



Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France

Ai Quoc Nguyen

► To cite this version:

Ai Quoc Nguyen. Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00182779

HAL Id: tel-00182779

<https://theses.hal.science/tel-00182779>

Submitted on 31 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE EN CO-TUTELLE

Présentée par
Ai Quoc NGUYEN

Pour obtenir les titres de
Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
Et Docteur du Viêt-Nam

Spécialité : **Didactique des mathématiques**

Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France

Soutenue le 18 Décembre 2006

Composition du jury :

Hamid CHAACHOUA	Co-directeur de thèse
Hoai Chau LE THI	Co-directrice de thèse
Jean-François NICAUD	Co-directeur de thèse
Teresa ASSUDE	Rapporteur
Kim NGUYEN BA	Rapporteur
Colette LABORDE	Examineur
Tien LE VAN	Examineur
Son NGUYEN THAI	Examineur
Claude COMITI	Membre invitée

Thèse préparée au sein de :
Equipe Did@ctic, Laboratoire LEIBNIZ-IMAG
Formation de Troisième cycle, Département de mathématiques,
Université de Pédagogie de Ho Chi Minh ville

SOMMAIRE

RÉSUMÉ DE LA THÈSE EN VIETNAMIEN TÓM TẮT LUẬN ÁN BẰNG TIẾNG VIỆT

PHẦN A	9
I. GIỚI HẠN ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU	10
I.1. Dạy và học đại số	11
I.2. Câu hỏi xuất phát	15
II. ĐẶT VẤN ĐỀ	15
II.1. Khung lý thuyết: Lý thuyết nhân chủng học của Didactic	15
II.2. Những giả thuyết làm việc đầu tiên và sự trình bày lại mục tiêu nghiên cứu của chúng tôi	17
II.3. Sự lựa chọn một quan điểm so sánh	19
III. PHƯƠNG PHÁP LUẬN	21
PHẦN B	25
PHẦN C	27
I. MỞ ĐẦU PHẦN THỰC NGHIỆM	27
I.1. Mục đích của phần thực nghiệm	27
I.2. Các câu hỏi mà thực nghiệm phải trả lời	27
I.3. Các ràng buộc mà cuộc thực nghiệm phải tính đến	28
II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH	28
II.1. Từ các praxéologie vùng đến praxéologie bộ phận	28
II.2. Xác định các praxéologie	29
III. TIẾN TRÌNH THỰC NGHIỆM TẠI VIỆT-NAM VÀ TẠI PHÁP	29
III.1. Việc chọn lớp	29
III.2. Tổ chức tiến trình thực nghiệm	30
III.3. Tiếp nhận các dữ liệu	30
III.4. Xử lý các dữ liệu	30
PHẦN D	33
MỞ ĐẦU	33
I. PHÂN TÍCH SO SÁNH CÁC QUAN HỆ CÁ NHÂN CỦA HỌC SINH	33
I.1. Phân tích so sánh 9-O và 2 nd (Đệ nhị)	34
I.2. Phân tích so sánh 10-S và 1 ^{re} (Đệ nhất)	36
II. KẾT LUẬN	38
II.1. Các kết quả chính của luận án	38
II.2. Các hướng mở ra từ luận án	43

PARTIE A.....	47
INTRODUCTION – PROBLEMATIQUE	47
INTRODUCTION.....	49
PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE	51
I. DELIMITATION DU SUJET.....	51
I.1. L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre.....	52
I.2. Questions de départs.....	56
II. PROBLEMATIQUE	57
II.1. Cadre théorique : la Théorie Anthropologique du Didactique.....	57
II.2. Premières hypothèses de travail et reformulations de notre objet d'étude	59
II.3. Le choix d'une perspective comparative	61
III. METHODOLOGIE	64
PARTIE B.....	67
ANALYSE INSTITUTIONNELLE.....	67
INTRODUCTION.....	69
CHAPITRE B1. ANALYSE DES PROGRAMMES VIETNAMIEN ET FRANÇAIS.....	71
I. L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE AU VIETNAM	71
I.1. En classe 6.....	71
I.2. En classe 7.....	71
I.3. En classe 8.....	72
I.4. En classe 9.....	74
I.5. En classe 10.....	75
I.6. En classe 11.....	78
I.7. Conclusion.....	78
II. L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE EN FRANCE	79
II.1. En classe de 6 ^e	79
II.2. En classe de 5 ^e	80
II.3. En classe de 4 ^e	82
II.4. En classe de 3 ^e	83
II.5. En classe de 2 ^{de}	85
II.6. En classe de 1 ^{er}	87
II.7. Conclusion.....	87
III. ANALYSE COMPAREE DES PROGRAMMES VIETNAMIENS ET FRANÇAIS.....	88
CHAPITRE B2 : ANALYSE DES MANUELS	93
I. METHODOLOGIE D'ANALYSE DES MANUELS	93

I.1.	<i>Le type de tâche T et les techniques qui lui sont liées</i>	93
I.2.	<i>Méthodologie d'analyse</i>	94
CHAPITRE B2.1 LE CAS DU VIET-NAM ANALYSE DES MANUELS DES CLASSES 7, 8, 9 ET 10		97
II.	PRESENTATION PAR NIVEAU DE CLASSE	97
II.1.	<i>Choix des manuels</i>	97
II.2.	<i>Structure des manuels</i>	97
II.3.	<i>Tâche de factorisation d'une expression algébrique à une variable</i>	98
II.4.	<i>Tâche de résolution algébrique des équations du second degré</i>	100
II.5.	<i>Tâches de résolution graphique des équations du second degré</i>	104
II.6.	<i>Équations du second degré dans les problèmes de modélisation</i>	108
II.7.	<i>Synthèse</i>	110
III.	ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DE L'ETUDE DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE	111
III.1.	<i>Sous-type de tâche C1</i>	112
III.2.	<i>Sous-type de tâche C2</i>	117
III.3.	<i>Sous-type de tâche C3</i>	121
III.4.	<i>Sous-type de tâche C4</i>	122
IV.	CONCLUSION	129
CHAPITRE B2.2 LE CAS DE LA FRANCE ANALYSE DES MANUELS DES CLASSES DE 4^E, 3^E, SECONDE ET PREMIERE		131
I.	PRESENTATION PAR NIVEAU DE CLASSE	131
I.1.	<i>Choix des manuels</i>	131
I.2.	<i>Structure des manuels</i>	131
I.3.	<i>Tâches de factorisation d'une expression algébrique à une variable</i>	132
I.4.	<i>Tâches de résolution algébrique des équations du second degré</i>	143
I.5.	<i>Tâches de résolution graphique des équations du second degré</i>	146
I.6.	<i>Équations du second degré dans les problèmes de modélisation</i>	147
I.7.	<i>Synthèse</i>	150
II.	ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU 2ND DEGRE	151
II.1.	<i>Sous-type de tâche C1:</i>	151
II.2.	<i>Sous type de tâche C2</i>	153
II.3.	<i>Sous-type de tâche C3</i>	156
II.4.	<i>Sous-type de tâche C4</i>	157
III.	CONCLUSION	161
	<i>Choix de technique pour un même type de tâche</i>	163

CHAPITRE B3. ANALYSE COMPARATIVE ENTRE LA FRANCE ET LE VN COMPARAISON DES PRAXEOLOGIES EXISTANTES.....	165
I. COMPARAISON DE L'EVOLUTION DES SOUS-TYPES DE TACHES DANS LES DEUX PAYS	165
II. SYNTHESE.....	167
PARTIE C.....	169
EXPERIMENTATION.....	169
CHAPITRE C1 - ANALYSE A PRIORI	171
I. INTRODUCTION DE LA PARTIE EXPERIMENTALE	171
I.1. But de la partie expérimentale	171
I.2. Questions auxquelles l'expérimentation doit répondre	171
I.3. Les contraintes que l'expérimentation doit prendre en compte.....	172
I.4. Présentation de la partie expérimentale	172
II. METHODE D'ANALYSE.....	173
II.1. Des praxéologies régionales aux praxéologies ponctuelles.....	173
II.2. Détermination des praxéologies ponctuelles	175
II.3. Synthèse.....	178
III. DEFINITION ET ANALYSE A PRIORI DES EXERCICES PROPOSES.....	179
III.1. Type T1 : $P \times Q = 0$ ou $(ax+b)(cx+d)=0$	180
III.2. Type T2 : $P \times Q + P \times R = 0$ ou $P \times Q = P \times R$	180
III.3. Type T3: $P \times Q = R \times S$ ou $P \times Q + R \times S = 0$ (où P est multiple de R : $P = k \times R$, ou R est multiple de P : $R = k \times P$ et $P \neq R$).....	182
III.4. Type T4: $P^2 - R^2 = 0$ ou $P^2 = R^2$	184
III.5. Type T5 : $ax^2 + bx + c = 0$	187
CHAPITRE C2 : DEROULEMENT DE L'EXPERIMENTATION.....	191
I. DEROULEMENT AU VIET-NAM ET EN FRANCE	191
II. METHODOLOGIE DE RECUEIL ET DE TRAITEMENT DES DONNES	193
II.1. Recueil des données	193
II.2. Traitement des données	193
II.3. Codage des types d'erreurs rencontrées	198
CHAPITRE C3 : ANALYSE DE L'EXPERIMENTATION DANS L'INSTITUTION V	201
I. RESULTATS GLOBAUX.....	201
I.1. Résultats de la classe 9.....	201
I.2. Résultats de la classe 10.....	202
I.3. Evolution des techniques mobilisées et des résultats obtenus lors du passage de la 9° à la 10°203	
II. ANALYSE DES PRAXEOLOGIES EXISTANTES	204

II.1.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T1</i>	204
II.2.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T2</i>	215
II.3.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T3</i>	225
II.4.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T4</i>	236
II.5.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T5</i>	248
III.	SYNTHESE	261
III.1.	<i>Synthèse de l'analyse des techniques mobilisées par les élèves et des technologies qui les engendrent</i>	261
III.2.	<i>Evolution des techniques majoritaires entre les classes 9 et 10</i>	264
III.3.	<i>Synthèse de l'analyse des erreurs</i>	266
III.4.	<i>Conclusion</i>	267
CHAPITRE C4 : ANALYSE DE L'EXPERIMENTATION DANS L'INSTITUTION F		269
I.	RESULTAT GLOBAUX	269
I.1.	<i>Résultats de la classe de 2°</i>	269
I.2.	<i>Résultats de la classe de 1°S</i>	269
I.3.	<i>Evolution des techniques mobilisées et des résultats obtenus lors du passage de la Seconde à la Première</i>	270
II.	ANALYSE DES PRAXEOLOGIES EXISTANTES	271
II.1.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T1</i>	271
II.2.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T2</i>	277
II.3.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T3</i>	287
II.4.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T4</i>	294
II.5.	<i>Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T5</i>	306
III.	SYNTHESE	316
III.1.	<i>Synthèse de l'analyse des techniques mobilisées par les élèves et des technologies qui les expliquent</i>	316
III.2.	<i>Evolution des techniques majoritaires entre les classes 2° et 1°</i>	319
III.3.	<i>Synthèse de l'analyse des erreurs</i>	320
III.4.	<i>Conclusion</i>	321
PARTIE D		321
ANALYSE COMPARATIVE ET CONCLUSION		321
INTRODUCTION		323
CHAPITRE D1 – ANALYSE COMPARATIVE DES RAPPORTS PERSONNELS DES ELEVES		326
I.	ANALYSE COMPARATIVE 9-O ET SECONDE	326
II.	ANALYSE COMPARATIVE 10-S ET PREMIERE	328
CHAPITRE D2 - CONCLUSION		332

I.	RESULTATS PRINCIPAUX DE LA THESE	332
I.1.	<i>L'enseignement de l'algèbre dans les deux pays</i>	332
I.2.	<i>L'enseignement de la résolution des équations du second degré</i>	333
I.3.	<i>Rapports personnels des élèves des deux institutions V et F à l'objet RESD</i>	334
II.	PERSPECTIVES	337
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	337
	BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE.....	339
	ANNEXE.....	341
	ANNEXE 1 : PRESENTATION D'APLUSIX.....	343
	ANNEXE 2 : PROGRAMMES EN MATHS-ALGÈBRE AU NIVEAU DE COLLÈGE ET DE LYCEE EN FRANCE ET AU VIETNAM.....	348
	ANNEXE 3 : RECUEIL ET TRAITEMENT DES DONNEES	361
	ANNEXE 4 : EXEMPLE DES ERREURS LORS DE LA RESOLUTION DES TYPES DE TACHE .	374
	ANNEXE 5 : EXEMPLES DES TECHNIQUES MOBILISEES PAR LES ELEVES LORS DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE	376
	ANNEXE 6 : EXEMPLES DES ERREURS RELEVÉES DANS LES PRODUCTIONS DES ELEVES LORS DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE.....	381
	ANNEXE 7 : EXEMPLES DE PROFILS D'ELEVES POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE.....	387

Résumé de la thèse en vietnamien
Tóm tắt luận án bằng tiếng Việt

Phần tóm tắt luận án bằng tiếng Việt gồm 4 phần : A, B, C và D.

Trong phần A, chúng tôi trình bày những vấn đề liên quan đến đại số : đại số là gì, các đối tượng của đại số, các dạng hoạt động đại số ; các câu hỏi xuất phát, khung lý thuyết tham chiếu, việc lựa chọn quan điểm so sánh và phương pháp luận nghiên cứu .

Trong phần B, chúng tôi tóm tắt nghiên cứu quan hệ thể chế ở vị trí người học sinh đối với đối tượng « phương trình bậc hai » bằng cách thực hiện phân tích chương trình, văn bản chính thức và sách giáo khoa trong hai thể chế cho phép làm rõ các praxéologie hiện hữu trong các sách giáo khoa của mỗi thể chế.

Trong phần C, chúng tôi trình bày mục đích của thực nghiệm, những câu hỏi mà thực nghiệm đó phải trả lời, những ràng buộc mà thực nghiệm phải tính đến, phương pháp phân tích kết quả thực nghiệm, tiến trình thực nghiệm, phương pháp thu nhận và xử lý các dữ liệu của thực nghiệm.

Trong phần D, chúng tôi trình bày một phân tích so sánh quan hệ cá nhân của học sinh đối với loại nhiệm vụ T mà chúng tôi làm thực nghiệm trong cả hai thể chế, và xác định sự tác động của những lựa chọn thể chế khác nhau trên quan hệ cá nhân của học sinh. Sau cùng, chúng tôi trình bày những kết quả chính thu được trong nghiên cứu và những hướng nghiên cứu mở ra trong tương lai.

PHẦN A

MỞ ĐẦU

Một quan sát đầu tiên trên chương trình và sách giáo khoa Việt nam so với chương trình và sách giáo khoa sử dụng trong các trường trung học Pháp hay trong các trường trung học quốc tế tại Việt nam đã cho chúng tôi thấy một sự gần giống nhau về những khả năng mong đợi ở học trò, mặc dù có một số khác biệt quan trọng tập trung trên :

- tầm quan trọng của các lĩnh vực toán học khác nhau được giải quyết (theo nghĩa của Chevallard, 1998)
- các chủ đề toán học được nghiên cứu
- cách định nghĩa các đối tượng nghiên cứu.

Điều này khiến chúng tôi tự hỏi về sự tác động của các lựa chọn thể chế khác nhau trên mối quan hệ với tri thức của học trò.

Vấn đề đặt ra này đã là mục tiêu của các nghiên cứu so sánh giữa Pháp và Việt nam, đặc biệt là việc giảng dạy véc-tơ (Lê Thị Hoài Châu, 1997), mối liên hệ giữa hàm số và phương trình (Lê Văn Tiến, 2001), giảng dạy hình học trong không gian (Đoàn Hữu Hải, 2001), đưa vào một số yếu tố thuật toán và lập trình hóa trong giảng dạy trung học (Nguyễn Chí Thành, 2005).

Chúng tôi đã chọn tập trung nghiên cứu việc giảng dạy đại số và cụ thể hơn việc giải phương trình bậc hai bằng phương pháp đại số.

Tại Việt nam cũng như Pháp, đại số đóng một vai trò quan trọng trong việc dạy Toán ở phổ thông cơ sở và phổ thông trung học. Nhưng các lựa chọn thực hiện tại Việt nam và Pháp đối với việc dạy đại số tại phổ thông cho thấy có những khác biệt quan trọng. Những khác biệt này tập trung trên việc tiếp cận đại số trong tổng thể của nó. Chẳng hạn chúng tôi tìm thấy hai tiếp cận khác nhau của khái niệm phương trình trong hai thể chế liên quan đến đối tượng nghiên cứu của chúng tôi.

Trong việc dạy học phổ thông tại Việt nam, một phương trình là đẳng thức của hai đa thức một biến và việc giải phương trình này bao gồm việc tìm một hay các giá trị của biến sao cho hai đa thức nhận cùng một giá trị số.

Trong việc dạy học phổ thông tại Pháp, một phương trình được định nghĩa bởi sự bằng nhau của hai biểu thức đại số, trong đó số chưa biết được biểu thị bằng một chữ cái, việc giải phương trình này bao gồm việc xác định một hay các giá trị của chữ (là ẩn số) sao cho đẳng thức là đúng. Khái niệm phương trình được đưa vào sau các tính toán trên chữ.

Trong khuôn khổ luận án này, chúng tôi tập trung vào việc nghiên cứu các lựa chọn dạy học đại số thực hiện trong hai thể chế khác nhau, trên các ràng buộc thể chế do sự lựa chọn này đặt ra, cũng như các thực hành đại số của học sinh được hình thành từ lựa chọn này tại mỗi nước. Để làm điều này, chúng tôi đã chọn tập trung vào nghiên cứu việc giải các phương trình bậc hai.

I. GIỚI HẠN ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU

Đại số là gì ?

Có bảy chủ đề xuất hiện khi trả lời cho câu hỏi trên qua các cuộc phỏng vấn do Lesley Lee (Kieran, 2001) thực hiện năm 1990 đối với tập hợp các nhà toán học, giáo sư, sinh viên và các nhà nghiên cứu giáo dục Toán :

- Đại số là một môn học phổ thông
- Đại số là một khái quát hóa số học
- Đại số là công cụ
- Đại số là một ngôn ngữ
- Đại số là một văn hóa
- Đại số là một kiểu suy nghĩ
- Đại số là một hoạt động.

Theo D. Wheeler (1996), một khó khăn trong việc định nghĩa đại số là khi chúng ta nghĩ rằng đã hiểu hết bản chất của nó thì lại xuất hiện những khía cạnh khác cần phải được tính đến : đại số là một hệ thống ký hiệu, đại số là một tính toán, đại số là một hệ thống biểu diễn.

A. Bell (Bell, 1996) tự hỏi các biểu thức đại số và ngôn ngữ tự nhiên khác nhau chỗ nào. Ông chỉ rõ rằng các quy trình lĩnh hội, quy trình chế tạo ra ý nghĩa tương tự nhau trong hai lĩnh vực mặc dù các biểu thức đại số có khuynh hướng dày đặc hơn và ít rườm rà hơn các phát biểu của ngôn ngữ tự nhiên (Bednarz, Kieran, Lee, 1996).

Hình như có một sự khác nhau thực sự trong vấn đề ngôn ngữ toán học và đặc biệt là đại số không chỉ phục vụ cho việc biểu đạt mà còn cho cả thao tác nữa. Các phép biến đổi về mặt cú pháp của các *biểu thức ký hiệu* có thể được thực hiện một cách máy móc và chúng được sử dụng từ các tương đương, mà không thiết lập các tương đương này bằng cách làm việc trên chính những khái niệm, trong khi các quy tắc cú pháp hiển nhiên bắt nguồn từ kiến thức của các khái niệm này.

Về mặt lịch sử, đại số ra đời để giải quyết một số « bài toán số học » và can thiệp như một công cụ giải các bài toán thuộc các lĩnh vực khác. Năm 1842, G. H. F. Nesselman đã phân loại sự phát triển lịch sử của phong trào ký hiệu học đại số thành ba giai đoạn :

- Giai đoạn « hùng biện » (trước Diophante, 325-410) đặc trưng bởi việc sử dụng ngôn ngữ thông thường để giải quyết một số dạng bài toán đặc biệt, và thiếu vắng cho việc biểu thị các biến số. Đại số hùng biện biểu thị lời giải của một bài toán mà không dùng bất kỳ một sự viết tắt hay ký hiệu nào cả.
- Giai đoạn « rút âm từ » (Từ Diophante đến cuối thế kỷ XVI) : Diophante đã đưa vào việc sử dụng viết tắt để chỉ các đại lượng chưa biết. Đại số « rút âm từ » sử dụng một số viết tắt tốc ký cho một số phép toán, đại lượng, và các quan hệ mà được sử dụng thường xuyên hơn.
- Giai đoạn « đại số ký hiệu » (Từ thời kỳ Viète trở đi) : các chữ cái cũng được sử dụng để chỉ các đại lượng : do đó có thể biểu thị các nghiệm « tổng quát », và sử dụng đại số như một công cụ để chứng minh các quy tắc tính toán.

Trong việc dạy Toán, đại số chiếm một vị trí quan trọng nhờ các bộ nhớ ký hiệu. Nhiều công trình nghiên cứu quan tâm đến việc dạy và học đại số. Trong những công trình này, chúng tôi giới thiệu ngắn gọn những nghiên cứu cho phép chúng tôi tập trung nhiều hơn vào đối tượng nghiên cứu của mình.

I.1. Dạy và học đại số

I.1.1. Hai mặt của đại số : công cụ/đối tượng

Xuất phát từ sự phân biệt tổng quát, do Régine Douady (1984) giới thiệu về phép biện chứng giữa hai mặt công cụ/đối tượng của một khái niệm toán học, Brigitte Grugeon (1995) đưa ra một tổ chức tri thức đại số sơ cấp xung quanh hai **mặt** chính yếu :

"Mặt công cụ : đại số được xem như là một công cụ để giải một số bài toán nảy sinh từ các ngữ cảnh bên trong hay bên ngoài toán học.

Mặt đối tượng : đại số được xem như một tập hợp cấu trúc các đối tượng (ẩn số, biến số, tham số, phương trình, bất phương trình, hàm số,...) được trang bị tính chất, đặc biệt là những kiểu giải quyết mang bản chất hình thức, những kiểu biểu diễn cho phép các giải quyết (cách viết đại số, đồ thị, ký hiệu hàm số,...). Cho nên tri thức đại số được biểu hiện bằng ngôn từ vai trò của các đối tượng đại số, của những khả năng thao tác chúng và khả năng nối khớp các thuộc tính cú pháp và ngữ nghĩa học của chúng." (Grugeon, 1995).

Người ta lại tìm thấy hai mặt đối tượng và công cụ trong lịch sử phát triển của đại số.

Về phần mình, chúng tôi quan tâm đến mặt đối tượng trong việc dạy học đại số. Nó được tổ chức, một mặt quanh các phép biến đổi biểu thức đại số, và mặt khác quanh việc giải các phương trình, bất phương trình và hệ phương trình tuyến tính.

I.1.2. Các đối tượng của đại số

Như với mọi khái niệm toán học, người ta làm việc trên các đối tượng của đại số thông qua các hệ thống biểu đạt (Duval, 1993) như ngôn ngữ tự nhiên, đồ thị, ký hiệu... Việc dạy đại số ưu tiên cho hệ thống biểu đạt bằng ký hiệu. Một hệ thống được thiết lập qua các chữ cái và các dấu hiệu biểu diễn các phép toán (+, -, x, ...) và các quan hệ giữa các biểu thức đại số (=, <, ...).

Các ký hiệu của hệ thống biểu đạt này đã được sử dụng trong số học, trước khi nghiên cứu đại số, nhưng với những cơ chế khác nhau. Sau đây chúng tôi sẽ giới thiệu ba đối tượng quan trọng cho nghiên cứu đại số sơ cấp.

a) Chữ

Trong số học, chữ dùng để chỉ các đơn vị đo hay chỉ các sự vật. Chẳng hạn 5g để chỉ một khối nặng 5g. Khi chuyển sang đại số, chữ dùng chỉ các số (Booth 1984, Kieran 1991), và biểu thức 5g có thể được giải thích bằng $5 \cdot g$ trong đó g chỉ một số.

Kucheman (1981) đã đưa ra một sự phân loại các vai trò của chữ, trong đó ông phân biệt :

- Chữ được gán giá trị : người ta thay bằng một giá trị số,
- Chữ không được xét đến: chữ không biết trong tính toán,
- Chữ chỉ đối tượng cụ thể : chữ là một nhãn,
- Chữ chỉ ẩn số đặc thù : chữ chỉ một số chưa biết cần tìm,
- Chữ chỉ số được khái quát hóa : chữ có thể nhận được nhiều giá trị,
- Chữ chỉ biến số : chữ được sử dụng trong một ngữ cảnh hàm số.

Về mặt lịch sử, khái niệm ẩn số phát triển trước khái niệm biến số : chữ được dùng để biểu thị một giá trị chưa biết trước khi nó được sử dụng để biểu thị tập hợp các giá trị. Tương tự, trong dạy học đại số, trước tiên chữ biểu thị ẩn số trước khi biểu thị biến số.

b) Biểu thức đại số

Như chúng tôi đã nói ở trên, biểu thức đại số sử dụng các phần tử : số, chữ và dấu hiệu phép toán thuộc về số học.

« Trong số học, chuỗi số và phép toán được xem như những quy trình hướng đến việc tạo ra một câu trả lời.

Ngược lại, trong đại số, bản thân các ký hiệu được viết ra (biểu thức, phương trình, hàm số) đều có ý nghĩa, độc lập với các quy trình mà chúng biểu thị trong việc giải các bài toán. Thế nhưng, chúng sử dụng các dấu hiệu thông thường của các phép toán: quy trình là một phần của đối tượng. Vì thế $a+b$ chỉ cùng lúc một quy trình (cộng a với b) và một kết quả (tổng của a và b)" (Pressiat, 1996).

Sự phân biệt này gắn liền với các công trình nghiên cứu của Sfard (1991) trong đó đặt ra việc phân biệt hai quan niệm chính đối với một biểu thức đại số : hoặc theo cấu trúc, như một đối tượng, hoặc theo phép toán, như một quy trình, đồng thời nhấn mạnh rằng, trong một hoạt động toán học, người ta nối khớp hai quan niệm này theo các yêu cầu cần thiết.

Những nghiên cứu khác cho thấy rằng hoạt động cần thiết cho việc giải các bài toán đại số đặt ra cùng lúc một cấp độ cú pháp và ba cấp độ ngữ nghĩa học (Nicaud, 1994). Việc nghiên cứu ba cấp độ ngữ nghĩa học cho phép phân tích sự tiến triển nghĩa của phép tính đại số :

- cấp độ 1 : phân phối giá trị cho các biến tham gia trong một biểu thức đại số,
- cấp độ 2 : biến đổi một biểu thức thành một biểu thức tương đương (khai triển, phân tích thành thừa số) bằng một tính toán trực tiếp,
- cấp độ 3 : tổ chức các giai đoạn của một tính toán đại số nhờ một suy luận chiến lược.

Nicaud (1993) cho rằng « chúng ta thực hiện một việc tính toán đại số thực sự khi một phần có ý nghĩa của hoạt động nằm ở cấp độ này (cấp độ thứ 3 ngữ nghĩa học). Không có cấp độ này, đại số được sử dụng như một sự ký hiệu đơn giản ».

Về phía mình, Drouhard (1992) dựa trên các khái niệm *nghĩa*, *sự biểu hiện*, *sự giải thích* và *sự mở rộng nghĩa* vay mượn của Frege (1971) để phân tích việc xử lý các *biểu thức ký hiệu* của đại số sơ cấp và các phép biến đổi hình thức trong việc viết lại. Vì thế, hai biểu thức đại số : $(x+1)^2$ và x^2+2x+1 có cùng một biểu hiện, nhưng không cùng một nghĩa. Chẳng hạn, biểu thức thứ nhất cho ta thấy rằng biểu thức đó luôn dương. Việc xử lý một biểu thức tùy thuộc vào *nghĩa* của nó, nhưng được thực hiện bằng cách giữ được *sự biểu hiện* của nó. Đặc biệt, khi giải các phương trình bậc hai, việc lựa chọn cách xử lý các biểu thức đại số (phân tích ra thừa số hay khai triển) đòi hỏi phải quay về *nghĩa* của chúng.

Một biểu thức có *sự giải thích* trong một khung cho trước là tất cả mục đích "tương ứng" với sự biểu hiện của biểu thức đó trong khung đó. Chẳng hạn, biểu thức $5x$ không có cùng một giải thích trong khung đại số hay khung hàm số.

Theo Drouhard, *sự mở rộng nghĩa* là tất cả những gì mà một học sinh hiểu và giải thích một biểu thức đại số theo cách riêng của mình, phụ thuộc vào kinh nghiệm học tập của học sinh đó, vào những tình huống trong đó học sinh thao tác biểu thức này hay các biểu thức khác.

c) *Dấu đẳng thức*

Dấu đẳng thức có một vai trò kép. Nó có thể hoặc chỉ một kết quả, hoặc một quan hệ tương đương. Trong số học, nó có chức năng thông báo một kết quả, trong khi trong đại số nó diễn đạt một quan hệ tương đương, đặc biệt là trong các phương trình. Như vậy cùng một lúc có một sự liên tục và gián đoạn giữa số học và đại số.

I.1.3. Các dạng khác của hoạt động đại số

Kieran (1996, 2001) phát triển một mô hình của hoạt động đại số trong đó phân biệt "ba hoạt động chủ chốt của đại số sơ cấp : *Khái quát, Biến đổi, và Toàn thể/Cấp độ Meta*.

Hoạt động Sản sinh :

Hoạt động này bao gồm việc hình thành các biểu thức và phương trình là những đối tượng của đại số. Tác giả đưa ra ba ví dụ đặc trưng sau của hoạt động sản sinh :

- Phương trình một ẩn mô hình hóa một bài toán tình huống
- Biểu thức khái quát hóa một quan hệ giữa các phần tử hình học hay dãy số
- Biểu thức chứng minh các tính chất số học.

Hoạt động biến đổi :

Hoạt động này tập trung chủ yếu việc thay đổi dạng của một biểu thức hay một phương trình và luôn bảo đảm sự tương đương. Tác giả nêu lên một số nghiên cứu về dạng hoạt động này (chẳng hạn Cerulli & Mariotti, 2001 : Lagrange 2000).

Hoạt động Toàn thể/ cấp độ Meta

Trong hoạt động này, đại số được sử dụng như một công cụ. Hoạt động này bao gồm hoạt động giải bài toán, mô hình hóa cấu trúc, nghiên cứu sự thay đổi, chứng minh, tiên đoán mà không cần đến đại số. Thực tế, theo quan điểm chương trình, hoạt động *Toàn thể/cấp độ Meta* không thể tách rời với các hoạt động khác, đặc biệt là hoạt động sản sinh, nếu không thì sẽ làm mất đi mục tiêu của đại số.

Cũng theo Kieran (2001), theo truyền thống, các sách giáo khoa đại số thường nhấn mạnh các phương diện biến đổi của hoạt động đại số bằng cách dành nhiều sự lưu ý cho các quy tắc tiếp theo sau trong việc thao tác các *biểu thức ký hiệu* và các phương trình hơn là lưu ý đến các khái niệm quan niệm làm nền tảng cho các quy tắc này hay các nền tảng cấu trúc cho nghĩa các biểu thức hay phương trình được thao tác.

« French Brevet nhấn mạnh cấu trúc toán, trong đó học sinh được yêu cầu trình bày một câu trả lời nào đó dưới một dạng đặc biệt ngược với yêu cầu hoàn thành một quy trình tính toán. " (Surtherland, 1995).

Theo các nhà chuyên môn, một trong những thế mạnh của đại số chính là phần lớn các hoạt động biến đổi có thể được xử lý trong những gì xuất hiện theo cách tự động hơn.

I.2. Câu hỏi xuất phát

Trong nghiên cứu của chúng tôi, chúng tôi tập trung nghiên cứu trên phương diện đối tượng của đại số trong đó học sinh phải thao tác các biểu thức đại số trong *bộ nhớ ký hiệu* được trang bị *ngữ nghĩa* và *cú pháp*. Cụ thể hơn, chúng tôi quan tâm đến các hoạt động biến đổi, theo nghĩa của Kieran, trong việc giải phương trình bậc hai.

Như chúng tôi đã nói trong phần mở đầu, việc giới thiệu và vị trí của đại số là khác nhau trong giảng dạy trung học, tại Việt nam và Pháp, nhưng các khả năng mong đợi ở học trò hình như gần giống nhau. Do đó các câu hỏi ban đầu của nghiên cứu chúng tôi là:

- Đặc trưng hóa việc dạy đại số như thế nào để hiểu được việc dạy giải phương trình bậc hai trong dạy học trung học tại hai nước?
- Giải phương trình bậc hai được dạy như thế nào tại hai nước?
- Sự thành thạo giải phương trình bậc hai của học sinh Việt nam và Pháp như thế nào?

II. ĐẶT VẤN ĐỀ

II.1. Khung lý thuyết: Lý thuyết nhân chủng học của Didactic

Để có thể phân tích các thực tiễn của học sinh trong việc giải các phương trình bậc hai trong hai hệ thống dạy học, trước hết chúng tôi nghiên cứu xem đại số được học như thế nào trong hai hệ thống đó, cụ thể hơn, chúng tôi tự đặt mình trong khung của Lý thuyết nhân chủng học của Didactic (Chevallard, 1998) để xác định các quan hệ thể chế với tính toán đại số và việc giải phương trình bậc hai của mỗi thể chế hiện hành: V, dạy học trung học tại Việt nam và F, dạy học trung học tại Pháp.

Lý thuyết nhân chủng học của Didactic cho rằng, ở cấp độ sau cùng, mọi hành động của con người bao gồm *hoàn thành một nhiệm vụ* của một kiểu T , nhờ một kỹ thuật τ , được giải thích bằng một công nghệ θ mà cho phép cùng lúc *ngĩ* ra nó, thậm chí *tạo ra* nó, và đến lượt mình, công nghệ được giải thích bằng một lý thuyết Θ .

Nói vắn tắt, nó xuất phát từ định đề mà mọi hoạt động của con người sử dụng một tổ chức mà Chevallard (1998) ký hiệu là $[T/\tau/\theta/\Theta]$ và gọi là *praxéologie*, hay *tổ chức praxéologie*.

Từ *praxéologie* nhấn mạnh cấu trúc $[T/\tau/\theta/\Theta]$: từ gốc hy Lạp *praxis* nghĩa là “thực hành”, gắn liền với khối *thực hành-kỹ thuật* (hay *praxique*) $[T/\tau]$, và từ gốc hy Lạp *logos*, nghĩa là “lập luận”, “phát biểu lập luận”, gắn liền với khối *công nghệ-lý thuyết* $[\theta, \Theta]$.

Các khái niệm này cho phép định nghĩa lại một số khái niệm đang dùng: người ta có thể xem rằng khối $[T/\tau]$ biểu thị cái mà người ta thường chỉ ra bằng tri thức (theo nghĩa hẹp). Chevallard (2002) nêu rõ một *praxéologie* $[T/\tau/\theta/\Theta]$ toàn thể như là một tổ chức tri thức.

II.1.1. Kiểu nhiệm vụ và kỹ thuật

Điểm xuất phát là một *nhiệm vụ* mà ta phải hoàn thành, ví dụ, đối với học sinh: giải một phương trình bậc hai.

Thực tế, nói chung, đây không phải là một nhiệm vụ xuất hiện riêng lẻ, mà là một kiểu nhiệm vụ T : ở đây là giải *một số* phương trình bậc hai.

Vậy, vấn đề là tìm một câu trả lời R cho câu hỏi Q : làm thế nào để hoàn thành nhiệm vụ t kiểu T ? Cụ thể hơn, liên quan đến chúng tôi là trả lời cho câu hỏi: Làm thế nào giải một số phương trình bậc hai?

Vấn đề trước hết là tìm *cách làm*, là cái chúng ta gọi là một kỹ thuật τ . Chẳng hạn, nếu chúng ta xét một kiểu nhiệm vụ con T : “giải một phương trình bậc hai dạng $P \times Q = 0$ ” (P và Q là hai biểu thức bậc nhất), ta có thể sử dụng một trong hai kỹ thuật sau đây:

τ_1 : giải $P=0$ và $Q=0$ và hợp các nghiệm của chúng lại.

τ_2 : khai triển tích, rồi sử dụng biệt số Δ để tính các nghiệm.

II.1.2. Công nghệ và lý thuyết

Cũng cần phải hiểu tại sao kỹ thuật vận hành được, nói cách khác, hợp pháp nó, giải thích cách làm τ : chính là thành phần thứ ba của mô hình mà Chevallard (1988) gọi là *công nghệ*, θ -phát biểu (*logos*) trên kỹ thuật (*techné*).

Nhưng không phải có duy nhất một dạng giải thích có thể: một công nghệ có thể khác tùy theo thể chế trong đó *praxéologie* được xem xét. Chúng tôi sẽ quan tâm điều này trong phân tích của chúng tôi.

II.1.3. Praxéologie toán và didactic

Vì thế ta nhận được một tổ chức praxéologie: $[T/\tau/\theta/\Theta]$, $[T/\tau]$ là *thực hành* – hay còn gọi là *kỹ năng*; $[\theta, \Theta]$ là *logos* – hay còn gọi là *tri thức*.

Theo Chevallard (1998), mô hình trên của praxéologie tạo thành một viên gạch cơ sở. Các viên gạch cơ sở này thường hòa hợp nhau để tạo thành những *praxéologie địa phương* trong đó ta có nhiều kỹ năng được giải thích bởi cùng một tri thức, tạo thành những *praxéologie vùng* trong đó cùng một lý thuyết giải thích nhiều công nghệ, mà đến lượt chúng giải thích nhiều khối kiểu nhiệm vụ/kỹ thuật; và sau cùng là tạo thành những *praxéologie tổng thể* bao gồm nhiều lý thuyết.

Người ta nói đến *praxéologie toán* - hay tổ chức toán học – khi các kiểu nhiệm vụ T thuộc về toán, nói đến *praxéologie didactic* – hay tổ chức didactic – khi các kiểu nhiệm vụ T là các kiểu nhiệm vụ học tập.

Một cách tổng quát, trong một thể chế I cho trước, một lý thuyết Θ trả lời cho nhiều công nghệ θ_j , mà đến lượt mỗi công nghệ giải thích và làm hiểu rõ nhiều kỹ thuật τ_{ij} tương ứng với cùng các kiểu nhiệm vụ T_{ij} . Các tổ chức *bộ phận* vì thế sẽ kết tụ lại, trước hết thành các *tổ chức địa phương*, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, tập trung quanh công nghệ θ đã xác định, tiếp theo thành các *tổ chức vùng*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\Theta]$, hình thành xung quanh một lý thuyết Θ . Xa hơn nữa, Chevallard (1998) gọi tổ chức *tổng thể* là praxéologie phức hợp $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta/\Theta]$ nhận được, trong một thể chế cho trước, bởi sự hòa hợp của nhiều tổ chức vùng tương ứng với nhiều lý thuyết Θ_k .

II.2. Những giả thuyết làm việc đầu tiên và sự trình bày lại mục tiêu nghiên cứu của chúng tôi

Trong nghiên cứu của chúng tôi, chúng tôi tìm cách định nghĩa các *tổ chức vùng* cho phép hoàn thành kiểu nhiệm vụ T : "giải các phương trình bậc hai", trong mỗi thể chế được nghiên cứu : trung học phổ thông tại Việt nam (V) và trung học phổ thông tại Pháp (F).

Đối với mỗi đối tượng O của thể chế I , tồn tại một quan hệ thể chế của thể chế đó với đối tượng đó. Nó « "phát biểu" nhiều thứ được thực hiện "với" O trong I , O được vận dụng trong đó như thế nào, hay còn nữa, theo ngôn từ hình tượng hơn, là "kết quả" của O trong I . » (Chevallard, 1989, tr.213).

Để xác định quan hệ thể chế, người ta có thể thực hiện việc phân tích chương trình, sách giáo khoa và/hay một thực tiễn trong một lớp học đặt dưới các ràng buộc khác liên quan đến sự vận động bên trong của một lớp.

Trong các chương trình, thể chế định nghĩa các đối tượng cho dạy học, những mong đợi của nó bằng ngôn từ các yêu cầu và hướng dẫn, các mục đích sau cùng và cái được thua của việc dạy học. Nhưng chỉ các chương trình thôi không cho phép xác định đầy đủ

quan hệ thể chế với một đối tượng. Phân tích sách giáo khoa là cần thiết, và bổ sung cho phân tích chương trình để tiếp cận được quan hệ thể chế này.

Đặc biệt, khi không cần thiết tiếp cận sự hoạt động thực trong một lớp học, hay khi không thể tiếp cận được, Assude (1996) đã xem một sách giáo khoa như một văn bản tri thức, bằng cách giả thuyết rằng:

“văn bản tri thức đủ đại diện cho một "trung bình được cân bằng cho nhiều ràng buộc" của quan hệ thể chế đối với các đối tượng của tri thức Toán hiện tại trong các hệ thống didactic khác nhau mà các hệ thống đó thực hiện thực sự văn bản tri thức này”.

Điều này khiến chúng tôi lấy lại giả thuyết làm việc do (Chaachoua, 1997) đã lựa chọn.

Giả thuyết làm việc thứ nhất

Quan hệ thể chế có thể tiếp cận bằng phân tích chương trình và sách giáo khoa.

Còn câu hỏi phương pháp luận đặc trưng hóa quan hệ thể chế với đối tượng nghiên cứu, Bosch và Chevallard (1999) giới thiệu khái niệm praxéologie như một câu trả lời cho câu hỏi phương pháp luận này.

“Cái khiếm khuyết, chính là soạn thảo một phương pháp phân tích các thực tiễn thể chế mà cho phép mô tả và nghiên cứu các điều kiện thực hiện. Những phát triển sau cùng của sự lý thuyết hóa sẽ lấp đầy thiếu sót này. Vậy khái niệm chủ chốt xuất hiện là tổ chức praxéologie hay praxéologie. (Bosch và Chevallard, 1999).

Từ đó giả thuyết làm việc thứ hai, mà chúng tôi lựa chọn, từ LE VAN (2001):

Giả thuyết làm việc thứ hai

Nghiên cứu quan hệ thể chế có thể được thực hiện bằng phân tích praxéologie.

Sự trình bày lại lần thứ nhất mục tiêu nghiên cứu của chúng tôi

Trong khung lý thuyết này, chúng tôi sẽ đặc trưng hóa các quan hệ thể chế đối với đối tượng nghiên cứu O của chúng tôi trong hai thể chế, $R_V(O)$ và $R_F(O)$ một cách gián tiếp, một mặt bằng một phân tích so sánh các chương trình hiện hành trong hai thể chế, mặt khác bằng một phân tích praxéologie sách giáo khoa.

Nhưng, trong một thể chế cho trước, quan hệ thể chế đối với một đối tượng O liên quan đến vị trí chủ thể của nó. Trong trường hợp của chúng tôi, chúng tôi quan tâm đến các chủ thể theo vị trí người học sinh, do đó chúng tôi quan tâm đến quan hệ thể chế đối với đối tượng “phương trình bậc hai” với các chủ thể theo vị trí học sinh. Quan hệ này định nghĩa cái mà thể chế đòi hỏi ở học sinh.

Ngoài định nghĩa các quan hệ thể chế $R_V(O)$ và $R_F(F)$, phân tích của chúng tôi có mục đích nhận được các yếu tố có ích, trong mỗi thể chế, cho việc xác định quan hệ thể chế đối với đối tượng “phương trình bậc hai” và cho việc nghiên cứu sự tương hợp của quan hệ cá nhân của học sinh với quan hệ thể chế ở vị trí học sinh đối với đối tượng này – $R_I(e, O)$ (Chevallard, 1992).

Nó dựa trên nghiên cứu, một mặt các praxéologie quan hệ với T trong hai thể chế mà chúng tôi quan tâm đến, mặt khác, các praxéologie quan hệ với T hiện có từ phía học sinh.

II.3. Sự lựa chọn một quan điểm so sánh

Ngoài những nghiên cứu nói trên trong mỗi thể chế V và F, do sự khác nhau hiện có trong việc dạy đại số tại hai nước, sẽ lý thú nếu so sánh các quan hệ cá nhân của học sinh của hai thể chế này đối với việc giải phương trình bậc hai, và trong việc đặt vấn đề về sự tác động của các lựa chọn thể chế trên quan hệ với tri thức của học sinh.

Nghiên cứu so sánh này đã hiện diện trong một chuỗi bốn luận án đồng hướng dẫn của các đồng nghiệp Việt-nam: LÊ T. H. C. (1997) LÊ V. T. (2001), DOAN H. H. (2001) và NGUYEN C. T. (2005).

Ngay từ 1997, LÊ T. H. C. đã trình bày giả thuyết sau trong luận án tiến sĩ của mình:

"Một phân tích so sánh các điều kiện dạy và học vectơ ở lớp 10 tại Việt nam và lớp đệ nhị tại Pháp, cho phép làm rõ các tính cân đối và các khác nhau trong những ràng buộc của việc dạy, và trong các khó khăn của việc học của học sinh". Đặc biệt, nghiên cứu của LÊ T. H. C. dẫn đến hai kết luận sau: "Trong hai thể chế, quan hệ của giáo viên đối với đối tượng tri thức (...) rất gần với quan hệ chính thức trong thể chế mà họ là các chủ thể" (...), "Mỗi thể chế được nghiên cứu biểu hiện những tính chất đặc trưng mà chúng tôi đã chỉ ra tầm quan trọng tương ứng trên các khó khăn của học sinh".

Vào năm 2001, DOAN H. H. nêu rõ rằng "hình như các khó khăn gắn liền với sự tương tự đã liên quan đến học sinh Pháp nhiều hơn là học sinh Việt nam. Sự khác nhau này có thể bắt nguồn từ sự khác nhau của các lựa chọn thể chế mà chúng tôi đã cụ thể hóa trong nghiên cứu trước".

Vào năm 2001, trong phần kết luận của luận án của mình, LÊ V. T tóm lại những đóng góp trong nghiên cứu của mình về quan điểm so sánh: "Qua nghiên cứu này, chúng tôi đã quan tâm đến việc dạy/ học các đối tượng tri thức gắn liền với việc học các phương trình nhờ vào hàm số (đối tượng F-E). Đó chính là:

- Xác định và đặc trưng hóa các đối tượng kiến thức cũng như những điều kiện và ràng buộc sinh thái và sự vận hành của chúng.
- Làm rõ các ràng buộc và khó khăn đặc trưng của giáo viên và học sinh mà là kết quả của các lựa chọn chương trình của hai thể chế dạy học Pháp và Việt-nam.

(...) Nghiên cứu quan hệ thể chế với đối tượng F-E, bằng phân tích praxéologie Toán gắn liền với đối tượng này, cho phép chúng tôi làm rõ những giống nhau, nhưng hầu hết là những đặc thù của việc lựa chọn chương trình của hai thể chế Pháp và Việt-nam về việc học các phương trình nhờ vào các hàm số."

Tám năm sau LÊ T. H. C, chúng tôi lại tìm thấy sự quan tâm về việc phân tích so sánh ở NGUYEN C. T. (2005) mà “giao nhau” trong luận án của mình “hai hệ thống dạy học phổ thông và hai hệ thống dạy học đại học tại Pháp và Việt-nam”, với mục đích:

- khám phá và làm rõ nét các sản phẩm khác nhau và giống nhau của các chuyển tải didactic của cùng các đối tượng tri thức;
- đặt vấn đề về những sự đồng dạng và khác nhau này với các điều kiện và các ràng buộc;
- khởi xướng một danh mục các praxéologie hiện hành và dự kiến những sự phát triển có thể của chúng.”

Chúng ta có thể nhận thấy rằng những phát triển của TAD, và đặc biệt về phân tích praxéologie trong những năm vừa qua, đã cho phép chuyển từ một quan điểm nhận thức (trong đó người ta liên kết việc học của học sinh với những khó khăn gặp phải và những sai lầm phạm phải khi thực hiện các nhiệm vụ với sự can thiệp của các đối tượng tri thức hiện hành) sang một quan điểm khoa học luận trong đó người ta cho rằng “các quy luật chi phối sự phát sinh, phát triển và các điều kiện sử dụng kiến thức toán phổ thông là *một phần của những kiến thức này*” (...) và cho rằng “didactic, được hiểu như những gì liên quan đến việc dạy và học toán ở phổ thông, tích hợp toán và phải được đặt vấn đề và mô hình hóa từ chính nó.”

Chính trong quan điểm khoa học luận này mà đến lượt mình chúng tôi tự đặt mình vào việc nghiên cứu các *praxéologie toán*, về kiểu nhiệm vụ T : “giải phương một trình bậc hai”, của hai thể chế V và F.

Phân tích so sánh của chúng tôi xuất phát từ sự đánh giá của Chevallard (1998) theo đó, trong một thể chế I cho trước, với một kiểu nhiệm vụ t cho trước, thường có ít các kỹ thuật được thừa nhận về mặt thể chế, trừ các kỹ thuật luân phiên có thể ra, thực tế có thể tồn tại trong các thể chế khác. Thông thường cái đi kèm với ảo tưởng là các kỹ thuật thể chế trong I là “tự nhiên”, trái ngược với tập hợp các kỹ thuật lựa chọn có thể mà các chủ thể của I không nhận biết.

Trong bối cảnh này, không phải là câu hỏi đối lập hai hệ thống dạy học xuất phát từ những khái niệm như phong cách quốc gia hay mô hình văn hóa, thấp hơn nữa là sắp xếp tổ chức theo bậc các kết quả thu được từ học sinh của hai quốc gia với các kiểm tra chung, nhưng phải chỉ ra rằng tồn tại những praxéologie khác nhau có thể có và đối với mỗi thể chế được nghiên cứu có thể có các công nghệ mới, kỹ thuật mới và các kiểu nhiệm vụ mới thích hợp hơn.

Điều này đưa chúng tôi đến việc chọn một giả thuyết làm việc thứ ba và trình bày lại mục tiêu nghiên cứu của mình.

Giả thuyết làm việc thứ ba

Một phân tích so sánh, một mặt, dựa trên việc nghiên cứu các praxéologie quan hệ với T của hai thể chế mà chúng tôi quan tâm đến, mặt khác, dựa trên nghiên cứu các praxéologie hiện có từ phía học sinh, sẽ cho phép nhận được các yếu tố có ích cho việc đánh giá các praxéologie toán khác được đề nghị trong mỗi thể chế cũng như sự phát triển có thể có của các praxéologie này.

Từ đó đi đến việc trình bày lại lần thứ hai mục tiêu nghiên cứu của chúng tôi :

« Phân tích didactic so sánh việc giải phương trình bậc hai trong việc dạy học trung học tại Việt-nam và tại Pháp.»

Đặc biệt quan điểm so sánh được chọn lựa cho phép trả lời các một số câu hỏi trên :

- Tính thích đáng của mỗi khối công nghệ-lý thuyết ;
- Tầm hoạt động của các kỹ thuật của các praxéologie được nghiên cứu ;
- Tính đáng tin cậy của các kỹ thuật được học sinh sử dụng (kỹ thuật như thế có thể chấp nhận được không trong những điều kiện sử dụng được gặp ?).

III. PHƯƠNG PHÁP LUẬN

Lý thuyết nhân chủng học của didactic (TAD) nhấn mạnh tầm quan trọng của việc nghiên cứu các cấp độ *đồng xác định didactic* cho việc xác định các điều kiện và ràng buộc tồn tại của một tổ chức toán địa phương.

Điều này dẫn chúng tôi đến xem xét chủ đề : phương trình bậc hai trong các mối quan hệ của nó với *vùng* (tổ chức toán vùng) mà chủ đề nằm trong đó, và với *lĩnh vực* (tổ chức toán tổng thể) mà vùng thuộc vào. Điều này cũng dẫn chúng tôi đến việc nghiên cứu các đề tài (nhân tử hóa, khai triển, v.v.) mà chủ đề kết hợp lại.

Chính là phân tích các chương trình (Phần B, chương B1) mà cho phép, trong trường hợp của hai chương trình Việt nam và Pháp : chúng tôi, trước hết khôi phục lại việc tổ chức chương trình trong hai nước bằng cách làm rõ các mối liên hệ tồn tại giữa các *chủ đề toán* tạo nên chúng, sự khớp nối của chúng với các *vùng* mà chúng nằm trong đó và các *lĩnh vực* mà chúng nhúng vào trong đó.

Tiếp theo chính là một phân tích sách giáo khoa, được dẫn dắt bằng ngôn từ praxéologie Toán tồn tại cho kiểu nhiệm vụ T, mà cho phép chúng tôi cụ thể, rồi so

sánh các quan hệ thể chế đối với việc giải phương trình bậc hai trong V và trong F, và từ đó suy ra cái mong đợi ở học trò trong mỗi thể chế - Quan hệ thể chế theo vị trí người học sinh (Phần B, chương B2).

Trong mục đích nghiên cứu quan hệ cá nhân của học sinh của các thể chế được xem xét đối với tri thức mà chủ đề « phương trình bậc hai » kết hợp lại, chúng tôi thực hiện một thực nghiệm trong đó chúng tôi đặt ra cùng các nhiệm vụ kiểu T mà học sinh phải huy động một số kiến thức đại số của mình cho chúng.

Mục đích của chúng tôi là đặc trưng hóa, bằng ngôn từ kỹ thuật và nếu có thể bằng ngôn từ công nghệ, các praxéologie hiện có ở học sinh của cả hai thể chế, là phân tích các kết quả thu được và các lỗi phạm phải liên quan đến các kỹ thuật được sử dụng, và là phân tích những độ lệch có thể có giữa quan hệ thể chế theo vị trí học sinh và quan hệ cá nhân của học sinh trong hai quốc gia.

Đó chính là mục tiêu của phần C. Trong chương C1, chúng tôi trình bày phân tích tiên nghiệm (a priori), trong C2, tiến trình thực nghiệm và phương pháp tiếp nhận các dữ liệu, trong C3, trường hợp của Việt-nam, và trong C4 trường hợp của Pháp.

Trong các chương C3 và C4, chúng tôi sử dụng phần mềm Aplusix, phiên bản Standard, để tiếp nhận các sản phẩm của học sinh khi giải quyết các nhiệm vụ được đặt ra trong thực nghiệm.

Học sinh giải các bài tập tìm thấy trong một tập tin của Aplusix mà chúng tôi đã chuẩn bị từ trước. Học sinh thực hiện các tính toán chọn lựa của mình trên một trang tính toán. Trang tính toán là vùng giới hạn trong một cửa sổ hiện trên màn hình của máy tính.

Học sinh làm việc với chế độ « Kiểm tra » trong đó phần mềm không cung cấp các thông tin trong suốt quá trình giải quyết các bài tập (đặt biệt trong chế độ này hiển thị sự tương đương hay không tương đương giữa hai giai đoạn bị hủy bỏ) và chỉ cho phép học sinh làm việc trong một thời gian nhất định.

Cuối quá trình giải bài tập, học sinh sẽ khai báo cho phần mềm về tình trạng câu hỏi. Đối với trường hợp giải phương trình, học sinh có thể chọn giữa các mục sau : « đã giải xong », « không có nghiệm », « mọi số đều là nghiệm » hay « Tôi bỏ bài tập này vậy ». Sau cùng, việc làm của học sinh được lưu lại trong một tập tin của Aplusix mà chúng ta có thể quan sát lại sau này.

Aplusix ghi lại tất cả các hành động của học sinh (nhấp chuột, nhấn bàn phím), tập hợp các tham số của một khóa làm bài, và các biểu thức nhận được. Được ghi lại dưới dạng văn bản, chúng có thể được tham khảo trực tiếp, với một bảng hay với máy ghi hình mà sẽ cung cấp dữ liệu cho các phân tích.

Trong phân tích hậu nghiệm, để xác định các kỹ thuật và các lỗi sinh ra trong mỗi bài tập của mỗi học sinh, chúng tôi sử dụng phần « Quan sát việc làm của học sinh » trong

thực đơn « Hoạt động đã qua » để xem lại các bài tập của mỗi học sinh ở dạng sau cùng của chúng và sử dụng « máy ghi hình » để xem lại các chi tiết của các hành động của học sinh đó.

Phần sau cùng (phần D) của công việc chúng tôi sẽ là về những yếu tố trả lời cho các câu hỏi mà chúng tôi đã tự đặt ra, xuất phát từ một sự đối chiếu của tập hợp các kết quả nhận được trong các phần B và C.

PHẦN B

Nghiên cứu của chúng tôi chủ yếu là nghiên cứu về việc dạy hay học đại số, đặc biệt là việc học các phương trình bậc hai một ẩn số ở lớp 8, 9 và 10 tại Việt-nam, ở lớp Độ nhì và Độ nhất tại Pháp.

Để nắm rõ quá trình xây dựng và phát triển của việc dạy học này, chúng tôi thấy rằng cần phải tìm xem các đối tượng của đại số nằm ở đâu trong chương trình (bằng cách dựa vào hệ quy chiếu tri thức bậc học), và trong những đối tượng này thì phương trình nằm ở đâu và được đưa vào như thế nào.

Đặc biệt là vấn đề làm sáng tỏ việc phân tích praxéologie của việc giải phương trình bậc hai mà chúng tôi sẽ đặt ra sau, bằng cách nghiên cứu :

- những sự nối khớp nào gắn kết phương trình với các đối tượng khác và những nối khớp này phát triển như thế nào trong suốt chương trình ?
- các mục đích của việc học phương trình là gì ?

Trước tiên chúng tôi rút ra các mục tiêu của chương trình và các khả năng yêu cầu tại Việt-nam và tại Pháp, cũng như các praxéologie mà phải hay có thể tồn tại trong mỗi quốc gia cho việc giải phương trình bậc hai, rồi chúng tôi phân tích các điểm chung và khác nhau giữa các lựa chọn được thực hiện bởi hai thể chế đang được nghiên cứu (xem chương B1).

Ngược với Pháp, chương trình Việt-nam ít chi tiết hơn, nhưng lại có một tuyển tập duy nhất các sách giáo khoa có vai trò chính thức và được kèm theo một tài liệu hướng dẫn giáo viên. Chúng tôi sử dụng các giải thích dành cho giáo viên trong tài liệu hướng dẫn giáo viên để làm rõ hơn tinh thần của chương trình Việt-nam.

Trong trường hợp của Pháp với chương trình chi tiết hơn, chúng tôi cũng dựa vào các tài liệu kèm theo cho giáo viên để bổ sung cho việc phân tích.

Tiếp theo chúng tôi xem xét (chương B2) chương trình được đưa vào các bộ sách giáo khoa như thế nào để cụ thể hóa mối quan hệ thể chế, xác định và so sánh các praxéologie hiện hữu trong việc dạy phương trình bậc hai trong mỗi một thể chế được nghiên cứu.

Chúng tôi đặc biệt quan tâm đến vị trí được dành cho phương trình bậc nhất và sự phân tích thành nhân tử, rồi việc giải bằng tính toán biệt số, cũng như vị trí khoa học luận trên phương trình : công cụ giải các bài toán (mô hình hóa) so với việc nghiên cứu phương trình như đối tượng toán học.

PHẦN C

I. MỞ ĐẦU PHẦN THỰC NGHIỆM

I.1. Mục đích của phần thực nghiệm

Chính là vấn đề nêu bật các đặc tính quan hệ thể chế của các chủ thể với vị trí người học sinh đối với kiểu nhiệm vụ T “Giải phương trình bậc hai một ẩn số bằng phương pháp đại số”, trong mỗi thể chế V (dạy học trung học phổ thông tại Việt-nam) và F (dạy học trung học phổ thông tại Pháp), và so sánh hệ quả của các lựa chọn thể chế được thực hiện trên các quan hệ của học sinh đối với đối tượng “phương trình bậc hai” trong mỗi một thể chế.

Trong mỗi nước, chính là vấn đề so sánh các praxéologie hiện hữu thực tế “ở học sinh” với các praxéologie được dạy (được xác định trong phân tích các sách giáo khoa của phần B), liên quan đến kiểu nhiệm vụ T.

Để làm việc này, trong phần thực nghiệm của mình, chúng tôi sẽ đặt học sinh vào những tình huống giải các phương trình bậc hai.

Để thu nhận các bài làm của học sinh, chúng tôi sử dụng phần mềm Aplusix.

Xuất phát từ phân tích các bài làm này, đối với mỗi nước, chúng tôi sẽ :

- xác định các kỹ thuật chính được học sinh sử dụng với sự tiến triển theo từng cấp lớp ;
- nghiên cứu các kết quả thu được liên quan với các kỹ thuật được sử dụng ;
- phân tích các kiểu sai lầm gặp phải.

I.2. Các câu hỏi mà thực nghiệm phải trả lời

Trong phần B, chúng tôi đã nêu ra các điểm sau đây :

- Mặc dù các khối tri thức (θ, Θ) khác nhau trong mỗi thể chế : lý thuyết ngầm ngấm trong thể chế V là vành đa thức nhân tử hóa $R[X]$ với hệ số trong R, và trong F, là trường các số thực, nhưng các khối kỹ năng (T, τ) mà chúng tôi quan tâm đến có thể giống nhau và các kỹ thuật τ được dạy là có thể so sánh được.
- Thời gian dành cho mỗi một trong các khối này trong V và F là khác nhau : trong V, có sự nhấn mạnh trên khối tri thức ngay từ những năm đầu của trung học cơ sở, trong khi trong F, người ta dành nhiều thời gian hơn cho khối kỹ năng, và đặc biệt là việc nghiên cứu các kỹ thuật nhân tử hóa khác nhau.

Đặc biệt, thực nghiệm phải cho phép chúng tôi trả lời cho các câu hỏi sau đây :

Các lực chọn thể chế khác nhau này có một số hệ quả sau :

- Ở học sinh có sự sẵn sàng các kỹ thuật đã được dạy ?
- Sự làm chủ các kỹ thuật ?

Nói cách khác, tác động nào của các lựa chọn thể chế trên kỹ năng của học sinh khi đối diện với kiểu nhiệm vụ T ?

I.3. Các ràng buộc mà cuộc thực nghiệm phải tính đến

Bộ tuyển tập các bài tập đặt ra cho học sinh trong hai thể chế phải giống nhau và phải sống được trong mỗi thể chế.

Điều này đưa chúng tôi đến việc lựa chọn một số bài tập tương thích đồng thời với quan hệ thể chế đối với đối tượng « Phương trình bậc hai », hiện diện trong thể chế « dạy học trung học phổ thông ở Việt-nam » và trong thể chế « dạy học trung học phổ thông tại Pháp », và loại trừ ra tất cả các bài tập chỉ tương hợp trong một nước duy nhất.

II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

II.1. Từ các praxéologie vùng đến praxéologie bộ phận

Theo quan điểm cấu trúc, chính tri thức $[\Theta/\Theta]$ cho phép sinh một kỹ thuật τ cho một kiểu nhiệm vụ T cho trước, công nghệ θ cho phép tạo ra và giải thích các kỹ thuật liên quan đến T. Thực tế, trong một thể chế I cho trước, một lý thuyết Θ trả lời cho *nhiều công nghệ* θ_j mà mỗi công nghệ đến lượt chúng giải thích và làm cho rõ nghĩa *nhiều kỹ thuật* τ_{ij} tương ứng với cùng các kiểu nhiệm vụ T_{ij} . Bộ tứ $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta)$ là cái mà người ta gọi là một praxéologie vùng.

Trong phần B, chúng tôi đã rút ra được sự hiện diện của hai praxéologie vùng khác nhau tùy theo các thể chế, V và F :

- Cho thể chế V : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta_v)$, với $j=v_1$ hay v_2
- Cho thể chế F : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta_f)$, với $j=f_1$ hay f_2

Trong đó :

Θ_v : trong $R[X]$, vành nhân tử hóa, giao hoán, có đơn vị và nguyên, mọi đa thức bậc hai ax^2+bx+c với $b^2-4ac \geq 0$ có một phân tích duy nhất thành các nhân tử bất khả quy (đa thức bậc nhất hay còn gọi là nhị thức bậc nhất) và mọi đa thức ax^2+bx+c với $b^2-4ac < 0$ là bất khả quy.

Θ_f : $(R, +, \times)$ là một vành nhân tử hóa trong đó mọi phần tử khác không có một phân tích duy nhất thành các nhân tử bất khả quy và không có ước số của 0, mọi phần tử khác 0 của R là giản ước đối với phép nhân.

θ_{v_1} : Các tính chất của « Phép nhân và chia các đa thức » (các quy tắc phân tích thành thừa số của một đa thức), các tính chất của phép nhân trong R và trong tập hợp $R[X]$ các đa thức với hệ số trong R (các quy tắc khai triển), và đặc biệt là tính chất nguyên của $R[X]$: $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ hay $B(x) = 0$.

θ_{f_1} : Các quy tắc tính toán đại số trong R , đặc biệt là tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và các hằng đẳng thức đánh nhớ, cũng như các tính chất của phép nhân trong R (các quy tắc phân tích thành thừa số khai triển một biểu thức đại số) và đặc biệt là tính chất nguyên của R : $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hay $b = 0$.

θ_{v_2} : θ_{v_1} và tính biệt số và tính toán đại số các nghiệm tùy theo dấu của biệt số.

θ_{f_2} : θ_{f_1} và tính biệt số và tính toán đại số các nghiệm tùy theo dấu của biệt số.

Hai khối (θ_{v_1}, Θ_v) và (θ_{f_1}, Θ_F) cho phép sinh ra hai loại kỹ thuật :

- **$\tau Gfact$** (G như tổng quát, $fact$ như phân tích thành nhân tử) : chính là các kỹ thuật cho phép đưa về việc triệt tiêu một tích của hai đa thức đại số bậc 1, sau khi phân tích thành thừa số,.

- **$\tau R\grave{e}gles$** : chính là các kỹ thuật dựa trên việc áp dụng các quy tắc như : triệt tiêu một tích của các nhân tử (**ProdN**), hay triệt tiêu một bình phương (**CarN**), đẳng thức hóa hai bình phương (**EgaCar**) hay lấy căn bậc hai hai vế của một đẳng thức (**RAC**).

Hai khối (θ_{v_2}, Θ_v) và (θ_{f_2}, Θ_F) cho phép sinh ra hai loại kỹ thuật khác :

- **$\tau Discr$** : Là kỹ thuật sử dụng tính biệt số và các công thức nghiệm cho việc giải phương trình bậc hai dạng chuẩn tắc.

- **$\tau Gd\acute{e}v$** (G như tổng quát, $d\acute{e}v$ như khai triển) : là các kỹ thuật cho phép khai triển biểu thức đại số cho trước để đưa về một phương trình dạng chuẩn tắc.

II.2. Xác định các praxéologie

Đối với chúng tôi hiện giờ chính là nêu bật các đặc tính của mối quan hệ thể chế của các chủ thể của V và F với vị trí người học sinh. Chúng tôi sẽ xác định các tổ chức praxéologie bộ phận đưa chúng tôi đến việc xác định các giá trị nhận được bởi i trong các bộ tứ ở trên.

III. TIẾN TRÌNH THỰC NGHIỆM TẠI VIỆT-NAM VÀ TẠI PHÁP

III.1. Việc chọn lớp

Tại Việt-nam, thực nghiệm đã được thực hiện trong 4 lớp của hai cấp học 9 và 10 : 9-O (lớp thường), 9-S (lớp tuyển), 10-O (lớp thường) và 10-S (lớp tuyển).

Tại Pháp, tương thích với việc nghiên cứu các chương trình được thực hiện trong phần B, thực nghiệm đã được tiến hành trong một lớp *Đệ nhị* (Seconde) và trong một lớp *Đệ nhất S* (Première S, là ban dành cho các học sinh giỏi toán và khoa học sau khi học xong lớp *Đệ nhị* không phân ban, còn các học sinh khác được định hướng vào các ban khoa học kinh tế và xã hội hay ngữ văn và ngoại ngữ).

Vì thế, chúng tôi có thể nghĩ rằng việc phân tích so sánh được thực hiện có thể rất lý thú một bên giữa lớp 9-O và *Đệ nhị*, bên còn lại giữa lớp 10-S và lớp *Đệ nhất*.

III.2. Tổ chức tiến trình thực nghiệm

Trong phân tích tiên nghiệm, chúng tôi đã thiết kế 18 bài tập được xếp vào 5 kiểu nhiệm vụ con Ti ($i=1,...,5$), cho cuộc thực nghiệm. Chúng tôi đã tổ chức cuộc thực nghiệm thành hai kỳ cho mỗi lớp. Để làm điều đó, chúng tôi đã đưa ra trong mỗi kỳ 9 bài tập theo cách đại diện cho tất cả các kiểu nhiệm vụ con. Sau cùng, đối với mỗi kỳ, chúng tôi đã tạo ra 4 danh sách A, B, C và D chứa 9 bài tập nhưng được đặt theo các thứ tự khác nhau để hạn chế thấp nhất việc sao chép nhau của học sinh.

Học sinh phải giải tất cả các bài tập bằng cách sử dụng phần mềm Aplusix. Mỗi học sinh làm việc trên một máy tính. Học sinh có quyền sử dụng các phương tiện sau đây :

- Một tờ giấy tập trắng
- Một viết chì
- Một máy tính đơn giản cho phép thực hiện các phép toán đơn giản : cộng, trừ, nhân và chia (hay một máy tính ảo trên máy vi tính).

Giáo viên đóng vai trò quan sát và không can thiệp vào việc làm của học sinh.

Các học sinh làm việc với chế độ *kiểm tra* trong đó họ không có được các phản hồi của phần mềm trên sự đánh giá việc giải bài của họ.

III.3. Tiếp nhận các dữ liệu

Mỗi học sinh có một tài khoản trong một thư mục mà mọi hành động của học sinh đó trong Aplusix được ghi lại cùng với thời gian. Người ta có thể xem bài giải sau cùng của học sinh dưới dạng một dãy liên tiếp nhau các giai đoạn và cũng như những gì đã làm bên trong từng giai đoạn kể cả những gì mà học sinh đó xóa đi.

III.4. Xử lý các dữ liệu

Việc xử lý các dữ liệu được tiến hành bởi 4 giai đoạn.

III.4.1. Giai đoạn 1 : Đọc các biên bản bài làm của học sinh

Chúng tôi đọc các biên bản bài làm của học sinh bằng máy ghi hình của Aplusix để xác định các kỹ thuật được huy động và các sai lầm có thể xảy ra.

III.4.2.Giai đoạn 2 : Tiếp nhận những gì quan sát được

Xuất phát từ việc đọc các biên bản bài làm của học sinh, chúng tôi rút ra cho mỗi học sinh và mỗi bài tập những gì quan sát được như sau : lời giải của học sinh, các chỉ báo của tình trạng bài giải (đúng, sai, gián đoạn) và sai lầm đầu tiên gặp được trong bài giải.

III.4.3.Giai đoạn 3 : Rút ra các kỹ thuật và lỗi theo từng lớp

Đối với mỗi lớp, và với mỗi bài tập, chúng tôi đã đếm số lần xuất hiện cho mỗi kỹ thuật :

- các kết quả khác nhau thu được ; thành công, sai lầm và gián đoạn
- các loại sai lầm khác nhau gặp được.

III.4.4.Giai đoạn 4 : Rút ra các kỹ thuật và lỗi theo từng học sinh

Đối với mỗi học sinh và mỗi bài tập, chúng tôi đã xác định kỹ thuật huy động, kết quả thu được, và các sai lầm phạm phải.

PHẦN D

MỞ ĐẦU

Mục đích nghiên cứu của chúng tôi là làm rõ tác động chính của các kiến thức đã học của bộ môn đại số trong việc giải phương trình bậc hai. Nghiên cứu này gồm một chiều so sánh giữa một số học sinh của hai thể chế : V (dạy học trung học và cụ thể hơn là lớp 7, 8, 9 và 10 tại Việt-nam) và F (dạy học trung học phổ thông và cụ thể hơn là các lớp đệ tứ, đệ tam, đệ nhị và đệ nhất tại Pháp).

Điều này đưa chúng tôi đến việc tiến hành hai kiểu phân tích nối khớp với nhau. Trước hết chúng tôi đã so sánh các tổ chức toán học trong cả hai thể chế V và F liên quan đến việc dạy « giải các phương trình bậc hai bằng phương pháp đại số » (GPTBH), chủ yếu dựa trên phân tích chương trình và sách giáo khoa. Nghiên cứu này đã cho phép chúng tôi xác định các quan hệ thể chế của mỗi thể chế đối với đối tượng nghiên cứu, và nêu bật các điểm chung và khác nhau trong việc tổ chức các tri thức hiện hành giữa hai thể chế được nghiên cứu (xem phần B).

Sau đó chúng tôi đã phân tích quan hệ cá nhân của học sinh của hai thể chế này liên quan đến đối tượng tri thức GPTBH. Nghiên cứu này dựa trên sự phân tích các kỹ thuật và công nghệ được học sinh lớp 9 và 10 Việt-nam và các lớp đệ nhị và đệ nhất Pháp sử dụng khi giải các phương trình bậc hai chung (xem phần C).

Xuất phát từ các kết quả nhận được trong hai phần này và do sự khác nhau tồn tại giữa việc dạy học đại số trong cả hai nước và giữa hai quan hệ thể chế của V và của F đối với đối tượng GPTBH, chúng tôi nghĩ rất lý thú nếu so sánh các quan hệ cá nhân đối với GPTBH của học sinh mà thực nghiệm của chúng tôi liên quan đến trong hai thể chế, và đặt vấn đề về sự tác động của các lựa chọn thể chế khác nhau trên quan hệ cá nhân của các học sinh này. Đó sẽ là mục tiêu của chương I.

Sau nghiên cứu so sánh này, chúng tôi sẽ trình bày, trong chương II, những kết quả chính nhận được trong nghiên cứu của chúng tôi và những hướng nghiên cứu mở ra trong tương lai.

I. PHÂN TÍCH SO SÁNH CÁC QUAN HỆ CÁ NHÂN CỦA HỌC SINH

Để so sánh mối quan hệ cá nhân với GPTBH (giải phương trình bậc hai) của học sinh của hai thể chế, chúng tôi sẽ phân tích và so sánh các kỹ thuật và công nghệ được sử dụng với các cấp lớp học như sau mà ta có thể xem như là so sánh được cho đối tượng nghiên cứu của chúng tôi:

- Các lớp “thường”: 9-O của V và 2nd (đệ nhị) của F
- Các lớp trong đó học sinh được tuyển chọn: 10-S của V và 1^{er} S (đệ nhất S) của F.

I.1. Phân tích so sánh 9-O và 2nd (Đệ nhị)

Chúng ta hãy nhớ rằng trong thể chế V, các kỹ thuật phân tích thành thừa số được học chủ yếu ở lớp 8 của trung học cơ sở. Chúng được thấy lại ở lớp 9 trong mục đích hoàn thành các công thức nghiệm của phương trình dạng chuẩn tắc $ax^2+bx+c=0$.

Trong thể chế F, chúng được học trong suốt thời gian dài ở trung học cơ sở (lớp đệ tam), nhưng cũng ở cả trung học phổ thông (2^{de} và 1^{er}).

Lớp	9 thường			2 nd (Đệ nhị)		
%	Huy động	Thành công	Gián đoạn	Huy động	Thành công	Gián đoạn
<i>Gfact</i>	44,1	32,9	3,6	70,5	54,6	8,6
<i>Règles</i>	10,8	26,8		22,7	56,7	7,8
<i>Mixtes</i>	25,9	15,3	5,1	0		
<i>Gdév</i>	19,3	0	23,3	6,8	0	77,8

Bảng 1- Tổng kết các kỹ thuật được sử dụng khi giải các bài tập của các kiểu nhiệm vụ T1, T2, T3, T4 và T5

Lớp	9 thường		2 nd (Đệ nhị)	
%	Huy động	Thành công	Huy động	Thành công
<i>Gfact+Règles</i>	54,9	31,7	93,2	55,1
<i>Gdév</i>	19,3	0	6,8	0
<i>Mixtes</i>	25,9	15,3	0	0

Bảng 2 – Gộp chung các kỹ thuật *Gfact* và *Règles* (*ProdN*, *CarN*, *Rac*)

Bảng 2 cho thấy các kỹ thuật mong đợi trong phân tích tiên nghiệm, các kỹ thuật phân tích thành thừa số của hai loại *Gfact* (*Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *IdR_CarN*) và *Règles* (*ProdN*, *CarN*, *Rac*) hiện diện nhiều hơn (93,2% so với 54,9%) và thành công hơn (55,1% so với 31,7%) ở lớp 2nd so với lớp 9-O.

Trong thể chế F, ta có thể nhận thấy sự vắng mặt của các kỹ thuật tạp (*Mixtes*) và ít sự huy động các kỹ thuật *Gdev*. Chúng ta có thể giải thích điều này bởi tầm quan trọng của việc dạy các kỹ thuật phân tích thành thừa số và chỉ đưa vào ở lớp để nhệ việc giải phương trình dạng chuẩn tắc trong đó các hằng đẳng thức đáng nhớ có thể áp dụng cho việc phân tích thành thừa số.

Trong thể chế V, tỷ lệ phần trăm quan trọng (26%) các kỹ thuật tạp (*Mixtes*) cạnh tranh với *Gfact* ở lớp 9 có thể giải thích bởi việc dạy một kỹ thuật mà chúng tôi đã gọi là *Dév_Fact_ProdN*, hay *Déc_Fact_ProdN*. Kỹ thuật này dựa trên sự phân tích thành thừa số của biểu thức dạng chuẩn tắc ax^2+bx+c bởi sự phân đôi của số hạng bx bằng cách tìm hai số m và n sao cho $m+n=b$ và $m \times n = a \times c$. Ở lớp 9-O, để áp dụng kỹ thuật này, học sinh đưa tất cả các phương trình về dạng chuẩn tắc $ax^2+bx+c=0$. Vì thế, học sinh bắt đầu khai triển tất cả các tích của các nhị thức mà không lưu ý đến dạng của phương trình, ngay cả khi phương trình đó có dạng phương trình tích $P(x) \times Q(x) = 0$.

Tỷ lệ phần trăm thành công yếu của kỹ thuật này, như chúng tôi đã nêu rõ, một mặt do nó chỉ thành công trong những điều kiện đặc biệt (tầm ảnh hưởng hẹp của kỹ thuật), mặt khác nó đòi hỏi một sự điều luyện nào đó về biến đổi số trong mỗi giai đoạn.

Mọi thứ diễn ra như là việc dạy kỹ thuật này đã khiến một số học sinh xem dạng chuẩn tắc của phương trình bậc hai như một điểm chuyển bắt buộc đối với việc giải các phương trình này, cái mà đưa đến một ngõ cụt khi ở ngoài tầm hoạt động của kỹ thuật này. Điều này giải thích 20% học sinh của lớp 9-O sử dụng kỹ thuật *Gdev* mà đã đưa đến thất bại.

Liên quan đến những kết quả nhận được, những lỗi lầm chính cùng gặp được trong cả hai thể chế có thể giải thích do :

- việc sử dụng kỹ thuật *Gdev* hợp thức về mặt khoa học, nhưng không thích đáng khi tính đến quan hệ thể chế đối với đối tượng nghiên cứu ;
- việc lạm dụng các kỹ thuật *Simp* và *IsV* (*Fact_IsV* và *Dév_IsV*), chỉ hợp thức trên một miền thu hẹp hơn ;
- không làm chủ được các kỹ thuật cần thiết cho việc giải quyết một số nhiệm vụ hay nhiệm vụ con gặp phải (lỗi về dấu khi chuyển các số hạng cần thiết đối với việc giải phương trình bậc nhất, và khi đặt các thừa số chung, lỗi tính toán, lỗi nhân tử hoá).

Hơn nữa chúng ta có thể lưu ý, chủ yếu ở học sinh của thể chế V, sự « chế tạo ra » các yếu tố công nghệ và các yếu tố này sinh ra một số kỹ thuật giải cho phương trình bậc hai kiểu $A(x) \times B(x) = 0$ và $A(x) \times B(x) = c$. Ở đây chúng tôi nhớ gặp chúng thường xuyên nhất, và biểu lộ nhiều nhất ở học sinh của lớp 9-O.

Đối với phương trình $A(x) \times B(x) = 0$, chúng tôi tìm thấy " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ và $B(x) = 0$ " khi sử dụng các kỹ thuật *ProdN* hay *Fact_ProdN* và *Dév_Fact_ProdN*. Một giải thích có thể do cách viết mang tính hệ thống tập hợp nghiệm $S = \{a, b\}$ trong sách giáo

khoa việt-nam của lớp 8 và 9 như câu trả lời cho nhiệm vụ giải các phương trình. Cách viết này liệt kê các nghiệm khác nhau bao hàm một ngầm ẩn « a và b » mà trở thành tường minh khi biểu thị các nghiệm trong ngôn ngữ tự nhiên : « phương trình có hai nghiệm a và b », như thỉnh thoảng được viết trong sách giáo khoa lớp 8.

Đối với phương trình $A(x) \times B(x) = c$ mà học sinh lớp 9-O quy về từ phương trình ban đầu khi sử dụng các kỹ thuật *Dév_Fact_ProdN*, chúng tôi tìm thấy " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ hay $B(x) = 0$ ", mà cho phép một học sinh đang đứng trước một ngõ cụt tạo ra một kỹ thuật cho phép « giải » phương trình này.

Trong cả hai trường hợp, chúng tôi có thể nghĩ rằng việc chế tạo ra “kỹ thuật ad’hoc”, dựa trên một số “công nghệ ad’hoc”, là do sự không đầy đủ về thời gian dành cho việc học các phương trình tích và các kỹ thuật phân tích thành nhân tử trong thể chế V.

So sánh này đưa chúng tôi đi đến kết luận về:

- sự tương hợp của quan hệ cá nhân học sinh lớp đệ nhị với quan hệ thể chế ở vị trí người học sinh lớp đệ nhị đối với đối tượng GPTBH ;
- sự hiện diện các vấn đề trong việc xây dựng quan hệ cá nhân của một số lượng lớn học sinh lớp 9-O đối với GPTBH.

I.2. Phân tích so sánh 10-S và 1^{re} (Đệ nhất)

Chúng ta nhớ rằng tại Việt-nam, việc giải phương trình bằng cách sử dụng biệt số Δ được đưa vào ngay học kỳ hai của lớp 9 và được sử dụng ở lớp 10 cho việc giải các phương trình dạng chuẩn tắc với hay không có tham số, trong khi tại Pháp, nó chỉ được học ở lớp đệ nhất.

Lớp	10 tuyển			Đệ nhất S		
%	Huy động	Thành công	Gián đoạn	Huy động	Thành công	Gián đoạn
<i>Gfact</i>	21,5	81,6	0	46,7	65,4	0
<i>Règles</i>	12,7	75	0	15,1	80,3	0
<i>Mixtes</i>	2	80	0	0,2	100	0
<i>Gdév</i>	47,7	46,3	1,1	23,8	30,2	37,5
<i>Discr</i>	16,1	75,4	0	14,1	63,2	0

Bảng 3- Tổng kết các kỹ thuật được sử dụng khi giải các bài tập của các kiểu nhiệm vụ T1, T2, T3, T4 và T5

Lớp	10 tuyển		Đệ nhất S	
%	Huy động	Thành công	Huy động	Thành công
<i>Gfact+Règles</i>	34,2	79,2	61,8	69,1
<i>Mixtes</i>	2	80	0,2	100

<i>Gdev+Discr</i>	63,8	53,6	37,9	42,5
-------------------	------	------	------	------

Bảng 4-Gộp chung các kỹ thuật *Gfact* và *Règles* (*ProdN*, *CarN*, *Rac*)

Bảng 4 cho thấy có một sự khác biệt quan trọng trong việc lựa chọn các kỹ thuật được huy động. Các kỹ thuật phân tích thành thừa số mong đợi của hai loại *Gfact* (*Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *IdR_CarN*) và *Règles* (*ProdN*, *CarN*, *Rac*) hiện diện nhiều (61,8%) và thành công nhiều (69,1%) ở lớp đệ nhất. Mặc dù các kỹ thuật này ít hơn ở lớp 10-S, nhưng chúng được huy động thành công hơn ở lớp đệ nhất. Điều này chắc chắn được giải thích bởi việc học sinh lớp 10-S có khả năng phân tích dạng phương trình và lựa chọn kỹ thuật thích hợp hơn dĩ nhiên là những người làm chủ tốt hơn các kỹ thuật khác nhau sẵn có.

Như chúng tôi đã có thể mong đợi sau khi nghiên cứu chương trình và sách giáo khoa lớp 10, các kỹ thuật khai triển tiếp theo là tính biệt số Δ chiếm một số lượng rất lớn ở lớp 10-S. Chúng tôi có thể nhận thấy rằng, mặc dù việc sử dụng các kỹ thuật này đưa đến nhiều thành công ở lớp 10-S hơn là ở lớp đệ nhất, điều mà chúng ta có thể giải thích bởi việc đưa vào việc tính toán biệt số Δ trong V sớm hơn trong F, nhưng tỷ lệ thành công chỉ cao hơn 50% một chút, trong khi lớp 10-S tập hợp các học sinh tuyển chọn của một trong những trường trung học tốt nhất của thành phố.

Sau cùng chúng tôi nhớ rằng kỹ thuật *Discr* chỉ có thể được sử dụng duy nhất trong trường hợp của các phương trình được cho dưới dạng chuẩn tắc (T5) trong khi các kỹ thuật *Gdev* (*Dév_Discr*) có thể là bất kỳ một nhiệm vụ con nào đó mà bài tập được giải gắn liền với nó. Nếu ta quan sát bảng 3, thì nhận thấy rằng, nếu các tỷ lệ phần trăm của kỹ thuật *Discr* có cùng bậc trong V và F (tỷ lệ huy động : 16,1% so với 14,1% ; tỷ lệ thành công : 75,4% so với 63,2%) trong trường hợp phương trình được cho dưới dạng chuẩn tắc trong cả hai lớp, thì đó không phải là trường hợp của các bài tập khác. Thực vậy ta nhận thấy, trong lớp đệ nhất S, một tỷ lệ phần trăm quan trọng (37,5%) trường hợp gián đoạn khi sử dụng các kỹ thuật khai triển được giải thích bởi tính phức tạp, bởi các tính toán khai triển, rồi tính biệt số Δ , và tính các nghiệm sau khi nhận được phương trình chuẩn tắc $ax^2+bx+c=0$ và do học sinh của F ít thời gian được hiệu chỉnh hơn so với học sinh của V trong việc sử dụng các kỹ thuật này.

Ta có thể lưu ý một sự giảm sút mạnh việc sử dụng các kỹ thuật của loại *Mixtes* ở lớp 10-S so với lớp 9-O. Trong những kỹ thuật này, chúng tôi lại tìm thấy *Déc_Fact_ProdN* được sử dụng chủ yếu ở đây cho các bài tập, chẳng hạn như $2x^2+5x-7=0$, mà nó dẫn đến thành công.

Liên quan đến các kết quả nhận được, các sai lầm chủ yếu cùng gặp phải trong cả hai thể chế, như đối với lớp 9-O và đệ nhị, có thể được giải thích do việc :

- lạm dụng các kỹ thuật *IsV* (*Fact_IsV*), hợp thức chỉ trên một miền thu hẹp hơn ;
- không làm chủ các kỹ thuật cần thiết cho việc giải quyết một số nhiệm vụ hay nhiệm vụ con gặp phải (lỗi về dấu khi chuyển cần thiết các số hạng đối với việc giải phương trình bậc nhất, và khi đặt thừa số chung, lỗi tính toán, lỗi nhân tử hoá, lỗi chỉ lấy căn bậc hai dương).

Các phân tích được thực hiện trong các phần C3 và C4, chứng tỏ hơn nữa:

- ở một số học sinh của lớp 10-S sự tồn tại dai dẳng của sử dụng kỹ thuật *Simp*, và sự nhầm lẫn giữa hai liên tử logic : VÀ và HAY (cũng xuất hiện ở lớp đệ nhất S mặc dù rất hiếm,) ;
- ở một số học sinh lớp đệ nhất S, việc sử dụng, đặc biệt là các kỹ thuật *Gdev* và *Dév_Discr*, mà chúng ta có thể giải thích bằng một số « công nghệ ad'hoc » kiểu : $ab+cd=0 \Leftrightarrow ab=0$ hay $cd=0$; $ab+c=0 \Leftrightarrow a=0$ hay $b+c=0$, $-a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0$ hay $b^2=0$, v.v.

Chúng ta có thể kết luận phần này bằng :

- một mặt, sự khẳng định của một sự tương hợp tổng thể của quan hệ cá nhân của học sinh lớp 10-S đối với quan hệ thể chế, đối với đối tượng GPTBH ở vị trí học sinh lớp 10 của V, và của quan hệ cá nhân học sinh lớp đệ nhất S đối với quan hệ thể chế, đối với đối tượng GPTBH ở vị trí học sinh lớp đệ nhất của F ;
- mặt khác, một ghi nhận các vấn đề dai dẳng trong việc xây dựng quan hệ cá nhân đối với GPTBH của một số học sinh của cả hai thể chế.

II. KẾT LUẬN

II.1. Các kết quả chính của luận án

Nghiên cứu quan hệ thể chế đối với đối tượng GPTBH bằng phân tích các praxéologie Toán gắn liền với đối tượng này đã cho phép chúng tôi làm rõ những điểm giống nhau và khác nhau, nhưng hầu hết là những đặc thù của việc lựa chọn chương trình của hai thể chế V và F liên quan đến việc nghiên cứu đại số và đặc biệt đến nghiên cứu việc giải phương trình bậc hai.

II.1.1. Việc dạy Đại số tại hai nước

a) Tại Việt-nam

Đại số được ưu tiên trong chương trình giảng dạy. Nó được nâng lên thành một trong hai lĩnh vực chính của Toán trong các lớp trung học cơ sở và đầu phổ thông trung học. Sự chuyển tiếp từ Số học sang Đại số được thực hiện từ lớp 7 và từ đại số sang giải tích được thực hiện ở lớp 11.

Đại số được giảng dạy chủ yếu trong vai trò *đối tượng nghiên cứu*, phương diện công cụ được phát triển ít. Cụ thể hơn, các đối tượng nghiên cứu là các phép toán (cộng, trừ, nhân và chia) trên các đa thức, phân tích thành nhân tử, khai triển và rút gọn các đa thức.

Trong bối cảnh này, **khái niệm phương trình được định nghĩa như đẳng thức của hai đa thức tại trung học cơ sở và đẳng thức của hai hàm số ở lớp 10 trung học phổ thông**. Việc giải phương trình gồm việc tìm các giá trị của biến số để hai đa thức của hai vế phương trình nhận cùng một giá trị số. Trong trường hợp này, các đa thức và hàm số đa thức nhận cùng một vai trò trong việc học phương trình khi biến số nhận giá trị trong trường số thực.

Trong lĩnh vực Đại số, có vẻ người ta mong muốn rằng học sinh được trang bị cả hai khả năng : *lý thuyết* và *thực hành*, nhưng khả năng lý thuyết quan trọng hơn với các tính chất của một vành giao hoán và nhân tử hoá, và nghiên cứu số nghiệm, giá trị hay/và dấu của các nghiệm theo giá trị của một tham số, các bài toán về việc giải và biện luận phương trình theo giá trị của một tham số có một vị trí quan trọng ở trung học phổ thông.

b) Tại Pháp

Tại Pháp, việc đưa Đại số vào giảng dạy được thực hiện trong một chu kỳ dài hơn tại Việt-nam. Các đối tượng nghiên cứu của Đại số lần lượt xuất hiện trong các lĩnh vực nghiên cứu số, tính toán và hàm số, rồi giải tích.

Ngược lại với Việt-nam, phương diện đối tượng của Đại số không được ưu tiên. Ngược lại là sự nhấn mạnh đặc biệt trong các tài liệu kèm theo cho giáo viên trên tầm quan trọng của phương diện công cụ.

Trong bối cảnh này, khái niệm phương trình được định nghĩa như là một đẳng thức của hai biểu thức chữ (đại số) tại trung học cơ sở và rồi là một đẳng thức của hai hàm số ở lớp Đệ nhị. Việc giải một phương trình gồm việc tìm các giá trị của ẩn số sao cho hai đa thức chữ nhận cùng một giá trị số. Chúng tôi cũng lưu ý sự vắng mặt định nghĩa các tương đương giữa hai phương trình.

II.1.2. Việc dạy giải các phương trình bậc hai

a) Tại Việt-nam

Các công nghệ sinh ra các kỹ thuật phân tích thành nhân tử dựa trên các tính chất của các phép toán trong tập hợp các đa thức.

Việc giải các phương trình bậc hai bằng đồ thị có một vị trí hẹp ở trung học cơ sở và đầu phổ thông trung học, như sự hiện diện của một số ít bài tập được giải bằng kỹ thuật này (xem Phần B). Kỹ thuật đồ thị được gắn liền với bài toán biện luận số nghiệm và dấu các nghiệm của một phương trình bậc hai. Như vậy các kỹ thuật giải phương trình bằng phương pháp đại số thống lĩnh trong V.

Hơn nữa, ngược lại với F, trong V, một vị trí quan trọng ở lớp 10 được dành cho việc nghiên cứu phương trình bậc hai (hay đưa về phương trình bậc hai) chứa tham số và biện luận theo các giá trị của tham số.

Rõ ràng đây chính là những gì giải thích cho việc kỹ thuật sử dụng biệt số được xem như kỹ thuật chủ yếu khi nghiên cứu việc giải các phương trình bậc hai.

Việc sử dụng các kỹ thuật phân tích thành nhân tử (của một đa thức) chỉ được học ở lớp 8 phổ thông cơ sở. Ở lớp 9, việc sử dụng này chỉ được lặp lại như một kỹ thuật cần thiết cho việc chuyển sang kỹ thuật dùng biệt số.

Tầm quan trọng của kỹ thuật biệt số được chứng minh bằng sự hiện diện, ngay ở lớp 9, của một số lượng lớn bài tập mà trong đó các phương trình được cho có dạng chuẩn tắc $ax^2+bx+c=0$ và bằng một phần lớn sách giáo khoa bài học và bài tập được dành cho việc sử dụng kỹ thuật biệt số và các công thức nghiệm.

« Toàn thể sức mạnh » của kỹ thuật dùng biệt số trong V cũng được xác nhận qua việc chúng ta tìm thấy những dấu vết ngấm ẩn của việc sử dụng biệt số trong kỹ thuật phân tích thành thừa số các phương trình dạng chuẩn tắc (được dạy trước kỹ thuật biệt số) trong sách giáo khoa lớp 9 : để phân đôi số hạng bx của phương trình $ax^2+bx+c=0$, thực tế giáo viên dựa trên một lý thuyết và công nghệ (tính chất của tổng và tích các nghiệm, thường được gọi là định lý Viète) mà học sinh không tiếp cận được vì việc dạy biệt số chưa được thực hiện.

b) Tại Pháp

Trước hết chúng ta lưu ý rằng, ngược với V, trong F, kỹ thuật đồ thị (mà nghiên cứu của chúng tôi không liên quan đến) đóng một vai trò quan trọng trong việc giải các phương trình bậc hai. Cũng cần phải lưu ý rằng phương diện *công cụ* của các phương trình bậc hai trong việc mô hình hóa các bài toán được trình bày trong một miền các bộ môn rộng hơn trong V.

Việc giải phương trình đại số bằng phương pháp đại số được tổ chức xung quanh việc giải phương trình tích $P(x) \times Q(x) = 0$. Nói cách khác, để giải một phương trình bậc hai, các kỹ thuật (*Gfact*, *IdR_ProdN*, *Fact_ProdN*,...) được ưu tiên hơn cho phép đưa về phương trình tích và do đó đưa về kỹ thuật triệt tiêu tích (*prodN* hay *CarN*).

Các kỹ thuật phân tích thành nhân tử và việc giải một phương trình bậc hai đưa về phương trình tích chiếm một vị trí rất quan trọng trong F, một mặt, bằng thời gian học dành cho chúng (ở trung học cơ sở rồi trung học phổ thông), mặt khác, bằng một số lượng bài tập dạng này được giải trong suốt ba năm liền.

Chỉ ở lớp Đệ nhất kỹ thuật sử dụng biệt số mới được đưa vào, để giải các phương trình chuẩn tắc $ax^2+bx+c=0$ không quy về phân khai triển của một hằng đẳng thức đáng nhớ. Nhưng ở lớp này, việc nhấn mạnh được đặt trên tầm quan trọng của khả năng phân tích dạng phương trình được cho và kết quả là lựa chọn kỹ thuật hiệu quả nhất và thích hợp nhất để giải phương trình đó. Khả năng này được phát triển bằng các bài tập trong đó học sinh được yêu cầu chọn kỹ thuật thích hợp nhất với phương trình đã cho.

II.1.3. Quan hệ cá nhân của học sinh của hai thể chế V và F đối với đối tượng GPTBH

a) Các sai lầm gắn liền với các kỹ thuật được huy động

Mặc dù khái niệm phương trình được thiết lập trong hai thể chế V và F và dựa trên nền tảng hai lý thuyết khác nhau : vành các đa thức (trong V) và trường số thực (trong F), hay nói cách khác trong hai khối *công nghệ-lý thuyết* khác nhau : (θ_{v1}, Θ_v) et (θ_{f1}, Θ_f) , các sai lầm sinh ra khi giải quyết 5 kiểu nhiệm vụ có thể được giải thích theo cùng ba loại sau : sử dụng một lý thuật hợp thức hóa về mặt khoa học nhưng không thích hợp khi xét đến quan hệ thể chế đối với đối tượng nghiên cứu, chất lượng của chính bản thân kỹ thuật, không làm chủ các yếu tố công nghệ sinh các kỹ thuật cần thiết cho việc giải quyết một số nhiệm vụ hay nhiệm vụ con gặp phải trong việc sử dụng một kỹ thuật hợp thức.

Tuy nhiên, các sai lầm sinh ra trong các lớp Việt-nam được nghiên cứu là thường xuyên và dai dẳng hơn các sai lầm trong hai lớp Pháp tương ứng. Hơn nữa, các sai lầm phạm phải bởi học sinh Việt-nam theo chúng tôi phần lớn có nguồn gốc « khái niệm », chẳng hạn các sai lầm là hệ quả của các công nghệ " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ hay $B(x) = 0$ " hay " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ và $B(x) = 0$ ", trong khi phần lớn các sai lầm phạm phải ở học sinh Pháp theo chúng tôi phần lớn có nguồn gốc « tính toán ».

b) So sánh các quan hệ cá nhân của học sinh Việt-nam và Pháp

Michèle Artaud nhấn mạnh trên « nguyên tắc chỉ đạo của việc *tạo ra các praxéologie toán* : chính là những *chức năng* của các đối tượng mà người ta thao tác phải được đặt ra trước tiên, phải hướng dẫn việc làm tạo ra các câu trả lời. Thực vậy, nguyên lý lý thuyết này can thiệp theo cách chính yếu trong việc nối khớp môi trường công nghệ-lý thuyết với thực tiễn (...) ». Artaud chỉ rõ rằng « khái niệm kiểu nhiệm vụ có một chức năng

chính trong việc phân tích cho phép nhóm các nhiệm vụ được cho là đủ gần. Kích thước của các nhóm tùy thuộc cùng lúc vào các thực tiễn mô hình hóa, vào thể chế mà người ta đặt mình trong đó và vào công việc nghiên cứu đang được tiến hành. »

Chính trong khuôn khổ này mà chúng tôi đã thiết kế cuộc thực nghiệm của mình, bằng cách nhóm lại các bài tập được đặt ra thành năm loại nhiệm vụ con mà trong đó chúng tôi được bảo đảm rằng tất cả các kiểu bài tập đều đã được học trong V và F.

Chúng tôi đã có thể nhận thấy rằng các kỹ thuật được học sinh sử dụng không luôn cho phép nhóm chúng lại theo sự cấu trúc hóa các kỹ thuật mong đợi, điều mà có thể được giải thích, đối với chúng tôi, bởi một sự khác nhau của các quan hệ cá nhân giữa học sinh các lớp Việt-nam và Pháp, chính hệ quả khác nhau của các lựa chọn thể chế của hai nước.

Chúng tôi đã nhấn mạnh trong chương trước về việc ưu tiên như thế nào, trong V, cho việc sử dụng và làm chủ một kỹ thuật thuật toán mà dẫn đến « sự tự nhiên hóa » trong việc xây dựng quan hệ thể chế của kỹ thuật biệt số, và đã không dành đủ chỗ (về số lượng và thời gian dạy/học) cho việc nghiên cứu một số kiểu nhiệm vụ và cho việc giải thích các công nghệ cho phép giải thích và sinh ra các kỹ thuật phân tích thành nhân tử khác nhau hiệu quả hơn *Déc_Fact_ProdN* và *Dév_Discr* khi đối diện với một số kiểu nhiệm vụ nào đó.

Nhưng ở đây cũng cần phải nhấn mạnh rằng sự lựa chọn được thêm vào, trong đó mỗi lần kỹ thuật biệt số được đưa vào thì người ta chỉ đặt ra cho học sinh một số biểu thức dưới dạng dạng chuẩn tắc, mang đến hệ quả là một sự làm chủ tốt kỹ thuật biệt số ở học sinh Việt-nam.

Điều này được thể hiện bằng một mối quan hệ cá nhân đối với việc giải một phương trình bậc hai, là đưa về một phương trình chuẩn tắc rồi sử dụng kỹ thuật biệt số, mà không tự đặt vấn đề lựa chọn có thể một kỹ thuật khác hiệu quả hơn đối với dạng phương trình cần giải ở phần lớn học sinh Việt-nam vào cuối quá trình luyện tập (lớp 10-S).

Ngược lại, ở Pháp, việc lựa chọn được thực hiện nhấn mạnh trên sự đa dạng của các kỹ thuật và trên sự lựa chọn một kỹ thuật tùy theo kiểu nhiệm vụ. Vì thế, một số nhiệm vụ được đặt ra để chỉ cho học sinh thấy phạm vi sử dụng của mỗi kỹ thuật, bao hàm cả sau khi đưa kỹ thuật biệt số vào lớp Đệ nhất S.

Điều này được thể hiện bằng một mối quan hệ cá nhân đối với việc giải một phương trình bậc hai là đưa họ đến việc lựa chọn giữa các kỹ thuật khác nhau có nhiều hay ít hiệu quả tùy theo dạng của phương trình cần giải, hơn là ưu tiên cho một kỹ thuật đặc biệt, nhưng cũng bằng một sự làm chủ kỹ thuật biệt số ở phần lớn học sinh Pháp vào cuối quá trình luyện tập (lớp Đệ nhất S) yếu hơn học sinh của V.

Sau cùng chúng tôi muốn nêu bật việc nhấn mạnh trên sự tiếp cận Đại số thiên về mặt lý thuyết nhiều hơn ở Việt-nam bằng cách ưu tiên phương diện đối tượng mà không đủ để cho học sinh huy động các kỹ thuật thích đáng tùy theo kiểu của nhiệm vụ.

Nói chung, chúng tôi cho rằng, đối với mỗi kiểu nhiệm vụ, điều quan trọng là dẫn dắt một việc làm ở cấp độ các kỹ thuật mà có thể hoàn thành kiểu nhiệm vụ này, và các công nghệ sinh ra và giải thích các kỹ thuật đó.

Thực vậy điều quan trọng là các thể chế ưu đãi cho việc xây dựng các tổ chức vùng đủ để cho học sinh có thể tạo ra những tổ chức vùng khác trước các nhiệm vụ mang tính lập luận trong trường hợp hiện tại bằng sự thích ứng.

II.2. Các hướng mở ra từ luận án

Trong nghiên cứu của chúng tôi, chúng tôi đã thực hiện một phân tích hậu nghiệm (posteriori) các dữ liệu thu nhận được bằng phần mềm Aplusix theo nhất cắt dọc, nghĩa là chúng tôi đã xác định *hình dáng* của mỗi lớp bằng phân tích các kỹ thuật được huy động và sự thành công của chúng.

Việc tiếp tục nghiên cứu của chúng tôi là xác định *hình dáng* của học sinh liên quan đến các kỹ thuật được huy động và đặc trưng các kỹ thuật đó để biết chúng có được áp dụng một cách máy móc hay lập luận hay không. Sự đặc trưng hóa này có thể được nhờ vào máy ghi hình của Aplusix bởi vì ta có thể quan sát việc làm của học sinh trong lòng mỗi giai đoạn với các chỉ báo về thời gian của mỗi hành động của học sinh. Điều này cho phép chúng tôi xác định được những sự do dự, những thay đổi kỹ thuật...

Việc kéo dài thứ hai nghiên cứu của chúng tôi là thiết kế một dự án cho việc xác định tự động các praxéologie và sự năng động hiện hữu của các praxéologie đó ở học sinh, liên quan đến nhiệm vụ « giải phương trình bậc hai một ẩn số bằng phương pháp đại số », xuất phát từ các biên bản mà chúng tôi bố trí trên Aplusix. Lợi ích của việc xác định tự động các praxéologie hiện có ở học sinh là dẫn dắt một số nghiên cứu trên một số lượng lớn và thực hiện một số phân tích so sánh giữa nhiều quốc gia. Sự kéo dài này hiện đang được đăng ký trong một số nghiên cứu hiện thời của dự án Aplusix.

Nghiên cứu của chúng tôi tập trung trên phương diện đối tượng của đại số, giới hạn ở việc giải các phương trình bậc hai bằng phương pháp đại số. Căn cứ vào các phân tích thể chế trong hai thể chế V và F, chúng tôi cho rằng sẽ lý thú nếu kéo dài nghiên cứu của chúng tôi theo hai hướng sau :

- Nghiên cứu kiểu nhiệm vụ « giải các phương trình bậc hai bằng phương pháp đồ thị » và sự nối khớp của nó với việc giải bằng phương pháp đại số ;
- Nghiên cứu phương diện *công cụ* của đại số trong hai thể chế.

PRESENTATION DE LA THESE
EN FRANÇAIS

PARTIE A

INTRODUCTION – PROBLEMATIQUE

INTRODUCTION

Un premier regard sur les programmes et sur les manuels vietnamiens par rapport aux programmes et manuels utilisés dans les lycées français ou dans les lycées internationaux du Viêt-Nam nous a montré une certaine proximité quant aux compétences attendues chez les élèves, malgré des différences importantes portant sur :

- l'importance des différents domaines mathématiques traités (au sens de Chevallard, 1998)
- les thèmes mathématiques étudiés
- la façon de définir les objets d'étude.

Ceci nous a conduit à nous interroger sur l'impact des différents choix institutionnels sur le rapport au savoir des élèves.

Ce questionnement a déjà fait l'objet d'autres travaux comparatifs entre la France et le Viêt-Nam, notamment en ce qui concerne l'enseignement des vecteurs (Le Thi Hoai Chau, 1992), le lien entre fonction et équation (Le Van Tien, 2001), l'enseignement de la géométrie dans l'espace (Doan Huu Hai, 2001) et l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement secondaire (Nguyen Chi Thanh, 2005).

Nous avons choisi de centrer notre travail sur l'enseignement de l'algèbre et plus précisément sur celui de la résolution algébrique des équations du second degré.

Au Viêt-Nam comme en France, l'algèbre joue un rôle important dans l'enseignement des mathématiques au collège et au début du lycée. Mais les choix effectués au Viêt-Nam et en France pour l'enseignement secondaire en algèbre présentent des différences importantes. Ces différences portent sur l'approche de l'algèbre dans sa globalité. En ce qui concerne notre objet d'étude, on trouve par exemple deux approches différentes de la notion d'équation dans les deux institutions.

Dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam, une équation est une *égalité entre deux polynômes* à une *variable* et la résolution de cette équation consiste en la recherche de la (ou des) valeur(s) de cette variable pour que ces polynômes prennent la même valeur numérique.

Dans l'enseignement secondaire en France, une équation est définie par une égalité *de deux expressions algébriques* dans laquelle un nombre inconnu est représenté par une lettre, la résolution de cette équation consistant en la détermination de la (ou des) valeur(s) de la lettre (qui a alors le statut d'*inconnue*) pour que l'égalité soit vraie. La notion d'équation est précédée par les calculs littéraux.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous centrons sur l'étude des choix d'enseignement de l'algèbre effectués dans ces deux institutions différentes, sur les contraintes

institutionnelles que ces choix imposent, ainsi que sur les pratiques en algèbre des élèves formés à partir de ces choix dans chacun des deux pays. Nous avons choisi, pour ce faire, de nous centrer sur l'étude de la résolution des équations du second degré.

PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

I. DELIMITATION DU SUJET

Qu'est-ce que l'algèbre ?

En réponse à des interviews faites en 1990 par Lesley Lee (Kieran, 2001)¹ auprès d'une cohorte de mathématiciens, professeurs, étudiants et chercheurs en éducation mathématique sur cette question, sept thèmes ont émergé :

- L'Algèbre est un sujet scolaire
- L'Algèbre est une arithmétique généralisée
- L'Algèbre est un outil
- L'Algèbre est un langage
- L'Algèbre est une culture
- L'Algèbre est une manière de pensée
- L'Algèbre est une activité.

Selon D. Wheeler (1996)², une difficulté dans la définition de l'algèbre provient de ce que, quand on pense qu'on a bien compris sa nature, d'autres aspects apparaissent et doivent être pris en compte : système symbolique, calcul, système représentatif.

A. Bell (Bell, 1996)³ se demande en quoi les expressions algébriques diffèrent de la langue naturelle. Il précise que les processus de compréhension, de fabrication de significations, sont semblables dans les deux domaines, bien que les expressions algébriques tendent à être plus denses et moins redondantes que les expressions du langage naturel.

Il semble y avoir une vraie différence dans le fait que la langue mathématique et l'algèbre en particulier servent non seulement pour l'expression mais également pour la manipulation. Des transformations syntaxiques des expressions symboliques peuvent être faites mécaniquement et employées à partir d'équivalences, sans établir ces équivalences en travaillant sur les concepts eux-mêmes, alors que les règles syntaxiques dérivent évidemment de la connaissance de ce concept.

Historiquement, l'algèbre a émergé pour traiter des « problèmes arithmétiques » et elle intervient comme outil de résolution de problèmes dans des champs d'intervention divers.

¹ *The core of algebra : Reflection on its Mains Activities*, C. Kieran, 2001, p.1

² *Approaches to Algebra*, N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee, 1996, p.319

³ *Approaches to Algebra*, N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee, 1996, p.169

En 1842, G. H. F. Nesselman a catégorisé le développement historique de symbolisme algébrique en trois étapes :

- L'étape « rhétorique » (avant Diophante, 325-410) se caractérise par l'emploi du langage ordinaire pour résoudre des types particuliers de problèmes, et par l'absence pour représenter les inconnues. L'algèbre rhétorique n'exprime la solution d'un problème sans aucune abréviation ou symbole
- L'étape « syncopée » (De Diophante à la fin du XVI^e siècle) : Diophante ayant introduit l'usage d'abréviations pour désigner les quantités inconnues. L'algèbre syncopée emploie des abréviations de sténographie pour certaines des opérations, des quantités, et des relations plus fréquemment utilisées.
- L'étape « algèbre symbolique » (A partir de Viète) : les lettres sont utilisées également pour désigner les données : il devient alors possible d'exprimer des solutions « générales », et d'utiliser l'algèbre comme outil pour prouver des règles de calcul.

Dans l'enseignement des mathématiques, l'algèbre a pris une place importante en privilégiant le registre symbolique. De nombreux travaux se sont intéressés à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Parmi ceux-ci, nous présentons brièvement ceux qui nous permettent de mieux cerner notre sujet d'étude.

I.1. L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre

I.1.1. Deux dimensions de l'algèbre : outil/objet

A partir de la distinction générale introduite par Régine Douady (1984) entre la dialectique *outil / objet* dans les concepts mathématiques, Brigitte Grugeon (1995) propose une organisation du savoir algébrique élémentaire autour de deux dimensions principales :

"Une dimension outil : l'algèbre est alors considéré comme un outil pour résoudre des problèmes émergeant dans des contextes internes ou externes aux mathématiques.

Une dimension objet : l'algèbre est alors considéré comme un ensemble structuré d'objets : inconnues, variables, paramètres, équations, inéquations, fonctions,..., doté de propriétés, de modes de traitement en particulier de nature formelle, de modes de représentations permettant ces traitements : écritures algébriques, graphes, notations fonctionnelles,... Le savoir algébrique s'exprime alors en termes de statut d'objets algébriques, de compétences à les manipuler et à articuler leurs attributs syntaxiques et sémantiques." (Grugeon, 1995)⁴.

⁴ *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première*, Thèse de doctorat, Université Paris VII-Denis Diderot, Grugeon, 1995, p.23

On retrouve cette double dimension de l'algèbre, avec imbrication des développements simultanés de l'objet et de l'outil, dans le développement historique de l'algèbre.

En ce qui nous concerne nous nous intéressons à la dimension objet dans l'enseignement de l'algèbre. Cette dimension étant organisée, d'une part autour des transformations des expressions algébriques et d'autre part de la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes linéaires.

I.1.2. Les objets de l'algèbre

Comme pour tout concept mathématique, on travaille sur les objets de l'algèbre à travers des registres sémiotiques (Duval, 1993). Comme le registre de la langue naturelle, le registre graphique, le registre symbolique... L'enseignement de l'algèbre privilégie le registre symbolique qui s'appuie sur l'usage des lettres et des signes qui représentent les opérations (+, -, x ...) et des relations entre des expressions algébriques (=, <...).

Les signes de ce registre sont utilisés en arithmétique, bien avant l'introduction de l'algèbre, mais avec des statuts différents. Nous présentons ci-dessous trois objets importants pour l'étude de l'algèbre élémentaire.

a) La lettre

En arithmétique, les lettres désignent des unités de mesure ou des objets. Par exemple 5g désigne une masse de 5 grammes. Lors du passage à l'algèbre les lettres désignent des nombres (cf. Booth 1984, Kieran 1991), et l'expression 5g peut être interprétée par $5 \cdot g$ où g désigne un nombre.

Une classification des différents statuts des lettres a été proposée par Küchemann (1981) où il distingue :

- la lettre évaluée : on la remplace par une valeur numérique,
- la lettre non considérée : la lettre est ignorée dans le calcul,
- la lettre objet concret : la lettre est une étiquette,
- la lettre inconnue spécifique : la lettre désigne un nombre inconnu à rechercher,
- la lettre nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs,
- la lettre variable : la lettre est utilisée dans un contexte fonctionnel.

Historiquement, la notion d'inconnue s'est développée avant la notion de variable : des lettres ont été employées pour représenter une valeur inconnue avant qu'elles aient été utilisées pour représenter un ensemble de valeurs. De même, dans l'enseignement de l'algèbre, les lettres représentent d'abord des inconnues avant de représenter des variables.

b) L'expression algébrique

Comme nous l'avons dit plus haut, les expressions algébriques utilisent des éléments : nombres, lettres et signes opératoires qui appartiennent aussi à l'arithmétique.

"En arithmétique, les chaînes de nombres et d'opérations sont considérées comme des procédures visant à produire une réponse.

En algèbre, au contraire, les symboles écrits (expressions, équations, fonctions) ont du sens par eux-mêmes, indépendamment des procédures qu'ils représentent dans la résolution de problèmes. Pourtant, ils utilisent les signes usuels d'opérations : la procédure fait partie de l'objet. Ainsi $a+b$ indique à la fois une procédure (additionner a à b) et un résultat (somme de a et b)" (Pressiat, 1996)⁵.

Cette distinction rejoint les travaux de Sfard (1991) qui propose de distinguer deux conceptions principales pour une expression algébrique : soit de façon structurale, comme un objet, soit de façon opérationnelle, comme un processus tout en soulignant que, dans une activité mathématique, on articule ces deux conceptions en fonction des besoins.

D'autres recherches montrent que l'activité mathématique nécessaire à la résolution des problèmes algébriques met en jeu à la fois un niveau syntaxique et trois niveaux sémantiques (Nicaud, 1994). L'étude de ces trois niveaux sémantiques permet d'analyser l'évolution du sens du calcul algébrique :

- niveau 1 : attribution de valeurs aux variables intervenant dans une expression algébrique,
- niveau 2 : transformation d'une expression en une expression équivalente (développement, factorisation) par un calcul direct,
- niveau 3 : organisation des étapes d'un calcul algébrique à l'aide d'un raisonnement stratégique.

Nicaud (1993) considère qu'« on effectue un réel travail d'algèbre lorsqu'une partie significative de l'activité se situe à ce niveau (troisième niveau sémantique). Sans cela, l'algèbre est utilisée comme une simple notation. »⁶

De son côté, Drouhard (1992) s'appuie sur les concepts de sens, dénotation, interprétation et connotation, empruntés à Frege (1971) pour analyser le traitement des expressions symbolique de l'algèbre élémentaire et les transformations formelles de la réécriture. Ainsi, les deux expressions algébriques : $(x+1)^2$ et x^2+2x+1 ont la même dénotation, mais non le

⁵ *Les débuts de l'algèbre au collège*, G. Combier, J. C. Guillaume et A. Pressiat, INRP, 1996, p.10

⁶ Nicaud J.F., 1993, Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX. *Rapport de recherche* n°859, Paris 11, Université de Paris Sud.

même sens. Seule, la première nous montre que l'expression est toujours positive, par exemple. Le traitement d'une expression dépend de son *sens*, mais il s'effectue en conservant sa *dénotation*. En particulier, lors de la résolution des équations du second degré, le choix des traitements des expressions algébriques (factorisation ou développement) exige un retour au *sens*.

Une expression a pour *interprétation* dans un cadre donné tout objet qui "correspond" à la dénotation de cette expression dans ce cadre. Par exemple, l'expression $5x$ n'a pas la même interprétation dans le cadre algébrique ou le cadre des fonctions.

Selon Drouhard, la *connotation* est tout ce qui fait qu'un élève perçoit et interprète une expression algébrique de manière personnelle, qui dépend de son expérience scolaire, des situations au cours desquelles il a manipulé cette expression ou d'autres expressions.

c) *Le signe d'égalité*

Le signe d'égalité a un double statut. Il peut désigner soit un résultat, soit une relation d'équivalence. En arithmétique, il a le statut d'annonce d'un résultat alors qu'en algèbre il traduit une relation d'équivalence, notamment dans les équations. Il y a donc en même temps continuité et rupture entre l'arithmétique et l'algèbre.

Vergnaud (1987) met en évidence des difficultés que cela entraîne pour les élèves dès le début de l'enseignement de l'algèbre : le statut d'annonce d'un résultat est à l'origine d'écritures bien connues des enseignants où pour calculer $12+3+5$, les élèves écrivent : $12+3=15+5=20$ où la symétrie et la transitivité de l'égalité ne sont pas respectées. Cela est aussi à l'origine d'erreurs du type $7x+3x^2=10x^3$.

I.1.3. Les différents types d'activités algébriques

Kieran (1996, 2001)⁷ développe un modèle de l'activité algébrique dans lequel elle distingue "trois activités cruciales de l'algèbre scolaire : *Générative*, *Transformationnelle*, et *Globale/Meta-niveau*".

Activités Génératives :

Cette activité comporte la formation des expressions et des équations qui sont les objets de l'algèbre. Trois exemples typiques de l'activité générative sont donnés par l'auteur :

- Equation à une inconnue modélisant une situation problème
- Expressions généralisant une relation entre éléments géométriques ou séquences numériques
- Expressions prouvant des propriétés arithmétiques.

⁷ *The core of algebra : Reflection on its Mains Activities*, C. Kieran, 2001, p.3

Activités transformationnelles :

Ces activités concernent essentiellement le changement de la forme d'une expression ou d'une équation tout en respectant l'équivalence. L'auteur signale des recherches portant sur ce type d'activité (par ex. Cerulli & Mariotti, 2001 ; Lagrange 2000).

Activités Globale/Méta-niveau mathématique

Dans ces activités, algèbre est utilisée comme un outil. Ces activités comportent des activités de résolution du problème, de modélisation de structure, d'étude de changement, de preuve, et de prédiction qui peuvent être engagées sans exiger aucune algèbre. En fait, du point de vue du curriculum, les activités Globale/Méta-niveau ne peuvent pas être séparées des autres activités, en particulier des activités génératives, sous peine de perdre l'objectif algébrique.

Toujours selon Kieran (2001)⁸, les manuels d'algèbre ont souligné traditionnellement les aspects transformationnels de l'activité algébrique en réservant plus d'attention aux règles suivies dans la manipulation des expressions symboliques et des équations qu'aux notions conceptuelles qui supportent ces règles ou aux bases structurales qui donnent sens aux expressions ou équations manipulées.

« French Brevet places emphasis on mathematical structure in that pupils are asked to present some answer in a particular form as opposed to being asked to complete the process of computation" (Surtherland, 1995)⁹.

Une des forces de l'algèbre est alors que, pour les experts, la plupart des activités transformationnelles peuvent être exécutées dans ce qui apparaît de manière plus automatique.

I.2. Questions de départs

Dans notre travail, nous centrons notre étude sur l'aspect objet de l'algèbre où les élèves doivent manipuler des expressions algébriques dans le registre symbolique doté d'une sémantique et d'une syntaxe. Plus précisément, nous nous intéressons aux activités transformationnelles, au sens de Kieran, dans la résolution des équations du second degré.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, la présentation et la place de l'algèbre sont différentes dans l'enseignement secondaire, au Viêt Nam et en France, mais les compétences attendues des élèves semblent être proches. D'où les questions à l'origine de notre travail :

- Comment caractériser l'enseignement de l'algèbre de manière à comprendre celui de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire des deux pays ?

⁸ *The core of algebra : Reflection on its Mains Activities*, C. Kieran, 2001, p.5

⁹ *Teaching and Learning-Algebra pre-19, Royal Society/JMC Working Group Report*, 1995, p.14

- Comment est enseignée la résolution des équations du second degré dans les deux pays ?
- Qu'en est-il de la maîtrise de la résolution des équations du second degré chez les élèves vietnamiens et français ?

II. PROBLEMATIQUE

II.1. Cadre théorique : la Théorie Anthropologique du Didactique

Afin de pouvoir ensuite analyser les pratiques des élèves dans la résolution des équations du second degré dans les deux systèmes d'enseignement, nous étudions d'abord comment l'algèbre y est étudiée, plus précisément, nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998) pour déterminer les *rapports institutionnels* au calcul algébrique et à la résolution des équations de chacune des deux *institutions* en jeu : V, enseignement secondaire au Viêt-Nam et F, enseignement secondaire en France.

La théorie anthropologique du didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche* t d'un certain *type* T , *au moyen* d'une *technique* τ , justifié par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui a son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ .

En bref, elle part du postulat que toute activité humaine *met en œuvre* une organisation que Chevallard (1998) note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'il nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*.

Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation $[T/\tau/\theta/\Theta]$: le grec *praxis*, qui signifie « pratique », renvoie au bloc *practico-technique* (ou praxique) $[T/\tau]$, et le grec *logos*, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au *bloc technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$.

Ces notions permettent de redéfinir certaines notions courantes : on peut considérer que le bloc $[T/\tau]$ représente ce que l'on désigne habituellement par savoir-faire, et que le bloc $[\theta, \Theta]$ représente ce que l'on désigne usuellement par savoir (au sens restreint). Chevallard, (2002) désigne alors une praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ tout entière comme étant une organisation de savoir.

II.1.1. Type de tâches et techniques

Le point de départ est une *tâche* que l'on a à accomplir, par exemple, pour un élève : résoudre *une* équation du second degré.

En fait, en général, ce n'est pas une tâche toute seule qui apparaît, mais un type de tâches T : ici, résoudre *des* équations du second degré.

Il s'agit donc de trouver une réponse R à la question Q : comment accomplir les tâches t du type T ? Plus précisément, en ce qui nous concerne, à la question : Comment résoudre des équations du second degré ?

Il s'agit d'abord de trouver une *manière de faire*, c'est ce qu'on appelle une *technique* τ .

Par exemple, si l'on considère le sous-type de tâche T : « résoudre une équation du second degré de la forme $P \times Q = 0$ » (où P et Q sont deux expressions du premier degré), on peut utiliser l'une ou l'autre des techniques suivantes :

τ_1 : résoudre $P = 0$ et $Q = 0$ et assembler leurs solutions.

τ_0 : développer le produit, puis utiliser le discriminant Δ pour calculer les solutions

II.1.2. Technologies et théories

Il faut également comprendre pourquoi cette technique marche, autrement dit, la légitimer, justifier la manière de faire τ : c'est la troisième composante du modèle, que Chevallard (1998) appelle la *technologie*, θ - discours (*logos*) sur la technique (*techne*).

Mais il n'y a pas une seule forme de justification possible : une technologie peut différer suivant l'institution dans laquelle la praxéologie est observée. Nous y serons vigilants dans nos analyses.

II.1.3. Praxéologies mathématique et didactique

On obtient ainsi une organisation praxéologique : $[T/\tau/\theta/\Theta]$, $[T/\tau]$ étant la *pratique* – ou encore le *savoir-faire* ; $[\theta/\Theta]$ le *logos* – ou encore le *savoir*.

Ce modèle de la praxéologie constitue une brique élémentaire. Ces briques élémentaires viendront en général s'amalgamer pour constituer des *praxéologies locales* dans lesquelles on aura plusieurs savoir-faire justifiés par le même savoir, des *praxéologies régionales* où la même théorie justifiera plusieurs technologies, qui à leur tour justifieront plusieurs blocs type de tâches/technique ; des *praxéologies globales* enfin qui comprendront plusieurs théories selon Chevallard (1998).

On parle de *praxéologie mathématique* – ou d'organisation mathématique – lorsque les types de tâches T relèvent des mathématiques, de *praxéologie didactique* – ou d'organisation didactique – lorsque les types de tâches T sont des types de tâches d'étude.

Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à *autant de types de tâches* T_{ij} . Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en *organisation locales*, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en *organisations régionales*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ . Au-delà, Chevallard (1998) nomme organisation *globale* le complexe praxéologique

$[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta/\Theta]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k .

II.2. Premières hypothèses de travail et reformulations de notre objet d'étude

Dans notre travail, nous cherchons à définir les organisations régionales permettant d'accomplir le type de tâches T : résoudre des équations du second degré, dans chacune des institutions étudiées, l'enseignement secondaire au Viêt-Nam (V) et l'enseignement secondaire en France (F).

Pour chaque objet O de l'institution I, il existe un rapport institutionnel de cette institution à cet objet. Celui-ci « "énonce" en gros ce qui se fait, dans I, "avec" O, comment O y est mis en jeu, ou encore, en termes plus imagés, ce qui est le "destin" de O dans I. » (Chevallard, 1989, p.213)¹⁰.

Pour déterminer le rapport institutionnel, on peut procéder à l'analyse des programmes, des manuels et/ou d'une réalisation effective dans une classe, cette dernière étant soumise à d'autres contraintes relatives au fonctionnement interne d'une classe.

Dans les programmes, l'institution définit les objets à enseigner, ses attentes en termes d'exigences et de recommandations, les finalités et les enjeux de l'enseignement. Mais les programmes seuls ne permettent pas de définir complètement le rapport institutionnel à un objet. L'analyse des manuels est nécessaire, et complémentaire de l'analyse des programmes, pour accéder à ce rapport institutionnel.

En particulier, lorsque l'accès au fonctionnement effectif dans une classe n'est pas nécessaire, ou n'est pas accessible, Assude (1996, p.50)¹¹ a considéré un manuel comme un texte de savoir, en supposant que :

“ le texte du savoir est assez représentatif d'une « moyenne pondérée à plusieurs contraintes » du rapport institutionnel aux objets de savoir mathématiques présents dans les différents systèmes didactiques qui réalisent effectivement ce texte de savoir.”

Ceci nous conduit à reprendre une hypothèse de travail adoptée par (Chaachoua, 1997, p.47)¹² . **Hypothèse de travail 1** : *Le rapport institutionnel peut être approché par l'analyse des programmes et des manuels.*

¹⁰ Chevallard Y., 1989, Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, n°108, 1988-1989, pp. 211-236.

¹¹ Assude T., 1996, De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol 16/1, pp.47-72

Reste la question méthodologique de la caractérisation du rapport institutionnel à notre objet d'étude. Bosch et Chevallard (1999) présentent le concept de praxéologie comme une réponse à cette question méthodologique :

"Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*. (Bosch et Chevallard, 1999, p.85)¹³.

D'où la deuxième hypothèse de travail, que nous adoptons, à la suite de LÊ VAN (2001) :

Hypothèse de travail 2

L'étude du rapport institutionnel peut être effectuée par l'analyse praxéologique.

Première reformulation de notre objet d'étude

Dans ce cadre théorique, nous caractérisons les rapports institutionnels à notre objet d'études O dans les deux institutions, $R_V(O)$ et $R_F(O)$, par le biais d'une part d'une analyse comparative des programmes en cours dans les deux institutions, d'autre part d'une analyse praxéologique des manuels.

Mais, dans une institution donnée, le rapport institutionnel à un objet O est relatif à la position de ses sujets. Dans notre cas, nous nous intéressons aux sujets en position élève, donc au rapport institutionnel à l'objet « équation du second degré » pour les sujets en position élève. Ce rapport définit ce que l'institution exige de l'élève.

Au-delà de la définition des rapports institutionnels $R_V(O)$ et $R_F(O)$, notre analyse a pour but d'obtenir des éléments utiles, dans chacune des deux institutions, à la détermination du rapport institutionnel à l'objet "équation du second degré" et à l'étude de la conformité du rapport personnel des élèves au rapport institutionnel en position d'élève à cet objet – $R_I(e, O)$. (Chevallard, 1992). Elle repose sur l'étude, d'une part des praxéologies relatives à T dans les deux institutions auxquelles nous nous intéressons, d'autre part, des praxéologies relatives à T existantes du côté des élèves.

¹² Chaachoua H., 1997, *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*, Thèse de doctorat, université Joseph Fourier, Grenoble.

¹³ Chevallard Y., Bosch M., 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19/1, pp. 77-124

II.3. Le choix d'une perspective comparative

Au delà des études précédentes au sein de chacune des deux institutions V et F, il est intéressant, étant donné la différence existante entre l'enseignement de l'algèbre dans les deux pays, de comparer les rapports personnels des élèves de ces deux institutions à la résolution des équations du second degré, et de nous interroger sur l'impact des différents choix institutionnels sur le rapport au savoir des élèves.

Cette étude comparative s'inscrit dans la suite des quatre thèses en cotutelle de nos collègues vietnamiens : LÊ THI (1997), LÊ VAN (2001), DOAN HUU (2001) et NGUYEN (2005).

Dès 1997, LÊ THI H.C. formulait, dans sa thèse de doctorat¹⁴, l'hypothèse suivante :

« Une analyse comparative des conditions de l'enseignement et de l'apprentissage des vecteurs, en classe de dixième au Viêt-Nam et de seconde en France, permettra de mettre en évidence des régularités et des différences dans les contraintes de l'enseignement, et dans les *difficultés*¹⁵ d'apprentissage des élèves ». Son travail l'a conduite notamment aux deux conclusions suivantes : « Dans les deux institutions, le rapport des enseignants à l'objet de savoir en jeu (...) reste très proche du rapport officiel dans l'institution dont ils sont les sujets » (...) « Chacune des institutions étudiées présente des caractéristiques spécifiques dont nous avons montré le poids respectif sur les *difficultés*¹⁶ des élèves ». ¹⁷

En 2001, DOAN Huu¹⁸ signale qu'il « semble que les *difficultés*¹⁹ liées à l'analogie touchent plus les élèves français que les élèves vietnamiens. Cette différence peut procéder de la différence des choix institutionnels que nous avons précisé dans l'étude précédente »

En 2001, LÊ Van revient, dans les conclusions de sa thèse²⁰, sur les apports dans son travail de la perspective comparative : « Nous nous sommes intéressé, tout au long de ce

14 LÊ Thi Hoai Châu, 1997, *Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de 10^e au Vietnam et la classe de seconde en France*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, p. 48

15 C'est nous qui soulignons

16 C'est nous qui soulignons

17 LÊ Thi Hoai Châu, 1997, p. 254

18 DOAN Huu Hai, 2001, *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, p.237

19 C'est nous qui soulignons

20 LÊ Van, 2001, *Etude didactique de lien entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-Nam*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, p.323

travail, à l'enseignement / apprentissage des objets de connaissance liés à l'étude des équations à l'aide des fonctions (objet F-E). Il s'agissait :

- d'identifier et de caractériser ces objets de connaissance ainsi que les conditions et contraintes de leur genèse et de leur fonctionnement.
- de mettre en évidence les contraintes et les *difficultés*²¹ spécifiques des enseignants et des élèves qui résultent des choix curriculaires de deux institutions d'enseignement française et vietnamienne.

(...) L'étude du rapport institutionnel à l'objet F-E, par l'analyse des praxéologies mathématiques liées à cet objet, nous a permis de mettre en évidence des ressemblances, mais surtout des spécificités des choix curriculaires des deux institutions française et vietnamienne en ce qui concerne l'étude des équations à l'aide des fonctions. »

Huit ans après LÊ THI, nous retrouvons cette même préoccupation d'analyse comparative chez NGUYEN C.T. (2005) qui « croise », dans sa thèse²², « deux systèmes d'enseignement secondaire et deux systèmes d'enseignement supérieur, en France et au Viêt-Nam, » avec, pour but :

- « de dévoiler et de caractériser les produits différents et semblables des transpositions didactiques des mêmes objets de savoir ;
- de questionner ces similitudes et ces différences en termes de conditions et de contraintes ;
- d'initier un répertoire des praxéologies existantes et d'envisager leurs développements possibles.»

Nous pouvons constater que les avancées de la TAD, et notamment de l'analyse praxéologique ces dernières années, ont permis le passage d'une perspective encore cognitiviste (où on reliait les *apprentissages* des élèves aux *difficultés* rencontrées et aux *erreurs* commises lors de la réalisation de tâches où interviennent les objets de savoir en jeu) à une perspective épistémologique dans laquelle on considère que « les lois qui régissent la genèse, le développement et les conditions d'utilisation des connaissances

²¹ C'est nous qui soulignons

²² NGUYEN C.T., 2005, *Etude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, p. 7

mathématiques scolaires *font partie de ces connaissances* »²³ (...) et qui considère « que le didactique, entendu comme ce qui est relatif à l'enseignement et l'apprentissage scolaire des mathématiques, intègre le mathématique et doit être questionné et modélisé à partir de celui-ci. »²⁴

C'est dans cette perspective épistémologique que nous nous plaçons pour étudier à notre tour les *praxéologies mathématiques*, à propos du type de tâches T " résoudre une équation du second degré", des deux institutions V et F.

Notre analyse comparative part du constat de Chevallard (1998) selon lequel, dans une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion de techniques alternatives possibles, qui peuvent exister effectivement dans d'autres institutions. Ce qui s'accompagne en général de l'illusion que les techniques institutionnelles dans I sont « naturelles » par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles que les sujets de I ignorent.

Dans ce contexte, il n'est pas question d'opposer deux systèmes d'enseignement à partir de notions comme celles de style national ou de modèle culturel, encore moins de hiérarchiser les résultats obtenus par les élèves des deux pays à des tests communs, mais de montrer qu'il existe différentes praxéologies possibles et peut-être, pour chaque institution étudiée, de *nouvelles technologies*, de *nouvelles techniques* et de *nouveaux types de tâches* mieux appropriés.

Ceci nous conduit à l'adoption d'une troisième hypothèse de travail et à une dernière reformulation de notre objet d'étude.

Hypothèse de travail 3

Une analyse comparative, reposant sur l'étude, d'une part des praxéologies relatives à T des deux institutions auxquelles nous nous intéressons, d'autre part, des praxéologies existantes du côté des élèves, permettra d'obtenir des éléments utiles à l'évaluation des différentes praxéologies mathématiques proposées dans chacune des institutions ainsi qu'à l'amélioration éventuelle de ces praxéologies.

D'où la deuxième reformulation de notre objet d'étude :

« Analyse didactique comparative de la résolution des équations du 2nd degré dans l'enseignement secondaire au Viêt-Nam et en France. »

²³ Bosch M. , Gascon J. , 2001, Organiser l'étude 2 : théories et empiries, *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques*

²⁴ Idem

La perspective comparatiste adoptée permettra de répondre notamment à des questions sur :

- la *pertinence* de chaque bloc technologico-théorique ;
- la *portée* des techniques des praxéologies étudiées ;
- la *fiabilité* des techniques mises en œuvre par les élèves (telle technique est-elle acceptable dans les conditions d'emploi rencontrées ?).

III. METHODOLOGIE

La théorie anthropologique du didactique (TAD) met l'accent sur l'importance de l'étude des niveaux de *codétermination didactique* pour la détermination des conditions et contraintes d'existence d'une organisation mathématique locale.

Ceci nous conduit à considérer le thème : équations du second degré dans ses relations avec le *secteur* (organisation mathématique régionale) dans lequel il se situe, et le *domaine* (organisation mathématique globale) auquel ce secteur appartient. Ceci nous conduit également à étudier les sujets (factorisation, développement, etc.) que le thème amalgame.

C'est l'analyse des programmes (Partie B, Chapitre B1) qui nous permet de le faire, dans le cas des deux programmes vietnamien et français : nous reconstituons d'abord l'organisation du curriculum dans les deux pays en mettant en évidence les filiations existant entre les *thèmes mathématiques* qui les composent, leurs articulations avec les *secteurs* dans lesquels ils se situent et les *domaines* dans lesquels ils sont plongés.

C'est ensuite une analyse de manuels, conduite en termes de praxéologies mathématiques existantes pour le type de tâche T, qui nous permet de préciser, puis de comparer les rapports institutionnels à la résolution des équations du 2nd degré dans V et dans F, et d'en déduire ce qui est attendu des élèves dans chaque institution - Rapport institutionnel en position d'élève). (Partie B, Chapitre B2).

Dans le but d'étudier le rapport personnel des élèves des institutions considérées aux savoirs que le thème "équations du second degré" amalgame, nous effectuons une expérimentation dans laquelle nous proposons les mêmes tâches de type T pour lesquelles les élèves doivent mobiliser certaines de leurs connaissances d'algèbre.

Notre but est de caractériser, en termes de techniques et si possible de technologies, les praxéologies existantes chez les élèves des deux institutions, d'analyser les résultats obtenus et les erreurs commises en relation avec les techniques utilisées, et d'analyser les écarts éventuels entre le rapport institutionnel en position d'élèves et le rapport personnel des élèves dans les deux pays.

Ce sera l'objet de la partie C. Dans le chapitre C1, nous présentons notre analyse a priori dans C2, le déroulement de notre expérimentation et notre méthode de recueil de données, dans C3, le cas du Viêt-nam, et dans C4 celui de la France.

Dans les chapitres C3 et C4, nous utilisons le logiciel Aplusix, version Standard, pour recueillir les productions des élèves lors du traitement des tâches proposées dans l'expérimentation.

L'élève résout les exercices se trouvant dans un fichier d'APLUSIX que nous avons préparé auparavant. Il effectue les calculs de son choix sur une feuille de calcul. La feuille de calcul est ce qui est affiché sur l'écran de l'ordinateur.

L'élève travaille en mode « Test » dans lequel le logiciel ne lui apporte pas d'information pendant le traitement des exercices (dans ce mode est notamment supprimé l'affichage d'équivalence ou de non-équivalence entre deux étapes) et ne lui permet de travailler que dans un temps limité.

A la fin de la résolution de l'exercice, l'élève déclare au logiciel le statut de la réponse. Pour le cas des équations, il peut choisir entre : "Résolu", "Pas de solution", "Tout nombre est solution" ou "Je laisse l'exercice ainsi".

Enfin, le travail de l'élève est enregistré dans un fichier d'Aplusix qu'on peut visualiser ultérieurement

Aplusix enregistre les actions des élèves (click de souris, frappe de clavier), l'ensemble des paramètres de la session, et les expressions obtenues. Enregistrés sous format texte ils peuvent être consultés directement, avec un tableur ou avec le magnétoscope ce qui fournit des données pour les analyses.

Dans l'analyse a posteriori, pour déterminer les techniques et les erreurs produites dans chaque exercice de chaque élève, nous utiliserons la rubrique "Observer le travail des élèves" dans le menu "Activités passées" pour revoir les exercices de chaque élève dans leur forme finale et utiliser le « magnétoscope » pour revoir le détail de ses actions.

La dernière partie (partie D) de notre travail apportera des éléments de réponse aux questions que nous nous sommes posées, à partir d'une confrontation de l'ensemble des résultats obtenus dans les parties B et C.

PARTIE B

ANALYSE INSTITUTIONNELLE

INTRODUCTION

Notre étude porte essentiellement sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, notamment sur l'étude des équations à une inconnue, en classes 8, 9 et 10 au Vietnam, au collège, en seconde et en première, en France.

Afin de saisir le processus de construction et d'évolution de cet enseignement, il nous est paru nécessaire de chercher où se trouvent, dans les programmes les objets de l'algèbre (en prenant pour référence le savoir savant), et où et comment s'insèrent, parmi ces objets, les équations.

Il s'agit notamment d'éclairer l'analyse praxéologique de la résolution des équations de degré 2, que nous proposerons ensuite, en recherchant :

- quelles articulations les équations entretiennent avec d'autres objets et comment ces articulations évoluent tout au long du curriculum ;*
- quelles sont les finalités de l'étude des équations.*

*Nous dégageons, dans un premier temps, les objectifs des programmes et les compétences exigibles au Viêt-Nam et en France, ainsi que **les praxéologies qui devraient ou pourraient, exister** dans chaque pays pour la résolution des équations de degré 2, puis nous analysons les points communs et les différences entre les choix faits par les deux institutions étudiées (chapitre B1).*

Contrairement à la France, les programmes vietnamiens sont peu détaillés. Mais il existe une seule collection de manuels qui a un statut officiel et qui est accompagnée d'un guide du professeur détaillé. Nous utiliserons les explications données aux enseignants dans le guide du professeur pour mieux caractériser l'esprit du programme vietnamien.

Dans le cas de la France, où les programmes sont plus détaillés, nous nous appuierons également sur les documents d'accompagnement pour compléter l'analyse.

*Nous regardons ensuite (chapitre B2) comment les programmes sont mis en œuvre dans une série de manuels afin de préciser le rapport institutionnel, et d'identifier et de comparer les **praxéologies existantes** dans l'enseignement des équations du 2^o degré dans chacune des institutions étudiées.*

Nous nous intéressons notamment à la place donnée aux équations de degré 1 et à la factorisation, puis à la résolution par calcul du discriminant, ainsi qu'à la position épistémologique prise sur l'équation : outil de résolution de problème (modélisation) versus étude de l'équation en tant qu'objet mathématique.

CHAPITRE B1. ANALYSE DES PROGRAMMES VIETNAMIEN ET FRANÇAIS

I. L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE AU VIETNAM

Nous nous intéressons au programme vietnamien de 2002, encore en vigueur pour les élèves sur lesquels a porté notre expérimentation.

Le programme des mathématiques de la classe 6 comporte deux grandes parties : Arithmétique et Géométrie. Pour les autres classes du collège et en classe 10, il se compose de deux parties intitulées : Algèbre et Géométrie, la partie intitulée Algèbre regroupant tous les domaines autres que géométriques et trigonométriques, dont les fonctions, les statistiques, et l'algèbre proprement dite.

I.1. En classe 6

Dans la partie d'arithmétique, on trouve les trois rubriques suivantes : Révision et compléments sur les naturels, Entiers relatifs, et Fractions.

I.2. En classe 7

La partie d'algèbre se compose de quatre chapitres :

- I. Nombres rationnels, irrationnels
- II. Fonctions, représentation graphique
- III. Statistiques
- IV. Expressions algébriques

La racine carrée est introduite dans la première rubrique, mais seulement au niveau de l'initiation et de l'utilisation de la touche $\sqrt{}$ sur la calculatrice.

Dans le chapitre « Expressions algébriques », les objets suivants sont proposés :

- Notion d'expression algébrique ; valeur d'une expression algébrique.
- Monômes, degré d'un monôme, monômes semblables.
- Notion de polynômes à plusieurs variables ; addition et soustraction des polynômes.
- Polynômes à une variable : ordonnés selon les puissances décroissantes ; Addition et soustraction des polynômes à une variable ; Notion de racine de polynômes à une variable.

Les compétences exigibles des élèves sont :

- Reconnaître les expressions algébriques (dans l'expression algébrique, on considère une lettre comme le « représentant » d'un nombre), et savoir calculer la valeur numérique d'une expression.
- Reconnaître les monômes et les monômes semblables, réduire un monôme et un polynôme, savoir faire l'addition et la soustraction des polynômes, notamment des polynômes à une variable.
- Connaître les règles de calcul habituelles pour ramener une expression à une autre.
- Avoir la notion des polynômes à plusieurs variables.
- Vérifier si un nombre est zéro²⁵ d'un polynôme.

Dans ce chapitre, la définition de deux expressions égales n'est pas énoncée, et la recherche des zéros d'un polynôme de degré supérieur à 1 n'est pas demandée.

I.3. En classe 8

La partie d'algèbre se compose de trois chapitres :

Multiplication et division des polynômes

Fractions algébriques

Equations et inéquations du premier degré à une inconnue

Dans le premier chapitre, les objets suivants sont proposés :

- multiplication d'un monôme par un polynôme, de deux polynômes, de deux polynômes ordonnés ;
- identités remarquables :
 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
- factorisation d'un polynôme: technique de mise en facteurs communs, technique d'utilisation des identités, technique de regroupement des plusieurs termes, technique par combinaison ;
- division d'un monôme par un monôme, d'un polynôme par un monôme, de deux polynômes ordonnés (divisés, divisibles).

Les compétences exigibles des élèves sont de :

- « bien retenir » les règles de multiplication d'un monôme par un polynôme et d'un polynôme par un polynôme.

²⁵ Au Viêt-Nam, on emploie le même mot « racines » pour désigner les zéros d'un polynôme et les racines de l'équation obtenue en l'annulant. Le mot vietnamien se traduit donc littéralement par : « racine » d'un polynôme.

- « bien retenir » les 7 identités remarquables et d'appliquer ces identités lors du calcul mental, de la factorisation d'un polynôme et de la réduction d'une expression.
- « bien retenir » et appliquer les techniques courantes de factorisation d'un polynôme : techniques de mise en facteurs communs, d'utilisation des identités, de regroupement de plusieurs termes, de combinaison ; savoir transformer une somme, en principe, en un produit de deux facteurs, et non de trois facteurs.
- « bien retenir » les règles de division d'un monôme par un polynôme et d'un polynôme par un polynôme, de deux polynômes ordonnés (principalement la divisibilité des polynômes à une même variable).

Mais aussi de savoir résoudre :

- des problèmes par mise en équation de degré 1 ou 2,
- des équations produit-nul (au plus de trois facteurs),
- des équations contenant l'inconnue au dénominateur (chaque membre de l'équation n'a pas plus de deux fractions algébriques) avec, dans ce cas, la recherche de l'ensemble de définition.

L'équation contenant une valeur absolue est étudiée sous la forme $|f(x)| = g(x)$ où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux binômes de degré 1.

Dans le guide des professeurs de la classe 8, il est précisé : « On ne construira pas la notion d'équation de manière complète, mais on introduira le terme « équation » à travers un exemple concret. »

C'est ainsi que, dans le manuel de Cours de la classe 8, l'équation est définie de la façon suivante :

« 1. Équation à une variable

En classe précédente, on a rencontré des problèmes comme :

Chercher x , sachant $2x+5=3(x-1)+2$.

Dans ce problème, on appelle $2x+5=3(x-1)+2$ une équation avec l'inconnue x .

Une équation avec l'inconnue x est de la forme $A(x)=B(x)$, dans laquelle le membre gauche $A(x)$ et le membre droit $B(x)$ sont deux expressions d'une même variable x . »
(Cours II, p.5)

Néanmoins, le guide des professeurs, dans sa partie Documentation complémentaire, qui a une fonction formative pour l'enseignant, explique à l'enseignant ce que l'on entend par « définition complète » d'une équation :

« Etant données deux fonctions $y=f(x)$ et $y=g(x)$ ayant respectivement pour ensembles de définition D_f et D_g , on appelle la fonction propositionnelle

(proposition contenant des variables) $f(x)=g(x)$ une équation d'inconnue x déterminée sur l'ensemble $D = D_f \cap D_g$. On appelle racine de l'équation toute valeur de $x \in D$ telle que la fonction propositionnelle $f(x)=g(x)$ devienne une proposition vraie » (Guide des professeurs II, p.6)

C'est en classe 8 que la notion de deux équations équivalentes est introduite. Deux équations sont dites équivalentes si leurs ensembles de solutions sont égaux.

« Deux équations équivalentes sont deux équations dont chaque racine de l'une de deux équations l'est aussi de l'autre et inversement » (Guide des professeurs II, p.6)

Le symbole d'équivalence « $\Leftrightarrow$ » est utilisé pour la première fois dans la représentation de deux équations équivalentes.

Les transformations équivalentes, utilisées comme outils pour ramener une équation donnée à une autre plus simple lors de la résolution de cette équation, ne sont pas présentées systématiquement. Par contre, deux règles « transférer dans l'autre membre » et « multiplier par un nombre » sont présentées comme un outil essentiel et utilisées lors de la résolution des équations du premier degré. Ces deux règles sont acceptées comme transformations équivalentes sans que cela soit justifié et sont appelées les règles de « transformations d'équations ».

En résumé, en classe 8, on étudie la notion d'équation du premier degré, la définition de deux équations équivalentes, la résolution d'une équation de premier degré, l'équation produit-nul, l'équation contenant un binôme au dénominateur, et la résolution des problèmes par la mise en équation du premier degré.

I.4. En classe 9

La partie d'algèbre est composée de 4 chapitres :

- I. Racine carrée, racine cubique
- II. Fonction du premier degré
- III. Système d'équations du premier degré à deux inconnues
- IV. Fonction $y=ax^2$ ($a \neq 0$), équation de degré 2 à une inconnue.

Comme en classe 7, l'étude de la racine est reprise dans le premier chapitre, mais on en fait cette fois une étude approfondie (définition, notation, condition d'existence d'une racine carrée, opérations, transformations, réduction et racine cube), et on introduit l'identité $\sqrt{A^2} = |A|$.

Dans le chapitre II, les objets suivants sont étudiés :

- Rappel des fonctions, fonctions de degré 1.
- Représentation graphique de la fonction $y=ax+b$ ($a \neq 0$).

- Coefficient d'une droite, droites parallèles, droites concourantes.

Les compétences exigibles des élèves lors de l'étude des fonctions du premier degré $y=ax+b$ (a non nul) sont les connaissances fondamentales (l'ensemble de définition, le sens de variations, la représentation graphique), la signification des coefficients a et b , les conditions de parallélisme et de concurrence de deux droites, et la lecture et le tracé de la représentation graphique de la fonction $y=ax+b$ (a et b , en principe, sont rationnels).

L'étude des fonctions continue dans le quatrième chapitre avec l'étude des fonctions carrée $y=ax^2$ (a non nul).

Dans le troisième chapitre, on étudie la définition du système d'équations de degré 1 à deux inconnues, les transformations équivalentes, la résolution par substitution et par combinaison, l'illustration graphique d'une solution d'un système linéaire, et la résolution de problèmes se ramenant à un système linéaire.

L'équation du second degré à une inconnue est introduite dans le chapitre IV. Les objets suivants sont étudiés :

- Equation du second degré, formules des solutions, relation de Viète (somme et produit des racines) et son application (calcul mental, recherche de deux nombres en connaissant leur somme et leur produit).
- Equations se ramenant à celle du second degré.
- Résolution de problèmes par mise en équation du second degré à une inconnue.

Les compétences exigibles des élèves dans cette partie sont :

- savoir utiliser les formules des solutions et résoudre de manière experte les équations du second degré à une inconnue,
- savoir utiliser la relation de Viète lors du calcul mental et de la recherche de deux nombres en connaissant leur somme et leur produit,
- savoir résoudre des équations se ramenant au second degré, des équations contenant l'inconnue en dénominateur (le dénominateur est un binôme) et au plus deux fractions, les équations $ax^2+bx+c=0$ (a non nul)
- résoudre des problèmes par la mise en équation du second degré à une inconnue (issus des problèmes de la réalité et des autres disciplines).

Avant d'établir les formules des solutions de l'équation du second degré, le manuel considère quelques exemples concrets dont l'objectif est de conduire à la méthode de résolution globale : transformer l'équation en un produit de deux expressions de degré 1, le membre de droite étant égal à 0, puis appliquer les connaissances connues de l'équation de degré 1 pour trouver les racines ; cette transformation doit bien sûr s'assurer de d'équivalence d'après les théorèmes étudiés dans l'algèbre de classe 8, comme le rappelle le Guide des professeurs de classe 9 (2002, p.62).

I.5. En classe 10

Le programme des mathématiques de classe 10 se présente en 5 chapitres.

Ensemble, propositions.

Fonctions.

Équations et inéquations de degré 1.

Équations et inéquations du second degré.

Erreur d'approximation.

Dans le chapitre II concernant les fonctions, on étudie la notion de fonction, la fonction $y=ax+b$, la fonction carrée $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), et d'autres fonctions : $|x|$, x^3 , $\sqrt{x}$.

Les équations et inéquations de degré 1 sont étudiées dans le chapitre III dans les paragraphes suivants :

Généralité de l'équation.

Équation et système d'équations du premier degré.

Inégalités.

Inéquation du premier degré.

Système d'inéquation du premier degré.

On constate, dans cette première classe du lycée, un changement de point de vue par rapport à l'enseignement antérieur du collège.

La définition de l'équation par une égalité entre deux fonctions, qui a été donnée seulement à titre de documentation complémentaire, en classe 8, dans le guide des professeurs, est maintenant introduite officiellement pour les élèves.

« Etant données deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ayant respectivement les ensembles de définition D_f et D_g . On a défini précédemment l'égalité $f(x)=g(x)$ comme étant une équation (à une variable). Cette définition n'est pas exacte, car une égalité n'est pas une équation.

Après avoir introduit la notion de proposition *contenant des variables* dans le §1 du chapitre I, on peut énoncer la définition d'une équation de manière plus exacte comme suit :

Notons $D=D_f \cap D_g$. La proposition contenant la variable $x \in D$ de la forme $f(x)=g(x)$ (1) est appelée *équation à une variable*, x est appelé *inconnue*. D est appelé *l'ensemble de définition* de l'équation (1). Ensuite, on définit la racine de l'équation (1), la résolution d'une équation étant la recherche de son ensemble des solutions. » (Guide des professeurs de classe 10, 2001, p.35)

Nous faisons l'hypothèse que ce changement de point de vue répond à la nécessité de traiter le cas des équations avec des fonctions rationnelles : en classe 8, on avait dit que deux équations sont équivalentes si et seulement si elles ont même ensemble de solutions, on n'examinait pas alors les ensembles de définition des équations, ces dernières étant implicitement définies dans $\mathbb{R}$; en classe 10, où l'on introduit des équations avec fonctions rationnelles, l'examen de l'égalité des ensembles de définition devient nécessaire pour la définition de deux équations équivalentes.

Les transformations équivalentes, sont maintenant présentées systématiquement par deux théorèmes.

« Théorème 1. Etant donnée l'équation $f(x)=g(x)$ (1) avec l'ensemble de définition D. Si $h(x)$ est une fonction définie sur D alors l'équation :

$f(x)+g(x)=g(x)+h(x)$ (2) est équivalente sur D à l'équation (1). »

(Cours 10, p.49).

« Théorème 2. Etant donnée l'équation $f(x)=g(x)$ (1), avec l'ensemble de définition D. Si $h(x)$ est une fonction définie sur D et $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$ alors l'équation :

$f(x).h(x)=g(x).h(x)$ (2) est équivalente sur D à l'équation (1). » (Cours 10, p.50)

La notion d'"équation conséquence" est également introduite. Une équation est appelée équation conséquence d'une équation donnée si son ensemble des solutions contient celui de l'équation donnée. Le symbole « $\Rightarrow$ » est utilisé pour noter une équation conséquence de l'équation donnée.

Le théorème 2 ci-dessus conduit notamment à une équation conséquence introduite par le théorème suivant :

« Si on élève au carré les deux membres d'une équation donnée, on obtient une nouvelle équation qui est conséquence de l'équation donnée. » (Cours 10, p.52)

Le chapitre IV concernant les équations et inéquations du deuxième degré comporte les objets suivants.

Équations du second degré $ax^2+bx+c=0$.

Système d'équations du deuxième degré.

Inéquations du deuxième degré.

Sommaire du système d'inéquations du deuxième degré.

Théorème inverse du signe de $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)²⁶.

Équations et inéquations se ramenant au deuxième degré.

Pour la partie des équations du second degré, on étudie la définition de l'équation, les formules des solutions, l'interprétation graphique, et le théorème de Viète et ses applications.

La résolution des équations du second degré est, en classe 10, centrée sur l'étude des équations avec paramètre. On y étudie :

- les problèmes de discussion du nombre des racines selon le signe du discriminant,
- l'intersection d'une parabole et d'une droite,
- la recherche du signe des racines,

²⁶ Si $a f(e) < 0$, alors $f(x)=0$ a deux racines distinctes x_1 et x_2 , et $x_1 < e < x_2$.

- la détermination des valeurs d'un paramètre pour que les racines vérifient une relation donnée,
- la recherche de la position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation.

I.6. En classe 11

La partie intitulée Algèbre du programme est entièrement consacrée à l'étude des fonctions trigonométriques et des équations et systèmes d'équations trigonométriques (dont celles qui se ramènent à des équations du second degré).

I.7. Conclusion

L'algèbre apparaît officiellement, dès la deuxième classe du collège, lors de l'étude des opérations sur les polynômes et de leurs propriétés : les polynômes à une ou plusieurs variables sont introduits et étudiés essentiellement en classe 7 et en classe 8.

L'équation est définie officiellement en classe 8 et continue à être étudiée et traitée dans les classes 9 et 10. L'équation est définie sous la forme $A(x)=B(x)$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux expressions à une variable. On travaille également la notion d'équations équivalentes et d'équation conséquence.

En classe 8, la résolution des équations du second degré par la technique algébrique repose sur les techniques de factorisation et les identités remarquables qui sont expliquées par la propriété de la distributivité. Cette technique se retrouve en classe 9, mais elle est placée dans une partie considérée comme une étape de préparation à la construction des formules des solutions en utilisant le discriminant.

« 1) Cette partie a pour propriété de conduire à préparer la construction des formules générales de l'équation du second degré. Dans cette partie, on se borne à l'étude de la résolution sur des exemples concrets avec une intension visible :

Exemple 1²⁷ : l'équation incomplète $ax^2+bx=0$ nous fait entendre facilement que la résolution consiste à ramener l'équation à la forme produit nul.

Exemple 2²⁸ : l'équation incomplète $ax^2-c=0$ ($a, c>0$) nous fait entendre la méthode d'utilisation de l'identité remarquable $A^2(x)-B^2(x)=(A(x)-B(x))(A(x)+B(x))$ pour ramener l'équation à la forme du produit de deux facteurs de degré 1.

Les exemples 3²⁹ et 4³⁰, qui sont des équations complètes placées après les exemples 1 et 2, nous font entendre l'idée de ramener à la forme produit nul comme on l'a fait dans l'exemple 2 (méthode d'utilisation des identités) » (Guide des professeurs de classe 9, p.67)

27 Exemple 1 : Résoudre l'équation : $3x^2+2x=0$ (p.79, Cours 9)

28 Exemple 2 : Résoudre l'équation $3x^2-48=0$ (p. 80, Cours 9)

29 Exemple 3 : Résoudre l'équation $x^2-2x+6=0$ (p. 80, Cours 9)

30 Exemple 4 : Résoudre l'équation $3x^2-5x-2=0$ (p. 80, Cours 9)

La notion de fonction, introduite officiellement en classe 7 par l'étude des fonctions linéaires ($y=ax$) et de leurs inverses ($y=a/x$), est reprise en classes 9 avec l'étude des fonctions affines ($y=ax+b$) et des fonctions carrées ($y=ax^2$) et en classe 10 par celle des fonctions de degré 2 ($y=ax^2+bx+c$).

Une nouvelle définition d'une équation comme égalité de deux fonctions est donnée en classe 10. Elle permet de faire un lien entre l'algèbre et l'analyse. En particulier, on introduit la résolution graphique. Il n'y a pas cependant pas de déclaration sur les liens existant entre ces deux méthodes de résolution.

« L'équation du second degré ayant déjà été présentée dans le manuel d'Algèbre de la classe 9, on rappellera brièvement les formules des solutions, l'interprétation graphique, pour passer à une étude approfondie du théorème de Viète et de ses applications, notamment à l'étude de signe des racines d'une équation du second degré et au calcul des valeurs des expressions symétriques de solutions. » (Guide des professeurs de classe 10, p.50).

II. L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE EN FRANCE

Nous nous intéressons au programme français depuis 2002. Le programme des mathématiques pour toutes les classes du collège comporte trois parties :

- A- Travaux géométriques
- B- Travaux numériques
- C- Organisation et gestion de données, fonctions

Dans toutes les classes du collège, la résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objet fondamental de la partie des travaux numériques. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral.

« L'activité de résolution de problèmes occupe une place importante dans le processus d'appropriation des connaissances mathématiques par les élèves, que ce soit dans les phases de construction de connaissances nouvelles, dans les phases de consolidation et de réinvestissement et de ces connaissances ou dans les phases d'évaluation. Les problèmes sont à la fois la source et le critère des connaissances mathématiques. » (Accompagnement des programmes de 6^e, p.38).

II.1. En classe de 6^e

L'assimilation progressive du langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes est l'un des trois objectifs de la partie des travaux numériques.

Le contenu de la partie des travaux numériques comporte les six rubriques suivantes :

1. Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations.

2. Quotient de deux nombres entiers.
3. Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires.
4. Initiation à la résolution d'équations.
5. Initiation aux écritures littérales.
6. Nombres relatifs et repérage.

Pour l'initiation aux écritures littérales, l'élève doit s'entraîner à schématiser un calcul en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées par des valeurs numériques.

Les compétences exigibles des élèves sont d'appliquer une formule littérale dans une situation familière.

La résolution d'équations est étudiée initialement au travers de certains problèmes concrets qui se traduisent par la recherche d'un nombre manquant dans une opération. La désignation de l'inconnue par une lettre n'est pas nécessaire dans ces activités.

Les compétences exigibles des élèves sont de trouver, dans des situations numériques simples :

- le nombre à ajouter à un nombre donné pour obtenir un résultat donné,
- le nombre à retrancher d'un nombre donné pour obtenir un résultat donné,
- le nombre par lequel multiplier un nombre donné pour obtenir un résultat donné.

Dans la partie d'organisation et gestion de données, certains travaux à base géométrique (calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, de la longueur d'un cercle), conduisent à décrire des situations qui mettent en jeu des fonctions. Toute définition de la notion de fonction doit être évitée, mais des expressions telles que « en fonction de », « est fonction de » peuvent être utilisées.

II.2. En classe de 5^e

Comme en 6^e, la résolution de problèmes constitue l'objectif fondamental de la partie des travaux numériques. Cette partie comporte quatre rubriques :

- Enchaînement d'opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs.
- Nombres en écriture fractionnaire.
- Nombres relatifs en écriture décimale.
- Initiation à la résolution d'équations.

L'initiation aux écritures littérales se poursuit, mais le calcul littéral ne figure pas encore au programme.

Les programmes du cycle central organisent une progression des apprentissages, aussi bien en calcul littéral que dans l'approche des notions d'équations et d'identité. Ces apprentissages s'appuient sur la résolution de nombreux problèmes, laquelle nécessite l'emploi de lettres pour désigner des inconnues, des indéterminées ou des variables.

Pour l'enchaînement d'opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est présentée sous forme d'identités :

$$k.(a+b)=k.a+k.b$$

$$k.(a-b)=k.a-k.b$$

$$k.a+k.b=k.(a+b)$$

$$k.a-k.b=k.(a-b).$$

Pour la résolution d'équations, les compétences exigibles sont :

- Trouver, dans des situations numériques simples, le nombre par lequel diviser un nombre donné pour obtenir un résultat donné.
- Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données.

Pour la première compétence, le travail étend au cas de la division l'initiation à la résolution d'équations, entreprise en 6^e. Désigner par une lettre le nombre inconnu peut ici se révéler pertinent.

Pour la deuxième compétence, les programmes prévoient une initiation très progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter l'écueil connu d'apprentissages aboutissant à la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens. La classe de 5^e correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. Par exemple, dans l'étude d'une situation conduisant à une égalité telle que $3y=4x+2$, on se ramène à en tester la véracité pour diverses valeurs de x et y . Les expressions qui figurent de part et d'autre du signe d'égalité jouent ici le même rôle.

« Dans cette classe, si on poursuit le travail d'initiation à la résolution d'équations par référence au sens des opérations (recherche d'un nombre inconnu dans une opération), on approche également la notion d'équation ou d'inéquation par la pratique de tests. À ce niveau, tester la véracité d'une égalité ou d'une inégalité littérales pour des valeurs numériques permet de donner au signe d'égalité une signification différente de celle qu'il a dans l'exécution de calculs (commande EXE de certaines calculatrices). Le travail ainsi engagé en classe de 5^e prépare l'étude, en classe de 4^e, de la conservation des égalités et des inégalités, ainsi que celle de la résolution d'équations. » (Document d'accompagnement des programmes du cycle central 5^e/4^e, p.8)

En 5^e, toute définition de la notion de fonction doit être évitée, mais des expressions telles que « en fonction de », « est fonction de » sont utilisées.

« En classe de 5^e, la substitution de nombres à des lettres permet, comme en classe de 6^e, d'exécuter des calculs numériques, de comprendre et de maîtriser les règles d'écriture d'expressions littérales. Cette substitution, accompagnée de la constitution de tableaux de nombres et de la construction de points dans un plan muni d'un repère, prépare à la notion de fonction. » (Accompagnement des programmes du cycle central 5^e/4^e, p.8).

II.3. En classe de 4^e

La résolution de problèmes constitue l'objet fondamental de la partie des travaux numériques.

Le contenu de la partie des travaux numériques comporte les deux rubriques suivantes :

1. Nombre et calcul numérique
2. Calcul littéral

L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement en recherchant des situations qui permettent aux élèves de donner du sens à l'introduction de ce type de calcul.

Le travail proposé s'articule sur deux axes :

- utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques
- utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers. (cf. Tableau 2)

Les situations proposées aux élèves doivent exclure tout type de virtuosité et répondre à chaque fois à un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique).

On évitera en particulier les expressions à plusieurs variables introduites a priori.

Les activités de développement poursuivent celles de 5^e en utilisant l'identité $k.(a+b)=k.a+k.b$. L'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prend tout son intérêt.

Les compétences exigibles des élèves sont :

- Développer une expression du type $(a+b)(c+d)$ sur des exemples numériques ou littéraux.
- Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.
- Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x-(4x-2)$, $2x^2-3x+x^2...$

« Le développement de certaines expressions du type $(a+b)(c+d)$ peut conduire à des simplifications d'écritures, mais les identités remarquables ne sont pas au programme. L'objectif est d'apprendre aux élèves à développer pas à pas ce type d'expression en une somme de termes. La factorisation d'expressions analogues à $x(3x+4)-5(3x+4)$ n'est pas au programme » (Accompagnement des programmes du cycle central 5^e/4^e, p.8).

Dans cette classe, la résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue est introduite.

Les règles de transformation des équations ne sont pas mentionnées dans le programme.

Une autre compétence exigible est de mettre en équation et de résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

« Les problèmes issus d'autres parties du programme conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. On dégagera chaque fois sur des problèmes particuliers les difficultés étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat. » (Programme de 5^e et 4^e, p.16).

Mais dans cette classe, tous les problèmes aboutissant à des équations produit, du type $(x-2)(2x-3)=0$, sont hors programme.

Comme en 5^e, le mot « fonction » est employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle soit donnée.

II.4. En classe de 3^e

Le contenu de la partie des travaux numériques comporte les rubriques suivantes :

Écriture littérales : identités remarquables.

Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées).

Équations et inéquations du premier degré.

Nombres entiers et rationnels.

L'un des objectifs à viser, pour le calcul littéral, est qu'il s'intègre aux moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques.

« Comme dans les classes du cycle central, l'acquisition de techniques de calcul faisant appeler des lettres est un des points délicats de l'enseignement des mathématiques. Les apprentissages, très progressifs et en continuité avec ceux développés dans les classes antérieures, s'appuient sur la résolution de nombreux problèmes, laquelle nécessite l'emploi de lettres pour désigner des inconnues, des indéterminées ou des variables. La pratique des tests sur les égalités et inégalités aident comprendre ce qu'est une identité et ce que signifient les expressions : résoudre une équation, résoudre une inéquation, en déterminer la ou les solutions. » (Accompagnement des programmes- 3^e, p.9)

Classe	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e
Calcul littéral	-Substitution de valeurs numériques à des lettres dans une formule	-Égalité $k.(a+b)=k.a+k.b$ et $k.(a-b)=k.a-k.b$. -Test d'une égalité ou d'une inégalité par substitution de valeurs numériques à une ou plusieurs variables	-Développement d'expressions. -Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. -Équations du premier degré à une inconnue.	-Factorisation (identités). -Problèmes se ramenant au premier degré. Inéquations. -Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Tableau 2 : Évolution du calcul littéral au collège (tableau synoptique pour le collège, Programmes de 3^e, p.114)

Les compétences exigibles des élèves sont :

- Factoriser des expressions telles que : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$;
 $(2x+1)^2+(2x+1)(x+3)$.
- Connaître les égalités : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales
simples telles que :

$$101^2=(100+1)^2=100^2+200+1, (x+5)^2-4=(x+5)^2-2^2=(x+5+2)(x+5-2).$$

Pour la première compétence, « la reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte ».

Pour la deuxième compétence, les travaux s'articulent selon deux axes :

- utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ;
- utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes.

« Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. »
(Programme des mathématiques de 3e, p.110)

La racine carrée d'un nombre positif est étudiée avec la définition et les deux opérations (produit et quotient) sur les racines carrées.

La résolution de l'équation $x^2=a$ ($a>0$) s'effectue en utilisant l'extraction de la racine carrée. Le travail mentionné sur les identités remarquables permet d'écrire des égalités comme $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$; $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$.

Dans la troisième rubrique concernant les équations et inéquations du premier degré, quatre objets sont à étudier :

Ordre et multiplication.

Inéquations du premier degré à une inconnue.

Système de deux équations à deux inconnues.

Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant.

Pour le deuxième objet, la compétence exigible est de résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques et de représenter ses solutions sur une droite graduée.

Pour le troisième objet, la compétence exigible est de résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule et d'en donner une interprétation graphique en utilisant la représentation des fonctions affines.

Pour le dernier objet, les compétences exigibles sont de résoudre une équation mise sous la forme $A(x) \times B(x)=0$, où $A(x)$ et $B(x)$ désignent deux expressions du premier degré de la

même variable, de mettre en équation et de résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation ou un système de deux équations du premier degré.

Comme en classe de 4^e, il est recommandé de dégager à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.

Jusqu'à la fin du cycle central, la notion de fonction n'a été utilisée que de manière implicite. Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes.

Les exemples mettant en jeu des fonctions peuvent être issus de situations concrètes ou de thèmes interdisciplinaires. L'utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de », déjà amorcée dans les classes précédentes, est poursuivie et associée à l'introduction prudente de la notation $f(x)$, où x a une valeur numérique donnée.

La fonction linéaire et la fonction affine sont deux objets à étudier. Les compétences exigibles sont la détermination d'une fonction linéaire ou affine, la représentation graphique, et la lecture sur la représentation graphique.

« La classe de 3^e est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines. D'autres exemples de fonctions simples seront également utilisés, en particulier pour montrer que tout représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques de points alignés (par exemple, en représentant quelques points d'une fonction telle que $x \mapsto x^2$, sur un intervalle). » (Accompagnement des programmes – 3^e, p.9)

La notion de fonction linéaire permet, en 3^e, d'opérer une synthèse des différents aspects rencontrés de la proportionnalité tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire.

La fonction linéaire doit apparaître comme un cas particulier de la fonction affine, cette dernière étant associée à la proportionnalité des accroissements.

II.5. En classe de 2^{de}

Le programme est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonction, et géométrie.

Le contenu du programme « Calcul et fonction » comporte les deux parties suivantes :
Nombres et Fonctions

Dans la deuxième partie « Fonctions », sept rubriques sont proposées :

1. Identification de la variable et de l'ensemble de définition d'une fonction
2. Étude qualitative de fonctions
3. Fonction croissante, fonction décroissante
4. Premières fonctions de référence
5. Fonctions linéaires et fonctions affines
6. Fonctions et formules algébriques
7. Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations

Au lycée, la notion de fonction occupe une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse.

Pour la rubrique « Premières fonctions de référence », les capacités attendues sont d'établir le sens de variation et de représenter graphiquement les deux fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$; de

connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$.

En particulier, la fonction $x \mapsto x^2$ sera utilisée lors de l'étude de la fonction trinôme en première.

Pour la rubrique « Fonctions et formules algébriques », les capacités attendues sont de reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés), d'identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule, de reconnaître différentes écritures d'une même expression et de choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite ; factorisée,...), de modifier, développer, réduire une expression selon l'objectif poursuivi.

Ces capacités doivent être développées essentiellement en liaison avec les autres rubriques : organisation du calcul, étude des fonctions, résolution d'équations et inéquations etc.

Pour la dernière rubrique concernant les équations, les capacités attendues sont :

- résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré,
- utiliser un tableau de signe pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction,
- résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x)=k$; $f(x)<k$; $f(x)=g(x)$; $f(x)<g(x)$;...

« Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution.

On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.

On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problèmes conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées. » (Commentaires, Programmes de 2^{de}, p.34)

Le point de vue des fonctions peut enrichir la réflexion sur la résolution d'équations. Par exemple :

- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto (x-2)^2$ met en évidence l'existence de deux solutions de l'équation $(x-2)^2=9$.
- La représentation graphique de la fonction $x \mapsto (x+1)^2+2$ montre l'absence de solution de l'équation $(x+1)^2+2=0$.
- Une calculatrice graphique montre facilement que les équations $x(x+1)=(2x+3)(x+1)$ et $x=2x+3$ n'ont pas les mêmes solutions.
- L'utilisation de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x^2+3x-10$ permet de conjecturer que 2 est une solution de l'équation $x^2+3x-10=0$; il reste à déterminer la factorisation de $(x-2)(x+5)$ pour aboutir à la résolution de l'équation $x^2+3x-10=0$.

II.6. En classe de 1^{er}

Le programme est composé de trois grands chapitres : statistique, analyse, et géométrie.

Le programme d'Analyse est composé de 4 parties :

Généralités sur les fonctions

Dérivation

Comportement asymptotique de certaines fonctions

Suites

Dans la partie « Généralités sur les fonctions », 4 rubriques sont proposées :

1. Opérations sur les fonctions : $u+v$, λu , uv , $\frac{u}{v}$, $u \circ v$
2. Définition d'une fonction polynôme et de son degré.
3. Sens de variation et représentation graphique d'une fonction de la forme $u+\lambda$, λu , la fonction u étant connue. Sens de variation de $u \circ v$, u et v étant monotones.
4. Résolution de l'équation du second degré. Étude du signe d'un trinôme.

Pour la quatrième rubrique concernant la résolution de l'équation du second degré et l'étude du signe d'un trinôme, on aboutit aux formules usuelles donnant la forme factorisée d'un trinôme du second degré et les racines de l'équation associée, et on fait le lien entre les résultats et l'observation des représentations graphiques obtenues à l'aide d'un grapheur.

II.7. Conclusion

Au collège, le calcul littéral et l'étude des équations sont introduits de manière progressive. En 6^e, le calcul littéral s'initialise par les calculs de la valeur d'une expression littérale en remplaçant les lettres par les valeurs numériques. On introduit le statut de variable de la lettre par l'utilisation des expressions « en fonction de » ou « est fonction de ». Ainsi, une

expression littérale est exprimée à l'aide d'une lettre qui joue le rôle de variable. La définition de la notion de fonction est hors programme.

La résolution des équations est effectuée par le type de tâche de recherche d'un nombre manquant dans une égalité, au niveau des opérations additive, soustractive et multiplicative. En 5^e, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est traduite sous la forme d'identités. L'utilisation des lettres pour un nombre inconnu commence à s'introduire dans la résolution des équations. L'utilisation des expressions « en fonction de » ou « est fonction de » se poursuit. Les programmes privilégient le travail sur le sens des équations en présentant ces dernières comme des assertions dont la vérité est à examiner.

En 4^e, l'utilisation du calcul littéral s'articule sur deux axes : dans les calculs numériques, et dans la mise en équation et la résolution de problèmes divers. Dans cette classe, on travaille la résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue.

En 3^e, les identités remarquables sont utilisées dans le calcul numérique des expressions numériques et dans la réduction des expressions littérales. Dans cette classe, le calcul littéral est utilisé aussi dans la mise en équation et la résolution de problèmes.

L'utilisation des expressions « est fonction de » ou « varie en fonction de » est poursuivie et associée à l'introduction prudente de la notation $f(x)$, où x a une valeur numérique donnée.

Au lycée, la notion de fonction occupe une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse. La résolution des équations est faite par une combinaison des apports des modes de résolution graphique et algébrique : l'utilisation de la représentation graphique et l'utilisation du discriminant.

Soulignons que l'étude des équations figure dans la rubrique "calcul et fonctions" et que les programmes mettent l'accent sur l'articulation à faire entre équations et fonctions.

III. ANALYSE COMPAREE DES PROGRAMMES VIETNAMIENS ET FRANÇAIS

La théorie anthropologique du didactique (TAD) met l'accent sur l'importance de l'étude des niveaux de codétermination didactique pour la détermination des conditions et contraintes d'existence d'une organisation mathématique locale. Selon M. Artaud (2005) : « (...) la segmentation de la matière mathématique à étudier lors d'une séquence *qui existe* dans l'enseignement secondaire est bien un découpage par *thème* (ce qui amène à considérer des organisations mathématiques *locales*) ; cependant, dans une perspective écologique (Artaud 1997), l'étude d'un thème conduit à le considérer dans ses *relations* avec le *secteur* (organisation mathématique *régionale*) et le *domaine* (organisation mathématique *globale*) dans lequel il est plongé, voire dans la *discipline* dans son ensemble, et également les *sujets* (organisation mathématique *ponctuelle*) que le thème

amalgame. Les différents niveaux de codétermination didactique énoncés ici constituent en effet des conditions et des contraintes d'existence d'une organisation mathématique locale³¹ (...).»

Afin de comparer les organisations mathématiques des programmes vietnamien et français, nous reconstituons d'abord l'organisation du curriculum dans les deux pays en mettant en évidence les filiations existant entre les *thèmes mathématiques* qui les composent, leurs articulations avec les secteurs dans lesquels ils se situent et les domaines dans lesquels ils sont plongés.

Le programme vietnamien en vigueur lors de notre expérimentation³², est organisé autour de deux domaines : géométrie et algèbre. L'algèbre regroupe tous les thèmes non géométriques dont les fonctions, les statistiques, et l'algèbre proprement dite. (cf. Tableau 3)

VietNam	8	9	10
Domaine	Algèbre	Algèbre	Algèbre
Secteur	Addition, multiplication et division des polynômes	Fonctions et équations algébriques ³³	Fonctions et équations algébriques ³⁴
Thèmes	Factorisation, identités remarquables, équations et inéquation de degré 1, équations équivalentes	Fonction du premier ou second degré, équations du second degré. système d'équations de premier degré, Transformations équivalentes des systèmes d'équations.	Equations du premier degré, du second degré, paramétrées, équations avec des fractions rationnelles. Transformations équivalentes des équations.

Tableau 3 : Les filiations au Viêt-Nam

Dans la suite, nous réserverons, sauf indication contraire, le mot algèbre pour désigner le *domaine mathématique* correspondant.

L'algèbre est introduite, dès la classe 7, puis en classe 8, à partir de l'étude des polynômes à coefficients dans R . On étudie les opérations et les propriétés qui sont proches de celles de l'anneau $R[X]$, avec x considérée comme variable et non comme indéterminée. Les techniques de factorisation de développement et de réduction sont justifiées par ces propriétés qui ne sont pas démontrées. Cependant, une analogie est faite avec les propriétés dans R . Cette analogie peut être justifiée par le fait que x est considérée comme variable.

La notion d'équations équivalentes est introduite dès la classe 8, par l'égalité des ensembles de solutions.

³¹ Ils constituent également des conditions d'existence des praxéologies didactiques.

³² Notre expérimentation a eu lieu avant la généralisation des nouveaux programmes qui sont entrée en application : en classe 8 à la rentrée 2003, en classe 9 à la rentrée 2004, en classe 10 à la rentrée 2005.

³³ En italique : en absence d'un découpage en secteur, c'est nous qui avons interprété par "Fonctions et équations algébriques"

³⁴ idem

On introduit en classe 9 la résolution des équations de degré 2 par le discriminant.

C'est en classe 9, qu'une première articulation entre algèbre et fonction est faite autour des notions de fonctions affines et fonctions carrées. Mais c'est en classe 10 que les équations sont interprétées comme égalité entre deux fonctions. A cette occasion, on introduit la notion de domaine de définition des équations comme intersection des domaines de définitions des fonctions. Cela permet d'introduire les équations avec des fractions rationnelles ou des fonctions définies avec des radicaux, et de compléter la définition de deux équations équivalentes par l'égalité des domaines de définitions.

Ce changement de point de vue qui fait passer des polynômes algébriques aux fonctions polynomiales et aux fonctions composées amène une précision sur les techniques de transformation des équations sous forme de théorèmes "transformations équivalentes des équations".

Le découpage en domaines du programme français est très différent de celui du programme vietnamien car l'algèbre en tant que telle n'y figure pas en tant que domaine. Les notions algébriques apparaissent comme des thèmes dans les domaines : travaux numériques au collège, calcul et fonctions en seconde et analyse en première. (cf. Tableau 4)

France	3°	2°	1°
Domaine	Travaux numériques	Calcul et fonctions	Analyse
Secteur	Calcul littéral	Fonctions et formules algébriques	Fonctions
Thèmes	Identités remarquables, Réduction, factorisation, équation de degré 1 et les équations s'y ramenant,	Développement, réduction, systèmes d'équations du premier degré, inéquation et équation se ramenant au premier degré	Equations du second degré

Tableau 4 : Les filiations en France

Le thème des équations est traité au sein du domaine travaux numériques en classe de 3°, comme en classe de quatrième, par le biais du calcul littéral.

On introduit la notion d'expression algébrique d'une manière ostensive comme une expression comportant une lettre. Le calcul littéral permet de faire des opérations sur les expressions algébriques. La lettre a également un statut de variable, introduit par la notion "en fonction de".

Le calcul littéral fournit les règles de développement, factorisations et des transformations équivalentes des équations. Ces transformations équivalentes n'ont pas un statut officiel contrairement au cas du Viêt-Nam, car la notion d'équations équivalentes n'est pas enseignée en France.

C'est en classe de seconde qu'un lien avec les fonctions est fait. Il s'agit d'interpréter les équations à l'aide des égalités entre deux fonctions mais aucune allusion n'est faite au domaine de définition.

La fonction est utilisée comme un moyen dans la résolution graphique des équations qui à leur tour sont utilisées comme un outil lors de la résolution des problèmes.

Nous constatons donc une différence importante entre ces deux pays quant à l'introduction de l'algèbre. Alors qu'au Viêt-Nam, on privilégie le statut objet de l'algèbre, en France on introduit des notions algébriques sans les définir dans le cadre de l'algèbre, pour les utiliser soit dans le calcul numérique, soit dans la résolution et la mise en équation de problèmes divers, et plus tard en analyse.

L'étude transversale des programmes nous a montré également une différence entre les deux programmes quant à l'évolution des techniques de résolution des équations du second degré :

- au Viêt-Nam : par factorisation (classe 8), discriminant (classe 9), graphique (classe 10)
- en France : par factorisation (3°), factorisation et graphique (2^{nde}), discriminant (1°).

Le travail sur la technique de factorisation est donc plus long en France qu'au Viêt-Nam où le discriminant est introduit dès la dernière classe de collège.

Elle nous a également montré qu'une place importante est consacrée, au Viêt-Nam, en classe 10, à l'étude des équations du second degré paramétrées et à leur discussion et leur résolution algébrique (par l'utilisation du discriminant) et graphique.

Dans les deux pays, on invite à mettre en œuvre les équations dans la résolution des problèmes issus d'autres disciplines ou de la vie courante. Cependant, les programmes français semblent donner plus de poids à la résolution de ces problèmes que les programmes vietnamiens.

Une articulation avec la notion de fonction est faite dans les deux pays. Ce qui permet d'introduire la résolution graphique des équations et des inéquations. Mais, là encore ce lien semble avoir plus d'importance en France qu'au Viêt-Nam .

L'étude des programmes laisse ouvertes les questions suivantes :

Comment sont introduites les techniques algébriques et comment ces techniques sont-elles utilisées dans la résolution des équations de second degré ?

Quelle est la place accordée à la factorisation ?

Quelle est la place accordée aux deux modes de résolution des équations : algébrique et graphique ?

Quelle importance est donnée à la résolution des problèmes conduisant à une équation du second degré ?

Nous essaierons d'apporter des éléments de réponse à ces questions dans les chapitres suivants lors de l'analyse des manuels au Viêt-Nam et en France.

CHAPITRE B2 : ANALYSE DES MANUELS

Dans ce chapitre, nous souhaitons analyser les différentes praxéologies mathématiques existantes pour la résolution des équations du second degré dans les manuels d'enseignement de chacun des pays, Viêt-Nam et France. Compte tenu du volume de cette étude, le chapitre est organisé en deux sections B2.1 (analyse des manuels Vietnamiens) et B2.2 (analyse des manuels Français).

I. METHODOLOGIE D'ANALYSE DES MANUELS

I.1. Le type de tâche T et les techniques qui lui sont liées

Pour éviter toute ambiguïté sur la forme des équations avant et après développement, nous adoptons, dans le cadre de ce travail, la définition suivante de l'équation du second degré à une inconnue :

Une équation du second degré est une équation qui, après développement, regroupement et réduction, s'écrit sous la forme $ax^2+bx+c=0$ avec a non nul.

Le degré dont on parle ici est sémantique, il faut le distinguer du degré syntaxique. En effet, une expression peut avoir comme degré syntaxique 2, c'est-à-dire que le plus haut exposant de ses termes est 2, alors qu'après développement et réduction sous forme canonique, l'expression est de degré 1 ou 0.

Bien qu'on cherche à étudier la place de la résolution graphique des équations, et le rôle outil des équations dans les problèmes de modélisations, notre travail d'analyse praxéologique se centre sur le caractère objet des équations et leur résolution algébrique.

On s'intéresse donc aux types de tâche T « Résoudre, algébriquement, une équation du second degré à une inconnue ». Bien entendu, "algébriquement" reste implicite dans les formulations des manuels.

Deux techniques existent a priori pour résoudre ce type de tâche.

- Utiliser la technique du discriminant.
- Factoriser en produit de polynômes de degré 1 puis utiliser la règle du produit de facteur nul.

Pour les besoins de cette étude de manuels, nous distinguerons 4 sous-types de tâches, C1, C2, C3 et C4, se différenciant par la forme de l'expression algébrique sous laquelle est donnée l'équation du second degré.

C1- Résoudre des équations :

- déjà factorisées [$P(x) \times Q(x) = 0$]
- comportant un facteur commun apparent [$P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) = 0$], ce qui permet de se ramener au cas précédent [$P(x) (R(x) + S(x)) = 0$].

C2- Résoudre des équations qui se ramènent à C1 après une factorisation partielle ou par application d'une identité remarquable :

- de la forme $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x) = 0$ (où $R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou de $Q(x)$)
- de la forme $P^2(x) - Q^2(x) = 0$, ou $k_1 \cdot P^2(x) - k_2 \cdot Q^2(x) = 0$, ou $k_1 \cdot P^2(x) - k_2 = 0$ ou $P^2(x) - k = 0$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k > 0$).

C3- Résoudre des équations dans lesquelles l'expression n'est pas développée sans être pour autant ni du type C1 ni du type C2, et donc ne se prête pas directement à une factorisation.

C4- Résoudre des équations dans lesquelles l'expression est déjà développée et réduite : $ax^2 + bx + c = 0$ (forme canonique).

Comme on le constate ci-dessus, le type de tâche F « Factoriser un polynôme » intervient comme élément de certaines techniques de résolution du type de tâche T. Il nous faut donc également nous intéresser, dans l'analyse des manuels, aux quatre sous-types de tâche suivants sur l'ensemble des polynômes :

F1 - Factoriser une expression de la forme : $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x)$;

F2- Factoriser une expression de la forme : $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x)$ (où $R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou $Q(x)$), ou $P^2(x) - Q^2(x)$, ou $k_1 \cdot P^2(x) - k_2 \cdot Q^2(x)$, ou $k_1 \cdot P^2(x) - k_2$ ou $P^2(x) - k$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k > 0$)

F3- Factoriser des polynômes non développés et dont l'expression ne se prête pas de manière apparente à une factorisation.

F4- Factoriser des polynômes donnés sous forme canonique : $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

I.2. Méthodologie d'analyse

Dans chacun des pays étudiés, nous analyserons les manuels de chaque niveau de classe à partir du travail proposé sur la factorisation, et jusqu'à la résolution de l'équation du second degré par le calcul du discriminant.

Nous proposerons d'abord, pour chaque niveau de classe, une présentation globale de la partie du manuel portant sur l'algèbre, (partie I de chacun des chapitres suivants).

Cette étude devra notamment nous permettre d'examiner, pour chacun des deux pays :

- quels sont les différents sous-types du type de tâche T « résoudre une équation du second degré à une inconnue » proposés ;

- si les technologies et théories correspondantes sont explicitées, et dans ce cas, quels sont les choix effectués ;
- comment est introduite la résolution des équations du second degré par calcul du discriminant.

Nous effectuerons ensuite une analyse praxéologique de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire (partie II), afin de répondre aux questions soulevées par la comparaison des programmes Vietnamiens et Français :

Q1) Comment sont introduites les techniques algébriques et comment ces techniques sont-elles utilisées dans la résolution des équations de second degré ?

Q2) Quelle est la place accordée à la factorisation ?

Q3) Quelle est la place accordée aux deux modes de résolution des équations : algébrique et graphique ?

Q4) Quelle importance est donnée à la résolution des problèmes conduisant à une équation du second degré ?

Conformément à l'étude des programmes effectuée dans la partie B1, nous nous bornerons à l'analyse des manuels suivants :

- au Viêt Nam, ceux des classes 7, 8, 9 (collège) et 10 (lycée) ;
- en France, ceux des classes de 4^e et 3^e (collège) et de seconde et première (lycée).

CHAPITRE B2.1 LE CAS DU VIET-NAM ANALYSE DES MANUELS DES CLASSES 7, 8, 9 ET 10

II. PRESENTATION PAR NIVEAU DE CLASSE

II.1. Choix des manuels

Au Viêt Nam, il existe une seule collection de manuels, éditée par la Maison d'Édition de l'Éducation.

Nous avons été confrontés au problème suivant : une réforme est en cours et depuis 2002 de nouveaux programmes et manuels sont en cours de publication, année par année³⁵.

Le changement de programme en 7^o et 8^o ne portant pas sur l'algèbre, nous avons choisi d'analyser les nouveaux manuels de ces deux niveaux de classe :

quatre manuels de la classe 7 (Cours : volumes I et II ; Exercices d'entraînement : volumes I et II, 2003)

quatre manuels de la classe 8 (Cours : volumes I et II ; Exercices d'entraînement : volumes I et II, 2004).

Nous avons consulté :

les guides des professeurs « Algèbre classe 8 » (ancien, 2002 et nouveau, 2004).

Enfin, les élèves concernés par notre expérimentation, en début de classe 9 et en classe 10, travaillant encore sur les anciens manuels, notre analyse porte, pour ces deux classes sur :

deux manuels anciens (Cours et Exercices d'entraînement, 2003) de la classe 9

deux manuels anciens (Cours et Exercices d'entraînement, 2001) de la classe 10

II.2. Structure des manuels

Les manuels se composent de volumes différents intitulés l'un COURS, l'autre EXERCICES.

Dans le manuel COURS, des exemples sont développés, et des textes d'exercices sont proposés sans indication de résolution.

Dans le manuel EXERCICES, pour chaque chapitre du cours, des exercices sont proposés, des indications sur les solutions étant systématiquement données à la fin de chaque chapitre dans une rubrique intitulée « Solution-Indication-Réponse ».

³⁵ Rentrée 2002 : manuel de 6^o ; rentrée 2002 : manuel de 7^o ; rentrée 2003 : manuel de 8^o ; rentrée 2004 : manuel de 9^o ; rentrée 2005

En particulier, le manuel Exercices de classe 10 se compose de deux parties : Exercices du Cours et Exercices d'entraînement. La résolution ou la solution de tous les exercices du manuel Cours de classe 10 sont données dans le manuel Exercices.

II.3. Tâche de factorisation d'une expression algébrique à une variable

L'étude de la factorisation est faite uniquement en classe 8. Son application pour la résolution des équations du second degré est faite dans les deux classes 8 et 9. Nous présentons ci-dessous l'analyse du manuel de la classe 8.

II.3.1. Le manuel de classe 8

a) Présentation

C'est en classe 8 que la factorisation d'un polynôme est officiellement introduite et étudiée. Elle porte sur les polynômes à une ou plusieurs variables.

Le manuel de la classe 8 comporte quatre chapitres d'Algèbre et quatre chapitres de Géométrie. Les quatre chapitres d'Algèbre sont les suivants :

Chapitre I : La multiplication et la division des polynômes.

Chapitre II : Les fractions algébriques.

Chapitre III : L'équation du premier degré.

Chapitre IV : L'inéquation du premier degré.

La factorisation est traitée dans le chapitre I et est ensuite appliquée dans le chapitre III lors de l'étude de la résolution des équations se ramenant au degré 1.

Dans le chapitre I, on étudie les techniques de factorisation de des expressions algébriques à une ou plusieurs variables et de degré supérieur ou égal à 2. Quatre techniques sont présentées :

Méthode de mise en facteurs communs : elle est utilisée dans les cas où il y a un facteur commun plus ou moins apparent. Exemple : "factoriser $2x^2-4x$ ".

Méthode d'utilisation des identités.

Méthode de regroupement des plusieurs termes, Exemple : "Factoriser $x^2-3x+xy-3y$ ".

Combinaison des méthodes précédentes. Exemple : "Factoriser $5x^3+10x^2y+5xy^2$ "

b) Les rubriques consacrées à la factorisation dans le chapitre I intitulé multiplication et division des polynômes, du manuel de 8°

Dans les 4 rubriques consacrées à la factorisation, celle-ci est mobilisée dans deux types de tâches :

Factoriser un polynôme à une ou deux variables de degré supérieur ou égal à 2.

« Exemple 2.

Factoriser $15x^3-5x^2+10x$.

Résolution. $15x^3-5x^2+10x = 5x(3x^2-x+2)$ » (I, p.18, Cours)

« Exemple 1.

Factoriser $5x^3+10x^2y+5xy^2$.

Résolution. $5x^3+10x^2y+5xy^2 = 5x(x^2+2xy+y^2) = 5x(x+y)^2$. » (I, p.23, Cours)

Chercher x tel que $P(x) = 0$ où $P(x)$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à 2.

« Exercice 2. Chercher x tel que $3x^2-6x = 0$

Indication. En factorisant le polynôme $3x^2-6x$, on obtient $3x(x-2)$.

Le produit précédent égale zéro lorsque l'un des facteurs égale 0» (I, p.18, Cours)

Ce deuxième type de tâche prépare le travail sur les sous-types de la tâche T « Résoudre les équations de degré 2 » se ramenant à la résolution de deux équations de degré 1, résolution ultérieurement traitée dans le chapitre III.

La plupart des exemples traités dans ces quatre rubriques concernent la factorisation d'un polynôme de deux ou trois variables et de degré supérieur ou égal à 2. Trois exemples seulement portent sur

un trinôme de type $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x)$: $2x^2-4x$,

un trinôme de type $P^2(x)-k$: x^2-2 ,

un trinôme donné sous forme canonique : x^2-4x+4 , de la forme $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Si on dénombre le nombre d'exercice relevant du type de tâche « Factoriser une expression à une variable » dans le chapitre I des manuels Cours et Exercices, on constate qu'il n'y a que 30 exercices de factorisation de polynômes à une variable de degré 2 sur 104 exercices de factorisation (dont 55 de factorisation de polynômes à plusieurs variables et 19 de factorisation de polynômes à une variable de degré supérieur à 2). (cf. Tableau 5)

Catégories	Cours	Exercices	Totaux
	Effectifs	Effectifs	Effectifs
F1	1	1	2
F2	1	3	4
F4	15	9	24
Totaux	17	13	30

Tableau 5 : Factorisation en 8°

Aucun des exercices n'est du sous-type F3 (Factoriser les polynômes qui ne sont pas développés et dont la factorisation n'est pas apparente) alors que les exercices du sous-type de tâche F4 (Factoriser les polynômes ax^2+bx+c ($a \neq 0$)), occupent 80% (24 sur 30) du total.

Parmi les 24 exercices de F4, il y a 13 exercices, soit plus de la moitié, dans lesquels on utilise les identités remarquables. De plus le nombre d'exercices proposés à l'entraînement des élèves (manuel exercices) est plus faible que celui des exercices donnés dans le manuel cours.

En résumé, alors que la factorisation des polynômes est traitée uniquement en classe 8, elle concerne essentiellement les polynômes à plusieurs variables, puisque nous avons vu ci-dessus que seulement 8,2% des factorisations portent sur les polynômes à une variable.

La factorisation est pourtant utilisée en classe 8 comme technique de résolution des équations de degré 2, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

II.4. Tâche de résolution algébrique des équations du second degré

Bien que la définition d'une équation ne soit introduite qu'en classe 8, la résolution d'équations est déjà implicitement présente en classe 7 où elle se manifeste sous la forme de la recherche des valeurs rationnelles de x pour qu'une égalité soit vraie, et de la recherche des racines d'un polynôme à une variable. On rencontre les deux types de tâche de la catégorie C1 dans le manuel Exercices de cette classe.

II.4.1. Le manuel de 7°

Les deux sous-types de tâches C1 et C2 sont présents en nombre négligeable et seulement dans le manuel Exercices de la classe 7 : on y rencontre en particulier une seule équation de type carré nul $P^2(x)=0$ dans un exercice présenté sous la forme « Chercher $x \in \mathbb{Q}$, en sachant : ... ». (cf. Tableau 6)

Sous type de tâche	Manuel Exercices
	Effectifs
C1	3
C2	2
Totaux	5

Tableau 6 : Résolution des équations de degré 2 en 7°

II.4.2. Le manuel de 8°

En classe 8, nous l'avons vu, la factorisation est utilisée lors de la recherche des valeurs de x telles que $P(x)=0$ où $P(x)$ est un polynôme de degré 2 ou supérieur à 2.

Dans le chapitre I lors de l'étude de la multiplication et la division des polynômes, la résolution des équations est présente sous la forme de recherche des valeurs de l'inconnue x telles que $P(x)=0$ où $P(x)$ sont des formes $P^3(x)+P(x) \times Q(x)=0$, ou $P(x) \times (Q^2(x)-k)=0$, ou $P(x)+k_1.P^2(x)+k_2.P^3(x)=0$, ou $P(x) \times R(x)+P(x) \times S(x)=0$, ou $P(x) \times Q(x)+R(x) \times S(x)=0$ ($R(x)$

est multiple de $P(x)$), ou $P^2(x)-Q^2(x)=0$, ou $ax^2+bx+c=0$ (le membre de gauche étant la partie développée d'une identité).

De plus, la notion d'équation-produit nul et la résolution des équations de ce type apparaissent dans le chapitre III lors de l'étude des équations du premier degré.

Dans ce chapitre, après les équations du premier degré, on étudie les équations pouvant être ramenées à une équation du premier degré : équations produit nul, équations contenant l'inconnue aux dénominateurs, et la résolution des problèmes par la mise des équations.

La résolution d'une équation produit nul est ramenée à celle des équations du premier degré en utilisant la règle d'annulation des facteurs : « $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ » qui est présente dans la partie Cours. (cf. Tableau 7)

Sous type de tâche	Manuel Cours	Manuel Exercices	Totaux
	Effectifs	Effectifs	Effectifs
C1	7	14	21
C2	16	9	25
C3	1	0	1
C4	2	5	7
Totaux	26	28	54

Tableau 7 : Résolution des équations de degré 2 en 8°

II.4.3. Le manuel de 9°

C'est dans le manuel de la classe 9 qu'apparaît la résolution des équations du second degré. Ce manuel comporte quatre chapitres :

Chapitre I : Nombres réels. Racine carrée

Chapitre II : Fonction $y=ax+b$. Système de deux équations à deux inconnues

Chapitre III : Fonction $y=ax^2$ ($a \neq 0$). Équation du second degré à une inconnue

Chapitre IV : Introduction de la statistique.

La résolution de l'équation du second degré à une inconnue en utilisant les techniques de factorisation est l'objet de la troisième rubrique du chapitre III. (cf. Tableau 8)

Dans les exemples donnés, les équations sont résolues par l'une des techniques suivantes, dont chacune comporte deux étapes consécutives :

- factorisation du facteur commun pour ramener l'équation donnée à la forme $P(x) \times Q(x) = 0$ (technique que nous notons *Fact*), puis annulation de chacun des facteurs – binômes du 1° degré- de l'équation produit (que nous notons *ProdN*) ;
- utilisation d'une identité remarquable pour ramener l'équation donnée à la forme $P(x) \times Q(x) = 0$ (technique que nous notons *IdR*), puis annulation de chacun des facteurs chacun des facteurs de l'équation produit (*ProdN*).

On rencontre 16 exercices dans le manuel Cours et 20 exercices dans le manuel Exercices pour lesquels les techniques de factorisation sont mobilisées.

Dans le chapitre III, la résolution des équations du second degré en utilisant le discriminant est étudiée dans trois rubriques suivantes :

Rubrique 4 : Formules des solutions de l'équation du second degré

Rubrique 5 : Formules réduite des solutions

Rubrique 6 : Relation Viète. Application

Sous type de tâche	Manuel Cours	Manuel Exercices	Totaux
	Effectifs	Effectifs	
C1	1	6	7
C2	7	8	15
C3	4	1	5
C4	48	25	73
Totaux	60	40	100

Tableau 8 : Résolution des équations de degré 2 en 9°

Remarquons que 44 exercices du manuel Cours et 20 du manuel Exercices se résolvent principalement par la mise en œuvre de la technique d'utilisation du discriminant.

II.4.4. Le manuel de 10°

Le manuel de classe 10 de compose de 5 chapitres :

Chapitre I. Ensembles. Propositions

Chapitre II. Fonctions

Chapitre III. Équations et inéquation du premier degré

Chapitre IV. Équations et inéquation du second degré

Chapitre V. Erreur des calculs

Notons que les chapitres III et IV portent essentiellement sur l'étude (résolution avec discussion) des équations paramétrées.

Dans le manuel de 10°, la seule technique de résolution de l'équation du second degré utilisée est celle du discriminant, technique renforcée par son rôle dans la discussion selon la valeur des paramètres.

On rencontre seulement 4 exercices sans résolution dans le manuel Cours. Par ailleurs, ces exercices sont présents dans le manuel Exercices et leurs racines sont données dans la partie Réponse. (cf. Tableau 9)

Sous type de tâche	Manuels de classe 10
C4	4

Tableau 9 : Résolution des équations de degré 2 en 10°

II.4.5.Synthèse

Comme on peut le constater dans les tableaux ci-dessous, les quatre sous-types de tâche C1, C2, C3 et C4, sont présents en classe 8 comme en classe 9. (cf. Tableau 10)

Sous type de tâche	Manuel Cours				Manuel Exercices			Totaux
	7	8	9	10	7	8	9	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	
C1		7	1		3	14	6	31
C2		16	7		2	9	8	42
C3		1	4			0	1	6
C4		2	48	4		5	25	84
Totaux	0	26	60	4	5	28	40	163

Tableau 10 : Evolution de la 7° à la 10°

Si l'on regroupe les exercices des manuels Cours et Exercices, on obtient le Tableau 11 :

Sous type de tâche	7	8	9	10	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
C1	3	21	7		31	19
C2	2	25	15		42	25,8
C3		1	5		6	3,7
C4		7	73	4	84	51,5
Totaux	5	54	100	4	163	100

Tableau 11 : Synthèse de la 7° à la 10°

Le tableau 7 fait apparaître que :

- c'est en classe 8 que se fait l'essentiel du travail des sous-types de tâches C1 et C2 du type de tâche T, qui se résolvent par des techniques de factorisation;
- la proportion globale des exercices de types C1 et C2 est relativement faible ;
- le nombre d'exercices de type C3 est négligeable ;
- les exercices de type C4, la plupart du temps à résoudre par la technique du discriminant, sont majoritaires en classe 9 (73%) et globalement, sur l'ensemble des classes (51,5%).

Dans le chapitre suivant, nous étudions en détail les praxéologies correspondant aux sous-types de tâche C1, C2, C3 et C4, et aux techniques de factorisation F1, F2, F3 et F4. Aucune de ces praxéologie ne se retrouve dans les manuels de la classe 10.

II.5. Tâches de résolution graphique des équations du second degré

La résolution graphique d'une équation du second degré n'est pas présente dans le manuel de classe 9. Il n'existe que des problèmes de détermination des coordonnées d'une parabole $x \mapsto ax^2$ et d'une droite $x \mapsto bx$ dans le chapitre III lors de l'étude des fonctions $y=ax^2$ ($a \neq 0$) et d'équations du second degré.

La résolution graphique d'une équation se présente en classe 10, mais elle n'est étudiée que pour les équations contenant un paramètre.

II.5.1.En classe 9

On rencontre un exercice dans la partie des exercices d'entraînement de la rubrique « Représentation graphique de la fonction $y=ax^2$ ($a \neq 0$) » du chapitre III du manuel Cours.

« Exercice 3. a) Sur le même système des axes de coordonnées, tracer la représentation graphique des fonctions : $y=-x^2$, $y=2x$, $y=-2x$;

b) En combien de points la parabole $y=-x^2$ coupe-t-elle chaque droite précédente? Déterminer les coordonnées de ces points d'intersection. » (Cours, p.79)

Cet exercice propose de déterminer le nombre et les coordonnées des points d'intersection entre une parabole $x \mapsto ax^2$ et une droite $x \mapsto bx$. Cependant, il n'y a pas de lien avec le point de vue algébrique en termes de solution de l'équation $ax^2=bx$.

Il y a 4 autres exercices dans le manuel Exercice dont un seul concerne la résolution graphique d'une équation de la forme $ax^2-c=0$:

« Exercice 4. Tracer la représentation graphique des fonctions $y=2x^2$, $y=2x^2+5$; $y=2x^2-8$ sur un même système d'axes de coordonnées. D'après cette représentation graphique, chercher les racines de l'équation $2x^2-8=0$.

Montrer que l'équation $2x^2+5=0$ n'a pas de solution. » (Exercices, p.114)

II.5.2.En classe 10

La résolution graphique des équations du second degré est présente dans la rubrique « Interprétation graphique » de la partie « Équations du second degré » du chapitre IV du manuel Cours.

« Résoudre l'équation du second degré : $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) (1)

et chercher les abscisses des points d'intersection de la parabole $y=ax^2+bx+c$ avec l'axe des abscisses.

Trois cas $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ sont interprétés par la représentation suivante : figures 1, 2, 3, 4, 5 et 6» (Cours, p.100)

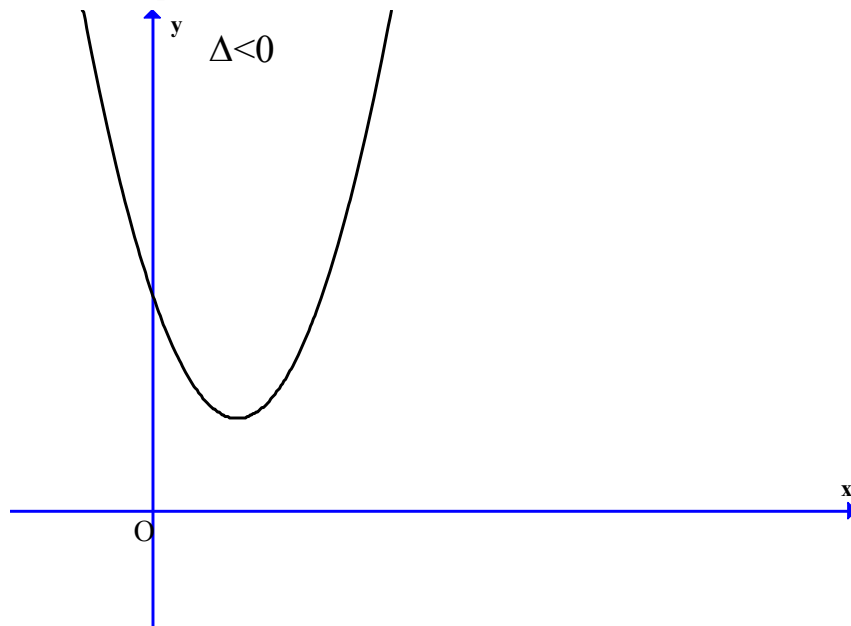


Figure 1 : Coefficient $a > 0$

Equation (1) n'a pas de solution

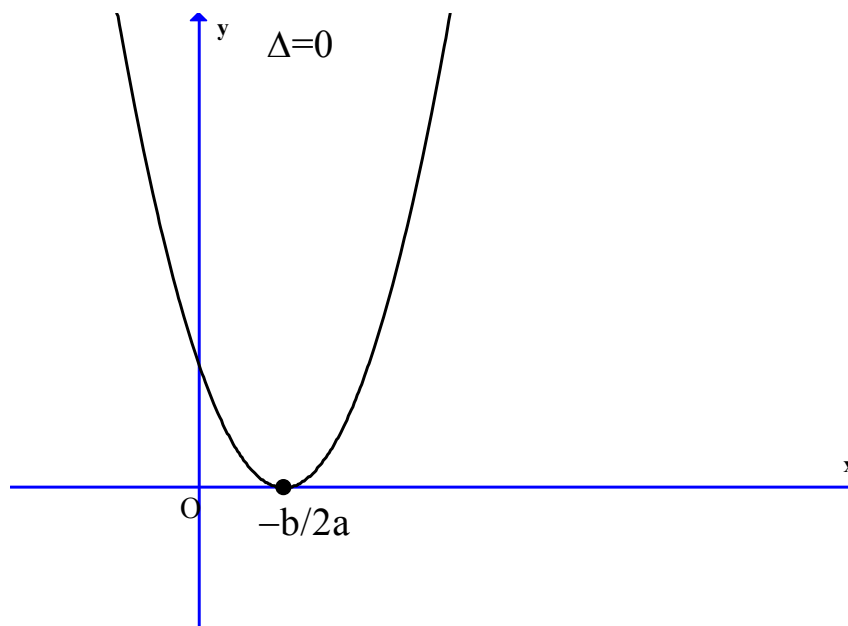


Figure 2 : Coefficient $a > 0$

Equation (1) a une solution $x = -\frac{b}{2a}$

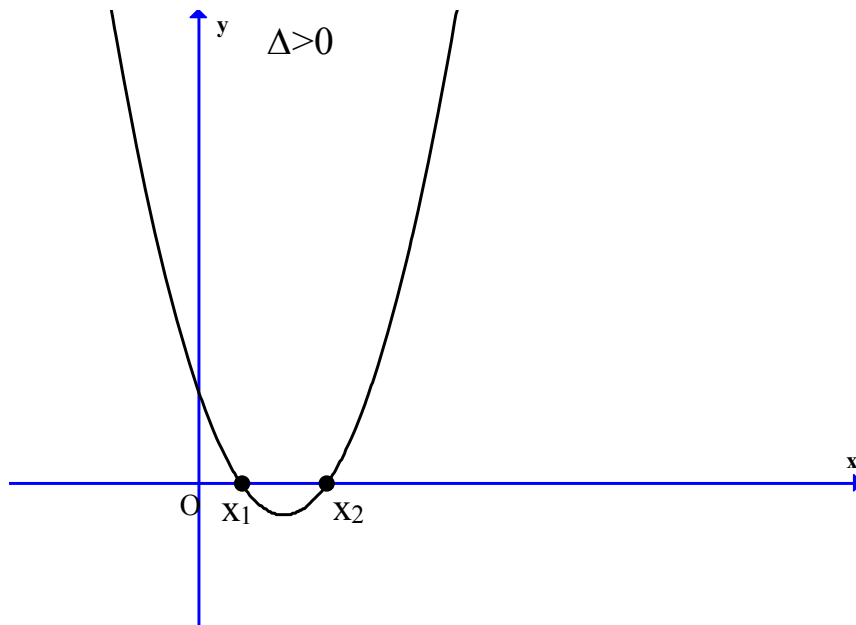


Figure 3 : Coefficient $a > 0$

Equation (1) a deux solutions $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$

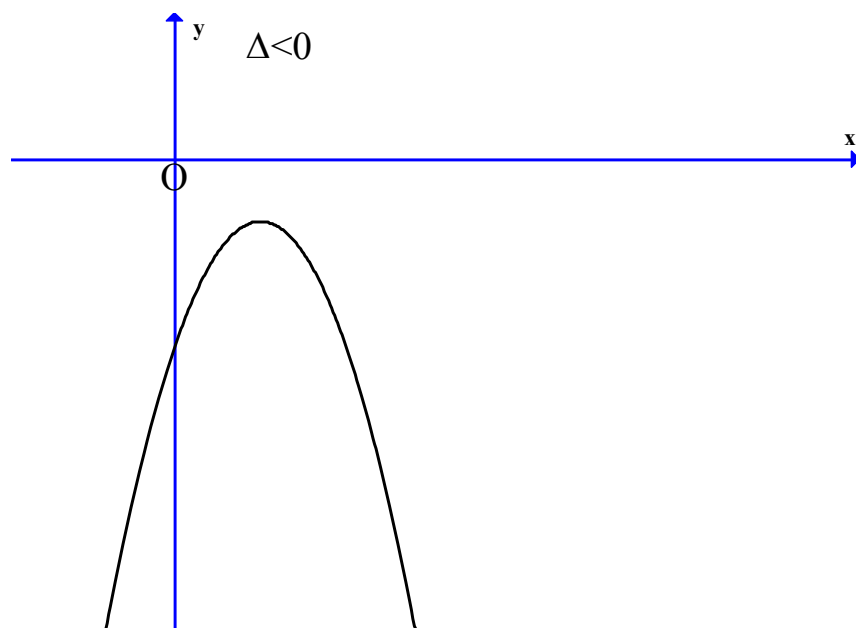


Figure 4 : Coefficient $a < 0$

Equation (1) n'a pas de solution

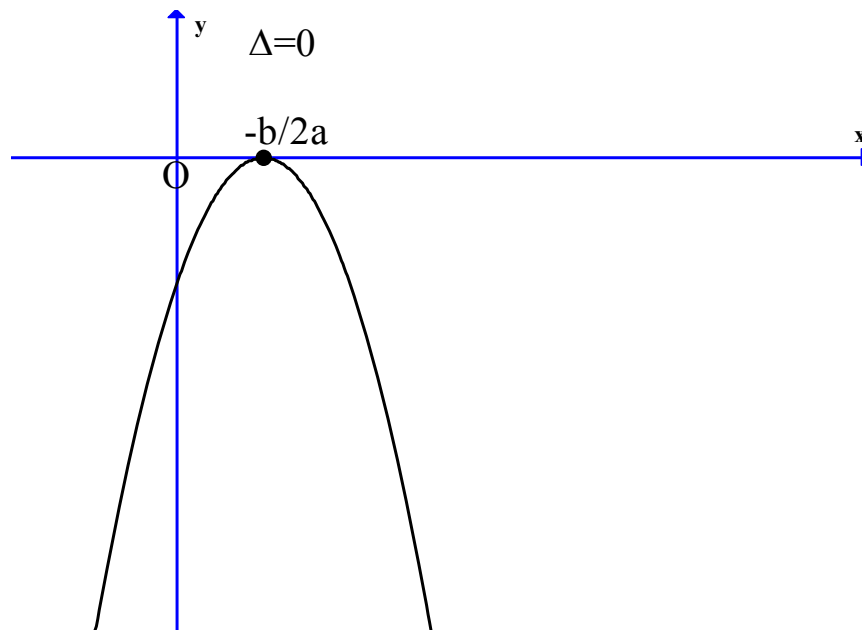


Figure 5 : Coefficient $a < 0$

Equation (1) a une solution $x = -\frac{b}{2a}$

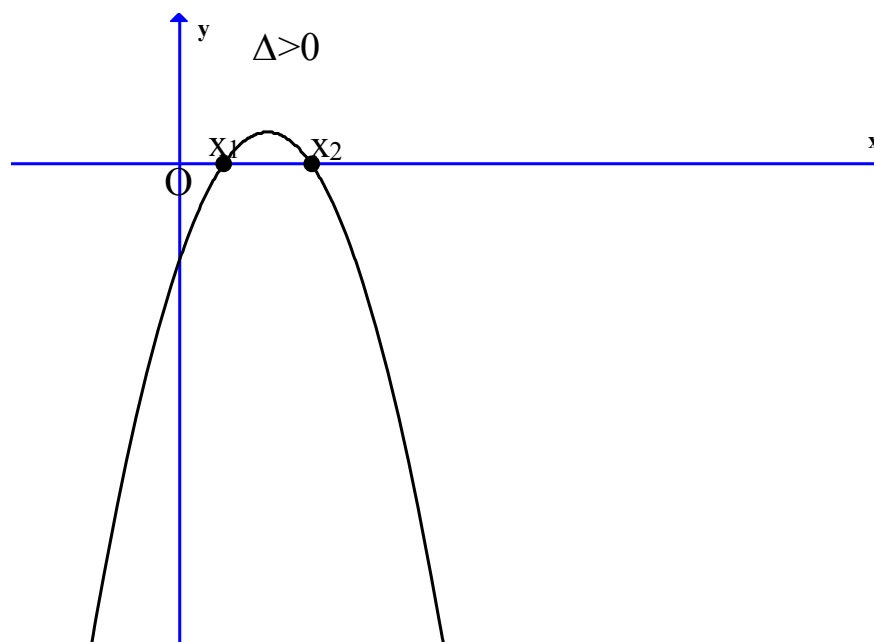


Figure 6 : Coefficient $a < 0$

Equation (1) a deux solutions $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$

De plus, l'équation $ax^2+bx+c=0$ peut être écrite sous la forme : $ax^2+bx=-c$ qui est interprétée comme l'égalité entre deux fonctions $x \mapsto ax^2+bx$ et $x \mapsto -c$ (droite parallèle à l'axe des abscisses.)

« Remarque. Parfois en transformant l'équation (1) sous la forme : $ax^2+bx=-c$, on étudie les points d'intersection de la parabole $y=ax^2+bx$ et la droite $y=-c$. » (Cours, p.101)

L'étude graphique de l'équation sous la forme $ax^2+bx=c$, permet d'étudier graphiquement le nombre de solution des équations paramétrées du type $ax^2+bx+f(m)=0$, où $f(m)$ est une expression de m . Par exemple :

« Exemple 3. En Utilisant la représentation graphique, discuter selon les valeurs de m le nombre des racines de l'équation :

$$x^2-2x-m=0. \text{ » (Cours, p.101).}$$

La résolution de l'exercice précédent est donnée dans laquelle on discute le nombre des racines de l'équation donnée selon le nombre des points d'intersection entre la parabole $x \mapsto x^2-2x$ et la droite $x \mapsto m$.

En revanche, il n'existe aucun exercice de ce type de tâche dans la partie Exercices du manuel Cours et dans la manuel Exercices.

II.6. Équations du second degré dans les problèmes de modélisation

Dans cette partie, on s'intéresse aux problèmes dans lesquels la recherche des réponses se conduit à la résolution d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$. Ces problèmes sont issus de la géométrie et de la vie courante. Afin d'éviter toute ambiguïté, nous ne considérerons pas les problèmes conduisant à une équation contenant l'inconnue au dénominateur.

La résolution de ces problèmes se compose des étapes suivantes :

- Choix de l'inconnue
- Mise en équation
- Résolution d'équation
- Sélection des solutions vérifiant les conditions

En raison de la variation de l'équation obtenue au départ, selon le choix de l'inconnue ou la mise en équation, on ne s'intéresse pas ici aux types de tâche, mais plutôt à la forme de l'équation trouvée. Par contre, nous ne considérons ici que les type de problèmes où existent une relation entre algèbre et d'autres domaines.

II.6.1. Le manuel de classe 8

En classe 8, la résolution de problèmes passant par la mise en équations ne se fait que sur des équations de degré 1.

II.6.2. Le manuel de classe 9

Une rubrique est consacrée à la résolution de problèmes par la mise en équation du second degré dans le chapitre III.

Les étapes de la résolution sont présentes dans les deux exemples donnés de cette rubrique.

« Exemple 1 : Un jardin rectangulaire est tel que sa longueur comporte 10m de plus que la largeur et que sa superficie est égale à 1200m^2 . Calculer le périmètre du jardin.

Résolution

Appelons x mètres ($x > 0$) la largeur, la longueur sera : $x+10$ (mètres).

La superficie du jardin est 1200m^2 , alors : $x(x+10)=1200$ ou $x^2+10x-1200=0$.

On résout l'équation du second degré, on obtient : $x_1=30$, $x_2=-40$.

La racine $x_2=-40$ ne vérifie pas l'énoncé car la mesure des côtés ne peut pas être négative.

Donc la largeur est 30(m), la longueur est : $30+10=40$ (m) et le périmètre du jardin est : $2(30+40)=140$ (m). » (Cours, p.94)

Dans la partie Exercices de ce chapitre, il y a 12 problèmes dont 4 problèmes issus de l'arithmétique, 2 issus de la géométrie, 1 issu de la chimie et 5 issus de la vie courante.

Dans le manuel Exercices, on trouve 10 problèmes dont 2 issus de l'arithmétique, 2 issus de la géométrie et 6 issus de la vie courante. (cf. Tableau 12)

Type de problèmes	Manuel Cours	Manuel Exercices	Totaux
Géométrie	2	2	4
Arithmétique	4	2	6
Chimie	1		1
Vie courante	5	6	11
Totaux	12	10	22

Tableau 12 : Problèmes de modélisation en 9°

II.6.3. Le manuel de classe 10

Un seul problème résolu se trouve dans l'exemple de la rubrique « Rechercher deux nombres en connaissant leur somme et leur produit ». Cette rubrique est étudiée comme une application du théorème de Viète, ou plutôt de la propriété « somme et produit des racines » du chapitre IV lors de l'étude des équations et inéquations du second degré.

« Exemple 4. Chercher deux côtés d'un rectangle en sachant que le périmètre est égal à 22m et l'aire à 28m^2 .

Résolution

Appelons u et v deux côtés du rectangle ($u > 0$, $v > 0$), on a :

$$S = u + v = 11,$$

$$P = uv = 28.$$

Donc u et v sont des racines de l'équation : $x^2 - 11x + 28 = 0$.

$$\text{On a : } \Delta = 121 - 4 \cdot 28 = 9 = 3^2.$$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{11-3}{2} = 4 ; x_2 = \frac{11+3}{2} = 7.$$

Donc les deux côtés du rectangle sont égaux à 4m et 7m. » (Cours, p.103)

La mise de l'équation dans la résolution de cet exercice repose sur la propriété suivante :

« Si deux nombres u et v ont la somme $u+v=S$ et le produit $uv=P$ alors u et v sont les racines de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$. » (Cours, p.103)

Dans la partie Exercices de ce chapitre manuel Cours, on trouve 8 problèmes dont 6 issus de l'arithmétique, 1 issu de la géométrie et 1 issu de la vie courante. La résolution ou la solution de ces problèmes sont données dans le manuel Exercices. (cf. Tableau 13)

D'autre part, on rencontre deux autres problèmes issus de la géométrie et de l'arithmétique dans la partie Exercices d'entraînement du manuel Exercices.

Type de problèmes	Manuel Cours	Manuel Exercices	Totaux
Géométrie	1	1	2
Arithmétique	6	1	7
Vie courante	1		1
Totaux	8	2	10

Tableau 13 : Problèmes de modélisation en 9°

II.7. Synthèse

La résolution des équations du second degré par l'utilisation des techniques de factorisation (*Fact_ProdN* et *IdR_ProdN*) est étudiée et traitée en classe 7, 8, et 9.

Elle est concentrée en classe 8, puis se retrouve en moindre importance en classes 9. Les deux sous-types de tâches majoritaires sont C2 et C4 (cf. tableau 7-VN).

En classe 9, l'étude de la résolution des équations du second degré est étudiée essentiellement sur les équations $ax^2 + bx + c = 0$ (a , b et c non nul) par la technique d'utilisation du discriminant, et il y a diminution des exercices des sous-types de tâche C1, C2, et C3.

En classe 10, les exercices des sous-types de tâche C1, C2, et C3 ont disparu, et ceux de type C4 sont en nombre négligeable pour les équations non paramétrées. (cf. tableau 7-VN).

Une autre technique de résolution des équations est étudiée en classe 9 et 10 : la résolution graphique. Elle porte sur des équations contenant un paramètre en classe 10. L'équation du second degré est interprétée comme l'intersection d'une parabole et d'une droite ou comme l'intersection de deux paraboles. Des activités proposent un travail d'interaction entre les deux modes de résolution : graphique et algébrique. Ce travail est fait en interaction avec le cadre de l'analyse.

Le traitement des problèmes issus des autres disciplines (de la géométrie, de l'arithmétique, de la physique, de la chimie, de la vie courante...) par la mise en équation de second degré est introduit en classe 9, et se poursuit dans la première classe du lycée (cf. Tableau 14).

Type de problèmes	Classe 9	Classe 10	Totaux
Géométrie	4	2	6
Arithmétique	6	7	13
Chimie	1		1
Vie courante	11	1	12
Totaux	22	10	32

Tableau 14 : modélisation en classes 9 et 10

III. ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DE L'ETUDE DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

On se limite, dans cette partie, aux tâches de résolution algébrique des équations de degré 2. Cette analyse a pour but d'identifier les praxéologies existantes dans les manuels vietnamiens, afin de les comparer ultérieurement à celles que l'on trouvera dans les manuels français, de répondre aux questions posées suite à l'analyse comparée des programmes.

Cette analyse nous permettra également de déterminer quels seront les types de tâches communs qui pourront être proposés, lors de notre expérimentation, aux élèves dans les deux pays.

Il s'agit notamment de préciser la place accordée, en classes 7, 8, 9 et 10, aux trois sous-types C1, C2 et C3 et C4 de la tâche T « résoudre une équation du second degré » dont les définitions ont été données dans la méthodologie d'analyse en début de chapitre B2, de préciser les techniques de résolution recommandées par le manuel, ainsi que les éléments technologiques qui les justifient.

Pour simplification de la rédaction et de la lecture, on convient de noter désormais les différentes techniques rencontrées dans le manuel comme suit :

CarN : technique d'annulation d'un carré.

Fact_ProdN : technique se décomposant en deux étapes consécutives : trouver un facteur commun pour ramener l'équation donnée à la forme $P(x) \times Q(x) = 0$, puis résoudre cette équation produit.

IdR_ProdN : technique qui se décompose de deux étapes consécutives : utiliser une identité remarquable pour ramener l'équation donnée à la forme $P(x) \times Q(x) = 0$, puis résoudre cette équation produit.

EgaCar (pour Egalité de Carrés) : technique reposant sur la règle « $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$ ».

Rac : technique reposant sur « $a^2 = k$ ($k > 0$) $\Leftrightarrow a = \sqrt{k}$ ou $a = -\sqrt{k}$ »

Discr : technique d'utilisation des formules des solutions après calcul du discriminant.

Dév_Fact_ProdN : technique qui se décompose en trois étapes consécutives : développer l'expression et la réduire, puis factoriser pour ramener l'équation donnée à la forme $P(x) \times Q(x) = 0$, et résoudre cette équation produit.

III.1. Sous-type de tâche C1

Polynôme déjà factorisé ou pouvant être factorisé par un facteur commun apparent

III.1.1. En classe 7

Rappelons que le programme comporte l'étude des expressions algébriques :

- Notion d'expression algébrique ; valeur d'une expression algébrique ;
 - Monômes, degré d'un monôme, monômes semblables ;
 - Notion de polynômes à plusieurs variables ; addition et soustraction des polynômes ;
 - Polynômes à une variable : ordonnés selon les puissances décroissantes ; addition et soustraction des polynômes à une variable ; notion de racine de polynômes à une variable.
- Mais la notion d'équation n'est pas introduite : nous avons vu précédemment que cette introduction se fait en classe 8.

On trouve cependant, dans les chapitres I et IV du manuel Exercices de la classe 7, quelques exercices pouvant se rattacher au sous-type de tâche C1. Ils se présentent sous les formes :

- « Chercher $x \in \mathbb{Q}$, en sachant que : $P(x) \times Q(x) = 0$ »,
- « Chercher $x \in \mathbb{Q}$, en sachant que : $P^2(x) = 0$ »,
- « Chercher les racines du polynôme suivant : $P(x) \times Q(x) = 0$ »

On pourrait penser que dans les deux premiers cas, il n'est pas attendu de l'élève une résolution algébrique donnant toutes les solutions, mais seulement la recherche par

tâtonnement d'une valeur de x répondant à la question. Mais les solutions données dans la partie Réponse ne vont pas dans le sens de cette interprétation.

Exemple 1. Dans la rubrique « multiplication et division des nombres rationnels » :

« Exercice 16. Chercher $x \in \mathbb{Q}$, en sachant que $2x(x - \frac{1}{7}) = 0$; » (I, p.5, Exercices)

Les deux solutions de cet exercice sont données dans la partie Réponse ($x=0$; $x=1/7$). La technique de résolution n'est pas explicitée.

Exemple 2. Dans la rubrique « puissance d'un nombre rationnel » :

« Exercice 42. Chercher $x \in \mathbb{Q}$, en sachant que $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$;... » (I, p.9, Exercices)

La solution $x = \frac{1}{2}$ est donnée sans explication.

Exemple 3. Dans la rubrique « racine d'un polynôme à une variable » :

« Exercice 45. Chercher les racines du polynôme suivant : $(x-2)(x+2)$ » (II, p.16, Exercices)

Il faut dans ce cas remarquer que la théorie sous-jacente figure dans le cours : on est dans l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la soustraction, ainsi que la technique de recherche des racines d'un polynôme : il s'agit de trouver des valeurs de x telle que le polynôme s'annule.

III.1.2.En classe 8

Le programme comporte notamment :

- la multiplication d'un monôme par un polynôme ; de deux polynômes
- les identités remarquables $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a \pm b)^3$, $a^3 \pm b^3$
- la factorisation de polynômes
- la division d'un monôme par un monôme ; d'un polynôme par un monôme ; d'un polynôme par un polynôme
- l'étude des fractions algébriques
- les équation et inéquations du premier degré à une inconnue
- les équations se ramenant au 1^{er} degré ($\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$, $A_1(x) \dots A_2(x)$).

Dans le manuel Cours, la résolution des équations de degré 2 est présente sous deux formulations :

Dans le chapitre I : « Chercher x tel que : $P(x)=0$ » ou « Chercher x , en sachant que $P(x)=0$ » ()

Dans le chapitre III : « Résoudre les équations $P(x)=0$ ».

La première formulation se trouve dans le chapitre I, avant l'introduction des équations qui ne se fait qu'au chapitre III.

Chapitre I : Multiplication et Division des polynômes

On pourrait penser, ici encore, que dans ce chapitre, lorsqu'on demande « Chercher x tel que : $P(x)=0$ » ou « Chercher x , en sachant que $P(x)=0$, il n'est pas attendu de l'élève une résolution algébrique donnant toutes les solutions.

Or dans le manuel Exercices, nous avons relevé les indications de réponse qui indiquent une technique de résolution.

Exemple : « Exercice 24. Chercher x , en sachant que :

a) $x+5x^2=0$; b) $x+1=(x+1)^2$ (I, p.6, Exercices)

La résolution de ces exercices est donnée dans la partie Réponse:

a) l'équation est transformée en $x(1+5x)=0$. Donc, $x=0$; $x=-\frac{1}{5}$.

b) $x=-1$; $x=0$ (I, p.11, Exercices)

L'indication donnée pour a) peut laisser penser que la technique attendue est *Fact_ProdN*, non explicitée.

Nous considérons donc les deux formulations comme relevant du type de tâche « Résoudre les équations.

Les équations proposées comportent toutes un facteur commun apparent. Elles se présentent sous les formes suivantes : « Chercher x , sachant que :

(1) $P(x) \times Q(x) + P(x) \times R(x) = 0$;

(2) $P^2(x) = P(x)$;

(3) $P(x) \times Q(x) = P(x)$;

(4) $P^2(x) - P(x) \times Q(x) = 0$.

Exemple 1- Dans le manuel Cours :

Exercice 81. Cet exercice, formulé sous la forme « Chercher x , en sachant que » propose :

- une équation du troisième degré de la forme : $k_1.P(x)(Q^2(x)-k_2) = 0$

- $(x+2)^2 - (x-2)(x+2) = 0$

- une équation du troisième degré de la forme : $P(x) + k_1.P^2(x) + k_2.P^3(x) = 0$ (I, p.33, Cours).

On peut donc penser que la technique suggérée par la forme de la première équation est *ProdN* et que celle-ci est donnée en premier pour amener les élèves à résoudre les deux autres équations par *Fact_ProdN*.

Exemple 2- Dans le manuel Exercices :

« Exercice 37. Chercher x , en sachant que : $5x(x-1) = x-1 ; \dots$ » (I, p.7, Exercices).

Les deux solutions de cette équation sont données dans la partie Réponse :

« a) $x=1$; $x=\frac{1}{5}$ » (I, p.13, Exercices^{8°}).

Ici, aucune indication sur la technique n'est donnée

Chapitre III : Equations et inéquations du premier degré

Le premier exercice se rattachant au sous-type de tâche C1 apparaît dans la rubrique « équations produit nul ». Cette rubrique contient deux parties :

- (1) Equation produit nul et sa résolution
- (2) Application

Dès l'introduction de la rubrique « Equations produit nul », le manuel essaie de mettre les élèves sur la piste de la recherche d'une technique de résolution en posant la question suivante : « Pour résoudre une équation de ce type, on doit résoudre plusieurs équations. Pourquoi ? » (II, p.15, Cours)

Avant l'introduction de l'équation produit nul et de sa résolution, la technique de factorisation est rappelée dans un exercice de factorisation d'un polynôme du second degré :

« Factoriser le polynôme $P(x)=(x^2-1)+(x+1)(x-2)$ ».

La partie « équation produit nul et sa résolution » commence par un énoncé à trous à compléter (dont on peut penser qu'il a pour but de rappeler la propriété de l'annulation d'un produit de deux nombres réels) :

« Rappelons une propriété de la multiplication des nombres, compléter l'énoncé suivant : dans un produit, si un facteur est égal à zéro, alors... ; inversement, si le produit est égal à zéro alors au moins l'un des facteurs... ».

Un exemple de résolution d'une équation-produit nul est ensuite donné

« Exemple 1 : Résoudre l'équation $(2x - 3)(x + 1) = 0$. »

La technique mobilisée ici bien *ProdN* explicitée comme suit dans le traitement de cet exercice:

« $(2x - 3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$.

Donc, on doit résoudre deux équations :

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1.5$.

$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = - 1$.

L'équation donnée a donc deux solutions : $x = 1.5$ et $x = -1$. On écrit aussi : l'ensemble de solutions de l'équation est $S = \{1.5 ; - 1\}$. » (II, p.15, Cours^{8°})

Après le traitement de cet exercice, la technique de résolution est explicitée par un discours qui précise en même temps la technique et la technologie la justifiant « $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ » .

« On étudie les équations produit de la forme $A(x) \times B(x) = 0$. Pour résoudre ces équations, on applique la formule : $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.

Donc, pour résoudre l'équation $A(x) \times B(x) = 0$, on résout les deux équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$, puis on prend toutes leurs solutions".

Dans les manuels Cours et Exercices, se présentent des exercices dans lesquels la technique de factorisation en produit nul et d'annulation des facteurs du premier degré est explicite dans la consigne des exercices.

Exemple 1.

« Par la mise en facteurs du membre de gauche, résoudre les équations suivantes :

a) $2x(x-3)+5(x-3)=0$;

b) $(x^2-4)+(x-2)(3-2x)=0$; » (Cours, p.17)

Dans l'équation a), le facteur commun $(x-3)$ est apparent, mais dans l'équation b), le facteur commun $(x-2)$ n'est pas apparent dans le premier terme (x^2-4) . La mise en facteur commun va ramener ces équations à celles $(x-3)(2x+5)=0$ et $(x-2)(5-x)=0$.

Exemple 2.

« Exercice 31. Résoudre les équations suivantes en les ramenant à une équation produit nul :

a) $(x-\sqrt{2})+3(x^2-2)=0$

b) $x^2-5=(2x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$. » (Exercices, p.8)

La mise en facteur commun de ces deux équations est donnée par une indication dans la partie Réponse :

« Exercice 31. a) Indication : Factoriser $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

Posons $x-\sqrt{2}$ comme le facteur commun.

Solutions : $x=\sqrt{2}$ et $x=-\frac{1}{3}-\sqrt{2}$.

b) Indication : Factoriser $x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.

Regroupons tous les termes dans un membre et prenons $x+\sqrt{5}$ comme facteur commun.

Solutions : $x=-\sqrt{5}$ et $x=0$. » (Exercices, p.24)

III.1.3.En classe 9

Le programme comporte :

- Nombres réels et racines carrées
- Fonction $y=ax+b$
- Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues
- Fonction $y=ax^2$
- Équations du second degré à une inconnue.

Chapitre III (Fonction $y=ax^2$ ($a \neq 0$)). Équation du second degré à une inconnue

Une seule équation du type $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) = 0$ apparaît dans un exemple de la rubrique « Equation du second degré à une inconnue » du Cours.

« Exemple 1 : Résoudre l'équation : $3x^2+2x=0$ (1) » (p.79, Cours).

L'Equation (1) est considérée comme une équation incomplète de l'équation canonique $ax^2+bx+c=0$.

« On prend x comme facteur commun : $x(3x+2)=0$. On en déduit $x=0$ ou $x=-\frac{2}{3}$.

Donc l'équation (1) a deux solutions $x_1=0$; $x_2=-\frac{2}{3}$ » (p.80, Cours)

III.2. Sous-type de tâche C2

Résoudre des équations qui se ramènent à C1 après une factorisation partielle ou par application d'une identité remarquable

III.2.1.En classe 7

Comme pour C1, on ne trouve des exercices se rattachant à ce sous-type de tâche que dans le manuel Exercices.

Deux équations du type $P^2(x)=k$ ($k>0$) se trouvent dans l'exercice 42 de la rubrique « puissance d'un nombre rationnel » :

« Exercice 42. Chercher $x \in \mathbb{Q}$, en sachant que $(x-2)^2=1$; $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$. » (I,p.9,

Exercices)

La résolution de ces deux exercices est indiquée dans la partie Réponse :

« Exercice 42....

$$x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$$x-2=-1 \Rightarrow x=1.$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{-3}{4} . \gg (\text{I, p.30, Exercices})$$

Ces indications montrent que c'est la technique *EgaCar* qui est mobilisée lors de la résolution de ces équations.

Cette technique « Pour résoudre une équation de la forme $P^2(x)=Q^2(x)$ on résout les deux équations du premier degré $P(x) = Q(x)$ et $P(x) = - Q(x)$ et on prend la réunion des solutions », n'est pas explicitée. Remarquons qu'aucun élément technologique justifiant cette technique n'est à la disposition des élèves en classe 7.

III.2.2.En classe 8

Comme c'était le cas pour C1, des exercices appartenant à ce sous-type de tâche figurent dans les chapitre I et III des deux manuels Cours et Exercice : dans le chapitre I ils apparaissent sous l'énoncé : « Chercher x, en sachant que ... », et dans le chapitre III, sous l'énoncé : « Résoudre les équations ».

Chapitre I : Multiplication et Division des polynômes

Des équations dans lesquelles le facteur commun n'est pas apparent sont données sous les formes :

$$P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x) = 0 \text{ (où } R(x) \text{ est un multiple de } P(x))$$

$$k^2 - Q^2(x) = 0 \text{ (où } k \text{ est un réel)}$$

$$P^2(x) - Q^2(x) = 0$$

Deux techniques de résolution des équations apparaissent, bien que non entièrement explicitées, dans le manuel Exercices : *Fact_ProdN* et *IdR_ProdN*.

Exemple 1.

« Exercice 28. Résoudre les équations suivantes :

$$(2-3x)(x+11) = (3x-2)(2-5x) \gg (\text{II, p.7, Exercices}) ;$$

Réponse : « Indication : Le facteur commun est $3x-2$.

$$\text{Solutions : } S = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{13}{4} \right\} \gg (\text{II, p.22, Exercices}) ;$$

La technique de résolution de cet exercice se décompose donc en trois étapes :

Regrouper les termes dans le premier membre de l'équation ;

Mettre en facteur dans l'expression le facteur commun ;

Résoudre l'équation produit nul obtenue.

Elle se ramène donc à la technique que nous avons noté *Fact_ProdN*.

Exemple 2.

« Exercice 45. Chercher x , en sachant que : $2 - 25x^2=0$ » (I, p.20, Cours).

Exemple 3.

« Exercice 55. Chercher x , en sachant que : $(2x-1)^2 - (x+3)^2=0$ » (I, p. 25, Cours)

Le premier exercice se trouve dans la rubrique de factorisation d'un polynôme en utilisant les identités et le second dans la partie de révision du chapitre I.

Les exercices étant des applications du cours, aucune indication n'est donnée, mais on peut penser que la technique de résolution de ces exercices est d'utiliser l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ pour se ramener à une équation produit nul. On est donc dans le cas *IdR_ProdN*

Chapitre III : Equations et inéquations du premier degré

Dans le manuel Cours, on rencontre un exercice de ce type dans la partie Exercices, deux autres qui s'y ramènent dans la partie Entraînement, et un dernier dans la partie Révision du chapitre.

« Exercice 22. Par la factorisation du membre gauche, résoudre l'équation suivante : $(2x-5)^2 - (x+2)^2=0$; » (II, p.17, Cours) ;

« Exercice 24. Résoudre les équations :

$$(x^2-2x+1)-4=0 ; \dots$$

$$4x^2+4x+1=x^2 ; \dots \text{ » (II, p.17, Cours) ;}$$

« Exercice 51. Résoudre les équations suivantes en se ramenant à une équation produit nul : $(x+1)^2 = 4(x^2-2x+1)$ » (II, p.33, Cours).

Les indications données dans l'énoncé (factoriser, ou se ramener à une équation produit nul) laissent à la charge de l'élève d'utiliser, pour ce faire, une identité remarquable – technique introduite au chapitre I.

Dans le manuel Exercices, on trouve une seule équation se ramenant à ce type de tâche.

« Exercice 29. Résoudre les équations suivantes : $x^2+(x+2)(11x-7)=4$ » (II, p.8, Exercices).

Dans la résolution, on fait apparaître le facteur commun après avoir regroupé le terme constant 4 avec le carré x^2 dans le membre gauche :

« Exercice 29. Indication :

$$x^2+(x+2)(11x-7)=4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4)+(x+2)(11x-7)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)+(x+2)(11x-7)=0.$$

Solutions: $S = \left\{ -2; \frac{3}{4} \right\}$. » (II, p.23, Exercices).

La technique utilisée lors de la résolution de cet exercice peut être décomposée trois étapes :

Regrouper les termes au 1^{er} membre ;
Chercher le facteur commun et factoriser pour se ramener à une équation produit nul
Résoudre l'équation produit nul obtenue

On se ramène donc à la technique que nous avons notée *Fact_ProdN*

III.2.3. En classe 9

Chapitre III: Fonction $y=ax^2$ ($a \neq 0$). Équation du second degré à une inconnue

Dans les exemples et exercices de ce chapitre, les équations données rattachables au sous-type de tâche C2 sont de formes suivantes :

$k_1.P^2(x)-k_2=0$ ($k_1>0$ et $k_2>0$) ;
 $P^2(x)-k.Q^2(x)=0$ ($k>0$) ;
 $P^2(x)-k=0$ ($k>0$) ;
 $k_1.P^2(x)-k_2.Q^2(x)=0$ ($k_1>0$ et $k_2>0$).

La technique mobilisée lors de la résolution de ces équations est *IdR_ProdN*, l'identité utilisée étant : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Par exemple, si on rencontre une équation de la forme (1), on se ramène à $P^2(x)-k=0$ ($k>0$) par division des deux membres de l'équation par k_1 . Ensuite, on utilise la technique *IdR_ProdN*, qui est explicitée dans un exemple.

« Exemple 2 : Résoudre l'équation $3x^2-48=0$ (2)
Divisons les deux membres par 3 : on obtient $x^2-16=0$.
Appliquons l'identité, on a $(x+4)(x-4)=0$.
L'équation a deux solutions $x_1=-4$; $x_2=4$. » (p.80, Cours)

Dans le manuel Exercices, on rencontre également une équation de la forme (4) :

« Exercice 6. Transformer le membre gauche en application de l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, puis résoudre l'équation : $9(x-2)^2-4(x-1)^2=0$;... » (p.105, Exercices).

Réponse :

« $[3(x-2)]^2-[2(x-1)]^2=0$
 $\Leftrightarrow [3(x-2)+2(x-1)][3(x-2)-2(x-1)]=0$
 $\Leftrightarrow (5x-8)(x-4)=0$
 $\Leftrightarrow x_1=\frac{8}{5}$; $x_2=4$. » (p.123, Exercices).

Ces indications indiquent la technique d'utilisation de l'identité a^2-b^2 pour se ramener à une équation produit nul.

III.3. Sous-type de tâche C3

Equations ne se prêtant pas, de manière apparente, à une factorisation

III.3.1.En classe 7

Il n'existe d'exercices de ce type de tâche ni dans le manuel cours ni dans le manuel d'exercices de la classe 7.

III.3.2.En classe 8

Chapitre III

Dans la partie du Cours : Application de la rubrique « Équation produit nul », on trouve un exemple résolu correspondant à ce type de tâche.

« Exemple 2. Résoudre l'équation $(x+1)(x+4)=(2-x)(2+x)$.

Résolution : On transforme l'équation donnée en une équation produit nul comme suit :

$$(x+1)(x+4)=(2-x)(2+x)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4)-(2-x)(2+x)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+4x+4-2^2+x^2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x=0$$

$$\Leftrightarrow x(2x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2x+5=0.$$

$$x=0 ;$$

$$2x+5=0 \Leftrightarrow 2x=-5 \Leftrightarrow x=-2,5 \text{ » (II, p.16, Cours).}$$

La technique de résolution de ce type de tâche, explicitée après le traitement de l'exercice, est formulée en deux étapes, sans préciser comment ni pourquoi on peut effectivement se ramener à une équation produit nul :

« Etape 1. Ramener l'équation donnée à celle d'une équation produit nul.

Etape 2. Résoudre l'équation produit nul et conclure. »

Nous considérons qu'une nouvelle technique de résolution apparaît ici :

Transfert de tous les termes dans le membre de gauche de l'équation, suivi du développement et de la réduction des produits ;

Factorisation de la nouvelle expression obtenue pour se ramener à une équation-produit nul

Résolution de l'équation-produit nul.

C'est la technique que nous avons notée *Dév_Fact_ProdN*.

Il faut remarquer qu'aucun exercice de ce type ne figure dans le manuel Exercices.

III.3.3.En classe 9

On ne trouve qu'un exercice de ce type dans le manuel Cours, mais cinq dans le manuel Exercices.

Exemple 1.

« Exercice 3c. $10(x-2)+19=(5x-1)(1+5x)$ » (p.81, Exercices) ;

« Indication : Se ramener à la forme $5x(5x-2)=0$. Donc, $x_1=0$; $x_2=\frac{2}{5}$ »

(p.121, Exercices).

Exemple 2.

« Exercice 3d. $(3x-2)^2-2(x+1)^2=2$. » (p.81, Exercices) ;

« Indication : En transformant, on obtient : $7x^2-16x=0$.

Donc, $x_1=0$; $x_2=\frac{16}{7}$. » (p.121, Exercices).

Bien que la technique de transformation de l'équation de départ ne soit pas précisée, on peut encore voir ici la présence implicite de la technique *Dev_Fact_ProdN*.

III.4. Sous-type de tâche C4

Le premier membre ax^2+bx+c des équations canoniques $ax^2+bx+c=0$ apparaît sous deux forme :

$$a^2 \pm 2ab + b^2 ;$$

sans factorisation apparente.

III.4.1.En classe 8

Aucun exemple de résolution de tels exercices ne figure dans les manuels.

Cependant, les deux techniques *IdR_ProdN* et *Fact_ProdN* apparaissent dans les indications de résolution de tels exercices données dans la manuel Exercices.

Pour la technique *IdR_ProdN*, ce sont les identités remarquables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ qui sont utilisées afin de ramener les équations de départ à la forme $P^2(x)=0$.

Exemple. « Exercice 30b. Chercher x , en sachant que $x^2-10x=-25$. » (I, p.6, Exercice)

Dans le cas où le trinôme n'est pas de la forme des identités $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, une décomposition (*Dec*) du terme bx du trinôme est effectuée afin de faire apparaître le facteur commun, puis de mettre en œuvre la technique *Fact_ProdN*.

Cette technique n'était pas prévue dans la liste des techniques envisagées en début de chapitre, on la désignera par *Dec_Fact_ProdN*. (*Dec* pour désigner la décomposition d'un ou plusieurs termes de l'expression).

Exemple.

« Exercice 30. Résoudre les équations suivantes en ramenant à celle produit nul.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

c) $4x^2 - 12x + 5 = 0$ » (II, p.8, Exercices)

« Exercice 30a) Indication : $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x) - (2x - 2) = 0$.

Solutions : $S = \{1 ; 2\}$ » (II, p.23, Exercices)

On décompose $-3x$ en la somme $-x - 2x$, puis on regroupe les termes deux par deux pour faire apparaître le facteur commun, enfin on se ramène on remette à l'équation produit nul : $(x-2)(x-1)=0$.

« Exercice 30c) Indication : $4x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 2x) - (10x - 5) = 0$.

Solutions : $S = \left\{ \frac{1}{2} ; \frac{5}{2} \right\}$. » (II, p.23, Exercices).

Ici on écrit $-12x$ sous la forme d'une somme de deux termes $-2x$ et $-10x$, puis on regroupe les termes deux par deux pour faire apparaître le facteur commun, enfin on se ramène comme précédemment à une équation produit nul.

Cette technique de factorisation repose sur une technologie explicitée comme suit dans l'ancien guide des professeurs de la classe 8 :

« Quand on factorise le trinôme $x^2 + bx + c$, on peut découper $b = m + n$ tel que $c = m.n$. Cela provient du théorème de Viète des solutions d'un trinôme : "Si $ax^2 + bx + c$ a deux solutions x_1 et x_2 , alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ". C'est un outil qui aide les professeurs à découper un terme. Par exemple, le polynôme $15x^2 - 8x - 7$ a deux solutions $x_1 = 1$, $x_2 = -7/15$, alors $15x^2 - 8x - 7 = 15(x - 1)(x + 7/15) = (x - 1)(15x + 7)$. Donc, il faut découper $-8x = -15x + 7x$. » (Guide du professeur, p.36).

Comme on le voit, il s'agit ici de donner aux professeurs « un outil » pour « découper » le terme en x facilement quand ils ont au préalable trouvé les solutions de l'équation.

Bien entendu, il est impossible de donner ces explications aux élèves qui, eux, ne connaissent pas ces solutions, puisqu'ils les cherchent !

Cette technique pourrait être explicitée par les étapes suivantes :

On cherche deux entiers m et n tels que : $m+n=b$ et $m \times n=a \times c$

On factorise le trinôme : $ax^2+bx+c = ax^2+(m+n)x+\frac{m \times n}{a} = ax^2+mx+nx+\frac{m \times n}{a}$

$$= x(ax+m)+\frac{n}{a}(ax+m) = (ax+m)(x+\frac{n}{a}).$$

L'Équation est ramenée à $(ax+m)(ax+n)=0$.

Dans l'exercice 30a, on a ainsi cherché deux entiers m, n tels que : $m+n=-3$ et $m \times n=2$. D'où $m=-2$ et $n=-1$.

Dans l'exercice 30c, m et n doivent vérifier : $m+n=-12$ et $m \times n=4 \times 5$. D'où $m=-2$ et $n=-10$.

Ceci est beaucoup trop difficile pour les élèves, sauf dans le cas des équations du type : $ax^2+(a+c)x+c=0$. Dans le cas général, le « découpage » proposé ne peut que sembler « magique » et inciter les élèves « bricoler » à leur façon.

La technique de factorisation ici proposée (dans le cadre de la technique *Dec_Fact_ProdN*) est donc à portée extrêmement limitée.

On va néanmoins la retrouver dans les manuels de la classe 9.

III.4.2.En classe 9

a) *Résolution d'une équation du second degré par factorisation*

La résolution de l'équation canonique $ax^2+bx+c=0$ apparaît dans un exemple de la rubrique « Equation du second degré à une inconnue » du chapitre III :

« Exemple 4 : Résoudre l'équation $3x^2-5x-2=0$ (4) » (p.80, Cours)

Trois techniques sont données après l'énoncé.

Dans la première technique, l'équation est ramenée à une équation produit nul par une factorisation du trinôme ax^2+bx+c par la technique présentée ci-dessus en classe 8.

$$\begin{aligned} \text{« Méthode 1 : } 3x^2-5x-2 &= 3x^2-6x+x-2 \\ &= 3x(x-2)+x-2 \\ &= (x-2)(3x+1). \end{aligned}$$

Donc (4) est équivalente à $(x-2)(3x+1) = 0$.

L'Equation donnée a deux solutions $x_1=2$; $x_2= -\frac{1}{3}$. » (p.80, Cours)

Dans cette résolution, on cherche deux entiers m et n tels que $m+n=-5$ et $m \times n=-2 \times 3$. On trouve (par calcul mental), $m=-6$ et $n=1$. Donc, le terme $(-5x)$ est découpé en deux termes (-

6x) et x. Ensuite, on regroupe les deux premiers termes $3x^2$ et $(-6x)$ et on fait apparaître le facteur commun $(x-2)$. Il s'agit alors de la technique *Dec_Fact_ProdN*

Dans la deuxième résolution, l'équation donnée est ramenée à la forme $P^2(x)=k$ en utilisant les identités remarquables $(A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$, puis résolue par la technique *EgaCar*.

« Méthode 2 : On a $3x^2-5x-2=0$, $a=3$, $b=-5$, $c=-2$.

Multiplions les deux membres de l'équation avec $4a=4.3=12$, on obtient

$$36x^2-60x-24=0$$

$$\text{Ou : } (6x)^2-2.5(6x)=24.$$

On rajoute $b^2=(-5)^2=25$ aux deux membres de l'équation, on obtient

$$(6x)^2-2.5(6x)+25=49$$

$$\text{Ou : } (6x-5)^2=7^2.$$

Delà $6x-5=7 \Rightarrow x=2$; ou

$$6x-5=-7 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \text{ » (p.80, Cours)}$$

Aucune explication n'est donnée pour justifier pourquoi ça marche. Il y a absence de technologie. La technique utilisée est *Aj_IdR_EgaCar*, où *Aj* désigne l'ajout d'un terme ou d'un facteur en conservant l'égalité afin de faire apparaître une identité remarquable.

En fait, on pourrait justifier cette technique comme suit. Pour résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$:

Multiplier les deux membres de l'équation par a pour faire apparaître le début d'un carré : $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a^2x^2+abx+ac=0$

Multiplier les deux membres de l'équation par 4, pour faire apparaître les deux premiers termes $A^2(x)$ et $2A(x) \times B(x)$ de la partie développée de l'identité $(A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$:

$$a^2x^2+abx+ac=0 \Rightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac=0 \Rightarrow (2ax)^2+2 \times 2ax \times b+4ac=0$$

Rajouter le nombre b^2 aux deux membres de l'équation et utiliser les identités $(A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$ pour ramener l'équation à celle $P^2(x)=k$:

$$(2ax)^2+2 \times 2ax \times b+4ac+ b^2 = b^2 \Rightarrow (2ax+b)^2 = b^2-4ac$$

Remettre l'équation sous la forme $P^2(x)=k^2$ et utiliser la technique *EgaCar* :

$$(2ax+b)^2 = \left(\sqrt{b^2-4ac} \right)^2 \Rightarrow 2ax+b = \sqrt{b^2-4ac} \text{ ou } 2ax+b = -\sqrt{b^2-4ac}.$$

Dans la troisième technique, l'équation donnée est ramenée à la forme $P^2(x)-Q^2(x)=0$, puis $R(x) \times S(x)=0$ en utilisant les identités remarquables $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, et puis l'utilisation de la règle d'annulation d'un produit de facteurs.

« Méthode 3 : Diviser deux membres de l'équation par 3, on obtient $x^2-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}=0$.

Transformer le membre gauche :

$$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} = \left(3 - \frac{5}{6} + \frac{7}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6} - \frac{7}{6}\right) \\ = \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2).$$

Résoudre l'équation $\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2) = 0$ on obtient deux solutions $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{3}$. »

(p.81, Cours)

Nous désignons cette technique par *Aj_IdR_ProdN*. Aucun élément technologique n'est donné.

On peut justifier cette technique, qui est celle de la décomposition canonique d'une équation du second degré, par les étapes suivantes :

(1) Ramener l'équation à celle $x^2 + b'x + c' = 0$ en divisant deux membres de

$$\text{l'équation par } a : ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

(2) Faire apparaître le double $2A(x) \times B(x)$ au deuxième terme de l'équation et

rajouter $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ pour avoir l'expression $A^2(x) + 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$ et

$$\text{d'obtenir une équation équivalente : } x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

(3) Remettre l'équation sous la forme de différence des carrés et la ramener à l'équation produit nul :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

(4) Résoudre l'équation produit nul.

Donc, trois techniques (*Dec_Fact_ProdN*, *Aj_IdR_EgaCar* et *Aj_IdR_ProdN*) sont proposées dans le manuel de 9° pour ramener des équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ aux formes $P(x) \times Q(x) = 0$, ou $P^2(x) = Q^2(x)$, ou $P^2(x) - k^2 = 0$, que l'on sait résoudre en se ramenant à une équation produit nul ou à de deux équations degré 1.

Il faut noter l'absence de technologie justifiant ces techniques. Cela rend difficile la détermination de leur portée. Quand marchent-elles ? Dans quel cas choisir l'une ou l'autre ? Comment choisir la technique la plus efficace selon le type d'exercice ?

b) Résolution d'une équation du second degré par calcul du discriminant

La résolution de l'équation du second degré en calculant le discriminant est introduite en classe 9 et reprise en classe 10, notamment pour l'étude des équations paramétrées auxquelles nous ne nous intéressons pas ici. (cf. Tableau 15)

Classes	Manuel Cours	Manuel Exercices	Totaux
9	44	20	64
10	4		4

Tableau 15

En classe 9

Elle figure dans le chapitre III « Fonction $y=ax^2$ ($a \neq 0$)-Equation du second degré à une inconnue ».

Alors qu'il n'y a que 5 exercices de résolution d'équation donnée sous forme canonique par factorisation dans le manuel Cours et 5 dans le manuel Exercices, on trouve, pour la résolution par calcul du discriminant, 44 exercices dans le manuel Cours et 20 dans celui d'Exercices.

En classe 10

Le manuel de la classe 10 comporte cinq chapitres dont deux chapitres sont consacrés à la résolution d'équations et inéquations avec paramètres.

Ensemble. Propositions ;
Fonctions ;
Équations et inéquations du premier degré ;
Équations et inéquations du second degré ;
Calcul approché.

La résolution de l'équation du second degré par calcul du discriminant se retrouve dans le chapitre IV qui concerne la résolution et la discussion d'une équation du second degré selon les valeurs d'un paramètre.

Ce chapitre se compose des rubriques: équation du second degré, système d'équations du second degré, inéquations du second degré, résumé de résolution d'un système d'inéquations du second degré, théorème réciproque du signe d'un trinôme (comparaison d'un nombre réel avec les deux racines d'une équation du second degré), équations et inéquations se ramenant au second degré.

Dans le chapitre IV, on étudie le nombre des solutions, la valeur et le signe des solutions d'une équation du second degré selon les valeurs d'un paramètre donné dans l'équation.

La partie Exercices de la rubrique « Équation du second degré » du manuel Cours se compose de quatre parties :

- définition de l'équation du second degré ;
- formules des solutions ;
- interprétation graphique ;
- théorème de Viète et ses applications.

On y trouve la résolution de quatre équations sans paramètres : $ax^2+bx+c=0$

« Exercice 4.1.1 Résoudre les équations suivantes :

- a) $2x^2-5x+4=0$;
- b) $4x^2-12x+9=0$;
- c) $x^2-3x+5=0$;
- d) $5x^2-4x-9=0$. » (p.26, Cours)

Comme la partie Réponse le laisse supposer, c'est la technique *Discr* (calcul du discriminant et utilisation des formules donnant les solutions) qui est mobilisée lors de la résolution de ces 4 exercices,

« Exercice 4.1.1 a) L'équation n'a pas de solution.

b) L'équation a une solution double $x=\frac{3}{2}$.

c) L'équation n'a pas de solution.

d) L'équation a deux solutions $x_1=-1$, $x_2=\frac{9}{5}$. » (p.82, Exercices).

La technique *Discr* utilisée en classes 9 et 10 est justifiée, selon le signe de b^2-4ac , par la mise en œuvre des techniques présentes dans le manuel de classe 9 lors de la construction des formules des solutions de l'équation du second degré et déjà pointées ci-dessus :

Aj_IdR_Car

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Aj_IdR_ProdN

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \end{aligned}$$

On peut donc dire que ces techniques (*Aj_IdR_Car* et *Aj_IdR_ProdN*) servent ici d'éléments technologiques justifiant la technique *Discr*.

IV. CONCLUSION

Dans cette conclusion, nous répondrons aux questions soulevées dans l'introduction de l'analyse praxéologique.

Q1) Comment sont introduites les techniques algébriques et comment ces techniques sont-elles utilisées dans la résolution des équations de second degré ?

Q2) Quelle est la place accordée à la factorisation ?

L'étude de la factorisation est faite uniquement en classe 8, de plus, elle concerne principalement les polynômes à plusieurs variables (53% = 55/104)

Son application à la résolution des équations du second degré intervient dans les deux classes 8 et 9.

La résolution algébrique concerne les équations du type C1 et C2, en classe 7, qui peuvent être résolues par les techniques *CarN*, *ProdN* et *Fact_ProdN*. En classe 8 et 9, elles sont complétées par des équations du type C3 et C4 qui peuvent être résolues par les techniques *Fact_ProdN*, *Dév_Fact_ProdN*, *IdR_ProdN* et *EgaCar*.

En particulier, on propose de résoudre les équations canoniques (du type C4) en utilisant la technique *Dec_Fact_ProdN* (où *Dec* est le « découpage du terme bx »), puis pour ramener les équations données à celles de type produit-nul et ensuite appliquer la règle d'annulation des facteurs nuls.

La technique *Discr* est introduite dès la classe 9.

On constate qu'en classe 10, la totalité des exercices sont du type C4 et que ces exercices favorisent la technique *Discr*.

Les équations du second degré se ramènent à la forme $(ax+b)(cx+d)=0$ en utilisant les techniques de factorisation qui sont justifiées par les éléments technologiques suivants :

$A(x) \times (B(x) + C(x)) = A(x) \times B(x) + A(x) \times C(x)$ où $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ sont des monômes, cette relation étant conséquence de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble des polynômes (qui n'est pas explicite dans le manuel) ; les identités remarquables.

La résolution d'équation produit-nul $P(x) \times Q(x) = 0$ en annulant les facteurs $P(x)$ et $Q(x)$ repose sur la règle « $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ». Cette règle provient de la propriété d'intégrité de l'anneau des polynômes $R[X]$ (où R est l'ensemble des réels) qui n'est pas explicite dans le manuel.

Q.c) Quelle est la place accordée aux deux modes de résolution des équations : algébrique et graphique ?

L'analyse des manuels a montré l'existence de deux types de techniques de résolutions des équations de degré 2 : algébrique et graphique.

La technique graphique est introduite en classe 9 et en classe 10. En classe 9, elle est utilisée dans l'étude du cas de l'intersection des paraboles $x \mapsto ax^2 + c$ ($a \neq 0$), et en classe 10, dans la discussion du nombre des racines d'une équation contenant un paramètre à partir de l'intersection d'une parabole et de l'axe des abscisses ou d'une droite parallèle à l'axe des abscisses. Le faible nombre d'exercices de résolution graphique nous laisse penser que la résolution algébrique des équations de degré 2 domine au collège et dans la première classe du lycée.

Q.d) Quelle importance est donnée à la résolution des problèmes conduisant à une équation du second degré ?

La résolution des problèmes issus des autres disciplines (géométrie, arithmétique, chimie, vie courante...) par la mise en équation est commencée dans les deux dernières classes du collège et en première classe du lycée. L'équation établie à partir des problèmes de degré 1 en classe 8, de degré 2 en classe 9 et se poursuit en classe 10.

L'utilisation des équations comme outils de résolution des problèmes permet aux élèves d'effectuer un passage d'une situation donnée à une activité numérique. Le processus de modélisation se comporte des étapes : codage (appel d'inconnue et mise en équation), exécution des informations (résolution d'équation), décodage (interprétation du résultat).

CHAPITRE B2.2 LE CAS DE LA FRANCE ANALYSE DES MANUELS DES CLASSES DE 4^E, 3^E, SECONDE ET PREMIERE

I. PRESENTATION PAR NIVEAU DE CLASSE

I.1. Choix des manuels

Nous avons choisi un manuel de la collection Les petits manuels pour la classe de 4^e et un manuel de la collection Triangle pour la classe de 3^e. Ces deux collections sont éditées par l'Édition Hatier :

Mathématiques de 4^e (2002)

Mathématiques de 3^e (Édition spéciale pour le professeur, 1999)

Pour les deux classes de seconde et première, nous avons choisi deux manuels de la collection Fractale, éditée par l'Édition Bordas:

Maths de 2^{de} (Édition spéciale pour l'enseignant, Programme 2000)

Maths de 1^{re}S (Programme 2001)

I.2. Structure des manuels

Dans le manuel de 4^e, chaque chapitre se compose de 4 parties dont 2 parties de cours et 2 autres d'exercices.

Cours :

Découverte, qui contient deux à quatre activités permet d'introduire les nouvelles connaissances à acquérir.

L'essentiel du cours, qui présente de façon concise et complète toutes les connaissances exigibles, chacune étant suivie d'un exemple.

Exercices :

Exercices.

Problèmes, qui permettent de faire la synthèse des connaissances acquises dans l'étude du chapitre et dans les chapitres antérieurs.

Dans le manuel de 3^e, chaque chapitre se compose de 4 parties dont 2 parties de cours et 2 autres d'exercices.

Cours :

Repérer les obstacles, qui contiennent des exercices que le professeur propose aux élèves pour repérer leurs connaissances et difficultés et *Franchir les obstacles*, qui contiennent des activités choisies par le professeur pour faire acquérir les nouvelles connaissances de ce chapitre.

Connaissances (savoir à retenir) et *Méthodes* (savoir-faire à retenir).

Exercices :

Exercices fondamentaux qu'il est indispensable de faire.

Exercices complémentaires pour réactiver, consolider et approfondir les connaissances des élèves.

Dans les manuels de 2^{de} et 1^{er} de la collection Fractale, chaque chapitre se compose de 5 parties dont 3 parties de cours et 2 autres d'exercices.

Cours :

Activités qui assurent l'articulation avec le collège et introduisent les notions nouvelles.

Cours.

Méthodes et exercices résolus, qui associent à chaque méthode la résolution détaillée d'un exercice type, puis propose une application directe.

Exercices :

Travaux dirigés (ou Modules), qui complète les méthodes.

Exercices, qui contiennent des exercices d'application, d'approfondissement, les problèmes et l'aide individualisée.

L'indication de résolution des exercices, dans tous les manuels, est donnée dans la partie *Corrigés des exercices* qui se trouve sur les dernières pages du manuel.

I.3. Tâches de factorisation d'une expression algébrique à une variable

Dans ce paragraphe on s'intéresse uniquement aux tâches où il est demandé explicitement de factoriser une expression algébrique.

I.3.1. Le manuel de 4^e

a) Présentation

La factorisation d'une expression est introduite et étudiée officiellement en classe de 4^e.

Le manuel de 4^e comporte 15 chapitres dont 5 chapitres de *travaux numériques*, 2 chapitres de *gestion de données*, et 8 chapitres de *géométrie*. Les 5 chapitres de travaux numériques sont les suivants :

Travaux numériques

Chapitre I. Opérations sur les décimaux

Chapitre II. Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire

Chapitre III. Puissances d'un nombre

Chapitre IV. Calculs littéraux – Équations

Chapitre V. Ordre et inégalités

La factorisation est introduite et étudiée dans le chapitre IV lors de l'étude des calculs littéraux et de la résolution des équations de degré 1. Elle est considérée comme l'une des trois méthodes de réduction d'une expression littérale.

La partie Cours du chapitre IV comporte les 3 rubriques suivantes :

Réduire une expression littérale.

Développer un produit.

Équation.

b) La rubrique consacrée à la factorisation dans le chapitre IV : Calculs littéraux - équations

Dans cette rubrique, trois méthodes de réduction d'une expression littérale sont présentes :

Suppression de parenthèses

Factorisation

Réduction

La factorisation d'une expression littérale est définie comme suit :

« Factoriser une somme ou une différence, c'est remplacer celle-ci par un produit. » (p.38)

La technique de factorisation repose sur les quatre égalités :

$$k.a+k.b=k.(a+b) ; a.k+b.k=(a+b).k ;$$

$$k.a-k.b=k.(a-b); a.k-b.k=(a-b).k.$$

Aucune explication n'est donnée sur ces égalités qui reposent sur la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et de la commutativité de la multiplication dans le corps des réels.

Pour illustrer l'application des règles précédentes dans la factorisation d'une expression, des exercices sont donnés, avec leur résolution, juste après ces règles :

$$\text{« Exemple : } 2x+5x=(2+5)x=7x.$$

$$3x-11x=(3-11)x=-8x. \text{ » (p.38)}$$

On rencontre 10 exercices de factorisation dans la partie Exercices. Les expressions traitées dans ces exercices sont de degré 1.

Par exemple : « Exercice 6. Factoriser : $A=7b-3b+4b+6b$. » (p.40).

I.3.2. Le manuel de 3^e

a) Présentation

L'étude et le traitement de la factorisation d'une expression littérale continue et progresse en classe de 3^e.

Dans le manuel de la classe de 3^e, le programme est traité en 14 chapitres dont 4 chapitres de *travaux numériques*, 4 de *travaux littéraux*, 5 de *travaux de géométrie* et mesure, et 1 de *révisions*. Le dernier chapitre est consacré à un Q.C.M. Les 8 chapitres concernant les travaux numériques et littéraux sont les suivants :

Travaux numériques

Chapitre I. Calcul numérique et PGCD

Chapitre II. Racines carrées

Chapitre III. Proportionnalité

Chapitre IV. Statistiques

Travaux littéraux

Chapitre V. Calcul littéral et identités remarquables

Chapitre VI. Fonctions linéaires et affines

Chapitre VII. Inéquations et équations

Chapitre VIII. Systèmes de deux équations à deux inconnues

La factorisation d'une expression est étudiée et traitée principalement dans le chapitre V, lors de l'étude des calculs littéraux et des identités remarquables. On la retrouve dans le chapitre VII, lors de l'étude de la résolution des inéquations du premier degré et des équations de degré 1 ou 2.

La partie *Connaissances* du chapitre V comporte les deux rubriques suivantes :

Factoriser

Développer.

La partie *Méthode* comporte les trois rubriques suivantes :

1. Factoriser une expression littérale
2. Développer une expression littérale
3. Démontrer l'égalité de deux expressions littérales

Dans le chapitre VII, on trouve, dans les parties d'exercices (fondamentaux et complémentaires), 5 tâches de factorisation conduisant à la résolution d'une équation de degré 2. Par exemple :

« Exercice 66. On considère l'expression suivante :

$$E = (2x+5)^2 - (2x+5)(x-3).$$

b/ Factoriser E.

c/ En déduire la résolution de l'équation $E=0$. » (p.127)

b) Rubrique consacrée à la factorisation dans le chapitre V du manuel de 3^e : Calcul littéral et identités remarquables

Rappelons les notations introduites précédemment dans l'étude effectuée pour le Viêt-Nam, pour les différents sous-types de tâche de factorisation.

F1 -Factoriser une expression de la forme : $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x)$

F2- Factoriser une expression de la forme : $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x)$ (où $R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou $Q(x)$), ou $P^2(x) - Q^2(x)$, ou $k_1.P^2(x) - k_2.Q^2(x)$, ou $k_1.P^2(x) - k_2$ ou $P^2(x) - k$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k > 0$)

F3- Factoriser des polynômes non développés et dont l'expression ne se prête pas de manière apparente à une factorisation.

F4- Factoriser des polynômes donnés sous forme canonique : $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Dans le chapitre V, on rencontre les tâches de factorisation via les tâches suivantes :

- « Factoriser les expressions suivantes »
- « Factoriser les expressions suivantes en utilisant la distributivité »
- « Factoriser les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable »
- « Factoriser les expressions suivantes en choisissant la méthode adaptée »
- « Factoriser les expressions suivantes en commençant par développer »
- « Écrire l'expression suivante sous la forme d'un produit de deux facteurs »
- « Associer à chacune des expressions la factorisation qui lui est égale ».

L'application de la factorisation pour la résolution des équations se ramenant à celle $P(x) \times Q(x) = 0$ se trouve dans le chapitre VII.

Nous avons dénombré, dans le chapitre V, les différents sous types de tâches de factorisation représentés dans les exercices des parties *Franchir les obstacles*, *Exercices fondamentaux* et *Exercices complémentaires*. (cf. Tableau 16)

Catégories	Exercices du Cours	Exercices	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
F1	16	39	55	33,7
F2	8	41	49	30,1
F3		8	8	4,9
F4	14	37	51	31,3
Totaux	38	125	163	100,0

Tableau 16 : factorisation chapitre V- 3^e

La factorisation étant aussi présente dans le chapitre VII comme sous-tâche intermédiaire de la résolution des équations du second degré se ramenant à $P(x) \times Q(x) = 0$, nous regroupons les exercices du chapitre V et ceux du chapitre VII dans le Tableau 17 suivant.

Catégories	Chapitre V		Chapitre VII	Totaux	
	Exercices du Cours	Exercices	Exercices	Effectifs	%
F1	16	39	2	57	33,7
F2	8	41	3	52	30,8
F3		8		8	4,7
F4	14	37	1	52	30,8
Totaux	38	125	6	169	100,0

Tableau 17 : factorisation en 3^e

On constate que les trois sous types de tâche F1 (33,7%), F3 (30,8%) et F4 (30,8%) sont les plus fréquents.

Dans la partie *Activités* du chapitre V, la factorisation est introduite de manière progressive à travers les 6 étapes suivantes :

1. « Utiliser la distributivité » : on étudie l'utilisation de deux propriétés : $ab+ac=a(b+c)$ et $ab-ac=a(b-c)$. Les expressions à factoriser sont de type: $k_1.x^2 \pm k_2.x$ où k_1, k_2 sont réels.
2. « Découvrir une formule » : on étudie l'utilisation de l'identité $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Les expressions à factoriser sont de la forme ax^2+bx+c où a, b et c sont positifs.
3. « Avec un signe moins » : on étudie l'utilisation de l'identité $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Les expressions à factoriser sont de type ax^2-bx+c où a, b et c sont positifs.
4. « Différence de deux carrés » : on étudie l'utilisation de l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Les expressions à factoriser sont de types $k_1.x^2-k_2$ et $k_1-k_2.x^2$.
5. « Factoriser dans tous les sens ! » Dans ces activités, on étudie la factorisation d'expressions de tous les types précédents.
6. « Factorisation d'un autre niveau ! » Dans ces activités, on étudie la factorisation des expressions des types suivants, où $P(x), Q(x), R(x)$ et $S(x)$ sont des binômes du 1^o degré :

a/ $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x)$

b/ $P(x) \times Q(x) + P(x)$

c/ $P(x) \times R(x) - P(x) \times S(x)$

d/ $P(x) \times Q(x) + P^2(x)$

e/ $P^2(x) - P(x) \times Q(x)$

f/ $P^2(x) - Q^2(x)$.

La partie Cours comporte deux objets : Factoriser et Développer.

La partie Factoriser commence par la définition suivante de la factorisation :

« Factoriser une somme, c'est la transformer en produit » (p.82)

« Exercice 9. Factoriser les expressions suivantes en commençant par développer :
 $A=6(3x^2-2x+3)-18+x$;...; $C=49(x^2-1)+48$ » (p.85)

Aucune factorisation n'est possible pour A et C. Un développement du produit va ramener les expressions à celles des formes $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x)$ et $k_1.P^2(x) - k_2$ ($k_1, k_2 > 0$) pour lesquelles sont utilisées les techniques de factorisation reposant sur la distributivité et l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$A = 18x^2 - 12x + 18 - 18 + x \text{ (développement)}$$

$$= 18x^2 - 11x \text{ (réduction)}$$

$$= x(18x - 11) \text{ (factorisation en utilisation la règle } ab - ac = a(b-c))$$

$$C = 44x^2 - 49 + 48 \text{ (développement)}$$

$$= 49x^2 - 1 \text{ (réduction)}$$

$$= (7x-1)(7x+1) \text{ (factorisation en utilisant l'identité remarquable } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$$

Nous constatons que les technologies des techniques de factorisation reposent sur les propriétés des nombres réels comme la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. En fait, il y a généralisation implicite de ces règles aux expressions algébriques. Celle-ci peut être légitimée par le fait qu'une expression algébrique peut être considérée comme un nombre "généralisé".

I.3.3. Le manuel de seconde

a) Présentation

L'étude et le traitement de la factorisation d'une expression sont repris en classe de seconde mais, cette fois, sur une expression algébrique à une ou plusieurs variables.

Dans le manuel de la classe 2^{de}, le programme est traité en 15 chapitres dont 9 chapitres de *calcul et fonction*, et 6 chapitres de *géométrie*. Les 9 chapitres de calcul et fonction sont les suivants.

Chapitre I. Caractéristiques d'une série statistique

Chapitre II. Simulations et fluctuations des fréquences

Chapitre III. Nombres et calculs

Chapitre IV. Ordre des nombres et valeur absolue

Chapitre V. Généralités sur les fonctions

Chapitre VI. Étude des variations d'une fonction

Chapitre VII. Les fonctions de référence

Chapitre VIII. Calcul algébrique et fonction

Chapitre IX. Équations et inéquations

La factorisation d'une expression est à nouveau étudiée et traitée principalement dans le chapitre VIII, lors de l'étude des calculs algébriques sur les expressions algébriques et du lien entre expression algébrique et fonction.

Dans le chapitre IX, on la retrouve lors de l'étude des équations et inéquations de degré 2, dans 6 exercices dans lesquels elle est utilisée comme sous-tâche intermédiaire dans une tâche de résolution d'une équation de degré 2. Par exemple :

« Exercice 2. On veut résoudre l'équation $(x+2)^2-(2x-6)^2=0$.

A priori, quel sera l'exposant le plus élevé de l'inconnue x ?

Factoriser l'expression $(x+2)^2-(2x-6)^2$.

Résoudre l'équation. » (p.180)

b) Rubrique consacrée à la factorisation dans le chapitre VIII : Calcul algébrique et fonction

Dans le chapitre VIII, la factorisation est traitée dans les rubriques suivantes :

« Règles du calcul algébrique » de la partie Cours. (p.153)

« Savoir factoriser une expression algébrique » de la partie Méthodes et Exercices résolus. (p.156)

« Utiliser les fonctions pour factoriser une expression de la forme x^2+ux+v , avec u et v donnés » de la partie Modules. (p.158)

Dans la première rubrique, on rappelle la définition de la factorisation, les égalités de distributivité et les trois égalités remarquables.

Dans la deuxième rubrique, on justifie les deux techniques de factorisation par les éléments technologiques que sont les deux propriétés de distributivité et les trois identités remarquables.

« Méthode 1

On peut utiliser les égalités $ab+ac=a(b+c)$ et $ab-ac=a(b-c)$.

Méthode 2

On peut utiliser les égalités remarquables :

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$; $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$; $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ » (p.156)

Comme en classe de 3^e, la technique de factorisation est décomposée selon les deux étapes principales :

Identification des termes d'une somme ou d'une différence ou d'un membre de l'une des identités remarquables

Application des égalités de la distributivité ou des identités remarquables.

Ces étapes apparaissent dans la résolution des exercices donnés dans les exemples. Par exemple :

« 1) Factoriser l'expression $x(x+2)+5x$.

On applique la méthode 1 avec $a=x$, $b=x+2$ et $c=5$.

Ce qui donne $x(x+2)+5x=x[(x+2)+5]$, donc $x(x+2)+5x=x(x+7)$. » (p.157)

Les 5 expressions à factoriser données dans ces exemples sont de types : $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x)$, ax^2+bx+c sous la forme développée du carré $(ax+b)^2$, $k_1.x^2-k_2$, $P^2(x)-Q^2(x)$, $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x)$ ($S(x)$ est un multiple de $R(x)$).

Ces exemples précèdent quatre exercices d'application dont deux expressions sont de type F2 : $k_1-k_2.x^2$ et k^2-x^2 , les deux autres étant de type F4 : ax^2-bx+c (développée de l'identité $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$).

Dans la troisième rubrique, apparaît, dans deux exercices, une nouvelle technique pour la factorisation des expressions de la forme : x^2+bx+c . Il s'agit de l'utilisation des fonctions.

Cette technique se compose des étapes suivantes :

Considérer la fonction $f: x \mapsto x^2+bx+c$. Représenter graphiquement la fonction f .

Choisir un voisinage de forme triangulaire contenant la partie d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

Déterminer graphiquement les abscisses a et b des points communs à la courbe et à l'axe des abscisses.

Vérifier les égalités $f(a)=0$ et $f(b)=0$.

Développer le produit $(x-a)(x-b)$ et conclure. » (p.159)

On peut penser que cette technique repose sur la propriété suivante : a et b sont solutions de l'équation $x^2+bx+c=0$ si et seulement si $x^2+bx+c=(x-a)(x-b)$. Cette propriété est justifiée par la définition de la racine d'une fonction polynôme.

On ne trouve, dans le manuel de seconde aucun exercice du type de tâche F3 : Factoriser les polynômes qui ne sont pas développés et dont la factorisation n'est pas apparente.

Nous regroupons, dans le Tableau 18, les différents types de tâches de factorisation explicitement rencontrés dans les deux chapitres VIII et IX.

Comme on peut le constater, c'est le sous-type de tâche F2 : Factoriser une expression de forme : $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x)$ (où $R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou $Q(x)$), ou $P^2(x)-Q^2(x)$, ou $k_1.P^2(x)-k_2.Q^2(x)$, ou $k_1.P^2(x)-k_2$ ou $P^2(x)-k$ ($k_1>0$, $k_2>0$, $k>0$), qui est le plus fréquemment rencontré.

Catégories	Chapitre VIII		Chapitre IX	Totaux	
	Exercices du Cours	Exercices	Exercices		
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
F1		8	1	9	14,3
F2	2	29	5	36	57,1

F4	5	13		18	28,6
Totaux	7	50	6	63	100

Tableau 18 : Factorisation en 2^{de}

I.3.4. Le manuel de première S

Dans le manuel de la classe de 1^{er}S, le programme est traité en 17 chapitres dont 7 chapitres d'*analyse* (fonctions et suites), 8 chapitres de *géométrie*, et 2 chapitres de *probabilités et statistique*. Les 7 chapitres d'*analyse* sont les suivants :

Chapitre I. Généralités sur les fonctions

Chapitre II. Fonctions trinômes, équations du second degré

Chapitre III. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Chapitre IV. Fonctions dérivées

Chapitre V. Comportement asymptotique des fonctions

Chapitre VI. Suites numériques

Chapitre VII. Limites de suites

L'équation du second degré apparaît dans le chapitre II lors de l'étude des Fonctions trinômes et des équations du second degré.

La factorisation des expressions de degré 2 n'est pas rappelée dans la partie Cours. Cependant, la mise d'une fonction trinôme $f: x \mapsto ax^2+bx+c$ sous la forme canonique : $f(x)=a[(x-\alpha)^2-\beta]$, est étudiée dans la rubrique « Fonctions trinôme du second degré ».

Cette forme est utilisée dans la démonstration de la propriété qui justifie la technique de l'étude de signe du trinôme du second degré ax^2+bx+c ($a \neq 0$) (propriété 5, p.39).

Dans cette démonstration, lorsque le discriminant :

s'annule, l'expression ax^2+bx+c se factorise selon le carré d'un binôme :

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

est positif, l'expression ax^2+bx+c se factorise en le produit de deux binômes :

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \text{ où } x_1, x_2 \text{ sont les racines de ce trinôme.}$$

Donc, un trinôme ax^2+bx+c (a non nul) peut être factorisé par la technique utilisant les égalités précédentes.

Il y a 13 exercices de factorisation de trinômes ax^2+bx+c par cette technique dans la partie *Exercices d'application directe* du cours et un exercice dans celle *Exercices d'approfondissement*. (cf. Tableau 19)

Catégories	Exercices	
	Effectifs	%
F1		
F2	2	12,5
F3	1	6,3
F4	13	81,3
Totaux	16	100

Tableau 19 : Factorisation en 1^{er}

On rencontre 3 d'autres exercices de recherche des racines d'un trinôme dans lesquels le trinôme est d'abord factorisé en facteurs du premier degré. La technique de factorisation est présentée par des consignes. Cette technique repose sur les technologies suivantes qui sont absentes du manuel :

- Le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ s'annule en $x=\alpha$ si et seulement si $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ avec $\deg[g(x)]<\deg[f(x)]$
- La définition de l'égalité entre deux fonctions

Exemple :

« Exercice 49. Soit $f(x)=2x^2-7x+6$ et $g(x)=(x-2)(ax+b)$.

1) Développer $g(x)$.

Déterminer des nombres a et b tels que $f(x)=g(x)$ pour tout x .

2) En déduire, sans calcul, le signe du discriminant de $f(x)$ et les valeurs x pour lesquelles $f(x)$ s'annule. » (p.50)

Dans la question 1), en application de la définition de deux fonctions égales permet de chercher a et b . L'existence de a et b permet de réécrire $f(x)$ sous la forme produit de deux binômes qui est la forme factorisée du trinôme donné.

Cette technique est utilisée lorsque l'on peut identifier une des racines du trinôme, autrement dit, une valeur de x pour laquelle $f(x)$ s'annule.

1.3.5.Conclusion

1. En classe de 3^e, la factorisation d'une expression se fait en deux étapes : identification des termes d'une somme ou d'un membre de l'une des identités remarquables, et utilisation de la distributivité simple : $ab \pm ac = a(b \pm c)$, ou des formules : $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Tous les sous types de tâche sont représentés dans les exercices :

a/ $P(x) \times Q(x) + P(x) \times R(x)$ (pour F1)

b/ $P^2(x) - Q^2(x)$, $k_1.P^2(x) - k_2.Q^2(x)$, $k_1.P^2(x) - k_2$ et $P^2(x) - k$ (pour F2)

c/ l'expression n'est pas développée et n'est pas de formes a/ ou b/ (pour F3)

d/ expression canonique ax^2+bx+c (pour F4)

Mais :

on ne trouve pas d'exercices compris à la tâche de factorisation de l'expression du type $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x)$ ($R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou $Q(x)$) dans F2

les expressions canoniques dans F4 sont restreintes aux formes de la partie développée d'une identité remarquable

les exercices du sous type de tâche F3 existent seulement dans la partie Exercices.

2. La factorisation est reprise en classe de 2^{de} par les mêmes techniques qu'en classe de 3^e, mais une nouvelle technique est introduite pour la factorisation des expressions de forme x^2+bx+c ne correspondant pas à la forme développée des identités $(a \pm b)^2$. Cette nouvelle technique repose sur la propriété d'intersection entre la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2+bx+c$ et l'axe des abscisses.

3. La factorisation d'une expression à une variable est longuement étudiée et traitée en classes de 4^e, 3^e et 2^{de} (230 exercices) : en classe de 4^e, sur les expressions de degré 1, en classes de 3^e et de 2^{de} sur celles de degré 2. Cette étude est concentrée en classe de 3^e (73%).

4. En classe de 3^e, les sous types de tâche F1, F2 et F3 se rencontrent en nombre presque égal. En classe de seconde, c'est sur F2 que l'accent est mis et sur la factorisation concernant l'utilisation de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. On peut de plus remarquer que F2 est globalement majoritaire dans l'ensemble des tâches de factorisation. (cf. Tableau 20)

Catégories	3e	2de	1er	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
F1	57	9		66	26,6
F2	52	36	2	90	36,3
F3	8		1	9	3,6
F4	52	18	13	83	33,5
Totaux	169	63	16	248	100,0

Tableau 20 : Factorisation de la 3^e à la 1^{er}

5. En classe de première, la factorisation des trinômes intervenant dans la résolution des équations $ax^2+bx+c=0$ se fait par le calcul des racines de ces trinômes.

I.4. Tâches de résolution algébrique des équations du second degré

Dans ce paragraphe on s'intéresse uniquement aux tâches où il est demandé explicitement de résoudre une équation de second degré.

Nous reprenons la définition des quatre sous types de tâches C1, C2, C3 et C4 de la tâche T« résoudre une équation du second degré » que nous avons utilisée dans l'analyse des manuels vietnamiens.

C1- Résoudre des équations :

- déjà factorisées $[P(x) \times Q(x) = 0]$
- comportant un facteur commun apparent $[P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) = 0]$, ce qui permet de se ramener au cas précédent $[P(x) (R(x) + S(x)) = 0]$.

C2- Résoudre des équations qui se ramènent à C1 après une factorisation partielle ou par application d'une identité remarquable :

- de la forme $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x) = 0$ (où $R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou de $Q(x)$)
- de la forme $P^2(x) - Q^2(x) = 0$, ou $k_1.P^2(x) - k_2.Q^2(x) = 0$, ou $k_1.P^2(x) - k_2 = 0$ ou $P^2(x) - k = 0$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k > 0$).

C3- Résoudre des équations dans lesquelles l'expression n'est pas développée sans être pour autant ni du type C1 ni du type C2, et donc ne se prête pas directement à une factorisation.

C4- Résoudre des équations dans lesquelles l'expression est déjà développée et réduite : $ax^2 + bx + c = 0$ (forme canonique).

I.4.1. Le manuel de 4^e

En classe de 4^e, l'étude de la résolution de l'équation ne se fait que sur les équations du premier degré.

I.4.2. Le manuel de 3^e

L'équation à une inconnue de degré 2 est introduite en classe de 3^e dans le chapitre VII.

L'un des objectifs de ce chapitre est « *savoir résoudre des équations se ramenant à une équation de la forme $A(x) \times B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ désignent deux expressions du premier degré de la même variable.* » (p.111)

Donc, la résolution des équations de degré 2 est ici ramenée à la résolution de deux équations de degré 1 en utilisant les techniques de factorisation. 83,3% des exercices sont de sous-type de tâche C1 et C2. (cf. Tableau 21)

Sous type de tâche	Exercices du Cours	Exercices	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
C1	6	19	25	34,7
C2	7	28	35	48,6
C3	1	3	4	5,6
C4	1	7	8	11,1
Totaux	15	57	72	100,0

Tableau 21 : Équation du 2^{de} degré-3^e

I.4.3.Le manuel de 2^{de}

En classe de 2^{de}, la résolution des équations de degré 2 est également ramenée à celle de deux équations de degré 1, le chapitre IX « *Équations et inéquations* » étant précédé par « *Calcul algébrique et fonction* » dans lequel la technique de factorisation des expressions de degré 2 est étudiée et traitée (la résolution de ces équations par calcul du discriminant n'est étudiée qu'en classe de 1^{er}). Le nombre de ces exercices diminue de moitié par rapport à la classe de 3^e. Cependant, les 4 sous-types de tâche sont ici présents. (cf.Tableau 22)

Sous type de tâche	Exercices du Cours	Exercices	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
C1	1	8	9	29,0
C2	4	7	11	35,5
C3		4	4	12,9
C4		7	7	22,6
Totaux	5	26	31	100,0

Tableau 22 : Équation du 2^{de} degré-seconde

I.4.4.Le manuel de 1^{er}

En classe de 1^{er}, les équations du second degré $ax^2+bx+c=0$ sont résolues en utilisant la technique du discriminant. Mais, dans le cas où $b=0$ ou $c=0$, la résolution de l'équation par les techniques de factorisation reste toujours prioritaire.

Les équations du second degré $ax^2+bx+c=0$ peuvent être résolues en utilisant la forme canonique $a[(x-\alpha)^2 - \beta]$ du trinôme pour ramener l'équation à $P^2(x)-k=0$ ($k>0$).

Ensuite, cette équation est ramenée à $P(x) \times Q(x) = 0$ ou $P^2(x) = k$. Dans le premier cas, la technique *ProdN* est mobilisée, et dans le deuxième cas, la technique d'extrait de racine carrée peut être mobilisée.

La quasi-totalité des exercices sont de type C4. (cf. Tableau 23)

Sous type de tâche	Exercices du Cours	Exercices	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
C1	1	2	3	7,1
C2		1	1	2,4
C4	3	35	38	90,5
Totaux	4	38	42	100

Tableau 23 : Équation du 2^{de} degré - première

I.5. Tâches de résolution graphique des équations du second degré

La résolution graphique d'une équation du second degré est introduite en classe de 2^{de} dans le chapitre IX lors de l'étude d'équations et inéquations et elle se poursuit en classe de 1^{er} dans le chapitre II lors de l'étude de fonction trinôme et d'équations du second degré.

I.5.1. En classe de 2^{de}

Il y a seulement deux exercices de résolution graphique d'une équation du second degré dans les parties « Modules » et « Exercices d'entraînement » du chapitre IX.

Exercice 1 :

« Résolution graphique de l'équation $x^2 = 2x + 3,8$

- Choisir les deux fonctions à représenter. Tracer leurs courbes représentatives.
- Donner une valeur approchée de l'abscisse de chacun des points communs aux deux courbes représentatives et tester l'équation avec chacun de ces valeurs.
- Résoudre graphiquement l'équation $x^2 - 2x = 3,8$. Quel est le lien avec les questions précédentes ? » (p.181)

Cet exercice, non résolu, est donné dans la rubrique « Résoudre graphiquement une équation » de la partie « Modules ».

L'exercice propose d'interpréter l'équation d'un point de vue de fonction. Ainsi, l'équation $P(x) = Q(x)$ est vue comme l'égalité de deux fonctions qui se traduit graphiquement par la recherche des points d'intersection des graphes des deux fonctions. Ce qui permet d'avoir une résolution graphique de l'équation. L'exercice propose également une réflexion sur le choix des fonctions : on transforme l'équation $x^2 = 2x + 3,8$ en $x^2 - 2x = 3,8$. Ces deux équations qui sont équivalentes ne se traduisent pas de la même façon à l'aide des fonctions.

Exercice 2 :

« On a représenté les fonctions f et g définies sur l'intervalle $\left[0; \frac{5}{4}\right]$ par $f(x) = 1 - (2 - 3x)^2$ et $g(x) = 6x - 3$. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x) \dots$ » (p.187)

Cet exercice est donné dans la rubrique « Résolution graphique » de la partie « *Exercices d'entraînement* ». Il propose l'étude de l'intersection de deux courbes sur un intervalle $[a; b]$ et, comme dans le premier exercice, d'interpréter l'équation $f(x) = g(x)$, comme une égalité de deux fonctions.

I.5.2. En classe de 1^{er}

Dans la partie « Activité » du chapitre II, on rencontre 4 exercices d'interprétation, de conjecture et de représentation graphique des solutions des équations du second degré.

Exemple 1:

« 2) Soit la fonction $g : x \mapsto 2x^2 - 4x - 6 = 0$.

- En utilisant la méthode de la question 1), montre que $g(x) = 2[(x-1)^2 - 4]$.
- À partir de la parabole P d'équation $y = x^2$, construire la courbe représentative C_g de g .
- Interpréter à l'aide de la courbe C_g , les solutions de l'équation $2x^2 - 4x - 6 = 0$.
- Résoudre l'équation $2x^2 - 4x + 6 = 0$. Vérifier la cohérence du résultat avec la représentation de C_g . » (p.34)

Exemple 2 :

« On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + x - 1$, avec a un nombre quelconque.

Si $a = 2$, on obtient la courbe C_2 .

Si $a = -2$, on obtient la courbe C_{-2} .

1) Pour $a = 2$

a) À l'aide de la courbe C_2 , interpréter les deux solutions de l'équation $2x^2 + x - 1 = 0 \dots$

3) Pour $a = -2$ et à l'aide de la courbe C_{-2} .

a) Que peut-on conjecturer pour les solutions de l'équation $-2x^2 + x - 1 = 0 ? \dots$ » (p.34)

Dans le premier exercice, on combine les apports des modes de résolution graphique et algébrique. Cependant, dans le deuxième, on propose une approximation lorsque les racines ne sont pas entières.

I.6. Équations du second degré dans les problèmes de modélisation

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux problèmes dont la résolution se ramène aux équations du second degré. Ces problèmes sont issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines ou de la vie courante.

La résolution de ces problèmes se compose des étapes suivantes :

- Choix de l'inconnue
- Mise en équation
- Résolution d'équation
- Interprétation du résultat

On ne s'intéresse pas à la forme de l'équation obtenue, mais uniquement au type de problème de modélisation.

I.6.1.Le manuel de 4^e

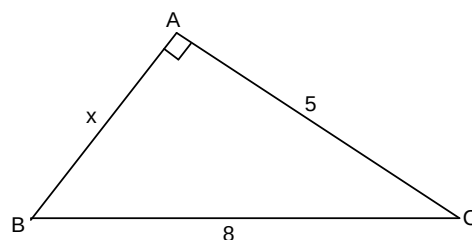
En classe de 4^e, l'étude de résolution des problèmes par la mise des équations ne se fait que sur les équations du premier degré.

I.6.2.Le manuel de 3^e

La majorité des problèmes de modélisation proposés se ramènent aux équations de degré 1. Dans la rubrique « Équations-produits » de la partie « Franchir les obstacles », on rencontre deux problèmes issus de la géométrie dans lesquels la recherche de la mesure d'un côté d'un triangle rectangle et d'un rayon d'un cercle, et trois problèmes issus de l'arithmétique conduisent à la résolution des équations du second degré. Ces problèmes ne sont pas résolus.

Par exemple :

« Déterminer x sur la figure ci-contre. (les mesures de longueur sont exprimées dans la même unité. » (p.116)



Les racines de ces équations sont solutions du problème si elles vérifient les conditions données dans le problème. Par exemple, la mesure d'un côté ou d'un rayon doit être un nombre positif.

Certains problèmes sont issus de la physique comme :

« Exercice 85. La puissance P reçu par un conducteur ohmique de résistance R traversé par un courant d'intensité I est donnée par la formule :

$$P=RI^2$$

Où P est exprimée en watt (W), R en ohm (Ω) et I en ampère (A). Sachant que $R=6\Omega$, $P=1,5W$ et que $I \geq 0$, calculer I. » (p.128).

Trois types de problèmes sont proposés : géométrique, arithmétique et physique. Le domaine géométrique reste majoritaire. (cf.Tableau 24)

Type des problèmes	Exercices du Cours	Exercices	Totaux
	Effectifs	Effectifs	Effectifs
Géométrique	2	7	9
Arithmétique	3	1	4
Physique		1	1
Totaux	5	9	14

Tableau 24 : Problèmes de modélisation – 3^e

I.6.3.Le manuel de 2^{de}

On trouve autant de problèmes de modélisation qui se ramènent aux équations de degré 1 que ceux qui se ramènent aux équations de degré 2.

Deux types de problèmes sont proposés dans cette classe sont géométrique et arithmétique. (cf.Tableau 25)

Type des problèmes	Exercices
	Effectifs
Géométrique	8
Arithmétique	3
Totaux	11

Tableau 25 : Problèmes de modélisation-2^{de}

I.6.4.Le manuel de 1^{er}

En classe de 1^{er}, on rencontre deux problèmes issus de la vie courante et 1 autre issu de la physique à côté de ceux issus des autres disciplines comme en classes de 3^e et 2^e. (cf.Tableau 26)

Par exemple, l'exercice suivant est donné dans la partie « Exercice approfondissement » :

« Exercice 100. Un groupe réserve un voyage pour un montant total de 21600€. Pour 30 participants de plus, ils auraient obtenu une réduction de 20€ par billets et auraient payé un total de 24000€. Quel est le prix d'un billet et le nombre des participants à ce voyage ? » (p.53)

Type des problèmes	Exercices du Cours	Exercices	Totaux
	Effectifs	Effectifs	Effectifs
Géométrie	2	1	3
Arithmétique		4	4
Physique		1	1
Vie courante		2	2
Totaux	2	8	10

Tableau 26 : Problèmes de modélisation – 1^e

I.7. Synthèse

La résolution des équations du second degré par l'utilisation des techniques de factorisation (*Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*) est étudiée et traitée en classe de 3^e et dans les deux premières classes du lycée. (cf. Tableau 27)

Sous type de tâche	3e	2de	1e	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
C1	25	9	3	37	25,5
C2	35	11	1	47	32,4
C3	4	4		8	5,5
C4	8	7	38	53	36,6
Totaux	72	31	42	145	100

Tableau 27 : Synthèse de la 3^e à la 1^e

Elle est concentrée en classe de 3^e, puis se retrouve en classes de 2^o et de 1^{er}. Les deux sous types de tâches majoritaires sont C2 et C4 (cf. tableau 12-F).

En classe de 1^{er}, la résolution des équations du second degré est étudiée essentiellement sur des équations du type $ax^2+bx+c=0$ (a, b et c non nul) par la technique d'utilisation du discriminant, alors il y a diminution des exercices des sous types de tâche C1, C2, et C3.

Une autre technique de résolution des équations est étudiée en classe de seconde et de première. L'équation du second degré est interprétée comme par l'intersection d'une parabole et d'une droite ou entre deux paraboles. Des activités proposent un travail utilisant simultanément les deux modes de résolution : graphique et algébrique, en montrant aussi les limites du graphique. Ce travail est fait en interaction avec le cadre de l'analyse.

Le traitement des problèmes issus des autres disciplines (de la géométrie, de l'arithmétique, de la physique, de la vie courante...) par la mise en équation de second degré est introduit en 3^e, et se poursuit dans les deux premières classes du lycée (cf. Tableau 28).

Type des problèmes	3e	2de	1er	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
Géométrie	9	8	3	20	57,1
Arithmétique	4	3	4	11	31,4
Physique	1		1	2	5,7
Vie courante			2	2	5,7
Totaux	14	11	10	35	100,0

Tableau 28: Modélisation de la 3^e à la 1^e

II. ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU 2nd DEGRE

Cette analyse a pour but d'identifier les praxéologies existes dans les manuels français

II.1. Sous-type de tâche C1:

Expressions déjà factorisées ou pouvant être factorisées par un facteur commun apparent

II.1.1.En classe de 3^e

L'équation $P^2(x)=0$ est introduite dans le chapitre II « Racine carrée » sous la forme la plus simple : $x^2=0$.

L'une des objectifs de ce chapitre est *Savoir résoudre l'équation $x^2=a$, où a désigne un nombre.* (p.25)

On trouve seulement deux équations $x^2=0$ dans ce chapitre. La première est présente dans un exercice contenant six équations, sans résolution, de la forme $x^2=a$ de la rubrique « *Des carrés dans une équation* » de la partie « *Franchir les obstacles* ». (p.29) La deuxième est donnée dans la partie *Exercices fondamentaux*. (p.35)

La résolution des équations de degré 2 est traitée essentiellement dans le chapitre VII : *Inéquations et équations*. L'un des objectifs de ce chapitre est *savoir résoudre des équations se ramenant à une équation de la forme $A(x) \times B(x)=0$ où $A(x)$ et $B(x)$ désignent deux expressions du premier degré de la même variable.* (p.111)

Dans ce chapitre, les équations sont données sous les formes suivantes : $P(x) \times Q(x)=0$ (8 cas), $x^2=0$ (1 cas), $P^2(x)=0$ (1 cas), $P(x) \times Q(x)+P(x) \times R(x)=0$ (15 cas).

Dans la partie Cours, seule la résolution d'une équation de la forme $P(x) \times Q(x) = 0$ est présentée :

« Exemple : résoudre l'équation suivante : $(2x-3)(x+2)=0$.

$(2x-3)(x+2)=0$ donc $2x-3=0$ ou $x+2=0$. Les solutions sont donc $\frac{3}{2}$ et -2 . »

La technique *ProdN* présentée au dessus comporte deux étapes :

Appliquer la règle du produit-nul à l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$

Résoudre les deux équations $ax+b=0$ et $cx+d=0$

Cette technique repose sur l'élément technologique : Quelques soient les nombres a et b , si $a.b=0 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$. Cette règle joue un rôle de technologie qui explique la technique *ProdN*. Comme dans le cas de la factorisation, nous constatons, que la technologie de la technique *ProdN* repose sur une règle concernant les nombres réels et qu'il y a généralisation implicite de ces règles aux expressions algébriques

La théorie qui explique cette règle n'est pas explicite dans le manuel, mais on peut dire que cette technologique provient de la propriété d'intégrité du corps des réels car a , b et $x \in \mathbb{R}$.

II.1.2. En classe de 2^{de}

Les équations de degré 2 sont introduites et traitées dans le chapitre IX « *Équations et inéquations* ».

Comme en classe de 3^e, la résolution d'une équation de degré 2 se ramène à celle des équations de degré 1 en utilisant les techniques de factorisation, puis la règle de produit nul.

Les équations données dans ce chapitre sont de la forme : $P(x) \times Q(x) = 0$ (4 cas), $P^2(x) = 0$ (1 cas), $P^2(x) + P(x) \times Q(x) = 0$ (2 cas), $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) = 0$ (2 cas).

Les techniques de résolution de ces équations sont présentées dans la rubrique : *Choisir la méthode de résolution la plus adaptée* de la partie « *Module* ». C'est un prolongement du travail commencé en classe de troisième sur le choix des méthodes. Les équations ont toutes un degré syntaxique 2. La première étape de la technique, invite l'élève à anticiper le degré sémantique de l'équation.

« Exercice 3. On veut résoudre l'équation $2(x+3)=(x+3)^2$.

A priori, quel sera l'exposant le plus élevé de l'inconnue x ?

Transformer l'équation pour que le second membre soit égal à zéro.

Factoriser alors l'expression du premier membre.

Résoudre l'équation. » (p.180)

D'après les consignes, l'équation est ramenée à la forme $P^2(x) + P(x) \times Q(x) = 0$, puis $P(x) \times (P(x) + Q(x)) = 0$. Résoudre cette équation se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $P(x) = 0$ et $P(x) + Q(x) = 0$ selon la technique principale au dessus. La technique mobilisée ici est donc *Fact_ProdN*.

II.1.3.En classe de 1^{er}

Il y a une seule tâche dans la partie : *Méthodes et exercices résolus* du chapitre II : *Fonction trinômes, équations du second degré*.

L'équation donnée est de la forme $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) = 0$. Cette équation peut être résolue par la technique de discriminant *Discr*, mais la technique de factorisation est prioritaire étant donnée sa forme.

« Exemple 4

Résoudre l'équation $3x^2 + 5x = 0$.

Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile, car elle se factorise immédiatement : $x(3x+5)=0$, soit $x_1=0$ et $x_2 = -\frac{5}{3}$ » (p.43)

On trouve encore deux autres tâches dans la rubrique « Équations du second degré » de la partie Exercices d'application directe du cours.

II.2. Sous type de tâche C2

Résoudre des équations qui se ramènent à C1 après une factorisation partielle ou par application d'une identité remarquable

II.2.1.En classe de 3^e

L'équation de la forme $P^2(x)=k$ ($k>0$) est présente dans le chapitre II : *Racine carrée*. Quatre équations de cette forme sont données dans la rubrique « *Des carrés dans une équation* » du cours. La technique de résolution de ces équations (*Rac*) est donnée dans le cours :

« Soit a un nombre donné.

Si $a<0$ l'équation $x^2=a$ n'a pas de solution.

Si $a=0$ l'équation $x^2=0$ a une solution : le nombre 0.

Si $a>0$ l'équation $x^2=a$ a deux solutions,

l'une positive : $\sqrt{a}$,

l'autre négative : $-\sqrt{a}$ » (p.32)

On trouve 11 exercices de ce type dans la partie *Exercices fondamentaux* de ce chapitre.

Dans le chapitre VII : *Inéquations et équations*, les équations de ce sous type de tâche C2 sont données sous les formes suivantes : $x^2-k=0$ (8 cas), $P^2(x)-k=0$ (3 cas), $k_1.x^2-k_2=0$ (2 cas), $P^2(x)-Q^2(x)=0$ (3 cas), $k.P^2(x)-Q^2(x)=0$ (1 cas), et $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x) = 0$ ($P(x)$ est un multiple de $R(x)$, 2 cas).

Puisque l'un des objectifs de ce chapitre est de ramener l'équation de degré 2 à celle de la forme $P(x) \times Q(x) = 0$, alors on peut penser que la technique mobilisée lors de la résolution de ces exercices est de ramener l'équation à celle $P(x) \times Q(x) = 0$ par la factorisation partielle ou utilisation des identités remarquables, puis l'annulation des facteurs nul $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$.

Cette technique est énoncée dans la rubrique « Résoudre une équation » de la partie Méthodes :

« Pour résoudre une équation, on peut regarder si l'inconnue est au carré en développant mentalement si nécessaire.

Deuxième cas : si l'inconnue est au carré, on peut regrouper tous les termes dans le même membre, factoriser l'expression obtenue et appliquer la propriété :

« si $ab=0$ alors $a=0$ ou $b=0$. » » (p.120)

Une des erreurs que peuvent faire les élèves est de ne considérer que la racine positive. Celle-ci est signalée dans les commentaires pour le professeur.

On trouve, également dans ce chapitre, des aides à la factorisation du 1^{er} membre comme le montre l'exemple suivant :

« a/ Développer $A=(3x-5)(2x+7)$.

b/ Résoudre l'équation suivante : $6x^2+11x-35=3x^2-5x$. » (ex. 79 p.128)

L'apparition du facteur commun $(3x-5)$ dans le membre gauche de l'équation et la mise de cet exercice dans la rubrique « Équations-produits » de la partie Exercices complémentaires nous permettent de penser la mobilisation de la technique *Fact_ProdN* lors de la résolution de cet exercice.

Remarque importante

Outre la technique *Rac*, les deux techniques *Fact_ProdN* et *IdR_ProdN* sont mobilisées dans la résolution des équations des formes $x^2-k=0$, $P^2(x)-k=0$, $k_1.x^2-k_2=0$.

II.2.2.En classe de 2^{de}

Les tâches sont données seulement dans la partie *Modules* et dans celles Exercices.

Les équations sont des formes $P^2(x)-Q^2(x)=0$ (4 cas), $P(x) \times Q(x)+R(x) \times S(x)=0$ ($R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou $Q(x)$, 4 cas), $k_1.x^2-k_2=0$ (2 cas), $P^2(x)-k=0$ (1 cas).

Il y a quatre exercices dans la rubrique « Choisir la méthode de résolution la plus adaptée » de la partie *Module*. Comme dans la partie d'analyse de sous type de tâche C1 en classe 2^{de}, la technique de résolution de ces exercices apparaît au travers des consignes.

Par exemple :

« 2) On veut résoudre l'équation $(x+2)^2-(2x-6)^2=0$.

A priori, quel sera l'exposant le plus élevé de l'inconnue x ?

Factoriser alors l'expression $(x+2)^2-(2x-6)^2$.

Résoudre l'équation. » (p.180)

D'après les consignes, l'expression du membre gauche est ramenée à la forme $(P(x)-Q(x)) \times (P(x)+Q(x))$ en utilisant l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Résoudre cette équation se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $P(x)-Q(x)=0$ et $P(x)+Q(x)=0$.

La technique mobilisée donc ici est *IdR_ProdN*.

On retrouve d'autres exercices dans lesquels la technique est indiquée par les consignes.

Par exemple :

« Exercice 9. Soit A l'expression : $(2x-1)(x-4)+(x^2-16)$.

Développer et réduire A .

Factoriser A .

Choisir l'écriture de A la mieux adaptée pour résoudre l'équation $A=0$, puis l'équation $A=-12$. » (p.182)

D'après la consigne 1), l'équation est de la forme $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) - 12 = 0$, et d'après la consigne 2), l'équation est ramenée à la forme $P'(x) \times Q'(x) = 0$.

Pour l'équation $A=-12$, on est dans le cas du sous type de tâche C3, un développement de A est donc nécessaire. La résolution de l'équation $A=-12$ se ramène à celle $P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) = 0$ en utilisant le résultat de la consigne 1).

Pour l'équation $A=0$, on est dans le cas du sous type de tâche C2 dans lequel le facteur commun $(x-4)$ est implicite dans le deuxième terme. La résolution de l'équation $A=0$ se ramène à celle $P'(x) \times Q'(x) = 0$ en utilisant le résultat de la consigne 2).

Donc, on peut penser que la résolution de l'équation $A=-12$ se ramène à celle de deux équations $P(x)=0$ et $R(x)+S(x)=0$, et la résolution de l'équation $A=0$ se ramène à celle de deux équations $P'(x)=0$ et $Q'(x)=0$.

Donc, la technique mobilisée ici est dans les deux cas *Fact_ProdN*.

II.2.3. En classe de 1^{re}

Il existe une tâche du sous type C2 dans la rubrique « Résoudre une équation du second degré » de la partie « Méthodes et exercices résolus » du chapitre II « Fonctions trinômes, équations du second degré ».

Comme la tâche du type C1, cette tâche peut être traitée par la technique d'utilisation du discriminant. Mais la technique d'extrait de racine carrée *Rac* est prioritaire dans ce cas d'après la forme de l'équation donnée.

« Exemple 2

Résoudre l'équation $4x^2-5=0$.

Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile.

L'équation s'écrit $x^2=\frac{5}{4}$. Il y a deux solutions opposées, soit :

$$x_1=\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ » (p.43)}$$

On trouve aussi un exercice de sous type C2 dans la rubrique « *Equations du second degré* » de la partie : *Application directe du cours*.

« Exercice 33

...4) $5x^2-3=0$ » (p.49).

On peut penser que cet exercice peut-être résolu par la technique *Rac* comme dans l'exemple précédent.

II.3. Sous-type de tâche C3

Equations ne se prêtant pas, de manière apparente, à une factorisation

II.3.1.En classe de 3^e

Les équations de ce sous-type de tâche sont minoritaires dans le chapitre VII : 1 exercice dans le cours et 3 dans la partie exercices.

Trois exercices sont de la même forme : $(ax+b)(cx+d)=e$ où $b.d=e$. La résolution de ces exercices n'est pas présente, mais la technique est présente dans le cours, où on trouve des activités qui portent sur le choix de méthode entre *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*.

Exemple 2.

« Choisir la bonne méthode

Résoudre les équations suivantes :

...

b/ $(2x+3)(3x+2)=6$

c/ $(3x-11)(x+12)-(3x-11)(7-3x)=0$... » (p.116)

La technique adaptée pour l'équation b) est *Dév_Fact_ProdN* et pour l'équation c) c'est *Fact_ProdN*. Un commentaire attire l'attention du professeur sur l'équation b) : "*Equation-*

produit à tout prix". Il concerne l'erreur qui consiste à appliquer la règle du produit nul à cette équation.

Le choix de méthode de résolution est présenté plus loin dans la rubrique " Méthodes" :

« Pour résoudre une équation, on peut regarder si l'inconnue est au carré en développant mentalement si nécessaire.

Premier cas : si l'inconnue n'est pas au carré, on applique la méthode vue en classe de 4^e, c'est-à-dire que l'on élimine tous les termes contenant l'inconnue dans un membre et tous les termes ne contenant pas l'inconnue dans l'autre membre pour aboutir à une équation du type $ax=b$.

Deuxième cas : si l'inconnue est au carré, on peut regrouper tous les termes dans le même membre, factoriser l'expression obtenue et appliquer la propriété :

« si $ab=0$ alors $a=0$ ou $b=0$. » » (p.120)

Un autre commentaire indique que quelques fois il est préférable de développer pour éliminer les termes contenant l'inconnue au carré. Cela nécessite une compétence chez l'élève de distinguer le degré syntaxique d'une expression de son degré sémantique.

II.3.2.En classe de 2de

Les exercices de sous type de tâche C3 sont donnés en nombre négligeable (4 exercices) dans le chapitre IX : *Équations et inéquations*. Ils sont placés dans les parties Exercices La forme de départ de ces équations ne permet pas d'utiliser ces techniques au premier coup. Cela se fait après le développement des produits et la réduction de l'expression obtenue. La technique est donc *Dév_Fact_ProdN*.

II.4. Sous-type de tâche C4

Résoudre des équations de degré 2 déjà développées.

II.4.1.En classe de 3^e

Les exercices de ce sous type de tâche sont présents dans le chapitre VII : *Inéquations et équations*. On ramène les équations données dans ces exercices à celles de la forme $ax^2+bx+c=0$, le membre gauche de l'équation est la partie développée de l'une des identités remarquables : $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$.

Comme on l'a vu dans l'étude des sous types précédents, la technique mobilisée lors de la résolution de ces exercices est d'utiliser ces deux identités remarquables pour ramener l'équation à celle produit nul, puis l'annulation des facteurs.

On trouve 8 exercices dans ce chapitre :

- un dans la rubrique « *Équations-produits* » de la partie : *Franchir les obstacles*.

- deux dans la rubrique « *Équations-produits* », et un dans la rubrique « *Faire le point* » de la partie : *Exercices fondamentaux*.
- quatre autres dans la rubrique « *Équations-produits* » de la partie : *Exercices complémentaires*.

Exemple : « Exercice 17. Résoudre les équations suivantes :

$$\dots d/ 4x^2-4x+1=0 ; \quad e/ 49x^2=14x-1. \text{ » (p.122)}$$

Ces deux exercices ne sont pas résolus, mais on peut penser que les équations données seront ramenées à celle $(ax-b)^2=0$ en utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, ensuite la technique *CarN* sera utilisée.

Remarques importantes

- Le membre de gauche des équations données dans les exercices de ce sous type de tâche C4, après mise sous forme d'équation produit nul, est de la forme développée de l'une des identités remarquables $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$.
- La technique de résolution est *IdR_CarN*.

II.4.2.En classe de 2^{de}

Pour le sous type de tâche C4, il y a 7 exercices qui sont présents seulement dans la rubrique : *Équations dans R* de la partie « *Exercices d'entraînement* » dans le chapitre IX : *Équations et inéquations*. Parmi les sept équations données, il y a trois équations se ramenant à la forme $P(x)=0$ où $P(x)$ est la partie développée de l'une des identités remarquables $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$, et quatre autres équations n'étant pas de cette forme.

Par exemple : « Résoudre les équations.

$$\dots 4) x^2-6x+9=0 \text{ » (p.185)}$$

Parmi ces quatre dernières équations, on trouve deux équations dans lesquelles la technique de résolution est présentée par des consignes qui conduisent l'élève à ramener l'équation sous la forme $(x+a)^2-k=0$ ($k>0$).

Par exemple :

$$\text{« Exercice 45. 1) Vérifier que } x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

2) Utiliser le résultat pour résoudre les équations

$$x^2+3x+2=0 \text{ et } x^2+3x+\frac{9}{4}=0. \text{ » (p.185)}$$

Dans cet exemple, on peut imaginer que l'équation $x^2+3x+2=0$ est résolue en trois étapes :

La ramener en forme canonique du trinôme : $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$
 puis la ramener en forme produit nul : $\left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$ ou
 $(x+1)(x+2)=0$ par l'utilisation de l'identité remarquable $a^2-b^2=0$
 Résoudre les deux équations de degré 1 : $x+1=0$ et $x+2=0$.

Donc, la technique de résolution mobilisée ici bien que non explicitée est *IdR_ProdN*, en utilisant les identités remarquables : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ et $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, et la règle des facteurs nul.

Pour les deux autres équations, la tâche de résolution est précédée par la tâche de développement du produit $(ax+b)(cx+d)$ qui est un multiple de la partie à factoriser du trinôme de ces équations (ces équations sont de la forme $ax^2+bx+c=0$).

Par exemple :

« Exercice 40. Développer $(x-5)(2x-6)$, puis utiliser le résultat pour résoudre l'équation $x^2-8x+15=0$ » (p.185)

II.4.3.En classe de 1^{er}

La résolution des équations $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) est étudiée dans le chapitre II lors de l'étude des fonctions trinômes et de la résolution de toutes les équations et inéquations du second degré.

La coordination des techniques de résolution est présente dans la rubrique : *Résoudre une équation du second degré* de la partie « Méthodes et exercices résolus » :

« Méthode

- Vérifier qu'il s'agit d'une équation du second degré et si l'utilisation du discriminant est utile.
- Calculer le discriminant Δ et déterminer son signe. » (p.42)

Évidemment, la résolution des équations du second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) comporte deux techniques : La factorisation et l'utilisation du discriminant.

La première technique est mobilisée dans les deux cas :

1. l'équation est de la forme $ax^2+c=0$ ($b=0$, $c < 0$) ou $ax^2+bx=0$ ($c=0$).
 Dans ce cas, ce type de tâche est ramené à celui de C1 ou C2.
2. Le trinôme ax^2+bx+c est de la forme de la partie développée d'une des identités remarquables $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$.

Exemple 1 :

« Exemple 4

Résoudre l'équation $3x^2+5x=0$.

Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile, car elle se factorise immédiatement : $x(3x+5)=0$, soit $x_1=0$ et $x_2=-\frac{5}{3}$ » (p.43)

Exemple 2 :

« Exemple 2

Résoudre l'équation $4x^2-5=0$.

Pour cette équation, le calcul du discriminant n'est pas utile.

L'équation s'écrit $x^2=\frac{5}{4}$. Il y a deux solutions opposées, soit :

$$x_1=\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ » (p.43)}$$

(Ces deux exemples sont présentées dans la partie des sous types de tâches C1 et C2).

Exemple 3 : La tâche dans l'exercice 32 dans la rubrique *Équations du second degré* :

« Exercice 32. 4) $4x^2+3x=0$ ».

L'utilisation du discriminant n'est pas nécessaire lors la résolution de cette équation. En effet, l'indication suivante est trouvée dans la partie *Corrigés des exercices* :

« 4) Δ non nécessaire : $S=\left\{0;-\frac{3}{4}\right\}$. » (p.396).

On rencontre deux exercices, sans résolution, dans la partie "*cours*" dans lesquels la forme canonique du trinôme est utilisée pour ramener l'équation donnée à celle $P^2(x)-k=0$ ($k>0$)..

Exemple :

« Exercice 5. a) Vérifier que $ax^2+x-1=a\left[\left(x+\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{a}\right]$.

b) Utiliser cette égalité pour résoudre l'équation $2x^2+x-1=0$. » (p.35)

On peut penser que cet exercice est résolu en trois étapes :

L'équation est ramenée à celle $2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]=0$ en utilisant le résultat de a).

L'équation est ramenée à celle :

Soit produit nul : $\left(x+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=0$ en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Soit $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, puis $x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ou $x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ en utilisation l'extrait de racine carrée.

La deuxième technique est mobilisée dans le cas où le trinôme ax^2+bx+c n'est pas des formes précédentes.

Par exemple :

Exemple 1.

« Résoudre l'équation $2x^2-4x-5=0$.

Il s'agit d'une équation du second degré et on calcule le discriminant b^2-4ac .

$\Delta=(-4)^2-4\times 2\times (-5)$, car $a=2$, $b=-4$ et $c=-5$, d'où $\Delta=56$.

Δ est strictement positif, il y a deux solutions distinctes données par les formules

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{56}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{56}}{4},$$

$$\text{soit } x_1 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}. \text{ » (p.42)}$$

Exemple 2.

« Résoudre l'équation $3x^2-2x+5=0$.

Pour cette équation, $a=3$, $b=-2$ et $c=5$, donc $\Delta=-56$.

L'équation n'a pas de solution (le polynôme $3x^2-2x+5$ n'a pas de racine).

Résoudre l'équation $x^2+2x-15=0$.

Pour cette équation, $a=1$, $b=2$ et $c=-15$, donc $\Delta=64$. On a $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2}$ et

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2}, \text{ soit } x_1 = -5 \text{ et } x_2 = 3. \text{ L'équation a deux solutions (le polynôme } x^2+2x-$$

15 a deux racines) (p.49).

Dans le cours il y a des exemples qui mettent en avant la technique de factorisation des équations du type C4. Ils ont pour fonction de montrer la technologie qui justifie la technique du discriminant sur des exemples. Dans la partie exercice, aucun exercice ne suggère la technique de factorisation pour les équations du type C4.

III. CONCLUSION

Dans cette conclusion, nous répondrons aux questions soulevées pour l'analyse des manuels.

Q.a) Comment sont introduites les techniques algébriques et comment ces techniques sont-elles utilisées dans la résolution des équations de second degré ?

Q.b) Quelle est la place accordée à la factorisation

L'étude et l'utilisation de la factorisation lors de la réduction des expressions algébriques et lors de la résolution des équations de degré 1 ou 2 sont présentes dans travers les deux dernières classes du collège et les deux premières classes du lycée.

La factorisation des expressions à une variable est introduite officiellement en classe de 4^e. Elle est utilisée lors de la réduction d'une expression littérale de degré 1 et la résolution des équations de degré 1. Elle repose sur quatre égalités vérifiées par la propriété de la distributivité.

La factorisation des expressions à une variable continue à être étudiée et traitée en classe de 3^e, mais sur les expressions littérales de degré 2. La technique de factorisation est complétée par l'utilisation des identités remarquables : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ et $a^2 - b^2 = 0$. Dans cette classe, la factorisation est utilisée comme une technique de résolution des équations de degré 2. Ces équations sont ramenées à celle $P(x) \times Q(x) = 0$ par factorisation partielle ou utilisation d'identités remarquables.

Notre étude montre une évolution des types de tâches de résolution algébrique des équations de degré 2 entre la classe de 3^o et la classe de première. En effet, en classe de 3^o on propose aux élèves des équations du type C1 et C2 qui peuvent être résolues par les techniques *ProdN*, *CarN*, *Fact_ProdN* et *IdR_ProdN*. En classe de seconde, les 4 sous-types de tâches, C1, C2, C3 et C4, sont proposés aux élèves. Les techniques de factorisation utilisées pour ramener l'équation du second degré donnée à la forme $(ax+bx)(cx+d)=0$ reposent sur l'égalité $ab+ac=a(b+c)$ et sur les identités remarquables $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Les relations sont expliquées par la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble des nombres réels (en fait le corps des réels).

La résolution de l'équation $P(x) \times Q(x) = 0$ est ramenée à celle de deux équations $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$. Cette technique repose sur la règle « Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$ », propriété d'intégrité du corps des réels implicite dans le manuel.

Les deux derniers types peuvent être également résolus par *Dév_Fact_ProdN*. Ils préparent le travail sur les trinômes de type C4 qui sera pratiquement le seul type de tâche en classe de première. C'est en classe de première que l'on introduit la technique *Discr* pour la résolution des équations du type C4.

On constate qu'en classe de première la quasi-totalité des exercices sont du type C4 et que le choix des formes de ces exercices favorise la technique *Discr*. On peut penser que cette limitation peut se traduire chez les élèves par un recours systématique à la technique *Discr*, d'autant plus que celle-ci présente l'avantage d'être algorithmique, ce qui n'est pas le cas pour les autres. Cependant, dans le manuel de 1^o, nous avons relevé trois exemples où la méthode *Discr* n'est pas utile.

Choix de technique pour un même type de tâche

Il est important de remarquer que, dans les manuels de la classe de 3^e à celle de 1^{re}, il y a des exercices dans lesquels l'élève est invité de choisir la technique la mieux adaptée à l'équation donnée. En effet, dans un exercice, on peut trouver la présence des quatre sous-types de tâche C1, C2, C3 et C4 pour lesquels l'une des techniques suivantes est mobilisée : *ProdN*, *Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *Dév_Fact_ProdN*, *EgaCar*, *Rac* ou *Discr*. Ce type de problème propose aux élèves de bien étudier la forme de l'équation avant choisir la technique la plus adaptée.

Q.c) Quelle est la place accordée aux deux modes de résolution des équations : algébrique et graphique ?

L'analyse des manuels a montré l'existence de deux types de techniques de résolutions des équations de degré 2 : algébrique et graphique.

La technique graphique est introduite en classe de 2^o et en 1^o. Elle repose sur un changement du cadre (au sens de R. Douady, 1986) : du cas algébrique au cadre d'analyse, puisque les équations sont interprétées comme des égalités entre deux fonctions. Cela permet d'interpréter les équations dans le registre graphique (Duval, 1988).

Les manuels mettent en avant l'articulation entre la résolution algébrique et graphique tout en soulignant les limites de cette dernière.

Q.d) Quelle importance est donnée à la résolution des problèmes conduisant à une équation du second degré ?

La modélisation des problèmes est commencée en deux dernières classes du collège et se poursuit dans les deux premières classes du lycée. L'équation établie en 4^e est de degré 1, et de degré 2 en autres classes. Le nombre des exercices de ce type est équivalent dans les trois classes 3^e, 2^{de} et 1^{er}.

Dans le problème de modélisation, les équations sont utilisées comme outils lors de la résolution des problèmes issus des autres disciplines (géométrie, arithmétique, physique, vie courante...). La modélisation des problèmes permet aux élèves de passer d'une situation donnée à une activité numérique.

CHAPITRE B3. ANALYSE COMPARATIVE ENTRE LA FRANCE ET LE VN COMPARAISON DES PRAXEOLOGIES EXISTANTES

En France, la résolution des équations du second degré est étudiée au collège (classe de 3^o) et se poursuit dans les deux premières classes du lycée (classes de 2^o et 1^o). Au Viêt-Nam, la résolution des équations du second degré est introduite en classe 7 et est étudiée essentiellement dans les classes 8 et 9. Dans cette partie, on se limite à la résolution algébrique des équations de degré 2.

I. COMPARAISON DE L'EVOLUTION DES SOUS-TYPES DE TACHES DANS LES DEUX PAYS

Dans l'analyse des manuels nous avons défini quatre sous-types de tâches se différenciant par la forme de l'expression algébrique sous laquelle est donnée l'équation du second degré.

C1- Résoudre des équations :

- déjà factorisées $[P(x) \times Q(x) = 0]$

- comportant un facteur commun apparent $[P(x) \times R(x) + P(x) \times S(x) = 0]$, ce qui permet de se ramener au cas précédent $[P(x) \times (R(x) + S(x)) = 0]$.

C2- Résoudre des équations qui se ramènent à C1 après une factorisation partielle ou par application d'une identité remarquable :

- de la forme $P(x) \times Q(x) + R(x) \times S(x) = 0$ (où $R(x)$ ou $S(x)$ sont un multiple de $P(x)$ ou de $Q(x)$)

- de la forme $P^2(x) - Q^2(x) = 0$, ou $k_1 \cdot P^2(x) - k_2 \cdot Q^2(x) = 0$, ou $k_1 \cdot P^2 - k_2 = 0$ ou $P^2(x) - k = 0$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k > 0$).

C3- Résoudre des équations dans lesquelles l'expression n'est pas développée sans être pour autant ni du type C1 ni du type C2, et donc ne se prête pas directement à une factorisation.

C4- Résoudre des équations dans lesquelles l'expression est déjà développée et réduite : $ax^2 + bx + c = 0$ (forme canonique).

L'analyse des manuels des deux pays a mis en évidence l'évolution de ces types de tâche tout au long des curriculums, comme le montrent les tableaux 10 et 26 d'après des analyses des manuels dans les deux pays.

On peut constater que dans les deux pays, le nombre total d'exercices se ramenant à la tâche T est équivalent. Cependant, la répartition entre les sous types de tâche et entre les niveaux de classes n'est pas la même.

Le nombre de tâches de type C3 est très faible dans les deux pays.

Sous type de tâche	7	8	9	10	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
C1	3	21	7		31	19
C2	2	25	15		42	25,8
C3		1	5		6	3,7
C4		7	73	4	84	51,5
Totaux	5	54	100	4	163	100

Tableau 10 : (cf. B2 VN)

Sous type de tâche	3e	2de	1e	Totaux	
	Effectifs	Effectifs	Effectifs	Effectifs	%
C1	25	9	3	37	25,5
C2	35	11	1	47	32,4
C3	4	4		8	5,5
C4	8	7	38	53	36,6
Totaux	72	31	42	145	100

Tableau 26 : (cf. B2 F)

Au Viêt-Nam, 51,5% des tâches sont de type C4 et sont traitées essentiellement en classe 9, les tâches C1 et C2 étant essentiellement traitées en classe 8.

En France, les tâches du type C1, C2 et C4 représentent respectivement 25,5%, 32,4% et 36,6%. Les tâches C1 et C2 sont traitées dans en classes de 3^o et 2nd, la tâche C4 étant essentiellement traitée en classe de 1^o.

Comparaison de l'évolution des techniques algébriques et des technologies dans les deux pays

Au Viêt-Nam, la résolution des équations du second degré par les techniques de factorisation (*CarN* et *ProdN*) commence en classe 7 avec un nombre réduit d'exercices. Elle est essentiellement étudiée et traitée en classe 8 en utilisant les techniques *CarN*, *ProdN*, *Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *EgaCar*, *Rac* qui sont basées sur la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des polynômes. La résolution de l'équation produit-nul $P(x) \times Q(x) = 0$ en annulant les facteurs $P(x)$ et $Q(x)$ repose sur la règle « $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ». Cette règle s'appuie implicitement sur la propriété d'intégrité de l'anneau des polynômes $R[X]$ (R est l'ensemble des réels).

D'autres techniques (*Dec_Fact_ProdN*, *Aj_IdR_EgaCar* et *Aj_IdR_ProdN*) sont proposées en classes 8 et 9, dans la partie cours, pour résoudre les équations canoniques (du type C4). Cependant, le nombre de tâches (cf. Tableau 7-VN) de type C4 proposé dans les exercices de la classe 8 est très faible.

En classe 9, les équations du second degré sont essentiellement résolues par la technique du discriminant, *Discr*, en utilisant les formules des solutions qui sont obtenues à partir de la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c . La résolution algébrique et graphique des équations $ax^2+bx+c=0$ en utilisant le discriminant est étudiée en classe 10 mais uniquement sur les équations paramétrées.

En France, la résolution des équations du second degré est introduite officiellement en classe de 3^e et se poursuit en classe de 2^e par les techniques de factorisation *CarN*, *ProdN*, *Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *Rac*. Ces techniques se basent sur la propriété de la distributivité par rapport à l'addition des nombres réels et sur l'annulation des facteurs nul $P(x)=0$ et $Q(x)=0$. Cette dernière est vue comme une généralisation de la règle « $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$ ». Implicitement, on utilise la propriété d'intégrité du corps des réels.

En classe de 1^o, on introduit la technique du discriminant, et nous avons noté que la quasi-totalité des exercices sont du type C4. Bien que les manuels mettent l'accent sur le choix de la méthode à mettre en œuvre en fonction de l'expression de l'équation, le choix des formes d'équations dans les exercices proposés favorise la technique *Discr*.

La résolution graphique des équations $ax^2+bx+c=0$ est étudiée en classe de 2^{de} et se poursuit en classe de 1^{er}.

II. SYNTHÈSE

L'analyse des manuels vietnamiens et français, nous a permis de mettre en évidence 4 blocs technologico-théoriques pour le type de tâche "résoudre une équation du second degré".

Classe	8 ^o VietNam	8 ^o et 9 ^o VietNam	9 ^o VietNam	3 ^o et 2 ^o France	1 ^o France
Techniques	<i>CarN</i> , <i>ProdN</i> , <i>Fact_ProdN</i> , <i>IdR_ProdN</i>	<i>Dec_Fact_ProdN</i> , <i>Aj_IdR_EgaCar</i> , <i>Aj_IdR_ProdN</i>	<i>Discr</i>	<i>CarN</i> , <i>ProdN</i> , <i>Fact_ProdN</i> , <i>IdR_ProdN</i> , <i>Rac</i>	<i>Discr</i>
Bloc θ/Θ	(θ_{v1}, Θ_v)	absence	(θ_{v2}, Θ_v)	(θ_{f1}, Θ_f)	(θ_{f2}, Θ_f)

Tableau 28 : Synthèse des praxéologies

(θ_{v1}, Θ_v)

Éléments technologiques : propriétés de la "Multiplication et division des polynômes", les règles de « Factorisation d'un polynôme », la propriété de la multiplication dans R : « $a \times b = 0$ équivaut à : $a = 0$ ou $b = 0$ » et la propriété dans l'ensemble $R[X]$ des polynômes à coefficient dans R : « $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$. »

Théorie sous-jacente Θ_v : dans $R[X]$, anneau factoriel, commutatif, unitaire et intègre, tout polynôme du second degré ax^2+bx+c avec $b^2-4ac \geq 0$ possède une décomposition unique en

deux facteurs irréductibles (polynômes du premier degré) et tout polynôme du premier degré et tout polynôme ax^2+bx+c avec $b^2-4ac < 0$ sont irréductibles.

(θ_{f1} , Θ_f)

Éléments technologiques : les « Règles du calcul algébrique » dans l'ensemble R , en particulier la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble R et les identités remarquables, ainsi que la propriété de la multiplication dans R : « $a \times b = 0$ équivaut à : $a=0$ ou $b=0$ ».

Théorie sous-jacente $\Theta_f : (R, +, \cdot)$ est un anneau factoriel dans lequel tout élément non nul possède une décomposition unique en facteurs irréductibles et qui ne possède pas de diviseur de zéro, tout élément non nul de R étant régulier pour la multiplication.

(θ_{v2} , Θ_v) et (θ_{f2} , Θ_f)

Les deux technologies θ_{v2} et θ_{f2} se distinguent car l'une repose sur les éléments technologiques θ_{v1} , l'autre sur θ_{f1} . Mais elles permettent de justifier la même technique *Discr* est justifiée par un même discours technologique dans les deux institutions F et V :

Mise sous formule canonique $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Et calcul algébrique des solutions selon le signe du discriminant.

Cette technologie est justifiée dans les deux institutions V et F respectivement par deux théories Θ_v et Θ_f .

On a donc deux praxéologies régionales différentes dans V et F :

- Pour l'institution V : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta_v)$, avec $j=v1$ ou $v2$
- Pour l'institution F : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta_f)$, avec $j=f1$ ou $f2$

Ces deux praxéologies seront précisées dans le chapitre C1, lors de la présentation de l'analyse a priori.

PARTIE C

EXPERIMENTATION

CHAPITRE C1 - ANALYSE A PRIORI

I. INTRODUCTION DE LA PARTIE EXPERIMENTALE

I.1. But de la partie expérimentale

Il s'agit pour nous de caractériser le rapport institutionnel des sujets en position d'élève, pour le type de tâche T "Résoudre, algébriquement, une équation du second degré à une inconnue", dans chacune des deux institutions V (enseignement secondaire au Viêt-Nam) et F (enseignement secondaire en France), et de comparer les conséquences des choix institutionnels effectués sur les rapports des élèves à l'objet « équation du second degré » dans chacune des deux institutions.

Dans chaque pays, il s'agit de comparer les praxéologies existantes effectivement "chez les élèves" aux praxéologies enseignées (qui ont été déterminées dans l'analyse des manuels de la partie B), relativement au type de tâche T.

Pour cela, nous allons, dans notre expérimentation, mettre les élèves en situation de résolution d'équations du second degré.

Pour recueillir leurs productions, nous utiliserons le logiciel APLUSIX.

C'est à partir de l'analyse de ces productions que pour chaque pays :

- nous identifierons les principales techniques mises en œuvre par les élèves, avec évolution selon les niveaux d'enseignement ;
- nous étudierons les résultats obtenus en relation avec les techniques mises en œuvre
- nous analyserons les principaux types d'erreurs rencontrés.

I.2. Questions auxquelles l'expérimentation doit répondre

Dans la partie B, nous avons montré les points suivants.

- Bien que les blocs du savoir (θ , Θ) soient différents dans chacune des deux institutions : la théorie sous-jacente étant dans V celle de l'anneau factoriel $R[X]$ des polynômes à coefficients dans R, et dans F, celle du corps des réels R, les blocs du savoir-faire auquel nous nous intéressons³⁶ (T , τ) sont semblables et les techniques τ enseignées, comparables.
- Le temps passé dans V et dans F sur chacun de ces "blocs" est différent : dans V, l'accent est mis, dès les premières années de collège, sur le bloc du savoir, alors que dans F, on fait le choix de consacrer plus de temps au bloc du savoir-faire, et en particulier à l'étude des différentes techniques de factorisation.

³⁶ Rappelons que nous n'étudions pas le cas des équations avec paramètres.

L'expérimentation doit nous permettre de répondre notamment aux questions suivantes :

Ces choix institutionnels différents ont-ils des conséquences sur :

- la disponibilité des techniques enseignées chez les élèves ?
- la maîtrise de ces techniques ?

Autrement dit, quel est l'impact des choix institutionnels sur le savoir-faire des élèves face au type de tâche T ?

I.3. Les contraintes que l'expérimentation doit prendre en compte

Le corpus d'exercices proposé aux élèves des deux institutions doit être le même et doit être viable dans chacune des deux institutions.

Ceci nous conduit à choisir des exercices conformes simultanément au rapport institutionnel à l'objet Equations du second degré présent dans l'institution « enseignement du second degré au Vietnam » et dans l'institution « enseignement du second degré en France », et à rejeter tout exercice qui ne serait conforme que dans un seul pays.

I.4. Présentation de la partie expérimentale

Dans ce chapitre C1 nous présenterons notre analyse a priori.

Dans le chapitre C2, nous présenterons les conditions de déroulement de l'expérimentation dans les classes vietnamiennes et françaises, puis nous expliciterons notre méthode de recueil et de traitement de données par APLUSIX.

L'analyse et l'interprétation des données (analyse a posteriori) figurera dans le chapitre C3 pour les classes vietnamiennes, et dans le chapitre C4, pour les classes françaises.

Rappelons maintenant les inter-relations entre analyse a priori, déroulement dans la classe et analyse a posteriori.

Selon Bessot, Comiti (1985)³⁷ : « A priori ne renvoie pas à une position dans le temps par rapport à l'histoire de la recherche, mais à une réflexion d'ordre épistémologique prenant en compte la situation générale et non la situation spécifique qui sera réalisée. » L'analyse a priori d'une situation a pour but d'éclairer les *significations* de ce qui peut se passer lors de la mise en œuvre de cette situation relativement aux savoirs en jeu. « Conduite dans le cadre théorique de référence de la recherche, elle est le résultat d'une argumentation indépendante de toute réalisation particulière de la situation didactique et se fait *en*

³⁷ BESSOT A., COMITI C., 1985, Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 6/2305-345, Grenoble, La pensée sauvage.

référence à un sujet rationnel donc fictif (ce qui n'empêche pas des allers retours entre analyses a priori successives).» (Bessot, Comiti, Le Thi H.C., Le V.T., 2003)³⁸.

Dans notre cas, elle prend en compte les connaissances - que nous déduisons de nos analyses institutionnelles de la partie B - de l'élève générique, pour déterminer les stratégies de résolution possibles d'une équation de degré 2 (appelées ici techniques) et les variables didactiques dont certaines valeurs vont favoriser ou bloquer la mise en œuvre de certaines stratégies. Elle définit également les observables caractéristiques de chaque stratégie possible.

Ainsi l'analyse a priori nous fournit un modèle de la réalité, élaboré en prenant en compte "la nécessité" induite par notre cadre théorique. Nous résumons ci-dessous les inter-relations que nous développerons dans cette partie expérimentale entre analyse a priori, expérimentation dans la classe et analyse a posteriori.

Analyse <i>a priori</i> Ou <i>Élaboration d'une Situation Sa : Modèle a priori de la réalité</i>	Observation <i>D'un déroulement particulier de la réalité en classe</i>	Analyse <i>a posteriori</i> Ou <i>Re-construction d'une Situation Sp : Modèle de la Réalité qui prend en compte le contingent</i>
Situation Sa Construite en déterminant des variables didactiques	<i>Situation observée</i> Réalité organisée	Situation Sp Correspondant à des valeurs fixées des variables didactiques
Élève générique vu comme un sujet rationnel de l'institution dans laquelle il est élève : rapport conforme au rapport institutionnel	Élèves Enseignants	Élèves vus comme des sujets didactiques
Stratégies a priori Observables	Recueil de données Observés	Observés / <i>observables</i> Procédures / <i>stratégies</i> Interprétation : <i>Rapport institutionnel en position d'élève</i>

Tableau 29 - adapté pour notre propos du tableau donné dans le cours de Thac Sy³⁹

II. METHODE D'ANALYSE

II.1. Des praxéologies régionales aux praxéologies ponctuelles

³⁸ BESSOT, COMITI, LE THI H.C., LE V.T., 2003, Cours de Thac Sy Didactic Toan, Ho Chi Minh

³⁹ Idem

D'un point de vue structurel, c'est le savoir $[\theta/\Theta]$ qui permet d'engendrer une technique τ pour un type de tâche T donné, la technologie θ permettant de produire et de justifier des techniques relatives à T . En effet, dans une institution I donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles *plusieurs techniques* τ_{ij} correspondant à *autant de types de tâches* T_{ij} . Le quadruplet $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta)$ constitue ce qu'on appelle une praxéologie régionale.

Dans la partie B nous avons conclu à la présence de deux praxéologies régionales différentes selon les institutions, V et F :

- Pour l'institution V : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta_v)$, avec $j=v_1$ ou v_2
- Pour l'institution F : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta_f)$, avec $j=f_1$ ou f_2

Où :

Θ_v : dans $R[X]$, anneau factoriel, commutatif, unitaire et intègre, tout polynôme du second degré ax^2+bx+c avec $b^2-4ac \geq 0$ possède une décomposition unique en deux facteurs irréductibles (polynômes du premier degré) et tout polynôme du premier degré et tout polynôme ax^2+bx+c avec $b^2-4ac < 0$ sont irréductibles.

Θ_f : $(R, +, \times)$ est un anneau factoriel dans lequel tout élément non nul possède une décomposition unique en facteurs irréductibles et qui ne possède pas de diviseur de zéro, tout élément non nul de R étant régulier pour la multiplication.

θ_{v_1} : Propriétés de la "Multiplication et division des polynômes" (règles de factorisation d'un polynôme), propriétés de la multiplication dans R et dans l'ensemble $R[X]$ des polynômes à coefficient dans R (règles de développement), et notamment la propriété d'intégrité de $R[x]$: $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.

θ_{f_1} : Règles du calcul algébrique dans R , en particulier propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et identités remarquables, ainsi que propriétés de la multiplication dans R (règles de factorisation et de développement d'une expression algébrique) et notamment la propriété d'intégrité de R : $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

θ_{v_2} : θ_{v_1} et calcul du discriminant et calcul algébrique des solutions selon le signe du discriminant.

θ_{f_2} : θ_{f_1} et calcul du discriminant et calcul algébrique des solutions selon le signe du discriminant.

Les deux blocs (θ_{v_1}, Θ_v) et (θ_{f_1}, Θ_f) permettent d'engendrer deux catégories de techniques :

- **$\tau Gfact$** (G comme générale, $fact$ comme factorisation) : il s'agit de techniques permettent de se ramener, après factorisation, à l'annulation d'un produit de deux expressions algébriques de degré 1.

- **τ Règles** : il s'agit de techniques reposant sur l'application de règles telles que : annuler un produit de facteurs (**ProdN**), ou annuler un carré (**CarN**), égaliser deux carrés (**EgaCar**) ou prendre la racine carrée des deux membres de l'égalité (**RAC**).

Les deux blocs (θ_{v_2}, Θ_v) et (θ_{f_2}, Θ_f) permettent d'engendrer deux autres catégories de techniques :

- **τ Discr** : Il s'agit de la technique d'utilisation du calcul du discriminant et des formules des solutions pour la résolution d'une équation du second degré de forme canonique.

- **τ Gdév** (*G* comme générale, *dév* comme développement) : il s'agit de techniques permettant de développer l'expression algébrique donnée pour se ramener à une équation de forme canonique.

II.2. Détermination des praxéologies ponctuelles

Il s'agit maintenant de caractériser les rapports institutionnels des sujets de V et de F en position d'élève. Pour cela nous devons identifier les organisations praxéologiques ponctuelles, ce qui nous conduira à préciser les valeurs prises par *i* dans les quadruplets ci-dessus.

Lors de l'analyse des manuels, nous avons été conduits à étudier les quatre sous-types de tâches suivants :

C1 : Résoudre des équations :

- déjà factorisées [$P \times Q = 0$]

- comportant un facteur commun apparent [$P \times R + P \times S = 0$], ce qui permet de se ramener au cas précédent [$P(R+S) = 0$].

C2 : Résoudre des équations qui se ramènent à C1 après une factorisation partielle ou par application d'une identité remarquable :

- de la forme $P \times Q + R \times S = 0$ (où *R* ou *S* sont un multiple de *P* ou de *Q*)

- de la forme $P^2 - Q^2 = 0$, ou $k_1 P^2 - k_2 Q^2 = 0$, ou $k_1 P^2 - k_2 = 0$ ou $P^2 - k = 0$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k > 0$).

C3 : Résoudre des équations dans lesquelles l'expression n'est pas développée sans être pour autant ni du type C1 ni du type C2, et donc ne se prête pas directement à une factorisation.

C4 : Résoudre des équations dans lesquelles l'expression est déjà développée et réduite : $ax^2 + bx + c = 0$ (forme canonique).

Nous choisissons ici, afin de pouvoir mieux identifier les techniques de factorisation qui interviennent comme sous-tâches de la résolution des équations de degré 2, de définir un autre découpage du type de tâche *T* qui prenne en compte la forme des expressions algébriques en jeu. Ceci nous conduit aux tableaux du paragraphe suivant.

II.2.1.Organisations ponctuelles dans l'institution V

Plaçons nous d'abord dans l'organisation locale $(T_{iv_1}, \tau_{iv_1}, \theta_{v_1}, \Theta_v)$.

Sous-type de tâche	Technique	Bloc du savoir	Description des techniques
T_{1v_1} : <i>Résoudre : $P_I(x) \times Q_I(x) = 0$</i> <i>Cas particulier,</i> <i>$\text{résoudre : } P_I^2(x) = 0$</i>	$\tau_{1v_1} : \tau\text{Règles}$ ProdN CarN	(θ_{v_1}, Θ_v)	<i>On se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $P_I(x) = 0$ et $Q_I(x) = 0$</i> <i>On se ramène à la résolution de l'équation de degré 1 : $P_I(x) = 0$</i>
T_{2v_1} : a/ Résoudre: $R_I(x) \times S_I(x) = R_I(x) \times S'_I(x)$ ou $R_I(x) \times S_I(x) + R_I(x) \times S'_I(x) = 0$ avec $S_I(x) \neq S'_I(x)$ b/ Résoudre: $R_I(x) \times S_I(x) = R'_I(x) \times S'_I(x)$ ou $R_I(x) \times S_I(x) + R'_I(x) \times S'_I(x) = 0$ où R_I et multiple de R'_I ou inversement.	$\tau_{2v_1} : \tau\text{Gfact}$ <i>Fact_ProdN</i>	(θ_{v_1}, Θ_v)	<i>On met en facteur commun $R_I(x)$, ce qui ramène à T_{1v_1}</i> <i>On cherche le facteur commun, on le fait apparaître dans les termes de l'équation, on le met en facteur et on est ramené à T_{1v_1}.</i>
T_{3v_1} : Résoudre: $R_I^2(x) - S_I^2(x) = 0$	$\tau_{3v_1} : \tau\text{Gfact}$ IdR_ProdN	(θ_{v_1}, Θ_v)	<i>On utilise l'identité dans $R[X]$ "$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$" pour ramener l'équation à</i> $(R_I(x) - \sqrt{k})(R_I(x) + \sqrt{k}) = 0$ <i>Ce qui ramène à T_{1v_1}.</i>
T_{4v_1} : Résoudre : $R_I^2(x) = S_I^2(x)$ ou $R_I^2(x) = k$ ($k > 0$)	$\tau_{4v_1} : \tau\text{Règles}$ RAC (RAC comme racine carrée)	(θ_{v_1}, Θ_v)	<i>En utilisant dans $R[X]$ la règle:</i> <i>« $a^2 = b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$ », on se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $R_I(x) = S_I(x)$ ou $R_I(x) = -S_I(x)$</i> <i>(ou $R_I(x) = \sqrt{k}$ ou $R_I(x) = -\sqrt{k}$)</i>
T_{5v_1} : Résoudre : $ax^2 + bx + c = 0$ Cas particulier où $ax^2 + bx + c$ est la partie développée d'une identité remarquable	$\tau_{5v_1} : \tau\text{Gfact}$ <i>IdR_CarN</i> (IdR comme Identité remarquable)	(θ_{v_1}, Θ_v)	<i>On utilise dans $R[X]$ l'une des identités remarquables : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ pour se ramener à une équation du type $P^2(x) = 0$</i> <i>On est donc ramené à T_{1v_1}.</i>
T_{6v_1} : Résoudre : $ax^2 + bx + c = 0$ Cas général	$\tau_{6v_1} : \tau\text{Gfact}$ Fact_ProdN	(θ_{v_1}, Θ_v)	<i>On factorise le trinôme $ax^2 + bx + c$ en utilisant la forme canonique de la fonction trinôme :</i> $ax^2 + bx + c = a \left[(x - \alpha)^2 - \beta \right] \quad (\beta > 0)$ <i>On est donc ramené à T_{1v_1}.</i>

Tableau 30 - Praxéologies ponctuelles correspondant au bloc (θ_{v_1}, Θ_v)

Plaçons-nous maintenant dans l'organisation locale ($T_{iv_2}, \tau_{iv_2}, \theta_{v_2}, \Theta_v$).

Les sous-types de tâche définis ci-dessus vont donc ici se décliner sous les dénominations T_{iv_2} . Le changement de praxéologie fait que certains sous-types de tâches T_{iv_1} définis dans le tableau 1 vont se regrouper en un autre type de tâche T_{iv_2} . Pour simplifier la lecture du tableau 2, nous nous contenterons de lister les T_{iv_1} concernés, sans les re-définir.

Sous-type de tâche	Technique	Bloc du savoir	Description des techniques
T_{1v_2} regroupe T_{5v_1} et T_{6v_1}	$\tau_{1v_2} : \tau\text{Discr}$ (Discr comme discriminant)	(θ_{v_2}, Θ_v)	On calcule les solutions en utilisant le discriminant et les formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
T_{2v_2} regroupe $T_{1v_1}, T_{2v_1}, T_{3v_1}$ et T_{4v_1}	$\tau_{2v_2} : \tau\text{Dév_Discr}$ (Dév comme développement)	(θ_{v_2}, Θ_v)	On utilise la propriété de double distributivité dans $R[X]$: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ pour développer et se ramener à T_{1v_2}

Tableau 31 - Praxéologies ponctuelles correspondant au bloc (θ_{v_2}, Θ_v)

II.2.2.Organisations ponctuelles dans l'institution F

Plaçons nous d'abord dans l'organisation locale ($T_{if_1}, \tau_{if_1}, \theta_{f_1}, \Theta_F$).

Sous-type de tâche	Technique	Bloc du savoir	Description des techniques
T_{1f_1} : Résoudre : $P_1(x) \times Q_1(x) = 0$ Cas particulier, résoudre : $P_1^2(x) = 0$	$\tau_{1f_1} : \tau\text{Règles}$ ProdN CarN	(θ_{f_1}, Θ_F)	On se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $P_1(x) = 0$ et $Q_1(x) = 0$ On se ramène à la résolution de l'équation de degré 1 : $P_1(x) = 0$
T_{2f_1} : a/ Résoudre: $R_1(x) \times S_1(x) = R_1(x) \times S'_1(x)$ ou $R_1(x) \times S_1(x) + R_1(x) \times S'_1(x) = 0$ avec $S_1(x) \neq S'_1(x)$ b/ Résoudre: $R_1(x) \times S_1(x) = R'_1(x) \times S'_1(x)$ ou $R_1(x) \times S_1(x) + R'_1(x) \times S'_1(x) = 0$ où R_1 et multiple de R'_1 ou inversement.	$\tau_{2f_1} : \tau\text{Gfact}$ Fact_ProdN	(θ_{f_1}, Θ_F)	On met en facteur commun $R_1(x)$, ce qui ramène à T_{1f_1} On cherche le facteur commun, on le fait apparaître dans les termes de l'équation, on le met en facteur et on est ramené à T_{1f_1} .

T_{3f_1} : Résoudre: $R_1^2(x) - S_1^2(x) = 0$	$\tau_{3f_1} : \tau Gfact$ IdR_ProdN	(θ_{f_1}, Θ_F)	On utilise l'identité dans R: " $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ " pour ramener l'équation à $(R_1(x) - \sqrt{k})(R_1(x) + \sqrt{k}) = 0$ Ce qui ramène à T_{1f_1} .
T_{4f_1} : Résoudre : $R_1^2(x) = S_1^2(x)$ ou $R_1^2(x) = k$ ($k > 0$)	$\tau_{4f_1} : \tau R��gles$ RAC (RAC comme racine carrée)	(θ_{f_1}, Θ_F)	En utilisant la règle dans R : « $a^2 = b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$ », on se ramène à la résolution de deux équations de degré 1 : $R_1(x) = S_1(x)$ ou $R_1(x) = -S_1(x)$ (ou $R_1(x) = \sqrt{k}$ ou $R_1(x) = -\sqrt{k}$)
T_{5f_1} : Résoudre : $ax^2 + bx + c = 0$ Cas particulier où $ax^2 + bx + c$ est la partie développée d'une identité remarquable	$\tau_{5f_1} : \tau Gfact$ IdR_CarN (IdR comme Identité remarquable)	(θ_{f_1}, Θ_F)	On utilise dans R l'une des identités remarquables : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ pour se ramener à une équation du type $P^2(x) = 0$ On est donc ramené à T_{1f_1} .
T_{6f_1} : Résoudre : $ax^2 + bx + c = 0$ Cas général	$\tau_{6f_1} : \tau Gfact$ Fact_ProdN	(θ_{f_1}, Θ_F)	On factorise le trinôme $ax^2 + bx + c$ en utilisant la forme canonique de la fonction trinôme : $ax^2 + bx + c = a \left[(x - \alpha)^2 - \beta \right]$ ($\beta > 0$) On est donc ramené à T_{1f_1} .

Tableau 32 - Praxéologies ponctuelles correspondant au bloc (θ_{f_1}, Θ_F)

Placon  s-nous maintenant dans l'organisation locale $(T_{if_2}, \tau_{if_2}, \theta_{f_2}, \Theta_F)$.

Sous-type de tâche	Technique	Bloc du savoir	Description des techniques
T_{1f_2} regroupe T_{5f_1} et T_{6f_1}	$\tau_{1f_2} : \tau Discr$ (Discr comme discriminant)	(θ_{f_2}, Θ_F)	On calcule les solutions en utilisant le discriminant et les formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
T_{2f_2} regroupe $T_{1f_1}, T_{2f_1},$ T_{3f_1} et T_{4f_1}	$\tau_{2f_2} :$ D��v_Discr (Dév comme développement)	(θ_{f_2}, Θ_F)	On utilise la propriété de double distributivité dans R : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ pour développer et se ramener à T_{1f_2}

Tableau 33 - Praxéologies ponctuelles correspondant au bloc (θ_{f_2}, Θ_F)

II.3. Synthèse

Les techniques de résolution du type de tâche "résoudre algébriquement une équation du second degré", bien que générées par 4 blocs technologico-théoriques différents, peuvent être regroupés dans le tableau suivant.

<i>Gfac</i>	<i>Fact ProdN, IdR ProdN</i>
<i>GRègles</i>	<i>ProdN, CarN, EgaCar, RAC</i>
<i>GDiscr</i>	<i>Discr</i>
<i>Gdév</i>	<i>Dév, Dév Discr</i>

Tableau 34 – Synthèse des techniques attendues

III. DEFINITION ET ANALYSE A PRIORI DES EXERCICES PROPOSES

L'analyse précédente nous conduit à proposer des exercices dont la résolution se rattache aux sous-types de tâches déterminés ci-dessus.

Pour chaque sous-type, nous allons donc déterminer les variables, choisir les valeurs que nous leur donnerons et définir les observables des stratégies possibles.

Notons dès à présent que le choix des variables a notamment pour but de mesurer la qualité de la mobilisation, par les élèves, de la sous-tâche de factorisation : il n'influe donc pas, dans notre cas, directement sur la stratégie attendue.

Ceci nous conduit à effectuer un découpage du sous-type de tâche T_{2j} ($j=v_1, f_1$) en deux nouveaux sous-types:

- T2 dans lequel le facteur commun est apparent,
- T3 dans lequel il n'est pas apparent.

Ceci nous conduit également à fusionner les deux sous-types de tâche T_{3j} et T_{4j} en un seul type de tâche : T4 car le sous-type de tâche T_{4j} est un cas particulier de T_{3j} et car les techniques τ_{3j} (IdR_ProdN) et τ_{4j} (Rac) sont adéquates pour ces deux sous-types de tâche.

Nous regroupons donc dorénavant les sous-types de tâche T_{iv_1}, T_{if_1} ($i=1, \dots, 6$) présentés

dans la partie I sous les dénominations T_i suivantes :

- $T1 = \{T_{1v_1}, T_{1f_1}\}$
- $T2 = \{T_{2v_1}a, T_{2f_1}a\}$
- $T3 = \{T_{2v_1}b, T_{2f_1}b\}$
- $T4 = \{T_{3v_1}, T_{4v_1}, T_{3f_1}, T_{4f_1}\}$
- $T5 = \{T_{5f_1}, T_{6v_1}, T_{5f_1}, T_{6f_1}\}.$

III.1. Type T1 : $P \times Q = 0$ ou $(ax+b)(cx+d)=0$

III.1.1. Variables de la tâche

Forme de l'expression du premier membre de l'équation : produit de deux binômes du premier degré, ou carré d'un binôme du premier degré.

Nous choisissons de donner à cette variable les deux valeurs possibles, ce qui revient à choisir : $P=Q$ puis $P \neq Q$.

La technique attendue dans le premier cas est l'utilisation de la règle d'annulation d'un carré : *CarN*.

La technique attendue dans ce second cas est l'utilisation de la règle d'annulation d'un produit de facteurs : *ProdN*.

III.1.2. Exercices retenus

	Exercices	V
E1.1	$(-2x+5)^2 = 0$	$P=Q$
E1.2	$(-5x+1)(3x-7) = 0$	$P \neq Q$

Tableau 35

III.1.3. Détermination des observables

Type de tâche	Exercice	Observables	Technique induite
T1	E1.1 $(-2x+5)^2=0$	$\Leftrightarrow -2x + 5 = 0$	<i>CarN</i>
		$\Leftrightarrow -2x + 5 = 0$ ou $-2x + 5 = 0$	<i>ProdN</i>
		$\Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b}{2a} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$	
	E1.2 $(-5x+1)(3x-7) = 0$	$\Leftrightarrow -5x+1 = 0$ ou $3x+7 = 0$	<i>ProdN</i>
		$\Leftrightarrow -15x^2 + 38x - 7 = 0$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-38 \pm \sqrt{1024}}{-30}$	

Tableau 36

III.2. Type T2 : $P \times Q + P \times R = 0$ ou $P \times Q = P \times R$

III.2.1. Variables de la tâche

Les variables retenues sont liées à la forme de l'équation et plus précisément :

V1 : Présence ou non du polynôme unité : $R=1$ ou $R \neq 1$,

V2 : Position des deux termes par rapport au signe de l'égalité : $P \times Q + P \times S = 0$ ou $Q \times P = P \times R$

III.2.2.Exercices retenus

Exercices		V1	V2
E2.1	$(3 - x)(x + 2) + x + 2 = 0$	oui	$Q \times P + P = 0$
E2.2	$(-3 + 2x)(4x - 7) + (-3x + 1)(2x - 3) = 0$	non	$P \times Q + R \times P = 0$
E2.3	$(-2x + 1)(-5x - 4) = (-5x - 4)(x - 1)$	non	$Q \times P = P \times R$

Tableau 9

Pour les trois exercices, deux techniques sont attendues, la technique enseignée : *Fact_ProdN* et la technique *Simp* (simplification par le facteur commun).

E2.1 $(3 - x)(x + 2) + x + 2 = 0$

Cet exercice présente deux niveaux de difficulté. Le premier est lié à la reconnaissance du facteur commun $(x + 2)$. En effet, dans le deuxième terme, le facteur R est 1 et $x + 2$ est écrit sans parenthèse. Le deuxième niveau de difficulté se présente lors de la factorisation par $x + 2$, les élèves pouvant avoir des difficultés pour gérer le facteur 1.

E2.2 $(-3 + 2x)(4x - 7) + (-3x + 1)(2x - 3) = 0$

Cet exercice présente également deux difficultés dans la reconnaissance du facteur commun. En effet, les termes du facteur commun sont permutés : $(-3 + 2x)$ dans le premier terme et $(2x - 3)$ dans le second. On peut s'attendre à ce que des élèves pensent que l'un est l'opposé de l'autre. La deuxième difficulté vient de la position relative du facteur commun dans les deux termes : dans le premier il est à gauche et dans le second il est à droite.

E2.3 $(-2x + 1)(-5x - 4) = (-5x - 4)(x - 1)$

Dans ce troisième exercice, les deux termes sont de part et d'autre du signe égal, mais le facteur commun est apparent. La technique attendue, est, après regroupement des termes dans un membre de l'équation, est *Fact_ProdN*.

III.2.3.Détermination des observables

Type de tâche	Exercice	Observables	Technique induite
	E2.1 $(3 - x)(x + 2) + x + 2 = 0$	$\Leftrightarrow (x + 2)[(3 - x) + 1] = 0$	<i>Fact_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ ou } -x + 4 = 0$	
		$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2}$	
		$\Leftrightarrow 3 - x + 1 = 0$	<i>Simp</i>
		$\Leftrightarrow (3 - x)(x + 2) = -(x + 2)$	
		$\Leftrightarrow 3 - x = -1$	

T2	E2.2 $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3) = 0$	$\Leftrightarrow (-3+2x)[(4x-7)+(-3x+1)] = 0$	<i>Fact_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow -3x+2=0$ ou $x-6=0$	
		$\Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 18 = 0$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{4}$	
	E2.3 $(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1)$	$\Leftrightarrow (4x-7)+(-3x+1) = 0$	<i>Simp</i>
		$\Leftrightarrow (-3+2x)(4x-7) = -(-3x+1)(2x-3)$	
		$\Leftrightarrow 4x-7 = -(-3x+1)$	
		$\Leftrightarrow (-5x-4)[(-2x+1)-(x-1)] = 0$	<i>Fact_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow -5x-4=0$ ou $-3x+2=0$	
		$\Leftrightarrow 10x^2+3x-4 = -5x^2+x+4$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow 15x^2+2x-8=0$	
		$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{30}$	
		$\Leftrightarrow (-2x+1)(-5x-4) - (-5x-4)(x-1) = 0$	
		$\Leftrightarrow (10x^2+3x-4) - (-5x^2+x+4) = 0$	
		$\Leftrightarrow 15x^2+2x-8=0$	
		$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{30}$	
		$\Leftrightarrow -2x+1 = x-1$	<i>Simp</i>

Tableau 10

III.3. Type T3: $P \times Q = R \times S$ ou $P \times Q + R \times S = 0$ (où P est multiple de R : $P = k \times R$, ou R est multiple de P : $R = k \times P$ et $P \neq R$)

III.3.1. Variables de la tâche

V1 : Présence ou non d'un polynôme unitaire : $S=1$ ou $Q=1$

V2 : Position de deux termes par rapport au signe d'égalité : $P \times Q + R \times S = 0$ ou $P \times Q = R \times S$

V3 : Valeur positive ou négative du réel k

III.3.2. Exercices retenus

Exercices		V1	V2	V3
E3.1	$(2x+1)(3x-6)+x-2=0$	oui	$Q \times P + R = 0$	$k > 0$
E3.2	$(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$	non	$Q \times P - S \times R = 0$	$k < 0$
E3.3	$(6x+3)(1-3x) = (2x+1)(-x-4)$	non	$P \times Q = R \times S$	$k > 0$
E3.4	$(-4x+3)(3x-9) + (4x-3)(x-8) = 0$	non	$P \times Q + R \times S = 0$	$k < 0$

Tableau 11

Les quatre exercices retenus (cf. Tableau 11) correspondent aux quatre formes d'équation suivantes :

$Q \times P + R = 0$ dont $S=1$, P est un multiple de R (E3.1)

$P \times Q - R \times S = 0$ dont R est un multiple de P (E3.2)

$P \times Q = R \times S$ dont P est un multiple de R (E3.3)

$P \times Q + R \times S = 0$ dont P est un multiple de R (E3.4)

E3.1 $(2x + 1)(3x - 6) + x - 2 = 0$

Ce premier exercice présente deux niveaux de difficultés. Le premier est la reconnaissance du facteur commun. En effet, dans le deuxième terme $S=1$ et le facteur commun $(x-2)$ est écrit sans parenthèses et n'est pas apparent dans le facteur $P=3x-6$. Le deuxième niveau de difficulté se rencontre lors de la factorisation par $(x-2)$, les élèves pouvant avoir des difficultés pour gérer le facteur 1. La technique attendue est *Fact_ProdN*.

E3.2 $(-x + 4)(-2x + 3) - (x - 5)(-6 + 4x) = 0$

Le deuxième exercice présente également deux niveaux de difficultés. La première difficulté est la reconnaissance du facteur commun $(-2x+3)$. En effet, le terme contenant l'inconnue x et la constante sont permutés : $(-2x+3)$ dans le premier terme et $(-6+4x)$ dans le deuxième. De plus, ces deux facteurs sont de signe contraire et l'un est multiple de l'autre. Après reconnaissance du facteur commun, *Fact_ProdN* et *Simp* sont deux techniques possibles. La deuxième difficulté est dans la mise en œuvre des deux techniques.

E3.3 $(6x + 3)(1 - 3x) = (2x + 1)(-x - 4)$

Dans cet troisième exercice réside une difficulté pour les élèves : la reconnaissance du facteur commun $(2x+1)$. Si l'élève reconnaît le facteur commun, alors il peut regrouper tous les termes dans le membre de gauche, puis utiliser *Fact_ProdN*, il peut aussi factoriser $(6x+3)$, puis utiliser *Simp*.

E3.4 $(-4x + 3)(3x-9) + (4x - 3)(x - 8) = 0$

Cet exercice présente un autre niveau de difficulté : la gestion du facteur (-1) lors de la factorisation du facteur commun $(-4x+3)$ (ou $(4x-3)$). La technique attendue est encore *Fact_ProdN*.

III.3.3.Détermination des observables

Type de tâche	Exercice	observables	Technique induite
T3	E3.1 $(2x + 1)(3x - 6) + x - 2 = 0$	$\Leftrightarrow (x - 2)[3(2x + 1) + 1] = 0$	<i>Fact_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $6x+4=0$	
		$\Leftrightarrow 6x^2 - 8x - 8 = 0$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{12}$	
		$\Leftrightarrow 3(2x + 1) + 1 = 0$	<i>Simp</i>
		$\Leftrightarrow 3(2x + 1) = -1$	

	E3.2 $(-x + 4)(-2x + 3) - (x - 5)(-6 + 4x) = 0$	$\Leftrightarrow (3 - 2x)[(-x + 4) + 2(x - 5)] = 0$ $\Leftrightarrow 3 - 2x = 0$ ou $x - 6 = 0$	Fact_ProdN
		$\Leftrightarrow -2x^2 + 15x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{81}}{-4}$	Dév_Discr
		$\Leftrightarrow (-x + 4) + 2(x - 5) = 0$	Simp
		$\Leftrightarrow (-x + 4)(-2x + 3) = (x - 5)(-6 + 4x)$ $\Leftrightarrow -x + 4 = -2(x - 5)$	
	E3.3 $(6x + 3)(1 - 3x) = (2x + 1)(-x - 4)$	$\Leftrightarrow (2x + 1)[3(1 - 3x) - (-x - 4)] = 0$ $\Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ ou $-8x + 7 = 0$	Fact_ProdN
		$\Leftrightarrow -18x^2 - 3x + 3 = -2x^2 - 9x - 4$ $\Leftrightarrow -16x^2 + 6x + 7 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{484}}{-32}$	Dév_Discr
		Ou $\Leftrightarrow (6x + 3)(1 - 3x) - (2x + 1)(-x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow -16x^2 + 6x + 7 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{484}}{-32}$	
		$\Leftrightarrow 3(1 - 3x) = (-x - 4)$	
			Simp
	E3.4 $(-4x + 3)(3x - 9) + (4x - 3)(x - 8) = 0$	$\Leftrightarrow (-4x + 3)[(3x - 9) - (x - 8)] = 0$ $\Leftrightarrow -4x + 3 = 0$ ou $2x - 1 = 0$	Fact_ProdN
		$\Leftrightarrow -8x^2 + 10x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{-16}$	Dév_Discr
		$\Leftrightarrow (3x - 9) - (x - 8) = 0$	Simp
		$\Leftrightarrow (3x - 9) = (x - 8)$	

Tableau 12

III.4. Type T4: $P^2 - R^2 = 0$ ou $P^2 = R^2$

Nous n'étudions que les équations de la forme suivante :

Différence de deux carrés : $(ax+b)^2 - (cx+d)^2 = 0$ où $a \neq c$ (1)

III.4.1. Variables de la tâche

Dans l'équation (1), les variables sont liées à la forme de l'équation :

V1 : Position de deux carrés par rapport au signe de l'égalité

V2 : Présence ou non d'une constante $k^2 \neq 1$ devant un carré

V3 : Présence ou non d'une constante au lieu d'un binôme au carré

III.4.2. Exercices retenus

Exercices	V1	V2	V3
-----------	----	----	----

E4.1	$(-4x + 5)^2 = (-2x - 7)^2$	$P^2=Q^2$	$k^2=1$	non
E4.2	$(3x - 4)^2 - (-5x + 1)^2 = 0$	$P^2 - Q^2 = 0$	$k^2=1$	non
E4.3	$x^2 = 7$	$P^2 = Q^2$	$k^2=1$	oui
E4.4	$-(-3x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$	$-P^2+Q^2 = 0$	$k^2=1$	non
E4.5	$-(2x - 1)^2 + 9(-x + 2)^2 = 0$	$-P^2+Q^2=0$	$k^2=9$	non

Tableau 13

Les cinq exercices retenus correspondent aux formes d'équations suivantes :

$$A^2(x) = B^2(x) \text{ (E4.1)}$$

$$\text{ou } A^2(x) - B^2(x) = 0 \text{ (E4.2)}$$

$$\text{ou } A^2(x) = c \text{ (} c > 0 \text{) (E4.3)}$$

$$\text{ou } -A^2(x) + B^2(x) = 0 \text{ (E4.4)}$$

$$\text{ou } -A^2(x) + k^2.B^2(x) = 0 \text{ (E4.5)}$$

$$\text{E4.1 } (-4x + 5)^2 = (-2x - 7)^2$$

Le premier exercice présente un niveau de difficulté : l'égalité de deux carrés peut conduire les élèves à l'utilisation de la règle invalide " $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ ". deux techniques sont attendues : *EgaCar*, ou *IdR_ProdN* si l'élève reconnaît le premier membre de l'identité remarquable et regroupe les deux termes de l'équation.

$$\text{E4.2 } (3x - 4)^2 - (-5x + 1)^2 = 0$$

Dans ce deuxième exercice, la technique attendue est *IdR_ProdN*. La technique *EgaCar* peut également être mobilisée après la mise sous la forme $a^2=b^2$ de l'équation donnée. Cependant, ce mouvement du deuxième carré de l'autre côté du signe d'égalité peut amener à mobiliser la règle invalide " $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ " qui conduit à une solution incomplète.

$$\text{E4.3 } x^2 = 7$$

La présence de la constante 7 au lieu du carré d'un binôme crée deux niveaux de difficulté aux élèves. Le premier est la reconnaissance du premier membre de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = 0$. En effet, la constante 7 n'est pas un nombre au carré. Le deuxième est la représentation de 7 sous la forme d'un carré car $\sqrt{7}$ est un irrationnel. Les techniques attendues sont l'extraction de la racine carrée, *Rac*, ou *EgaCar* : " $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$ ". Les difficultés précédentes peuvent amener à mobiliser l'utilisation de la règle " $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ " et conduire les élèves à une résolution incomplète.

$$\text{E4.4 } -(-3x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$$

Dans cet exercice, la permutation du signe moins peut créer des difficultés dans la reconnaissance du premier membre de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a+b)$. Cela peut conduire au développement des deux carrés. Si les élèves reconnaissent le premier membre de l'identité remarquable, la technique *IdR_ProdN* peut être mobilisée. La technique *EgaCar* peut aussi être mobilisée si l'équation est ramenée à la forme $a^2=b^2$.

$$E4.5 \quad -(2x - 1)^2 + 9(-x + 2)^2 = 0$$

Cet exercice présente deux niveaux de difficulté. Le premier est identique au cas de l'exercice précédent. Le deuxième est la nécessité de reconnaître un carré dans la constante 9, puis de fusionner 9 et $(-x + 2)^2$. Ces difficultés peuvent conduire à un développement des deux carrés dans ce cas. Si les élèves reconnaissent le premier membre de l'identité remarquable, alors *IdR_ProdN* peut être mobilisée. La technique *EgaCar* peut être mobilisée si l'équation est ramenée à la forme $a^2=b^2$.

III.4.3.Détermination des observables

Type de tâche	Exercice	Observables	Technique induite
T4	E4.1 $(-4x + 5)^2 = (-2x - 7)^2$	$\Leftrightarrow (-4x + 5)^2 - (-2x - 7)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (-2x + 12)(-6x - 2) = 0$	<i>IdR_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow -4x + 5 = -2x - 7$ ou $-4x + 5 = -(-2x - 7)$ Ou $\Leftrightarrow -4x + 5 = -2x - 7$	<i>EgaCar</i>
		$\Leftrightarrow \sqrt{(-4x + 5)^2} = \sqrt{(-2x - 7)^2}$ $\Leftrightarrow -4x + 5 = -2x - 7$ ou $-4x + 5 = -(-2x - 7)$	<i>Rac</i>
		$\Leftrightarrow (-4x + 5)^2 - (-2x - 7)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (16x^2 - 40x + 25) - (4x^2 - 28x - 49) = 0$ $\Leftrightarrow 12x^2 - 68x - 24 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{68 \pm \sqrt{5776}}{24}$ Ou $\Leftrightarrow (-4x + 5)^2 = (-2x - 7)^2$ $\Leftrightarrow 16x^2 - 40x + 25 = 4x^2 + 28x + 49$ $\Leftrightarrow 12x^2 - 68x - 24 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{68 \pm \sqrt{5776}}{24}$	<i>Dév_Discr</i>
	E4.2 $(3x - 4)^2 - (-5x + 1)^2 = 0$	$\Leftrightarrow (-2x - 3)(8x - 5) = 0$	<i>IdR_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow (3x - 4)^2 = (-5x + 1)^2$ $\Leftrightarrow 3x - 4 = -5x + 1$ ou $3x - 4 = -(-5x + 1)$	<i>EgaCar</i>
		$\Leftrightarrow \sqrt{(3x - 4)^2} = \sqrt{(-5x + 1)^2}$ $\Leftrightarrow 3x - 4 = -5x + 1$ ou $3x - 4 = -(-5x + 1)$	<i>Rac</i>
		$\Leftrightarrow (9x^2 - 24x + 16) - (25x^2 - 10x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow -16x^2 - 14x + 15 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{1156}}{-32}$	<i>Dév_Discr</i>
	E4.3 $x^2 = 7$	$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{7}$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$	<i>Rac</i>

		$\Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{7})^2$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}$ Ou $\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$	<i>EgaCar</i>
		$\Leftrightarrow x^2 - 7 = 0$ $\Leftrightarrow (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$	<i>IdR-ProdN</i>
	E4.4 $-(-3x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$	$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 - (-3x - 5)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (5x + 8)(-x - 2) = 0$	<i>IdR_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow -5x^2 - 18x - 16 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{4}}{-10}$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 = (-3x - 5)^2$ $\Leftrightarrow 2x + 3 = -3x - 5 \text{ ou } 2x + 3 = -(-3x - 5)$	<i>EgaCar</i>
		$\Leftrightarrow \sqrt{(2x + 3)^2} = \sqrt{(-3x - 5)^2}$ $\Leftrightarrow 2x + 3 = -3x - 5 \text{ ou } 2x + 3 = -(-3x - 5)$	<i>Rac</i>
	E4.5 $(2x - 1)^2 + 9(-x + 2)^2 = 0$	$\Leftrightarrow 9(-x + 2)^2 - (2x - 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (-3x + 6)^2 - (2x - 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (-5x + 7)(-x + 5) = 0$	<i>IdR_ProdN</i>
		$\Leftrightarrow 5x^2 - 32x + 35 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{32 \pm \sqrt{324}}{10}$	<i>Dév_Discr</i>
		$\Leftrightarrow 9(-x + 2)^2 = (2x - 1)^2$ $\Leftrightarrow 3(-x + 2) = 2x - 1 \text{ ou } 3(-x + 2) = -(2x - 1)$ Ou $\Leftrightarrow 3(-x + 2) = 2x - 1$	<i>EgaCar</i>
		$\Leftrightarrow \sqrt{9(-x + 2)^2} = \sqrt{(2x - 1)^2}$ $\Leftrightarrow 3(-x + 2) = 2x - 1 \text{ ou } 3(-x + 2) = -(2x - 1)$	<i>Rac</i>

Tableau 14

III.5. Type T5 : $ax^2 + bx + c = 0$

III.5.1. Variables de la tâche

V1 : forme du premier membre : le premier membre se présente sous la forme d'une identité remarquable ou non, et dans ce dernier cas aucune factorisation partielle n'est possible.

V2 : valeur du coefficient de x^2 : 1, k^2 , ou k non carré parfait

V3 : existence ou non des solutions de l'équation donnée

III.5.2. Exercices retenus

Exercices	V1	V2	V3
-----------	----	----	----

E5.1	$x^2 + 8x + 16 = 0$	Oui $(P+a)^2$	1	oui
E5.2	$25x^2 - 90x + 81 = 0$	Oui $(P-a)^2$	5^2	oui
E5.3	$2x^2 + 5x - 7 = 0$	Non	2	oui
E5.4	$x^2 - 11x + 24 = 0$	Non	1	oui

Tableau 15

E5.1 $x^2 + 8x + 16 = 0$

Dans cet exercice, de l'équation, la reconnaissance de ce que 16 est 4^2 carré permet la mobilisation de *IdR_CarN*.

E5.2 $25x^2 - 90x + 81 = 0$

La valeur différente de 1 du coefficient de x^2 rend difficile la reconnaissance du premier membre de l'identité remarquable $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$. Cependant, la reconnaissance de 25 et 81 en temps que carrés permet de mobiliser *IdR_CarN*.

E5.3 et E5.4 $2x^2 + 5x - 7 = 0$ et $x^2 - 11x + 24 = 0$

Pour ces deux exercices 3 et 4, techniques peuvent être mobilisées, soit *Fact_ProdN*, soit *Discr*.

III.5.3.Détermination des observables

Type de tâche	Exercice	observables	Technique induite
T5	E5.1 $x^2 + 8x + 16 = 0$	$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x+4)^2 = 0$	τ_{IdR_CarN}
		$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2} = -4$	τ_{Discr}
	E5.2 $25x^2 - 90x + 81 = 0$	$\Leftrightarrow (5x)^2 - 2 \cdot (5x) \cdot 9 + 9^2 = 0$ $\Leftrightarrow (5x - 9)^2 = 0$ $\Leftrightarrow 5x - 9 = 0$ Ou $\Leftrightarrow 25(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{9}{5} + (\frac{9}{5})^2) = 0$ $\Leftrightarrow (x - \frac{9}{5})^2 = 0$	τ_{IdR_CarN}
		$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{90}{50} = \frac{9}{5}$	τ_{Discr}
	E5.3 $2x^2 + 5x - 7 = 0$	$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$ $\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-\frac{7}{2}$	τ_{Discr}

		$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 7x - 7 = 0$ $\Leftrightarrow 2x(x - 1) + 7(x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(2x + 7) = 0$	τ_{Fact_ProdN}
	E5.4 $x^2 - 11x + 24 = 0$	$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2}$ $\Leftrightarrow x=8 \text{ ou } x=3$	τ_{Discr}
		$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 8x + 24 = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 3) - 8(x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 3)(x - 8) = 0$	τ_{Fact_ProdN}

Tableau 16

CHAPITRE C2 : DEROULEMENT DE L'EXPERIMENTATION

I. DEROULEMENT AU VIET-NAM ET EN FRANCE

Choix des classes

Au Viêt-Nam, l'expérimentation a été effectuée dans 4 classes de deux niveaux 9 et 10 : 9-O (ordinaire), 9-S (sélectionnée), 10-O (ordinaire) et 10-S (sélectionnée).

Or au Viet-Nam, dans l'enseignement public, il y a 2 systèmes d'enseignement : l'enseignement normal et l'enseignement destiné à former l'élite de la nation. Ces deux systèmes sont présents aussi à HoChiMinh ville.

En année 2005, il y a 239 collèges et 118 lycées à HoChiMinh ville. Parmi ces lycées, il y a environ 10 lycées "à sélection" où les élèves sont sélectionnés à l'entrée, où les effectifs sont réduits et où enseignent les professeurs considérés comme les meilleurs. Parmi ceux-ci, un établissement comporte deux niveaux d'enseignements : collège (de la classe 6 à celle 9) et lycée (de la classe 10 à celle 12).

Pour l'expérimentation, nous avons choisi une classe 9 (collège) de ce lycée et une classe 10 d'un autre lycée et nous les notons : 9-S et 10-S. De plus, nous avons choisi une classe 9 d'un collège ordinaire et une classe 10 d'un lycée ordinaire et nous les notons 9-O et 10-O afin de pouvoir étudier les résultats de l'enseignement de l'algèbre dans l'enseignement de masse au Viet-Nam.

Il est clair qu'il y a une différence en termes de résultat, entre les 2 systèmes. Nous avons donc souhaité analyser plus précisément en quoi réside cette différence, en ce qui concerne le sujet de notre étude.

En France, conformément à l'étude des programmes effectuée en partie B, l'expérimentation a été effectuée dans une classe de 2° et une classe de 1°S (filiale destinée, à la sortie de la seconde indifférenciée, aux élèves les meilleurs en mathématiques et sciences, les autres étant orientés vers des filières sciences économiques et sociales ou lettres et langues).

Ainsi, on peut penser que l'analyse comparative effectuée pourra être intéressante entre 9-O et 2° d'un côté, entre 10-S et 1°S, de l'autre.

Organisation du déroulement

Dans l'analyse a priori, nous avons élaboré 18 exercices classés dans les 5 sous-types de tâche T_i ($i=1, \dots, 5$), pour l'expérimentation. Nous avons organisé l'expérimentation en deux séances pour chaque classe. Pour cela nous avons proposé dans chaque séance 9

exercices, de manière à représenter tous les sous-types de tâche. Ensuite, pour chaque séance, nous avons créé 4 listes A, B, C et D contenant les 9 exercices mais qui sont disposés en ordre différent afin de minimiser les copies entre les élèves.

Les tableaux ci-dessous présentent les dates et les durées des différentes séances.

Classe	Date d'expérimentation	Séance-Durée
9-O	24 Avril 2005	1-45 mns
	3 Septembre 2005	2-45 mns
9-S	13-Septembre 2005	1-45 mns
	15-Septembre 2005	2-45 mns
10-O	17 Février 2005	1- 45 mns
	24 Février 2005	2-45 mns
10-S	17 Février 2005	1-45 mns
	24 Février 2005	2-45 mns

Tableau 1

Classe	Dated'expérimentation	Séance-Durée
Seconde	24 Mai 2005	1-45 mns
	31 Mai 2005	2-45 mns
Première	1 Juin 2006	1-30 mns
		2-30 mns

Tableau 2

Les élèves doivent résoudre les exercices en utilisant le logiciel Aplusix. Chaque élève travaille sur un ordinateur. Il a de plus le droit d'utiliser les moyens suivants :

- un feuille de papier
- un crayon
- une calculatrice simple qui lui permet d'effectuer des opérations simples : addition, soustraction, multiplication et division (ou la calculatrice virtuelle de l'ordinateur).

L'enseignant joue le rôle d'observateur et n'intervient pas dans le travail des élèves.

Les élèves travaillent en mode test dans lequel ils ne disposent pas de rétroactions du logiciel sur la validité de leur résolution (cf. Figure 1).

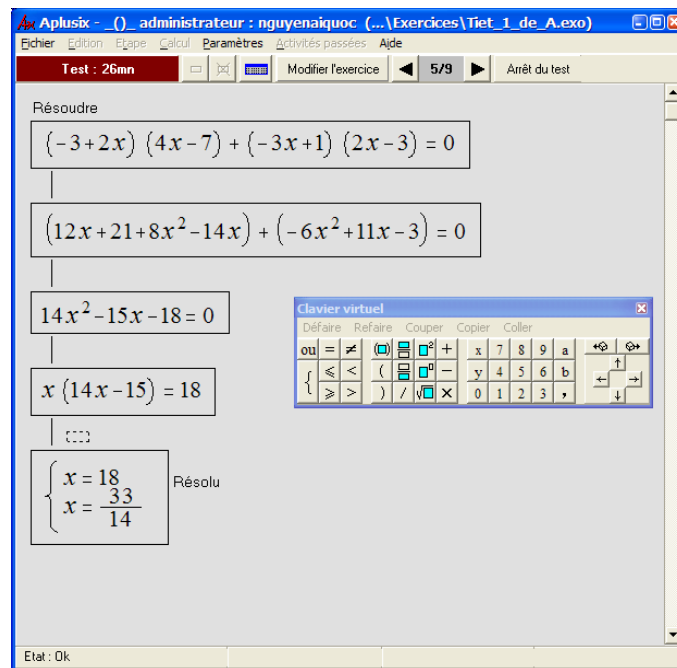


Figure 1 : Protocole d'un élève vietnamien dans la résolution de l'exercice E2.2 en mode de Test

II. METHODOLOGIE DE RECUEIL ET DE TRAITEMENT DES DONNES

II.1. Recueil des données

Chaque élève a un compte dans un répertoire où toutes ses actions dans Aplusix sont enregistrées avec le temps. Ces activités enregistrées peuvent être visualisées à l'aide d'un outil magnétoscope dans Aplusix. On peut ainsi voir la résolution finale de l'élève sous forme de succession d'étapes mais aussi tout ce que l'élève a fait à l'intérieur d'une étape y compris ce qu'il a effacé.

II.2. Traitement des données

Le traitement des données a été fait en 4étapes.

II.2.1.Etape 1 : visualisation des protocoles

Nous avons d'abord visualisé les protocoles des élèves par le magnétoscope pour déterminer la technique mobilisée et repérer les éventuelles erreurs.

Par exemple, l'examen du protocole de l'élève 8 de la classe 1° dans la résolution de l'exercice E4.4 (cf. Figure 2), nous a permis d'identifier la technique mobilisée : la

factorisation par l'utilisation de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (*IdR*) suivie de l'application de la règle (*ProdN*). La technique mobilisée est donc *IdR_ProdN*. L'erreur produite dans cette résolution est une erreur de signe dans le mouvement lors de la résolution de l'équation du premier degré " $-x-2=0$ ".

The screenshot shows the Aplusix software interface with the 'Observation' tab selected. The main window displays a sequence of steps for solving the equation $-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0$. The steps are:

- $-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0$ (Résoudre)
- $(2x+3)^2 - (-3x-5)^2 = 0$
- $(2x+3-3x-5)(2x+3+3x+5) = 0$
- $(-x-2)(5x+8) = 0$
- $x = 2$ ou $x = -\frac{8}{5}$ (Résolu)

A red asterisk is placed next to the fourth step, indicating an error in the sign during the simplification of the binomials.

Figure 2 : la technique *IdR_ProdN* est mobilisée dans cet exercice

The screenshot shows the Aplusix software interface with the 'Quarantaine' tab selected. The main window displays a sequence of steps for solving the equation $-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0$. The steps are:

- $-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0$ (Résoudre)
- $-(9x^2 - 30x + 25) + (4x^2 + 12x + 9) = 0$
- $-9x^2 + 30x - 25 + 4x^2 + 12x + 9 = 0$
- $-5x^2 + 42x - 16 = 0$
- $-5x^2 + 42x = 16$

A red asterisk is placed next to the second step, indicating an error in the sign during the expansion of the binomials. A small window titled 'Mètre' is visible in the bottom right corner, showing a scale from 0 to 100.

Figure 3 : La technique de développement *Dév* est mobilisée au début de la résolution

Le magnétoscope nous a également permis d'identifier les changements de stratégies des élèves. Par exemple, l'élève 3 de la classe 9-O a mobilisée la technique *Dév* dans un premier temps lors de la résolution de l'exercice E4.4 (cf. Figure 3). Ensuite, il a remplacé

cette technique par *IdR_ProdN* après l'obtention d'une équation du second degré (cf. Figure 4).

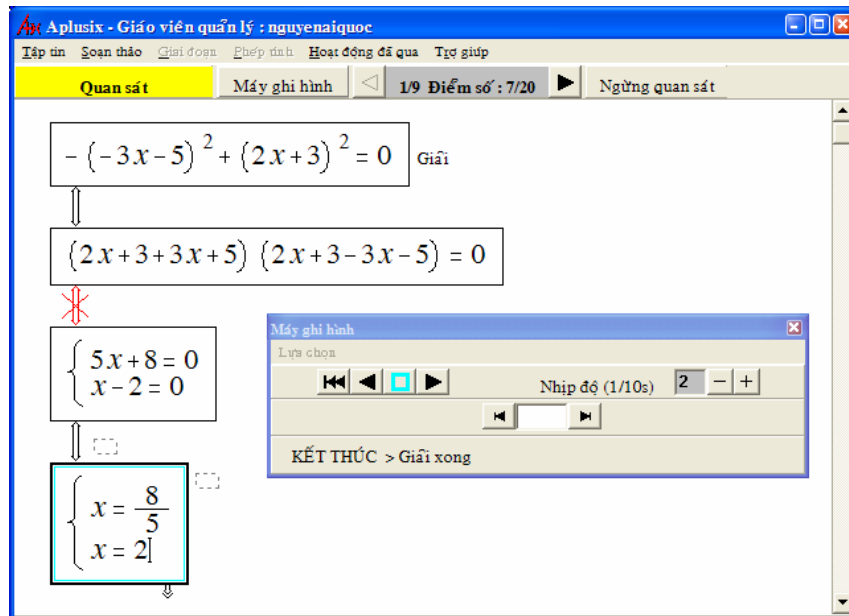


Figure 4 : En suite, la technique *Dév* est remplacée par *IdR_ProdN*

II.2.2.Etape 2 : Recueil des observés

A partir de la visualisation des protocoles nous avons relevé pour chaque élève et pour chaque exercice les observés suivants : la résolution de l'élève, une indication sur l'état de la résolution (correcte, échec, interrompu) et la première erreur rencontrée dans la résolution (cf. Tableau 3). Lorsque dans un exercice, il y a plusieurs erreurs successives, on ne prend en compte que la première erreur rencontrée.

N°	$(-2x+5)^2=0$ $x = \frac{5}{2}$	$(-5x+1)(3x-7)=0$ $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	$(3-x)(x+2)+x+2=0$ S : x=-2 ou x=4	$(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ S : x=6 ou $x = \frac{3}{2}$	$(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ S : $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$
E3	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x = \frac{5}{2}$ Correcte	$\tau_{Dév_Fact_ProdN}$ $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2+35x-3x-7=0$ ESIGN $-3x(5x-1)+7(5x-1)=0$ $(5x-1)(-3x+7)=0$ Interrompu	τ_{Fact_IsV} $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2-2x+x+2=0$ $2x-x^2+6+2=0$ $x(2-x)=-8$ interrompu	$\tau_{Dév}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-12x+21-8x^2-14x)+(-6x^2+9x+2x-3)=0$ ESIGN $-26x+21-8x^2-6x^2+11x-3=0$ $-15x-14x^2=-18$ interrompu	$\tau_{Dév}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(10x^2+8x-5x-4)=(-5x^2+5x-4x+4)$ $10x^2+3x-4=-5x^2-x+4$ ESIGN $10x^2+3x-4-5x^2-x+4=0$ $5x^2+4x-8=0$ interrompu
E4	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x = \frac{5}{2}$ Correcte	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ Correcte	$\tau_{Dév}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2-2x+x+2=0$ $2x-x^2+6+2=0$ $2x-x^2+8=0$ $x(1-x)+(8+x)=0$ interrompu	$\tau_{Dév}$ $(-12x+21+8x^2-14x)+(-6x^2+9x+2x-3)=0$ $8x^2-28x+21-6x^2+9x+2x-3=0$ ECAL $2x^2-17x+18=0$ $x(2x-17)+18=0$ Interrompu	$\tau_{Dév_Fact_ProdN}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(10x^2+8x-5x-4)=(-5x^2+5x-4x+4)$ $10x^2+5x^2-3x+4x-5x=8$ ESIGN $15x^2-4x=8$ $15x^2-4(x-2)=0$ $(15-4)(15+4)(x-2)=0$ $209(x-2)=0$ $x-2=0$ $x=2$
E5	Sans réponse	$\tau_{Dév_Fact_ProdN}$ $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2-35x+3x-7=0$ ESIGN $-15x^2-32x-7=0$ $-x(15x+32)=7$ $x=0$ ou $x = \frac{15}{32}$	$\tau_{Dév_Fact_ProdN}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2-2x+x+2=0$ $2x-x^2+6+2=0$ $x(2-x)=-8$ $x=0$ ou $x = \frac{8}{2}$ EPRODF	$\tau_{Dév_Fact_ProdN}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-12x+21+8x^2-14x)+(6x^2+9x+2x-3)=0$ ESIGN $14x^2-15x+18=0$ $x(14x-15) = -18$ $x=0$ ou $x = \frac{14}{15}$ EPRODF	$\tau_{Dév_Fact_ProdN}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(10x^2+8x-5x-4)=-5x^2+5x-4x+4$ $10x^2+8x-5x-4-5x^2+5x-4x+4=0$ ESIGN $5x^2+4x=0$ $x(5x+4)=0$ $x=0$ ou $x = \frac{5}{4}$

Tableau 3 : Un extrait du tableau de recueil des observés de la classe 9-O

II.2.3.Etape 3 : Relevé des techniques et erreurs par classe

Pour chaque classe, et pour chaque exercice, nous avons compté le nombre d'occurrences pour chaque technique :

- des différents résultats obtenus : succès, erreur ou interruption
- et des différentes catégories d'erreurs rencontrées (cf. Tableau 4).

Techniques	Etat Techs			Erreurs										Données statistiques				
	Réussi	Echouée		ECALN	ECALD	ESIGN	EOPM	EPRODF	EFACT	ELOG	ERA1	ERA2	Total erreurs	Total techs	% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues /Total
		Terminée	Interrompue															
τ_{Fact_ProdN}	65	35		7		28			6	7			48	100	24,8	65,0	35,0	
τ_{Fact_IsV}		1				1			1				2	1	0,2	0,0	100,0	
τ_{IdR_ProdN}	28	29		6		17			10	3			36	57	14,1	49,1	50,9	
τ_{IdR_CarN}	30													30	7,4	100,0		
τ_{IdR_Simp}																		
Total Gfact	123	65		13		46			17	10			86	188	46,7	65,4	34,6	
τ_{ProdN}	19	3				1				2			3	22	5,5	86,4	13,6	
τ_{CarN}	16	1				1	1						2	17	4,2	94,1	5,9	
τ_{Rac}	14	8									7	1	8	22	5,5	63,6	36,4	
τ_{IdR}																		
τ_{Simp}^{+}																		
τ_{Simp_ProdN}																		
Total Règles	49	12				2	1			2	7	1	13	61	15,1	80,3	19,7	
$\tau_{Dév}$																		
τ_{IdR_Dev}																		
τ_{Dev_Rac}		1		1								1	2	1	0,2		100,0	
τ_{Dev_Discr}	29	30	36	25	13	44				5			87	95	23,6	30,5	69,5	37,9
τ_{Dev_IsV}																		
Total Gdév	29	31	36	26	13	44				5		1	89	96	23,8	30,2	69,8	37,5
T_{Discr}	36	21		5	6	5				6			22	57	14,1	63,2	36,8	
τ_{Fact_Dev}																		
$\tau_{Fact_Dev_Discr}$	1													1	0,2	100,0		
$\tau_{Dev_Fact_ProdN}$																		
Total Mixtes	1													1	0,2	100,0		
Non identifiée																		
Totaux	238	129	36	44	19	97	1		17	23	7	2	210	403	100,0	59,1	40,9	8,9

Tableau 4 : Relevé quantitatif des techniques mobilisées et des erreurs de la classe de 1°

C'est en nous appuyant sur ces tableaux que nous avons réalisé les synthèses présentées dans les chapitres C3 et C4.

II.2.4. Etape 4 : Relevé des techniques et erreurs par élève

Pour chaque élève et pour chaque exercice, nous avons identifié la technique mobilisée, le résultat obtenu, et les erreurs commises (cf. Tableau5)

Exercice	El	Technique	Première erreur rencontrée
$(-2x+5)^2=0$	1	CarN	néant
$(-4x+5)^2=(-2x-7)^2$	1	Dev_Rac	ECAL dans le développement
$2x^2+5x-7=0$	1	Discr	ESIGN (non maîtrise s-t formule de solutions $x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)
$x^2-11x+24=0$	1	Discr	néant
$(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$	1	Fact_ProdN	ESIGN (non maîtrise s-tâche réduction)
$(6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4)$	1	Fact_ProdN	EFAC (non maîtrise s-tâche factorisation : $(2x+1)(3x-9+x+4)=0$)
$(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$	1	Fact_ProdN	ESIGN (non maîtrise s-tâche factorisation)
$(2x+1)(3x-6)+x-2=0$	1	Fact_ProdN	néant
$(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$	1	Fact_ProdN	néant
$(3-x)(x+2)+x+2=0$	1	Fact_ProdN	néant
$(-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0$	1	Fact_ProdN	néant
$25x^2-90x+81=0$	1	IdR_CarN	néant
$x^2+8x+16=0$	1	IdR_CarN	néant
$-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=0$	1	IdR_ProdN	ESIGN (dans le calcul de carré)
$(3x-4)^2-(-5x+1)^2=0$	1	IdR_ProdN	néant
$-(-3x-5)^2+(2x+3)^2=0$	1	IdR_ProdN	néant
$(-5x+1)(3x-7)=0$	1	ProdN	néant
$x^2=7$	1	Rac	néant

Tableau 5 : Profil de l'élève 1 de la classe 1° dans la résolution de 18 exercices donnés

Ces tableaux n'ont pu, faute de temps, être exploités dans la partie expérimentale, nous espérons pouvoir le faire par la suite.

II.3. Codage des types d'erreurs rencontrées

Nous avons classifié a priori les erreurs susceptibles d'être produites par les élèves lors de la résolution des exercices. Puis nous avons codé ces types d'erreurs par des notations en

majuscule, codages que nous utiliserons dans la rédaction de l'analyse postérieure (cf. Tableau 6).

Type d'erreur	Notation	Description
Erreur de calcul	ECAL	Calcul numérique et littéral
Erreur dans la formule du discriminant	ECALD	Calcul de discriminant
Erreur de signe	ESIGN	Dans le mouvement des termes d'un même à l'autre Dans la réécriture Dans le développement
Erreur d'opérateur lors du mouvement	EOPM	$ax+c=d \Leftrightarrow x+c=\frac{d}{a}; a+b=c \Leftrightarrow b=\frac{c}{a}$ $ab=c \Leftrightarrow b=c - \frac{1}{a}; ab=c \Leftrightarrow a=bc; ab=c \Leftrightarrow a=\frac{b}{c};$ $ax=b \Leftrightarrow x=b \pm a$
Erreur lors de l'annulation d'un produit de facteurs ou utilisation abusive de la règle d'annulation	EPRODF	$A \times B=0 \Leftrightarrow A=B$ (ou $A=-B$) $A+B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$ $A+B=C \Leftrightarrow A+C$ ou $B+C$ $A^2-B^2=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$ $A=B \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$ $A \times B=C \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$ $A \times B=C \Leftrightarrow A=C$ ou $B=C$ $AB+C=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B+C=0$ $AB+C=0 \Leftrightarrow A+C=0$ ou $B+C=0$ $AB+CD=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B+C=0 \Leftrightarrow D=0$
Erreur de factorisation ou de développement	EFAC	$ab+b=ab; ab+a=(a+a)b; ab+kac=a(b+c+k)$ $ab+a=a(b \times 1)$ $ab+ac=a^2b+c; abc-bd=ab(c-d)$ $abc-c^2=(ac-c)(bc+c); abc^2-cd=(ac-d)(bc-c)$ $a(b+c)(d+e)=(ab+ac)(ad+ae) (a-b)^2=(a-b)(a+b)$ $a^2-b^2=(a-b)^2$ $k^2a^2-b^2=(k^2a-b)(k^2a+b); a^2+b^2=(a-b)(a+b)$ $ax \times bx \rightarrow (a+b)x; ax \times bx \rightarrow (a+b)x^2$ $ax \times b=(a+b)x$
Erreur de logique	ELOG	$a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ET $b=0$
Erreur de développement	EDEV	$k(a+b)=k+a+b; (a+b)^2=a^2+2(a+b)+b^2$ $(a+b)^2=2a+2(a+b)+b^2$ ou $(a+b)^2=a^2+2(a+b)+2b$ $(a+b)^2=a^2+ab+b^2; (-a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(-a+b)^2=-a^2+2ab+b^2; (-a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(-a-b)^2=a^2+2ab-b^2; (-a+b)^2=a^2-2ab-b^2$ $(-a+b)^2=-a^2-2ab+b^2; (-ax+b)^2=-ax^2+2abx+b^2$ $(-ax+b)^2=a^2x+2abx+b^2; (-ax+b)^2=a^2x-2abx+b^2$ $(-ax-b)^2=-a^2x+2abx-b^2; (-ax-b)^2=2ax^2+2abx+b^2$ $(ax+b)^2=a^2x+b^2; (a+b)^2=a^2+b^2$ $(a+b)(c+d)=a+b+c+d;$ $ax \times bx \rightarrow abx; (a+b)(c+d)=ac+bd$ $ax \times b=ab$
Erreurs sur les racines carrées	ERA1	$\sqrt{A}$ est définie pour tout A $\sqrt{A^2} = A$ $\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$ $A\sqrt{B} = \sqrt{AB}$

On ramène abusivement l'équation de degré 2 à une équation degré 1	ERA2	$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow ax+bx+c=0$ $ax^2+b=c \Leftrightarrow ax+b=\sqrt{c}$ $x^2=ax+b \Leftrightarrow x=x\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $\sqrt{ax^2+bx}=\sqrt{c} \Leftrightarrow x\sqrt{ a+b }=\sqrt{c}$ $x^2=k \ (k>0) \Leftrightarrow x=k \text{ ou } x=-k$ $(\text{ou } \Leftrightarrow x=k) \ (\text{ou } \Leftrightarrow x=-k)$ $x^2=k^2 \Leftrightarrow x=k; a^2-b^2=0 \Leftrightarrow a-b=0$
Erreurs diverses	EDIVER	

Tableau 6 : Codage des types d'erreurs

CHAPITRE C3 : ANALYSE DE L'EXPERIMENTATION DANS L'INSTITUTION V

I. RESULTATS GLOBAUX

I.1. Résultats de la classe 9

Résolution par les techniques	9 - O Collège BD							9 - S Lycée TDN						
	Réussie	Échouée		% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total	Réussie	Échouée		% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total
		Terminée	Interrompue						Terminée	Interrompue				
<i>Total Gfact</i>	55	106	6	44,1	32,9	67,1	3,6	459	125	2	70,9	78,3	21,7	0,3
<i>Total Règles</i>	11	30	0	10,8	26,8	73,2	0	108	50	0	19,1	68,4	31,6	0
<i>Total Gdév</i>	0	56	17	19,3	0	100	23,3	0	1	20	2,5	0	100	95,2
<i>Total Mixtes</i>	15	78	5	25,9	15,3	84,7	5,1	34	25	3	7,5	54,8	45,2	4,8
Totaux	81	270	28	100	21,4	78,6	7,4	601	201	25	100	72,7	27,3	3

Tableau VN- 1

D'après l'analyse a priori, les praxéologies attendues en classes 9 sont celles qui mobilisent les techniques *Gfact* et *Règles* (notamment dans le cas où l'expression est déjà factorisée ou se présente sous la forme d'un carré ou d'une identité remarquable).

Si on s'intéresse aux techniques mobilisées dans les deux classes 9 du cursus ordinaire et sélectionné, on constate que les techniques majoritaires mobilisées dans les deux classes sont des types *Gfact* et *Règles* avec 54,9% pour la classe 9-O et 90% pour celle de 9-S (cf. Tableau VN-1).

De plus, nous appelons *Mixtes* les techniques utilisées dans ces deux classes composées dans lesquelles l'élève développe d'abord les expressions, puis revient à la factorisation pour arriver à une équation produit nul et utiliser la règle d'annulation du produit. Nous regrouperons donc dans les analyses les techniques de la catégorie *Mixtes* avec celles de *Gfact*. Ce qui montre que les techniques de factorisation et d'utilisation de règles représentent 80,8% des techniques mobilisées en classe 9-O et 97,5% en classe O-S.

On voit par ailleurs apparaître, chez près de 20% des élèves en classe 9-O, versus 2,5% en 9-S les techniques de développement qui ne permettent pas, en classe 9, de mener à bien les tâches proposées.

Cette analyse rapide nous permet d'affirmer que les élèves de la classe 9-S ont un rapport personnel à la résolution de l'équation du second degré davantage conforme au rapport institutionnel que les élèves de la classe 9-O.

Ce résultat est renforcé par le fait que l'on trouve chez élèves de la classe 9-S un pourcentage important de réussite lors de l'utilisation des techniques attendues (72,7%), alors que ce pourcentage est beaucoup plus faible (21,4%) chez élèves de la classe 9-O.

I.2. Résultats de la classe 10

Résolution par les techniques	10-O Lycée LTV							10-S Lycée BTX						
	Réussie	Échouée		% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total	Réussie	Échouée		% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total
		Terminée	Interrompue						Terminée	Interrompue				
<i>Total Gfact</i>	22	11	0	4,7	66,7	33,3	0	133	30	0	21,5	81,6	18,4	0
<i>Total Règles</i>	28	22	0	7,1	56	44	0	72	24	0	12,7	75	25	0
<i>Total Gdév</i>	100	359	6	65,6	21,5	78,5	1,3	167	190	4	47,7	46,3	53,7	1,1
<i>Discr</i>	79	65	0	20,3	54,9	45,1	0	92	30	0	16,1	75,4	24,6	0
<i>Total Mixtes</i>	2	15	0	2,4	11,8	88,2	0	12	3	0	2	80	20	0
Totaux	231	472	6	100	32,6	67,4	0,8	476	277	4	100	62,9	37,1	0,5

Tableau VN- 2

Rappelons que notre expérimentation en classe 9 s'est volontairement déroulée avant toute introduction du calcul du discriminant. L'apprentissage du discriminant en classe 9 et son utilisation privilégiée en classe 10 introduisent une nouvelle par rapport aux techniques de factorisation : la technique de calcul du discriminant (*Discr*), qui leur permet résoudre toute équation donnée sous forme réduite : $ax^2+bx+c=0$, ou de se ramener à cette forme réduite en développant l'équation de départ.

Les praxéologies attendues en classe 10 sont donc celles qui induisent, selon les types de tâche, les techniques *Gfact* et *Règles*, ou les techniques *Gdév* et *Discr*.

Si on s'intéresse maintenant aux techniques présentes dans les deux classes 10-O et 10-S, suite des classes 9-O et 9-S du cursus ordinaire et sélectionné, on constate que les techniques majoritaires dans ces deux classes sont celles de développement ou de calcul

direct du discriminant avec 85,9 % pour la classe 10-O et 63,8% pour la classe 10-S (cf. Tableau VN-2).

De plus, il est intéressant de remarquer que *Gdév* est moins mobilisé en classe 10-S (47,7%) qu'en classe 10-O (65,6%), *Gfact* occupant 21,5% en 10-S alors qu'elle n'occupe que 4,7% en 10-O. Cela montre, chez les élèves de la classe 10-S, une meilleure coordination des techniques adéquates dans la résolution de chacun des types d'équation, que chez ceux de la classe 10-O.

On remarque également que la mobilisation des techniques *Gfact* est davantage couronnée de succès (66,7% en classe 10-O et 81,6% en classe 10-S) que celle des techniques *Gdév* (21,5% en classe 10-O et 46,3% en classe 10-S)

I.3. Evolution des techniques mobilisées et des résultats obtenus lors du passage de la 9^o à la 10^o

On s'intéresse ici à l'évolution des techniques dans le traitement des types de tâche par les élèves de classe 9 et ceux de classe 10. Les comparaisons sont effectuées d'une part, entre classes ordinaires, d'autre part, entre classes dont les élèves ont été sélectionnés.

Techniques	9 - O		10 - O		9 - S		10 - S	
	%	R	%	R	%	R	%	R
<i>Gfact-Règles</i>	54,9	31,7	11,8	60,2	90	76,2	34,2	79,2
<i>Gdév-Discr</i>	19,3	0	85,9	29,4	2,5	0	63,8	53,6
<i>Mixtes</i>	25,9	15,3	2,4	11,8	7,5	54,8	2	80

Tableau VN-3

Comme on pouvait s'y attendre, l'enseignement de la méthode de résolution des équations du second degré induit une forte mobilisation des techniques *Gdév* et *Discr* chez les élèves de classe 10.

On constate une très forte augmentation des techniques *Gdév* et *Discr* (63,8% en 10-S versus 2,5% en classe 9 – S, et 85,9% en 10 – O versus 19,3% en 9-O) au détriment des techniques *Gfact* et *Règles* dont la présence diminue fortement (11,8% en 10-O versus 54,9% en 9-O, et 34,2% en 10-S versus 90% en 9 – S) (cf. Tableau VN-3).

On peut également remarquer le taux négligeable des techniques *Mixtes* dans les deux classes

10-O et 10-S, ce qui montre une stabilité nouvelle dans les procédures mises en œuvre par les élèves, qu'il s'agisse de *Gfac* ou de *Gdév*.

En classe ordinaire, les élèves qui continuent de choisir les techniques de factorisation et d'utilisation des règles semblent mieux les maîtriser en classe 10 qu'en classe 9, puisque leur taux de réussite des exercices ainsi traités passe de 31,7% à 60,2%. Mais le fait d'utiliser des techniques de développement, même dans le cas où elles sont très couteuses, conduit à un taux d'échec important pour les exercices traités avec ces dernières (70,6%).

En classe sélectionnée on constate le maintien d'un fort taux de succès dans l'utilisation de *Gfact* et *Règles* (79,2% en classe 10 versus 76,2% en classe 9), mais des difficultés dans celle de *Gdév* et *Discr* (53,6% de succès seulement).

Enfin, comme le montre le tableau VN-2, le taux global de réussite des élèves de 10-S (62,9%) est environ le double de celui des élèves de 10-O (32,6%).

II. ANALYSE DES PRAXEOLOGIES EXISTANTES

Rappelons que les praxéologies enseignées au Vietnam pour le type de tâche T sont :

(θ_{v_1}, Θ_v) , où les éléments technologiques sont les propriétés de la "Multiplication et division des polynômes", en particulier les règles de « Factorisation d'un polynôme », les propriétés de la multiplication dans R et dans l'ensemble $R[X]$ des polynômes à coefficient dans R : les identités remarquables et la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ "
 (θ_{v_2}, Θ_v) , où les éléments technologiques sont la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré et les règles de calcul du discriminant et des solutions selon le signe du discriminant.

La théorie sous-jacente Θ_v reposant dans les deux cas sur les propriétés de l'anneau des polynômes factoriel $(R[X], +, \times)$.

Bien que nous nous intéressions à la comparaison des praxéologies existantes aux praxéologies enseignées (déterminées dans la partie B), les données recueillies ne nous donnent accès qu'aux techniques mises en œuvre par les élèves ainsi qu'aux éléments technologiques qui les justifient.

Dans un premier temps, celui de la présentation des résultats, n'apparaîtront donc, notamment dans les tableaux qui les synthétisent, que les techniques observées.

II.1. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T1

II.1.1. Cas de la classe 9

Selon l'analyse a priori, les techniques attendues pour le type de tâche T1 sont celles d'annulation du produit des facteurs (*ProdN*) ou d'un carré (*CarN*). Ces techniques

reposent sur les éléments technologiques : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " et " $A^2(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ " avec $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ sont polynômes, de la technologie θ_{v_1} .

a) Techniques et technologies existantes en classe 9-O

Comme on le constate dans le tableau VN-4, outre les techniques *CarN* et *ProdN*, apparaissent des techniques des catégories *Gdév* et *Mixtes*.

Les techniques attendues d'utilisation des règles (*ProdN* et *CarN*), qui reposent sur l'élément technologique " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ", ne sont que minoritairement mobilisées dans l'exercice E1.1 (38,9%) et E1.2 (44%).

Type de tâche T1 Classe 9-O (27 élèves)		E1.1 $(-2x+5)^2=0$		E1.2 $(-5x+1)(3x-7)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	1	1	11	3	12	4
	<i>CarN</i>	6	6			6	6
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>	2		4		6	0
	<i>Dév_Rac</i>	3				3	0
	<i>Dév_IsV</i>	2				2	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	4		10	1	14	1
Totaux		18	7	25	4	43	11

Tableau VN-4

Certains élèves utilisent une nouvelle technique de la catégorie *Mixtes*, que nous appelons *Dév_Fact_ProdN*, reposant sur les éléments technologiques : identité remarquable $(A(x)-B(x))^2=A^2(x)-2A(x) \times B(x)+B^2(x)$, propriété de la simple et double distributivité " $A(x) \times (B(x) \pm C(x))=A(x) \times B(x) \pm A(x) \times C(x)$ ", $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x))=A(x) \times C(x)+A(x) \times D(x)+B(x) \times C(x)+B(x) \times D(x)$, et règle " $A(x) \times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ ou $B(x)=0$ ".

En utilisant cette technique, les élèves ont effectué une re-factorisation et utilisé la règle d'annulation du produit après le développement du carré dans l'exercice E1.1 et du produit dans E1.2.

On voit de plus apparaître chez des élèves qui commencent par développer une technique, qu'on notera *Dév_IsV*, consistant à essayer d'isoler la variable x , comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}
 &(-2x+5)^2=0 \\
 &4x^2-20x+25=0 \\
 &4x^2-20x=-25 \\
 &4x(x-5)=-25 \\
 &x-5=-\frac{25}{4x} \text{ (E27, classe 9-O).}
 \end{aligned}$$

b) Techniques et technologies existantes en classe 9-S

Selon le tableau VN-5 et comme en classe 9-O, outre les techniques *CarN* et *ProdN*, apparaissent des techniques des catégories *Gdév* et *Mixtes*.

Type de tâche T1 Classe 9-S (46 élèves)		E1.1 $(-2x+5)^2=0$		E1.2 $(-5x+1)(3x-7)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	2	2	41	33	43	35
	<i>CarN</i>	43	42			43	42
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>			2	0	2	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	1	0	3	2	4	2
Totaux		46	44	46	35	92	79

Tableau VN-5

A la différence de la classe 9-O, les techniques de la catégorie *Règles* (*CarN* pour résoudre l'exercice E1.1 et *ProdN* pour résoudre l'exercice E1.2.) sont mobilisées majoritairement (93,5%) pour le type de tâche T1 en classe 9-S.

Le taux de succès de l'utilisation de ces techniques est bien meilleur qu'en 9-O : 97,7% pour la technique *CarN* et 81,4% pour la technique *ProdN*. Cette réussite s'explique sans doute par une meilleure appropriation, en classes 7 et 8, des éléments technologiques " $A^2(x) \Leftrightarrow A(x)=0$ " et " $A(x) \times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ ou $B(x)=0$ ", qui jouent ici le rôle d'éléments technologiques justifiant les techniques *CarN* et *ProdN*.

La technique *Dév_Fact_ProdN* ne se rencontre qu'une fois pour l'exercice E1.1 et trois fois pour l'exercice E1.2.

c) Analyse des résultats obtenus pour les deux classes 9

Dans les deux classes, on peut remarquer que :

le nombre d'utilisation avec succès des techniques de *Règles*, *ProdN* et *CarN*, dans l'exercice E1.1 (7/7) est bien plus important que dans l'exercice E1.2 (3/11). Cet écart provient de ce qu'il faut, dans l'exercice E1.2., prendre la réunion des ensembles de solutions des deux équations du premier degré.

Le taux de réussite d'utilisation de la technique *Dév_Fact_ProdN* est négligeable : 1 fois sur 14 en classe 9-O et 2 fois sur 4 en classe 9-S. Cet échec dans l'utilisation de cette technique peut être expliqué par un échec de la re-factorisation de l'expression dans l'équation obtenue après le développement.

En classe 9-O, la présence des techniques *Gdév* (*Dév*, *Dév_Rac* et *Dév_Isv*), dans l'exercice E1.1 et dans l'exercice E1.2, peut s'expliquer par la volonté de ramener les équations données à une équation du premier degré par le développement de toutes les expressions en enlevant les parenthèses, puis, selon les cas, de « prendre la racine carrée » ou d'« isoler la variable », ce qui conduit toujours à l'échec ou à une interruption des calculs. L'utilisation des techniques de la catégorie *Gdév* est beaucoup moins en classe 9-S (2 cas).

Classe	9-O (27 élèves)							9-S (46 élèves)				
Type de tâche T1	ECAL	ESIGN			EOPM	EPRODF	ELOG	ECAL	ESIGN		EOPM	ELOG
	Non respect priorité des opérations	Développement	Écriture nouvelle Équ	Mouve Equ 1er				Non respect priorité des opérations	Factorisation	Mouve Equ 1er		
<i>CarN</i>											1	
<i>ProdN</i>			1	1	1		5			6		4
<i>Dév_Fact_ProdN</i>	2	1				10		1	1			1
Totaux	2	1	1	1	1	10	5	1	1	6	1	5

Tableau VN- 6

Dans le tableau VN-6, on constate d'abord que les erreurs les plus fréquentes sont, en classe 9-O, celles survenant lors de l'annulation du produit de facteurs (EPRODF) dans la mise en œuvre de la technique *Dév_Fact_ProdN*, alors qu'elles ne sont quasiment pas présentes en classe 9S. Ces erreurs sont de trois formes comme on les voit dans le tableau VN-7 ci-dessous:

Forme d'Erreur	Élément technologique	Nombre de cas
EPRODF-1	$axb=c \Leftrightarrow a=c \text{ ou } b=c$	8
EPRODF-2	$axb=c \Leftrightarrow a=0 \text{ et } b=0$	1
EPRODF-3	$axb=c \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } b=c$	1

Tableau VN- 7

Elles proviennent de l'utilisation abusive de la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " pour résoudre une équation de la forme : $P(x) \times Q(x) = c$ où c est constant non nul.

Tout se passe comme si les élèves de la classe 9-O utilisaient, dans la résolution des deux exercices du type de tâche T1, une technique reposant sur l'élément technologique " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = c$ ou $B(x) = c$ ", qui n'est valide que lorsque $c = 0$.

Les deux autres erreurs rencontrées de manière significative dans les deux classes sont les erreurs de signe (ESIGN) et celles de logique (ELOG), intervenant lors de la résolution de l'exercice E1.2 par la technique *ProdN*.

Les erreurs de signe sont produites par environ 14,3% en classe 9-O et 42,9% en classe 9-S. On peut noter qu'elles interviennent le plus souvent dans la résolution des équations du premier degré (lors du mouvement).

Les erreurs ELOG qui sont davantage présentes en 9-S (35,7%) qu'en 9-O (23,8%) se traduisent par une confusion entre les deux opérateurs logiques ET et OU engendrée par un élément technologique erroné : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ ". Celui-ci peut sans doute s'expliquer par une confusion avec la conjonction 'et' utilisée dans l'enseignement pour donner la réunion de l'ensemble des solutions de chacune des équations du premier degré.

Le non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre produit des erreurs lors de la re-factorisation en deux classes 9-O (2 cas) et 9-S (1 cas) :

$$(-2x+5)^2=0$$

$$4x^2-20x+25=0$$

$$4x^2-4 \times 5x+5 \times 5=0$$

$$4(x-1)(x+1)+5(x+1) \times 5=0 \text{ (E22, classe 9-O).}$$

Dans ce raisonnement, l'élève E22 a regroupé les deux premiers termes '4x²' et '4', et les deux termes suivants '5x' et '5' sans faire compter sur la priorité de la multiplication par rapport à l'addition.

II.1.2.Cas de la classe 10

Selon l'analyse a priori, les techniques attendues en classe de 1^o pour ce type de tâche sont *ProdN*, ou *CarN*, ou *Dév_Discr*. Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} ou de θ_{v_2} :

les règles " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " et " $A^2(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ "

mais aussi les règles : l'identité remarquable $(A(x)-B(x))^2 = A^2(x) - 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$, la propriété de la double distributivité

" $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x)) = A(x) \times C(x) + A(x) \times D(x) + B(x) \times C(x) + B(x) \times D(x)$ " et les formules des solutions.

a) *Techniques et technologies existantes en classe 10-O*

Selon le tableau VN-8, outre les techniques *CarN*, *ProdN* et *Dév_Discr* attendues par l'analyse a priori, apparaissent, comme en classe 9, des techniques *Mixtes* (*Dév_Fact_ProdN*) et *Gdév*.

Type de tâche T1 Classe 10-O (27 élèves)		E1.1 $(-2x+5)^2=0$		E1.2 $(-5x+1)(3x-7)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>			9	5	9	5
	<i>CarN</i>	4	4			4	4
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Rac</i>	1				1	0
	<i>Dév_Discr</i>	34	20	30	8	64	28
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>			2		2	0
Totaux		39	24	41	13	80	37

Tableau VN-8

Les techniques *ProdN* et *CarN*, qui reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " et " $A^2(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ", sont peu utilisées dans l'exercice E1.1 (10,3%) et dans l'exercice E1.2 (22%).

La technique *Dév_Fact_ProdN* ne se rencontre que deux fois pour l'exercice E1.2.

La présence d'une grande quantité de la technique *Dév_Discr* (80%) dans les exercices du type de tâche T1 n'est pas conforme à notre analyse a priori. Nous expliquons ceci par un travail de la technique *Discr* systématiquement mise en œuvre, comme nous l'avons montré dans notre analyse des manuels, notamment lors des heures de Travaux Dirigés, en application des éléments technologiques : identité remarquable " $(A(x)-B(x))^2 = A^2(x) - 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$ ", propriété de la double distributivité

" $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x)) = A(x) \times C(x) + A(x) \times D(x) + B(x) \times C(x) + B(x) \times D(x)$ " et utilisation des formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

De plus, l'observation sur le magnétoscope d'Aplusix montre que les élèves utilisent immédiatement cette technique *Discr*. Certains précisent dans les commentaires l'utilisation du discriminant qu'ils calculent sur papier crayon (cf. Figure 5).

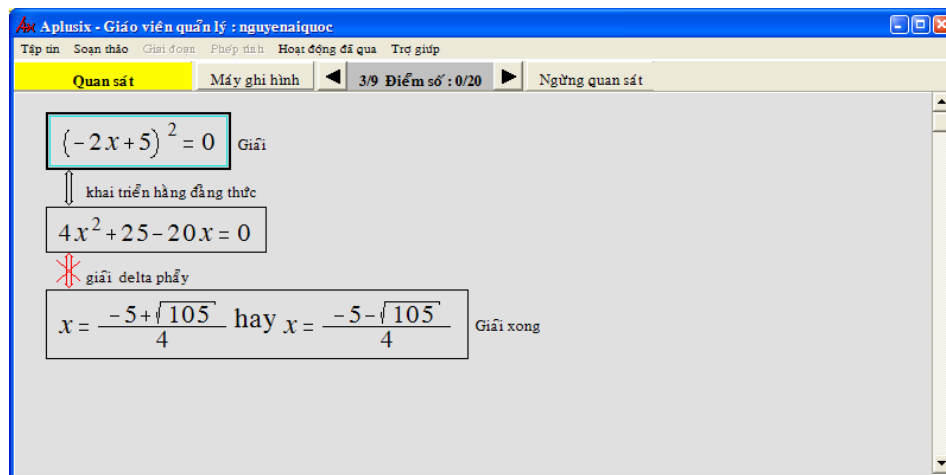


Figure 5 : le protocole de l'élève 9 de la classe 10-S

La résolution est faite en peu d'étapes, et les élèves effectuent rapidement chaque étape (cf. Figure 6 et 7).

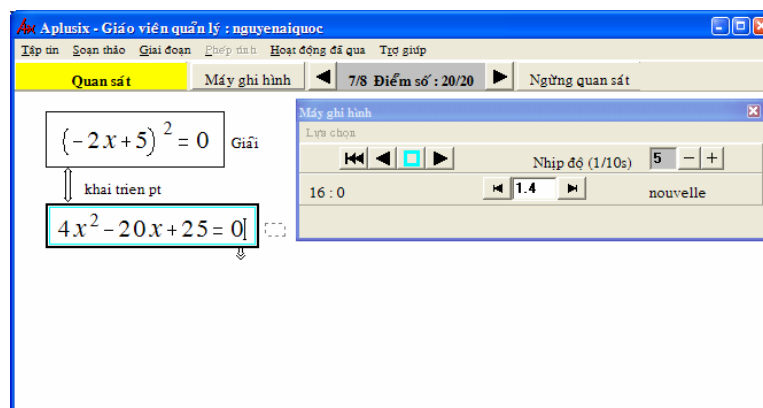


Figure 6 : le protocole de l'élève 10, classe 10-O dans l'étape de développement

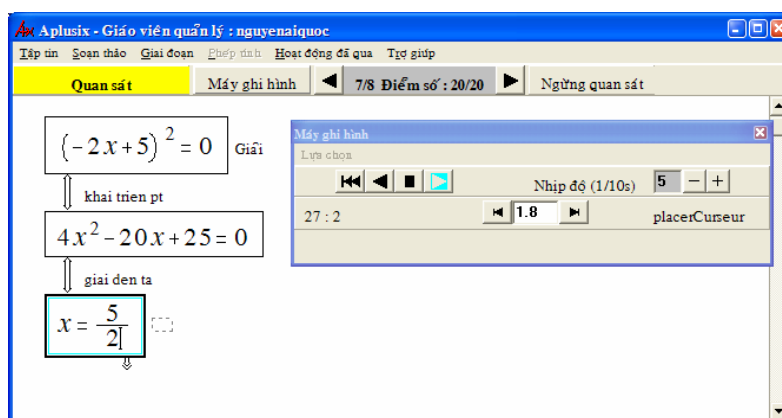


Figure 7 : le protocole de l'élève 10, classe 10-O dans l'étape de discriminant

On peut conclure ici à une application routinière de la résolution d'équation du second degré par la technique du calcul du discriminant.

b) Techniques et technologies existantes en classe 10-S

Comme en classe 10-O, outre les techniques attendues *ProdN*, *CarN* et *Dév_Discr*, apparaît la technique *Dév_Fact_ProdN* de la catégorie *Mixtes*.

Type de tâche T1 Classe 10-S (46 élèves)		E1.1 $(-2x+5)^2=0$		E1.2 $(-5x+1)(3x-7)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>			23	19	23	19
	<i>CarN</i>	21	18			21	18
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Discr</i>	20	14	20	8	40	22
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>			1	1	1	1
Totaux		41	32	44	28	85	60

Tableau VN-9

Dans cette classe, les techniques de la catégorie *Règles* (*ProdN* et *CarN*), qui s'appuient sur l'élément technologique " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ", et la technique de la catégorie *Gdév* (*Dév_Discr*), qui repose sur la propriété de la double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et les formules des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, sont mobilisées en égale proportions.

Il n'y a pas la différence de mobilisation entre la technique *CarN* (51,2%) dans l'exercice E1.1 et la technique *ProdN* (52,3%) dans l'exercice E1.2 (cf. Tableau VN-9)

Nous constatons une mobilisation forte de la technique *Dév_Discr* (47%), mais qui reste inférieure à celle constatée dans la classe 10-O.

La technique *Dév_Fact_ProdN* ne se rencontre qu'une fois pour l'exercice E1.2.

c) Analyse des résultats obtenus pour les deux classes 10

En classe 10-O, le taux de succès par l'utilisation de *Dév_Discr* dans l'exercice E1.1 (58,8%) est le double de celui obtenu dans l'exercice E1.2 (26,7%). Cette différence s'explique d'une part, par les erreurs de connecteur logique comme en classe 9, d'autre part, par l'apparition, dans l'exercice E1.2, du coefficient négatif de x^2 après développement du produit des deux binômes, cause d'erreurs dans le calcul du discriminant.

Malgré que les techniques *ProdN* et *CarN* soient peu utilisées par rapport à la technique *Dév_Discr*, elles conduisent plus souvent au succès : 5 fois sur 9 pour E1.2 et 4 fois sur 4 pour E1.1.

En classe 10-S, le taux de succès lors de l'utilisation des techniques de *Règles* dans les deux exercices est voisin avec 85,7% pour E1.1 et 82,6% pour E1.2. L'efficacité de ces techniques vient confirmer la bonne appropriation, par les élèves, des éléments technologiques justifiant les techniques *CarN* et *ProdN*, ce que nous avons déjà souligné en classe 9-S.

Bien que la technique *Dév_Discr* soit également mobilisée dans le traitement de deux exercices, le taux de réussite est plus important dans l'exercice E1.1 (70%) que dans l'exercice E1.2 (40%). Comme en classe 10-O, on peut expliquer cette différence par :

- l'apparition du signe moins du coefficient de x^2 dans l'équation du second degré obtenue après le développement du produit dans l'exercice E1.2, signe qui complique le calcul du discriminant ;
- les erreurs d'équivalence entre deux étapes finales de la résolution, lors de la réunion des deux solutions de cet exercice.

Malgré que la technique *Dév_Fact_ProdN* soit moins présente en classe 10-S, son utilisation conduit à une résolution correcte grâce à la bonne maîtrise des éléments technologiques.

Selon le tableau VN-10 ci-dessous, contrairement à ce qu'on a constaté en classes 9, où les erreurs étaient concentrées dans l'utilisation des deux techniques *ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*, la plupart des erreurs relevées en classes 10 sont produites lors de l'utilisation de la technique *Dév_Discr* qui est composée de trois étapes : développement, calcul du discriminant et calcul des racines.

Classe	10-O (42 élèves)										10-S (44 élèves)									
Type de tâche T1	Interrompu	ECAL		ECALD	ESIGN				EPRODF	ELOG	ECAL		ECALD	ESIGN			EOPM	ELOG		
		Développement	Calcul Solutions		Développement	Écriture nouvelle Équation	Signe Solutions	Mouve Équation 1er			Développement	Calcul Solutions		Développement	Signe Solutions	Mouve Equation 1er				
<i>CarN</i>															2	1				
<i>ProdN</i>						1		2		1		1			2		1			
<i>Dév_Fact_ProdN</i>									2											
<i>Dév_Discr</i>	1	5	6	5	11		2			6	2	3	7	3	1			1		
Totaux	1	5	6	5	11	1	2	2	2	7	2	4	7	3	1	4	1	2		

Tableau VN-10

Si on fait un zoom sur l'ensemble des erreurs liées à la technique *Dév_Discr*, les erreurs de signe sont plus fréquentes en classe 10-O (16 erreurs) qu'en classe 10-S (8 erreurs).

La plupart interviennent dès le développement du carré $(-2x+5)^2$ de l'équation E.1.1.

Plus précisément, ces erreurs sont produites lors de l'application de l'identité remarquable $(A(x)+B(x))^2=A^2(x)+2A(x)\times B(x)+B^2(x)$ qui se transforme en $(-A(x)+B(x))^2=(-A(x))^2++2A(x)\times B(x)+B^2(x)$, comme si, pour les élèves, le signe moins devait disparaître, car un nombre négatif au carré est un nombre positif. On peut supposer que la position du signe moins empêche les élèves de reconnaître le carré d'une différence habituellement écrit sous forme : $(A(x)-B(x))^2=A^2(x)-2A(x)\times B(x)+B^2(x)$.

Outre les erreurs liées au développement, on trouve, dans la résolution de l'équation E.1.2, des erreurs de signe lors du calcul des solutions, dues à l'utilisation de formules erronées du type suivant : $x_{1,2} = -\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_{1,2} = \frac{\pm b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Les erreurs de signe sont également attachées, dans les deux classes, à l'utilisation des techniques *CarN* et *ProdN*. Ces erreurs concernent alors le mouvement des termes lors de la résolution des équations facteurs nul du premier degré.

Quant aux erreurs de calcul numérique (ECAL), elles sont presque toutes attachées à la technique *Dév_Discr* avec 11 erreurs en classe 10-O et 6 erreurs en classe 10-S.

L'apparition du signe moins dans le coefficient de x^2 a provoqué des erreurs de calcul du discriminant dans les deux classes (5 erreurs en classe 10-O et 7 erreurs en classe 10-S). Les autres erreurs sont concentrées dans les étapes de développement ou de calcul des solutions par leurs formules après le calcul du discriminant.

Comme en classes 9, on retrouve des erreurs de logique (ELOG) qui se traduisent par une confusion entre les opérateurs 'ET' ou 'OU' lors de la résolution de E1.2 que ce soit par *ProdN* ou par *Dév_Discr*.

Enfin, deux cas d'utilisation abusive de l'élément technologique " $A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ ou $B(x)=0$ " dans la résolution d'une équation de la forme " $A(x)\times B(x)=c$ " avec c constant non nul sont présents en classes 10-O après le développement, puis la ré-factorisation du produit $(-5x+1)(3x-7)$.

II.1.3.Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T1

a) *Sur les techniques et technologies existantes*

Type de tâche T1		9-O		10-O		9-S		10-S	
		%	R	%	R	%	R	%	R
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	27,9	33,3	11,3	55,6	46,7	81,4	27,1	82,6
	<i>CarN</i>	14	100	5	100	46,7	97,7	24,7	85,7
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	32,6	7,1	2,5	0	4,3	50	1,2	100
<i>Gdév</i>	<i>Dév+Dév_Rac+Dév_IsV</i>	25,6	0	1,3	0	2,2	0		
	<i>Dév_Discr</i>			80	43,8			47,1	55
Totaux		100,1		100,1		99,9		100,1	

Tableau VN-11

Globalement, les techniques mobilisées en classe 10 se répartissent dans les deux catégories *Règles* (*ProdN* et *CarN*) et *Dév_Discr*, tandis qu'en classe 9, les techniques mobilisées étaient essentiellement *Règles* et *Mixtes* (*Dév_Fact_ProdN*) (cf. tableau VN-11). Cette évolution s'explique par la force du contrat institutionnel, conséquence de l'apprentissage en cours de classe 9 de la résolution des équations du second degré par le discriminant et son utilisation quasi-exclusive en classe 10.

Toute fois, les techniques de la catégorie *Gdév* apparaissent principalement en classe 9-O sous la forme des techniques *Dév*, *Dév_Rac* et *Dév_IsV*. Ces techniques ne sont pas adéquates pour ce type de tâche car leur utilisation conduit à une interruption de solution ou un résultat incorrect. L'utilisation de la technique *Dév* s'explique par une tentative d'obtention une équation de degré 1, mais l'équation développée est de degré 2.

Quant à la mobilisation de la technique *Dév_Rac*, l'élève a tenté de ramener l'équation donnée à l'équation de degré la plus simple $x^2=k$ ($k>0$). Quant à la mobilisation de la technique *Dév_IsV*, l'élève a isolé les termes contenant l'inconnue x dans un membre de l'équation après le développement du carré dans l'exercice E1.1. La dernière technique n'est valable que dans le cas de résolution de l'équation de degré 1.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

Si on compare les deux classes « ordinaires » 9-O et 10-O, on constate que les techniques *Règles* sont plus souvent mobilisées en classe 9-O qu'en classe 10-O, mais que leur mobilisation est moins réussie.

Par contre, si les techniques *Règles* sont également davantage mobilisées en 9-S qu'en 10-S, c'est avec, dans les deux cas, un taux de réussite important (supérieur à 80%).

On peut donc dire que :

les élèves qui utilisent en classe 10 les techniques attendues (*CarN* et *ProdN*) pour résoudre le type de tâche T1 les maîtrisent beaucoup mieux qu'en classe 9, l'introduction précoce de l'élément technologique de θ_{v_2} , mise sous formule

$$\text{canonique} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac, \text{ a pour conséquence l'abandon, par}$$

une partie importante des élèves, des techniques de résolution les moins coûteuses et les plus efficaces dans le cas de la résolution du type de tâche T1.

Les erreurs principales rencontrées dans la résolution du type de tâche T1 sont liées à l'utilisation de la technique *ProdN* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Fact_ProdN* en classes 9 ou de *Dév_Discr* en classes 10. Ce sont des erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre de ces deux techniques, ce qui nous amène à classer comme suit les erreurs rencontrées :

Erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre de ces techniques mises en œuvre : erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation de *ProdN* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Discr* en classe 10

Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

problème de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré,

erreur dans le développement d'un carré par l'utilisation des identités remarquables,

erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* lors de l'annulation d'un produit de deux polynômes,

utilisation de techniques reposant sur des technologies 'personnelles' pour l'annulation du produit de facteur (" $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = c$ ou $B(x) = c$ ") dans la dernière étape de la technique *Dév_Fact_ProdN*.

II.2. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T2

II.2.1. Cas de la classe 9

Selon notre analyse a priori, la technique attendue pour ce type de tâche en classes 9 est *Fact_ProdN* qui se compose de deux étapes : mise en facteurs et annulation des facteurs, et qui repose sur les éléments technologiques de θ_1 :

la propriété de distributivité simple " $A(x) \times (B(x) + C(x)) = A(x) \times B(x) + A(x) \times C(x)$ "

la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

a) Techniques et technologies existantes en classe 9-0

Type de tâche T2 Classe 9-O (27 élèves)		E2.1 $(3-x)(x+2)+x+2=0$		E2.2 $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$		E2.3 $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	5	2	7	5	10	1	22	8
	<i>Fact_IsV</i>	1						1	0
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>			1				1	0
	<i>Simp</i>					2		2	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>	5		7		3		15	0
	<i>Dév_Rac</i>	1						1	0
	<i>Dév_IsV</i>	1		1		1		3	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	12	3	7	1	9	1	28	5
Totaux		25	5	23	6	25	2	73	13

Tableau VN-12

Comme on le voit dans le tableau VN-12, outre la technique attendue *Fact_ProdN*, on constate la présence des techniques des catégories *Règles*, *Gdév* et *Mixtes*.

Nous constatons que la mobilisation de la technique *Fact_ProdN* est plus faible (31%) que celle de la technique *Dév_Fact_ProdN* (39%) pour ce type de tâche.

La technique *Dév_Fact_ProdN* se compose de trois étapes : développement, factorisation et annulation du produit. La technologie de la première étape est la propriété de la double distributivité " $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x)) = A(x) \times C(x) + A(x) \times D(x) + B(x) \times C(x) + B(x) \times D(x)$ ", et les technologies des autres étapes sont les mêmes que dans le paragraphe précédent.

Certains élèves ont utilisé la technique *Fact_IsV* (factorisation et isolation de l'inconnue) ou *Dév_IsV* (développement et isolation de l'inconnue) dans le but d'isolation des termes contenant l'inconnue dans un membre de l'équation, puis de calcul de l'inconnue x en fonction d'une fraction algébrique contenant x au dénominateur (cf. Figure 8). Ces techniques sont valables dans le cas de résolution de l'équation du premier degré.

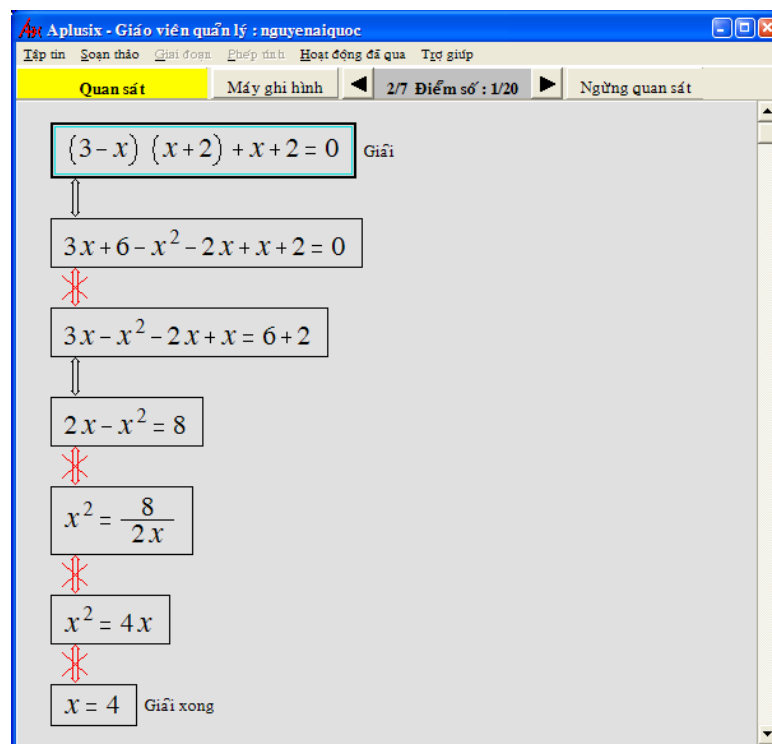


Figure 8 : Exemple d'utilisation de la technique *Dév_IsV* de l'élève 26 de la classe 9-O

b) *Techniques et technologies existantes en classe 9-S*

Type de tâche T2 Classe 9-S (46 élèves)		E2.1 $(3-x)(x+2)+x+2=0$		E2.2 $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$		E2.3 $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	35	26	31	23	34	26	100	75
<i>Règles</i>	<i>Simp</i>					8		8	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>	2		7		1		10	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	9	7	8	7	3		20	14
Totaux		46	33	46	30	46	26	138	89

Tableau VN-13

Contrairement à la classe 9-O, la technique *Fact_ProdN* est majoritairement utilisée 100 fois sur les 138 techniques mobilisées (soit 72,5%) dans cette classe pour les trois exercices

de ce type de tâche. Cependant, la technique *Dév_Fact_ProdN*, qui commence par le développement, puis la ré-factorisation et l'annulation du produit de facteurs, est mobilisée 20 fois sur les 138 techniques mobilisées (soit 14,5%) (cf. Tableau VN-13).

c) Analyse des résultats obtenus

En classe 9-O :

- La mobilisation de *Fact_ProdN* est moins importante dans l'exercice E2.1 (5 élèves) que dans E2.2 (7 élèves) et surtout que dans E2.3 (10 élèves). Nous expliquons cette différence par la variable concernant l'évidence du facteur commun. En effet, dans E2.1 le facteur commun n'est pas visible perceptivement en raison de l'absence de parenthèses, contrairement aux deux autres exercices. Par ailleurs le facteur commun est davantage visible dans l'exercice E2.3 que dans E2.2 car, dans ce dernier cas, les termes sont commutés.

La réussite de ces techniques de factorisation est faible dans les trois exercices et surtout pour E2.3 qui est seulement de 2/25.

- Si on regroupe la technique *Dév_Fact_ProdN* avec *Fact_ProdN*, on trouve 17/25 (68%) pour E2, 14/23 (61%) pour E2.2 et 19/25 (76%) pour E2.3.
- Les techniques de développement ont été utilisées de façon équivalentes pour les deux exercices E2.1 et E2.2. En revanche, elles sont moins mobilisées dans E2.3, car dans cet exercice, la majorité des élèves ont utilisé les techniques de factorisation.
- Enfin, nous constatons la mobilisation de la technique de Simplification pour l'exercice E2.3 chez deux élèves. Cela est sans doute dû au fait que le facteur commun est de part et d'autre du signe égal.

En classe 9-S :

- La bonne appropriation et la bonne maîtrise dans l'utilisation des éléments technologiques lors de la mobilisation de la technique *Fact_ProdN* conduisent à une résolution correcte avec un taux de réussite assez fort environ 75% dans chaque exercice.
- Le taux de réussite dans la mobilisation de la technique *Dév_Fact_ProdN* (70%) est équivalent à celui de la technique *Fact_ProdN*. Cette mobilisation est réussie seulement pour les exercices E2.1 et E2.2 : 14 des 17 élèves (soit 82)
- 10 élèves utilisent *Gdév*, notamment pour E22, ce qui s'explique par la difficulté à reconnaître ici le facteur commun dont les termes ont été commutés, et ne peuvent aboutir puisqu'ils ne disposent pas du discriminant.
- La variable choisie dans l'analyse a priori sur le facteur commun n'a d'impact que sur la résolution de l'exercice E2.3 dans laquelle 8 élèves utilisent la technique de simplification.

Classe	9-O (27 élèves)										9-S (46 élèves)							
Type de tâche T2	Interrompre	ECAL				ESIGN		EOPM	EPRODF	ELOG	ECAL		ESIGN				EOPM	ELOG
		Non respect priorité des opérations	Factorisation	Développement	Réduction	Factorisation	Mouve Equ 1er				factorisation	Réduction	Réduction	Mouvement	Factorisation	Mouve Equ 1er		
<i>Fact ProdN</i>		2	1			2	3		1	5	1	3	3	2	7	2	1	6
<i>Dév Fact ProdN</i>	1	4		1	1			1	14	1	1			1		1		3
Totaux	1	6	1	1	1	2	3	1	15	6	2	3	3	3	7	3	1	9

Tableau VN-14

Selon le tableau VN-14 ci-dessus et comme dans le traitement du type de tâche T1, les erreurs les plus fréquentes (15 erreurs), en classe 9-O, sont celles produites lors de l'annulation du produit des facteurs (EPRODF) dans l'équation 'pseudo-produit nul' $A(x) \times B(x) = c$ avec c constant non nul. Ces erreurs sont produites lors de la mise en œuvre de la technique *Dév_Fact_ProdN* et *Fact_ProdN*. Elles ne sont pas présentes en classe 9-S. La technique d'annulation du produit repose sur la technologie " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = c$ ou $B(x) = c$ " qui n'est correcte que dans le cas où $c=0$.

Les erreurs de signe sont les plus nombreuses dans la factorisation et dans la résolution des équations facteur nul du premier degré pour les deux classes. Elles proviennent, dans l'exercice E2.2, de la commutation des termes dans le facteur commun $(2x-3)$ qui a incité les élèves à changer le signe des expressions en enlevant leurs parenthèses, et, dans l'exercice E2.3, du changement du signe lors du regroupement des termes dans un même membre de l'équation.

La confusion des opérateurs logiques ET et OU est persistante dans les deux classes 9-O (6 erreurs) et 9-S (9 erreurs).

Les erreurs de calcul (ECAL) sont produites majoritairement lors de la factorisation ou ré-factorisation. En particulier, la plupart de ces erreurs provient de l'infraction de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition.

Par exemple, on considère la résolution de l'exercice E2.1 de l'élève E2 de la classe 9-O :

$$(3-x)(x+2)+x+2=0$$

$$2x+8-x^2=0$$

$$2x+12-4-x^2=0$$

$$x(2-x)+8=0$$

$$(2-x)(x+8)=0.$$

Ici, l'élève E2 a regroupé les deux termes x et 8 sans compter sur le produit de x et le binôme $2-x$.

II.2.2.Cas de classe 10

Selon notre analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classes 9 sont *Fact_ProdN* et *Dév_Discr* qui reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} et de θ_{v_2} :

la propriété de distributivité simple " $A(x) \times (B(x) \pm C(x)) = A(x) \times B(x) \pm A(x) \times C(x)$ ", et la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

mais aussi le calcul du discriminant et les formules des solutions.

a) Techniques et technologies existantes en classe 10-O

Selon le tableau VN-15, outre les techniques attendues *Fact_ProdN* et *Dév_Discr*, on rencontre l'utilisation des techniques de la catégorie *Mixtes* (*Dév_Fact_ProdN*) et *Gdév*.

Type de tâche T2 Classe 10-O (42 élèves)		E2.1 $(3-x)(x+2)+x+2=0$		E2.2 $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$		E2.3 $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>			2	2	2	1	4	3
<i>Règles</i>	<i>Simp</i>					2		2	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>					1		1	0
	<i>Dév_Rac</i>					1		1	0
	<i>Dév_Discr</i>	37	6	35	5	34	8	106	19
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	4	1	3	1	1		8	2
Totaux		41	7	40	8	41	9	122	24

Tableau VN-15

La technique *Dév_Discr*, qui repose sur deux éléments technologiques : la propriété de la double distributivité

" $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x)) = A(x) \times C(x) + A(x) \times D(x) + B(x) \times C(x) + B(x) \times D(x)$ " et l'utilisation des formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, est majoritairement utilisée dans cette classe pour les trois exercices, elle représente environ 87% des techniques mobilisées.

Les techniques de factorisation (*Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*) ne représentent que 9,8% des techniques mobilisées.

b) Techniques et technologies existantes en classe 10-S

Selon le tableau VN-16, outre les techniques attendues *Fact_ProdN* et *Dév_Discr*, apparaissent des techniques de la catégorie *Mixtes* (*Dév_Fact_ProdN*) et *Règles*. Six élève utilisent *Simp*.

Type de tâche T2 Classe 10-S (44 élèves)		E2.1 $(3-x)(x+2)+x+2=0$		E2.2 $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$		E2.3 $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	10	9	9	6	11	9	30	24
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>			1		1		2	0
	<i>Simp</i>			1		5		6	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Discr</i>	30	17	31	15	24	8	85	40
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	4	4	1	1	2	1	7	6
Totaux		44	30	43	22	43	18	130	70

Tableau VN-16

Comme en classe 10-O, la technique *Dév_Discr* est majoritairement utilisée dans cette classe pour les trois exercices avec environ 65%. Néanmoins, la technique *Fact_ProdN* mobilisée avec des proportions équivalentes (23,1%) pour les trois exercices, est plus présente qu'en 9-O.

La technique *Dév_Fact_ProdN* est mobilisée minoritairement avec 5,4%.

c) Analyse des résultats obtenus

En classe 10-O, la technique *Dév_Discr* est mobilisée avec peu de succès (environ 18%), tandis que l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* conduit à une résolution mieux réussie (3 fois sur 4). Nous constatons qu'elle n'a pas été utilisée dans l'exercice E2.1 sans doute à cause de la nécessité de la reconnaissance du facteur commun $(x+2)$ (dans ce cas multiplié à 1).

Si on regroupe les deux techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*, alors le taux de réussite de la mobilisation de ces techniques de factorisation est deux fois plus important que celui de la technique *Dév_Discr*.

Comme dans les deux classes 9-O et 9-S, certains élèves utilisent la technique de simplification dans la résolution de l'exercice E2.3 (2 fois) dans lequel le facteur commun est de part et d'autre du signe égal.

En classe 10-S, la mobilisation de la technique *Dév_Discr* conduit à une résolution réussie globalement meilleure : environ 50%. Remarquons qu'elle n'est pas la même selon l'exercice : 57% pour E2.1, 48% pour E2.2 et 33% pour E2.3. Cela est probablement lié au fait qu'il y a plus de calculs lors des développements dans les exercices E2.2 et E2.3, et qu'il y a de plus des mouvements à faire pour le passage des termes d'un membre à l'autre.

Quant aux techniques de *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*, leur mobilisation atteint un taux de réussite plus fort : 80% pour la première et 85,7% pour la dernière.

Les techniques *Gdév* (*Dév*, *Dév_Rac*) et *Règles* (*ProdN*) sont mobilisées en quantité négligeable sans doute dans le but de baisser le degré de l'équation donnée. Ces techniques n'aboutissent pas à une résolution exacte.

Comme dans la classe 10-O, certains élèves utilisent la technique de simplification dans la résolution de l'exercice E2.3 (5 fois).

Selon le tableau VN-17 et VN-18, d'abord on constate qu'il y a plus d'erreurs en classe 10-O (92 erreurs pour 42 élèves) qu'en classe 10-S (51 erreurs pour 44 élèves). Elles sont liées aux deux techniques *Dév_Fact_ProdN* et *Dév_Discr* en classe 10-O et aux techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Discr* en classe 10-S.

Les erreurs en nombre plus important sont celles de calcul (ECAL) qui occupent 39 cas en classe 10-O et 31 cas en classe de 10-S. La plupart de ces erreurs sont produites lors du développement ou la réduction de l'expression obtenue après le développement.

La complexité des formules des solutions avec le discriminant est également l'une des causes du calcul incorrect des solutions.

Classe	10-O (42 élèves)									
Type de tâche T2	Interrompu	ECAL			ECALD	ESIGN			EPRODF	ELOG
		Développement	Réduction	Calcul Solutions		Développement	Réduction	Signe Solutions		
<i>Fact_ProdN</i>										1
<i>Dév_Fact_ProdN</i>						1	1		4	
<i>Dév_Discr</i>	1	24	9	6	13	6	3	3		21
Totaux	1	24	9	6	13	7	4	3	4	22

Tableau VN-17

Classe	10-S (44 élèves)											
Type de tâche T2	Interrompu	ECAL				ECALD	ESIGN				EOPM	ELOG
		Développement	Factorisation	Réduction	Calcul Solutions		Développement	Factorisation	Signe Solution	Mouve Equ 1er		
<i>Fact_ProdN</i>			1					1		2	1	1
<i>Dév_Fact_ProdN</i>				1								
<i>Dév_Discr</i>	1	14		5	10	6	2		5			2
Totaux	1	14	1	6	10	6	2	1	5	2	1	3

Tableau VN-18

L'apparition du signe moins, après le développement et la réduction, du coefficient de x^2 dans l'exercice E2.1 et du terme constant dans l'exercice E2.3 cause des difficultés dans le calcul du discriminant dont proviennent 13 erreurs (ECALD) en classe 10-O et 6 en classe 10-S.

Quant aux erreurs de signe dans le calcul des solutions après le calcul du discriminant, elles sont produites par l'utilisation des formules incorrectes des solutions, par exemple $-\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

On constate aussi, attachée à la technique *Dév_Fact_ProdN*, la persistance d'erreurs lors de l'annulation du produit des facteurs (EPRODF) en classe 10-O et celle de l'erreur ELOG lors du rassemblement des solutions de deux équations facteur nul du 1^{er} degré.

II.2.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T2

a) Sur les techniques et technologies existantes

Les techniques les plus mobilisées en classes 9, plus de deux-tiers, sont celles de factorisation (*Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*). A côté de la technique *Fact_ProdN*, *Dév_Fact_ProdN* est utilisée comme une technique qui permet de ramener les équations données sous la forme d'un produit nul (cf. tableau VN-19)

Type de tâche T2		9-O		10-O		9-S		10-S	
		%	R	%	R	%	R	%	R
<i>Gfact+Mixtes</i>	<i>Fact_ProdN</i>	68,5	26	9,8	41,7	87	74,2	28,5	81,1
	<i>Dév_Fact_ProdN</i>								
	<i>Fact_IsV</i>	1,4	0						
<i>Règles</i>	<i>ProdN+Simp</i>	4,1	0	1,6	0	5,8	0	6,2	0
<i>Gdève</i>	<i>Dév</i>	26	0	1,6	0	7,2	0		
	<i>Dév_Rac+Dév_IsV</i>								
	<i>Dév_Discr</i>			86,9	17,9			65,4	47,1
Totaux		100		99,9		100		100,1	

Tableau VN-19

L'Apprentissage de la résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (a non nul) par les formules du discriminant a été à l'origine de la diminution de l'utilisation la technique *Fact_ProdN* en classe 10.

La présence de la mobilisation des techniques de *Gdév* (*Dév*, *Dév_Rac*, *Dév_IsV*) dans les trois classes 9-0, 9-S, 10-O et celles de *Règles* (*ProdN*, *Simp*) dans toutes les classes s'explique par une volonté d'obtenir une équation de degré 1 que l'on sait résoudre depuis la classe 8. Cette mobilisation conduit à une impasse ou à une résolution incorrecte.

En particulier, la variable choisie dans l'analyse a priori sur le facteur commun, qui est de part et d'autre du signe égal dans l'exercice E2.3, a un impact sur la résolution de cet exercice : on est là dans le cas de l'utilisation « abusive » d'une technique valide sur un champ plus restreint, celui de la résolution d'une équation de degré 1.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

Globalement, le taux de réussite de la mobilisation de toutes les techniques est de 64,5% en classe 9-S, soit plus de trois fois celui de la classe 9-O (17,8%), et de 53,8% en classe 10-S, soit 2,7 fois de celui de la classe 10-O (19,7%).

Malgré que les techniques de factorisation (*Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*) soient utilisées principalement en classe 9, le taux de réussite de l'ensemble de ces techniques est

plus faible qu'en classe 10. Cet écart est assez grand entre 9-O (26%) et 10-O (41,7%), tandis qu'il n'y a pas une grande différence entre 9-S (74,2%) et 10-S (81,1%).

Contrairement à la classe 9, la technique *Dév_Discr* est utilisée majoritairement en classe 10, notamment en classe 10-O, mais cette technique conduit souvent à l'échec.

Les erreurs principales rencontrées dans la résolution du type de tâche T2 peuvent donc ici être caractérisées comme suit :

Erreurs de résolution dues à l'utilisation « abusive » de techniques (*Simp*, *Fact_Isv* et *Dev_Isv*), valides seulement sur un champ plus restreint, celui de la résolution d'une équation de degré 1.

Erreurs dues à la qualité de la mise en oeuvre d'une technique : erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation des techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Discr* en classe 10,

Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

problème de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré,

erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* lors de l'annulation d'un produit de deux polynômes,

utilisation de techniques reposant sur des technologies 'personnelles' pour l'annulation du produit de facteur (" $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = c$ ou $B(x) = c$ ") dans la dernière étape de la technique *Dév_Fact_ProdN*.

utilisation des formules des solutions incorrectes

calcul du discriminant lorsque les signes du coefficient de x^2 et du terme constant sont opposés

II.3. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T3

II.3.1. Cas de la classe 9

Selon notre analyse a priori, la technique attendue pour ce type de tâche en classes 9 est *Fact_ProdN*. Cette technique repose sur les éléments technologiques de θ_{v_1} :

la propriété de distributivité simple " $A(x) \times (B(x) \pm C(x)) = A(x) \times B(x) \pm A(x) \times C(x)$ "

la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

a) Techniques et technologies existantes en classe 9-O

Outre les techniques attendues, on constate la présence des catégories *Règles*, *Gdév* et *Mixtes*, avec ici l'apparition de la technique *Simp* qui consiste en la simplification par un binôme.

On constate le fait que le facteur commun ne soit pas apparent dans le type de tâche T3 fait augmenter le nombre de la technique *Dév_Fact_ProdN* qui passe de 38,4% (ou $\frac{28}{73}$) en T2 à 59% (ou $\frac{46}{78}$) en T3 (cf. Tableau VN-20).

Type de tâche T3 Classe 9-O (27 élèves)		E3.1 $(2x+1)(3x-6)+x-2=0$		E3.2 $(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$		E3.3 $(6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4)$		E3.4 $(-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	6	3	3		2		8	1	19	4
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>			1						1	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>			8		3		1		12	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	12	1	12	2	13	2	9	2	46	7
Totaux		18	4	24	2	18	2	18	3	78	11

Tableau VN-20

Dans les exercices E3.1 et E3.4, la reconnaissance plus facile du facteur commun dans l'exercice E3.4 fait augmenter le nombre de fois où est utilisée la technique *Fact_ProdN*.

b) *Techniques et technologies existantes en classe 9-S*

Contrairement à la classe 9-O, comme pour le type de tâche T2, en classe 9-S la technique *Fact_ProdN* est majoritaire (82,1%) dans le traitement des exercices donnés. Elle est mobilisée dans les mêmes proportions dans les exercices E3.1 (37 fois), E3.2 et E3.3 (35 fois). La mobilisation plus forte de cette technique (44 fois) dans l'exercice E3.4 provient de la visibilité perceptive du facteur commun ($4x-3$) (cf. Tableau VN-21).

Cependant, précédemment en classe 9-O, certains élèves, après le développement des produits dans l'équation, re-factorisent l'expression obtenue et appliquent ensuite la règle

de facteur nul (*Dév_Fact_ProdN*). Cette technique est moins mobilisée dans l'exercice E3.4.

Type de tâche T3 Classe 9-S (46 élèves)		E3.1 $(2x+1)(3x-6)+x-2=0$		E3.2 $(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$		E3.3 $(6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4)$		E3.4 $(-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	37	31	35	21	35	21	44	32	151	105
<i>Règles</i>	<i>Simp</i>					3				3	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>			4		4		1		9	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	9	5	7	5	4	1	1		21	11
Totaux		46	36	46	26	46	22	46	32	184	116

Tableau VN-21

c) Analyse des résultats obtenus dans les deux classes 9

En classe 9-O

L'invisibilité du facteur commun et le signe différent du facteur commun et de son multiple dans les exercices du type T3 ont entraîné un échec important dans l'utilisation de la technique *Fact_ProdN*. La forme complexe de l'équation dans les exercices E3.2, E3.3 et E3.4 exige beaucoup de calculs dans le développement qui sont souvent cause d'échec dans l'utilisation de la technique *Dév_Fact_ProdN*. Le taux de réussite par l'utilisation de ces techniques pour le type T3 est donc faible (14,1%).

Si on regroupe les deux catégories *Mixtes* (*Dév_Fact_ProdN*) et *Gfact* (*Fact_ProdN*), alors les techniques de factorisation occupent 83,3% des techniques mobilisées, mais le faible de succès dans l'utilisation de ces techniques ($\frac{11}{65}$) confirme que ces techniques ne sont pas maîtrisées.

En classe 9-S

La complexité de la reconnaissance du facteur commun dans les deux exercices E3.2 et E3.3 provoque une réussite plus faible lors de l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* (60%) dans ces deux exercices que dans les deux exercices E3.1 (83,8%) et E3.4 (72,7%). La position du facteur commun et la présence du même signe dans le facteur commun et

son multiple explique que le taux de succès dans l'exercice E3.1 est meilleur que celui de l'exercice E3.4 .

Si on regroupe la technique *Dév_Fact_ProdN* avec la technique *Fact_ProdN*, alors les techniques de factorisation représentent la quasi-totalité (93,5%) des techniques mobilisées pour ce type de tâche. La pertinence de ces techniques de factorisation dans ce type de tâche et la bonne maîtrise dans l'utilisation de ces techniques conduisent à un taux de succès de 67,4%.

Comme dans le cas de T2, la position du facteur commun et son multiple dans les deux membres de l'équation dans l'exercice E3.3 a conduit 3 élèves de simplifier ce facteur commun.

Selon le tableau VN-22, on retrouve d'abord la présence persistante de l'erreur EPRODF (27 erreurs) dans la mise en œuvre de la technique *Dév_Fact_ProdN* chez élèves de la classe 9-O. La forme complexe de la forme des équations données, ou plutôt l'invisibilité du facteur commun, semble avoir engagé ces élèves à développer les produits dans l'équation de manière routinière.

Classe	9-O (27 élèves)							9-S (46 élèves)						
Type de tâche T3	ECAL			ESIGN		EPRODF	ELOG	ECAL			ESIGN		EOPM	ELOG
	Non respect priorité des opérations	Factorisation	Réduction	Factorisation	Mouve Equ 1er			Ecriture nouvelle étape	Factorisation	Réduction	Factorisation	Mouve Equ 1er		
<i>Fact_ProdN</i>	5	1		6			2		13	5	20	5	3	
<i>Dév_Fact_ProdN</i>	3	4	1	1	4	27		1	4	1	1			3
Totaux	8	5	1	7	4	27	2	1	17	6	21	5	3	3

Tableau VN-22

Ensuite, ils ont re-factorisé l'expression obtenue lors de la reconnaissance du second degré de l'équation obtenue, mais se sont arrêtés lors de l'obtention de l'équation de la forme 'pseudo-produit nul' $A(x) \times B(x) = c$ avec c constant non nul. L'application abusive de la règle facteur nul pour annuler deux facteurs du produit $a \times b$ les conduit alors à un résultat incorrect. Ces erreurs EPRODF ne se rencontrent pas en classe 9-S.

Les erreurs fréquentes dans les deux classes, 6 cas en classe 9-O et 25 cas en classe 9-S, sont celles de signe dans la mobilisation de la technique *Fact_ProdN*.

La différence du signe dans le facteur commun et son multiple est source d'erreur dans la factorisation (dans le cas où il y a reconnaissance du facteur commun) pour ramener l'équation donnée à celle produit nul.

Il y a quelques erreurs de signe (5 cas) en classe 9-S lors de la résolution des équations facteur nul du premier degré. Ces erreurs ne sont pas présentes en classe 9-O car la technique majoritaire dans cette classe 9-O est *Dév_Fact_ProdN*.

Deux erreurs EFAC et ECAL sont liées à l'étape de factorisation de l'expression donnée lors de la mobilisation de deux techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*. L'Erreur EFAC est intervenue lors de la mise de l'apparition du facteur commun dans les deux termes de l'équation et la mise de ces termes en produit nul.

L'Erreur ECAL est produite lors de la factorisation par non respect de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition (seulement en classe 9-O) :

$$(2x+1)(3x-6)+x-2=0$$

$$6x^2-8x-8=0$$

$$6x(x-4)+8(2x-1)=0$$

$$(6x+8)(x-4)(2x-1)=0 \text{ (E27, classe 9-O).}$$

On la rencontre également dans l'étape de l'enlèvement des parenthèses internes des facteurs après avoir obtenu l'équation produit. Cette erreur ECAL se trouve encore lors de la réduction de l'expression dans les facteurs après la mise de l'équation en produit nul en utilisant la technique *Fact_ProdN* en classe 9-S.

L'Erreur ELOG est toujours présente dans les trois types de tâches, dans les deux classes 9-O et 9-S (confusion du rôle des opérateurs logiques ET et OU dans la réunion des solutions des équations facteurs nul du premier degré).

On rencontre ici, en classe 9-S, trois cas dans lesquels le numérateur et le dénominateur sont inversés, lors de la résolution des équations de degré 1, dans la mobilisation de la technique *Fact_ProdN*.

Voici la copie de l'élève E3 :

$$(-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0$$

$$(-4x+3)(3x-9)+(-1)(-4x+3)(x-8)=0$$

$$(-4x+3)((3x-9)-(x-8))=0$$

$$(-4x+3)(3x-9-x+8)=0$$

$$(-4x+3)(2x-1)=0$$

$$-4x+3=0 \text{ ou } 2x-1=0$$

$$x=\frac{4}{3} \text{ ou } x=\frac{1}{2}.$$

Nous notons ce type d'erreur : EOPM, pour Erreur d'OPérateur lors du Mouvement.

II.3.2.Cas de classe 10

Selon l'analyse a priori, comme pour le type de tâche T2, outre la technique *Fact_ProdN*, la technique attendue est aussi celle de développement et discriminant *Dév_Discr*. Ces techniques pour ce type de tâche en classe 10 reposent sur les éléments technologiques :

la propriété de distributivité simple " $A(x) \times (B(x) \pm C(x)) = A(x) \times B(x) \pm A(x) \times C(x)$ "

la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

et sur le calcul du discriminant et les formules des solutions.

a) Techniques et technologies existantes en classe 10-O

Type de tâche T3 Classe 10-O (42 élèves)		E3.1 $(2x+1)(3x-6)+x-2=0$		E3.2 $(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$		E3.3 $(6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4)$		E3.4 $(-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	1	1			1	1	1	1	3	3
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Discr</i>	37	11	37	5	37	11	38	11	149	38
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>			2	0					2	0
Totaux		38	12	39	5	38	12	39	12	154	41

Tableau VN-23

Les techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN* sont mobilisées en quantité négligeable : 3,2%. La quasi-totalité des techniques mobilisées dans le traitement des exercices de ce type de tâche est *Dév_Discr* (96,8%) (cf. tableau VN-23)

Ce phénomène s'explique par l'invisibilité du facteur commun dans tous les exercices et la confiance des élèves dans la technique d'utilisation du discriminant pour le calcul des solutions après avoir ramené l'équation donnée à sa forme canonique du second degré. Comme dans le type de tâche T2, la première étape de cette technique se fonde sur la propriété de la double distributivité

" $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x)) = A(x) \times C(x) + A(x) \times D(x) + B(x) \times C(x) + B(x) \times D(x)$ ",

et la deuxième étape sur les formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

b) Techniques et technologies existantes en classe 10-S

Comme on le voit dans le tableau VN-24, outre les techniques attendues *Fact_ProdN* et *Dév_Discr*, apparaissent des techniques *Mixtes* : *Dév_Fact_ProdN*, et *Gdév* : *Dév_IsV* ainsi que la technique *Simp*.

Type de tâche T3 Classe 10-S (44 élèves)		E3.1 $(2x+1)(3x-6)+x-2=0$		E3.2 $(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$		E3.3 $(6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4)$		E3.4 $(-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	6	1	5	4	6	3	14	11	31	19
<i>Règles</i>	<i>Simp</i>					1				1	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév_IsV</i>			1						1	0
	<i>Dév_Discr</i>	35	18	34	17	33	20	27	15	129	70
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>			4	4	1				5	4
Totaux		41	19	44	25	41	23	41	26	167	93

Tableau VN-24

Comme on l'a vu en 10-O, la reconnaissance du facteur commun $(4x-3)$ augmente le nombre d'utilisations de la technique *Fact_ProdN* pour l'exercice E3.4 (14 fois).

Par rapport à la classe 10-O, la technique *Dév_Discr* est moins mobilisée, mais représente tout de même en moyenne 77,3% des techniques utilisées.

Son taux d'utilisation n'est pas le même dans tous les exercices : 85,4% dans l'exercice E3.1, 80,5% dans E3.3, 77,3% dans E3.2, et 65,9% dans l'exercice E3.4 (cf. ci-dessus)

c) Analyse des résultats obtenus dans les deux classes 10

En classe 10-O

Malgré que la technique *Fact_ProdN* soit présente en proportion négligeable par rapport à la technique *Dév_Discr*, son utilisation conduit, dans les 3 cas où elle est utilisée, à une résolution exacte. Quant à la technique *Dév_Fact_ProdN*, elle est utilisée seulement dans l'exercice 3.2 et conduit toujours à un échec.

En classe 10-S

Bien que les techniques de factorisation (*Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*) ne soient pas majoritaires, elles conduisent davantage au succès (63,9%) que les techniques *Dév_Discr* (54,3%).

L'utilisation de la technique *Dév_Fact_ProdN* dans l'exercice E3.2 fait que les élèves ne sont pas confrontés au problème de la factorisation par $(2x-3)$ dans le cas de la mobilisation de la technique *Fact_ProdN*. Elle conduit donc au succès. Cette explication peut être montrée via la copie de l'élève E6 dans l'utilisation de cette technique :

$$\begin{aligned}
 &(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0 \\
 &2x^2-3x-8x+12+6x-4x^2-30+20x=0 \\
 &-2x^2+15x-18=0 \\
 &2x^2-15x+18=0 \\
 &2x^2-3x-12x+18=0 \\
 &x(2x-3)-6(2x-3)=0 \\
 &(x-6)(2x-3)=0 \\
 &x=6 \text{ ou } x=\frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

On rencontre ici encore un cas de la simplification du facteur commun dans l'exercice E3.3 à cause de la position du facteur commun et son multiple dans les deux membres de l'équation.

Dans le tableau VN-25 et VN-26, on constate que les erreurs sont produites majoritairement lors de la mobilisation de la technique *Dév_Discr* qui exige une grande quantité des calculs numériques dans les deux étapes de développement et de calcul des solutions. Ces erreurs sont celles de calcul, de signe et de logique.

Classe	10-O (42 élèves)									
Type de tâche T3	Interrompue	ECAL			ECALD	ESIGN			EPRODF	ELOG
		Développement	Réduction	Calcul Solutions		Développement	Mouvement	Signe Solutions		
<i>Fact_ProdN</i>										
<i>Dév_Fact_ProdN</i>			1						1	
<i>Dév_Discr</i>	1	24	12	21	10	11	1	11		20
Totaux	1	24	13	21	10	11	1	11	1	20

Tableau VN-25

Classe	10-S (44 élèves)										
Type de tâche T3	ECAL					ECALD	ESIGN				
	Non respect priorité opérations	Développement	Réduction	Factorisation	Calcul Solutions		Développement	Réduction	Factorisation	Signe Solution	Mouve Equ 1er
<i>Fact_ProdN</i>	1			6					4		1
<i>Dév_Fact_ProdN</i>				1							
<i>Dév_Discr</i>		10	5		12	10	3	1		13	5
Totaux	1	10	5	7	12	10	3	1	4	13	5

Tableau VN-26

Les erreurs de calcul sont produites principalement dans le développement des produits de deux binômes, dans la réduction de l'expression après l'enlèvement des parenthèses et dans le calcul des solutions en utilisant les formules définitives.

Les erreurs de calcul et de signe rencontrées dans le développement : 35 cas en classe 10-O et 13 cas en classe 10-S, sont produites lors de l'application de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Les erreurs de calcul et de signe rencontrées dans la réduction de l'expression : 13 cas en classe 10-O et 6 cas en classe 10-S, sont produites lors de l'application des propriétés de l'addition dans l'ensemble des entiers relatifs.

Quant aux erreurs de calcul et de signe lors du calcul des solutions après calcul du discriminant, elles sont liées à l'utilisation de formules incorrectes des solutions (cf. Tableau VN-27).

Cas	Formules incorrectes
1	$x_{1,2} = -\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
2	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
3	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$
4	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{4a}$
5	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

Tableau VN- 27

Le nombre de cas d'erreur de calcul du discriminant (ECALD) est égal dans les deux classes. L'apparition du coefficient négatif de x^2 dans l'équation obtenue après le développement et la réduction de l'expression dans les exercices E3.2, E3.3 et E3.4, et la parité du coefficient de x dans cette équation entraînant l'utilisation des formules incorrectes suivantes :

$$\Delta' = b'^2 - 4ac \text{ ou } \Delta' = b^2 - ac.$$

La mobilisation de la technique *Fact_ProdN*, plus importante en classe 10-S qu'en classe 10-O, entraîne en 10-S quelques erreurs de signe et de factorisation dans la première étape de cette technique, soit dans l'extraction du facteur commun des termes de l'équation, soit dans la mise sous forme d'équation produit.

En fin, les erreurs ELOG en classe 10-S sont moins fréquentes qu'en classe 10-O.

II.3.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T3

a) Sur les techniques et technologies existantes

Type de tâche T3		9-O		10-O		9-S		10-S	
		%	R	%	R	%	R	%	R
<i>Gfact+Mixtes</i>	<i>Fact_ProdN+Dév Fact_ProdN</i>	83,3	16,9	3,2	60	93,5	67,4	21,6	63,9
<i>Règles</i>	<i>ProdN+Simp</i>	1,3	0			1,6	0	0,6	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév+Dév IsV</i>	15,4	0			4,9		0,6	0
	<i>Dév Discr</i>			96,8	25,5			77,2	54,3
Totaux		100		100		100		100	

Tableau VN-28

La seule technique utilisée pour la résolution des exercices de ce type de tâche en classe 9 est la factorisation suivie de l'annulation du produit de facteurs. Certains élèves développent les produits de deux polynômes en s'appuyant sur la propriété de la double distributivité " $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x)) = A(x) \times C(x) + A(x) \times D(x) + B(x) \times C(x) + B(x) \times D(x)$ ", puis re-factorisent l'expression obtenue en utilisant la propriété de distributivité simple " $A(x) \times (B(x) \pm C(x)) = A(x) \times B(x) \pm A(x) \times C(x)$ " afin de pouvoir utiliser la règle facteur nul " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ", mais certains s'arrêtent lors de l'obtention d'une équation du second degré.

La position du facteur commun et son multiple dans les deux membres de l'équation dans l'exercice E3.3 a conduit 3 élèves de la classe 9-O et un autre de la classe 10-S à simplifier ce facteur commun (*Simp*)

On constate un grand changement dans le choix des techniques chez les élèves de la classe 10 : au lieu de factoriser, ils développent le produit de deux polynômes en utilisant la propriété de la double distributivité

" $(A(x)+B(x)) \times (C(x)+D(x)) = A(x) \times C(x) + A(x) \times D(x) + B(x) \times C(x) + B(x) \times D(x)$ ", puis réduisent l'expression obtenue et calculent les solutions en utilisant la technologie : les formules définitives des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (cf. Tableau VN-28).

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

La mobilisation des techniques de factorisation est plus réussie en classe 9-S (67,4%) qu'en classe 9-O (16,9%).

Les techniques de factorisation (*Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*), bien que moins mobilisées en classe 10 qu'en classe 9, conduisent à une résolution exacte plus souvent en classe 10 qu'en classes 9.

Malgré que la technique *Dév_Discr* est majoritaire en classe 10, le taux de réussite de sa mobilisation est plus faible que celui de la technique de factorisation à cause du grand nombre de calculs et d'étapes exigé avant la détermination des solutions.

Les erreurs principales rencontrées dans la résolution du type de tâche T3 peuvent ici encore être caractérisées comme suit :

Erreurs de résolution dues à l'utilisation « abusive » de techniques (*Simp*, *Fact_Isv* et *Dev_Isv*), valides seulement sur un champ plus restreint, celui de la résolution d'une équation de degré 1.

Erreurs dues à la qualité de la mise en oeuvre d'une technique : erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation des techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Discr* en classe 10,

Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

- erreurs de calcul lors du développement du produit de deux polynômes, de la réduction d'une expression, du calcul des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ en utilisant les formules des solutions, et de calcul du discriminant
- problème de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré et de la factorisation
- erreurs de calcul lors de la factorisation suite au non respect de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition
- erreurs de factorisation du type : $A(x)B(x)C(x)+A(x)D(x)=A(x)B(x)(C(x)+D(x))$

- utilisation abusive de l'élément technologique " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " dans la résolution de l'équation "pseudo-produit nul" $A(x) \times B(x) = c$ avec c constant non nul"
- erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* dans l'application de la règle d'annulation du produit de deux polynômes.

II.4. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T4

II.4.1. Cas de la classe 9

D'après l'analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classes 9 sont l'utilisation des identités remarquables suivie par la règle d'annulation des facteurs (*IdR_ProdN*) ou la prise de la racine carrée de deux membres de l'équation (*Rac*). Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} :

l'identité remarquable " $A(x)^2 - B(x)^2 = (A(x) - B(x)) \times (A(x) + B(x))$ ",

la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ "

et la propriété : " Si $a > 0$ l'équation $x^2 = a$ a deux solutions, l'une positive : $\sqrt{a}$, l'autre négative : $-\sqrt{a}$ " .

a) Techniques et technologies existantes en classe 9-0

Type de tâche T4 Classe 9-0 (27 élèves)		E4.1 $(-4x+5)^2 = (-2x-7)^2$		E4.2 $(3x-4)^2 - (-5x+1)^2 = 0$		E4.3 $x^2 = 7$		E4.4 $-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0$		E4.5 $-(2x-1)^2 + 9(-x+2)^2 = 0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
	<i>IdR_ProdN</i>	13	1	12	3	1		10	2	8	2	44	8
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>					17	1					17	1
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>	5		7				2		4		18	0
	<i>Dév_Rac</i>	1		1				3		3		8	0
	<i>Dév_IsV</i>	1		2						1		4	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	3		2				3	1	2	1	10	2
Totaux		23	1	24	3	18	1	18	3	18	3	101	11

Tableau VN-29

Selon le tableau VN-29, on constate qu'outre les techniques attendues *IdR_ProdN* et *Rac*, les techniques des catégories *Gdév* et *Mixtes* sont mobilisées et qu'on rencontre toujours, bien que très faiblement utilisée, la technique *Dév_IsV*.

La technique la plus mobilisée dans la résolution des exercices de ce type de tâche est *IdR_ProdN* (42,6%). Elle se compose de deux étapes : ramener l'équation donnée à celle produit nul $P(x) \times Q(x) = 0$ en utilisant l'élément technologique : l'identité remarquable $A(x)^2 - B(x)^2 = (A(x) - B(x)) \times (A(x) + B(x))$, et ensuite annuler le produit $P(x) \times Q(x)$ en utilisant l'élément technologique de θ_{v_1} : la règle facteur nul " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

Cette technique est moins mobilisée dans l'exercice E4.5 (8 cas) à cause de la présence de 9 (une constante) devant le carré $(-x+2)^2$, et elle ne présente pas dans l'exercice E4.3 dans lequel le second membre est la constante 7.

La présence de la constante 7 dans l'exercice E4.3 conduit les élèves de prendre la racine carrée (*Rac*) des deux termes des deux membres de l'équation (16,8%). La diminution du degré de l'équation se fait en utilisant l'élément technologique de θ_{v_1} : " Si $a > 0$ l'équation $x^2 = a$ a deux solutions, l'une positive : $\sqrt{a}$, l'autre négative : $-\sqrt{a}$ ".

b) Techniques et technologies existantes en classe 9-S

Selon le tableau VN-30, outre les techniques attendues *IdR_ProdN* et *Rac*, apparaissent des techniques des catégories *Règles* et *Mixtes*.

Type de tâche T4 Classe 9-S (46 élèves)		E4.1 $(-4x+5)^2 = (-2x-7)^2$		E4.2 $(3x-4)^2 - (-5x+1)^2 = 0$		E4.3 $x^2 = 7$		E4.4 $-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0$		E4.5 $-(2x-1)^2 + 9(-x+2)^2 = 0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>IdR_ProdN</i>	30	22	37	26	9	5	38	34	37	26	151	113
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>	8	0	4	0	37	26	2	0	3	0	54	26
	<i>EgaCar</i>	2	1	2	2			1	1	2	1	7	5
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	6	3	2				5	3	4	2	17	8
Totaux		46	26	45	28	46	31	46	38	46	29	229	152

Tableau VN-30

Comme en classe 9-O, la technique la plus mobilisée est *IdR_ProdN* (65,9%) qui est la technique attendue dans l'analyse a priori. Elle est moins utilisée dans l'exercice E4.3 dans lequel un carré d'un binôme est remplacé par la constante 7.

Contrairement à la classe 9-O, la technique de prise de la racine carrée (*Rac*) est mobilisée dans tous les exercices (23,6%), mais elle ne conduit majoritairement à la réussite que dans l'exercice E4.3 (70,3%).

A côté de la technique *Rac*, apparaît dans le traitement de ce type de tâche une autre technique, *EgaCar* (égalité des carrés), de la catégorie *Règles* qui repose sur l'élément technologique θ_{v_1} : " $A(x)^2=B(x)^2 \Leftrightarrow A(x)=B(x)$ ou $A(x)=-B(x)$ "

Comme en classe 9-O, on rencontre quelques cas de techniques *Dév_Fact_ProdN* (7,4%) utilisées dans les exercices E4.1, E4.4 et E4.5.

c) Analyse des résultats obtenus

En classe 9-O

L'utilisation de la technique *IdR_ProdN* ne conduit à la réussite que 8 fois sur 44, soit 18,2%.

Certains élèves (10 cas) ont développé les carrés, puis re-factorisé l'expression obtenue, et ensuite utilisé la règle d'annulation des facteurs dans tous les exercices sauf E4.3. C'est la technique *Dév_Fact_ProdN*.

Si on regroupe les techniques de factorisation (*IdR_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*), alors elles occupent 52,5% des techniques mobilisées, mais sont mobilisées avec un taux de réussite faible (18,9%).

Dans l'utilisation de la technique *Rac*, on trouve un seul cas de succès car les élèves utilisent la règle erronée " $\sqrt{a^2} = a$ " (cf. Figure 9).

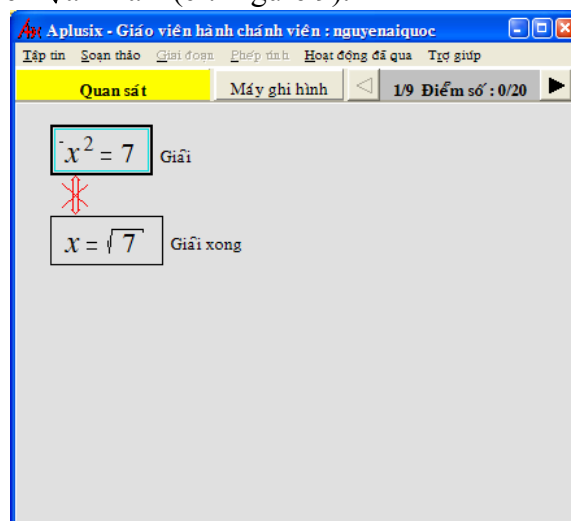


Figure 9 : La technique *Rac* mobilisée repose sur la règle erronée " $\sqrt{a^2} = a$ " de l'élève E9, classe 9-S

Enfin, certains élèves (17,8%) espèrent obtenir une équation du premier degré par le développement des carrés mais la résolution est interrompue dès que l'obtention d'une équation du second degré. D'autres ont pris la racine carrée des deux membres de l'équation après isolation du carré de x dans de ces deux membres sans vérifier son existence, ou ont « isolé » la variable x dans un membre de l'équation après développement des carrés.

Finalement, nous noterons le cas d'un élève qui essaie de factoriser (x^2-7) en remplaçant (-7) par un binôme $(14x-49)$ afin de pouvoir faire apparaître le facteur commun $(x+7)$:

$$\begin{array}{llll} x^2=7 & x^2-7=0 & x^2+14x-49=0 & x^2+7x+7x-49=0 \\ x(x+7)+7(x-7)=0 & (x+7)(x-7)(x+7)=0 & & \\ \left\{ \begin{array}{l} x+7=0 \\ x-7=0 \\ x+7=0 \end{array} \right. & & & \\ \left\{ \begin{array}{l} x=-7 \\ x=7 \\ x=-7 \end{array} \right. & \text{(élève E27).} & & \end{array}$$

En classe 9-S

La technique *IdR_ProdN* est moins réussie dans le cas de l'écriture de 7 sous une forme carrée.

Cette technique est utilisée avec réussite dans les deux exercices E4.1 (73,3%) et E4.4 (89,5%) car dans ce cas là, le changement du signe dans la factorisation est plus simple, grâce aux termes de même signe dans le carré précédé par le signe moins,

$$\begin{array}{l} (-4x+5)^2 = (-2x-7)^2 \\ (-4x+5)^2 - (-2x-7)^2 = 0 \\ (-4x+5-2x-7)(-4x+5+2x+7) = 0 \\ \text{et } (-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0 \\ 2x+3-3x-5)(2x+3+3x+5)=0. \end{array}$$

La technique *EgaCar* se présente seulement dans 3,1% des cas, mais avec 2/3 de réussite.

Enfin, si on regroupe la technique *Dév_Fact_ProdN* avec *IdR_ProdN*, alors le taux de réussite de l'utilisation des techniques de factorisation est presque quatre fois plus élevé qu'en classe 9-O.

Selon le tableau VN-31 et VN-32, les erreurs les plus fréquentes dans le traitement du type de tâche T4 sont liées à la technique *Rac* dans l'application d'une propriété de la racine carrée (ERA1) dans les deux classes 9-O (16 cas) et 9-S (26 cas).

Ces erreurs sont produites lors de l'application de la règle erronée " $\sqrt{a^2} = a$ ", en classe 9-O, dans l'exercice E4.3, et en classe 9-S, majoritairement dans les exercices E4.1 et E4.3. Peut-être peut-on expliquer l'application de la règle erronée " $x^2=a \Rightarrow x=\sqrt{a}$ " par une confusion entre la définition de la racine carrée positive d'un nombre positif et les deux solutions radicales de l'équation $x^2=k$ ($k>0$).

Classe	9-O (27 élèves)							
Type de tâche T4	ECAL		ESIGN					
	Non respect priorité des opérations	Réduction	Factorisation	Mouve Equ 1er				
<i>IdR_ProdN</i>	5	3	6	6	2			14
<i>Dév_Fact_ProdN</i>		2				6		
<i>EgaCar</i>								
<i>Rac</i>							16	
Totaux	5	5	6	6	2	6	16	14

Tableau VN-31

Classe	9-S (46 élèves)										
Type de tâche T4	Interrompue	ECAL					ESIGN				
		Non respect priorité des opérations	Développement	Factorisation	Écriture Nouvelle Équation	Réduction	Factorisation	Mouve Equ 1er			
<i>IdR_ProdN</i>		7		4	1	6	8	5	1		5
<i>Dév_Fact_ProdN</i>	3		1	1			1	1			3
<i>EgaCar</i>								2			
<i>Rac</i>										26	1
Totaux		7	1	5	1	6	9	8	1	26	9

Tableau VN-32

Les erreurs de signe reliées à la technique *IdR_ProdN* s'expliquent par le signe différent des termes dans les carrés (E4.2 et E4.5) lors de la factorisation de l'expression a^2-b^2 en utilisant l'élément technologique de θ_{v_1} : l'identité remarquable $A(x)^2-B(x)^2=(A(x)-B(x))\times(A(x)+B(x))$ en classe 9-O (6 cas) et en classe 9-S (8 cas).

Quant aux erreurs de signe lors de la résolution de l'équation produit du premier degré avec 6 cas en classe 9-O et 3 cas en classe 9-S, l'une des raisons d'échec est la conservation du signe d'un terme négatif dans le mouvement multiplicatif ou additif:

$$\begin{aligned}(3x-4)^2-(-5x+1)^2 &= 0 \\ (3x-4-5x+1)(3x-4+5x-1) &= 0 \\ -2x-3 &= 0 \text{ ou } 8x-5 = 0 \\ x &= \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{8} \text{ (élève E22, classe 9-O).}\end{aligned}$$

La présence d'une constante positive devant un carré dans l'exercice E4.5 conduit à la présence d'erreurs lors de la mise sous forme a^2-b^2 . Les erreurs produites dans ce cas, 4 erreurs en 9-O et 7 en 9-S, proviennent du non-respect de la priorité d'une opération par rapport à l'autre dans la factorisation :

$$\begin{aligned}-(2x-1)^2+9(-x+2)^2 &= 0 \\ 9(-x+2)^2-(2x-1)^2 &= 0 \\ (-9x+18)^2-(2x-1)^2 &= 0 \text{ (E25, classe 9-S).}\end{aligned}$$

Ici, la multiplication entre 9 et $(-x+2)$ est effectuée sans tenir compte de la priorité de la puissance.

Le type d'erreurs ELOG persiste, lors du rassemblement des solutions des équations de degré 1,

avec 14 cas en 9-O et 5 en 9-S,

Quant aux erreurs de calcul liées à *IdR_ProdN*, on les trouve lors de la réduction et du "développement interne". L'apparition de la constante 9 devant un carré dans l'exercice E4.5 provoque ainsi quelques échecs lors du 'développement interne' dans le produit de 9 et ce carré :

$$\begin{aligned}-(2x-1)^2+9(-x+2)^2 &= 0 \\ 9(-x+2)^2-(2x-1)^2 &= 0 \\ (-9x+2)^2-(2x-1)^2 &= 0 \text{ (élève E25, classe 9-S).}\end{aligned}$$

Cette présence du 9 entraîne aussi quelques erreurs de factorisation, dont 3 cas d'erreurs en 9-O et 7 en 9-S, lors de l'utilisation de la technique *IdR_ProdN*.

On trouve également 6 erreurs EPRODF en classe 9-O lors de l'application de la règle facteur nul sur l'équation "pseudo-produit nul" $A(x)\times B(x)=c$ (c est constant non nul) après la ré-factorisation de l'expression obtenue d'un développement.

II.4.2.Cas de classe 10

D'après notre analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classe 10 sont *IdR_ProdN* (utilisation des identités remarquables suivie de la règle d'annulation des facteurs), ou *Rac* (prise de la racine carrée des deux membres de l'équation), ou *Dév_Discr* (développement suivi du calcul du discriminant). Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} et θ_{v_2} :

l'identité remarquable $A(x)^2-B(x)^2=(A(x)-B(x))\times(A(x)+B(x))$ et la règle

" $A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ ou $B(x)=0$ "

la propriété : " Si $a>0$ l'équation $x^2=a$ a deux solutions, l'une positive : $\sqrt{a}$, l'autre négative : $-\sqrt{a}$ "

le calcul du discriminant et les formules des solutions $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

a) Techniques et technologies existantes en classe 10-O

Comme on le voit dans le tableau VN-33, outre les techniques attendues *IdR_ProdN*, *Rac* et *Dév_Discr*, apparaissent les techniques *Dév_Rac*, *Discr* et *Dév_Fact_ProdN*.

Type de tâche T4 Classe 10-O (42 élèves)		E4.1 $(-4x+5)^2=(-2x-7)^2$		E4.2 $(3x-4)^2-(-5x+1)^2=0$		E4.3 $x^2=7$		E4.4 $-(-3x-5)^2+(2x+3)^2=0$		E4.5 $-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>IdR_ProdN</i>	5	3	2	2	3	2	2	1	2	1	14	9
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>					35	17					35	17
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Rac</i>			1				1				2	0
	<i>Dév_Discr</i>	34	2	35	4			36	3	36	6	141	15
	<i>Discr</i>					1						1	0
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>	2		2				1				5	0
Totaux		41	5	40	6	39	19	40	4	38	7	198	41

Tableau VN-33

La technique *Dév_Discr*, qui repose sur les éléments technologiques de θ_{v_2} : identités remarquables " $(A(x)\pm B(x))^2=A^2(x)\pm 2A(x)\times B(x)+B^2(x)$ " et formules des solutions

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, est mobilisée principalement (71,2%) dans ce type de tâche. Elle se présente environ $\frac{141}{159}$, soit 88,7%, dans tous les exercices sauf E4.3.

Comme en classe 9-O, la prise de la racine carrée est mobilisée seulement pour l'exercice E4.3 (17,7%).

Contrairement à la classe 9-O, les techniques de factorisation (*IdR_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*) sont peu utilisées (9,6%).

Le seul cas d'utilisation du discriminant (*Discr*) dans l'exercice E4.3 montre qu'il y a un lien très fort chez les élèves entre le second degré de l'équation et l'utilisation systématique du discriminant, qui les empêche de voir que l'équation donnée est tronquée et peut se résoudre plus simplement.

b) *Techniques et technologies existantes en classe 10-S*

Selon le tableau VN-34, autres les techniques attendues (*IdR_ProdN*, *Rac* et *Dév_Discr*), on rencontre la présence des techniques *EgaCar* de *Règles*, *Dév_IsV* de *Gdév*, *Discr* et *Dév_Fact_ProdN* de *Mixtes*.

Type de tâche T4 Classe 10-S (44 élèves)		E4.1 $(-4x+5)^2 = (-2x-7)^2$		E4.2 $(3x-4)^2 - (-5x+1)^2 = 0$		E4.3 $x^2 = 7$		E4.4 $-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0$		E4.5 $-(2x-1)^2 + 9(-x+2)^2 = 0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>IdR_ProdN</i>	17	14	14	13			14	14	11	8	56	49
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>	1				40	35	1				42	35
	<i>EgaCar</i>			1								1	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév_IsV</i>			1								1	0
	<i>Dév_Discr</i>	26	8	28	8			25	7	28	14	107	37
<i>Discr</i>						1	1					1	1
<i>Mixtes</i>	<i>Dév_Fact_ProdN</i>									2	1	2	1
Totaux		44	22	44	21	41	36	40	21	41	23	210	123

Tableau VN-34

Comme dans les types de tâche T2 et T3, la technique *Dév_Discr* est mobilisée majoritairement (51%) dans ce type de tâche, et évidemment elle ne peut pas être mobilisée dans l'exercice E4.3. On la rencontre environ $\frac{107}{169}$, soit 63,3% dans les 4 exercices.

La mobilisation de la technique *IdR_ProdN*, qui repose sur les éléments technologiques de θ_{v_1} : identité remarquable $A(x)^2-B(x)^2=(A(x)-B(x))\times(A(x)+B(x))$ et règle d'annulation du produit, conduit à une résolution fortement réussie (87,5%) dans tous les exercices de ce type de tâche, malgré qu'elle n'est pas majoritaire (26,7%) contrairement à la technique *Dév_Discr*.

Comme en classe 10-O, la technique de prise de la racine carrée est concentrée dans l'exercice E4.3 (19,1%).

c) *Analyse des résultats obtenus*

En classe 10-O

La technique *Dév_Discr* est mobilisée avec un taux de réussite faible, 10,6%, à cause sans doute des nombreux calculs à effectuer dans le développement des carrés : la plupart des erreurs sont celles de signe.

Quant à la technique *Rac*, sa mobilisation est réussie cette fois presque dans la moitié des cas (48,6%) en classe 10-O.

Malgré que les techniques *IdR_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN* soient peu présentes, la moitié de ces techniques est mobilisée avec succès. En particulier, on trouve 3 cas d'utilisation de la technique *IdR_ProdN* dans l'exercice E4.3, dont 2 avec succès :

$$x^2=7 \Leftrightarrow (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{7} \text{ ou } x=-\sqrt{7}.$$

En classe 10-S

Comme en classe 10-O, ce sont certainement la forme des carrés $(A(x)+B(x))^2$ et $(A(x)-B(x))^2$ des identités remarquables, et l'enlèvement des parenthèses qui causent un faible taux de réussite (34,6%) dans l'utilisation de la technique *Dév_Discr*. Cependant, la prise de la racine carrée est ici utilisée avec un taux de réussite de 87,5%.

Selon les tableaux VN-35 et VN-36, on constate que les erreurs les plus fréquentes sont celles de signe dans les deux classes. La plupart de ces erreurs sont liées à la technique *Dév_Discr* (le développement et l'utilisation du discriminant) avec 55 cas en 10-O et 31 cas en 10-S. Parmi ces erreurs, la majorité concerne le développement des carrés, en particulier, le développement du carré $(-a+b)^2$:

$$(-A(x)+B(x))^2=A^2(x)+2A(x)\times B(x)+B^2(x) \text{ ou } (-A(x)+B(x))^2=-A^2(x)-2(-A(x))\times B(x)+B^2(x).$$

Classe	10-O (42 élèves)												
Type de tâche T4	ECAL			ECALD	ESIGN				EOPM	EPRODF	ERA1	ERA2	ELOG
	Développement	Réduction	Calcul Solutions		Développement	Réduction	Signe Solutions	Mouvement Equ 1er					
<i>IdR ProdN</i>		2						1	1				
<i>Dév Fact ProdN</i>										5			
<i>Rac</i>											7	2	7
<i>Dév Discr</i>	34	6	11	7	47	3	5						10
Totaux	34	8	11	7	47	3	5	1	1	5	7	2	17

Tableau VN-35

Classe	Classe 10-S (44 élèves)												
Type de tâche T4	ECALN				ECALD	ESIGN					ERA1	ERA2	ELOG
	Développement	Factorisation	Réduction	Calcul Solutions		Développement	Réduction	Mouvement	Factorisation	Signe Solution	Mouvement Equ 1er		
<i>IdR ProdN</i>		1	1					1	2				
<i>Dév Fact ProdN</i>													
<i>Rac</i>											1	5	1
<i>Dév Discr</i>	7		8	8	14	20	3		1	7			3
Totaux	7	1	9	8	14	20	3	1	3	7	1	5	4

Tableau VN-36

La position inhabituelle du signe moins dans les carrés $(-A(x)+B(x))^2$ et $(-A(x)-B(x))^2$ empêche la reconnaissance immédiate des carrés $(A(x)-B(x))^2$ et $(A(x)+B(x))^2$ de deux identités remarquables. C'est une cause d'échec dans les développements, notamment dans l'enlèvement des parenthèses lors du développement.

Il y a des erreurs de signe dans les deux classes lors de la réduction et le calcul des solutions car l'utilisation de la technique *Dév_Discr* exige beaucoup d'opérations de calculs à chacune de ces étapes.

L'apparition d'un coefficient non nul et différent de 1 de l'inconnue x dans le carré est l'une des causes qui provoque le plus grand nombre d'erreurs de calcul dans le développement, 34 cas en classe 10-O et 7 en classe 10-S, par l'utilisation des formules erronées suivantes:

$$(ax-b)^2=ax^2 \pm 2abx+b^2$$

ou $(-ax+b)^2=-ax^2-2.(-ax).b+b^2$.

Par exemple, l'élève E8 de la classe 10-O résout l'exercice E4.2 comme suit :

$$(3x-4)^2-(-5x+1)^2=0$$

$$3x^2-2.3x.(-4)+4^2-(-5x^2+2.(-5x).1+1^2)=0.$$

Certains élèves utilisent les formules suivantes lors du développement des carrés :

$$(A(x) \pm B(x))^2=A(x)^2 \pm B(x)^2.$$

La complexité des formules des solutions $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $\frac{-b' \pm \sqrt{\Delta}}{a}$ (dans le cas où b est pair)

est également l'une des causes des échecs dans le calcul des solutions en utilisant le discriminant.

Comme dans les classes 9, il y a des erreurs produites par l'utilisation la règle erronée " $\sqrt{a^2} = a$ ", mobilisée principalement dans l'exercice E4.3.

Les erreurs ELOG se rencontrent encore dans ce type de tâche et sont liées aux techniques *Rac* et *Dév_Discr* lors du rassemblement des solutions. Ces erreurs sont résistantes chez élèves des classes 9 et 10 ordinaires.

Les erreurs EPRODF sont encore présentes en classe 10-O lors de la mobilisation de la technique *Dév_Fact_ProdN* (5 cas).

II.4.3.Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T4

a) Sur les techniques et technologies existantes

Evolution entre 9-O et 9-S

L'identification de la différence $A^2(x)-B^2(x)$, qui entraîne la mobilisation de la technologie : $A^2(x)-B^2(x)=(A(x)-B(x))(A(x)+B(x))$, à partir des relations suivantes: $a^2=b^2$ ou $a^2-b^2=0$ ou $a^2=k$ (k positif) ou $-a^2+b^2=0$, et la compréhension de l'intérêt de cette technologie qui diminue le degré du premier membre, dans le cas de la résolution d'une équation du second degré (lorsqu'elle a deux solutions) font augmenter la mobilisation des techniques *IdR_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN* en classe 9-S.

Contrairement à la classe 9-O, en classe 9-S, la technique *EgaCar* qui repose sur la technologie : " $A^2(x)=B^2(x) \Leftrightarrow A(x)=B(x)$ ou $A(x)=-B(x)$ " et la technique de prise de la racine carrée est utilisée non seulement dans l'exercice E4.3, mais dans tous les exercices.

Aucun cas d'utilisation d'une technique de *Gdév* n'est mobilisée en classe 9-S, alors qu'en classe 9-O, on repère des essais de baisser le degré de l'équation par développement (*Dév*),

ou extrait de racine carrée (*Dév_Rac*) ou isolation de l'inconnue x (*Dév_IsV*) après développement des carrés.

Entre 10-O et 10-S

Comme en classes 9, la technique *IdR_ProdN* est mobilisée en classe 10-S environ 3 fois plus qu'en classe 10-O. Cela conduit à une diminution d'utilisation de la technique *Dév_Discr* en classe 10-S, où les élèves semblent être davantage capables de choisir la technique la moins coûteuse.

Entre 9 et 10

L'Apprentissage de la résolution d'une équation du second degré en calculant le discriminant a fait un grand changement du choix de la technique *IdR_ProdN* entre les classes 9-O et 10-O, et entre 9-S et 10-S, mais le taux de réussite dans la mobilisation de la technique *Dév_Discr* en classes 10-O et 10-S n'est pas convaincu.

Par rapport à la classe 9-S, la concentration, en classe 10-S, des techniques dans la catégorie *Gdév* (la technique *Dév_Discr*) entraîne une diminution des techniques *Gfact+Mixtes*.

Quant à la technique de prise de la racine carrée, il n'y a pas une grande différence de la mobilisation entre les classes 9 et les classes 10, mais la mobilisation de cette technique est plus réussie en classes 10 où elle s'appuie sur l'identité " $\sqrt{x^2} = |x|$ ", qui a été introduite au début de la classe 9.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

Type de tâche T4		9-O		10-O		9-S		10-S	
		%	R	%	R	%	R	%	R
<i>Gfact+Mixtes</i>	<i>Fact_ProdN, IdR_ProdN, Dév_Fact_ProdN</i>	53,5	18,5	9,6	47,4	73,4	72	27,6	86,2
<i>Règles</i>	<i>Rac, EgaCar</i>	16,8	5,9	17,7	48,6	26,6	50,8	20,5	81,4
<i>Dév</i>	<i>Dév, Dév_Rac, Dév_IsV</i>	29,7	0	1	0			0,4	0
	<i>Dév_Discr</i>			71,2	10,6			51	34,6
<i>Discr</i>				0,5				0,4	100
Totaux		100		100		100		99,9	

Tableau VN-37

L'utilisation efficace des technique *IdR_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN* en classe 9-S apporte un succès environs 4 fois plus important qu'en classe 9-O (72% par rapport à 18,5%) (cf. Tableau VN-37).

Les techniques *EgaCar* et *Rac*, qui appartiennent à la catégorie *Règles*, sont appliquées avec un taux de succès beaucoup plus fort (50,8%) qu'en classe 9-O (5,9%).

La mobilisation de la technique *IdR_ProdN* en classe 10-S conduit à une résolution correcte avec un succès plus important qu'en classe 10-O et une meilleure utilisation de la propriété de la racine carrée conduit au succès de la technique *Rac* en classe 10-S.

En classe 10-O, plus 2/3 des élèves ont utilisé la technique *Dév_Discr*, avec un taux de réussite trois fois inférieur à celui de la classe 10-S. Ce taux s'explique par des erreurs de calcul et de signe dans le développement des carrés.

Nous retrouvons ici essentiellement deux des catégories d'erreurs détectées pour le types d tâche précédents :

Erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre d'une technique valide : ce sont les erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation de *IdR_ProdN* aux deux niveaux de classe, ou de *Dév_Discr* en classe 10,

Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

problème de signe lors de la factorisation, lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré

non respect de la priorité d'une opération par rapport à l'autre lors de la mise en carré unique $k^2(ax+b)^2=[k(ax+b)]^2$, de la réduction d'une expression et du calcul du discriminant

erreur de logique dans l'application de la règle d'annulation du produit de deux polynômes, lors du rassemblement des solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$

exclusion de la racine négative lors de la prise de la racine carrée du carré d'un binôme

utilisation abusive de la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " dans la résolution de l'équation "pseudo-produit nul " $A(x) \times B(x) = c$ avec c constant non nul".

II.5. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T5

II.5.1.Cas de la classe 9

Selon l'analyse a priori, la technique attendue lors de la résolution de deux premières équations est *IdR_CarN* et celle de deux dernières équations est *IdR_ProdN*. Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} :

les identités remarquables " $A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$ ", et la règle " $A(x)^2 = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ "

la forme canonique du trinôme : $ax^2 + bx + c = a[(x - \alpha)^2 - \beta]$, l'identité remarquable " $A^2(x) - B^2(x) = (A(x) - B(x)) \times (A(x) + B(x))$ ", la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

a) Techniques et technologies existantes en classe 9-O

Comme on le voit dans le tableau VN-38, outre les techniques attendues *IdR_CarN* et *IdR_ProdN*, on trouve les techniques *Fact_ProdN* et *Fact_IsV*, *Rac* et *IdR_Dév*.

La technique majoritaire pour ce type de tâche est *Fact_ProdN* (63,1%), qui est mobilisée essentiellement dans les deux exercices E5.3 (43,4%) et E5.4 (32,1%), où l'application des identités remarquables n'est pas immédiate.

Type de tâche T5 Classe 9-O (27 élèves)		E5.1 $x^2 + 8x + 16 = 0$		E5.2 $25x^2 - 90x + 81 = 0$		E5.3 $2x^2 + 5x - 7 = 0$		E5.4 $x^2 - 11x + 24 = 0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	9	1	4	0	23	5	17	8	53	14
	<i>Fact_IsV</i>	2	0	2	0					4	0
	<i>IdR_ProdN</i>			1	1					1	1
	<i>IdR_CarN</i>	13	11	10	9					23	20
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>					2				2	0
<i>Gdév</i>	<i>IdR_Dév</i>			1						1	0
Totaux		24	12	18	10	25	5	17	8	84	35

Tableau VN-38

En fait, cette technique correspond à ce que nous avons appelé *Dec_Fact_ProdN* dans la partie B2.1 "Analyse des manuels vietnamiens" qui est basée sur la décomposition du terme bx . En effet, la factorisation de l'expression commence par la décomposition du terme bx , qui repose sur la propriété des racines de l'équation : " Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines x_1 et x_2 , alors $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $S = x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$. La factorisation de l'expression $ax^2 + bx + c$ exige que les élèves déterminent les deux entiers relatifs m et n tels que $m + n = b$ et $m \times n = a \times c$ et cette détermination est réalisée si les racines de l'équation $ax^2 + bx + c$ existent :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + (m+n)x + c = 0$$

$$x(ax+m)+(nx+c)=0$$

$$x(ax+m)+(nx+\frac{m.n}{a})=0$$

$$x(ax+m)+n(x+\frac{m}{a})=0$$

$$x(ax+m)+\frac{n}{a}(ax+m)=0$$

$$(ax+m)(x+\frac{n}{a})=0.$$

Ici, les deux racines de l'équation sont $-\frac{m}{a}$ et $-\frac{n}{a}$ et vérifient bien les égalités $m+n=b$ et $m \times n = a \times c$.

Dans le cas particulier où $a=1$, la recherche des m et n est plus facile, et la factorisation suit les étapes suivantes :

$$x^2+bx+c=0$$

$$x^2+(m+n)x+m.n=0$$

$$x^2+mx+nx+m.n=0$$

$$x(x+m)+n(x+m)=0$$

$$(x+m)(x+n)=0 \text{ (cf. Figure 10).}$$

Rappelons, que seul pour ce cas ($a=1$), on a trouvé des traces des éléments technologiques dans le manuel.

Quant à la technique *IdR_CarN*, elle n'est mobilisée (27,4%), comme attendu, que dans les deux premiers exercices E5.1 et E5.2 où l'expression du membre gauche de l'équation est la partie développée des identités remarquables $(A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$.

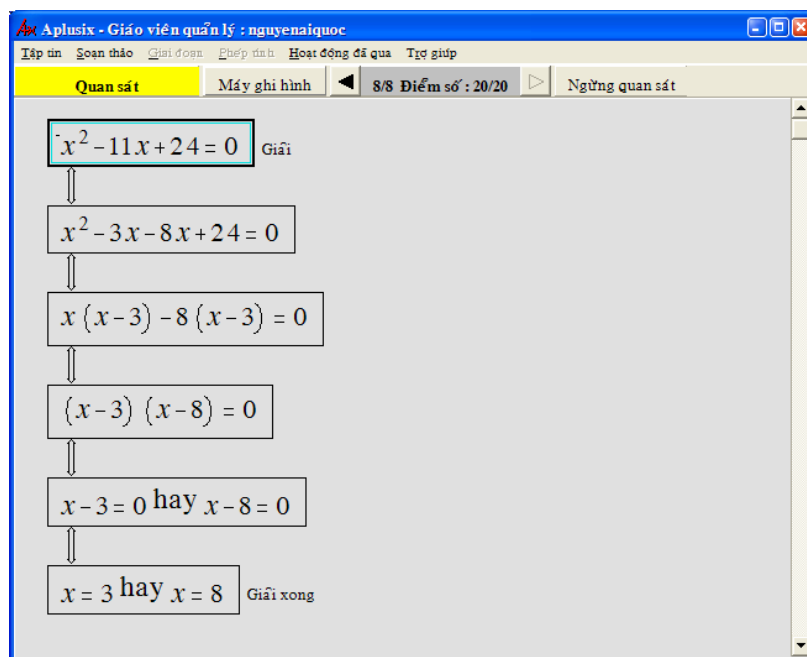


Figure 10 : Exemple de travail de l'élève 4 de la classe 9-O dans l'utilisation de la technique Dec_Fact_ProdN

b) Techniques et technologies existantes en classe 9-S

Comme on le constate dans le tableau VN-39, les techniques attendues d'après l'analyse a priori *IdR_CarN* et *IdR_ProdN* sont présentes.

Contrairement à la classe 9-O où les techniques sont dispersées dans plusieurs catégories, les techniques mobilisées en classe 9-S sont celles de la catégorie *Gfact* et se répartissent également entre les deux techniques *Fact_ProdN* (49,5%) et *IdR_CarN* (48,9%).

Type de tâche T5 Classe 9-S (46 élèves)		E5.1 $x^2+8x+16=0$		E5.2 $25x^2-90x+81=0$		E5.3 $2x^2+5x-7=0$		E5.4 $x^2-11x+24=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>					45	35	46	41	91	76
	<i>IdR_ProdN</i>	1	1	1	0	1	0			3	1
	<i>IdR_CarN</i>	45	44	45	45					90	89
Totaux		46	45	46	45	46	35	46	41	184	166

Tableau VN-39

On constate qu'il y a identification de la forme $a^2 \pm 2ab + b^2$ des identités remarquables en classe 9-S via la répartition égale de deux techniques mobilisées *Fact_ProdN* et *IdR_CarN*, malgré la présence du coefficient différent de l'unité de x^2 dans l'exercice E5.2 : la technique *Fact_ProdN* n'est utilisée que pour les deux exercices E5.3 et E5.4, tandis que *IdR_CarN* n'est utilisée que pour les deux premiers exercices E5.1 et E5.2.

La technique *IdR_CarN* mobilisée dans les deux exercices E5.1 et E5.2 se compose de deux étapes : mise de l'équation en forme $P^2(x)=0$ et résolution de l'équation $P(x)=0$. La première étape repose sur les éléments technologiques de θ_{v_1} : $(A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$, et " $A^2(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ ".

La technique *Fact_ProdN* mobilisée dans les deux derniers exercices E5.3 et E5.4 se compose de deux étapes : mise de l'équation en forme $P(x) \times Q(x)=0$ et résolution de deux équations du premier degré $P(x)=0$ et $Q(x)=0$. Dans la première étape, le terme bx est d'abord décomposé en deux termes mx et nx tels que $m+n=b$ et $m \times n=a \times c$ comme on l'a montré ci-dessus, puis suit la factorisation reposant sur l'élément technologique de θ_{v_1} : propriété de distributivité simple " $A(x) \times (B(x) \pm C(x)) = A(x) \times B(x) \pm A(x) \times C(x)$ ". (technique notée aussi *Dec_Fact_ProdN*).

c) *Analyse des résultats obtenus*

En classe 9-O

L'identification des identités remarquables permet aux élèves de réussir par la technique *IdR_CarN* dans les deux exercices E5.1 (84,6%) et E5.2 (90%).

La complexité de la technique *Fact_ProdN* (ou *Dec_Fact_ProdN*) ne permet pas d'atteindre le même niveau de réussite dans la résolution de deux exercices E5.3 (21,7%) et E5.4 (47,1%).

On trouve 2 cas dans lesquels on isole l'inconnue x dans un membre de l'équation après la factorisation de deux termes contenant x :

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$4(2x+4) + x^2 = 0$$

$$2x+4+x^2 = -4$$

$$2x+x^2 = 0$$

$$x(2+x) = 0$$

$$\text{et } 25x^2 - 90x + 81 = 0$$

$$x(25x-90) = -81$$

$$x = -81 \text{ ou } 25x - 90 = 0.$$

Et deux cas dans lesquels la prise de la racine carrée est utilisée pour abaisser le degré de x et se ramener au premier degré :

$$2x^2+5x-7=0$$

$$2x^2+5x=7$$

$$2x^2=\frac{7}{5x}$$

$$x=\sqrt{\frac{14}{5}}.$$

En classe 9-S

L'identification de la forme des identités remarquables permet un succès quasi-total (98,9%) en utilisant la technique *IdR_ProdN* dans les deux exercices E5.1 et E5.2.

Quant à la technique *Fact_ProdN*, comme en classe 9-O, la détermination de deux nombres entiers relatifs m et n tels que $m+n=b$ et $c=m \times n$, lors de la factorisation de l'expression x^2+bx+c empêche les élèves de réussir comme la technique. De plus, l'apparition de la constante 2 dans l'exercice E5.3 provoque un taux de réussite (77,8%) plus léger que celui dans l'exercice E5.4 (89,1%).

On rencontre 3 cas de d'utilisation de la technique *IdR_ProdN* pour les trois exercices E5.1, E5.2 et E5.3. Dans l'exercice E5.1 et E5.2, l'équation carré nul $a^2=0$ est résolu comme l'union de deux mêmes équations de facteur nul $a^2=0$. Cependant, dans l'exercice E5.3, l'identité remarquable " $(A(x)-B(x))^2=A^2(x)-2A(x) \times B(x)+B^2(x)$ " est utilisée dans le but de ramener l'équation donnée à celle du produit :

$$2x^2+5x-7=0$$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{83}{16} = 0$$

$$x+\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{83}{16}}=0 \text{ ou } x+\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{83}{16}}=0$$

$$x=-\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{83}{16}} \text{ ou } x=-\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{83}{16}}.$$

Selon le tableau VN-40, on constate que la plupart des erreurs produites est liée aux deux techniques *Fact_ProdN* et *IdR_CarN* puisque les techniques attendues dans ce type de tâche T5 sont de la catégorie *Gfact*.

Le type d'erreurs le plus fréquent en classe 9-O se produit lors de l'application de la règle de l'annulation des facteurs nul dans la résolution de l'équation "pseudo-produit nul". Ces erreurs se présentent en classe 9-O et 10-O dans tous les types de tâche, mais ne se rencontrent pas en 9-S et 10-S.

Afin de pouvoir comprendre la nature de ce type d'erreurs, étudions un exemple de l'élève E7 dans la résolution de l'exercice E5.3 :

$$2x^2+5x-7=0$$

$$x(2x+5)=7$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 2x + 5 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 2x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

Dans cette résolution, l'élève identifie les deux facteurs x et $2x+5$ avec 7. On se trouve donc devant une utilisation abusive de la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " pour une équation de la forme $A(x) \times B(x) = c$ (c est constant non nul).

On constate aussi une autre configuration de ce type d'erreurs :

$$x^2+8x+16=0$$

$$x(x+8)=-16$$

$$x=-16$$

$$x+8=0 \text{ ou } x=-8 \text{ (E15, classe 9-O)}$$

Dans cette résolution, le raisonnement s'appuie sur la règle erronée " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = c$ ou/et $B(x) = 0$ ", ou plus général sur celle " $A(x) \times B(x) = C(x) \times D(x) \Leftrightarrow A(x) = C(x)$ ou/et $B(x) = D(x)$ ". Donc, le zéro est attribué au facteur implicite (l'unité) dans le second membre de l'égalité $A(x) \times B(x) = c$. On peut se demander si cette règle est une conséquence de la décomposition unique d'un nombre entier en facteurs premiers.

Classe	9-O (27 élèves)						9-S (46 élèves)				
Type de tâche T5	ECAL			ESIGN			ECAL		ESIGN		
	Non respect priorité des opérations	Factorisation	Calcul solutions	Factorisation	EPRODF	ELOG	Factorisation	Écriture Nouvelle Équ	Factorisation	Mouve Equ 1er	ELOG
<i>Fact_ProdN</i>	4	8		1	22	6	2	2		4	7
<i>IdR_CarN</i>			1						1		
Totaux	4	8	1	1	22	6	2	2	1	4	7

Tableau VN-40

L'erreur EPRODF se présente encore sous une autre forme dans laquelle la priorité de la multiplication par rapport à l'addition n'est pas respectée :

$$2x^2+5x-7=0$$

$$x(2x+5)-7=0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 5 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Comme dans tous les types de tâche, se trouvent les erreurs ELOG liées à la technique *Fact_ProdN*, avec 6 cas en 9-O et 7 en 9-S, lors de l'utilisation l'opérateur logique ET au lieu OU dans le rassemblement des solutions des équations facteur nul du premier degré.

Dans la mobilisation de la technique *Fact_ProdN*, quelques erreurs de factorisation sont produites lors de l'application des règles erronées de factorisation suivantes :

$$A(x) \times (B(x) + C(x)) + D(x) = (A(x) + D(x)) \times (B(x) + C(x))$$

$$\text{ou } A(x) \times (B(x) + C(x)) + D(x) \times (E(x) + F(x)) = (A(x) + D(x)) \times (B(x) + C(x)) \times (E(x) + F(x)).$$

Dans ces factorisations, la priorité de la multiplication par rapport à l'addition n'est pas respectée.

Outre ces erreurs, se trouvent des erreurs de calcul lors la factorisation en classes 9-O (8 cas) et 9-S (2 cas) :

$$x^2+8x+16=0$$

$$(x+8)^2=0 \text{ (E5, classe 9-O).}$$

En fin, quelques erreurs de signe (4 cas) sont produites lors de la résolution des équations facteur du premier degré dans l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* en classe 9-S.

II.5.2.Cas de classe 10

Selon l'analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classe 10 sont *IdR_CarN* ou *Discr*. Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} et de θ_{v_2} :

- les identités remarquables $(A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$, et la règle " $A^2(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ " lors de la résolutions de deux premières équations
- le calcul du discriminant et les formules des solutions..

a) *Techniques et technologies existantes en classe 10-O*

Comme on le constate dans le tableau VN-41, outre les techniques attendues *IdR_ProdN* de la catégorie *Gfact* et *Discr* se présente la technique *Fact_ProdN*.

La forme canonique $ax^2+bx+c=0$ des équations données incite une grande partie des élèves (92,3%) à calculer directement les solutions en calculant le discriminant (*Discr*). Cette technique, qui repose sur les formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, est mobilisée de la même façon dans tous les exercices.

Type de tâche T5 Classe 10-O (42 élèves)		E5.1 $x^2+8x+16=0$		E5.2 $25x^2-90x+81=0$		E5.3 $2x^2+5x-7=0$		E5.4 $x^2-11x+24=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	1	0	1	0	4	2	1	0	7	2
	<i>IdR_CarN</i>	3	3	2	2					5	5
<i>Discr</i>		36	27	35	27	34	10	38	15	143	79
Totaux		40	30	38	29	38	12	39	15	155	86

Tableau VN-41

La technique *IdR_CarN* est peu mobilisée (7 cas) et seulement dans les deux premiers exercices. On rencontre aussi la présence négligeable de la technique *Fact_ProdN* (ou *Dec_Fact_ProdN*) dans tous les exercices de ce type de tâche.

b) *Techniques et technologies existantes en classe 10-S*

Selon le tableau VN-42, outre les techniques attendues *IdR_CarN* et *Discr*, on constate la présence des techniques *Fact_ProdN*, *Fact_IsV* et *IdR_ProdN* de la catégorie *Gfact*.

Comme en classe 10-O, la technique *Discr* est majoritaire (72%) parce que la plupart des élèves calculent directement les solutions des équations données en calculant le discriminant (*Discr*).

Quant aux techniques de factorisation, la technique d'utilisation des identités remarquables avec la règle d'annulation du carré (*IdR_CarN*), n'est mobilisée (17,3%) que dans les deux premiers exercices E5.1 et E5.2.

Type de tâche T5 Classe 10-S (44 élèves)		E5.1 $x^2+8x+16=0$		E5.2 $25x^2-90x+81=0$		E5.3 $2x^2+5x-7=0$		E5.4 $x^2-11x+24=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	1	1	1	1	7	5	7	7	16	14
	<i>Fact_IsV</i>					1				1	0
	<i>IdR_ProdN</i>					1	1			1	1
	<i>IdR_CarN</i>	16	15	13	12					29	27
<i>Discr</i>		26	22	26	20	35	24	34	25	121	91
Totaux		43	38	40	33	44	30	41	32	168	133

Tableau VN-42

Cependant, la technique *Fact_ProdN* (ou *Dec_Fact_ProdN*) est concentrée dans les derniers exercices E5.3 et E5.4. Elle se présente aussi dans les premiers exercices E5.1 et E5.2 dans lesquels le carré nul est considéré comme produit nul de deux facteurs identiques.

Par exemple, dans la résolution de l'exercice E5.1 :

$$x^2+8x+16=0$$

$$x^2+4x+4x+16=0$$

$$x(x+4)+4(x+4)=0$$

$$(x+4)(x+4)=0$$

$$x+4=0 \text{ ou } x+4=0.$$

c) *Analyse des résultats obtenus*

En classe 10-O

Malgré que la technique *Discr* est majoritaire, son utilisation est seulement réussie à 55,2%. Le taux de réussite dans les deux exercices E5.3 (29,4%) et E5.4 (39,5%) est beaucoup plus faible que dans les deux exercices E5.1 (75%) et E5.2 (77,1%). Cela s'explique par le fait que la formule des solutions dans le cas où le discriminant s'annule (dans E5.1 et E5.2) est plus simple et exige moins de calculs. De plus, dans le cas où le discriminant est un nombre positif (dans E5.3 et E5.4), et où l'équation a deux solutions, l'utilisation des opérateurs logiques ET et OU pour réunir ces deux solutions pose problème.

Les techniques de factorisation minoritaires (7,7%) de la catégorie *Gfact*, *Fact_ProdN* ont un taux de succès d'utilisation très faible (28,6%), s'expliquant par l'abus de la règle d'annulation des facteurs lors de la résolution de l'équation pseudo-produit nul $a \times b = c$ (c

non nul), quant à *IdR_CarN*, concentré dans les deux exercices E5.1 et E5.2, elle conduit à 100% de succès.

En classe 10-S

L'utilisation de la technique *Discr* atteint un taux de réussite plus fort (75,2%) qu'en classe 10-O.

L'identification des formes des identités remarquables et la résolution simple de l'équation de forme $P^2(x)=0$ permettent de parvenir au taux de succès 93,1% dans la mobilisation de la technique *IdR_CarN*.

La technique *Fact_ProdN* est moins mobilisée que les précédentes (9,5%) mais son utilisation atteint un taux de réussite important (87,5%).

En particulier, la technique *IdR_ProdN* est mobilisée uniquement dans l'exercice E5.3 et avec succès. Dans la première étape de cette technique, l'équation est ramenée à celle

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \text{ en ajoutant } \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \text{ aux deux membres de l'équation après}$$

avoir divisé les deux membres par le coefficient 'a' de x^2 , puis à l'équation produit nul.

Cette technique repose donc sur les éléments technologiques de θ_{v1} :

" $(A(x)+B(x))^2=A^2(x)+2A(x)\times B(x)+B^2(x)$ ", " $A^2(x)-B^2(x)=(A(x)-B(x))(A(x)+B(x))$ ", et

" $A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ ou $B(x)=0$ ".

Classe	10-O (42 élèves)					10-S (44 élèves)					
Type de tâche T5	Calcul Solutions	ECALD	ESIGN	EPRODF	ELOG	Calcul Solutions	ECALD	ESIGN			ELOG
			Signe Solutions					Factorisation	Signe Solution	Mouve Equ 1er	
<i>Fact_ProdN</i>				5				1		1	
<i>IdR_CarN</i>								1		1	
<i>Discr</i>	21	10	9		24	20	3		6		1
Totaux	21	10	9	5	24	20	3	2	6	2	1

Tableau VN-43

Puisque la technique d'utilisation du discriminant est majoritaire en classes 10-O et 10-S, les erreurs sont produites lors du calcul des solutions en utilisant les formules, du calcul du discriminant, de la détermination du signe et du rassemblement des solutions comme on le voit dans le tableau VN-43.

Les erreurs de calcul numérique des solutions, qui se présentent en nombre égal dans les deux classes 10-O et 10-S, proviennent majoritairement de l'utilisation des formules erronées $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$ ou $x_{1,2} = -b \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Au-delà de ces erreurs, il y a des erreurs produites lors des opérations algébriques.

Quant aux erreurs de signe des solutions, avec 9 cas en classe 10-O et 6 cas en classe 10-S, elles proviennent essentiellement de l'utilisation de la formule erronée $x_{1,2} = -\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$.

Les erreurs de calcul numérique lors du calcul du discriminant se rencontrent davantage en classe 10-O (10 cas) qu'en classe 10-S (3 cas).

L'utilisation d'opérateur logique ET au lieu OU lors de la réunion des solutions, qui annule l'équivalence entre deux étapes du raisonnement, se présente essentiellement en classe 10-O avec 24 cas.

Enfin, comme dans tous les autres types de tâche, l'application de la règle facteur nul lors de la résolution d'une équation "pseudo-produit nul" obtenue par factorisation des expressions ax^2+bx+c résiste en 10-O (5 cas) bien que moins fréquente qu'en 9-O.

II.5.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T5

a) Sur les techniques et technologies existantes

Type de tâche T5		9-O		10-O		9-S		10-S	
		%	R	%	R	%	R	%	R
Gfact	Fact_ProdN	63,1	26,4	4,5	28,6	49,5	83,5	9,5	87,5
	IdR_CarN+IdR_ProdN	28,6	87,5	3,2	100	50,5	96,8	17,9	93,3
	Fact_IsV	4,8	0					0,6	
Règles	Rac	2,4	0						
Gdév	IdR_Dév	1,2	0						
Discr				92,3	55,2			72	75,2
Totaux		100,1		100		100		100	

Tableau VN-44

La technique *IdR_CarN*, qui repose sur les éléments technologiques de θ_{v_1} : $(A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x)$ et " $A^2(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ", est mobilisée dans les deux niveaux de classe avec un taux fort de réussite (cf. tableau VN-44).

La technique *Fact_ProdN*, qui repose ici sur la détermination de deux nombres m et n tels que $m+n=b$ et $m \times n=a \times c$ pour ramener l'équation $ax^2+bx+c=0$ à $(ax+m)(x+\frac{n}{a})=0$, est

mobilisée dans toutes les classes, mais avec succès seulement en classes 9-S et 10-S.

La technique *Discr* est mobilisée seulement en classe 10 car le calcul des solutions de l'équation canonique $ax^2+bx+c=0$ par le calcul du discriminant n'a été introduit en classe 9 qu'après notre expérimentation.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

Entre 9-O et 9-S

On note une meilleure identification de la forme des identités remarquables $((A(x) \pm B(x))^2 = A^2(x) \pm 2A(x) \times B(x) + B^2(x))$ en classe 9-S via la répartition égale de deux techniques *Fact_ProdN* et *IdR_CarN*, techniques utilisées avec 98,4% de succès en classe 9-S.

Entre 10-O et 10-S

Les techniques de factorisation (*Fact_ProdN* et *IdR_ProdN*) sont plus mobilisées et avec davantage de succès en classe 10-S.

Entre 9 et 10

L'introduction institutionnelle du calcul du discriminant entraîne un changement de choix des techniques utilisées en classe 10 et une plus grande mobilisation de la technique *Discr*.

Le taux de réussite lors de l'utilisation des techniques de factorisation reste constant entre les classes 9 et 10.

Nous retrouvons :

- les erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre d'une technique valide : erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation de *Fact_ProdN* et *IdR_CarN* aux deux niveaux de classe, ou de *Discr* en classe 10,

- les erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

- problème de signe lors de la factorisation, du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré, et du calcul des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$

- erreurs de calcul lors du calcul du discriminant, ou des solutions en utilisant les

formules erronées $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$ ou $x_{1,2} = -b \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

- erreur de logique dans la réunion des solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$

- erreurs de factorisation dans la mise en produit de deux polynômes

utilisation abusive de la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " dans la résolution de l'équation "pseudo-produit nul " $A(x) \times B(x) = c$ avec c constant non nul".

III. SYNTHESE

III.1. Synthèse de l'analyse des techniques mobilisées par les élèves et des technologies qui les engendrent

III.1.1. Classe 9-O

Les règles de factorisation du calcul algébrique ne semblent pas appropriées par les élèves de cette classe. Le développement est donc utilisé comme première étape dans la résolution des équations du second degré.

Les variables choisies dans l'analyse a priori, l'invisibilité du facteur commun, la commutation du signe dans les carrés, la position inhabituelle des carrés dans la différence $a^2 - b^2$, la présence d'une constante devant un carré, etc. ont un fort impact sur le choix des techniques dans cette classe.

L'appropriation faible de l'élément technologique " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " et de son usage incitent les élèves de la classe 9-O à réarranger toutes les équations selon une technique qui se décompose les étapes suivantes :

- développer tous les produits de deux binômes,
- ramener l'expression à celle canonique du second degré,
- re-factoriser cette expression.

Cette technique, que nous avons appelée *Dév_Fact_ProdN*, ou *Dec_Fact_ProdN* qui est explicitement enseignée au Vietnam comme nous l'avons vu dans l'analyse des manuels, contient de nombreux risques d'échec, car d'une part, elle ne réussit que dans des conditions particulières, d'autre part car elle exige une certaine virtuosité numérique à chaque étape.

Certains élèves s'arrêtent après la première étape lors du développement, ou tentent de diminuer le degré de l'équation par la prise de la racine carrée sur les deux membres de l'équation après isolation de x^2 dans un membre, sans vérifier si la condition d'existence de la racine est vérifiée, ou encore essaient d'isoler l'inconnue x dans un membre de l'équation et calculent x en fonction d'une fraction contenant l'inconnue au dénominateur.

L'élément technologique " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ", utilisé par de nombreux élèves, engendre une technique dérivée de *ProdN*, appliquée pour trouver les solutions dans ce cas.

Dans le cas où la technique *Fact_ProdN* est utilisée, sa qualité n'est pas bonne, notamment à cause soit du non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre, soit d'une erreur de signe ou/et de calcul dans la factorisation ou la résolution des équations du premier degré, soit encore de l'utilisation de l'élément technologique : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ ".

Quant à la prise de la racine carrée, dans laquelle il y a confusion entre la définition de la racine positive d'un nombre positif et les deux solutions de l'équation $x^2 = k$ ($k > 0$), elle repose sur l'utilisation de l'élément technologique : " $\sqrt{a^2} = a$ ".

Enfin quelques élèves abandonnent le travail juste après avoir vu que les équations sont du second degré.

III.1.2. Classe 9-S

A la différence de la classe 9-O, l'appropriation et la compréhension de l'usage de la règle " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ", la reconnaissance du facteur commun et des identités remarquables, conduisent les élèves au choix de techniques de factorisation avec un taux de réussite meilleur que dans la classe précédente.

De plus, la technique *EgaCar*, qui est justifiée par l'élément technologique " $A(x)^2 = B(x)^2 \Leftrightarrow A(x) = B(x)$ ou $A(x) = -B(x)$ ", utilisée surtout pour le type de tâche T4 apporte un taux de succès important.

Pourtant, la technique composée *Dév_Fact_ProdN* est encore présente chez certains élèves, comme une « seconde technique », dans le cas où ne se retrouvent pas les formes habituelles. Le non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre se retrouve encore dans la factorisation.

Comme en classe 9-O, l'utilisation de l'élément technologique : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ " est toujours présente.

De même, la technique *Fact_ProdN* est mobilisée fréquemment lors de la résolution des équations canoniques $ax^2 + bx + c = 0$ du type de tâche T5, mais cette mobilisation est plus réussie qu'en 9-S. D'abord l'équation est ramenée à $P(x) \times Q(x) = 0$, puis à la résolution de deux équations de degré 1 : $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$.

La mise de l'expression $ax^2 + bx + c$ en produit de deux binômes $P(x)$ et $Q(x)$ se fait par la détermination de deux nombres m et n tels que $m+n=b$ et $m \times n = a \times c$.

Bien que la technique de la prise de la racine carrée soit utilisée pour l'équation $x^2 = k$ ($k > 0$) et aussi pour l'équation $P^2(x) = Q^2(x)$, on retrouve, comme en classe 9-O, l'utilisation de l'élément technologique : " $\sqrt{a^2} = a$ ".

A la différence de la classe 9-O, tous les exercices sont traités jusqu'au bout.

III.1.3. Classe 10-O

L'introduction du discriminant en classe 9 a un grand impact sur les choix des techniques lors de la résolution d'une équation du second degré.

Tout se passe comme si la résolution d'une équation du second degré par calcul du discriminant était considérée comme une technique plus sûre (« plus rapide » et « plus efficace ») par les élèves de cette classe, même lorsque l'équation se présente sous la forme d'un produit nul (le type T1), ou même sous une forme d'une identité remarquable $a^2-b^2=0$ (le type T4).

Malgré la présence minoritaire des techniques de factorisation (*Fact_ProdN*, *Dév_Fact_ProdN* et *IdR_ProdN*) dans les quatre premiers types de tâche, le taux réussite de la mobilisation de ces techniques est toujours beaucoup plus fort que celui de la technique de développement.

Bien que l'entraînement à la factorisation d'un trinôme fasse partie de l'enseignement dans les classes au début de collège, l'insuffisance des pratiques de résolution de l'équation produit nul et de la mise en équation produit nul des équations dans lesquelles un facteur commun est apparent, la non-appropriation de la pertinence et de l'efficacité des techniques de factorisation, conduisent les élèves à mobiliser la technique *Dév_Discr* de façon routinière.

Les élèves de cette classe rencontrent des problèmes de calcul et de signe lors du développement, du calcul du discriminant et du calcul des solutions par les formules. Comme la classe 9-O, ils utilisent les éléments technologiques : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ " et " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

III.1.4. Classe 10-S

En comparaison avec la classe 10-O, on constate une augmentation des techniques de factorisation dans tous les types de tâches avec un taux de succès supérieur, mais le taux de présence de ces techniques ne dépasse jamais celui des techniques *Dév_Discr* et *Discr*.

Inversement, le taux de réussite des techniques *Dév_Discr* et *Discr* est moindre que celui des techniques de factorisation.

La présence de la technique composée *Dév_Fact_ProdN* montre l'impact du choix de la variable didactique dans l'analyse a priori. Cependant, on ne rencontre pas dans cette classe l'élément technologique " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ".

Comme en classe 10-O, la technique *Fact_ProdN* est très peu mobilisée lors de la résolution des équations canoniques $ax^2+bx+c=0$ du type de tâche T5, mais cette mobilisation est plus réussie en classe 10-S. D'abord l'équation est ramenée à celle $P(x) \times Q(x) = 0$, puis la résolution de deux équations de degré 1 : $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$. La mise de l'expression ax^2+bx+c en produit de deux binômes $P(x)$ et $Q(x)$ se fait par la détermination de deux nombres m et n tels que $m+n=b$ et $m \times n = a \times c$. On constate que cette

technique, apprise en classe, est mobilisée avec succès en 10-S avec un taux de réussite autour de 85%.

Comme en classe 10-O, bien qu'en proportion moindre, les élèves de cette classe rencontrent des problèmes de calcul et de signe lors du développement, du calcul des solutions par les formules définitives, et du calcul du discriminant.

Il faut enfin noter la persistance de l'utilisation de l'élément technologique : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ lors de l'énoncé des solutions des équations facteur nul ou des équations canoniques du second degré.

III.2. Evolution des techniques majoritaires entre les classes 9 et 10

Nous nous centrons sur l'évolution entre les classes 9 et 10 des techniques qui se présentent de façon significative chez les élèves. Dans le tableau VN-45, nous avons reporté pour chaque classe les couples (tâche, technique) en indiquant les pourcentages de mobilisation et de réussite.

Techniques attendues	9-O	10-O	9-S	10-S
<i>CarN</i> <i>ProdN</i>	(T1, <i>Dév_Fact_ProdN</i>) : 32,6% - 7,1% (T1, <i>ProdN</i>) : 27,9% - 33,3% (T1, <i>Dév</i>) : 25,6% - 0%	(T1, <i>Dév_Discr</i>) : 80% - 43,8% (T1, <i>ProdN</i>) : 11,3% - 55,6%	(T1, <i>ProdN</i> , <i>CarN</i>) : 46,7% - 81,4% 46,7% - 97,7%	(T1, <i>Dév_Discr</i>) : 47,1% - 55% (T1, <i>ProdN</i>) : 27,1% - 82,6% (T1, <i>CarN</i>) : 24,7% - 85,7%
<i>Fact_ProdN</i>	(T2, <i>Dév_Fact_ProdN</i>) : 39,4%-17,9% (T2, <i>Fact_ProdN</i>) : 31% : 36,4% (T2, <i>Dév</i>) : 26% - 0%	(T2, <i>Dév_Discr</i>) : 86,9% - 17,9%	(T2, <i>Fact_ProdN</i>) : 77%-75% (T2, <i>Dév_Fact_ProdN</i>) : 15,4% - 70%	(T2, <i>Dév_Discr</i>) : 65,4% - 47,1% (T2, <i>Fact_ProdN</i>) : 24,2%-80%
<i>Fact_ProdN</i>	(T3, <i>Dév_Fact_ProdN</i>) : 59%-15,2% (T3, <i>Fact_ProdN</i>) : 24,4%-21,1%	(T3, <i>Dév_Discr</i>) : 96,8% - 25,5%	(T3, <i>Fact_ProdN</i>) : 83,4%-69,5% <i>Dév_Fact_ProdN</i>) : 11,6% - 52,4%	(T3, <i>Dév_Discr</i>) : 77,2% - 54,3% (T3, <i>Fact_ProdN</i>) : 18,7%-61,3%
<i>IdR_ProdN</i> <i>Rac</i>	(T4, <i>IdR_ProdN</i>) : 43,6%-18,2% (T4, <i>Dév</i>) : 29,7% - 0%	(T4, <i>Dév_Discr</i>) : 71,2% - 10,6% (T4, <i>Rac</i>) : 17,7% - 48,6%	(T4, <i>IdR_ProdN</i>) : 65,9%-74,8% (T4, <i>Rac</i>) : 23,6%-48,1%	(T4, <i>Dév_Discr</i>) : 51% - 34,6% (T4, <i>IdR_ProdN</i>) : 26,7%-87,5% (T4, <i>Rac</i>) : 20% - 83,3%
<i>IdR_ProdN</i> <i>Discr</i>	(T5, <i>Fact_ProdN</i>) : 63,1% - 26,4% (T5, <i>IdR_CarN</i>) :	(T5, <i>Discr</i>) : 92,3% - 55,2%	(T5, <i>Fact_ProdN</i>) : 49,5% - 83,5% (T5, <i>IdR_CarN</i>) :	(T5, <i>Discr</i>) : 72% - 75,2% (T5, <i>IdR_CarN</i>) :

	27,4%-87%		48,9%-98,9%	17,3%-93,1%
--	-----------	--	-------------	-------------

Tableau VN-45

Evolution 9-O / 10-O

En classe 9-O, nous constatons la mobilisation de plusieurs techniques par type de tâche. La technique mobilisée majoritairement pour un type de tâche n'est pas en général celle attendue dans l'analyse a priori. On peut dire que le choix de la technique n'est pas toujours le mieux approprié pour le type de tâche (cf. T1, T2 et T3). De plus, le taux de réussite est souvent faible.

En classe 10-O, nous constatons que les élèves mobilisent systématiquement la même technique à savoir Dév-Discr pour tous les types de tâche.

Evolution 9-S / 10-S

En classe 9-S, les techniques mobilisées majoritairement pour chaque type de tâche correspondent à celles de l'analyse a priori, avec un meilleur taux de réussite.

En classe 10-S, nous constatons la mobilisation de plusieurs techniques par type de tâche. La technique mobilisée majoritairement pour un type de tâche n'est pas en général celle attendue dans l'analyse a priori. On peut dire que le choix de la technique n'est pas toujours le mieux approprié pour le type de tâche (cf. T1, T2, T3 et T4). La technique mobilisée majoritairement pour tous les types de tâche est Dév-Discr.

Globalement, les techniques de factorisation sont plus mobilisées dans la classe 9 qu'en classe 10 : en classe 9-O, elles sont mobilisées avec 39% de plus qu'en classe 10-O, et en classe 9-S avec 49% de plus qu'en classe 10-S. Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{v_1} :

propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$A(x)[B(x)+C(x)]=A(x)\times B(x)+A(x)\times C(x)"]$$

les identités remarquables $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$

et la propriété d'intégrité " $A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ ou $B(x)=0$ ".

Ces éléments technologiques sont vérifiés dans l'anneau des polynômes à une variable.

Nous constatons que la mobilisation des techniques *Gfact* et *Règles* est plus réussie dans les classe 9-S et 10-S. On peut donc faire l'hypothèse qu'il y a une meilleure appropriation de la technologie θ_{v_1} en S qu'en O.

L'enseignement du calcul du discriminant a un impact dans le choix des techniques chez élèves de la classe 10 : les techniques *Dév_Discr* et *Discr* sont utilisées majoritairement. Elles reposent sur les éléments technologiques suivants :

propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$"[A(x)+B(x)][C(x)+D(x)]=A(x)\times C(x)+A(x)\times D(x)+B(x)C(x)+B(x)D(x)"$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\text{les formules des solutions définitives } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

III.3. Synthèse de l'analyse des erreurs

Si nous avons mis l'accent, dans les paragraphes précédents, sur certains des éléments technologiques dont on peut penser qu'ils sont utilisés par les élèves, c'est parce que nombreuses sont les erreurs dont nous avons relevé la persistance dans les classes qui ne proviennent pas des techniques mobilisées, mais bien plutôt d'une appropriation partielle ou absente des éléments technologiques enseignés.

Au-delà des erreurs de calcul ou de signe qui affectent la qualité de la mise en œuvre d'une technique valide (qu'il s'agisse de techniques *Gfact*, *Gdév*, *Règles* ou *Mixtes*) amplement explicitées lors de l'analyse de chaque type de tâche, nous retiendrons seulement ici les catégories d'erreurs qui nous paraissent les plus intéressantes à analyser.

- Mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide, mais non adéquate compte tenu du rapport institutionnel à l'objet d'étude : par exemple, techniques *Gdév* non adéquates en début de classe 9 que les élèves vont essayer de transformer en technique mixte (*Dév-Fact-ProdN*)

- Qualité de la technique elle-même : utilisation « abusive » de techniques valides seulement sur un champ plus restreint, telles *Simp* et de *IsV* (*Fact_IsV* et *Dév_IsV*), valides dans le cas de la résolution des équations du 1^{er} degré.

- Non-maîtrise d'éléments technologiques engendrant les techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées dans la mise en œuvre d'une technique valide :

- non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre ou de certaines identités remarquables, ou des formules du discriminant et/ou des solutions
- utilisation de l'élément technologique : " $A(x)\times B(x)=c \Leftrightarrow A(x)=0$ ou $B(x)=0$ " pour la résolution d'équation "pseudo-produit nul",
- utilisation de l'élément technologique : " $\sqrt{a^2} = a$ " lors de la prise de la racine carrée d'un carré,

- utilisation de l'élément technologique : " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ " lors du rassemblement des solutions d'une équation du second degré.

Ces erreurs sont à nos yeux des symptômes de problèmes lors de la fabrication du rapport institutionnel de départ, ces problèmes ne relevant pas seulement des techniques, mais des praxéologies dans leur ensemble.

III.4. Conclusion

Nous avons, dans la partie B analysé comment s'est établi le rapport institutionnel dans V à l'objet « résolution des équations du second degré », rapport analysé en termes de praxéologies régionales.

L'étude de ce chapitre nous a permis

- d'identifier différents rapports institutionnels en position d'élève à cet objet (à partir de l'analyse des travaux des élèves)
- d'observer, chez de nombreux élèves de V, et notamment ceux des classes ordinaires, des écarts à la norme que constitue le rapport institutionnel.

La synthèse ci-dessus nous montre qu'il n'y a conformité entre les techniques attendues et celles existantes que chez les élèves vietnamiens de classe 9-S.

Dans les autres classes, les élèves n'adaptent pas le choix d'une technique en fonction du type de tâche (cf. classes 9-0, 10-O et 10-S) :

- En classe 9, avant l'introduction du discriminant, on a constaté que les élèves ne choisissent pas d'une manière adéquate la technique pour chacun des types de tâches. Nous l'expliquons par le fait que l'institution passe peu de temps sur la résolution des équations du second degré avec les techniques de la catégorie Gfact et Règles. (cf. paragraphe I.1 du chap. B.3).
- En classe 10, la technique du discriminant, introduite en classe 9, devient la technique privilégiée des élèves pour tous les types de tâches. Cela peut s'expliquer par les choix institutionnels de privilégier le type de tâche T5 par la technique du discriminant dès la classe 9 (cf. paragraphe I.1 du chap. B.3).

CHAPITRE C4 : ANALYSE DE L'EXPERIMENTATION DANS L'INSTITUTION F

I. RESULTAT GLOBAUX

I.1. Résultats de la classe de 2°

Seconde (25 élèves)							
Résolution par les techniques	Réussie	Échouée		% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total
		Terminée	Interrompue				
Total <i>Gfact</i>	155	110	18	71,8	54,8	45,2	6,4
Total <i>Règles</i>	46	31	7	21,3	54,8	45,2	8,3
Total <i>Gdév</i>	0	6	21	6,9	0	100	77,8
Totaux	201	147	46	100	51	49	11,7

Tableau F-1

D'après l'analyse a priori, les praxéologies attendues en classe de Seconde sont celles qui mobilisent les techniques *Gfact* et *Règles* (notamment dans le cas où l'expression est déjà factorisée ou se présente sous la forme d'un carré ou d'une identité remarquable).

Conformément à cette analyse, les techniques effectivement mobilisées dans la classe de 2^{de} de notre expérimentation sont, pour 93,1%, de type *Gfact* et *Règles* (cf. Tableau F-1)

Les autres techniques mobilisées sont celles de développement qui aboutissent à l'interruption de la résolution, car les élèves n'ont pas encore appris la méthode du discriminant.

Nous pouvons donc déjà affirmer que les élèves de cette classe de Seconde ont, dans la majorité des cas, un rapport personnel à la résolution des équations du second degré conforme au rapport institutionnel en France.

I.2. Résultats de la classe de 1°S

Première S (24 élèves)							
Résolution par les techniques	Réussie	Échouée		% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total
		Terminée	Interrompue				
Total <i>Gfact</i>	123	65	0	46,7	65,4	34,6	0
Total <i>Règles</i>	49	12	0	15,1	80,3	19,7	0
Total <i>Gdév</i>	29	31	36	23,8	30,2	69,8	37,5
Total <i>Discr</i>	36	21	0	14,1	63,2	36,8	0
Total <i>Mixtes</i>	1	0	0	0,2	100	0	0
Totaux	238	129	36	100	59,1	40,9	8,9

Tableau F-2

Notre expérimentation en classe de 1^e s'est déroulée au début du Juin 2006 après l'introduction de la résolution des équations du second degré sous forme canonique ($ax^2+bx+c=0$) par calcul du discriminant. Après l'apprentissage du discriminant, les élèves disposent d'une nouvelle d'une technique de résolution, que l'on note *Discr*.

Les praxéologies attendues en classe de 1^e sont, conformément à notre analyse a priori, celles qui induisent, selon les sous-types de tâche, les techniques *Gfact* et *Règles*, ou les techniques *Gdév* et *Discr*.

Le tableau ci-dessus nous montre que les techniques majoritaires restent celles de factorisation ou d'utilisation des règles avec 61,8% par rapport à celles de développement ou de calcul direct du discriminant avec 37,9% et à un nombre négligeable des techniques mixtes (cf. Tableau F-2).

I.3. Evolution des techniques mobilisées et des résultats obtenus lors du passage de la Seconde à la Première

On s'intéresse ici à l'évolution des techniques dans le traitement des types de tâche par les élèves de classe de 2^e et ceux de classe de 1^e.

Le passage de 2^e en 1^eS, dont il faut noter qu'il s'accompagne d'une sélection des élèves, montre d'abord une diminution de techniques de factorisation au profit des techniques de développement avec utilisation du discriminant (cf. Tableau F-3).

Techniques	Seconde		Première	
	%	Réussie	%	Réussie
<i>Gfact-Règles</i>	93,1	54,8	61,8	69,1
<i>Gdev-Discr</i>	6,9	0	37,9	42,5
<i>Mixtes</i>	0	0	0,2	100

Tableau F-3

Si on s'intéresse ensuite aux résultats obtenus par mobilisation des techniques, on remarque que les techniques de factorisation sont mieux maîtrisées en 1°S qu'en 2° et conduisent davantage à une résolution exacte que celles de développement. De plus, le tableau F-2 montre que les techniques de développement sont les seules techniques pour lesquelles on trouve encore, en 1°, 37,5% de résolutions interrompues.

II. ANALYSE DES PRAXÉOLOGIES EXISTANTES

Rappelons que les praxéologies enseignées en France pour le type de tâche T sont :

(θ_{f_1}, Θ_F) où les éléments technologiques sont les « Règles du calcul algébrique » dans

l'ensemble R, en particulier la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble R et les identités remarquables, ainsi que la propriété de la multiplication dans R : « $a \times b = 0$ équivaut à : $a = 0$ ou $b = 0$ » ;

(θ_{f_2}, Θ_F) où les éléments technologiques sont la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré et les règles de calcul du discriminant et des solutions selon le signe du discriminant.

La théorie sous-jacente Θ_F reposant dans les deux cas sur les propriétés de l'anneau factoriel $(R, +, \times)$.

Bien que nous nous intéressions à la comparaison des praxéologies existantes aux praxéologies enseignées (déterminées dans la partie B), les données recueillies ne nous donnent accès qu'aux techniques mises en œuvre par les élèves ainsi qu'aux éléments technologiques qui les justifient.

Dans un premier temps, celui de la présentation des résultats, n'apparaîtront donc, notamment dans les tableaux qui les synthétisent, que les techniques observées et le nombre des cas de non- réponse.

II.1. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T1

II.1.1. Cas de la classe de 2°

Selon l'analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classe de 2° sont celles d'annulation du produit des facteurs (*ProdN*) ou du carré (*CarN*). Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} : " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ " et " $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ".

a) Techniques et technologies existantes en classe de 2°

Comme on le constate dans le tableau F-4 suivant, outre les techniques *CarN* et *ProdN* attendues, apparaissent des techniques de la catégorie *Gdév*.

Les techniques attendues d'utilisation des règles (*ProdN* et *CarN*) sont effectivement majoritairement mobilisées dans les exercices E1.1 (95,7%) et E1.2 (83,3%). On peut remarquer que la proportion de succès par la mobilisation de ces techniques est équivalente pour E1.1 (19/22) et E1.2 (19/20).

Type de tâche T1 Classe Seconde (25 élèves)		E1.1 $(-2x+5)^2=0$		E1.2 $(-5x+1)(3x-7)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	8	6	20	19	28	25
	<i>CarN</i>	14	13			14	13
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>	1	0	4	0	5	0
Totaux		23	19	24	19	47	38

Tableau F-4

La résolution de l'équation de type $P(x) \times Q(x) = 0$ (E1.2), et de celle de type $P^2(x) = 0$ (E1.1) dans 8 cas, repose sur l'élément technologique " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ " ramenée pour E1.1 à la forme " $a = 0$ ou $a = 0$ ", et, dans 14 cas pour E1.1, sur l'élément technologique " $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ".

Les praxéologies existantes correspondent donc, pour ce type de tâche, aux praxéologies enseignées.

b) Analyse des résultats obtenus

On constate d'abord, comme prévisible puisque la technologie permettant le calcul des solutions par la technique *Discr* n'est pas enseignée en 2°, que la mobilisation de *Dév* (5 cas) conduit, dans les deux exercices, à une interruption de la résolution après obtention d'équations du second degré développées.

Seconde (25 élèves)		
Type de tâche T1	ESIGN	EFAC
<i>CarN</i>	1	
<i>ProdN</i>	1	2
Totaux	2	2

Tableau F-5

Quant aux techniques *Règles*, elles aboutissent majoritairement à des résolutions exactes : 19 fois sur 22 pour E1.1 et 19 fois sur 20 pour E1.2.

Selon le tableau F-5, les erreurs rencontrées sont :

deux erreurs de factorisation dans E1.1 : le carré $(-2x+5)^2$ est décomposé de la somme de deux expressions $(-2x+5)$ et $(2x+5)$, ou $(-2x+5)$ et $(-2x-5)$.

deux erreurs de signe lors du mouvement, dans la résolution des équations du premier degré

II.1.2.Cas de la classe de 1°

Selon l'analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classe de 1° sont *ProdN* ou *CarN*, ou *Dév_Discr*. Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} et de θ_{f_2} :

les règles " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ " et " $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ",

mais aussi le calcul du discriminant et les formules des solutions.

a) *Techniques et technologies existantes en 1°*

Comme on le constate dans le tableau F-6 suivant, les techniques attendues *ProdN*, *CarN* et *Dév_Discr* sont bien celles qui existent dans la classe étudiée.

On peut remarquer que, malgré l'enseignement dans cette classe de la technique du discriminant, la technique d'annulation du carré (*CarN*) et celle du produit (*ProdN*) restent utilisées majoritairement (81,3%) dans les deux exercices de ce type de tâche.

Type de tâche T1 Classe Première (24 élèves)		E1.1 $(-2x+5)^2=0$		E1.2 $(-5x+1)(3x-7)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	3	3	19	16	22	19
	<i>CarN</i>	17	16			17	16
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Discr</i>	4	1	5	2	9	3
Totaux		24	20	24	18	48	38

Tableau F-6

La première étape de la technique *Dév_Discr*, quand elle est utilisée, repose, pour l'exercice E1.1, sur l'élément technologique : $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, et, pour l'exercice E1.2, sur l'élément technologique : $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$. Dans les deux cas, la deuxième étape de cette technique, calcul des solutions d'équation du second degré, repose sur l'utilisation des formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

b) Analyse des résultats obtenus

Dans les deux exercices, on remarque d'abord que les techniques de factorisation, qui sont les moins coûteuses pour la résolution du type de tâche T1, conduisent davantage à une résolution exacte que celle de développement suivi du calcul du discriminant (*Dév_Discr*) : 19 fois sur 20 versus 1 fois sur 4 pour E1.1 et 16 fois sur 19 versus 2 fois sur 5 pour E1.2.

En particulier, dans l'exercice E1.1, l'utilisation de la technique *ProdN* aboutit à une résolution exacte dans les 3 cas où l'équation $P^2(x)=0$ est résolue en passant par la résolution de deux équations identiques $P(x)=0$.

Comme on le voit dans le tableau F-7, les erreurs se rencontrent majoritairement (6 cas) lors de la mise en œuvre de la technique *Dév_Discr*. Ce sont des erreurs de signe (4 cas) et de calcul du discriminant. On les trouve surtout lors du développement du carré dans E1.1 et du produit dans E1.2. Par exemple : $(-a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Les erreurs de signe se rencontrent également lors de la résolution des équations de degré 1 après utilisation des techniques de *Règles* sur les équations départ.

Première (24 élèves)							
Type de tâche T1	Interrompue	ECALD	ESIGN			ELOG	EOPM
			Développement	Mouve Equ 1er	Calcul des solutions		
<i>CarN</i>				1			1
<i>ProdN</i>				1		2	
<i>Dév_Discr</i>	1	1	3		1		
Totaux	1	1	3	2	1	2	1

Tableau F-7

Quant à l'erreur de calcul, elle intervient lors du calcul du discriminant dans la deuxième étape de la technique *Dév_Discr*.

La confusion d'utilisation de l'opérateur logique ET au lieu de OU conduit à deux cas d'erreurs lors de la mobilisation de la technique *ProdN* dans l'exercice E1.2 : " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ OU $b = 0$ ".

Enfin, on rencontre une erreur de signification opérationnelle (EOPM) lors du mouvement du coefficient de l'inconnue x dans l'utilisation de la règle " $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$ " lors de la résolution de l'équation $a^2 = 0$ dans E1.1.

II.1.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T1

a) Sur les techniques et technologies existantes

Type de tâche T1		Seconde		Première	
		%	Réussie	%	Réussie
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	59,6	89,3	45,8	86,4
	<i>CarN</i>	29,8	92,9	35,4	94,1
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>	10,6	0		
	<i>Dév_Discr</i>			18,8	33,3
Totaux		100		100	

Tableau F-8

Globalement, les techniques les plus mobilisées dans les deux classes sont celles de la catégorie *Règles* (cf. Tableau F-8). Néanmoins, les techniques de la catégorie *Gdév* :

apparaissent dès la classe de 2° sous la forme *Dév* bien que cette technique soit inadéquate dans cette classe : nous expliquons ce phénomène par le but de se ramener, après réduction, à une équation de degré 1 dont la technique de résolution est connue des élèves. Cette technique conduit à une interruption de la résolution dès l'obtention de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

se présentent en classe de 1° sous la forme *Dév_Discr* : cette évolution s'explique par l'évolution du contrat institutionnel, avec la présence en classe de 1° de la praxéologie permettant la résolution des équations du second degré par le calcul du discriminant.

On constate de plus qu'en classe de 1°, dans l'utilisation des techniques de la catégorie *Règles*, la technique *CarN* est davantage mobilisée et réussie qu'en classe de 2°. Ce résultat peut sans doute s'expliquer par une meilleure capacité des élèves de 1°S que de ceux de 2° de maîtriser la forme de l'équation $a^2=0$ et de gérer le choix de la technique de résolution la plus adéquate.

b) Sur les résultats obtenus et les erreurs rencontrées

Si les techniques de *Règles* conduisent, dans les deux classes, majoritairement les élèves à une résolution exacte des équations proposées, ce n'est pas le cas de *Dév-Discr* en classe de 1° (3 résultats exacts sur 9).

Les erreurs principales rencontrées sont liées à l'utilisation de la technique *ProdN* et de *Dév_Discr* (cf. Tableau F-9). Ce sont des erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre de ces deux techniques, ce qui nous amène à classer comme suit les erreurs rencontrées :

- Erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre de ces techniques mises en œuvre : erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation de *ProdN* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Discr* en classe 1°.

- Erreurs due à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

- problème de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré,
- confusion dans les identités remarquables,
- erreur de logique lors de l'application de la règle d'annulation d'un produit de deux expressions algébriques.

Classe	Seconde (25 élèves)				Première (24 élèves)					
Type de tâche T1	Interrompue	ECAL	ESIGN	EFAC	Interrompue	ECALD	ESIGN		Calcul des solutions	ELOG
		Développement	Mouve Equ 1er				Développement	Mouve Equ 1er		
<i>CarN</i>			1					1		
<i>ProdN</i>			1	2				1		2
<i>Dév</i>	4	1								
<i>Dév_Discr</i>					1	1	3		1	
Totaux	4	1	2	2	1	1	3	2	1	2

Tableau F-9

II.2. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T2

II.2.1. Cas de la classe 2°

Comme indiqué dans notre analyse a priori, la technique attendue pour ce type de tâche en classe de 2° est *Fact_ProdN* qui est composée en deux étapes : mise en facteurs et annulation des facteurs. Cette technique repose sur les éléments technologiques de θ_{f_1} :

la propriété de distributivité simple " $ab+ac=a(b+c)$ " ou " $ab-ac=a(b-c)$ "

la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ".

a) Techniques et technologies existantes en classe 2°

Selon le tableau F-10, outre la technique attendue *Fact_ProdN*, on constate la présence des techniques de la catégorie *Gdév* et *Règles*.

Dans le traitement des exercices de ce type de tâche, technique *Fact_ProdN* se reposant sur les éléments technologiques de θ_{f_1} : " $ab \pm ac = a(b \pm c)$ " et " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ " est

mobilisée essentiellement avec $\frac{58}{72}$, soit 80,6%. Elle est moins importante dans l'exercice

E2.1 (16 élèves) que dans E2.2 (21 élèves) et surtout que dans E2.3 (21 élèves). Nous expliquons cette différence par la différence de la valeur de la variable concernant l'évidence du facteur commun : contrairement au cas des deux autres exercices, dans E2.1 le facteur commun n'est pas visible perceptivement en raison de l'absence des parenthèses.

Type de tâche T2 Classe Seconde (25 élèves)		E2.1 $(3-x)(x+2)+x+2=0$		E2.2 $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$		E2.3 $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	16	9	21	13	21	11	58	33
<i>Gdev</i>	<i>Dév</i>	4		3		1		8	0
	<i>Dév_Rac</i>	1				1		2	0
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	1		1				2	0
	<i>Simp</i>					2		2	0
Totaux		22	9	25	13	25	11	72	33

Tableau F-10

La technique *Fact_ProdN* représente 72,7% (16/22) des techniques mobilisées dans l'exercice E2.1, 84% (21/25) dans E2.2 et E2.3. La moyenne de réussite de la mobilisation de cette technique pour les trois exercices est de 57%. La réussite est plus importante pour l'exercice E2.2 et moins pour E2.3.

b) Analyse des résultats obtenus

L'utilisation de la technique de développement *Dév* conduit à une interruption (8 cas) lors de l'obtention d'une équation de second degré car les élèves de la classe de 2° ne sont pas munis la technique de discriminant.

Certains élèves utilisent la prise de la racine carrée des deux membres de l'équation obtenue après le développement des expressions (*Dév_Rac*) dans l'équation donnée, l'équation obtenue étant de la forme $x^2=k$ ($k>0$), après des calculs erronés lors du développement et de la réduction (cf. Figure 1).

Aplusic - ()_ administrateur : nguyenaquoc

Echier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 3/6 Score : 0/10 Arrêt observation

$(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1)$ Résoudre

$10x^2 - 4 = -5x^2 + 4$

$10x^2 + 5x^2 = 4 + 4$

$15x^2 = 8$

$15x^2 = 8$

$x^2 = \frac{8}{15}$

$x = \sqrt{\frac{8}{15}}$ Résolu

Etat : Ok

Figure 1 : Exemple d'utilisation de la technique *Dév_Rac* de l'élève 9 de la classe 2^o

On rencontre aussi des cas d'utilisation abusive de la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ " sur une somme des termes (*ProdN*) sans respect la priorité de la multiplication par rapport à l'addition (cf. Figure 2).

Aplusic - ()_ administrateur : nguyenaquoc

Echier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 2/9 Score : 3/10 Arrêt observation

$(3-x)(x+2) + x+2 = 0$ Résoudre

$(3-x) = 0$ ou $(x+2) + x+2 = 0$

$3-x = 0$ ou $x+2+x+2 = 0$

$-x = -3$ ou $2x+4 = 0$

$x = 3$ ou $2x = -4$

$x = 3$ ou $x = -\frac{4}{2}$ Résolu

Etat : Ok

Figure 2 : Exemple d'utilisation de la technique *ProdN* de l'élève 16 de la classe 2^o

Quant à la technique *Fact_ProdN*, elle conduit à une résolution correcte avec un taux moyen de réussite 57%.

La position du facteur commun est de part et d'autre du signe égal induit dans 2 cas la simplification (*Simp*) de ce facteur dans la résolution de l'exercice E2.3 (cf. Figure 3).

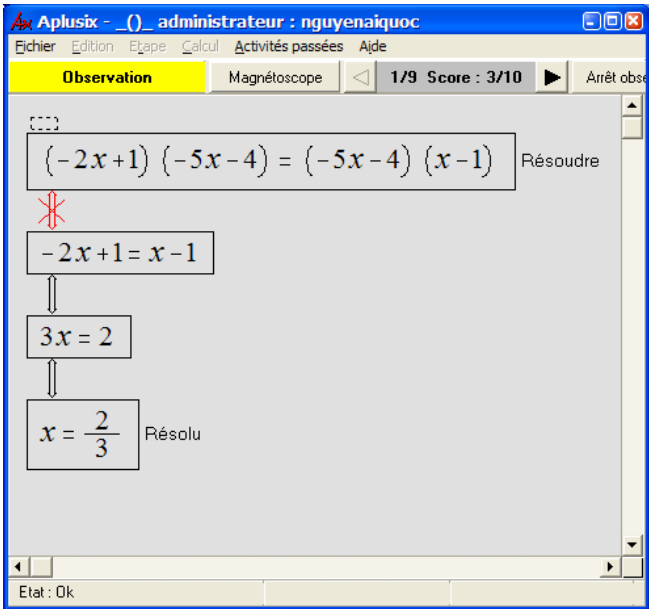


Figure 3 : Exemple d'utilisation de la technique *Simp* de l'élève 12 de la classe 2°

Puisque la technique *Fact_ProdN* (factorisation et annulation des facteurs) est utilisée essentiellement pour ce type de tâche, la plupart des erreurs est liée à cette technique (cf. Tableau F-11).

Seconde (25 élèves)							
Type de tâche T2	ECAL		ESIGN			EFAC	EOPM
	Réduction	Solutions	Enlèvement des parenthèses	Passage dans l'autre membre	Mouve Equ 1er		
<i>Fact_ProdN</i>	3	1	3	3	10	4	1

Tableau F-11

Les erreurs rencontrées sont :

- 10 erreurs de signe produites lors du mouvement des termes lors de la résolution des équations de degré 1, par exemple : $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=b$, ou $ax=b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. D'autres erreurs

sont produites lors du passage d'un terme dans l'autre membre de l'équation (3 cas) dans l'exercice E2.3 ou lors de l'enlèvement des parenthèses des expressions intérieures des facteurs de l'équation $P(x) \times Q(x) = 0$ (3 cas) obtenues par factorisation.

- 3 erreurs de calcul lors de la réduction des expressions intérieures des facteurs de l'équation $PxQ=0$
- 4 erreurs de factorisation (EFAC) lors de la mise en facteur de l'expression dans l'équation E2.1 (qui s'expliquent par le coefficient 1 du facteur commun $(x+2)$).

II.2.2. Cas de la classe de 1°

Selon l'analyse a priori, outre la technique *Fact_ProdN*, la technique de développement suivi du calcul du discriminant *Dév_Discr* est attendue aussi. L'utilisation de ces techniques pour ce type de tâche en classe 1° repose sur les éléments technologiques de θ_{f_1} ou θ_{f_2} :

la propriété de distributivité simple " $ab+ac=a(b+c)$ " ou " $ab-ac=a(b-c)$ "

la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ".

et aussi sur le calcul du discriminant et les formules des solutions.

a) Techniques et technologies existantes en classe 1°

Outre les techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Discr* attendues comme les montre le tableau F-12, apparaît la technique de la catégorie *Mixtes*.

Type de tâche T2 Classe Première (24 élèves)		E2.1 $(3-x)(x+2)+x+2=0$		E2.2 $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$		E2.3 $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	12	12	16	12	17	10	45	34
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Discr</i>	11	4	7	5	7	2	25	11
<i>Mixtes</i>	<i>Fact_Dév_Discr</i>			1	1				
Totaux		23	16	24	18	24	12	70	45

Tableau F-12

Pour ce type de tâche, on constate qu'il y a une répartition des fréquences d'utilisation de deux techniques : celle de technique *Fact_ProdN* reposant sur les éléments technologiques de θ_{f_1} : " $ab \pm ac = a(b \pm c)$ " et " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ", et celle de la technique *Dév_Discr* reposant sur l'utilisation des éléments technologiques de θ_{f_2} : la propriété de distributivité double " $(a+b)(c+d) = ab+ac+bc+bd$ " et sur l'utilisation des formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, mais la première technique est mobilisée (64,3%) presque deux fois plus que la deuxième (35,7%) et sa mobilisation atteint une réussite de la résolution avec un taux de réussite (75,6%) plus fort que celui dans la mobilisation de la dernière technique (44%).

b) Analyse des résultats obtenus

Si on considère les résultats obtenus par l'utilisation de la technique de factorisation suivie de l'annulation des facteurs (*Fact_ProdN*) dans les trois exercices, on constate que ces résultats sont meilleurs pour l'exercice E2.1 (12/12), moins bons pour E2.2 (12/16) et encore moins pour E2.3 (10/17).

Quant à la technique de développement et discriminant (*Dév_Discr*), elle conduit davantage au succès dans l'exercice E2.2 (5/7), que dans E2.1 (4/11) et dans E2.3 (2/7). Ces résultats peuvent s'expliquer par la reconnaissance plus facile du facteur commun (2x-3) dans E2.2, la non visibilité apparente du facteur commun (x+2) dans E2.1, la position des termes par rapport à l'égalité et la présence du signe moins dans les deux termes du facteur commun (-5x-4).

On remarque en particulier que, dans l'exercice E2.2, un élève mobilise avec succès *Fact_Dév_Discr* de la catégorie *Mixtes* : on peut penser que cette résolution démarre par la factorisation pour mettre l'équation sous la forme $(ax+b)(cx+d)=0$ avant le développement et l'utilisation du discriminant pour calculer les solutions (cf. la Figure 4).

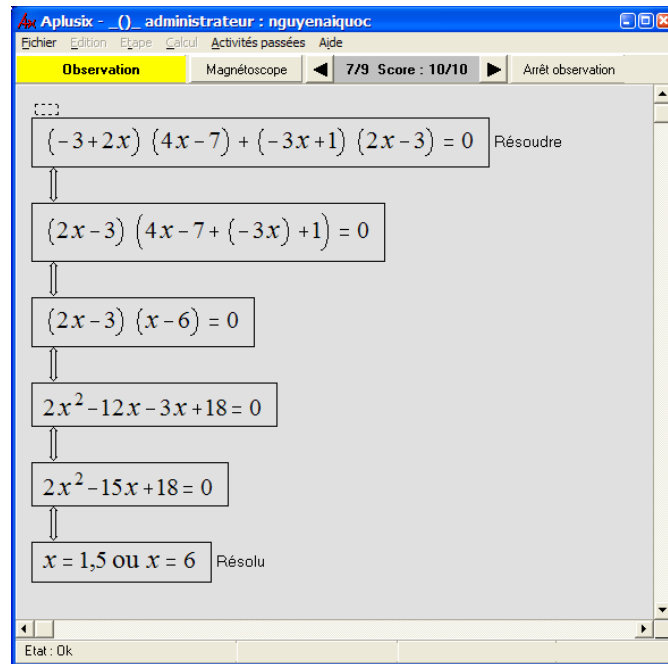


Figure 4 : Exemple d'utilisation de la technique *Fact_Dév_Discr* de l'élève 13 de la classe 1^o

Comme on le voit dans le tableau F-13, par rapport à la mobilisation de la technique *Fact_ProdN*, les erreurs les plus fréquentes sont celles de signe lors de la mise en facteur commun (3 cas). D'autres erreurs de signe sont produites lors de l'enlèvement des parenthèses et de la réduction des expressions (3 cas en total) intérieures des facteurs de l'équation $P(x) \times Q(x) = 0$.

On rencontre également 3 erreurs de logique ELOG (l'utilisation du connecteur logique ET au lieu à OU) sont trouvées lors de la résolution de l'équation produit nul :

$P \times Q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$. Cette erreur se rencontre également dans la mobilisation de la technique

Dév_Discr, lors de la réunion des racines de l'équation du second degré.

Première (24 élèves)									
Type de tâche T2	Interrompue	ECAL		ECALD	ESIGN			EFAC	ELOG
		Développement	Réduction		Enlèvement des parenthèses	Factorisation	Réduction	Ecriture nouvelle étape	
<i>Fact_ProdN</i>			1		2	3	1		3
<i>Dév_Discr</i>	1	3		3	1		3	1	2
Totaux	1	3	1	3	3	3	4	1	5

Tableau F-13

Dans la mobilisation de la technique *Dév_Discr*, on rencontre 3 erreurs de signe lors de la réduction des expressions de l'équation du second degré obtenue après le développement des produits dans les équations données. Enfin, on rencontre 3 erreurs de calcul lors du développement du produit des expressions de l'équation donnée et 3 erreurs de calcul du discriminant.

II.2.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T2

a) Sur les techniques et technologies existantes

Type de tâche T2		Seconde		Première	
		%	Réussie	%	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	80,6	56,9	63,4	75,6
<i>Gdev</i>	<i>Dév+Dév_Rac</i>	13,9	0		
	<i>Dév_Discr</i>			35,2	44
<i>Règles</i>	<i>ProdN+Simp</i>	5,6	0		
<i>Mixtes</i>	<i>Fact_Dév_Discr</i>			1,4	100
Totaux		100		100	

Tableau F-14

Globalement, la technique la plus mobilisée dans les deux niveaux de classe est *Fact_ProdN*, ce qui montre un rapport personnel à l'objet de la résolution des équations produit nul $P(x) \times Q(x) = 0$ (cf. Tableau F-14). Toute fois, les techniques de la catégorie *Gdev* :

apparaissent en classe 2° sous la forme des techniques *Dév* et *Dév_Rac*. Ces deux techniques ne sont pas adéquates pour ce type de tâche car leur utilisation conduit à une interruption de solution ou un résultat incorrect. Comme dans le type de tâche T1, l'utilisation de la technique *Dév* s'explique par un but d'obtention une équation de degré 1, mais l'équation développée est de degré 2. Quant à la mobilisation de la technique *Dév_Rac*, l'élève a tenté de ramener l'équation donnée à l'équation de degré la plus simple $x^2 = k$ ($k > 0$).

sont présentes en classe de 1° sous la forme *Dév_Discr* conforme au rapport institutionnel dans lequel l'équation du second degré soit résolue par les formules définitives des solutions.

L'apparence de la technique *Fact_Dév_Discr* de la catégorie *Mixtes* peut s'expliquer par un but de diminuer le nombre de calculs dans le développement des produits dans l'équation donnée.

Enfin, la mobilisation de la technique d'annulation du produit *ProdN* sur une somme des termes présente un but d'utilisation de la technologie " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ " dans la résolution des équations données.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

La technique la plus mobilisée en classe de 2°, plus de 4 fois sur 5, est *Fact_ProdN*.

En classe de 1°, l'apprentissage de la résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ (a non nul) par les formules définitives des solutions entraîne une diminution du choix de la technique *Fact_ProdN* mais celle-ci reste mobilisée presque deux fois plus que la technique *Dév_Discr*.

Bien que les techniques de factorisation soient utilisées principalement en classe 2°, le taux de réussite de la mobilisation de ces techniques est plus important en classe 1°S (75,6%) qu'en classe de 2°, ce qui montre une meilleure maîtrise de ces techniques chez les élèves de 1°S que chez ceux de 2°.

En classe de 1°, le taux de réussite de la technique *Dév_Discr* est inférieur à 50%.

Comme on le voit dans le tableau F-15 et F-16, les erreurs principales dès l'étude du type de tâche T2 sont celles liées à l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* ou de *Dév-Discr*. Nous pouvons donc caractériser ces erreurs comme suit :

- Erreurs de résolution dues à l'utilisation « abusive » de la technique *Simp*, valide seulement sur un champ plus restreint, celui de la résolution d'une équation de degré 1
- Erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre d'une technique : ce sont erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation des techniques *Fact_ProdN* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Discr* en classe 1°
- Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :
 - erreurs de calcul lors du développement d'un produit de deux expressions algébriques, de la réduction d'une expression, du calcul des solutions des équations facteurs nul, et du calcul du discriminant
 - problème de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré, du mouvement des termes dans l'autre membre de l'équation donnée, de l'enlèvement des parenthèses des expressions intérieures des facteurs de l'équation $P \times Q = 0$, et de la mise en facteur commun des expressions

- erreurs lors de l'annulation d'une partie de l'équation non respect de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition : $a \times b + c = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b + c = 0$
- erreurs de factorisation lors de la mise en facteur commun
- erreur de signification opérationnelle lors du mouvement du coefficient de l'inconnue x : $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$
- erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* dans l'application de la règle d'annulation d'un produit de deux expressions algébriques et dans la réunion des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Classe	Seconde (25 élèves)									
Type de tâche T2	Interrompue	ECAL			ESIGN			EFAC	EOPM	EPRODF
		Développement	Réduction	Solution	Enlèvement des parenthèses	Passage dans l'autre membre	Mouve Equ 1er			
<i>Fact ProdN</i>			3	1	3	3	10	4	1	
<i>ProdN</i>										2
<i>Dév</i>	6	1			1					
<i>Dév Rac</i>		1	1							
Totaux	6	2	4	1	4	3	10	4	1	2

Tableau F-15

Classe	Première (24 élèves)									
Type de tâche T2	Interrompue	ECAL		ECALD	ESIGN				EFAC	ELOG
		Développement	Réduction		Enlèvement des parenthèses	Factorisation	Réduction	Ecriture nouvelle étape		
<i>Fact ProdN</i>			1		2	3	1		1	3
<i>Dév Discr</i>	1	3		3	1		3	1		2
Totaux	1	3	1	3	3	3	4	1	1	5

Tableau F-16

II.3. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T3

II.3.1. Cas de la classe 2°

Selon l'analyse a priori, comme pour le type de tâche T2, la technique attendue pour ce type de tâche T3 en classe de 2° est *Fact_ProdN* qui est composée en deux étapes : mise en facteurs et annulation des facteurs. Cette technique repose sur les éléments technologiques de θ_{f_1} :

la propriété de distributivité simple " $ab+ac=a(b+c)$ " ou " $ab-ac=a(b-c)$ "

la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ".

a) Techniques et technologies existantes en classe 2°

Comme le tableau F-17 nous montre, outre la technique attendue *Fact_ProdN*, apparaissent les techniques des catégories *Gdév* et *Règles*.

Type de tâche T3 Classe Seconde (25 élèves)		E3.1 $(2x+1)(3x-6)+x-2=0$		E3.2 $(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$		E3.3 $(6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4)$		E3.4 $(-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	19	8	20	8	20	13	18	11	77	40
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>			1		1				2	0
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	2		2		1		1		6	0
	<i>Simp</i>	1				1		3		5	0
Totaux		22	8	23	8	23	13	22	11	90	40

Tableau F-17

Bien que le facteur commun ne soit pas apparent dans les exercices du type de tâche T3, c'est la technique *Fact_ProdN* qui est essentiellement mobilisée ($\frac{77}{90}$, soit 85,6%).

Nous déjà savons que cette technique se compose de deux étapes : mise en facteurs communs et annulation des facteurs. La première étape *Fact* repose principalement sur

l'élément technologique de θ_{f_1} : propriété de distributivité simple " $ab \pm ac = a(b \pm c)$ ". En particulier, dans la résolution du premier exercice, cet élément technologique s'écrit sous la forme : " $a(b+1) = ab + a$ ". La deuxième étape *ProdN* se fonde sur un autre élément technologique " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ".

b) Analyse des résultats obtenus

La technique *Fact_ProdN* est utilisée de manière équivalente dans chaque exercice, mais le fait que le facteur commun ne soit pas entre parenthèses dans l'exercice E3.1, et la difficulté, pour les élèves de reconnaître le facteur commun $(-2x+3)$ (ou de le mettre en facteur) dans son multiple $(6-4x)$ dans l'exercice E3.2 sont sans doute une des raisons du taux de réussite moins important pour ces deux exercices.

Quant aux techniques de la catégorie Règles, certains élèves ont appliqué abusivement la technique d'annulation des facteurs du produit (*ProdN*) sur la somme des expressions, ou simplifié le facteur commun (*Simp*) après l'avoir fait apparaître dans les deux termes de l'équation.

Comme on le voit dans le tableau F-18, les erreurs essentielles lors de la mobilisation de la technique *Fact_ProdN* sont celles de factorisation (17 cas) dans la mise en produit $P(x) \times Q(x) = 0$ des équations données. Par exemple, elles sont des types suivants :

1/ $a \times b + a \times c \times d = a \times (b + c + d)$

2/ $a \times b + k \times a \times c = a \times (b + c)$

3/ $b \times (ka) + a = b \times (ka + a)$

4/ $a \times b + a \times c = a \times b \times c$

Seconde (25 élèves)							
Type de tâche T3	ECAL		ESIGN		EOPM	EFAC	EDIVER
	Développement	Factorisation	Factorisation	Mouve Equ 1er			
<i>Fact_ProdN</i>	4	4	7	2	1	17	2
Totaux	4	4	7	2	1	17	2

Tableau F-18

Nous rencontrons aussi des erreurs de signe (7 cas) lors de l'extraction du facteur commun de son multiple et lors de la mise en facteur. Ces erreurs de signe se rencontrent aussi lors

du mouvement des termes (2 cas) dans la résolution des équations de degré 1 provenant de l'annulation d'un produit de facteurs.

En fin, ce sont les erreurs de calcul lors de la factorisation des expressions (4 cas) et lors du développement, après suppression des parenthèses, des expressions qu'elles contiennent (4 cas).

II.3.2.Cas de la classe de 1°

Selon l'analyse a priori, comme pour le type de tâche T2, outre la technique *Fact_ProdN*, la technique attendue est aussi celle de développement suivi de calcul du discriminant *Dév_Discr*. Ces techniques pour ce type de tâche en classe de 1° reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} et θ_{f_2} :

la propriété de distributivité simple " $ab+ac=a(b+c)$ " ou " $ab-ac=a(b-c)$ "

la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ".

et sur le calcul du discriminant et les formules définitives des solutions.

a) Techniques et technologies existantes en classe de 1°

Comme on le constate dans le tableau F-19, les deux techniques attendues *Fact_ProdN* et *Dév_Discr* sont bien celles existant dans la classe étudiée.

Type de tâche T3 Classe Première (24 élèves)		E3.1 (2x+1)(3x-6)+x-2=0		E3.2 (-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0		E3.3 (6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4)		E3.4 (-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
Gfact	<i>Fact_ProdN</i>	11	10	13	3	14	7	17	11	55	31
Gdév	<i>Dév_Discr</i>	12	2	9	2	10	2	6	5	37	11
Totaux		23	12	22	5	24	9	23	16	92	42

Tableau F-19

Le jeu sur la variable « visibilité apparente » du facteur commun dans ce type de tâche a entraîné, comme prévu dans l'analyse a priori, un changement dans le choix des techniques mobilisées.

Les techniques mobilisées sont essentiellement *Fact_ProdN* (59,8%) et *Dév_Discr* (40,2%).

b) Analyse des résultats obtenus

Le fait que le facteur commun (x-2) ne soit pas entre parenthèses dans l'exercice E3.1 a conduit plus de la moitié des élèves à utiliser *Dév_Discr*, alors que l'apparence du facteur commun (4x-3) (ou (-4x+3)) dans l'exercice E3.4 a entraîné une mobilisation majoritaire de la technique *Fact_ProdN*. Cependant, l'élément technologique " $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ " est appliquée attentivement dans le cas où $c=1$ dans la première étape de la technique *Fact_ProdN* et elle concourait à un taux important de succès (90,9%) lors la résolution de l'exercice E3.1.

L'utilisation de la technique *Fact_ProdN* conduit davantage à une résolution exacte (56,4%) que celle de la technique *Dév_Discr* (29,7%).

Il faut néanmoins noter l'échec de l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* dans l'exercice E3.2 (23,1% de succès seulement) à imputer à la différence de signe du facteur commun avec son multiple et la commutation des termes dans ce multiple.

Quant au faible succès de l'utilisation de la technique *Dév_Discr* dans les trois premiers exercices, il peut s'expliquer par les erreurs commises dans la première étape de cette technique lors du développement et de la réduction des expressions données.

Selon le tableau F-20, les erreurs essentielles lors de l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* sont celles de signe et de factorisation. Elles se rencontrent essentiellement dans l'étape de factorisation lors de la mise en facteur (6 cas), puis de l'enlèvement des parenthèses (4 cas) et enfin de la réduction des expressions intérieures aux parenthèses de chacun des facteurs (5 cas) de l'équation produit nul $P(x) \times Q(x) = 0$.

On rencontre encore 2 erreurs de signe lors du mouvement des termes dans la résolution des équations facteur nul de degré 1.

On trouve également des erreurs de factorisation (EFAC) lors de la mise en produit $P(x) \times Q(x) = 0$ des équations données dans les exercices E3.2 et E3.3 (5 cas). Par exemple, elles sont des types suivants :

$$1/ a \times b + k \times a \times c = a \times (b+k+c)$$

$$2/ k \times a \times b + a \times c = a \times (b + c)$$

Première (24 élèves)													
Type de tâche T3	Interrompu	ECAL			ECALD	ESIGN					EFAC	ELOG	
		Développement	Factorisation	Réduction		Enlèvement des ()	Développement	Factorisation	Mouve Equ 1er	Réduction			Calcul des solutions
Fact_ProdN			1			4		6	2	5		5	1
Dév_Discr	5	4		2	2	1	2			8	1		
Totaux	5	4	1	2	2	5	2	6	2	13	1	5	1

Tableau F-20

En ce qui concerne la technique *Dév_Discr*, les erreurs de signe lors de la mobilisation de cette technique sont le plus souvent liées à l'étape de développement (2 cas) et de réduction (8 cas) des produits dans les équations données.

On trouve aussi les erreurs de calcul dans cette étape (4 cas) et certaines résolutions sont interrompues après cette étape (5 cas).

Enfin, dans deux cas, il y a erreur de calcul sur le discriminant.

II.3.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T3

a) Sur les techniques et technologies existantes

Type de tâche T3		Seconde		Première	
		%	Réussie	%	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>	85,6	52	59,8	56,4
<i>Gdev</i>	<i>Dév</i>	2,2	0		
	<i>Dév_Discr</i>			40,2	29,7
<i>Règles</i>	<i>ProdN+Simp</i>	12,2	0		
Totaux		100		100	

Tableau F-21

Comme dans le traitement du type de tâche T2, la technique la plus mobilisée et institutionnelle dans les deux niveaux de classe pour le type de tâche T3 est la technique de factorisation et d'application de la règle d'annulation des facteurs (*Fact_ProdN*) (cf. Tableau F-21). Cette technique repose sur les deux éléments technologiques de θ_{f_1} : la

propriété de distributivité simple : $ab+ac=a(b+c)$ et la règle " $a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ ". En particulier, le premier élément technologique est étudiée dans le cas où $c=1$, ou il se présente plutôt sous la forme $a \times b+a=a \times (b+1)$.

La technique de développement *Dév* reposant sur la propriété de distributivité double : $(a+b) \times (c+d)=a \times c+a \times d+b \times c+b \times d$ qui conduit à une interruption de la résolution se présente aussi en classe de 2° mais par un taux négligeable de la mobilisation de cette technique. Cette technique est devenue une technique attendue de deux étapes : développement et calcul du discriminant, en classe de 1°, dès que la technologie du calcul des solutions par le discriminant est introduite.

Enfin, nous retrouvons la mobilisation de la technique d'annulation du produit *ProdN* sur une somme des termes. On explique ce phénomène, comme dans le type de tâche T2, par le but d'utilisation de l'élément technologique " $a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ " dans la résolution des équations données.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

On peut d'abord constater que l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* a atteint un taux de réussite du même ordre en classe de 2° et de 1° (52% versus 56,4%).

En classe de 2°, la proportion de la technique *Fact_ProdN* dans l'ensemble des techniques mobilisées est de 6 sur 7, ce qui montre un rapport personnel assez fort chez élèves de la classe 2°.

En classe de 1°, on a constaté un changement de choix de techniques chez les élèves : les techniques *Fact_ProdN* et *Dév_Discr* sont mobilisées de manière équivalente, mais l'utilisation de la première technique conduit environ deux fois plus au succès que celle de la deuxième.

Classe	Seconde (25 élèves)								
Type de tâche T3	Interrompu	ECAL		ESIGN		EPRODF	EOPM	EFAC	EDIVER
		Développement	Factorisation	Factorisation	Mouve Equ 1er				
<i>Fact_ProdN</i>		4	4	7	2		1	17	2
<i>ProdN</i>						6			
<i>Dév</i>	1	1							
<i>Dév_Discr</i>									
Totaux	1	5	4	7	2	6	1	17	2

Tableau F-22

Classe	Première (24 élèves)												
Type de tâche T3	Interrompu	ECAL			ECALD	ESIGN						EFAC	ELOG
		Développement	Factorisation	Réduction		Enlèvement des ()	Développement	Factorisation	Mouve Equ 1er	Réduction	Calcul des solutions		
Fact_ProdN			1			4		6	2	5		5	1
Dév_Discr	5	4		2	2	1	2			8	1		
Totaux	5	4	1	2	2	5	2	6	2	13	1	5	1

Tableau 23

Selon le tableau F-22 et F-23, nous retrouvons les erreurs principales dès l'étude du type de tâche T2 sont celles liées à l'utilisation de la technique *Fact_ProdN* ou de *Dév-Discr*. Nous pouvons donc caractériser ces erreurs comme suit :

- Erreurs de résolution dues à l'utilisation « abusive » de la technique *Simp*, valide seulement sur un champ plus restreint, celui de la résolution d'une équation de degré 1
- Erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre d'une technique : ce sont des erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation des techniques *Fact_ProdN* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Discr* en classe 1°
- Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :
 - erreurs de calcul lors du développement d'un produit de deux expressions algébriques, de la réduction d'une expression, du calcul des solutions des équations facteurs nul, et du calcul du discriminant
 - problème de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré, de l'enlèvement des parenthèses des expressions intérieures des facteurs nul, et de la mise en facteur commun
 - erreurs lors de l'annulation des termes d'une somme non respect de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition : $a \times b + c = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b + c = 0$; $a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$
 - erreurs de factorisation lors de la mise en facteur commun ou en produit, par exemple : $a \times b + d \times a \times c = a \times (b + d + c)$ ou $k \times a \times b + a \times c = a \times (b + c)$

- erreur de signification opérationnelle lors du mouvement du coefficient de l'inconnue x : $ax=b \Leftrightarrow x=\frac{a}{b}$
- erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* dans l'application de la règle d'annulation d'un produit de deux expressions algébriques et dans la réunion des racines de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

II.4. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T4

II.4.1.Cas de la classe 2°

D'après l'analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classe de 2° sont l'utilisation des identités remarquables suivie de la règle d'annulation des facteurs (*IdR_ProdN*) ou la prise de la racine carrée des deux membres de l'équation (*Rac*). Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} :

l'utilisation de l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,

la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ "

et la propriété : " Si $a > 0$ l'équation $x^2=a$ a deux solutions, l'une positive : $\sqrt{a}$, l'autre négative : $-\sqrt{a}$ ".

a) Techniques et technologies existantes en classe 2°

Type de tâche T4 Classe Seconde (25 élèves)		E4.1 $(-4x+5)^2=(-2x-7)^2$		E4.2 $(3x-4)^2-(-5x+1)^2=0$		E4.3 $x^2=7$		E4.4 $-(3x-5)^2+(2x+3)^2=0$		E4.5 $-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>									2		2	0
	<i>IdR_ProdN</i>	16	11	20	12	6	6	19	12	15	2	76	43
	<i>IdR_Simp</i>							1		1		2	0
<i>Gdév</i>	<i>Dév</i>	4		2				1				7	0
	<i>IdR_Dév</i>	2		1								3	0
<i>Règles</i>	<i>ProdN</i>	1		1				1		1		4	0
	<i>Rac</i>	1				17	8					18	8
Totaux		24	11	24	12	23	14	22	12	19	2	112	51

Tableau F-24

Comme on le voit dans le tableau F-24, outre les techniques attendues *IdR_ProdN* et *Rac*, se présentent aussi les techniques de la catégorie *Gdév*, les autres techniques de deux catégories *Gfact* et *Règles*.

La technique la plus mobilisée dans la résolution des exercices de ce type de tâche est *IdR_ProdN*, avec 76 fois sur 112, soit 67,9%. Elle se compose de deux étapes : ramener l'équation donnée à la forme $P(x) \times Q(x) = 0$ en utilisation de l'identité remarquable et résoudre la dernière équation. En particulier, cette technique est mobilisée dans l'exercice E4.3 dans lequel le constant 7 est remis sous le carré $(\sqrt{7})^2$ avant la mise de l'équation sous la forme $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$ (cf. Figure 5).

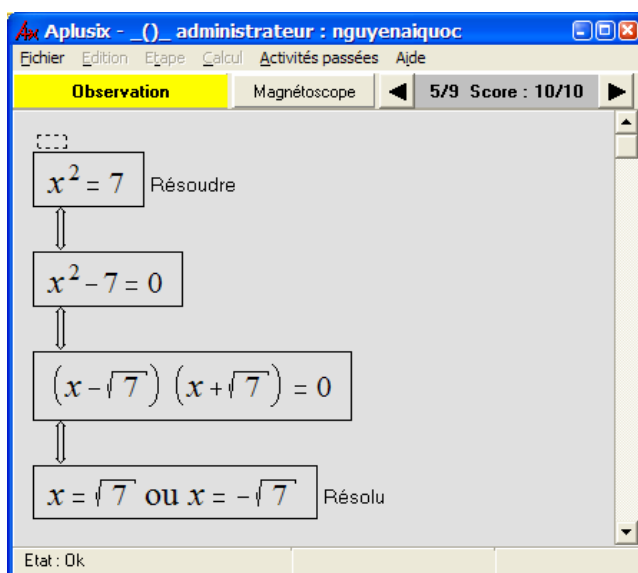


Figure 5 : La technique *IdR_prodN* est mobilisée dans l'exercice E4.3 de l'élève E2, classe de 2°

La première étape de cette technique, mise en équation produit nul, repose sur l'élément technologique : l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, et la deuxième étape, la résolution de l'équation nul est ramenée à celle de deux équations facteur nul de degré 1, repose sur l'élément technologique : la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ".

La technique reposant sur l'élément technologique " l'équation $x^2 = a$ ($a > 0$) a deux solutions, l'une positive: $\sqrt{a}$, l'autre négative: $-\sqrt{a}$ ", *Rac*, est mobilisée complètement dans l'exercice E4.3, ce qui montre un rapport personnel fort des élèves conformant au rapport institutionnel.

b) Analyse des résultats obtenus

La mobilisation de la technique *IdR_ProdN* est différente dans chaque exercice à cause du choix des variables de la tâche. La technique *IdR_ProdN* est moins mobilisée dans l'exercice E4.3 à cause de la présence de la constante 7 au lieu d'un carré d'une expression, et dans E4.5 (15 cas) à cause de la présence de la constante 9 devant le carré $(-x+2)^2$ (cf. Figure 6).

$$\begin{aligned}
 &-(2x-1)^2 + 9(-x+2)^2 = 0 \quad \text{Résoudre} \\
 &\Downarrow \\
 &-(2x-1)(2x-1) + 9(-x+2)(-x+2) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &(2x-1)(9(-x+2) + x-2) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &(2x-1)(-9x+18+x-2) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &(2x-1)(-8x+16) = 0 \\
 &\Downarrow \\
 &2x = 1 \text{ ou } -8x = -16 \\
 &\Downarrow \\
 &x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \quad \text{Résolu}
 \end{aligned}$$

Figure 6 : Exemple d'utilisation de la technique *Fact_ProdN* de l'élève 24 de la classe 2°

Dans ce premier cas, la présence de la constante 7 conduit les élèves, avec 17 fois sur 23, soit 73,9%, à prendre la racine carrée des deux termes dans les deux membres de l'équation, et seulement 47,1% de ces technique sont utilisées en succès car certains élèves utilisent la règle erronée " $\sqrt{a^2} = a$ ".

Nous rencontrons deux cas de factorisation dans l'exercice E4.5. La technique *Fact_ProdN* est mobilisée dans le but de mettre l'équation sous la forme de produit nul $P(x) \times Q(x) = 0$, mais cette factorisation n'est pas réussie car la règle $ab+ac=a \times (b+c)$ n'est pas appliquée correctement (cf. la Figure 6).

Quant à la technique *IdR_Simp* utilisée avec une seule fois dans l'exercice E4.4 et E4.5, l'élève a simplifié le facteur commun après la factorisation en utilisant « l'identité remarquable » erronée : $a^2-b^2=ab+a(-b)$ (cf. la Figure 7).

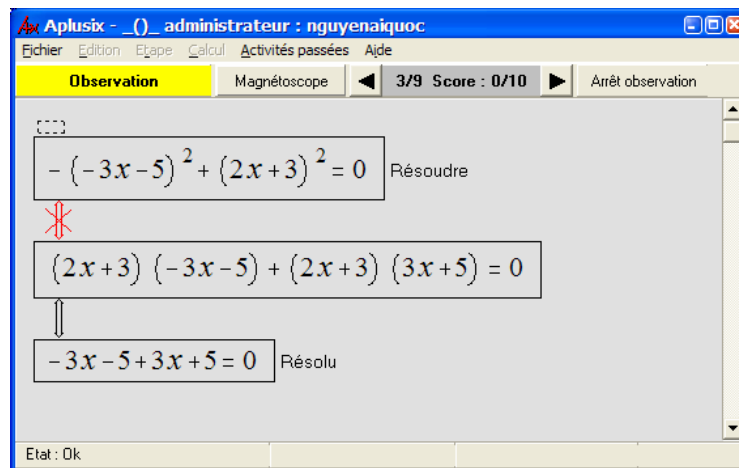


Figure 7 : Exemple d'utilisation de la technique *IdR_Simp* de l'élève 17 de la classe 2°

Quant aux techniques de la catégorie *Gdév*, on trouve 10 cas d'utilisation des techniques de développement (*Dév* et *IdR_Dév*), ce qui traduit sans doute la volonté de se ramener au cas connu de la résolution d'une équation de degré 1. Notamment, l'utilisation de l'identité remarquable avant développement dans la technique *IdR_Dév* peut s'expliquer par la volonté de diminuer le nombre de produits des expressions dans l'équation donnée. La mobilisation de ces techniques conduit à une interruption de la résolution car l'équation développée est de second degré.

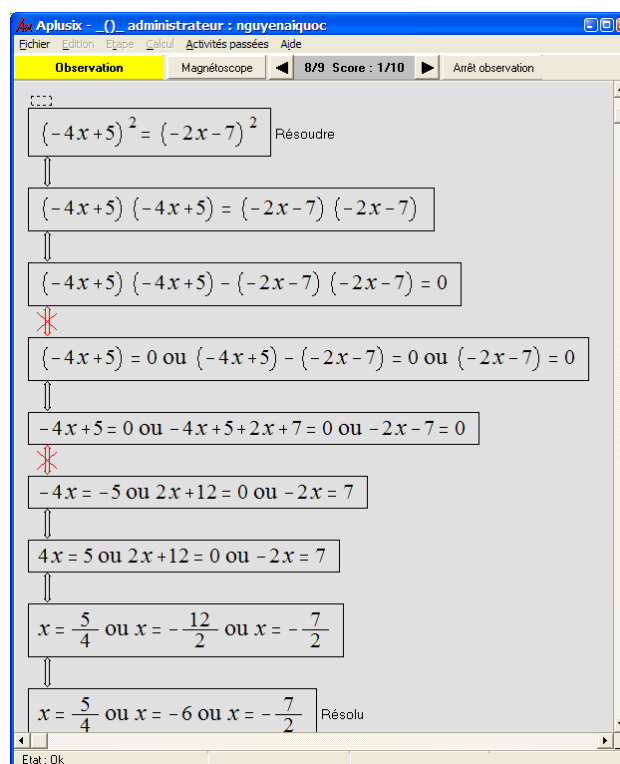


Figure 8 : Exemple d'utilisation de la technique *ProdN* de l'élève 16 de la classe 2°

Enfin, on rencontre quelque cas de mobilisation de la technique d'annulation du produit $ProdN$ dans tous les exercices sauf E4.3. Dans ces cas, la règle d'annulation des facteurs du produit est appliquée sur une somme des termes. On explique ce phénomène par l'utilisation de l'élément technologique " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ " dans la résolution des équations données sans respect la priorité de la multiplication par rapport à la soustraction (cf. Figure 8).

Les erreurs les plus fréquentes, liées à la technique Rac , dans le traitement du type de tâche T4 en classe de 2° sont celles provenant de l'application incorrecte d'une propriété de la racine carrée (cf. Tableau F-25). Ces 10 erreurs sont produites par l'application de l'élément technologique : " $\sqrt{a^2} = a$ ", dans l'exercice E4.1 (1 seul cas) et dans E4.3 (cf. Figure9).

Seconde (25 élèves)													
Type de tâche T4	Interrompue	ECAL				ESIGN							
		Factorisation	Sur les carrés	Réduction	Mouve Equ 1er	Enlèvement des ()	Sur les carrés	Réduction	Mouve Equ 1er				
<i>Fact_ProdN</i>										2			
<i>IdR_ProdN</i>		1	5	8	1	5	1	1	1	9			1
<i>Rac</i>												10	
Totaux	0	1	5	8	1	5	1	1	1	11	0	10	1

Tableau F-25

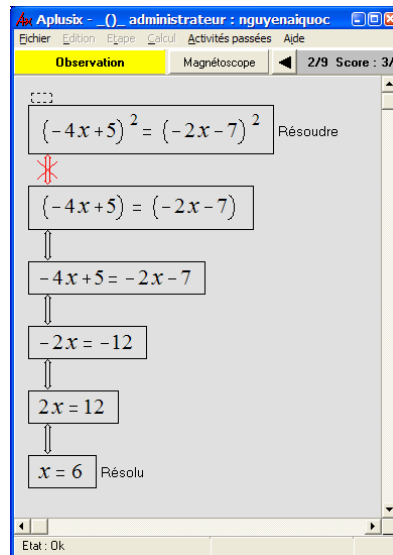


Figure 9 : La technique *Rac* mobilisée dans la résolution de l'exercice E4.1 de l'élève E12, classe de 2°

D'autre part, on rencontre également l'application de l'élément technologique : " $x^2=a \Rightarrow x=\sqrt{a}$ " qui peut s'expliquer par une confusion entre la définition de la racine carrée positive d'un nombre positif et la recherche des deux solutions radicales de l'équation $x^2=k$ ($k>0$).

Les erreurs de calcul liées à l'utilisation de la technique *IdR_ProdN*, elles, sont produites essentiellement dans la réduction des expressions intérieures des facteurs nul (8 cas) et dans le calcul du carré (5 cas) lors de la présence de la constante 9 dans le carré d'une expression : $9(-x+2)^2=(-9x+2)^2$.

La présence de la constante 9 devant le carré dans l'exercice E4.5 produit également des erreurs dans la mise en facteur de l'expression du membre gauche de l'équation (9 erreurs de factorisation EFAC), par exemple : $-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=9(-x+2+2x-1)(-x+2-2x+1)$..

En fin, les erreurs de signe également sont liées à la technique *IdR_ProdN*, elles sont les plus fréquentes (5 cas) lors de la suppression des parenthèses intérieures des facteurs.

II.4.2.Cas de la classe de 1°

D'après l'analyse a priori, les techniques attendues en 1° sont, comme en 2°, *IdR_ProdN* ou *Rac*, mais aussi *Dév_Discr* (développement suivi du calcul du discriminant). Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} et de θ_{f_2} suivants :

l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

la règle " $a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ "

la propriété : " Si $a>0$ l'équation $x^2=a$ a deux solutions, l'une positive : $\sqrt{a}$, l'autre négative : $-\sqrt{a}$ "

et aussi le calcul du discriminant et les formules des solutions

a) *Techniques et technologies existantes en classe 1°*

Comme le montre le tableau F-26, outre les techniques attendues *IdR_ProdN*, *Dév_Discr* et *Rac*, apparaissent la technique *Discr* et *Dév_Rac*

En classe de 1°, la technique *IdR_ProdN* n'est plus mobilisée majoritairement dans ce type de tâche avec 56 fois sur 115, soit 48,7%. Cette technique, comme dans la classe de 2°, se compose de deux étapes : la première étape *IdR* repose sur l'élément technologique : " $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ " et la deuxième *ProdN* repose sur celui : annulation des facteurs. En particulier, dans l'exercice E4.5, une transformation algébrique est nécessaire, avant l'application de la dernière technologie, afin de mettre l'expression $-(2x-1)^2+9(-x+2)^2$ sous la forme a^2-b^2 : $-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=-(2x-1)^2+3^2(-x+2)^2=(-3x+6)^2-(2x-1)^2$. La transformation du carré $9(-x+2)^2$ repose sur l'élément technologique " $a^n \times b^n = (ab)^n$ ".

Type de tâche T4 Classe Première (24 élèves)		E4.1 $(-4x+5)^2=(-2x-7)^2$		E4.2 $(3x-4)^2-(-5x+1)^2=0$		E4.3 $x^2=7$		E4.4 $(-3x-5)^2+(2x+3)^2=0$		E4.5 $-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>IdR_ProdN</i>	15	6	14	11			15	11	12	0	56	28
<i>Gdév</i>	<i>Dév_Discr</i>	8	0	9				7	0	10	4	34	4
	<i>Dév_Rac</i>	1										1	0
<i>Discr</i>						2	1					2	1
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>					22	14					22	14
Totaux		24	6	23	11	24	15	22	11	22	4	115	47

Tableau F-26

Comme pour les types de tâches précédents T2 et T3, la technique de développement et discriminant (*Dév_Discr*) est mobilisée (29,6%). La première étape de cette technique (*Dév_Discr*) comporte le développement des carrés des expressions et elle se fonde sur la technologie θ_{f_2} : les identités remarquables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ et les formules définitives

des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Le signe inhabituel des termes intérieurs des carrés exige les élèves de déterminer la forme habituelle des identités remarquables par des transformations algébriques sur ces carré

avant les développer, par exemple, on a les égalités suivantes: $(-a-b)^2=(a+b)^2$ ou $(-a+b)^2=(a-b)^2$.

Comme en classe de 2°, la prise de la racine carrée des deux membres de l'équation (*Rac*) est mobilisée majoritairement dans l'exercice E4.3 avec 22 fois sur 24, soit 91,7%. L'utilisation de cette technique aboutit à une réussite de la résolution avec un taux équivalent à celui de la classe de 2° (63,6%).

b) *Analyse des résultats obtenus*

La technique *IdR_ProdN* se présente en quantité équivalente dans tous les exercices sauf E4.3, mais la mobilisation de cette technique ne conduit globalement qu'une fois sur deux au succès (cf. Figure 10).

The screenshot shows the Aplix software interface for solving equations. The main workspace displays a sequence of equations connected by arrows, representing the steps of the *IdR_ProdN* technique. The equations are:

$$-(2x-1)^2 + 9(-x+2)^2 = 0 \quad \text{Résoudre}$$

$$9(-x+2)^2 - (2x-1)^2 = 0$$

$$9((-x+2) - (2x-1))((-x+2) + (2x-1)) = 0$$

$$9(-3x+1)(x+1) = 0$$

$$9(-3x+1)(x+1) = 0$$

$$-3x+1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -1 \quad \text{Résolu}$$

Red 'X' marks are placed between the second and third equations, and between the fourth and fifth equations, indicating errors or deviations in the student's work. The status bar at the bottom shows 'Etat: Ok'.

Figure 10 : La technique *IdR_ProdN* mobilisée dans la résolution de l'exercice E4.5 de l'élève E9, classe 1°S dans laquelle la priorité de la multiplication par rapport à l'addition n'est pas respectée

Quant à la technique *Dév_Discr*, son utilisation n'est pas réussie avec un taux de réussite global n'étant pas important (11,8%) et il n'y a aucune réussite de résolution pour les exercices E4.1, E4.2 et E4.4.

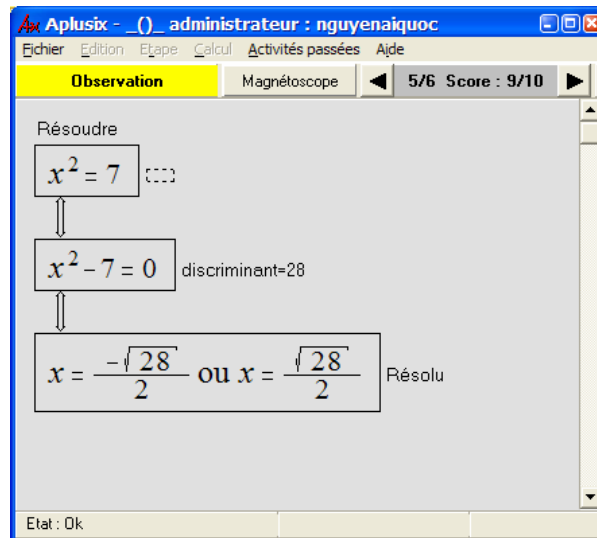


Figure 11 : L'utilisation du discriminant (*Discr*) dans la résolution de l'exercice E4.3 de l'élève E21, classe 1^oS

Nous rencontrons deux cas d'utilisation du discriminant dans la résolution de cet exercice, l'équation $x^2=7$ étant considérée comme une équation du second degré incomplète $ax^2+0x+c=0$, avec un seul cas de résolution réussie (cf. Figure 11).

En fin, il y a un seule cas d'utilisation de la prise de la racine carrée (*Rac*) des deux membres de l'équation obtenue après le développement des expressions (*Dév_Rac*) dans l'équation donnée. L'équation obtenue est de la forme $x^2=k$ ($k>0$) après des calculs erronés lors du développement et de la réduction (cf. Figure 12).

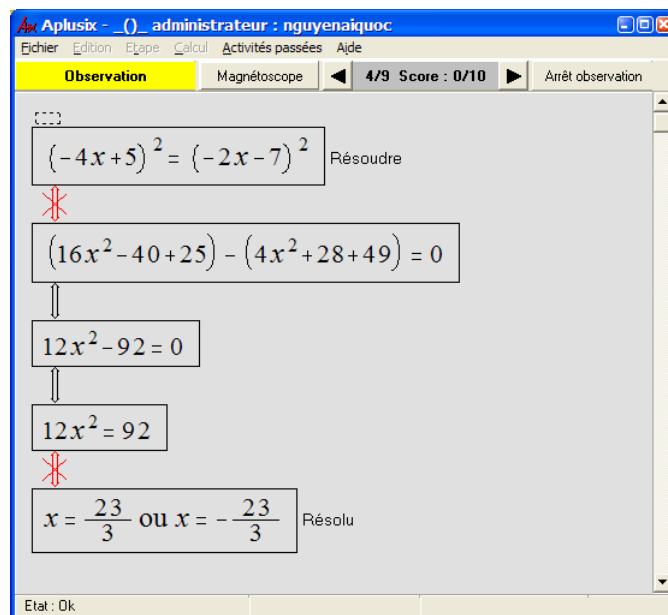


Figure 12 : Exemple d'utilisation de la technique *Dév_Rac* de l'élève 1 de la classe 1^o

Selon le tableau F-27, les erreurs les plus fréquentes sont celles de signe liées à la technique *Dév_Discr* lors du développement (13 cas) et de la réduction (4 cas) des expressions dans la première étape de cette technique. La plupart de ces erreurs sont essentiellement produites lors du développement des carrés de la forme $(-a+b)^2$ et $(-a-b)^2$, notamment dans les deux cas suivants :

1/ $(-a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2/ $(-a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Quant aux erreurs de calcul liées à cette même technique, on en rencontre 5 lors du développement les carrés des expressions dans les exercices E4.1 et E4.5, par exemple dans le cas suivant : $(-a+b)^2 = a^2 - ab + b^2$.

En particulier, dans les deux exercices E4.2 et E4.4, on rencontre des cas d'interruption de la résolution après l'obtention d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ lors de l'utilisation de la technique *Dév_Discr* sur les équations données.

Première (24 élèves)																
Type de tâche T4	Interrompue	ECAL					ECALD	ESIGN					EFAC	ERA1	ERA2	ELOG
		Factorisation	Développement	Réduction	Calcul des solutions	Mouve Equ 1er		Enlèvement des ()	Développement	Sur les carrés	Réduction	Mouve Equ 1er				
<i>IdR_ProdN</i>		1		4		1				1	3	5	10			3
<i>Dév_Discr</i>	4		5				1	1	13	1	4					
<i>Rac</i>														7	1	
<i>Discr</i>					1											
Totaux	4	1	5	4	1	1	1	1	13	2	7	5	10	7	1	3

Tableau F-27

Lors de l'utilisation de la technique *IdR_ProdN*, la présence de la constante 9 devant le carré $(-x+2)^2$ dans l'exercice E4.5 est cause de production d'erreurs de factorisation EFAC liées à la technique *IdR_ProdN*, par exemple dans le cas suivant : $-a^2 + kb^2 = k(b-a)(b+a)$. Ces erreurs peuvent s'expliquer par la non prise en compte de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition : ici, l'élève factorise la différence $b^2 - a^2$ avant tenir compte du coefficient k .

En ce qui concerne les erreurs de signe dans l'utilisation de cette même technique, elles sont produites lors du mouvement des termes dans l'équation facteur nul de degré 1 (5 cas) et lors de la réduction des expressions intérieurs des facteurs de l'équation $P \times Q = 0$ (3 cas).

L'équation produit nul est obtenue après factorisation des expressions dans les équations données en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

Comme dans la classe de 2°, il y a des erreurs ERA1 (7 cas) lors de l'utilisation de la technique de prise de la racine carrée des deux membres de l'équation : utilisation de l'élément technologique : " $x^2=a \Rightarrow x=\sqrt{a}$ " dans l'exercice E4.3.

Enfin, on retrouve des erreurs ELOG (3 cas).

II.4.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T4

a) Sur les techniques et technologies existantes

Type de tâche T4		Seconde		Première	
		%	Réussie	%	Réussie
Gfact	Fact_ProdN+IdR_ProdN	69,6	55,1	48,7	50
	IdR_Simp	1,8	0		
Gdév	Dév+IdR_Dév+Dév_Rac	8,9	0	0,8	0
	Dév_Discr			29,6	11,8
Discr				1,7	50
Règles	ProdN	3,6	0		
	Rac	16,1	44,4	19,1	63,6
Totaux		100		99,9	

Tableau F-28

Comme on le voit dans le tableau F-28 au dessus, la technique la plus mobilisée dans les deux classes est l'utilisation d'identité remarquable suivie de l'annulation des facteurs du produit (*IdR_ProdN*) qui repose en général sur les éléments technologiques de θ_{f_1} : l'identité remarquable " $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ", la règle " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ ", et sur " $a^n \times b^n = (ab)^n$ " de plus dans le cas particulier de l'exercice E4.5.

La forme spéciale $x^2=k$ ($k>0$) de l'équation dans l'exercice E4.3 induit la mobilisation principale de la technique de prise de la racine carrée des deux membres de l'équation (*Rac*) qui repose sur la propriété d'existence de deux solutions racines carrées opposées de l'équation $x^2=a$ ($a>0$). En particulier, il y a six cas d'utilisation avec réussite de la technique *IdR_ProdN* dans la classe de 2° lors de la résolution de cet exercice, en considérant la constante 7 comme un carré de $\sqrt{7}$, et deux cas d'utilisation de la technique de calcul du discriminant dans la classe de 1° lors de la résolution de cet exercice en considérant l'équation donnée comme une équation incomplète de degré 2.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

Le faible taux de réussite par l'utilisation de la technique *Dév_Discr* (11,8%), qui se fonde sur les technologies : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ et les formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, provient encore d'erreurs de calcul et de signe lors du développement.

Seconde (25 élèves)													
Type de tâche T4	Interrompue	ECAL				ESIGN				EFAC	EPRODF	ERA1	EOPM
		Factorisation	Sur les carrés	Réduction	Mouve Equ 1er	Enlèvement des ()	Sur les carrés	Réduction	Mouve Equ 1er				
<i>Fact_ProdN</i>										2			
<i>IdR_ProdN</i>		1	5	8	1	5	1	1	1	9			1
<i>IdR_Simp</i>										2			
<i>Dév</i>	7												
<i>IdR_Dév</i>	1					1				1			
<i>ProdN</i>											4		
<i>Rac</i>												10	
Totaux	8	1	5	8	1	6	1	1	1	14	4	10	1

Tableau F-29

[illegible]

<i>IdR_ProdN</i>		1		4		1				1	3	5	10			3
<i>Dév_Rac</i>			1													
<i>Dév_Discr</i>	4		5				1	1	13	1	4					
<i>Rac</i>														7	1	
<i>Discr</i>					1											
Totaux	4	1	6	4	1	1	1	1	13	2	7	5	10	7	1	3

Tableau F-30

Selon le tableau F-29 et F-30 ci-dessus, les erreurs les plus fréquentes lors de l'étude du type T4 sont celles liées à l'utilisation de la technique *IdR_ProdN*, ou de *Rac* ou de *Dév_Discr*. Nous pouvons donc caractériser ces erreurs comme suit :

- Erreurs de résolution dues à l'utilisation « abusive » de la technique *Simp*, valide seulement sur un champ plus restreint, celui de la résolution d'une équation de degré 1
- Erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre d'une technique : ce sont erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation des techniques *Fact_ProdN* ou *Rac* aux deux niveaux de classe ou de *Dév_Discr* en classe 1°
- Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

problème de signe lors de la factorisation, du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré

erreurs de calcul (non respect de la priorité d'une opération par rapport à l'autre) lors de la mise en carré unique $k^2(ax+b)^2=[k(ax+b)]^2$ et de la réduction d'une expression développée

erreurs de factorisation (non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre) lors de la mise en produit d'une différence : $ka^2-b^2=k(a-b)(a+b)$ ($k>0$)

erreurs d'annulation d'un produit de facteurs : $ab+cd=0 \Leftrightarrow ab=0$ ou $cd=0$

erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* dans l'application de la règle d'annulation d'un produit de deux facteurs

erreurs d'exclusion de la racine négative lors de la prise de la racine carrée d'un carré.

II.5. Techniques et technologies existantes dans le traitement du type de tâche T5

II.5.1.Cas de la classe 2°

Selon l'analyse a priori, les techniques attendues sont *IdR_CarN* ou *IdR_ProdN*. Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} suivants :

les identités remarquables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, et la règle " $a^2=0 \Leftrightarrow a=0$ " lors de la résolutions de deux premières équations.

la forme canonique du trinôme : $ax^2+bx+c=a[(x-\alpha)^2-\beta]$, l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, la règle " $a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ " lors de la résolution de deux dernières équations.

a) Techniques et technologies existantes en classe 2°

Type de tâche T5 Classe Seconde (25 élèves)		E5.1 $x^2+8x+16=0$		E5.2 $25x^2-90x+81=0$		E5.3 $2x^2+5x-7=0$		E5.4 $x^2-11x+24=0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN</i>					1	0			1	0
	<i>IdR_ProdN</i>	5	5	5	2	1		8	1	19	8
	<i>IdR_CarN</i>	20	15	18	17					38	32
	<i>Fact_IsV</i>					8	0	4	0	12	0
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>					4	0	1	0	5	0
Totaux		25	20	23	19	14	0	13	1	75	40

Tableau F-31

Comme on le constate dans le tableau F-31, outre les techniques attendues *IdR_CarN* et *IdR_ProdN*, apparaissent les techniques *Fact_ProdN*, *Fact_IsV* de la catégorie *Gfact* et *Rac* de *Règles*.

Les deux techniques *IdR_CarN* et *IdR_ProdN* sont mobilisées principalement dans la résolution de deux premiers exercices E5.1 et E5.2. Ces deux techniques reposent sur une technologique essentielle : la règle d'annulation des facteurs " $a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ ".

Dans la résolution de deux derniers exercices, se présente une quantité négligeable, 2 cas sur 9, d'utilisation de la technique *IdR_ProdN* qui repose sur les éléments technologiques de θ_{f_1} : la forme canonique du trinôme : $ax^2+bx+c=a[(x-\alpha)^2-\beta]$, l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, et la règle " $a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ ".

b) Analyse des résultats obtenus

Si on regroupe les deux techniques *IdR_CarN* et *IdR_ProdN* et si on les considère comme des techniques de factorisation, alors ce sont les seules techniques mobilisées dans la résolution de ces deux exercices (48/48) avec un taux de réussite remarquable (81,3%).

Pour les deux autres exercices E5.3 et E5.4, y a une dispersion des techniques utilisées et la moitié des exercices n'est pas résolue (23/50).

Certains élèves tentent de ramener l'équation donnée à une équation produit nul puis de la résoudre par la règle d'annulation d'un produit de facteurs (9 cas), mais il y a seul cas réussi (cf. Figure 13).

The figure consists of two screenshots of the Aplux software interface, showing the resolution of a quadratic equation using the *IdR_ProdN* technique.

Left Screenshot: The interface shows the equation $x^2 - 11x + 24 = 0$ with the label "Résoudre". Below it, the steps of completing the square are shown:

$$x^2 - 2x \times \frac{11}{2} + \frac{121}{4} + 24 - \frac{121}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + 24 - \frac{121}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{96}{4} - \frac{121}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

Right Screenshot: The interface shows the final steps of the resolution:

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{16}{2}\right)\left(x - \frac{6}{2}\right) = 0$$

$$x - \frac{16}{2} = 0 \text{ ou } x - \frac{6}{2} = 0$$

$$x = 8 \text{ ou } x = 3 \text{ Résolu}$$

Figure 13 : L'utilisation de la technique *IdR_ProdN* de l'élève E6, classe de 2^o dans la résolution de l'exercice E5.4

On rencontre un seul cas de mobilisation de la technique *Fact_ProdN* dans l'exercice E5.3. Cet élève a tenté de factoriser l'expression $2x^2 + 5x - 7$ en produit de deux facteurs de degré 1 : $P(x) \times Q(x)$, mais il n'a pas réussi (cf. Figure 14).

Aplux - ()_administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Étape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 9/9 Score : 5/10

$2x^2 + 5x - 7 = 0$ Résoudre

$x(2x+5) - 7 = 0$

$(x-7)(2x-2) = 0$

$x = 7$ ou $x = \frac{2}{2}$

$x = 7$ ou $x = 1$ Résolu

Etat : Ok

Figure 14 : L'utilisation de la technique *Fact_ProdN* de l'élève E24, classe de 2^o dans la résolution de l'exercice E5.4

Dans la résolution des équations E5.3 et E5.4, la technique *Fact_IsV* ou *Rac* est mobilisée dans le but de diminution de degré de l'inconnue. Nous pouvons expliquer ce phénomène par la forme canonique de l'équation donnée dans laquelle l'expression donnée dans le membre gauche n'est pas la partie développée d'une identité remarquable (cf. Figure 15 et 16).

Aplux - ()_administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Étape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 9/9 Score : 0/10 Arrêt observation

$x^2 - 11x + 24 = 0$ Résoudre

$x - 11 = \frac{-24}{x}$

$x = \frac{-24}{x} + 11$

$x = -\frac{24 \times x}{1} + 11$

$x = -\frac{24x}{1} + \frac{11}{1}$

$x = -\frac{24x}{1} + \frac{11}{1}$

Etat : Ok

Figure 15 : Exemple d'utilisation de la technique *Fact_IsV* de l'élève 12 de la classe 2^o

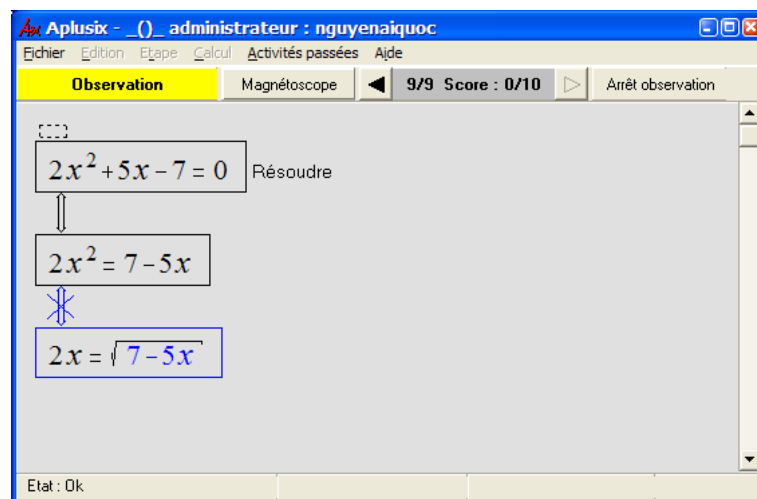


Figure 16 : Exemple d'utilisation de la technique *Rac* de l'élève 4 de la classe 2°

Comme on le voit dans le tableau F-32, dans l'utilisation des techniques *IdR_CarN* et *IdR_ProdN*, on rencontre des erreurs de signe lors du mouvement des termes dans la résolution des équations facteur nul de degré 1, et des erreurs de calcul lors de la factorisation en utilisation des identités remarquables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Seconde (25 élèves)					
Type de tâche T5	Interrompu	ECAL	ESIGN		EFAC
		Factorisation	Factorisation	Mouve Equ 1er	
<i>Fact_ProdN</i>					1
<i>IdR_ProdN</i>	2	2			2
<i>IdR_CarN</i>		2	1	3	
Totaux	2	4	1	3	3

Tableau F-32

En particulier, dans l'utilisation de la technique *IdR_ProdN*, il y a deux cas d'erreurs de factorisation, EFAC, dans lesquels les élèves utilisent la formule suivante : $(x\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 = ax^2 + bx + c$, sans tenir compte de "bx", pour transformer l'équation des exercices E5.3 et E5.4 sous la forme $P^2(x) = 0$.

II.5.2. Cas de la classe de 1°

Selon l'analyse a priori, les techniques attendues pour ce type de tâche en classe de 1° sont *IdR_CarN* ou *Discr*. Ces techniques reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} et θ_{f_2} :

- les identités remarquables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, et la règle " $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ " lors de la résolutions de deux premières équations..
- le calcul du discriminant et les formules des solutions.

a) Techniques et technologies existantes en classe 1°

Comme on le constate dans le tableau F-33, outre les techniques attendues *IdR_CarN* et *Discr*, apparaissent les techniques *IdR_ProdN* et *Fact_IsV* de *Gfact*.

L'apprentissage du discriminant dans la résolution des équations du second degré en classe de 1° induit ici un changement dans le choix des techniques pour les deux premiers exercices : $\frac{2}{3}$ des techniques mobilisées sont encore du type *IdR_CarN*, mais $\frac{1}{3}$ sont du type *Discr*.

Type de tâche T5 Classe Première (24 élèves)		E5.1 $x^2 + 8x + 16 = 0$		E5.2 $25x^2 - 90x + 81 = 0$		E5.3 $2x^2 + 5x - 7 = 0$		E5.4 $x^2 - 11x + 24 = 0$		Totaux	
Catégorie	Technique	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie	Effectif	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>IdR_ProdN</i>	1	0							1	0
	<i>IdR_CarN</i>	15	15	15	15					30	30
	<i>Fact_IsV</i>			1	0					1	0
<i>Règles</i>	<i>Discr</i>	8	8	6	5	21	9	19	12	54	34
Totaux		24	23	22	20	21	9	19	12	86	64

Tableau F-33

La techniques *IdR_CarN* repose sur les éléments technologique de θ_{f_1} : l'utilisation des identités remarquables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ et la règle d'annulation d'un carré " $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ", et la technique *Discr* se base sur les éléments technologiques de θ_{f_2} :

l'utilisation des formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ de l'équation canonique $ax^2 + bx + c = 0$.

b) Analyse des résultats obtenus

Pour les exercices E5.1 et E5.2 :

la maîtrise par les élèves de 1^oS des identités remarquables et de la technique d'annulation d'un carré est sans doute à l'origine du succès (100%) dans la mobilisation de la technique *IdR_CarN* ;

le fait que le discriminant prenne la valeur nulle a permis aux élèves d'utiliser la technique du discriminant *Discr* conduisant à une résolution correcte par une réussite également massive (92,9%).

Pour les deux derniers exercices E5.3 et E5.4, la forme de l'équation impose le choix d'une seule technique: celle de l'utilisation du discriminant *Discr*.

La réussite de l'utilisation de cette technique pour l'exercice E5.3 (42,9%) plus faible que celle pour l'exercice E5.4 (63,2%) peut s'expliquer par les signes opposés du coefficient de x^2 et du terme constant qui mettent des difficultés dans le calcul du discriminant.

On rencontre la mobilisation de la technique *IdR_ProdN* (une seule fois) dans l'exercice E5.1. L'équation est ramenée à la forme $(x+4)^2=0$ en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, puis la résolution de la dernière équation est ramenée à celle de deux équations $x+4=0$ et $-(x-4)=0$. Ce qui se base sur l'élément technologique " $a^2=a \times (-a)$ ".

En fin, on rencontre un seul cas d'utilisation de la technique *Fact_IsV* dans l'exercice E5.3 pour le but de diminuer le degré de l'inconnue x . Nous pouvons expliquer ce phénomène par la présence du coefficient différent de 1 de x^2 dans l'équation donnée.

Selon le tableau F-34, les erreurs se rencontrent dans l'utilisation de la technique *Discr*, essentiellement lorsque le calcul du discriminant et l'utilisation des formules des solutions sont « compliqués » pour les élèves.

Les erreurs les plus fréquentes sont celles intervenant dans le calcul du discriminant ECALD et celle de l'utilisation des opérateurs logiques ELOG.

On rencontre aussi des erreurs de calcul et de signe lors de l'utilisation des formules des solutions, par exemple :

- Quant aux erreurs de signe, le signe du coefficient "b" du terme "bx" de l'équation n'est pas conservé : $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Quant aux erreurs de calcul des solutions, le double du coefficient "a" du carré x^2 est enlevé: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$.

Première (24 élèves)						
Type de tâche T5	Interrompue	ECAL		ECALD	ESIGN	
		Réduction	Calcul des solutions		Factorisation	Calcul des solutions
<i>IdR_ProdN</i>					1	
<i>Discr</i>		1	3	6		4
Totaux	0	1	3	6	1	4

Tableau F-34

II.5.3. Conclusion sur les techniques et technologies existantes, les résultats obtenus et les erreurs commises dans le traitement des exercices du type de tâche T5

a) Sur les techniques et technologies existantes

Type de tâche T5		Seconde		Première	
		%	Réussie	%	Réussie
<i>Gfact</i>	<i>Fact_ProdN+IdR_ProdN+IdR_CarN</i>	77,3	69	36	96,8
	<i>Fact_IsV</i>	16	0	1,2	0
<i>Discr</i>				62,8	63
<i>Règles</i>	<i>Rac</i>	6,7	0		
Totaux		100,1		100	

Tableau F-35

Selon le tableau F-35, en classe de 2°, la technique la plus mobilisée est l'utilisation des identités remarquables suivie de la règle d'annulation du produit, *IdR_ProdN*, qui se fonde sur les éléments technologiques de θ_{f_1} : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, " $a^2=0 \Leftrightarrow a=0$ ", et " $a \times b=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$ ". En particulier, la technique *IdR_ProdN* doit se fonder, outre les éléments technologiques précédentes, aussi sur l'élément technologique " $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ " lorsque l'expression ax^2+bx+c est ramenée à la forme canonique du trinôme $a[(x-\alpha)^2-\beta]$ et elle n'est pas la partie développée d'un carré.

Certains élèves (12 cas) tentent de baisser le degré de l'équation donnée par factorisation des deux premiers termes contenant l'inconnue x puis le mouvement d'un facteur de ce produit dans l'autre membre de l'équation (*Fact_IsV*) :

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x(ax+b)=-c$$

$$x=-\frac{c}{ax+b}.$$

Dans le même but, certains (5 cas) isolent le carré de l'inconnue dans un membre de l'équation, puis prennent la racine carrée de deux membres de l'équation sans tenir compte des conditions d'existence de la racine (*Rac*) :

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2=\frac{-bx-c}{a}$$

$$x=\sqrt{\frac{-bx-c}{a}}.$$

En classe de 1^o, l'apprentissage de la résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ par calcul du discriminant entraîne la mobilisation majoritaire de la technique du discriminant *Discr* (62,8%) qui repose sur les éléments technologiques : les formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

b) Sur les résultats et les erreurs rencontrées

En classe 2^o, l'identification de la partie développée des identités remarquables $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ dans les deux premières équations conduit la mobilisation à la réussite de la technique *IdR_CarN* (84,2%) et de *IdR_ProdN* (70%). Toutefois, la mobilisation des techniques de factorisation n'est pas réussie dans la résolution de deux dernières équations à cause de la forme particulière des équations données, ce qui entraîne la diminution du taux global de réussite (69%).

En classe de 1^o, malgré que la technique du discriminant *Discr* soit la plus mobilisée, le taux de réussite par cette technique (63%) est moins important que celui obtenue par les techniques de factorisation (*Fact_ProdN*, *IdR_ProdN* et *IDR_CarN*) (96,8%).

L'utilisation des formules des solutions $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, lors de la mobilisation de la technique *Discr*, rencontre des difficultés dans le calcul du discriminant lorsque les signes de deux facteurs a et c sont opposés, par exemple dans l'exercice E5.3.

Selon le tableau F-36, les erreurs principales lors de l'étude du type T5 sont celles liées à l'utilisation de la technique *IdR_CarN* ou *IdR_ProdN* aux deux niveaux de classe, ou de *Discr* en classe 1°.

Classe	Seconde (25 élèves)							Première (24 élèves)						
Type de tâche T5	Interrompu	ECAL	ESIGN		EFAC	EPRODF	ERA2	Interrompu	ECAL		ECALD	ESIGN		ELOG
		Factorisation	Factorisation	Mouve Equ 1er					Réduction	Calcul des solutions		Factorisation	Calcul des solutions	
<i>Fact_ProdN</i>					1									
<i>Fact_IsV</i>	9					3		1						
<i>IdR_ProdN</i>	2	2			2							1		
<i>IdR_CarN</i>		2	1	3										
<i>Rac</i>							5							
<i>Discr</i>									1	3	6		4	6
Totaux	11	4	1	3	3	3	5	1	1	3	6	1	4	6

Tableau F-36

Nous pouvons donc caractériser ces erreurs comme suit :

- Erreurs de résolution dues à l'utilisation « abusive » de techniques *Fact_IsV*, *Rac* valides seulement sur un champ plus restreint, celui de la résolution d'une équation de degré 1
- Erreurs dues à la qualité de la mise en œuvre d'une technique : ce sont erreurs de calcul ou de signe dans l'utilisation des techniques *IdR_ProdN* ou *IdR_CarN* aux deux niveaux de classe ou de *Discr* en classe 1°
- Erreurs dues à la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées :

- problème de signe lors de la factorisation, du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré, et du calcul des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, par exemple, le signe moins est enlevé dans les formules suivantes : $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- erreurs de calcul lors du calcul du discriminant ou du calcul des solutions en utilisant les formules erronées, par exemple le double du coefficient est enlevé dans les formules suivantes : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$
- erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* dans le rassemblement des solutions d'une équation $ax^2+bx+c=0$
- erreurs de factorisation de l'expression ax^2+bx+c dans la mise en deux facteurs de degré 1 en utilisant la forme canonique du trinôme $a[(x-\alpha)^2-\beta]$
- erreurs de factorisation de l'expression ax^2+bx+c en utilisant la formule erronée $(x\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 = ax^2+bx+c$

III. SYNTHESE

III.1. Synthèse de l'analyse des techniques mobilisées par les élèves et des technologies qui les expliquent

III.1.1. Classe de Seconde

L'appropriation et la compréhension de l'usage de l'élément technologique : " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ", la reconnaissance du facteur commun et de la partie développée des identités remarquables, conduisent les élèves de cette classe au choix essentiel des techniques de factorisation de la catégorie *Gfact* (*Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *IDR_CarN*) et des techniques de la catégorie *Règles* (*ProdN*, *CarN* et *Rac*) dans la résolution des exercices de 5 types de tâche donnés. Mais la mobilisation de ces techniques de factorisation n'aboutit qu'à un taux de réussite oscillant autour 50% (cf. tableau F-1).

Ce taux s'explique par la production d'erreurs de calcul ou de signe dans la factorisation ou dans la réduction des expressions intérieures aux parenthèses dans les facteurs, soit d'erreurs de signe dans le mouvement des termes d'une équation du premier degré, soit d'erreurs de calcul dans la réduction du produit d'un nombre et d'un carré : $k(ax+b)^2 = (kax+b)^2$, soit de confusion entre la définition de la racine positive d'un nombre positif et les deux solutions de l'équation $x^2=k$ ($k>0$).

Outre les techniques de factorisation, certaines autres techniques sont mobilisées, bien qu'elles soient inefficaces et invalides par rapport à la forme des équations du second degré données, dans le but de diminuer le degré de ces équations.

Une de ces techniques est *ProdN* utilisée dans certains cas sur la somme des expressions ou la différence de deux carrés (non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre), qui repose alors sur les éléments technologiques : " $ab+cd=0 \Leftrightarrow ab=0$ ou $cd=0$ " et " $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0$ ou $b^2=0$ ".

En ce qui concerne la technique de développement *Dév*, elle est aussi utilisée pour tenter d'obtenir une équation du premier degré à partir de l'équation donnée, mais cette technique conduit à une interruption de la résolution. L'utilisation de cette technique peut être une conséquence du choix des variables dans l'analyse a priori : l'invisibilité du facteur commun, la commutation du signe dans les carrés, la position inhabituelle du signe moins dans la différence a^2-b^2 , et la présence d'une constante devant un carré.

Un cas particulier d'utilisation de la technique *Dév* est celle *IdR_Dév* par laquelle l'expression $R^2(x)-S^2(x)$ est ramenée à la forme produit $P_1(x) \times Q_1(x)$ en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ avant le développement. La première étape est dans le but de diminuer le nombre des produits des expressions dans l'équation donnée.

Une autre technique pour la diminution du degré de l'équation du second degré est la simplification du facteur commun *Simp*, sans avoir vérifié que si ce facteur est non nul. Cette technique est valable dans le cas où le facteur est un constant ou plutôt dans le cas de résolution de l'équation du premier degré.

La tentative de diminution du degré de l'équation du second degré est encore réalisée par les deux autres techniques : *Fact_IsV* et *Dév_Rac*. Ces deux techniques sont utilisées lors de la résolution des équations canoniques $ax^2+bx+c=0$ dans lesquelles l'expression ax^2+bx+c n'est pas la partie développée d'un carré.

Pour la première technique *Fact_IsV*, les élèves isolent les deux termes contenant x dans un membre de l'équation et les factorisent. Ensuite, l'inconnue x est calculée en fonction d'une fraction contenant x au dénominateur : $x(ax+b) = -c \Rightarrow x = -\frac{c}{ax+b}$.

Pour la deuxième technique *Dév_Rac*, les élèves isolent le carré x^2 dans un membre de l'équation. Ensuite, la prise de la racine carrée est appliquée sur les expressions dans les deux membres : $x^2 = -\frac{bx+c}{a} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{bx+c}{a}}$.

En particulier, il y a deux cas de résolution, dont un est réussi, dans lesquels l'équation est ramenée à celle produit nul $P \times Q = 0$ en utilisant la forme canonique du trinôme et l'identité remarquable $a^2-b^2=0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad (b^2 - 4ac > 0) \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 = 0 \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0
\end{aligned}$$

III.1.2. Classe de Première

A la différence de la classe de Seconde, l'introduction du discriminant en classe de Première a un impact sur le choix des techniques lors de la résolution des équations du second degré.

Les erreurs survenues lors de l'utilisation des techniques de factorisation sont celles, soit de calcul ou de signe lors de la mise en facteur commun, soit de réduction des expressions à l'intérieur des facteurs de l'équation produit nul, soit de l'utilisation de l'élément technologique " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$ " lors de la réunion des solutions des équations facteur nul de degré 1, etc.

Dans la mobilisation des techniques de développement et de discriminant, d'après la forme de l'exercice donné, une de deux techniques *Dév_Discr* et *Discr* sera mobilisée :

- Dans le cas où l'équation est donnée sous la forme canonique $ax^2 + bx + c = 0$, le discriminant est calculé immédiatement et les solutions sont calculées en utilisant les formules définitives des solutions : c'est la technique *Discr*.
- Dans les autres cas, le développement et la réduction sont mobilisées consécutivement pour ramener l'équation à la forme canonique $ax^2 + bx + c = 0$ qui est continuellement résolue par la technique *Dév_Discr* utilisée dans le cas précédent.

Pourtant, les techniques de développement et discriminant ne sont pas majoritaires dans tous les types de tâche sauf le type T5 dans lequel les équations sont données sous la forme canonique $ax^2 + bx + c = 0$.

Les techniques de développement sont utilisées avec un taux faible de réussite. Ce résultat provient soit des erreurs de calcul ou de signe lors du développement, soit d'une utilisation erronée des identités remarquables ou des formules de solutions, soit des erreurs dans le calcul du discriminant, soit de l'utilisation de l'élément technologique " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$ " lors de la réunion des solutions de l'équation.

Certaines résolutions sont interrompues après l'obtention de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Cela peut s'expliquer par l'oubli ou l'hésitation sur la complexité des formules des solutions. Il

existe aussi dans cette classe la mobilisation des techniques *Fact_IsV* et *Dév_Rac* mais avec un taux négligeable.

III.2. Evolution des techniques majoritaires entre les classes 2° et 1°

Nous nous centrons sur l'évolution entre la classe de 2° et de 1° des techniques qui rencontrent de façon significative chez les élèves. Dans le tableau F-37, nous avons reporté pour chaque classe les couples (tâche, technique) en indiquant les pourcentages de mobilisation et de réussite.

Techniques attendues	Seconde	Première
<i>ProdN</i> <i>CarN</i>	(T1, <i>ProdN</i>) : 59,6% - 89,3% (T1, <i>CarN</i>) : 29,8% - 92,9%	(T1, <i>ProdN</i>) : 45,8% - 86,4% (T1, <i>CarN</i>) : 35,4% - 94,1% (T1, <i>Dév_Discr</i>) : 18,8% - 33,3%
<i>Fact_ProdN</i>	(T2, <i>Fact_ProdN</i>) : 80,6% - 56,9% (T2, <i>Dév</i>) : 13,9% - 0%	(T2, <i>Fact_ProdN</i>) : 63,4% - 75,6% (T2, <i>Dév_Discr</i>) : 35,2% - 44%
<i>Fact_ProdN</i>	(T3, <i>Fact_ProdN</i>) : 85,6% - 52%	(T3, <i>Fact_ProdN</i>) : 59,8% - 56,4% (T3, <i>Dév_Discr</i>) : 40,2% - 29,7%
<i>IdR_ProdN</i> <i>Rac</i>	(T4, <i>IdR_ProdN</i>) : 67,9% - 56,6% (T4, <i>Rac</i>) : 16,1% - 44,4%	(T4, <i>IdR_ProdN</i>) : 48,7% - 50% (T4, <i>Dév_Discr</i>) : 29,6% - 11,8% (T4, <i>Rac</i>) : 19,1% - 63,6%
<i>IdR_CarN</i> <i>Dicrs</i>	(T5, <i>IdR_CarN</i>) : 50,7% - 84,2% (T5, <i>IdR_ProdN</i>) : 25,3% - 42,1%	(T5, <i>Discr</i>) : 62,8% - 63% (T5, <i>IdR_CarN</i>) : 34,9% - 100%

Tableau F-37

En classe de 2°, nous constatons que les techniques mobilisées majoritairement, et avec un bon taux de réussite pour chaque type de tâche, correspondent à celles de l'analyse a priori. En classe de 1°, nous constatons la mobilisation de plusieurs techniques par type de tâche, mais en général, les techniques majoritaires sont celles attendues dans l'analyse a priori. On peut dire que le choix de la technique est toujours bien approprié pour le type de tâche avec un bon taux de réussite. Même si les techniques de factorisation et de règles sont moins mobilisées en classe de 1° qu'en classe de 2°, elles restent majoritaires dans les tâches T1, T2, T3 et T4.

L'utilisation des techniques : *ProdN*, *CarN*, *Rac*, *Fact_ProdN*, *IdR_ProdN* et *IdR_CarN*, attendues et efficaces par rapport aux types de tâches donnés, reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_1} :

la propriété de l'intégrité " $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ "

propriété de distributivité simple " $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ "

les identité remarquables $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$,

De même, l'utilisation des techniques *Dév_Discr* et *Discr* reposent sur les éléments technologiques de θ_{f_2} :

propriété de distributivité double " $(a+b)(c+d)=ab+ac+bc+bd$ "

les formules des solutions : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

III.3. Synthèse de l'analyse des erreurs

Comme dans le cas de l'institution V, au-delà des erreurs de calcul ou de signe qui affectent la qualité de la mise en œuvre d'une technique valide (qu'il s'agisse de techniques *Gfact*, *Gdév*, *Règles* ou *Mixtes*) amplement explicitées lors de l'analyse de chaque type de tâche, nous retiendrons seulement ici les catégories d'erreurs qui nous paraissent les plus intéressantes à analyser.

- Mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide, mais non adéquate compte tenu du rapport institutionnel à l'objet d'étude : par exemple, techniques *Gdév* non adéquates en classe de 2° dans la tentation d'obtenir une équation du premier degré.

- Qualité de la technique elle-même : utilisation « abusive » de techniques valides seulement sur un champ plus restreint, telles *Simp*, et de *IsV* (*Fact_IsV*), valides dans le cas de la résolution des équations du 1^{er} degré.

- Non-maîtrise d'éléments technologiques engendrant les techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées dans la mise en œuvre d'une technique valide :

- non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre ou de certaines identités remarquables, ou des formules du discriminant et/ou des solutions
- utilisation de l'élément technologique : " $\sqrt{a^2} = a$ " lors de la prise de la racine carrée d'un carré, prise de la racine carrée d'une expression sans vérifier la condition d'existence de la racine, par exemple : $\sqrt{\frac{-5x+7}{2}}$.
- erreurs de factorisation diverses comme par exemple : $ab+acd=a(b+c+d)$, $ab+kac=a(b+c)$
- utilisation d'éléments technologiques du type : $ab+cd=0 \Leftrightarrow ab=0$ ou $cd=0$, $ab+c=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $b+c=0$, $-a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0$ ou $b^2=0$.
- utilisation de l'élément technologique : " $A(x) \times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0$ et $B(x)=0$ " lors du rassemblement des solutions d'une équation du second degré.

Ces erreurs ne relèvent pas seulement des techniques, mais des praxéologies dans leur ensemble.

III.4. Conclusion

La synthèse ci-dessus nous montre tout d'abord qu'il y a conformité entre les techniques attendues et celles existantes chez les élèves français. Ils adaptent le choix d'une technique en fonction du type de tâche y compris après l'introduction de la technique du discriminant. Ceci s'explique sans doute par le fait que dans l'enseignement français, on travaille les techniques de factorisation pendant deux ans et comme on l'a vu dans l'analyse des manuels, en insistant sur la nécessité de choisir la technique adéquate à la tâche à résoudre. (cf. paragraphe I.1 du chap. B.3).

Elle montre également l'utilisation, par certains élèves, de technologies qui interrogent sur la fabrication du rapport institutionnel en position d'élève dans F.

PARTIE D

ANALYSE COMPARATIVE ET CONCLUSION

INTRODUCTION

L'objectif de notre étude était de caractériser les interventions principales des acquis de l'algèbre dans la résolution de l'équation du second degré. Cette étude comportait une dimension comparative entre des élèves des deux institutions : V (enseignement secondaire et plus précisément, classes 7, 8, 9 et 10 au Viêt-Nam) et F (enseignement secondaire et plus précisément, classes de 4^e, 3^e, 2^e et 1^e en France).

Ceci nous a conduit à mener deux types d'analyses qui s'articulent entre elles. Nous avons d'abord comparé les organisations mathématiques dans les deux institutions V et F relativement à l'enseignement de la "résolution algébrique des équations du second degré" (RESA), en nous appuyant essentiellement sur l'analyse des programmes et des manuels. Cette étude nous a permis de déterminer les rapports institutionnels de chaque institution à cet objet d'étude, et de caractériser les points communs et les différences dans l'organisation des savoirs en jeu entre les deux institutions étudiées (cf. partie B)

Nous avons ensuite analysé le rapport personnel des élèves de ces deux institutions relativement à l'objet de savoir RESA. Cette étude s'appuie sur l'analyse des techniques et technologies mises en œuvre par des élèves de classes 9 et 10 vietnamiennes et de classes de seconde et de première françaises, lors de la résolution d'équations du second degré communes. (cf. partie C)

A partir des résultats obtenus dans ces deux parties, il nous semble intéressant, étant donné la différence existant entre l'enseignement de l'algèbre dans les deux pays et entre les deux rapports institutionnels de V et F à l'objet RESA, de comparer les rapports personnels à RESA des élèves sur lesquels portent notre expérimentation dans les deux institutions et de nous interroger sur l'impact des différents choix institutionnels sur le rapport personnel de ces élèves. Ce sera l'objet du chapitre I.

Après cette étude comparative, nous présenterons, dans le chapitre II, les principaux résultats obtenus dans notre travail et les pistes qu'il ouvre pour l'avenir.

CHAPITRE D1 – ANALYSE COMPARATIVE DES RAPPORTS PERSONNELS DES ELEVES

Afin de comparer le rapport personnel à RESD des élèves des deux institutions, nous allons analyser et comparer les techniques et technologies mises en œuvre aux niveaux scolaires suivants que l'on peut considérer comme comparables pour notre objet d'études :

- Les classes « ordinaires » : 9-O de V et seconde de F
- Les classes dont les élèves sont sélectionnés : 10-S de V et première S de F.

I. ANALYSE COMPARATIVE 9-O ET SECONDE

Rappelons que dans l'institution V, les techniques de factorisation sont étudiées essentiellement en classe 8 du collège. Elles ne sont revues en classe 9 que dans le but d'aboutir aux formules des solutions de l'équation canonique $ax^2+bx+c=0$.

Dans l'institution F, elles sont longuement étudiées au collège (3^e), mais également au lycée (2^{de} et 1^{er}).

Classe	9 ordinaire			Seconde		
%	% Mobilisée	% Réussie	% Interrompue	% Mobilisée	% Réussie	% Interrompue
<i>Gfact</i>	44,1	32,9	3,6	70,5	54,6	8,6
<i>Règles</i>	10,8	26,8		22,7	56,7	7,8
<i>Mixtes</i>	25,9	15,3	5,1	0		
<i>Gdév</i>	19,3	0	23,3	6,8	0	77,8

Tableau 1- Synthèse des techniques mises en œuvre lors de la résolution des exercices des types de tâche T1, T2, T3, T4 et T5

Classe	9 ordinaire		Seconde	
%	% Mobilisée	% Réussie	% Mobilisée	% Réussie
<i>Gfact+Règles</i>	54,9	31,7	93,2	55,1
<i>Gdév</i>	19,3	0	6,8	0
<i>Mixtes</i>	25,9	15,3	0	0

Tableau 2 –Regroupement des techniques *Gfact* et *Règles* (*ProdN*, *CarN*, *Rac*)

Le tableau 2 montre que les techniques attendues dans l'analyse a priori, techniques de factorisation des deux catégories *Gfact* (*Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *IdR_CarN*) et *Règles*

(*ProdN*, *CarN*, *Rac*) sont davantage présentes (93,2% versus 54,9%) et réussies (55,1% versus 31,7%) en classe de 2° qu'en classe 9-O.

Dans l'institution F, on peut constater l'absence de techniques mixtes et le peu de mobilisation de techniques *Gdév*. Ce que l'on peut expliquer par l'importance de l'enseignement des techniques de factorisation et un travail ne portant en seconde sur la forme canonique que dans le cas où les identités remarquables peuvent s'appliquer pour la factorisation.

Dans l'institution V, le pourcentage important (26%) des techniques mixtes, concurrentes de *GFact* en 9-O peut s'expliquer par l'enseignement d'une technique que nous avons appelée *Dév_Fact_ProdN*, ou *Déc_Fact_ProdN*. Cette technique repose sur la factorisation de l'expression canonique ax^2+bx+c par la décomposition du terme bx en cherchant les deux nombres m et n tels que $m+n=b$ et $m \times n = a \times c$. En classe 9-O, pour appliquer cette technique, les élèves ramènent toutes les équations à la forme canonique $ax^2+bx+c=0$. Ainsi, les élèves commencent à développer tous les produits de deux binômes sans tenir compte de la forme de l'équation donnée, même si elle est de la forme de produit nul $P(x) \times Q(x) = 0$.

Le faible taux de réussite de cette technique provient de ce que, comme nous l'avons montré, d'une part, elle ne réussit que dans des conditions particulières (faible portée de la technique), d'autre part elle exige une certaine virtuosité numérique à chaque étape.

Tout se passe comme si l'enseignement de cette technique conduisait certains élèves à considérer la forme canonique des équations du second degré comme un point de passage obligatoire à la résolution de ces équations, ce qui les conduit à une impasse lorsqu'on est en dehors de la portée de cette technique. Ceci explique que 20% des élèves de 9-O utilisent la technique *Gdév* qui les conduit à l'échec.

En ce qui concerne les résultats obtenus, les principales erreurs également rencontrées dans les deux institutions peuvent s'interpréter comme dues à :

- la mise en œuvre de la technique *Gdév* scientifiquement valide, mais non adéquate compte tenu du rapport institutionnel à l'objet d'étude ;
- l'utilisation abusive des techniques *Simp* et *IsV* (*Fact_IsV* et *Dév_IsV*), valides seulement sur un champ plus restreint ;
- la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées (erreurs de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré, et lors de la mise en facteurs, erreurs de calcul, erreurs de factorisation).

On peut de plus noter, essentiellement chez les élèves de l'institution V, la "fabrication" d'éléments technologiques engendrant des techniques de résolution pour les équations du type $A(x) \times B(x) = 0$ et $A(x) \times B(x) = c$. Nous rappelons ici les plus fréquemment rencontrés, et qui nous paraissent le plus significatifs chez les élèves de 9-O.

Pour l'équation $A(x) \times B(x) = 0$, on trouve " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ " lors de l'utilisation des techniques *ProdN* ou *Fact_ProdN* et *Dév_Fact_ProdN*. Une explication peut provenir de l'écriture systématique dans les manuels vietnamiens de classe 8 et 9 de l'ensemble solution $S = \{a, b\}$ comme réponse à la tâche de résolution des équations. Cette écriture qui énumère les différentes solutions contient un implicite "a et b" qui devient explicite lorsqu'on exprime les solutions dans la langue naturelle : "l'équation a deux solutions a et b", comme cela est parfois écrit dans le manuel de la classe 8.

Pour l'équation $A(x) \times B(x) = c$ à laquelle des élèves de 9-O aboutissent lors de l'utilisation de techniques *Dév_Fact_ProdN*, on trouve " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ", qui permet à un élève se trouvant devant une impasse de fabriquer une technique lui permettant de « résoudre » l'équation.

Dans les deux cas, on peut penser que cette fabrication de « techniques ad' hoc », reposant sur des « technologies ad' hoc » provient de l'insuffisance de temps consacré à l'étude des équations produit et des techniques de factorisation dans l'institution V.

Cette comparaison nous amène à conclure à :

- une conformité du rapport personnel des élèves de la classe de seconde au rapport institutionnel en position d'élève de seconde à RESD ;
- la présence de problèmes dans la construction du rapport personnel d'un grand nombre d'élèves de la classe de 9-O à RESD.

II. ANALYSE COMPARATIVE 10-S ET PREMIERE

Rappelons qu'au Viêt-Nam, la résolution des équations en utilisant le discriminant est introduite dès le 2nd semestre de la classe 9 et est utilisée en classe 10 pour la résolution des équations canoniques avec et sans paramètres, alors qu'en France, elle n'est étudiée qu'en début de première.

Classe	10 sélectionnée			Première S		
%	% Mobilisée	% Réussie	% Interrompue	% Mobilisée	% Réussie	% Interrompue
Gfact	21,5	81,6	0	46,7	65,4	0
Règles	12,7	75	0	15,1	80,3	0
Mixtes	2	80	0	0,2	100	0
Gdév	47,7	46,3	1,1	23,8	30,2	37,5
Discr	16,1	75,4	0	14,1	63,2	0

Tableau 3- Synthèse des techniques mises en œuvre lors de la résolution des exercices des types de tâche T1, T2, T3, T4 et T5

Classe	10-S		Première S	
%	% Mobilisée	% Réussie	% Mobilisée	% Réussie
Gfact+Règles	34,2	79,2	61,8	69,1
Mixtes	2	80	0,2	100
Gdév+Discr	63,8	53,6	37,9	42,5

Tableau 4- Regroupement des techniques *Gfact* et *Règles* (*ProdN*, *CarN*, *Rac*)

Le tableau 4 montre qu'il y a une différence importante dans le choix des techniques mobilisées. Les techniques attendues de factorisation de deux catégories *Gfact* (*Fact_ProdN*, *IdR_ProdN*, *IdR_CarN*) et *Règles* (*ProdN*, *CarN*, *Rac*) sont davantage présentes (61,8 %) et réussies (69,1%) en classe de 1°. Bien que ces techniques soient minoritaires en classe 10-S, elles sont mobilisées avec un succès encore plus fort que celui de 1°. Cela s'explique certainement par le fait que les élèves de 10-S qui sont capables d'analyser la forme de l'équation et de choisir la technique la mieux appropriée sont sans doute aussi ceux qui maîtrisent le mieux les différentes techniques disponibles.

Comme on pouvait s'y attendre après l'étude du programme et de manuel de la classe 10, les techniques de développement suivi de calcul du discriminant sont très fortement majoritaires (63,8%) en 10-S. On peut constater que, bien que l'utilisation de ces techniques conduise davantage au succès en classe 10-S qu'en classe de première, ce que l'on peut expliquer par l'introduction plus précoce du calcul du discriminant dans V que dans F, le taux de réussite y est à peine supérieur à 50%, alors que la classe 10-S regroupe les élèves sélectionnés d'un des meilleurs lycées de la ville.

Rappelons enfin que la technique *Discr* ne peut être utilisée seule que dans le cas d'équations données sous la forme canonique (T5) alors que les techniques *Gdév* (dont *Dév_Discr*) peuvent l'être quelle que soit le sous-type de tâche auquel se rattache l'exercice résolu. Si l'on observe alors le tableau 3, on constate que, si les pourcentages sont du même ordre dans V et dans F (taux de mobilisation : 16,1% versus 14,1% ; taux de réussite : 75,4% versus 63,2%) dans le cas des équations données sous forme canonique dans les deux classes, ce n'est pas le cas pour les autres exercices. On constate en effet, dans la classe de première S, un pourcentage important (37,5%) de cas d'interruption lors de l'utilisation des techniques de développement s'expliquant par la complexité, pour les élèves de F qui sont beaucoup moins rodés que ceux de V à l'utilisation de ces techniques, des calculs de développement puis du discriminant et des solutions après obtention de l'équation canonique $ax^2+bx+c=0$.

On peut noter une forte diminution par rapport à la classe 9-O d'utilisation de techniques de la catégorie *Mixtes* en classe 10S. Parmi elles, on retrouve *Déc_Fact_ProdN*

essentiellement utilisée ici pour les exercices, comme par exemple $2x^2+5x-7 = 0$, où elle conduit au succès.

En ce qui concerne les résultats obtenus, les principales erreurs également rencontrées dans les deux institutions peuvent, comme pour les deux classes 9-O et seconde, s'interpréter comme dues à :

- l'utilisation abusive des techniques *IsV* (*Fact_IsV*), valides seulement sur un champ plus restreint ;
- la non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées (erreurs de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré, et lors de la mise en facteurs, erreurs de calcul, erreurs de factorisation, erreur de prise d'une seule racine positive).

Les analyses effectuées dans les parties C3 et C4, montrent de plus :

- chez certains élèves de 10-S la persistance de l'utilisation de la technique *Simp*, et celle de la confusion entre les deux connecteurs logiques : ET et OU (qui apparaît aussi, bien que plus rarement, en classe de première S) ;
- chez certains élèves de première S, l'utilisation, notamment lors de la mise en œuvre des techniques *Gdev* et *Dév-Discr*, qu'on peut expliquer par des « technologies ad' hoc » du type :

$$ab+cd = 0 \Leftrightarrow ab=0 \text{ ou } cd=0 ; ab+c = 0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } b+c=0, -a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0 \text{ ou } b^2=0, \text{ etc.}$$

Nous pouvons conclure ce paragraphe par:

- d'une part, l'affirmation d'une conformité globale du rapport personnel à RESD des élèves de la classe de 10-S au rapport institutionnel en position d'élève de 10° dans V , et des élèves de la classe de première S au rapport institutionnel en position d'élève de première dans F;
- d'autre part, le constat de problèmes persistants dans la construction du rapport personnel à RESD de certains des élèves des deux institutions.

CHAPITRE D2 - CONCLUSION

I. RESULTATS PRINCIPAUX DE LA THESE

L'étude du rapport institutionnel à l'objet RESD par l'analyse des praxéologies mathématiques liés à cet objet nous a permis de mettre en évidence des ressemblances et les différences, mais surtout des spécificités de choix curriculaires des deux institutions V et F en ce qui concerne l'étude de l'algèbre et notamment celle de la résolution de l'équation du second degré.

I.1. L'enseignement de l'algèbre dans les deux pays

I.1.1. Au Viêt-Nam

L'algèbre est privilégiée dans le programme d'enseignement. Elle est érigée comme un de deux domaines principaux des mathématiques dans les classes du collège et au début du lycée. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre s'effectue dès la classe 7 et le passage de l'algèbre à l'analyse s'effectue en classe 11.

L'algèbre est enseignée essentiellement dans son statut d'*objet d'étude*, l'aspect *outil* étant peu développé. Plus précisément, les *objets d'étude* sont les opérations (addition, soustraction, multiplication et division) sur les polynômes, la factorisation, le développement et la réduction des polynômes.

Dans ce contexte, la notion d'équation est définie comme une égalité de deux polynômes au collège et puis celle de deux fonctions en classe 10 du lycée. La résolution d'une équation consiste à rechercher les valeurs de la variable pour que les polynômes des deux membres de l'équation prennent une même valeur numérique. Dans ce cas, les polynômes et les fonctions polynomiales prennent le même statut dans l'étude de l'équation lorsque la variable prend les valeurs dans le corps des réels.

Dans le domaine d'algèbre, il semble que l'on souhaite que les élèves soient dotés de deux aptitudes : *théorique* et *pratique*, mais l'aptitude *théorique* est plus important avec l'étude approfondie sur les objets de l'algèbre, par exemple l'ensemble des polynômes avec les propriétés d'un anneau commutatif et factoriel, et l'étude du nombre des solutions, de valeur ou/et de signe des solutions selon la valeur d'un paramètre, les problèmes de résolution et de discussion des équations selon la valeur d'un paramètre ayant une place importante au lycée.

I.1.2. En France

En France, l'introduction de l'algèbre se fait sur une période plus longue qu'au Viêt-Nam. Les objets d'étude de l'algèbre apparaissent successivement dans les domaines travaux numériques, calcul et fonction, puis analyse.

Contrairement au Viêt-Nam l'aspect objet de l'algèbre n'est pas prioritaire. En revanche, l'accent est mis notamment dans les documents d'accompagnement sur l'importance de la dimension outil.

Dans ce contexte, la notion d'équation est définie comme une égalité de deux expressions littérales (algébriques) au collège et puis celle de deux fonctions en classe de Seconde. La résolution d'une équation consiste à rechercher les valeurs de l'inconnue pour que les deux expressions littérales prennent la même valeur numérique. Notons, l'absence de définition des équivalences entre deux équations.

I.2. L'enseignement de la résolution des équations du second degré

I.2.1. Au Viêt-Nam

Les technologies engendrant les techniques de factorisation sont basées sur les propriétés des opérations dans l'ensemble des polynômes.

La résolution graphique des équations du second degré a une place réduite au collège et au début du lycée, comme le montre la présence d'un nombre faible d'exercices résolubles par cette technique (Cf. Partie B). La technique graphique est liée au problème de discussion du nombre et du signe des solutions d'une équation du second degré. Ce sont donc les techniques de résolution algébrique qui dominent.

De plus, dans V, contrairement à F, une grande place est donnée en classe 10, à l'étude des équations du second degré (ou se ramenant au second degré) paramétrées. Et aux discussions selon les valeurs des paramètres.

C'est sans doute ce qui explique que la technique d'utilisation du discriminant y soit considérée comme essentielle lors de l'étude de la résolution des équations du second degré.

L'utilisation des techniques de factorisation (d'un polynôme) n'est étudiée qu'en classe 8 au collège. En classe 9, elle n'est reprise que comme technique nécessaire au passage à la technique du discriminant.

L'importance de la technique du discriminant est prouvée par la présence, dès la classe 9, d'un grand nombre d'exercices dans lesquels les équations données sont de la forme canonique $ax^2+bx+c=0$ et par l'importance des parties des manuels de cours et de TD consacrées, en classes 9 et 10, à l'utilisation de la technique du discriminant et des formules des solutions.

La "toute puissance" de la technique du discriminant dans V se confirme également dans le fait qu'on trouve des traces implicites de l'utilisation du discriminant dans la technique de factorisation des équations de forme canonique (enseignée avant la technique du discriminant) dans le manuel de classe 9 : pour découper le terme bx de l'équation $ax^2+bx+c=0$, le professeur s'appuie en fait sur une théorie et technologie (propriété de la somme et du produit des solutions, découlant du théorème de Viète) auxquelles l'élève n'a pas accès puisque l'enseignement du discriminant n'est pas encore fait.

I.2.2.En France

Notons d'abord que, dans F, contrairement à V, la technique graphique (sur laquelle notre étude ne porte pas) joue un rôle important dans la résolution des équations du second degré. Il faut également noter que la dimension *outil des* équations du second degré dans la modélisation des problèmes est présente dans un domaine de disciplines plus vaste que dans V.

La résolution algébrique de l'équation du second degré est organisée autour de celle de l'équation produit $P(x) \times Q(x) = 0$. Autrement dit, pour résoudre une équation du second degré, sont privilégiées les techniques (*Gfact*, *IdR_ProdN*, ...) permettant de se ramener à une équation produit et donc à la technique d'annulation d'un produit (*ProdN* ou *CarN*).

Les techniques de factorisation et la résolution d'une équation du second degré se ramenant à une équation produit ont une place très importante dans F, d'une part, par le temps d'apprentissage qui leur sont consacrées (au collège puis au lycée), d'autre part, par la quantité d'exercices de ce type résolus pendant ces trois années.

Ce n'est qu'en classe de 1^o que la technique du discriminant est introduite, pour résoudre celles des équations canoniques $ax^2+bx+c=0$ qui ne se ramènent pas à la partie développée d'une identité remarquable.

Mais dans cette classe, l'accent reste mis sur l'importance de la capacité d'analyser la forme de l'équation donnée et de choisir en conséquence la technique la plus adéquate et la mieux adaptée pour la résoudre. Cette capacité est développée par des exercices dans lesquels les élèves sont invités à choisir la technique la mieux adaptée à l'équation donnée.

I.3. Rapports personnels des élèves des deux institutions V et F à l'objet RESD

I.3.1.Erreurs liées aux techniques mobilisées

Bien que la notion d'équation est établie dans les deux institutions différentes V et F et se base sur les deux théories différentes : l'anneau des polynômes (dans V) et l'ensemble des réels (dans F), ou autrement dit dans les deux blocs *technologico-théoriques* différents :

(θ_{v1}, Θ_v) et (θ_{f1}, Θ_f) , les erreurs produites lors du traitement des 5 types de tâches peuvent être classées dans les trois mêmes catégories : mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide mais non adéquate compte tenu du rapport institutionnel à l'objet d'étude, qualité de la technique elle-même, non-maîtrise d'éléments technologiques engendrant les techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées dans la mise en œuvre d'une technique valide.

Toutefois, les erreurs produites dans les classes vietnamiennes étudiées sont plus fréquentes et persistantes que celles des deux classes françaises correspondantes. De plus les erreurs commises par les élèves vietnamiens nous semblent davantage d'origine "*conceptuelle*", par exemple celles qui sont conséquentes des technologies " $A(x) \times B(x) = c \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ " ou " $A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ ", alors que la plupart des erreurs commises chez élèves français nous semblent davantage d'origine "*calculatoire*".

I.3.2. Comparaison des rapports personnels des élèves vietnamiens et français

Michèle Artaud⁴⁰ insiste sur « un principe directeur de la *fabrication des praxéologies mathématiques* : ce sont les *fonctions* des objets que l'on manipule qui doivent être mises en avant, qui doivent guider le travail de fabrication de réponses. Ce principe théorique intervient en effet de manière cruciale dans l'articulation de l'environnement *technologico-théorique* avec la pratique (...) ». Elle précise que « la notion de type de tâches a pour principale fonction dans l'analyse de permettre le groupement de tâches jugées suffisamment proches, la taille des groupes dépendant à la fois de la réalité modélisée, de l'institution dans laquelle on se place et du travail mené. »

C'est dans ce cadre que nous avons élaboré notre expérimentation, en regroupant les exercices proposés en cinq sous-types de tâches dont nous nous étions assuré que tous avaient été étudiés dans V et dans F.

Nous avons pu constater que les techniques mises en œuvre par les élèves ne se laissent pas toujours regrouper selon la structuration de techniques attendues, ce qui s'explique, pour nous, par une différence des rapports personnels entre les élèves des classes vietnamiennes et françaises étudiées, différence elle-même conséquence des choix institutionnels des deux pays.

Nous avons souligné dans le chapitre précédent comment le fait de privilégier, dans V, le travail et la maîtrise d'une technique algorithmique qui conduit à la "*naturalisation*" dans la construction du rapport institutionnel de la technique du discriminant, n'a pas laissé assez

⁴⁰ Artaud M, à paraître, La TAD comme théorie pour la formation des professeurs, *Actes du 1^{er} congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Jaen, Espagne, 2005.

de place (en nombre et en temps d'enseignement/apprentissage) à l'étude de certains types de tâche et à l'explicitation de technologies permettant d'expliquer et d'engendrer différentes techniques de factorisation plus adéquates que *Déc_Fact_ProdN* et que *Dév_Discr* face à certains types de tâches.

Mais il faut ici aussi souligner que ce choix ajouté au fait qu'une fois la technique du discriminant introduite, on ne propose plus aux élèves que des expressions sous une forme canonique, a pour conséquence une bonne maîtrise de la technique du discriminant par les élèves vietnamiens.

Ceci se traduit, chez la majorité des élèves de V en fin d'apprentissage (classe 10-S) par un rapport personnel à la résolution d'une équation du second degré qui est de se ramener à une équation canonique puis d'utiliser la technique du discriminant, sans se poser la question du choix possible d'une autre technique plus adéquate à la forme de l'équation à résoudre.

A l'opposé, dans F, le choix est fait de mettre l'accent sur la multiplicité des techniques et sur le choix d'une technique en fonction du type de tâche. Ainsi, des tâches sont proposées pour montrer aux élèves la portée de chaque technique, y compris après l'introduction de la technique du discriminant en première S.

Ceci se traduit, chez la majorité des élèves en fin d'apprentissage (classe de 1^oS), par un rapport personnel à la résolution d'une équation du second degré de les amène à choisir entre différentes techniques plus ou moins adéquates selon la forme de l'équation à résoudre plutôt que de privilégier une technique particulière, mais aussi par une moins bonne maîtrise de la technique du discriminant que celle des élèves de V.

Enfin, nous soulignons le fait de mettre l'accent sur une approche plus théorique de l'algèbre au Vietnam en privilégiant l'aspect objet, n'est pas suffisant pour que les élèves mobilisent des techniques pertinentes en fonction du type de tâche.

Nous concluons d'une manière générale qu'il est important de mener, pour chaque type de tâche, un travail au niveau des techniques pouvant accomplir ce type de tâche et des technologies qui les engendrent et les justifient.

Il est en effet important que les institutions favorisent la construction d'organisations régionales suffisantes pour que les élèves puissent en fabriquer d'autres, en l'occurrence par adaptation, devant des tâches problématiques.

II. PERSPECTIVES

Dans notre recherche, nous avons fait une analyse a posteriori des données accueillies par le logiciel Aplusix selon un découpage vertical, c'est-à-dire nous avons identifié le profil de chaque classe par l'analyse des techniques mobilisées et de leurs réussites.

Un prolongement immédiat de notre travail est de déterminer des profils des élèves par rapport aux techniques mobilisées et de les caractériser pour savoir si elles sont routinières ou problématiques. Cette caractérisation est possible grâce au magnétoscope d'Aplusix car on peut visualiser le travail au sein de chaque étape avec l'indication du temps de chaque action de l'élève. Cela nous permet de repérer les hésitations, les changements de techniques...

Un deuxième prolongement de notre travail est l'élaboration d'un cahier de charge pour la détermination automatique des praxéologies et de leur dynamique existantes chez les élèves relative à la tâche à la tâche « résolution algébrique d'équation du second degré à une inconnue », à partir des protocoles dont nous disposons sur Aplusix. L'intérêt de la détermination automatique des praxéologies existantes chez les élèves est de mener des études sur des grands effectifs et de faire des analyses comparatives entre plusieurs pays. Ce prolongement, s'inscrit dans des recherches en cours du projet Aplusix.

Notre étude s'est centrée sur l'aspect objet de l'algèbre en se limitant à la résolution algébrique des équations du second degré. Compte tenu des analyses institutionnelles dans les deux institutions V et F, il nous semble intéressant de prolonger notre recherche autour des axes suivant :

- Etudier le type de tâche "résolution graphique des équations du second degré" et son articulation avec la résolution algébrique.
- Etudier l'aspect outil de l'algèbre dans les deux institutions.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Artaud M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de l'IXe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, pp.101-139, IUFM de Rennes.
- Artaud M. (2005), à paraître, La TAD comme théorie pour la formation des professeurs, *Actes du 1^{er} congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Jaen, Espagne.
- Assude T. (1996), De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol 16/1, pp.47-72.
- Bessot A., Comiti C., 1985, Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 6/2305-345, Grenoble, La pensée sauvage.
- Bessot A., Comiti C., LE T. H.C., LE V.T., 2003, Cours de Thac Sy Didactic Toan, Ho Chi Minh
- Booth, L. R. (1984), *Algebra : Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.
- Bosch M., Chevallard Y., 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19/1, pp. 77-124
- Bosch M., Gascon J. (2001), Organiser l'étude 2 : théories et empiries, *Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques*.
- Mariotti M.A., Cerulli M. (2001) Semiotic mediation for algebra teaching and learning, *Proceedings of the 25th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education*, The Netherlands.
- Chaachoua H. (1997), *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*, Thèse de doctorat, université Joseph Fourier, Grenoble.
- Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par un approche anthropologiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 12/1, 83-121, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Chevallard Y. (1989), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, n°108, 1988-1989, pp. 211-236.
- Chevallard Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique, *Actes de l'U.E. de la Rochelle*.

- Chevallard Y, Bosch M. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19/1, pp. 77-124.
- Doan H. H. (2001), *L'enseignement de la géométrie dans l'espace au début du lycée dans ses liens avec la géométrie plane*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- Douady R. (1984), *Dialectique outil/objet et jeux de cadres*, Thèse d'état, Université Paris 7.
- Drouhard J. P. (1992), *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Duval R. (1993), *Registre de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol.5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.
- Frege G. (1971), « Sens et dénotation », in *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil, pp. 102-126.
- Grugeon B. (1995), *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première*, thèse de l'université de Paris VII-Denis Diderot.
- Kieran C., Bednarz N., Lee L. (1996), *Approaches to Algebra-Perspectives for Research and Teaching*, Kluwer Academic Publishers.
- Kieran C. (2001), The core of Algebra : Reflection on its Main Activities. *Plenary paper presented at ICMI Algebra Conference*, December 10, 2001, Melbourne Australia.
- Küchemann, D.E. (1981), *Children's understanding of mathematics*, 11-16, pp. 102-119, In K. M. Hart (Ed.), K., London: J. Murray.
- Le T. H. C. (1997), *Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de 10^e au Vietnam et la classe de seconde en France*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- Le V. T. (2001), *Etude didactique de lien entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viet-Nam*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- Nguyen C. T. (2005), *Etude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- Nicaud J. F. (1993), *Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX*. Rapport de recherche n°859. LRI, Université de Paris Sud.
- Nicaud J. F. (1994), *Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX. Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 14/1.2, pp. 67-112, Edition La Pensée Sauvage.
- Pressiat A., Guillaume C., Combier G. (1996), *Les débuts de l'algèbre au collège*, Institut Royal Society /JMC Working Group Report (1995), Teaching and Learning-Algebra pre-19

- Sfard A. (1991), *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, p. 1-36.
- Sutherland R. (1993), Algebraic Processes and the role of Symbolism, *Working Conference of ESRC Seminar Group*, Institute of Education, Université de Londres.
- Vergnaud G., Cortès A., Favre-Artigue P (1987), Introduction de l'algèbre auprès de débutant faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp. 259-288, Edition La Pensée Sauvage.

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

- Ainley J., Bills E., Wilson K. (2004), Purposeful Algebraic Activity, *Final report from Award R000239375*, Insitute of Education, University of Warwick.
- Arzarello F., L.Bazzini, G. Chiappini (2001), A model for analysing algebraic process of thinking, in *Perspectives on School Algebra*, Mathematics Education Library, V.22.
- Booth L.R. (1984), Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x n° 5* IREM de Grenoble.
- Chevallard, Y. (1985), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. *Petit x n°5*, IREM de Grenoble, pp.51-94
- Chevallard, Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. *Petit x n° 19*, IREM de Grenoble, pp.43-75
- Chevallard, Y. (1990), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. *Petit x n° 30*, IREM de Grenoble, pp.5-38
- Chick H., Stacey K., Vincent J. & Vincent J. (Eds) (2001), The Future of the Teaching and the Learning of Algebra, *Proceedings of the 12th ICMI Study* Univesity of Melbourne, Australia.
- Comin, E. (2005), Variables et fonctions, du collège au lycée. *Petit x n° 67*, IREM de Grenoble.
- Coppé, S. Chalancon, F., Pascal, N. (2002), Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. Grenoble, *Petit x n° 59*.
- Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol 7 (2), La Pensée Sauvage (Eds.), pp. 5-32.

- Gascon J. (1993), Desarrollo del conocimiento matematico y analisis didactico : del patron de analisis-sintesis a la genesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 13-3, 295-332.
- Geco (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire, *Repères IREM* N° 28, pp.37-68.
- Kieran (1989), A perspective on algebraic thinking. In : *Proceeding of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME XIII). Paris, 2, 163-171.
- Kieran C. (1990), *Mathematics and cognition*, Cambridge University Press.
- Kieran C. (1991), A Procedural-Structural Perspective on Algebra Research. *Proceedings of Psychology of Mathematics Education*, Furinghetti F (eds), Assise, Italy.
- Kieran C. (1992), The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419), New York: MacMillan.
- Kieran C. (1994), A functional approach to the introduction of algebra. Some pros and Cons. *Proceedings of PME 18* , Vol I, 157-175, Université de Lisbonne.
- Lemoyne G., Conne F., Brun J. (1993), Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif à l'algèbre, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 13-3, 333-384.
- Puig L., Rojano T. (2004), The history of algebra in mathematics education, In K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224), Boston/Dordrecht/New York/ London: Kluwer Academic Publishers.
- Vergnaud G. (1988), Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Vergnaud G. (1989), Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. N. Bednarz et C. Garnier Edits. CIRADE.
- Vergnaud G., Cortes, A., Favre Artigue, P. (1987), Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. *Problèmes épistémologiques et didactiques. Didactique et acquisition de connaissances scientifiques*, Grenoble : La Pensée sauvage.

ANNEXE

ANNEXE 1 : PRESENTATION D'APLUSIX

Dans notre expérimentation, nous avons utilisé Aplusix Standard. Actuellement, il existe une nouvelle version Aplusix II que nous présentons ci-dessous.

Aplusix II est un logiciel d'aide à l'apprentissage de l'algèbre pour les élèves de collèges et de lycées. Il porte sur la résolution d'exercices (calculs numériques, développements, factorisations, résolutions d'équations, d'inéquations et de systèmes d'équations) ainsi que sur la résolution de problèmes donnés en langue naturelle.

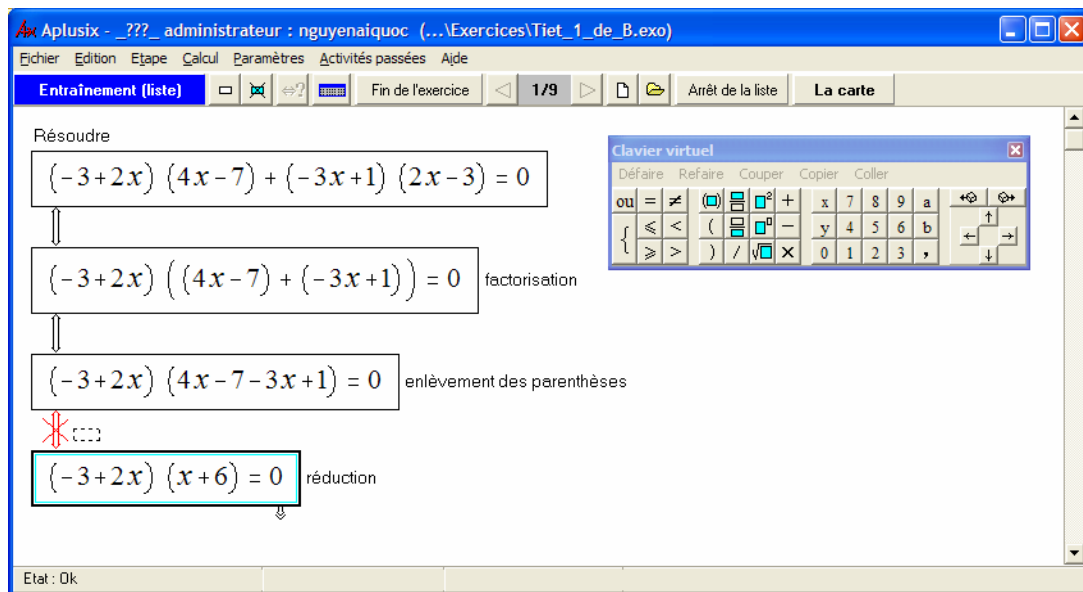


Figure 1 : Exemple d'utilisation en entraînement. L'équation dans l'étape 4 n'est pas équivalente à la précédente.

L'objectif d'Aplusix est d'aider les élèves à résoudre des exercices et des problèmes. L'élève effectue les calculs de son choix, avec les étapes de son choix, comme sur le papier. Aplusix lui indique si ses calculs sont corrects ou non, si l'exercice est résolu ou non. Aplusix fournit aussi la solution de l'exercice et le score d'une résolution.

Lorsque les exercices sont de l'un des types calculer (pour le calcul numérique), développer, factoriser, ou résoudre (équations, inéquations, ou systèmes d'équations), Aplusix vérifie que les exercices sont correctement terminés. Des exercices non de ces types peuvent aussi être traités ; dans ce cas, il n'y a pas de vérification de la fin.

Les problèmes sont composés de sections dans lesquelles des informations sont apportées et des questions sont posées. Les réponses sont des expressions qui sont comparées à celle qui a été fournie par le concepteur du problème. Certaines sections d'un problème peuvent être des exercices. Ainsi, un problème peut comporter un texte en langue naturelle avec une mise en équation suivi de la résolution de l'équation.

Aplusix n'enseigne pas directement les règles et les méthodes. Il aide à les appliquer correctement en fournissant des rétroactions pertinentes.

Aplusix II est un logiciel conçu en premier lieu pour une utilisation dans les établissements scolaires dotés d'un réseau et d'un serveur. Il peut aussi être utilisé sur des machines autonomes, dans des établissements scolaires ou à la maison.

L'activité Exercices

Aplusix Standard comporte un mode appelé « Exercice » qui permet un entraînement de l'élève à la résolution d'exercices. Dans l'activité « Exercices », l'élève peut effectuer les actions suivantes :

- Il peut saisir l'énoncé de chaque exercice à partir d'un livre ou d'une fiche fournie par le professeur et la saisie peut être effectuée avec le clavier de l'ordinateur ou le clavier virtuel. Pour afficher le clavier virtuel.

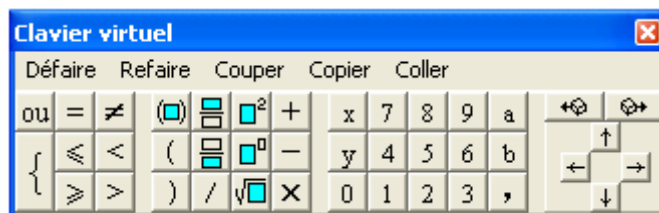


Figure 2 : Le clavier virtuel

- Il peut résoudre des exercices de la Carte. La carte présente les familles d'exercices sous la forme de points organisés dans un plan. Les exercices de la Carte sont produits par Aplusix en choisissant des formes et en tirant les nombres au hasard. Lorsque l'élève demande une deuxième fois les exercices d'une même famille, il obtient des exercices différents.

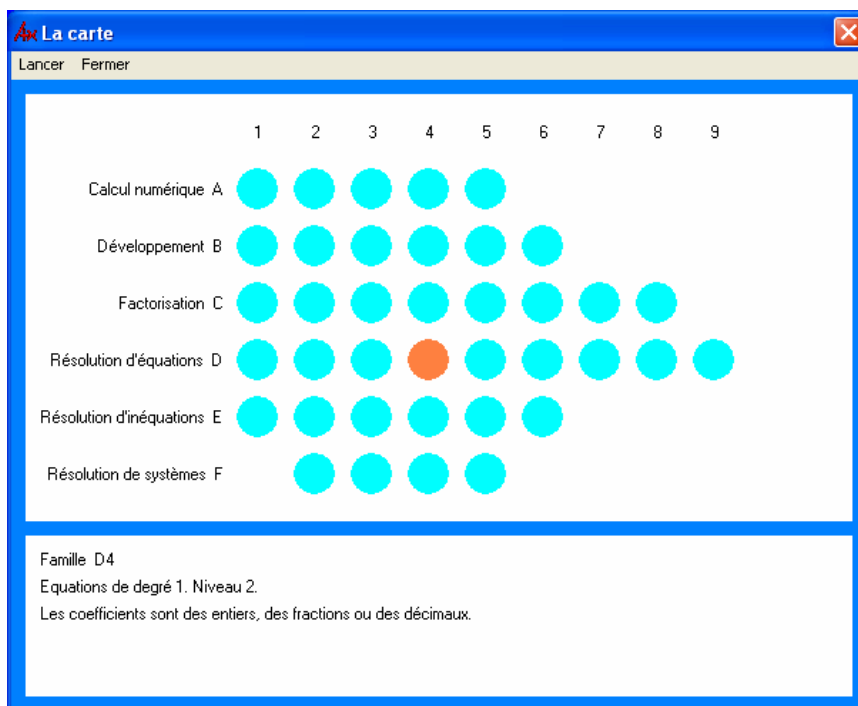


Figure 3 : La carte des exercices

- Il peut résoudre des exercices se trouvant dans un fichier. Ces fichiers peuvent contenir des exercices ou des problèmes. Au moment du chargement, s'il n'y a pas de mode d'exécution associé à la liste, Aplusix demande à l'élève s'il veut résoudre les exercices en mode « Entraînement » ou en mode « Test ». Des fichiers d'exercices peuvent être fournis par un professeur. Des fichiers d'exercices pourront être obtenus sur Internet lorsque des sites en proposeront (voir en particulier le site <http://apluxix.imag.fr>).

- Il peut enregistrer la feuille de calcul dans un fichier. La feuille de calcul est ce qui est affiché sur l'écran de l'ordinateur.
- Il peut ouvrir un fichier contenant une feuille de calcul. Ce fichier peut avoir été enregistré précédemment par l'élève ou avoir été fourni par une autre personne.
- Pendant la résolution d'un exercice, l'élève peut à tout moment demander son score ou de voir la solution avec le bouton droit de la souris.

L'activité Test

Aplusix Standard comporte un mode appelé « Test » dans lequel il laisse travailler l'élève pendant 30 minutes sans lui apporter d'information.

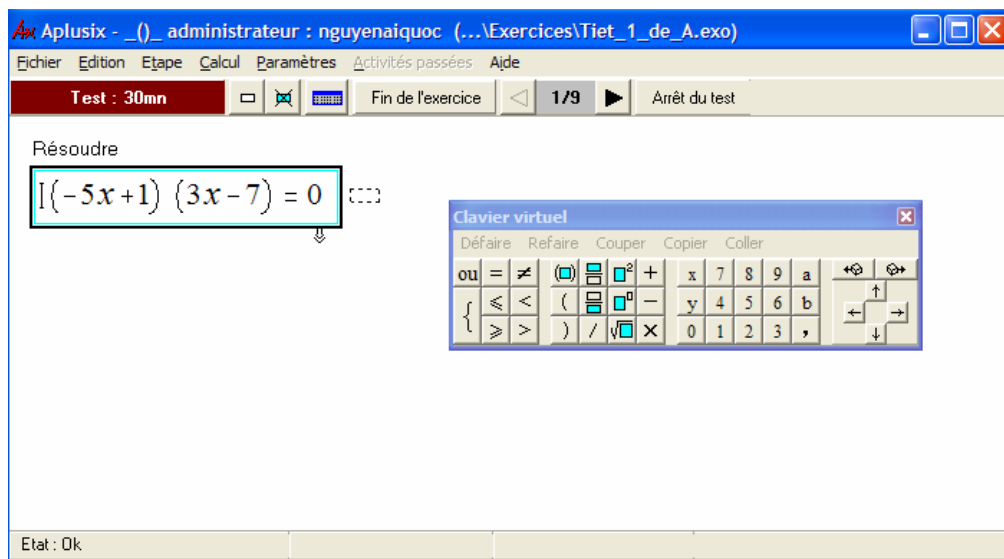


Figure 4 : Exemple de travail en mode « Test »

A l'issue d'un test, l'élève obtient un score et peut passer en « Autocorrection », mode dans lequel il revoit son travail, avec les indications de calculs justes et de calculs faux, d'exercice terminé ou non. Il peut alors reprendre les exercices pour les corriger lui-même, avec l'aide des rétroactions du mode « Exercice ».

La partie gauche de la barre d'outils indique en permanence le temps restant. Lorsque l'élève a terminé un exercice, il peut le reprendre tout de suite en cliquant sur le bouton « Modifier l'exercice ».

Un test est terminé dans 4 situations lorsque :

- tous les exercices ont été résolus, correctement ou non,
- le temps est écoulé,
- l'élève clique sur le bouton « Arrêt du test »,
- l'élève quitte Aplusix.

Dans les trois premiers cas, Aplusix fournit le score et propose de passer en "Autocorrection".

Les activités passées

Le menu « Activités passées » d'Aplusix comporte une rubrique « Observation/correction » qui ouvre une fenêtre permettant de revoir ce qui a été effectué. Il faut choisir une activité dans cette fenêtre, en sélectionnant un item dans chaque colonne à partir de la gauche.

Les élèves accèdent aux activités par la date (première colonne) puis par l'heure et le type d'activité (deuxième colonne). Une description de l'activité sélectionnée est fournie en bas de la fenêtre. Les professeurs disposent de deux colonnes complémentaires, à gauche, permettant de choisir la classe et l'élève.

Lorsqu'une activité est sélectionnée, l'utilisateur (élève ou professeur) peut effectuer une Observation (voir ci-dessous). Lorsqu'une activité « Exercice » ou « Test » est sélectionnée, l'élève peut effectuer une Autocorrection (voir ci-dessous).

L'activité Autocorrection

Dans cette activité, l'élève peut revoir les calculs qu'il a effectués en mode Exercice ou Test. Il peut corriger lui-même les exercices qu'il n'a pas résolus correctement en cliquant sur le bouton « Modifier l'exercice » et en reprenant la résolution. Il profite ainsi de la vérification des calculs qu'il n'avait pas à sa disposition pendant un Test.

L'élève peut effectuer l'Autocorrection d'un test juste après ce test, en répondant oui à la proposition faite par Aplusix. Il peut effectuer l'Autocorrection d'un test ultérieurement, à l'aide du menu « Activités passées ».

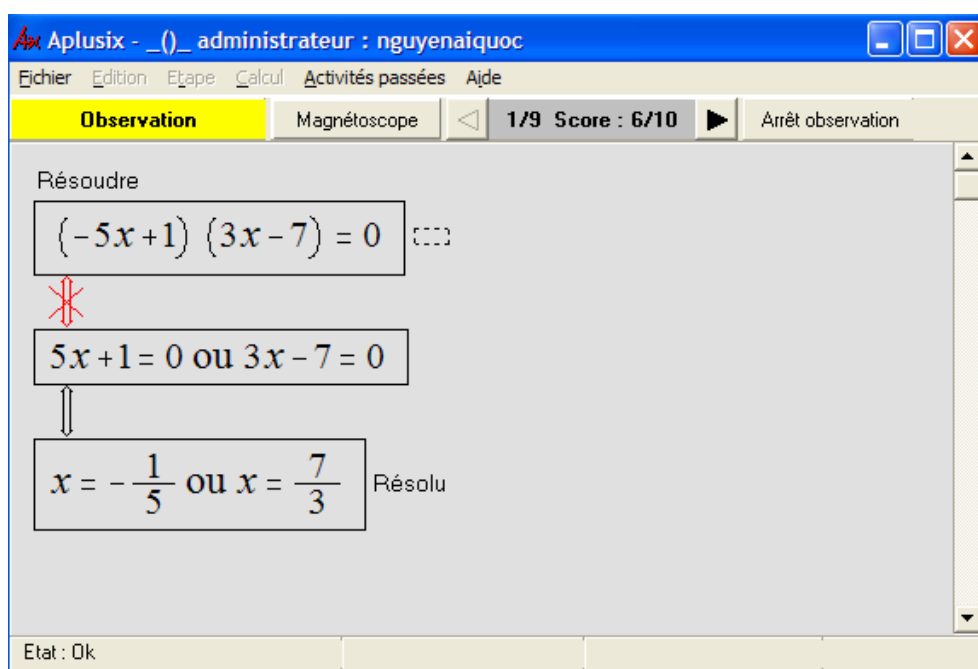


Figure 5 : Exemple d'utilisation d'Autocorrection après le test

L'activité Observation

Dans cette activité, l'élève peut revoir ses exercices dans leur forme finale et utiliser le magnétoscope pour revoir le détail de ses actions. Le professeur peut faire de même pour les élèves de ses classes.

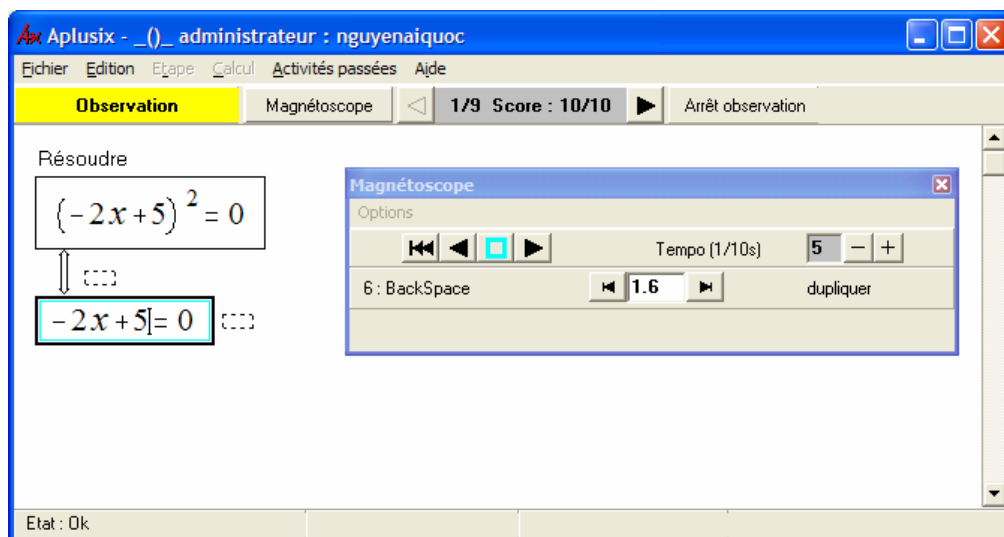


Figure 6 : Exemple d'observation des activités passées à l'aide du magnétoscope

Le logiciel enregistre toutes les actions de l'élève. Cela permet une observation fine des activités passées à l'aide d'un « magnétoscope », observation qui peut être effectuée par l'élève ou le professeur. Le professeur a accès aussi à des statistiques sur ses classes en termes de nombre d'exercices traités ou bien résolus, de calculs erronés, de scores.

Les statistiques

Le menu « Activités passées » d'Aplux comporte une rubrique « Statistiques » qui ouvre une fenêtre permettant de choisir une « population » (ensemble d'activités d'élèves) sur laquelle on veut des statistiques. Il faut sélectionner une date de début et une date de fin, éventuellement une activité et éventuellement une famille d'exercices ou un fichier d'exercices.

Quand l'utilisateur est un professeur, il peut choisir des classes, parmi les siennes, et éventuellement des élèves. S'il ne choisit pas d'élève, tous ceux appartenant aux classes sélectionnées sont pris en compte. Quand l'utilisateur est un élève, il n'a rien de plus à choisir.

Vérification des calculs

Aplux peut vérifier que deux étapes reliées contiennent deux expressions numériques ou algébriques « égales », ou deux équations, inéquations ou systèmes d'équations « équivalents ». Avec le menu « Paramètres », on peut choisir entre une vérification permanente et une vérification à la demande, éventuellement limitée (à 2 crédits ou 4 crédits par exercice). Dans le cas d'une vérification à la demande, le bouton « vérifier l'équivalence » doit être utilisé pour obtenir la vérification. Si c'est une vérification avec crédits, à chaque fois que la demande de vérification est activée, le crédit est diminué de 1. Lorsqu'il n'y a plus de crédit, il n'est plus possible de vérifier l'équivalence. Le nombre de crédits restants est indiqué dans la barre d'état.

ANNEXE 2 : PROGRAMMES EN MATHS-ALGÈBRE AU NIVEAU DE COLLÈGE ET DE LYCEE EN FRANCE ET AU VIETNAM

Classe Sixième (F)	Classe 6 (VN)
TRAVAUX NUMÉRIQUES 1. Nombres entiers et décimaux : écriture et opérations -Techniques opératoires -Procédés de calcul approché : troncature et arrondi ; ordre de grandeur d'un résultat 2. Quotient de deux nombres entiers : -Écrire fractionnaire -Extension aux nombres décimaux 3. Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires 4. Initiation à la résolution d'équations 5. Initiation aux écritures littérales 6. Nombres relatifs et repérage ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES-FONCTION 1. A base numérique 2. A base géométrique	ARITHMETIQUE 1. Révision et compléments sur les naturels - Notion d'ensemble, d'élément. Notation d'un ensemble. Les symboles $\in$, $\notin$. - Nombre des éléments d'un ensemble. Sous-ensembles (avec les notations $\subset$, $\supset$), ensemble vide (avec notation $\emptyset$). -$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, écriture et lecture des naturels, opérations dans $\mathbb{N}$ et propriétés, puissances, propriétés de divisibilité d'un nombre et d'une somme par un nombre, diviseurs et multiples, nombres premiers, diviseurs communs, multiples communs. 2. Entiers relatifs $\mathbb{Z}$: -entiers négatifs : besoin d'utilisation, représentation des naturels et des entiers négatifs sur l'axe numérique -Ensemble $\mathbb{Z}$ et la représentation des entiers sur l'axe numérique, ordre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, Valeur absolue. -Opérations dans $\mathbb{Z}$ (addition, soustraction et multiplication, convention de priorités entre opérations) et propriétés fondamentales, multiples et diviseurs d'un entier. 3. Fractions -Fraction $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ ($b \neq 0$). Égalité, propriétés fondamentales, réduction, fraction réduit au maximum, réduction au même dénominateur, comparaison des fractions -Opérations sur les fractions : addition, soustraction, multiplication, division et propriétés fondamentales. -Nombres $a\frac{b}{c}$, nombre décimal, rapport et rapport des pourcentages -3 problèmes fondamentaux sur les fractions : Calcul de la valeur fractionnaire d'un nombre donné, Détermination d'un nombre en sachant sa valeur fractionnaire, Détermination d'un rapport de deux nombres. -Représentation en diagramme des pourcentages.

Tableau 1

Classe Cinquième (F)	Classe 7 (VN)
TRAVAUX NUMÉRIQUES 1. Enchaînement d'opérations sur les nombres entiers et décimaux positifs : -Conventions de priorités entre opérations -Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition 2. Nombres en écriture fractionnaire -Multiplication -Comparaison, addition et soustraction, les dénominateurs étant égaux ou multiples 3. Nombres relatifs en écriture décimale -Initiation à la résolution d'équations ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 1. Activités graphiques -Repérage sur une droite graduée -Repérage dans le plan 2. Exemple de fonctions-Proportionnalité 3. Relevés statistiques -Lecture, interprétation, représentations graphiques de séries statistiques -Classes, effectifs -Fréquences.	ALGÈBRE 1. Nombres rationnels et réels -Notion de nombre rationnel ; représentation d'un rationnel sur l'axe numérique ; comparaison des rationnels ; 4 opérations sur les rationnels ; Puissance entière d'un rationnel -Proportion et propriétés ; propriétés des suites de fractions égales -Décimaux finis ; décimaux infinis périodiques ; opérations -Arrondissement d'un nombre -Introduction de la racine carrée, irrationnels (décimaux infinis non périodiques), touche racine carrée $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice, réels 2. Fonctions et graphiques -Proportionnalité croissante et décroissante -Définition de la notion de fonction par tableaux, formules, concrets et simple -Système de coordonnées planes ; Représentation graphique de la fonction $y=ax$ ($a \neq 0$) et $y= (a/x)$ ($a \neq 0$) 3. Statistiques -Signification de la statistique ; recueil de données, fréquence ; tableau de distribution expérimentale ; diagramme ; moyenne ; mode 4. Expressions algébriques -Notion d'expression algébrique ; valeur d'une expression algébrique -Monômes, degré d'un monôme, monômes semblables -Notion de polynômes à plusieurs variables ; addition et soustraction des polynômes -Polynômes à une variable : ordonnés selon les puissances décroissantes ; Addition et soustraction des polynômes à une variable ; Notion de racine de polynômes à une variable.

Tableau 2

Classe Quatrième (F)	Classe 8 (VN)
TRAVAUX NUMÉRIQUES 1. Nombres et calcul numérique Opérations (+, -, x, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée) - Puissance d'exposant entier relatif - Notation scientifique des nombres décimaux. Ordre de grandeur d'un résultat - Touche racine carrée $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice 2. Calcul littéral - Développement - Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. Applications - Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 1. Représentations graphiques. Proportionnalité 2. Applications de la proportionnalité - Vitesse moyenne - Calculs faisant intervenir des pourcentages 3. Statistiques - Effectifs cumulés, fréquences cumulées - Moyennes pondérées - Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs	ALGÈBRE 1. Multiplication et Division des polynômes - Multiplication d'un monôme par un polynôme ; entre deux polynômes - Identités remarquables : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm a^2b + ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ - Factorisation de polynômes - Division d'un monôme par un monôme ; d'un polynôme par un monôme ; d'un polynôme par un polynôme 2. Fractions algébriques - Définition, ensemble de définition d'une fraction - Propriété fondamentale ; règle de changement du signe - Réduction, réduction au même dénominateur de plusieurs fractions - Opérations sur les fractions : addition, soustraction, multiplication, division, transformations identiques 3. Equation et inéquations du premier degré à une inconnue a. Équation à une inconnue - Définition de notion de l'équation ; solutions - Deux équations équivalentes - Transformations équivalentes des équations - Équation du premier degré à une inconnue : définition, résolution - Équations $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$, $A_1(x).A_2(x) \dots A_n(x) = 0$ avec des paramètres - Résolution des problèmes se ramenant à une équation - Ordre dans l'ensemble Q b. Inéquation à une inconnue - Définition de notion de l'inéquation ; solutions - Inéquations équivalentes - Transformations équivalentes des inéquations - Inéquation du premier degré à une inconnue : définition, résolution - Représentation d'ensemble de solutions sur l'axe numérique.

Tableau 3

Classe Troisième (F)	Classe 9 (VN)
TRAVAUX NUMÉRIQUES 1. Écriture littérales ; identités remarquables 2. Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées) - Racine carrée d'un nombre positif - Produit et quotient de deux radicaux 3. Équations et inéquations du premier degré - Ordre et multiplication - Inéquation du premier degré à une inconnue - Système de deux équations à deux inconnues - Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant 4. Nombres entiers et rationnels - Diviseurs communs à deux entiers - Fractions irréductibles ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES – FONCTIONS 1. Fonction linéaire et fonction affine - Fonction linéaire - Fonction affine - Fonction affine et fonction linéaire associée 2. Proportionnalité et traitements usuels sur les grandeurs - Applications de la proportionnalité - Grandeurs composées - Changement d'unités Calculs d'aires et de volumes - Effets d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou volumes 3. Statistique - Caractéristiques de position d'une série statistique - Approche de caractéristiques de dispersion d'une série statistique - Initiation à l'utilisation de tableurs-grapheurs en statistique.	ALGÈBRE 1. Nombres réels et racines carrées - Révision des rationnels - Définition de notion des nombres irrationnels : décimaux infinis non périodiques - Ensemble des réels - Racine carrée : définition et notation, extraction d'un produit et multiplication des racines carrées ; extraction d'un quotient et division des racines carrées ; réduction d'une expression contenant des racines carrées - racine du troisième degré : définition, notation, propriétés analogues de la racine carrée 2. Fonction $y=ax+b$ - Révision, propriétés, représentation graphique de $y=ax$ et $y=ax+b$ - Coefficient angulaire d'une droite ; droites parallèles, confondues, concourantes et perpendiculaires 3. Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues - Définition, transformations équivalentes - Résolution par substitution et par combinaison - Illustration graphique d'une solution d'un système linéaire - Résolution de problèmes se ramenant à un système linéaire 4. Fonction $y=ax^2$ - Étude et représentation graphique de la fonction $y=ax^2$ 5. Équations du second degré à une inconnue - Définition ; équations défectives $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$ - Résolution en utilisant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ ou $\Delta' = b'^2 - ac$ avec $b' = \frac{b}{2}$ lorsque b est pair - Théorème de Viète : Soit x_1, x_2 deux solutions, alors $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

	-Équation se ramenant à des équations du 2 nd : équations rationnelles, équations contenant des racines, des valeurs absolues, équations du troisième degré, du quatrième degré 6. Introduction de la statistique -Tableaux, diagrammes, moyenne.
--	---

Tableau 4

Classe Seconde (F)	Classe 10 (VN)
CALCUL ET FONCTIONS CALCUL 1. Nature et écriture des nombres -Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. 2. Notations N, Z, D, Q, R 3. Représentation des nombres dans une calculatrice -Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. 4. Nombres premiers -Décomposer un entier en produit de nombres premiers. 5. Ordre des nombres -Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. -Comparer a , a^2 et a^3 lorsque a est positif. 6. Valeur absolue d'un nombre -Caractériser les éléments d'un intervalle et le présenter. FONCTIONS 1. Identification de la variable et de l'ensemble de définition d'une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule. Détermination de l'image d'un nombre dans chacun des cas. 2. Étude qualitative de fonctions	(LE PROGRAMME ACTUEL) ALGÈBRE ENSEMBLE 1. Propositions - Ensemble -Notion de Proposition -Négation d'une proposition -Dédution et Équivalence -Propositions contenant les variables, $\forall, \exists$ 2. Application des propositions dans le raisonnement mathématique -Théorème, Condition nécessaire, condition suffisante -Condition nécessaire et suffisante -Démonstration par l'absurde 3. Notion d'ensemble -Notion d'ensemble : Deux façons de déterminations d'un ensemble : l'énumération, la caractérisation -Sous-ensemble -Deux ensembles égaux -Les ensembles ordinaires : N, Z, Q, R, intervalles des réels 4. Opérations sur les ensembles : Intersection, Réunion, Différence, Complémentaire. FONCTIONS

-Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. 3. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle. -Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation. 4. Premières fonctions de référence -Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2, x \mapsto \frac{1}{x}$ -Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$ 5. Fonctions linéaires et fonctions affines -Caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable. 6. Fonctions et formules algébriques -Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). -Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. -Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite ; factorisée,...). -Modifier une expression ; la développer ; la réduire selon l'objectif poursuivi. 7. Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations -Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. -Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. -Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x)=k$; $f(x)<k$; $f(x)=g(x)$; $f(x)<g(x)$; ... STATISTIQUE	1. Notion de fonctions -Définition -la fonction donnée par une formule -Représentation graphique d'une fonction -Variation de la fonction -Fonction paire et fonction impaire : Définition, représentation graphique 2. Fonction $y=ax+b$ -Représentation graphique de la fonction constante $y=b$ -Étude de la fonction $y=ax+b$ ($a \neq 0$) : ensemble de définition, représentation graphique -Droite parallèle à l'axe des ordonnées, droite $Ax+By+C=0$ 3. Fonction carrée $y=ax^2+bx+c$ -Ensemble de définition, variation et représentation de la fonction $y=ax^2$ ($a \neq 0$) -Variation de la fonction $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) -Représentation graphique de la fonction $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) : Formule de changement des axes de coordonnées $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$; détermination de la forme de la fonction $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 4. D'autres fonctions : $x , x^3, \sqrt{x}$ ÉQUATION ET INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ 1. Généralité de l'équation -Définition -Deux équations équivalentes, transformations équivalentes -Équation conséquente -Équation contenant des paramètres -Équation à plusieurs inconnues 2. Équation et système d'équations du premier degré a. Résolution et discussion de l'équation $ax+b=0$ b. Équation se ramenant à l'équation $ax+b=0$
--	--

1. Résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale (moyen, médiane, classe modale, moyenne élaguée) et une mesure de dispersion (on se restreindra en classe de seconde à l'étendue) -Utiliser les propriétés de linéarité de la moyenne d'une série statistique. -Calculer la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes. -Calcul de la moyenne à partir de la distribution des fréquences. 2. Définition de la distribution des fréquences d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement. Simulation et fluctuation d'échantillonnage. -Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard.	-Équation $\frac{mx+n}{px+q} = e$ avec $p \neq 0$ -Équation $ax+b = cx+d$ c.Équation du premier degré à deux inconnues $ax+by = c$ -Résolution et discussion de l'équation $ax+by=c$ -Représentation géométriquement de l'ensemble des solutions de l'équation $ax+by=c$ -Commentaire dans le cas où $a=b=0$ d. Système d'équations premier degré à deux inconnues : -Définition -Résolution du système -Représentation géométriquement de l'ensemble des solutions 3. Inégalité a. Réels positifs et négatifs b. Inégalité - Définition c. Caractères fondamentales de l'inégalité d. Démonstration d'une égalité e. Inégalité de Cauchy f. Inégalités contenant les valeurs absolues 4. Inéquation du premier degré a. Généralité de l'inéquation -Définition -Deux inéquations équivalentes b. Inéquation $ax+b > 0$ -Résolution et discussion de l'inéquation: $ax+b>0$ c. Signe de binôme $f(x)=ax+b$ - Inéquations se ramenant à la forme: $(ax+b)(cx+d)(mx+n)>0$ - Inéquations se ramenant à la forme : $\frac{(ax+b)(cx+d)}{ex+f}$ d. Équations et inéquations contenant des valeurs absolues : $ax+b + cx+d = 0$; $ax+b > cx+d$; $ax+b \geq cx+d$. 5. SYSTÈME D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ a. Système d'inéquations du premier degré à une inconnue
---	---

Exemples : $\begin{cases} 3x+2 > 0 \\ 2x-5 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+1)(x+4) < 0 \\ \frac{1}{x-3} < \frac{2}{2x+1} \end{cases}$

b. Inéquation du premier degré à deux inconnues :

-Définition

-Exemple : $2x+3y-12 > 0$

c. Système d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Exemple : $\begin{cases} 3x-y+3 > 0 \\ -2x+3y-6 < 0 \\ 2x+y+4 > 0 \end{cases}$

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

1. Équation du deuxième degré $ax^2+bx+c = 0$

a. Définition

b. Formule de solutions

c. Résolution et discussion de l'équation par l'intersection de la parabole $y=ax^2+bx+c$ et l'axe $y=0$

d. Théorème de Viète et ses applications

- Théorème de Viète : Soient x_1, x_2 deux solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, alors

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

-Cherche des deux nombres en sachant leur somme et produit

-Signe des solutions

2. Système d'équations du deuxième degré

-Système contenant une équation du deuxième degré et une équation du premier degré à deux inconnues

-Système d'équations symétriques aux x et Y : $\begin{cases} x^2 \pm xy + y^2 = a \\ x \pm y \pm xy = b \end{cases}$

	3. Inéquation du deuxième degré a. Signe du trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ Théorème de signe de $f(x)$: Soit $\Delta = b^2-4ac$. <table border="1" data-bbox="1128 268 2038 592"> <tr> <th>Signe de Δ</th><th>Signe de $f(x)$</th></tr> <tr> <td>$\Delta < 0$</td><td>$a.f(x) > 0, \forall x \in R$</td></tr> <tr> <td>$\Delta = 0$</td><td>$a.f(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$</td></tr> <tr> <td>$\Delta > 0$: l'Équation $f(x)=0$ possède deux solutions x_1, x_2 distinctes ($x_1 < x_2$)</td><td> $a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$ $a.f(x) > 0,$ $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ </td></tr> </table> b. Inéquation du deuxième degré -Définition c. Résolution 4. Sommaire du système d'inéquations du deuxième -Résolution d'un système d'inéquations du deuxième degré à une inconnue 5. Théorème inverse de signe de $f(x)$ a. Théorème : Soit le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) et le réel α. Si $a.f(\alpha) < 0$ alors $f(x)$ possède deux racines x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) et $x_1 < \alpha < x_2$. b. Comparaison d'un réel et les racines d'un trinôme 6. Équations et inéquations se ramenant au deuxième degré a. Équation $ax^4+bx^2+c = 0$ b. Équations et inéquations contenant la valeur absolue c. Équations et inéquations contenant la racine carrée de l'inconnue CALCUL APPROCHE 1. Approximation. Erreur absolue 2. Erreur relative. Opérations sur les erreurs.	Signe de Δ	Signe de $f(x)$	$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in R$	$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$	$\Delta > 0$: l'Équation $f(x)=0$ possède deux solutions x_1, x_2 distinctes ($x_1 < x_2$)	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$ $a.f(x) > 0,$ $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
Signe de Δ	Signe de $f(x)$								
$\Delta < 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \in R$								
$\Delta = 0$	$a.f(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$								
$\Delta > 0$: l'Équation $f(x)=0$ possède deux solutions x_1, x_2 distinctes ($x_1 < x_2$)	$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$ $a.f(x) > 0,$ $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$								

Tableau 5

Classe Première (F)	Classe 11 (VN)
ANALYSE GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS 1. Opérations sur les fonctions : $u+v$, λu, uv, $\frac{u}{v}$, $u \circ v$ -On partira des fonctions étudiées en classe de 2^{nde}. Sur des exemples et selon le problème traité, on proposera plusieurs écritures d'une même fonction trinôme, d'une même fonction homographique. 2. Définition d'une fonction polynôme et de son degré 3. Sen de variation et représentation graphique d'une fonction de la forme $u+\lambda$, λu, la fonction u étant connue. Sen de variation de $u \circ v$, u et v étant monotones -On travaillera, à l'aide de grapheurs, sur des familles de courbes représentatives de fonctions associées à deux fonctions données u et v : $u+\lambda$, λu, $u+v$, u, $x \rightarrow u(\lambda x)$ et $x \rightarrow u(x+\lambda)$. 4. Résolution de l'équation du second degré. Étude du signe d'un trinôme -On aboutira ici aux formules usuelles donnant les racines et la forme factorisée d'un trinôme du second degré. -On fera le lien entre les résultats et l'observation des représentations graphiques obtenues à l'aide d'un grapheur. DÉRIVATION 1. Approche cinématique ou graphique du concept de nombre dérivé d'une fonction en un point -Plusieurs démarches sont possibles : passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée pour des mouvements rectilignes suivant des lois horaires élémentaires (trinôme du second degré dans un premier temps) ; zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice. -On ne donnera pas de définition formelle de la notion de limite. Le vocabulaire et la notation relatifs aux limites seront introduits sur des exemples puis utilisés de façon intuitive.	ALGÈBRE ET ANALYSE FONCTIONS, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES 1. Fonctions trigonométriques -Définition de fonctions trigonométriques de variables réelles ; périodique ; variation et représentation graphique. 2. Formules de transformations $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$ $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ $a \sin x + b \cos x = A \sin(x+C)$ 3. Équations trigonométriques fondamentales ; Formules de solutions ; Représentation de solutions sur cercle trigonométrique -On pourra présenter les touches $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ de calculatrice. -On pourra utiliser les notations : arcsin, arccos, arctn, arccotan 4. Équations trigonométriques simples -Équation du deuxième degré à une fonction trigonométrique ; équation $a \sin x + b \cos x = c$; quelques autres équations autres. 5. Inéquations trigonométriques simples

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0

3. Fonction dérivée

4. Tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable ; approximation affine associée de la fonction

-On construira point par point un ou deux exemples d'approximation de courbe intégrale définie par : $y=f(t)$ et $y(t_0)=y_0$ en utilisant l'approximation $\Delta f \approx f'(a)\Delta t$

-On pourra observer sur grapheur ou tableur l'erreur commise dans le cas où on connaît une expression de la fonction y.

5. Dérivée des fonctions usuelles : $x \rightarrow x^n$, $x \rightarrow \sqrt{x}$, $x \rightarrow \cos x$ et $x \rightarrow \sin x$

-On pourra admettre les dérivées des fonctions sinus et cosinus.

6. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de $x \mapsto f(ax+b)$

-On justifiera le résultat donnant la dérivée de uv et (1/u)

7. Lien entre signe de la dérivée et variations

-On étudiera, sur quelques exemples, le sens de variation de fonction polynômes de degré 2 ou 3, de fonctions homographiques ou de fonctions rationnelles très simples. On introduira les notions et le vocabulaire usuels (extremum, majorant, minorant) et, de l'étude du sens de variations, on déduira des encadrements d'une fonction sur un intervalle.

-On justifiera que la dérivée d'une fonction monotone sur un intervalle est de signe constant ; on admettra la réciproque.

-L'étude de fonctions ne sera pas présentée comme une fin en soi, mais interviendra lors de la résolution de problèmes.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES

SUITES

1. Raisonnement par récurrence

-Présentation de raisonnement par récurrence

-Exemples d'applications

2. Suites ; Suites croissantes ; suites décroissantes ; suites bornées

-Considération de suite à une fonction de variable naturelle

-Exercices d'application de raisonnement par récurrence

3. Suites arithmétiques ; terme général de suite arithmétique ; Somme de n termes premiers d'une suite arithmétique

4. Suites géométriques ; terme général de suite géométrique ; somme de n termes premiers d'une suite géométrique

-Un text à consulter sur les suites dans la fleur de neige Von Koch (géométrie fractale)

LIMITE

1. Limite de suites

-Notion de limite d'une suite ; Quelques théorèmes de limite des suites ; somme de tous les termes des suites géométriques infinies de raison $|q| < 1$; suites tendent vers ∞

-On n'utilise pas le langage (ε, N) dans la définition de limite de suites.

-Former aux élèves la notion de limite 0 par les exemples concrets et en suite on se conduit à limite non nul

-On ne présente pas le théorème suivant: « Une suite convergente est bornée »

-On présente le théorème Weierstrass et le théorème «des gendarmes »

2. Limite de fonctions

-Définition de limite de fonction via limite de suites; Quelques théorèmes de limite de fonctions ; élargissement de notion de limite de fonctions (limite infinie, limite en infini). Formes indéterminées.

-Limite à gauche, à droite n'est pas abordée

- On ne démontre pas les théorèmes de limite de fonctions

-Pour les formes indéterminées, on ne considère que les exercices

FONCTIONS

-Asymptotes verticales, horizontales ou obliques
-On étudiera, sur des exemples très simples (fonctions polynômes de degré 2 ou 3, fonction rationnelles du type $x \rightarrow ax + b + h(x)$ avec h tendant vers 0 en $+\infty$ ou $-\infty$), les limites aux bornes de l'intervalle de définition et les asymptotes éventuelles
-On s'appuiera sur l'intuition ; les résultats usuels sur les sommes et produits de limites apparaîtront à travers des exemples et seront ensuite énoncés clairement.

SUITES

1. Modes de générations d'une suite numérique.

Suite croissante, suite décroissante.

Suites arithmétiques et suites géométriques.

-Étude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence.

-Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation des vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques.

Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée).

-On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.

-On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.

2. Notion intuitive de limite infinie perçue à partir d'exemples.

Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition

-On utilisera au choix une des définitions suivantes pour la convergence d'une suite vers a :

Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à

simples

3. Fonctions continues

-Définition de fonctions continues en un point ; fonctions continues sur un intervalle ; quelques théorèmes de fonctions continues

-Pas notion de fonction continues sur l'intervalle $[a, b]$

-Pas démonstration de théorèmes de fonctions continues

DÉRIVATION

1. Notion de dérivé

-Définition ; méthode de calcul ; signification géométrique et physique de la dérivation

-On ne considère pas la dérivée à gauche et à droite

-Présentation de coefficient angulaire de tangente et de vitesse instantanée d'un mouvement

2. Règles de calculs de dérivée

-Dérivée d'une somme, différence, produit, quotient des fonctions ; dérivée de fonctions composées

-Démonstration de règles des calculs n'est pas exigible

3. Dérivée de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

-Présentation de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ pour établir formules de calculs de dérivée

des fonctions trigonométriques

4. Différentielle

-Définition ; application dans calculs approches

-pas notion approfondie sur différentielle

5. Dérivée en haut degré

Définition ; signification géométrique et mécanique de dérivée de second degré.

partir d'un certain rang. -Toute définition en ε et N est exclue. -Démonstration du théorème « des gendarmes » ; les théorèmes sur la somme, le produit et le quotient de suites convergentes seront pour la plupart admis -On pourra mettre la définition en œuvre pour étudier une limite (exemple : suite (w_n) définie par $w_n = \max(u_n, v_n)$) ou pour montrer l'unicité de la limite. -La définition d'une limite infinie pourra être abordée ou non -On montrera avec des exemples la variété de comportement de suites convergeant vers une même limite. 3. Limite d'une suite géométrique	
--	--

Tableau 6

ANNEXE 3 : RECUEIL ET TRAITEMENT DES DONNEES

Dans cette annexe, nous présentons les différentes étapes de recueil et traitement des données pour illustrer la méthodologie décrite dans le paragraphe II du chapitre C2. Chaque étape sera illustrée par les données d'une seule classe. Seule la première étape n'est pas illustrée car il s'agit de la visualisation des protocoles par le magnétoscope.

I.1. Etape 2 : Recueil des observés

Après la visualisation des protocoles des élèves par le magnétoscope d'Aplusix (étape 1) pour déterminer la technique mobilisée et repérer les éventuelles erreurs, nous avons relevé pour chaque élève et pour chaque exercice les observés : la résolution de l'élève, une indication sur l'état de la résolution (correcte, échec, interrompu) et la première erreur rencontrée dans la résolution (cf. Tableau 7, cas de classe Seconde)

Elève	$(-2x+5)^2=0$ $x = \frac{5}{2}$	$(-5x+1)(3x-7)=0$ $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	$(3-x)(x+2)+x+2=0$ S : $x=-2$ ou $x=4$	$(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ S : $x=6$ ou $x=\frac{3}{2}$	$(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ S : $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$
E1	τ_CarN $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x = -\frac{5}{2}$ ESIGN	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	τ_Fact_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)=0$ EFAC $3-x=0$ ou $x+2=0$ $x=3$ ou $x=-2$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)(4x-7-3x+1)=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $x = -\frac{3}{2}$ ou $x=6$ ESIGN	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ ESIGN $(-5x-4)(2x+1-x+1)=0$ $(-5x-4)(x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $x+2=0$ $x = -\frac{4}{5}$ ou $x = -2$
E2	τ_CarN $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x = \frac{5}{2}$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	τ_Fact_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+1(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)(4x-7-3x+1)=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $x = \frac{3}{2}$ ou $x=6$	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$

E3	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $-2x=-5$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x=\frac{-1}{-5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+1(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ ESIGN $x=-\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{4}{-5}$ ou $x=\frac{2}{3}$ ESIGN
E4	τ_{ProdN} $(-2x+5)^2=0$ $(-2x+5)=0$ ou $(2x-5)=0$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x=\frac{-1}{-5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+1(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)(4x-7-3x+1)=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{2}{-3}$ ou $x=-\frac{4}{5}$
E5	Sans réponse	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x=\frac{-1}{-5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=-4$ ESIGN	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{2}{-3}$ ou $x=-\frac{4}{5}$
E6	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x=\frac{-1}{-5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=-4$ ESIGN	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(2x-3)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(2x-3)(4x+7-3x+1)=0$ ESIGN $(2x-3)(x+8)=0$ $(2x-3)=0$ ou $(x+8)=0$ $2x=3$ ou $x=-8$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$

				$x = \frac{3}{2}$ ou $x = -8$	$x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$
E7	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x = \frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x = \frac{-1}{-5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	Sans réponse	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=0,5$ ou $x=6$ ECALN	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x = -\frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$ ESIGN
E8	τ_{Dev} $(-2x+5)^2=0$ $(-2x)^2 + 2 \times (-2x) \times 5 + (5)^2=0$ $4x^2+20x+25=0$ ESIGN interrompu	τ_{Dev} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2+35x+3x-7=0$ interrompu	τ_{Dev} $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2-2x+x+2=0$ $-x^2+2x+8=0$ interrompu	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $2x-3=0$ ou $x-6=0$ $x = -\frac{3}{2}$ ou $x=6$ ESIGN	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x+1)=0$ ESIGN $(-5x-4)((-2x+1)-(x+1))=0$ $(-5x-4)(-2x+1-x-1)=0$ $(-5x-4)(-3x)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x=0$ $x = \frac{4}{5}$ ou $x=0$ ESIGN
E9	Sans Réponse	τ_{Dev} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x+35x+3x-7=0$ ECALN $23x=7$ $x = \frac{7}{23}$	τ_{Dev} $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2+2x+x+2=0$ ESIGN $x^2+6x+8=0$ interrompu	τ_{Dev} $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-12x-14x) + (-6x^2-3)=0$ ECALN $(-12x-14x)=0$ ou $(-6x^2-3)=0$ EPRODF $x=26$ ou $x^2=6+3$ EOPM $x=26$ ou $x=3$ ERA1	$\tau_{\text{Dev_Rac}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $10x^2 - 4 = -5x^2 + 4$ ECALN $10x^2+5x^2=4+4$ $15x^2=8$ $x^2 = \frac{8}{15}$ $x = \sqrt{\frac{8}{15}}$ ERA1
E10	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+1(x+2)=0$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(2x-3)(4x-7-3x-1)=0$ ESIGN	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x+1)=0$

	$-2x=-5$ $x=\frac{5}{2}$	$x=\frac{-1}{-5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	$(2x-3)(x-8)=0$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=8$	ESIGN $(-5x-4)(-2x+1-x-1)=0$ $(-5x-4)(-3x)=0$ $x=-\frac{4}{5}$ ou $x=0$
E11	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $-2x=-5$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{Dev} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2+35x+3x-7=0$ $-15x^2+38x-7=0$ interrompu	Sans réponse	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{4}{5}$ ou $x=\frac{2}{3}$ ESIGN
E12	τ_{ProdN} $(-2x+5)^2=0$ $(-2x+5)=0$ ou $(-2x+5)=0$ $2x=5$ ou $2x=5$ $x=\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}$ $x=\frac{5}{2}$	$\tau_{\text{Non identifiée}}$ $(-5x+1)(3x-7)=0$ $(-5x+1)=-(3x-7)$ EPRODF $-5x+1=-3x+7$ $-2x=8$ ESIGN $x=-4$	τ_{Dev} $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+x=2$ ESIGN $3x+6-x^2-2x+x=2$ $2x-x^2=-4$ interrompu	τ_{Dev} $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(4x-7-3x-1)=0$ ESIGN $(-3+2x)(x-8)=0$ $-3x+24+2x^2-16x=0$ $2x^2-19x+24=0$ interrompu	τ_{Simp} $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $-2x+1=x-1$ $3x=2$ $x=\frac{2}{3}$
E13	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)=0$ EFAC $3-x=0$ ou $x+2=0$ $x=3$ ou $x=-2$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(2x-3)(-x-6)=0$ ECALN $2x-3=0$ ou $-x-6=0$ $2x=3$ ou $x=-6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{2}{3}$ ou $x=-\frac{4}{5}$
E14	τ_{ProdN} $(-2x+5)^2=0$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$

	$(-2x+5)=0$ ou $(-2x+5)=0$ $2x=5$ ou $2x=5$ $x=\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}$	$-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$(3-x)(x+2)+1(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $x+2=0$ ou $3-x=-1$ $x=-2$ ou $x=\frac{1}{3}$ EOPM	$(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{2}{3}$ ou $x=-\frac{4}{5}$
E15	τ_ProdN $(-2x+5)^2=0$ $(-2x+5)=0$ ou $(2x+5)=0$ EFACT $2x=5$ ou $2x=-5$ $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{5}{2}$	τ_Dev $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2+35x+3x-7=0$ $-15x^2+38x-7=0$ interrompu	τ_Dev_Rac $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2-2x+x+2=0$ $8-x^2=0$ ECALN $x=\sqrt{8}$ ERA1	τ_Dev $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $-12x+21+6x^2+14x-6x^2+9x+2x-3=0$ ESIGN et ECALN $18+13x=0$ $x=-\frac{18}{13}$	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)(-3x-x)=0$ ESIGN interrompu
E16	τ_ProdN $(-2x+5)^2=0$ $(-2x+5)=0$ ou $(-2x+5)=0$ $2x=5$ $x=\frac{5}{2}$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	τ_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)=0$ ou $(x+2)+x+2=0$ EPRODF $3-x=0$ ou $2x+4=0$ $x=3$ ou $x=-2$	τ_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)=0$ ou $(4x-7)+(-3x+1)=0$ ou $(2x-3)=0$ EPRODF $2x=3$ ou $x=6$ ou $2x=3$ $x=6$ ou $x=\frac{3}{2}$	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ ESIGN $-2x+1=0$ ou $-x+1=0$ ESIMP $x=\frac{1}{2}$ ou $x=1$
E17	τ_CarN $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x=\frac{5}{2}$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	τ_Fact_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+1(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	τ_Dev $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $10x^2+8x-5x-4=-5x^2+5x-4x+4$ $15x^2+2x=8$ $\frac{15}{2}x^2+x=4$ interrompu
E18	τ_CarN $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$	τ_Dev $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2-2x+x+2=0$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$

	$x = \frac{5}{2}$	$x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	$-x^2 + 2x + 8 = 0$ interrompu	$(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x = \frac{3}{2}$ ou $x=6$	$(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$
E19	τ_ProdN $(-2x+5)^2=0$ $(-2x+5)=0$ ou $(-2x+5)=0$ $2x=5$ $x = \frac{5}{2}$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	τ_Fact_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)(4x-7)+(-1+3x)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-1+3x))=0$ $(-3+2x)(7x-8)=0$ $-3+2x=0$ ou $7x-8=0$ $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{8}{7}$	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-2x+1)((-5x-4)-(x-1))=0$ EFAC $(-2x+1)(-6x-3)=0$ $-2x+1=0$ ou $-6x-3=0$ $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{3}{6}$
E20	τ_CarN $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $x = \frac{5}{2}$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	τ_Fact_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x = \frac{3}{2}$ ou $x=6$	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$
E21	τ_CarN $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $-2x=-5$ $x = \frac{5}{2}$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x = \frac{1}{5}$ ou $x = \frac{7}{3}$	τ_Fact_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x = \frac{3}{2}$ ou $x=6$	τ_Fact_ProdN $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x = \frac{2}{3}$ ou $x = -\frac{4}{5}$
E22	τ_ProdN $(-2x+5)^2=0$	τ_ProdN $(-5x+1)(3x-7)=0$	τ_Fact_ProdN $(3-x)(x+2)+x+2=0$	τ_Fact_ProdN $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$	τ_Simp $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$

	$(-2x+5)=0$ ou $(-2x-5)=0$ EFAC $2x=5$ ou $2x=-5$ $x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{5}{2}$	$-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$(3-x)(2(x+2))=0$ EFAC $3-x=0$ ou $2x+4=0$ $-x=-3$ ou $2x=-4$ $x=3$ ou $x=-2$	$(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\frac{(-2x+1)(-5x-4)}{(-5x-4)} = x-1$ $-2x+1=x-1$ $-3x=-2$ $x=\frac{2}{3}$
E23	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $-2x=-5$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(3-x)=0$ ECALN $x+2=0$ ou $3-x=0$ $x=-2$ ou $x=3$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{2}{3}$ ou $x=-\frac{4}{5}$
E24	τ_{ProdN} $(-2x+5)^2=0$ $(-2x+5)=0$ ou $(-2x+5)=0$ $2x=5$ ou $2x=5$ $x=\frac{5}{2}$ ou $x=\frac{5}{2}$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $-5x=-1$ ou $3x=7$ $x=\frac{1}{5}$ ou $x=\frac{7}{3}$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $x+2=0$ ou $-x+4=0$ $x=-2$ ou $x=4$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(x-6)=0$ $-3+2x=0$ ou $x=6$ $2x=3$ ou $x=6$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{2}{3}$ ou $x=-\frac{4}{5}$
E25	τ_{CarN} $(-2x+5)^2=0$ $-2x+5=0$ $-2x=-5$ $x=\frac{5}{2}$	τ_{ProdN} $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-5x+1=0$ ou $3x-7=0$ $x=-\frac{1}{5}$ ou $x=-\frac{7}{3}$ ESIGN		$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)((4x-7)+(-3x+1))=0$ $(-3+2x)(6+x)=0$ ECALN $-3+2x=0$ ou $x+6=0$ $x=\frac{3}{2}$ ou $x=-6$	$\tau_{\text{Fact_ProdN}}$ $(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $-5x-4=0$ ou $-3x+2=0$ $x=\frac{2}{-3}$ ou $x=\frac{4}{5}$ ESIGN

Tableau 7

I.2. Etape 3 : Relevé des techniques et erreurs par classe

Après l'étape 2, pour chaque classe et pour chaque exercice, nous avons compté le nombre d'occurrences des différents résultats obtenus et des différentes catégories d'erreurs rencontrées pour chaque technique (cf. Tableau 8, 9, 10, 11, 12, et 13).

Techniques	Etat de Techs			Erreurs										Données statistiques					
	Réussi	Echouée		ECALN	ECALD	ESIGN	EOPM	EPRODF	EFACT	ELOG	ERA1	ERA2	EDIVER	Total erreurs	Total techs	% Tech/ Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues /Total
		Terminée	Interrompue																
τ_{Fact_ProdN}	75	59	5	14		30	2	2	25			2	2	77	139	35,3	54,0	46,0	3,6
τ_{Fact_IsV}		3	9	1				3						4	12	3,0		100,0	75,0
τ_{IdR_ProdN}	51	41	3	21		16	1		13					51	95	24,1	53,7	46,3	3,2
τ_{IdR_CarN}	29	6		2		4	1							7	35	8,9	82,9	17,1	
τ_{IdR_Simp}		1	1			1	1		1					3	2	0,5		100,0	50,0
Total Gfact	155	110	18	38		51	5	5	39			2	2	142	283	71,8	54,8	45,2	6,4
τ_{ProdN}	25	13	2			4		12	2					18	40	10,2	62,5	37,5	5,0
τ_{CarN}	13	1				1								1	14	3,6	92,9	7,1	
τ_{Rac}	8	11	4			1	1				10	5		17	23	5,8	34,8	65,2	17,4
$\tau_{Simp} + \tau_{Simp_ProdN}$		6	1	1										1	7	1,8		100,0	14,3
Total Règles	46	31	7	1		6	1	12	2		10	5		37	84	21,3	54,8	45,2	8,3
$\tau_{Dév}$		4	18	7		10	1	1			1			20	22	5,6		100,0	81,8
τ_{IdR_Dev}			3			1			1					2	3	0,8		100,0	100,0
τ_{Dev_Rac}		2		2							2			4	2	0,5		100,0	
τ_{Dev_Discr}																			
τ_{Dev_IsV}																			
Total Gdév		6	21	9		11	1	1	1		3			26	27	6,9		100,0	77,8
Discr																			
τ_{Fact_Dev}																			
$\tau_{Fact_Dev_Discr}$																			
$\tau_{Dev_Fact_ProdN}$																			
Total Mixtes																			
<i>Non identifiée</i>		54																	
Totaux	201	147	46	48		68	7	18	42		13	7	2	205	394	100,0	51,0	49,0	11,7

Tableau 8 : Résultats globaux des effectifs des techniques et erreurs de la classe Seconde

Techniques	Etat Techs			Erreurs									Données statistiques					
	Réussi	Echouée		ECALN	ECALD	ESIGN	EOPM	EPRODF	EFACT	ELOG	ERA1	ERA2	Total erreurs	Total techs	% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues /Total
		Terminée	Interrompue															
τ_{Fact_ProdN}	65	35		7		28			6	7			48	100	24,8	65,0	35,0	
τ_{Fact_IsV}		1				1			1				2	1	0,2	0,0	100,0	
τ_{IdR_ProdN}	28	29		6		17			10	3			36	57	14,1	49,1	50,9	
τ_{IdR_CarN}	30													30	7,4	100,0		
τ_{IdR_Simp}																		
Total Gfact	123	65		13		46			17	10			86	188	46,7	65,4	34,6	
τ_{ProdN}	19	3				1				2			3	22	5,5	86,4	13,6	
τ_{CarN}	16	1				1	1						2	17	4,2	94,1	5,9	
τ_{Rac}	14	8									7	1	8	22	5,5	63,6	36,4	
τ_{IdR}																		
$\tau_{Simp}+\tau_{Simp_ProdN}$																		
Total Règles	49	12				2	1			2	7	1	13	61	15,1	80,3	19,7	
$\tau_{Dév}$																		
τ_{IdR_Dev}																		
τ_{Dev_Rac}		1		1								1	2	1	0,2		100,0	
τ_{Dev_Discr}	29	30	36	25	13	44				5			87	95	23,6	30,5	69,5	37,9
τ_{Dev_IsV}																		
Total Gdév	29	31	36	26	13	44				5		1	89	96	23,8	30,2	69,8	37,5
T_{Discr}	36	21		5	6	5				6			22	57	14,1	63,2	36,8	
τ_{Fact_Dev}																		
$\tau_{Fact_Dev_Discr}$	1													1	0,2	100,0		
$\tau_{Dev_Fact_ProdN}$																		
Total Mixtes	1													1	0,2	100,0		
Non identifiée																		
Totaux	238	129	36	44	19	97	1		17	23	7	2	210	403	100,0	59,1	40,9	8,9

Tableau 9 : Résultats globaux des effectifs des techniques et erreurs de la classe Première

Techniques	État de Techs			Erreurs								Données statistiques					
	Réussie	Échouée		ECAL	ECALD	ESIGN	EOPM	EPRODF	ELOG	ERA1	ERA2	Total erreurs	Total techs	% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues /Total
		Terminée	Interrompue														
τ_Fact_ProdN	26	68		25		17	2	24	31			99	94	24,8	27,7	72,3	
τ_Fact_IsV			5	3			3		1			7	5	1,3		100,0	100,0
τ_IdR_ProdN	9	35	1	11		18	2		17			48	45	11,9	20,0	80,0	2,2
τ_IdR_CarN	20	3		2		1						3	23	6,1	87,0	13,0	
τ_IdR_Simp																	
Total Gfact	55	106	6	41		36	7	24	49			157	167	44,1	32,9	67,1	3,6
τ_ProdN	4	10				2	1	2	7			12	14	3,7	28,6	71,4	
τ_CarN	6												6	1,6	100,0	0,0	
τ_Rac	1	18					2			15	3	20	19	5,0	5,3	94,7	
τ_IdR																	
τ_Simp+τ_Simp_ProdN		2											2	0,5		100,0	
Total Règles	11	30				2	3	2	7	15	3	32	41	10,8	26,8	73,2	
τ_Dév		34	17	34		13	1	5	5		1	59	51	13,5		100,0	33,3
τ_IdR_Dev		1		1								1	1	0,3		100,0	
τ_Dev_Rac		12		10		2				12		24	12	3,2		100,0	
τ_Dev_Discr																	
τ_Dev_IsV		9		6		4	4			1	2	17	9	2,4		100,0	
Total Gdév		56	17	51		19	5	5	5	13	3	101	73	19,3		100,0	23,3
τ_Discr																	
τ_Fact_Dev																	
τ_Fact_Dev_Discr																	
τ_Dev_Fact_ProdN	15	78	5	44		31	5	56	32			168	98	25,9	15,3	84,7	5,1
Total Mixtes	15	78	5	44		31	5	56	32			168	98	25,9	15,3	84,7	5,1
Non identifiée																	
Totaux	81	270	28	136	0	88	20	87	93	28	6	458	379	100,0	21,4	78,6	7,4

Tableau 10 : Résultats globaux des effectifs des techniques et erreurs de la classe 9-O (VN)

Techniques	État de Techs			Erreurs								Données statistiques					
	Réussie	Échouée		ECAL	ECALD	ESIGN	EOPM	EPRODF	ELOG	ERA1	ERA2	Total erreurs	Total techs	% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total
		Terminée	Interrompue														
τ_{Fact_ProdN}	256	84	2	28		45	5		18			96	342	41,4	74,9	25,1	0,6
τ_{Fact_IsV}																	
τ_{IdR_ProdN}	114	40		23		16	1		5	1		46	154	18,6	74,0	26,0	
τ_{IdR_CarN}	89	1				1						1	90	10,9	98,9	1,1	
τ_{IdR_Simp}																	
Total Gfact	459	125	2	51		62	6		23	1		143	586	70,9	78,3	21,7	0,3
τ_{ProdN}	35	8				6			4			10	43	5,2	81,4	18,6	
τ_{CarN}	42	1					1					1	43	5,2	97,7	2,3	
$\tau_{EgaCarN}$	5	2				2						2	7	0,8	71,4	28,6	
τ_{Rac}	26	28				1			1	24	1	27	54	6,5	48,1	51,9	
τ_{IdR}																	
$\tau_{Simp}+\tau_{Simp_ProdN}$		11											11	1,3		100,0	
Total Règles	108	50				9	1		5	24	1	40	158	19,1	68,4	31,6	
$\tau_{Dév}$		1	20	5		6						11	21	2,5		100,0	95,2
τ_{IdR_Dev}																	
τ_{Dev_Rac}																	
τ_{Dev_Discr}																	
τ_{Dev_IsV}																	
Total Gdév		1	20	5		6						11	21	2,5		100,0	95,2
τ_{Discr}																	
τ_{Fact_Dev}																	
$\tau_{Fact_Dev_Discr}$																	
$\tau_{Dev_Fact_ProdN}$	34	25	3	9		10			11			30	62	7,5	54,8	45,2	4,8
Total Mixtes	34	25	3	9		10			11			30	62	7,5	54,8	45,2	4,8
Non identifiée		1															
Totaux	601	201	25	65		87	7		39	25	1	224	827	100,0	72,7	27,3	3,0

Tableau 11 : Résultats globaux des effectifs des techniques et erreurs de la classe 9-S (VN)

Techniques	État de Techs			Erreurs								Données statistiques					
	Réussie	Échouée		ECAL	ECALD	ESIGN	EOPM	EPRODF	ELOG	ERA1	ERA2	Total erreurs	Total techs	% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues /Total
		Terminée	Interrompue														
τ_{Fact_ProdN}	8	6					1	5	3			9	14	2,0	57,1	42,9	
τ_{Fact_IsV}																	
τ_{IdR_ProdN}	9	5		2		1	1		1			5	14	2,0	64,3	35,7	
τ_{IdR_CarN}	5												5	0,7	100,0		
τ_{IdR_Simp}																	
Total Gfact	22	11		2		1	2	5	4			14	33	4,7	66,7	33,3	
τ_{ProdN}	5	4				3			2			5	9	1,3	55,6	44,4	
τ_{CarN}	4												4	0,6	100,0		
τ_{Rac}	19	16							7	7	2	16	35	4,9	54,3	45,7	
τ_{IdR}																	
$\tau_{Simp}+\tau_{Simp_ProdN}$		2											2	0,3		100,0	
Total Règles	28	22				3			9	7	2	21	50	7,1	56,0	44,0	
$\tau_{Dév}$			1										1	0,1		100,0	100,0
τ_{IdR_Dev}																	
τ_{Dev_Rac}		4		4					3	1	3	11	4	0,6		100,0	
τ_{Dev_Discr}	100	355	5	205	92	132			193		1	623	460	64,9	21,7	78,3	1,1
τ_{Dev_IsV}																	
Total Gdév	100	359	6	209	92	132			196	1	4	634	465	65,6	21,5	78,5	1,3
τ_{Discr}	79	65		21	10	9			38			78	144	20,3	54,9	45,1	
τ_{Fact_Dev}																	
$\tau_{Fact_Dev_Discr}$																	
$\tau_{Dev_Fact_ProdN}$	2	15		3		9		12	9			33	17	2,4	11,8	88,2	
Total Mixtes	2	15		3		9		12	9			33	17	2,4	11,8	88,2	
<i>Non identifiée</i>																	
Totaux	231	472	6	235	102	154	2	17	256	8	6	780	709	100,0	32,6	67,4	0,8

Tableau 12 : Résultats globaux des effectifs des techniques et erreurs de la classe 10-O (VN)

Techniques	État de Techs			Erreurs								Données statistiques					
	Réussie	Échouée		ECAL	ECALD	ESIGN	EOPM	EPRODF	ELOG	ERA1	ERA2	Total erreurs	Total techs	% Tech / Techs Identifiées	% T Réussies / Total	% T Echouées / Total	%T Interrompues / Total
		Terminée	Interrompue														
τ_{Fact_ProdN}	57	20		8		11	2		1			22	77	10,2	74,0	26,0	
τ_{Fact_IsV}		1		1								1	1	0,1		100,0	
τ_{IdR_ProdN}	50	7		3		4						7	57	7,5	87,7	12,3	
τ_{IdR_CarN}	26	2				2						2	28	3,7	92,9	7,1	
τ_{IdR_Simp}																	
Total Gfact	133	30		12		17	2		1			32	163	21,5	81,6	18,4	
τ_{ProdN}	19	6				2		2	1			5	25	3,3	76,0	24,0	
τ_{CarN}	18	3				2	1					3	21	2,8	85,7	14,3	
τ_{EgaCar}	1											1	1	0,1	100,0		
τ_{Rac}	34	8				1			1	5	1	8	42	5,5	81,0	19,0	
τ_{IdR}																	
$\tau_{Simp}+\tau_{Simp_ProdN}$		7		1		1						2	7	0,9		100,0	
Total Règles	72	24		1	0	6	1	2	2	5	1	18	96	12,7	75,0	25,0	
$\tau_{Dév}$																	
τ_{IdR_Dev}																	
τ_{Dev_Rac}																	
τ_{Dev_Discr}	167	188	4	88	53	64			23			228	359	47,4	46,5	53,5	1,1
τ_{Dev_IsV}		2		2								2	2	0,3		100,0	
Total Gdév	167	190	4	90	53	64			23			230	361	47,7	46,3	53,7	1,1
τ_{Discr}	92	30		20	4	8			2			34	122	16,1	75,4	24,6	
τ_{Fact_Dev}																	
$\tau_{Fact_Dev_Discr}$																	
$\tau_{Dev_Fact_ProdN}$	12	3		3					1			4	15	2,0	80,0	20,0	
Total Mixtes	12	3		3					1			4	15	2,0	80,0	20,0	
Non identifiée		1										1	1	0,1		100,0	
Totaux	476	277	4	126	57	95	3	2	29	5	1	318	757	100,0	62,9	37,1	0,5

Tableau 13 : Résultats globaux des effectifs des techniques et erreurs de la classe 10-S (VN)

ANNEXE 4 : EXEMPLES DES ERREURS LORS DE LA RÉOLUTION DES TYPES DE TÂCHE

N°	Type d'erreurs	Situation	Etat
1	ECAL	Développement	$(-2x+5)^2=0$ $4x^2-10x+25$ (E6, 10-O)
		Calcul des solutions	$(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2+38x-7=0$ $\begin{cases} x = -1,88 \\ x = -0,24 \end{cases}$ (E21, 10-O) $(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2+38x-7=0$ $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{11}{5}$ (E14, 10-S)
		Non respect de la priorité d'une opération par rapport à une autre	$(-2x+5)^2=0$ $4x^2-20x+25$ $4x^2-4 \times 5x+5 \times 5=0$ $4(x-1)(x+1)+5(x+1) \times 5=0$ (E22, 9-O)
		Factorisation	$(3-x)(x+2)+x+2=0$ $-x^2+2x+8=0$ $-x^2-4x+2x+8=0$ $-x(x+4)+2(x+4)=0$ (E15, 9-S) $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(-3+2x)(4x-7+2x-3)=0$ (E44, 9-S)
		Réduction	$(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(2-x)=0$ (E28, 9-S)
		Ecriture de la nouvelle équation	$-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=0$ $9(-x+2)^2-(2x-1)^2=0$ $(3(2-x))^2-(2x-1)^2=0$ $(-3x+6-6x+1)(-3x+6+2x-1)=0$ (E46, 9-S)
2	ECALD	Calcul du discriminant	$(-5x+1)(3x-7)=0$ $-15x^2+38x-7=0$ $\begin{cases} x = \frac{-38+\sqrt{32}}{-30} \\ x = \frac{-38-\sqrt{32}}{-30} \end{cases}$ (E3, 10-O)
3	ESIGN	Développement	$(3-x)(x+2)+x+2=0$ $3x+6-x^2+2x+x+2=0$ (E25, 10-O)
		Factorisation	$(2x+1)(3x-6)+x-2=0$ $3(2x+1)^2+x-2=0$ (E22, 9-S) $(-4x+5)^2=(-2x-7)^2$ $(-4x+5)^2-(-2x-7)^2=0$ $(-4x+5+2x-7)(4x+5-2x+7)=0$ (E19, 9-O)
		Réduction	$-(-3x-5)^2+(2x+3)^2=0$ $-(9x^2+30x+25)+(4x^2+12x+9)=0$ $9x^2-30x-25+4x^2+12x+9=0$ (E9, 10-S) $(3x-4)^2-(-5x+1)^2=0$ $9x^2-24x+16-25x^2+10x-1=0$ $16x^2-14x+15=0$ (E23, 10-O)
		Ecriture de la nouvelle équation	$(-5x+1)(3x-7)=0$

			$5x+1=0$ ou $3x-7=0$ (E7, 9-O)
		Mouvement équation 1er	$(-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1)$ $(-2x+1)(-5x-4)-(-5x-4)(x-1)=0$ $(-5x-4)((-2x+1)-(x-1))=0$ $(-5x-4)(-2x-x+1+1)=0$ $(-5x-4)(-3x+2)=0$ $5x=4$ ou $-3x=-2$
		Signe des solutions	$(-4x+5)^2=(-2x-7)^2$ $12x^2-68x-24=0$ $\begin{cases} x = -\frac{34 - \sqrt{1444}}{12} \\ x = -\frac{34 + \sqrt{1444}}{12} \end{cases}$ (E2, 10-O)
3	EOPM	Erreur d'opérateur lors du mouvement	$-(2x-1)^2+9(-x+2)^2=0$ $(2x-1-3x+6)(2x-1+3x-6)=0$ $x=5$ ou $x=-\frac{5}{7}$ $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3)=0$ $(2x-3)(4x-7+1-3x)=0$ $2x-3=0$ ou $x-6=0$ $x=\frac{2}{3}$ ou $x=6$ (E45, 9-S)
4	EPRODF	Application abusive de la Règle de Produit des Facteurs	$(-x+4)(-2x+3)-(x-5)(-6+4x)=0$... $-2x^2+15x-18=0$ $x(-2x+15)=18$ $x=18 \text{ ou } \begin{cases} -2x+15=18 \\ -2x=3 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{en courant})$
5	ERA1	$x^2=k$ ($k>0$) $\Leftrightarrow x=\sqrt{k}$	$x^2=7$ $x=\sqrt{7}$ (en courant)
6	ERA2	Baisse du degré de l'équation	$x^2=7 \Leftrightarrow x=7$ ou $x=-7$ (E20, 9-S)
7	ELOG	Utilisation du connecteur logique ET au lieu de OU	$(3-x)(x+2)+x+2=0$ $(3-x)(x+2)+1(x+2)=0$ $(x+2)(3-x+1)=0$ $(x+2)(-x+4)=0$ $\begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$

Tableau 14

ANNEXE 5 : EXEMPLES DES TECHNIQUES MOBILISEES PAR LES ELEVES LORS DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Nous présentons des illustrations des techniques, représentatives relevées dans les productions des élèves vietnamiens et français.

a) *Technique Déc_Fact_ProdN*

Cette technique a été observée uniquement au Viet-Nam.

Par exemple, dans la résolution de l'exercice 18, l'élève E1 de classe 9-S a utilisé la technique *Déc_Fact_ProdN*: décomposition du terme $-11x$, factorisation, annulation du produit (cf. Figure 7).

The screenshot shows the Aplusix software interface with the title bar 'Aplusix - Giáo viên hành chính viên : nguyenaquoc'. The menu bar includes 'Tập tin', 'Sơ đồ thảo luận', 'Giải toán', 'Phương pháp', 'Hoạt động đã qua', and 'Trợ giúp'. The toolbar shows 'Quan sát', 'Máy ghi bình', '9/9', 'Điểm số : 20/20', and 'Ngừng quan sát'. The main workspace displays the following steps for solving the equation $x^2 - 11x + 24 = 0$:

$$\begin{aligned} & x^2 - 11x + 24 = 0 \quad \text{Giải} \\ & \Downarrow \\ & x^2 - 3x - 8x + 24 = 0 \\ & \Downarrow \\ & x(x-3) - 8(x-3) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (x-3)(x-8) = 0 \\ & \Downarrow \\ & x-3=0 \text{ hay } x-8=0 \\ & \Downarrow \\ & x=3 \text{ hay } x=8 \quad \text{Giải xong} \end{aligned}$$

Figure 7

Comme dans le cas précédent, l'élève E40 de classe 10-S a utilisé la technique *Déc_Fact_ProdN* dans la résolution de l'exercice 17 (cf. Figure 8).

The screenshot shows the Aplusix software interface with the title bar 'Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc'. The menu bar includes 'Tập tin', 'Sơ đồ thảo luận', 'Giải toán', 'Phương pháp', 'Hoạt động đã qua', and 'Trợ giúp'. The toolbar shows 'Quan sát', 'Máy ghi bình', '9/9', 'Điểm số : 20/20', and 'Ngừng quan sát'. The main workspace displays the following steps for solving the equation $2x^2 + 5x - 7 = 0$:

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 5x - 7 = 0 \quad \text{Giải} \\ & \Downarrow \\ & 2x^2 + 7x - 2x - 7 = 0 \\ & \Downarrow \\ & 2x(x-1) + 7(x-1) = 0 \\ & \Downarrow \\ & x = -\frac{7}{2} \text{ hay } x = 1 \quad \text{Giải xong} \end{aligned}$$

Figure 8

b) *Technique Dév*

Cette technique est présente dans les deux pays mais elle est majoritaire au VietNam. Dans la figure 9, c'est l'utilisation de la technique *Dév* de l'élève E3 de la classe 9-O, et dans la figure 10 c'est le cas de l'élève E15 de la classe Seconde qui conduit à une impasse.

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 1/1 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1)$$
 Giải

$$(10x^2+8x-5x-4) = (-5x^2+5x-4x+4)$$

$$(10x^2+3x-4) = (-5x^2-x+4)$$

$$10x^2+3x-4-5x^2+x-4$$

$$5x^2+4x-8$$
 Giải xong

Figure 9

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc (Seconde)

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 5/9 Score : 0/10 Arrêt observation

$$(-5x+1)(3x-7) = 0$$
 Résoudre

$$-15x^2+35x+3x-7 = 0$$

$$-15x^2+38x-7 = 0$$

Etat : Ok

Figure 10

c) *Technique Dév_Fact_ProdN*

Cette technique a été observée uniquement au Viet-Nam. L'utilisation de la technique *Dév_Fact_ProdN* de l'élève E2 de classe 9-S (cf. Figure 11) et de l'élève E17 de la classe 9-O (cf. Figure 12) conduit à une résolution réussie.

Aplusix - Giáo viên bình chính viên : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoán Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 3/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$-(2X-1)^2 + 9(-X+2)^2 = 0$ Giải

$-(4X^2 - 4X + 1) + 9(X^2 - 4X + 4) = 0$

$-4X^2 + 4X - 1 + 9X^2 - 36X + 36 = 0$

$5X^2 - 32X + 35 = 0$

$5X(X-5) - 7(X-5) = 0$

$X-5 = 0$ hay $5X-7 = 0$

$X = 5$ hay $X = \frac{7}{5}$ Giải xong

Figure 11

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoán Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 3/5 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$(-3+2X)(4X-7) + (-3X+1)(2X-3) = 0$ Giải

$-12X + 21 + 8X^2 - 14X - 6X^2 + 9X + 2X - 3 = 0$

$-15X + 2X^2 + 18 = 0$

$2X^2 - 15X + 18 = 0$

$2X^2 - 12X - 3X + 18 = 0$

$2X(X-6) - 3(X-6) = 0$

$(X-6) \times (2X-3) = 0$

$X-6 = 0$ hay $2X-3 = 0$

$X = 6$ hay $X = \frac{3}{2}$ Giải xong

Figure 12

d) Technique Simp

Cette technique est présente plus majoritaire dans les classes vietnamiennes et seulement dans la classe de Seconde. Dans les figures 13 et 14, c'est le cas d'utilisation de la technique *Simp* de l'élève E24 de classe 9-O, et de l'élève E4 e classe 10-O, et dans la figure 15, c'est le cas de l'élève E12 de la classe de Seconde.

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Sửa thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 7/7 Điểm số : 6/20 Ngừng quan sát

$$(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1)$$
 Giải

$$(-2x+1) = (x-1)$$

$$-2x-x = -1-1$$

$$-3x = -2$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$
 Giải xong

Figure 13

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Sửa thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 6/9 Điểm số : 6/20 Ngừng quan sát

$$(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1)$$
 Giải

$$-2x+1-x+1 = 0$$

$$-3x+2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$
 Giải xong

Figure 14

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc (Seconde)

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 1/9 Score : 3/10 Arrêt observation

$$(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1)$$
 Résoudre

$$-2x+1 = x-1$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$
 Résolu

Etat : Ok

Figure 15

e) *Technique Dév_Discr*

Dans la figure 16, c'est le cas d'utilisation de la technique *Dév_Discr* bien que l'équation donnée est celle de carré nul de l'élève E8 e classe 10-S.

$$(-2x+5)^2 = 0 \quad \text{Giải}$$

$$25 - 20x + 4x^2 = 0$$

$$x = \frac{2}{5} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 16

Dans la figure 17, c'est le cas d'utilisation de la technique *Dév_Discr* bien que l'équation donnée est celle de produit nul de l'élève E7 de classe 10-O.

$$(-5x+1)(3x-7) = 0 \quad \text{Giải}$$

$$-15x^2 + 38x - 7 = 0$$

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{3} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 17

Dans la figure 18, c'est le cas d'utilisation de la technique *Dév_Discr* lorsque le facteur commun n'est pas apparent dans l'équation donnée de l'élève E2 de la classe Première S.

$$(3-x)(x+2) + x + 2 = 0 \quad \text{Résoudre}$$

$$3x + 6 - x^2 - 2 + x + 2 = 0$$

$$-x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{-4 - \sqrt{40}}{-2} \\ x = \frac{-4 + \sqrt{40}}{-2} \end{cases} \quad \text{Résolu}$$

Figure 18

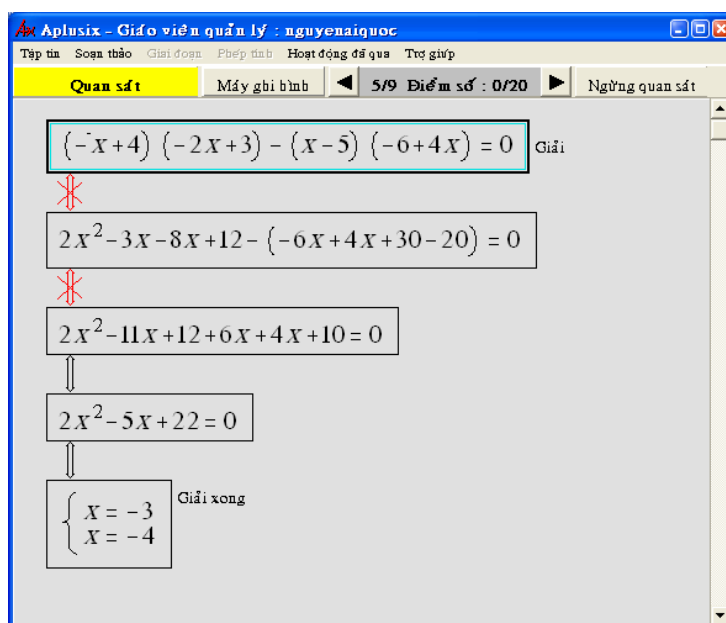
ANNEXE 6 : EXEMPLES DES ERREURS RELEVÉES DANS LES PRODUCTIONS DES ELEVES LORS DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Nous présentons des illustrations des erreurs relevées dans les productions des élèves vietnamiens et français.

VIET-NAM

a) *Erreur de calcul*

Il y a un grand nombre d'erreurs de calcul produites dans la première étape (développement) ou dans la deuxième étape (Discr) lors de l'utilisation de la technique *Dév_Discr*. Dans la figure 19, c'est le cas du développement (E12, classe 10-O), et dans la figure 20, c'est le cas de calcul du discriminant (E4, 10-S).



Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động để qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 5/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$\{-x+4\} \{-2x+3\} - \{x-5\} \{-6+4x\} = 0$$
 Giải

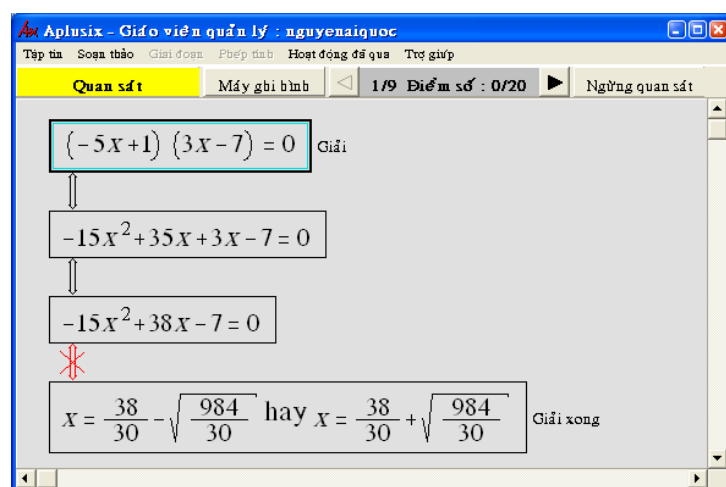
$$2x^2 - 3x - 8x + 12 - \{-6x + 4x + 30 - 20\} = 0$$

$$2x^2 - 11x + 12 + 6x - 4x + 10 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 22 = 0$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x = -4 \end{cases}$$
 Giải xong

Figure 19



Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động để qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 1/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$\{-5x+1\} \{3x-7\} = 0$$
 Giải

$$-15x^2 + 35x + 3x - 7 = 0$$

$$-15x^2 + 38x - 7 = 0$$

$$x = \frac{38}{30} - \sqrt{\frac{984}{30}} \text{ hay } x = \frac{38}{30} + \sqrt{\frac{984}{30}}$$
 Giải xong

Figure 20

b) Erreur dans l'utilisation des connecteurs logiques

C'est le cas de l'élève E22 de classe 9-0 lors du rassemblement des solutions finales (cf. Figure 21), et de l'élève E12 de classe 10-S lors de l'annulation du produit (cf. Figure 22).

Apluxix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Sửa thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 5/8 Điểm số : 14/20 Ngừng quan sát

$(3-x)(x+2) + x + 2 = 0$ Giải

$(x+2)(4-x) = 0$

$x+2=0$ hay $4-x=0$

$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array} \right.$ Giải xong

Figure 21

Apluxix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Sửa thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 5/9 Điểm số : 1/20 Ngừng quan sát

$(-5x+1)(3x-7) = 0$ Giải

$\left\{ \begin{array}{l} -5x+1=0 \\ 3x-7=0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{5} \\ x = \frac{7}{3} \end{array} \right.$ Giải xong

Figure 22

c) Application abusive de la technique d'annulation du produit

Cette erreur est présente seulement chez élèves vietnamiens.

C'est le cas de l'élève E11 et E9 de classe 9-O (cf. Figure 23 et 24), et de l'élève E6 de classe 10-O (cf. Figure 25) lors de la résolution de l'équation de la forme $x(ax+b)=c$.

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 2/3 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(3-x)(x+2) + x + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$3x + 6 - x^2 - 2x + x + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x - x^2 = -8$$

$$\Downarrow$$

$$x(2-x) = -8$$

✖

Giải xong

$$x = -8 \text{ hay } \begin{cases} 2-x = -8 \\ -x = -8-2 \\ x = 10 \end{cases}$$

Figure 23

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 1/5 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(-5x+1)(3x-7) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-15x^2 + 35x + 3x - 7 = 0$$

✖

$$3x(-5x+5+1) - 7 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$3x(-5x+6) - 7 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3x-7=0 \\ -5x+6-7=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Giải xong

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ x = -5 \end{cases}$$

Figure 24

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Sửa thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 3/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(-3+2x)(4x-7) + (-3x+1)(2x-3) = 0$$

$$(12x+21+8x^2-14x) + (-6x^2+11x-3) = 0$$

$$14x^2-15x-18 = 0$$

$$x(14x-15) = 18$$

Giải xong

$$\begin{cases} x = 18 \\ x = \frac{33}{14} \end{cases}$$

Figure 25

FRANCE

Les erreurs produites chez élèves français surtout sont surtout d'origine « calculatoire » : erreurs de signe, erreurs de calcul,...

a) Erreur dans l'utilisation des connecteurs logiques

Dans la figure 26, c'est le cas de l'élève E2 de la classe de Première S.

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc (Seconde)

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 1/9 Score : 0/10 Arrêt observation

Résoudre

$$(-5x+1)(3x-7) = 0$$

$$\begin{cases} -5x+1 = 0 \\ 3x-7 = 0 \end{cases}$$

Résolu

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Etat : Ok

Figure 26

b) Erreur de signe

Dans la figure 27, c'est le cas d'erreur de signe dans le mouvement des termes lors de la résolution de l'équation du premier degré (E25, classe Seconde)

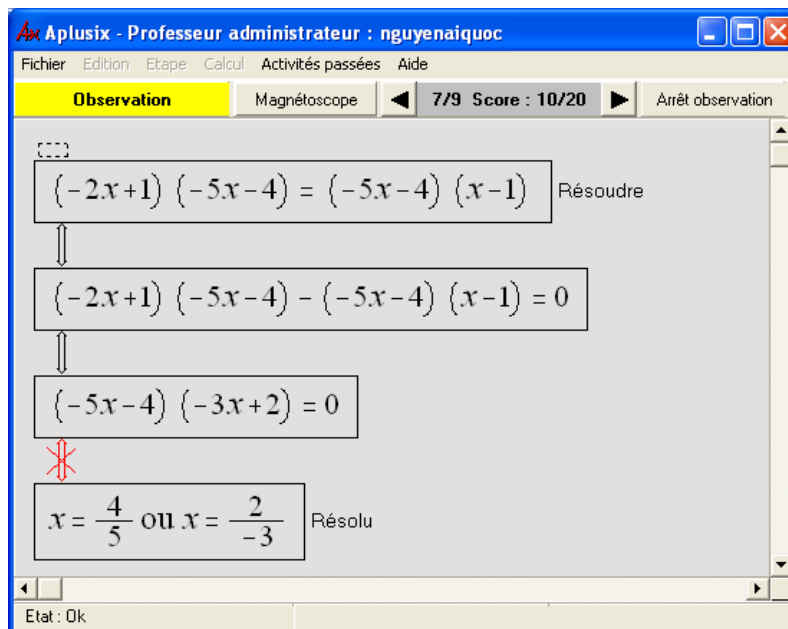


Figure 27

Dans la figure 28, c'est le cas d'erreur de signe lors du développement des facteurs internes des parenthèses (E16, Classe 1^o)

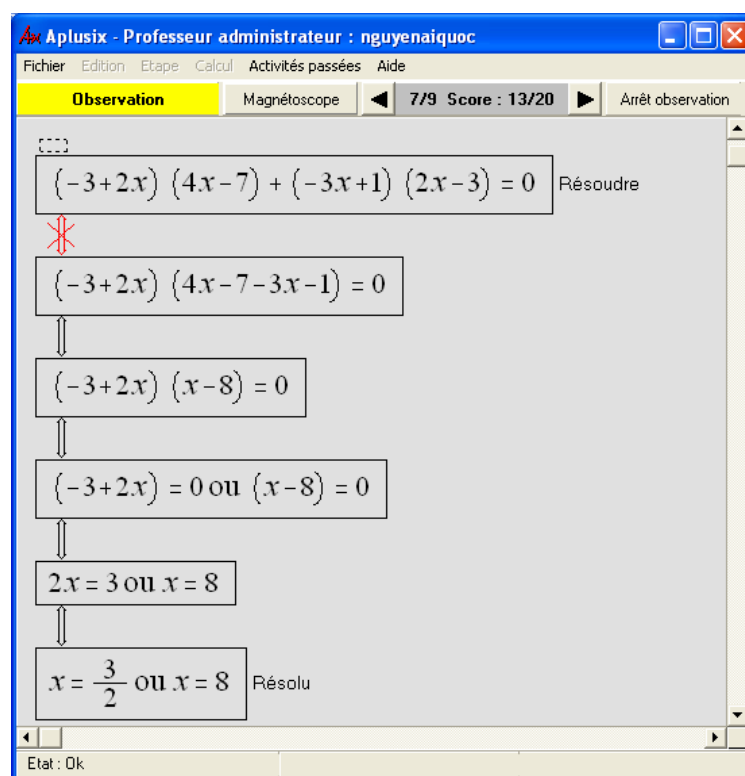


Figure 28

c) Erreur de calcul

Dans la figure 29, c'est le cas d'erreur de calcul de l'élève E13 de la classe Seconde lors de la réduction d'une expression, et dans la figure 30, c'est le cas de calcul du discriminant de l'élève E18 de la classe de Première S.

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc (Seconde)

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 5/8 Score : 9/10 Arrêt observation

$$\{-3+2x\} \{4x-7\} + \{-3x+1\} \{2x-3\} = 0 \quad \text{Résoudre}$$

$$\{2x-3\} \{4x-7\} + \{-3x+1\} \{2x-3\} = 0$$

$$\{2x-3\} \{ \{4x-7\} + \{-3x+1\} \} = 0$$

$$\{2x-3\} \{-x-6\} = 0$$

$$\{2x-3\} = 0 \text{ ou } \{-x-6\} = 0$$

$$2x = 3 \text{ ou } -x = 6$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -6 \quad \text{Résolu}$$

Etat : Ok

Figure 29

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc (Seconde)

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 7/9 Score : 1/10 Arrêt observation

$$\{-2x+1\} \{-5x-4\} = \{-5x-4\} \{x-1\} \quad \text{Résoudre}$$

$$\{-2x+1\} \{-5x-4\} - \{-5x-4\} \{x-1\} = 0$$

$$10x^2+8x-5x-4 - (-5x^2+5x-4x+4) = 0$$

$$10x^2+8x-5x-4+5x^2-5x+4x-4 = 0$$

$$15x^2+2x-8 = 0$$

$$x = \frac{-2-\sqrt{480}}{30} \text{ ou } x = \frac{-2+\sqrt{480}}{30}$$

$$x = \frac{-1}{15} - \frac{\sqrt{480}}{30} \text{ ou } x = \frac{-1}{15} + \frac{\sqrt{480}}{30} \quad \text{Résolu}$$

Etat : Ok

Figure 30

ANNEXE 7 : EXEMPLES DE PROFILS D'ELEVES POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Nous présentons trois profils d'élèves pour la résolution des équations du second degré. Nous avons choisi :

- un profil qui illustre la conformité du rapport personnel au rapport institutionnel d'un élève vietnamien de la classe 9-S.
- un profil qui illustre la non conformité du rapport personnel au rapport institutionnel d'un élève vietnamien de la classe 10-0.
- un profil qui illustre la conformité du rapport personnel au rapport institutionnel d'un élève français de la classe Seconde.
- un profil qui illustre la conformité du rapport personnel au rapport institutionnel d'un élève français de la classe Première.
- un profil qui illustre la non conformité du rapport personnel au rapport institutionnel d'un élève français de la classe Première.

a) *Un profil d'un élève de classe 9-S qui illustre la conformité du rapport personnel au rapport institutionnel : Elève E10*

Il s'agit de mettre en œuvre des techniques adéquates à chaque type de tâche. C'est le cas de l'élève E10, où il utilise les techniques de la catégorie *Règles*, *Gfact* et aussi *Dec_Fact_ProdN* pour les trinômes où la factorisation n'est pas évidente par l'application des identités remarquables, c'est le cas des exercices $2x^2+5x-7=0$ et $x^2-11x+24=0$ (cf. Figures 47 et 48)

The screenshot shows the Aplusix software interface with the title bar 'Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc'. The menu bar includes 'Tập tin', 'Soạn thảo', 'Quản điểm', 'Chạy máy', 'Hoạt động đã qua', and 'Trợ giúp'. The toolbar has buttons for 'Quan sát', 'Máy ghi bình', and navigation arrows. The main window displays the equation $(-2x+5)^2 = 0$ with the label 'Giải' (Solve). Below it, the steps of the solution are shown: $-2x+5 = 0$, $-2x = -5$, and finally $x = 2,5$ with the label 'Giải xong' (Solution finished).

Figure 31 : Technique mobilisée : *CarN*

The screenshot shows the Aplusix software interface with the title bar 'Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc'. The menu bar includes 'Tập tin', 'Soạn thảo', 'Quản điểm', 'Chạy máy', 'Hoạt động đã qua', and 'Trợ giúp'. The toolbar has buttons for 'Quan sát', 'Máy ghi bình', and navigation arrows. The main window displays the equation $(-5x+1)(3x-7) = 0$ with the label 'Giải' (Solve). Below it, the steps of the solution are shown: $-5x+1 = 0$ hay $3x-7 = 0$, and finally $x = \frac{1}{5}$ hay $x = \frac{7}{3}$ with the label 'Giải xong' (Solution finished).

Figure 32 : Technique mobilisée : *ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 8/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(3-x)(x+2) + x + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x+2)(3-x+1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x+2)(4-x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x+2=0 \text{ hay } 4-x=0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -2 \text{ hay } x = 4$$

Giải xong

Figure 33 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 3/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(-3+2x)(4x-7) + (-3x+1)(2x-3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2x-3)(4x-7-3x+1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2x-3)(x-6) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x-3=0 \text{ hay } x-6=0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1,5 \text{ hay } x = 6$$

Giải xong

Figure 34 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 5/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1)$$

$$\Downarrow$$

$$(-2x+1)(-5x-4) - (-5x-4)(x-1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-5x-4)(-2x+1-x+1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-5x-4)(2-3x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-5x-4=0 \text{ hay } 2-3x=0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{4}{5} \text{ hay } x = \frac{2}{3}$$

Giải xong

Figure 35 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 6/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$\begin{aligned} & (-4x+3)(3x-9) + (4x-3)(x-8) = 0 \quad \text{Giải} \\ & \Downarrow \\ & (4x-3)(x-8) - (4x-3)(3x-9) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (4x-3)(x-8-3x+9) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (4x-3)(1-2x) = 0 \\ & \Downarrow \\ & 4x-3=0 \text{ hay } 1-2x=0 \\ & \Downarrow \\ & x = \frac{3}{4} \text{ hay } x = \frac{1}{2} \quad \text{Giải xong} \end{aligned}$$

Figure 36 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 8/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$\begin{aligned} & (2x+1)(3x-6) + x-2 = 0 \quad \text{Giải} \\ & \Downarrow \\ & 3(2x+1)(x-2) + x-2 = 0 \\ & \Downarrow \\ & (x-2)(6x+3+1) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (x-2)(6x+4) = 0 \\ & \Downarrow \\ & x-2=0 \text{ hay } 6x+4=0 \\ & \Downarrow \\ & x = 2 \text{ hay } x = -\frac{2}{3} \quad \text{Giải xong} \end{aligned}$$

Figure 37 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 1/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(-x+4)(-2x+3) - (x-5)(-6+4x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-x+4)(-2x+3) + 2(x-5)(-2x+3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-2x+3)(-x+4+2x-10) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-2x+3)(x-6) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-2x+3=0 \text{ hay } x-6=0$$

$$\Downarrow$$

$$x=1,5 \text{ hay } x=6 \quad \text{Giải xong}$$

Figure 38 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 4/9 Điểm số : 14/20 Ngừng quan sát

Giải

$$(6x+3)(1-3x) = (2x+1)(-x-4)$$

$$\Downarrow$$

$$3(2x+1)(1-3x) - (2x+1)(-x-4) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2x+1)(3-9x-x+4) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2x+1)(7-10x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x+1=0 \text{ hay } 7-10x=0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ hay } x = \frac{7}{10} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 39 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 6/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$\begin{aligned} & \boxed{(-4x+5)^2 = (-2x-7)^2} \text{ Giải} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{(-4x+5)^2 - (-2x-7)^2 = 0} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{(-4x+5-2x-7)(-4x+5+2x+7) = 0} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{(-6x-2)(12-2x) = 0} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{-6x-2=0 \text{ hay } 12-2x=0} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{x = -\frac{1}{3} \text{ hay } x = 6} \text{ Giải xong} \end{aligned}$$

Figure 40 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 2/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$\begin{aligned} & \boxed{(3x-4)^2 - (-5x+1)^2 = 0} \text{ Giải} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{(3x-4-5x+1)(3x-4+5x-1) = 0} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{(-2x-3)(8x-5) = 0} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{-2x-3=0 \text{ hay } 8x-5=0} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{x = -1,5 \text{ hay } x = \frac{5}{8}} \text{ Giải xong} \end{aligned}$$

Figure 41 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 3/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$\begin{aligned} & \boxed{x^2 = 7} \text{ Giải} \\ & \Downarrow \\ & \boxed{x = \sqrt{7} \text{ hay } x = -\sqrt{7}} \text{ Giải xong} \end{aligned}$$

Figure 42 : Technique mobilisée : *Rac*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 5/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$-(-3x-5)^2 + (2x+3)^2 = 0 \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$(2x+3)^2 - (-3x-5)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(2x+3-3x-5)(2x+3+3x+5) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(-x-2)(5x+8) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-x-2=0 \text{ hay } 5x+8=0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -2 \text{ hay } x = -\frac{8}{5} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 43 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 1/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$-(2x-1)^2 + 9(-x+2)^2 = 0 \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$9(-x+2)^2 - (2x-1)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(6-3x)^2 - (2x-1)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(6-3x+2x-1)(6-3x-2x+1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(5-x)(7-5x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$5-x=0 \text{ hay } 7-5x=0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 5 \text{ hay } x = \frac{7}{5} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 44 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 4/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$X^2 + 8X + 16 = 0 \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$(X + 4)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$X + 4 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$X = -4 \quad \text{Giải xong}$$

Figure 45 : Technique mobilisée : *IdR_CarN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 2/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$25X^2 - 90X + 81 = 0 \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$(5X - 9)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$5X - 9 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$5X = 9$$

$$\Downarrow$$

$$X = \frac{9}{5} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 46 : Technique mobilisée : *IdR_CarN*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 9/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$$2X^2 + 5X - 7 = 0 \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$2X^2 - 2X + 7X - 7 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2X(X - 1) + 7(X - 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(X - 1)(2X + 7) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$X - 1 = 0 \text{ hay } 2X + 7 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$X = 1 \text{ hay } X = -\frac{7}{2} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 47 : Technique mobilisée : *Déc_Fact_ProdN*

Apluxix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 9/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$X^2 - 11X + 24 = 0$ Giải

$X^2 - 3X - 8X + 24 = 0$

$X(X-3) - 8(X-3) = 0$

$(X-8)(X-3) = 0$

$X-8=0$ hay $X-3=0$

$X=8$ hay $X=3$ Giải xong

Figure 48 : Technique mobilisée : *Déc_Fact_ProdN*

b) Un profil d'un élève de classe 10-O qui illustre la non conformité du rapport personnel au rapport institutionnel : Elève E3

Cet élève a mobilisé la technique du discriminant de façon systématique et ce même quand l'expression est factorisée comme $(-5x+1)(3x-7)=0$. Dans ces cas il a utilisé Dév_Discr (cf. Figures 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61 et 62).

Apluxix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 5/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$(-2X+5)^2 = 0$ Giải

$4X^2 - 20X + 25 = 0$

gải delta

$X = 2,5$ Giải xong

Figure 49 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Apluxix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 7/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$(-5X+1)(3X-7) = 0$ Giải

$-15X^2 + 38X - 7 = 0$

$X = \frac{-38 + \sqrt{32}}{-30}$
 $X = \frac{-38 - \sqrt{32}}{-30}$ Giải xong

Figure 50 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 8/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$(3-x)(x+2) + x + 2 = 0 \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 51 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 1/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$(-3+2x)(4x-7) + (-3x+1)(2x-3) = 0 \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$-12x + 21 + 8x^2 - 14x - 6x^2 + 9 + 2x - 3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$2x^2 - 24x + 27 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = 21 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 52 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 4/9 Điểm số : 1/20 Ngừng quan sát

$$(-2x+1)(-5x-4) = (-5x-4)(x-1) \quad \text{Giải}$$

$$\Downarrow$$

$$10x^2 + 8x - 5x - 4 = -5x^2 + 5x - 4x + 4$$

$$\Downarrow$$

$$15x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{61}}{15} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{61}}{15} \end{cases} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 53 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 4/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$\{-4x+3\} \{3x-9\} + \{4x-3\} \{x-8\} = 0 \quad \text{Giải}$$

* nhân phân phối

$$-12x^2 + 9x + 36x - 27 + 4x^2 - 32x - 3x + 24$$

* rút gọn

$$-8x^2 + 10x - 3 = 0$$

* giải delta

$$\begin{cases} x = 0,5 \\ x = 0,75 \end{cases} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 54 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 6/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$\{2x+1\} \{3x-6\} + x - 2 = 0 \quad \text{Giải}$$

|| nhân phân phối

$$6x^2 - 12x + 3x - 6 + x - 2 = 0$$

|| rút gọn

$$6x^2 - 8x - 8 = 0$$

* delta = -16

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -0,6 \end{cases} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 55 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi hình 9/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$$\{-x+4\} \{-2x+3\} - \{x-5\} \{-6+4x\} = 0 \quad \text{Giải}$$

||

$$-2x^2 + 15x - 18 = 0$$

*

$$\begin{cases} x = \frac{-15 + \sqrt{114}}{-4} \\ x = \frac{-15 - \sqrt{114}}{-4} \end{cases} \quad \text{Giải xong}$$

Figure 56 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 2/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$(6X+3)(1-3X) = (2X+1)(-X-4)$ Giải

↕ nhân phân phối

$6X-18X^2+3-9X = -2X^2-8X-X-4$

✖ chuyển về trái sang về phải

$6X-18X^2+3-9X-2X^2-8X-X-4 = 0$

↕ rút gọn

$-20X^2-12X-1 = 0$

✖ giải delta

$\begin{cases} X = -0,5 \\ X = -0,1 \end{cases}$ Giải xong

Figure 57 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 6/9 Điểm số : 1/20 Ngừng quan sát

$(-4X+5)^2 = (-2X-7)^2$ Giải

↕

$16X^2-40X+25 = 4X^2+28X+49$

↕

$12X^2-68X-24 = 0$

✖

$\begin{cases} X = 6 \\ X = -\frac{1}{3} \end{cases}$ Giải xong

Figure 58 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 3/9 Điểm số : 15/20 Ngừng quan sát

$(3X-4)^2 - (-5X+1)^2 = 0$ Giải

✖

$9X^2-24X+16 = 0$

↕

$X = \frac{24}{18}$ Giải xong

Figure 59 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 1/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$X^2 = 7$ Giải

⇕ khai triển

$X = -\sqrt{7}$ hay $X = \sqrt{7}$ Giải xong

Figure 60 : Technique mobilisée : *Rac*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 3/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$-(3X-5)^2 + (2X+3)^2 = 0$ Giải

* bỏ ngoặc

$-9X^2 - 30X + 25 + 4X^2 - 12X + 9 = 0$

⇕ rút gọn

$-5X^2 - 42X + 34 = 0$

* giải delta

$\begin{cases} X = -9,1 \\ X = 0,7 \end{cases}$ Giải xong

Figure 61 : Technique mobilisée : *Dev_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 7/9 Điểm số : 0/20 Ngừng quan sát

$-(2X-1)^2 + 9(-X+2)^2 = 0$ Giải

⇕ bỏ ngoặc

$-4X^2 + 4X - 1 + 9X^2 - 36X + 36 = 0$

⇕ rút gọn

$5X^2 - 32X + 35 = 0$

* tính delta=18

$\begin{cases} X = 5 \\ X = 1,4 \end{cases}$ Giải xong

Figure 62 : Technique mobilisée : *Dev_Discr*

Aplusix - Giáo viên quản lý : nguyenaquoc

Tập tin Soạn thảo Giải đoạn Phép tính Hoạt động đã qua Trợ giúp

Quan sát Máy ghi bình 2/9 Điểm số : 20/20 Ngừng quan sát

$X^2 + 8X + 16 = 0$ Giải

⇕

$X = -4$ Giải xong

Figure 63 : Technique mobilisée : *Discr*

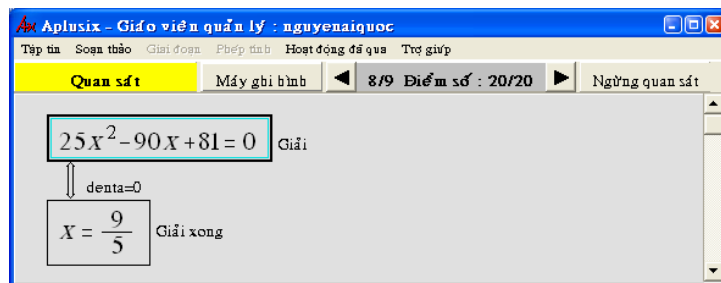


Figure 64 : Technique mobilisée : *Discr*

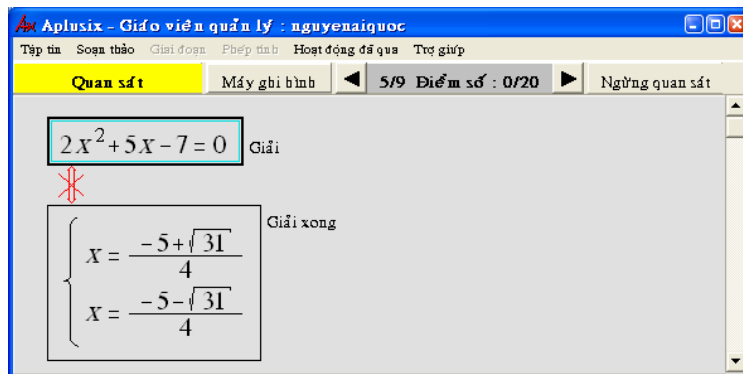


Figure 65 : Technique mobilisée : *Discr*

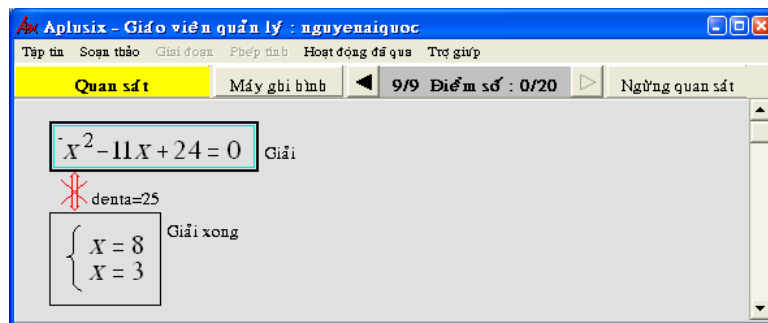


Figure 66 : Technique mobilisée : *Discr*

c) Un profil d'un élève de classe Seconde qui illustre la conformité du rapport personnel au rapport institutionnel : Elève 2

C'est le cas d'un élève qui a bien maîtrisé le choix des techniques adaptée au type des sous-tâches. Il a utilisé les techniques *Règles*, *Gfact* dans la résolution des équations données. Cependant, il ne dispose pas de technique pour la résolution des deux exercices dans lesquels l'expression de l'équation n'est pas la partie développée d'une identité remarquable (cf. Figures 83 et 84).

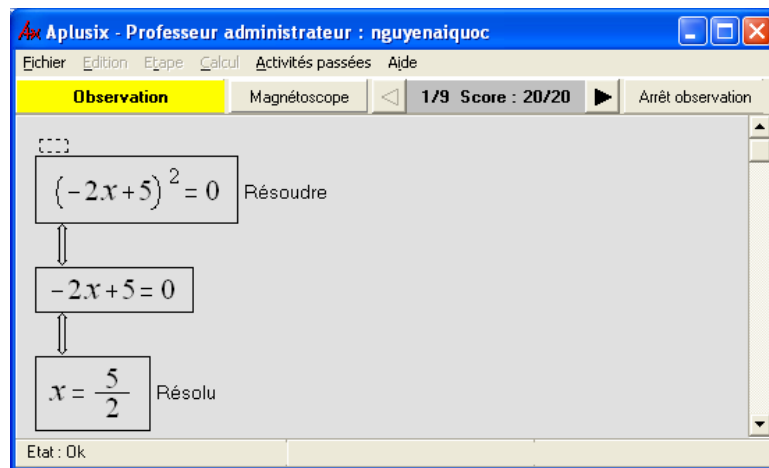


Figure 67 : Technique mobilisée : *CarN*

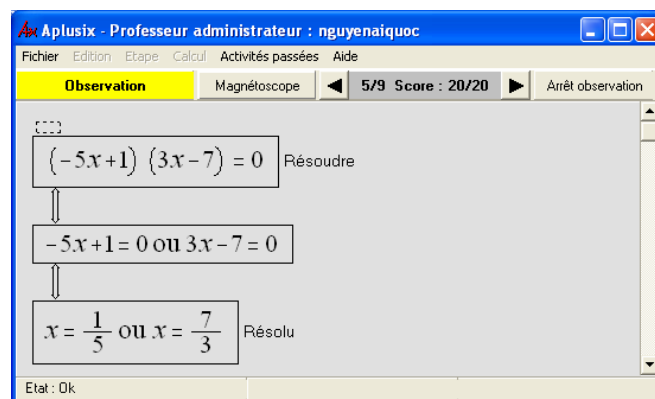


Figure 68 : Technique mobilisée : *ProdN*

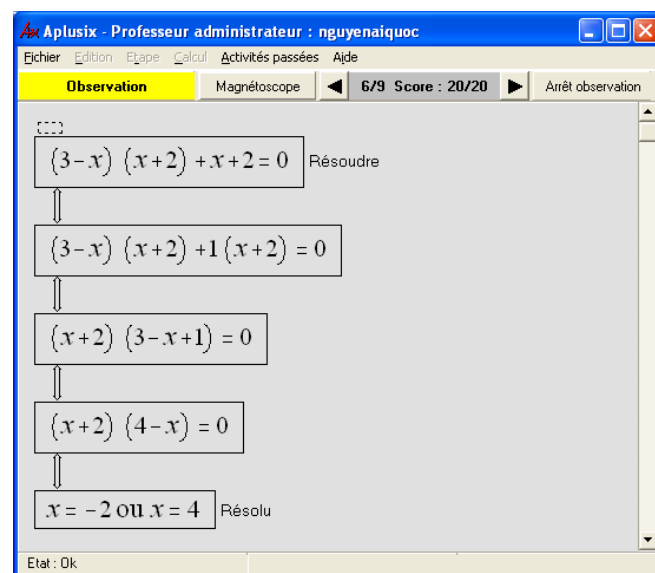


Figure 69 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

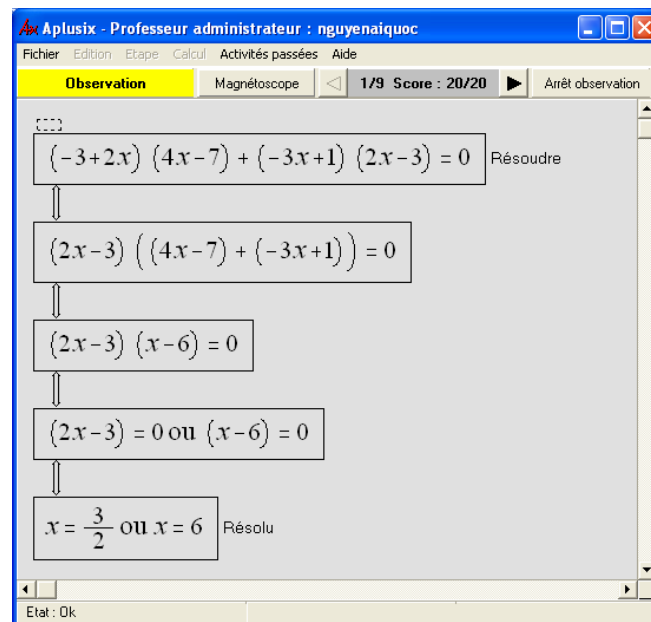


Figure 70 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

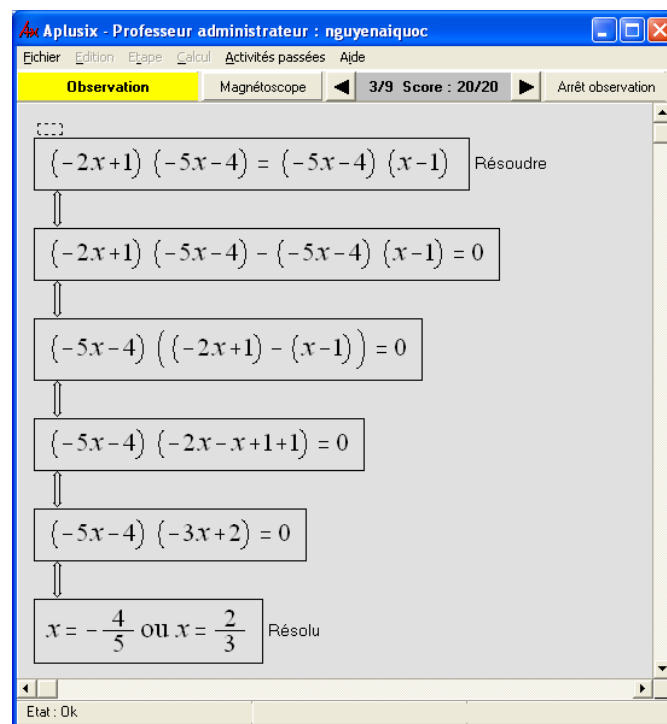


Figure 71 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 8/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$\begin{aligned} & \{-4x+3\} \{3x-9\} + \{4x-3\} \{x-8\} = 0 \quad \text{Résoudre} \\ & \Downarrow \\ & -1 \{4x-3\} \{3x-9\} + \{4x-3\} \{x-8\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{4x-3\} \{-1 \times \{3x-9\} + \{x-8\}\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{4x-3\} \{-3x+9+x-8\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{4x-3\} \{-2x+1\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{4x-3\} = 0 \text{ ou } \{-2x+1\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & x = \frac{3}{4} \text{ ou } x = \frac{1}{2} \quad \text{Résolu} \end{aligned}$$

Etat : Ok

Figure 72 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 2/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$\begin{aligned} & \{2x+1\} \{3x-6\} + x-2 = 0 \quad \text{Résoudre} \\ & \Downarrow \\ & \{2x+1\} \{3x-6\} + \{x-2\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \left(\{2x+1\} \{x-2\} \times 3 \right) + \{x-2\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{x-2\} \left(\left(3 \{2x+1\} \right) + 1 \right) = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{x-2\} \{6x+3+1\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{x-2\} \{6x+4\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & \{x-2\} = 0 \text{ ou } \{6x+4\} = 0 \\ & \Downarrow \\ & x = 2 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \quad \text{Résolu} \end{aligned}$$

Etat : Ok

Figure 73 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 7/9 Score : 7/20 Arrêt observation

$$\begin{aligned} & (-x+4)(-2x+3) - (x-5)(-6+4x) = 0 \quad \text{Résoudre} \\ & \Downarrow \\ & (-x+4)(-2x+3) - (x-5)(-2x+3) \times (-2) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (-2x+3)((-x+4) - (-2)(x-5)) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (-2x+3)(-x+4 - (-2x+10)) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (-2x+3)(-x+4+2x-10) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (-2x+3)(x-6) \\ & \Downarrow \\ & x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 6 \quad \text{Résolu} \end{aligned}$$

Etat : Ok

Figure 74 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 6/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$\begin{aligned} & (6x+3)(1-3x) = (2x+1)(-x-4) \quad \text{Résoudre} \\ & \Downarrow \\ & (6x+3)(1-3x) - (2x+1)(-x-4) = 0 \\ & \Downarrow \\ & 3(2x+1)(1-3x) - (2x+1)(-x-4) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (2x+1)(3(1-3x) - (-x-4)) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (2x+1)(3-9x+x+4) = 0 \\ & \Downarrow \\ & (2x+1)(7-8x) = 0 \\ & \Downarrow \\ & 2x+1 = 0 \text{ ou } 7-8x = 0 \\ & \Downarrow \\ & x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{7}{8} \quad \text{Résolu} \end{aligned}$$

Etat : Ok

Figure 75 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

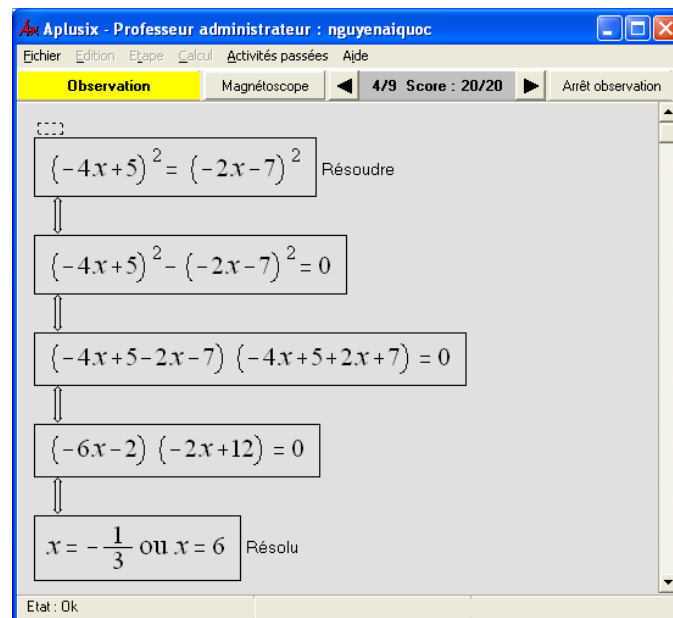


Figure 76 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

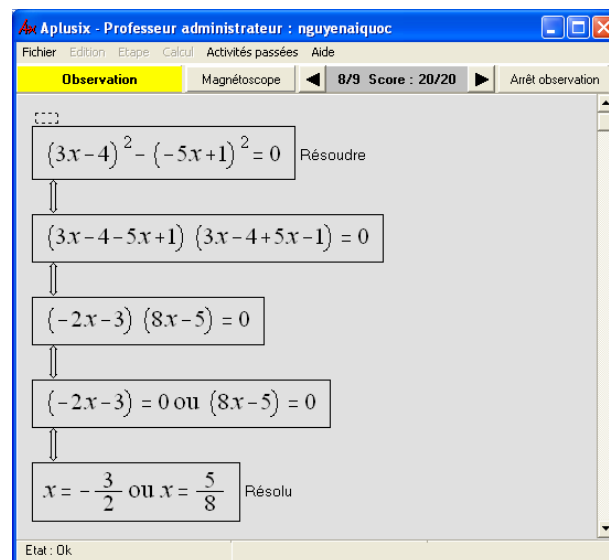


Figure 77 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

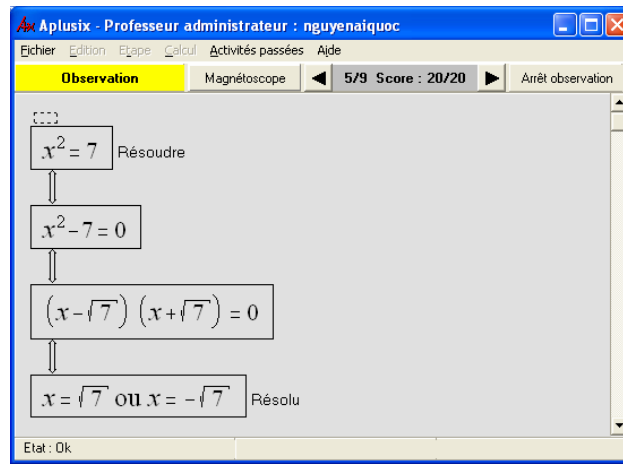


Figure 78 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

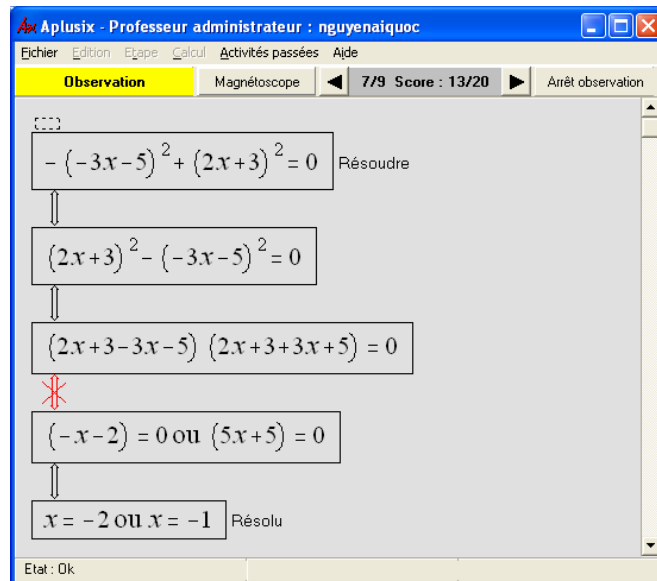


Figure 79 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN* et il y a une erreur de calcul ECAL

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 3/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$-(2x-1)^2 + 9(-x+2)^2 = 0$$
 Résoudre

$$9(2-x)^2 - (2x-1)^2 = 0$$

$$(9(4-4x+x^2)) - (2x-1)^2 = 0$$

$$(36-36x+9x^2) - (2x-1)^2 = 0$$

$$(6-3x)^2 - (2x-1)^2 = 0$$

$$(6-3x+2x-1)(6-3x-2x+1) = 0$$

$$(5-x)(7-5x) = 0$$

$$x = 5 \text{ ou } x = \frac{7}{5}$$
 Résolu

Etat : Ok

Figure 80 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 2/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$
 Résoudre

$$(x+4)(x+4) = 0$$

$$x = -4$$
 Résolu

Etat : Ok

Figure 81 : Technique mobilisée : *IdR_CarN*

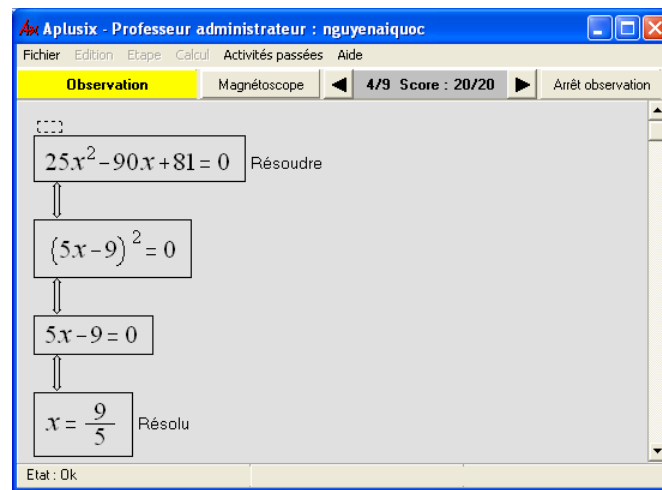


Figure 82 : Technique mobilisée : *IdR_CarN*

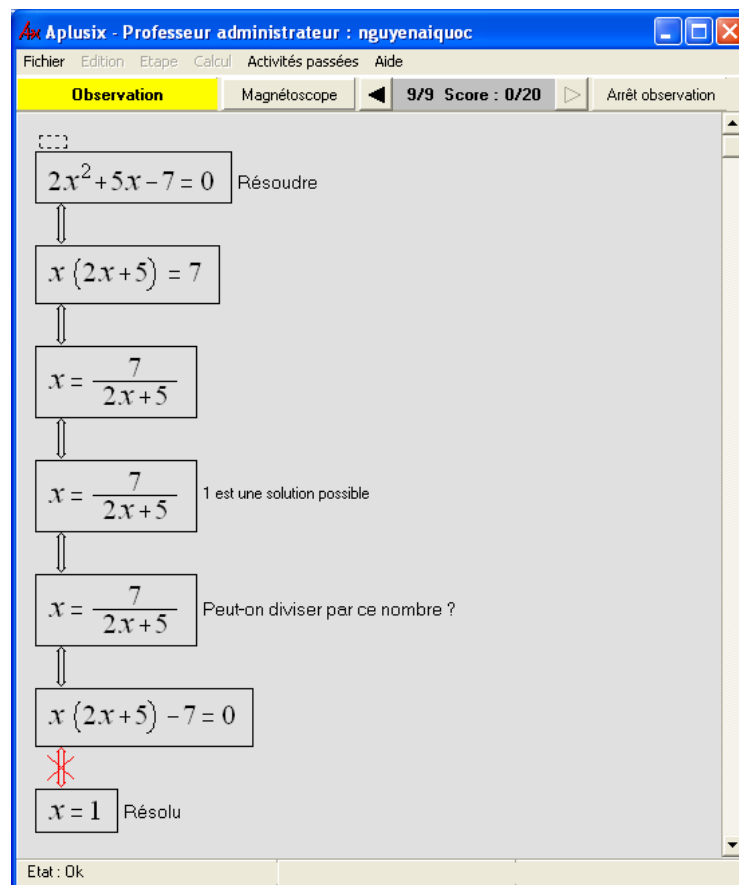


Figure 83 : Technique mobilisée : *Fact_IsV*

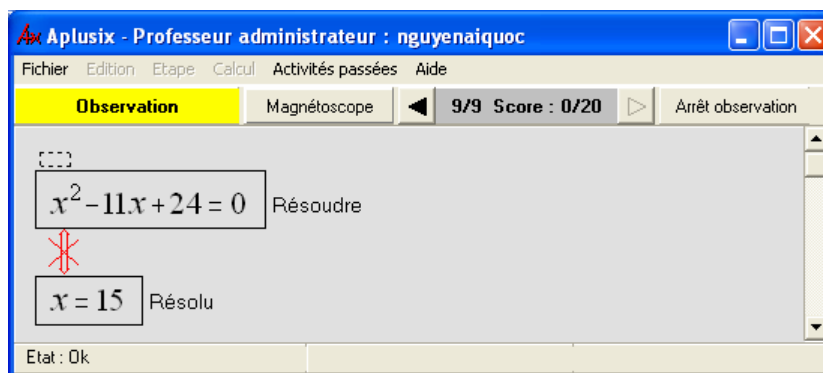


Figure 84 : Technique mobilisée : *inconnue*

d) Profil d'un élève de classe Première qui illustre la conformité du rapport personnel au rapport institutionnel : Elève 10

Comme le cas précédent de l'élève de la classe Seconde, l'élève E10 a bien maîtrisé les types de sous tâche donnés pour aboutir à choisir la technique adéquate à la forme de l'équation donnée. Toutefois, il n'a pas réussi dans l'utilisation de la technique discriminant pour résoudre les dernières équations : $2x^2+5x-7=0$ et $x^2-11x+24=0$ (cf. Figures 101 et 102). Dans la première équation, la résolution est interrompue, et dans la deuxième équation, E10 n'a pas utilisée les formules correctes des solutions.

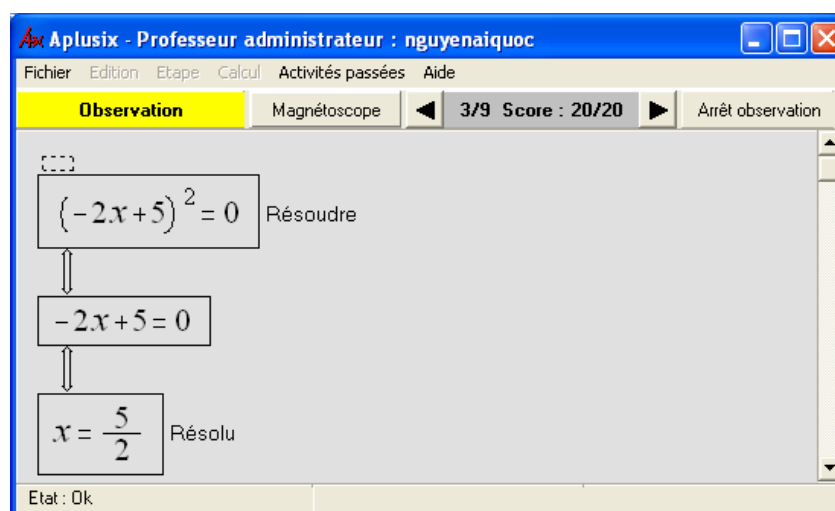


Figure 85 : Technique mobilisée : *CarN*

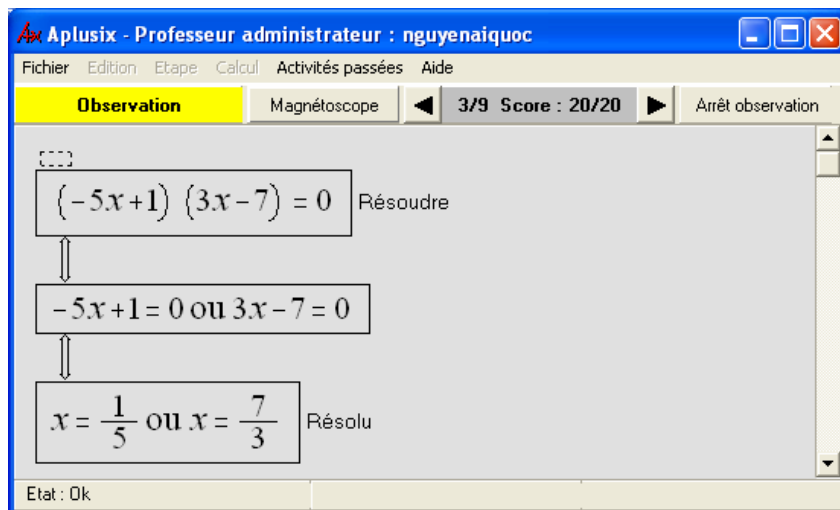


Figure 86 : Technique mobilisée : *ProdN*

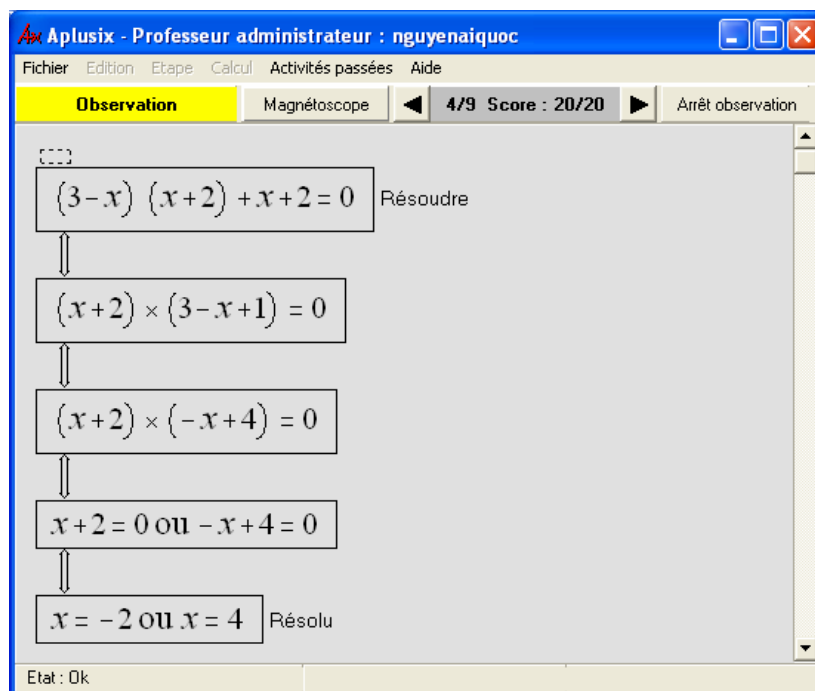


Figure 87 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyennaiquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 7/9 Score : 20/20 Arrêt observation

[[[

$\{-3+2x\} \{4x-7\} + \{-3x+1\} \{2x-3\} = 0$ Résoudre

$\downarrow$

$\{-3+2x\} \{ (4x-7) + \{-3x+1\} \} = 0$

$\downarrow$

$\{-3+2x\} \{4x-7-3x+1\} = 0$

$\downarrow$

$\{-3+2x\} \{x-6\} = 0$

$\downarrow$

$-3+2x = 0$ ou $x-6 = 0$

$\downarrow$

$x = \frac{3}{2}$ ou $x = 6$ Résolu

Etat : Ok

Figure 88 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyennaiquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 1/9 Score : 20/20 Arrêt observation

[[[

$\{-2x+1\} \{-5x-4\} = \{-5x-4\} \{x-1\}$ Résoudre

$\downarrow$

$\{-2x+1\} \{-5x-4\} - \{-5x-4\} \{x-1\} = 0$

$\downarrow$

$\{-5x-4\} \{ (-2x+1) - (x-1) \} = 0$

$\downarrow$

$\{-5x-4\} \{-3x+2\} = 0$

$\downarrow$

$-5x-4 = 0$ ou $-3x+2 = 0$

$\downarrow$

$x = -\frac{4}{5}$ ou $x = \frac{2}{3}$ Résolu

Etat : Ok

Figure 89 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnéscope 2/9 Score : 20/20 Arrêt observation

[[[]]]

$(-4x+3)(3x-9) + (4x-3)(x-8) = 0$ Résoudre

$\Downarrow$

$-(4x-3)(3x-9) + (4x-3)(x-8) = 0$

$\Downarrow$

$(4x-3)(-(3x-9) + (x-8)) = 0$

$\Downarrow$

$(4x-3)(-3x+9+x-8) = 0$

$\Downarrow$

$(4x-3)(-2x+1) = 0$

$\Downarrow$

$4x-3 = 0$ ou $-2x+1 = 0$

$\Downarrow$

$x = \frac{3}{4}$ ou $x = \frac{1}{2}$ Résolu

Etat : Ok

Figure 90 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnéscope 4/9 Score : 20/20 Arrêt observation

[[[]]]

$(2x+1)(3x-6) + x-2 = 0$ Résoudre

$\Downarrow$

$(2x+1)(x-2) \times 3 + (x-2) \times 1 = 0$

$\Downarrow$

$(x-2)((2x+1) \times 3 + 1) = 0$

$\Downarrow$

$(x-2)(6x+3+1) = 0$

$\Downarrow$

$(x-2)(6x+4) = 0$

$\Downarrow$

$x-2 = 0$ ou $6x+4 = 0$

$\Downarrow$

$x = 2$ ou $x = -\frac{2}{3}$ Résolu

Etat : Ok

Figure 91 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyennaiquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 5/9 Score : 13/20 Arrêt observation

$$(-x+4)(-2x+3) - (x-5)(-6+4x) = 0$$
 Résoudre

$$(-x+4)(-2x+3) - (x-5)(3-2x)(-2) = 0$$

✖

$$(-2x+3)((-x+4) - (x-5) - 2) = 0$$

$$(-2x+3)(-x+4-x+5-2) = 0$$

$$(-2x+3)(-2x+7) = 0$$

$$-2x+3 = 0 \text{ ou } -2x+7 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{7}{2}$$
 Résolu

Etat : Ok

Figure 92 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*
Il y a une erreur EFAC

Aplusix - Professeur administrateur : nguyennaiquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 8/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$(6x+3)(1-3x) = (2x+1)(-x-4)$$
 Résoudre

$$(6x+3)(1-3x) - (2x+1)(-x-4) = 0$$

$$3(2x+1)(1-3x) - (2x+1)(-x-4) = 0$$

$$(2x+1)((1-3x) \times 3 - (-x-4)) = 0$$

$$(2x+1)(3-9x+x+4) = 0$$

$$(2x+1)(-8x+7) = 0$$

$$2x+1 = 0 \text{ ou } -8x+7 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{7}{8}$$
 Résolu

Etat : Ok

Figure 93 : Technique mobilisée : *Fact_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 2/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$(-4x+5)^2 = (-2x-7)^2 \quad \text{Résoudre}$$

$$(-4x+5)^2 - (-2x-7)^2 = 0$$

$$((-4x+5) - (-2x-7))((-4x+5) + (-2x-7)) = 0$$

$$(-4x+5+2x+7)(-4x+5-2x-7) = 0$$

$$(-2x+12)(-6x-2) = 0$$

$$-2x+12 = 0 \text{ ou } -6x-2 = 0$$

$$x = 6 \text{ ou } x = -\frac{1}{3} \quad \text{Résolu}$$

Etat : Ok

Figure 94 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 6/9 Score : 20/20 Arrêt observation

$$(3x-4)^2 - (-5x+1)^2 = 0 \quad \text{Résoudre}$$

$$((3x-4) - (-5x+1))((3x-4) + (-5x+1)) = 0$$

$$(3x-4+5x-1)(3x-4-5x+1) = 0$$

$$(8x-5)(-2x-3) = 0$$

$$8x-5 = 0 \text{ ou } -2x-3 = 0$$

$$x = \frac{5}{8} \text{ ou } x = -\frac{3}{2} \quad \text{Résolu}$$

Etat : Ok

Figure 95 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

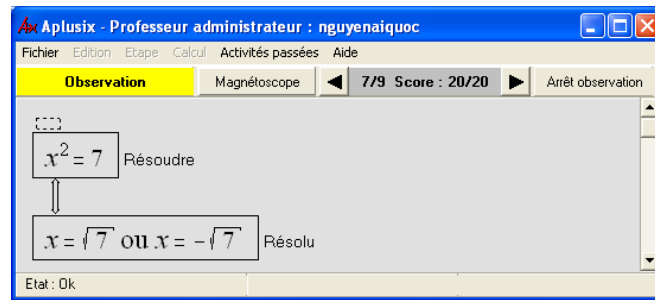


Figure 96 : Technique mobilisée : *Rac*

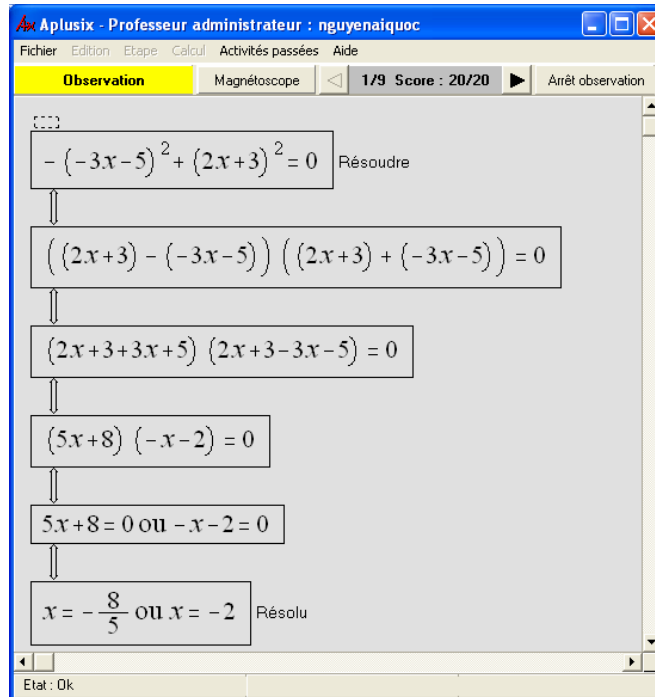


Figure 97 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN*

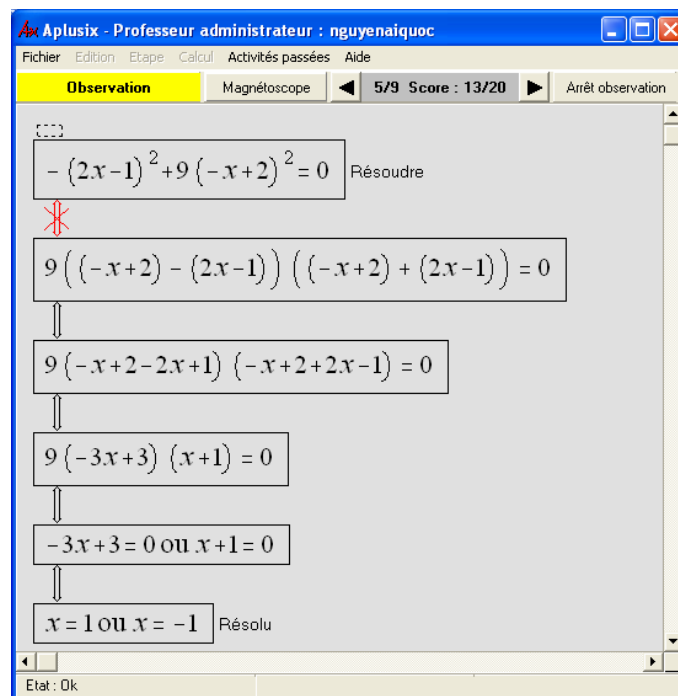


Figure 98 : Technique mobilisée : *IdR_ProdN* et il y a une erreur EFAC

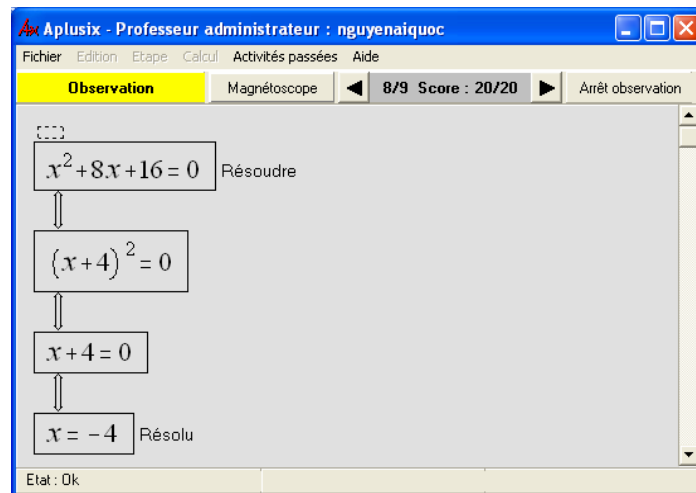


Figure 99 : Technique mobilisée : *IdR_CarN*

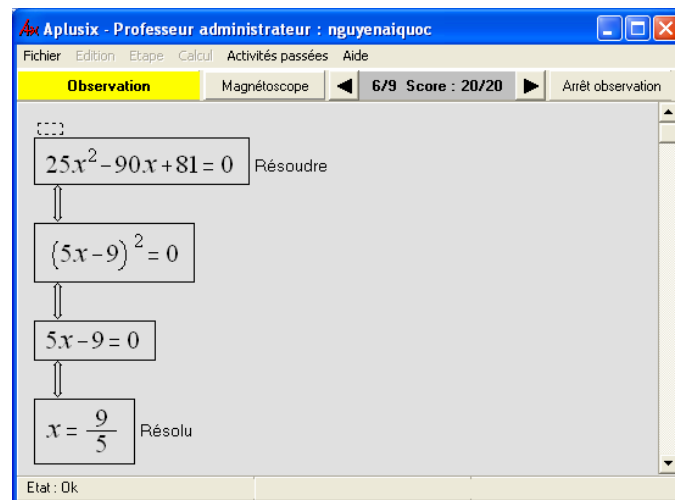


Figure 100 : Technique mobilisée : *IdR_CarN*

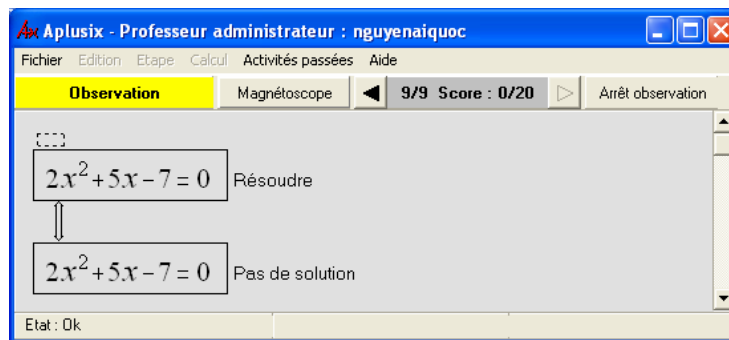


Figure 101 : Interrompu

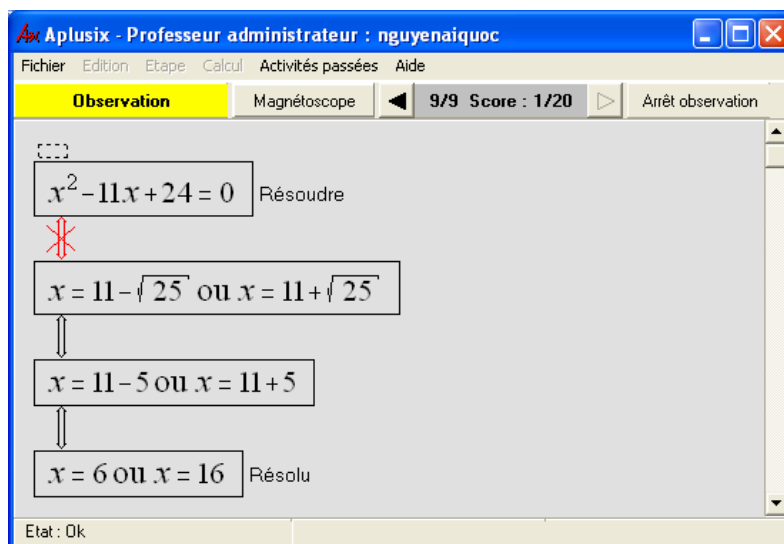


Figure 102 : Technique mobilisée : *Discr*

e) Un profil d'un élève de classe Première S qui illustre la non conformité du rapport personnel au rapport institutionnel : Elève E11

Il s'agit le cas où la technique *Dév_Discr* est mobilisée partout lors de la résolution des exercices donnés. Dans certains cas, la résolution est interrompue dans la première étape après le développement des expressions (cf. Figures 106, 107, 109, 112, 113, 115 et 116). Cependant, il y a deux cas d'utilisation de cette technique dans lesquels la résolution est réussie (cf. Figures 105 et 110) même cette technique n'est pas attendue par l'institution.

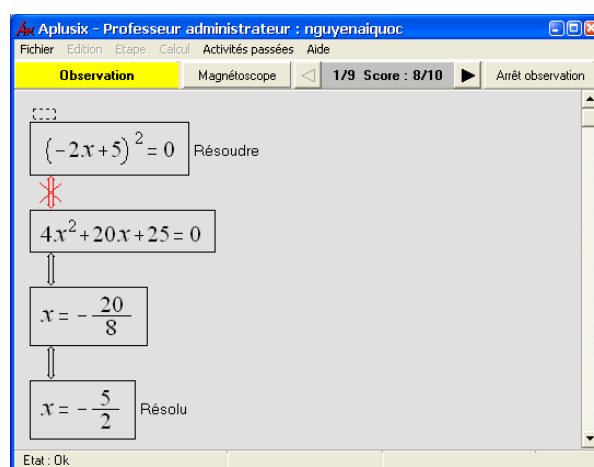


Figure 103 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

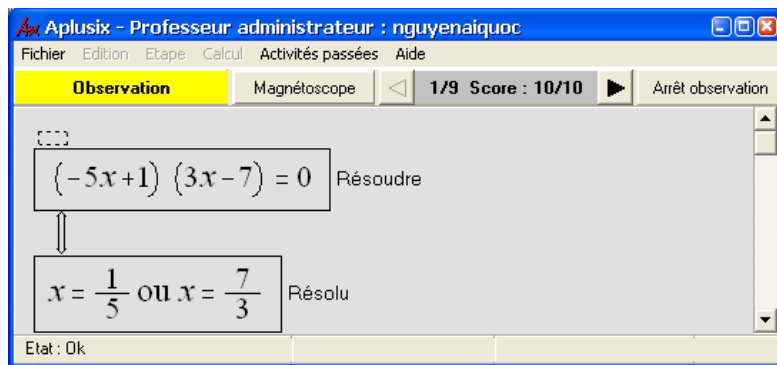


Figure 104 : Technique mobilisée : *ProdN*

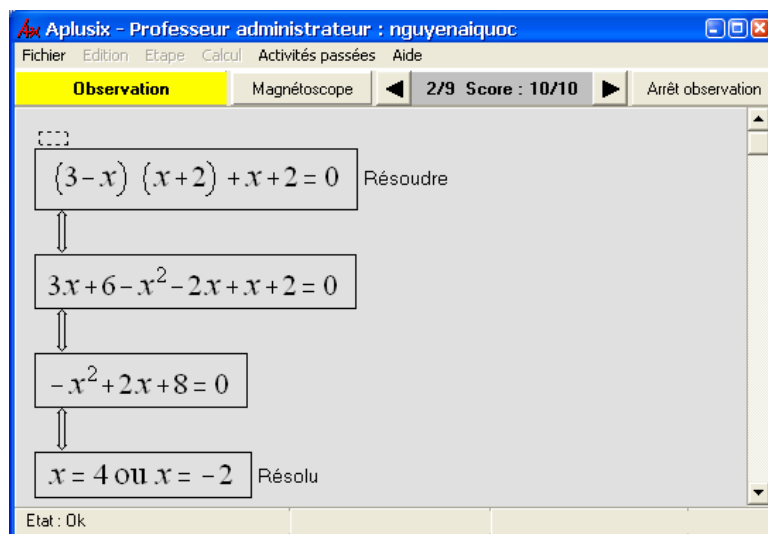


Figure 105 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

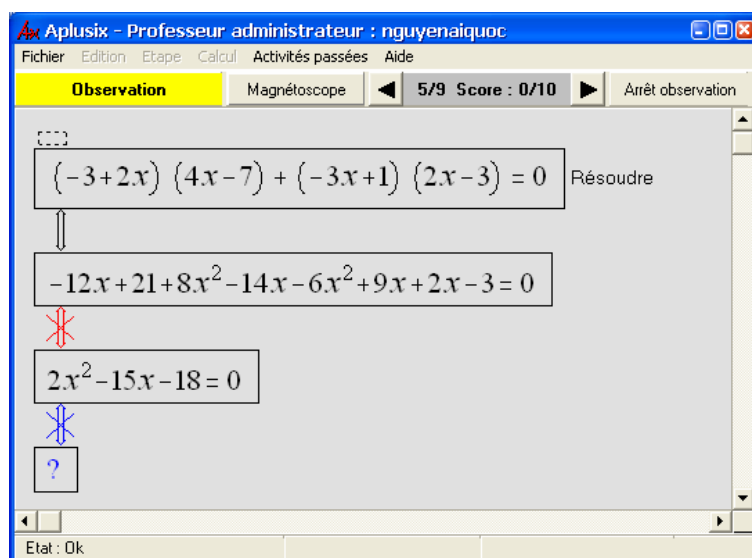


Figure 106 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

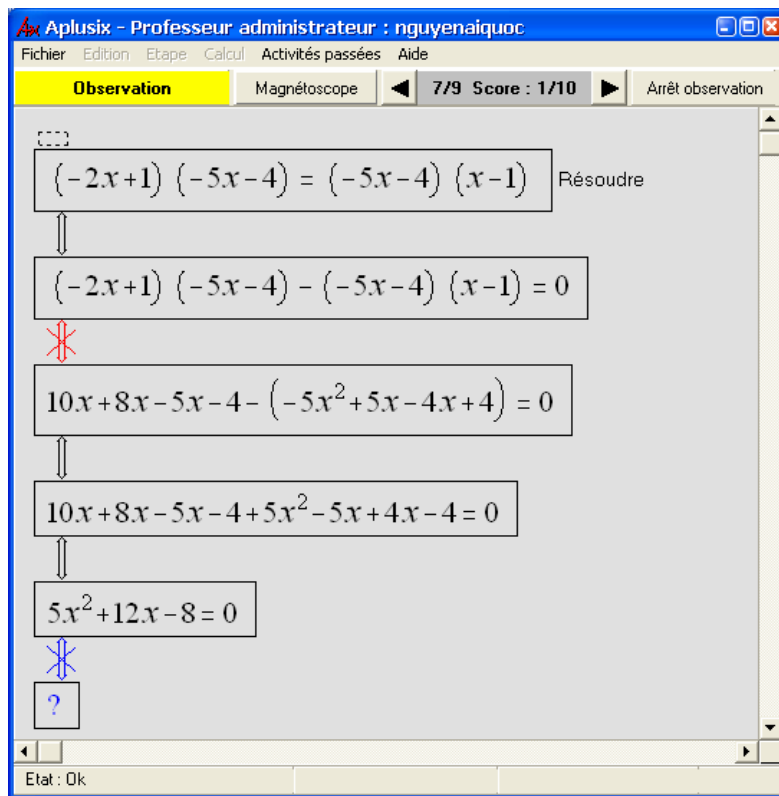


Figure 107 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

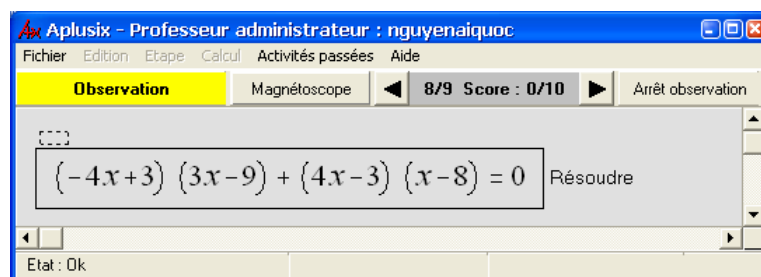


Figure 108 : Interrompu

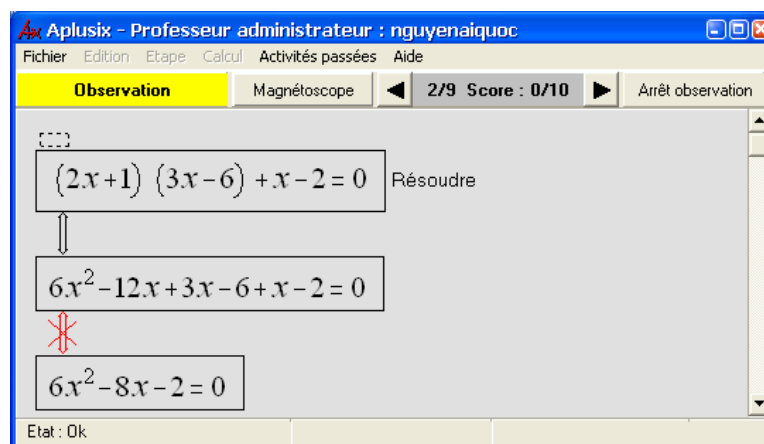


Figure 109 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 3/9 Score : 10/10 Arrêt observation

[[[]]]

$$(-x+4)(-2x+3) - (x-5)(-6+4x) = 0$$
 Résoudre

$$2x^2 - 3x - 8x + 12 - (-6x + 4x^2 + 30 - 20x) = 0$$

$$2x^2 - 3x - 8x + 12 + 6x - 4x^2 - 30 + 20x = 0$$

$$-2x^2 + 15x - 18 = 0$$

$$x = 6 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$
 Résolu

Etat : Ok

Figure 110 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 6/9 Score : 4/10 Arrêt observation

[[[]]]

$$(6x+3)(1-3x) = (2x+1)(-x-4)$$
 Résoudre

$$(6x+3)(1-3x) - (2x+1)(-x-4) = 0$$

$$6x - 18x + 3 - 9x - (-2x - 8x - x - 4) = 0$$

$$6x - 18x + 3 - 9x + 2x + 8x + x + 4 = 0$$

$$-10x + 7 = 0$$

$$x = \frac{7}{10}$$
 Résolu

Etat : Ok

Figure 111 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 8/9 Score : 1/10 Arrêt observation

$$(-4x+5)^2 = (-2x-7)^2 \quad \text{Résoudre}$$

$$\Leftrightarrow (-4x+5)^2 - (-2x-7)^2 = 0$$

$$\times 16x^2 + 40x + 25 - (4x^2 - 28x + 49) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 40x + 25 - 4x^2 + 28x - 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 68x - 24 = 0$$

Etat : Ok

Figure 112 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

Aplusix - Professeur administrateur : nguyenaquoc

Fichier Edition Etape Calcul Activités passées Aide

Observation Magnétoscope 4/9 Score : 0/10 Arrêt observation

$$(3x-4)^2 - (-5x+1)^2 = 0 \quad \text{Résoudre}$$

$$\times 9x^2 - 24x + 16 - (25x^2 + 10x + 1) = 0$$

$$\times 9x^2 - 24x + 16 - 25 - 10x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 34x - 10 = 0$$

$$\times x = ?$$

Etat : Ok

Figure 113 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

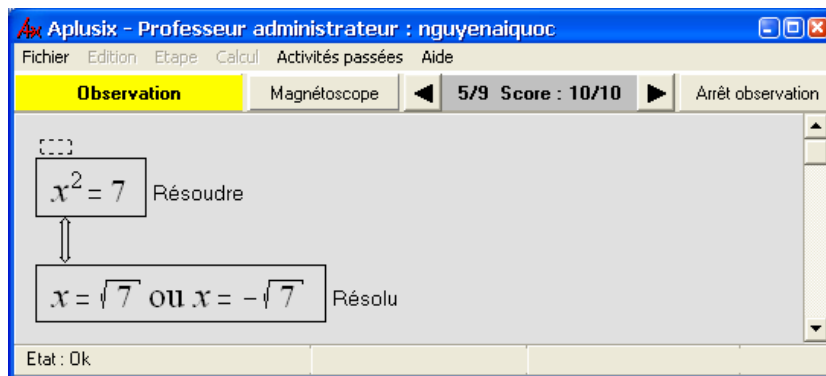


Figure 114 : Technique mobilisée : *Rac*

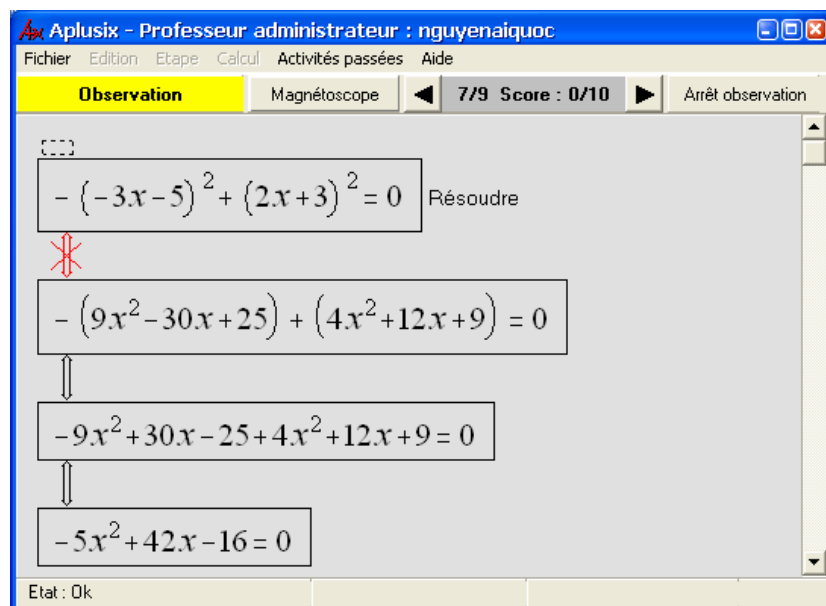


Figure 115 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

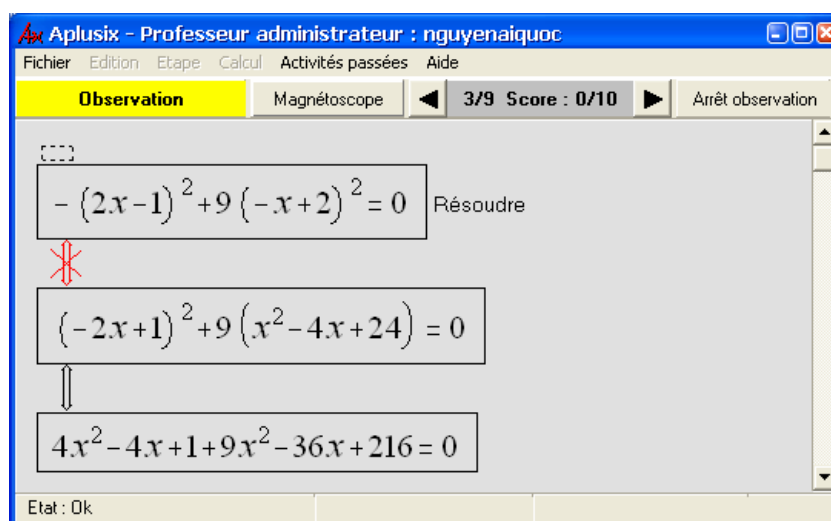


Figure 116 : Technique mobilisée : *Dév_Discr*

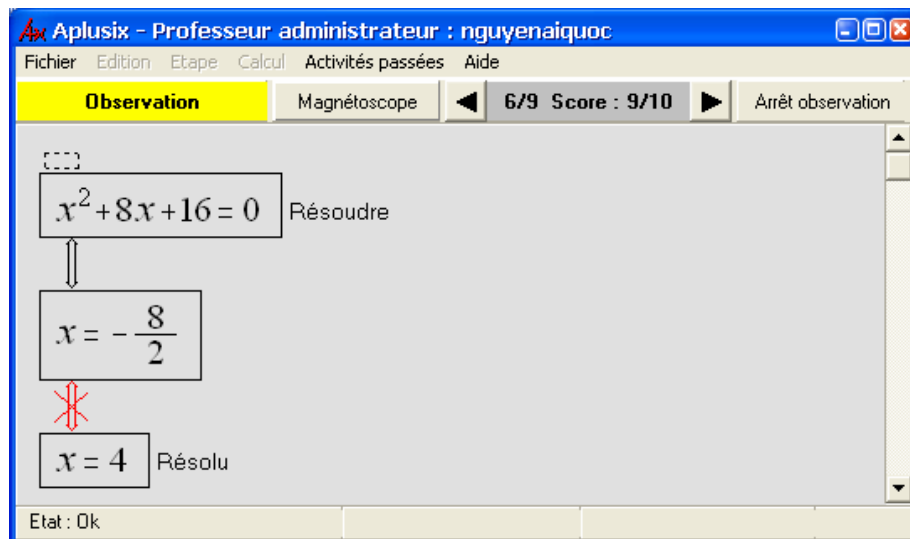


Figure 117 : Technique mobilisée : *Discr*

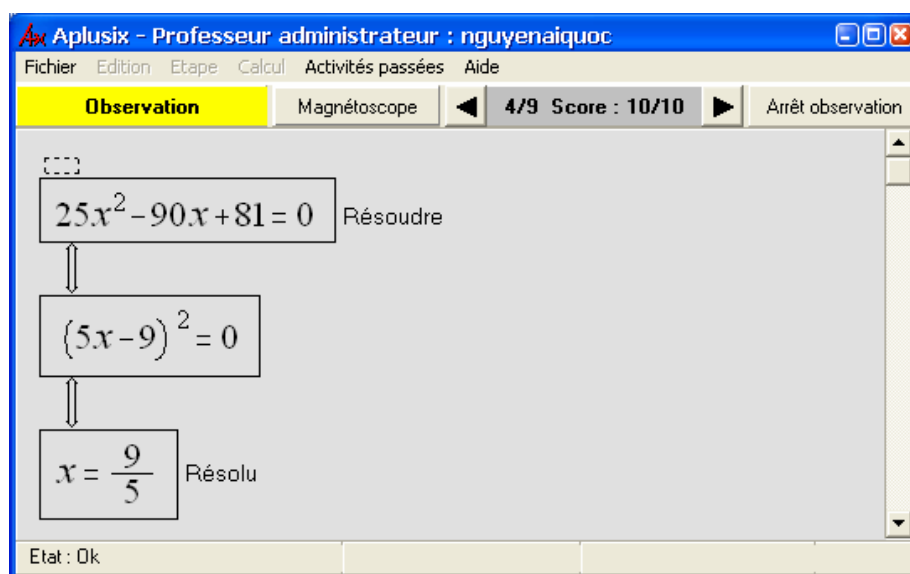


Figure 118 : Technique mobilisée : *IdR_CarN*

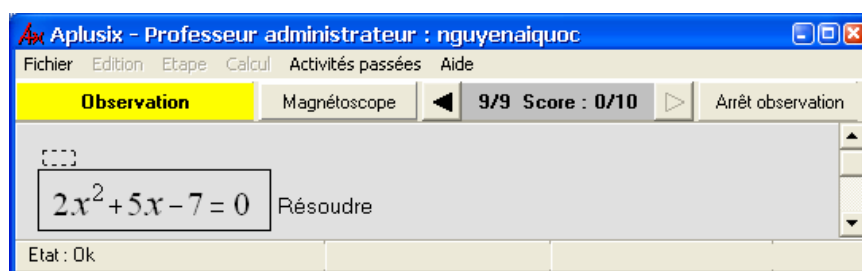


Figure 119 : Interrompu

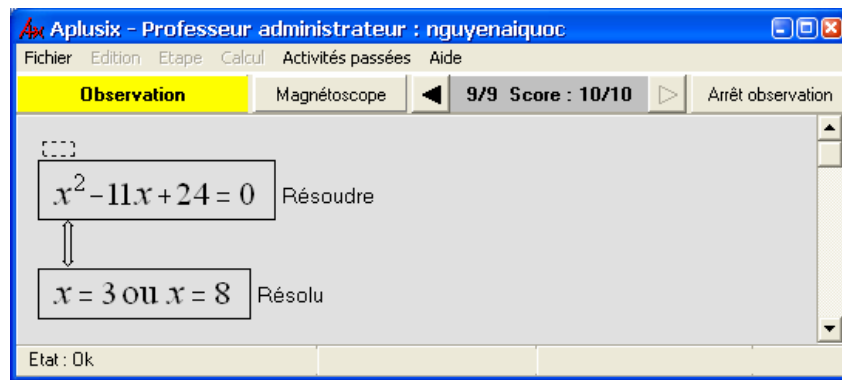


Figure 120 : Technique mobilisée : *Discr*

FIN