Estimations dispersives

Simon Moulin

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
Sciences et Technologies de l'Information et des Matériaux

Année 2007

N° attribué par la bibliothèque

Estimations dispersives

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline: Mathématiques
Spécialité: Equations aux dérivées partielles

Présentée et soutenue publiquement par

Simon MOULIN

Le 29 novembre 2007, devant le jury ci-dessous

Président:	BURQ Nicolas	Professeur (Paris 11)
Rapporteurs:	BURQ Nicolas	Professeur (Paris 11)
	D'ANCONA Piero	Professeur (Rome 1)
Examinateurs:	BRUNEAU Vincent	Professeur (Bordeaux 1)
	PETKOV Vesselin	Professeur (Bordeaux 1)
	POPOV Georgi	Professeur (Nantes)
	VODEV Georgi	CNRS (Nantes)
	WANG Xue-Ping	Professeur (Nantes)

Directeurs de thèse: VODEV Georgi et POPOV Georgi

Laboratoire Jean Leray (UMR 6629)

ED: ....

Année 2007

Estimations dispersives

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline: Mathématiques
Spécialité: Equations aux dérivées partielles

Présentée et soutenue publiquement par

Simon MOULIN

Remerciements.

Merci à mes deux maîtres de thèse : Georgi Popov et Georgi Vodev ; le premier pour avoir supervisé mon travail depuis mon stage de master jusqu'à aujourd'hui et pour m'avoir fait découvrir les résonances ; le second pour m'avoir guidé pas à pas dans mes recherches, m'avoir expliqué de nombreux problèmes intéressants sur les résonances puis sur les estimations dispersives et aussi s'être montré extrêmement disponible pour répondre à mes questions que ce soit sur un calcul ou sur des perspectives générales.

Merci à N.Burq d'avoir accepté de raporter cette thèse, pour ses suggestions et ses remarques. Merci d'avoir accepté de présider ce jury. N.Burq a guidé sans le savoir mes premiers pas dans la recherche, mon sujet de master portant sur un des ses articles. Même si je ne suis pas allé à Evian, merci à N.Burq et à travers lui au GDR Equations aux dérivées partielles de m'avoir permis de suivre deux colloques à Forges-les-eaux.

Merci à P.D'Ancona pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, merci d'avoir accepté de rapporter cette thèse et d'avoir essayé de prendre part à ce jury. Je sais grâce à lui que mes articles sont lus puisqu'il m'a envoyé des commentaires sur un des mes articles postés sur Arxiv.

Merci à V.Bruneau, V.Petkov, X.P.Wang et D.Robert d'avoir accepté de participer à ce jury.

Merci de nouveau à tous les membres extérieurs pour avoir répondu rapidement à mes sollicitations, envoyant les papiers administratifs dans les meilleurs délais, m'évitant ainsi des tracas avec l'administration.

Merci à tous les membres du Département et du Laboratoire Jean Leray et plus particulièrement aux membres de l'équipe d'analyse. Merci aux personnels du Département que ce soit Claude à la bibliothèque, Brigitte et Annick au secrétariat, Saïd à l'informatique.

Merci à tous les jeunes gens que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quelques années à Nantes, ceux qui sont partis comme ceux qui viennent d'arriver, je ne les citerais pas tous, j'en ai cotoyé beaucoup puisque c'est maintenant ma cinquième année au sein du laboratoire. Je pense que la bonne humeur qui règne à l'étage du bas m'a beaucoup aidé dans l'achèvement de ma thèse.

Merci aussi à la SNCF et à mon vélo de m'avoir transporté au laboratoire sans encombre pendant plus de cinq ans.

Merci à tous mes amis non mathématiciens qui ont tous voulu savoir sur quoi je travaillais et m'ont souvent paru avoir l'air intéressés.

Merci à toute ma famille de m'avoir supporté et aidé, merci d'être venue assister à ma soutenance.

Merci à Elodie pour m'avoir patiemment soutenu dans les moments de doute et d'inquiétudes. Merci à elle pour avoir aussi partagé tous les autres.

Politics is for the present, but an equation is something for eternity.

(Albert Einstein)

Estimations dispersives

Simon Moulin

Table des matières

1 Introduction

Le sujet principal de cette thèse est l'étude des propriétés dispersives d'équations très importantes de physique mathématique, l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t u - \Delta u = 0,$$

et l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0,$$

ainsi que leur perturbation par un potentiel ne dépendant que de la variable d'espace :

$$i\partial_t u - \Delta u + V(x)u = 0, \quad \partial_t^2 u - \Delta u + V(x)u = 0.$$

L'équation des ondes et celle de Schrödinger présentent des points communs ainsi que des propriétés différentes. La notion de *propriétés dispersives* s'applique aux deux équations mais s'explique de manière différente.

Pour l'équation des ondes, équation d'évolution à vitesse finie, le signal se déplace avec une vitesse égale à 1 ; cela signifie que si la donnée initiale a son support dans une boule de rayon R, la solution au temps T a son support dans une boule de rayon au plus $R+T$. Ainsi, l'énergie de la solution qui est conservée s'étend sur une région qui augmente avec le temps, et il est naturel d'obtenir que la taille de la solution décroît de même. D'un point de vue physique, on peut penser à des ondes se déplaçant sur la surface d'un lac lorsqu'on jette une pierre : les cercles deviennent de plus en plus grand, mais l'amplitude des ondes décroît jusqu'à disparaître. Ce phénomène est qualifié traditionnellement de *décroissance des solutions lorsque* $t \to +\infty$.

Mais ce phénomène a aussi lieu pour d'autres équations même si la vitesse de propagation n'est pas finie, ce qui est le cas pour l'équation de Schrödinger. Pour cette équation, il est facile de prouver la propriété de dispersion grâce à la formule explicite des solutions, mais il est clair que le mécanisme est différent de l'équation des ondes. Par exemple, si la donnée initiale est à support compact, la solution de l'équation de Schrödinger au temps T n'a pas un support compact. Ou dit d'une autre manière, même si une particule est localisée à l'instant $t = 0$, elle a une probabilité non nulle de présence dans tout l'espace dès l'instant $t > 0$. Dans ce cas, en utilisant la transformée de Fourier, on peut voir que les composantes de la solution qui ont des fréquences différentes se déplacent à des vitesses différentes. Ainsi, il est naturel de penser à un nuage de particules qui ont des énergies différentes et qui, pour cette raison, se déplacent à des vitesses différentes. C'est pourquoi l'on parle de dispersion. Comme *les particules se dispersent*, la probabilité de présence dans un région compacte fixée de l'espace décroît.

Dans les deux cas, la propriété est appelée propriété dispersive, de manière à unifier les cas de propagation à vitesse finie et infinie.

Décrivons maintenant nos résultats plus en détail. Rappelons tout d'abord certains résultats. Considérons l'équation de Schrödinger en dimension n :

$$i\partial_t u + G_0 u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x),$$

où G_0 est la réalisation auto-adjointe de $-\Delta$ sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 1$. Le domaine de G_0, $D(G_0)$, est l'espace de Sobolev $H^2(\mathbf{R}^n)$. La solution de l'équation de Schrödinger est donnée par $e^{itG_0}u_0$, où le groupe unitaire fortement continu e^{itG_0} est défini par le calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints. Comme la solution peut s'écrire explicitement :

$$u(t,x) = e^{itG_0}u_0(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy,$$

on obtient directement l'estimation dispersive suivante

$$\|u(t)\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left|e^{itG_0}u_0(x)\right| \le C|t|^{-n/2}\|u_0\|_{L^1}, \quad t\neq 0.$$

Comme nous avons conservation de la norme L^2 pour le problème libre, par interpolation entre l'estimation L^2-L^2 et l'estimation L^1-L^∞, nous obtenons pour l'équation de Schrödinger :

$$\|e^{itG_0}\|_{L^{p'}\to L^p} \le C|t|^{-\alpha n/2}, \quad t\neq 0,$$

pour tout $2\le p\le +\infty$, $\alpha = 1-2/p$ et $1/p+1/p' = 1$.

L'estimation correspondante pour l'équation des ondes est plus délicate. Bien que déjà connue dans certains cas, la première analyse complète a été l'article de von Wahl [77], qui a prouvé que la solution de l'équation des ondes en dimension n, $n\ge 2$:

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), \quad \text{et ainsi } u = \frac{\sin(t\sqrt{G_0})}{\sqrt{G_0}}u_1,$$

vérifie l'estimation de dispersion suivante

$$|u(t,x)| \le C(1+|t|)^{-\frac{n-1}{2}}\|u_1\|_{W^{N,1}}, \quad \forall x\in\mathbf{R}^n,$$

pour $N = N(n)$ assez grand et où $W^{N,1}$ désignent l'espace de Sobolev usuel. Cette estimation a été améliorée par Brenner (qui a introduit l'utilisation d'espaces de Besov), Pecher, Kapitanski [43], Ginibre et Velo [24] [25] [26], et d'autres, et finalement, l'estimation optimale suivante a été obtenue

$$|u(t,x)| \le Ct^{-\frac{n-1}{2}}\|u_1\|_{B_{1,1}^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Ici $B_{1,1}^{\frac{n-1}{2}}$ désigne l'espace de Besov homogène. Pour éviter le recours à des sous-espaces de $L^1(\mathbf{R}^n)$, nous pouvons autoriser une perte supplémentaire de dérivées :

$$\left\|e^{it\sqrt{G_0}}f\right\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon|t|^{-(n-1)/2}\left\|(-\Delta)^{(n+1)/4-\varepsilon}(1-\Delta)^{2\varepsilon}f\right\|_{L^1}, \quad 0<\varepsilon\ll 1,$$

$$\left\|e^{it\sqrt{G_0}}f\right\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon|t|^{-(n-1)/2}\log(2+|t|)\left\|(-\Delta)^{(n+1)/4}(1-\Delta)^{2\varepsilon}f\right\|_{L^1}, \quad 0<\varepsilon\ll 1,$$

En ce qui concerne l'estimation $L^{p'}-L^p$, Strichartz a démontré dans [69] et [70]

$$\left\|e^{it\sqrt{G_0}}f\right\|_{L^p} \le C_\varepsilon|t|^{-\alpha(n-1)/2}\left\|G_0^{\alpha(n+1)/4}f\right\|_{L^{p'}},$$

pour tout $2\le p<+\infty$ et $\alpha = 1-2/p$.

Il est logique que l'estimation pour l'équation des ondes soit plus délicate car nous avons les différences de comportement suivantes :

- équation des ondes : réversibilité (groupe), pas d'action régularisante, vitesse de propagation finie, solution élémentaire à support compact en x pour tout $t>0$ fixé,
- équation de Schrödinger : réversibilité (groupe), action régularisante en x lorsque t croît ($t\neq 0$), "vitesse de propagation infinie", solution élémentaire dont le support est $\mathbf{R}_x^n$ pour $t>0$ fixé.

Nous retiendrons aussi que la solution élémentaire de l'équation de Schrödinger est régulière alors que celle de l'équation des ondes est une distribution.

Ces estimations seront dorénavant appelées estimations dispersives $L^1 - L^\infty$ usuelles ou pour l'opérateur libre.

La question qui guide cette thèse est la suivante : quelle part des propriétés dispersives est préservée si nous perturbons les équations par un potentiel ?

L'étude de ces propriétés est fondamentale à plusieurs titres. Tout d'abord, elle est importante du point de vue physique dans l'étude des propriétés asymptotiques des solutions : par exemple, en théorie du scattering, le problème le plus important est de déterminer l'amplitude des ondes après interaction, mais pas le mécanisme précis de l'interaction. De plus, des estimations dispersives ont été utilisées avec succès dans beaucoup de problèmes non-linéaires ; en particulier, pour l'équation semi-linéaire de Schrödinger et pour l'équation des ondes, la théorie moderne de l'existence de solutions locale et globale est basée essentiellement sur ces estimations. Nous mentionnons entre autre, les résultats d'exitence globale pour des petites données pour des perturbations semi-linéaires, et l'existence locale pour des solutions à faible régularité (dus à von Wahl, Strichartz, John, Pecher, Brenner, Klainerman, Kapitanski, Shatah, Struwe, Kenig, Ponce, Vega, Bourgain, Tao et d'autres).

Remarquons qu'il est facile de détruire les propriétés dispersives en perturbant par un potentiel. Par exemple, si nous ajoutons à $-\Delta$ un terme de potentiel négatif $V(x)$, $V < 0$, il est bien connu que l'opérateur $-\Delta + V(x)$ possède des vecteurs propres $u(x)$ pour des valeurs propres strictement négatives, à condition que V soit suffisamment grand. Ensuite, il suffit de considérer l'onde correspondante, de la forme $e^{i\lambda t}u(x)$, pour produire une solution de l'équation d'évolution avec une norme constante en temps. Ainsi, le potentiel V doit satisfaire des hypothèses convenables.

Pour éliminer le problème des valeurs propres, nous ferons des hypothèses convenables sur le potentiel et nous introduirons P_c la projection sur le spectre continu. Ainsi, en ne s'intéressant par exemple qu'à l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ pour l'équation de Schrödinger, le nouveau problème est le suivant :
A-t-on $\|e^{itG}P_c\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}$, $t \neq 0$ pour l'équation de Schrödinger, où P_c désigne la projection sur le spectre continu ?

Un autre obstacle à l'obtention d'estimations dispersives est la présence de résonances. Citons pour introduire ce problème les travaux de Rauch [57] et Jensen et Kato [38] dans lesquels les auteurs ont étudié les estimations dispersives $L^2 - L^2$ avec certains poids, exponentiel pour Rauch et polynomial pour Jensen et Kato :

$$\left\| e^{-\varepsilon|x|} e^{it(-\Delta+V)} P_c e^{-\varepsilon|x|} \right\|_{L^2\to L^2} \leq C(1+|t|)^{-1/2},$$

avec la condion $e^{2\varepsilon|x|}V(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ dans [57] et

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} e^{it(-\Delta+V)} P_c \langle x\rangle^{-s} \right\|_{L^2\to L^2} \leq C(1+|t|)^{-1/2}, \quad s > 5/2,$$

avec la condion $\langle x\rangle^{\beta}|V(x)| \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$, $\beta > 3$ dans [38]. La décroissance en $(1+|t|)^{-1/2}$ au lieu de $(1+|t|)^{-3/2}$ est due à la présence de résonances à l'énergie 0. Ainsi, les résonances sont un autre obstacle pour des estimations dispersives. Rauch et Jensen et Kato, en supposant l'absence de résonances en 0, ont montré

$$\left\| w e^{it(-\Delta+V)} P_c w \right\|_{L^2 \to L^2} \leq C|t|^{-3/2},$$

avec $w(x) = e^{-\rho\langle x \rangle}$ avec un certain $\rho > 0$ et V exponentiellement décroissant (Rauch) ou $w(x) = \langle x \rangle^{-\sigma}$ pour $\sigma > 0$ et V décroissant comme une certaine puissance (Jensen, Kato). La perte de décroissance peut apparaître aussi si 0 est une valeur propre même si P_c est sensé éliminer les fonctions propres correspondantes. Les deux articles [57] et [38] sont basés sur des développements asymptotiques du propagateur lorsque $t \to \infty$ sur des espaces L^2 à poids. Nous préciserons plus loin l'importance du comportement en 0 (valeur propre, résonance, les deux ou ni l'un ni l'autre).

Voyons quelques stratégies pour prendre en compte les problèmes liés aux valeurs propres et aux résonances. Rappelons qu'il y a deux façons de voir le spectre d'un opérateur :

- en distinguant σ_{pp}, σ_{ac} et σ_{sc} (ensembles non nécessairement disjoints) ; nous avons $\sigma_{cont} = \sigma_{ac} \cup \sigma_{sc}$ et $\sigma = \overline{\sigma_{pp}} \cup \sigma_{cont}$ ainsi que la décomposition pour un opérateur auto-adjoint :

$$L^2(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^n)_{pp} \oplus L^2(\mathbf{R}^n)_{ac} \oplus L^2(\mathbf{R}^n)_{sc},$$

- en distinguant σ_{dis} et σ_{ess} (ensembles toujours disjoints) ; nous avons $\lambda \in \sigma_{ess}$ si, et seulement si $\lambda \in \sigma_{cont}$ ou λ est un point limite de σ_{pp} ou encore λ est un valeur propre de multiplicité infinie ; nous avons $\lambda \in \sigma_{dis}$ si, et seulement si λ est un point isolé de σ ou λ est un valeur propre de multiplicité finie.

Rappelons aussi deux théorèmes :

Théorème 1.1 *Théorème de Kato-Rellich.*
Si le domaine de V inclut $D(-\Delta)$ et $\|V\psi\| \leq a\|\psi\| + b\|\Delta\psi\|$ avec $a > 0$ et $0 \leq b < 1$, alors $-\Delta + V$ est auto-adjoint sur $D(-\Delta)$.

Théorème 1.2 *Théorème de Weyl.*
Si V est une perturbation relativement compacte de $-\Delta$ alors $-\Delta + V$ est auto-adjoint et $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$.

C'est pourquoi nous considérerons des potentiels à valeurs réelles, V perturabtion relativement compacte de $-\Delta$. Sous ces conditions $-\Delta + V$ admet une unique réalisation auto-adjointe sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ que nous désignons par G. Il est bien connu que les opérateurs G_0 et G possède le même domaine de définition ainsi que le même spectre essentiel qui consiste en l'intervalle $[0, +\infty)$. De plus, le caractère auto-adjoint de G nous permet d'utiliser le calcul fonctionnel approprié pour travailler sur le propagateur e^{itG}.

Rappelons aussi quelques théorèmes qui montrent pourquoi de nombreux auteurs se sont intéressés principalement à deux classes de potentiel : les potentiels décroissant à l'infini et les petits potentiels.

Théorème 1.3 *Théorème de Kato-Agmon-Simon*
Si V est borné en dehors d'une boule et $|x|V(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, alors G n'a pas de valeur propre strictement positive.

$N(V)$ désigne le nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur $-\Delta + V$.

Théorème 1.4 *Borne de Birman-Schwinger*

$$N(V) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int_{\mathbf{R}^6} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dxdy.$$

L'intégrale apparaissant dans le majorant est la norme de Rollnik au carré, noté $\|\cdot\|_R^2$. Remarquons que si $\|V\|_R < 4\pi$, alors $N(V) = 0$.

Théorème 1.5 *Borne de Cwikel-Lieb-Rosenbljum*

$$N(V) \leq c_n \int_{\mathbf{R}^n} |V_-(x)|^{n/2} dx, \quad n \geq 3$$

Ainsi, si $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\delta}$ avec $\delta > 2$, nous avons $V_- \in L^{n/2}(\mathbf{R}^n)$ et donc les valeurs propres négatives sont en nombre fini et de multiplicité finie.

Si $d \geq 3$ et V est petit, nous pouvons procéder de manière perturbative. Un approche purement perturbative ne peut pas fonctionner en présence d'états liés pour G comme ceux-ci doivent être écartés. Comme il est connu que des états liés peuvent apparaître pour des potentiels arbitrairement petits en dimensions $d = 1, 2$, une approche perturbative sera plus difficile dans ces dimensions.

Définition 1.6 *V est appelé potentiel d'Agmon si $V(x) = \langle x\rangle^{-1-\varepsilon} W(x)$ pour $\varepsilon > 0$ et W une perturbation relativement compacte de $-\Delta$.*

Par exemple, pour $n/2 < p < \infty$ et $p \geq 2$, si $\langle x\rangle^{1+\varepsilon} V \in L^p$, V est un potentiel d'Agmon.

Théorème 1.7 *Théorème de Agmon-Kato-Kuroda*
Si V est un potentiel d'Agmon. Alors

- *l'ensemble $\mathcal{E}^+$ des valeurs propres positives est un ensemble discret de $(0, \infty)$ et chaque valeur propre a une multiplicité finie.*
- *$\sigma_{sing}(G) = \emptyset$.*
- *Les opérateurs d'ondes existent et sont complets.*

Détaillons un peu ces résultats. Kato [44] a prouvé que si V est borné et vérifie $\lim\limits_{|x|\to\infty} |x||V(x)| = 0$, alors il n'y a pas de valeurs propres positives. Agmon [1] et Simon [64] ont prouvé l'absence de valeurs propres positives lorsque le potentiel V peut être écrit $V = V_1 + V_2$, où V_1 vérifie la condition de Kato et V_2 est un potentiel réel à longue portée. La condition de décroissance ponctuelle de Kato est optimale au sens où Wigner et Von Neumann ont donné un exemple de potentiel décroissant en $1/|x|$ et possédant une valeur propre strictement positive.

Une classe intéressante à étudier est la classe des potentiels à courte portée. Nous rappelons qu'un potentiel réel $V \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ est dit à courte portée ou appartenir à la classe SR si, pour un certain $\varepsilon > 0$, l'opérateur de multiplication $u \mapsto \langle x\rangle^{1+\varepsilon} V(x) u$ définit un opérateur compact de $H^2(\mathbf{R}^n)$ sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Sous cette condition, le spectre de G est de la forme $\sigma(G) = [0, \infty) \cup \{\lambda_j\}$ où $[0, \infty)$ est le spectre essentiel de G et $\{\lambda_j\}$ est l'ensemble discret des valeurs propres négatives de multiplicité finie, ayant 0 comme seule point limite.

Agmon [2] considère des perturbations par des potentiels à courtes portées (*short-range* ou *SR*). Il montre que sous cette condition, le spectre discret positif de G est un ensemble discret de $\mathbf{R}_+^*$ et qu'il n'y a pas de résonances sur $\mathbf{R}_+^*$, seulement des valeurs propres. Il montre aussi le principe d'absorption aux limites, c'est-à-dire que pour une certaine topologie la fonction à valeurs opérateur $(G - z)^{-1}$, définie pour z non-réel, se prolonge de manière continue au bord depuis les deux côtés de l'axe réel (en excluant l'ensemble discret des valeurs propres). Il montre aussi l'existence de l'opérateur d'onde. Le principe d'absorption aux limites est un outil important dans notre étude et de nombreux auteurs ont cherché à le prouver sous des conditions moins restrictives.

Ainsi, par exemple, si V est de classe SR, deux types de solutions intéressantes apparaissent :
– les états liés $e^{i\omega t}u_0(x)$ pour lesquels $|u(t,x)|$ est indépendant du temps.
– les états de diffusion $u(t,x)$ avec la propriété

$$\int_B |u(t,x)|^2\,dx \to 0 \quad \text{lorsque } t \to +\infty, \quad \forall B \text{ boule de } \mathbf{R}^n.$$

Une question fondamentale concernant les solutions de diffusion est de savoir à quel taux elles décroissent. Comme $V(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, il est naturel de s'attendre à ce que pour des solutions de diffusion, il existe $u_+(t) = e^{itG_0}u_+(0)$ avec $\|u(t) - u_+(t)\|_{L2(\mathbf{R}^3)} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. Ainsi, une problématique importante en relation avec les estimations dispersives est l'étude des propriétés de diffusion, notamment autour de l'existence de l'opérateur d'onde.

Mais supposer que V est un potentiel à valeurs réelles $V \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\delta}$, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ avec $\delta > 1$ et ainsi que $\sigma_{ac}(G_0) = \sigma_{ac}(G) = [0, +\infty)$, $\sigma_{sing} = \emptyset$ et G ne possède pas de valeurs propres ou résonances > 0 n'est pas toujours suffisant pour avoir une estimation dispersive du type $\|e^{itG}P_{ac}\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}$ où P_{ac} est la projection sur le spectre absolument continu de G.

En effet, sous ces hypothèses, nous pouvons encore avoir 0 valeur propre ou résonance. Plus généralement, en présence d'états liés, la nature de la mesure spectrale et/ou de la résolvante de G deviennent essentielles.

Un des objectifs de cette thèse est d'étudier attentivement la nature de la résolvante pour pouvoir considérer une large classe de potentiel incluant notamment de grands potentiels.

Une autre manière de voir l'importance de l'étude de la résolvante est la suivante : si nous regardons les noyaux des résolvantes libres $(G_0 - z)^{-1}$ en dimension 1 et 3, nous avons les noyaux suivants :

$$n = 1 : \quad \frac{i}{2\sqrt{z}}e^{i\sqrt{z}|x-y|} \quad \text{et} \quad n = 3 : \quad \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{|x-y|}.$$

Nous voyons que le noyau en dimension 3 se comporte raisonnablement lorsque $z \to 0$. Dans le cas $n \geq 4$, le noyau de la résolvante libre a aussi un comportement raisonnable lorsque $z \to 0$. Dans le cas $n = 1$, le noyau est singulier en $z \to 0$ et les mêmes techniques ne peuvent donc pas être employées pour la dimension 1 et les dimensions $n \geq 3$. Mais si les propriétés de la résolvante libre sont bien connues, il est plus difficile de voir comment elles se traduisent sur la résolvante perturbée.

Un des objectifs de cette thèse est de souligner le changement de comportement en fonction de la dimension.

Jensen et Kato [38] pour $n = 3$ puis Murata [54], Jensen [36] pour $n \geq 5$ et [37] pour $n = 4$, sous les hypothèses un peu plus fortes $V(x) = O(|x|^{-\beta})$ avec $\beta > 1$ pour $n = 3$ et $\beta > 2$ pour $n \geq 4$, (éliminant ainsi la présence de valeurs propres strictement positives), montrent des développements asymptotiques en z de la résolvante $(G - z)^{-1}$ en distingant les cas où 0 n'est pas valeur propre des cas où 0 est valeur propre ou résonance. Ces développements reposent sur une itération de la formule liant la résolvante $R(z)$ à la résolvante libre ainsi que sur des propriétés des fonctions de Hankel qui apparaissent dans l'expression du noyau de la résolvante libre R_0.

Vingt ans plus tard, Ionescu et Jerison [34] montrent l'absence de valeurs propres positives pour G pour une classe de potentiels plus larges que les précédentes. Soit $q \in [n/2, \infty]$ (ou $q \in (1, \infty]$ si $n = 2$) et soit $\beta(q) = (2q - n)/(2q)$, la classe de potentiel considérée est $V \in L^{n/2}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ (ou $V \in L^r_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $r > 1$, si $n = 2$) et

$$\lim_{R \to \infty} R^{\beta(q)} \|V\|_{L^q(R \leq |x| \leq 2R)} = 0.$$

Koch et Tataru [50] obtiennent l'absence de valeurs propres pour une large classe de potentiels qui inclue $V \in L^{n+1/2}(\mathbf{R}^n)$ améliorant ainsi le résultat de Ionescu et Jerison où $V \in L^{n/2}(\mathbf{R}^n)$.

Le principe d'absorption aux limites d'Agmon [2] a ainsi été amélioré en dimension 3 par Golberg et Schlag [31]. Agmon [2] utilisait le théorème de Kato avec la condition de décroissance ponctuelle pour montrer l'absence de valeurs propres plongées alors que Schlag et Golberg utilise la condition d'intégrabilité de Ionescu et Jerison.

Enfin, Ionescu et Schlag [35] ont récemment amélioré le théorème de Agmon-Kato-Kuroda pour une classe plus large de potentiels : V à valeurs réelles, $V \in L^q(\mathbf{R}^n)$, $q \in [n/2, (n+1)/2]$ (si $n = 2$, alors $q \in (1, 3/2])$ ainsi que pour des potentiels à valeurs réelles vérifiant une condition de Kato globale.

Pour résumer, les potentiels étudiés vérifient soit une condition de décroissance à l'infini soit une condition d'intégrabilité. Dans les deux cas, l'hypothèse assure que le spectre essentiel est $\sigma_{ess}(G) = \sigma_{ess}(G_0) = [0, \infty)$ et que G ne possède pas de valeurs propres ni de résonances strictement positives. De plus, nous avons à notre disposition un principe d'absorption aux limites ainsi qu'un développement de la résolvante. Par contre, le cas de l'énergie 0 est traité séparément. Des résultats sont prouvés sous les hypothèses supplémentaires 0 point régulier (ni valeur propre ni résonance) ou non.

Dans cette thèse, nous étudierons exclusivement le cas où 0 est un point régulier (ie ni valeur propre, ni résonance). De plus, nous privilégierons l'étude de la résolvante à l'étude du spectre pour prouver les estimations dispersives contrairement à l'approche la plus souvent employée.

Revenons d'ailleurs aux estimations dispersives en commençant par les résultats concernant l'équation de Schrödinger.

Une avancée significative a été réalisée par Journé, Soffer et Sogge [42] pour les dimensions $n \geq 3$. Ils supposent que l'opérateur $\langle x \rangle^\delta V(x) : H^\gamma(\mathbf{R}^n) \to H^\gamma(\mathbf{R}^n)$ est borné, avec $\gamma > 0$ et $\delta > n + 4$ ainsi que $\hat{V} \in L^1$. Nous avons $\delta > 2$ en particulier donc des hypothèses convenables sur le spectre. Les auteurs montrent l'estimation dispersive $L^1 \to L^\infty$ sous la condition 0 point régulier.

La démonstration utilise une méthode dépendant du temps et un développement du propagateur obtenu par itération de la formule de Duhamel. Pour des hautes énergies, l'estimation pour contrôler la petitesse du propagateur e^{itG} apparaissant dans le membre de droite d'un tel développement est obtenue à l'aide d'estimations de régularité de Kato. Pour les basses énergies, elle utilise le développement de la résolvante proche de zéro. Comme la méthode est basée sur l'intégrabilité de $t^{-n/2}$ à l'infini, elle ne peut être utilisée qu'en dimension $n \geq 3$ et elle nécessite aussi plus de régularité sur V ($\hat{V} \in L^1$). Notons que l'hypothèse $\delta > n + 4$ est nécessaire aux basses fréquences, elle peut être affaiblie en $\delta > n$ aux hautes fréquences.

Notons que les auteurs ont aussi montré l'estimation de Strichartz

$$\left\|e^{itG}P_{ac}f\right\|_{L^p(\mathbf{R}^{n+1})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)},$$

où $p = 2 + 4/n$. Ils ont aussi conjecturé que sous les conditions 0 point régulier et $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-2-\varepsilon}$, avec $\varepsilon > 0$ arbitraire, alors l'estimation de Strichartz suivante est vérifiée :

$$\left\|e^{itG}P_{ac}f\right\|_{L^q_t(L^p_x)} \leq C\|f\|_2, \quad \text{pour tout } \frac{2}{q} + \frac{n}{p} = \frac{n}{2},\ 2 < q \leq \infty$$

L'hypothèse de décroissance ponctuelle ainsi que les hypothèses de régularité ont été réduites par Yajima [82] pour les dimensions $n \geq 3$ puis Golberg et Schlag [30] pour la dimension $n = 3$.

En effet, Yajima suppose $\delta > n + 2$ plutôt que $\delta > n + 4$ mais conserve l'hypothèse $\hat{V} \in L^1$. Yajima utilise les opérateurs d'onde. Présentons brièvement sa technique :
Soit $W = s - \lim_{t\to\infty} e^{-itG}e^{itG_0}$ l'opérateur d'onde habituel. Les opérateurs d'onde sont des isométries, avec les propriétés suivantes $e^{itG}W = We^{itG_0}$, $\mathrm{Im}(W) \subset L^2_{ac}(G)$, $W^*W = id_{L^2}$ et $WW^* = P_{ac}$ dans le cas complet (cf théorème d'Agmon-Kato-Kuroda).

Donc $e^{itG}P_{ac} = We^{itG_0}W^*$ et si $\|W\|_{L^\infty\to L^\infty}$ est finie, alors

$$\|e^{itG}P_{ac}\|_{1\to\infty} = \|We^{itG_0}W^*\|_{1\to\infty} \leq C|t|^{-n/2}.$$

En dimension 3, l'hypothèse sur $\hat{V}$ n'est plus nécessaire et Goldberg et Schlag ont montré l'estimation dispersive pour des potentiels avec $\delta > 3$. Vodev [73] et Yajima [84] ont finalement amélioré l'hypothèse en supposant seulement $\delta > 5/2$.

En dimension 3, Goldberg [28] et [29] a montré l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ pour $V \in L^{3/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^3) \cap L^1(\mathbf{R}^3)$ et $V \in L^p(\mathbf{R}^3) \cap L^q(\mathbf{R}^3)$, $p < 3/2 < q$ respectivement avec l'hypothèse 0 point régulier. La possibilité de travailler avec des conditions d'intégrabilité dépend du résultat de Ionescu et Jerison [34]. Remarquons que si $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\delta}$, $\delta > 2$, nous avons V qui vérifie $V \in L^{3/2-\varepsilon}(\mathbf{R}^3) \cap L^{3/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^3)$ pour ε assez petit.

Rodnianski et Schlag [62] ont montré l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ pour un potentiel vérifiant $\|V\|_K < 4\pi$ ainsi que $\|V\|_R < 4\pi$ où

$$\|V\|_K := \sup_{y\in\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} |V(x)||x-y|^{-1}\,dx, \quad \|V\|_R^2 := \int_{\mathbf{R}^6} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}\,dxdy.$$

Remarquons que $\|V\|_K \leq C\|V\|_{L^{3/2-\delta}} + C\|V\|_{L^{3/2+\delta}}$.

Ces deux derniers résultats sont les meilleurs résultats actuellement : le second pour les petits potentiels, le premier pour des potentiels grands vérifiant des conditions de décroissance et/ou d'intégrabilité.

En dimension 1, en utilisant comme Yajima des techniques basées sur l'opérateur d'onde, Weder [79] et [80] a prouvé l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ sous l'hypothèse $V \in L^1_\gamma(\mathbf{R})$, $\gamma > 3/2$ lorsque 0 est un point régulier et $\gamma > 5/2$ lorsque 0 est une résonance. L^1_γ désigne l'espace des fonctions ϕ mesurables à valeurs complexes, définies sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\|\phi\|_{L^1_\gamma} := \int_{\mathbf{R}} |\phi(x)|(1+|x|)^\gamma\,dx < \infty.$$

Goldberg et Schlag [30] ont ensuite amélioré ce résultat en supposant $V \in L^1_1(\mathbf{R})$ dans le cas où 0 est un point régulier. Le théorème de [30] traite aussi le cas $V \in L^1_2$ pour lequel l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ a lieu qu'il y ait ou non une résonance en 0.

En dimension 2, Yajima [83] a étendu ses résultats prouvés en dimension ≥ 3. Les hypothèses deviennent $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\delta}$, $\delta > 6$ et une condition de régularité pour l'énergie 0. Pour des estimations dispersives $L^p - L^{p'}$ avec $1 < p < \infty$, Jensen et Yajima [41] ont prouvé le résultat sous la même hypothèse pour le potentiel et sous l'hypothèse habituelle 0 point régulier. Schlag [64] améliore ce résultat en supposant uniquement $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\beta}$, $\beta > 3$ et 0 point régulier. Il utilise un résultat plus précis de Jensen et Nenciu [40] sur le développement de la résolvante près des de 0.

Remarque 1.8 *la principale difficulté en dimension* 2 *est la partie aux basses énergies. Cela est dû au fait que la résolvante libre* $R_0^\pm(\lambda^2) = (G_0 - (\lambda^2 \pm i0))^{-1}$ *a pour noyau* $H_0^\pm$ *(la fonction de Hankel) qui est singulière en* 0*.*

En dimension $n \geq 2$, Murata [54] a montré des estimations dispersives L^2 pour des hypothèses sur la norme de V vu comme opérateur entre des espaces à poids. En toute dimension, Jensen et Nakamura [39] ont montré des estimations dispersives L^p presque optimales et pour des espaces de Besov.

Citons aussi Erdogan et Schlag [21] [22] qui ont étudié les estimations dispersives en présence d'une valeur propre et/ou d'une résonance au niveau d'énergie 0. Dans le premier article, l'hypothèse sur V est du type $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\beta}$ avec $\beta > 12$, mais l'objectif des auteurs n'était pas de trouver la décroissance optimale du potentiel.

Parallèlement, des estimations dispersives pour l'équation des ondes ont été étudiées. Beals et Strauss [5] ont montré des estimations dispersives pour l'équation des ondes sous deux types de conditions sur le potentiel, une portant sur des petits potentiels, l'autre sur des potentiels plus réguliers. La condition peut s'exprimer ainsi : $|V(x)| \leq c_0\langle x\rangle^{-\delta}$ avec une des deux hypothèses

- c_0 est suffisamment petit et $\delta > 4$ pour $n = 3$, $\delta > n$ pour $n \geq 5$ impair et $\delta > n + 1/2 + 1/(n+1)$ pour $n \geq 4$ pair.
- $V(x) \geq 0$ et $\delta > 3n + 1/2 - 1/(n+1)$ ainsi que des majorations des derivées de V jusqu'à un certain ordre.

Beals [4] a poursuivi ce travail en montrant des estimations analogues à celles portant sur G_0 en supposant $V \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 3$ avec V suffisamment petit ou positif.

En dimension $n = 3$, Cuccagna [13] améliore le résultat de [5] en prenant un potentiel vérifiant $|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-3-\varepsilon}$ pour $|\alpha| \leq 2$.

Georgiev et Visciglia [23] ont montré que l'estimation dispersive usuelle pour l'équation des ondes est vérifiée en supposant $V(x) \in C^\alpha(\mathbf{R}^3\backslash 0)$, $\alpha \in]0, 1[$ et

$$0 \leq V(x) \leq C|x|^{-2-\varepsilon},\ |x| \geq 1 \quad 0 \leq V(x) \leq C|x|^{-2+\varepsilon},\ |x| \leq 1$$

En fait, dans ce cas, $V \in L^{3/2-\delta}(\mathbf{R}^3) \cap L^{3/2+\delta}(\mathbf{R}^3)$ pour δ petit.

Cardoso et Vodev [12] ont montré des estimations dispersives à poids pour l'équation des ondes en dimension 3, $1 < p < +\infty$ avec l'hypothèse suivante sur V : $|V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-2-\delta}$, $\delta > 0$.

Vodev [76] a étudié la décroissance de l'énergie locale pour l'équation des ondes en dimension $n \geq 3$ avec des potentiels à courte portée ie $0 \leq V(x) \leq C\langle x\rangle^{-\delta}$, $\delta > 1$.

Pierfelice [56] a montré l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ pour $\|V\|_K \leq 4\pi$, ce résultat prolonge le résultat de [23].Ce résultat est étendu à une classe plus large de potentiels dans [17].

Cardoso, Cuevas et Vodev [10] ont montré des estimations dispersives à hautes fréquences en dimensions 2 et 3 pour des potentiels $V(x) = O(\langle x\rangle^{-(n+1)/2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, sans régularité supplémentaire.

Cuevas et Vodev [15] améliorent le résultat de [23] en montrant des estimations dispersives L^p, $2 < p < +\infty$ pour des potentiels à valeurs réelles qui décroissent lentement à l'infini.

Ainsi pour l'équation des ondes comme pour l'équation de Schrödinger, le cas de la dimension 3 est souvent traité, avec deux types d'hypothèses sur le potentiel : petitesse ou condition de décroissance/intégrabilité. En dimension ≥ 4, les derniers résultats sont celui de Beals et Strauss [5] pour l'équation des ondes et celui de Yajima [82] pour l'équation de Schrödinger. Dans ces deux travaux, une condition supplémentaire de régularité est nécessaire pour obtenir l'estimation dispersive usuelle (celle du cas $V = 0$).

Pour l'équation de Schrödinger en dimension $n \geq 4$, Goldberg et Visan [32] ont montré que l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ usuelle n'a pas lieu pour un potentiel V à support compact, $V \in C^\alpha$, $\alpha < (n-3)/2$. Ceci sugggère que l'estimation dispersive peut avoir lieu pour des potentiels suffisamment régulier (en plus d'une décroissance suffisante à l'infini), d'autres critères comme le nombre et la taille des dérivées détermine ce qui se passe en l'absence d'une régularité aussi forte. Nous ne pouvons donc pas espérer l'estimation usuelle sans perte de dérivées. C'est pourquoi nous chercherons dans cette thèse à expliciter cette perte de dérivée en dimension $n \geq 4$ si nous ne faisons pas d'hypothèses supplémentaires de régularité mais nous chercherons aussi à améliorer les résultats connus avec des hypothèses de régularité.

Faisons maintenant un petit détour et présentons brièvement d'autres thématiques relatives aux estimations dispersives : les estimations dispersives pour un potentiel dépendant du temps, les estimations dispersives pour d'autres perturbations du Laplacien et les estimations de Strichartz.

Ainsi, Rodnianski et Schlag [62] ont étudié la décroissance en temps pour des potentiels dépendant du temps avec l'hypothèse :

$$\sup_t \|V(t,\cdot)\|_{L^{3/2}(\mathbf{R}^3)} + \sup_{y\in\mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(\hat{\tau},x)|}{|x-y|} d\tau dx < c_0,$$

où c_0 désigne une petite constante et $V(\hat{\tau},x)$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable de temps.

Par ailleurs, comme déjà mentionné, Journé, Soffer et Sogge [42] ont montré des estimations de Strichartz

$$\left\|e^{itG}P_{ac}f\right\|_{L^{2+4/n}(\mathbf{R}^{n+1})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Yajima [82] puis Goldberg et Schlag [30] en dimension 3 ont affaibli les hypothèses pour lesquelles l'estimation a lieu.

Un autre résultat fondamental sur les estimations de Strichartz est le résultat de Keel et Tao [48]. Ces auteurs montrent que si l'estimation dispersive $L^1 - L^\infty$ a lieu ainsi qu'une estimation usuelle $L^2 - L^2$ alors nous avons l'estimation de Strichartz suivante :

$$\|U(t)f\|_{L^q_t L^r_x} \leq C\|f\|_{L^2},$$

où la paire d'exposants (q,r) est dite σ-admissible ie q, $r \geq 2$, $(q,r,\sigma) \neq (2,\infty,1)$ et $\dfrac{1}{q} + \dfrac{\sigma}{r} = \dfrac{\sigma}{2}$, $\sigma = (n-1)/2$, $n/2$ respectivement pour l'équation des ondes et celle de Schrödinger.

Ensuite de nombreux auteurs ont étudié ces estimations de Strichartz pour des potentiels particuliers. Citons les travaux de Burq, Planchon, Stalker et Tahvildar-Zadeh [8] [9] ou les travaux de D'Ancona et Pierfelice [18] entre autres. Nous voyons que de l'obtention d'une estimation dispersive $L^1 - L^\infty$, nous pouvons déduire des estimations de Strichartz, elles aussi très utiles dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles. Remarquons que souvent l'obtention d'une estimation dispersive est plus difficile que l'obtention d'une estimation d'une estimation de Strichartz car l'obtention de la première implique l'obtention d'une estimation de Strichartz.

Citons aussi d'autres travaux sur les estimations dispersives. Rodnianski et Tao [63] ont étudié la décroissance en temps pour l'équation de Schrödinger sur des variétés. Les fréquences intermédiaires nécessitent l'utilisation du théorème RAGE (qui reflète le fait que G n'a pas de valeur propre plongée) ainsi qu'une version quantitative de la méthode de Enss. Quant aux basses fréquences, elles requièrent l'utilisation d'une inégalité type Poincaré (qui reflète que 0 est un point régulier). D'autre part, citons les travaux de Bouclet et Tzvetkov [7] et Nakamura [55] qui étudient des perturbations à longue portée du Laplacien sur $\mathbf{R}^n$.

Avant de présenter des résultats nouveaux, résumons les problématiques importantes. Pour étudier les estimations dispersives pour les équations des ondes et de Schrödinger perturbées par un potentiel, on doit s'intéresser

- à la présence ou non d'états liés ou d'états résonants,
- au comportement à l'infini des solutions de diffusion.

Ceci est relié aux différentes hypothèses que l'on peut envisager sur le potentiel

- petits potentiels,
- conditions d'intégrabilité ou conditions de décroissance à l'infini,
- conditions de régularité.

Remarquons que le problème principal devient trouver les conditions minimales sur le potentiel $V(x)$ qui garantissent que l'estimation dispersive usuelle (ie du problème libre) reste vraie. En dimension $n = 1, 2, 3$, ce programme a été pratiquement complété, alors qu'en dimension supérieure, il n'est pas toujours clair de voir qu'elles sont les hypothèses minimales.

Les objectifs de cette thèse sont principalement les suivants :

- établir des estimations dispersives pour l'équation des ondes et l'équation de Schrödinger en considérant une perturbation par un potentiel réel en dimension $n \geq 2$, et plus particulièrement,
- souligner la différence de comportement en fonction de la dimension,
- étudier attentivement la nature de la résolvante pour déterminer une large classe de potentiel,
- compléter le programme des dimensions 2 et 3,
- déterminer en dimension $n \geq 4$ une classe importante de potentiels pour lesquels l'estimation dispersive optimale a lieu,
- expliquer le phénomène de perte de régularité en dimension $n \geq 4$.

En dimension $n \geq 4$, des résultats à hautes fréquences pour l'équation de Schrödinger ont été prouvés par Vodev sous l'hypothèse :

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^n), \quad |V(x)| \leq C\langle x\rangle^{-\delta}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \tag{$V\delta$}$$

avec des constantes $C > 0$, $\delta > (n+2)/2$.

Pour traiter séparément hautes et basses fréquences, nous procédons comme suit : étant donné $a > 0$, posons $\chi_a(\sigma) = \chi_1(\sigma/a)$, où $\chi_1 \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\chi_1(\sigma) = 0$ pour $\sigma \leq 1$, $\chi_1(\sigma) = 1$ pour $\sigma \geq 2$. Posons $\eta_a = \chi(1 - \chi_a)$, où χ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, +\infty)$. De manière évidente, $\eta_a(G) + \chi_a(G) = P_{ac}$.

Dans [74], lorsque $n \geq 4$, des estimations dispersives avec une perte de $(n-3)/2$ dérivées pour l'opérateur $e^{itG}\chi_a(G)$, $\forall a > 0$, ont été prouvées sous la condition (Vδ), $\delta > (n+2)/2$, seulement. La perte de dérivées dans ce cas est un phénomène hautes fréquences et ne peut être évitée à moins d'imposer des conditions de régularité sur le potentiel (voir [32]). La condition $\hat{V} \in L^1$ dans [42] joue ce rôle mais elle semble trop forte. Il ressort qu'aucune régularité sur le potentiel n'est nécessaire pour prouver les estimations dispersives pour la partie basses fréquences $e^{itG}\eta_a(G)$, $a > 0$ petit. Nous avons juste besoin d'une décroissance à l'infini. En fait, l'étude à basses fréquences se trouve être plus facile en dimension $n \geq 4$ comparée aux cas $n = 2$ et $n = 3$, et peut être conduite pour une classe plus large de potentiels vérifiant (pour un certain $0 < \varepsilon \ll 1$)

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \left(|x-y|^{-n+2} + |x-y|^{-(n-2)/2+\varepsilon} \right) |V(x)| dx \leq C < +\infty. \tag{VS}$$

De manière évidente, (VS) est vérifiée pour des potentiels vérifiant (Vδ) avec $\delta > (n+2)/2$.

De même, des estimations dispersives à hautes fréquences avec une perte de régularité de $(n-3)/2$ ont été récemment prouvées dans [75] pour le groupe des ondes avec un potentiel à valeurs réelles $V \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 4$, vérifiant

$$|V(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\delta}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.1}$$

avec des constantes $C > 0$, $\delta > (n+1)/2$.

Comme dans le cas du groupe de Schrödinger (voir [53]), les estimations dispersives pour la partie aux basses fréquences $e^{it\sqrt{G}}\eta_a(G)$, $a > 0$ petit, se trouvent être plus faciles à prouver lorsque $n \geq 4$, et ceci peut être fait pour une classe plus large de potentiels. Nous le ferons pour des potentiels vérifiant

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \left(|x-y|^{-n+2} + |x-y|^{-(n-1)/2} \right) |V(x)| dx \leq C < +\infty. \tag{VO}$$

De manière évidente, (VO) est vérifié pour des potentiels vérifiant (Vδ) avec $\delta > (n+1)/2$.

En appendice, nous explicitons les relations entre ces nouvelles hypothèses sur le potentiel et les hypothèses usuelles de décroissance et/ou d'intégrabilité.

En dimension $n = 3$, les méthodes utilisées en dimension $n \geq 4$ s'adaptent pour traiter le cas des basses fréquences pour l'équation des ondes. L'hypothèse (VO) devient

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} |x-y|^{-1} |V(x)| dx \leq C < +\infty, \tag{$V3$}$$

mais elle ne suffit pas. Il faut rajouter l'hypothèse supplémentaire :

$$V \in L^{3/2-\epsilon}(\mathbf{R}^n), \quad 0 < \epsilon \ll 1, \tag{$L3/2-$}$$

qui permet des estimations plus précises dans certains cas. Les méthodes développées permettent aussi de traiter le cas de l'équation de Schrödinger mais cela n'apporte pas de résultats nouveaux puisque nous retrouverions alors les hypothèses de Golberg [28] et [29].

En dimension $n = 2$, les méthodes développées pour les dimensions $n \geq 4$ s'adaptent pour traiter cette fois-ci le cas des hautes fréquences pour l'équation des ondes et de Schrödinger. L'hypothèse sur le potentiel s'écrit

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} |x-y|^{-1/2} |V(x)| dx \leq C < +\infty. \tag{$V2$}$$

Dans le cas de la dimension $n = 2$, une méthode spécifique permet d'obtenir l'estimation dispersive à hautes fréquences sous la même hypothèse sur le potentiel pour l'équation des ondes et celle de Schrödinger.

Les idées principales des méthodes utilisées sont les suivantes :
- des estimations fines sur la résolvante libre en utilisant l'expression de son noyau à l'aide des fonctions de Hankel, lesquelles permettent d'obtenir des estimations sur la résolvante perturbée en inversant $1 + VR_0(\lambda)$ (sous certaines conditions portant sur λ),
- des estimations sur les propagateurs libres et perturbés, en utilisant leur expression qui font intervenir de nouveau les fonctions de Hankel,
- des estimations sur des opérateurs de comparaison entre le propagateur perturbé et le propagateur libre à l'aide d'expressions modifiées de la formule de Duhamel.

1.1 Hypothèses sur le potentiel

Hypothèse 1 *Hypothèse en dimension 2*
- *hypothèse de décroissance :*

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^2), \quad |V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\delta}, \tag{$V(\delta)$}$$

avec $\delta > 3/2$ *pour l'équation des ondes et* $\delta > 2$ *pour l'équation de Schrödinger.*
- *hypothèse en rapport avec le noyau de la résolvante :*

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^{-1/2} |V(x)| dx \leq C < +\infty. \tag{$V2$}$$

Hypothèse 2 *Hypothèse en dimension 3*
- *hypothèse de décroissance :*

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^3), \quad |V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\delta}, \tag{$V(\delta)$}$$

avec $\delta > 2$ *pour l'équation des ondes et* $\delta > 5/2$ *pour l'équation de Schrödinger.*
- *hypothèse en rapport avec le noyau de la résolvante :*

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^3} \int_{\mathbf{R}^3} |x-y|^{-1} |V(x)| dx \leq C < +\infty. \tag{$V3$}$$

- *hypothèse d'intégrabilité :*

$$V \in L^{3/2-\varepsilon}(\mathbf{R}^3), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{$L3/2-$}$$

Hypothèse 3 *Hypothèse en dimension* $n \geq 4$
- *hypothèse de décroissance :*

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^n), \quad |V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\delta}, \tag{$V(\delta)$}$$

avec $\delta > (n+1)/2$ *pour l'équation des ondes et* $\delta > (n+2)/2$ *pour l'équation de Schrödinger.*

– *hypothèse en rapport avec le noyau de la résolvante :*
  – *pour l'équation des ondes*

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\left(|x-y|^{-n+2}+|x-y|^{-\frac{n-1}{2}}\right)|V(x)|\,dx<+\infty, \tag{VOn}$$

  – *pour l'équation de Schrödinger*

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\left(|x-y|^{-n+2}+|x-y|^{-\frac{n-2}{2}+\varepsilon}\right)|V(x)|\,dx<+\infty,\quad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{VSn}$$

2 Estimations dispersives pour l'équation des ondes

Nous avons le résultat suivant à basses fréquences en dimension $n \geq 3$:

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (VOn) en dimension $n \geq 4$ et (V3)+(L3/2-) en dimension $n = 3$ sur le potentiel V et sous l'hypothèse que 0 est un point régulier pour G, il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $0 < a \leq a_0$*

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\frac{n+1}{4}} \eta_a(G) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n-1}{2}} \log(2 + |t|), \quad \forall t, \tag{D1}$$

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\frac{n+1}{4}+\varepsilon} \eta_a(G) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C_\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t, \forall 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{D2}$$

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha\frac{n+1}{4}} \eta_a(G) \right\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C \langle t \rangle^{-\alpha\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t, \tag{D3}$$

où $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = 1 - 2/p$ pour $2 \leq p < +\infty$.

Rappelons les résultats à hautes fréquences prouvés par Vodev en dimension $n \geq 4$ dans [75] :

Théorème 2.2 *Supposons $(V(\delta))$ vérifiée avec $\delta > (n+1)/2$. Alors, pour tout $a > 0$, $2 \leq p < \dfrac{2(n-1)}{n-3}$, il existe une constante $C > 0$ telle que nous ayons l'estimation suivante*

$$\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4} \chi_a(G) \|_{L^{p'} \to L^p} \leq C |t|^{-\alpha(n-1)/2}, \quad \forall t \neq 0,$$

où $1/p + 1/p' = 1$, $\alpha = 1 - 2/p$. De plus, pour tout $a > 0$, $2 \leq p < +\infty$, nous avons

$$\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n-1)/2} \chi_a(G) \|_{L^{p'} \to L^p} \leq C |t|^{-\alpha(n-1)/2}, \quad \forall t \neq 0,$$

et $\forall\, 0 < \varepsilon \ll 1$,

$$\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4} \chi_a(G) \langle x \rangle^{-\alpha(n/2+\varepsilon)} \|_{L^2 \to L^p} \leq C_\varepsilon |t|^{-\alpha(n-1)/2}, \quad \forall t \neq 0.$$

Quant aux estimations pour $p = \infty$, ce sont les suivantes pour tout $0 < \epsilon \ll 1$:

$$\| e^{it\sqrt{G}} G^{-(n-1)/2-\epsilon} \chi_a(G) \|_{L^1 \to L^\infty} \leq C |t|^{-(n-1)/2}, \quad \forall t \neq 0,$$

et $\forall\, 0 < \varepsilon' \ll 1$,

$$\| e^{it\sqrt{G}} G^{-(n+1)/4-\varepsilon'} \chi_a(G) \langle x \rangle^{-\alpha(n/2+\varepsilon')} \|_{L^2 \to L^\infty} \leq C_{\varepsilon'} |t|^{-(n-1)/2}, \quad \forall t \neq 0.$$

Remarque 2.3 *Nous avons aussi l'estimation*

$$\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha((n+1)/4+q/2)} \chi_a(G) \|_{L^{p'} \to L^p} \leq C |t|^{-\alpha(n-1)/2}, \quad \forall t \neq 0,$$

pour tout $0 < q < (n-3)/2$ et pour $2 \leq p < \dfrac{2(n-1-2q)}{n-3-2q}$.

Une estimation de l'article de Vodev a été donnée sans démonstration et s'est révélée plus difficile que prévue à justifier, c'est pourquoi nous en donnons la démonstration dans la section 2.1.2.

Nous pouvons ainsi déduire un résultat global :

Théorème 2.4 *Supposons $n \geq 4$ et supposons ($V(\delta)$) vérifiée pour $\delta > (n+1)/2$. Alors pour tout $2 \leq p < +\infty$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $t \neq 0$, nous avons les estimations suivantes*

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-(n+1)/4} \langle G \rangle^{-(n-3)/4-\varepsilon} P_{ac}\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C_\varepsilon |t|^{-(n-1)/2} \log(2+|t|), \tag{D4}$$

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-(n+1)/4+\varepsilon} \langle G \rangle^{-(n-3)/4-2\varepsilon} P_{ac}\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C_\varepsilon |t|^{-(n-1)/2}, \tag{D5}$$

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4} \langle G \rangle^{-\alpha(n-3)/4} P_{ac}\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C|t|^{-\alpha(n-1)/2}. \tag{D6}$$

De plus pour tout $0 \leq q \leq (n-3)/2$, $2 \leq p < \frac{2(n-1-2q)}{n-3-2q}$, nous avons

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4} \langle G \rangle^{-\alpha q/2} P_{ac}\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C|t|^{-\alpha(n-1)/2}, \tag{D7}$$

où $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = 1 - 2/p$.

Nous avons également le théorème suivant en dimension $n = 2$:

Théorème 2.5 *Soit V vérifiant (V2). Alors, il existe une constante $a_0 > 0$ telle que pour tout $a \geq a_0$, $0 < \epsilon \ll 1$, $2 \leq p < +\infty$, nous ayons les estimations*

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-3/4-\epsilon} \chi_a(G) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C_\epsilon |t|^{-1/2}, \quad t \neq 0, \tag{D8}$$

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-3\alpha/4} \chi_a(G) \right\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C|t|^{-\alpha/2}, \quad t \neq 0, \tag{D9}$$

où $1/p + 1/p' = 1$, $\alpha = 1 - 2/p$.

2.1 Estimations utiles en dimension $n \geq 2$ et à toute fréquence

2.1.1 Estimations autour de la résolvante

Soit $\psi \in C_0^\infty((0,+\infty))$ et soit $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda^2)$. Nous souhaitons obtenir des estimations sur $\psi(h^2G_0)$ et $\psi(h^2G)$. Pour cela, nous allons utiliser la formule de Helffer-Sjöstrand (avec $H = G_0$ ou $H = G$) :

$$\psi(h^2H) = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)(h^2H - z^2)^{-1} z L(dz), \tag{HS}$$

où $L(dz)$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$, $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ est un prolongement presqu'analytique de φ supporté dans un petit voisinage complexe de $\operatorname{supp}\varphi$ et vérifiant

$$\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right| \leq C_N|\operatorname{Im} z|^N, \quad \forall N \geq 1.$$

Notons

$$C_\varphi^\pm = \{z \in \operatorname{supp}\tilde{\varphi},\ \pm\operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Vu la formule de Helffer-Sjöstrand, les estimations désirées seront déduites d'estimations sur les résolvantes obtenues pour $z \in C_\varphi^\pm$.

Pour $\pm\operatorname{Im} z > 0$, désignons

$$\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z) = (h^2G_0 - z^2)^{-1}, \quad \mathcal{R}_h^\pm(z) = (h^2G - z^2)^{-1}.$$

Ces résolvantes sont liées par

$$\mathcal{R}_h^\pm(z)\left(1 + h^2V\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z)\right) = \mathcal{R}_{0,h}^\pm(z) \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}_h^\pm(z) - \mathcal{R}_{0,h}^\pm(z) = h^2\mathcal{R}_h^\pm(z)V\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z), \quad \pm\operatorname{Im} z > 0.$$

Nous allons chercher des estimations sur $\mathcal{R}_{0,h}^\pm$ pour voir que sous de bonnes hypothèses sur V, nous obtenons des estimations similaires sur $\mathcal{R}_h^\pm$ en inversant $\left(1 + h^2V\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z)\right)$ ainsi que sur $\mathcal{R}_h^\pm - \mathcal{R}_{0,h}^\pm$. Pour déterminer des estimations sur $\mathcal{R}_{0,h}^\pm$, intéressons-nous à son noyau : il est de la forme $R_h^\pm(|x-y|, z)$, où

$$R_h^\pm(\sigma, z) = \pm h^{-2}\frac{i\sigma^{-2\nu}}{4(2\pi)^\nu}\mathcal{H}_\nu^\pm(\sigma z/h) = h^{-n}R_1^\pm(\sigma h^{-1}, z),$$

où $\nu = (n-2)/2$, $\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) = \lambda^\nu H_\nu^\pm(\lambda)$, $H_\nu^\pm$ sont les fonctions de Hankel sortante et entrante d'ordre ν.

Il est bien connu que ces fonctions ont un comportement différent près de 0 et à l'infini. Pour λ grand, ces fonctions vérifient $\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) = e^{\pm i\lambda}b_\nu^\pm(\lambda)$ où $b_\nu^\pm(\lambda)$ est un symbole d'ordre $(n-3)/2$, c'est-à-dire

$$\left|\partial_\lambda^k b_\nu^\pm(\lambda)\right| \leq C|\lambda|^{\frac{n-3}{2}-k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors que près de $\lambda = 0$, elles sont de la forme

$$\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) = a_{\nu,1}^\pm(\lambda) + \lambda^{n-2}\log\lambda\, a_{\nu,2}^\pm(\lambda), \tag{2.1.1}$$

où $a_{\nu,1}^\pm$ et $a_{\nu,2}^\pm$ sont des fonctions analytiques, $a_{\nu,2}^\pm \equiv 0$ si n est impaire.

Nous voyons que pour le comportement à l'infini, la dimension 3 joue un rôle charnière alors que près de 0, c'est en dimension 2 que le comportement change (présense du terme $\lambda^{n-2}\log\lambda$). C'est pourquoi, dans la suite, nous allons distinguer les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.

Lemme 2.6 *Nous avons en dimension $n \geq 3$*

$$\|V\mathcal{R}^{\pm}_{0,h}(z)\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{-2}, \quad h \geq 1,\ z \in C^{\pm}_{\varphi}. \tag{$R1$}$$

Preuve de (R1) : Il est bien connu que les fonctions de Hankel vérifient

$$\left|\mathcal{H}^{\pm}_{\nu}(\lambda)\right| \leq C\langle\lambda\rangle^{(n-3)/2}e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|}, \quad \forall\lambda,\ \pm\mathrm{Im}\,\lambda \geq 0. \tag{2.1.2}$$

Par conséquent, les fonctions $R^{\pm}_{h}$ vérifient les estimations (pour $\sigma > 0$, $h \geq 1$, $z \in \mathbf{C}^{\pm}_{\varphi}$)

$$\left|R^{\pm}_{h}(\sigma,z)\right| \leq Ch^{-2}\sigma^{-2\nu}\left\langle\frac{\sigma z}{h}\right\rangle^{\frac{n-3}{2}} e^{-\left|Im\,\frac{\sigma z}{h}\right|}.$$

Comme nous avons $\langle x\rangle^{\alpha} \leq C(1+|x|^{\alpha})$, pour $\alpha > 0$ et que nous pouvons majorer l'exponentielle par 1, nous avons

$$\left|R^{\pm}_{h}(\sigma,z)\right| \leq Ch^{-2}\sigma^{-n+2}\left(1+\left|\frac{\sigma z}{h}\right|^{\frac{n-3}{2}}\right).$$

Nous utilisons alors $z \in C^{\pm}_{\varphi}$ et $h \geq 1$ pour conclure $\left|\frac{\sigma z}{h}\right| \leq C\sigma$ et donc

$$\left|R^{\pm}_{h}(\sigma,z)\right| \leq Ch^{-2}\left(\sigma^{-n+2}+\sigma^{-(n-1)/2}\right). \tag{2.1.3}$$

Remarquons qu'en dimension 3, $-n+2 = -(n-1)/2 = -1$:

$$\left|R^{\pm}_{h}(\sigma,z)\right| \leq h^{-2}\sigma^{-1}, \quad n = 3.$$

La norme du terme de gauche de (R1) est majorée par

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)|\left|R^{\pm}_{h}(|x-y|,z)\right|dx.$$

Vu (2.1.3), ce terme est majoré par :

$$\leq Ch^{-2}\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)|\left(|x-y|^{-n+2}+|x-y|^{-(n-1)/2}\right)dx,$$

et en utilisant (VOn) pour les dimension $n \geq 4$ et (V3) pour la dimension $n = 3$, nous obtenons finalement la majoration par Ch^{-2} soit

$$\|V\mathcal{R}_{0,h}(z)\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{-2}, \quad h \geq 1.$$

□

(R1) bien que très utile ne nous permet pas d'inverser $1+h^2V\mathcal{R}^{\pm}_{0,h}(z)$. Il faut pour cela gagner une puissance négative de h supplémentaire. Cela est permis par une étude plus approfondie de la fonction de Hankel en 0 ainsi que de l'hypothèse 0 point régulier. En dimension 3, l'étude doit être légèrement modifiée et l'hypothèse (L3/2-) intervient.

Lemme 2.7 *Nous avons pour $z \in C^{\pm}_{\varphi}$ et $h \geq 1$:*

$$\|V\mathcal{R}_{0,h}(z) - V\mathcal{R}_{0,h}(0)\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{-5/2}, \quad n \geq 4, \tag{$R2$}$$

$$\|V\mathcal{R}_{0,h}(z) - V\mathcal{R}_{0,h}(0)\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{-2-\gamma}, \quad n = 3. \tag{$R3$}$$

Preuve de (R2) : Nous étudions donc les fonctions de Hankel. Tout d'abord, considérons le cas $|\lambda| \geq 1$,

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right| \leq |\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda)| + |\mathcal{H}_\nu^\pm(0)|.$$

par (2.1.2), nous avons comme $|\lambda| \geq 1$,

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda)\right| \leq C\langle\lambda\rangle^{(n-3)/2} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|} \leq C|\lambda|^{(n-3)/2},$$

et nous avons

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right| \leq C \leq C|\lambda|^{(n-3)/2}.$$

Comme $|\lambda|^{(n-3)/2} \leq |\lambda|^{1/2}\langle\lambda\rangle^{(n-4)/2}$, nous avons pour $|\lambda| \geq 1$,

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right| \leq C|\lambda|^{1/2}\langle\lambda\rangle^{(n-4)/2}.$$

Ensuite, considérons le cas $|\lambda| \leq 1$, nous avons d'après (2.1.1)

$$\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0) = \lambda\left(\frac{a_\nu^\pm(\lambda) - a_\nu^\pm(0)}{\lambda} + \lambda^{n-3}\log\lambda \cdot a_{\nu,2}^\pm(\lambda)\right).$$

Comme $n \geq 4$ et comme $\dfrac{a_\nu^\pm(\lambda) - a_\nu^\pm(0)}{\lambda}$ et $a_{\nu,2}^\pm(\lambda)$ sont analytiques, nous avons

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right| \leq C|\lambda| \leq C|\lambda|^{1/2},$$

car $|\lambda| \leq 1$. Comme $|\lambda|^{1/2} \leq |\lambda|^{1/2}\langle\lambda\rangle^{(n-4)/2}$, nous avons pour $|\lambda| \leq 1$,

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right| \leq C|\lambda|^{1/2}\langle\lambda\rangle^{(n-4)/2}.$$

Finalement,

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right| \leq C|\lambda|^{1/2}\langle\lambda\rangle^{(n-4)/2}, \quad \forall\lambda,\ \pm\mathrm{Im}\,\lambda \geq 0. \tag{2.1.4}$$

En utilisant (2.1.4), nous obtenons :

$$\left|R_h^\pm(\sigma,z) - R_h^\pm(\sigma,0)\right| \leq Ch^{-5/2}\left(\sigma^{-n+5/2} + \sigma^{-(n-1)/2}\right). \tag{2.1.5}$$

L'estimation (R2) suit de la même manière que (R1) en utilisant (2.1.5) au lieu de (2.1.3), le fait que dans l'hypothèse (VOn) nous ayons σ^{-n+2} et non $\sigma^{-n+5/2}$ ne change rien car ce terme intervient pour contrôler le comportement des σ petits et si $\sigma \leq 1$, nous avons $\sigma^{-n+5/2} \leq \sigma^{-n+2}$.
$\square$

Preuve de (R3) : En dimension 3, nous avons

$$\left|\mathcal{H}_{1/2}^\pm(z)\right| \leq Ce^{-\sigma|Im\,z|}, \quad \forall z,\ \pm\mathrm{Im}\,z \geq 0. \tag{2.1.6}$$

De plus, pour z petit

$$\mathcal{H}_{1/2}^\pm(z) - \mathcal{H}_{1/2}^\pm(0) = z \times \text{ fonction analytique.}$$

Donc

$$\left|\mathcal{H}_{1/2}^\pm(z) - \mathcal{H}_{1/2}^\pm(0)\right| \leq C|z|, \quad z \text{ petit},$$

et

$$\left|\mathcal{H}_{1/2}^\pm(z) - \mathcal{H}_{1/2}^\pm(0)\right| \leq |\mathcal{H}_{1/2}^\pm(z)| + |\mathcal{H}_{1/2}^\pm(0)| \leq C, \quad z \text{ grand}.$$

Ce que nous pouvons regrouper en

$$\left|\mathcal{H}^{\pm}_{1/2}(z) - \mathcal{H}^{\pm}_{1/2}(0)\right| \leq C\frac{|z|}{\langle z\rangle}, \quad \forall z \in C^{\pm}_{\varphi}. \tag{2.1.7}$$

Par conséquent, les fonctions $R^{\pm}_h$ vérifient les estimations (pour $z \in C^{\pm}_{\phi}$, $\sigma > 0$, $h \geq 1$) :

$$\left|R^{\pm}_h(\sigma, z) - R^{\pm}_h(\sigma, 0)\right| \leq Ch^{-2}\sigma^{-1}\frac{|\sigma z|/h}{\langle\sigma z/h\rangle} = Ch^{-3}|z|\left\langle\frac{\sigma z}{h}\right\rangle^{-1}.$$

Comme $z \in C^{\pm}_{\phi}$, on a $|z|\left\langle\frac{\sigma z}{h}\right\rangle^{-1} \leq C\left\langle\frac{\sigma}{h}\right\rangle^{-1}$ et finalement,

$$\left|R^{\pm}_h(\sigma, z) - R^{\pm}_h(\sigma, 0)\right| \leq Ch^{-3}\left\langle\frac{\sigma}{h}\right\rangle^{-1}. \tag{2.1.8}$$

Ensuite (R3) se déduit de la même manière que (R1) ou (R2) mais en utilisant l'hypothèse (L3/2-) ainsi que la remarque sur cette hypothèse faite en appendice. En utilisant (2.1.8), La norme du terme de gauche de (R3) est majorée par

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\mathbf{R}^3}\int_{\mathbf{R}^3}|V(x)||R^{\pm}_h(|x-y|, z) - R^{\pm}_h(|x-y|, 0)|\,dx &\leq Ch^{-3}\sup_{y\in\mathbf{R}^3}\int_{\mathbf{R}^3}|V(x)|\langle(x-y)/h\rangle^{-1}\,dx\\ &\leq Ch^{-2-\gamma}.\end{aligned}$$

□

Par contre, en dimension 2, la présence du log pour z petit dans l'expression du noyau de la résolvante libre modifie l'étude. Vu l'hypothèse faite sur le potentiel, nous pouvons obtenir $\|h^2V\mathcal{R}^{\pm}_{0,h}(z)\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{1/2}$. Le comportement est ainsi différent des dimensions $n \geq 3$ car ici, cette estimation nous permet directement d'inverser $1 + h^2V\mathcal{R}^{\pm}_{0,h}(z)$ mais cette fois-ci pour h petit et non h grand.

Lemme 2.8 *Nous avons en dimension $n = 2$ pour $z \in C^{\pm}_{\varphi}$*

$$\|V\mathcal{R}_{0,h}(z)\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{-3/2}, \quad \forall h > 0. \tag{R4}$$

Preuve de (R4) : Nous avons alors

$$z \text{ grand}, \quad |H^{\pm}_0(z)| \leq ce^{-|Im\, z|}|z|^{-1/2}, \ \pm\mathrm{Im}\, z \geq 0,$$

$$z \text{ petit}, \quad |H^{\pm}_0(z)| \leq c|\log|z||.$$

Par conséquent, les fonctions $R^{\pm}_1$ vérifient les estimations (pour $z \in C^{\pm}_{\phi}$, $\sigma > 0$) :

$$\left|R^{\pm}_1(\sigma, z)\right| \leq C|\sigma|^{-1/2}, \quad \sigma \geq 1,$$

$$\left|R^{\pm}_1(\sigma, z)\right| \leq -C\log(\sigma), \quad \sigma \leq 1.$$

Remarquons que $-\log(\sigma) \leq C|\sigma|^{-1/2}$ et donc nous pouvons regrouper les deux estimations précédentes en

$$\left|R^{\pm}_1(\sigma, z)\right| \leq C|\sigma|^{-1/2}, \quad \forall\sigma > 0.$$

D'où pour $h > 0$:

$$\left|R^{\pm}_h(\sigma, z)\right| \leq Ch^{-3/2}|\sigma|^{-1/2}, \quad \sigma > 0. \tag{2.1.9}$$

Ainsi, la norme du terme de gauche de (R4) est majorée en utilisant (V2) par

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|V(x)||R_h^{\pm}(|x-y|,z)|\,dx\leq Ch^{-3/2}.$$

□

Parallèlement, aux estimations sur $\|V\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}\|_{L^1\to L^1}$, nous obtenons aussi des estimations sur $\|\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}\|_{L^1\to L^1}$.

Lemme 2.9 *Nous avons pour $n\geq 2$:*

$$\left\|\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right\|_{L^1\to L^1}\leq C|\mathrm{Im}\,z|^{-q},\quad h>0,\,\mathrm{Im}\,z\neq 0. \tag{R5}$$

Preuve de (R5) : La norme du terme de gauche de (R5) est bornée supérieurement par

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left|R_h^{\pm}(|\xi|,z)\right|\,d\xi.$$

En effectuant le changement de variables $\sigma=|\xi|$, nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left|R_h^{\pm}(|\xi|,z)\right|\,d\xi=c_n\int_0^{\infty}\sigma^{n-1}\left|R_h^{\pm}(\sigma,h)\right|\,d\sigma.$$

Comme $R_h^{\pm}(\sigma,z)=h^{-n}R_1^{\pm}(\sigma h^{-1},z)$, nous avons

$$\int_0^{\infty}\sigma^{n-1}\left|R_h^{\pm}(\sigma,z)\right|d\sigma=\int_0^{\infty}(\sigma h^{-1})^{n-1}\left|R_1^{\pm}(\sigma h^{-1},z)\right|h^{-1}\,d\sigma=\int_0^{\infty}\sigma^{n-1}\left|R_1^{\pm}(\sigma,z)\right|d\sigma. \tag{2.1.10}$$

Ainsi il suffit d'obtenir une majoration de $|R_1^{\pm}|$.
En dimension $n\geq 4$, nous utilisons (2.1.2) pour obtenir (pour $z\in\mathbf{C}_{\varphi}^{\pm}$, $\mathrm{Im}\,z\neq 0$)

$$\left|R_1^{\pm}(\sigma,z)\right|\leq\sigma^{-n+2}\langle\sigma z\rangle^{\frac{n-3}{2}}e^{-|Im\,\sigma z|}=C\sigma^{-n+2}\langle\sigma z\rangle^{-5/2}\langle\sigma z\rangle^{\frac{n+2}{2}}e^{-\sigma|Im\,z|},$$

comme $\sigma>0$.

$$\left|R_1^{\pm}(\sigma,z)\right|\leq C\sigma^{-n+2}\langle\sigma\rangle^{(n-3)/2}e^{-\sigma|\mathrm{Im}\,z|}\leq C\sigma^{-n+2}\langle\sigma\rangle^{-5/2}|\mathrm{Im}\,z|^{-(n+2)/2}. \tag{2.1.11}$$

Par (2.1.10), (2.1.11) est majoré par

$$\leq C|\mathrm{Im}\,z|^{-(n+2)/2}\int_0^{\infty}\sigma\langle\sigma\rangle^{-5/2}d\sigma.$$

En utilisant $\sigma\langle\sigma\rangle^{-1}\leq 1$, nous obtenons

$$\leq C|\mathrm{Im}\,z|^{-(n+2)/2}\int_0^{\infty}\langle\sigma\rangle^{-3/2}d\sigma.$$

Comme $\langle\sigma\rangle^{-3/2}$ est intégrable sur $(0,+\infty)$, nous avons finalement la majoration :

$$\leq C|\mathrm{Im}\,z|^{-(n+2)/2}.$$

Ce qui prouve (R5) en dimension $n\geq 4$. En dimension $n=3$, pour prouver (R5), nous utilisons

$$\left|\mathcal{H}_{1/2}^{\pm}(z)\right|\leq Ce^{-\sigma|Im\,z|},\quad\forall z,\,\pm\mathrm{Im}\,z\geq 0,$$

pour obtenir (pour $z \in C_{\phi}^{\pm}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$) :

$$|R_1^{\pm}(\sigma, z)| \leq C\sigma^{-1} e^{-\sigma|Im\, z|}.$$

Ainsi, la norme du terme de gauche de (R5) est majorée par

$$C \int_0^{\infty} \sigma^2 |R_1^{\pm}(\sigma, z)| d\sigma \leq C \int_0^{\infty} \sigma e^{-\sigma|Im\, z|} d\sigma \leq C|\operatorname{Im} z|^{-2}.$$

D'où (R5) en dimension 3. En dimension 2, pour prouver (R5), nous utilisons les majorations précédentes pour obtenir (pour $z \in C_{\phi}^{\pm}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$) :

$$|R_1^{\pm}(\sigma, z)| \leq Ce^{-\sigma|Im\, z|} |\sigma z|^{-1/2} \leq C|\sigma|^{-5/2} |\operatorname{Im} z|^{-2}, \quad \sigma \geq 1,$$

$$|R_1^{\pm}(\sigma, z)| \leq -C \log(\sigma), \quad \sigma \leq 1.$$

Ainsi, la norme du terme de gauche de (2.1.10) est majorée par

$$C \int_0^{\infty} \sigma |R_1^{\pm}(\sigma, z)| d\sigma \leq C \int_0^{1} -\log(\sigma) d\sigma + C|\operatorname{Im} z|^{-2} \int_1^{\infty} \sigma^{-5/2} d\sigma.$$

Finalement,

$$C \int_0^{\infty} \sigma |R_h^{\pm}(\sigma, z)| d\sigma \leq C + C|\operatorname{Im} z|^{-2} \leq C|\operatorname{Im} z|^{-2},$$

comme $|\operatorname{Im} z| \ll 1$. D'où (R5) en dimension 2. $\square$

Même si l'inversibilité de $1 + h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)$ est obtenue de manière différente selon les dimensions, le principe de démonstration du lemme suivant est similaire et nous avons :

Lemme 2.10 *Nous avons pour $z \in C_{\varphi}^{\pm}$:*
En dimension $n \geq 3$, pour un certain $h_0 \geq 1$,

$$\|V\mathcal{R}_h(z)\|_{L^1 \to L^1} \leq Ch^{-2}, \quad h \geq h_0, \tag{R6}$$

$$\left\|\mathcal{R}_h^{\pm}(z)\right\|_{L^1 \to L^1} \leq C|\operatorname{Im} z|^{-q}, \quad h \geq h_0,\ \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{R7}$$

En dimension $n = 2$, pour un certain $h_0 \leq 1$,

$$\|V\mathcal{R}_h(z)\|_{L^1 \to L^1} \leq Ch^{-3/2}, \quad 0 < h \leq h_0 < 1, \tag{R8}$$

$$\left\|\mathcal{R}_h^{\pm}(z)\right\|_{L^1 \to L^1} \leq C|\operatorname{Im} z|^{-q}, \quad 0 < h \leq h_0 < 1,\ \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{R9}$$

Preuve de (R6) et (R7) : Pour prouver (R6) et (R7), nous allons utiliser l'identité

$$\mathcal{R}_h^{\pm}(z) \left(1 + h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right) = \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z), \quad \pm\operatorname{Im} z > 0. \tag{2.1.12}$$

Observons que $1 + h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(0) = 1 - V\Delta^{-1}$, qui est supposé être inversible sur L^1 avec un inverse borné, noté T. Ainsi, il suit de (R2)-(R3) qu'il existe une constante $h_0 > 0$ telle que pour $h \geq h_0$ l'opérateur $1 + h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)$ est inversible sur L^1 avec un inverse vérifiant

$$\left\| \left(1 + h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right)^{-1} \right\|_{L^1 \to L^1} \leq C, \quad z \in \mathbf{C}_{\varphi}^{\pm}, \tag{2.1.13}$$

avec une constante $C > 0$ indépendante de z et h. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$\mathcal{R}_h^{\pm}(z) = \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z) \left(1 + h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right)^{-1}. \tag{2.1.14}$$

Maintenant (R6) résulte de (R1), (2.1.13) et (2.1.14), alors que (R7) résulte de (R5), (2.1.13) et (2.1.14). □

Preuve de (R8) et (R9) : Pour prouver (R8) et (R9), nous utilisons aussi l'identité :

$$\mathcal{R}_h^{\pm}(z)\left(1+h^2V\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right)=\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z),\quad \pm\mathrm{Im}\,z>0.$$

Observons que $\|h^2V\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\|_{L^1\to L^1}\le h^{1/2}$, donc pour h assez petit $1+h^2V\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)$ est inversible pour $h\le h_0$, avec un certain $h_0<1$, avec un inverse vérifiant

$$\left\|\left(1+h^2V\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right)^{-1}\right\|_{L^1\to L^1}\le C,\quad z\in C_\phi^{\pm},$$

avec une constante $C>0$ indépendante de z et h. Par conséquent, on peut écrire

$$\mathcal{R}_h^{\pm}(z)=\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\left(1+h^2V\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right)^{-1}.$$

Maintenant, (R8) résulte de (R4) et des identités précédentes, alors que (R9) résulte de (R5) et des mêmes identités. □

2.1.2 Estimations sur $\psi(h^2G_0)$ et $\psi(h^2G)$

Pour les trois propositions suivantes, nous faisons les hypothèses suivantes : $\psi\in C_0^\infty((0,+\infty))$, 0 est un point régulier pour G et V vérifie des hypothèses convenables.

Proposition 2.11 *(estimations pour tout h en dimension $n\ge 2$)*
Il existe une constante positive C telle que nous ayons les estimations suivantes

$$\|\psi(h^2G_0)\|_{L^1\to L^1}\le C,\quad h>0,\tag{E1}$$

$$\left\|\langle x\rangle^s\psi(h^2G_0)\langle x\rangle^{-s}\right\|_{L^1\to L^2}\le Ch^{-n/2}\langle h\rangle^s,\quad h>0,\ s\ge 0.\tag{E2}$$

Dans (E1) et (E2), la constante C est de la forme

$$C=C'\sup_{0\le k\le k_0}\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}|\partial_\lambda^k\psi(\lambda)|,\tag{E3}$$

avec un certain entier k_0 indépendant de ψ et une consante $C'>0$ dépendant du support de ψ, seulement.

Proposition 2.12 *(estimations pour h grand en dimension $n\ge 3$)*
Sous les hypothèses (VOn) pour $n\ge 4$ et (V3)+(L3/2-) pour $n=3$, nous avons

$$\|\psi(h^2G)\|_{L^1\to L^1}\le C,\quad h\ge h_0,\tag{E4}$$

$$\|\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)T\|_{L^1\to L^1}\le Ch^{-\beta},\quad h\ge h_0,\tag{E5}$$

où l'opérateur

$$T=(1-V\Delta^{-1})^{-1}:L^1\to L^1$$

est borné par hypothèse.

Proposition 2.13 *(estimations pour h petit en dimension $n=2$)*
Sous l'hypothèse (V2), il existe des constantes positives C et h_0 telles que les estimations suivantes aient lieu :

$$\left\|\psi(h^2G)\right\|_{L^1\to L^1}\le C,\quad 0<h\le h_0,\tag{E6}$$

$$\left\|\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1}\le Ch^{1/2},\quad 0<h\le h_0.\tag{E7}$$

Proposition 2.14 *(estimations pour h petit en dimension $n \geq 2$)*
De plus, si V vérifie (V(δ)) avec $\delta > n/2$, nous avons les estimations :

$$\left\|\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)\right\|_{L^1 \to L^1} \leq Ch^2, \quad 0 < h \leq 1, \tag{$E8$}$$

$$\left\|\langle x\rangle^\delta \left(\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)\right)\right\|_{L^1 \to L^2} \leq Ch^{2-n/2}, \quad 0 < h \leq 1. \tag{$E9$}$$

Preuve de (E1) (1ère méthode) : (E1) résultent de (HS) et (R3). Ainsi

$$\begin{aligned}
\left\|\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^1} &= \left\|\frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\mathcal{R}^{\pm}_{0,h}(z)f(z)zL(dz)\right\|_{L^1} \quad \text{en utilisant (HS),} \\
&\leq \frac{2}{\pi}\int_C \left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right| |z| \left\|\mathcal{R}^{\pm}_{0,h}(z)f\right\|_{L^1} L(dz) \\
&\leq C\int_C \left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right| |\mathrm{Im}\, z|^{-q+1}L(dz)\|f\|_{L^1} \quad \text{en utilisant (R3),} \\
&\leq C\|f\|_{L^1} \quad \text{d'après les propriétés sur } \tilde{\varphi}.
\end{aligned}$$

□

Preuve de (E4) et (E6) : De la même manière que précédemment, (E4) et (E6) résultent de (HS) et de (R7) et (R9) respectivement.

□

Preuve de (E1) (2nde méthode) : (E1) peut être aussi prouvée en utilisant le fait que le noyau de l'opérateur $\psi(h^2G_0)$ est de la forme $k_h(|x-y|)$ avec une fonction k_h vérifiant

$$k_h(\sigma) = h^{-n}k_1(\sigma/h), \tag{2.1.15}$$

$$|k_1(\sigma)| \leq C_m\langle\sigma\rangle^{-m}, \quad \forall\sigma > 0, \tag{2.1.16}$$

pour tout entier $m \geq 0$, avec une constante C_m de la forme

$$C_m = C'_m \sup_{0\leq j\leq j_m}\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |\partial^j_\lambda\psi(\lambda)|, \tag{2.1.17}$$

où j_m est un certain entier indépendant de ψ, alors que $C'_m > 0$ dépend du support de ψ. Nous avons

$$\left\|\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^1} \leq C\int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n} k_h(|x-y|)f(y)dy\right| dx = C\left\|k(|x-\cdot|) * f\right\|_{L^1}.$$

Par l'inégalité de Young, ceci est majoré par

$$\leq C\left\|k(|\cdot|)\right\|_{L^1}\|f\|_{L^1}.$$

Donc le terme de gauche de (E1) est majoré par

$$\int_{\mathbf{R}^n} |k_h(|\xi|)|d\xi.$$

En effectuant le changement de variables $\sigma = |\xi|$, nous obtenons

$$\int_{\mathbf{R}^n} |k_h(|\xi|)|d\xi = c_n\int_0^\infty \sigma^{n-1}|k_h(\sigma)|\, d\sigma.$$

Puis en utilisant $k_h(\sigma) = h^{-n} k_1(\sigma h^{-1})$ et en effectuant le changement de variables $\sigma h^{-1} \mapsto \sigma$, nous obtenons

$$\int_0^\infty \sigma^{n-1} |k_1(\sigma)| d\sigma.$$

Comme $|k_1(\sigma)| \leq C_m \langle \sigma \rangle^{-m}$ pour tout $\sigma > 0$ et tout entier $m \geq 0$, pour $m = n+1$, $\sigma^{n-1} \langle \sigma \rangle^{-m}$ est intégrable. Par conséquent,

$$\int_0^\infty \sigma^{n-1} |k_1(\sigma)| d\sigma \leq C_{n+1}.$$

Finalement, nous obtenons (E1) :

$$\left\| \psi(h^2 G_0) \right\|_{L^1 \to L^1} \leq C.$$

□

Preuve de (E2) : Nous avons

$$\left\| \langle x \rangle^s \psi(h^2 G_0) \langle x \rangle^{-s} f \right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbf{R}^n} \left| \langle x \rangle^s \int_{\mathbf{R}^n} k_h(|x-y|) \langle y \rangle^{-s} f(y) dy \right|^2 dx,$$

qui est majoré par

$$\leq \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \langle x \rangle^{2s} \langle y \rangle^{-2s} |k_h(|x-y|)|^2 \, dx \|f\|_{L^1}^2.$$

Comme $|x|^2 \leq 2(|y|^2 + |x-y|^2)$, nous avons $\langle x \rangle^2 = 1 + |x|^2 \leq 2 \langle y \rangle^2 \langle x - y \rangle^2$ et donc pour tout $s \geq 0$, nous avons $\langle x \rangle^{2s} \langle y \rangle^{-2s} \leq \langle x - y \rangle^{2s}$. La norme du terme de gauche de (E2) est donc majorée par

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \langle x \rangle^{2s} \langle y \rangle^{-2s} |k_h(|x-y|)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \langle x - y \rangle^{2s} |k_h(|x-y|)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Nous avons $\left(1 + |\xi/h|^2\right)(1 + h^2) \geq 1 + |\xi|^2$, donc $\langle \xi \rangle^{2s} \leq \langle \xi/h \rangle^{2s} \langle h \rangle^{-2s}$, et par conséquent en effectuant en plus le changement de variables $\xi = x - y$, nous obtenons la majoration par

$$\leq C \langle h \rangle^s \left(\int_{\mathbf{R}^n} \langle \xi/h \rangle^{2s} |k_h(|\xi|)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

En utilisant $k_h(|\xi|) = h^{-n} k_1(|\xi|/h)$ et en effectuant le changement de variables $\xi/h \mapsto \xi$, nous obtenons finalement la majoration par

$$\leq C \langle h \rangle^s h^{-n/2} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \langle \xi \rangle^{2s} |k_1(|\xi|)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

En choisissant m assez grand dans la propriété (2.1.16), nous avons finalement

$$\left\| \langle x \rangle^s \psi(h^2 G_0) \langle x \rangle^{-s} \right\|_{L^1 \to L^2} \leq C_{s_n} \langle h \rangle^s h^{-n/2},$$

où s_n est un certain entier dépendant de n et s.

□

Preuve de (E5) : Pour prouver (E5), nous réécrivons l'identité (2.1.14) sous la forme

$$\mathcal{R}_h^\pm(z) - \mathcal{R}_{0,h}^\pm(z) T = \mathcal{R}_{0,h}^\pm(z) \left((1 + h^2 V \mathcal{R}_{0;h}^\pm(z))^{-1} - T \right),$$

et comme $T^{-1} = 1 + h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(0)$, nous obtenons

$$\mathcal{R}_h^{\pm}(z) - \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)T = \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\left(\left(T^{-1} + (h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z) - h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(0))\right)^{-1} - T\right),$$

et comme $(1+A)^{-1} - 1 = -A(1+A)^{-1}$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_h^{\pm}(z) - \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)T \\ &= \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)T\left(h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z) - h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(0)\right)T\left(1 + \left(h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z) - h^2 V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(0)\right)T\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Par (R2), (R3), (R5), (2.1.13) et (2.1.18), nous concluons

$$\left\|\mathcal{R}_h^{\pm}(z) - \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)T\right\|_{L^1 \to L^1} \leq C h^{-\beta} |\mathrm{Im}\, z|^{-q}, \quad h \geq h_0,\ z \in \mathbf{C}_{\varphi}^{\pm},\ \mathrm{Im}\, z \neq 0, \tag{2.1.19}$$

avec des constantes $C, q, \beta > 0$ indépendantes de z et h. Maintenant (E7) résulte de (HS) et (2.1.19).

□

Preuve de (E7) : Pour prouver (E7), nous réécrivons l'identité de la résolvante sous la forme

$$\mathcal{R}_h^{\pm}(z) - \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z) = h^2 \mathcal{R}_h^{\pm}(z) V \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z).$$

Par (R4) et (R9), nous concluons

$$\left\|\mathcal{R}_h^{\pm}(z) - \mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right\|_{L^1 \to L^1} \leq C h^{1/2} |\mathrm{Im}\, z|^{-q}, \quad h \leq h_0,\ z \in \mathbf{C}_{\varphi}^{\pm},\ \mathrm{Im}\, z \neq 0, \tag{2.1.20}$$

avec des constantes $C, q > 0$ indépendantes de z et h. Ainsi (E7) résulte de (2.1.20) et (HS).

□

Preuve de (E8) : Pour prouver (E8), observons que d'après la formule d'Helffer-Sjöstrand (HS) et l'identité de la résolvante

$$\begin{aligned} (h^2 G - z^2)^{-1} - (h^2 G_0 - z^2)^{-1} &= (h^2 G_0 - z^2)^{-1}(h^2 G - h^2 G_0)(h^2 G - z^2)^{-1} \\ &= h^2 (h^2 G_0 - z^2)^{-1} V (h^2 G - z^2)^{-1}, \end{aligned}$$

nous avons

$$\psi(h^2 G) - \psi(h^2 G_0) = \frac{2h^2}{\pi} \int_{\mathbf{C}} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \bar{z}}(z)(h^2 G_0 - z^2)^{-1} V (h^2 G - z^2)^{-1} z L(dz). \tag{2.1.21}$$

Il est évident que (E8) résulte de (2.1.21), (R5) et de l'estimation (pour $z \in \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}$)

$$\left\|(h^2 G - z^2)^{-1}\right\|_{L^1 \to L^1} \leq C |\mathrm{Im}\, z|^{-q}, \quad 0 < h \leq 1,\ \mathrm{Im}\, z \neq 0. \tag{2.1.22}$$

En effet, nous avons alors

$$\begin{aligned} &\left\|\psi(h^2 G) - \psi(h^2 G_0)\right\|_{L^1 \to L^1} \\ &\leq C h^2 \int_C \left|\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \bar{z}}(z)\right| \underbrace{\left\|\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)\right\|_{L^1 \to L^1}}_{\leq C |\mathrm{Im}\, z|^{-q}\ (R5)} \underbrace{\|V\|_{L^\infty}}_{\leq C} \underbrace{\left\|(h^2 G - z^2)^{-1}\right\|_{L^1 \to L^1}}_{C |\mathrm{Im}\, z|^{-q}\ (2.1.22)} \underbrace{|z|}_{\leq C,\, z \in \operatorname{supp} \tilde{\varphi}} L(dz). \end{aligned}$$

D'où

$$\left\|\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1}\leq Ch^2\int_C\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right||\operatorname{Im}z|^{-N}L(dz)\leq Ch^2,$$

car

$$\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right|\leq C_N|\operatorname{Im}z|^N,\quad\forall N\geq 1.$$

Preuve de (2.1.22) : Soit $\phi\in C_0^\infty([1,2])$ telle que $\int\phi(\theta^2)\theta^{-1}d\theta=1$. Etant donné un paramètre $0<\varepsilon\ll 1$, nous décomposons la résolvante libre comme suit

$$(h^2G_0-z^2)^{-1}=\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)+\mathcal{B}_\varepsilon(z;h),\tag{2.1.23}$$

où

$$\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)=\int_0^1 f\left((\varepsilon\theta h)^2G_0;(\varepsilon\theta)^2;z\right)\frac{d\theta}{\theta},$$

$$\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)=\int_1^\infty f\left((\varepsilon\theta h)^2G_0;(\varepsilon\theta)^2;z\right)\frac{d\theta}{\theta},$$

avec

$$f(\lambda;\mu;z)=\frac{\phi(\lambda)}{\lambda\mu^{-1}-z^2}.$$

En effet, nous vérifions

$$\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)+\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)=\int_0^\infty f((e\theta h)^2G_0;(e\theta)^2;z)\frac{d\theta}{\theta}=(h^2G_0-z^2)^{-1}\int_0^\infty\phi((e\theta h)^2G_0)\theta^{-1}d\theta.$$

Ecrivons à l'aide de la formule de Stone :

$$\int_0^\infty\phi((e\theta h)^2G_0)\theta^{-1}d\theta=\frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\phi((e\theta h)^2\lambda^2)\left(R_0^+(\lambda)-R_0^-(\lambda)\right)\theta^{-1}d\theta d\lambda.$$

Effectuons le changement de variables $eh\lambda\theta\mapsto\theta$, nous obtenons

$$\int_0^\infty\phi((e\theta h)^2G_0)\theta^{-1}d\theta=\frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\phi(\theta^2)\theta^{-1}d\theta\right)\left(R_0^+(\lambda)-R_0^-(\lambda)\right)d\lambda.$$

Ce qui donne

$$\int_0^\infty\phi((e\theta h)^2G_0)\theta^{-1}d\theta=\frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty\left(R_0^+(\lambda)-R_0^-(\lambda)\right)d\lambda=1.$$

Maintenant, il est facile de voir qu'il existe des constantes $0<\mu_1<\mu_2$ telles que la fonction f vérifie les majorations suivantes

$$\left|\partial_\lambda^j f(\lambda;\mu;z)\right|\leq C_j\mu,\quad 0<\mu\leq\mu_1,\tag{2.1.24}$$

$$\left|\partial_\lambda^j f(\lambda;\mu;z)\right|\leq C_j'|\operatorname{Im}z|^{-j-1},\quad\mu_1\leq\mu\leq\mu_2,\tag{2.1.25}$$

$$\left|\partial_\lambda^j f(\lambda;\mu;z)\right|\leq C_j'',\quad\mu\geq\mu_2,\tag{2.1.26}$$

pour tout entier $j\geq 0$. En effet, écrivons

$$f(\lambda,\mu,z)=\frac{\phi(\lambda)}{\lambda}\frac{\mu}{1-z^2\lambda^{-1}\mu}=-\frac{\phi(\lambda)}{z^2}\frac{1}{1-\lambda z^{-2}\mu^{-1}}.$$

Si nous notons $\operatorname{supp}\tilde{\phi}\cap\mathbf{R}=[m,M]$ et comme $\operatorname{supp}\phi=[1,2]$, désignons par $\mu_1=m^{-2}/2$ et $\mu_2=4M^2$. Alors pour $z\in\operatorname{supp}\tilde{\phi}$, $\lambda\in\operatorname{supp}\phi$ et $\mu\leq\mu_1$, nous avons $|z^2\lambda^{-1}\mu|\leq 1/2$ et donc

$\dfrac{\mu}{1-z^2\lambda^{-1}\mu} \le \dfrac{\mu}{2}$. De même pour $z \in \operatorname{supp} \tilde{\phi}$, $\lambda \in$supp ϕ et $\mu \ge \mu_2$, nous avons $|z^{-2}\lambda\mu^{-1}| \le 1/2$ et donc $\dfrac{1}{1-z^{-2}\lambda\mu^{-1}} \le \dfrac{1}{2}$. Nous obtenons donc les majorations (2.1.24) et (2.1.26) pour $j=0$. Si $\mu_1 \le \mu \le \mu_2$ et $1 \le \lambda \le 2$, nous avons

$$\left|\frac{\phi(\lambda)}{\lambda\mu^{-1}-z^2}\right| \le C\left|\frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda\mu^{-1}-z^2)}\right| = C\frac{1}{2|\operatorname{Im} z||\operatorname{Re} z|} \le C|\operatorname{Im} z|^{-1}$$

car $z \in \operatorname{supp} \tilde{\varphi}$. D'où (E8.5) pour $j=0$.

Les mêmes constantes μ_1 et μ_2 conviennent pour tout entier $j \ge 1$, car les dénominateurs qui apparaissent dans les dérivées successives se traitent de la même manière que le cas $j=0$ alors que les numérateurs restent bornés. Nous avons donc bien (2.1.24)-(2.1.26) pour tout entier $j \ge 0$.

Par (E1), (E3) et (2.1.24), nous avons

$$\left\| f\left((\varepsilon\theta h)^2 G_0; (\varepsilon\theta)^2; z\right)\right\|_{L^1\to L^1} \le C(\varepsilon\theta)^2, \quad 0<\theta\le 1, \tag{2.1.27}$$

à condition $\varepsilon > 0$ soit pris suffisamment petit (tel que $\varepsilon \le \sqrt{\mu_1}$, ainsi $(\varepsilon\theta)^2 \le \mu_1$ pour $0<\theta\le 1$). Nous déduisons de (2.1.27)

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\|_{L^1\to L^1} \le C\varepsilon^2, \quad z \in \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}, \tag{2.1.28}$$

avec une constante $C>0$ indépendante de z, h et ε.

Par (E2) et (E3), nous avons

$$\left\|\langle x\rangle^s f\left((\varepsilon\theta h)^2 G_0; (\varepsilon\theta)^2; z\right)\langle x\rangle^{-s}\right\|_{L^1\to L^2} \le C(\varepsilon\theta h)^{-n/2}\langle\varepsilon\theta h\rangle^s \times \sup_{0\le k\le k_0}\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}\left|\partial_\lambda^k f(\lambda;(\varepsilon\theta)^2;z)\right|.$$

Par suite, en utilisant (2.1.24)-(2.1.26), nous obtenons

$$\sup_{0\le k\le k_0}\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}\left|\partial_\lambda^k f(\lambda;(\varepsilon\theta)^2;z)\right| \le \sup_{0\le k\le k_0}\max\left(C_k\mu_1, C_k'|\operatorname{Im} z|^{-k-1}, C_k''\right),$$

et comme $z \in C_\varphi$, $\operatorname{Im} z$ est petit, c'est donc le comportement de $|\operatorname{Im} z|^{-1}$ qui domine. Nous obtenons finalement :

$$\left\|\langle x\rangle^s f\left((\varepsilon\theta h)^2 G_0; (\varepsilon\theta)^2; z\right)\langle x\rangle^{-s}\right\|_{L^1\to L^2} \le C(\varepsilon\theta h)^{-n/2}\langle\varepsilon\theta h\rangle^s|\operatorname{Im} z|^{-q}, \tag{2.1.29}$$

avec des constantes $C, q > 0$ indépendantes de z, θ, h et ε.

Nous déduisons de (2.1.29)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)\|_{L^1\to L^2} &\le C_\varepsilon' h^{-n/2}|\operatorname{Im} z|^{-q}\int_1^\infty \theta^{-1-n/2}d\theta \\ &\le C_\varepsilon h^{-n/2}|\operatorname{Im} z|^{-q}, \quad z\in\operatorname{supp}\widetilde{\varphi},\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

avec une constante $C_\varepsilon > 0$ indépendant de z et h.

Il résulte de (2.1.28) que l'opérateur $1-h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)$ est inversible sur L^1, à condition que $\varepsilon>0$ soit pris suffisamment petit, indépendant de h (rappelons que h est supposé $0<h\le 1$).

Par conséquent, nous pouvons écrire l'identité

$$\left(h^2G-z^2\right)^{-1} = \left(h^2G_0-z^2\right)^{-1} + h^2\left(h^2G-z^2\right)^{-1}V\left(h^2G_0-z^2\right)^{-1}, \tag{2.1.31}$$

sous la forme

$$\left(h^2G-z^2\right)^{-1} = \mathcal{M}(z;h) + h^2\left(h^2G-z^2\right)^{-1}\mathcal{N}(z;h), \tag{2.1.32}$$

où les opérateurs $\mathcal{M}(z;h)$ et $\mathcal{N}(z;h)$ sont définis pas

$$\mathcal{M}(z;h) = \left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1}\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\right)^{-1},$$

$$\mathcal{N}(z;h) = V\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\right)^{-1}.$$

En effet, en utilisant l'identité liant résolvante et résolvante libre et en utilisant $1 = (1-x)(1-x)^{-1}$ avec $x = h^2V\mathcal{A}_\varepsilon$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&(h^2G - z^2)^{-1}\\ &= \left((h^2G_0 - z^2)^{-1} + h^2(h^2G - z^2)^{-1}V(h^2G_0 - z^2)^{-1} - h^2(h^2G - z^2)^{-1}V\mathcal{A}_\varepsilon\right)\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Ce qui devient en introduisant $\mathcal{B}_\varepsilon$:

$$(h^2G - z^2)^{-1} = (h^2G_0 - z^2)^{-1}\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon\right)^{-1} + h^2(h^2G - z^2)^{-1}V\mathcal{B}_\varepsilon\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon\right)^{-1}.$$

De plus les opérateurs $\mathcal{M}(z;h)$ et $\mathcal{N}(z;h)$ vérifient les estimations

$$\|\mathcal{M}(z;h)\|_{L^1\to L^1} + \|\mathcal{N}(z;h)\|_{L^1\to L^1} \leq C|\mathrm{Im}\, z|^{-q}, \tag{2.1.33}$$

$$\|\mathcal{N}(z;h)\|_{L^1\to L^2} \leq Ch^{-n/2}|\mathrm{Im}\, z|^{-q}. \tag{2.1.34}$$

En effet, comme V vérifie (V(δ)) avec $\delta > n/2$, on a $V \in L^2$. (2.1.34) résulte alors de

$$\|\mathcal{N}(z;h)\|_{L^1\to L^2} \leq C\left\|V\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)\right\|_{L^1\to L^2} \leq C\|V\|_{L^2}\left\|\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)\right\|_{L^1\to L^2},$$

et de (2.1.30). Pour (2.1.33), comme nous avons $\left\|(h^2G_0 - z^2)^{-1}\right\|_{L^1\to L^1} \leq C|\mathrm{Im}\, z|^q$, nous avons la même estimations pour $\|\mathcal{M}(z;h)\|_{L^1\to L^1}$. Nous utilisons ensuite (2.1.23) et (2.1.28) pour obtenir $\|\mathcal{N}(z;h)\|_{L^1\to L^1} \leq C|\mathrm{Im}\, z|^{-q}$. Ensuite, comme $V \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, nous avons finalement (2.1.33).

En itérant (2.1.32), nous avons

$$\begin{aligned}\left(h^2G - z^2\right)^{-1} &= \sum_{j=0}^{J-1}\mathcal{M}(z;h)\mathcal{N}(z;h)^j + h^{2J}\left(h^2G - z^2\right)^{-1}\mathcal{N}(z;h)^J\\ &= \sum_{j=0}^{J-1}\mathcal{M}(z;h)\mathcal{N}(z;h)^j + h^{2J}\left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1}\mathcal{N}(z;h)^J\\ &\quad + h^{2J+2}\left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1}V\left(h^2G - z^2\right)^{-1}\mathcal{N}(z;h)^J,\end{aligned} \tag{2.1.35}$$

pour tout entier $J \geq 1$. Par (2.1.34) et (R3), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left\|\left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1}V\left(h^2G - z^2\right)^{-1}\mathcal{N}(z;h)\right\|_{L^1\to L^1}\\ &\leq \|V\|_{L^2}\left\|\left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1}\right\|_{L^1\to L^1}\left\|\left(h^2G - z^2\right)^{-1}\right\|_{L^2\to L^2}\|\mathcal{N}(z;h)\|_{L^1\to L^2}\\ &\leq Ch^{-n/2}|\mathrm{Im}\, z|^{-q_2}.\end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Maintenant, (2.1.22) résulte de (2.1.33), (2.1.35) et (2.1.36).

□

Preuve de (E9) : Pour prouver (E9), nous réécrivons (2.1.32) sous la forme

$$\left(h^2G - z^2\right)^{-1} - \left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1} = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{F}_j(z;h), \tag{2.1.37}$$

où

$$\mathcal{F}_1(z;h) = h^2\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\right)^{-1},$$
$$\mathcal{F}_2(z;h) = h^2\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\right)^{-1},$$
$$\mathcal{F}_3(z;h) = h^2\left(h^2G - z^2\right)^{-1}V\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\right)^{-1}.$$

En effet,

$$\mathcal{F}_1(z;h)+\mathcal{F}_2(z;h)+\mathcal{F}_3(z;h) = \left(h^2(\mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon)V\mathcal{A}_\varepsilon + h^2\left(h^2G - z^2\right)^{-1}V\mathcal{B}_\varepsilon\right)\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\right)^{-1}.$$

En utilisant $\left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1} = \mathcal{A}_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon$ et l'identité de la résolvante, nous retrouvons (2.1.37). Il est facile de voir que nous avons l'estimation

$$\left\|\langle x\rangle^s\left(h^2G - z^2\right)^{-1}\langle x\rangle^{-s}\right\|_{L^2\to L^2} \le C|\mathrm{Im}\, z|^{-q}, \quad z \in \mathrm{supp}\,\widetilde{\varphi},\ 0 < h \le 1, \tag{2.1.38}$$

pour tout $s \ge 0$ avec des constantes $C, q > 0$ dépendantes de s mais indépendantes de z et h. Par (2.1.30) et (2.1.38),

$$\left\|\langle x\rangle^\delta\mathcal{F}_3(z;h)\right\|_{L^1\to L^2} \le Ch^{2-n/2}|\mathrm{Im}\, z|^{-q}, \quad z \in \mathrm{supp}\,\widetilde{\varphi},\ 0 < h \le 1. \tag{2.1.39}$$

Observons maintenant que nous pouvons écrire l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)$ sous la forme

$$\mathcal{A}_\varepsilon(z;h) = \chi_\varepsilon^{(3)}(h^2G_0)\left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1},$$

où

$$\chi_\varepsilon^{(3)}(\sigma) = \int_0^{\varepsilon\sigma^{1/2}} \phi(\theta^2)\frac{d\theta}{\theta}.$$

De façon similaire, nous pouvons décomposer l'opérateur $\mathcal{B}_\varepsilon(z;h)$ comme $\mathcal{B}_\varepsilon^{(1)} + \mathcal{B}_\varepsilon^{(2)}$, où

$$\mathcal{B}_\varepsilon^{(j)}(z;h) = \chi_\varepsilon^{(j)}(h^2G_0)\left(h^2G_0 - z^2\right)^{-1}, \quad j = 1, 2,$$
$$\chi_\varepsilon^{(1)}(\sigma) = \int_{\varepsilon\sigma^{1/2}}^{\varepsilon^{-1}\sigma^{1/2}} \phi(\theta^2)\frac{d\theta}{\theta}, \quad \chi_\varepsilon^{(2)}(\sigma) = \int_{\varepsilon^{-1}\sigma^{1/2}}^{\infty} \phi(\theta^2)\frac{d\theta}{\theta}.$$

En prenant $\varepsilon > 0$ assez petit, nous pouvons nous arranger pour que $\mathrm{supp}\,\chi_\varepsilon^{(j)} \cap \mathrm{supp}\,\varphi = \emptyset$, $j = 2, 3$, et donc que les fonctions à valeur opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)$ et $\mathcal{B}_\varepsilon^{(2)}(z;h)$ soient analytiques sur $\mathrm{supp}\,\widetilde{\varphi}$. Par conséquent, nous pouvons écrire (2.1.21) sous la forme

$$\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=3}^{4}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\mathcal{F}_j(z;h)zL(dz), \tag{2.1.40}$$

où

$$\mathcal{F}_4(z;h) = h^2\mathcal{B}_\varepsilon^{(1)}(z;h)V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\left(1 - h^2V\mathcal{A}_\varepsilon(z;h)\right)^{-1}.$$

Par (2.1.29) (avec $s = \delta$), nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\langle x\rangle^\delta\mathcal{F}_4(z;h)\right\|_{L^1\to L^2} &\le Ch^2\left\|\langle x\rangle^\delta\mathcal{B}_\varepsilon^{(1)}(z;h)\langle x\rangle^{-\delta}\right\|_{L^1\to L^2}\\ &\le Ch^{2-n/2}|\mathrm{Im}\, z|^{-q}, \quad z \in \mathrm{supp}\,\widetilde{\varphi},\ 0 < h \le 1.\end{aligned} \tag{2.1.41}$$

Maintenant (E9) résulte de (2.1.39)-(2.1.41). □

2.2 Estimations à basses fréquences en dimension $n \geq 3$

On introduit

$$\Phi(t;h) = e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G) - T^*e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)T.$$

Pour prouver le théorème en dimension $n \geq 3$ à basses fréquences, nous allons étudier ce comparateur en trois étapes :

1. Estimations sur $\psi(h^2G_0)$ et $\psi(h^2G)$ à l'aide de propriétés sur la résolvante (cf section 2.1).
2. Estimations autour des propagateurs à l'aide d'estimations sur les noyaux (cf proposition 2.16).
3. Estimations du comparateur à l'aide de la formule de Duhamel et d'un mécanisme de bootstrap.

2.2.1 Etape 1 : Estimations sur $\psi(h^2G_0)$ et $\psi(h^2G)$

L'étude a déjà été faite dans une partie précédente. Rappelons ici les résultats qui nous intéressent à basses fréquences en dimension $n \geq 3$:

Proposition 2.15 *Il existe des constantes positives C, β et h_0 telles que nous ayons les estimations suivantes*

$$\|\psi(h^2G_0)\|_{L^1\to L^1} \leq C, \quad h > 0, \tag{E1}$$

$$\|\psi(h^2G)\|_{L^1\to L^1} \leq C, \quad h \geq h_0, \tag{E4}$$

$$\|\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)T\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{-\beta}, \quad h \geq h_0, \tag{E5}$$

où l'opérateur

$$T = (1 - V\Delta^{-1})^{-1} : L^1 \to L^1$$

est borné par hypothèse.

2.2.2 Etape 2 : Estimations autour des propagateurs $e^{it\sqrt{G_0}}$ et $e^{it\sqrt{G}}$

Proposition 2.16 *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe des constantes positives C, h_0 et β telles que, pour $\forall f \in L^1$,*

$$\left\|e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^\infty} \leq Ch^{-(n+1)/2}|t|^{-(n-1)/2}\|f\|_{L^1}, \quad h > 0,\, t \neq 0, \tag{P1}$$

$$\left\|e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^\infty} \leq Ch^{-(n+1)/2}\langle t\rangle^{-(n-1)/2}\|f\|_{L^1}, \quad h \geq 1,\, \forall t, \tag{P2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|Ve^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^1} dt \leq Ch^{-1-(n-3)/2}\|f\|_{L^1}, \quad h > 0,\, n \geq 4, \tag{P3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|Ve^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^1} dt \leq Ch^{-1-\gamma}\|f\|_{L^1}, \quad h \geq 1,\, n = 3, \tag{P4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|Ve^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1} dt \leq Ch^{-1-\beta}\|f\|_{L^1}, \quad h \geq h_0. \tag{P5}$$

Remarque 2.17 *Observons dans (P3) que si $n = 3$ cela donne un terme en h^{-1} qui est insuffisant pour continuer les majorations. Il faut une puissance négative de h supplémentaire, ce qui nécessite de nouveau l'emploi de l'hypothèse (L3/2-) et nous obtenons alors (P4) en dimension $n = 3$.*

preuve de (P1) : Nous allons utiliser le fait que le noyau de l'opérateur $e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)$ est de la forme $K_h(|x-y|,t)$, où

$$K_h(\sigma,t)=\frac{\sigma^{-2\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{it\lambda}\mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda)\psi(h^2\lambda^2)\lambda d\lambda=h^{-n}K_1(\sigma h^{-1},th^{-1}),\tag{2.2.1}$$

où $\mathcal{J}_\nu(z)=z^\nu J_\nu(z)$, $J_\nu(z)=\left(H_\nu^+(z)+H_\nu^-(z)\right)/2$ est la fonction de Bessel d'ordre $\nu=(n-2)/2$. Il est montré dans l'appendice que K_h vérifie les estimations (pour tout $\sigma,t>0$, $h\geq 1$)

$$|K_1(\sigma,t)|\leq C\langle t\rangle^{-s}\langle\sigma\rangle^{s-(n-1)/2},\quad \forall s\geq 0,\tag{2.2.2}$$

$$|K_h(\sigma,t)|\leq Ch^{-(n+1)/2}|t|^{-s}\sigma^{s-(n-1)/2},\quad 0\leq s\leq (n-1)/2.\tag{2.2.3}$$

Nous avons

$$\left|e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f(x)\right|=\left|\int_{\mathbf{R}^n}K_h(|x-y|,t)f(y)dy\right|\leq\sup_{\sigma>0}|K_h(\sigma,t)|\,\|f\|_{L^1},$$

donc il est évident que (P1) résulte de (2.2.3) avec $s=(n-1)/2$.

Preuve de (P3) et (P4) : Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}\left|Ve^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f(x)\right|dx&\leq\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)||K_h(|x-y|,t)||f(y)|dydx\\&\leq\|f\|_{L^1}\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)||K_h(|x-y|,t)|dx.\end{aligned}$$

D'où après intégration par rapport au temps :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|Ve^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^1}dt\leq\|f\|_{L^1}\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)|\int_{-\infty}^{\infty}|K(|x-y|,t)|dt\,dx.$$

Ce n'est donc pas difficile de voir que (P3) et (P4) résultent de (VOn) et du lemme suivant avec $(s=0)$:

Lemme 2.18 *Pour tout $\sigma,h>0$, $0\leq s\leq(n-1)/2$, nous avons*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\langle th^{-1}\rangle^s\,|K_h(\sigma,t)|\,dt\leq Ch^{-n+1}\langle\sigma h^{-1}\rangle^{s-(n-1)/2}.\tag{2.2.4a}$$

Remarquons que $|th^{-1}|^s\leq\langle th^{-1}\rangle^s$ et comme pour $0\leq s\leq(n-1)/2$, nous avons $\langle\sigma h^{-1}\rangle^{s-(n-1)/2}\leq C(\sigma h^{-1})^{s-(n-1)/2}$, nous obtenons pour tout $\sigma,h>0$, $0\leq s\leq(n-1)/2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^s\,|K_h(\sigma,t)|\,dt\leq Ch^{-(n-1)/2}\sigma^{s-(n-1)/2}.\tag{2.2.4b}$$

Preuve lemme $\Rightarrow$ (P3) et (P4) : Nous avons alors en dimension $n\geq 4$ en utilisant (2.2.4b) :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|Ve^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^1}dt\leq Ch^{-(n-1)/2}\|f\|_{L^1}\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)||x-y|^{-(n-1)/2}dx,$$

et en dimension $n=3$ en utilisant (2.2.4a) :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|Ve^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^1}dt\leq Ch^{-2}\|f\|_{L^1}\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)|\langle|x-y|h^{-1}\rangle^{-1}dx.$$

En utilisant (VOn) en dimension $n \geq 4$ et (L3/2-) en dimension $n=3$, nous obtenons bien (P3) et (P4).

Preuve lemme $h=1 \Rightarrow$ *lemme* : Vu (2.2.1), il suffit de montrer (2.2.4) avec $h=1$. En effet, nous avons
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle th^{-1}\rangle^s |K_h(\sigma,t)|dt = h^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle th^{-1}\rangle^s |K_1(\sigma h^{-1}, th^{-1})|dt.$$
En effectuant le changement de variables $th^{-1} \mapsto t$, nous obtenons :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle th^{-1}\rangle^s |K_h(\sigma,t)|dt &= h^{-n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} \langle t\rangle^s |K_1(\sigma h^{-1}, t)|dt \\ &\leq Ch^{-n+1}\langle \sigma h^{-1}\rangle^{s-(n-1)/2} \quad \text{si (2.2.4a) pour } h=1.\end{aligned}$$

Preuve lemme $h=1$: Lorsque $0<\sigma\leq 1$, cela provient de (2.2.2). En effet, nous séparons l'intégration en deux parties $|t|\leq 1$ et $|t|\geq 1$. Pour le domaine $|t|\geq 1$, nous utilisons (2.2.2) avec $s+1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, $0\leq s\leq (n-1)/2$, ce qui donne
$$\int_{|t|\geq 1} |t|^s |K_1(\sigma,t)|dt \leq C\langle\sigma\rangle^{s+1+\varepsilon-(n-1)/2}.$$
Comme $0<\sigma\leq 1$, nous avons $\langle\sigma\rangle^{1+\varepsilon}\leq C$. Pour le domaine $|t|\leq 1$, nous utilisons (2.2.2) avec s, $0\leq s\leq (n-1)/2$, ce qui donne
$$\int_{|t|\leq 1} |t|^s |K_1(\sigma,t)|dt \leq C\langle\sigma\rangle^{s-(n-1)/2}.$$
Finalement, nous avons
$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |K_1(\sigma,t)|dt \leq C\langle\sigma\rangle^{s-(n-1)/2}, \quad 0<\sigma\leq 1. \tag{2.2.5}$$
Soit maintenant $\sigma\geq 1$. Nous allons utiliser le fait que la fonction $\mathcal{J}_\nu$ peut être décomposée en $\mathcal{J}_\nu(z) = e^{iz}b_\nu^+(z) + e^{-iz}b_\nu^-(z)$, où $b_\nu^\pm(z)$ sont des symboles d'ordre $(n-3)/2$ pour $z\geq z_0$. Alors, nous pouvons décomposer la fonction K_1 en $K_1^+ + K_1^-$, où $K_1^\pm$ sont définis en remplaçant dans la définition de K_1 la fonction $\mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda)$ par $e^{\pm i\sigma\lambda}b_\nu^\pm(\sigma\lambda)$. En intégrant par parties, nous obtenons par exemple pour K_1^+ :
$$i^m(t+\sigma)^m K_1^+(\sigma,t) = c_\nu \sigma^{-2\nu}\int_0^\infty e^{i(t+\sigma)\lambda}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(b_\nu^+(\sigma\lambda)\psi(\lambda^2)\lambda\right)d\lambda.$$
En utilisant la formule de dérivation de Leibniz, nous avons
$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(b_\nu^+(\sigma\lambda)\psi(\lambda^2)\lambda\right) = \sum_{k=0}^m \sigma^k \frac{d^k b_\nu^+}{d\lambda^k}(\sigma\lambda)\psi_{m-k}(\lambda),$$
où $\psi_{m-k}\in C_0^\infty((0,+\infty))$. En utilisant
$$\left|\frac{d^k b_\nu^+}{d\lambda^k}(z)\right| \leq |z|^{\frac{n-3}{2}-k}, \quad |z|\geq z_0,$$
et le fait que $\sigma>1$ (et donc $\sigma\lambda\geq z_0$ pour z_0 convenablement choisi) et comme les ψ_{m-k} sont à support compact, nous pouvons majorer la valeur absolue de la derivée m-ième par $C\sigma^{\frac{n-3}{2}}$. Finalement, $-2\nu+(n-3)/2 = -(n-1)/2$, par conséquent nous avons la majoration
$$\left|K_1^\pm(\sigma,t)\right| \leq C_m\sigma^{-(n-1)/2}\langle t\pm\sigma\rangle^{-m}, \tag{2.2.6}$$

pour tout entier $m \geq 0$. En utilisant $|t| \leq |\sigma| + |t \pm \sigma|$ et donc $|t|^s \leq C\sigma^s + C|t \pm \sigma|^s$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|K_1^{\pm}(\sigma,t)\right| dt \leq \sigma^s \int_{-\infty}^{\infty} \left|K_1^{\pm}(\sigma,t)\right| dt + \int_{-\infty}^{\infty} |t \pm \sigma|^s \left|K_1^{\pm}(\sigma,t)\right| dt.$$

Par (2.2.6),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|K_1^{\pm}(\sigma,t)\right| dt \leq C_m \sigma^{s-(n-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle t \pm \sigma\rangle^{-m} dt + C_m \sigma^{-(n-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle t \pm \sigma\rangle^{-m+s} dt.$$

Nous séparons l'intégration en deux parties, par exemple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt = \int_{|t+\sigma|>1} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt + \int_{|t+\sigma|<1} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt,$$

et nous choisissons $m = 2$ dans la première intégrale et $m = 0$ dans la seconde pour conclure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt \leq C.$$

Finalement, en procédant de même pour les autres intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|K_1^{\pm}(\sigma,t)\right| dt \leq C\sigma^{s-(n-1)/2}. \tag{2.2.7}$$

Comme $\sigma \geq 1$, nous avons $\langle\sigma\rangle \leq C\sigma$ et donc pour $0 \leq s \leq (n-1)/2$, $\sigma^{s-(n-1)/2} \leq C\langle\sigma\rangle^{s-(n-1)/2}$, nous avons finalement pour tout $\sigma > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |K_1^{\pm}(\sigma,t)| dt \leq C\langle\sigma\rangle^{s-(n-1)/2}.$$

En utilisant cette inégalité pour $s = 0$ et $0 \leq s \leq (n-1)/2$ et en remarquant que $\langle t\rangle^s \leq C(1+|t|^s)$, nous obtenons (2.2.4a) pour tout $\sigma > 0$ et $0 \leq s \leq (n-1)/2$. □

Preuve de (P5) : Pour prouver (P5) nous allons utiliser la formule

$$e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G) = (i\pi h)^{-1} \int_0^{\infty} e^{it\lambda}\varphi_h(\lambda)\left(R^+(\lambda) - R^-(\lambda)\right) d\lambda, \tag{2.2.9}$$

où $\varphi_h(\lambda) = \varphi_1(h\lambda)$, $\varphi_1(\lambda) = \lambda\psi(\lambda^2)$, et $R^{\pm}(\lambda) = (G - \lambda^2 \pm i0)^{-1}$ vérifie l'identité

$$R^{\pm}(\lambda)\left(1 + VR_0^{\pm}(\lambda)\right) = R_0^{\pm}(\lambda). \tag{2.2.10}$$

Ici $R_0^{\pm}(\lambda)$ désignent les résolvantes libres sortante et entrante avec les noyaux donnés en terme de fonction de Hankel, $H_\nu^{\pm}$, d'ordre $\nu = (n-2)/2$ par la formule

$$[R_0^{\pm}(\lambda)](x,y) = \pm i4^{-1}(2\pi)^{-\nu}|x-y|^{-n+2}\,\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\lambda|x-y|),$$

où $\mathcal{H}_\nu^{\pm}(z) = z^\nu H_\nu^{\pm}(z)$ vérifie

$$\left|\partial_z^j \mathcal{H}_\nu^{\pm}(z)\right| \leq C\langle z\rangle^{(n-3)/2}, \quad \forall z > 0,\ j = 0, 1. \tag{2.2.11}$$

En effet, rappelons que nous avons

$$\mathcal{H}_\nu^{\pm}(z) = e^{\pm iz} b_\nu^{\pm}(z) \text{ si } z \geq z_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_\nu^{\pm}(z) = a_{\nu,1}^{\pm}(z) + z^{n-2}\log z\, a_{\nu,2}^{\pm}(z) \text{ si } z \leq z_0,$$

avec $b_\nu^\pm$ symbole d'ordre $(n-3)/2$ et $a_{\nu,j}^\pm$ analytiques ($j=1,\,2$). Nous avons déjà montré (2.2.11) pour $j=0$. Dérivons maintenant $\mathcal{H}_\nu^\pm$. Nous obtenons si $z \geq z_0$:

$$\partial_z \mathcal{H}_\nu^\pm(z) = e^{\pm iz}\left(\pm i b_\nu^\pm(z) + \partial_z b_\nu^\pm(z)\right),$$

qui peut s'estimer comme z grand

$$\left|\partial_z \mathcal{H}_\nu^\pm(z)\right| \leq C\left|b_\nu^\pm(z)\right| + C\left|\partial_z b_\nu^\pm(z)\right| \leq C|z|^{(n-3)/2}.$$

Pour $z \leq z_0$, nous obtenons

$$\partial_z \mathcal{H}_\nu^\pm(z) = \partial_z a_{\nu,1}^\pm + z^{n-2}\log z\,\partial_z a_{\nu,2}^\pm(z) + \left((n-2)z^{n-1}\log z + z^{n-3}\right)a_{\nu,2}^\pm(z).$$

Lorsque $n \geq 4$, nous avons près de 0, la même estimation que pour $\mathcal{H}_\nu^\pm(z)$ soit $\left|\partial_z \mathcal{H}_\nu^\pm(z)\right| \leq C$. Lorsque $n=3$, comme $a_{\nu,2}(z) \equiv 0$, nous avons aussi la même estimation. Ce qui prouve bien (2.2.11) pour $j=1$.

D'autre part, nous avons aussi

$$\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(z) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right| \leq C|z|^{1/2}\langle z\rangle^{(n-4)/2}, \quad \forall z,\ \text{pour } n \geq 4, \tag{2.2.12a}$$

$$\left|\mathcal{H}_{1/2}^\pm(z) - \mathcal{H}_{1/2}^\pm(0)\right| \leq C|z|\langle z\rangle^{-1}, \quad \forall z,\ \text{pour } n = 3. \tag{2.2.12b}$$

Il suit de (2.2.11) et de (VOn) et (V3) que

$$\left\|VR_0^\pm(\lambda)\right\|_{L^1\to L^1} \leq C, \quad 0<\lambda\leq 1, \tag{2.2.13}$$

D'autre part, nous avons

$$\left\|(VR_0^\pm(\lambda) - VR_0^\pm(0))f\right\|_{L^1} \leq c_n \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-n+2}\left|\mathcal{H}_\nu^\pm(\lambda|x-y|) - \mathcal{H}_\nu^\pm(0)\right||V(x)||f(y)|\,dydx.$$

Distinguons les cas $n=3$ et $n\geq 4$. Pour $n \geq 4$, nous utilisons (2.2.12a) pour obtenir :

$$\left\|(VR_0^\pm(\lambda) - VR_0^\pm(0))f\right\|_{L^1} \leq c_n \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-n+2}\lambda^{1/2}|x-y|^{1/2}\langle\lambda|x-y|\rangle^{(n-4)/2}|V(x)||f(y)|\,dxdy.$$

En utilisant (VOn) et le fait que si $0<\lambda\leq 1$, nous avons $\lambda^{(n-4)/2} \leq 1$, nous obtenons

$$\left\|VR_0^\pm(\lambda) - VR_0^\pm(0)\right\|_{L^1\to L^1} \leq C\lambda^{1/2}, \quad 0<\lambda\leq 1.$$

Pour $n=3$, nous utilisons (2.2.12b) pour obtenir :

$$\left\|(VR_0^\pm(\lambda) - VR_0^\pm(0))f\right\|_{L^1} \leq c_3\lambda \int_{\mathbf{R}^3}\int_{\mathbf{R}^3} \langle\lambda|x-y|\rangle^{-1}|V(x)||f(y)|\,dxdy.$$

En utilisant (L3/2-), nous obtenons :

$$\left\|VR_0^\pm(\lambda) - VR_0^\pm(0)\right\|_{L^1\to L^1} \leq C\lambda^{\gamma}, \quad 0<\lambda\leq 1,$$

avec γ définie dans l'appendice. Nous pouvons donc écrire pour $n\geq 3$:

$$\left\|VR_0^\pm(\lambda) - VR_0^\pm(0)\right\|_{L^1\to L^1} \leq C\lambda^{\beta}, \quad 0<\lambda\leq 1,$$

avec $\beta = \min(\gamma, 1/2) > 0$. Comme $1 + VR_0^{\pm}(0) = 1 - V\Delta^{-1}$ est inversible sur L^1 par hypothèse avec un inverse borné, noté T, il suit de (2.2.14) qu'il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que l'opérateur $1 + VR_0^{\pm}(\lambda)$ soit inversible sur L^1 pour $0 < \lambda \le \lambda_0$. Vu (2.2.10), nous avons

$$R^{\pm}(\lambda) = R_0^{\pm}(\lambda)\left(1 + VR_0^{\pm}(\lambda)\right)^{-1},$$

et donc

$$VR^{\pm}(\lambda) = VR_0^{\pm}(\lambda)\left(1 + VR_0^{\pm}(\lambda)\right)^{-1} = 1 - \left(1 + VR_0^{\pm}(\lambda)\right)^{-1}.$$

En écrivant ensuite

$$\begin{aligned}1 + VR_0^{\pm}(\lambda) &= 1 + VR_0^{\pm}(0) + VR_0^{\pm}(\lambda) - VR_0^{\pm}(0) \\ &= T^{-1} + VR_0^{\pm}(\lambda) - VR_0^{\pm}(0) = \left(1 + (VR_0^{\pm}(\lambda) - VR_0^{\pm}(0))T\right)T^{-1},\end{aligned}$$

nous avons l'identité

$$\begin{aligned}\sum_{\pm} \pm VR^{\pm}(\lambda) &= -\sum_{\pm} \pm \left(1 + VR_0^{\pm}(\lambda)\right)^{-1} = -\sum_{\pm} \pm T\left(1 + (VR_0^{\pm}(\lambda) - VR_0^{\pm}(0))T\right)^{-1} \\ &= \sum_{\pm} \pm T(VR_0^{\pm}(\lambda) - VR_0^{\pm}(0))T\left(1 + (VR_0^{\pm}(\lambda) - VR_0^{\pm}(0))T\right)^{-1}. \qquad (2.2.15)\end{aligned}$$

Par (2.2.9) et (2.2.15),

$$Ve^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G) = (i\pi h)^{-1}\sum_{\pm} \pm \int_{-\infty}^{+\infty} TVP_h^{\pm}(t-\tau)U_h^{\pm}(\tau)d\tau, \qquad (2.2.16)$$

où

$$\begin{aligned}P_h^{\pm}(t) &= \int_0^{\infty} e^{it\lambda}\widetilde{\varphi}_h(\lambda)\left(R_0^{\pm}(\lambda) - R_0^{\pm}(0)\right)d\lambda, \\ U_h^{\pm}(t) &= \int_0^{\infty} e^{it\lambda}\varphi_h(\lambda)T\left(1 + (VR_0^{\pm}(\lambda) - VR_0^{\pm}(0))T\right)^{-1}d\lambda,\end{aligned}$$

où $\widetilde{\varphi}_h(\lambda) = \widetilde{\varphi}_1(h\lambda)$, $\widetilde{\varphi}_1 \in C_0^{\infty}((0, +\infty))$ est tel que $\widetilde{\varphi}_1 = 1$ sur $\operatorname{supp}\varphi_1$. Le noyau de l'opérateur $P_h^{\pm}(t)$ est de la forme $A_h^{\pm}(|x-y|, t)$, où

$$A_h^{\pm}(\sigma, t) = \pm i4^{-1}(2\pi)^{-\nu}\sigma^{-n+2}\int_0^{\infty} e^{it\lambda}\widetilde{\varphi}_h(\lambda)\left(\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)) - \mathcal{H}_\nu^{\pm}(0)\right)d\lambda = h^{1-n}A_1^{\pm}(\sigma/h, t/h). \qquad (2.2.17)$$

Lemme 2.19 *Pour tout $\sigma > 0$, $h \ge 1$, nous avons*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|A_h^{\pm}(\sigma, t)\right| dt \le Ch^{-1/2}\left(\sigma^{-n+5/2} + \sigma^{-(n-1)/2}\right), \quad n \ge 4, \qquad (2.2.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|A_h^{\pm}(\sigma, t)\right| dt \le Ch^{-1}\langle \sigma h^{-1}\rangle^{-1}, \quad n = 3. \qquad (2.2.19)$$

Preuve de (2.2.18). Vu (2.2.17), il suffit de prouver (2.2.18) avec $h = 1$. Considérons en premier le cas $0 < \sigma \le 1$. Nous voulons obtenir une majoration en $\sigma^{-n+5/2}$. En utilisant l'inégalité montrée en appendice

$$\|\widehat{f}\|_{L^1} \le C\sum_{j=0}^{1} \sup_{\lambda} \langle\lambda\rangle \left|\partial_\lambda^j f(\lambda)\right|,$$

nous obtenons

$$\sigma^{n-2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|A_1^{\pm}(\sigma,t)\right|dt = c_\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\tilde{\phi}_1(\lambda)\left(\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)-\mathcal{H}_\nu^{\pm}(0)\right)d\lambda\right|dt$$
$$\leq C\sup_{\lambda\in\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}_1}\left(\left|\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)-\mathcal{H}_\nu^{\pm}(0)\right|+\sigma\left|\partial_\lambda\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)\right|\right)\leq C\sigma^{1/2},$$

qui est la borne désirée. Soit maintenant $\sigma \geq 1$. Nous voulons obtenir une majoration en $\sigma^{-(n-1)/2}$. Nous avons

$$A_1^{\pm}(\sigma,t) = K_1^{\pm}(\sigma,t)+c^{\pm}\sigma^{-n+2}\int_0^\infty e^{it\lambda}\widetilde{\varphi}_1(\lambda)d\lambda,$$

où $c^{\pm}$ sont des constantes et $K_1^{\pm}$ sont comme dans la preuve du lemme 2.18. Comme $\tilde{\varphi}$ est à support compact, nous avons $\hat{\tilde{\varphi}}\in L^1(\mathbf{R})$. En effet, écrivons

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\phi(\lambda)d\lambda\right|dt = \int_{|t|\leq 1}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\phi(\lambda)d\lambda\right|dt+\int_{|t|\geq 1}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\phi(\lambda)d\lambda\right|dt.$$

En intégrant par parties deux fois dans l'intégrale portant sur $\{|t|\geq 1\}$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\phi(\lambda)d\lambda\right|dt\leq C+\int_{|t|\geq 1}\frac{1}{t^2}\int_0^\infty|\varphi''(\lambda)|d\lambda\,dt\leq C.$$

Nous avons donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A_1^{\pm}(\sigma,t)|dt\leq\int_{-\infty}^{\infty}|K_1^{\pm}(\sigma,t)|dt+C\sigma^{-n+2}\|\hat{\tilde{\phi}}_1\|_{L^1}.$$

En utilisant (2.2.7) qui apparaît dans la preuve du lemme 2.18. avec $s=0$ et le fait que pour $\sigma\geq 1$, nous ayons $\sigma^{-n+2}\leq\sigma^{-(n-1)/2}$, nous obtenons finalement :

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A_1^{\pm}(\sigma,t)|dt\leq C\sigma^{-(n-1)/2},\quad \sigma\geq 1.$$

Par conséquent, nous avons bien (2.2.18) (avec $h=1$) dans ce cas. □

Preuve de (2.2.19). Comme dans le cas $n\geq 4$, il suffit de prouver (2.2.19) pour $h=1$. Considérons en premier le cas $0<\sigma\leq 1$. Nous utilisons ici encore l'inégalité

$$\|\widehat{f}\|_{L^1}\leq C\sum_{j=0}^{1}\sup_\lambda\langle\lambda\rangle\left|\partial_\lambda^j f(\lambda)\right|,$$

nous obtenons

$$\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\left|A_1^{\pm}(\sigma,t)\right|dt = c_3\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\tilde{\phi}_1(\lambda)\left(\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)-\mathcal{H}_\nu^{\pm}(0)\right)d\lambda\right|dt$$
$$\leq C\sup_{\lambda\in\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}_1}\left(\left|\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)-\mathcal{H}_\nu^{\pm}(0)\right|+\sigma\left|\partial_\lambda\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)\right|\right)$$
$$\leq C\sup_{\lambda\in\operatorname{supp}\widetilde{\varphi}_1}\left(|\sigma\lambda|\langle\sigma\lambda\rangle^{-1}+\sigma\right)\leq C\sigma.$$

En utilisant $1\leq C\langle\sigma\rangle^{-1}$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|A_1^{\pm}(\sigma,t)\right|dt\leq C\langle\sigma\rangle^{-1},\quad 0<\sigma\leq 1,$$

qui est la borne désirée. Pour $\sigma \geq 1$, écrivons de nouveau

$$A_1^{\pm}(\sigma, t) = K_1^{\pm}(\sigma, t) + c^{\pm}\sigma^{-1} \int_0^{\infty} e^{it\lambda}\widetilde{\varphi}_1(\lambda)d\lambda,$$

où $c^{\pm}$ sont des constantes et $K_1^{\pm}$ sont comme dans la preuve du lemme 2.18. Nous avons donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_1^{\pm}(\sigma, t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K_1^{\pm}(\sigma, t)|dt + C\sigma^{-1}\|\hat{\hat{\phi}}_1\|_{L^1}.$$

En utilisant (2.2.7) qui apparaît dans la preuve du lemme 2.18. avec $s = 0$ et le fait que $\sigma^{-1} \leq \langle\sigma\rangle^{-1}$ pour $\sigma \geq 1$, nous obtenons finalement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_1^{\pm}(\sigma, t)|dt \leq C\langle\sigma\rangle^{-1} + C\sigma^{-1} \leq C\langle\sigma\rangle^{-1}, \quad \sigma \geq 1.$$

Par conséquent, nous avons bien (2.2.19) (avec $h = 1$) dans ce cas. $\square$

Suite de la preuve de (P5) : Par (2.2.16), (2.2.18) et (VOn), nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|Ve^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1} dt \leq Ch^{-1}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\|VP_h^{\pm}(t-\tau)U_h^{\pm}(\tau)f\right\|_{L^1} d\tau dt$$

$$\leq Ch^{-1}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |V(x)| \left|A_h^{\pm}(|x-y|, t-\tau)\right| \left|U_h^{\pm}(\tau)f(y)\right| dxdyd\tau dt$$

$$\leq Ch^{-1}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |V(x)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|A_h^{\pm}(|x-y|, \tau)\right| d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(y)\right| d\tau\right) dxdy.$$

Distinguons maintenant les cas $n \geq 4$ et $n = 3$. Pour $n \geq 4$, nous avons la majoration par

$$\leq Ch^{-3/2}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |V(x)| \left(|x-y|^{-n+5/2} + |x-y|^{-(n-1)/2}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(y)\right| d\tau dxdy$$

$$\leq Ch^{-3/2}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(y)\right| d\tau dy. \tag{2.2.20}$$

Pour $n = 3$, nous avons la majoration par

$$\leq Ch^{-2}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |V(x)|\langle|x-y|/h\rangle^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(y)\right| d\tau dxdy,$$

et donc en utilisant (L3/2-), nous obtenons finalement une majoration par

$$\leq Ch^{-1-\gamma}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(y)\right| d\tau dy. \tag{2.2.21}$$

Ainsi, (P5) résulte de (2.2.20) et (2.2.21) (avec $\beta = \min(\gamma, 1/2)$) et du lemme suivant

Lemme 2.20 *Il existe une constante $h_0 > 0$ telle que pour $h \geq h_0$, nous ayons*

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(t)f(x)\right| dtdx \leq C\|f\|_{L^1}. \tag{2.2.22}$$

Preuve du lemme. En utilisant l'identité

$$T\left(1+(VR_0^\pm(\lambda)-VR_0^\pm(0))T\right)^{-1}$$
$$=T-T(VR_0^\pm(\lambda)-VR_0^\pm(0))T\left(1+(VR_0^\pm(\lambda)-VR_0^\pm(0))T\right)^{-1},$$

nous obtenons

$$U_h^\pm(t)=T\widehat{\varphi}_h(t)-\int_{-\infty}^{\infty}TVP_h^\pm(t-\tau)U_h^\pm(\tau)d\tau.$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}_h(t)|dt=h^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}_1(t/h)|dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}_1(t)|dt,$$

comme précédemment, nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h^\pm(t)f(x)\right|dtdx\le C\|f\|_{L^1}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}_h(t)|dt$$
$$+C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)|\left|A_h^\pm(|x-y|,t-\tau)\right|\left|U_h^\pm(\tau)f(y)\right|dxdyd\tau dt.$$

Ce qui se majore pour $n\ge 4$ par

$$\le C\|f\|_{L^1}+Ch^{-1/2}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h^\pm(\tau)f(y)\right|d\tau dy,$$

et pour $n=3$ par

$$\le C\|f\|_{L^1}+Ch^{-\gamma}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h^\pm(\tau)f(y)\right|d\tau dy.$$

Ce qui implique (2.2.22) à condition que h soit pris assez grand. □

2.2.3 Etape 3 : étude du comparateur

Proposition 2.21 *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe des constantes positives C, h_0 et β telles que nous ayons, pour $h\ge h_0$,*

$$\|\Phi(t,h)\|_{L^1\to L^\infty}\le Ch^{-(n+1)/2-\beta}\langle t\rangle^{-(n-1)/2},\quad\forall t.\qquad (CO)$$

Preuve : Nous allons déduire (CO) de la proposition 2.16.
Nous utilisons la formule de Duhamel

$$e^{it\sqrt{G}}=e^{it\sqrt{G_0}}+i\frac{\sin\left(t\sqrt{G_0}\right)}{\sqrt{G_0}}\left(\sqrt{G}-\sqrt{G_0}\right)-\int_0^t\frac{\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)}{\sqrt{G_0}}Ve^{i\tau\sqrt{G}}d\tau.\qquad (2.2.23)$$

Posons

$$\Phi_2(t;h)=-h\int_0^t T^*\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)d\tau.\qquad (2.2.24)$$

Nous avons alors

$$\Phi(t;h)-\Phi_2(t;h)=\Phi(t;h)+T^*\psi_1(h^2G_0)\left(e^{it\sqrt{G_0}}+i\frac{\sin(t\sqrt{G_0})}{\sqrt{G_0}}(\sqrt{G}-\sqrt{G_0})-e^{it\sqrt{G}}\right)\psi(h^2G).$$

Nous introduisons $\psi_1\in C_0^\infty((0,+\infty))$, $\psi_1=1$ sur $\operatorname{supp}\psi$, $\widetilde{\psi}(\sigma)=\sigma^{1/2}\psi(\sigma)$, $\widetilde{\psi}_1(\sigma)=\sigma^{-1/2}\psi_1(\sigma)$. Comme $f(h^2G_0)$ commute avec $e^{\pm it\sqrt{G_0}}$ pour $f=\psi$, ψ_1 et $\tilde{\psi}_1$, nous obtenons

$$\Phi_1(t;h):=\Phi(t;h)-\Phi_2(t;h)=\left(\psi_1(h^2G)-T^*\psi_1(h^2G_0)\right)e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)$$

$$+T^*\psi_1(h^2G_0)e^{it\sqrt{G_0}}\left(\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)T\right)$$
$$-iT^*\psi_1(h^2G_0)\sin\left(t\sqrt{G_0}\right)\left(\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)T\right)$$
$$+iT^*\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin\left(t\sqrt{G_0}\right)\left(\widetilde{\psi}(h^2G)-\widetilde{\psi}(h^2G_0)T\right). \tag{2.2.25}$$

Par (P2) et (E5), nous avons

$$\|\text{2e terme de }\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}=\left\|T^*\psi_1(h^2G_0)e^{it\sqrt{G_0}}\left(\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)T\right)f\right\|_{L^\infty}$$

$$\leq \underbrace{\|T^*\|_{L^\infty\to L^\infty}}_{\leq C\text{ hypothèse}}\times\underbrace{\left\|\psi_1(h^2G_0)e^{it\sqrt{G_0}}\right\|_{L^1\to L^\infty}}_{\leq Ch^{-(n+1)/2}\langle t\rangle^{-(n-1)/2}\text{ (P2)}}\times\underbrace{\left\|\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)T\right\|_{L^1\to L^1}}_{\leq Ch^{-\beta}\text{ (E5)}}\times\|f\|_{L^1}.$$

Par conséquent

$$\|\text{2e terme de }\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}\leq Ch^{-\beta-\frac{n+1}{2}}\langle t\rangle^{-\frac{n-1}{2}}\|f\|_{L^1},\quad h\geq h_0.$$

De la même façon, nous obtenons la même estimation pour les 3e et 4e termes de $\Phi_1(t;h)$. Pour traiter le premier terme de $\Phi_1(t;h)$, nous écrivons :

$$e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)=\Phi(t;h)+T^*e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)T.$$

En utilisant (P2) et (E5), nous obtenons

$$\|\text{1er terme de }\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}\leq Ch^{-\beta}\left(\|\Phi(t;h)\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}+h^{-\frac{n+1}{2}}\langle t\rangle^{-\frac{n-1}{2}}\|f\|_{L^1}\right).$$

Finalement, nous obtenons l'estimation suivante pour la contribution de $\Phi_1(t;h)$:

$$\|\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}\leq Ch^{-(n+1)/2-\beta}\langle t\rangle^{-(n-1)/2}\|f\|_{L^1}+Ch^{-\beta}\|\Phi(t;h)f\|_{L^\infty}. \tag{2.2.26}$$

Nous estimons ensuite

$$\langle\Phi_2(t;h)f,g\rangle=-h\int_0^t\langle T^*\tilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin((t-\tau)\sqrt{G})Ve^{i\tau\sqrt{G_0}}\psi(h^2G)f,g\rangle\,d\tau.$$

En prenant la valeur absolue et en multipliant par $t^{\frac{n-1}{2}}$, nous majorons $t^{\frac{n-1}{2}}|\langle\Phi_2(t;h)f,g\rangle|$ en séparant l'intégrale en deux termes $\int_0^{t/2}$ et $\int_{t/2}^t$. Dans la première intégrale, nous utilisons

$$\text{si }0\leq\tau\leq t/2\text{ alors }\left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\geq 2^{-\frac{n-1}{2}},$$

et dans la deuxième intégrale, nous utilisons

$$\text{si }t/2\leq\tau\leq t\text{ alors }\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\geq 2^{-\frac{n-1}{2}}.$$

De plus, nous écrivons dans la première intégrale

$$\langle T^*\tilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,g\rangle=\langle Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})\tilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\rangle,$$

et dans la deuxième intégrale

$$\langle T^*\tilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,g\rangle=\langle e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,V\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})\tilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\rangle.$$

Ce qui permet la majoration suivante

$$\langle t\rangle^{(n-1)/2}\left|\langle\Phi_2(t;h)f,g\rangle\right|$$

$$\leq h\int_0^{t/2}\langle t-\tau\rangle^{(n-1)/2}\left\|\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\right\|_{L^\infty}\left\|Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau$$

$$+h\int_{t/2}^{t}\left\|V\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\right\|_{L^1}\langle\tau\rangle^{(n-1)/2}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}d\tau.$$

Par (P2), nous avons comme $t-\tau\neq 0$ car $0\leq\tau\leq t/2$,

$$\left\|\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})\tilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\right\|_{L^\infty}\leq Ch^{-\frac{n+1}{2}}\langle t-\tau\rangle^{-\frac{n-1}{2}}\underbrace{\|Tg\|_{L^1}}_{\leq C\|g\|_1}.$$

Donc la première intégrale peut être majorée par

$$\leq Ch^{1-\frac{n+1}{2}}\|g\|_1\int_0^{t/2}\left\|Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau.$$

Quant à la seconde, nous avons la majoration

$$\leq Ch\sup_{t/2\leq\tau\leq t}\langle\tau\rangle^{\frac{n-1}{2}}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}\int_{t/2}^{t}\left\|V\sin\left((t-\tau')\sqrt{G_0}\right)\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\right\|_{L^1}d\tau'.$$

Nous majorons alors les deux intégrales qui apparaissent dans les majorants par des intégrales sur $(-\infty,+\infty)$ puis nous distinguons les cas $n=3$ et $n\geq 4$.

Cas $n\geq 4$: nous utilisons (P3) et (P5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau\leq Ch^{-1-\beta}\|f\|_{L^1},\quad h\geq h_0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|V\sin((t-\tau')\sqrt{G_0})\tilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\right\|_{L^1}d\tau'\leq Ch^{-\frac{n-1}{2}}\|Tg\|_{L^1}\leq Ch^{-\frac{n-1}{2}}\|g\|_{L^1},\quad h>0.$$

Finalement,

$$\langle t\rangle^{(n-1)/2}\left|\langle\Phi_2(t;h)f,g\rangle\right|$$

$$\leq Ch^{-(n+1)/2-\beta}\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1}+Ch^{-\frac{n-3}{2}}\|g\|_{L^1}\sup_{t/2\leq\tau\leq t}\langle\tau\rangle^{(n-1)/2}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}.$$

Comme $n\geq 4$, nous avons $\dfrac{n-3}{2}>0$ et donc nous pouvons conclure

$$\langle t\rangle^{(n-1)/2}\|\Phi_2(t;h)f\|_{L^\infty}\leq Ch^{-(n+1)/2-\beta}\|f\|_{L^1}$$

$$+Ch^{-\beta}\sup_{t/2\leq\tau\leq t}\langle\tau\rangle^{(n-1)/2}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}.\tag{2.2.27a}$$

Cas $n=3$ **:** nous utilisons (P4) et (P5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau\leq Ch^{-1-\beta}\|f\|_{L^1},\quad h\geq h_0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|V\sin((t-\tau')\sqrt{G_0})\tilde{\psi}_1(h^2G_0)Tg\right\|_{L^1}d\tau'\leq Ch^{-1-\gamma}\|Tg\|_{L^1}\leq Ch^{-1-\gamma}\|g\|_{L^1},\quad h>0.$$

Finalement,

$$\langle t\rangle \left|\langle \Phi_2(t;h)f,g\rangle\right|$$
$$\leq Ch^{-2-\beta}\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1} + Ch^{-\gamma}\|g\|_{L^1}\sup_{t/2\leq\tau\leq t}\langle\tau\rangle\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}. \tag{2.2.27b}$$

Nous pouvons réunir les cas (2.2.27a) et (2.2.27b) et continuer la démonstration pour tout $n \geq 3$. Par (2.2.26) et (2.2.27), nous concluons

$$\langle t\rangle^{(n-1)/2}\|\Phi(t;h)f\|_{L^\infty} \leq Ch^{-(n+1)/2-\beta}\|f\|_{L^1} + Ch^{-\beta}\langle t\rangle^{(n-1)/2}\|\Phi(t;h)f\|_{L^\infty}$$
$$+Ch^{-\beta}\sup_{t/2\leq\tau\leq t}\langle\tau\rangle^{(n-1)/2}\|\Phi(\tau;h)f\|_{L^\infty}. \tag{2.2.28}$$

En prenant h assez grand, nous pouvons absorber le deuxième et troisième terme du membre de droite de (2.2.28), obtenant ainsi (CO). De façon similaire, nous pouvons traiter le cas $t < 0$.
□

2.2.4 Preuve du théorème 2.1

Théorème 2.22 *Sous les hypothèses (VOn) en dimension $n \geq 4$ et (V3)+(L3/2-) en dimension $n = 3$ sur le potentiel V et sous l'hypothèse que 0 est un point régulier pour G, il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $0 < a \leq a_0$*

$$\left\|e^{it\sqrt{G}}G^{-\frac{n+1}{4}}\eta_a(G)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C\langle t\rangle^{-\frac{n-1}{2}}\log(2+|t|), \quad \forall t, \tag{$D1$}$$

$$\left\|e^{it\sqrt{G}}G^{-\frac{n+1}{4}+\varepsilon}\eta_a(G)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C_\varepsilon\langle t\rangle^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t,\ \forall 0<\varepsilon\ll 1, \tag{$D2$}$$

$$\left\|e^{it\sqrt{G}}G^{-\alpha\frac{n+1}{4}}\eta_a(G)\right\|_{L^{p'}\to L^p} \leq C\langle t\rangle^{-\alpha\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t, \tag{$D3$}$$

où $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = 1 - 2/p$ pour $2 \leq p < +\infty$.

Preuve : le théorème résulte de la proposition 2.21. Par interpolation entre (CO) et la borne triviale

$$\|\Phi(t,h)\|_{L^2\to L^2} \leq C,$$

nous obtenons

$$\|\Phi(t,h)\|_{L^{p'}\to L^p} \leq Ch^{-\alpha(n+1)/2-\alpha\beta}\langle t\rangle^{-\alpha(n-1)/2}, \quad t\neq 0, \tag{2.2.29}$$

pour tout $2 \leq p \leq +\infty$, où $1/p + 1/p' = 1$, $\alpha = 1 - 2/p$. En effet, c'est l'application du théorème de Riesz-Thorin où $(1/p', 1/p)$ est le barycentre du système $(((1/2,1/2),\alpha),((1,0),1-\alpha))$. Nous avons bien $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\alpha}{2}$ et $\dfrac{1}{p'} = \alpha + \dfrac{1-\alpha}{2}$. Rappellons que

$$\eta_a(\sigma) = \chi(\sigma)(1-\chi_a(\sigma)) = \chi(\sigma)(1-\chi_1(\sigma/a)).$$

Nous avons donc pour $\sigma > 0$:

$$\int_{\sigma/a}^{+\infty}\chi_1'(\theta)d\theta = [\chi_1(\theta)]_{\sigma/a}^{+\infty} = 1-\chi_1(\sigma/a) = \eta_a(\sigma).$$

Par conséquent, en posant $\psi(\sigma) = \sigma^{1-\alpha(n+1)/4}\chi_1'(\sigma) \in C_0^\infty((0,+\infty))$, nous avons

$$\int_{1/a}^{+\infty}\psi(\sigma\theta)\theta^{-1+\alpha\frac{n+1}{4}}\,d\theta = \int_{1/a}^{+\infty}\sigma^{1-\alpha\frac{n+1}{4}}\chi_1'(\sigma\theta)d\theta = \sigma^{-\alpha\frac{n+1}{4}}\int_{\sigma/a}^{+\infty}\chi_1'(\theta)d\theta = \sigma^{-\alpha\frac{n+1}{4}}\eta_a(\sigma).$$

Maintenant, en utilisant (2.2.29), nous obtenons (pour $2 < p \leq +\infty$)

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G) - T^* e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G_0)T \right\|_{L^{p'}\to L^p} \\
&\leq \int_{a^{-1}}^{\infty} \left\| \Phi(t,\sqrt{\theta}) \right\|_{L^{p'}\to L^p} \theta^{-1+\alpha(n+1)/4} d\theta \\
&\leq C\langle t\rangle^{-\alpha(n-1)/2} \int_{a^{-1}}^{\infty} \theta^{-1-\alpha\beta/2} d\theta.
\end{aligned}$$

Comme $-1-\alpha\beta/2 > -1$, $\theta \mapsto \theta^{-1-\alpha\beta/2}$ est intégrable en $+\infty$ et donc pour a assez petit $\displaystyle\int_{1/a}^{+\infty} \theta^{-1-\alpha\beta/2} d\theta \leq C$. Finalement, nous avons la majoration

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G) - T^* e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G_0)T \right\|_{L^{p'}\to L^p} \leq C\langle t\rangle^{-\alpha(n-1)/2}, \qquad (2.2.30)$$

à condition que a soit pris suffisamment petit. Séparons maitenant les cas $p = +\infty$ et $2 \leq p < +\infty$. Pour $2 \leq p < +\infty$, il est évident que (D3) suit de (2.2.30), du fait que l'estimation ait lieu pour G_0 et que l'opérateur $T : L^p \to L^p$ est borné par hypothèse pour $1 \leq p \leq 2$. Pour $p = +\infty$, nous avons comme l'opérateur $T : L^p \to L^p$ est borné par hypothèse pour $1 \leq p \leq 2$:

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G) \right\| \\
&\leq \left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G) - T^* e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G_0)T \right\|_{L^1\to L^\infty} + C\left\| e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-\alpha(n+1)/4}\eta_a(G_0) \right\| \\
&\leq C\langle t\rangle^{-(n-1)/2} + C\langle t\rangle^{-(n-1)/2}\log(2+|t|) \leq C\langle t\rangle^{-(n-1)/2}\log(2+|t|).
\end{aligned}$$

Théorème 2.23 *Supposons $n \geq 4$ et supposons ($V(\delta)$) vérifiée pour $\delta > (n+1)/2$. Alors pour tout $2 \leq p < +\infty$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $t \neq 0$, nous avons les estimations suivantes*

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-(n+1)/4}\langle G\rangle^{-(n-3)/4-\varepsilon} P_{ac}\|_{L^1\to L^\infty} \leq C_\varepsilon |t|^{-(n-1)/2}\log(2+|t|), \qquad (D4)$$

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-(n+1)/4+\varepsilon}\langle G\rangle^{-(n-3)/4-2\varepsilon} P_{ac}\|_{L^1\to L^\infty} \leq C_\varepsilon |t|^{-(n-1)/2}, \qquad (D5)$$

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4}\langle G\rangle^{-\alpha(n-3)/4} P_{ac}\|_{L^{p'}\to L^p} \leq C|t|^{-\alpha(n-1)/2}. \qquad (D6)$$

De plus pour tout $0 \leq q \leq (n-3)/2$, $2 \leq p < \frac{2(n-1-2q)}{n-3-2q}$, nous avons

$$\|e^{it\sqrt{G}} G^{-\alpha(n+1)/4}\langle G\rangle^{-\alpha q/2} P_{ac}\|_{L^{p'}\to L^p} \leq C|t|^{-\alpha(n-1)/2}, \qquad (D7)$$

où $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = 1 - 2/p$.

Preuve : le théorème résulte des théorèmes 2.1 et 2.2

D'après le théorème 2.2, nous avons

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\frac{n-1}{2}-\varepsilon}\chi_a(G) \right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t \neq 0,$$

et d'après le théorème 2.1, nous avons

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-\frac{n+1}{4}}\eta_a(G) \right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C\langle t\rangle^{-\frac{n-1}{2}}\log(2+|t|), \quad \forall t \neq 0.$$

Comme $P_{ac}(G) = \eta_a(G) + \chi_a(G)$, nous avons

$$G^{-\frac{n+1}{4}}\langle G\rangle^{-\frac{n-3}{4}-\varepsilon}P_{ac}(G) = G^{-\frac{n+1}{4}}\eta_a(G)\langle G\rangle^{-\frac{n-3}{4}-\varepsilon} + G^{-\frac{n-1}{2}-\varepsilon}\chi_a(G)G^{\frac{n-3}{4}-\varepsilon}\langle G\rangle^{-\frac{n-3}{4}-\varepsilon}.$$

Comme $\langle x\rangle^{-\frac{n-3}{4}-\varepsilon} \leq 1$ et $x^{\frac{n-3}{3}+\varepsilon}\langle x\rangle^{-\frac{n-3}{4}-\varepsilon} \leq 1$, on a

$$\left\|e^{it\sqrt{G}}G^{-\frac{n+1}{4}}\langle G\rangle^{-\frac{n-3}{4}-\varepsilon}P_{ac}(G)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq \left\|e^{it\sqrt{G}}G^{-\frac{n+1}{4}}\eta_a(G)\right\|_{L^1\to L^\infty} + \left\|e^{it\sqrt{G}}G^{-\frac{n-1}{2}-\varepsilon}\chi_a(G)\right\|_{L^1\to L^\infty},$$

et finalement

$$\left\|e^{it\sqrt{G}}G^{-\frac{n+1}{4}}\langle G\rangle^{-\frac{n-3}{4}-\varepsilon}P_{ac}(G)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-\frac{n-1}{2}}\log(2+|t|), \quad \forall t \neq 0,$$

et de la même manière pour prouver (D5), (D6) et (D7).

2.3 Estimations dispersives en dimension $n = 2$

Nous adaptons des méthodes utilisées pour les dimensions $n \geq 3$ à la dimension $n = 2$. Les méthodes fonctionnant à basses fréquences en dimension $n \geq 3$ fonctionnent ici à hautes fréquences en dimension $n = 2$.

Théorème 2.24 *Soit V vérifiant (V2). Alors, il existe une constante $a_0 > 0$ telle que pour tout $a \geq a_0$, $0 < \epsilon \ll 1$, $2 \leq p < +\infty$, nous ayons les estimations*

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-3/4-\epsilon} \chi_a(G) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C_\epsilon |t|^{-1/2}, \quad t \neq 0, \tag{D8}$$

$$\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-3\alpha/4} \chi_a(G) \right\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C |t|^{-\alpha/2}, \quad t \neq 0, \tag{D9}$$

où $1/p + 1/p' = 1$, $\alpha = 1 - 2/p$.

Soit $\psi \in C_0^\infty((0, +\infty))$. On introduit

$$\Phi(t; h) = e^{it\sqrt{G}} \psi(h^2 G) - e^{it\sqrt{G_0}} \psi(h^2 G_0).$$

Pour prouver le théorème 2.24, nous allons étudier ce comparateur en trois étapes :

1. Estimations sur $\psi(h^2 G_0)$ et $\psi(h^2 G)$ à l'aide de propriété sur la résolvante (section 2.1)
2. Estimations autour des propagateurs associés à l'équation des ondes à l'aide d'estimations sur les noyaux (section suivante 2.3.1)
3. Estimations du comparateur $\Phi(t; h)$ à l'aide de la formule de Duhamel et d'un mécanisme de bootstrap (section 2.3.2).

En effet, le théorème 2.24 résulte de l'estimation suivante :

Proposition 2.25 *Sous les hypothèses du théorème 2.24, il existe des constantes positives C et h_0 telles que nous ayons, pour $0 < h \leq h_0$,*

$$\|\Phi(t, h)\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C h^{-1} |t|^{-1/2}, \quad t \neq 0. \tag{$CO-2$}$$

Preuve du théorème : écrivons

$$\sigma^{-3/4-\epsilon} \chi_a(\sigma) = \int_0^1 \psi(\sigma\theta) \theta^{3/4+\epsilon-1} d\theta, \quad \sigma > 0,$$

où $\psi(\sigma) = \sigma^{1-3/4-\epsilon} \chi_1'(\sigma) \in C_0^\infty((0, +\infty))$, et en utilisant (CO-2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\| e^{it\sqrt{G}} G^{-3/4-\epsilon} \chi_a(G) - e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-3/4-\epsilon} \chi_a(G_0) \right\|_{L^1 \to L^\infty} &\leq \int_0^1 \left\| \Phi(t, \sqrt{\theta}) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \theta^{-1/4+\epsilon} d\theta \\ &\leq C |t|^{-1/2} \int_0^1 \theta^{-3/4+\epsilon} d\theta \leq C |t|^{-1/2}.\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Il est évident que (D8) résulte (2.3.1) et de l'estimation pour l'opérateur libre $\sqrt{G_0}$. Pour prouver (D9), observons qu'une interpolation entre (CO-2) et la borne triviale

$$\|\Phi(t; h)\|_{L^2 \to L^2} \leq C$$

conduit à

$$\|\Phi(t; h)\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C h^{-\alpha} |t|^{-\alpha/2}, \quad t \neq 0, \tag{2.3.2}$$

pour tout $2 \leq p \leq +\infty$, $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = 1 - 2/p$. Maintenant, nous écrivons

$$\sigma^{-3\alpha/4}\chi_a(\sigma) = \int_0^{a^{-1}} \psi(\sigma\theta)\theta^{-1+3\alpha/4}d\theta,$$

et nous utilisons (2.3.2) pour obtenir (pour $0 < \alpha \leq 1$)

$$\left\| e^{it\sqrt{G}}G^{-3\alpha/4}\chi_a(G) - e^{it\sqrt{G_0}}G_0^{-3\alpha/4}\chi_a(G_0)\right\|_{L^{p'}\to L^p}$$

$$\leq \int_0^{a^{-1}} \left\|\Phi(t;\sqrt{\theta})\right\|_{L^{p'}\to L^p} \theta^{-1+3\alpha/4}d\theta \leq C|t|^{-\alpha/2}\int_0^{a^{-1}} \theta^{-1+\alpha/4}d\theta \leq C|t|^{-\alpha/2}, \tag{2.3.3}$$

à condition que a soit pris suffisamment grand. Maintenant, (D9) résulte de (2.3.3) et du fait que l'estimation ait lieu pour G_0.

2.3.1 Estimations autour des propagateurs $e^{it\sqrt{G_0}}$ et $e^{it\sqrt{G}}$

Proposition 2.26 *Sous les hypothèses du théorème 2.24, il existe des constantes positives C et h_0 telles que, pour $0 \leq s \leq 1/2$, f, $g \in L^1$, nous ayons*

$$\left\| e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^\infty} \leq Ch^{-3/2}|t|^{-1/2}\|f\|_{L^1}, \quad h > 0,\, t \neq 0, \tag{P6}$$

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s|x-y|^{-s}\left|Ve^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)f(x)\right||g(y)|\,dtdxdy$$
$$\leq Ch^{-1/2}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \quad h > 0, \tag{P7}$$

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s\left\langle |x-y|/h\right\rangle^{-s}\left|Ve^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)\right||g(y)|\,dtdxdy$$
$$\leq Ch^{s-1/2-\epsilon_s}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \quad 0 < h \leq h_0, \tag{P8}$$

où $\epsilon_s = 0$ si $0 \leq s < 1/2$ et $\epsilon_s = \epsilon$ si $s = 1/2$ avec $0 < \epsilon \ll 1$.

Preuve de (P6) : Nous allons utiliser comme dans la preuve de la proposition 2.15. le fait que le noyau de l'opérateur $e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)$ est de la forme $K_h(|x-y|, t)$, où

$$K_h(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{it\lambda}\mathcal{J}_0(\sigma\lambda)\psi(h^2\lambda^2)\lambda d\lambda = h^{-2}K_1(\sigma h^{-1}, th^{-1}), \tag{2.3.4}$$

où $\mathcal{J}_0(z)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0. Il est prouvé dans l'appendice que K_h vérifie les estimations (pour tout $\sigma, h > 0$, $t \neq 0$)

$$|K_1(\sigma, t)| \leq C|t|^{-s}\langle\sigma\rangle^{s-1/2}, \quad \forall s \geq 0, \tag{2.3.5}$$

$$|K_h(\sigma, t)| \leq Ch^{-3/2}|t|^{-s}\sigma^{s-1/2}, \quad 0 \leq s \leq 1/2. \tag{2.3.6}$$

Il est évident que (P6) résulte de (2.3.6) avec $s = 1/2$.

Preuve de (P7) : Ce n'est pas difficile de voir que (P7) résulte de (V2) et du lemme suivant

Lemme 2.27 *Pour tout $\sigma, h > 0$, $0 \leq s \leq 1/2$, nous avons*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle th^{-1}\rangle^s\,|K_h(\sigma, t)|\,dt \leq Ch^{-1}\langle\sigma h^{-1}\rangle^{s-1/2}. \tag{2.3.7a}$$

Remarquons que le lemme est légèrement différent du lemme 2.18. Le changement de $|t|^s$ en $\langle t\rangle^s$ ne peut pas être obtenu en dimension $n \geq 3$, car nous utilisons ici que t^{-s} est intégrable en 0 pour $0 \leq s \leq (n-1)/2$ avec $n = 2$. Nous avons encore aussi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \, |K_h(\sigma, t)| \, dt \leq C h^{-1/2} \sigma^{s-1/2}, \quad 0 \leq s \leq 1/2, \tag{2.3.7b}$$

comme $|th^{-1}|^s \leq \langle th^{-1}\rangle^s$ et $\langle \sigma h^{-1}\rangle^{s-1/2} \leq (\sigma h^{-1})^{s-1/2}$ pour $0 \leq s \leq 1/2$.

Preuve lemme ⇒ (P7). Nous utilisons en fait (2.3.7b). Nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |x-y|^{-s} \left| V e^{it\sqrt{G_0}} \psi(h^2 G_0) f(x)\right| |g(y)| dt\, dx dy$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |K_h(|x-x'|, t)| dt\, |x-y|^{-s} |V(x)||f(x')||g(y)| dx' dx dy,$$

et en utilisant (2.3.7b),

$$\leq h^{-1/2} \int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2} |V(x)||x-y|^{-s}|x-x'|^{s-1/2}|f(x')||g(y)| dx' dx dy.$$

Nous utilisons (V2) pour $s = 0$ et $s = 1/2$:

$$\int_{\mathbf{R}^2} |V(x)||x-x'|^{-1/2} dx \leq C, \quad (s = 0),$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} |V(x)||x-y|^{-1/2} dx \leq C, \quad (s = 1/2),$$

pour obtenir pour $s = 0$ ou $s = 1/2$, une majoration par :

$$\leq C h^{-1/2} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Nous obtenons ensuite (P7) par interpolation entre $s = 0$ et $s = 1/2$.

Preuve lemme $h = 1$ ⇒ lemme. Vu (2.3.4), il suffit de montrer (2.3.7a) avec $h = 1$. En effet, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle th^{-1}\rangle^s |K_h(\sigma, t)| dt = h^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle th^{-1}\rangle^s |K_1(\sigma h^{-1}, th^{-1})| dt.$$

En effectuant le changement de variables $th^{-1} \mapsto t$, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle th^{-1}\rangle^s |K_h(\sigma, t)| dt = h^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle t\rangle^s |K_1(\sigma h^{-1}, t)| dt \leq C h^{-1} \langle \sigma h^{-1}\rangle^{s-1/2}.$$

Preuve lemme $h = 1$. Nous séparons l'étude en deux parties.
Si $0 < \sigma \leq 1$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle t\rangle^s |K_1(\sigma, t)| dt \leq C \int_{|t|\leq 1} |K_1(\sigma, t)| dt + C \int_{|t|\geq 1} |t|^s |K_1(\sigma, t)| dt.$$

En utilisant (2.3.5) avec $s' = s$ pour la première intégrale et $s' = s + 1 + \epsilon$ pour la seconde, nous avons une majoration par

$$\leq C \int_{|t|\leq 1} |t|^{-s} \langle \sigma\rangle^{s-1/2} + C \int_{|t|\geq 1} |t|^s |t|^{-s-1-\epsilon} \langle \sigma\rangle^{s+1+\epsilon-1/2} \leq C\langle \sigma\rangle^{s-1/2} + C\langle \sigma\rangle^{s+1/2+\epsilon}.$$

Comme $0 < \sigma \leq 1$, nous avons $\langle\sigma\rangle^{1+\epsilon} \leq C$ et donc nous obtenons finalement

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle t\rangle^s |K_1(\sigma,t)| dt \leq C\langle\sigma\rangle^{s-1/2}, \quad \forall\, 0 \leq s \leq 1/2.$$

Si $\sigma \geq 1$, nous allons utiliser le fait que la fonction J_0 peut être décomposée en $J_0(z) = e^{iz}b_0^+(z) + e^{-iz}b_0^-(z)$, où $b_0^\pm(z)$ sont des symboles d'ordre $-1/2$ pour $z \geq 1$. Alors, nous pouvons décomposer la fonction K_1 en $K_1^+ + K_1^-$, où $K_1^\pm$ sont définis en remplaçant dans la définition de K_1 la fonction $J_0(\sigma\lambda)$ par $e^{\pm i\sigma\lambda}b_0^\pm(\sigma\lambda)$. En intégrant par parties, nous obtenons par exemple pour K_1^+ :

$$(i(t+\sigma))^m K_1^+(\sigma,t) = \int_0^\infty e^{i(t+\sigma)\lambda} \frac{d^m}{d\lambda^m}\left(b_0^+(\sigma\lambda)\psi(\lambda^2)\lambda\right) d\lambda.$$

En utilisant la formule de dérivation de Leibniz, nous avons

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(b_0^+(\sigma\lambda)\psi(\lambda^2)\lambda\right) = \sum_{k=0}^m \sigma^k \frac{d^k b_0^+}{d\lambda^k}(\sigma\lambda)\psi_{m-k}(\lambda),$$

où les ψ_{m-k} sont dans $C_0^\infty((0,+\infty))$. En utilisant

$$\left|\frac{d^k b_0^+}{d\lambda^k}(z)\right| \leq |z|^{-1/2-k},$$

et comme les ψ_{m-k} sont à support compact, nous pouvons majorer la valeur absolue de la derivée m-ième par $C\sigma^{-1/2}$. Finalement, nous avons la majoration

$$\left|K_1^\pm(\sigma,t)\right| \leq C_m\sigma^{-1/2}\langle t\pm\sigma\rangle^{-m}, \tag{2.3.8}$$

pour tout entier $m \geq 0$. En utilisant $|t| \leq |\sigma| + |t\pm\sigma|$ et donc $|t|^s \leq C\sigma^s + C|t\pm\sigma|^s$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|K_1^\pm(\sigma,t)\right| dt \leq \sigma^s \int_{-\infty}^{\infty} \left|K_1^\pm(\sigma,t)\right| dt + \int_{-\infty}^{\infty} |t\pm\sigma|^s \left|K_1^\pm(\sigma,t)\right| dt.$$

Par (2.3.8),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|K_1^\pm(\sigma,t)\right| dt \leq C_m\sigma^{s-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \langle t\pm\sigma\rangle^{-m} dt + C_m\sigma^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle t\pm\sigma\rangle^{-m+s} dt.$$

Nous séparons l'intégration en deux parties, par exemple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt = \int_{|t+\sigma|>1} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt + \int_{|t+\sigma|<1} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt,$$

et nous choisissons $m = 2$ dans la première intégrale et $m = 0$ dans la seconde pour conclure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle t+\sigma\rangle^{-m} dt \leq C.$$

Finalement, en procédant de même pour les autres intégrales, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|K_1^\pm(\sigma,t)\right| dt \leq C\sigma^{s-1/2}, \quad 0 \leq s \leq 1/2, \forall \sigma > 0. \tag{2.3.9}$$

Ensuite, nous écrivons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle t\rangle^s |K_1(\sigma,t)| dt \leq C\int_{-\infty}^{+\infty} |K_1(\sigma,t)| dt + C\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^s |K_1(\sigma,t)| dt.$$

En utilisant (2.3.9) pour $s=0$ et $0\le s\le 1/2$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\langle t\rangle^s\,|K_1(\sigma,t)|\,dt\le C\sigma^{-1/2}+C\sigma^{s-1/2}\le C\sigma^{s-1/2}\le C\langle\sigma\rangle^{s-1/2},$$

car $\sigma\ge 1$ et $0\le s\le 1/2$. Ce qui implique clairement (2.3.7a) dans ce cas. $\square$

Preuve de (P8) : Pour prouver (P8) nous allons utiliser la formule

$$e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)=(i\pi h)^{-1}\int_0^\infty e^{it\lambda}\varphi_h(\lambda)\left(R^+(\lambda)-R^-(\lambda)\right)d\lambda, \tag{2.3.10}$$

où $\varphi_h(\lambda)=\varphi_1(h\lambda)$, $\varphi_1(\lambda)=\lambda\psi(\lambda^2)$, et $R^\pm(\lambda)$ vérifie l'identité

$$R^\pm(\lambda)\left(1+VR_0^\pm(\lambda)\right)=R_0^\pm(\lambda). \tag{2.3.11}$$

Ici $R_0^\pm(\lambda)$ désignent les résolvantes libres sortante et entrante avec les noyaux donnés en terme de fonction de Hankel, $H_0^\pm$, par la formule

$$[R_0^\pm(\lambda)](x,y)=\pm i4^{-1}H_0^\pm(\lambda|x-y|),$$

où

$$\left|H_0^\pm(z)\right|\le C|z|^{-1/2},\quad \forall z.$$

Il suit de ces estimations que

$$\left|\left[R_0^\pm(\lambda)\right](x,y)\right|\le C\lambda^{-1/2}|x-y|^{-1/2},$$

et donc en utilisant (V2)

$$\left\|VR_0^\pm(\lambda)\right\|_{L^1\to L^1}\le C\lambda^{-1/2},\quad \forall\lambda>0. \tag{2.3.12}$$

Il suit de (2.3.12) qu'il existe une constante $\lambda_0>0$ telle que l'opérateur $1+VR_0^\pm(\lambda)$ soit inversible sur L^1 pour $\lambda\ge\lambda_0$. Vu (2.3.11), nous avons

$$R^\pm(\lambda)=R_0^\pm(\lambda)\left(1+VR_0^\pm(\lambda)\right)^{-1},$$

et donc

$$VR^\pm(\lambda)=VR_0^\pm(\lambda)\left(1+VR_0^\pm(\lambda)\right)^{-1}=1-\left(1+VR_0^\pm(\lambda)\right)^{-1}. \tag{2.3.13}$$

Par (2.3.10) et (2.3.13),

$$Ve^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)=(i\pi h)^{-1}\sum_\pm\pm\int_{-\infty}^\infty VP_h^\pm(t-\tau)U_h^\pm(\tau)d\tau, \tag{2.3.14}$$

où

$$P_h^\pm(t)=\int_0^\infty e^{it\lambda}\widetilde{\varphi}_h(\lambda)R_0^\pm(\lambda)d\lambda,$$

$$U_h^\pm(t)=\int_0^\infty e^{it\lambda}\varphi_h(\lambda)\left(1+VR_0^\pm(\lambda)\right)^{-1}d\lambda,$$

où $\widetilde{\varphi}_h(\lambda)=\widetilde{\varphi}_1(h\lambda)$, $\widetilde{\varphi}_1\in C_0^\infty((0,+\infty))$ est tel que $\widetilde{\varphi}_1=1$ sur $\operatorname{supp}\varphi_1$. Le noyau de l'opérateur $P_h^\pm(t)$ est de la forme $A_h^\pm(|x-y|,t)$, où

$$A_h^\pm(\sigma,t)=\pm i4^{-1}\int_0^\infty e^{it\lambda}\widetilde{\varphi}_h(\lambda)\left(H_0^\pm(\sigma\lambda)\right)d\lambda=h^{-1}A_1^\pm(\sigma h^{-1},th^{-1}). \tag{2.3.15}$$

Lemme 2.28 *Pour tout $\sigma > 0$, $0 \leq s \leq 1/2$ et $0 < h \leq 1$ nous avons*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|A_h^{\pm}(\sigma, t)\right| dt \leq C h^{1/2} \sigma^{s-1/2}(1 + h^{\epsilon_s} \sigma^{-\epsilon_s}). \tag{2.3.16}$$

où $\epsilon_s = 0$ si $0 \leq s < 1/2$ et $\epsilon_s = \epsilon$ si $s = 1/2$ avec $0 < \epsilon \ll 1$.

Preuve lemme $h = 1$ implique lemme : comme $A_h^{\pm}(\sigma, t) = h^{-1} A_1^{\pm}(\sigma h^{-1}, th^{-1})$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |A_h^{\pm}(\sigma, t)|\, dt = h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |A_1^{\pm}(\sigma h^{-1}, th^{-1})|\, dt = h^s \int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |A_1^{\pm}(\sigma h^{-1}, t)|\, dt,$$

en effectuant le changement de variables $th^{-1} \mapsto t$. Si (2.3.16) est vérifiée pour $h = 1$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |A_h^{\pm}(\sigma, t)|\, dt \leq C h^s (\sigma h^{-1})^{s-1/2}(1 + (\sigma h^{-1})^{-\epsilon_s}) = C h^{1/2} \sigma^{s-1/2}(1 + h^{\epsilon_s} \sigma^{-\epsilon_s}).$$

Ce qui donne bien (2.3.16) pour tout $0 < h \leq 1$.

Preuve du lemme $h = 1$: Considérons en premier le cas $0 < \sigma \leq 1$. Nous avons pour z près de 0 :

$$H_0^{\pm}(z) = a_1^{\pm}(z) + \log(z)\, a_2^{\pm}(z),$$

avec $a_j^{\pm}$ analytiques pour $j = 1, 2$. Ce qui donne les estimations

$$H_0^{\pm}(z) = O(|\log z|), \quad \partial_z H_0^{\pm}(z) = O(1/|z|) \quad \text{et} \quad \partial_z^2 H_0^{\pm}(z) = O(1/|z|^2).$$

En remarquant que (nous notons $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier par rapport à la variable λ)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt = \left\| \mathcal{F}\left(\tilde{\phi}_1(\cdot) H_0^{\pm}(\sigma \cdot)\right) \right\|_{L^1},$$

et en utilisant l'inégalité (C.12) prouvée en appendice

$$\|\widehat{f}\|_{L^1} \leq C \sum_{j=0}^{1} \sup_{\lambda} \langle \lambda \rangle \left| \partial_\lambda^j f(\lambda) \right|,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \left|A_1^{\pm}(\sigma, t)\right| dt &\leq C \sup_{\lambda \in \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}_1} \left(\left|\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)\right| + \sigma \left|\partial_\lambda \mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)\right| \right) \\ &\leq C \sup_{\lambda \in \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}_1} \left(|\log|\sigma\lambda|| + \sigma |\sigma\lambda|^{-1} \right) \leq C |\log(\sigma)|.\end{aligned}$$

De la même manière, en remarquant que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t| |A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt = \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\lambda(\tilde{\phi}_1(\cdot) H_0^{\pm}(\sigma \cdot))\right) \right\|_{L^1},$$

et en utilisant toujours l'inégalité (C.12), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |t| \left|A_1^{\pm}(\sigma, t)\right| dt &\leq C \sup_{\lambda \in \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}_1} \left(\left|\mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)\right| + \sigma \left|\partial_\lambda \mathcal{H}_\nu^{\pm}(\sigma\lambda)\right| + \sigma^2 \left|\partial_\lambda^2 H_0^{\pm}(\sigma\lambda)\right| \right) \\ &\leq C \sup_{\lambda \in \operatorname{supp} \widetilde{\varphi}_1} \left(|\log|\sigma\lambda|| + \sigma|\sigma\lambda|^{-1} + \sigma^2 |\sigma\lambda|^{-2} \right) \leq C |\log(\sigma)|.\end{aligned}$$

Par conséquent, par interpolation, nous avons pour tout $0 \leq s \leq 1$ et en particulier pour tout $0 \leq s \leq 1/2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|A_1^{\pm}(\sigma, t)\right| dt \leq C|\log \sigma|.$$

Considérons maintenant le cas $\sigma \geq 1$. Nous utilisons $H_0^{\pm}(z) = e^{\pm iz} b_0^{\pm}(z)$ pour z grand avec $b_0^{\pm}$ symbole d'ordre $-1/2$, pour écrire

$$A_1^{\pm}(\sigma, t) = c \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t \pm \sigma)\lambda} \tilde{\phi}(\lambda) b_0^{\pm}(\lambda) d\lambda.$$

Donc, en utilisant l'inégalité (C.12)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |A_1^{\pm}(\sigma, t \mp \sigma)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \tilde{\phi}(\lambda) b_0^{\pm}(\sigma\lambda) d\lambda \right| dt \\
&\leq C \sup_{\lambda \in supp\, \tilde{\phi}_1} \left(|b_0^{\pm}(\sigma\lambda)| + \sigma |\partial_\lambda b_0^{\pm}(\sigma\lambda)| \right) \\
&\leq C \sup_{\lambda \in \mathrm{supp}\, \widetilde{\varphi}_1} \left(|\sigma\lambda|^{-1/2} + \sigma |\sigma\lambda|^{-3/2} \right) \leq C|\sigma|^{-1/2},
\end{aligned}$$

car

$$|b_0^{\pm}(z)| \leq C|z|^{-1/2}, \quad |\partial_\lambda b_0^{\pm}(z)| \leq C|z|^{-3/2}, \quad z \text{ grand}.$$

En effectuant le changement de variables $t \pm \sigma \mapsto t$, nous obtenons pour $\sigma \geq 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt \leq C\sigma^{-1/2}.$$

Maintenant, utilisons $|t| \leq |t \pm \sigma| + \sigma$, pour écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t||A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |t \pm \sigma||A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} |A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt.$$

Ce qui donne en effectuant le changement de variables $t \pm \sigma \mapsto t$ dans les intégrales du membre de droite :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t||A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt \leq \left\| \mathcal{F}\left(\partial_\lambda (\tilde{\phi}_1(\cdot) b_0^{\pm}(\sigma \cdot)) \right) \right\|_{L^1} + \sigma \left\| \mathcal{F}\left(\tilde{\phi}_1(\cdot) b_0^{\pm}(\sigma \cdot) \right) \right\|_{L^1}.$$

En utilisant toujours l'inégalité (C.12) et le fait que $b_0^{\pm}$ est un symbole d'ordre $-1/2$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |t||A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt &\leq C \sup_{\lambda \in supp\, \tilde{\phi}_1} \left(|b_0^{\pm}(\sigma\lambda)| + \sigma |\partial_\lambda b_0^{\pm}(\sigma\lambda)| + \sigma^2 |\partial_\lambda^2 b_0^{\pm}(\sigma\lambda)| \right) \\
&\quad + C\sigma \sup_{\lambda \in supp\, \tilde{\phi}_1} \left(|b_0^{\pm}(\sigma\lambda)| + \sigma |\partial_\lambda b_0^{\pm}(\sigma\lambda)| \right) \\
&\leq C \left(|\sigma|^{-1/2} + \sigma |\sigma|^{-1/2} \right) \leq C\sigma^{1/2},
\end{aligned}$$

comme $\sigma \geq 1$. Finalement, par interpolation, nous avons pour $0 \leq s \leq 1/2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |A_1^{\pm}(\sigma, t)| dt \leq C\sigma^{s-1/2}, \quad \sigma \geq 1.$$

En regroupant les estimations obtenues pour σ petit et σ grand, et en utilisant pour $0<\sigma\leq 1$, $|\log\sigma|\leq C_\epsilon \sigma^{-\epsilon}$ pour tout $0<\epsilon\ll 1$, nous obtenons finalement

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \left|A_1^{\pm}(\sigma,t)\right| dt \leq C\sigma^{-\epsilon}\langle\sigma\rangle^{s+\epsilon-1/2},$$

pour tout $\sigma>0$ et tout $0\leq s\leq 1/2$. Pour $0\leq s<1/2$, nous pouvons utiliser pour ϵ assez petit $\langle\sigma\rangle^{s+\epsilon-1/2}\leq C\sigma^{s+\epsilon-1/2}$, mais pas pour $s=1/2$. Nous obtenons bien (2.3.16). □

Suite de la preuve de (P8) : Il est clair qu'il suffit de prouver (P8) pour $s=0$ et $s=1/2$. Pour ces valeurs de s, nous utilisons $|t|^s\leq|t-\tau|^s+|\tau|^s$ et (2.3.14)-(2.3.15) pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s \langle |x-y|/h\rangle^{-s}\left|Ve^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)\right||g(y)|\,dtdxdy\\
&\leq Ch^{-1}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle |x-y|/h\rangle^{-s}\left(|t-\tau|^s+|\tau|^s\right)\\
&\qquad\times\left|VP_h^{\pm}(t-\tau)U_h^{\pm}(\tau)f(x)\right||g(y)|\,d\tau dtdxdy\\
&\leq Ch^{-1}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|V(x)|\langle |x-y|/h\rangle^{-s}\left(|t-\tau|^s+|\tau|^s\right)\\
&\qquad\times|A_h^{\pm}(|x-x'|,t-\tau)|\left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right||g(y)|\,d\tau dtdx'dxdy.
\end{aligned}$$

Nous séparons alors les termes correspondant respectivement à $|t-\tau|^s$ et $|t|^s$. Puis nous effectuons le changement de variables $t-\tau\mapsto t$ pour obtenir la majoration par

$$\begin{aligned}
&\leq Ch^{-1}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|V(x)|\langle |x-y|/h\rangle^{-s}|g(y)|\\
&\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}|t|^s|A_h^{\pm}(|x-x'|,t)|dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right|d\tau\right)dx'dxdy\\
&+Ch^{-1}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|V(x)|\langle |x-y|/h\rangle^{-s}|g(y)|\\
&\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}|A_h^{\pm}(|x-x'|,t)|dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^s\left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right|d\tau\right)dx'dxdy.
\end{aligned}$$

Nous utilisons alors (2.3.16) pour $s=0$ pour le second terme de la somme du membre de droite et $0\leq s\leq 1/2$ pour l'autre terme pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\leq Ch^{-1/2}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|V(x)|\langle |x-y|/h\rangle^{-s}|x-x'|^{s-1/2}\left(1+h^{\epsilon_s}|x-x'|^{-\epsilon_s}\right)|g(y)|\\
&\qquad\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right|d\tau\right)dx'dxdy\\
&+Ch^{-1/2}\sum_{\pm}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|V(x)|\langle |x-y|/h\rangle^{-s}|x-x'|^{-1/2}|g(y)|\\
&\qquad\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^s\left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right|d\tau\right)dx'dxdy:=I_1+I_2.
\end{aligned}\tag{2.3.17}$$

Pour estimer I_1 lorsque $s = 0$, nous utilisons (V2) pour obtenir

$$I_1 \leq Ch^{-1/2}\|g\|_{L^1} \sum_{\pm} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right| d\tau dx'.$$

Pour estimer I_1 lorsque $s = 1/2$, posons $q = (2\epsilon_{1/2})^{-1}$, $1/p + 1/q = 1$, et utilisons l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$h^{\epsilon_{1/2}} \int_{\mathbf{R}^2} |V(x)| \langle |x-y|/h \rangle^{-1/2} |x-x'|^{-\epsilon_{1/2}} dx$$

$$\leq h^{\epsilon_{1/2}} \left(\int_{\mathbf{R}^2} |V(x)| \langle |x-y|/h \rangle^{-p/2} dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{R}^2} |V(x)||x-x'|^{-1/2} dx \right)^{1/q}.$$

Utilisons ensuite (V2) pour majorer la deuxième intégrale du membre de droite. Nous pouvons ainsi en utilisant $p \geq 1$ une majoration par

$$\leq C_1 h^{\epsilon_{1/2}} \left(\int_{\mathbf{R}^2} |V(x)| \langle |x-y|/h \rangle^{-1/2} dx \right)^{1/p},$$

et donc en utilisant $\langle |x-y|/h \rangle^{-1/2} \leq Ch^{1/2}|x-y|^{-1/2}$ une majoration par

$$\leq C_1 h^{\epsilon_{1/2}} h^{1/(2p)} \left(\int_{\mathbf{R}^2} |V(x)||x-y|^{-1/2} dx \right)^{1/p}.$$

En utilisant de nouveau (V2) et comme $p = 1/(1-2\epsilon_{1/2})$, nous avons finalement une majoration par

$$\leq C_2 h^{1/2}.$$

Par conséquent, nous obtenons pour $s = 1/2$

$$I_1 \leq C \sum_{\pm} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right| |g(y)| \, d\tau dx' dy.$$

Finalement, en regroupant les cas $s = 0$ et $s = 1/2$, nous avons

$$I_1 \leq C' h^{s-1/2} \sum_{\pm} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right| |g(y)| \, d\tau dx' dy. \tag{2.3.18}$$

Pour estimer I_2 lorsque $s = 0$, nous utilisons (V2) pour obtenir

$$I_2 \leq Ch^{-1/2}\|g\|_{L^1} \sum_{\pm} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|U_h^{\pm}(\tau)f(x')\right| d\tau dx'.$$

Pour estimer I_2 lorsque $s = 1/2$, nous utilisons l'inégalité

$$\langle |x-y|/h \rangle^{-1/2} |x-x'|^{-1/2} \leq \left\langle |x'-y|/h \right\rangle^{-1/2} \left(|x-y|^{-1/2} + |x-x'|^{-1/2} \right).$$

Preuve de l'inégalité : Posons $a = (x-y)/h$ et $b = (x-x')/h$, l'inégalité se réécrit :

$$\langle a \rangle^{-1/2} |b|^{-1/2} \leq \langle a-b \rangle^{-1/2} \left(|a|^{-1/2} + |b|^{-1/2} \right),$$

qui est équivalente à

$$\langle a \rangle^{1/2} \left(1 + |b/a|^{1/2} \right) - \langle b-a \rangle^{1/2} \geq 0.$$

Une étude de fonction par rapport à la variable b montre l'inégalité pour tout $a,\ b \geq 0$. $\square$

Nous obtenons en utilisant (V2)

$$I_2 \leq Ch^{-1/2} \sum_{\pm} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{1/2} \left\langle |x'-y|/h \right\rangle^{-1/2} \left| U_h^{\pm}(\tau) f(x') \right| |g(y)|\, d\tau dx' dy,$$

et donc finalement pour $s = 0$ ou $s = 1/2$:

$$I_2 \leq Ch^{-1/2} \sum_{\pm} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{s} \left\langle |x'-y|/h \right\rangle^{-s} \left| U_h^{\pm}(\tau) f(x') \right| |g(y)|\, d\tau dx' dy. \tag{2.3.19}$$

D'autre part, par l'identité

$$\left(1 + VR_0^{\pm}(\lambda)\right)^{-1} = 1 - VR_0^{\pm}(\lambda) \left(1 + VR_0^{\pm}(\lambda)\right)^{-1},$$

nous obtenons

$$U_h^{\pm}(t) = \widehat{\varphi}_h(t) - \int_{-\infty}^{\infty} VP_h^{\pm}(t-\tau) U_h^{\pm}(\tau) d\tau. \tag{2.3.20}$$

Comme

$$\widehat{\varphi}_h(t) = h^{-1} \widehat{\varphi}_1(t/h),$$

nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |\widehat{\varphi}_h(t)| dt \leq Ch^s. \tag{2.3.21}$$

En utilisant (2.3.20) et (2.3.21), de la même manière que dans la preuve de (2.3.17)-(2.3.19), nous obtenons avec $s = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| U_h^{\pm}(t) f(x) \right| |g(y)|\, dt dx dy &\leq C \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \\ &+ Ch^{1/2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| U_h^{\pm}(\tau) f(x') \right| |g(y)|\, d\tau dx' dy \end{aligned}$$

En prenant h suffisamment petit, nous pouvons absorber le deuxième terme du membre de droite et obtenir l'estimation

$$\int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| U_h^{\pm}(t) f(x) \right| |g(y)|\, dt dx dy \leq C \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \tag{2.3.22}$$

Pour $s = 1/2$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{1/2} \langle |x-y|/h \rangle^{-1/2} \left| U_h^{\pm}(t) f(x) \right| |g(y)|\, dt dx dy &\leq Ch^{1/2} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \\ &+ Ch^{1-\epsilon} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| U_h^{\pm}(\tau) f(x') \right| |g(y)|\, d\tau dx' dy \\ + Ch^{1/2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{1/2} &\left\langle |x'-y|/h \right\rangle^{-1/2} \left| U_h^{\pm}(\tau) f(x') \right| |g(y)|\, d\tau dx' dy. \end{aligned}$$

Pour majorer le deuxième terme du membre de droite, nous utilisons (2.3.22). Nous remarquons donc que pour $0 < h \leq 1$, le deuxième terme peut être absorber par le premier terme du membre de droite. En prenant h suffisamment petit, nous pouvons absorber le troisième terme du membre de droite et obtenir l'estimation

$$\int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{1/2} \langle |x-y|/h \rangle^{-1/2} \left| U_h^{\pm}(t) f(x) \right| |g(y)|\, dt dx dy \leq Ch^{1/2} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \tag{2.3.23}$$

Ainsi en regroupant (2.3.22) et (2.3.23), nous pouvons écrire

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}|t|^s\langle|x-y|/h\rangle^{-s}\left|U_h^{\pm}(t)f(x)\right||g(y)|\,dtdxdy\leq Ch^s\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}. \tag{2.3.24}$$

Maintenant (P8) résulte de (2.3.17)-(2.3.19) et (2.3.24). □

2.3.2 Etude du comparateur

Preuve de (CO-2) : Nous allons déduire (CO-2) de la proposition 2.26.
Nous utilisons la formule de Duhamel pour obtenir la décomposition

$$\Phi(t;h)=\Phi_1(t;h)+\Phi_2(t;h),$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi_1(t;h)=\Phi(t;h)-\Phi_2(t;h)=&\left(\psi_1(h^2G)-\psi_1(h^2G_0)\right)e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)\\ &+\psi_1(h^2G_0)e^{it\sqrt{G_0}}\left(\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)\right)\\ &-i\psi_1(h^2G_0)\sin\left(t\sqrt{G_0}\right)\left(\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)\right)\\ &+i\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin\left(t\sqrt{G_0}\right)\left(\widetilde{\psi}(h^2G)-\widetilde{\psi}(h^2G_0)\right),\end{aligned}$$

$$\Phi_2(t;h)=-h\int_0^t\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)d\tau.$$

où $\psi_1\in C_0^\infty((0,+\infty))$, $\psi_1=1$ sur $\operatorname{supp}\psi$, $\widetilde{\psi}(\sigma)=\sigma^{1/2}\psi(\sigma)$, $\widetilde{\psi}_1(\sigma)=\sigma^{-1/2}\psi_1(\sigma)$.

Par (P6) et (E7), nous avons

$$\|\text{2e terme de }\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}=\left\|\psi_1(h^2G_0)e^{it\sqrt{G_0}}\left(\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)\right)f\right\|_{L^\infty}$$

$$\leq\underbrace{\left\|\psi_1(h^2G_0)e^{it\sqrt{G_0}}\right\|_{1\to\infty}}_{\leq Ch^{-3/2}|t|^{-1/2}\text{ (P6)}}\times\underbrace{\left\|\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)\right\|_{1\to1}}_{\leq Ch^{1/2}\text{ (E7)}}\times\|f\|_1.$$

Par conséquent

$$\|\text{2e terme de }\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}\leq Ch^{-1}|t|^{-1/2}\|f\|_{L^1},\quad 0<h\leq h_0.$$

De la même façon, nous obtenons la même estimation pour les 3e et 4e termes de $\Phi_1(t;h)$. Pour traiter le premier terme de $\Phi_1(t;h)$, nous écrivons :

$$e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)=\Phi(t;h)+e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0).$$

En utilisant (P6) et (E7), nous obtenons

$$\|\text{1er terme de }\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}\leq Ch^{1/2}\left(\|\Phi(t;h)\|_{L^1\to L^\infty}\|f\|_{L^1}+h^{-3/2}|t|^{-1/2}\|f\|_{L^1}\right).$$

Finalement, nous obtenons l'estimation suivante pour la contribution de $\Phi_1(t;h)$:

$$\|\Phi_1(t;h)f\|_{L^\infty}\leq Ch^{-1}|t|^{-1/2}\|f\|_{L^1}+Ch^{1/2}\|\Phi(t;h)f\|_{L^\infty}. \tag{2.3.25}$$

Nous estimons ensuite

$$\langle\Phi_2(t;h)f,g\rangle=-h\int_0^t\langle\tilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,g\rangle\,d\tau$$

En prenant la valeur absolue et en multipliant par $t^{1/2}$, nous majorons $t^{1/2}\,|\langle \Phi_2(t;h)f,g\rangle|$ en séparant l'intégrale en deux termes $\displaystyle\int_0^{t/2}$ et $\displaystyle\int_{t/2}^{t}$. Dans chacune des intégrales, nous utilisons

$$\text{si } 0 \le \tau \le t/2 \text{ alors } \left((t-\tau)/t\right)^{1/2} \ge 2^{-1/2} \quad \text{et si } t/2 \le \tau \le t \text{ alors } (\tau/t)^{1/2} \ge 2^{-1/2}.$$

De plus, nous écrivons dans la première intégrale

$$\langle \tilde{\psi_1}(h^2G_0)\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,g\rangle = \langle Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})\tilde{\psi_1}(h^2G_0)g\rangle,$$

et dans la deuxième intégrale

$$\langle \tilde{\psi_1}(h^2G_0)\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,g\rangle = \langle e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f,V\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})\tilde{\psi_1}(h^2G_0)g\rangle.$$

Ce qui permet la majoration suivante

$$\begin{aligned} &t^{1/2}\,|\langle \Phi_2(t;h)f,g\rangle| \\ &\le h\int_0^{t/2}(t-\tau)^{1/2}\left\|\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)g\right\|_{L^\infty}\left\|Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau \\ &+h\int_{t/2}^{t}\left\|V\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)g\right\|_{L^1}\tau^{1/2}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}d\tau. \end{aligned}$$

Par (P6), nous avons comme $t-\tau \neq 0$ (car $0 \le \tau \le t/2$),

$$\left\|\sin((t-\tau)\sqrt{G_0})\tilde{\psi_1}(h^2G_0)g\right\|_{L^\infty} \le Ch^{-3/2}|t-\tau|^{-1/2}\|g\|_{L^1}.$$

Donc la première intégrale peut être majorée par

$$\le Ch^{-1/2}\|g\|_1\int_0^{t/2}\left\|Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau.$$

Quant à la seconde, nous avons la majoration

$$\le Ch\sup_{t/2\le\tau\le t}\tau^{1/2}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}\int_{t/2}^{t}\left\|V\sin\left((t-\tau')\sqrt{G_0}\right)\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)g\right\|_{L^1}d\tau'.$$

Nous majorons alors les deux intégrales qui apparaissent dans les majorants par des intégrales sur $(-\infty,+\infty)$ puis nous utilisons (P7) et (P8) avec $s=0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau \le Ch^{-1/2}\|f\|_{L^1},\quad 0<h\le h_0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|V\sin((t-\tau')\sqrt{G_0})\tilde{\psi_1}(h^2G_0)g\right\|_{L^1}d\tau' \le Ch^{-1/2}\|g\|_{L^1},\quad h>0.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} &t^{1/2}\,|\langle \Phi_2(t;h)f,g\rangle| \\ &\le Ch^{-1}\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1}+Ch^{1/2}\|g\|_{L^1}\sup_{t/2\le\tau\le t}\tau^{1/2}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure

$$t^{1/2}\,\|\Phi_2(t;h)f\|_{L^\infty} \le Ch^{-1}\|f\|_{L^1}+Ch^{1/2}\sup_{t/2\le\tau\le t}\tau^{1/2}\left\|e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}. \tag{2.3.26}$$

Par (2.3.25) et (2.3.26), nous concluons

$$t^{1/2}\,\|\Phi(t;h)f\|_{L^\infty} \le Ch^{-1}\|f\|_{L^1}+Ch^{1/2}t^{1/2}\,\|\Phi(t;h)f\|_{L^\infty}+Ch^{1/2}\sup_{t/2\le\tau\le t}\tau^{1/2}\,\|\Phi(\tau;h)f\|_{L^\infty}. \tag{2.3.27}$$

En prenant h assez petit, nous pouvons absorber le deuxième et troisième terme du membre de droite de (2.3.27), obtenant ainsi (CO-2). De façon similaire, nous pouvons traiter le cas $t<0$.

3 Estimations dispersives pour l'équation de Schrödinger

Nous avons le résultat suivant à basses fréquences en dimension $n \geq 4$:

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (VSn) sur le potentiel V. De plus, supposons que 0 est un point régulier pour G. Alors dans ce cas, il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $0 < a < a_0$*

$$\left\| e^{itG} \eta_a(G) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}, \quad \forall t \neq 0. \tag{D10}$$

Rappelons les résultats à hautes fréquences prouvés par Vodev pour $n \geq 4$ dans [74]

Théorème 3.2 *Supposons ($V(\delta)$) vérifiée avec $\delta > (n+2)/2$. Alors, pour tout $a > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$, il existe des constantes C, $C_\varepsilon > 0$ telles que nous ayons les estimations suivantes*

$$\|e^{itG} G^{-(n-3)/4} \chi_a(G)\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}, \quad \forall t \neq 0,$$

$$\|e^{itG} \chi_a(G) \langle x \rangle^{-n/2-\varepsilon}\|_{L^2 \to L^\infty} \leq C_\varepsilon |t|^{-n/2}, \quad \forall t \neq 0.$$

De plus, pour tout $0 \leq q \leq (n-3)/2$, $2 \leq p < \dfrac{2(n-1-2q)}{n-3-2q}$, nous avons

$$\|e^{itG} G^{-\alpha q/2} \chi_a(G)\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C|t|^{-\alpha n/2}, \quad \forall t \neq 0,$$

où $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = 1 - 2/p$.

Nous pouvons ainsi en déduire

Théorème 3.3 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3.2 avec $n \geq 4$, alors pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$ et pour tout $t \neq 0$, nous avons les estimations suivantes*

$$\|e^{itG} P_{ac} f\|_{L^\infty} \leq C|t|^{-n/2} \left\| \langle G \rangle^{(n-3)/4} f \right\|_{L^1}, \tag{D11}$$

$$\|e^{itG} P_{ac} f\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon |t|^{-n/2} \left\| \langle x \rangle^{n/2+\varepsilon} f \right\|_{L^2}. \tag{D12}$$

Nous obtenons aussi un nouveau théorème en dimension $n \geq 4$ avec des hypothèses de régularité supplémentaire :

Théorème 3.4 *Supposons $n \geq 4$, 0 point régulier pour G et V vérifiant ($V(\delta)$) avec $\delta > n-1$ ainsi que $\hat{V} \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Alors nous avons l'estimation suivante*

$$\left\| e^{itG} P_{ac} \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}, \quad t \neq 0. \tag{D14}$$

Nous avons également le théorème suivant en dimension $n = 2$:

Théorème 3.5 *Si V vérifie (V2), il existe un $a_0 > 0$ tel que pour tout $a \geq a_0$, nous ayons*

$$\left\| e^{itG} \chi_a(G) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C|t|^{-1}, \tag{D15}$$

pour une constante $C > 0$.

3.1 Estimations à basses fréquences en dimension $n \geq 4$

On introduit
$$\Psi(t;h) = e^{itG}\psi(h^2G) - T^* e^{itG_0}\psi(h^2G_0)T.$$

Pour prouver le théorème en dimension $n \geq 4$ à basses fréquences, nous allons étudier ce comparateur en trois étapes :

1. Estimations sur $\psi(h^2G_0)$ et $\psi(h^2G)$ à l'aide de propriété sur la résolvante (prouvées dans la section 2.1).
2. Estimations autour des propagateurs à l'aide d'estimations sur les noyaux (cf proposition 3.7).
3. Estimations du comparateur à l'aide de la formule de Duhamel et d'un mécanisme de bootstrap.

3.1.1 Etape 1 : Estimations sur $\psi(h^2G_0)$ et $\psi(h^2G)$

L'étude a déjà été faite dans la section 2.1. Rappelons ici les résultats qui nous intéressent à basse fréquences en dimension $n \geq 4$:

Proposition 3.6 *Il existe des constantes positives C, β et h_0 telles que nous ayons les estimations suivantes*

$$\|\psi(h^2G_0)\|_{L^1\to L^1} \leq C, \quad h > 0 \tag{E1}$$

$$\|\psi(h^2G)\|_{L^1\to L^1} \leq C, \quad h \geq h_0 \tag{E4}$$

$$\|\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)T\|_{L^1\to L^1} \leq Ch^{-\beta}, \quad h \geq h_0 \tag{E5}$$

où l'opérateur

$$T = (1 - V\Delta^{-1})^{-1} : L^1 \to L^1$$

est borné par hypothèse.

3.1.2 Etape 2 : estimations autour des propagateurs e^{itG_0} et e^{itG}

Proposition 3.7 *Sous les hypothèses du théorème 1.1, il existe des constantes positives h_0 et β telles que nous ayons les estimations suivantes*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|Ve^{itG_0}\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1} dt \leq Ch^{-\beta}, \quad h \geq 1, \tag{P9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|V\psi(h^2G)e^{itG_0}\psi_1(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1} dt \leq Ch^{-\beta}, \quad h \geq h_0, \tag{P10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|Ve^{itG}\psi(h^2G)\right\|_{L^1\to L^1} dt \leq Ch^{-\beta}, \quad h \geq h_0. \tag{P11}$$

Preuve de (P9) : Il est montré dans l'appendice que le noyau de l'opérateur $e^{itG_0}\psi(h^2G_0)$ est de la forme $K_h(|x-y|,t)$ avec une fonction K_h vérifiant

$$K_h(\sigma,t) = h^{-n}K_1(\sigma h^{-1}, th^{-2}),$$

$$|K_1(\sigma,t)| \leq C|t|^{-s-1/2}\sigma^{s-(n-1)/2}, \quad 0 \leq s \leq (n-1)/2,\ \sigma > 0,\ t \neq 0.$$

Ainsi pour tout $0 \leq s \leq (n-1)/2$, $\sigma > 0$, $t \neq 0$, $h > 0$, nous avons

$$|K_h(\sigma,t)| \leq Ch^{s-(n-1)/2}|t|^{-s-1/2}\sigma^{s-(n-1)/2},$$

qui implique

$$\begin{aligned}\left\|Ve^{itG_0}\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1} &\leq C\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|V(x)||K_h(|x-y|,t)|\,dx\\ &\leq Ch^{s-(n-1)/2}|t|^{-s-1/2}\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|x-y|^{s-(n-1)/2}|V(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Si $\frac{1}{2}-\varepsilon\leq s\leq\frac{1}{2}+\varepsilon$, alors $-\frac{n-2}{2}-\varepsilon\leq s-\frac{n-1}{2}\leq-\frac{n-2}{2}+\varepsilon$, ce qui permet d'utiliser (VSn) :

$$\left\|Ve^{itG_0}\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1}\leq Ch^{s-(n-1)/2}|t|^{-s-1/2},\quad 1/2-\varepsilon\leq s\leq 1/2+\varepsilon, \tag{3.1.1}$$

où $0<\varepsilon\ll 1$. En choisissant $1/2-\varepsilon\leq s<1/2$, nous montrons $t\mapsto\left\|Ve^{itG_0}\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1}$ intégrable en 0 et en choisissant $1/2<s\leq 1/2+\varepsilon$, nous montrons $t\mapsto\left\|Ve^{itG_0}\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1}$ intégrable en $+\infty$. De manière évidente, (P9) résulte de (3.1.1) avec $\beta=(n-1)/2-s$.

Preuve de (P10) : De plus, en utilisant (HS), (R5), (R6), (3.1.1) et $\mathcal{R}_h^\pm(z)-\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z)=h^2\mathcal{R}_h^\pm(z)V\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left\|V\left(\psi(h^2G)-\psi(h^2G_0)\right)e^{itG_0}\psi_1(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1}\\ &\leq Ch^2\sum_\pm\int_{\mathbf{C}_\varphi^\pm}\left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right|\left\|V\mathcal{R}_h^\pm(z)Ve^{itG_0}\psi_1(h^2G_0)\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z)\right\|_{L^1\to L^1}L(dz)\\ &\leq Ch^2\sum_\pm\int_{\mathbf{C}_\varphi^\pm}\left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right|\underbrace{\left\|V\mathcal{R}_h^\pm(z)\right\|_{L^1\to L^1}}_{(R6)}\underbrace{\left\|Ve^{itG_0}\psi_1(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1}}_{(3.1.1)}\underbrace{\left\|\mathcal{R}_{0,h}^\pm(z)\right\|_{L^1\to L^1}}_{(R5)}L(dz)\\ &\leq Ch^{s-(n-1)/2}|t|^{-s-1/2}\sum_\pm\int_{\mathbf{C}_\varphi^\pm}\left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\bar{z}}(z)\right||\mathrm{Im}\,z|^{-q}L(dz)\\ &\leq Ch^{s-(n-1)/2}|t|^{-s-1/2},\quad 1/2-\varepsilon\leq s\leq 1/2+\varepsilon.\end{aligned}$$

ce qui implique (P10) de la même manière que précédemment. □

Preuve de (P11) : En utilisant la formule de Duhamel

$$e^{itG}=e^{itG_0}+i\int_0^t e^{i(t-\tau)G}Ve^{i\tau G_0}d\tau,$$

et en multipliant cette égalité à gauche par $\psi(h^2G)$ et à droite par $\psi_1(h^2G_0)T$ et en utilisant que $\psi=\psi\psi_1$ et que $\psi(h^2G)$ et e^{itG} commutent, nous obtenons l'identité

$$\begin{aligned}e^{itG}\psi(h^2G)=\psi(h^2G)e^{itG_0}\psi_1(h^2G_0)T+e^{itG}\psi(h^2G)\left(\psi_1(h^2G)-\psi_1(h^2G_0)T\right)\\ +i\int_0^t\psi(h^2G)e^{i(t-\tau)G}Ve^{i\tau G_0}\psi_1(h^2G_0)Td\tau.\end{aligned}$$

En multipliant à gauche par V puis en prenant la norme $L^1\to L^1$ et en intégrant par rapport à t, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\|Ve^{itG}\psi(h^2G)\right\|_{L^1\to L^1}dt\leq\ \text{Terme 1}\ +\ \text{Terme 2}\ +\ \text{Terme 3},$$

avec

$$\text{Terme 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| V\psi(h^2G)e^{itG_0}\psi(h^2G_0)T \right\|_{L^1\to L^1} dt,$$

$$\text{Terme 2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| Ve^{itG}\psi(h^2G)(\psi_1(h^2G) - \psi_1(h^2G_0)T) \right\|_{L^1\to L^1} dt,$$

$$\text{Terme 3} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \left\| V\psi(h^2V)e^{i(t-\tau)G}Ve^{i\tau G_0}\psi_1(h^2G_0)T \right\|_{L^1\to L^1} d\tau dt.$$

Pour le Terme 1, nous utilisons (P10) et le fait que $\|T\|_{L^1\to L^1} \leq C$

$$\text{Terme 1} \leq Ch^{-\beta}, \quad h \geq h_0. \tag{3.1.2}$$

Pour le Terme 2, nous utilisons (E7)

$$\text{Terme 2} \leq Ch^{-\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| Ve^{itG}\psi(h^2G) \right\|_{L^1\to L^1} dt, \quad h \geq h_0. \tag{3.1.3}$$

Pour le Terme 3, nous avons en utilisant l'inégalité de Young

$$\text{Terme 3} \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \left\| V\psi(h^2G)e^{i(t-\tau)G} \right\|_{L^1\to L^1} \left\| Ve^{i\tau G_0}\psi_1(h^2G_0) \right\|_{L^1\to L^1} d\tau dt.$$

Nous intervertissons les intégrales puis nous effectuons le changement de variables $t - \tau \to t$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t d\tau dt = \int_0^{+\infty}\int_\tau^{+\infty} + \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^{-\tau} dtd\tau = \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^{+\infty} dt + \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^0 d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau$$

Nous utilisons (P9) pour majorer l'intégrale par rapport à τ

$$\text{Terme 3} \leq h^{-\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| Ve^{itG}\psi(h^2G) \right\|_{L^1\to L^1} dt. \tag{3.1.4}$$

Finalement, regroupant (3.1.2)-(3.1.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| Ve^{itG}\psi(h^2G) \right\|_{L^1\to L^1} dt \leq Ch^{-\beta} + Ch^{-\beta}\int_{-\infty}^{\infty} \left\| Ve^{itG}\psi(h^2G) \right\|_{L^1\to L^1} dt,$$

qui implique (P11) si nous prenons h assez grand. □

3.1.3 Etape 3 : étude du comparateur

Proposition 3.8 *Sous les hypothèses du théorème 3.1, il existe des constantes positives C, h_0 et β telles que pour $h \geq h_0$ nous ayons*

$$\|\Psi(t, h)\|_{L^1\to L^\infty} \leq Ch^{-\beta}|t|^{-n/2}, \quad t \neq 0. \tag{$CS1$}$$

Preuve : En utilisant la formule de Duhamel

$$e^{itG} = e^{itG_0} + i\int_0^t e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G}d\tau,$$

et en rappelant que $\psi_1\psi = \psi$ et que $\psi_1(h^2G)$ et e^{itG} commutent, nous obtenons l'identité

$$\Psi(t; h) - i\int_0^t T^*\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G}\psi(h^2G)d\tau$$

$$= e^{itG}\psi(h^2G) - T^*e^{itG_0}\psi(h^2G_0)T + T^*\psi_1(h^2G_0)\left(e^{itG_0} - e^{itG}\right)\psi(h^2G).$$

Posons

$$\Psi_2(t;h) = i\int_0^t T^*\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G}\psi(h^2G)d\tau.$$

Ainsi, en utilisant entre autre $e^{itG}\psi(h^2G) = e^{itG}\psi_1(h^2G)\psi(h^2G) = \psi_1(h^2G)e^{itG}\psi(h^2G)$, nous avons

$$\Psi(t;h)-\Psi_2(t;h) = T^*\psi_1(h^2G_0)e^{itG_0}\left(\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)T\right)+\left(\psi_1(h^2G) - T^*\psi_1(h^2G_0)\right)e^{itG}\psi(h^2G).$$

Posons

$$\Psi_1(t;h) = T^*\psi_1(h^2G_0)e^{itG_0}\left(\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)T\right) + \left(\psi_1(h^2G) - T^*\psi_1(h^2G_0)\right)e^{itG}\psi(h^2G).$$

Nous avons donc

$$\Psi(t;h) = \sum_{j=1}^{2}\Psi_j(t;h).$$

Par (E1) et (E5) ainsi que l'estimation dispersive usuelle pour l'opérateur libre

$$\left\|e^{itG_0}\right\|_{L^1\to L^\infty} \le C|t|^{-n/2},$$

et en rappelant que si $\|u\|_{L^1\to L^1} \le C$, alors $\|u^*\|_{L^\infty\to L^\infty} \le C$, nous obtenons

$$\|\Psi_1(t;h)f\|_{L^\infty} \le \underbrace{\|T^*\|_{L^\infty\to L^\infty}}_{\le C}\underbrace{\|\psi_1(h^2G_0)\|_{L^\infty\to L^\infty}}_{\le C\,(E1)}\underbrace{\|e^{itG_0}\|_{L^1\to L^\infty}}_{\le C|t|^{-n/2}}\underbrace{\|\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)T\|_{L^1\to L^1}}_{\le Ch^{-\beta},\quad h\ge h_0,\,(E5)}\|f\|_{L^1}$$

$$+\underbrace{\|\psi_1(h^2G) - T^*\psi_1(h^2G_0)\|_{L^\infty\to L^\infty}}_{\le Ch^{-\beta},\,(E5)}\left\|\left(\Psi(t;h) + T^*e^{itG_0}\psi(h^2G_0)T\right)\right\|_{L^\infty}.$$

Finalement,

$$\|\Psi_1(t;h)f\|_{L^\infty} \le Ch^{-\beta}|t|^{-n/2}\|f\|_{L^1} + Ch^{-\beta}\|\Psi(t;h)f\|_{L^\infty}, \quad t \ne 0. \tag{3.1.5}$$

Remarquons :

$$\text{si } 0 \le \tau \le t/2 \text{ alors } ((t-\tau)/t)^{1/2} \ge 2^{-1/2} \quad \text{et si } t/2 \le \tau \le t \text{ alors } (\tau/t)^{1/2} \ge 2^{-1/2}.$$

En séparant l'intégrale apparaissant dans $\Psi_2(t;h)$ en deux intégrales portant respectivement sur $(0,t/2)$ et $(t/2,t)$, en utilisant la remarque précédente et le fait que $\|T^*\|_{L^\infty\to L^\infty} \le C$, nous avons $\forall f \in L^1$, $t > 0$:

$$t^{n/2}\|\Psi_2(t;h)f\|_{L^\infty}$$

$$\le C\int_0^{t/2}(t-\tau)^{n/2}\left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}\right\|_{L^1\to L^\infty}\left\|Ve^{i\tau G}\psi(h^2G)f\right\|_{L^1}d\tau$$

$$+C\int_{t/2}^{t}\left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}V\right\|_{L^\infty\to L^\infty}\tau^{n/2}\left\|e^{i\tau G}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}d\tau.$$

Nous avons d'après (P9)

$$\begin{aligned}
\int_{t/2}^{t} \left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau')G_0}V\right\|_{L^\infty\to L^\infty} d\tau' &= \int_0^{t/2} \left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i\tau G_0}V\right\|_{L^\infty\to L^\infty} d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i\tau G_0}V\right\|_{L^\infty\to L^\infty} d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|Ve^{i\tau G_0}\psi_1(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^1} d\tau \\
&\leq Ch^{-\beta} \quad \text{d'après (P9).}
\end{aligned}$$

Donc la deuxième intégrale est majorée par

$$\begin{aligned}
&\leq C \sup_{t/2\leq\tau\leq t} \tau^{n/2} \left\|e^{i\tau G}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty} \int_{t/2}^{t} \left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau')G_0}V\right\|_{L^\infty\to L^\infty} d\tau' \\
&\leq Ch^{-\beta} \sup_{t/2\leq\tau\leq t} \tau^{n/2} \left\|e^{i\tau G}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}. \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale, nous utilisons l'estimation dispersive usuelle pour l'opérateur libre pour majorer

$$(t-\tau)^{n/2} \left\|\psi(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C, \quad t\neq\tau.$$

Puis en utilisant (P11), la première intégrale se majore par

$$\leq Ch^{-\beta}\|f\|_{L^1}. \qquad (3.1.7)$$

Finalement en regroupant (3.1.6) et (3.1.7), nous obtenons

$$t^{n/2}\left\|\Psi_2(t;h)f\right\|_{L^\infty} \leq Ch^{-\beta}\|f\|_{L^1} + Ch^{-\beta} \sup_{t/2\leq\tau\leq t} \tau^{n/2} \left\|e^{i\tau G}\psi(h^2G)f\right\|_{L^\infty}. \qquad (3.1.8)$$

En combinant (3.1.5) et (3.1.8), nous concluons, $\forall f\in L^1$, $t>0$,

$$\begin{aligned}
t^{n/2}\left\|\Psi(t;h)f\right\|_{L^\infty} &\leq Ch^{-\beta}\|f\|_{L^1} + Ch^{-\beta}t^{n/2}\left\|\Psi(t;h)f\right\|_{L^\infty} \qquad (3.1.9) \\
&+Ch^{-\beta} \sup_{t/2\leq\tau\leq t} \tau^{n/2}\left\|\Psi(\tau;h)f\right\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

En prenant h suffisamment grand, nous pouvons absorber le deuxième et troisième terme de membre de droite de (3.1.9), et obtenir ainsi (CS1). Il est évident que le cas $t<0$ peut être traité de la même manière. □

3.1.4 Preuve du théorème 3.1

Théorème 3.9 *Soit $n\geq 4$, soit V vérifiant (VSn) et supposons que 0 est un point régulier pour G. Alors, il existe une constante $a_0>0$ telle que pour $0<a\leq a_0$, nous ayons l'estimation*

$$\left\|e^{itG}\eta_a(G)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}, \quad t\neq 0. \qquad (D10)$$

Preuve : Rappelons que $\chi_a(\sigma) = \chi_1(\sigma/a)$, $a > 0$ petit. Alors nous pouvons écrire la fonction η_a comme suit

$$\eta_a(\sigma) = 1 - \chi_1(\sigma a^{-1}) = \int_{\sigma a^{-1}}^{\infty} \chi_1^{'}(\theta) d\theta = \int_{a^{-1}}^{\infty} \sigma\theta\chi_1^{'}(\sigma\theta)\frac{d\theta}{\theta} = \int_{a^{-1}}^{\infty} \psi(\sigma\theta)\frac{d\theta}{\theta}, \quad \sigma > 0,$$

où $\psi(\sigma) = \sigma\chi_1'(\sigma) \in C_0^\infty((0, +\infty))$. Ainsi, nous obtenons de (CS1),

$$\begin{aligned}\left\|e^{itG}\eta_a(G) - T^* e^{itG_0}\eta_a(G_0)T\right\|_{L^1\to L^\infty} &\le \int_{a^{-1}}^{\infty} \left\|\Psi(t, \sqrt{\theta})\right\|_{L^1\to L^\infty} \frac{d\theta}{\theta} \\ &\le C|t|^{-n/2} \int_{a^{-1}}^{\infty} \theta^{-1-\beta/2} d\theta \le C|t|^{-n/2}, \qquad (3.1.10)\end{aligned}$$

à condition que a soit pris suffisamment petit. Il est évident que (D10) suit de (3.1.10), et du fait que l'estimation ait lieu pour G_0 et que l'opérateur $T : L^p \to L^p$ est borné par hypothèse pour $1 \le p \le 2$.

□

Théorème 3.10 *Soit $n \ge 4$, soit V vérifiant $(V(\delta))$ avec $\delta > (n+2)/2$ et supposons que 0 est un point régulier pour G. Alors, nous avons l'estimation, $\forall t \neq 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$,*

$$\left\|e^{itG}P_{ac}f\right\|_{L^\infty} \le C|t|^{-n/2} \left\|\langle G\rangle^{(n-3)/4} f\right\|_{L^1}, \qquad (D11)$$

$$\left\|e^{itG}P_{ac}f\right\|_{L^\infty} \le C_\varepsilon|t|^{-n/2} \left\|\langle x\rangle^{n/2+\varepsilon} f\right\|_{L^2}. \qquad (D12)$$

Preuve de (D11) : nous avons d'après les théorèmes (3.1) et (3.2)

$$\begin{aligned}\left\|e^{itG}(\chi_a(G) + \eta_a(G))f\right\|_{L^\infty} &\le \left\|e^{itG}\chi_a(G)G^{-(n-3)/4}G^{(n-3)/4}f\right\|_{L^\infty} + \left\|e^{itG}\eta_a(G)f\right\|_{L^\infty} \\ &\le C|t|^{-n/2}\left(\left\|G^{(n-3)/4}f\right\|_{L^1} + \|f\|_{L^1}\right) \\ &\le C|t|^{-n/2}\left\|\langle G\rangle^{(n-3)/4}f\right\|_{L^1}.\end{aligned}$$

□

Preuve de (D12) : nous avons d'après les théorèmes (3.1) et (3.2)

$$\begin{aligned}\left\|e^{itG}(\chi_a(G) + \eta_a(G))f\right\|_{L^\infty} &\le \left\|e^{itG}\chi_a(G)\langle x\rangle^{-n/2-\epsilon}\langle x\rangle^{n/2+\epsilon}f\right\|_{L^\infty} + \left\|e^{itG}\eta_a(G)f\right\|_{L^\infty} \\ &\le C_\epsilon|t|^{-n/2}\left(\left\|\langle x\rangle^{n/2+\epsilon}f\right\|_{L^2} + \|f\|_{L^1}\right).\end{aligned}$$

Comme $\left(x \mapsto \langle x\rangle^{-n/2-\epsilon}\right) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, nous avons

$$\|f\|_{L^1} \le C\left\|\langle x\rangle^{n/2+\epsilon}f\right\|_{L^2},$$

et donc finalement :

$$\left\|e^{itG}P_{ac}f\right\|_{L^\infty} \le C|t|^{-n/2}\left\|\langle x\rangle^{n/2+\epsilon}f\right\|_{L^2}.$$

□

3.2 Une autre estimation dispersive avec plus de régularité

En combinant des idées de [73],[74] et [42] nous allons prouver le résultat suivant.

En supposant
$$\hat{V} \in L^1(\mathbf{R}^n), \tag{3.2.1}$$
on a le théorème suivant

Théorème 3.11 *Soit $n \geq 4$, soit V vérifiant (V(δ)) avec $\delta > n-1$ ainsi que (3.2.1). Alors pour tout $a > 0$, nous avons l'estimation*
$$\left\|e^{itG}\chi_a(G)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}, \quad t \neq 0. \tag{$D13$}$$

Remarque. Remarquons que (D14) est prouvée dans [42] pour des potentiels vérifiants (V(δ)) avec $\delta > n$, la condition (3.2.1) ainsi que $\langle x\rangle^\delta V(x) : H^\gamma \to H^\gamma$ borné pour un certain $\gamma > 0$. Ici, nous éliminons cette condition supplémentaire.

En combinant les résultats des théorèmes 3.1 et 3.11, nous obtenons

Théorème 3.12 *Soit $n \geq 4$, soit V vérifiant (V(δ)) avec $\delta > n-1$ ainsi que (3.2.1), et supposons que 0 est un point régulier pour G. Alors nous avons l'estimation*
$$\|e^{itG}P_{ac}\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}, \quad t \neq 0. \tag{$D14$}$$

Preuve du théorème 3.12 : comme $\delta > n-1$ implique $\delta > (n-2)/2$ pour tout $n \geq 4$, nous avons
$$\left\|e^{itG}(\chi_a(G)+\eta_a(G))f\right\|_{L^\infty} \leq \underbrace{\left\|e^{itG}\chi_a(G)f\right\|_{L^\infty}}_{\leq C|t|^{-n/2},\ \text{théorème 3.11}} + \underbrace{\left\|e^{itG}\eta_a(G)f\right\|_{L^\infty}}_{\leq C|t|^{-n/2},\ \text{théorème 3.1}}$$

Preuve du théorème 3.11 : Le point principal dans la preuve de [42] est la borne prouvée en appendice (C.11)
$$\left\|e^{-itG_0}Ve^{itG_0}\right\|_{L^1\to L^1} \leq \|\widehat{V}\|_{L^1}, \quad \forall t. \tag{3.2.2}$$
En combinant (3.2.2) avec la formule de Duhamel $e^{itG} = e^{itG_0} + i\int_0^t e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G}d\tau$, nous obtenons
$$e^{-itG_0}Ve^{itG} = e^{-itG_0}Ve^{itG_0} + ie^{-itG_0}Ve^{itG_0}\int_0^t e^{-i\tau G_0}Ve^{i\tau G}d\tau,$$
et donc
$$\left\|e^{-itG_0}Ve^{itG}\right\|_{L^1\to L^1} \leq \|\hat{V}\|_{L^1} + \|\hat{V}\|_{L^1}\int_0^t \left\|e^{-i\tau G_0}Ve^{i\tau G}\right\|_{L^1\to L^1}d\tau.$$
En appliquant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons
$$\left\|e^{-itG_0}Ve^{itG}\right\|_{L^1\to L^1} \leq \|\hat{V}\|_{L^1}\left(1+\|\hat{V}\|_{L^1}te^{\|\hat{V}\|_{L^1}t}\right).$$
En particulier, si $|t| \leq 1$, nous avons :
$$\left\|e^{-itG_0}Ve^{itG}\right\|_{L^1\to L^1} \leq C, \quad |t| \leq 1, \tag{3.2.3}$$
avec une constante $C > 0$ indépendante de t. Dans ce qui suit, nous allons déduire (D14) de (3.2.2) et (3.2.3).

Pour cela, étant donnée une fonction $\psi \in C_0^\infty((0,+\infty))$ et un paramètre $0 < h \leq 1$, comme dans [73], [74], désignons par

$$\Psi(t,h) = e^{itG}\psi(h^2G) - e^{itG_0}\psi(h^2G_0),$$

$$F(t) = i\int_0^t e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G_0}d\tau.$$

Comme dans ces articles, il est facile de voir que (D14) résulte du résultat suivant

Théorème 3.13 *Sous les hypothèses du théorème B.1, il existe des constantes $C, \beta > 0$ telles que nous ayons les estimations suivantes (pour $0 < h \leq 1$, $t \neq 0$)*

$$\|F(t)\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}, \tag{$CS2$}$$

$$\left\|\Psi(t,h) - F(t)\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq Ch^\beta|t|^{-n/2}. \tag{$CS3$}$$

Preuve théorème 3.13 ⇒ (D14) : Nous écrivons la fonction χ_a comme $\chi_a(\sigma) = \displaystyle\int_0^1 \psi(\sigma\theta)\theta^{-1}d\theta$ où $\psi(\sigma) = \sigma\chi_a'(\sigma) \in C_0^\infty((0,+\infty))$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
&\left\|e^{itG}\chi_a(G) - e^{itG_0}\chi_a(G_0) - F(t)\chi_a(G_0)\right\|_{L^1\to L^\infty} \\
&\qquad\leq \int_0^1 \|\Psi(t,h) - F(t)\phi(\theta G_0)\|_{L^1\to L^\infty}\,\theta^{-1}d\theta \\
&\qquad\qquad\leq C|t|^{-n/2}\int_0^1 \theta^{-1+\beta/2}d\theta \leq C'|t|^{-n/2}.
\end{aligned}$$

Comme $\left\|e^{itG_0}\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C|t|^{-n/2}$ et $\chi_a(G_0)$ est borné sur L^p, $1 \leq p \leq +\infty$, nous déduisons (D14) des estimations précédentes en décomposant

$$e^{itG}\chi_a(G) = \left(e^{itG}\chi_a(G) - e^{itG_0}\chi_a(G_0) - F(t)\chi_a(G_0)\right) + e^{itG_0}\chi_a(G_0) + F(t)\chi_a(G_0).$$

Preuve du théorème 3.13
Preuve de (CS2) : Pour $|t| \leq 2$, nous avons d'après (3.2.2) :

$$\|F(t)\|_{L^1\to L^\infty} \leq \left\|e^{itG_0}\right\|_{L^1\to L^\infty}\int_0^t \left\|e^{-i\tau G_0}Ve^{i\tau G_0}\right\|_{L^1\to L^1}d\tau \leq 2\|\hat{V}\|_{L^1}\left\|e^{itG_0}\right\|_{L^1\to L^\infty},$$

et comme l'inégalité de dispersion est vérifiée pour l'opérateur libre, nous obtenons (CS2). Sans perte de généralités, nous pouvons supposer $t \geq 2$. Ecrivons $F = F_1 + F_2$, où

$$F_1(t) = i\int_1^{t-1} e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G_0}d\tau,$$

$$F_2(t) = i\left(\int_0^1 + \int_{t-1}^t\right)e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G_0}d\tau.$$

Il résulte de (3.2.2) que $F_2(t)$ vérifie (CS2) (traitement similaire au cas $|t| \leq 2$, étant donné que les intervalles d'intégration sont de taille ≤ 1). Pour traiter l'opérateur $F_1(t)$, observons que son noyau est de la forme

$$c_n\int_{\mathbf{R}^n} U(|x-\xi|^2/4, |y-\xi|^2/4, t)V(\xi)d\xi,$$

où c_n est une constante et

$$U(\sigma_1, \sigma_2, t) = \int_1^{t-1} e^{i\sigma_1/(t-\tau)+i\sigma_2/\tau}(t-\tau)^{-n/2}\tau^{-n/2}d\tau.$$

Pour prouver que $F_1(t)$ vérifie (D14), il suffit de montrer que

$$|U(\sigma_1, \sigma_2, t)| \leq Ct^{-n/2}\left(\sigma_1^{-1/2} + \sigma_2^{-1/2}\right), \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 > 0,\, t \geq 2. \tag{3.2.4}$$

En effet, si (3.2.4) est vérifiée, nous avons

$$\begin{aligned}\|F_1(t)\|_{L^1\to L^\infty} &\leq c_n \sup_{x,y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} U(|x-\xi|^2/4, |y-\xi|^2/4, t)V(\xi)d\xi \\ &\leq C|t|^{-n/2}\sup_{x,y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\left(|x-\xi|^{-1} + |y-\xi|^{-1}\right)|V(\xi)|d\xi.\end{aligned}$$

(CS2) découle alors du fait que V vérifie (V(δ)) avec $\delta > n-1$. Par exemple, (en écrivant $\delta = n-1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$)

$$\int_{\mathbf{R}^n}|x-\xi|^{-1}|V(\xi)|d\xi \leq C\int_0^\infty \rho^{n-2}\langle\rho\rangle^{-n+1-\varepsilon}d\rho.$$

L'intégrande du majorant est équivalent en $+\infty$ à $\rho^{-1-\varepsilon}$ qui est intégrable.

Preuve de (3.2.4) : Dans la formule donnant U, séparons le domaine d'intégration en deux parties : $1 \leq \tau \leq t/2$ et $t/2 \leq \tau \leq t-1$. Effectuons le changement de variables $\tau/t \mapsto \tau$ dans la première zone et $1-\tau/t \mapsto \tau$ dans la seconde. Nous avons ainsi

$$U(\sigma_1, \sigma_2, t) = t^{-n+1}\left(u(\sigma_1 t^{-1}, \sigma_2 t^{-1}, t^{-1}) + u(\sigma_2 t^{-1}, \sigma_1 t^{-1}, t^{-1})\right), \tag{3.2.5}$$

où

$$u(\sigma_1', \sigma_2', \kappa) = \int_\kappa^{1/2} e^{i\sigma_1'/(1-\tau')+i\sigma_2'/\tau'}(1-\tau')^{-n/2}(\tau')^{-n/2}d\tau'.$$

Il est facile de voir que (3.2.4) résulte de (3.2.5) et de la borne

$$\left|u(\sigma_1', \sigma_2', \kappa)\right| \leq C\kappa^{-(n-3)/2}(\sigma_1')^{-1/2}, \quad \forall \sigma_1', \sigma_2' > 0,\, 0 < \kappa \leq 1/2. \tag{3.2.6}$$

En effet, si (3.2.6) est vérifiée, nous avons

$$|U(\sigma_1, \sigma_2, t)| \leq Ct^{-n+1}\left(|t|^{(n-3)/2}(\sigma_1 t^{-1})^{-1/2} + |t|^{(n-3)/2}(\sigma_2 t^{-1})^{-1/2}\right) = Ct^{-n/2}(|\sigma_1|^{-1/2}+|\sigma_2|^{-1/2}).$$

Preuve de (3.2.6) : Pour prouver (3.2.6), nous effectuons le changement de variables $\mu = 1/\tau'$ et nous écrivons la fonction u sous la forme

$$u(\sigma_1', \sigma_2', \kappa) = \int_2^{\kappa^{-1}} e^{i\varphi(\mu,\sigma_1',\sigma_2')}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2}\mu^{n/2-2}d\mu,$$

où

$$\varphi(\mu, \sigma_1', \sigma_2') = \mu\sigma_2' + \frac{\mu}{\mu-1}\sigma_1'.$$

Notons $a(\mu) = \mu/(\mu-1)$. Nous avons $a'(\mu) = -1/(\mu-1)^2 < 0$. Donc $a(\mu)$ est décroissante. Comme $0 < \kappa \leq 1/2$, nous avons $1 < a(\kappa^{-1}) = 1/(1-\kappa) \leq 2$. Par conséquent, $1 \leq a(\mu) \leq 2$, pour $2 \leq \mu \leq \kappa^{-1}$. Nous obtenons ainsi :

$$\left|u(\sigma_1', \sigma_2', \kappa)\right| \leq C\int_2^{\kappa^{-1}}\mu^{n/2-2}d\mu \leq C\kappa^{-(n-2)/2}. \tag{3.2.7}$$

Par ailleurs, observons que

$$\varphi'(\mu) = \frac{d\varphi}{d\mu} = \sigma_2' - \frac{\sigma_1'}{(\mu-1)^2},$$

donc φ' s'annule en $\mu_0 = 1 + (\sigma_1'/\sigma_2')^{1/2}$. Remarquons aussi

$$\varphi''(\mu) = \frac{2\sigma_1'}{(\mu-1)^3},$$

qui est strictement positif pour $\mu \geq 2$ comme $\sigma_1' > 0$. Nous allons considérer deux cas.

Cas 1. $\mu_0 \notin [3/2, 3\kappa^{-1}/2]$. Alors, écrivons

$$\varphi'(\mu) = \frac{\sigma_2'}{(\mu-1)^2}\left((\mu-1)^2 - (\mu_0-1)^2\right) = \frac{\sigma_2'}{(\mu-1)^2}(\mu - 1 + \mu_0 - 1)(\mu - \mu_0).$$

Donc

$$\left|\frac{\varphi'(\mu)(\mu-1)}{\sigma_2'}\right| = \left(1 + \frac{\mu_0 - 1}{\mu - 1}\right)|\mu - \mu_0|.$$

Comme $\dfrac{\mu_0 - 1}{\mu - 1} \geq 0$ pour $\mu \geq 2$, nous avons

$$\left|\varphi'(\mu)\right| \geq \sigma_2' \frac{|\mu - \mu_0|}{\mu - 1}, \quad \mu \in [2, \kappa^{-1}].$$

Soit $\mu \in [2, \kappa^{-1}]$. Si $\mu_0 \in [1, 3/2]$, nous avons $|\mu - \mu_0| = \mu - \mu_0$ et $\dfrac{10\mu_0 - 1}{9} \leq \dfrac{14}{9} < 2 \leq \mu$, et donc $10\mu_0 - 1 < 9\mu = 10\mu - \mu$ d'où finalement

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu - 1} > \frac{1}{10}.$$

Si au contraire $\mu_0 \geq 3\kappa^{-1}/2$, nous avons $|\mu - \mu_0| = \mu_0 - \mu$ et $\dfrac{10\mu_0 + 1}{11} \geq \dfrac{15\kappa^{-1} + 1}{11} > \kappa^{-1} \geq \mu$, et donc $10\mu_0 + 1 > 11\mu = 10\mu + \mu$ d'où finalement

$$\frac{\mu_0 - \mu}{\mu - 1} > \frac{1}{10}.$$

En réunissant les deux cas, nous avons

$$\left|\varphi'(\mu)\right| \geq \frac{\sigma_2'}{10}, \quad \mu \in [2, \kappa^{-1}].$$

De plus, en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(\sigma_1', \sigma_2', \kappa) &= \int_2^{\kappa^{-1}} (i\varphi')^{-1}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2} \mu^{n/2-2} de^{i\varphi} \\ &= e^{i\varphi}(i\varphi')^{-1}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2} \mu^{n/2-2}\Bigg|_2^{\kappa^{-1}} - \int_2^{\kappa^{-1}} e^{i\varphi} f(\mu) d\mu, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

où

$$f(\mu) = \frac{d}{d\mu}\left((i\varphi')^{-1}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2} \mu^{n/2-2}\right)$$

$$= (i\varphi')^{-1}\frac{d}{d\mu}\left(\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2}\mu^{n/2-2}\right)+\frac{i\varphi''}{\varphi'^2}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2}\mu^{n/2-2}.$$

Comme

$$\left|\frac{\varphi''}{\varphi'}\right| \le \frac{2\sigma_1'(\mu-1)^{-2}}{(\mu-1)\,|\sigma_2'-\sigma_1'(\mu-1)^{-2}|} \le \frac{2}{\mu-1}\left(1+\frac{\sigma_2'}{|\varphi'|}\right),$$

en utilisant $\varphi'(\mu) \ge \sigma_2'/10$, nous avons

$$\left|\frac{\varphi''}{\varphi'}\right| \le \frac{22}{\mu-1}.$$

Soit

$$g(\mu) = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2}\mu^{n/2-2} = a(\mu)^{n/2}\mu^{n/2-2}.$$

Nous avons

$$g'(\mu) = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2}\mu^{n/2-3}\left(n/2-2-\frac{n}{2(\mu-1)}\right).$$

Comme $1 \le a(\mu) \le 2$ et $\dfrac{1}{\mu-1} \le 1$, nous avons pour $2 \le \mu \le \kappa^{-1}$:

$$\left|\frac{1}{\mu-1}g(\mu)\right| \le C\mu^{n/2-3} \quad \text{et} \quad |g'(\mu)| \le C\mu^{n/2-3}.$$

Par conséquent, nous obtenons (pour $\mu \ge 2$)

$$|f(\mu)| \le C(\sigma_2')^{-1}\mu^{n/2-3}. \tag{3.2.9}$$

Par (3.2.8) et (3.2.9), et en utilisant

$$1 \le a(\mu)^{n/2} \le 2^{n/2} \quad \text{pour } \mu \in [2,\kappa^{-1}] \quad \text{et} \quad 2^{n/2-2} \le \kappa^{-n/2+2},$$

nous obtenons

$$\left|u(\sigma_1',\sigma_2',\kappa)\right| \le C(\sigma_2')^{-1}\kappa^{-(n-4)/2}. \tag{3.2.10}$$

Il est évident que dans ce cas, (3.2.6) résulte de (3.2.7) et (3.2.10).

Cas 2. $\mu_0 \in [3/2, 3\kappa^{-1}/2]$. Désignons par $I(\mu_0) = [9\mu_0/10, 11\mu_0/10] \cap [2,\kappa^{-1}]$. Nous écrivons la fonction u comme $u_1 + u_2$, où

$$u_1 = \int_{I(\mu_0)} e^{i\varphi}\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{n/2}\mu^{n/2-2}d\mu = \mu_0^{n/2-1}\int_{\widetilde{I}(\mu_0)} e^{i\lambda\psi(z)}g(z)dz, \tag{3.2.11}$$

où nous avons fait le changement de variables $\mu = \mu_0(1+z)$, $\widetilde{I}(\mu_0) \subset [-1/10, 1/10]$, $\lambda = \mu_0\sigma_2'$,

$$g(z) = \left(\frac{1+z}{1+z-\mu_0^{-1}}\right)^{n/2}(1+z)^{n/2-2},$$

$$\psi(z) = (1+z)\left(1+\frac{(\mu_0-1)^2}{\mu_0(1+z)-1}\right).$$

Nous pouvons écrire

$$\psi(z) = (1+z)\left(1+\frac{\mu_0-1}{1+\frac{\mu_0 z}{\mu_0-1}}\right) = (1+z)\left(1+(\mu_0-1)\left(1-\frac{\mu_0 z}{\mu_0-1}+\left(\frac{\mu_0 z}{\mu_0-1}\right)^2+O(z^3)\right)\right),$$

et finalement

$$\psi(z) = \mu_0 + \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} z^2 + O(z^3), \quad |z| \ll 1,$$

uniformément en μ_0. Il est facile de voir que nous avons l'estimation

$$\left| \int_0^a e^{i\lambda\psi(z)} g(z) dz \right| \leq C\lambda^{-1/2}, \quad |a| \leq 1/10. \tag{3.2.12}$$

En effet, les fonctions $g(z)$ et $\psi(z)$ sont analytiques en $|z| \leq 1/10$ avec $|g(z)|$ borné sur ce domaine uniformément en μ_0. Par ailleurs, nous pouvons changer le contour d'intégration pour obtenir (avec un certain $0 < \gamma \ll 1$)

$$\left| \int_0^a e^{i\lambda\psi(z)} g(z) dz \right| \leq \left| \int_0^a e^{i\lambda\psi(e^{i\gamma}y)} g(e^{i\gamma}y) dy \right| + \left| a \int_0^\gamma e^{i\lambda\psi(e^{i\theta}a)} g(e^{i\theta}a) d\theta \right|.$$

D'une part, nous avons

$$\psi(e^{i\gamma}y) = \mu_0 + \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} e^{2i\gamma} y^2 + O(y^3)$$

et donc

$$\operatorname{Re}\big(i\lambda\psi(e^{i\gamma}y)\big) = -\frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} \lambda \sin(2\gamma) y^2 + O(y^3) \leq -C\lambda y^2.$$

D'autre part, nous avons

$$\operatorname{Re}\Big(i\lambda\psi(e^{i\theta}a)\Big) = -\frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} \lambda \sin(2\theta) a^2 + O(\theta^3) \leq -C\lambda\theta.$$

Par conséquent,

$$\left| \int_0^a e^{i\lambda\psi(z)} g(z) dz \right| \leq C_1 \int_0^a e^{-C\lambda y^2} dy + C_1' \int_0^\gamma e^{-C'\lambda\theta} d\theta = O(\lambda^{-1/2}),$$

avec des constantes $C, C', C_1, C_1' > 0$. Par (3.2.11) et (3.2.12), nous concluons

$$|u_1| \leq C(\sigma_2')^{-1/2} \mu_0^{(n-3)/2} \leq \widetilde{C}(\sigma_2')^{-1/2} \kappa^{-(n-3)/2}. \tag{3.2.13}$$

D'autre part, si $\mu \in [2, \kappa^{-1}] \setminus I(\mu_0)$, alors

$$\frac{|\mu - \mu_0|}{\mu - 1} \geq C > 0,$$

En effet, si $2 \leq \mu \leq 9\mu_0/10$, alors $|\mu - \mu_0| = \mu_0 - \mu \geq \mu/9$ et si $11\mu_0/10 \leq \mu$, alors $|\mu - \mu_0| = \mu - \mu_0 \geq \mu/11$, donc nous avons pour tout $\mu \in [2, +\infty[\setminus I(\mu_0)$

$$\frac{|\mu - \mu_0|}{\mu - 1} \geq \frac{1}{11} \frac{\mu}{\mu - 1} \geq \frac{1}{11}.$$

Par conséquent, nous pouvons minorer $|\varphi'(\mu)|$. De plus, la fonction u_2 peut être traitée de la même manière que dans le cas 1. Ainsi, u_2 vérifie (3.2.6) et par conséquent, vu (3.2.13), il en est de même pour u. Ceci complète la preuve de (3.2.6) et donc de (3.2.4). $\square$

Preuve de (CS3) : Il suffit de prouver (CS3) pour $0 < h \leq h_0$ avec une certaine constante $0 < h_0 \leq 1$, comme pour $h_0 \leq h \leq 1$, (CS3) résulte de (CS2) et de l'estimation de la norme $L^1 \to L^\infty$ de $\Psi(t, h)$ prouvée dans [74] pour la classe plus large de potentiels vérifiant (V(δ))

avec $\delta > (n+2)/2$ (sans utiliser (3.2.1)). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $t > 0$. Maintenant, utilisant la formule de Duhamel comme dans [73], [74] nous obtenons l'identité

$$\Psi(t;h) - F(t)\psi(h^2G_0) = \sum_{j=1}^{5} \Psi_j(t;h), \tag{3.2.14}$$

où

$$\begin{aligned}
\Psi_1(t;h) &= \psi_1(h^2G_0)e^{itG_0}\left(\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)\right) \\
&+ \left(\psi_1(h^2G) - \psi_1(h^2G_0)\right) e^{itG_0}\psi(h^2G_0) + \left(\psi_1(h^2G) - \psi_1(h^2G_0)\right) \Psi(t;h), \\
\Psi_2(t;h) &= i\left(\int_0^\gamma + \int_{t-\gamma}^t\right) \psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G}\psi(h^2G)d\tau, \\
\Psi_3(t;h) &= -i\left(\int_0^\gamma + \int_{t-\gamma}^t\right) e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G_0}\psi(h^2G_0)d\tau, \\
\Psi_4(t;h) &= i\int_\gamma^{t-\gamma} \psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}V\Psi(\tau;h)d\tau, \\
\Psi_5(t;h) &= -i\int_\gamma^{t-\gamma} (1-\psi_1)(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G_0}\psi(h^2G_0)d\tau,
\end{aligned}$$

où $\psi_1 \in C_0^\infty((0,+\infty))$, $\psi_1 = 1$ sur $\operatorname{supp}\psi$, et $0 < \gamma \ll 1$ est un paramètre qui sera fixé ultérieurement, dépendant de h.

Estimation sur $\Psi_1(t;h)$: Vu (E5) et en utilisant l'estimation dispersive pour l'opérateur libre, nous avons

$$\|\Psi_1(t;h)f\|_{L^\infty} \leq Ch^2t^{-n/2}\|f\|_{L^1} + Ch^2\|\Psi(t;h)f\|_{L^\infty}, \quad \forall f \in L^1. \tag{3.2.15}$$

Estimation sur $\Psi_3(t;h)$: Ecrivons

$$\Psi_3(t;h) = -ie^{itG_0}\left(\int_0^\gamma + \int_{t-\gamma}^t\right) e^{-i\tau G_0}Ve^{i\tau G_0}\psi(h^2G_0)d\tau.$$

Par (3.2.2), l'estimation dispersive pour le propagateur libre et (E1), nous obtenons

$$\|\Psi_3(t;h)f\|_{L^\infty} \leq C\gamma t^{-n/2}\|f\|_{L^1}, \quad \forall f \in L^1. \tag{3.2.16}$$

Estimation sur $\Psi_2(t;h)$: Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{t-\gamma}^t$, effectuons le changement de variables $t-\tau \mapsto \tau$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{t-\gamma}^t \psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}Ve^{i\tau G}\psi(h^2G)d\tau &= \int_0^\gamma \psi_1(h^2G_0)e^{i\tau G_0}Ve^{i(t-\tau)G}\psi(h^2G)d\tau \\
&= \psi_1(h^2G_0)\int_0^\gamma e^{i\tau G_0}Ve^{-i\tau G}d\tau\left(\Psi(t;h) + e^{itG_0}\psi(h^2G_0)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant (3.2.2) et (3.2.3), ainsi que l'estimation dispersive pour le propagateur libre et (E1), nous obtenons :

$$\|\Psi_2(t;h)f\|_{L^\infty} \leq C\gamma t^{-n/2}\|f\|_{L^1} + C\gamma\|\Psi(t;h)f\|_{L^\infty}, \quad \forall f \in L^1, \tag{3.2.17}$$

avec une constante $C > 0$ indépendante de t, h et γ.

Estimation sur $\Psi_4(t;h)$:

Proposition 3.14 *Soit V vérifiant (1.1) avec $\delta > n-1$. Alors, il existe des constantes $C, \beta_1 > 0$ telles que pour $0 < h \le 1$, $t \ge 2\gamma$, nous ayons l'estimation*

$$\|\Psi_4(t,h)\|_{L^1\to L^\infty} \le Ch^{\beta_1}\gamma^{-(n-3)/2}t^{-n/2}. \tag{3.2.18}$$

Preuve. Nous allons utiliser les estimations suivantes prouvées dans [74].

Proposition 3.15 *Soit V vérifiant (1.1) avec $\delta > (n+2)/2$. Alors, pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$, $1/2 - \varepsilon/4 \le s \le (n-1)/2$, $0 < h \le 1$, $t \ne 0$, nous avons les estimations*

$$\left\|\psi(h^2G_0)e^{itG_0}\langle x\rangle^{-s-1/2-\varepsilon}\right\|_{L^2\to L^\infty} \le Ch^{s-(n-1)/2}|t|^{-s-1/2}, \tag{3.2.19}$$

$$\left\|\Psi(t,h)\langle x\rangle^{-s-1/2-\varepsilon}\right\|_{L^2\to L^\infty} \le Ch^{s-(n-3)/2-\varepsilon/4}|t|^{-s-1/2}. \tag{3.2.20}$$

Comme V vérifie (V(δ)) avec $\delta > n-1$, nous avons en particulier $|V(x)| \le C\langle x\rangle^{-n+1-2\varepsilon_0}$ pour un certain $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. En remarquant que $-n+1-2\varepsilon_0 = (-n/2-\varepsilon_0)+(-(n-2)/2-\varepsilon_0)$ et en séparant l'intégration $\int_\gamma^{t-\gamma}$ en deux parties $\int_\gamma^{t/2}$ et $\int_{t/2}^{t-\gamma}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\|\Psi_4(t,h)\|_{L^1\to L^\infty}\\ &\le C\int_\gamma^{t/2}\left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}\langle x\rangle^{-n/2-\varepsilon_0}\right\|_{L^2\to L^\infty}\left\|\langle x\rangle^{-(n-2)/2-\varepsilon_0}\Psi(\tau,h)\right\|_{L^1\to L^2}d\tau\\ &+C\int_{t/2}^{t-\gamma}\left\|\psi_1(h^2G_0)e^{i(t-\tau)G_0}\langle x\rangle^{-(n-2)/2-\varepsilon_0}\right\|_{L^2\to L^\infty}\left\|\langle x\rangle^{-n/2-\varepsilon_0}\Psi(\tau,h)\right\|_{L^1\to L^2}d\tau.\end{aligned}$$

Pour l'intégration $\int_\gamma^{t/2}$, nous utilisons (3.2.19) avec $s = (n-1)/2$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$ et (3.2.20) avec $s = (n-3)/2 + 2\varepsilon_0/5$ et $\varepsilon = 3\varepsilon_0/5$. Nous obtenons ainsi une majoration par

$$\le Ch^{\varepsilon_0/4}\int_\gamma^{t/2}|t-\tau|^{-n/2}|\tau|^{-(n-2)/2-2\varepsilon_0/5}d\tau.$$

Comme $\gamma \le \tau$, nous avons $|t-\tau| \ge t/2$ et donc $|t-\tau|^{-n/2} \le C|t|^{-n/2}$. Le majorant devient :

$$\le Ch^{\varepsilon_0/4}|t|^{-n/2}\int_\gamma^{t/2}|\tau|^{-(n-2)/2-2\varepsilon_0/5}d\tau.$$

L'intégrale se calcule, et comme $t/2 \ge \gamma$, nous avons

$$\int_\gamma^{t/2}|\tau|^{-(n-2)/2-2\varepsilon_0/5}d\tau \le C\gamma^{-(n-2)/2-2\varepsilon_0/5+1}.$$

Comme $0 < \varepsilon \ll 1$, nous avons $-(n-2)/2 - 2\varepsilon_0/5 + 1 \ge -(n-3)/2$ et comme $0 < \gamma < 1$, nous avons $\gamma^{-(n-2)/2-2\varepsilon_0/5+1} \le \gamma^{-(n-3)/2}$. Finalement, la première intégrale peut se majorer par

$$\le Ch^{\varepsilon_0/4}|t|^{-n/2}\gamma^{-(n-3)/2}.$$

Pour l'intégration $\int_{t/2}^{t-\gamma}$, nous utilisons (3.2.19) avec $s = (n-3)/2 + \varepsilon_0/2$ et $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ et (3.2.20) avec $s = (n-1)/2$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. Nous obtenons ainsi une majoration par

$$\le Ch^{\varepsilon_0/4}\int_{t/2}^{t-\gamma}|t-\tau|^{-(n-2)/2-\varepsilon_0/2}|\tau|^{-n/2}d\tau.$$

En effectuant le changement de variables $t-\tau \mapsto \tau$, nous retrouvons la même analyse que la première intégrale. Finalement, nous obtenons :

$$\|\Psi_4(t,h)\|_{L^1\to L^\infty} \leq Ch^{\varepsilon_0/4}\gamma^{-(n-3)/2}t^{-n/2}.$$

Ce qui donne bien le résultat voulu. $\square$

Estimation sur $\Psi_5(t;h)$:

Proposition 3.16 *Soit* V *vérifiant (1.1) avec* $\delta > n-1$. *Alors, pour tout* $0<\varepsilon \ll 1$, $0<h\leq 1$, $t\geq 2\gamma$, *nous avons l'estimation*

$$\|\Psi_5(t,h)\|_{L^1\to L^\infty} \leq C_\varepsilon h^\varepsilon \gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}t^{-n/2}. \tag{3.2.21}$$

Preuve. nous allons utiliser le fait que le noyau de l'opérateur $e^{itG_0}\psi(h^2G_0)$ est de la forme $K_h(|x-y|,t)$, où

$$K_h(\sigma,t) = \frac{\sigma^{-2\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{it\lambda^2}\mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda)\psi(h^2\lambda^2)\lambda d\lambda = h^{-n}K_1(\sigma h^{-1}, th^{-2}),$$

où $\mathcal{J}_\nu(z) = z^\nu J_\nu(z)$, $J_\nu(z) = \left(H_\nu^+(z)+H_\nu^-(z)\right)/2$ est la fonction de Bessel d'ordre $\nu=(n-2)/2$. Ainsi, le noyau de l'opérateur Ψ_5 est de la forme

$$\int_{\mathbf{R}^n} W_h(|x-\xi|,|y-\xi|,t,\gamma)V(\xi)d\xi,$$

où

$$\begin{aligned} W_h(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma) &= -i\int_\gamma^{t-\gamma}\widetilde{K}_h(\sigma_1,t-\tau)K_h(\sigma_2,\tau)d\tau \\ &= h^{-2n+2}W_1(\sigma_1h^{-1},\sigma_2h^{-1},th^{-2},\gamma h^{-2}), \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

où $\widetilde{K}_h$ est défini en remplaçant dans la définition de K_h la fonction ψ par $1-\psi_1$. Il est facile de voir que (3.2.21) résulte de la borne (pour tout σ_1, σ_2, $\gamma>0$, $0<\varepsilon\ll 1$, $t\geq 2\gamma$)

$$|W_h(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma)| \leq C_\varepsilon h^\varepsilon\gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}t^{-n/2}\left(\sigma_1^{-n+2}+\sigma_1^{-1+\varepsilon}+\sigma_2^{-n+2}+\sigma_2^{-1+\varepsilon}\right). \tag{3.2.23}$$

En effet, si (3.2.23) est vérifée, nous avons

$$\begin{aligned} \|\Psi_5(t;h)\|_{L^1\to L^\infty} &\leq C_\varepsilon h^\varepsilon\gamma^{-(n-3)/2}t^{-n/2} \\ &\times \sup_{x,y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\left(|x-\xi|^{-n+2}+|x-\xi|^{-1+\varepsilon}+|y-\xi|^{-n+2}+|y-\xi|^{-1+\varepsilon}\right)|V(\xi)|d\xi. \end{aligned}$$

Comme V vérifie (V(δ)) avec $\delta>n-1$, nous avons par exemple (avec $\delta = n-1+\alpha$) :

$$\int_{\mathbf{R}^n}|x-\xi|^{-k}|V(\xi)|d\xi \leq C\int_0^\infty \rho^{n-1-k}\langle\rho\rangle^{-n+1-\alpha}d\rho.$$

En 0, il y a intégrabilité si $k<n$, ce qui est vérifié pour $k=n-2$ et $k=1-\varepsilon$. En $+\infty$, il y a intégrabilité si $k+\alpha>1$, ce qui est vérifié pour $k=n-2$ et $k=1-\varepsilon$ si $\varepsilon<\alpha$ (ce que l'on suppose). Donc nous avons bien l'intégrabilité de tous les termes.

preuve de (3.2.23) : Vu (3.2.22), il suffit de prouver (3.2.23) avec $h=1$. En effet, si (3.2.23) est vérifiée pour $h=1$, alors

$$|W_h(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma)| \leq C_\varepsilon h^{-2n+2}(\gamma h^{-2})^{-(n-3)/2-\varepsilon}(th^{-2})^{-n/2}$$

$$\times \left((\sigma_1 h^{-1})^{-n+2} + (\sigma_1 h^{-1})^{-1+\varepsilon} + (\sigma_2 h^{-1})^{-n+2} + (\sigma_2 h^{-1})^{-1+\varepsilon}\right).$$

Soit

$$|W_h(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma| \leq C_\varepsilon h^\varepsilon \gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon} t^{-n/2} \left(\sigma_1^{-n+2} h^{n-3+\varepsilon} + \sigma_1^{-1+\varepsilon} + \sigma_2^{-n+2} h^{n-3+\varepsilon} + \sigma_2^{-1+\varepsilon}\right).$$

Comme $n \geq 4$ et $0 < h \leq 1$, nous avons $h^{n-3+\varepsilon} \leq 1$. Par conséquent, nous obtenons bien (3.2.23) pour tout $0 < h \leq 1$.

Preuve de (3.2.23) pour $h = 1$: Maintenant, observons que $\frac{1}{4} d\lambda_1^2 d\lambda_2^2 = \lambda_1\lambda_2 d\lambda_1 d\lambda_2$ et

$$\int_\gamma^{t-\gamma} e^{i(t-\tau)\lambda_1^2} e^{i\tau\lambda_2^2} d\tau = \frac{1}{i(\lambda_2^2-\lambda_1^2)} \left(e^{i(t-\gamma)\lambda_2^2 + i\gamma\lambda_1^2} - e^{i\gamma\lambda_2^2 + i(t-\gamma)\lambda_1^2}\right).$$

Par conséquent, nous obtenons $W_1 = W_1^{(1)} - W_1^{(2)}$ où

$$W_1^{(1)}(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma) = \frac{(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu}}{4(2\pi)^{2\nu+2}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(t-\gamma)\lambda_1^2 + i\gamma\lambda_2^2} \rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2) \mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2) d\lambda_1^2 d\lambda_2^2, \tag{3.2.24}$$

$$W_1^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma) = \frac{(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu}}{4(2\pi)^{2\nu+2}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(t-\gamma)\lambda_2^2 + i\gamma\lambda_1^2} \rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2) \mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2) d\lambda_1^2 d\lambda_2^2, \tag{3.2.25}$$

où la fonction (nous utilisons $\psi = \psi_1\psi$ pour la seconde égalité)

$$\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2) = \frac{(1-\psi_1)(\lambda_1^2)\psi(\lambda_2^2)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2} = (1-\psi_1)(\lambda_1^2)\psi_1(\lambda_2^2)\frac{\psi(\lambda_2^2)-\psi(\lambda_1^2)}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}$$

vérifie

$$\left|\partial_{\lambda_1^2}^{\alpha_1}\partial_{\lambda_2^2}^{\alpha_2}\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)\right| \leq C_{\alpha_1,\alpha_2}\langle\lambda_1^2\rangle^{-1-\alpha_1}, \quad \forall(\lambda_1,\lambda_2). \tag{3.2.26}$$

En effet, remarquons que $\lambda_1^2 \in \operatorname{supp}(1-\psi_1)$ et $\lambda_2^2 \in \operatorname{supp}\psi$ et que $\operatorname{supp}(1-\psi_1) \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$. Comme $\lambda_2 \mapsto \rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)$ est $C_0^\infty((0,+\infty))$, les dérivations par rapport à λ_2^2 ne posent pas de problèmes. Lorsque nous regardons $\lambda_1 \mapsto \rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)$, il suffit de regarder le comportement à l'infini, comme la fonction est C^∞, elle est bornée sur un domaine compact. A l'infini, elle se comporte comme $1/\lambda_1^2$ ($\psi_1(\lambda_1^2) = 0$ à l'infini), ce qui donne bien (3.2.26) lorsque nous dérivons.

Etant donnés des entiers $0 \leq k, m < n/2$, nous avons $k + m \leq n-1$ pour n impair et $k + m \leq n-2$ pour n pair. Comme $\mathcal{J}_\nu(z) = O(z^{n-2})$ lorsque $z \to 0$ pour n pair et qu'il n'y a pas de singularité qui apparaît en 0 lorsque nous dérivons pour n impair, nous pouvons intégrer par parties pour obtenir

$$W_1^{(1)}(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma) = i^{-m-k}(t-\gamma)^{-k}\gamma^{-m}\frac{(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu}}{4(2\pi)^{2\nu+2}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(t-\gamma)\lambda_1^2 + i\gamma\lambda_2^2}$$
$$\times \partial_{\lambda_1^2}^k \partial_{\lambda_2^2}^m \left(\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2)\right) d\lambda_1^2 d\lambda_2^2,$$
$$W_1^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma) = i^{-m-k}(t-\gamma)^{-k}\gamma^{-m}\frac{(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu}}{4(2\pi)^{2\nu+2}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(t-\gamma)\lambda_2^2 + i\gamma\lambda_1^2}$$
$$\times \partial_{\lambda_1^2}^m \partial_{\lambda_2^2}^k \left(\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2)\right) d\lambda_1^2 d\lambda_2^2.$$

Utilisant l'inégalité bien connue

$$\left|\int_{-\infty}^\infty e^{it\lambda^2}\varphi(\lambda)d\lambda\right| \leq C|t|^{-1/2}\|\widehat{\varphi}\|_{L^1},$$

nous obtenons (avec ϕ définie de manière naturelle)

$$\left|\int_0^\infty e^{i(t-\gamma)\lambda_1^2}\phi(\lambda_1)d\lambda_1\right| \le C|t-\gamma|^{-1/2}\|\hat\phi\|_{L^1}.$$

Comme $t \ge 2\gamma$, nous avons $t-\gamma \ge t/2$ et donc $|t-\gamma|^{-k-1/2} \le C|t|^{-k-1/2}$ et comme par ailleurs $\|\hat\phi\|_{L^1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\tau\lambda_1}\phi(\lambda_1)\right|d\lambda_1$, nous obtenons (pour $t \ge 2\gamma$) :

$$\begin{aligned}\left|W_1^{(1)}(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma)\right| &\le Ct^{-k-1/2}\gamma^{-m}(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{i\tau\lambda_1+i\gamma\lambda_2^2}\right.\\ &\left.\times\lambda_1\partial_{\lambda_1^2}^k\partial_{\lambda_2^2}^m\left(\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2)\right)d\lambda_1 d\lambda_2^2\right|d\tau, &(3.2.27)\\ \left|W_1^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2,t,\gamma)\right| &\le Ct^{-k-1/2}\gamma^{-m}(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{i\tau\lambda_2+i\gamma\lambda_1^2}\right.\\ &\left.\times\lambda_2\partial_{\lambda_1^2}^m\partial_{\lambda_2^2}^k\left(\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2)\right)d\lambda_2 d\lambda_1^2\right|d\tau. &(3.2.28)\end{aligned}$$

Nous rappellons que la fonction $\mathcal{J}_\nu$ est de la forme $\mathcal{J}_\nu(z) = e^{iz}b_\nu^+(z) + e^{-iz}b_\nu^-(z)$, où $b_\nu^\pm(z)$ sont des symboles d'ordre $(n-3)/2$ pour $z \ge 1$, alors que près de $z=0$ la fonction $\mathcal{J}_\nu(z)$ est égale à $z^{2\nu}$ fois une fonction analytique. Par ailleurs, elle vérifie

$$\left|\partial_z^j\mathcal{J}_\nu(z)\right| \le Cz^{n-2-j}\langle z\rangle^{j-(n-1)/2}, \quad \forall z>0,\ 0\le j\le n-2, \tag{3.2.29}$$

$$\left|\partial_z^j\mathcal{J}_\nu(z)\right| \le C_j\langle z\rangle^{(n-3)/2}, \quad \forall z>0,\ j\ge 0. \tag{3.2.30}$$

De plus, les fonctions $b_\nu^\pm(z)$ sont de la forme (près de $z=0$)

$$b_\nu^\pm(z) = a_{\nu,1}^\pm(z) + z^{n-2}\log z\, a_{\nu,2}^\pm(z),$$

où $a_{\nu,j}^\pm(z)$ sont des fonctions analytiques, $a_{\nu,2}^\pm(z)\equiv 0$ si n est impaire. Par ailleurs, nous avons

$$\left|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)\right| \le C, \quad 0<z\le 1,\ 0\le j\le n-3, \tag{3.2.31}$$

$$\left|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)\right| \le C_\varepsilon z^{-\varepsilon}, \quad 0<z\le 1,\ j=n-2, \tag{3.2.32}$$

$$\left|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)\right| \le C_j z^{n-2-j}, \quad 0<z\le 1,\ j\ge n-1, \tag{3.2.33}$$

ce qui implique

$$\left|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)\right| \le C\langle z\rangle^{(n-3)/2-j}, \quad \forall z>0,\ 0\le j\le n-3, \tag{3.2.34}$$

$$\left|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)\right| \le C_\varepsilon z^{-\varepsilon}\langle z\rangle^{-(n-1)/2+\varepsilon}, \quad \forall z>0,\ j=n-2, \tag{3.2.35}$$

$$\left|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)\right| \le C_j z^{n-2-j}\langle z\rangle^{-(n-1)/2}, \quad \forall z>0,\ j\ge n-1. \tag{3.2.36}$$

Estimations sur $W_1^{(2)}$:

Soit

$$A_\pm^{(2)}(\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2) = \lambda_2 e^{\mp i\sigma_2\lambda_2}\partial_{\lambda_1^2}^m\partial_{\lambda_2^2}^k\left(\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)e^{\pm i\sigma_2\lambda_2}b_\nu^\pm(\sigma_2\lambda_2)\right).$$

Nous avons ainsi

$$\lambda_2\partial_{\lambda_1^2}^m\partial_{\lambda_2^2}^k\left(\rho(\lambda_1^2,\lambda_2^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2)\right) = e^{i\sigma_2\lambda_2}A_+^{(2)}(\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2) + e^{-i\sigma_2\lambda_2}A_-^{(2)}(\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2).$$

Par conséquent, pour majorer $W_1^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)$, il nous faut majorer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{i\tau\lambda_2 \pm i\sigma_2\lambda_2 + i\gamma\lambda_1^2} A_{\pm}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) d\lambda_2 d\lambda_1^2 \right| d\tau. \tag{3.2.37}$$

En effectuant le changement de variables $\tau \pm \sigma_2 \mapsto \tau$, nous voyons apparaître une transformée de Fourier. Nous pouvons alors utiliser l'inégalité (C.12) prouvée en appendice

$$\|\widehat{\varphi}(\tau)\|_{L^1} \leq C \|\langle\tau\rangle\widehat{\varphi}(\tau)\|_{L^2} \leq C \sum_{\ell=0}^{1} \left\| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right\|_{L^2} \leq C \sum_{\ell=0}^{1} \sup_\lambda \langle\lambda\rangle \left| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right|.$$

Ainsi si nous arrivons à majorer pour $\ell = 0, 1$:

$$\left| \partial_{\lambda_2}^\ell A_{\pm}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) \right|,$$

nous obtiendrons des majorations des expressions (3.2.37). Par (3.2.26)-(3.2.36), nous avons (avec $\ell = 0, 1$)

$$\begin{aligned} &\left| \partial_{\lambda_2}^\ell A_{\pm}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) \right| \\ &\leq C\sigma_1^{n-2} \langle\sigma_1\rangle^{m-(n-1)/2} \langle\sigma_2\rangle^{k+(n-3)/2} \langle\lambda_1\rangle^{(n-3)/2-m-2}, \quad \forall(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \tag{3.2.38}$$

Si $m > (n-3)/2$, nous avons l'intégrabilité par rapport à λ_1 de

$$\lambda_1 \langle\lambda_1\rangle^{(n-3)/2-m-2},$$

et nous pouvons ensuite majorer l'intégrale qui apparaît dans (3.2.39) par une constante. Ainsi, par (3.2.28) et (3.2.38), nous obtenons (si $m > (n-3)/2$) :

$$\begin{aligned} \left| W_1^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma) \right| &\leq \sum_{\pm} C t^{-k-1/2} \gamma^{-m} (\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{i\tau\lambda_2 + i\gamma\lambda_1^2} A_{\pm}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) d\lambda_2 d\lambda_1^2 \right| d\tau \\ &\leq \sum_{\pm} \sum_{\ell=0}^{1} C t^{-k-1/2} \gamma^{-m} (\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu} \sup_{\lambda_2} \int_0^{\infty} \left| \partial_{\lambda_2}^\ell A_{\pm}^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) \right| d\lambda_1^2 \\ &\leq C t^{-k-1/2} \gamma^{-m} \sigma_2^{-n+2} \langle\sigma_2\rangle^{k+(n-3)/2} \langle\sigma_1\rangle^{m-(n-1)/2}. \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

Nous voulons appliquer (3.2.39) avec $k = (n-1)/2$, $m = (n-3)/2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. En fait, comme $\left(\lambda_2^2 \mapsto \rho(\lambda_1^2, \lambda_2^2)\right) \in C_0^\infty((0, +\infty))$, nous n'avons pas de conditions restrictives sur k, (3.2.39) est vraie pour tout entier $k \geq 0$ et donc pour tout réel $k \geq 0$ par interpolation. En particulier, ceci est valide pour $k = (n-1)/2$.
Comme nous avons les conditions suivantes sur l'entier m : $0 \leq m < n/2$ et $m > (n-3)/2$, nous avons en fait une estimation dans le cas n pair, pour $m = (n-2)/2$ et dans le cas impair pour $m = (n-1)/2$. Nous avons donc besoin de montrer que ces estimations sont valides pour tout réel $(n-3)/2 < m \leq (n-2)/2$ si n est pair, et pour tout réel $(n-3)/2 < m \leq (n-1)/2$ si n est impair. Ceci peut être fait par interpolation comme suit.

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\phi(\lambda) = 1$ pour $|\lambda| \leq 1$, $\phi(\lambda) = 0$ for $|\lambda| \geq 2$. Décomposons $W_1^{(2)}$ sous la forme $X^{(2)} + Y^{(2)}$ où $X^{(2)}$ et $Y^{(2)}$ sont définis en remplaçant dans la définition de $W_1^{(2)}$ la fonction ρ par $\phi(\lambda_1)\rho$ et $(1-\phi)(\lambda_1)\rho$, respectivement.

De manière évidente, la fonction vérifie $X^{(2)}$ vérifie (3.2.39) pour tout entier $0 \leq m < n/2$, et par conséquent, par interpolation, pour tout réel $0 \leq m \leq (n-1)/2$ si n est impair, et pour tout réel $0 \leq m \leq (n-2)/2$ si n est pair.
Pour traiter la fonction $Y^{(2)}$, qui vérifie (3.2.39) pour tout entier $(n-3)/2 < m < n/2$, nous écrivons la fonction $1-\phi$ sous la forme

$$(1-\phi)(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_2(2^{-p}\lambda),$$

avec une certaine fonction $\phi_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\phi_2(\lambda) = 0$ dans un voisinage de $\lambda = 0$. Ainsi,

$$Y^{(2)} = \sum_{p=0}^{\infty} Y_p^{(2)},$$

où $Y_p^{(2)}$ est défini en remplaçant dans la définition de $Y^{(2)}$ la fonction $(1-\phi)(\lambda_1)$ par $\phi_2(2^{-p}\lambda_1)$. Maintenant, les fonctions $Y_p^{(2)}$ vérifient (3.2.39) avec un facteur supplémentaire dans le membre de droite de la forme $2^{-p(m-(n-3)/2)}$ pour tout entier $0 \leq m < n/2$, et par conséquent, par interpolation, pour tout réel $0 \leq m \leq (n-1)/2$ si n est impair, et tout réel $0 \leq m \leq (n-2)/2$ si n est pair. Par conséquent, en sommant ces estimations, nous concluons que $Y^{(2)}$ vérifie (3.2.39) pour tout réel $(n-3)/2 < m \leq (n-1)/2$ si n est impair, et pour tout réel $(n-3)/2 < m \leq (n-2)/2$ si n est pair. En particulier, ceci est valide pour $m = (n-3)/2 + \varepsilon$.

Ainsi $W_1^{(2)}$ vérifie (3.2.39) pour $k = (n-1)/2$ et $m = (n-3)/2 + \varepsilon$, ce qui donne comme estimation :

$$\left| W_1^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma) \right| \leq C t^{-n/2} \gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon} \sigma_2^{-n+2} \langle \sigma_2 \rangle^{n-2} \langle \sigma_1 \rangle^{-1+\varepsilon}. \tag{3.2.40}$$

Estimations sur $W_1^{(1)}$:

Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\phi(\lambda) = 1$ pour $|\lambda| \leq 1$, $\phi(\lambda) = 0$ pour $|\lambda| \geq 2$. Décomposons $W_1^{(1)}$ sous la forme $W_1^{(\leq 1)} + W_1^{(\geq 1)}$, où $W_1^{(\leq 1)}$ et $W_1^{(\geq 1)}$ sont définis en remplaçant dans la définition de $W_1^{(1)}$ la fonction ρ par $\phi(\lambda_1)\rho$ et $(1-\phi)(\lambda_1)\rho$, respectivement.
Nous distinguons donc deux cas :

1er cas : $|\lambda| \geq 1$: nous cherchons à estimer $W_1^{(\geq 1)}$.

Soit

$$A_\pm^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) = \lambda_1 e^{\mp i\sigma_1\lambda_1} \partial_{\lambda_1^2}^k \partial_{\lambda_2^2}^m \Big(\rho(\lambda_1^2, \lambda_2^2)(1-\phi)(\lambda_1) e^{\pm i\sigma_1\lambda_1} b_\nu^\pm(\sigma_1\lambda_1) \mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2) \Big).$$

Nous avons ainsi

$$\lambda_1 \partial_{\lambda_1^2}^k \partial_{\lambda_2^2}^m \left(\rho(\lambda_1^2, \lambda_2^2)(1-\phi)(\lambda_1) \mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1) \mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2) \right) = e^{i\sigma_1\lambda_1} A_+^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) + e^{-i\sigma_1\lambda_1} A_-^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2).$$

Par conséquent, pour majorer $W_1^{(\geq 1)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)$, il nous faut majorer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i\tau\lambda_1 \pm i\sigma_1\lambda_1 + i\gamma\lambda_2^2} A_\pm^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) d\lambda_1 d\lambda_2^2 \right| d\tau. \tag{3.2.41}$$

En effectuant le changement de variables $\tau \pm \sigma_1 \mapsto \tau$, nous voyons apparaître une transformée de Fourier. Nous pouvons alors utiliser l'inégalité (C.12) prouvée en appendice

$$\|\widehat{\varphi}(\tau)\|_{L^1} \leq C \|\langle\tau\rangle \widehat{\varphi}(\tau)\|_{L^2} \leq C \sum_{\ell=0}^{1} \left\| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right\|_{L^2} \leq C \sum_{\ell=0}^{1} \sup_\lambda \langle\lambda\rangle \left| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right|.$$

Ainsi si nous arrivons à majorer pour $\ell = 0, 1$:

$$\left|\partial_{\lambda_1}^{\ell} A_{\pm}^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)\right|,$$

nous obtiendrons des majorations des expressions (3.2.41). Par (3.2.26)-(3.2.36), nous avons (avec $\ell = 0, 1$)

$$\left|\partial_{\lambda_1}^{\ell} A_{\pm}^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)\right| \\ \leq C\langle\sigma_1\rangle^{k+(n-3)/2}\sigma_2^{n-2}\langle\sigma_2\rangle^{m-(n-1)/2}\langle\lambda_1\rangle^{(n-3)/2-k-1}, \quad \forall(\lambda_1, \lambda_2). \tag{3.2.42}$$

Si $k > (n-3)/2$, nous pouvons majorer l'expression suivante qui apparaît dans (3.2.43)

$$\langle\lambda_1\rangle\langle\lambda_1\rangle^{(n-3)/2-k-1} \leq 1.$$

Ainsi, nous obtenons de (3.2.27) et (3.2.42) (si $k > (n-3)/2$)

$$\begin{aligned} \left|W_1^{(\geq 1)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)\right| &\leq \sum_{\pm} Ct^{-k-1/2}\gamma^{-m}(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{i\tau\lambda_1+i\gamma\lambda_2^2}A_{\pm}^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)d\lambda_1 d\lambda_2^2\right| d\tau \\ &\leq \sum_{\pm}\sum_{\ell=0}^{1} Ct^{-k-1/2}\gamma^{-m}(\sigma_1\sigma_2)^{-2\nu}\sup_{\lambda_1\geq 1,\, \lambda_2}\langle\lambda_1\rangle\left|\partial_{\lambda_1}^{\ell}A_{\pm}^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)\right| \\ &\leq Ct^{-k-1/2}\gamma^{-m}\sigma_1^{-n+2}\langle\sigma_1\rangle^{k+(n-3)/2}\langle\sigma_2\rangle^{m-(n-1)/2}. \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

Nous voulons appliquer (3.2.43) avec $k = (n-1)/2$, $m = (n-3)/2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Comme nous avons les conditions suivantes sur les entiers k et m : $0 \leq k, m < n/2$ et $k > (n-3)/2$, nous avons en fait une estimation dans le cas n pair, pour $k = (n-2)/2$, $0 \leq m \leq (n-2)/2$ et dans le cas impair pour $k = (n-1)/2$, $0 \leq m \leq (n-1)/2$. Nous avons donc besoin de montrer que ces estimations sont valides pour tout réel $(n-2)/2 \leq k < n/2$ si n est pair, et si n est impair, c'est bon. Ceci peut être fait par interpolation comme suit.

Pour montrer cela dans le cas n pair, nous écrivons la fonction ϕ sous la forme suivante

$$\phi(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty}\phi_1(2^p\lambda),$$

avec une certaine fonction $\phi_1 \in C_0^{\infty}(\mathbf{R})$, $\phi_1(\lambda) = 0$ dans un voisinage de $\lambda = 0$. Ainsi,

$$A_{\pm}^{(1)} = \sum_{p=0}^{\infty} A_{p,\pm}^{(1)},$$

où $A_{p,\pm}^{(1)}$ est défini en remplaçant dans la définition de $A_{\pm}^{(1)}$ la fonction $\phi(\lambda_1)$ par $\phi_1(2^p\lambda_1)$. Comme ci-dessus, nous pouvons voir que les fonctions $A_{p,\pm}^{(1)}$ vérifient (3.2.43) avec un facteur supplémentaire dans le membre de droite de la forme $2^{p(k-n/2)}$ pour tout entier $k \geq (n-2)/2$, et par conséquent, par interpolation, pour tout réel $k \geq (n-2)/2$. Par ailleurs, en sommant ces estimations, nous concluons que $A_{\pm}^{(1)}$ vérifie (3.2.43) pour tout réel $(n-2)/2 \leq k < n/2$, et en particulier pour $k = (n-1)/2$. Par conséquent, il en est de même pour les fonctions $W_1^{(\geq 1)}$. De plus, $W_1^{(\geq 1)}$ vérifie (3.2.43) pour tout entier $0 \leq m < n/2$, et par conséquent, par interpolation, pour tout réel $0 \leq m \leq (n-1)/2$ si n est impair, et pour tout réel $0 \leq m \leq (n-2)/2$ si n est pair. En particulier, ceci est valide avec $m = (n-3)/2 + \varepsilon$.

Ainsi dans ce cas, $W_1^{(\geq 1)}$ vérifie (3.2.43) pour $k = (n-1)/2$ et $m = (n-3)/2 + \varepsilon$, ce qui donne comme estimation :

$$\left|W_1^{(\geq 1)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)\right| \leq Ct^{-n/2}\gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}\sigma_1^{-n+2}\langle\sigma_1\rangle^{n-2}\langle\sigma_2\rangle^{-1+\varepsilon}. \tag{3.2.44}$$

2e cas : $|\lambda_1| \leq 1$: nous cherchons à estimer $W_1^{(\leq 1)}$

Posons

$$a^{(1)}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2) = \lambda_1 \partial^k_{\lambda_1^2}\partial^m_{\lambda_2^2}\left(\rho(\lambda_1^2, \lambda_2^2)\phi(\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2)\right).$$

Nous avons comme dans le cas précédent

$$\left|W_1^{(\leq 1)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)\right| \leq C|t|^{-k-1/2}\gamma^{-m}(\sigma_1\sigma_2)^{-n+2}\sup_{\lambda_2}\|\hat{a}\|_{L^1}.$$

Il nous faut donc majorer $\|\hat{a}\|_{L^1}$ où la transformée de Fourier est prise par rapport à λ_1 (ce qui sera le cas dans la suite lorsque nous noterons $\hat{a}$)

Décomposons ϕ sous la forme $\phi(\lambda_1) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\phi_1(2^p\lambda_1)$ avec une certaine fonction $\phi_1 \in C_0^\infty((0,\infty))$ telle que $\operatorname{supp}\phi_1 \subset [1/2, 1]$. On définit ainsi

$$a_p(\lambda_1, \sigma_1, \lambda_2, \sigma_2) = \lambda_1 \partial^k_{\lambda_1^2}\partial^m_{\lambda_2^2}\left(\rho(\lambda_1^2, \lambda_2^2)\phi_1(2^p\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\mathcal{J}_\nu(\sigma_2\lambda_2)\right).$$

Lemme 3.17 *Nous avons $\|\hat{f}\|_{L^1} \leq \sqrt{2}\|f\|_{L^2}^{1/2}\|\partial_\lambda f\|_{L^2}^{1/2}$ pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

Preuve du lemme : Nous écrivons

$$\begin{aligned}
\int |\hat{f}(\tau)|d\tau &= \int_{|\tau|\leq R} 1\cdot|\hat{f}(\tau)|d\tau + \int_{|\tau|\geq R}\frac{1}{|\tau|}\cdot|\tau||\hat{f}(\tau)|d\tau \\
&\leq \left(\int_{|\tau|\leq R} d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{|\tau|\leq R}|\hat{f}(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} + \left(\int_{|\tau|\geq R}|\tau|^{-2}d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{|\tau|\geq R}|\tau|^2|\hat{f}(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2}R^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} + \sqrt{2}R^{-1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\tau|^2|\hat{f}(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{2}\left(R^{1/2}\|f\|_{L^2} + R^{-1/2}\|\partial_\lambda f\|_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

En choisissant $R = \|\partial_\lambda f\|_{L^2}/\|f\|_{L^2}$, nous obtenons le lemme. □

Nous avons ainsi

$$\|\hat{a}_p(\sigma_1)\|_{L^1} \leq \sqrt{2}\|a_p(\sigma_1)\|_{L^2}^{1/2}\|\partial_{\lambda_1}a_p(\sigma_1)\|_{L^2}^{1/2}, \tag{3.2.45}$$

où les normes L^2 sont prises par rapport à λ_1.

Remarquons que $\operatorname{supp}(\lambda_1 \mapsto a_p(\lambda_1)) \subset [2^{-p-1}, 2^{-p}]$. Soit $\phi_2 \in C_0^\infty((0,+\infty))$ une fonction telle que $\phi_2 \equiv 1$ sur $[1/2, 1]$. Nous avons alors $a_p(\lambda_1) = a_p(\lambda_1)\phi_2(2^p\lambda_1)$. Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\|a_p\|_{L^2} &= \left(\int |a_p(\lambda_1)|^2 d\lambda_1\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{2^{-p-1}}^{2^{-p}} |a_p(\lambda_1)|^2 |\phi_2(2^p\lambda_1)|^2 d\lambda_1\right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{\lambda_1} |a_p| \times \left(\int_{2^{-p-1}}^{2^{-p}} d\lambda_1\right)^{1/2} \\
&\leq C2^{-p/2} \sup_{\lambda_1} |a_p|.
\end{aligned}$$

Comme $\partial_\lambda a_p \sim 2^p a_p$, nous avons $\|\partial_\lambda a_p\|_{L^2} \sim 2^p \|a_p\|_{L^2} \sim 2^{p/2} \sup |a_p|$. Par conséquent, nous avons en utilisant le lemme

$$\|\hat{a}_p(\sigma_1)\|_{L^1} \leq C \sup_{\lambda_1} |a_p(\cdot, \sigma_1)|. \tag{3.2.46}$$

Pour estimer $\sup_{\lambda_1} |a_p|$, nous devons encore traiter deux cas : $\sigma_1 \leq 1$ et $\sigma_1 \geq 1$.

1er sous-cas : $\sigma_1 \leq 1$. Nous avons dans ce cas $\lambda_1\sigma_1 \leq 1$. Nous avons

$$\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1) = (\lambda_1\sigma_1)^{n-2} \left(1 + O(\sigma_1^2\lambda_1^2)\right).$$

Ainsi le comportement de $\lambda_1 \partial^k_{\lambda_1^2}(\quad)$ est similaire à celui de $\sigma_1^{n-2}\lambda_1^{n-1-2k}$ et donc nous avons la majoration suivante

$$\sup_{\lambda_1} |a_p| \leq C(2^{-p})^{n-1-2k} \sigma_1^{n-2} \sigma_2^{n-2} \langle\sigma_2\rangle^{m-(n-1)/2}.$$

Pour pouvoir sommer par rapport à p, nous devons supposer $k < (n-1)/2$, or nous voulons utiliser l'estimation pour $k = (n-1)/2$. Pour cela, nous devons obtenir une estimation plus précise, ce que l'on fait en séparant les cas n pair et n impair.

Si n est pair, nous pouvons dériver $n/2$ fois par rapport à λ_1^2 car nous avons

$$\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1) = (\sigma_1\lambda_1)^{2\frac{n-2}{2}} \left(1 + O(\sigma_1^2\lambda_1^2)\right) = \sigma_1^{n-2}(\lambda_1^2)^{(n-2)/2} - c_1\sigma_1^n(\lambda_1^2)^{n/2} + O((\sigma_1^2\lambda_1^2)^{(n+2)/2}).$$

Le premier terme disparaît dans la dérivation, ainsi le comportement de $\lambda_1 \partial^{n/2}_{\lambda_1^2}(\ )$ est similaire à celui de $\sigma_1\lambda_1$ et donc nous avons la majoration suivante

$$\sup_{\lambda_1} |a_p| \leq C(\sigma_2)\, 2^{-p}\sigma_1 \leq C(\sigma_2) 2^{-p}\sigma^{n-2},$$

car $\sigma_1 \leq 1$, ce qui convient.

Par interpolation entre $k = (n-2)/2$ et $k = n/2$, nous en déduisons que l'estimation est vraie pour $k = (n-1)/2$, soit $\sup\limits_{\lambda_1} |a_p| \leq C(\sigma_2)\sigma_1^{n-2}$.

Si n est impair, nous avons en regardant cette fois $\partial_\lambda a_p$:

$$\partial_{\lambda_1}\left(\lambda_1 \partial^{\frac{n-1}{2}}_{\lambda_1^2}\left(\sigma_1^{n-2}\lambda_1^{2\frac{n-2}{2}} - c_1\sigma_1^n\lambda_1^{2\frac{n}{2}} + O((\sigma_1\lambda_1)^{(n+2)/2})\right)\right),$$

le premier terme $\partial^{\frac{n-1}{2}}_{\lambda_1^2} \lambda_1^{2\frac{n-2}{2}}$ étant en λ_1^{-1} et se simplifiant dans la dérivation avec le terme λ_1. Nous avons donc $\partial_{\lambda_1} a_p \sim \sigma_1 \lambda_1^{1/2}$ et par conséquent $\sup\limits_{\lambda_1} |a_p| \leq C(\sigma_2)\sigma_1^n 2^{-3p/2}$, ce qui convient comme précédemment.

Nous avons donc l'estimation pour $k = (n-1)/2$:

$$\|\widehat{a}\|_{L^1} \leq C\sigma_1^{n-2}\sigma_2^{n-2}\langle\sigma_2\rangle^{m-(n-1)/2},$$

et dans ce cas pour $m = (n-3)/2 + \varepsilon$, nous obtenons :

$$\left|W_1^{(\leq 1)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)\right| \leq C|t|^{-n/2}\gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}\langle\sigma_2\rangle^{-1+\varepsilon}. \tag{3.2.47a}$$

2e sous-cas : $\sigma_1 \geq 1$. Nous écrivons

$$\rho(\lambda_1^2, \lambda_2^2) = \left(\rho(\lambda_1^2, \lambda_2^2) - \rho(0, \lambda_2^2)\right) + \rho(0, \lambda_2^2) = \rho(0, \lambda_2^2) + O(\lambda_1^2).$$

Le terme en $O(\lambda_1^2)$ se traite comme le 1er sous-cas car il nous permet deux dérivations supplémentaires par rapport à k. L'intégration par rapport à λ_1 du terme correspondant à $\rho(0, \lambda_2^2)$ s'écrit en fait :

$$\left|c_n\sigma_1^{-n+2}\int e^{it\lambda_1^2}\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\phi(\lambda_1)d\lambda_1\right|.$$

Comme nous avons l'estimation (qui correspond à l'estimation dispersive pour l'opérateur libre) :

$$\left|c_n\sigma_1^{-n+2}\int e^{it\lambda_1^2}\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)d\lambda_1\right| \leq C|t|^{-n/2},$$

nous pouvons remplacer ϕ par $1-\phi$ et ainsi remplacer $\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)$ par $\sum_\pm e^{\pm i\sigma_1\lambda_1}b_\nu^\pm(\sigma_1\lambda_1)$. Nous avons alors à estimer (premier terme du développement de $b_\nu^\pm$) :

$$\left|\int e^{it\lambda_1^2 \pm i\sigma_1\lambda_1}\lambda_1^{(n-1)/2}(1-\phi)(\lambda_1)d\lambda_1\right|,$$

ce qui a été fait par Vodev dans [74] qui a obtenu une majoration par $\leq C|t|^{-n/2}\sigma_1^{(n-1)/2}$ lorsque $\sigma_1 \geq 1$.
On a donc

$$\left|c_n\sigma_1^{-n+2}\int e^{it\lambda_1^2}\mathcal{J}_\nu(\sigma_1\lambda_1)\phi(\lambda_1)d\lambda_1\right| \leq C|t|^{-n/2}\sigma_1^{-n+2}\sigma_1^{(n-1)/2} \leq C|t|^{-n/2},$$

comme $n \geq 3$ et $\sigma_1 \geq 1$. Comme dans le premier sous-cas, dans la majoration de $W_1^{(1)}$ n'apparaît que le terme dépendant de σ_2. Par conséquent si $|\lambda_1| \leq 1$, nous obtenons pour $m = (n-3)/2+\varepsilon$:

$$\left|W_1^{(\leq 1)}(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)\right| \leq C|t|^{-n/2}\gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}\langle\sigma_2\rangle^{-1+\varepsilon}. \tag{3.2.47b}$$

Fin de la preuve :

Par (3.2.40), (3.2.44), (3.2.47a) et (3.2.47b), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|W_1(\sigma_1, \sigma_2, t, \gamma)| \\
&\leq Ct^{-n/2}\gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}\left(\sigma_1^{-n+2}\langle\sigma_1\rangle^{n-2}\langle\sigma_2\rangle^{-1+\varepsilon} + \sigma_2^{-n+2}\langle\sigma_2\rangle^{n-2}\langle\sigma_1\rangle^{-1+\varepsilon} + \langle\sigma_2\rangle^{-1+\varepsilon}\right) \\
&\leq Ct^{-n/2}\gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}\left(\sigma_1^{-n+2} + \sigma_2^{-n+2} + \langle\sigma_1\rangle^{-1+\varepsilon} + \langle\sigma_2\rangle^{-1+\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq Ct^{-n/2}\gamma^{-(n-3)/2-\varepsilon}\left(\sigma_1^{-n+2}+\sigma_2^{-n+2}+\sigma_1^{-1+\varepsilon}+\sigma_2^{-1+\varepsilon}\right),$$

qui est l'estimation désirée. □

En prenant $\gamma = h^{\beta'}$ avec une constante convenablement choisie $\beta' > 0$, nous déduisons de (CS2), (3.2.14)-(3.2.18) et (3.2.21),

$$\begin{aligned}&\left\|\Psi(t;h)f - F(t)\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^\infty}\\ &\leq Ch^{\beta}t^{-n/2}\|f\|_{L^1} + Ch^{\beta}\left\|\Psi(t;h)f - F(t)\psi(h^2G_0)f\right\|_{L^\infty}, \quad \forall f \in L^1,\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

avec une certaine constante $\beta > 0$. en prenant h suffisamment petit, nous pouvons absorber le second terme du membre de droite de (3.2.48), et obtenir finalement (CS3). □

3.3 Estimations dispersives en dimension $n = 2$

Théorème 3.18 *Si V vérifie (V2), alors étant donné un $a_0 > 0$, nous avons pour tout $a \geq a_0$*

$$\left\| e^{itG}\chi_a(G) \right\| \leq C|t|^{-1}, \qquad (D15)$$

pour une constante $C > 0$.

Soit $\psi \in C_0^\infty((0, +\infty))$. On introduit

$$\Psi(t; h) = e^{itG}\psi(h^2 G) - e^{itG_0}\psi(h^2 G_0).$$

Le théorème 3.17 résulte de l'estimation suivante :

Proposition 3.19 *Sous les hypothèses du théorème 3.17, il existe des constantes positives C et h_0 telles que nous ayons, pour $0 < h \leq h_0$,*

$$\|\Psi(t, h)\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C h^{1/2} |t|^{-1}, \quad t \neq 0. \qquad (CS-2)$$

Preuve du théorème : écrivons

$$\chi_a(\sigma) = \int_0^1 \psi(\sigma\theta)\theta^{-1} d\theta, \quad \sigma > 0,$$

où $\psi(\sigma) = \sigma\chi_1'(\sigma) \in C_0^\infty((0, +\infty))$, et en utilisant (CS-2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\| e^{itG}\chi_a(G) - e^{itG_0}\chi_a(G_0) \right\|_{L^1 \to L^\infty} &\leq \int_0^1 \left\| \Psi(t, \sqrt{\theta}) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \theta^{-1} d\theta \\ &\leq C|t|^{-1} \int_0^1 \theta^{-1+1/4-\epsilon/2} d\theta \leq C|t|^{-1}. \qquad (3.3.1)\end{aligned}$$

Il est évident que (D15) résulte (3.3.1) et de l'estimation pour l'opérateur libre G_0.

Preuve de (CS-2). Nous allons déduire (CS-2) des estimations déjà connues pour l'équation des ondes en dimension 2. Pour cela, nous allons utiliser l'identité

$$e^{it\lambda^2}\varphi(h^2\lambda^2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\zeta_h(t, \tau) d\tau, \qquad (3.3.2)$$

où $\varphi \in C_0^\infty((0, +\infty))$, $\varphi = 1$ sur $\operatorname{supp}\psi_1$, les fonctions ψ et ψ_1 étant définies comme d'habitude, et

$$\zeta_h(t, \tau) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{it\lambda^2 - i\tau\lambda}\varphi(h^2\lambda^2) d\lambda = h^{-1}\zeta_1(th^{-2}, \tau h^{-1}). \qquad (3.3.3)$$

Nous déduisons de (3.3.2) la formule

$$e^{itG}\psi(h^2 G) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_h(t, \tau) e^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2 G) d\tau. \qquad (3.3.4)$$

En intégrant par parties dans (3.3.3), nous obtenons

$$\zeta_1(t, \tau) = \frac{1}{t}\left(\tau\zeta_1^{(0)}(t, \tau) + \zeta_1^{(1)}(t, \tau) \right),$$

avec

$$\zeta_1^{(j)}(t, \tau) = \int_0^\infty e^{it\lambda^2 - i\tau\lambda}\tilde{\varphi}_j(\lambda) d\lambda,$$

où les fonctions $\tilde{\varphi}_j$ sont $C_0^\infty((0,+\infty))$. En utilisant l'estimation (C.10) montrée en appendice, la fonction $\zeta_1^{(j)}$ vérifie les estimations bien connues suivantes (pour tout $t \neq 0$, $\tau \in \mathbf{R}$)

$$\left|\zeta_1^{(j)}(t,\tau)\right| \leq C|t|^{-1/2},$$

qui implique (pour tout $t \neq 0$, $\tau \in \mathbf{R}$)

$$|\zeta_1(t,\tau)| \leq C|t|^{-3/2}\langle\tau\rangle.$$

Comme nous avons aussi toujours d'après l'estimation (C.10) (pour tout $t \neq 0$, $\tau \in \mathbf{R}$)

$$|\zeta_1(t,\tau)| \leq C|t|^{-1/2},$$

par interpolation, nous obtenons

$$|\zeta_1(t,\tau)| \leq C|t|^{-1/2-s}\langle\tau\rangle^s, \quad \forall\, 0 \leq s \leq 1.$$

En particulier pour $s = 1/2$, cela donne

$$|\zeta_1(t,\tau)| \leq C|t|^{-1}\langle\tau\rangle^{1/2},$$

et donc

$$|\zeta_h(t,\tau)| \leq Ch|t|^{-1}\langle\tau h^{-1}\rangle^{1/2}. \tag{3.3.5}$$

Nous pouvons exprimer le comparateur $\Psi(t;h)$ à l'aide du comparateur $\Phi(t;h)$:

$$\Psi(t;h) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_h(t,\tau)\Phi(\tau,h)d\tau.$$

Rappelons la décomposition de $\Phi(t;h) = \Phi_1(t;h) + \Phi_2(t;h)$ avec

$$\begin{aligned}\Phi_1(t;h) &= \left(\psi_1(h^2G) - \psi_1(h^2G_0)\right) e^{it\sqrt{G}}\psi(h^2G)\\ &+\psi_1(h^2G_0)e^{it\sqrt{G_0}}\left(\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)\right)\\ &-i\psi_1(h^2G_0)\sin\left(t\sqrt{G_0}\right)\left(\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)\right)\\ &+i\widetilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin\left(t\sqrt{G_0}\right)\left(\widetilde{\psi}(h^2G) - \widetilde{\psi}(h^2G_0)\right),\end{aligned}$$

$$\Phi_2(t;h) = -h\int_0^t \widetilde{\psi}_1(h^2G_0)\sin\left((t-\tau)\sqrt{G_0}\right)Ve^{i\tau\sqrt{G}}\psi(h^2G)d\tau,$$

où $\psi_1 \in C_0^\infty((0,+\infty))$, $\psi_1 = 1$ on $\operatorname{supp}\psi$,$\widetilde{\psi}(\sigma) = \sigma^{1/2}\psi(\sigma)$, $\widetilde{\psi}_1(\sigma) = \sigma^{-1/2}\psi_1(\sigma)$. Ce qui permet d'écrire une décomposition de $\Psi(t;h) = \Psi_1(t;h) + \Psi_2(t;h)$ avec

$$\Psi_1(t;h) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_h(t,\tau)\Phi_1(\tau,h)d\tau, \quad \Psi_2(t;h) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_h(t,\tau)\Phi_2(\tau,h)d\tau.$$

Nous cherchons à estimer $\langle\Psi(t;h)f,g\rangle$. Regardons par exemple

$$\text{Terme } 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_h(t,\tau)\left\langle\psi_1(h^2G_0)e^{i\tau\sqrt{G_0}}\left(\psi(h^2G) - \psi(h^2G_0)\right)f,g\right\rangle d\tau.$$

En utilisant (3.3.5) et (E7), nous obtenons

$$|\text{ Terme } 1\ | \leq Ch^{3/2}|t|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau h^{-1}\rangle^{1/2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|\tilde{K}_h(|x-y|,\tau)||f(x)||g(y)|d\tau dxdy.$$

En utilisant (2.3.7a) puis (V2), nous avons

$$| \text{ Terme } 1 \ | \leq Ch^{1/2}|t|^{-1}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

En traitant de la même manière, les termes apparaissant dans $\Psi_1(t,h)$, nous obtenons

$$|\langle\Psi_1(t;h)f,g\rangle| \leq Ch^{1/2}|t|^{-1}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} + Ch^{1/2}\|\Psi(t;h)\|_{L^1\to L^\infty}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}. \tag{3.3.6}$$

Pour traiter le cas de $\Psi_2(t;h)$, écrivons

$$\langle\Psi_2(t;h)f,g\rangle = -h\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\tau}\zeta_h(t,\tau)\left\langle Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f, \sin((\tau-\tau')\sqrt{G_0})\tilde{\psi}_1(h^2G_0)g\right\rangle d\tau'\,d\tau$$

En utilisant de nouveau (3.3.5) et en introduisant le noyau $\tilde{K}_h$:

$$|\langle\Psi_2(t;h)f,g\rangle|$$
$$\leq Ch^2|t|^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\tau}\langle\tau h^{-1}\rangle^{1/2}\left|\tilde{K}_h(|x-y|,\tau-\tau')\right||g(y)|\left|Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)\right|d\tau' d\tau\,dxdy.$$

En utilisant $\langle\tau h^{-1}\rangle^{1/2} \leq C\left(\langle\tau' h^{-1}\rangle^{1/2} + \langle(\tau-\tau')h^{-1}\rangle^{1/2}\right)$, puis en majorant les intégrales en temps par des intégrales sur $(-\infty,\infty)$, nous obtenons

$$|\langle\Psi_2(t;h)f,g\rangle| \leq Ch^2|t|^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{K}_h(|x-y|,\tau)||g(y)|d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau' h^{-1}\rangle^{1/2}|Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)|d\tau'\,dxdy$$

$$+Ch^2|t|^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau h^{-1}\rangle^{1/2}|\tilde{K}_h(|x-y|,\tau)||g(y)|d\tau\int_{-\infty}^{\infty}|Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)|d\tau'\,dxdy.$$

En utilisant (2.3.7a), nous pouvons écrire

$$|\langle\Psi_2(t;h)f,g\rangle| \leq Ch|t|^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle|x-y|h^{-1}\rangle^{-1/2}|g(y)|\langle\tau' h^{-1}\rangle^{1/2}|Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)|d\tau'\,dxdy$$

$$+Ch|t|^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}|Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)||g(y)|d\tau'\,dxdy.$$

En utilisant $\langle\tau' h^{-1}\rangle^{1/2} \leq C(1+|\tau'|^{1/2}h^{-1/2})$ et en utilisant $\langle|x-y|h^{-1}\rangle^{-1/2} \leq 1$ dans l'intégrale qui correspond à 1, nous obtenons

$$|\langle\Psi_2(t;h)f,g\rangle| \leq Ch^{1/2}|t|^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\langle|x-y|h^{-1}\rangle^{-1/2}|g(y)||\tau'|^{1/2}|Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)|d\tau'\,dxdy$$

$$+Ch|t|^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}\int_{-\infty}^{\infty}|Ve^{i\tau'\sqrt{G}}\psi(h^2G)f(x)||g(y)|d\tau'\,dxdy. \tag{3.3.7}$$

En utilisant (P8) avec $s = 1/2$ pour la première intégrale et (P8) avec $s = 0$ pour la seconde intégrale, nous avons finalement

$$|\langle\Psi_2(t;h)f,g\rangle| \leq Ch^{1/2}|t|^{-1}, \tag{3.3.8}$$

comme $0 < h \leq 1$. Ainsi, nous obtenons en regroupant (3.3.6) et (3.3.8) :

$$|\langle\Psi(t;h)f,g\rangle| \leq Ch^{1/2}\,\|\Psi(t;h)f\|_{L^\infty}\,\|g\|_{L^1} + Ch^{1/2}|t|^{-1}\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

qui implique clairement (CS-2) pour h pris suffisamment petit.

A Appendice 1 : Remarques sur les hypothèses sur le potentiel

Hypothèse 4 *Hypothèse en dimension 2*

- *hypothèse de décroissance :*

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^2), \quad |V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\delta}, \tag{$V2(\delta)$}$$

  avec $\delta > 3/2$ pour l'équation des ondes et $\delta > 2$ pour l'équation de Schrödinger.
- *hypothèse en rapport avec le noyau de la résolvante :*

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^2}\int_{\mathbf{R}^2}|x-y|^{-1/2}|V(x)|dx \le C < +\infty. \tag{$V2$}$$

Hypothèse 5 *Hypothèse en dimension 3*

- *hypothèse de décroissance :*

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^3), \quad |V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\delta}, \tag{$V3(\delta)$}$$

  avec $\delta > 2$ pour l'équation des ondes et $\delta > 5/2$ pour l'équation de Schrödinger.
- *hypothèse en rapport avec le noyau de la résolvante :*

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^3}\int_{\mathbf{R}^3}|x-y|^{-1}|V(x)|dx \le C < +\infty. \tag{$V3$}$$

- *hypothèse d'intégrabilité :*

$$V \in L^{3/2-\varepsilon}(\mathbf{R}^3), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{$L3/2-$}$$

$$V \in L^{3/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^3), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{$L3/2+$}$$

Hypothèse 6 *Hypothèse en dimension $n \ge 4$*

- *hypothèse de décroissance :*

$$V \in L^\infty(\mathbf{R}^n), \quad |V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\delta}, \tag{$Vn(\delta)$}$$

  avec $\delta > (n+1)/2$ pour l'équation des ondes et $\delta > (n+2)/2$ pour l'équation de Schrödinger.
- *hypothèse en rapport avec le noyau de la résolvante :*
  - *pour l'équation des ondes*

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\left(|x-y|^{-n+2}+|x-y|^{-\frac{n-1}{2}}\right)|V(x)|\,dx < +\infty. \tag{VOn}$$

  - *pour l'équation de Schrödinger*

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\left(|x-y|^{-n+2}+|x-y|^{-\frac{n-2}{2}+\varepsilon}\right)|V(x)|\,dx < +\infty, \quad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{VSn}$$

Remarque A.1 *Si $|x| \le |y|/2$, nous avons*

$$|x-y| \ge |y| - |x| \ge |y|/2 \ge |x|.$$

Si $|x| \ge |y|/2$, nous avons

$$\langle x-y\rangle^2 = 1 + |x-y|^2 \le 1 + 2(|x|^2+|y|^2) \le 1 + 10|x|^2 \le 10\langle x\rangle^2.$$

Remarque A.2 *(Dimension $n \geq 4$)*
Pour l'équation des ondes, si (Vn(δ)) est vérifiée avec $\delta > (n+1)/2$, alors (VOn) est vérifiée. En effet, soit $\frac{n-1}{2} \leq k \leq n-2$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\delta = \frac{n+1}{2} + \varepsilon$. Nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-k} |V(x)| \, dx \leq C \int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-k} \langle x \rangle^{-\frac{n+1}{2}-\varepsilon} \, dx.$$

Nous séparons l'intégrale en deux parties $|x| \geq |y|/2$ et $|x| \leq |y|/2$. Nous avons en utilisant la remarque précédente :

$$\int_{|x| \geq |y|/2} |x-y|^{-k} |V(x)| \, dx \leq c \int_{|x| \geq |y|/2} |x-y|^{-k} \langle x-y \rangle^{-\frac{n+1}{2}-\varepsilon} \, dx,$$

et

$$\int_{|x| \leq |y|/2} |x-y|^{-k} |V(x)| \, dx \leq c \int_{|x| \leq |y|/2} |x|^{-k} \langle x \rangle^{-\frac{n+1}{2}-\varepsilon} \, dx.$$

En majorant les intégrales par des intégrales sur $\mathbf{R}^n$, puis en effectuant le changement de variables $z = x - y$ dans la première et ensuite $\rho = |z|$ dans les deux intégrales des termes de droite, nous obtenons

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-k} |V(x)| \, dx \leq C \int_0^\infty \rho^{n-1-k} \langle \rho \rangle^{-\frac{n+1}{2}-\varepsilon} \, d\rho.$$

Près de 0, l'intégrande se comporte comme ρ^{n-k-1} qui est intégrable pourvu que $n-k-1 > -1$ soit $k < n$, ce qui est le cas comme $k \leq n-2$. Près de l'infini, l'intégrande se comporte comme $\rho^{n/2-3/2-\varepsilon-k}$ qui est intégrable pourvu que $n/2 - 3/2 - \varepsilon - k < -1$ soit $k > \frac{n-1}{2} - \varepsilon$, ce qui est le cas comme nous avons supposé $k \geq \frac{n-1}{2}$. Nous avons donc

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-k} |V(x)| \, dx \leq C < +\infty \quad \textit{pour } \frac{n-1}{2} \leq k \leq n-2.$$

Ce qui prouve le résultat annoncé. Nous avons le même résultat pour l'équation de Schrödinger :

$$(Vn(\delta)) \textit{ avec } (\delta > (n+2)/2) \quad \Longrightarrow \quad (VSn)$$

Remarque A.3 *(Dimension 2)*
Pour l'équation des ondes, si (V(δ)) est vérifiée avec $\delta > 3/2$ alors (V2) est vérifiée. Comme dans le cas $n \geq 4$ puisque pour $\delta > 3/2$, nous montrerions

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-k} |V(x)| \, dx \leq C < +\infty \quad \textit{pour } -\frac{1}{2} \leq k \leq 0.$$

Nous avons le même résultat pour l'équation de Schrödinger comme $\delta > 2$ implique $\delta > 3/2$.

Remarque A.4 *(Dimension 3)*
Si (V(δ)) est vérifiée pour $\delta > 2$, alors (L3/2-) est vérifiée pour $\varepsilon < 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\right)$ et (V3) est vérifiée. En effet, si (V(δ)) est vérifiée, nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^3} |V(x)|^{3/2-\varepsilon} dx \leq C \int_{\mathbf{R}^3} \langle x \rangle^{-\delta(3/2-\varepsilon)} dx.$$

En effectuant le changement de variables $\rho = |x|$, nous obtenons une majoration par

$$\int_{\mathbf{R}^3} |V(x)|^{3/2-\varepsilon} dx \leq C \int_0^\infty \rho^2 \langle \rho \rangle^{-\delta(3/2-\varepsilon)} d\rho,$$

qui est intégrable pour $2 - \delta(3/2-\varepsilon) < -1$ soit $\varepsilon < 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\delta}\right)$. D'où (L3/2-).
Pour (V3), comme dans le cas $n \geq 4$ puisque pour $\delta > 2$, nous montrerions

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{-k} |V(x)|\, dx \leq C < +\infty, \quad \text{pour } k = 1.$$

Nous avons le même résultat pour l'équation de Schrödinger comme $\delta > 5/2$ implique $\delta > 2$.
Si (L3/2c-) et (L3/2+) sont vérifiées, nous avons (V3). En effet, en séparant l'intégrale en deux parties puis en utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^3} |x-y|^{-1} |V(x)| dx$$

$$\leq \left(\int_{|x-y|\leq 1} |V|^p \right)^{1/p} \left(\int_{|x-y|\leq 1} |x-y|^{-q} dx \right)^{1/q} + \left(\int_{|x-y|\geq 1} |V|^{p'} \right)^{1/p'} \left(\int_{|x-y|\geq 1} |x-y|^{-q'} dx \right)^{1/q'},$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. En effectuant le changement de variables $\rho = |x-y|$, nous obtenons :

$$\int_{\mathbf{R}^3} |x-y|^{-1} |V(x)| dx \leq \|V\|_p \left(\int_0^1 \rho^{2-q} d\rho \right)^{1/q} + \|V\|_{p'} \left(\int_1^{+\infty} \rho^{2-q'} d\rho \right)^{1/q'}.$$

En prenant, $p = 3/2+\varepsilon$ et $p' = 3/2-\varepsilon$, ρ^{2-q} est intégrable en 0 et $\rho^{2-q'}$ l'est en $+\infty$. Finalement,

$$\int_{\mathbf{R}^3} |x-y|^{-1} |V(x)| dx \leq C \left(\|V\|_{3/2+\varepsilon} + \|V\|_{3/2-\varepsilon} \right).$$

Remarque A.5 *Si (L3/2-) est vérifiée, nous avons d'après l'inégalité de Hölder :*

$$\int_{\mathbf{R}^3} |V(x)| \left\langle \frac{x-y}{h} \right\rangle^{-1} dx \leq \left(\int |V|^p \right)^{1/p} \left(\int \left\langle \frac{x-y}{h} \right\rangle^{-q} dx \right)^{1/q}.$$

Effectuons le changement de variables $\rho = |x-y|/h$ dans la seconde intégrale, ce qui donne :

$$\int_{\mathbf{R}^3} |V(x)| \left\langle \frac{x-y}{h} \right\rangle^{-1} dx \leq h^{3/q} \left(\int |V|^p \right)^{1/p} \left(\int \rho^2 \langle \rho \rangle^{-q} d\rho \right)^{1/q}.$$

En choisissant $p = 3/2 - \varepsilon$, on a $q = (3-2\varepsilon)/(1-2\varepsilon)$ et donc

$$\left(\int \rho^2 \langle \rho \rangle^{-q} d\rho \right)^{1/q} \leq C < +\infty.$$

De plus, nous avons $\frac{3}{q} = 1 - \frac{4\varepsilon}{3-2\varepsilon}$ et nous pouvons donc écrire, en posant $0 < \gamma = \frac{4\varepsilon}{3-2\varepsilon} \ll 1$:

$$\int_{\mathbf{R}^3} |V(x)| \left\langle \frac{x-y}{h} \right\rangle^{-1} dx \leq C h^{1-\gamma}. \tag{A.1.1}$$

Remarque A.6 *Nous avons (VSn) $\Rightarrow$ (VOn) en dimension $n \geq 4$. En effet, nous avons pour $|x-y| \geq 1$:*

$$|x-y|^{-n+2} \leq |x-y|^{-\frac{n-1}{2}} \leq |x-y|^{-\frac{n-2}{2}+\varepsilon},$$

et pour $|x-y| \leq 1$:

$$|x-y|^{-\frac{n-2}{2}+\varepsilon} \leq |x-y|^{-\frac{n-1}{2}} \leq |x-y|^{-n+2}.$$

Donc si (VSn) est vérifiée

$$\begin{aligned}
&\sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \left(|x-y|^{-n+2} + |x-y|^{-\frac{n-1}{2}} \right) |V(x)| dx \\
&\quad \leq \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \left(\int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{-n+2} |V(x)| dx + \int_{|x-y| \geq 1} |x-y|^{-\frac{n-2}{2}+\varepsilon} |V(x)| dx \right) \\
&\qquad \leq \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \left(|x-y|^{-n+2} + |x-y|^{-\frac{n-2}{2}+\varepsilon} \right) |V(x)| dx \leq C < +\infty.
\end{aligned}$$

B Appendice 2 : Quelques propriétés autour de la résolvante

B.1 Définition et formules liant R et R_0

Nous définissons les résolvantes libre et perturbée par

$$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1} \quad \text{pour} \quad z \notin \sigma(H_0),$$
$$R(z) = (H - z)^{-1} \quad \text{pour} \quad z \notin \sigma(H).$$

Puis nous définissons

$$R_0^{\pm}(\lambda^2) = \lim_{z \to \lambda^2, \pm \mathrm{Im}\, z > 0} R_0(z),$$
$$R^{\pm}(\lambda^2) = \lim_{z \to \lambda^2, \pm \mathrm{Im}\, z > 0} R(z).$$

Nous avons les formules suivantes :

$$R^{\pm}(\lambda) - R_0^{\pm}(\lambda) = R_0^{\pm}(\lambda) V R^{\pm}(\lambda) = R^{\pm}(\lambda) V R_0^{\pm}(\lambda).$$

Si $(1 + VR_0(z))^{-1}$ et $(1 + R_0(z)V)^{-1}$ existent,

$$R(z) = (1 + R_0(z)V)^{-1} R_0(z) = R_0(z)(1 + VR_0(z))^{-1}.$$

De même si les inverses existent,

$$R^+(\lambda) - R^-(\lambda) = (1 + R_0^+(\lambda)V)^{-1} \left(R_0^+(\lambda) - R_0^-(\lambda) \right) (1 + R_0^-(\lambda)V)^{-1}.$$

La première formule par itération donne une série de Born.

B.2 Résultats autour des noyaux des propagateurs

Pour $\pm \mathrm{Im}\, z > 0$, écrivons

$$\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z) = (h^2 G_0 - z^2)^{-1}, \quad \mathcal{R}_h^{\pm}(z) = (h^2 G - z^2)^{-1}.$$

Le noyau de l'opérateur $\mathcal{R}_{0,h}^{\pm}(z)$ est de la forme $R_h^{\pm}(|x-y|, z)$ avec

$$R_h^{\pm}(\sigma, z) = \pm h^{-2} \frac{i\sigma^{-2\nu}}{4(2\pi)^{\nu}} \mathcal{H}_{\nu}^{\pm}(\sigma z/h) = h^{-n} R_1^{\pm}(\sigma h^{-1}, z),$$

où $\mathcal{H}_{\nu}^{\pm}(z)$ sont les fonctions de Hankel sortante et entrante d'ordre $\nu = (n-2)/2$.

A l'aide de la formule

$$e^{it\sqrt{G_0}} \psi(h^2 G_0) = (\pi i)^{-1} \int_0^{\infty} e^{it\lambda} \psi(h^2 \lambda^2) \left(R_0^+(\lambda) - R_0^-(\lambda) \right) \lambda \, d\lambda,$$

le noyau de l'opérateur $e^{it\sqrt{G_0}} \psi(h^2 G_0)$ est de la forme $K_h(|x-y|, t)$ avec

$$K_h^{(w)}(\sigma, t) = \frac{\sigma^{-2\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}} \int_0^{\infty} e^{it\lambda} \mathcal{J}_{\nu}(\sigma\lambda) \psi(h^2\lambda^2) \lambda \, d\lambda = h^{-n} K_1(\sigma h^{-1}, th^{-1}). \qquad (B.2.1)$$

où $\mathcal{J}_{\nu}(z) = z^{\nu} J_{\nu}(z)$, $J_{\nu}(z) = (H_{\nu}^+(z) + H_{\nu}^-(z))/2$ est la fonction de Bessel d'ordre $\nu = (n-2)/2$. Nous avons le développement suivant

$$J_{\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \right].$$

De la même manière, à l'aide de la formule

$$e^{itG_0}\psi(h^2G_0) = (\pi i)^{-1}\int_0^\infty e^{it\lambda^2}\psi(h^2\lambda^2)\left(R_0^+(\lambda) - R_0^-(\lambda)\right)\,\lambda\,d\lambda,$$

le noyau de l'opérateur $e^{itG_0}\psi(h^2G_0)$ est de la forme $K_h^{(S)}(|x-y|,t)$ où

$$K_h^{(S)}(\sigma,t) = \frac{\sigma^{-2\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{it\lambda^2}\psi(h^2\lambda^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda)\lambda\,d\lambda = h^{-n}K_1^{(S)}(\sigma h^{-1}, th^{-2}). \qquad (B.2.2)$$

Comme nous avons la décomposition $\mathcal{J}_\nu(z) = e^{iz}b_\nu^+(z) + e^{-iz}b_\nu^-(z)$ pour z grand, il sera des fois judicieux de décomposer $K^{(w)}$ (ou $K^{(S)}$) sous la forme $K^{(w)+} + K^{(w)-}$ où $K^{(w)\pm}$ sont définis en remplaçant dans la définition de $K_h^{(w)}$ la fonction $J_\nu(\sigma\lambda)$ par $e^{i\pm\sigma\lambda}b_\nu^\pm(\sigma\lambda)$ lorsque nous souhaiterons obtenir des estimations plus fines sur les noyaux pour $\sigma \geq 1$. Ainsi :

$$K_h^{(w)\pm}(\sigma,t) = \frac{h^{-1}\sigma^{-2\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_0^\infty e^{i(t\pm\sigma)\lambda}\tilde{\psi}(h\lambda)b_\nu^\pm(\sigma\lambda)\,d\lambda, \qquad (B.2.3)$$

où $\tilde{\psi}(\lambda) = \lambda\phi(\lambda^2)$.

Lemme B.1 *Nous avons les estimations suivantes pour tout $\sigma > 0$, $t \neq 0$ et $h > 0$:*

$$|K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C\langle t\rangle^{-s}\langle\sigma\rangle^{s-(n-1)/2}, \quad s \geq 0, \quad \textit{pour } n \geq 2, \qquad (N1)$$

$$|K_h^{(w)}(\sigma,t)| \leq C|t|^{-s}h^{-(n+1)/2}\sigma^{-(n-1)/2+s}, \quad 0 \leq s \leq (n-1)/2, \quad \textit{pour } n \geq 2, \qquad (N2)$$

$$|K_h^{(S)}(\sigma,t)| \leq Ch^{s-(n-1)/2}|t|^{-s-1/2}\sigma^{-(n-1)/2+s}, \quad 0 \leq s \leq (n-1)/2, \quad \textit{pour } n \geq 3. \qquad (N3)$$

Preuve de (N1) : Séparons les cas $n \geq 3$ et $n = 2$. Soit $n \geq 3$. Il est connu que la fonction $\mathcal{J}_\nu(z)$ vérifie les bornes

$$\left|\partial_z^k\mathcal{J}_\nu(z)\right| \leq C_k z^{(n-3)/2}, \quad z \geq 1,$$

pour tout entier $k \geq 0$, alors que près de $z = 0$, la fonction $\mathcal{J}_\nu(z)$ est égale à $z^{2\nu}$ fois une fonction analytique paire. Par conséquent, nous avons, pour $n \geq 3$,

$$\left|\partial_z^k\mathcal{J}_\nu(z)\right| \leq Cz^{n-2-k}, \quad 0 < z \leq 1,\, 0 \leq k \leq n-2, \qquad (B.2.4)$$

Ainsi, nous obtenons pour $n \geq 3$,

$$\left|\partial_z^k\mathcal{J}_\nu(z)\right| \leq Cz^{n-2-k}\langle z\rangle^{-(n-1)/2+k}, \quad \forall z > 0,\, 0 \leq k \leq n-2. \qquad (B.2.5)$$

Nous avons aussi pour $n \geq 3$

$$\left|\partial_z^j\mathcal{J}_\nu(z)\right| \leq C_j\langle z\rangle^{(n-3)/2}, \quad \forall z > 0, \forall j \geq 0. \qquad (B.2.6)$$

Soit $n \geq 3$ et soit m un entier tel que $0 \leq m \leq n-2$. En intégrant par parties m fois

$$(it)^m K_1^{(w)}(\sigma,t) = \frac{\sigma^{-2\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}}\int_0^\infty t^m e^{it\lambda}\psi(\lambda^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda)\lambda d\lambda,$$

et en utilisant (B.2.5), nous obtenons

$$|t^m K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C\sigma^{-2\nu}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\partial_\lambda^m\left(\psi(\lambda^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda)\lambda\right)d\lambda\right|$$

$$\leq C\sigma^{-2\nu}\sum_{k=0}^{m}\sigma^k\int_{supp\,\psi}\left|\frac{\partial^k\mathcal{J}_\nu}{\partial\lambda^k}(\sigma\lambda)\right|d\lambda$$

$$\leq C\sigma^{-2\nu}\sum_{k=0}^{m}\sigma^k\sigma^{n-2-k}\langle\sigma\rangle^{-(n-1)/2+k}$$

$$\leq C\langle\sigma\rangle^{-(n-1)/2+m}.$$

Soit maintenant un entier m tel que $m > n-2$. En intégrant par parties m fois, nous obtenons

$$|t^m K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C\sigma^{-2\nu}\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\partial_\lambda^m\left(\psi(\lambda^2)\mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda)\lambda\right)d\lambda\right|$$

$$\leq C\sigma^{-2\nu}\sum_{k=0}^{m}\sigma^k\int_{supp\,\psi}\left|\frac{\partial^k\mathcal{J}_\nu}{\partial\lambda^k}(\sigma\lambda)\right|d\lambda.$$

Puis en utilisant (B.2.5) et (B.2.6),

$$|t^m K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C\sigma^{-2\nu}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\sigma^k\sigma^{n-2-k}\langle\sigma\rangle^{-(n-1)/2+k} + \sum_{k=n-1}^{m}\sigma^k\langle\sigma\rangle^{(n-3)/2}\right).$$

Nous avons pour la première somme

$$\sigma^{-n+2}\sum_{k=0}^{n-2}\sigma^{n-2}\langle\sigma\rangle^{-(n-1)/2+k} \leq C\langle\sigma\rangle^{(n-3)/2},$$

et pour la deuxième somme

$$\sigma^{-n+2}\sum_{k=n-1}^{m}\sigma^k\langle\sigma\rangle^{(n-3)/2} \leq \begin{cases}\langle\sigma\rangle^{(n-3)/2}\sigma \leq C, & \sigma \text{ petit},\\[2ex] \sigma^{-n+2}\sigma^m\sigma^{(n-3)/2} = \sigma^{m-(n-1)/2}, & \sigma \text{ grand}.\end{cases}$$

Comme $m \geq n-1$, nous avons $m-(n-1)/2 \geq (n-3)/2$ et donc finalement

$$|t^m K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C\sigma^{m-(n-1)/2}.$$

Ce qui prouve

$$|K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C|t|^{-m}\langle\sigma\rangle^{m-(n-1)/2}, \tag{B.2.7}$$

pour tout entier $m \geq 0$ et donc pour tout réel $s \geq 0$ par interpolation. En écrivant (B.2.7) pour $s=0$ et $s \geq 0$ et en utilisant $1+|t|^{-s} \leq C\langle t\rangle^{-s}$, nous en déduisons (N1) pour tout réel $s \geq 0$.

Soit maintenant $n=2$. Nous avons

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k z^{2k} = 1 - c_1 z^2 + \cdots$$

donc près de 0, nous avons

$$\left|\partial_z^k J_0(z)\right| \leq C, \text{ pour } k \text{ pair} \quad \left|\partial_z^k J_0(z)\right| \leq C|z|, \text{ pour } k \text{ impair}.$$

Près de l'infini, nous avons l'estimation $\left|\partial_z^j J_0(z)\right| \leq C|z|^{-1/2}$ pour tout k. En regroupant les deux types de comportement, cela donne

$$\left|\partial_z^k J_0(z)\right| \leq C\langle z\rangle^{-1/2} \quad k \text{ pair},$$

$$\left|\partial_z^k J_0(z)\right| \leq Cz\langle z\rangle^{-3/2}, \quad k \text{ impair},$$

que nous pouvons en fait regrouper en

$$\left|\partial_z^k J_0(z)\right| \leq C\langle z\rangle^{-1/2} \quad \forall k \geq 0.$$

Le même type raisonnement que dans le cas $n \geq 3$ nous conduit à estimer pour un entier $m \geq 0$

$$|t^m K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C\sum_{k=0}^{m} \sigma^k \int_{supp\,\psi} \left|\frac{\partial^k \mathcal{J}_\nu}{\partial\lambda^k}(\sigma\lambda)\right| d\lambda \leq C\sum_{k=0}^{m} \sigma^k \langle\sigma\rangle^{-1/2}.$$

Finalement, nous obtenons pour tout entier $m \geq 0$:

$$|t^m K_1^{(w)}(\sigma,t)| \leq C\langle\sigma\rangle^{m-1/2},$$

et donc par interpolation, nous obtenons (N1) pour tout réel $s \geq 0$.

□

Preuve de (N2) : D'après (N1) et comme $K_h^{(w)}(\sigma,t) = h^{-n}K_1^{(w)}(\sigma h^{-1}, th^{-1})$, nous avons pour $\sigma > 0$ et $0 \leq s \leq (n-1)/2$

$$|K_h^{(w)}(\sigma,t)| \leq Ch^{-n}|th^{-1}|^{-s}\langle\sigma h^{-1}\rangle^{s-(n-1)/2}.$$

Comme nous avons pour $0 \leq s \leq (n-1)/2$

$$\langle\sigma h^{-1}\rangle^{-(n-1)/2+s} \leq h^{(n-1)/2-s}\sigma^{-(n-1)/2+s},$$

nous obtenons

$$|K_h^{(w)}(\sigma,t)| \leq Ch^{-(n+1)/2}|t|^{-s}\sigma^{s-(n-1)/2}.$$

□

Preuve de (N3) : Réécrivons $K_1^{(S)}(\sigma,t)$ en effectuant le changement de variables $\lambda^2 \mapsto \lambda$:

$$K_1^{(S)} = \frac{\sigma^{-2\nu}}{2(2\pi)^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{it\lambda}\psi(\lambda)\mathcal{J}_\nu(\sigma\sqrt{\lambda})d\lambda.$$

Soit $m \geq 0$ un entier. Intégrons par parties $t^m K_1^{(S)}(\sigma,t)$:

$$\begin{aligned}(it)^m K_1^{(S)}(\sigma,t) &= \frac{\sigma^{-2\nu}}{2(2\pi)^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{it\lambda}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(\psi(\lambda)\mathcal{J}_\nu(\sigma\sqrt{\lambda})\right)d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^{m} \sigma^{k-2\nu}\int_0^\infty e^{it\lambda}\psi_{m-k}(\lambda)\mathcal{J}_\nu^{(k)}(\sigma\sqrt{\lambda})d\lambda,\end{aligned}$$

où $\psi_{m-k} \in C_0^\infty((0,+\infty))$. Effectuons le changement de variables $\lambda \mapsto \lambda^2$, nous obtenons

$$(it)^m K_1^{(S)}(\sigma,t) = \sum_{k=0}^{m} \sigma^{k-2\nu}\int_0^\infty e^{it\lambda^2}\phi_{m-k}(\lambda)\mathcal{J}_\nu^{(k)}(\sigma\lambda)d\lambda,$$

où $\phi_k(\lambda) = 2\lambda\psi(\lambda^2)$. Pour estimer le terme de droite, nous allons utiliser l'inégalité prouvée en appendice (C.10)-(C.12) :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda^2 - i\tau\lambda}\phi(\lambda)d\lambda\right| \leq C|t|^{-1/2}\|\hat{\phi}\|_{L^1}$$
$$\leq C_b|t|^{-1/2} \sup_{0\leq j\leq 1}\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}\left|\partial_\lambda^j\phi(\lambda)\right|, \quad \forall t\neq 0,\, \tau\in\mathbf{R}, \qquad (B.2.8)$$

pour $\phi \in C_0^\infty([-b,b])$ avec $b > 0$ et $C_b > 0$ une constante indépendante de t, τ et ϕ. Séparons les cas $0 < \sigma \leq 1$ et $\sigma \geq 1$.
Pour $0 < \sigma \leq 1$, l'inégalité précédente donne

$$|t^m K_1(\sigma,t)| \leq C|t|^{-1/2}\sum_{k=0}^{m}\sigma^{k-2\nu}\sup_{0\leq j\leq 1}\sup_{\lambda\in supp\,\phi_{m-k}}\left|\mathcal{J}_\nu^{(k+j)}(\sigma\lambda)\right|.$$

Comme il est connu que près de 0, la fonction $\mathcal{J}_\nu(z)$ est égal à $z^{2\nu}$ fois une fonction analytique, nous avons pour $0 < z \leq z_0$:

$$\left|\partial_z^k\mathcal{J}_\nu(z)\right| \leq Cz^{2\nu-k},\ 0\leq k\leq n-2, \quad \left|\partial_z^k\mathcal{J}_\nu(z)\right| \leq C_k,\ k\geq n-1,$$

avec des constantes C, C_k dépendantes de z_0. Séparons la somme de 0 à m en deux sommes : la première avec les termes de 0 à $n-2$ et les autres de $n-1$ à m (la deuxième somme est nulle si $m \leq n-2$). Nous avons dans la première somme

$$\sup_{0\leq j\leq 1}\sup_{\lambda\in supp\,\phi_{m-k}}\left|\mathcal{J}_\nu^{(k+j)}(\sigma\lambda)\right| \leq C\sigma^{2\nu-k},$$

donc la première somme est majorée par une constante. Dans la deuxième somme, nous avons

$$\sup_{0\leq j\leq 1}\sup_{\lambda\in supp\,\phi_{m-k}}\left|\mathcal{J}_\nu^{(k+j)}(\sigma\lambda)\right| \leq C,$$

donc la deuxième somme est majorée par $\displaystyle\sum_{k=n-1}^{m}\sigma^{k-n+2} \leq C$ comme $0 < \sigma \leq 1$. Finalement,

$$|K_1^{(S)}(\sigma,t)| \leq C_m|t|^{-m-1/2}, \quad \forall t\neq 0,\ 0<\sigma\leq 1, \qquad (B.2.9)$$

pour tout entier $m \geq 0$ avec une constante $C_m > 0$ indépendante de t et σ. Clairement, (B.2.9) reste vraie pour $m = s$ pour tout réel $0 \leq s \leq (n-1)/2$, ce qui implique (N3) pour $h = 1$ dans ce cas.
Pour $\sigma \geq 1$, nous devons décomposer $\mathcal{J}_\nu(z)$ en $\mathcal{J}_\nu(z) = e^{iz}b_\nu^+(z) + e^{-iz}b_\nu^-(z)$ avec des fonctions $b_\nu^\pm(z)$ vérifiant

$$\left|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)\right| \leq C_j z^{\frac{n-3}{2}-j}, \quad \forall z\geq z_0, \qquad (B.2.10)$$

pour tout entier $j \geq 0$ et tout $z_0 > 0$, avec une constante $C_j > 0$ dépendante de j et z_0 mais indépendante de z. Nous pouvons alors écrire $K_1^{(S)} = K_1^+ + K_1^-$, où $K_1^\pm$ est défini en remplaçant $\mathcal{J}_\nu(z)$ par $e^{\pm iz}b_\nu^\pm(z)$. Nous avons

$$\mathcal{J}_\nu^{(k)}(z) = \sum_\pm e^{\pm iz}b_{\nu,k}^\pm(z),$$

où les fonctions $b_{\nu,k}^\pm$ vérifient aussi (B.2.10). Nous avons ainsi en utilisant l'inégalité (B.2.8) :

$$|t^m K_1^\pm(\sigma,t)| \leq C|t|^{-1/2}\sum_{k=0}^{m}\sum_\pm\sigma^{k-2\nu}\sup_{0\leq j\leq 1}\sup_{\lambda\in supp\,\phi_{m-k}}\left|(b_{\nu,k}^\pm)^{(j)}(\sigma\lambda)\right|,$$

et comme
$$\left|\partial_z^j b_{\nu,k}^{\pm}(z)\right| \leq C_j z^{\frac{n-3}{2}-j} \leq C z^{\frac{n-3}{2}}, \quad \forall z \geq z_0,\, j=0,\,1,$$
nous obtenons finalement :
$$|t^m K_1^{\pm}(\sigma,t)| \leq C|t|^{-1/2} \sum_{k=0}^{m} \sigma^{-\frac{n-1}{2}+k}.$$
Par conséquent
$$\left|K_1^{\pm}(\sigma,t)\right| \leq C_m |t|^{-m-1/2} \sigma^{-(n-1)/2+m}, \quad \forall t \neq 0,\, \sigma \geq 1, \tag{$B.2.11$}$$
pour tout entier $m \geq 0$ avec une constante $C_m > 0$ indépendante de t et σ. Il est clair que (B.2.11) reste vraie pour $m = s$ pour tout réel $0 \leq s \leq (n-1)/2$, ce qui implique (N3) pour $h = 1$ dans ce cas.
Comme $K_h^{(S)}(\sigma,t) = h^{-n} K_1^{(S)}(\sigma h^{-1}, th^{-1})$, nous en déduisons (N3) pour tout h. □

Ces résultats sur les noyaux des propagateurs permettent d'obtenir les estimations dispersives pour l'équation des ondes et de Schrödinger libres.

Proposition B.2 *Estimations dispersives pour l'équation des ondes libre*

– *Estimation $L^1 - L^\infty$ à basses fréquences ($n \geq 3$, 1ère version)*
$$\left\| e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-(n+1)/4} \eta(\sqrt{G_0}) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-(n-1)/2} \log\left(2 + |t|\right), \quad \forall t. \tag{$OB1$}$$

– *Estimation $L^1 - L^\infty$ à basses fréquences ($n \geq 3$, 2nde version)*
$$\left\| e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-(n+1)/4+\varepsilon} \eta(\sqrt{G_0}) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C_\varepsilon \langle t \rangle^{-(n-1)/2}, \quad \forall t. \tag{$OB2$}$$

– *Estimation $L^1 - L^\infty$ à hautes fréquences ($n \geq 2$)*
$$\left\| e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-\frac{n+1}{4}-\varepsilon} \chi_a(G_0) \right\|_{L^1 \to L^\infty} \leq C|t|^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{OH}$$

Nous rappelons l'estimation dispersive $L^{p'} - L^p$ pour l'équation des ondes libre (avec $2 \leq p < +\infty$, $\alpha = 1 - 2/p$ et $1/p + 1/p' = 1$) prouvée par Strichartz dans [69] et [70]
$$\left\| e^{it\sqrt{G_0}} G_0^{-\alpha\frac{n+1}{4}} \right\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C|t|^{-\alpha\frac{n-1}{2}}. \tag{O}$$

Proposition B.3 *Estimations dispersives pour l'équation de Schrödinger libre.*
Estimation $L^{p'} - L^p$ avec $2 \leq p \leq +\infty$ et $\alpha = 1 - 2/p$:
$$\left\| e^{itG_0} \right\|_{L^{p'} \to L^p} \leq C|t|^{-\alpha\frac{n}{2}}. \tag{S}$$

Preuve de (OB) : Le noyau de l'opérateur apparaissant dans le membre de gauche de (OB) est de la forme $K(|x-y|,t)$, où
$$K(\sigma,t) = c_n \sigma^{-n+2} \int_0^\infty e^{it\lambda} \lambda^{1-(n+1)/2} \eta_a(\lambda) \mathcal{J}_\nu(\sigma\lambda) d\lambda.$$
Lorsque $|t| \leq 2$, en utilisant que $\mathcal{J}_\nu(z) = O(z^{n-2})$, $\forall z > 0$, nous avons $|K(\sigma,t)| \leq C$, ce qui implique (OB) dans ce cas. Dans ce qui suit, nous supposerons donc $|t| \geq 2$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\phi(\mu) = 1$ for $|\mu| \leq 1$, $\phi(\mu) = 0$ pour $|\mu| \geq 2$. Nous écrivons $K = K_1 + K_2$, où
$$K_1(\sigma,t) = c_n \sigma^{-n+2} \int_0^\infty e^{it\lambda} \lambda^{1-(n+1)/2} \eta_a(\lambda) (\phi\mathcal{J}_\nu)(\sigma\lambda) d\lambda,$$

$$K_2(\sigma,t) = c_n\sigma^{-n+2}\int_0^\infty e^{it\lambda}\lambda^{1-(n+1)/2}\eta_a(\lambda)((1-\phi)\mathcal{J}_\nu)(\sigma\lambda)d\lambda.$$

Comme $((1-\phi)\mathcal{J}_\nu)(z) = O(z^{(n-3)/2})$, $\forall z > 0$, (comportement de $\mathcal{J}_\nu$ à l'infini), nous avons

$$|K_2(\sigma,t)| \le C\sigma^{-(n-1)/2}\int_{\sigma^{-1}}^{Const}\lambda^{-1}d\lambda \le C\sigma^{-(n-1)/2}\log\langle\sigma\rangle. \qquad (B.2.12)$$

Il suit de (B.2.12) que pour $|t|/2 \le \sigma \le 2|t|$, nous avons

$$|K_2(\sigma,t)| \le C|t|^{-(n-1)/2}\log|t|. \qquad (B.2.13)$$

Soit maintenant $\sigma \notin [|t|/2, 2|t|]$. Nous écrivons K_2 comme $K_2^+ + K_2^-$, où

$$K_2^\pm(\sigma,t) = c_n\sigma^{-n+2}\int_0^\infty e^{i(t\pm\sigma)\lambda}\lambda^{1-(n+1)/2}\eta_a(\lambda)((1-\phi)b_\nu^\pm)(\sigma\lambda)d\lambda,$$

avec des fonctions $b_\nu^\pm$ qui vérifient

$$|\partial_z^j b_\nu^\pm(z)| \le C_j z^{(n-3)/2-j}, \quad \forall j \ge 0,\ z \ge 1.$$

En intégrant par parties $m \ge 1$ fois, nous obtenons

$$|K_2^\pm(\sigma,t)| \le C\sigma^{-n+2}|t\pm\sigma|^{-m}\int_0^\infty\sum_{j=0}^m\sigma^{m-j}\left|\partial_\lambda^j(\lambda^{1-(n+1)/2}\eta_a(\lambda))\right|\left|(\partial_\lambda^{m-j}(1-\phi)b_\nu^\pm)(\sigma\lambda)\right|d\lambda$$

$$\le C\sigma^{-n+2}|t\pm\sigma|^{-m}\int_{\sigma^{-1}}^{Const}\sum_{j=0}^m\sigma^{m-j}\lambda^{1-(n+1)/2-j}(\sigma\lambda)^{(n-3)/2-(m-j)}d\lambda$$

$$\le C\sigma^{-(n-1)/2}|t\pm\sigma|^{-m}\int_{\sigma^{-1}}^{Const}\lambda^{-1-m}d\lambda \le C\sigma^{m-(n-1)/2}|t\pm\sigma|^{-m}\int_1^\infty\mu^{-1-m}d\mu$$

$$\le C\sigma^{m-(n-1)/2}|t\pm\sigma|^{-m} \le C_m\sigma^{m-(n-1)/2}|t|^{-m}, \qquad (B.2.14)$$

comme $|t\pm\sigma| \ge |t|/2$ dans ce cas, pour tout entier $m \ge 1$, et par conséquent pour tout réel $m \ge 1$. En prenant $m = (n-1)/2$ dans (B.2.14), nous obtenons

$$|K_2(\sigma,t)| \le C|t|^{-(n-1)/2}, \quad \text{if} \quad \sigma \notin [|t|/2, 2|t|]. \qquad (B.2.15)$$

Pour traiter K_1 nous allons utiliser que $(\phi\mathcal{J}_\nu)(z) = z^{n-2}g(z)$ avec une fonction $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Nous écrivons

$$K_1(\sigma,t) = c_n\int_0^\infty e^{it\lambda}\lambda^{(n-3)/2}\eta_a(\lambda)g(\sigma\lambda)d\lambda.$$

Lemme B.4 *Pour tout $k \ge 1$, nous avons*

$$\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\lambda^{k-1}\eta_a(\lambda)g(\sigma\lambda)d\lambda\right| \le C_k|t|^{-k}, \qquad (B.2.16)$$

avec une constante $C_k > 0$ indépendante de t et σ.

Preuve. Si $k \ge 1$ est un entier, nous intégrons par parties k fois pour obtenir

$$\left|\int_0^\infty e^{it\lambda}\lambda^{k-1}\eta_a(\lambda)g(\sigma\lambda)d\lambda\right|$$

$$\leq |t|^{-k}\int_0^\infty \left|\partial_\lambda^k(\lambda^{k-1}\eta_a(\lambda)g(\sigma\lambda))\right| d\lambda + |t|^{-k}\left|\partial_\lambda^{k-1}(\lambda^{k-1}\eta_a(\lambda)g(\sigma\lambda))|_{\lambda=0}\right|$$

$$\leq |t|^{-k}\int_0^\infty \sum_{j=1}^k \sigma^j\lambda^{j-1}|(\partial_\lambda^j g)(\sigma\lambda)|d\lambda + |t|^{-k}\int_0^\infty |\eta_a'(\lambda)||g(\sigma\lambda)|d\lambda + |t|^{-k}|g(0)|$$

$$\leq |t|^{-k}\sum_{j=1}^k \int_0^\infty (\sigma\lambda)^{j-1}(\partial_\lambda^j g)(\sigma\lambda)|d(\sigma\lambda) + |t|^{-k}\int_0^\infty |\eta_a'(\lambda)|d\lambda + |t|^{-k}|g(0)| \leq C_k|t|^{-k}.$$

Nous utilisons alors l'interpolation complexe pour prouver (B.2.16) pour tout réel $k \geq 1$. □

En appliquant (B.2.16) avec $k = (n-1)/2$ nous obtenons

$$|K_1(\sigma,t)| \leq C|t|^{-(n-1)/2}. \qquad (B.2.17)$$

Maintenant (OB) résulte de (B.2.13), (B.2.15) et (B.2.17). □

Preuve de (OH) : (N2) avec $s = (n-1)/2$ donne

$$|K_h^{(w)}(\sigma,t)| \leq C|t|^{-(n-1)/2}h^{-(n+1)/2}.$$

Par conséquent

$$\left\|e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq C\sup_{\sigma>0}|K_h^{(w)}(\sigma,t)| \leq Ch^{-(n+1)/2}|t|^{-(n-1)/2}.$$

Ensuite, en écrivant

$$\sigma^{-(n+1)/4-\epsilon}\chi_a(\sigma) = \int_0^1 \psi(\sigma\theta)\theta^{(n+1)/4+\epsilon-1}d\theta,$$

avec $\psi(\sigma) = \sigma^{1-(n+1)/4-\epsilon}\chi_1'(\sigma) \in C_0^\infty((0,+\infty))$, nous obtenons

$$\left\|e^{it\sqrt{G_0}}G_0^{-(n+1)/4-\epsilon}\chi_a(G_0)\right\|_{L^1\to L^\infty} \leq \int_0^1 \left\|e^{it\sqrt{G_0}}\psi(h^2G_0)\right\|_{L^1\to L^\infty}\theta^{(n+1)/4+\epsilon-1}d\theta$$

$$\leq C|t|^{-(n-1)/2}\int_0^1 \theta^{-1+\epsilon}d\theta \leq C|t|^{-(n-1)/2}.$$

D'où (OH).

□

Preuve de (S) : Si u vérifie l'équation de Schrödinger $i\partial_t u + G_0 u = 0$ avec condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, nous obtenons en utilisant la transformée de Fourier par rapport à x que $\hat{u}$ vérifie :

$$i\partial_t\hat{u} + |\xi|^2\hat{u} = 0, \quad \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi),\ \forall\xi \in \mathbf{R}^n.$$

Equation dont on connaît la solution :

$$\hat{u}(t) = e^{i|\xi|^2t}\hat{u}_0.$$

De cette expression, nous en déduisons la conservation de la charge

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|\hat{u}(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Nous en déduisons aussi par transformée de Fourier inverse :

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy.$$

D'où l'on déduit

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} \leq C|t|^{-n/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}, \quad t \neq 0.$$

Par interpolation entre les estimations $L^2 - L^2$ et $L^1 - L^\infty$, nous en déduisons l'estimation $L^{p'} - L^p$ pour tout $2 \leq p \leq +\infty$, c'est-à-dire (S). $\square$

C Appendice 3 : Quelques inégalités utilisées

1. Inégalité de Cauchy
$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (a, b \in \mathbf{R}), \tag{C.1}$$
$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \quad (a, b \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0). \tag{C.2}$$
2. Inégalité de Young. Soit $1 < p,\ q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.
$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \in \mathbf{R}), \tag{C.3}$$
$$ab \le \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (a, b \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0,\ C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}). \tag{C.4}$$
3. Inégalité de Hölder. Soit $1 \le p,\ q \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Si $u \in L^p$ et $v \in L^q$, alors
$$\int |uv| \le \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}. \tag{C.5}$$
4. Inégalité de Minkowski. Soit $1 \le p \le \infty$ et soit $u,\ v \in L^p$. Alors
$$\|u + v\|_{L^p} \le \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}. \tag{C.6}$$
5. Inégalité d'interpolation pour les normes L^p. Supposons $1 \le s \le r \le t \le \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$. Supposons aussi $u \in L^s \cap L^t$. Alors $u \in L^r$ et
$$\|u\|_{L^r} \le \|u\|_{L^s}^{\theta} \|u\|_{L^t}^{1-\theta}. \tag{C.7}$$
6. Inégalité de Gronwall (forme différentielle).
   - Soit $\eta(\cdot)$ une fonction positive, absolument continue sur $[0, T]$, qui vérifie pour presque tout t l'inéquation différentielle
   $$\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$
   où $\phi(t)$ et $\psi(t)$ sont positives, intégrable sur $[0, T]$. Alors
   $$\eta(t) \le e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right). \tag{C.8}$$
   pour tout $0 \le t \le T$.
   - En particulier, si $\eta' \le \phi\eta$ sur $[0, T]$ et $\eta(0) = 0$, alors $\eta \equiv 0$ sur $[0, T]$.

7. Inégalité de Gronwall (forme intégrale).
   - Soit $\xi(t)$ une fonction positive, intégrable sur $[0, T]$ qui vérifie pour presque tout t l'inégalité intégrale
   $$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)\, ds + C_2,$$
   pour des constantes $C_1,\ C_2 \ge 0$. Alors
   $$\xi(t) \le C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right). \tag{C.9}$$
   pour presque tout $0 \le t \le T$.

– En particulier, si $\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s)\,ds$ pour presque tout $0 \leq t \leq T$, alors $\xi(t) = 0$ presque partout.

8. Une autre inégalité utile :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda^2 - i\tau\lambda} \phi(\lambda) d\lambda \right| \leq C|t|^{-1/2} \|\hat{\phi}\|_{L^1}, \qquad (C.10)$$

pour $\phi \in C_0^\infty([-b, b])$ avec $b > 0$.

Preuve : Définissons

$$J(\tau, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda^2 + i\tau\lambda} \phi(\lambda) d\lambda,$$

pour tout $t \neq 0$ et tout réel τ. Observons que $J(\tau, t)$ est fonction régulière solution de l'équation de Schrödinger en dimension 1

$$i\frac{\partial}{\partial t} J(\tau, t) - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} J(\tau, t) = 0,$$

$$J(\tau, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\lambda} \phi(\lambda) d\lambda = \hat{\phi}(\tau).$$

Comme nous connaissons la représentation explicite du noyau de la solution fondamentale :

$$J(\tau, t) = (-4\pi i t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{|a-b|^2}{4t}} J(\tau', 0) d\tau'.$$

Ce qui implique que $J(\tau, t)$ obéit à l'estimation dispersive usuelle en dimension 1 :

$$|J(\tau, t)| \leq C|t|^{-1/2} \|J(\cdot, 0)\|_{L^1}.$$

Comme nous avons exactement $J(\tau, 0) = \hat{\phi}(\tau)$, nous obtenons bien l'inégalité voulue. □

9. Encore une autre inégalité utile :

$$\left\| e^{-itG_0} V e^{itG_0} \right\|_{L^1 \to L^1} \leq \|\widehat{V}\|_{L^1}, \quad \forall t. \qquad (C.11)$$

Preuve : En utilisant la noyau associé au propagateur e^{itG_0}, nous pouvons écrire

$$\left\| e^{-itG_0} V e^{itG_0} f \right\|_{L^1} = \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{1}{(4\pi t)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\phi(x,y,z)} V(z) f(y) dz dy \right| dx,$$

avec $\phi(x, y, z) = -\frac{|x-z|^2}{4t} + \frac{|z-y|^2}{4t}$. Après calculs, nous trouvons

$$\phi(x, y, z) = \frac{|y|^2 - |x|^2}{4t} + z \cdot \frac{x-y}{2t}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\left\| e^{-itG_0} V e^{itG_0} f \right\|_{L^1}$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{1}{(4\pi t)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\frac{|y|^2 - |x|^2}{4t}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{iz\cdot\frac{x-y}{2t}} V(z) dz\, f(y)\, dy \right| dx,$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{1}{(4\pi t)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\frac{|y|^2-|x|^2}{4t}} \hat{V}(\frac{x-y}{2t}) dz\, f(y)\, dy \right| dx.$$

Nous effectuons le changement de variables $(x-y)/2t \mapsto x$, ce qui donne

$$\left\| e^{-itG_0} V e^{itG_0} f \right\|_{L^1} = \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\phi(x,y)} \hat{V}(x) f(y) dy \right| dx.$$

Nous pouvons donc obtenir la majoration suivante

$$\left\| e^{-itG_0} V e^{itG_0} f \right\|_{L^1} \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{V}\|_{L^1} \|f\|_{L^1},$$

qui est l'estimation voulue. □

10. Une autre inégalité utile

$$\|\widehat{\varphi}(\tau)\|_{L^1} \leq C \|\langle\tau\rangle \widehat{\varphi}(\tau)\|_{L^2} \leq C \sum_{\ell=0}^{1} \left\| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right\|_{L^2} \leq C \sum_{\ell=0}^{1} \sup_\lambda \langle\lambda\rangle \left| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right|. \tag{C.12}$$

Preuve de (C.12) : Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons

$$\|\hat{\phi}(\tau)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle |\hat{\phi}(\tau)| \langle\tau\rangle^{-1} d\tau \leq \|\langle\tau\rangle^{-1}\|_{L^2} \|\langle\tau\rangle \hat{\phi}(\tau)\|_{L^2} \leq C \|\langle\tau\rangle \hat{\phi}(\tau)\|_{L^2}.$$

Par le théorème de Plancherel, nous avons

$$\|\langle\tau\rangle \hat{\phi}(\tau)\|_{L^2} = \|\hat{\phi}(\tau)\|_{L^2} + \|\tau \hat{\phi}(\tau)\|_{L^2} = C_1 \|\phi(\lambda)\|_{L^2} + C_2 \|\phi'(\lambda)\|_{L^2} \leq C \sum_{l=0}^{1} \|\partial_\lambda^l \phi(\lambda)\|_{L^2}.$$

Enfin, nous avons

$$\|\phi\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \langle\lambda\rangle^2 \phi(\lambda)^2 \langle\lambda\rangle^{-2} d\lambda \leq C \sup_\lambda \langle\lambda\rangle^2 \phi(\lambda)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle\lambda\rangle^{-2} d\lambda \leq C \sup_\lambda \langle\lambda\rangle^2 \phi(\lambda)^2.$$

Finalement, nous avons bien

$$\sum_{\ell=0}^{1} \left\| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right\|_{L^2} \leq C \sum_{\ell=0}^{1} \sup_\lambda \langle\lambda\rangle \left| \partial_\lambda^\ell \varphi(\lambda) \right|.$$

□

Références

[1] S. Agmon, *Lower bounds for solutions of Schrödinger equations.* J. Analyse Math. 23 (1970), 1-25.

[2] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl/ Sci. (4) 2 (1975), no. 2, 151-218.

[3] P. Alsholm, G. Schmidt, *Spectral and scattering theory for Schrödinger operators*, Arch. Rational. Mech. Anal. 40 (1970/1971), 281-311.

[4] M. Beals, *Optimal L^∞ decay estimates for solutions to the wave equation with a potential*, Commun. Partial Diff. Equations **19** (1994), 1319-1369.

[5] M. Beals, W.Strauss, *L^p Estimates for the wave equation with a potential.* Comm. Partial Differential Equations 18, (1993), 1365-1397.

[6] J. Bourgain, *Global solutions of nonlinear Schroginer equations.* American Mathematical Society Colloquium Publications, 46. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[7] J.M. Bouclet, N. Tzvetkov, *Strichartz estimates for long range perturbations.* to appear in Amer. J. Math.

[8] N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, S. Tahvildar-Zadeh, *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with inverse-square potential.* J. Funct. Anal. 203 (2003), 519-549.

[9] N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, S. Tahvildar-Zadeh, *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with potentials of critical decay.* Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), 1665-1680.

[10] F. Cardoso, C. Cuevas, G. Vodev, *Dispersive estimates of solutions to the wave equation with a potential in dimensions two and three*, Serdica Math. J. **31** (2005), 263-278.

[11] F. Cardoso, C. Cuevas, G. Vodev, *Weighted dispersive estimates for solutions of the Schrödinger equation*, preprint.

[12] F. Cardoso, G. Vodev, *Weighted L^p decay estimates of solutions to the wave equation with a potential.* Quad. Mat. 15 (2004), 1-20.

[13] S. Cuccagna, *On the wave equation with a potential.* Comm. Partial Differential Equations 25 (2000), no. 7-8, 1549-1565.

[14] S. Cuccagna, *Stabilization of solutions to non-linear Schrödinger equations.* Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001), no. 9, 1110-1145.

[15] C. Cuevas, G. Vodev, *$L^{p'} \to L^p$ decay estimates of solutions to the wave equation with a short-range potential.* Asympt. Anal. 46 (2006), no 1, 29-42.

[16] H.L. Cycon, R. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators*, Springer-Verlag Texts and Monographs in Physics, 1987.

[17] P. d'Ancona, V. Pierfelice, *On the wave equation with a large rough potential*, J. Funct. Anal. 227, (2005), no 1, 30-77.

[18] P. d'Ancona, V. Pierfelice, N.Visciglia, *Some remarks on the Schrödinger equation with a potential in $L^r_t L^s_x$*, Math. Ann. 333, (2005), no 2, 271-290.

[19] P. d'Ancona, V. Georgiev, H. Kubo, *Weighted decay estimates for the wave equation.* J. Differential Equations 177 (1), (2001), 146-208.

[20] S.A. Denisov, A. Kiselev, *Spectral properties of Schrödinger operators with decaying potentials*, preprint.

[21] B. Erdogan, W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three*, Dyn. Partial Differ. Equ. 1, (2004), no 4, 359-379.

[22] B. Erdogan, W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three II*, preprint.

[23] V. Georgiev, N. Visciglia, *Decay estimates for the wave equation with potential*, Commun. Partial Diff. Equations **28** (2003), 1325-1369.

[24] J. Ginibre, G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case*, J. Funct. Anal. 32 (1979), 1-32.

[25] J. Ginibre, G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. II. Scattering theory, general case*, J. Funct. Anal. 32 (1979), 33-71.

[26] J. Ginibre, G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. III. Special theories in dimension 1, 2 and 3*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 28 (1978), 287-316.

[27] J. Ginibre, G. Velo, *Generalized Stichartz inequalities for the wave equation*, J. Funct. Anal. 133 (1) (1995), 50-68.

[28] M. Goldberg, *Dispersive estimates for the three-dimensional Schrödinger equation with rough potential*, Amer. J. Math. 128 (2006), no.3, 731-750.

[29] M. Goldberg, *Dispersive bounds for the three dimensional Schrödinger equation with almost critical potentials*, GAFA **16** (2006), 517-536.

[30] M. Goldberg, W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions one and three*, Commun. Math. Phys. **251** (2004), 157-178.

[31] M. Goldberg, W. Schlag, *A limiting absorption principle for the three-dimensional Schrödinger equation with L^p potentials*. Intl. Math. Res. Not, no 75, (2004), 4049-4071.

[32] M. Goldberg, M. Visan, *A conterexample to dispersive estimates for Schrödinger operators in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **266** (2006), 211-238.

[33] P.D. Hislop, I.M. Sigal, *Introduction to spectral theory. With applications to Schrödinger operators.* Applies Mathematical Sciences, 113. Springer-Verlag, New York, 1996.

[34] A. Ionescu, D. Jerison, *On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials.* Geom. and Func. Anal. 13 (2003), 1029-1081.

[35] A. Ionescu, W. Schlag, *Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations*, Duke Math. J. 131, no 3, (2006), 397-440.

[36] A. Jensen, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions. Results in $L^2(\mathbf{R}^m)$, $m \geq 5$.* Duke Math. J. 47 (1980), no. 1, 57-80.

[37] A. Jensen, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions. Results in $L^2(\mathbf{R}^4)$.* J. Math. Anal. Appl. 101 (1984), no. 2, 397-422.

[38] A. Jensen, T. Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions.* Duke Math. J. 46 (1979), no. 3, 583-611.

[39] A. Jensen, S. Nakamura, *L^p-mapping properties of functions of Schrödinger operators and their applications to scattering theory.* J. Math. Soc. Japan 47, (1995), 253-273.

[40] A. Jensen, G. Nenciu, *A unified approach to resolvent expansions at thresholds.* Rev. Math. Phys. 13 (2001), no. 6, 717-754.

[41] A. Jensen, K. Yajima, *A remark on L^p-boundedness of wave operators for two-dimensional Schrödinger operators.* Comm. Math. Phys. 225 (2002), no. 3, 633-637.

[42] J.-L. Journé, A. Soffer, C. Sogge, *Decay estimates for Schrödinger operators*, Commun. Pure Appl. Math. **44** (1991), 573-604.

[43] L.V. Kapitanski, *Some generalizations of the Strichartz-Brenner inequality.* Algebra i Analiz 1, 3 (1989), 127-159 ; translation in Leningrad Math. J. 1, 3 (1990), 693-726.

[44] T. Kato, *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient.* Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 403-425.

[45] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations.* Ann IHP (Phys. Théor.) 46 (1987), 113-129.

[46] T. Kato, *Nonlinear Schrödinger equations* in Schrödinger operators.

[47] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators.* New York : Springer-Verlag, 1966.

[48] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates.* Amer. J. Math. 120 (1998), no. 5, 955-980.

[49] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non linéaire, 10(3) (1993), 255-288.

[50] H. Kock, D. Tataru, *Dispersive estimates for principally normal pseudodifferential operators.* Comm. Pure Appl. Math. 68 (2005), no 2, 217-284.

[51] S. Moulin, *Low frequency dispersive estimates for the wave equation in higher dimensions*, submitted.

[52] S. Moulin, *High frequency dispersive estimates in dimension two*, submitted.

[53] S. Moulin, G. Vodev, *Low frequency dispersive estimates for the Schrödinger group in higher dimensions*, Asymptot. Anal., to appear

[54] M. Murata, *Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations.* J. Funct. Anal. 49 (1) (1982), 10-56.

[55] S. Nakamura, *Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equations.* preprint.

[56] V. Pierfelice, *Decay estimate for the wave equation with a small potential.* preprint 2004.

[57] J. Rauch, *Local decay of scattering solutions to Schrödinger's equation.* Comm. Math. Phys. 61 (1978), no. 2, 149-168.

[58] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.* Academic Press, New York-London, 1.

[59] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis.* Academic Press, New York-London, .

[60] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory.* Academic Press, New York-London, 1979.

[61] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* Academic Press, New York-London, 1978.

[62] I. Rodnianski, W. Schlag, *Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials.* Invent. Math. 155 (2004), 451-513.

[63] I. Rodnianski, T. Tao, *Long-time decay for the Schrödinger equation on manifolds.* preprint.

[64] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in two dimensions*, Commun. Math. Phys. **257** (2005), 87-117.

[65] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators : a survey*, preprint.

[66] B. Simon, *On positive eigenvalues of one body Schrödinger operators.* Comm. Pure Appli. Math. 22 (1969), 531-538.

[67] B. Simon, *Schrödinger semigroups.* Bull. AMS. vol. 7, no. 3, (1982), 447-526.

[68] W.A. Strauss, *Nonlinear wave equations*, CBMS-RCSM 73, American Mathematical society, Providence, 1989.

[69] R. Strichartz, *Convolutions with kernels having singularities on a sphere*, Trans. A.M.S. 148 (1970), 461-471.

[70] R. Strichartz, *A priori estimates for the wave equation and some applications*, J. Func. Anal. 5 (1970), 218-235.

[71] R. Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J., vol 44, no.3 (1977), 705-714.

[72] N. Visciglia, *About ths Strichartz estimate and the dispersive estimate.* C.R. Acad. Bulgare Sci. 55(5), (2002), 9-14.

[73] G. Vodev, *Dispersive estimates of solutions to the Schrödinger equation*, Ann. H. Poincaré **6** (2005), 1179-1196.

[74] G. Vodev, *Dispersive estimates of solutions to the Schrödinger equation in dimensions* $n \geq 4$, Asymptot. Anal. **49** (2006), 61-86.

[75] G. Vodev, *Dispersive estimates of solutions to the wave equation with a potential in dimensions* $n \geq 4$, Commun. Partial Diff. Equations **31** (2006), 1709-1733.

[76] G. Vodev, *Local energy decay of solutions to the wave equation for short-range potentials*, Asympt. Anal. 37 (2004), 175-187.

[77] W. Von Wahl, *L^p-decay rates for homogeneous wave-equations.* Math. Z. 120 (1971), 93-106.

[78] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge university press, Cambridge (1966).

[79] R. Weder, *$L^p - L^{p'}$ estimates for the Schrödinger equations on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential.* J. Funct. Anal. 170, (2000), 37-68.

[80] R. Weder, *The $L^p - L^{p'}$ estimate for the Schrödinger equation on the half-line.* J. Math. Anal. Appl. 281 (2003), no 1, 233-243.

[81] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolutions equations.* Comm. Math. Phys. 110 (1999) ; 415-426.

[82] K. Yajima, *The $W^{k,p}$ continuity of wave operators for Schrödinger operators*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 551-581.

[83] K. Yajima, *L^p boudndedness of wave operators for two-Schrödinger operators.* Comm. Math. Phys. 208 (1999) ; no. 1. 125-152.

[84] K. Yajima, *Dispersive estimates for Schrödinger equations with threshold resonance and eigenvalue*, Commun. Math. Phys. **259** (2005), 475-509.