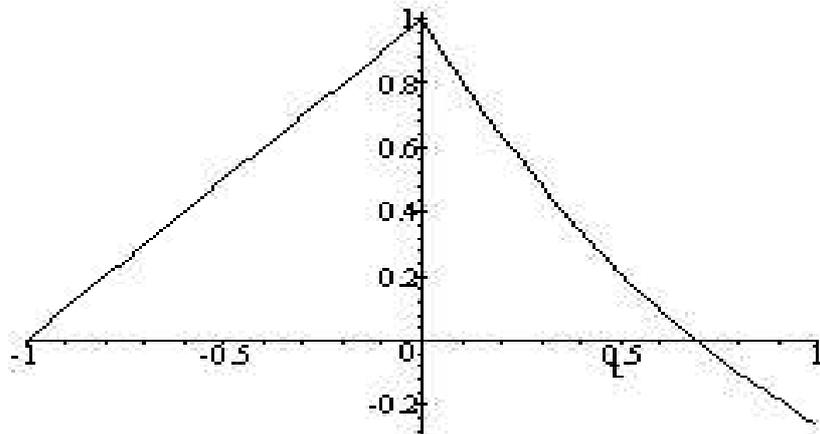


FIG. 1.7 – Solution avec $g(t) = (t - 1)$, $-1 \leq t \leq 0$.

THÉORÈME 1.4.1 (Hale et Verduyn Lunel 2002). *Dans (1.4.2) le coefficient de $x(t-1)$ n'est pas Shur-Cohn stable, cependant $x \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Le système (1.4.2) n'est donc pas exponentiellement stable mais il est asymptotiquement stable (voir Définition 3.2.1, Chapitre 3).*

Ce résultat est donné dans [41] où les auteurs utilisent une approche spectrale de la théorie des opérateurs pour la démonstration; ici on donne une démonstration partielle en utilisant une approche temporelle simple (voir Sections 2.4, 2.5):

Démonstration. Supposons que la solution de (1.4.2)-(1.4.3) est asymptotiquement stable i.e., $x \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Par contradiction, on suppose que la solution est

exponentiellement stable i.e., il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\|x(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t}$, $\forall t > 0$. Alors on peut borner la solution de (1.4.2):

$$x(t) = -x(t-1) + e^{-at} [x(0) + x(-1)] + a \int_0^t e^{-a(t-s)} x(s-1) ds \quad (1.4.4)$$

par

$$\begin{aligned} x(t) &\leq -x(t-1) + e^{-at} [g(0) + g(-1)] + a \int_0^t e^{-a(t-s)} \|x(s-1)\| ds \\ &\leq -x(t-1) + e^{-at} [g(0) + g(-1)] + a \int_0^t e^{-a(t-s)} \beta e^{-\alpha(s-1)} ds, \end{aligned}$$

qui montre que la différence $x(t) + x(t-1)$ a une borne supérieure positive:

$$x(t) + x(t-1) \leq e^{-at} [g(0) + g(-1)] + a\beta e^{-at} e^\alpha \int_0^t e^{(a-\alpha)s} ds;$$

finalemeent, après intégration, on obtient:

$$x(t) + x(t-1) \leq e^{-at} [g(0) + g(-1)] + \frac{a\beta e^\alpha}{(a-\alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-at}). \quad (1.4.5)$$

L'équation (1.4.5) signifie que $\forall \epsilon > 0$ il existe $\sigma > 0$ tel que $x(t) + x(t-1) \leq \epsilon$, $\forall t \geq \sigma$, alors la solution (1.4.4) satisfait l'inéquation

$$x(t) + x(t-1) \leq \epsilon, t \geq \sigma, \quad (1.4.6)$$

pour n'importe quelle condition initiale continue

$$x(\sigma + \theta) = -\tilde{g}(\sigma + \theta), \theta \in [-1, 0].$$

Par simplicité, on choisit $\tilde{g}(\sigma + \theta) = -1$, alors la solution de (1.4.4) pour $t \in [\sigma, \sigma + 1]$ est

$$x(t) = -x(t-1) + e^{-at} [x(\sigma) + x(\sigma-1)] + e^{-at} \int_\sigma^t de^{as},$$

alors la différence $x(t) + x(t-1)$ en $t = \sigma$ est

$$x(t) + x(t-1) = 2e^{-a\sigma}.$$

Finalemeent si on choisit $\epsilon = e^{-a\sigma}$, alors (1.4.6) implique la contradiction:

$$2 \leq 1.$$

Donc $x(t)$ n'est pas exponentiellement stable et (1.4.2)-(1.4.3) est simplement asymptotiquement stable.

□

REMARQUE 1.4.1. Cette démonstration comme on l'a dit au départ, est partielle, car il faut montrer que $x \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ mais ce résultat peut être obtenu en accord avec [41] (il n'est pas montré) en démontrant que la transformation de Laplace de (1.4.2) a une extension analytique dans le demi-plan complexe $\{s \in \mathbb{C} | \text{Re}(s) \geq 0\}$, alors (1.4.2) est intégrable le long d'axe réel positif, et $x(t)$ est stable, donc $x \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ (voir Exemple 3.2.2, Chapitre 3).

1.5 CIRCUITS ÉQUIVALENTS DES ÉLÉMENTS PARTIELS PEEC

Ce dernier exemple est un circuit dans lequel les éléments ont des retards (qui représentent les circuits équivalents des éléments partiels PEEC) [5], [99]. Ces circuits se rencontrent dans l'interconnexion de circuits digitaux ou avec des circuits intégrant des microondes; ils sont devenus très importants parce qu'il permettent de décrire le comportement des systèmes VLSI.

On motive ce travail avec un circuit de test, qui est un circuit PEEC réel [103] montré Figure 1.8 (b). Ce circuit représente un circuit équivalent d'onde complété pour une barre de métal qui est discrétisée en deux cellules comme on le voit Figure 1.8 (a).

Le modèle de la Figure 1.8 (b) inclut des éléments de circuit que l'on accouple entre des inductances avec retard de la forme $L_{Pij}(t-r)$ et des retards dépendant des sources de courant de la forme $i_{Cj}(t-r)$. La forme générale de ce type d'équation est

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + C\dot{x}(t-r), t \geq t_0 \quad (1.5.1)$$

avec la condition initiale

$$x(t) = g(t), t \leq t_0,$$

où toutes les matrices A , B et C , et le vecteur g ont des valeurs réelles. On donne dans la suite un simulation.

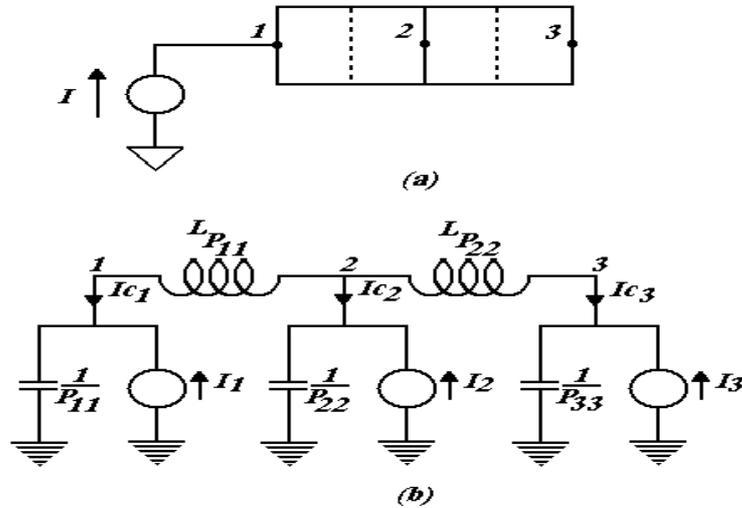


FIG. 1.8 – (a) barre de métal, (b) petit modèle PEEC.

1.5.1 SIMULATIONS

Pour cette simulation, on considère un circuit de test [5] (voir aussi [103]), où le retard $r = 1$, les matrices sont

$$\frac{A}{100} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \frac{B}{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5.2)$$

et la condition initiale est

$$g(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \sin(3\pi t) \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (1.5.3)$$

Ce système a une solution asymptotiquement stable (exponentiellement stable) mais "difficile" à simuler car mal conditionné; il a été utilisé dans la littérature pour des comparaisons de méthodes d'intégration comme par exemple la règle trapézoïdale utilisée par SPICE, ou la méthode contractive à 2-étapes Lobatto III-C, proposée dans [5] par exemple.

Ensuite des simulations sont présentées avec la sortie

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

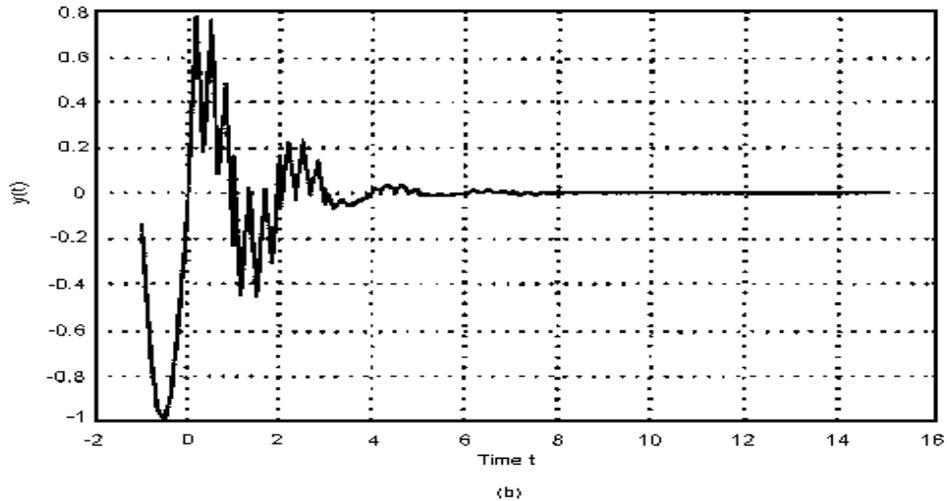


FIG. 1.9 – *Solution pour y avec la règle trapézoïdale (SPICE)*

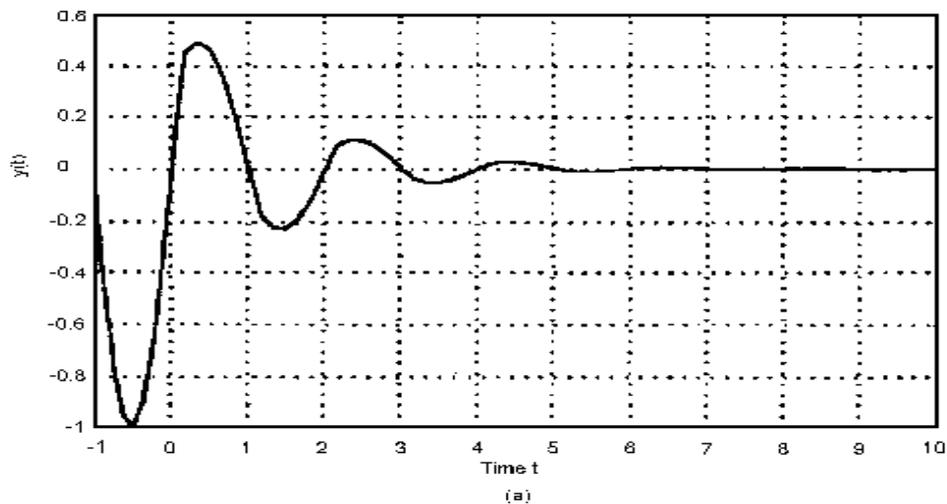


FIG. 1.10 – *Solution pour y avec la méthode contractive 2-étapes Lobatto III-C*

Les Figures 1.9, 1.10 montrent d'une part, l'inefficacité de la règle trapézoïdale, qui engendre des oscillations pour les solutions, même si les solutions sont exponentiellement stables.

D'autre part, malgré le bon comportement de la simulation avec Lobatto III-C, celle-ci pose un problème, voir la remarque suivante:

REMARQUE 1.5.1. La condition initiale (1.5.3) est telle que (1.5.1) ne satisfait pas la condition dite de "sewing condition" [40],[68],[59]) en 0, i.e.

$$\dot{x}(0) \neq Ax(0) + Bx(-r) + C\dot{x}(-r),$$

donc la solution de (1.5.1)-(1.5.3) ne peut pas être différentiable en 0, comme on le voit sur la Figure 1.11 avec la méthode ode4 Runge-Kutta.

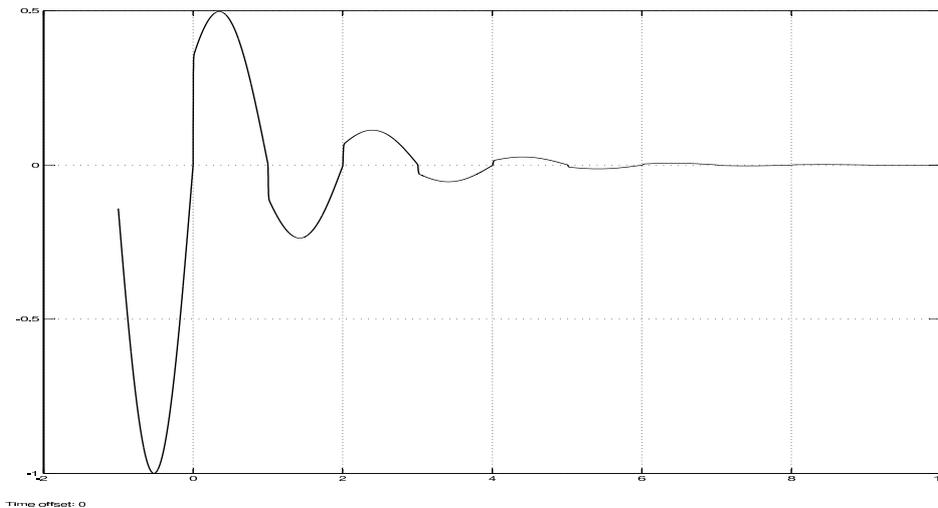


FIG. 1.11 – *Solution pour y avec ode4 Runge-Kutta MATLAB.*

Cependant ce comportement n'est pas satisfait dans les Figures 1.9 et 1.10.

Pour les circuits PEEC, de "bonnes simulations" ont été obtenues avec la méthode d'Euler [104] et [88].

1.6 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, on a présenté à base d'exemples les systèmes retardés et les systèmes neutres linéaires; on a montré comment certaines équations aux dérivées partielles de type parabolique sont reliées aux systèmes retardés, et certaines équations aux dérivées partielles de type hyperbolique aux systèmes neutres. Par contre, il n'existe pas de théorie globale qui caractérise quel type d'équations peut être transformé en systèmes à retards, ou une méthodologie pour les transformer. Ici, on a utilisé l'équation (1.2.7) et la formule de d'Alembert, mais [59] propose aussi une

technique qui introduit un retard artificiel pour l'analyse de l'équation de la chaleur et la méthode pas à pas (pag. 172-174). On a présenté un modèle simple pour la colonne chromatographique, un circuit électronique d'une ligne de transmission sans pertes [98] (hypothèse utilisée pour la synthèse de réseaux à haut vitesse dans [10] de IBM), un système mécanique fait d'une barre flexible acouplée à une charge, et un circuit électronique à éléments partiels (PEEC) [99] (circuit pratique de test étudié par [5]), avec aussi quelques simulations. Celles-ci montrent le caractère tout à fait particulier des systèmes neutres par rapport aux systèmes retardés, notamment pour la convergence et la différentiabilité en certains points.

Dans ce chapitre, les modèles obtenus sont linéaires (sans éléments de dissipation) avec des conditions limites linéaires. Mais dans [59], il y a des exemples avec des éléments de dissipation comme la résistance à la circulation sanguine pour le contrôle de l'hypertension, conditions limites non linéaires où les modèles obtenus sont non linéaires, et dans [68], [110] sont proposés des systèmes neutres non linéaires détaillés qui modélisent la croissance des espèces, qui prennent en compte la capacité de l'environnement, la consommation de nourriture, etc.

Chapitre 2

LE PROBLÈME DE LA VALEUR INITIALE ET SOLUTIONS POUR SYSTÈMES DE TYPE NEUTRE

Dans ce chapitre, on présente le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutres; les idées sont simples mais la notation peut être compliquée (voir la première section où se trouve la notation). Ici on rappelle ce problème dans trois espaces différents: l'espace des fonctions continues \mathcal{C} , l'espace de Sobolev \mathcal{W}_p^1 et l'espace abstrait $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$. On rappelle aussi les solutions des systèmes neutres linéaires, la représentation de Cauchy et la matrice fondamentale associée aux systèmes neutres linéaires. On propose deux manières de trouver la matrice fondamentale; pour l'une d'elles, on utilise l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$, qui a l'avantage d'être général pour résoudre les problèmes où la variable x n'est pas différentiable, même pas continue comme c'est le cas de la solution de la matrice fondamentale [6]. Un exemple de système neutre dans $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}_p([-0.5,0], \mathbb{R}^2)$ est présenté. Un autre exemple dans $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_p([-1,0], \mathbb{R})$ montre comment l'analyse du système neutre $\dot{x}(t) + \dot{x}(t-1) = -x(t)$, $x(t) \in \mathcal{C}^1((0, \infty), \mathbb{R})$, est inefficace pour l'analyse du système $\frac{d}{dt}[x(t) + x(t-1)] = -x(t)$, où seulement la différence $[x(t) + x(t-1)]$ est différentiable presque partout. Dans ces espaces précédemment décrits, le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutres est bien posé, voilà pourquoi ils sont utilisés dans les prochains chapitres.

La contribution de ce chapitre est de proposer un méthode pour obtenir la matrice fondamentale dans l'espace abstrait $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$ et sa solution analytique.

2.1 INTRODUCTION

Le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutre est un problème qui consiste à déterminer une solution à l'équation de type neutre avec des restrictions sur la fonction inconnue en une valeur de la variable indépendante. Une telle condition est appelée valeur initiale. Considérons l'exemple suivant.

EXEMPLE 2.1.1. Soit $r = \frac{\pi}{2}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$ et le système à retard de type retardé:

$$\dot{x}(t) = -x(t-r), t \geq t_0, \quad (2.1.1)$$

avec la valeur initiale ou condition initiale

$$x(t_0) = \sin \frac{\pi}{4}. \quad (2.1.2)$$

Une solution de (2.1.1)-(2.1.2) est $x(t) = \sin t$, mais $x(t) = \cos t$ est aussi une autre solution, alors il n'y a pas une solution unique au système (2.1.1)-(2.1.2). Par contre si la condition initiale est une fonctionnelle $\phi(\cdot)$ continue dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$:

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \theta \in [t_0 - r, t_0], \quad (2.1.3)$$

il existe une solution unique de (2.1.1) $x(t)$, continue pour $t \geq t_0 - r$ qui passe à travers de la fonctionnelle initiale ϕ (2.1.3) [40].

Cet exemple montre que pour trouver une solution unique du système (2.1.1) il faut choisir une fonctionnelle initiale dans l'espace des fonctions continues sur $[t_0 - r, t_0] : \mathcal{C}([t_0 - r, t_0], \mathbb{R})$. De plus comme $x(\cdot) \in \mathcal{C}([t_0 - r, \infty), \mathbb{R})$ alors pour chaque $T \in \mathbb{R}$ fixé, $x(\cdot)$ est uniformément continue dans $[t_0 - r, T]$, et pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x(t) - x(\tau)| < \varepsilon$ si $|t - \tau| < \delta$. Alors, pour $t \in [t_0 - r, T]$, $|t - \tau| < \delta$, on a

$$|x(t + \theta) - x(\tau + \theta)| < \varepsilon$$

pour n'importe quel $\theta \in [t_0 - r, t_0]$, qui montre que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonctionnelle $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ est une fonction continue de t , i.e. si la fonctionnelle initiale

(2.1.3): $x_{t_0}(\cdot)$ appartient à $\mathcal{C}([t_0 - r, t_0], \mathbb{R})$, alors la solution de (2.1.1) considérée comme une fonctionnelle $x_t(\cdot)$ passe à travers de (2.1.3), est unique et reste dans le même espace de départ. Alors dans cette approche, l'état n'est pas $x(\cdot)$, mais la fonctionnelle $x_t(\cdot)$.

Pour calculer la solution d'un système à retard de type neutre quelconque qui passe à travers une fonctionnelle initiale, on fait la même chose que pour le système retardé de l'exemple précédent: il faut d'abord préciser l'espace de départ. Les espaces les plus courants qui sont utilisés pour l'étude des systèmes neutres sont (voir la section de symboles): l'espace de Banach des fonctions continues $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ [40], l'espace de Sobolev d'ordre 1 $\mathcal{W}_p^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ [59], [42], [76] et l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ [12], [13].

Motivé par le fait que l'équation (1.3.4) se réécrit comme

$$\frac{d}{d\xi} [\psi(\xi) - C\psi(\xi - r)] = A\psi(\xi) + B\psi(\xi - r), \quad (2.1.4)$$

on présente d'abord le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutres représentés sous la forme de Hale [37], [59], approche fonctions continues $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Ensuite, on présente le problème de la valeur initiale et les solutions pour les systèmes de type neutre dans l'espace de Sobolev des fonctions absolument continues $\mathcal{W}_p^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. On présente aussi le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutres généralisés dans l'espace abstrait $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$; dans ce produit d'espaces, la solution au problème de la valeur initiale peut avoir un nombre infini mais dénombrable de discontinuités.

Finalement, on présente les solutions pour les systèmes neutres linéaires (méthode pas à pas), la matrice fondamentale associée à ces systèmes, sa représentation de Cauchy.

2.2 L'ÉTAT DANS L'ESPACE DES FONCTIONS CONTINUES

Dans cette section, on rappelle quelques résultats classiques; cette approche est utilisée plus tard dans le Chapitre 4.

Soit $\tau \in \mathbb{R}$, \mathcal{H} un ouvert de $[\tau, \infty) \times \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ i.e. un sous ensemble de la forme $\Omega_1 \times \Omega_2$ où Ω_1 est ouvert dans \mathbb{R}^n et Ω_2 est ouvert dans \mathcal{C} . On considère le système suivant, écrit sous la forme proposée dans [37], [40], [59]:

$$\frac{d}{dt} [D(t) x_t] = F(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad (2.2.1)$$

$$D(t) \varphi := [\varphi(0) - G(t, \varphi)], \quad (2.2.2)$$

avec la condition initiale

$$x_{t_0} \equiv \phi(\theta), \quad \{\phi, \varphi\} \in \mathcal{C}[-r, 0], \quad (2.2.3)$$

où $x_t = \{x(t + \theta) : \theta \in [-r, 0], r := \max\{r_1, r_2\} \geq 0\}$, $D(\cdot)$ est l'opérateur de différence, $F, G : [\tau, \infty) \times \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont supposées continues [19], [109], $G(t, \varphi)$ est linéaire dans φ , $\|F(t, \varphi)\|$, $\|G(t, \varphi)\|$ sont bornées uniformément par rapport à t pour φ dans un ensemble compact de \mathcal{C} [105], avec $F(t, 0) \equiv 0$, $G(t, 0) \equiv 0$ de telle façon que $x = 0$ est une solution du système (2.2.1)-(2.2.3). Ceci assure un "point" d'équilibre à l'origine.

Comme le problème de la valeur initiale pour le système (2.2.1)-(2.2.3), en général, n'a pas de solution [37], le système (2.2.1)-(2.2.3) est défini comme un système neutre si $D(t)$ est atomique en zéro, cette propriété garantit qu'il existe une solution de (2.2.1)-(2.2.3) sous les conditions avant décrit en F et G :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} , $t \in \Omega$, $L(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$, (l'espace de Banach des applications linéaires bornées de \mathcal{C} dans \mathbb{R}^n) $L : \Omega \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$; alors, le théorème de représentation de Riesz implique qu'il existe une matrice fonctionnelle de variation bornée η sur $[-r, 0]$ telle que

$$L(t) \varphi = \int_{-r}^0 [d_\theta \eta(t, \theta)] \varphi(\theta). \quad (2.2.4)$$

Pour un tel η , on peut la prolonger dans \mathbb{R} si $\eta(t, \theta) = \eta(t, -r)$ pour $\theta \leq -r$ et $\eta(t, \theta) = \eta(t, 0)$ pour $\theta \geq 0$ [68].

DÉFINITION 2.2.1 (Hale et Verduyn Lunel 1993). Si $\beta \in \mathbb{R}$, et la matrice

$$\mathcal{A}(t, \beta, L(t)) = \eta(t, \beta^+) - \eta(t, \beta^-) \quad (2.2.5)$$

est non singulière en $t = \sigma$, alors $L(t)$ est dit atomique en β en σ . Si $\mathcal{A}(t, \beta, L)$ est non singulière sur $\mathcal{O} \subset \Omega$, alors $L(t)$ est dit atomique en β sur \mathcal{O} .

Donc $D(t)$ est atomique en β sur \mathcal{H} si

$$\det \mathcal{A}(t, \beta, D(t)) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2.6)$$

DÉFINITION 2.2.2 (Hale 1971). Un système neutre est un système de la forme (2.2.1)-(2.2.3) pour lequel $D(t), F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues et $D(t)$ est atomique en zéro sur \mathcal{H} .

En général, les théorèmes d'existence, d'unicité et de dépendance continue sont donnés dans [37] pour la première fois pour le système (2.2.1)-(2.2.3) sous l'hypothèse que $G(t, \varphi)$ est non-atomique en zéro (équivalente à l'atomicité de l'opérateur de différence quand $G(t, \varphi)$ a la structure 2.2.4). Après, dans [36] est proposée la définition d'atomicité car elle permet de garantir qu'il existe une solution d'une classe générale de systèmes neutres, même quand l'opérateur de différence $D(t, \varphi)$ n'est pas linéaire [36], [40]. Cependant dans cette approche, la condition d'atomicité sur $D(t, \varphi)$ est une condition nécessaire seulement pour garantir l'existence de solutions des systèmes neutres (voir [39], [13]).

Dans ce travail on ne s'intéresse qu'à des opérateurs de la forme (2.2.2) (il sont très utilisés dans la théorie de la stabilité [19]), où $G(t, \varphi)$ est linéaire en φ . Alors, on donne les conditions sur $G(t, \varphi)$ pour avoir un système neutre, i.e. G non atomique en zéro. Cette propriété assure que $G(t, \varphi)$ ne dépend pas de $\varphi(0)$. Par le théorème de représentation de Riesz [77], il existe une matrice carrée $\mu(t, \theta)$ de dimension n telle que

$$G(t, \varphi) = \int_{-r}^0 [d_{\theta} \mu(t, \theta)] \varphi(\theta), \quad (2.2.7)$$

avec $t \in [t_0, \infty)$, $\theta \in [-r, 0]$, de variation bornée en θ . S'il existe une fonction scalaire $m(s)$ continue non décroissante pour $s \in [-r, 0]$, $m(0) = 0$, telles que

$$\left\| \int_{-s}^0 [d_{\theta} \mu(t, \theta)] \varphi(\theta) \right\| \leq m(s) \sup_{-s \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta)\|, \quad (2.2.8)$$

pour tout t dans $[t_0, \infty)$ et φ dans \mathcal{C} , donc que $G(t, \varphi)$ est non atomique en zéro. Alors (2.2.1)-(2.2.3) est un système neutre, il existe une solution unique x , du système (2.2.1)-(2.2.3), non nécessairement différentiable; seul, l'opérateur de différence $D(\cdot)$ est différentiable sur (t_0, ∞) (et différentiable à droite en t_0).

REMARQUE 2.2.1. Dans cette approche, l'état est la fonctionnelle $x_t(\theta) = x(t + \theta) \in \mathcal{C}$, $-r \leq \theta \leq 0$, et non le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Ceci est naturel parce que le système (2.2.1)-(2.2.3) est de dimension infinie.

Une classe importante de systèmes neutres concerne les systèmes neutres généralisés:

$$\frac{d}{dt} [Dx_t] = Lx_t, \quad t \geq 0, \quad (2.2.9)$$

où $D, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, sont des opérateurs linéaires bornés tels que l'opérateur de différence soit atomique en zéro, c'est à dire:

$$D\varphi := \varphi(0) - \int_{-r}^0 d\mu(\theta) \varphi(\theta), \quad (2.2.10)$$

où μ est continue en zéro et l'opérateur linéaire L peut être représenté par une fonction matricielle à variation bornée, i.e.

$$L\varphi = \int_{-r}^0 d\eta(\theta) \varphi(\theta), \quad (2.2.11)$$

où $\eta(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, est une matrice $n \times n$ avec des éléments à variation bornée, telle que η est continue à gauche sur $(-r, 0)$ et $\eta(0) = 0$, i.e. de variation bornée normalisée.

Par exemple, le système neutre suivant est un cas particulier de (2.2.9) où x n'est pas nécessairement différentiable:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Cx(t-r)] = Ax(t) + Bx(t-r), \quad t \geq 0, \quad r > 0. \quad (2.2.12)$$

Cependant en pratique, les paramètres d'un modèle ne sont pas connus avec exactitude, il est alors intéressant d'étudier les systèmes avec incertitudes [51], comme le modèle suivant:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Cx(t-r_1) - \Delta_C] = Ax(t) + Bx(t-r_2) + \Delta_A + \Delta_B, \quad t \geq 0, \quad (2.2.13)$$

où $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, et les termes incertains Δ_A , Δ_B , Δ_C seront précisés dans les Chapitres 4,5 et 6. Mais en général, le système nonlinéaire proche du point d'équilibre

$$\frac{d}{dt} [Dx_t - \tilde{g}(t, x_t)] = Lx_t + \tilde{f}(t, x_t), \quad t \geq 0,$$

peut être étudié par l'approximation linéaire (2.2.9). Ici D, L sont les fonctionnelles (2.2.10) et (2.2.11) respectivement et \tilde{f}, \tilde{g} sont des fonctionnelles continues de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ dans \mathbb{R}^n satisfaisant $\tilde{f}(t, 0) = 0$ et

$$\left\| \tilde{f}(t, \varphi) - \tilde{f}(t, \psi) \right\| \leq \zeta(\nu) \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}} \text{ pour } \|\varphi\|_{\mathcal{C}}, \|\psi\|_{\mathcal{C}} \leq \nu,$$

et la même condition pour \tilde{g} , ou $\zeta(\nu) \rightarrow 0$ quand $\nu \rightarrow 0^+$. Sous cette hypothèse, le problème de la valeur initiale est bien posé dans \mathcal{C} , et les solutions peuvent être continues pendant qu'elles restent bornées [36].

D'autre part, en pratique, il est parfois nécessaire d'avoir des solutions régulières: par exemple, si la commande dépend de la dérivée de la solution [41], [40], alors il est naturel de considérer l'espace \mathcal{W}_p^1 utilisé dans la section suivante.

2.3 L'ÉTAT DANS L'ESPACE DES FONCTIONS ABSOLUMENT CONTINUES

D'abord on considère le système neutre (2.2.1) et on suppose que la fonction x satisfait (2.2.1) sur un intervalle, avec une dérivée régulière telle que l'on peut faire la différentiation de la partie à gauche de (2.2.1) [37] i.e.

$$\frac{d}{dt} [D(t) \varphi] = \dot{\varphi}(0) - G'_t(t, \varphi) - G'_\varphi(t, \varphi) \psi,$$

où $G'_t(t, \varphi)$ est la dérivée partielle par rapport à "t" et $G'_\varphi(t, \varphi)$ est la dérivée partielle par rapport à "φ". On obtient alors le système neutre suivant:

$$\dot{x}(t) = G'_t(t, x_t) + G'_{x_t}(t, x_t) \dot{x}_t + F(t, x_t). \quad (2.3.1)$$

Le système (2.3.1) comprend les systèmes de type neutre où la dérivée intervient linéairement. Maintenant, on considère un système plus général que (2.3.1)

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t), \quad t \geq t_0, \quad (2.3.2)$$

où continue et f est continue et Lipschitz dans les deuxième et troisième arguments:

$$\|f(t, \varphi_2, \psi_2) - f(t, \varphi_1, \psi_1)\| \leq l_1 \|\varphi_2 - \varphi_1\|_{\mathcal{C}} + l_2 \|\psi_2 - \psi_1\|_{\mathcal{C}}, \quad \varphi_i, \psi_i \in \mathcal{C},$$

$l_1 \in [0, \infty)$, $l_2 \in [0, 1)$. On note qu'il n'est pas possible que tout système neutre écrit sous la forme (2.3.4) puisse être réécrit sous la forme (2.2.1) [59].

Maintenant on se pose la question suivante: quelle condition initiale ϕ faut-il pour avoir une solution différentiable de (2.3.2)? Cette condition est appelée "condition de raccordement" ("sewing condition" en anglais) [59], [40]. On suppose que la fonctionnelle initiale ϕ est non seulement $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ mais aussi $\mathcal{C}^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, et satisfait

$$\dot{\phi}(0^-) = f(t_0, \phi, \dot{\phi}). \quad (2.3.3)$$

Alors, $\dot{x}(t)$ est continue pour $t \geq t_0$ et entraîne la différentiabilité de $x(t)$ dans $(t_0 - r, \infty)$.

Comme la condition de "raccordement" (2.3.3) peut être restrictive, on présente l'approche suivante. Soit $\Omega_\nu \subset \mathcal{W}_2^1$ la boule ouverte définie par $\Omega_\nu := \{\varphi : \|\varphi\|_{\mathcal{W}_2^1} < \nu, \nu > 0\}$ et soit $f : [\tau, \infty) \times \Omega_\omega \times \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonctionnelle continue qui satisfait la condition de Lipschitz dans les second et troisième arguments, avec la constante de Lipschitz pour le troisième argument inférieure à 1. On suppose que

$$f(t, 0, 0) \equiv 0, \quad \left\| f(t, \varphi, \dot{\varphi}) \right\| \leq M, \quad \forall \varphi \in \Omega_\omega, t \geq t_0.$$

Alors il existe une solution unique notée $x(\cdot; t_0, \phi)$, de

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t), \quad t \geq t_0, \quad (2.3.4)$$

avec la condition initiale suivante [59]:

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \phi \in \mathcal{W}_2^1, \quad t \geq t_0, \quad -r \leq \theta \leq 0. \quad (2.3.5)$$

Étant donné que ϕ est un élément de l'espace de Banach \mathcal{W}_2^1 [1], [69], [77], l'égalité en (2.3.4) est satisfaite presque partout [26]; avec quelques modifications, ϕ peut être \mathcal{W}_p^1 (voir aussi [42], [76] pour \mathcal{W}_∞^1 et \mathcal{W}_p^1). Alors, on considère que l'état x_t , du système neutre (2.3.4)-(2.3.5) est absolument continu et qu'il a donc la propriété d'être différentiable presque partout; cette approche est reprise dans le Chapitre 5.

Dans cette approche, x est absolument continue, ce qui est plus restrictif que dans la section précédente où x est continue; dans la section suivante, on relâche ces restrictions, et on considère x discontinue, en fait juste $\mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

2.4 L'ÉTAT DANS LE PRODUIT DES ESPACES

Dans les sections précédentes l'état était considéré continu ($x_t \in \mathcal{C}$) puis absolument continu ($x_t \in \mathcal{W}_p^1$). Dans cette section, l'état appartient à l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$, où x peut avoir un nombre infini dénombrable de discontinuités, cependant l'état (Dx_t, x_t) appartient à l'espace abstrait \mathcal{M}_p . On remarque que l'approche des équations différentielles fonctionnelles qui est présenté dans la suite peut être présenté aussi dans une approche des systèmes de dimension infinie [13].

D'abord on considère le système (2.2.9)-(2.2.11). Sans perte de généralité, on suppose que l'opérateur linéaire $L \in \mathcal{B}(\mathcal{W}_p^1, \mathbb{R}^n)$ a la représentation suivante [13], [1]

$$L\varphi = \int_{-r}^0 \left[F(\theta) \varphi(\theta) + G(\theta) \dot{\varphi}(\theta) \right] d\theta,$$

où F et G sont des fonctions matricielles $n \times n$ avec des vecteurs colonnes qui appartiennent à $\mathcal{L}_q([-r,0], \mathbb{R}^n)$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \{p, q\} \in \mathbb{R}\right)$. On suppose aussi que l'opérateur linéaire de différence $D \in \mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$ est "atomique en zéro", i.e.

$$D\varphi = \varphi(0) + \int_{-r}^0 d\mu(\theta) \varphi(\theta) \quad (2.4.1)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{TVar}_{[-\varepsilon, 0]}(\mu) = 0, \quad (2.4.2)$$

où $\text{TVar}_{[a,b]}(\mu)$ témoigne de la variation totale de $\mu(\cdot)$ dans $[a,b]$, la fonction matricielle $n \times n$, $\mu(\cdot)$, a des coefficients à variations bornées sur $[-r,0]$, est continue à droite dans $(-r,0)$ avec $\mu(-r) = 0$, et étendue sur \mathbb{R} par $\mu(s) = \mu(0)$ pour $s \geq 0$ et $\mu(s) = 0$ pour $s \leq -r$.

Maintenant on considère le système neutre généralisé [12]:

$$\frac{d}{dt} [Dx_t] = Lx_t, \quad t \geq 0, \quad p.p. \quad (2.4.3)$$

avec la condition initiale

$$Dx_0 = \eta, \quad x_0 = \phi, \quad (\eta, \phi) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r,0], \mathbb{R}^n). \quad (2.4.4)$$

Une solution de (2.4.3)-(2.4.4) est une fonction $x : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui satisfait

1. $x_t \in \mathcal{L}_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$ pour tout $t \geq 0$,

2. $x(\theta) = \phi(\theta)$ presque partout sur $[-r, 0]$ et
3. pour presque tout $t \in (0, +\infty)$, x résout l'équation intégrale:

$$x(t) + \int_{-r}^0 d\mu(\theta) x(t + \theta) = y(t), \quad (2.4.5)$$

où

$$y(t) = \eta + \int_{-r}^0 G(\theta) [x(t + \theta) - x(\theta)] d\theta + \int_0^t \int_{-r}^0 F(\theta) x(\vartheta + \theta) d\theta d\vartheta. \quad (2.4.6)$$

Si $(\eta, \phi) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, alors il existe une solution unique $x(\cdot; \eta, \phi)$ de (2.4.3)-(2.4.4). En particulier, il existe une paire unique $(y(\cdot; \eta, \phi), x(\cdot; \eta, \phi))$ qui satisfait (2.4.3)-(2.4.4) avec $x(\theta; \eta, \phi) = \phi$ p.p. dans $[-r, 0]$. Si $T > 0$ et $0 \leq t \leq T$, alors l'application $(\eta, \phi) \rightarrow x_t(\cdot; \eta, \phi)$ de $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ est continue. Comme $x_t \in \mathcal{L}_p$ alors $y(\cdot; \eta, \phi)$ est continue en t et pour chaque $t \in (0, T)$ fixé, l'application $(\eta, \phi) \rightarrow y(\cdot; \eta, \phi)$ de \mathcal{M}_p dans \mathbb{R}^n est aussi continue.

On peut penser que l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ est trop général pour des applications, mais on montre dans la section suivante, que cet espace est nécessaire pour résoudre certains problèmes, par exemple l'équation matricielle de type neutre associée au système (2.2.12):

$$\frac{d}{dt} [D\Phi] = \Phi(t) A + \Phi(t - r) B, \quad t \geq 0, \quad r \geq 0, \quad (2.4.7)$$

avec l'opérateur de différence

$$D\Phi = [\Phi(t) - \Phi(t - r) C], \quad (2.4.8)$$

et la condition initiale

$$D\Phi = I, \quad \Phi(t) = 0, \quad t < 0, \quad (2.4.9)$$

où Φ est appelée la matrice fondamentale associée au système (2.2.12). Sur la Figure 2.1, on montre la solution de (2.2.12)-(2.4.9) $(D\Phi, \Phi)$ dans $\mathcal{M}_p = \mathbb{R} \times \mathcal{L}_p([-0.5, 0], \mathbb{R})$ pour le cas scalaire avec $A = -1$, $B = -0.5$, $C = 0.5$, $r = 0.5$.

Le problème de la valeur initiale est très important pour les systèmes neutres, même pour les systèmes neutres linéaires. Considérons le système neutre [41] (1.4.2)

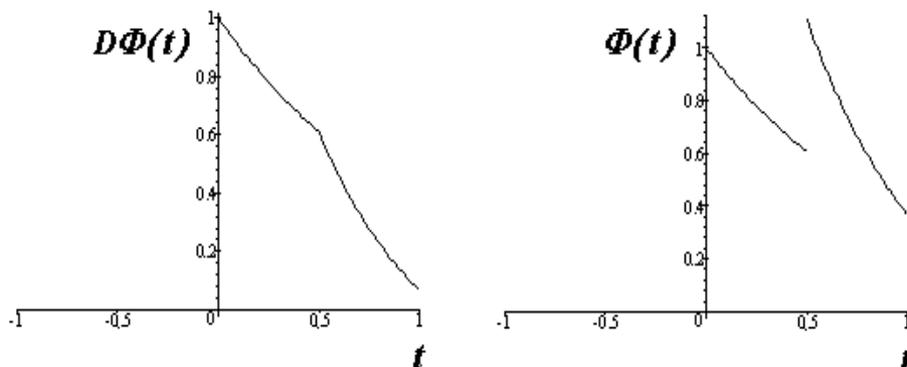


FIG. 2.1 – Solution de (2.2.12)-(2.4.9) $(D\Phi, \Phi)$ dans $\mathcal{M}_p = \mathbb{R} \times \mathcal{L}_p([-0.5, 0], \mathbb{R})$.

analysé dans Section 1.4.1, Chapitre 1:

$$\frac{d}{dt} [x(t) + x(t-r)] = -ax(t), \quad r=1, a>0, t \geq 0. \quad (2.4.10)$$

Alors $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ [41], si la condition initiale est continue. Mais si on change la condition initiale par:

$$[x(0) + x(0-1)] = 1, \quad x(t) = 0, \quad \text{si } t < 0, \quad (2.4.11)$$

où $x(t)$ a un saut en $t=0$, alors le problème de la valeur initiale est bien posé dans $\mathcal{M}_p = \mathbb{R} \times \mathcal{L}_p([-1, 0], \mathbb{R})$. La solution de (2.4.10) $x(t) \rightarrow 0$ avec la topologie de $\mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R})$ si la condition initiale appartient à $\mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R})$ (voir section (1.4.1)), mais si on choisit la condition initiale 2.4.11 qui appartient à $\mathcal{M}_p = \mathbb{R} \times \mathcal{L}_p([-1, 0], \mathbb{R})$, $x(t) \not\rightarrow 0$ dans la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$, car il y a des sauts, cependant $x(t) \rightarrow 0$ dans la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p}$, comme il est montré dans la Figure 2.2. Alors l'amplitude des sauts aux points kr , $k=1, 2, \dots$ ne décroît pas $\|C^k\| = 1$ (voir section 2.6, lemme 2.6.2), et $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k$ n'existe pas.

Dans la section suivante, on montre que (2.2.12)-(2.4.9) est très importante pour représenter les solutions de (2.2.12).

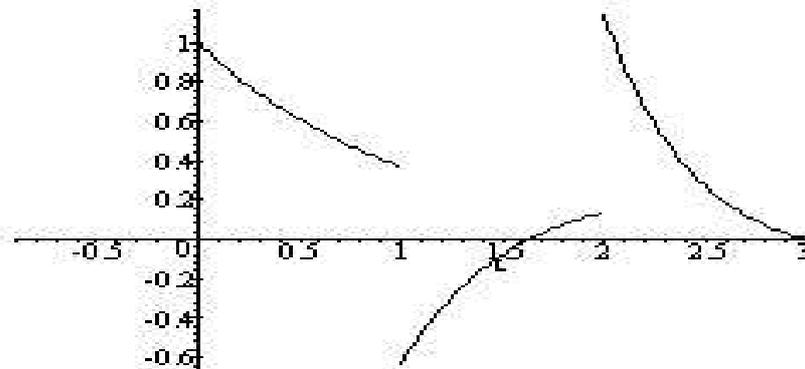


FIG. 2.2 – La solution de (2.4.10)-(2.4.11) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$.

2.5 SOLUTION DE SYSTÈMES NEUTRES LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE PAS À PAS

On considère le système linéaire suivant:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + C\dot{x}(t-r), \text{ p.p. } t \geq 0, r \geq 0, \quad (2.5.1)$$

avec la condition initiale

$$x_0(\theta) = \phi(\theta), \phi \in \mathcal{W}_2^1, -r \leq \theta \leq 0. \quad (2.5.2)$$

Cas 1: Si $A = 0$, B et C sont de matrices constantes de dimension $n \times n$, la solution de (2.5.1) est

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [Bx(s-r) + C\dot{x}(s-r)] ds, t \geq 0, \quad (2.5.3)$$

mais dans l'intervalle $t \in [0, r]$ $x(\cdot - r) = \phi(\cdot)$, alors

$$x(t) = x(0) + \int_{-r}^{t-r} [B\phi(\theta) + C\dot{\phi}(\theta)] d\theta,$$

où le changement de variable $\theta = s - r$ a été utilisé et la condition initiale (2.5.2) sur l'intégrale (2.5.3). Alors on peut calculer x dans l'intervalle $t \in [r, 2r]$ en utilisant (2.5.3) de nouveau parce que $x(\cdot)$ est disponible dans $[0, r]$, et ainsi de suite. Cette

méthode est appelée méthode pas à pas car elle permet de construire la solution d'un système à retard, intervalle par intervalle.

Cas 2: Si $A \neq 0$ dans (2.5.1), la solution est plus facile à calculer si on réécrit (2.5.1) sous la forme (2.2.12) et si on considère l'état x_t en \mathcal{C} , [40]

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Cx(t-r)] = Ax(t) + Bx(t-r), t \geq 0, r \geq 0, \quad (2.5.4)$$

avec la condition initiale

$$x_0(\theta) = \phi(\theta), \phi \in \mathcal{C}, -r \leq \theta \leq 0. \quad (2.5.5)$$

Alors il existe une unique solution x continue dans $(-r, \infty)$ [40] donnée par

$$x(t) = Cx(t-r) + e^{At} [\phi(0) - C\phi(-r)] + \int_0^t e^{A(t-s)} (AC + B)x(s-r) ds. \quad (2.5.6)$$

On note aussi que la solution générale de (2.5.1)-(2.5.2) est pour $t > 0$,

$$x(t) = e^{At}\phi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} [Bx(s-r) + C\dot{x}(s-r)] ds. \quad (2.5.7)$$

Ceci peut être vérifié par dérivation directe de (2.5.6) et de (2.5.7).

Finalement, on présente une solution alternative de (2.5.1)-(2.5.2) et de (2.5.7) qui utilise la matrice fondamentale (2.4.7)-(2.4.9) associée à ces systèmes.

2.6 SOLUTION DE SYSTÈMES NEUTRES LINÉAIRES PAR SA REPRÉSENTATION DE CAUCHY

On considère l'équation suivante [6], [40] (voir aussi [45]):

$$\dot{\Phi}(t) - C\dot{\Phi}(t-r) = A\Phi(t) + B\Phi(t-r), r \geq 0, t \neq kr, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6.1)$$

où $\Phi(t)$ est une fonction matricielle $n \times n$ telle que

$$\Phi(t) = 0_{n \times n}, \text{ pour } t < 0, \text{ et } \Phi(0) = I, \quad (2.6.2)$$

$\Phi(t)$ est appelée la matrice fondamentale du système (2.5.4).

THÉORÈME 2.6.1 (Bellman et Cooke 1963). *La matrice fondamentale $\Phi(t)$ du système (6.2.1) satisfait aussi l'équation*

$$\dot{\Phi}(t) - \dot{\Phi}(t-r)C = \Phi(t)A + \Phi(t-r)B, t > 0, t \neq kr, k = 1, 2, \dots, \quad (2.6.3)$$

La matrice fondamentale présente des sauts dans les points $t_k = kr$, $k = 0, 1, 2, \dots$ tandis que la différence $[\Phi(t) - C\Phi(t-r)]$ est continue. Le lemme suivant décrit les sauts.

LEMME 2.6.2 (Bellman et Cooke 1963). *La matrice fondamentale $\Phi(t)$ présente des sauts aux points $t_k = kr$, $k = 0, 1, 2, \dots$,*

$$\Delta\Phi(t)|_{t=t_k} := [\Phi(kr+0) - \Phi(kr-0)] = C^k, \quad (2.6.4)$$

et $\Phi(t) = \Phi(t+0)$ pendant les sauts.

LEMME 2.6.3 (Hale et Verduyn Lunel 1993). *Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que "la transformée" de Laplace de la matrice fondamentale de système (6.2.1) est donnée par*

$$\mathcal{L}[\Phi(t)] = [s(I_n - e^{-sr}C) - A - e^{-sr}B]^{-1},$$

dans le demiplan ouvert $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \alpha\}$.

LEMME 2.6.4 (Bellman et Cooke 1963). *La solution du système (2.5.1)-(2.5.2), est*

$$\begin{aligned} x(t; \phi) &= [\Phi(t) - \Phi(t-r)C]\phi(0) + \\ &+ \int_{-r}^0 \Phi(t-\theta-r) [B\phi(\theta) + C\dot{\phi}(\theta)] d\theta, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

où $\Phi(t)$ est la matrice fondamentale du système (2.5.1).

La solution du système (2.5.1)-(2.5.2) donnée par (2.6.5) est appelée représentation de Cauchy; elle est fonction de la matrice fondamentale associée à (2.5.1). On remarque que l'intérêt de cette représentation ne vient pas du fait que c'est plus simple de simuler Φ que x , l'intérêt vient de l'analyse de stabilité des solutions (2.5.1)-(2.5.2), voir Chapitre 6.

Dans d'autres cas, le problème de la valeur initiale (2.6.1)-(2.5.1) peut être modifié, par exemple, quand on pose le même problème dans l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Si on considère

$$\frac{d}{dt} [D\Phi_i] = A\Phi_i(t) + B\Phi_i(t-r), \quad \forall t \geq 0, r \geq 0, \quad (2.6.6)$$

où Φ_i est la i -ème colonne $1 \leq i \leq n$ de la matrice fondamentale (2.6.1) avec l'opérateur de différence

$$D\Phi_i = [\Phi_i(t) - C\Phi_i(t-r)], \quad (2.6.7)$$

et la condition initiale

$$[\Phi(0) - C\Phi(-r)] = I, \Phi(t) = 0, t < 0, \quad (2.6.8)$$

(voir (2.4.7)-(2.4.9)), on a l'avantage que le problème de la valeur initiale est bien posé, si la condition initiale est dans \mathcal{M}_p , la solution reste dans \mathcal{M}_p . De plus s'il est nécessaire de changer la condition initiale (ou le système linéaire par un autre plus général, par exemple (2.4.3)-(2.4.4)) dans \mathcal{M}_p , la solution $(D\Phi_i, \Phi_i)$ reste dans \mathcal{M}_p , par exemple on peut choisir comme condition initiale (2.6.8) ($[\Phi(0) - C\Phi(-r)] = I, \Phi(\theta) = 0, \theta \in [-r, 0]$), et on peut "oublier" que $\Phi(0) = I$ (parce qu'il est de mesure nulle) en gardant que $D\Phi = I$ pour $\Phi(\cdot)$ dans $[-r, 0]$. La solution Φ se trouve directement en résolvant simultanément (2.4.5)-(2.4.6) pour (2.6.6)-(2.6.7), i.e.

$$[\Phi(t) - C\Phi(t-r)] = Y(t), \quad (2.6.9)$$

avec

$$Y(t) = I + \int_0^t A\Phi(\tau) + B\Phi(\tau-r) d\tau. \quad (2.6.10)$$

En fait, pour la condition initiale (2.6.8), les équations (2.6.9)-(2.6.10) sont équivalentes à [56], [98]

$$\frac{d^+}{dt} [\Phi(t) - C\Phi(t-r)] = A\Phi(t) + B\Phi(t-r), t \geq 0, r \geq 0, \quad (2.6.11)$$

dont la solution est

$$\Phi(t) - C\Phi(t-r) = e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} (AC + B) \Phi(s-r) ds. \quad (2.6.12)$$

La preuve est directe en utilisant la méthode pas à pas et le fait que $\Phi(s-r)$ est continue pour $s \in [0, t], t \in [0, r]$; alors la différence $[\Phi(t) - C\Phi(t-r)]$ dans (2.6.12) est différentiable à droite parce qu'elle a une dérivée continue à droite, et la valeur de $\frac{d^+}{dt} [\Phi(t) - C\Phi(t-r)]$ en zéro est donnée par la limite quand $t \rightarrow 0$ en (2.6.12), i.e.

$$\frac{d^+}{dt} [\Phi(t) - C\Phi(t-r)]|_{t=0} = A. \quad (2.6.13)$$

Alors on a construit le premier pas, et on peut utiliser cette méthode de façon itérative.

Pour construire la solution de (2.6.11) dans \mathcal{M}_p , on peut commencer par exemple par le point

$$D\Phi_0 = \eta, \Phi_0 = \bar{\Phi}(\theta), \theta \in [-r, 0], (\eta, \bar{\Phi}(\theta)) = (I_{n \times n}, 0_{n \times n}) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p,$$

et pour obtenir n'importe quel autre point de la solution dans \mathcal{M}_p , on utilise la formule (2.6.12), on a alors $D\Phi_t$ avec $t > 0$, et finalement la formule (2.6.9) donne Φ_t , i.e. le nouveau point $(D\Phi_t, \Phi_t)$.

L'exemple suivant montre la solution de la matrice fondamentale (2.6.11) qui a été obtenue en utilisant l'espace \mathcal{M}_p .

2.6.1 EXEMPLE

Soit la matrice fondamentale (2.6.11) avec

$$A = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, B = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \text{ et } r = 0.5.$$

Alors une simulation de (2.6.11) avec la condition initiale (2.6.8) est donnée dans la Figure 2.3 La solution de la matrice fondamentale a des sauts, le saut au point 0 est $I_{2 \times 2}$, le saut au point 0.5 est C et au point k fois 0.5, le saut est C^k [6].

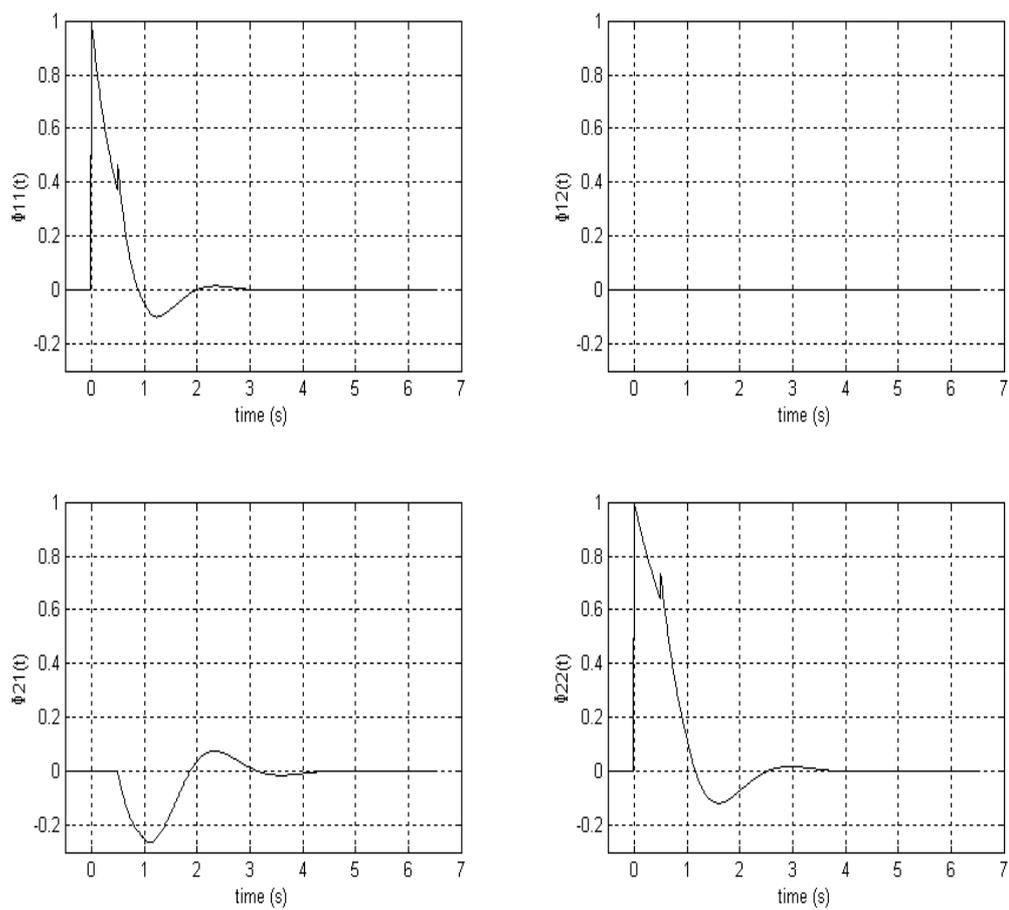


FIG. 2.3 – Solution $\Phi(t)$, $t \in [-0.5, 7]$.

2.7 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, on a présenté différents espaces où le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutres est bien posé. La matrice fondamentale associée à un système neutre a été définie et on a présenté deux méthodes pour l'obtenir; parmi les deux, une a été proposée. Cette matrice fondamentale joue un rôle très important car elle intervient dans la stabilité des systèmes neutres comme on le verra au Chapitre 6.

Chapitre 3

STABILITÉ ET STABILITÉ ROBUSTE POUR LES SYSTÈMES NEUTRES: UN TOUR GUIDÉ

L'objet de ce chapitre est de familiariser le lecteur avec la stabilité de systèmes neutres. On présente un panorama rapide ou tour guidé sur la stabilité des systèmes neutres. On présente d'abord quelques définitions de stabilité et théorèmes de base sur la stabilité des systèmes neutres. On pose un nouveau problème de stabilité robuste très général où deux retards sont constants et inconnus, l'un dans l'état à un instant retardé et l'autre dans l'opérateur de différence appliqué à l'état. On présente également certaines transformations qui sont utilisées par les auteurs pour démontrer la stabilité ou une propriété importante des systèmes neutres. Finalement, on présente un tour guidé avec des résultats sur la stabilité dépendante et indépendante de la taille du retard pour les systèmes neutres.

L'apport de ce chapitre est de présenter deux transformations de modèle pour les systèmes neutres. La première transformation consiste à transformer un système neutre en un "système retardé" et on donne un résultat de stabilité (théorème 3.4.1) [98] avec quelques commentaires sur la stabilité robuste par rapport aux retards. La deuxième transformation utilise la règle de Leibnitz sur l'opérateur de différence, [96], pour transformer une classe de modèles de systèmes neutres plus générale que quand on utilise la règle de Leibnitz classique seulement sur l'état. Ceci permet

d'avoir des solutions avec discontinuités, alors que l'opérateur de différence reste différentiable (presque partout). En fait, pour utiliser cette transformation, on se place dans des espaces intéressants par rapport à la stabilité [98] où le problème de la valeur initiale est bien posé, par exemple $\mathcal{W}_p^1([-r,0], \mathbb{R}^n)$ [42], $\mathcal{C}([-r,0], \mathbb{R}^n)$ [40], $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p([-r,0], \mathbb{R}^n)$ [13].

3.1 INTRODUCTION

Pour montrer la stabilité d'un système neutre quelconque; il est "classique" de transformer le modèle neutre original en un autre modèle neutre qui a de bonnes propriétés, et l'analyse de stabilité du système transformé qui est plus simple à effectuer, permet de garantir la stabilité du système original [51]. Ici on présente les transformations de modèle les plus courantes dans la littérature dans les approches fréquentielle et temporelle, parmi elles on en propose deux. On présente également les définitions de base (stabilité dans le sens de Lyapunov) et théorèmes classiques pour la stabilité des systèmes à retard de type neutre [40], [59]. Finalement, un tour guidé permet de montrer les résultats récents sur la stabilité de systèmes neutres, stabilité dépendante ou indépendante de la taille du retard. Ces résultats utilisent différentes approches dans les domaines fréquentiel ou temporel.

Ensuite on étudie la stabilité des systèmes neutres; on s'intéresse plus particulièrement à des systèmes neutres linéaires écrits dans la forme (2.2.1) proposée par [40] et (2.3.4) étudiée dans [59].

3.2 STABILITÉ DE SYSTÈMES NEUTRES

On rappelle quelques définitions classiques concernant la stabilité des systèmes neutres, ensuite on aborde la stabilité des opérateurs de différence et finalement on présente l'approche de Lyapunov-Krasovskii. Cette approche est résumée dans deux théorèmes de stabilité pour les systèmes neutres écrits sous la forme de Hale [40], (2.2.1), et dans la forme proposée dans [59], (2.3.4). On remarque que certaines définitions et théorèmes de stabilité peuvent être appliqués dans des espaces différents

en faisant attention à la norme qui est utilisée. Voir Définition 3.2.1, et dans le reste de cette section, on donne les définitions de stabilité dans l'espace des fonctions continues $\mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

La définition de stabilité dans le sens de Lyapunov peut être adaptée aux systèmes neutres:

DÉFINITION 3.2.1. Soit $\mathcal{X} = \mathcal{C}$ ou $\mathcal{X} = \mathcal{W}_2^1$. La solution triviale $x(t) = 0$ de (2.2.1) ou (2.3.4) avec la fonctionnelle initiale (2.2.3), (2.3.5) respectivement, est stable si pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, $t_0 \in [\tau, \infty)$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tel que $\|\phi\|_{\mathcal{X}} \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ implique $\|x(t; t_0, \phi)\| \leq \varepsilon$. La solution $x(t) = 0$ est asymptotiquement stable si elle est stable et $x(t; t_0, \phi) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ avec la limite comprise dans la topologie introduite par la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. La solution nulle est exponentiellement stable, s'il existe $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ tels que chaque solution $x(t; t_0, \phi)$ de (2.2.1) ou (2.3.4) avec la condition initiale ϕ en (2.2.3), (2.3.5) satisfasse l'inégalité

$$\|x(t; t_0, \phi)\| \leq \beta \|\phi\|_{\mathcal{X}} e^{-\alpha t}, \forall t > t_0.$$

EXEMPLE 3.2.1. Si le système (2.5.1) est exponentiellement stable, alors la matrice fondamentale $\Phi(t)$ satisfait la borne

$$\|\Phi(t)\| \leq \gamma e^{-\alpha t}, t \geq 0, \alpha > 0, \gamma > 0. \quad (3.2.1)$$

REMARQUE 3.2.1 (Hale et Verduyn Lunel 1993). Si la matrice C est Schur-Cohn stable, alors la stabilité asymptotique du système (2.5.1) est équivalente à la stabilité exponentielle de (2.5.1).

Dans ce travail, on étudie principalement les systèmes neutres linéaires, ensuite on présente les conditions de stabilité en termes des zéros de leur fonction caractéristique: Le système (2.2.9) est asymptotiquement stable si sa fonction caractéristique [40] donnée par

$$h(s) = \det \left(s \left(I - \int_{-r}^0 e^{st} d[\mu(t)] \right) - \int_{-r}^0 e^{st} d[\eta(t)] \right), s \in \mathbb{C}, \quad (3.2.2)$$

n'a pas de racines avec partie réelle non négative.

EXEMPLE 3.2.2. Le système (2.2.12) est asymptotiquement stable si sa fonction caractéristique

$$p(s, e^{-rs}) = \det(s(I - Ce^{-rs}) - A - Be^{-rs}) \quad (3.2.3)$$

satisfait

$$\sup \{ \operatorname{Re}(s) : \det (s (I - C e^{-rs}) - A - B e^{-rs}) = 0 \} < 0. \quad (3.2.4)$$

REMARQUE 3.2.2 (Hale et Verduyn Lunel 2002). Pour les systèmes neutres linéaires, la stabilité asymptotique n'implique pas la stabilité exponentielle comme c'est le cas pour les systèmes retardés linéaires [51]. Par exemple [41]

$$\frac{d}{dt} [x(t) - x(t-1)] = -ax(t), \quad t \geq 0, \quad (3.2.5)$$

$$x_0 = \phi \in \mathcal{C},$$

avec $a > 0$ implique $x \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, mais le système (3.2.5) n'est pas exponentiellement stable (voir une démonstration partielle dans (1.4.1), Chapitre 1).

Maintenant on considère l'équation suivante

$$D(t)x_t = D(t_0)\phi + H(t) - H(t_0), \quad t \geq t_0, \quad (3.2.6)$$

$$x_{t_0} = \phi \quad (3.2.7)$$

$H \in \mathcal{C}([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et un opérateur de différence $D(t)x_t$ quasilineaire (linéaire dans le deuxième argument seulement) qui satisfait toutes les conditions données dans le paragraphe 2.2.

DÉFINITION 3.2.2 (Cruz et Hale 1970). On suppose que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$. L'opérateur de différence $D(t)$ (3.2.6) est uniformément stable par rapport à \mathcal{H} s'il existe des constantes K, Λ telles que pour n'importe quels $\phi \in \mathcal{C}$, $t_0 \in [\tau, \infty)$, et H dans \mathcal{H} , la solution $x(t; t_0, \phi, H)$ de (3.2.6)-(3.2.7) satisfait

$$\|x(t; t_0, \phi, H)\| \leq K \|\phi\|_{\mathcal{C}} + \Lambda \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|H(\tau) - H(t_0)\|, \quad t \geq t_0. \quad (3.2.8)$$

REMARQUE 3.2.3. Quand l'opérateur de différence est indépendant de t , la condition (3.2.8) implique que les racines de l'équation

$$\det \left(I - \int_{-r}^0 [d\mu(\theta)] \rho^\theta \right) = 0$$

ont un module inférieur ou égal à 1. Par exemple, l'opérateur de différence $D\varphi := \varphi(0) - C\varphi(r)$ pour (2.2.12) est stable uniformément si C est une matrice Schur-Cohn stable (valeurs propres à l'intérieur du disque unitaire).

Ensuite on rappelle l'approche des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii [40], [59] dans les espaces \mathcal{C} et \mathcal{W}_2^1 respectivement.

Soit $V : [\tau, \infty) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonctionnelle continue; la dérivée supérieure à droite de V le long des solutions du système (2.2.1)-(2.2.3) est définie par [102]

$$V'(t, \phi)|_{(2.2.1)-(2.2.3)} := \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x_{t+h}(\cdot; t_0, \phi)) - V(t, \phi)]. \quad (3.2.9)$$

THÉORÈME 3.2.1 (Cruz et Hale 1970). *On considère le système neutre (2.2.1)-(2.2.3). On suppose que $D(t)$ est uniformément stable par rapport à $\mathcal{C}([\tau, \infty), \mathbb{R}^n)$ et qu'il existe des fonctions non décroissantes continues $v_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$ telles que $v_i(0) = 0$ et $v_i(s) > 0$, pour chaque $s > 0$ et $i = 1, 2, 3$. Alors, la solution nulle de (2.2.1)-(2.2.3) est asymptotiquement stable s'il existe une fonctionnelle continue $V : [\tau, \infty) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que:*

$$v_1(\|D(t)\varphi\|) \leq V(t, \varphi) \leq v_2(\|\varphi\|_{\mathcal{C}})$$

$$V'(t, x_t)|_{(2.2.1)-(2.2.3)} \leq -v_3(\|D(t)x_t\|), \forall t \geq t_0.$$

Le même résultat est vrai si la borne supérieure sur $V'(t, x_t)|_{(2.2.1)-(2.2.3)}$ est donnée par $-v_3(\|x(t)\|)$.

THÉORÈME 3.2.2 (Kolmanovskii et Myshkis 1999). *On suppose qu'il existe des fonctions continues non décroissantes $\omega_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $i = 1, 2, 3$, telles que $\omega_i(0) = 0$ et $\omega_i(s) > 0$, pour chaque $s > 0$ et $i = 1, 2, 3$. Soit $\Omega_\nu \subset \mathcal{W}_2^1$ un ouvert défini par $\Omega_\nu := \{\varphi : \|\varphi\|_{\mathcal{W}_2^1} < \nu, \nu > 0\}$. Alors, la solution nulle de (2.3.4) est asymptotiquement stable s'il existe une fonctionnelle continue $v : [t_0, \infty) \times \Omega_\nu \times \mathcal{L}_2[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les inégalités suivantes sont satisfaites:*

$$\omega_1(\|\varphi(0)\|) \leq v(t, \varphi, \psi) \leq \omega_2(\|\varphi\|_{\mathcal{W}_2^1}) \quad \text{et} \quad (3.2.10)$$

$$v'|_{(2.3.4)-(2.3.5)} \leq -\omega_3(\|x(t)\|) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (3.2.11)$$

Comme on l'a vu dans la Section 2.3, certains systèmes neutres écrits sous la forme (2.3.4) peuvent être réécrits sous la forme de Hale (2.2.1), i.e., les systèmes de type neutre où la dérivée intervient linéairement, (2.3.1). Alors dans ce cas-là, les deux approches peuvent être utilisées.

Maintenant on se pose trois problèmes de stabilité importants par rapport au système neutre (2.2.13) (voir aussi [94]):

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Cx(t - r_1) - \Delta_C] = Ax(t) + Bx(t - r_2) + \Delta_A + \Delta_B, t \geq 0,$$

avec des incertitudes Δ_A , Δ_B et Δ_C décrites par des applications continues et Lipschitz dans les deuxièmes tels que les applications $\Delta_A(t, \varphi(0))$, $\Delta_B(t, \varphi(-r_2))$ sont non linéaires et l'application $\Delta_C(t, \varphi(-r_1))$ est linéaire dans le deuxième argument seulement pour pouvoir utiliser le théorème 3.2.1.

Problème de stabilité robuste indépendante du retard: Trouver des conditions (quand elles existent) sous lesquelles la stabilité asymptotique de (2.2.13) est assurée *indépendamment des retards* r_1, r_2 et pour n'importe quelles fonctions Δ_A , Δ_B , Δ_C satisfaisant les conditions précédentes.

Dans [81], un problème similaire été étudié mais il n'y a pas d'incertitude dans la partie neutre ($\Delta_C(\cdot, \cdot) \equiv 0$)

Problème de stabilité dépendant du retard et sans incertitude: Trouver des bornes r_1^* , r_2^* , (quand elles existent) sur r_1 , r_2 , telles que la stabilité asymptotique de (2.2.13) est assurée quand les matrices Δ_A , Δ_B , Δ_C sont égales à zéro et pour n'importe quels $r_1 \leq r_1^*$ et $r_2 \leq r_2^*$.

Dans [48] et [94], le problème de stabilité dépendant du retard a été résolu seulement pour le retard r_2 et non pour r_1 .

Problème de stabilité robuste dépendant du retard: Trouver des bornes r_1^* , r_2^* , (quand elles existent) sur r_1 , r_2 , et des conditions sous lesquelles la stabilité asymptotique de (2.2.13) est assurée quand les matrices Δ_A , Δ_B , Δ_C satisfont les conditions précédentes et pour n'importe quels retards $r_1 \leq r_1^*$ et $r_2 \leq r_2^*$.

Ensuite on montre avec deux exemples simples que la stabilité des systèmes à retard dépend des paramètres du système et peut dépendre ou non de la taille des retards.

EXEMPLE 3.2.3. On considère le système à retard scalaire suivant, par souci de simplicité de type retardé:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - r), t \geq 0, r > 0, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

avec des conditions initiales

$$x(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } x(0) = 1,$$

l'équation caractéristique associée à ce système est

$$s + a + be^{-st} = 0,$$

i.e. une équation transcendente avec un nombre infini de solutions.

Le méthode de la D -decomposition [63] donne une paramétrisation de l'espace (a, b) dans certaines régions, chacune est caractérisée par le même nombre de racines positives (voir aussi [85], [28]). En plus, chaque région est bornée par une "hypersurface" (ici de dimension 1), dans laquelle au moins une racine de l'équation caractéristique est sur l'axe imaginaire pour les paramètres correspondants a, b, r . Après quelques calculs, on peut montrer que les régions correspondantes sont données comme indiqué dans la Figure 3.1 Dans S_∞ la stabilité est assurée indépendamment de la taille

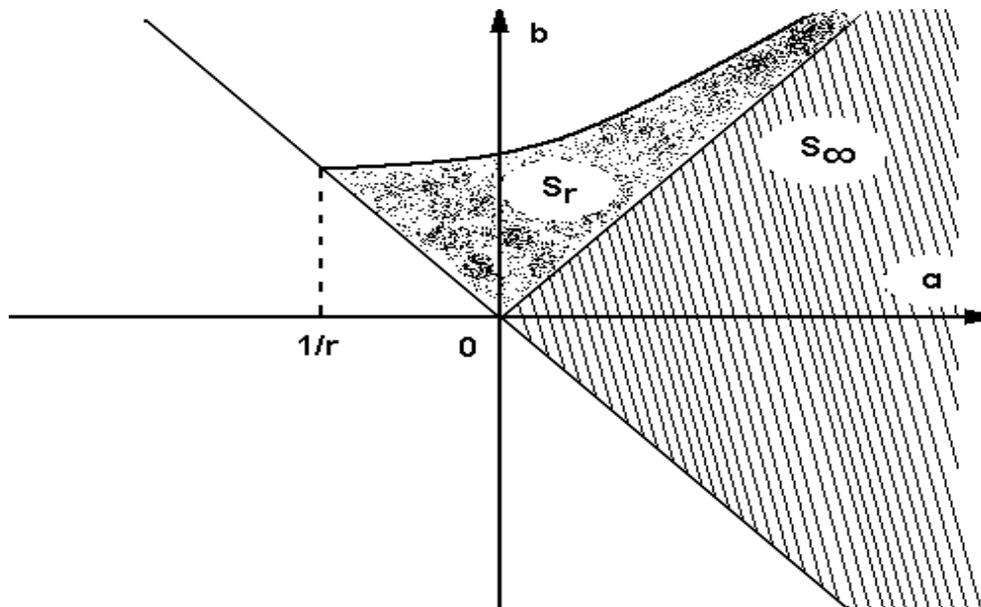


FIG. 3.1 – *Regions de stabilité, S_r et S_∞*

du retard r et dans $S_r \cup S_\infty$, la stabilité est assurée pour n'importe quel retard égal ou inférieur à r . Alors, étant donné un critère de stabilité pour le système (2.3.4) celui-ci peut être classé comme stabilité indépendante du retard ou dépendante du retard, selon sa dépendance ou non sur la taille du retard [25].

EXEMPLE 3.2.4. Soit le système scalaire neutre [96]:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - r_1 c x(t - r_1)] = -ax(t) - bx(t - r_2), t \geq \sigma, x_\sigma \equiv \phi, \phi \in \mathcal{C}. \quad (3.2.12)$$

où $a, b, c \neq 0$, sont constantes et r_1, r_2 sont des constantes non négatives. Bien sûr, comme $x_t \in \mathcal{C}$, ce système peut être réécrit sous la forme (2.2.9)-(2.2.11) pour le théorème de représentation de Riesz mais dans ce cas-là, l'opérateur de différence dépend de r_1 . Pour le cas particulier $r = r_1 = r_2$, la stabilité de l'opérateur de différence $Dx_t := [x(t) - r c x(t - r)]$ dépend directement de la borne supérieure sur le retard $r^* = |r| < 1/|c|$. Alors la stabilité dépend du retard dans la partie neutre, $r = r_1 = r_2$, et dans le cas général $r_1 \neq r_2$ la stabilité du système (3.2.12) est fonction des deux retards.

REMARQUE 3.2.4. Dans l'exemple (3.2.12) la stabilité de l'opérateur de différence dépend de r_1 parce que le coefficient de $x(t - r_1)$ contient ce retard. Quand ce n'est pas le cas, il est bien connu que la stabilité dépend seulement du retard r_2 de l'état retardé [48].

Ensuite on présente quelques transformations utilisées dans la littérature sur les systèmes neutres pour l'analyse de stabilité.

3.3 TRANSFORMATIONS DE MODÈLES

Dans cette partie, on présente quelques transformations dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel, souvent utilisées par beaucoup d'auteurs, voir [90], [34], [83], [93] pour déduire ou prouver quelques propriétés.

3.3.1 TRANSFORMATIONS DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

Ces transformations sont données pour avoir un panorama complet sur les systèmes neutres, mais elles ne seront pas utilisées dans les prochains chapitres.

TRANSFORMATION 1

On considère d'abord le système à retard de type retardé obtenu à partir de (2.2.12) quand $C = 0$,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r), t \geq 0. \quad (3.3.1)$$

Les propriétés de stabilité de (3.3.1) peuvent être étudiées par l'analyse de la matrice de transfert de (3.3.3):

$$H_{xu}(s) = (sI - A)^{-1} B, \quad (3.3.2)$$

associée au système linéaire invariant dans le temps:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geq 0. \quad (3.3.3)$$

TRANSFORMATION 2

Une autre transformation consiste à modifier la fonction caractéristique (3.2.2) en utilisant la transformation de Möbius [75]

$$s = \frac{1-w}{1+w}, w \in \mathbb{C}. \quad (3.3.4)$$

Celle-ci transforme les semiplans gauche et droit du plan "s" en les régions intérieure et extérieure du disque unitaire "w", et l'axe imaginaire "s" en cercle de rayon $|w| = 1$.

TRANSFORMATION 3

Finalement on peut utiliser un modèle à deux variables qui sont: s et le "terme de retard" $z = e^{-rs}$. Alors on peut considérer le polynôme caractéristique donné dans (3.2.3), non dans la variable s, mais dans les deux variables indépendantes (s,z), [44]

$$p(s,z) = \det((sI - A) - (B + Cs)z), |z| \leq 1, (s,z \in \mathbb{C}). \quad (3.3.5)$$

3.3.2 TRANSFORMATIONS DANS LE DOMAINE TEMPOREL

La stabilité des systèmes à retard a été étudiée en utilisant des transformations de modèle sous l'hypothèse que la solution est différentiable. On les rappelle ici.

TRANSFORMATION 4

Dans ce cas là, quelques auteurs introduisent des transformations pour montrer la stabilité; par exemple, ils transforment un système à retard de la forme $\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m B_i x(t - h_i)$, $h_i \geq 0$, en un système neutre écrit sous la forme de Hale, par intégration sur un intervalle [65],

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) + \sum_{i=0}^m B_i \int_{t-h_i}^t x(\tau) d\tau \right] = \sum_{i=0}^m B_i x(t). \quad (3.3.6)$$

On note que cette transformation est aussi applicable au système neutre suivant (3.3.7) avec $u = 0$, $r_i > 0$, (voir [72]).

Dans la suite on propose la transformation inverse, i.e., transformer un système neutre en un "système retardé".

TRANSFORMATION 5

On considère le système neutre

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) - \sum_{i=1}^m C_i x(t - r_i) \right] = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - r_i) + u(t - r), \quad r_i > 0, t \geq t_0, \quad (3.3.7)$$

avec $r \geq 2 \inf \{r_i, i = 1, 2, \dots, m\}$. Maintenant, si on choisit la fonction de commande comme

$$u(t - r) = - \sum_{i=1}^m [A_0 C_i + A_i] \sum_{j=1}^m C_j x(t - r_i - r_j), \quad (3.3.8)$$

on obtient le système à retard suivant en boucle fermée

$$\dot{y}(t) = A_0 y(t) + \sum_{i=1}^m [A_0 C_i + A_i] y(t - r_i), \quad (3.3.9)$$

où $y(t) := x(t) - \sum_{j=1}^m C_j x(t - r_j)$.

TRANSFORMATION 6

Un autre transformation possible est obtenue quand le système neutre

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t),$$

peut être réécrit sous la forme de Hale [59], (2.2.1), voir la Section 2.1.2, (2.3.1).

Maintenant on considère la règle de Leibnitz sur l'état x_t [64]

$$x(t) - x(t-r) = \int_{-r}^0 \dot{x}(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad \theta \in [-r, 0]. \quad (3.3.10)$$

Alors, par exemple, le système retardé (3.3.1) avec des retards ponctuels peut être réécrit comme un système à retards distribués

$$\dot{x}(t) = (A+B)x(t) - B \int_{-r}^0 [Ax(t+\theta) + Bx(t+\theta-r)] d\theta. \quad (3.3.11)$$

Cependant, la fonction de transfert associée à (3.3.11) est donnée par le produit

$$H(s) = (sI - A - e^{-sr}B) \left(I - \frac{1 - e^{-sr}}{s} B \right),$$

i.e., la fonction de transfert originale du système (3.3.1), $(sI - A - e^{-sr}B)$, et la dynamique additionnelle introduite par la transformation est donnée par [34], [35], [52], [53]:

$$\left(I - \frac{1 - e^{-sr}}{s} B \right). \quad (3.3.12)$$

Cette méthode peut être étendue dans la suite aux systèmes neutres linéaires (2.2.12) en supposant que $x(t)$ est continue mais non nécessairement différentiable.

TRANSFORMATION 7

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + C \dot{x}(t-r), \quad t \geq 0, \quad r > 0, \quad (3.3.13)$$

et (3.3.10) est satisfaite. On remarque que dans les exemples précédents, la condition initiale doit être différentiable $\phi \in \mathcal{C}^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ [48] ou au moins différentiable à droite [94]. Cependant ce problème technique peut être évité si $\phi \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et si la règle de Leibnitz est utilisée dans l'opérateur de différence $D(t)x_t$, [96]

$$D(t)x_t - D(t-r)x_{t-r} = \int_{-r}^0 d\theta [D(t+\theta)x_{t+\theta}] = \int_{-r}^0 \frac{d}{dt} [D(t+\theta)x_{t+\theta}] d\theta, \quad (3.3.14)$$

alors on a le nouveau système

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D x_t &= (A+B)x(t) - BCx(t-r) + BCx(t-2r) \\ &\quad - B \int_{-r}^0 [Ax(t+\theta) + Bx(t+\theta-r)] d\theta. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Cela constitue une classe de problèmes plus générale parce que la solution peut avoir des discontinuités, alors que la différence $[x(t) - Cx(t-r)]$ est différentiable [96]. Alors, le système, (2.2.12) se transforme en (3.3.15) et a la même dynamique additionnelle (3.3.12), que pour le système à retard [48].

REMARQUE 3.3.1. Ici on a posé la transformation dans l'espace des fonctions continues \mathcal{C} [40], mais cette transformation est aussi vérifiée dans quelques espaces intéressants pour l'étude de la stabilité [98] quand le problème de la valeur initiale est bien posé, par exemple l'espace de Sobolev \mathcal{W}_p^1 [42], ou l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}^p$ [13], où Dx_t est absolument continu sur $[0, \infty)$ (avec l'intégrale dans (3.3.14) dans le sens de Lebesgue [23]).

TRANSFORMATION 8

Finalement on présente la transformation appelée "forme descripteur" ("descriptor form" en anglais) proposée dans la référence [31]. L'idée de cette transformation se base sur l'hypothèse que la condition initiale pour (3.3.7) ϕ appartient à $\mathcal{C}^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, alors elle considère le système neutre

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^m C_i \dot{x}(t-r_i) = \sum_{i=0}^m A_i x(t-r_i) + u(t-r), \quad t \geq t_0, \quad (3.3.16)$$

où $r_0 = 0$, $0 < r_i \leq r$, $i = 1, \dots, m$. Le système (3.3.16) a la propriété d'être équivalent au système avec des retards distribués:

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad y(t) - \sum_{i=1}^m C_i y(t-r_i) = \sum_{i=0}^m A_i x(t) - \sum_{i=1}^m A_i \int_{t-r_i}^t y(\theta) d\theta + u(t-r), \quad t \geq t_0, \quad (3.3.17)$$

où la variable $y(t)$ est appelé la variable rapide. Cette approche est importante car elle donne de bons résultats sans adjonction de dynamique additionnelle [31], [32].

Par la suite, on va utiliser certaines transformations qui ont été présentées précédemment dans le domaine fréquentiel et temporel pour trouver des résultats de stabilité dépendants ou indépendants de la taille du retard pour des systèmes neutres.

3.4 STABILITÉ INDÉPENDANTE DE LA TAILLE DU RETARD.

On donne quelques résultats récents sur la stabilité indépendante du retard pour les systèmes neutres. Dans la section précédente, une transformation dans le domaine du temps a été faite sur le système neutre (3.3.7)-(3.3.8) pour obtenir le système à retard (3.3.9), de façon à étudier ensuite sa stabilité. Maintenant on propose le résultat suivant:

THÉORÈME 3.4.1. *On considère le système (3.3.9). On suppose que $0 < r_j$ sont des nombres réels tels que le rapport r_i/r_j est rationnel si $m > 1$ et toutes les racines de l'équation*

$$\det \left[I - \sum_{i=1}^m C_i \rho^{-r_i} \right] = 0, \quad (3.4.1)$$

ont un module $|\rho|$ inférieur à 1. Alors, si le système à retard (3.3.9) est asymptotiquement stable (de manière équivalente exponentiellement stable [51], voir remarque 3.2.1), le système en boucle fermée (3.3.7)-(3.3.8) est stable uniformément. Si en plus, l'équation caractéristique associée à (3.3.9) n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire, (3.3.7)-(3.3.8) est stable asymptotiquement.

Démonstration. Si (3.3.9) est asymptotiquement stable, alors $\|y(t; t_0, \phi)\| \leq \beta \|\phi\|_C e^{-\alpha t}$:

$$\left\| x(t) - \sum_{i=1}^m C_i x(t - r_i) \right\| \leq \beta \|\phi\|_C e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, \beta \geq 1.$$

Comme (3.4.1) est vérifiée, l'opérateur de différence est uniformément stable par rapport à $\mathcal{C}([t_0, \infty), \mathbb{R}^n)$ (voir [19]) et donc (3.2.8) montre que $x(t)$ est uniformément stable. L'égalité (3.2.8) signifie que le système neutre (3.3.7)-(3.3.8) en boucle fermée est uniformément stable ou asymptotiquement stable. Si en plus l'équation caractéristique associée à (3.3.9) n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire, alors (3.3.7)-(3.3.8) est stable asymptotiquement.

□

D'une part dans le Théorème 3.4.1, on suppose que le système à retard (3.3.9) est stable, alors on peut utiliser "le théorème du petit gain" pour vérifier la stabilité

du système à retard [25], [20]. D'autre part, le fait d'utiliser le retour (3.3.8) sur le système neutre (3.3.7) pose le problème de stabilité robuste par rapport au retards commensurables r_i . Dans une approche différente, [41] pose le même problème pour une classe plus générale de retour d'état. Le problème de choisir un retour (3.3.8) pour le système (3.3.7) est appelé "fortement stabilisable" ("strongly stabilizable" en anglais), si la solution nulle de (3.3.9) est exponentiellement stable quand les retards r_i ont des petites variations. Ensuite, on donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste de la transformation (3.3.9).

THÉORÈME 3.4.2 (Hale et Verduyn Lunel 2002). *Le problème (3.3.7) est "fortement stabilisable" par la commande (3.3.8) si et seulement si pour n'importe quels retards r_1, r_2, \dots, r_m , on a :*

$$\begin{cases} \text{Rang} \left[s \left(I - \sum_{j=1}^m C_j^{-sr_j} \right) - \sum_{i=0}^m A_i e^{-sr_i} \right] = n & \forall s \in \mathbb{C} \text{ avec } \text{Re}(s) \geq -\epsilon \\ \text{Rang} \left[I - \sum_{j=1}^m C_j^{-sr_j} \right] = n & \forall s \in \mathbb{C} \text{ avec } \text{Re}(s) \geq -\epsilon, \end{cases}$$

pour quelque $\epsilon = \epsilon(r_1, r_2, \dots, r_m)$.

Maintenant, dans le domaine fréquentiel, [44] utilise la transformation de Möbius (3.3.4) et le polynôme caractéristique (3.3.5) pour démontrer le Lemme 3.4.3 proposé par [107] (dans [107] ce lemme n'est pas démontré):

LEMME 3.4.3 (Siljak 1975, Hu et Hu 1996). *On considère le polynôme à deux variables (3.3.5). Si les conditions $p(s, 0) \neq 0$ pour n'importe quel s tel que $\text{Re}(s) \geq 0$ et $p(s, z) \neq 0$ pour n'importe quelle paire (s, z) telle que $\text{Re}(s) = 0$ et $|z| \leq 1$ sont satisfaites, alors $p(s, z) \neq 0$ pour n'importe quel (s, z) tel que $\text{Re}(s) \geq 0$ et $|z| \leq 1$.*

Ce lemme est l'extension au cas neutre de la proposition 10 dans [85] utilisée pour les systèmes retardés [38].

Dans [44], quelques résultats sur la stabilité indépendante du retard, faciles à vérifier, sont également proposés, et parmi eux le théorème suivant:

THÉORÈME 3.4.4 (Hu et Hu 1996). *Le système (3.3.13) est asymptotiquement stable si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

$$\mu(A) + \|B\| + \frac{\|CA\| + \|CB\|}{1 - \|C\|} < 0; \quad \|C\| < 1.$$

Ici $\mu(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\|I + \epsilon A\| - 1)$ est la mesure de la matrice A et $\|\cdot\|$ est la norme des matrices.

Dans une approche temporelle ou de type Lyapunov-Krasovskii [72], on a le résultat de stabilité indépendant du retard:

THÉORÈME 3.4.5 (Lien et al., 2000). *Le système (3.3.7) avec $u = 0$ est stable asymptotiquement si $\sum_{i=1}^m \|C_i\| < 1$ et s'il existe des matrices $R_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, telles que*

$$\begin{pmatrix} A_0 + A_0^\top + \sum_{i=1}^m R_i & A_1 - A_0^\top C_1 & \cdots & A_m - A_0^\top C_m \\ A_1^\top - C_1^\top A_0 & -C_1^\top A_1 - A_1^\top C_1 - R_1 & \cdots & -C_1^\top A_m \\ A_2^\top - C_2^\top A_0 & -A_2^\top C_1 & \cdots & -C_2^\top A_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^\top - C_m^\top A_0 & -A_m^\top C_1 & \cdots & -C_m^\top A_m - A_m^\top C_m - R_m \end{pmatrix} < 0.$$

Finalement, dans la section suivante, on présente quelques résultats sur la stabilité dépendante du retard.

3.5 STABILITÉ DÉPENDANTE DE LA TAILLE DU RETARD

Quelques résultats récents sur la stabilité dépendante de la taille du retard sont présentés ci-après.

Dans une approche temporelle ou de Lyapunov-Krasovskii, [72] utilise la transformation (3.3.6) pour le système neutre (3.3.7) avec $u = 0$ et obtient le résultat de stabilité dépendant de la taille du retard suivant:

THÉORÈME 3.5.1 (Lien et al., 2000). *Le système (3.3.7) avec $u = 0$ est stable asymptotiquement si $\sum_{i=1}^m (\|C_i\| + r_i \|A_i\|) < 1$ et si pour des matrices $Q > 0$, $R_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, il existe une solution $P > 0$ à l'équation de Riccati suivante:*

$$\bar{A}^\top P + P\bar{A} + \sum_{i=1}^m \left[(r_i + m_i) R_i + r_i \bar{A}^\top P A_i R_i^{-1} \bar{A}_i^\top P \bar{A} + \bar{A}^\top P C_i R_i^{-1} C_i^\top P \bar{A} \right] = -Q,$$

où $\bar{A} = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i$, $m_i = 0$ si $C_i = 0$, $m_i = 1$ si $C_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Maintenant on présente un problème de stabilité robuste dépendant de la taille du retard. [43] considère l'équation (2.2.13) dans une approche fréquentielle avec $r_1 = r_2$, où les incertitudes

$$\Delta_J := E\delta_J F_J, J \in \{A, B, C\} \quad (3.5.1)$$

et $\delta_A \in \mathbb{R}^{m \times p_A}$, $\delta_B \in \mathbb{R}^{m \times p_B}$, $\delta_C \in \mathbb{R}^{m \times p_C}$ dénotent les perturbations dans les matrices et $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $F_A \in \mathbb{R}^{p_A \times m}$, $F_B \in \mathbb{R}^{p_B \times m}$, $F_C \in \mathbb{R}^{p_C \times m}$ sont des matrices de mise à l'échelle.

DÉFINITION 3.5.1. Soit $\delta := [\delta_A, \delta_B, \delta_C]$. Le rayon de stabilité de (2.2.13) avec les incertitudes (3.5.1) est

$$r_{\mathbb{R}}(A, B, C; E, F_A, F_B, F_C) := \inf \{ \bar{\sigma}(\delta) : \delta \in \mathbb{R}^{n \times (p_A + p_B + p_C)} \text{ et (2.2.13) est instable.} \}$$

Ici $\sigma_i(M)$, $i = 1, 2, \dots, \min\{n, (p_A + p_B + p_C)\}$ dénote les valeurs propres de $M \in \mathbb{C}^{n \times (p_A + p_B + p_C)}$, ordonnées de manière non incrémentale et $\sigma_1(M) := \bar{\sigma}(M)$.

THÉORÈME 3.5.2 (Hu et Davinson 2000). *Si le système nominal de (2.2.13) est stable, alors le rayon de stabilité de (2.2.13) est donné par*

$$r_{\mathbb{R}} = \left\{ \sup_{s \in \mathbb{C}_g} \inf_{\gamma \in (0, 1]} \sigma_2 \left(\begin{bmatrix} \operatorname{Re} Q & -\gamma \operatorname{Im} Q \\ \gamma^{-1} \operatorname{Im} Q & \operatorname{Re} Q \end{bmatrix} \right) \right\}^{-1},$$

où

$$Q(s) := \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} (sI - A - B e^{r_1 s} - C e^{r_1 s})^{-1} E \in \mathbb{C}^{n \times (p_A + p_B + p_C)}.$$

La preuve de ce théorème utilise le résultat de [89].

D'une part, à la différence des autres résultats rappelés dans ce chapitre, le Théorème 3.5.2 étudie la stabilité robuste dépendante de la taille du retard (même sujet étudié dans le reste de ce rapport). D'autre part, on remarque que dans le Théorème 3.5.2, le système nominal (2.2.13) est supposé stable; cette condition est utilisée fréquemment en pratique par les auteurs. Dans le Chapitre 6, on suppose aussi cette condition [56].

3.6 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, on a présenté les définitions et théorèmes de base pour la stabilité de systèmes neutres, les espaces qui ont été utilisés sont l'espace des fonctions continues et l'espace de Sobolev. On a présenté aussi trois transformations de modèle dans le domaine fréquentiel (transformations 1,2,et 3) et cinq dans le domaine temporel (transformation 4,5,...,8); parmi ces transformations, deux ont été proposées: les transformations 4 et 7. On a proposé aussi un théorème de stabilité et une analyse de stabilité robuste par rapport aux retards pour le système transformé (3.3.9). Finalement, un tour guidé a été présenté sur la stabilité des systèmes neutres.

Chapitre 4

STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES NEUTRES AVEC DYNAMIQUE ADDITIONNELLE

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité robuste dépendante de la taille du retard des systèmes neutres linéaires avec incertitudes sur les paramètres et les retards. Les systèmes considérés sont décrits par des équations différentielles fonctionnelles avec des incertitudes non linéaires et variantes dans le temps, sur les paramètres des coefficients d'état à l'instant présent et d'état à l'instant retardé, et avec des incertitudes variantes dans le temps et quasilinéaires (i.e. linéaires seulement sur un des termes) pour l'opérateur de différence appliqué à l'état. L'analyse de stabilité est effectuée grâce à une approche de type fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

La contribution principale de ce travail, théorème 4.4.1, repose sur les résultats de stabilité robuste dépendante de la taille du retard obtenus dans [99], [97], qui généralisent des travaux antérieurs [94], [96] avec des incertitudes variantes dans le temps et quasilinéaires dans l'opérateur de différence, et avec l'obtention de conditions de stabilité robuste, faciles à vérifier, qui s'expriment en termes de l'existence de solutions positives d'une inégalité linéaire matricielle ou LMI.

4.1 INTRODUCTION

Une grande variété de systèmes peuvent être modélisés par la classe des systèmes neutres linéaires, caractérisée par la présence de deux retards r_1 et r_2 , l'un dans la dérivée de l'opérateur de différence appliqué à l'état $Dx_t := [x(t) - Cx(t - r_1)]$, et l'autre dans $x(t - r_2)$,

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Cx(t - r_1)] = Ax(t) + Bx(t - r_2), t \geq 0, r_1 > 0, r_2 > 0.$$

Cependant dans la pratique, les paramètres du modèle ne sont pas bien connus, il est donc nécessaire de considérer la stabilité robuste par rapport aux paramètres du système:

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Cx(t - r_1) - \Delta_C] = Ax(t) + Bx(t - r_2) + \Delta_A + \Delta_B, t \geq 0, r_1 > 0, r_2 > 0.$$

Quelques conditions suffisantes de stabilité robuste ont été obtenues par certains auteurs, mais avec seulement un paramètre de retard et des hypothèses restrictives dans la partie $[x(t) - Cx(t - r_1) - \Delta_C]$ [94], et dans un cas plus général [96], mais avec des conditions de stabilité robuste non linéaires difficiles à vérifier.

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'analyse de stabilité dépendante du retard des systèmes linéaires neutres avec des incertitudes. Les retards sont supposés inconnus et constants, les incertitudes sont variantes dans le temps. Ici on évite de faire l'hypothèse sur la différentiabilité de x (en général, on suppose que celui-ci n'est pas différentiable); on transforme un système avec des retards ponctuels en un système avec des retards distribués en utilisant la règle de Leibnitz dans l'opérateur de différence $D(t)x_t := [x(t) - Cx(t - r_1) - \Delta_C]$. On obtient des conditions suffisantes dépendantes de la taille du retard, sous lesquelles la stabilité est garantie via une approche de type fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Les systèmes considérés sont décrits par des équations différentielles fonctionnelles, avec des incertitudes dans l'état, l'état retardé et l'opérateur de différence. Les résultats de stabilité sont vérifiés en termes d'une LMI.

4.2 PROBLÈME

Dans cette section on considère la classe suivante très générale de systèmes neutres (2.2.1)-(2.2.2), avec $F(t, x_t) = Ax(t) + Bx(t - r_2) + \Delta_A(t, x_t(0)) + \Delta_B(t, x_t(-r_2))$ et on suppose que $G(t, x_t) = Cx(t - r_1) + \Delta_C(t, x_t(r_1))$ est non-atomique en zéro, (voir Section 2.2, (2.2.13)). Ici les retards r_1 et r_2 sont supposés constants non négatifs et inconnus,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [D(t) x_t] &= Ax(t) + Bx(t - r_2) + f(t, x_t), t \geq \sigma \\ D(t) \varphi &:= [\varphi(0) - C\varphi(-r_1) - \Delta_C(t, \varphi(-r_1))], \\ f(t, \varphi) &:= \Delta_A(t, \varphi(0)) + \Delta_B(t, \varphi(-r_2)), \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

avec la condition initiale fonctionnelle

$$x_\sigma \equiv \phi, \{\phi, \varphi\} \in \mathcal{C}, \quad (4.2.2)$$

où $x_t = \{x(t + \theta) : \theta \in [-r, 0], r := \max\{r_1, r_2\}\}$. A , B , et C sont des matrices constantes connues, les applications non linéaires $\Delta_A, \Delta_B : \mathbb{R} \times \Omega_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n$, et l'application linéaire dans le deuxième argument $\Delta_C : \mathbb{R} \times \Omega_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n$ transforment des ensembles fermés et bornés en des ensembles fermés et bornés. Ils sont décrits par

$$\begin{aligned} \Delta_A(t, \varphi(0)) &:= E_A \delta_A(t, \varphi(0)), \\ \delta_A^\top(t, \varphi(0)) \delta_A(t, \varphi(0)) &\leq \varphi^\top(0) W_A^\top W_A \varphi(0), \\ \Delta_B(t, \varphi(-r_2)) &:= E_B \delta_B(t, \varphi(-r_2)), \\ \delta_B^\top(t, \varphi(-r_2)) \delta_B(t, \varphi(-r_2)) &\leq \varphi^\top(-r_2) W_B^\top W_B \varphi(-r_2), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_C(t, \varphi(-r_1)) &:= E_C \delta_C(t) \varphi(-r_1), E_C = I_{n \times n} \\ W_C + \delta_C(t) &\geq 0, W_C - \delta_C(t) \geq 0, \\ \forall (t, \varphi) &\in \mathbb{R}^+ \times \Omega_\nu, \end{aligned}$$

où E_A, E_B sont des matrices connues, W_A, W_B et W_C sont des matrices de pondération connues, et $\delta_A, \delta_B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des applications continues qui satisfont

$$\delta_A(t, 0) \equiv 0, \delta_B(t, 0) \equiv 0, \quad (4.2.4)$$

de sorte que $x = 0$ est une solution du système neutre (4.2.1)-(4.2.2). On remarque que l'incertitude Δ_C est non structurée i.e. $E_C = I_{n \times n}$. Sous ces hypothèses, le problème de la valeur initiale est bien posé et on va analyser la stabilité robuste dépendante de la taille du retard r_2 et indépendante de r_1 ; les résultats peuvent être vérifiés en utilisant des logiciels standard de résolution de LMI.

REMARQUE 4.2.1. On note que $r_1 > 0$ implique que $C\varphi(-r_1) + \Delta_C(t, \varphi(-r_1))$ ne dépend pas de $\varphi(0)$, la condition (4.2.3) permet de satisfaire (2.2.7)-(2.2.8), alors $Cx(t - r_1) + \Delta_C(t, \varphi(-r_1))$ est non atomique en zéro dans \mathcal{H} [37].

Dans cette section, on considère le problème de stabilité suivant, cas particulier du problème 3.2:

Problème de stabilité robuste dépendante du retard r_2 : Trouver une borne r_2^* , (quand elle existe) sur r_2 , et des conditions sous lesquelles la stabilité asymptotique de (4.2.1)-(4.2.4) est assurée quand les matrices Δ_A , Δ_B , Δ_C satisfont (4.2.3) et pour n'importe quels retards $r_1 > 0$ et $r_2 \leq r_2^*$.

Ici on utilise la méthode directe de Lyapunov-Krasovskii pour l'étude de la stabilité robuste dépendante du retard. Les conditions de stabilité sont données en termes de l'existence de solutions positives de LMI.

4.3 TRANSFORMATION DE MODÈLE AVEC DYNAMIQUE ADDITIONNELLE

Dans le chapitre précédent, on a présenté quelques transformations utilisées dans la littérature; pour la plupart d'entre elles, il est supposé que l'état est différentiable, sauf la transformation (3.3.14) qui a été proposée pour la première fois dans [96]; ici on utilise cette approche.

Maintenant on considère le système neutre (4.2.1):

$$\frac{d}{dt} [D(t) x_t] = Ax(t) + Bx(t - r_2) + f(t, x_t), t \geq \sigma.$$

De la règle de Leibnitz dans l'opérateur de différence, $D(t) x_t - D(t - r_2) x_{t-r_2} =$

$\int_{-r_2}^0 d\theta [D(t+\theta)x_{t+\theta}]$, on a pour $t \geq r+r_2$:

$$\begin{aligned} x(t-r_2) &= x(t) - Cx(t-r_1) - \Delta_C(t, x_t) \\ &+ Cx(t-r_1-r_2) + \Delta_C(t-r_2, x_{t-r_2}(-r_1)) - \int_{-r_2}^0 \frac{d}{dt} [D(t+\theta)x_{t+\theta}] d\theta, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

parce que $D(t)x_t$ a une dérivée continue.

Alors l'équation (4.2.1) peut être réécrite dans la nouvelle variable ξ comme (voir [51], [96]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [D(t)\xi_t] &= (A+B)\xi(t) - BC\xi(t-r_1) - B\Delta_C(t, \xi_t(-r_1)) \\ &+ BC\xi(t-r_1-r_2) + B\Delta_C(t-r_2, \xi_{t-r_2}(-r_1)) \\ &- B \int_{-r_2}^0 [A\xi(t+\theta) + B\xi(t+\theta-r_2) + f(t+\theta, \xi_{t+\theta})] d\theta + f(t, \xi_t). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Ce modèle est appelé le modèle transformé.

REMARQUE 4.3.1. La nouvelle condition initiale pour (4.3.2) n'est pas $\phi \in \mathcal{C}[-r, 0]$, elle doit être définie $\xi(\vartheta) \in \mathcal{C}([-r-r_2, 0], \mathbb{R}^n)$, $r := \max\{r_1, r_2\}$.

REMARQUE 4.3.2. On peut vérifier que chaque solution de (4.2.1) est aussi une solution de (4.3.2), la stabilité de (4.3.2) implique alors la stabilité de (4.2.1) voir [51]. Cependant l'affirmation inverse n'est pas vraie, parce que, comme on l'a vu dans la section 3.3.2., cette transformation ajoute une dynamique; quand Δ_A , Δ_B , Δ_C sont égales à zéro, cette dynamique est donnée par (3.3.12).

Dans la section suivante, l'analyse de stabilité du modèle transformé (4.3.2) est faite en termes de la variable x .

4.4 STABILITÉ ROBUSTE DÉPENDANT DE LA TAILLE DU RETARD AVEC DYNAMIQUE ADDITIONNELLE

Dans cette section, comme dans [98], on utilise l'approche des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, avec l'aide du Théorème 3.2.1 pour démontrer le théorème suivant sur la stabilité dépendant de la taille du retard r_2 et indépendant de la taille du retard r_1 :

THÉORÈME 4.4.1. *Soit le système neutre (4.2.1)-(4.2.4). Si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1. $A_1 := A + B$ est une matrice stable de Hurwitz [4] (les valeurs propres sont dans le demi plan gauche du plan \mathbb{C});
2. l'opérateur de différence $D(t)\varphi := [\varphi(0) - C\varphi(-r_1) - \Delta_C(t, \varphi(-r_1))]$ est linéaire en φ , continu et stable uniformément par rapport à $\mathcal{C}([\sigma, \infty), \mathbb{R}^n)$;
3. il existe un nombre réel positif r_2^* et des matrices définies positives $P, S_i > 0$, $i = \overline{1,7}$ tels que la LMI suivante est satisfaite:

$$\Gamma := \begin{pmatrix} Q(r_2^*) & \Omega_{12} & 0 & \Omega_{14} & \overline{S}(r_2^*) \\ \Omega_{12}^\top & \Omega_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{33} & 0 & 0 \\ \Omega_{14}^\top & 0 & 0 & \Omega_{44} & 0 \\ \overline{S}^\top(r_2^*) & 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix} < 0, \quad (4.4.1)$$

où

$$Q(r_2^*) := \Omega_{11} + \overline{S}(r_2^*) R^{-1} \overline{S}^\top(r_2^*), \quad (4.4.2)$$

$$\Omega_{11} := PA_1 + A_1^\top P + 2S - \overline{S}(r_2^*) R^{-1} \overline{S}^\top(r_2^*) \quad (4.4.3)$$

$$S := W_A^\top W_A + \sum_{i=1}^2 S_i + r_2^* \sum_{i=3}^5 S_i, \quad (4.4.4)$$

$$\overline{S}(r_2^*) := \begin{pmatrix} \overline{S}_1 & \overline{S}_2(r_2^*) \end{pmatrix}, \quad (4.4.5)$$

$$\overline{S}_1 := \begin{pmatrix} PA_1, & \sqrt{2}PB, & PE_A, & PE_B \end{pmatrix}, \quad (4.4.6)$$

$$\overline{S}_2(r_2^*) := \sqrt{r_2^*} \begin{pmatrix} PBE_A, & PBE_B, & PBA, & PB^2 \end{pmatrix}, \quad (4.4.7)$$

$$R^{-1} := \begin{pmatrix} -I_{6n} & 0 & 0 \\ 0 & -S_5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -S_6^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.4.8)$$

$$\Omega_{12} := \left(PA + W_A^\top W_A + \sum_{i=1}^2 S_i + r_2^* \sum_{i=3}^5 S_i \right) C, \quad (4.4.9)$$

$$\Omega_{22} := 2W_C^\top W_C - S_1 + S_7 + C^\top SC + 3W_C^\top SW_C \quad (4.4.10)$$

$$\Omega_{33} := W_B^\top W_B - S_2 + r_2^* S_6, \quad (4.4.11)$$

$$\Omega_{44} := W_C^\top W_C - S_7, \quad (4.4.12)$$

$$\Omega_{14} := PBC, \quad (4.4.13)$$

Alors le Système Neutre (4.2.1)-(4.2.4) est robustement asymptotiquement stable pour n'importe quel retard $r_2 \leq r_2^*$ et n'importe quel retard $r_1 > 0$.

Démonstration. On considère le système transformé (4.3.2) et la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovkii suivante:

$$V(t, \varphi) := V_1(t, \varphi) + V_2(\varphi) + V_3(\varphi), \varphi \in \mathcal{C}, \quad (4.4.14)$$

où

$$V_1(t, \varphi) := [D(t) \varphi]^\top PD(t) \varphi, \quad (4.4.15)$$

$$V_2(\varphi) := \sum_{i=1}^2 \int_{-r_i}^0 \varphi^\top(\theta) S_i \varphi(\theta) d\theta + \int_{-r_2}^0 \left[\int_{\theta}^0 \varphi^\top(\vartheta) S_3 \varphi(\vartheta) d\vartheta \right] d\theta, \quad (4.4.16)$$

$$V_3(\varphi) := \int_{-r_2}^0 \left[\int_{\theta-r_2}^0 \varphi^\top(\vartheta) S_4 \varphi(\vartheta) d\vartheta \right] d\theta + \int_{-r_1-r_2}^{-r_1} \varphi^\top(\theta) S_7 \varphi(\theta) d\theta, \quad (4.4.17)$$

$$+ \sum_{i=5}^6 \int_{-r_2}^0 \left[\int_{\theta}^0 \psi_i^\top(\vartheta) S_i \psi_i(\vartheta) d\vartheta \right] d\theta$$

et les fonctionnelles ψ_i , sont données par $\psi_5 := \varphi$, $\psi_6(\vartheta) := \varphi(\vartheta - r_2)$. Pour la fonctionnelle V , on peut construire \dot{V} le long des trajectoires de (4.3.2) en fonction de x , si φ est remplacée par x_t dans la partie à droite de $V(t, \varphi)$; on passe à x , en différentiant par rapport à t (tel que $\frac{d}{dt} D(t) x_t$ peut apparaître seulement pour la valeur courante (non retardée) de t), après on substitue $\frac{d}{dt} D(t) x_t$ par (4.3.2), on passe de x à x_t , et on remplace x_t par φ . Avec cette procédure, les expressions pour V et la dérivée supérieure à droite de V' (voir (3.2.9)) sont fréquemment réécrites comme des fonctions de x , en gardant en mémoire la transition de x à φ , comme cela est proposé dans [59]. Alors on a:

$$V_1'(t, x_t) = [D(t) x_t]^\top P \frac{d}{dt} D(t) x_t + \left[\frac{d}{dt} D(t) x_t \right]^\top PD(t) x_t, \quad (4.4.18)$$

$$V_2'(x_t) = \sum_{i=1}^2 [x^\top(t) S_i x(t) - x^\top(t - r_i) S_i x(t - r_i)] + \int_{-r_2}^0 [x_t^\top(0) S_3 x_t(0) - x_{t+\theta}^\top(0) S_3 x_{t+\theta}(0)] d\theta, \quad (4.4.19)$$

$$\begin{aligned}
V'_3(x_t) &= \int_{-r_2}^0 [-x_{t+\theta}^\top(-r_2) S_4 x_{t+\theta}(-r_2) + x_t^\top(0) S_4 x_t(0)] d\theta \\
&+ x^\top(t-r_1) S_7 x(t-r_1) - x^\top(t-r_1-r_2) S_7 x(t-r_1-r_2) \\
&+ \int_{-r_2}^0 [x_t^\top(0) S_5 x_t(0) - x_{t+\theta}^\top(0) S_5 x_{t+\theta}(0) + \\
&+ x_t^\top(-r_2) S_6 x_t(-r_2) - x_{t+\theta}^\top(-r_2) S_6 x_{t+\theta}(-r_2)] d\theta
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

On substitue (4.3.2) dans (4.4.18) et on pose $A_1 := A + B$ pour avoir:

$$\begin{aligned}
V'_1(t, x_t)|_{(4.3.2)} &= [D(t) x_t]^\top P A_1 x(t) + x^\top(t) A_1^\top P D(t) x_t \\
&+ 2 [D(t) x_t]^\top P [E_A \delta_A(t, x_t) + E_B \delta_B(t, x_t)] \\
&- [D(t) x_t]^\top P B C [x(t-r_1) - x(t-r_1-r_2)] \\
&- [x^\top(t-r_1) - x^\top(t-r_1-r_2)] C^\top B^\top P D(t) x_t \\
&- 2 [D(t) x_t]^\top P B E_C [\delta_C(t) x(t-r_1) - \delta_C(t-r_2) x(t-r_1-r_2)] \\
&- 2 [D(t) x_t]^\top P B \int_{-r_2}^0 [A x_{t+\theta}(0) + B x_{t+\theta}(-r_2) \\
&+ E_A \delta_A(t+\theta, x_{t+\theta}(0)) + E_B \delta_B(t+\theta, x_{t+\theta}(-r_2))] d\theta.
\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

Ensuite on utilise l'inégalité classique

$$-2a^\top b \leq \inf_{X>0} \{a^\top X a + b^\top X^{-1} b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4.22}$$

avec (4.2.3) et les matrices R_1 et R_2 , on a directement les inégalités suivantes:

$$2 [D(t) x_t]^\top P E_B \delta_B(t, x_t) \leq [D(t) x_t]^\top P E_B E_B^\top P D(t) x_t + x_t^\top(-r_2) W_B^\top W_B x_t(-r_2) \tag{4.4.23}$$

$$\begin{aligned}
&-2 [D(t) x_t]^\top P B \int_{-r_2}^0 B x_{t+\theta}(-r_2) d\theta \leq \\
&\int_{-r_2}^0 \{ [D(t) x_t]^\top P B^2 R_2^{-1} (B^2)^\top P D(t) x_t \\
&+ x_{t+\theta}^\top(-r_2) R_2 x_{t+\theta}(-r_2) \} d\theta,
\end{aligned} \tag{4.4.24}$$

et de forme semblable pour δ_A et R_1 ,

$$\begin{aligned}
&-2 [D(t) x_t]^\top P B \int_{-r_2}^0 E_A \delta_A(t+\theta, x_{t+\theta}(0)) d\theta \leq \\
&\int_{-r_2}^0 \{ [D(t) x_t]^\top P B E_A E_A^\top B^\top P D(t) x_t \\
&+ x_{t+\theta}^\top(0) W_A^\top W_A x_{t+\theta}(0) \} d\theta,
\end{aligned} \tag{4.4.25}$$

et les inégalités pour δ_B et R_2 .

Les inégalités (4.4.23)-(4.4.25) permettent d'avoir une borne pour V'_1 . Maintenant pour supprimer des termes carrés dans V' on choisit les matrices positives $R_1 := S_5$,

$R_2 := S_6$,

$$\begin{cases} S_5 = W_A^\top W_A, & \text{si } W_A^\top W_A > 0, \\ S_5 > W_A^\top W_A, & \text{si non,} \end{cases} \quad (4.4.26)$$

$$\begin{cases} S_6 = W_B^\top W_B, & \text{si } W_B^\top W_B > 0, \\ S_6 > W_B^\top W_B, & \text{si non,} \end{cases} \quad (4.4.27)$$

et on utilise les inégalités (4.4.19) et (4.4.20). Alors, on obtient la borne suivante pour V' :

$$\begin{aligned} V'(t, x_t)|_{(4.3.2)} &\leq [D(t) x_t]^\top P A_1 x(t) + x^\top(t - r_1) S_7 x(t - r_1) \\ &\quad + x^\top(t) A_1^\top P D(t) x_t - x^\top(t - r_1 - r_2) S_7 x(t - r_1 - r_2) \\ &\quad - [D(t) x_t]^\top P B C [x(t - r_1) - x(t - r_1 - r_2)] \\ &\quad - [x^\top(t - r_1) - x^\top(t - r_1 - r_2)] C^\top B^\top P D(t) x_t \\ &\quad + [D(t) x_t]^\top P E_A E_A^\top P D(t) x_t + x^\top(t) W_A^\top W_A x(t) \\ &\quad + [D(t) x_t]^\top P E_B E_B^\top P D(t) x_t + x^\top(t - r_2) W_B^\top W_B x(t - r_2) \\ &\quad + 2 [D(t) x_t]^\top P B E_C E_C^\top B^\top P D(t) x_t + x^\top(t - r_1) W_C^\top W_C x(t - r_1) \\ &\quad \quad + x^\top(t - r_1 - r_2) W_C^\top W_C x(t - r_1 - r_2) \\ &\quad + \int_{-r_2}^0 [D(t) x_t]^\top P B A S_5^{-1} A^\top B^\top P D(t) x_t d\theta \\ &\quad + \int_{-r_2}^0 [D(t) x_t]^\top P B^2 S_6^{-1} (B^2)^\top P D(t) x_t d\theta \\ &\quad + \int_{-r_2}^0 [D(t) x_t]^\top P B E_A E_A^\top B^\top P D(t) x_t d\theta \\ &\quad + \int_{-r_2}^0 [D(t) x_t]^\top P B E_B E_B^\top B^\top P D(t) x_t d\theta \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 [x^\top(t) S_i x(t) - x^\top(t - r_i) S_i x(t - r_i)] \\ &\quad + r_2 \sum_{i=3}^5 x^\top(t) S_i x(t) + r_2 x^\top(t - r_2) S_6 x(t - r_2). \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

Si on utilise les identités suivantes (4.4.29), (4.4.30), avec $S = W_A^\top W_A + \sum_{i=1}^2 S_i + r_2 \sum_{i=3}^5 S_i$, on peut réécrire chaque expression qui contient le vecteur $x(t)$ de (4.4.28) comme une expression qui contient $D(t) x_t$ et $x(t - r_1)$:

$$\begin{aligned} x^\top(t) S x(t) &= [D(t) x_t]^\top S D(t) x_t + [D(t) x_t]^\top S C x(t - r_1) + \\ &\quad + x^\top(t - r_1) C^\top S D(t) x_t + x^\top(t - r_1) C^\top S C x(t - r_1) \\ &\quad + 2 [D(t) x_t]^\top S \Delta_C(t, x_t) + 2 x^\top(t - r_1) C^\top S \Delta_C(t, x_t) \\ &\quad \quad + \Delta_C^\top(t, x_t) S \Delta_C(t, x_t), \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

$$\begin{aligned}
& [D(t)x_t]^\top PA_1x(t) + x^\top(t)A_1^\top PD(t)x_t = \\
& [D(t)x_t]^\top (PA_1 + A_1^\top P)D(t)x_t + [D(t)x_t]^\top PA_1Cx(t-r_1) \\
& + x^\top(t-r_1)C^\top A_1^\top PD(t)x_t + 2[D(t)x_t]^\top PA_1\Delta_C(t,x_t),
\end{aligned} \tag{4.4.30}$$

et on peut borner les termes

$$\begin{aligned}
2[D(t)x_t]^\top S\Delta_C(t,x_t) &\leq [D(t)x_t]^\top SD(t)x_t \\
&+ x^\top(t-r_1)W_C^\top SW_Cx(t-r_1),
\end{aligned} \tag{4.4.31}$$

$$\Delta_C^\top(t,x_t)S\Delta_C(t,x_t) \leq x^\top(t-r_1)W_C^\top SW_Cx(t-r_1), \tag{4.4.32}$$

et de forme similaire pour $2x^\top(t-r_1)C^\top S\Delta_C(t,x_t)$, $2[D(t)x_t]^\top PA_1\Delta_C(t,x_t)$.

On note que (4.4.32) est obtenue directement du fait que $(W_C + \delta_C(t))^\top S(W_C - \delta_C(t)) \geq 0$ par l'hypothèse (4.2.3).

Avec toutes ces inégalités et identités, s'il existe un réel positif $r_2^* \geq r_2$ tel que la LMI (4.4.1) est satisfaite, alors (4.4.1) est équivalente à:

$$V'(t,x_t)|_{(4.3.2)} \leq \omega^\top \Omega \omega < 0, \tag{4.4.33}$$

où le vecteur ω est

$$\omega := \begin{pmatrix} D(t)x_t \\ x(t-r_1) \\ x(t-r_2) \\ x(t-r_1-r_2) \end{pmatrix} \tag{4.4.34}$$

et la matrice $\Omega := (\Omega_{i,j}), i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$ est définie dans le Théorème 4.4.1. Ceci est vérifié via une transformation de Schur appropriée [9].

L'inégalité (4.4.33) signifie que $\Omega < 0$, $\Omega_{1,1} < 0$ et qu'il existe un $\gamma > 0$ tel que $\dot{V}(t,x_t) \leq -\gamma \|D(t)x_t\|$ pour n'importe quel $t \geq \sigma$. $D(t)$ est stable par l'hypothèse (2) du Théorème 4.4.1, voir (3.2.2) et [19]; alors, la stabilité asymptotique de (4.2.1)-(4.2.4) est assurée par le Théorème 3.2.1 pour n'importe quel retard $r_2 \leq r_2^*$, [19].

□

REMARQUE 4.4.1. La fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (4.4.14)-(4.4.17) généralise des fonctionnelle proposée dans la littérature [96].

REMARQUE 4.4.2. Quand les incertitudes $\Delta A(\cdot, \cdot)$, $\Delta B(\cdot, \cdot)$, $\Delta C(\cdot, \cdot)$ sont égales à zéro, on peut choisir la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii (4.4.14) $V(\varphi) := V_1(\varphi) + V_2(\varphi) + V_3(\varphi)$ avec V_1 définie dans (4.4.15) et

$$V_2(\varphi) := \int_{-r}^0 \varphi^\top(\theta) S_1 \varphi(\theta) d\theta + \int_{-r_2}^0 \left[\int_{\theta}^0 \varphi^\top(\vartheta) S_3 \varphi(\vartheta) d\vartheta \right] d\theta, \quad (4.4.35)$$

$$V_3(\varphi) := \int_{-r_2}^0 \left[\int_{\theta-r_2}^0 \varphi^\top(\vartheta) S_4 \varphi(\vartheta) d\vartheta \right] d\theta + \int_{-r_1-r_2}^{-r_1} \varphi^\top(\theta) S_7 \varphi(\theta) d\theta, \quad (4.4.36)$$

on retrouve alors le résultat de [48] qui dépend du retard r_2 mais sans incertitudes.

REMARQUE 4.4.3. Si on s'intéresse seulement au problème de stabilité robuste (en $\Delta A(\cdot, \cdot)$, $\Delta B(\cdot, \cdot)$) indépendamment du retard du système (4.2.1)-(4.2.4), alors la transformation de modèle peut être évitée; on choisit $V(\varphi) := V_1(\varphi) + V_2(\varphi)$ avec V_1 définie dans (4.4.15) et

$$V_2(\varphi) := \sum_{i=1}^2 \int_{-r_i}^0 \varphi^\top(\theta) S_i \varphi(\theta) d\theta, \quad (4.4.37)$$

on retrouve alors des résultats similaires à [81].

REMARQUE 4.4.4. Si l'opérateur de différence défini par $D(t) = D$, $\Delta_C(t, \varphi) = \Delta C \varphi(t - r_1)$, si l'incertitude ΔC est une matrice constante et si φ est différentiable à droite ($\varphi \in \mathcal{C}^1$), alors on retrouve le résultat de [94].

REMARQUE 4.4.5. Dans [96] seulement, dans le cas où $\Delta_C(t, \varphi) := E_C \delta_C(t, \varphi) \equiv 0$ le résultat peut être vérifié en termes d'une LMI. Dans le théorème 4.4.1 la condition 3: (4.4.1) est une LMI et elle peut être toujours vérifiée en utilisant des logiciels de résolution de LMI [9]. On note que la condition 1 est nécessaire et découle de la vérification de la condition 3: $Q(r_2^*) < 0$ implique $A_1 < 0$. La Condition 2 consiste à vérifier la stabilité de $D(t)$ par rapport à $\mathcal{C}([\sigma, \infty), \mathbb{R}^n)$, voir Définition 3.2.2, [19].

4.5 EXEMPLES

Dans ce paragraphe, on va illustrer les résultats de stabilité avec deux exemples de systèmes neutres où la matrice C n'a pas d'incertitude par souci de simplicité.

EXEMPLE 4.5.1. On considère d'abord le système neutre:

$$\left[x(t) - \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} x(t - r_1) \right]^{\bullet} = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t - r_2) \quad (4.5.1)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t - r_2) \quad (4.5.2)$$

On note que, quand $C \equiv 0$, le système retardé n'est pas asymptotiquement stable indépendamment de la taille du retard r_2 , $A + B$ est stable mais $A - B$ ne l'est pas (condition obtenue pour le système sans retard, voir Figure 3.1). De façon équivalente, pour le système neutre, pour $r_1 \equiv 0$, si la matrice $(I - C)^{-1}(A + B)$ est Hurwitz stable et $(I - C)^{-1}(A - B)$ est instable, alors le système ne peut pas être stable indépendamment du retard r_2 , voir Figure 3.1. Dans cet exemple, on considère $r_1 = r_2$, comme cela est proposé dans [48]. Alors pour les incertitudes caractérisées par $W_A = W_B = 0.15I_2$ (par simplicité), le Théorème 4.4.1 donne la borne $r_2 < r_2^* = 0.5s$, une solution faisable est obtenue de la LMI (4.4.1) du Théorème 4.4.1. Dans la Figure 4.1, une simulation est présentée pour le système (4.5.1)-(4.5.2) avec la condition initiale $\phi_1(\theta) = -0.75\theta + 1$, $\phi_2(\theta) = -16.625\theta + 1$. Sous cette condition $\phi \in \mathcal{C}^1$ et la "condition de raccordement" (2.3.3): $\dot{\phi}(0^-) = A\phi(0) + B\phi(-r_2) + C\dot{\phi}(-r_1)$ est satisfaite quand il n'y pas d'incertitudes (voir Section 2.3), donc $\dot{x}(t)$ est continue pour $t \geq \sigma$ et $x(t)$ est différentiable sur $(\sigma - r, \infty)$; cependant, pour le cas avec incertitudes, il y a un petit saut en $t = 0$.

Dans le cas sans incertitude ($W_A = W_B = 0$), la solution donnée par le théorème est r_1 n'importe quel réel positif et $r_2 < r_2^* = 0.894s$.

EXEMPLE 4.5.2. Le deuxième exemple est un problème pratique (voir Section 1.5) motivé par un circuit PEEC (Partial Element Equivalent Circuit), modèle étudié dans [5]: $\frac{d}{dt}[x(t) - Cx(t - r)] = Ax(t) + Bx(t - r)$, avec la condition initiale (1.5.3) définie entre $-10 \leq t \leq 0$. Il est caractérisé par les matrices A, B, C :

$$\frac{A}{100} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \frac{B}{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5.3)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t - r_2). \quad (4.5.4)$$

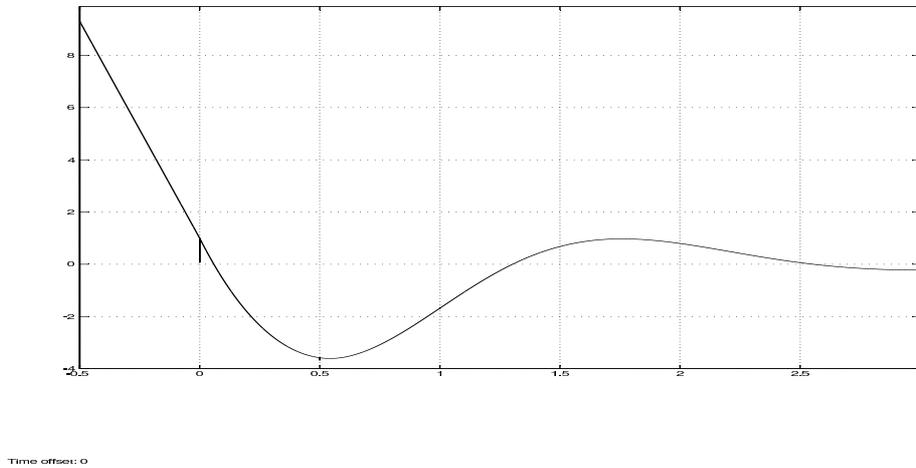


FIG. 4.1 – $-4 \leq y(t) \leq 10$, $-0.5 \leq t \leq 3$

Dans [48], la stabilité du système est obtenue pour les bornes $r^* = r_2^* = 0.43s$. Dans [5], la stabilité du système est obtenue pour une borne plus grande: $r = 1$ en utilisant une méthode numérique contractive. Cependant dans notre cas, on garantit la stabilité du système pour n'importe quel retard inférieur ou égal à r^* . Si on applique le théorème 4.4.1 et les routines de LMI-Toolbox Matlab, on obtient que l'inégalité est faisable pour $r_2^* = 100s$. En fait l'inégalité (4.4.1) est satisfaite pour des valeurs plus grandes de r_2^* . La simulation qui est montrée Fig. 2 est calculée pour $r_2^* = 10s$. La condition initiale est donnée entre $-10s$ et $0s$. On note que il y a des discontinuités dans la dérivée de $y(t)$ pour $t = 0s$, et les multiples de $10s$ parce que la "condition de raccordement" n'est pas vérifiée.

Si on utilise seulement V_1 donnée par l'équation (4.4.15) pour le système (4.5.3) sans incertitudes, on obtient la condition de stabilité indépendante du retard [112]:

$$\begin{pmatrix} A^\top P + PA + S & P(AC + B) + SC \\ C^\top S + (C^\top A^\top + B^\top) & C^\top SC - S \end{pmatrix} < 0, \quad (4.5.5)$$

$$C^\top SC - S < 0, \quad (4.5.6)$$

où les matrices $P > 0$ et $S > 0$ sont symétriques définies positives. Le système (4.5.3) satisfait les LMIs (4.5.5)-(4.5.6) et comme ces conditions ne sont pas fonction de r , alors on démontre que le système (4.5.3) est stable asymptotiquement, indépendamment du retard $r = r_1 = r_2$.

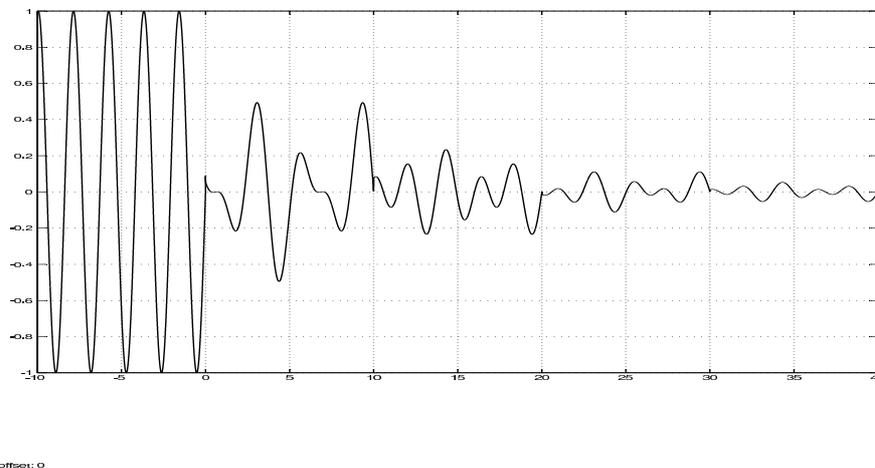


FIG. 4.2 – $-1 \leq y(t) \leq 1$, $-10 \leq t \leq 40$

On finit avec une remarque sur la stabilité de l'exemple (3.2.12) proposé dans la section précédente.

REMARQUE 4.5.1. Quand les conditions du théorème 4.4.1 sont satisfaites, la stabilité asymptotique robuste de (4.2.1)-(4.2.4) est assurée pour n'importe quel $r_2 \leq r_2^*$ et n'importe quel réel positif r_1 . Cependant le Théorème 4.4.1 peut être appliqué pour l'analyse de (3.2.12) quand le coefficient de $x(t - r_1)$ dépend de r_1 . Dans ce cas-là, la stabilité dépend de r_1 ; donc r_1 doit être tel que la Condition 2 du Théorème 4.4.1 soit satisfaite.

4.6 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, on a considéré la stabilité robuste dépendante du retard pour une classe générale de systèmes neutres. On a obtenu des conditions suffisantes qui s'expriment en termes de LMI. On a proposé une fonctionnelle de Lyapunov-Krassovskii qui inclut comme cas particulier d'autres fonctionnelles déjà utilisées dans la littérature. On a développé le travail de [98], qui est plus général que [94], [96] dans le sens où les systèmes neutres considérés ont des incertitudes dans la partie neutre et où les résultats sont toujours vérifiés en termes de LMI. On a présenté quelques exemples qui mettent en valeur le résultat principal (théorème 4.4.1).

Chapitre 5

STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES NEUTRES SANS DYNAMIQUE ADDITIONNELLE

Dans ce chapitre, comme dans le précédent, on aborde la stabilité robuste dépendant de la taille du retard des systèmes neutres linéaires avec incertitudes dans les paramètres et les retards. Les systèmes considérés sont décrits par des équations différentielles fonctionnelles avec des incertitudes non linéaires et variant dans le temps dans l'état à l'instant présent et dans l'état à un instant retardé, et des incertitudes variant dans le temps et quasilineaires dans l'opérateur de différence appliqué à l'état. À la différence du chapitre précédent, on évite la dynamique additionnelle associée à la transformation par la règle de Leibnitz utilisée dans le Chapitre 4 (voir remarque 4.3.2), en étendant la transformation par intégration sur un intervalle [65] (3.3.6) au cas neutre avec incertitudes (5.2.1)-(5.2.7).

L'apport principal de ce chapitre est donc l'analyse de stabilité présentée qui s'appuie sur une approche de type fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on étend la transformation par intégration sur un intervalle [65] (3.3.6), au cas des systèmes neutres avec incertitudes paramétriques (5.2.1)-(5.2.7). À la différence de la transformation par la règle de Leibnitz utilisée dans le chapitre précédent, la technique par intégration sur un intervalle n'ajoute aucune dynamique additionnelle. On obtient deux résultats de stabilité dépendant de la taille du retard r_2 , vérifiés en termes de LMI; cependant le prix payé est que la vérification de la stabilité du nouvel opérateur de différence est un peu plus compliquée. On donne quelques conditions suffisantes basées sur les techniques de commande robuste étudiées dans [82] pour vérifier la stabilité de ce nouvel opérateur de différence.

5.2 PROBLÈME

On considère une classe de systèmes neutres (2.2.1)-(2.2.2), avec $F(t, x_t) = Ax(t) + Bx(t - r_2) + \Delta_A(t, x_t(0)) + \Delta_B(t - r_2, x_t(-r_2))$ et on suppose que $G(t, x_t) = Cx(t - r_1) + \Delta_C(t - r_1, x_t(-r_1))$ est non atomique en zéro, i.e., des systèmes neutres linéaires avec incertitudes (voir Section 2.2, (2.2.13)). Ici les retards $r_1 \geq 0$ et $r_2 \geq 0$ sont supposés constants et inconnus,

$$\frac{d}{dt} [D(t) x_t] = Ax(t) + Bx(t - r_2) + f(t, x_t), t \geq \sigma \geq 0, \quad (5.2.1)$$

$$D(t) \varphi := [\varphi(0) - C\varphi(-r_1) - \Delta_C(t - r_1, \varphi(-r_1))], \quad (5.2.2)$$

$$f(t, \varphi) = \Delta_A(t, \varphi(0)) + \Delta_B(t - r_2, \varphi(-r_2)), \varphi \in \mathcal{C} \quad (5.2.3)$$

avec la fonctionnelle initiale

$$x_\sigma \equiv \phi, \phi \in \mathcal{C}, \quad (5.2.4)$$

où $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ quand il existe pour $t \geq \sigma$, $\theta \in [-r, 0]$, $r := \max\{r_1, r_2\}$. Les matrices A , B , et C sont constantes et connues, l'application continue non linéaire $\Delta_A : \mathbb{R} \times \Omega_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n$ et les applications continues quasilineaires (linéaires seulement dans le deuxième argument) $\Delta_B, \Delta_C : \mathbb{R} \times \Omega_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n$ transforment des ensembles fermés et bornés en des ensembles fermés et bornés. Elles sont dénotées par

$$\Delta_{J,t}(\theta) = \Delta_J(t + \theta, \varphi(\theta)), J \in \{A, B, C\},$$

et définies par

$$\begin{aligned}\Delta_A(t, \varphi(0)) &:= E_A \delta_A(t, \varphi(0)), \\ \delta_A^\top(t + \theta, \varphi(\theta)) \delta_A(t + \theta, \varphi(\theta)) &\leq \varphi^\top(\theta) W_A^\top W_A \varphi(\theta), \\ \Delta_B(t - r_2, \varphi(-r_2)) &:= E_B \delta_B(t - r_2) \varphi(-r_2), \quad E_B = I_{n \times n}, \\ W_B + \delta_B(t + \theta) &\geq 0, \quad W_B - \delta_B(t + \theta) \geq 0,\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

$$\begin{aligned}\Delta_C(t - r_1, \varphi(-r_1)) &:= E_C \delta_C(t - r_1) \varphi(-r_1), \quad E_C = I_{n \times n}, \\ W_C + \delta_C(t + \theta) &\geq 0, \quad W_C - \delta_C(t + \theta) \geq 0, \\ \forall(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_\nu, \theta &\in [-r, 0],\end{aligned}$$

où l'hypothèse $W_J + \delta_J(t + \theta) \geq 0, W_J - \delta_J(t + \theta) \geq 0, i = 1, 2$, implique

$$\delta_J^\top(t + \theta) S \delta_J(t + \theta) \leq W_J^\top S W_J, \quad S > 0,\tag{5.2.6}$$

E_A est une matrice connue, W_A, W_B et W_C sont des matrices de pondération, δ_A est une application qui satisfait

$$\delta_A(t, 0) \equiv 0,\tag{5.2.7}$$

quand $x = 0$ est une solution du système neutre (5.2.1)-(5.2.4). On remarque que les incertitudes Δ_B, Δ_C sont non structurées, i.e. $E_B = E_C = I_{n \times n}$. Sous ces hypothèses, on va montrer la stabilité robuste dépendante de la taille du retard r_2 et indépendante de r_1 , les résultats peuvent être vérifiés en utilisant les techniques LMI.

Problème de stabilité robuste dépendante du retard: Trouver une borne r_2^* , (quand elle existe) sur r_2 , et des conditions sous lesquelles la stabilité asymptotique de (5.2.1)-(5.2.4) est assurée *en fonction du retard* quand $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ satisfont (4.2.3) pour n'importe quel r_1 réel positif et pour $r_2 \leq r_2^*$.

Ici on utilise de nouveau la méthode directe de Lyapunov-Krasovskii pour l'étude de la stabilité robuste dépendante du retard. Les conditions de stabilité sont données en termes de l'existence de solutions positives de LMI.

5.3 TRANSFORMATION DE MODÈLE SANS DYNAMIQUE ADDITIONNELLE

On étend la transformation par intégration sur un intervalle [65], [61], [17] pour le système à retard (3.3.6), au cas des systèmes neutres (5.2.1). Cette technique est utilisée à la place de la règle de Leibnitz sur l'opérateur de différence proposée dans le chapitre précédent parce qu'elle a l'avantage de ne pas introduire de dynamique additionnelle. Alors, après l'intégration du système (5.2.1)-(5.2.3) sur l'intervalle $[0, r_2]$ [61], on réécrit le nouveau modèle en termes de la nouvelle variable $\xi(t)$ (comme [51]):

$$\frac{d}{dt} \tilde{D}(t) \xi_t = (A + B) \xi(t) + \Delta_A(t, \xi(t)) + \Delta_B(t, \xi(t)), \quad (5.3.1)$$

$$\tilde{D}(t) \varphi := D(t) \varphi + \int_{-r_2}^0 [B\varphi(\theta) + \Delta_B(t + \theta, \varphi(\theta))] d\theta, \quad (5.3.2)$$

où l'opérateur de différence $D(t)$, est défini par (5.2.2).

REMARQUE 5.3.1. Il est facile de montrer que chaque solution de (5.2.1)-(5.2.3) est aussi une solution de (5.3.1)-(5.3.2), alors la stabilité de (5.3.1)-(5.3.2) implique la stabilité de (5.2.1)-(5.2.3) [51].

REMARQUE 5.3.2. Il est facile de vérifier que la transformation de modèle proposée n'introduit pas de dynamique additionnelle quand les incertitudes sont non variables dans le temps; par contre, elle requiert que le nouvel opérateur de différence $\tilde{D}(t)$ (5.3.2), soit stable pour l'analyse de stabilité.

LEMME 5.3.1. *Avec la transformation qui a été proposée ci avant, le nouveau système transformé (5.3.1)-(5.3.2) est un système à retard de type neutre.*

Démonstration. Comme il n'y pas de paramètre à définir, alors la condition initiale pour (5.3.1)-(5.3.2) est la même que pour le système d'origine (5.2.1)-(5.2.3); (5.2.4), i.e. $x_\sigma \equiv \phi$, reste dans le même espace \mathcal{C} (cette propriété en général n'est pas valable pour n'importe quelle transformation, par exemple la transformation de modèle utilisée dans le chapitre précédent, où la condition initiale change de $\mathcal{C}[-r, 0]$ à $\mathcal{C}[-r - r_2, 0]$, voir Remarque 4.3.1). En fait, si la condition initiale pour (5.3.1)-(5.3.2) satisfait la "condition de raccordement" alors ses solutions sont les mêmes que pour (5.2.1)-(5.2.3).

Finalement, on montre que le système transformé (5.3.1)-(5.3.2) est un système neutre, i.e. on va réécrire l'opérateur de différence (5.3.2) dans la forme d'un opérateur linéaire (5.3.3) et vérifier que cet opérateur est atomique en zéro condition (2.2.6) (voir section 2.2).

D'abord on réécrit (5.3.2) en forme d'intégrale de Riemann-Stieltjes

$$\tilde{D}(t)\varphi = \int_{-r}^0 [d_\theta \mu(t, \theta)] \varphi(\theta), \theta \in [-r, 0], \quad (5.3.3)$$

où $r := \max\{r_1, r_2\}$ et

$$\mu(t, \theta) := \mu_0(\theta) + \mu_1(\theta) + \mu_2(t, \theta) + \mu_3(t, \theta) + \mu_4(t, \theta), \quad (5.3.4)$$

avec μ_i fonctions de variation bornée. Ces μ_i sont ensuite définies sous une forme qui représente chaque terme de (5.3.2):

$$\begin{aligned} \mu_0(\theta) &:= \begin{cases} -I & \text{si } \theta < 0, \\ 0_{n \times n} & \text{si } \theta = 0, \end{cases} \\ \mu_1(\theta) &= \begin{cases} C & \text{si } \theta < -r_1, \\ 0_{n \times n} & \text{si } \theta \geq -r_1, \end{cases} \\ \mu_2(t, \theta) &= \begin{cases} \delta_C(t - r_1) & \text{si } \theta < -r_1, \\ 0_{n \times n} & \text{si } \theta \geq -r_1, \end{cases} \\ \mu_3(t, \theta) &= \begin{cases} -r_2 B & \text{si } \theta \leq -r_2, \\ \theta B & \text{si } -r_2 \leq \theta \leq 0, \end{cases} \\ \mu_4(t, \theta) &= \begin{cases} -\int_{-r_2}^0 \delta_B(t + \vartheta) d\vartheta & \text{si } \theta \leq -r_2, \\ -\int_\theta^0 \delta_B(t + \vartheta) d\vartheta & \text{si } -r_2 \leq \theta \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

et $\mu(t, \theta) = \mu(t, 0)$ si $\theta \geq 0$. Comme $\delta_B(t + \theta)$ et $\delta_C(t + \theta)$ sont continues et bornées $\forall t \geq \sigma, \theta \in [-r, 0]$, μ_i est de variation bornée et alors μ est de variation bornée et $\tilde{D}(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathbb{R}^n)$.

Maintenant on obtient (similaire à (2.2.5)):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t, 0, \tilde{D}(t)) &= \mu(t, 0^+) - \mu(t, 0^-) \\ &= I - C - \delta_C(t - r_1), \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

i.e. la même condition d'atomicité que pour l'opérateur de différence $D(t)$ (5.2.2) du système (5.2.1)-(5.2.7). Finalement si $\det(I - C - \delta_C(t - r_1)) \neq 0$ pour n'importe quel $t \in [\sigma, \infty)$ alors la condition d'atomicité (2.2.6) est satisfaite, (5.2.1)-(5.2.7) est un système neutre et (5.3.5) implique que (5.3.1)-(5.3.2) est atomique en zéro i.e. un système neutre, voir définition (2.2.2).

□

Ensuite, on étudie la stabilité du modèle transformé (5.3.1)-(5.3.2) en termes de la variable x .

5.4 STABILITÉ ROBUSTE DÉPENDANTE DE LA TAILLE DU RETARD SANS DYNAMIQUE ADDITIONNELLE

Dans cette section, on utilise aussi l'approche par fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, avec l'aide du Théorème 3.2.1 pour montrer le théorème suivant sur la stabilité dépendante de la taille du retard r_2 et indépendante de la taille du retard r_1 :

THÉORÈME 5.4.1. *Soit le système neutre (5.2.1)-(5.2.3). Si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1. $A_1 := A + B$ est une matrice stable de Hurwitz [4];
2. les opérateurs de différence $D(t)\varphi := [\varphi(0) - C\varphi(-r_1) - \Delta_C(t, \varphi)]$ et $\tilde{D}(t)\varphi := \left\{ D(t)\varphi + \int_{-r_2}^0 [B\varphi(\theta) + \Delta_B(t + \theta, \varphi(\theta))] d\theta \right\}$ sont linéaires en φ , continus, stables uniformément par rapport à $\mathcal{C}([\sigma, \infty), \mathbb{R}^n)$, $D(t)$ est atomique en zéro;
3. il existe un nombre réel positif $r_2^* \geq r_2$ et des matrices définies positives $P, S_i > 0, i = \overline{1, 6}$ tels que les LMIs suivantes sont satisfaites:

$$\Gamma := \begin{pmatrix} Q(r_2^*) & \Gamma_{12} & \overline{S}(r_2^*) \\ \Gamma_{12}^\top & \Gamma_{22} & 0 \\ \overline{S}^\top(r_2^*) & 0 & R \end{pmatrix} < 0, \quad (5.4.1)$$

$$S_2 > S_3 + W_B^\top S_4 W_B + (2r_2 + 3) B^\top S B + (2r_2 + 3) W_B^\top S W_B, \quad (5.4.2)$$

où

$$S := (W_A^\top W_A + W_B^\top S_5 W_B + S_1 + r_2 S_2). \quad (5.4.3)$$

$$Q(r_2^*) := \Gamma_{11} + \bar{S}(r_2^*) R^{-1} \bar{S}^\top(r_2^*), \quad (5.4.4)$$

$$\Gamma_{11} = A_1^\top P + P A_1 + 2S + 2r_2 S - \bar{S}(r_2^*) R^{-1} \bar{S}^\top(r_2^*) \quad (5.4.5)$$

$$\bar{S}(r_2^*) := \begin{pmatrix} \bar{S}_1(r_2^*) & \bar{S}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.4.6)$$

$$\bar{S}_1(r_2^*) := \sqrt{r_2^*} \begin{pmatrix} P A_1 B, & P A_1 \end{pmatrix}, \quad (5.4.7)$$

$$\bar{S}_2 := \begin{pmatrix} P, & P A_1^\top, & P E_A \end{pmatrix}, \quad (5.4.8)$$

$$R^{-1} := \begin{pmatrix} -S_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_5^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_6^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (5.4.9)$$

$$\Gamma_{12} := P A_1 C + S C, \quad (5.4.10)$$

$$\Gamma_{22} := -S_1 + W_C^\top S_6 W_C + (2 + r_2) C^\top S C + (2 + r_2) W_C^\top S W_C. \quad (5.4.11)$$

Alors le Système Neutre (5.2.1)-(5.2.3) est robustement asymptotiquement stable pour n'importe quel retard $r_2 \leq r_2^*$ et n'importe quel retard $r_1 > 0$.

Démonstration. Soit la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante:

$$V(t, \varphi) := V_1(t, \varphi) + V_2(\varphi) + V_3(\varphi), \quad (5.4.12)$$

où

$$V_1(t, \varphi) := \left[\tilde{D}(t) \varphi \right]^\top P \tilde{D}(t) \varphi, \quad (5.4.13)$$

$$V_2(\varphi) := \int_{-r_2}^0 \varphi^\top(\theta) S_1 \varphi(\theta) d\theta, \quad (5.4.14)$$

$$V_3(\varphi) := \int_{-r_2}^0 \int_{\theta}^0 \varphi^\top(\vartheta) S_2 \varphi(\vartheta) d\vartheta d\theta. \quad (5.4.15)$$

Pour cette fonctionnelle V , on peut construire V' le long des trajectoires (5.3.1).

Alors on a:

$$V'_1(t, \varphi) = \frac{d}{dt} \left[\tilde{D}(t) \varphi \right]^\top P \tilde{D}(t) \varphi + \left[\tilde{D}(t) \varphi \right]^\top P \frac{d}{dt} \left[\tilde{D}(t) \varphi \right],$$

$$\begin{aligned}
V'_1(t, x_t)|_{(5.3.1)} &= x^\top(t) (A + B)^\top P x(t) + x^\top(t) P (A + B) x(t) \\
&- x^\top(t) (A + B)^\top P C x(t - r_1) - x^\top(t - r_1) C^\top P (A + B) x(t) \\
&- 2x^\top(t) (A + B)^\top P \Delta_{C,t}(-r_1) + 2x^\top(t) (A + B)^\top P B \int_{-r_2}^0 x(t + \theta) d\theta \\
&+ 2x^\top(t) (A + B)^\top P \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) x(t + \theta) d\theta \\
&+ 2x^\top(t) P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) - 2x^\top(t - r_1) C^\top P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) \\
&- 2\Delta_{C,t}^\top(-r_1) P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) \\
&+ 2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) d\theta B^\top P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) \\
&+ 2 \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}^\top(\theta) d\theta P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)),
\end{aligned} \tag{5.4.16}$$

$$\begin{aligned}
V'_1(t, x_t)|_{(5.3.1)} &= \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top (A + B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) \tilde{D}(t) x_t \\
&+ x^\top(t - r_1) C^\top (A + B)^\top P \tilde{D}(t) x_t + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) C x(t - r_1) \\
&- 2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) B \int_{-r_2}^0 x(t + \theta) d\theta \\
&- 2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta \\
&+ 2\Delta_{A,t}^\top(0) P \tilde{D}(t) x_t + 2\Delta_{B,t}^\top(0) P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ 2\Delta_{C,t}^\top(-r_1) (A + B)^\top P \tilde{D}(t) x_t,
\end{aligned} \tag{5.4.17}$$

où l'identité suivante été utilisée

$$\begin{aligned}
&\left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top (A + B)^\top P \tilde{D}(t) x_t + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) \tilde{D}(t) x_t \\
&+ x^\top(t - r_1) C^\top (A + B)^\top P \tilde{D}(t) x_t + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) C x(t - r_1) \\
&- 2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) B \int_{-r_2}^0 x(t + \theta) d\theta \\
&- 2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A + B) \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta \\
&+ 2\Delta_{C,t}^\top(-r_1) (A + B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\
&= x^\top(t) (A + B)^\top P x(t) + x^\top(t) P (A + B) x(t) \\
&- x^\top(t) (A + B)^\top P C x(t - r_1) - x^\top(t - r_1) C^\top P (A + B) x(t) \\
&- 2x^\top(t) (A + B)^\top P \Delta_{C,t}(-r_1) + 2x^\top(t) (A + B)^\top P B \int_{-r_2}^0 x(t + \theta) d\theta \\
&+ 2x^\top(t) (A + B)^\top P \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) x(t + \theta) d\theta,
\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

$$V'_2(x_t) = x^\top(t) S_1 x(t) - x^\top(t - r_1) S_1 x(t - r_1), \tag{5.4.19}$$

$$V'_3(x_t) = r_2 x^\top(t) S_2 x(t) - \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) S_2 x(t + \theta) d\theta. \tag{5.4.20}$$

On utilise (5.2.5)-(5.2.6) et l'inégalité classique:

$$-2a^\top b \leq \inf_{S>0} \{a^\top Sa + b^\top S^{-1}b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n \quad (5.4.21)$$

pour borner différents termes

$$\begin{aligned} & -2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P(A+B) B \int_{-r_2}^0 x(t+\theta) d\theta \\ & \leq r_2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P(A+B) B R_1^{-1} B^\top (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\ & + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) R_1 x(t+\theta) d\theta, \quad R_1 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P(A+B) \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta \\ & \leq r_2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P(A+B) R_2^{-1} (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\ & + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top R_2 W_B x(t+\theta) d\theta, \quad R_2 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\Delta_{A,t}^\top(0) P \tilde{D}(t) x_t = 2\delta_A^\top(t, x(t)) E_A^\top P \tilde{D}(t) x_t \\ & \leq x^\top(t) W_A^\top R_3 W_A x(t) \\ & + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P E_A R_3^{-1} E_A^\top P \tilde{D}(t) x_t, \quad R_3 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\Delta_{Bt}^\top(0) P \tilde{D}(t) x_t = 2x^\top(t) \delta_B^\top(t) P \tilde{D}(t) x_t \\ & \leq x^\top(t) W_B^\top R_4 W_B x(t) \\ & + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P R_4^{-1} P \tilde{D}(t) x_t, \quad R_4 > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\Delta_{C,t}^\top(-r_1) (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t = 2x^\top(t-r_1) \delta_C^\top(t-r_1) (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\ & \leq x^\top(t-r_1) W_C^\top R_5 W_C x(t-r_1) \\ & + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A+B) R_5^{-1} (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t, \quad R_5 > 0, \end{aligned}$$

et on réécrit (5.4.17)-(5.4.20) comme

$$\begin{aligned}
V'(t, x_t)|_{(5.3.1)} &\leq \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A+B) \tilde{D}(t) x_t \\
&+ x^\top(t-r_1) C^\top (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A+B) C x(t-r_1) \\
&+ r_2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A+B) B R_1^{-1} B^\top (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) R_1 x(t+\theta) d\theta \\
&+ r_2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A+B) R_2^{-1} (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top R_2 W_B x(t+\theta) d\theta \\
&+ x^\top(t) W_A^\top R_3 W_A x(t) + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P E_A R_3^{-1} E_A^\top P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ x^\top(t) W_B^\top R_4 W_B x(t) + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P R_4^{-1} P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ x^\top(t-r_1) W_C^\top R_5 W_C x(t-r_1) \\
&+ \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top P (A+B) R_5^{-1} (A+B)^\top P \tilde{D}(t) x_t \\
&+ x^\top(t) S_1 x(t) - x^\top(t-r_1) S_1 x(t-r_1) \\
&+ r_2 x^\top(t) S_2 x(t) - \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) S_2 x(t+\theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{5.4.22}$$

Maintenant on considère l'identité

$$\begin{aligned}
x^\top(t) S x(t) &= \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S \tilde{D}(t) x_t \\
&+ x^\top(t-r_1) C^\top S \tilde{D}(t) x_t + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S C x(t-r_1) \\
&+ x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) \\
&- 2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S B \int_{-r_2}^0 x(t+\theta) d\theta \\
&- 2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta \\
&+ 2 \Delta_{C,t}^\top(-r_1) S \tilde{D}(t) x_t \\
&- 2 x^\top(t-r_1) C^\top S B \int_{-r_2}^0 x(t+\theta) d\theta \\
&- 2 x^\top(t-r_1) C^\top S \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta \\
&+ 2 \Delta_{C,t}^\top(-r_1) S C x(t-r_1) \\
&+ \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) d\theta B^\top S B \int_{-r_2}^0 x(t+\theta) d\theta \\
&+ 2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) d\theta B^\top S \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta \\
&- 2 \Delta_{C,t}^\top(-r_1) S B \int_{-r_2}^0 x(t+\theta) d\theta + \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}^\top(\theta) d\theta S \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta \\
&- 2 \Delta_{C,t}^\top(-r_1) S \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) d\theta + \Delta_{C,t}^\top(-r_1) S \Delta_{C,t}(-r_1).
\end{aligned} \tag{5.4.23}$$

On peut borner $x^\top(t) Sx(t)$ si on utilise de nouveau l'inégalité (5.4.21) sur les termes qui ont le facteur 2 dans (5.4.23) et aussi sur les termes:

$$\begin{aligned} & \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) d\theta B^\top S B \int_{-r_2}^0 x(t+\theta) d\theta = \int_{-r_2}^0 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\vartheta) d\vartheta d\theta \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{-r_2}^0 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top R_6 B x(t+\theta) d\vartheta d\theta \\ & + \frac{1}{2} \int_{-r_2}^0 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\vartheta) B^\top S R_6^{-1} S B x(t+\vartheta) d\vartheta d\theta \\ & = r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta, R_6 = S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}^\top(\theta) d\theta S \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\vartheta) d\vartheta = \int_{-r_2}^0 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) \delta_B^\top(t+\theta) S \delta_B(t+\vartheta) x(t+\vartheta) d\vartheta d\theta \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{-r_2}^0 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) \delta_B^\top(t+\theta) R_7 \delta_B(t+\theta) x(t+\theta) d\vartheta d\theta \\ & + \frac{1}{2} \int_{-r_2}^0 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\vartheta) \delta_B^\top(t+\vartheta) S R_7^{-1} S \delta_B(t+\vartheta) x(t+\vartheta) d\vartheta d\theta \\ & = r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta, R_7 = S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta_{C,t}^\top(-r_1) S \Delta_{C,t}(-r_1) = x^\top(t-r_1) \delta_C^\top(t-r_1) S \delta_C(t-r_1) x(t-r_1) \\ & \leq x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1), \end{aligned}$$

alors une borne de (5.4.23) est

$$\begin{aligned} & x^\top(t) Sx(t) \leq \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S \tilde{D}(t) x_t \\ & + x^\top(t-r_1) C^\top S \tilde{D}(t) x_t + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S C x(t-r_1) \\ & + x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) \\ & + r_2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S \tilde{D}(t) x_t + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\ & + r_2 \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S \tilde{D}(t) x_t + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\ & + x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + \left[\tilde{D}(t) x_t \right]^\top S \tilde{D}(t) x_t \\ & + r_2 x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\ & + r_2 x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\ & + x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) \\ & + r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\ & + r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta + r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\vartheta) W_B^\top S W_B x(t+\vartheta) d\vartheta \\ & + r_2 x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\ & + r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\ & + r_2 x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\ & + x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1), \end{aligned} \tag{5.4.24}$$

et on change les termes de $x(t)$ dans $\tilde{D}(t)x_t$ dans (5.4.22) en utilisant (5.4.24)

$$\begin{aligned}
V'(t, x_t)|_{(5.3.1)} &\leq \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top (A+B)^\top P \tilde{D}(t)x_t + \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top P (A+B) \tilde{D}(t)x_t \\
&+ x^\top(t-r_1) C^\top (A+B)^\top P \tilde{D}(t)x_t + \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top P (A+B) C x(t-r_1) \\
&+ r_2 \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top P (A+B) B R_1^{-1} B^\top (A+B)^\top P \tilde{D}(t)x_t \\
&+ \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) R_1 x(t+\theta) d\theta \\
&+ r_2 \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top P (A+B) R_2^{-1} (A+B)^\top P \tilde{D}(t)x_t \\
&+ \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top R_2 W_B x(t+\theta) d\theta \\
&+ \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top P E_A R_3^{-1} E_A^\top P \tilde{D}(t)x_t + \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top P R_4^{-1} P \tilde{D}(t)x_t \\
&+ x^\top(t-r_1) W_C^\top R_5 W_C x(t-r_1) \\
&+ \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top P (A+B) R_5^{-1} (A+B)^\top P \tilde{D}(t)x_t \\
&- x^\top(t-r_1) S_1 x(t-r_1) - \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) S_2 x(t+\theta) d\theta \\
&+ \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top S \tilde{D}(t)x_t \\
&+ x^\top(t-r_1) C^\top S \tilde{D}(t)x_t + \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top S C x(t-r_1) \\
&+ x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) \\
&+ r_2 \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top S \tilde{D}(t)x_t + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\
&+ r_2 \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top S \tilde{D}(t)x_t + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\
&+ x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + \left[\tilde{D}(t)x_t \right]^\top S \tilde{D}(t)x_t \\
&+ r_2 x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\
&+ r_2 x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\
&+ x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + x^\top(t-r_1) C^\top S C x(t-r_1) \\
&+ r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\
&+ r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta + r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\vartheta) W_B^\top S W_B x(t+\vartheta) d\vartheta \\
&+ r_2 x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) B^\top S B x(t+\theta) d\theta \\
&+ r_2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\
&+ r_2 x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t+\theta) W_B^\top S W_B x(t+\theta) d\theta \\
&+ x^\top(t-r_1) W_C^\top S W_C x(t-r_1),
\end{aligned} \tag{5.4.25}$$

où

$$S := (W_A^\top R_3 W_A + W_B^\top R_4 W_B + S_1 + r_2 S_2). \tag{5.4.26}$$

Finalement pour supprimer des termes carrés dans V' on choisit $R_1 = S_3$, $R_2 = S_4$, $R_3 = I$, $R_4 = S_5$, $R_5 = S_6$ et

$$\begin{aligned} S_2 &> R_1 + W_B^\top R_2 W_B + 3B^\top S B + 3W_B^\top S W_B \\ &+ 2r_2 B^\top S B + 2r_2 W_B^\top S W_B, \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

et avec toutes ces inégalités et identités, s'il existe un réel positif $r_2^* \geq r_2$ tel que la LMI (4.4.1) est satisfaite, alors (4.4.1) est équivalente via une transformation de Schur appropriée [9] à:

$$V'(t, x_t)|_{(5.3.1)} \leq \begin{pmatrix} [\tilde{D}(t) x_t]^\top & x^\top(t - r_1) \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} \tilde{D}(t) x_t \\ x(t - r_1) \end{pmatrix} < 0, \quad (5.4.28)$$

avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^\top & \Gamma_{22} \end{pmatrix}$$

où $(\Gamma_{i,j}), i = 1, 2, j = 1, 2$ est définie dans le Théorème 5.4.1.

L'inégalité (5.4.28) signifie $\Gamma < 0$, $\Gamma_{1,1} < 0$ et qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $\dot{V}(t, x_t) \leq -\gamma \|D(t) x_t\|$ pour n'importe quel $t \geq \sigma$. $D(t)$ et $\tilde{D}(t)$ sont stables par l'hypothèse (2) du Théorème 5.4.1, voir (3.2.2) et [19]. Alors, la stabilité asymptotique de (5.2.1)-(5.2.3) est assurée par le Théorème 3.2.1 pour n'importe quel retard $r_2 \leq r_2^*$, [19].

□

THÉORÈME 5.4.2. *Soit le système neutre (5.2.1)-(5.2.3). Si les conditions 1, 2, du Théorème 5.4.1 sont vérifiées et s'il existe un nombre réel positif $r_2^* \geq r_2$ et des matrices définies positives $P, S_i > 0, i = \overline{1,9}$ telles que les LMIs suivantes sont satisfaites:*

$$\Upsilon := \begin{pmatrix} Q_2(r_2^*) & C^\top P A_1 & 0 & \overline{S}_2(r_2^*) \\ A_1^\top P C & Q_1(r_2^*) & \overline{S}_1(r_2^*) & 0 \\ 0 & \overline{S}_1^\top(r_2^*) & \overline{R}_1 & 0 \\ \overline{S}_2^\top(r_2^*) & 0 & 0 & \overline{R}_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (5.4.29)$$

$$S < 0, \quad (5.4.30)$$

où

$$S := -S_2 + B^\top S_4 B + W_B^\top S_5 W_B + 2B^\top B + W_B^\top W_B, \quad (5.4.31)$$

$$Q_1(r_2^*) := A_1^\top P + P A_1 + W_A^\top (S_6 + S_7) W_A + W_B^\top (S_8 + S_9) W_B + S_1 + r_2^* S_2,$$

$$\bar{S}_1(r_2^*) := \begin{pmatrix} A_1^\top P & \sqrt{r_2^*} A_1^\top P & \sqrt{r_2^*} A_1^\top P & P & P & \sqrt{r_2^*} W_A^\top P & \sqrt{r_2^*} W_B^\top P \end{pmatrix},$$

$$\bar{R}_1^{-1} := \begin{pmatrix} -S_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_4^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_5^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_6^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_8^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$Q_2(r_2^*) := -S_1 + W_C^\top S_3 W_C,$$

$$\bar{S}_2(r_2^*) := \begin{pmatrix} C^\top P & C^\top P \end{pmatrix},$$

$$\bar{R}_2^{-1} := \begin{pmatrix} -S_7^{-1} & 0 \\ 0 & -S_9^{-1} \end{pmatrix}.$$

Alors le système neutre (5.2.1)-(5.2.3) est robustement asymptotiquement stable pour n'importe quel retard $r_2 \leq r_2^*$ et n'importe quel retard $r_1 > 0$.

Démonstration. Le résultat est obtenu de manière semblable au Théorème 5.4.1, qui utilise aussi les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii (5.4.12)-(5.4.15). On dérive (5.4.12) mais on évite l'identité (5.4.18) et on a directement

$$\begin{aligned} V'(t, x_t)|_{(5.3.1)} &= x^\top(t) A_1^\top P x(t) + x^\top(t) P A_1 x(t) \\ &- x^\top(t) A_1^\top P C x(t - r_1) - x^\top(t - r_1) C^\top P A_1 x(t) \\ &- 2x^\top(t) A_1^\top P \Delta_{C,t}(-r_1) + 2x^\top(t) A_1^\top P B \int_{-r_2}^0 x(t + \theta) d\theta \\ &+ 2x^\top(t) A_1^\top P \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}(\theta) x(t + \theta) d\theta \\ &+ 2x^\top(t) P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) - 2x^\top(t - r_1) C^\top P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) \\ &- 2\Delta_{C,t}^\top(-r_1) P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) \\ &+ 2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) d\theta B^\top P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) \\ &+ 2 \int_{-r_2}^0 \Delta_{B,t}^\top(\theta) d\theta P (\Delta_{A,t}(0) + \Delta_{B,t}(0)) \\ &+ x^\top(t) S_1 x(t) - x^\top(t - r_1) S_1 x(t - r_1) \\ &+ r_2 x^\top(t) S_2 x(t) - \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) S_2 x(t + \theta) d\theta, \end{aligned}$$

on utilise (5.4.21) pour avoir une borne de $V'(t, x_t)$

$$\begin{aligned}
V'(t, x_t)|_{(5.3.1)} &\leq x^\top(t) A_1^\top P x(t) + x^\top(t) P A_1 x(t) \\
&- x^\top(t) A_1^\top P C x(t - r_1) - x^\top(t - r_1) C^\top P A_1 x(t) \\
&+ x^\top(t) A_1^\top P S_3^{-1} P A_1 x(t) + x^\top(t - r_1) W_C^\top S_3 W_C x(t - r_1) \\
&+ r_2 x^\top(t) A_1^\top P S_4^{-1} P A_1 x(t) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) B^\top S_4 B x(t + \theta) d\theta \\
&+ r_2 x^\top(t) A_1^\top P S_5^{-1} P A_1 x(t) + \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) W_B^\top S_5 W_B x(t + \theta) d\theta \\
&+ x^\top(t) P (S_6^{-1} + S_8^{-1}) P x(t) + x^\top(t) (W_A^\top S_6 W_A + W_B^\top S_8 W_B) x(t) \\
&+ x^\top(t - r_1) C^\top P (S_7^{-1} + R_9^{-1}) P C x(t - r_1) + x^\top(t) (W_A^\top S_7 W_A + W_B^\top S_9 W_B) x(t) \\
&+ 2r_2 x^\top(t) (W_A^\top P P W_A + W_B^\top P P W_B) x(t) \\
&+ 2 \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) (B^\top B + W_B^\top W_B) x(t + \theta) d\theta \\
&+ x^\top(t) S_1 x(t) - x^\top(t - r_1) S_1 x(t - r_1) \\
&+ r_2 x^\top(t) S_2 x(t) - \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) S_2 x(t + \theta) d\theta,
\end{aligned} \tag{5.4.32}$$

où $S_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 9$.

Finalement, il est facile de vérifier que, s'il existe un réel positif $r_2^* \geq r_2$ et des matrices définies positives P , $S_i > 0$, $i = \overline{1, 9}$, tel que $V'(t, x_t)|_{(5.3.1)} < 0$, alors (5.4.32) peut être réécrit comme

$$V'(t, x_t)|_{(5.3.1)} \leq \chi^\top \Xi \chi + \int_{-r_2}^0 x^\top(t + \theta) S x(t + \theta) d\theta < 0 \tag{5.4.33}$$

où

$$\Xi := \begin{pmatrix} Q_1(r_2^*) - \overline{S}_1(r_2^*) \overline{R}_1^{-1} \overline{S}_1^\top(r_2^*) & A_1^\top P C \\ C^\top P A_1 & Q_2(r_2^*) - \overline{S}_2(r_2^*) \overline{R}_2^{-1} \overline{S}_2^\top(r_2^*) \end{pmatrix} < 0, \tag{5.4.34}$$

$$S := -S_2 + B^\top S_4 B + W_B^\top S_5 W_B + 2B^\top B + W_B^\top W_B < 0, \tag{5.4.35}$$

$\chi^\top = \begin{pmatrix} x^\top(t) & x^\top(t - r_1) \end{pmatrix}$ et Q_j , \overline{S}_j , \overline{R}_j^{-1} , $j = 1, 2$ sont définis dans le Théorème 5.4.2. Alors (5.4.29), $\Upsilon < 0$, est équivalente via une double transformation de Schur appropriée [9] à (5.4.34), $\Xi < 0$.

L'inégalité (5.4.34) signifie $\Xi < 0$, $\Xi_{1,1} < 0$ et qu'il existe $\xi > 0$ tel que $\dot{V}(t, x_t) \leq -\xi \|x(t)\|$ pour n'importe quel $t \geq \sigma$. $D(t)$ et $\tilde{D}(t)$ sont stables par l'hypothèse du Théorème 5.4.2, voir (3.2.2) et [19], [40]. Alors, la stabilité asymptotique de (5.2.1)-(5.2.3) est assurée par le Théorème 3.2.1 pour n'importe quel retard $r_2 \leq r_2^*$, [40].

□

Les conditions des Théorème 5.4.1 et 5.4.2 sont vérifiées en termes de LMI (facile à vérifier), mais la stabilité de l'opérateur de différence $\tilde{D}(t)$, (5.3.2) est un peu plus compliquée. Ensuite on donne quelques conditions suffisantes basées sur les techniques de commande robuste pour vérifier la stabilité de (5.3.2).

Un exemple d'opérateur stable uniformément par rapport à $\mathcal{C}([\sigma, \infty), \mathbb{R}^n)$ est donné par $\tilde{D}(t)\varphi = \varphi(0) - g(t, \varphi)$, $g(t, \varphi) := C\varphi(-r_1) + \Delta_C(t, \varphi) - \int_{-r_2}^0 [B\varphi(\theta) + \Delta_B(t + \theta, \varphi(\theta))]d\theta$ où pour n'importe quel δ , $0 < \delta < 1$ et pour $t_0 \in [\sigma, \infty)$,

$$\|g(t, \varphi)\| \leq (1 - \delta) \|\varphi\|_{\mathcal{C}}, \forall \varphi \in \mathcal{C}, t \geq t_0,$$

i.e.

$$[\|C\| + \|W_C\| + r_2(\|B\| + \|W_B\|)] < 1.$$

Quand l'opérateur de différence $\tilde{D}(t)$ est indépendant de t ,

$$\tilde{D}\varphi := \varphi(0) - C\varphi(-r_1) - \delta_C\varphi(-r_1) - \int_{-r_2}^0 (B + \delta_B)\varphi(\theta) d\theta, \quad (5.4.36)$$

où δ_B, δ_C sont des matrices constantes, la stabilité de (5.3.2) est équivalente à la stabilité asymptotique uniforme de l'équation caractéristique correspondante (voir Remarque (3.2.3)), i.e. les solutions de l'équation

$$\det \left(I_n - (C + \delta_C) e^{-sr_1} + (B + \delta_B) \int_{-r_2}^0 e^{s\theta} d\theta \right) = 0, s \in \mathbb{C},$$

ont une partie réelle négative: $\operatorname{Re}(s) \leq -\varepsilon < 0$, ($\varepsilon > 0$). Cette dernière équation a été étudiée dans [82]. On rappelle quelques résultats:

THÉORÈME 5.4.3 (Niculescu 2001). *Si $C + \delta_C$ est une matrice Schur-Cohn stable, l'opérateur de différence (5.4.36) est asymptotiquement stable pour n'importe quel r_1 réel positif, et $r_2 \in [0, r_2^*]$, tels que*

$$r_2^* < \inf_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} \frac{1}{\rho((zI - C - \delta_C)^{-1}(B + \delta_B))}, \quad (5.4.37)$$

r_2^* satisfaisant simultanément (5.4.37) et les Théorèmes 5.4.1 ou 5.4.2.

THÉORÈME 5.4.4 (Niculescu 2001). *Si $C + \delta_C$ est une matrice Schur-Cohn stable, l'opérateur de différence (5.4.36) est asymptotiquement stable pour n'importe quel $r_2 \in [0, r_2^*]$, tel que*

$$\begin{pmatrix} -I + (C + \delta_C)^\top (C + \delta_C) & r_2^* (B + \delta_B)^\top \\ r_2^* (B + \delta_B) & -I \end{pmatrix} < 0, \quad (5.4.38)$$

r_2^* satisfaisant simultanément (5.4.38) et les Théorèmes 5.4.1 ou 5.4.2.

5.5 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, on a considéré la stabilité robuste dépendante du retard pour une classe générale de systèmes neutres. On a obtenu des conditions suffisantes qui ont été vérifiées avec des outils LMI. On a repris le travail présenté en [98] en évitant l'ajout de dynamique additionnelle, ce qui constitue la contribution du chapitre.

Chapitre 6

STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES NEUTRES: UNE APPROCHE CONSTRUCTIVE

Dans ce chapitre, on présente pour la première fois une approche constructive des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii "bien adaptées" à l'analyse de stabilité robuste des systèmes neutres linéaires. Cette approche consiste, en une procédure systématique et efficace de construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii qui par sa structure permettent l'étude de la stabilité des systèmes linéaires neutres avec incertitudes. Ces fonctionnelles qui sont obtenues ont une borne inférieure et supérieure de type quadratique et leur dérivée le long des solutions est négative de sorte que, si le système neutre nominal est exponentiellement stable, alors ces fonctionnelles permettent de trouver toujours une marge de stabilité pour les systèmes neutres avec des incertitudes dans les paramètres.

La nouveauté ici est la méthode constructive des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii et une grande partie des propriétés de la matrice de Lyapunov, qui sont démontrées dans ce chapitre pour la classe des systèmes neutres linéaires.

6.1 INTRODUCTION

L'application de l'approche de Lyapunov-Krasovskii pour l'analyse de stabilité présente un certain nombre de difficultés. Parmi elles, l'absence d'une méthode ou procédure efficace pour obtenir des fonctionnelles "bien adaptées" à l'analyse de stabilité. La pratique la plus courante consiste en la "construction" de beaucoup de fonctionnelles réduites, voir par exemple [40], mais il n'y pas de garantie que ce type de fonctionnelles réduites puisse servir pour l'analyse de stabilité pour un système neutre donné.

Ici on propose une procédure systématique pour obtenir des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii qui s'appuie sous l'hypothèse que le système neutre linéaire à étudier est stable (cette supposition n'est pas restrictive par ce qu'on s'intéresse à l'étude de la stabilité robuste du système). Il existe donc toujours une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii telle que sa dérivée est négative le long des solutions du système neutre [19]. On propose une fonctionnelle négative définie qui est la dérivée d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, et on cherche cette fonctionnelle par intégration.

Le problème de construction des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii à partir de leur dérivée par rapport au temps a été considéré pour les systèmes à retard par quelques auteurs, voir [91], [45], [49], [54] et [55]. Par contre, à notre connaissance, il n'y a pas de résultat sur la construction de ce type de fonctionnelles pour les systèmes neutres.

D'une part, [49] donne quelques résultats sur la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii étendus au cas des systèmes retardés généralisés, mais le type de borne qui est obtenu est cubique. Ces fonctionnelles sont importantes pour l'analyse de la stabilité, mais elles sont inefficaces pour l'analyse de la stabilité des systèmes neutres avec incertitudes, car elles contiennent seulement des termes qui sont fonction de l'état à l'instant présent du système. D'autre par [54] donne quelques résultats sur la construction de fonctionnelles au cas des systèmes retardés et le type de bornes qui sont obtenues est de type quadratique, de plus, ces fonctionnelles contiennent non seulement des termes qui sont fonction de l'état à l'instant présent du système mais qui sont aussi fonction de l'état aux instants passés. [54] démontre

que ce type de fonctionnelle permet d'étudier le problème de stabilité robuste par rapport aux paramètres des systèmes retardés.

Dans ce chapitre, à partir de la construction de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, on établit de nouveaux résultats de stabilité robuste. À la différence des résultats vérifiés en termes de LMIs, [48], [81], [98], les conditions que l'on propose donnent des bornes positives sur les incertitudes pour n'importe quel système nominal stable. Ici on a étendu la méthode proposée par [54] au cas des systèmes à retard de type neutre.

6.2 PRÉLIMINAIRES

Dans cette section, on introduit la matrice de Lyapunov et des outils qui sont utilisés dans les sections suivantes.

Soit le système linéaire neutre suivant:

$$\dot{x}(t) - C \dot{x}(t-r) = Ax(t) + Bx(t-r), t \geq 0, \quad (6.2.1)$$

où A , B , et C sont des matrices constantes de dimension $n \times n$, et r est un retard positif connu. Soit la condition initiale

$$x_0(\theta) = \phi(\theta), \phi \in \mathcal{W}_2^1, -r \leq \theta \leq 0, \quad (6.2.2)$$

on note par $x(\cdot; \varphi)$ la solution qui satisfait (6.2.1) presque partout pour $t \geq 0$.

Maintenant, on présente la matrice de Lyapunov proposée pour les systèmes retardés dans [54], [55]. Soit le système (6.2.1) exponentiellement stable, alors pour n'importe quelle matrice carrée W , la fonction matricielle [56] suivante est bien définie:

$$U_W(\xi) := \int_0^\infty \Phi^\top(\tau) W \Phi(\tau + \xi) d\tau. \quad (6.2.3)$$

Cette matrice a un rôle très important dans la construction des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii (voir section prochaine) et on l'appelle matrice de Lyapunov pour le système (6.2.1).

LEMME 6.2.1 (Matrice de Lyapunov). *Soit le système (6.2.1) exponentiellement stable. Alors pour toute matrice symétrique W de dimension $n \times n$, la matrice*

de Lyapunov $U_W(\xi)$ pour le système (6.2.1) est bien définie,

1. $U_W(\xi)$ existe pour n'importe quel réel ξ , $U_W(-\xi) = U_W^\top(\xi) \forall \xi \geq 0$,
2. $U(0)$ est une matrice symétrique et
3. $\frac{d}{d\xi} [U_W(\xi) - U_W(\xi - r)C] = U_W(\xi)A + U_W(\xi - r)B \forall \xi \geq 0$.

Démonstration. :1. La convergence absolue de l'intégrale (6.2.3) est garantie par (3.2.1), l'intégrale (6.2.3) converge donc pour n'importe quel réel ξ . Comme (6.2.1) est exponentiellement stable il existent $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ tel que $\|\Phi(\xi)\| \leq \gamma e^{-\alpha\xi}$, $\xi \geq 0$ et (6.2.3) a une borne

$$\begin{aligned} \|U_W(\xi)\| &\leq \int_0^\infty \|\Phi^\top(\tau) W \Phi(\tau + \xi)\| d\tau \leq \|W\| \int_0^\infty \gamma e^{-\alpha\tau} \gamma e^{-\alpha(\tau + \xi)} d\tau \\ &\leq \frac{\|W\| \gamma^2 e^{-\alpha\xi}}{-2\alpha} e^{-2\alpha\tau} \Big|_0^\infty = \frac{\|W\| \gamma^2 e^{-\alpha\xi}}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Alors l'intégrale (6.2.3) converge pour $\xi \geq 0$. Pour montrer que l'intégrale (6.2.3) converge pour $\xi \leq 0$, on utilise la propriété $U_W(-\xi) = U_W^\top(\xi)$. Soit $U_W^\top(\xi) := \int_0^\infty \Phi^\top(\tau + \xi) W \Phi(\tau) d\tau$ si on utilise un changement de variable on obtient $U_W^\top(\xi) = \int_0^\infty \Phi^\top(\zeta) W \Phi(\zeta - \xi) d\zeta$, $\xi \geq 0$, comme $\|U_W(\xi)\| = \|U_W^\top(\xi)\|$ alors (6.2.4) implique que $U_W^\top(\xi)$ existe et égale $U_W(-\xi)$, alors $U_W(\xi)$ existe si $\xi \geq 0$.

2. Du fait que $U_W(-\xi) = U_W^\top(\xi) \forall \xi \in \mathbb{R}$, alors $U_W(0)$ est une matrice symétrique.

3. (2.6.3) peut être réécrit comme

$$\frac{d^+}{dt} [\Phi(t) - \Phi(t - r)C] = \Phi(t)A + \Phi(t - r)B, t \geq 0, \quad (6.2.5)$$

où juste la différence est absolument continue et différentiable à droite pour $t \geq 0$.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} [U_W(\xi) - U_W(\xi - r)C] &= \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty \Phi^\top(\tau) W [\Phi(\tau + \xi) - \Phi(\tau + \xi - r)C] d\tau \\ &= \int_0^\infty \Phi^\top(\tau) W \frac{d^+}{d\xi} [\Phi(\tau + \xi) - \Phi(\tau + \xi - r)C] d\tau, \end{aligned}$$

et (6.2.5) implique $\frac{d}{d\xi} [U_W(\xi) - U_W(\xi - r)C] = U_W(\xi)A + U_W(\xi - r)B \forall \xi \geq 0$.

□

COROLLAIRE 6.2.2. *Soit le système (6.2.1) exponentiellement stable. Alors $U_W(\xi)$ est continue.*

Démonstration. Si (6.2.1) exponentiellement stable, $\Psi(\tau, \xi) := \Phi^\top(\tau) W \Phi(\tau + \xi)$ est donc intégrable sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ (propriété 1 du lemme 6.2.1) et (6.2.4) implique que $\Psi(\tau, \xi)$ est borné partout sur $[0, \infty)$; pour chaque $\tau \in [0, \infty)$, et $\xi \in \mathbb{R}$ fixé $\lim_{\zeta \rightarrow \xi} \Psi(\tau, \zeta) = \Psi(\tau, \xi)$ partout sauf dans $\{\tau = kr, k = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{\tau + \xi, kr, k = 0, 1, 2, \dots\}$ alors¹ $U_W(\xi) = \int_0^\infty \Psi(\tau, \xi) d\tau$ est continue dans \mathbb{R} , i.e., si $\xi \in \mathbb{R}$ $\lim_{\zeta \rightarrow \xi} \int_0^\infty \Psi(\tau, \zeta) d\tau = \int_0^\infty \lim_{\zeta \rightarrow \xi} \Psi(\tau, \zeta) d\tau$.

□

La propriété 3 du Lemme 6.2.1 et le Corollaire 6.2.2 montrent que la différence $[U_W(\xi) - U_W(\xi - r)C]$ a une dérivée continue, le lemme suivant montre que $U_W(\xi)$ ne satisfait pas cette dernière propriété.

LEMME 6.2.3. *Soit les ensembles ouverts $\mathcal{O} := \cup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_k :=](k-1)r, kr[$. Alors la Matrice de Lyapunov $U_W(\xi)$ pour le système (6.2.1) est différentiable sur \mathcal{O} :*

$$U'_W(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'^\top(\tau) W \Phi(\tau + \xi) d\tau - \sum_{k=0}^{\infty} (C^k)^\top W \Phi(kr + \xi), \quad (6.2.6)$$

et continuellement différentiable sur \mathcal{O}_k . Aux instants $\xi_k = kr$, les valeurs des sauts sont:

$$\frac{dU_W}{d\xi}(kr + 0) - \frac{dU_W}{d\xi}(kr - 0) = - \sum_{l=0}^{\infty} (C^l)^\top W C^{k+l}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.2.7)$$

où $C^0 := I$, $C^{-k} := 0$ si $k > 0$.

Démonstration. Par définition, $\Phi(-\tau) \equiv 0, \forall \tau > 0$, alors on récrit (6.2.3) comme

$$U_W(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^\top(\tau) W \Phi(\tau + \xi) d\tau, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Soit $[\Phi^\top]_{k,l}$ la distribution régulière [69], [21] associée à la matrice Φ^\top qui assigne à chaque matrice $(F_{i,j}(\cdot)) \in \mathcal{D}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$, le réel $\int_{\Omega_l - t} \Phi^\top(\tau) W F(\xi + \tau) d\tau$, pour $\xi \in \mathcal{O}_k$, i.e.

$$\langle [\Phi^\top]_{k,l}, F \rangle := \int_{\Omega_l - t} \Phi^\top(\tau) W F(\xi + \tau) d\tau, \quad \xi \in \mathcal{O}_k.$$

1. $U(\xi)$ satisfait les conditions de continuité standard pour les fonctions Lebesgue intégrables, voir par exemple [3];

Maintenant on peut choisir Ω_l tel que Φ^\top a seulement un saut de discontinuité au point

$$\tau = (l-1)r. \quad (6.2.8)$$

En fait, on choisit pour $\xi \in \mathcal{O}_k :=](k-1)r, kr[$:

$$\Omega_l := \mathcal{O}_{(k+l-1)}. \quad (6.2.9)$$

D'une part, par définition de la dérivée d'une distribution, on a

$$\langle [\Phi^\top]'_{k,l}, F \rangle := - \langle [\Phi^\top]_{k,l}, F' \rangle. \quad (6.2.10)$$

D'autre part, comme Φ^\top a un saut dans \mathcal{O}_k on a la formule bien connue [108], [69], [21]:

$$[\Phi^\top]'_{k,l} = [\Phi'^\top]_{k,l} + \delta_{(l-1)r}, \quad (6.2.11)$$

où l'opérateur de Dirac $\delta_{(l-1)r}$ introduit le saut au point (6.2.8) par la sélection de Ω_l dans (6.2.9). De (6.2.10), (6.2.11) et (6.2.8), on a $\forall \xi \in \mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}$, $(F)_{i,j} \in \mathcal{D}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$

$$\langle [\Phi^\top]_{k,l}, F' \rangle = - \langle [\Phi'^\top]_{k,l}, F \rangle - [\Phi((l-1)r^+) - \Phi((l-1)r^-)]^\top W F(t + (l-1)r),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^\top(\tau) W F(\tau + \xi) d\tau &= - \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle [\Phi'^\top]_{k,l}, F \rangle \\ &- \sum_{l \in \mathbb{Z}} [\Phi((l-1)r^+) - \Phi((l-1)r^-)]^\top W F(t + (l-1)r). \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Où $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle [\Phi'^\top]_{k,l}, F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'^\top(\tau) W F(\xi + \tau) d\tau$ et les sauts dans la partie à droite de (6.2.12) peuvent être calculés par la formule (2.6.4). Alors comme $(\Phi_{i,j}(\cdot)) \in \mathcal{C}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$ et $\mathcal{D}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$ est dense sur $\mathcal{C}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$ [108], [69], on a pour $\xi \in \mathcal{O}$:

$$\frac{d}{d\xi} U_W(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'^\top(\tau) W \Phi(\xi + \tau) d\tau - \sum_{l=0}^{\infty} (C^l)^\top W \Phi(t + (l-1)r). \quad (6.2.13)$$

Finalement, les sauts dans (6.2.7) peuvent être calculés directement à partir de $[U_W(kr+0) - U_W(kr-0)]$.

□

COROLLAIRE 6.2.4. $U_W(\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Comme $\langle [\Phi^\top]_{k,l}, F \rangle$ est une distribution, $\frac{d^j}{d\xi^j} \langle [\Phi^\top]_{k,l}, F \rangle$ existe sur $\mathcal{O}_k \times \mathcal{D}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$ et est continuellement différentiable sur \mathcal{O}_k . On a directement par récurrence

$$\begin{aligned} \langle [\Phi^\top]_{k,l}, F^{(j)} \rangle &= (-1)^j \langle [\Phi^{(j)\top}]_{k,l}, F \rangle \\ &+ (-1)^j [\Phi^{(j-1)\top}((l-1)r^+) - \Phi^{(j-1)\top}((l-1)r^-)] W F^{(0)}(t + (l-1)r) \\ &- (-1)^j [\Phi^{(j-2)\top}((l-1)r^+) - \Phi^{(j-2)\top}((l-1)r^-)] W F^{(1)}(t + (l-1)r) \\ &\dots \\ &- [\Phi^\top((l-1)r^+) - \Phi^\top((l-1)r^-)] W F^{(j-1)}(t + (l-1)r). \end{aligned}$$

Alors pour la propriété de densité de $\mathcal{D}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$ dans $\mathcal{C}(\Omega_l, \mathbb{R}^{n \times n})$, on a pour n'importe quel ξ dans \mathcal{O} :

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{d\xi^j} U_W(\xi) &= (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(j)\top}(\tau) W \Phi(\xi + \tau) d\tau \\ &+ (-1)^j \sum_{l=0}^{\infty} [\Phi^{(j-1)\top}((l-1)r^+) - \Phi^{(j-1)\top}((l-1)r^-)] W \Phi^{(0)}(t + (l-1)r) \\ &- (-1)^j \sum_{l=0}^{\infty} [\Phi^{(j-2)\top}((l-1)r^+) - \Phi^{(j-2)\top}((l-1)r^-)] W \Phi^{(1)}(t + (l-1)r) \\ &\dots \\ &- \sum_{l=0}^{\infty} (C^l)^\top W \Phi^{(j-1)}(t + (l-1)r). \end{aligned}$$

□

La proposition suivante montre que la matrice $U_W(\xi)$ satisfait une équation matricielle du deuxième ordre sans retard.

THÉORÈME 6.2.5 (Kharitonov et al. 2002). *La matrice $U_W(\xi)$ (6.2.3) est solution de l'équation du deuxième ordre sans retard suivante:*

$$\begin{aligned} U_W''(\xi) - C^\top U_W''(\xi) C &= U_W'(\xi) A - A^\top U_W'(\xi) + \\ &+ C^\top U_W'(\xi) B - B^\top U_W'(\xi) C + A^\top U_W(\xi) A - B^\top U_W(\xi) B, \text{ for } \xi \in (0, r), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$[C^\top U_W'(r) - A^\top U_W(0) - B^\top U_W(r)] + [C^\top U_W'(r) - B^\top U_W(r) - A^\top U_W(0)]^\top = W,$$

et

$$U_W'(0) = U_W(0) A + [C^\top U_W'(r) + B^\top U_W(r)]^\top,$$

où $U_W'(r) = \left. \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=r}$ et W est la matrice donnée dans l'équation (6.2.3).

Démonstration. : On peut réécrire l'équation neutre pour $U_W(\xi)$, dans la troisième propriété du Lemma 6.2.1, comme

$$U'_W(\xi) = -[U'_W(r - \xi)]^\top C + U_W(\xi) A + U_W(r - \xi) B,$$

grâce à la deuxième propriété du Lemma 6.2.1. La troisième propriété du Lemme 6.2.1, s'écrit comme:

$$U'_W(r - \xi) = U'_W(-\xi) C + U_W(r - \xi) A + U_W(-\xi) B.$$

Si on substitue cette expression dans la précédente et si on utilise la seconde propriété du Lemme 6.2.1, on arrive à l'équation:

$$\begin{aligned} U'_W(\xi) &= C^\top U'_W(\xi) C - B^\top U_W(\xi) C + U_W(\xi) A - \\ &\quad - A^\top U_W(r - \xi) C + U_W(r - \xi) B. \end{aligned}$$

On peut différentier par rapport à ξ , et on obtient:

$$\begin{aligned} U''_W(\xi) &= C^\top U''_W(\xi) C - B^\top U'_W(\xi) C + U'_W(\xi) A - \\ &\quad - A^\top [U'_W(\xi) - U_W(\xi) A + U_W(\xi - r) B] + U'_W(\xi - r) B, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} U''_W(\xi) &= C^\top U''_W(\xi) C - B^\top U'_W(\xi) C + U'_W(\xi) A - A^\top U'_W(\xi) + A^\top U_W(\xi) A + \\ &\quad - [U'_W(r - \xi) - U_W(r - \xi) A]^\top B. \end{aligned}$$

Comme

$$U'_W(r - \xi) - U_W(r - \xi) A = U'_W(-\xi) C + U_W(-\xi) B,$$

on arrive à l'équation du deuxième ordre désirée:

$$\begin{aligned} U''_W(\xi) &= C^\top U''_W(\xi) C - B^\top U'_W(\xi) C + U'_W(\xi) A - A^\top U'_W(\xi) + A^\top U_W(\xi) A + \\ &\quad + C^\top U'_W(\xi) B - B^\top U_W(\xi) B. \end{aligned}$$

La première condition initiale peut être obtenue facilement si on calcule d'abord la dérivée de

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\Phi^\top(\tau) W \Phi(\tau)) &= [\Phi'(\tau - r) C + A \Phi(\tau) + B \Phi(\tau - r)]^\top W \Phi(\tau) \\ &\quad + \Phi^\top(\tau) W [\Phi'(\tau - r) C + A \Phi(\tau) + B \Phi(\tau - r)], \end{aligned}$$

et après on intègre des deux côtés de 0 à l' ∞ . La seconde condition initiale est une conséquence directe du Lemme 6.2.1.

□

Ensuite, les résultats précédents sont utilisés pour la construction des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

6.3 CONSTRUCTION DES FONCTIONNELLES DE LYAPUNOV - KRASOVSKII

Dans cette section, on propose une procédure pas à pas pour la construction des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour la dérivée d'une fonctionnelle donnée [95], [100]. Le système considéré est le système (6.2.1), pour qui on propose trois fonctionnelles w_1 , w_2 et w_3 , où w_1 est la fonctionnelle principale et w_2 , w_3 sont des fonctionnelles auxiliaires pour l'étude de la stabilité.

THÉORÈME 6.3.1. *Soit le système (6.2.1) exponentiellement stable. Étant donné les matrices définies positives W_1 , W_2 et W_3 alors l'évaluation de la dérivée de la fonctionnelle (6.3.6) donne*

$$\left. \frac{d}{dt} v(x_t(\theta)) \right|_{(6.2.1)-(6.2.2)} = -w(x_t(\theta)), t \geq 0, \quad (6.3.1)$$

avec

$$w(\phi) := w_1(\phi, W_1) + w_2(\phi, W_2) + w_3(\phi, W_3), \quad (6.3.2)$$

$$w_1(\phi, W_1) := \phi^\top(0) W_1 \phi(0), \quad (6.3.3)$$

$$w_2(\phi, W_2) := \int_{-r}^0 \phi^\top(\theta) W_2 \phi(\theta) d\theta, \quad (6.3.4)$$

$$w_3(\phi, W_3) := \int_0^\infty \phi^\top(-r) W_3 \phi(-r) dt, \quad (6.3.5)$$

$$v(\phi) = \tilde{v}(\phi, W) + \int_{-r}^0 \phi^\top(\theta) [(r + \theta) W_2 + W_3] \phi(\theta) d\theta, W := W_1 + rW_2 + W_3, \quad (6.3.6)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(\phi, W) &:= \phi(0)^\top [U_W(0) - C^\top U_W(r) - U_W^\top(r)C + C^\top U_W(0)C] \phi(0) \\
&+ 2\phi(0)^\top \int_{-r}^0 [U_W^\top(r+\theta) - C^\top U_W^\top(\theta)] \left[B\phi(\theta) + C \dot{\phi}(\theta) \right] d\theta \\
&+ \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 \left[B\phi(\theta_1) + C \dot{\phi}(\theta_1) \right]^\top U_W(\theta_1 - \theta_2) \left[B\phi(\theta_2) + C \dot{\phi}(\theta_2) \right] d\theta_1 d\theta_2,
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

où $v(\cdot)$ est la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, $\{x_t(\theta), \varphi(\theta)\} \in \mathcal{W}[-r, 0]$, $W > 0$, et $U_W(\xi)$ est la matrice de Lyapunov (6.2.3) pour le système (6.2.1) qui est fonction de la matrice W .

Démonstration. : On cherche une fonctionnelle $v(x_t)$ telle que l'équation (6.3.1) est satisfaite. Alors par intégration de (6.3.1) on a: $\int_0^\infty \frac{d}{d\tau} v(x_\tau(\theta))_{(6.2.1)-(6.2.2)} d\tau = -\int_0^\infty w(x_\tau(\theta; \phi)) d\tau$, où $\int_0^\infty \frac{d}{d\tau} v(x_\tau(\theta))_{(6.2.1)-(6.2.2)} d\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} v(x(\tau+\theta)) - v(x(0+\theta))$. Comme (6.2.1) est exponentiellement stable, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(x(\tau+\theta)) = v(0) = 0$ et par la fonctionnelle initiale (6.2.2), $v(x_0(\theta)) = v(\phi)$. Alors la fonctionnelle $v(\cdot)$ peut être obtenue par la formule

$$v(\phi) := \int_0^\infty w(x_\tau(\theta; \phi)) d\tau, \forall \phi \in \mathcal{W}. \tag{6.3.8}$$

Comme $w(\cdot)$ a trois termes, alors la fonctionnelle $v(\phi)$ a trois termes aussi

$$v(\phi) = v_1(\phi, W_1) + v_2(\phi, W_2) + v_3(\phi, W_3) \tag{6.3.9}$$

où v_i correspond à l'intégrale de 0 à ∞ du terme w_i dans (6.3.2). On commence la construction de v_1 à partir du terme principal w_1 , celui-ci est choisi dans (6.3.3) parce qu'il est le terme le plus simple qui satisfait la condition (3.2.11) dans le théorème (3.2.2), Alors de (6.3.2), (6.3.3), (6.3.8) et (6.3.9)

$$v_1(\phi, W_1) := \int_0^\infty x^\top(t, \varphi) W_1 x(t, \varphi) dt. \tag{6.3.10}$$

L'équation (2.6.5) permet d'écrire $x(\tau; \phi)$ comme une fonction de la condition initiale ϕ (6.2.2) et la matrice fondamentale Φ (2.6.1).

Maintenant, on s'intéresse à la seconde fonctionnelle v_2 , qui correspond au terme intégral w_2 (6.3.4); ce terme est nécessaire pour l'analyse de la stabilité robuste dans la section suivante. Alors de (6.3.2), (6.3.4), (6.3.8) et (6.3.9), il peut être exprimé dans la forme

$$v_2(\varphi, W_2) := \int_0^\infty \left[\int_{-r}^0 x^\top(\tau + \theta; \varphi) W_2 x(\tau + \theta; \varphi) d\theta \right] d\tau \tag{6.3.11}$$

En changeant l'ordre d'intégration dans la double intégrale, on obtient l'expression suivante:

$$v_2(\phi, W_2) = \int_{-r}^0 \left[\int_{\theta}^0 \phi^\top(s) W_2 \phi(s) ds + \int_0^\infty x^\top(s; \phi) W_2 x(s; \phi) ds \right] d\theta, \quad (6.3.12)$$

et alors

$$v_2(\phi, W_2) = \tilde{v}(\phi, rW_2) + \int_{-r}^0 (r + \theta) \phi^\top(\theta) W_2 \phi(\theta) d\theta, \quad (6.3.13)$$

où $W_2 > 0$ et \tilde{v} sont données dans (6.3.7).

Finalement, on cherche la fonctionnelle v_3 qui correspond à l'intégrale du terme w_3 (6.3.5); ce terme, comme le terme précédent w_2 est nécessaire par l'étude de la stabilité robuste (voir section suivante). Alors de (6.3.2), (6.3.5), (6.3.8) et (6.3.9), il peut être exprimé dans la forme

$$v_3(\phi; W_3) := \int_0^\infty x^\top(\tau - r; \phi) W_3 x(\tau - r; \phi) d\tau. \quad (6.3.14)$$

On observe que

$$x^\top(t - r; \phi) W_3 x(t - r; \phi) = x^\top(t; \phi) W_3 x(t; \phi) - \frac{d}{dt} \left[\int_{t-r}^t x^\top(s; \phi) W_3 x(s; \phi) ds \right].$$

Si on utilise cette formule, on réécrit $v_3(\phi, W_3)$ comme

$$v_3(\phi, W_3) = \tilde{v}(\phi, W_3) + \int_{-r}^0 \phi^\top(\theta) W_3 \phi(\theta) d\theta.$$

où $W_2 > 0$ et \tilde{v} sont données dans (6.3.7).

Maintenant on obtient $v(\phi)$ à partir des fonctionnelles $v_i(\phi, W_i)$ (6.3.9) et de la fonctionnelle (6.3.6). Comme ϕ est n'importe quelle fonctionnelle dans \mathcal{W} , et $x_t \in \mathcal{W}$, $v(\phi)$ peut être exprimée en termes de x_t , i.e.

$$\begin{aligned} v(x_t) &= x^\top(t) [U_W(0) - C^\top U_W(r) - U_W^\top(r) C + C^\top U_W(0) C] x(t) \\ &+ 2x^\top(t) \int_{-r}^0 [U_W^\top(r + \theta) - C^\top U_W^\top(\theta)] [Bx(t + \theta) + C\dot{x}(t + \theta)] d\theta \\ &+ \int_{-r}^0 \int_{-r}^0 [Bx(t + \theta_1) + C\dot{x}(t + \theta_1)]^\top U_W(\theta_1 - \theta_2) [Bx(t + \theta_2) + C\dot{x}(t + \theta_2)] d\theta_1 d\theta_2 \\ &+ \int_{-r}^0 x^\top(t + \theta) [(r + \theta) W_2 + W_3] x(t + \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

où $U_W(\xi)$ est la matrice de Lyapunov pour l'équation (2.3.4) définie dans (6.2.3).

Alors la fonctionnelle $v(\varphi)$ définie dans (6.3.9) est une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, i.e. $v(\cdot)$ a une borne inférieure et une borne supérieure, et satisfait la condition (3.2.10) du théorème (3.2.2). Par construction $v(\cdot)$ eq. (6.3.9) et les définitions (6.3.10), (6.3.11), (6.3.14), on a

$$\bar{v}_1(\|x_t(0)\|) := \lambda_{\min}(W_1) \int_0^\infty x_\tau^\top(0)x_\tau(0)d\tau$$

qui satisfait (3.2.10) et est une borne inférieure de $v(\cdot)$. D'autre part, de (6.3.9) et des définitions (6.3.10), (6.3.11), (6.3.14), il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \bar{v}_2(\|x_\tau\|_{\mathcal{W}}) & : = \lambda_{\max}(W_1) \int_0^\infty [x_\tau^\top(0)x_\tau(0) + \int_{-h}^0 \|\dot{x}_\tau(\theta)\|^2 d\theta]^{1/2} d\tau \\ & + \int_0^\infty [\int_{-r}^0 x_\tau^\top(\theta)W_2x_\tau(\theta)d\theta] d\tau \\ & + \int_0^\infty x_\tau^\top(-r)W_3x_\tau(-r)d\tau \end{aligned}$$

satisfait (3.2.10) et est une borne supérieure de (6.3.9). Alors $v(\cdot)$ satisfait les bornes (4.4.23).

□

REMARQUE 6.3.1. On note que la fonctionnelle (6.3.2) satisfait les bornes suivantes

$$\omega_1(\|\phi(0)\|) \leq w(\phi) \leq \omega_2(\|\phi\|_{\mathcal{W}}), \quad (6.3.16)$$

où

$$\omega_1(\|\phi(0)\|) := \lambda_{\min}(W_1) \phi^\top(0)\phi(0) \quad (6.3.17)$$

et

$$\omega_2(\|\phi\|_{\mathcal{W}}) := \lambda_{\max}(W_1) \|\phi\|_{\mathcal{W}} + \int_{-r}^0 \phi^\top(\theta)W_2\phi(\theta)d\theta + \phi^\top(-r)W_3\phi(-r). \quad (6.3.18)$$

REMARQUE 6.3.2. Soit le système (6.2.1) exponentiellement stable. Alors,

$$\bar{v}_3(\|x_t(0)\|) := \omega_1(\|x_t(0)\|)$$

satisfait (3.2.11) et la borne (6.3.17):

$$\frac{d^+v}{dt}(x_t) \leq -\omega_1(\|x_t(0)\|) \quad \forall t \geq 0.$$

Dans la section suivante, on utilise la fonctionnelle (6.3.9) pour l'étude de la stabilité robuste des systèmes neutres.

6.4 STABILITÉ ROBUSTE

Maintenant, on suppose que les matrices A et B sont soumises à des incertitudes de la forme suivante

$$A \rightsquigarrow A + \Delta_A, B \rightsquigarrow B + \Delta_B,$$

où les matrices constantes Δ_A, Δ_B sont bornées par

$$\begin{aligned} \Delta_A^T R_A \Delta_A &\leq \rho_A I_n, \\ \Delta_B^T R_B \Delta_B &\leq \rho_B I_n, \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

R_A et R_B , sont des matrices positives définies, ρ_A et ρ_B des nombres positifs.

Alors on considère le système perturbé suivant:

$$\dot{y}(t) - C \dot{y}(t-r) = (A + \Delta_A)y(t) + (B + \Delta_B)y(t-r), p.p. t \geq 0. \tag{6.4.2}$$

Soit le système (6.2.1) exponentiellement stable, on cherche des conditions sous lesquelles, le système incertain (6.4.2) reste stable. Ensuite, on utilise la fonctionnelle

(6.3.9) construite pour le système nominal (6.2.1). Après des calculs directs, la dérivée de $v(y_t)$ est donnée par:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(y_t) = & 2 \dot{y}^\top(t) [U_W(0)y(t) - U_W(0)Cy(t-r)] + 2 \dot{y}^\top(t) \int_{-r}^0 U_W^\top(\theta+r) By(t+\theta) d\theta \\
& - 2 \dot{y}^\top(t) \int_{-r}^0 \dot{U}_W^\top(\theta+r) Cy(t+\theta) d\theta - 2y^\top(t) U_W^\top(0) C \dot{y}(t-r) \\
& - 2y^\top(t) \int_{-r}^0 \dot{U}_W^\top(\theta+r) By(t+\theta) d\theta \\
& - 2y^\top(t) C^\top [U_W(0)By(t) - U_W(r)By(t-r)] \\
& + 2y^\top(t) C^\top \int_{-r}^0 \dot{U}_W^\top(\theta) By(t+\theta) d\theta + 2y^\top(t) B^\top \int_{-r}^0 U_W^\top(\theta) By(t+\theta) d\theta \\
& + 2y^\top(t) C^\top U_W(r) Cy(t-r) + 2y^\top(t) [U_W^\top(r)By(t) - U_W(0)By(t-r)] \\
& - 2y^\top(t-r) B^\top \int_{-r}^0 U_W^\top(\theta+r) By(t+\theta) d\theta \\
& + 2y^\top(t) B^\top [U_W^\top(0)Cy(t) - U_W(r)Cy(t-r)] \\
& - 2y^\top(t) B^\top [U_W^\top(r)Cy(t) - U_W(0)Cy(t-r)] \\
& - 2 \dot{y}^\top(t-r) C^\top \int_{-r}^0 U_W^\top(\theta+r) By(t+\theta) d\theta \\
& - 2y^\top(t) B^\top \int_{-r}^0 \dot{U}_W^\top(\theta) Cy(t+\theta) d\theta \\
& + 2y^\top(t-r) B^\top \int_{-r}^0 \dot{U}_W^\top(\theta+r) Cy(t+\theta) d\theta \\
& - 2 \dot{y}^\top(t-r) C^\top \int_{-r}^0 U_W^\top(\theta+r) C \dot{y}(t+\theta) d\theta \\
& + y^\top(t) [rW_2 + W_3] y(t) - \int_{-r}^0 y^\top(t+\theta) W_2 y(t+\theta) d\theta - y^\top(t-r) W_3 y(t-r).
\end{aligned}$$

L'évaluation de la dérivée de $v(y_t)$ le long du système (6.4.2) donne après simplification:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v(y_t) \Big|_{(6.4.2)} = & -w(y_t) \\
& + 2 [\Delta_A y(t) + \Delta_B y(t-r)]^\top U_W(0) y(t) \\
& - 2 [\Delta_A y(t) + \Delta_B y(t-r)]^\top U_W(0) C y(t-r) \\
& + 2 [\Delta_A y(t) + \Delta_B y(t-r)]^\top \int_{-r}^0 U_W^\top(\theta+r) By(t+\theta) d\theta \\
& - 2 [\Delta_A y(t) + \Delta_B y(t-r)]^\top \int_{-r}^0 \dot{U}_W^\top(\theta+r) Cy(t+\theta) d\theta,
\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

où $w(\cdot)$ est définie par (6.3.2). Pour obtenir l'équation (6.4.3), on a utilisé le fait

que la dérivée par rapport au temps de $v(\cdot)$ dans (6.3.15) est égale à (6.3.1) par construction.

Maintenant en utilisant (6.4.3) on obtient les conditions de robustesse suivantes:

THÉORÈME 6.4.1. *Soit le système (6.2.1) exponentiellement stable, alors le système perturbé (6.4.2) reste stable pour toutes les incertitudes constantes satisfaisant (6.4.1), si C est une matrice Schur-Cohn stable et s'il existe des matrices positives W_1, W_2, W_3 , et un scalaire μ tels que*

$$\begin{aligned}
i) \quad & W_1 > \mu U_W(0) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) U_W(0) + \frac{2}{\mu} (\rho_A I + \rho_{Ar} I); \\
ii) \quad & W_2 > \mu B^\top U_W(\theta + r) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) U_W^\top(\theta + r) B + \\
& + \mu C^\top U_W'(\theta + r) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) [U_W'(\theta + r)]^\top C, \quad \forall \theta \in (-r, 0); \\
iii) \quad & W_3 > \mu C^\top U_W(0) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) U_W(0) C + \frac{2}{\mu} (\rho_B I + \rho_{Br} I),
\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

où $W := W_1 + rW_2 + W_3$.

Démonstration. : Il a été montré que $\frac{d}{dt}v(y_t)$ donnée par (6.4.3) est bornée. Alors, si on utilise l'inégalité classique:

$$2\xi^\top \zeta \leq \xi^\top R_J \xi + \zeta^\top R_J^{-1} \zeta, \quad R_J > 0, \quad J = \{A, B\},$$

et l'équation (6.4.1), on a l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt}v(y_t) \right|_{(6.4.2)} & \leq -w(y_t) \\
& + y^\top(t) \left[\mu U_W(0) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) U_W(0) + \frac{2}{\mu} (\rho_A I + \rho_{Ar} I) \right] y(t) \\
& + \mu y^\top(t-r) [C^\top U_W(0) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) U_W(0) C] y(t-r) \\
& + \frac{2}{\mu} y^\top(t-r) [(\rho_B I + \rho_{Br} I)] y(t-r) \\
& + \mu \int_{-r}^0 y^\top(t+\theta) [B^\top U_W(\theta+r) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) U_W^\top(\theta+r) B] y(t+\theta) d\theta \\
& + \mu \int_{-r}^0 y^\top(t+\theta) [C^\top \dot{U}_W(\theta+r) (R_A^{-1} + R_B^{-1}) \dot{U}_W^\top(\theta+r) C] y(t+\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Si on choisit W_1, W_2, W_3 satisfaisant (6.4.4) et la structure de $w(\varphi)$ donnée par (6.3.2) on obtient $\frac{dv}{dt} < 0$. Le Théorème 3.2.2 garantit que le système (6.4.2) reste

stable.

□

COROLLAIRE 6.4.2. *Pour n'importe quelles matrices positives W_1, W_2, W_3 et $\mu > 0$, il toujours existe une marge positive de stabilité robuste donnée par les bornes ρ_A, ρ_B telles que le système (2.3.4) est stable robustement pour n'importe quelles incertitudes Δ_A, Δ_B qui satisfont (6.4.1), i.e. on peut trouver une solution aux inéquations non linéaires: conditions i),ii),iii) du théorème 6.4.1.*

Démonstration. On peut choisir n'importe quelles matrices définies positives W_1, W_2, W_3 et n'importe quels nombres positifs ρ_A, ρ_B, μ . Alors, on peut trouver toujours des matrices R_A, R_B , suffisamment "grandes" et incertitudes Δ_A, Δ_B qui satisfont (6.4.1), telles que

$$W_1 > \varepsilon + \frac{2}{\mu}(\rho_A I + \rho_{Ar} I),$$

$$W_2 > \varepsilon,$$

$$W_3 > \varepsilon + \frac{2}{\mu}(\rho_B I + \rho_{Br} I),$$

pour n'importe quel $\varepsilon > 0$. Alors $W_1 > \frac{2}{\mu}(\rho_A I + \rho_{Ar} I) > 0, W_2 > 0, W_3 > \frac{2}{\mu}(\rho_B I + \rho_{Br} I) > 0$ et donc, le théorème 6.4.1 est vérifié par les matrices R_A, R_B et les incertitudes Δ_A, Δ_B qui ont été choisies.

□

REMARQUE 6.4.1. Quelles que soient les matrices W_1, W_2, W_3 , il existe toujours des nombres positifs ρ_A, ρ_B tels que le système (6.2.1) est robustement stable pour toutes les incertitudes Δ_A, Δ_B satisfaisant (6.4.1).

REMARQUE 6.4.2. Si le système (6.2.1) est un système à retard, i.e., $C \equiv 0$, alors l'égalité (6.4.3) est simplifiée et on retrouve le résultat de stabilité de [54].

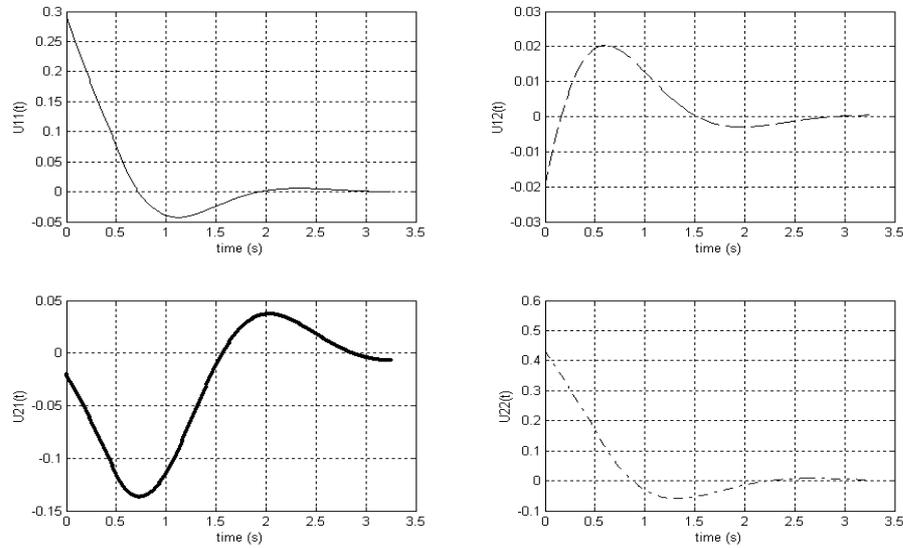
Dans la suite, on illustre les résultats sur un exemple.

6.5 EXEMPLE

On considère un système neutre illustratif, stable pour le retard $r = \frac{1}{2}$, voir [47].

EXEMPLE 6.5.1. Soit le système:

$$\dot{x}(t) - \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \dot{x}(t-0.5) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t-0.5), t \geq 0,$$

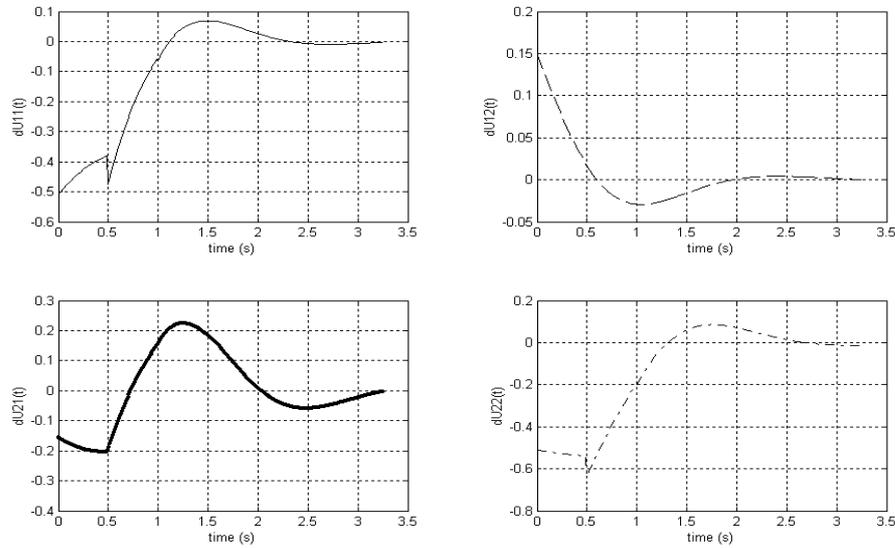
FIG. 6.1 – *Eléments de la matrice $U(t)$*

(exemple 4.5.1 du chapitre 4). Si on utilise la matrice de Lyapunov (6.2.3) et si on choisit $U_W(\tau)$ avec $W = W_1 + rW_2 + W_3 = 0.5I_2$ (par exemple $W_1 = 0.2476455I_2$, $W_2 = 0.1993I_2$, $W_3 = 0.1527045I_2$), la formule (6.4.4) donne les bornes $\rho_A = 0.050I_2$, $\rho_B = 0.050I_2$ pour les incertitudes Δ_A , Δ_B et $R_A = I_2$, $R_B = I_2$ dans (6.4.1); ces constantes assurent la stabilité du système incertain.

Les éléments de $U_W(t)$ sont donnés pour $0 \leq t \leq 3$ (Figure 6.1) à partir de la formule (6.2.3).

Les éléments de $\dot{U}_W(t)$ sont calculés en utilisant (6.2.6), pour $0 \leq t \leq 3$ (Figure 6.2)

REMARQUE 6.5.1. Dans cet exemple illustratif, les bornes ρ_A , ρ_B ne sont pas optimisées par rapport aux incertitudes Δ_A , Δ_B (elles ont une structure quadratique (6.4.1)). Alors $\sqrt{\rho_A}$ est plus grande de 10% que la valeur propre absolue la plus grande de la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{pmatrix}$ et $\sqrt{\rho_B}$ est plus grande de 20% que la valeur propre la plus grande de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

FIG. 6.2 – *Eléments de la matrice $U'(t)$*

6.6 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, une procédure systématique est proposée pour la construction des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii pour le système (6.2.1).

Il a été montré que les fonctionnelles dépendent en particulier de la matrice de Lyapunov $U_W(\tau)$ (6.2.3). Quelques propriétés ont été obtenues pour $U_W(\tau)$.

Il nous semble que les matrices Δ_A , Δ_B peuvent varier dans le temps et dépendre de $y(t)$ et $y(t-r)$. L'unique hypothèse est qu'il est nécessaire que ces incertitudes soient continues absolument par rapport à la variable du temps, et Lipschitz par rapport à l'argument de l'état ou de l'état retardé.

D'autre part les résultats principaux qui sont obtenus sont décrits en termes d'inégalités non linéaires, alors il faut étudier l'optimisation des bornes ρ_A , ρ_B dans (6.4.4) par rapport aux incertitudes Δ_A , Δ_B (elles ont une structure quadratique (6.4.1))

Quelques résultats de stabilité basés sur les fonctionnelles ont été obtenus.

Un exemple a été proposé pour illustrer la méthodologie proposée.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, on s'est intéressé au problème de la stabilité des systèmes linéaires neutres, et plus particulièrement aux aspects de robustesse par rapport aux paramètres de modèle dans le contexte de la stabilité, fonction de la taille du retard.

Comme on l'a vu dans le Chapitre 1, on a démontré, à base d'exemples pratiques comment les systèmes neutres sont reliés aux modèles aux dérivées partielles de type hyperbolique et comment les systèmes retardés sont reliés aux modèles aux dérivées partielles de type parabolique. Dans le Chapitre 2, on a rappelé le problème de la valeur initiale pour les systèmes neutres dans les espaces \mathcal{C} , \mathcal{W}_p^1 , $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_p$ et on a posé et résolu le problème de la valeur initiale pour la matrice fondamentale dans l'espace abstrait \mathcal{M}_p . On a considéré quelques transformations de modèle pour les systèmes neutres et parmi elles, deux ont été proposées dans le Chapitre 3 [96], [98]. La première transformation a utilisé la règle de Leibnitz dans l'opérateur de différence, qui permet de traiter des problèmes plus généraux que l'utilisation de la règle de Leibnitz dans "l'état". La deuxième a permis de "transformer" un système neutre en un système à retard classique, ce qui a permis d'établir un nouveau théorème de stabilité.

Dans les chapitres 4, 5 et 6 de ce mémoire, on a posé et résolu le problème de stabilité robuste dépendant de la taille du retard (conditions suffisantes de stabilité) par une approche temporelle avec des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

Pour l'étude de la stabilité, deux sortes d'approches ont été considérées: la première se base sur la transformation de modèle et sur l'étude de la stabilité du modèle

transformé; la seconde est une approche constructive des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, ce qui permet d'obtenir des fonctionnelles bien adaptées au système neutre considéré.

APPROCHE PAR TECHNIQUES DE TYPE LMI

On a utilisé une approche basée sur l'utilisation de la méthode directe de Lyapunov pour les équations différentielles fonctionnelles de type neutre. L'idée est de transformer le système neutre de départ en un autre modèle qui a de "bonnes" propriétés, et de montrer alors la stabilité du modèle transformé en utilisant des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. Les résultats sont donnés en termes de l'existence de matrices définies positives qui satisfont une LMI.

On s'est intéressé à l'analyse de la stabilité robuste, dépendante de la taille du retard des systèmes neutres linéaires avec incertitude sur les paramètres et les retards. On a obtenu des conditions suffisantes de stabilité vérifiées en termes d'une LMI. Les modèles étudiés sont décrits par des équations différentielles fonctionnelles de type neutre

$$\frac{d}{dt} [x(t) - Cx(t - r_1) - \Delta_C] = Ax(t) + Bx(t - r_2) + \Delta_A + \Delta_B,$$

où les incertitudes Δ_A , Δ_B , Δ_C sont $\Delta_A(t, x(t))$, $\Delta_B(t, x(t - r_2))$ variables dans le temps, non linéaires et Lipschitz dans le deuxième argument et Δ_C :

1. $\Delta_C(x(t - r_1)) = \Delta x(t - r_1)$ avec Δ constante dans [94];
2. $\Delta_C(t, x(t - r_1)) = E_C \delta_C(t, x(t - r_1))$ où E_C représente la structure constante et δ_C seulement non linéaire en t , [96];
3. $\Delta_C(t, x(t - r_1)) = \delta_C(t) x(t - r_1)$ linéaire seulement dans le deuxième argument mais sans partie structurée [99] comme dans le cas précédent, par contre le résultat principal est toujours vérifié en termes d'une LMI;
4. Dans le chapitre 5 seulement, $\Delta_A(t, x(t))$ a une structure et $\Delta_C(t, x(t - r_1)) = \delta_C(t) x(t - r_1)$, $\Delta_B(t, x(t - r_2)) = \delta_B(t) x(t - r_2)$ sont non structurées et quasilineaires, mais le résultat principal est toujours vérifié en termes d'une LMI.

Pour démontrer la stabilité dépendante de la taille du retard r_2 des systèmes 1, 2, 3 et 4, on a utilisé une transformation de modèle. Dans 1 on a utilisé la règle de

Leibnitz sur "l'état", et dans 2, 3 on a proposé la règle de Leibnitz sur l'opérateur de différence $D(t)\varphi := [\varphi(0) - C\varphi(-r_1) - \Delta_C(t, \varphi(-r_1))]$, et dans 4 on a étendu la transformation de modèle par intégration sur l'intervalle $[-r_2, 0]$, (3.3.6), au cas neutre linéaire avec incertitudes. Les transformations de modèle utilisées dans 1, 2 et 3, où la règle de Leibnitz a été utilisée, ont le désavantage d'ajouter une dynamique additionnelle (voir transformation 7, chapitre 4), alors que 4 évite cette dynamique additionnelle. Finalement on remarque que dans 1, 2, 3 et 4, il est nécessaire que l'opérateur de différence $D(t)\varphi$ soit stable (voir Chapitre 4); cependant en 4, on paye le fait qu'il n'y a pas de dynamique additionnelle par la vérification de la stabilité de l'opérateur de différence $\tilde{D}(t)\varphi := D(t)\varphi + \int_{-r_2}^0 [B\varphi(\theta) + \Delta_B(t + \theta, \varphi(\theta))] d\theta$ (voir Chapitre 5).

APPROCHE CONSTRUCTIVE DES FONCTIONNELLES DE LYAPUNOV-KRASOVSKII

Dans ce travail, le problème de construction des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii avec une dérivée du temps a été proposé pour les systèmes neutres [56], [100] (Chapitre 6). À notre connaissance, il n'y a pas de résultat sur la construction de ce type de fonctionnelles pour les systèmes neutres.

Dans ce rapport, basé sur la construction des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii on a déduit de nouveaux résultats de stabilité robuste. À la différence des résultats vérifiés en termes de LMIs, [40], [59], [48], [81], [94], [96], [99], [98], les conditions qui sont proposées toujours apportent des bornes positives sur les incertitudes pour n'importe quel système nominal stable. Les modèles qui ont été étudiés sont décrits par

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - r_1) = Ax(t) + Bx(t - r_2) + \Delta_A + \Delta_B, \quad (6.6.1)$$

où les incertitudes Δ_A, Δ_B sont $\Delta_A(t, x(t)), \Delta_B(t, x(t - r_2))$ variables dans le temps, non linéaires dans "l'état" et dans "l'état retardé" et structurées.

L'idée utilisée pour la construction des fonctionnelles est basée sur la représentation de la matrice fondamentale (2.6.5) associée au système sans perturbations (6.6.1) ($\Delta_A \equiv \Delta_B \equiv 0$). On a supposé qu'au minimum, pour l'étude de la stabilité robuste, cette représentation est stable avec C une matrice Schur-Cohn stable; on a

défini la Matrice de Lyapunov (6.2.3) pour le système sans perturbations (6.6.1) et finalement on a construit des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii qui sont fonction de (6.2.3).

Finalement, on a démontré dans le Chapitre 6 quelques propriétés de la Matrice Lyapunov (6.2.3) (existence, continuité, différentiabilité, etc.) qui ont permis de construire des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, et on a obtenu de nouveaux résultats de stabilité robuste [100].

PERSPECTIVES

Des perspectives intéressantes se présentent, suite à ce travail. D'abord les modèles: il semble important d'étudier le modèle pour la colonne chromatographique appelée modèle d'équilibre-dispersif [27], parce que, pour beaucoup d'applications il prédit les concentrations c_i de forme précise car il prend en compte la dispersion axiale [8] terme négligé dans le chapitre 1. On remarque qu'il existe une solution analytique pour le modèle d'équilibre-dispersif proposé par [70] pour une colonne de longueur infinie, mais elle est difficile à calculer et seulement des approximations ont été utilisées. Par rapport au modèle de la ligne de transmission, il est important d'étudier le modèle dans le cas de pertes dans la ligne par résistance et la stabilité des points d'équilibre.

Dans le cadre des transformations de modèle, il est d'intérêt d'étudier dans quel cas on peut généraliser la transformation de modèle par la règle de Leibnitz sur l'opérateur de différence $D(t)x_t - D(t-r)x_{t-r} = \int_{-r}^0 d\theta [D(t+\theta)x_{t+\theta}]$, pour des opérateurs de plus grande complexité, par exemple (2.2.4), même pour la transformation de modèle par intégration sur un intervalle (5.2.1). Finalement, il serait très intéressant d'étudier la stabilité robuste des systèmes neutres sous la transformation "descriptor form" dans une approche différente du H_∞ [32].

Pour l'approche LMI, la stabilité robuste a été analysée, donc il est important également d'étudier la stabilisation [46] et/ou l'observation [29] dans le cas des systèmes neutres. Il est intéressant d'étudier et de réduire le degré de conservatisme de la méthode LMI. Dans ce rapport, ont été considérées des incertitudes dans les coefficients des matrices de l'état à l'instant t et $t - r_2$ et dans l'opérateur de différence. Mais les incertitudes sont non linéaires, variables dans le temps et structurées

seulement dans le coefficient de l'état à l'instant t . Alors il est important d'étudier la stabilité quand toutes les incertitudes sont structurées non linéaires et variables dans le temps.

En ce qui concerne l'approche constructive des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii appliquée aux systèmes neutres linéaires, il semble qu'il s'agit d'un problème qui peut avoir beaucoup de généralisations. D'une part, dans ce mémoire on n'a pas considéré d'incertitudes dans le coefficient de la dérivée de l'état à l'instant $t - r$, donc il est intéressant de les considérer. Un travail est à effectuer pour obtenir des méthodes numériques permettant d'obtenir la matrice de Lyapunov qui soient simples. D'autre part les résultats principaux qui sont obtenus sont décrits en termes d'inégalités non linéaires, alors il faut étudier l'optimisation des bornes ρ_A, ρ_B dans (6.4.4) par rapport aux incertitudes Δ_A, Δ_B (elles ont une structure quadratique (6.4.1)). On peut également généraliser cette approche aux systèmes linéaires généralisés (2.2.9) car il existe une matrice fondamentale associée à (2.2.9) [40] sous la condition de stabilité de l'opérateur de différence. L'étude de la matrice fondamentale associée à (2.2.9) peut être étudiée dans l'espace produit $\mathcal{M}_p = \mathbb{R}^n \times \mathcal{W}_p^1$, car ce type de systèmes est beaucoup plus complexe.

Bibliographie

- [1] Adams R.A. (1975) Sobolev Spaces. Academic Press.
- [2] Ahlfors L.V. (1979) Complex Analysis, 3rd Edition McGraw-Hill.
- [3] Apostol T.M. (1957) Mathematical Analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- [4] Barnett S. Matrices Methods and Applications, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series.
- [5] Bellen A., N. Guglielmi and A.E. Ruehli (1999) Methods for Linear Systems of Circuits Delays Differential Equations of Neutral Type. IEEE Trans. Circuits and Sys. 46, 1:212–216.
- [6] Bellman R. and K.L. Cooke (1963) Differential Difference Equations. Academic Press.
- [7] Bensoussan A.G. D. Prato, M. Delfour and S. Mitter (1993) Representation and Control of Infinite Dimensional Systems Volume II, Birkhäuser.
- [8] Bird R.B., W.E. Stewart and E.N. Lightfoot (2002) Transport Phenomena 2nd Edition J. Wiley & Sons.
- [9] Boyd S., L.El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994) Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [10] Brayton R. (1968) Small-Signal Stability Criterion for Electrical Networks Containing Lossless Transmission Lines, IBM J. Res. Dev., 12:431–440.
- [11] Brayton R. (1976) Nonlinear Oscillations in a Distributed Network, Quart. Appl. Math., 24: 289-301.
- [12] Burns J.A., T.L. Herdman and H.W. Stech (1981) The Cauchy Problem For Linear Functional Differential Equations. Lecture Notes in Pure and Applied

- Mathematics, T.L. Herdman, S.M. Rankin and H.W. Stech, eds. Marcel Dekker, New York, 67:139–149.
- [13] Burns J.A., T.L. Herdman and H.W. Stech (1983) Linear Functional Differential Equations As Semigroups On Products Spaces. *SIAM. J. Math. Anal.*, 14:98–116.
- [14] Carter M. and B. Van Brunt (2000). *The Lebesgue-Stieljes Integral A Practical Introduction*. Springer.
- [15] Castelan E.B., A. Silva, E.R. Llanos and S. Tarbouriech (2002) On Regional Pole Placement by Output Feedback For a Class of Descriptor Systems. 15th Triennial World Congress of the IFAC, Barcelona.
- [16] Chen J. (1995) On Computing the Maximal Delay Intervals for Stability of Linear Delay Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40:1087–1093.
- [17] Chen J.D., C.H. Lien, K.K. Fan and J.S. Cheng (200) Delay-Dependent Stability Criterion for Neutral Time-Delay Systems. *IEE Electronics Letters*, 36, 22:1897–1898.
- [18] Chua L.O., C.A. Desoer and E.S. Kuh (1987) *Linéar and Nonlinéar Circuits* Mc Graw-Hill.
- [19] Cruz M.A. and J.K. Hale (1970) Stability of functional differential equations of neutral type. *J. Differential Eqns.* 7:334–355.
- [20] Datko R.A. (1985) Remarks Concerning the Asymptotic and Stabilization of Linear Delay Differential Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 111: 571–584.
- [21] Demengel F. and G. Demengel (2000) *Mesures et Distributions Théorie et Illustration Par Les Exemples*, (in French). Ellipses.
- [22] de Souza C.E. and X. Li (1999) Delay-Dependent Robust H_∞ Control Of Uncertain Linear State-Delay Systems. *Automatica*, 35:1313–1321.
- [23] Diekmann O., S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel and H.-O. Walther (1995). *Delay Equations Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*. Springer Verlag.
- [24] Dion J.-M., L. Dugard et S. Niculescu (2000) *Analysis and Control of Time-Delay Systems*. Ecole d'Été d'Automatique de Grenoble.

- [25] Dugard L. and E. Verriest, (Editors) (1997) *Stability and Control of Time-Delay Systems*. Springer Verlag.
- [26] Dunford N. and J.T. Schwartz with the assistance of W.G. Bade and R.G. Bartle (1988) *Linear Operators Part I: General Theory* J. Wiley & Sons.
- [27] Dünnebier G., I. Weirich and K.-U. Klatt (1998) Computationally efficient dynamic modeling and simulation of simulated moving bed chromatographic processes with linear isotherms. *Chemical Engineering Sciences*, 53:2537–2546.
- [28] El'sgots and Norkin (1973) *Introduction to Theory and Applications of Differential Equations with deviating arguments*. Academic Press.
- [29] Fattouh A. (2000) *Observation et Commande Numérique Robustes des Systèmes à Retards*, (in French). Ph.D. Thesis, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, INPG, 24 Novembre.
- [30] Fliess M. and H. Mounier (2001) On a Class of Linear Delay Systems Often Arising in Practice. *Kybernetika*, 37:295–308.
- [31] Fridman E. (2001) New Lyapunov-Krasovskii Functionals for stability of linear retardes and neutral systems, *Systems and Control Letters*, 43, 4:309–319.
- [32] Fridman E. and U. Shaked (2002) LMI Approach To H Infinity Filtering Of Linear Neutral Systems With Delay. 15th Triennial World Congress of the IFAC, Barcelona.
- [33] Gopalsamy, K. (1992) *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Kluwer Academic Publishers.
- [34] Gu K. and S. Niculescu (1999) Additional Dynamics in Transformed Time-Delay Systems. *Proc. IEEE CDC*, Phoenix, Arizona, USA:4673–4677.
- [35] Gu K. and S. Niculescu (2000) Additional Dynamics in Transformed Time-Delay Systems. *Proc. IEEE Trans. on Auto. Ctrl.*, 45, 3:572–575.
- [36] Hale J.K. (1971) Forward and Backward Continuation for Neutral Functional Differential Equations. *J. Diff. Equ.*, 9:168–181.
- [37] Hale J.K. and M.A. Cruz (1970) Existence, Uniqueness and Continuous Dependence for Hereditary Systems. *Ann. Mat. Pura Appl.* 85, 4:63–82.
- [38] Hale J.K., E.F. Infante and F.S.P. Tsen (1985) Stability of Linear Delay Equations. *J. Math. Anal. Appl.* 105:533–555.

- [39] Hale J.K. and W. Oliva (1976) One-to-Oneness For Linear Retarded Functional Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.* 20:28–36.
- [40] Hale J.K. and S.M. Verduyn Lunel (1993) *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag.
- [41] Hale J.K. and S.M. Verduyn Lunel (2002) Strong Stabilization of Neutral Functional Differential Equations. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*:5–23.
- [42] Henry D. (1974) Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations. *J. Diff. Equ.*, 15:106–128.
- [43] Hu G. and E.J. Davinson (2000) Real Stability Radii for Linear Neutral Systems. 2nd IFAC Workshop on Linear Time-Delay Systems. Ancona Italy:117–122.
- [44] Hu Guang-Di and Guang-Da Hu (1996) Some Simple Criteria for Stability of Neutral Delay-Differential Systems. *App. Math. and Comp.* 80:257–271.
- [45] Infante E.F. and W.B. Castelan (1978) A Liapunov Functional for a Matrix Difference-Differential Equation. *Journal Differential Equations*, 29:439–451.
- [46] Ivanescu D. (2000) On the Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: Theory and Applications, (in French). Ph.D. Thesis, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, INPG, 8 Septembre.
- [47] Ivanescu D., S. Niculescu, L. Dugard and J.M. Dion (2000) On Delay Dependent Stability for Linear Neutral Systems. *Proc. IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Ancona Italy:117–122.
- [48] Ivanescu D., S. Niculescu, L. Dugard, J.M. Dion and E.I. Verriest (2003) On Delay Dependent Stability for Linear Neutral Systems. *Automatica* 39:255–261.
- [49] Juang W. (1989) Generalization of Liapunov's Theorem in a Linear Delay System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* , 23:83–94.
- [50] Khalil, H. (1996) *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- [51] Kharitonov V.L. (1998) Robust Stability Analysis of Time-Delay Systems: a Survey. *Proc. IFAC Syst. Struct. and Contr.*, Nantes, France:1–12.

- [52] Kharitonov V.L and D. Melchor-Aguilar (2000) On Delay-Dependent Stability Conditions. *Systems and Control Letters* 40:71–76.
- [53] V.L. Kharitonov and D. Melchor-Aguilar, On delay Dependent Stability Conditions For Time-Varying Systems. *Systems and Control Letters*, 46:173–180.
- [54] Kharitonov V.L. and A.P. Zhabko (2001) Lyapunov-Krasovskii approach to robust stability of time delay systems, in the Proc. of the 1-st. IFAC Symposium on System Structure and Control, Prague, 29–31.
- [55] Kharitonov V.L. and A.P. Zhabko (2003) Lyapunov-Krasovskii approach to robust stability of time delay systems. *Automatica*, 39:15–20.
- [56] Kharitonov V.L., S. A. Rodríguez, J.-M. Dion and L. Dugard (2002) Lyapunov-Krasovskii Functional for neutral systems: a constructive approach, IFAC Workshop Guadalajara, México.
- [57] Kolmanovskii V.B. (1996) The stability of Hereditary Systems of neutral type. *J. Appl. Maths. Mechs.* 60, 2:205–216.
- [58] Kolmanovskii V.B. and A.D. Myshkis (1992) *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers.
- [59] Kolmanovskii V.B. and A.D. Myshkis (1999) *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers.
- [60] Kolmanovskii V.B., S. Niculescu et K. Gu (1999) Delay Effects On Stability: A survey Conference on Decision and Control.
- [61] Kolmanovskii V.B. and V.R. Nosov (1970) On the Stability of First Order Nonlinear Equations of Neutral Type. *Prikl. Math. Mech.*, 34:587–594.
- [62] Kolmanovskii V.B. and V.R. Nosov (1982) Stability of Neutral Type Fuctional Differential Equations. *Nonlinear Anal. Theory, Methods. & Appl.*, 6, 9:873–910.
- [63] Kolmanovskii V.B. and V.R. Nosov (1986) *Stability of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers.

- [64] Kolmanovskii V.B. and J.P. Richard (1997) Stability of Some Systems With Distributed Delays. *JESA*, special issue on Analysis and Control of Time-Delay Systems 31:13–18.
- [65] Kolmanovskii V.B. and J.P. Richard (1998) Stability of Systems With Pure, Discrete Multi-Delays. *IFAC Conference System Structure and Control Nantes, France*:13–18.
- [66] Krasovskii N.N. (1956) On the Application of the Second Method of A. M. Liapunov to Equations with Time Delays, *Prikl. Mat. Meh.*, 20:315–327.
- [67] Krasovskii N.N. (1963) *Stability of Motion*, Stanford Univ. Press.
- [68] Kuang, Y. (1993) *Delay-Differential Equation With Applications in Population Dynamics*, Academic Press.
- [69] Lacroix-Sonnier M.T. (1998) *Distributions Espaces de Sobolev Applications. Ellipses*.
- [70] Lapidus L. and N. Amundsen (1952) Mathematics of Adsorption in beds. IV. The Effect of Longitudinal Diffusion in ion Exchange and Chromatographic Columns, *J. Phys. Chem.* 56:984–988.
- [71] Lien C.-H. (1999) Asymptotic criterion for neutral systems with multiple time delays, *IEE Electronics Letters*, 35, 10:850–851.
- [72] Lien C.-H., K.W. Yu and J.-G. Hsieh (2000) Stability Conditions for a Class of Neutral Systems With Multiple Time Delays. *J. Math. Anal. and Appl.* 245:20–27.
- [73] Logemann H. and S. Townley (1996) The effect of Small Delays in the Feedback Loop on the Stability of Neutral Systems. *Syst. Contr. Lett.* 27:267–274.
- [74] Loiseau J.J., M. Cardelli and X. Dusser (2002). Neutral-Type-Time-Delay Systems That Are Not Formally Stable Are Not BIBO Stabilizable. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*:217–227.
- [75] Mathews J.H. and R.W. Howell (1996) *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*. Wm C. Brown Publishers.
- [76] Melvin W.R. (1970) *A Class of Neutral FDEs*. Ph.D. thesis, Brown Univ., Providence, R.I.

- [77] Mitrovic D. and D. Zubrinic (1998) *Fundamentals of Applied Functional Analysis Distributions-Sobolev Spaces Nonlinear Elliptic Equations*, Longman.
- [78] Mounier H., P. Rouchon and J. Rudolph, (1997) Some Examples of Linear Systems with Delays. *RAIRO-APII-JESA*, 31,6:9111–925.
- [79] Niculescu S.I. (1996) On the Stability and Stabilization of Linear Systems with Delayed State, (in French). Ph.D. Thesis, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, INPG, February.
- [80] Niculescu S.I. (1998) On The Stability of A Class of Uncertain Linear Neutral Systems: An LMI Approach with Applications, *IFAC Syst. Struc. Contr. Nantes France*:25–30.
- [81] Niculescu S.I. (2001) On Robust Stability of Neutral Systems, Special issue On Time-Delay Systems. *Kybernetika* 37:253–263.
- [82] Niculescu S.I. (2001) On Delay-Dependent Stability Under Model Transformations of Some Neutral Linear Systems. *Int. J. Contr.*,74,6:609–617.
- [83] Niculescu S.I. (2001) *Delay Effects On Stability*, Springer.
- [84] Niculescu S.I., E.I.Verriest, L. Dugard and J.-M. Dion (1997) Stability and Robust Stability of Time-Delay Systems: A Guided Tour. L. Dugard and E.I. Verriest, Eds. Springer 22:1–71.
- [85] Niculescu S.I., E.I.Verriest, L. Dugard and J.-M. Dion (1997) Delay-Independent Stability of LNS: A Riccati Equation Approach, in *Stability and Control of Time-Delay Systems*. L. Dugard and E.I. Verriest, Eds. Springer 22:92–100.
- [86] Niculescu S.I. and B. Brogliato (1995) On Force Measurement Time-Delay Systems, *Proc. IFAC Syst. Struc. Contr. Nantes France*:266–271.
- [87] Olgac N. and R. Sipahi (to appear 2003) Direct Method For Analyzing The Stability Of Neutral Type LTI-Time Delayed Systems. *Automatica*.
- [88] Pinello, W., A.C. Cangellaris and A.Ruehli (1997) Hybride Electromagnetics Based on the Partial Element Equivalent Circuit Formualtion. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*45:1889–1896.

- [89] Qiu L., B. Bernhardsson, A. Rantzer, E.J. Davison, P.M. Young and J.C. Doyle (1995). A Formula for Computation of the Real Stability Radius. *Automatica*:879–890.
- [90] Rekasius Z.V. (1980) A Stability Test for Systems with Delays. Proc. Joint Automatic Control Conf. TP9-A
- [91] Repin Yu. M. (1965) Quadratic Lyapunov Functionals for systems with delay. *Prikladnay Matematika*, 29:564–566 (In Russian).
- [92] Richard J.P. (1998) Some Trends and Tools for the Study of Time Delay Systems. Proc. IEEE-IMACs Conference Comp. Eng. in Sys. App., Nabeul, Tunisia.
- [93] Richard J.P. (2003) Time-Delay Systems: An Overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39, 10:1667–1694.
- [94] Rodriguez S.A., J.M. Dion, L. Dugard and D. Ivănescu (2001) On delay-dependent robust stability of neutral systems. 3rd IFAC Workshop on Time Delay Systems, Santa Fe USA:101–106.
- [95] Rodriguez S.A., J.M. Dion and L. Dugard. (2002) Lyapunov-Krasovskii Functionals for Neutral Systems: A Constructive Approach. Congreso Latinoamericano de Control Automatico CLCA IFAC 2002 Guadalajara México.
- [96] Rodriguez S.A., J.M. Dion and L. Dugard (2002) Robust Stability Analysis of Neutral Systems Under Model Transformation. 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA:1850–1855.
- [97] Rodriguez S.A., J.M. Dion and L. Dugard (2003) Robust Delay Dependent Stability Analysis of Neutral Systems. Workshop CNRS-National Science Foundation, January 22-23, Paris, France.
- [98] Rodriguez S.A., J.M. Dion and L. Dugard. (2003) Stability of Neutral Time Delay Systems: A Survey of Some Results. *Advances in Automatic Control* by Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [99] Rodriguez S.A., J.M. Dion and L. Dugard (2003) Robust Delay Dependent Stability Analysis of Neutral Systems, internal report.

- [100] Rodriguez S.A., V. Kharitonov, J.M. Dion and L. Dugard (2003) Robust Stability of Neutral Systems: A Lyapunov-Krasovskii Constructive Approach. Accepted to International Journal of Robust Nonlinear Control.
- [101] Roseau M. (1984) Vibrations des Systèmes Mécaniques. Masson, Paris.
- [102] Royden H.L. (1963) Real and Analysis, Mcmillan.
- [103] Ruehli A.E.(1974) Equivalent Circuit Models for Three Dimensional Multi-conductor Systems. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 22, 3:216–221.
- [104] Ruehli, A.E., U. Miekala, A. Bellen and H. Heeb (1994) Stable Time Domain Solutions for EMC problems using PEEC models. In Proc. of Inter. Symp. on Elmag. Comp., Chicago, IL,371–376.
- [105] Rudin W. (1973) Functional Analysis, McGraw-Hill.
- [106] Shif J.L. (2001) The Laplace Transform Theory and Applications. Springer.
- [107] Siljak D.D. Criteria for Two-Variables Polynomials (1975). IEEE Trans. Circuit and Systems, CAS-22, 3:185–189.
- [108] Schwartz L. (1957) Théorie des Distributions. Tomes I et II, Hermann.
- [109] Slemrod M. and E.F. Infante (1972) Asymptotic Stability Criteria for Linear Systems of Difference-Differential Equations of Neutral Type and Their Discrete Analogues. J. of Math. Anal. and App. 38:399–415.
- [110] Smith F.E. (1963) Population dynamics in *Daphnia magna*, Ecology 44: 651–653.
- [111] Tchangani et al. (1999) Robust Stability Analysis of Neutral Systems Under Model Transformation. 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA:1850–1855.
- [112] Verriest E.I. and S.I. Niculescu (1997) Delay-Independent Stability of LNS: A Riccati Equation Approach, in Stability and Control of Time-Delay Systems. (L. Dugard and E.I. Verriest, Eds.), Springer-Verlag L. 228:92–100.

ANNEXE

Rodriguez S.A., J.M. Dion and L. Dugard (2004) "Robust Delay Dependent Stability Analysis of Neutral Systems", Lectures Notes in Control and Information Science. Editions Springer-Verlag 2004. Verssion étendue du Workshop CNRS-National Science Foundation, January 22-23, 2003 Paris, France.

Rodriguez S.A., J.M. Dion and L. Dugard (2003) "Stability of Neutral Time Delay Systems: A Survey of some results," Mihail Voicu (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 2003, ISBN 0-4040-7607, pp. 315-336.