



HAL
open science

Optimisation et filtrage de systèmes linéaires de dimension finie par calcul hiérarchisé

Marcos Azevedo da Silveira

► **To cite this version:**

Marcos Azevedo da Silveira. Optimisation et filtrage de systèmes linéaires de dimension finie par calcul hiérarchisé. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1981. Français. NNT: . tel-00178836

HAL Id: tel-00178836

<https://theses.hal.science/tel-00178836>

Submitted on 12 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE (Sciences)

en vue de l'obtention

du Grade de DOCTEUR D'ETAT

Spécialité : Automatique

par

Marcos Azevedo DA SILVEIRA

Bacharel em Matemática - PUCRJ (Brésil)

M. Sc. Génie Electrique - PUCRJ (Brésil)

OPTIMISATION ET FILTRAGE DE SYSTEMES LINEAIRES DE DIMENSION FINIE PAR CALCUL HIERARCHISE

Soutenue le 22 Juin 1981, devant la Commission d'Examen:

MM. Y. SEVELY

Président

M. AMOUROUX

B. LACAZE

B. PRADIN

A. J. PRITCHARD

A. TITLI

} Examineurs

à Renata et Gabriel

AVANT-PROPOS

Ce mémoire présente un travail effectué au laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C. N. R. S. Il a été possible par le double financement du Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) et du Gouvernement Français (CROUS & FNEGE).

Je remercie les membres du Jury par leur participation et leurs conseils :

Monsieur le Professeur Y. SEVELY,
Monsieur le Professeur M. AMOUROUX,
Monsieur le Professeur B. LACAZE,
Monsieur B. PRADIN,
Monsieur le Professeur A. J. PRITCHARD,
Monsieur le Professeur A. TITLI.

Je remercie aussi les membres du L. A. A. S., pour la collaboration amicale qui a été la nôtre, spécialement Messieurs AMOUROUX et BABARY de l'équipe "Systèmes à Paramètres répartis" ; Messieurs BERNUSSOU, CALVET et PRADIN, à qui je dois beaucoup par leur compréhension et patience ; et Messieurs L. JULIEN, M. DELERIS et P. CHACON qui ont dû me supporter dans le même bureau pour un temps assez long et m'aider dans mes démêlés avec l'ordinateur.

Je remercie enfin les personnes qui ont facilité mon adaptation en France, spécialement Madame LOMI (L. A. A. S.) et Monsieur BOURBON (CROUS), et celles qui ont participé à la réalisation matérielle du mémoire.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 - INTRODUCTION	1
1.1 - LE CALCUL HIERARCHISE ET LES SYSTEMES DE DIMENSION INFINIE	1
1.1.2 - PLAN DU MEMOIRE	2
1.3 - SYSTEMES LINEAIRES DE DIMENSION INFINIE	4
CHAPITRE 2 - COUPLAGE REPARTI	9
2.1 - INTRODUCTION	9
2.2 - DEFINITION DU SYSTEME, COUPLAGE CONTINU	10
2.3 - QUELQUES EXEMPLES	11
2.4 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE	13
2.5 - UN PROBLEME DE POINT SELLE	16
2.6 - LA METHODE NON-ADMISSIBLE	18
2.6.1 - DECOMPOSITION	18
2.6.2 - UN PROBLEME SINGULIER	19
2.6.3 - CONVERGENCE DE LA METHODE	20
2.6.4 - SOLUTION DES SOUS-PROBLEMES	21
2.6.5 - DECOUPLAGE	22
2.6.6 - D'AUTRES ALGORITHMES DE COORDINATION	22
2.6.7 - UNE REMARQUE	23
2.7 - LA METHODE DE PREDICTION DE L'ITERATION	23
2.8 - EXTENSION AU CAS DE COUPLAGE DIFFERENTIEL	28
CHAPITRE 3 - COUPLAGE CONCENTRE SUR UNE SOUS-VARIETE I : THEORIE GENERALE	31
3.1 - INTRODUCTION	31
3.2 - DEFINITION DES SOUS-SYSTEMES	32
3.3 - DEFINITION DU SYSTEME GLOBAL	36
3.4 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE	38
3.5 - LE CALCUL HIERARCHISE	40

CHAPITRE 4 - COUPLAGE CONCENTRE SUR UNE SOUS-VARIETE II : EXEMPLES	42
4.1 - INTRODUCTION	42
4.2 - UN CAS DE COUPLAGE PONCTUEL	42
4.3 - COUPLAGE PAR LES LIMITES SUR DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES	45
4.3.1 - DEFINITION DES SOUS-SYSTEMES	45
4.3.2 - DEFINITION DU SYSTEME GLOBAL	47
4.3.3 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE	49
4.3.4 - LE CALCUL HIERARCHISE	52
4.3.5 - DECOUPLAGE LOCAL	54
4.3.6 - PROBLEME AVEC UN COUT SUR LES TERMES DE COUPLAGE	55
4.4 - PROBLEMES DE TRANSMISSION VARIATIONNELS	56
4.4.1 - DEFINITION DU SYSTEME	56
4.4.2 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE	61
4.4.3 - LA METHODE DE PREDICTION DE L'INTERACTION	63
4.4.4 - UNE METHODE DUALE	65
4.4.5 - DECOUPLAGE DES SOUS-PROBLEMES	69
4.4.6 - PROBLEMES AVEC UN COUT SUR LE COUPLAGE	70
CHAPITRE 5 - LE FILTRAGE DECENTRALISE	73
5.1 - INTRODUCTION	73
5.2 - POSITION DU PROBLEME DANS LE CAS DE COUPLAGE REPARTI	74
5.2.1 - DEFINITION DES SOUS-SYSTEMES	74
5.2.2 - LE SYSTEME GLOBAL	75
5.3 - LE FILTRE GLOBAL	76
5.4 - DUALISATION DES ALGORITHMES DE CALCUL HIERARCHISE	78
5.4.1 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE EQUIVALENT	78
5.4.2 - APPLICATION DU CALCUL HIERARCHISE	79
5.4.3 - COORDINATION EN TEMPS REEL	81
5.5 - PROBLEMES DE TRANSMISSION	82
5.5.1 - POSITION DU PROBLEME	82
5.5.2 - LE FILTRE GLOBAL	83
5.5.3 - EQUATIONS SUR LES NOYAUX	84
5.6 - DECENTRALISATION DE L'EQUATION DE RICCATI	87
5.7 - TRANSFORMATIONS DE CHANDRASEKAR	89
5.8 - EXEMPLES	96

CHAPITRE 6 - CONCLUSIONS	99
APPENDICE	101
A.1 - DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3	101
A.2 - DEMONSTRATION ET EXTENSIONS DE LA PROPOSITION 4.4	108
A.3 - QUELQUES THEOREMES	113
A.4 - UN CALCUL DANS LE PARAGRAPHE 2.6.6	116
BIBLIOGRAPHIE	118
TABLE DE NOTATIONS	126

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 - LE CALCUL HIERARCHISE ET LES SYSTEMES DE DIMENSION INFINIE.

Les techniques de calcul et de commande hiérarchisés, basées sur les principes de décomposition-coordination, ont pour but de faciliter l'étude des systèmes complexes, soit en allégeant la taille des problèmes ou le temps de calcul, soit en proposant des structures de commande décentralisées ou plus faciles à comprendre.

Elles ont été développées pour les systèmes statiques et pour les systèmes dynamiques à paramètres concentrés [LASDON (1), PEARSON (1), WISMER (1), MESAROVIC et al (1), TITLI (1)]. Un nombre important de travaux ont été écrits sur ces techniques, en étendant leur champ d'application (cf. surveys de [VAUDAN et RICHARD (1), MAHMOUD (1), SANDELL et al (1)] et les livres [SINGH et TITLI (1), BERNHARD (1)]).

L'application du calcul hiérarchisé présente, sans doute, un grand intérêt pour des systèmes de dimension infinie, où la complexité de calcul est très importante. [WISMER (2), CAMBON et le LETTY (1)] ont considéré le calcul de la commande optimale d'un système à paramètres répartis, après une approximation par différences finies, c'est-à-dire, en le réduisant à un système à paramètres concentrés ou même statique. [BENSOUSSAN et al (1)], avec une formulation abstraite, ont traité les systèmes composés de sous-systèmes de dimension infinie, mais ils ont appliqué ces méthodes seulement à la résolution d'équations variationnelles, par décomposition de l'opérateur (éclatement d'opérateur) et décomposition du domaine spatial [LEMONNIER (1)].

La résolution explicite de problèmes de commande optimale sur des systèmes couplés, de dimension infinie, a été faite par [GRATELOUP et al (1), PRADIN et TITLI (1), AMOUROUX et al(1)]. Dans ces travaux, les auteurs ont toujours considéré des couplages continus. Or, les problèmes de dimension infinie ont certaines caractéristiques qui leur sont propres : la possibilité d'avoir des commandes, des mesures et des couplages non bornés (malgré la linéarité), par exemple des couplages différentiels, ponctuels ou par les conditions aux limites. [PRADIN (1,2)] a présenté une méthode (par prédiction de l'interaction), applicable aux systèmes paraboliques couplés par les limites, et [TRYBUS (1)] une autre (non-admissible), cette fois pour des systèmes hyperboliques, mais ayant un coût sur les termes de couplage.

1.2 - PLAN DU MEMOIRE.

Le but de notre travail est d'étendre le calcul et la commande hiérarchisés sur les systèmes de dimension infinie, en généralisant les travaux de [PRADIN (1,2)] , et en développant des algorithmes pour des cas encore non étudiés, tout en conservant aux systèmes leur description à paramètres répartis, suivant en cela la recommandation de [ATHANS (1)].

Dans les autres paragraphes de ce chapitre, nous présenterons quelques résultats mathématiques connus qui seront utilisés dans le mémoire.

Le chapitre 2 présentera l'extension du calcul hiérarchisé aux systèmes couplés, d'une façon répartie, soit par des opérateurs continus, soit par des opérateurs différentiels. Ces méthodes seront utiles, par exemple, dans la séparation d'un système de N équations différentielles partielles avec partie principale diagonale :

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + \beta_i \frac{\partial z_i}{\partial x} + \gamma_i z_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N [a_{ij} \frac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij} z_j]$$

en N équations couplées, le terme de couplage étant égal à :

$$w_i = \sum_{j=1}^N [a_{ij} \frac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij} z_j] ,$$

ce qui allègera les calculs d'une façon très importante. Ces méthodes

sont proches des méthodes d'éclatement des opérateurs [BENSOUSSAN et al (1)] et de quelques méthodes à deux pas [YANNENKO (1), MAURIN (1)].

Le chapitre 3 présente une formulation abstraite du problème de commande optimale de systèmes couplés par des surfaces de dimension plus petite que l'espace de définition de l'état. Un exemple est la commande de pollution d'une rivière, supposée séparée en plusieurs tronçons. Sur chaque tronçon la dynamique de la demande biologique d'oxygène (L) et de l'oxygène dissout dans l'eau (c) est modélisée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial L_i}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (QL) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial L}{\partial x}) - K_r L + L_r + B(1-u) \\ \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (Qc) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (EA \frac{\partial c}{\partial x}) + K_a (c_s - c) - K_d L + S(t, x), \end{cases}$$

où les différents coefficients sont connus et peuvent varier selon les tronçons [THOMANN (1), O'CONNOR (1)]. Les conditions à la frontière commune Γ_i entre les tronçons i et $i+1$ sont :

$$\begin{cases} L_i(t, \zeta) = L_{i+1}(t, \zeta), c_i(t, \zeta) = c_{i+1}(t, \zeta) \\ \frac{\partial L_i}{\partial x}(t, \zeta) = \frac{\partial L_{i+1}}{\partial x}(t, \zeta), \frac{\partial c_i}{\partial x}(t, \zeta) = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial x}(t, \zeta) \quad \zeta \in \Gamma_i \end{cases}$$

conséquences de la conservation de la masse. Un autre exemple est la commande de la qualité d'eau d'une baie, où la décomposition de l'espace $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ permet la considération de coefficients constants dans chaque morceau. Dans ce chapitre, nous étudierons encore une méthode par prédiction de l'interaction, mise dans un cadre très général.

Les applications des méthodes du chapitre 3 seront faites au chapitre 4. En premier lieu, nous étudierons un problème de couplage ponctuel. Nous appliquerons ensuite les méthodes précédentes aux systèmes décrits par des équations hyperboliques couplées par les conditions aux limites. Dans le cas particulier où la fonction de coût a un terme sur le couplage, on retrouve des résultats de [TRYBUS (1)]. Pour terminer, nous étudierons les systèmes décrits par des équations variationnelles couplées par les conditions aux limites, comme des problèmes de

transmission ou de diffraction. Dans ce cas, nous pourrions développer une méthode duale, en plus de la méthode du chapitre 3.

Le chapitre 5 contient quelques résultats et remarques sur le filtrage décentralisé développés à partir de coordonnateurs prédicteurs-correcteurs [SMITH et SAGE (1)].

1.3 - SYSTEMES LINEAIRES DE DIMENSION INFINIE.

Nous allons présenter quelques définitions ou théorèmes sur les systèmes linéaires de dimension infinie qui seront utiles dans notre mémoire. Sous ce titre, nous voulons désigner la classe de systèmes dynamiques linéaires [KALMAN, FALB et ARBIB (1)] tels que leur espace d'état est de dimension infinie. Par exemple, les équations paraboliques, où l'espace d'état est usuellement contenu dans le $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, Ω un ouvert dans \mathbb{R}^n . Nous considérerons seulement les systèmes dynamiques linéaires définis à partir d'un problème de Cauchy bien posé. D'autres exemples sont fournis par les équations avec retard, les équations hyperboliques, et certaines équations intégrales ou intégrodifférentielles.

Les systèmes considérés seront modélisés par des opérateurs d'évolution ou des semi-groupes, sauf dans quelques cas particuliers.

Définition 1.1.

Soit H un espace de Hilbert et $[0, T] \subset \mathbb{R}$, $T < \infty$. $\Phi(.,.) : \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq T\} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est un opérateur d'évolution "douce" (mild evolution operator CURTAIN et PRITCHARD (3)) si :

- (a) $\Phi(t, t) = I, t \in [0, T]$,
- (b) $\Phi(t, r) \Phi(r, s) = \Phi(t, s), 0 \leq s \leq r \leq t \leq T$,
- (c) $\Phi(t, s)$ est faiblement continu en $s \in [0, T]$ et en $t \in [s, T]$,
- (d) $\sup_{t, s} \|\Phi(t, s)\| \leq M < \infty$.

S'il existe un $h \neq 0$, $h \in H$, et un opérateur linéaire fermé $A(s)$ sur H , p.p. en $s \in [0, T]$, et satisfaisant :

$$\langle k, [\Phi(t, s) - I] h \rangle_H = \int_s^t \langle k, \Phi(t, \sigma) A(\sigma) h \rangle_H d\sigma \quad (1.1)$$

pour tout $k \in H$, $\Phi(.,.)$ sera un opérateur de quasi-évolution sur H ayant $A(.)$ par quasi-générateur. On définira $\mathcal{D}(A) = \{h \in H \mid (1.1) \text{ est vraie}\}$.

Une conséquence de la définition d'opérateur de quasi-évolution est [CURTAIN et PRITCHARD (3) Page 43] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial s} \langle k, \Phi(t,s)h \rangle_H = - \langle k, \Phi(t,s) A(s)h \rangle_H \text{ p.p.} \\ \forall h \in \mathcal{D}(A), \forall k \in H. \end{array} \right.$$

Définition 1.2.

Un opérateur d'évolution (fort) est un opérateur de quasi-évolution $\Phi(.,.)$ fortement continu en s et h et tel que :

$$\Phi(t,s) : \mathcal{D}(A(s)) \rightarrow \mathcal{D}(A(t)), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

$A(.)$ sera appelé le générateur de $\Phi(.,.)$.

On démontre qu'un opérateur d'évolution est différentiable partout et satisfait à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t,s)h = A(t) \Phi(t,s)h, \quad \forall h \in \mathcal{D}(A(s)).$$

Un exemple intéressant d'opérateur de quasi-évolution qui n'est pas un opérateur d'évolution est l'opérateur généré par la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dt}(t) = [A + P(t)]z(t), \\ z(0) = z_0, \end{array} \right.$$

où A est le générateur d'un semigroupe et $P(.) \in L^\infty([0,T], \mathcal{L}(H))$, [CURTAIN et PRITCHARD (3), Page 41].

Les opérateurs d'évolution sont une généralisation des semigroupes aux équations variant dans le temps. La théorie des semigroupes et des opérateurs d'évolution et de quasi-évolution se trouve exposée dans [BALAKRISNAN (1), CURTAIN et PRITCHARD (3), KREIN (1), YOSIDA (1), c.f. DA SILVEIRA (2)]. Nous citerons certains théorèmes

de cette théorie.

Proposition 1.1. [KREIN (1)] Le problème de Cauchy abstrait.

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = Az + Bu, z(0) = z_0 & (1.2) \\ z(\cdot) \in L^2([0, T], H), z_0 \in \mathcal{D}(A), A \text{ un opérateur sur } H, \text{ est uniformément} \\ \text{bien posé si et seulement s'il existe un semigroupe } S(\cdot) \text{ fortement} \\ \text{continu tel que :} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (S(t)h) = A(s) S(t)h, \forall h \in \mathcal{D}(A).$$

$$\begin{aligned} \text{Dans ce cas, si } Bu(\cdot) \in C^1([0, T], H), \\ z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s) Bu(s) ds. \end{aligned} \quad (1.3)$$

L'expression (1.3) a un sens, même si $z_0 \in H$ (et non seulement à $\mathcal{D}(A)$ et $Bu(\cdot) \in L^2([0, T], H)$. Dans ce cas plus général, où (1.2) n'a pas de sens strict ($z(\cdot)$ n'est pas différentiable), on dira que la fonction $z(\cdot)$ définie par (1.3) est la "mild solution" de (1.2) [CURTAIN et PRITCHARD (3)]. On peut démontrer que $z(\cdot) \in C^0([0, T], H)$, au moins. La proposition suivante donne la relation entre une "mild solution" et une solution faible de (1.2).

Proposition 1.2. La fonction $z(\cdot)$ définie par (1.3), avec $z_0 \in H$ et $Bu(\cdot) \in L^2([0, T], H)$, est une "mild solution" de (1.2) si et seulement si elle est une solution faible de la même équation dans le sens suivant :

$$\begin{aligned} (a) z(\cdot) \in C^0([0, T], H), \\ (b) \int_0^T \langle f(t), z(t) \rangle_H dt = \int_0^T \langle \varphi(t), Bu(t) \rangle_H dt + \langle \varphi(0), z_0 \rangle_H \end{aligned}$$

pour tout $f(\cdot) \in C^1([0, T], H)$ où

$$\varphi(t) = \int_t^T S^*(s-t) f(s) ds \quad (1.4)$$

De (1.4) on voit que $\varphi(\cdot) \in C^0([0, T], H)$ et est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -A^*\varphi - f, \\ \varphi(T) = 0. \end{cases}$$

La plupart des équations linéaires du type (1.2) dans ce mémoire seront prises dans le sens faible explicité à la proposition 1.2. Nous aurons besoin de cette généralité parce que, dans les problèmes de commande optimale, il est bien plus simple et réaliste de supposer la commande $u(\cdot) \in L^2([0,T],U)$, $B \in \mathcal{L}(L^2([0,T],H), L^2([0,T],U))$ et $z_0 \in H$, U étant un autre espace de Hilbert.

Nous utiliserons aussi la formulation variationnelle [LIONS (1)], pour des équations abstraites, qui sera explicitée au moment où elle apparaîtra nécessaire.

Les propositions 1.1 et 1.2 sont généralisables aux équations différentielles abstraites variant dans le temps, après certaines précisions techniques [KREIN (1), DA SILVEIRA (2)].

Remarque 1.1.

[CURTAIN et PRITCHARD (1), pages 11 et 262-268] montrent que les équations différentielles ordinaires linéaires, les équations variationnelles, les équations paraboliques et hyperboliques et les équations linéaires avec retard entrent dans le cadre des opérateurs d'évolution. □

Nous aurons besoin de deux autres propositions [ibid.].

Proposition 1.3. Soit $\Phi(\cdot, \cdot)$ un opérateur de quasi-évolution sur H et considérons l'équation duale :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -A^*(t)p(t) - f(t), \\ p(T) = p_T \end{cases} \quad (1.5)$$

Donc :

$$p(t) = \Phi^*(T,t) p_T + \int_t^T \Phi^*(s,t) f(s) ds$$

est l'unique solution faible de (1.5) dans le sens que :

(a) $p(\cdot)$ est faiblement continue sur $[0,T]$,

$$(b) \int_0^T \langle p(t), \frac{d\eta}{dt}(t) - A(t) \eta(t) \rangle_H dt = \int_0^T \langle f(t), \eta(t) \rangle_H dt \\ + \langle p_T, \eta(T) \rangle_H,$$

pour toute fonction $\eta(\cdot)$ avec valeurs dans $\mathcal{D}(A)$ et avec $\eta(\cdot)$, $d\eta(\cdot)/dt$ et $A(\cdot)\eta(\cdot)$ faiblement continus dans $(0, T)$.

Proposition 1.4. Soit $\Phi(\cdot, \cdot)$ un opérateur d'évolution doux sur H et $C(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(H))$. L'équation :

$$U(t, s) h = \Phi(t, s) h + \int_s^t \Phi(t, \sigma) C(\sigma) U(\sigma, s) h d\sigma$$

a une solution unique dans la classe des opérateurs d'évolution doux sur H . Si, en particulier, $\Phi(\cdot, \cdot)$ est un opérateur de quasi-évolution avec quasi-générateur $A(\cdot)$, $U(\cdot, \cdot)$ est aussi un opérateur de quasi-évolution avec quasi-générateur $A(\cdot) + C(\cdot)$.

Cela signifie donc que le problème de Cauchy

$$\frac{dz}{dt} = [A(t) + C(t)] z(t),$$

$$z(0) = z_0,$$

est bien posé.

CHAPITRE 2

COUPLAGE REPARTI,

2.1 - INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, nous allons étendre quelques algorithmes du calcul hiérarchisé à la résolution de problèmes de commande optimale posés sur des systèmes linéaires de dimension infinie. Ces systèmes seront composés de N sous-systèmes couplés par des opérateurs que nous supposerons, dans un premier temps, continus.

Nous montrerons que le système global est bien défini, et nous introduirons le problème aux deux bouts qui constitue une condition nécessaire et suffisante pour la résolution d'un problème de commande optimale avec un coût quadratique.

Certaines méthodes du calcul hiérarchisé sont basées sur des algorithmes de recherche d'un point selle. Ceci nous obligera à considérer l'existence de ce point pour le problème de commande optimale où le couplage apparaît comme une contrainte. Nous pourrions alors définir des algorithmes, et démontrer leur convergence.

Ensuite, l'extension de la théorie sur des systèmes couplés par des opérateurs non bornés, mais obéissant à certaines propriétés, sera présentée. Le prototype de la situation traitée est le couplage par des opérateurs différentiels, lorsque le système est régi par des équations différentielles partielles. Dans ce cas, le support de l'opérateur de couplage, qu'il soit continu ou différentiel, doit contenir l'ouvert de définition des fonctions de l'espace d'état. Nous dirons donc que ces couplages sont répartis.

2.2 - DEFINITION DU SYSTEME, COUPLAGE CONTINU.

Nous supposerons un système composé de N sous-systèmes interconnectés régis par :

$$z_i(t) = \Phi_i(t,0) z_{i0} + \int_0^t \Phi_i(t,s) B_i(s) u_i(s) ds + \int_0^t \Phi_i(t,s) w_i(s) ds \quad (2.1)$$

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}(t) z_j(t) \quad i \in \overline{1,N} \quad (2.2)$$

où $\Phi_i(.,.)$ représente un opérateur d'évolution "doux" sur un espace de Hilbert H_i , et $z_{i0} \in H_i$, $u_i(.) \in L^2([0,T], U_i)$, $B_i(.) \in L^\infty([0,T], \mathcal{L}(U_i, H_i))$, $w_i(.) \in L^2([0,T], H_i)$, $t \in [0,T]$, $C_{ij}(.) \in L^\infty([0,T], \mathcal{L}(H_j, H_i))$, U_i étant un espace de Hilbert. Donc (proposition 1.2) $z_i(.) \in C^0([0,T], H_i)$. Si nécessaire, nous supposerons que $\Phi_i(.,.)$ est un opérateur de quasi-évolution ayant la famille $A_i(.)$ d'opérateurs sur H_i pour quasi-générateur. Alors (2.1) pourra être représenté (dans un sens faible [DA SILVEIRA (2)]) par :

$$\begin{cases} \frac{dz_i}{dt} = A_i(t) z_i + B_i(t) u_i + w_i \\ z_i(0) = z_{i0} \end{cases} \quad (2.3)$$

Si on pose $z = \text{col}(z_i)$, $z_0 = \text{col}(z_{i0})$, $u = \text{col}(u_i)$, $w = \text{col}(w_i)$, $\Phi(.,.) = \text{diag}(\Phi_i(.,.))$, $B(.) = \text{diag}(B_i(.))$, $A(.) = \text{diag}(A_i(.))$, $C(.) = C_{ij}(.)$, $H = \prod H_i$ et $U = \prod U_i$, le système global est représenté par :

$$z(t) = \Phi(t,0) z_0 + \int_0^t \Phi(t,s) B(s) u(s) + C(s) z(s) ds.$$

Il s'agit de l'équation de la perturbation de $\Phi(.,.)$ par $C(.)$, et comme $C(.)$ appartient à $L^\infty([0,T], \mathcal{L}(H,H))$, la proposition 1.4 nous dit qu'il existe un opérateur d'évolution "doux" $U(.,.)$ sur H tel que :

$$z(t) = U(t,0) z_0 + \int_0^t U(t,s) B(s) u(s) ds.$$

En plus, si $\Phi(.,.)$ est de quasi-évolution, $U(.,.)$ l'est aussi ayant $A(.) + C(.)$ pour quasi-générateur. D'où la :

Proposition 2.1. Le système global régi par (2.1) et (2.2) avec couplage continu est bien défini.

Nous avons supposé les opérateurs $B_i(t)$ bornés. Pour des commandes ponctuelles ou sur les limites, il faut considérer $B_i(t)$ non borné. On peut utiliser la théorie des prolongements d'opérateurs [CURTAIN et PRITCHARD (3), Chapitre VIII] ou des théories spécifiques [LIONS (2), VINTER et JOHNSON (1)] pour recouvrir ces cas avec la formulation de ce paragraphe.

2.3 - QUELQUES EXEMPLES.

Exemple 2.1.

Les systèmes linéaires à paramètres concentrés définissent un opérateur d'évolution où $H_i = \mathbb{R}^{n_i}$, $U_i = \mathbb{R}^{m_i}$, $A_i(t)$ est une matrice $n_i \times n_i$, B_i une matrice $n_i \times m_i$ et D_i une matrice $p_i \times n_i$. $\Phi_i(\cdot, \cdot)$ est ce qu'on appelle la matrice fondamentale du système CODINGTON et LEVINSON (1), et, dans le cas invariant dans le temps :

$$\Phi_i(t, s) = \exp(A_i(t-s)).$$

□

Exemple 2.2.

Les équations paraboliques et hyperboliques [LIONS et MAGENES (1), LADYZENSKAJA et al (1), VINTER et JOHNSON (1)] définissent des opérateurs d'évolution [CURTAIN et PRITCHARD (3)]. La théorie développée dans ce chapitre est applicable si le couplage est borné (opérateurs matriciels ou intégraux, e.g.) ou différentiels (voir le paragraphe 2.8). Les exemples considérés dans [PRADIN (2), PRADIN et DA SILVEIRA (1),(2)] entrent dans ce cas.

□

Exemple 2.3.

Les équations avec retard et couplage borné entrent dans le cadre de ce chapitre.

□

Exemple 2.4.

Nous examinerons de plus près les équations d'évolution variationnelles. Supposons V_i et H_i deux espaces de Hilbert tels que :

$$V_i \subset H_i \subset V_i^*$$

avec les injections continues, chacun étant dense dans le suivant. Soit $a(t; \psi, \xi)$ une famille de formes bilinéaires sur V , $t \in [0, T]$, $i \in \overline{1, N}$, $V = \prod V_i$, $H = \prod H_i$, telle que :

$$(a) \quad a(t; \psi, \xi) = \sum_{i=1}^N [a_i(t; \psi_i, \xi_i) + c_i(t; \psi, \xi_i)]$$

où $\psi = \text{col}(\psi_i)$ et $\xi = \text{col}(\xi_i)$,

(b) $a(\cdot; \psi, \xi)$ est mesurable sur $[0, T]$, $\forall \psi, \xi \in V$,

(c) $\exists \alpha_i > 0$, $\alpha > 0$, λ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \{ a_i(t; \psi_i, \psi_i) + \lambda_i \|\psi_i\|_{H_i}^2 \} \geq \alpha_i \|\psi_i\|_{V_i}^2 \\ \text{Re} \{ a(\cdot; \psi, \psi) + \lambda \|\psi\|_H^2 \} \geq \alpha \|\psi\|_V^2 \\ \forall t \in [0, T], \forall \psi \in V, i \in \overline{1, N}. \end{array} \right.$$

On peut démontrer [LIONS et MAGENES (1), vol 1, Page 23] que les espaces :

$W_i = \{ \psi : \psi \in L^2([0, T], V_i) \text{ et } d\psi/dt \in L^2([0, T], V_i^*) \}$ sont contenus dans $C^0([0, T], H)$ et de même $W = W_i \subset C^0([0, T], H)$. Alors l'équation :

$$a(t; z, \eta) + \langle dz/dt, \eta \rangle_{VV^*} = \langle Bu + f, \eta \rangle_{VV^*} + (z_0, \eta(0))_H$$

$\forall \eta \in W$ avec $\eta(T) = 0$

a une solution unique dans W , pour tout $Bu + f \in L^2([0, T], V^*)$ et tout $z_0 \in H$.

Si $Bu + f = \text{col}(B_i u_i + f_i)$, $z = \text{col}(z_i)$, $z_0 = \text{col}(z_{0i})$ et

$$(d) \quad c_i(t; \psi, \eta_i) = - \left\langle \sum_{j=1}^N c_{ij}(t) \psi_j, \eta_i \right\rangle_{VV^*}$$

avec $c_{ij}(\cdot) \in \mathcal{L}(W_j, L^2([0, T], V_i^*))$, les sous-systèmes seront définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(t; z_i, \eta_i) + c_i(t; z_i, \eta_i) + \langle dz_i/dt, \eta_i \rangle_{V_i, V_i^*} = \langle f_i + B_i u_i, \eta_i \rangle_{V_i, V_i^*} + (z_{oi}, \eta_i)_{H_i} \\ \forall \eta_i \in W_i \text{ tel que } \eta_i(T) = 0. \end{array} \right.$$

On peut démontrer qu'il existe des opérateurs :

$$A(\cdot) \in \mathcal{L}(L^2([0, T], V), L^2([0, T], V^*)) \text{ et}$$

$$A_i(\cdot) \in \mathcal{L}(L^2([0, T], V_i), L^2([0, T], V_i^*))$$

tels que ces équations s'écrivent sous la forme (2.3). Nous pouvons faire apparaître le couplage sous des hypothèses différentes de (d) par exemple,

$$(d') \quad c_i(t; \psi, \eta_i) = \sum_{j=1}^N c_{ij}(t) \psi_j, \eta_i)_{H_i}$$

avec les $c_{ij}(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(H_j, H_i))$, ce qui revient aux hypothèses du paragraphe 2.2. Dans ce cas, la première inégalité de (c) est une conséquence de la deuxième pour $i \in \overline{1, N}$. □

2.4 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE.

Soit le coût séparable :

$$J(u) = \sum_{i=1}^N J_i(u_i)$$

$$\begin{aligned} J_i(u_i) &= 1/2 \langle z_i(T) - \bar{z}_i(T), G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T)) \rangle_{H_i} \\ &\quad + 1/2 \int_0^T \langle z_i(t) - \bar{z}_i(t), D_i(z_i(t) - \bar{z}_i(t)) \rangle_{H_i} dt \\ &\quad + 1/2 \int_0^T (u_i, R_i u_i)_{U_i} dt, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\bar{z}_i(\cdot) \in C^0([0, T], H_i), \quad D_i(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(H_i)), \quad G_i \in \mathcal{L}(H_i),$$

$$R_i(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(U_i)), \text{ et } \mathcal{U}_i \subset L^2([0, T], U_i),$$

un ensemble convexe fermé. Supposons G_i et $D_i(t)$ auto-adjoints semi-définis positifs, et $R_i(t)$ auto-adjoint défini positif, p.p. en $[0, T]$.

Un problème de commande optimale est de trouver $u(\cdot) \in \mathcal{U} = \prod \mathcal{U}_i$ minimisant $J(v)$ pour tout $v \in \mathcal{U}$.

Remarque 2.1.

Dans le coût $J_i(u_i)$ la fonction $z_i(\cdot)$ représente une fonction de laquelle on ne veut pas s'éloigner. Si l'on définit une sortie :

$$Y_i(t) = \mathcal{G}_i(t) z_i(t), \bar{y}_i(t) = \mathcal{G}_i(t) \bar{z}_i(t),$$

$\mathcal{G}_i(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(H_i, Y_i))$, Y_i un espace de Hilbert, le deuxième terme de J_i pourra être écrit :

$$1/2 \int_0^T \| \mathcal{G}_i(t) z_i(t) - y_i(t) \|_{Y_i}^2 dt$$

où $D_i(t) = \mathcal{G}_i^*(t) \text{Iso}(Y_i) \mathcal{G}_i(t)$, $\text{Iso}(Y_i)$ l'isomorphisme canonique de Y_i sur son dual (et où nous avons identifié H_i à son dual). □

La condition nécessaire et suffisante d'optimalité (Proposition A.2) est :

$$(\partial J(u)/\partial u, v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}, u \in \mathcal{U}. \quad (2.6)$$

Alors, si $z(t; u)$ ($z(t; v)$) représente la solution de (2.1) avec $u=v$,

$$\begin{aligned} (\partial J_i(u_i)/\partial u_i, v_i - u_i)_{\mathcal{U}_i} &= \\ &= \langle G_i(z_i(T; u_i) - \bar{z}_i(T)), z_i(T; v_i) - \bar{z}_i(T; u_i) \rangle_{H_i} \\ &+ \int_0^T \langle D_i(t)(z_i(t; u_i) - \bar{z}_i(t)), z_i(t; v_i) - \bar{z}_i(t; u_i) \rangle_{H_i} dt \\ &+ \int_0^T (R_i u_i, v_i - u_i)_{U_i} dt, \quad i \in \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Introduisons l'état adjoint défini par :

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \Phi_i^*(T, t) G_i(z_i(T) - z_i(T)) \\ &+ \int_t^T \Phi_i^*(s, t) D_i(s)(z_i(s) - \bar{z}_i(s)) ds \\ &+ \int_t^T \Phi_i^*(s, t) \sum_{j=1}^N C_{ji}^*(s) p_j(s) ds, i \in \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La variable $p = \text{col}(p_i)$ est bien définie à partir d'un opérateur d'évolution $U^*(.,.)$ qui est la perturbation de $\Phi^*(.,.)$ par $C^*(.)$ dans le sens de la proposition 2.1, et, de plus,

$$p(t) = U^*(T,t)p_T + \int_t^T U^*(s,t)D(s)(z(s)-\bar{z}(s))ds, \quad (2.9)$$

où $p_T = \text{col}(p_{T_i})$, $p_{T_i} = G_i(z_i(T)-\bar{z}_i(T))$, $D(t) = \text{diag}(D_i(t))$,

et $U^*(.,.)$ l'opérateur d'évolution adjoint de $U(.,.)$ [DA SILVEIRA (2)].

Remarquons que, si $\Phi(.,.)$ est un opérateur d'évolution fortement continu de générateur $A(.,.)$, $U(.,.)$ a pour générateur $A(.,.) + C(.,.)$ et $U^*(.,.)$ pour quasi-générateur $A^*(.,.) + C^*(.,.)$ [CURTAIN et PRITCHARD (3), Page 261, DA SILVEIRA (2)]. Nous transformerons les deux premiers termes de la formule correspondant à (2.6) pour le système global en utilisant l'état adjoint.

$$\begin{aligned} y &= \langle G(z(T;u) - \bar{z}(T)), z(T;v) - \bar{z}(T;u) \rangle_H \\ &\quad + \int_0^T \langle D(t)(z(t;u) - \bar{z}(t)), z(t;v) - \bar{z}(t;u) \rangle_H dt \\ &= \langle p_T(u), \int_0^T U(T,s) B(s)(v-u) ds \rangle_H \\ &\quad + \int_0^T \langle D(t)(z(t;u) - \bar{z}(t)), \int_0^t U(t,s) B(s)(v-u) ds \rangle_H dt \\ &= \int_0^T \langle U^*(T,t)p_T(u) + \int_t^T U^*(s,t)D(s)(z(s;u) - \bar{z}(s))ds, B(s)(v-u) \rangle_H dt \\ &= \int_0^T \langle p(t;u), B(t)(v-u) \rangle_H dt \end{aligned}$$

après l'utilisation des propriétés des opérateurs d'évolution, le Théorème de Fubini [CURTAIN et PRITCHARD (4)], et la substitution de (2.4) et (2.9). La condition d'optimalité (2.6) devient :

$$(\text{Iso}(U_i)B_i^*(t) \text{ Iso}(H_i^*)) p_i(t;u) + R_{i_i, v_i - u_i} u_i \geq 0,$$

$$\forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i, \quad (2.10)$$

où $p(.,.)$ et $z(.,.)$ (et donc $p_i(.,.)$ et $z_i(.,.)$) sont définis par (2.4) et (2.9).

Remarque 2.2.

Les isomorphismes canoniques $\text{Iso}(\cdot)$ entre un espace et son dual ne seront plus représentés pour ne pas alourdir le texte. □

Si l'on n'a pas de contraintes sur la commande $(u_i = L^2(\{0, T\}, U_i))$, (2.10) devient :

$$u_i(t) = - R_i^{-1}(t) B_i^*(t) p_i(t) \quad (2.11)$$

et la théorie du découplage est applicable [LIONS (2), BENSOUSSAN (1)]. Cette théorie permet de découpler le problème aux deux bouts, en utilisant une équation de Riccati. Elle constitue la base de la théorie de la commande en boucle fermée.

Remarque 2.3.

L'équation (2.8) pourra être interprétée dans un sens faible par :

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = - A_i^*(t) p_i - D_i(t)(z_i - z_i) - \sum_{j=1}^N C_{ji}^*(t) p_j \\ p_i(T) = G_i(z_i(T) - z_i(T)) \end{cases} \quad (2.12)$$

pourvu que $\Phi^*(\cdot, \cdot)$ soit un opérateur de quasi-évolution. □

Remarque 2.4.

Dans le cas de commandes, ou observations (G_i) non bornées, il faut bien interpréter le sens de (2.8) et (2.10). Voir [LIONS (2), VINTER et JOHNSON (1), CURTAIN et PRITCHARD (2)]. □

2.5 - UN PROBLEME DE POINT SELLE.

Certains des algorithmes du calcul hiérarchisé étant des algorithmes de recherche de point selle, nous aurons besoin d'étudier le problème de ce type défini par le problème de commande optimale posé

au paragraphe 2.4, en considérant le couplage comme une contrainte.

Soit le Lagrangien :

$$\begin{aligned} J(u, \lambda) &= \sum_{i=1}^N J_i(u_i) + \int_0^T \left\{ \langle \lambda_i(t), w_i(t) - \sum_{j=1}^N c_{ij}(t) z_j(t) \rangle_{H_i} dt \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N J_i(u_i) + \int_0^T \left\{ \left[\langle \lambda_i, w_i \rangle_{H_i} - \sum_{j=1}^N \langle \lambda_j, c_{ji} z_i \rangle_{H_j} \right] dt \right\} \\ &\equiv \sum_{i=1}^N J_i(u_i, \lambda) \end{aligned}$$

où $\lambda = \text{col}(\lambda_i) \in L^2([0, T], H)$. Nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.2. Sous les hypothèses des paragraphes 2.2 et 2.4, il existe un point selle (u, λ) unique tel que :

$$\min_u \max_{\lambda} J(u, \lambda) = \max_{\lambda} \min_u J(u, \lambda)$$

Démonstration : Le couplage mis sous la forme :

$$F(w) = w - Cz(w)$$

est tel que l'équation $F(w(u)) = \varphi$ a une solution unique pour tout $\varphi \in L^2([0, T], H)$, par exemple :

$$\begin{aligned} w(t) &= C(t) \left\{ \Phi(t, 0) z_0 + \int_0^t \Phi(t, s) B(s) u(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \Phi(t, s) C(s) (w(s) + \varphi(s)) ds \right\} - \varphi(t), \end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathcal{U}$. Le coût J est trivialement semi-continu inférieurement et nous avons vérifié toutes les hypothèses de la Proposition A.3, qui nous affirme l'équivalence du problème de commande optimale original au problème de recherche du point selle de J . Les propriétés d'un point selle complètent la démonstration [LUENBERGER(1), Page 219].

En accord avec la littérature, nous définirons la fonctionnelle conjuguée de J par :

$$\Theta^*(\lambda) = \min_u J(u, \lambda).$$

Les Propositions A.3 et 2.2 affirment l'équivalence entre la minimisation de $J(u)$ sous (2.1) et (2.2) et la minimisation de $\Theta^*(\lambda)$ pour $\lambda \in L^2([0, T], H)$.

2.6 - LA METHODE NON-ADMISSIBLE.

Nous allons étendre la méthode non-admissible du calcul hiérarchisé au calcul de la commande optimale du problème défini au paragraphe 2.4. Cette méthode est une méthode duale où l'on cherche le maximum de $\Theta^*(\lambda)$ par un algorithme itératif.

2.6.1 - DECOMPOSITION.

Supposons choisi un algorithme de maximisation pour $\Theta^*(\lambda)$ (gradient, par exemple). A chaque itération on aura besoin de connaître le gradient de $\Theta^*(\lambda)$. On peut vérifier que :

$$\partial \Theta^*(\lambda) / \partial \lambda = w^* - Cz^*,$$

w^* et z^* solutions du problème de minimisation de $J(u, \lambda)$ pour λ donné. Or, ce problème d'optimisation est séparable en N sous-problèmes : minimiser $J_i(u_i, \lambda)$ sous (2.1), $u_i \in \mathcal{U}_i$, pour λ donné.

Cela nous amène à décomposer la méthode en deux niveaux. Un premier niveau cherche à résoudre les N sous-problèmes indépendants, pour λ donné. Le deuxième niveau, que nous appellerons le coordonnateur, cherche à améliorer la valeur maximisant la fonctionnelle conjuguée par un algorithme itératif. Par exemple, si on utilise au coordonnateur, un algorithme type gradient, on aura :

Coordonnateur : $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho^k (w^k - Cz^k), \rho^k > 0$,
avec w^k et z^k solutions des sous problèmes :

$$\min_{u_i} J_i(u_i, \lambda^k), u_i \in \mathcal{U}_i, \text{ sous (2.1).}$$

Cette méthode nous fournit une séquence de solutions $z^k, p^k, w^k, u^k, \lambda^k; k \in \mathbb{N}$, qui doit converger vers la solution du problème global, c'est-à-dire, la solution des équations (2.4), (2.9) et (2.10).

2.6.2 - UN PROBLEME SINGULIER.

Malheureusement, les sous-problèmes sont singuliers, conséquence du couplage linéaire par variable d'état [GALY (1)]. Parmi les suggestions pour surmonter cette difficulté (élévation au carré des équations de couplage [BAUMAN (1)], utilisation en plus du Lagrangien augmenté [HESTENES (1)]), nous considèrerons le changement de variables proposé par [GALY (1)]. Ce changement de variables a pour but de rendre $J(u, \lambda)$ non-linéaire en w , et s'obtient par un traitement de la relation de couplage (2.2). Recherchons les conditions pour lesquelles l'inversion de

$$w = Cz \tag{2.13}$$

conduit à un coût séparable.

Remarque 2.5.

On ne peut pas inverser C dans tous les cas, même si C est un opérateur borné. Si C n'est pas borné, on aura des problèmes aux limites souvent complexes, c.f. la section 2.8.

Supposons (2.13) inversible dans les espaces choisis et représentons la relation inverse par :

$$z = Ew = \text{col} \left(\sum_{j=1}^N E_{ij} w_j \right), \tag{2.14}$$

où $E = \{E_{ij}\}$. La substitution de (2.14) dans le terme sur la sortie du Lagrangien $J(u, \lambda)$ conduit à :

$$\hat{J}(u, \lambda) = \sum_{i=1}^N \hat{J}_i(u_i, w_i, \lambda) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \int_0^T \langle M_{ij} w_i, w_j \rangle_{H_j} dt,$$

où nous avons fait :

$$\begin{aligned} \hat{J}_i(u_i, w_i, \lambda) = & 1/2 \langle z_i(T) - \bar{z}_i(T), G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T)) \rangle_{H_i} \\ & + \int_0^T \left\{ 1/2 \langle M_{ii}(t) w_i(t), w_i(t) \rangle_{H_i} - \langle \lambda_i(t), w_i(t) \rangle_{H_i} \right. \\ & \left. - \langle D_i(t) \bar{z}_i(t) + \sum_{j=1}^N C_{ji}^*(t) \lambda_j(t), z_i(t) \rangle_{H_i} \right\} dt \end{aligned}$$

$$+ 1/2 \langle \bar{z}_i(t), D_i(t) \bar{z}_i(t) \rangle_{H_i} \} dt + 1/2 \int_0^T (u_i, R_i u_i)_{U_i} dt$$

et

$$M_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N E_{kj}^*(t) D_k(t) E_{ki}(t).$$

Si $M_{ij}(t) = 0$ pour $i \neq j$ et les $M_{ii}(\cdot)$ (auto-adjoints semi-définis positifs par définition) sont inversibles, le Lagrangien est séparable, et la méthode non-admissible peut être appliquée.

Avec le coordonnateur ci-dessus, les sous-problèmes seront :

$$\min_{u_i, w_i} \hat{J}_i(u_i, w_i, \lambda), \quad u_i \in \mathcal{U}_i, \quad w_i \in L^2([0, T], M_i), \quad (2.15)$$

sous (2.1)

En réalité, nous avons remplacé le problème original par un problème équivalent ayant un coût strictement convexe sur le couplage. Sur celui-ci, on peut appliquer la méthode sans crainte d'un problème singulier.

Remarque 2.6.

Dans le cas où le problème n'est pas séparable, on peut essayer un changement du type :

$$C_{ii} \rightarrow C_{ii} + \mathfrak{F}_i, \quad A_i \rightarrow A_i - \mathfrak{F}_i,$$

\mathfrak{F}_i un opérateur borné sur H_i . On aura, de $M_{ij} = 0$, $N(N-1)/2$ équations non-linéaires avec N inconnues, ce qui est bien restrictif.

2.6.3 - CONVERGENCE DE LA METHODE.

Nous démontrerons la proposition :

Proposition 2.3. Supposons $M_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et les M_{ii} inversibles. Le nouveau problème de commande optimale a un point selle unique et, en plus, la solution des sous-problèmes converge vers la solution du problème global, pour ρ^k appartenant à un compact contenu dans $(0, 2^\alpha/\rho^2)$, où α est l'indice

de coercivité de \hat{J} , c'est-à-dire,

$$\hat{J}(u,w,\lambda) \geq \alpha (\|u(\cdot)\|^2 + \|w(\cdot)\|^2),$$

et β la norme de :

$$(u(\cdot), w(\cdot)) \rightarrow C(\cdot) \int_0^{\cdot} \Phi(\cdot, s) [B(s)u(s) + w(s)] ds \quad (2.16)$$

Nous ferons dans la proposition A.4 (Voir l'appendice A.3) $X = L^2([0, T], U) \times L^2([0, T], H)$, $x = (u, w)$ et $\mathcal{J}' = (\partial \hat{J} / \partial u, \partial \hat{J} / \partial w)$. Les propriétés (a) et (b) sont classiques et la propriété (c) découle de l'inversibilité de R et des M_{ii} . Nous ferons aussi :

$$(u, w) = w - Cz(u, w).$$

Il est facile de reconnaître dans (A.28) les équations variationnelles qui donnent la solution du problème global dans la Proposition 2.2., et dans l'algorithme (A.29), (A.30), la méthode non-admissible du sous-paragraphe 2.6.2. Comme la proposition 2.2 s'applique facilement au problème de commande optimale après le changement de variables, la Proposition A.4 implique la Proposition 2.3.

2.6.4 - SOLUTION DES SOUS-PROBLEMES.

La même démarche du paragraphe 2.4 appliquée aux sous-problèmes (2.15) conduit à l'ensemble d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i + w_i, \quad z_i(0) = z_{i0}, \\ \frac{dp_i}{dt} = A_i^* p_i + D_i z_i + \sum_{j=1}^N C_{ji}^* \lambda_j, \quad p_i(T) = p_{iT}, \\ (B_i^* p_i(t; u) + R_i u_i, v_i - u_i)_{u_i} \geq 0, \quad \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i, \\ w_i(t) = -M_{ii}^{-1}(\lambda_i + p_i), \end{array} \right. \quad (2.17)$$

car on n'a pas de contrainte sur w .

2.6.5 - DECOUPLAGE.

Supposons $\mathcal{U} = L^2([0, T], U)$. Les équations (2.17) sont sous la forme d'un problème aux deux bouts usuel, et la théorie du découplage est applicable. Tous les calculs faits nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(t) = - R_i^{-1}(t) B_i^*(t) [P_i(t) z_i(t) + r_i(t)], \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_i(t) = - M_{ii}^{-1}(t) [\lambda_i(t) + P_i(t) z_i(t) + r_i(t)], \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où $P_i(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(H_i))$ est un opérateur auto-adjoint solution de :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P_i(t)h, k \rangle + \langle P_i(t)h, A_i(t)k \rangle + \langle A_i(t)h, P_i(t)k \rangle \\ - \langle P_i(t) B_i(t) R_i^{-1}(t) B_i^*(t) P_i(t) h, k \rangle \\ - \langle P_i(t) M_{ii}^{-1}(t) P_i(t)h, k \rangle + \langle D_i(t)h, k \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$P_i(T) = G_i, \forall h, k \in \mathcal{D}(A_i),$$

et $r_i(\cdot) \in L^2([0, T], H_i)$ solution unique de :

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} = [-A_i^*(t) + P_i(t) B_i(t) R_i^{-1}(t) B_i^*(t) + P_i(t) M_{ii}^{-1}(t)] r_i \\ + P_i(t) M_{ii}^{-1}(t) \lambda_i + \sum_{j=1}^N C_{ji}^*(t) \lambda_j \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$r_i(T) = G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T))$$

2.6.6 - AUTRES ALGORITHMES DE COORDINATION.

On peut changer le coordonnateur en utilisant d'autres algorithmes, comme un de descente minimale, de Newton, du gradient conjugué, ou des méthodes du type quasi-Newton. Avec un coordonnateur de descente minimale, on doit chercher le paramètre ρ^k de telle façon qu'il maximise :

$$\Theta^*(\lambda^k + \rho^k(w^k - Cz^k)).$$

Si z^k, w^k et u^k sont solutions des sous-problèmes pour $\lambda = \lambda^k$, et $\tilde{z}, \tilde{w}, \tilde{u}$ pour $\lambda = w^k - Cz^k$ (le gradient de $\Theta^*(\lambda)$ si $\lambda = \lambda^k$) un calcul simple (Voir l'appendice A.4) donne :

$$\Theta^*(\lambda^k + \rho(w^k - Cz^k)) = 1/2 a\rho^2 + b\rho + \Theta^*(\lambda^k)$$

avec :

$$a = \langle \tilde{z}(T), G\tilde{z}(T) \rangle_H + \int_0^T \{ \langle M\tilde{w}, \tilde{w} \rangle_H + 2 \langle w^k - Cz^k, \tilde{w} - C\tilde{z} \rangle_H \} dt + \int_0^T \langle \tilde{u}, R\tilde{u} \rangle_U dt$$

$$b = \langle z^k(T) - \tilde{z}(T), G\tilde{z}(T) \rangle_H + \int_0^T \{ \langle Mw^k, \tilde{w} \rangle_H + \langle \lambda^k, \tilde{w} - C\tilde{z} \rangle_H + \langle w^k - Cz^k, w^k - Cz^k \rangle_H - \langle D\tilde{z}, \tilde{z} \rangle_H \} dt + \int_0^T \langle u^k, R\tilde{u} \rangle_U dt$$

Alors :

$$\rho^k = -b/a.$$

On vérifie que, à chaque itération du coordonnateur, il faut résoudre les sous-problèmes deux fois, l'une pour calculer z^k, w^k et u^k , et l'autre pour calculer \tilde{z}, \tilde{w} et \tilde{u} .

2.6.7 - UNE REMARQUE.

Des exemples numériques sont présentés dans [PRADIN (2)].

2.7 - LA METHODE DE PREDICTION DE L'INTERACTION.

L'idée de cette méthode est de fixer au coordonnateur non seulement le paramètre λ , comme à la méthode non-admissible, mais aussi la variable w [MESAROVIC et al (1), TITLI (1)]. Dans ce sens, avec un algorithme gradient, le coordonnateur devient :

$$\begin{cases} \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho^k(w^k - Cz^k) \\ w^{k+1} = w^k - \eta^k(\rho^k + \lambda^k), \\ \rho^k, \eta^k > 0. \end{cases}$$

Le coordonnateur le plus intéressant est celui qui utilise un algorithme d'itération directe, ce qui revient à utiliser un algorithme d'itérations successives pour la résolution des équations du problème global :

$$\begin{cases} w^{k+1} = Cz^k & (2.22) \\ \lambda^{k+1} = -p^k & (2.23) \end{cases}$$

z^k et p^k solutions de :

$$\begin{cases} \frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i + w_i^k, z_i(0) = z_{i0} \\ \frac{dp_i}{dt} = -A_i^* p_i - D_i(z_i - z_i) - \sum_{j=1}^N C_{ji}^* \lambda_j, p_i(T) = p_{iT} \\ (B_i^* p_i(t; u_i) + R_i u_i, v_i - u_i)_{u_i} \geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i. \end{cases} \quad (2.24)$$

Des exemples numériques sont présentés dans [PRADIN (2)]. Nous discuterons ici la convergence de la méthode.

Proposition 2.6. Soit $(z^k, p^k, w^k, \lambda^k, u^k), k \in \mathbb{N}$ la séquence générée par l'algorithme itératif défini par (2.22), (2.23) et (2.24). Supposons qu'on n'a pas de contraintes sur la commande. Alors, si l'intervalle $[0, T]$ est suffisamment petit, cette séquence converge vers (z, p, w, λ, u) , solution du problème global, fortement dans :

$$[L^2([0, T], H)]^4 \times L^2([0, T], U).$$

Démonstration : Comme la solution des sous-problèmes est bien définie à partir de λ^k et w^k , on peut écrire la méthode de la façon suivante :

$$w^{k+1} = Cz(w^k, \lambda^k),$$

$$\lambda^{k+1} = -p(w^k, \lambda^k),$$

avec des notations évidentes. Si nous définissons :

$$x = \text{col}(w^k, \lambda^k) \in X = [L^2([0, T], H)]^2, \text{ et}$$

$$F(x^k, \lambda^k) = \text{diag} (Cz(w^k, \lambda^k), -p(w^k, \lambda^k)),$$

la méthode peut s'écrire :

$$x^{k+1} = F(x^k),$$

F étant une application affine de X dans X. Par le théorème du point fixe [YOSIDA (1)], pour démontrer la convergence, il suffit de vérifier si la partie linéaire de F est une contraction. Cette partie linéaire est obtenue en faisant $z_0 = 0$, $z(t) = 0$. Nous trouverons une expression pour cette partie linéaire, et nous estimerons sa norme.

La substitution de l'expression de $z(t)$ dans l'expression de $p(t)$ conduit à :

$$\begin{aligned} p(t) + \int_0^t & \left[\Phi^*(T,t) G \Phi(T,s) B(s) R^{-1}(s) B^*(s) \right. \\ & \left. + \int_{\text{sup}(t,s)}^T \Phi^*(\sigma,t) D(\sigma) \Phi(\sigma-s) B(s) R^{-1}(s) B^*(s) d\sigma \right] p(s) ds \\ = \int_0^T & \left[\Phi^*(T,t) G \Phi(T,s) + \int_{\text{sup}(t,s)}^T \Phi^*(\sigma,t) D(\sigma) \Phi(\sigma,s) d\sigma \right] w(s) ds \\ & - \int_t^T \Phi^*(s,t) C^*(s) \lambda(s) ds \end{aligned} \quad (2.25)$$

Le terme à gauche de l'égalité définit un opérateur sur :

$L^2([0,T], H)$ que nous écrirons :

$$= (I + A) p(\cdot),$$

où I représente l'identité dans cet espace. De la définition 1.1, on a que :

$$\|\Phi(t,s)\| = \|\Phi^*(t,s)\| \leq \gamma, \quad \gamma \text{ une constante quelconque dans le texte,}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|A(p(t))\| \leq & \left[\gamma T^2 \|G\|^2 \|B R^{-1} B^*\|_\infty^2 \right]^{1/2} \|p(t)\| \\ & + \left[\gamma T^3 \|D\|_\infty^2 \|B R^{-1} B^*\|_\infty^2 \right]^{1/2} \|p(t)\|, \end{aligned}$$

où les normes ont été prises au sens de H et $\|D\|_\infty = \text{ess sup}_t \|D(t)\|$.

Si T est suffisamment petit, $\|A\| < 1$. Un théorème classique [YOSIDA (1)],

Page 69 nous dit que l'opérateur I + A est inversible et, en plus,

$$\| (I + \Lambda)^{-1} \| \leq 1 / (1 - \| \Lambda \|).$$

De (2.25) nous pouvons retirer une expression pour $p(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= (I + \Lambda)^{-1} \int_0^T [\Phi^*(T, t) G \Phi(T, s) + \int_{\sup(t, s)}^T \Phi^*(\sigma, t) D(\sigma) \Phi(\sigma, s) d\sigma] w(s) ds \\ &\quad - (I + \Lambda)^{-1} \int_t^T \Phi^*(s, t) C^*(s) \lambda(s) ds, \end{aligned} \quad (2.26)$$

d'où la majoration :

$$\begin{aligned} \| p(t) \| &\leq \sqrt{\gamma_{\sup(T^2, T^3)} [\| G \|^2 + \| D \|_{\infty}^2 / (1 - \| \Lambda \|^2)] \| w(t) \|} + \\ &\quad + \sqrt{\gamma T^2 \| C \|_{\infty}^2 / (1 - \| \Lambda \|^2)} \| \lambda(t) \| \end{aligned}$$

De la même façon, si on substitue (2.26) dans l'expression de $z(t)$, on aura :

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t \Phi(t, s) B(s) R^{-1}(s) B^*(s) (I + \Lambda)^{-1} \int_t^T \Phi^*(\sigma, t) C^*(\sigma) \lambda(\sigma) d\sigma ds \\ &\quad + \int_0^t \Phi(t, s) \lambda(s) ds \\ &\quad - \int_0^t \Phi(t, s) B(s) R^{-1}(s) B^*(s) (I + \Lambda)^{-1} \int_0^t [\Phi^*(T, \sigma) G \Phi(T, \sigma) \\ &\quad \quad + \int_{\sup(s, \sigma)}^T \Phi^*(\eta, s) D(\eta) \Phi(\eta, \sigma) d\eta] w(\sigma) d\sigma ds \end{aligned}$$

ce qui conduit à la majoration

$$\begin{aligned} \| z(t) \| &\leq (\gamma T + \gamma T \| B R^{-1} B^* \|_{\infty}) \sqrt{\gamma_{\sup(T^2, T^3)} [\| G \|^2 + \| D \|_{\infty}^2 / (1 - \| \Lambda \|^2)] \| w(t) \|} \\ &\quad + \gamma T \| B R^{-1} B^* \|_{\infty} \sqrt{\gamma T^2 \| C \|_{\infty}^2 / (1 - \| \Lambda \|^2)} \| \lambda(t) \| \end{aligned}$$

On voit que, si T est suffisamment petit,

$$\| Cz(w, \lambda) \| \leq \alpha \| (w, \lambda) \|,$$

$$\| -p(w, \lambda) \| \leq \alpha \| (w, \lambda) \|,$$

pour une constante $\alpha < 1$, $\| (w, \lambda) \|$ la norme de (w, λ) dans l'espace produit.

D'où :

$\| F(x^1 - x^2) \| \leq \alpha \| x^1 - x^2 \|$, $\alpha < 1$, $x^1, x^2 \in X$,
 et nous avons terminé la démonstration.

Une discussion plus détaillée pour le cas de systèmes invariants dans le temps, se trouve dans [PRADIN et DA SILVEIRA (2)].

Remarque 2.7.

A partir des expressions des constantes, on peut voir que la convergence sera améliorée si le couplage est plus "faible" ($\| C \|$ plus petit), le coût sur la commande plus "fort" ($\| R^{-1} \|$ plus petit) et le coût sur l'état plus "faible" ($\| D \|$ plus petit). □

Remarque 2.8.

[PRADIN (2)] a suggéré une modification qui peut, dans certains cas, améliorer la convergence : affaiblir le couplage par un changement dans la définition de $A_i(t)$:

$$C_i \longrightarrow C_i - F_i, A_i \longrightarrow A_i + F_i$$

□

Remarque 2.9.

La théorie du découplage est applicable aux sous-problèmes. On obtient les équations suivantes :

$$p_i(t) = P_i(t) z_i(t) + r_i(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P_i(t) h, k \rangle_{H_i} + \langle P_i(t) h, A_i(t) k \rangle_{H_i} + \langle A_i(t) h, P_i(t) k \rangle_{H_i} \\ - \langle P_i(t) B_i(t) R_i^{-1}(t) B_i^*(t) P_i(t) h, k \rangle_{H_i} + \langle D_i(t) h, k \rangle_{H_i} = 0 \end{aligned}$$

$$P_i(T) = G_i, \forall h, k \in \mathcal{D}(A_i)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} = [- A_i^*(t) + P_i(t) B_i(t) R_i^{-1}(t) B_i^*(t)] r_i - \sum_{j=1}^N C_{ji}^*(t) \lambda_j \\ + D_i(t) \bar{z}_i - P_i(t) w_i \end{aligned}$$

$$r_i(T) = G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T))$$

□

2.8 - EXTENSION AU CAS DE COUPLAGE DIFFERENTIEL.

Nous allons étendre les méthodes déjà présentées dans ce chapitre, au cas de systèmes régis par des équations différentielles partielles couplées par des opérateurs différentiels. En réalité, nous travaillerons dans un cas un peu plus général. Supposons que le couplage obéit aux hypothèses :

(a) $C_{ij}(t) : H_j \rightarrow H_i$ est un opérateur linéaire fermé avec domaine dense dans H_j , pour tout i, j et presque partout en $[0, T]$.

(b) Il existe $g(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ tel que :
 $\| C(t) \Phi(t, s) h \|_H \leq g(t-s) \| h \|_H$

Sous ces hypothèses, on peut définir une extension fermée bornée de $C(t) \Phi(t, s)$ [YOSIDA (1), Pages 78-79]. L'utilisation du théorème 2.1, Page 572 de [CURTAIN et PRITCHARD (2)] à la place de la proposition 1.4, nous amène à la généralisation suivante de la proposition 2.1 :

Proposition 2.6. Soient les hypothèses du paragraphe 2.2, en supposant les $C_{ij}(\cdot)$ non bornés, mais obéissant aux conditions (a) et (b). Alors le problème global est bien défini.

Le paragraphe 2.4 reste entièrement applicable, car on peut bien définir $C^*(\cdot)$. La proposition 2.2 n'utilise pas la continuité des restrictions, mais seulement celle de $\Phi(t, s) C(s)$, donc elle reste valable. La méthode non-admissible avec le changement de variables proposé dans le sous-paragraphe 2.6.2 est applicable dès que le problème aux limites

$$Cz = w, \tag{2.27}$$

w donné, a une solution unique dans les espaces choisis, et que M_{ii} est bien défini. Dans ce cas, la Proposition 2.3 reste valable, car, dans (2.16),

$$C(\cdot) \int_0^\cdot \Phi(\cdot, s) \varphi(s) ds = \int_0^\cdot \overline{C(\cdot) \Phi(\cdot, s)} \varphi(s) ds,$$

l'extension fermée existant presque partout dans $[0, T]$. La grande difficulté de l'application de la méthode non-admissible revient à la solution de (2.27). Nous le montrerons sur deux exemples.

Exemple 2.5.

Supposons $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, A un opérateur différentiel elliptique du deuxième ordre, $\mathcal{D}(A_1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $H_1 = L^2(\Omega)$. Soit $C = K \partial/\partial x$, $x \in \Omega$, K une matrice inversible, la solution de (2.27) sera :

$$z(t,x) = Ew = \int_0^x K^{-1} w(t,\sigma) d\sigma,$$

car $z(t,.)$ est absolument continue et

$$\partial z/\partial x = K^{-1} w \text{ avec } z(t,0) = 0.$$

□

Exemple 2.6.

Supposons A un opérateur elliptique du quatrième ordre, $\mathcal{D}(A_1) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, et $C = K \partial^2/\partial x^2$. Si $z_0 \in \mathcal{D}(A)$, il faut résoudre la famille de problèmes aux limites.

$$\begin{cases} K \partial^2 z/\partial x^2 = w(t), \\ z(t) \in \mathcal{D}(A), w(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Si K définit un système elliptique, le problème a une solution unique. Si K définit un système hyperbolique, le problème sera ultra-déterminé. Eventuellement une connaissance spécifique de $w(t)$ permettra de démontrer qu'il y a une solution (Voir Exemple 2.5).

□

En passant à la méthode de prédiction de l'interaction, on peut voir qu'on a besoin seulement de $\overline{C(\cdot) \Phi(\cdot, \cdot)}$ et son adjoint. Nous réunirons ces affirmations dans la proposition suivante.

Proposition 2.7. Soient les hypothèses des paragraphes 2.2 et 2.4, en supposant les $C_{ij}(\cdot)$ non bornés mais obéissant à (a) et (b). Si le problème aux limites (2.27) a une solution unique, les $M_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, et les M_{ii} sont inversibles, la méthode non-admissible est applicable, la Proposition 2.3 restant valable, étant la norme de :

$$(u(\cdot), w(\cdot)) \rightarrow \int_0^\cdot \overline{C(\cdot) \Phi(\cdot, s)} [B(s)u(s) + w(s)] ds.$$

Si T est suffisamment petit et le problème n'a pas de contraintes sur la commande, la Proposition 2.4 reste valable.

Nous avons développé un exemple avec deux sous-systèmes couplés par des opérateurs différentiels :

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \alpha_i \frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + \beta_i z_i + u_i + w_i, \quad t \in [0, 1.0], \quad x \in (0, 0.1),$$

avec :

$$z_i(t, 0) = z_i(t, 1) = 0,$$

$$z_i(0, x) = \sin(10\pi x),$$

$$\text{et } \alpha_1 = 0.001, \quad \alpha_2 = 0.003, \quad \beta_1 = \beta_2 = -1,$$

le couplage étant donné par :

$$w_1 = 0.5 \frac{\partial z_2}{\partial x} + z_2,$$

$$w_2 = 0.3 \frac{\partial z_1}{\partial x} + z_1.$$

En utilisant un algorithme d'interaction directe et des différences finies pour la résolution des sous-problèmes, nous avons obtenu le résultat suivant :

erreur de 10^{-2}	35 itérations
erreur de 10^{-3}	40 itérations
erreur de 10^{-4}	45 itérations
erreur de 10^{-5}	51 itérations,

où l'erreur est donnée par :

$$\sup_{t, x} \| z^{k+1}(t, x) - z^k(t, x) \|, \quad \text{l'erreur initiale d'ordre de } 0.2.$$

CHAPITRE 3

COUPLAGE CONCENTRE SUR UNE SOUS-VARIETE I : THEORIE GENERALE.

3.1 - INTRODUCTION.

Les types de couplage considérés dans le Chapitre 2, ne comprennent pas le couplage par les conditions aux limites, pour des systèmes décrits par des équations différentielles partielles. Or, on trouve des exemples physiques où ce dernier type de couplage a beaucoup d'importance : les problèmes de commande de pollution sur une rivière ou sur une baie, divisées en tronçons (voir le chapitre 1), les problèmes de commande d'une colonne de distillation plus complexe.

Le but du chapitre 3 est d'étudier une théorie pour ce type de couplage, dans un cadre suffisamment général, pour couvrir des couplages ponctuels ou par des surfaces intérieures au domaine de définition de la variable d'état.

Dans le prochain paragraphe, nous développerons les notions de base pour bien définir ces types de couplage. Les paragraphes suivants traiteront des problèmes de commande optimale et du calcul hiérarchisé, toujours dans ce cadre abstrait et général.

Les exemples et les cas particuliers seront traités au Chapitre 4.

3.2 - DEFINITION DES SOUS-SYSTEMES.

Pour parler du couplage ponctuel où par les limites, nous aurons besoin d'introduire des équations affaiblies et des définitions par transposition.

Nous noterons $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert ayant $\partial\Omega_i$ pour frontière (supposée une sous-variété de dimension $(n-1)$ suffisamment régulière), $H_i \subset L^2(\Omega_i)$. Soit $\Gamma_i \subset \bar{\Omega}_i$ une sous-variété de dimension strictement plus petite que n et suffisamment régulière. Γ_i sera appelée la surface de couplage. Par convention, $Q_i = [0, T] \times \Omega_i$, $\Sigma_i = [0, T] \times \Gamma_i$; $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_i}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_i}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q_i}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_i}$ la dualité pour des espaces de fonctions de support continu dans Ω_i , Γ_i , Q_i et Σ_i .

Nous supposerons aussi l'existence d'une formule de Green sur Q_i .

$$\begin{aligned} \langle \varphi, f \rangle_{Q_i} = & \langle (d/dt - \mathcal{A}_i) \varphi, \eta \rangle_{Q_i} - \langle \mathcal{B}_i \varphi, \mathcal{T}_i \eta \rangle_{\Sigma_i} \\ & + \langle \mathcal{A}_i \varphi, \mathcal{C}_i \eta \rangle_{\Sigma_i} + \langle \varphi(0), \eta(0) \rangle_{\Omega_i}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

où η est donné par :

$$\eta(t) = \int_t^T \Phi_i^*(s, t) f(s) ds, \quad (3.2)$$

$\Phi_i(\cdot, \cdot)$ un opérateur d'évolution sur H_i ayant pour générateur $A_i(\cdot)$ de domaine $\mathcal{D}(A_i) \neq \emptyset$, et où $\mathcal{A}_i(\cdot)$ représente le même opérateur d'un point de vue formel, mais sans exiger des conditions homogènes sur Γ_i (ce qui se traduit pour un domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A}_i)$ plus large que $\mathcal{D}(A_i)$). On voit des formules de Green de ce type dans [LIONS et MAGENES (1), LADYZENSKAJA et al (1)]. Nous montrerons des exemples au chapitre 4.

Remarque 3.1.

Dans le cas général d'un opérateur $A_i(\cdot)$ d'ordre $2m$, on aura les termes de (3.1) sur $[0, T] \times \partial\Omega_i / \Gamma_i$, où du type :

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle \mathcal{A}_{ij} \varphi, \mathcal{C}_{ij} \eta \rangle_{\Sigma_i} - \sum_{j=0}^{m-1} \langle \mathcal{B}_{ij} \varphi, \mathcal{T}_{ij} \eta \rangle_{\Sigma_i}. \quad (3.3)$$

La méthode que nous développerons restant la même, nous nous bornerons à (3.1), qui suppose soit l'ordre de $A_i(\cdot)$ égal à 2, soit l'annulation de $2(m-1)$ termes de (3.3). □

Définition 3.1.

Supposons Γ_i et $\partial\Omega_i$ disjoints. Une solution faible de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dz}{dt} = A_i(t)z + B_i u_i & \text{sur } Q_i \\ \Phi_i z = w_i, \quad \mathcal{A}_i z = 0 & \text{sur } \Sigma_i \\ z(0) = z_0 & \text{sur } \Omega_i \end{array} \right. \quad (3.4)$$

est une fonction $z(\cdot) \in C^0([0, T], H_i)$ telle que :

$$\begin{aligned} \langle f, z \rangle_{Q_i} &= \langle \eta, B_i u_i \rangle_{Q_i} - \langle \mathcal{T}_i \eta, w_i \rangle_{\Sigma_i} \\ &+ \langle \eta(0), z_0 \rangle_{\Omega_i}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

pour tout $f \in C^1([0, T], H_i)$ et $\eta(\cdot)$ obéissant à :

$$\eta(t) = \int_t^T \Phi_i^*(s, t) f(s) ds, \quad (3.6)$$

et $B_i u_i \in L^2(Q_i)$, $z_0 \in H_i$ □

Les conditions aux limites sur $\partial\Omega_i$, si elles sont homogènes, sont contenues dans la définition de $\mathcal{D}(A_i)$. Dans le cas contraire, il faut modifier la définition (3.1), dans le sens de [LIONS et MAGENES (1)].

Remarque 3.2.

L'expression (3.6) indique que $\eta(\cdot)$ est une solution faible du problème de Cauchy (Voir la proposition 1.2) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\eta}{dt} = A_i^* \eta - f & \text{sur } Q_i \\ \eta(T) = 0, \quad \eta(\cdot) \in C^0([0, T], H_i). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Il n'y a pas de conditions sur Γ_i . □

La définition (3.1) est cohérente avec la formule de Green (3.1) :

$$\begin{aligned} \langle f, z \rangle_{Q_i} &= \langle (-d/dt - A_i^*) \eta, z \rangle_{Q_i} - \langle \mathcal{T}_i \eta, \mathcal{B}_i z \rangle_{\Sigma_i} \\ &\quad + \langle \mathcal{G}_i \eta, \mathcal{A}_i z \rangle_{\Sigma_i} + \langle \eta(0), z_0 \rangle_{\Omega_i} \\ &= \langle \eta, B_i u_i \rangle_{Q_i} - \langle \mathcal{T}_i \eta, w_i \rangle_{\Sigma_i} + \langle \eta(0), z_0 \rangle_{\Omega_i}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où l'on a appliqué les conditions de la définition. Par les arguments de densité utilisés dans la littérature [ibid.] on a (3.4).

Le couplage par les conditions aux limites exigera une légère modification.

Définition 3.2.

Supposons $\Gamma_i \subset \partial\Omega_i$. Une solution faible de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dz}{dt} = A_i(t)z + B_i u_i & \text{sur } Q_i \\ \mathcal{B}_i z = w_i & \text{sur } \Sigma_i \\ z(0) = z_0 & \text{sur } \Omega_i \end{array} \right. \quad (3.9)$$

est une fonction $z(\cdot) \in C^0([0, T], H_i)$ obéissant à (3.5), pour tout $f(\cdot) \in C^1([0, T], H_i)$, $B_i u_i \in L^2(Q_i)$, $z_0 \in H_i$, et où $\eta(\cdot)$ est décrite par :

$$\eta(t) = \int_t^T \Phi_i^*(s, t) f(s) ds,$$

les fonctions de $\mathcal{D}(A_i^*)$ (et donc $\eta(t)$, p.p. en t) étant telles que $\mathcal{G}_i \eta(t) = 0$.

□

Remarque 3.3.

$\eta(\cdot)$ est la solution faible de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\eta}{dt} = - A_i^*(t)\eta - f, & \text{sur } Q_i \\ \mathcal{L}_i \eta = 0, & \text{sur } \Sigma_i \\ \eta(T) = 0, & \text{sur } \Omega_i \end{array} \right. \quad (3.10)$$

conditions aux limites homogènes sur $[0, T] \times \partial\Omega_i / \Gamma_i$,

$\eta(t) \in \mathcal{D}(A_i^*)$ p.p. en t , $\eta(\cdot) \in C^0([0, T], H_i)$. L'Equation (3.9) est la transposée de (3.10) [ibid.]. □

On peut reprendre les calculs de l'expression (3.8), en démontrant que la définition (3.2) est aussi cohérente avec la formule de Green (3.1).

Dans les définitions (3.1) et (3.2) nous pouvons représenter la solution de (3.4) et (3.9) dans une formulation abstraite qui s'approche de celle utilisée au paragraphe 2.2.

Proposition 3.1. Soit $\Lambda_i = - \Upsilon_i^*$ et $\Phi_i^*(\cdot, \cdot)$ l'opérateur de quasi-évolution généré par $A_i^*(\cdot)$. Alors la solution de (3.4) (ou (3.9) s'écrit :

$$z(t) = \Phi_i(t, 0) z_0 + \int_0^t \Phi_i(t, s) B_i(s) u_i(s) ds + \int_0^t \Phi_i(t, s) \Lambda_i(s) w_i(s) ds, \quad (3.11)$$

où nous n'avons pas indiqué l'isomorphisme canonique entre un espace de Hilbert et son dual.

Remarque 3.4.

L'opérateur Λ_i est nécessairement non borné, vu qu'il transforme un espace de fonction sur Γ_i , en un espace abstrait qui contient fonctions définis sur Ω_i . L'interprétation de Λ_i n'est pas aisée, il est préférable de regarder chaque cas particulier. Une théorie sur le dernier terme de (3.11) commence à être construite par [BALAKRISHNAN (1), Pages 214-220, LASIECKA (1)]. □

Démonstration de la proposition 3.1 : La substitution de (3.6) dans (3.5) amène à :

$$\int_0^T \left\{ \langle f, z \rangle_{\Omega_i} - \left\langle \int_t^T \Phi_i^*(s,t) f(s) ds, B_i u_i(t) + \Lambda_i w_i(t) \right\rangle_{\Omega_i} \right\} dt - \left\langle \int_0^T \Phi_i^*(s,0) f(s) ds, z_0 \right\rangle_{\Omega_i} = 0.$$

D'après le théorème de Fubini [CURTAIN et PRITCHARD (4)] :

$$\int_0^T \langle f(t), z(t) - \Phi_i(t,0) z_0 - \int_0^t \Phi_i(t,s) [B_i u_i(s) + \Lambda_i w_i(s)] ds \rangle_{\Omega_i} dt = 0,$$

pour tout $f(\cdot) \in C^2([0,T], H_i)$. La densité de cet espace dans $C^0([0,T], H_i)$ et le théorème de Titchmarsh finissent la démonstration.

On écrit (3.11) formellement comme :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \mathcal{A}_i(t) z + B_i u_i + \Lambda_i w_i, \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

On peut démontrer aussi que la proposition 3.1 donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir (3.11).

3.3 - DEFINITION DES SYSTEMES GLOBAUX.

Le système global sera défini par :

$$\begin{cases} \frac{dz_i}{dt} = \mathcal{A}_i(t) z_i + B_i u_i + \Lambda_i w_i, \\ z_i(0) = z_{oi}, \\ w_i(t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}(t) z_j(t), \end{cases} \quad (3.12)$$

$i \in \overline{1, N}$. (3.12) représentent formellement des sous-systèmes comme ceux présentés à la définition (3.1) (où à la définition (3.2)), et les opérateurs $C_{ij}(\cdot)$ sont des opérateurs non bornés entre $L^2([0,T], H_j)$ et un espace de fonctions de support contenu dans Σ_i . Remarquons que le support des $C_{ij}(\cdot)$ doit être nécessairement Σ_j , et qu'ils constituent une sorte de "mesure sur Σ_j ".

La proposition 2.1, n'est plus valable, et il faut vérifier si le problème global est bien défini. Il faudra avoir une certaine compatibilité entre les ordres de différentiation des Θ_i et des C_{ij} , et la régularité des $\Phi_i(.,.)$. Un exemple de conditions de ce type est donné par la proposition 3.2, qui est quelquefois, trop restrictive.

Proposition 3.2. Supposons l'existence d'espaces de Banach \bar{W}_i , \underline{W}_i et W_i , $i \in \overline{1, N}$, tels que :

- (a) $H_j \supset \mathcal{D}(C_{ij}(t)) \supset \underline{W}_j$, $\bar{W}_i \supset \text{Im}(\Lambda_i(t)) \supset H_i$,
- (b) $C_{ij}(.) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(\underline{W}_j, W_i))$,
- $\Lambda_i(.) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(W_i, \bar{W}_i))$,
- (c) $\Phi_j(t, s) \in \mathcal{L}(H_j, \underline{W}_j)$, $\Phi_i(t, s) \in \mathcal{L}(\bar{W}_i, H_i)$, $t > s$,
- (d) $\|\Phi_j(t, s)\gamma\|_{\underline{W}_j} \leq g_j(t-s)\|\gamma\|_{H_j}$, $\forall \gamma \in H_j$,
- (e) $\|\Phi_i(t, s)\varphi\|_{H_i} \leq h_i(t-s)\|\varphi\|_{\bar{W}_i}$, $\forall \varphi \in \bar{W}_i$,
- (f) $g_j(.)$, $h_i(.)$ et $g_j h_i(.) \in L^2([0, T], \mathbb{R})$, $\forall i, j \in \overline{1, N}$.

Alors le problème global :

$$z(t) = \Phi(t, 0) z_0 + \int_0^t \Phi(t, s) B(s) u(s) ds + \int_0^t \Phi(t, s) C(s) z(s) ds \quad (3.13)$$

est bien défini, où $C(.) = \{\Lambda_i(.) C_{ij}(.)\}$.

Démonstration : Il suffit de vérifier que $C(.) = \text{diag}(\Lambda_i(.)) \{C_{ij}(.)\}$, les deux matrices et $\Phi(.,.) = \text{diag}(\Phi_i(.,.))$ obéissent à des conditions du type (a) - (f) sur $\bar{W} = \prod \bar{W}_i$, $\underline{W} = \prod \underline{W}_i$ et $W = \prod W_i$, et d'utiliser le théorème 2.1, Page 572, de [CURTAIN et PRITCHARD (2)] avec :

$$\mathcal{U}(t, s; \Lambda) = \Phi(t, s) \text{diag}(\Lambda_i(s)), F(t) = \{C_{ij}(t)\},$$

dans les notations de l'article cité.

La condition (f) est très restrictive [CURTAIN (2)]. De toute façon, on exige que l'opérateur d'évolution soit régularisant, ce qui interdit certains problèmes hyperboliques, par exemple. Dans le Chapitre 4, nous montrerons trois applications où on peut montrer que le système global est bien défini sans utiliser la proposition 3.2.

3.4 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE.

Le problème de commande optimale que nous considérons est la minimisation du coût :

$$J(u) = \sum_{i=1}^N J_i(u_i)$$

$$J_i(u_i) = 1/2 \langle z_i(T) - \bar{z}_i(T), G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T)) \rangle_{H_i}$$

$$+ 1/2 \int_0^T \langle z_i(t) - \bar{z}_i(t), D_i(z_i(t) - \bar{z}_i(t)) \rangle_{H_i} dt$$

$$+ 1/2 \int_0^T (u_i, R_i u_i)_{U_i} dt,$$

avec les notations du paragraphe 2.4, sous (3.12).

La condition nécessaire et suffisante d'optimalité est toujours donnée par :

$$(\partial J(u) / \partial u, v-u)_U \geq 0, \forall v \in \mathcal{U}, u \in \mathcal{U}. \quad (3.13)$$

Si on reprend les calculs du paragraphe 2.4, on arrive aux conditions suivantes : (3.1.2),

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -A_i^* p_i - D_i(z_i - \bar{z}_i) - \sum_{j=1}^N C_{ji}^* \Lambda_j^* p_j \\ p_i(T) = G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T)) \equiv p_{iT} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$(B_i^* p_i(t; u) + R_i u_i, v_i - u_i)_{U_i} \geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i \quad (3.15)$$

L'équation (3.14) est formelle, et elle a le même sens que (3.12). Après

avoir défini $p = \text{col } (p_i)$ par (3.14), $i \in \overline{1, N}$, il faut recalculer (paragraphe 2.4), pour arriver à (3.15).

$$\mathcal{J} = \langle (-d/dt - \mathcal{A}^* - \mathcal{C}^* \Lambda^*) p(t; u), z(t; v) - z(t; u) \rangle_Q \\ + \langle p_T, z(T; v) - z(T; u) \rangle_{\Omega},$$

avec $Q = \prod Q_i$, $\Omega = \prod \Omega_i$. Si $\mathcal{B} = \text{diag } (\mathcal{B}_i)$, etc, et $\Sigma = \prod \Sigma_i$,

$$\mathcal{J} = \langle p(t; u), B(v-u) \rangle_Q - \langle \Lambda^* p(t; u), C(z(t; v) - z(t; u)) \rangle_{\Sigma} \\ + \langle \mathcal{C} p(t; u), \mathcal{A} (z(t; v) - z(t; u)) \rangle_{\Sigma} \\ - \langle \mathcal{T} p(t; u), \mathcal{B} (z(t; v) - z(t; u)) \rangle_{\Sigma},$$

par l'application de la formule de Green (3.1) et la substitution de (3.12) et (3.14). De la définition de Λ il vient :

$$\mathcal{J} = \langle p(t; u), B(v-u) \rangle_Q + \langle p(t; u), (C - \mathcal{B})(z(t; v) - z(t; u)) \rangle_{\Sigma}$$

Or, d'après les définitions 3.1 et 3.2, nous savons que =

$$w = \mathcal{B} z,$$

et d'après la définition du système global, que :

$$w = Cz. \text{ Alors :}$$

$$\mathcal{J} = \langle p(t; u), B(v-u) \rangle_Q,$$

ce qui démontre (3.15) par les arguments du paragraphe 2.4.

Le dernier terme de (3.14) doit être interprété à la lumière de la formule de Green et des définitions 3.1 et 3.2. En général, il sera plus facile de calculer directement les conditions d'optimalité que d'interpréter (3.15).

3.5 - LE CALCUL HIERARCHISE.

L'extension directe de la méthode non-admissible au calcul du problème de commande optimale posé au dernier paragraphe, n'est pas intéressante. Elle conduit à des problèmes singuliers au niveau des sous-problèmes, et l'application du changement de variables proposé par [GALY (1)] exige la résolution d'importants problèmes d'observabilité. Elle pourra être intéressante, si on a un coût quadratique sur le couplage. Nous reprendrons ce problème au Chapitre 4.

Pour l'introduction de la méthode de prédiction de l'interaction, nous définirons :

$$\lambda_j = -\Lambda_j^* p_j,$$

ce qui nous permet de séparer les conditions d'optimalité en deux ensembles :

$$\begin{cases} w_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} z_j, \\ \lambda_j = -\Lambda_j^* p_j, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i + w_i, z_i(0) = z_{i0}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -A_i^* p_i - D_i (z_i - z_i^*) + \sum_{j=1}^N C_{ji}^* \lambda_j, p_i(T) = p_{iT}, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$(B_i^* p_i(t; u) + R_i u_i, v_i - u_i)_{\mathcal{U}_i} \gg 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i,$$

$$i \in \overline{1, N}$$

La méthode représente comme un algorithme d'itérations successives :

$$\begin{cases} w_i^{k+1} = \sum_{j=1}^N C_{ij} z_j^k, \\ \lambda_i^{k+1} = -\Lambda_j^* p_j^k, \end{cases}$$

z^k et p^k solutions de (3.17) avec $w = w^k$ et $\lambda = \lambda^k$, et où $\lambda = \text{col}(\lambda_1)$.

Sous les hypothèses de la proposition 3.2, il est possible d'étendre la démonstration de convergence de la méthode de prédiction de l'interaction (proposition 2.5) car les termes du type :

$$\Phi_i(t,s) \Lambda_i(s) C_{ij}(s)$$

sont bornés, et l'opérateur $C(s)$ apparaît toujours pré-multiplié par $\Phi(t,s)$ [PRADIN et DA SILVEIRA (2)].

CHAPITRE 4

COUPLAGE CONCENTRE SUR UNE SOUS-VARIEETE II : EXEMPLES

4.1 - INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, nous appliquerons la théorie du chapitre 3 à trois exemples : un cas de couplage ponctuel, des équations hyperboliques couplées par les conditions aux limites, et les problèmes variationnels dits de "transmission" ou de "diffraction".

Les équations variationnelles nous permettront de définir une méthode duale, en appliquant les techniques du paragraphe 2.6 d'une façon très abstraite sur la définition (variationnelle) des équations, et non sur le problème de commande optimale.

4.2 - UN CAS DE COUPLAGE PONCTUEL.

Soit $\Omega_i = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $H_i = L^2(\Omega_i)$, $A_i = \Delta$ (le Laplacien) avec domaine :

$\mathcal{D}(A_i) = H^2(\Omega_i) \cap H_0^1(\Omega_i)$, $i \in \overline{1, N}$. Soit la formule de Green :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \varphi(t,x) f(t,x) dx dt &= \int_0^T \int_0^1 (d\varphi(t,x)/dt - A_i \varphi(t,x)) \eta(t,x) dx dt \\ &+ \int_0^T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{\bar{x}_i}(t) \eta(t, x_i) dt - \int_0^T [\varphi]_{\bar{x}_i} \frac{\partial \eta}{\partial x}(t, x_i) dt \\ &+ \int_0^1 \varphi(0,x) \eta(0,x) dx, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où

où

$$[g(t,x)]_{\bar{x}_i} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}_i^+} g(t,x) - \lim_{x \rightarrow \bar{x}_i^-} g(t,x), \quad \bar{x}_i \in \Omega_i,$$

et $\eta(\cdot)$ est solution faible de

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t}(t,x) = -\Delta \eta(t,x) - f(t,x), \\ \eta(t,0) = \eta(t,1) = 0, \\ \eta(T,x) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Cette formule de Green est un cas particulier de la formule démontrée dans [LADYZENSKAJA et al (1), Pages 225, 226 et 229], où on démontre aussi que les différentes limites dans (4.1) ont un sens. La formule (4.1) est obtenue comme limite de formules de Green classiques de part et d'autre du point \bar{x}_i , sur l'ensemble de solutions de :

$$\begin{cases} \frac{\partial z_i}{\partial t}(t,x) = \Delta z_i(t,x) + B_i u_i(t,x), \\ z_i(t,0) = z_i(t,1) = 0, \\ z_i(0,x) = z_{i0}(x). \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous remarquons que $\eta(t) \in \mathcal{D}(A_i)$ est continûment différentiable, mais $\varphi(t)$ peut en pas l'être sur $x = \bar{x}_i$. De plus,

$$\mathcal{D}(A_i) = L^2(\Omega_i) \cap H^2((0, \bar{x}_i) \cup (\bar{x}_i, 1)) \cap X,$$

X la fermeture dans $H^1((0, \bar{x}_i) \cup (\bar{x}_i, 1))$ de l'ensemble des fonctions de classe C^∞ en $(0, \bar{x}_i)$ et $(\bar{x}_i, 1)$ et nulles sur $x = 0$ et $x = 1$.

Si on choisit $\mathcal{D}_i z_i = [z_i]_{\bar{x}_i} = w_i$, les sous-systèmes seront décrits par (4.3) et :

$$[z_i]_{\bar{x}_i} = w_i,$$

$$[\partial z_i / \partial x]_{\bar{x}_i} = 0$$

Un formalisme plus facile à manier est proposé dans [LIONS (2) , Pages 182-187]. Soit $h_i(t) \otimes \delta(x-\bar{x}_i)$ la distribution :

$$\varphi(t,x) \rightarrow \int_0^T h_i(t) \varphi(t, \bar{x}_i) dt, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q_i).$$

Elle appartient à $[H^{2,1}(Q)]^*$ si $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$. Par transposition, on peut définir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_i}{\partial t} = \Delta z_i + B_i u_i + w_i(t) \otimes \delta(x-\bar{x}_i), \text{ sur } Q_i \\ z_i(t,0) = z_i(t,s) = 0, \quad t \in [0,T] \\ z_i(0,x) = z_{i0}(x), \quad \text{sur } \Omega_i \end{array} \right. \quad (4.4)$$

le couplage étant :

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^N C_{ij} z_j(t, \bar{x}_j), \bar{x}_j \in \Omega_j.$$

Nous reconnaissons, dans le formalisme du chapitre 3, $\Lambda_i w_i = w_i \otimes \delta(x-\bar{x}_i)$, et $C_{ij} = c_{ij} \mathcal{O}_j z_j$, $\mathcal{O}_j z_j = z_j(t, \bar{x}_j)$ (la trace sur $\bar{x}_j \in \Omega_j$).

Si on définit l'état adjoint par la solution (par transposition [ibid.]) de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\Delta p_i - D_i(z_i - z_i) - \sum_{j=1}^N p_j(t, \bar{x}_j) \otimes \delta(x-\bar{x}_i), \text{ sur } Q_i \\ p_i(t,0) = p_i(t,l) = 0, \quad t \in [0,T] \\ p_i(T,x) = G_i(z_i(T,x) - \bar{z}_i(T,x)), \text{ sur } \Omega_i \end{array} \right.$$

et on observe que :

$$\sum_{i=1}^N \left\langle \sum_{j=1}^N p_j(t, \bar{x}_j) \otimes \delta(x-\bar{x}_i), z_i(t;v) - z_i(t;u) \right\rangle_{Q_i} - \sum_{i=1}^N \left\langle p_i(t;u), [w_i(t;v) - w_i(t;u)] \otimes \delta(x-\bar{x}_i) \right\rangle_{Q_i} = 0,$$

les calculs du paragraphe 3.4 nous conduisent à :

$$(B_i^* p_i(t;u) + R_i u_i, v_i - u_i)_{\mathcal{U}_i} \geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i.$$

La méthode de prédiction de l'interaction s'écrit :

$$\lambda_i^{k+1}(t) = -p_i^k(t, x_i),$$

$$w_i^{k+1}(t) = \sum_{j=1}^N z_j^k(t, x_j),$$

z^k et p^k solutions de N sous-problèmes décrits par :

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \Delta z_i + B_i u_i + w_i^k(t) \otimes \delta(x - \bar{x}_i),$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\Delta p_i - D_i(z_i - z_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^k(t) \otimes \delta(x - \bar{x}_j) ;$$

$$z_i(t, 0) = z_i(t, l) = p_i(t, 0) = p_i(t, l) = 0,$$

$$z_i(0, x) = z_{i0}(x), p_i(T, x) = p_{iT}(x),$$

$$(B_i^* p_i(t, x; u_i) + R_i u_i, v_i - u_i)_{\mathcal{U}_i} \geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i.$$

Remarque 4.1.

Le coordonnateur travaille sur des fonctions ayant leur support sur les points de couplage, ce qui signifie un échange d'information très petit, par rapport aux sous-problèmes. □

4.3 - COUPLAGE PAR LES LIMITES SUR DES EQUATIONS HYPERBOLIQUES.

Dans ce paragraphe nous étudierons l'application de la théorie générale du chapitre 3 aux systèmes régis par des équations hyperboliques couplées par les limites.

4.3.1 - DEFINITION DES SOUS-SYSTEMES.

Nous utiliserons la théorie développée par [RAUCH (1)] pour décrire les équations hyperboliques ayant des solutions dans un espace de type 1.²

$$\text{Soit } \Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_{i-1} < x^1 < l_i\}, \text{ avec}$$

$x = \text{col } (x^j) \in \mathbb{R}^n$, et $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^i = 1\}$. Soit :

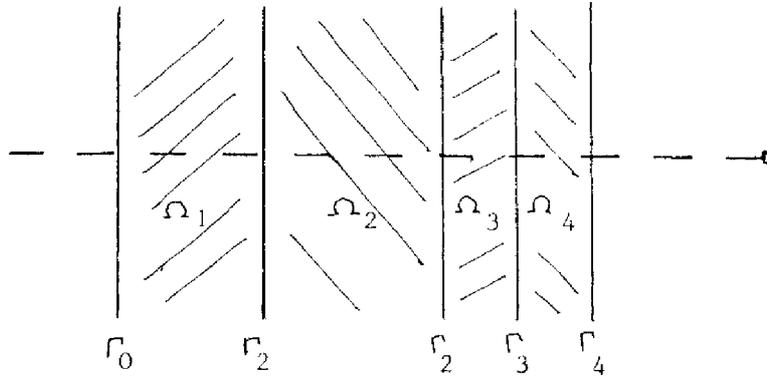


Figure 1.

le système d'équations du premier ordre.

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n A_{ij}(t,x) \frac{\partial z_j}{\partial x} + A_{i0}(t,x) z_i + B_i u_i, \quad (4.5)$$

où A_{ij} et A_{i0} sont des matrices $n_i \times n_i$ de classe C^∞ en t et x , et $z_i, B_i u_i \in L^2([0, T] \times \Omega_i, \mathbb{R}^{n_i})$.

Supposons (4.5) une équation strictement hyperbolique avec limites non-caractéristiques [VINTER et JOHNSON (1), COURANT et HILBERT (1)]. Sans perte de généralité, nous supposons (4.5) dans la forme normale [COURANT et HILBERT (1), Pages 173, 426], où :

$$A_{i1} = \begin{bmatrix} A_i^- & 0 \\ 0 & A_i^+ \end{bmatrix}, \quad A_i^- = \text{diag}(a_{ij}^-), \quad A_i^+ = \text{diag}(a_{ij}^+),$$

A_i^- une matrice $r_i \times r_i$, A_i^+ une matrice $(n_i - r_i) \times (n_i - r_i)$ avec les $a_{ij}^- < 0$ et les $a_{ik}^+ > 0$. Nous pouvons décomposer le vecteur d'état en :

$$z_i(t,x) = (z_i^-(t,x) \ z_i^+(t,x))^T,$$

z_i^- un vecteur de dimension r_i , et z_i^+ un vecteur de dimension $(n_i - r_i)$.

Alors les conditions aux limites seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1^-(t,x) = 0, \quad x \in \Gamma_0 \\ z_N^+(t,x) = 0, \quad x \in \Gamma_N \\ z_i^-(t,x) = w_i^-, \quad x \in \Gamma_{i-1}, i \in \overline{2,N}, \\ z_i^+(t,x) = w_i^+, \quad x \in \Gamma_i, i \in \overline{1,N-1}, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

avec $w_i^- \in L^2([0,T] \times \Gamma_{i-1}, \mathbb{R}^{r_i})$ et $w_i^+ \in L^2([0,T] \times \Gamma_i, \mathbb{R}^{(n_i-r_i)})$;

et la condition initiale sera :

$$z_i(0,x) = z_{i0}(x) \in L^2(\Omega_i, \mathbb{R}^{n_i}). \quad (4.7)$$

[RAUCH (1)] démontre, sous les hypothèses ci-dessus, que le système d'équations (4.5), (4.6) et (4.7) est bien posé. Il approche $z_i, w_i^-, w_i^+, B_i u_i$ et z_{i0} par des fonctions infiniment différentiables, sur lesquelles l'affirmation est démontrable par la méthode des caractéristiques. Il passe ensuite à la limite en utilisant des inégalités issues de l'égalité de l'énergie. C'est-à-dire que le sens de (4.5) est donné comme la limite d'équations du même type sur des fonctions de classe C^∞ .

4.3.2 - DEFINITION DU SYSTEME GLOBAL.

Supposons N sous-systèmes décrits par (4.5), (4.6) et (4.7), $i \in \overline{1,N}$, couplés par :

$$w_i^-(t,x) = M_i^-(t,x) z_{i-1}^-(t,x), \quad x \in \Gamma_{i-1}, i \in \overline{2,N},$$

$$w_i^+(t,x) = M_i^+(t,x) z_{i+1}^+(t,x), \quad x \in \Gamma_i, i \in \overline{1,N-1},$$

M_i^- et M_i^+ matrices $r_i \times r_{i-1}$ et $(n_i - r_i) \times (n_{i-1} - r_{i-1})$ sur $C^\infty([0,T], \Gamma_{i-1})$ et $C^\infty([0,T], \Gamma_i)$, et de rang plein. Sous une condition technique (le noyau des matrices suffisamment proches de M_i^- et M_i^+ doit être disjoint d'une certaine variété [VINTER et JOHNSON (1)]), nous pouvons appliquer la technique de [RAUCH (1)] pour démontrer que le système global est bien défini. En plus [VINTER et JOHNSON (1), RUSSEL (1)] démontrent une formule de Green qui nous sera fort utile. D'une façon plus explicite, on a :

Proposition 4.1. Le problème global hyperbolique (4.5), (4.6), (4.7), $i \in \overline{1, N}$, et (4.8), obéissant aux hypothèses ci-dessus, est bien défini. Pour chaque sous-système, la formule de Green suivante est valable :

$$\begin{aligned} \langle z_i, f \rangle_{Q_i} &= \langle B_i u_i, \eta_i \rangle_{Q_i} - \langle z_i^-, A_i^- \eta_i^- \rangle_{\Sigma_{i-1}^-} \\ &+ \langle z_i^+, A_i^+ \eta_i^+ \rangle_{\Sigma_i^+} + \langle z_{i0}, \eta_i(0, x) \rangle_{\Omega_i} \end{aligned} \quad (4.9)$$

où $\langle \dots \rangle_Q$ représente le produit interne dans $L^2([0, T] \times \Omega_i, \mathbb{R}^{n_i})$, etc, et η_i est solution de :

$$-\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_{ij}^T \frac{\partial \eta_i}{\partial x^j} - (A_{i0}^T - \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{ik}^T}{\partial x^k}) \eta_i = f_i,$$

$$\eta_i^+(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma_{i-1}^+, \quad i \in \overline{1, N}, \quad (4.10)$$

$$\eta_i^-(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma_i^-, \quad i \in \overline{1, N},$$

$$\eta_i(T, x) = 0$$

Définissons pour $i \in \overline{2, N-1}$,

$$A_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}(t, x) \partial_j \cdot \partial x^j + A_{i0}(t, x) \cdot, \quad \text{avec domaine :}$$

$\mathcal{D}(A_i) = L^2([0, T], H^2(\Omega_i, \mathbb{R}^{n_i}))$, et l'opérateur A_i ayant la même définition formelle de A_i , mais de domaine :

$$\mathcal{D}(A_i) = \{ z \in \mathcal{D}(A_i) \mid z^- = 0 \text{ sur } \Gamma_{i-1}^- \text{ et } z^+ = 0 \text{ sur } \Gamma_i^+ \}.$$

Pour $i = 1, N$, nous supposons, de plus, que $z_1^- = 0$, sur Γ_0^- , et que $z_N^+ = 0$, sur Γ_N^+ (dans la définition de $\mathcal{D}(A_i)$ et de $\mathcal{D}(A_i)$). En suivant le même raisonnement que dans le chapitre 3, les sous-problèmes pourront être décrits (formellement) par :

$$\begin{cases} \frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i + \Lambda_i^- w_i^- + \Lambda_i^+ w_i^+, \\ z_i(0) = z_{i0}, \end{cases}$$

et (4.10) par

$$\begin{cases} (-\frac{d\gamma}{dt} - A_i^+ \gamma) = f, \\ \gamma(T) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Dans (4.11), si Θ_i représente la trace sur la surface Γ_i ,

$$\Lambda_i^- = -[A_i^- \Theta_{i-1}]^*, \Lambda_i^+ = [A_i^+ \Theta_i]^*,$$

qui sont des opérateurs nécessairement non bornés.

Remarque 4.2.

Nous pourrions considérer aussi des couplages série-parallèle, où

$$\begin{aligned} w_i^- &= \sum_{j=1}^{i-1} M_{ij}^- z_j^-, \\ w_i^+ &= \sum_{j=i+1}^N M_{ij}^+ z_j^+. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nous indiquerons dans des remarques, ce qu'il faut changer dans les méthodes qui suivent pour couvrir ce cas plus général. □

4.3.3 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE.

Considérons le problème de minimisation du coût $J(u) = \sum_{i=1}^N J_i(u_i)$ exprimé au paragraphe 3.4, mais où nous introduirons une légère généralisation :

$\bar{z}_i(\cdot) \in L^2([0, T] \times \Omega_i, \mathbb{R}^{n_i})$ dans cette application. Si nous définissons les équations adjointes par :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^T \frac{\partial p_i}{\partial x^j} - (A_{i0}^T - \sum_{b=1}^n \frac{\partial A_{ik}^T}{\partial x^k}) p_i - D_i(z_i - \bar{z}_i), \quad (4.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i^- = (A_i^-)^{-1} (M_{i+1}^-)^T A_{i+1}^- p_{i+1}^-, \text{ sur } \Gamma_i^-, i \in \overline{1, N-1}, \\ p_i^+ = (A_i^+)^{-1} (M_{i-1}^+)^T A_{i-1}^+ p_{i-1}^+, \text{ sur } \Gamma_{i-1}^+, i \in \overline{2, N}, \\ p_N^- = 0, \text{ sur } \Gamma_N^-, \\ p_1^+ = 0, \text{ sur } \Gamma_0^+, \end{array} \right. \quad (4.14)$$

$$p_i(T, x) = G_i(z_i(T, x) - \bar{z}_i(T, x)) = p_{iT}, \text{ sur } \Omega_i, \quad (4.15)$$

équation qui a un sens par les mêmes théorèmes que l'équation du système (obéit aux mêmes hypothèses), les calculs du paragraphe 3.4 pourront être repris. Alors, si $\mathcal{A} = \text{diag} (A_i)$, $A = \text{diag} (A_i)$, etc...,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \langle (-d/dt - \mathcal{A}^* - C^* \Lambda^*) p(t; u), z(t; v) - z(t; u) \rangle_Q \\ & + \langle p_T, z(T; v) - z(T; u) \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

En regroupant les termes et d'après (4.9),

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \langle p(t; u), B(v-u) \rangle_Q - \sum_{i=2}^N \langle A_i^- p_i^-(t; u), z_i^-(t; v) - z_i^-(t; u) \rangle_{\Sigma_{i-1}} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \langle A_i^+ p_i^+(t; u), z_i^+(t; v) - z_i^+(t; u) \rangle_{\Sigma_i} \\ & - \sum_{i=2}^N \langle A_i^+ p_i^+(t; u), z_i^+(t; v) - z_i^+(t; u) \rangle_{\Sigma_{i-1}} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \langle A_i^- p_i^-(t; u), z_i^-(t; v) - z_i^-(t; u) \rangle_{\Sigma_i} \\ & + \langle p(0; u), z_0^- - z_0^+ \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

De (4.6) et (4.8) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \langle p(t; u), B(v-u) \rangle_Q - \sum_{i=2}^N \langle (M_i^-)^{-1} A_i^- p_i^-(t; u), z_{i-1}^-(t; v) \\ & - z_{i-1}^-(t; u) \rangle_{\Sigma_{i-1}} + \sum_{i=1}^{N-1} \langle (M_i^+)^{-1} A_i^+ p_i^+(t; u), z_{i+1}^+(t; v) - z_{i+1}^+(t; u) \rangle_{\Sigma_i} \\ & - \sum_{i=2}^N \langle A_i^+ p_i^+(t; u), z_i^+(t; v) - z_i^+(t; u) \rangle_{\Sigma_{i-1}} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \langle A_i^- p_i^-(t; u), z_i^-(t; v) - z_i^-(t; u) \rangle_{\Sigma_i} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites de (4.14) nous amènent à :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & \langle p(t;u), B(v-u) \rangle_Q \\ & - \sum_{i=2}^N \langle A_{i-1}^- p_{i-1}^-(t;u), z_{i-1}^-(t;v) - z_{i-1}^-(t;u) \rangle_{\Sigma_{i-1}} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \langle A_i^- p_i^-(t;u), z_i^-(t;v) - z_i^-(t;u) \rangle_{\Sigma_i} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \langle A_{i+1}^+ p_{i+1}^+(t;u), z_{i+1}^+(t;v) - z_{i+1}^+(t;u) \rangle_{\Sigma_i} \\ & - \sum_{i=2}^N \langle A_i^+ p_i^+(t;u), z_i^+(t;v) - z_i^+(t;u) \rangle_{\Sigma_{i-1}} \end{aligned}$$

Si on remplace l'indice de la deuxième somme par $i-1$, et celui de la quatrième somme par i , on voit que :

$$\mathcal{J} = \langle p(t;u), B(v-u) \rangle_Q,$$

d'où, selon le paragraphe 3.4, la condition d'optimalité devient :

$$\langle B_i^* p_i(t;u_i), v_i - u_i \rangle_{\mathcal{U}_i} \geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i, i \in \overline{1, N}. \quad (4.16)$$

Remarque 4.3.

Nous avons utilisé une généralisation de la formule de Green (4.9), pour un cas où les conditions aux limites sur \mathcal{M} ne sont pas homogènes. On peut la démontrer, soit directement, soit par addition à la formule correspondante pour p_i , obtenue par changement de la direction du temps. □

Remarque 4.4.

Dans le cas signalé à la remarque 4.2, supposons, par simplicité, que l'on a, pour seule différence par rapport à (4.8), pour i et j fixés,

$$w_i^- = M_i^- z_{i-1}^- + M_{ij}^- z_j^-$$

(z_{i-1}^- pris sur Γ_{i-1}^- et z_j^- pris sur Γ_j^-). Le seul changement nécessaire

dans (4.13), (4.14) et (4.15) sera :

$$p_j^- = (A_j^-)^{-1} [(M_{ij}^-)^T A_i^- p_i^- + (M_{j+1}^-)^T A_{j+1}^- p_{j+1}^-], \text{ sur } \Gamma_j^-.$$

□

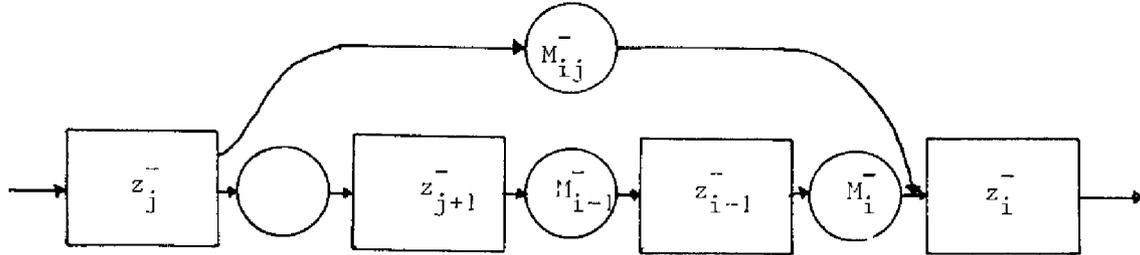


Figure 2.

4.3.4 - LE CALCUL HIERARCHISE.

Pour appliquer le paragraphe 3.5, il faut définir une nouvelle variable :

$$\lambda = \Lambda^+ p.$$

Or, de la définition de Λ formé par Λ^- et Λ^+ , on voit que λ doit être décomposé en deux parties, avec :

$$\lambda_i^- = A_i^- p_i^-, \lambda_i^+ = -A_i^+ p_i^+, \text{ sur } \Gamma_{i-1}^- \text{ et } \Gamma_i^-.$$

Pour faciliter l'application des formules nous réécrivons cette variable sous la forme :

$$\beta_i^- = p_i^- (= (A_i^-)^{-1} \lambda_i^-), \beta_i^+ = p_i^+ (= -(A_i^+)^{-1} \lambda_i^+),$$

et la méthode de prédiction de l'interaction devient : coordonnateur donné par :

$$\left. \begin{aligned} (w_i^-)^{k+1} &= M_i^- (z_{i-1}^-)^k \\ (\beta_i^+)^{k+1} &= (A_i^+)^{-1} (M_{i-1}^+)^T A_{i-1}^+ (p_{i-1}^+)^k \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma_{i-1}, i \in \overline{2, N},$$

$$\left. \begin{aligned} (w_i^+)^{k+1} &= M_i^+ (z_{i+1}^+)^k \\ (\beta_i^-)^{k+1} &= (A_i^-)^{-1} (M_{i+1}^-)^T A_{i+1}^- (p_{i+1}^-)^k \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma_i, i \in \overline{1, N-1},$$

$$z_i^k = \text{col}(z_i^-, z_i^+)^k \text{ et } p_i^k = \text{col}(p_i^-, p_i^+)^k, i \in \overline{1, N}$$

solutions de :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial t} &= A_i z_i + B_i u_i, z_i(0, x) = z_{i0}(x), \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -A_i^* p_i - D_i (z_i - z_i), p_i(T, x) = p_{iT}, \\ (B_i^* p_i(t; u_i) + R_i u_i, v_i - u_i)_{\mathcal{U}_i} &\geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i, \end{aligned} \right.$$

pour $i \in \overline{1, N}$, et les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{aligned} z_i^- &= (w_i^-)^k, p_i^+ = (\beta_i^+)^k, \text{ sur } \Gamma_{i-1}, i \in \overline{2, N}, \\ z_i^+ &= (w_i^+)^k, p_i^- = (\beta_i^-)^k, \text{ sur } \Gamma_i, i \in \overline{1, N-1}. \end{aligned} \right.$$

Remarque 4.5.

L'échange d'informations par le coordonnateur, se fait seulement sur les limites. □

Remarque 4.6.

L'extension de la méthode au cas traité dans le paragraphe 4.4 (et 4.2) est évident. Il suffit de faire dans le coordonnateur (i et j fixés),

$$(w_i^-)^{k+1} = M_i^- (z_{i-1}^-)^{k+1} + M_{ij}^- (z_j^-)^{k+1}$$

$$(\beta_j^-)^{k+1} = (A_j^-)^{-1} [(M_{ij}^-)^T A_i^- (p_i^-)^k + (M_{j+1}^-)^T A_{j+1}^- (p_{j+1}^-)^k].$$
□

4.3.5 - DECOUPLAGE LOCAL.

On démontre dans l'appendice 1, la proposition suivante :

Proposition 4.2. Sous les hypothèses de la proposition 4.1, et si on n'a pas de contrainte sur la commande,

$$p_i(t) = P_i(t) z_i(t) + r_i(t), \text{ p.p. en } t, \quad (4.16)$$

où $P_i(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(L^2(\Omega_i, \mathbb{R}^{n_i}))$ est la solution unique de :

$$\left\langle \left(\frac{dP_i}{dt} + P_i \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^* P_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^* P_i + D_i \right) \varphi, \eta \right\rangle_{Q_i} = 0 \quad (4.17)$$

$$P_i(T) = 0$$

pour $\forall \varphi, \eta \in L^2([0, T] \times \Omega_i, \mathbb{R}^{n_i})$, tels que $d\varphi/dt - \mathcal{A}_i \varphi = 0$,

et $r_i(\cdot)$ solution unique de :

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} = & \left[-\mathcal{A}_i^* + P_i B_i R_i^{-1} B_i^* \right] r_i + D_i \bar{z}_i \\ & + P_{ri}^- (w_i^-)^k + P_{ri}^+ (w_i^+)^k, \end{aligned}$$

$$r_i(T) = G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T)), \quad (4.18)$$

$$r_i^+ = (\beta_i^+)^k, \text{ sur } \Gamma_{i-1}, \quad i \in \overline{2, N},$$

$$r_i^- = (\beta_i^-)^k, \text{ sur } \Gamma_i, \quad i \in \overline{1, N-1},$$

$$r_i^+ = 0, \text{ sur } \Gamma_0, \text{ et } r_i^- = 0, \text{ sur } \Gamma_N,$$

où, après partitionnement :

$$P \eta = ([P \eta]^- [P \eta]^+)^T,$$

nous définissons :

$$\begin{aligned} & \langle (P_{ri}^-, (w_i^-) P_{ri}^+ (w_i^+)), \eta \rangle_{Q_i} \\ & = \langle (w_i^-), A_i^- [P \eta]^- \rangle_{Z_i} - \langle (w_i^+), A_i^+ [P \eta]^+ \rangle_{Z_{i-1}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3.6 - PROBLEME AVEC UN COUT SUR LES TERMES DE COUPLAGE.

[TRYBUS (1)] a étudié un problème de commande optimale défini comme celui de ce paragraphe, mais ayant pour coût l'expression :

$$\tilde{J}(u) = J(u) + \sum_{i=2}^N \langle w_i^-, S_i^- w_i^- \rangle_{Z_{i-1}} + \sum_{i=1}^{N-1} \langle w_i^+, S_i^+ w_i^+ \rangle_{Z_i}$$

Sous l'hypothèse de coercivité des formes bilinéaires définies par S_i^- et S_i^+ , on peut appliquer le développement du chapitre 2, qui amène à une méthode non-admissible, et son problème de singularité. La méthode s'écrit :

$$(\beta_i^-)^{k+1} = (\beta_i^-)^k + \rho^k (M_i^- z_{i-1}^- - w_i^-) \text{ sur } \Gamma_{i-1}, \quad i \in \overline{2, N},$$

$$(\beta_i^+)^{k+1} = (\beta_i^+)^k + \rho^k (M_i^+ z_{i+1}^+ - w_i^+) \text{ sur } \Gamma_i, \quad i \in \overline{1, N-1},$$

z_i et w_i solutions de (4.5), (4.6), (4.7), (4.13), (4.15), (4.16) et :

$$w_i^- = (S_i^-)^{-1} ((\beta_i^-)^k + A_i^- p_i^-) \quad \text{sur } \Gamma_{i-1}, \quad i \in \overline{2, N},$$

$$p_i^+ = (A_i^+)^{-1} (M_i^+)^T ((\beta_i^+)^k$$

$$w_i^+ = (S_i^+)^{-1} ((\beta_i^+)^k - A_i^+ p_i^+) \quad \text{sur } \Gamma_i, \quad i \in \overline{1, N-1},$$

$$p_i^- = - (A_i^-)^{-1} (M_i^-)^T ((\beta_i^-)^k$$

$$p_1^+ = 0, \text{ sur } \sigma, \text{ et } p_N^- = 0, \text{ sur } \Gamma_N.$$

[TRYBUS (1)] présente les équations du découplage. On peut aussi définir une méthode par prédiction de l'interaction, comme au paragraphe 2.7.

4.4 - PROBLEMES DE TRANSMISSION VARIATIONNELS.

On trouve dans la littérature, la description de deux types d'équations paraboliques couplées par les conditions aux limites : les problèmes de diffraction [LADYZENKAJA et al (1), Page 224] et les problèmes de transmission [LIONS (1), Page 103]. Ces derniers décrits dans un cadre variationnel, se prêtent très bien aux manipulations que nous ferons dans la suite. Il nous sera possible de définir une méthode duale, qui prendra la place de la méthode non-admissible. Les problèmes de diffraction qui ne sont pas variationnels, sont encore dans le cadre du chapitre 3, mais la méthode duale (sous-paragraphe 4.4.4), ne sera pas applicable.

4.4.1 - DEFINITION DU SYSTEME.

Cette fois, nous définirons d'abord le système global, pour le décomposer ensuite en sous-systèmes.

Supposons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ouvert, divisé en N morceaux ouverts Ω_i , $i \in \overline{1, N}$, disjoints deux à deux, et séparés par des surfaces $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$. Toutes les surfaces $\partial\Omega_i$ sont supposées des variétés de dimension $n-1$ suffisamment régulières (de classe C^∞ par morceaux et obéissant à la condition du cône [TREVES (1)], par exemple), et les Γ_{ij} seront numérotés avec $i > j$.

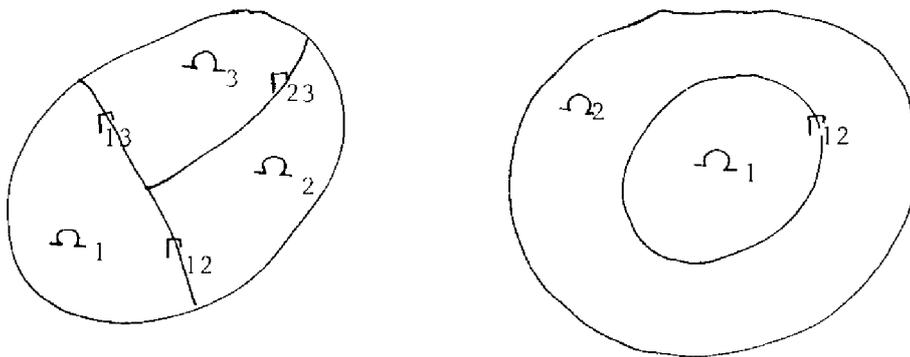


Figure 3.

Par simplicité, on travaillera avec des opérateurs du deuxième ordre, en supposant les limites $\partial\Omega_i$ de classe C^∞ , pour pouvoir appliquer la théorie de [LIONS et MAGENES (1)]. Nous indiquerons ensuite comment passer au cas plus général.

Nous voulons formaliser un couplage donné par :

$$\sigma_{ij}(x) \mathcal{B}_{ij} z_i = \sigma_{ji}(x) \mathcal{B}_{ji} z_j, \text{ sur } \Gamma_{ij}, \quad (4.20)$$

où \mathcal{B}_{ij} représente l'opérateur de trace sur Γ_{ij} à partir de Ω_i . Supposons $H = \prod H_i$, $H_i = L^2(\Omega_i)$, et V_i la fermeture dans $H^1(\Omega_i)$ du sous-ensemble de $C^\infty(\Omega_i)$ formé par les fonctions nulles sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega_i$. Soit $V = \{ \varphi = \text{col}(\varphi_i) \in \prod V_i \mid \varphi \text{ obéit à (4.20), pour chaque } \Gamma_{ij} \neq \emptyset, \text{ les } \sigma_{ij}(\cdot) \in L^\infty(\Gamma_{ij}) \}$. Supposons donnée sur chaque Ω_i une famille de formes sesquilinéaires sur V_i , $a_i(t; \varphi, \eta)$, $t \in [0, T]$, coercives sur V_i , et obéissant aux conditions (b) et (c) de l'exemple 2.4, paragraphe 2.3. La forme sesquilinéaire $a(t; \varphi, \eta) = \sum_{i=1}^N a_i(t; \varphi_i, \eta_i)$, $\varphi = \text{col}(\varphi_i)$,

$\eta = \text{col}(\eta_i)$ est coercive sur V , $t \in [0, T]$. Alors la théorie des problèmes variationnels [LIONS et MAGENES (1)] nous dit qu'il existe un seul $z = \text{col}(z_i) \in W$ (voir l'exemple 2.4) tel que :

$$\int_0^T [a(t; z, \eta) + \langle dz/dt, \eta \rangle_{V^*V}] dt = \int_0^T \langle Bu, \eta \rangle_{V^*V} dt + \langle z_0, \eta(0) \rangle_H = 0, \quad (4.21)$$

$\forall \eta \in W$ avec $\eta(T) = 0$,

pour tout $Bu \in L^2([0, T], V^*)$ et $z_0 \in H$. Si on peut appliquer la formule de Green modifiée de [LIONS et MAGENES (1), Page 132], où les \mathcal{A}_{ij} représentent la dérivée normale sur Γ_{ij} à partir de Ω_i ,

$$a(t; z, \eta) = \sum_{i=1}^N \langle -A_i(t) z_i, \eta_i \rangle_{V_i^*V_i} + \sum_i \sum_j [\langle \mathcal{A}_{ij} z_i, \mathcal{B}_{ij} \eta_j \rangle_{\Gamma_{ij}} + \langle \mathcal{A}_{ji} z_j, \mathcal{B}_{ji} \eta_j \rangle_{\Gamma_{ij}}], \quad (4.22)$$

la deuxième sommation prise sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$. La substitution de (4.22) dans (4.21) et les arguments de densité habituels nous conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i, \quad \text{sur } Q_i \\ z_i(0) = z_{i0} \quad \text{sur } \Omega_i \end{array} \right. \quad (4.22)$$

$i \in \overline{1, N}$, et à la condition :

$$\sum_{i > j} [\langle \Lambda_{ij} z_i, \mathbb{B}_{ij} \eta_i \rangle \Gamma_{ij} + \langle \Lambda_{ji} z_j, \mathbb{B}_{ji} \eta_j \rangle \Gamma_{ij}] = 0$$

Si on prend les termes définis sur Γ_{ij} (où, toujours, $i > j$) et si on applique (4.20) on aura :

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ji} [\langle \Lambda_{ij} z_i, \mathbb{B}_{ij} \eta_i \rangle \Gamma_{ij} + \langle \Lambda_{ji} z_j, \mathbb{B}_{ji} \eta_j \rangle \Gamma_{ij}] \\ &= \langle \sigma_{ji} \Lambda_{ij} z_i, \sigma_{ij} \mathbb{B}_{ij} \eta_i \rangle \Gamma_{ij} + \langle \sigma_{ij} \Lambda_{ji} z_j, \sigma_{ji} \mathbb{B}_{ji} \eta_j \rangle \Gamma_{ij} \\ &= \langle \sigma_{ji} \Lambda_{ij} z_i + \sigma_{ij} \Lambda_{ji} z_j, \sigma_{ij} \mathbb{B}_{ij} \eta_i \rangle \Gamma_{ij}. \end{aligned}$$

De (4.23) on a l'égalité à zéro pour toutes les Γ_{ij} , et tout $\eta_i \in V_i$, d'où :

$$\sigma_{ji}(x) \Lambda_{ij} z_i + \sigma_{ij}(x) \Lambda_{ji} z_j = 0, \text{ sur } \Gamma_{ij}.$$

Donc (4.21) équivaut, dans les notations du chapitre 3, à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i \quad \text{sur } Q_i \\ z_i(0) = z_{i0} \quad \text{sur } \Omega_i \\ z_i(t, x) = 0, \quad x \in \partial \Omega_i \cap \partial \Omega, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

et les conditions sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} z_i - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} z_j = 0, \\ \sigma_{ji} \mathcal{A}_{ij} z_i + \sigma_{ij} \mathcal{A}_{ji} z_j = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

que l'on peut réécrire comme :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} z_i = w_{ij}, \\ \sigma_{ij} \mathcal{A}_{ji} z_j = w_{ji}, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, i > j \quad (4.25)$$

complémentées par les relations de couplage :

$$\begin{cases} w_{ij} = \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} z_j, \\ w_{ji} = -\sigma_{ji} \mathcal{A}_{ij} z_i. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, i > j \quad (4.26)$$

Dans cette nouvelle notation, les équations (4.23) et (4.25) définissent les sous-systèmes, $i \in \overline{1, N}$, et l'équation (4.26), pour toutes les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$, le couplage.

Remarque 4.7.

Nous ne calculerons pas les opérateurs Λ_i dans ce paragraphe, il est plus facile de travailler directement avec la formulation variationnelle. Les opérateurs A_i et \mathcal{A}_i ont également un sens différent du chapitre 3, ayant leur domaine sur V_i et leur image dans V_i^* . On peut réduire ce cas plus général aux hypothèses du chapitre 3 (domaine contenu dans H_i).

□

Remarque 4.8.

Dans l'étude de systèmes disposés en réseaux, comme la commande de pollution dans une rivière et ses affluents, ou le chauffage d'un treillis de plaques, on trouve un couplage :

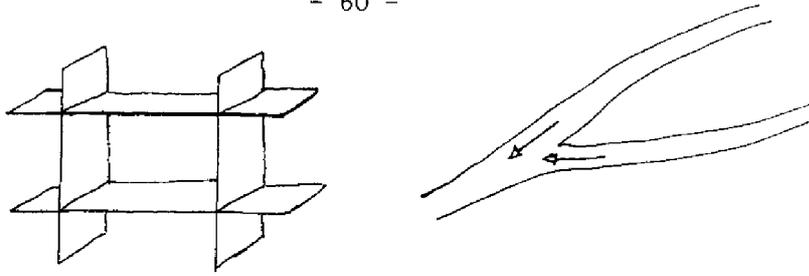


Figure 4.

différent qui suppose plus de deux sous-systèmes couplés sur une même surface de couplage. Travaillant avec trois sous-systèmes (les résultats pour $n > 3$ sont semblables) nous distinguerons deux types de problème.

L'un correspond au treillis de plaques, où la température est la même à la surface de couplage :

$$\sigma_1 \mathcal{B}_1 z_1 = \sigma_2 \mathcal{B}_2 z_2 = \sigma_3 \mathcal{B}_3 z_3, \text{ sur } \Gamma. \quad (4.27)$$

De la validité d'une formule de Green modifiée pour ce cas (où les \mathcal{B}_i et \mathcal{A}_i contiennent les diféomorphismes nécessaires à l'accouplement de plusieurs sous-systèmes sur une seule surface), on calcule de la même façon que pour (4.24) :

$$\sigma_2 \sigma_3 \mathcal{A}_1 z_1 + \sigma_1 \sigma_3 \mathcal{A}_2 z_2 + \sigma_1 \sigma_2 \mathcal{A}_3 z_3 = 0, \text{ sur } \Gamma. \quad (4.28)$$

D'où la définition des sous-systèmes par les conditions sur :

$$\sigma_1 \mathcal{B}_1 z_1 = w_1, \sigma_2 \mathcal{B}_2 z_2 = w_1, \sigma_1 \sigma_2 \mathcal{A}_3 z_3 = w_3, \quad (4.29)$$

et les relations de couplage

$$w_1 = \sigma_3 \mathcal{B}_3 z_3, w_3 = \sigma_2 \sigma_3 \mathcal{A}_1 z_1 + \sigma_1 \sigma_3 \mathcal{A}_2 z_2. \quad (4.30)$$

L'autre problème modélise la jonction de deux rivières :

$$\mathcal{B}_1 z_1 = \beta \mathcal{B}_2 z_2 + (1 - \beta) \mathcal{B}_3 z_3, \text{ sur } \Gamma, 0 < \beta < 1. \quad (4.31)$$

L'application de la formule de Green modifiée donne :

$$\begin{aligned} & \langle \beta(1-\beta)\Lambda_1 z_1, \mathbb{B}_1 \eta_1 \rangle_{\Gamma} + \langle (1-\beta)\Lambda_2 z_2, \beta \mathbb{B}_2 \eta_2 \rangle_{\Gamma} \\ & + \langle \beta \Lambda_3 z_3, (1-\beta) \mathbb{B}_3 \eta_3 \rangle_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

La variable $\eta \in V$ obéissant à (4.31), on a :

$$\begin{aligned} & \langle \beta(1-\beta)\Lambda_1 z_1 + (1-\beta)\Lambda_2 z_2, \beta \mathbb{B}_2 \eta_2 \rangle_{\Gamma} \\ & + \langle \beta(1-\beta)\Lambda_1 z_1 + \beta \Lambda_3 z_3, (1-\beta) \mathbb{B}_3 \eta_3 \rangle_{\Gamma} = 0, \end{aligned}$$

pour tout $\eta_2 \in V_2$ et $\eta_3 \in V_3$. Donc :

$$\begin{aligned} \Lambda_2 z_2 &= -\beta \Lambda_1 z_1, \\ & \text{sur } \Gamma \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\Lambda_3 z_3 = -(1-\beta) \Lambda_1 z_1.$$

Les sous-systèmes sont définis par les conditions sur Γ .

$$\mathbb{B}_1 z_1 = w_1, \Lambda_2 z_2 = w_2, \Lambda_3 z_3 = w_3, \tag{4.33}$$

et le couplage par :

$$\begin{aligned} w_1 &= \beta \mathbb{B}_2 z_2 + (1-\beta) \mathbb{B}_3 z_3, \\ w_2 &= -\beta \Lambda_1 z_1, \\ w_3 &= -(1-\beta) \Lambda_1 z_1. \end{aligned} \tag{4.34}$$

□

4.4.2 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE.

Soit le problème de minimiser le coût $J(u)$ donné au paragraphe 3.4, $u \in \mathcal{U} = \tilde{\Pi} \mathcal{U}_i, \mathcal{U}_i$ un ensemble convexe fermé contenu dans $L^2([0, T], U_i)$

z_i défini par (4.23), (4.25) et (4.26). La condition nécessaire et suffisante d'optimalité (3.13) conduit à :

$$\begin{aligned} & \langle G_i(z_i(T;u_i) - \bar{z}_i(T)), z_i(T;v_i) - z_i(T;u_i) \rangle_{\Omega_i} \\ & + \int_0^T \langle D_i(t)(z_i(t;u_i) - \bar{z}_i(t)), z_i(t;v_i) - z_i(t;u_i) \rangle_{\Omega_i} \\ & + \int_0^T (R_i u_i, v_i - u_i)_{U_i} dt \geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, i \in \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Supposons valable une formule de Green du type de (3.1), mais symétrique dans le sens que :

$$\mathcal{G}_{ij} = \mathcal{B}_{ij} \text{ (le trace sur } \Gamma_{ij} \text{)}. \quad (4.36)$$

Alors, la définition de $p = \text{col}(p_i)$ par :

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -A_i^* p_i - D_i(z_i - \bar{z}_i), & \text{sur } Q_i \\ p_i(T) &= G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T)), & \text{sur } \Omega_i \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$p_i(t, x) = 0, x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} \mathcal{G}_{ij} p_i - \sigma_{ji} \mathcal{G}_{ji} z_j &= 0 \\ \sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} p_i + \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ji} z_j &= 0 \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma_{ij} \quad (4.38)$$

$$i \in \overline{1, N}, \text{ toutes les } \Gamma_{ij} \neq \emptyset,$$

permet la transformation de (4.35) en :

$$(B_i^* p_i(t;u_i) + R_i u_i, v_i - u_i)_{U_i} \geq 0, \forall v_i \in \mathcal{U}_i, u_i \in \mathcal{U}_i, i \in \overline{1, N} \quad (4.39)$$

Une démonstration se trouve dans [PRADIN et DA SILVEIRA (1)] et une autre dans [DA SILVEIRA (3)].

Dans la formulation variationnelle (4.37) est interprété comme :

$$\int_0^T \left[\overline{a(t; \eta, p)} + \langle p, d\eta/dt \rangle_{V^*V} \right] dt = - \langle D(z-z), \eta \rangle_{V^*V} + \langle G(z(T) - \bar{z}(T)), \eta(T) \rangle_H = 0, \quad (4.40)$$

$$\forall \eta \in W \text{ avec } \eta(0) = 0.$$

Remarquons que $\overline{a(t; \eta, p)}$ est l'adjointe de la forme sesquilinéaire initiale, et donc coercive avec le même coefficient de coercivité.

Remarque 4.9.

Si on considère la généralisation étudiée à la remarque 4.8, équations (4.27) - (4.30), il faut remplacer les conditions de (4.37) sur Γ_{ij} par :

$$\begin{aligned} \sigma_1 \mathcal{C}_{1p_1} &= \sigma_2 \mathcal{C}_{2p_2} = \sigma_3 \mathcal{C}_{3p_3} \\ & \quad , \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\sigma_2 \sigma_3 \mathcal{T}_{1p_1} + \sigma_1 \sigma_3 \mathcal{T}_{2p_2} + \sigma_1 \sigma_2 \mathcal{T}_{3p_3} = 0$$

Déjà le cas considéré aux équations (4.31) - (4.34) exige le remplacement des conditions sur Γ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{1p_1} &= \beta \mathcal{C}_{2p_2} + (1-\beta) \mathcal{C}_{3p_3} \\ \mathcal{T}_{2p_2} &= -\beta \mathcal{T}_{1p_1} \\ \mathcal{T}_{3p_3} &= -(1-\beta) \mathcal{T}_{1p_1}. \end{aligned} \quad , \text{ sur } \Gamma \quad (4.42)$$

On voit que le problème de transmission sur p est toujours du même type que le problème sur z .

□

4.4.3 - LA METHODE DE PREDICTION DE L'INTERACTION.

L'application directe du paragraphe 3.4 au problème de commande optimale traité dans ce paragraphe, comme on a fait au sous-paragraphe

4.3.4, nous conduit à la méthode suivante :

$$\begin{aligned} w_{ij}^{k+1} &= \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} z_j^k \\ w_{ji}^{k+1} &= -\sigma_{ji} \mathcal{A}_{ij} z_i^k \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, i \neq j, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{k+1} &= \sigma_{ji} \mathcal{C}_{ji} p_j^k \\ \lambda_{ji}^{k+1} &= -\sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} p_i^k \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, i \neq j, \quad (4.44)$$

pour toutes les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$, z^k et p^k solutions de (4.23), (4.37) et (4.39), et les conditions sur Γ_{ij} :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} z_i &= w_{ij}^k \\ \sigma_{ij} \mathcal{A}_{ji} z_j &= w_{ji}^k \\ \sigma_{ij} \mathcal{C}_{ij} p_i &= \lambda_{ij}^k \\ \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ji} p_j &= \lambda_{ji}^k \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, i \neq j, \quad (4.45)$$

pour toutes les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$.

[PRADIN (1), (2)] présente des exemples d'équations paraboliques où il a appliqué cette méthode, ayant obtenu de bons résultats.

Remarque 4.10.

La méthode est facilement généralisable pour les problèmes présentés aux remarques 4.8 et 4.9. Dans le premier cas, le coordonnateur sera :

$$\begin{aligned} w_1^{k+1} &= \sigma_3 \mathcal{B}_3 z_3^k \\ w_3^{k+1} &= -\sigma_2 \sigma_3 \mathcal{A}_1 z_1^k - \sigma_1 \sigma_3 \mathcal{A}_2 z_2^k \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma,$$

et les équations correspondantes pour p_1 , p_2 et p_3 . La définition des sous-problèmes sera différente sur Γ :

$$\mathcal{B}_1 z_1 = w_1^k, \mathcal{A}_2 z_2 = w_2^k, \mathcal{A}_3 z_3 = w_3^k$$

et les équations correspondantes pour p_1, p_2 et p_3 . □

Remarque 4.11.

Cette méthode permet une résolution séquentielle. Entre les diverses dispositions possibles, on peut poser le problème de trouver la "meilleure", dans un sens à préciser. □

4.4.4 - UNE METHODE DUALE.

Si on applique la philosophie de la méthode non-admissible (paragraphe 2.6), non plus au problème de commande optimale, mais aux équations variationnelles (4.21) et (4.40), vues d'une façon heuristique comme les équations d'Euler d'un problème de minimisation, on obtiendra une nouvelle méthode [DA SILVEIRA (3)].

Soit $\mathcal{V} = \prod \mathcal{V}_i$ (sans condition sur les Γ_{ij}) et considérons le problème :

$$\begin{aligned} & \int_0^T [a(t; z, \varphi) - \langle dz/dt, \varphi \rangle_{\mathcal{V}^* \mathcal{V}} - \langle Bu, \varphi \rangle_{\mathcal{V}^* \mathcal{V}}] dt \\ & - \langle z_0, \varphi(0) \rangle_H + \sum_{i > j} \int_0^T \langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \varphi_i - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \varphi_j \rangle_{\Gamma_{ij}} dt \\ & = 0, \forall \varphi \in W \text{ avec } \varphi(T) = 0, \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T [a(t; \eta, p) + d\eta/dt, p \rangle_{\mathcal{V}^* \mathcal{V}} + \langle D(z-\bar{z}), \eta \rangle_{\mathcal{V}^* \mathcal{V}}] dt \\ & - \langle p_T, \eta(T) \rangle_H + \sum_{i > j} \int_0^T \langle \beta_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{C}_{ij} \eta_i - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \eta_j \rangle_{\Gamma_{ij}} dt \\ & = 0, \forall \eta \in W \text{ avec } \eta(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.47}$$

(les intégrales étant faites sur toutes les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$), plus les "contraintes" :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} z_i &= \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} z_j \\ & \text{sur } \Gamma_{ij}, \\ \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} p_i &= \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} p_j \end{aligned} \tag{4.48}$$

pour toutes les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$. Ici λ_{ij} et β_{ij} appartiennent, en principe, au dual de l'image de \mathcal{B}_{ij} (et \mathcal{C}_{ij}). Or, les équations (4.46) et (4.47) sont formellement équivalentes à :

$$\frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i \quad \text{sur } Q_i$$

$$z_i(0) = z_{i0}, \text{ sur } \Omega_i, z_i(t, x) = 0, x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ji} \Lambda_{ij} z_i &= -\lambda_{ij} \\ \sigma_{ij} \Lambda_{ji} z_j &= \lambda_{ij} \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_{ij}, i > j, \quad (4.49)$$

$i \in \overline{1, N}$, toutes les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$,

$$\frac{dp_i}{dt} = -A_i^* p_i - D_i(z_i - \bar{z}_i) \quad \text{sur } Q_i$$

$$p_i(T) = p_{iT}, \text{ sur } \Omega_i, p_i(t, x) = 0, x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ji} \Upsilon_{ij} p_i &= \beta_{ij} \\ \sigma_{ij} \Upsilon_{ji} p_j &= -\beta_{ij} \end{aligned} \right\} \text{ sur } \Gamma_{ij}, i > j, \quad (4.50)$$

$i \in \overline{1, N}$, toutes les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$,

donc λ_{ij} et β_{ij} appartiennent aux images de $\Upsilon_{ij}, \Lambda_{ij}$, les espaces pour lesquels la formule de Green a un sens.

D'un point de vue heuristique, si (4.46) était la condition de premier ordre d'un problème de minimisation, ayant (4.48) par contrainte et λ_{ij} pour paramètre de Lagrange, le gradient du Lagrangien associé au problème par rapport à λ_{ij} serait $\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} z_i - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} z_j$, z_i et z_j solutions du problème de minimisation, λ_{ij} donné. D'où la méthode :

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{k+1} &= \lambda_{ij}^k + \rho^k (\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} z_i^k - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} z_j^k) \\ \beta_{ij}^{k+1} &= \beta_{ij}^k + \rho^k (\sigma_{ij} \mathcal{C}_{ij} p_i^k - \sigma_{ji} \mathcal{C}_{ji} p_j^k) \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

z_i^k, p_j^k solutions des équations (4.49), (4.50) et (4.39), pour $\lambda_{ij}^k = \lambda_{ij}^k$ et $\beta_{ij}^k = \beta_{ij}^k$. Dans l'appendice A.1, on démontre :

Proposition 4.3. Supposons que, dans le problème de commande optimale du sous-paragraphe 4.4.2, on n'a pas de contraintes sur la commande, et, en plus, :

$$\|B^* R^{-1} B\| = \mu, \quad \|D\| = \delta,$$

$$\sum_{i>j} \|\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} z_i - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} z_j\|_{\Gamma_{ij}}^2 \leq \pi^2 \|z\|_W^2,$$

$$\sum_{i>j} \|\sigma_{ij} \mathcal{C}_{ij} p_i - \sigma_{ji} \mathcal{C}_{ji} p_j\|_{\Gamma_{ij}}^2 \leq \pi^2 \|p\|_W^2,$$

$$a(t; \varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Alors si :

$$(a) \quad 2\alpha > \delta + \mu,$$

$$(b) \quad \rho^k \in [a, b] \subset (0, (2\alpha - \delta - \mu) / \pi^2),$$

les solutions des sous-problèmes et les paramètres λ_{ij}^k et β_{ij}^k convergent fortement vers la solution du problème global.

Des essais numériques satisfaisants sont présentés dans [DA SILVEIRA (3), PRADIN et DA SILVEIRA (1)].

Remarque 4.12.

La condition (a) n'est pas essentielle. On peut toujours faire un changement de variable de telle façon qu'elle soit vérifiée [ibid.].

□

Remarque 4.13.

Dans le premier problème présenté à la remarque 4.8 (treillis de plaques chauffantes), le coordonnateur sera :

$$\begin{aligned} \lambda_2^{k+1} &= \lambda_1^k + \rho^k (\sigma_1 \mathcal{B}_1 z_1^k - \sigma_2 \mathcal{B}_2 z_2^k) \\ \lambda_3^{k+1} &= \lambda_2^k + \rho^k (\sigma_1 \mathcal{B}_1 z_1^k - \sigma_3 \mathcal{B}_3 z_3^k) \\ \beta_2^{k+1} &= \beta_2^k + \rho^k (\sigma_1 \mathcal{C}_1 p_1^k - \sigma_2 \mathcal{C}_2 p_2^k) \\ \beta_3^{k+1} &= \beta_3^k + \rho^k (\sigma_1 \mathcal{C}_1 p_1^k - \sigma_3 \mathcal{C}_3 p_3^k) \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma,$$

les sous-problèmes étant donnés par (4.49), (4.50) et (4.39) avec les conditions sur Γ remplacés par :

$$\begin{aligned} \sigma_2 \sigma_3 \mathcal{A}_1 z_1 &= \lambda_2^k + \lambda_3^k, \sigma_1 \sigma_3 \mathcal{A}_2 z_2 = -\lambda_2^k, \sigma_1 \sigma_2 \mathcal{A}_3 z_3 = -\lambda_3^k \\ \sigma_2 \sigma_3 \mathcal{T}_1 p_1 &= \beta_2^k + \beta_3^k, \sigma_1 \sigma_3 \mathcal{T}_2 p_2 = -\beta_2^k, \sigma_1 \sigma_2 \mathcal{T}_3 p_3 = -\beta_3^k \end{aligned}$$

Pour le deuxième problème on doit choisir le coordonnateur suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{k+1} &= \lambda_1^k + \rho^k (\mathcal{B}_1 z_1^k - \beta \mathcal{B}_2 z_2^k - (1 - \beta) \mathcal{B}_3 z_3^k) \\ \lambda_2^{k+1} &= \lambda_2^k + \rho^k (\mathcal{C}_1 p_1^k - \beta \mathcal{C}_2 p_2^k - (1 - \beta) \mathcal{C}_3 p_3^k), \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma.$$

les sous-problèmes définis par (4.49), (4.50) et (4.39) avec les conditions sur Γ remplacées par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 z_1 &= -\lambda_1^k, \mathcal{A}_2 z_2 = \beta \lambda_1^k, \mathcal{A}_3 z_3 = (1 - \beta) \lambda_1^k \\ \mathcal{T}_1 p_1 &= \lambda_2^k, \mathcal{T}_2 p_2 = -\beta \lambda_2^k, \mathcal{T}_3 p_3 = - (1 - \beta) \lambda_2^k. \end{aligned}$$

La proposition 4.3 reste valable, voir l'appendice A.1. □

4.4.5 - DECOUPLAGE DES SOUS-PROBLEMES.

Le découplage des équations (4.23), (4.37), (4.39) et (4.35), où des équations (4.49), (4.50) et (4.39), dans le cas où l'on n'a pas de contrainte sur la commande, exige une extension de la théorie classique, car les conditions aux limites de la variable adjointe ne sont pas homogènes. On peut démontrer la proposition [DA SILVEIRA (3), Appendice A.2].

Proposition 4.4. Avec les hypothèses de la proposition 4.3, et en supposant la compacité de l'injection canonique de V_i dans H_i , la solution de (4.50) s'écrit $p_i(t) = P_i(t) z_i(t) + r_i(t)$,

où $P_i(\cdot) \in L^2([0, T], \mathcal{L}(H_i))$ est un opérateur auto-adjoint, solution unique de :

$$\langle (dP_i/dt + P_i A_i + A_i^* P_i + P_i B_i R_i^{-1} B_i^* P_i + D_i) \varphi, \eta \rangle_{Q_i} = 0$$

$P_i(T) = G_i, \forall \varphi, \eta \in W_i$ tels que $d\varphi/dt - A_i \varphi = 0$ et $r_i(\cdot) \in W_i$, solution unique de :

$$\frac{dr_i}{dt} = [-A_i^* + P_i B_i R_i^{-1} B_i^*] r_i + D_i \bar{z}_i - \sum \bar{P}_{ij} \lambda_{ij}$$

$$r_i(T) = G_i(z_i(T) - \bar{z}_i(T))$$

$$r_i(t, x) = 0, x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$$

$$\sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} p_i = \beta_{ij}, \text{ si } i > j, \quad \text{sur } \Gamma_{ij}$$

$$\sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} p_i = -\beta_{ij}, \text{ si } i < j, \quad \text{sur } \Gamma_{ij},$$

la sommation et des deux derniers termes pris sur tous les Γ_{ij} telles que $\Gamma_{ij} \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$. \bar{P}_{ij} est défini par :

$$\langle P_{ij} \lambda_{ij}, \eta \rangle_{Q_i} = \langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{L}_{ij} \bar{P}_i \eta \rangle_{\Gamma_{ij}}.$$

4.4.6 - PROBLEMES AVEC UN COUT SUR LE COUPLAGE.

Le problème de commande optimale avec un coût sur les termes de couplage (supposé fait par les conditions aux limites) présente une difficulté connue [LIONS (2), Pages 198-201]. Considérons Ω divisé en deux morceaux ayant Γ par surface commune, et les deux sous-systèmes :

$$\frac{dz_i}{dt} = A_i z_i + B_i u_i \quad \text{sur } Q_i$$

$$z_i(0) = z_{i0}, \quad z_i(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i,$$

couplés par les limites (problème de transmission)

$$\mathcal{B}_1 z_1 = \mathcal{B}_2 z_2$$

$$\mathcal{A}_1 z_1 + \mathcal{A}_2 z_2 = 0,$$

$\mathcal{B}_i(\mathcal{A}_i)$ la trace (la dérivée normale) sur Γ à partir de

Ω_i . Supposons \mathcal{A}_i un opérateur de deuxième ordre,

$B_i u_i \in L^2(Q_i)$ et $z_{i0} \in H^1(\Omega_i)$. Alors, si on fait :

$$w_1 = \mathcal{B}_1 z_1 \in L^2(\Sigma). \quad (4.52)$$

Des théorèmes de trace [LIONS et MAGENES (1), Page 83] on tire :

$$w_2 = \mathcal{A}_2 z_2 \in H^{-1, -1/2}(\Sigma), \quad (4.53)$$

où $\Sigma = [0, T] \times \Gamma$ et on a supposé $\partial\Omega_i$ de classe C^∞ , $i = 1, 2$. Le coût sur w_2 doit être :

$$\langle w_2, \mathcal{A}_2 w_2 \rangle_{H^{-1, -1/2}(\Sigma)} = \langle (-\Delta_\Sigma)^{-1} w_2, \mathcal{A}_2 w_2 \rangle_{L^2(\Sigma)},$$

où Δ_Σ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Σ [ibid., Pages 42, 97, LIONS (2), Page 198]. Si, pour un autre côté, $w_2 \in L^2(\Sigma)$, alors $w_1 \in H_0^{1, 1/2}(\Sigma)$ et son coût sera :

$$\langle w_1, \Delta_1 w_1 \rangle_{H_0^{1,1/2}(\Sigma)} = \langle (-\Delta_\Sigma) w_1, \Delta_1 w_1 \rangle_{L^2(\Sigma)}.$$

Une méthode différente [LIONS (3)] nous permet de définir un algorithme sans utiliser l'opérateur de Laplace-Beltrami Définissons :

$\mathcal{M} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times (w_1, w_2)$ tels que $w_1 \in L^2(\Sigma)$ et $w_2 \in L^2(\Sigma)$, et cherchons une solution du problème tel que $(u_1, u_2, w_1, w_2) \in \mathcal{M}$. On voit aisément que :

$$\mathcal{M} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times H_0^{1,1/2}(\Sigma) \times L^2(\Sigma),$$

le coût :

$$\bar{J} = J(u_1, u_2) + \langle w_1, \Delta_1 w_1 \rangle_{L^2(Q)} + \langle w_2, \Delta_2 w_2 \rangle_{L^2(Q)},$$

(J défini au paragraphe 3.4) étant une norme sur \mathcal{M} équivalente à la norme classique. La solution du problème de commande optimale ayant pour coût $\hat{J}(u, w, \lambda) = \bar{J}(u, w) + \langle \lambda_1, w_1 - \mathcal{B}_2 z_2 \rangle_{L^2(Q)} + \langle \lambda_2, w_2 + \Delta_1 z_1 \rangle_{L^2(Q)}$

est donnée (formellement) par (4.23), (4.52), (4.53), (4.39), et :

$$\frac{dp_i}{dt} = -A_i^* p_i - D_i(z_i - \bar{z}_i) \quad \text{sur } Q_i$$

$$p_i(T) = p_{iT}$$

$$p_i(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i$$

$$\mathcal{G}_1 p_1 = -\lambda_2$$

sur Γ

$$\mathcal{T}_2 p_2 = -\lambda_1$$

et les inégalités variationnelles :

$$\langle \Delta_1 w_1 - \mathcal{T}_1 p_1 + \lambda_1, w_1' - w_1 \rangle_{H_0^{-1, -1/2}(\Sigma)} \geq 0 \quad (4.54)$$

$$\forall w_1' \in H_0^{1, 1/2}(\Sigma), w_1 \in L^2(\Sigma),$$

$$\langle \Delta_2 w_2 + \mathcal{B}_2 p_2 + \lambda_2, w_2' - w_2 \rangle_{L^2(\Sigma)} \geq 0, \forall w_2' \in L^2(\Sigma), w_2 \in L^2(\Sigma) \quad (4.55)$$

De l'appartenance de λ_2 à $L^2(\Sigma)$ on déduit que :

$\gamma_1 p_1 \in H^{-1,1/2}(\Sigma)$ et $\mathcal{G}_2 p_2 \in L^2(\Sigma)$, et l'utilisation des formules de Green a un sens. Donc, les inégalités sont bien définies, et la solution du problème est bien celle suggérée.

Remarque 4.14.

Il faut supposer $\lambda_2 \in H^{-1,-1/2}(\Sigma)$. Mais $w_1 - \mathcal{B}_2 z_2 \in H_0^{1,1/2}(\Sigma)$, et le deuxième terme de \hat{J} a un sens. □

Remarque 4.15.

On ne peut pas écrire la première inégalité variationnelle comme une égalité sur $L^2(\Sigma)$, parce que $H_0^{1,1/2} \neq L^2(\Sigma)$. Il faut choisir entre la complexité apportée par l'opérateur de Laplace-Beltrami ou celle apportée par l'inégalité variationnelle. □

La méthode non-admissible (par exemple) devient :

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &= \lambda_1^k + \rho^k (w_1^k - \mathcal{B}_2 z_2^k) \\ \lambda_2^{k+1} &= \lambda_2^k + \rho^k (w_2^k + \mathcal{A}_1 z_1^k) \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma$$

z_1^k solution de (4.23) et (4.39) pour $i = 1$, (4.52) et (4.54), et z_2^k solution de (4.23) et (4.39) pour $i = 2$, (4.53) et (4.55).

CHAPITRE 5

LE FILTRAGE DECENTRALISE.

5.1 - INTRODUCTION.

Ce chapitre a pour but d'esquisser une généralisation des méthodes de filtrage décentralisé [SINGH et TITLI (1)] aux systèmes de dimension infinie. Nous examinerons les méthodes duales et le coordinateur prédicteur-correcteur de [SMITH et SAGE (1)].

L'étude sera séparée en deux cas : couplage réparti et problèmes de transmission. Notre intérêt a été centré sur ce dernier cas, essentiellement différent des problèmes où l'espace d'état est de dimension finie.

Le paragraphe 5.2 posera le problème dans un cadre très général, les couplages étant compris dans le sens du chapitre 2. Pour ce problème de filtrage, nous proposerons deux algorithmes, par dualisation des algorithmes de calcul hiérarchisé. Dans ce but, le paragraphe 5.4 commence en proposant un problème de commande optimale équivalent au problème de filtrage global.

Le paragraphe 5.5 positionne le problème de filtrage sur des systèmes décrits par des problèmes de transmission. Les méthodes présentées au paragraphe 5.6 ont exigé le développement des équations du filtre global, jusqu'au niveau des équations sur le noyau de la covariance de l'erreur.

Les méthodes présentées (paragraphe 5.6) sont issues d'un concept un peu différent de celui du calcul hiérarchisé habituel : la décentralisation de l'équation de Riccati. Pour faciliter l'application de

ces méthodes, nous avons étendu les transformations de Chandrasekar, sujet du paragraphe 5.7. Des exemples d'application de ces méthodes sont présentés au paragraphe 5.8.

Nous aurons besoin de la théorie des équations stochastiques à paramètres répartis, qui se trouve exposée dans [BENSOUSSAN (1)] dans un cadre variationnel, et dans [CURTAIN et PRITCHARD (3,4)] pour des systèmes décrits par des semigroupes. Nous nous bornerons à présenter le modèle et quelques théorèmes qui justifieront nos démarches futures.

5.2 - POSITION DU PROBLEME DANS LE CAS DE COUPLAGE REPARTI.

5.2.1 - DEFINITION DES SOUS-SYSTEMES.

L'équivalent stochastique de (2.2) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} dz_i(t) = A_i(t) z_i(t) dt + B_i(t) u_i(t) dt + w_i(t) dt \\ \quad + E_i(t) d\omega_i(t), \\ z_i(0) = z_{i0}, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

ce qui signifie :

$$\begin{aligned} z_i(t) = z_{i0} + \int_0^t [A_i(s) z_i(s) + B_i(s) u_i(s) + w_i(s)] ds \\ + \int_0^t E_i(s) d\omega_i(s), \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $A_i(\cdot)$ est le quasi-générateur d'un opérateur de quasi-évolution $\Phi_i(\cdot, \cdot)$ sur H_i (voir chapitre 1), $t \in [0, T]$, B_i , u_i et w_i définis au chapitre 2, z_{i0} est une variable aléatoire gaussienne de moyenne z_{i0} et covariance P_{i0} , et $\omega_i(\cdot)$ un processus stochastique de Wiener avec valeurs sur un espace K_i , $E_i(\cdot) \in L^2([0, T], \mathcal{L}(K_i, H_i))$. Le dernier terme de (6.2) a donc le sens d'une intégrale stochastique au sens de Ito [CURTAIN et PRITCHARD (3), Pages 136 - 142].

La solution de (5.2) sera donnée, sous certaines hypothèses, par :

$$z_i(t) = \Phi_i(t,0) z_{i0} + \int_0^t \Phi_i(t,s) [B_i(s) u_i(s) + w_i(s)] ds + \int_0^t \Phi_i(t,s) E_i(s) d\omega_i(s). \quad (5.3)$$

En général nous dirons que (5.3) est la solution "douce" ou "faible" de (5.1) ou (5.2).

Remarque 5.1.

Nous supposons que la covariance de $\omega_i(s)$ a la forme :

$$\text{Cov}\{\omega_i(t) - \omega_i(s)\} = (t-s) W_i.$$

$W_i \in \mathcal{L}(K_i)$ est un opérateur nucléaire auto-adjoint et semi-défini positif, ayant pour valeurs propres, l'ensemble $\{\lambda_j, j \in \mathbb{N}\}$ et pour vecteurs propres, l'ensemble $\{e_j, j \in \mathbb{N}\} \subset K_i$. □

5.2.2 - LE SYSTEME GLOBAL.

Supposons N sous-systèmes définis par (5.3), solutions douces de (5.1), $i \in \overline{1, N}$, et couplés par :

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}(t) z_j(t). \quad (5.4)$$

Le système global est bien défini en raison de la proposition suivante.

Proposition 5.1. Supposons $\Phi_i(t,s) E_i(s) e_j, \Phi_i(t,s) [B_i(s) u_i(s) + w_i(s)]$ et $\Phi_i(t,0) z_{i0} \in \mathcal{D}(A_i)$ avec probabilité 1, pour tout $j, 0 \leq s \leq t \leq T$, et

$$\int_0^t \|A_i(t) \Phi_i(t,s) [B_i(s) u_i(s) + w_i(s)]\| ds < \infty, \text{ a.p. 1,}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \int_0^t \|A_i(t) \Phi_i(t,s) E_i(s) e_j\|^2 ds < \infty,$$

alors $z_i(t)$ donné par (5.3) est l'unique solution forte de (5.1), et si $C(\cdot) = \{C_{ij}(\cdot)\} \in L^\infty([0, T], \mathcal{L}(H))$, $H = \prod H_i$, le système global est bien défini.

La première partie de cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 5.35 [CURTAIN et PRITCHARD (3), Page 148]. La deuxième partie est la généralisation de la proposition 2.1, si nous tenons compte du corollaire 5.36, [ibid., page 150].

Si on appelle $U(.,.)$ l'opérateur de quasi-évolution généré par $A(.) + C(.)$, $A(.) = \text{diag}(A_i(.))$, $z(.) = \text{col}(z_i(.))$, etc, le système global sera modélisé par :

$$z(t) = U(t,0) z_0 + \int_0^t U(t,s) B(s) u(s) ds + \int_0^t U(t,s) E(s) d\omega(s), \quad (5.5)$$

$$y(t) = \int_0^t D(s) z(s) ds + \int_0^t F(s) dv(s), \quad (5.6)$$

où $E(.) = \text{diag}(E_i(.))$; $\omega(t) = \text{col}(\omega_i(t))$ (avec covariance $W = \text{diag}(W_i)$); la sortie $y = \text{col}(y_i)$ est formée par des mesures entachées par une erreur $v(s) = \text{col}(v_i(s))$, $v(s)$ étant un processus stochastique de Wiener sur \mathbb{R}^p , de covariance $V = \text{diag}(V_i)$; $F(.) = \text{diag}(F_i(.))$, $F_i(.) \in L^\infty([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^{p_i}))$, $\sum p_i = p$. Encore, $D(.) = \text{diag}(D_i(.))$, z_0 sera une variable aléatoire gaussienne de moyenne $z_0 = \text{col}(z_{0i})$ et covariance $P_0 = \text{diag}(P_{0i})$.

5.3 - LE FILTRE GLOBAL.

Dans [ibid., page 280, CURTAIN et PRITCHARD (1)] on démontre la proposition suivante.

Proposition 5.2. Sous les hypothèses de la proposition 5.1, augmentées de :

(a) $U(.,.)$ est un opérateur d'évolution presque fort [ibid., Page 43],

(b) $\int_0^T \|A(t) \cdot U(t,0) P_0 h\| dt < \infty, \forall h \in H$,

(c) $\mathcal{D}(A^+) = \bigcap \mathcal{D}(A^+(t)) \neq \emptyset$,

le meilleur estimateur sans biais (au sens de Kalman-Bucy) du système global est donné par l'unique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{z}(t) = [A(t) + C(t)] \hat{z}(t) dt + B(t) u(t) dt \\ \quad + P(t) D^*(t) [F(t) VF^*(t)]^{-1} d\rho(t) \\ \hat{z}(0) = \bar{z}_0 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

$$\rho(t) = y(t) - \int_0^t D(s) z(s) ds \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P(t) h, k \rangle_H &= \langle P(t) h, (A^*(t) + C^*(t))k \rangle_H \\ &\quad - \langle (A^*(t) + C^*(t)) h, P(t) k \rangle_H \\ &\quad + \langle P(t) D^*(t) [F(t) VF^*(t)]^{-1} D(t) P(t) h, k \rangle_H \\ &= \langle E(t) WE^*(t) h, k \rangle_H, \forall h, k \in \mathcal{D}(A^*) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$P(0) = P_0, P(t) = P^*(t)$$

La généralisation de cette proposition pour des bruits sur les limites ou ponctuels se trouve dans [CURTAIN et PRITCHARD (2), CURTAIN (2)].

Remarque 5.2.

On peut résoudre l'équation de Riccati (5.9) par décomposition modale ou par différences finies [BENSOUSSAN (1)], ou en appliquant le Théorème des noyaux de L. SCHWARTZ. De plus, si $P_0 = 0$ et A, B, C, D et F sont constants dans le temps, on peut utiliser les transformations de Chandrasekar [CASTI et JUNG (1)]. □

$P(t)$ est un opérateur défini sur l'espace produit $H = H_1$, on peut donc le décomposer comme suit :

$P(t) = P_{ij}(t)$, $i, j \in \overline{1, N}$, et réécrire (5.7) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{z}_i(t) = A_i(t) \hat{z}_i(t) dt + B_i(t) u_i(t) dt + \hat{w}_i(t) dt \\ \quad + \sum_{j=1}^N P_{ij}(t) D_j^*(t) [F_j(t) V_j F_j^*(t)]^{-1} d\rho_j(t), \\ \hat{z}_i(o) = \bar{z}_{io}, \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\text{où } \hat{w}_i(t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}(t) \hat{z}_j(t).$$

5.4 - DUALISATION DES ALGORITHMES DE CALCUL HIERARCHISE.

5.4.1 - UN PROBLEME DE COMMANDE OPTIMALE EQUIVALENT.

Considérons le problème de commande optimale suivant :
minimiser le coût

$$\begin{aligned} J^*(m) = & 1/2 \langle P_o \hat{p}(o), \hat{p}(o) \rangle_H + 1/2 \int_0^T \{ \langle [F(t) V F^*(t)] m(t), m(t) \rangle_{\mathbb{R}^P} \\ & + \langle E(t) W E^*(t) \hat{p}(t), \hat{p}(t) \rangle_H - 2 \langle \hat{p}(t), B(t) u(t) \rangle_H \\ & + \langle [F(t) V F^*(t)] y(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^P} \} dt \end{aligned}$$

par rapport à la variable $m(.) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^P)$, sous :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{p}(t) = - (A^*(t) + C^*(t)) \hat{p}(t) dt - D^*(t) m(t) dt - \\ \quad - C^*(t) [F(t) V F^*(t)]^{-1} dy(t), \\ \hat{p}(T) = 0. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Ce problème conduit à résoudre le problème aux deux bouts formé par (5.11) et les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{q}(t) = [A(t) + C(t)] \hat{q}(t) dt + B(t) u(t) dt \\ \quad - E(t) W E^*(t) \hat{p}(t) dt, \\ \hat{q}(o) = \bar{z}_o - P_o \hat{p}(o), \end{array} \right. \quad (5.12)$$

$$m(t) = [F(t) \vee F^*(t)]^{-1} D(t) \hat{z}(t).$$

[BENSOUSSAN (1), Pages 164-166] démontre que la solution du problème de commande optimale ci-dessus est liée au filtre du paragraphe 5.3 par :

$$\hat{z}(T) = \hat{z}(T), \tag{5.13}$$

dans chaque intervalle $[0, T]$.

5.4.2 - APPLICATION DU CALCUL HIERARCHISE.

Nous allons appliquer les algorithmes de calcul hiérarchisé au nouveau problème de commande optimale défini par $J^*(m)$ et (5.11). Nous tirerons ensuite (5.13) des sous-problèmes, en ramenant ce calcul à des filtres localisés sur les sous-systèmes.

Nous nous bornerons à la méthode par prédiction de l'iteration, en évitant les problèmes singuliers (voir sous-paragraphe 2.6.2).

Définissons dans (5.11) :

$$C^*(t) \hat{p}(t) = \tilde{w}(t),$$

et dans (5.12) :

$$C(t) \hat{z}(t) = - C(t) \tilde{\lambda}(t),$$

comme on a fait au paragraphe 2.7. Alors comme le coût $J^*(m)$ est séparable, nous pouvons proposer la méthode :

$$\begin{cases} \tilde{w}^{k+1}(t) = C^*(t) \hat{p}^k(t), \\ \tilde{\lambda}^{k+1}(t) = - \hat{z}^k(t), \end{cases} \tag{5.14}$$

$\hat{p}^k(.)$ et $\hat{z}^k(.)$ solutions des "sous-problèmes" :

minimiser par rapport à m_i le coût :

$$J_i^*(m_i) + \langle \lambda_i, \tilde{w}_i^k \rangle_{H_i} - \sum_{j=1}^N \langle \tilde{\lambda}_j^k, C_{ij}^* \hat{p}_i \rangle_{H_j}$$

sujet à :

$$d\hat{p}_i(t) = - A_i^*(t) \hat{p}_i dt - D_i^*(t) m_i(t) dt - D_i^* [F_i(t) V_i F_i^*(t)]^{-1} dy_i(t) + \tilde{w}_i^k(t)$$

$$p_i(T) = 0, i \in \overline{1, N},$$

où $m = \text{col } (m_i)$, $w = \text{col } (w_i)$, $\tilde{\lambda} = \text{col } (\tilde{\lambda}_i)$ et $J_i^*(m_i)$

a une formulation similaire à $J^*(m)$ avec l'indice i sur tous les opérateurs, variables et espaces.

Evidemment $\hat{z}_i^k(T) = \hat{p}_i^k(T)$, et la proposition 2.5 nous dit que la suite $\{\hat{z}_i^k(T); k \in \mathbb{N}\}$ converge vers $\hat{z}_i(T)$, résultat du filtre global. Les "sous-problèmes" sont équivalents à des filtres classiques, pour $\tilde{w}_i^k(t)$ et $\tilde{\lambda}_i^k(t)$ donnés, et si on fait le chemin inverse de ce qui nous a amené au problème de commande optimale, on trouve le filtre des sous-systèmes :

$$\begin{aligned} d\hat{z}_i(t) &= A_i(t) \hat{z}_i(t) dt + B_i(t) u_i(t) dt \\ &+ P_i(t) D_i^*(t) [F_i(t) V_i F_i^*(t)]^{-1} D_i(t) d p_i(t) \\ &+ P_i(t) \tilde{w}_i^k(t) + \sum_{j=1}^N C_{ij}(t) \tilde{\lambda}_j^k(t), \end{aligned}$$

$$z_i(0) = z_{i0},$$

$$p_i(t) = y_i(t) - \int_0^T D_i(t) z_i(t) dt,$$

$P_i(t)$ l'unique solution de l'équation de Riccati :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{dP_i(t)}{dt} - P_i(t) A_i^*(t) - A_i(t) P_i(t) - E_i(t) W_i E_i^*(t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + P_i(t) D_i^*(t) [F_i(t) V_i F_i^*(t)]^{-1} D_i(t) P_i(t) \right) h, k \right\rangle_{H_i} = 0 \\ & P_i(0) = P_{i0}, \forall h, k \in \mathcal{D}(A_i^*). \end{aligned} \right.$$

Remarque 5.3.

On a [BENSOUSSAN (1), Page 140] :

$$\hat{\xi}_i(t) = P_i(t) \hat{p}_i(t) + \hat{z}_i(t).$$

La méthode finale obtenue n'est pas utile, car elle n'est pas recursive, condition essentielle, pour un filtre ! La convergence des suites $\{\tilde{w}_i^k(\cdot)\}$ et $\{\tilde{\lambda}_i^k(\cdot)\}$ est faite dans $L^2([0, T], H_i)$, espaces définis sur tout l'intervalle $[0, T]$. Cela signifie qu'il faut connaître à l'avance toute la sortie $y(t)$, $t \in [0, T]$ pour appliquer la méthode, ce qui détruit la recursivité. La même remarque pourra être faite pour l'application de la méthode non-admissible. □

5.4.3 - COORDINATION EN TEMPS REEL.

Dans une large classe de problèmes on peut accepter une solution qui s'améliore avec le temps, à la place de la solution optimale. [SMITH et SAGE (1)] ont introduit la notion d'un coordonnateur séquentiel, qui travaille par prédiction-correction, la deuxième étape étant accomplie par des algorithmes proposés en calcul hiérarchisé. Une application de cette idée aux problèmes de filtrage se trouve dans [ARAFEH et SAGE (1)], où les auteurs travaillent avec l'approche dite du "maximum à postérieur".

La fonction de prédiction est de prendre en compte l'évolution des variables de coordination dans le temps. On pourra utiliser une méthode quelconque d'extrapolation, selon la précision

désirée et l'information dont on dispose. Par exemple, une extrapolation de premier ordre nous donne :

$$\tilde{w}_i^k(t) \text{ extrapolé} = \tilde{w}_i^k(t-\Delta) + \Delta \frac{\partial \tilde{w}_i^k}{\partial t} (t-\Delta).$$

Δ un intervalle choisi. L'approximation de la dérivée par une différence finie sur conduit à :

$$\tilde{w}_i^k(t) \text{ extrapolé} \approx 2\tilde{w}_i^k(t-\Delta) - \tilde{w}_i^k(t-2\Delta).$$

Avec cet extrapolateur, le coordonnateur devient :

$$\tilde{w}_i^{k+1}(t) = 2\tilde{w}_i^k(t-\Delta) - \tilde{w}_i^k(t-2\Delta)$$

$$\tilde{\lambda}_i^{k+1}(t) = -2\tilde{\lambda}_i^k(t-\Delta) + \tilde{\lambda}_i^k(t-2\Delta),$$

le paramètre d'itération k se confondant avec un compteur des intervalles de taille Δ .

Remarque 5.4.

Pour ne pas figer le coordonnateur à une extrapolation de premier ordre, nous indiquerons cette opération de la façon suivante :

$$\tilde{w}_i^k(t) \text{ extrapolé} \approx \mathcal{E}(\Delta, \tilde{w}_i^k).$$

□

5.5 - PROBLEMES DE TRANSMISSION.

Plus intéressant que le problème avec un couplage réparti, nous considèrerons le problème de transmission (paragraphe 4.4), particulier aux systèmes de dimension infinie. Nous nous placerons dans un cadre variationnel, ce qui implique l'utilisation des méthodes de [BENSOUSSAN (1)].

5.5.1 - POSITION DU PROBLEME.

Nous utiliserons les notations et résultats du paragraphe 4.4, en particulier la définition de $H = L^2(\Omega)$, Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n divisé en N morceaux (Ω_i) , la frontière commune entre Ω_i et Ω_j étant désignée par $\Gamma_{i,j}$. Dans ce cas $z_i(t)$ représente la restriction

de $z(t)$ à Ω_i , opération bien définie que nous noterons par :

$$z_i(t) = z(t) \Big|_{\Omega_i}.$$

Rappelons que $Q_i = [0, T] \times \Omega_i$, $Q = \prod Q_i$, $\Sigma_{ij} = [0, T] \times \Gamma_{ij}$,
 $\Sigma = \prod \Sigma_{ij}$.

5.5.2 - LE FILTRE GLOBAL.

Le filtre global présenté au paragraphe 5.3 est encore applicable, mais il faut bien interpréter l'équation (5.10). Comme :

$$\hat{z}_i(t) = \hat{z}(t) \Big|_{\Omega_i},$$

cette équation se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{z}_i(t) = A_i(t) \hat{z}_i(t) + B_i(t) u_i(t) dt \\ \quad + [P(t) D^*(t) [F(t) V F^*(t)]^{-1} d\rho(t)] \Big|_{\Omega_i} \\ \hat{z}_i(0) = z_{i0}. \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Le couplage entre les \hat{z}_i , $i \in \overline{1, N}$ s'établit par les conditions de transmission sur Γ_{ij} , du type de (4.24). ($\hat{z}(\cdot) \in L^2([0, T], V)$, et donc obéit aux mêmes conditions que $z(\cdot)$).

Or, si $\text{supp } D_i(t) \subset \Omega_i$, $i \in \overline{1, N}$, (mesures prises à l'intérieur de Ω_i , et si nous posons :

$$P_{ij}(t) h(t) = [P(t) h(t)] \Big|_{\Omega_j},$$

pour tout $h(t)$ tel que $\text{supp } h(t) \subset \Omega_j$, le dernier terme de (5.16) peut s'écrire :

$$\sum_{j=1}^N P_{ij}(t) D_j^*(t) [F_j(t) V_j F_j^*(t)]^{-1} d\rho_j(t),$$

comme dans (5.10).

L'équation sur les $P_{ij}(t)$ est calculée en partitionnant (5.9) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P_{ij}(t) h, k \rangle_{H_i} &= \langle P_{ij}(t) h, A_i^*(t) k \rangle_{H_i} \\ &- \langle A_j^*(t) h, P_{ji}(t) k \rangle_{H_j} \\ &+ \sum_{k=1}^N \langle P_{ik}(t) D_k^*(t) [F_k(t) V_k F_k^*(t)]^{-1} D_k(t) P_{kj}(t) h, k \rangle_{H_i} \\ &= \langle E_i(t) W_{ij} E_j^*(t) h, k \rangle_{H_i}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

$P_{ij}(0) = P_{oij}, \forall h \in \mathcal{D}(A_j^+)$ et $\forall k \in \mathcal{D}(A_i^+), i, j \in \overline{1, N}$ où P_{oij} et w_{ij} sont définis à partir de P_0 et W de la même façon que P_{ij} .

5.5.3 - EQUATIONS SUR LES NOYAUX.

$P(t) \in \mathcal{L}(H)$ et $P_{ij}(t) \in \mathcal{L}(H_j, H_i)$, la théorie des noyaux [SCHWARTZ (2), GUELFAND et VILENKIN (1)] nous dit qu'il existe $P_{ij}(t, \dots) \in L^2(\Omega_i \times \Omega_j)$ tel que :

$$P_{ij}(t) h(t) = \int_{\Omega_j} P_{ij}(t, x, \varphi) h(t, \varphi) d\varphi, x \in \Omega_i.$$

Nous utiliserons l'équation du filtre global développée sur les noyaux $P_{ij}(t, x, \varphi)$. Par simplicité, nous supposerons que $u_i(\cdot) \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{m_i})$, $m = m_i, B_i u_i = B_i(x) u_i(t), x \in \Omega_i, B_i(x)$ un vecteur ligne de dimension m_i et coefficients de classe C^∞ . De plus $E_i \omega_i = E_i(x) \omega_i(t), \omega_i(t)$ un processus aléatoire sur $\mathbb{R}^{m_i}, E_i(\cdot)$ obéissant aux mêmes conditions que $B_i(\cdot)$; et $D_i z_i = D_i(x) z_i(t, x), D_i(x) \in C^\infty(\Omega_i, \mathbb{R}^{p_i})$, ayant support contenu dans Ω_i .

La symétrie de $P(t)$ implique que :

$$P(t; x, \varphi) = P(t; \varphi, x), x, \varphi \in \Omega,$$

si $P(t; x, \varphi)$ est le noyau de $P(t)$, et alors :

$$P_{ij}(t; x, \varphi) = P_{ji}(t; \varphi, x), x \in \Omega_i, \varphi \in \Omega_j.$$

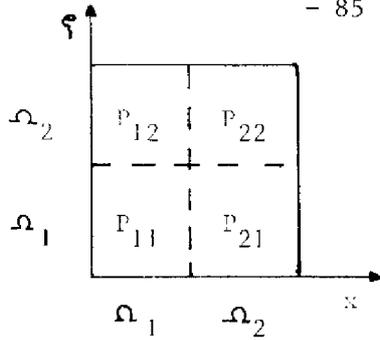


Figure 5. Supports des P_{ij} , dans un exemple où $\Omega \subset \mathbb{R}$ est divisé en deux morceaux.

Il nous sera convenable de définir un opérateur $K_{ij}(t) \in \mathcal{L}(L^2([0, T], \mathbb{R}^{P_j}), H_i)$ - le gain du filtre - par :

$$K_{ij}(t) \rho_j(t) = P_{ij}(t) D_j^* [F_j V_j F_j^*]^{-1} \rho_j(t).$$

Si on utilise la représentation par noyaux, on a :

$$\begin{aligned} K_{ij}(t) \rho_j(t) &= \int_{\Omega_j} P_{ij}(t; x, \varphi) D_j^T(\varphi) d\varphi [F_j(t) V_j F_j^*(t)]^{-1} \rho_j(t) \\ &\equiv K_{ij}(t; x) \rho_j(t), \quad x \in \Omega_i \end{aligned}$$

étant la fonction $K_{ij}(t; \cdot) \in L^2(\Omega_i, \mathbb{R})$, l'équation (5.16) devient :

$$\begin{cases} d\hat{z}_i(t) = A_i(t) \hat{z}_i(t) dt + B_i u_i(t) dt + \sum_{i=1}^N K_{ij}(t) d\rho_j(t), \\ \hat{z}_i(0) = \bar{z}_{i0}. \end{cases} \quad (5.18)$$

L'équation de Riccati (5.16) implique l'équation suivante sur les noyaux :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{ij}(t; x, \varphi) &= [A_i(t; x) + A_j(t; \varphi)] P_{ij}(t; x, \varphi) \\ &+ E_i(x) W_{ij} E_j(x) \\ &+ \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} P_{ik}(t; x, \eta) D_k^T(\eta) d\eta [F_k(t) V_k F_k^*(t)]^{-1} \int_{\Omega_k} D_k(\sigma) P_{kj}(t; \sigma, \varphi) d\sigma \end{aligned}$$

$$P_{ij}(0; x, \varphi) = P_{0ij}(x, \varphi)$$

$$i, j \in \overline{1, N}, \quad x \in \Omega_i, \quad \varphi \in \Omega_j.$$

où $P_{oij}(x, \xi)$ est le noyau associé à P_{oij} et $\Lambda_i(t; x)$ l'opérateur $\Lambda_i(t)$ avec des coefficients en $x \in \Omega_i$ et les différentiations appliquées à la variable x .

L'unique point à justifier dans cette transformation est le fait que :

$$\int_{\Omega} P(t; x, \sigma) \Lambda^*(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma = \int_{\Omega} \Lambda(t; \sigma) P(t; x, \sigma) h(\sigma) d\sigma.$$

Ceci est la conséquence des conditions Dirichlet homogènes de $h(\cdot)$ sur $\partial\Omega$ (une démonstration directe se trouve dans [LIONS (2), Page 158]).

Il faut encore trouver les conditions sur P_{ij} pour x ou $\xi \in \Gamma_{ij}$. De l'appartenance des fonctions et de l'image de $P(t)$ à l'espace V (sous-paragraphe 4.4.1) il vient :

$$\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \left[\int_{\Omega} P(t; x, \xi) h(t, \xi) d\xi \right] \Big|_{\Omega_i} = \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \left[\int_{\Omega} P(t; x, \xi) h(t, \xi) d\xi \right] \Big|_{\Omega_j}$$

d'où (si $h_k(t, \xi) = h(t, \xi) \Big|_{\Omega_k}$)

$$\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \left[\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} P_{ik}(t; x, \xi) - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} P_{jk}(t; x, \xi) \right] h_k(t, \xi) d\xi = 0,$$

sur Γ_{ij} , les opérateurs $\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij}$ agissant sur x . Donc :

$$\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} P_{ik}(t; x, \xi) - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} P_{jk}(t; x, \xi) = 0, \quad (5.20)$$

$x \in \Gamma_{ij} \neq \emptyset$, $i < j$, $k \in \overline{1, N}$, $\xi \in \Omega_k$. Par la symétrie de $P(t)$ on a :

$$\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} P_{ki}(t; x, \xi) - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} P_{kj}(t; x, \xi) = 0, \quad (5.21)$$

$\xi \in \Gamma_{ij} \neq \emptyset$, $i < j$, $k \in \overline{1, N}$, $x \in \Omega_k$. D'une façon analogue, on arrive à compléter les conditions de transmission entre les P_{ik} , $k \in \overline{1, N}$, sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$. Aussi, des conditions type Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$,

$$P_{ij}(t; x, \varphi) = 0, \text{ si } x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \text{ et } \varphi \in \Omega_j, \text{ où si } \varphi \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_j$$

et $x \in \Omega_i$. (5.22)

Remarque 5.5.

Les équations sur P_{ij} sont les symétriques des équations sur P_{ji} . En réalité, on a $N(N-1)/2$ équations seulement. □

5.6 - DECENTRALISATION DE L'EQUATION DE RICCATI.

Un des avantages les plus importants des méthodes de calcul hiérarchisé est que l'équation de Riccati est indépendante des paramètres de coordination, comme on a vu aux chapitres 2, 3 et 4. De cette façon, elle peut être résolue "off-line" au début du calcul et de façon complètement décomposée. Cette possibilité n'est pas utile dans les calculs du filtre, puisque la structure recursive oblige la résolution de l'équation de Riccati à chaque instant de temps, la présence de paramètres additionnant un terme de plus, seulement. En plus, dans le calcul hiérarchisé, le "gain" ne converge pas vers le "gain" optimal, puisqu'il est constant. Au contraire, il y a des problèmes pratiques où il est intéressant d'avoir un gain qui s'améliore à chaque itération.

Dans les problèmes de transmission (paragraphe 4.4), les méthodes de calcul hiérarchisé sont obtenues à partir de simples méthodes de résolution des équations de transmission. Notre idée est d'appliquer ces méthodes aux équations du filtre global, à savoir (5.18) - (5.22), plus les conditions sur les \mathcal{A}_{ij} , puisqu'elles définissent des problèmes semblables à ceux de transmission. Evidemment les nouveaux sous-problèmes auront des équations de Riccati dépendant des paramètres de coordination, mais leurs solutions convergent vers la solution globale.

Il reste un inconvénient. Dans les équations (5.18) et (5.19) pour le sous-système i , il faut connaître les fonctions $P_{ij}(t; x, \varphi)$ pour $j \in \overline{1, N}$, au moins pour $x \in \Omega_i, \varphi \in \text{supp } D_j(\varphi)$. Or, si les mesures sont ponctuelles (le cas le plus important), le support de D_j est très petit autour de quelques points appartenant à l'intérieur de Ω_j . Normalement,

il faudra échanger moins d'information que dans le filtre de Shah [SINGH et TITLI (1)] généralisé à notre cas (on remplace le couplage par les limites par un bruit aux limites dont la moyenne et la covariance sont échangées entre les filtres des sous-systèmes).

En vue de la récursivité, nous utiliserons un coordonnateur prédicteur-correcteur (voir sous-paragraphe 5.4.3).

La méthode duale (sous-paragraphe 4.4.4) appliquée à (5.18) et (5.19) nous amène au coordonnateur :

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(t) = \mathcal{E}(\Delta, \lambda_{ij}(t)) + \rho(\sigma_{ij} \otimes_{ij} \hat{z}_i(t-\Delta t) - \sigma_{ji} \otimes_{ji} \hat{z}_j(t-\Delta t)), \\ \beta_{ijk}(t) = \mathcal{E}(\Delta, \beta_{ijk}(t)) + \rho(\sigma_{ij} \otimes_{ij} P_{ik}(t-\Delta t; x, \varphi) \\ - \sigma_{ji} \otimes_{ji} P_{jk}(t-\Delta t; x, \varphi)), \end{cases}$$

sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$, $i < j$, $k \in \overline{1, N}$, $\varphi \in \Omega_k$. Les \hat{z}_i et les P_{ik} sont solution des filtres locaux, décrits par (5.18), (5.19), (5.20) et les conditions aux limites sur $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$, $i < j$:

$$\begin{cases} \sigma_{ji} \Delta_{ij} \hat{z}_i(t) = -\lambda_{ij}(t) \\ \sigma_{ij} \Delta_{ji} \hat{z}_j(t) = \lambda_{ij}(t) \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} P_{ik}(t; x, \varphi) = \beta_{ijk}(t) \\ \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ji} P_{ik}(t; x, \varphi) = -\beta_{ijk}(t) \end{cases} \quad k \in \overline{1, N}, \varphi \in \Omega_k, \quad (5.24)$$

plus les conditions symétriques de (5.24).

Remarque 5.6.

Une justification heuristique de l'application de la méthode à l'équation de Riccati, qui n'est pas une équation variationnelle au sens habituel, sera donnée au prochain paragraphe. Des exemples seront résolus au paragraphe 5.8.

□

Une méthode par prédiction de l'interaction amène au coordonnateur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij}(t) = \mathcal{E}(\Delta, \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \hat{z}_j(t)) \\ \lambda_{ji}(t) = \mathcal{E}(\Delta, -\sigma_{ji} \mathcal{A}_{ij} \hat{z}_i(t)) \\ \beta_{ijk}(t) = \mathcal{E}(\Delta, \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} P_{jk}(t; x, \varphi)) \\ \beta_{jik}(t) = \mathcal{E}(\Delta, -\sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} P_{ik}(t; x, \varphi)) \end{array} \right. \quad k \in \overline{1, N}$$

sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$, $i < j$, et aux conditions sur Γ_{ij} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \hat{z}_i(t) = \lambda_{ij}(t), \sigma_{ij} \mathcal{A}_{ji} z_j(t) = \lambda_{ji}(t), \\ \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} P_{ijk} = \beta_{ijk}(t), \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ji} P_{jk} = \beta_{jik}(t), \end{array} \right.$$

$k \in \overline{1, N}$.

5.7 - TRANSFORMATIONS DE CHANDRASEKAR.

L'application des méthodes du paragraphe 5.6 n'est pas commode. Elle suppose la résolution des équations sur les noyaux P_{ij} , qui sont des fonctions sur $[0, T] \times \Omega_i \times \Omega_j$, avec le double de variables d'espace par rapport à $z_i(t)$, par exemple. Une façon de simplifier ces équations, dans le cas particulier où $P_0 = 0$ (on connaît parfaitement les conditions initiales) et où les opérateurs $A(t)$, $E(t)$, $D(t)$ et $F(t)$ sont invariants dans le temps, est donnée par les transformations de Chandrasekar [CASTI et LJUNG (1)]. Dans ce paragraphe, nous développerons cette application, ce qui nous permettra de plus, de mieux comprendre les méthodes de décentralisation de l'équation de Riccati.

La technique est basée sur la possibilité d'écrire :

$$P'(t) \equiv \frac{dP(t)}{dt} = L(t) L^*(t),$$

où $L(t) : \mathcal{U} \rightarrow H$, comme on le démontrera.

Supposons l'opérateur $L(t)$ de $L^2([0, T], \mathbb{R})$ sur $L^2([0, T], V)$ solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt} &= AL(t) + K(t) DL(t), & (5.25) \\ L(0) &= EW^{1/2}, & (5.26) \end{aligned} \right.$$

$K(t)$ un opérateur borné donné. Supposons aussi que l'opérateur A génère un semigroupe analytique. Alors on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{dL(t)}{dt} - AL(t) - K(t) DL(t) \right) L^*(t) h, k \right\rangle_H \\ + \left\langle h, \left(\frac{dL(t)}{dt} - AL(t) - K(t) DL(t) \right) L^*(t) k \right\rangle_H = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

pour tout $h, k \in \mathcal{D}(A^*)$ (ce qui implique des conditions Dirichlet homogènes pour h et k sur $\partial\Omega$). En décomposant (5.27) on arrive à :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dL(t)}{dt} L^*(t) h, k \right\rangle_H + \left\langle L(t) \frac{dL^*(t)}{dt} h, k \right\rangle_H & (5.28) \\ = \left\langle L(t) L^*(t) h, A^* k \right\rangle_H + \left\langle A^* h, L(t) L^*(t) k \right\rangle_H \\ - \left\langle L(t) L^*(t) D^* K^*(t) h, k \right\rangle_H + \left\langle K(t) DL(t) L^*(t) h, k \right\rangle_H \end{aligned}$$

Le premier terme de (5.28) égale :

$$\frac{d}{dt} \left\langle L(t) L^*(t) h, k \right\rangle_H,$$

que nous appellerons :

$$\frac{d}{dt} \left\langle P'(t) h, k \right\rangle_H$$

Si :

$$K(t) = P(t) D^* [FVF^*]^{-1}, \quad (5.29)$$

l'équation (5.28) équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P'(t) h, k \rangle_H &= \langle P'(t) h, A^* k \rangle_H + \langle A^* h, P'(t) k \rangle_H \\ &- \langle P'(t) D^* [FVF^*]^{-1} D P(t) h, k \rangle_H \\ &- \langle P(t) D [FVF^*]^{-1} D P'(t) h, k \rangle_H, \end{aligned}$$

équation dérivée de (5.9) (avec $C \equiv 0$) par différentiation dans le temps. Etant donnée l'unicité des solutions de l'équation de Riccati (5.9), il suffit de vérifier si $dP(o)/dt$ et $P'(o)$ ont la même valeur. Or, de (5.9) on tire :

$$\begin{aligned} \frac{dP(o)}{dt} &= \langle P(o) h, A^* k \rangle_H + \langle A^* h, P(o) k \rangle_H \\ &- \langle P(o) D^* K^*(o) h, k \rangle_H + \langle EWE^* h, k \rangle_H \\ &= \langle EWE^* h, k \rangle_H = \langle L(o) L^*(o) h, k \rangle_H, \end{aligned}$$

puisque $P(o) = P_o = 0$. Pour trouver une équation différentielle pour $K(t)$, il suffit de différencier (5.2a) et réécrire $dP(t)/dt$ en fonction de $L(t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dK(t)}{dt} &= L(t) L^*(t) D^* [FVF^*]^{-1} & (5.30) \\ K(o) &= P(o) D^* [FVF^*]^{-1} = 0 & (5.31) \end{aligned} \right.$$

La réunion des résultats démontre la :

Proposition 5.3. Sous les hypothèses de la proposition 5.2, avec $C \equiv 0$, A , E , D et F invariants dans le temps, A générateur d'un semigroupe analytique, le filtre global s'écrit :

$$d\hat{z}(t) = A\hat{z}(t) dt + B(t) u(t) dt + K(t) d\rho(t)$$

$$\hat{z}(o) = z_o$$

$$P'(t) = y(t) - \int_0^t D \hat{z}(t) dt,$$

K(t) solution du système d'équations (5.25), (5.30) ayant (5.26) et (5.31) par conditions initiales.

Remarque 5.7.

L'équation (5.30) sur K(t) est une équation différentielle ordinaire. Donc :

$$K(t) = \int_0^t L(\tau) L^*(\tau) D^* [FVF^*]^{-1} d\tau. \quad \square$$

L'application de la théorie des noyaux à l'opérateur $L^*(t) : L^2([0,T], H) \rightarrow L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ nous dit qu'il existe une fonction $\mathfrak{L}(\cdot, \cdot) \in C^0([0,T], H)$ telle que :

$$L^*(t) h(t) = \int_{\Omega} \mathfrak{L}^T(t, x) h(t, x) dx$$

Dans ce cas, l'opérateur $L(t) : L^2([0,T], \mathbb{R}^m) \rightarrow L^2([0,T], H)$ est décrit par :

$$L(t) g(t) = \mathfrak{L}(t, x) g(t) \in L^2([0,T], H).$$

L'opérateur K(t) est décrit par :

$$K(t) \rho(t) = K(t, x) \rho(t) = \int_{\Omega} P(t, x, \varphi) D^T(\varphi) [FVF^*]^{-1} d\varphi \rho(t),$$

et donc $K(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$. Les équations sur \mathfrak{L} et K sont obtenues à partir de (5.25) et (5.30) comme les équations pour P :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}(t, x) A \mathfrak{L}(t, x) + K(t, x) \int_{\Omega} D(\varphi) \mathfrak{L}(t, \varphi) d\varphi, \\ \mathfrak{L}(t, x) = 0, x \in \partial\Omega, \\ \mathfrak{L}(0, x) = E(x) W^{1/2}, \end{array} \right. \quad (5.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K}{\partial t}(t, x) = \mathfrak{L}(t, x) \int_{\Omega} \mathfrak{L}^T(t, \varphi) D^T(\varphi) d\varphi [FVF^+]^{-1} \\ K(0, x) = 0, \end{array} \right. \quad (5.33)$$

$E(x)$ le noyau correspondant à l'opérateur E . L'équation (5.32) est prise sous l'espace V (sous-paragraphe 4.4.1), et donc, comme on a fait au sous-paragraphe 5.5.3. :

$$\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} [\mathcal{L}(t,x) h(t)]|_{\Omega_i} = \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} [\mathcal{L}(t,x) h(t)]|_{\Omega_j},$$

d'où :

$$\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \mathcal{L}_i(t,x) = \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \mathcal{L}_j(t,x), \text{ sur } \Gamma_{ij}, \quad (5.34)$$

si nous définissons $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}|_{\Omega_i}$, $i \in \overline{1,N}$. De même :

$$\sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} \mathcal{L}_i(t,x) + \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ji} \mathcal{L}_j(t,x) = 0, \text{ sur } \Gamma_{ij}. \quad (5.35)$$

L'équation (5.32) définit un problème de transmission dès que l'on arrive à montrer qu'elle est une équation variationnelle. Or, ceci est évident, puisque l'opérateur $K(t,x) \int_{\Omega} D(\varphi)$. $d\varphi$ est borné (et même compact), pour $K(t,x) \in L^2([0,T], H)$. On peut vérifier que :

$$K(t,x)|_{\Omega_i} = (K_{i1}(t,x) \dots K_{iN}(t,x)).$$

Donc les équations (5.32) et (5.33) peuvent être partitionnées en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial t}(t,x) &= \mathcal{A}_i \mathcal{L}_i(t,x) + \sum_{i=1}^N K_{ij}(t,x) \int_{\Omega_j} D_j(\sigma) \mathcal{L}_j(t,\sigma) d\sigma, \\ \frac{\partial K_{ij}}{\partial t}(t,x) &= \mathcal{L}_i(t,x) \int_{\Omega_j} \mathcal{L}_j^T(t,\sigma) D_j^T(\sigma) d\sigma [E_j V_j E_j^*]^{-1}, \quad j \in \overline{1,N} \\ \mathcal{L}_i(0,x) &= E_i(x) w_i^{1/2}, \quad K_{ij}(0,x) = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\mathcal{L}_i(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega^c,$$

avec $i \in \overline{1,N}$, plus les conditions de transmission (5.34) et (5.35), sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$.

Sur ce problème de transmission on peut appliquer les méthodes de résolution déjà développées au paragraphe 4.4, comme on a indiqué pour la décentralisation de l'équation de Riccati.

La méthode duale (sous-paragraphe 4.4.4.) appliquée à (5.18) et (5.36) devient :

$$\begin{cases} \lambda_{ij}(t) = \mathcal{E}(\Delta, \lambda_{ij}(t)) + \rho(\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \hat{z}_i(t-\Delta t) - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \hat{z}_j(t-\Delta t)), \\ \beta_{ij}(t) = \mathcal{E}(\Delta, \beta_{ij}(t)) + \rho(\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \mathcal{L}_i(t-\Delta t) - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \mathcal{L}_j(t-\Delta t)), \end{cases}$$

sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$, $i < j$. Les \hat{z}_i et les \mathcal{L}_i , $i \in \overline{1, N}$, sont solutions de (5.18) et (5.36), plus les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \hat{z}_i |_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0, \quad \mathcal{L}_i |_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_{ji} \mathcal{A}_{ij} \hat{z}_i &= -\lambda_{ij}, \quad \sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} \mathcal{L}_i = \beta_{ij} \\ \sigma_{ij} \mathcal{A}_{ji} \hat{z}_j &= \lambda_{ij}, \quad \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ji} \mathcal{L}_j = -\beta_{ij} \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma_{ij}, \quad i < j. \end{cases}$$

La méthode par prédiction des interations devient :

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}(t) &= \mathcal{E}(\Delta, \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \hat{z}_j(t)) \\ \lambda_{ji}(t) &= \mathcal{E}(\Delta, -\sigma_{ji} \mathcal{A}_{ij} \hat{z}_i(t)) \quad \text{sur } \Gamma_{ij}, \quad i < j, \\ \beta_{ij}(t) &= \mathcal{E}(\Delta, \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \mathcal{L}_j(t)) \\ \beta_{ji}(t) &= \mathcal{E}(\Delta, -\sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} \mathcal{L}_i(t)) \end{aligned}$$

les z_i et \mathcal{L}_i , $i \in \overline{1, N}$, solutions de (5.18) et (5.36), plus les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \hat{z}_i |_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} &= 0, \quad \mathcal{L}_i |_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0, \\ \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \hat{z}_i(t) &= \lambda_{ij}(t), \quad \sigma_{ij} \mathcal{A}_{ij} \hat{z}_j(t) = \lambda_{ji}(t) \quad , \text{ sur } \Gamma_{ij}, \\ \sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \mathcal{L}_i(t) &= \beta_{ij}(t), \quad \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ij} \mathcal{L}_j(t) = \beta_{ji}(t) \end{aligned}$$

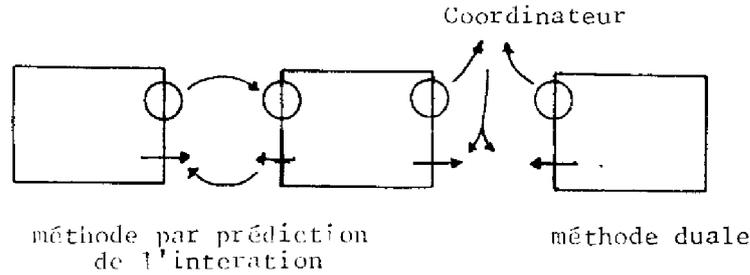


Figure 6.

De l'équation (5.36) on voit que, pour utiliser la méthode, il faut, à chaque $t \in [0, T]$, transmettre les valeurs de $\ell_j(t, x)$ sur le support de $D_j(x)$ du filtre du sous-système j sur le filtre du sous-système i . Les deux méthodes seront intéressantes seulement si les supports de $D_j(x)$, $j \in \overline{1, N}$ sont "petits". En plus, il faut transmettre les innovations $p_j(t)$, $j \in \overline{1, N}$, d'un filtre à l'autre. C'est une condition nécessaire pour avoir un filtre qui s'approche du filtre optimal.

Remarque 5.8.

Si on modélise une mesure ponctuelle sur p_i points $x_1, \dots, x_{p_i} \in \Omega_i$ par un opérateur D_i ou $D_i(x) = \text{col} (\partial(x - x_j))$, $j \in \overline{1, p_i}$, d'une façon formelle, on aura :

$$y_i(t) = \text{col} (z_i(t, x_j)), j \in \overline{1, p_i},$$

et les équations (5.36) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \ell_i}{\partial t}(t, x) = \lambda_i \ell_i(t, x) + \sum_{j=1}^N K_{ij}(t, x) (\ell_j(t, \bar{x}_1) \dots \ell_j(t, \bar{x}_1)) \\ \frac{\partial K_{ij}}{\partial t}(t, x) = \ell_i(t, x) (\ell_j(t, \bar{x}_1) \dots \ell_j(t, \bar{x}_1)) [F_j V_j F_j^*]^{-1}, \end{cases}$$

les $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_1$ les points de mesure dans Ω_j .

□

Remarque 5.9.

La considération d'un retard de $d \geq 0$ dans le transfert d'informations nous amène aux équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{z}_i}{\partial t}(t,x) = \mathcal{A}_i \hat{z}_i(t,x) + B_i(x) u_i(t) + \sum_{j=1}^N K_{ij}(t-d,x) d \rho_j(t-d), \\ \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial t}(t,x) = \mathcal{A}_i \mathcal{L}_i(t,x) + \sum_{j=1}^N K_{ij}(t,x) \int_{\Omega_j} D_j(\sigma) \mathcal{L}_j(t-d,x) d\sigma, \\ \frac{\partial K_{ij}}{\partial t}(t,x) = \mathcal{L}_i(t,x) \int_{\Omega_j} \mathcal{L}_j^T(t-d,x) D_j^T(\sigma) d\sigma [F_j V_j F_j^+]^{-1}, \end{cases}$$

qui sont très commodes pour les méthodes de résolution par différences finies. □

5.8 - EXEMPLES.

Nous avons testé les filtres décentralisés proposés au paragraphe 5.7. Considérons un système décrit par :

$$\begin{aligned} dz(t,x) = & \left[\alpha(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) + \beta(x) z(t,x) \right] dt + Bu(t,x) dt \\ & + d\omega(t,x), \end{aligned}$$

$$z(0,x) = z_0(x) = x(2-x),$$

$$z(t,0) = z(t,2) = 0,$$

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} z(t,x_1) \\ z(t,x_2) \\ z(t,x_3) \end{bmatrix} + \eta_1, \quad y_2(t) = \begin{bmatrix} z(t,x_4) \\ z(t,x_5) \\ z(t,x_6) \end{bmatrix} + \eta_2.$$

Ici $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$ sera décomposé en deux morceaux : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$,
 $\Omega_1 = (0,1)$, $\Omega_2 = (1,2)$. Evidemment, $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \Omega_1$, et $\{x_4, x_5, x_6\} \subset \Omega_2$.

Les équations du filtre global et des filtres décentralisés ont été résolues par une méthode implicite à différences finies, analogue (pour les équations de Chandrasekar) à celle proposée dans [BENSOUSSAN (1)].

Si on appelle $z_i = z|_{\Omega_i}$, \hat{z} le filtre global, \hat{z}_1, \hat{z}_2 les filtres des sous-systèmes (dans le filtre décentralisé), et si on fait :

$$\hat{z}_d = \hat{z}_1, \text{ sur } \Omega_1,$$

$$\hat{z}_d = \hat{z}_2, \text{ sur } \Omega_2,$$

$$\hat{z}_d(t, l) = (\hat{z}_1(t, l) + \hat{z}_2(t, l))/2,$$

on peut définir une erreur en pourcentage par :

$$\epsilon(t) = \left[\sup_{x \in \Gamma} \left\{ |\hat{z}(t, x) - \hat{z}_d(t, x)| / |\hat{z}(t, x)| \right\} \cdot 100 \right].$$

Les simulations ont donné les résultats exposés dans la figure 7, où on voit que le coordonnateur par prédiction des interactions donne de meilleurs résultats. Pour la comparaison, nous avons simulé les deux types de coordonnateur sans l'étape de correction. On voit que le prédicteur correspondant au coordonnateur par prédiction des interactions est très mauvais (par rapport aux autres), mais que le correcteur du coordonnateur dual n'améliore pas beaucoup son prédicteur.

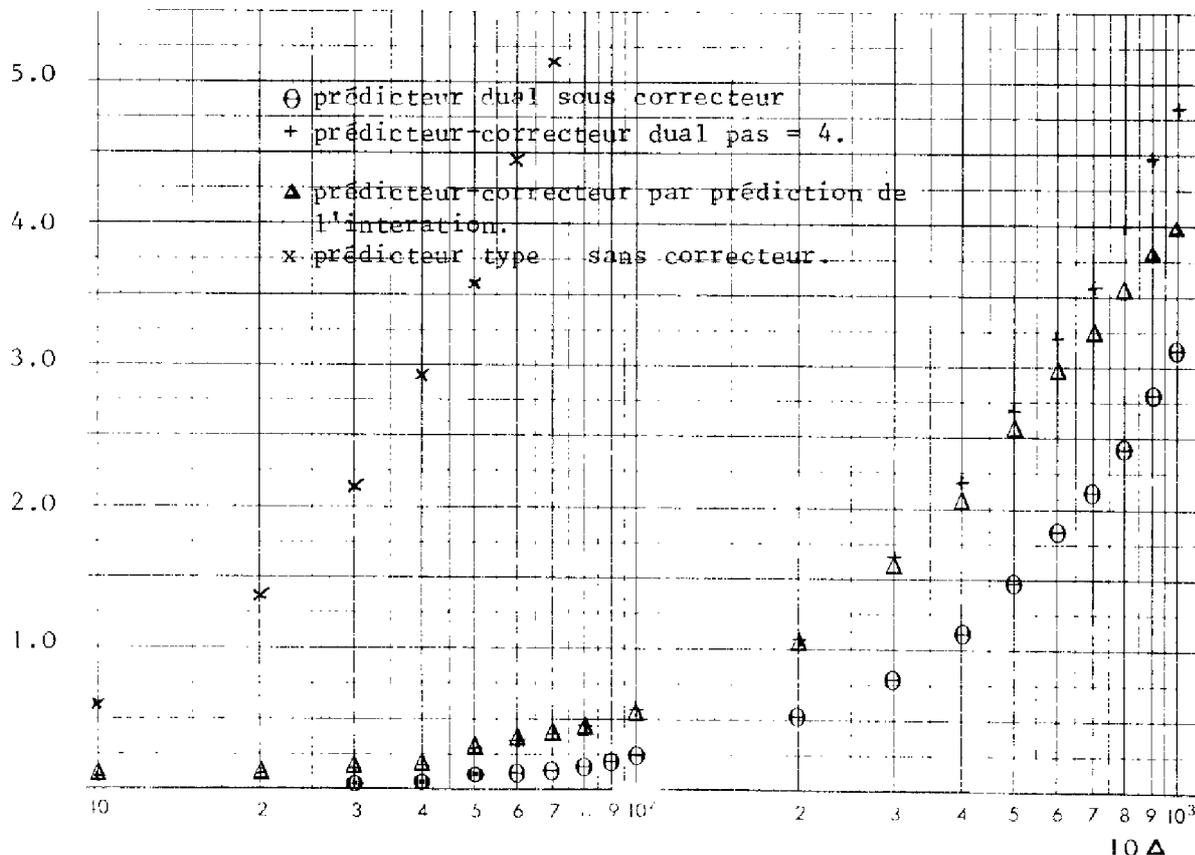


Figure 7. Erreur en pourcentage de plusieurs filtres.

Remarque 5.10.

Dans les simulations nous avons fait $Bu(t,x) = x(2-x)$, $\omega(t,x)$ un processus de Wiener ayant pour covariance $10(t-s)x(2-x)$, et $\eta_i(t)$ des bruits blancs ayant pour covariance $V_1 = 10$. Aussi :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0,001, & \text{si } x \in \Omega_1, \\ 0,003, & \text{si } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

et $\beta(x) = -1$. □

La méthode duale exigeant le choix d'un pas, nous avons étudié la variation de l'erreur $\epsilon(1000\Delta)$ pour différents pas. Nous avons obtenu la figure 8.

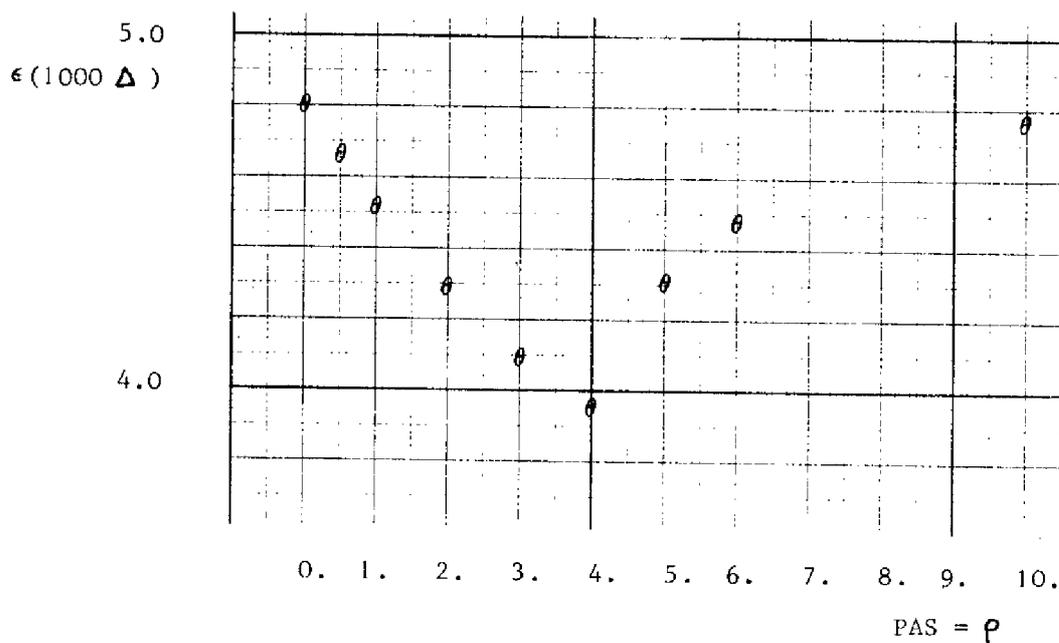


Figure 8. Erreur percentuel x pas ρ

La simulation du coordonnateur dual montrée à la Figure 8 a utilisé le pas $\rho = 4$.

CHAPITRE 6

CONCLUSION.

Nous avons présenté, dans ce mémoire, une généralisation des techniques et concepts du calcul hiérarchisé (comme ils sont exposés par [SINGH et TITLI (1)]) aux systèmes linéaires de dimension infinie, spécialement aux systèmes décrits par des équations différentielles partielles d'évolution. Les démonstrations de convergence et de la bonne définition des méthodes nous ont obligé à affaiblir le sens de certaines équations, principalement dans le cas de systèmes couplés par les conditions aux limites. Ce dernier problème a été étudié avec plus de profondeur, au niveau de la commande hiérarchisée et du filtrage décentralisé.

Il reste encore plusieurs points à éclaircir ou à étudier :

1) La démonstration de la convergence de la méthode par prédiction des itérations pour les systèmes couplés par les limites. Nous croyons que les théorèmes de [LASIECKA (1)] seront fort utiles.

2) L'utilisation de la représentation de [BALAKRISHNAN (1)] pour des commandes aux limites, en vue d'un changement des hypothèses de la proposition 3.2.

3) La méthode par prédiction des itérations pour les systèmes hyperboliques couplés par les limites et la méthode duale pour la classe de ces systèmes qui admet une description variationnelle.

4) L'application de la stratégie qui amène au filtre décentralisé de Sabah [SINGH et TITLI (1), Page 534], consistent à considérer le couplage comme un bruit, la moyenne et la covariance fournies par le filtre de l'autre sous-système. Ce filtre exige un meilleur contrôle des problèmes avant des bruits par les conditions aux limites.

5) Une justification plus précise des méthodes de décentralisation de l'équation de Riccati présentées aux paragraphes 5.5 - 5.8. Il nous semble qu'il faut toujours utiliser les méthodes de monotonie.

6) Généraliser les transformations de Chandrasekar pour des problèmes où $P_0 \neq 0$. Voir [CASTI et LJUNG(1)] pour commentaires.

7) Etudier plus profondément les méthodes numériques de résolution des équations (5.32) et (5.33) (sorties de transformations de Chandrasekar), en suivant, au moins, les résultats de [BENSOUSSAN (1), Chapitre 9].

8) Appliquer les résultats aux problèmes avec retard, seulement évoqués d'une façon très superficielle, et les étendre aux systèmes bilinéaires déjà étudiés [NOLDUS (1)].

APPENDICE

A.1 - DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.3.

Nous réécrivons l'algorithme proposé au sous-paragraphe 4.4.4., d'une façon abstraite (A.1.1), nous montrerons qu'il est bien défini (A.1.2), et après quelques inégalités (A.1.3), nous démontrerons la convergence des variables primales (A.1.4). Utilisant l'interprétation des paramètres de Lagrange comme dérivées normales, nous démontrerons aussi sa convergence (A.1.5). Nous discuterons de la vitesse de convergence (A.1.6) et de la remarque 4.1.2 (A.1.7).

A.1.1 - UN ALGORITHME ABSTRAIT.

Définissons les familles de formes :

$$A_i(t; \varphi_i, \eta_i) = \int_0^T [a_i(t; \varphi_i, \eta_i) - \langle d\varphi_i/dt, \eta_i \rangle v_i^* v_i] dt,$$

$$A_i^*(t; \varphi_i, \eta_i) = \int_0^T [\overline{a_i(t; \eta_i, \varphi_i)} + \langle d\eta_i/dt, \varphi_i \rangle v_i^* v_i] dt,$$

$$A(t; \varphi, \eta) = \sum_{i=1}^N A_i(t; \varphi_i, \eta_i),$$

$$A^*(t; \varphi, \eta) = \sum_{i=1}^N A_i^*(t; \varphi_i, \eta_i),$$

$$\varphi = \text{col}(\varphi_i), \quad \eta = \text{col}(\eta_i), \quad \varphi_i \text{ et } \eta_i \in W_i, \quad t \in [0, T].$$

Le problème global (sans contraintes sur la commande) revient à résoudre les égalités variationnelles suivantes :

$$\Lambda(t; z, \varphi) = - \langle B R^{-1} B^* p, \varphi \rangle + \langle z_0, \varphi(0) \rangle_H$$

$$- \sum_{i < j} \langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \theta_{ij} \varphi_i - \sigma_{ji} \theta_{ji} \varphi_j \rangle_{ij},$$

$$\forall \varphi \in W \text{ et tel que } \varphi(T) = 0,$$

(A.1)

$$\begin{aligned} \Lambda^*(t; p, \eta) = & - \langle D(z-\bar{z}), \eta \rangle + \langle p_T, \eta(T) \rangle_H \\ & - \sum_{i < j} \langle \beta_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{E}_{ij} \eta_i - \sigma_{ji} \mathcal{E}_{ji} \eta_j \rangle_{ij}, \end{aligned}$$

$\forall \eta \in W$ et tel que $\eta(0) = 0$, (A.2)

où $\langle \dots \rangle$ représente la dualité dans $L^2([0, T], \mathcal{V})$ et $\langle \dots \rangle_{ij}$, la dualité sur les espaces qui rendent vraie la formule de Green (4.22), les sommations prises sur les $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$.

Définissons aussi :

$$\lambda = \text{col} (\lambda_{ij}), \quad \beta = \text{col} (\beta_{ij}), \tag{A.3}$$

les ij tels que $\Gamma_{ij} \neq \emptyset$ pris dans un ordre quelconque (mais toujours le même), et :

$$\mathbb{B} \varphi = \text{col} (\sigma_{ij} \mathcal{B}_{ij} \varphi_i - \sigma_{ji} \mathcal{B}_{ji} \varphi_j),$$

$$\mathbb{C} \eta = \text{col} (\sigma_{ij} \mathcal{E}_{ij} \eta_i - \sigma_{ji} \mathcal{E}_{ji} \eta_j).$$

\mathbb{B} et \mathbb{C} sont des opérateurs sur des espaces fonctionnels ayant $[0, T] \times \prod_{i < j} \Gamma_{ij}$ pour support.

On connaît l'existence d'un opérateur linéaire [LIONS (1)] $\Lambda \in \mathcal{L}(L^2([0, T], \mathcal{V}), L^2([0, T], \mathcal{V}^*))$ tel que :

$$\Lambda(t; z, \varphi) = \langle \Lambda z, \varphi \rangle, \quad \Lambda^*(t; p, \eta) = \langle \Lambda^* p, \eta \rangle$$

Avec ces notations, le problème global s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Lambda z, \varphi \rangle + \langle \mathbb{B} R^{-1} \mathbb{B}^* p, \varphi \rangle &= \langle z_0, \varphi(0) \rangle_H \end{aligned} \right. \tag{A.4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \Lambda^* p, \eta \rangle + \langle D(z-\bar{z}), \eta \rangle &= \langle p_T, \eta(T) \rangle_H \end{aligned} \right. \tag{A.5}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{B} z &= 0 \end{aligned} \right. \tag{A.6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{C} p &= 0 \end{aligned} \right. \tag{A.7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \forall \varphi, \eta \in W \text{ tels que } \varphi(T) = 0 \text{ et } \eta(0) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'algorithme s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho^k \mathbb{B} z^k, & (A.8) \\ \beta^{k+1} = \beta^k + \rho^k \mathbb{C} p^k, & (A.9) \end{cases}$$

z^k et p^k solutions de :

$$\begin{cases} \langle \mathbb{A} z, \varphi \rangle + \langle \mathbb{B} R^{-1} \mathbb{B}^* p, \varphi \rangle = \langle z_0, \varphi(0) \rangle_H - \langle \lambda, \mathbb{B} \varphi \rangle_\Gamma, & (A.10) \\ \forall \varphi \in W \text{ avec } \varphi(T) = 0, \\ \langle \mathbb{A}^* p, \eta \rangle + \langle D(z-\bar{z}), \eta \rangle = \langle p_T, \eta(T) \rangle_H - \langle \beta, \mathbb{C} \eta \rangle_\Gamma, & (A.11) \\ \forall \eta \in W \text{ avec } \eta(0) = 0, \end{cases}$$

où $\langle \varphi, \eta \rangle_\Gamma = \sum_{i < j} \langle \varphi_{ij}, \eta_{ij} \rangle_{ij}$. Des hypothèses de la proposition

4.3, nous avons $\|\mathbb{B}\| \leq \pi$, $\|\mathbb{C}\| \leq \pi$, et (voir [LIONS et MAGENES (1), page 249]) :

$$\langle \mathbb{A} z, z \rangle \geq \alpha \|z\|^2, \quad \langle \mathbb{A}^* p, p \rangle \geq \alpha \|p\|^2, \quad (A.12)$$

la norme $\|\cdot\|$ prise sur $L^2([0, T], \mathcal{V})$.

A.1.2 - L'ALGORITHME EST BIEN DEFINI.

A défaut d'un théorème de point-selle, nous démontrerons directement l'existence des paramètres λ et β obéissant à (A.10) et (A.11).

La formule de Green modifiée [LIONS et MAGENES (1), page 132] nous amène de (4.46) et (4.47) à (4.49) et (4.50), ce qui démontre les égalités :

$$\begin{cases} \lambda_{ij} = -\sigma_{ji} \wedge_{ij} z_i = \sigma_{ij} \wedge_{ji} z_j \\ \beta_{ij} = \sigma_{ji} \mathcal{T}_{ij} p_i = -\sigma_{ij} \mathcal{T}_{ji} p_j \end{cases}, \text{ sur } \Gamma_{ij}, i < j,$$

dans le sens des espaces sur lesquels la formule de Green citée est vraie. La substitution directe de ces expressions dans (A.10), (A.11) démontre que $\lambda = \text{col}(\lambda_{ij})$ et $\beta = \text{col}(\beta_{ij})$ sont solutions.

Comme on a pris \mathcal{G}_{ij} et \mathcal{E}_{ij} par les traces sur Γ_{ij} , la régularité de $\mathbb{B} z$ et de \mathcal{C}_p est plus grande que celle de λ et β , et l'algorithme est bien défini. En plus, il respecte les conditions de compatibilité [LIONS et MAGENES (1), Vol. 2, Page 19], puisque $z_o^k = z_o$ et $p_o^k = p_o$ pour tout k , et donc :

$$\sigma_{ij} \mathcal{G}_{ij} z_{io}^k - \sigma_{ji} \mathcal{G}_{ji} z_{jo}^k = 0,$$

ce qui implique :

$$\lambda_{ij}^k(o) = - \sigma_{ji} \mathcal{G}_{ij} z_{io}^k = \sigma_{ij} \mathcal{G}_{ji} z_{jo}^k$$

pour tout k (et de même pour $\beta_{ij}^k(o)$ et $p^k(o)$).

A.1.3 - DEUX INEGALITES.

Supposons (z, p, λ, β) solutions du problème global, et $(z^k, p^k, \lambda^k, \beta^k)$ solutions trouvées à l'itération k . Si on fait $\varphi = z^k - z$ dans (A.4) et $\varphi = z - z^k$ dans (A.10), après la soustraction des deux équations et l'addition de :

$$\langle \lambda, \mathbb{B} z \rangle = 0,$$

on aura :

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A} z - \mathbb{A} z^k, z^k - z \rangle + \langle \mathbb{B} R^{-1} \mathbb{B}^* (p - p^k), z^k - z \rangle \\ + \langle \lambda - \lambda^k, \mathbb{B} (z^k - z) \rangle_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La coercivité de $\Lambda(t; z, \varphi)$ implique que :

$$\langle \mathbb{A} z - \mathbb{A} z^k, z^k - z \rangle \leq - \alpha \|z - z^k\|^2 \quad (\text{A.14})$$

Donc, de (A.13), (A.14), et de la norme de $\mathbb{B} R^{-1} \mathbb{B}^*$, on a :

$$- \langle \lambda - \lambda^k, \mathbb{B}(z^k - z) \rangle_{\Gamma} \geq \alpha \|z^k - z\|^2 - \mu \|z^k - z\| \|p^k - p\| \quad (\text{A.15})$$

De la même façon, on obtient :

$$- \langle \beta - \beta^k, \mathbb{C}(p^k - p) \rangle_{\Gamma} \geq \alpha \|p^k - p\|^2 - \gamma \|z^k - z\| \|p^k - p\| \quad (\text{A.16})$$

à partir de (A.5) et (A.11).

A.1.4 - CONVERGENCE DES VARIABLES PRIMALES.

Définissons $r^k = \lambda^k - \lambda$ et $s^k = \beta^k - \beta$. De (A.8) :

$$\begin{aligned} r^{k+1} &= \lambda^{k+1} - \lambda = \lambda^k - \lambda + \rho^k \mathbb{B} z^k \\ &= \lambda^k - \lambda + \rho^k \mathbb{B} (z^k - z) \\ &= r^k + \rho^k \mathbb{B} (z^k - z). \end{aligned}$$

De la même façon :

$$s^{k+1} = s^k + \rho^k \mathbb{C} (p^k - p).$$

Considérons l'erreur (avec des notations évidentes)

$$\begin{aligned} &\|r^{k+1}\|_{\Gamma}^2 + \|s^{k+1}\|_{\Gamma}^2 \\ &= \|r^k\|_{\Gamma}^2 + \|s^k\|_{\Gamma}^2 + (\rho^k)^2 (\|\mathbb{B} (z^k - z)\|_{\Gamma}^2 + \|\mathbb{C} (p^k - p)\|_{\Gamma}^2) \\ &\quad + 2\rho^k (\langle r^k, \mathbb{B} (z^k - z) \rangle_{\Gamma} + \langle s^k, \mathbb{C} (p^k - p) \rangle_{\Gamma}). \end{aligned}$$

D'après la norme de \mathbb{B} et \mathbb{C} nous avons que :

$$\begin{aligned} &\|r^k\|_{\Gamma}^2 + \|s^k\|_{\Gamma}^2 \geq \|r^{k+1}\|_{\Gamma}^2 + \|s^{k+1}\|_{\Gamma}^2 - (\rho^k)^2 (\|z^k - z\|^2 + \|p^k - p\|^2) \\ &\quad - 2\rho^k (\langle r^k, \mathbb{B} (z^k - z) \rangle_{\Gamma} + \langle s^k, \mathbb{C} (p^k - p) \rangle_{\Gamma}). \end{aligned}$$

L'utilisation de (A.15) et (A.16) nous conduit à :

$$\begin{aligned} \|r^k\|_r^2 + \|s^k\|_r^2 \geq \|r^{k+1}\|_r^2 + \|s^{k+1}\|_r^2 - (\rho^k)^2 \pi^2 (\|z-z^k\|^2 + \|p-p^k\|^2) \\ + 2\rho^k \alpha (\|z-z^k\|^2 + \|p-p^k\|^2) - 2\rho^k (\sigma + \mu) \|z^k - z\| \|p^k - p\| \end{aligned} \quad (A.17)$$

Si on appelle $u_k = \|z-z^k\|$ et $v_k = \|p-p^k\|$, (A.17) devient :

$$\|r^k\|_r^2 + \|s^k\|_r^2 \geq \|r^{k+1}\|_r^2 + \|s^{k+1}\|_r^2 + F(\rho^k, u_k, v_k), \quad (A.18)$$

où

$$F(\rho, u, v) = \rho(2\alpha - \rho\pi^2) u^2 - 2\rho(\sigma + \mu) uv + \rho(2\alpha - \rho\pi^2) v^2.$$

Des hypothèses de la proposition 4.3, $\rho^k(2\alpha - \rho^k\pi^2) > 0$
et $2\rho^k(\alpha - \sigma - \mu) - (\rho^k)^2\pi^2 > 0$, donc :

$$F(\rho^k, u_k, v_k) \geq \rho^k(2\alpha - \sigma - \mu - \rho^k\pi^2) (u_k^2 + v_k^2) \geq 0 \quad (A.19)$$

pour tous u_k, v_k , tels que $u_k v_k \neq 0$.

De (A.18) $\|r^k\|_r; k \in \mathbb{N}$ et $\|s^k\|_r; k \in \mathbb{N}$ sont suites décroissantes et donc convergentes. Alors :

$F(\rho^k, u_k, v_k)$ converge vers $z=0$, et de (A.19).

$$\|z-z^k\| \rightarrow 0, \quad \|p-p^k\| \rightarrow 0.$$

A.1.5 - CONVERGENCE DES PARAMETRES.

Des relations sur λ_{ij} et β_{ij} montrées au sous-paragraphe A.1.2, et de la continuité des opérateurs Δ_{ij} et Υ_{ij} (condition pour la validité de la formule de Green) et des hypothèses sur les σ_{ij} , la convergence de z^k et p^k entraîne la convergence forte de λ^k et β^k vers λ et β , nécessairement solutions du problème global.

A.1.6 - CONSIDERATIONS SUR LA VITESSE DE CONVERGENCE.

La décroissance maximale de l'erreur dans l'inégalité (A.18)

aura lieu si $F(\rho^k, u_k, v_k)$ est maximal pour tous les u_k et v_k , d'où :

$$\rho^k = (2\alpha - \sigma - \mu) / \pi^2$$

A.1.7 - LA CONDITION (a) DE LA PROPOSITION 4.3.

La condition $2\alpha > \sigma + \mu$ n'est pas essentielle, si on remplace les variables par :

$$\tilde{z} = z e^{-\omega t}, \tilde{p} = p e^{\omega t}, \omega > 0,$$

alors :

$$\begin{aligned} A(t; \tilde{z}, \tilde{z}) &= \int_0^T [a(t; z e^{-\omega t}, z e^{-\omega t}) - \langle \frac{dz}{dt} e^{-\omega t}, z e^{-\omega t} \rangle_{V^*V} \\ &\quad + \omega \langle z e^{-\omega t}, z e^{-\omega t} \rangle_{V^*V}] dt \\ &= \int_0^T a(t; z, z) - \langle \frac{dz}{dt}, z \rangle_{V^*V} e^{-2\omega t} dt + \omega \|z\|^2 \\ &\geq \alpha \|z\|^2 + \omega \|\tilde{z}\|^2 \geq (\alpha + \omega) \|\tilde{z}\|^2, \end{aligned}$$

les normes prises sur $L^2([0, T], V)$. De la même façon, et comme $\|\tilde{p}\| \leq \|p\| e^{\omega T}$, :

$$A^*(t; \tilde{p}, \tilde{p}) \geq e^{2\omega T} \alpha \|p\|^2 + \omega \|\tilde{p}\|^2 \geq (\alpha + \omega) \|\tilde{p}\|^2.$$

Si on choisit ω suffisamment grand pour avoir $2(\alpha + \omega) > \sigma + \mu$, la condition (a) de la proposition 4.3 sera remplie.

A.1.8 - UNE REMARQUE.

Nous avons toujours supposé la validité d'une certaine formule de Green sans expliciter les espaces fonctionnels. Comme exemple, si $z_0 \in H^1(\Omega)$, V (et $\mathcal{V}) \subset H^1(\Omega)$, $B u(t) \in L^2(Q)$, il faut choisir \mathcal{B}_{ij} comme un opérateur entre $H^{2,0}(Q_i)$ et $H_0^{3/2, 3/4}([0, T] \times \Gamma_{ij})$, et donc \mathcal{B} et \mathcal{C} comme des opérateurs de $H_0^{2,1}(Q_i)$ pour $H_0^{3/2, 3/4}([0, T] \times \Gamma)$, $\Gamma = \prod_{i < j} \Gamma_{ij}$.

Aussi, $\lambda, \beta \in H^{1/2, 1/4}([0, T] \times \Gamma)$. Dans ce cas, la formule de Green de [LIONS et MAGENES (1), Vol. 2, Page 5] est applicable. Mais tous ces calculs

font l'hypothèse implicite de la différentiabilité des surfaces $\partial\Omega$, $\partial\Omega_i$ et Γ_{ij} . Pour des problèmes un peu différents, comme quand Ω est un pavé dans le \mathbb{R}^n , il faut travailler avec des espaces de Sobolev avec des poids [LADYZENSKAJA et al (1), LASIECKA (1)].

A.2 - DEMONSTRATION ET EXTENSION DE LA PROPOSITION 4.4.

Cette proposition est une extension de la Théorie du découplage présenté dans [LIONS (2), paragraphes III.4 et III.5] aux problèmes aux deux bouts ayant des conditions aux limites non homogènes, soit pour la variable d'état, soit pour la variable adjointe.

Nous n'écrivons pas l'indice i , présent sur toutes les variables dans la proposition 4.4. Nous maintiendrons l'indice ij .

A.2.1 - DEFINITION DE P et r.

En suivant le raisonnement direct de [LIONS (2)], nous définissons $P(t)$ et $r(t)$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{dt} = A(t)\varphi - B R^{-1} B^* \eta, \\ \varphi(t, x) = 0, x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i; \sigma_{ij} \lambda_{ij} \varphi = 0, \text{ sur } \Gamma_{ij}, \\ \varphi(\rho, x) = h, 0 \leq \rho < T, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta}{dt} = -A^*(t)\eta - D\varphi, \\ \eta(t, x) = 0, x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i; \sigma_{ij} \gamma_{ij} \eta = 0, \text{ sur } \Gamma_{ij}, \\ \eta(T, x) = 0, \end{array} \right.$$

$$P(\rho) h = \eta(\rho),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = A(t)\bar{\varphi} - B R^{-1} B^* \bar{\eta} \\ \bar{\varphi}(t, x) = 0, x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i; \sigma_{ij} \lambda_{ij} \bar{\varphi} = -\lambda_{ij}, \text{ sur } \Gamma_{ij}, \\ \bar{\varphi}(\rho, x) = 0, 0 \leq \rho < T, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{\eta}}{dt} = -A^*(t)\bar{\eta} - D(\bar{\varphi} - \bar{z}) \\ \bar{\eta}(t,x) = 0, x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_i ; \sigma_{ij} \mathcal{T}_{ij} \bar{\eta} = \beta_{ij}, \text{ sur } \Gamma_{ij}, \\ \bar{\eta}(T,x) = 0 \end{array} \right.$$

$$r_i(\varphi) = \bar{\eta}(\varphi).$$

Les équations ci-dessus sont comprises au sens variationnel, et si $i > j$, il faut changer le signe des conditions sur $\Gamma_{ji} = \Gamma_{ij}$.

Par [ibid. Pages 132 - 141], l'équation :

$$p(t) = P(t) z(t) + r(t) \tag{A.20}$$

est vraie p.p. en $[0,T]$, avec :

$P(t) \in \mathcal{L}(H_i)$, $P(t) = P^*(t)$, et $t \mapsto (P(t)h, \bar{h})$ continue en $[0,T]$ pour tous $h, \bar{h} \in H_i$. En plus, si $B(\cdot) \in L^\infty([0,T], (U_i, H_i))$, $r_i \in W_i$ [ibid., lemma 4.2, Page 146], et donc $P_i(\cdot) z_i(\cdot) = r_i \in W_i$ [ibid., lemma 4.2, page 146], et donc $P_i(\cdot) z_i(\cdot) = p_i(\cdot) - r_i(\cdot) \in W_i$.

Remarque A.1.

Pour des hypothèses plus larges ($B(\cdot) \in L^\infty([0,T], \mathcal{L}(U_i, V_i^*))$), voir [ibid, paragraphe III-5]. □

A.2.2 - CALCULS FORMELS.

Les sous-problèmes peuvent être décrits par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle dz/dt - A z + B R^{-1} B^* p, \varphi \rangle_{V_i^* V_i} + \sum_{i < j} \langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{G}_{ij} \varphi \rangle_{ij} \\ = \langle z_0, \varphi(0) \rangle_{H_i}, \end{array} \right. \tag{A.21}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle -dp/dt - A^* p - D(z - \bar{z}), \eta \rangle_{V_i^* V_i} + \sum_{i < j} \langle \beta_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{G}_{ij} \eta \rangle_{ij} \\ = \langle p_T, \eta(T) \rangle_{H_i}, \end{array} \right. \tag{A.22}$$

, $\forall \varphi, \eta$ tels que $\varphi(T) = 0$ et $\eta(0) = 0$.

La substitution de (A.20) dans (A.22) donne :

$$\begin{aligned} & \langle -d(Pz)/dt - dr/dt - A^* Pz - A^* r - D(z-\bar{z}), \eta \rangle_{V_i^* V_i} \\ & + \sum_{i < j} \langle \beta_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{E}_{ij} \eta \rangle_{ij} = \langle P_T, \eta(T) \rangle_{H_i} \end{aligned} \quad (A.23)$$

De (A.21) :

$$\begin{aligned} - \langle P dz/dt, \eta \rangle_{V^* V} &= - \langle dz/dt, P \eta \rangle_{V^* V} \\ &= - \langle Az - B R^{-1} B^* p, P \eta \rangle_{V^* V} + \sum_{i < j} \langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{E}_{ij} P \eta \rangle_{ij} \end{aligned} \quad (A.24)$$

Si nous définissons l'opérateur dP/dt par :

$$\eta \mapsto d(P\eta)/dt - P(d\eta/dt),$$

on peut démontrer qu'il est continu entre l'espace de fonctions $\eta \in W_i$, telles que $P(t)\eta \in W_i$ et $d\eta/dt + A(t)\eta \in L^2([0, T], H_i)$ [ibd., Page 149]. D'où la relation suivante est vraie :

$d(P(t)\eta)/dt = (dP(t)/dt) \cdot \eta + P(t) d\eta/dt$. Alors, de (A.23) et (A.24) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & [\langle (dP(t)/dt + A^* P(t) + D) z, \eta \rangle_{V_i^* V_i} \\ & + \langle (A - B R^{-1} B^* P) z, P(t) \eta \rangle_{V_i^* V_i}] \\ & + [\langle dr/dt + A^* r - D\bar{z}, \eta \rangle_{V_i^* V_i} - \langle B R^{-1} B^* r, P \eta \rangle_{V_i^* V_i} \\ & - \sum_{i < j} (\langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{E}_{ij} P \eta \rangle_{ij} + \langle \beta_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{E}_{ij} \eta \rangle_{ij}) = 0, \end{aligned} \quad (A.25)$$

d'où les équations de la proposition 4.4.

A.2.3 - JUSTIFICATION DES CALCULS.

Il faut vérifier si $r(.) \in W_i$, puisque, alors, $P(.)z(.) = p(.) - r(.) \in W_i$. La régularité de $r(.)$ dépend des deux derniers termes de (A.25). Sans ces deux termes, le terme 4.7 [ibd., page 146] montre ce que l'on veut, sous l'hypothèse de $B(t) \in \mathcal{L}(U_i, H_i)$. Dans notre cas,

l'affirmation vient de la validité de la formule de Green.

Par exemple, si les données sont suffisamment régulières ($\partial\Omega_i$ de classe C^∞ , $z_0 \in H^1(\Omega_i)$), $\varphi \in H^{2,1}(Q_i)$ (dans le sous-paragraphe A.2.1) et donc $\varphi(\varrho, x) \in H^1(\Omega_i)$, d'où $P(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), H^1(\Omega_i))$, $P(t)$ étant continu par le théorème du graphe fermé. Donc $P(\cdot) z(\cdot) \in L^2([0, T], V_i)$ (où $V_i \subset H^1(\Omega_i)$), et $r(t) = p(t) - P(t) z(t) \in L^2([0, T], V_i)$. En plus, $\eta(t) \in L^2(\Omega_i)$, et donc $P(t)\eta(t) \in H^1(\Omega_i)$, d'où $\sigma_{ij} \theta_{ij} P(t)\eta(t) \in H^{1/2}(\Sigma_{ij})$. Comme $\lambda_{ij} \in H^{-1/2}(\Sigma_{ij})$, la fonctionnelle :

$$\sum_{i < j} \langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \theta_{ij} P \eta \rangle_{ij}$$

est continue en η . De même pour la fonctionnelle :

$$\sum_{i < j} \langle \beta_{ij}, \sigma_{ij} \theta_{ij} \eta \rangle_{ij}.$$

Donc l'équation sur $r(t)$ nous indique que $r(\cdot) \in H^{2,1}(Q_i) \subset W_i$.

A.2.4 - L'UNICITE.

Si $P(t)$ et $r(t)$ obéissent les équations de la proposition 4.4, et si en plus (A.20), on peut refaire les calculs et vérifier que, nécessairement, $p(t)$ obéit à l'équation adjointe. L'unicité des solutions du problème aux deux bouts termine la démonstration de l'unicité de $P(t)$ et $r(t)$.

A.2.5 - EXTENSION AUX PROBLEMES AYANT DES CONDITIONS TYPE DIRICHLET SUR Γ_{ij} .

Ce type de problème apparaît dans les sous-problèmes générés par la méthode de prédiction de l'itération (sous-paragraphe 4.4.3). Il faut remplacer les deux derniers termes de (A.25) par :

$$\sum_{i < j} (\langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \Lambda_{ij} P(t) \eta \rangle_{ij} + \langle \beta_{ij}, \sigma_{ij} \Upsilon_{ij} \eta \rangle_{ij})$$

et vérifier que cette fois, $\sigma_{ij} \Lambda_{ij} P(t) \eta \in H^{-1/2}(\Gamma_{ij})$, $\lambda_{ij}(t) \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$, et les formes linéaires sont continues.

A.2.6 - EXTENSION AUX PROBLEMES HYPERBOLIQUES.

Les sous-problèmes générés par la méthode du paragraphe 4.3.4 ont été déjà résolus par [VINTER et JOHNSON (1)] avec un raisonnement proche du nôtre. La différence réside dans la démonstration de la différentiabilité de $r(\cdot)$ et de $P(\cdot) z(\cdot)$, tout en utilisant les résultats de régularité connus pour la formule de Green (4.9). Dans le cas particulier où $n = 1$ des résultats plus complets sont présentés dans [RUSSEL (1)].

A.2.7 - APPLICATION DE LA THEORIE DES NOYAUX.

La théorie des noyaux [SCHWARTZ (2), GUELFAND et VILENKIN (1)] nous dit que :

$$P(t) z(t) = \int_{\Omega_i} P(t; x, \varphi) z(t, \varphi) d\varphi, \quad (A.26)$$

pour tout $z(\cdot) \in \mathcal{D}(Q_i)$. Puisque $P(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i))$, alors $P_i(t; x, \varphi) \in L^2(\Omega_i \times \Omega_i)$ pour chaque $t \in [0, T]$. La substitution de (A.26) dans les équations de la proposition 4.4, amène à des équations intégro-différentielles sur P . Si on représente par $A(t, x)$ l'opérateur $A(t)$ appliqué sur la variable x , et par $A(t, \varphi)$, le même appliqué sur φ , on aura :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \left[\frac{dP}{dt} (T; x, \varphi) + (A^*(t, x) + A^*(t, \varphi)) P(t; x, \varphi) \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega_i} P(t; x, \sigma) B R^{-1} B^* P(t; \sigma, \varphi) d\sigma + D(t; x, \varphi) \right] \\ & \quad z(t, \varphi) d\varphi \eta(t, \varphi) dx \\ & = - \sum_{i < j} \int_{\Gamma_{ij}} \int_{\Omega_{ij}} \ell_{ij}(t, \varphi) P(t; x, \varphi) \mathcal{A}_{ij}(t, \varphi) z(t, \varphi) d\Gamma_{ij}(\varphi) \\ & \quad \eta(t, x) dx \end{aligned} \quad (A.27)$$

les termes aux limites proviennent de la formule de Green [LIONS et MAGENES, Page 133] appliquée au terme $\langle P(t; x, \varphi) A(t, \varphi) z(t, \varphi) \eta(t, x) \rangle$. Du membre à gauche de (A.27), il vient l'équation différentielle sur $P(t; x, \varphi)$, $(t, x, \varphi) \in [0, T] \times \Omega_i \times \Omega_i$, et du membre à droite des conditions aux

limites. Dans le cas de conditions type Neumann imposées sur z , on aura :

$$\sigma_{ij} \mathcal{G}_{ij} P(t; x, \varphi) = 0, \varphi \in \Gamma_{ij}, x \in \Omega_i,$$

et, par la symétrie de P ,

$$\sigma_{ij} \mathcal{G}_{ij} P(t; x, \varphi) = 0, \varphi \in \Omega_i, x \in \Gamma_{ij}.$$

Remarque A.2.

Avec les noyaux, il devient facile d'interpréter l'avant-dernier terme de (A.25), c'est-à-dire, l'opérateur P_{ij} de la proposition 4.4. Dans un cas explicite, où $\sigma_{ij} = 1$ et \mathcal{G}_{ij} la trace sur Γ_{ij} ,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{ij}, \sigma_{ij} \mathcal{G}_{ij} P \eta \rangle_{ij} &= \int_{\Gamma_{ij}} \lambda_{ij}(t, x) \int_{\Omega_i} P(t; x, \varphi) \eta(t, \varphi) d\varphi d\Gamma_{ij}(x) \\ &= \int_{\Omega_i} \int_{\Gamma_{ij}} P(t; x, \varphi) \lambda_{ij}(t, \varphi) d\Gamma_{ij}(\varphi) \eta(t, x) dx \\ &= \langle \bar{P}_{ij}(t) \lambda_{ij}(t), \eta(t) \rangle_{\Omega_i}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\bar{P}_{ij}(t) \lambda_{ij}(t) = \int_{\Gamma_{ij}} P(t; x, \varphi) \lambda_{ij}(t, \varphi) d\Gamma_{ij}(\varphi), x \in \Omega_i. \quad \square$$

A.3 - QUELQUES THEOREMES.

Nous citerons ici, quelques théorèmes qui ont été nécessaires dans le texte.

Proposition A.1. [LIONS (2), Pages 7-10]. Soit le coût :

$$J(u) = \mathcal{T}(u, u) - 2L(u), u \in U,$$

U un espace de Banach, $\mathcal{T}(u, v)$ une forme bilinéaire continue symétrique coercive :

$$\mathcal{T}(u, u) \geq \alpha \|u\|_U^2, \forall u \in U, \alpha > 0,$$

et $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur U . Soit $U' \subset U$ un ensemble convexe fermé. Il existe un élément unique $u \in U'$, tel que :

$$J(u) = \inf \{ J(v), v \in U' \},$$

qui est caractérisé par :

$$\pi(u, v-u) - L(v-u) \geq 0, \forall v \in U', u \in U'.$$

Remarque A.3.

Le réel α sera appelé le coefficient de coercivité de $J(u)$. \square

Plus généralement, on a :

Proposition A.2. [ibid., page 10-11]. Soit le coût $J(u) : U \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe et différentiable, U un espace de Banach, et $J(u)$ tel que :

$$J(u) \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \|u\|_U \rightarrow \infty, \quad u \in U',$$

$U' \subset U$ un ensemble convexe fermé. Il existe un élément unique qui minimise $J(u)$ dans U' , et il est caractérisé par :

$$\left(\frac{\partial J}{\partial u}, v - u \right)_{U^*U} \geq 0, \forall v \in U', u \in U'.$$

De plus la dérivée de $J(u)$ est monotone :

$$\left(\frac{\partial J}{\partial u}(v) - \frac{\partial J}{\partial u}(u), v - u \right)_{U^*U} \geq 0, \forall v, u \in U'.$$

Proposition A.3. [BENSOUSSAN et al (1), Page 154]. Soit $J(.) : U \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe semi-continue inférieurement, U un espace de Hilbert, $U' \subset U$, un convexe fermé, et $F(.) : U \rightarrow \Psi$ une fonction convexe. On suppose Ψ un espace de Banach muni d'un cône Λ qui définit un ordre partiel ($\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda$). De plus, on suppose qu'il existe une sphère dans Ψ de centre l'origine et de rayon a , de telle sorte que, pour tout φ avec $\|\varphi\| = a$, l'équation $F(u) = \varphi$ à une solution dans U' . Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in U'$ minimise $J(u)$ dans U' sujet à la contrainte $F(u) \leq 0$ est qu'il existe $\lambda \in \Psi^*$ tel que (u, λ) soit un point selle du Lagrangien.

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, F(u) \rangle_{\Psi^* \Psi}$$

sur $U' \times \Lambda$.

Remarque A.4.

Notons que, se (u, λ) est un point-selle de $L(v, \eta)$,
alors :

$$\min_{v \in U'} \max_{\eta \in \Lambda} L(v, \eta) = \max_{\eta \in \Lambda} \min_{v \in U'} L(v, \eta),$$

et que :

$$L(u, \eta) \leq L(u, \lambda) \leq L(v, \eta), \forall v \in U', \forall \eta \in \Lambda, \text{ [LUENBERGER (1), § 8.4].} \quad \square$$

Proposition A.4. Soit \mathcal{J}' un opérateur de X_{ad} dans X^* , X un espace de Hilbert et X_{ad} un ensemble convexe fermé contenu dans X . On suppose \mathcal{J}' vérifiant :

(a) \mathcal{J}' est borné,

(b) \mathcal{J}' est hémicontinu, c'est-à-dire, la fonction $\eta' \langle \mathcal{J}'(x + \eta x'), \varphi \rangle_{X^*X}$ est continue sur \mathbb{R} , pour chaque x, x' et $\varphi \in X_{ad}$,

(c) \mathcal{J}' est coercif : il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\langle \mathcal{J}'(x) - \mathcal{J}'(x'), x - x' \rangle_{X^*X} \geq \alpha \|x - x'\|_X^2$$

pour tout $x, x' \in X_{ad}$.

Soit aussi Ψ un espace de Hilbert, identifié à son dual, pourvu d'un cône convexe fermé \mathbb{P} définissant une relation d'ordre \succcurlyeq sur Ψ et \mathcal{R} une application de X_{ad} dans Ψ telle que :

(d) \mathcal{R} est convexe par rapport à la relation d'ordre,

(e) la fonction $(q, \mathcal{R}(x))$ est semi-continue inférieurement, pour tout $q \in \mathbb{P}$,

(f) $\|\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(x')\|_\Psi \leq \beta \|x - x'\|_X, \forall x, x' \in X.$

Posons le problème de trouver $x \in X_{ad}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \psi'(x) \cdot x' - x \rangle_{X^*X} + (\lambda, \mathcal{R}(x'))_{\psi} \geq 0, \quad x \in X_{ad} \\ \mathcal{R}(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{P} \end{array} \right. \quad (\text{A.28})$$

et l'algorithme itératif :

$$\lambda^{k+1} = \text{Pr} (\lambda^k + \rho^k \mathcal{R}(x^k)). \quad (\text{A.29})$$

$\rho^k > 0$, Pr la projection sur \mathbb{P} , et x^k solution unique de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \psi'(x^k) ; x' - x^k \rangle_{X^*X} + (\lambda^k, \mathcal{R}(x') - \mathcal{R}(x^k))_{\psi} \geq 0 \\ \forall x' \in X_{ad} \end{array} \right. \quad (\text{A.30})$$

Si les problèmes (A.28) et (A.30) ont une solution unique (ce qui revient à dire que (λ, x) est un point selle du problème (A.28)), et si ρ^k appartient à un compact contenu dans $(0, 2\alpha/\beta^2)$, la séquence x^k converge fortement vers $x \in X$ et la séquence λ^k converge faiblement vers $\lambda \in \Psi$ tel que (λ, x) est une solution de (A.28).

Cette dernière proposition se trouve dans [BENSOUSSAN et al (1), Page 148].

A.4 - UN CALCUL DANS LE PARAGRAPHE 2.6.6.

Soit :

$$\Theta^*(\lambda) = \min_{u, w} \hat{J}(u, w, \lambda)$$

avec :

$$\hat{J}(u, w, \lambda) = \bar{J}(u, w) + \langle \lambda, w - Cz \rangle$$

$$\bar{J}(u, w) = 1/2 \langle Mw, w \rangle - \langle z, D \bar{z} \rangle + 1/2 \langle \bar{z}, D \bar{z} \rangle + 1/2 (u, R u).$$

De l'équation du système, on a :

$$z(t) = \Psi B u + \Psi w + \Psi_0,$$

Ψ l'opérateur défini par :

$$\Psi w = \int_0^t \Phi(t, z) w(z) dz,$$

et Ψ_0 le terme dépendant de z_0 et des conditions aux limites : le développement de \hat{J} conduit à :

$$\begin{aligned} \hat{J}(u, w, \lambda) = 1/2 \{ & \langle Mw, w \rangle + (u, Ru) + \langle \bar{z}, D\bar{z} \rangle \} \\ & + \langle w, (I - C\Psi)^* \lambda - \Psi^* D\bar{z} \rangle \\ & - (u, B^* \Psi^* C^* \lambda + B^* \Psi^* D\bar{z}) - \langle \Psi_0, C^* \lambda + D\bar{z} \rangle \end{aligned}$$

De l'optimalité on a que :

$$u = R^{-1} [B^* \Psi^* (C^* \lambda + Dz)]$$

$$w = M^{-1} [(I - C\Psi)^* \lambda - \Psi^* Dz]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Theta^*(\lambda) = 1/2 \{ & 3 \langle [(I - C\Psi)^* \lambda - \Psi^* D\bar{z}] M^{-1} [(I - C\Psi)^* \lambda - \Psi^* D\bar{z}] \rangle \\ & - ([B^* \Psi^* (C^* \lambda + D\bar{z})], R^{-1} [B^* \Psi^* (C^* \lambda + D\bar{z})]) \\ & + \langle \bar{z}, D\bar{z} \rangle \} - \langle \Psi_0, C^* \lambda + D\bar{z} \rangle. \end{aligned}$$

Si on fait $\lambda = \lambda^k + \rho(w^k - C z^k)$, et on reconnaît que :

$$\tilde{u} = R^{-1} [B^* \Psi^* (C^* w^k - C^* C z^k + D\bar{z})]$$

$$\tilde{w} = M^{-1} [(I - C\Psi)^* (w^k - C z^k)],$$

un calcul simple conduit à l'expression de ρ^k donnée au sous-paragraphe 2.6.6.

BIBLIOGRAPHIE

AMOUROUX M. - BABARY J. P. - PRADIN B. - TITLI A. (1)

Commande Hiérarchisée de Systèmes à paramètres répartis Interconnectés.
Rapport Final ATP N° 1388, Février 1976, Laboratoire d'Automatique
et d'Analyse des Systèmes, TOULOUSE.

ARAFEH S. A. - SAGE A. P. (1)

Multilevel Discrete Time System Identification in Large Scale Systems.
Int. J. System Sci, 1974, Vol. 5, N° 8, pp. 753 - 791.

ATHANS M. (1)

Towards a Practical Theory for Distributed Systems.
IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-15, N° 2, April 1970, pp 245 - 247.

BALAKRISHNAN A. V. (1)

Applied Functional Analysis - Springer Verlag 1976.

BAUMAN E. J. (1)

Multilevel Optimisation Techniques with Applications to Trajectory
Decompositions - Advances in Control Systems, Vol. 6, ed. By C. T. Leondes,
1968.

BENSOUSSAN A. (1)

Filtrage Optimal des Systèmes Linéaires - Dunod 1971.

BENSOUSSAN A. - LIONS J. L. - TEMAN R. (1)

Sur les méthodes de Décomposition, de Décentralisation et de Coordination,
et Applications - in Cahier IRIA N° 11, Juin 1972.

BERNHARD P. (1)

Commande optimale, Décentralisation et Jeux Dynamiques - Dunod 1976.

BUTKOWSKIY A. G. (1)

Distributed Control Systems - Elsevier Pub. Comp., 1969.

CAMBON P. - LE LETTY L. (1)

Application des Techniques de Décomposition et de Hiérarchisation à la
Commande Optimale de systèmes régis par des Equations aux Dérivées Partielles.
RAIRO, décembre 1972.

CASTI J. - LJUNG L. (1)

Some New Analytic and Computational Results for Operator Riccati Equations.
SIAM J. Control, Vol. 13, N° 4, July 1975, pp. 817 - 826.

CODDINGTON E. A. - LEVINSON N. (1)

Theory of Ordinary Differential Equations - Mac Graw-Hill Pub. Comp., 1955.

COHEN G. (1)

Optimisation by Decomposition and Coordination : a Unified Approach.
IEEE Trans. Autom. Control, Vol AC - 23, N° 2, April 1978, pp. 222 - 232.

COURANT R. - HILBERT D. (1)

Methods of Mathematical Physics, Vol. 2 - Inter-science Pub., 1966.

CURTAIN R. (1)

The Infinite Dimensional Riccati Equation with Applications to Affine
Hereditary Differential Systems - SIAM J. Control, Vol. 14, 1975, pp. 951-
983.

CURTAIN R. (2)

Linear Stochastic Control for Distributed Systems with Boundary Control,
Boundary Noise and Point Observations, Report N° 46, Warwick Control
Theory Center, 1976.

CURTAIN R. - PRITCHARD A. J. (1)

The Infinite Dimensional Riccati Equation for Systems Defined by Evolution
Operators - SIAM J. Control, Vol 14, N° 5, August 1976, pp. 951-983.

CURTAIN R. - PRITCHARD A. J. (2)

An Abstract Theory for Unbounded Control Action for Distributed Parameter Systems - SIAM J. Control, Vol. 15, N° 4, July 1972, pp. 566 - 611.

CURTAIN R. - PRITCHARD A. J. (3)

Infinite Dimensional System Theory - Springer Verlag, 1978.

CURTAIN R. - PRITCHARD A. J. (4)

Functional Analysis in Modern Applied Mathematics - Academic Press, 1979.

DA SILVEIRA M. A. (1)

Contribuição ao Controle Ótimo de Sistemas Compostos com Aplicação a Sistemas Regidos por Equações Diferenciais Parciais - Thèse de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, 1976.

DA SILVEIRA M. A. (2)

Les Equations Différentielles d'Evolution en vue de la commande optimale - Note Interne 1981, Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, TOULOUSE.

DA SILVEIRA M. A. (3)

Optimal Control Calculation for Interconnected Parabolic Systems - en proposition.

FORSYTHE G. E. - WASOW W. R. (1)

Finite - Difference Methods for Partial Differential Equations - John Wiley Sons, 1960.

GALY J. (1)

Optimisation Dynamique par Quasilinearisation et Commande Hiérarchisée Thèse de 3ème cycle, Université Paul Sabatier, TOULOUSE 1973.

GUELFAND I. M. - CHILOW G. E. (1)

Les Distributions, Tome 1 - Dunod, 1962.

GUELFAND I. M. - VILENKIN N. Y. (1)

Les Distributions, Tome 4, - Dunod 1967.

GODUNOV S. - RIABENKI V. (1)

Schémas aux Différences - Editions MIR, 1977.

GRATELOUP G. - TITLI A. - PRADIN B. (1)

Solution of Partial Derivatives Optimal Control Problems By Multilevel Control Techniques - Symposium IFAC/IFORS, Octobre 1974, Varna (Bulgarie).

HESTENES M. R. (1)

Multiplies and Gradient Methods - in Computing Methods in Optimisation, Vol. 2, ed. Zadeh, Neustadt et Balakrishnan, Academic Press, 1969, pp. 143 - 163.

ICHIKAWA A. - RYAN E. P. (1)

Filtering and Control of Distributed Parameter Systems with Point Observations and Inputs - 2nd Symposium on Control of D. P. S., 28 June, 1977, Un. of Warwick, Coventry (England).

JAUDAN M. R. - RICHARDS R. J. (1)

Decentralized Control Systems Theory - Int. J. Control, Vol. 26, N° 1, 1977.

KALMAN R. E. - FALB B. - ARBIB M. A. (1)

Topics in Mathematical System Theory - Mac Crow-Hill, 1969.

KREIN S. G. (1)

Linear Differential Equations in Banach Spaces -Transl. of Math. Monographs, Amer. Math. Society 1970.

LADYZENSKAJA D. A. - SOLONNIKOV V. A. - URALCEVA N. N. (1)

Linear And Quasi-Linear Equations of Parabolic Type -Transl. Of Math. Monographs, Vol. 23, Am. Math. Society, 1968.

LASDON L. S. (1)

Optimisation Theory for Large Scale Systems - Mac Millan, 1970.

LASIECKA J. (1)

Unified Theory for Abstract Parabolic Boundary Problems : a Semigroup Approach - Appl. Math. Opt. Vol. 6, 198, pp. 287 - 333.

LEMONNIER P. (1)

Resolution Numérique d'Equations aux Dérivées Partielles par Décomposition et Coordination - in Cahier IRIA N° 11, juin 1972.

LIONS J. L. (1)

Equations Différentielles Opérationnelles - Springer Verlag, 1961.

LIONS J. L. (2)

Optimal Control of Systems Governed By Partial Differential Equations - Springer Verlag, 1971.

LIONS J. L. (3)

Function Spaces and Optimal Control of Distributed Systems - Instituto de Matematica da Un. Federal do Rio de Janeiro, 1980.

LIONS J. L. - MAGENES E. (1)

Problèmes aux Limites Non-Homogènes, Vol. 1 (1) - Dunod 1968.

LIONS J. L. - MAGENES E. (2)

Problèmes aux Limites Non-Homogènes, Vol. 2 (2) - Dunod 1968.

LUENBERGER D. G. (1)

Optimisation by Vector Space Methods - John Wiley & Sons, 1969.

LUENBERGER D. G. (2)

Introduction to Linear and Non-linear Programming - Addison - Wesley Pub., 1973.

MAHMOUD H. S. (1)

Multilevel Systems Control and Applications : a Survey - IEEE Trans. on Syst. Man and Cyb., Vol. SMC - 7, N° 3, March 1977.

MAURIN S. (1)

Schéma de Décomposition pour l'Equation de Hamilton-Jacobi - Rapport de Recherche N° 233, IRIA, Mai 1977.

MESAROVIC M. D. - MACKO D. - TAKAHARA Y. (1)

Theory of Hierarchical Multilevel Systems - Academic Press, 1970.

NOLDUS E. (1)

Control of Bilinear Distributed Parameter Systems - 3rd IMA Conference on Control Theory, 9 - 11 september 1980, Sheffield (England).

O'CONNOR D. J. (1)

Oxygen Balance of an Estuary - J. San. Eng. Div. ASCE, Vol. 86, N° SA 3, May 1960, pp. 35 - 55.

PEARSON J. D. (1)

Dynamic Decomposition Techniques - In Optimisation Methods by Large Scale Systems, ed. Wismer, Mac Graw-Hill, 1971.

PRADIN B. (1)

Calcul Hiérarchisé pour la Commande Optimale de Systèmes à Paramètres Répartis Interconnectés par les Limites : un Exemple - Note Interne, Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, TOULOUSE, Juin 1978.

PRADIN B. (2)

Calcul Hiérarchisé pour la commande en Boucle Ouverte de Systèmes à Paramètres Répartis - Thèse d'Etat N° 883, Un. Paul Sabatier, TOULOUSE, Juin 1979.

PRADIN B. - DA SILVEIRA M. A. (1)

Multilevel Optimal Control of Interconnected Infinite Dimensional Systems)
3rd IMA Conference on Control Theory, 9 - 11 september 1980, Sheffield
(England).

PRADIN B. - DA SILVEIRA M. A. (2)

The Mixed Method for Interconnected Distributed Parameters Systems Control -
en proposition.

PRADIN B. - TITLI A. (1)

Methods of Decomposition - Coordination for the Optimisation of Inter-connected Distributed Parameter Systems - IFAC Boston, Août 1975.

RAUCH J. (1)

L^2 is a Continuable Initial Condition for Kreiss' Mixed Problems - Comm. Pure Appl. Math., Vol. 25, 1972, pp. 265 - 285.

RUSSEL O. L. (1)

Quadratic Performance Criteria in Boundary Control on Linear Symmetric Hyperbolic Systems - SIAM J. Control, Vol. 11, N° 3, August 1973, pp. 475 - 509.

SANDELL Jr. - N. S. - VARAIYA P. - ATHANS M. - SAFONOV M. (1)

Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems - IEEE Aut. Control, Vol. AC - 23, N° 2, 1978.

SCHWARTZ L. (1)

Theorie des Distributions - Hermann, 1966.

SCHWARTZ L. (2)

Theorie des Noyaux - Proc. Int. Cong. Math, 1950, Cambridge (U. S. A.), Vol. 1, Am. Math. Society, 1952, pp. 220-230.

SINGH M. G. - TITLI A. (1)

Systems : Decomposition, Optimisation and Control - Pergamon Press, 1978.

SMITH N. J. - SAGE A. P. (1)

A Sequential Method for System Identification in Hierarchical Structure - Automatica, Vol. 9, November 1973, pp. 677 - 688.

TITLI A. (1)

Commande Hierarchisée et Optimisation des Processus Complexes - Dunod Automatique 1975.

THOMANN R. V. (1)

Effect of Longitudinal Dispersion on Dynamic Water Quality Response of Streams and Rivers - Water Resources Research, Vol. 19, N° 2, April 1973, pp. 355 - 366.

TREVES F. (1)

Basic Linear Partial Differential Equations - Academic Press 1975.

TRYBUS L. (1)

Two - Level Feedback Control for Interconnected Distributed Parameter Systems of First Order - *Kybernetika*, Vol. 15, N° 1, 1979, pp. 51 - 64.

VINTER R. B. - JOHNSON T. L. (1)

Optimal Control of Non-Symmetric Hyperbolic Systems in n Variables on the Half-Space - *SIAM J. Control*, Vol. 15, N° 1, January 1977, pp. 129-143.

WISMER J. D. A. (1)

Optimisation Methods for Large Scale Systems - Mac Graw-Hill - 1971.

WISMER J. D. A. (2)

Distributed Multilevel Systems - in *Optimisation Methods for Large Scale Systems*, ed. Wismer, Mac Graw-Hill, 1971.

YANENKO N. N. (1)

Méthodes à Pas Fractionnaires-Armand Colin, 1963.

YOSIDA K. (1)

Functional Analysis - Springer Verlag, 1968.

TABLE DE NOTATIONS

\emptyset	l'ensemble vide
$\subset, \supset, \not\subset$	symboles de contenance
$H \times U$	produit cartésien des espaces H et U
$\prod H_i$	produit cartésien des H_i
\sum_i	sommation sur i
(λ, w)	vecteur ligne, duplex
$\text{col}(z_i)$	vecteur colonne de coordonné z_i
(a, b)	intervale ouvert
$[a, b]$	intervale fermé
$\overline{1, N}$	$1, 2, \dots, N = \mathbf{N} \quad i, N$
$\partial\Omega / \Gamma$	différence entre deux ensembles
Ω	ouvert contenu dans le \mathbb{R}^n
$\partial\Omega$	frontière de Ω
$\bar{\Omega}$	fermeture de Ω
Q	$= [0, T] \times \Omega$
Σ	$= [0, T] \times \Gamma \quad , \Gamma \subset \partial\Omega$
\bar{a}	si $a \in \mathbb{C}$, le conjugué de a.
H^*	dual topologique de H
$\langle \dots \rangle_H, \langle \dots \rangle_{\mathcal{U}}$	produit interne dans H, dans \mathcal{U}
$\langle \dots \rangle_{\Omega}, \langle \dots \rangle_{\Gamma}$	dualité sur des espaces de fonctions définis sur Ω ou sur Γ .
$\langle \dots \rangle_{V^*V}$	dualité entre V^* et V
$\ \cdot \ _Y$	norme dans Y (espace de Banach)
A^*, M^T	adjoint de A, transposée de M
$\mathcal{D}(A), \text{Im}(A)$	domaine de A, image de A

$\ A\ $	norme de l'opérateur A
$\text{diag}(A_i)$	opérateur bloc-diagonal, ayant les A_i par blocs
$\{C_{ij}\}$	matrice d'opérateurs d'élément C_{ij}
Δ	laplacien $(\sum_i \partial^2 / \partial x_i^2)$ où interval réel
$\Phi(\dots), U(\dots)$	opérateurs d'évolution
$S(\cdot)$	semigroupe
$z _{\Omega_i}$	restriction de la fonction $z(\cdot)$ a Ω_i
$\text{supp } h$	support de la fonction $h(\cdot)$
$\text{Iso}(H)$	isomorphisme canonique entre H et H^+
I	opérateur identité
ess. sup.	suprême essentiel (sup. p.p.)
$\sup \{a_i\}$	suprême de $\{a_1, \dots, a_N\}$
$\inf. \{a_i\}$	infime de $\{a_i\}$
$\mathbb{N}, \mathbb{R},$	ensemble des naturels, réels et complexes
\mathbb{R}^n	ensemble de n-uples de réels
$L^2([0,T]) = L^2([0,T], \mathbb{R})$	$= \{f : [0,T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int f ^2 < \infty\}$ quotient l'ensemble $\{f : [0,T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int f ^2 = 0\}$ [BALAKRISNAN (1) Page 6]
$L^2([0,T], H)$	[BALAKRISNAN (1), Page 134]
$L^2([0,T], \mathcal{L}(U,H))$	$= \{A(\cdot) : [0,T] \rightarrow \mathcal{L}(U,H) \mid \int \ A(t)\ ^2 dt < \infty\}$ quotient $\{A(\cdot) \mid \int \ A(t)\ ^2 dt = 0\}$
$L^2([0,T], \mathcal{L}(H))$	$= L^2([0,T], \mathcal{L}(H,H))$
$L^\infty([0,T]) = L^\infty([0,T], \mathbb{R})$	$= \{f : [0,T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{ess sup } f < \infty\}$ quotient l'ensemble $\{f : \text{ess sup } f = 0\}$ [YOSIDA (1), Page 34]
$L^\infty([0,T], \mathcal{L}(U,H))$	$= \{A(\cdot) : [0,T] \rightarrow \mathcal{L}(U,H) \mid \text{ess sup } \ A(t)\ < \infty\}$ quotient $\{A(\cdot) : \text{ess sup } \ A(t)\ = 0\}$
$C^0([0,T], H)$	$= \{f : [0,T] \rightarrow H \text{ continues}\}$

$C^k([0,T], H), 0 \leq k \leq \infty$	$= \{ f : [0,T] \rightarrow H \text{ k-fois continûment différentiable} \}$
$\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(Q)$	$= \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ infiniment différentiables du support compact contenu dans } \Omega \}$, idem, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, [LIONS et MAGENES (1) pages 3,4].
$H^s(\Omega)$	$= \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \in L^2(\Omega), \alpha \leq s \}$ si $s \geq 0$; $[H^{-s}(\Omega)]^*$ si $s < 0$. [LIONS et MAGENES (1), chapitre 1].
$H_0^s(\Omega)$	$= \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ dans $H^s(\Omega)$, $s > 0$ [ibid., Page 59]
$H^s(\Gamma), \Gamma \subset \partial\Omega$	[ibid. Pages 38 - 40]
$H^{s,s/2}(\Sigma)$	$= L^2([0,T], H^s(\Sigma)) \cap H^s([0,T], L^2(\Sigma))$, [ibid., pages 96-97, LIONS et MAGENES (2), page 44].
$H_0^{s,s/2}(\Sigma)$	[LIONS et MAGENES (1), Page 98].
$H^{s,s/2}(Q)$	$= L^2([0,T], H^s(Q)) \cap H^s([0,T], L^2(Q))$, [LIONS et MAGENES (2), Pages 7, 44]
$\mathcal{L}(U, H)$	espace des opérateurs linéaires de U dans H .
$\mathcal{L}(H)$	$= \mathcal{L}(H, H)$