



HAL
open science

Assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés

Ehouarn Simon

► **To cite this version:**

Ehouarn Simon. Assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT: . tel-00194593

HAL Id: tel-00194593

<https://theses.hal.science/tel-00194593>

Submitted on 6 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

Thèse

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

Discipline : **Mathématiques Appliquées**

Présentée et soutenue publiquement par

Ehouarn SIMON

Assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés

Date de soutenance : **8 Novembre 2007**

JURY

Mr François-Xavier LE DIMET	LJK - Université Joseph Fourier	Président
Mr Roland BECKER	LMA - Université de Pau et des Pays de l'Adour	Rapporteur
Mr Jean-Luc DEVENON	IFREMER	Rapporteur
Mr Eric BLAYO	LJK - Université Joseph Fourier	Co-directeur
Mr Laurent DEBREU	LJK - INRIA	Co-directeur
Mr Rémy BARAILLE	LEGOS - SHOM	Examinateur
Mr Pierre BRASSEUR	LEGI - CNRS	Examinateur

Thèse préparée au sein du Laboratoire Jean Kuntzmann - Grenoble

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Roland Becker et Jean-Luc Devenon pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et pour l'attention qu'ils ont portée à ce manuscrit. Leurs remarques, tant dans leurs rapports que pendant la soutenance furent précieuses.

Je tiens également à remercier François-Xavier Le Dimet pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Je remercie également Rémy Baraille ainsi que Pierre Brasseur, dont l'intérêt pour ces travaux s'est constamment vérifié lors des nombreuses réunions "assimilation" de l'équipe MEOM du LEGI.

Ces travaux n'auraient pu être ce qu'ils sont sans l'apport des chefs. Tout d'abord Eric Blayo qui m'a fait découvrir voilà 3 ans et demi le monde de l'assimilation de données et qui a toujours su se rendre disponible, et surtout Laurent Debreu dont j'ai pu apprécier les qualités dans bien des domaines, aussi bien scientifiques que humains (No Name, ski, foot, etc..). Merci beaucoup!

Naturellement un grand remerciement à tous les membres (et assimilés) de la salle 3 du LJK pour tous les bons moments passés ensemble : Céline et Vincent (et le jeune Martin), William et Nathalie (et le tout aussi jeune Kylan), Marc et Sandrine (et la petite dernière Emilie), Florian, Morgan, Ibrahim, Emilie, Carine, Claire, Claire, Cyril et Elise, Innocent, Thomas, Ange, Joel, Monika, Olivier plus tous ceux que j'oublie sur l'instant..

Un merci plus général aux autres membres de l'équipe MOISE notamment Maëlle, Antoine, Arthur, Imma., et aux membres du LJK que j'ai pu côtoyer. Un grand merci également aux membres de l'équipe MEOM du LEGI avec qui j'ai pu interagir : Pierre Brasseur, Jacques Veron, Jean-Michel Brankart, Emmanuel Cosme, Broq, Fred, Sergey, Léo, David, et tous les autres.

Enfin, je remercie mes ex-collocs Florent, Fred, Olive, Bruno et naturellement Elena pour ces belles années grenobloises et mes amis de toujours Yoann et Adeline, Lorenzo, Stéphanie et Olivier..

Et bien entendu, je remercie mes parents pour m'avoir soutenu durant toutes ces années, ainsi que mon frère Eric et Elodie, et tout le reste de ma famille.

Table des matières

1	Emboîtement de modèles et assimilation de données	11
1.1	L'assimilation de données	12
1.2	Notations	12
1.3	Approche stochastique	14
1.3.1	Le filtre de Kalman	14
1.3.2	Le problème des non-linéarités : le filtre de Kalman étendu	16
1.3.3	Implémentation réaliste : les filtres de rang réduit	16
1.4	Approche variationnelle	19
1.4.1	4D-Var	19
1.4.2	4D-Var incrémental	20
1.4.3	Méthode adjointe	21
1.4.4	Le rôle de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B}	23
1.4.5	Un préconditionnement remarquable	24
1.5	Emboîtement de modèles : définitions et notations	25
1.5.1	Grilles et fonctions de grille	25
1.5.2	Produit scalaire L^2 discret sur un maillage	26
1.5.3	Opérateurs inter-grilles et décomposition d'échelles	26
1.6	Formulations de l'emboîtement de modèles	26
1.6.1	Interaction one-way	27
1.6.2	Interaction two-way	28
1.7	L'assimilation de données bi-grille	29
1.7.1	Etat de l'art de l'assimilation multi-grille	29
1.7.2	Définitions	31
1.7.3	Formulations	34
1.7.4	Vers le couplage de modèles	35
2	Systèmes d'optimalité et matrice de covariance d'erreur d'ébauche pour une configuration bi-grille	39
2.1	Les systèmes d'optimalité	39
2.1.1	Interaction one-way	40
2.1.2	Interaction two-way	42
2.1.3	Ajout du contrôle des erreurs de transfert inter-grilles	45
2.1.4	Passage d'un adjoint mono-grille à un adjoint bi-grille	50
2.2	Structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche	51
2.2.1	Cadre simplifié : l'ébauche haute résolution est obtenue par interpolation de l'ébauche basse résolution	51

2.2.2	Cadre général : l'ébauche est obtenue après intégration d'un modèle bi-grille	54
2.2.3	Détails des calculs dans le cas d'interaction one-way	55
2.2.4	Détails des calculs dans le cas d'interaction two-way	60
2.2.5	Conclusion	67
3	Description du modèle et des tests numériques	69
3.1	Le modèle	70
3.2	Simulation de référence	72
3.3	Configurations locales	77
3.3.1	Présentation	77
3.3.2	Conditions aux frontières ouvertes	79
3.4	Configuration des expériences d'assimilation	79
3.4.1	Expériences	79
3.4.2	Observations	80
3.5	Modélisation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche	80
3.5.1	Structure bi-grille de \mathbf{B}	80
3.5.2	Structure mono-grille de $\mathbf{B} : \mathbf{B}_H, \mathbf{B}_h$	81
3.6	Les fonctions coût	83
3.7	Validation des gradients	84
3.8	Illustration des covariances d'erreur d'ébauche : expériences "mono-obs"	85
3.9	Diagnostics physiques	90
3.9.1	Définitions	90
3.9.2	Une remarque sur les ondes internes et la présentation des courbes diagnostiques	90
4	Résultats numériques	93
4.1	Travaux antérieurs de contrôle des frontières ouvertes en océanographie	94
4.2	Décroissance des fonctions coût	95
4.3	Erreurs RMS	96
4.3.1	Domaine local à haute résolution ω_h	96
4.3.2	Domaine global à basse résolution $\Omega_H \setminus \omega_H$	98
4.4	Diagnostics physiques	101
4.4.1	Domaine local à haute résolution ω_h	101
4.4.2	Domaine global à basse résolution Ω_H	110
4.5	Algorithmes wic : étude des transferts inter-grilles	114
4.5.1	Contrôle de l'erreur d'interpolation	114
4.5.2	Contrôle de l'erreur de restriction (interaction <i>two-way</i>)	118
4.6	Etude des gradients	121
4.7	Assimilation des observations sur ω_H	123
4.7.1	Principe	123
4.7.2	Résultats en <i>one-way</i>	123
4.7.3	Résultats en <i>two-way</i>	126
4.8	Un préconditionnement multi-grille pour l'assimilation mono-grille	127
4.8.1	Algorithme	128
4.8.2	Résultats numériques	128
4.8.3	Application aux algorithmes bi-grilles	136
4.9	Conclusion	140

5 Applications des solveurs multi-grilles à l'assimilation variationnelle de données	143
5.1 L'approche multi-grille pour la résolution de systèmes	144
5.1.1 Quelques rappels sur les méthodes de relaxation	144
5.1.2 La correction par grille grossière	146
5.1.3 L'algorithme Full Approximation Scheme (FAS)	147
5.2 Application de l'algorithme FAS à l'assimilation variationnelle de données avec contrôle de la condition initiale	148
5.2.1 L'algorithme 4D-Var FAS	148
5.2.2 Propriétés de l'algorithme	150
5.2.3 Application au cas d'une équation de Burgers 1-D	153
5.3 Application de l'algorithme FAS à l'assimilation variationnelle de données avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux frontières	155
5.3.1 L'algorithme 4D-Var FAS	156
5.3.2 Propriétés de l'algorithme	157
5.3.3 Applications au cas d'un modèle shallow water 2-D	161
5.4 Conclusion	170
 Conclusion et perspectives	 171
 A Structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche	 177
A.1 Cadre simplifié : l'ébauche haute résolution est obtenue par interpolation de l'ébauche basse résolution	177
A.1.1 Erreur d'ébauche	177
A.1.2 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche	178
A.2 L'ébauche est obtenue après intégration d'un modèle bi-grille en interaction one-way dans un cas non-linéaire	179
A.2.1 Erreur d'ébauche	180
A.2.2 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche	182
A.3 L'ébauche est obtenue après intégration d'un modèle bi-grille en interaction two-way dans un cas non-linéaire	185
A.3.1 Erreur d'ébauche	186
A.3.2 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche	188
 B Applications numériques : hauteur d'eau, vitesses et vorticité des solutions optimales	 193
B.1 Champs hauteur d'eau-vitesse et champs de vorticité des solutions haute résolution	193
B.2 Algorithme mono-grille : effet de l'assimilation sur la valeur des conditions aux frontières	209

Introduction

Les évolutions des sociétés dans lesquelles nous vivons et de nos modes de vie ont fait croître durant ce dernier siècle nos besoins en prévision aussi bien de l'état de l'atmosphère que de l'état de l'océan. Ces besoins sont de natures variées et portent sur des échelles spatio-temporelles multiples. La nécessité d'obtenir des prévisions à court terme précises a entraîné dans un premier temps le développement de la météorologie opérationnelle dont nous voyons tous les jours une application (le bulletin météorologique du journal télé), puis celui relativement récent de l'océanographie opérationnelle. L'exemple des zones côtières, où l'activité humaine est intense aussi bien en mer que sur terre, illustre à merveille les enjeux de société auxquels nous sommes confrontés et pour lesquels il est important de développer notre capacité à comprendre et prévoir la façon dont notre milieu naturel évolue. Ces enjeux sont notamment de nature économique (pêche, navigation, champs pétrolifères off-shore, tourisme, etc..) ou bien liés à des aspects de sécurité civile (ouragans, pollutions liées aux naufrages de super tanker, etc..).

Parallèlement à cela, durant ce dernier quart de siècle, nous avons pris conscience de l'impact que nous avons sur le climat, créant ainsi de nouveaux besoins en terme de prévision. Les problèmes liés au réchauffement climatique nécessitent, en effet, des prévisions à long terme précises, afin de pouvoir anticiper et prévenir au mieux les catastrophes humaines potentielles qui en découleraient. Nos modes de vie dépendant ainsi très fortement des aléas climatiques, à court et à long terme, il semble nécessaire de pouvoir prévoir avec précision l'état de l'atmosphère et des océans.

Pour cela, une première source d'information est l'utilisation des modèles numériques du système dont on cherche à prévoir les états. Les progrès constants réalisés dans les domaines de l'océanographie ou de la météorologie font que nous disposons actuellement de modèles sophistiqués et relativement précis. Néanmoins, ceux-ci comportent encore de multiples erreurs. Celles-ci peuvent être liées aux approximations de la théorie physique qui sont réalisées dans ces modèles (par exemple en océanographie l'approximation de Boussinesq ou bien l'approximation hydrostatique). Elles viennent également du fait que les modèles numériques sont discrets. Leurs erreurs de troncature dépendent à la fois des schémas numériques utilisés, ainsi que de la résolution du modèle. L'augmentation de celle-ci permettra naturellement de réduire ces erreurs de troncature. Néanmoins, les coûts de calculs pourront s'avérer prohibitifs. Enfin, il existe également des erreurs aux niveaux des forçages des modèles. Dans le cas des modèles d'océans, de nombreuses erreurs subsistent au niveau de la connaissance du vent, des flux de chaleur, de la bathymétrie, etc.. Ainsi, suivant l'utilisation de ces modèles, les prévisions obtenues pourront présenter des erreurs importantes. Cette seule source d'information ne peut donc suffire.

Une seconde source d'information de l'état de l'océan ou de l'atmosphère réside dans les mesures. L'utilisation de satellites (Topex-Poseidon, Jason I, ENVISAT, etc..) ou la mise en œuvre de campagnes en mer (bouées XBT, balises ARGO, mooring, etc..) ont permis à la com-

munauté océanographique de collecter une quantité importante d'informations sur l'état de la mer. Toutefois, ces informations sont réparties dans le monde de façon hétérogène en espace et en temps. Certaines zones des océans sont toujours inexplorées. Il faut ajouter à cela le fait que les observations présentent des erreurs liées aux instruments de mesure employés. Elles ne suffisent donc pas à elles seules à la définition d'un état initial en vue d'une prévision de l'océan.

Il est donc nécessaire de pouvoir combiner les informations provenant des modèles et celles provenant des observations dont nous disposons. C'est le but de l'assimilation de données. Ce terme englobe l'ensemble des techniques qui permettent de combiner, de la meilleure des façons possibles (dans un sens à définir), l'information mathématique contenue dans les équations et l'information physique provenant des observations en vue de reconstituer l'état d'un système. Ces méthodes sont utilisées maintenant depuis un certain nombre d'années aussi bien en météorologie qu'en océanographie, disciplines dans lesquelles elles ont fait leurs preuves.

Par ailleurs, nos besoins croissants en prévisions les plus précises possibles rendent nécessaire l'utilisation de modèles à très haute résolution et ce notamment en océanographie dans les zones côtières, où l'activité humaine y est la plus intense. La résolution des modèles de bassins n'étant pas adaptée aux échelles des phénomènes physiques qui nous intéressent dans ces zones, il est nécessaire d'augmenter la résolution des modèles sur ces zones d'intérêt. En effet, même si les capacités informatiques des centres opérationnels croissent de manière importante, il n'est pas encore envisageable d'utiliser des modèles de bassins à très haute résolution. Il apparaît donc nécessaire de pouvoir effectuer des raffinements de maillages locaux. C'est ce que font les systèmes de prévision opérationnels (FOAM ¹, MOON ², etc). La nécessité d'améliorer les prévisions sur ces zooms locaux amène alors naturellement à s'intéresser à la faisabilité de l'assimilation de données dans ces modèles dits emboîtés, ce qui a été très peu étudiée jusqu'à présent.

Dans ces systèmes opérationnels, les observations sont généralement assimilées dans chaque modèle de façons indépendantes. Les effets de l'assimilation dans un modèle se font alors sentir dans tout l'emboîtement selon la nature des interactions entre les modèles. Dans le cas d'interaction *one-way*, les conditions aux frontières pour la grille haute résolution proviennent d'une interpolation de la solution obtenue sur la grille à plus faible résolution. Ces interactions sont dites passives et peuvent être réalisées de manière *off-line*, l'intégration du modèle basse résolution étant indépendante du modèle haute résolution. Dans le cas d'interaction *two-way*, une rétroaction de la grille haute résolution vers la grille basse résolution est ajoutée. Ces interactions sont dites actives. Il faut cependant remarquer que les corrections apportées par l'assimilation dans chacun des modèles de l'emboîtement peuvent s'avérer incohérentes entre elles. Ceci est dû notamment au fait que les domaines sur lesquels s'appuient les modèles sont de différentes tailles et résolutions, et que les échelles physiques représentées par ces modèles sont différentes. Peu de travaux ont abordé à l'heure actuelle ce problème d'une assimilation de données cohérente simultanément sur plusieurs grilles emboîtées. Citons toutefois l'approche novatrice de Barth et *al* [2], [3] développée dans le cadre de méthodes stochastiques d'assimilation de données (filtre de Kalman), qui introduit un vecteur d'état "généralisé", regroupant les différents vecteurs d'état présents dans l'emboîtement. Une étude bibliographique des travaux sur cette thématique est faite au chapitre 1. Dans le contexte des méthodes variationnelles d'assimilation de données toutefois, aucune étude n'a encore été réalisée à notre connaissance sur leur application à des systèmes de modèles emboîtés. C'est précisément sur ce sujet que va porter notre travail, qui

¹<http://www-unix.mcs.anl.gov/foam/index.html>

²<http://www.moon-oceanforecasting.eu/>

va consister à mettre en place des algorithmes d'assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés.

Nos objectifs sont multiples. Ainsi, un premier intérêt des raffinements de maillages est l'amélioration de la solution d'un modèle basse résolution, en effectuant des zooms là où la physique le nécessite. La question de la formulation de l'assimilation de données dans de tels modèles se pose alors, sachant que ceux-ci présentent plusieurs grilles interagissant les unes avec les autres. De plus, il faut noter qu'il serait intéressant en terme d'assimilation de pouvoir adapter localement la résolution des modèles à celles des observations. Dans le cas de l'océanographie, les campagnes en mer permettent d'obtenir une quantité importante d'observations sur une zone géographique souvent très localisée. Il serait ainsi judicieux de pouvoir effectuer des zooms sur ces zones afin d'exploiter au mieux toute l'information dont nous disposons.

Comme dit plus haut, dans de nombreux centres océanographiques de prévisions opérationnelles, un modèle global est utilisé pour spécifier les conditions aux limites de modèles côtiers locaux haute résolution. L'assimilation variationnelle de données est réalisée localement et de façon indépendante dans chaque modèle. La question qui se pose à nous est de savoir s'il serait possible d'améliorer les prévisions locales à haute résolution en appliquant l'assimilation de données au système emboîté vu dans sa globalité. L'algorithme mis en place devra également respecter les contraintes matérielles de la prévision opérationnelle.

Le plan de cette étude est le suivant. Dans un premier temps, nous présentons les méthodes classiques d'assimilation de données et nous donnons une formulation de l'emboîtement de modèles. Nous posons également le problème de l'assimilation variationnelle de données pour le cas général d'un emboîtement bi-grille. Nous posons ensuite les équations du modèle adjoint bi-grille pour le cas d'interaction *one-way* et *two-way* et nous étudions la structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche (chapitre 2). Nous présentons ensuite le cadre de nos expériences numériques (chapitre 3) ainsi que les résultats obtenus par nos algorithmes d'assimilation bi-grilles (chapitre 4). Enfin, nous proposons des pistes pour la mise en oeuvre d'un algorithme d'assimilation variationnelle de données basé sur les méthodes d'optimisation multi-grilles (chapitre 5).

Chapitre 1

Emboîtement de modèles et assimilation de données

Sommaire

1.1	L'assimilation de données	12
1.2	Notations	12
1.3	Approche stochastique	14
1.3.1	Le filtre de Kalman	14
1.3.2	Le problème des non-linéarités : le filtre de Kalman étendu	16
1.3.3	Implémentation réaliste : les filtres de rang réduit	16
1.4	Approche variationnelle	19
1.4.1	4D-Var	19
1.4.2	4D-Var incrémental	20
1.4.3	Méthode adjointe	21
1.4.4	Le rôle de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B}	23
1.4.5	Un préconditionnement remarquable	24
1.5	Emboîtement de modèles : définitions et notations	25
1.5.1	Grilles et fonctions de grille	25
1.5.2	Produit scalaire L^2 discret sur un maillage	26
1.5.3	Opérateurs inter-grilles et décomposition d'échelles	26
1.6	Formulations de l'emboîtement de modèles	26
1.6.1	Interaction one-way	27
1.6.2	Interaction two-way	28
1.7	L'assimilation de données bi-grille	29
1.7.1	Etat de l'art de l'assimilation multi-grille	29
1.7.2	Définitions	31
1.7.3	Formulations	34
1.7.4	Vers le couplage de modèles	35

Le but de ce chapitre est d'introduire d'une part les outils relatifs à l'assimilation de données et aux théories de l'emboîtement de modèles, et d'autre part de présenter l'état de l'art associé.

Dans un premier temps, nous introduisons dans ce chapitre le concept d'assimilation de données. Nous présentons les grandes classes de méthodes qui lui sont associées.

Dans un second temps, nous nous intéressons aux problèmes d'emboîtement de modèles (ou *nesting*). Nous introduisons les notations usuelles et nous présentons différentes approches.

Enfin, nous posons le problème de l'assimilation variationnelle pour le cas général d'un modèle bi-grille.

1.1 L'assimilation de données

Soit un système physique, sur lequel on dispose de différentes sources d'informations : modélisations mathématiques, observations, etc. Le terme "assimilation de données" désigne l'ensemble des techniques qui permettent de combiner, de la meilleure des façons possibles (dans un sens à définir), l'information mathématique contenue dans les équations et l'information physique provenant des observations, en vue de reconstituer l'état d'un système. De telles méthodes sont couramment introduites dans des domaines tels que l'océanographie ou la météorologie. En effet, pour les fluides géophysiques, chaque situation est unique ; il est donc nécessaire d'introduire des données d'observation dans la modélisation. Ainsi que ce soit dans le but d'analyser historiquement un phénomène climatique ou océanique, ou bien que ce soit dans le but de faire de la prévision (recherche de la meilleure condition initiale pour le modèle), des méthodes d'assimilation de données sont employées.

Ces méthodes peuvent être classées suivant deux catégories : l'approche stochastique basée sur la théorie de l'estimation statistique (filtre de Kalman,..) et l'approche variationnelle basée sur la théorie du contrôle optimal.

1.2 Notations

Nous allons par la suite définir les différents intervenants de l'assimilation de données. Le formalisme des notations correspond à celui introduit par IDE *et al.* (1997) [31]. Ainsi, pour être succinct, les minuscules italiques représenteront des valeurs scalaires, les majuscules $M, H, ..$ désigneront des opérateurs non linéaires. Des minuscules "grasses", par exemple \mathbf{y} , seront utilisées pour représenter des vecteurs tandis que les majuscules "grasses" représenteront des matrices ou des opérateurs linéaires.

Certaines variables seront notées avec des exposants a, f, b, t : l'exposant a représentera l'état analysé (produit par l'assimilation), le f représentera les différentes prévisions (forecast), le b l'ébauche (premier itéré ou background) et enfin le t représentera l'état "vrai" (true).

Le modèle M

Le modèle décrit l'évolution du fluide. Il s'écrit sous la forme d'un système continu d'équations aux dérivées partielles non linéaires, M représente alors le modèle discret.

Il peut être écrit de façon semi-discretisée en espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = M(\mathbf{x}(t)) & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec \mathbf{x} vecteur d'état du système.

Le modèle M peut être linéarisé au voisinage de \mathbf{x}_0 et on pose :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \quad (1.2)$$

Le vecteur d'état \mathbf{x}

Ce vecteur représente l'ensemble des variables du modèle. Ainsi \mathbf{x}_i correspond à l'état au temps t_i . Il est obtenu par propagation via le modèle M depuis l'état initial.

Le vecteur d'observation \mathbf{y}

Ce vecteur représente les observations disponibles pendant l'intervalle de temps correspondant au cycle d'assimilation. Celles-ci sont de natures très diverses et proviennent de sources multiples (satellites, données in-situ)

L'opérateur d'observation discret H

Cet opérateur permet de faire le lien entre le vecteur d'état du modèle et les observations disponibles. En effet celles-ci ne sont pas nécessairement localisées sur les différents points de grille du modèle, ou ne sont pas de même nature que les variables du modèle.

Notons \mathbf{y}_i les n observations présentes au temps t_i : $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^n$. Elles sont reliées à l'état continu \mathbf{x}^c par :

$$\mathbf{y}_i = H_i^c(\mathbf{x}_i^c) + \epsilon_i^m \quad (1.3)$$

avec H_i^c l'opérateur d'observation continu au temps t_i et ϵ_i^m les erreurs de mesure à ce même instant. Nous supposons que ces erreurs sont indépendantes de l'état continu.

Notons \mathbf{x}^t l'état vrai. Il correspond à la projection de l'état continu \mathbf{x}^c sur l'espace du vecteur d'état :

$$\mathbf{x}_i^t = \mathbf{\Pi} \mathbf{x}_i^c \quad (1.4)$$

Il représente ainsi la réalité discrétisée.

Nous introduisons alors l'opérateur d'observation discret H_i au temps t_i . L'observation \mathbf{y}_i s'exprime alors

$$\mathbf{y}_i = H_i(\mathbf{x}_i^t) + \epsilon_i \quad (1.5)$$

avec ϵ_i l'erreur d'observation. Elle est définie comme la somme de l'erreur de mesure ϵ_i^m et d'une erreur dite de représentativité [36] notée ϵ_i^r correspondant aux erreurs engendrées par la représentation dans un espace discret de la réalité continue. Elle s'écrit :

$$\epsilon_i^r = H_i^c(\mathbf{x}_i^c) - H_i(\mathbf{x}_i^t) \quad (1.6)$$

Cet opérateur peut être linéarisé autour de la trajectoire via la formule :

$$\mathbf{H}_i = \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i) \quad (1.7)$$

La matrice de covariance d'erreur d'observation \mathbf{R}_i

La matrice de covariance de l'erreur d'observation \mathbf{R}_i à l'instant t_i est définie par

$$\mathbf{R}_i = E[\epsilon_i \epsilon_i^T] \quad (1.8)$$

avec ϵ_i l'erreur d'observation à l'instant t_i .

Nous définissons alors la norme $\|\cdot\|_o$, associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ sur l'espace des observations \mathcal{O} par :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{O}^2, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_o = \langle \mathbf{u}, \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v} \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien sur \mathcal{O} et \mathbf{R} est la matrice de covariance d'erreur d'observation, supposée fonction du temps.

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B}

Nous appelons l'ébauche \mathbf{x}^b la condition initiale de notre problème d'assimilation que l'on a a priori. L'erreur d'ébauche ϵ^b se définit alors par :

$$\epsilon^b = \mathbf{x}^b - \mathbf{x}^t \quad (1.9)$$

où \mathbf{x}^t correspond à "l'état vrai".

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche vaut

$$\mathbf{B} = E[\epsilon^b \epsilon^{bT}] \quad (1.10)$$

Nous définissons alors la norme $\|\cdot\|_B$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ sur l'espace du vecteur d'état par :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_B = \langle \mathbf{u}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{v} \rangle$$

1.3 Approche stochastique

Nous présentons succinctement dans cette partie les méthodes liées à l'approche statistique de l'assimilation de données. Le but n'est pas d'être exhaustif, mais simplement de présenter les principales notions, que nous reprendrons plus loin lorsque nous présenterons l'état de l'art sur l'assimilation de données dans un cadre multi-grille (cf §1.7.1). Les méthodes stochastiques d'assimilation de données reposent essentiellement sur le filtre de Kalman [33], qui est un filtre optimal pour des problèmes linéaires. Le terme "filtrage" signifie que seules les observations passées et présentes sont prises en compte pour l'estimation de l'état le plus probable du système (contrairement par exemple à un "lissage" qui prend aussi en compte les observations futures). Pour une description détaillée de l'approche statistique de l'assimilation de données et des différentes variantes du filtrage de Kalman, on pourra consulter par exemple Evensen (2007) [23] ou Bertino et al (2003) [4].

1.3.1 Le filtre de Kalman

Le principe du filtre de Kalman repose sur la recherche du B.L.U.E. (Best Linear Unbiased Estimator). Il s'agit d'ajuster l'état du modèle afin qu'il coïncide le mieux possible avec les observations présentes. Celles-ci sont disponibles à divers instants t_k , l'indice k permettant ainsi par la suite de repérer au niveau de quelle observation se situe l'algorithme. L'assimilation

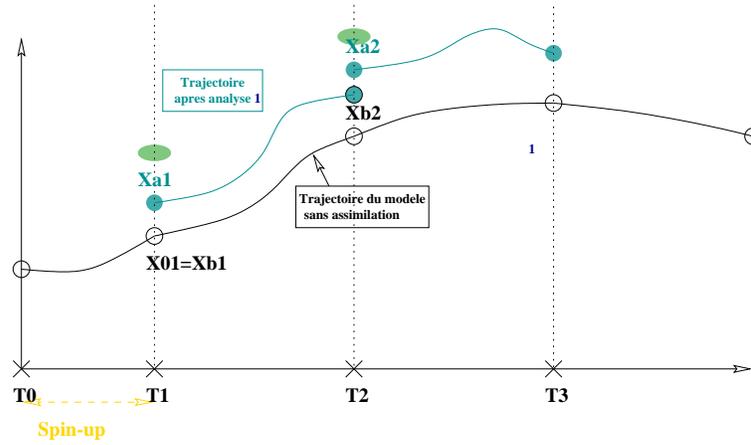


FIG. 1.1 – Principe du filtrage en assimilation de données

de données via le filtre de Kalman se déroule en deux phases : une phase d'analyse et une de prévision. L'étape de prévision permet de fournir, comme son nom l'indique, une prévision de l'état courant du système. Elle va nécessiter l'emploi du modèle : l'état courant va être obtenu après intégration des équations du modèle depuis l'état analysé précédent du système (1.11). Cette phase va fournir également la matrice de covariance des erreurs de prévision, \mathbf{P}^f , correspondant à la propagation de l'erreur d'analyse précédente via le modèle, à laquelle on ajoute une estimation \mathbf{Q} de l'erreur de modèle (1.11).

L'étape d'analyse va réaliser une estimation de l'état du système en corrigeant l'état courant à partir des écarts aux observations, et va fournir la matrice de covariance des erreurs d'analyse, \mathbf{P}^a . Cela va nécessiter la connaissance de la matrice de covariance de l'erreur d'observation, \mathbf{R} , regroupant les erreurs de mesure et de représentativité par la grille spatio-temporelle du modèle.

Le modèle \mathbf{M} ainsi que l'opérateur d'observation \mathbf{H} sont, dans ce cas de figure, supposés linéaires.

D'où l'algorithme du filtre de Kalman :

Prévision

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^f &= \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{x}_k^a \\ \mathbf{P}_{k+1}^f &= \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_k \end{aligned} \quad (1.11)$$

Analyse

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{x}_{k+1}^f + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^f) \\ \mathbf{P}_{k+1}^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^f \end{aligned} \quad (1.12)$$

où \mathbf{K} est appelée la matrice de gain de l'analyse statistique. C'est la matrice de gain optimale qui minimise la variance de l'erreur d'analyse.

Le principe de l'assimilation via un filtre de Kalman est représenté figure 1.1

1.3.2 Le problème des non-linéarités : le filtre de Kalman étendu

Dans la pratique, le modèle dynamique M n'est pas linéaire, de même que l'opérateur d'observation H . Il est donc nécessaire dans ce cas d'adapter le filtre de Kalman.

Pour les modèles faiblement non-linéaires, on généralise l'algorithme du filtre de Kalman en faisant intervenir le modèle linéaire tangent \mathbf{M} , ainsi que le linéaire tangent \mathbf{H} de l'opérateur d'observation (Jazwinski [32]). On obtient ainsi \mathbf{M} et \mathbf{H} par :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{k,k+1} &= \frac{\partial M_{k,k+1}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k^a) \\ \mathbf{H}_{k+1} &= \frac{\partial H_{k+1}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{k+1}^f)\end{aligned}\quad (1.13)$$

Le vecteur d'état analysé \mathbf{x}^a sera alors propagé par le modèle non linéaire, tandis que les matrices de covariance d'erreur de prévision \mathbf{P}^f et d'analyse \mathbf{P}^a le seront par les différents modèles linéaires tangents. On obtient alors le système suivant :

Prévision

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1}^f &= M_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a) \\ \mathbf{P}_{k+1}^f &= \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}\quad (1.14)$$

Analyse

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{x}_{k+1}^f + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}^f)) \\ \mathbf{P}_{k+1}^a &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1}^f\end{aligned}\quad (1.15)$$

On n'obtient plus alors la solution optimale (au sens où la variance de l'erreur d'analyse ne sera plus minimale) mais une solution approchée.

1.3.3 Implémentation réaliste : les filtres de rang réduit

Outre les problèmes liés à la non optimalité du filtre de Kalman étendu et à la méconnaissance des matrices \mathbf{P}_0 , \mathbf{Q} et \mathbf{R} qui peuvent entraîner une certaine inefficacité du filtre, le problème lié à la taille du vecteur d'état pour des modèles réalistes (de l'ordre de 10^6 - 10^7) rend impossible son implémentation complète. L'idée est alors d'approcher l'espace complet des covariances d'erreur par un sous-espace de dimension réduite. Il est en effet fréquent que la quasi-totalité de la dynamique du modèle puisse être déterminée, à chaque instant, par la donnée d'un nombre limité de variables, ou de combinaisons linéaires de variables (appelés modes dominants). Nous faisons alors l'hypothèse que la plus grande part des statistiques d'erreur est due à ces modes. Notons p le nombre de modes retenus. Les différents filtres de rang réduits vont dépendre essentiellement de la façon dont on approche ces modes. De plus, les matrices de covariance d'erreur étant symétriques définies positives, elles peuvent s'écrire $\forall k$, $\mathbf{P}_k^f = \mathbf{S}_k^f \mathbf{S}_k^{fT}$, $\mathbf{P}_k^a = \mathbf{S}_k^a \mathbf{S}_k^{aT}$ et $\mathbf{Q}_k = \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{\Sigma}_k^T$. Ces méthodes de rang réduites ne vont plus faire intervenir directement ces matrices, mais leur racine carrée.

1.3.3.1 Le filtre RRSQRT

Pour le *Reduced Rank Square Root Filter* de Verlaan et Heemink [54], les modes sont directement définis à partir de la matrice $\mathbf{S}_k^a \mathbf{S}_k^{aT}$. Ils vont correspondre aux p vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus importantes de cette matrice.

L'algorithme se base de nouveau sur le filtre de Kalman étendu. Posons $\Psi_k = \mathbf{H}_k \mathbf{S}_k^f$, il s'écrit alors :

Prévision

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^f &= M_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a) \\ \mathbf{S}_{k+1}^f &= [\mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{S}_{k+1}^a, \Sigma_k] \\ \mathbf{P}_{k+1}^f &= \mathbf{S}_{k+1}^f \mathbf{S}_{k+1}^{fT} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Analyse

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{S}_{k+1}^f \Psi_{k+1}^T (\Psi_{k+1} \Psi_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{x}_{k+1}^f + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}^f)) \\ \mathbf{S}_{k+1}^a &= \mathbf{S}_{k+1}^f [\mathbf{I} - \Psi_{k+1}^T (\Psi_{k+1} \Psi_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \Psi_{k+1}]^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{P}_{k+1}^a &= \mathbf{S}_{k+1}^a \mathbf{S}_{k+1}^{aT} \end{aligned} \quad (1.17)$$

En faisant intervenir des troncatures des racines carrées des matrices de covariance d'erreur, les coûts de calcul de l'algorithme peuvent devenir acceptables dans le cas d'applications réalistes.

1.3.3.2 Le filtre SEEK

Pour le *Singular Evolutive Extended Kalman Filter* proposé par Pham et al [43], le choix des modes se fait via une analyse EOF (Empirical Orthogonal Functions), ou analyse en composantes principales, d'une trajectoire précédente du modèle.

L'algorithme se base de nouveau sur le filtre de Kalman étendu. Il faut noter que durant la phase de prévision, les p modes d'erreur évoluent numériquement avec le modèle. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}_p \quad [\mathbf{S}_{k+1}^f]_i &= M_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a + [\mathbf{S}_k^a]_i) - M_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a) \\ &\approx \mathbf{M}_{k,k+1} [\mathbf{S}_k^a]_i \end{aligned} \quad (1.18)$$

De plus, le problème de l'estimation de l'erreur modèle étant très complexe, un artifice assez simple consiste à utiliser un poids numérique $\rho \in]0, 1]$ appelé "facteur d'oubli", que l'on applique au calcul de la matrice de covariance des erreurs de prévision. Ainsi on a

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \frac{1}{\rho} \mathbf{S}_{k+1}^f \mathbf{S}_{k+1}^{fT} \quad (1.19)$$

Au final, l'algorithme s'écrit :

Initialisation

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k=0} &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{P}_{k=0}^f &= \mathbf{S}_0^f \mathbf{S}_0^{fT} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Prévision

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1}^f &= M_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a) \\
\forall i \in \mathbb{N}_p \quad [\mathbf{S}_{k+1}^f]_i &= M_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a + [\mathbf{S}_k^a]_i) - M_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a) \\
\mathbf{P}_{k+1}^f &= \frac{1}{\rho} \mathbf{S}_{k+1}^f \mathbf{S}_{k+1}^{fT}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Analyse

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1}^f &= \mathbf{S}_{k+1}^f \mathbf{S}_{k+1}^{fT} \\
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{S}_{k+1}^f (\mathbf{I} + (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f)^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f))^{-1} (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f)^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} \\
\mathbf{x}_{k+1}^a &= \mathbf{x}_{k+1}^f + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^f) \\
\mathbf{P}_{k+1}^a &= \mathbf{S}_{k+1}^f (\mathbf{I} + (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f)^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{S}_{k+1}^f))^{-1} \mathbf{S}_{k+1}^{fT}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

1.3.3.3 Le filtre de Kalman d'ensemble

Le filtre de Kalman d'ensemble (Evensen [21],[22]) est basé sur une méthode de Monte Carlo. Il consiste à remplacer la propagation explicite des matrices de covariance par des estimations obtenues en générant plusieurs analyses et prévisions, à partir de perturbations des observations, du modèle et de l'ébauche.

Notons N la taille de notre ensemble.

Initialisation

Nous perturbons l'ébauche par une erreur ϵ^b de moyenne nulle et de distribution gaussienne

$$\begin{aligned}
\forall j \in \mathbb{N}_N \quad \mathbf{x}^{b,j} &= \mathbf{x}^b + \epsilon^{b,j} \\
\mathbf{P}^b &= \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \epsilon^{b,jT} \epsilon^{b,j}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Prévision

Notons $\forall j \in \mathbb{N}_N \quad M_{k,k+1}^j$ des perturbations du modèle $M_{k,k+1}$ (perturbation sur les forçages par exemple). Elles vont permettre de simuler le comportement de l'erreur modèle (supposée de moyenne nulle et de covariance \mathbf{Q}_k).

$$\begin{aligned}
\forall j \in \mathbb{N}_N \quad \mathbf{x}_{k+1}^{f,j} &= M_{k,k+1}^j(\mathbf{x}_k^{a,j}) \\
\mathbf{x}_{k+1}^f &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{k+1}^{f,j} \\
\mathbf{P}_{k+1}^f &= \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_{k+1}^{f,j} - \mathbf{x}_{k+1}^f)^T (\mathbf{x}_{k+1}^{f,j} - \mathbf{x}_{k+1}^f)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Analyse

Nous perturbons les observations par une erreur ϵ^o de moyenne nulle et de covariance \mathbf{R}_{k+1} .

$$\forall j \in \mathbb{N}_N \quad \mathbf{y}_{k+1}^j = \mathbf{y}_{k+1} + \epsilon^{o,j} \tag{1.25}$$

L'analyse suit les équations du filtre de Kalman étendu.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^f \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \\
\forall j \in \mathbb{N}_N \quad \mathbf{x}_{k+1}^{a,j} &= \mathbf{x}_{k+1}^{f,j} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1}^j - H_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}^{f,j})) \\
\mathbf{x}_{k+1}^a &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_{k+1}^{a,j} \\
\mathbf{P}_{k+1}^a &= \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_{k+1}^{a,j} - \mathbf{x}_{k+1}^a)^T (\mathbf{x}_{k+1}^{a,j} - \mathbf{x}_{k+1}^a)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Nous constatons que ce filtre permet de prendre en compte implicitement les non-linéarités du modèle. Son principal défaut réside dans le nombre N relativement grand de simulations à réaliser. Néanmoins, ce filtre peut être appliqué en pratique pour des modèles réalistes, ce qui n'est pas le cas du filtre de Kalman, du fait de la taille des matrices de covariance d'erreur (cf §1.3.3).

1.4 Approche variationnelle

Introduites par Sasaki dès 1955 [47], les méthodes variationnelles sont basées sur la minimisation d'une fonction coût J mesurant les écarts entre l'état estimé et les données disponibles. Alors que dans le cadre du filtrage stochastique les observations n'étaient utilisées qu'une seule fois et n'influaient pas sur les calculs des divers estimés qui leurs étaient antérieurs, l'approche variationnelle va opérer globalement sur l'ensemble des observations disponibles dans la fenêtre d'assimilation pour réaliser la minimisation. Ainsi cette approche permet de calculer la trajectoire optimale du système et non plus la meilleure estimation de l'état à un instant d'observation.

1.4.1 4D-Var

La méthode du 4D-Var a pour but d'obtenir la trajectoire optimale sur une fenêtre de temps donnée, la période d'assimilation. Pour cela il est nécessaire de prendre en compte toutes les observations contenues dans cette fenêtre. Nous supposons que ces observations sont localisées temporellement aux N instants $(t_i)_{1 \leq i \leq N}$. A partir d'une ébauche \mathbf{x}^b de la condition initiale pour la phase d'assimilation sur une fenêtre donnée, l'algorithme 4D-Var va fournir une condition initiale optimisée (ou état analysé) \mathbf{x}^a , qui sera intégré par le modèle afin d'obtenir la trajectoire optimale. Cet état analysé est obtenu en minimisant la fonction coût

$$J(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (H_i[M_{0,i}(\mathbf{x}_0)] - \mathbf{y}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (H_i[M_{0,i}(\mathbf{x}_0)] - \mathbf{y}_i) \tag{1.27}$$

\mathbf{B} représente la matrice de covariance d'erreur d'ébauche. Elle correspond à la matrice \mathbf{P}_0^f présente dans le cadre du filtre de Kalman. Nous verrons dans le paragraphe 1.4.4 l'importance du rôle joué par cette matrice dans l'obtention de l'état analysé. Comme précédemment, les matrices \mathbf{R}_i représentent les covariances d'erreur d'observation aux temps t_i et les opérateurs H_i correspondent aux opérateurs d'observation aux instants t_i .

La condition initiale optimale $\mathbf{x}^a(t_0)$ est obtenue en résolvant l'équation :

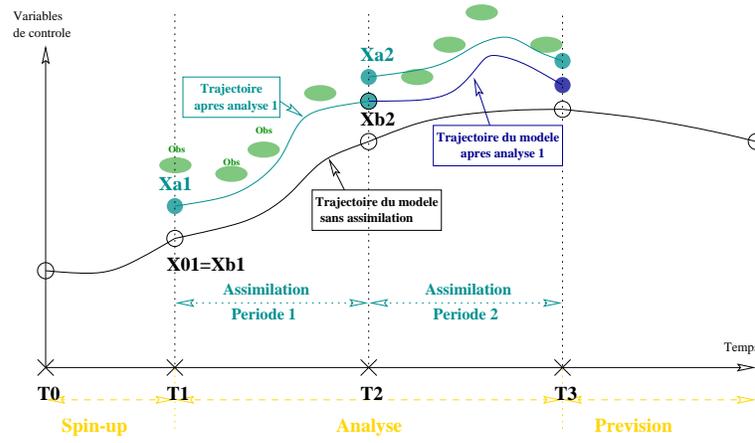


FIG. 1.2 – Assimilation par le 4D-Var

$$\nabla J(\mathbf{x}^a(t_0)) = 0 \quad (1.28)$$

Ce gradient sera obtenu par la méthode de l'adjoint décrite au §1.4.3.

Si les opérateurs H_i et M sont linéaires, J est alors quadratique, d'où l'unicité de la solution. De plus si le modèle est parfait, il existe une certaine équivalence entre les solutions trouvées par le 4D-Var et le filtre de Kalman : il est possible de montrer qu'en partant des mêmes données l'analyse 4D-Var à la fin de la période d'assimilation est égale à celle du filtre de Kalman au même instant. Dans le cadre de l'océanographie ou de la météorologie, ces opérateurs ne sont pas linéaires : on utilisera alors leurs linéaires tangents.

L'assimilation par le 4D-Var est schématisée figure 1.2

1.4.2 4D-Var incrémental

Le problème de la non linéarité des différents opérateurs entraîne un surcoût de calcul de la méthode ainsi que l'apparition de nombreux minima locaux pouvant altérer les performances du minimiseur. Une alternative consiste à modifier la fonction coût afin de la rendre quadratique : c'est la version incrémentale du 4D-Var proposé par Courtier et *al* [13].

La fonction coût ne va plus être minimisée par rapport à l'état \mathbf{x}_0 , mais par rapport à un incrément $\delta\mathbf{x}_0$ défini par $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}_0$. Les opérateurs H_i et M sont de plus linéarisés au voisinage de \mathbf{x}^b :

$$M_{0,i}(\mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}_0) \approx M_{0,i}(\mathbf{x}^b) + \mathbf{M}_{0,i}\delta\mathbf{x}_0 \quad \forall i \quad (1.29)$$

$$H_i(\mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}_0) \approx H_i(\mathbf{x}^b) + \mathbf{H}_i\delta\mathbf{x}_0 \quad \forall i \quad (1.30)$$

D'où la nouvelle fonction coût :

$$J(\delta\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i) \quad (1.31)$$

avec $\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i - H_i(M_{0,i}(\mathbf{x}^b))$ vecteur d'innovation.

Là encore, on recherche l'incrément minimisant cette fonction coût. On fera naturellement appel à la méthode de l'adjoint pour obtenir la valeur du gradient.

Il existe également des variantes basées sur les notions de "boucle externe" et "boucle interne". La notion de "boucle interne" correspond à la minimisation de la fonction coût via le calcul de l'incrément optimal (typiquement les boucles présentes dans le gradient conjugué). En pratique, cette minimisation ne sera pas menée jusqu'à l'obtention de l'optimum : seul un certain nombre prédéfini d'itérations seront réalisées. Afin de prendre en compte les non-linéarités du modèle et des opérateurs d'observations, une boucle dite "externe" est ajoutée au processus. Les vecteurs d'innovation sont régulièrement recalculés en utilisant la dynamique complète non-linéaire. Ceci permet de s'approcher de la minimisation de (1.27). Ce qui donne l'algorithme :

- **Initialisation** : $\mathbf{x}_0^0 = \mathbf{x}^b$
- **Tant que** $k \leq k_{max}$ ou $\|\delta\mathbf{x}^{a,k}\| < \varepsilon$!! boucle externe
- * $\mathbf{d}_i^k = \mathbf{y}_i^{obs} - H_i(M_{0,i}(\mathbf{x}_0^k))$
- * Chercher l'incrément d'analyse simplifié $\delta\mathbf{x}^{a,k}$ minimisant !! boucle interne

$$J(\delta\mathbf{x}^k) = \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^{kT} \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x}^k + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta\mathbf{x}^k - \mathbf{d}_i^k)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta\mathbf{x}^k - \mathbf{d}_i^k)$$

$$* \mathbf{x}_0^{k+1} = \mathbf{x}_0^k + \delta\mathbf{x}^{a,k}$$

1.4.3 Méthode adjointe

Considérons un modèle d'évolution semi-discretisé d'un système quelconque (par exemple un fluide) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = M(\mathbf{x}(t)) & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.32)$$

avec \mathbf{x} vecteur d'état du système. La variable de contrôle dans le cas présent sera la condition initiale \mathbf{x}_0 . Par souci de clarté, seule cette variable de contrôle est choisie ici ; il est cependant possible d'en contrôler d'autres, par exemple certains paramètres mal connus.

La fonction coût J s'exprime alors comme la somme d'un terme de régularisation J_b mesurant l'écart à l'ébauche et d'un terme mesurant l'écart aux observations J_0 :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|_o^2 dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b\|_B^2 \\ &= J_0(\mathbf{x}_0) + J_b(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Rechercher le minimum de cette fonction va nécessiter l'étude de ses points critiques, *ie* rechercher les points \mathbf{x}_0^* vérifiant :

$$\nabla J(\mathbf{x}_0^*) = 0 = \nabla J_b(\mathbf{x}_0^*) + \nabla J_0(\mathbf{x}_0^*) \quad (1.34)$$

Le gradient du terme J_b étant simple à calculer, intéressons-nous à celui du terme J_0 . La fonction J_0 ne dépendant pas explicitement de la variable de contrôle \mathbf{x}_0 , le calcul direct du gradient s'avère ardu voire impossible. Cependant, ce calcul est réalisable via la méthode de l'adjoint proposée par Lions en 1968 [35] et appliquée pour la première fois en météorologie par Le Dimet (1982) [18], et Le Dimet et Talagrand (1986) [20]. En voici une description sommaire.

Considérons $\hat{\mathbf{x}}$ la dérivée de Gâteaux de \mathbf{x} dans la direction h , et \hat{J} celle de J . Il vient alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(0) = h \end{cases} \quad (1.35)$$

$$\hat{J}(\mathbf{x}_0, h) = \int_0^T \langle \mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t), \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t) \rangle dt \quad (1.36)$$

Introduisons \mathbf{p} la variable adjointe. On multiplie alors l'équation précédente par \mathbf{p} et on intègre sur $[0, T]$:

$$\int_0^T \langle \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)}{\partial t}, \mathbf{p} \rangle dt = \int_0^T \langle \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{p} \rangle dt \quad (1.37)$$

Après une intégration par parties, il vient :

$$\langle \hat{\mathbf{x}}(T), \mathbf{p}(T) \rangle - \langle \hat{\mathbf{x}}(0), \mathbf{p}(0) \rangle = \int_0^T \langle \hat{\mathbf{x}}(t), \left[\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right]^T \mathbf{p}(t) + \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} \rangle dt \quad (1.38)$$

Si l'on définit \mathbf{p} comme la solution du modèle adjoint suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right]^T \mathbf{p}(t) = \mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{p}(T) = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

l'équation (1.38) devient alors :

$$- \langle \hat{\mathbf{x}}(0), \mathbf{p}(0) \rangle = \int_0^T \langle \mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t), \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t) \rangle dt \quad (1.40)$$

Il ne reste plus qu'à identifier avec l'équation (1.36) de $\hat{J}(\mathbf{x}_0, h)$, sachant que $\hat{J}(\mathbf{x}_0, h) = \langle \nabla J(\mathbf{x}_0), h \rangle$ pour obtenir :

$$\nabla J(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{p}(0) \quad (1.41)$$

En intégrant de manière rétrograde le modèle adjoint (1.39), il est donc possible d'avoir accès au gradient de la fonction coût. On peut donc minimiser J par une méthode de gradient.

Le système d'optimalité s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = M(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \right]^T \mathbf{p}(t) = \mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{p}(T) = 0 \\ \nabla J(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{p}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (1.42)$$

Remarque : il faut noter que cette méthode permet d'obtenir le gradient de J de façon exacte, et ce pour des coûts de calcul assez faibles : seules deux simulations (une pour le modèle direct et une pour le modèle adjoint) sont nécessaires. Une autre approche "simpliste", où l'on évaluerait le gradient par des taux d'accroissement $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_0) \approx \frac{J(\mathbf{x}_0 + \alpha \mathbf{e}_i) - J(\mathbf{x}_0)}{\alpha}$ nécessiterait un nombre de simulations du modèle direct de l'ordre de la dimension de l'espace de contrôle et ne fournirait pas un résultat exact.

1.4.4 Le rôle de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B}

Dans un souci de lisibilité des calculs, plaçons-nous dans le cas simplifié d'un algorithme 4D-Var incrémental où le modèle et les opérateurs d'observations sont linéaires. La fonctionnelle à minimiser s'écrit :

$$J(\delta \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i) \quad (1.43)$$

avec $\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{x}^b$ vecteur d'innovation.

Son gradient vaut :

$$\nabla J(\delta \mathbf{x}_0) = \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^N \mathbf{M}_{0,i}^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i) \quad (1.44)$$

L'incrément optimal $\delta \mathbf{x}_0^a$ vaut alors :

$$\delta \mathbf{x}_0^a = \left[\mathbf{B}^{-1} + \sum_{i=0}^N \mathbf{M}_{0,i}^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \right]^{-1} \sum_{i=0}^N \mathbf{M}_{0,i}^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{d}_i \quad (1.45)$$

Posons $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_N \end{bmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{0,1} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{0,N} \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & (\mathbf{O}) & \dots & (\mathbf{O}) \\ (\mathbf{O}) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (\mathbf{O}) \\ (\mathbf{O}) & \dots & (\mathbf{O}) & \mathbf{H}_N \end{bmatrix}$ et

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & (\mathbf{O}) & \dots & (\mathbf{O}) \\ (\mathbf{O}) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (\mathbf{O}) \\ (\mathbf{O}) & \dots & (\mathbf{O}) & \mathbf{R}_N \end{bmatrix}.$$

L'équation (1.45) s'écrit alors

$$\delta \mathbf{x}_0^a = [\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d} \quad (1.46)$$

En utilisant la formule de Sherman-Morrison-Woddbury [44],

$$[\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{B}^T [\mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T]^{-1} \quad (1.47)$$

il vient :

$$\delta \mathbf{x}_0^a = \mathbf{B} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T [\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T]^{-1} \mathbf{d} \quad (1.48)$$

Posons $\tilde{\mathbf{d}} = [\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T]^{-1} \mathbf{d}$. Cette correction dans l'espace des observations apparaît donc comme une pondération de l'écart du modèle aux données par les covariances d'erreur d'observation et d'erreur d'ébauche.

L'incrément d'analyse s'écrit alors

$$\delta \mathbf{x}_0^a = \mathbf{B} \sum_{i=0}^N \mathbf{M}_{0,i}^T \mathbf{H}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_i \quad (1.49)$$

L'intégration rétrograde du modèle adjoint permet alors de ramener ces corrections temporellement localisées jusqu'à l'instant initial, la physique du modèle permettant une diffusion spatiale et temporelle de l'information aux différentes variables d'états. L'incrément d'analyse apparaît finalement comme l'image par \mathbf{B} de la somme des ces différentes corrections. Cette matrice \mathbf{B} va donc permettre de nouveau une diffusion spatiale de la correction aux différentes variables du modèle à l'instant initial.

La correction apportée par l'algorithme 4D-Var étant à "l'image" de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} , le rôle de celle-ci est donc essentiel. Une mauvaise modélisation de celle-ci entrainera une "mauvaise" correction de la condition initiale, la solution optimale obtenue pouvant, par exemple, ne plus être acceptable physiquement.

1.4.5 Un préconditionnement remarquable

Nous pouvons remarquer que le calcul de la fonction coût J fait intervenir \mathbf{B}^{-1} , l'inverse de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche. Pour des systèmes de grandes tailles, cette inversion s'avère problématique. Or la matrice \mathbf{B} est symétrique définie positive. Il existe donc une matrice carrée définie positive \mathbf{S} , appelée racine carrée de \mathbf{B} , telle que

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{S}^T \quad (1.50)$$

Effectuons le changement de variables comme proposé par Courtier [12]

$$\chi = \mathbf{S}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 \quad (1.51)$$

Le problème d'optimisation devient

$$\min_{\chi} \tilde{J}(\chi) \quad (1.52)$$

avec $\tilde{J}(\chi) = J(\delta \mathbf{x}_0)$:

$$\tilde{J}(\chi) = \frac{1}{2} \chi^T \chi + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{S} \chi - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{S} \chi - \mathbf{d}_i) \quad (1.53)$$

La fonction coût dans ce nouvel espace de contrôle ne fait plus intervenir l'inverse de \mathbf{B} . Intéressons-nous au calcul de la hessienne de \tilde{J} que nous noterons \mathcal{H} . Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\chi) &= \frac{1}{2} \chi^T \chi + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{S} \chi - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{S} \chi - \mathbf{d}_i) \\ \nabla \tilde{J} &= \chi + \sum_{i=0}^N \mathbf{S}^T \mathbf{M}_{0,i}^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \mathbf{S} \chi - \mathbf{d}_i) \\ \mathcal{H} &= \mathbf{I} + \mathbf{S}^T \left(\sum_{i=0}^N \mathbf{M}_{0,i}^T \mathbf{H}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} \right) \mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.54)$$

La hessienne dans l'espace préconditionné apparaît donc comme la somme de l'identité et d'une matrice symétrique positive. De fait, sa plus petite valeur propre est supérieure ou égale à 1. Dans l'espace non préconditionné, la présence possible de valeurs propres proches de 0 peut dégrader le conditionnement de la hessienne, et peut ainsi diminuer de façon significative les performances du minimiseur. Ce changement de variables, en nous assurant de l'absence de petites valeurs propres, permet d'envisager de meilleures performances des routines de minimisation (cf Lorenc [37]).

1.5 Emboîtement de modèles : définitions et notations

Nous introduisons dans cette partie les outils mathématiques et les notations nécessaires à la modélisation des modèles multi-grilles.

1.5.1 Grilles et fonctions de grille

Soit Ω notre domaine d'étude : $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec $d = 2$ ou $d = 3$. Soit Ω_H un maillage de Ω de pas d'espace H constant dans toutes les directions.

Soit ω un sous-domaine de Ω . Soit ω_H un maillage régulier de taille de maille H , et soit ω_h un autre maillage de ω de pas d'espace h , avec $H = p.h$, $p \in \mathbb{N}$. Nous avons ainsi réalisé un raffinement de maillage localement (sur ω). Par la suite, Ω_H sera appelé le maillage basse résolution ou encore la grille grossière, et ω_h le maillage haute résolution ou la grille fine. La hiérarchie de grilles obtenue est illustrée figure 1.3.

Posons F_{Ω_H} (respectivement F_{Ω_h}) l'ensemble des fonctions de grilles définies sur Ω_H (respectivement Ω_h) : c'est l'ensemble des vecteurs définis sur la grille Ω_H (respectivement Ω_h). De la même manière, nous définissons F_{ω_h} comme l'ensemble des fonctions de grilles définies sur ω_h , F_{ω_H} l'ensemble des fonctions de grilles définies sur ω_H et enfin $F_{\partial\omega_h}$ l'espace des fonctions de grilles définies sur la frontière du domaine haute résolution $\partial\omega_h$.

1.5.2 Produit scalaire L^2 discret sur un maillage

Nous définissons le produit scalaire L^2 sur le maillage Ω_h par :

$$\forall (u_h, v_h) \in F_{\Omega_h}^2, \quad \langle u_h, v_h \rangle_h = h^d \sum_{x \in \Omega_h} u_h(x) v_h(x) \quad (1.55)$$

La norme euclidienne associée est définie par

$$\forall u_h \in F_{\Omega_h}, \quad \|u_h\|_h = \left[h^d \sum_{x \in \Omega_h} u_h(x)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.56)$$

Nous munissons de la même manière F_{Ω_H} de $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, le produit scalaire L^2 discret sur Ω_H .

1.5.3 Opérateurs inter-grilles et décomposition d'échelles

Soit I_H^h un opérateur linéaire d'interpolation de F_{Ω_H} dans F_{Ω_h} . Posons I_h^H l'opérateur adjoint de I_H^h . C'est un opérateur de restriction. Par définition, il vérifie

$$\forall (u_h, v_H) \in F_{\Omega_h} \times F_{\Omega_H}, \quad \langle I_h^H u_h, v_H \rangle_H = \langle u_h, I_H^h v_H \rangle_h \quad (1.57)$$

Notons \mathbf{I}_H^h et \mathbf{I}_h^H les représentations matricielles de I_H^h et I_h^H . Il vient alors

$$\mathbf{I}_h^H = \left(\frac{h}{H} \right)^d (\mathbf{I}_H^h)^T \quad (1.58)$$

\mathbf{I}_h^H étant une application linéaire et F_{Ω_h} étant de dimension finie, F_{Ω_h} se décompose de la manière suivante :

$$F_{\Omega_h} = \text{Ker}(\mathbf{I}_h^H) \oplus \text{Im}(\mathbf{I}_h^H)^T \quad (1.59)$$

Soit en utilisant (1.58),

$$F_{\Omega_h} = \text{Ker}(\mathbf{I}_h^H) \oplus \text{Im}(\mathbf{I}_H^h) \quad (1.60)$$

Donc

$$\forall \mathbf{x}_h \in F_{\Omega_h}, \exists (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_H) \in \text{Ker}(\mathbf{I}_h^H) \times F_{\Omega_H}, \quad \mathbf{x}_h = \mathbf{u}_h + \mathbf{I}_H^h \mathbf{v}_H. \quad (1.61)$$

$\mathbf{u}_h \in \text{Ker}(\mathbf{I}_h^H)$. Donc $\mathbf{I}_h^H \mathbf{u}_h = 0$. Ceci signifie que \mathbf{u}_h n'est pas visible sur la grille basse résolution : \mathbf{u}_h ne contient que des hautes fréquences.

Ainsi, \mathbf{x}_h s'écrit comme la somme d'un terme représentable par une fonction de la grille basse résolution et d'un terme traduisant les hautes fréquences invisibles pour la grille basse résolution. Nous obtenons ainsi une séparation des petites et des grandes échelles d'une grille de résolution h . Cette décomposition d'échelles interviendra au §1.7.2.4 lors de la définition des variables de contrôle du problème d'assimilation bi-grille.

1.6 Formulations de l'emboîtement de modèles

Soit un premier modèle évoluant dans le temps sur un maillage Ω_H (uniforme de pas d'espace horizontal H) du domaine Ω . Nous réalisons un raffinement local de maillage sur le domaine ω . Nous obtenons ainsi un second modèle, dit haute résolution, évoluant dans le temps sur un maillage ω_h (uniforme de pas d'espace horizontal h). Le modèle global est alors appelé modèle basse résolution. L'emboîtement des deux modèles est illustré figure 1.3. Nous présentons par la suite deux types d'interactions entre ces deux modèles.

1.6.1 Interaction one-way

Dans le cas d'interaction *one-way*, la solution du modèle basse résolution procure les conditions aux limites du modèle local à haute résolution via un opérateur d'interpolation I_H^h . Ces interactions sont dites passives : le modèle local haute résolution attend "passivement" que la solution basse résolution lui procure les conditions aux frontières et n'a aucune incidence sur celle-ci. Les équations semi-discrétisées du système emboîté sont les suivantes :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Domaine } \Omega_H & \text{Domaine } \omega_h \\
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1.62)
 \end{array}$$

avec I_H^h un opérateur d'interpolation de F_{Ω_H} dans $F_{\partial\omega_h}$. $\mathbf{x}_{\partial\omega}$ est donc l'interpolé du vecteur d'état basse résolution \mathbf{x}_h sur les frontières du domaine.

Une fois la discrétisation spatiale réalisée, il est également possible de raffiner temporellement nos modèles (c'est d'ailleurs ce qui est fait en général dans la pratique). Néanmoins, dans un souci de lisibilité, dans toute notre étude, nous supposons que les différents modèles ont le même pas de temps. Cette hypothèse ne s'avère pas restrictive dans la mesure où nous aurions alors à remplacer les interpolations spatiales par des interpolations spatio-temporelles. Les équations discrètes deviennent :

$$\begin{array}{cc}
 \text{Domaine } \Omega_H & \\
 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_H(t_{i+1}) = M_H^{i+1,i}(\mathbf{x}_H(t_i)) \quad \text{sur } \Omega_H \times \{t_0, \dots, t_N\} \\ \mathbf{x}_H(x, t_0) = \mathbf{x}_H^0 \end{array} \right. & \\
 \text{Domaine } \omega_h & (1.63) \\
 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_h(t_{i+1}) = M_h^{i+1,i}(\mathbf{x}_h(t_i), \mathbf{x}_{\partial\omega}(t_{i+1})) \quad \text{sur } \omega_h \times \{t_0, \dots, t_N\} \\ \mathbf{x}_h(x, t_0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega}(t_{i+1}) = I_H^h(\mathbf{x}_H(t_{i+1})) \quad \text{sur } \partial\omega_h \times \{t_1, \dots, t_N\} \end{array} \right. &
 \end{array}$$

où $M_H^{i+1,i}$ est le modèle basse résolution correspondant au passage du pas de temps i au pas de temps $i + 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 M_H^{i+1,i} : F_{\Omega_H} & \rightarrow & F_{\Omega_H} \\
 \mathbf{x}_H & \mapsto & M_H^{i+1,i}(\mathbf{x}_H)
 \end{array} \quad (1.64)$$

et $M_h^{i+1,i}$ le modèle local haute résolution correspondant au passage du pas de temps i au pas de temps $i + 1$.

$$\begin{array}{ccc}
 M_h^{i+1,i} : F_{\omega_h} \times F_{\partial\omega_h} & \rightarrow & F_{\omega_h} \\
 (\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) & \mapsto & M_h^{i+1,i}(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega})
 \end{array} \quad (1.65)$$

Les notations choisies pour les modèles semblent suggérer l'utilisation de schémas numériques explicites ($\mathbf{x}(t_{i+1})$ est obtenu connaissant $\mathbf{x}(t_i)$). Ceci est bien évidemment un abus de langage de notre part dans le but, là encore, de simplifier les notations.

1.6.2 Interaction two-way

Dans le cas d'interaction *two-way*, une rétroaction (ou *feedback*) du modèle haute résolution vers le modèle grossier est ajoutée. La solution du modèle basse résolution est réactualisée localement par la solution haute résolution via un opérateur de restriction G_h^H . Ces interactions sont dites actives : les deux modèles communiquent constamment entre eux. Les équations semi-discrétisées du système emboîté sont les suivantes :

$$\begin{array}{cc} \text{Domaine } \Omega_H & \text{Domaine } \omega_h \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_\omega) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_\omega = G_h^H(\mathbf{x}_h) \quad \text{sur } \dot{\omega}_H \times [0, T] \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \end{array} \quad (1.66)$$

Une fois la discrétisation temporelle réalisée, il vient :

Domaine Ω_H

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_H(t_{i+1}) = \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} M_H^{i+1,i}(\mathbf{x}_H(t_i)) + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{x}_\omega(t_{i+1}) \quad \text{sur } \Omega_H \times \{t_0, \dots, t_N\} \\ \mathbf{x}_H(x, t_0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_H^*(t_{i+1}) = M_H^{i+1,i}(\mathbf{x}_H(t_i)) \quad \text{sur } \Omega_H \times \{t_0, \dots, t_N\} \\ \mathbf{x}_\omega(t_{i+1}) = G_h^H(\mathbf{x}_h(t_{i+1})) \quad \text{sur } \dot{\omega}_H \times \{t_1, \dots, t_N\} \end{array} \right. \quad (1.67)$$

Domaine ω_h

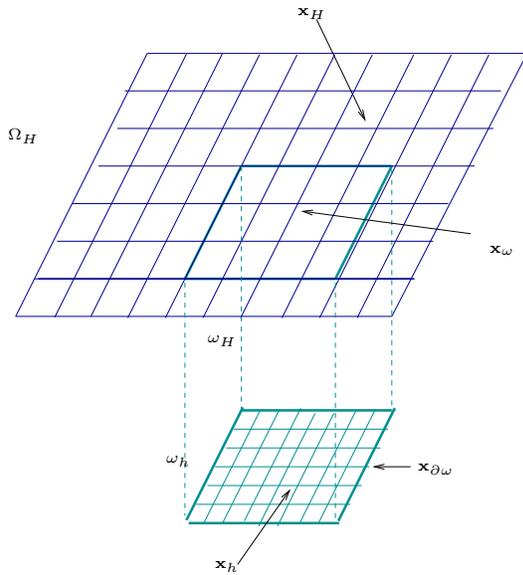
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_h(t_{i+1}) = M_h^{i+1,i}(\mathbf{x}_h(t_i), \mathbf{x}_{\partial\omega}(t_{i+1})) \quad \text{sur } \omega_h \times \{t_0, \dots, t_N\} \\ \mathbf{x}_h(x, t_0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega}(t_{i+1}) = I_H^h(\mathbf{x}_H^*(t_{i+1})) \quad \text{sur } \partial\omega_h \times \{t_1, \dots, t_N\} \end{array} \right.$$

où $\mathbf{J}_{\dot{\omega}_H}$ est un opérateur linéaire de F_{Ω_H} dans F_{Ω_H} (indicatrice de $\Omega_H \setminus \dot{\omega}_H$).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} : F_{\Omega_H} & \rightarrow & F_{\Omega_H} \\ \mathbf{x}_H & \mapsto & \begin{cases} \mathbf{x}_H & \text{sur } \Omega_H \setminus \dot{\omega}_H \\ 0 & \text{sur } \dot{\omega}_H \end{cases} \end{array} \quad (1.68)$$

et $\bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}$ est un opérateur linéaire de F_{ω_h} dans F_{Ω_H} (indicatrice de $\dot{\omega}_H$ et prolongement par zéro).

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} : F_{\omega_h} & \rightarrow & F_{\Omega_H} \\ \mathbf{x}_H & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega_H \setminus \dot{\omega}_H \\ \mathbf{x}_H & \text{sur } \dot{\omega}_H \end{cases} \end{array} \quad (1.69)$$



- \mathbf{x}_H correspond au vecteur d'état sur Ω_H .
- \mathbf{x}_h correspond au vecteur d'état sur ω_h .
- $\mathbf{x}_{\partial\omega}$ correspond à l'interpolation de \mathbf{x}_H sur les limites de ω .
- \mathbf{x}_ω correspond, dans le cas d'interactions *two-way*, à la restriction de la solution haute résolution sur le modèle grossier. Il est défini localement sur ω_H .

FIG. 1.3 – Notations de l'emboîtement

Notons que contrairement à l'interaction *one-way*, l'interaction *two-way* nécessite, sur le plan informatique, l'intégration simultanée des modèles.

Remarque : soit d_H le nombre de variables d'état du modèle basse résolution (par exemple la température, la salinité, les vitesses), d_h celui du modèle haute résolution. Alors, $\mathbf{x}_H \in F_{\Omega_H}^{d_H}$ et $\mathbf{x}_h \in F_{\omega_h}^{d_h}$. Par la suite, pour ne pas alourdir les notations, nous commettrons un abus de langage en appelant F_{Ω_H} (resp. F_{ω_h}) $F_{\Omega_H}^{d_H}$ (resp. $F_{\omega_h}^{d_h}$). Nous nous placerons ainsi dans le cas où chacun des modèles n'aurait qu'une variable d'état.

1.7 L'assimilation de données bi-grille

Dans un premier temps, nous présentons très succinctement quelques résultats importants sur l'assimilation de données pour des modèles multi-grilles. Ces travaux sont réalisés essentiellement avec une approche stochastique (filtre de Kalman).

Dans un second temps, à l'aide des notations introduites précédemment, nous posons le problème de l'assimilation variationnelle de données dite 4D-Var pour le cas générique d'un emboîtement bi-grille. Pour cela, nous redéfinissons au préalable quelques notions fondamentales dans ce contexte multi-grille.

1.7.1 Etat de l'art de l'assimilation multi-grille

Comme nous l'avons vu en introduction, les systèmes opérationnels d'assimilation de données utilisent de nos jours de façon courante des modèles emboîtés. Cependant, les observations sont généralement assimilées dans chaque modèle de façons indépendantes. C'est le cas par exemple

pour les systèmes FOAM ¹ (Argonne National Laboratory), ADRICOSM ² (mer Adriatique), MFSTEP et son successeur MOON ³ (mer Méditerranée). Les effets de l'assimilation dans un modèle se font sentir dans tout l'emboîtement selon la nature des interactions entre les modèles. Ainsi, les résultats de l'assimilation dans le modèle global basse résolution sont perceptibles dans les modèles locaux haute résolution via leurs conditions aux limites. Inversement, dans le cas d'interaction *two-way*, les effets de l'assimilation dans un modèle haute résolution sont perceptibles dans les modèles à plus basse résolution via la rétroaction. Cependant, les corrections apportées dans chacun des modèles peuvent s'avérer incohérentes entre elles, essentiellement au niveau des frontières. Ceci est dû notamment au fait que les domaines sur lesquels s'appuient les modèles sont de différentes tailles et que les échelles physiques représentées par ces modèles sont différentes.

Barth *et al* [2], [3] ont proposé une nouvelle approche permettant de résoudre ce problème dans ce type de système. Elle est basée sur une méthode d'assimilation stochastique (un filtre SEEK) pour laquelle on utilise un vecteur d'état "généralisé" regroupant les différents vecteurs d'état présents dans l'emboîtement ($\mathbf{x} = [\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_h]$ dans un cas bi-grille). Cette approche permet de bien prendre en compte les corrélations entre les différents modèles. L'assimilation d'observations dans un seul modèle permet alors une correction cohérente sur l'ensemble des modèles de l'emboîtement. Les tests réalisés dans une configuration réaliste dans la mer Ligure ont montré l'intérêt d'une telle méthode. Dans le cadre d'expériences jumelles dans le Golfe du Lion, Vandenbulcke *et al* [52] ont comparé les résultats de cette approche dans le cas d'interaction *two-way* avec ceux issus d'assimilations réalisées de façon indépendantes sur les différents modèles dans le cas d'interactions *one-way* et *two-way*. Ils ont constaté que l'utilisation d'emboîtement *two-way* permettait d'obtenir les meilleurs résultats, et que dans ce cas, l'approche utilisant le vecteur d'état multi-grille obtenait des résultats équivalents à une assimilation "indépendante" dans le modèle haute résolution. Ce résultat semble plutôt décevant mais peut s'expliquer par la configuration de l'emboîtement (erreur de la solution basse résolution relativement faible, interaction *two-way*).

A notre connaissance, l'approche variationnelle pour des modèles emboîtés a peu été étudiée. Gebbie *et al* [26] ont proposé une approche multi-grille séquentielle d'estimation des conditions aux frontières d'un modèle régional *eddy-resolving* par assimilation variationnelle de données. Ils proposent ainsi d'améliorer leur premier estimé via une phase d'assimilation à plus basse résolution, celle-ci ayant des coût de calculs beaucoup plus faibles.

Les algorithmes 4D-Var incrémental à simple troncature et à multiples troncatures proposés par Courtier *et al* [13] et repris notamment par Veersé dans sa thèse [53] apparaissent également comme des méthodes d'assimilation variationnelles multi-grilles. Ils reprennent la formulation de l'algorithme 4D-Var incrémental (cf §1.4.2), mais remplacent le modèle linéaire par des approximations obtenues via un opérateur de simplification, qui traduit généralement un changement de résolution spatiale. L'innovation est alors calculée à haute résolution via le modèle non-linéaire. La minimisation de l'écart à l'innovation se fait en utilisant le modèle simplifié à basse résolution. Bien évidemment, ces algorithmes ne permettent pas de faire de l'assimilation variationnelle de données dans des modèles emboîtés. Ils doivent plutôt être vus comme des versions du 4D-Var

¹<http://www-unix.mcs.anl.gov/foam/index.html>

²<http://www.bo.ingv.it/adricosm-partnership/>

³<http://www.moon-oceanforecasting.eu/>

incrémental avec une phase d'optimisation multi-grille.

1.7.2 Définitions

1.7.2.1 Observations et opérateur d'observation

Supposons disposer d'observations sur le domaine Ω . La présence des différentes grilles à différentes résolution fait que certaines de ces observations seront plus adaptées à une grille qu'à une autre. Nous souhaitons donc pouvoir choisir les observations que nous assimilons sur chacune des grilles Ω_H et ω_h . Pour cela, nous définissons \mathcal{O}_H et \mathcal{O}_h les espaces des observations assimilées sur la grille Ω_H et sur la grille ω_h . Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_H &= \{\mathbf{y}_H \text{ est assimilée sur } \Omega_H\} \\ \mathcal{O}_h &= \{\mathbf{y}_h \text{ est assimilée sur } \omega_h\}\end{aligned}\tag{1.70}$$

Cette formulation, qui affecte un espace d'observation à une grille, permet une grande liberté dans le choix des observations qui seront assimilées sur chaque niveau de grilles. De plus, une même observation pourra être assimilée sur la grille haute résolution ω_h et le sous-domaine ω_H de la grille basse résolution Ω_H , ce qui pourra s'avérer intéressant comme nous le verrons au §4.7

Faute de temps, la question du choix optimal des observations pour chacune des grilles n'a pas été abordée dans ce manuscrit. Une telle étude sera a priori fortement dépendante de la configuration du modèle et de la nature des observations assimilées, et les résultats obtenus sur une configuration données seront sans doute difficilement généralisables à l'ensemble des systèmes d'assimilation. De fait, elle nous apparait vraiment intéressante lors de la mise en place par exemple d'un système d'assimilation (scénarii satellitaires, campagnes de mesures en mer, etc) ou lors des phases d'optimisation des performances de ce système d'assimilation (choix des observations).

Nous définissons les opérateurs d'observation discrets ainsi que les matrices de covariance d'erreur d'observation sur la grille basse résolution (H_H et \mathbf{R}_H^i) et sur la grille haute résolution (H_h et \mathbf{R}_h^i) exactement de la même manière qu'au §1.1.

1.7.2.2 Vecteur d'état

Soit \mathbf{x} le vecteur d'état de notre modèle bi-grille. Il est composé des vecteurs d'état de chacune des deux grilles. Il s'écrit ainsi :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_H \\ \mathbf{x}_h \end{bmatrix}$$

où \mathbf{x}_H correspond au vecteur d'état basse résolution et \mathbf{x}_h au vecteur d'état haute résolution.

1.7.2.3 Condition initiale

Soit \mathbf{x}^0 la condition initiale de notre modèle. Elle correspond aux conditions initiales sur chacune des grilles. Elle s'écrit :

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_h^0 \end{bmatrix}$$

où \mathbf{x}_H^0 correspond à la condition initiale sur la grille grossière et \mathbf{x}_h^0 à celle sur la grille fine. A priori, nous supposons que \mathbf{x}_H^0 et \mathbf{x}_h^0 sont indépendants à l'intérieur de ω .

1.7.2.4 Contrôle

Condition initiale

Nous avons vu dans la partie 1.4.1 que la méthode 4D-Var reposait sur la minimisation, par rapport à une variable de contrôle, d'une fonctionnelle mesurant notamment l'écart du modèle aux observations. Cette variable de contrôle s'avère être, le plus souvent, la condition initiale du modèle. Notons $\tilde{\mathbf{x}}$ la variable de contrôle bi-grille. De la même manière, la minimisation de notre fonctionnelle 4D-Var bi-grille se fera en général selon la condition initiale bi-grille \mathbf{x}^0 .

Correction des transferts inter-grilles

La solution du modèle basse résolution n'étant pas la solution exacte, elle introduit des erreurs dans la solution haute résolution via les conditions aux frontières du modèle local haute résolution. De plus, les opérateurs d'interpolation utilisés ne sont pas parfaits, les erreurs introduites sur la grille haute résolution via les termes de conditions aux limites peuvent ainsi croître sous l'effet des erreurs d'interpolation. Il serait donc intéressant d'introduire une variable de contrôle $\epsilon_{\partial\omega}$ au niveau des conditions aux limites afin de minimiser les erreurs liées aux transferts inter-grilles.

De plus, même si la solution basse résolution était exacte, la formulation actuelle des transferts inter-grilles (équation sur $\mathbf{x}_{\partial\omega}$ dans (1.62) et (1.66)) ne permet pas d'obtenir de petites échelles. Nous avons ainsi vu au §1.5.3 que toute fonction de grille haute résolution pouvait s'écrire comme la somme de l'image par une interpolation linéaire d'une fonction de grille basse résolution et d'un terme haute fréquence invisible à basse résolution (équation (1.61)). Même si nous ne sommes plus dans le cadre linéaire, l'ajout du terme $\epsilon_{\partial\omega}$ va nous permettre d'introduire certaines petites échelles manquantes.

Les conditions aux limites du modèle haute résolution s'écrivent alors

$$\mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) + \epsilon_{\partial\omega} \quad \text{sur} \quad \partial\omega_h \times [0, T]$$

De même, dans le but de réduire les erreurs introduites sur la grille basse résolution par la rétroaction *two-way*, nous ajoutons également un terme correctif ϵ_ω à la restriction provenant de la grille haute résolution. Nous écrivons

$$\mathbf{x}_\omega = G_h^H(\mathbf{x}_h) + \epsilon_\omega \quad \text{sur} \quad \hat{\omega}_H \times [0, T]$$

Nous obtenons alors le vecteur ϵ^{bc} :

$$\epsilon^{bc} = \begin{cases} \epsilon_{\partial\omega} & \text{en } one\text{-}way \\ \begin{bmatrix} \epsilon_\omega \\ \epsilon_{\partial\omega} \end{bmatrix} & \text{en } two\text{-}way \end{cases}$$

Nous ajoutons ce terme à la condition initiale bi-grille dans notre variable de contrôle. Ceci va nous permettre d'obtenir un contrôle au niveau des transferts inter-grilles et ainsi de minimiser l'erreur introduite par les interpolations/restrictions en introduisant sur chaque grille les échelles invisibles pour celle qui lui transmet l'information.

En effet, si $\epsilon_{\partial\omega} \in \text{Ker}(\mathbf{I}_h^H)$ et $\epsilon_\omega \in \text{Ker}(\mathbf{G}_H^h)$ où \mathbf{I}_h^H et \mathbf{G}_H^h sont les adjoints des opérateurs linéarisés \mathbf{I}_H^h et \mathbf{G}_h^H , ce terme correspond alors aux échelles "invisibles" sur chacune des deux grilles. L'introduction d'une telle contrainte au problème d'optimisation nous renseigne sur ce que pourraient être les termes de régularisation portant sur ϵ^{bc} à ajouter dans la fonction coût (cf §1.7.3).

Bilan

Pour résumer, nous étudierons deux contrôles possibles $\tilde{\mathbf{x}}$:

- la condition initiale bi-grille :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^0$$

- la condition initiale bi-grille et le contrôle au niveau des transferts inter-grilles ϵ^{bc} :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^0 \\ \epsilon^{bc} \end{bmatrix}$$

On désignera dans la suite par *wic* (pour "with interaction control") les algorithmes utilisant cette variable de contrôle étendue.

1.7.2.5 Ebauche

Nous définissons l'ébauche \mathbf{x}^b de notre problème d'assimilation bi-grille comme étant les conditions initiales non optimisées des modèles emboîtés. Ainsi

$$\mathbf{x}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_H^b \\ \mathbf{x}_h^b \end{bmatrix}$$

où \mathbf{x}_H^b correspond à l'ébauche sur la grille grossière et \mathbf{x}_h^b à celle sur la grille fine.

L'erreur d'ébauche ϵ^b se définit alors par :

$$\epsilon^b = \begin{bmatrix} \epsilon_H^b \\ \epsilon_h^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_H^b - \mathbf{x}_H^t \\ \mathbf{x}_h^b - \mathbf{x}_h^t \end{bmatrix}$$

où \mathbf{x}_H^t correspond à "l'état vrai" sur la grille grossière et \mathbf{x}_h^t à celui sur la grille fine. Ce que nous appelons "état vrai" pour une grille donnée est la projection de l'état continu \mathbf{x}^t sur l'espace des fonctions de cette grille (F_{Ω_H} et F_{ω_H}). Ainsi

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H^t = \mathbf{\Pi}_H \mathbf{x}^t \\ \mathbf{x}_h^t = \mathbf{\Pi}_h \mathbf{x}^t|_\omega \end{cases}$$

avec $\mathbf{\Pi}_H$ (respectivement $\mathbf{\Pi}_h$) opérateur de projection sur F_{Ω_H} (resp. F_{ω_H}).

L'étude de la structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} est réalisée au §2.2.

1.7.3 Formulations

Avec les notations introduites au §1.1, nous retrouvons pour le cas bi-grille une formulation analogue au 4D-Var mono-grille. Définissons les différentes fonctionnelles dans le cas où l'on contrôle uniquement la condition initiale bi-grille

$$\begin{aligned}
J^b &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b) \quad \text{écart à l'ébauche} \\
J_H^{obs} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_H^i]^T \mathbf{R}_H^{i-1} [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_H^i] \quad \text{écart aux observations sur la grille grossière} \\
J_h^{obs} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_h^i]^T \mathbf{R}_h^{i-1} [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_h^i] \quad \text{écart aux observations sur la grille fine}
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Le problème de l'assimilation de données s'écrit :

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x}^0} J(\mathbf{x}^0) &= J^b(\mathbf{x}^0) + J_H^{obs}(\mathbf{x}^0) + J_h^{obs}(\mathbf{x}^0) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_H^i]^T \mathbf{R}_H^{i-1} [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_H^i] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_h^i]^T \mathbf{R}_h^{i-1} [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0)) - \mathbf{y}_h^i]
\end{aligned}$$

Ajoutons le contrôle sur les transferts inter-grilles (algorithmes *wic*). Nous définissons les différentes fonctionnelles :

$$\begin{aligned}
J_H^{obs} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_H^i]^T \mathbf{R}_H^{i-1} [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_H^i] \\
J_h^{obs} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_h^i]^T \mathbf{R}_h^{i-1} [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_h^i] \\
J^{\epsilon^{bc}} &= \frac{1}{2} \|\mathbf{K} \epsilon^{bc}\|^2 \quad \text{norme du terme correctif aux frontières}
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Le terme de pénalisation $J^{\epsilon^{bc}}$ s'apparente à une contrainte faible portant sur le vecteur ϵ^{bc} . Ce terme ayant pour but de représenter les échelles invisibles sur chacune des grilles lors des interactions, nous cherchons à faire en sorte que ϵ^{bc} appartienne aux noyaux des adjoints des opérateurs d'interactions linéarisés. Ainsi, dans le cas d'interaction *two-way*, \mathbf{K} s'écrit :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_H^h & \mathbf{(0)} \\ \mathbf{(0)} & \mathbf{I}_h^H \end{bmatrix}$$

Le problème de minimisation devient :

$$\begin{aligned}
\min_{(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})} J(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc}) &= J^b(\mathbf{x}^0) + J^{\epsilon^{bc}}(\epsilon^{bc}) + J_H^{obs}(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc}) + J_h^{obs}(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\epsilon^{bc}\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_H^i]^T \mathbf{R}_H^{i-1} [H_H^i(\mathbf{x}_H^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_H^i] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_h^i]^T \mathbf{R}_h^{i-1} [H_h^i(\mathbf{x}_h^i(\mathbf{x}^0, \epsilon^{bc})) - \mathbf{y}_h^i]
\end{aligned}$$

1.7.4 Vers le couplage de modèles

Revenons plus en détail sur les formulations *wic* de l'assimilation bi-grille et notamment sur le terme $J^{\epsilon^{bc}}$ présent dans la fonction coût. Nous montrons dans cette partie que le contrôle des transferts inter-grilles initialement introduit pour améliorer les interactions entre les solutions des deux modèles peut aussi être interprété comme un couplage faible entre ces modèles.

1.7.4.1 Interaction one-way

Dans le cas d'interaction *one-way*, ce terme de pénalisation s'écrit :

$$\begin{aligned}
2J^{\epsilon^{bc}} &= \|\mathbf{K}\epsilon^{bc}\|^2 \\
&= \|\mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega}\|_H^2 \\
&= \langle \mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega}, \mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega} \rangle_H \\
&= \langle \epsilon_{\partial\omega}, \mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega} \rangle_h
\end{aligned} \tag{1.73}$$

$\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H$ étant symétrique de $F_{\partial\omega_h}$ dans $F_{\partial\omega_h}$, il vient ⁴

$$F_{\partial\omega_h} = \text{Ker}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H) \oplus \text{Im}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H) \tag{1.74}$$

De plus ces espaces supplémentaires sont orthogonaux. ⁵

Notons Π la projection orthogonale sur $\text{Im}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)$ parallèlement à $\text{Ker}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)$.

Alors

$$2J^{\epsilon^{bc}} = \langle \Pi \epsilon_{\partial\omega}, \mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H \Pi \epsilon_{\partial\omega} \rangle_h \tag{1.75}$$

Nous définissons alors la norme sur $\text{Im}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)$, sous-espace de $F_{\partial\omega_h}$, par :

$$\forall \mathbf{u}_h \in \text{Im}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H), \quad \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H}^2 = \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H \mathbf{u}_h \rangle_h \tag{1.76}$$

Il vient alors

⁴ $\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H$ étant linéaire, $F_{\partial\omega_h}$ se décompose en

$$F_{\partial\omega_h} = \text{Ker}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H) \oplus \text{Im}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)^T$$

⁵Soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \text{Ker}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H) \times \text{Im}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)$. Alors $\exists \mathbf{w} \in FG(\partial\omega_h)$, $\mathbf{v} = \mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H \mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_h &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H \mathbf{w} \rangle_h \\
&= \langle (\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)^T \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_h \\
&= \langle \mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle_h \\
&= 0 \quad \text{car } \mathbf{u} \in \text{Ker}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)
\end{aligned}$$

$$J^{\epsilon^{bc}} = \frac{1}{2} \|\Pi \epsilon_{\partial\omega}\|_{\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H}^2 \quad (1.77)$$

Or $\mathbf{x}_h = I_H^h(\mathbf{x}_H) + \epsilon_{\partial\omega}$ sur $\partial\omega_h \times [0, T]$.

D'où

$$J^{\epsilon^{bc}} = \frac{1}{2} \|\Pi(\mathbf{x}_h - I_H^h(\mathbf{x}_H))|_{\partial\omega_h}\|_{\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H}^2$$

En pratique, l'interpolation \mathbf{I}_H^h est injective, d'où $\text{Ker}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H) = \text{Ker}(\mathbf{I}_h^H)$. Π est alors la projection orthogonale sur $\text{Im}(\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H)$ parallèlement à $\text{Ker}(\mathbf{I}_h^H)$.

Minimiser $J^{\epsilon^{bc}}$ revient alors à minimiser, dans l'espace orthogonal au noyau de l'adjoint de l'opérateur d'interpolation, la différence entre les solutions des deux modèles sur la frontière du domaine local haute résolution.

Ce terme introduit ainsi un couplage faible sur l'espace $[\text{Ker}(\mathbf{I}_h^H)]^\perp$, c'est à dire un espace de basses fréquences, entre les projections des solutions des deux modèles au niveau de cette frontière. Notons, que ce couplage est réalisé de façon incrémentale : nous ne contrôlons pas directement la valeur des solutions aux interfaces mais un incrément que nous ajoutons à la solution haute résolution.

1.7.4.2 Interaction two-way

Dans le cas d'interaction *two-way*, la minimisation de la fonctionnelle $J^{\epsilon^{bc}}$ apparait de la même manière comme un couplage faible entre les deux solutions, non plus sur la frontière du domaine haute résolution mais sur ω tout entier.

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2J^{\epsilon^{bc}} &= \langle \mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega}, \mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega} \rangle_H + \langle \mathbf{G}_H^h \epsilon_\omega, \mathbf{G}_H^h \epsilon_\omega \rangle_h \\ &= \|\Pi \epsilon_{\partial\omega}\|_{\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H}^2 + \langle \mathbf{G}_H^h \epsilon_\omega, \mathbf{G}_H^h \epsilon_\omega \rangle_h \end{aligned} \quad (1.78)$$

Supposons \mathbf{G}_H^h injectif. En utilisant la relation (1.60), nous pouvons montrer que $\mathbf{G}_h^H \mathbf{G}_H^h$ est inversible et donc définie positive. Nous définissons alors la norme sur $F_{\hat{\omega}_H}$ l'espace des fonctions de grilles définies sur $\hat{\omega}_H$ par

$$\forall \mathbf{u}_H \in F_{\hat{\omega}_H}, \quad \|\mathbf{u}_H\|_{\mathbf{G}_h^H \mathbf{G}_H^h}^2 = \langle \mathbf{u}_H, \mathbf{G}_h^H \mathbf{G}_H^h \mathbf{u}_H \rangle_H \quad (1.79)$$

Il vient alors

$$2J^{\epsilon^{bc}} = \|\Pi \epsilon_{\partial\omega}\|_{\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H}^2 + \|\epsilon_\omega\|_{\mathbf{G}_h^H \mathbf{G}_H^h}^2 \quad (1.80)$$

Par définition de ϵ^{bc} , nous obtenons

$$J^{\epsilon^{bc}} = \frac{1}{2} \|\Pi(\mathbf{x}_h - I_H^h(\mathbf{x}_H))|_{\partial\omega_h}\|_{\mathbf{I}_H^h \mathbf{I}_h^H}^2 + \frac{1}{2} \|(\mathbf{x}_h - G_h^H(\mathbf{x}_h))|_{\hat{\omega}_H}\|_{\mathbf{G}_h^H \mathbf{G}_H^h}^2$$

Nous retrouvons ainsi le couplage faible entre les deux solutions évoqué dans le cas d'interactions *one-way*. Ce couplage a lieu sur ω tout entier :

- à haute résolution sur $\partial\omega_h$ via un incrément ajouté à la solution haute résolution corrigeant sa composante orthogonale au noyau de $\mathbf{I}_h^{\mathbf{H}}$ (basses fréquences).
- à basse résolution sur $\hat{\omega}_H$ via un incrément correctif ajouté à la solution basse résolution.

Chapitre 2

Systèmes d’optimalité et matrice de covariance d’erreur d’ébauche pour une configuration bi-grille

Sommaire

2.1	Les systèmes d’optimalité	39
2.1.1	Interaction one-way	40
2.1.2	Interaction two-way	42
2.1.3	Ajout du contrôle des erreurs de transfert inter-grilles	45
2.1.4	Passage d’un adjoint mono-grille à un adjoint bi-grille	50
2.2	Structure de la matrice de covariance d’erreur d’ébauche	51
2.2.1	Cadre simplifié : l’ébauche haute résolution est obtenue par interpolation de l’ébauche basse résolution	51
2.2.2	Cadre général : l’ébauche est obtenue après intégration d’un modèle bi-grille	54
2.2.3	Détails des calculs dans le cas d’interaction one-way	55
2.2.4	Détails des calculs dans le cas d’interaction two-way	60
2.2.5	Conclusion	67

2.1 Les systèmes d’optimalité

Nous présentons dans cette partie les systèmes d’optimalité du problème d’optimisation introduit au §1.7. Dans un premier temps, nous étudions le cas où la variable de contrôle est la condition initiale seule pour le cas d’interactions *one-way* et *two-way*. Puis nous rajoutons le contrôle sur les transferts inter-grilles.

Nous nous intéressons uniquement au gradient de J^{obs} , ceux de J^b et J^{bc} étant triviaux.

2.1.1 Interaction one-way

Nous contrôlons dans cette partie uniquement les conditions initiales sur les deux grilles $(\mathbf{x}_H^0, \mathbf{x}_h^0)$. ϵ^{bc} reste donc nul durant le processus de minimisation. De ce fait, il n'apparaît pas dans les équations du modèle.

Le modèle est en interaction *one-way*. Il s'écrit :

$$\begin{array}{cc} \text{Domaine } \Omega_H & \text{Domaine } \omega_h \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = \mathbf{I}_H^h(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \end{array} \quad (2.1)$$

En introduisant, comme au §1.4.3, une perturbation $(\mathbf{u}_H, \mathbf{v}_h)$ des variables de contrôle $(\mathbf{x}_H^0, \mathbf{x}_h^0)$, on obtient le système suivant pour $\widehat{\mathbf{x}}_H$ et $\widehat{\mathbf{x}}_h$, dérivées au sens de Gâteaux de \mathbf{x}_H et \mathbf{x}_h

$$\begin{array}{cc} \text{Domaine } \Omega_H & \text{Domaine } \omega_h \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_H \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_H(0) = \mathbf{u}_H \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_h + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_h(0) = \mathbf{v}_h \\ \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} = \mathbf{I}_H^h \widehat{\mathbf{x}}_H \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \end{array} \quad (2.2)$$

où \mathbf{I}_H^h symbolise $\mathbf{I}_H^h(\mathbf{x}_H)$, c'est à dire le linéarisé de \mathbf{I}_H^h en \mathbf{x}_H .

Introduisons les variables adjointes \mathbf{P} sur la grille grossière et \mathbf{Q} sur la grille fine. En prenant les produits scalaires sur chacune des grilles de ces deux vecteurs par les équations linéarisées précédentes et en intégrant sur toute la fenêtre d'assimilation, il vient :

sur Ω_H :

Une intégration par parties nous donne :

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t}, \mathbf{P} \right\rangle_H dt = \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \right\rangle_H - \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \right\rangle_H - \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\rangle_H dt \quad (2.3)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t}, \mathbf{P} \right\rangle_H &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{P} \right\rangle_H \\ &= \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H \end{aligned} \quad (2.4)$$

D'où :

$$\int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H dt = \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \right\rangle_H - \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \right\rangle_H \quad (2.5)$$

sur ω_h :

De la même manière, nous avons

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t}, \mathbf{Q} \right\rangle_h dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \rangle_h - \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \rangle_h - \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right\rangle_h dt \quad (2.6)$$

et

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t}, \mathbf{Q} \right\rangle_h &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \widehat{\mathbf{x}}_h + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \mathbf{I}_H^h \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{Q} \right\rangle_h \\ &= \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h + \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_H \end{aligned} \quad (2.7)$$

D'où :

$$\int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h dt + \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_H dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \rangle_h - \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \rangle_h \quad (2.8)$$

La fonction coût J^{obs} mesurant l'écart aux observations s'écrit comme la somme de deux termes : l'un mesurant l'écart entre la solution basse résolution et les observations présentes sur cette grille, l'autre mesurant l'écart entre la solution haute résolution et les observations présentes sur la grille fine. Soit,

$$J^{obs} = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)\|_o^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)\|_o^2 dt \quad (2.9)$$

Sa dérivée de Gâteaux \hat{J}^{obs} dans la direction $(\mathbf{x}_H^0, \mathbf{x}_h^0)$ s'écrit

$$\hat{J}^{obs} = \int_0^T \left\langle \hat{\mathbf{x}}_H(t), \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \right\rangle_H dt + \int_0^T \left\langle \hat{\mathbf{x}}_h(t), \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \right\rangle_h dt \quad (2.10)$$

Sommons (2.5) et (2.8). Il vient :

$$\int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h dt + \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_H dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \rangle_h - \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \rangle_h + \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \rangle_H - \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \rangle_H \quad (2.11)$$

Définissons les variables adjointes comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Domaine } \Omega_H &\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \end{cases} \\ \text{Domaine } \omega_h &\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si aucune observation n'est présente sur une des grilles, la partie de la fonction J^{obs} correspondant à cette grille sera nulle, donc aussi son gradient vis-à-vis de la variable d'état de cette grille.

Finalement, il vient :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \\ \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \end{cases} \quad (2.13)$$

D'où :

Système d'optimalité one-way

Domaine Ω_H	{	$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \end{cases}$
Domaine ω_h	{	$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \\ \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \end{cases}$

Nous observons ainsi au travers du terme $\mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q}$ une rétroaction du modèle adjoint haute résolution vers celui basse résolution, à l'opposé de celle présente dans le modèle direct.

2.1.2 Interaction two-way

Nous contrôlons là encore uniquement les conditions initiales sur les deux grilles ($\mathbf{x}_H^0, \mathbf{x}_h^0$). De même, ϵ^{bc} reste nul durant le processus de minimisation. De ce fait, il n'apparaît pas dans les équations du modèle.

Le modèle est en interaction *two-way*. Il s'écrit :

<p>Domaine Ω_H</p> $\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_\omega) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_\omega = G_h^H(\mathbf{x}_h) \quad \text{sur } \hat{\omega}_H \times [0, T] \end{cases}$	<p>Domaine ω_h</p> $\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{cases} \quad (2.14)$
---	--

En introduisant une perturbation $(\mathbf{u}_H, \mathbf{v}_h)$ de $(\mathbf{x}_H^0, \mathbf{x}_h^0)$, on obtient le système suivant pour $\widehat{\mathbf{x}}_H$ et $\widehat{\mathbf{x}}_h$, dérivées au sens de Gâteaux de \mathbf{x}_H et \mathbf{x}_h

Domaine Ω_H

Domaine ω_h

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \widehat{\mathbf{x}}_H + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \widehat{\mathbf{x}}_\omega \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_H(0) = \mathbf{u}_H \\ \widehat{\mathbf{x}}_\omega = \mathbf{G}_h^H \widehat{\mathbf{x}}_h \quad \text{sur } \dot{\omega}_H \times [0, T] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \widehat{\mathbf{x}}_h + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_h(0) = \mathbf{v}_h \\ \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} = \mathbf{I}_H^h \widehat{\mathbf{x}}_H \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où \mathbf{G}_h^H symbolise $\mathbf{G}_h^H(\mathbf{x}_h)$, le linéarisé de G_h^H en \mathbf{x}_h .

Introduisons les variables adjointes \mathbf{P} sur la grille grossière et \mathbf{Q} sur la grille fine. En prenant les produits scalaires sur chacune des grilles de ces deux vecteurs par les équations linéarisées précédentes et en intégrant temporellement, il vient :

sur Ω_H :

En intégrant par parties, nous obtenons

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t}, \mathbf{P} \right\rangle_H dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \rangle_H - \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \rangle_H - \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\rangle_H dt \quad (2.16)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t}, \mathbf{P} \right\rangle_H &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{P} \right\rangle_H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \widehat{\mathbf{x}}_\omega, \mathbf{P} \right\rangle_H \\ &= \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H + \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \mathbf{G}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_h \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'où :

$$\int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H dt + \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \mathbf{G}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_h dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \rangle_H - \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \rangle_H \quad (2.18)$$

sur ω_h :

De la même manière, nous avons

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t}, \mathbf{Q} \right\rangle_h dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \rangle_h - \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \rangle_h - \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right\rangle_h dt \quad (2.19)$$

et

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t}, \mathbf{Q} \right\rangle_h &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \widehat{\mathbf{x}}_h + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{Q} \right\rangle_h \\ &= \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h + \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_H \end{aligned} \quad (2.20)$$

D'où :

$$\int_0^T \langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \rangle_h dt + \int_0^T \langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \rangle_H dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \rangle_h - \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \rangle_h \quad (2.21)$$

Définissons les variables adjointes comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Domaine } \Omega_H & \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \end{cases} \\ \text{Domaine } \omega_h & \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{G}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

En sommant (2.18) et (2.21), il vient :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \\ \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \end{cases} \quad (2.23)$$

D'où :

Système d'optimalité two-way	
Domaine Ω_H	$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_\omega) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_\omega = G_h^H(\mathbf{x}_h) \quad \text{sur } \omega_H \times [0, T] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \end{array} \right. \\ \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \end{array} \right.$
Domaine ω_h	$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{G}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \end{array} \right. \\ \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \end{array} \right.$

2.1.3 Ajout du contrôle des erreurs de transfert inter-grilles

Dans cette partie, nous introduisons un terme de contrôle ϵ^{bc} au niveau des transferts inter-grilles comme expliqué au §1.7. Suivant le type d'interactions envisagé, ce vecteur aura une composante sur la grille grossière ou non. Nous contrôlons également les conditions initiales sur chacune des grilles.

2.1.3.1 Interaction one-way

Dans le cas d'interactions *one-way*, les variables de contrôle sont les conditions initiales sur chacune des grilles ainsi que le terme de petite échelle $\epsilon_{\partial\omega}$ présent dans les conditions aux frontières du modèle haute résolution.

Le modèle s'écrit :

$$\begin{array}{cc} \text{Domaine } \Omega_H & \text{Domaine } \omega_h \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = \mathbf{I}_H^h(\mathbf{x}_H) + \epsilon_{\partial\omega} \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \end{array} \quad (2.24)$$

En introduisant une perturbation $(\mathbf{u}_H, \mathbf{v}_h, \eta_{\partial\omega})$ des variables de contrôle $(\mathbf{x}_H^0, \mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega})$, on obtient le système suivant pour $\widehat{\mathbf{x}}_H$ et $\widehat{\mathbf{x}}_h$, dérivées au sens de Gâteaux de \mathbf{x}_H et \mathbf{x}_h

$$\begin{array}{cc} \text{Domaine } \Omega_H & \text{Domaine } \omega_h \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_H \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_H(0) = \mathbf{u}_H \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_h + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_h(0) = \mathbf{v}_h \\ \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} = \mathbf{I}_H^h \widehat{\mathbf{x}}_H + \eta_{\partial\omega} \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \end{array} \quad (2.25)$$

Introduisons les variables adjointes \mathbf{P} sur la grille grossière et \mathbf{Q} sur la grille fine. En prenant les produits scalaires sur chacune des grilles de ces deux vecteurs par les équations linéarisées précédentes et en intégrant temporellement, il vient :

sur Ω_H :

$$\int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \rangle_H - \langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \rangle_H \quad (2.26)$$

sur ω_h :

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t}, \mathbf{Q} \right\rangle_h dt = \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \rangle_h - \langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \rangle_h - \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right\rangle_h dt \quad (2.27)$$

et

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t}, \mathbf{Q} \right\rangle_h &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \widehat{\mathbf{x}}_h + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} (\mathbf{I}_H^h \widehat{\mathbf{x}}_H + \eta_{\partial\omega}), \mathbf{Q} \right\rangle_h \\
&= \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h + \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{I}_H^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_H + \left\langle \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \eta_{\partial\omega}, \mathbf{Q} \right\rangle_h
\end{aligned} \tag{2.28}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h dt + \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{I}_H^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_H dt + \int_0^T \left\langle \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \eta_{\partial\omega}, \mathbf{Q} \right\rangle_h dt \\
= \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \right\rangle_h - \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \right\rangle_h
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Nous définissons les variables adjointes de la même manière que dans le cas *one-way*. Ainsi,

$$\text{Domaine } \Omega_H \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\text{Domaine } \omega_h \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \end{cases}$$

En sommant (2.26) et (2.29), il vient :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \\ \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \\ \nabla_{\epsilon_{\partial\omega}(t)} J^{obs} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q}(t) \end{cases} \tag{2.31}$$

Le système d'optimalité s'écrit ainsi

Système d'optimalité one-way wic

$$\begin{array}{l}
\text{Domaine } \Omega_H \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_H^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^*(\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \end{array} \right. \\ \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \end{array} \right. \\
\\
\text{Domaine } \omega_h \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) + \epsilon_{\partial\omega} \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_h^*(\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \\ \nabla_{\epsilon_{\partial\omega}(t)} J^{obs} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q}(t) \end{array} \right. \end{array} \right.
\end{array}$$

Nous retrouvons un système proche de celui du *one-way* avec contrôle des conditions initiales seul. Le contrôle sur les transferts inter-grilles (ici de la grille grossière vers la grille fine) apparaît uniquement dans le système d'équations concernant les gradients de J^{obs} . Ceci s'avère particulièrement intéressant pour la programmation informatique d'un tel système. En effet, une fois le système d'optimalité dans le cas du seul contrôle des conditions initiales mis en place, il ne sera pas nécessaire de modifier le système adjoint (ce qui est généralement le plus problématique).

2.1.3.2 Interaction two-way

Dans cette partie, nous rajoutons au cas précédent un contrôle ϵ_ω dans la mise à jour de la solution de la grille grossière \mathbf{x}_H sur ω_H par la solution de la grille fine \mathbf{x}_h .

Le modèle s'écrit alors

Domaine Ω

Domaine ω

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_\omega) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_\omega = G_h^H(\mathbf{x}_h) + \epsilon_\omega \quad \text{sur } \hat{\omega}_H \times [0, T] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) + \epsilon_{\partial\omega} \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \quad (2.32)
\end{array}$$

En introduisant une perturbation $(\mathbf{u}_H, \mathbf{v}_h, \eta_\omega, \eta_{\partial\omega})$ des variables de contrôle $(\mathbf{x}_H^0, \mathbf{x}_h^0, \epsilon_\omega, \epsilon_{\partial\omega})$, on obtient le système suivant pour $\widehat{\mathbf{x}}_H$ et $\widehat{\mathbf{x}}_h$, dérivées au sens de Gâteaux de \mathbf{x}_H et \mathbf{x}_h :

Domaine Ω_H

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_H + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_\omega \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_H(0) = \mathbf{u}_H \\ \widehat{\mathbf{x}}_\omega = \mathbf{G}_h^H \widehat{\mathbf{x}}_h + \eta_\omega \quad \text{sur } \dot{\omega}_H \times [0, T] \end{array} \right.$$

Domaine ω_h

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_h}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_h + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \widehat{\mathbf{x}}_h(0) = \mathbf{v}_h \\ \widehat{\mathbf{x}}_{\partial\omega} = \mathbf{I}_H^h \widehat{\mathbf{x}}_H + \eta_{\partial\omega} \quad \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Introduisons les variables adjointes \mathbf{P} sur la grille grossière et \mathbf{Q} sur la grille fine. En prenant les produits scalaires sur chacune des grilles de ces deux vecteurs par les équations linéarisées précédentes et en intégrant temporellement, il vient :

sur Ω_H :

En intégrant par parties, nous obtenons

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t}, \mathbf{P} \right\rangle_H dt = \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \right\rangle_H - \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \right\rangle_H - \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\rangle_H dt \quad (2.34)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}_H}{\partial t}, \mathbf{P} \right\rangle_H &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \cdot \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{P} \right\rangle_H + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \cdot (\mathbf{G}_h^H \widehat{\mathbf{x}}_h + \eta_\omega), \mathbf{P} \right\rangle_H \\ &= \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H + \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \mathbf{G}_h^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_h + \left\langle \eta_\omega, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H \end{aligned} \quad (2.35)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H dt + \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \mathbf{G}_h^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_h dt + \int_0^T \left\langle \eta_\omega, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} \right\rangle_H dt \\ = \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(T), \mathbf{P}(T) \right\rangle_H - \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H(0), \mathbf{P}(0) \right\rangle_H \end{aligned} \quad (2.36)$$

sur ω_h :

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h dt + \int_0^T \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_H, \mathbf{I}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_H dt + \int_0^T \left\langle \eta_{\partial\omega}, \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} \right\rangle_h dt \\ = \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h(T), \mathbf{Q}(T) \right\rangle_h - \left\langle \widehat{\mathbf{x}}_h(0), \mathbf{Q}(0) \right\rangle_h \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nous définissons les variables adjointes comme les solutions du système suivant

$$\begin{aligned}
\text{Domaine } \Omega_H & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \end{array} \right. \\
\text{Domaine } \omega_h & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{G}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Il vient en sommant (2.36) et (2.37) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \\ \nabla_{\epsilon_\omega(t)} J^{obs} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P}(t) \\ \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \\ \nabla_{\epsilon_{\partial\omega}(t)} J^{obs} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q}(t) \end{array} \right. \tag{2.39}$$

Le système d'optimalité s'écrit ainsi

Système d'optimalité two-way wic	
Domaine Ω_H	$ \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F(\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_\omega) \quad \text{sur } \Omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_\omega = G_h^H(\mathbf{x}_h) + \epsilon_\omega \quad \text{sur } \omega_H \times [0, T] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_H} \right]^* \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{H}_H^* (\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H(t) - \mathbf{y}_H(t)) \\ \mathbf{P}(T) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}_H^0} J^{obs} = -\mathbf{P}(0) \\ \nabla_{\epsilon_\omega(t)} J^{obs} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P}(t) \end{array} \right. \end{array} \right. $
Domaine ω_h	$ \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega}) \quad \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega} = I_H^h(\mathbf{x}_H) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^* \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{G}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{H}_h^* (\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h(t) - \mathbf{y}_h(t)) \\ \mathbf{Q}(T) = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathbf{x}_h^0} J^{obs} = -\mathbf{Q}(0) \\ \nabla_{\epsilon_{\partial\omega}(t)} J^{obs} = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^* \cdot \mathbf{Q}(t) \end{array} \right. \end{array} \right. $

De même que précédemment, ce nouveau terme de contrôle apparaît uniquement dans le système d'équations concernant les gradients de J^{obs} . De ce fait, comme pour le cas *one-way*, la mise en place d'un tel système sera assez simple depuis le système *two-way* avec contrôle des conditions initiales uniquement.

2.1.4 Passage d'un adjoint mono-grille à un adjoint bi-grille

L'écriture du modèle adjoint constitue une difficulté importante pour la mise en pratique des méthodes d'assimilation variationnelle de données. Comme son nom l'indique, le modèle adjoint est l'opérateur adjoint du modèle linéaire tangent du modèle physique direct. Dans le cas de modèles réalistes, cela nécessite un travail considérable, puisque cela revient à réécrire un code d'une complexité aussi importante que celle du modèle direct. Le passage d'un algorithme d'assimilation mono-grille à un algorithme bi-grille entraînant la modification des modèles adjoints, son coût en terme de développements informatiques peut être effrayant à première vue. Il n'en est rien. Une comparaison des systèmes adjoints semi-discretisés montre en fait que très peu de modifications sont nécessaires pour obtenir les modèles adjoints sur les différentes grilles.

En effet, le système d'optimalité pour un algorithme 4D-Var mono-grille avec contrôle de la condition initiale s'écrit (cf §1.4.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(x, 0) = \mathbf{x}^0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right]^* \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{H}^*(\mathbf{H}\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{Z}(T) = 0 \end{array} \right. \\ \nabla_{\mathbf{x}^0} J^{obs} = -\mathbf{Z}(0) \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Ce système est très proche de ceux présents sur chacune des grilles dans le cas d'interactions *one-way* et *two-way*. La différence avec le modèle adjoint bi-grille correspond à l'ajout des adjoints des transferts inter-grilles présents dans le modèle direct, soit $\mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^* \mathbf{Q}$ et $\mathbf{G}_H^h \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\omega} \right]^* \mathbf{P}$ selon le type d'interaction envisagée et la grille où l'on se situe. Pour des modèles simples, l'ajout de ces termes nécessite uniquement l'écriture des adjoints d'opérateurs d'interpolation et de restriction. Une fois en possession du modèle adjoint mono-grille, l'écriture des modèles adjoints multi-grilles demande donc relativement peu de travail.

2.2 Structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Nous nous intéressons dans cette partie à \mathbf{B} , la matrice de covariance d'erreur d'ébauche. Comme nous avons pu le voir au §1.4.4 dans le cas mono-grille, cette matrice joue un rôle important dans l'analyse 4D-Var. Nous nous proposons d'étudier cette matrice dans le cas bi-grille. Il faut tout d'abord rappeler que la modélisation des covariances d'erreur d'ébauche est quelque chose de difficile (état vrai inaccessible pour des expériences réalistes). De nombreux travaux de recherche (en cours pour certains) portent exclusivement sur ce sujet. Ce n'est pas le but de cette étude. Nous supposons ici disposer de méthodes efficaces pour modéliser cette matrice \mathbf{B} dans un cadre **mono-grille**. Nous nous intéressons alors au passage d'une modélisation mono-grille à une modélisation bi-grille.

Dans un premier temps, nous étudions le cas simplifié où l'ébauche haute résolution est obtenue par interpolation linéaire de l'ébauche basse résolution. Dans un second temps, nous étudions le cas où l'ébauche est obtenue après propagation du modèle bi-grille en interaction *one-way* et enfin nous étudions le cas où l'ébauche est obtenue après propagation du modèle bi-grille en interaction *two-way*.

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche bi-grille est de la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{B}_{Hh} \\ \mathbf{B}_{hH} & \mathbf{B}_{hh} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Le bloc \mathbf{B}_{HH} correspond aux covariances d'erreur d'ébauche des variables d'état de la grille grossière, le bloc \mathbf{B}_{hh} à celles des variables d'états de la grille fine, et les blocs \mathbf{B}_{Hh} et \mathbf{B}_{hH} aux covariances entre les deux grilles. Nous notons dans toute la suite de ce document N_H la taille du vecteur d'état sur la grille grossière et N_h celle du vecteur d'état sur la grille fine. Nous avons alors $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{N_H+N_h}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_{HH} \in \mathcal{M}_{N_H}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_{hh} \in \mathcal{M}_{N_h}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_{Hh} \in \mathcal{M}_{N_H, N_h}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B}_{hH} \in \mathcal{M}_{N_h, N_H}(\mathbb{R})$.

2.2.1 Cadre simplifié : l'ébauche haute résolution est obtenue par interpolation de l'ébauche basse résolution

Dans un premier temps nous faisons l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\mathbf{x}_h^b = \mathbf{I}_H^h \mathbf{x}_H^b$$

où \mathbf{I}_H^h est un opérateur d'interpolation linéaire, de F_{Ω_H} dans F_{ω_h} . Nous supposons ainsi que le vecteur d'ébauche de la grille fine est obtenu par interpolation de la composante ω_H du vecteur d'ébauche de la grille basse résolution. Cette situation est fréquente en pratique : lors de la mise en place de l'emboîtement de modèles, la solution haute résolution peut être obtenue en interpolant la solution basse résolution.

2.2.1.1 Erreur d'ébauche

L'erreur d'ébauche sur la grille fine ϵ_h^b devient :

$$\begin{aligned} \epsilon_h^b &= \mathbf{I}_H^h \mathbf{x}_H^b - \mathbf{x}_h^t \\ &= \mathbf{I}_H^h (\mathbf{x}_H^b - \mathbf{x}_H^t) + \mathbf{I}_H^h \mathbf{x}_H^t - \mathbf{x}_h^t \end{aligned} \quad (2.42)$$

Posons $\epsilon^{I,t} = \mathbf{I}_H^h \mathbf{x}_H^t - \mathbf{x}_h^t$. Ce terme correspond à l'erreur commise par l'interpolation sur la grille fine de la solution vraie sur la grille grossière. Il vient :

$$\epsilon_h^b = \mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b + \epsilon^{I,t}$$

2.2.1.2 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} .

- Calcul de \mathbf{B}_{hH} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hH} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_H^b) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b, \epsilon_H^b) + \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \epsilon_H^b) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\text{hyp} : \epsilon^{I,t} \text{ et } \epsilon_H^b \text{ sont indépendants.}$$

Nous supposons ainsi que les erreurs d'ébauche sur la grille grossière et les erreurs commises en approximant "l'état vrai" de la grille fine par une interpolation de "l'état vrai" de la grille grossière sont indépendantes. Cette hypothèse paraît naturelle, le choix de l'ébauche étant a priori indépendant du choix de l'opérateur d'interpolation.

D'où

$$\mathbf{B}_{hH} = \text{Cov}(\mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b, \epsilon_H^b) = \mathbf{I}_H^h \text{Cov}(\epsilon_H^b, \epsilon_H^b) \quad (2.44)$$

Soit

$$\mathbf{B}_{hH} = \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{Hh} :

\mathbf{B} étant symétrique, il vient $\mathbf{B}_{Hh} = \mathbf{B}_{hH}^T$. D'où :

$$\mathbf{B}_{Hh} = \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hh} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hh} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_h^b) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b, \mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b) + \text{Cov}(\mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b, \epsilon^{I,t}) \\ &\quad + \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b) + \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \epsilon^{I,t}) \\ &= \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{I}_H^h \text{Cov}(\epsilon_H^b, \epsilon^{I,t}) \\ &\quad + \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \epsilon_H^b) \mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Toujours sous l'hypothèse que $\epsilon^{I,t}$ et ϵ_H^b sont indépendantes, il vient

$$\mathbf{B}_{hh} = \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}}$$

Finalement, \mathbf{B} s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{B}_{HH}\mathbf{I}_H^{hT} \\ \mathbf{I}_H^h\mathbf{B}_{HH} & \mathbf{I}_H^h\mathbf{B}_{HH}\mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}} \end{bmatrix}$$

Remarque 1 : Comme mentionné au §1.4.5, une décomposition de \mathbf{B} sous la forme $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$ évite, en effectuant le changement de variable $\delta\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{v}$, d'avoir à faire intervenir \mathbf{B}^{-1} dans l'algorithme d'assimilation. Il nous faut donc calculer \mathbf{S} .

\mathbf{B}_{HH} et $\mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}}$ étant symétriques définies positives, il existe \mathbf{S}_{HH} et $\mathbf{S}_{\epsilon^{I,t}}$ telles que $\mathbf{B}_{HH} = \mathbf{S}_{HH}\mathbf{S}_{HH}^T$ et $\mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}} = \mathbf{S}_{\epsilon^{I,t}}\mathbf{S}_{\epsilon^{I,t}}^T$. Ce qui donne :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{HH}\mathbf{S}_{HH}^T & \mathbf{S}_{HH}(\mathbf{I}_H^h\mathbf{S}_{HH})^T \\ (\mathbf{I}_H^h\mathbf{S}_{HH})\mathbf{S}_{HH}^T & (\mathbf{I}_H^h\mathbf{S}_{HH})(\mathbf{I}_H^h\mathbf{S}_{HH})^T + \mathbf{S}_{\epsilon^{I,t}}\mathbf{S}_{\epsilon^{I,t}}^T \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Il vient

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{HH} & (\mathbf{0}) \\ \mathbf{I}_H^h\mathbf{S}_{HH} & \mathbf{S}_{\epsilon^{I,t}} \end{bmatrix}$$

Remarque 2 : La matrice $\mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}}$ correspond à la matrice de covariance de l'erreur que l'on commet en interpolant "l'état vrai" basse résolution vis-à-vis de "l'état vrai" haute résolution. Par définition, n'ayant pas accès à "l'état vrai" nous ne pouvons la calculer explicitement. Une hypothèse grossière consisterait à considérer les coefficients de cette matrice comme négligeables devant ceux de $\mathbf{I}_H^h\mathbf{B}_{HH}\mathbf{I}_H^{hT}$. La matrice \mathbf{B}_{hh} serait donc égale à $\mathbf{I}_H^h\mathbf{B}_{HH}\mathbf{I}_H^{hT}$. Ainsi, nous aurions :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{B}_{HH}\mathbf{I}_H^{hT} \\ \mathbf{I}_H^h\mathbf{B}_{HH} & \mathbf{I}_H^h\mathbf{B}_{HH}\mathbf{I}_H^{hT} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

On peut noter que cette matrice n'est pas inversible puisque

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{I}_H^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{B}_{HH} \\ \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{B}_{HH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{I}_H^h \end{bmatrix}^T \quad (2.48)$$

et que le noyau de \mathbf{I}_H^{hT} , n'est pas nul.

Il est toutefois possible d'écrire $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}^T$, avec

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{HH} \\ \mathbf{I}_H^h\mathbf{S}_{HH} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

On est donc dans le cas d'une approximation de rang réduit de \mathbf{B} , ce qui n'est pas a priori gênant (voir par exemple les méthodes de rang réduit décrites au §1.3.3).

Cependant le changement de variables $\delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{S}}\mathbf{v}$ pose problème : \mathbf{v} correspond à un vecteur basse résolution. De fait, la variable de contrôle ne sera donc plus en mesure d'apporter à la solution haute résolution les échelles invisibles sur la grille grossière (cf §1.5.3). Ceci nous amène à penser que les performances de l'assimilation pourraient être dégradées.

De ce fait, il n'est pas souhaitable de négliger la matrice $\mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}}$, même si en pratique, on peut s'attendre à ce que $\|\epsilon^{I,t}\| \ll \|\epsilon_H^b\|$. Au contraire, c'est elle qui permet d'obtenir un contrôle sur toutes les échelles présentes sur la grille haute résolution. Il est donc indispensable de pouvoir l'approximer correctement à défaut de pouvoir la calculer explicitement. Pour cela, les méthodes

statistiques d'estimation de matrices de covariance semblent les plus appropriées.

Remarque 3 : Dans le cas d'un opérateur d'interpolation non-linéaire I_H^h , nous trouvons que \mathbf{B} peut être approchée par la même matrice \mathbf{B} que celle obtenue dans cette partie, \mathbf{I}_H^h étant dans ce cas l'opérateur I_H^h linéarisé (cf annexe A.1).

2.2.2 Cadre général : l'ébauche est obtenue après intégration d'un modèle bi-grille

Nous nous intéressons dans cette partie et dans les suivantes au cas où l'ébauche serait obtenue après intégration d'un modèle bi-grille. Ce cas s'avère pertinent pour une configuration où la fenêtre d'assimilation suit une phase de prévision du modèle, par exemple un *spin-up* ou bien une succession de fenêtres d'assimilation. L'ébauche est alors l'état final de la prévision (ou de l'analyse) réalisée sur la fenêtre temporelle précédente.

Une telle situation est banale en assimilation variationnelle de données. L'assimilation sur de longues périodes temporelles pose de nombreux problèmes, tant d'un point de vue technique (place mémoire des calculateurs limitée) que d'un point de vue théorique. En effet, le caractère chaotique des écoulements océaniques (ou atmosphériques) fait qu'au delà d'un certain temps le modèle s'avère peu sensible aux variations de la condition initiale, entraînant ainsi une perte d'efficacité de l'assimilation de données. Il faut donc plutôt réaliser l'assimilation sur une succession de fenêtres temporelles relativement courtes (de l'ordre d'un mois par exemple en océanographie). L'ébauche sur chaque fenêtre correspond alors à l'état final obtenue par intégration du modèle sur la fenêtre précédente.

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} que nous cherchons à calculer peut également être vue comme une matrice de covariance d'erreur de prévision. C'est sur cette idée que repose par exemple la méthode NMC développée par Parrish et Derber (1992) [41]. Elle estime ainsi les statistiques d'erreur d'ébauche via les différences entre deux prévisions de durées différentes valides aux mêmes instants. Notons $\tilde{\mathbf{B}}$ la matrice de covariance d'erreur d'ébauche obtenue sur la fenêtre antérieure, et notons également avec un "tilde" les variables de la fenêtre antérieure.

Dans le cas usuel d'un modèle mono-grille, on montre aisément que $\mathbf{B} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}$, où \mathbf{M} est le modèle linéaire tangent et \mathbf{Q} la matrice de covariance d'erreur modèle. C'est d'ailleurs l'équation de propagation usuelle des erreurs (1.11) du filtre de Kalman.

Dans le cas bi-grille, nous montrons que la matrice \mathbf{B} vérifie le même type de loi. Nous avons ainsi

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}$$

avec \mathbf{M} le modèle linéaire tangent bi-grille en interaction *one-way* ou *two-way* et \mathbf{Q} une matrice pouvant être interprétée comme la matrice de covariance d'erreur modèle bi-grille.

Pour cela, nous montrons (les calculs sont détaillés aux §2.2.3 et §2.2.4) que dans le cas d'une ébauche obtenue après intégration sur **un pas de temps** d'un modèle bi-grille M , et sous certaines hypothèses d'indépendance sur les erreurs, la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} s'écrit comme la somme d'un terme correspondant à la propagation de la matrice $\tilde{\mathbf{B}}$ par le modèle linéaire tangent \mathbf{M} et d'un autre terme correspondant à une matrice de covariance

d'erreur modèle bi-grille \mathbf{Q} . Cette étape est nécessaire afin de pouvoir prendre en compte les covariances d'erreur issues des interactions entre les grilles.

Puis, grâce à la formule obtenue sur un pas de temps, il est possible de calculer le lien entre \mathbf{B} et $\tilde{\mathbf{B}}$ pour le cas général d'une fenêtre contenant n pas de temps. Ainsi les matrices de covariance d'erreur d'ébauche aux temps t_i et t_{i-1} sont reliées par :

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{M}_{i,i-1} \mathbf{B}_{i-1} \mathbf{M}_{i,i-1}^T + \mathbf{Q}_{i,i-1} \quad (2.50)$$

avec les matrices $\mathbf{M}_{i,i-1}$ et $\mathbf{Q}_{i,i-1}$ correspondant à celles définies dans les cas *one-way* et *two-way* entre les instants t_{i-1} et t_i .

De cette relation de récurrence entre les instants t_i et t_{i-1} , nous obtenons la matrice de covariance d'erreur d'ébauche au temps t_n en fonction de celle au temps t_0 . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n &= \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{M}_{n+1-i,n-i} \right) \mathbf{B}_0 \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{M}_{i,i-1}^T \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^n \mathbf{M}_{n+1-j,n-j} \right) \mathbf{Q}_{i,i-1} \left(\prod_{j=i}^n \mathbf{M}_{j,j-1}^T \right) + \mathbf{Q}_{n,n-1} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Or, $\mathbf{B}_0 = \tilde{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}$. Il vient alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{M}_{n+1-i,n-i} \right) \tilde{\mathbf{B}} \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{M}_{i,i-1}^T \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i}^n \mathbf{M}_{n+1-j,n-j} \right) \mathbf{Q}_{i,i-1} \left(\prod_{j=i}^n \mathbf{M}_{j,j-1}^T \right) + \mathbf{Q}_{n,n-1} \end{aligned} \quad (2.52)$$

ce qui se réécrit

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{n,0} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{M}_{n,0}^T + \mathbf{Q} \quad (2.53)$$

En pratique, les techniques de calculs de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche déjà existantes dans le cas mono-grille seront directement applicables aux cas bi-grilles en remplaçant les variables mono-grilles par celles bi-grilles correspondantes.

Les calculs permettant d'aboutir aux relations précédentes sont détaillés dans les deux paragraphes qui suivent. Dans un premier temps, nous nous intéresserons au cas d'un modèle bi-grille en interaction *one-way*. Les calculs seront présentés dans un cas linéaire, puis les résultats seront exposés dans un cas général. Puis nous nous intéresserons au cas d'un modèle en interaction *two-way*, pour lequel nous distinguerons de nouveau les cas linéaires et non-linéaires. Le lecteur ne s'intéressant pas aux détails des calculs pourra directement passer au §2.2.5

2.2.3 Détails des calculs dans le cas d'interaction one-way

Nous supposons que notre ébauche \mathbf{x}^b est obtenue après intégration par notre modèle en configuration *one-way*, durant un pas de temps, d'une ébauche calculée sur la fenêtre antérieure. Nous avons vu que l'extension à n pas de temps ne posait pas de difficulté.

2.2.3.1 Cas linéaire

Nous nous plaçons dans un cas linéaire : le modèle et les différents opérateurs sont supposés linéaires.

Nous rappelons les équations discrétisées du modèle bi-grille en interaction *one-way* (cf §1.6.1).

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H^b = \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b \\ \mathbf{x}_h^b = \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, \mathbf{I}_H^h \mathbf{x}_H^b) \end{cases} \quad (2.54)$$

Erreur d'ébauche

Grille grossière

L'erreur d'ébauche sur la grille grossière ϵ_H^b s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b - \mathbf{x}_H^t \\ &= \mathbf{M}_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b - \tilde{\mathbf{x}}_H^t) + \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^t - \mathbf{x}_H^t \end{aligned} \quad (2.55)$$

Posons $\epsilon_H^M = \mathbf{x}_H^t - \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^t$. Ce terme correspond à l'erreur modèle du modèle basse résolution. Notons $\tilde{\epsilon}_H^b = \tilde{\mathbf{x}}_H^b - \tilde{\mathbf{x}}_H^t$ l'erreur d'ébauche sur la grille grossière sur la fenêtre précédente.

Nous obtenons alors :

$$\boxed{\epsilon_H^b = \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M}$$

Grille fine

L'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon_h^b &= \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{x}_h^t \\ &= \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b - \tilde{\mathbf{x}}_h^t, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b - \tilde{\mathbf{x}}_H^t)) + \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^t) - \mathbf{x}_h^t \end{aligned} \quad (2.56)$$

Posons $\epsilon_h^M = \mathbf{x}_h^t - \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^t)$. Ce terme correspond à l'erreur modèle haute résolution. Notons de nouveau $\tilde{\epsilon}_h^b = \tilde{\mathbf{x}}_h^b - \tilde{\mathbf{x}}_h^t$. Il vient

$$\boxed{\epsilon_h^b = \mathbf{M}_h(\tilde{\epsilon}_h^b, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b) - \epsilon_h^M}$$

\mathbf{M}_h étant une application linéaire de $F_{\omega_h} \times F_{\partial\omega_h}$ dans F_{ω_h} , sa matrice s'écrit $[\mathbf{M}_h] = [\mathbf{M}_h^h \quad \mathbf{M}_h^{\partial\omega}]$ Nous confondrons par la suite l'opérateur \mathbf{M}_h et sa matrice.

Il vient

$$\boxed{\epsilon_h^b = \mathbf{M}_h^h \tilde{\epsilon}_h^b + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M}$$

Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} .

- Calcul de \mathbf{B}_{HH} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{HH} &= \text{Cov}(\epsilon_H^b, \epsilon_H^b) \\
&= \text{Cov}(\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M) \\
&= \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T - \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \epsilon_H^M) \\
&\quad - \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T + \mathbf{Q}_H
\end{aligned} \tag{2.57}$$

avec \mathbf{Q}_H la matrice de covariance d'erreur modèle basse résolution.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\text{hyp} : \epsilon_H^M \text{ et } \tilde{\epsilon}_H^b \text{ sont indépendants.}$$

Nous supposons ainsi que le choix de l'ébauche est indépendant de l'erreur modèle basse résolution. Cette hypothèse est évidemment discutable si l'ébauche est issue d'une prévision du modèle. Néanmoins, dans le cas mono-grille, cette hypothèse est également faite : l'erreur modèle est ainsi supposée ne pas dépendre de l'état du modèle. Elle permet notamment d'obtenir l'équation (1.11) du filtre de Kalman. Nous restons donc dans la "légalité" vis-à-vis des règles usuelles de l'assimilation de données.

Il vient

$$\mathbf{B}_{HH} = \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T + \mathbf{Q}_H$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hH} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{hH} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_H^b) \\
&= \text{Cov}(\mathbf{M}_h^h \tilde{\epsilon}_h^b + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\text{hyp} : \tilde{\epsilon}_H^b \text{ et } \epsilon_h^M \text{ d'une part, et } \tilde{\epsilon}_h^b \text{ et } \epsilon_H^M \text{ sont indépendantes d'autre part}$$

Nous supposons ainsi que l'erreur d'ébauche antérieure sur une grille et l'erreur modèle sur l'autre grille sont indépendantes. Nous prolongeons au cas bi-grille l'hypothèse que les erreurs modèles sur chacune des grilles sont indépendantes des états de ces modèles.

Il vient en développant :

$$\mathbf{B}_{hH} = \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M)$$

- Calcul de \mathbf{B}_{Hh} :

\mathbf{B} étant symétrique, il vient $\mathbf{B}_{Hh} = \mathbf{B}_{hH}^T$. D'où :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{Hh}} = \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \mathbf{M}_h^{hT} + \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \mathbf{M}_h^{\partial\omega T} + \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M)$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hh} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hh} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_h^b) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{M}_h^h \tilde{\epsilon}_h^b + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M, \mathbf{M}_h^h \tilde{\epsilon}_h^b + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M) \end{aligned} \quad (2.59)$$

hyp : $\tilde{\epsilon}_h^b$ et ϵ_h^M sont indépendantes

Il vient en développant :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hh} &= \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \mathbf{M}_h^{hT} + \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \mathbf{M}_h^{\partial\omega T} \\ &\quad + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \mathbf{M}_h^{hT} + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \mathbf{M}_h^{\partial\omega T} \\ &\quad + \mathbf{Q}_h \end{aligned}$$

avec \mathbf{Q}_h la matrice de covariance d'erreur modèle haute résolution.

Posons

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_H & (\mathbf{0}) \\ \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H & \mathbf{M}_h^h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\ \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) & \mathbf{Q}_h \end{bmatrix}$$

Alors, il vient :

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{M}^T + \mathbf{Q}$$

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} s'écrit ainsi comme la somme d'un terme correspondant à la propagation par le modèle bi-grille \mathbf{M} de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche initiale $\tilde{\mathbf{B}}$ et d'un terme d'erreur modèle \mathbf{Q} . Nous retrouvons ainsi une formulation équivalente à celle d'une erreur de prévision dans un cas mono-grille.

2.2.3.2 Cas non-linéaire

Nous supposons cette fois-ci que l'ébauche initiale est propagée par un modèle non-linéaire en configuration *one-way* durant un unique pas de temps.

Ceci s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H^b = M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) \\ \mathbf{x}_h^b = M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) \end{cases} \quad (2.60)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes en ce qui concerne le modèle :

- M_H est différentiable en $\tilde{\mathbf{x}}_H^b$. Nous pouvons ainsi linéariser le modèle autour de ce vecteur. Par la suite, nous utiliserons la notation \mathbf{M}_H pour représenter $\mathbf{M}_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)$.
- M_h admet des dérivées partielles suivant \mathbf{x}_h en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))$ et suivant $\mathbf{x}_{\partial\omega}$ en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))$. Nous les noterons $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}$ et $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}}$.

Nous indiquons ici les résultats obtenus, sans le détail des calculs que l'on peut trouver en annexe A.2.

Erreur d'ébaucheGrille grossière

L'erreur d'ébauche sur la grille grossière ϵ_H^b s'écrit :

$$\epsilon_H^b = M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{x}_H^t \quad (2.61)$$

Posons $\epsilon_H^M = \mathbf{x}_H^t - M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)$. Ce terme correspond à l'erreur modèle du modèle basse résolution.

Nous obtenons alors :

$$\epsilon_H^b = \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M + o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$$

Grille fine

L'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit :

$$\epsilon_h^b = M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - \mathbf{x}_h^t \quad (2.62)$$

Posons $\epsilon_h^M = \mathbf{x}_h^t - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))$. Ce terme correspond à l'erreur modèle haute résolution.

Il vient

$$\epsilon_h^b = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M + o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) + o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$$

L'erreur d'ébauche apparaît comme la somme de la propagation par le modèle linéaire tangent haute résolution de l'erreur d'ébauche antérieure, de l'erreur modèle haute résolution et de termes négligeables devant l'erreur d'ébauche bi-grille de la fenêtre précédente.

Nous supposons, comme dans le cas linéaire, que les erreurs d'ébauche sont indépendantes des erreurs modèles.

Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} . Notons \mathbf{Q}_H et \mathbf{Q}_h les matrices de covariance d'erreur modèle basse et haute résolution.

Nous supposons de plus que les erreurs d'ébauche de la fenêtre temporelle précédente sont du même ordre de grandeur. Nous posons : $\varepsilon = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$

\mathbf{B} s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{B}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{B}^{(2)}.$$

Approximation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Etudions l'ordre 0 de \mathbf{B} , c'est à dire la matrice $\mathbf{B}^{(0)}$.

$$\mathbf{B}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH}^{(0)} & \mathbf{B}_{Hh}^{(0)} \\ \mathbf{B}_{hH}^{(0)} & \mathbf{B}_{hh}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}_{HH}^{(0)} = \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T + \mathbf{Q}_H \\ \mathbf{B}_{hH}^{(0)} = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \\ \quad + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \\ \mathbf{B}_{Hh}^{(0)} = \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\ \quad + \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\ \mathbf{B}_{hh}^{(0)} = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\ \quad + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\ \quad + \mathbf{Q}_h \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Posons

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_H & 0 \\ \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H & \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_H & \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\ \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) & \mathbf{Q}_h \end{bmatrix}$$

Alors, il vient :

$$\boxed{\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{M}^T + \mathbf{Q}.}$$

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche $\mathbf{B}^{(0)}$ s'écrit ainsi comme la somme d'un terme correspondant à la propagation par le modèle linéaire tangent \mathbf{M} du modèle bi-grille M de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche initiale $\tilde{\mathbf{B}}$ et d'un terme d'erreur modèle \mathbf{Q} . Nous retrouvons ainsi à nouveau une formulation équivalente à celle d'une erreur de prévision dans un cas mono-grille.

2.2.4 Détails des calculs dans le cas d'interaction two-way

Nous supposons cette fois-ci que l'ébauche initiale est intégrée par un modèle en configuration *two-way* durant un pas de temps. Nous avons vu que l'extension à n pas de temps ne posait pas de difficulté.

2.2.4.1 Cas linéaire

Nous nous plaçons dans un cas linéaire : le modèle et les différents opérateurs sont supposés linéaires.

Nous rappelons les équations discrétisées du modèle bi-grille en interaction *two-way* (cf §1.6.2).

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H^b = \mathbf{J}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b) \\ \mathbf{x}_h^b = \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b) \end{cases} \quad (2.65)$$

Erreur d'ébauche

Grille grossière

L'erreur d'ébauche sur la grille grossière ϵ_H^b devient :

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= \mathbf{x}_H^b - \mathbf{x}_H^t \\ &= \mathbf{J}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{x}_H^t \end{aligned} \quad (2.66)$$

Notons $\mathbf{K}_{\hat{\omega}_H}$ la restriction de \mathbf{x}_H à l'intérieur de ω_H

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H} : F_{\Omega_H} &\rightarrow F_{\omega_H} \\ \mathbf{x}_H &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\omega_H \\ \mathbf{x}_H & \text{sur } \hat{\omega}_H \end{cases} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Nous avons ainsi : $\mathbf{J}_{\hat{\omega}_H} + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H} = \mathbf{I}_{F_{\Omega_H}}$.

D'où

$$\epsilon_H^b = \mathbf{J}_{\hat{\omega}_H} (\mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b - \mathbf{x}_H^t) + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} (\mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{x}_H^t) \quad (2.68)$$

De la même manière que pour le cas d'interaction *one-way*, posons $\mathbf{M}_h = [\mathbf{M}_h^h \quad \mathbf{M}_h^{\partial\omega}]$

Il vient

$$\epsilon_H^b = \mathbf{J}_{\hat{\omega}_H} (\mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b - \mathbf{x}_H^t) + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} (\mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{x}}_h^b + \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b - \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{x}_H^t) \quad (2.69)$$

Posons $\epsilon_H^M = \mathbf{x}_H^t - \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^t$. Ce terme correspond à l'erreur modèle basse résolution. Alors, $\mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^b - \mathbf{x}_H^t = \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M$.

Posons $\epsilon_h^M = \mathbf{x}_h^t - \mathbf{M}_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{x}}_H^t)$ l'erreur modèle haute résolution.

Notons enfin $\epsilon^{G,t} = \mathbf{G}_h^H \mathbf{x}_h^t - \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{x}_H^t$. Ce terme correspond à l'erreur commise par la restriction de la solution vraie à haute résolution vis-à-vis de la restriction de la solution vraie à $\hat{\omega}_H$.

Quelques calculs (cf annexe A.3 dans le cas non linéaire) nous amènent à :

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_H^b &= [\mathbf{J}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H] \tilde{\epsilon}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \tilde{\epsilon}_h^b \\ &\quad - \mathbf{J}_{\hat{\omega}_H} \epsilon_H^M - \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \epsilon_h^M + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H} \epsilon^{G,t} \end{aligned}}$$

Par la suite, nous noterons \mathbf{P}_H l'opérateur $\mathbf{J}_{\omega_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H$.

L'erreur d'ébauche basse résolution apparait comme la somme de différents termes. Le premier, $[\mathbf{J}_{\omega_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H] \tilde{\epsilon}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \tilde{\epsilon}_h^b$, correspond à l'intégration de l'erreur d'ébauche antérieure par la composante basse résolution du modèle bi-grille en interaction *two-way*. Le résultat obtenu correspond sur l'intérieur de ω_H à la restriction de l'intégration de l'erreur initiale bi-grille par le modèle haute résolution, et correspond partout ailleurs à l'intégration par le modèle basse résolution de l'erreur initiale basse résolution. Le second, $-(\mathbf{J}_{\omega_H} \epsilon_H^M + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \epsilon_h^M)$ apparait comme une erreur modèle. Elle est égale à la restriction de l'erreur modèle haute résolution sur l'intérieur de ω_H et à l'erreur modèle basse résolution partout ailleurs. Enfin, le troisième terme correspond à la restriction à l'intérieur de ω_H de l'erreur dîte de restriction. C'est la somme de ces deux derniers termes qui est la composante basse résolution de l'erreur modèle bi-grille.

Grille fine

L'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit (cf calculs *one-way*) :

$$\epsilon_h^b = \mathbf{M}_h^h \tilde{\epsilon}_h^b + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M$$

Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} .

Nous faisons ici de nouvelles hypothèses :

hyp :

- $\tilde{\epsilon}_H^b$ et ϵ_H^M sont indépendants

Nous supposons que les erreurs d'ébauche sur la fenêtre précédente sont indépendantes des erreurs modèles sur cette fenêtre. Ces hypothèses sont les mêmes que celles faites dans le cas en interaction *one-way*.

- $\tilde{\epsilon}_H^b$ et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants
- $\tilde{\epsilon}_h^b$ et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants

Nous supposons que les erreurs d'ébauche sur la fenêtre précédente sont indépendantes des erreurs commises par la restriction de la solution vraie haute résolution vis-à-vis de la composante sur ω_H de la solution vraie basse résolution. Cette hypothèse est de même nature que celle portant sur l'indépendance de l'erreur modèle et de l'ébauche.

- ϵ_H^M et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants
- ϵ_h^M et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants

Nous supposons que les erreurs modèles et les erreurs de restriction sont indépendantes. Cette hypothèse paraît naturelle, le choix de \mathbf{G}_h^H étant indépendant des modèles \mathbf{M}_H et \mathbf{M}_h .

- Calcul de \mathbf{B}_{HH} :

En injectant l'expression de ϵ_H^b il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{HH} = & \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{P}_H^T + \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \mathbf{M}_h^{hT} \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T \\ & + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{P}_H^T + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \mathbf{M}_h^{hT} \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T \\ & + \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{Q}_H \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \mathbf{Q}_h \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{B}_{\epsilon^G, t} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T \\ & + \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H}^T \end{aligned}$$

avec \mathbf{Q}_H et \mathbf{Q}_h les matrices de covariance d'erreur modèle basse et haute résolution.

- Calcul de \mathbf{B}_{hH} :

En injectant les expressions de ϵ_H^b et ϵ_h^b il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hH} = & \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{P}_H^T + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{P}_H^T + \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \mathbf{M}_h^{hT} \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T \\ & + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \mathbf{M}_h^{hT} \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H}^T + \mathbf{Q}_h \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T \end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{Hh} :

Par symétrie de \mathbf{B} , il vient $\mathbf{B}_{Hh} = \mathbf{B}_{hH}^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Hh} = & \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \mathbf{M}_h^{hT} + \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_h^{\partial\omega T} + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \mathbf{M}_h^{hT} \\ & + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_h^{\partial\omega T} + \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{Q}_h \end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hh} :

D'après les calculs fait dans la partie *one-way*, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hh} = & \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \mathbf{M}_h^{hT} + \mathbf{M}_h^h \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_h^{\partial\omega T} \\ & + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \mathbf{M}_h^{hT} + \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_h^{\partial\omega T} \\ & + \mathbf{Q}_h \end{aligned}$$

Posons

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H & \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{M}_h^h \\ \mathbf{M}_h^{\partial\omega} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H & \mathbf{M}_h^h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{Q}_H \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{Q}_h \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T & \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \mathbf{Q}_h + \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\ + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{B}_{\epsilon^G, t} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T + \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T & \\ + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H}^T & \\ \mathbf{Q}_h \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\dot{\omega}_H}^T & \mathbf{Q}_h \end{bmatrix}$$

Alors, il vient :

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}.$$

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} s'écrit de nouveau comme la somme d'un terme correspondant à la propagation par le modèle linéaire tangent \mathbf{M} du modèle bi-grille M de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche antérieure $\tilde{\mathbf{B}}$ et d'un terme d'erreur modèle \mathbf{Q} . Nous retrouvons ainsi à nouveau une formulation équivalente à celle d'une erreur de prévision dans un cas mono-grille.

2.2.4.2 Cas non-linéaire

Nous supposons maintenant que l'ébauche initiale est propagée par un modèle non-linéaire en configuration *two-way* durant un unique pas de temps.

Ceci s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H^b = \mathbf{J}_{\omega_H} M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) \\ \mathbf{x}_h^b = M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) \end{cases}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes en ce qui concerne le modèle :

- M_H est différentiable en $\tilde{\mathbf{x}}_H^b$. Nous pouvons ainsi linéariser le modèle autour de ce vecteur. Par la suite, nous utiliserons la notation \mathbf{M}_H pour représenter $\mathbf{M}_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)$.
- M_h admet des dérivées partielles suivant \mathbf{x}_h en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(\mathbf{K}_{\partial\omega_H} M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))$ et suivant $\mathbf{x}_{\partial\omega}$ en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(\mathbf{K}_{\partial\omega_H} M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))$. Nous les noterons $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}$ et $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}}$.
- G_h^H est différentiable sur F_{ω_h} . Nous noterons

$$\begin{cases} \mathbf{G}_h^H = \mathbf{G}_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) \\ \bar{\mathbf{G}}_h^H = \mathbf{G}_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) \\ \tilde{\mathbf{G}}_h^H = \mathbf{G}_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) \end{cases} \quad (2.70)$$

Nous indiquons ici les résultats obtenus, sans le détail des calculs que l'on peut trouver en annexe A.3.

Erreur d'ébauche

Grille grossière

L'erreur d'ébauche sur la grille grossière ϵ_H^b devient :

$$\epsilon_H^b = \mathbf{x}_H^b - \mathbf{x}_H^t \quad (2.71)$$

Posons $\epsilon_H^M = \mathbf{x}_H^t - M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)$ et $\epsilon^{G,t} = G_h^H(\mathbf{x}_h^t) - \mathbf{K}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{x}_H^t$. Ce terme correspond à l'erreur commise par la restriction de la solution vraie à haute résolution vis-à-vis de la restriction de la solution vraie à $\tilde{\omega}_H$.

Quelques calculs nous amènent à :

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= [\mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H] \tilde{\epsilon}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b \\ &\quad - \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \epsilon_H^M - \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \epsilon_h^M + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \epsilon^{G,t} + o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|) + o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) + o(\|\epsilon_H^M\|) \end{aligned}$$

Par la suite, nous noterons \mathbf{P}_H l'opérateur $\mathbf{J}_{\omega_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H$.

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$. Effectuons les changements de variables $\tilde{\alpha}_H = \varepsilon \tilde{\mathbf{a}}_H$, $\tilde{\beta}_H = \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}_H$ et $\gamma_H = \eta \mathbf{d}_H$.

L'erreur d'ébauche basse résolution devient

$$\epsilon_H^b = \mathbf{P}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b - \mathbf{J}_{\omega_H} \epsilon_H^M - \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \epsilon_h^M + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \epsilon^{G,t} + o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|) + o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) + o(\|\epsilon_h^M\|)$$

Grille fine

D'après les calculs réalisés dans le cas d'interaction *one-way*, l'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit :

$$\epsilon_h^b = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M + o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) + o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$$

Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} .

Nous supposons que les erreurs d'ébauche de la fenêtre temporelle précédente sont du même ordre de grandeur. Nous posons : $\varepsilon = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$ et $\eta = o(\|\epsilon_H^M\|)$

Sous les mêmes hypothèses d'indépendance des erreurs faites dans le cas linéaire, il vient

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{B}^{(1,0)} + \eta \mathbf{B}^{(0,1)} + \varepsilon^2 \mathbf{B}^{(2,0)} + \varepsilon \eta \mathbf{B}^{(1,1)} + \eta^2 \mathbf{B}^{(0,2)}.$$

Approximation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Etudions l'ordre 0 de \mathbf{B} , c'est à dire $\mathbf{B}^{(0)}$.

$$\mathbf{B}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH}^{(0)} & \mathbf{B}_{Hh}^{(0)} \\ \mathbf{B}_{hH}^{(0)} & \mathbf{B}_{hh}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{B}_{HH}^{(0)} = \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{P}_H^T + \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T \\
 \quad + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{P}_H^T + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T \\
 \quad + \mathbf{J}_{\omega_H}^T \mathbf{Q}_H \mathbf{J}_{\omega_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \mathbf{Q}_h \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{B}_{\epsilon^{G,t}} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T \\
 \quad \mathbf{J}_{\omega_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\omega_H}^T \\
 \mathbf{B}_{hH}^{(0)} = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{P}_H^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{P}_H^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T \\
 \quad + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T + \mathbf{Q}_h \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\omega_H}^T \\
 \mathbf{B}_{HH}^{(0)} = \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \mathbf{P}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 \quad + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 \quad + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \mathbf{Q}_h + \mathbf{J}_{\omega_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\
 \mathbf{B}_{hh}^{(0)} = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 \quad + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 \quad + \mathbf{Q}_h
 \end{array} \right. \tag{2.73}$$

Posons

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\omega_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H & \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \\ \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H & \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\omega_H}^T \mathbf{Q}_H \mathbf{J}_{\omega_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \mathbf{Q}_h \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T & \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \mathbf{Q}_h + \mathbf{J}_{\omega_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\ + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \mathbf{B}_{\epsilon^{G,t}} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T + \mathbf{J}_{\omega_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T & \\ + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\omega_H}^T & \\ \mathbf{Q}_h \tilde{\mathbf{G}}_h^{HT} \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H}^T + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\omega_H}^T & \mathbf{Q}_h \end{bmatrix}$$

alors, il vient :

$$\boxed{\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{M}^T + \mathbf{Q}}$$

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche $\mathbf{B}^{(0)}$ s'écrit de nouveau comme la somme d'un terme correspondant à la propagation par le modèle linéaire tangent \mathbf{M} du modèle bi-grille M de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche initiale $\tilde{\mathbf{B}}$ et d'un terme d'erreur modèle \mathbf{Q} . Nous retrouvons ainsi à nouveau une formulation équivalente à celle d'une erreur de prévision dans un cas mono-grille.

2.2.5 Conclusion

Nous avons étudié dans cette partie la structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche dans le cas d'un emboîtement bi-grille. Cette étude a été menée telle une récurrence. Notre étape d'*initialisation* a concerné le cas particulier d'une ébauche haute résolution obtenue par interpolation de l'ébauche basse résolution. Cette situation est celle que l'on peut observer lors de la mise en place d'un emboîtement de modèles : l'initialisation de la solution du modèle haute résolution se fait en interpolant la solution basse résolution déjà existante.

Nous avons montré ensuite que dans le cas où notre ébauche était obtenue par intégration par un modèle bi-grille d'une ébauche antérieure, il était possible d'approcher la matrice de covariance d'erreur d'ébauche par l'intégration de la matrice d'erreur d'ébauche antérieure par le linéaire tangent du modèle bi-grille auquel s'ajoutent des termes d'erreur modèle. Nous avons obtenu ainsi une relation de récurrence entre les matrices de covariance d'erreur d'ébauche de deux fenêtres d'assimilation consécutives. Cette relation s'avère être la même que dans le cas mono-grille. Dès lors, il va être possible d'appliquer au cas bi-grille les méthodes de calcul de la matrice \mathbf{B} déjà existantes pour le cas mono-grille.

Chapitre 3

Description du modèle et des tests numériques

Sommaire

3.1	Le modèle	70
3.2	Simulation de référence	72
3.3	Configurations locales	77
3.3.1	Présentation	77
3.3.2	Conditions aux frontières ouvertes	79
3.4	Configuration des expériences d’assimilation	79
3.4.1	Expériences	79
3.4.2	Observations	80
3.5	Modélisation de la matrice de covariance d’erreur d’ébauche	80
3.5.1	Structure bi-grille de \mathbf{B}	80
3.5.2	Structure mono-grille de $\mathbf{B} : \mathbf{B}_H, \mathbf{B}_h$	81
3.6	Les fonctions coût	83
3.7	Validation des gradients	84
3.8	Illustration des covariances d’erreur d’ébauche : expériences ”mono-obs”	85
3.9	Diagnostics physiques	90
3.9.1	Définitions	90
3.9.2	Une remarque sur les ondes internes et la présentation des courbes diagnostiques	90

Nous introduisons dans ce chapitre le modèle utilisé pour mettre en oeuvre les algorithmes d’assimilation multi-grilles présentés dans les parties précédentes. Nous décrivons également la configuration des tests numériques réalisés.

3.1 Le modèle

Considérons un fluide homogène présent dans un domaine sur la Terre en rotation. La conservation de la masse de ce fluide s'écrit :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (3.1)$$

où ρ est la densité du fluide, \vec{U} son champ de vitesse, et $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulière : $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla$.

Plaçons-nous dans un repère lié à la Terre, qui tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors dans ce repère :

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{f} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{U} + \mu \left(\Delta \vec{U} + \frac{1}{3} \nabla(\operatorname{div} \vec{U}) \right) \quad (3.2)$$

où \vec{f} représente les forces volumiques extérieures (par exemple la force de gravitation), P la pression, et μ la viscosité dynamique du fluide. Le terme $\Delta \vec{U} + \frac{1}{3} \nabla(\operatorname{div} \vec{U})$ correspond aux forces non conservatives. Ces deux équations forment le modèle de Navier-Stokes.

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un fluide, vérifiant l'approximation hydrostatique et de densité constante ρ_0 . Supposons de plus que les échelles verticales de l'écoulement soient négligeables devant les échelles horizontales. Ceci revient à considérer le fluide comme une fine couche d'eau à la surface de la Terre. En intégrant sur la verticale les équations précédentes (en négligeant le terme $\mu \frac{1}{3} \nabla(\operatorname{div} \vec{U})$), nous obtenons alors le système de Saint-Venant (ou shallow water). Les variables d'état sont uniquement la hauteur d'eau h et les deux composantes (u, v) de la vitesse horizontale. Les équations modélisant la dynamique du fluide sont alors (e.g. Gill [28], Pedloski [42]), en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} + ru - \nu \Delta u = \frac{\tau_x}{\rho_0 h} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} + rv - \nu \Delta v = \frac{\tau_y}{\rho_0 h} \end{cases} \quad (3.3)$$

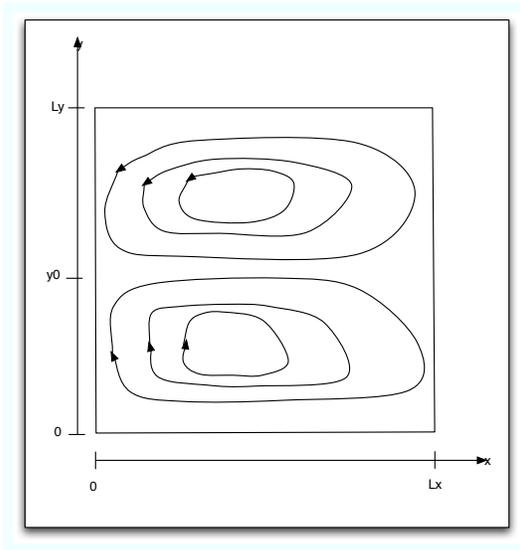
g représente la gravité. f est le paramètre de Coriolis. Il vaut $f = 2\Omega \sin \Phi$, où Φ est la latitude. ν est le coefficient de viscosité (permettant de paramétrer la dissipation due aux petites échelles) et r est le coefficient de frottement de fond (modélisation de la friction du fluide sur le fond). $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ est la tension du vent agissant sur le fluide. Des conditions aux limites de type adhérence ($u = v = 0$) sont imposées sur les bords du domaine.

Le domaine est choisi rectangulaire $[0, L_x] \times [y_0 - \frac{L_y}{2}, y_0 + \frac{L_y}{2}]$, où y_0 est donc la valeur de y au centre du bassin. On applique de plus l'approximation du β -plan, c'est à dire que l'on écrira $f(y) \approx f(y_0) + \beta(y - y_0)$, avec $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(y_0)$.

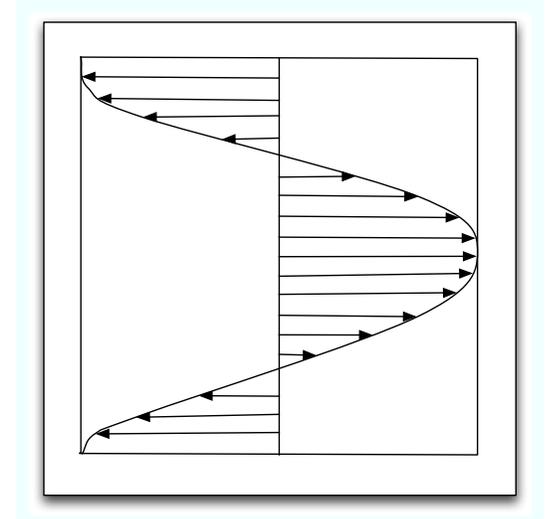
La tension du vent est choisie constante dans le temps, et vaut

$$\tau = \tau_0 \cos\left(\frac{2\pi(y - y_0)}{L_y}\right) \vec{i} \quad (3.4)$$

Ce choix entraîne une circulation en "double gyre" dans le domaine.



Domaine de calcul
et circulation typique



Tension du vent

Les valeurs numériques des paramètres sont les suivantes : $L_x = L_y = 2000km$, $f(y_0) = 0.7 \times 10^{-4}s^{-1}$, $\beta = 2 \times 10^{-11}m^{-1}s^{-1}$, $r = 1.10^{-7}s^{-1}$, $\rho_0 = 1000kgm^{-3}$, $g = 0.02ms^{-2}$, $\tau_0 = 0.015Nm^{-2}$. Ces valeurs correspondent à celles utilisées par Adcroft et Marshall (1998) [1] et par Vidard (2001) [55] pour leur modèle shallow water. On peut noter que la valeur de g correspond non pas à la valeur usuelle de la gravité terrestre ($g_0 = 9.8ms^{-2}$), mais à une valeur dite de "gravité réduite" $g = g_0 \frac{\rho_0 - \rho_{ref}}{\rho_{ref}}$. Ceci signifie que l'on modélise en fait une couche d'eau de densité ρ_0 en mouvement sur une couche d'eau immobile de densité ρ_{ref} (amplitude de la force d'Archimède).

Un schéma aux différences finies de type Prédicteur-Correcteur à l'ordre trois en temps et en espace est utilisé pour discrétiser ce modèle sur une grille décalée, de type C dans la classification d'Arakawa (figure 3.1).

Ce schéma correspond à celui utilisé pour l'écoulement barotrope dans le modèle numérique d'océan ROMS-AGRIF développé par UCLA et l'IRD, et intégrant, comme son nom l'indique l'outil AGRIF¹ de raffinement de maillage développé par Debreu [14], [15]. De plus amples informations sur ce schéma peuvent être trouvées dans Shchepetkin et McWilliams (2005) [48].

¹<http://www-lmc.imag.fr/IDOPT/AGRIF/index.html>

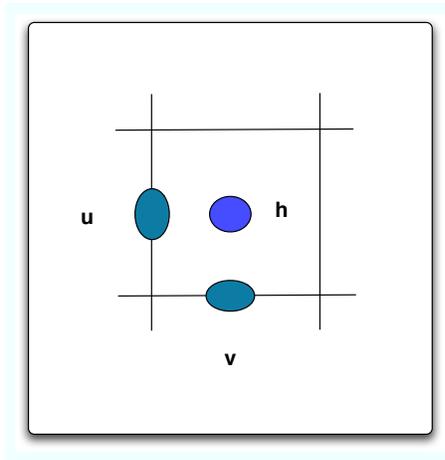


FIG. 3.1 – Grille C d’Arakawa : la hauteur d’eau h est localisée au centre de la maille, les composantes de la vitesse sont centrées sur les arêtes.

3.2 Simulation de référence

Nous décrivons dans cette partie la simulation de référence qui nous servira de ”vérité” pour toutes les expériences d’assimilation de données qui seront décrites par la suite.

Initialement, un spin-up haute résolution de cinq ans est réalisé en partant du modèle au repos ($h = h_0 = 500m$, $u = v = 0ms^{-1}$). Le pas d’espace $\delta_x = \delta_y$ est de $\frac{25}{3}km$ dans les deux directions horizontales. Le coefficient de diffusion vaut $\nu = 33.33m^2.s^{-1}$.

Cette simulation correspond à la montée en puissance du modèle jusqu’à l’obtention d’un écoulement stabilisé. Durant cette période, dans un premier temps, l’océan va se mettre en mouvement sous l’action du vent. Puis, les courants sur le bord Ouest vont s’intensifier sous l’action de la rotation de la Terre (effet β) entraînant une déstabilisation du jet et la formation de tourbillons (cf figure 3.2).

Une fois ce spin-up réalisé, le modèle atteint un état ”stabilisé” d’un point de vue énergétique. La trajectoire du modèle pourra alors nous servir de référence, et sera l’état ”vrai” de nos expériences d’assimilation.

Les figures 3.4, 3.5 représentent l’évolution de la surface libre et du champ de vitesse de la solution vraie au cours du temps. La figure 3.6 représente l’évolution du champ de vorticité. Nous constatons la présence de deux masses tourbillonnaires sur ce domaine haute résolution : la première au Sud (anticyclone) caractérisée par une élévation de la surface libre et des vitesses de rotation relativement importantes, et la seconde (cyclone) au Nord, plus petite, présentant une dépression et des vitesses de rotation plus faibles. Entre ces deux structures, nous trouvons une zone où les vitesses essentiellement zonales sont importantes. C’est le jet central. Enfin, un tourbillon se situant initialement dans le coin Nord-Est se déplace vers l’Ouest le long de la frontière Nord.

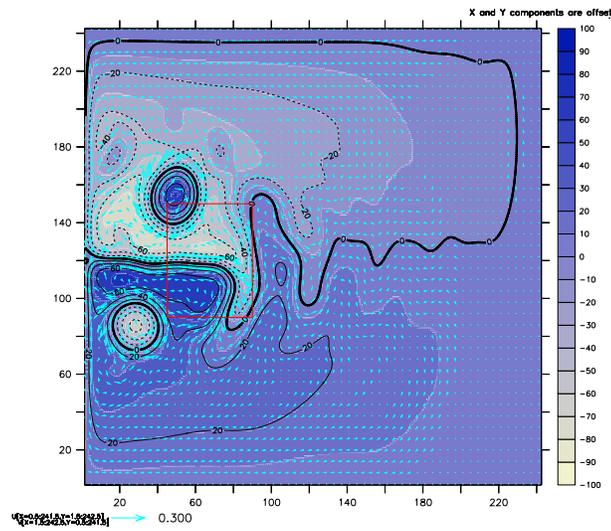


FIG. 3.2 – Hauteur d'eau (isolignes) et vitesses (vecteurs) après 5 ans d'intégration du modèle haute résolution. En trait rouge : domaine d'étude ω pour les expériences d'assimilation de données.

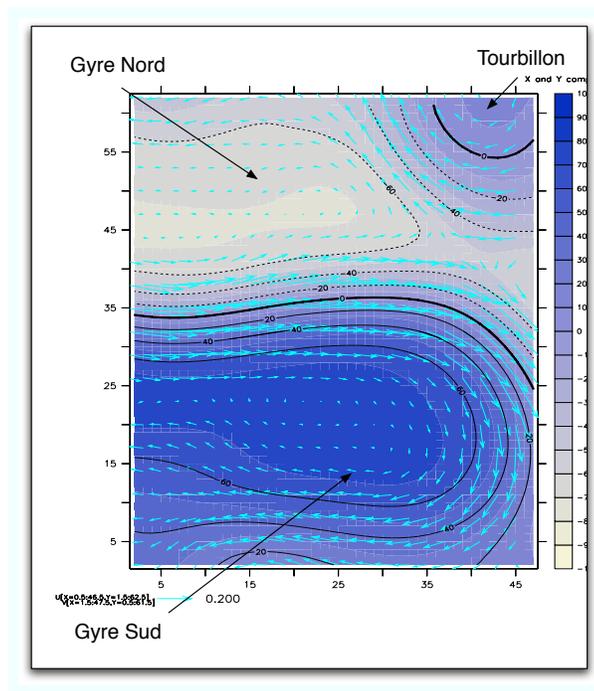


FIG. 3.3 – Zoom sur ω durant la fenêtre d'assimilation : définitions des structures remarquables

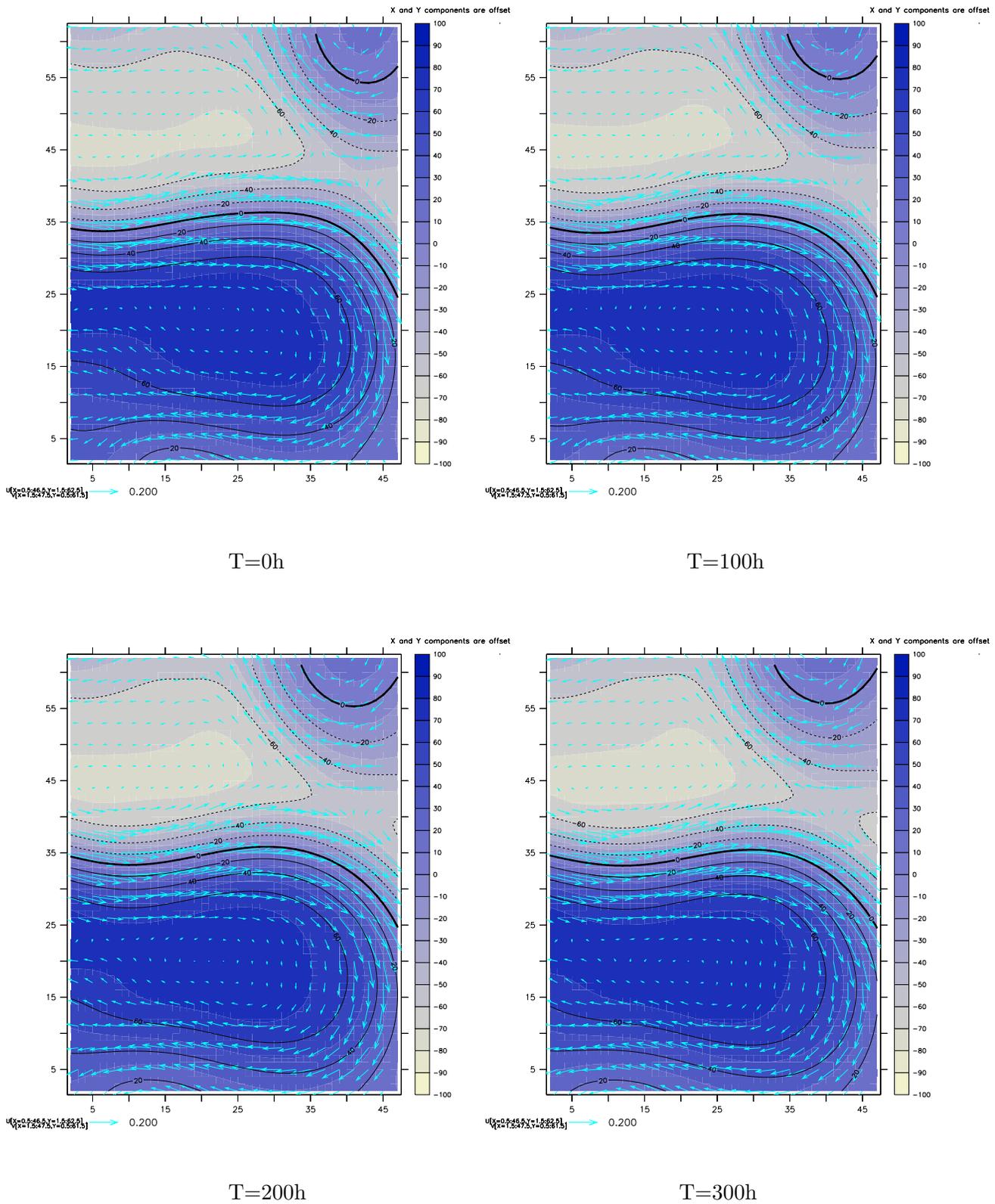


FIG. 3.4 – Zoom sur ω durant la fenêtre d'assimilation : hauteur d'eau (couleur et isolignes) et vitesse (flèches) de la solution vraie de $T = 0h$ à $T = 300h$

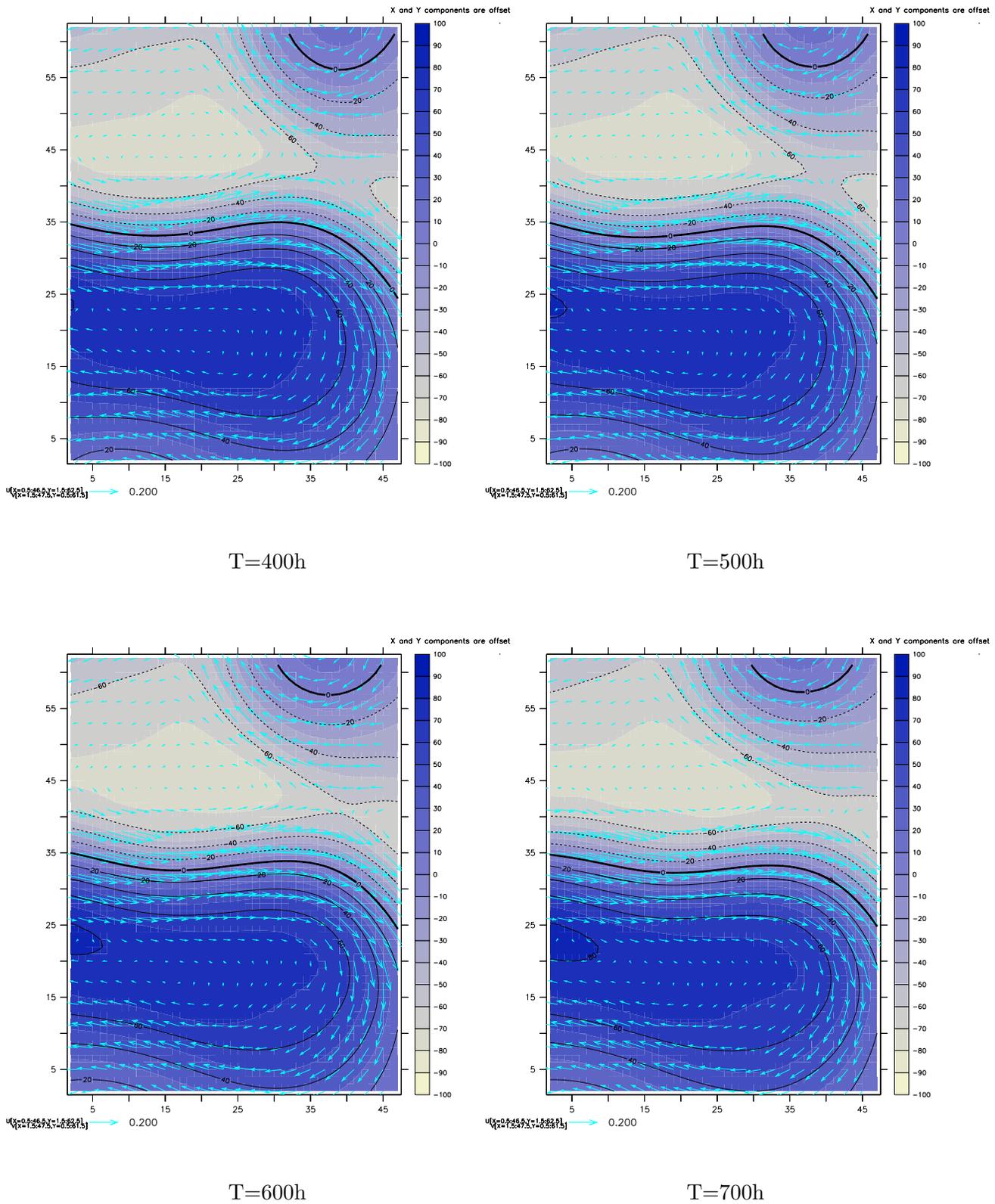
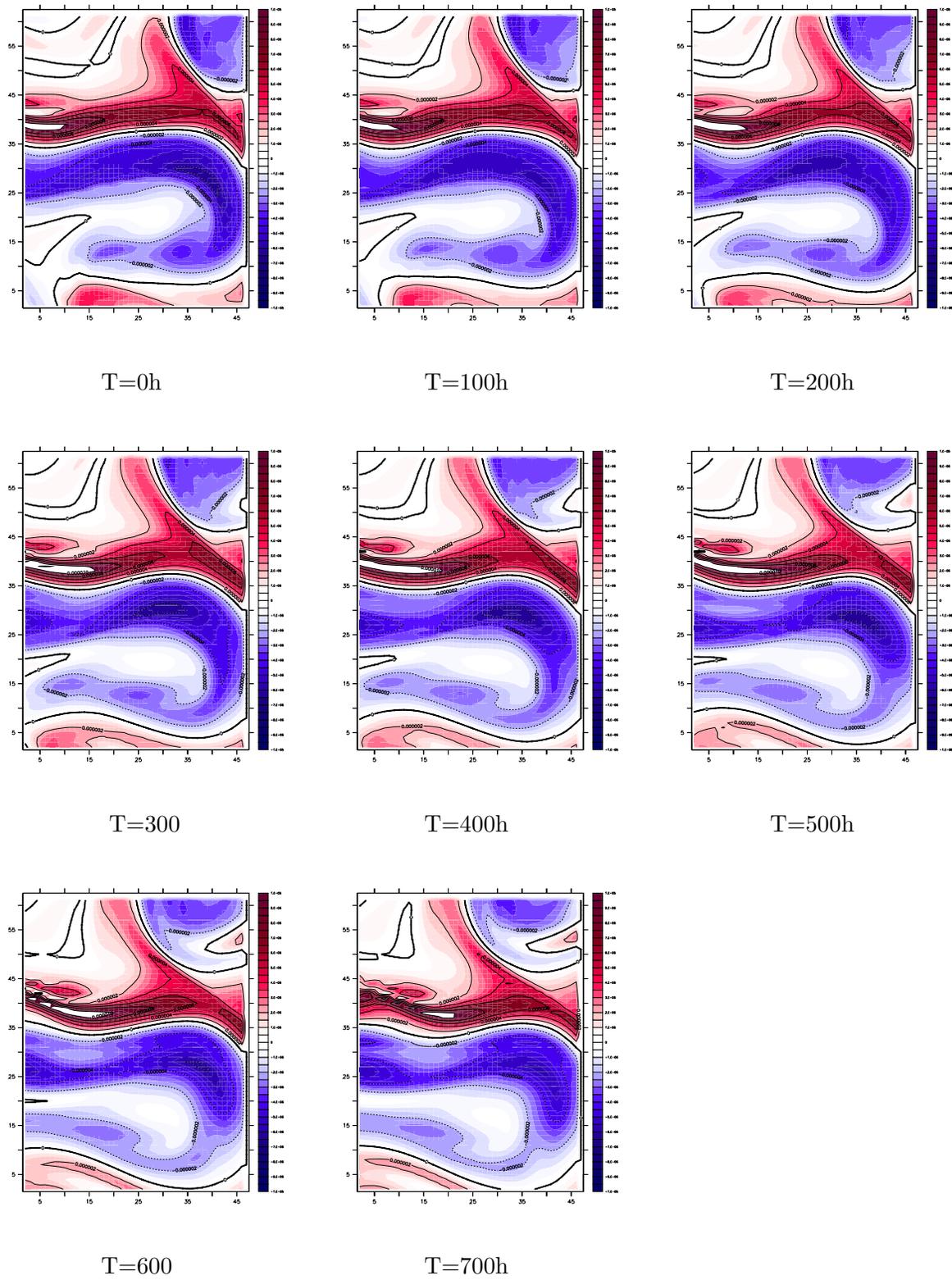


FIG. 3.5 – Idem figure 3.4, de $T = 400h$ à $T = 700h$

FIG. 3.6 – Zoom sur ω_h durant la fenêtre d'assimilation : vorticité de la solution vraie

3.3 Configurations locales

Nous définissons la zone d'étude ω dans nos expériences d'assimilation à l'intérieur de notre domaine Ω . Elle correspond au domaine encadré en rouge sur les figures 3.3 et 3.7.

3.3.1 Présentation

- Plusieurs configurations de calcul sont construites pour fournir une solution sur cette zone :
- la première est une configuration mono-grille frontières ouvertes "classique". La grille haute résolution ω_h recouvre uniquement le domaine ω . Les conditions aux limites sont spécifiées de manière *off-line* par des forçages provenant d'un autre modèle.
 - deux configurations bi-grilles d'emboîtement de modèles ont également été mises en place : la première en interaction *one-way*, la seconde en interaction *two-way*. Elles font intervenir deux modèles distincts : le premier à basse résolution sur Ω_H ($H = 25km$), le second identique à la configuration mono-grille, à haute résolution sur ω_h . Dans notre cas, les forçages aux bords du domaine dans la configuration mono-grille sont issus de ce modèle basse résolution.

La construction de ces configurations est la suivante. Une fois le spin-up réalisé, nous mettons en place un emboîtement bi-grille en interaction *two-way*. La solution initiale basse résolution est alors obtenue en appliquant un opérateur de restriction (linéaire dans notre cas) sur la solution obtenue en fin de spin-up. La solution locale haute résolution est obtenue en interpolant la solution globale basse résolution. Nous intégrons alors le schéma bi-grille pendant six mois. Le coefficient de diffusion est le même que celui du modèle global haute résolution. La configuration initiale de l'emboîtement de modèle est représentée figure 3.7.

Nous résumons dans le tableau suivant les différentes valeurs choisies pour nos discrétisations spatio-temporelles :

	Maillage Nb mailles	Résolution (km)	Pas de temps (s)	Coefficient de diffusion ($m^2.s^{-1}$)
Modèle global haute résolution : simulation de référence	240×240	$h = \frac{25}{3}$	1800	33.33
Modèle global basse résolution	80×80	$H = 25$	1800	300
Modèle local haute résolution	45×60	$h = \frac{25}{3}$	1800	33.33

Il est important de noter qu'avec ces différents choix de viscosité, les physiques présentes sur les deux grilles ne sont plus les mêmes. Ainsi, le modèle global basse résolution ne permet plus la génération de tourbillons de méso-échelle et au contraire dissipera ceux présents initialement, tandis que le modèle local haute résolution garde les propriétés turbulentes du modèle global haute résolution.

Conformément aux choix de la partie théorique, nous n'avons pas réalisé de raffinement temporel. Le pas de temps est donc identique sur chacune des grilles.

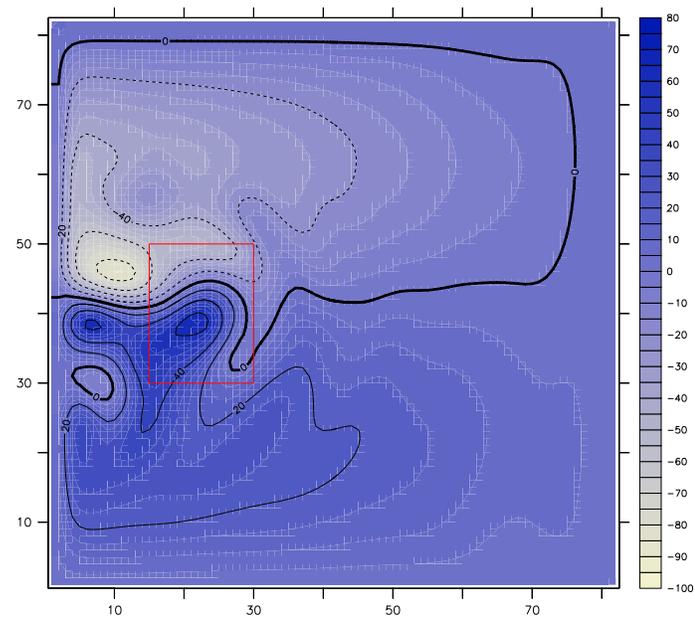


FIG. 3.7 – Configuration initiale de l’emboîtement de modèles. En rouge : localisation du domaine Ω_{in}

3.3.2 Conditions aux frontières ouvertes

Intéressons-nous maintenant aux conditions aux limites du modèle local haute résolution. Tout d'abord signalons la présence d'une couche de transition sur les bords intérieurs du domaine fin. Sa largeur correspond à cinq points de grille. Cette couche a pour but d'assurer une transition continue entre les équations des modèles à basse et à haute résolution, et de réduire les phénomènes de réflexion observables au niveau des frontières ouvertes du domaine, lors de l'emploi de conditions aux limites trop simplistes (Dirichlet par exemple). Pour cela, nous augmentons progressivement la viscosité dans cette couche pour atteindre, aux frontières du domaine, la valeur 300 présente dans le modèle basse résolution.

De plus, dans le cas d'interaction *one-way*, nous utilisons sur $\partial\omega$ la condition de Flather (1976) [25], à savoir :

$$u_h = u_H \pm \sqrt{\frac{g}{H_0}}(\eta_H - \eta_h) \quad (3.5)$$

où u est la composante normale de la vitesse, H_0 la profondeur d'eau au repos et η l'élevation de surface.

De nombreuses études comparatives traitant des conditions de frontières ouvertes ont mis en évidence les très bonnes performances des conditions de Flather. Dans le cas d'un modèle shallow water, cette condition revient à spécifier la caractéristique entrante (e.g. Blayo et Debreu [5]).

Dans le cas d'interaction *two-way*, la rétroaction du modèle haute résolution vers le modèle basse résolution peut entraîner des différences entre les caractéristiques vues sur ces deux modèles, qui peuvent mener à des instabilités numériques. Nous avons donc choisi comme conditions aux limites des conditions de Dirichlet. Pour le cas de l'assimilation mono-grille avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites, la condition de Flather est également utilisée.

Nous récapitulons ces différentes conditions aux limites dans le tableau suivant :

Configuration	Couche de transition	Condition de Flather
One-way	×	×
One-way wic	×	×
Two-way	×	
Two-way wic	×	
Mono-grille	×	×

3.4 Configuration des expériences d'assimilation

Nous présentons dans cette partie la configuration de nos expériences d'assimilation.

3.4.1 Expériences

Une fois l'emboîtement stabilisé, l'assimilation peut avoir lieu. La fenêtre temporelle dure un mois. La solution globale haute résolution représente \mathbf{x}_h^t l'état vrai sur le domaine local. L'état vrai basse résolution \mathbf{x}_H^t est obtenu en conservant les valeurs de la solution globale haute résolution coïncidant avec les points du maillage. Le déroulement temporel de nos expériences est résumé figure 3.8.

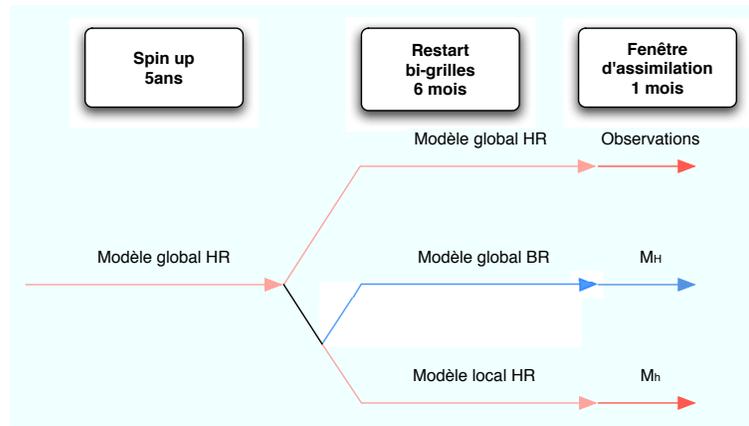


FIG. 3.8 – Cadre expérimental des expériences d'assimilation de données

3.4.2 Observations

Les observations, présentes uniquement sur la grille fine, sont obtenues en échantillonnant spatialement et temporellement l'état "vrai", à savoir la solution du modèle global haute résolution de référence. Différentes fréquences d'échantillonnage ont été testées.

Les matrices \mathbf{R}_i de covariance d'erreur d'observation aux différents instants t_i sont égales à l'identité. Les erreurs d'observations sont donc supposées décorrélées spatialement. Les variations de la hauteur d'eau fluctuant entre $-75m$ et $80m$, la valeur 1 pour les coefficients diagonaux traduit des erreurs de l'ordre de 1% à 1.5%

3.5 Modélisation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Nous avons vu au §2.2 quelle était la structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche dans le cas de modèles emboîtés. Nous avons également vu qu'il était possible d'appliquer les techniques mono-grilles déjà existantes afin de modéliser la matrice de covariance d'erreur d'ébauche bi-grille.

3.5.1 Structure bi-grille de \mathbf{B}

Nous avons supposé qu'il y avait décorrélation des covariances d'erreur d'ébauche entre les grilles. \mathbf{B} est alors diagonale par blocs :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_H & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{B}_h \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La matrice ainsi obtenue est une approximation simpliste de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche. Néanmoins, cette modélisation contient déjà une part importante de l'information statistique pour chacune des grilles. Elle permet de plus une implémentation relativement aisée. Ainsi, partant d'une configuration mono-grille haute résolution, il suffira d'utiliser les mêmes routines permettant de modéliser la matrice de covariance d'erreur d'ébauche haute résolution (EOF, filtre Laplacien,..) sur la grille basse résolution pour obtenir les covariances d'erreur

d'ébauche basse résolution. Le passage à un algorithme bi-grille dans l'optique d'améliorer la solution locale haute résolution se fera donc plus facilement.

De plus, l'emploi de la librairie AGRIF nous amène naturellement à utiliser une telle modélisation.

Les difficultés rencontrées pour ajouter les covariances d'erreur entre les grilles dépendront fortement de la méthode utilisée pour modéliser \mathbf{B} . L'utilisation d'EOF calculées à partir de la trajectoire du vecteur d'état bi-grille devrait permettre une prise en compte relativement "facile" de ces covariances. Néanmoins, dans un premier temps, il ne nous a pas semblé judicieux de mêler à la fois le multi-grille et les méthodes de rang réduit. C'est pourquoi nous avons préféré la méthode du filtre Laplacien généralisé appliquée sur chacune des grilles. Cette méthode est développée dans la partie suivante. L'ajout des covariances d'erreur entre les grilles nécessite dans ce cas de créer un opérateur d'équilibre bi-grille reliant les différentes variables du vecteur d'état entre elles, ce qui s'avère a priori compliqué et ne nous a pas semblés prioritaire.

3.5.2 Structure mono-grille de \mathbf{B} : $\mathbf{B}_H, \mathbf{B}_h$

Pour nos expériences numériques, nous avons décidé de modéliser sur chacune des grilles, non pas la matrice \mathbf{B} , mais l'opérateur réalisant le produit de cette matrice avec un vecteur quelconque. Cette technique est usuelle : la taille de cette matrice dans le cas d'applications réalistes rend son calcul explicite difficile voire impossible (problème de mémoire des ordinateurs notamment). Il nous est en fait seulement nécessaire de savoir calculer le produit $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}$, avec \mathbf{v} un vecteur quelconque. Ceci va nous permettre de réaliser sur chaque grille le changement de variables "classique" (§1.4.5) $\delta\mathbf{x} = \mathbf{B}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}$, avec $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b$ l'incrément d'analyse.

Nous exposons par la suite la construction de la matrice \mathbf{B} telle qu'elle a été exposée par Vidard [55] ou bien Ricci [45] dans leurs thèses.

Sur chacune des grilles, le vecteur d'état se compose de trois variables : la hauteur d'eau h et les vitesses u et v . La matrice \mathbf{B} associée à chacune des grilles s'écrit donc

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{hh} & \mathbf{B}_{hu} & \mathbf{B}_{hv} \\ \mathbf{B}_{uh} & \mathbf{B}_{uu} & \mathbf{B}_{uv} \\ \mathbf{B}_{vh} & \mathbf{B}_{vu} & \mathbf{B}_{vv} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

où $\mathbf{B}_{\alpha\beta}$ représentent les covariances spatiales entre les variables α et β .

Le calcul de ces différents blocs va se faire en deux phases. Dans un premier temps, nous construisons pour chaque variable α un opérateur de covariance spatiale \mathbf{C}_α . Nous obtenons ainsi sur chaque grille un opérateur de covariance monovarié \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_h & (\mathbf{0}) & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & \mathbf{C}_u & (\mathbf{0}) \\ (\mathbf{0}) & (\mathbf{0}) & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Pour obtenir ensuite une matrice de covariance d'erreur d'ébauche multivariée, nous introduisons un opérateur d'équilibre \mathbf{K} reliant les variables entre elles. Sur chacune des grilles, \mathbf{B} s'écrit alors

$$\mathbf{B} = \mathbf{KCK}^T \quad (3.9)$$

Nous cherchons donc à calculer

$$\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{K}\mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

Nous détaillons ici la construction de ces opérateurs.

Construction de l'opérateur de covariance monovariée \mathbf{C} :

Pour chaque grille, nous cherchons à construire des corrélations spatiales qui décroissent avec la distance. Nous supposons ainsi que les erreurs présentes en un point de grille sont décorréliées de celles présentes en des points de grille éloignés. Le profil gaussien permettant d'obtenir cette propriété, il va nous permettre de modéliser les corrélations spatiales.

Une possibilité pour obtenir un tel profil est la résolution d'une équation de diffusion représentée par un filtre Laplacien généralisé, comme le proposent Weaver et Courtier (2001) [56]. La méthode originelle sépare les corrélations verticales (équation 1D) et horizontales (équation 2D). Notre modèle numérique Shallow Water étant 2D, seules les corrélations horizontales nous intéresseront. Pour obtenir nos opérateurs de covariance monovariée (un pour chaque variable), il suffit de résoudre sur la sphère une équation du type

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \eta = 0 \quad t \in [0, \tau] \quad (3.11)$$

avec ∇^2 le Laplacien 2D et κ le coefficient de diffusion. La condition initiale correspond au vecteur dont nous voulons calculer l'image par \mathbf{B} .

La solution obtenue au temps τ s'écrit comme la convolution entre la condition initiale et le noyau de la chaleur, de forme gaussienne. Nous obtenons ainsi des covariances, dont l'échelle de corrélation spatiale est proche de $2\kappa\tau$ pour chaque variable. Notons \mathbf{L} ce filtre Laplacien que nous supposons discrétisé.

Il ne reste plus alors qu'à ajouter une normalisation afin de s'assurer que les covariances obtenues soient bien celles correspondant aux variables d'ébauche du modèle et non à celles induites par le filtre diffusif. Notons $\mathbf{\Lambda}$ la matrice de normalisation (matrice diagonale des écarts types). Pour chaque variable α , nous obtenons alors un opérateur de covariance

$$\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{L}_\alpha \mathbf{\Lambda}_\alpha \quad (3.12)$$

Construction de l'opérateur d'équilibre \mathbf{K} :

Afin d'obtenir une matrice de covariance d'erreur d'ébauche multivariée, un opérateur \mathbf{K} dit "d'équilibre" est introduit. Le but est ainsi de relier, sur chaque grille, par une relation d'équilibre les différentes variables d'état à une variable de référence. Ainsi dans la formulation proposée par Derber et Bouttier (1999) [16], toutes les variables d'état à l'exception de celle servant de référence, sont décomposées en une partie équilibrée (avec la variable de référence) et une partie non équilibrée. Dans notre cas, sur chacune des grilles, c'est la hauteur d'eau h qui est choisie comme référente. Le vecteur d'état s'écrit alors

$$\begin{cases} h &= h \\ u &= u' + u^{eq} \\ v &= v' + v^{eq} \end{cases} \quad (3.13)$$

avec u^{eq} et v^{eq} les parties de u et v en équilibre avec h .

La relation choisie est l'équilibre géostrophique, à savoir dans le cas d'un modèle Shallow Water

$$\begin{cases} u^{eq} &= -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y} \\ v^{eq} &= \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour des phénomènes de relativement grandes échelles (spatiale et temporelle), ces relations fournissent en effet un assez bon diagnostic de l'état du fluide. L'opérateur \mathbf{K} s'écrit alors

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\mathbf{0}) & (\mathbf{0}) \\ -\frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} & \mathbf{I} & (\mathbf{0}) \\ \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial x} & (\mathbf{0}) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Finalement, sur chaque grille, la matrice de covariance d'erreur d'ébauche s'écrit

$$\mathbf{B} = \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{K}^T \quad (3.16)$$

Il vient alors

$$\mathbf{B}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{K} \mathbf{A} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

L'image d'un vecteur par $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}$ s'obtient donc en résolvant l'équation de diffusion (avec renormalisation) puis en appliquant l'opérateur d'équilibre.

3.6 Les fonctions coût

Nous exposons ici les différentes fonctions coût que nous minimisons pour les différents algorithmes :

- pour le cas mono-grille avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites :

$$J(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{x}_{bc}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0^h\|_2^2 + J^{obs}(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{x}_{bc}) + \int_0^T \|\mathbf{x}_{bc}(t) - \mathbf{x}_{bc}^f(t)\|_2^2 dt$$

où \mathbf{x}_{bc}^f correspond aux conditions aux frontières provenant du forçage initial (sans assimilation). Le terme de régularisation portant sur les conditions aux limites est ici très simple. Il tend juste à réduire l'écart entre les conditions aux frontières optimisées et celles provenant du forçage sans assimilation.

- pour les cas bi-grilles en interaction *one-way* et *two-way* :

$$J(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{v}_0^H) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0^h\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0^H\|_2^2 + J^{obs}(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{v}_0^H)$$

- pour le cas bi-grille en interaction *one-way* avec contrôle des transferts inter-grilles (appelé *one-way wic*) :

$$J(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{v}_0^H, \epsilon_{\partial\omega}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0^h\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0^H\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega}\|_2^2 + J^{obs}(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{v}_0^H, \epsilon_{\partial\omega})$$

avec \mathbf{I}_h^H l'adjoint du linéaire tangent de l'opérateur d'interpolation I_H^h de la grille grossière vers la grille fine.

- pour le cas bi-grille en interaction *two-way* avec contrôle des transferts inter-grilles (appelé *two-way wic*) :

$$J(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{v}_0^H, \epsilon_{\partial\omega}, \epsilon_\omega) = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_0^h\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_0^H\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{G}_H^h \epsilon_\omega\|_2^2 + J^{obs}(\mathbf{v}_0^h, \mathbf{v}_0^H, \epsilon_{\partial\omega}, \epsilon_\omega)$$

avec \mathbf{I}_h^H l'adjoint du linéaire tangent de l'opérateur d'interpolation I_H^h de la grille grossière vers la grille fine et \mathbf{G}_H^h l'adjoint du linéaire tangent de l'opérateur de restriction G_h^H (update de la solution grossière par la solution fine).

3.7 Validation des gradients

Une difficulté pratique majeure des méthodes variationnelles est la dérivation du modèle adjoint permettant le calcul du gradient de la fonction coût. Comme son nom l'indique, le modèle adjoint est l'opérateur adjoint du modèle linéaire tangent du modèle physique direct. La mise en pratique de toute méthode variationnelle nécessite donc d'écrire le modèle linéaire tangent, puis son adjoint. Les sources d'erreurs sont donc multiples.

Cependant, les outils de différentiation automatique peuvent s'avérer particulièrement efficaces pour peu que le code du modèle à différentier soit "bien" écrit, c'est à dire respecte un certain nombre de principes syntaxiques. Nous pouvons citer par exemple le logiciel TAPE-NADE développé par Hascoët *et al* (INRIA Sophia-Antipolis) [30]. Dans notre cas, afin de bien comprendre en détail le fonctionnement de l'adjoint, nous avons choisi d'écrire directement le modèle adjoint à la main (ce qui n'est pas un travail trop lourd, car le modèle direct est ici assez simple). Une phase de validation du modèle adjoint, et donc du gradient, constitue donc une étape obligatoire avant de pouvoir lancer les différentes optimisations. La méthode choisie pour cela s'appelle le test du gradient.

Soit $\tilde{\mathbf{x}}$ notre vecteur de contrôle. Il correspond, par exemple, aux conditions initiales sur les deux grilles dans le cas des algorithmes *one-way* et *two-way* sans contrôle des interactions. Un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction coût J autour de $\tilde{\mathbf{x}}$ nous donne

$$J(\tilde{\mathbf{x}} + \alpha \mathbf{x}) \approx J(\tilde{\mathbf{x}}) + \alpha \langle \nabla J(\tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{x} \rangle$$

En prenant pour \mathbf{x} le gradient normalisé $\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})/\|\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})\|$, il vient

$$J(\tilde{\mathbf{x}} + \alpha \frac{\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})}{\|\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})\|}) \approx J(\tilde{\mathbf{x}}) + \alpha \|\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})\|$$

Définissons la fonction $F(\alpha)$ par

$$F(\alpha) = \frac{J(\tilde{\mathbf{x}} + \alpha \frac{\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})}{\|\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})\|}) - J(\tilde{\mathbf{x}})}{\alpha \|\nabla J(\tilde{\mathbf{x}})\|}$$

Alors F doit vérifier

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = 1$$

La figure 3.9 représente la valeur absolue de $(F(\alpha) - 1)$ pour différentes valeurs de α . Partant de l'ébauche du modèle, le vecteur de contrôle $\tilde{\mathbf{x}}$ est nul (nous travaillons dans l'espace préconditionné). Nous observons que la différence converge bien vers 0 avec une précision de l'ordre de $10^{-7} - 10^{-8}$. Ceci confirme la validité de l'implémentation du gradient. La hausse irrégulière de la différence observée pour des valeurs de α comprises entre $(\frac{1}{2})^{24}$ et $(\frac{1}{2})^{32}$ est due au fait que, pour ces valeurs, la précision machine est atteinte.

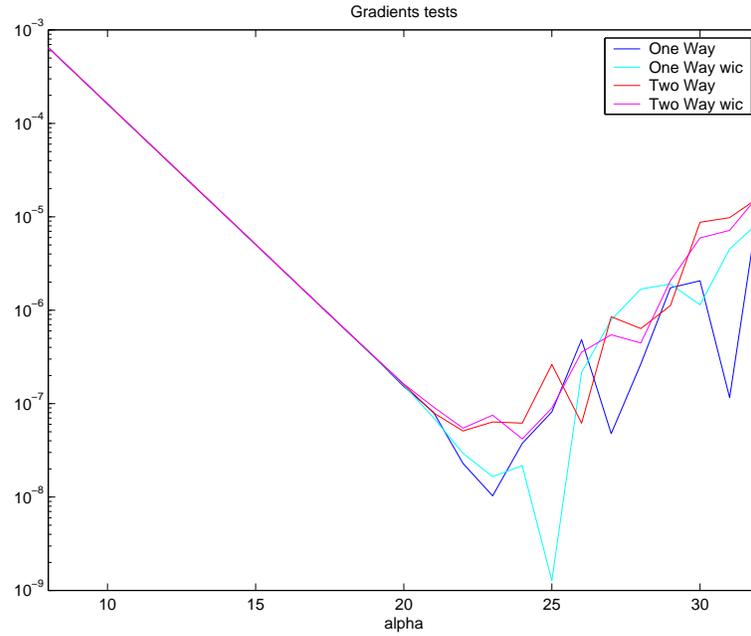


FIG. 3.9 – Test du gradient. En ordonnée : $|F(\alpha) - 1|$ en échelle logarithmique. En abscisse : $\alpha = (\frac{1}{2})^i$ avec $8 \leq i \leq 32$.

3.8 Illustration des covariances d'erreur d'ébauche : expériences "mono-obs"

Afin de visualiser les covariances d'erreur d'ébauche, plusieurs expériences dites "mono-obs" ont été réalisées. Elles consistent à assimiler une seule observation, localisée temporellement à la fin de la fenêtre d'intégration du modèle. L'incrément d'analyse obtenu nous renseigne alors sur la structure de ces covariances d'erreur.

En effet, soit \mathbf{y} notre observation présente en un point de la grille haute résolution au temps t_n . Pour plus de clarté, plaçons-nous dans le cas simplifié où tout serait linéaire, à savoir le modèle (bi-grille) et l'opérateur d'observation. La fonction coût s'écrit alors :

$$J(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{M}\delta\mathbf{x} - \mathbf{d})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{M}\delta\mathbf{x} - \mathbf{d}) \quad (3.18)$$

où $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^b$ (si l'on suppose qu'il n'y a pas de contrôle des interactions), \mathbf{M} est le modèle bi-grille et $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{x}^b$ est l'innovation. L'incrément d'analyse optimale $\delta\mathbf{x}^a$ vaut alors :

$$\delta\mathbf{x}^a = (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d} \quad (3.19)$$

Ce qui se peut se réécrire ² :

$$\delta\mathbf{x}^a = \mathbf{B} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{d} \quad (3.20)$$

Dans notre cas précis, en posant $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_H^H & \mathbf{M}_H^h \\ \mathbf{M}_h^H & \mathbf{M}_h^h \end{bmatrix}$, et avec $\mathbf{R} = \sigma_{obs} \mathbf{I}$ et $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_h \end{bmatrix}$,

il vient

²Formule de Sherman-Morrison-Woddbury [44]

$$\delta \mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_H \mathbf{M}_h^{H^T} (\sigma_{obs} \mathbf{I}_h + \mathbf{M}_h^H \mathbf{B}_H \mathbf{M}_h^{H^T} + \mathbf{M}_h^h \mathbf{B}_h \mathbf{M}_h^{h^T})^{-1} \mathbf{d}_h \\ \mathbf{B}_h \mathbf{M}_h^{h^T} (\sigma_{obs} \mathbf{I}_h + \mathbf{M}_h^H \mathbf{B}_H \mathbf{M}_h^{H^T} + \mathbf{M}_h^h \mathbf{B}_h \mathbf{M}_h^{h^T})^{-1} \mathbf{d}_h \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

avec $\mathbf{d}_h = \mathbf{y} - \mathbf{M}_h^H \mathbf{x}_H^b - \mathbf{M}_h^h \mathbf{x}_h^b$.

Posons $\tilde{\mathbf{d}}_h = (\sigma_{obs} \mathbf{I}_h + \mathbf{M}_h^H \mathbf{B}_H \mathbf{M}_h^{H^T} + \mathbf{M}_h^h \mathbf{B}_h \mathbf{M}_h^{h^T})^{-1} \mathbf{d}_h$. Alors

$$\delta \mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_H \mathbf{M}_h^{H^T} \tilde{\mathbf{d}}_h \\ \mathbf{B}_h \mathbf{M}_h^{h^T} \tilde{\mathbf{d}}_h \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

L'écart à l'observation finale, pondéré par les erreurs d'observation et les erreurs d'ébauche, à savoir $\tilde{\mathbf{d}}_h$ est ainsi propagé de façon rétrograde dans le temps par l'adjoint de la composante haute résolution du modèle bi-grille. Celle-ci prend naturellement en compte les différentes interactions entre les deux grilles. Cette intégration temporelle rétrograde ainsi que les structures de covariance de l'erreur d'ébauche sur chacune des grilles permettent alors d'obtenir une correction sur l'ensemble des variables de notre vecteur d'état. En visualisant les deux composantes de l'incrément d'analyse correspondant aux conditions initiales, nous pouvons donc observer indirectement les structures des matrices de covariance d'erreur d'ébauche sur chacune des grilles. De plus, le fait d'assimiler une seule observation présente à la fin de la fenêtre temporelle va nous permettre d'observer à la fois l'influence de l'intégration rétrograde du modèle adjoint, mais aussi la structure spatiale de la correction illustrant \mathbf{B} .

La figure 3.10 (respectivement 3.11) représente l'incrément haute résolution (respectivement basse résolution) obtenu pour les deux types d'interactions envisagées, ainsi que leur version *wic*. L'observation de la hauteur d'eau se trouve sur la grille haute résolution. Sa position est indiquée par un point rouge sur ces figures. Ses coordonnées sont (22, 30) : elle se situe sur le jet, au centre du domaine ω . L'écart initial entre la hauteur d'eau du modèle et l'observation vaut 33.64m. L'ébauche correspond à celle décrite au §3.4.

Il faut d'abord remarquer que les échelles de ces corrections varient énormément selon les grilles et selon les algorithmes. Nous les résumons dans le tableau suivant.

Interaction	Grille grossière	Grille fine
one-way	$\begin{cases} h \in [-2, 6]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 0.01m.s^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} h \in [-77, 43]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 0.3m.s^{-1} \end{cases}$
one-way wic	$\begin{cases} h \in [-2, 6]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 0.01m.s^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} h \in [-24, 6]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 0.1m.s^{-1} \end{cases}$
two-way	$\begin{cases} h \in [-2, 6]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 5.10^{-3}m.s^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} h \in [-77, 43]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 0.2m.s^{-1} \end{cases}$
two-way wic	$\begin{cases} h \in [-1, 6]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 5.10^{-4}m.s^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} h \in [-16, 6]m \\ \ \mathbf{u}\ _2 = 0.1m.s^{-1} \end{cases}$

Ainsi les échelles de correction sur la grille fine sont beaucoup plus grandes que celles sur la grille grossière, ce qui est logique au vu de la configuration choisie, l'observation étant présente uniquement au centre du domaine haute résolution. La solution basse résolution joue ici un rôle

moins important, la correction apportée y est donc faible.

Intéressons-nous dans un premier temps aux structures de corrélation indiquées par la correction sur la grille haute résolution (figure 3.10). Nous distinguons deux types de structures de correction : d'une part celles associées aux algorithmes *one-way* et *two-way* et d'autre part celles associées aux algorithmes avec contrôle des transferts inter-grilles. Les incréments d'analyse *one-way* et *two-way* montrent que la correction est centrée essentiellement sur la frontière Ouest, là où le courant entre dans le domaine. Ceci illustre l'intégration rétrograde du modèle adjoint : en modifiant initialement le jet à l'entrée du domaine, l'intégration du modèle va propager au cours du temps cette correction jusqu'à la position de l'observation. Nous remarquons de plus que, essentiellement dans le cas d'interaction *two-way*, l'analyse tend à corriger à la baisse la hauteur d'eau présente près de la frontière Est du domaine. Les conditions aux limites de cette frontière sortante étant simplistes, il existe dans cette zone des phénomènes de réflexions d'ondes que l'assimilation cherche à corriger.

L'ajout du contrôle des transferts inter-grilles entraîne une modification importante de l'incrément d'analyse sur la grille haute résolution. Tout d'abord, l'amplitude de la correction est beaucoup plus faible, à la fois sur la hauteur d'eau et sur les vitesses. De plus, la structure même de la correction est profondément modifiée. Ainsi, la correction ne porte plus sur le courant entrant dans le domaine, mais correspond à un "trou d'eau" étendu légèrement en amont de l'observation. La correction du flot entrant a lieu quant à elle essentiellement via le terme de contrôle des transferts inter-grilles.

La figure 3.11 représente les cartes de l'incrément d'analyse correspondant à la condition initiale du modèle basse résolution. Nous constatons là aussi deux types de structures de correction bien différentes suivant les interactions envisagées. Tout d'abord les deux variantes du *one-way* ainsi que l'algorithme *two-way* avec contrôle des transferts inter-grilles présentent une même structure en forme de "haricot" juste en amont de la frontière Ouest. Cette structure est centrée sur la frontière et corrige à la hausse la hauteur d'eau à l'entrée du domaine. La courbure présente à l'intérieur correspond à la zone où la correction haute résolution est la plus marquée. Ceci laisse donc penser que malgré l'absence de corrélation entre les grilles dans notre modélisation de \mathbf{B} , il existe une cohérence entre les corrections apportées sur chacune des grilles via les interactions inter-grilles. Pour l'algorithme *two-way wic*, la correction se situe à l'extérieur de la zone où la rétroaction haute résolution a lieu. Enfin, nous constatons que l'incrément d'analyse *one-way wic* corrige légèrement la solution au niveau de la frontière Est. Comme dans le cas d'interaction *two-way* à haute résolution, l'assimilation essaye de corriger les problèmes liés aux frontières sortantes.

Le deuxième type de structure concerne le cas d'interaction *two-way*. Nous observons dans ce cas une "bosse d'eau" centrée juste en amont de la frontière Ouest. Celle-ci permet de recalculer la hauteur d'eau du jet entrant dans le domaine. Une explication possible à cela est le fait que dans le cas d'interaction *two-way*, la condition initiale haute résolution contrôle également les conditions aux frontières via la rétroaction sur la grille basse résolution. La correction basse résolution a donc lieu essentiellement sur le point d'entrée du jet, là où la solution haute résolution n'a que peu d'influence.

Dans le cas de l'algorithme *two-way wic*, les modèles sont en interaction *two-way*. Pour autant les structures de corrections sont différentes et se rapprochent de celles obtenues par l'algorithme *one-way wic*. Ceci est dû à l'ajout du contrôle des transferts inter-grilles qui entraîne une perte d'influence de la solution haute résolution au profit du contrôle de l'erreur d'interpolation.

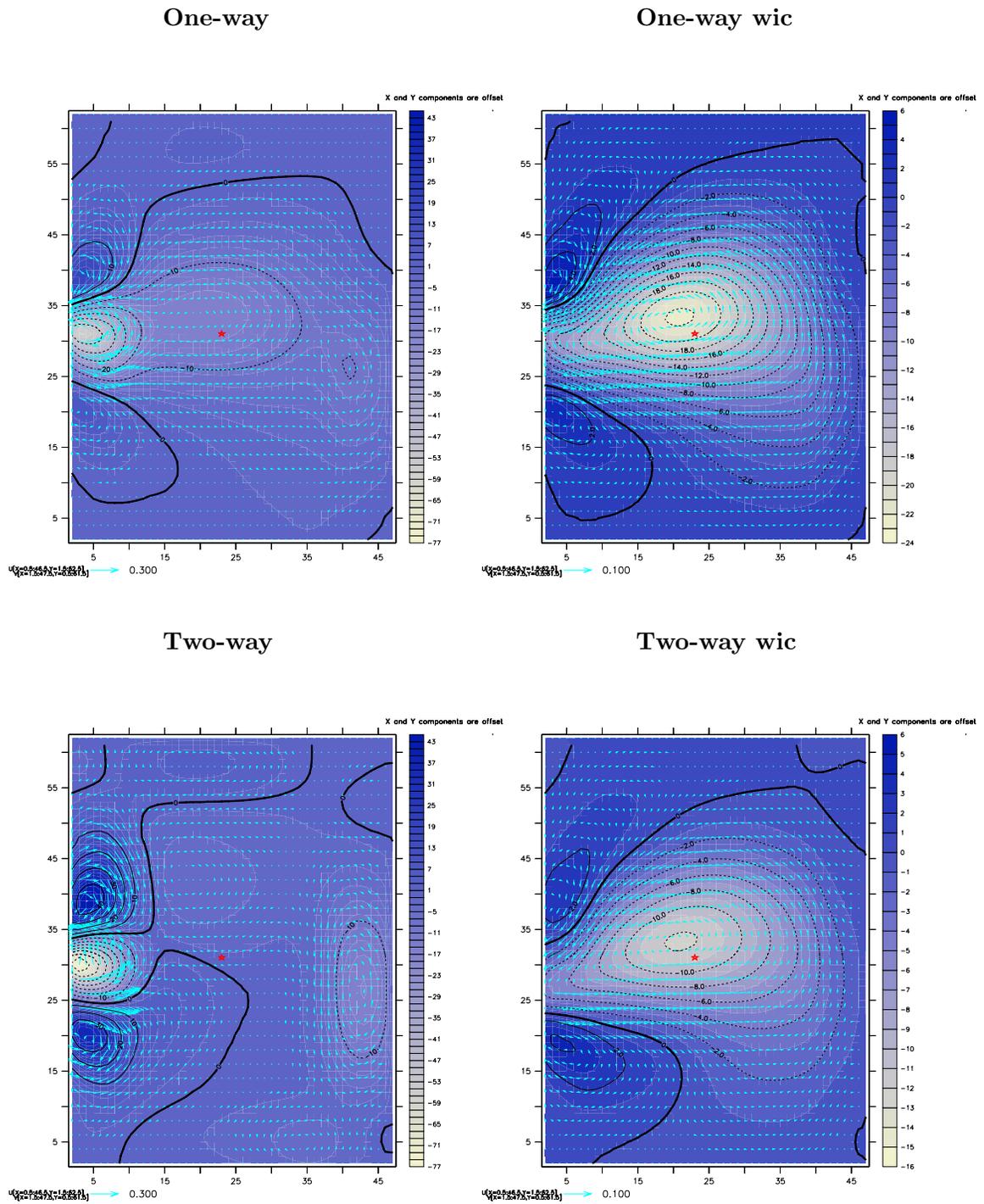
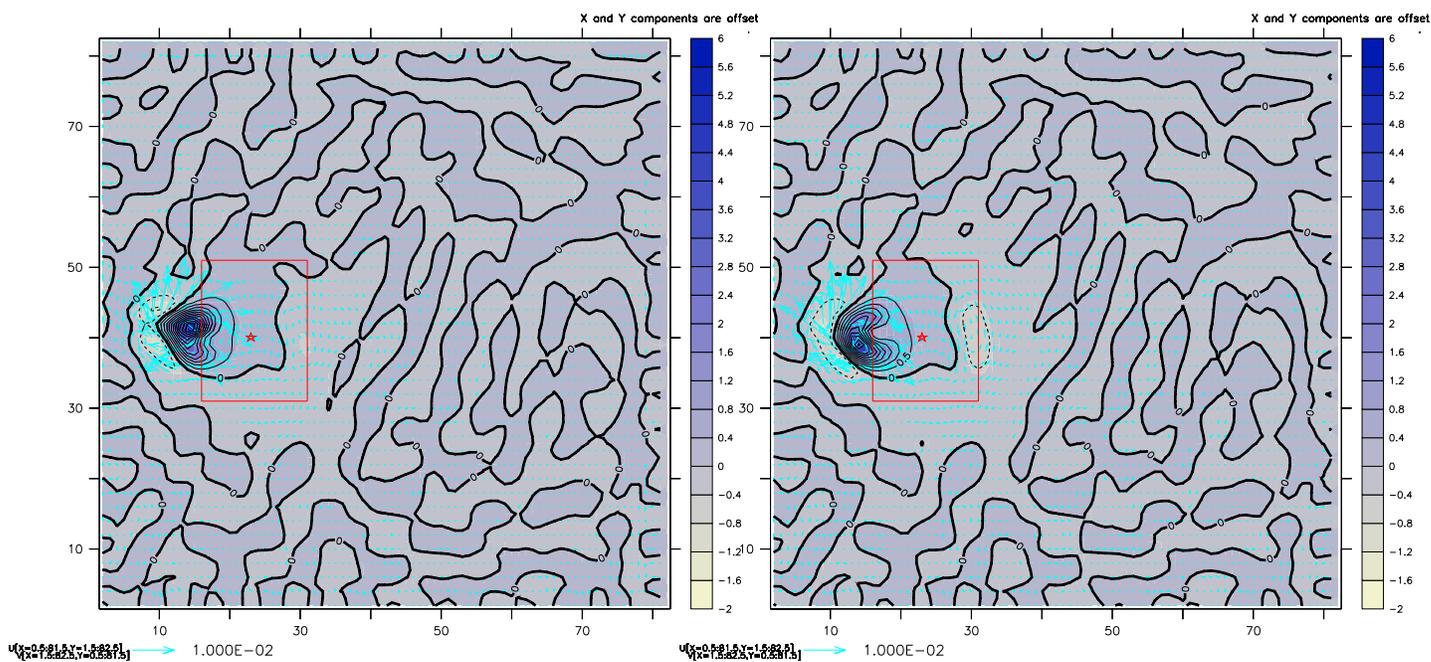


FIG. 3.10 – Expérience d’assimilation mono-observation. Incrément d’analyse sur le domaine haute résolution ω_h : hauteur d’eau (isolignes) et vitesses (vecteurs très faibles) pour les 4 systèmes d’assimilation considérés. Le point rouge indique la position de l’observation.

One-way

One-way wic



Two-way

Two-way wic

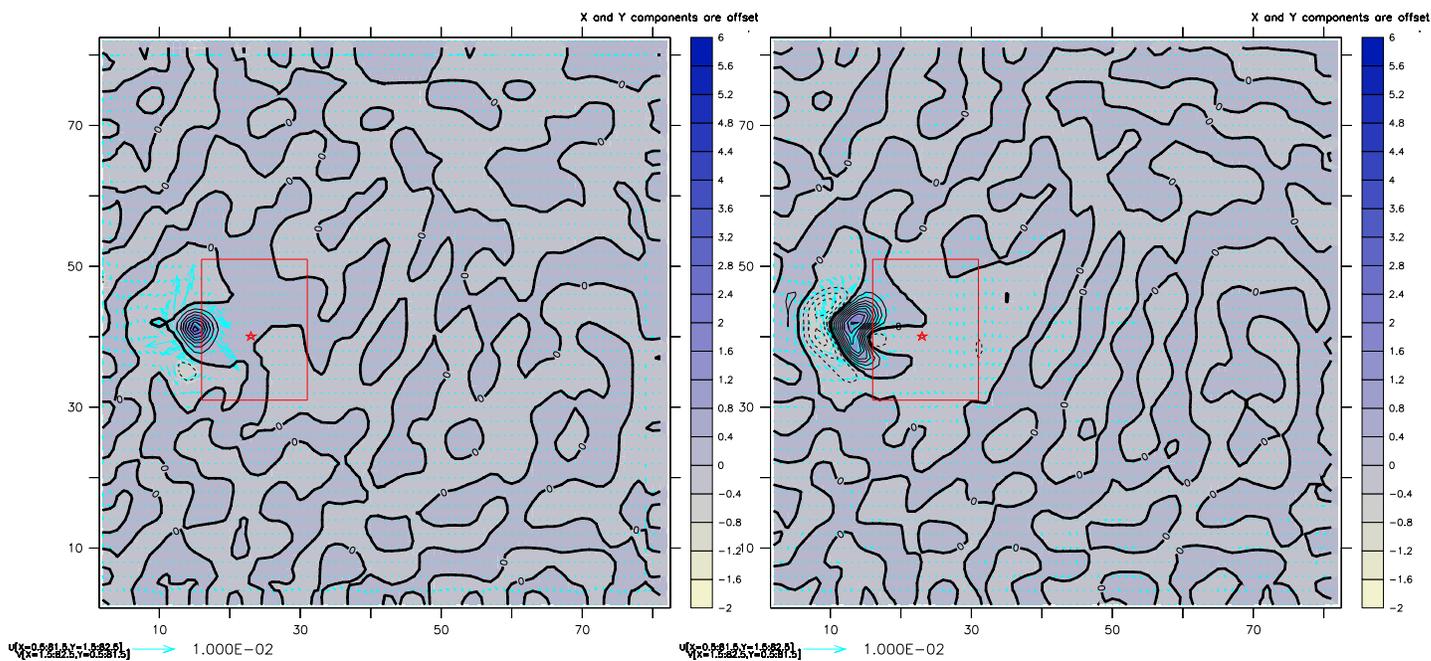


FIG. 3.11 – Expérience d’assimilation mono-observation. Incrément d’analyse sur le domaine basse résolution Ω_H : hauteur d’eau (isolignes) et vitesses (vecteurs très faibles) pour les 4 systèmes d’assimilation considérés. Le point rouge indique la position de l’observation, le rectangle rouge la grille haute résolution.

3.9 Diagnostics physiques

Nous présentons dans cette partie les propriétés physiques qui nous ont servi de diagnostics pour l'étude des solutions optimales des modèles haute et basse résolution.

3.9.1 Définitions

Nous avons mis en place plusieurs diagnostics sur les solutions optimales issues des différents algorithmes d'assimilation. La première variable étudiée est l'erreur RMS (*Root Mean Square*) normalisée. Elle est définie à l'instant t par la formule :

$$\forall t \in [0, T] \text{ RMS}(t) = \frac{\|\mathbf{x}^a(t) - \mathbf{x}^t(t)\|_2}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{x}^t\|_2^2 dt}} \quad (3.23)$$

Nous avons également regardé l'évolution au cours du temps de certaines quantités physiques des solutions optimales : leurs énergies cinétique KE et potentielle PE ainsi que leur enstrophie \mathcal{E} . Elles sont définies par

$$\forall t \in [0, T] \quad \begin{cases} \text{KE}(t) = \frac{1}{2} \int_{D(t)} \|\mathbf{u}\|_2^2 dx \\ \text{PE}(t) = \frac{1}{2} \int_{S(t)} gh dx \\ \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{D(t)} \|\omega\|_2^2 dx \end{cases} \quad (3.24)$$

avec $D(t)$ le volume défini à l'instant t , $S(t)$ la surface du fluide et $\omega = \text{Rot}\mathbf{u} = \partial_x v - \partial_y u$ la vorticité de la solution. Ces quantités sont comparées à celles de la solution "vraie".

3.9.2 Une remarque sur les ondes internes et la présentation des courbes diagnostiques

Nous justifions dans cette partie l'emploi de moyennes glissantes sur les courbes représentant l'évolution temporelle de différentes propriétés de ces solutions. Les courbes d'évolution temporelle des erreurs RMS, des énergies cinétique et potentielle et de l'enstrophie des solutions optimales présentent de nombreuses oscillations. Ces oscillations n'étant pas intrinsèques aux méthodes d'assimilation exposées mais dépendant essentiellement de la précision et de la pertinence des modélisations numériques de différents opérateurs intervenant dans le processus d'assimilation, nous avons décidé de lisser ces courbes. Nous expliquons plus en détail la cause de ces oscillations ci-dessous. A titre d'exemple, la figure 3.12 représente l'effet du lissage par moyenne glissante sur la courbe de l'évolution au cours du temps de l'énergie potentielle de la solution optimale haute résolution dans le cas d'interactions *two-way*.

Une étude fréquentielle de ces signaux temporels nous a permis d'identifier deux types d'oscillations traduisant deux problèmes différents dans notre modélisation numérique. La première gamme d'oscillations concerne les courbes d'énergie des solutions optimales bi-grilles. Elles sont particulièrement visibles sur les courbes concernant la solution basse résolution, et sur les courbes concernant la solution haute résolution pour les algorithmes sans contrôle des transferts inter-grilles. Ces courbes apparaissent comme des signaux modulés typiques de la superposition de deux ondes de même amplitude et de fréquence différentes. Nous interprétons ce phénomène comme une génération d'ondes stationnaires dans la solution basse résolution. De telles ondes

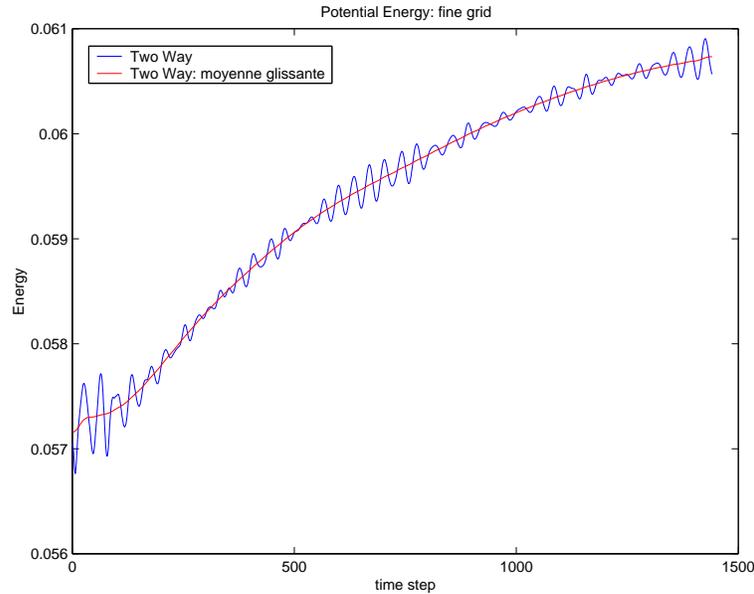


FIG. 3.12 – Effet du lissage par moyenne glissante. En bleu : courbe originale. En rouge : courbe lissée.

sont générées par la correction apportée par l'incrément d'analyse, du fait de notre modélisation un peu simpliste de \mathbf{B} (absence de corrélation entre les grilles). En effet, cette correction va entraîner la formation d'ondes progressives se propageant dans des sens opposés, et ce dans les deux directions du domaine. La réflexion de ces ondes sur les bords du domaine engendre in fine des ondes dites stationnaires. Ce phénomène est présent dans les canaux fermés ou les lacs de faible profondeur (cf par exemple le cours d'océanographie de Ronday et Beckers [46] pour plus d'information), ce qui correspond assez bien à notre grille basse résolution. Les oscillations observées sont également appelées "seiches". Elles sont ensuite réintroduites dans le modèle haute résolution via les conditions de frontières ouvertes. Une amélioration de notre modélisation de \mathbf{B} prenant en compte les covariances d'erreur entre les grilles devrait donc permettre de réduire ces phénomènes d'ondes pour les méthodes bi-grilles.

La deuxième gamme d'oscillations concerne les courbes d'erreur RMS et d'énergie des solutions optimales haute résolution pour les algorithmes dont une des variables de contrôle dépend du temps, à savoir les algorithmes bi-grilles avec contrôle des transferts inter-grilles et l'algorithme mono-grille. Les fréquences de ces oscillations correspondent soit à la moitié soit exactement à la fréquence temporelle des observations (une par jour). Ce résultat est robuste, car nous le retrouvons en faisant varier la fréquence des observations. Or les termes de régularisation portant sur ces variables de contrôle n'introduisent pas de contrainte physique sur la correction qu'elles apportent aux frontières du domaine haute résolution et sur $\hat{\omega}_H$ dans le cas de l'algorithme *two-way wic*. Pour les algorithmes bi-grilles *wic*, la contrainte cherche simplement à imposer au contrôle des transferts inter-grilles d'être dans le noyau des adjoints des opérateurs d'interpolation/restriction. Pour l'algorithme mono-grille, le terme de pénalisation est la norme euclidienne de l'écart aux frontières initiales. Dès lors nous obtenons une correction qui peut être à la fois physiquement incohérente entre la hauteur d'eau h et la vitesse \mathbf{u} , et qui de plus apparaît

comme une succession de Dirac au cours du temps. Ceci entraîne l'apparition d'ondes de gravité à l'intérieur du domaine. Une meilleure pénalisation de ces termes de contrôle, notamment par l'emploi d'un opérateur d'équilibre (cf §2.2) entre les variables, permettrait potentiellement une réduction de ces oscillations.

Pour autant, ces problèmes à la fois d'initialisation et de pénalisation ne nous semblent pas dramatiques et ne remettent pas en cause les fondements et les bonnes performances des méthodes d'assimilation multi-grilles exposées par la suite. Ces problèmes sont inhérents à toutes les méthodes d'assimilation et prennent de l'importance essentiellement dans le cas d'applications réalistes pour lesquelles la présence d'ondes artificielles n'est pas acceptable. De plus, la résolution de ces problèmes demande un travail spécifique adapté à chaque situation : la réponse apportée à ces problèmes dépendra du modèle utilisé, de la physique présente dans la zone d'étude, des observations disponibles, etc.. C'est pourquoi l'investissement nécessaire à l'obtention du "réglage parfait" ne nous a pas semblé nécessaire pour l'utilisation que nous allions en faire.

Chapitre 4

Résultats numériques

Sommaire

4.1	Travaux antérieurs de contrôle des frontières ouvertes en océanographie	94
4.2	Décroissance des fonctions coût	95
4.3	Erreurs RMS	96
4.3.1	Domaine local à haute résolution ω_h	96
4.3.2	Domaine global à basse résolution $\Omega_H \setminus \omega_H$	98
4.4	Diagnostics physiques	101
4.4.1	Domaine local à haute résolution ω_h	101
4.4.2	Domaine global à basse résolution Ω_H	110
4.5	Algorithmes wic : étude des transferts inter-grilles	114
4.5.1	Contrôle de l'erreur d'interpolation	114
4.5.2	Contrôle de l'erreur de restriction (interaction <i>two-way</i>)	118
4.6	Etude des gradients	121
4.7	Assimilation des observations sur ω_H	123
4.7.1	Principe	123
4.7.2	Résultats en <i>one-way</i>	123
4.7.3	Résultats en <i>two-way</i>	126
4.8	Un préconditionnement multi-grille pour l'assimilation mono-grille	127
4.8.1	Algorithme	128
4.8.2	Résultats numériques	128
4.8.3	Application aux algorithmes bi-grilles	136
4.9	Conclusion	140

Nous présentons dans ce chapitre les résultats des expériences d'assimilation de données dans le modèle présenté au chapitre 3. Rappelons que dans notre cas, le modèle correspond au modèle local haute résolution décrivant le comportement du jet et des deux gyres sur ω_h . Nous disposons d'observations uniquement sur le domaine ω . Notre but est de comparer les performances des systèmes d'assimilation bi-grilles mis en place dans la partie théorique au cas classique d'une assimilation sur ce domaine fin à haute résolution avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites. Ainsi, si nous nous fixons comme but d'améliorer la solution

sur un domaine à haute résolution possédant des frontières ouvertes, est-il plus intéressant de mettre en place un emboîtement de modèles en introduisant une grille à plus faible résolution sur un domaine englobant notre domaine d'étude, ou mieux vaut-il contrôler les conditions aux frontières directement ?

4.1 Travaux antérieurs de contrôle des frontières ouvertes en océanographie

Nous présentons ici quelques résultats concernant l'assimilation variationnelle de données dans des modèles présentant des frontières ouvertes. Nous ne cherchons pas ici à faire une liste exhaustive des travaux traitant de ce problème. Notre but est plutôt de rappeler succinctement au lecteur le contexte de l'assimilation de données avec contrôle des conditions aux frontières, ainsi que les difficultés rencontrées en pratique par les océanographes.

Dans le cadre d'expériences jumelles dans un modèle régional de marée, Devenon (1990) [17] a montré que le contrôle des conditions aux limites s'avérait bien adapté pour ce type de modèles elliptiques et permettait d'améliorer la solution du modèle au vu d'observations radars de courant.

Toujours dans le cadre d'expériences jumelles dans un modèle quasi-géostrophique régional, Gunson et Malanotte-Rizzoli (1996) [29] ont montré qu'il était possible d'estimer correctement la condition initiale et les conditions aux frontières en assimilant des données de vitesse présentes à l'intérieur du domaine.

Taillandier et *al* (2004) [50] ont montré eux aussi, pour une configuration idéalisée du Golfe du Lion, qu'il était possible d'obtenir des forçages aux bords consistants avec la physique du modèle en assimilant des données de courant de surface présentes à l'intérieur du domaine. Ils ont également constaté que les différentes variables de contrôle n'avaient pas la même importance dans le processus de minimisation. Ainsi, dans leurs expériences, la composante normale du transport au niveau des frontières était la variable de contrôle la plus importante, tandis que la condition initiale et la composante tangentielle du transport au niveau des frontières jouaient un rôle plus faible.

Cette sensibilité de la fonction coût vis-à-vis du contrôle des conditions aux limites est potentiellement problématique. Ainsi, Ferron et Marotzke (2003) [24] ont été contraints de réaliser une assimilation en deux étapes pour un modèle régional de l'océan Indien, cela à cause de la faible sensibilité de la fonction coût aux vitesses spécifiées sur les frontières (ils assimilaient des données de température de surface, de salinité et de tension du vent). Dans une première phase, la minimisation fut effectuée en contrôlant la condition initiale, les traceurs aux frontières du domaine et les flux de surface, puis dans la seconde en contrôlant uniquement les vitesses aux frontières.

Gebbie et *al* (2006) [26] suggèrent ainsi que l'espace de contrôle, à savoir la condition initiale et les conditions aux frontières du domaine ω , est "mal conditionné" d'un point de vue physique : la circulation à l'intérieur du domaine est très sensible à certaines variations du vecteur de contrôle et très peu sensible à d'autres. Ils citent ainsi l'exemple des modèles régionaux pour lesquels la sensibilité de la hauteur d'eau à l'intérieur du domaine aux vitesses spécifiées sur la frontière est beaucoup plus importante que les sensibilités basées sur d'autres phénomènes physiques de l'océan (que peut contenir la condition initiale ou les conditions aux frontières).

A notre connaissance, peu de travaux ont été réalisés sur l'optimisation des conditions aux

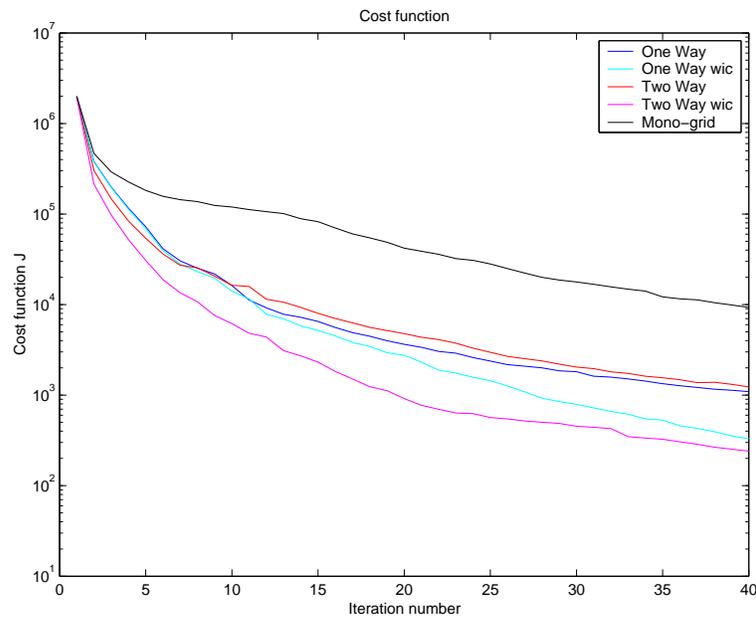


FIG. 4.1 – Evolution des fonctions coût lors des 40 premières itérations de l'algorithme d'optimisation

limites d'un modèle régional par des méthodes stochastiques d'assimilation de données. Bourret (2005) [7] a mis au point une variante du filtre de Kalman dont la variable d'état correspond aux variables du modèle sur les frontières ouvertes. Cette approche permet ainsi de rendre applicable le filtre de Kalman en réduisant de manière importante la dimension du problème. Sa mise en pratique sur les côtes de la Guyane a montré la faisabilité de cette approche.

4.2 Décroissance des fonctions coût

Nous étudions dans cette partie le comportement durant la minimisation des fonctions coût des différents algorithmes d'assimilation envisagés. La définition de ses fonctions se trouve au §3.6.

Notons d'abord, que pour les résultats présentés, le coefficient d'échantillonnage spatial (dans les deux directions) des observations vaut 5 et la coefficient temporel vaut 48 (une série d'observations par jour). De plus, les observations se situent toutes à au moins cinq points de grilles des frontières du domaine fin (soit deux points de grilles pour le domaine grossier).

La minimisation est effectuée grâce au module **M1QN3** développé par Gilbert et Lemaréchal [27]. Ce module est basé sur une méthode Quasi-Newton à mémoire limitée.

La figure 4.1 représente la décroissance de la fonction coût pour les différentes méthodes envisagées en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme d'optimisation.

Nous remarquons tout d'abord que, dans tous les cas, la fonction coût décroît bien au cours du processus de minimisation. Même si les minimisations ne semblent pas avoir fini de conver-

ger dans les différents cas au bout des 40 itérations, nous stoppons l'algorithme au vu de la stabilisation des courbes d'erreurs RMS (cf §4.3).

Nous constatons de plus que les méthodes multi-grilles sont nettement plus efficaces que le cas mono-grille classique (courbe noire). Ainsi, lors des premières itérations, la décroissance de la fonction coût pour les cas emboîtés est beaucoup plus forte. Après cinq itérations, la fonction coût pour le cas *two-way* (courbe rouge) est cinq fois plus faible que celle du cas mono-grille. Nous pouvons noter que, après six itérations, les courbes des cas *one-way* et *two-way* ont une pente proche de celle du cas mono-grille.

L'introduction du contrôle des transferts inter-grilles (algorithmes *wic*) permet d'améliorer encore les performances en terme de minimisation de la fonctionnelle. Alors que les courbes des fonctions coût des algorithmes bi-grilles avec contrôle des conditions initiales seules connaissent une inflexion marquée après quelques itérations (autour de 5 pour le cas *two-way*, 10 pour le cas *one-way*), celles correspondant aux méthodes *wic* (courbe cyan dans le cas *one-way*, courbe magenta dans le cas *two-way*) continuent de baisser fortement. Pour le cas *two-way wic*, après 40 itérations, la fonction coût a ainsi été divisée par un facteur 4.10^3 , celle pour le cas *two-way* par un facteur $1.5.10^3$. Pour le cas *one-way*, l'apport du contrôle du transfert grille grossière-grille fine est équivalent.

4.3 Erreurs RMS

Nous avons vu au §4.2 qu'en terme de minimisation pure de la fonctionnelle, les méthodes multi-grilles étaient plus performantes. Intéressons-nous maintenant aux erreurs RMS des solutions optimales obtenues. Rappelons que l'erreur RMS normalisée est définie au temps t par la formule

$$\forall t \in [0, T] \text{ RMS}(t) = \frac{\|\mathbf{x}^a(t) - \mathbf{x}^t(t)\|_2}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{x}^t\|_2^2 dt}} \quad (4.1)$$

4.3.1 Domaine local à haute résolution ω_h

Intéressons-nous dans un premier temps aux erreurs RMS sur la grille fine. La figure 4.2 représente la moyenne temporelle de l'erreur RMS normalisée sur la variable observée, à savoir la hauteur d'eau, au cours de la minimisation.

Les méthodes multi-grilles se révèlent être beaucoup plus performantes en terme d'erreur RMS sur les variables assimilées. Ainsi, alors que la courbe d'erreur RMS relative pour le cas mono-grille converge très rapidement (5 itérations) vers une valeur proche de 21%, l'erreur étant ainsi divisée par 3 par rapport à l'ébauche, celles des cas bi-grilles convergent vers des valeurs beaucoup plus faibles, proches de 5%, et ce en quelques itérations supplémentaires. Nous avons vu que ces méthodes multi-grilles minimisaient mieux leurs fonctionnelles associées, il est logique de retrouver cette propriété sur les erreurs RMS des variables observées, celles-ci leur étant directement reliées.

Nous retrouvons, de la même manière, que la moyenne temporelle des erreurs RMS associées aux deux variantes du *two-way* décroissent de façon plus importante lors des premières itérations de la minimisation. Néanmoins, l'erreur associée au cas *one-way* simple devient équivalente dans les dernières itérations. Par contre, l'apport des algorithmes *wic* en terme d'erreur RMS sur la variable observée est faible, voire presque contre-productif dans le cas *one-way*, et ce alors que leurs fonctionnelles associées sont beaucoup plus faibles. Ceci est dû au fait que la hauteur d'eau à l'intérieur du domaine fin ω_h est très sensible aux variations de vitesse sur les frontières.

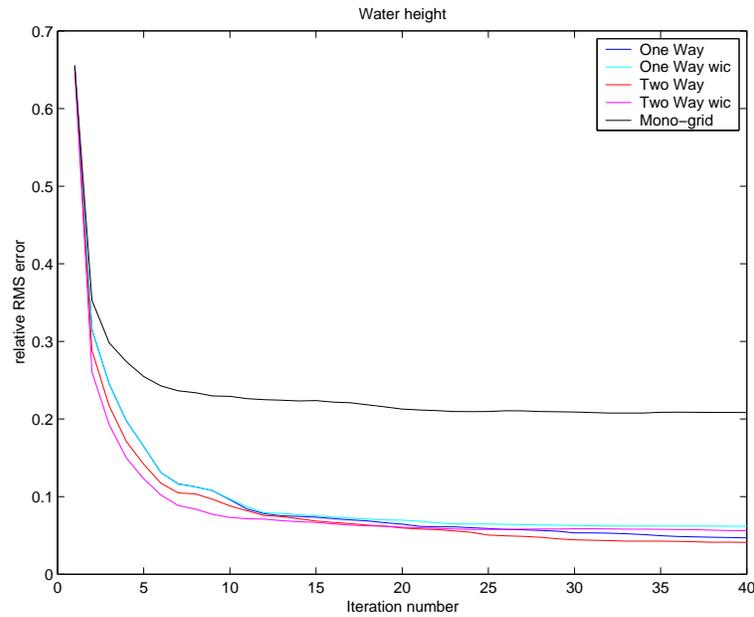


FIG. 4.2 – Grille fine ω_h : moyenne temporelle de l’erreur RMS normalisée sur la hauteur d’eau (variable observée) en fonction du nombre d’itérations de la minimisation

L’ajout du contrôle des transferts inter-grilles va permettre de faire entrer sur la grille fine, et ce durant toute l’intégration du modèle, de petites quantités d’eau qui vont directement corriger la hauteur d’eau aux temps t_i où les observations sont présentes. Par contre, cela aura pour effet d’augmenter l’erreur RMS de la solution haute résolution durant les périodes comprises entre deux observations. Nous reviendrons plus en détail sur ce point lors de l’étude fréquentielle du contrôle des transferts inter-grilles au §4.5.

La figure 4.3 représente la moyenne temporelle de l’erreur RMS normalisée sur les variables non observées, à savoir la norme de la vitesse. Là encore, les méthodes multi-grilles s’avèrent nettement plus performantes. Nous pouvons voir que la courbe de l’erreur RMS sur les vitesses dans le cas mono-grille a tendance à osciller autour d’une valeur médiane (environ 60%), alors que celles concernant les méthodes multi-grilles décroissent pour converger vers des erreurs situées entre 15% et 20%. Les versions du *two-way* sont de nouveau plus performantes lors des premières itérations de la minimisation. Néanmoins lors des dernières itérations, la moyenne temporelle de l’erreur RMS associée aux interactions *one-way* est légèrement meilleure que celle concernant la solution optimale *two-way wic*. L’apport du contrôle des transferts inter-grilles, en début de minimisation, sur les variables non-observées dans le cas d’interactions *two-way* est plus important que sur les erreurs concernant la hauteur d’eau.

Les figures 4.4 et 4.5 représentent l’erreur RMS normalisée, calculée après 40 itérations de minimisation, en fonction du temps pour la hauteur d’eau et les vitesses. Comme indiqué au §3.9.2, ces courbes ont été lissées afin d’éliminer l’impact des ondes de gravité générées par l’incrément d’analyse et présentes dans les solutions optimales. Ces erreurs, concernant la hauteur d’eau, se situent pour les algorithmes bi-grilles, entre 3% et 10% sur toute la fenêtre d’assimilation et celles concernant les vitesses entre 15% et 25%. Ces méthodes, aussi bien multi-

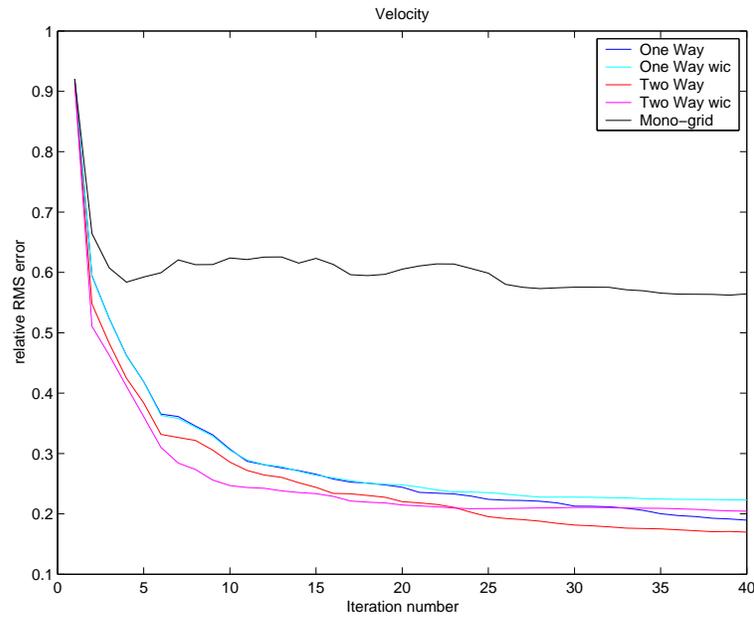


FIG. 4.3 – Grille fine ω_h : moyenne temporelle de l’erreur RMS normalisée sur la vitesse (variable non observée) en fonction du nombre d’itérations de la minimisation

grilles que mono-grille sont ainsi très efficaces sur ce cas test idéalisé. Néanmoins, nous constatons que les méthodes multi-grilles permettent d’obtenir une meilleure précision. De plus, les deux variantes du *one-way* commettent moins d’erreur en tout début de fenêtre d’assimilation, tandis que les méthodes basées sur le *two-way* s’avèrent plus performantes par la suite. Ceci s’explique par le fait que l’emboîtement *two-way* possède un régime transitoire un peu plus long que celui du *one-way*. Enfin, nous constatons de nouveau que l’apport du contrôle des transferts inter-grilles dans le cas *one-way* s’avère plutôt contre-productif.

4.3.2 Domaine global à basse résolution $\Omega_H \setminus \omega_H$

Intéressons-nous maintenant, dans le cas des méthodes multi-grilles, au comportement des solutions de la grille basse résolution. Les figures 4.6 et 4.7 représentent les erreurs RMS relatives sur la hauteur d’eau et sur la vitesse restreintes au domaine grossier Ω_H privé de la zone correspondant au domaine fin ω_h : à savoir $\Omega_H \setminus \omega_H$.

Nous remarquons ainsi que l’assimilation permet d’améliorer la solution basse résolution en dehors de la zone de raffinement où se situent les observations. Néanmoins, les échelles des variations de ces erreurs restent relativement faibles. Ainsi, les erreurs concernant la hauteur d’eau varient entre 28% et 37%, tandis que celles concernant les vitesses varient entre 60% et 70%. Nous obtenons donc, dans le meilleur des cas, un gain de 8 points au niveau des erreurs sur la hauteur d’eau (*one-way* et *two-way*), et un gain de 6 points au niveau des erreurs sur les vitesses (*two-way* et *two-way wic*), ce qui est assez faible. Nous constatons de plus que l’utilisation d’interaction *two-way* permet d’obtenir une meilleure correction des vitesses de la solution basse résolution.

Ceci s’explique par plusieurs raisons. Tout d’abord, nous regardons ici les erreurs sur le domaine $\Omega_H \setminus \omega_H$. Or la position du zoom ω est centrée sur la zone où le jet se déstabilise et

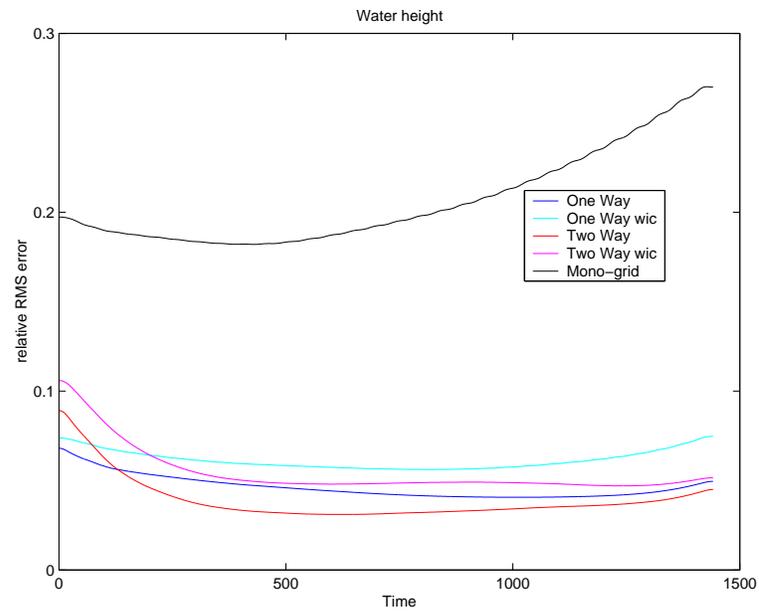


FIG. 4.4 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau (variable observée) après 40 itérations

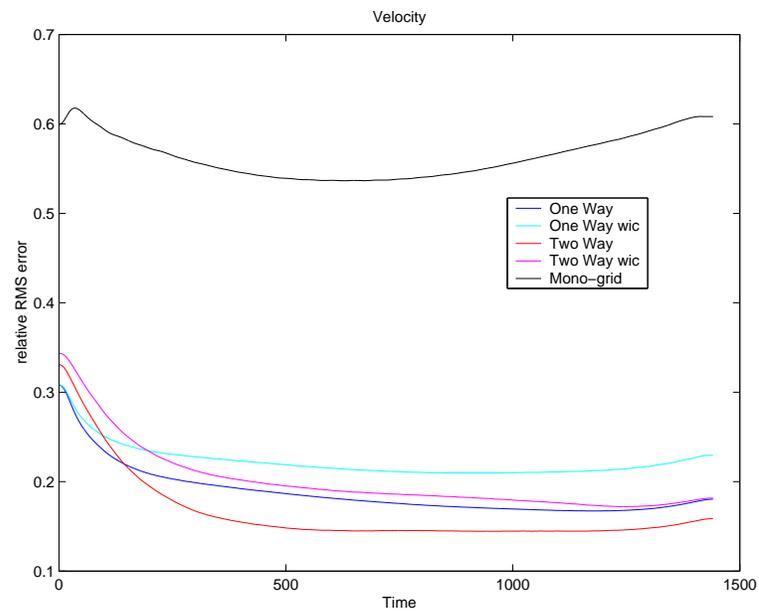


FIG. 4.5 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'erreur RMS normalisée sur la vitesse (variable non observée) après 40 itérations

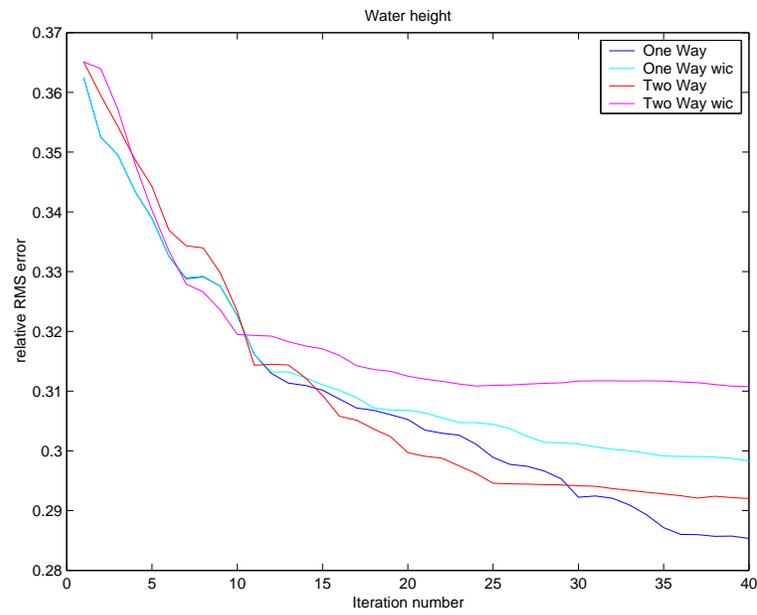


FIG. 4.6 – Grille grossière $\Omega_H \setminus \omega_H$: erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau en fonction du nombre d'itérations de la minimisation

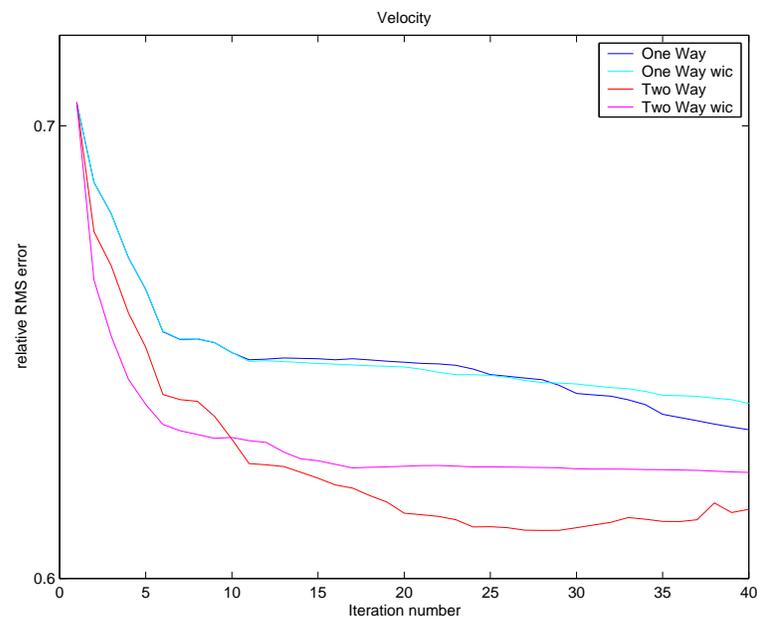


FIG. 4.7 – Grille grossière $\Omega_H \setminus \omega_H$: erreur RMS normalisée sur la vitesse en fonction du nombre d'itérations de la minimisation

où se forment les tourbillons de méso-échelle. Elle se situe ainsi sur la zone où les erreurs basse résolution sont les plus importantes. La correction apportée au vu des observations présentes sur cette zone sera relativement faible là où la solution est peu affectée par une amélioration du courant, à savoir les zones stables au Nord, au Sud et loin à l'Est de ω . De plus, dans le cas d'interaction *one-way*, la correction basse résolution a pour but d'améliorer les conditions aux frontières du modèle haute résolution. Il n'y a pas de rétroaction de la solution haute résolution vers la solution basse résolution. Les structures présentes dans la solution basse résolution autour de la frontière Est (sortante) ne correspondent pas à celles présentes dans la solution "vraie". L'erreur y est donc importante. Dans le cas d'interactions *two-way*, la solution est parfaitement corrigée à l'intérieur de ω via la rétroaction de la solution haute résolution vers la solution basse résolution. Ceci permet d'améliorer naturellement la solution basse résolution en aval du courant (frontière Est). Néanmoins, on observe des problèmes sur la frontière Ouest du domaine : en amont de cette frontière, le courant apparaît comme trop important, entraînant des phénomènes de réflexion et une augmentation de l'erreur dans cette zone.

Ainsi, la décorrélation des grilles (matrice \mathbf{B}) au niveau de l'analyse, combinée à la fois à des conditions de frontières ouvertes trop simplistes et à une zone d'observation très localisée ne permettent pas une correction importante de la solution basse résolution sur l'ensemble du domaine. Il faudrait sans doute ajouter un réseau d'observations, même moins dense, sur le reste du domaine pour accroître la correction de cette solution.

Enfin, nous constatons que l'ajout du contrôle des transferts inter-grilles entraîne une correction plus faible de la solution basse résolution à l'extérieur de ω_H . En introduisant un degré de liberté supplémentaire dans le système d'assimilation, il devient moins nécessaire de corriger la solution basse résolution sur l'ensemble du domaine pour améliorer la solution haute résolution. La hauteur d'eau à l'intérieur du domaine fin ω_h étant très sensible aux variations de vitesse sur les frontières, le contrôle de la condition initiale bi-grilles va permettre ainsi une correction des tendances de l'écoulement aux frontières à laquelle seront ajoutées des corrections ponctuelles, temporellement localisées suivant la fréquence d'apparition des observations, via le contrôle des transferts inter-grilles.

4.4 Diagnostics physiques

Nous étudions dans cette partie le comportement de quelques grandeurs physiques de base associées aux solutions optimales, c'est à dire aux solutions du modèle après 40 itérations de l'algorithme de minimisation.

4.4.1 Domaine local à haute résolution ω_h

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux résultats concernant la solution haute résolution. Les figures 4.8 et 4.9 représentent l'énergie cinétique (KE) et l'énergie potentielle (PE) des solutions haute résolution. Rappelons qu'elles sont définies par

$$\forall t \in [0, T] \quad \begin{cases} \text{KE}(t) = \frac{1}{2} \int_{D(t)} \|\mathbf{u}\|_2^2 dx \\ \text{PE}(t) = \frac{1}{2} \int_{S(t)} gh dx \end{cases} \quad (4.2)$$

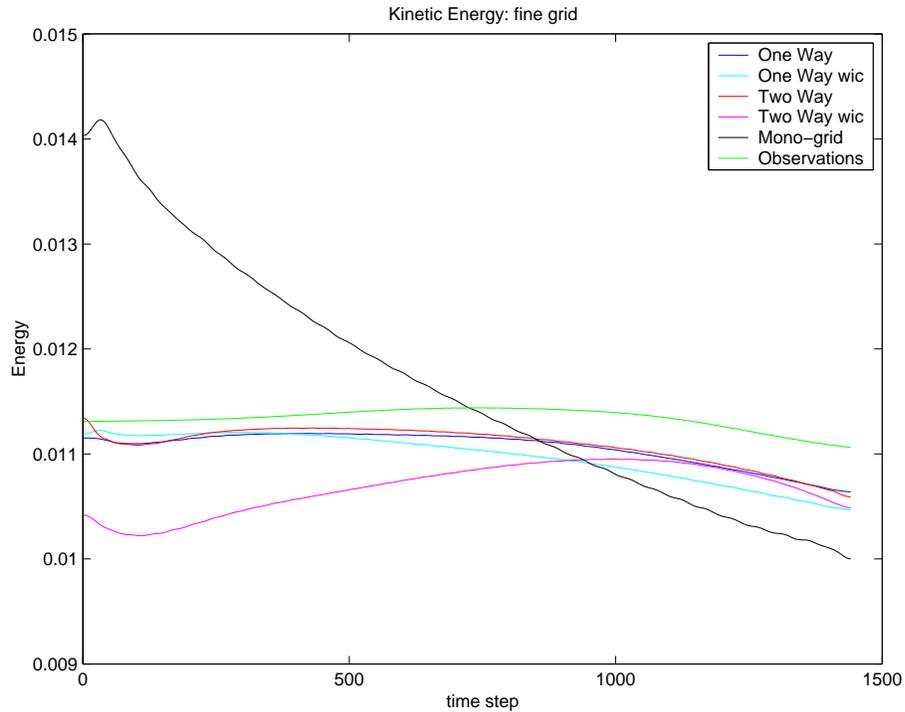


FIG. 4.8 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie cinétique des solutions optimales

avec $D(t)$ le volume défini à l'instant t , $S(t)$ la surface du fluide. Les courbes vertes sont associées aux observations. Elles représentent donc les énergies "vraies".

Nous constatons que les solutions optimales associées aux méthodes multi-grilles ont des propriétés énergétiques globalement meilleures que celles de la solution optimale provenant de l'assimilation mono-grille. Néanmoins ces solutions présentent encore certaines propriétés remarquables, traduisant des comportements différents de ces solutions.

4.4.1.1 Énergie cinétique

Tout d'abord, intéressons-nous à l'énergie cinétique (figure 4.8). Nous remarquons que la solution optimale mono-grille possède une énergie cinétique qui est initialement beaucoup trop importante. Elle diminue ensuite fortement au cours du temps, ce qui n'est pas le cas de l'énergie cinétique de la solution vraie. Ceci est logique si l'on considère les courbes des erreurs RMS obtenues précédemment (figure 4.5). Dans le cas des algorithmes bi-grilles, nous distinguons le comportement de la solution optimale *two-way wic* de celui des autres solutions. Celles-ci ont une énergie cinétique légèrement inférieure à celle de la solution vraie. Nous constatons de plus que leur énergie décroît de manière trop importante au cours du temps. A priori, deux phénomènes peuvent expliquer cela. Le premier est lié à la présence d'une zone de transition sur les bords de la grille haute résolution. Dans cette zone, la dissipation liée à l'opérateur de diffusion augmente de manière continue pour approcher celle du modèle basse résolution sur les bords. Le second phénomène est lié aux carences énergétiques de la solution basse résolution. Celle-ci présentant une énergie cinétique trop faible (figure 4.15), sa contribution énergétique au modèle haute résolution, via les conditions aux frontières, sera elle aussi trop faible. De fait, il

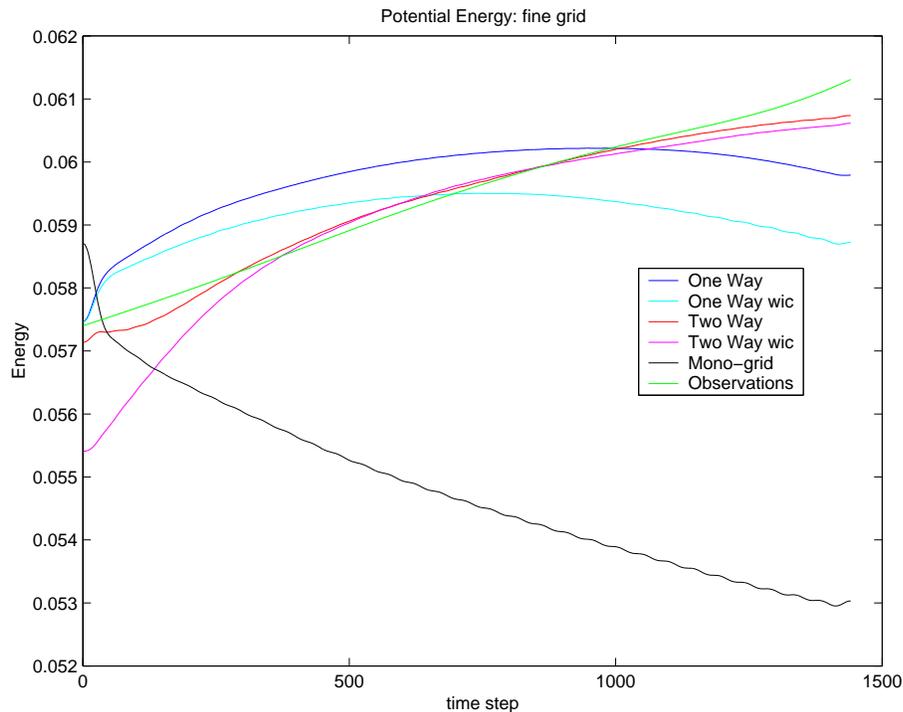


FIG. 4.9 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie potentielle des solutions optimales

apparaît comme normal que les solutions haute résolution voient leur énergie cinétique décroître légèrement tout au long de la simulation.

La solution optimale haute résolution *two-way wic* possède, elle, une énergie cinétique trop faible initialement mais qui augmente progressivement au cours du temps pour atteindre des valeurs proches de celles des énergies cinétiques des solutions optimales provenant des autres algorithmes bi-grilles. Ceci illustre l'apport du contrôle des transferts inter-grilles dans le cas d'interactions *two-way*. Initialement, la correction apportée sur la condition initiale apparaît comme légèrement trop faible, mais la solution est ensuite corrigée au cours du temps via la composante de l'incrément d'analyse relative au contrôle des transferts au niveau des frontière du domaine haute résolution. Cette correction permet d'apporter l'énergie nécessaire à la solution haute résolution.

4.4.1.2 Energie potentielle

Intéressons-nous maintenant à l'énergie potentielle des solutions optimales (figure 4.9). Nous constatons tout d'abord que la courbe correspondant au cas mono-grille décroît assez fortement durant toute la simulation, alors que la solution "réelle" voit son énergie augmenter durant cette même période. Cette solution semble donc peu acceptable. Ce qui n'est pas le cas des solutions optimales bi-grilles *two-way* et *two-way wic* dont les courbes d'énergie potentielle collent parfaitement à la "réalité". De plus, nous retrouvons de nouveau le fait que l'ajout du contrôle des transferts inter-grilles fait que la solution optimale possède initialement une énergie trop faible. Enfin, les solutions *one-way* possèdent une énergie potentielle qui croît très rapidement lors des tous premiers pas de temps et qui se stabilise par la suite autour d'une valeur proche

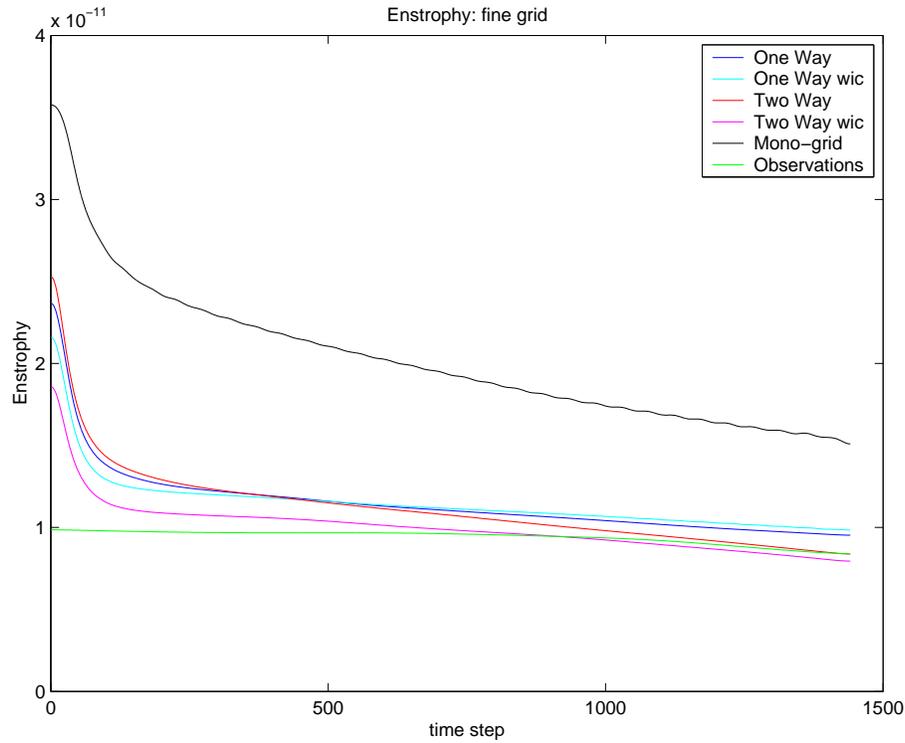


FIG. 4.10 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'enstrophie des solutions optimales

de la moyenne temporelle de l'énergie potentielle de la solution réelle.

4.4.1.3 Enstrophie

Enfin la figure 4.10 représente l'enstrophie \mathcal{E} des solutions haute résolution. Elle est définie par

$$\forall t \in [0, T] \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{D(t)} \|\omega\|_2^2 dx \quad (4.3)$$

avec $\omega = \text{Rot} \mathbf{u} = \partial_x v - \partial_y u$ la vorticité de la solution et $D(t)$ le volume défini à l'instant t .

Nous remarquons tout d'abord que l'enstrophie de la solution optimale mono-grille est beaucoup trop élevée. Les courbes d'enstrophie des solutions optimales bi-grilles sont particulièrement intéressantes. Nous constatons ainsi qu'initialement, aussi bien en interactions *one-way* que *two-way*, l'enstrophie est trop importante. Néanmoins, lors de la première moitié de l'intégration temporelle (voire seulement lors des premiers pas de temps pour la solution optimale *two-way wic*), ces courbes décroissent et convergent vers une valeur qui est identique à celle de l'enstrophie vraie dans le cas d'interactions *two-way* mais qui lui est supérieure dans le cas d'interactions *one-way*. Une fois les instabilités générées par l'ajout de l'incrément d'analyse évacuées, les solutions optimales des méthodes bi-grilles possèdent une structure turbulente (en moyenne) proche de la réalité. Dans le cas d'interactions *one-way*, l'enstrophie finale un peu trop importante amène à penser qu'une recirculation anormale a lieu à l'intérieur du domaine ω_h . Ce phénomène est encore plus marqué au niveau de la solution optimale mono-grille. Cela traduit un problème de frontières ouvertes : la dynamique à l'intérieur du domaine n'est plus en adéquation avec les

conditions aux frontières. Dès lors, des phénomènes de réflexion d’ondes apparaissent au niveau des bords. De plus, certaines ondes générées par la correction sur la condition initiale de la solution haute résolution sont également réfléchies à l’intérieur du domaine par une des frontières (le bord Est a priori). En effet, dans le cas mono-grille, la valeur aux frontières est imposée par une donnée brute, c’est à dire un forçage n’ayant pas ou peu connaissance des ondes se propageant dans le domaine fin. Lorsque celles-ci arrivent aux bords, si leurs amplitudes sont trop importantes, la condition de Flather ainsi que la couche de transition peuvent ne pas suffire pour permettre d’assurer leur sortie du domaine fin. Dans le cas des méthodes *one-way*, la correction de la condition initiale de la grille grossière va générer également des ondes sur le domaine grossier. Cependant, la différence de résolution entre les deux grilles peut entraîner numériquement une différence dans les vitesses de propagation sur chacune des grilles. Néanmoins, dans notre cas, la présence d’une couche de transition permet d’atténuer ce problème, sans pour autant le faire disparaître. Dans les versions *two-way*, l’update à chaque pas de temps de la solution basse résolution par la solution haute résolution va permettre au modèle grossier de prendre en compte ces ondes, ou du moins les principales structures associées à celles-ci.

4.4.1.4 Variables d’état du modèle

Intéressons-nous maintenant aux variables d’état du modèle, à savoir la hauteur d’eau et les vitesses, ainsi qu’aux champs de vortacité. Afin de ne pas surcharger ce chapitre, toutes les figures traitant des champs de hauteur-vitesse et des champs de vortacité se trouvent dans l’**annexe B**. Elle contient l’évolution au cours du temps de la hauteur d’eau, des champs de vitesse et de vortacité des solutions optimales haute résolution. Nous résumons sur la figure 4.11 les champs de hauteur-vitesse au temps $T=300h$ des solutions optimales obtenues avec les différents algorithmes.

Considérons la solution optimale provenant de l’assimilation mono-grille (figures 4.11 b), B.1 et B.2). Les lignes de niveaux de la surface libre sont ainsi très irrégulières, traduisant la présence de nombreuses instabilités. Le gyre Nord apparaît comme trop intense, surtout durant la première moitié de la simulation. Il en est de même pour le gyre Sud qui ne paraît pas assez large. Enfin le tourbillon initialement présent dans le coin Nord-Est disparaît assez rapidement.

De plus, de nombreux problèmes apparaissent au niveau des frontières du domaine, essentiellement au niveau des frontières sortantes. Ainsi, les vitesses proches de la frontières Est sont essentiellement méridionales. Le courant dans cette zone étant sortant, ceci nous indique que les conditions aux limites correspondant à cette frontière sont fausses. Dès lors, la quantité d’eau qui aurait dû être évacuée du domaine est advectée le long de la frontière par les structures tourbillonnaires. Ce problème d’évacuation d’eau intervenant également à la frontière Sud, l’eau se propage donc le long de cette frontière, contribuant ainsi à accélérer le mouvement de rotation. La frontière Ouest, dans sa partie Sud, ne permettant pas la sortie de ces masses d’eau, celles-ci sont alors réinjectées dans le jet, contribuant ainsi à réduire la taille du gyre Sud. La limite Ouest de la frontière Nord étant sortante, elle permet une évacuation de l’eau, ce phénomène est moins important pour le gyre Nord. Néanmoins, les valeurs aux frontières dans cette zone semblent, elles aussi, mauvaises. Cela se traduit par une vortacité (figure 4.12 b) et figure B.3) beaucoup trop importante en norme et la présence de nombreuses instabilités au niveau du courant central, se propageant ensuite dans tout le domaine.

Afin de mieux comprendre d’où proviennent ces erreurs, comparons les conditions aux limites du modèle libre et celles obtenues après assimilation. Pour cela, nous traçons, à différents

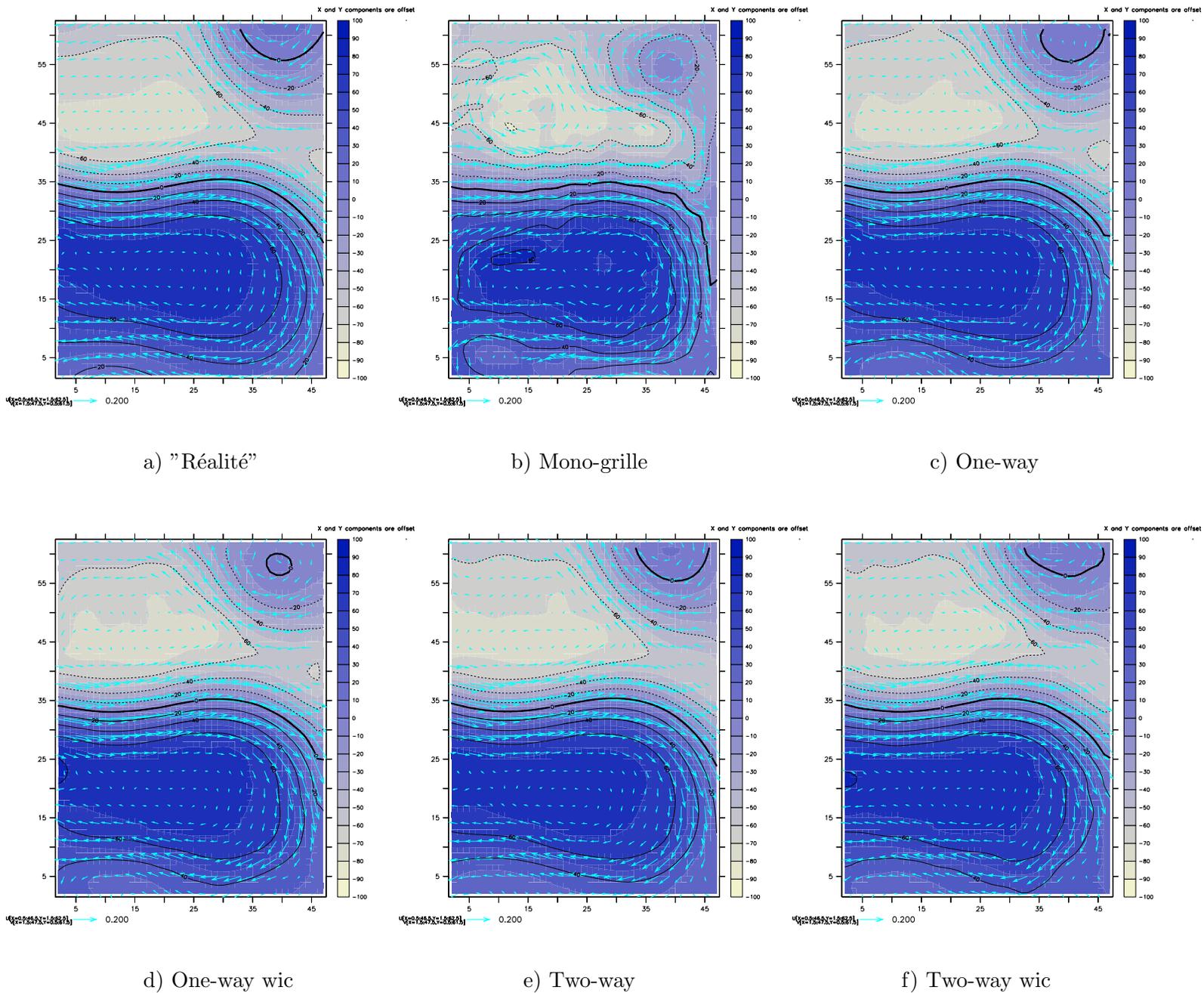
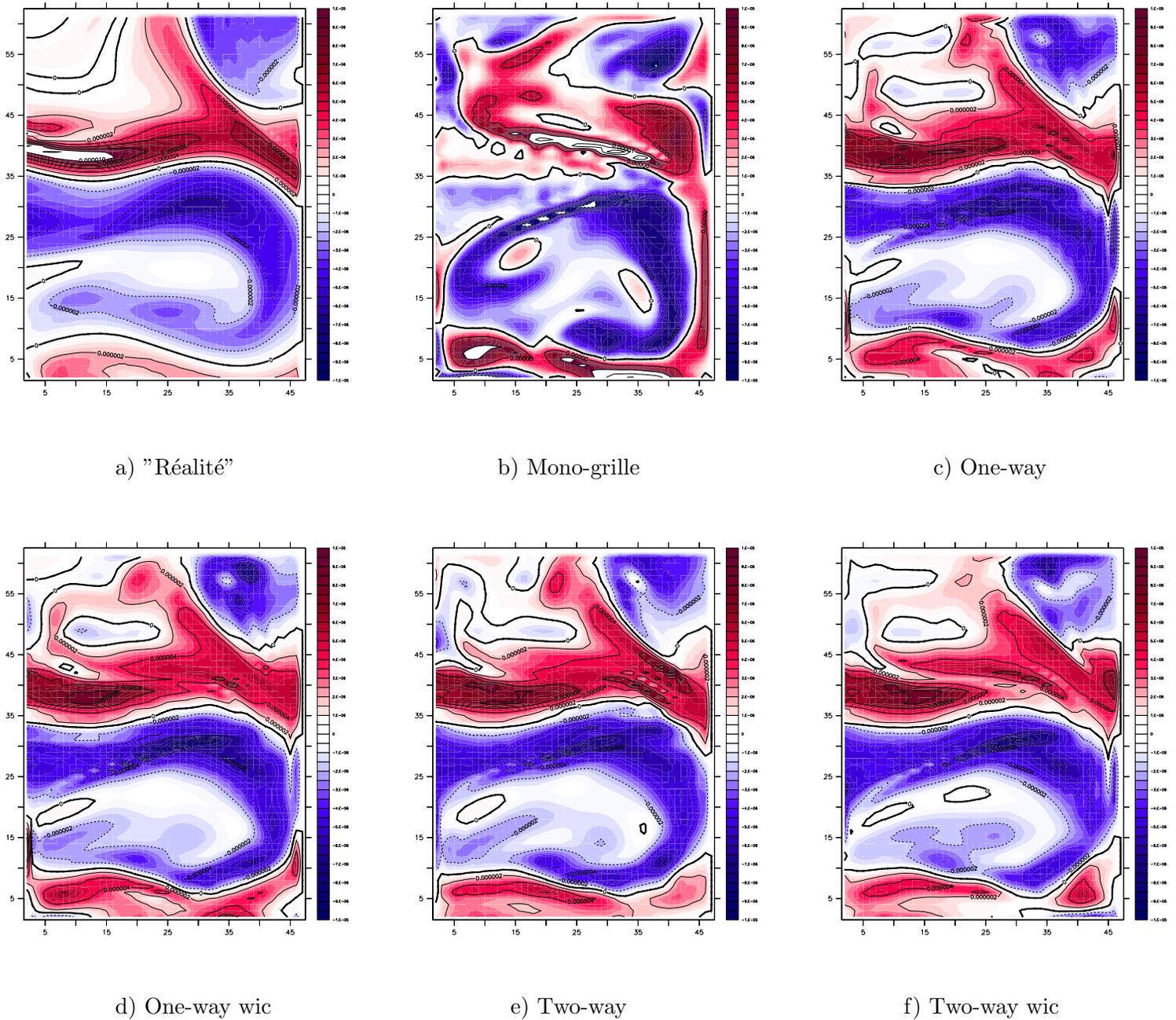


FIG. 4.11 – Grille fine : hauteur d'eau (couleur et isolignes) et vitesse (flèches) des solutions optimales à $T=300h$. Sous-échantillonnage spatial de deux points de grilles pour les vitesses zonales, et trois points de grille pour les vitesses méridionales. Plus la hauteur d'eau est élevée, plus le bleu est sombre.

FIG. 4.12 – Grille fine : vorticité des solutions optimales à $T=300h$.

instants, les valeurs prises par la surface libre et les vitesses au niveau des frontières ouvertes. Le cas de la frontière Est (frontière sortante) est représenté figure 4.13 (les courbes correspondant aux 3 autres frontières sont en annexe, figures B.16, B.17, B.18). Nous constatons ainsi que l'assimilation ne corrige pas la surface libre au niveau de cette frontière. Il en est de même pour la composante méridionale de la vitesse. Seule la composante de la vitesse orthogonale à cette frontière est modifiée, et les corrections apportées restent peu marquées. Ceci explique les problèmes de conditions aux frontières observés : la dynamique générée par la condition initiale optimisée n'est pas en accord avec les conditions aux limites. Nous retrouvons le constat fait par Gebbie [26] : la hauteur d'eau à l'intérieur d'un modèle possédant des frontières ouvertes est très sensible aux variations de la vitesse normale à ces frontières. N'observant que la hauteur d'eau à l'intérieur du domaine ω_h , la fonction coût s'avère ainsi hyper-sensible aux faibles variations d'une des composantes de la variable de contrôle choisie : le problème d'optimisation mono-grille s'avère donc mal conditionné. L'assimilation sera donc peu efficace.

Intéressons nous maintenant à la solution de l'assimilation bi-grille dans le cas d'interaction *one-way*. Sur la figure 4.11 (et les figures B.4 et B.5), nous constatons tout d'abord que les lignes de niveau de la surface libre sont beaucoup plus lisses, et représentent relativement bien les structures tourbillonnaires, notamment le tourbillon Nord-Est. Les problèmes majeurs concernent essentiellement le gyre Nord. Il apparaît trop étiré vers le Nord (la ligne de niveau $\zeta = 60m$ sort de la frontière) et pas assez long vers l'Est. Nous remarquons également des changements brusques de direction sur la frontière Est au niveau des lignes de niveau délimitant le gyre Sud. Ce décalage traduit de légers problèmes de frontières ouvertes.

Etudions les champs de vorticité de la solution haute résolution (figures 4.12 c) et B.6). Plusieurs constats s'imposent. Tout d'abord, durant les premières heures de la simulation, la solution présente un champ de vorticité trop marqué. Ceci s'explique par la présence de structures turbulentes de petites échelles liées au choc engendré par l'incrément d'analyse. Au fil du temps, ces structures se dissipent ou bien sont advectées hors du domaine par le flot entrant. Nous obtenons ainsi, après un certain temps, des champs de vorticité relativement cohérents avec la réalité. Nous constatons néanmoins la formation puis l'accumulation d'instabilités au niveau de plusieurs zones. Celles-ci se forment tout d'abord au niveau du jet. Elles se propagent alors vers l'Est, entraînant ainsi la formation d'une zone d'accumulation sur la frontière Est, celle-ci ne pouvant toutes les évacuer. Le même phénomène se déroule au Sud de la frontière Ouest. Nous sommes ainsi en présence d'un problème de frontières ouvertes. Via la condition de Flather sur les vitesses normales, nous spécifions les caractéristiques entrantes, ce qui permet une amélioration des quantités d'eau que nous faisons entrer dans le domaine. Par contre, l'utilisation de conditions de Dirichlet pose des problèmes au niveau des zones sortantes du domaine. En imposant aux frontières des valeurs indépendantes du modèle haute résolution, des incohérences apparaissent sur ces frontières : l'eau devant sortir du domaine (dynamique interne) dans certaines zones ne le peut pas à cause de "mauvaises" conditions aux frontières, ce qui entraine la formation d'instabilités visibles sur ces zones, même si la couche de transition permet d'en absorber une partie.

L'ajout du contrôle des interactions entraîne une nette amélioration de la solution au niveau du gyre Nord. Nous constatons ainsi sur les figures 4.11 d), B.7 et B.8 que la ligne de niveau $\zeta = 60m$ est beaucoup mieux représentée. Ceci se fait au détriment du tourbillon Nord-Est qui a presque disparu en fin de simulation. Cette faiblesse du tourbillon apparait sur les champs de vorticité (figure B.9). De plus, nous remarquons là encore la présence d'instabilités au niveau du jet. Celles-ci semblent plus importantes que celles présentes dans la solution *one-way* sur le

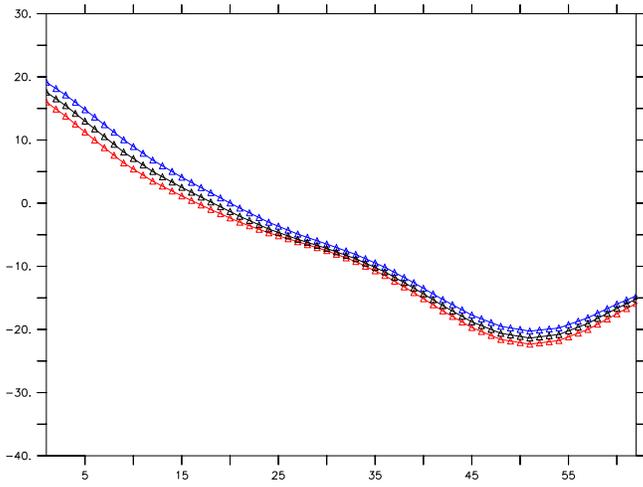
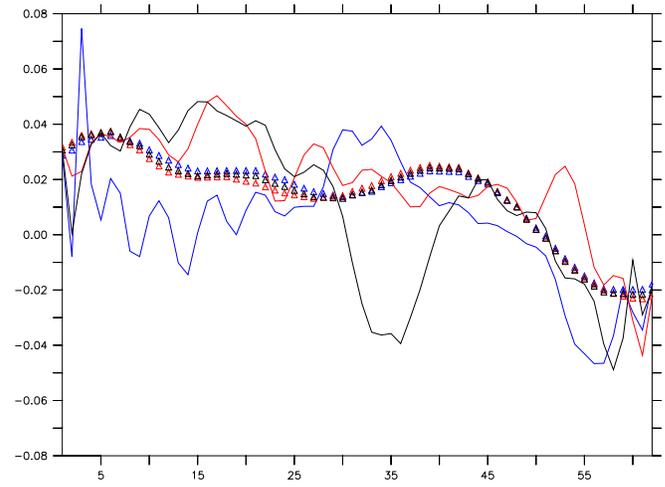
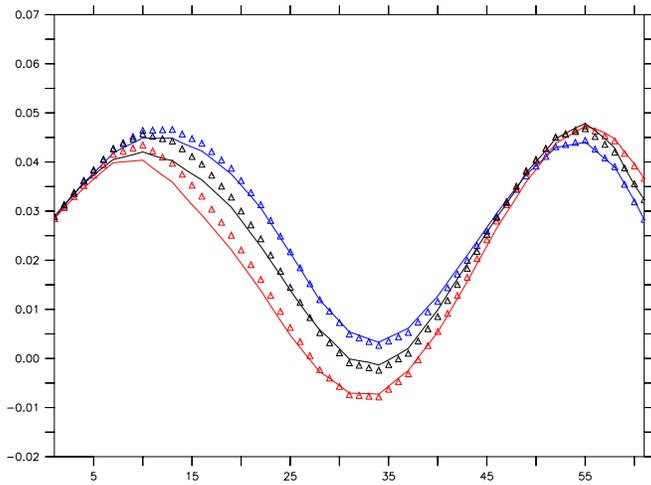
Hauteur d'eau h Composante zonale de la vitesse u Composante méridionale de la vitesse v

FIG. 4.13 – Conditions à la frontière Est de la grille haute résolution : surface libre et vitesses (rouge : $T=100h$, noir : $T=300h$, bleu : $T=500h$) avec assimilation mono-grille (courbes continues) et sans assimilation (triangles). En abscisse : la coordonnée le long de la frontière.

Sud de la frontière Ouest.

Enfin passons à la solution obtenue après assimilation dans le cas d'interactions *two-way*. Les figures 4.11 e), B.10 et B.11 représentent les lignes de niveau de la surface libre ainsi que les vitesses à différents instants. Là encore les structures sont relativement bien localisées. Comparé à la solution dite *one-way*, le gyre Nord semble mieux représenté : sa structure est plus étroite et plus allongée. Le tourbillon présent sur la frontière Nord, même s'il reste encore trop petit, apparaît lui aussi comme légèrement meilleur. Les raccords entre les lignes de niveau délimitant le gyre Sud et la frontière Est sont cette fois-ci parfaits.

Ce meilleur comportement se retrouve au niveau des champs de vorticité (figures 4.12 e) B.12). Comme pour les cas *one-way*, ces champs sont trop marqués initialement. Néanmoins, en fin de simulation, la structure du champ de vorticité s'avère cohérente avec la réalité. Les instabilités présentes au niveau du jet dans le cas *one-way* ont disparu en fin de simulation. Nous remarquons qu'il n'y a plus d'accumulation de ces instabilités sur le bord Est. Enfin, le Sud de la frontière Ouest ne pose plus de problème non plus. Les conditions imposées à la frontière Est par la solution basse résolution sont ainsi cohérentes avec la dynamique du modèle haute résolution. Ainsi la rétroaction à chaque pas de temps de la solution basse résolution par la solution haute résolution combinée à l'utilisation d'une couche de transition met en accord la dynamique du modèle global basse résolution avec celle du modèle local haute résolution.

Comme pour le cas des solutions *one-way*, l'ajout du contrôle au niveau des interactions inter-grilles permet une amélioration du gyre Nord (figures 4.11 f), B.13 et B.14) essentiellement sur sa partie située la plus à l'Est. Celui-ci se retrouve ainsi beaucoup plus allongé. Par contre, le tourbillon semble un peu moins bien représenté. De plus, les problèmes de raccord des lignes de niveau sur la frontière Est sont de nouveau perceptibles. Ils sont directement liés au fait que les termes de contrôle au niveau de l'interpolation de la solution basse résolution sur la frontière apparaissent comme des conditions de Dirichlet. Nous constatons de plus que des instabilités réapparaissent au niveau des champs de vorticité (figure B.15). Il subsiste ainsi une légère zone d'accumulation sur le bord Est, en milieu de simulation. Les conditions aux frontières obtenues restent toutefois cohérentes avec la dynamique engendrée par la condition initiale optimale du modèle local haute résolution.

4.4.2 Domaine global à basse résolution Ω_H

Intéressons-nous maintenant, dans le cas des méthodes bi-grilles, aux solutions basse résolution. Les figures 4.14 et 4.15 représentent l'énergie potentielle et l'énergie cinétique des solutions basse résolution. Les courbes vertes représentent les énergies de l'état vrai. La "réalité" étant obtenue à partir du modèle haute résolution, il ne sera donc pas possible pour la solution basse résolution de l'atteindre exactement. Celle-ci pourra au mieux s'en approcher.

Nous signalons tout d'abord que pour toutes les versions bi-grilles, l'assimilation a permis d'améliorer les énergies des solutions basse résolution par rapport au modèle libre (courbes en pointillés). Cependant l'impact énergétique des corrections varie selon les méthodes. De nouveau, la solution optimale *two-way wic* se distingue des autres solutions optimales bi-grilles. Celles-ci voient leurs énergies évoluer au cours du temps de manière similaire. Les énergies cinétique et potentielle des solutions optimales basse résolution *one-way*, *one-way wic* et *two-way* sont initialement trop faibles et décroissent au cours du temps de manière quasi-linéaire. De plus,

les pentes correspondant à ces trois solutions optimales sont très proches. Cette chute irréaliste de l'énergie cinétique est due essentiellement à une dissipation trop importante : la baisse de résolution combinée à une hausse importante du coefficient de dissipation rend le modèle basse résolution trop dissipatif.

Nous constatons de plus que les algorithmes basés sur des interactions *one-way* s'avèrent moins performants que la version *two-way*. La rétroaction de la solution haute résolution sur la solution basse résolution injecte de l'énergie dans le modèle basse résolution. Ceci explique les meilleures propriétés énergétiques des solutions *two-way* basse résolution par rapport à celles des solutions *one-way*.

Intéressons-nous à la solution optimale *two-way wic*. Nous constatons qu'elle possède des énergies trop faibles initialement. Ceci s'explique par l'ajout de degrés de liberté dans le système. En effet, via ces contrôles "extérieurs" supplémentaires, la grille grossière est soumise à moins de contraintes. De fait, pour la variante *one-way wic*, l'ajout de ce terme de contrôle rend la solution optimale obtenue moins performante. Comme pour la solution *two-way*, la rétroaction au premier pas de temps ne permet pas de corriger suffisamment la solution basse résolution pour retrouver une énergie proche de la réalité. Cependant, les variations de ses énergies au cours du temps se révèlent pertinentes. Ainsi, l'énergie potentielle croît au cours du temps à une vitesse comparable à celle de la solution vraie. L'énergie cinétique augmente également quasiment tout au long de la simulation. Via le contrôle des transferts inter-grilles, il est ainsi possible d'injecter de l'énergie au modèle basse résolution tout au long de la simulation, à la fois par sa composante basse résolution sur $\hat{\omega}_H$ mais aussi par sa composante haute résolution sur la frontière de ω_h via la rétroaction *two-way*.

Enfin, la figure 4.16 représente les variations au cours du temps de l'entrophie des solutions basse résolution pour les quatre algorithmes envisagés. Nous retrouvons des résultats proches de ceux concernant les courbes d'énergie cinétique. Ainsi, l'assimilation a permis d'améliorer l'entrophie des solutions basse résolution, même si l'écart avec la réalité reste important. Les algorithmes en interactions *two-way* produisent des solutions présentant de meilleures valeurs d'entrophie. De plus, les entrophies des solutions optimales basse résolution *one-way*, *one-way wic* et *two-way* semblent avoir le même comportement à des échelles différentes. Ainsi, ces courbes décroissent avec la même oscillation importante en fin d'intégration. Le modèle basse résolution étant trop diffusif, il détruit rapidement les petits tourbillons générés par l'ajout de l'incrément d'analyse, ce qui entraîne une baisse de l'entrophie au cours du temps. Par contre, l'entrophie de la solution optimale *two-way wic* semble avoir des caractéristiques proches de celles de la solution "réelle", mais avec une amplitude beaucoup plus faible. Nous retrouvons de nouveau le fait que le contrôle des transfert inter-grilles s'apparente à un terme source pour le modèle basse résolution.

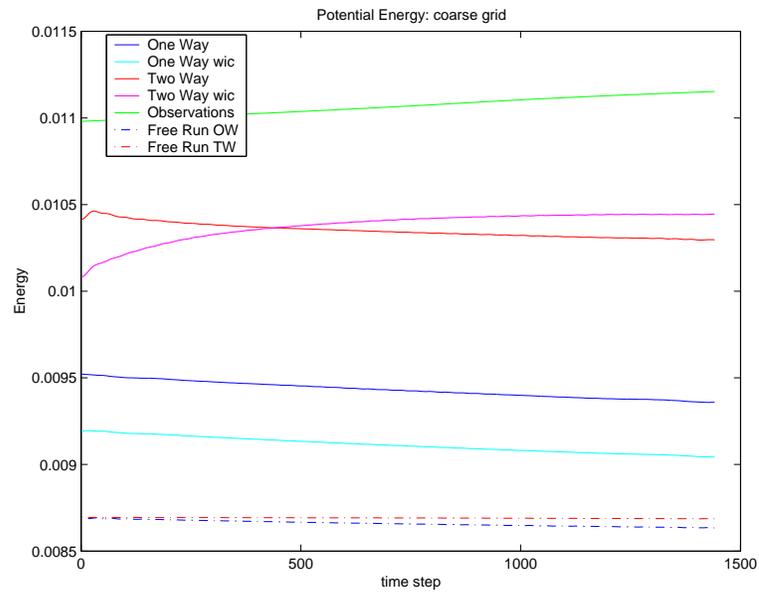


FIG. 4.14 – Grille grossière Ω_H : évolution temporelle de l'énergie potentielle des solutions optimales

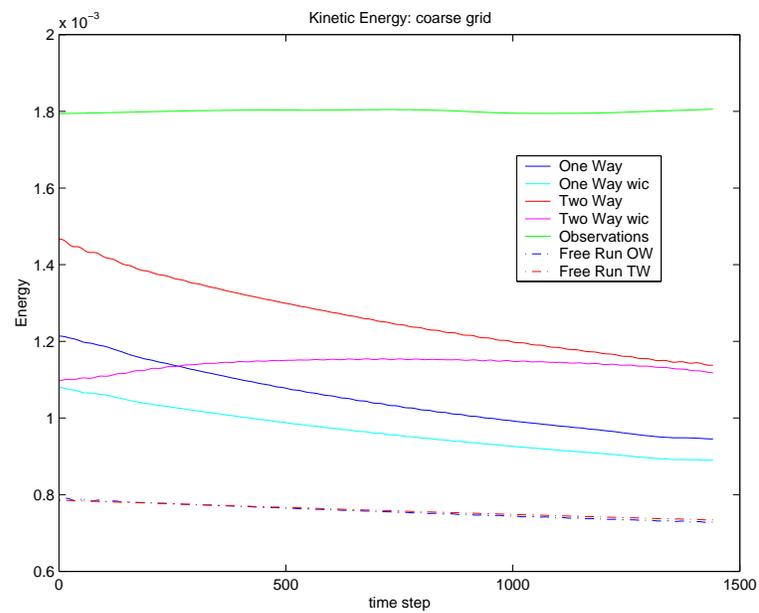
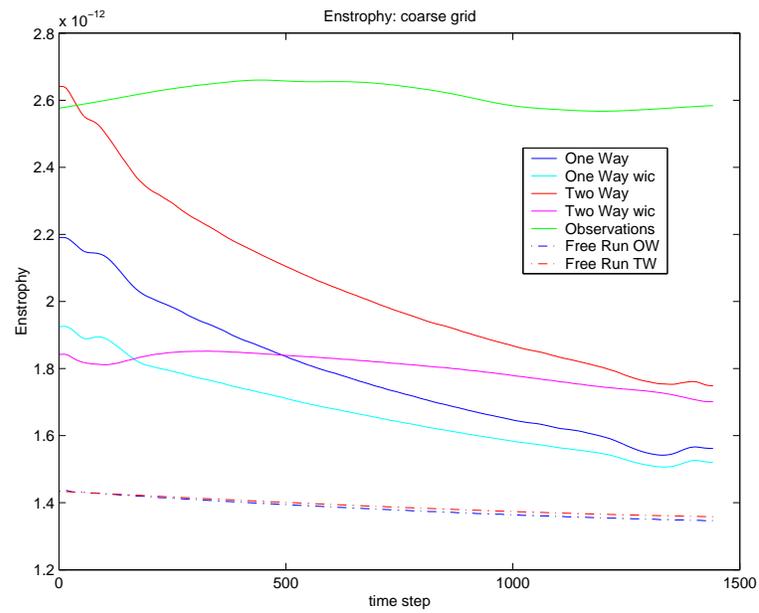


FIG. 4.15 – Grille grossière Ω_H : évolution temporelle de l'énergie cinétique des solutions optimales

FIG. 4.16 – Grille grossière Ω_H : évolution temporelle de l'enstrophie des solutions optimales

4.5 Algorithmes wic : étude des transferts inter-grilles

Nous avons vu précédemment que le contrôle des transferts inter-grilles permet d'améliorer la minimisation de la fonction coût, et dans le cas d'interaction *two-way* permet d'améliorer les solutions optimales ("meilleur" comportement physique de la solution notamment à basse résolution). Le but de cette correction est de réduire les erreurs commises lors de ces transferts en apportant de l'information à des échelles invisibles pour la grille depuis laquelle le transfert a lieu. Dans cette partie, nous étudions à quelles échelles ces corrections ont lieu.

4.5.1 Contrôle de l'erreur d'interpolation

Une correction de petite échelle doit être apportée aux conditions aux frontières du modèle haute résolution obtenues par interpolation de la solution basse résolution. Néanmoins, une erreur modèle ou des erreurs d'interpolation trop importantes engendreront une correction des grandes échelles. Afin de visualiser sur quelles échelles portent ces corrections, nous avons analysé dans l'espace de Fourier la composante *wic* des incréments d'analyse obtenus.

Les figures 4.17 et 4.18 représentent la norme des coefficients de Fourier de la correction des conditions aux frontières sur la composante u de la vitesse pour le cas d'interactions *one-way* et *two-way*. Les abscisses correspondent aux pulsations spatiales, les ordonnées aux pulsations temporelles, avec pour échelles le coefficient $\mathbf{k} = (k_s, k_t)$. Les périodes correspondantes sont données par les formules

$$\begin{cases} T_{k_t} = \frac{N_t}{k_t} T_{e_t} \\ T_{k_s} = \frac{N_s}{k_s} T_{e_s} \end{cases} \quad (4.4)$$

avec T_{e_t} et T_{e_s} les périodes d'échantillonnage temporel et spatial, N_t et N_s la taille du vecteur signal. Seul le quart Nord-Ouest a été tracé (les autres sont obtenus par symétrie). Enfin le pixel (0,0) représente la moyenne.

Nous remarquons tout d'abord que les coefficients des transformées de Fourier des corrections sur les frontières Nord et Sud sont très faibles, aussi bien en *one-way* qu'en *two-way*. Nous retrouvons donc le fait que les corrections portent essentiellement sur la composante de la vitesse qui est normale à la frontière. De plus, la correction est essentiellement basse fréquence en temps et en espace.

L'analyse de Fourier des corrections apportées sur les frontières Est et Ouest est beaucoup plus intéressante. Rappelons tout d'abord que ces deux frontières jouent un rôle majeur : le jet entre dans le domaine haute résolution par la frontière Ouest et ressort par la frontière Est. Il est donc crucial d'obtenir des valeurs sur ces frontières les plus précises possibles. Nous signalons de plus que nous observons une saturation au niveau des coefficients *two-way* proches de l'origine liée à la palette de couleurs choisie. Ceux-ci sont en effet 3 à 4 fois plus importants. Ces corrections, les plus importantes, se font sur de longues périodes et à des échelles spatiales importantes. Les autres corrections, dans le cas d'interactions *two-way*, sont spatialement à basse fréquence, même si les structures les plus fines sont de l'ordre de 25 km, soit la résolution de la grille grossière. De plus, 4 fréquences temporelles se distinguent sur la frontière Ouest et 3 sur la frontière Est. Nous résumons cela dans les tableaux suivants :

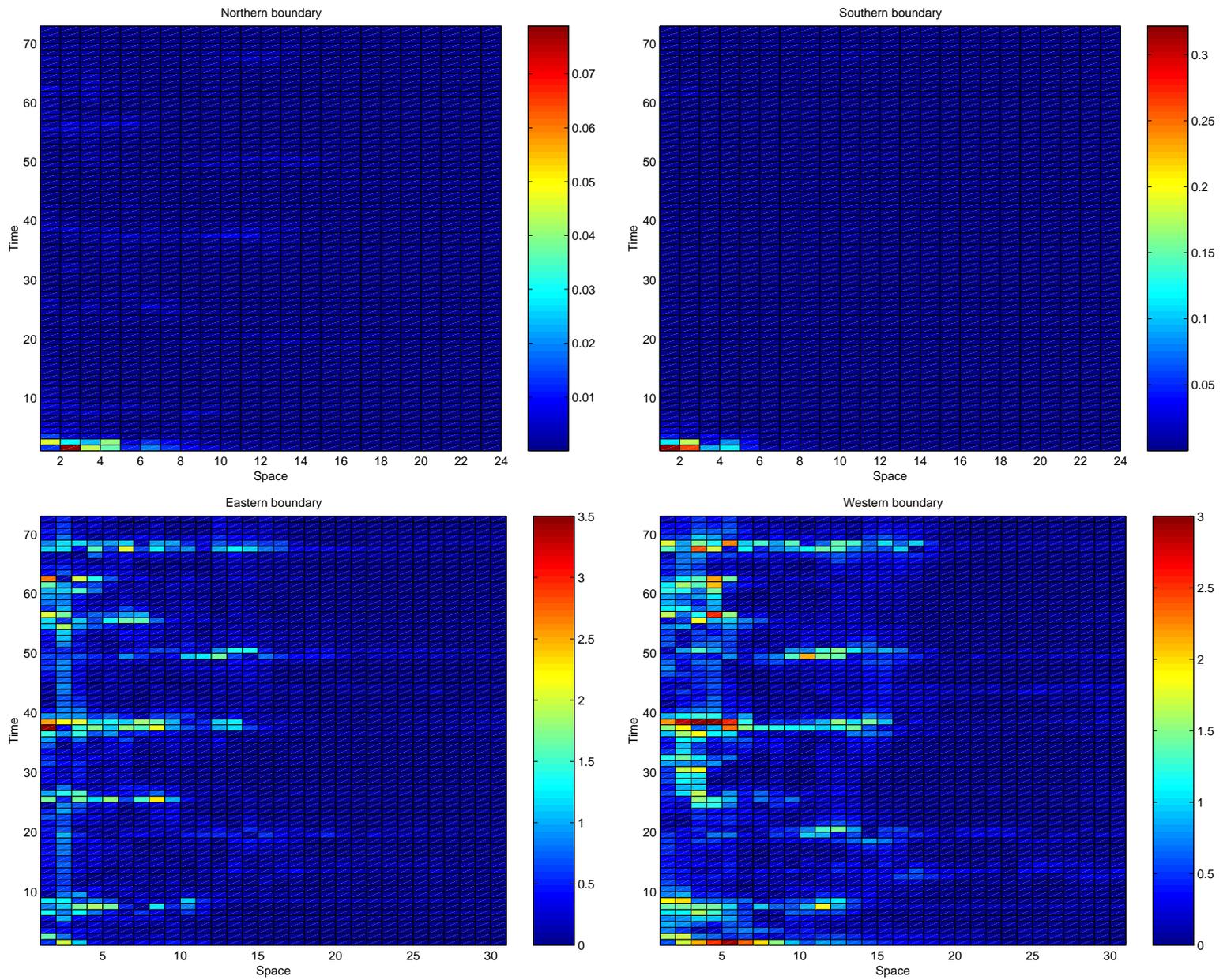


FIG. 4.17 – One-way : norme des coefficients de Fourier (FFT) de la composante u de la correction des conditions aux frontières. De gauche à droite et de haut en bas : frontière Nord, Sud, Est, Ouest. En abscisse : pulsation spatiale k_s . En ordonnée : pulsation temporelle k_t

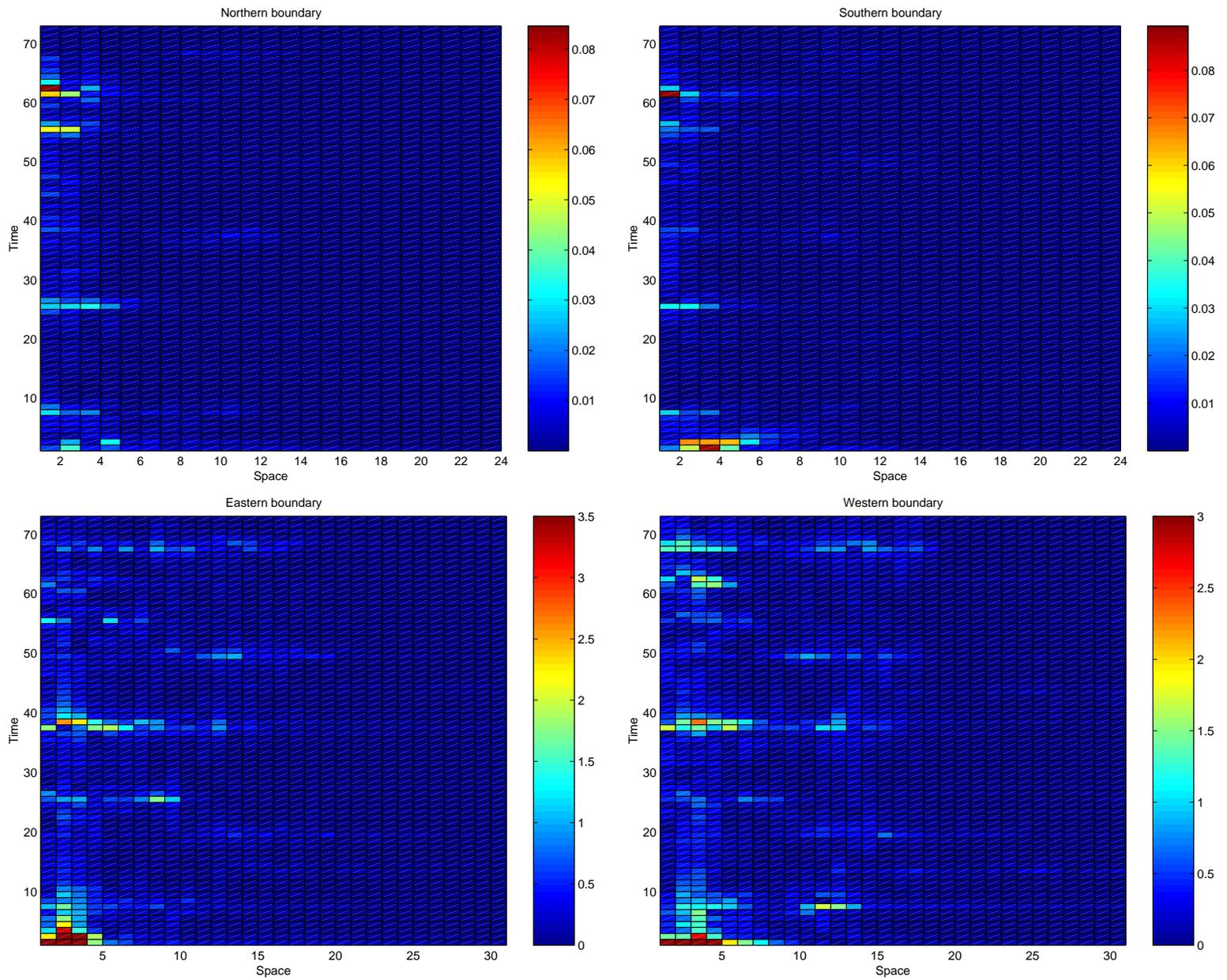


FIG. 4.18 – Two-way : norme des coefficients de Fourier (FFT) de la composante u de la correction des conditions aux frontières. De gauche à droite et de haut en bas : frontière Nord, Sud, Est, Ouest. En abscisse : pulsation spatiale k_s . En ordonnée : pulsation temporelle k_t

Frontière	k_t	8	37 – 38	61 – 62	67 – 68
Ouest	T_{k_t} (h)	90.6	19 – 19.5	11.7 – 12	10.6 – 10.8

Frontière	k_t	8	37 – 38	55
Est	T_{k_t} (h)	90.6	19 – 19.5	13.2

La correction dont la période temporelle est proche de 12 heures est présente uniquement sur le bord Ouest, à savoir la frontière entrante. Elle apparait également sur les frontières Ouest et Est dans le cas d'interactions *one-way*. Cette période correspond à la moitié de celle d'apparition des observations (24 heures). Une partie de la correction des erreurs d'interpolation est ainsi directement corrélée aux observations : le flot entrant est régulièrement modifié afin que l'écart aux observations soit le plus faible possible.

Les autres fréquences de corrections s'expliquent par la présence d'ondes stationnaires dans la solution basse résolution (cf §3.9.2). Nous avons résumé dans le tableau qui suit une estimation de la période d'oscillations T_n pour différentes ondes de mode n (d'après [46]).

Ondes	mode n	4	18	26	33
stationnaires	T_n (h)	87.8	19.5	13.5	10.6

Nous retrouvons ainsi des valeurs proches des périodes de correction présentes dans le contrôle des erreurs d'interpolation. Ce contrôle cherche ainsi à réduire la transmission de ces ondes au modèle haute résolution.

Dans le cas d'interactions *one-way*, les corrections basse fréquence et à faible résolution (coefficients proches de l'origine) ne sont plus aussi importantes. Nous observons de plus l'apparition de nouvelles fréquences temporelles dans la correction, surtout sur la frontière Est. Nous résumons cela dans les tableaux suivants :

Frontière	k_t	8	26	30	37 – 38	50	55	61 – 62	67 – 68
Ouest	T_{k_t} (h)	90.6	27.8	24.1	19 – 19.5	14.5	13.2	11.7 – 12	10.6 – 10.8

Frontière	k_t	8	26	37 – 38	50	55	61 – 62	67 – 68
Est	T_{k_t} (h)	90.6	27.8	19 – 19.5	14.5	13.2	11.7 – 12	10.6 – 10.8

Nous retrouvons des fréquences de correction correspondant à la fréquence d'apparition des observations. Ainsi sur la frontière Ouest (entrante), des corrections ont lieu toutes les 12 heures comme pour la version *two-way* mais aussi toutes les 24 heures. De plus, la frontière Est (sortante) est elle aussi corrigée toutes les 12 heures.

Le contrôle de l'erreur d'interpolation semble intervenir de façon plus ponctuel dans le cas d'interactions *one-way*. Les autres fréquences de corrections s'expliquent elles aussi par la présence d'ondes stationnaires dans la solution basse résolution. Nous avons résumé dans le tableau qui suit une estimation de la période d'oscillations T_n pour différentes ondes de mode n (d'après [46]).

Ondes	mode n	4	13	18	24	26	33
stationnaires	T_n (h)	87.8	27.8	19.5	14.6	13.5	10.6

Nous retrouvons des résultats analogues sur la composante v de la vitesse en tenant compte du fait que les frontières normales à cette composante sont cette fois-ci les frontières Nord et Sud.

La correction sur la hauteur d'eau étant très faible voire quasi nulle dans le cas d'interactions *two-way*, l'étude du contrôle des erreurs d'interpolation présente peu d'intérêt pour cette variable. Nous retrouvons quand même des corrections présentant des fréquences temporelles similaires à celles rencontrées sur les vitesses.

4.5.2 Contrôle de l'erreur de restriction (interaction *two-way*)

Intéressons-nous maintenant au contrôle de l'erreur de restriction dans le cas d'interaction *two-way*. La figure 4.19 représente la composante du contrôle de l'erreur de restriction de l'incrément d'analyse obtenu après 40 itérations de minimisation. Il faut d'abord noter la faible amplitude des corrections apportées au niveau de la rétroaction *two-way*. Ainsi la composante hauteur d'eau est au maximum de l'ordre du dixième de millimètre. Elle s'avère ainsi négligeable. La correction sur les vitesses est plus importante, de l'ordre du centimètre par seconde.

Nous constatons de plus que cette correction est apportée essentiellement sur les bords du domaine ω_H . Ceci est dû au fait que le schéma est totalement explicite et qu'il n'y a pas d'observation assimilée sur ω_H . La rétroaction est donc importante uniquement sur les premiers points (selon la largeur du stencil). Ainsi, pour chaque pas de temps du modèle direct en interaction *two-way*, la rétroaction sur la grille basse résolution entraîne la mise à 0 de la variable adjointe basse résolution sur l'intérieur de ω_H . Le gradient de la fonction coût vis-à-vis du contrôle de l'erreur de restriction est donc obtenu en intégrant de façon rétrograde, sur un pas de temps, le modèle adjoint basse résolution partant d'un état adjoint dont la composante sur ω_H est nulle. Ce gradient restera donc nul au centre de ω_H (il n'y a pas d'observation sur ce domaine), et sera modifié sur les bords selon la largeur du stencil du schéma numérique utilisé.

Dès lors, à la vue de ces résultats, nous présentons uniquement l'étude dans l'espace de Fourier de la correction des erreurs de restriction au niveau des frontières du domaine ω_H . La figure 4.20 représente la norme des coefficients de Fourier de la correction des erreurs de restriction sur la composante u de la vitesse au niveau des frontières (colonne de gauche) et au niveau de la première maille à l'intérieur du domaine (colonne de droite). Les abscisses correspondent aux pulsations spatiales, les ordonnées aux pulsations temporelles, avec pour échelles le coefficient $\mathbf{k} = (k_s, k_t)$.

Nous retrouvons ainsi sur les différentes frontières des corrections à basse fréquence temporelle ainsi qu'un certain nombre de fréquences caractéristiques qui étaient déjà présentes dans le terme de correction des erreurs d'interpolation. Les périodes associées sont résumées dans le tableau suivant :

k_t	8	38	55	60 – 62
$T_{k_t}(\text{h})$	90.6	19.1	13.2	11.7 – 12

Elles correspondent de nouveau aux périodes de certains modes d'ondes stationnaires ou bien sont directement corrélées à la fréquence d'assimilation des observations. Nous retrouvons des résultats analogues sur la composante v de la vitesse ainsi que sur la hauteur d'eau, même si la correction est très faible pour cette variable.

Le terme de contrôle des erreurs de restriction tend ainsi à améliorer la solution basse résolution d'une part en corrigeant de façon continue les erreurs liées à l'opérateur G_h^H , d'autre part en cherchant à atténuer les phénomènes résultant de la présence d'ondes stationnaires dans le domaine basse résolution.

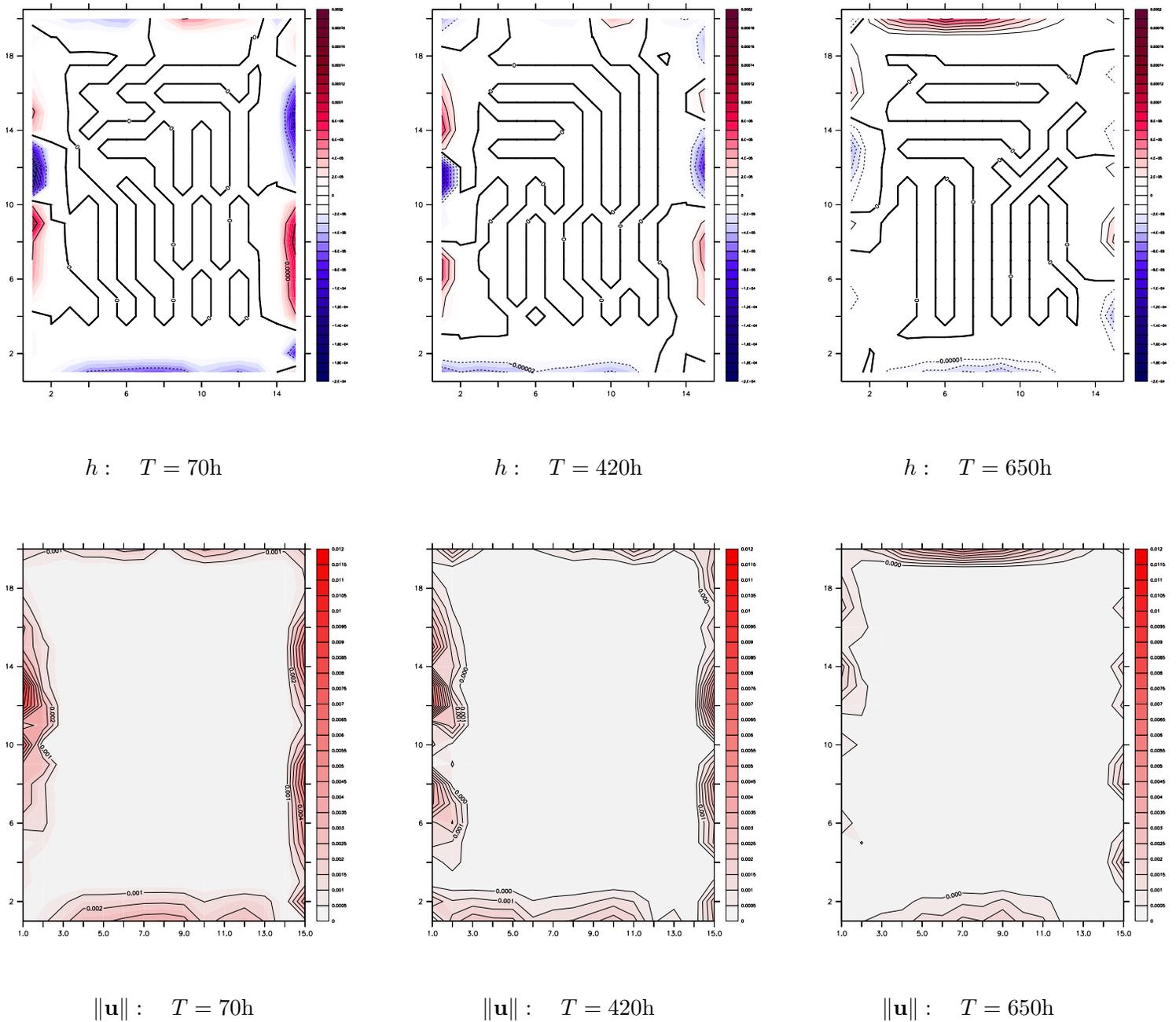


FIG. 4.19 – Grille basse résolution : composante du contrôle de l'erreur de restriction de l'incrément d'analyse à $T = 70h$, $T = 420h$ et $T = 650h$

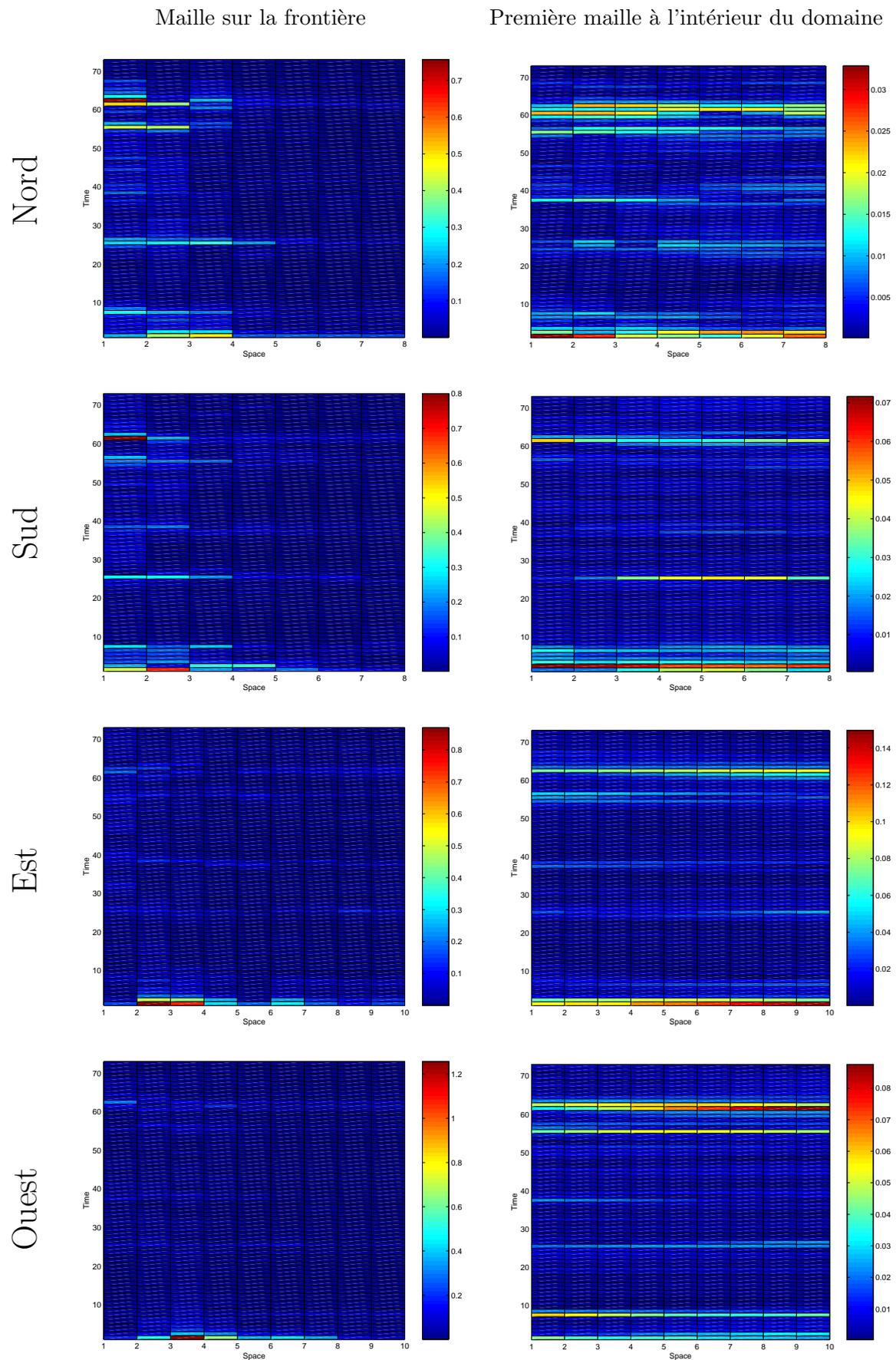


FIG. 4.20 – Two-way : norme des coefficients de Fourier (FFT) de la composante u de la correction des des erreurs de restriction. En abscisse : pulsation spatiale k_s . En ordonnée : pulsation temporelle k_t

4.6 Etude des gradients

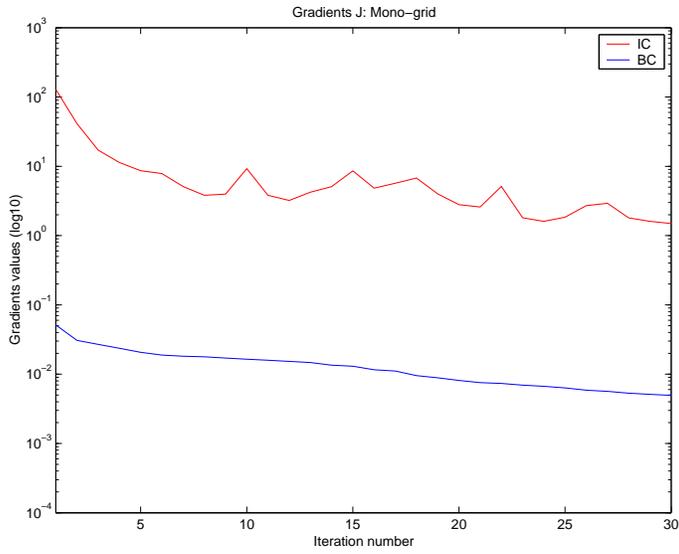
Nous nous intéressons dans cette partie à l'évolution des normes des gradients selon les différents contrôles au cours de la minimisation. Le but est d'une part de vérifier que les gradients des fonctions coût convergent bien vers 0 au cours de la minimisation, et d'autre part de mieux visualiser les problèmes de conditionnement des hessiennes des fonctions coût.

La figure 4.21 représente cette évolution pour les cinq algorithmes étudiés. Les courbes affichées sont les normes des gradients normalisées, à savoir les normes divisées par la taille du vecteur de contrôle associé.

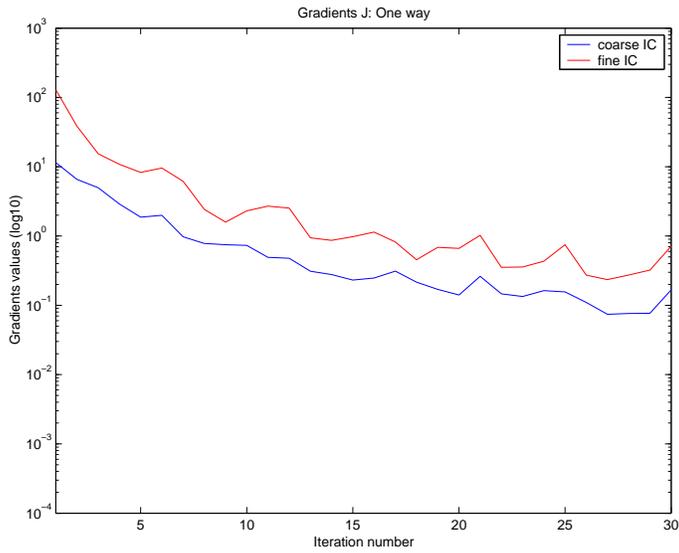
Comme attendu, dans tous les cas, les courbes des différents gradients convergent bien vers 0. Le mauvais conditionnement de la hessienne dans le cas mono-grille apparaît très clairement. Ainsi, le gradient de J selon les conditions aux limites est initialement très faible (en moyenne de l'ordre de 10^{-1}), tandis que le gradient selon la condition initiale est beaucoup plus important. Ce déséquilibre entre les pentes de la fonction coût selon les différentes composantes du vecteur de contrôle fait que le minimiseur ne va pas ou peu corriger les conditions aux limites. C'est ce que nous observons sur les figures B.16, B.17 et B.18. Dans le cas des méthodes bi-grilles, les gradients selon la condition initiale de la grille grossière sont initialement beaucoup plus importants (facteur 100 comparé au cas mono-grille). Or la condition initiale du modèle basse résolution contrôle directement les conditions aux frontières du modèle local haute résolution. Ainsi, dans ce nouvel espace de contrôle, les conditions aux frontières n'apparaissent plus comme optimales. La minimisation va donc pouvoir les corriger. Ceci traduit un meilleur conditionnement de la hessienne de la fonction coût. Nous constatons de plus que les gradients selon la condition initiale du modèle basse résolution sont légèrement plus importants dans le cas des algorithmes *one-way* que dans les cas *two-way*. L'update de la solution basse résolution par la solution locale haute résolution fait que la condition initiale du modèle fin joue un rôle dans le contrôle des conditions aux limites sur la grille fine. La condition initiale du modèle grossier perd donc en importance.

Nous constatons de plus que pour la méthode *one-way wic*, la courbe du gradient selon le contrôle des conditions aux limites est très proche de celle concernant le gradient selon les conditions aux limites du cas mono-grille. Cette variable de contrôle apparaît donc comme quasi-optimale dès le début de la minimisation. Des calculs montrent que ces matrices hessiennes ont une structure relativement similaire, dès lors un mauvais conditionnement dans le cas mono-grille entraîne de facto une faible correction sur ce terme de contrôle. Néanmoins, son but originel étant d'apporter de l'information de petite échelle, invisible par le modèle basse résolution, ces faibles corrections s'avèrent suffisantes pour améliorer de façon significative la minimisation (figure 4.1).

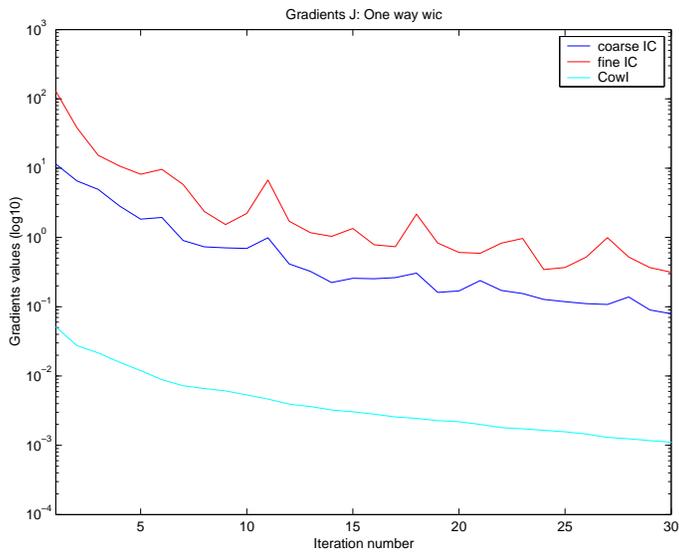
Pour le cas de l'algorithme *two-way wic*, initialement, le gradient selon ce même vecteur de contrôle est aussi relativement faible; néanmoins cette valeur est dix fois plus importante que pour la version *one-way wic*. L'update local de la solution basse résolution réalisé à chaque pas de temps permet d'accentuer le conditionnement de la hessienne vis-à-vis de ce contrôle. Ainsi, l'impact de ce contrôle sur la solution haute résolution durant la minimisation devient plus important. L'algorithme converge ainsi plus rapidement. Le gradient selon le contrôle des erreurs de restriction est très faible initialement, les corrections apportées par le processus de minimisation vont rester elles-aussi faibles.



Mono-grille



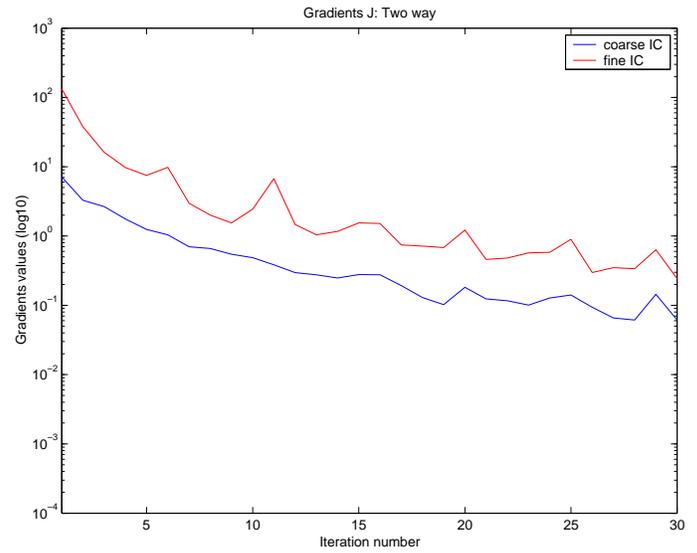
Bi-grille one-way



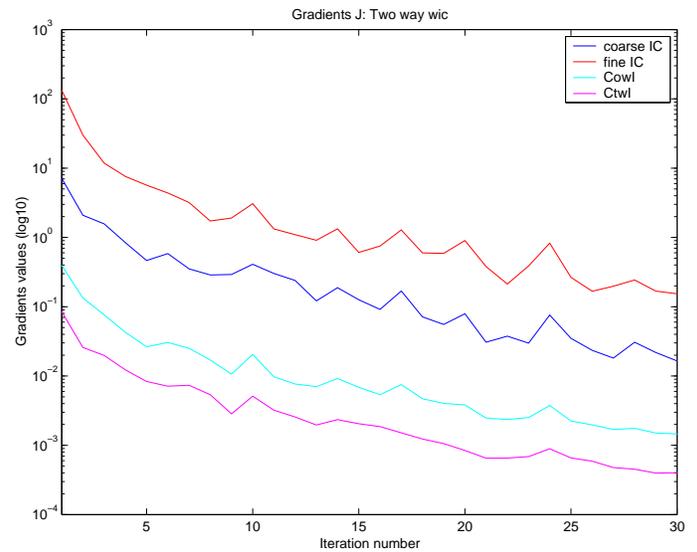
Bi-grille one-way wic

Légende

- Courbe rouge : gradient selon la condition initiale haute résolution
- Courbe bleu : gradient selon le contrôle des conditions aux frontières (mono-grille) ou selon la condition initiale basse résolution (bi-grilles)
- Courbe cyan : gradient selon le contrôle des erreurs d'interpolations
- Courbe magenta : gradient selon le contrôle des erreurs de restriction



Bi-grille two-way



Bi-grille two-way wic

FIG. 4.21 – Evolution de la norme des différentes composantes du gradient de J au cours de la minimisation

4.7 Assimilation des observations sur ω_H

Jusqu'à présent, nous avons assimilé des observations présentes uniquement sur la grille haute résolution ω_h . Ces observations étant localisées sur le domaine ω , il est également possible de les assimiler sur la zone ω_H de la grille basse résolution Ω_H .

4.7.1 Principe

Le terme de la fonction coût mesurant les écarts aux observations s'écrit maintenant :

$$J^{obs}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \int_0^T \|H_H(\mathbf{x}_H) - \mathbf{y}\|_o^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|H_h(\mathbf{x}_h) - \mathbf{y}\|_o^2 dt \quad (4.5)$$

avec \mathbf{y} les observations, \mathbf{x}_H et \mathbf{x}_h les vecteurs d'état sur chacune des grilles, H_H et H_h les opérateurs d'observation discrets sur chacune des grilles, et $\tilde{\mathbf{x}}$ le vecteur de contrôle. Minimiser cette fonctionnelle revient donc à réduire l'écart entre les solutions des modèles haute et basse résolution et un même jeu d'observations. Si cela semble intéressant dans le cas d'un emboîtement en interaction *one-way*, cela l'est a priori beaucoup moins pour un emboîtement en interaction *two-way*.

Afin de mieux comprendre pourquoi le comportement de l'assimilation diffère à l'ajout de ce nouveau terme dans la fonction coût, selon le type d'interactions utilisées, intéressons-nous aux normes des écarts aux observations sur chacune des grilles. Pour une meilleure lisibilité, nous supposons que les opérateurs d'observation sont linéaires ainsi que l'opérateur de restriction \mathbf{G}_h^H dans le cas d'interaction *two-way*. Nous supposons de plus que les observations sont présentes à un unique instant. La fonction coût s'écrit

$$J^{obs}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_H \mathbf{x}_H - \mathbf{y}\|_o^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h - \mathbf{y}\|_o^2 \quad (4.6)$$

Notons \mathbf{x}_h^t l'état vrai sur la grille haute résolution et \mathbf{x}_H^t celui sur la grille basse résolution. Nous avons la relation suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_h \mathbf{x}_h^t + \epsilon_h = \mathbf{H}_H \mathbf{x}_H^t + \epsilon_H \quad (4.7)$$

avec ϵ_h , ϵ_H les erreurs d'observation haute et basse résolution. Elles sont définies par :

$$\begin{cases} \epsilon_h &= H^c(\mathbf{x}^c) - \mathbf{H}_h \mathbf{x}_h^t + \epsilon^m \\ \epsilon_H &= H^c(\mathbf{x}^c) - \mathbf{H}_H \mathbf{x}_H^t + \epsilon^m \end{cases} \quad (4.8)$$

où ϵ^m est l'erreur de mesure.

4.7.2 Résultats en *one-way*

Dans le cas d'interaction *one-way*, J^{obs} devient

$$J^{obs}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_H(\mathbf{x}_H - \mathbf{x}_H^t) - \epsilon_H\|_o^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_h(\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^t) - \epsilon_h\|_o^2 \quad (4.9)$$

La minimisation de J^{obs} tend donc à faire coïncider dans l'espace des observations la solution du modèle et l'état vrai sur chacune des grilles. Le modèle basse résolution étant indépendant du

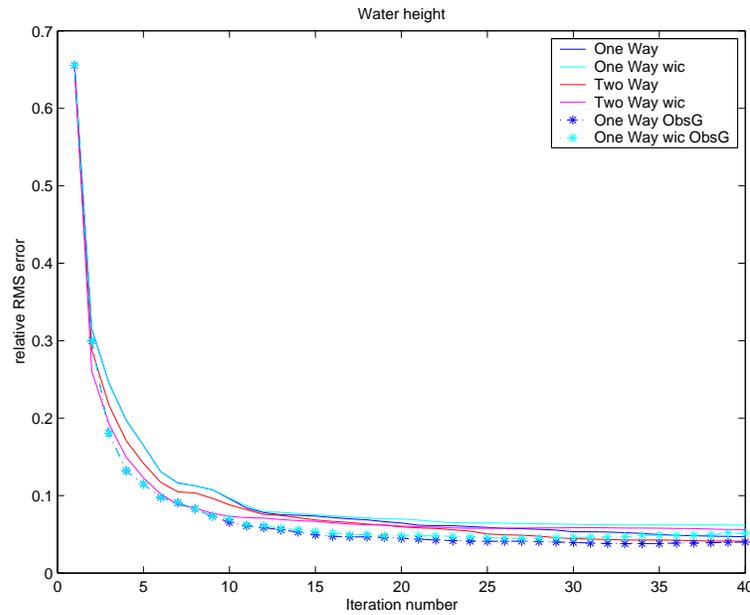


FIG. 4.22 – Grille fine ω_h : moyenne temporelle de l’erreur RMS relative sur la hauteur d’eau en fonction du nombre d’itérations de la minimisation. Courbes * : observations assimilées également à basse résolution

modèle haute résolution, la minimisation de ce nouveau terme ne posera pas de difficultés majeures. Si les erreurs d’observations sont faibles sur la grille basse résolution (cela revient donc notamment à supposer que nous disposons d’un ”bon” opérateur d’observation discret \mathbf{H}_H), alors assimiler sur la grille basse résolution les observations dont on dispose sur ω devrait permettre une amélioration plus importante de la solution basse résolution entraînant une meilleure correction de la solution haute résolution (la solution basse résolution spécifie les conditions aux frontières du modèle haute résolution). Cela nécessite donc de pouvoir définir des opérateurs d’observation H_H et H_h pertinents sur chacune des grilles.

Les figures 4.22 et 4.23 représentent l’évolution de l’erreur RMS sur la hauteur d’eau et sur les vitesses de la solution haute résolution au cours de la minimisation. Nous constatons que l’ajout de l’assimilation des observations à basse résolution pour les algorithmes en interaction *one-way* permet à la fois d’accélérer fortement la réduction des erreurs lors des premières itérations de minimisation, et d’obtenir au final une amélioration de la solution optimale haute résolution. Celle-ci présente alors des erreurs proches de celle de la solution optimale *two-way*.

Néanmoins, l’assimilation basse résolution des observations n’a pas entraîné de réelle amélioration des propriétés énergétiques des solutions optimales haute résolution. Celles-ci possèdent une énergie potentielle toujours trop importante (figure 4.25) et une énergie cinétique trop faible (figure 4.24). Nous retrouvons ainsi de manière plus marquée encore les propriétés énergétiques des solutions optimales *one-way* et *one-way wic*. L’assimilation des observations sur les deux grilles semble ainsi converger vers une solution haute résolution proche de celle obtenue pour des observations assimilées sur la grille fine uniquement.

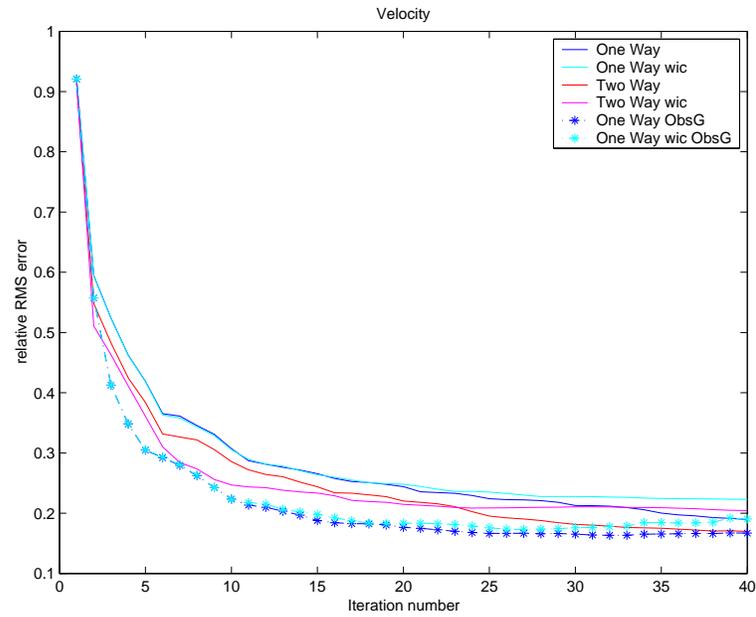


FIG. 4.23 – Grille fine ω_h : moyenne temporelle de l'erreur RMS relative sur la vitesse en fonction du nombre d'itérations de la minimisation. Courbes * : observations assimilées également à basse résolution

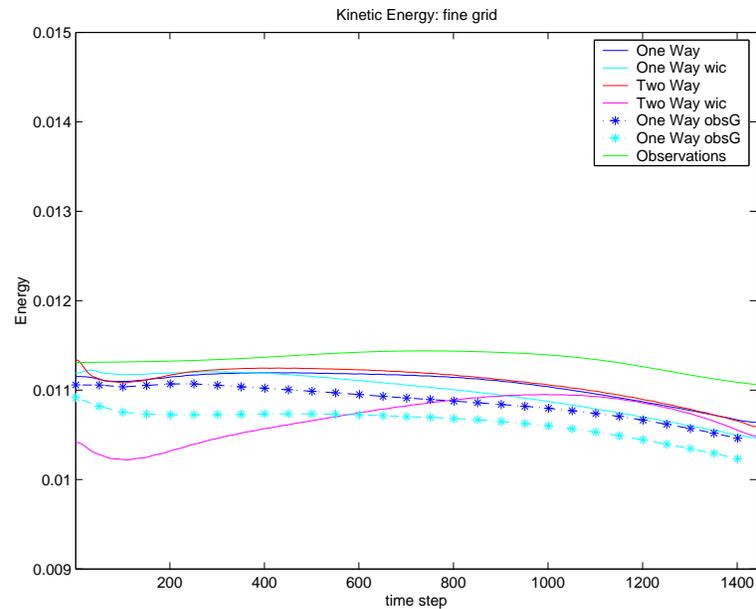


FIG. 4.24 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie cinétique des solutions optimales. Courbes * : observations assimilées également à basse résolution

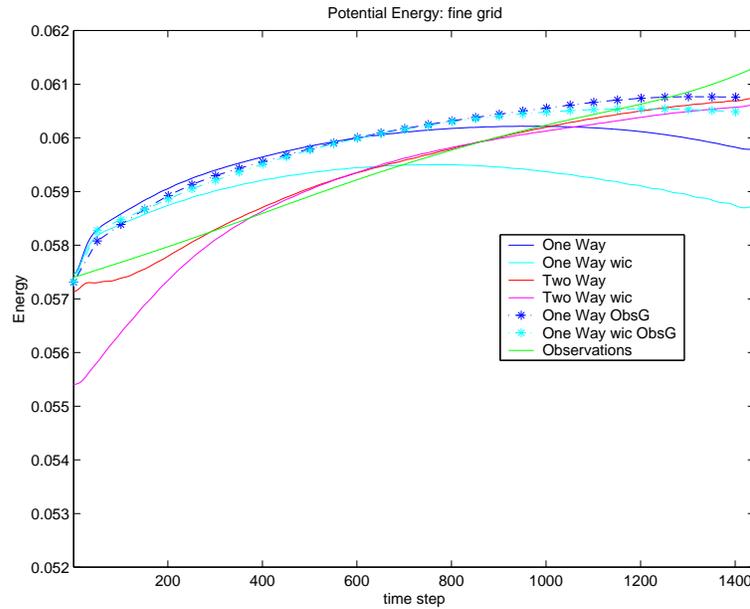


FIG. 4.25 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie potentielle des solutions optimales. Courbes * : observations assimilées également à basse résolution

4.7.3 Résultats en *two-way*

Dans le cas d'interaction *two-way*, via la rétroaction de la solution haute résolution vers la solution basse résolution sur ω_H , l'écart aux observations sur la grille basse résolution apparaît en fait comme l'écart entre la restriction de la solution haute résolution et les observations. Ainsi, en confondant \mathbf{H}_H et sa restriction à ω_H , J^{obs} s'écrit

$$J^{obs}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_H \mathbf{G}_h^H \mathbf{x}_h - \mathbf{y}\|_o^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_h \mathbf{x}_h - \mathbf{y}\|_o^2 \quad (4.10)$$

Soit

$$J^{obs}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_H \mathbf{G}_h^H (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^t) - \tilde{\epsilon}_h\|_o^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{H}_h (\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_h^t) - \epsilon_h\|_o^2 \quad (4.11)$$

avec $\tilde{\epsilon}_h$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_h &= \epsilon_h - (\mathbf{H}_H \mathbf{G}_h^H - \mathbf{H}_h) \mathbf{x}_h^t \\ &= H^c(\mathbf{x}^c) - \mathbf{H}_H \mathbf{G}_h^H \mathbf{x}_h^t + \epsilon^m \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\tilde{\epsilon}_h$ apparaît ainsi comme une erreur d'observation. C'est la somme de l'erreur de mesure et de l'erreur de représentativité du nouvel opérateur d'observation haute résolution $\mathbf{H}_H \mathbf{G}_h^H$ introduit par la rétroaction *two-way* sur ω_H .

L'ajout sur la grille basse résolution de l'assimilation des observations utilisée sur ω_h revient à réduire l'écart dans l'espace des observations entre la solution du modèle et l'état vrai haute résolution, et ce simultanément pour deux opérateurs d'observation distincts. Dans le meilleur des cas, si le nouvel opérateur d'observation $\mathbf{H}_H \mathbf{G}_h^H$ s'avère pertinent (faible erreur de représentativité), l'ajout de ce nouveau terme dans la fonction coût ne devrait pas entraîner des modifications majeures au niveau de la solution optimale haute résolution (nous supposons que \mathbf{H}_h est initialement un bon opérateur d'observation). En effet, nous minimiserions alors

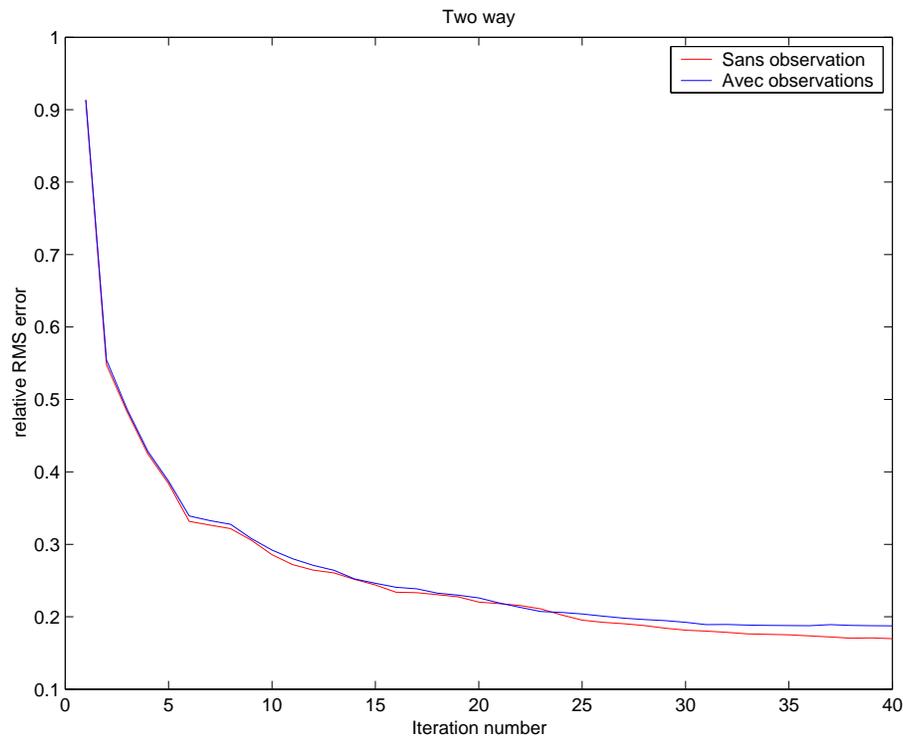


FIG. 4.26 – Grille fine ω_h : moyenne temporelle de l'erreur RMS relative sur la vitesse en fonction du nombre d'itérations de la minimisation. En rouge : les observations sont assimilées sur la grille haute résolution uniquement. En bleu : les observations sont assimilées sur les deux grilles.

la somme de deux termes mesurant avec précision l'écart entre le modèle et l'observation. Par contre, si l'erreur de représentativité associée à l'opérateur d'observation $\mathbf{H}_H \mathbf{G}_h^H$ est importante, cela revient alors à ajouter à la fonction coût *two-way* un terme supplémentaire mesurant avec des erreurs importantes l'écart entre le modèle et l'observation. La solution optimale obtenue sera alors moins pertinente que celle obtenue par l'algorithme *two-way*. Nous constatons ainsi sur la figure 4.26 que la décroissance de l'erreur RMS relative sur les vitesses au cours de la minimisation est légèrement plus faible lorsque nous ajoutons l'assimilation des observations à basse résolution. En tout état de cause, l'ajout du terme d'assimilation à basse résolution n'a que très peu d'effet.

4.8 Un préconditionnement multi-grille pour l'assimilation mono-grille

Nous avons vu dans les parties précédentes que l'assimilation mono-grille avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites s'avérait relativement peu efficace comparée aux méthodes multi-grilles. Le conditionnement de la hessienne de la fonction objectif étant mauvais, l'algorithme ne parvenait pas à corriger suffisamment les conditions aux frontières. Une idée pour tenter d'améliorer cela est donc de préconditionner la minimisation en effectuant plusieurs itérations sur une grille plus grossière. Plusieurs algorithmes en ce sens ont déjà été

proposés. Nous pouvons citer les travaux de Veersé [53] ou bien ceux de Gebbie et *al* [26].

4.8.1 Algorithme

Dans notre cas, le préconditionnement mis en place est le suivant. Plaçons-nous sur le domaine global grossier Ω_H utilisé dans nos méthodes bi-grilles. Nous effectuons alors un certain nombre d'itérations de minimisation avec un algorithme 4D-Var mono-grille dans lequel nous contrôlons uniquement la condition initiale du modèle global (basse résolution). Les observations sont les mêmes que celles présentes dans l'algorithme mono-grille à haute résolution. Elles sont donc situées uniquement sur le domaine ω_H , à savoir la zone correspondant à notre domaine d'étude à haute résolution. Une fois ces itérations réalisées, nous récupérons la condition initiale optimisée ainsi que la trajectoire du modèle afin d'obtenir par interpolation notre ébauche optimisée sur notre domaine haute résolution, ainsi que des conditions aux limites améliorées. Nous effectuons alors plusieurs itérations de l'algorithme d'assimilation mono-grille avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites. Ceci se résume en trois étapes :

1. Plusieurs itérations d'un algorithme 4D-Var avec contrôle de la condition initiale sur le domaine global à basse résolution Ω_H .
2. Interpolation de la condition initiale optimisée sur notre domaine haute résolution, ainsi que des conditions aux limites.
3. Plusieurs itérations de l'algorithme référence 4D-Var avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux frontières sur le domaine haute résolution ω_h .

A travers ce préconditionnement se cache donc une méthode multi-grille. Néanmoins celle-ci est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre puisque les minimisations sur chacune des grilles sont découplées.

4.8.2 Résultats numériques

La figure 4.27 représente la décroissance de la fonction coût durant la minimisation mono-grille basse résolution (préconditionnement). Après 40 itérations, la pente de la courbe a diminué fortement et la fonction coût a été divisée par cent. Durant cette minimisation, différentes conditions initiales ont été sauvegardées afin de mesurer l'impact de ce préconditionnement sur l'algorithme mono-grille haute résolution.

4.8.2.1 Décroissance de la fonction coût

La figure 4.28 représente la décroissance de la fonction coût pour les algorithmes bi-grilles et pour les versions préconditionnées de l'algorithme mono-grille.

Nous constatons tout d'abord que le préconditionnement permet d'obtenir une fonction coût initialement beaucoup plus faible. De fait, après 40 itérations de minimisation haute résolution, les valeurs atteintes par les fonctions coût mono-grille préconditionnées (10 et 20 itérations de préconditionnement) sont proches de celles de l'algorithme bi-grilles *one-way wic*, tandis que la version mono-grille avec 30 itérations de préconditionnement est moins bonne et atteint une valeur proche de celles des fonctions coût bi-grilles sans contrôle des transferts inter-grilles. Cette

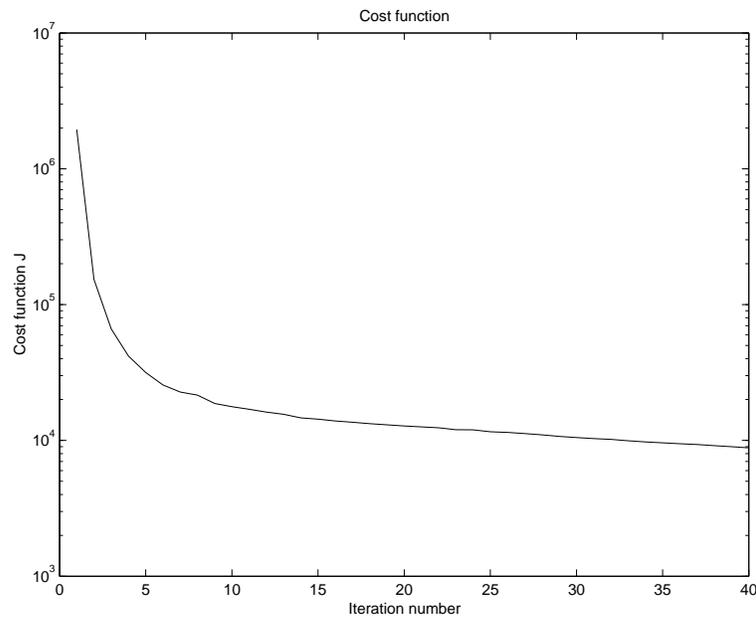


FIG. 4.27 – Préconditionnement basse résolution : fonction coût durant la minimisation

figure permet, au passage, d'illustrer la vitesse de décroissance remarquable de l'algorithme *two-way wic*, pour lequel seulement 5 itérations suffisent pour obtenir un écart aux observations équivalent à celui des versions mono-grille préconditionnées.

Nous constatons de plus qu'un nombre d'itérations trop important lors du préconditionnement peut dégrader les performances de la minimisation haute résolution. Ainsi, au final, les valeurs prises par les fonctions coût sont très proches pour les versions faisant intervenir 10 et 20 itérations lors du préconditionnement, tandis que celle prise par la fonction coût de la version avec 30 itérations est beaucoup plus élevée. L'ébauche et les conditions aux limites provenant de l'interpolation de la trajectoire optimale basse résolution obtenue après 30 itérations de minimisation s'avèrent moins "bonnes" à haute résolution que celles obtenues après des préconditionnements de seulement 10 et 20 itérations. Ce résultat est assez logique. Le changement de grille lors du préconditionnement entraînant des modifications importantes aux niveaux des dimensions du domaine, de la résolution du modèle et donc des phénomènes physiques représentables par ce modèle, l'assimilation de données basse résolution peut converger vers une solution ne correspondant pas à celle que nous obtiendrions localement à haute résolution. Ce problème sera plus ou moins important selon la configuration étudiée. Une telle méthode de préconditionnement pose donc le problème du choix du critère d'arrêt de la minimisation basse résolution.

4.8.2.2 Erreurs RMS

Nous retrouvons naturellement une amélioration des performances de l'assimilation en terme d'erreur. Les figures 4.29 et 4.30 représentent les erreurs RMS normalisées sur la hauteur d'eau et sur les vitesses. Ainsi peu d'itérations lors du préconditionnement suffisent à améliorer de façon importante l'erreur sur toutes les variables d'état. Nous constatons que l'écart en terme d'erreur RMS sur la hauteur d'eau reste très faible entre ces trois solutions. Par contre, l'augmentation

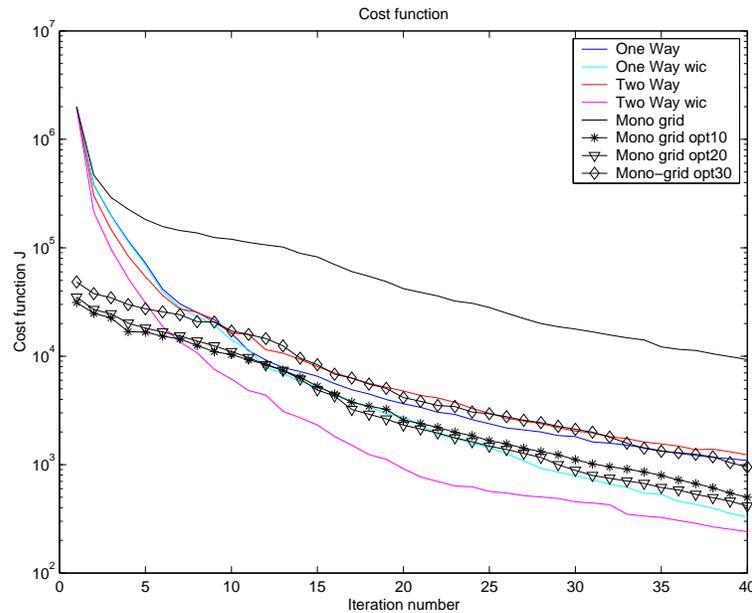


FIG. 4.28 – Fonctions coût lors des itérations de l’algorithme d’optimisation haute résolution

du nombre d’itérations du préconditionneur entraîne un accroissement important des erreurs RMS sur les vitesses (entre 5 et 10 points d’erreur). De plus, la correction haute résolution reste relativement faible surtout sur la hauteur d’eau (avec une baisse de 2 points de l’erreur) mais aussi sur les vitesses (entre 5 et 10 points). Au final, après 40 itérations de minimisation, ces erreurs deviennent plus importantes que celles obtenues avec les algorithmes bi-grilles.

4.8.2.3 Diagnostics physiques

Enfin, les figures 4.31, 4.32 et 4.33 représentent l’énergie potentielle, l’énergie cinétique et l’entrophie des solutions optimales haute résolution au cours du temps. Nous comparons ces courbes avec celles des solutions optimales bi-grilles. Nous constatons tout d’abord une très nette amélioration de ces caractéristiques physiques grâce au préconditionnement. Nous remarquons de plus que les solutions avec 20 et 30 itérations lors de la phase de préconditionnement ont des propriétés énergétiques ayant la même évolution temporelle.

En terme d’énergie potentielle, les solutions mono-grilles ont un comportement proche des solutions *one-way*, à savoir une énergie initialement trop importante qui augmente vers une valeur "asymptotique". L’augmentation du nombre d’itérations entraîne une augmentation de cette énergie mais ne modifie pas ses variations temporelles.

Le préconditionnement a permis d’améliorer globalement l’énergie cinétique des solutions optimales mono-grilles. Alors que sans préconditionnement, la solution optimale mono-grille possédait initialement une énergie cinétique beaucoup trop élevée, les solutions optimales obtenues avec préconditionnement ont une énergie cinétique initiale plus proche de la réalité et qui, de surcroît, est légèrement trop faible. Nous constatons toutefois une décroissance trop importante de cette énergie au cours du temps. Nous observons de nouveau que l’augmentation du nombre d’itérations lors du préconditionnement entraîne une hausse de l’énergie, ce qui permet, contrairement à l’énergie potentielle, une amélioration de l’énergie cinétique des solutions

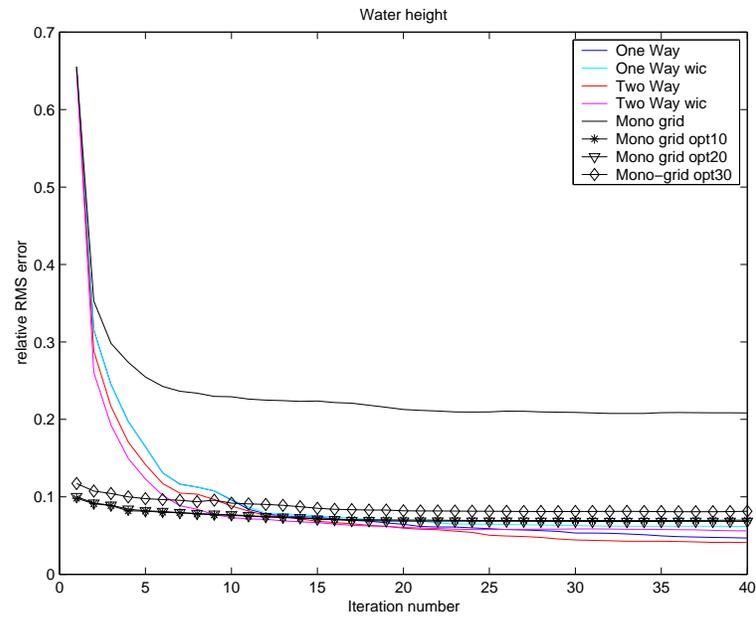


FIG. 4.29 – Grille fine ω_h : erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau (variable observée) en fonction du nombre d'itérations de la minimisation

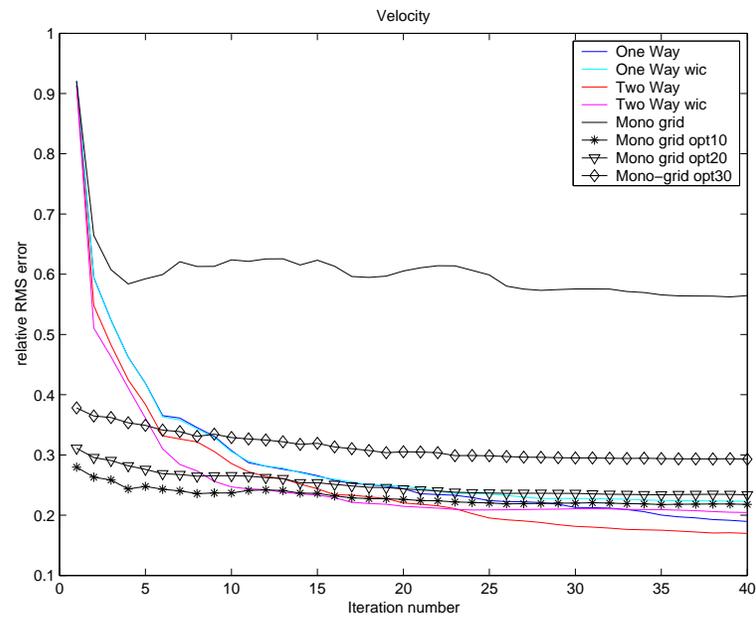


FIG. 4.30 – Grille fine ω_h : erreur RMS normalisée sur la vitesse (variable non observée) en fonction du nombre d'itérations de la minimisation

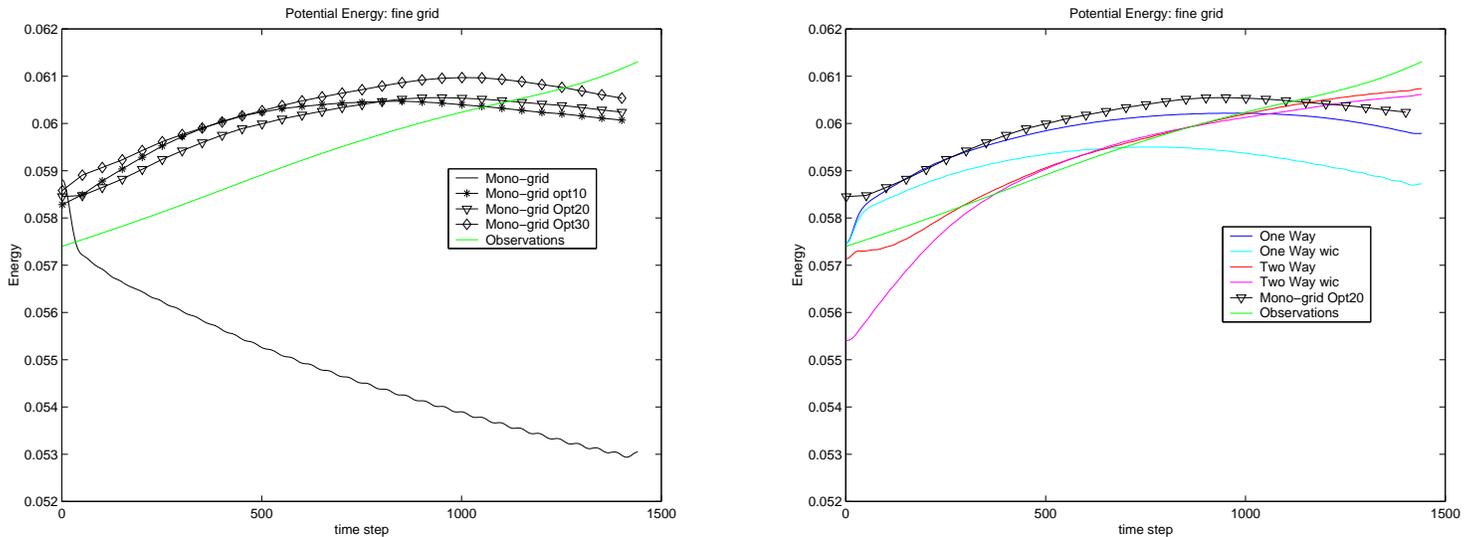


FIG. 4.31 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie potentielle. Les courbes noires sont associées à l'algorithme mono-grille : en trait continu sans preconditionnement, avec des étoiles pour 10 itérations, avec des triangles pour 20, et avec des losanges pour 30.

optimales.

Enfin, nous retrouvons l'apport du preconditionnement au niveau de l'entrophie des solutions. Celle-ci, initialement trop élevée, décroît au cours du temps vers une valeur proche de la "réalité". Suivant le nombre d'itérations réalisées lors du preconditionnement, cette valeur finale s'avère plus ou moins exacte. Ainsi, avec seulement 10 itérations, la solution optimale possède une entrophie au final trop faible. Néanmoins, initialement, l'entrophie est relativement proche de la réalité. La correction apportée par l'assimilation haute résolution est beaucoup moins "violente" que dans le cas mono-grille sans preconditionnement ou dans les cas bi-grilles. Le preconditionnement a ainsi permis d'obtenir une ébauche haute résolution plus pertinente. Avec un preconditionnement de 20 itérations, l'entrophie de la solution optimale haute résolution est initialement la même que celle du cas avec 10 itérations, mais converge cette fois-ci vers l'entrophie vraie. Enfin, si nous continuons d'augmenter le nombre d'itérations lors du preconditionnement (30 itérations), cela entraîne une dégradation de l'entrophie de la solution optimale haute résolution. Dans notre cas, une minimisation trop importante sur la grille basse résolution dégradant l'ébauche haute résolution, il en résulte une correction plus importante de la condition initiale, et donc une augmentation de l'entrophie initiale.

4.8.2.4 Conclusion

En réalisant une méthode 4D-Var avec contrôle de la condition initiale uniquement sur un domaine global à plus faible résolution, il est ainsi possible de fournir une ébauche optimisée ainsi que de meilleures conditions aux limites initiales en entrée de l'algorithme d'assimilation mono-grille de référence sur le domaine d'étude à haute résolution. Via ce preconditionnement, les solutions optimales obtenues s'avèrent plus pertinentes : moins d'erreur, propriétés physiques

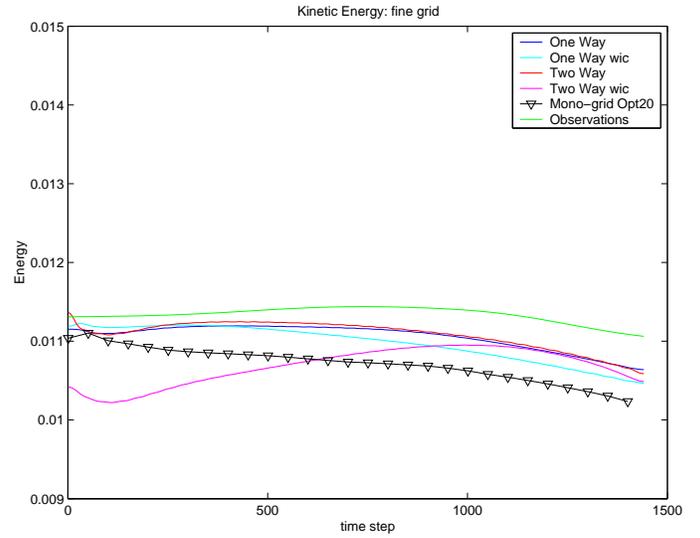
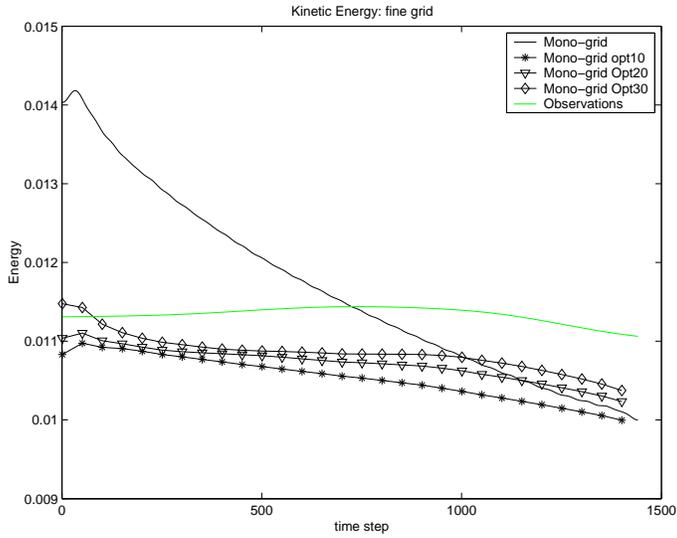


FIG. 4.32 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie cinétique. Les courbes noires sont associées à l'algorithme mono-grille : en trait continu sans preconditionnement, avec des étoiles pour 10 itérations, avec des triangles pour 20, et avec des losanges pour 30.

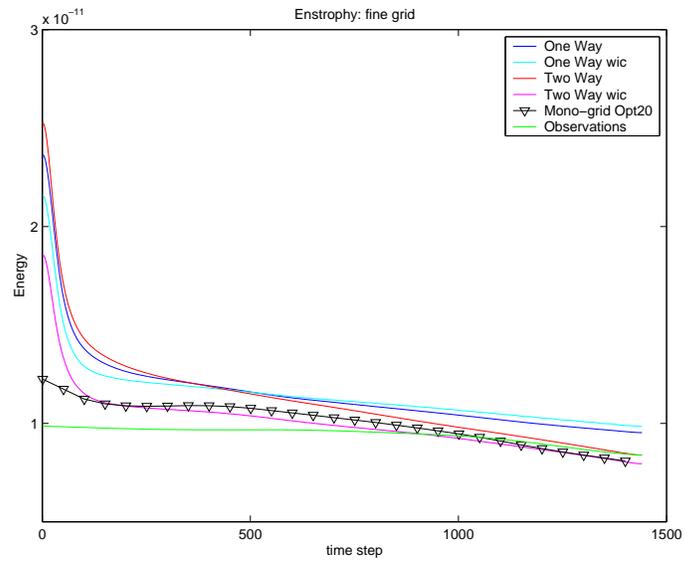
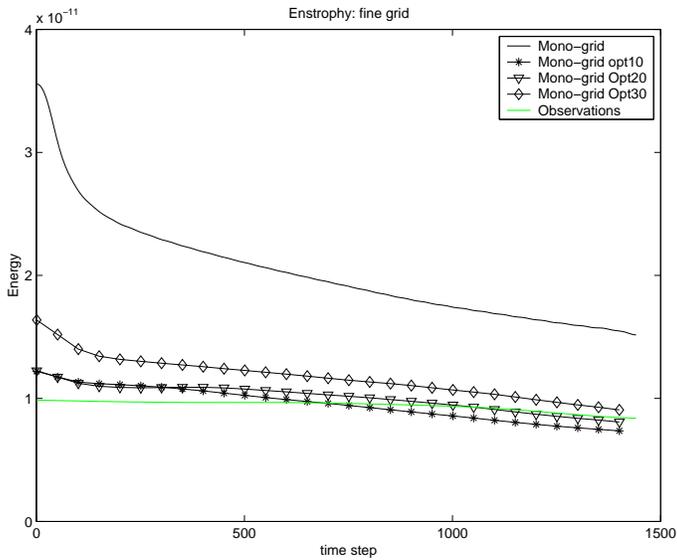


FIG. 4.33 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'enstrophie. Les courbes noires sont associées à l'algorithme mono-grille : en trait continu sans preconditionnement, avec des étoiles pour 10 itérations, avec des triangles pour 20, et avec des losanges pour 30.

améliorées... Selon le nombre d'itérations réalisées, il est possible d'obtenir des résultats proches de ceux provenant de nos algorithmes bi-grilles (bien que ceux-ci apparaissent plus performants).

Cette approche apparaît comme une méthode bi-grille séquentielle, les deux grilles étant utilisées l'une après l'autre, au contraire de nos méthodes d'emboîtement de modèles où l'utilisation des grilles se fait en parallèle. Toutefois, cette approche soulève un nouveau problème : le choix d'un critère d'arrêt de la minimisation basse résolution. Les minimisations sur chacune des grilles ne convergeant pas forcément vers la même solution (à une interpolation/restriction près), une minimisation basse résolution trop importante sera contre-productive.

Néanmoins, examinons de plus près le processus de minimisation sur le domaine haute résolution. La figure 4.34 représente la trajectoire de la fonction coût durant la minimisation dans le repère $(\|\mathbf{x}_f\|, \|\mathbf{x}_{bc}\|)$, où \mathbf{x}_f correspond à la condition initiale sur la grille fine et \mathbf{x}_{bc} les conditions aux frontières. Chaque couleur correspond à des couples (ébauche, conditions aux limites avant minimisation) avant assimilation distincts. Il est ainsi possible de représenter l'influence de la condition initiale et des conditions aux frontières durant la minimisation : à chaque tiret/triangle correspond une itération de minimisation. Nous constatons alors que pour le cas mono-grille, la descente de la minimisation se fait essentiellement dans la direction de la condition initiale, et ce malgré les différents préconditionnements. Le problème lié au conditionnement de la hessienne est toujours présent : la fonction coût étant beaucoup trop sensible aux variations des vitesses sur les frontières du domaine, l'assimilation de données ne peut corriger de façon pertinente les valeurs à ces frontières. Néanmoins, comme ces conditions aux limites ont été améliorées durant le préconditionnement, les conséquences sont moins importantes. Par contre, pour le cas bi-grille *one-way*, la minimisation se fait dans les deux directions : il est ainsi possible de vraiment corriger les conditions aux limites du modèle haute résolution via le contrôle de la condition initiale basse résolution.

Dans le cas de modèles plus réalistes où la physique est plus complexe, le préconditionnement basse résolution pourrait ne plus être suffisamment efficace pour obtenir des conditions aux limites pertinentes, auquel cas l'impact du mauvais conditionnement de la hessienne dans le cas mono-grille serait plus important. Les méthodes bi-grilles devraient alors s'avérer encore plus efficaces.

Enfin, comparons les coûts de calcul de l'algorithme mono-grille préconditionné avec ceux des algorithmes bi-grilles. Soient N_p le nombre d'itérations faites durant la minimisation du préconditionnement basse résolution et N_a le nombre d'itérations faites durant la phase d'assimilation haute résolution. Notons C_H (resp. C_h) le coût de calcul de l'intégration du modèle non-linéaire basse résolution (resp. haute résolution) ainsi que de son adjoint. Le coût de calcul de l'assimilation mono-grille préconditionné C_m vaut alors $C_m = N_p C_H + N_a C_h$ tandis que celui des algorithmes bi-grilles C_b vaut $C_b = N_a(C_H + C_h + C_t)$ avec C_t le coût des transferts inter-grilles.

Si le nombre d'itérations lors du préconditionnement basse résolution (N_p) reste plus petit que le nombre d'itérations faites durant l'assimilation (N_a), l'algorithme mono-grille préconditionné possède un coût de calcul plus faible que ceux des algorithmes bi-grilles. Néanmoins, les minimisations basse et haute résolution se faisant de façon séquentielle dans le cas mono-grille, cet algorithme requiert donc un plus grand nombre d'itérations du minimiseur que les algorithmes bi-grilles. En pratique, dans nos simulations, le temps de calcul des algorithmes bi-grilles étaient quand même deux à trois fois plus long que l'algorithme mono-grille : la qualité se paye !

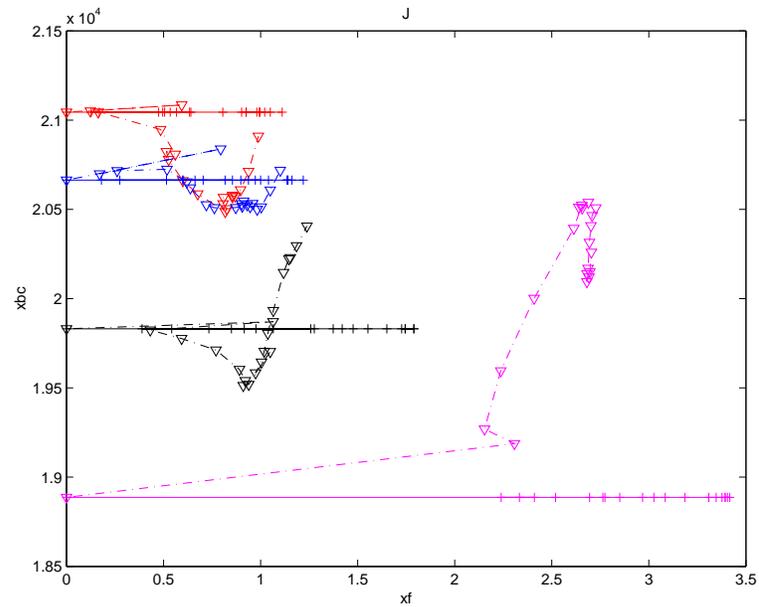


FIG. 4.34 – Trajectoire de la fonction coût durant la minimisation dans le repère $(\|\mathbf{x}_f\|, \|\mathbf{x}_{bc}\|)$. Les trajectoires continues correspondent à l'assimilation mono-grille et celles avec des triangles à l'assimilation bi-grille en interaction *one-way*. Les couleurs correspondent au couple initial $(\mathbf{x}^b, \mathbf{x}_{bc})$. En magenta, sans preconditionnement, en cyan avec preconditionnement de 5 itérations, en rouge 10 itérations et en bleu 15 itérations.

4.8.3 Application aux algorithmes bi-grilles

Ce préconditionnement s'avère également très facile à mettre en pratique dans le cadre d'une configuration multi-grille. Il nous semble donc intéressant d'en étudier l'impact sur les méthodes que nous avons proposées. Dans les expériences numériques qui suivent, l'ébauche utilisée a été obtenue après 20 itérations de minimisation du préconditionneur basse résolution. Au vu des résultats exposés dans le cas mono-grille, cette ébauche semble en effet la plus intéressante.

La figure 4.35 représente la décroissance de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations de minimisation. Elle est à comparer avec la figure 4.1. Nous constatons tout d'abord que l'ébauche optimisée obtenue lors du préconditionnement s'avère meilleure dans le cas d'interactions *one-way* que *two-way*. Ainsi, initialement, les solutions haute résolution *two-way* présentent une erreur plus importante que les solutions *one-way*. Or, dans le cas d'interactions *one-way*, l'ébauche basse résolution étant la condition initiale optimisée lors du préconditionnement, la solution basse résolution correspond exactement à la solution optimale du préconditionnement. Dans le cas d'interactions *two-way*, l'interpolation de la condition initiale préconditionnée ainsi que les rétroactions provenant de la solution haute résolution font que la solution basse résolution ne correspond plus exactement à celle issue du préconditionnement. Ainsi, l'ajout de la rétroaction *two-way* fait s'éloigner la solution basse résolution de la trajectoire optimale au vu des observations présentes.

De plus, la décroissance des fonctions coût *one-way* et *two-way* ralentit assez rapidement, comparé à celles des cas mono-grille et bi-grilles avec contrôle des transferts inter-grilles, entraînant ainsi un écart important après 40 itérations. La minimisation de la fonction coût de l'algorithme *two-way wic* est de nouveau la plus importante, même si au final la valeur de la fonction coût *one-way wic* est la plus faible. Enfin, nous constatons dans le cas d'interactions *two way* qu'au final les valeurs des fonctions coût sont plus élevées avec le préconditionnement que sans. Il faut noter, dans ce cas précis, le bon comportement de la fonction mono-grille lors de la minimisation. Après 40 itérations, sa valeur est ainsi plus faible que celles des fonctions coût *one-way* et *two-way*.

Cependant, ces écarts en terme de minimisation ne se retrouvent pas sur les erreurs RMS des solutions respectives. Ainsi, les solutions haute résolution des différents algorithmes bi-grilles voient leur erreur diminuer de façon plus importante que la solution de l'algorithme mono-grille, tant sur la hauteur d'eau (figure 4.36) que sur les vitesses (figure 4.37). De plus, concernant les algorithmes bi-grilles, seules les solutions optimales haute résolution *one-way* et *one-way wic* semblent tirer bénéfice de ce préconditionnement, puisqu'au final les erreurs RMS associées à ces solutions sont plus faibles que celles obtenues sans celui-ci. Ce n'est pas le cas des solutions optimales haute résolution *two-way* et *two-way wic* pour lesquelles le préconditionnement ne modifie pas ou peu leurs erreurs RMS.

Enfin, les figures 4.38, 4.39 et 4.40 représentent l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'enstrophie des solutions haute résolution. Nous constatons tout d'abord que l'apport du préconditionnement en terme d'énergie potentielle dépend fortement du type d'interactions envisagé. Ainsi, dans le cas d'interactions *one-way*, l'évolution temporelle de l'énergie potentielle des solutions optimales apparaît comme plus proche de la réalité. Toutefois, ces solutions présentent une énergie potentielle légèrement trop importante. Ces résultats sont meilleurs que ceux obtenus sans préconditionnement. Au contraire, les solutions *two-way* et *two-way wic* possèdent maintenant une énergie proche de celle du *one-way*, tandis que sans préconditionnement, celle-ci

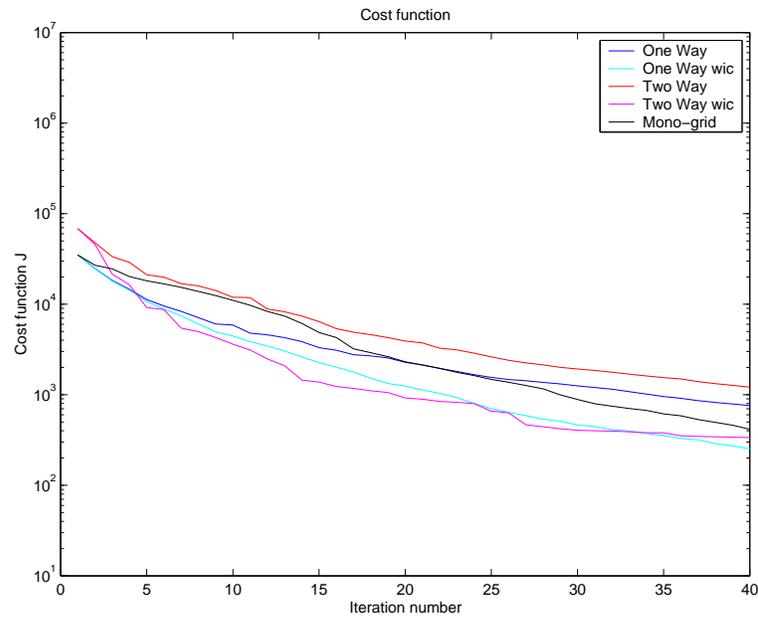


FIG. 4.35 – Fonctions coût lors des itérations de l'algorithme d'optimisation haute résolution lorsque l'ébauche est obtenue après 20 itérations de minimisation basse résolution (à comparer avec la figure 4.1)

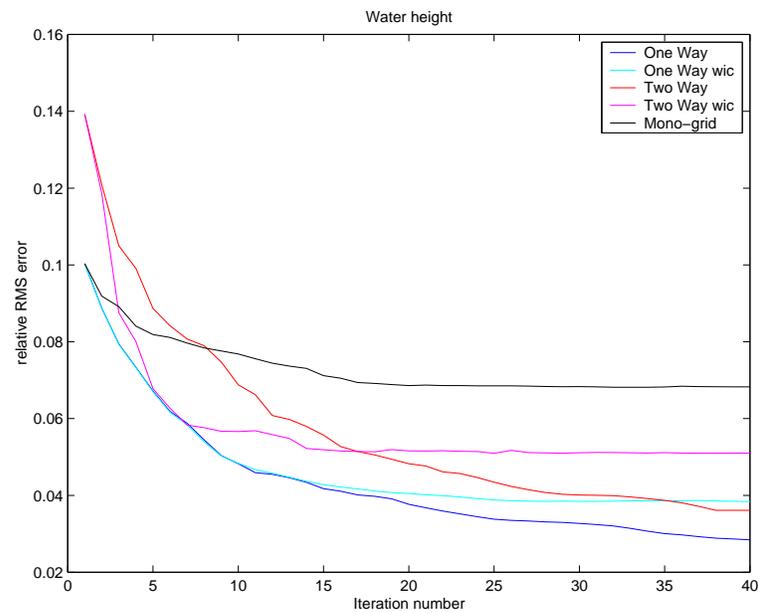


FIG. 4.36 – Grille fine ω_h : erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau en fonction du nombre d'itérations de la minimisation lorsque l'ébauche est obtenue après 20 itérations de minimisation basse résolution (à comparer avec la figure 4.2)

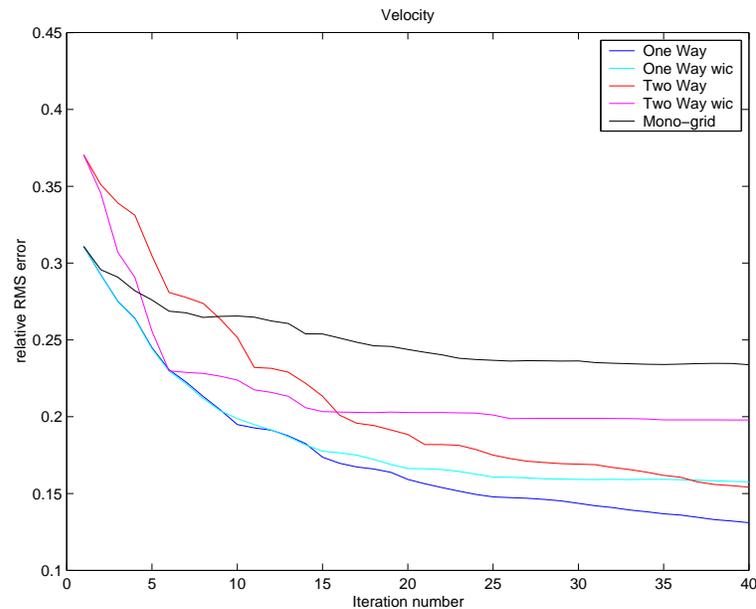


FIG. 4.37 – Grille fine ω_h : erreur RMS normalisée sur la vitesse en fonction du nombre d'itérations de la minimisation lorsque l'ébauche est obtenue après 20 itérations de minimisation basse résolution (à comparer avec la figure 4.3)

était proche de la réalité. L'apport du preconditionnement s'avère donc plutôt négatif pour les solutions obtenues avec les algorithmes en interactions *two-way*.

Au niveau de l'énergie cinétique des solutions optimales, le preconditionnement s'avère globalement positif. Les variations au cours du temps de l'énergie cinétique des solutions optimales semblent suivre celles de l'énergie de la solution vraie. Ceci est particulièrement vrai pour les solutions *one-way* et *one-way wic*. Néanmoins, nous retrouvons que l'énergie cinétique des solutions optimales est constamment légèrement trop faible.

Enfin, l'utilisation du preconditionnement permet d'améliorer de façon significative l'enstrophie des solutions optimales. Celle-ci reste initialement légèrement trop élevée mais converge dans tous les cas vers les valeurs de l'enstrophie de la solution vraie.

En résumé, l'utilisation d'un algorithme 4D-Var basse résolution comme preconditionneur des méthodes bi-grilles donne des résultats mitigés. Ainsi, dans le cas d'un emboîtement en interaction *one-way*, il permet d'obtenir une amélioration des solutions optimales, essentiellement au niveau des vitesses, à savoir les variables non observées. Ceci se traduit par une amélioration nette de l'énergie cinétique et de l'enstrophie. Par contre, dans le cas d'un emboîtement en interaction *two-way*, aucune amélioration nette des solutions optimales haute résolution n'a été constaté. Leur énergie cinétique ainsi que leur enstrophie ont certes été légèrement améliorées, mais cela au dépend de l'énergie potentielle.

De fait, l'emploi d'un tel preconditionnement pour les algorithmes bi-grilles ne nous paraît pas à ce stade nécessaire, le gain obtenu étant relativement faible par rapport au temps de calcul supplémentaire.

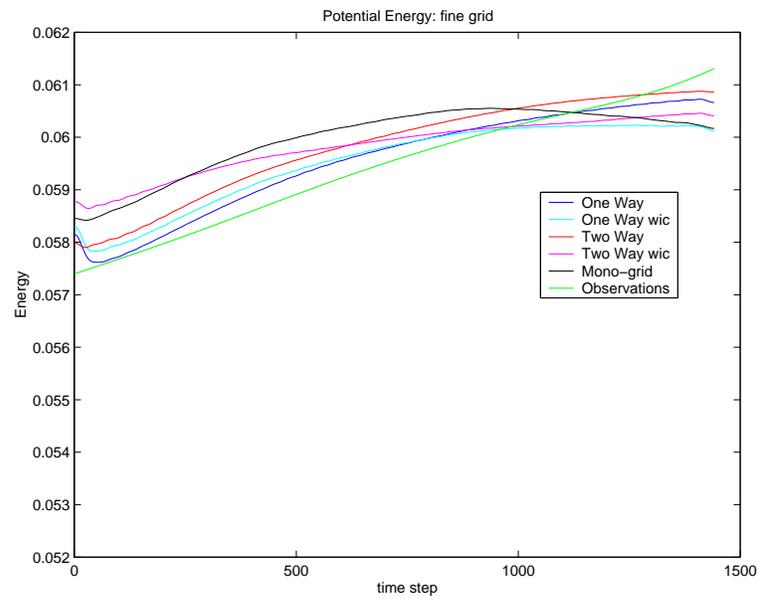


FIG. 4.38 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie potentielle des solutions optimales lorsque l'ébauche est obtenue après 20 itérations de minimisation basse résolution (à comparer avec la figure 4.9)

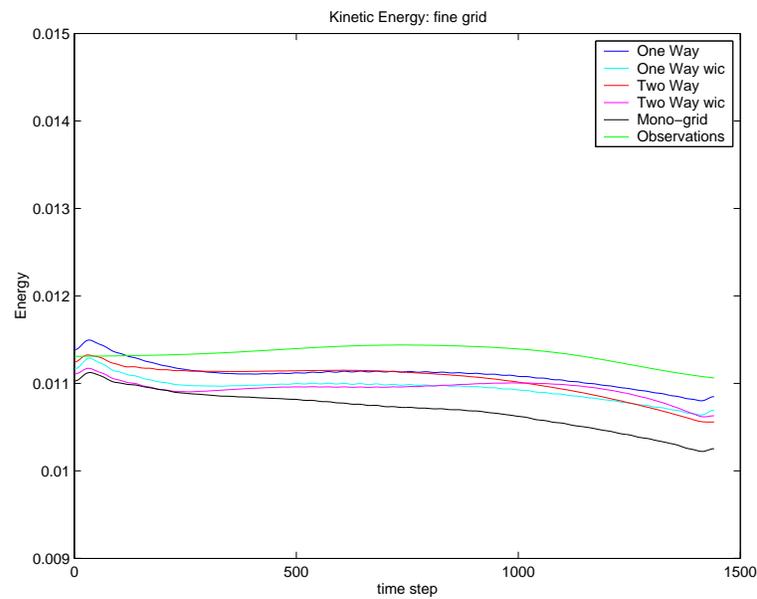


FIG. 4.39 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l'énergie cinétique des solutions optimales lorsque l'ébauche est obtenue après 20 itérations de minimisation basse résolution (à comparer avec la figure 4.8)

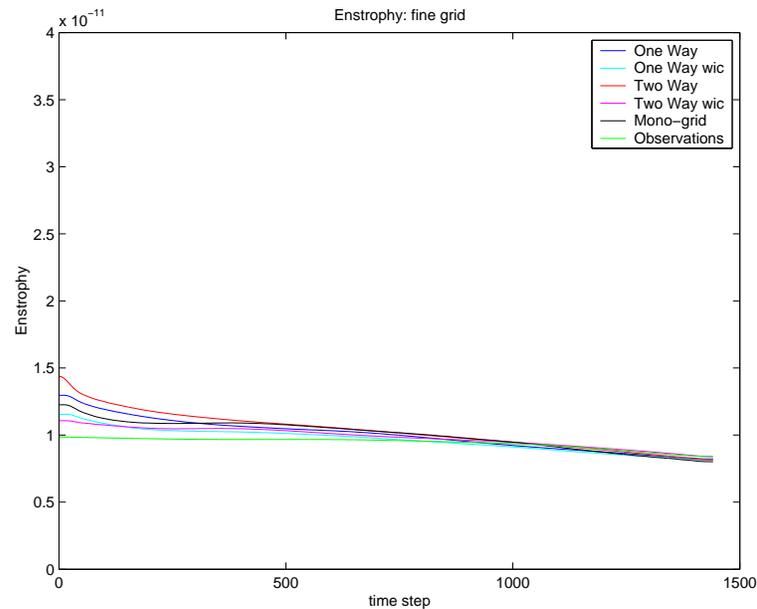


FIG. 4.40 – Grille fine ω_h : évolution temporelle de l’enstrophie des solutions optimales lorsque l’ébauche est obtenue après 20 itérations de minimisation basse résolution (à comparer avec la figure 4.10)

4.9 Conclusion

Dans toute notre étude, nous nous sommes placés dans le contexte de l’assimilation de données pour des modèles présentant des frontières ouvertes. Notre problématique fut alors de savoir s’il était possible d’améliorer les résultats de l’assimilation de données en utilisant un emboîtement de modèles plutôt qu’en utilisant une seule grille sur laquelle nous contrôlerions à la fois la condition initiale et les conditions aux limites. Pour cela, des expériences jumelles ont été réalisées sur une configuration idéalisée basée sur un modèle shallow water 2D. Nous avons ainsi comparé nos algorithmes bi-grilles présentés aux chapitre 1 et 2 à une méthode *4D-Var* mono-grille ”classique”.

- Les résultats obtenus grâce à l’assimilation bi-grille sont bien meilleurs que ceux résultant de l’assimilation mono-grille. Ces algorithmes permettent de converger rapidement vers des solutions optimales haute résolution très proches de la solution vraie. Ces solutions présentent des erreurs 2 à 4 fois plus faibles selon les variables que celles de la solution optimale mono-grille. Les solutions basse résolution ont également été améliorées, dans des proportions plus faibles, sur l’ensemble du domaine. Le contrôle des conditions initiales sur chacune des grilles permet ainsi, via le modèle basse résolution, une réelle correction des conditions aux frontières du modèle local haute résolution.
- L’utilisation d’emboîtements en interaction *two-way* en comparaison des interactions *one-way* a entraîné une nette amélioration des solutions haute résolution surtout sur les vitesses. Néanmoins, l’emboîtement *one-way* reste très intéressant grâce à sa simplicité d’implémentation informatique. De plus, cette approche permet une intégration *off-line*

des modèles direct et adjoint en stockant les variables le long des frontières du domaine ω , afin de forcer la grille haute résolution pour le modèle direct et la grille basse résolution pour le modèle adjoint. Enfin, l'apport du contrôle des erreurs de transferts inter-grilles a permis une décroissance plus importante de la fonction coût. Dans le cas d'interactions *two-way*, ceci se traduit par une accélération en début de minimisation de la convergence des erreurs RMS des solutions haute résolution et une amélioration des propriétés énergétiques des solutions optimales.

- Enfin, nous avons testé un préconditionnement basse résolution pour l'algorithme mono-grille. Il consiste à minimiser une fonctionnelle $4D-Var$ sur la grille basse résolution, l'interpolation de la condition initiale optimisée servant alors d'ébauche à l'assimilation haute résolution. Un tel préconditionnement a permis d'améliorer grandement la minimisation mono-grille. Néanmoins, les solutions optimales obtenues restent moins bonnes que celles provenant de nos algorithmes bi-grilles. De plus, la minimisation sur la grille basse résolution ne convergeant pas forcément vers une solution proche de la solution optimale haute résolution, le choix d'un bon critère d'arrêt pour ce préconditionnement apparaît comme obligatoire, sous peine de dégrader par la suite l'assimilation haute résolution.

Chapitre 5

Applications des solveurs multi-grilles à l'assimilation variationnelle de données

Sommaire

5.1	L'approche multi-grille pour la résolution de systèmes	144
5.1.1	Quelques rappels sur les méthodes de relaxation	144
5.1.2	La correction par grille grossière	146
5.1.3	L'algorithme Full Approximation Scheme (FAS)	147
5.2	Application de l'algorithme FAS à l'assimilation variationnelle de données avec contrôle de la condition initiale	148
5.2.1	L'algorithme 4D-Var FAS	148
5.2.2	Propriétés de l'algorithme	150
5.2.3	Application au cas d'une équation de Burgers 1-D	153
5.3	Application de l'algorithme FAS à l'assimilation variationnelle de données avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux frontières	155
5.3.1	L'algorithme 4D-Var FAS	156
5.3.2	Propriétés de l'algorithme	157
5.3.3	Applications au cas d'un modèle shallow water 2-D	161
5.4	Conclusion	170

Nous présentons dans ce chapitre l'application d'une méthode multi-grille à l'assimilation variationnelle de données. Ces travaux se basent sur les approches proposées par Ta'asan [49] et celles proposées par Nash [39] et Lewis et Nash [34] sur l'application des méthodes multi-grilles à des problèmes de contrôle optimal.

Nous abordons ici une approche multi-grille très différente de celle que nous avons eu jusqu'à présent dans ce manuscrit. Il n'est plus question de raffinements locaux de maillages ni de modèles emboîtés. Notre problématique est la suivante : partant d'une configuration d'assimilation 4D-Var classique (avec présence ou non de frontières ouvertes), comment peut-on introduire des

méthodes multi-grilles dans le processus de minimisation de la fonction coût et quel gain peut-on espérer obtenir au final à la fois sur la vitesse de convergence d'un tel algorithme et sur la précision de la solution optimale obtenue? Dans cette approche, la grille basse résolution est utilisée uniquement pour améliorer l'optimisation à haute résolution, contrairement aux chapitres précédents où nous nous intéressions à l'assimilation de données dans des modèles emboîtés.

Ce chapitre doit être vu comme un chapitre d'ouverture. Il soulève malheureusement plus de questions qu'il n'en résout. Cependant, il nous apparaît comme un préambule nécessaire à la mise en place d'un algorithme d'assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés basé sur une application locale de méthodes multi-grilles.

Dans un premier temps, nous faisons un bref rappel sur les méthodes multi-grilles. Dans un second temps, nous présentons un algorithme d'assimilation 4D-Var multi-grille pour la recherche des points critiques de la fonction coût. Cette méthode s'inspire des travaux de Ta'asan [49]. Les résultats présentés sont issus des travaux d'Emilie Neveu durant son stage de Master 2 Recherche [40]. Enfin nous présentons une variante de cet algorithme adaptée aux cas des modèles à frontières ouvertes pour lesquels la variable de contrôle fait intervenir à la fois la condition initiale et les conditions aux limites. Ces deux versions correspondent à l'algorithme MG/Opt développé par Nash [39], [34].

5.1 L'approche multi-grille pour la résolution de systèmes

Dans cette partie, nous nous intéressons aux méthodes multi-grilles permettant la résolution de systèmes discrets du type

$$L_h(u_h) = f_h \quad \text{sur } \omega_h \quad (5.1)$$

avec L_h un opérateur discret non nécessairement linéaire et u_h la solution recherchée. Pour notre application, l'équation (5.1) correspondra à l'équation d'Euler $\nabla J_h(\mathbf{x}_h) = 0$, avec J_h la fonction coût à minimiser et \mathbf{x}_h la variable de contrôle.

Il est possible de résoudre ce système en utilisant soit des méthodes directes, soit des méthodes itératives ou méthodes de relaxation (méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel). Les méthodes multi-grilles sont à classer parmi les méthodes itératives. En exploitant au mieux les propriétés des méthodes de relaxation sur lesquelles elle s'appuient, elles peuvent s'avérer très performantes.

Nous présentons dans cette partie les méthodes multi-grilles classiques pour la résolution de systèmes. Dans un premier temps, nous rappelons brièvement quelques propriétés des méthodes de relaxation classiques, puis nous présentons, pour le cas linéaire, l'algorithme de correction par grille grossière et enfin son extension au cas non-linéaire, à savoir l'algorithme *Full Approximation Scheme* aussi appelé FAS. De plus amples informations sur ces méthodes et sur les aspects du multi-grille en général sont disponibles dans [9],[51].

5.1.1 Quelques rappels sur les méthodes de relaxation

Les méthodes itératives permettent la résolution du problème (5.1) en améliorant une approximation initiale v_h^0 que l'on a de la solution u_h par des ajouts successifs d'incrément correctifs. Idéalement, la séquence d'approximations $(v_h^k)_k$ que génère la méthode est supposée converger vers la solution exacte du problème. Les plus connues sont les méthodes de Jacobi ou de Gauss-Seidel. Elles se basent sur la résolution d'un problème de point fixe. L_h , supposé

linéaire, est mis sous la forme $L_h = L_h^+ - L_h^-$. La résolution du système (5.1) se fait de manière itérative en résolvant les systèmes $L_h^+ u_h^{k+1} = L_h^- u_h^k + f_h$. Pour la méthode de Jacobi, L_h^+ correspond à la matrice diagonale de L_h . Pour la méthode de Gauss-Seidel, L_h^+ correspond à la matrice triangulaire inférieure de L_h .

Leurs performances varient selon les problèmes étudiés. Néanmoins, nous constatons fréquemment le même phénomène lors de l'utilisation de ces méthodes : la réduction de l'erreur commise par l'approximation de la solution a lieu essentiellement lors des premières itérations de l'algorithme. Ceci est dû au fait que la plupart de ces méthodes éliminent rapidement les composantes haute fréquence de l'erreur tandis qu'elles réduisent difficilement les composantes basse fréquence. Elles possèdent ainsi une propriété de lissage de l'erreur. D'où leur nom de méthodes de relaxation. Cette propriété est à l'origine des méthodes multi-grilles comme nous le verrons au §5.1.2.

Les méthodes de relaxation nécessitent de s'intéresser aux propriétés d'ellipticité du système que l'on cherche à résoudre, et plus précisément au concept d'h-ellipticité (Brandt [8]) de l'opérateur discrétisé L_h . Dans le cas continu, si l'opérateur différentiel L est elliptique alors son symbole \hat{L} défini par

$$L e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \hat{L}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (5.2)$$

vérifie la propriété

$$|\hat{L}(\mathbf{k})| \geq C |\mathbf{k}|^{2m} \quad (5.3)$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}$. Le symbole de L atteint ainsi des valeurs élevées pour les hautes fréquences et des valeurs faibles pour les basses fréquences. L'opérateur L aura donc tendance à augmenter l'amplitude des hautes fréquences de la variable u prise en argument. Sans rentrer dans les détails, la h-ellipticité traduit cette notion d'ellipticité pour les opérateurs discrets. Il faut savoir, que même si l'opérateur continu L est elliptique, un mauvais choix de discrétisation peut faire perdre cette propriété pour l'opérateur discret. La propriété d'h-ellipticité de l'opérateur L_h est importante. Elle nous assure qu'il sera possible de trouver une méthode de relaxation efficace (ayant de bonnes propriétés de lissage) pour la résolution du problème. En effet, si l'opérateur L_h n'est pas h-elliptique, aucune méthode de relaxation basée sur un splitting $L_h = L_h^+ - L_h^-$ (Jacobi, Gauss-Seidel) ne sera efficace. Plus de détails sur cette notion d'h-ellipticité et sur ses liens avec l'efficacité des méthodes de relaxation peuvent être trouvés dans [51].

Pour notre problème d'assimilation de données, ces propriétés d'ellipticité ne portent plus sur le modèle, mais sur le problème d'optimisation lui-même. Minimiser J_h conduit à rechercher ses points critiques, à savoir les points \mathbf{x}_h^* vérifiant

$$\nabla J_h(\mathbf{x}_h^*) = 0 \quad (5.4)$$

Nous cherchons à résoudre ce système via une méthode itérative. Supposons donc avoir une approximation \mathbf{x}_h de la solution du système (5.4). Nous cherchons alors la correction $\delta\mathbf{x}_h$ vérifiant

$$\nabla J_h(\mathbf{x}_h + \delta\mathbf{x}_h) = 0 \quad (5.5)$$

Un développement de Taylor du premier ordre nous donne

$$\mathcal{H}_h(\mathbf{x}_h) \delta\mathbf{x}_h \approx -\nabla J_h(\mathbf{x}_h) \quad (5.6)$$

avec $\mathcal{H}_h(\mathbf{x}_h)$ la hessienne de J_h calculée au point \mathbf{x}_h . A voisinage de l'optimum, la résolution du système d'optimalité se ramène à la résolution de ce nouveau système. L'efficacité des méthodes itératives employées pour résoudre le problème d'assimilation de données dépendra ainsi des propriétés d'ellipticité de la hessienne de la fonction coût au voisinage de l'optimum. De nouveau apparaît l'importance de la hessienne dans le processus de minimisation.

Signalons enfin qu'il n'est pas nécessaire que le modèle (continu ou discret) soit elliptique pour que la hessienne de la fonction coût le soit. Des exemples de problèmes de contrôle optimal elliptiques pour lesquels les modèles ne le sont pas (équation de transport notamment) sont exhibés dans Ta'asan [49], Lewis et Nash [34].

5.1.2 La correction par grille grossière

L'algorithme de correction par grille grossière est un algorithme multi-grille pour la résolution du problème (5.1) supposé linéaire. Il repose sur l'idée que les basses fréquences qui n'ont pu être corrigées par la méthode de relaxation apparaissent comme des hautes fréquences sur une grille à plus basse résolution. L'algorithme va donc être le suivant : dans un premier temps, quelques itérations d'une méthode de relaxation vont éliminer les composantes hautes fréquences de l'erreur, puis cette méthode (ou une autre) va être appliquée à plus basse résolution afin que les basses fréquences de l'erreur apparaissent comme des hautes fréquences et soient ainsi réduites plus facilement.

Notons u_h^k l'approximation de la solution à l'itération k . Notons ω_H la grille basse résolution. Soit I_H^h un opérateur d'interpolation de ω_H vers ω_h et I_h^H un opérateur de restriction de ω_h vers ω_H . Avec deux niveaux de grilles, le passage de l'itération k à l'itération $k + 1$ s'écrit :

Algorithme de correction par grille grossière

1. Relaxation : faire ν_1 itérations de la méthode de relaxation notée S à u_h^k sur la grille haute résolution ω_h :

$$\bar{u}_h = S^{\nu_1}(u_h^k, L_h, f_h)$$

2. Correction par grille grossière

- (a) Calculer le résidu $r_h = f_h - L_h \bar{u}_h$
- (b) Transférer le résidu sur la grille basse résolution : $r_H = I_h^H r_h$.
- (c) Résoudre $L_H e_H = r_H$.
- (d) Interpoler la correction sur la grille haute résolution : $e_h = I_H^h e_H$.
- (e) Calculer la solution approchée haute résolution : $\tilde{u}_h = \bar{u}_h + e_h$.

3. Relaxation : faire ν_2 itérations de la méthode de relaxation notée S à \tilde{u}_h :

$$u_h^{k+1} = S^{\nu_2}(\tilde{u}_h, L_h, f_h)$$

Algorithme 1

Notons que c'est l'équation résiduelle du système qui est résolue sur la grille basse résolution et pas le système lui-même. Après avoir corrigé les erreurs hautes fréquences de l'approximation u_h lors de la première phase de relaxation, la correction par grille grossière a pour but l'obtention

d'un incrément corrigeant les basses fréquences de l'erreur. C'est donc le résidu qui est transféré et non l'approximation courante de la solution.

5.1.3 L'algorithme Full Approximation Scheme (FAS)

Nous supposons cette fois que le système (5.1) est non-linéaire. Chercher une correction v_h solution de l'équation résiduelle $L_h v_h = r_h$ n'a plus de sens dans ce cas. L'équation résiduelle à résoudre sur la grille haute résolution devient :

$$L_h(u_h + v_h) - L_h(u_h) = r_h \quad (5.7)$$

Une solution approchée de cette équation sera obtenue en passant sur une grille à plus basse résolution.

Notons u_h^k l'approximation de la solution à l'itération k . Soient I_h^H l'opérateur de transfert du résidu de ω_h vers ω_H , \hat{I}_h^H l'opérateur de transfert de l'approximation de la solution de ω_h vers ω_H et I_H^h l'opérateur de transfert de la correction de ω_H vers ω_h .

Avec deux niveaux de grilles, le passage de l'itération k à l'itération $k + 1$ s'écrit :

Algorithme FAS

1. Relaxation : faire ν_1 itérations de la méthode de relaxation notée S à u_h^k sur la grille haute résolution ω_h :

$$\bar{u}_h = S^{\nu_1}(u_h^k, L_h, f_h)$$

2. Correction par grille grossière

(a) Calculer le résidu $r_h = f_h - L_h(\bar{u}_h)$

(b) Transférer le résidu sur la grille basse résolution : $r_H = I_h^H r_h$.

(c) Transférer l'approximation : $v_H = \hat{I}_h^H \bar{u}_h$.

(d) Calculer le second membre basse résolution : $f_H = r_H + L_H(v_H)$.

(e) Résoudre $L_H(\bar{v}_H) = f_H$.

(f) Calculer la correction : $\tilde{v}_H = \bar{v}_H - v_H$.

(g) Interpoler la correction sur la grille haute résolution : $v_h = I_H^h \tilde{v}_H$.

(h) Calculer la solution approchée haute résolution : $\tilde{u}_h = \bar{u}_h + v_h$.

3. Relaxation : faire ν_2 itérations de la méthode de relaxation notée S à \tilde{u}_h :

$$u_h^{k+1} = S^{\nu_2}(\tilde{u}_h, L_h, f_h)$$

Algorithme 2

Nous pouvons remarquer que si le système est linéaire, alors l'algorithme FAS correspond à l'algorithme de correction par grille grossière.

De plus, l'algorithme FAS vérifie la propriété suivante :

Propriété 1 Si u_h est solution du système (5.1), alors la correction par grille grossière est nulle.

Preuve

Supposons que u_h soit solution du système (5.1). Alors $L_h(\bar{u}_h) = f_h$ et $r_h = 0$. Il faut alors résoudre sur la grille basse résolution le système

$$L_H(\bar{v}_H) = L_H(\hat{I}_h^H \bar{u}_h) \tag{5.8}$$

dont $\hat{I}_h^H \bar{u}_h$ est une solution évidente. Ceci entraîne une correction nulle et donc une correction par grille grossière nulle. **CQFD** \square .

Nous avons là une propriété importante de l'algorithme FAS : si la solution du système a été trouvée sur la grille haute résolution alors la correction par grille grossière ne la modifie pas. Cette propriété n'est pas vérifiée par l'algorithme 1 conçu pour les problèmes linéaires.

5.2 Application de l'algorithme FAS à l'assimilation variationnelle de données avec contrôle de la condition initiale

Nous présentons dans cette partie l'application du FAS à l'assimilation variationnelle de données. Ces travaux se basent sur l'approche proposée par Ta'asan [49] et sur celles proposées par Nash [39] et Lewis et Nash [34].

Nous nous plaçons dans le cas d'un algorithme 4D-Var pour lequel la variable de contrôle est la condition initiale. Soit ω notre domaine d'étude et soit ω_h un maillage de pas d'espace constant h dans toutes les directions.

5.2.1 L'algorithme 4D-Var FAS

Le modèle semi-discrétisé s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F_h(\mathbf{x}_h) & \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \end{cases} \tag{5.9}$$

avec \mathbf{x}_h le vecteur d'état du modèle et \mathbf{x}_h^0 la condition initiale.

Nous cherchons donc à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{x}_h^0} J_h(\mathbf{x}_h^0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|H_h(\mathbf{x}_h) - \mathbf{y}\|^2 dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_h^0 - \mathbf{x}_h^b\|_{\mathbf{B}_h}^2 \tag{5.10}$$

Nous cherchons pour cela les points critiques de cette fonction, à savoir les solutions du système :

$$\nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) = 0 \tag{5.11}$$

Ceci peut se mettre sous la forme $L_h(\mathbf{x}_h^0) = f_h$, avec $L_h(\mathbf{x}_h^0) = \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0)$ et $f_h = 0$. Appliquer le FAS sur ce système revient à résoudre le système suivant sur une grille à plus basse résolution ω_H :

$$L_H(\mathbf{x}_H^0) = I_h^H(f_h - L_h(\mathbf{x}_h^0)) + L_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \tag{5.12}$$

\mathbf{x}_h^0 est ensuite mis à jour par la formule

$$\mathbf{x}_h^0 = \mathbf{x}_h^0 + I_h^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \quad (5.13)$$

Appliqué au système (5.11), nous obtenons le système suivant à résoudre sur la grille basse résolution :

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0) = -I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) + \nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \quad (5.14)$$

avec

$$J_H(\mathbf{x}_H^0) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_H^0 - \mathbf{x}_H^b\|_{B_H}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|H_H(\mathbf{x}_H) - \mathbf{y}\|^2 dt \quad (5.15)$$

et \mathbf{x}_H solution du modèle basse résolution

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F_H(\mathbf{x}_H) & \text{sur } \omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Posons

$$\mathbf{g}_2 = -I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) + \nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0)$$

Nous cherchons ainsi à résoudre le système

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0) = \mathbf{g}_2 \quad (5.17)$$

Ceci revient à minimiser sur la grille basse résolution une nouvelle fonction coût J_H^{FAS} définie par :

$$J_H^{FAS}(\mathbf{x}_H^0) = J_H(\mathbf{x}_H^0) - \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{x}_H^0 \rangle$$

Il n'est pas nécessaire de mener à terme la minimisation de J_H^{FAS} . Une variante consiste à itérer les cycles "optimisation haute résolution"- "optimisation FAS basse résolution" en ne faisant qu'un certain nombre d'itérations de minimisation sur chaque grille.

Afin de s'assurer que la correction par grille grossière minimise bien la fonction coût haute résolution, une recherche linéaire de pas optimal est ajoutée dans la phase de mise à jour de la variable de contrôle haute résolution.

Nous obtenons alors l'algorithme **4D-Var FAS** suivant :

Algorithme 4D-Var FAS

Tant que $k \leq N_{\text{iter}}$ ou convergence

1. k_h itérations de minimisation de la fonction coût haute résolution $J_h(\mathbf{x}_h^0)$

$$\min_{\mathbf{x}_h^0} J_h(\mathbf{x}_h^0) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_h^0 - \mathbf{x}_h^b\|_{B_h}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|H_h(\mathbf{x}_h) - \mathbf{y}\|^2 dt$$

2. Calcul de $\mathbf{g}_2 = -I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) + \nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0)$
3. k_{FAS} itérations de minimisation de la fonction coût FAS basse résolution J_H^{FAS} .

$$\min_{\mathbf{x}_H^0} J_H^{FAS}(\mathbf{x}_H^0) = J_H(\mathbf{x}_H^0) - \langle \mathbf{g}_2, \mathbf{x}_H^0 \rangle$$

4. Utiliser une recherche linéaire pour mettre à jour les variables de contrôle haute résolution.

$$\mathbf{x}_h^0(k+1) = \mathbf{x}_h^0(k) + \alpha I_H^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0(k))$$

FIN

Cet algorithme correspond au module d'optimisation multi-grilles MG/Opt développé par Nash [39]. Afin d'améliorer les performances de l'algorithme, il est également possible d'ajouter des bornes judicieusement choisies sur la variable de contrôle (cf Lewis et Nash [34]).

5.2.2 Propriétés de l'algorithme

Nous présentons dans cette partie quelques propriétés de l'algorithme 4D-Var FAS introduit précédemment.

5.2.2.1 Convergence de l'algorithme

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux propriétés de convergence de l'algorithme d'assimilation 4D-Var FAS. Cet algorithme correspondant au module d'optimisation multi-grille MG/Opt, nous présentons dans un premier temps les résultats obtenus par Nash [39] sur cet algorithme. Nous nous intéressons dans un second temps à l'algorithme 4D-Var FAS sans recherche linéaire et aux travaux d'Emilie Neveu [40] le concernant.

L'algorithme MG/Opt

Dans [39], Nash montre que l'algorithme MG/Opt converge si le problème d'optimisation vérifie plusieurs conditions. Si

1. l'algorithme d'optimisation utilisé sur chacune des grilles converge, à savoir

$$\forall k \in \{h, H\} \quad \lim_{p \rightarrow 0} \|\nabla J_k(\mathbf{x}_k^0(p))\| = 0$$

avec p le nombre d'itérations de la routine de minimisation

2. le nombre d'itérations réalisées lors des phases de minimisation haute résolution est non nul

3. la correction par grille grossière est bien une direction de descente pour la fonction coût haute résolution

alors l'algorithme MG/Opt converge.

La correction par grille grossière étant une direction de descente, la recherche linéaire produira à l'itération $p+1$ une variable de contrôle qui ne pourra pas être pire que celle à l'itération p . Comme une minimisation haute résolution a lieu, la convergence de l'algorithme d'optimisation haute résolution assure la convergence de l'algorithme MG/Opt.

La recherche linéaire lors de la mise à jour des variables de contrôle haute résolution joue donc un rôle important. Sans elle, l'algorithme 4D-Var FAS décrit au §5.2.1 peut alors ne pas converger. En effet, la fonction coût haute résolution calculée après la correction par grille grossière peut prendre une valeur supérieure à celle qu'elle avait avant le cycle de minimisation basse résolution si aucune condition n'est imposée sur le choix des opérateurs de transfert inter-grilles ou sur le choix des discrétisations des modèles basse résolution. Une succession de phases où la minimisation haute résolution permettrait de revenir à des valeurs de la fonction coût proche de celle antérieure à la hausse introduite par la correction par grille grossière est envisageable, empêchant ainsi l'algorithme de converger vers une solution optimale.

Nash propose également des conditions suffisantes pour que la correction par grille grossière soit bien une direction de descente. La première concerne les opérateurs de transferts inter-grilles I_H^h et I_h^H appliqués aux variables d'état du modèle. Ils sont supposés vérifier la relation $I_H^h = \gamma(I_h^H)^T$, avec $\gamma > 0$. C'est une relation classique pour les méthodes multi-grilles (cf §1.5.3). Ceci implique au passage l'utilisation d'opérateurs linéaires. La seconde concerne le problème d'optimisation lui-même, qui est supposé convexe. C'est une hypothèse difficilement vérifiable par les problèmes d'assimilation de données rencontrés en pratique. Néanmoins, elle peut être remplacée par une hypothèse moins forte, à savoir que la hessienne de la fonction coût soit définie positive. Enfin, le problème d'optimisation basse résolution doit être résolu de façon "précise".

Les calculs qui suivent permettent de mieux comprendre d'où proviennent ces hypothèses. Soit \mathbf{x}_h^0 la variable de contrôle avant la phase de correction par grille grossière et soit \mathbf{x}_H^0 la variable de contrôle basse résolution optimisée. Elle vérifie l'équation

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0) = \nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) - I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) + \mathbf{z} \quad (5.18)$$

si le problème d'optimisation basse résolution n'a pas été résolu de façon exacte (\mathbf{z} est un résidu).

La correction par grille grossière est une direction de descente si

$$\nabla J_h(\mathbf{x}_h^0)^T I_H^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) < 0 \quad (5.19)$$

Or

$$\begin{aligned} \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0)^T I_H^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) &= \gamma(I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0))^T (\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \\ &= \gamma(\nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) - \nabla J_H(\mathbf{x}_H^0) + \mathbf{z})^T (\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne entre \mathbf{x}_H^0 et $\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0$ à la fonction $\nabla J_H(\mathbf{x})^T \mathbf{x}$, il vient

$$\exists \xi, \quad \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0)^T I_H^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) = \gamma[-(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0)^T \mathcal{H}_h(\xi)(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) + z^T (\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0)] \quad (5.20)$$

avec $\mathcal{H}_h(\xi)$ la hessienne de J_h calculée en ξ .

Si le problème d’optimisation est convexe, ou si la hessienne est définie positive au voisinage de ξ , le premier terme sera négatif. De plus, \mathbf{z} sera négligeable si le problème d’optimisation basse résolution a été résolu de façon suffisamment ”précise”. Alors, la correction par grille grossière sera bien une direction de descente dans ce cas.

L’algorithme 4D-Var FAS sans recherche linéaire

La phase de recherche linéaire présente lors de la mise à jour des variables de contrôle haute résolution pouvant faire croître de manière importante le nombre de simulations haute résolution, il serait intéressant de pouvoir s’en affranchir. De plus, les conditions suffisantes proposées par Nash pour que la correction par grille grossière soit bien une direction de descente font intervenir la convexité des problèmes d’optimisation sur chacune des grilles. Ces hypothèses peuvent devenir très contraignantes pour l’application de l’assimilation variationnelle de données aux fluides géophysiques.

Emilie Neveu [40] a montré qu’en imposant un certain nombre de contraintes portant sur les opérateurs de transfert inter-grilles, les modèles basse résolution, les matrices de covariance d’erreur d’ébauche basse résolution et les observations basse résolution, il était possible d’obtenir une correction par grille grossière qui minimise la fonction coût haute résolution permettant ainsi à l’algorithme de converger.

Sans rentrer dans les détails, nous précisons tout de même que les contraintes concernant les modèles basse résolution peuvent s’avérer difficiles à mettre en pratique pour des modèles réalistes d’océan. On demande ainsi à ce que $F_H I_h^H$ soit proche de $I_h^H F_h$ avec F_H l’opérateur aux dérivées partielles spatiales discret basse résolution. Un candidat naturel est $F_H = I_h^H F_h (I_h^H)^T$ si l’opérateur de transfert inter-grilles $(I_h^H)^T I_h^H$ est proche de l’identité. Néanmoins le calcul d’un tel modèle basse résolution semble impossible au vu de la complexité des modèles classiques d’océan basés pour la plupart sur des schémas aux différences finies.

Ces contraintes sont classiques en méthodes multi-grilles. En pratique cependant, les modèles basse résolution sont obtenus en changeant quelques paramètres du schéma numérique (pas d’espace, coefficient de diffusion, etc..) ce qui pourrait ne pas être suffisant pour vérifier les contraintes de convergence proposées par Emilie Neveu.

5.2.2.2 Lien entre la correction par grille grossière et les méthodes d’optimisation

Nous présentons succinctement dans ce paragraphe les travaux de Lewis et Nash [34] faisant le lien entre la méthode de correction par grille grossière et les méthodes standards d’optimisation.

Reprenons les notations du paragraphe précédent. Soient \mathbf{x}_h^0 la variable de contrôle haute résolution avant la phase de correction par grille grossière et soit \mathbf{x}_H^0 la variable de contrôle basse résolution optimisée. Notons $\mathbf{e}_H = \mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0$ et $\mathbf{e}_h = I_h^H \mathbf{e}_H$ la correction par grille grossière. Nous supposons de plus que l’opérateur de transfert inter-grille I_h^H vérifie $I_h^H = \gamma (I_H^h)^T$.

Par définition de J_H^{FAS} , nous avons la relation suivante :

$$\nabla J_H^{FAS}(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) = I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) \tag{5.21}$$

D’où

$$\begin{aligned} J_h(\mathbf{x}_h^0 + \mathbf{e}_h) &= J_h(\mathbf{x}_h^0) + \mathbf{e}_h^T \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) + O(\|\mathbf{e}_h\|^2) \\ &= J_h(\mathbf{x}_h^0) + \gamma \mathbf{e}_H^T I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) + O(\|\mathbf{e}_h\|^2) \\ &= J_h(\mathbf{x}_h^0) + \gamma \mathbf{e}_H^T \nabla J_H^{FAS}(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) + O(\|\mathbf{e}_H\|^2) \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation FAS basse résolution peut donc être vue comme une approximation au premier ordre du problème d'optimisation haute résolution. La correction par grille grossière apparait ainsi comme une méthode de descente. L'algorithme 4D-Var FAS utilisant une recherche linéaire lors de la mise à jour de la variable de contrôle haute résolution, cette correction basse résolution est ainsi une méthode de descente à pas optimal.

Mieux, la correction par grille grossière peut même être vue comme une méthode de type Newton, ce qui fait que la valeur 1 pourra être acceptée comme pas de descente par la recherche linéaire. En effet, nous avons à convergence

$$\nabla J_H^{FAS}(\mathbf{x}_H^0) = 0 \quad (5.22)$$

Or

$$\nabla J_H^{FAS}(\mathbf{x}_H^0) = \nabla J_H(\mathbf{x}_H^0) + I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) - \nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \quad (5.23)$$

D'où

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0) = \nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) - I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) \quad (5.24)$$

Un développement au premier ordre de $\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0)$ nous donne

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0) \approx \nabla J_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) + \mathcal{H}_H(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0)(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \quad (5.25)$$

En combinant les équations (5.24) et (5.25), il vient

$$(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) \approx -\mathcal{H}_H^{-1}(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) I_h^H \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) \quad (5.26)$$

D'où une approximation de la correction par grille grossière

$$\begin{aligned} I_h^H(\mathbf{x}_H^0 - \hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) &\approx -[I_h^H \mathcal{H}_H^{-1}(\hat{I}_h^H \mathbf{x}_h^0) I_h^H] \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) \\ &\approx -\mathcal{H}_h^{-1}(\mathbf{x}_h^0) \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nous retrouvons ainsi une descente de type Newton. A convergence de l'algorithme, la correction par grille grossière aura ainsi des échelles adaptées à la fonction coût haute résolution. Ceci permet de choisir la valeur 1 pour le premier pas de la recherche linéaire.

5.2.3 Application au cas d'une équation de Burgers 1-D

Ces tests numériques ont été réalisés par Emilie Neveu durant son stage de Master 2 Recherche en 2007 [40]. Elle a appliqué l'algorithme 4D-Var FAS décrit dans la partie précédente à une équation de Burgers 1D non-linéaire. Il est important de noter que la mise à jour des variables de contrôle haute résolution lors de la correction par grille grossière a été réalisée sans recherche linéaire. Nous présentons ici quelques résultats obtenus en expériences jumelles concernant la décroissance des erreurs RMS au cours de la minimisation.

5.2.3.1 Configuration des expériences

Le modèle utilisé est une équation de Burgers non-linéaire en dimension un, avec un terme de diffusion constant. La condition initiale est une sinusoïde. Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) = \sin(2\pi k_1 x / L) \end{cases} \quad (5.28)$$

Le modèle discret est obtenu par différences finies à l'aide de schémas centrés en espace et explicites en temps.

L'état vrai est calculé en intégrant ce modèle avec l'état initial exact donné par (5.28). L'ébauche est obtenue en perturbant l'état initial par une sinusoïde de fréquence plus élevée.

Les observations sont obtenues en échantillonnant temporellement l'état vrai. L'espace des observations coïncide donc avec celui du vecteur d'état. Les matrices de covariance d'erreur d'observation sont égales à l'identité. La variable de contrôle est la condition initiale u_0 . La fonction coût mesure uniquement l'écart aux observations. Elle s'écrit :

$$J(u_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \|u - u_{obs}\|^2 dt \quad (5.29)$$

La minimisation est réalisée par une méthode de descente à pas optimal avec recherche linéaire.

5.2.3.2 Résultats numériques

Emilie Neveu a comparé la méthode multi-grille avec 4 niveaux de grilles à une méthode 4D-Var mono-grille. Lors de chaque test, la même méthode de descente a été utilisée.

La figure 5.1 représente les variations de l'erreur RMS relative (définition au §3.9) en fonction du nombre de simulations haute résolution réalisées pendant la minimisation. Nous ne comptons pas les simulations basse résolution car, celles-ci sont beaucoup moins coûteuses en temps de calcul que celles réalisées à haute résolution, d'autant plus qu'il est possible d'utiliser des modèles simplifiés (linéarisés par exemple) sur les grilles basse résolution (cf Neveu [40]). Ainsi dans le cas de modèles réalistes, on cherchera essentiellement à limiter le nombre de simulations haute résolution.

Nous constatons que l'algorithme FAS permet une accélération importante de la décroissance des erreurs RMS. Ainsi après 25 simulations, la solution optimale haute résolution issue de l'algorithme FAS présente une erreur plus faible que celle de la solution optimale mono-grille obtenue après 40 simulations.

La présence de paliers sur la courbe de l'erreur RMS associée à la solution FAS montre l'importance de la correction par grille grossière. La première correction permet ainsi de diviser par 100 l'erreur de la solution. Néanmoins, la correction par grille grossière perd en efficacité au cours de la minimisation. Nous retrouvons la propriété de la méthode FAS : la correction par grille grossière est nulle une fois l'optimum atteint.

5.2.3.3 Conclusion

L'algorithme 4D-Var FAS avec contrôle de la condition initiale donne des résultats très satisfaisants sur ce cas test très simple. Il y a bien eu réduction des erreurs de la solution haute résolution après les différents passages sur les grilles basse résolution. Il n'a pas été nécessaire d'utiliser une recherche linéaire lors de la mise à jour de la variable de contrôle haute résolution. De plus, cette méthode a nécessité deux fois moins de simulations haute résolution qu'un algorithme 4D-Var mono-grille. De tels résultats seraient particulièrement intéressants dans le cas de modèles réalistes.

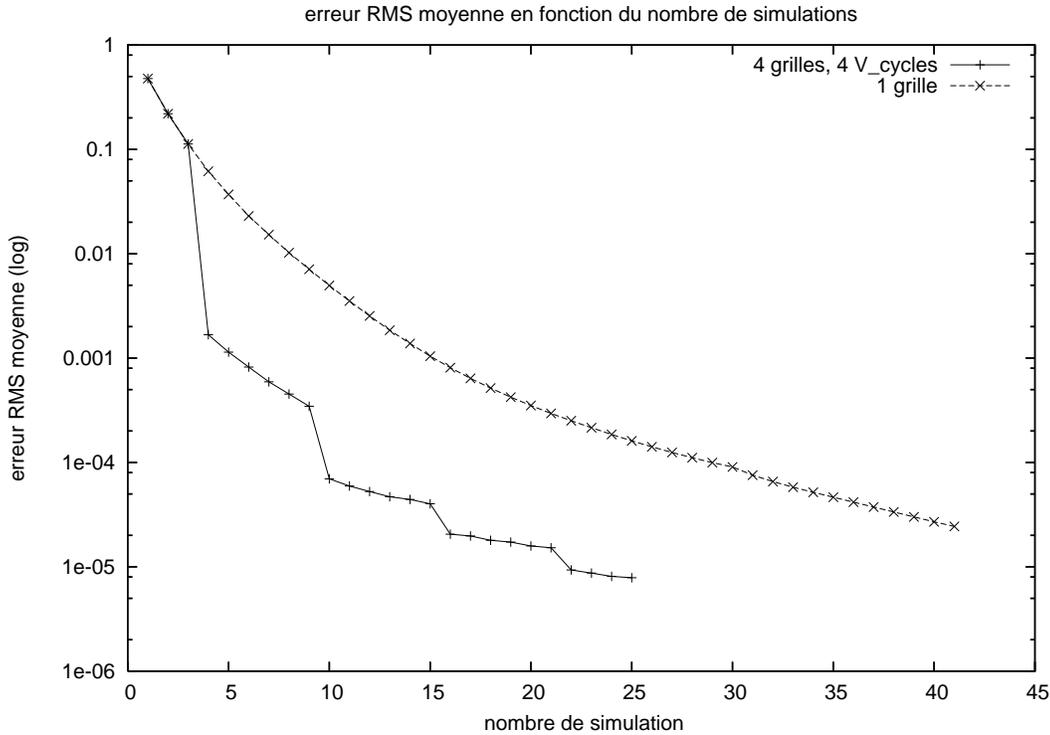


FIG. 5.1 – Erreur RMS relative en fonction du nombre de simulations haute résolution

5.3 Application de l'algorithme FAS à l'assimilation variationnelle de données avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux frontières

Nous nous intéressons dans cette partie à l'application du FAS pour l'assimilation de données dans un modèle présentant des frontières ouvertes. Les variables de contrôle sont cette fois-ci la condition initiale du modèle ainsi que les conditions aux limites.

Nous avons constaté (cf chapitre 4) que la résolution de ce problème d'optimisation pouvait s'avérer difficile. Dans nos cas tests, les conditions aux limites du domaine furent très peu corrigées, les corrections apportées par l'assimilation de données étant toujours à haute fréquence. Ceci est dû à l'hyper-sensibilité de la hauteur d'eau à l'intérieur du domaine vis-à-vis des vitesses spécifiées aux frontières.

La méthode de minimisation n'étant pas capable de corriger les composantes basse fréquence des erreurs, l'emploi d'une méthode de correction par grille grossière apparaît naturelle. Les basses fréquences sur une grille apparaissant comme des hautes fréquences sur une grille à plus basse résolution, il devrait donc être possible d'améliorer la correction des conditions aux frontières en passant sur une grille à plus basse résolution.

Soit ω notre domaine d'étude et soit ω_h un maillage de pas d'espace constant h dans toutes les directions.

5.3.1 L'algorithme 4D-Var FAS

Nous présentons dans cette partie l'application de l'algorithme **FAS** au problème de l'assimilation variationnelle de données dans un modèle présentant des frontières ouvertes.

Le modèle semi-discretisé s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial t} = F_h(\mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{\partial\omega_h}) & \text{sur } \omega_h \times [0, T] \\ \mathbf{x}_h(x, 0) = \mathbf{x}_h^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega_h} = \epsilon_{\partial\omega_h} & \text{sur } \partial\omega_h \times [0, T] \end{cases} \quad (5.30)$$

où \mathbf{x}_h représente le vecteur d'état du modèle, \mathbf{x}_h^0 la condition initiale et $\mathbf{x}_{\partial\omega_h}$ les conditions aux frontières.

Le problème d'assimilation va consister à minimiser une fonction coût J_h par rapport au vecteur de contrôle défini par la condition initiale et la valeur des conditions aux frontières $\epsilon_{\partial\omega_h}$. La fonctionnelle est de type *4D-Var*, ce qui s'écrit :

$$\min_{(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h})} J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_h^0 - \mathbf{x}_h^b\|_{B_h}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|H_h(\mathbf{x}_h) - \mathbf{y}\|_{\omega}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|C_h \epsilon_{\partial\omega_h}\|^2 dt \quad (5.31)$$

Appliquons l'algorithme FAS au système :

$$\nabla J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) = 0 \quad (5.32)$$

Nous utilisons le symbole G pour les opérateurs de transferts inter-grilles appliqués aux conditions initiales et I ceux appliqués aux conditions aux frontières. Ainsi \hat{G}_h^H sera l'opérateur de restriction appliqué pour la condition initiale.

Sur la grille basse résolution ω_H , ce système devient :

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) = \begin{bmatrix} -G_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \mathbf{x}_h^0}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + \frac{\partial J_H}{\partial \mathbf{x}_H^0}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \\ -I_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_{\partial\omega_h}}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + \frac{\partial J_H}{\partial \epsilon_{\partial\omega_H}}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

avec

$$J_H(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_H^0 - \mathbf{x}_H^b\|_{B_H}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|H_H(\mathbf{x}_H) - \mathbf{y}\|_{\omega}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|C_H \epsilon_{\partial\omega_H}\|^2 dt \quad (5.34)$$

et \mathbf{x}_H solution du modèle basse résolution

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}_H}{\partial t} = F_H(\mathbf{x}_H, \mathbf{x}_{\partial\omega_H}) & \text{sur } \omega_H \times [0, T] \\ \mathbf{x}_H(x, 0) = \mathbf{x}_H^0 \\ \mathbf{x}_{\partial\omega_H} = \epsilon_{\partial\omega_H} & \text{sur } \partial\omega_H \times [0, T] \end{cases} \quad (5.35)$$

Posons

$$\begin{cases} g_2^0 = -G_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \mathbf{x}_h^0}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + \frac{\partial J_H}{\partial \mathbf{x}_H^0}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \\ g_2^\varepsilon = -I_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_{\partial\omega_h}}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + \frac{\partial J_H}{\partial \epsilon_{\partial\omega_H}}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{cases} \quad (5.36)$$

Ceci revient au problème de minimisation d'une nouvelle fonction coût :

$$J_H^{FAS}(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) = J_H(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) - \langle \mathbf{x}_H^0, g_2^0 \rangle - \int_0^T \langle \epsilon_{\partial\omega_H}, g_2^\varepsilon \rangle dt$$

Après quelques itérations du minimiseur, le contrôle haute résolution est mis à jour par une recherche linéaire :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_h^0 = \mathbf{x}_h^0 + \alpha G_H^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0) \\ \epsilon_{\partial\omega_h} = \epsilon_{\partial\omega_h} + \alpha I_H^h(\epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{cases} \quad (5.37)$$

Une phase d'assimilation haute résolution est ensuite réalisée. Il est alors possible d'itérer plusieurs fois cette phase de correction grossière, ce qui nous donne l'algorithme :

Algorithme 4D-Var FAS

Tant que $k \leq N_{\text{iter}}$ ou convergence

1. k_h itérations de minimisation de la fonction coût haute résolution $J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h})$

$$\begin{aligned} \min_{(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h})} J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_h^0 - \mathbf{x}_h^b\|_{B_h}^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \|H_h(\mathbf{x}_h) - \mathbf{y}\|_\omega^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|C_h \epsilon_{\partial\omega_h}\|^2 dt \end{aligned}$$

2. Calcul de g_2^0 et g_2^ε .
3. k_{FAS} itérations de minimisation de la fonction coût **FAS** basse résolution J_H^{FAS} .

$$\min_{(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H})} J_H^{FAS}(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) = J_H(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) - \langle \mathbf{x}_H^0, g_2^0 \rangle - \int_0^T \langle \epsilon_{\partial\omega_H}, g_2^\varepsilon \rangle dt$$

4. Utiliser une recherche linéaire pour mettre à jour les variables de contrôle haute résolution.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_h^0(k+1) = \mathbf{x}_h^0(k) + \alpha G_H^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0(k)) \\ \epsilon_{\partial\omega_h}(k+1) = \epsilon_{\partial\omega_h}(k) + \alpha I_H^h(\epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}(k)) \end{cases}$$

FIN

5.3.2 Propriétés de l'algorithme

5.3.2.1 Une variable de contrôle problématique

Reprenons l'étude des propriétés d'optimisation de la correction par grille grossière réalisée au §5.2.2.2. A convergence de l'optimisation sur la grille basse résolution, nous avons

$$\nabla J_H^{FAS}(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) = 0 \quad (5.38)$$

D'où en reprenant l'expression de J_H^{FAS}

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) = \nabla J_H(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) - \begin{bmatrix} G_h^H & (0) \\ (0) & I_h^H \end{bmatrix} \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \quad (5.39)$$

Un développement au premier ordre de $\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H})$ nous donne

$$\nabla J_H(\mathbf{x}_H^0, \epsilon_{\partial\omega_H}) \approx \nabla J_H(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) + \mathcal{H}_H(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0 \\ \epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

En combinant les équations (5.39) et (5.40), il vient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0 \\ \epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h} \end{bmatrix} \approx -\mathcal{H}_H^{-1}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} G_h^H & (0) \\ (0) & I_h^H \end{bmatrix} \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \quad (5.41)$$

D'où une approximation de la correction par grille grossière

$$\begin{bmatrix} G_H^h(\mathbf{x}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0) \\ I_H^h(\epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} G_H^h & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \mathcal{H}_H^{-1}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} G_h^H & (0) \\ (0) & I_h^H \end{bmatrix} \nabla J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \quad (5.42)$$

Nous retrouvons une formule analogue à l'équation (5.27). La correction semble ainsi être une direction de descente de type Newton. Intéressons-nous de plus près à la matrice

$$\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1} = \begin{bmatrix} G_H^h & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \mathcal{H}_H^{-1}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} G_h^H & (0) \\ (0) & I_h^H \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Notons

$$\mathcal{H}_H^{-1}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Nous avons alors

$$\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1} = \begin{bmatrix} G_H^h A G_h^H & G_H^h B I_h^H \\ I_H^h B^T G_h^H & I_H^h C I_h^H \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Rappelons que (cf §1.5.3)

$$\begin{cases} I_h^H = \left(\frac{h}{H}\right)^{d_1} (I_h^h)^T \\ G_h^H = \left(\frac{h}{H}\right)^{d_2} (G_h^h)^T \end{cases} \quad (5.46)$$

avec $d_2 = d_1 + 1$. Par exemple, pour un modèle 2D, la condition initiale est une variable 2D tandis que les conditions aux limites sont des variables 1D. Cette différence de dimension s'avère problématique. En effet, nous avons

$$(\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1})^T = \begin{bmatrix} G_H^h A G_h^H & \frac{h}{H} G_H^h B I_h^H \\ \frac{H}{h} I_H^h B^T G_h^H & I_H^h C I_h^H \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

La matrice $\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1}$ est donc symétrique si et seulement si $G_H^h B I_h^H = 0$. Dans un cas général, cette condition n'a aucune raison d'être vérifiée. Cette matrice risque donc de ne pas être une bonne approximation de la hessienne haute résolution. La correction par grille grossière pourra

donc être à des échelles non adaptées pour le problème d'assimilation haute résolution. **La différence de dimension entre les variables de contrôle fait que la correction par grille grossière ne s'apparentera plus à une direction de descente de type Newton, sauf cas particulier.**

Une première solution pour s'assurer que la minimisation basse résolution ne s'écarte pas trop de la solution haute résolution est l'utilisation de contraintes durant la minimisation. Lewis et Nash [34] préconise ainsi l'utilisation de bornes sur la variable de contrôle. Ceci suppose d'être en possession d'un module d'optimisation autorisant l'introduction de contraintes.

Une autre solution serait d'utiliser un préconditionnement judicieux. Par exemple, si les composantes de la variable de contrôle dans l'espace préconditionné sont toutes de même dimension, alors les transferts inter-grilles ne poseront plus de problème. Nous serons alors ramené à l'algorithme FAS de la partie précédente. La question est maintenant de savoir si un tel préconditionnement existe. C'est une question pour laquelle nous n'avons pas pour l'instant la réponse. Une étude de la hessienne de la fonction coût est à ce stade obligatoire.

La solution que nous avons privilégiée pour nos tests numériques est l'introduction d'un facteur d'échelle σ_H^h lors de la mise à jour des variables de contrôle haute résolution par la correction par grille grossière. Nous pouvons remarquer qu'en interpolant la correction basse résolution sur la condition initiale par l'opérateur $\frac{h}{H} G_H^h$ et non plus par G_H^h , la matrice $\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1}$ devient symétrique. Naturellement, cet opérateur d'interpolation présente une erreur importante puisqu'il sous-estime la correction haute résolution. Même si $\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1}$ est symétrique, elle n'est donc pas pour autant une bonne approximation de la hessienne haute résolution.

Néanmoins, la correction par grille grossière peut toujours être vue comme une approximation au premier ordre du problème d'assimilation haute résolution. Notons $\mathbf{e}_H = (\mathbf{e}_H^0, \mathbf{e}_H^\epsilon)$ la correction par grille grossière sur la grille basse résolution, avec $\mathbf{e}_H^0 = \mathbf{x}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0$ et $\mathbf{e}_H^\epsilon = \epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}$. Avec les mêmes notations pour la grille haute résolution, nous obtenons $\mathbf{e}_h = (\mathbf{e}_h^0, \mathbf{e}_h^\epsilon) = (G_H^h \mathbf{e}_H^0, I_h^H \mathbf{e}_H^\epsilon)$. Par définition de J_H^{FAS} , nous avons

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J_H^{FAS}}{\partial \mathbf{x}_H^0}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \\ \frac{\partial J_H^{FAS}}{\partial \epsilon_{\partial\omega_H}}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \mathbf{x}_h^0}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \\ I_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_{\partial\omega_h}}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

D'où

$$\begin{aligned} J_h(\mathbf{x}_h^0 + \mathbf{e}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h} + \mathbf{e}_h^\epsilon) &= J_h(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + (\mathbf{e}_h^0)^T \frac{\partial J_h}{\partial \mathbf{x}_h^0}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + (\mathbf{e}_h^\epsilon)^T \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_{\partial\omega_h}}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + O(\|\mathbf{e}_h\|^2) \\ &= J_h(\mathbf{x}_h^0) + \left(\frac{H}{h}\right)^{d_1} (\mathbf{e}_H^0)^T I_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \mathbf{x}_h^0}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \\ &\quad + \left(\frac{H}{h}\right)^{d_2} (\mathbf{e}_H^\epsilon)^T G_h^H \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_{\partial\omega_h}}(\mathbf{x}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) + O(\|\mathbf{e}_h\|^2) \\ &= J_h(\mathbf{x}_h^0) + \left(\frac{H}{h}\right)^{d_1} (\mathbf{e}_H^0)^T \frac{\partial J_H^{FAS}}{\partial \mathbf{x}_H^0}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \\ &\quad + \left(\frac{H}{h}\right)^{d_2} (\mathbf{e}_H^\epsilon)^T \frac{\partial J_H^{FAS}}{\partial \epsilon_{\partial\omega_H}}(\hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) + O(\|\mathbf{e}_H\|^2) \end{aligned}$$

En rééchelonant chacune des composantes de la correction par grille grossière par des coefficients distincts, le problème d'assimilation FAS basse résolution apparait comme une approximation au

premier ordre du problème d'assimilation haute résolution. Nous constatons que les différences de dimension entre les variables donnent plus de poids à la condition initiale dans la correction par grille grossière.

Ces constats permettent d'imaginer une méthode très simple ayant pour but de corriger ces problèmes d'échelle de la variable de contrôle. Nous proposons d'utiliser l'opérateur $\sigma_H^h G_H^h$ pour interpoler la correction portant sur la condition initiale, le paramètre σ_H^h étant réglé "à la main" par l'utilisateur. La mise à jour des variables de contrôle haute résolution utilisera toujours une recherche linéaire. Elle s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{x}_h^0(k+1) = \mathbf{x}_h^0(k) + \alpha \sigma_H^h G_H^h (\mathbf{x}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{x}_h^0(k)) \\ \epsilon_{\partial\omega_h}(k+1) = \epsilon_{\partial\omega_h}(k) + \alpha I_H^h \epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H (\epsilon_{\partial\omega_h}(k)) \end{cases} \quad (5.49)$$

avec α le pas optimal.

Cette solution est évidemment très simpliste. Néanmoins, les résultats numériques obtenus avec cette méthode au §5.3.3 laissent entrevoir des perspectives intéressantes.

5.3.2.2 Le préconditionnement $\delta\mathbf{x} = \mathbf{B}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}^0$

Nous nous intéressons dans cette partie au préconditionnement 4D-Var $\delta\mathbf{x} = \mathbf{B}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}^0$ présenté au §1.4.5. Le but est de trouver des conditions portant sur $\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}}$ nous assurant que le préconditionnement basse résolution soit cohérent avec celui réalisé à haute résolution.

Effectuons le changement de variable $\mathbf{x}_h^0 - \mathbf{x}_h^b = \mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_h^0$ et notons \tilde{J}_h la fonction coût haute résolution dans l'espace préconditionné. Nous avons $\tilde{J}_h(\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) = J_h(\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h})$. L'ébauche \mathbf{x}_h^b est volontairement oubliée pour ne pas alourdir les notations.

Le gradient et la hessienne de \tilde{J}_h s'écrivent

$$\nabla \tilde{J}_h(\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_h^{\frac{T}{2}} & (0) \\ (0) & \mathbf{I}_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial J_h}{\partial \mathbf{x}_h^0}(\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \\ \frac{\partial J^{obs}}{\partial \epsilon_{\partial\omega_h}}(\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{J}_h}(\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_h^{\frac{T}{2}} & (0) \\ (0) & \mathbf{I}_\epsilon \end{bmatrix} \mathcal{H}_{J_h}(\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} \mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}} & (0) \\ (0) & \mathbf{I}_\epsilon \end{bmatrix}$$

avec \mathbf{I}_ϵ l'opérateur identité dans l'espace des conditions aux frontières.

A convergence de la minimisation sur la grille basse résolution, des calculs analogues au §5.3.2.1 donnent

$$\begin{bmatrix} G_H^h(\mathbf{v}_H^0 - \hat{G}_h^H \mathbf{v}_h^0) \\ I_H^h(\epsilon_{\partial\omega_H} - \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} G_H^h(\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}})^{-1} & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \mathcal{H}_H^{-1}(\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}}\hat{G}_h^H \mathbf{v}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_H^{\frac{T}{2}})^{-1} G_H^h & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \nabla \tilde{J}_h(\mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \quad (5.51)$$

Posons

$$\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1} = \begin{bmatrix} G_H^h(\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}})^{-1} & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \mathcal{H}_H^{-1}(\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}}\hat{G}_h^H \mathbf{v}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_H^{\frac{T}{2}})^{-1} G_H^h & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Faisons les hypothèses suivantes sur $(\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}})^{-1}$ et $\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|G_H^h(\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}})^{-1} - (\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}})^{-1}G_H^h\| = O(h^q) \quad , q > 1 \\ \|\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}}\tilde{G}_h^H - \tilde{G}_h^H\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}}\| = O(h^q) \quad , q > 1 \end{array} \right.$$

La première hypothèse est équivalente ¹ à

$$\|(\mathbf{B}_H^{\frac{T}{2}})^{-1}G_h^H - G_h^H(\mathbf{B}_h^{\frac{T}{2}})^{-1}\| = O(h^q) \quad , q > 1 \quad (5.53)$$

Il vient alors

$$\tilde{\mathcal{H}}_H^{-1} \approx \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}})^{-1} & (0) \\ (0) & \mathbf{I}_\epsilon \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} G_H^h & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \mathcal{H}_H^{-1}(\hat{G}_h^H \mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} G_h^H & (0) \\ (0) & I_h^H \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_h^{\frac{T}{2}})^{-1} & (0) \\ (0) & \mathbf{I}_\epsilon \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

En comparant avec l'inverse de la hessienne haute résolution (équation (5.50)), nous constatons que la correction par grille grossière correspond à une descente de type Newton si

$$\mathcal{H}_{J_h}^{-1}(\mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_h^0, \epsilon_{\partial\omega_h}) \approx \begin{bmatrix} G_H^h & (0) \\ (0) & I_H^h \end{bmatrix} \mathcal{H}_H^{-1}(\hat{G}_h^H \mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_h^0, \hat{I}_h^H \epsilon_{\partial\omega_h}) \begin{bmatrix} G_h^H & (0) \\ (0) & I_h^H \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Comme nous l'avons vu au §5.3.2.1, cette hypothèse n'est pas vérifiée dans un cas général. Nous sommes de nouveau confrontés au problème d'échelle de la correction par grille grossière rencontré précédemment. Le choix de $\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}}$ vérifiant les hypothèse encadrées permet de s'assurer que le préconditionnement 4D-Var ne va pas amplifier ces problèmes d'échelle.

5.3.3 Applications au cas d'un modèle shallow water 2-D

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus avec l'algorithme 4D-Var FAS en expériences jumelles sur un modèle shallow water 2-D.

5.3.3.1 Configuration des expériences

Nous nous plaçons dans le cadre des expériences jumelles d'assimilation présentées au chapitre 3. La zone d'étude est de nouveau le domaine local ω . Elle correspond au domaine encadré en rouge sur les figures 3.3 et 3.7.

Nous utilisons la même configuration mono-grille frontières ouvertes que celle présentée au chapitre 3. La grille haute résolution ω_h recouvre uniquement le domaine ω . Les conditions aux limites sont spécifiées de manière *off-line* par des forçages provenant d'un autre modèle. Nous renvoyons le lecteur à ce chapitre pour plus de détails sur la configuration des tests numériques.

Notre configuration de l'algorithme 4D-Var FAS n'utilise que deux grilles. La grille basse résolution ω_H possède la même résolution que la grille basse résolution Ω_H utilisée pour l'emboîtement de modèles. Nous avons ainsi un coefficient de raffinement de 3 dans chacune des directions entre les deux grilles.

¹la norme d'opérateur $\|\cdot\|$ sur les fonctions de grilles est équivalente à la norme d'opérateur $\|\cdot\|_2$

Le choix des observations est par contre différent. Nous assimilons toujours des données de hauteur d’eau obtenues en échantillonnant spatio-temporellement l’état vrai. Nous avons cependant augmenté le nombre d’observations afin de nous placer dans une situation plus favorable à la fois pour l’algorithme 4D-Var classique et pour l’algorithme 4D-Var FAS. Le coefficient d’échantillonnage temporel vaut 24, soit deux observations par jour, et les coefficients spatiaux valent 3. La résolution spatiale des observations coïncide ainsi avec celle de la grille ω_H .

La fonction coût J_h est la somme de l’écart de la solution du modèle aux observations et de l’écart de la condition initiale à l’ébauche. Nous n’avons pas mis de terme de régularisation sur le contrôle des conditions aux frontières. Nous utilisons le même filtre Laplacien généralisé qu’au §3.5 pour modéliser la matrice de covariance d’erreur d’ébauche haute résolution. Ceci nous amène donc à faire le changement de variable classique $\delta \mathbf{x}_h^0 = \mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_0^h$ (cf §1.4.5). La fonction coût s’écrit :

$$J(\mathbf{v}_0^h, \epsilon_{bc}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_0^h\|_2^2 + J^{obs}(\mathbf{v}_0^h, \epsilon_{bc})$$

Pour l’algorithme 4D-Var FAS, les covariances d’erreur d’ébauche basse résolution sont également modélisées par un filtre Laplacien $\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}}$. Celui-ci est défini par la relation

$$\mathbf{B}_H^{\frac{1}{2}} = G_h^H \mathbf{B}_h^{\frac{1}{2}} G_H^h \tag{5.56}$$

Il serait intéressant d’étudier les propriétés d’ellipticité de la hessienne de la fonction coût avec un tel préconditionnement. Malheureusement, cette étude n’a pu être menée faute de temps.

Deux types d’ébauche ont été envisagées pour nos expériences. La première correspond à une ébauche ”loin” de la solution vraie. Nous utilisons la condition initiale et les conditions aux limites utilisées pour les expériences numériques sans préconditionnement du chapitre 4 .

La seconde correspond à une ébauche ”proche” de la solution vraie. Nous utilisons la condition initiale et les conditions aux frontières obtenue après 20 itérations de préconditionnement basse résolution (cf §4.8).

Les conditions aux limites correspondant à l’interpolation sur les frontières du domaine d’une solution globale basse résolution optimisée, elle devrait donc présenter essentiellement des erreurs hautes fréquences pour lesquelles la correction par grille grossière apporte peu comparée à un algorithme mono-grille. Nous espérons par contre une nette amélioration des performances de l’assimilation haute résolution dans le premier cas.

Enfin, les minimisations sont effectuées grâce au module **M1QN3** développé par Gilbert et Lemaréchal [27]. Il faut signaler que son utilisation peut s’avérer problématique pour les minimisations de la fonction coût FAS basse résolution. En effet, c’est une méthode de type quasi-Newton dont l’approximation de l’inverse de la hessienne est obtenue par la formule BFGS. A l’itération k , m paires de vecteurs $\{(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i), k - m \leq i \leq k - 1\}$ (avec \mathbf{g}_i le gradient de la fonction coût calculé en \mathbf{x}_i) sont utilisées pour mettre à jour l’approximation courante de la hessienne. Les gradients de la fonction coût interviennent ainsi dans ce calcul. Sur la grille basse résolution, cette approximation va donc être obtenue en utilisant les termes g_2 présents dans le gradient de J_H^{FAS} . Or la hessienne de J_H^{FAS} ne fait pas directement intervenir ces termes (le modèle étant non-linéaire, ils jouent quand même un rôle via les \mathbf{x}_k). Les termes g_2 changeant après chaque minimisation haute résolution, l’algorithme pourra faire intervenir, lors des changements de cycle, une matrice ne correspondant plus à une approximation de la hessienne,

entraînant ainsi une dégradation de la minimisation. Il est donc nécessaire de faire redémarrer ”à froid” la minimisation basse résolution. Cela nuit évidemment aux performances de la minimisation basse résolution. Les résultats présentés dans la suite pourront donc être améliorés en adaptant à notre approche multi-grille le module **M1QN3**.

Nous avons comparé dans nos tests plusieurs variantes de l’algorithme 4D-Var FAS à l’algorithme mono-grille. La première est l’algorithme 4D-Var FAS avec facteur d’échelle tel qu’il est décrit au §5.3.2.1. La seconde est l’algorithme 4D-Var FAS sans ce facteur d’échelle afin de mesurer son impact au niveau de la minimisation haute résolution. Enfin, dans la troisième, nous avons retiré les termes g_2 dans le calcul de la fonction coût basse résolution (le facteur d’échelle est conservé par contre). La valeur de ce facteur est 27 dans les deux configurations.

Nous présentons uniquement les performances de l’assimilation en terme de minimisation haute résolution de la fonction coût ainsi qu’en terme d’erreur RMS normalisée. Nous rappelons la formule de l’erreur RMS normalisée :

$$\forall t \in [0, T] \text{ RMS}(t) = \frac{\|\mathbf{x}^a(t) - \mathbf{x}^t(t)\|_2}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{x}^t\|_2^2 dt}} \quad (5.57)$$

5.3.3.2 Résultats numériques : cas où la solution est ”loin” de la solution vraie

Nous nous plaçons dans le cas où la solution haute résolution est ”loin” de la solution vraie. L’algorithme FAS va donc nécessiter un nombre important d’itérations de minimisation basse résolution lors des premiers cycles. Au bout de 2 cycles, les dernières itérations de minimisation ne corrigeant que peu les solutions, nous réduisons leur nombre pour chacune des grilles.

La figure 5.2 représente l’évolution de la fonction coût en fonction du nombre d’itérations du minimiseur haute résolution.

Nous constatons tout d’abord que l’algorithme 4D-Var FAS avec facteur d’échelle permet une décroissance plus rapide et plus importante de la fonction coût haute résolution. Après 30 itérations haute résolution, la fonction coût associée à cet algorithme est ainsi 6 fois plus faible que celle associée à l’algorithme mono-grille. De plus, la courbe 4D-Var FAS avec facteur d’échelle présente de nombreux paliers, marqués essentiellement en début de minimisation. Les sauts observés correspondent aux mises à jour des variables de contrôle haute résolution par la correction par grille grossière. Nous constatons qu’elle permet une réduction importante de la fonction coût lors des premières itérations de minimisation. L’utilisation d’un facteur d’échelle lors de la mise à jour des variables de contrôle haute résolution apparaît nécessaire. Sans ce paramètre, les performances de l’algorithme 4D-Var FAS sont très proches de celles de l’algorithme mono-grille. Le facteur d’échelle permet, en leur donnant plus de poids dans la correction par grille grossière, de privilégier les échelles de la correction des conditions aux frontières lors de la recherche linéaire.

L’importance des termes FAS g_2 dans le processus de correction par grille grossière est flagrante. La courbe ”Bi-grid” représente l’application d’une méthode multi-grille classique, c’est à dire sans le terme additionnelle g_2 . Ainsi les courbes de décroissance de la fonction coût associée au cas mono-grille et au cas bi-grille sans g_2 sont presque confondues. Ce terme nous assure que la correction par grille grossière est une approximation du premier ordre (à des coefficients multiplicatif près) du problème d’assimilation haute résolution. Sans celui-ci, il n’y a plus forcément de correspondance entre les problèmes d’optimisation haute et basse résolution. Dans ce cas,

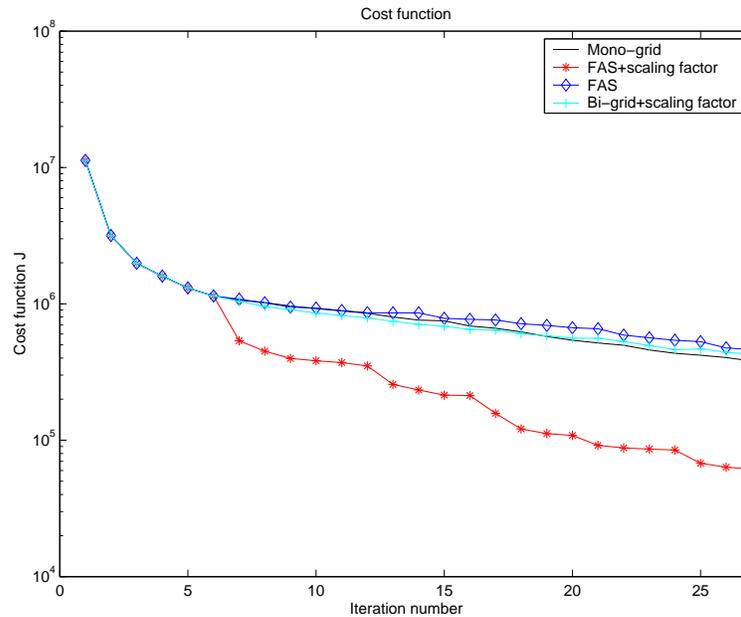


FIG. 5.2 – Evolution des fonctions coût haute résolution en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme d'optimisation. En noir : algorithme mono-grille. En rouge : algorithme 4D-Var FAS avec facteur d'échelle. En bleu : algorithme 4D-Var FAS sans facteur d'échelle. En cyan : algorithme 4D-Var bi-grille sans les termes g_2 .

l'utilisation d'une grille grossière pourra entraîner une augmentation de la fonction coût.

La figure 5.3 représente l'évolution au cours de la minimisation haute résolution de la moyenne temporelle de l'erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau. Naturellement, nous retrouvons des résultats analogues à ceux observés sur la minimisation de la fonctionnelle haute résolution. Nous constatons ainsi que l'algorithme 4D-Var FAS avec facteur d'échelle permet d'obtenir une solution haute résolution avec une erreur plus faible que celle de la solution mono-grille. Néanmoins le gain apporté par le FAS reste relativement faible (5 points d'erreur). Sans ce facteur, la décroissance des erreurs de la solution haute résolution est équivalente à celle de l'algorithme mono-grille.

La figure 5.4 représente l'évolution au cours de la minimisation haute résolution de la moyenne temporelle de l'erreur RMS normalisée sur les vitesses. Nous constatons de nouveau que l'algorithme 4D-Var FAS avec facteur d'échelle permet d'obtenir une solution haute résolution avec une erreur plus faible que celle de la solution mono-grille. L'écart entre les erreurs des solutions FAS et de la solution mono-grille est cette fois-ci plus important (de l'ordre de 15 points d'erreurs). Cependant, la solution FAS présente encore une erreur élevée sur les vitesses. Après presque 30 itérations haute résolution, l'erreur est aux alentours de 50%.

Nous constatons également que l'algorithme bi-grille sans termes g_2 dans la fonction coût basse résolution et l'algorithme 4D-Var FAS sans facteur d'échelle permettent une légère amélioration des vitesses de la solution haute résolution comparé à l'algorithme mono-grille. La solution optimale haute résolution obtenue avec cet algorithme présente toutefois des erreurs sur les

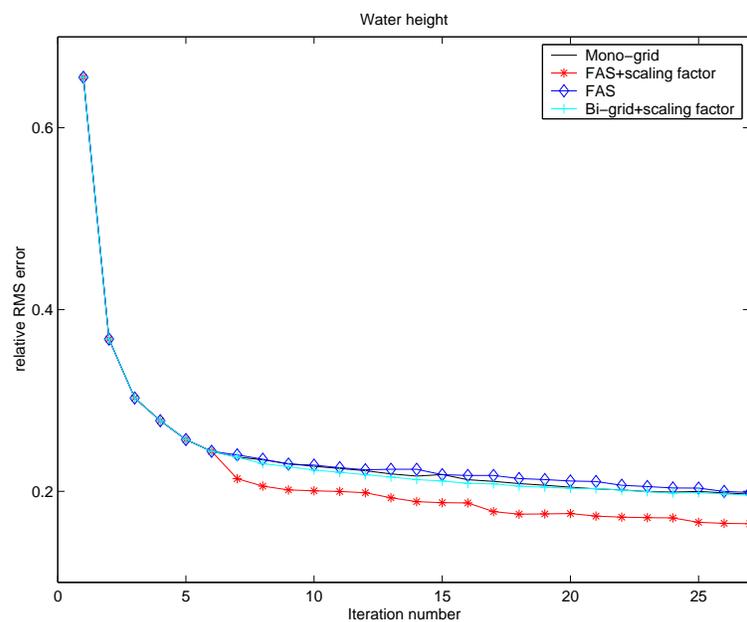


FIG. 5.3 – Moyenne temporelle de l'erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau (variable observée) en fonction du nombre d'itérations de la minimisation haute résolution. En noir : algorithme mono-grille. En rouge : algorithme 4D-Var FAS avec facteur d'échelle. En bleu : algorithme 4D-Var FAS sans facteur d'échelle. En cyan : algorithme 4D-Var bi-grille sans les termes g_2 .

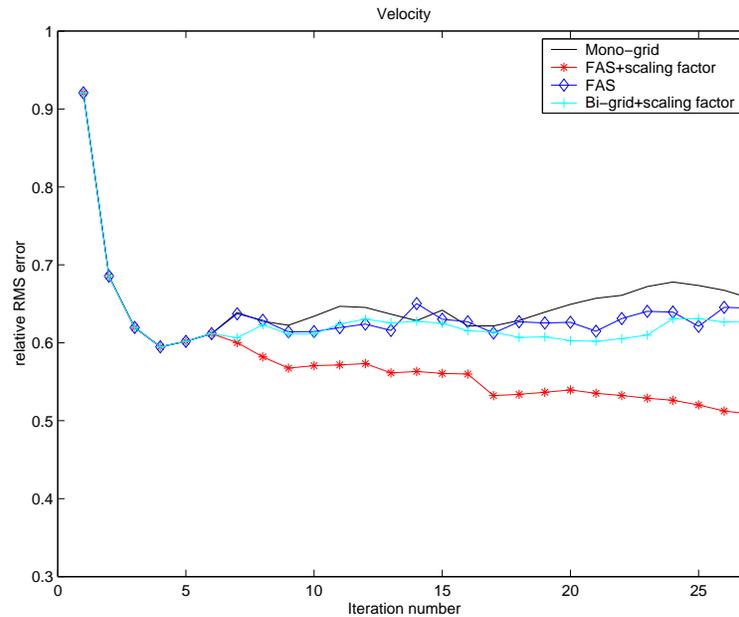


FIG. 5.4 – Moyenne temporelle de l’erreur RMS normalisée sur la vitesse (variable non observée) en fonction du nombre d’itérations de la minimisation haute résolution. En noir : algorithme mono-grille. En rouge : algorithme 4D-Var FAS avec facteur d’échelle. En bleu : algorithme 4D-Var FAS sans facteur d’échelle. En cyan : algorithme 4D-Var bi-grille sans les termes g_2 .

vitesse nettement supérieures à celle de la solution 4D-Var FAS avec facteur d’échelle.

5.3.3.3 Résultats numériques : cas où la solution est ”proche” de la solution vraie

Nous nous plaçons dans le cas où la solution haute résolution est proche de la solution vraie. Dans ce cas, la minimisation basse résolution ne nécessitera plus autant d’itérations pour fournir une correction par grille grossière pertinente. Nous avons donc réduit les nombres d’itérations de minimisation sur chacune des grilles et nous les avons gardés constants au cours des cycles.

La figure 5.5 représente l’évolution de la fonction coût en fonction du nombre d’itérations du minimiseur haute résolution.

Nous constatons de nouveau que l’algorithme 4D-Var FAS avec facteur d’échelle permet une décroissance plus rapide et plus importante de la fonction coût haute résolution. L’écart est toutefois plus faible que celui observé au §5.3.3.2. Ainsi après 30 itérations haute résolution, la fonction coût associée à cet algorithme est entre 2 et 3 fois plus faible que celle associée à l’algorithme mono-grille. Nous retrouvons la présence de nombreux paliers au niveau de la courbe associée à cet algorithme. Les mises à jour des variables de contrôle haute résolution par la correction par grille grossière permettent une réduction importante de la fonction coût surtout lors des premières itérations de minimisation.

Cette configuration montre également l’importance du facteur d’échelle lors de la mise à jour des variables de contrôle haute résolution. Sans ce paramètre, l’algorithme FAS obtient des résultats équivalents voire légèrement moins bons que ceux de l’algorithme mono-grille. En réduisant l’amplitude de la correction sur la condition initiale, il permet de rendre la correction

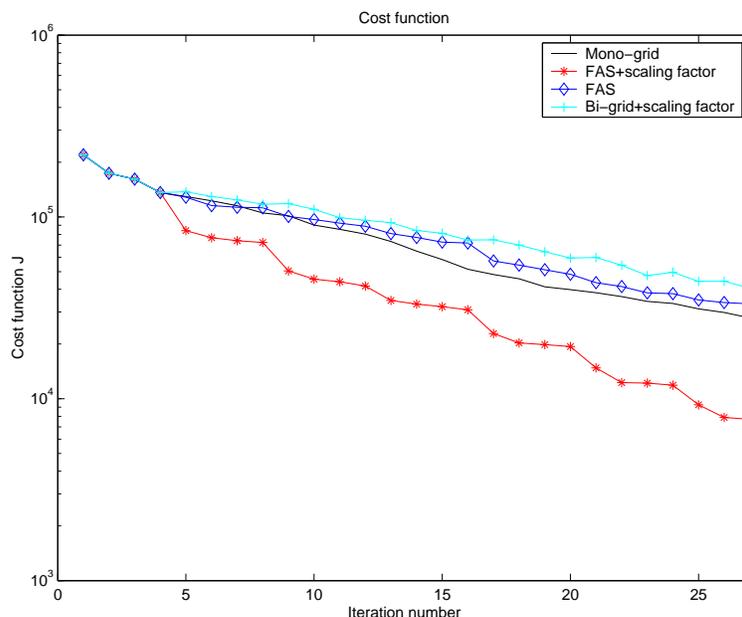


FIG. 5.5 – Evolution des fonctions coût haute résolution en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme d'optimisation. En noir : algorithme mono-grille. En rouge : algorithme 4D-Var FAS avec facteur d'échelle. En bleu : algorithme 4D-Var FAS sans facteur d'échelle. En cyan : algorithme 4D-Var bi-grille sans les termes g_2 .

par grille grossière acceptable pour l'algorithme de recherche linéaire. La correction par grille grossière une fois remise à échelle semble ainsi être une direction de descente de la fonction coût haute résolution. Ce sont les échelles de correction sur la condition initiale qui ne sont pas toujours adaptées au problème d'optimisation haute résolution.

La figure 5.6 représente l'évolution au cours de la minimisation haute résolution de la moyenne temporelle de l'erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau.

Nous retrouvons des résultats analogues à ceux observés sur la minimisation de la fonctionnelle haute résolution. L'algorithme 4D-Var FAS avec facteur d'échelle permet de réduire le plus efficacement les erreurs de la solution haute résolution. Les premières corrections par grille grossière permettent une réduction importante de ces erreurs. Par contre pour la version sans facteur d'échelle, la faiblesse de la décroissance de la fonction coût observée se traduit par une décroissance de l'erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau moins rapide que pour le cas mono-grille. Néanmoins, lors des dernières itérations, ces erreurs RMS sont très proches de celles de la solution obtenue avec l'algorithme mono-grille.

Nous observons le même type de résultats au niveau de l'évolution au cours de la minimisation de la moyenne temporelle de l'erreur RMS normalisée sur les vitesses (figure 5.6). De nouveau, l'algorithme 4D-Var FAS permet une meilleure réduction des erreurs de la solution haute résolution.

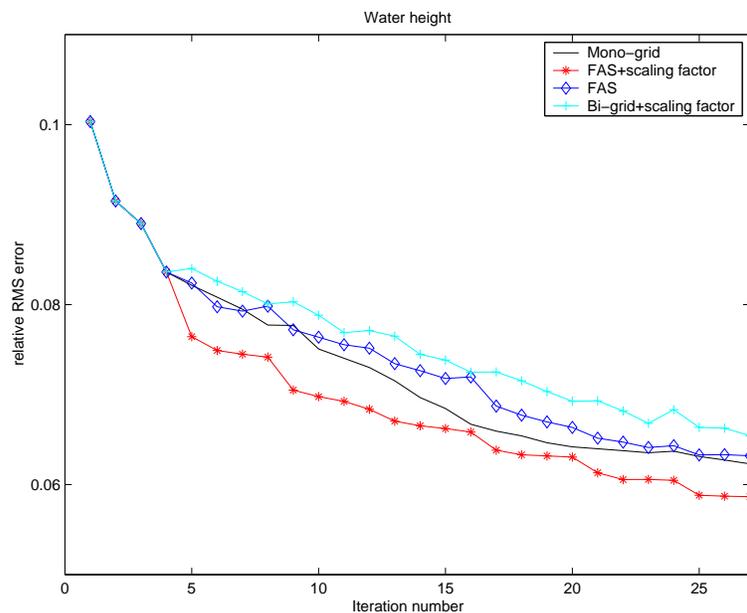


FIG. 5.6 – Moyenne temporelle de l'erreur RMS normalisée sur la hauteur d'eau (variable observée) en fonction du nombre d'itérations de la minimisation haute résolution. En noir : algorithme mono-grille. En rouge : algorithme 4D-Var FAS avec facteur d'échelle. En bleu : algorithme 4D-Var FAS sans facteur d'échelle. En cyan : algorithme 4D-Var bi-grille sans les termes g_2 .

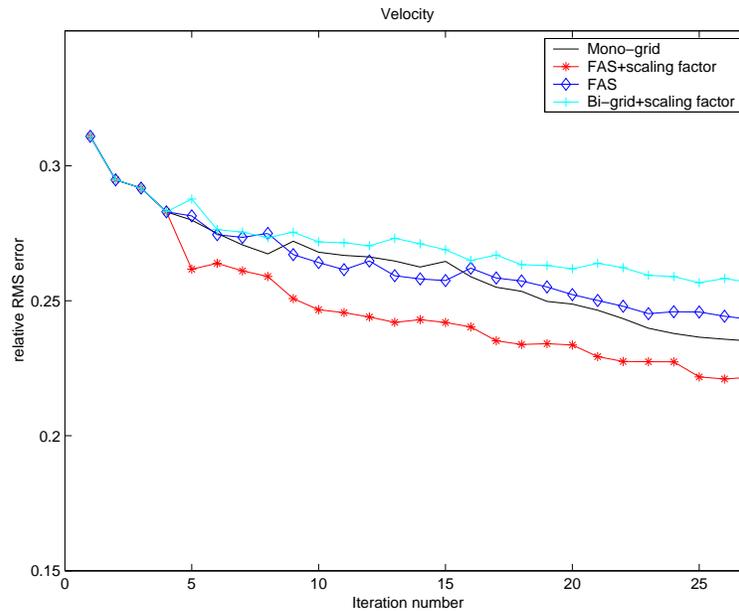


FIG. 5.7 – Moyenne temporelle de l’erreur RMS normalisée sur la vitesse (variable non observée) en fonction du nombre d’itérations de la minimisation haute résolution. En noir : algorithme mono-grille. En rouge : algorithme 4D-Var FAS avec facteur d’échelle. En bleu : algorithme 4D-Var FAS sans facteur d’échelle. En cyan : algorithme 4D-Var bi-grille sans les termes g_2 .

5.3.3.4 Conclusion

L’algorithme 4D-Var FAS avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites a permis sur ces expériences une minimisation plus importante de la fonction coût comparé à un algorithme 4D-Var mono-grille classique. Il a permis d’obtenir des solutions optimales possédant des erreurs plus faibles sur les différentes variables comparées aux solutions optimales mono-grilles, et ce dans les deux configurations étudiées.

Il faut tout de même signaler que dans le cas où la solution est initialement ”loin” de la solution vraie, la solution optimale que l’on obtient avec l’algorithme 4D-Var FAS possède encore des erreurs importantes, surtout au niveau des vitesses, malgré une diminution importante de la fonction coût. L’ajout dans l’expression de fonction coût de termes de régularisation sur le contrôle des conditions aux limites devrait la rendre plus pertinente d’un point de vue physique et ainsi permettre une meilleure correction des erreurs. Ceci peut être vu comme une tentative d’amélioration des propriétés de la hessienne de la fonction coût.

Nous avons pu voir également que l’utilisation d’un facteur d’échelle pour la mise à jour des variables de contrôle haute résolution était nécessaire. Même si cette méthode est simpliste, elle permet néanmoins de compenser, sur ce cas précis, les problèmes théoriques de l’algorithme évoqués au §5.3.2.1.

Enfin, les performances de la minimisation basse résolution peuvent être très certainement améliorées en modifiant le module d’optimisation **M1QN3**. Cette possible amélioration de la correction par grille grossière devrait entraîner une décroissance plus importante de la fonction coût haute résolution.

5.4 Conclusion

Cette étude préliminaire avait pour but la mise en place d'algorithmes d'assimilation variationnelle de données basés sur une approche multi-grille. L'application du Full Approximation Scheme à la recherche des points critiques de la fonction coût 4D-Var nous a permis d'obtenir un algorithme 4D-Var multi-grille, appelé dans ce chapitre 4D-Var FAS. Celui-ci possède de "bonnes" propriétés d'optimisation lorsque les variables de contrôle sont de même dimension (typiquement contrôle de la condition initiale seule ou des conditions aux limites seules). Outre le fait que sa convergence soit assurée pour un grand nombre de problèmes d'optimisation, la correction par grille grossière, qui fait la force de cet algorithme, apparaît comme une descente de type Newton, et se révèle ainsi bien adaptée à la minimisation de la fonction coût. Dans le cas où les composantes de la variables de contrôle seraient de dimension différentes (par exemple le contrôle simultané de la condition initiale et des conditions aux limites), la correction par grille grossière n'apparaît plus comme une descente de type Newton et pourra avoir des échelles non adaptées au problème d'assimilation haute résolution.

En pratique, afin de remédier à ce problème, nous avons proposé une méthode simple consistant à introduire un facteur d'échelle afin de privilégier la direction d'une des composantes du vecteur de contrôle lors de la correction par grille grossière. Les tests numériques réalisés sur des configurations idéalisées 1D et 2D nous ont permis de constater un gain important en terme de minimisation de la fonction coût via l'utilisation de cet algorithme et l'introduction de ce paramètre pour les tests 2D. Il a permis d'obtenir des solutions optimales possédant des erreurs plus faibles sur les différentes variables comparées aux solutions optimales mono-grille.

Néanmoins de nombreux problèmes restent en suspens. Ainsi, les solutions optimales obtenues pour les configuration 2D à frontières ouvertes présentent encore des niveaux d'erreur importants, surtout sur les variables non observées. Des améliorations de la fonction coût sont donc à prévoir, tant d'un point de vue physique (matrice \mathbf{B}) que mathématique. Pour cela, il nous paraît indispensable d'étudier théoriquement la façon de préconditionner la fonction coût afin de s'assurer que la correction par grille grossière soit bien une approximation d'une direction de descente de type Newton du problème d'assimilation haute résolution. De plus, l'étude des propriétés d'ellipticité de sa hessienne nous paraît intéressante. Les informations obtenues devraient nous permettre de choisir avec précision les termes de régularisation à ajouter à la fonction coût et nous renseigner également sur la nature du préconditionnement recherché.

Au niveau pratique, il est également nécessaire de repenser l'algorithme d'optimisation afin de pouvoir le faire fonctionner sans avoir à faire des redémarrages "à froid".

Enfin, il reste à mettre en place un algorithme d'assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés basé sur une application locale du FAS. De nombreux problèmes apparaissent dans ce cas. Comment obtenir un algorithme vérifiant la propriété FAS, à savoir que si l'optimum local haute résolution est atteint, la correction par grille grossière ne le modifie pas. Peut-on obtenir un algorithme ayant des bonnes propriétés de convergence, les problèmes d'optimisation pouvant être radicalement différents d'une grille à l'autre ?

Conclusion et perspectives

Le but de ces travaux était de mettre en place une formulation de l'assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés, puis de la valider sur des cas tests numériques simples.

Nous avons proposé plusieurs variantes d'un algorithme de type 4D-Var qui se révèlent parfaitement adaptées aux différentes interactions présentes entre les modèles. Pour le cas général d'une grille haute résolution emboîtée localement dans une autre à plus faible résolution, nous avons posé les équations du système adjoint dans les deux cas d'interactions *one-way* et *two-way*. Nous avons montré que la formulation adjointe fait naturellement apparaître de nouvelles interactions entre les grilles, dans le sens opposé de celles existant dans la formulation directe. Nous avons envisagé plusieurs types de contrôle pour la minimisation de notre fonction coût : dans un premier temps, la condition initiale bi-grille, à laquelle, dans un second temps, nous avons ajouté un terme de contrôle sur les transferts inter-grilles (algorithmes *wic*).

Nous avons également étudié la structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} toujours dans le cas d'un emboîtement bi-grille. Nous avons notamment montré que dans le cas où l'ébauche était obtenue par intégration par un modèle bi-grille d'une ébauche antérieure, il était possible d'approximer \mathbf{B} par l'intégration de la matrice d'erreur d'ébauche présente sur la fenêtre antérieure, par le linéaire tangent du modèle bi-grille auquel s'ajoutent des termes d'erreur modèle. Nous avons obtenu ainsi une relation de récurrence entre les matrices de covariance d'erreur d'ébauche de deux fenêtres d'assimilation consécutives, qui s'avère être la même que dans le cas mono-grille. Il va être possible d'appliquer au cas bi-grille les méthodes de calcul de la matrice \mathbf{B} déjà existantes pour le cas mono-grille.

Nous avons testé les différents algorithmes proposés lors d'expériences jumelles sur un modèle shallow water 2D. Nous nous sommes placés dans une optique d'assimilation de données dans un modèle présentant des frontières ouvertes. Il correspond au modèle local haute résolution décrit dans notre emboîtement. Nous avons assimilé des observations de hauteur d'eau présentes uniquement sur le domaine du zoom.

Les résultats obtenus grâce à l'assimilation bi-grille sont bien meilleurs que ceux résultant d'un algorithme mono-grille avec contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites. Ces algorithmes permettent de converger rapidement vers des solutions optimales haute résolution très proches de la solution vraie. Ces solutions présentent des erreurs beaucoup plus faibles que celles de la solution optimale mono-grille. Les solutions basse résolution ont également été améliorées, dans des proportions plus faibles, sur l'ensemble du domaine. Ces bonnes performances s'expliquent par le fait que l'emboîtement de modèles a permis une réelle correction des conditions aux frontières du modèle haute résolution, ce qui n'était pas le cas pour l'algorithme mono-grille.

L'utilisation d'emboîtements en interaction *two-way* en comparaison des interactions *one-way* a entraîné une nette amélioration des solutions haute résolution surtout sur les vitesses (variables non observées). Néanmoins, l'emboîtement *one-way* reste très intéressant de par sa simplicité d'implémentation informatique.

Enfin, l'apport du contrôle des erreurs de transferts inter-grilles a permis une décroissance plus importante de la fonction coût. Dans le cas d'interaction *two-way*, ceci se traduit par une accélération en début de minimisation de la convergence des erreurs RMS des solutions haute résolution et une amélioration des propriétés énergétiques des solutions optimales.

Enfin, nous avons étudié l'application des méthodes multi-grilles à l'assimilation variationnelle de données. L'application du Full Approximation Scheme à la résolution de l'équation d'Euler ($\nabla J = 0$) nous a permis d'obtenir un algorithme d'assimilation variationnelle multi-grille appelé 4D-Var FAS. Celui-ci s'avère très proche du module d'optimisation multi-grille MG/Opt développé par Nash [39]. Nous avons pu constater que cet algorithme possède de bonnes propriétés d'optimisation dans le cas où l'on contrôle uniquement la condition initiale (ou les conditions aux limites), mais que celles-ci pouvaient être perdues dans le cas du contrôle conjoint de la condition initiale et des conditions aux limites. Ces variables n'étant pas de même dimension, les différents transferts inter-grilles font ainsi apparaître des problèmes d'échelles entre les variables. Afin d'y remédier, nous avons proposé une méthode simple consistant à introduire un facteur d'échelle sur les variables de contrôle lors de la correction par grille grossière.

Les tests numériques 1D et 2D ont permis de montrer un gain important en terme de réduction de la fonction coût via l'utilisation de l'algorithme 4D-Var FAS. Il a permis d'obtenir des solutions optimales possédant des erreurs plus faibles sur les différentes variables comparées aux solutions optimales mono-grilles. Néanmoins, ces erreurs, pour la configuration 2D, restent encore importantes surtout sur les variables non observées.

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses. Tout d'abord, en ce qui concerne les modèles emboîtés, il serait intéressant de tester nos algorithmes dans une configuration réaliste (modèle 3D, observations réelles) afin d'en apprécier les performances dans un contexte opérationnel. Bien souvent, soit les modèles d'océan permettent de mettre en place facilement un emboîtement *on-line* soit ils disposent de leur modèle adjoint. Mais rares sont les modèles intégrant à la fois des modules de raffinement de maillages et d'assimilation variationnelle de données. D'importants travaux de développement sont donc à prévoir. Cependant, il nous paraît s'agir là d'étapes indispensables pour disposer in fine de systèmes régionaux de modélisation et de prévision performants, systèmes pour lesquels la demande est de plus en plus forte actuellement.

Il serait également intéressant, pour les algorithmes *wic*, d'étudier les termes de régularisation portant sur le contrôle des transferts inter-grilles, afin que celui-ci soit plus pertinent d'un point de vue physique.

En ce qui concerne l'approche FAS de l'assimilation variationnelle de données, l'étude théorique de la hessienne de la fonction coût via l'étude de son symbole est à mener afin d'évaluer ses propriétés d'ellipticité. Les informations obtenues devraient nous permettre de choisir avec précision les termes de régularisation à ajouter à la fonction coût, ainsi que le préconditionnement à appliquer aux variables de contrôle permettant de résoudre les problèmes d'échelles rencontrés dans le cas du contrôle de la condition initiale et des conditions aux limites.

Il reste également à mettre en place un algorithme d'assimilation variationnelle de données pour des modèles emboîtés basé sur une application locale du FAS. De nombreux problèmes apparaissent notamment sur la propriété FAS de l'algorithme (à savoir que si l'optimum local

haute résolution est atteint, la correction par grille grossière ne le modifie pas), et sur les propriétés de convergence et d'efficacité (les problèmes d'optimisation pouvant être radicalement différents d'une grille à l'autre).

Enfin, la question de l'introduction d'observations dans le modèle basse résolution est aussi à étudier. Ainsi, jusqu'à présent dans les tests numériques effectués, les observations étaient présentes uniquement sur la grille haute résolution. Le but était alors de savoir si l'emploi de modèles multi-grilles permettait d'améliorer les performances de l'assimilation par rapport à un algorithme mono-grille pour un modèle présentant des frontières ouvertes. Il reste encore à traiter la question de l'assimilation de données dans les modèles emboîtés déjà opérationnels. La question fondamentale sous-jacente concerne le choix des observations à utiliser sur chacune des grilles suivant leur résolution. Ainsi des observations pertinentes à une certaine échelle ne le seront plus forcément à une autre, et seraient alors susceptibles de dégrader les performances de l'assimilation de données (Le Dimet et Shutyaev [19]). Il va donc falloir étudier l'influence des observations dans un tel système d'assimilation de données, et définir sur quels critères s'appuyer pour sélectionner les observations à assimiler sur chaque grille. A nos yeux, le calcul des degrés de liberté du signal (DFS) semble un outil de diagnostic intéressant pour aborder cette question (Cardinali et al [10], Chapnik [11]).

Nous retrouvons là, exprimé dans un contexte multi-échelles, toute la problématique de l'assimilation de données : comment combiner ces sources d'information distinctes que sont les modèles et les observations pour obtenir la meilleure représentation possible de l'évènement particulier sur lequel notre attention se porte ?

Annexes

Annexe A

Structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Nous développons dans cette partie les calculs permettant d'aboutir aux résultats de la partie 2.2 concernant la structure de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche dans le cas d'interactions one-way et two-way.

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche est de la forme :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{B}_{Hh} \\ \mathbf{B}_{hH} & \mathbf{B}_{hh} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Le bloc \mathbf{B}_{HH} correspond aux covariances d'erreur d'ébauche des variables d'état de la grille grossière, le bloc \mathbf{B}_{hh} à celles des variables d'états de la grille fine, et les blocs \mathbf{B}_{Hh} et \mathbf{B}_{hH} aux covariances entre les deux grilles. Nous notons dans toute la suite de ce document N_H la taille du vecteur d'état sur la grille grossière et N_h celle du vecteur d'état sur la grille fine. Nous avons alors $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{N_H+N_h}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_{HH} \in \mathcal{M}_{N_H}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_{hh} \in \mathcal{M}_{N_h}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}_{Hh} \in \mathcal{M}_{N_H, N_h}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B}_{hH} \in \mathcal{M}_{N_h, N_H}(\mathbb{R})$.

A.1 Cadre simplifié : l'ébauche haute résolution est obtenue par interpolation de l'ébauche basse résolution

Dans un premier temps nous faisons l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\mathbf{x}_h^b = I_H^h(\mathbf{x}_H^b) \quad (\text{A.2})$$

où I_H^h est un opérateur d'interpolation non linéaire, de F_{Ω_H} dans F_{ω_h} . Nous supposons ainsi que le vecteur d'ébauche de la grille fine est obtenu par interpolation de la composante ω_H du vecteur d'ébauche de la grille grossière. Cette situation est fréquente en pratique : lors de la mise en place de l'emboîtement de modèles, la solution haute résolution est obtenue en interpolant la solution basse résolution.

A.1.1 Erreur d'ébauche

L'erreur d'ébauche sur la grille fine ϵ_h^b devient :

$$\begin{aligned}\epsilon_h^b &= I_H^h(\mathbf{x}_H^b) - \mathbf{x}_h^t \\ &= (I_H^h(\mathbf{x}_H^b) - I_H^h(\mathbf{x}_H^t)) + (I_H^h(\mathbf{x}_H^t) - \mathbf{x}_h^t)\end{aligned}\tag{A.3}$$

Posons $\epsilon^{I,t} = I_H^h(\mathbf{x}_H^t) - \mathbf{x}_h^t$. Ce terme correspond à l'erreur commise par l'interpolation de la solution vraie de la grille grossière vis-à-vis de la solution vraie sur la grille fine.

En linéarisant l'opérateur d'interpolation au voisinage de l'ébauche grossière, il vient :

$$I_H^h(\mathbf{x}_H^t) = I_H^h(\mathbf{x}_H^b) - \mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b + \alpha_h, \quad \|\alpha_h\| = o(\|\epsilon_H^b\|)\tag{A.4}$$

où \mathbf{I}_H^h symbolise $\mathbf{I}_H^h(\mathbf{x}_H^b)$.

Il vient,

$$\epsilon_h^b = \mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b + \epsilon^{I,t} + \alpha_h, \quad \|\alpha_h\| = o(\|\epsilon_H^b\|)$$

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Effectuons le changement de variable $\alpha_h = \varepsilon \mathbf{a}_h$. L'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit :

$$\epsilon_h^b = \mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b + \epsilon^{I,t} + \varepsilon \mathbf{a}_h$$

A.1.2 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} .

- Calcul de \mathbf{B}_{hH} :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{hH} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_H^b) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b, \epsilon_H^b) + \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \epsilon_H^b) + \text{Cov}(\alpha_h, \epsilon_H^b)\end{aligned}\tag{A.5}$$

Faisons l'hypothèse suivante :

$$\text{hyp} : \epsilon^{I,t} \text{ et } \epsilon_H^b \text{ sont indépendantes.}$$

Nous supposons ainsi que les erreurs d'ébauche sur la grille grossière et les erreurs commises en approximant "l'état vrai" de la grille fine par une interpolation de "l'état vrai" de la grille grossière sont indépendantes. Cette hypothèse paraît naturelle, le choix de l'ébauche étant à priori indépendant du choix de l'opérateur d'interpolation.

$$\text{D'où } \mathbf{B}_{hH} = \text{Cov}(\mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b, \epsilon_H^b) + \varepsilon \text{Cov}(\mathbf{a}_h, \epsilon_H^b).$$

$$\text{Or } \text{Cov}(\mathbf{I}_H^h \epsilon_H^b, \epsilon_H^b) = \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH}$$

D'où,

$$\mathbf{B}_{hH} = \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH} + \varepsilon \text{Cov}(\mathbf{a}_h, \epsilon_H^b)$$

- Calcul de \mathbf{B}_{Hh} :

\mathbf{B} étant symétrique, il vient $\mathbf{B}_{Hh} = \mathbf{B}_{hH}^T$. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Hh} &= (\mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH})^T + \varepsilon (\text{Cov}(\mathbf{a}_h, \epsilon_H^b))^T \\ &= \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} + \varepsilon \text{Cov}(\epsilon_H^b, \mathbf{a}_h) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Soit,

$$\boxed{\mathbf{B}_{Hh} = \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} + \varepsilon \text{Cov}(\epsilon_H^b, \mathbf{a}_h)}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hh} :

En injectant l'expression de ϵ_h^b , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hh} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_h^b) \\ &= \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{I}_H^h \text{Cov}(\epsilon_H^b, \epsilon^{I,t}) \\ &\quad + \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \epsilon_H^b) \mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}} \\ &\quad + \varepsilon \mathbf{I}_H^h \text{Cov}(\epsilon_H^b, \mathbf{a}_h) + \varepsilon \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \mathbf{a}_h) + \varepsilon \text{Cov}(\mathbf{a}_h, \epsilon_H^b) \mathbf{I}_H^{hT} \\ &\quad + \varepsilon \text{Cov}(\mathbf{a}_h, \epsilon^{I,t}) + \varepsilon^2 \mathbf{B}_{\mathbf{a}_h} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Toujours sous l'hypothèse que $\epsilon^{I,t}$ et ϵ_H^b sont indépendantes, il vient

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{B}_{hh} &= \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}} \\ &\quad + \varepsilon [\mathbf{I}_H^h \text{Cov}(\epsilon_H^b, \mathbf{a}_h) + \text{Cov}(\epsilon^{I,t}, \mathbf{a}_h) + \text{Cov}(\mathbf{a}_h, \epsilon_H^b) \mathbf{I}_H^{hT} \\ &\quad + \text{Cov}(\mathbf{a}_h, \epsilon^{I,t})] + \varepsilon^2 \mathbf{B}_{\mathbf{a}_h} \end{aligned}}$$

Finalement, \mathbf{B} s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{B}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{B}^{(2)}}.$$

A.1.2.1 Approximation de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons nous alors à l'ordre 0 de \mathbf{B} , c'est à dire, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)}$.

$$\mathbf{B}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} \\ \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH} & \mathbf{I}_H^h \mathbf{B}_{HH} \mathbf{I}_H^{hT} + \mathbf{B}_{\epsilon^{I,t}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Nous retrouvons la matrice obtenue dans la partie (2.2.1) dans le cas d'un opérateur d'interpolation linéaire, \mathbf{I}_H^h étant ici le linéarisé de I_H^h au voisinage de l'ébauche.

A.2 L'ébauche est obtenue après intégration d'un modèle bi-grille en interaction one-way dans un cas non-linéaire

Nous supposons cette fois-ci que l'ébauche est obtenue après intégration d'une ébauche initiale par un modèle non-linéaire en configuration *one-way* durant un unique pas de temps. Nous avons vu que l'extension à n pas de temps ne posait pas de difficulté.

La matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} que nous cherchons à calculer peut également être vue comme une matrice de covariance d'erreur de prévision. Notons $\tilde{\mathbf{B}}$ la matrice de covariance d'erreur d'ébauche obtenue sur la fenêtre antérieure. Enfin, notons également avec un "tilde" les variables de la fenêtre antérieure.

Ceci s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H^b = M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) \\ \mathbf{x}_h^b = M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Nous faisons les hypothèses suivantes en ce qui concerne le modèle :

- M_H est différentiable en $\tilde{\mathbf{x}}_H^b$. Nous pouvons ainsi linéariser le modèle autour de ce vecteur. Par la suite, nous utiliserons la notation \mathbf{M}_H pour représenter $\mathbf{M}_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)$.
- M_h admet des dérivées partielles suivant \mathbf{x}_h en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))$ et suivant $\mathbf{x}_{\partial\omega}$ en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))$. Nous les noterons $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}$ et $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}}$.

A.2.1 Erreur d'ébauche

Grille grossière

L'erreur d'ébauche sur la grille grossière ϵ_H^b devient :

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{x}_H^t \\ &= (M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)) + (M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t) - \mathbf{x}_H^t) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Posons $\epsilon_H^M = \mathbf{x}_H^t - M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)$. Ce terme correspond à l'erreur modèle du modèle basse résolution.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= (M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)) - \epsilon_H^M \\ &= M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - (M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t) + \mathbf{M}_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t - \tilde{\mathbf{x}}_H^b) + \tilde{\alpha}_H) - \epsilon_H^M, \\ &\quad \|\tilde{\alpha}_H\| = o(\|\tilde{\mathbf{x}}_H^t - \tilde{\mathbf{x}}_H^b\|) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Posons $\tilde{\epsilon}_H^b = \tilde{\mathbf{x}}_H^b - \tilde{\mathbf{x}}_H^t$. Ce terme correspond à l'erreur d'ébauche sur la grille grossière comme définie dans la partie précédente.

Il vient finalement, en choisissant $\tilde{\alpha}_H = -\tilde{\alpha}_H$,

$$\boxed{\epsilon_H^b = \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M + \tilde{\alpha}_H, \quad \|\tilde{\alpha}_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)}$$

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Effectuons le changement de variable $\tilde{\alpha}_H = \varepsilon \tilde{\mathbf{a}}_H$. L'erreur d'ébauche sur la grille grossière devient :

$$\boxed{\epsilon_H^b = \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M + \varepsilon \tilde{\mathbf{a}}_H}$$

Grille fine

L'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_h^b &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - \mathbf{x}_h^t \\
 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) \\
 &\quad + M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t))) \\
 &\quad + M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t))) - \mathbf{x}_h^t
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Posons $\epsilon_h^M = \mathbf{x}_h^t - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))$. Ce terme correspond à l'erreur modèle haute résolution.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) \\
 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - [M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))] \\
 &\quad + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}(\tilde{\mathbf{x}}_h^t - \tilde{\mathbf{x}}_h^b) + \tilde{\beta}_h, \quad \|\tilde{\beta}_h\| = o(\|\tilde{\mathbf{x}}_h^t - \tilde{\mathbf{x}}_h^b\|)
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Posons $\tilde{\epsilon}_h^b = \tilde{\mathbf{x}}_h^b - \tilde{\mathbf{x}}_h^t$. Il vient,

$$I_1 = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_h, \quad \|\tilde{\beta}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t))) \\
 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h([M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H]))
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h([M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H])) \\
 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) + \mathbf{I}_H^h(-\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H) + \tilde{\gamma}_h, \\
 &\quad \|\tilde{\gamma}_h\| = o(\|\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H\|)
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Lemme : Si \mathbf{M}_H est borné sur F_{Ω_H} , alors $\|\tilde{\gamma}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$.

En effet, si \mathbf{M}_H est borné sur F_{Ω_H} , alors nous pouvons définir $\|\mathbf{M}_H\|$. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\|\tilde{\gamma}_h\|}{\|\tilde{\epsilon}_H^b\|} &= \frac{\|\tilde{\gamma}_h\|}{\|\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H\|} \frac{\|\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H\|}{\|\tilde{\epsilon}_H^b\|} \\
 &\leq \frac{\|\tilde{\gamma}_h\|}{\|\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H\|} (\|\mathbf{M}_H\| + \frac{\|\tilde{\alpha}_H\|}{\|\tilde{\epsilon}_H^b\|})
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Or, $\|\tilde{\gamma}_h\| = o(\|\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H\|)$ et $\|\tilde{\alpha}_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$, il vient, $\frac{\|\tilde{\gamma}_h\|}{\|\tilde{\epsilon}_H^b\|} \rightarrow 0$, \square .

D'où,

$$\begin{aligned}
 I_3 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) + \mathbf{I}_H^h(-\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\alpha}_H) + \tilde{\gamma}_h, \\
 &\quad \|\tilde{\gamma}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|) \\
 &= M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}}(-\mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \mathbf{I}_H^h \tilde{\alpha}_H + \tilde{\gamma}_h) + \tilde{\delta}_h, \\
 &\quad \|\tilde{\delta}_h\| = o(\|-\mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \mathbf{I}_H^h \tilde{\alpha}_H + \tilde{\gamma}_h\|)
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

De la même manière que pour $\tilde{\gamma}_h$, on démontre que $\|\tilde{\delta}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)$.

D'où,

$$I_2 = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \tilde{\alpha}_H - \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \tilde{\gamma}_h - \tilde{\delta}_h \quad (\text{A.19})$$

Supposons que $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}}$ soit borné sur F_{ω_h} . De la même manière, il vient :

$$\left\| \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \tilde{\alpha}_H + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \tilde{\gamma}_h + \tilde{\delta}_h \right\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|) \quad (\text{A.20})$$

D'où,

$$I_2 = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\sigma}_h, \|\tilde{\sigma}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|) \quad (\text{A.21})$$

D'où,

$$\epsilon_h^b = I_1 + I_2 - \epsilon_h^M \quad (\text{A.22})$$

Soit,

$$\begin{aligned} \epsilon_h^b &= \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M + \tilde{\beta}_h + \tilde{\sigma}_h, \\ \|\tilde{\beta}_h\| &= o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) \\ \|\tilde{\sigma}_h\| &= o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|) \end{aligned}$$

Effectuons les changements de variable $\tilde{\beta}_h = \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}_h$ et $\tilde{\sigma}_h = \varepsilon \tilde{\mathbf{s}}_h$, avec ε fixé précédemment. L'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit

$$\epsilon_h^b = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M + \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}_h + \varepsilon \tilde{\mathbf{s}}_h,$$

A.2.2 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} .

- Calcul de \mathbf{B}_{HH} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{HH} &= \text{Cov}(\epsilon_H^b, \epsilon_H^b) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b) + \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_H^M) + \text{Cov}(\tilde{\alpha}_H, \tilde{\alpha}_H) \\ &\quad + \text{Cov}(\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\alpha}_H) + \text{Cov}(\tilde{\alpha}_H, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b) - \text{Cov}(\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b, \epsilon_H^M) \\ &\quad - \text{Cov}(\epsilon_H^M, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b) - \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\alpha}_H) - \text{Cov}(\tilde{\alpha}_H, \epsilon_H^M) \\ &= \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T + \mathbf{Q}_H - \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \epsilon_H^M) - \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \\ &\quad + \varepsilon \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T - \varepsilon \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{a}}_H) - \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \epsilon_H^M) \\ &\quad + \varepsilon^2 \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{a}}_H} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

avec \mathbf{Q}_H la matrice de covariance d'erreur modèle basse résolution.

Nous faisons ici une nouvelle hypothèse :

hyp : $\tilde{\epsilon}_H^b$ et ϵ_H^M sont indépendantes.

Nous supposons que l'erreur d'ébauche basse résolution et l'erreur modèle basse résolution sont indépendantes. Cette hypothèse discutable pour une ébauche issue d'une phase de prévision du modèle est classique en assimilation de données mono-grille.

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{HH} &= \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T + \mathbf{Q}_H \\ &+ \varepsilon [\mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T - \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{a}}_H) - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \epsilon_H^M)] \\ &+ \varepsilon^2 \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{a}}_H} \end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hH} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{hH} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_H^b) \\ &= \text{Cov}\left(\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b\right) - \text{Cov}\left(\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b, \epsilon_H^M\right) + \text{Cov}\left(\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\alpha}_H\right) \\ &+ \text{Cov}\left(\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b\right) - \text{Cov}\left(\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b, \epsilon_H^M\right) \\ &+ \text{Cov}\left(\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\alpha}_H\right) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b) + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \\ &- \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\alpha}_H) + \text{Cov}(\tilde{\beta}_h, \tilde{\alpha}_H) + \text{Cov}(\tilde{\beta}_h, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b) - \text{Cov}(\tilde{\beta}_h, \epsilon_H^M) \\ &+ \text{Cov}(\tilde{\sigma}_h, \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b) - \text{Cov}(\tilde{\sigma}_h, \epsilon_H^M) + \text{Cov}(\tilde{\sigma}_h, \tilde{\alpha}_H) \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T - \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \epsilon_h^M) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \\ &- \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \epsilon_H^M) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \\ &+ \varepsilon \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \varepsilon \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) - \varepsilon \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{a}}_H) \\ &+ \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T - \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon_H^M) + \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T - \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon_H^M) \\ &+ \varepsilon^2 \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \varepsilon^2 \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\mathbf{a}}_H) \end{aligned}$$

Nous faisons ici une nouvelle hypothèse :

hyp : $\tilde{\epsilon}_H^b$ et ϵ_h^M d'une part, et $\tilde{\epsilon}_h^b$ et ϵ_H^M sont indépendantes d'autre part

Nous supposons ainsi que l'erreur d'ébauche antérieure sur une grille et l'erreur modèle sur l'autre grille sont indépendantes. Nous prolongeons au cas bi-grille l'hypothèse que les erreurs modèles sur chacune des grilles sont indépendantes des états de ces modèles.

D'où

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{hH} &= \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \\
 &+ \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \\
 &+ \varepsilon \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{a}}_H) \right. \\
 &+ \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon_H^M) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon_H^M) \left. \right] \\
 &+ \varepsilon^2 [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\mathbf{a}}_H)]
 \end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{Hh} :

Par symétrie de \mathbf{B} , il vient $\mathbf{B}_{Hh} = \mathbf{B}_{hH}^T$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{Hh} &= \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 &+ \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\
 &+ \varepsilon [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \epsilon_h^M) \\
 &+ \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) - \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) - \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{s}}_h) \left. \right] \\
 &+ \varepsilon^2 [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\mathbf{s}}_h)]
 \end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hh} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{hh} &= \text{Cov}(\epsilon_h^b, \epsilon_h^b) \\
 &= \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 &- \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \epsilon_h^M) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \\
 &+ \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T - \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \epsilon_h^M) \\
 &- \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T + \mathbf{Q}_h \\
 &+ \varepsilon \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) + \varepsilon \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \varepsilon \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) \\
 &+ \varepsilon \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) - \varepsilon \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{b}}_h) - \varepsilon \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{s}}_h) \\
 &+ \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T - \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon_h^M) \\
 &+ \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T - \varepsilon \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon_h^M) \\
 &+ \varepsilon^2 \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{b}}_h} + \varepsilon^2 \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{s}}_h} + \varepsilon^2 \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \varepsilon^2 \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\mathbf{s}}_h)
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Sous l'hypothèse $\boxed{\text{hyp} : \tilde{\epsilon}_h^b \text{ et } \epsilon_h^M \text{ sont indépendantes}}$

il vient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{hh} = & \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\mathbf{B}}_{hH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 & + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{Hh} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\mathbf{B}}_{HH} \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
 & + \mathbf{Q}_h \\
 & + \varepsilon \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) \right. \\
 & + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{b}}_h) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{s}}_h) \\
 & + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon_h^M) \\
 & + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{I}_H^{hT} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon_h^M) \left. \right] \\
 & + \varepsilon^2 [\mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{b}}_h} + \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{s}}_h} + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\mathbf{s}}_h)]
 \end{aligned}$$

Finalement, \mathbf{B} s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{B}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{B}^{(2)}.$$

A.3 L'ébauche est obtenue après intégration d'un modèle bi-grille en interaction two-way dans un cas non-linéaire

Nous supposons cette fois-ci que l'ébauche est obtenue après intégration d'une ébauche initiale par un modèle non-linéaire en configuration *two-way* durant un unique pas de temps. Nous avons vu que l'extension à n pas de temps ne posait pas de difficulté.

Ceci s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_H^b = \mathbf{J}_{\omega_H} M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) \\ \mathbf{x}_h^b = M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Nous faisons les hypothèses suivantes en ce qui concerne le modèle :

- M_H est différentiable en $\tilde{\mathbf{x}}_H^b$. Nous pouvons ainsi linéariser le modèle autour de ce vecteur. Par la suite, nous utiliserons la notation \mathbf{M}_H pour représenter $\mathbf{M}_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)$.
- M_h admet des dérivées partielles suivant \mathbf{x}_h en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(\mathbf{K}_{\partial\omega_H} M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))$ et suivant $\mathbf{x}_{\partial\omega}$ en $(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(\mathbf{K}_{\partial\omega_H} M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))$. Nous les noterons $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}$ et $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}}$.
- G_h^H est différentiable sur F_{ω_h} . Nous noterons

$$\begin{cases} \mathbf{G}_h^H = \mathbf{G}_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) \\ \bar{\mathbf{G}}_h^H = \mathbf{G}_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) \\ \tilde{\mathbf{G}}_h^H = \mathbf{G}_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Enfin, notons la restriction de \mathbf{x}_H à l'intérieur de ω_H

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\dot{\omega}_H} : F_{\Omega_H} & \rightarrow F_{\omega_H} \\
 \mathbf{x}_H & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{sur } \partial\omega_H \\ \mathbf{x}_H & \text{sur } \dot{\omega}_H \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Nous avons ainsi : $\mathbf{J}_{\dot{\omega}_H} + \bar{\mathbf{J}}_{\dot{\omega}_H} \mathbf{K}_{\dot{\omega}_H} = \mathbf{I}_{F_{\Omega_H}}$.

A.3.1 Erreur d'ébauche

Grille grossière

L'erreur d'ébauche sur la grille grossière ϵ_H^b devient :

$$\begin{aligned}\epsilon_H^b &= \mathbf{x}_H^b - \mathbf{x}_H^t \\ &= \mathbf{J}_{\hat{\omega}_H}[M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{x}_H^t] + \bar{\mathbf{J}}_{\hat{\omega}_H}[G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) - \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H}\mathbf{x}_H^t]\end{aligned}\quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned}I_1 &= M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b) - \mathbf{x}_H^t \\ &= \mathbf{M}_H\tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M + \tilde{\alpha}_H, \quad \|\tilde{\alpha}_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|)\end{aligned}\quad (\text{A.30})$$

avec $\epsilon_H^M = \mathbf{x}_H^t - M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)$, d'après les calculs fait dans le cas d'interaction *one-way*.

$$\begin{aligned}I_2 &= G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) - \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H}\mathbf{x}_H^t \\ &= G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) - G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) \\ &\quad + G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) - G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) \\ &\quad + G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) - G_h^H(\mathbf{x}_h^t) \\ &\quad + G_h^H(\mathbf{x}_h^t) - \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H}\mathbf{x}_H^t\end{aligned}\quad (\text{A.31})$$

Posons $\epsilon^{G,t} = G_h^H(\mathbf{x}_h^t) - \mathbf{K}_{\hat{\omega}_H}\mathbf{x}_H^t$. Ce terme correspond à l'erreur commise par la restriction de la solution vraie à haute résolution vis-à-vis de la restriction de la solution vraie à $\hat{\omega}_H$.

$$\begin{aligned}I_3 &= G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) - G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) \\ &= \mathbf{G}_h^H[M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))] + \beta_H \\ &\quad \|\beta_H\| = o(\|M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))\|) \\ &= \mathbf{G}_h^H[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}\tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_h] + \beta_H, \quad \|\tilde{\beta}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|), \\ &\quad \|\beta_H\| = o(\|M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^b, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))\|) \\ &= \mathbf{G}_h^H\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}\tilde{\epsilon}_h^b + \mathbf{G}_h^H\tilde{\beta}_h + \beta_H, \quad \|\tilde{\beta}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|), \\ &\quad \|\beta_H\| = o(\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}\tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_h\|)\end{aligned}\quad (\text{A.32})$$

d'après les calculs du *one-way*.

Or,

$$\|\tilde{\beta}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) \Rightarrow \|\mathbf{G}_h^H\tilde{\beta}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|)\quad (\text{A.33})$$

Supposons de plus $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}$ bornée sur F_{ω_h} . Il vient que $\|\beta_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|)$.

En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\|\beta_H\|}{\|\tilde{\epsilon}_h^b\|} &= \frac{\|\beta_H\|}{\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}\tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_h\|} \frac{\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}\tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_h\|}{\|\tilde{\epsilon}_h^b\|} \\ &\leq \frac{\|\beta_H\|}{\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}\tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_h\|} (\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h}\| + \frac{\|\tilde{\beta}_h\|}{\|\tilde{\epsilon}_h^b\|})\end{aligned}\quad (\text{A.34})$$

Or, $\|\beta_H\| = o(\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_h\|)$ et $\|\tilde{\beta}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|)$, il vient, $\frac{\|\beta_H\|}{\|\tilde{\epsilon}_h^b\|} \rightarrow 0$, \square .

D'où,

$$I_3 = \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_H, \quad \|\tilde{\beta}_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} I_4 &= G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b)))) - G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) \\ &= \bar{\mathbf{G}}_h^H[M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))] + \gamma_H \\ \|\gamma_H\| &= o(\|M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^b))) - M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))\|) \\ &= \bar{\mathbf{G}}_h^H[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\sigma}_h] + \gamma_H, \quad \|\tilde{\sigma}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|), \\ \|\gamma_H\| &= o(\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\sigma}_h\|) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

d'après les calculs du *one-way*.

$$\begin{aligned} I_4 &= \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \bar{\mathbf{G}}_h^H \tilde{\sigma}_h + \gamma_H, \quad \|\tilde{\sigma}_h\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|), \\ \|\gamma_H\| &= o(\|\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\sigma}_h\|) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

En supposant $\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}}$ bornée sur F_{ω_h} et \mathbf{M}_H borné sur F_{Ω_H} , de même que précédemment, il vient :

$$I_4 = \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial\omega_H} \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\gamma}_H, \quad \|\tilde{\gamma}_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|), \quad (\text{A.38})$$

Enfin,

$$\begin{aligned} I_5 &= G_h^H(M_h(\tilde{\mathbf{x}}_h^t, I_H^h(M_H(\tilde{\mathbf{x}}_H^t)))) - G_h^H(\mathbf{x}_h^t) \\ &= -\mathbf{G}_h^H \epsilon_h^M + \delta_H, \quad \|\delta_H\| = o(\|\epsilon_h^M\|) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} [\mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_H^M + \tilde{\alpha}_H] + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} [\mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \tilde{\beta}_H \\ &\quad + \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \tilde{\gamma}_H - \tilde{\mathbf{G}}_h^H \epsilon_h^M + \delta_H + \epsilon^{G,t}], \\ \|\tilde{\alpha}_H\| &= o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|), \quad \|\tilde{\beta}_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|), \quad \|\tilde{\gamma}_H\| = o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|), \quad \|\delta_H\| = o(\|\epsilon_h^M\|) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Soit,

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= [\mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H] \tilde{\epsilon}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b \\ &\quad - \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \epsilon_H^M - \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_h^H \epsilon_h^M + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \epsilon^{G,t} + \tilde{\alpha}_H + \tilde{\beta}_H + \gamma_H, \\ \|\tilde{\alpha}_H\| &= o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|), \\ \|\tilde{\beta}_H\| &= o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|), \\ \|\gamma_H\| &= o(\|\epsilon_h^M\|) \end{aligned}$$

Par la suite, nous noterons \mathbf{P}_H l'opérateur $\mathbf{J}_{\omega_H} \mathbf{M}_H + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H$.

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$. Effectuons les changements de variables $\tilde{\alpha}_H = \varepsilon \tilde{\mathbf{a}}_H$, $\tilde{\beta}_H = \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}_H$ et $\gamma_H = \eta \mathbf{d}_H$.

L'erreur d'ébauche basse résolution devient

$$\begin{aligned} \epsilon_H^b &= \mathbf{P}_H \tilde{\epsilon}_H^b + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \bar{\mathbf{G}}_h^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b \\ &\quad - \mathbf{J}_{\omega_H} \epsilon_H^M - \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \bar{\mathbf{G}}_h^H \tilde{\epsilon}_h^M + \bar{\mathbf{J}}_{\omega_H} \epsilon^{G,t} + \varepsilon \tilde{\mathbf{a}}_H + \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}_H + \eta \mathbf{d}_H \end{aligned}$$

Grille fine

L'erreur d'ébauche sur la grille fine s'écrit (cf calculs dans le cas *one-way*) :

$$\begin{aligned} \epsilon_h^b &= \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M + \tilde{\beta}_h + \tilde{\sigma}_h, \\ \|\tilde{\beta}_h\| &= o(\|\tilde{\epsilon}_h^b\|) \\ \|\tilde{\sigma}_h\| &= o(\|\tilde{\epsilon}_H^b\|) \end{aligned}$$

Effectuons les changements de variables $\tilde{\beta}_h = \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}_h$ et $\tilde{\sigma}_h = \varepsilon \tilde{\mathbf{s}}_h$ avec ε fixé précédemment. L'erreur d'ébauche haute résolution s'écrit

$$\epsilon_h^b = \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \tilde{\epsilon}_h^b + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{M}_H \tilde{\epsilon}_H^b - \epsilon_h^M + \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}_h + \varepsilon \tilde{\mathbf{s}}_h$$

A.3.2 Matrice de covariance d'erreur d'ébauche

Intéressons-nous maintenant au calcul de \mathbf{B} .

Nous faisons ici de nouvelles hypothèses :

hyp :

- $\tilde{\epsilon}_H^b$ et ϵ_H^M sont indépendants

Nous supposons que les erreurs d'ébauche sur la fenêtre précédente sont indépendantes des erreurs modèles sur cette fenêtre. Ces hypothèses sont les mêmes que celles faites dans le cas en interaction *one-way*.

- $\tilde{\epsilon}_H^b$ et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants
- $\tilde{\epsilon}_h^b$ et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants

Nous supposons que les erreurs d'ébauche sur la fenêtre précédente sont indépendantes des erreurs commises en appliquant l'opérateur de restriction la solution vraie haute résolution vis-à-vis de la restriction à ω_H de la solution vraie basse résolution.

- ϵ_H^M et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants
- ϵ_h^M et $\epsilon^{G,t}$ sont indépendants

Nous supposons que les erreurs modèles et les erreurs de restriction sont indépendantes. Cette hypothèse paraît naturelle, le choix de \mathbf{G}_h^H étant indépendant des modèles \mathbf{M}_H et \mathbf{M}_h .

- Calcul de \mathbf{B}_{HH} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{HH} = & \mathbf{P}_H \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_H^b} \mathbf{P}_H^T + \mathbf{P}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
 & + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{P}_H^T + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_h^b} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
 & + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{B}_{\epsilon_H^M} \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_H^H \mathbf{B}_{\epsilon_h^M} \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{B}_{\epsilon^{G,t}} \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
 & \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_H^H \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
 & + \epsilon [\mathbf{P}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \mathbf{P}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{b}}_H) + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) \\
 & + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^H \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{b}}_H) - \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{a}}_H) - \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{b}}_H) \\
 & + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon^{G,t}, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon^{G,t}, \tilde{\mathbf{b}}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{P}_H^T \\
 & + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H}^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
 & + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \epsilon^{G,t}) \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{P}_H^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
 & - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H}^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \epsilon^{G,t}) \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T] \\
 & + \eta [\text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{P}_H^T + \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
 & - \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H}^T - \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \epsilon^{G,t}) \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T] \\
 & + \epsilon^2 [\mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{a}}_H} + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\mathbf{b}}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{b}}_H}] \\
 & + \epsilon \eta [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \mathbf{d}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \mathbf{d}_H) + \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\mathbf{b}}_H)] \\
 & + \eta^2 \mathbf{B}_{\mathbf{d}_H}
 \end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hH} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{hH} = & \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{P}_H^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial\omega_H} \mathbf{M}_H \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_H^b} \mathbf{P}_H^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_h^b} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
& + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial\omega_H} \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \mathbf{B}_{\epsilon_h^M} \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\epsilon_h^M, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
& + \epsilon [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{P}_H^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{P}_H^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
& + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T \mathbf{G}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H}^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon_H^M) \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
& - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon_h^M) \tilde{\mathbf{G}}_H^h \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon^{G,t}) \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon^{G,t}) \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H}^T \\
& + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial\omega_H} \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{a}}_H) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{a}}_H) \\
& + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{b}}_H) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial\omega_H} \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{b}}_H) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{b}}_H) \\
& + \eta \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \mathbf{d}_H) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial\omega_H} \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \mathbf{d}_H) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \mathbf{d}_H) \right] \\
& + \epsilon^2 [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\mathbf{a}}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\mathbf{b}}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\mathbf{b}}_H)] \\
& + \epsilon \eta [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \mathbf{d}_H) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \mathbf{d}_H)]
\end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{Hh} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{Hh} = & \mathbf{P}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \mathbf{P}_H \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_H^b} \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial\omega_H} {}^T \mathbf{I}_H^h \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
& + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^h \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_h^b} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^h \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial\omega_H} {}^T \mathbf{I}_H^h \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
& + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_H^h \mathbf{B}_{\epsilon_h^M} + \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \epsilon_h^M) \\
& + \epsilon [\mathbf{P}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \mathbf{P}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^h \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) \\
& + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \mathbf{G}_H^h \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) - \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{b}}_h) - \mathbf{J}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon_H^M, \tilde{\mathbf{s}}_h) \\
& - \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_H^h \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{b}}_h) - \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \tilde{\mathbf{G}}_H^h \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{s}}_h) + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon^{G,t}, \tilde{\mathbf{b}}_h) \\
& + \bar{\mathbf{J}}_{\tilde{\omega}_H} \text{Cov}(\epsilon^{G,t}, \tilde{\mathbf{s}}_h) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial\omega_H} {}^T \mathbf{I}_H^h \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
& - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \epsilon_h^M) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial\omega_H} {}^T \mathbf{I}_H^h \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T \\
& - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \epsilon_h^M)] \\
& + \eta [\text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial\omega_H} {}^T \mathbf{I}_H^h \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial\omega}} \right]^T - \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \epsilon_h^M)] \\
& + \epsilon^2 [\text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}_H, \tilde{\mathbf{s}}_h) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_H, \tilde{\mathbf{s}}_h)] \\
& + \epsilon \eta [\text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \text{Cov}(\mathbf{d}_H, \tilde{\mathbf{s}}_h)]
\end{aligned}$$

- Calcul de \mathbf{B}_{hh} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_{hh} = & \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_h^b} \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial \omega_H}^T \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^T \\
 & + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial \omega_H} \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial \omega_H} \mathbf{M}_H \mathbf{B}_{\tilde{\epsilon}_H^b} \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial \omega_H}^T \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^T \\
 & + \mathbf{B}_{\epsilon_h^M} \\
 & + \epsilon \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_h^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial \omega_H} \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{b}}_h) \right. \\
 & + \frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \mathbf{I}_H^h \mathbf{K}_{\partial \omega_H} \mathbf{M}_H \text{Cov}(\tilde{\epsilon}_H^b, \tilde{\mathbf{s}}_h) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{b}}_h) - \text{Cov}(\epsilon_h^M, \tilde{\mathbf{s}}_h) \\
 & + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial \omega_H}^T \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \epsilon_h^M) \right. \\
 & + \left. \left. \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_h^b) \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_h} \right]^T + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\epsilon}_H^b) \mathbf{M}_H^T \mathbf{K}_{\partial \omega_H}^T \mathbf{I}_h^H \left[\frac{\partial M_h}{\partial \mathbf{x}_{\partial \omega}} \right]^T - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \epsilon_h^M) \right] \right. \\
 & \left. + \epsilon^2 [\mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{b}}_h} + \mathbf{B}_{\tilde{\mathbf{s}}_h} + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}_h, \tilde{\mathbf{b}}_h) + \text{Cov}(\tilde{\mathbf{b}}_h, \tilde{\mathbf{s}}_h)] \right]
 \end{aligned}$$

Ainsi, \mathbf{B} s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \epsilon \mathbf{B}^{1,0} + \eta \mathbf{B}^{0,1} + \epsilon^2 \mathbf{B}^{2,0} + \epsilon \eta \mathbf{B}^{1,1} + \eta^2 \mathbf{B}^{0,2}.}$$

Annexe B

Applications numériques : hauteur d'eau, vitesses et vorticité des solutions optimales

B.1 Champs hauteur d'eau-vitesse et champs de vorticité des solutions haute résolution

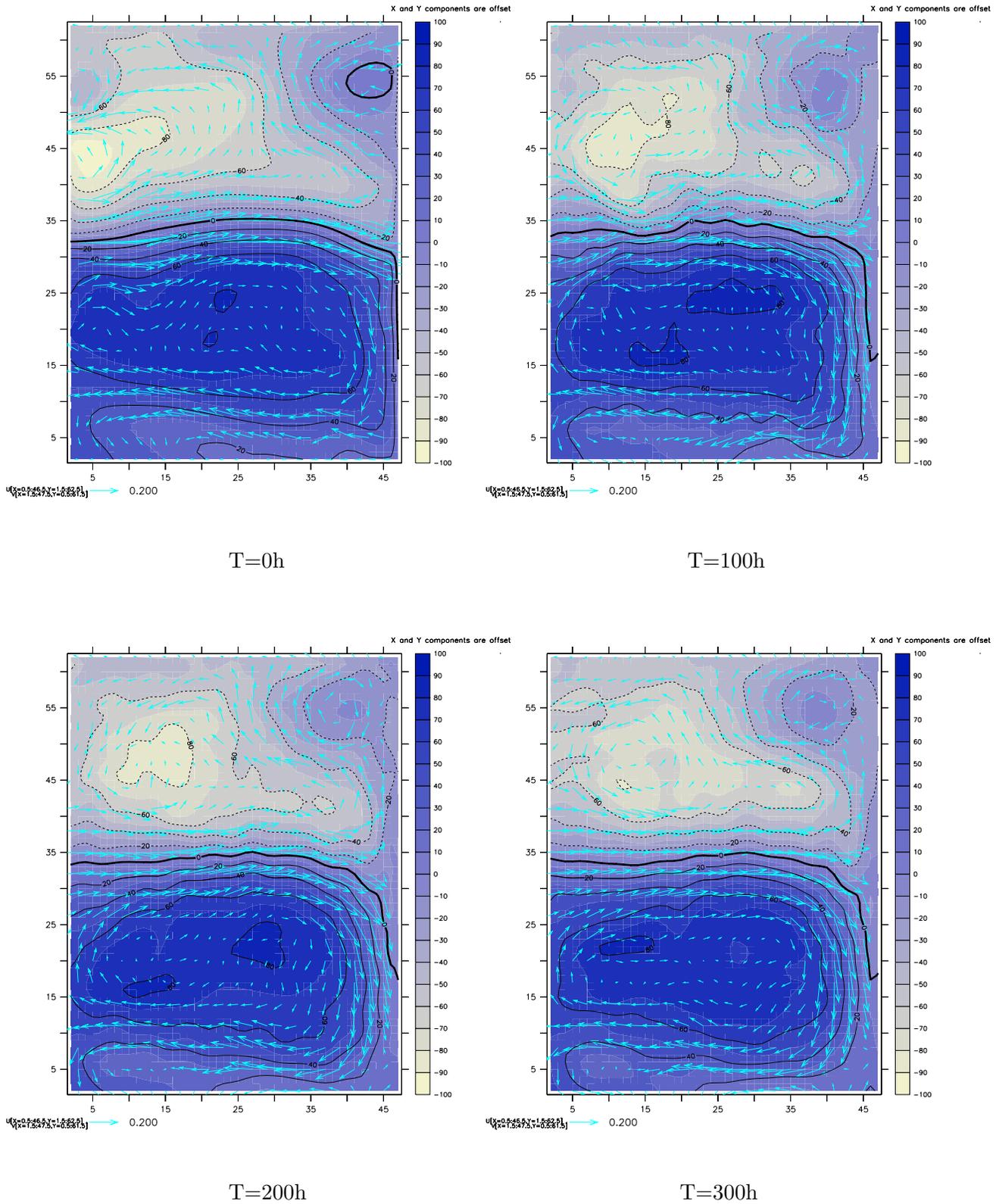
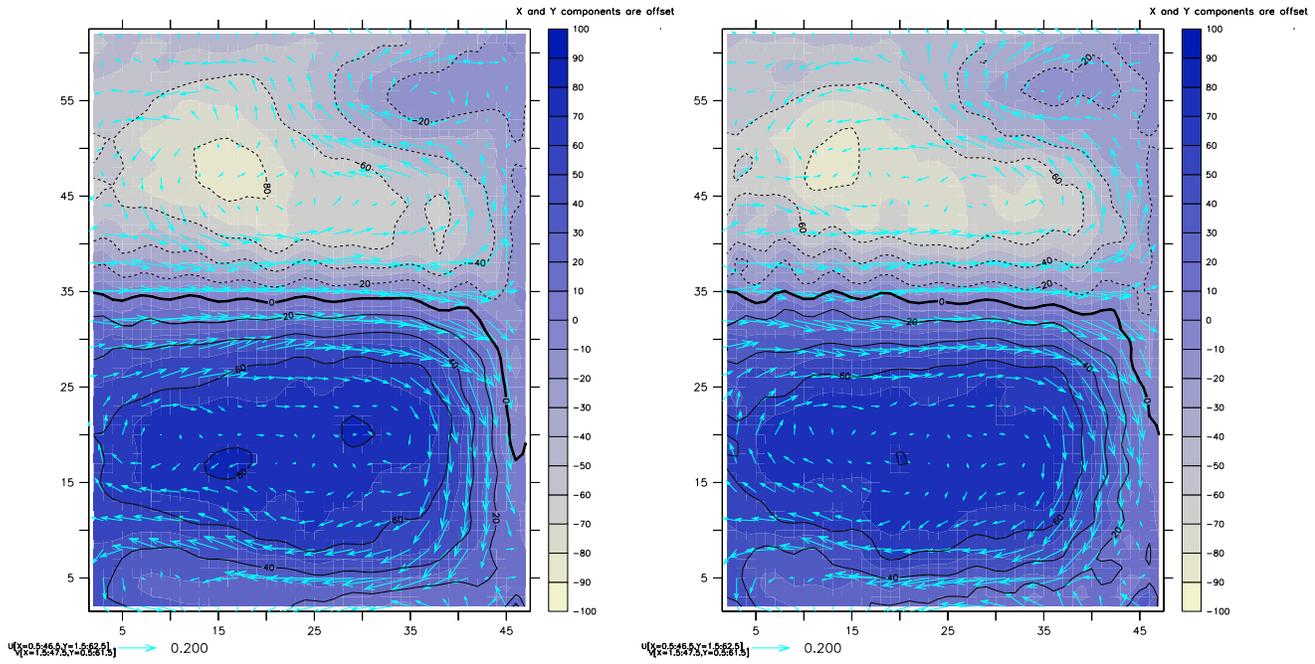
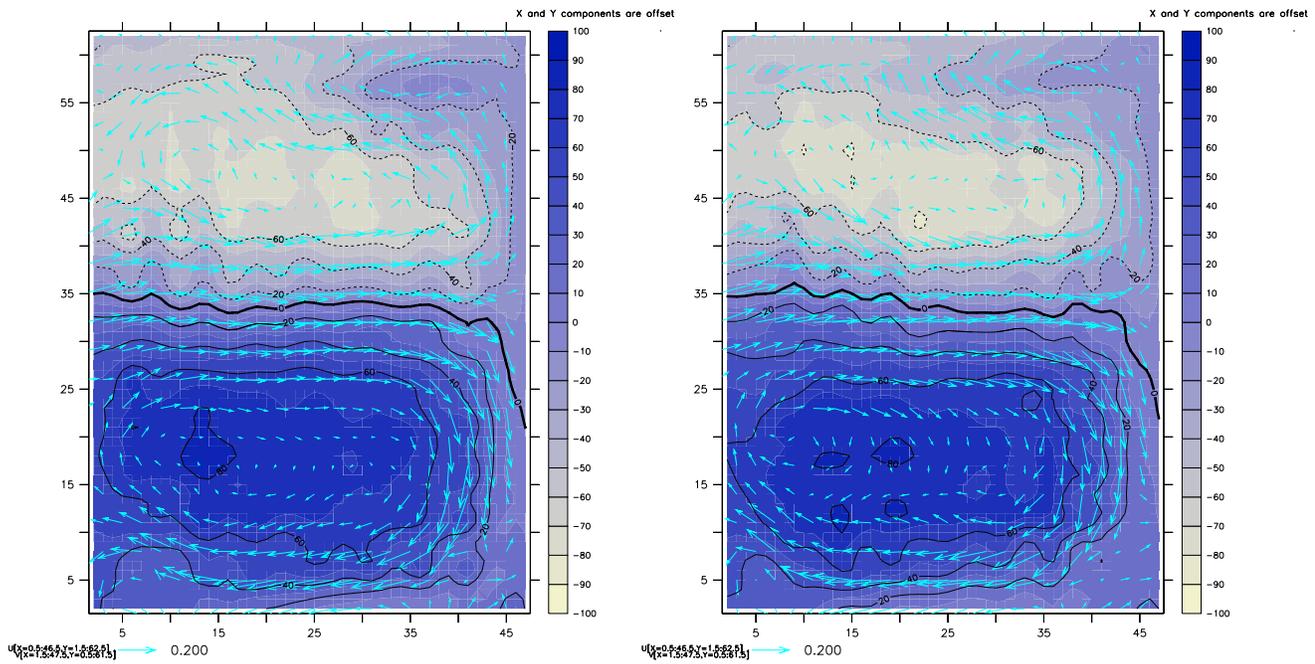


FIG. B.1 – Grille fine : hauteur d'eau (couleur et isolignes) et vitesse (flèches) de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation mono-grille, de $T = 0h$ à $T = 300h$



T=400h

T=500h



T=600h

T=700h

FIG. B.2 – Idem figure B.1, de $T = 400h$ à $T = 700h$.

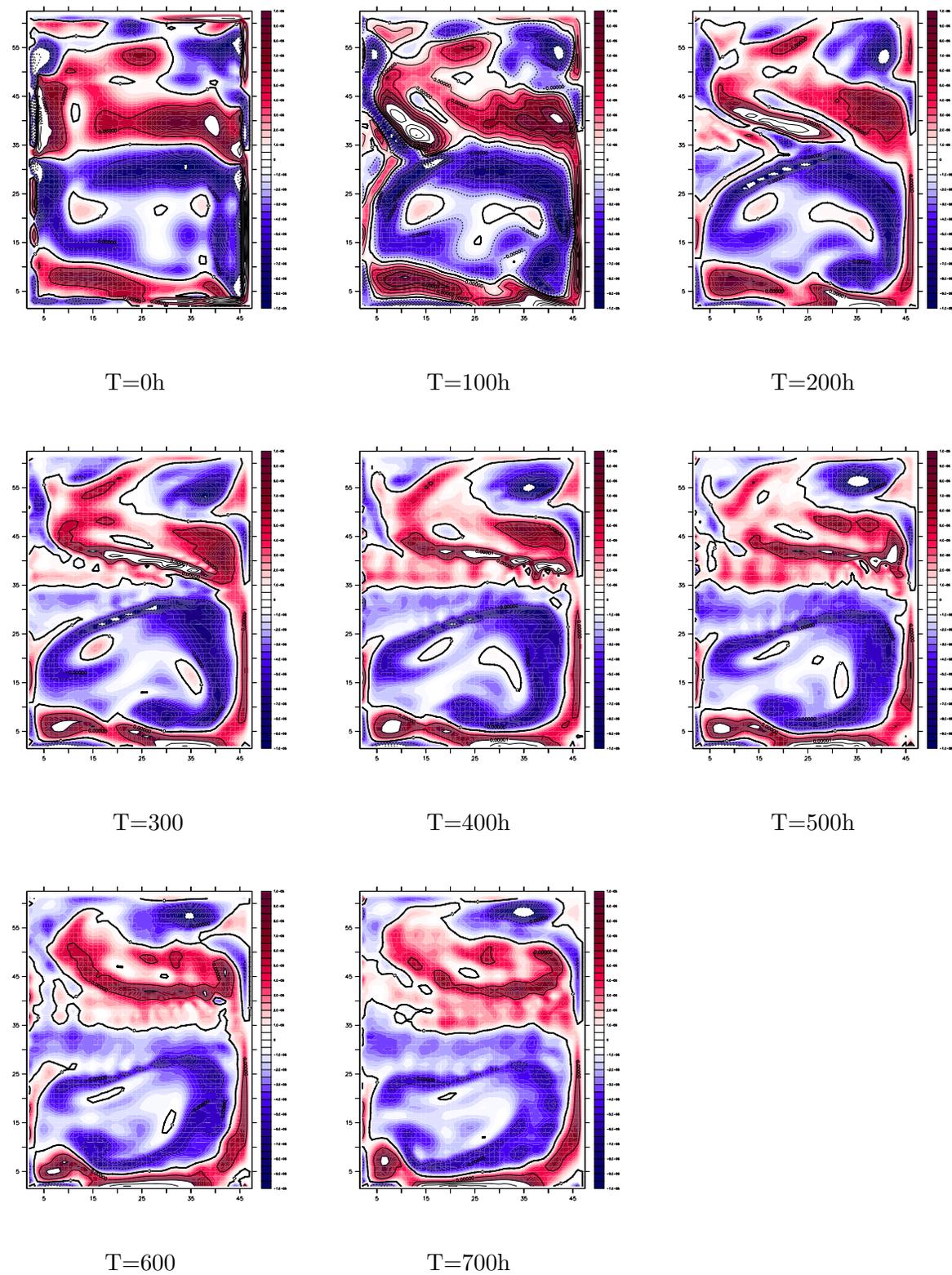


FIG. B.3 – Grille fine : vorticité de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation mono-grille

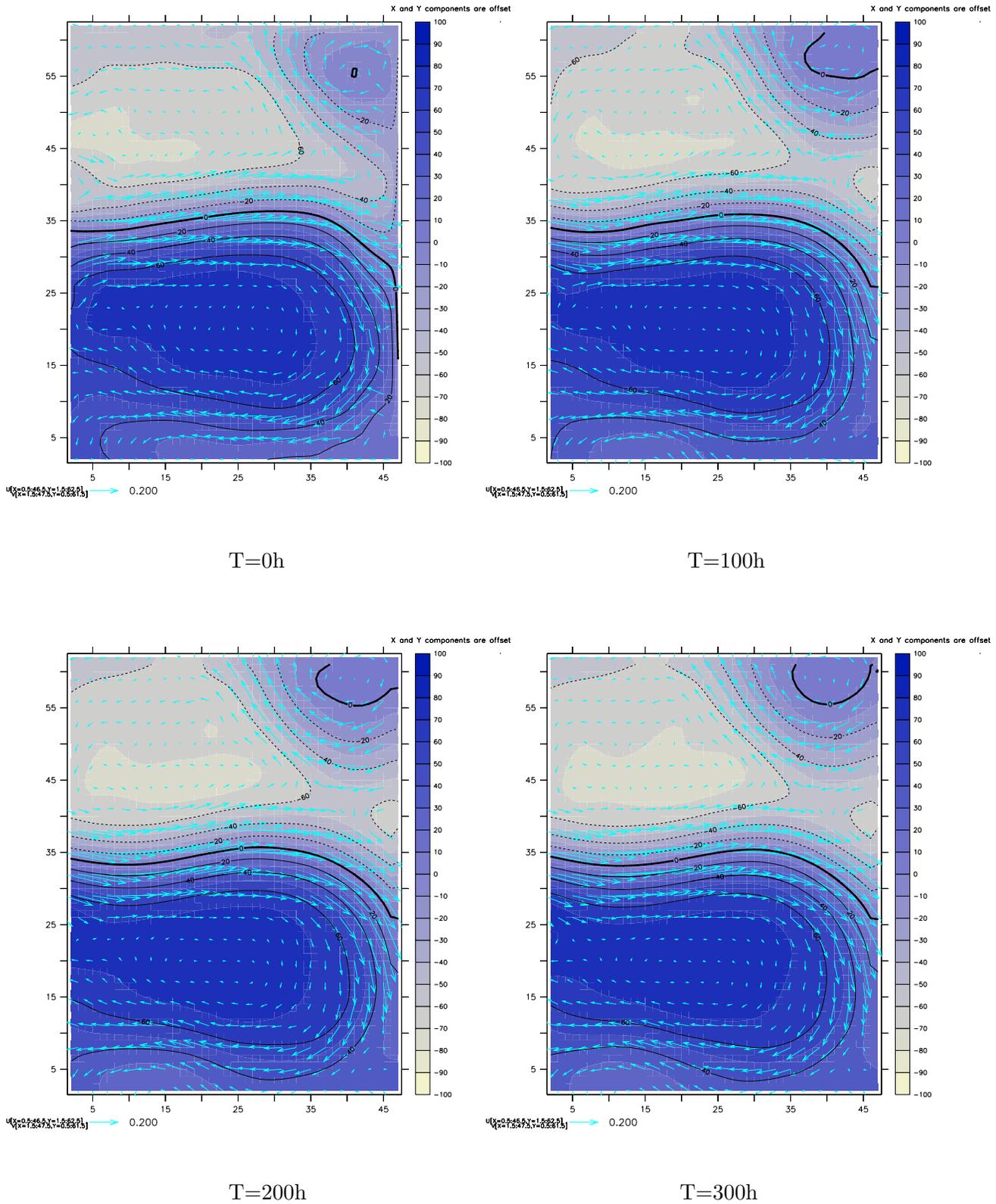
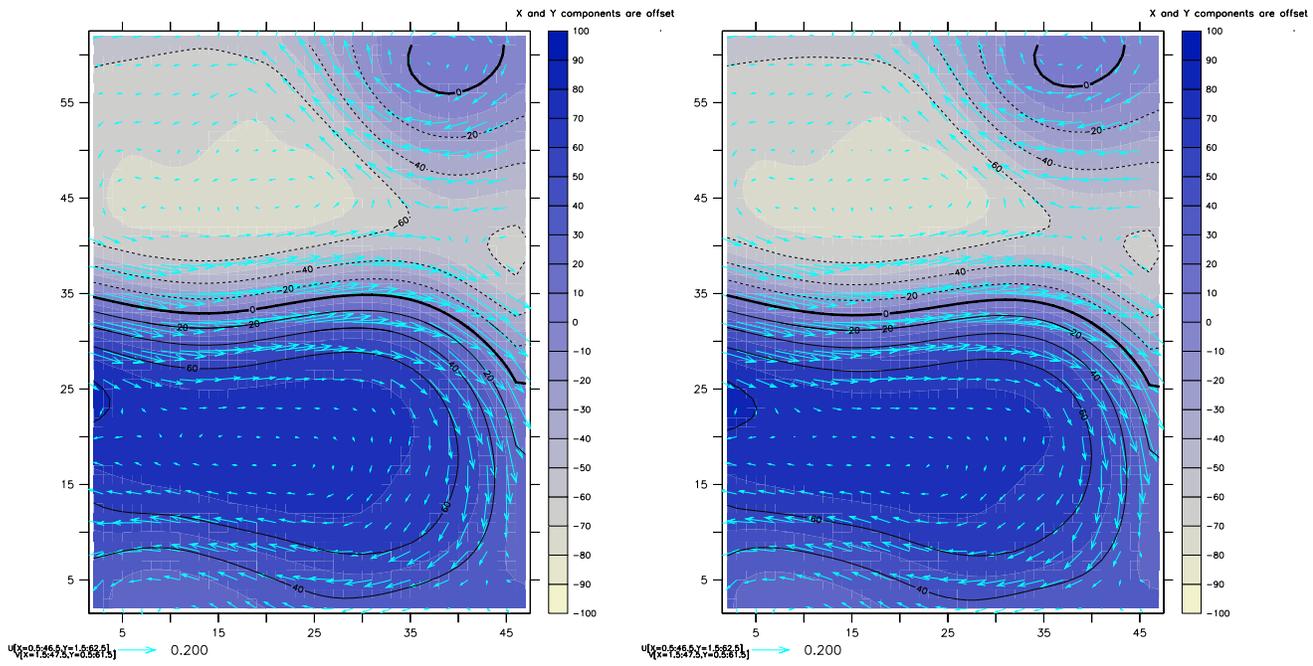
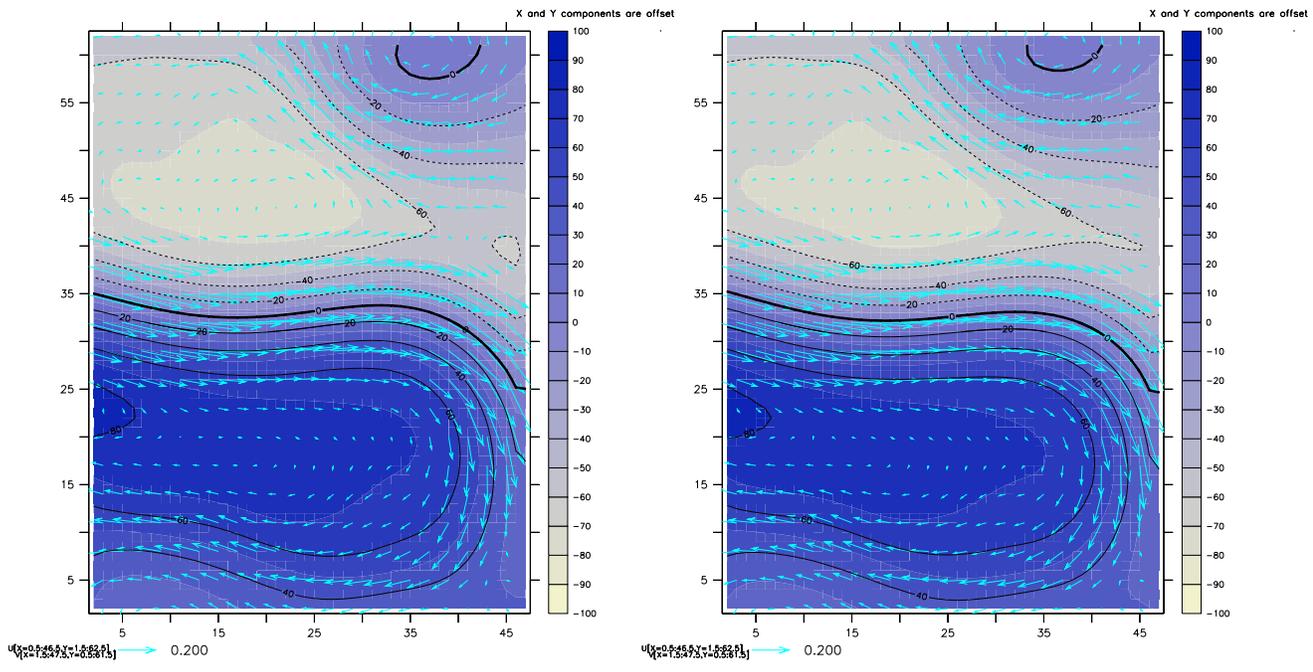


FIG. B.4 – Grille fine : hauteur d'eau (couleur et isolignes) et vitesse (flèches) de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *one-way*, de $T = 0h$ à $T = 300h$.



T=400h

T=500h



T=600h

T=700h

FIG. B.5 – Idem figure B.4, de $T = 400h$ à $T = 700h$.

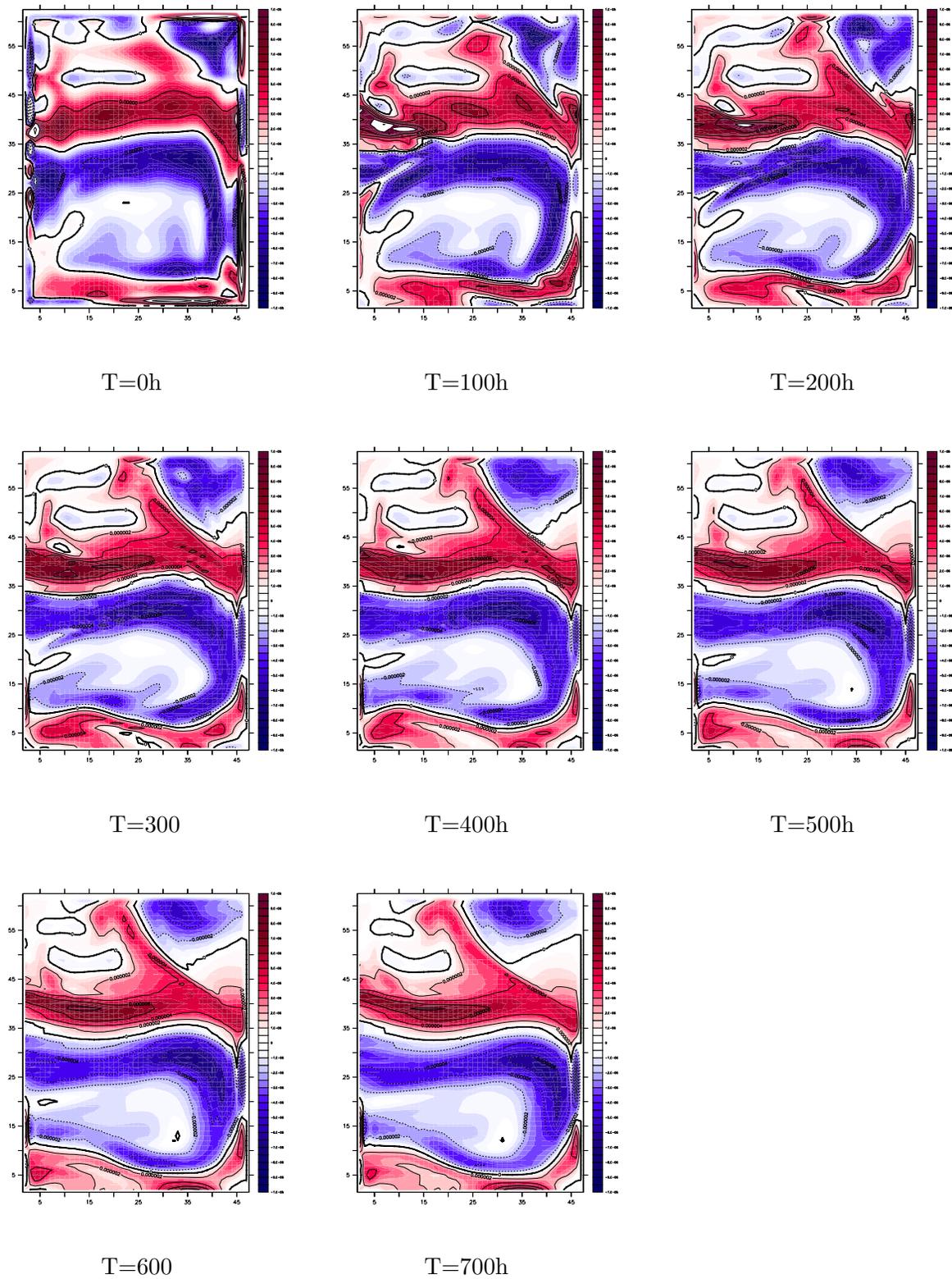


FIG. B.6 – Grille fine : vorticité de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *one-way*

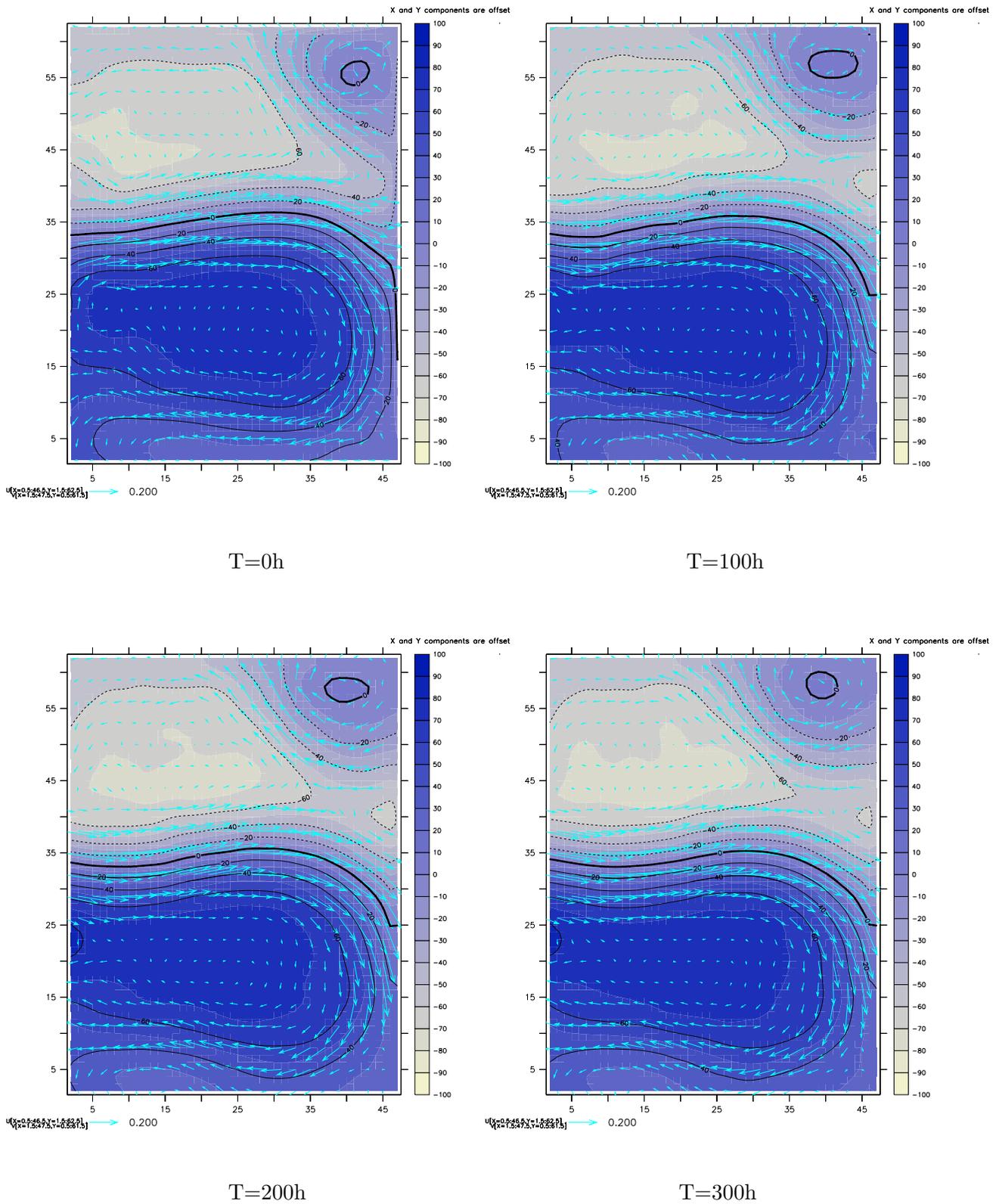
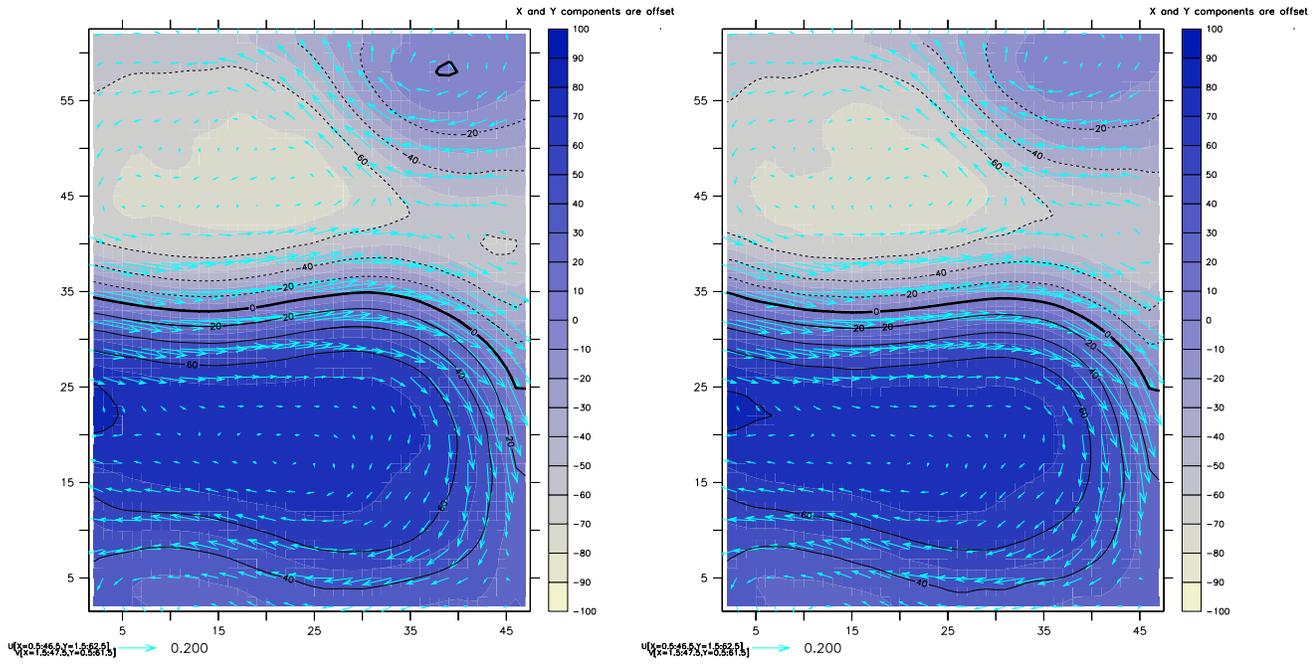
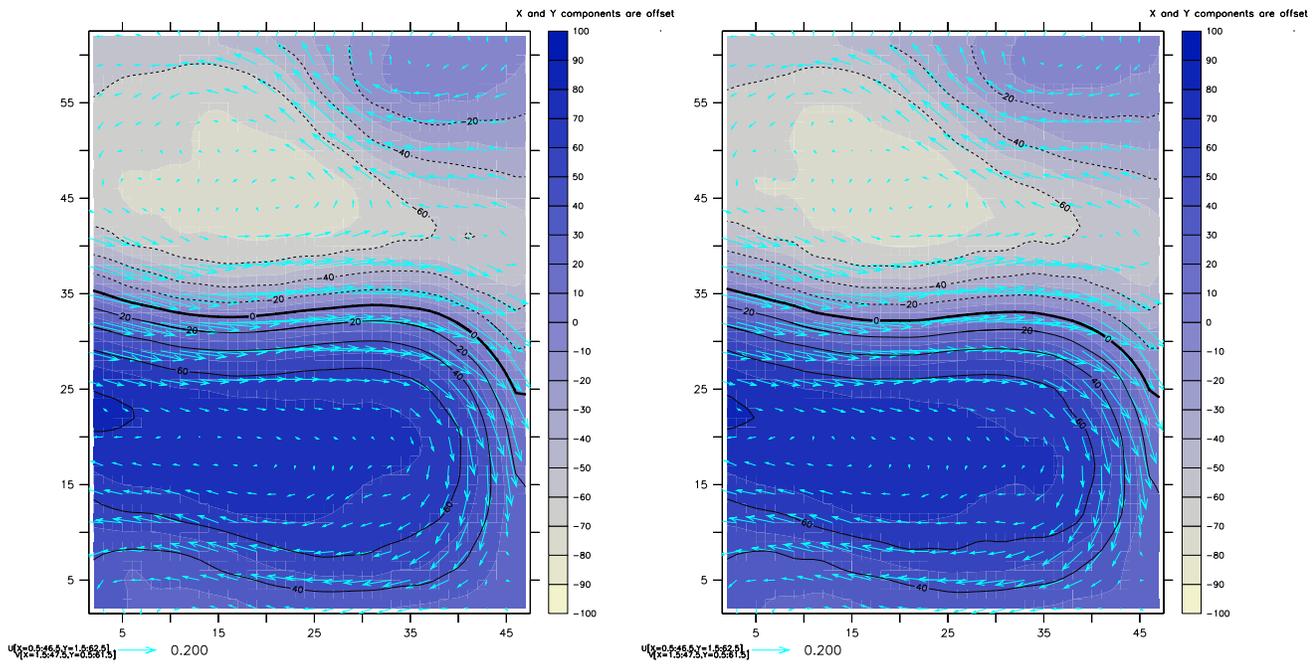


FIG. B.7 – Grille fine : hauteur d'eau (couleur et isolignes) et vitesse (flèches) de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *one-way vic*, de $T = 0h$ à $T = 300h$.



T=400h

T=500h



T=600h

T=700h

FIG. B.8 – Idem figure B.7, de $T = 400h$ à $T = 700h$.

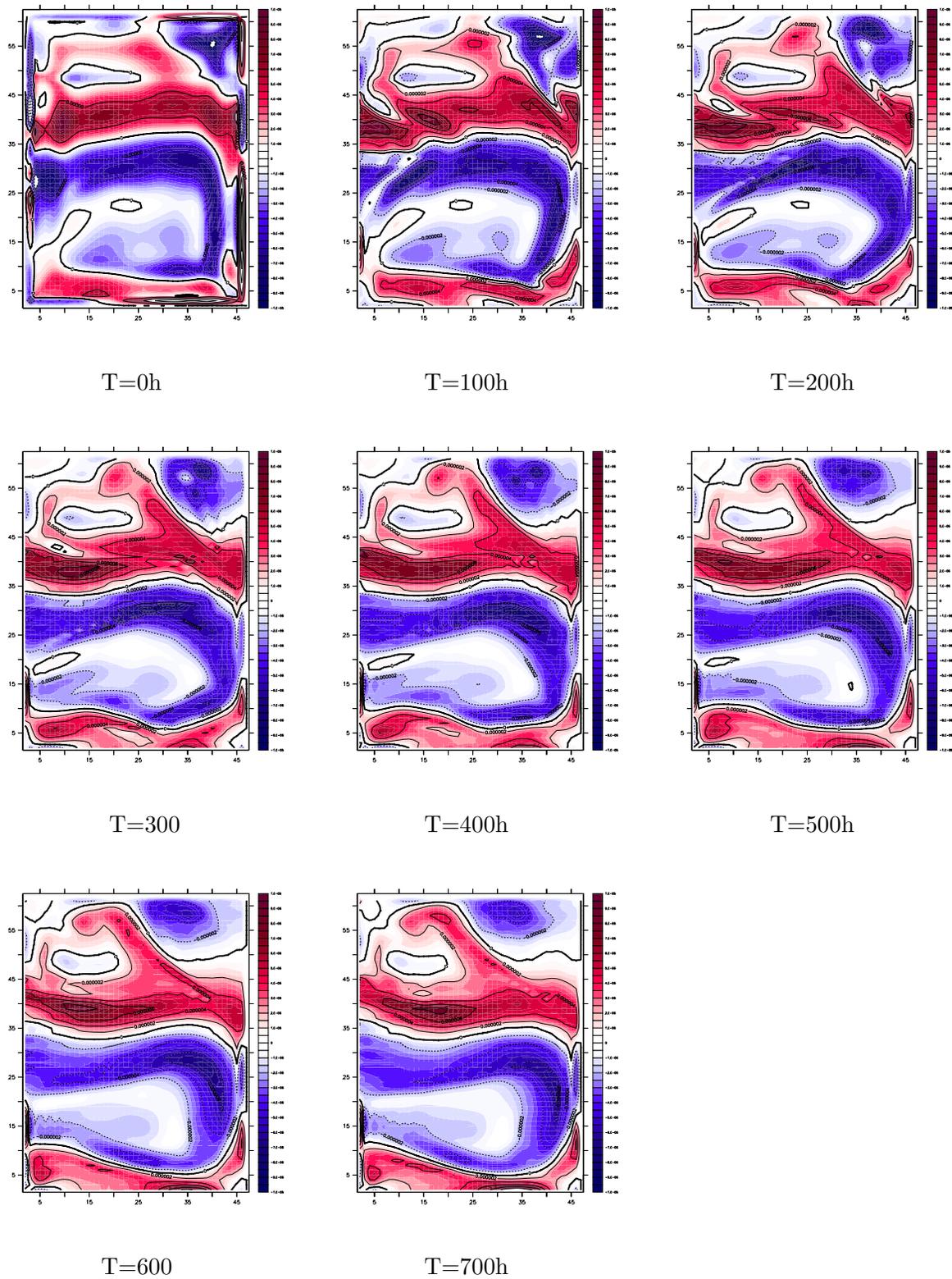


FIG. B.9 – Grille fine : vorticité de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *one-way vic*

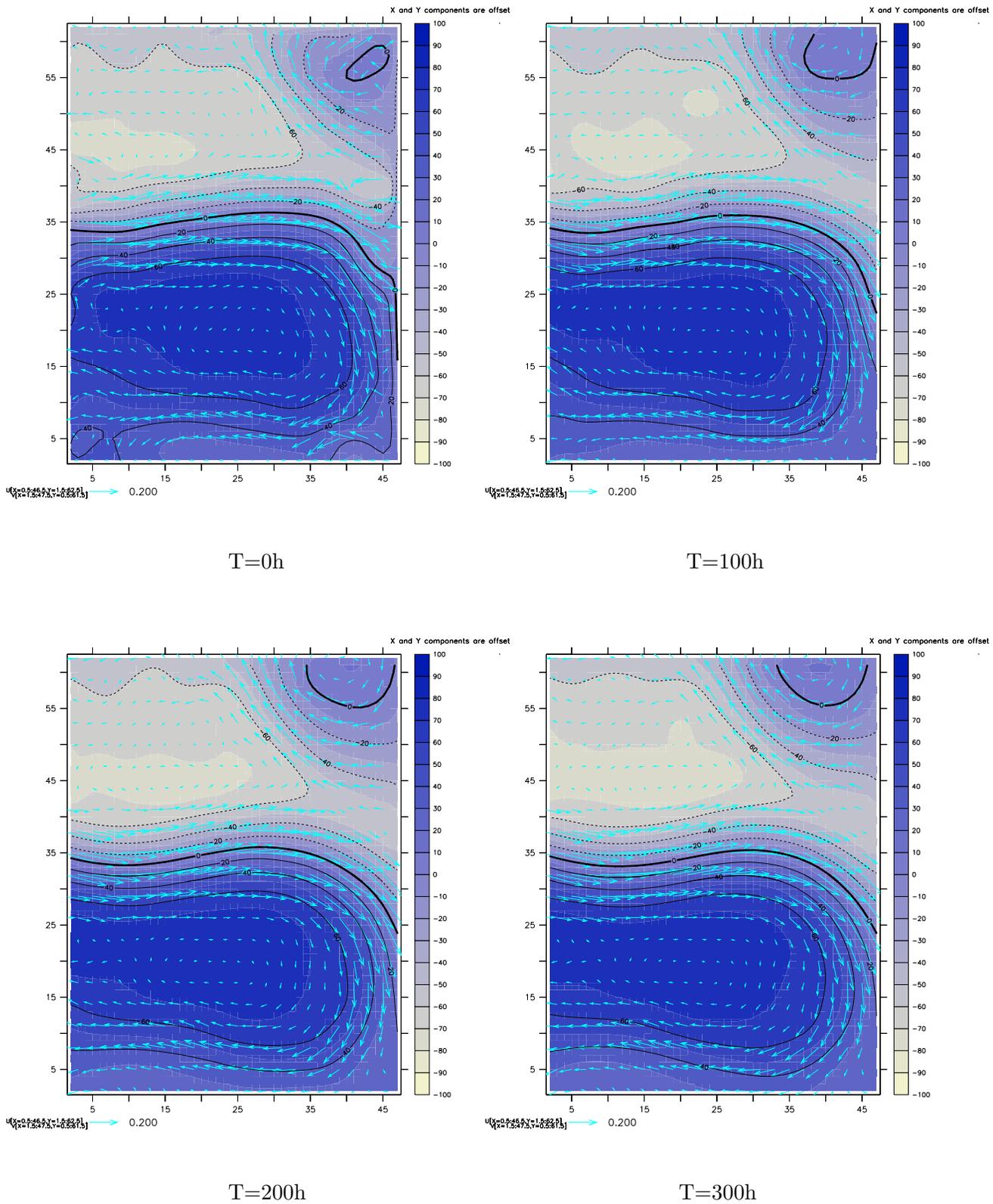
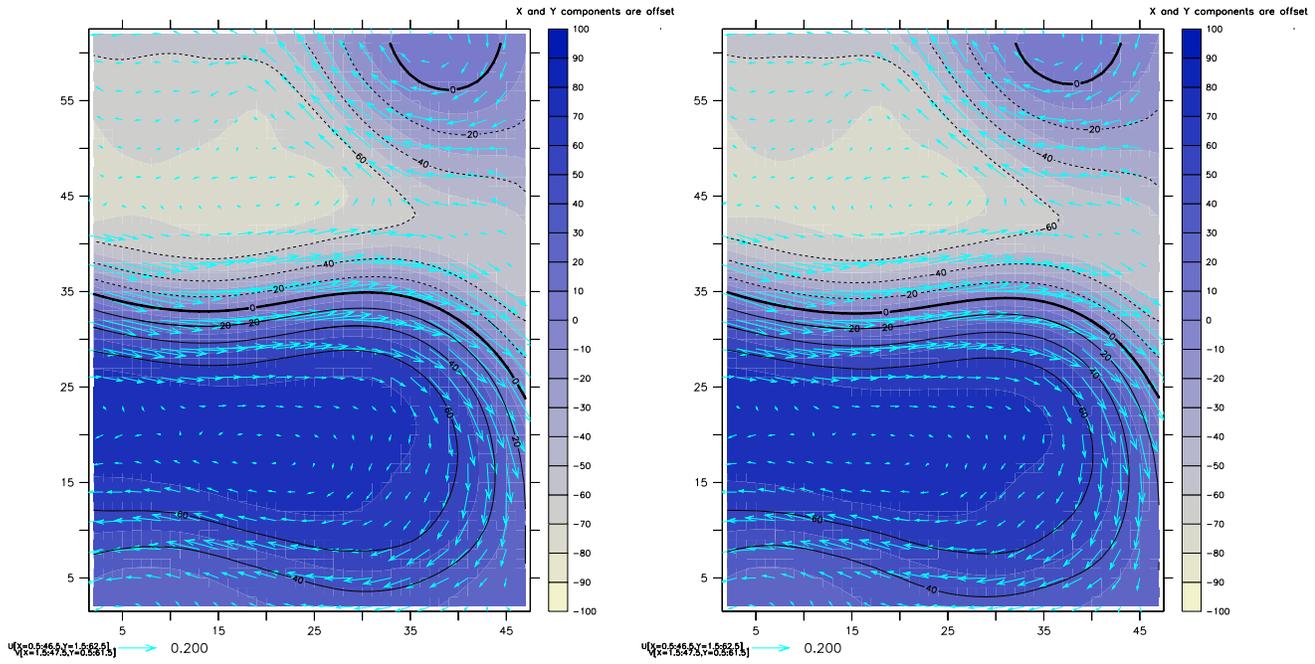
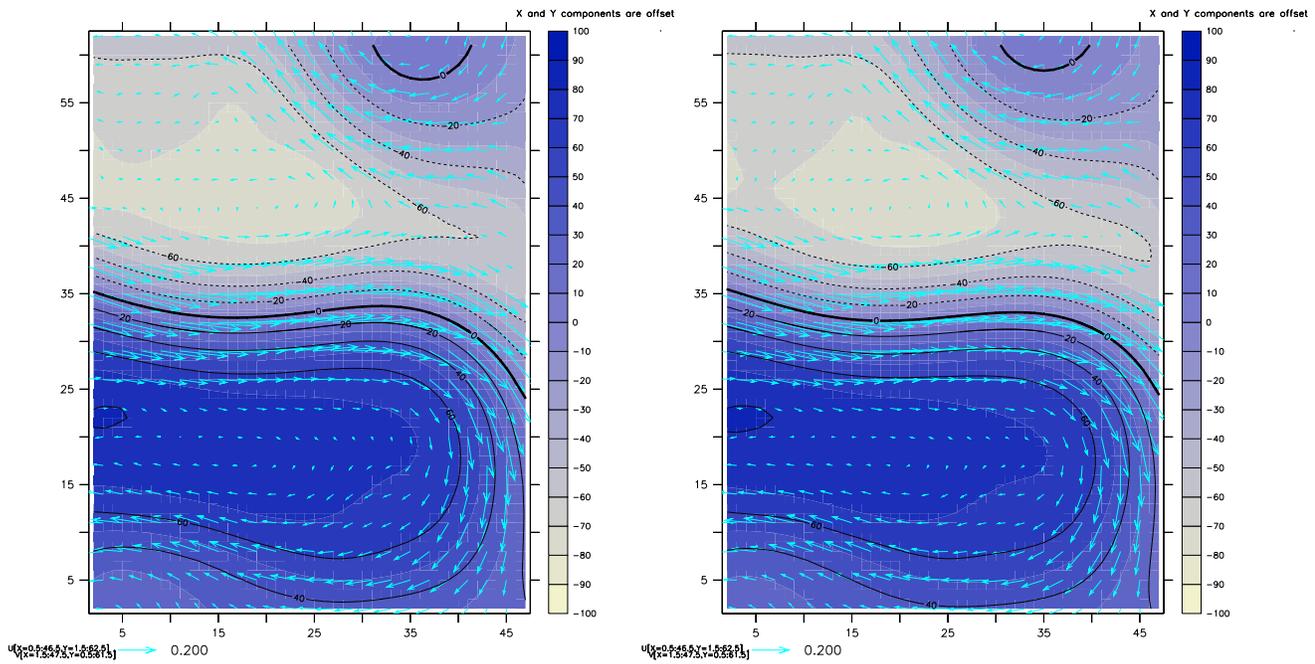


FIG. B.10 – Grille fine : hauteur d'eau (couleur et isolignes) et vitesse (flèches) de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *two-way*, de $T = 0h$ à $T = 300h$.



T=400h

T=500h



T=600h

T=700h

FIG. B.11 – Idem figure B.10, de $T = 0h$ à $T = 300h$.

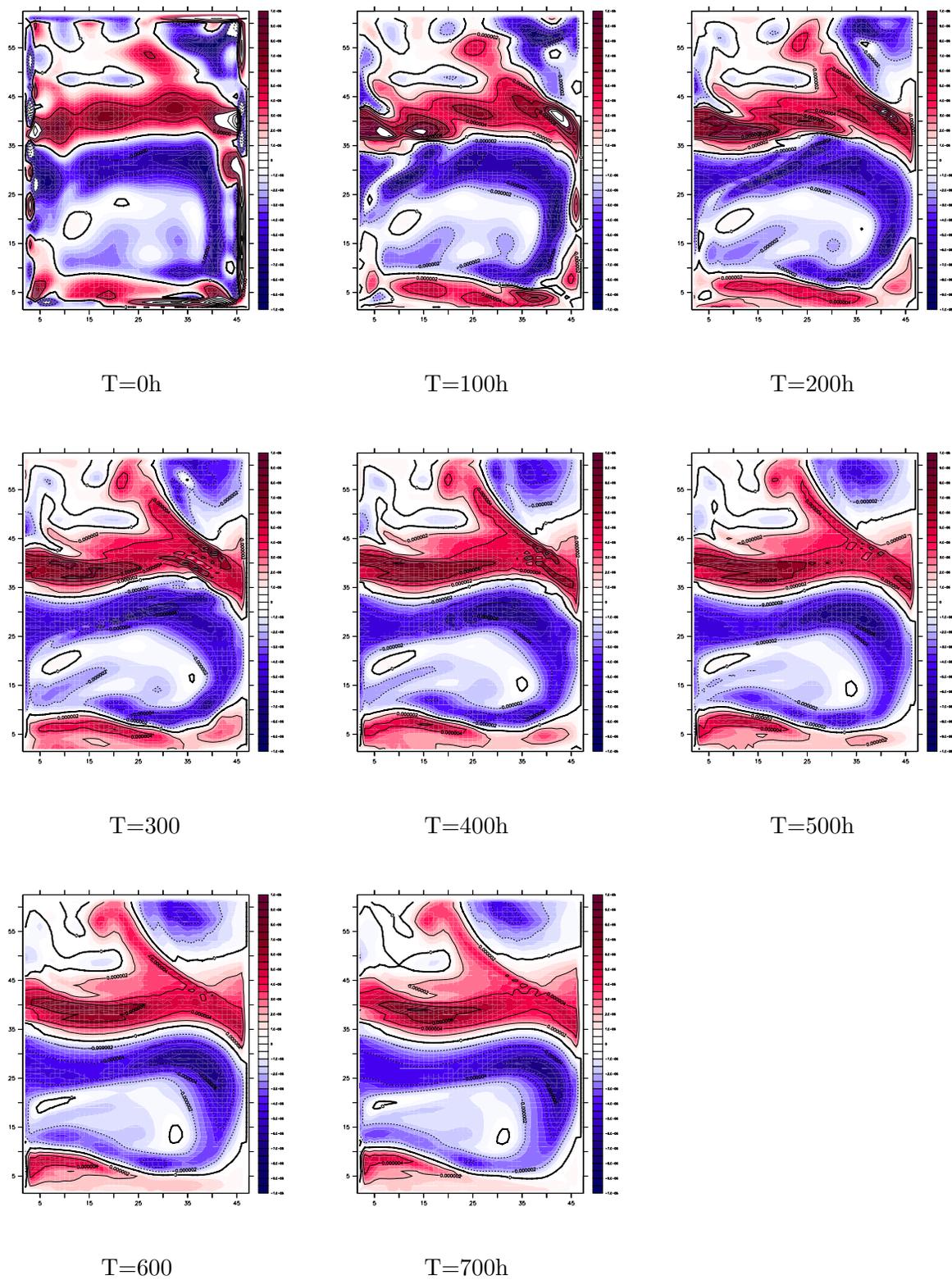


FIG. B.12 – Grille fine : vorticité de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *two-way*

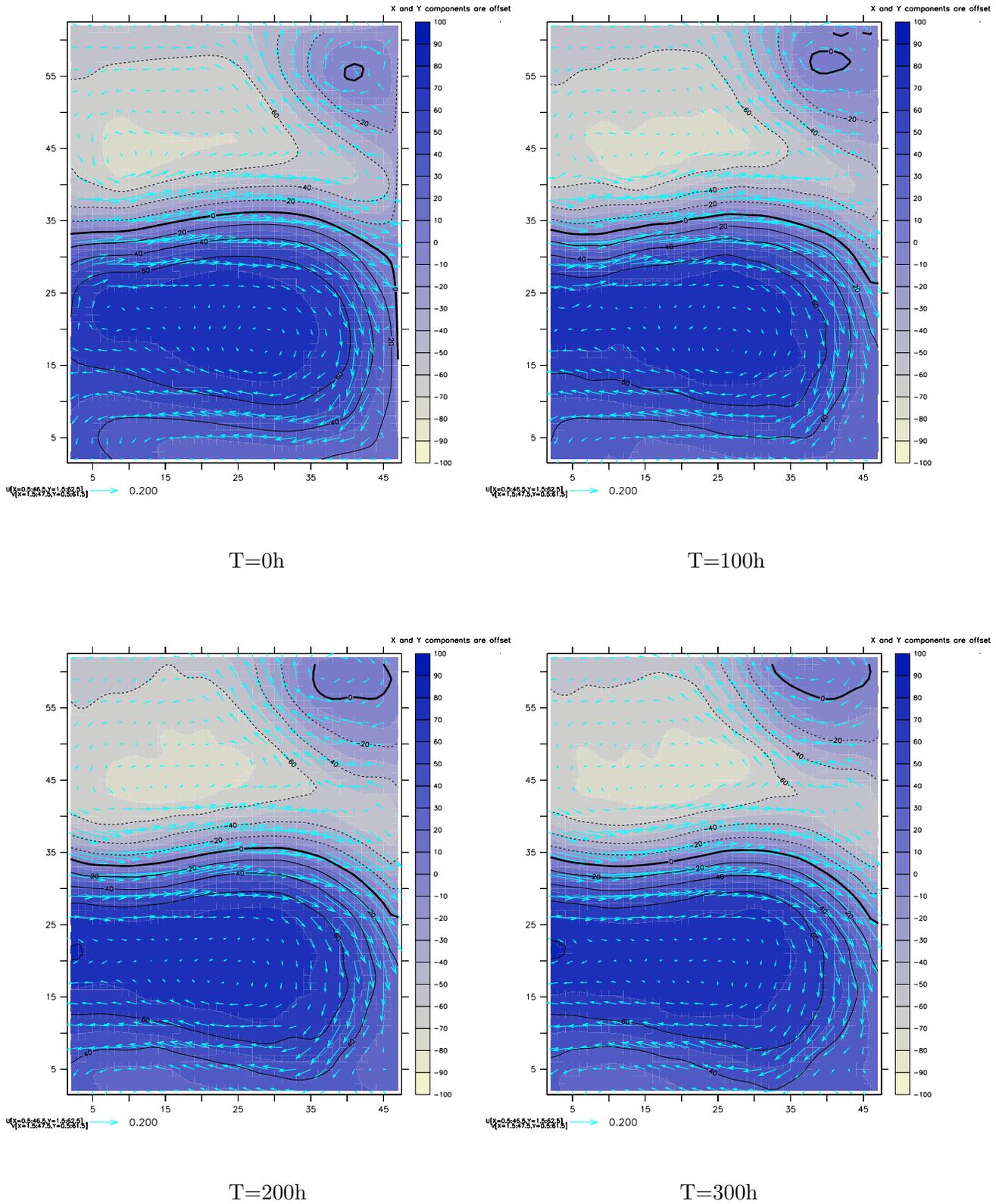
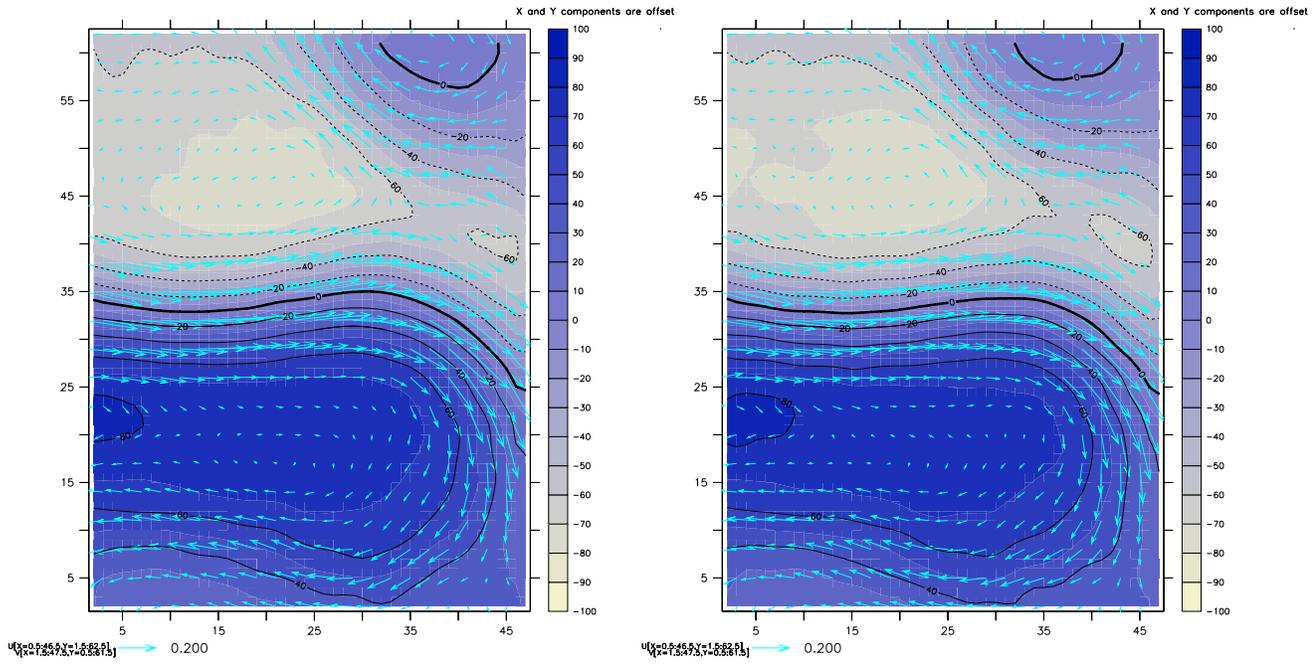
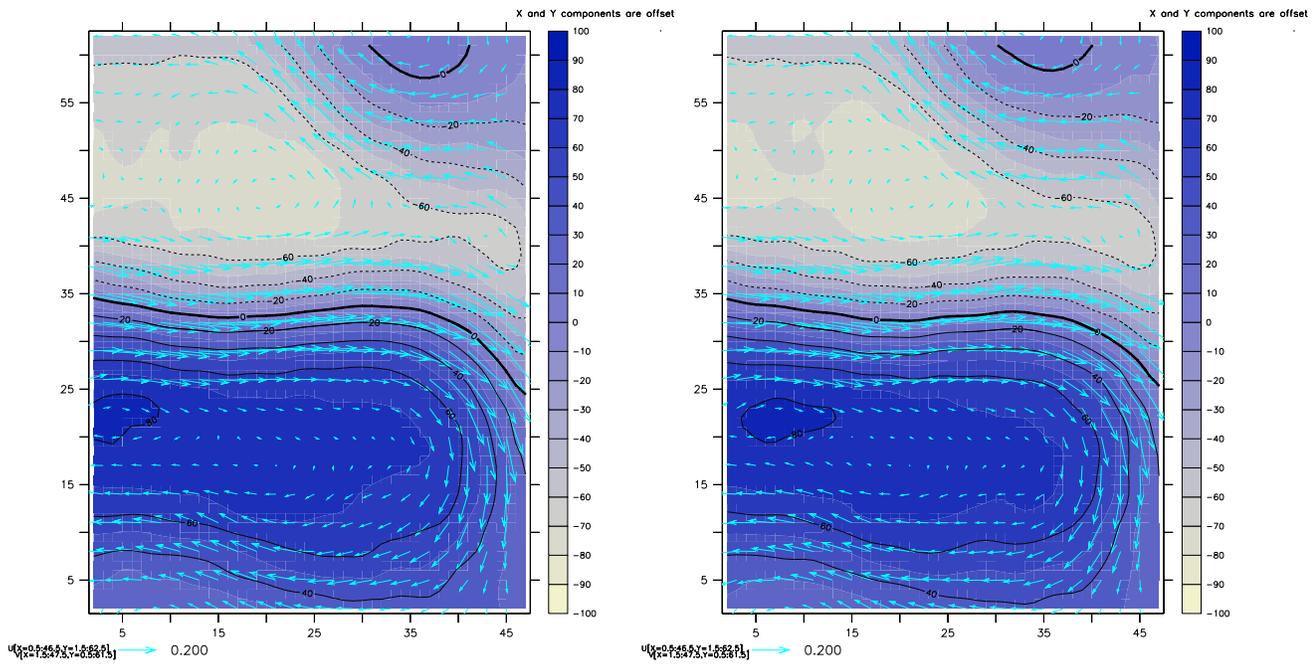


FIG. B.13 – Grille fine : hauteur d'eau (couleur et isolignes) et vitesse (flèches) de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *two-way wic*, de $T = 0h$ à $T = 300h$.



T=400h

T=500h



T=600h

T=700h

FIG. B.14 – Idem figure B.13, de $T = 0h$ à $T = 300h$.

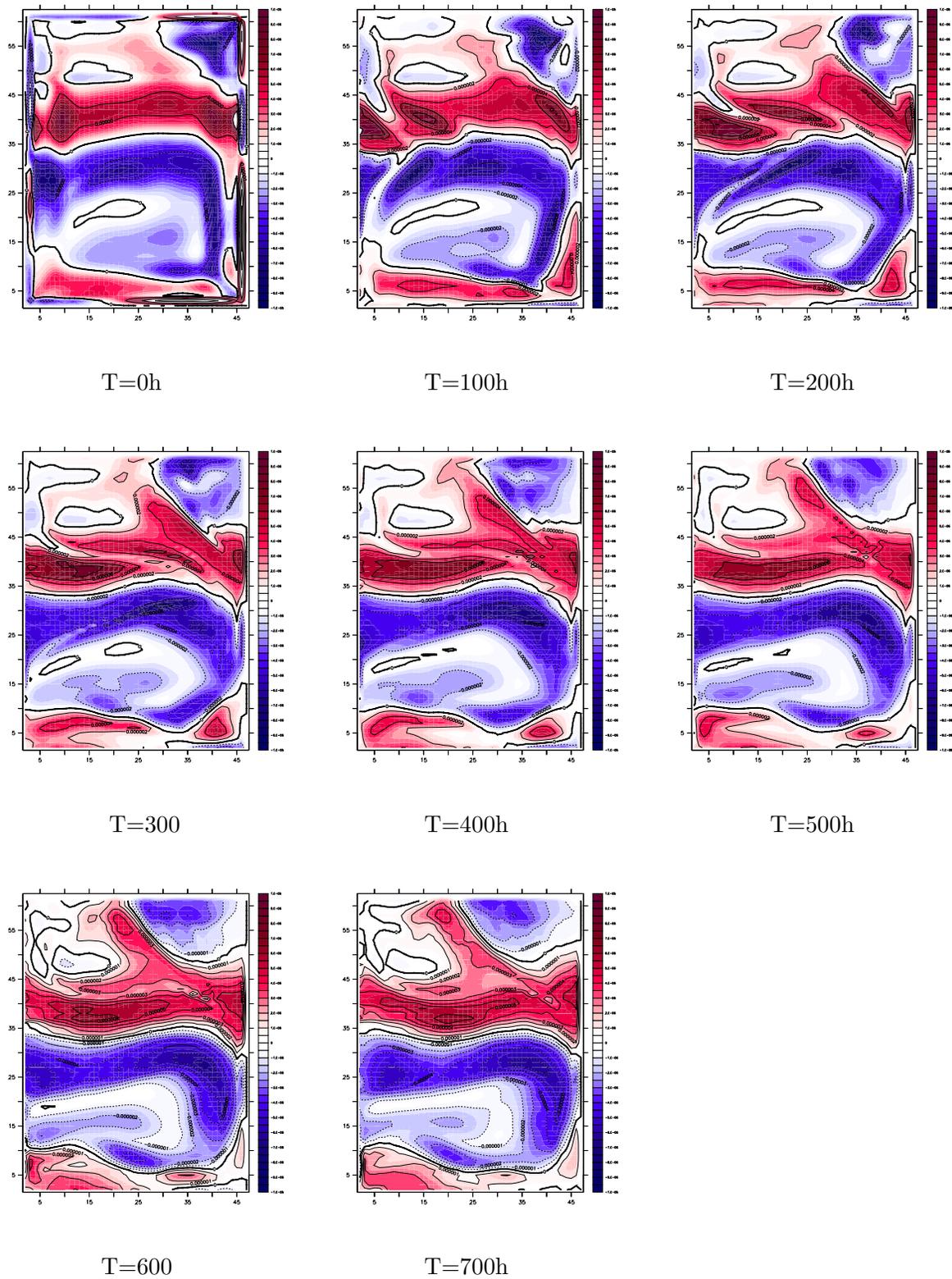
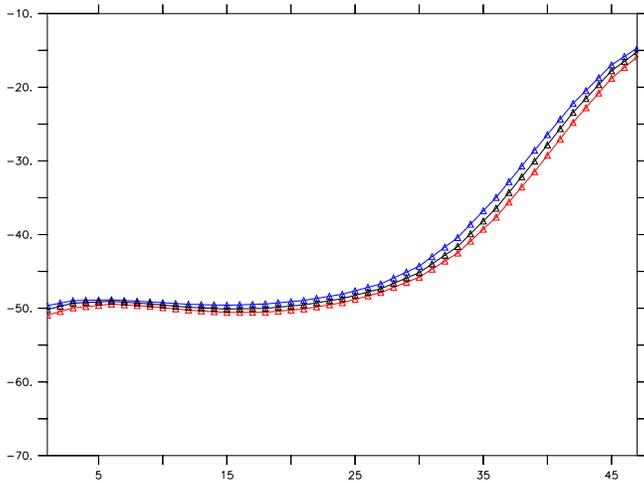
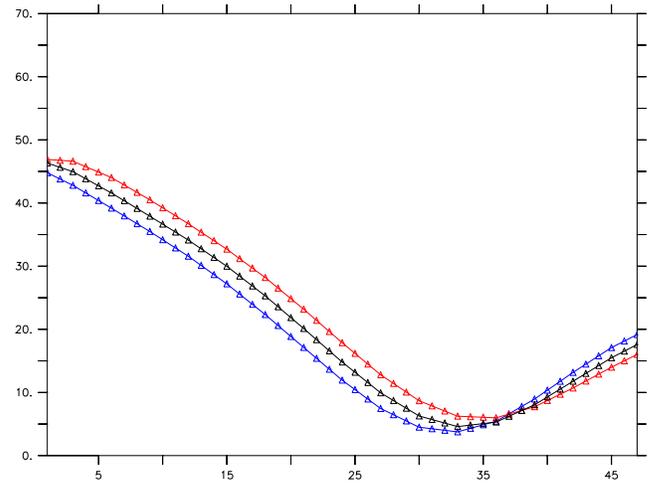


FIG. B.15 – Grille fine : vorticité de la solution après 40 itérations de minimisation pour l'assimilation *two-way wic*

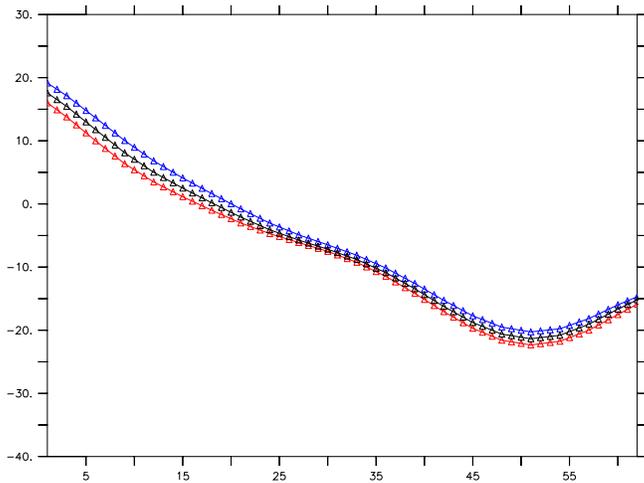
**B.2 Algorithme mono-grille : effet de l'assimilation sur la valeur
des conditions aux frontières**



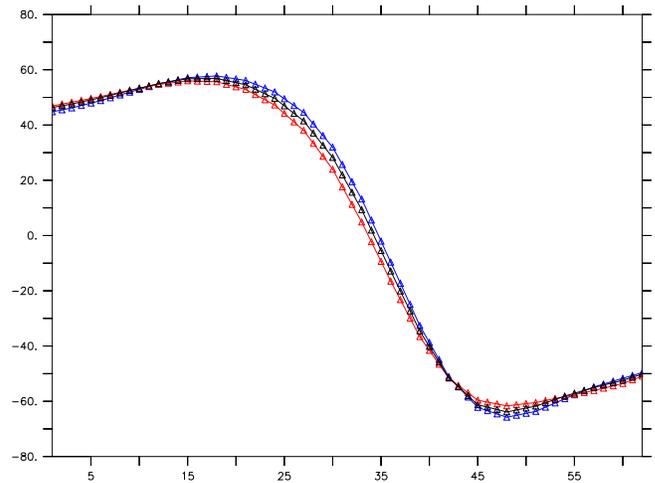
Nord



Sud

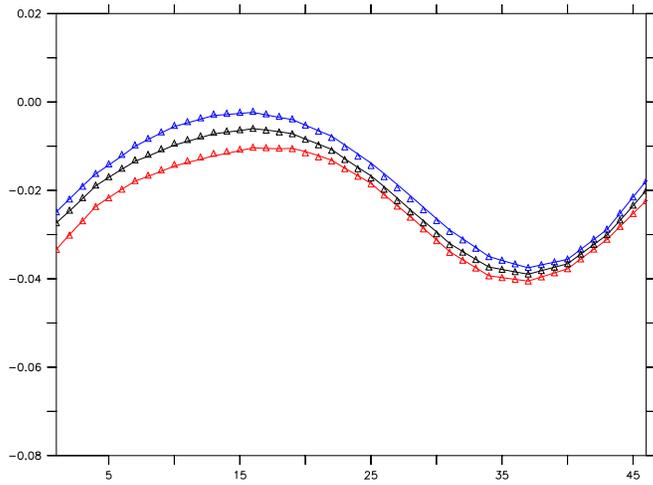


Est

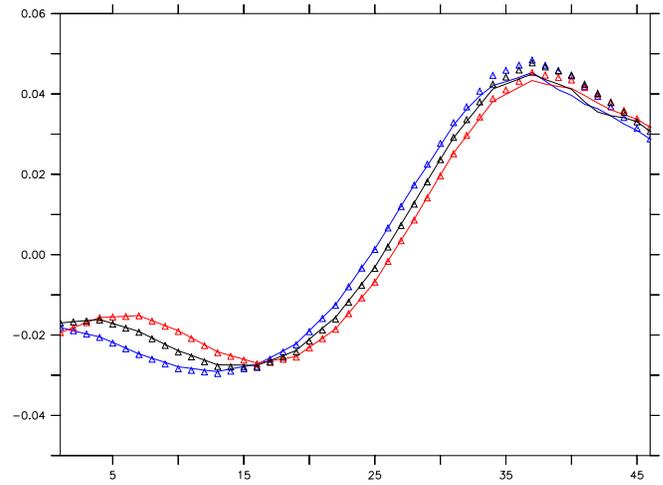


Ouest

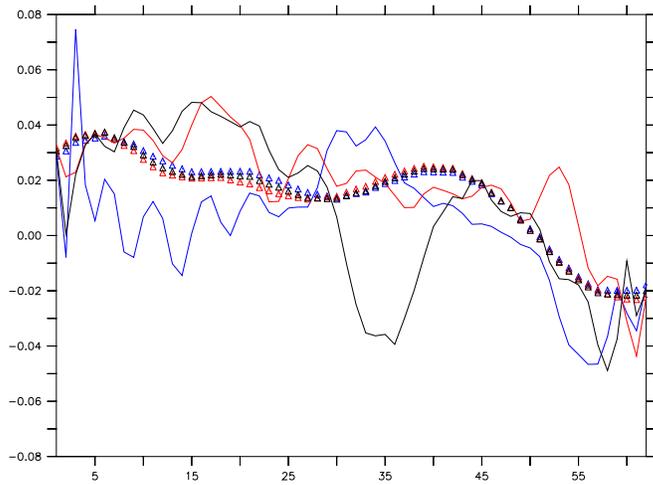
FIG. B.16 – Conditions aux frontières de la grille fine : surface libre (rouge : $T=100h$, noir : $T=300h$, bleu : $T=500h$) sur les bords Nord, Sud, Est, Ouest avec assimilation mono-grille (courbes continues) et sans assimilation (triangles). En abscisse : la coordonnée le long de la frontière



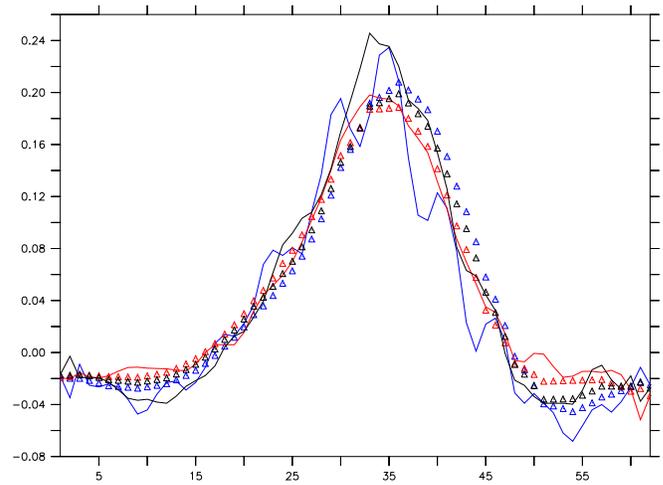
Nord



Sud

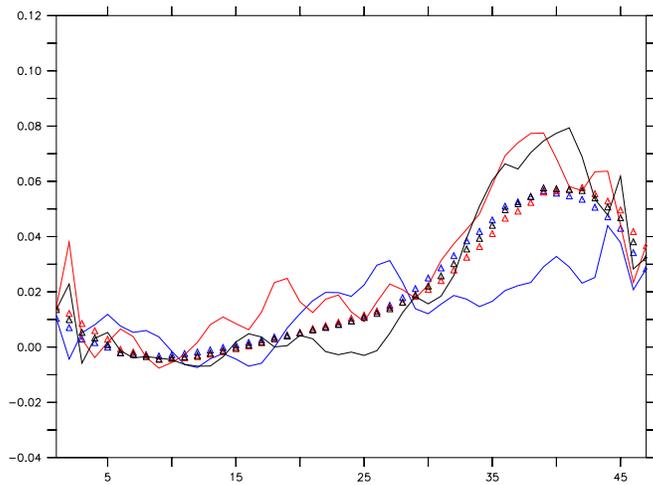


Est

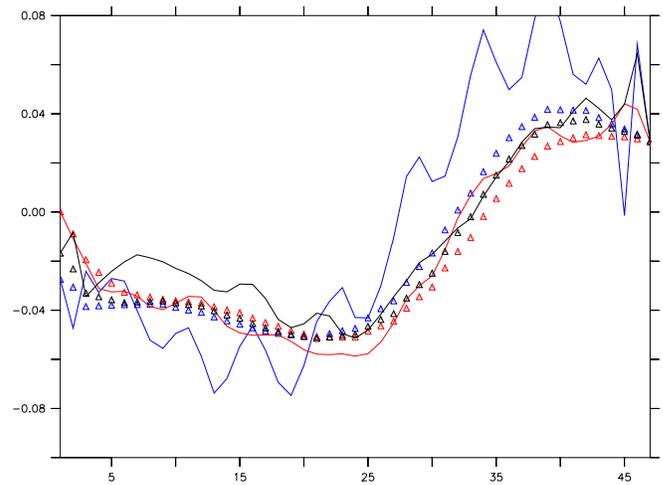


Ouest

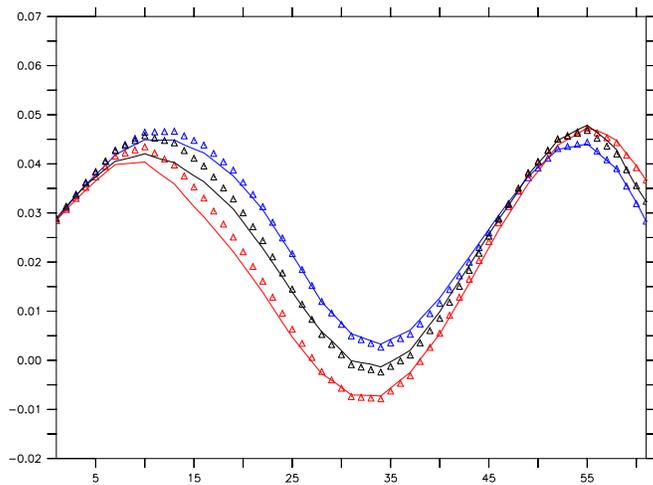
FIG. B.17 – Conditions aux frontières de la grille fine : vitesse zonale (rouge : $T=100h$, noir : $T=300h$, bleu $T=500h$) sur les bords Nord, Sud, Est, Ouest avec assimilation mono-grille (courbes continues) et sans assimilation (triangles). En abscisse : la coordonnée le long de la frontière



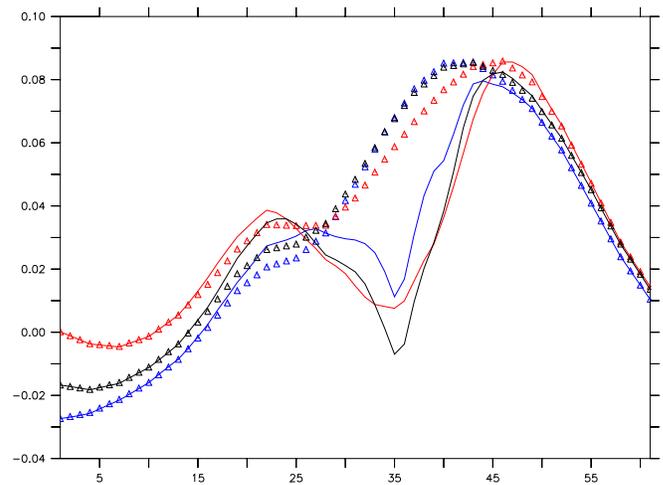
Nord



Sud



Est



Ouest

FIG. B.18 – Conditions aux frontières de la grille fine : vitesse méridionale (rouge : $T=100h$, noir : $T=300h$, bleu $T=500h$) sur les bords Nord, Sud, Est, Ouest avec assimilation mono-grille (courbes continues) et sans assimilation (triangles). En abscisse : la coordonnée le long de la frontière

Bibliographie

- [1] A. Adcroft and D. Marshall. How slippery are piecewise-constant coastlines in numerical ocean models? *Tellus*, 50A :95–108, 1998.
- [2] A. Barth, A. Alvera-Azcàrate, J.-M. Beckers, and M. Rixen. Coupling a two-way nested primitive equation model and a statistical predictor of the ligurian sea via data assimilation. *Ocean Modelling*, 13 :255–270, 2006.
- [3] A. Barth, A. Alvera-Azcàrate, J.-M. Beckers, M. Rixen, and L. Vandenbulcke. Multigrid state vector for data assimilation in a two-way nested model of the ligurian sea. *Journal of Marine Systems*, in Press, 2006.
- [4] L. Bertino, G. Evensen, and H. Wackernagel. Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, 71 :223–242, 2003.
- [5] E. Blayo and L. Debreu. Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables. *Ocean Modelling*, 9 :231–252, 2005.
- [6] E. Blayo and L. Debreu. Nesting ocean models. In Eric P. Chassignet and Jacques Verron, editors, *Ocean Weather Forecasting : An Integrated View of Oceanography*, pages 127–147. Springer, 2006.
- [7] A. Bourret. *Traitement et optimisation des conditions aux frontières pour un modèle de circulation cotière. Application au cas de la Guyane*. Phd thesis, Université de la Méditerranée, 2005.
- [8] A. Brandt. Stages in developing multigrid solutions. In *Proceedings of the 2nd International Congress of Numerical methods for Engineers*, pages 23–43, Paris, 1980. Dunod.
- [9] W.L. Briggs. *A Multigrid Tutorial*. SIAM, 1987.
- [10] C. Cardinali, S. Pezzuli, and E. Anderson. Influence matrix diagnostic of a data assimilation system. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 130(603) :2767–2786, 2004.
- [11] B. Chapnik. *Réglage des statistiques d’erreur en assimilation variationnelle*. Phd thesis, Université Toulouse III, 2005.
- [12] P. Courtier. Dual formulation of four-dimensional variational assimilation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 123 :2449–2461, 1997.
- [13] P. Courtier, J. N. Thépaut, and A. Hollingsworth. A strategy for operational implementation of 4d-var, using an incremental approach. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 120 :1367–1387, 1994.
- [14] L. Debreu. *Raffinement adaptatif de maillage et méthodes de zoom. Application aux modèles d’océan*. Phd thesis, Université Joseph Fourier, 2000.
- [15] L. Debreu, C. Vouland, and E. Blayo. Agrif : Adapted grid refinement in fortran. *Computers and Geosciences*, to appear.

- [16] J. Derber and F. Bouttier. A reformulation of the background error covariance in the ecmwf global data assimilation system. *Tellus*, 51A :195–221, 1999.
- [17] J.-L. Devenon. Optimal control theory applied to an objective analysis of a tidal current mapping by hf radar. *J. Atmosph. Ocean Technol.*, 7 :269–284, 1990.
- [18] F.-X. Le Dimet. *A general formalism of variational analysis*. CIMMS Report, 1982.
- [19] F.-X. Le Dimet and V. Shutyaev. On deterministic error analysis in variational data assimilation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 12 :481–490, 2005.
- [20] F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : Theoretical aspects. *Tellus*, 38A :97–110, 1986.
- [21] G. Evensen. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, 99-C5 :10143–10182, 1994.
- [22] G. Evensen. The ensemble kalman filter : theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, 53 :343–367, 2003.
- [23] G. Evensen. *Data Assimilation. The Ensemble Kalman Filter*. Springer, 2007.
- [24] B. Ferron and J. Marotzke. Impact of 4d-variational assimilation of wocce hydrography on the meridional circulation in the indian ocean. *Deep Sea Research Part II : Topical Studies in Oceanography*, 50 :2005–2021, 2003.
- [25] R.A. Flather. A tidal model of the north-west european continental shelf. *Mem. Soc. R. Sci Liège*, 6(10) :141–164, 1976.
- [26] G. Gebbie, P. Heimbach, and C. Wunsch. Strategies for nested and eddy-resolving state estimation. *J. Geophys. Res*, 2006.
- [27] J.C. Gilbert and C. Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45 :407–435, 1989.
- [28] A.E. Gill. *Atmosphere Ocean Dynamics*. Academic Press, San Diego, 1982.
- [29] J.R. Gunson and P. Malanotte-Rizzoli. Assimilation studies of open-ocean flows. part 1 : Estimation of initial and boundary conditions. *J. Geophys. Res.*, 101 :28457–28472, 1996.
- [30] L. Hascoët, R.-M. Greborio, and V. Pascual. Computing adjoints by automatic differentiation with tapenade. In B. Sportisse and F.-X. LeDimet, editors, *Ecole INRIA-CEA-EDF "Problèmes non-linéaires appliqués"*. Springer, 2005. to appear.
- [31] K. Ide, P. Courtier, M. Ghil, and A.C. Lorenc. Unified notation for data assimilation : Operational, sequential and variational. *J. Met. Soc. Japan*, 75, 1997.
- [32] A.H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, 1970.
- [33] R. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Physical Oceanography*, 23 :2541–2566, 1960.
- [34] R.M Lewis and S.G. Nash. Model problems for the multigrid optimization of systems governed by differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26 :1811–1837, 2005.
- [35] J.L. Lions. *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1968.

- [36] A.C. Lorenc. Analysis methods for numerical weather prediction. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 112 :1177–1194, 1986.
- [37] A.C. Lorenc. Optimal non-linear objective analysis. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 114 :205–240, 1988.
- [38] S.G. Nash. Preconditioning of truncated-newton methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6 :599–616, 1985.
- [39] S.G. Nash. A multigrid approach to discretized optimization problems. *Journal of Optimization Methods and Software*, 14 :99–116, 2000.
- [40] E. Neveu. *Multigrilles pour l'assimilation variationnelle*. Rapport de stage m2r mathématiques appliquées, Université Joseph Fourier-Grenoble I, 2007.
- [41] D.F. Parrish and J.C. Derber. The national meteorological center's spectral statistical-interpolation analysis system. *Monthly Weather Review*, 120 :1747–1763, 1992.
- [42] J. Pedloski. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, 1986.
- [43] D.T. Pham, J. Verron, and M.-C. Roubaud. A singular evolutive extended kalman filter for data assimilation in oceanography. *Journal of Marine Systems*, 16,3-4 :323–340, 1998.
- [44] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. Numerical recipes. In *The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [45] S. Ricci. *Modélisation multivariée de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche pour l'assimilation variationnelle océanique*. Phd thesis, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2004.
- [46] F. Runday and J.M. Beckers. *Océanographie physique, version préliminaire*. Université de Liège, 2004.
- [47] Y. Sasaki. A fundamental study of the numerical prediction based on the variational principle. *J. Met. Soc. Japan*, 33 :262–265, 1955.
- [48] A. Shchepetkin and J.C. McWilliams. The regional oceanic modeling system : A split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate ocean model. *Ocean Modelling*, 9 :347–404, 2005.
- [49] S. Ta'asan. *Multigrid one-shot methods and design strategy*. Lecture note, Carnegie Mellon University, 2001.
- [50] V. Taillandier, V. Echevin, L. Mortier, and J.-L. Devenon. Controlling boundary conditions with a four-dimensional variational data-assimilation method in a non-stratified open coastal model. *Ocean Dynamics*, 54 :284–298, 2004.
- [51] U. Trottenberg, C. Oosterlee, and A. Schüller. *Multigrid*. Academic Press, 2001.
- [52] L. Vandenbulcke, A. Barth, M. Rixen, A. Alvera-Azcàrate, Z. Ben Bouallegue, and J.-M. Beckers. Study of the combined effects of data assimilation and grid nesting in ocean models-application to the gulf of lions. *Ocean Science Discussions*, 3 :291–318, 2006.
- [53] F. Veersé. *Stratégies de minimisation pour le calcul de l'état initial en météorologie*. Phd thesis, Université Bordeaux I, 1997.
- [54] M. Verlaan and A.W. Heemink. Tidal flow forecasting using reduced rank square root filters. *Stoch. Hydrol. Hydraul.*, 11(5) :349–368, 1997.
- [55] A. Vidard. *Vers une prise en compte des erreurs modèle en assimilation de données 4D-variationnelle. Application à un modèle réaliste d'océan*. Phd thesis, Université Joseph Fourier-Grenoble I, 2001.

-
- [56] A. Weaver and P. Courtier. Correlation modelling on the sphere using a generalized diffusion equation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 127 :1815–1846, 2001.