Contribution à l'analyse de problèmes d'obstacle pour une classe de lois de conservation scalaires quasi linéaires

Laurent Levi

Mémoire de synthèse des travaux scientifiques rédigé à l'appui d'une demande d'inscription à l'Habilitation à Diriger des Recherches.

Contribution à l'analyse de problèmes d'obstacle pour une classe de lois de conservation scalaires quasi linéaires

Laurent Lévi
Université de Pau et des Pays de l'Adour
Laboratoire de Mathématiques Appliquées - UMR CNRS 5142
BP 1155 - 64013 PAU Cedex - FRANCE

Table des matières

1 Introduction

1.1 Présentation du mémoire

Les problèmes d'obstacle pour des opérateurs hyperboliques du premier ordre ont été introduits par A.Bensoussan & J.L.Lions [12] pour l'étude de fonctions-coût associées à des processus déterministes. Depuis, de nombreux travaux ont été développés ([7, 23, 50, 62, 63]...). Les résultats exposés dans ce mémoire ont été motivés par l'étude d'écoulements de fluides en milieux poreux pour la récupération d'hydrocarbures, ce qui peut amener à considérer, après simplifications diverses, une phase huileuse unique saturant la roche réservoir et composée de deux constituants : l'huile lourde et l'huile légère. Ainsi, l'application de la loi de Gibbs fixe à trois la variance thermodynamique de ce système, c'est à dire le nombre de variables indépendantes propres à décrire son évolution. On choisit alors la pression $\mathcal{P}$, la température $\mathcal{T}$ et la fraction molaire X_h du pseudo constituant lourd. Pour des écoulements isothermes, le choix des inconnues se réduit donc à $\mathcal{P}$ et X_h, où X_h est assujettie, à la pression $\mathcal{P}$, à vérifier la condition d'obstacle unilatérale

$$X_h \geq C(\mathcal{P}).$$

En effet, en deçà de cette valeur, l'apparition d'une phase gazeuse pour le même nombre de constituants fixe à deux la variance thermodynamique ; de sorte que X_h est totalement déterminée par la connaissance de $\mathcal{P}$. On considère donc un modèle prenant en compte la dissolution du gaz dans l'huile mais excluant le phénomène de libération du gaz. Ainsi, l'écriture de la loi de conservation de masse pour le constituant "huile lourde" et de la loi de conservation de masse globale conduit à s'intéresser au problème couplé en "saturation-pression" :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho(X_h)\omega_h(X_h)) + Div(\rho(X_h)\omega_h(X_h)\mathbf{V}) = 0, \\ X_h \geq C(\mathcal{P}), \\ \partial_t\rho(X_h) + Div(\rho(X_h)\mathbf{V}) = 0, \end{cases}$$

où la vitesse de filtration $\mathbf{V}$ est donnée par la loi de Darcy-Muskat :

$$\mathbf{V} = -\frac{k(x)}{\mu(X_h)}(\nabla\mathcal{P} - \rho(X_h)\mathbf{g}),$$

où $\rho(X_h)$ est la masse volumique de la phase huileuse considérée, $k(x)$ sa perméabilité et μ sa viscosité dynamique, ω_h la fraction massique du composant lourd et $\mathbf{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur. En remarquant que l'application $X_h \to \rho(X_h)\omega_h(X_h)$ est strictement croissante, on introduit la nouvelle inconnue $u \equiv \rho(X_h)\omega_h(X_h)$ satisfaisant à une équation hyperbolique quasi linéaire du premier ordre et associée à une contrainte unilatérale couplée à une équation en pression.

On retrouve ce même type d'équations lorsque l'on s'intéresse au modèle *Black Oil* en présence d'une phase aqueuse où l'on considère trois constituants (l'eau, l'huile lourde et l'huile légère) présents soit dans deux phases (cas d'une huile sous-saturée) soit éventuellement dans 3 (lorsqu'il y a formation d'une phase gazeuse). L'étude de tels modèles a été menée seulement lorsque l'équation en X_h a pu être linéarisée et ainsi étudiée partir des résultats de F.Mignot & J.P.Puel [50] : ce sont notamment les travaux de G.Gagneux, A.M.Lefevère & M.Madaune-Tort [33] dans le cas d'un modèle triphasique. Il faut aussi noter que pour les modèles prenant en compte le fait qu'en un point x du gisement, l'huile puisse être saturée ou sous-saturée, la saturation en gaz est solution d'une équation parabolique dégénérée dont le terme de transport est non-linéaire. Ceci motive, dans le cas des problèmes du type *Black-oil*, l'étude de l'approximation des problèmes hyperboliques non linéaires unilatéraux par des problèmes paraboliques dégénérés associés à la même condition d'obstacle.

On trouvera d'autres exemples en physique et en mécanique (et pour d'autres familles d'opérateurs que celles précitées) dans les ouvrages de G.Duvaut & J.L.Lions [27], J.L.Lions [44], J.F.Rodrigues [61], D.Kinderlehrer & G.Stampacchia [38] et en mathématiques financières (voir [41], chapitre 4). En outre, on ne manquera pas de se reporter à l'ouvrage de H.Brézis [14] où est présenté un ensemble de résultats d'existence, d'unicité et de régularité pour des problèmes d'obstacle unilatéraux correspondant à des opérateurs linéaires aux dérivées partielles elliptiques, paraboliques ou hyperboliques du second ordre.

Ce mémoire s'organise de la façon suivante :

- Aux paragraphes 2 et 3 on considère une classe d'opérateurs $\mathbb{O}$ quasi linéaires respectivement hyperboliques du premier ordre et paraboliques du second ordre associés à une contrainte forcée d'obstacle, ce que nous décrirons formellement à l'aide du problème à frontières libres :

Etant donné deux fonctions a et b mesurables sur $]0,T[\times\Omega$ ($a \leq b$ p.p.) :
Trouver une fonction u mesurable sur $]0,T[\times\Omega$ telle que

$$\begin{cases} a \leq u \leq b \text{ sur }]0,T[\times\Omega, \\ \mathbb{O}(t,x,u) = 0 \text{ sur } [a < u < b], \\ \mathbb{O}(t,x,u) \leq 0 \text{ sur } [a < u = b],\ \ \mathbb{O}(t,x,u) \geq 0 \text{ sur } [a = u < b], \end{cases} \tag{1.1}$$

et vérifiant une condition initiale et des conditions aux limites que nous préciserons ultérieurement. Dans (1.1) nous dirons que a et b sont deux obstacles (ou seuils) et que la présentation correspond à celle du problème d'obstacle bilatéral pour $\mathbb{O}$; celle de l'obstacle unilatéral inférieur ou supérieur pouvant être obtenue en choisissant (formellement) $b \equiv +\infty$ et $a \equiv -\infty$ respectivement.

Remarque 1.1.1 - *Dans un souci d'unification de la présentation et sauf mention du contraire, les résultats présentés aux paragraphes 2 et 3 feront référence au problème d'obstacle bilatéral, le cas de l'obstacle unilatéral s'en déduisant comme mentionné ci-dessus.*

Ainsi, le paragraphe 2 est précisément consacré à l'analyse mathématique du problème (1.1) pour la classe d'opérateurs hyperboliques du premier ordre

$$\mathbb{H}(t,x,.) : u \to \partial_t u + \sum_{i=1}^{p} \partial_{x_i}[\varphi_i(t,x,u)] + \psi(t,x,u), \tag{1.2}$$

associés à des conditions aux limites de Dirichlet. En premier lieu, on donne une formulation faible du problème bilatéral pour $\mathbb{H}$ au moyen d'une inégalité d'entropie utilisant des *paires entropiques de Kruzhkov* ([39]) paramétrées par les variables de temps et d'espace de manière à prendre en compte les conditions d'obstacle. On exprime les conditions de bord en s'inspirant de la présentation de F.Otto dans [53] (voir aussi le chapitre 2 de l'ouvrage de J.Malek, J.Necas, M.Rokyta, M.Ruzicka [52]). En adaptant la méthode de dédoublement des variables on s'assure (paragraphe 2.1) que la définition ainsi proposée garantit l'unicité d'une solution entropique. On obtient les résultats d'existence au paragraphe 2.2 en utilisant la méthode de pénalisation (*cf.* par exemple [44]) et des théorèmes de compacité. On présente deux situations, selon que les contraintes d'obstacle sont fixes (c'est à dire indépendantes des variables de temps et d'espace) ou mobiles. Dans la première situation (sous-paragraphe 2.2.1), sous couvert d'hypothèses additionnelles de régularité sur la donnée initiale et sur les fonctions $\boldsymbol{\varphi}$ et ψ, on établit l'existence d'une solution à variation bornée et même continue de $[0,T]$ à valeurs dans L^1. Dans la deuxième situation (sous-paragraphe 2.2.2), on dispose seulement d'une estimation uniforme dans $L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ des solutions des problèmes pénalisés. On passe alors à la limite par rapport au paramètre de pénalisation dans L^∞ faible-$\star$ *via* le concept de solution à valeurs mesure - précisément "mesure de Young solution" - à laquelle nous associons, à la manière de de R.Eymard, T.Gallouët & R.Herbin [28], la notion de processus entropique solution. Ceci conduit à une reformulation entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ où l'inconnue dépend maintenant d'une variable libre intégrée sur $[0,1]$.

Au paragraphe 2.3 on s'intéresse à des résultats de comportement de la solution u en fonction de la contrainte d'obstacle associée : propriétés de monotonie, d'approximation. On met aussi u en relation avec la solution du problème sans contraintes associé. Enfin, au paragraphe 2.4, on propose une approximation numérique de u basée sur une méthode à pas fractionnaire en temps. Dans le cas du problème de Cauchy sur tout l'espace (sous-paragraphe 2.4.1) et lorsque a et b sont des constantes réelles et $\mathbb{H}(t,x,.) = \mathbb{H}(.)$, on obtient une majoration de l'erreur dans L^1 entre la solution exacte et la solution calculée en $\mathcal{O}(\sqrt{t})$. Dans le cas du problème de Dirichlet (sous-paragraphe 2.4.2), on a seulement pu établir un résultat de convergence dans L^1.

Au paragraphe 3, on considère le problème (1.1) pour la famille d'opérateurs paraboliques

$$\mathbb{P}(t,x,.) : u \to \mathbb{H}(t,x,u) - \Delta\phi(u), \tag{1.3}$$

où ϕ est une fonction croissante telle que ϕ' peut s'annuler ; de sorte qu'il existe, au sein du domaine d'étude, des zones de "parabolicité" (où $\phi'(u) > 0$) et "d'hyperbolicité" (où $\phi'(u) = 0$) qui dépendent de la solution elle-même. On distingue deux cas selon que $\mathbb{P}$ est faiblement ou fortement dégénéré c'est à dire selon que ϕ est strictement croissante (et ϕ' s'annule en des points isolés de $\mathbb{R}$ ce qui est en particulier le cas pour les équations des milieux poreux où $\phi(u) = u^m$, $m > 1$) ou croissante "au sens large". Dans l'une ou l'autre des situations, on obtient un résultat d'existence en utilisant la méthode de viscosité artificielle et en relaxant la contrainte d'obstacle par pénalisation.

Lorsque $\mathbb{P}$ est faiblement dégénéré on tire avantage de l'existence de ϕ^{-1} et on présente au paragraphe 3.1 deux résultats d'existence et d'unicité. Pour des obstacles constants (sous-paragraphe 3.1.1) et sous des conditions additionnelles de régularité sur la donnée initiale et sur $\boldsymbol{\varphi}$ et ψ, on prouve l'existence d'une solution à variation bornée, caractérisée par une inéquation variationnelle "forte". La technique d'unicité s'appuie sur des formules de Gauss-Green et de différentiation de la superposition fonctionnelle exprimées dans l'espace des fonctions bornées et à variation bornée. Au sous-paragraphe 3.1.2, pour des obstacles mobiles, on démontre l'existence d'une solution faible satisfaisant à une inéquation variationnelle "faible". Si les contraintes d'obstacle ne dépendent que de la variable d'espace, on est en mesure d'utiliser une méthode de dédoublement de la variable temporelle uniquement et on établit un résultat de dépendance T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ d'une solution faible en fonction de la donnée initiale associée.

Pour des opérateurs fortement dégénérés (paragraphe 3.2), on donne d'abord une formulation entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$, qui peut être vue comme une extension au second ordre de celle proposée pour l'opérateur $\mathbb{H}$. En particulier les conditions aux limites sont exprimées par une inégalité entre flux entropiques dans le cadre mathématique des *champs à divergence-mesure*. Notons que les obstacles a et b sont désormais des constantes réelles. Ainsi, on peut assurer l'unicité d'une solution entropique (sous-paragraphe 3.2.1) en utilisant la méthode de dédoublement des variables. En effet, on adapte les arguments de J.Carrillo [15] pour contrôler la contribution des termes de diffusion *via* une "inégalité d'énergie" et ceux de C.Mascia, A.Porretta & A.Terracina [46] pour étudier les termes de bord. Des résultats d'existence sont exposés au sous-paragraphe 3.2.2 avec des conditions supplémentaires de régularité sur les non-linéarités et éventuellement sur la donnée initiale. Toutes ces hypothèses sont relaxées au sous-paragraphe 3.2.3 où l'on passe à la limite dans L^∞ faible-$\star$, c'est à dire en introduisant la notion de processus entropique pour le problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$. Au sous-paragraphe 3.3, on montre que le problème d'obstacle du second ordre fournit une approximation avec viscosité du problème d'obstacle pour l'opérateur du premier ordre correspondant. Ce résultat de perturbations singulières nous permet de mettre en relation les formulations entropiques (notamment celles des conditions aux limites) données aux paragraphes 2 et 3. Enfin, au sous-paragraphe 3.4, on considère le problème d'obstacle unilatéral (toujours supposé constant) pour un opérateur quasi linéaire *anisotropique* fortement dégénéré lorsque les données initiales sont seulement des fonctions mesurables et intégrables. On définit alors la notion de solution faible entropique renormalisée, à l'aide de fonctions de troncature, de sorte que la technique d'unicité s'apparente à celle développée au sous-paragraphe 3.2.1. On obtient un résultat d'existence en régularisant le terme de diffusion et en utilisant la méthode de pénalisation.

Le dernier paragraphe de ce mémoire (paragraphe 4) est consacré à de nouvelles thématiques de recherche où on réinvestit les techniques utilisées précédemment pour les opérateurs du second et premier ordre dans le cadre de modèles particuliers encore issus de l'étude d'écoulements de fluides en milieux poreux. Tout d'abord, au sous-paragraphe 4.1, on considère un problème de couplage entre une équation quasi linéaire hyperbolique du premier ordre posée dans un ouvert Ω_1 et une équation parabolique faiblement dégénérée posée dans le complémentaire $\Omega_2 \equiv \Omega\backslash\Omega_1$, avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. L'une des particularités de ce travail est de supposer que l'interface Γ_{12} entre les deux milieux est incluse dans le lieu des caractéristiques sortantes de l'opérateur du premier ordre. Ainsi, les conditions de transmission le long de Γ_{12} se réduisent uniquement à des conditions (formelles) de continuité de flux. On donne alors une formulation faible du problème au moyen d'une condition d'entropie sur tout l'ouvert d'étude ; de sorte qu'une solution faible vérifie une condition d'entropie sur Ω_1 et une égalité variationnelle sur Ω_2. Le fait qu'à l'interface l'information est transmise de la zone d'hyperbolicité à la zone de parabolicité nous conduit à chercher un résultat d'unicité en considérant d'abord la zone d'hyperbolicité, puis celle de parabolicité. On obtient une propriété d'existence en régularisant le terme de diffusion sur Ω_2 et en ajoutant un terme viscosité sur Ω_1. On est donc amené à considérer sur tout Ω une équation de diffusion-convection-réaction, dont le terme de diffusion présente un saut le long de l'interface. Il convient alors de s'assurer de l'existence d'une solution faible (par une méthode de point fixe) et de l'unicité de celle-ci (par une technique de changement d'espace-pivot). On fait tendre le terme de viscosité artificielle vers 0 en examinant deux situations : ou bien la non linéarité du terme de diffusion est holdérienne d'exposant dans $]0,1[$ (et on passe à la limite fortement dans L^2 sur tout l'ouvert $]0,T[\times\Omega$ au moyen d'un théorème de compacité dû à J.L.Lions [44]) ou bien on impose une hypothèse supplémentaire de régularité sur $u_{0|\Omega_1}$ (et le passage à la limite se fait dans L^∞ faible $\star$ sur $]0,T[\times\Omega_1$ *via* le concept de processus entropique et fortement dans L^2 sur $]0,T[\times\Omega_2$ grâce à une estimation préalable des quotients différentiels dans L^1 de la solution régularisée). Certaines techniques du sous-paragraphe 4.1 sont réinvesties au sous-paragraphe 4.2 lorsque le problème de couplage doit aussi tenir compte d'une contrainte forcée d'obstacle bilatéral.

Enfin, au sous-paragraphe 4.3 on s'intéresse à un résultat de parturbations singulières pour une famille d'équations quasi linéaires paraboliques faiblement dégénérées associées à des conditions aux limites mêlées de Dirichlet-Neumann. Les techniques développées pour établir l'existence d'une solution faible au problème du second ordre s'apparentent à celles évoquées tout au long de ce mémoire (principalement basées sur la méthode de viscosité artificielle même si l'on considère des données de Dirichlet non homogènes) et le passage à la limite lorsque le terme de diffusion devient négligeable par rapport à ceux de convection et de réaction utilise la convergence dans L^∞ faible-$\star$ et la notion de processus entropique solution.

1.2 Hypothèses sur les données

• L'ouvert Ω est un domaine borné *régulier* de $\mathbb{R}^p$, de frontière Γ et de vecteur normal extérieur ν. En outre T est un réel strictement positif, pour tout s de $]0,T]$, Q_s désigne le cylindre $]0,s[\times\Omega$, Σ_s la couronne $]0,s[\times\Gamma$ avec, par convention, $Q = Q_T$ et $\Sigma = \Sigma_T$.

• Aux paragraphes 2 et 3 les fonctions d'obstacle sont données dans $W^{1,+\infty}(Q)$ et sont telles que la donnée initiale et les données de bord appartiennent au convexe des contraintes.

• La donnée initiale u_0 est une fonction mesurable et bornée sur Ω.

• Le terme de réaction ψ est une fonction continue sur $[0,T]\times\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$. De plus ψ est lipschitzienne par rapport à sa troisième variable de constante de Lipschitz M_ψ, uniformément par rapport à (t,x) dans Q.

• Le terme de convection $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction à valeurs vectorielles élément de $(W^{1,+\infty})^p$ sur $[0,T]\times\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$ telle que pour tout i dans $\{1,..,p\}$, $\partial_{x_i}\varphi_i$ est lipschitzienne par rapport à sa troisième variable, de constante de Lipschitz $M_{\partial_{x_i}\varphi_i}$, uniformément par rapport à (t,x) dans Q. Au paragraphe 4, le terme de transport sera écrit sous la forme $-\varphi(u)\nabla\mathcal{P}$ où φ est une fonction de classe $W^{1,+\infty}$ sur $\mathbb{R}$. La pression $\mathcal{P}$ est définie par une équation autonome de type parabolique ou elliptique linéaire posée sur Q (respectivement sur Ω) et est supposée *régulière* c'est à dire dans $W^{2,+\infty}$.

Remarque 1.2.1 - *Sans indications supplémentaires de comportement du signe du terme de source de $\mathbb{H}$ ou de $\mathbb{P}$, le fait qu'à l'instant initial la condition d'obstacle soit satisfaite ne se transmet pas, par hérédité, à la solution associée. Il s'agit donc bien d'un problème de contrainte(s) forcée(s). On verra au paragraphe 2.3 comment il peut en être autrement.*

Dans ces conditions, il est loisible de définir $M_{\boldsymbol{\varphi}} = \max_{i \in \{1,..,p\}} M_{\partial_{x_i}\varphi_i}$ et pour tout t de $[0,T]$,

$$M(t) = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} e^{\mathcal{K}_1 t} + \frac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1}\left(e^{\mathcal{K}_2 t} - 1\right),$$

où $\mathcal{K}_1 = M_\psi + M_{\boldsymbol{\varphi}}$ et $\mathcal{K}_2 = \max_{[0,T]\times\bar{\Omega}} |\psi(t,x,0) + Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,0)]|$. Pour simplifier on pose $M = M(T)$.

Remarque 1.2.2 - *Exception faite du sous-paragraphe 3.4, la constante M jouera le rôle de borne dans $L^\infty(Q)$ pour les solutions des problèmes rencontrés. C'est l'une des caractéristiques de ce mémoire que de considérer des solutions qui sont au moins des fonctions bornées. Ceci étant une conséquence de l'application du principe du maximum ou du fait que l'on s'intéresse à une contrainte bilatérale pour laquelle les fonctions de seuil sont des fonctions bornées.*

Remarque 1.2.3 - *Compte tenu de la remarque qui précède, on peut donner un caractère plus local aux hypothèses de régularité concernant la fonction $\boldsymbol{\varphi}$ que nous supposerons donc désormais définie sur $[0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ et (sauf mention particulière) élément de $W^{1,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M,M])$.*

• Le terme de diffusion ϕ est une fonction croissante sur $[-M,M]$ élément de $W^{1,+\infty}([-M,M])$ et nulle en zéro (par normalisation).

1.3 Espaces fonctionnels

Soient X et Y deux espaces de Hilbert. On pose

$$W(0,T;X;Y) = \left\{v \in L^2(0,T;X), \partial_t v \in L^2(0,T;Y)\right\}$$

qui est un espace de Hilbert lorsque qu'il est muni de la norme du graphe. Enfin,

$$BV(Q) = \left\{v \in L^1_{loc}(Q), \partial_t v \in \mathcal{M}_b(Q) \text{ et } \forall i \in \{1,..,p\}, \partial_{x_i} v \in \mathcal{M}_b(Q)\right\}$$

$$\mathcal{DM}_2(Q) = \left\{\mathbf{V} = (v_0, v_1, .., v_p) \in L^2(Q)^{p+1}, Div_{(t,x)}\mathbf{V} \in \mathcal{M}_b(Q)\right\},$$

où $\mathcal{M}_b(Q)$ désigne l'espace des mesures de Radon bornées sur Q.

Introduits d'abord par G.Anzellotti [3] in 1983, les L^r-espaces des champs à divergence-mesure $\mathcal{DM}_r$ ont été largement étudiés par G.Q.Chen & H.Frid ([18] pour $r = +\infty$ et [19] pour un exposé exhaustif lorsque $1 \leq r \leq +\infty$). Il est commode de définir pour tout V de $\mathcal{DM}_2(Q)$ la forme linéaire Λ_V sur $H^1(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$ à partir de la formule de Gauss-Green généralisée établie dans [19] :

$$\Lambda_V(\xi) := \langle V, \xi \rangle_{\partial Q} = \int_Q V.(\partial_t \xi, \nabla \xi) dxdt + \int_Q \xi \; d[Div_{(t,x)} V].$$

De sorte que si ξ appartient à $H^1_0(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$ alors

$$\Lambda_V(\xi) = \langle V, \xi \rangle_{\partial Q} = 0.$$

En conséquence, C.Mascia, A.Porretta & A.Terracina ont établi dans [46] le résultat suivant :
soit V un élément de $\mathcal{DM}_2(Q)$ tel que v_0 définit une fonction de $[0,T[$ dans $L^1(\Omega)$, continue en 0. Alors pour toute fonction ξ de $H^1(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$ telle que $\xi(T,.) = 0$,

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \int_Q V\xi.(0, \nabla \rho_\varrho) dxdt = -\int_\Omega v_0(0,x)\xi(0,x)\, dx - \langle V, \xi \rangle_{\partial Q}, \tag{1.4}$$

pour toute *suite de bord* $(\rho_\varrho)_{\varrho>0}$ c'est à dire toute suite de fonctions $(\rho_\varrho)_{\varrho>0}$ de $\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ telle que :

$$\lim_{\rho\to 0^+}\rho_\varrho = 1 \text{ p.p. dans } \Omega,\ 0\leq\rho_\varrho\leq 1 \text{ dans } \Omega,\ \rho_\varrho = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Il faut noter que dans le cas particulier où ξ appartient à $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ le membre de droite de (1.4) est nul.

Au paragraphe 2.4, nous utiliserons l'espace $\overline{BV}(\mathbb{R}^p)$ des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^p$ dont la variation totale sur $\mathbb{R}^p$ - notée $TV_{\mathbb{R}^p}$ - est finie.

1.4 Notations

• Dans tout ce qui suit, Div désigne l'opérateur différentiel classique par rapport aux variables d'espace uniquement ; alors que $Div_{(t,x)}$ désigne l'opérateur différentiel par rapport aux variables de temps et espace.

• Les formulations entropiques présentées dans ce mémoire sont exprimées à l'aide des "paires entropiques de Kruzhkov". Nous poserons donc pour (t,x) quelconque fixé dans Q,

$$\begin{aligned}
\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \mathbf{F}(u,v) &= sgn(u-v)\left(\boldsymbol{\varphi}(t,x,u)-\boldsymbol{\varphi}(t,x,v)\right),\\
\forall u\in\mathbb{R},\forall K\in W^{1,1}(Q),\ G(u,K) &= sgn(u-K)\left(Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,K)]+\psi(t,x,u)+\partial_t K\right),\\
\forall(u,v,w)\in\mathbb{R}^3,\ \mathcal{F}(u,v,w) &= 1/2(\mathbf{F}(u,v)-\mathbf{F}(w,v)+\mathbf{F}(u,w)),
\end{aligned}$$

la dépendance par rapport aux variables de temps et d'espace des nonlinéarités $\mathbf{F}$ et G n'étant pas essentielle pour la compréhension.

• Enfin, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $\mathcal{H}^n$ désigne la mesure n-dimensionnelle de Hausdorff et $\mathcal{L}^n$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

2 Opérateurs du premier ordre

La formulation mathématique s'obtient en considérant d'une part que pour des opérateurs quasi linéaires hyperboliques du premier ordre il convient d'introduire une condition d'entropie afin de contrôler la présence d'ondes de chocs et d'autre part, selon de la remarque 1.2.1, il faut aussi tenir compte de la contrainte d'obstacle. On propose donc une définition au moyen d'une inégalité d'entropie à l'intérieur du domaine d'étude en utilisant les *paires entropiques de Kruzhkov* où le paramètre k dépend des variables de temps et d'espace *via* les fonctions a et b. Par ailleurs, l'existence éventuelle de couches limites conduit à exprimer les conditions de bord par une inégalité entre intégrales de surface, formulation due à F.Otto [52, 53] qui généralise au cas de solutions essentiellement bornées celle de C.Bardos, A.Y.LeRoux & J.C.Nédélec [6], seulement valables pour des solutions ayant au moins - en un certain sens - une trace presque partout sur le bord (*cf* remarque 2.0.1). Ainsi, nous dirons que :

Définition 2.0.1 - *Une fonction u mesurable et bornée sur Q est une solution faible entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ si et seulement si u vérifie :*
i) la condition d'obstacle

$$a \leq u \leq b \text{ p.p. dans } Q,$$

ii) la condition d'entropie intérieure pour toute fonction ξ de $\mathcal{D}(Q)$, $\xi \geq 0$, et toute fonction K de $W^{1,1}(Q)$ telle que $a \leq K \leq b$ p.p. dans Q,

$$\int_Q \left(|u-K|\partial_t \xi + \mathbf{F}(u,K).\nabla\xi - G(u,K)\xi\right) dxdt \geq 0, \tag{2.1}$$

iii) la condition aux limites de Dirichlet homogène pour toute fonction ζ de $L^1(\Sigma)$, $\zeta \geq 0$, et toute fonction K de $L^1(\Sigma)$ telle que $a \leq K \leq b$, $\mathcal{H}^p$-p.p. sur Σ,

$$ess \lim_{\tau \to 0^-} \int_\Sigma \mathcal{F}\left(u(\sigma+\tau\nu), 0, K\right).\nu\zeta d\mathcal{H}^p \geq 0, \tag{2.2}$$

iv) la condition initiale u_0 au sens faible dans $L^1(\Omega)$,

$$ess \lim_{t\to 0^+} \int_\Omega |u(t,.)-u_0|dx = 0. \tag{2.3}$$

Remarque 2.0.1 - *Si u admet une trace forte γ_u sur le bord qui est une fonction intégrable, ce qui peut être le cas dès lors que u est un élément de $BV(Q)$ ou, compte tenu des travaux de A.Vasseur [76] (voir aussi [54]), si $\boldsymbol{\varphi}$ est véritablement non linéaire au sens où pour presque tout (t,x) de $]0,T[\times\Omega$ et pour tout $(\tau,\boldsymbol{\varsigma})$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p$ tel que $\tau^2+|\boldsymbol{\varsigma}|^2=1$,*

$$\mathcal{L}^1(\{z|\tau+\boldsymbol{\varsigma}.\partial_u\boldsymbol{\varphi}(t,x,z)=0\})=0,$$

alors la condition iii) est équivalente à celle donnée par C.Bardos, A.Y.LeRoux & J.C.Nédélec, qui se réduit ici à :

$$\forall k \in \mathcal{I}(\gamma_u,0),\ sgn(\gamma_u)\{\boldsymbol{\varphi}(\sigma,\gamma_u))-\boldsymbol{\varphi}(\sigma,k))\}.\nu \geq 0,\ \text{pour } \mathcal{H}^p - \text{presque tout } \sigma \text{ de } \Sigma.$$

Cependant pour des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes, la formulation proposée par F.Otto permet d'obtenir un résultat de dépendance dans L^1 de la solution faible entropique en fonction des données initiales et de bord (de la même manière qu'à la remarque 2.1.2).

Remarque 2.0.2 - *On peut vérifier que la définition 2.0.1 décrit bien le problème d'obstacle pour* $\mathbb{H}$. *En effet, dans ii) on choisit* $K = a$. *Il vient :* $\forall \xi \in \mathcal{D}(Q)$, $\xi \geq 0$,

$$\int_Q ((u-a)\partial_t \xi + sgn(u-a)(\boldsymbol{\varphi}(t,x,u) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,a)).\nabla\xi)\, dxdt$$
$$-\int_Q sgn(u-a)(Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,a)] + \psi(t,x,u) + \partial_t a)\xi dxdt \geq 0.$$

On observe que p.p. sur Q, $sgn(u-a)(\boldsymbol{\varphi}(t,x,u) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,a)) = \boldsymbol{\varphi}(t,x,u) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,a)$. *Donc,*

$$-\langle \mathbb{H}(t,x,u), \xi\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} + \int_Q (1 - sgn(u-a))(Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,a)] + \psi(t,x,u) + \partial_t a)\xi dxdt \geq 0.,$$

ou encore, compte tenu du fait que $(1-sgn(u-a))(Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,a)]+\psi(t,x,u)+\partial_t a) = (1-sgn(u-a))\mathbb{H}(t,x,a)$ *p.p. sur* Q,

$$\langle \mathbb{H}(t,x,u), \xi\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} \leq \int_Q (1 - sgn(u-a))\mathbb{H}(t,x,a)\xi dxdt. \tag{2.4}$$

Supposons maintenant que u *est suffisamment régulière pour que* $\mathbb{H}(t,x,u)$ *soit un élément de* $L^1(Q)$ *et choisissons* $\xi = (u-a)^+\zeta$ *où* ζ *appartient à* $\mathcal{D}(Q)$, $\zeta \geq 0$. *Puisque* $(1 - sgn(u-a))(u-a)^+ = 0$ *p.p. sur* Q, *nous obtenons*

$$\int_Q \mathbb{H}(t,x,u)(u-a)^+\zeta dxdt \leq 0,$$

qui signifie que $\mathbb{H}(t,x,u)(u-a)^+ \leq 0$ *p.p. sur* Q. *Le même raisonnement avec* $K = b$ *conduit à*

$$\langle \mathbb{H}(t,x,u), \xi\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} \geq \int_Q (1 + sgn(u-b))\mathbb{H}(t,x,b)\xi dxdt. \tag{2.5}$$

De sorte que $\mathbb{H}(t,x,u)(u-b)^- \geq 0$ *p.p. sur* Q, *ce qui formellement nous donne les relations souhaitées.*

2.1 Le théorème d'unicité

Il s'agit d'abord de s'assurer que la définition 2.0.1 garantit l'unicité d'une solution faible entropique. Pour cela, on s'appuie sur la méthode de dédoublement des variables due à S.N.Kruzhkov [39]. Celle-ci nous permet d'établir le résultat suivant de dépendance T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ de la solution en fonction la donnée initiale :

Théorème 2.1.1 - *Soient* u *et* v *deux solutions faibles entropiques du problème d'obstacle pour l'opérateur* $\mathbb{H}$ *de conditions initiales respectives* u_0 *et* v_0. *Alors, pour presque tout* t *de* $]0,T[$,

$$\int_\Omega |u(t,x) - v(t,x)|dx \leq \int_\Omega |u_0 - v_0|dx\, e^{M_\psi t}.$$

La preuve repose essentiellement sur le lemme suivant, démontré à partir des techniques développées par F.Otto [52, 53] :

Lemme 2.1.1 - *Toute solution faible entropique vérifie :*
$\forall K \in W^{1,1}(Q)$, $a \leq K \leq b$ *p.p. sur* Q, $\forall \xi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\mathbb{R}^p)$, $\xi \geq 0$,

$$-\int_Q (|u-K|\partial_t\xi + \mathbf{F}(u,K).\nabla\xi - G(u,K)\xi)\, dxdt \leq ess \lim_{\tau\to 0^-} \int_\Sigma \mathbf{F}(u(\sigma+\tau\nu),0).\nu\xi d\mathcal{H}^p - \int_\Sigma \mathbf{F}(K,0).\nu\xi d\mathcal{H}^p.$$

Dans cette inégalité, écrite en variables (t,x) pour la solution u, on choisit pour presque tout couple (s,y) fixé dans Q

- dans le cas de l'obstacle bilatéral, $K(t,x) = k(s,y)(b(t,x) - a(t,x)) + a(t,x)$,

$$k(s,y) = \begin{cases} \dfrac{v(s,y) - a(s,y)}{b(s,y) - a(s,y)} \text{ si } b(s,y) \neq a(s,y), \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

de sorte que $0 \leq k \leq 1$ p.p. sur Q et en conséquence, $a \leq K \leq b$ p.p. sur Q.

- dans le cas de l'obstacle unilatéral inférieur, $K(t,x) = k(s,y) + a(t,x)$,

$$k(s,y) = v(s,y) - a(s,y)$$

de sorte que $k \geq 0$ p.p. sur Q et par suite, $K \geq a$ p.p. sur Q.

Remarque 2.1.1 - *De façon analogue, pour l'obstacle unilatéral supérieur, on considère $K(t,x) = k(s,y) + b(t,x)$, avec pour presque tout couple (s,y) de Q, $k(s,y) = v(s,y) - b(s,y)$. En outre, dans la situation de l'obstacle bilatéral, on peut aussi prendre $K(t,x) = k^\star(s,y)(a(t,x) - b(t,x)) + b(t,x)$, sachant que pour presque tout couple (s,y) de Q,*

$$k^\star(s,y) = \begin{cases} \dfrac{v(s,y) - b(s,y)}{a(s,y) - b(s,y)} \textit{ si } b(s,y) \neq a(s,y), \\ 0 \textit{ sinon,} \end{cases}$$

le passage de cette écriture à la précédente étant obtenu en posant $k^\star = 1 - k$.

On écrit maintenant l'inégalité du lemme 2.1.1 en variables (s,y) pour la solution v avec $K(s,y)$ choisi comme pour u mais en inversant le rôle des variables (t,x) et (s,y). Enfin la fonction-test ξ est construite à partir de suites régularisantes en temps et espace. On intègre chaque inégalité sur Q par rapport aux variables correspondantes. La suite de l'argumentation repose alors schématiquement :

- sur des techniques classiques utilisant de façon essentielle la notion de point de Lebesgue d'une fonction intégrable pour traiter les intégrales dans l'ouvert $Q \times Q$,

- sur la méthodologie développée par F.Otto pour étudier les intégrales du bord.

■

Remarque 2.1.2 - *Le théorème 2.1.1 reste valable dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes. Si u_Γ et v_Γ désignent les données de bord dans $L^\infty(\Sigma)$ (avec $a \leq u_\Gamma$, $v_\Gamma \leq b$ p.p.sur Σ) pour u et v respectivement, on a pour presque tout t de $]0,T[$:*

$$\int_\Omega |u(t,x) - v(t,x)| dx \leq \left(M_{\boldsymbol{\varphi}} \int_0^t \int_\Gamma |u_\Gamma - v_\Gamma| d\sigma + \int_\Omega |u_0 - v_0| dx \right) e^{M_\psi t}.$$

Noter que dans cette situation, la nouvelle écriture de la condition de bord (2.2) est donnée par :
$\forall \zeta \in L^1(\Sigma)$, $\zeta \geq 0$, $\forall K \in L^1(\Sigma)$, $a \leq K \leq b$, $\mathcal{H}^p$-p.p. sur Σ,

$$ess \lim_{\tau \to 0^-} \int_\Sigma \mathcal{F}\left(u(\sigma + \tau\nu), u_\Gamma, K\right) .\nu \zeta d\mathcal{H}^p \geq 0.$$

Remarque 2.1.3 - *Si l'on est assuré de l'existence de solutions à variation bornée - ou pour le moins de solutions ayant des traces qui sont des fonctions de $L^\infty(\Sigma)$ - la preuve de l'unicité proposée par C.Bardos, A.Y.LeRoux & J.C.Nédélec peut encore être utilisée pour établir le théorème 2.1.1. Cependant elle ne permet pas d'obtenir le résultat de la remarque 2.1.2.*

2.2 Quelques résultats d'existence

On relaxe la condition d'obstacle en utilisant une méthode de pénalisation qui nous conduit à introduire, pour tout η strictement positif,

$$\mathbb{H}_\eta(t,x,.) : u \to \mathbb{H}(t,x,u) + \frac{1}{\eta}\beta(t,x,u),$$

où l'opérateur de pénalisation β est donné par $\beta(t,x,u) = -(u-a(t,x))^- + (u-b(t,x))^+$; cette définition incluant celle de l'obstacle unilatéral (inférieur ou supérieur) en prenant formellement $b \equiv +\infty$ et $a \equiv -\infty$. On considère alors la solution faible entropique u_η du problème pénalisé correspondant et on cherche des estimations *a priori* qui suffisent à décrire, par utilisation de théorèmes de compacité, le comportement de la suite $(u_\eta)_{\eta>0}$ lorsque η tend vers 0^+. Deux situations se présentent, selon que les obstacles a et b sont mobiles ou pas.

2.2.1 Cas d'obstacles constants

Lorsque a et b sont des réels fixés, β ne dépend pas des variables de temps et d'espace. Dès lors on retient que l'on a essentiellement :

Propriété 2.2.1 - *Si u_0 est un élément de $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que Δu_0 est une mesure de Radon bornée sur Ω, si φ_i, $i \in \{1,..,p\}$, et ψ sont respectivement des éléments de $W^{2,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M,M])$ et $W^{1,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, alors,*
i) $(u_\eta)_{\eta>0}$ est une suite bornée de $BV(Q) \cap L^\infty(Q) \cap L^\infty(0,T;BV(\Omega))$,
ii) $(\frac{1}{\eta}(\beta(u_\eta))_{\eta>0}$ est une suite bornée de $L^1(Q)$.

Cette propriété est établie en revenant au problème de Dirichlet pour l'opérateur parabolique $\mathbb{H}_{\eta,\epsilon}(t,x,.)$: $u \to \mathbb{H}_\eta(t,x,u) - \epsilon\Delta u$, $\epsilon > 0$ et pour une donnée initiale régularisée par troncature et convolution indexée par le paramètre ϵ. On montre que la suite des solutions $(u_{\epsilon,\eta})_{\epsilon>0}$ est bornée dans $W^{1,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \cap L^\infty(0,T;W^{1,1}(\Omega))$ uniformément par rapport à η en utilisant la monotonie de β et son indépendance par rapport aux variables (t,x). En outre, les bornes d'estimation obtenues dépendent de la variation totale de u_0 sur Ω et des bornes infinies sur $[0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M,M]$ - où M est donné au sous-paragraphe 1.2 - des dérivées partielles secondes et premières des fonctions φ_i et ψ respectivement.

$\blacksquare$

La compacité de l'injection de $BV(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ et le théorème d'Ascoli entraînent l'existence d'une fonction u de $BV(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$, $a \leq u \leq b$ p.p. sur Q telle que à une sous-suite extraite près lorsque η tend vers 0^+, $(u_\eta)_{\eta>0}$ converge vers u dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$. On s'assure que u remplit les conditions de la définition 2.0.1, par passage à la limite en η dans une formulation entropique régularisée pour u_η utilisant des *paires entropiques de F.Otto* $(H_i, \mathbf{Q}_i)$, $i \in \{1,2\}$, définies ici pour tout l dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $[a,b]$, par

$$H_1(z,k) = \left((z-k)^2 + \left(\frac{1}{l}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{1}{l},$$

$$H_2(z,k) = \left((dist(z,[0,k]))^2 + \left(\frac{1}{l}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{1}{l},$$

$$\mathbf{Q}_i(z,k) = \int_k^z \partial_1 H_i(\tau,k)\partial_u \boldsymbol{\varphi}(t,x,\tau)d\tau, i \in \{1,2\},$$

et des fonctions-test $\zeta_i \geq 0$ telles que ζ_1 appartient à $\mathcal{D}(]-\infty, T[\times\Omega)$, et ζ_2 est un élément de $\mathcal{D}(]-\infty, T[\times\mathbb{R}^p)$. Le passage à la limite en η ne pose pas de difficulté puisque $\partial_1 H_i(u_\eta, k)\beta(u_\eta) \geq 0$ p.p. dans Q.

• le choix $i = 1$ pour la paire entropique montre que la fonction limite u vérifie l'inégalité $ii)$ de la définition 2.0.1.

• le choix $i = 2$ nous permet de montrer, à partir des techniques mises en place par F.Otto [52, 53], que u vérifie $iii)$, ce qui nous permet d'affirmer que :

Théorème 2.2.1 - *Si les contraintes d'obstacle sont des constantes réelles, si u_0 est un élément de $BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ tel que Δu_0 appartient à $\mathcal{M}_b(\Omega)$, si $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction de classe $(W^{2,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M, M]))^p$ et ψ est une fonction de classe $W^{1,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, alors le problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ a une unique solution faible entropique dans $BV(Q)\cap L^\infty(Q)$ qui est la limite dans $\mathcal{C}([0,T]; L^q(\Omega))$, $q \in [1, +\infty[$ de (toute) la suite $(u_\eta)_{\eta>0}$ des solutions faibles entropiques des problèmes pénalisés correspondants.*

On peut relaxer les hypothèses de régularité faites sur la condition initiale en construisant, à l'aide de problèmes elliptiques linéaires, une suite $(u_0^\varrho)_{\varrho>0}$ vérifiant la contrainte d'obstacle et qui converge dans $L^1(\Omega)$ vers u_0. Puisque u_0^ϱ appartient à $W^{1,1}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ et Δu_0^ϱ est un élément de $L^1(\Omega)$ on se reporte au théorème 2.2.1 pour faire tendre η vers 0^+ à ϱ fixé. Le passage à la limite en ϱ s'effectue en considérant que le résultat de dépendance T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ énoncé au théorème 2.1.1 garantit que la suite $(u_\varrho)_{\varrho>0}$ des solutions des problèmes d'obstacle pour $\mathbb{H}$ correspondant aux données initiales $(u_0^\varrho)_{\varrho>0}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(Q)$ (et même dans $\mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega))$. Elle converge donc vers un élément u de $\mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega))$ pour lequel on établit (avec les mêmes arguments que ceux évoqués pour démontrer le théorème 2.2.1) qu'il vérifie les conditions de la définition 2.0.1. On a donc

Corollaire 2.2.1 - *Etant donné u_0 dans $L^\infty(\Omega)$, si les contraintes d'obstacle sont des constantes réelles et si $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction de classe $(W^{2,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M, M]))^p$ et ψ une fonction de classe $W^{1,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, alors le problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ a une unique solution faible entropique qui est un élément de $\mathcal{C}([0,T]; L^q(\Omega))$, $q \in [1, +\infty[$.*

ARTICLES DE RÉFÉRENCE DE L'AUTEUR

Lévi, Laurent, Équations quasi linéaires du premier ordre avec contrainte unilatérale. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 317, No.12, 1133-1136 (1993)

Lévi, Laurent, Problèmes unilatéraux pour des équations non linéaires de convection-réaction. Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. 4, No.3, 593-631 (1995)

2.2.2 Cas d'obstacles mobiles

Dans cette situation, l'opérateur de pénalisation β dépend des variables de temps et d'espace. Donc, des estimations mises en avant à la propriété 2.2.1, seul le principe du maximum - $(u_\eta)_{\eta>0}$ suite bornée dans $L^\infty(Q)$ par M - reste vérifié. Dès lors pour passer à la limite en η dans les termes non linéaires de $\mathbb{H}$ il nous faut tirer parti des propriétés des suites bornées dans L^∞. A cet effet, on rappelle brièvement les faits suivants :

• Soit $\mathcal{O}$ un domaine borné de $\mathbb{R}^q$ $(q \geq 1)$ et soit $(u_n)_{n>0}$ une suite bornée dans $L^\infty(\mathcal{O})$ par une constante M. Pour toute fonction h réelle continue sur $[-M, M]$, il existe $\bar{h}$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$ tel que, pour une sous-suite, $(h(u_n))_{n>0}$ converge vers $\bar{h}$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible $\star$. Depuis les travaux de R.J.Diperna [24] puis L.Tartar [72], on est capable de décrire la limite composite $\bar{h}$. En effet, grace aux propriétés de la topologie faible * sur l'espace des mesures de Radon, on a le résultat de compacité :

Proposition 2.2.1 - *Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite de fonctions mesurables sur $\mathcal{O}$ telle que*

$$\exists M > 0, \forall n > 0, \|u_n\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leq M.$$

Alors il existe une sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n>0}$ et $(\nu_w)_{w\in\mathcal{O}}$ une famille de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-M, M]$, telle que pour toute fonction réelle continue et bornée h sur $\mathcal{O}\times]-M, M[$, la suite $\big(h(., u_{\varphi(n)})\big)_{n>0}$ converge dans $L^\infty(\mathcal{O})$ faible $\star$ vers l'élément

$$w \to \int_{\mathbb{R}} h(x, \lambda) d\nu_w(\lambda).$$

L'application $\nu : w \to \nu_w$ est appelée "mesure de Young associée à la suite $(u_n)_{n>0}$".

Un tel résultat a trouvé sa première application dans [25] pour l'approximation, par la méthode de viscosité artificielle, du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^q$, dès lors que l'on peut établir un contrôle uniforme dans L^∞ des solutions approchées. Il a ensuite été utilisé dans le cadre de l'analyse numérique d'équations de transport puisque les schémas "Volumes-Finis" donnent seulement une estimation de la solution numérique dans L^∞ uniforme par rapport au paramètre de discrétisation. Enfin, ce concept de solution très faible a été adapté au cas du problème de Dirichlet pour des lois de conservation scalaires en introduisant la notion de *mesure de Young trace* (voir [10, 11, 68, 69, 75],..).

• En fait, les propriétés de l'inverse généralisée de la fonction de répartition associée à une mesure de probabilité permet de transformer l'intégration par rapport à la mesure $d\nu_w$ en une intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, 1[$. En effet, on doit à R.Eymard, T.Gallouët & R.Herbin [28], le résultat suivant :

Proposition 2.2.2 - *Soit $w \to \nu_w$ une mesure de Young à support dans $[-M, M]$. Il existe une fonction π dans $L^\infty(]0, 1[\times\mathcal{O})$ telle que pour toute fonction continue et bornée h sur $\mathcal{O}\times]-M, M[$*

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathcal{O}} h(x, \lambda) d\nu_w(\lambda) dx = \int_{]0,1[\times\mathcal{O}} h(x, \pi(\alpha, w)) d\alpha dx \text{ pour presque tout } w \text{ dans } \mathcal{O}.$$

On dit que π est un processus associé à la suite $(u_n)_{n>0}$.

On adapte ces notions lorsque la suite des approximations est la suite $(u_\eta)_{\eta>0}$ des solutions faibles entropiques des problèmes pénalisés, ce qui nous conduit à introduire la notion de *processus entropique* pour le problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$. La définition d'un tel processus reprend celle de la définition 2.0.1 où les intégrales sur Q, Σ et Ω sont respectivement changées en intégrales sur $]0, 1[\times Q$, $]0, 1[\times\Sigma$ et $]0, 1[\times\Omega$. L'existence d'un processus entropique est obtenue, comme dans le cas d'obstacles constants (paragraphe 2.2.1), par passage à la limite en η dans une formulation entropique régularisée pour u_η utilisant les paires entropiques de F.Otto, où cependant $k = K(t, x)$ est un élément de $W^{1,1}(Q)$ tel que $a \leq K \leq b$ p.p. sur Q. En outre la méthode d'unicité évoquée pour établir le théorème 2.1.1, nous permet de montrer que :

Propriété 2.2.2 - *Soient π et ω deux processus entropiques du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$. Alors, pour presque tout t de $]0,T[$,*

$$\int_{]0,1[\times\Omega} |\pi(\alpha,t,x)-\omega(\tau,t,x)|dxd\alpha d\tau \leq \int_{\Omega} |u_0 - v_0|dx\, e^{M_\psi\, t}.$$

Donc lorsque $u_0 = v_0$ p.p. sur Ω, on établit l'existence d'une fonction mesurable u sur Q telle que pour presque tout (t,x) de Q, $\pi(\alpha,t,x) = \omega(\tau,t,x) = u(t,x)$ pour presque tout α et τ de $]0,1[$.

Ainsi, dans la définition d'un processus entropique, les intégrales sur $]0,1[$ peuvent être calculées, ce qui prouve que la fonction u mise en évidence ci-dessus est la solution faible entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ au sens de la définition 2.0.1. En outre, comme les mesures de probabilités $d\mu_{(t,x)}$ and $d\varpi_{(t,x)}$ associées à π and ω selon la proposition 2.2.2 se réduisent à des masses de Dirac centrées au même point $u(t,x)$ on est assuré (selon les travaux de J.R.Diperna [25]) que (toute) le suite des solutions approchées converge fortement dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$ vers u.

Puisque l'on a su passer à la limite en η en utilisant seulement le principe du maximum pour u_η, on a de ce fait relaxé les hypothèses additionnelles de régularité portant sur la donnée initiale, le flux et le terme de réaction utilisées pour avoir les estimations de $(u_\eta)_{\eta>0}$ de la propriété 2.2.1. On a donc ici, au regard du théorème 2.2.1,

Théorème 2.2.2 - *Le problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ a une unique solution faible entropique qui est la limite dans $L^q(Q)$, $q \in [1,+\infty[$ de (toute) la suite $(u_\eta)_{\eta>0}$ des solutions faibles entropiques des problèmes pénalisés correspondants.*

<u>Articles de référence de l'auteur</u>

Lévi, Laurent Obstacle problems for scalar conservation laws. M2AN, Math. Model. Numer. Anal. 35, No.3, 575-593 (2001)

Lévi, Laurent ; Vallet, Guy. Entropy solutions for first-order quasilinear equations related to a bilateral obstacle condition in a bounded domain Chin. Ann. Math., Ser. B 22, No.1, 93-114 (2001)

2.3 Quelques propriétés de comportement

On se place dans la situation générale où les hypothèses sur la condition initiale u_0, sur les fonctions d'obstacle a et b et sur les non-linéarités $\boldsymbol{\varphi}$ et ψ sont celles données au paragraphe 1.2. Ainsi, compte tenu du théorème 2.2.2, on tire parti de la convergence forte dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$ de la suite $(u_\eta)_{\eta>0}$ vers u pour donner d'abord des propriétés de sensibilité de u en fonction de la condition d'obstacle associée. Elles résultent de la structure de l'opérateur β qui garantit que l'on a la propriété de conservation de l'ordre :

Lemme 2.3.1 - *Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles entropiques du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ associées respectivement aux données initiales $u_{0,1}$ et $u_{0,2}$ et correspondant aux fonctions d'obstacle (a_1,b_1) et (a_2,b_2). Si $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2$ p.p. sur Q alors pour presque tout t de $]0,T[$,*

$$\int_{\Omega} (u_1(t,x) - u_2(t,x))^+ dx \leq \int_{\Omega} (u_{0,1} - u_{0,2})^+ dx e^{M_\psi t}.$$

Remarque 2.3.1 - *Dans le cas de données de bord non-homogènes $u_{\Gamma,1}$ et $u_{\Gamma,2}$, compatibles avec la condition d'obstacle et éléments de $L^\infty(\Sigma)$, on a la relation pour presque tout t de $]0,T[$,*

$$\int_\Omega (u_1(t,x) - u_2(t,x))^+ dx \leq \left(M_{\boldsymbol{\varphi}} \int_0^t \int_\Gamma (u_{\Gamma,1} - u_{\Gamma,2})^+ d\mathcal{H}^p + \int_\Omega (u_{0,1} - u_{0,2})^+ dx \right) e^{M_\psi t}$$

où $M_{\boldsymbol{\varphi}}$ désigne la constante de Lipschitz de $\boldsymbol{\varphi}$ par rapport à sa troisième variable, uniformément en (t,x).

En conséquence, soient $(a_n)_{n>0}$ et $(b_n)_{n>0}$ deux suites de $W^{1,+\infty}(Q)$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists M_1 > 0,\, \exists M_2 > 0, \forall n > 0,\ \|a_n\|_{L^\infty(Q)} \leq M_1 \text{ et } \|b_n\|_{L^\infty(Q)} \leq M_2, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \text{ dans } W^{1,1}(Q). \end{array} \right.$$

Pour tout $n > 0$ on désigne par u_n la solution faible entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ relativement aux obstacles (a_n, b_n). Alors on a :

Propriété 2.3.1
(i) La suite $(u_n)_{n>0}$ converge dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$, vers la solution faible entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ relativement aux obstacles (a,b) lorsque n tend vers $+\infty$.
(ii) Si $(a_n)_{n>0}$ et $(b_n)_{n>0}$ ont la même monotonie alors la suite $(u_n)_{n>0}$ est monotone, de même monotonie.

On peut aussi chercher à mettre explicitement en relation la solution u du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ avec celle du problème sans contraintes formellement décrit par :
Trouver une fonction v mesurable et bornée telle que

$$\mathbb{H}(t,x,v) = 0 \text{ dans } Q,$$

associée aux mêmes conditions aux limites et initiales que u. On établit que :

Propriété 2.3.2
(i) Si $\mathbb{H}(t,x,a) \leq 0$ et $\mathbb{H}(t,x,b) \geq 0$ p.p. sur Q, alors $u = v$.
(ii) Si v est un élément de $W^{1,1}(Q)$ et si $\mathbb{H}(t,x,a) \geq 0$ et $\mathbb{H}(t,x,b) \leq 0$ p.p. sur Q, alors

$$u = a + (v-a)^+ - (v-b)^+ \equiv \max(a, \min(v,b)) \ \textit{p.p. sur } Q.$$

Remarque 2.3.2 - *La proposition (i) n'est pas une surprise : on l'entrevoit déjà dans les inégalités* (2.4) *et* (2.5). *Les conditions de signe imposées pour $\mathbb{H}(t,x,a)$ et $\mathbb{H}(t,x,b)$ montrent qu'en définitive $\mathbb{H}(t,x,u) = 0$ au moins au sens des distributions sur Q. Ainsi, la propriété (i) traduit le fait que si l'obstacle inférieur est une sous-solution du problème sans contraintes alors que l'obstacle supérieur en est une sur-solution alors le principe du maximum pour la solution est hérité de la donnée initiale (et des données de bord s'il y a lieu).*

En ce qui concerne (ii), on a une détermination simple de u et des ensembles de coïncidence $[u = a]$ et $[u = b]$ par une simple technique de troncature opérant sur v.

On notera que dans les deux situations évoquées à la propriété 2.3.2, le problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ ne peut plus être considéré comme un problème à frontières libres.

2.4 Approximation par une méthode de Time-Splitting

On se place dans la situation où les termes de convection et de réaction de $\mathbb{H}$ sont indépendants des variables de temps et d'espace. On s'intéresse au problème d'obstacle pour lequel les seuils a et b sont des constantes réelles. On décide d'approcher numériquement la solution du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ en utilisant une méthode à pas fractionnaires en temps qui consiste à alterner la résolution exacte de l'équation homogène

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{p} \partial_{x_i} \varphi_i(u) = 0, \tag{2.6}$$

et celle du problème d'obstacle pour l'opérateur différentiel $u \to \partial_t u - \psi(u)$ formellement décrit par :
Trouver une fonction mesurable u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq u \leq b, \\ \partial_t u = \psi(u) \text{ sur } [a < u < b], \\ \partial_t u - \psi(u) \leq 0 \text{ sur } [a < u = b], \partial_t u + \psi(u) \geq 0 \text{ sur } [a = u < b]. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

En effet, compte tenu de la remarque 1.2.1 et de la propriété 2.3.2 qui s'y rapporte, en l'absence de termes de source dans (2.6), le principe du maximum assure que si la donnée initiale pour (2.6) est comprise entre a et b, il en est de même pour la solution associée. Ainsi, la condition d'obstacle doit seulement être prise en compte pour la résolution de l'équation différentielle ordinaire $\partial_t u = \psi(u)$.

On définit $S(t)$, $t \in [0, T]$, l'opérateur qui associe, à la donnée initale u_0, la solution exacte $u(t, .)$ de (1.1). Pour tout entier N, on définit le pas de temps

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

De sorte que pour tout n de $\{1, ..., N\}$, la solution à pas fractionnaires $\mathcal{F}_s\,(t_n)\,u_0$ de (1.1) au temps $t_n = n\Delta t$ est donnée par :

$$\mathcal{F}_s(t_n)u_0 = (\mathcal{H}(\Delta t)\mathcal{I}(\Delta t))^n u_0,$$

$\mathcal{H}(t)$ et $\mathcal{I}(t)$, $t \in [0, T]$, désignant respectivement les opérateurs correspondant à la résolution exacte de (2.6) et de (2.7).

Remarque 2.4.1 - *Il est intéressant de noter que pour tout n de $\{1, ..., N\}$, la solution approchée $\mathcal{F}_s(t_n)u_0$ vérifie la condition d'obstacle.*

Les méthodes à pas fractionnaire d'ordre 1 pour des lois de conservation scalaires non homogènes ont été introduites en 1958 par S.K.Godounov [35] et revisitées par G.Strang en 1968 ([67]). Depuis, M.Crandall & A.Majda [21] ont étudié la convergence vers la solution faible entropique. Une estimation du taux de convergence dans L^1 a d'abord été obtenue par T.Tang & Z.H.Teng [71] en $\mathcal{O}(\Delta t^{1/2})$ puis par J.O.Langseth, A.Tveito & R.Winter [43] en $\mathcal{O}(\Delta t)$. Ce dernier résultat a été étendu par T.Tang [70] dans le cas d'un terme de source raide puis par F.Peyroutet [59] et M.Madaune-Tort & F.Peyroutet [58] pour le problème de Dirichlet.

2.4.1 Le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^p$

Dans les travaux précités, la borne d'erreur dans L^1 est obtenue à partir d'une estimation (utilisant les techniques développées par S.N.Kruzhkov [39] sur chaque intervalle de longueur Δt) entre la solution faible entropique du problème non homogène et la translatée au moyen du terme de source de la solution du problème homogène correspondant. Cette méthode conduit à considérer deux formulations entropiques associées à deux différentes fonctions de flux et de réaction, ce qui replace le résultat obtenu dans le cadre plus général donné par F.Bouchut & B.Perthame [13].

Ici, lorsque l'on change le terme de flux et que l'on introduit un terme de réaction dans (2.6), il n'est pas sûr que la solution approchée obtenue après translation vérifie la contrainte d'obstacle souhaitée sur chaque intervalle de longueur Δt. On ne peut donc utiliser la méthode évoquée ci-dessus. On considère alors le problème de Cauchy et on se réfère aux travaux T.Tang & Z.H.Teng [71] pour établir le résutat suivant :

Théorème 2.4.1 - *Il existe une constante C telle que : $\forall R > 0$,*

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|S(t_n)u_0 - \mathcal{F}_s(t_n)u_0\|_{L^1(\mathcal{B}_{\bar{R}-\mathcal{N}t_n})} \leq C\sqrt{\Delta t}\left(C_R + \max\left(\sqrt{\Delta t}, R\right)^{p-1}\right),$$

avec $C_R = 1 + \|u_0\|_{L^1(\mathcal{B}_{\bar{R}})}$ où $\mathcal{B}_R$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^p$ centrée à l'origine et de rayon R et pour tout t de $[0,T]$,

$$M(t) = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^p)} \exp(K_g\, t) \text{ et } \mathcal{N} = \sup_{-M(T)<u<M(T)} |\nabla \boldsymbol{\varphi}(u)|_p\,,$$

$|.|_p$ représentant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$ et $\bar{R} = R + \mathcal{N}T$.

Principaux ingrédients de la démonstration

On s'appuie sur les propriétés des opérateurs $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{I}(t)$, $t \in [0,T]$.

• Celles de $\mathcal{S}(t)$ ont déjà été évoquées au paragraphe 2.2.1, théorème 2.2.1, dans la cas du problème de Dirichlet. Néanmoins, compte tenu du fait que l'on s'intéresse ici au problème de Cauchy, on s'assure que si u_0 appartient à $\overline{BV}(\mathbb{R}^p) \cap L^\infty(\mathbb{R}^p)$ et si les fonctions φ_i et ψ sont *régulières* (au sens du théorème 2.2.1), alors la solution u du problème d'obstacle bilatéral pour $\mathbb{H}$ est un élément de $L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R}^p) \cap L^\infty(0,T;BV(\mathbb{R}^p)) \cap \mathcal{C}([0,T];L^1_{loc}(\mathbb{R}^p))$ telle que pour tout t_1 et t_2 de $[0,T]$, $t_1 < t_2$, tout réel k de $[a,b]$ et toute fonction ξ de $\mathcal{D}([0,T] \times \mathbb{R})$, $\xi \geq 0$:

$$\int_{\mathcal{K}_R^{t_1,t_2}} \left(|u-k|\partial_t \xi + sgn(u-k)(\boldsymbol{\varphi}(u) - \boldsymbol{\varphi}(k)).\nabla\xi + sign(u-k)\psi(u)\xi\right) dxdt - \left[\int_{\mathcal{B}_{\bar{R}-\mathcal{N}t}} |u-k|\xi dx\right]_{t_1}^{t_2} \geq 0,$$

où $[w]_{t_1}^{t_2} = w(t_2) - w(t_1)$ et $\mathcal{K}_R^{t_1,t_2}$ est la troncature de $\mathcal{K}_R \equiv \{(t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^p,\ t \in \mathcal{B}_{\bar{R}-\mathcal{N}t}\}$ entre t_1 et t_2. En outre, pour tout $R > 0$

$$\forall t \in [0,T],\ TV_{\mathbb{R}^p}(u(t,.)) \leq TV_{\mathbb{R}^p}(u_0)\exp(M_\psi t),$$
$$\forall h \in]0,T[,\ \forall t \in [0,T-h],\ \|u(t+h,.) - u(t,.)\|_{\mathcal{B}_{\bar{R}-\mathcal{N}t}} \leq C\,h\,\left[1 + \|u_0\|_{\mathcal{B}_{\bar{R}}}\right],$$

où C est une constante indépendante de tout paramètre.

• En ce qui concerne $\mathcal{I}(t)$, on remarque que si w_0 est une fonction mesurable et bornée telle que $a \leq w_0 \leq b$ p.p. sur $\mathbb{R}^p$ alors le problème bilatéral (2.7) associé à la donnée initiale w_0 a une unique solution w dans $H^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^p))$ caractérisée par la formulation variationnelle :

$\forall t \in [0,T], a \leq w(t,.) \leq b$ p.p. dans $\mathbb{R}^p$, $w(0,.) = w_0$ p.p. sur $\mathbb{R}^p$,
pour presque tout t de $]0,T[$, pour toute fonction mesurable et bornée v telle que $a \leq v \leq b$ p.p. sur $\mathbb{R}^p$,

$$\partial_t w(v-w) \geq \psi(w)(v-w) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^p.$$

En outre, si $\hat{w}$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire $\partial_t \hat{w} = \psi(\hat{w})$ associée à la donnée initiale w_0, alors $w = \max(a, \min(\hat{w}, b))$ p.p. sur $]0,T[\times\mathbb{R}^p$.

Ainsi, selon l'idée développée par M.Crandall & A.Majda [21] on cherche une estimation de l'erreur en norme L^1 entre u et la fonction u_Δ, continue en la variable temporelle sur $[0,T]$, donnée par :

$$u_\Delta(t,.) = \begin{cases} \mathcal{I}(2(t-t_n))\mathcal{F}_s(t_n)u_0 \text{ si } t \in [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}[, \\ \mathcal{H}(2(t-t_{n+\frac{1}{2}}))\mathcal{I}(\Delta t)\mathcal{F}_s(t_n)u_0 \text{ si } t \in [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}[. \end{cases}$$

De sorte que u_Δ vérifie les estimations : $\forall R > 0$,

$$\forall t \in [0,T],\ TV_{\mathbb{R}^p}(u_\Delta(t,.)) \leq TV_{\mathbb{R}^p}(u_0)\exp(M_\psi T),$$
$$\forall h \in]0,T[, \forall t \in [0, T-h], \|u_\Delta(t+h,.) - u_\Delta(t,.)\|_{\mathcal{B}_{\bar{R}-\mathcal{N}t}} \leq C\, h\, \left[1 + \|u_0\|_{\mathcal{B}_{\bar{R}}}\right],$$

où C est une constante indépendante de tout paramètre.

Il convient alors de poser

$$\Lambda(w,v) = -\int_{\mathcal{K}_R^{t_n}\times\mathcal{K}_R^{t_n}} \{|w-\tilde{v}|\partial_t\omega_\mu + \mathbf{F}(w,\tilde{v}).\nabla_x\omega_\mu\}\, dxdtd\tilde{x}d\tilde{t} + \int_{\mathcal{K}_R^{t_n}} \left[\int_{\mathcal{B}_{\bar{R}-\mathcal{N}t}} |w-\tilde{v}|\omega_\mu dx\right]_0^{t_n} d\tilde{x}d\tilde{t},$$

où $w = w(t,x)$, $\tilde{v} = v(\tilde{t},\tilde{x})$ et $(\omega_\mu)_{\mu>0}$ est la suite régularisante usuelle sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

La borne d'erreur cherchée est obtenue à partir d'une inégalité de Kuznetsov [40] ce qui nous conduit à chercher une majoration de $\Lambda(u_\Delta, u)$, de $\Lambda(u, u_\Delta)$, et une minoration de la somme $\Lambda(u_\Delta, u) + \Lambda(u, u_\Delta)$ en fonction de $\|u(t_n,.) - u_\Delta(t_n,.)\|_{\mathcal{B}_{\bar{R}-\mathcal{N}t_n}}$ et en utilisant les estimations de u et de u_Δ qui précèdent.

■

Remarque 2.4.2 - *La démonstration du théorème 2.4.1 repose avant tout sur des techniques utilisant les propriétés des fonctions à variation bornée. En outre, la méthode de splitting considérée tire parti de l'abscence de termes de source dans (2.6). Ceci explique pourquoi le cadre mathématique considéré est difficilement généralisable au cas de contraintes d'obstacle et/ou de termes de flux et de réaction dépendants des variables de temps et d'espace.*

2.4.2 Le problème de Dirichlet

On se place dans les mêmes conditions de régularité que pour le problème de Cauchy. On suppose donc que la donnée initiale appartient à $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Ainsi, sous couvert des conditions de régularité pour les termes de flux et de réaction évoquées au théorème 2.2.1, on est assuré de l'existence d'une solution au problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ qui soit un élément de $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$. On cherche alors à étudier le comportement, lorsque Δt tend vers 0^+, de la suite de fonctions $(\mathcal{F}_s(t)u_0)_{\Delta t>0}$. En fait, seulement un résultat de convergence a pu être établi. En effet, nous n'avons pas été capable de développer le même résultat de comparaison qu'au paragraphe 2.4.1 utilisant des propriétés des fonctions à variation bornée. Ce raisonnement peut certes être repris à l'intérieur de l'ouvert Q mais les propriétés de l'opérateur de trace γ de $BV(Q)$ dans $L^1(\Sigma)$ ne suffisent pas à étendre les techniques utilisées précédemment aux intégrales de bord. On peut donc seulement énoncer compte tenu des estimations de la suite $(\mathcal{F}_s(t)u_0)_{\Delta t>0}$:

Théorème 2.4.2 - *Lorsque Δt tend vers 0^+ la suite de fonctions à pas de temps fractionnaire $(\mathcal{F}_s(t)u_0)_{\Delta t>0}$ converge fortement dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$ et dans $\mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega))$ vers la solution faible entropique u du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$.*

Remarque 2.4.3 - *Pour avoir une idée de la borne d'erreur dans L^1, considérons le problème de Riemann pour l'équation unidimensionnelle de Burgers*

$$\partial_t u + \tfrac{1}{2}\partial_x (u)^2 = -u \text{ sur } Q =]0,2[\times]-1,1[,$$

assujettie à la contrainte unilatérale inférieure $u \geq \dfrac{2}{3}$.

On s'intéresse à deux cas, selon que la condition initiale donne lieu à une onde de chocs ou à une onde de raréfaction. La première situation est associée aux conditions initiale et de bord

$$u_0 = \begin{cases} 2 \text{ si } -1 \leq x < 0, \\ 1 \text{ si } 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad \text{et } u_\Gamma = \begin{cases} \max\left(2e^{-t}, \frac{2}{3}\right) \text{ en } x = -1, \\ \max\left(e^{-t}, \frac{2}{3}\right) \text{ en } x = 1. \end{cases}$$

On détermine la solution exacte par la méthode des caractéristiques, en utilisant la relation de Rankine-Hugoniot et la condition d'entropie d'Oleinik :

$$u(t,x) = \begin{cases} 2e^{-t} \text{ si } -1 \leq x < \frac{3}{2}\left(1-e^{-t}\right) \text{ et } t \leq k_1, \\ e^{-t} \text{ si } \dfrac{3}{2}\left(1-e^{-t}\right) < x \leq 1 \text{ et } t \leq k_1, \\ 2e^{-t} \text{ si } -1 \leq x < -e^{-t} + \frac{1}{3}t + \frac{5-2k_1}{6} \text{ et } k_1 \leq t \leq 2, \\ \dfrac{2}{3} \text{ si } -e^{-t} + \frac{1}{3}t + \frac{5-2k_1}{6} < x \leq 1 \text{ et } k_1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

avec $k_1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. *Dans le second cas on considère les conditions :*

$$u_0 = \begin{cases} 1 \text{ si } -1 \leq x < 0, \\ 2 \text{ si } 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad \text{et } u_\Gamma = \begin{cases} \max\left(e^{-t}, \frac{2}{3}\right) \text{ en } x = -1, \\ \max\left(2e^{-t}, \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) \text{ en } x = 1 \text{ et pour } t \neq 0, \\ 2e^{-t} \text{ en } x = 1 \text{ et pour } t = 0 \end{cases}$$

Puisque la solution v du problème sans contrainte est un élément de $W^{1,1}(Q)$, on sait, d'après la propriété 2.3.2, que la solution exacte u est déterminée explicitement par :

$$u = \max\left(\frac{2}{3}, v\right),$$

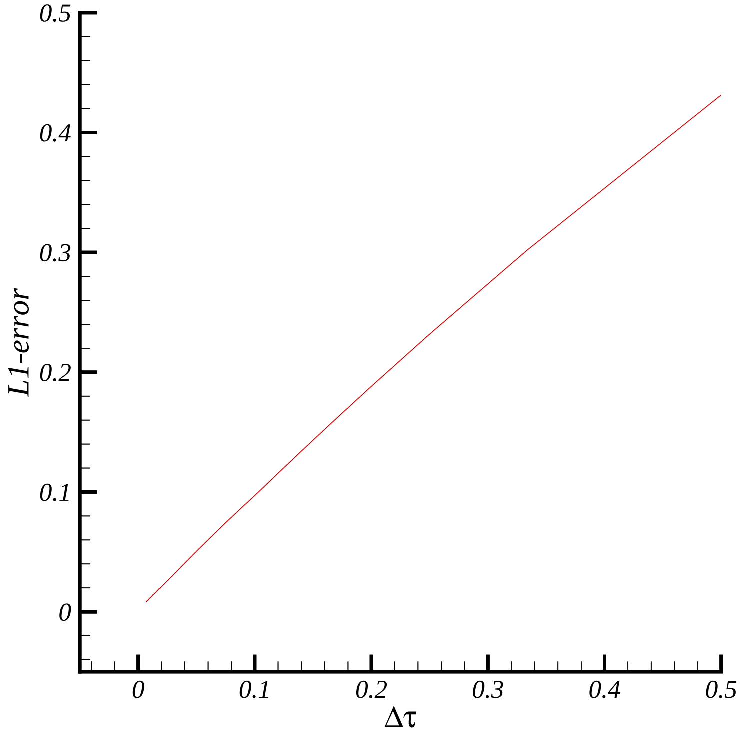
où v est l'onde de raréfaction définie par :

$$v(t,x) = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } -1 \leq x < 1-e^{-t} \text{ et } 0 \leq t \leq \ln(2), \\ \dfrac{xe^{-t}}{1-e^{-t}} \text{ si } 1-e^{-t} < x < 2\left(1-e^{-t}\right) \text{ et } t \leq \ln(2), \\ 2e^{-t} \text{ si } 2\left(1-e^{-t}\right) < x \leq 1 \text{ et } t \leq \ln(2), \\ \dfrac{xe^{-t}}{1-e^{-t}} \text{ si } 1-e^{-t} < x \leq 1 \text{ et } \ln(2) \leq t \leq 2. \end{cases}$$

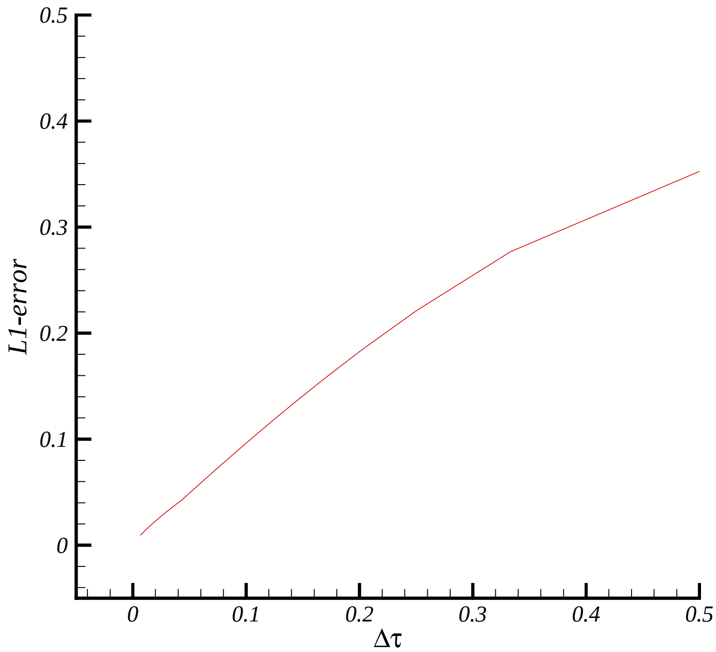
Pour calculer numériquement la solution, on utilise le schéma classique de Godounov - qui se réduit ici à un simple schéma de type "upwind" - pour l'approximation de l'opérateur $\mathcal{H}(t)$ correspondant à la résolution exacte de l'équation homogène

$$\partial_t u + \tfrac{1}{2}\partial_x (u)^2 = 0 \text{ sur } Q.$$

Dans chaque situation, Δt étant fixé à partir de Δx et de la condition C.F.L. une erreur dans L^1 est calculée de façon exacte. Lorsque Δt tend vers 0^+, les courbes obtenues (voir figures ci-après) nous conduisent à penser que le taux de convergence dans L^1 pour l'opérateur de splitting sans discrétisation spatiale doit être de l'ordre de Δt. En effet, le fait que nous ne trouvions pas une ligne droite $y = ax$ dans le cas d'une onde de raréfaction peut provenir du schéma numérique utilisé pour résoudre l'équation homogène qui induit une erreur en norme L^1 de l'ordre de $\mathcal{O}(\Delta x\,|\ln \Delta x|)$, lorsque la donnée initiale a un nombre fini d'extréma (voir à ce propos [71]).



Erreur en norme L^1 pour l'onde de chocs



Erreur en norme L^1 pour l'onde de raréfaction

Article référence de l'auteur

Lévi, Laurent ; Peyroutet, Fabrice, A time-fractional step method for conservation law related obstacle problems. Adv. Appl. Math. 27, No.4, 768-789 (2001)

2.5 Développements possibles

Propriétés de sensibilité par rapport à la condition d'obstacle

A la propriété 2.3.1 du paragraphe 2.3 on a su établir des résultats de convergence et de monotonie de la suite des solutions en fonction de propriétés analogues de la suite des contraintes d'obstacle associées. Cependant on peut aussi obtenir une estimation dans L^1 de l'écart entre deux solutions qui correspondent à deux conditions d'obstacle différentes. Ce travail, en cours de réalisation, reprend le cadre général des "estimations de type Kruzhkov" proposé par F.Bouchut & B.Perthame dans [13] (voir aussi dans [55] *via* le concept de formulations cinétiques). En effet, l'inégalité (2.1) montre que la problématique repose en fait sur la comparaison de deux solutions faibles entropiques d'équations hyperboliques quasi linéaires du premier ordre associées à des fonctions de flux et des termes de réaction différents. Notons que la technique mise en oeuvre nécessite de supposer que l'une des solutions à comparer est une fonction à variation bornée, ce qui réduit le champ d'application du résultat obtenu. Dans ces conditions, et pour le problème unilatéral relatif à des conditions aux limites de Dirichlet, on montre que la différence en norme $L^1(Q)$ entre deux solutions est majorée en fonction de la norme dans $W^{1,1}(Q)$ de la différence des contraintes d'obstacle correspondantes.

Formulation entropique renormalisée pour des données initiales dans L^1

Comme on l'a souligné à la remarque 1.2.2, les travaux présentés dans ce mémoire s'appuient en parti sur le fait que les solutions des différents problèmes considérés sont essentiellement bornées, la donnée initiale étant elle-même un élément de $L^\infty(\Omega)$. Pour relaxer notamment cette hypothèse, on propose de donner une formulation entropique renormalisée du problème d'obstacle (unilatéral) pour $\mathbb{H}$ en s'appuyant sur les travaux de A.Porretta & J.Vovelle [60] ou ceux de J.Carrillo & P.Wittbold [16], K.Ammar, P.Wittbold & J.Carrillo [2]. Cette définition pourrait être obtenue comme limite de viscosité de la formulation renormalisée à l'ordre deux présentée au paragraphe 3.4.

Enfin, pour terminer, citons quelques pistes qui méritent d'être explorées :

- Dans les paragraphes 2 et 3, on utilise toujours le même opérateur de pénalisation :

$$\beta_\eta(t,x,u) = \frac{1}{\eta}\left(-(u-a(t,x))^- + (u-b(t,x))^+\right).$$

Il nous permet de construire une suite de solutions approchées, mais on n'a aucune minoration et/ou majoration de celles-ci en fonction de a et/ou de b. Il peut donc être intéressant de considérer une suite de solutions approchées qui vérifie "à peu de choses près" la condition d'obstacle souhaitée à la limite. De fait, en se reportant aux travaux de J.F.Rodrigues [62, 63] pour des opérateurs du premier ordre linéaires, on peut obtenir un résultat d'existence similaire à celui du théorème 2.2.2 en pénalisant directement l'opérateur $\mathbb{H}$ par le terme :

$$\beta_\eta(t,x,u) = [\mathbb{H}(t,x,a(t,x)-\eta)]^+ \left(sgn_\eta^+(u-a(t,x))-1\right) + [\mathbb{H}(t,x,b(t,x)+\eta)]^- \left(1-sgn_\eta^+(b(t,x)-u)\right).$$

Ainsi, en revenant au problème de Dirichlet pour l'opérateur de viscosité artificielle associé et en utilisant des techniques de troncature dans L^1, on a :

$$\forall \eta > 0, a-\eta \leq u_\eta \leq b+\eta \text{ p.p. sur } Q.$$

En outre, on peut aussi établir des inégalités de Lewy-Stampacchia à partir du problème pénalisé et par passage à la limite en η,

$$-[\mathbb{H}(t,x,a)]^- \leq \mathbb{H}(t,x,u) \leq [\mathbb{H}(t,x,b)]^+,$$

a priori au sens des distributions sur Q, mais finalement p.p. sur Q. Ainsi, on en déduit par exemple, compte tenu des régularités de a et de b, que $\mathbb{H}(.,.,u)$ est un élément de $L^{\infty}(Q)$. Reste alors posées les questions relatives à l'approximation des ensembles de coïncidence $[u = a]$ et $[u = b]$ lorsque le paramètre de pénalisation tend vers 0^{+}.

- Les formulations cinétiques pour des lois de conservation scalaires hyperboliques du premier ordre ont été définies en 1991 par B.Perthame & E.Tadmor [57]. Elles consistent à introduire une variable libre ζ sur $\mathbb{R}^{+}$ (dans le même esprit que les processus entropiques), une mesure de "défaut d'entropie" $m = m(t, x, \zeta)$ et une fonction $\chi = \chi(\zeta, u)$ où u est l'inconnue du problème, de sorte à donner une formulation faible linéarisée pour χ au moyen d'une égalité au sens des distributions sur $\mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{p} \times \mathbb{R}$. Ce cadre mathématique permet notamment d'obtenir un résultat d'unicité sans utiliser les *paires entropiques de Kruzhkov* et sans recourir à la technique usuelle de dédoublement des variables (*cf.* [55, 56, 57] pour plus de détails). C'est pourquoi, il serait intéressant d'envisager une formulation cinétique du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ dans la perspective de relaxer les conditions de régularité sur a et sur b, uniquement utilisées pour établir la propriété d'unicité du théorème 2.1.1.

Enfin, notons que l'approximation numérique de la solution du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ reste encore un sujet d'étude peu développé.

3 Opérateurs du second ordre

Pour des opérateurs de type (1.3) on distingue deux situations selon que la fonction ϕ est strictement croissante (mais ϕ' peut s'annuler en des points isolés de $\mathbb{R}$) ou seulement croissante au sens large c'est à dire - en employant une terminologie généralement utilisée - selon que $\mathbb{P}$ est *faiblement* ou *fortement dégénéré.* Dans chacun des cas considérés, on obtient un résultat d'existence en couplant les méthodes de pénalisation et de viscosité artificielle. On introduit donc un paramètre δ strictement positif et destiné à tendre vers 0^+ et on définit

$$\mathbb{P}_\delta(t,x,.) : u \to \mathbb{H}(t,x,u) - \Delta\phi_\delta(u) + \frac{1}{\delta}\beta(t,x,u),$$

où $\beta(t,x,u) = -(u-a(t,x))^- + (u-b(t,x))^+$ et $\phi_\delta = \phi + \delta\mathbb{I}_\mathbb{R}$. On considère le problème de Dirichlet associé formellement décrit par :
touver une fonction u_δ mesurable et bornée sur Q telle que

$$\begin{cases} \mathbb{P}_\delta(t,x,u_\delta) = 0 \text{ dans } Q, \\ u_\delta = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ u_\delta(0,.) = u_0 \text{ sur } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

On s'assure à partir des résultats généraux établis par O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov & N.N. Ural'ceva [42] que si u_0 est un élément de $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ alors (3.1) a une solution faible unique dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(Q)\cap H^1(Q)$ avec $\phi_\delta(u_\delta)$ dans $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Notre objectif est de préciser le comportement de la suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ lorsque δ tend vers 0+ et de caractériser sa limite éventuelle. Pour cela on a besoin d'estimations *a priori* pour passer à la limite en utilisant des théorèmes de compacité et il faut donner une formulation affaiblie de (3.1) qui garantisse l'unicité d'une solution faible.

En premier lieu, et quelle que soit la nature de l'opérateur $\mathbb{P}$, on a principalement les estimations suivantes, obtenues en choisissant dans la formulation variationnelle de (3.1) des fonctions-test adéquates :

Propriété 3.0.1
i) $(u_\delta)_{\delta>0}$ *est une suite bornée de* $L^\infty(Q)$ *(par* M *donnée au sous-paragraphe 1.2),*
ii) $(\phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0}$ *est une suite bornée de* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$*,*
iii) $(\frac{1}{\delta}(\beta(.,.,u_\delta))_{\delta>0}$ *est une suite bornée de* $L^1(Q)$*.*

iv) Si de plus u_0 *est un élément de* $H_0^1(\Omega)$*,* $(\partial_t\phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0}$ *est une suite bornée de* $L^2(Q)$*.*

3.1 Opérateurs faiblement dégénérés

On suppose dans tout ce paragraphe que u_0 appartient à $H_0^1(\Omega)$ (cette hypothèse sera relaxée au paragraphe 3.2). Ainsi, puisque la fonction ϕ^{-1} existe et est continue, les estimations mises en lumière à la propriété 3.0.1 suffisent à préciser le comportement de la suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ au moyen de la suite $(\phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0}$ - qui est uniformément bornée dans $H^1(Q)$ - et de la compacité de l'injection de $H^1(Q)$ dans $L^2(Q)$. Cependant, on peut obtenir des informations supplémentaires selon que la contrainte d'obstacle dépend ou pas des variables de temps et d'espace et selon la régularité de la donnée initiale et des termes de transport et de réaction.

3.1.1 Cas d'obstacles constants

Dans cette situation, on tire parti du fait que $\beta(t,x,.) = \beta(.)$ de sorte que l'on peut établir que :

Propriété 3.1.1
i) $(\frac{1}{\delta}(\beta(u_\delta))_{\delta>0}$ *est une suite bornée de* $L^2(Q)$

et, en conséquence,
ii) $(\partial_t u_\delta)_{\delta>0}$ *est une suite bornée de* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$
estimation obtenue en revenant à l'équation (3.1) et à la définition de la norme dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

De plus,

Propriété 3.1.2 - *Si* $\Delta\phi(u_0)$ *et* Δu_0 *sont des éléments de* $\mathcal{M}_b(\Omega)$ *et si* φ_i, $i \in \{1,..,p\}$, *et* ψ *sont respectivement des fonctions de* $W^{2,+\infty}([0,T]\times\overline{\Omega}\times[-M,M])$ *et* $W^{1,+\infty}([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, *alors* $(u_\delta)_{\delta>0}$ *est une suite bornée dans* $W^{1,1}(Q)$ *par une constante* A *qui dépend essentiellement de la variation totale des mesures* Δu_0 *et* $\Delta\phi(u_0)$ *sur* Ω *et des bornes infinies sur* $[0,T]\times\overline{\Omega}\times[-M,M]$ *des dérivées partielles secondes et premières des fonctions* φ_i *et* ψ *respectivement.*

Dans ces conditions, on peut énoncer que :

Théorème 3.1.1 - *Le problème d'obstacle pour* $\mathbb{P}$ *a une solution faible* u *vérifiant la "formulation forte" :*
i) $u \in BV(Q)\cap L^\infty(Q)\cap\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\phi(u) \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$,
$a \le u \le b$ *p.p. sur* Q, $u(0,.) = u_0$ *p.p. sur* Ω,
ii) pour presque tout t *de* $]0,T[$ *et pour toute fonction mesurable* v *sur* Ω *telle que* $a \le v \le b$ *p.p. sur* Ω, *telle que* $\phi(v)$ *appartient à* $H_0^1(\Omega)$ *:*

$$\langle\partial_t u, \phi(v)-\phi(u)\rangle + \int_\Omega (\nabla\phi(u)-\boldsymbol{\varphi}(t,x,u)).\nabla(\phi(v)-\phi(u))dx + \int_\Omega \psi(t,x,u)(\phi(v)-\phi(u))dx \ge 0. \quad (3.2)$$

Un commentaire - Pour établir (3.2) on multiplie l'équation de (3.1) par $\phi(v)-\phi(u)$ de sorte que $\beta(u)(\phi(v)-\phi(u)) \le 0$ p.p. sur Q. On s'affranchit donc de la présence du coefficient $1/\delta$ ce qui permet de faire tendre δ vers 0^+. L'intégrale contenant le terme $\partial_t u_\delta$ est intégrée par partie grâce à l'introduction de l'espace interpolé holomorphe $\Theta = [H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_{1/2}$ et de son dual $\Theta' = [L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/2}$ de sorte que $W(0,T,H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}([0,T];\Theta)$ de même que $W(0,T,L^2(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}([0,T];\Theta')$ (cf. [22], **8**, p. 578 par exemple).

Remarque 3.1.1 - *Les notions de "formulation variationnelle forte" et de "formulation variationnelle faible" (voir paragraphe 3.1.2) pour des inéquations variationnelles reprend la terminologie employée par J.L.Lions [44] (voir aussi [51])*

Grâce aux propriétés des éléments de $BV(Q)\cap L^\infty(Q)$, on peut définir des formules de différentiation de la superposition fonctionnelle résultant des travaux de A.I.Vol'pert [77]. En outre on obtient une extension de la formule de Gauss-Green au cas des fonctions bornées et à variation bornée. Un exposé plus détaillé peut être trouvé dans les ouvrages de H.Federer [31], L.C.Evans R.Gariepy [30] ou G.Gagneux & M.Madaune-Tort [32]. Ces résultats permettent d'adapter les techniques "classiques" et conduisent à :

Théorème 3.1.2 - *Si les contraintes d'obstacle sont des constantes réelles, si* $\Delta\phi(u_0)$ *et* Δu_0 *sont des éléments de* $\mathcal{M}_b(\Omega)$ *et si* φ_i, $i \in \{1,..,p\}$, *et* ψ *sont respectivement des éléments de* $W^{2,+\infty}([0,T]\times\overline{\Omega}\times[-M,M])$ *et* $W^{1,+\infty}([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, *alors Le problème d'obstacle pour* $\mathbb{P}$ *a une solution unique caractérisée par la "formulation forte" du théorème 3.1.1.*

Principes de la démonstration - La méthode reprend celle présentée dans [32] pour des problèmes d'évolution pour lesquels les solutions sont seulement dans $BV(0,T;L^1(\Omega))$ au lieu de $BV(Q)$, qui s'inspire elle-même de celle introduite dans [37] pour le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$. On utilise de façon essentielle le fait que :

• puisque u est un élément de $L^\infty(Q)$, la fonction borélienne $\overline{u}$, donnée par la demi-somme des limites approximatives inférieure et supérieure de u au sens de Federer [31], est définie partout sur Q. De plus $u = \overline{u}$ p.p. et on identifie donc systématiquement u et son représentant borélien $\overline{u}$, de sorte que u est mesurable et intégrable par rapport à toute mesure borélienne bornée.

• Les mesures de Radon bornées $\partial_{x_i} u$, $i \in \{1,..,p\}$, et $\partial_t u$ sont associées de façon unique à des mesures de Borel bornées sur Q, absolument continues par rapport à la mesure $\mathcal{H}^p$.

• compte tenu des résultats établis dans [32] puisque $\phi(u)$ est un élément de $H^1(Q) \cap L^\infty(Q)$, la fonction $\phi(u)$ (par $\overline{\phi(u)}$) est $\mathcal{H}^p$-p.p. approximativement continue. Puisque ϕ est un homéomorphisme d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant $u(Q)$ sur $\phi(I)$, on en déduit que u est $\mathcal{H}^p$-p.p. approximativement continue, ce résultat restant vrai pour toute fonction $f(.,.,u)$ continue par rapport à ses trois arguments. Ainsi, si f est élément de $W^{1,+\infty}(]0,T[\times\Omega\times]a,b[)$, on a au sens des mesures :

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}[f(t,x,u)] &= \partial_u f(t,x,u)\partial_{x_i} u + \partial_{x_i} f(t,x,u),\\ \partial_t[f(t,x,u)] &= \partial_u f(t,x,u)\partial_t u + \partial_t f(t,x,u).\end{aligned}$$

En outre, pour toute fonction g de $BV(Q) \cap L^\infty(Q)$, $\mathcal{H}^p$-p.p. approximativement continue, et tout s de $]0,T]$ et i de $\{1,..,p\}$,

$$\begin{aligned}\int_{Q_s} f(t,x,u)\partial_{x_i}[g] &= -\int_{Q_s} g\partial_{x_i}[f(t,x,u)] + \int_{\Sigma_s} f(t,x,\gamma_u)\nu_i g d\mathcal{H}^p,\\ \int_{Q_s} f(t,x,u)\partial_t[g] &= -\int_{Q_s} g\partial_t[f(t,x,u)] + \int_{\Omega} [f(t,x,u)g]_{t=0}^{t=s}\, dx.\end{aligned}$$

On considère H_λ, l'approximation de classe $\mathcal{C}^1$ de *sign*, donnée pour tout réel r par

$$H_\lambda(r) = \frac{|r|r}{r^2+\lambda}.$$

On remarque que $H_\lambda(0) = 0$ et si l'on note M_λ sa constante de Lipschitz, on a :

$$\forall r \in \mathbb{R},\ |H_\lambda(r)| \leq 1,\ 0 \leq H'_\lambda(r),\ |rH'_\lambda(r)| \leq 1,\ \lim_{\lambda\to 0^+} rH'_\lambda(r) = 0.$$

Soient u et v deux solutions du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ correspondant aux données initiales u_0 et v_0. Dans l'inégalité variationnelle (3.2) vérifiée par u, on s'assure que l'on peut choisir la fonction-test

$$Y_1 = \phi^{-1}\left(\phi(u) - \frac{1}{M_\lambda} H_\lambda(\phi(u)-\phi(v))\right),$$

et dans celle vérifiée par v la fonction-test,

$$Y_2 = \phi^{-1}\left(\phi(v) + \frac{1}{M_\lambda} H_\lambda(\phi(u)-\phi(v))\right)$$

pour presque tout t de $]0,T[$. On additionne les deux relations qui résultent de ces choix et on intègre sur $]0,s[$, pour s fixé dans $]0,T]$. On justifie une double intégration par parties en temps conduisant à la transformation suivante :

$$\int_0^s \langle \partial_t(u-v), H_\lambda(\phi(u)-\phi(v))\rangle dt = \int_{Q_s} H_\lambda(\phi(u)-\phi(v)) d[\partial_t(u-v)].$$

Ainsi, lorsque λ tend vers 0^+, $(H_\lambda)_{\lambda>0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $sign$. Donc $(H_\lambda(\phi(u) - \phi(v)))_{\lambda>0}$ converge $\mathcal{H}^p$-p.p. sur Q vers $sign(\phi(u) - \phi(v))$, qui est égal à $sign(u - v)$ $\mathcal{H}^p$-p.p. sur Q (puisque ϕ est strictement croissante). Ainsi, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue pour la mesure $\partial_t(u - v)$ on établit que :

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \int_{Q_s} H_\lambda(\phi(u) - \phi(v))d[\partial_t(u - v)] = \int_{Q_s} sign(u - v)d[\partial_t(u - v)].$$

Les formules de différentiation de la superposition fonctionnelle permettent d'écrire,

$$\int_{Q_s} sign(u - v)d[\partial_t(u - v)] = \int_{Q_s} \partial_t|u - v|,$$

de sorte que finalement,

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \left(\int_0^s \langle \partial_t(u - v), H_\lambda(\phi(u) - \phi(v))\rangle dt \right) = \|(u - v)(s, .)\|_{L^1(\Omega)} - \|u_0 - v_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Pour le terme de convection, on introduit d'une part

$$\mathcal{K}_\lambda = -\int_{Q_s} H_\lambda(u - v)d(Div[\boldsymbol{\varphi}(t, x, u) - \boldsymbol{\varphi}(t, x, v)]).$$

On utilise la formule de Green (dans le cadre des fonctions à variation bornée) et celle de différentiation pour écrire :

$$\mathcal{K}_\lambda = -\int_{Q_s} H'_\lambda(u - v)[\boldsymbol{\varphi}(t, x, u) - \boldsymbol{\varphi}(t, x, v)].d[\nabla(u - v)],$$

puisque $u - v$ est $\mathcal{H}^p-$p.p. approximativement continue. Par suite,

$$|\mathcal{K}_\lambda| \leq K \int_{Q_s} |(u - v)H'_\lambda(u - v)||\nabla Z|,$$

et la mesure $|\nabla Z|$ étant absolument continue par rapport à $\mathcal{H}^p$ le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathcal{K}_\lambda = 0$.

D'autre part, on peut utiliser une formule de Green pour écrire :

$$\mathcal{J}_\lambda = \int_{Q_s} (\boldsymbol{\varphi}(t, x, u) - \boldsymbol{\varphi}(t, x, v)).\nabla(H_\lambda(\phi(u) - \phi(v)))dxdt = -\int_{Q_s} H_\lambda(\phi(u) - \phi(v))d(Div[\boldsymbol{\varphi}(t, x, u) - \boldsymbol{\varphi}(t, x, v)]).$$

Ainsi

$$\mathcal{J}_\lambda - \mathcal{K}_\lambda = \int_{Q_s} \{H_\lambda(u - v) - H_\lambda(\phi(u) - \phi(v))\}\, d[Div(\boldsymbol{\varphi}(t, x, u) - \boldsymbol{\varphi}(t, x, v))].$$

La mesure $Div[\boldsymbol{\varphi}(t, x, u) - \boldsymbol{\varphi}(t, x, v)]$ est absolument continue par rapport à $\mathcal{H}_p$ et donc $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} (\mathcal{J}_\lambda - \mathcal{K}_\lambda) = 0$. Ce qui prouve finalement que $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \mathcal{J}_\lambda = 0$. L'étude des autres termes ne présentant par de difficultés, on conclut la démonstration par utilisation du Lemme de Gronwall.

■

Remarque 3.1.2 - *Comme dans le cas de l'opérateur $\mathbb{H}$, on peut retrouver - au moins formellement - la formulation (1.1) à partir de (3.2). En effet, on choisit dans (3.2) la fonction-test*

$$v = \phi^{-1}(\phi(u) - \frac{\lambda\zeta}{\|\zeta\|_\infty} sgn_\lambda(\phi(u) - \phi(K)))$$

où K est un réel tel que $a \leq K \leq b$ et ζ appartient à $\mathcal{D}(Q)$, $\zeta \geq 0$. De sorte qu'après passage à la limite en λ, u vérifie l'inégalité d'entropie :

$$\int_Q (|u - K|\partial_t\xi - \nabla|\phi(u) - \phi(K)|.\nabla\zeta + \mathbf{F}(u, K).\nabla\xi - G(u, K)\xi)\, dxdt \geq 0,$$

compte tenu des notations du paragraphe 1.4. Ainsi, en choisissant $K = a$,

$$\langle \mathbb{P}(t, x, u), \zeta\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} \leq \int_Q (1 - sgn(u - a))\mathbb{P}(t, x, a)\zeta dxdt,$$

puis $K = b$,

$$\langle \mathbb{P}(t, x, u), \zeta\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} \geq \int_Q (1 + sgn(u - b))\mathbb{P}(t, x, b)\zeta dxdt,$$

de sorte que l'on peut raisonner comme à la remarque 2.0.2 du paragraphe 2.

<u>Article référence de l'auteur</u>

Lévi, Laurent, Singular perturbations of unilateral problems arising from the theory of flows through porous media. Adv. Math. Sci. Appl. 9, No.2, 597-620 (1999)

3.1.2 Cas d'obstacles mobiles

Sans hypothèses de régularité supplémentaires sur ϕ, sur a et sur b - *cf.* remarque 3.1.4 ci-dessous - nous n'avons pas su obtenir les estimations de la propriété 3.1.1. En outre, l'opérateur de pénalisation dépendant maintenant des variables de temps et d'espace, les résultats dégagés à la propriété 3.1.2 ne peuvent plus être établis (quelle que soit la régularité de la donnée initiale, de $\boldsymbol{\varphi}$ et de ψ). En conséquence, et compte tenu de la propriété 3.0.1, on est seulement assuré de l'existence d'une fonction u, $a \leq u \leq b$ p.p. sur Q, telle que après extractions éventuelles de sous-suites lorsque δ tend vers 0^+, $(u_\delta)_{\delta>0}$ converge vers u dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$, et $(\phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0}$ converge faiblement vers $\phi(u)$ dans $H^1(Q)$ et fortement dans $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$.

On a donc peu d'informations sur la régularité de u, en particulier sur celle de $\partial_t u$. Ceci nous oblige à donner une formulation variationnelle affaiblie du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ pour laquelle nous serons assuré de l'existence d'une solution. Ainsi :

Théorème 3.1.3 - *Le problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ a une solution u vérifiant la formulation "affaiblie" :*
i) $u \in L^\infty(Q)$, $a \leq u \leq b$ p.p. sur Q, $u(0, .) = u_0$ p.p. sur $\Omega, \phi(u) \in W(0, T; H^1_0(\Omega), L^2(\Omega))$,
ii) pour toute fonction v mesurable sur Q telle que $a \leq v \leq b$ p.p. sur Q et $\phi(v) \in W(0, T; H^1_0(\Omega), L^2(\Omega))$, $\phi(v)(T, .) = \phi(u)(T, .)$ p.p. dans Ω,

$$\begin{aligned}&\int_Q \partial_t\phi(v)(\phi(v) - \phi(u))dxdt + \int_Q (\nabla\phi(u) - \boldsymbol{\varphi}(t, x, u)).\nabla(\phi(v) - \phi(u))dxdt \\ &+ \int_Q \psi(t, x, u)(\phi(v) - \phi(u))dxdt - \int_Q (u - \phi(v))\partial_t(\phi(v) - \phi(u))dxdt \\ &+ \int_\Omega (u_0 - \phi(v)(0, .))(\phi(u_0) - \phi(v)(0, .))dx \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Remarque 3.1.3 - *Pour justifier l'écriture de la condition initiale, nous observons que puisque $\phi(u)$ est un élément de $W(0,T,H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ alors $t \to \phi(u)(t,.)$ est continue de $[0,T]$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$. Donc pour tout t de $[0,T]$, $\phi(u)(t,.)$ appartient à $L^\infty(\Omega)$; ϕ^{-1} étant continue, $u(t,.) \equiv \phi^{-1}(\phi(u)(t,.))$ définit, pour tout t de $[0,T]$, un élément de $L^\infty(\Omega)$.*

Remarque 3.1.4 - *Si ϕ est un élément de $W^{2,+\infty}([-M,M])$ et si Δa et Δb appartiennent à $L^\infty(Q)$ on peut montrer que la propriété 3.1.1 est vérifiée. Ainsi, par passage à la limite en δ, on est assuré de l'existence d'(au moins) une solution u au problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ au sens "fort" suivant :*
i) $u \in L^\infty(Q)$, $a \leq u \leq b$ p.p. sur Q, $u(0,.) = u_0$ p.p. sur Ω, $\partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,
$\phi(u) \in W(0,T;H_0^1(\Omega);L^2(\Omega))$,
ii) u vérifie la formulation variationnelle (3.2).

En ce sens, toute formulation forte est une formulation faible et toute solution u vérifiant une formulation affaiblie pour laquelle $\partial_t u$ est un élément de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ satisfait une formulation forte. L'argumentation repose essentiellement sur une intégration par parties en temps possible par l'introduction des espaces interpolés holomorphes Θ et Θ' (voir le commentaire suivant le théorème 3.1.1).

Pour remédier au manque de régularité en temps d'une solution faible, la méthode d'unicité utilise une technique de dédoublement de la variable temporelle seulement. Celle-ci nous conduit à supposer que les obstacles a et b sont indépendants de t. Ddans ces conditions, on peut choisir dans (3.3), écrite en variables (t,x) pour une solution faible u_1, la fonction-test

$$v_1(t,x) = \phi^{-1}(\phi(u_1)(t,x) - \frac{\lambda\alpha_\mu}{\|\alpha_\mu\|_\infty} sgn_\lambda(\phi(u_1)(t,x) - \phi(u_2)(\tilde{t},x))),$$

et dans (3.3), écrite en variables $(\tilde{t},x)$ pour une solution faible u_2 la fonction-test

$$v_2(\tilde{t},x) = \phi^{-1}(\phi(u_2)(\tilde{t},x) + \frac{\lambda\alpha_\mu}{\|\alpha_\mu\|_\infty} sgn_\lambda(\phi(u_1)(t,x) - \phi(u_2)(\tilde{t},x)),$$

où pour tout μ strictement positif,

$$\alpha_\mu(t,\tilde{t}) = \gamma\left(\frac{t+\tilde{t}}{2}\right)\omega_\mu\left(\frac{t-\tilde{t}}{2}\right),$$

avec γ élément de $\mathcal{D}_+(]0,T[)$ et μ suffisamment petit pour que α_μ appartienne à $\mathcal{D}_+(]0,T[\times]0,T[)$. En outre $(\omega_\mu)_{\mu>0}$ est la suite régularisante classique définie sur $\mathbb{R}$. On effectue une intégration par parties en temps en tenant compte du fait que α_μ est à support compact dans $]0,T[\times]0,T[$. On additionne les deux inégalités obtenues. Pour passer à la limite lorsque λ tend vers 0^+ dans le terme

$$\int_{]0,T[\times Q} u_1\partial_t(sgn_\lambda(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_\mu)dqd\tilde{t} - \int_{]0,T[\times Q} \tilde{u}_2\partial_t(sgn_\lambda(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_\mu)dqd\tilde{t}$$

(où $\tilde{u}_i = u_i(\tilde{t},x)$, $q = (t,x)$, $dq = dxdt$ et $\tilde{q} = (\tilde{t},x)$), on utilise une formule d' intégration par parties dans le même esprit que dans les travaux de J.Carrillo [15], A.Bamberger [5] (voir aussi dans [32], le lemme de F.Mignot & A.Bamberger). En effet, en s'appuyant sur des inégalités de convexité on établit que :

Lemme 3.1.1 - *Si u est une fonction mesurable et bornée sur Q (par une constante M) et β une fonction croissante continue sur $[-M,M]$, telle que $\partial_t\beta(u)$ appartient à $L^1(Q)$ alors pour toute fonction positive α de $\mathcal{C}^1([0,T])$ telle que $\alpha(T) = \alpha(0) = 0$ et toute fonction v mesurable et bornée (par M) sur Ω :*

$$\int_Q u\partial_t(\beta(u)\alpha)dxdt = \int_Q \left(\int_v^u \beta(r)dr\right)\partial_t\alpha dxdt.$$

Ce résultat reste vrai si β dépend aussi de x dès lors que pour tout x de Ω, $\tau \to \beta(x,\tau)$ est croissante et continue et pour tout τ dans $[-M, M]$, $x \to \beta(x,\tau)$ est mesurable et bornée sur Ω.

L'étude des termes de convection, écrits sous la forme,

$$\int_{]0,T[\times Q} \{\boldsymbol{\varphi}(q,u_1) - \boldsymbol{\varphi}(q,\tilde{u}_2)\}.\nabla sgn_\lambda(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_\mu dq d\tilde{t}$$
$$+ \int_{]0,T[\times Q} \{\boldsymbol{\varphi}(q,\tilde{u}_2) - \boldsymbol{\varphi}(\tilde{q},\tilde{u}_2)\}.\nabla sgn_\lambda(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))\alpha_\mu dq d\tilde{t},$$

nécessite une hypothèse supplémentaire concernant le comportement local de la fonction $\tau \to \boldsymbol{\varphi}(t,x,\phi^{-1}(\tau))$. En effet, si

$$\begin{array}{c}\tau \to \boldsymbol{\varphi}(t,x,\phi^{-1}(\tau)) \text{ est lipschitzienne sur } [\phi(-M), \phi(M)] \\ \text{de constante indépendante de } (t,x) \text{ dans } Q,\end{array} \tag{3.4}$$

alors on est assuré d'une part que la première intégrale tend vers 0 avec λ grâce au lemme de Sacks et d'autre part que $\boldsymbol{\varphi}(q,\tilde{u}_2)$ et $\boldsymbol{\varphi}(\tilde{q},\tilde{u}_2)$ sont des éléments de $L^2(0,T;H^1(\Omega))^p$ de sorte que l'on peut utiliser la formule de Green dans la deuxième intégrale puis y passer à la limite en λ.

La conclusion alors est classique : en revenant à la définition de α_μ on fait tendre μ vers 0^+. On peut alors énoncer que,

Théorème 3.1.4 - *Si les contraintes a et b ne dépendent que de la variable d'espace et si (3.4) a lieu alors le problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ a une solution unique caractérisée par la "formulation faible" du théorème 3.1.3. De plus, si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ associées aux données initiales $u_{0,1}$ et $u_{0,2}$ alors pour presque tout t de $[0,T]$,*

$$\int_\Omega |u_1(t,x) - u_2(t,x)|dx \leq \int_\Omega |u_{0,1} - u_{0,2}|dx\, e^{M_\psi t}.$$

Remarque 3.1.5 - *Si $\boldsymbol{\varphi}$ ne dépend pas de la variable "temps" (par exemple si $\boldsymbol{\varphi} = f(.)\nabla P$ où le champ de pression P est supposé stationnaire), alors pour obtenir le résultat du théorème 3.1.4 il suffit de supposer que pour tout x dans Ω, $\tau \to \boldsymbol{\varphi}(x,\phi^{-1}(\tau))$ est hölderienne sur $[\phi(-M), \phi(M)]$ avec une constante indépendante de x et un exposant au moins égal à $1/2$ (voir [32], chapitre 3).*

<u>Article référence de l'auteur</u>

Lévi, Laurent, The singular limit of a bilateral obstacle problem for a class of degenerate parabolic–hyperbolic operators. Adv. Appl. Math. 35, No.1, 34-57 (2005).

3.2 Opérateurs fortement dégénérés

On considère maintenant le cas où la fonction ϕ est croissante *au sens large*. Cette situation est sensiblement différente de la précédente où le fait que $\phi(u)$ est un élément de $H^1(Q) \cap L^\infty(Q)$ et que ϕ est un homéomorphisme assure que la dimension de Hausdorff de l'onde de chocs de u et inférieure ou égale $p-1$; de sorte que comme le soulignent G.Gagneux & M.Madaune-Tort [32] chapitre 2, un critère d'entropie est inutile (car implicite) pour garantir l'unicité d'une solution faible. En outre, les conditions de bord de Dirichlet sont satisfaites - en un certain sens - presque partout sur $]0,T[\times\partial\Omega$. Dans la situation présente il est nécessaire d'introduire une condition d'entropie dans l'ouvert Q. Par ailleurs, la présence possible de couches limites montre que les conditions aux limites doivent être transcrites par des relations de compatibilité (ou d'entropie) comme elles le sont dans le cas des problèmes quasi linéaires du premier ordre (voir [6],[52],[53]). Cependant l'écriture au second ordre de la formulation de C.Bardos, A.Y.LeRoux & J.C.Nédélec impose que la solution u et la dérivée normale $\partial_n\phi(u)$ aient une trace définie presque partout sur $]0,T[\times\partial\Omega$. Cette situation a été considérée par G.Gagneux & E.Rouvre [64],[65] dans le cas d'un problème sans contraintes. Lorsque la donnée initiale est suffisamment régulière et par utilisation d'une propriété de l'opérateur de Laplace, ces auteurs établissent l'existence d'une solution u dans $BV(Q)\cap L^\infty(Q)$ telle $\partial_n\phi(u)$ est un élément de $L^1(\Sigma)$. J.Carillo propose lui une formulation affaiblie utilisant des inégalités d'entropie dans l'ouvert pour des sur- et sous-solutions avec des fonctions-test à support compact dans $]0,T[\times\overline{\Omega}$ et des paramètres k "adaptés" (voir [15]).

Nous avons préféré nous reporter aux travaux de C.Mascia, A.Porretta & A.Terracina [46] où est donnée une formulation des conditions aux limites dans le cadre mathématique des *champs à divergence-mesure* qui fournit une extension au second ordre de celle proposée par F.Otto au premier ordre. Ce type de formulation *via* la notion de *processus entropiques solutions* a été utilisé par G.Vallet [73, 74] pour l'étude de problèmes de Dirichlet à données de bord homogènes ou non. Pour une approche légèrement différente, mais basée sur les mêmes idées, on pourra se reporter aux travaux de A.Michel & J.Vovelle [48], ou ceux de R.Eymard, T.Gallouët, R.Herbin, A.Michel [29] dans le cadre de l'approximation numérique de la solution par la méthode des volumes finis.

Ici, compte tenu des difficultés rencontrées notamment pour établir un résultat d'unicité, nous supposons désormais que <u>a et b sont des constantes réelles</u>. Ainsi, nous dirons que :

Définition 3.2.1 - *Une fonction u mesurable et bornée sur Q est une solution entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ si :*
i) $a \leq u \leq b$ *p.p. dans* Q, $\phi(u) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\forall k \in [a,b]$, $U_k \in \mathcal{DM}_2(Q)$,

ii) $\forall k \in [a,b]$, $\forall \xi \in \mathcal{D}(]-\infty,T[\times\Omega)$, $\xi \geq 0$,

$$\int_Q \big(U_k.\overline{\nabla}\xi - sgn(u-k)G(u,k)\xi\big)\, dxdt + \int_\Omega |u_0-k|\xi(0,.)dx \geq 0, \tag{3.5}$$

iii) $\forall \xi \in L^\infty(Q)\cap H^1(Q)\cap\mathcal{C}(Q)$, $\xi(T,.)=\xi(0,.)=0$, $\forall k \in [a,b]$,

$$\int_\Sigma \mathbf{F}(k,0).\nu\xi d\mathcal{H}^p \leq \langle U_k,\xi\rangle_{\partial Q} + \langle U_0,\xi\rangle_{\partial Q}\,, \tag{3.6}$$

où $U_k = (|u-k|, -\nabla|\phi(u)-\phi(k)| + \mathbf{F}(u,k))$ *et* $\overline{\nabla}\zeta = (\partial_t\xi, \nabla\xi)$.

Remarque 3.2.1 - *En procédant comme aux remarques 2.0.2 et 3.1.2, c'est à dire en choisissant successivement $k=a$ et $k=b$ dans (3.5), on retouve la présentation formelle (1.1) du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$. En outre ces choix pour k permettent aussi d'assurer que $\partial_t u$ est un élément de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, d'après la définition de la norme dans cet espace.*

3.2.1 Théorème d'unicité

La démonstration repose d'abord sur une propriété de comparaison dans l'ouvert Q entre deux solutions entropiques, obtenue par la technique classique de dédoublement des variables due à S.N.Kruzhkov [39] pour le cas d'opérateurs quasi linéaires hyperboliques du premier ordre. Tout d'abord, il est essentiel de remarquer que :

Lemme 3.2.1 - *Soit u une fonction mesurable et bornée sur Q telle que $a \leq u \leq b$ p.p. dans Q, $\phi(u)$ appartient à $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et vérifiant (3.5). Alors, pour toute fonction mesurable v de $H_0^1(\Omega)$, $\phi(a) \leq v \leq \phi(b)$ p.p. sur Ω, on a presque partout sur $]0,T[$,*

$$\begin{aligned}\langle \partial_t u, v-\phi(u)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &+ \int\limits_\Omega (\nabla\phi(u) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,u)).\nabla(v-\phi(u))dx \\ &+ \int\limits_\Omega \psi(t,x,u)(v-\phi(u))dx \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Une idée de la preuve du lemme 3.2.1 - Compte tenu de la remarque 3.2.1, on a pour presque tout t de $]0,T[$ et pour toute fonction ζ de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$,

$$\langle \partial_t u, \zeta\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int\limits_Q ((\nabla\phi(u) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,u)).\nabla\zeta + \psi(t,x,u)\zeta)\, dxdt \leq \int\limits_Q (1-sgn(u-a))\mathbb{P}(t,x,a)\zeta dxdt,$$

et

$$\langle \partial_t u, \zeta\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int\limits_Q ((\nabla\phi(u) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,u)).\nabla\zeta + \psi(t,x,u)\zeta)\, dxdt \geq \int\limits_Q (1+sgn(u-b))\mathbb{P}(t,x,b)\zeta dxdt.$$

Dans la première inegalité on choisit $\zeta = (v-\phi(u))^-$ et dans la seconde $\zeta = (v-\phi(u))^+$. Etant donné les propriétés de v, on s'assure que $(1-sgn(u-a))(v-\phi(u))^- = 0$ et $(1+sgn(u-b))\zeta = (v-\phi(u))^+ = 0$ p.p. sur Ω. L'inéquation variationnelle désirée s'obtient alors par soustraction des deux inégalités ainsi obtenues. ■

Par ailleurs, afin de contrôler la contribution des termes de diffusion, nous utilisons une *inégalité d'énergie* dans le même esprit que J.Carrillo dans [15] :

Lemme 3.2.2 - *Soit u une solution entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$. Alors, pour tout réel k de $E \cap [a,b]$ et toute fonction ζ de $\mathcal{D}(Q)$, $\zeta \geq 0$,*

$$\int\limits_Q \left(U_k.\overline{\nabla}\zeta - sgn(u-k)G(u,k)\zeta\right) dxdt \geq \limsup_{\lambda\to 0^+} \int\limits_Q sgn'_\lambda(\phi(u)-\phi(k))[\nabla\phi(u)]^2\zeta dxdt,$$

où $E = \{l \in \mathbb{R}, \{l\} = \phi^{-1}\{\phi(l)\}\}$.

Quelques commentaires sur la preuve du lemme 3.2.2 - Il est loisible de choisir dans (3.7) la fonction-test $v = \phi(u) - \frac{\lambda}{\|\zeta\|_\infty} sgn_\lambda(\phi(u)-\phi(k))\zeta$, k étant donné $[a,b]$ et ζ dans $\mathcal{D}(]0,T[)\bigotimes\mathcal{D}(\Omega)$, $\zeta \geq 0$. On intègre de 0 à T. On utilise le lemme de Mignot-Bamberger (voir [32]) pour intégrer par parties le terme d'évolution puis on fait tendre λ vers 0^+. Pour le terme de convection, on introduit l'hypo-inverse ϕ_0^{-1} de ϕ définie pour tout r de $Im\phi$ par $\phi_0^{-1}(r) = Inf\phi^{-1}(\{r\})$ et la fonction à valeurs vectorielles :

$$\mathbf{H}_\lambda(t,x,r) = \int\limits_{\phi(k)}^{r} [\boldsymbol{\varphi}(t,x,\phi_0^{-1}(\tau)) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,k)]sgn'_\lambda(\tau-\phi(k))d\tau.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\int\limits_Q (\boldsymbol{\varphi}(t,x,u) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,k)).\nabla\phi(u)sgn'_\lambda(\phi(u)-\phi(k))\zeta dxdt \\ &= \int\limits_Q Div[\mathbf{H}_\lambda(t,x,\phi(u))]\zeta dxdt - \int\limits_Q \int\limits_{\phi(k)}^{\phi(u)} \left(Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,\phi_0^{-1}(\tau))] - Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,k)]\right) sgn'_\lambda(\tau-\phi(k))d\tau\zeta dxdt,\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $\nabla\phi(u) = 0$ p.p. sur $Q_0^u = \{(t,x) \in Q,\ u(t,x) \notin E\}$ de sorte que l'intégration porte en fait sur $Q\backslash Q_0^u$ où $\phi_0^{-1}(\phi(u)) = u$ p.p.. Le premier terme du membre de droite est intégré par parties selon la formule de Green et pour le second on revient à la définition de sgn'_λ pour obtenir :

$$\int_Q \frac{1}{\lambda}\int_{\mathcal{I}} \left([\boldsymbol{\varphi}(t,x,\phi_0^{-1}(\tau)) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,k)].\nabla\zeta + Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,\phi_0^{-1}(\tau)) - \boldsymbol{\varphi}(t,x,k)]\zeta d\tau\right) dxdt,$$

où $\mathcal{I} = I(\phi(u),\phi(k)) \cap [\phi(k)-\lambda, \phi(k)+\lambda]$ avec $I(r,p) = [min(r,p), max(r,p)]$, pour tout (r,p) de $\mathbb{R}^2$. Puisque k appartient à E, la fonction généralisée ϕ_0^{-1} est continue en $\phi(k)$ (*cf.* [15]). Donc le terme ci-dessus tend vers 0 lorsque λ tend vers 0^+, et on termine ainsi la preuve du lemme 3.2.2.

■

On peut alors adapter le raisonnement développé par J.Carrillo et établir le résultat de comparaison :

Lemme 3.2.3 - *Soient u_1 et u_2 deux solutions entropiques du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$. Alors, pour toute fonction Ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $Q \times Q$, $\Psi \geq 0$, telle que*

$$\forall (t,x) \in Q,\ (\tilde{t},\tilde{x}) \longmapsto \Psi(t,x,\tilde{t},\tilde{x}) \in \mathcal{D}(Q),$$
$$\forall (\tilde{t},\tilde{x}) \in Q,\ (t,x) \longmapsto \Psi(t,x,\tilde{t},\tilde{x}) \in \mathcal{D}(Q),$$

on a "l'inégalité de Kruzhkov"

$$-\int_{Q\times Q} |u_1 - \tilde{u}_2|(\partial_t\Psi_t + \partial_{\tilde{t}}\Psi) + sgn(\phi(u_1) - \phi(\tilde{u}_2))(\nabla_x\phi(u_1) - \nabla_{\tilde{x}}\phi(\tilde{u}_2)).(\nabla_x\Psi + \nabla_{\tilde{x}}\Psi)dqd\tilde{q}$$
$$-\int_{Q\times Q} \Big(\mathbf{F}(u_1,\tilde{u}_2).\nabla_x\Psi + \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{u}_2,u_1).\nabla_{\tilde{x}}\Psi - sgn(u_1-\tilde{u}_2)(G(u_1,\tilde{u}_2) - \tilde{G}(\tilde{u}_2,u_1))\Psi\Big) dqd\tilde{q} \leq 0,$$

où $dq = dxdt$, $d\tilde{q} = d\tilde{x}d\tilde{t}$, $u_i = u_i(t,x)$, $\tilde{u}_i = u(\tilde{t},\tilde{x})$.

Dans la formulation du lemme 3.2.3, on choisit $\Psi(t,x,\tilde{t},\tilde{x}) = \xi(t,x,\tilde{t},\tilde{x})\rho_l(x)\rho_m(\tilde{x})$ où $(\rho_l)_{l>0}$ et $(\rho_m)_{m>0}$ sont des suites de bord (au sens de la terminologie employée dans [46]) et ξ un élément de $\mathcal{D}((]0,T[\times\overline{\Omega})^2)$, $\xi \geq 0$, pour prendre en compte les conditions aux limites. On s'inspire des techniques proposées par C.Mascia, A.Porretta & A.Terracina [46] nous permettant de faire tendre l et m vers 0^+ pour obtenir :

Théorème 3.2.1 - *Soient u_1 et u_2 sont deux solutions entropiques du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ associées aux données initiales $u_{0,1}$ et $u_{0,2}$. Alors, pour presque tout t de $[0,T]$,*

$$\int_\Omega |u_1(t,x) - u_2(t,x)|dx \leq \int_\Omega |u_{0,1} - u_{0,2}|dx\, e^{M_\psi t}.$$

Pour démontrer l'existence d'une solution entropique on dispose des estimations établies à la propriété 3.0.1. Puisque l'on a perdu le caractère inversible de ϕ, on a peu d'informations sur le comportement de la suite $(u_\delta)_{\delta>0}$. Mais compte tenu du fait que les seuils a et b sont constants, nous cherchons dans un premier temps à suivre le raisonnement du paragraphe 3.1.1.

3.2.2 Résultat d'existence pour des non-linéarités "régulières"

On suppose que φ_i, $i \in \{1,..,p\}$, et ψ sont respectivement des éléments de $W^{2,+\infty}([0,T]\times\overline{\Omega}\times[-M,M])$ et $W^{1,+\infty}([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ et, dans un premier temps, que u_0 est un élément de $H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta\phi(u_0)$ et Δu_0 sont des éléments de $\mathcal{M}_b(\Omega)$. Ainsi, les estimations obtenues aux propriétés 3.0.1, 3.1.1 et 3.1.2 sont encore vraies et montrent qu'après extraction éventuelle d'une sous-suite lorsque δ tend vers 0^+, il existe une fonction u de $BV(Q) \cap \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$, $a \le u \le b$ p.p. dans Q, et telle que, $(u_\delta)_{\delta>0}$ converge vers u dans $\mathcal{C}^0([0,T]; L^1(\Omega))$ et $(\partial_t u_\delta)_{\delta>0}$ converge faiblement vers $\partial_t u$ dans $L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. De plus $(\phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0}$ converge vers $\phi(u)$ faiblement dans $H^1(Q)$ et fortement dans $\mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega))$. Ces propriétés de convergence permettent de passer à la limite dans l'ouvert Q et assurent que u vérifie (3.5). On établit (3.6) en montrant tout d'abord que pour les solutions approchées u_δ :

Lemme 3.2.4 - *$\forall \delta > 0$, $\forall k \in [a,b]$, $\forall \xi \in L^\infty(Q) \cap H^1(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$, $\xi(T,.) = \xi(0,.) = 0$, $\xi \ge 0$,*

$$\int_\Sigma \mathbf{F}(k,0).\nu \xi d\mathcal{H}^p \le \langle U_{k,\delta}, \xi \rangle_{\partial Q} + \langle U_{0,\delta}, \xi \rangle_{\partial Q},$$

où $U_{k,\delta}$ se réfère à U_k avec ϕ_δ à la place de ϕ. En outre

$$\exists C > 0, \forall \delta > 0,\ \|Div_{(t,x)} U_{k,\delta}\|_{\mathcal{M}_b(Q)} \le C.$$

Ainsi, compte tenu des propriétés de la topologie faible $\star$ sur $\mathcal{M}_b(Q)$ (*cf.* [47]), après extraction éventuelle d'une sous-suite, $(Div_{(t,x)} U_{k,\delta})_{\delta>0}$ converge vers $Div_{(t,x)} U_k$ dans $\mathcal{M}_b(Q)$ faible $\star$. Pour passer à la limite en δ dans l'inégalité du lemme 3.2.4 on montre que

Lemme 3.2.5 - *Si $(\mu_\varrho)_{\varrho>0}$ une suite de $\mathcal{M}_b(Q)$, $\mu_\varrho \ge 0$, convergeant vers μ dans $\mathcal{M}_b(Q)$ faible $\star$ lorsque ϱ tend vers 0^+. Alors pour toute fonction ξ à valeurs positives de $L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$,*

$$\int_Q \xi d\mu \le \liminf_{\varrho \to 0^+} \int_Q \xi d\mu_\varrho.$$

L'utilisation du lemme 3.2.5 pour la suite $(-Div_{(t,x)} U_{k,\delta} - sgn(u_\delta - k) G(u_\delta, k))_{\delta>0}$ et la définition du crochet $\langle .,. \rangle_{\partial Q}$ donnée au paragraphe 1.3 conduisent, lorsque δ tend vers 0^+, à (3.6). On conclut donc :

Théorème 3.2.2 - *Si u_0 est un élément de $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $\Delta\phi(u_0)$ et Δu_0 appartiennent à $\mathcal{M}_b(\Omega)$ et si φ_i, $i \in \{1,..,p\}$, et ψ sont respectivement des fonctions de $W^{2,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M,M])$ et de $W^{1,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, alors le problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ a une solution entropique u dans $BV(Q) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$. En outre, si u_1 et u_2 sont deux solutions entropiques correspondant aux données initiales $u_{0,1}$ et $u_{0,2}$ alors,*

$$\forall t \in [0,T], \|u_1(t,.) - u_2(t,.)\|_{L^1(\Omega)} \le e^{M_\psi t} \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{L^1(\Omega)}.$$

En suivant la même idée que celle évoquée au sous-paragraphe 2.2.1 pour établir le corollaire 2.2.1, on relaxe les hypothèses de régularité faites sur la donnée initiale en construisant, à l'aide de problèmes auxiliaires elliptiques quasi linéaires (la non-linéarité étant exclusivement portée par le terme de diffusion), une suite $(u_0^{\varrho,\delta})_{\varrho>0,\delta>0}$ vérifiant la condition d'obstacle et telle que pour tout δ et ϱ strictement positifs,

$$\|\nabla u_0^{\varrho,\delta}\|_{L^1(\Omega)^p} \le C(\varrho),\ \|\phi_\delta(u_0^{\varrho,\delta})\|_{H_0^1(\Omega)} \le C(\varrho) \text{ et } \|\Delta\phi_\delta(u_0^{\varrho,\delta})\|_{L^1(\Omega)} \le C(\varrho),$$

où $C(\varrho)$ est une constante qui ne dépend que de ϱ.

On désigne par u_δ^ϱ la solution de (3.1) correspondant à la donnée initiale $u_0^{\varrho,\delta}$. Ainsi, le paramètre ϱ étant fixé on utilise les estimations des propriétés 3.0.1, 3.1.1 et 3.1.2 pour justifier comme ci-dessus le passage à la limite lorsque δ tend vers 0^+. Par suite, si u^ϱ désigne la solution du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ associée à la donnée initiale u_0^ϱ, limite dans $L^1(\Omega)$ de la suite $(u_0^{\varrho,\delta})_{\delta>0}$, on déduit du théorème 3.2.2 que $(u^\varrho)_{\varrho>0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T]; L^1(\Omega))$. Par ailleurs, puisque (toute) la suite $(u_\delta^\varrho)_{\delta>0}$ converge vers u^ϱ, on a des estimations uniformes pour $(\partial_t u^\varrho)_{\varrho>0}$, $(\phi(u^\varrho))_{\varrho>0}$ et $(Div_{(t,x)} U_k^\varrho)_{\varrho>0}$ respectivement dans $L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ et $\mathcal{M}_b(Q)$. On peut donc passer à la limite lorsque ϱ tend vers 0^+, les propriétés de convergence de $(u^\varrho)_{\varrho>0}$ étant de même nature que celles de $(u_\delta^\varrho)_{\delta>0}$. Les arguments évoqués pour établir le théorème 3.2.2 peuvent donc encore être repris et conduisent finalement à :

Théorème 3.2.3 - *Etant donné u_0 dans $L^\infty(\Omega)$, si φ_i, $i \in \{1,..,p\}$, et ψ sont respectivement des fonctions de $W^{2,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M,M])$ et $W^{1,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, le problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ a une solution entropique u dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$.*

Articles références de l'auteur

Lévi, L. ; Rouvre, E. ; Vallet, G., Weak entropy solutions for degenerate parabolic–hyperbolic inequalities. Appl. Math. Lett. 18, No.5, 497-504 (2005)

Lévi, Laurent The positiveness problem for a class of degenerate parabolic-hyperbolic operator. Adv. Math. Sci. Appl. 15,.No 1, 307-333 (2005)

3.2.3 Résultat d'existence *via* le concept de processus entropique

On cherche à s'affranchir des conditions de régularité requises au théorème 3.2.3 pour les non-linéarités $\boldsymbol{\varphi}$ et ψ et donc à se satisfaire seulement des estimations des propriétés 3.0.1 et 3.1.1 pour passer à la limite en δ. Tout d'abord on considère u_0^δ une approximation dans $L^1(\Omega)$ de u_0 obtenue à l'aide de suites régularisantes de sorte que pour tout δ strictement positif u_0^δ appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie $a \leq u_0^\delta \leq b$ p.p. dans Ω. On désigne par u_δ la solution de (3.1) associée à u_0^δ. Comme la technique de régularisation de la donnée initiale ne donne pas d'estimations de $(\phi_\delta(u_0^\delta))_{\delta>0}$ dans $H_0^1(\Omega)$, il convient dans la propriété 3.0.1 de changer *iv)* en l'estimation locale en temps :

$$(\sqrt{t}\partial_t \phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0} \text{ suite bornée de } L^2(Q).$$

On met donc en évidence une fonction u telle que $a \leq u \leq b$ p.p. sur Q et telle que, après extractions éventuelles de sous-suites, $(u_\delta)_{\delta>0}$ converge vers u dans $L^\infty(Q)$ faible $\star$ et $(\partial_t u_\delta)_{\delta>0}$ converge faiblement vers $\partial_t u$ dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Par ailleurs, et compte tenu du fait que $(t\phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0}$ est bornée dans $H^1(Q)$, il existe une fonction Φ telle que - après extractions éventuelles de sous-suites - $(\phi_\delta(u_\delta))_{\delta>0}$ converge faiblement vers Φ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et fortement dans $L^q(Q)$ pour tout q de $[1,+\infty[$.

En utilisant la monotonie de ϕ, on montre que p.p. sur Q

$$\Phi(t,x) = \phi(u(.,.)) = \phi(\pi(\alpha,.,.)) \text{ pour presque tout } \alpha \text{ dans }]0,1[,$$

où π est un processus associé à la suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ d'après la proposition 2.2.2 du paragraphe 2.

Enfin, puisque les résultats du lemme 3.2.4 restent vérifiés, on peut énoncer la propriété suivante en utilisant les mêmes arguments que ceux évoqués au paragraphe 3.2.2 :

Propriété 3.2.1 - *Le problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ admet une solution processus entropique au sens où il existe une fonction π de $L^\infty(]0,1[\times Q)$ telle que en posant $u(t,x) = \int_0^1 \pi(\alpha,t,x)d\alpha$*

i) $a \leq \pi \leq b$ p.p. dans $]0,1[\times Q$, $\phi(u) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ où p.p. sur Q, $\phi(u) = \phi(\pi(\alpha,.))$ p.p.t. $\alpha \in]0,1[$,

$\forall k \in [a,b], \Pi_k \in \mathcal{DM}_2(Q)$,

ii) $\forall k \in [a,b]$, $\forall \xi \in \mathcal{D}(]-\infty,T[\times\Omega)$, $\xi \geq 0$,

$$\int_{]0,1[\times Q} \left(\Pi_k.\overline{\nabla}\xi dxdt - sgn(\pi-k)G(\pi,k)\xi\right) d\alpha dxdt + \int_\Omega |u_0-k|\xi(0,.)dx \geq 0.$$

iii) $\forall \xi \in L^\infty(Q) \cap H^1(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$, $\xi \geq 0$, $\xi(T,.) = \xi(0,.) = 0$, $\forall k \in [a,b]$,

$$\int_\Sigma \mathbf{F}(k,0).\nu\xi d\mathcal{H}^p \leq \langle \Pi_k, \xi\rangle_{\partial Q} + \langle \Pi_0, \xi\rangle_{\partial Q},$$

où on a posé $\Pi_k = \left(\int_0^1 |\pi(\alpha,.,.) - k|d\alpha, -\nabla|\phi(u) - \phi(k)| + \int_0^1 \mathbf{F}(\pi(\alpha,.,.),k)d\alpha\right)$.

La démonstration du théorème d'unicité évoquée au paragraphe 3.2.1 dans le cadre de solutions fonctions reste identique dans le cas de processus entropiques. En particulier, avec les mêmes arguments que ceux développés au lemme 3.2.1, on montre que π vérifie l'inéquation variationnelle, p.p. sur $]0,T[$ et pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ telle que $\phi(a) \leq v \leq \phi(b)$ p.p. sur Ω,

$$\langle \partial_t u, v - \phi(u)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \nabla\phi(u).\nabla(v - \phi(u))dx$$
$$- \int_{\Omega\times]0,1[} \boldsymbol{\varphi}(t,x,\pi).\nabla(v - \phi(u))dx + \int_{\Omega\times]0,1[} \psi(t,x,\pi)(v - \phi(u))dx \geq 0,$$

à partir de laquelle on montre que π vérifie *l'inégalité d'energie*, pour tout k de $[a,b] \cap E$ et toute fonction ζ de $\mathcal{D}(Q)$, $\zeta \geq 0$,

$$\int_Q \Pi_k.\overline{\nabla}\zeta dxdt - \int_{]0,1[\times Q} sgn(\pi - k)G(\pi,k)\zeta d\alpha dxdt \geq \limsup_{\lambda\to 0^+} \int_Q sgn'_\lambda(\phi(u) - \phi(k))[\nabla\phi(u)]^2\zeta dxdt.$$

Finalement, comme dans le cas des opérateurs de type $\mathbb{H}$ (*cf.* propriété 2.2.2, paragraphe 2.2), on est assuré que pour presque tout (t,x) de Q

$$\pi(\alpha,t,x) = u(t,x) \text{ pour presque tout } \alpha \text{ de }]0,1[,$$

de sorte que u est la solution faible entropique du problème d'obstacle pour $\mathbb{P}$ au sens de la définition 3.2.1. On a donc :

Théorème 3.2.4 - *Le problème d'obstacle pour* $\mathbb{P}$ *a une solution entropique* u *dans* $L^\infty(Q)$.

Remarque 3.2.2 - *Les propriétés de comportement établies au sous-paragraphe 2.3 pour les opérateurs de type* $\mathbb{H}$ *restent, pour la plupart, vérifiées pour des opérateurs de type* $\mathbb{P}$. *On peut donc énoncer de la même façon la propriété de conservation de l'ordre du lemme 2.3.1, le résultat de sensibilité de la propriété 2.3.1 (i) et (ii), et uniquement la relation (i) de la propriété 2.3.2 en remplaçant* $\mathbb{H}$ *par* $\mathbb{P}$ *(et en supposant que* $\Delta\phi(a)$ *et* $\Delta\phi(b)$ *sont des éléments de* $L^1(Q)$*). C'est la présence de termes de diffusion au second ordre qui ne permet pas d'obtenir (ii).*

Article référence de l'auteur

Lévi, L. ; Vallet, G., 2. Mathematical Analysis of a Bilateral Obstacle Problem for a Class of Second-Order Operators, International Journal of Evolution Equations, 3, No 2 (2006).

3.3 Remarque sur le passage du second ordre au premier ordre

On s'intéresse à des résultats de perturbations singulières du problème du premier ordre par celui du second ordre. Dans le cadre d'écoulements en milieux poreux, cette étude consiste à comparer les deux modèles selon que le terme de diffusion est négligeable ou pas au regard de celui de transport et dans ce mémoire, cela nous permet de faire un lien entre les travaux présentés aux paragraphes 2 et 3. D'un point de vue mathématique, la méthode consiste à introduire un paramètre ϵ strictement positif et destiné à tendre vers 0^+ et à préciser le comportement de la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des solutions des problèmes d'obstacle pour les opérateurs $(\mathbb{P}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ où

$$\mathbb{P}_\epsilon(t,x,.) : u \to \mathbb{H}(t,x,u) - \epsilon\Delta\phi(u).$$

On passe à la limite en ϵ en utilisant des théorèmes de compacité, ce qui nécessite des estimations *a priori* pour la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$. Celles-ci sont obtenues en revenant au problème de viscosité pénalisé naturellement associé, en portant notre attention sur les estimations uniformes en ϵ qui restent vraies après passage à la limite par rapport au paramètre de viscosité-pénalisation (paramètre δ - *cf.* paragraphe 3). Ainsi, on a toujours :

Propriété 3.3.1 - *La suite $(\sqrt{\epsilon}\phi(u_\epsilon))_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ uniformément par rapport à ϵ. Par ailleurs, $a \leq u_\epsilon \leq b$ p.p. sur Q.*

Notons que des résultats de perturbations singulières pour des problèmes d'obstacle ont déjà été obtenus par F.Mignot & J.P.Puel [49] pour des opérateurs linéaires et par M.Madaune-Tort [45] pour des opérateurs quasi linéaires paraboliques (faiblement) dégénérés en dimension d'espace 1 associés à une contrainte de positivité sur le bord. Ici, les estimations dégagées suffisent à préciser le comportement de la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ en vertu des affirmations 2.2.1 et 2.2.2 du paragraphe 2 qui fournissent un résultat de compacité et conduisent à l'introduction de processus entropiques solutions. Cependant, on peut remarquer que si la condition d'obstacle ne dépend pas des variables (t,x) et si la donnée initiale et les termes de transport et de réaction sont "suffisamment réguliers" alors on a une estimation uniforme de $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ dans $BV(Q)$ et on majore même l'accroissement $(u_\epsilon(t+h,.)-u_\epsilon(t,.))$ dans $L^1(\Omega)$ par $C\,h$, uniformément en ϵ (voir propriété 3.1.2, paragraphe 3). On utilise la compacité de l'injection de $BV(Q)$ dans $L^1(Q)$ pour justifier que :

Théorème 3.3.1 - *Si u_0 est un élément de $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $\Delta\phi(u_0)$ et Δu_0 appartiennent à $\mathcal{M}_b(\Omega)$ et si φ_i, $i \in \{1,..,p\}$, et ψ sont respectivement des fonctions de classe $W^{2,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times [-M,M])$ et $W^{1,+\infty}([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, alors la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des solutions des problèmes d'obstacle pour $\mathbb{P}_\epsilon$ converge dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$, et dans $\mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega))$ lorsque ϵ tend vers 0^+ vers la solution entropique u appartenant à $BV(Q) \cap \mathcal{C}([0,T];L^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ au sens de la définition 2.0.1.*

Lorsque l'on relaxe les conditions de régularité sur la donnée initiale et sur les termes de transport et de réaction, on se place dans un contexte de solutions u_ϵ, $\epsilon > 0$, essentiellement bornées et on a alors :

Théorème 3.3.2 - *La suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des solutions des problèmes d'obstacle pour $\mathbb{P}_\epsilon$ converge dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$, lorsque ϵ tend vers 0^+ vers la solution entropique u du problème d'obstacle pour $\mathbb{H}$ au sens de la définition 2.0.1.*

<u>Quelques commentaires</u> - Dans les deux situations, on tire avantage de la propriété d'approximation de u_ϵ par la suite $(u_{\epsilon,\delta})_{\delta>0}$ des solutions des problèmes de viscosité pénalisés et on considère la famille de paires entropiques de flux au bord au sens de F.Otto, $(H_i, \mathbf{Q}_i)$, $i \in \{1,2\}$, déjà évoquées aux paragraphes 2.2.1 et 2.2.2. On considère le produit scalaire dans $L^2(Q)$ entre l'équation de viscosité pénalisée vérifiée par $u_{\epsilon,\delta}$ et

$\partial_1 H_i(u_{\epsilon,\delta}, K)\zeta_i$, K étant réel compris entre a et b ou un élément de $W^{1,1}(\Omega)$ tel que $a \leq K \leq b$ p.p. sur Ω selon les situations considérées aux paragraphes 3.1 et 3.2, de sorte que $\partial_1 H_i(u_{\epsilon,\delta}, K)\beta(t, x, u_{\epsilon,\delta}) \geq 0$ p.p. sur Q. Le passage à la limite en δ ne pose pas de difficultés et celui en ϵ s'effectue comme aux paragraphes 2.2.1 et 2.2.2, c'est à dire fortement dans $L^1(Q)$ dans le cas du théorème 3.3.1 et dans $L^\infty(Q)$ faible $\star$ dans celui du théorème 3.3.2, la contribution du terme de diffusion étant contrôlée grâce à l'estimation de $(\sqrt{\epsilon}\phi(u_\epsilon))_{\epsilon>0}$ donnée par la propriété 3.3.1.

■

Remarque 3.3.1 - *On peut aussi établir l'égalité de bord pour u en passant à la limite en ϵ dans celle satisfaite par $u_{\epsilon,\delta}$ et mise en évidence au lemme 3.2.4. On utilise le même raisonnement que celui développé pour passer à la limite en δ dans celles vérifiée par u_δ au paragraphe 3.2.2. On obtient alors pour toute fonction ξ de $H^1(Q) \cap L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}(Q)$, $\xi(T, .) = \xi(0, .) = 0$, $\xi \geq 0$,*

$$\int_\Sigma \mathbf{F}(K, 0).\nu\xi d\mathcal{H}^p \leq \langle \Pi_k, \xi \rangle_{\partial Q} + \langle \Pi_0, \xi \rangle_{\partial Q} ,$$

avec

$$\Pi_K(t, x) = (|u(t, x) - K|, \mathbf{F}(u(t, x), K) \text{ ou } \Pi_K(t, x) = (\int_0^1 |\pi(\alpha, t, x) - K| d\alpha, \int_0^1 \mathbf{F}(\pi(\alpha, t, x), K) d\alpha),$$

selon que l'on considère la situation du théorème 3.3.1 ou celle du théorème 3.3.2. L'inégalité souhaitée résulte alors de (1.4).

Article référence de l'auteur

Lévi Laurent, Problèmes unilatéraux pour des équations non linéaires de convection-réaction. Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. 4, No.3, 593-631 (1995)

Lévi Laurent, Singular perturbations of unilateral problems arising from the theory of flows through porous media. Adv. Math. Sci. Appl. 9, No.2, 597-620 (1999)

Lévi Laurent, The singular limit of a bilateral obstacle problem for a class of degenerate parabolic–hyperbolic operators. Adv. Appl. Math. 35, No.1, 34-57 (2005).

Lévi Laurent, The positiveness problem for a class of degenerate parabolic-hyperbolic operator. Adv. Math. Sci. Appl. 15,.No 1, 307-333 (2005)

3.4 Données initiales dans $L^1(\Omega)$

Il s'agit de travaux menés en collaboration avec M.Bendahmane du Département d'Ingénierie Mathématique de l'Université de Conception au Chili.

On souhaite s'affranchir du contexte de solutions bornées présent tout au long de ce mémoire, cette propriété étant notamment due au fait que la donnée initiale est elle-même un élément de $L^\infty(\Omega)$. On s'intéresse donc à un résultat d'existence et d'unicité pour le problème d'obstacle unilatéral (inférieur) : Trouver une fonction u mesurable et intégrable sur Q telle que :

$$\begin{cases} a \leq u \text{ p.p. sur } Q, \\ \partial_t u - \sum_{i=1}^p \partial^2_{x_i x_i}\phi_i(u) + \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}(\varphi_i(t, x, u)) + \psi(t, x, u) = 0 \text{ sur } [a < u], \\ \partial_t u - \sum_{i=1}^p \partial^2_{x_i x_i}\phi_i(u) + \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}(\varphi_i(t, x, u)) + \psi(t, x, u) \geq 0 \text{ sur } [u = a], \\ u(0, .) = u_0 \text{ sur } \Omega,\ u = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{cases} \tag{3.8}$$

où l'on suppose que u_0 est un élément de $L^1(\Omega)$, les conditions de régularité de $\boldsymbol{\varphi}$ et de ψ étant celles données en introduction, au paragraphe 1.2. Dans un soucis de généralisation des résultats exposés au paragraphe 3.2, l'opérateur de diffusion est considéré *anisotropique*. En outre, pour tout i de $\{1,..,p\}$,

$$\phi_i \text{ est une fonction croissante sur } \mathbb{R}, \text{ élément de } W^{1,+\infty}(\mathbb{R}) \text{ et nulle en zéro.}$$

On donne une formulation *entropique renormalisée* du problème (3.8) à l'aide de *fonctions de troncature* T_l définies sur $\mathbb{R}$ pour tout l strictement positif par :

$$T_l(u) = \begin{cases} -l, & u < -l, \\ u, & -l \leq u \leq l, \\ l, & u > l. \end{cases}$$

Ainsi, en s'appuyant sur les travaux déjà réalisés par M.Bendahmane & K.H.Karsen [8, 9] dans le cadre de problèmes sans contrainte et qui utilise des *semi-entropies de Kruzhkov*, nous dirons que

Définition 3.4.1 - *Une fonction mesurable u est une solution entropique renormalisée de (3.8) si et seulement si u vérifie :*
i) la condition d'obstacle

$$a \leq u \text{ p.p. dans } Q,$$

ii) les conditions de régularité : $u \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ et $\forall i \in \{1,..,p\}$, $\partial_{x_i}\widehat{\phi_i}(T_l(u)) \in L^2(Q)$, $\forall l > 0$,

iii) les conditions d'entropies intérieures : pour tout l strictement positif, il existe une mesure de Radon positive $\mathcal{M}_l^u$ définie sur $[0,T[\times\overline{\Omega}$ telle que,

$$\int_Q \left((T_l(u)-k)^+\partial_t\zeta + \mathbf{F}^+(T_l(u),k).\nabla\zeta - G^+(T_l(u),k)\zeta - \sum_{i=1}^p sgn^+(T_l(u)-k)\partial_{x_i}\phi_i(T_l(u))\partial_{x_i}\zeta \right) dxdt$$
$$+ \int_\Omega (T_l(u_0)-k)^+\zeta(0,x)dx$$
$$\geq \limsup_{\lambda\to 0^+} \int_Q \sum_{i=1}^p (sgn_\lambda^+)'(u-k)(\partial_{x_i}\widehat{\phi_i}(T_l(u)))^2\zeta dxdt - \int_Q \zeta d\mathcal{M}_l^u(t,x),$$

pour toute paire (ζ,k) de $\mathcal{D}([0,T[\times\Omega)\times[a,+\infty[$ et toute paire (ζ,k) de $\mathcal{D}([0,T[\times\overline{\Omega})\times[0,+\infty[$ (ζ étant toujours supposée à valeurs positives), et

$$\int_Q \left((T_l(u)-k)^-\partial_t\zeta + \mathbf{F}^-(T_l(u),k).\nabla\zeta - G^-(T_l(u),k)\zeta - \sum_{i=1}^p sgn^-(T_l(u)-k)\partial_{x_i}\phi_i(T_l(u))\partial_{x_i}\zeta \right) dxdt$$
$$+ \int_\Omega (T_l(u_0)-k)^-\zeta(0,x)dx$$
$$\geq \limsup_{\lambda\to 0^+} \int_Q \sum_{i=1}^p (sgn_\lambda^-)'(u-k)(\partial_{x_i}\widehat{\phi_i}(T_l(u)))^2\zeta dxdt - \int_Q \zeta d\mathcal{M}_l^u(t,x),$$

pour toute paire (ζ,k) de $\mathcal{D}([0,T[\times\Omega)\times[a,+\infty[$ et toute paire (ζ,k) de $\mathcal{D}([0,T[\times\overline{\Omega})\times[a,0]$ (ζ étant toujours supposée à valeurs positives),

iv) les conditions de bord pour toute fonction f de $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ et tout i de $\{1,..,p\}$,

$$\int_Q \left(Div[\Phi^f(T_l(u))]\zeta + \Phi^f(T_l(u)).\nabla\zeta \right) dxdt = 0,$$

pour toute fonction ζ *de* $\mathcal{D}(]0,T[\times\overline{\Omega})$,

v) la "mesure de renormalisation" $\mathcal{M}_l^u$ *est telle que*

$$\lim_{l\to+\infty}\mathcal{M}_l^u([0,T[\times\overline{\Omega})=0,$$

où on a posé, pour (t,x) *quelconque fixé dans* Q *et tout couple de réels* (u,k),

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{F}^{\pm}(u,k) & = & sgn^{\pm}(u-k)\left(\boldsymbol{\varphi}(t,x,u)-\boldsymbol{\varphi}(t,x,k)\right),\\ G^{\pm}(u,k) & = & sgn^{\pm}(u-k)\left(Div[\boldsymbol{\varphi}(t,x,k)]+\psi(t,x,u)\right),\end{array}$$

pour tout i *de* $\{1,..,p\}$ *et tout réel* u *et toute fonction* f *de* $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\widehat{\phi_i}(u)=\int_0^u\sqrt{\phi_i'(\tau)}d\tau,\qquad \Phi_i^f(u)=\int_0^u f(\tau)\sqrt{\phi_i'(\tau)}d\tau,\qquad \Phi^f(u)=\left(\Phi_1^f(u),..,\Phi_p^f(u)\right).$$

Par utilisation de la technique de dédoublement des variables et en reprenant les méthodes développées dans [8, 9], on établit d'abord l'unicité d'une solution entropique renormalisée. Précisément,

Théorème 3.4.1 - *Soient* u *et* v *deux solutions faibles entropiques renormalisées du problème d'obstacle (3.8) associées aux données initiales respectives* u_0 *et* v_0 *dans* $L^1(\Omega)$. *Alors, pour presque tout* t *de* $]0,T[$,

$$\int_{\Omega}(u(t,x)-v(t,x))^+dx\le\int_{\Omega}(u_0-v_0)^+dx\,e^{M_{\psi}\,t},$$

de sorte que l'on en déduit une propriété de dépendance T*-lipschitzienne dans* $L^1(\Omega)$ *de la solution en fonction de la donnée initiale.*

Remarque 3.4.1 - *Bien-sûr, on s'assure que si* u_0 *est un élément de* $L^{\infty}(\Omega)$ *alors toute solution entropique renormalisée est une solution entropique au sens de la définition 3.2.1.*

Le résultat d'existence est obtenu par viscosité artificielle et pénalisation, ce qui amène à considérer le problème de Cauchy-Dirichlet :
Trouver une fonction u_δ mesurable sur Q telle que pour tout δ strictement positif

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t u_\delta-\displaystyle\sum_{i=1}^p\partial^2_{x_ix_i}\phi_{i,\delta}(u_\delta)+\sum_{i=1}^p\partial_{x_i}(\varphi_i(t,x,u_\delta))+\psi(t,x,u_\delta)=\frac{1}{\delta}(u_\delta-a)^-\text{ sur }Q,\\ u_\delta(0,.)=u_0\text{ sur }\Omega,\ u_\delta=0\text{ sur }\Sigma,\end{array}\right.\tag{3.9}$$

où pour tout i de $\{1,..,p\}$, $\phi_{i,\delta}(u_\delta)=\phi_i(u_\delta)+\delta u_\delta$.

Première étape - On suppose que u_0 est un élément de $BV(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Dans ces conditions, le problème (3.9) a une unique solution dans $L^{\infty}(Q)\cap W(0,T;H_0^1(\Omega);L^2(\Omega))$. En outre,

Propriété 3.4.1 - *Il existe des constantes* C_i, $i\in\{1,2,3\}$, *indépendantes de* δ *telles que*

$$\begin{gathered}\forall t\in[0,T],\ -M(t)\le u_\delta(t,.)\le M(t)\ p.p.\ dans\ \Omega,\\ \frac{1}{\delta}\|(u_\delta-a)^-\|_{L^2(Q)}\le C_1,\\ \forall i\in\{1,..,p\},\ \int_Q(\partial_{x_i}\widehat{\phi_{i,\delta}}(u_\delta))^2dxdt\le C_2,\\ \|\partial_t u_\delta\|_{L^2(0,T;W^{-1,1}(\Omega))}\le C_3,\end{gathered}$$

où la constante $M(t)$ *est définie en introduction, au paragraphe 1.2.*

Remarque 3.4.2 - *Il est essentiel de noter que les constantes C_i dépendent de façon implicite de $M(t)$ et par suite de $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Elles ne peuvent donc plus être utilisées lorsque u_0 appartient seulement à $L^1(\Omega)$.*

De plus, en utilisant les arguments développés par D.Serre dans [66] - qui s'appuient en particulier sur une inégalité de Kato - on est en mesure de montrer que :

Propriété 3.4.2 - *La solution u_δ de* (3.9) *vérifie pour tout s de $]0,T[$,*

$$TV_\Omega(u_\delta)(s,.)dx \leq TV_\Omega(u_0)e^{M_\psi\, s},$$

où $TV_\Omega(u)$ désigne la variation totale sur Ω d'une fonction u de $BV(\Omega)$.

On déduit des propriétés 3.4.1 et 3.4.2 que la suite la $(u_\delta)_{\delta>0}$ est bornée dans $W^{1,2}(0,T;W^{-1,1}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W^{1,1}(\Omega))$. Puisque l'injection de $W^{-1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ est continue et compacte et que celle de $L^1(\Omega)$ dans $W^{1,1}(\Omega)$ est continue, un résultat de compacité standard (voir [26]) assure l'existence d'une fonction mesurable et bornée u sur Q, telle que après extractions éventuelles de sous-suites lorsque δ tend vers 0^+,

$$u_\delta \to u \text{ dans } L^\infty(0,T;L^1(\Omega)).$$

Ceci nous conduit alors au résultat suivant qui généralise au cas d'un opérateur de diffusion anisotropique ceux établis aux théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 pour un opérateur isotropique :

Théorème 3.4.2 - *Si u_0 appartient à $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ alors le problème d'obstacle (3.8) a une solution entropique unique u dans $L^\infty(Q) \cap L^\infty(0,T;BV(\Omega))$ au sens de la définition 3.2.1. De plus, si u et v sont deux solutions de (3.8) associées aux données initiales respectives u_0 et v_0 alors,*

$$\text{p.p.t. } t \text{ de } [0,T], \int_\Omega |u(t,x) - v(t,x)|dx \leq \int_\Omega |u_0 - v_0|dx\, e^{M_\psi t}.$$

Pour établir que cette solution est une solution entropique renormalisée au sens de la définition 3.4.1 on a besoin d'estimations *a priori* qui sont indépendantes de $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ et qui permettent de mettre en évidence la mesure de renormalisation $\mathcal{M}_l^u$ vérifiant le point v). Pour cela, on montre que :

Propriété 3.4.3 - *Pour tout δ strictement positif,*

$$\forall s \in [0,T],\ \|u_\delta(s,.)\|_{L^1(\Omega)} \leq \left(\|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \int_Q |\psi(t,x,0)|dxdt\right) e^{M_\psi\, s},$$

$$\forall l > 0, \forall i \in \{1,..,p\}, \int_Q (\partial_{x_i}\widehat{\phi_{i,\delta}}(T_l(u_\delta)))^2 dxdt \leq l\left(\|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \int_Q |\psi(t,x,0)|dxdt\right) e^{M_\psi\, T},$$

$$\forall l > 0,\ \forall \mu > 0,\ \forall i \in \{1,..,p\}, \frac{1}{\mu}\int_{[l<|u_\delta|<l+\mu]} (\partial_{x_i}\widehat{\phi_{i,\delta}}(u_\delta))^2 dxdt \leq \mathcal{E}(l),$$

où $\mathcal{E}(.)$ est une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}^+$, qui est indépendante de δ et de μ et qui vérifie $\lim_{l\to+\infty} \mathcal{E}(l) = 0$.

Quelques commentaires sur la preuve de la propriété 3.4.3 - On établit les deux premières estimations à partir des techniques développées notamment dans [8] et en tirant profit de la monotonie de l'opérateur de pénalisation pour s'affranchir de la présence du paramètre δ. En ce qui concerne la troisième, on considère une fonction numérique à valeurs réelles $S_{l,\mu}(.)$ telle que $S_{l,\mu}(0) = 0$ et $S'_{l,\mu}(u) = \frac{1}{\mu}(T_{l+\mu}(u) - T_l(u))$. On multiplie l'équation de (3.9) par $S'_{l,\mu}(u_\delta)$ et on intègre sur Q. On remarque que $S'_{l,\mu}(u_\delta)(u_\delta - a)^- \leq 0$ p.p. sur Q. Ainsi, compte tenu de la définition de $S'_{l,\mu}$, on obtient l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\mu} \int\limits_{[l<|u_\delta|<l+\mu]} (\partial_{x_i} \widehat{\phi_{i,\delta}}(u_\delta))^2 dxdt \leq \int\limits_{[|u_0|>l]} |u_0| dx + \int\limits_{[|u_\delta|>l]} |\psi(t,x,0)| dxdt + M_\psi \int\limits_{[|u_\delta|>l]} |u_\delta| dxdt,$$

où on a utilisé la condition de Lipschitz sur ψ. Puisque u_0 est un élément de $L^1(\Omega)$, il est clair que la première intégrale du membre de droite tend vers 0 lorsque l tend vers $+\infty$, uniformément par rapport à δ et μ. En outre, comme la suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ est bornée dans $L^1(Q)$, il existe une constante C telle que, pour tout δ et l positif,

$$\mathcal{L}_{p+1}([|u_\delta| > l]) \leq \frac{C}{l},$$

où $\mathcal{L}_{p+1}$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{p+1}$. Ainsi, on en déduit que la seconde intégrale du membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend aussi vers 0 uniformément par rapport à δ et μ. Enfin, pour le troisième terme, on utilise le fait que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, $(u_\delta)_{\delta>0}$ converge dans $L^1(Q)$ et p.p. sur Q vers une fonction u. D'après le théorème de Vitali, la (sous-)suite $(u_\delta)_{\delta>0}$ est *équi-intégrable* c'est-à-dire :

$$\forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \rho > 0,\ \text{tel que pour tout ensemble } \mathcal{L}_{p+1} - \text{mesurable } A,\ A \subset Q \text{ vérifiant } \mathcal{L}_{p+1}(A) \leq \rho,\ \text{on a}$$
$$\left| \int\limits_A |u_\delta| dxdt \right| \leq \mathcal{E},\ \forall \delta > 0.$$

On se réfère à cette propriété avec $A = [|u_\delta| > l]$, ensemble dont on contrôle la mesure de Lebesgue grâce à l'estimation de $(u_\delta)_{\delta>0}$ dans $L^1(Q)$.

■

Soit η une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, telle que $\eta'(0) = 0$, $|\eta'(u)| \leq K$ et soit $h_{l,\mu}$ la fonction numérique à valeurs réelles définie par $h_{l,\mu}(0) = 0$ et

$$h'_{l,\mu}(u) = \begin{cases} 1, & |u| < l, \\ \frac{l+\mu-|u|}{\mu}, & l < |u| < l+\mu, \\ 0, & |u| > l+\mu. \end{cases}$$

On multiplie l'équation dans (3.9) par $\eta'(u_\delta - k) h'_{l,\mu}(u_\delta)$. On tient compte du fait que

$$\eta'(u_\delta - k) h'_{l,\mu}(u_\delta)(u_\delta - a)^- \leq 0 \text{ p.p. sur } Q \text{ si } k \geq a.$$

On construit ainsi une condition d'entropie - avec des paires entropiques *régularisées* - qui ne dépend plus de l'opérateur de pénalisation et dont le second membre fait surtout apparaître l'étude de la limite - lorsque μ puis δ tend vers 0^+ - du terme issu de la dérivée seconde de $h_{l,\mu}$ au sens des distributions

$$\frac{K}{\delta} \int\limits_{[l\leq|u_\delta|\leq l+\mu]} \sum_{i=1}^{p} (\partial_{x_i} \widehat{\phi_{i,\delta}}(u_\delta))^2 \zeta dxdt,\ \zeta \in \mathcal{D}([0,T[\times\overline{\Omega}),$$

les autres quantités ne présentant pas de difficultés. Ceci amène à considérer la mesure de Radon positive $\mathcal{M}_{l,\delta,\mu}$ définie pour tout borélien $\mathcal{O}$ de $[0,T[\times\overline{\Omega}$ par

$$\mathcal{M}_{l,\delta,\mu}(\mathcal{O}) = \frac{K}{\delta} \mathbb{I}_{\mathcal{O}\cap[l\leq|u_\delta|\leq l+\mu]} \sum_{i=1}^{p} (\partial_{x_i} \widehat{\phi_{i,\delta}}(u_\delta))^2.$$

D'après la troisième estimation de la propriété 3.4.3,

$$\mathcal{M}_{l,\delta,\mu}([0,T[\times\overline{\Omega}) \leq \mathcal{E}(l),$$

où $\mathcal{E}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, qui tend vers 0 lorsque l tend vers $+\infty$, uniformément par rapport à δ et μ. En conséquence, l étant fixé, on est assuré qu'après extractions éventuelles de sous-suites :

$$\begin{array}{rl} \mathcal{M}_{l,\delta,\mu} \rightharpoonup \mathcal{M}_{l,\delta} & \text{faible-}\star \text{ au sens des mesures sur } [0,T[\times\overline{\Omega} \text{ lorsque } \mu \to 0^+, \\ \mathcal{M}_{l,\delta} \rightharpoonup \mathcal{M}_{l} & \text{faible-}\star \text{ au sens des mesures sur } [0,T[\times\overline{\Omega} \text{ lorsque } \delta \to 0^+, \end{array}$$

où $\mathcal{M}_l$ est une mesure de Radon positive vérifiant

$$\mathcal{M}_{l}([0,T[\times\overline{\Omega}) \leq \mathcal{E}(l).$$

Ainsi, on peut passer à la limite en μ, puis en δ dans l'inégalité d'entropie *régularisée* et obtenir les relations du point *iii*) de la définition 3.4.1, *via* le choix d'approximation adéquates des fonctions sgn^+ et sgn^-. Pour clore cette étape, notons que le point *iv*) de la définition 3.4.1 est établi comme dans [9], le contexte de problèmes d'obstacle considéré ici n'ayant pas d'incidence sur le traitement et la formulation des conditions aux limites.

Deuxième étape - On suppose que u_0 est un élément de $L^1(\Omega)$ vérifiant la contrainte d'obstacle. On introduit alors la suite $(u_{0,n})_{n>0}$ de données initiales *tronquées* définie pour tout n strictement positif par :

$$u_{0,n} = T_n(u_0^{\star n}),$$

où $(u_0^{\star n})_{n>0}$ est une suite régularisée construite à partir de u_0 par troncature (du support) et convolution. Ainsi, pour tout n, $u_{0,n}$ est un au moins un élément de $H_0^1(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ qui vérifie la condition d'obstacle. En outre $(u_{0,n})_{n>0}$ converge vers u_0 dans $L^1(\Omega)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour chaque n, on désigne par u_n la solution entropique de (3.8) qui nous est donnée par le théorème 3.4.2. La propriété de dépendance T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega)$ d'une solution entropique par rapport à la donnée intiale garantit que $(u_n)_{n>0}$ est une suite de Cauchy de $L^1(Q)$, qui converge donc vers un élément u de $L^1(Q)$. Par ailleurs, d'après la première étape, pour chaque n strictement positif, u_n est une solution entropique renormalisée de (3.8). On désigne par $\mathcal{M}_{l,n}$ la mesure de renormalisation correspondante. D'après les estimations de la propriété 3.4.3 et les propriétés de convergence de la suite $(u_{n,\delta})_{\delta>0}$ des solutions des problèmes de viscosité pénalisés $(3.9)_{\delta>0}$ pour la donnée initiale $u_{0,n}$, on a

$$\begin{array}{l} \|u_n\|_{L^1(Q)} \leq C_1, \\ \forall l > 0, \forall i \in \{1,..,p\}, \displaystyle\int_Q (\partial_{x_i}\widehat{\phi_{i,\delta}}(T_l(u_\delta)))^2 dxdt \leq lC_2, \\ \mathcal{M}_{l,n}(Q) \leq C_3(l), \end{array}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de l et de n, alors que $C_3(l)$ ne dépend que de l.

A l'aide de ces estimations et de la convergence forte de $(u_n)_{n>0}$ vers u, on peut répéter avec la suite $(u_n)_{n>0}$ les techniques développées dans la première étape avec la suite $(u_\delta)_{\delta>0}$. On conclut donc que :

Théorème 3.4.3 - *Etant donné u_0 dans $L^1(\Omega)$, $u_0 \geq a$, p.p. sur Ω, le problème d'obstacle (3.8) a une solution entropique renormalisée au sens de la défintion 3.4.1. Cette solution est la limite dans $L^1(Q)$ de la suite des problème de viscosité pénalisés* $(3.9)_{\delta>0}$ *lorsque δ tend vers 0^+.*

<u>Article référence de l'auteur</u>

Bendahmane, Mostafa & Lévi, Laurent, Renormalized Entropy Solutions for Anisotropic Degenerate Unilateral Obstacle Problem, article en cours de rédaction.

3.5 Perspectives

Bien-sûr, il restera à mener l'étude du comportement de la suite des solutions des problèmes (3.8) lorsque le terme de diffusion devient négligeable par rapport à ceux de transport et de réaction afin de mettre en relation la formulation entropique renormalisée du problème d'obstacle au second et celle au premier ordre évoquée au sous-paragraphe 2.5.

Par ailleurs, dans le cadre d'opérateurs fortement dégénérés, on veut pourvoir prendre en compte des obstacles dépendants des variables de temps et/ou d'espace. Se pose la question de la formulation entropique du problème car notamment la méthode de l'unicité exposée au sous-paragraphe 3.2.1 ne peut plus être reprise en remplaçant k par $K(t,x)$ comme cela a été fait au premier ordre. Ceci est principalement dû au fait que dans de telles conditions le terme de diffusion dans l'inégalité d'entropie (3.5) dépendrait des variables de temps et/ou d'espace. Il nous semble donc qu'une étude préalable de formulations entropiques pour une certaine classe d'opérateurs paraboliques quasi linéaires anisotropiques est nécessaire en se reportant par exemple aux travaux de G.Q.Chen & K.H.Karsen [20]. Notons que les techniques élaborées pourrait être réinvesties pour l'étude de problèmes d'obstacle issus des mathématiques financières ([41]).

4 Nouvelles thématiques de recherches

4.1 Couplage parabolique-hyperbolique

On s'intéresse au problème du couplage d'une équation quasi linéaire parabolique du second ordre et d'une équation quasi linéaire hyperbolique du premier ordre qui trouve son origine physique notamment lors de l'étude des processus d'infiltration dans un sous-sol stratifié. Une modélisation simplifiée conduit à considérer deux couches de caractéristiques géologiques différentes telles que dans la seconde couche les effets de diffusion peuvent être négligés au regard de ceux de transport. Ce phénomène apparaît aussi en dynamique des fluides pour des écoulements visqueux et compressibles autour d'un profil rigide tels que, au voisinage de ce profil, les effets de viscosité doivent être pris en compte alors qu'à une certaine distance, ils peuvent être négligés. D'autres exemple dans le cas des transferts de chaleur sont mentionnés dans [34].

Ainsi, on cherche une fonction u mesurable et bornée sur telle que formellement :

$$\begin{cases} \partial_t u - Div[\varphi_1(u)\nabla\mathcal{P}] + \psi_1(t,x,u) = 0 \text{ dans } Q_1, \\ \partial_t u - Div[\varphi_2(u)\nabla\mathcal{P}] + \psi_2(t,x,u) = \Delta\phi(u) \text{ dans } Q_2, \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma,\ u(0,.) = u_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec la configuration géométrique $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. De plus, pour i dans $\{1,2\}$, $Q_i =]0,T[\times\Omega_i$. En outre, il faut prendre en compte des conditions adéquates le long de l'interface entre les deux régions Q_1 et Q_2. Lorsque l'on se reporte à l'analyse faite par F.Gastaldi and *al.* dans [34], ces conditions de transmission doivent être formellement écrites sous la forme :

$$-\varphi_1(u)\nabla\mathcal{P}.\nu_1 = (\nabla\phi(u) + \varphi_2(u)\nabla\mathcal{P}).\nu_2 \text{ sur } \Sigma_{12}, \tag{4.2}$$

où $\Sigma_{12} =]0,T[\times\Gamma_{12}$ et $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ et $\Gamma_i = \partial\Omega_i$. Enfin $\mathcal{H}^{p-1}(\overline{\Gamma_{12}} \cap (\overline{\Gamma_i \backslash \Gamma_{12}})) = 0$.

On suppose que la pression $\mathcal{P}(= \mathcal{P}(x))$ est un élément de $W^{1,+\infty}(\overline{\Omega})$ qui vérifie

$$\Gamma_{12} \subset \{\bar\sigma \in \Gamma_1, \nabla\mathcal{P}(\bar\sigma).\nu_1 \leq 0\} \tag{4.3}$$

et que φ_1 est une fonction croissante de sorte que Σ_{12} est incluse dans le lieu des caractéristiques sortantes de la zone hyperbolique Q_1. Ainsi le long de l'interface, les informations "quittent" le domaine hyperbolique et par suite (4.2) suffit à assurer que le problème est bien posé. Cette propriété essentielle nous guide pour établir un résultat d'unicité, en considérant d'abord le comportement d'une solution faible dans Q_1, puis dans Q_2.

Remarque 4.1.1 - *En reprenant une terminologie déjà évoquée au paragraphe 3, nous supposons que l'opérateur du second ordre posé sur Q_2 est faiblement dégénéré. Par ailleurs, dans tout ce paragraphe, V désigne l'espace de Hilbert*

$$V = \{v \in H^1(\Omega_2), v = 0 \ p.p. \ sur \ \Gamma_2\backslash\Gamma_{12}\}.$$

muni de la norme $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_2)^p}$

On s'inspire des travaux de G.Aguilar, F.Lisbona & M.Madaune-Tort dans le cas uni-dimensionnel [1] (et par analogie avec les problèmes fortement dégénérés parabolique-hyperbolique évoqués au paragraphe 3) pour on proposer une formulation faible du problème (4.1)-(4.2) au moyen d'une formulation entropique globale sur tout l'ouvert Q. Ainsi,

Définition 4.1.1 - *Une fonction u est une solution faible de (4.1)-(4.2) si et seulement si*
i) u appartient à $L^\infty(Q)$, $\phi(u)$ à $L^2(0,T;V)$,

ii) $\forall \xi \in \mathcal{D}(Q)$, $\xi \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$,

$$\int_Q |u-k|\partial_t \xi dxdt - \int_{Q_2} \nabla|\phi(u)-\phi(k)|.\nabla\xi dxdt - \int_Q \mathbf{F}(u,k).\nabla\xi dxdt - \int_Q G(u,k)\xi dxdt$$
$$- \int_{\Sigma_{hp}} \{\varphi_1(k)-\varphi_2(k)\}\nabla\mathcal{P}.\nu_1 sgn(\phi(u)-\phi(k))\xi d\mathcal{H}^p \geq 0, \tag{4.4}$$

iii) $\forall \zeta \in L^1(\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12})$, $\zeta \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$

$$ess \lim_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12}} \mathcal{F}_1(u(\sigma+\tau\nu_h), 0, k).\nu_1 \zeta d\mathcal{H}^p \leq 0, \tag{4.5}$$

iv) $ess \lim_{t \to 0^+} \int_\Omega |u(t,x)-u_0(x)|dx = 0,$

où on a posé compte tenu des notations générales du paragraphe 1.4 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(u,k) &= sgn(u-k)\left((\varphi_2(u)-\varphi_2(k))\nabla\mathcal{P}\mathbb{I}_{\Omega_2}(x) + (\varphi_1(u)-\varphi_1(k))\nabla\mathcal{P}\mathbb{I}_{\Omega_1}(x)\right) \\
&\equiv \mathbf{F}_2(u,k)\mathbb{I}_{\Omega_p}(x) + |\varphi_1(u)-\varphi_1(k)|\nabla\mathcal{P}\mathbb{I}_{\Omega_1}(x) \\
G(u,k) &= sgn(u-k)\psi_2(t,x,u)\mathbb{I}_{\Omega_2}(x) + sgn(u-k)\psi_1(t,x,u)\mathbb{I}_{\Omega_1}(x) \\
&\equiv G_2(u,k)\mathbb{I}_{\Omega_p}(x) + G_1(u,k)\mathbb{I}_{\Omega_h}(x) \\
\mathcal{F}_1(a,b,c) &= 1/2\{|\varphi_1(a)-\varphi_1(b)| - |\varphi_1(c)-\varphi_1(b)| + |\varphi_1(a)-\varphi_1(c)|\}\nabla\mathcal{P}.
\end{aligned}$$

4.1.1 La propriété d'unicité

La démonstration s'effectue en deux étapes. On déduit d'abord de la définition 4.1.1 que toute solution faible vérifie une inégalité d'entropie dans la zone d'hyperbolicité Q_1 :

Lemme 4.1.1 - *Soit u une fonction bornée sur Q vérifiant (4.4) et (4.5). Alors, pour tout réel k et toute fonction φ de $\mathcal{D}(]0,T[\times\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$,*

$$\begin{aligned}
&- \int_{Q_1} \left(|u-k|\partial_t\varphi - |\varphi_1(u)-\varphi_1(k)|\nabla\mathcal{P}.\nabla\varphi - G_1(u,k)\varphi\right) dxdt \\
&\leq \int_{\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12}} |\varphi_1(k)-\varphi_1(0)|\nabla\mathcal{P}.\nu_1\varphi(\sigma)d\mathcal{H}^p - ess\lim_{\tau\to 0^-} \int_{\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12}} |\varphi_1(u(\sigma+\tau\nu_h)) - \varphi_1(0)|\nabla\mathcal{P}.\nu_1\varphi(\sigma)d\mathcal{H}^p \\
&+ ess\lim_{\tau\to 0^-} \int_{\Sigma_{12}} |\varphi_1(u(\sigma+\tau\nu_h)) - \varphi_1(k)|\nabla\mathcal{P}.\nu_1\varphi(\sigma)d\mathcal{H}^p \\
&\leq \int_{\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12}} |\varphi_1(k)-\varphi_1(0)|\nabla\mathcal{P}.\nu_1\varphi(\sigma)d\mathcal{H}^p - ess\lim_{\tau\to 0^-} \int_{\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12}} |\varphi_1(u(\sigma+\tau\nu_h)) - \varphi_1(0)|\nabla\mathcal{P}.\nu_1\varphi(\sigma)d\mathcal{H}^p,
\end{aligned}$$

cette dernière inégalité résultant de (4.3).

Dès lors on peut utiliser la méthode de dédoublement des variables et les propriétés des suites régularisantes sur le bord pour établir le résultat de dépendance T-lipschitzienne dans $L^1(\Omega_1)$ suivant :

Théorème 4.1.1 - *Soient u et v deux solutions faibles de (4.1) associées aux données initiales u_0 et v_0 respectivement, alors*

$$\text{pour presque tout } t \text{ de }]0,T[, \int_{\Omega_1} |u(t,.) - v(t,.)|dx \leq e^{M_{\psi_1} t} \int_{\Omega_1} |u_0 - v_0|dx.$$

Sur la zone de parabolicité Q_2, la solution faible de (4.1) est caractérisée par une égalité variationnelle incluant un terme de convection correspondant aux données provenant de la zone hyperbolique :

Propriété 4.1.1 - *Soit u une fonction bornée sur Q telle que $\nabla\phi(u)$ soit élément de $L^2(Q_2)^p$ et vérifiant (4.4). Alors $\partial_t u$ appartient à $L^2(0,T;V')$. De plus, pour toute fonction ξ de $L^2(0,T;V)$,*

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \xi \rangle_{V',V} dt + \int_{Q_2} \nabla\phi(u).\nabla\xi dxdt + \int_{Q_2} \varphi_2(u)\nabla\mathcal{P}.\nabla\xi dxdt + \int_{Q_2} \psi_2(t,x,u)\xi dxdt$$
$$+ess \lim_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_{12}} \varphi_1(u(\sigma + \tau\nu_1))\nabla\mathcal{P}.\nu_1 \xi d\mathcal{H}^p = 0.$$

A partir de l'égalité variationnelle précédente, on établit un résultat de comparaison dans $L^1(\Omega_2)$ entre deux solutions faibles u et v de (4.1) ayant même données initiales sur Ω_1. En effet, selon le théorème 4.1.1, on sait alors que $u = v$ p.p. sur Ω_1, de sorte que la contribution des termes à l'interface est nulle. Par ailleurs, le peu de régularité de la dérivée partielle par rapport à t d'une solution faible de (4.1) nous conduit à utiliser une méthode de dédoublement de la variable t uniquement, dans le même esprit (et pour les mêmes raisons) qu'au théorème 3.1.3, paragraphe 3.1.2. Cette technique nous conduit à utiliser une "formule d'intégration par parties de Mignot-Bamberger" (voir [32] ou le lemme 3.1.1) pour transformer les termes dans lesquels apparaissent le crochet $\langle .,. \rangle_{V',V}$ et à faire une hypothèse supplémentaire - de type höldérien - sur le comportement local de $\varphi_2 \circ \phi^{-1}$ nous permettant d'étudier les termes de transport. Ainsi :

Théorème 4.1.2 - *Soient u et v deux solutions faibles de (4.1) correspondant aux données initiales u_0 et v_0 telles que $u_0 = v_0$ p.p. sur Ω_1. On suppose qu'il existe un réel θ dans $[1/2, +\infty[$ et une constante $\mathcal{C}$ tels que :*

$$\forall (x,y) \in [\phi(-M), \phi(M)]^2, |(\varphi_2 \circ \phi^{-1})(x) - (\varphi_2 \circ \phi^{-1})(y)| \leq \mathcal{C}|x-y|^\theta.$$

Alors, pour presque tout t de $[0,T]$,

$$\int_{\Omega_2} |u(t,.) - v(t,.)|dx \leq e^{M_{\psi_2} t} \int_{\Omega_2} |u_0 - v_0|dx.$$

4.1.2 Résultats d'existence

On utilise une méthode de viscosité artificielle qui consiste ici à considérer, pour tout ϵ strictement positif, le problème régularisé formellement décrit par :
Touver une fonction mesurable et bornée u_ϵ sur Q telle que

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon - Div[\varphi_1(u_\epsilon)\nabla\mathcal{P}] + \psi_1(t,x,u_\epsilon) = \epsilon\Delta\phi_\epsilon(u_\epsilon) \text{ dans } Q_1, \\ \partial_t u_\epsilon - Div[\varphi_2(u_\epsilon)\nabla\mathcal{P}] + \psi_2(t,x,u_\epsilon) = \Delta\phi_\epsilon(u_\epsilon) \text{ dans } Q_2, \\ u_\epsilon = 0 \text{ sur } \Sigma, \ u_\epsilon(0,.) = u_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

et pour avoir un problème bien posé, on exprime les conditions de transmission à l'interface :

$$\begin{aligned} -(\epsilon\nabla\phi_\epsilon(u_\epsilon) + \varphi_1(u_\epsilon)\nabla\mathcal{P}).\nu_1 = (\nabla\phi_\epsilon(u_\epsilon) + \varphi_2(u_\epsilon)\nabla\mathcal{P}).\nu_2 \text{ sur } \Sigma_{12}, \\ u_{\epsilon|Q_1} = u_{\epsilon|Q_2} \text{ sur } \Sigma_{12}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Du fait de la discontinuité (par rapport à x) du terme de diffusion, il faut d'abord s'assurer que (4.6)-(4.7) a une solution faible. Ce résultat est obtenu par utilisation du théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff. Pour cela, afin de garantir que les solutions faibles considérées sont des éléments de $L^\infty(Q)$ il est nécessaire de supposer que soit satisfaite la condition de compatibilité suivante, pour tout t de $[0,T]$:

$$\varphi_2(-M(t)) \leq \varphi_1(-M(t)) \text{ et } \varphi_1(M(t)) \leq \varphi_2(M(t)), \tag{4.8}$$

où la constante $M(t)$ s'apparente à celle donnée en introduction, au paragraphe 1.2. La propriété d'unicité repose sur une méthode de changement d'espace pivot (méthode de dualité de Holmgren). Cette technique nous permet aussi d'obtenir un résultat de régularité local dans $L^2(Q)$ pour la dérivée partielle en temps de toute solution faible.

Propriété 4.1.2 - *Le problème (4.6)-(4.7) admet une unique solution faible u_ϵ élément de $W(0,T,V,V') \cap L^\infty(Q)$ telle que $\sqrt{t}\partial_t u_\epsilon$ appartient à $L^2(Q)$, $u_\epsilon(0,.) = u_0$ p.p. dans Ω et vérifiant pour tout v de $H_0^1(\Omega)$ et pour presque tout t de $]0,T[$:*

$$\langle \partial_t u_\epsilon, v\rangle_{V',V} + \int_\Omega (\lambda_\epsilon(x)\nabla\phi_\epsilon(u_\epsilon).\nabla v + \varphi(x,u_\epsilon)\nabla\mathcal{P}.\nabla v + \psi(t,x,u_\epsilon)v)\,dx = 0,$$

où $\varphi = \varphi_1\mathbb{I}_{\Omega_1} + \varphi_2\mathbb{I}_{\Omega_2}$, $\lambda_\epsilon = \epsilon\mathbb{I}_{\Omega_1} + \mathbb{I}_{\Omega_2}$, $\psi = \psi_1\mathbb{I}_{\Omega_1} + \psi_2\mathbb{I}_{\Omega_2}$.

Dans un deuxième temps, on dégage des estimations *a priori* propres à décrire le comportement de la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0^+.

Propriété 4.1.3
i) $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une suite bornée de $L^\infty(Q)$,
ii)$((\lambda_\epsilon)^{1/2}\nabla\phi_\epsilon(u_\epsilon))_{\epsilon>0}$ est une suite bornée de $L^2(Q)^p$
iii) $(\partial_t u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une suite bornée de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Le manque d'informations sur la zone de parabolicité nous conduit d'abord à examiner la situation pour laquelle ϕ^{-1} est hölderienne d'exposant θ dans $]0,1[$. Dans ces conditions, on reprend un raisonnement mené dans [32], chapitre 2, en argumentant que la suite $(\phi_\epsilon(u_\epsilon))_{\epsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T;V)$ et que pour tout s de $]0,1[$,

$$L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1(\Omega_p)) \hookrightarrow L^2(0,T;W^{s,2}(\Omega_p)).$$

Ainsi $u_\epsilon \equiv \phi_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon(u_\epsilon))$ est uniformément bornée dans $L^{2/\theta}(0,T;W^{\theta\, s,2/\theta}(\Omega_2))$. La compacité de l'injection de $W^{\theta\, s,2/\theta}(\Omega_2)$ dans $L^{2/\theta}(\Omega_2)$ et le théorème de compacité de J.L.Lions ([44], p. 57) assurent que $\mathcal{W} \equiv \{v \in L^{2/\theta}(0,T;W^{\theta\, s,2/\theta}(\Omega_2));\ \partial_t v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_2))\}$ est inclus dans $L^{2/\theta}(0,T;L^{2/\theta}(\Omega_2))$, injection étant compacte. On obtient finalement une propriété de convergence forte dans $L^q(Q_2)$ pour tout q de $[1,+\infty[$. Dans la zone d'hyperbolicité, on passe à la limite dans $L^\infty(Q_1)$ faible-$\star$ et à l'aide des affirmations 2.2.1 et 2.2.2, c'est à dire en utilisant la notion de processus entropique et avec les arguments évoqués au paragraphe 3.3, pour montrer le théorème 3.3.2. Compte tenu du résultat d'unicité préalablement établi au paragraphe 4.1.1, on peut affirmer que :

Théorème 4.1.3 - *Si ϕ^{-1} est hölderienne d'exposant θ dans $]0,1[$, le problème (4.1)-(4.2) a une unique solution u qui est la limite dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$ de (toute) la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des problèmes de viscosité (4.6)-(4.7)$_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0^+.*

On relaxe la condition de Hölder sur ϕ^{-1} en cherchant une estimation des quotients différentiels en temps dans $L^1(\Omega_2)$ d'une solution u_ϵ, associée une donnée initiale "suffisamment" régulière. La technique mise en oeuvre permet en fait d'obtenir une estimation globale dans $L^1(\Omega)$ de ces quotients. Dès lors on est assuré que la suite $(\partial_t u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. En conséquence et compte tenu de la propriété 4.1.3, $(\phi(u_\epsilon))_{\epsilon>0}$ est bornée dans $W^{1,1}(Q_2)$. L'injection compacte de cet espace dans $L^1(Q_2)$ et la continuité de ϕ^{-1} montre que l'on peut passer à la limite lorsque ϵ tend vers 0^+, dans $L^q(Q_2)$, $1 \leq q < +\infty$, pour la zone de parabolicité et dans $L^\infty(Q_1)$ faible-$\star$ pour la zone d'hyperbolicité, comme précédemment. D'où :

Théorème 4.1.4 - *Si u_0 est un élément de $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $\Delta\phi(u_0)$ et Δu_0 appartiennent à $\mathcal{M}_b(\Omega)$, alors le problème (4.1)-(4.2) a une unique solution faible dans $BV(0,T;L^1(\Omega))$ qui est la limite dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$ de (toute) la suite des solutions des problèmes (4.6)-(4.7)$_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0^+.*

On peut se placer dans les conditions du théorème ci-dessus par régularisation de la donnée initiale en opérant de la façon suivante : partir de problèmes de type elliptique sur chaque ouvert Ω_1 et Ω_2, on construit deux suites $(w_1^\epsilon)_{\epsilon>0}$ et $(w_2^{\epsilon,\varrho})_{\varrho>0,\epsilon>0}$ qui convergent respectivement vers $u_{0_{|\Omega_1}}$ dans $L^1(\Omega_1)$ lorsque ϵ tend vers 0^+ et vers $u_{0_{|\Omega_2}}$ dans $L^1(\Omega_2)$ lorsque ϵ puis ϱ tend vers 0^+. On pose alors pour tout ϱ et ϵ,

$$u_0^{\epsilon,\varrho} = w_2^{\epsilon,\varrho}\mathbb{I}_{\Omega_2} + w_1^\epsilon \mathbb{I}_{\Omega_1},$$

de sorte que $u_0^{\epsilon,\varrho}$ appartient à $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Ainsi, en notant $u_{\epsilon,\varrho}$ la solution faible de (4.6)-(4.7) associée à la donnée initiale $u_0^{\epsilon,\varrho}$, on montre que si $u_{0_{|\Omega_1}}$ appartient à $BV(\Omega_1)$ alors $(\partial_t u_{\epsilon,\varrho})_{\epsilon>0}$ est une suite bornée de $L^1(Q)$ uniformément par rapport à ϵ (mais pas par rapport à ϱ).

Par passage à la limite en ϵ avec les arguments développés au théorème 4.1.4, on établit l'existence d'une fonction u_ϱ solution de (4.1)-(4.2) associée à la donnée initiale $u_0^\varrho = w_2^\varrho \mathbb{I}_{\Omega_2} + w_1 \mathbb{I}_{\Omega_1}$ et telle que $(u_\varrho)_{\varrho>0}$ et $(\nabla\phi(u_\varrho))_{\varrho>0}$ sont respectivement des suites bornées dans $L^\infty(Q)$ et dans $L^2(Q_2)^p$. En outre, compte tenu des résultats obtenus aux théorèmes 4.1.3 et 4.1.4, $(u_\varrho)_{\varrho>0}$ est une suite de Cauchy dans $L^1(Q)$, ce qui permet de faire tendre ϱ vers 0^+. Finalement,

Théorème 4.1.5 - *Si $u_{0_{|\Omega_1}}$ appartient à $BV(\Omega_1)$, le problème (4.1)-(4.2) a une solution faible unique.*

<u>Article référence de l'auteur</u>

G. Aguilar, L. Lévi and M. Madaune-Tort, Coupling of Multidimensional Parabolic and Hyperbolic Equations *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, **3**, No. 1, (2006) 53-80.

4.2 Application au problème de l'obstacle

On réinvestit certaines techniques développées au paragraphe 4.1 lorsque la solution du problème (4.1)-(4.2) est assujettie à vérifier une contrainte d'obstacle que nous supposerons bilatéral, les arguments avancés pouvant être repris dans le cas d'une contrainte unilatérale (inférieure ou supérieure).

Pour simplifier les notations, on pose :

$$\mathcal{T}_1(u) = \partial_t u - Div[\boldsymbol{\varphi}(u)\nabla\mathcal{P}] + \psi_1(t,x,u),$$
$$\mathcal{T}_2(u) = \partial_t u - \Delta\phi(u) - Div[\boldsymbol{\varphi}(u)\nabla\mathcal{P}] + \psi_2(t,x,u).$$

On remarquera que dans cette première étude, le terme de flux ne présente pas de discontinuités le long de l'interface. Ainsi, le problème en mains consiste à :
Trouver une fonction u mesurable et bornée sur Q telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq b \text{ p.p. sur } Q, \\ \text{pour } i \text{ dans } \{1,2\}, \mathcal{T}_i(u) = 0 \text{ sur } Q_i \cap [0 < u < b], \\ \mathcal{T}_i(u) \leq 0 \text{ sur } Q_i \cap [0 < u = b], \mathcal{T}_i(u) \geq 0 \text{ sur } Q_i \cap [0 = u < b], \\ u = 0 \text{ sur }]0, T[\times \Gamma, \ u(0,.) = u_0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right. \tag{4.9}$$

compte tenu des conditions de transmission à l'interface

$$\nabla \phi(u).\nu_2 = 0 \text{ sur } \Sigma_{12} \cap [0 < u < b], \tag{4.10}$$

la *configuration géométrique* étant celle du paragraphe précédant, l'hypothèse (4.3) étant supposée satisfaite.

En se reportant à la définition 4.1.1 du paragraphe 4.1 et aux études des problèmes d'obstacle menées aux paragraphes 2 et 3, on propose la définition suivante :

Définition 4.2.1 - *Une fonction u est une solution faible de (4.9)-(4.10) si et seulement si*
i) u appartient à $L^\infty(Q)$, $0 \leq u \leq b$ p.p. sur Q, $\phi(u)$ est un élément de $L^2(0,T;V)$,

ii) $\forall \xi \in \mathcal{D}(Q)$, $\xi \geq 0$, $\forall k \in [0,1]$,

$$\int_Q |u - kb| \partial_t \xi dxdt - \int_{Q_2} \nabla |\phi(u) - \phi(kb)|.\nabla \xi dxdt - \int_Q \mathbf{F}(u, kb).\nabla \xi dxdt - \int_Q G(u, kb) \xi dxdt$$
$$+ \int_{Q_2} \Delta \phi(kb) sgn(u - kb) \xi dxdt + \int_{\Sigma_{12}} \nabla \phi(kb).\nu_1 sgn(\phi(u) - \phi(kb)) \xi d\mathcal{H}^p \geq 0, \tag{4.11}$$

iii) $\forall \zeta \in L^1(\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12})$, $\zeta \geq 0$, $\forall k \in [0,1]$,

$$ess \lim_{\tau \to 0^-} \int_{\Sigma_1 \backslash \Sigma_{12}} \mathcal{F}_1(u(\sigma + \tau \nu_h), 0, kb).\nu_1 \zeta d\mathcal{H}^p \leq 0,$$

iv) $ess \lim_{t \to 0^+} \int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)| dx = 0$,
avec les notations générales introduites au paragraphe 1.4.

L'obstacle supérieur b ne dépend que de la variable x et est tel que $b_{|\Omega_i}$ appartient à $W^{1,+\infty}(\Omega_i)$, $i \in \{1,2\}$. De plus $b_{|\Omega_2}$ est un élément de $W^{2,1}(\Omega_2)$. Par ailleurs on suppose ϕ' est lipschitzienne sur $[0, \|b\|_{L^\infty(\Omega)}]$, ce qui permet de donner un sens à la deuxième ligne de (4.11). En outre, u_0 appartient à $L^\infty(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ et bien-sûr vérifie la condition d'obstacle.

4.2.1 La propriété d'unicité

L'unicité d'une solution faible s'obtient, comme au paragraphe précédent, en raisonnant sur la zone d'hyperbolicité Q_1 puis sur la zone de parabolicité Q_2. Sur Q_1, la démonstration est similaire à celle développée au sous-paragraphe 4.1.1. D'ailleurs on a une inégalité d'entropie identique à celle formulée au lemme 4.1.1 avec kb à la place de k. Dès lors, par une technique de dédoublement des variables (k étant choisi comme pour la preuve du théorème 2.1.1 au paragraphe 1.2) et en ne tenant compte des conditions aux limites que sur la frontière extérieure $\Gamma \backslash \Gamma_{12}$ de Ω_1, on établit le même résultat que celui exposé au théorème 4.1.1.

Sur Q_2, on dispose de la propriété suivante (analogue à la propriété 4.1.1) :

Propriété 4.2.1 *Soit u une fonction mesurable et bornée sur Q telle que $\nabla\phi(u)$ appartienne à $L^2(Q_2)^p$ et vérifiant (4.11). Alors $\partial_t u$ est un élément de $L^2(0,T;V')$. De plus, pour toute fonction mesurable v sur Q_2, telle que p.p.t. t de $]0,T[$, $0 \leq v(t,.) \leq b$ p.p. sur Ω_2 avec $\phi(v) \in L^2(0,T;V)$,*

$$\int_0^T \langle \partial_t u, \phi(v) - \phi(u)\rangle_{V',V} dt + \int_{Q_2} (\nabla\phi(u) + \varphi(u)\nabla\mathcal{P}) . \nabla(\phi(v) - \phi(u)) dxdt$$

$$+ \int_{Q_2} \psi_2(t,x,u)(\phi(v) - \phi(u))dxdt + ess \lim_{\tau\to 0^-} \int_{\Sigma_{12}} \varphi(u(\sigma + \tau\nu_1))\nabla\mathcal{P}.\nu_1(\phi(v) - \phi(u))d\mathcal{H}^p \geq 0. \quad (4.12)$$

Principaux ingrédients de la preuve - Tout d'abord dans (4.11), on choisit $k = 1$ de sorte qu'en notant $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \mathbb{I}_{\Omega_1} + \mathcal{T}_2 \mathbb{I}_{\Omega_2}$, $\psi = \psi_1 \mathbb{I}_{\Omega_1} + \psi_2 \mathbb{I}_{\Omega_2}$, on a pour toute fonction ζ de $\mathcal{D}(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\zeta \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_Q u\partial_t\zeta dxdt \quad &\leq \int_{Q_2} \nabla\phi(u).\nabla\zeta dxdt + \int_Q \varphi(u)\nabla\mathcal{P}.\nabla\zeta dxdt + \int_Q \psi(t,x,u)\zeta dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_{12}} \nabla\phi(b).\nu_1(1 + sgn(\phi(u) - \phi(b)))\zeta d\mathcal{H}^p \\
&- \int_Q (1 + sgn(u - b))\mathcal{T}(b)\zeta dxdt. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Par ailleurs dans (4.11) pour $k = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_Q u\partial_t\zeta dxdt \quad &\geq \int_{Q_2} \nabla\phi(u).\nabla\zeta dxdt + \int_Q \varphi(u)\nabla\mathcal{P}.\nabla\zeta dxdt + \int_Q \psi(t,x,u)\zeta dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_{12}} \nabla\phi(0).\nu_1(1 - sgn(\phi(u))\zeta d\mathcal{H}^p \\
&- \int_Q (1 - sgn(u))\mathcal{T}(0)\zeta dxdt. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

En raisonnant comme dans le cas du problème sans contrainte au paragraphe précédent, on prend en compte les données provenant de la zone d'hyperbolicité en établissant, à partir des inégalités ci-dessus, que pour toute fonction ζ de $\mathcal{D}(0,T;V)$, $\zeta \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_Q u\partial_t\zeta dxdt \quad &\leq \int_{Q_2} \nabla\phi(u).\nabla\zeta dxdt + \int_Q \varphi(u)\nabla\mathcal{P}.\nabla\zeta dxdt + \int_Q \psi(t,x,u)\zeta dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_{12}} \nabla\phi(b).\nu_1(1 + sgn(\phi(u) - \phi(b)))\zeta d\mathcal{H}^p \\
&- \int_Q (1 + sgn(u - b))\mathcal{T}(b)\zeta dxdt + ess \lim_{\tau\to 0^-} \int_{\Sigma_{12}} \varphi(u(\sigma + \tau\nu_1))\zeta\nabla\mathcal{P}.\nu_1 d\mathcal{H}^p,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_Q u\partial_t\zeta dxdt &\geq \int_{Q_2} \nabla\phi(u).\nabla\zeta dxdt + \int_Q \varphi(u)\nabla\mathcal{P}.\nabla\zeta dxdt + \int_Q \psi(t,x,u)\zeta dxdt \\
&+ \int_{\Sigma_{12}} \nabla\phi(0).\nu_1(1 - sgn(\phi(u))\zeta d\mathcal{H}^p \\
&- \int_Q (1 - sgn(u))\mathcal{T}(0)\zeta dxdt + ess\lim_{\tau\to 0^-}\int_{\Sigma_{12}} \varphi(u(\sigma+\tau\nu_1))\zeta\nabla\mathcal{P}.\nu_1 d\mathcal{H}^p.
\end{aligned}$$

D'une part, on en déduit que $\partial_t u$ est un élément de $L^2(0,T;V')$ ce qui permet "d'intégrer par parties" le terme d'évolution de sorte que les inégalités ci-dessus restent vérifiées pour toute fonction ζ de $L^2(0,T;V)$, $\zeta \geq 0$. On obtient l'inéquation variationnelle (4.12) en choisissant $\zeta = (\phi(v) - \phi(u))^+$ et $\zeta = (\phi(v) - \phi(u))^-$ respectivement dans les deux inégalités obtenues, la fonction v étant choisie comme dans l'énoncé de la propriété 4.2.1. Ainsi $(1 + sgn(u - b))(\phi(v) - \phi(u))^+ = 0$ et $(1 - sgn(u))(\phi(v) - \phi(u))^- = 0$ p.p. sur Q_2 et $\mathcal{H}^p$-p.p. sur Σ_{12}. Par addition, on montre le résultat souhaité.

■

Dès lors, en utilisant une méthode de dédoublement de la variable t uniquement et en faisant la même hypothèse sur le comportement local de $\varphi_2 \circ \phi^{-1}$ que celle du théorème 4.1.2 on établit que :

Théorème 4.2.1 - *Soient u et v deux solutions faibles de (4.9) correspondant aux données initiales u_0 et v_0 telles que $u_0 = v_0$ p.p. sur Ω_1. On suppose qu'il existe un réel θ dans $]1/2, +\infty[$ et une constante $\mathcal{C}$ tels que :*

$$\forall(x,y) \in [0, \phi(\|b\|_{L^\infty(\Omega)})]^2, |(\varphi_2 \circ \phi^{-1})(x) - (\varphi_2 \circ \phi^{-1})(y)| \leq \mathcal{C}|x - y|^\theta.$$

Alors, pour presque tout t de $[0,T]$,

$$\int_{\Omega_2} |u(t,.) - v(t,.)|dx \leq e^{M_{\psi_2} t}\int_{\Omega_2} |u_0 - v_0|dx.$$

Remarque 4.2.1

• *Pour établir le théorème 4.2.1, on choisit dans (4.12) écrite en variables (t,x) pour une solution faible u_1, la fonction-test*

$$v_1(t,x) = \phi^{-1}(\phi(u_1)(t,x) - \frac{\lambda\alpha_\mu}{\|\alpha_\mu\|_\infty} sgn_\lambda(\phi(u_1)(t,x) - \phi(u_2)(\tilde{t},x))),$$

et dans (4.12) écrite en variables $(\tilde{t},x)$ pour une solution faible u_2, la fonction-test

$$v_2(\tilde{t},x) = \phi^{-1}(\phi(u_2)(\tilde{t},x) + \frac{\lambda\alpha_\mu}{\|\alpha_\mu\|_\infty} sgn_\lambda(\phi(u_1)(t,x) - \phi(u_2)(\tilde{t},x)).$$

Pour tout μ strictement positif, $\alpha_\mu(t,\tilde{t}) = \gamma\left(\frac{t+\tilde{t}}{2}\right)\rho_\mu\left(\frac{t-\tilde{t}}{2}\right)$, où γ est un élément de $\mathcal{D}(]0,T[)$, $\gamma \geq 0$, et μ est suffisamment petit pour que α_μ appartienne à $\mathcal{D}(]0,T[\times]0,T[)$, $\alpha_\mu \geq 0$.

• *Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t,x)$ le résultat d'unicité du théorème 4.2.1 reste valable à condition que l'on suppose que $\varphi_2 \circ \phi^{-1}$ est lipschitzienne sur $[0, \phi(\|b\|_{L^\infty(\Omega)})]$.*

4.2.2 Résultat d'existence

On régularise le terme de diffusion par l'ajout d'un coefficient de viscosité discontinu par rapport à la variable x afin de rendre compte de la modélisation physique considérée. Ceci nous amène donc à introduire, pour tout ϵ strictement positif

$$\mathcal{T}_{\epsilon,1}(u) = \partial_t u - \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}(\epsilon\partial_{x_i}\phi(u) + \varphi(u)\partial_{x_i}\mathcal{P}) + \psi_1(t,x,u),$$

et à considérer le problème à frontières libres :
Trouver une fonction mesurable et bornée u_ϵ telle que

$$\begin{cases} 0 \leq u_\epsilon \leq b \text{ p.p. sur } Q, \\ \mathcal{T}_2(u_\epsilon) = 0 \text{ sur } Q_2 \cap [0 < u_\epsilon < b], \mathcal{T}_{\epsilon,1}(u_\epsilon) = 0 \text{ on } Q_h \cap [0 < u_\epsilon < b], \\ \mathcal{T}_{\epsilon,1}(u_\epsilon) \leq 0 \text{ sur } Q_1 \cap [0 < u_\epsilon = b], \mathcal{T}_{\epsilon,1}(u_\epsilon) \geq 0 \text{ sur } Q_1 \cap [0 = u_\epsilon < b], \\ \mathcal{T}_2(u_\epsilon) \leq 0 \text{ sur } Q_2 \cap [0 < u_\epsilon = b], \mathcal{T}_2(u_\epsilon) \geq 0 \text{ sur } Q_2 \cap [0 = u_\epsilon < b], \\ u_\epsilon = 0 \text{ sur } \Sigma,\ u_\epsilon(0,.) = u_0 \text{ sur } \Omega, \end{cases} \tag{4.15}$$

et pour avoir un problème bien posé, on doit tenir compte des conditions de transmission à l'interface :

$$\begin{aligned} -\epsilon \nabla\phi(u_\epsilon).\nu_1 = \nabla\phi(u_\epsilon).\nu_2 \text{ sur } \Sigma_{12} \cap [0 < u_\epsilon < b], \\ u_{\epsilon|Q_1} = u_{\epsilon|Q_2} \text{ sur } \Sigma_{12}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On obtient un résultat d'existence pour (4.15)-(4.16) en utilisant une méthode de viscosité artificielle (on rappelle que ϕ' peut s'annuler) et en relaxant la contrainte bilatérale par pénalisation. De sorte que l'on établit d'abord que

Théorème 4.2.2 *Le problème (4.15) -(4.16) a une solution faible unique u_ϵ telle que*

$$\forall t \in]0,T[, 0 \leq u_\epsilon(t,.) \leq b \text{ p.p. dans } \Omega,\ \phi(u_\epsilon) \in W(0,T,H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)), \\ u_\epsilon(0,.) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et pour toute fonction mesurable v sur Q telle que $\phi(v) \in W(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$, $\phi(v)(T,.) = \phi(u_\epsilon)(T,.)$ p.p. dans Ω, vérifiant pour tout t de $[0,T]$, $0 \leq v(t,.) \leq b$ p.p. dans Ω,

$$\int_Q \partial_t\phi(v)(\phi(v) - \phi(u_\epsilon))dxdt + \int_Q \lambda_\epsilon(x)\nabla\phi(u_\epsilon).\nabla(\phi(v) - \phi(u_\epsilon))dxdt \\ + \int_Q \varphi(u_\epsilon)\nabla\mathcal{P}.\nabla(\phi(v) - \phi(u_\epsilon))dxdt + \int_Q \psi(t,x,u_\epsilon)(\phi(v) - \phi(u_\epsilon))dxdt \\ - \int_Q (u_\epsilon - \phi(v))\partial_t(\phi(v) - \phi(u_\epsilon))dxdt + \int_\Omega (u_0 - \phi(v)(0,.))(\phi(u_0) - \phi(v)(0,.))dx \geq 0,$$

où $\lambda_\epsilon = \epsilon\mathbb{I}_{\Omega_1} + \mathbb{I}_{\Omega_2}$.

Remarque 4.2.2
• *On remarquera que cette fomulation est celle donnée au théorème 3.1.3. Ainsi, compte tenu de la termonologie adoptée au sous-paragraphe 3.1, la fonction u_ϵ est caractérisée par une "formulation variationnelle faible".*
• *L'unicité de u_ϵ est obtenue par une méthode de dédoublement d la variable t uniquement. Pour transformer le terme d'évolution, on utilise la formule d'intégration (de type "Mignot-Bamberger") du lemme 3.1.1. Pour étudier les termes de convection, on a besoin de l'hypothèse de comportement local de $\varphi \circ \phi^{-1}$ faite au théorème 4.2.1.*

En outre, on dispose des estimations *a priori* suivantes (analogues à celles de la propriété 4.1.3) :

Propriété 4.2.2 - *Il existe deux constantes C_1 et C_2 indépendantes de ϵ telles que,*

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq C_1, \\ \epsilon^{1/2}\|\nabla\phi(u_\epsilon)\|_{L^2(Q_1)^n} + \|\nabla\phi(u_\epsilon)\|_{L^2(Q_2)^p} \leq C_2.$$

De plus,

$$\text{si } b_{|\Omega_1} \text{ appartient à } H^2(\Omega_1) \text{ alors } \|\partial_t u_\epsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C_3,$$

où C_3 est une constante indépendante de ϵ.

Quelques commentaire sur la troisième estimation - En revenant au problème de viscosité pénalisé on montre, par passage à la limite, que u_ϵ vérifie une inégalité d'entropie à partir de laquelle, pour les choix $k = 1$ et $k = 0$ on obtient des inégalités de type (4.13) et (4.14) qui nous permettent de conclure.

■

Finalement, de la même manière qu'au théorème 4.1.3, on peut énoncer que :

Théorème 4.2.3

Si ϕ^{-1} est hölderienne d'exposant θ dans $]0,1[$,
et si $(\varphi \circ \phi^{-1})'$ est continue sur $[0, \phi(\|b\|_{L^\infty(\Omega)})]$,

le problème (4.9)-(4.10) a une unique solution u qui est la limite dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$ de (toute) la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des problèmes de viscosité (4.15)-(4.16)$_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0^+.

Quelques commentaires - La condition de Hölder concernant ϕ^{-1} est utilisée pour obtenir des propriétés de convergence de la suite $(u_{\epsilon|Q_2})_{\epsilon>0}$. Dans la zone d'hyperbolicité, on passe à la limite dans $L^\infty(Q_1)$ faible-$\star$ à l'aide des affirmations 2.2.1 et 2.2.2, c'est à dire en utilisant la notion de processus entropique. En ce qui concerne la seconde hypothèse, elle provient de l'étude du passage à la limite lorsque ϵ tend vers 0^+ dans le terme de flux pour obtenir l'inégalité d'entropie (4.11). En effet, on est amené à considérer l'intégrale :

$$I_{\epsilon,\lambda} = \int_{Q_1} \varphi(u_\epsilon) sgn'_\lambda(\phi(u_\epsilon) - \phi(kb)) \nabla(\phi(u_\epsilon) - \phi(kb)).\nabla \mathcal{P} \zeta dxdt,$$

où k est un réel de $[0,1]$ et ζ une fonction de $\mathcal{D}(Q)$, $\zeta \geq 0$. Pour cela on introduit

$$H_\lambda(v,w) = \int_w^v (\varphi \circ \phi^{-1})(\tau) sgn'_\lambda(\tau - w) d\tau,$$

de sorte qu'après une intégration par parties par rapport à τ,

$$I_{\epsilon,\lambda} = \int_{Q_1} \nabla(H_\lambda(\phi(u_\epsilon), \phi(kb))).\nabla \mathcal{P} \zeta dxdt - \int_{Q_1} \left(\int_{\phi(kb)}^{\phi(u_\epsilon)} (\varphi \circ \phi^{-1})'(\tau) sgn'_\lambda(\tau - \phi(kb)) d\tau \right) \nabla \phi(kb).\nabla \mathcal{P} \zeta dxdt.$$

Grâce à la formule de Gauss-Green,

$$\begin{aligned} I_{\epsilon,\lambda} &= -\int_{Q_1} H_\lambda(\phi(u_\epsilon), \phi(kb))(\zeta \Delta \mathcal{P} + \nabla \zeta.\nabla \mathcal{P}) dxdt + \int_{\Sigma_{12}} H_\lambda(\phi(u_\epsilon), \phi(kb)) \nabla \mathcal{P}.\nu_1 \zeta d\mathcal{H}^p \\ &- \int_{Q_1} \left(\int_{\phi(kb)}^{\phi(u_\epsilon)} (\varphi \circ \phi^{-1})'(\tau) sgn'_\lambda(\tau - \phi(kb)) d\tau \right) \nabla \phi(kb).\nabla \mathcal{P} \zeta dxdt. \end{aligned}$$

On passe à la limite en ϵ. pour l'intégrale de bord on utilise le fait que $(H_\lambda(\phi(u_\epsilon), \phi(kb))\zeta)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^2(0,T;V)$. On obtient $\lim_{\epsilon \to 0^+} I_{\epsilon,\lambda} = I_\lambda$ où

$$\begin{aligned} I_\lambda &= -\int_{Q_1 \times]0,1[} H_\lambda(\phi(\pi), \phi(kb))(\zeta \Delta \mathcal{P} + \nabla \zeta.\nabla \mathcal{P}) d\alpha dxdt + \int_{\Sigma_{12}} H_\lambda(\phi(u), \phi(kb)) \nabla \mathcal{P}.\nu_1 \zeta d\mathcal{H}^p \\ &- \int_{Q_1 \times]0,1[} \left(\int_{\phi(kb)}^{\phi(\pi)} (\varphi \circ \phi^{-1})'(\tau) sgn'_\lambda(\tau - \phi(kb)) d\tau \right) \nabla \phi(kb).\nabla \mathcal{P} \zeta d\alpha dxdt. \end{aligned}$$

Pour passer à la limite en λ, on revient à la définition de $sign'_\lambda$ et puisque $\varphi \circ \phi^{-1}$ est continue sur $[0, \phi(\|b\|_{L^\infty(\Omega)})]$, $(H_\lambda(v,w))_{\lambda>0}$ converge vers $sgn(v-w)\varphi(w)$ p.p. sur $Q_1\times]0,1[$ and $d\mathcal{H}^p$-p.p. sur Σ_{12}. De la même manière, $\left(\int_w^v (\varphi \circ \phi^{-1})'(\tau) sgn'_\lambda(\tau - w)d\tau\right)_{\lambda>0}$ converge vers $sgn(v-w)(\varphi\circ\phi^{-1})'(w)$ p.p. sur $Q_1\times]0,1[$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il s'ensuit que $\lim_{\lambda\to 0^+} I_\lambda = I$ où

$$I = -\int_{Q_1\times]0,1[} sgn(\pi - kb)(\varphi(kb)\nabla\mathcal{P}.\nabla\zeta + \zeta Div[\varphi(kb)\nabla\mathcal{P}]d\alpha dx dt + \int_{\Sigma_{12}} sgn(\phi(u) - \phi(kb))\varphi(kb)\nabla\mathcal{P}.\nu_1\zeta d\mathcal{H}^p.$$

■

<u>Article référence de l'auteur</u>

L.Lévi, Obstacle Problems for a Coupling of Quasilinear Hyperbolic-Parabolic Equations, accepté pour publication dans la revue Interface & Free Boundaries Journal en Décembre 2006.

4.3 Conditions aux limites mêlées de Dirichlet-Neumann

En ingénierie pétrolière, pour la récupération assistée des hydrocarbures, le modèle isotherme *Dead Oil* conduit à considérer un écoulement diphasique incompressible de deux constituants non miscibles (eau-huile) dans un milieu poreux (la roche réservoir) dont la frontière Γ est partitionnée en trois ouverts de mesures superficielles strictement positives : la zone d'injection d'eau Γ_e, la zone de production d'huile Γ_s, les parois imperméables du gisement Γ_L telles que

$$\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_s \cup \Gamma_L \cup \partial\Gamma_L, \overline{\Gamma_e} \cap \overline{\Gamma_s} = \emptyset.$$

L'évolution de la saturation réduite en huile s_ϵ est décrite par une équation du type

$$\partial_t s_\epsilon - Div[\varphi(s_\epsilon)\nabla\mathcal{P}] + \psi(t,x,s_\epsilon) = \epsilon\Delta\phi(s_\epsilon) \text{ dans }]0,T[\times\Omega, \epsilon > 0, \tag{4.17}$$

associée à des conditions de bord mêlées

$$s_\epsilon = s_{\Gamma_e} \text{ dans }]0,T[\times\Gamma_e, \nabla\phi(s_\epsilon).\nu = 0 \text{ sur }]0,T[\times(\Gamma\backslash\Gamma_e). \tag{4.18}$$

Dans les écritures qui précèdent, φ est une fonction croissante exprimant la fraction de flux d'huile et $\mathcal{P}$ désigne la pression globale fictive introduite par G.Chavent & P.Jaffré [17], qui est déterminée par une équation parabolique linéaire associée à des conditions aux limites de Neumann-Robin :

$$d\nabla\mathcal{P}.\nu = f \text{ sur } \Sigma_e \equiv]0,T[\times\Gamma_e, \nabla\mathcal{P}.\nu = 0 \text{ sur } \Sigma_L \equiv]0,T[\times\Gamma_L, d\nabla\mathcal{P}.\nu = -\lambda\mathcal{P} \text{ sur } \Sigma_s \equiv]0,T[\times\Gamma_s,$$

où d est une constante strictement positive. La vitesse de filtration f aux puits d'injection, que l'on suppose donnée *régulière et stationnaire* et λ, le coefficient de perméabilité aux puits de production, sont tels que :

$$f \geq 0 \text{ sur } \Gamma_e, \mathcal{H}^{p-1}(\{x\in\Gamma_e, f(x)>0\}) > 0,\ \lambda \geq 0 \text{ sur } \Gamma_s, \mathcal{H}^{p-1}(\{x\in\Gamma_s, \lambda(x)>0\}) > 0.$$

On peut remarquer que $\Sigma_- = \{\sigma\in\Sigma, \nabla\mathcal{P}(\sigma).\nu \geq 0\}$ (correspondant aux lieux où les caractéristiques de l'opérateur de premier ordre sont rentrantes) est de $\mathcal{H}^p-$mesure strictement positive et que Σ_e est un ouvert de Σ contenant Σ_-. En outre, compte tenu des conditions aux limites pour $\mathcal{P}$ sur $]0,T[\times\Gamma_e$, Σ_- est un ouvert de la forme $]0,T[\times\Gamma_-$, où Γ_- est un ouvert de Γ, de $\mathcal{H}^{p-1}-$mesure strictement positive.

Dans (4.17) on a tenu compte des effets de la pression capillaire entre la phase "huile" et la phase "eau" au moyen de la fonction ϕ supposée croissante telle que ϕ^{-1} existe (au sens de la terminologie employée au paragraphe 3, l'opérateur du second ordre est faiblement dégénéré). Usuellement, ces effets sont négligeables au regard de ceux de convection, ce qui signifie que ϵ est choisi "petit" ; le cas $\epsilon = 0$ signifiant que ces effets sont totalement négligés.

Ainsi, à ϵ fixé, la situation est similaire à celle rencontrée au paragraphe 4.1 dans Q_2, où Σ_- joue le rôle de l'interface Σ_{12}. Cependant la partie de frontière restante correspond maintenant des conditions de Neumann homogènes et non plus de Dirichlet homogènes. Néanmoins la technique utilisée pour obtenir un résultat d'existence est identique et repose sur la méthode de viscosité artificielle qui nous permet d'établir :

Théorème 4.3.1 - *Etant donné s_0 dans $L^\infty(\Omega)$, le problème (4.17)-(4.18) a au moins une solution faible s_ϵ dans $L^\infty(Q)$ telle que $\phi(s_\epsilon)$ et $\partial_t s_\epsilon$ sont respectivement des éléments $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et $L^2(0,T;V')$. Cette solution vérifie :*

$$s_\epsilon = s_{\Gamma_e}\ \mathcal{H}^p\text{- } p.p \text{ sur } \Sigma_e,$$
$$ess \lim_{t\to 0^+} \int_\Omega |s_\epsilon(t,x) - s_0(x)|dx = 0,$$

et l'égalité variationnelle pour presque tout t de $]0,T[$ et pour tout v de V :

$$\langle \partial_t s_\epsilon, v\rangle - \int_\Omega \varphi(s_\epsilon)\nabla\mathcal{P}.\nabla v dx + \int_\Gamma \varphi(s_\epsilon) v \mathcal{P}.\nu d\mathcal{H}^{p-1} + \epsilon \int_\Omega \nabla\phi(s_\epsilon).\nabla v dx + \int_\Omega \psi(t,x,s_\epsilon) v dx = 0.$$

Remarque 4.3.1

(i) Ici $V = \{v \in H^1(\Omega), v_{|\Gamma_e} = 0\}$, espace de Hilbert muni de la norme $\|v\|_V = (\int_\Omega [\nabla v]^2 dx)^{1/2}$.

(ii) La donnée de bord s_{Γ_e} est supposée suffisamment régulière de sorte que par un argument de translation on puisse se ramener à des conditions de Dirichlet homogènes sur Σ_e. Ainsi, il suffit de considérer que s_{Γ_e} est la trace sur Σ d'une fontion $\overline{s_{\Gamma_e}}$ de $H^1(Q)\cap L^\infty(Q)$ telle que $\partial_t \overline{s_{\Gamma_e}}$ et $\partial_t\phi(\overline{s_{\Gamma_e}})$ appartiennent à $H^1(Q)$.

(iii) Si $\mathcal{P}$ est stationnaire et si Δu_0 et $\Delta\phi(u_0)$ sont des mesures de Radon bornées sur Ω, alors s_ϵ appartient à $BV(0,T;L^1(\Omega))$.

La démonstration de l'unicité utilise une méthode de dédoublement de la variable t uniquement, pour des raisons évoquées dans des cas similaires de régularité d'une solution faible, au théorème 3.1.3, paragraphe 3.1.2 et au théorème 4.1.2, paragraphe 4.1.1. Le résultat obtenu complète ceux déjà établis pour des conditions aux limites mêlées par M.J.Jasor [36] où $\mathcal{P}$ est stationnaire et *très régulier* et par G.Gagneux & M.Madaune-Tort [32] pour des inéquations variationnnelles associées à une contrainte unilatérale "sur le bord" (problèmes à effet de puits ou d'extrémité).

Théorème 4.3.2 - *Si $\varphi\circ\phi^{-1}$ est lipschitzienne sur $[\phi(-M),\phi(M)]$ alors pour s_ϵ and w_ϵ deux solutions faibles de (4.17)-(4.18) associées respectivement aux couples de données de bord (s_0, s_{Γ_e}) et (w_0, w_{Γ_e}) on a pour presque tout t de $]0,T[$:*

$$\int_\Omega (s_\epsilon(t,x) - w_\epsilon(t,x))^+ dx \leq \int_\Omega (s_0 - w_0)^+ dx\, e^{M'_\psi t}.$$

Lorsque l'on s'intéresse au comportement de la suite $(s_\epsilon)_{\epsilon>0}$ lorsque ϵ tend vers 0^+, on dispose seulement d'une estimation uniforme dans $L^\infty(Q)$. En effet, on ne peut recourir à la méthode mise en oeuvre dans [36] où on tire parti de la régularité de $\nabla\mathcal{P}$ (supposé dans $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})^p$) pour introduire, à la manière de F.Mignot & J.P.Puel [49], une classe de fonctions ζ liées à l'opérateur linéaire $v \to \mathcal{P}.\nabla v$ de sorte à occulter le manque de régularité de $\phi(s_\epsilon)$ au voisinage de $\Gamma\backslash\Gamma_e$ et obtenir ainsi une estimation locale de ∇s_ϵ dans $L^1(Q)^p$ à partir de celle de $\zeta\nabla s_\epsilon$. On passe donc à la limite en ϵ dans $L^\infty(Q)$ faible $\star$ avec le même argumentaire que celui évoqué tout au long de ce mémoire, ce qui nous permet d'énoncer :

Théorème 4.3.3 - *Lorsque ϵ tend vers 0^+, la suite $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ des solutions des problèmes* (4.17-4.18)$_{\epsilon>0}$ *pour la donnée initiale s_0 dans $L^\infty(\Omega)$ converge dans $L^q(Q)$, $1 \leq q < +\infty$, vers la solution faible entropique s dans $L^\infty(Q)$ du problème du premier ordre correspondant caractérisée ici par la formulation :*
i) pour toute fonction ξ de $\mathcal{D}(Q)$, $\xi \geq 0$ et tout réel k

$$\int_Q (|u-k|\partial_t \xi + \mathbf{F}(u,k).\nabla\xi - G(u,k)\xi)\, dxdt + \int_\Omega |u_0 - k|\zeta(0,.)dx \geq 0,$$

ii) pour toute fonction ζ de $L^1(\Sigma)$, $\zeta \geq 0$, et tout réel k

$$ess \lim_{\tau\to 0^-} \int_\Sigma \mathcal{F}\left(u(\sigma+\tau\nu), u_{\Gamma_e}, k\right).\nu\zeta d\mathcal{H}^p \geq 0.$$

Article référence

Jasor, Marie-Josée ; Lévi, Laurent Singular perturbations for a class of degenerate parabolic equations with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions. Ann. Math. Blaise Pascal 10, No.2, 269-296 (2003).

4.4 Travaux en cours

Problèmes à effet de puits (ou d'extrémité)

On reprend la présentation du paragraphe 4.3 et on exprime le fait que sur la zone de production Γ_s l'eau ne peut jaillir que si sa saturation est maximale. Ceci introduit une condition d'obstacle unilatérale pour s_ϵ sur Γ_s qui, associée à l'équation de continuité (4.17), donne lieu à la condition de bord :

$$s_\epsilon \geq 0, (\epsilon\nabla\phi(s_\epsilon) - \nabla\mathcal{P}\varphi(s_\epsilon)).\nu \geq 0, s_\epsilon(\epsilon\nabla\phi(s_\epsilon) - \nabla\mathcal{P}\varphi(s_\epsilon)).\nu = 0,\ \mathcal{H}^p\text{-p.p. sur } \Sigma_s.$$

A ϵ fixé, il faut donner une formulation affaiblie du problème (au travers d'une inéquation variationnelle) garantissant l'unicité. L'existence étant obtenue en utilisant la méthode de viscosité artificielle et en relaxant la contrainte de bord par introduction d'un opérateur de pénalisation "sur le bord". Se pose aussi la question du comportement de la suite des solutions des problèmes du second ordre lorsque le terme de diffusion devient négligeable par rapport à ceux de convection et de réaction (rédaction en collaboration avec M.J.Jasor de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand).

Loi de conservation scalaire à terme de flux discontinu par rapport à la variable d'espace

Ce travail, réalisé dans le cadre de la direction de la thèse de J.Jimenez (allocataire-moniteur à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour) concerne l'analyse mathématique de lois de conservation scalaire unidimensionnelle de la forme :

$$\partial_t u + \partial_x(k(x)\varphi(u)) = 0 \text{ sur }]0,T[\times]-1,1[,$$

où la fonction k est bornée et à variation bornée, discontinue en un point x_0 de $]-1,1[$. En s'appuyant sur les travaux de J.Vovelle & N.Seguin [78] (voir aussi [4]) on établit un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible entropique pour le problème de Dirichlet à condition que φ présente au plus deux changements de monotonie et que l'ensemble $\{x \in]-1,1[, k(x) = 0\}$ soit de mesure de Lebesgue nulle. Se pose alors la question de la généralisation de ce résultat dans le cas d'un ouvert multidimensionnel et de l'approche par des problèmes de diffusion-convection.

Conditions aux limites de Neumann

On propose d'utiliser les techniques de passage à la limite (notamment celle dans L^∞ faible $\star$) évoquées tout au long de ce mémoire en vue d'établir des résultats de perturbations singulières pour des opérateurs quasi linéaires paraboliques associés à des conditions de Neumann sur toute la frontière du domaine d'étude et obtenir une notion de formulation faible entropique du problème du premier ordre.

Références

[1] G.Aguilar, F.Lisbona, M.Madaune-Tort, Analysis of a nonlinear parabolic-hyperbolic problem. Adv. Math. Sci. Appl. 7, No.1, 165-181 (1997).

[2] K.Ammar, P.Wittblod, J.Carrillo, Scalar conservation laws with general boundary condition and continuous flux function. J. Differ. Equations 228, No. 1, 111-139 (2006).

[3] G.Anzellotti, Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness. Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. 135, 293-318 (1983).

[4] F.Bachmann, Analysis of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients. Adv. Differ. Equations, 9, No 11-12, 1317-1338 (2004).

[5] A.Bamberger, Étude d'une équation doublement non linéaire. J. Funct. Anal. 24, 148-155 (1977).

[6] C.Bardos, A.Y.LeRoux & J.C.Nedelec, First order quasilinear equations with boundary conditions. Commun. Partial Differ. Equations 4, 1017-1034 (1979).

[7] L.Barthélémy, Problème d'obstacle pour une équation quasi linéaire du premier ordre. Ann. Fac. Sci. Toulouse, Sér., Math. 5, No.9, 137-159 (1988)

[8] M.Bendahmane & K.H.Karsen, Renormalized entropy solutions for quasi-linear anisotropic degenerate parabolic equations. SIAM J. Math. Anal. 36, No.2, 405-422 (2004).

[9] M.Bendahmane & K.H.Karsen, Renormalized solutions of an anisotropic reaction-diffusion-advection system with L^1 data modeling the propagation of an epidemic disease. Site personnel de K.H.Karsen http ://www.math.uio.no/ kennethk/publications.html

[10] S.Benharbit, A.Chalabi, J.P.Vila, Numerical viscosity and convergence of finite volume methods for conservation laws with boundary conditions. SIAM J. Numer. Anal. 32, No.3, 775-796 (1995).

[11] B.Ben Moussa & A.Szeppessy, Scalar Conservation Laws with Boundary Conditions and Rough Data Measure Solutions. Serveur "Conservation Laws" http ://www.math.ntnu.no/conservation/ (2003)

[12] A.Bensoussan & J.L.Lions, Inéquations variationnelles non linéaires du premier et du second ordre. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 276, 1411-1415 (1973).

[13] F.Bouchut & B.Perthame, Kruzkov's estimates for scalar conservation laws revisited. Trans. Am. Math. Soc. 350, No.7, 2847-2870 (1998).

[14] H.Brézis, Problèmes unilatéraux. J. Math. pur. Appl., IX. Sér. 51, 1-168 (1972).

[15] J.Carrillo, Entropy solutions for nonlinear degenerate problems. Arch. Ration. Mech. Anal. 147, No.4, 269-361 (1999).

[16] J.Carrillo & P.Wittbold, Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws with boundary condition. J. Differ. Equations 185, No.1, 137-160 (2002).

[17] G.Chavent & J.Jaffré, Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 17. Amsterdam etc. : North-Holland. XI, 376 p. (1986).

[18] G.Q.Chen & H.Frid, Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws. Arch. Ration. Mech. Anal. 147, No.2, 89-118 (1999).

[19] G.Q.Chen & H.Frid, On the theory of divergence-measure fields and its applications. Bol. Soc. Bras. Mat., Nova Sér. 32, No.3, 401-433 (2001).

[20] G.Q.Chen & K.H.Karsen, L^1-framework for continuous dependence and error estimates for quasilinear anisotropic degenerate parabolic equations. Trans. Am. Math. Soc. 358, No.3, 937-963 (2006).

[21] M.Crandall & A.Majda, The method of fractional steps for conservation laws. Numer. Math. 34, 285-314 (1980).

[22] R.Dautray & J.L.Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. (Reproduction intégrale en 9 vol. brochés de l'ouvrage paru en trois tomes reliés, chez Masson en 1984 et 1985). Commissariat à l'Énergie Atomique, Gif-sur-Yvette (France). Inst. National des Sciences et Techniques Nucléaires. Collection Enseignement. Paris etc. : Masson. xi, (1988).

[23] J.I.Diaz & L.Véron, Existence theory and qualitative properties of the solutions of some first order quasilinear variational inequalities. Indiana Univ. Math. J. 32, 319-361 (1983).

[24] R.J.Diperna, Measure-valued solutions to conservation laws. Arch. Ration. Mech. Anal. 88, 223-270 (1985).

[25] R.J.Diperna, Convergence of approximate solutions to conservation laws. Arch. Ration. Mech. Anal. 82, 27-70 (1983).

[26] J.Droniou, Polycopiés de GM^3, Université de Provence, http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/gm3-02.pdf. (2001)

[27] G.Duvaut & J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique. Travaux et recherches mathématiques. Vol. 21. Paris : Dunod. XX, 387 p. (1972).

[28] R.Eymard, T.Gallouët & R.Herbin, Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation. Chin. Ann. Math., Ser. B 16, No.1, 1-14 (1995).

[29] R.Eymard, T.Gallouët, R.Herbin, A.Michel, Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations. Numer. Math. 92, No.1, 41-82 (2002).

[30] L.C.Evans & R.F.Gariepy, Measure theory and fine properties of functions. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton : CRC Press. viii, 268 p. (1992)

[31] H.Federer, Geometric measure theory. Repr. of the 1969 ed. Classics in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag. xvi, 680 p. (1996).

[32] G.Gagneux & M.Madaune-Tort, Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière. Mathématiques & Applications (Paris). 22. Paris : Springer-Verlag. xiv, 188 p. (1995).

[33] G.Gagneux, A.M.Lefevere, M.Madaune-Tort, Modélisation d'écoulements polyphasiques en milieu poreux par un systéme de problèmes unilateraux. RAIRO, Modélisation Math. Anal. Numér. 22, No.3, 389-415 (1988).

[34] F.Gastaldi, A.Quateroni, G. Landriani Sacchi, Coupling of two-dimensional hyperbolic and elliptic equations. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 80, No.1-3, 347-354 (1990).

[35] S.K.Godounov, Finite Difference Methods for Numerical Computations of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics, Math. USSR Sbornik, 47, 271-295, (1958).

[36] M.J.Jasor, Perturbations singulières de problèmes aux limites non linéaires "paraboliques dégénérés-hyperboliques". Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. **7**, No.2, 267-291 (1998).

[37] Y.Jingxue, On the uniqueness and stability of BV solutions for nonlinear diffusion equations. Commun. Partial Differ. Equations 15, No.12, 1671-1683 (1990)

[38] D.Kinderlehrer & G.Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their applications. Reprint of the 1980 original. Classics in Applied Mathematics. 31. Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). xx, 313 p. (2000).

[39] S.N.Kuzhkov, First order quasilinear equations in several independent variables. Math. USSR, Sb. 10, 217-243 (1970).

[40] N.N.Kuznetsov, Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi-linear equation. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 16(1976), No.6, 105-119 (1978).

[41] Y.K.Kwok, Mathematical models of financial derivatives. Singapore : Springer. xiii, 386 p.(1998).

[42] O.A.Ladyzhenskaya, V.A.Solonnikov, N.N.Ural'tseva, Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs. 23. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). XI, 648 p. (1968).

[43] J.O.Langseth, A.Tvieto, R.Winther, On the convergence of operator splitting applied to conservation laws with source terms. SIAM J. Numer. Anal. 33, No.3, 843-863 (1996).

[44] J.L.Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Etudes mathématiques. Paris : Dunod ; Paris : Gauthier-Villars. XX, 554 p. (1969).

[45] M.Madaune-Tort, Un résultat de perturbations singulieres pour des inéquations variationnelles dégénérées. Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. 131, 117-144 (1982).

[46] C.Mascia, A.Porretta & A.Terracina, Nonhomogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations. Arch. Ration. Mech. Anal. 163, No.2, 87-124 (2002).

[47] C.M.Marle, Mesures et probabilités. Collection enseignement des sciences. 19. Paris : Hermann. 474 p. (1974).

[48] A.Michel & J.Vovelle, Entropy formulation for parabolic degenerate equations with general Dirichlet boundary conditions and application to the convergence of FV methods. SIAM J. Numer. Anal. 41, No.6, 2262-2293 (2003).

[49] F.Mignot & J.P.Puel, Un résultat de perturbations singulières dans les inéquations variationnelles (passage du 2eme ordre au 1er ordre). Singular Perturb. Bound. Layer Theory, Proc. Conf. Lyon 1976, Lect. Notes Math. 594, 365-399 (1977).

[50] F.Mignot & J.P.Puel, Inéquations variationnelles et quasi-variationnelles hyperboliques du premier ordre. J. Math. Pures Appl., **IX**. Sér. 55, 353-378 (1976).

[51] F.Mignot & J.P.Puel, Inéquations d'évolution paraboliques avec convexes dépendant du temps. Applications aux inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Arch. Ration. Mech. Anal. 64, 59-91 (1977).

[52] F.Otto, Conservation Laws in Bounded Domains, Uniqueness and Existence via Parabolic Approximation. In J.Malek, J.Necas, M.Rokyta, M.Ruzicka : *Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDE's* , Chapman & Hall, (1996), 95-143.

[53] F.Otto, Initial-boundary value problem for a scalar conservation law. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I 322, No.8, 729-734 (1996).

[54] Y.Panov, Existence of strong traces for generalized solutions of multidimensional scalar conservation laws, J. Hyperbolic Differ. Equ. 2, No.4, 885-908 (2005).

[55] B.Perthame, Uniqueness and error estimates in first order quasilinear conservation laws via the kinetic entropy defect measure. J. Math. Pures Appl., IX. Sér. 77, No.10, 1055-1064 (1998).

[56] B.Perthame, Kinetic formulation of conservation laws. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. 21. Oxford : Oxford University Press. xi, 198 p. (2002).

[57] B.Perthame & E.Tadmor, A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. Commun. Math. Phys. 136, No.3, 501-517 (1991).

[58] F.Peyroutet, M.Madaune-Tort, Error estimate for a splitting method applied to convection-reaction equations. Math. Models Methods Appl. Sci.**11**, No.6, 1081-1100 (2001).

[59] F.Peyroutet, Splitting method applied to hyperbolic problem with source term. Appl. Math. Lett. 14, No.1, 99-104 (2001).

[60] A.Porretta, J.Vovelle, L^1 solutions to first order hyperbolic equations in bounded domains. Commun. Partial Differ. Equations 28, No.1-2, 381-408 (2003).

[61] J.F.Rodrigues, Obstacle problems in mathematical physics. North-Holland Mathematics Studies, 134, Notas de Matemática (114). Amsterdam etc. : North-Holland. XV, 352 p. (1987).

[62] J.F.Rodrigues, On the hyperbolic obstacle problem of first order. Chin. Ann. Math., Ser. B 23, No.2, 253-266 (2002).

[63] J.F.Rodrigues, On hyperbolic variational inequalities of first order and some applications. Monatsh. Math. 142, No.1-2, 157-177 (2004).

[64] E.Rouvre & G.Gagneux, Formulation forte entropique de lois scalaires hyperboliques-paraboliques dégénérées. Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. 10, No.1, 163-183 (2001).

[65] E.Rouvre & G.Gagneux, Solution forte entropique de lois scalaires hyperboliques-paraboliques dégénérées. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 329, No.7, 599-602 (1999).

[66] D.Serre, Systèmes de lois de conservation. II : Structures géométriques, oscillations et problèmes mixtes. Fondations. Paris : Diderot Editeur. iii, 306 p. (1996).

[67] G.Strang, On the construction and comparison of difference schemes. SIAM J. Numer. Anal. 5, 506-517 (1968).

[68] A.Szepessy, Measure-valued solutions of scalar conservation laws with boundary conditions. Arch. Ration. Mech. Anal. 107, No.2, 181-193 (1989)

[69] A.Szepessy, An existence result for scalar conservation laws using measure valued solutions. Commun. Partial Differ. Equations, 14, No.10, 1329-1350 (1989).

[70] T.Tang, Convergence analysis for operator-splitting methods applied to conservation laws with stiff source terms. SIAM J. Numer. Anal. 35, No.5, 1939-1968 (1998).

[71] T.Tang & Z.H.Teng, Viscosity methods for piecewise smooth solutions to scalar conservation laws. Math. Comput. 66, No.218, 495-526 (1997).

[72] L.Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations. Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symp., 4, Edinburgh 1979, Res. Notes Math. 39, 136-212 (1979).

[73] G.Vallet, Weak entropic solution to a scalar hyperbolic-parabolic conservation law. RACSAM, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat. 97, No.1, 147-152 (2003).

[74] G.Vallet, Dirichlet problem for a degenerated hyperbolic-parabolic equations. Adv. Math. Sci. Appl. 15, 423-450 (2005)

[75] G.Vallet, Dirichlet problem for a nonlinear conservation law. Rev. Mat. Complut. 13, No.1, 231-250 (2000).

[76] A.Vasseur, Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws. Arch. Ration. Mech. Anal. 160, No.3, 181-193 (2001).

[77] A.I.Volpert, The spaces BV and quasilinear equations. Math. USSR, Sb. 2, 225-267 (1967) ; translation from Mat. Sb., n. Ser. 73(115), 255-302 (1967).

[78] J.Vovelle & N.Seguin, Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients. Math. Models Methods Appl. Sci. 13, No.2, 221-257 (2003).