

Fonctions de corrélation des chaînes de spin. Approche de l'ansatz de Bethe algébrique

N. Kitanine

► **To cite this version:**

N. Kitanine. Fonctions de corrélation des chaînes de spin. Approche de l'ansatz de Bethe algébrique. Physique mathématique [math-ph]. Université de Cergy Pontoise, 2007. tel-00175290

HAL Id: tel-00175290

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00175290>

Submitted on 27 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Cergy-Pontoise

Mémoire d'Habilitation

Presenté pour obtenir une **Habilitation à diriger des recherches**

Spécialité : Physique Théorique

Fonctions de corrélation des chaînes de spin.

Approche de l'ansatz de Bethe algébrique.

par

Nikolai Kitanine

Soutenu le 19 septembre 2007

devant le jury composé de :

Jean Avan	
Philippe Di Francesco	Rapporteur
Patrick Dorey	Rapporteur
Michio Jimbo	Rapporteur
Jean Michel Maillet	
Jean-Bernard Zuber	Président

Remerciements

Une grande majorité des résultats présentés dans ce mémoire d'habilitation est le fruit d'une longue collaboration avec Jean Michel Maillet, Véronique Terras et Nikita Slavnov. Je souhaite aujourd'hui dire combien pour moi cette collaboration a été - et est encore - une source de motivation et de joie et c'est pourquoi je tiens à leur exprimer tout particulièrement ma gratitude. Je remercie également Karol Kozlowski et Giuliano Niccoli qui ont rejoints notre équipe.

Je suis très reconnaissant à Messieurs Patrick Dorey, Philippe di Francesco et Michio Jimbo pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs et je suis heureux que Jean-Bernard Zuber ait bien voulu présider le jury de cette HDR.

Je remercie le professeur Hung The Diep pour l'accueil que j'ai eu au Laboratoire de Physique Théorique et Modélisation de l'Université de Cergy-Pontoise. Je suis très reconnaissant à Jean Avan et Geneviève Rollet pour de nombreuses discussions intéressantes, pour m'avoir énormément aidé à m'insérer au sein de l'Université de Cergy-Pontoise ainsi que pour la relecture de ce manuscrit. Je voudrais exprimer ma gratitude à Claire Pinettes, Trong Tuong Truong, Damien Foster, Philippe Lecheminant et tout les membres du LPTM pour l'aide que j'ai reçue pendant mes premières années à Cergy-Pontoise. Je remercie Sylvie Villemin pour sa grande gentillesse, son énorme compétence, son efficacité sans faille.

Je suis très reconnaissant à Omar Foda avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer récemment. Je tiens à remercier Pascal Baseilhac et Anastasia Doikou pour les discussions amicales que nous avons eu, elles ont été une forte motivation pour mon travail.

Je suis reconnaissant à E. Corrigan, N. MacKay, G. Delius ainsi que tous les membres du département de Mathématiques de l'Université de York pour l'accueil que j'y ai reçu. J'ai eu la chance de profiter de nombreuses discussions avec M. Jimbo et J. Shiraishi, je les en remercie ici et je tiens à leur exprimer ma gratitude pour m'avoir accueilli à l'Université de Tokyo entre 2001 et 2003 et pour leur hospitalité récurrente depuis.

Je voudrais également remercier le laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon pour avoir rendu aisée ma collaboration avec J.M. Maillet, V. Terras et K. Kozlowski. Les différentes parties du travail présenté dans ce mémoire ont été soutenues par UK ESPRC Grant GR/M 73231, JSPS grant P01177, projet ANR MIB-05 JC05-52749, projet ANR GIMP ANR-05-BLAN-0029-01.

Je remercie enfin Yulia ainsi que ma famille à St. Pétersbourg pour leur indéfectible soutien.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Chaîne de spin $\frac{1}{2}$ XXZ	19
2.1	Définition du modèle	19
2.2	Ansatz de Bethe Algébrique	20
2.3	Etat fondamental	24
3	Blocs élémentaires	27
3.1	Problème inverse	28
3.2	Produits scalaires	29
3.2.1	Fonction de partition	29
3.2.2	Produits scalaires	30
3.2.3	Normes des états de Bethe	31
3.3	Blocs élémentaires	31
3.4	Probabilité de formation du vide	36
3.4.1	Analyse asymptotique	37
3.4.2	$\Delta = \frac{1}{2}$	37
4	Fonctions à deux points	41
4.1	Fonctionnelle génératrice	42
4.1.1	Méthode I	43
4.1.2	Méthode II	45
4.2	Cas particuliers	47
4.2.1	Fermions libres	47
4.2.2	$\Delta = \frac{1}{2}$	48
4.3	Equation master	50
4.4	Fonctions à deux points dynamiques	52
5	Chaîne XXX de spin s	55
5.1	Ansatz de Bethe Algébrique	55
5.2	Problème inverse et produits scalaires	58
5.3	Blocs élémentaires	60

6	Chaînes de spin ouvertes	63
6.1	Etats propres	64
6.1.1	Equation de réflexion	64
6.1.2	Etat fondamental	68
6.2	Problème inverse	70
6.2.1	Propriétés des états $ \psi_{\pm}(\{\lambda\})\rangle$	70
6.2.2	Problème inverse, forme alternative	72
6.2.3	Action des opérateurs locaux	73
6.3	Produits scalaires	74
6.3.1	Fonction de partition	74
6.3.2	Produits scalaires	75
6.4	Blocs élémentaires	76
7	Conclusion et Perspectives	79

Chapitre 1

Introduction

Ce mémoire d'habilitation est consacré entièrement aux *chaînes de spin* quantiques, modèles unidimensionnels étudiés depuis presque 80 ans. Il s'agit des modèles des particules de spin $\frac{1}{2}$ (ou plus généralement de spin s) situées sur les sites d'un réseau qui interagissent avec leurs voisins les plus proches. Introduites initialement par Heisenberg [57] en 1928 comme une tentative d'élaborer une théorie pour la transition ferromagnétique, les chaînes de spin apparaissent aujourd'hui dans les domaines de la physique et des mathématiques si différents qu'on les appelle parfois « l'oscillateur harmonique du XXI siècle ». Il existe aujourd'hui des applications directes de ces modèles en physique de la matière condensée, en optique quantique, en physique de particules, en théories de jauge et même en théorie des cordes. Les modèles à vertex étroitement reliés aux chaînes de spin (et étudiés exactement de la même façon) jouent un rôle très important en physique statistique en 2 dimensions. Toutes les théories des champs intégrables en $1 + 1$ dimensions peuvent être liées d'une façon ou d'une autre aux chaînes de spin et on utilise parfois pour étudier ces théories les méthodes initialement introduites pour les chaînes de spin. Des domaines entiers des mathématiques, en particulier la théorie des groupes quantiques, ont été initiés par l'étude de ces modèles, tandis que les techniques introduites pour les chaînes de spin sont utilisées aujourd'hui en théorie des noeuds, théorie des groupes, combinatoire, géométrie algébrique etc. Il y a plusieurs raisons pour cette omniprésence des chaînes de spin et nous n'en mentionnons que quelques unes :

1. Ce sont des modèles formulés de façon très simple.
2. Ils sont profondément non-triviaux.
3. Ils sont *exactement solubles* ou *intégrables*, il est possible d'en obtenir le spectre et les états propres d'une façon exacte.
4. Parmi les modèles exactement solubles (intégrables) ce sont les plus fondamentaux, on peut obtenir des résultats pour les autres systèmes en utilisant les résultats pour les chaînes de spin.

Dans ce mémoire nous discutons le problème du calcul des fonctions de corrélation pour les chaînes de spin. C'est un problème central pour toutes les applications physiques mais aussi pour la compréhension des structures mathématiques profondes, qui se cachent derrière l'intégrabilité.

Pour expliquer l'importance et la difficulté du problème nous commençons ici par une brève histoire de ces modèles et des certains sujets adjacents qui se sont révélés (parfois d'une façon tout à fait inattendue) très importants pour l'étude des chaînes de spin et pour le calcul des fonctions de corrélation.

- Les années **20, le début**. Nous avons déjà mentionné que pour la première fois une chaîne de spin quantique (la chaîne isotrope XXX) a été introduite par Heisenberg en 1928. Mais ici nous pensons qu'il faut commencer quelques années plus tôt par l'introduction du modèle d'Ising. Bien que ce ne soit pas un modèle de spin quantique l'étude de ce modèle a eu une contribution très importante pour les solutions exactes en général. E. Ising a introduit son modèle en 1925 [59]. Ensuite il a étudié le cas unidimensionnel et il a montré qu'il n'y a pas de transition ferromagnétique. A partir de ce résultat il a fait une conclusion (qui s'est révélé fausse 20 ans plus tard) qu'il n'existe pas de transition de phase dans les modèles d'Ising en 2 et 3 dimensions. Paradoxalement cette conclusion fausse a poussé Heisenberg à chercher un modèle quantique qui pouvait décrire la transition ferromagnétique et à introduire la chaîne de spin XXX [57]. C'est aussi la raison pour laquelle la solution pour le modèle de Heisenberg (par ailleurs bien plus compliquée que celle pour Ising) a été construite plus tôt.
- Les années **30, l'ansatz de Bethe**. La solution par H. Bethe du modèle de Heisenberg périodique en 1931 [18] reste l'événement le plus important dans l'histoire des modèles intégrables. Les états propres de la chaînes XXX ont été construits en termes des quasi-particules (spinons) dont les rapidités satisfont à un système d'équations algébriques (équations de Bethe). En utilisant cette construction L. Hulthén [58] a calculé l'énergie exacte de l'état fondamental pour la chaîne XXX antiferromagnétique. Cette technique (appelée aujourd'hui l'ansatz de Bethe) est devenue plus tard l'outil principal pour construire le spectre de plusieurs modèles quantiques unidimensionnels (continus et sur réseau) et de certains modèles en physique statistique classique en 2 dimension. Les nombreuses méthodes proposées dans la suite portent toujours le nom d'ansatz de Bethe (algébrique, fonctionnel, analytique etc) car elles ramènent toujours aux équations du même type pour les rapidités des quasi-particules.
- Les années **40 et 50, L. Onsager et la matrice de transfert**. Les années 40 et 50 ont été marquées par le retour du modèle d'Ising. La solution pour le modèle d'Ising en 2 dimensions proposée par L. Onsager en 1942 et publiée 2 ans plus tard [134] a joué un rôle aussi important que l'ansatz de Bethe pour l'étude des modèles solubles exactement. Onsager a démontré que la conclusion d'Ising était fausse, il a calculé la température de transition de phase (conjecturée par H.A. Kramers et G.H. Wannier [107] en 1941) mais ce sont surtout les moyens qu'il a utilisés qui sont les plus importants pour nous ici. Pour obtenir sa solution exacte il a introduit la matrice de transfert, un objet qui joue depuis le rôle central dans l'étude des modèles en 2 dimensions. Il faut mentionner également que la relation « étoile-triangle » qui est à l'origine de l'équation de Yang-Baxter a été utilisée pour la première fois dans cet article. Cette approche (ainsi que ses versions plus

simples introduites par B. Kaufman [84] et par G. Newell et E. Montroll [133]) est à l'origine de toutes les méthodes algébriques en physique statistique à 2 dimensions. Pour l'ansatz de Bethe il n'y avait pas de développements aussi spectaculaires à cette époque mais à la fin des années 50 les premières généralisation de la méthode de Bethe pour d'autres modèles que la chaîne XXX ont été introduites. Entre autres la chaîne de spin anisotrope XXZ (qui est l'objet central de ce mémoire) a été résolue par R. Orbach [135, 166] par l'ansatz de Bethe.

- Les années **60, l'explosion**. Une véritable explosion d'intérêt pour les solutions exactes se produit au début des années 60. Premièrement l'ansatz de Bethe a été généralisé pour plusieurs modèles très différents y compris pour des théories des champs unidimensionnelles. Les solutions par la méthode de Bethe du modèle de gaz de Bose en 1 dimension par E. Lieb et W. Liniger [121, 122] et du modèle de Hubbard par E. Lieb and F.Y. Wu [120] ont montré que l'ansatz de Bethe est une méthode très générale, applicable pour des modèles très différents, continus et sur réseau, parfois très importants en physique de la matière condensée (modèle de Hubbard, effet Kondo etc).

Une autre application de l'ansatz de Bethe a été proposés aussi par E. Lieb [118] et de façon indépendante dans un cas plus général par B. Sutherland [156] pour résoudre le modèle à 6 vertex. Cette solution a fourni un lien pour la première fois entre la méthode de matrice de transfert et l'ansatz de Bethe (la technique de Bethe a été appliquée pour décrire les états propres de la matrice de transfert du modèle à 6 vertex), lien qui a joué le rôle central pour le développement des méthodes plus algébriques de résolution des chaînes de spin. Lieb et Sutherland ont aussi remarqué que les équations de Bethe pour le modèle à 6 vertex sont les mêmes que pour la chaîne XXZ et que la solution qui correspond à l'état fondamental est aussi la même, en établissant ainsi pour la première fois un lien entre les chaînes de spin et les modèles à vertex.

Par ailleurs l'analyse des équations de Bethe pour la chaîne XXZ effectué par C.N. Yang et C.P. Yang [172, 174] a permis d'identifier l'état fondamental dans les deux régimes non-triviaux du modèle : le régime antiferromagnétique massif et le régime de masse nulle (ou désordonné). Cette analyse reste toujours fondamentale pour tous les résultats concernant les chaînes de spin dans la limite thermodynamique.

C'est aussi dans les années 60 que les premiers résultats pour les fonctions de corrélation des chaînes de spin ont été obtenus. En 1961 E. Lieb, T. Schultz et D. Mattis [119] ont considéré pour la première fois la chaîne XY. Ils ont montré qu'en utilisant la transformation de Jordan-Wigner il est possible de réécrire le Hamiltonien de ce modèle en termes de fermions libres avec des conditions aux bords très particulières. Cela leur a permis d'obtenir des représentations pour les fonctions à deux points en termes de déterminants de Töplitz. Cette approche a été généralisée pour les fonction de corrélation dépendant du temps ou de la temperature par B. McCoy et ses collaborateurs [8, 128, 129]. Des résultats du même type ont été obtenu également pour le modèle d' Ising en 2 dimensions par T.T. Wu et B. McCoy, [130, 170]. Ces représentations restaient les seuls résultats pour les fonctions de corrélation des chaînes de spin pendant plus de 20 ans. Malheureusement cette

méthode marche uniquement dans les cas équivalents aux fermions libres (modèle XY ou XX0) et n'est pas généralisable pour les situations plus générales comme la chaîne XXZ. Pour les autres modèles solubles par l'ansatz de Bethe la situation a été similaire : il était possible de calculer les fonctions de corrélation aux points de fermions libres, mais pas de résultats en dehors de ces points. Par exemple pour le point de fermions libres du modèle de gaz de Bose (modèle de bosons impénétrables, limite de couplage infini) les fonctions à deux points les plus simples ont été calculées par A. Lenard [116, 117]. Il est remarquable que ces représentations sont bien différentes de celles de E. Lieb et B. McCoy, car au lieu de déterminants de Töplitz, A. Lenard a obtenu des déterminants de Fredholm.

Parmi les grands résultats de cette décennie dans le domaine des solutions exactes nous voudrions souligner l'un sur lequel sont basées toutes les méthodes algébriques développées plus tard. C'est en 1967 que C.N. Yang [173] a écrit pour la première fois de façon explicite l'équation que l'on appelle aujourd'hui *l'équation de Yang-Baxter* et l'a utilisée pour la solution du modèle de gaz de Bose unidimensionnel.

Une autre direction de recherche *a priori* totalement différente a été initiée à la fin des années 60 : il s'agit de la méthode de diffusion inverse classique pour résoudre les équations non-linéaires en dérivées partielles (comme celle de Korteweg - De Vries) proposée par C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal et R. Miura [51]. En 1968 P. Lax [114] a proposé une construction (la paire de Lax) qui permettait de formuler cette méthode d'une manière très élégante et d'étudier les solutions solitoniques de l'équation de Korteweg-De Vries. Le lien entre cette approche et les solutions exactes pour des modèles quantiques n'a été élucidé que 11 ans plus tard.

- Les années **70, du modèle à 8 vertex à l'ansatz de Bethe algébrique** Au début des années 70 l'équation de Yang-Baxter apparaît à nouveau dans un contexte différent. R. Baxter [10, 11] l'a proposée sous une forme un peu différente pour résoudre le modèle à 8 vertex. Il a également introduit l'opérateur Q , un autre objet fondamental en théorie des modèles intégrables quantiques qui est à l'origine des équations de Bethe. Baxter a également démontré que ce modèle (le plus général parmi les modèles à vertex) est lié avec la chaîne de spin la plus générale XYZ. Cette solution a été utilisée par J. Johnson, S. Krinsky and B. McCoy [81] pour étudier le spectre d'excitations de la chaîne de spin XYZ. Ainsi toutes les chaînes de spin $\frac{1}{2}$ périodiques ont été résolues par l'ansatz de Bethe (bien sûr, Baxter a introduit une modification de la méthode de Bethe très compliquée pour la chaîne XYZ, mais à la fin les rapidités des quasi-particules sont toujours données par les équations du même type). En étudiant le modèle à 8 vertex R. Baxter a proposé plusieurs méthodes très originales pour calculer la fonction de partition, l'énergie libre et l'aimantation spontanée [14]. Nous mentionnons ici la technique de matrice de transfert de coin [12, 13], car elle joue un rôle central pour l'une des approches de calcul des fonctions de corrélation pour les chaînes de spin.

Parallèlement la méthode de diffusion inverse classique a été rapidement développée pendant les années 70. La méthode de paire de Lax a été appliquée pour l'équation de Schrödinger non-linéaire [176], pour l'équation de sine-Gordon [159, 177], pour la chaîne de Heisenberg classique [161] et pour plusieurs autres équations [1, 2] (nous

citons ici uniquement les modèles les plus importants dans le cas quantique). En 1971 Zakharov et Faddeev [175] ont montré que la possibilité de résoudre l'équation de Korteweg - De Vries en utilisant la paire de Lax signifie que c'est un système hamiltonien intégrable (ils ont construit l'ensemble complet des variables action-angle pour cette équation). Les quantités conservées (y compris le Hamiltonien) ont été obtenues comme les dérivées logarithmiques de la trace de la matrice de diffusion (les identités de trace). Cette méthode hamiltonienne pour la théorie des solitons est expliquée en détail dans le livre [45].

En 1979 L. Faddeev, E. Sklyanin et L. Takhtadjan [47] ont remarqué une similarité entre les identités de trace pour les modèles intégrables classiques et les identités quantiques entre les matrices de transfert pour les modèles à vertex et les Hamiltoniens des chaînes de spin. Ils ont proposé d'introduire la version quantique de l'opérateur de Lax (l'opérateur L) et à partir de cet opérateur de construire la matrice de monodromie (version quantique de la matrice de diffusion) et la matrice de transfert (trace de la matrice de monodromie dans l'espace auxiliaire). Les relations de commutation entre les opérateurs de Lax quantiques sont écrites en terme d'une solution de l'équation de Yang-Baxter (matrice R). Les identités de trace quantiques donnent ainsi les quantités conservées (et c'est la raison pour laquelle on parle des « modèles intégrables quantiques »), tandis que les éléments non-diagonaux de la matrice de monodromie sont utilisés comme les opérateurs de création et d'annihilation des états propres. Ainsi la méthode de diffusion inverse classique et la méthode de matrice de transfert ont été utilisées pour construire une approche algébrique aux systèmes intégrables quantiques unidimensionnels (*méthode de diffusion inverse quantique*). Les états propres sont décrits à nouveau en termes de quasi-particules dont les rapidités satisfont toujours aux équations de Bethe (pour cette raison on appelle cette méthode aussi *l'ansatz de Bethe algébrique*). Cette méthode a donné un cadre très général pour décrire les modèles intégrables quantiques [46]. Etant applicable à tous les modèles qui avaient été résolus par l'ansatz de Bethe habituel [111, 148, 158], la méthode de diffusion inverse quantiques a ouvert la porte à des nombreuses généralisations. Notons aussi que dans le cadre de cette approche les chaînes de spin se sont révélées comme les modèles intégrables les plus fondamentaux.

Parmi les principaux résultats des années 70 il faut mentionner également une autre méthode d'étude des théories de champs intégrables (étroitement liée à l'ansatz de Bethe algébrique). Il s'agit de l'approche de la matrice S factorisée [179] proposée par A. Zamolodchikov et Al. Zamolodchikov plus ou moins au moment où la méthode de diffusion inverse quantique était développée par l'école de Faddeev. Cette méthode était à l'origine des techniques « bootstrap » [82, 83] de calcul des facteurs de forme des théories des champs intégrables.

C'est également à la fin des années 70 qu'une méthode qui donne une possibilité d'étudier le comportement asymptotique des fonctions de corrélation aux points de fermions libres a été élaborée. En 1976 T.T. Wu, B. McCoy, C.A. Tracy and E. Barouch [171] ont montré que les fonctions de corrélations du modèle d'Ising satisfont aux équations de Painlevé. En 1977 M. Jimbo, T. Miwa et M. Sato [145, 146] ont

développé une méthode permettant d'utiliser ces équations pour étudier le comportement asymptotique des solutions. Ils ont également généralisé ces résultats pour les fonctions de corrélation pour les bosons impénétrables obtenues par A. Lenard [80].

- Les années **80, l'âge d'or des modèles intégrables**. La méthode de diffusion inverse quantique et donc une possibilité de quantifier les solitons a attiré un énorme intérêt vers les modèles intégrables, surtout du côté de la physique des particules. Ainsi les années 80 ont été marquées par un progrès très rapide dans le domaine. Ici nous ne mentionnons que quelques résultats centraux qui sont les plus importants pour l'étude des fonctions de corrélation.

Des nombreuses généralisations de la méthode de diffusion inverse ont été proposées. L'introduction par P. Kulish, E. Sklyanin et N. Reshetikhin [110] de la notion de *fusion* pour les solutions de l'équation de Yang-Baxter a permis de construire des chaînes de spin, pour les particules de spin supérieur à $\frac{1}{2}$. La généralisation de la chaîne XXX a été étudiée de façon indépendante par L. Takhtadjan [162] et H. Babujian [6]. La version de spin 1 de la chaîne XXZ a été introduite par V. Fateev et A. Zamolodchikov [178] et la généralisation pour toutes les valeurs de spin a été obtenue par A. Kirillov et N. Reshetikhin [85–87]. Ces résultats ont permis d'établir un lien entre les chaînes de spin et les autres modèles intégrables, en particulier les théories des champs telles que le gaz de Bose unidimensionnel [108, 148] et le modèle de sine-Gordon [109].

L'ansatz de Bethe a été également généralisé pour les modèles avec des conditions aux bords non-périodiques. Les premiers résultats ont été obtenus par l'ansatz de Bethe habituel pour la chaîne de spin XXX ouverte par F. Alcaraz, M. Barber, M. Batchelor, R. Baxter and G. Quispel [4]. La méthode algébrique pour le cas non-périodique a été proposée par Sklyanin en 1988 [149]. Pour généraliser la méthode de diffusion inverse quantique aux modèles ouverts il a utilisé l'équation de réflexion introduite par I. Cherednik [35].

La méthode de diffusion inverse quantique a contribué à l'apparition d'une nouvelle branche des mathématiques : la théorie des groupes quantiques. Introduits de façon indépendante par M. Jimbo [74, 75] et V. Drinfel'd [39] ces nouveaux objets mathématiques ont été utilisés plus tard en théorie des modèles intégrables pour décrire les symétries non-abéliennes. Il faut mentionner que les symétries non-abeliennes des modèles intégrables avait été découvertes [125] et étudiés [40, 41] avant les groupes quantiques mais ces derniers ont donné un cadre mathématique très adapté pour ces symétries [16, 17, 115].

Les années 80 étaient aussi marquées par un progrès très important en théories des champs intégrables. Il s'agit premièrement de la théorie des champs conforme proposée initialement par A. Belavin, A. Polyakov et A. Zamolodchikov [15]. Dans la suite la théorie conforme fut très vite développée et appliquée à différents domaines de la physique théorique, en particulier en physique statistique [68] et en théorie des cordes [50]. Les équations pour les fonctions de corrélation des théories conformes obtenues par V. Knizhnik et A. Zamolodchikov (équations KZ) ont joué dans la suite un rôle très important dans l'étude des chaînes de spin. Les méthodes de théorie

conforme ont été appliquées aussi pour obtenir le comportement asymptotique des fonctions de corrélation des modèles intégrables. Les exposants pour les fonctions à deux points pour le gaz de Bose et pour les chaînes de spin ont été ainsi obtenus à partir des corrections de taille finie [19, 42, 73]. Il faut mentionner que cette méthode est très bonne pour calculer les exposants mais initialement ne donnait pas de possibilité de calculer les amplitudes.

Une méthode de calcul des facteurs de forme pour les théories des champs intégrables basée sur l'ansatz de Bethe algébrique et l'approche de matrice S factorisée a été développée par F. Smirnov [153, 154]. Cette approche est très importante pour nous ici car c'était une des premières tentatives (après [38]) de résoudre le *problème inverse quantique* et l'utiliser pour le calcul des facteurs de forme et des fonctions de corrélation. En développant sa méthode F. Smirnov a montré que les facteurs de forme qu'il avait calculés sont des solutions des équations de Knizhnik-Zamolodchikov déformées (équation q -KZ) [155].

C'est dans les années 80 que les premiers résultats pour les fonctions de corrélation ont été obtenus à partir de l'ansatz de Bethe. Le premier pas en cette direction était l'hypothèse de Gaudin pour les normes des états de Bethe publiée en 1981 [52, 53]. En 1982 V. Korepin a prouvé cette hypothèse en utilisant l'ansatz de Bethe algébrique. Ainsi l'étude des fonctions de corrélation par la méthode de diffusion inverse quantique a été commencée par A Izergin et V. Korepin [71, 72]. Curieusement ils ont découvert un autre lien entre les modèles intégrables unidimensionnels (y compris les chaînes de spin) et les modèles à vertex. Pour calculer les fonctions de corrélation dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique il était nécessaire de considérer la fonction de partition du modèle à 6 vertex avec des conditions aux bords très particulières (conditions aux bords du type parois des domaines, dans la suite nous utilisons l'abréviation DWBC). Cette fonction décrite pour la première fois par V. Korepin en 1982 [104] a été obtenue par A. Izergin 5 ans plus tard [69]. Cette représentation (sous forme de déterminant) est la clé pour toutes les méthodes de calcul des fonctions de corrélation dans le cadre de l'ansatz de Bethe et la raison pour laquelle tous les résultats finaux contiennent des déterminants. Ce résultat joue un rôle très important pour nous et nous allons l'expliquer dans le chapitre 3 de ce mémoire. Une conséquence très importante de ce résultat est la formule en terme de déterminant pour les produits scalaires des états de Bethe obtenue par N. Slavnov en 1989 [152].

Nous arrêtons cette brève description historique au début des années 90, car à ce moment la théorie des modèles intégrables est devenue un domaine si vaste de la physique théorique et des mathématiques qu'il est impossible de mentionner ici même les plus importants des résultats des deux dernières décennies. Ainsi nous nous concentrons dans la suite sur le sujet principal de ce mémoire : les fonctions de corrélation.

Au début des années 90 deux méthodes ont été proposées. La première que nous avons déjà mentionnée, a été développée par A. Its, A Izergin, V. Korepin, N. Slavnov et leurs collaborateurs. D'abord cette approche, basée sur l'ansatz de Bethe algébrique, a été employée pour les points de fermions libres, notamment pour le modèle de bosons

impénétrables [60–64, 66] et pour la chaîne XX0 [36, 37, 65]. Le résultat de Lenard pour le gaz de Bose a été étendu aux fonctions de corrélation les plus générales, dépendantes du temps et de la température. Comme dans le cas le plus simple les fonctions à deux points ont été obtenues sous forme de déterminants de Fredholm. Ces déterminants satisfont aussi à une équation aux dérivées partielles, qui est cette fois l'équation de Schrödinger non-linéaire classique. Ainsi les fonctions de corrélation constituent un autre lien entre les systèmes intégrables quantiques et classiques. Les détails de cette méthode sont expliqués dans le livre [106]. L'analyse de cette équation donne le comportement asymptotique des fonctions à deux points. Une analyse similaire est faite pour la chaîne de spin XX0 où les fonctions de corrélations sont obtenues comme des solutions de l'équation classique intégrable d'Ablowitz-Ladik (une version discrète de l'équation de Schrödinger non-linéaire).

L'extension de cette méthode aux cas plus généraux, notamment pour le gaz de Bose unidimensionnel (avec une constante de couplage finie) et la chaîne de spin XXZ, a rencontré des difficultés combinatoires. Pour les éviter V. Korepin a proposé d'introduire des champs quantiques auxiliaires et de représenter les fonctions de corrélation comme des valeurs moyennes sur ces champs [105]. Le désavantage de cette idée est le fait que le résultat n'est plus explicite et contient des objets non-physiques. Le seul modèle où des représentations avec des champs auxiliaires ont permis d'obtenir des équations pour les fonctions à deux points et de calculer le terme dominant de l'asymptotique est le gaz de Bose [67, 100, 101]. Pour les chaînes de spin l'analyse des déterminants avec des champs auxiliaires [102] est beaucoup plus compliquée et il n'existe aujourd'hui ni de résultats explicites obtenus par cette méthode ni d'équations intégrables pour les fonctions de corrélation des chaînes XXX et XXZ.

La deuxième méthode proposée par M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa et A. Nakayashiki [77] pour la chaîne de spin XXZ dans le régime massif utilise les symétries non-abéliennes de la chaîne dans la limite thermodynamique et sur les équations obtenue par F. Smirnov pour les facteurs de forme du modèle de sine-Gordon. En utilisant cette symétrie ainsi que la méthode de matrice de transfert de coin de Baxter et la version q -déformé des opérateurs de vertex introduit par E. Frenkel et N. Reshetikhin [49], M. Jimbo, T. Miwa et leurs collaborateurs ont obtenu les équations q -KZ pour les fonctions de corrélation. Les équations ont été formulées en termes des paramètres auxiliaires (paramètres d'inhomogénéité), ainsi il est très difficile (si possible) d'en extraire le comportement asymptotique des fonctions de corrélation. Par contre cela permet d'obtenir des représentations explicites pour les fonctions de corrélation sous forme d'intégrales multiples. Ces résultats étaient les premières représentations explicites pour les fonctions de corrélation en dehors des points de fermions libres. Les détails de cette méthode sont donnés dans le livre [78]. Cette approche fut appliquée pour la chaînes XXZ de spin 1 [30] et pour la chaîne XXZ semi-infinie (avec un bord) [76]. La généralisation pour le régime désordonné de la chaîne XXZ n'a été faite qu'en utilisant l'hypothèse que dans ce cas les fonctions de corrélation satisfont aussi aux équations q -KZ [79]. Le résultat pour ce cas s'écrit aussi sous la forme d'intégrales multiples.

L'avantage de cette méthode par rapport à celle d'Izergin et Korepin est la forme explicite des résultats pour les fonctions de corrélation qui ne contiennent aucun objet non-physique (comme les champs auxiliaires). Par contre l'approche de Jimbo et Miwa et

difficilement généralisable pour les chaînes de spin dans un champ magnétique extérieur, pour les chaînes finies, pour les fonctions de corrélation dépendantes de la température etc, car dans ces cas il n'y a plus de symétries non-abéliennes simples et les équations de type q -KZ pour les fonctions de corrélation ne sont pas connues.

Parallèlement à ces deux méthodes il y a eu plusieurs tentatives d'appliquer les méthodes de la théorie conforme au calcul des fonctions de corrélation des chaînes de spin. En général l'application des méthodes des théories des champs pour les modèles sur réseau posait de nombreuses difficultés et la plupart de résultats obtenus par cette approche sont des conjectures. C'est en utilisant les méthodes de la théorie conforme que les amplitudes pour les termes dominants de l'asymptotique des fonctions de corrélations ont été conjecturées par S. Lukyanov [123] (les premiers termes sous-dominants ont été calculés plus tard [124]). Le cas isotrope XXX de ce point de vue est un peu plus compliqué, car il y a des corrections logarithmiques. Les amplitudes dans ce cas ont été conjecturées par I. Affleck [3] (les corrections sous-dominantes sont obtenues dans [9])

C'est dans ce contexte que nous avons commencé le travail sur les fonctions de corrélation du modèle XXZ en 1996 en collaboration avec J.M. Maillet et V. Terras. Notre but était de construire une méthode basée sur l'ansatz de Bethe algébrique (et donc assez générale comme celle d'Izergin et Korepin) mais qui produit des résultats explicites pour les fonctions de corrélation (comme l'approche de Jimbo et Miwa). Le but final de ce travail est d'obtenir à partir de ces représentations explicites les formules asymptotiques pour les fonctions à deux points en prouvant ainsi les conjectures de S. Lukyanov et I. Affleck. Aujourd'hui nous sommes à mi-chemin vers ce but et nous présentons dans ce mémoire une méthode qui permet de calculer les fonctions de corrélation de chaînes de spin à partir de l'ansatz de Bethe algébrique.

Nous avons déjà mentionné que l'ansatz de Bethe algébrique a été proposé comme une version quantique de la méthode de diffusion inverse classique. L'idée centrale de cette méthode classique est de remplacer une équation non-linéaire en dérivées partielles par un problème linéaire auxiliaire (donné par l'opérateur de Lax) où la solution de l'équation initiale joue le rôle du potentiel. La matrice de diffusion pour ce problème linéaire a une dynamique très simple (ses éléments jouent le rôle des variables action-angle). Ainsi il est possible de

1. résoudre le problème de diffusion en utilisant les conditions initiales,
2. construire la solution à tout moment en utilisant la dynamique de la matrice de diffusion et en résolvant *le problème de diffusion inverse*.

Dans la version quantique de cette méthode on utilise l'opérateur de Lax quantique (opérateur L) et à partir de cet opérateur on construit la matrice de monodromie qui joue ici le rôle de la matrice de diffusion. Les éléments de la matrice de monodromie contiennent les intégrales de mouvement et les opérateur de création et d'annihilation des états propres. Ainsi pour obtenir le spectre et les états propres du système on n'utilise que la version quantique du premier étape de la méthode classique. Dès l'introduction de la méthode quantique il était clair que pour calculer les fonctions de corrélation il fallait construire une version quantique de la seconde étape : résoudre le *problème inverse quantique* (représenter les champs locaux en termes des éléments de la matrice de monodromie).

La version quantique des équations de Gelfand, Levitan et Marchenko (une des deux méthodes de résolution du problème inverse classique), a été proposée pour la première fois par D. Creamer, H. Thacker et D. Wilkinson [38] pour le gaz de Bose et par F. Smirnov [153, 154] pour le modèle de sine-Gordon. Ces équations intégrales sont assez compliquées et ne permettent pas d'obtenir des résultats explicites pour les fonctions de corrélation.

Par contre pour les chaînes périodiques de spin $\frac{1}{2}$ la solution du problème inverse a une forme extrêmement simple. La représentation que nous avons obtenue (en collaboration avec J.M. Maillet et V. Terras) en 1998 [98] ne contient pas d'intégrales et permet d'obtenir les opérateurs de spin locaux comme des simples produits d'éléments de la matrice de monodromie. La preuve initiale que nous avons présentée dans l'article [98] n'est pas la plus simple et la plus générale, elle a été simplifiée et généralisée pour toutes les chaînes de spin périodiques (chaîne XYZ, chaînes de spin s etc) dans [127]. Nous avons utilisé cette solution pour le calcul des facteurs de forme [98], dont un exemple important est l'aimantation spontanée [70] (en collaboration avec A. Izergin, J.M. Maillet et V. Terras) dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique.

Dans ce mémoire nous présentons les résultats pour les fonctions de corrélation qui ont suivi ces deux articles. Nous démontrons comment utiliser l'ansatz de Bethe algébrique et la solution du problème inverse quantique pour obtenir des représentations explicites pour les fonctions de corrélation pour la chaîne XXZ périodique de spin $\frac{1}{2}$, pour la chaîne XXX de spin s et pour les chaînes de spin ouvertes. La liste des articles originaux est donnée en appendice à la fin du mémoire.

Dans le Chapitre 2 de ce mémoire nous donnons une brève description de la méthode de diffusion inverse quantique appliquée à la chaîne XXZ périodique (ou quasi-périodique) de spin $\frac{1}{2}$ en suivant [47]. Nous introduisons le modèle et tous les objets importants pour l'ansatz de Bethe algébrique : matrice R , matrice de monodromie, matrice de transfert et les états de Bethe. Nous expliquons (très brièvement) comment les équations pour les rapidités des quasi-particules (les équations de Bethe) apparaissent dans le cadre de cette approche. A la fin du premier chapitre nous identifions l'état fondamental de la chaîne XXZ en suivant [172, 174].

Chapitre 3 est consacré aux fonctions de corrélation les plus fondamentales, (nous les appelons *les blocs élémentaires*) qui peuvent être considérées comme les éléments de la matrice de densité. Toutes les autres fonctions de corrélation, y compris les fonctions à deux points se calculent comme des sommes de tels blocs. C'est ces fonctions qui sont calculées par M. Jimbo, T. Miwa et leur collaborateurs à partir des équations q -KZ [77, 79]. Nous commençons par la solution du problème inverse pour la chaîne XXZ. Nous montrons que cette solution réduit le calcul des fonctions de corrélation au calcul des produits scalaires des états de Bethe. Nous étudions ces produits scalaires et pour le faire d'abord nous introduisons l'objet central de ce calcul : la fonction de partition du modèle à 6 vertex avec les conditions aux bords DWBC. Nous discutons brièvement les conditions de Korepin [104] pour cet objet et la formule du déterminant d'Izergin [69]. Les produits scalaires se calculent à partir de cette fonction de partition, nous présentons la formule de Slavnov pour les produits scalaires [152] sous la forme simple obtenue dans [98]. Ainsi dans la limite thermodynamique nous obtenons des représentations sous forme d'intégrales

multiples pour les blocs élémentaires [99] (Article I). Ce résultat est valable pour les deux régimes de la chaîne XXZ (massif et désordonné) dans un champ magnétique extérieur constant. Dans le cas le plus simple de champ magnétique extérieur nul nous reproduirons les résultats de [77] pour le régime massif et le résultat de [79] pour le régime désordonné. Notons que notre résultat pour ce dernier cas peut être considéré comme la preuve du fait que les fonctions de corrélation satisfont aux équations q -KZ dans le régime désordonné.

Il est important de souligner que les expressions obtenues sous les intégrales ont une structure très particulière mise en évidence par notre méthode. On peut la séparer en deux parties : partie algébrique qui est définie par le choix d'opérateurs locaux (et indépendant du régime du modèle, du champ magnétique extérieur, etc) et le déterminant des densités défini uniquement par l'état fondamental et indépendant du choix d'opérateurs locaux. Cette structure permet dans la suite d'aborder le problème de calcul des fonctions à deux points.

Ainsi nous avons montré que l'ansatz de Bethe algébrique peut être utilisé pour obtenir des représentations explicites pour les fonctions de corrélation. Nos buts suivants étaient d'analyser ces résultats, d'obtenir des représentations simples pour les fonctions à deux points et de les généraliser pour les autres modèles.

La première question qui se pose est l'analyse des blocs élémentaires. Parmi ces fonctions il y en a une assez intéressante, qui a une signification physique claire : il s'agit de la probabilité de formation du vide, c'est à dire la probabilité que les m premiers spins de la chaîne soient alignés (par exemple vers le bas). Cette fonction a été considérée par A. Izergin et V. Korepin et leur collaborateurs pour le gaz de Bose [61, 62] et pour la chaîne XX0 [36, 65, 147]. Pour les deux cas il est démontré que cette fonction a un comportement gaussien dans la limite des grandes distances (m pour les chaînes de spin). En collaboration avec J.M. Maillet, N. Slavnov et V. Terras nous avons considéré les représentations sous forme d'intégrales multiples pour cette fonction et nous les avons analysées en utilisant une modification de la méthode du point selle. Cette analyse nous a permis d'obtenir l'exposant de ce comportement gaussien pour la chaîne XXZ en général (sans champ magnétique extérieur) [90] (Article II). Pour l'obtenir nous avons utilisé une hypothèse sur la distribution des solutions de l'équation de point selle, donc ce résultat est une conjecture, mais elle est confirmée par les résultats exacts pour les points spéciaux et par l'analyse numérique. Un résultat équivalent pour la même quantité a été obtenu de façon indépendante par V. Korepin, S. Lukyanov, Y. Nishiyama et M. Shiroishi [103].

Une autre question intéressante sur la probabilité de formation du vide est l'analyse de cette fonction à certains points spéciaux. Cette question s'est posée grâce à un certain nombre de conjectures formulées récemment pour la chaîne de spin XXZ avec le paramètre d'anisotropie $\Delta = \frac{1}{2}$. Jusqu'à la fin des années 90 le seul point où il existait des simplifications était celui de fermions libres (chaîne XXZ avec paramètre d'anisotropie $\Delta = 0$). L'intérêt pour les points $\Delta = \pm\frac{1}{2}$ a été provoqué par l'observation de G. Kuiperberg [112, 113] qui a remarqué un lien entre la fonction de partition du modèle à six vertex avec les conditions DWBC pour $\Delta = \frac{1}{2}$ et un problème combinatoire d'énumération des matrices de signes alternés [31, 131]. La conjecture de W. Mills, D. Robbins et H. Rumsey [131] pour le nombre de telles matrices (prouvée d'une façon très compliquée par D. Zeilberger [180]) a été ainsi démontrée d'une façon très simple à partir de la formule

d'Izergin [69]. Il faut noter également que G. Kuperberg a proposé une méthode pour calculer le déterminant d'Izergin dans la limite totalement homogène pour $\Delta = \pm\frac{1}{2}$. Ce lien a poussé A. Razumov et Yu. Stroganov à étudier numériquement l'état fondamental d'une chaîne finie XXZ pour $\Delta = \frac{1}{2}$. Ils ont observé [139, 140] que pour les conditions périodiques et un nombre de sites impair ou pour les conditions quasi-périodiques (avec un paramètre de twist bien choisi) et le nombre de sites pair l'état fondamental possède plusieurs propriétés fascinantes. Par exemple ils ont montré numériquement qu'il existe une normalisation de l'état fondamental où les poids des certaines configurations des spins sont des nombres entiers (les nombres de configuration d'un modèle de boucles $O(1)$) [141, 142]. Ainsi cet analyse numérique leur a permis de formuler un nombre de conjectures sur l'état fondamental d'une chaîne XXZ finie (dont la plus importante, la conjecture de Razumov-Stroganov, sur le lien entre les poids des configurations des spins et les nombres de configurations des boucles). Des nombreuses conjectures ont été ajoutées par S. Mitra, B. Nienhuis, J. de Gier et M.T. Batchelor [132], tandis que la généralisation pour le cas des conditions aux bords ouvertes a été proposée par P. Pearce, V Rittenberg, J. de Gier et B. Nienhuis [137, 138]. Une grande majorité de ces conjectures pour les chaînes finies reste à prouver (avec une exception importante : les « règles de sommes » démontrées par P. di Francesco et P. Zinn-Justin [43, 44, 136]).

Razumov et Stroganov ont considéré entre autres quantités la probabilité de formation du vide et ils ont proposé une conjecture pour cette fonction dans le cas d'une chaîne finie avec $\Delta = \frac{1}{2}$ et dans la limite thermodynamique [139]. C'est une des rares conjectures pour une fonction de corrélation dans la limite thermodynamique. Ainsi en collaboration avec J.M. Maillet, N. Slavnov et V. Terras nous avons montré qu'il est possible de la prouver à partir des intégrales multiples. C'est une des rares situations où les intégrales sont calculables et le résultat pour la probabilité de trouver m premiers spins alignés vers le bas est proportionnel au nombre des matrices de signes alternés de taille m [93] (Article III).

Le chapitre 4 est basé sur 5 articles toujours en collaboration avec J.M. Maillet, N. Slavnov et V. Terras. Nous y considérons les fonctions à deux points. Nous avons déjà mentionné que toutes les fonctions de corrélation y compris les fonctions à deux points peuvent être représentées en termes des blocs élémentaires. Une fonction à deux points des troisièmes composantes des spins séparés de m sites s'écrit par exemple comme une somme de 2^{m+1} blocs (donc le nombre de termes croît exponentiellement avec la distance). Une telle somme est un objet très compliqué à étudier, surtout s'il s'agit d'analyse asymptotique à longues distances. Ainsi il est nécessaire de trouver des représentations plus compactes et plus adaptées pour l'analyse asymptotique. Nous proposons deux possibilités de réduire le nombre de termes dans la représentation finale et d'obtenir les fonctions à deux points comme une somme de m termes. La première possibilité proposée dans [91] (Article IV) est basée sur l'introduction d'intégrales auxiliaires, tandis que la deuxième sur la symétrisation sur les variables d'intégration [97] (Article V). Ces deux resommations sont utilisable pour les points spéciaux, ainsi nous retrouvons les résultats de [128, 170] pour le point de fermions libres [92] (Article VI). Il y a des nouvelles simplifications également pour le point $\Delta = \frac{1}{2}$, ici les intégrales sont calculées dans le cas inhomogène [95] (Article VII). Nous n'avons pas réussi à calculer la limite homogène d'une façon systématique mais

nous proposons les résultats exacts pour $m \leq 9$.

La dernière question de ce chapitre est le lien entre les représentations sous forme d'intégrales multiples et les sommes sur les facteurs de forme. Nous obtenons une formule (« l'équation master ») qui donne un lien entre ces deux types de représentations [96] (Article VIII). Ce lien peut être généralisé pour le calcul des fonctions à deux points dynamiques [94] (Article IX), où il faut utiliser les représentations de Trotter pour les exponentielles du Hamiltonien.

Ainsi nous avons élaboré une méthode de calcul des fonctions à deux points pour la chaîne XXZ de spin $\frac{1}{2}$. Nous en avons obtenu des nombreuses représentations et nous les avons calculées pour les cas les plus simples. Il n'est pas encore claire lesquelles de ces représentations sont les plus pratiques pour l'analyse asymptotique et cela reste la question centrale pour notre travail actuel.

Les deux derniers chapitres de ce mémoire sont consacrés aux généralisations possibles de ces résultats pour les autres types de chaînes de spin. Dans le chapitre 5 nous considérons les chaînes XXX de spin s (l'analyse de l'état fondamental dans le cas XXZ de spin $s > \frac{1}{2}$ est très compliqué et nous ne le considérons pas ici). La solution du problème inverse [127] permet d'obtenir dans cette situation des représentations pour les fonctions de corrélation sous forme d'intégrales multiples très similaires aux cas de spin $\frac{1}{2}$ (bien qu'un peu plus compliquées). Ces représentations ont été obtenues dans [88] (Article XI). Comme dans le cas de spin $\frac{1}{2}$ pour calculer les produits scalaires et les normes des états de Bethe il est nécessaire d'obtenir une représentation pour la fonction de partition du modèle à n vertex correspondant. Une telle représentation, obtenue en collaboration avec A. Caradoc et O. Foda est démontrée dans [32] (Article X).

Dans le dernier chapitre nous étudions une autre généralisation de nos résultats : les chaînes de spin ouvertes. Les représentations pour les fonctions de corrélation dans le régime massif pour la chaîne XXZ semi-infinie ont été obtenues à partir de l'équation q -KZ par M. Jimbo, R. Kedem, T. Kojima, H. Konno et T. Miwa [76]. Notre but était de généraliser ce résultat pour tous les régimes du modèle XXZ en utilisant la version de l'ansatz de Bethe algébrique pour les modèles intégrables avec bords introduite par E. Sklyanin [149]. L'objet central de cette approche est la double matrice de monodromie (au lieu de la matrice de monodromie habituelle pour le cas périodique) qui permet d'obtenir les intégrales de mouvement et de construire les états propres.

Le calcul des fonctions de corrélation dans ce cas rencontre des difficultés supplémentaires. Premièrement pour résoudre le problème inverse dans le cas périodique nous utilisons l'invariance par translation de la chaîne et cette invariance est perdue pour la chaîne ouverte. La reconstruction naïve de Y.-S. Wang [167] ne marche que pour le premier site, pour les autres il faut utiliser les éléments de la matrice de monodromie pour le cas périodique, tandis que les états propres sont construits en termes des éléments de la double matrice de monodromie. Dans [89] (Article XII) en collaboration avec K. Kozłowski, J.M. Maillet, G. Niccoli, N. Slavnov et V. Terras, pour éviter cette difficulté nous proposons une nouvelle forme de la solution du problème inverse pour le cas périodique ainsi qu'un lien entre les états de Bethe pour une chaîne ouverte et ceux pour le cas périodique. Cela permet d'obtenir l'action d'opérateurs locaux sur les états de Bethe et ainsi de réduire le problème du calcul des blocs élémentaires aux calculs des produits

scalaires comme dans le cas périodique. Dans la suite nous calculons les produits scalaires et les normes des états de Bethe en généralisant les résultats de Y.-S. Wang [168]. Dans la limite thermodynamique (chaîne semi-infinie) nous obtenons des représentations sous forme d'intégrales multiples pour les blocs élémentaires pour tous les régimes de la chaîne XXZ.

Ainsi nous montrons que la méthode de calcul des fonctions de corrélation basée sur l'ansatz de Bethe algébrique est utilisable pour différentes généralisations de la chaîne de spin $\frac{1}{2}$ périodique. Il est possible également de généraliser nos résultats pour les fonctions à deux points aux chaînes de spin ouvertes et aux chaînes de spin s . Récemment notre méthode a été généralisée par F. Göhmann, A. Klümper et A. Seel [55, 56] et par K. Sakai [143] pour les fonctions de corrélation dépendantes de la température.

A la fin de cette introduction nous voudrions mentionner quelques développements récents dans le domaine du calcul des fonctions de corrélation. Deux directions parallèles (et complémentaires) à notre approche ont eu des développements spectaculaires ces dernières années. Premièrement il s'agit de la méthode d'analyse des solutions des équations q -KZ proposé par H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov et Y. Takeyama. Les résultats explicites pour les fonctions de corrélation du modèle XXX à petites distances sont à l'origine de cette approche. En 1977 M. Takahashi a calculé la fonction à deux points pour la distance $m = 2$ [157] et il a montré qu'elle s'exprime en termes de la fonction zêta de Riemann $\zeta(3)$. H. Boos et V. Korepin ont confirmé ce résultat à partir des intégrales multiples [27]. Ils l'ont généralisé pour la probabilité de formation du vide pour $m \leq 5$ [27, 28] en observant que cette fonction s'exprime toujours en termes de la fonction zêta d'arguments entiers $\zeta(n)$. Une méthode plus puissante à partir de l'équation q -KZ permettant de calculer les intégrales pour les petites distances a été proposée par H. Boos, V. Korepin et F. Smirnov [26, 29]. Cela a permis de calculer tous les blocs élémentaires de tailles $m \leq 6$ pour la chaîne XXX en termes de la fonctions zêta d'arguments entiers. En s'appuyant sur ces résultats H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov et Y. Takeyama ont élucidé des structures algébriques nouvelles derrière les solutions des équations q -KZ pour la chaîne XXX, XXZ et même (en utilisant certaines hypothèses) pour la chaîne XYZ [20–24]. En particulier cette approche permet de prouver que tous les blocs élémentaires s'expriment en termes de la fonctions zêta d'arguments entiers pour la chaîne XXX et en termes de la fonction zêta q -déformée pour la chaîne XXZ. Les derniers résultats permettent d'identifier une structure fermionique cachée derrière les fonctions de corrélation [25].

La deuxième direction c'est l'étude numérique des fonctions à deux points dynamique à partir des représentations pour les facteurs de forme [98]. J.S. Caux et J.M. Maillet ont utilisé ces résultats ainsi que les solutions numériques des équations de Bethe pour les états excités (pour les chaînes de quelques centaines de sites) pour calculer les facteurs de structure, c'est à dire les transformés de Fourier des fonctions à deux points dynamiques [33, 34]. Cette approche permet de comparer les résultats obtenus pour les fonctions de corrélation des chaînes de spin avec les données expérimentales pour la diffusion inélastique des neutrons sur certains cristaux magnétiques.

Chapitre 2

Chaîne de spin $\frac{1}{2}$ XXZ

Dans ce chapitre nous introduisons le modèle XXZ de spin $\frac{1}{2}$ et nous donnons une brève description de la solution de ce modèle par la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique. Nous considérons ici uniquement la chaîne XXZ avec les conditions aux bords périodiques (ou quasi-périodiques).

2.1 Définition du modèle

Le Hamiltonien de la chaîne de spin $\frac{1}{2}$ XXZ dans un champ magnétique extérieur h parallèle à l'axe z s'écrit sous la forme :

$$H = \sum_{m=1}^M (\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y + \Delta (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1)) - \frac{h}{2} \sum_{m=1}^M \sigma_m^z, \quad (2.1)$$

où Δ est le paramètre d'anisotropie. Cet Hamiltonien agit dans l'espace $\mathcal{H} = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_M$ et les espaces quantiques locaux V_j sont isomorphes à \mathbb{C}^2 . Les opérateurs de spin locaux σ_j^a , $a = x, y, z$ sont des matrices de Pauli dans l'espace quantique local V_j . Nous utilisons également les matrices $\sigma_j^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_j^x \pm i\sigma_j^y)$. Nous supposons dans la suite que le nombre de sites M est pair.

Dans ce chapitre nous étudions ce Hamiltonien avec les conditions aux bords quasi-périodiques :

$$\begin{aligned} \sigma_{M+1}^z &= \sigma_1^z, \\ \sigma_{M+1}^\pm &= \kappa^{\pm 1} \sigma_1^\pm, \end{aligned}$$

où κ est un paramètre de twist complexe, pour que le Hamiltonien soit hermitien il faut que $|\kappa| = 1$. Le cas $\kappa = 1$ correspond aux conditions aux bords périodiques.

On considère ici uniquement le cas de champ magnétique extérieur positif car le Hamiltonien avec champ magnétique négatif peut être obtenu par une simple transformation :

$$H(-h) = \Gamma_x H(h) \Gamma_x, \quad \Gamma_x = \prod_{j=1}^M \sigma_x^j.$$

Suivant les valeurs de deux paramètres du modèle (champ magnétique extérieur h et paramètre d'anisotropie Δ) il existe trois phases du système : ferromagnétique, désordonnée et antiferromagnétique. S'il n'y a pas de champ magnétique extérieur on obtient le régime ferromagnétique si $\Delta < -1$, le régime désordonné si $|\Delta| \leq 1$ et le régime antiferromagnétique si $\Delta > 1$. L'état fondamental dans le cas ferromagnétique est trivial (c'est l'un de deux états ferromagnétiques avec tous les spins alignés en même direction), donc on ne le considère pas ici. La technique de l'ansatz de Bethe algébrique est la même pour les régimes désordonné et antiferromagnétique, ainsi pour simplifier les notations tous les résultats seront présentés ici uniquement pour le cas $|\Delta| \leq 1$. Les résultats pour le cas $\Delta > 1$ sont présentés dans les articles en appendices (par exemple la description détaillée de l'ansatz de Bethe algébrique est donnée dans l'article I).

Il y a plusieurs cas spéciaux du modèle XXZ, en particulier le point $\Delta = 1$ (ou la chaîne XXX, le modèle initialement introduit par Heisenberg [57] et résolu par Bethe en 1931 [18]) et le point de fermions libres $\Delta = 0$. Nous allons également étudier en détail le point $\Delta = \frac{1}{2}$ où le modèle XXZ a des nombreuses propriétés intéressantes. Il est important de mentionner que ces trois points appartiennent au secteur désordonné (pour le champ magnétique extérieur nul) et c'est encore une des raisons pour lesquelles nous avons choisi de concentrer ici sur ce régime.

2.2 Ansatz de Bethe Algébrique

Le premier problème qu'il faut résoudre pour procéder au calcul des fonctions de corrélation est la diagonalisation du Hamiltonien (2.1) Pour construire les états propres de la chaîne de spin XXZ nous utilisons ici la technique de l'ansatz de Bethe algébrique (ou la méthode de diffusion inverse quantique) introduite par Faddeev, Sklyanin et Takhtadjan en 1979 [47]. Ici nous donnons une brève description de cette méthode appliquée à la chaîne de spin XXZ quasi-périodique.

Nous commençons par l'introduction des trois notions principales de la méthode : la **matrice \mathbf{R}** , la **matrice de monodromie** et la **matrice de transfert** et nous montrons ensuite comment ces objets peuvent être utilisés pour construire les états propres du Hamiltonien (2.1).

On introduit la matrice $R_{jk}(\lambda)$ qui agit dans le produit tensoriel de deux espaces V_j et V_k (dans le cas de la chaîne de spin XXZ ce sont deux espaces \mathbb{C}^2) et qui satisfait à l'équation de Yang-Baxter :

$$R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3) R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) = R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3) R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (2.2)$$

Nous considérons ici la solution trigonométrique de cette équation :

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & a(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

où le paramètre ζ est lié au paramètre d'anisotropie du modèle XXZ $\Delta = \cos \zeta$ et

$$b(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda)}{\sinh(\lambda - i\zeta)}, \quad c(\lambda) = -i \frac{\sin \zeta}{\sinh(\lambda - i\zeta)} \quad (2.4)$$

(pour résoudre le modèle XXX il faut considérer la solution rationnelle

$$b(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - i}, \quad c(\lambda) = -\frac{i}{\lambda - i},$$

sinon toute la technique est la même).

Cette matrice a les propriétés suivantes :

1. Normalisation :

$$R_{12}(0) = P_{12},$$

où P_{12} est l'opérateur de transposition dans le produit tensoriel $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, c'est à dire $P_{12}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$, pour deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$.

2. Unitarité :

$$R_{12}(\lambda)R_{12}(-\lambda) = I$$

.

3. Symétrie de croisement

$$R_{12}(\lambda)\sigma_1^y R_{12}^{t_1}(\lambda + i\zeta)\sigma_1^y = b(\lambda + i\zeta) \cdot I,$$

où $R_{12}^{t_1}$ est la matrice R transposée dans l'espace V_1 .

Pour les chaînes de spin la matrice R joue le rôle d'opérateur L (opérateur de Lax quantique). Un produit ordonné des matrices R agissant dans les produits tensoriels de l'espace auxiliaire V_a et d'un espace quantique local V_j s'appelle la **matrice de monodromie** de la chaîne :

$$T_a(\lambda) = R_{aM}(\lambda - \xi_M) \dots R_{a1}(\lambda - \xi_1) \quad (2.5)$$

où ξ_j sont les paramètres d'inhomogénéité arbitraires. L'introduction de ces paramètres n'est pas indispensable mais pratique pour les calculs intermédiaires. Dans la suite nous supposons que ces paramètres sont suffisamment proches du point $-i\frac{\zeta}{2}$. La matrice de monodromie est un opérateur qui agit dans le produit tensoriel de $M + 1$ espaces \mathbb{C}^2 et qui peut être représenté comme une matrice 2×2 dans l'espace auxiliaire V_a ,

$$T_a(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}_{[a]}, \quad (2.6)$$

où les éléments de la matrice de monodromie $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des opérateurs qui agissent dans le même espace \mathcal{H} que le Hamiltonien du modèle XXZ. Les opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ conservent la troisième composante du spin total :

$$[A(\lambda), S^z] = [D(\lambda), S^z] = 0, \quad S_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \sigma_j^z,$$

tandis que les opérateurs $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$ la changent de la façon suivante :

$$[B(\lambda), S^z] = B(\lambda), \quad [C(\lambda), S^z] = -C(\lambda).$$

Les relations de commutation de ces quatre opérateurs pour les valeurs différentes du paramètre spectral λ peuvent être obtenues de l'équation de Yang-Baxter (2.2). On considère deux matrices de monodromie $T_a(\lambda)$ et $T_b(\mu)$ avec les espaces auxiliaires différents V_a et V_b . En utilisant M fois l'équation de Yang-Baxter on obtient,

$$R_{ab}(\lambda - \mu) T_a(\lambda) T_b(\mu) = T_b(\mu) T_a(\lambda) R_{ab}(\lambda - \mu) \quad (2.7)$$

Cette formule (que l'on appelle d'habitude « la relation RTT ») contient toutes les relations de commutation pour les éléments de la matrice de monodromie dont les plus simples sont :

$$[A(\lambda), A(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = [C(\lambda), C(\mu)] = [D(\lambda), D(\mu)] = 0.$$

Pour tenir compte des conditions aux bords quasi-périodiques il est pratique d'introduire la matrice de monodromie « twistée »

$$T_a^{(\kappa)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}_{[a]} T_a(\lambda), \quad (2.8)$$

Cette matrice satisfait à la même relation RTT (2.7) :

$$R_{ab}(\lambda - \mu) T_a^{(\kappa)}(\lambda) T_b^{(\kappa)}(\mu) = T_b^{(\kappa)}(\mu) T_a^{(\kappa)}(\lambda) R_{ab}(\lambda - \mu)$$

La trace de la matrice de monodromie dans l'espace auxiliaire s'appelle la **matrice de transfert** :

$$\mathcal{T}_\kappa(\lambda) = \text{tr}_a T_a^{(\kappa)}(\lambda) = A(\lambda) + \kappa D(\lambda) \quad (2.9)$$

(d'habitude pour le cas $\kappa = 1$ on utilise la notation $\mathcal{T}(\lambda) \equiv \mathcal{T}_\kappa(\lambda)|_{\kappa=1}$). Il est évident que la matrice de transfert commute avec l'opérateur S^z .

Une conséquence importante de la relation RTT est la relation de commutation pour les matrices de transfert :

$$[\mathcal{T}_\kappa(\lambda), \mathcal{T}_\kappa(\mu)] = 0. \quad (2.10)$$

Dans la limite homogène ($\xi_j = -i\frac{\zeta}{2}, \forall j$) matrice de transfert est étroitement liée au Hamiltonien du modèle XXZ. Plus précisément, le Hamiltonien XXZ avec les conditions aux bords quasi-périodiques peut être reconstruit comme la dérivée logarithmique de la matrice de transfert :

$$H_\kappa = -2i \sin \zeta \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \mathcal{T}_\kappa(\lambda) \right|_{\lambda = -i\frac{\zeta}{2}} - h S^z. \quad (2.11)$$

En utilisant (2.10) et (2.11) on déduit que la matrice de transfert est une quantité conservée pour toute valeur du paramètre spectral λ :

$$[H_\kappa, \mathcal{T}^{(\alpha)}(\lambda)] = 0 \quad (2.12)$$

Ainsi nous avons construit un ensemble de quantités conservées qui commutent entre elles. Cela veut dire en particulier, que si on trouve les états propres pour la matrice de transfert pour toute valeur du paramètre λ on trouvera également les états propres du Hamiltonien.

Les états propres de la matrice de transfert peuvent être construits en utilisant les opérateurs $B(\lambda)$ comme opérateurs de création (et $C(\lambda)$ comme opérateurs d'annihilation). Pour que ce soit possible il faut qu'il existe un état $|0\rangle$ qui :

- soit un état propre des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad \forall \lambda,$$

- soit annihilé par l'opérateur $C(\lambda)$

$$C(\lambda)|0\rangle = 0, \quad \forall \lambda.$$

Pour la chaîne XXZ l'état ferromagnétique avec tous les spins dirigés vers le haut satisfait à ces conditions. Les valeurs propres des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont

$$a(\lambda) = 1, \quad d(\lambda) = \prod_{j=1}^M \frac{\sinh(\lambda - \xi_j)}{\sinh(\lambda - \xi_j - i\zeta)} \quad (2.13)$$

On cherche les autres états propres de la matrice de transfert sous la forme

$$|\psi\rangle = B(\lambda_N) \dots B(\lambda_1)|0\rangle.$$

Maintenant on peut utiliser les relations de commutation entre les opérateurs $A(\mu)$, $D(\mu)$ et $B(\lambda)$ données par la relation RTT (2.7) pour étudier l'action de la matrice de transfert sur un tel état

$$A(\lambda_{N+1})B(\lambda_N) \dots B(\lambda_1)|0\rangle = \sum_{k=1}^{N+1} a(\lambda_k) \frac{\prod_{j=1}^N \sinh(\lambda_k - \lambda_j - i\zeta)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N+1} \sinh(\lambda_k - \lambda_j)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N+1} B(\lambda_j)|0\rangle, \quad (2.14)$$

$$D(\lambda_{N+1})B(\lambda_N) \dots B(\lambda_1)|0\rangle = \sum_{k=1}^{N+1} d(\lambda_k) \frac{\prod_{j=1}^N \sinh(\lambda_k - \lambda_j + i\zeta)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N+1} \sinh(\lambda_k - \lambda_j)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N+1} B(\lambda_j)|0\rangle. \quad (2.15)$$

On obtient donc les conditions pour que l'état $|\psi\rangle$ soit un état propre de la matrice de transfert $\mathcal{T}_\kappa(\lambda_{N+1})$ pour toute valeur du paramètre λ_{N+1}

$$\mathcal{Y}_\kappa(\lambda_j|\{\lambda\}) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.16)$$

où

$$\mathcal{Y}_\kappa(\mu|\{\lambda\}) = a(\mu) \prod_{k=1}^N \sinh(\lambda_k - \mu - i\zeta) + \kappa d(\mu) \prod_{k=1}^N \sinh(\lambda_k - \mu + i\zeta). \quad (2.17)$$

Ce système de N équations pour $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ s'appelle les **équations de Bethe** pour le modèle XXZ. Les états $|\psi\rangle$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ satisfont à ces équations s'appellent les états de Bethe. La valeur propre de la matrice de transfert $\mathcal{T}_\kappa(\lambda_\mu)$ pour un état de Bethe peut être facilement obtenue de (2.14,2.15) :

$$\tau_\kappa(\mu|\{\lambda\}) = a(\mu) \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\lambda_k - \mu - i\zeta)}{\sinh(\lambda_k - \mu)} + \kappa d(\mu) \prod_{k=1}^N \frac{\sinh(\mu - \lambda_k - i\zeta)}{\sinh(\mu - \lambda_k)}. \quad (2.18)$$

Finalement en utilisant l'identité de trace (2.11) on obtient le spectre du Hamiltonien XXZ :

$$H_\kappa|\psi\rangle = \left(-\frac{Mh}{2} + \sum_{j=1}^N \varepsilon_0(\lambda_j) \right) |\psi\rangle, \quad \varepsilon_0(\lambda) = -\frac{2 \sin^2 \zeta}{\sinh(\lambda + i\frac{\zeta}{2}) \sinh(\lambda - i\frac{\zeta}{2})} + h \quad (2.19)$$

Notons aussi que si $|\psi\rangle = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N)|0\rangle$ est un état de Bethe on peut représenter son état dual sous la forme suivante :

$$\langle\psi| = \langle 0|C(\lambda_1) \dots C(\lambda_N),$$

et c'est aussi un état propre de la matrice de transfert et du Hamiltonien.

La complétude des états de Bethe est une question nettement plus compliquée qui ne rentre pas dans le cadre de ce mémoire. Pour la chaîne de spin XXZ avec les conditions aux bords quasi-périodiques la question a été étudiée en détail par Tarasov et Varchenko [163]. Le résultat le plus important pour nous est le fait que l'état fondamental du modèle XXZ peut être construit par l'ansatz de Bethe algébrique.

2.3 Etat fondamental

Les fonctions de corrélation à température nulle sont définies comme les valeurs moyennes des opérateurs locaux dans l'état fondamental. Ainsi notre but suivant est de décrire la solution des équations de Bethe qui correspond à cet état. Nous donnons ici sans preuve les résultats principaux concernant cette solution en suivant la méthode proposée pour le modèle du gaz de Bose unidimensionnel par Lieb et Liniger en 1963 [122] et utilisée par Yang et Yang en 1966 pour la chaîne de spin XXZ [174]. Nous considérons ici uniquement le régime $|\Delta| \leq 1$, l'analyse similaire pour le cas $\Delta > 1$ est décrite en détail dans l'article I. Pour que le Hamiltonien H_κ soit hermitien nous considérons ici le cas $|\kappa| = 1$.

On réécrit les équations de Bethe (2.16) (dans la limite homogène $\xi_j = -i\frac{\zeta}{2}$) sous la forme logarithmique

$$Mp_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) + i \log \kappa = 2\pi n_j, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (2.20)$$

où n_j sont des entiers pour N impair et demi-entiers pour N pair. En général différents ensembles d'entiers (ou demi-entiers) n_j correspondent aux différentes solutions des équations

tions de Bethe. L'impulsion $p_0(\lambda)$ et la phase de diffusion $\theta(\lambda)$ sont données par

$$p_0(\lambda) = i \ln \frac{\sinh(\lambda + i\frac{\zeta}{2})}{\sinh(\lambda - i\frac{\zeta}{2})},$$

$$\theta(\lambda) = i \ln \frac{\sinh(i\zeta - \lambda)}{\sinh(i\zeta + \lambda)}.$$

Le nombre des quasi-particules N dans l'état fondamental dépend du champ magnétique extérieur h . Dans le cas de champ magnétique nul ce nombre est $N = \frac{M}{2}$.

Les entiers (demi-entiers) n_j qui correspondent à l'état fondamental sont des nombres consécutifs :

$$n_j = -\frac{N+1}{2} + j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Les solutions des équations de Bethe correspondantes sont des nombres réels (pour $h \geq 0$ et $|\kappa| = 1$)

Il est plus facile d'étudier l'état fondamental dans la limite thermodynamique $M \rightarrow \infty$. Dans cette limite on peut introduire la densité des paramètres λ dans l'état fondamental. Plus précisément pour toute fonction $f(\lambda) \in C_\infty(\mathbb{R})$ on peut remplacer la somme $\sum_{j=1}^N f(\lambda_j)$, où $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est la solution des équations de Bethe qui correspond à l'état fondamental, par l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^N f(\lambda_j) = \int_{-\Lambda_h}^{\Lambda_h} f(\lambda) \rho_h(\lambda) d\lambda + O(M^{-1}), \quad (2.21)$$

où la densité $\rho_h(\lambda)$ est la solution de l'équation intégrale de Lieb. [122, 174] :

$$\rho_h(\lambda) + \int_{-\Lambda_h}^{\Lambda_h} K(\lambda - \mu) \rho_h(\mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda), \quad (2.22)$$

avec le noyau $K(\lambda)$ défini par

$$K(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \theta'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin 2\zeta}{\sinh(\lambda + i\zeta) \sinh(\lambda - i\zeta)} \quad (2.23)$$

La limite d'intégration Λ_h (la limite de la zone de Fermi) est définie par les équations pour l'énergie « habillée » d'excitations :

$$\varepsilon_h(\lambda) + \int_{-\Lambda_h}^{\Lambda_h} d\mu K(\lambda - \mu) \varepsilon_h(\mu) = \varepsilon_0(\lambda), \quad \varepsilon_h(\Lambda_h) = 0, \quad (2.24)$$

où l'énergie « nue » de quasi-particule $\varepsilon_0(\lambda)$ est définie par la formule (2.19). L'intégrale de la densité donne le nombre N de quasi-particules dans l'état fondamental, plus précisément,

$$\int_{-\Lambda_h}^{\Lambda_h} \rho_h(\lambda) d\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N}{M}.$$

Dans le cas de champ magnétique nul $h = 0$ l'équation pour la densité devient plus simple car $\Lambda_h \rightarrow \infty$. La solution $\rho(\lambda)$ peut être facilement obtenue :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\zeta \cosh(\frac{\pi}{\zeta}\lambda)}. \quad (2.25)$$

L'analyse des états excités peut être également effectuée en utilisant une technique similaire [5, 48, 160, 169] mais c'est un problème plus compliqué qui ne rentre pas dans le cadre de ce mémoire où nous étudions uniquement les valeurs moyennes dans l'état fondamental.

Ainsi on voit que

1. Les états propres du Hamiltonien XXZ sont construits par l'action des éléments de la matrice de monodromie $B(\lambda)$ à condition que les paramètres λ_j satisfassent aux équations de Bethe.
2. Dans la limite thermodynamique il n'est pas nécessaire de résoudre les équations de Bethe, elles peuvent être remplacées par les équations intégrales pour la densité des solutions.

Dans le chapitre suivant nous utiliserons ces résultats pour obtenir les représentations pour les fonctions de corrélation du modèle XXZ dans la limite thermodynamique.

Chapitre 3

Blocs élémentaires

Notre but central est l'étude des fonctions de corrélation en température nulle. Avant d'aborder le problème central du calcul des fonctions à deux points nous considérons dans ce chapitre les objets que l'on appelle les blocs élémentaires. On définit un bloc comme la valeur moyenne d'un produit de matrices élémentaires locales $E_j^{\epsilon\epsilon'}$, où $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$ et

$$\begin{aligned} E^{++} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & E^{+-} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E^{-+} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & E^{--} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dans les sites consécutifs,

$$F_m(\{\epsilon_j, \epsilon'_j\}) = \frac{\langle \psi_g | \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (3.1)$$

où $|\psi_g\rangle$ est l'état fondamental du modèle XXZ. Le calcul de blocs élémentaires permet d'obtenir directement des représentations pour les fonctions à deux points comme des sommes de 2^m termes (où m est la distance) car n'importe quelle fonction de corrélation peut être exprimée en termes des blocs.

Nous présentons ici notre méthode de calcul des blocs élémentaires, basée sur l'ansatz de Bethe algébrique. Dans le chapitre précédent l'état fondamental a été construit en termes des éléments de la matrice de monodromie. Pour calculer les fonctions de corrélation nous utilisons l'approche suivante :

1. Solution du problème inverse quantique, c'est à dire une expression pour les matrices élémentaires locales (ou les opérateurs de spin locaux) en termes des éléments de la matrice de monodromie.
2. Utilisation de l'algèbre de Yang-Baxter (relation RTT).
3. Calcul des produits scalaires.
4. Limite thermodynamique (remplacement des sommes par des intégrales).

A la fin les blocs élémentaires sont représentés comme des intégrales multiples. Dans la partie finale de ce chapitre nous montrons que cette représentation peut être utilisée pour l'analyse asymptotique d'un bloc élémentaire très important - la probabilité de formation du vide *i.e.* la probabilité de retrouver m premiers spins alignés vers le bas. Nous montrons également qu'au point $\Delta = \frac{1}{2}$ on peut calculer les intégrales multiples pour cette fonction et obtenir le résultat en termes du nombre des matrices de signes alternés.

Ce chapitre contient les résultats des articles I, II et III.

3.1 Problème inverse

Nous avons montré dans le premier chapitre que l'état fondamental du modèle XXZ peut être construit en termes des éléments de la matrice de monodromie. Pour étudier les blocs élémentaires (3.1) il faut maintenant reconstruire les matrices élémentaires en termes des opérateurs $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$. Cette reconstruction est en effet la solution du problème inverse pour la chaîne XXZ.

La solution que nous présentons ici a été obtenue pour la première fois dans l'article [98], sa généralisation pour les autres chaînes de spin a été obtenue par J.M. Maillet et V. Terras dans [127]. Nous donnons ici uniquement les résultats, mais il faut mentionner que la preuve présentée dans [127] est basée sur l'équation de Yang Baxter et sur la propriété de normalisation de la matrice $R : R_{12}(0) = P_{12}$.

Proposition 3.1. *Les matrices élémentaires $E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j}$ peuvent être exprimées en termes des éléments de la matrice de monodromie sous la forme suivante :*

$$E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} = \prod_{k=1}^{j-1} \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) T_{\epsilon'_j, \epsilon_j}^{(\kappa)}(\xi_j) \prod_{k=1}^j \mathcal{T}_\kappa^{-1}(\xi_k). \quad (3.2)$$

Cette formule est l'élément central pour notre approche. Pour les opérateurs de spin on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_j^- &= \prod_{k=1}^{j-1} \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) B(\xi_j) \prod_{k=1}^j \mathcal{T}_\kappa^{-1}(\xi_k), \\ \sigma_j^+ &= \kappa \prod_{k=1}^{j-1} \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) C(\xi_j) \prod_{k=1}^j \mathcal{T}_\kappa^{-1}(\xi_k), \\ \sigma_j^z &= \prod_{k=1}^{j-1} \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) (A(\xi_j) - \kappa D(\xi_j)) \prod_{k=1}^j \mathcal{T}_\kappa^{-1}(\xi_k). \end{aligned}$$

Cette solution est très bien adaptée pour le calcul des fonctions de corrélation. Soit l'état fondamental $|\psi_g\rangle = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N)|0\rangle$. En utilisant la solution du problème inverse on obtient la représentation pour les blocs élémentaires (3.1) uniquement en termes des éléments de la matrice de monodromie :

$$F_m(\{\epsilon_j, \epsilon'_j\}) = \prod_{j=1}^m \tau_\kappa^{-1}(\xi_j | \{\lambda\}) \frac{\langle 0 | C(\lambda_N) \dots C(\lambda_1) \prod_{j=1}^m T_{\epsilon'_j, \epsilon_j}^{(\kappa)}(\xi_j) B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N) | 0 \rangle}{\langle 0 | C(\lambda_N) \dots C(\lambda_1) B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N) | 0 \rangle}. \quad (3.3)$$

Maintenant il faut utiliser les relations de commutation des éléments de la matrice de monodromie (relation RTT). L'action des opérateurs $A(\lambda)$, $D(\lambda)$ et $B(\lambda)$ à gauche sur l'état de Bethe dual $\langle \psi_g |$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$\langle 0 | \prod_{k=1}^N C(\lambda_k) A(\lambda_{N+1}) = \sum_{a'=1}^{N+1} a(\lambda_{a'}) \frac{\prod_{k=1}^N \sinh(\lambda_k - \lambda_{a'} - i\zeta)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a'}}^{N+1} \sinh(\lambda_k - \lambda_{a'})} \langle 0 | \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a'}}^{N+1} C(\lambda_k); \quad (3.4)$$

$$\langle 0 | \prod_{k=1}^N C(\lambda_k) D(\lambda_{N+1}) = \sum_{a=1}^{N+1} d(\lambda_a) \frac{\prod_{k=1}^N \sinh(\lambda_a - \lambda_k - i\zeta)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^{N+1} \sinh(\lambda_a - \lambda_k)} \langle 0 | \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^{N+1} C(\lambda_k); \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{k=1}^N C(\lambda_k) B(\lambda_{N+1}) &= \sum_{a=1}^{N+1} d(\lambda_a) \frac{\prod_{k=1}^N \sinh(\lambda_a - \lambda_k - i\zeta)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^{N+1} \sinh(\lambda_a - \lambda_k)} \\ &\times \sum_{\substack{a'=1 \\ a' \neq a}}^{N+1} \frac{a(\lambda_{a'})}{\sinh(\lambda_{N+1} - \lambda_{a'} - i\zeta)} \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq a}}^{N+1} \sinh(\lambda_j - \lambda_{a'} - i\zeta)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq a, a'}}^{N+1} \sinh(\lambda_j - \lambda_{a'})} \langle 0 | \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq a, a'}}^{N+1} C(\lambda_k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ainsi on voit que l'action des opérateurs locaux sur un état de Bethe produit une somme d'états construits avec les opérateurs $C(\lambda)$ (mais ce ne sont plus des états de Bethe car certains paramètres λ_a sont remplacés par ξ_j).

Pour obtenir la représentation finale pour les blocs élémentaires pour la chaîne XXZ finie il faut calculer les produits scalaires des états obtenus à gauche (après l'action des éléments de la matrice de monodromie) avec l'état de Bethe à droite ainsi que la norme de l'état fondamental.

3.2 Produits scalaires

Dans cette section nous étudions les produits scalaires des états construits par l'action des éléments de la matrice de monodromie.

3.2.1 Fonction de partition

Nous commençons par le cas le plus simple mais aussi le plus fondamental. Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ un ensemble de paramètres arbitraires. Nous considérons le cas inhomogène,

$\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$ est l'ensemble de paramètres d'inhomogénéité du modèle. Izergin et Korepin [71, 104] ont démontré que pour calculer les produits scalaires dans le cadre de l'ansatz de Bethe algébrique il est indispensable d'obtenir des représentations pour l'objet suivant

$$Z_M(\{\lambda\}|\{\xi\}) = \langle 0' | B(\lambda_1) \dots B(\lambda_M) | 0 \rangle, \quad (3.7)$$

où $\langle 0' |$ est le deuxième état ferromagnétique de la chaîne avec tous les spins dirigés vers le bas. Si l'on considère le modèle à six vertex inhomogène avec les conditions aux bords de type parois de domaines (DWBC) on peut montrer que (3.7) donne la fonction de partition de ce système [106].

Cet objet a été étudié pour la première fois par V. Korepin [104] dans le cadre du calcul des fonctions de corrélation. Il a prouvé, en particulier, que cette fonction est définie de façon unique par les conditions suivantes :

1. $Z_M(\{\lambda\}|\{\xi\})$ est une fonction symétrique de $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ et de ξ_1, \dots, ξ_M .
2. $Z_1(\lambda|\xi) = c(\lambda - \xi)$, où la fonction $c(\lambda)$ est définie par (2.4).
3. La fonction

$$e^{2M\lambda_M} \left(\prod_{j,k=1}^M c^{-1}(\lambda_j - \xi_k) \right) Z_M(\{\lambda\}|\{\xi\}),$$

est un polynôme de la variable $e^{2\lambda_M}$ de degré $M - 1$.

4. La fonction $Z_N(\{\lambda_j\}|\{\xi_k\})$ satisfait à la condition de récurrence suivante :

$$Z_M(\{\lambda\}|\{\xi\})|_{\lambda_M=\xi_M} = Z_{M-1}(\{\lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}\}|\{\xi_1, \dots, \xi_{M-1}\}).$$

La fonction qui satisfait à ces conditions a été construite par A. Izergin dans [69], Z_M y est représentée sous forme de déterminant :

$$Z_M(\{\lambda\}|\{\xi\}) = \frac{\prod_{j=1}^M \prod_{k=1}^M \sinh(\lambda_j - \xi_k)}{\prod_{j>k} \sinh(\lambda_j - \lambda_k) \sinh(\xi_k - \xi_j)} \det_M \mathcal{M},$$

$$\mathcal{M}_{jk} = \frac{-i \sin \zeta}{\sinh(\lambda_j - \xi_k) \sinh(\lambda_j - \xi_k - i\zeta)}. \quad (3.8)$$

Ce résultat est nécessaire pour prouver toutes les autres formules pour les produits scalaires (plus précisément la possibilité d'obtenir des représentations sous forme de déterminants pour les produits scalaires est une conséquence de cette formule). Nous montrerons également que cet objet apparaît dans les formules finales pour certaines fonctions de corrélation.

3.2.2 Produits scalaires

Pour le calcul des blocs élémentaires nous avons besoin des produits scalaires d'un état de Bethe avec un état construit par l'action des opérateurs $C(\lambda)$. De tels produits

scalaires ont été considérés pour la première fois par N. Slavnov [152], ici nous présentons la forme du résultat obtenue pour la chaîne XXZ dans dans [98]. Nous considérons le produit scalaire

$$S_N(\{\mu\}|\{\lambda\}) = \langle 0|C(\mu_1) \dots C(\mu_N) B(\lambda_N) \dots B(\lambda_1)|0\rangle,$$

où $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ est une solution des équations de Bethe et $\{\mu_1, \dots, \mu_N\}$ est un ensemble de paramètres arbitraires.

Proposition 3.2. *Le produit scalaire $S_N(\{\mu\}|\{\lambda\})$ peut être représenté comme le rapport de deux déterminants :*

$$S_N(\{\mu\}|\{\lambda\}) = \kappa^{-N} \frac{\det T(\{\mu\}, \{\lambda\})}{\det V(\{\mu\}, \{\lambda\})},$$

$$T_{ab} = \frac{\partial}{\partial \lambda_a} \tau_\kappa(\mu_b, \{\lambda\}), \quad V_{ab} = \frac{1}{\sinh(\mu_b - \lambda_a)}, \quad (3.9)$$

où $\tau_\kappa(\mu_b, \{\lambda\})$ est la valeur propre de la matrice de transfert (2.18).

La preuve de cette proposition est basée sur la formule d'Izergin (3.8) et présentée en détail dans [98].

3.2.3 Normes des états de Bethe

Dans la limite $\mu_j \rightarrow \lambda_j$ on obtient la formule suivante pour la norme des états de Bethe

$$\langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) |0\rangle = \frac{(-\kappa)^{-N}}{\prod_{a \neq b} \sinh(\lambda_a - \lambda_b)} \det_N Y'(\{\lambda\}),$$

$$Y'_{jk} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \mathcal{Y}_\kappa(\lambda_j|\{\lambda\}) \quad (3.10)$$

où la fonction $\mathcal{Y}_\kappa(\lambda_j|\{\lambda\})$ est définie par (2.17). Ce résultat a été conjecturé par M. Gaudin [52, 53] et prouvé par V. Korepin [104].

Ainsi nous avons obtenu des représentations pour les produits scalaires (3.9) et les normes (3.10) des états de Bethe. Avec la solution du problème inverse (3.2) et l'action des éléments de la matrice de monodromie sur un état de Bethe (3.4-3.6) cela donne une représentation pour les blocs élémentaires pour une chaîne XXZ finie en termes des paramètres λ_j - solutions des équations de Bethe. Dans la limite thermodynamique on remplace les équations de Bethe par l'équation intégrale de Lieb pour la densité (2.22) et les sommes par des intégrales. On obtient ainsi des représentations pour les blocs élémentaires sous forme des intégrales multiples.

3.3 Blocs élémentaires

Dans cette section nous présentons brièvement le résultat principal de l'article I - la représentation pour les blocs élémentaires sous forme des intégrales multiples pour la

chaîne XXZ dans un champ magnétique extérieur. Les détails de ce calcul et la preuve du résultat sont donnés dans l'article I.

Nous étudions les blocs élémentaires

$$F_m(\{\epsilon_j, \epsilon'_j\}) = \frac{\langle \psi_g | \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (3.11)$$

Les formules (3.4-3.6) montrent que les blocs peuvent être représentés comme des sommes multiples. Le nombre de sommes que l'on obtient pour un bloc de longueur m est toujours m (les opérateurs $A(\xi)$ et $D(\xi)$ produisent une somme chacun, l'opérateur $B(\xi)$ - une double somme, tandis que $C(\xi)$ - aucune somme; les nombres d'opérateurs $B(\xi)$ et $C(\xi)$ doivent être égaux pour que la valeur moyenne soit non nulle). Dans la limite thermodynamique ces sommes sont remplacées par des intégrales de contour. Le choix du contour d'intégration dépend de l'opérateur local. On peut voir qu'il existe deux types de sommes : « sommes de type A » (3.4) et « sommes de type D » (3.5), on peut interpréter la double somme dans (3.6) comme une somme de type A et une somme de type D . Les contours d'intégrations dans la limite thermodynamique sont différents pour ces deux situations. Pour la somme de type D le contour Γ_D est l'intervalle de l'axe réel $[-\Lambda_h, \Lambda_h]$, car $d(\xi_j) = 0$ et on peut utiliser directement la formule (2.21). Pour les sommes de type A il faut également tenir compte des termes supplémentaires (il apparaissent dans (3.4) avec $\lambda_{N+j} = \xi_j$), dans la suite nous les appelons « les termes directs ». Ces termes peuvent être également écrits comme les intégrales de la même fonction sur les contours autour des points $\lambda = \xi_j$ grâce à l'identité

$$2i\pi \operatorname{Res} \rho(\lambda - \xi - i\zeta/2) \Big|_{\lambda=\xi} = 1. \quad (3.12)$$

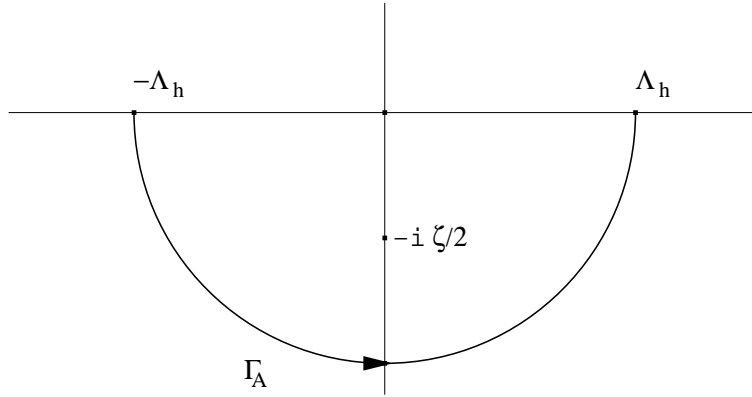
Cela signifie que le contour pour les sommes de type A doit être déformé. Dans la limite homogène ($\xi_j = i\frac{\zeta}{2}$) le contour Γ_A est aussi entre les points $-\Lambda_h$ et Λ_h mais passe au dessous du pôle de la densité $-i\frac{\zeta}{2}$ (voir Figure 3.1). Dans le cas inhomogène si l'on suppose que tous les paramètres ξ_j sont suffisamment proches du point $-i\frac{\zeta}{2}$ (c'est le cas le plus important pour nous) on peut garder le même contour (le contour doit passer au dessous de tous les points ξ_j).

Pour écrire ces intégrales on introduit deux ensembles :

$$\begin{aligned} \beta^+ &= \{j : 1 \leq j \leq m, \epsilon_j = +1\}, & \operatorname{card}(\beta^+) &= s', & \max_{j \in \beta^+}(j) &\equiv j'_{\max}, & \min_{j \in \beta^+}(j) &\equiv j'_{\min}, \\ \beta^- &= \{j : 1 \leq j \leq m, \epsilon'_j = -1\}, & \operatorname{card}(\beta^-) &= s, & \max_{j \in \beta^-}(j) &\equiv j_{\max}, & \min_{j \in \beta^-}(j) &\equiv j_{\min}. \end{aligned}$$

Ici s' est le nombre d'intégrales de type A et s est le nombre d'intégrales de type D , $s + s' = m$. On utilise les variables d'intégration de type D : $\{\mu_j : j \in \beta^-\}$ et les variables d'intégration de type A : $\{\mu'_j : j \in \beta^+\}$ et l'ensemble ordonné de toutes les variables d'intégration :

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = \{\mu'_{j'_{\max}}, \dots, \mu'_{j'_{\min}}, \mu_{j_{\min}}, \dots, \mu_{j_{\max}}\}.$$

FIG. 3.1 – Contour Γ_A

Donc chaque variable d'intégration λ_p avec $p = 1, \dots, s$ correspond à une intégrale de type A : $\lambda_p = \mu_j$ et on peut définir un entier $i_p = j$, également pour $p = s + 1, \dots, m$, λ_p correspond à une intégrale de type D , $\lambda_p = \mu'_j$ et $i_p = j$.

Nous obtenons finalement dans la limite thermodynamique le résultat suivant pour les blocs élémentaires (3.11),

$$\begin{aligned}
F_m(\{\epsilon_j, \epsilon'_j\}) &= \frac{(-1)^{m-s}}{\prod_{k<l} \sinh(\xi_k - \xi_l)} \prod_{p=1}^s \int_{\Gamma_D} d\lambda_s \prod_{p=s+1}^m \int_{\Gamma_A} d\lambda_p \frac{\det_m \mathcal{S}(\{\lambda\}|\{\xi\})}{\prod_{j>k} \sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \\
&\times \prod_{p=1}^s \left(\prod_{k=1}^{i_p-1} \sinh(\lambda_p - \xi_k - i\zeta) \right) \left(\prod_{k=i_p+1}^m \sinh(\lambda_p - \xi_k) \right) \\
&\times \prod_{p=s+1}^m \left(\prod_{k=1}^{i_p-1} \sinh(\xi_k - \lambda_p - i\zeta) \right) \left(\prod_{k=i_p+1}^m \sinh(\lambda_p - \xi_k) \right). \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice \mathcal{S} est obtenu du rapport de deux déterminants, celui du numérateur de (3.9) et celui de la formule de Gaudin (3.10) dans la limite thermodynamique,

$$\mathcal{S}_{jk} = \tilde{\rho}_h(\lambda_j, \xi_k), \quad (3.14)$$

où la fonction $\tilde{\rho}_h(\lambda, \xi)$ est la solution de l'équation intégrale suivante :

$$\tilde{\rho}_h(\lambda, \xi) + \int_{-\Lambda_h}^{\Lambda_h} K(\lambda - \mu) \tilde{\rho}_h(\mu, \xi) d\mu = \frac{1}{2\pi} p'_0(\lambda - \xi - i\frac{\zeta}{2}). \quad (3.15)$$

Le résultat (3.13) a une structure bien particulière. On peut toujours distinguer deux parties dans l'expression sous l'intégrale : le déterminant $\det_m \mathcal{S}(\{\lambda\}|\{\xi\})$, qui ne dépend pas de choix des opérateurs locaux est défini totalement par l'état fondamental (la partie

thermodynamique) et le reste (ou la partie algébrique) défini par le choix des opérateurs est indépendant du champ magnétique. L'origine de la partie thermodynamique est le rapport de deux déterminants, tandis que celle de la partie algébrique est l'algèbre de Yang-Baxter (relation RTT). Cette structure générale pour toutes les valeurs moyennes obtenues par cette méthode est très importante pour pouvoir passer des blocs élémentaires aux fonctions de corrélation physiques.

L'exemple le plus simple d'utilisation de ce résultat est l'aimantation $\langle \sigma_m^z \rangle$. Cette fonction peut être écrite comme une seule intégrale dont on obtient le résultat évident :

$$\langle \sigma_m^z \rangle = 1 - 2 \int_{-\Lambda_h}^{\Lambda_h} \rho_h(\lambda) d\lambda = 1 - 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N}{M}.$$

Les formules pour les blocs élémentaires deviennent plus simple si le champ magnétique extérieur est nul $h = 0$. Dans cette situation on retrouve le résultat obtenu à partir des équations qKZ par M. Jimbo et T. Miwa [79]. Le contour d'intégration Γ_D ici est l'axe réel ($\Lambda_h \rightarrow \infty$) et Γ_A est parallèle à l'axe réel : $\Gamma_A = \{z : \Im z = -\zeta\}$ (Fig. 3.2).

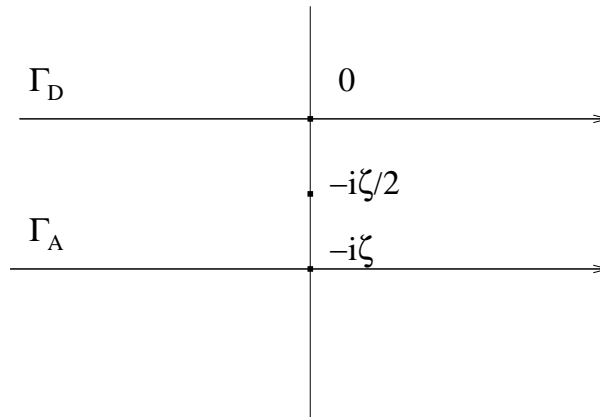


FIG. 3.2 – Contours Γ_A et Γ_D

L'équation (3.15) peut être résolue pour $h = 0$ en termes de la densité (2.25) :

$$\tilde{\rho}_0(\lambda, \xi) = \rho(\lambda - \xi + i\frac{\zeta}{2}), \quad \rho(\lambda) = \frac{1}{2\zeta \cosh(\frac{\pi}{\zeta}\lambda)}$$

et le déterminant de \mathcal{S} devient un déterminant de Cauchy

$$\det_m \mathcal{S} = \frac{1}{(2\zeta)^m} \frac{\prod_{j>k} \sinh \frac{\pi}{\zeta}(\xi_k - \xi_j) \sinh \frac{\pi}{\zeta}(\lambda_j - \lambda_k)}{\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \cosh \frac{\pi}{\zeta}(\lambda_j - \xi_k - i\frac{\zeta}{2})},$$

Ainsi les blocs élémentaires s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned}
F_m(\{\epsilon_j, \epsilon'_j\}) &= (-1)^{m-s} \prod_{j>k} \frac{\sinh \frac{\pi}{\zeta}(\xi_k - \xi_j)}{\sinh(\xi_k - \xi_j)} \prod_{p=1}^s \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_p \prod_{p=s+1}^m \int_{-\infty-i\zeta}^{\infty-i\zeta} d\lambda_p \prod_{j>k} \frac{\sinh \frac{\pi}{\zeta}(\lambda_k - \lambda_j)}{\sinh(\lambda_k - \lambda_j - i\zeta)} \\
&\times \prod_{p=1}^s \frac{\prod_{k=1}^{i_p-1} \sinh(\lambda_p - \xi_k - i\zeta)}{\prod_{k=1}^m \cosh \frac{\pi}{\zeta}(\lambda_p - \xi_k - i\frac{\zeta}{2})} \\
&\times \prod_{p=s+1}^m \frac{\prod_{k=1}^{i_p-1} \sinh(\xi_k - \lambda_p - i\zeta)}{\prod_{k=1}^m \cosh \frac{\pi}{\zeta}(\lambda_p - \xi_k - i\frac{\zeta}{2})}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Dans la limite homogène le résultat final pour les blocs élémentaires est

$$\begin{aligned}
F_m(\{\epsilon_j, \epsilon'_j\}) &= (-1)^{m-s} \left(\frac{\pi}{\zeta}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{p=1}^s \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_p \prod_{p=s+1}^m \int_{-\infty-i\zeta}^{\infty-i\zeta} d\lambda_p \prod_{j>k} \frac{\sinh \frac{\pi}{\zeta}(\lambda_k - \lambda_j)}{\sinh(\lambda_k - \lambda_j - i\zeta)} \\
&\times \prod_{p=1}^s \frac{\sinh^{i_p-1}(\lambda_p - i\frac{\zeta}{2}) \sinh^{m-i_p}(\lambda_p + i\frac{\zeta}{2})}{\cosh^m \frac{\pi}{\zeta} \lambda_p} \\
&\times \prod_{p=s+1}^m \frac{\sinh^{i_p-1}(-\lambda_p - 3i\frac{\zeta}{2}) \sinh^{m-i_p}(\lambda_p + i\frac{\zeta}{2})}{\cosh^m \frac{\pi}{\zeta} \lambda_p}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons obtenu des représentations pour tous les blocs élémentaires pour la chaîne XXZ dans un champ magnétique extérieur (ou sans champ extérieur). Le calcul de ces intégrales multiples est un problème très compliqué à cause de la présence d'un terme de couplage $\sinh(\lambda_k - \lambda_j - i\zeta)$ dans le dénominateur. Or il est possible de découpler les intégrales et de calculer tous les blocs explicitement pour les petites valeurs de m (le calcul est fait pour $m \leq 7$ pour le modèle XXX [26, 27, 29] et pour $m \leq 5$ pour le modèle XXZ [144]). Les résultats obtenus ont une forme très particulière, par exemple pour la chaîne XXX les blocs s'écrivent en termes des valeurs $\zeta(n)$, où $\zeta(x)$ est la fonction ζ de Riemann et n sont des entiers $n < m$. Cet ansatz a été prouvé dans [23] mais le problème de calcul des blocs élémentaires pour toutes valeurs de m reste à résoudre même dans le cas isotrope (il n'existe ni de méthode générale de calcul des coefficients dans cet ansatz ni d'estimation de leurs asymptotiques).

N'importe quelle fonction de corrélation peut être exprimée maintenant comme une somme des blocs élémentaires. Cependant le nombre de termes dans ces sommes croît généralement exponentiellement avec la distance et donc pour analyser les fonctions à deux points il faut trouver des autres expressions plus simples. Ce problème sera traité dans le chapitre suivant.

Pourtant certains blocs élémentaires sont des fonctions intéressantes en soi. L'exemple d'une telle fonction est la probabilité de retrouver m premiers spins alignés vers le bas

(probabilité de formation du vide). Nous étudierons cette fonction dans la dernière section de ce chapitre.

Il est important de mentionner que les fonctions de corrélation dans la limite thermodynamique ne dépendent pas du paramètre de twist κ et donc dans la suite nous considérerons uniquement le cas des conditions aux bords périodiques.

3.4 Probabilité de formation du vide

Dans cette section nous étudions une fonction de corrélation - la probabilité de formation du vide $\tau(m)$. Elle peut être définie comme la probabilité de retrouver m premiers spins aligné vers le bas. Il est facile de voir que cette probabilité est un des blocs élémentaires, avec $s = m$, $s' = 0$:

$$\tau(m) = \frac{\langle \psi_g | \prod_{j=1}^m E_j^- | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}. \quad (3.18)$$

On considère cette fonction dans le cas du champ magnétique nul. En utilisant les résultats de la section précédent (3.16) on obtient

$$\begin{aligned} \tau(m) &= \prod_{j>k} \frac{1}{\sinh(\xi_k - \xi_j)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_m \det_m \mathcal{S}(\{\lambda\}|\{\xi\}) \\ &\times \prod_{j>k} \frac{\sinh(\lambda_j - \xi_k - i\zeta) \sinh(\lambda_k - \xi_j)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Cette représentation est très simple mais malheureusement pas très pratique pour l'analyse asymptotique ($m \rightarrow \infty$) car la fonction sous l'intégrale n'est symétrique ni en variables d'intégration ni en paramètre d'inhomogénéité. Il est naturel de chercher une représentation symétrique car les opérateurs $D(\xi)$ commutent entre eux. Après la symétrisations sur la variable d'intégration on obtient une formule totalement symétrique :

$$\begin{aligned} \tau(m) &= \frac{i^m}{m! \sin^m \zeta} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_m \prod_{j,k=1}^m \frac{\sinh(\lambda_j - \xi_k - i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \\ &\times \prod_{j<k}^m \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k)}{\sinh(\xi_j - \xi_k)} \cdot Z_m(\{\lambda\}, \{\xi\}) \cdot \det_m \mathcal{S}(\{\lambda\}|\{\xi\}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

où $Z_m(\{\lambda\}, \{\xi\})$ est la fonction de partition (3.8). Il faut noter par ailleurs que la présence de cette fonction sous les intégrales dans la représentation pour la probabilité de formation du vide est un résultat assez intéressant et inattendu. Cette représentation symétrique permet d'analyser le comportement asymptotique de la probabilité de formation du vide mais aussi d'obtenir un résultat exact pour cette fonction dans le point $\Delta = \frac{1}{2}$.

3.4.1 Analyse asymptotique

Maintenant on peut effectuer l'analyse asymptotique de la probabilité de formation du vide en utilisant une modification de la méthode du point selle. Nous cherchons le point selle pour l'expression sous l'intégrale en supposant que dans la limite $m \rightarrow \infty$ les solutions de la condition du point selle sont distribuées avec une certaine densité $\tilde{\rho}(\lambda)$ sur l'axe réel (donc ce résultat est une conjecture). La condition de point selle permet de calculer cette densité et donc donne le terme dominant de l'asymptotique. Les détails de calcul sont donnés dans l'article II.

Le comportement dominant dans la limite $m \rightarrow \infty$ est un décroissement gaussien :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \tau(m)}{m^2} = \log \frac{\pi}{\zeta} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}-i0} \frac{d\omega \sinh \frac{\omega}{2} (\pi - \zeta) \cosh^2 \frac{\omega \zeta}{2}}{\omega \sinh \frac{\pi \omega}{2} \sinh \frac{\omega \zeta}{2} \cosh \omega \zeta}, \quad (3.21)$$

Il faut préciser encore une fois que pour obtenir ce résultat dans l'article II nous avons dû faire une hypothèse (sur le fait que la position du point selle peut être décrit par une densité) et il faut considérer (3.21) comme une conjecture. Il faut donc vérifier que les résultats pour des points particuliers et les estimations numériques confirment (3.21).

L'intégrale (3.21) peut être calculée si $e^{i\zeta}$ est une racine de l'unité ($e^{ik\zeta} = 1$, pour un entier k). Par exemple pour $\zeta = \frac{\pi}{2}$ et $\zeta = \frac{\pi}{3}$ (c'est à dire $\Delta = 0$ et $\Delta = 1/2$) on obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \tau(m)}{m^2} = -\frac{1}{2} \log 2, \quad \Delta = 0, \quad (3.22)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \tau(m)}{m^2} = \frac{3}{2} \log 3 - 3 \log 2, \quad \Delta = \frac{1}{2}, \quad (3.23)$$

Le premier résultat (3.22) coïncide avec les formules exactes obtenues dans [65,147]. A la fin de cette section nous montrerons aussi que le résultat (3.23) peut être confirmé par des calculs exacts.

Dans le cas isotrope de la chaîne XXX on peut également calculer l'intégrale (3.21). On obtient

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \tau(m)}{m^2} = \log \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right) \approx \log(0.5991), \quad (3.24)$$

et ce résultat coïncide avec l'estimation numérique $\log(0.598)$, obtenue dans [28].

Une expression équivalente à (3.21) a été obtenue de façon indépendante dans [103]. Le résultat y est confirmé par des estimations numériques faites de deux façons différentes : par la méthode de Monte Carlo et par la méthode DMRG.

3.4.2 $\Delta = \frac{1}{2}$

Le calcul exact des intégrales multiples (3.20) est très compliqué en général, il a été fait uniquement pour les petites distances $m \leq 7$ [20,21,26–29,144]. La difficulté principale est le fait que les intégrales sont couplées et on ne peut pas les séparer de façon générale pour toutes valeurs de m . Il existe quand même certains points où les intégrales peuvent être découplée pour n'importe quelle distance et calculées une par une. Il s'agit premièrement

du point de fermions libres $\Delta = 0$ considéré en détail dans [65, 147]. Nous avons montré dans l'article III qu'il existe un autre cas où le calcul de la probabilité de formation du vide peut être fait jusqu'au bout : c'est le point $\Delta = \frac{1}{2}$, $\zeta = \frac{\pi}{3}$. Ce point a plusieurs propriétés intéressantes même pour la chaîne finie. Il donne un lien inattendu entre les modèles intégrables et certains problèmes combinatoires [112, 113]. L'analyse numérique du modèle XXZ dans ce point montre que l'état fondamental de la chaîne XXZ possède plusieurs propriétés fascinantes, il faut mentionner ici les articles [132, 138, 139, 141, 142] où plusieurs conjectures sont formulées. Maintenant la plupart des conjectures pour la chaîne finie ne sont pas encore prouvées à l'exception des « règles de sommes » [43, 44, 136]. Ici nous démontrons à partir de notre représentation pour les blocs élémentaires une conjecture proposée par Razumov et Stroganov [139] pour la probabilité de formation du vide dans la limite thermodynamique.

Dans le point $\Delta = \frac{1}{2}$ les intégrales se découpent grâce à l'identité

$$\sinh(3x) = 4 \sinh(x) \sinh(x + i\pi/3) \sinh(x - i\pi/3).$$

Après un calcul dont les détails sont donnés dans l'article III, on obtient la représentation avec les intégrations séparées pour $\tau(m)$

$$\tau(m, \{\xi_j\}) = (-1)^{\frac{m^2-m}{2}} 3^m 2^{-m^2} \prod_{j>k}^m \frac{\sinh 3(\xi_k - \xi_j)}{\sinh(\xi_k - \xi_j)} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{\sinh(\xi_j - \xi_k)} \det_m \mathcal{A}(\{\xi\})$$

$$\mathcal{A}_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{id\lambda}{4\pi \sinh(\lambda - \xi_j + \frac{i\pi}{3}) \sinh(\lambda - \xi_k - \frac{i\pi}{3}) \sinh(\lambda - \xi_k)}. \quad (3.25)$$

Le calcul des intégrales dans la matrices $\mathcal{A}(\{\xi\})$ donne le résultat suivant :

$$\mathcal{A}_{jk} = \frac{\sinh \frac{\xi_j - \xi_k}{2}}{\sinh \frac{3(\xi_j - \xi_k)}{2}} \quad (3.26)$$

Ainsi nous avons obtenu une représentation pour la probabilité de formation de vide où toutes les intégrales sont déjà calculées. On peut considérer maintenant le déterminant $\det_m \mathcal{A}(\{\xi\})$ dans la limite homogène en utilisant la technique proposée par G. Kuperberg [112], qui donne le résultat suivant :

$$\tau(m) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m^2} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{(3k+1)!}{(m+k)!}. \quad (3.27)$$

Cette expression a été conjecturée (à partir des résultats numériques) par A. Razumov and Yu. Stroganov [139]. Nous avons prouvé cette conjecture dans l'article III. Cette formule est le premier résultat exact pour une fonction de corrélation en dehors du point de fermions libres.

Le facteur

$$A_m = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{(3k+1)!}{(m+k)!}, \quad (3.28)$$

est un entier et c est le nombre des *matrices de signes alternés* de taille m [112, 131, 180] (ce sont les matrices avec les éléments -1 , 1 et 0 telles que dans toutes les lignes et toutes les colonnes il a des éléments non-nuls, les éléments non-nuls alternent et le premier et le dernier élément non-nul de toutes les lignes et toutes les colonnes est 1). L'apparition de ces nombres très particuliers (et étroitement liés au modèle à six vertex) dans le résultat pour la probabilité de formation du vide est une de ces propriétés fascinantes de la chaîne XXZ au point $\Delta = \frac{1}{2}$ dont nous avons parlé plus haut.

Le résultat (3.27) nous permet d'obtenir le comportement asymptotique de la fonction $\tau(m)$ en utilisant la formule de Stirling [139] :

$$\tau(m) \rightarrow c \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3m^2} m^{-\frac{5}{36}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (3.29)$$

où la constante c est

$$c = \exp \left[\int_0^\infty \left(\frac{5e^{-t}}{36} - \frac{\sinh \frac{5t}{12} \sinh \frac{t}{12}}{\sinh^2 \frac{t}{2}} \right) \frac{dt}{t} \right]. \quad (3.30)$$

Le terme gaussien de cette expression coïncide avec (3.23) et cela confirme encore une fois le résultat (3.21).

Chapitre 4

Fonctions à deux points

Le but central de notre étude est le calcul des fonctions à deux points,

$$g_{zz}(m, t) = \frac{\langle \psi_g | \sigma_1^z(0) \sigma_{m+1}^z(t) | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (4.1)$$

$$g_{+-}(m, t) = \frac{\langle \psi_g | \sigma_1^+(0) \sigma_{m+1}^-(t) | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (4.2)$$

où les opérateurs de spin dépendant du temps sont définis comme

$$\sigma_m^{x,y,z}(t) = e^{iHt} \sigma_m^{x,y,z} e^{-iHt}. \quad (4.3)$$

Dans les trois premières sections de ce chapitre nous traitons les fonctions de corrélation statiques ($t = 0$), mais dans la dernière section nous montrons comment on peut obtenir des résultats pour le cas dynamique. Nous présentons ici uniquement les résultats pour la fonction de corrélation des troisièmes composantes de spin (4.1), les formules pour les fonctions « non-diagonales » (4.2) sont d'habitude similaires mais plus longues et elles sont données dans les articles IV et V.

Dans la première section de ce chapitre nous étudions la fonction à deux points (4.1) statique en utilisant les résultats du chapitre précédent pour les blocs élémentaires. Pour simplifier les calculs nous introduisons une nouvelle fonction (fonctionnelle génératrice) étroitement liée à la fonction à deux points. Nous présentons deux méthodes différentes pour obtenir des expressions plus ou moins compactes pour la fonctionnelle génératrice (articles IV et V) et donc pour la fonction (4.1) à $t = 0$. Dans la deuxième section nous montrons que ces résultats permettent de calculer les intégrales multiples pour deux cas particuliers : point de fermions libres $\Delta = 0$ (article VI) et le cas $\Delta = \frac{1}{2}$ (article VII). Dans la troisième section nous introduisons la formule « master » qui donne un lien entre les représentations sous forme d'intégrales multiples et les sommes sur les facteurs de forme pour la chaîne finie (article VIII). Dans la dernière section nous montrons comment cette formule peut être généralisée au cas des fonctions à deux points dynamiques $t \neq 0$ (article IX). Ce dernier résultat est l'expression la plus générale que nous avons obtenue à ce moment et nous espérons l'utiliser dans la suite pour l'analyse asymptotique.

4.1 Fonctionnelle génératrice

Nous étudions ici la fonction à deux points statique :

$$g_{zz}(m) = \frac{\langle \psi_g | \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (4.4)$$

pour la chaîne XXZ avec des conditions aux bords périodiques (nous avons montré dans le chapitre précédent que l'introduction du paramètre de « twist » aux bords ne change pas les fonctions de corrélation dans la limite thermodynamique).

Il est pratique à ce point d'introduire une nouvelle fonction de corrélation - la **fonctionnelle génératrice**,

$$Q_\kappa(m) = \frac{\langle \psi_g | \prod_{n=1}^m \left(\frac{1+\kappa}{2} + \frac{1-\kappa}{2} \cdot \sigma_n^z \right) | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (4.5)$$

où κ est un paramètre complexe. C'est un polynôme de la variable κ de degré m ; il est facile de voir que

$$Q_\kappa(m)|_{\kappa=1} = 1,$$

et l'aimantation $\langle \sigma_m^z \rangle$ s'écrit en termes de la fonctionnelle génératrice comme

$$\langle \sigma_m^z \rangle = 1 - 2D_m \frac{d}{d\kappa} Q_\kappa(m) \Big|_{\kappa=1},$$

où $D_m f(m) = f(m) - f(m-1)$ est la dérivée discrète.

La fonction de corrélation (4.4) peut être écrite en termes de la dérivée seconde de $Q_\kappa(m)$,

$$g_{zz}(m) = 2\langle \sigma_m^z \rangle - 1 + 2D_m^2 \frac{d^2}{d\kappa^2} Q_\kappa(m) \Big|_{\kappa=1}, \quad (4.6)$$

où $D_m f(m) = f(m-1) - 2f(m) + f(m+1)$ est la dérivée seconde discrète. Ainsi pour calculer la fonction à deux points (4.4) il est suffisant d'obtenir une représentation pour la fonctionnelle génératrice (4.5).

En termes des matrices élémentaires on peut écrire cette fonction comme

$$Q_\kappa(m) = \frac{\langle \psi_g | \prod_{n=1}^m (E_n^{++} + \kappa E_n^{--}) | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle},$$

donc il est évident qu'elle peut être représentée comme une somme de 2^m blocs élémentaires. Le but de cette section est de trouver des expressions pour la fonctionnelle génératrice où le nombre de termes ne croît pas exponentiellement. Pour y arriver nous proposons ici deux méthodes différentes.

4.1.1 Méthode I

En utilisant la solution du problème inverse (3.2) on obtient la représentation pour la fonctionnelle génératrice en termes des éléments de la matrice de monodromie

$$Q_\kappa(m) = \prod_{n=1}^m \tau^{-1}(\xi_n|\{\lambda\}) \frac{\langle \psi_g | \prod_{n=1}^m \mathcal{T}_\kappa(\xi_n) | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (4.7)$$

où $\mathcal{T}_\kappa(\lambda) = A(\lambda) + \kappa D(\lambda)$. Pour calculer l'action de cet opérateur sur l'état fondamental on utilise (comme d'habitude) les relation RTT, ou plus précisément les formules (3.4,3.5). Il est facile de remarquer qu'il y a deux type de termes dans ces formules : les termes « directs » où $a = N + 1$ et les termes « indirects » ($a \leq N$). Les termes indirects produisent des intégrales dans la limite thermodynamique. Il est évident que les opérateurs $D(\xi_j)$ ne produisent pas de termes directs car $d(\xi_j) = 0$. Pour obtenir la représentation (3.13) nous avons inclus les termes directs dans les intégrales de type A en déformant les contours.

Ici nous faisons d'abord le calcul pour une chaîne finie. Il est facile de montrer que l'action des opérateurs $\mathcal{T}_\kappa(\lambda)$ peut produire entre 0 et m termes directs. L'idée centrale de cette méthode est de regrouper ensemble les contributions avec le même nombre de termes directs.

Pour simplifier les formules nous introduisons ici les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sinh(x - i\zeta)}{\sinh x}, \quad t(x) = \frac{-i \sin \zeta}{\sinh(x - i\zeta) \sinh x}$$

Nous étudions l'action des opérateurs $\mathcal{T}_\kappa(x)$ sur l'état fondamental

$$\langle \psi | \prod_{a=1}^m \mathcal{T}_\kappa(x_a) = \sum_{n=0}^m \langle \psi_n(\kappa) |.$$

Les contributions avec n termes indirects (donc avec n intégrales dans la limite thermodynamique) s'écrivent sous la forme suivante :

$$\langle \psi_n(\kappa) | = \sum_{\substack{\{\lambda\} = \{\lambda_{\alpha_+}\} \cup \{\lambda_{\alpha_-}\} \\ \{x\} = \{x_{\gamma_+}\} \cup \{x_{\gamma_-}\} \\ |\alpha_+| = |\gamma_+| = n}} R_n(\{x_{\gamma_+}\} | \{x_{\gamma_-}\} | \{\lambda_{\alpha_+}\} | \{\lambda_{\alpha_-}\}, \kappa) \langle 0 | \prod_{a \in \gamma_+} C(x_a) \prod_{b \in \alpha_-} C(\lambda_b). \quad (4.8)$$

Les coefficients R_n obtenus dans l'article IV ont la forme suivante :

$$R_n(\{x_{\gamma_+}\} | \{x_{\gamma_-}\} | \{\lambda_{\alpha_+}\} | \{\lambda_{\alpha_-}\}) = S_n(\{x_{\gamma_+}\} | \{\lambda_{\alpha_+}\} | \{\lambda_{\alpha_-}\}) \\ \times \prod_{a \in \gamma_-} \left(a(x_a) \prod_{b \in \gamma_+} f(x_b - x_a) \prod_{b \in \alpha_-} f(\lambda_b - x_a) + \kappa d(x_a) \prod_{b \in \gamma_+} f(x_a - x_b) \prod_{b \in \alpha_-} f(x_a - \lambda_b) \right).$$

La fonction S_n peut être représentée comme le déterminant d'une matrice $n \times n$

$$S_n(\{x\}|\{\lambda_{\alpha_+}\}|\{\lambda_{\alpha_-}\}) = \frac{\prod_{b \in \alpha_+} \prod_{a=1}^n \sinh(x_a - \lambda_b - i\zeta)}{\prod_{\substack{a>b \\ a,b \in \alpha_+}} \sinh(\lambda_a - \lambda_b) \prod_{a<b}^n \sinh(x_a - x_b)} \cdot \det_n \mathcal{M}(\{x\}|\{\lambda_{\alpha_+}\}),$$

où la matrice $\mathcal{M}(\{x\}|\{\lambda_{\alpha_+}\})$ est

$$\mathcal{M}_{jk} = a(\lambda_j)t(x_k - \lambda_j) \prod_{a \in \alpha_-} f(\lambda_a - \lambda_j) - \kappa d(\lambda_j)t(\lambda_j - x_k) \prod_{a \in \alpha_-} f(\lambda_j - \lambda_a) \prod_{b=1}^m \frac{\sinh(\lambda_j - x_b - i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - x_b + i\zeta)}.$$

Il est remarquable que cette matrice a presque la même forme que la matrice dans le numérateur de la formule (3.9) pour le produit scalaire. Cette similarité est expliquée dans la troisième section de ce chapitre.

Maintenant il faut considérer les points $x_j = \xi_j$ et calculer les produits scalaires pour obtenir une représentation pour la fonctionnelle génératrice. L'expression (4.8) contient les sommes sur les partitions de l'ensemble $\{x\}$ et de l'ensemble $\{\lambda\}$. On peut éliminer la somme sur les partitions de l'ensemble $\{x\}$ en introduisant n intégrales de contour supplémentaires. Soit $\mathcal{F}(z_1, \dots, z_n)$ une fonction symétrique de n variables z_k , analytique autour des points $\{\xi\}$. On obtient pour la somme sur les partitions,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\{\xi\} = \{\xi_{\gamma_-}\} \cup \{\xi_{\gamma_+}\} \\ |\gamma_+| = n}} \prod_{a \in \gamma_-} \prod_{b \in \gamma_+} f(\xi_b - \xi_a) \cdot \mathcal{F}(\{\xi_{\gamma_+}\}) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\Gamma} \prod_{j=1}^n \frac{dz}{2\pi i} \prod_{a=1}^n \prod_{b=1}^m f(z_a - \xi_b) \frac{\prod_{a=1}^n \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^n \sinh(z_a - z_b)}{\prod_{a=1}^n \prod_{b=1}^n \sinh(z_a - z_b - i\zeta)} \mathcal{F}(\{z\}). \end{aligned}$$

Le contour fermé Γ contient tous les points ξ_j , mais pas les autres singularités de l'expression sous l'intégrale.

Dans la limite thermodynamique la somme sur les partitions de $\{\lambda\}$ produit n intégrales entre $-\Lambda_h$ et Λ_h , mais pour une chaîne finie il faut appliquer la même procédure que pour $\{x\}$, et c'est la méthode que nous utilisons dans la troisième section pour démontrer la formule « master ».

Pour la fonctionnelle génératrice on obtient dans la limite thermodynamique l'expression suivante :

$$\begin{aligned} Q_{\kappa}(m) &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n!)^2} \oint_{\Gamma} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \int_{\Gamma_D} d^n \lambda \prod_{b=1}^n \prod_{a=1}^m \frac{f(z_b - \xi_a)}{f(\lambda_b - \xi_a)} \\ &\quad \times W_n(\{\lambda\}, \{z\}) \cdot \det_n \tilde{\mathcal{M}}(\{\lambda\}|\{z\}) \cdot \det_n \mathcal{S}(\{\lambda\}|\{z\}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

La fonction W est définie comme un produit

$$W_n(\{\lambda\}, \{z\}) = \prod_{a=1}^n \prod_{b=1}^n \frac{\sinh(\lambda_a - z_b - i\zeta) \sinh(z_b - \lambda_a - i\zeta)}{\sinh(\lambda_a - \lambda_b - i\zeta) \sinh(z_a - z_b - i\zeta)}, \quad (4.10)$$

la matrice $\tilde{\mathcal{M}}(\{\lambda\}|\{z\})$ est très similaire à celle qui apparaît dans le numérateur de la formule pour les produits scalaires :

$$\tilde{\mathcal{M}}_{jk} = t(z_k - \lambda_j) + \kappa t(\lambda_j - z_k) \prod_{a=1}^n \frac{\sinh(\lambda_a - \lambda_j - i\zeta) \sinh(\lambda_j - z_a - i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_a - i\zeta) \sinh(z_a - \lambda_j - i\zeta)}, \quad (4.11)$$

et la matrice $\mathcal{S}(\{\lambda\}|\{z\})$ est définie par (3.14).

Dans la limite homogène $\xi_j = -i\frac{\zeta}{2}$, on obtient

$$Q_\kappa(m) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n!)^2} \oint_{\Gamma} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \int_{\Gamma_D} d^m \lambda \prod_{a=1}^n \left(\frac{\sinh(z_a - i\frac{\zeta}{2}) \sinh(\lambda_a + i\frac{\zeta}{2})}{\sinh(z_a + i\frac{\zeta}{2}) \sinh(\lambda_a - i\frac{\zeta}{2})} \right)^m \\ \times W_n(\{\lambda\}, \{z\}) \cdot \det_n \tilde{\mathcal{M}}(\{\lambda\}|\{z\}) \cdot \det_n \mathcal{S}(\{\lambda\}|\{z\}). \quad (4.12)$$

Ainsi nous avons obtenu une représentation pour la fonctionnelle génératrice où le nombre de termes n'est plus 2^m mais $m + 1$. Cette représentation semble être bien adaptée pour l'analyse asymptotique car la distance apparaît comme une puissance sous l'intégrale. Il est facile de démontrer en utilisant l'expression (4.9) que $Q_\kappa(m)|_{\kappa=1} = 1$ (car $\det_n \tilde{\mathcal{M}}(\{\lambda\}|\{z\})|_{\kappa=1} = 0$, pour $n \geq 1$ et il reste un seul terme $n = 0$), ainsi que la formule pour l'aimantation.

Ce résultat permet de calculer la fonction à deux points (4.4) en utilisant (4.6), il existe également des expressions de ce type pour la fonction non-diagonale $g_{+-}(m)$. Des représentations pour les fonctions à deux points dans la limite thermodynamique sont données dans l'article IV.

Cependant l'analyse des termes dans (4.12) pour $n \geq 2$ devient assez compliqué, tandis que les premières estimations montrent qu'il faut tenir compte de toute la série pour obtenir le comportement asymptotique des fonctions à deux points. L'introduction des intégrales sur z ajoute un certain nombre de problèmes, en particulier l'apparition des pôles doubles aux points $\lambda_j = z_k$. Dans la suite nous proposons une méthode alternative où on n'a pas besoin d'introduire des intégrales supplémentaires.

4.1.2 Méthode II

Nous présentons ici la méthode alternative de calcul des fonctions à deux points. Nous étudions comme dans le cas précédent la fonctionnelle génératrice mais cette fois directement dans la limite thermodynamique à partir des expressions pour les blocs élémentaires (3.13). Bien que cette méthode s'applique pour le cas de la chaîne XXZ dans un champ

magnétique extérieur nous présentons ici uniquement le cas $h = 0$ où tous les résultats ont une forme assez simple.

La fonctionnelle génératrice (4.5) est définie comme un polynôme de κ

$$Q_\kappa(m) = \sum_{s=0}^m \kappa^s G_s(m). \quad (4.13)$$

L'idée centrale de la deuxième méthode de sommation des blocs élémentaires est de trouver une expression compacte pour les coefficients $G_s(m)$ de ce polynôme. Ces coefficients peuvent être écrits comme des sommes des blocs élémentaires diagonaux,

$$G_s(m) = \sum_{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m = m - 2s} F_m(\{\epsilon_j, \epsilon_j\}),$$

avec s matrices élémentaires E_j^{--} et $m - s$ matrices E_j^{++} . Dans le cas du champ magnétique extérieur nul on peut représenter ces blocs sous une forme très simple :

$$\begin{aligned} F_m(\{\epsilon_j, \epsilon_j\}) &= \frac{1}{\prod_{j < k} \sinh(\xi_j - \xi_k)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_m \det_m \mathcal{S}(\{\lambda\}, \{\xi\}) \\ &\times \prod_{j > k} \frac{\sinh(\lambda_j - \xi_k - i(1 - \epsilon_j)\frac{\zeta}{2}) \sinh(\lambda_k - \xi_j - i(1 + \epsilon_k)\frac{\zeta}{2})}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + i(\epsilon_j + \epsilon_k)\frac{\zeta}{2})}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nous avons changé les variables pour les intégrales de type A , donc tous les contours d'intégration ici sont les mêmes.

Comme dans le cas de la probabilité de formation du vide il faut symétriser l'expression sous les intégrales, mais cette fois il faut le faire séparément pour s intégrales de type D et $m - s$ intégrales de type A . On peut étudier maintenant les propriétés de la fonction sous les intégrales. On peut montrer que cette expression est une fonction symétrique de variables ξ_j , établir les relations de récurrence dans les points $\lambda_j = \xi_1$ et vérifier qu'après avoir séparé un dénominateur commun on obtient un polynôme de degré $m - 1$ de chaque variable $\epsilon^{2\lambda_j}$ (les détails sont présentés dans l'article V). Ces propriétés sont très similaires à celles que nous avons utilisées pour établir l'expression pour la fonction de partition Z_m (3.8). La solution qu'on obtient ici est donc la même,

$$\begin{aligned} G_s(m) &= \frac{i^m}{m! \sin^m \zeta} \prod_{j < k}^m \frac{1}{\sinh(\xi_j - \xi_k)} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_m \prod_{j,k=1}^m \sinh(\lambda_j - \xi_k - i\zeta) \\ &\times \Theta_m^s(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \cdot Z_m(\{\lambda\}, \{\xi\}) \cdot \det_m \mathcal{S}(\{\lambda\} | \{\xi\}), \end{aligned} \quad (4.15)$$

où le « dénominateur commun » $\Theta_m^s(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est le seul facteur qui dépend de s ,

$$\begin{aligned} \Theta_m^s(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \prod_{k=1}^s \prod_{j=s+1}^m \frac{1}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k)} \prod_{m \geq j > k > s} \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta) \sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \\ &\times \prod_{s \geq j > k \geq 1} \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta) \sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Notons que l'expression pour la probabilité de formation du vide (3.20) est le cas particulier $s = m$ de cette formule. En générale pour chaque coefficient de la série (4.13) nous avons obtenu une expression très similaire à celle pour la probabilité de formation de vide et c'est l'avantage principal de cette méthode. Par contre il est assez dur de démontrer les propriétés de la fonctionnelle génératrice à partir de cette représentation.

On peut appliquer la méthode du point selle comme dans le cas de la probabilité de formation de vide, mais malheureusement cette approche à l'analyse asymptotique n'est pas pour l'instant suffisamment fine pour obtenir les corrections au terme dominant $\kappa^{\frac{m}{2}}$ qui donnent le comportement asymptotique de la fonction à deux points (4.4).

Les expressions du même type obtenues directement pour les fonctions à deux points $g_{zz}(m)$ et $g_{+-}(m)$ sont présentées dans l'article V.

Pour l'instant il n'est pas clair laquelle des deux méthodes de sommation pour la fonctionnelle génératrice et les fonctions à deux points est plus prometteuse pour l'analyse asymptotique. Dans les cas particuliers $\Delta = 0$ et $\Delta = \frac{1}{2}$ on peut obtenir les résultats exacts de deux façons différentes. Nous présentons ces expressions pour les fonctions de corrélation dans la section suivante.

4.2 Cas particuliers

4.2.1 Fermions libres

Les fonctions de corrélation au point de fermions libres ont été étudiées en détail par plusieurs auteurs, notamment par T.T. Wu et B. McCoy [128, 170] par la méthode basée sur la transformation de Jordan-Wigner et par Izergin, Korepin et leurs collaborateurs [36] par la méthode basée sur l'ansatz de Bethe. Nous avons montré dans les articles V et VI que les représentations sous forme d'intégrales multiples permettent de reproduire les résultats explicites obtenus pour les fonctions à deux points en température nulle par T.T. Wu [170].

Les deux méthodes introduites dans la section précédente peuvent être utilisées pour étudier le point de fermions libres et donnent à la fin la même représentation. L'application de la première approche est décrite en détails dans l'article VI, tandis que l'application de la méthode alternative est donnée dans la dernière section de l'article V.

En considérant le cas $\zeta = \frac{\pi}{2}$ il est facile de remarquer que les intégrales peuvent être séparées. On obtient la fonctionnelle génératrice sous forme de déterminant d'une matrice $m \times m$,

$$Q_\kappa(m) = \det_m T(\kappa),$$

$$T_{kn}(\kappa) = \delta_{kn} \frac{\kappa + 1}{2} + (1 - \delta_{kn})(1 - \kappa) \frac{1 - (-1)^{n-k}}{2i\pi(n-k)}. \quad (4.17)$$

En utilisant le lien entre la fonctionnelle génératrice et la fonction à deux points $g_{zz}(m)$ on obtient le résultat bien connu :

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = \frac{2}{\pi^2 m^2} \left((-1)^m - 1 \right). \quad (4.18)$$

Le calcul de la fonction $g_{+-}(m)$ est un peu plus long mais peut être fait presque de la même façon. On obtient le résultat de [170] (le cas plus général du modèle XY a été traité dans [128]) :

$$\langle \sigma_1^+ \sigma_{m+1}^- \rangle = \frac{(-1)^m}{2} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(k - \frac{1}{2})\Gamma(k + \frac{1}{2})} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(k - \frac{1}{2})\Gamma(k + \frac{1}{2})}. \quad (4.19)$$

Le comportement asymptotique de cette expression a été étudié également dans [170] en utilisant la technique introduite par Barnes [7] :

$$\langle \sigma_1^+ \sigma_{m+1}^- \rangle = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2m}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[e^{-4t} - \frac{1}{\cosh^2 t} \right] \right\} \left(1 - \frac{(-1)^m}{8m^2} + \mathcal{O}(m^{-4}) \right). \quad (4.20)$$

Ainsi les représentations sous forme d'intégrales multiples permettent de retrouver les résultats explicites et asymptotiques pour le cas de fermions libres obtenus initialement par des méthodes complètement différentes (éventuellement plus simples mais applicables uniquement au cas $\Delta = 0$).

4.2.2 $\Delta = \frac{1}{2}$

Nous avons montré dans le chapitre précédent que dans le cas $\Delta = \frac{1}{2}$ certaines fonctions de corrélation comme la probabilité de formation du vide peuvent être calculées explicitement. Le calcul des fonctions à deux points est plus compliqué dans ce cas mais il est possible de séparer les intégrales et les calculer dans le cas inhomogène. Les détails de ce calcul sont présentés dans l'article VII. Les coefficients du polynôme (4.13) peuvent être obtenus sous la forme suivante :

$$G_n(m) = \frac{3^m}{2^{m^2}} \prod_{a>b}^m \frac{\sinh 3(\xi_a - \xi_b)}{\sinh^3(\xi_a - \xi_b)} \sum_{\substack{\{\xi\} = \{\xi_{\gamma_+}\} \cup \{\xi_{\gamma_-}\} \\ |\gamma_+| = n}} \det_m \hat{\Phi}^{(n)}(\{\xi_{\gamma_+}\}, \{\xi_{\gamma_-}\}) \\ \times \prod_{a \in \gamma_+} \prod_{b \in \gamma_-} \frac{\sinh(\xi_b - \xi_a - \frac{i\pi}{3}) \sinh(\xi_a - \xi_b)}{\sinh^2(\xi_b - \xi_a + \frac{i\pi}{3})}, \quad (4.21)$$

où la matrice $\Phi(n)$ est définie par

$$\hat{\Phi}^{(n)}(\{\xi_{\gamma_+}\}, \{\xi_{\gamma_-}\}) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi(\xi_j - \xi_k) & \Phi(\xi_j - \xi_k - \frac{i\pi}{3}) \\ \hline \Phi(\xi_j - \xi_k + \frac{i\pi}{3}) & \Phi(\xi_j - \xi_k) \end{array} \right), \quad \Phi(x) = \frac{\sinh \frac{x}{2}}{\sinh \frac{3x}{2}}. \quad (4.22)$$

C'est le résultat final pour la chaîne inhomogène, malheureusement nous avons pas encore réussi à en obtenir d'une manière systématique la limite homogène. Les résultats numériques pour $m \leq 9$ montrent une particularité intéressante de ces coefficients : $2^{m^2} G_n(m)$

est toujours un entier. Pour le polynôme $P_m(\kappa) = 2^{m^2}Q_\kappa(m)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
P_1(\kappa) &= 1 + \kappa, \\
P_2(\kappa) &= 2 + 12\kappa + 2\kappa^2, \\
P_3(\kappa) &= 7 + 249\kappa + 249\kappa^2 + 7\kappa^3, \\
P_4(\kappa) &= 42 + 10004\kappa + 45444\kappa^2 + 10004\kappa^3 + 42\kappa^4, \\
P_5(\kappa) &= 429 + 738174\kappa + 16038613\kappa^2 + 16038613\kappa^3 + 738174\kappa^4 + 429\kappa^5, \\
P_6(\kappa) &= 7436 + 96289380\kappa + 11424474588\kappa^2 + 45677933928\kappa^3 + 11424474588\kappa^4 \\
&\quad + 96289380\kappa^5 + 7436\kappa^6, \\
P_7(\kappa) &= 218348 + 21798199390\kappa + 15663567546585\kappa^2 + 265789610746333\kappa^3 \\
&\quad + 265789610746333\kappa^4 + 15663567546585\kappa^5 + 21798199390\kappa^6 + 218348\kappa^7, \\
P_8(\kappa) &= 10850216 + 8485108350684\kappa + 39461894378292782\kappa^2 \\
&\quad + 3224112384882251896\kappa^3 + 11919578544950060460\kappa^4 + 3224112384882251896\kappa^5 \\
&\quad + 39461894378292782\kappa^6 + 8485108350684\kappa^7 + 10850216\kappa^8.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Il est naturel de conjecturer que ces coefficients restent entiers pour toute valeur de m . Le premier terme de ces polynômes est toujours le nombre de matrices de signes alternés A_m (ce qui correspond à la probabilité de formation du vide pour la chaîne), il n'est pas clair si les autres coefficients ont une signification combinatoire.

En utilisant (4.6) on peut obtenir les résultats numériques exacts pour la fonction à deux points $g_{zz}(m)$. Pour $m \leq 8$:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle &= -2^{-1}, \\
\langle \sigma_1^z \sigma_3^z \rangle &= 7 \cdot 2^{-6}, \\
\langle \sigma_1^z \sigma_4^z \rangle &= -401 \cdot 2^{-12}, \\
\langle \sigma_1^z \sigma_5^z \rangle &= 184453 \cdot 2^{-22}, \\
\langle \sigma_1^z \sigma_6^z \rangle &= -95214949 \cdot 2^{-31}, \\
\langle \sigma_1^z \sigma_7^z \rangle &= 1758750082939 \cdot 2^{-46}, \\
\langle \sigma_1^z \sigma_8^z \rangle &= -30283610739677093 \cdot 2^{-60}, \\
\langle \sigma_1^z \sigma_9^z \rangle &= 5020218849740515343761 \cdot 2^{-78}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Il est important de mentionner que ces résultats exacts confirment la conjecture de Lukyanov [123, 124] pour le comportement asymptotique de la fonction à deux points $g_{zz}(m)$.

4.3 Equation master

Nous avons montré dans les sections précédentes que les fonctions à deux points peuvent être représentées sous forme d'intégrales multiples. Or il est bien connu qu'il en existe une autre représentation en termes de facteurs de forme. Il est évident qu'en introduisant une somme sur tous les états propres $|\psi_a\rangle$ de la matrice de transfert (et donc du Hamiltonien) entre les opérateurs de spin locaux on obtient une somme de facteurs de formes :

$$\langle \psi_g | \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z | \psi_g \rangle = \sum_{\text{états propres}} \frac{\langle \psi_g | \sigma_1^z | \psi_a \rangle \langle \psi_a | \sigma_{m+1}^z | \psi_g \rangle}{\langle \psi_a | \psi_a \rangle} \quad (4.25)$$

Nous étudions dans cette section ces deux représentations et nous montrons qu'il existe des formules pour les fonctions de corrélation (les fonctions à deux points ou la fonctionnelle génératrice) pour la chaîne finie que nous appelons « les équations masters » qui fournissent le lien entre ces deux approches.

Ce lien est basé sur une observation sur la formule (4.9) pour la fonctionnelle génératrice : la matrice $\tilde{\mathcal{M}}(\{\lambda\}|\{z\})$ ressemble à celle qui apparaît dans la formule pour les produits scalaires (3.9) et donc pour les facteurs de forme [98]. Dans l'article VIII nous avons étudié la représentation (4.8) pour la fonctionnelle génératrice. Nous considérons ici le cas de la chaîne XXZ finie. Pour formuler le résultat de cet article nous avons besoin de deux définitions [163] :

Definition 4.1. Une solution $\{\lambda\}$ des équations de Bethe

$$a(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sinh(\lambda_k - \lambda_j - i\zeta) = d(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sinh(\lambda_k - \lambda_j + i\zeta), \quad j = 1, \dots, N,$$

s'appelle admissible, si

$$d(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta) \neq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.26)$$

Definition 4.2. Une solution $\{\lambda\}$ des équations de Bethe (2.16) s'appelle non-diagonale si $\lambda_j \neq \lambda_k, \quad \forall j, k$.

Le résultat central de l'article VIII est le théorème suivant :

Theorem 4.1. Soit $\{\xi\}$ les paramètres d'inhomogénéité génériques et $\{\lambda\}$ une solution des équations de Bethe admissible et non-diagonale. Il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour $|\kappa| < \kappa_0$ la fonctionnelle génératrice $Q_\kappa(m)$ pour la chaîne XXZ inhomogène finie est représentée

sous forme d'intégrales de contour multiples

$$Q_\kappa(m) = \frac{1}{N!} \oint_{\Gamma\{\xi\} \cup \Gamma\{\lambda\}} \prod_{j=1}^N \frac{dz_j}{2\pi i} \cdot \prod_{a,b=1}^N \sinh^2(\lambda_a - z_b) \cdot \prod_{a=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_a|\{z\})}{\tau(\xi_a|\{\lambda\})} \times \frac{\det_N \left(\frac{\partial \tau_\kappa(\lambda_j|\{z\})}{\partial z_k} \right) \cdot \det_N \left(\frac{\partial \tau(z_k|\{\lambda\})}{\partial \lambda_j} \right)}{\prod_{a=1}^N \mathcal{Y}_\kappa(z_a|\{z\}) \cdot \det_N \left(\frac{\partial \mathcal{Y}(\lambda_k|\{\lambda\})}{\partial \lambda_j} \right)}. \quad (4.27)$$

Le contour d'intégration est choisi de telle façon que parmi les singularités de l'expression sous les intégrales seuls les points $\{\xi\}$ et $\{\lambda\}$ sont à l'intérieur de $\Gamma\{\xi\} \cup \Gamma\{\lambda\}$.

Nous appelons l'expression (4.27) **l'équation master** pour la fonctionnelle génératrice. Les déterminants dans le numérateur de cette expression sont les mêmes qui apparaissent dans la formule pour les produits scalaires (3.9), tandis que celui du dénominateur est la norme de l'état de Bethe défini par les paramètres $\{\lambda\}$.

Il est possible de calculer les intégrales de contour en considérant soit les pôles à l'intérieur des contours soit les pôles à l'extérieur. Le calcul des résidus à l'intérieur des contours nous ramène à l'expression (4.8) qui donne dans la limite thermodynamique la représentation (4.9) pour le fonctionnelle génératrice.

L'analyse des pôles à l'extérieur du contour est plus compliqué. Ils proviennent du produit des équations de Bethe

$$\prod_{a=1}^N \mathcal{Y}_\kappa(z_a|\{z\}).$$

Nous montrons dans l'article VIII qu'il n'y a que les solutions admissibles non-diagonales qui produisent des résidus non nuls. Ainsi nous montrons que la somme sur les pôles à l'extérieur du contour donne en effet la somme sur tous les états propres de la matrice de transfert $\mathcal{T}_\kappa(\mu)$. On obtient ainsi la représentation suivante

$$Q_\kappa(m) = \sum_{\{\mu\}} \prod_{a=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_a|\{\mu\})}{\tau(\xi_a|\{\lambda\})} \cdot \frac{\langle \psi(\{\lambda\}) | \psi_\kappa(\{\mu\}) \rangle}{\langle \psi_\kappa(\{\mu\}) | \psi_\kappa(\{\mu\}) \rangle} \cdot \frac{\langle \psi_\kappa(\{\mu\}) | \psi(\{\lambda\}) \rangle}{\langle \psi(\{\lambda\}) | \psi(\{\lambda\}) \rangle}. \quad (4.28)$$

On somme ici sur toutes les solutions admissibles non-diagonales $\{\mu\}$ des équations

$$\mathcal{Y}_\kappa(\mu_a|\{\mu\}) = 0.$$

Cette somme est en effet la somme des facteurs de forme,

$$\langle Q_{1,m}^\kappa \rangle = \sum_{\{\mu\}} \frac{\langle \psi(\{\lambda\}) | \prod_{b=1}^m \mathcal{T}_\kappa(\xi_b) | \psi_\kappa(\{\mu\}) \rangle \cdot \langle \psi_\kappa(\{\mu\}) | \prod_{b=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_b) | \psi(\{\lambda\}) \rangle}{\langle \psi_\kappa(\{\mu\}) | \psi_\kappa(\{\mu\}) \rangle \cdot \langle \psi(\{\lambda\}) | \psi(\{\lambda\}) \rangle}. \quad (4.29)$$

En dérivant cette expression deux fois par rapport à κ et par rapport à m (4.6) on obtient l'expression (4.25) pour la fonction à deux points,

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = \langle \sigma_1^z \rangle \cdot \langle \sigma_{m+1}^z \rangle + \sum_{\{\mu\} \neq \{\lambda\}} \frac{\langle \psi(\{\lambda\}) | \sigma_1^z | \psi(\{\mu\}) \rangle \cdot \langle \psi(\{\mu\}) | \sigma_{m+1}^z | \psi(\{\lambda\}) \rangle}{\langle \psi(\{\mu\}) | \psi(\{\mu\}) \rangle \cdot \langle \psi(\{\lambda\}) | \psi(\{\lambda\}) \rangle}, \quad (4.30)$$

Une représentation similaire est possible également pour la fonction à deux points non-diagonale.

Ainsi on voit que l'équation master relie les représentations sous forme d'intégrales multiples et les sommes des facteurs de forme. Dans la section suivante nous montrons comment on peut généraliser cette représentation pour le cas des fonctions à deux points dynamiques.

4.4 Fonctions à deux points dynamiques

Dans la dernière section de ce chapitre nous considérons la fonction à deux points diagonale mais dépendant du temps,

$$g_{zz}(m, t) = \frac{\langle \psi_g | \sigma_1^z(0) \sigma_{m+1}^z(t) | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (4.31)$$

où

$$\sigma_m^z(t) = e^{iHt} \sigma_m^z e^{-iHt}. \quad (4.32)$$

Dans la suite il sera plus pratique d'écrire le Hamiltonien sous la forme :

$$H = H^{(0)} - hS_z, \quad (4.33)$$

où

$$H^{(0)} = \sum_{m=1}^M (\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y + \Delta (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1)),$$

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sigma_m^z, \quad [H^{(0)}, S_z] = 0.$$

Il est évident que l'opérateur de spin dynamique peut être représenté uniquement en termes de l'exponentielle de $H^{(0)}$:

$$\sigma_m^z(t) = e^{iH^{(0)}t} \sigma_m^z e^{-iH^{(0)}t}. \quad (4.34)$$

Nous considérons dans cette section la chaîne XXZ homogène pour qu'il soit possible de représenter le Hamiltonien comme la dérivée logarithmique de la matrice de transfert (2.11)

$$H^{(0)} = -2i \sin \zeta \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \mathcal{T}(\lambda) \right|_{\lambda = -i \frac{\zeta}{2}}. \quad (4.35)$$

De la même façon on peut définir le Hamiltonien avec les conditions quasi-périodiques $H_\kappa^{(0)}$.

Si $\{\lambda\}$ est une solution admissible non-diagonale des équations de Bethe la valeur propre de l'opérateur $H^{(0)}$ peut être obtenue sous la forme suivante :

$$H^{(0)} |\psi(\{\lambda\})\rangle = \left(\sum_{j=1}^N E(\lambda_j) \right) \cdot |\psi(\{\lambda\})\rangle, \quad (4.36)$$

où $E(\lambda)$ est l'énergie de quasi-particule

$$E(\lambda) = -\frac{2 \sin^2 \zeta}{\sinh(\lambda + i\frac{\zeta}{2}) \sinh(\lambda - i\frac{\zeta}{2})}. \quad (4.37)$$

Pour simplifier les calculs nous introduisons comme dans le cas statique une fonctionnelle génératrice définie par l'équation suivante,

$$Q_\kappa(m, t) = \langle \psi(\{\lambda\}) | \mathcal{T}_\kappa^m \left(-i\frac{\zeta}{2} \right) \cdot e^{itH_\kappa^{(0)}} \cdot \mathcal{T}^{-m} \left(-i\frac{\zeta}{2} \right) \cdot e^{-itH^{(0)}} | \psi(\{\lambda\}) \rangle. \quad (4.38)$$

Il est facile de vérifier que la fonction à deux points dynamique s'exprime en termes de cette fonctionnelle génératrice

$$\langle \sigma_1^z(0) \sigma_{m+1}^z(t) \rangle = 2 \langle \sigma_1^z(0) \rangle - 1 + 2D_m^2 \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} Q_\kappa(m, t) \Big|_{\kappa=1}. \quad (4.39)$$

Le résultat central de cette section obtenu dans l'article IX est le théorème suivant :

Theorem 4.2. *Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ une solution admissible et non-diagonale des équations de Bethe*

$$\mathcal{Y}(\lambda_j | \{\lambda\}) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Il existe $\kappa_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < |\kappa| < \kappa_0$, la fonctionnelle génératrice $Q_\kappa(m, t)$ pour la chaîne XXZ finie s'écrit sous la forme suivante :

$$Q_\kappa(m, t) = \frac{1}{N!} \oint_{\Gamma_{\{\pm i\frac{\zeta}{2}\} \cup \Gamma\{\lambda\}}} \prod_{j=1}^N \frac{dz_j}{2\pi i} \cdot \prod_{b=1}^N e^{it(E(z_b) - E(\lambda_b)) + im(p(z_b) - p(\lambda_b))} \\ \times \prod_{a,b=1}^N \sinh^2(\lambda_a - z_b) \cdot \frac{\det_N \left(\frac{\partial \tau_\kappa(\lambda_j | \{z\})}{\partial z_k} \right) \cdot \det_N \left(\frac{\partial \tau(z_k | \{\lambda\})}{\partial \lambda_j} \right)}{\prod_{a=1}^N \mathcal{Y}_\kappa(z_a | \{z\}) \cdot \det_N \left(\frac{\partial \mathcal{Y}(\lambda_k | \{\lambda\})}{\partial \lambda_j} \right)}. \quad (4.40)$$

où $E(\lambda)$ est l'énergie de quasi-particule (4.37) et $p(\lambda)$ est l'impulsion de quasi-particule

$$p(\lambda) = i \log \left(\frac{\sinh(\lambda + i\frac{\zeta}{2})}{\sinh(\lambda - i\frac{\zeta}{2})} \right). \quad (4.41)$$

Le contour d'intégration est choisi de telle façon que les seules singularités à l'intérieur sont les points $\pm i\frac{\zeta}{2}$ et $\{\lambda\}$.

Pour $t = 0$ ce théorème est équivalent au théorème 4.1 dans la limite homogène. Comme dans le cas précédent on appelle la représentation (4.40) **l'équation master dynamique**.

Cette représentation donne un lien entre la somme des facteurs de forme et les intégrales multiples. En effet cette expression peut être prouvée de deux façons différentes :

à partir de l'action multiple des matrices de transfert qui donne la somme sur les résidus dans les pôles à l'intérieur du contour et à partir de la somme des facteurs de forme (pôles à l'extérieur).

La première méthode est basée sur la représentation de Trotter pour l'exponentielle du Hamiltonien, l'opérateur d'évolution peut être obtenu comme la limite suivante :

$$e^{it(H_\kappa^{(0)} + 2M \cos \zeta)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\mathcal{T}_\kappa \left(-i \frac{\zeta}{2} + \varepsilon \right) \cdot \mathcal{T}_\kappa^{-1} \left(-i \frac{\zeta}{2} \right) \right)^L, \quad \varepsilon = \frac{1}{L} 2t \sin \zeta. \quad (4.42)$$

La matrice de transfert inverse pour le point $\lambda = -i \frac{\zeta}{2}$ s'exprime en terme de la matrice de transfert au point $\lambda = i \frac{\zeta}{2}$:

$$\mathcal{T}_\kappa^{-1}(-i\zeta/2) = \left(\kappa a(-i\zeta/2) d(i\zeta/2) \right)^{-1} \mathcal{T}_\kappa(i\zeta/2). \quad (4.43)$$

Ainsi on peut représenter la fonctionnelle génératrice en termes de l'action multiple des matrices de transfert. Pour calculer le résultat de cette action nous utilisons la formule (4.8). Nous montrons dans l'article IX que cette somme sur les partitions dans la limite de Trotter ($L \rightarrow \infty$) donne la somme des contributions des pôles de (4.40) à l'intérieur du contour.

Comme dans le cas statique les pôles de l'expression sous l'intégral dans (4.40) produisent une somme sur les états de Bethe, ou plus précisément, une somme sur toutes les solutions admissibles non-diagonales des équations de Bethe,

$$\mathcal{Y}_\kappa(\mu_a | \{\mu\}) = 0.$$

On obtient que l'équation master dynamique est équivalente à la somme suivante :

$$Q_\kappa(m, t) = \sum_{\{\mu\}} \prod_{b=1}^N e^{it(E(\mu_b) - E(\lambda_b)) + im(p(\mu_b) - p(\lambda_b))} \frac{\langle \psi(\{\lambda\}) | \psi_\kappa(\{\mu\}) \rangle}{\langle \psi_\kappa(\{\mu\}) | \psi_\kappa(\{\mu\}) \rangle} \cdot \frac{\langle \psi_\kappa(\{\mu\}) | \psi(\{\lambda\}) \rangle}{\langle \psi(\{\lambda\}) | \psi(\{\lambda\}) \rangle}. \quad (4.44)$$

Ainsi l'équation master dynamique donne le lien entre deux types de représentations pour les fonctions de corrélation. Egalement il faut noter que c'est une représentation compacte pour la fonction à deux points dynamique pour une chaîne finie, et c'est la première représentation de ce type en dehors du point de fermions libres. Nous montrons par ailleurs dans l'article IX qu'à ce point elle est équivalente aux représentations obtenues dans [36]. Nous espérons que cette représentation permettra d'étudier le comportement asymptotique des fonctions à deux points dynamiques.

Chapitre 5

Chaîne XXX de spin s

Les résultats pour les fonctions de corrélation, notamment pour les blocs élémentaires, peuvent être étendus au cas plus général des chaînes de spin s . Pour ne pas aborder la question très complexe d'analyser l'état fondamental pour la chaîne XXZ de spin s [85–87, 178] nous considérons ici uniquement le cas XXX [6, 162].

La généralisation naïve du Hamiltonien du modèle XXX pour les spins plus élevés ne donne pas un modèle intégrable. Par contre en utilisant la technique de l'ansatz de Bethe algébrique et la procédure de *fusion* [110] pour la matrice R on peut construire les Hamiltoniens intégrables pour les valeurs de spin $s > \frac{1}{2}$. Cette construction et l'analyse de l'état fondamental est présentée dans la première section de ce chapitre (nous suivons ici les articles [6, 162]). Dans la deuxième section nous présentons la solution du problème inverse [127] et les formules pour les produits scalaires. La preuve du résultat pour les produits scalaires n'est pas discutée ici mais la construction de la fonction de partition du modèle à n vertex correspondant, avec les conditions aux bords de type parois de domaines (un résultat auxiliaire important pour ce calcul) est proposée dans l'article X. La représentation finale pour les blocs élémentaires est présentée dans la dernière section de ce chapitre. Les détails de la preuve de ce résultat sont donnés dans l'article XI.

5.1 Ansatz de Bethe Algébrique

L'Ansatz de Bethe algébrique pour les chaînes de spins plus élevés peut être construit d'une façon très similaire au cas du spin $\frac{1}{2}$. Pour définir la matrice de monodromie on introduit d'abord l'opérateur L local

$$L_m(\lambda) = \frac{1}{\lambda - i(s + \frac{1}{2})} \begin{pmatrix} \lambda - i(s_m^z + \frac{1}{2}) & -is_m^- \\ -is_m^+ & \lambda + i(s_m^z + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

qui agit dans le produit tensoriel de l'espace auxiliaire de deux dimensions et d'un espace quantique local à $2s + 1$ dimensions. Notons que dans le cas de spin $\frac{1}{2}$ l'espace quantique est aussi \mathbb{C}^2 et $L_m(\lambda) = R_{0m}(\lambda)$. La matrice R dans le cas XXX s'écrit sous la forme

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda-i} & \frac{-i}{\lambda-i} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{\lambda-i} & \frac{\lambda}{\lambda-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

Il est facile de montrer que les opérateurs L vérifient la relation suivante

$$R_{ab}(\lambda - \mu) (L_m)_a(\lambda) (L_m)_b(\mu) = (L_m)_b(\mu) (L_m)_a(\lambda) R_{ab}(\lambda - \mu). \quad (5.3)$$

Ainsi la matrice de monodromie,

$$T(\lambda) = L_M(\lambda - \xi_M) L_{M-1}(\lambda - \xi_{M-1}) \dots L_1(\lambda - \xi_1) \equiv \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

satisfait aussi à la relation RTT :

$$R_{ab}(\lambda - \mu) T_a(\lambda) T_b(\mu) = T_b(\mu) T_a(\lambda) R_{ab}(\lambda - \mu). \quad (5.5)$$

Donc les opérateurs A , B , C et D ont les mêmes relations de commutation que dans le cas du spin $\frac{1}{2}$.

Jusqu'à ce point toute la construction était exactement la même que pour le cas du spin $\frac{1}{2}$. Par contre pour construire un Hamiltonien local commutant avec la matrice de transfert on doit introduire la technique de fusion proposée en 1981 par Kulish, Reshetikhin et Sklyanin [110]. Cette technique permet de construire une matrice de monodromie telle que le nombre de dimensions de l'espace auxiliaire soit le même que celui de chaque espace quantique local.

Le nouvel opérateur L est construit par la projection sur le sous-espace symétrique dans le produit tensoriel de $2s$ espaces auxiliaires (donc sur un sous-espace de $2s + 1$ dimensions) du produit suivant des opérateurs L habituels

$$L_n^{(s)}(\lambda) = P_{a_1, \dots, a_n}^+ L_{a_{2s}, n}(\lambda + 2is - i) \dots L_{a_2, n}(\lambda + i) L_{a_1, n}(\lambda) P_{a_1, \dots, a_n}^+ \quad (5.6)$$

où les espaces auxiliaires sont marqués par les indices a_j et P_{a_1, \dots, a_n}^+ est le projecteur sur le sous-espace symétrique dans le produit tensoriel. Cet opérateur L dont l'espace auxiliaire a $2s + 1$ -dimensions a la propriété suivante

$$L_{a, n}^{(s)}(-is) = P_{a, n},$$

où $P_{a, n}$ est l'opérateur de transposition dans le produit tensoriel de deux espaces \mathbb{C}^2 .

Ainsi il est possible de construire la nouvelle matrice de monodromie comme le produit des opérateurs L

$$T_a^{(s)}(\lambda) = L_M^{(s)}(\lambda - \xi_M) L_{M-1}^{(s)}(\lambda - \xi_{M-1}) \dots L_1^{(s)}(\lambda - \xi_1), \quad (5.7)$$

et la nouvelle matrice de transfert comme la trace de la matrice de monodromie dans l'espace auxiliaire,

$$\mathcal{T}^{(s)}(\lambda) = \text{tr}_a T_a(\lambda).$$

Il est possible de montrer que ces matrices de transfert commutent entre elles pour différentes valeurs du paramètre spectral λ mais aussi avec la matrice de transfert "habituelle" $\mathcal{T}(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ (il est facile de voir que c'est un polynôme de $A(\lambda) + D(\lambda)$),

$$[\mathcal{T}^{(s)}(\lambda), \mathcal{T}^{(s)}(\mu)] = [\mathcal{T}^{(s)}(\lambda), \mathcal{T}(\mu)] = 0. \quad (5.8)$$

On peut construire maintenant le Hamiltonien de la chaîne de spin XXX comme une dérivée logarithmique de la matrice de transfert dans la limite homogène $\xi_j = 0$,

$$H^{(s)} = \text{const} \left. \frac{d}{d\lambda} \mathcal{T}^{(s)}(\lambda) \right|_{\lambda=-is}, \quad (5.9)$$

Ce Hamiltonien local commute avec la matrice de transfert (ainsi qu'avec l'opérateur $\mathcal{T}(\lambda)$) et donc il est possible de construire ces états propres en utilisant la technique de l'Ansatz de Bethe Algébrique.

La forme explicite de ce Hamiltonien est plus compliquée que dans le cas du spin $\frac{1}{2}$ mais il décrit toujours l'interaction des spins avec leurs voisins les plus proches [162] :

$$H^{(s)} = \sum_{m=1}^M Q_{2s}(\mathbf{s}_m \mathbf{s}_{m+1}), \quad (5.10)$$

$$Q_{2s}(x) = \sum_{j=1}^{2s} \left(\sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \right) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{2s} \frac{x - x_l}{x_j - x_l}, \quad (5.11)$$

où $\mathbf{s}_n = (s_n^x, s_n^y, s_n^z)$ sont les opérateurs de spin et $x_l = \frac{1}{2}[l(l+1) - 2s(s+1)]$. Par exemple pour le spin 1 on obtient le Hamiltonien suivant

$$H^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_{m=1} \mathbf{s}_m \mathbf{s}_{m+1} - (\mathbf{s}_m \mathbf{s}_{m+1})^2. \quad (5.12)$$

La construction des états propres est exactement la même que pour le cas du spin $\frac{1}{2}$. L'état ferromagnétique $|0\rangle$ avec tous les spins dirigés vers le haut

$$s_n^+ |0\rangle = 0, \quad \forall n$$

satisfait aux conditions introduites dans le Chapitre 2,

$$\begin{aligned} A(\lambda)|0\rangle &= a(\lambda)|0\rangle, & D(\lambda)|0\rangle &= d(\lambda)|0\rangle, & \forall \lambda, \\ C(\lambda)|0\rangle &= 0, & \forall \lambda, \end{aligned}$$

donc il est possible d'utiliser les opérateurs $B(\lambda)$ comme création. Plus précisément les états

$$B(\lambda_1)B(\lambda_2) \dots B(\lambda_N)|0\rangle$$

sont des états propres de la matrice de transfert

$$\mathcal{T}(\mu)B(\lambda_1)B(\lambda_2) \dots B(\lambda_N)|0\rangle = \tau(\mu|\{\lambda_j\})B(\lambda_1)B(\lambda_2) \dots B(\lambda_N)|0\rangle, \quad (5.13)$$

à condition que $\{\lambda_j\}$ soient des solutions des équations de Bethe

$$\varphi_j(\{\lambda\}) \equiv \left(\frac{\lambda + is}{\lambda - is} \right)^M \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i} = -1. \quad (5.14)$$

L'étude de l'état fondamental est légèrement plus compliquée pour les spins élevés. Il est démontré dans [162] que dans la limite thermodynamique l'état fondamental est formé de « cordes ». Plus précisément la solution des équations de Bethe correspondant à l'état fondamental contient uniquement les $2s$ cordes

$$\lambda_k^a = \mu_k + i\left(a - s - \frac{1}{2}\right),$$

où μ_k est réel et s'appelle le centre de corde, et a prend toutes les valeurs entre 1 et $2s$.

La densité des centres dans la limite thermodynamique peut être obtenue à nouveau comme la solution d'une équation intégrale très simple,

$$\rho_{2s}(\lambda) + 2 \sum_{a=1}^{2s-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu K_a(\lambda - \mu) \rho_{2s}(\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} d\mu K_{2s}(\lambda - \mu) \rho_{2s}(\mu) = \sum_{k=1}^{2s} K_s\left(\lambda + i\left(s + \frac{1}{2} - k\right)\right), \quad (5.15)$$

avec le noyau K_a défini par

$$K_a(\lambda) = \frac{2a}{(\lambda + ia)(\lambda - ia)} \quad (5.16)$$

Il est facile de voir que la solution est la même pour toutes les valeurs de spin

$$\rho_{2s}(\lambda) = \frac{1}{2 \cosh(\pi\lambda)}, \quad (5.17)$$

(c'est évidemment la même solution que pour la chaîne XXX de spin $\frac{1}{2}$).

Ainsi la construction des états propres du Hamiltonien de spin s est très similaire à la procédure employée pour le cas du spin $\frac{1}{2}$ et donc il est possible d'appliquer une technique similaire pour le calcul des fonctions de corrélation. Pour avancer nous avons besoin à nouveau de deux éléments : la solution du problème inverse et une représentation pour les produits scalaires.

5.2 Problème inverse et produits scalaires

La solution du problème inverse quantique pour les chaînes de spin $s > \frac{1}{2}$ a été construit par J.M. Maillet et V. Terras dans [127]. Ici nous présentons les résultats pour les matrices élémentaires locales $E_j^{\epsilon'_j, \epsilon_j}$

$$\left(E^{\epsilon', \epsilon} \right)_{ab} = \delta_{\epsilon'_a} \delta_{\epsilon_b},$$

où $\epsilon, \epsilon' = 1, \dots, 2s + 1$. Ces matrices élémentaires peuvent être représentées en termes de la matrice de monodromie $T^{(s)}(\lambda)$ (5.7)

$$E_m^{\epsilon'_m, \epsilon_m} = \prod_{j=1}^{m-1} \mathcal{T}^{(s)}(\xi_j - is) T_{\epsilon_m, \epsilon'_m}^{(s)}(\xi_m - is) \left(\prod_{j=1}^m \mathcal{T}^{(s)}(\xi_j - is) \right)^{-1}, \quad (5.18)$$

Pour obtenir une représentation en termes des opérateurs A, B, C et D (qui est nécessaire pour le calcul des fonctions de corrélation) il faut écrire explicitement la projection sur le sous-espace symétrique dans le produit tensoriel,

$$T_{\epsilon, \epsilon'}^{(s)}(\lambda) = \frac{1}{(C_{2s}^{\epsilon-1} C_{2s}^{\epsilon'-1})^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{2s} - 2s = \epsilon - 1 \\ k_1 + \dots + k_{2s} - 2s = \epsilon' - 1}} T_{j_{2s} k_{2s}}(\lambda + 2si - i) \dots T_{j_2 k_2}(\lambda + i) T_{j_1 k_1}(\lambda), \quad (5.19)$$

où C_n^k sont les coefficients binomiaux et T_{jk} sont les éléments de la matrice de monodromie (5.4) avec l'espace auxiliaire de deux dimensions, donc $j, k = 1, 2$. Par exemple pour le cas du spin 1 la matrice $T^{(1)}(\lambda)$ a la forme suivante en termes des opérateurs A, B, C et D

$$T^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda + i)A(\lambda) & \frac{1}{\sqrt{2}}(A(\lambda + i)B(\lambda) + B(\lambda + i)A(\lambda)) & B(\lambda + i)B(\lambda) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(A(\lambda + i)C(\lambda) + C(\lambda + i)A(\lambda)) & \frac{1}{2}(A(\lambda + i)D(\lambda) + D(\lambda + i)A(\lambda) + B(\lambda + i)C(\lambda) + C(\lambda + i)B(\lambda)) & \frac{1}{\sqrt{2}}(D(\lambda + i)B(\lambda) + B(\lambda + i)D(\lambda)) \\ C(\lambda + i)C(\lambda) & \frac{1}{\sqrt{2}}(D(\lambda + i)C(\lambda) + C(\lambda + i)D(\lambda)) & D(\lambda + i)D(\lambda) \end{pmatrix}$$

Il faut noter que l'action de la matrice de transfert $\mathcal{T}^{(s)}(\xi_j - is)$ sur les états de Bethe est très simple

$$\mathcal{T}^{(s)}(\xi_j - is) B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N) |0\rangle = \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_k - \xi_j - is}{\lambda_k - \xi_j + is} B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N) |0\rangle. \quad (5.20)$$

Nous avons reconstruit les opérateurs locaux en termes des éléments de la matrice de monodromie, donc il reste à obtenir des représentations pour les produits scalaires. En utilisant le fait que les relations de commutation entre les éléments de la matrice de monodromie ici sont les mêmes que pour le spin $\frac{1}{2}$ on peut démontrer que les résultats pour les produits scalaires et les normes des états de Bethe sont aussi les mêmes,

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\mu_j) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle = \frac{\det_N T(\{\mu\}, \{\lambda\})}{\det_N V(\{\mu\}, \{\lambda\})}, \quad (5.21)$$

$$T_{ab} = \frac{\partial}{\partial \lambda_a} \tau(\mu_b | \{\lambda\}), \quad V_{ab} = \frac{1}{\lambda_a - \mu_b},$$

Une autre façon de prouver cette formule est de procéder comme pour le spin $\frac{1}{2}$ en utilisant la base F [98, 126, 164]. L'élément central d'une telle preuve est la formule pour la fonction

de partition du modèle à n vertex correspondant (c'est 19 vertex pour $s = 1$, etc.) avec les conditions aux bords de type parois de domaines. Une formule générale pour cet objet est démontrée dans l'article X.

Ainsi nous avons tous les ingrédients nécessaires pour calculer les fonctions de corrélation pour les chaînes de spin $s > \frac{1}{2}$. Dans la dernière section de ce chapitre nous présentons le résultat final pour les blocs élémentaires.

5.3 Blocs élémentaires

Le calcul des fonctions de corrélation dans le cas de spin élevé bien qu'étant plus compliqué que pour le cas de spin $\frac{1}{2}$ peut être fait de la même façon. Le résultat final pour les blocs élémentaires

$$F_m(\{\epsilon, \epsilon'\}) = \frac{\langle \psi_g | \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon'_j, \epsilon_j} | \psi_g \rangle}{\langle \psi_g | \psi_g \rangle}, \quad (5.22)$$

peut être écrit dans la limite thermodynamique sous forme d'intégrales multiples. Cette fois le nombre d'intégrales est $2ms$ et le contour d'intégration reflète le fait que la solution des équations de Bethe correspondant à l'état fondamental est constituée de $2s$ -cordes. Chaque opérateur local $E_j^{\epsilon'_j, \epsilon_j}$ produit $\epsilon'_j - 1$ intégrales « de type D » sur les variables μ_{ja_j} et $2s + 1 - \epsilon_j$ intégrales « de type A » sur les variables $\mu'_{ja'_j}$ (les variables sont choisies de telle façon que les contours d'intégration soient les mêmes pour les deux types). Comme dans le cas du spin $\frac{1}{2}$ il est pratique d'ordonner les variables d'intégration de façon suivante :

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2sm}\} = \{\{\mu'_{ma'_m}\}, \dots, \{\mu'_{1a'_1}\}, \{\mu_{1a_1}\}, \dots, \{\mu_{ma_{jm}}\}\},$$

Pour chaque variable λ_l nous introduisons deux paramètres ε_l et i_l

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{1}{2}, & \text{si } \lambda_l &= \mu_{ja_j} \quad (\text{type } D), \\ \varepsilon_l &= -\frac{1}{2}, & \text{si } \lambda_l &= \mu'_{ja'_j} \quad (\text{type } A), \\ i_l &= j, & \text{si } \lambda_l &= \mu_{ja_j} \quad \text{ou} \quad \lambda_l = \mu'_{ja'_j}. \end{aligned}$$

Ainsi le résultat pour les blocs élémentaires s'écrit comme

$$\begin{aligned} F_m(\{\epsilon, \epsilon'\}) &= \frac{\left(\prod_{l=1}^m C_{2s}^{\epsilon_l - 1} C_{2s}^{\epsilon'_l - 1} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\prod_{k=1}^{2s-1} i^k k! \right)^m \prod_{\substack{j,k=1 \\ j>k}}^m \prod_{r=1}^{2s} \prod_{n=1}^{2r-1} (\xi_j - \xi_k - i(r-n))} \times \\ &\times \int_{2s\text{-strings}} d\lambda_1 \dots \int_{2s\text{-strings}} d\lambda_{2sm} \mathbf{H}_{\{\epsilon, \epsilon'\}}^{(s)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2sm}) \det_{2sm} \mathcal{S}^{(s)}(\{\lambda\}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ici nous intégrons sur les $2s$ -cordes

$$\int_{2s\text{-strings}} d\lambda f(\lambda) = \sum_{k=1}^{2s} \int_{-\infty - (i+i0)(2s-k-\frac{1}{2})}^{\infty - (i+i0)(2s-k-\frac{1}{2})} d\lambda f(\lambda).$$

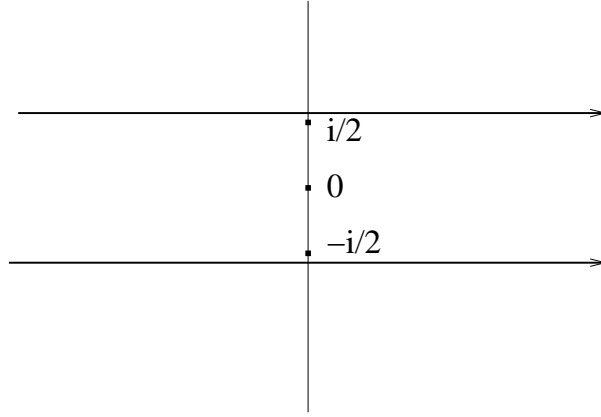


FIG. 5.1 – Contour d'intégration $s = 1$

La partie algébrique de l'expression sous les intégrales est

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\{\epsilon, \epsilon'\}}^{(s)}(\{\lambda_l\}) &= \left(\prod_{p=1}^{2s-1} \prod_{l=1}^{2sm} \prod_{k=1}^m (\lambda_l - \xi_k - i(s-p)) \right) \times \\ &\times \frac{\prod_{l=1}^{2sm} \left(\prod_{k=1}^{i_l-1} (\lambda_l - \xi_k - 2is\epsilon_l) \prod_{k=i_l+1}^m (\lambda_l - \xi_k + 2is\epsilon_l) \right)}{\prod_{l>n} (\lambda_l - \lambda_n - i(\epsilon_l + \epsilon_n)^2)}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

et la matrice $\mathcal{S}^{(s)}$ est définie en termes de la fonction densité :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{j, 2s(k-1)+l} &= \rho(\lambda_j - \xi_k + 2si - il + \frac{i}{2}), & -2s + l - 1 < \text{Im}(\lambda_j) < -2s + l \\ &= 0, & \text{sinon.} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nous avons ainsi obtenu une représentation pour les fonctions de corrélation du modèle XXX pour toute les valeurs de spin. Des représentations similaires peuvent être obtenues pour les chaînes XXZ pour toutes les valeurs de spin à condition que l'état fondamental soit constitué de $2s$ -cordes (ce que n'est pas toujours le cas [85]). Ces représentations sont très similaires aux résultats pour le spin $\frac{1}{2}$ (bien que légèrement plus compliquées). Comme pour ce cas le plus simple l'analyse asymptotique des fonctions de corrélation dans la limite des grandes distances $m \rightarrow \infty$ ainsi que dans la limite continue $s \rightarrow \infty$ est toujours un problème ouvert.

Chapitre 6

Chaînes de spin ouvertes

Dans ce chapitre nous retournons à la chaîne XXZ de spin $\frac{1}{2}$ et nous montrons que la technique proposée dans les chapitres précédents pour le cas des conditions aux bords périodiques (ou quasi-périodiques) peut être généralisée aux chaînes de spin ouvertes.

Le Hamiltonien pour une chaîne ouverte est donné par

$$H = \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ \sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y + \Delta (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1) \right\} + h_- \sigma_1^z + h_+ \sigma_M^z, \quad (6.1)$$

où h_{\pm} sont les champs magnétiques aux bords. Nous considérons ici uniquement le cas de termes de bord diagonaux où la composante z du spin total est conservée, le cas général étant beaucoup plus compliqué. Il n'existe pas pour l'instant de généralisation de notre méthode pour cette situation. Pour simplifier les notations comme dans les chapitres précédents nous présentons uniquement les résultats pour le cas de masse nulle $|\Delta| < 1$, mais le calcul pour le cas massif se fait de la même façon (la procédure générale est présentée dans l'article XII).

Nous utilisons ici la modification de l'Ansatz de Bethe Algébrique proposée par Sklyanin [149] pour construire les états propres des modèles intégrables à bords en utilisant les éléments de la « double » matrice de monodromie. Ainsi nous pouvons calculer les fonctions de corrélation en utilisant la même méthode que pour le cas périodique à condition qu'il existe

1. une solution simple du problème inverse quantique,
2. une représentation pour les produits scalaires.

Tandis que les produits scalaires peuvent être considérés plus ou moins de la même façon que dans le cas périodique le problème inverse devient plus compliqué. La solution (3.2) obtenue dans le Chapitre 3 est basée sur l'invariance par translation d'une chaîne périodique (ou quasi-périodique). L'absence de cette invariance pour une chaîne ouverte rend le problème inverse nettement plus compliqué et pour l'instant nous n'avons pas de formule simple et compacte pour la solution. Par contre il est possible d'utiliser à nouveau la solution obtenue pour la chaîne périodique. Cette solution permet à la fin d'obtenir le résultat de l'action d'un produit d'opérateurs locaux sur l'état fondamental de la chaîne

à bords en termes des états construits par l'action des éléments de la double matrice de monodromie et donc procéder de la même façon que pour le cas périodique.

Dans la première section nous introduisons l'équation de réflexion [35] et la version de l'Ansatz de Bethe Algébrique pour les chaînes ouvertes en suivant [149]. Nous construisons ainsi les états propres du Hamiltonien et donnons une brève description de l'état fondamental. La deuxième section est consacrée à l'action des opérateurs locaux sur un état de Bethe pour une chaîne ouverte. Les résultats pour les produits scalaires sont présentés dans la section 3. Dans la dernière section nous obtenons les représentations sous forme des intégrales multiples pour les blocs élémentaires dans la limite thermodynamique (cas d'une chaîne demi-infinie). Les détails de calcul sont donnés dans l'article XII.

Les représentations finales pour les blocs élémentaires sont très similaires à ceux pour le cas périodique. Ici comme pour les chaînes périodiques il est important d'obtenir des résultats pour les fonctions de corrélation physiques. Pour une chaîne ouverte la première fonction non-triviale est l'aimantation, donc une fonction à un point. Dans le cas périodique, grâce à l'invariance par translation, l'aimantation est constante pour tous les sites et donc on peut la calculer à partir de la valeur propre de l'opérateur S_z (qui commute avec le Hamiltonien). Il n'y a plus cette invariance dans le cas de la chaîne ouverte et l'aimantation cette fois-ci est une fonction non-triviale de la distance au bord. Ainsi la complexité de calcul de l'aimantation pour une chaîne ouverte est comparable à celle pour les fonctions à deux points pour le cas périodique. Pour obtenir des représentations compactes pour cette fonction ainsi que pour les fonctions à deux points il faut à nouveau sommer les blocs élémentaires. Il est possible de montrer que les deux méthodes introduites dans le Chapitre 4 pour le cas périodique peuvent être appliquées également pour une chaîne périodique. Il est également possible d'obtenir des résultats simples et compacts pour le point de fermions libres $\Delta = 0$. Ces résultats vont être publiés bientôt mais sortent du cadre de ce mémoire.

6.1 Etats propres

6.1.1 Equation de réflexion

La méthode de diagonalisation du Hamiltonien (6.1) est basée à nouveau sur l'équation de Yang-Baxter et la matrice R (2.3) (il est plus pratique d'utiliser ici une autre normalisation $\widehat{R}(\lambda)$)

$$R(\lambda) = \frac{\widehat{R}(\lambda)}{\sinh(\lambda - i\zeta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda) & c(\lambda) & 0 \\ 0 & c(\lambda) & b(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

où

$$b(\lambda) = \frac{\sinh \lambda}{\sinh(\lambda - i\zeta)}, \quad c(u) = \frac{-i \sin \zeta}{\sinh(\lambda - i\zeta)}. \quad (6.3)$$

Nous rappelons brièvement ici les propriétés de cette matrice. Premièrement c'est une solution de l'équation de Yang-Baxter

$$R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3) R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) = R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3) R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (6.4)$$

Les 3 propriétés suivantes jouent un rôle très important dans la suite, c'est la condition initiale, l'unitarité et la symétrie de croisement :

$$R_{12}(0) = P_{12}, \quad (6.5)$$

$$R_{12}(\lambda) R_{12}(-\lambda) = 1, \quad (6.6)$$

$$R_{12}(\lambda) \sigma_1^y R_{12}^{t_1}(\lambda + i\zeta) \sigma_1^y = b(\lambda + i\zeta) \cdot I. \quad (6.7)$$

Ici P_{12} est l'opérateur de permutation dans le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$, et t_1 est la transposition de matrice dans le premier espace du produit tensoriel.

La diagonalisation du Hamiltonien périodique peut être faite en utilisant uniquement la matrice R . Pour étudier les modèles intégrables ouverts il faut introduire un objet de plus : la matrice de bord $K(u; \xi)$ qui satisfait à l'équation de réflexion introduite par Cherednik en 1984 [35] :

$$R_{12}(\lambda - \mu) K_1(\lambda) R_{12}(\lambda + \mu) K_2(\mu) = K_2(\mu) R_{12}(\lambda + \mu) K_1(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu). \quad (6.8)$$

Ici nous considérons uniquement les solutions diagonales de cette équation qui ont la forme suivante

$$K(u) = K(u; \xi) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda + \xi) & 0 \\ 0 & \sinh(\xi - \lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

le paramètre ξ étant lié avec les champs magnétiques aux bords $h_{\pm} = -i \sin \zeta \coth \xi_{\pm}$.

Maintenant nous pouvons introduire la double matrice de monodromie. Premièrement on construit la matrice de monodromie pour la chaîne périodique (ici et dans la suite il est plus pratique d'utiliser la normalisation $\widehat{R}(\lambda)$)

$$T(\lambda) = \widehat{R}_{0M}(\lambda - \xi_M) \dots \widehat{R}_{02}(\lambda - \xi_2) \widehat{R}_{01}(\lambda - \xi_1) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Notons que la seule différence entre les éléments de la matrice de monodromie $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ etc., et ceux (2.6) définis dans le chapitre 2 est la normalisation et donc ils vérifient les mêmes relations de commutation données par l'équation RTT (2.7). On définit également la matrice de monodromie pour le passage de la chaîne en direction inverse

$$\widehat{T}(\lambda) = \widehat{R}_{01}(\lambda + \xi_1 + i\zeta) \widehat{R}_{02}(\lambda + \xi_2 + i\zeta) \dots \widehat{R}_{0M}(\lambda + \xi_M + i\zeta). \quad (6.11)$$

En utilisant l'unitarité (6.6) et la symétrie de croisement (6.7) on peut exprimer cette matrice en termes de la matrice de monodromie habituelle

$$\widehat{T}(\lambda) = (-1)^M \sigma_0^y T^{t_0}(-\lambda) \sigma_0^y \quad (6.12)$$

$$= \widehat{\gamma}(\lambda) T^{-1}(-\lambda - i\zeta), \quad (6.13)$$

où

$$\widehat{\gamma}(\lambda) = (-1)^M \prod_{j=1}^M [\sinh(\lambda + \xi_j) \sinh(\lambda + \xi_j + 2i\zeta)]. \quad (6.14)$$

Maintenant nous pouvons introduire la double matrice de monodromie dont les éléments jouent le même rôle pour la chaîne ouverte que ceux de la matrice de monodromie habituelle pour la chaîne périodique. Plus précisément on peut définir les deux objets suivants

$$\mathcal{U}_-(\lambda) = T(\lambda) K_-(\lambda) \widehat{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_-(\lambda) & \mathcal{B}_-(\lambda) \\ \mathcal{C}_-(\lambda) & \mathcal{D}_-(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathcal{U}_+^{t_0}(\lambda) = T^{t_0}(\lambda) K_+^{t_0}(\lambda) \widehat{T}^{t_0}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_+(\lambda) & \mathcal{C}_+(\lambda) \\ \mathcal{B}_+(\lambda) & \mathcal{D}_+(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

où les matrices de bord $K_{\pm}(\lambda) = K(\lambda \mp i\zeta/2; \xi_{\pm})$ agissent dans l'espace auxiliaire V_0 . En 1988 Sklyanin a observé que ces objets satisfont aussi à l'équation de réflexion, notamment

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda - \mu) (\mathcal{U}_-)_1(\lambda) R_{12}(\lambda + \mu + i\zeta) (\mathcal{U}_-)_2(\mu) \\ = (\mathcal{U}_-)_2(\mu) R_{12}(\lambda + \mu + i\zeta) (\mathcal{U}_-)_1(\lambda) R_{12}(\lambda - \mu), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} R_{12}(-\lambda + \mu) (\mathcal{U}_+)_1^{t_1}(\lambda) R_{12}(-\lambda - \mu + i\zeta) (\mathcal{U}_+)_2^{t_2}(\mu) \\ = (\mathcal{U}_+)_2^{t_2}(\mu) R_{12}(-\lambda - \mu + i\zeta) (\mathcal{U}_+)_1^{t_1}(\lambda) R_{12}(-\lambda + \mu), \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ces équations bien que plus compliquées que les relations RTT donnent également les relations de commutation pour les éléments de deux doubles matrices de monodromie $\mathcal{U}_{\pm}(\lambda)$, entre autres :

$$[\mathcal{B}_-(\lambda), \mathcal{B}_-(\mu)] = [\mathcal{C}_-(\lambda), \mathcal{C}_-(\mu)] = [\mathcal{B}_+(\lambda), \mathcal{B}_+(\mu)] = [\mathcal{C}_+(\lambda), \mathcal{C}_+(\mu)] = 0,$$

qui donne une possibilité de construire les états propres du Hamiltonien en utilisant les opérateurs $\mathcal{B}_{\pm}(\lambda)$ comme opérateurs de création et les opérateurs $\mathcal{C}_{\pm}(\lambda)$ comme ceux d'annihilation. Il faut cependant noter que cette fois il n'y a plus de commutation entre les opérateurs $\mathcal{A}_{\pm}(\lambda)$ et $\mathcal{D}_{\pm}(\lambda)$:

$$[\mathcal{A}_{\pm}(\lambda), \mathcal{A}_{\pm}(\mu)] \neq 0, \quad [\mathcal{D}_{\pm}(\lambda), \mathcal{D}_{\pm}(\mu)] \neq 0$$

Une autre conséquence importante des équation de réflexion est l'existence d'une famille commutante de matrices de transfert

$$\mathcal{T}(\lambda) = \text{tr}_0\{K_+(\lambda) T(\lambda) K_-(\lambda) \widehat{T}(\lambda)\} = \text{tr}_0\{K_+^{t_0}(\lambda) \mathcal{U}_-(\lambda)\} = \text{tr}_0\{K_-(\lambda) \mathcal{U}_+^{t_0}(\lambda)\}. \quad (6.19)$$

Comme pour le cas périodique la trace est calculée sur l'espace auxiliaire V_0 . En utilisant l'équation de réflexion on peut montrer que

$$[\mathcal{T}(\lambda), \mathcal{T}(\mu)] = 0.$$

Dans la limite homogène ($\xi_m = -i\frac{\zeta}{2}$, $\forall m = 1, \dots, M$), le Hamiltonien (6.1) peut être obtenu comme une dérivée de la matrice de transfert (6.19) :

$$H = \frac{2[-i \sin \zeta]^{1-2M}}{\text{tr}\{K_+(-i\zeta/2)\} \text{tr}\{K_-(-i\zeta/2)\}} \frac{d}{d\lambda} \mathcal{T}(\lambda) \Big|_{\lambda=-i\zeta/2} + \text{const}, \quad (6.20)$$

et donc commute avec $\mathcal{T}(\lambda)$. Ainsi il est possible de construire les charges conservées pour la chaîne XXZ ouverte et remplacer le problème de diagonalisation du Hamiltonien par la diagonalisation de la matrice de transfert pour toute valeur du paramètre spectral λ . Notons également qu'il est possible de représenter la matrice de transfert en terme des éléments des matrices $\mathcal{U}_+(\lambda)$ et $\mathcal{U}_-(\lambda)$

$$\mathcal{T}(\lambda) = \sinh(\lambda - i\zeta/2 + \xi_+) \mathcal{A}_-(\lambda) - \sinh(\lambda - i\zeta/2 - \xi_+) \mathcal{D}_-(\lambda), \quad (6.21)$$

$$= \sinh(\lambda + i\zeta/2 + \xi_-) \mathcal{A}_+(\lambda) - \sinh(\lambda + i\zeta/2 - \xi_-) \mathcal{D}_+(\lambda), \quad (6.22)$$

et donc nous pouvons utiliser l'algèbre des éléments de la double matrice de monodromie $\mathcal{U}_-(\lambda)$, ainsi que celle des éléments de $\mathcal{U}_+(\lambda)$ pour construire les états propres du Hamiltonien. Plus précisément les états

$$|\psi_-(\{\lambda\})\rangle = \prod_{k=1}^N \mathcal{B}_-(\lambda_j) |0\rangle, \quad \langle \psi_-(\{\lambda\}) | = \langle 0 | \prod_{k=1}^N \mathcal{C}_-(\lambda_j), \quad (6.23)$$

et les états

$$|\psi_+(\{\lambda\})\rangle = \prod_{k=1}^N \mathcal{B}_+(\lambda_j) |0\rangle, \quad \langle \psi_+(\{\lambda\}) | = \langle 0 | \prod_{k=1}^N \mathcal{C}_+(\lambda_j), \quad (6.24)$$

où $|0\rangle$ est comme d'habitude l'état ferromagnétique avec tous les spins dirigés vers le haut, sont les états propres de la matrice de transfert pour toute valeur du paramètre spectral, si $\{\lambda\}$ est une solution des équations de Bethe

$$y_j(\lambda_j; \{\lambda\}; \xi_+, \xi_-) = y_j(-\lambda_j; \{\lambda\}; \xi_+, \xi_-), \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.25)$$

où

$$y_j(\mu; \{\lambda\}; \xi_+, \xi_-) = \frac{\hat{y}(\mu; \{\lambda\}; \xi_+, \xi_-)}{\sinh(\lambda_j - \mu - i\zeta) \sinh(\lambda_j + \mu + i\zeta)}, \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(\mu; \{\lambda\}; \xi_+, \xi_-) &= -a(\mu) d(-\mu) \sinh(\mu + \xi_+ - i\zeta/2) \sinh(\mu + \xi_- + i\zeta/2) \\ &\quad \times \prod_{k=1}^N [\sinh(\mu - \lambda_k + i\zeta) \sinh(\mu + \lambda_k + i\zeta)]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ici $a(\lambda)$ et $d(\lambda)$ sont les valeurs propres des opérateurs $A(\lambda)$ et $D(\lambda)$ pour l'état ferromagnétique $|0\rangle$, notons que dans la normalisation choisie dans ce chapitre ces deux fonctions s'écrivent comme

$$a(\lambda) = \prod_{i=1}^M \sinh(\lambda - \xi_i - i\zeta), \quad d(\lambda) = \prod_{i=1}^M \sinh(\lambda - \xi_i). \quad (6.28)$$

La valeur propre de la matrice de transfert $\mathcal{T}(\mu)$ qui correspond à l'état (6.23) (ou (6.24)) est

$$\begin{aligned} \tau(\mu, \{\lambda_j\}) = & (-1)^M \left\{ a(\mu)d(-\mu) \frac{\sinh(2\mu - i\zeta) \sinh(\mu + \xi_+ + i\zeta/2) \sinh(\mu + \xi_- + i\zeta/2)}{\sinh(2\mu) \prod_{i=1}^N [b(\lambda_i - \mu) b(-\mu - \lambda_i)]} \right. \\ & \left. + a(-\mu)d(\mu) \frac{\sinh(2\mu + i\zeta) \sinh(\mu - \xi_+ - i\zeta/2) \sinh(\mu - \xi_- - i\zeta/2)}{\sinh(2\mu) \prod_{i=1}^N [b(\mu + \lambda_i) b(\mu - \lambda_i)]} \right\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Il faut mentionner ici une propriété des opérateurs \mathcal{B}_\pm et \mathcal{C}_\pm qui est importante pour la construction des états propres :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_-(-\lambda) &= -\frac{\sinh(2\lambda - i\zeta)}{\sinh(2\lambda + i\zeta)} \mathcal{B}_-(\lambda), & \mathcal{C}_-(-\lambda) &= -\frac{\sinh(2\lambda - i\zeta)}{\sinh(2\lambda + i\zeta)} \mathcal{C}_-(\lambda), \\ \mathcal{B}_+(-\lambda) &= -\frac{\sinh(2\lambda + i\zeta)}{\sinh(2\lambda - i\zeta)} \mathcal{B}_+(\lambda), & \mathcal{C}_+(-\lambda) &= -\frac{\sinh(2\lambda + i\zeta)}{\sinh(2\lambda - i\zeta)} \mathcal{C}_+(\lambda). \end{aligned}$$

La preuve de cette propriété est donnée dans l'article XII.

Pour les solutions des équations de Bethe il est facile de prouver la propriété suivante. Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ une solution des équations de Bethe (6.25), cela implique que $\{\sigma_1 \lambda_1, \dots, \sigma_N \lambda_N\}$ est aussi une solution, pour $\sigma_j = \pm$, $j = 1, \dots, N$. Il est évident qu'une telle solution correspond au même état et donc en général il suffit de considérer uniquement les solutions telles que $\Re(\lambda_j) > 0$ ou $\Re(\lambda_j) = 0$, $\Im(\lambda_j) < 0$. Notre objectif suivant est d'identifier parmi les solutions celle qui correspond à l'état fondamental.

6.1.2 Etat fondamental

Dans la limite homogène il est facile de calculer l'énergie pour un état de Bethe (6.23) (ou (6.24)) en utilisant l'identité de trace (6.20)

$$E(\{\lambda\}) = h_+ + h_- - 2 \sum_{j=1}^N \frac{\sin^2 \zeta}{\sinh(\lambda_j + i\frac{\zeta}{2}) \sinh(\lambda_j - i\frac{\zeta}{2})}. \quad (6.30)$$

Nous cherchons ici la solution pour laquelle cette énergie est minimale. Dans ce mémoire nous considérons uniquement le régime de masse nulle $-1 < \Delta \leq 1$, les détails sur le régime massif $\Delta > 1$ sont présentés dans l'article XII. Nous considérons ici la limite thermodynamique $M \rightarrow \infty$ (une chaîne demi-infinie). L'état fondamental d'une chaîne XXZ ouverte a été étudié en détail dans [150, 151]. Il est démontré que les propriétés de la solution des équations de Bethe qui correspond à l'état fondamental dépend du paramètre h_- (paramètre h_+ dans la limite de chaîne demi-infinie n'a pas de sens physique). Pour avoir le champ magnétique au bord h_- réel il faut choisir le paramètre ξ_- imaginaire,

$$\xi_- = -i\tilde{\xi}_-, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \tilde{\xi}_- < \frac{\pi}{2},$$

Nous avons montré que les solutions des équations de Bethe $\{\lambda_j\}$ et $\{\sigma_j \lambda_j\}$, où $\sigma_j = \pm$, correspondent au même vecteur de Bethe. Ainsi nous considérons uniquement $\{\lambda_j\}$ tels que $\Re(\lambda_j) > 0$ ou $\Re(\lambda_j) = 0$, $\Im(\lambda_j) < 0$.

Si $\tilde{\xi}_- < 0$ ou $\tilde{\xi}_- > \zeta/2$, l'état fondamental du Hamiltonien (6.1) est donné par le nombre maximal N de racines réelles et positives λ_j . Si $0 < \tilde{\xi}_- < \zeta/2$ il existe une racine imaginaire λ_0 et les autres racines sont réelles et positives. Pour éviter cette difficulté il suffit de remarquer qu'il existe une simple transformation qui inverse le champ $h_- : \mathcal{H} \rightarrow \Gamma_x \mathcal{H} \Gamma_x$, où $\Gamma_x = \prod_{j=1}^M \sigma_j^x$. Ainsi il suffit de considérer uniquement le cas du champ h_- positif ($\tilde{\xi}_- < 0$), sans perte de généralité. Donc nous considérons ici uniquement le cas où la solution des équations de Bethe pour l'état fondamental ne contient pas de racines imaginaires.

Comme dans le cas périodique, dans la limite thermodynamique on peut décrire les racines réelles pour l'état fondamental en termes de la densité

$$\rho(\lambda_j) = \lim_{M \rightarrow \infty} [M(\lambda_{j+1} - \lambda_j)]^{-1} \quad (6.31)$$

qui satisfait à l'équation intégrale suivante

$$\rho(\lambda) + \int_0^{\infty} [K(\lambda - \mu) + K(\lambda + \mu)] \rho(\lambda) d\lambda = \frac{p'_0(\lambda)}{\pi}. \quad (6.32)$$

Les fonctions $K(\lambda)$ et p'_0 sont définies dans le chapitre 2 et données par

$$K(\lambda) = \frac{\sin(2\zeta)}{2\pi \sinh(\lambda + i\zeta) \sinh(\lambda - i\zeta)}, \quad p'_0(\lambda) = \frac{\sin(\zeta)}{\sinh(\lambda + i\zeta/2) \sinh(\lambda - i\zeta/2)} \quad (6.33)$$

Il est facile de remarquer que si on définit $\rho(\lambda)$ pour $\lambda < 0$ comme une fonction paire, on obtient la même équation (à un coefficient près) que dans le cas périodique.

$$\rho(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \rho(\lambda) d\lambda = \frac{p'_0(\lambda)}{\pi}, \quad (6.34)$$

et donc cela signifie que la densité de racines des équations de Bethe est 2 fois plus grand que dans le cas périodique (2.25),

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\zeta \cosh \frac{\pi}{\zeta} \lambda}. \quad (6.35)$$

Comme dans le cas périodique pour toute fonction $f(\lambda) \in C_\infty(\mathbb{R})$ on peut remplacer la somme $\sum_{j=1}^N f(\lambda_j)$ par l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^N f(\lambda_j) = \int_0^{\infty} f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda + O(M^{-1}). \quad (6.36)$$

6.2 Problème inverse

La solution du problème inverse quantique (3.2) présentée dans le chapitre 3 est indispensable pour le calcul des fonctions de corrélation. Cette solution est basée sur l'invariance par translation de la chaîne périodique. L'absence de cette invariance dans le cas d'une chaîne ouverte rend la solution bien plus compliquée (par exemple cela rend la reconstruction naïve proposée par Wang [167] utilisable uniquement pour le premier site) et il n'existe pas à ce moment de représentations du type (3.2) pour les opérateurs locaux en termes des éléments de la matrice $\mathcal{U}_-(\lambda)$ (ou $\mathcal{U}_+(\lambda)$). Il est important de remarquer que des représentations plus complexes (par exemple des formules récurrentes) existent pour les opérateurs locaux mais elles rendent le calcul des fonctions de corrélation très difficile. Ici nous proposons une méthode de calcul des blocs élémentaires basée sur la solution du problème inverse pour le cas périodique.

Notons ici que nous avons besoin de la solution du problème inverse pour calculer l'action d'un produit d'opérateurs élémentaires locaux $E_1^{\epsilon_1 \epsilon'_1} \dots E_m^{\epsilon_m \epsilon'_m}$ (nous utilisons ici les mêmes notations pour les matrices élémentaires que dans le chapitre 3, $\epsilon_j = \pm$) sur un état de Bethe (en particulier sur l'état fondamental). Un tel produit peut être facilement représenté en termes des éléments de la matrice de monodromie $T(\lambda)$. Notre but est d'étudier l'action de ce produit sur un état $\mathcal{B}_\pm(\lambda_1) \dots \mathcal{B}_\pm(\lambda_N)|0\rangle$ et d'exprimer le résultat de cette action comme une combinaison linéaire des états du même type $\mathcal{B}_\pm(\mu_1) \dots \mathcal{B}_\pm(\mu_N)|0\rangle$.

Ici nous proposons le schéma suivant :

1. Nous représentons les états $\mathcal{B}_\pm(\lambda_1) \dots \mathcal{B}_\pm(\lambda_N)|0\rangle$ en termes des états $B(\sigma_1 \lambda_1) \dots B(\sigma_N \lambda_N)|0\rangle$, où $\sigma_j = \pm$.
2. Nous utilisons la solution du problème inverse pour la chaîne périodique et nous étudions l'action d'un produit d'opérateurs locaux $E_1^{\epsilon_1 \epsilon'_1} \dots E_m^{\epsilon_m \epsilon'_m}$ sur les états $B(\sigma_1 \lambda_1) \dots B(\sigma_N \lambda_N)|0\rangle$, où $\sigma_j = \pm$.
3. Nous représentons le résultat de cette action à nouveau en termes des états $\mathcal{B}_\pm(\mu_1) \dots \mathcal{B}_\pm(\mu_N)|0\rangle$

6.2.1 Propriétés des états $|\psi_\pm(\{\lambda\})\rangle$

Nous étudions ici les propriétés des états $\langle \psi_\pm(\{\lambda\}) |$ et $|\psi_\pm(\{\lambda\})\rangle$. Notre but est de les exprimer en termes des états construits par l'action des éléments de la matrice de monodromie $T(\lambda)$. Pour ce faire nous utilisons la définition des doubles matrices de monodromie $\mathcal{U}_\pm(\lambda)$ qui permet d'obtenir pour les opérateurs $\mathcal{B}_\pm(\lambda)$ et $\mathcal{C}_\pm(\lambda)$ des représentations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_-(\lambda) &= -(A(\lambda)B(-\lambda) \sinh(\lambda + i\zeta/2 + \xi_-) + B(\lambda)A(-\lambda) \sinh(\lambda + i\zeta/2 - \xi_-)), \\ \mathcal{C}_-(\lambda) &= C(\lambda)D(-\lambda) \sinh(\lambda + i\zeta/2 + \xi_-) + D(\lambda)C(-\lambda) \sinh(\lambda + i\zeta/2 - \xi_-), \\ \mathcal{B}_+(\lambda) &= B(\lambda)D(-\lambda) \sinh(\lambda - i\zeta/2 + \xi_+) + D(\lambda)B(-\lambda) \sinh(\lambda - i\zeta/2 - \xi_+), \\ \mathcal{C}_+(\lambda) &= -(A(\lambda)C(-\lambda) \sinh(\lambda - i\zeta/2 - \xi_+) + C(\lambda)A(-\lambda) \sinh(\lambda - i\zeta/2 - \xi_+)). \end{aligned}$$

Maintenant il est possible d'utiliser les relations de commutation données par l'équation RTT pour les éléments de la matrice $T(\lambda)$ pour prouver la proposition suivante

Proposition 6.1. *Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ des nombre complexes arbitraires (pas forcément une solution des équations de Bethe). Les états $|\psi_\varepsilon(\{\lambda\})\rangle$ et $\langle\psi_\varepsilon(\{\lambda\})|$, où $\varepsilon = \pm$ peuvent être représentés sous la forme*

$$|\psi_\varepsilon(\{\lambda\})\rangle = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N = \pm} H_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}^{\mathcal{B}_\varepsilon}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \xi_\varepsilon) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j^\sigma) |0\rangle, \quad (6.37)$$

$$\langle\psi_\varepsilon(\{\lambda\})| = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N = \pm} H_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}^{\mathcal{C}_\varepsilon}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \xi_\varepsilon) \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j^\sigma), \quad (6.38)$$

où

$$\begin{aligned} H_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}^{\mathcal{B}_-}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \xi_-) &= (-1)^{MN} \prod_{j=1}^N \left[-\sigma_j a(-\lambda_j^\sigma) \frac{\sinh(2\lambda_j + i\zeta)}{\sinh(2\lambda_j)} \right. \\ &\quad \left. \times \sinh(\lambda_j^\sigma - \xi_- - i\zeta/2) \right] \prod_{1 \leq r < s \leq N} \frac{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma - i\zeta)}{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma)}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} H_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}^{\mathcal{C}_-}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \xi_-) &= (-1)^{MN} \prod_{j=1}^N \left[\sigma_j d(-\lambda_j^\sigma) \frac{\sinh(2\lambda_j + i\zeta)}{\sinh(2\lambda_j)} \right. \\ &\quad \left. \times \sinh(\lambda_j^\sigma + \xi_- + i\zeta/2) \right] \prod_{1 \leq r < s \leq N} \frac{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma + i\zeta)}{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma)}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} H_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}^{\mathcal{C}_+}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \xi_+) &= (-1)^{MN} \prod_{j=1}^N \left[-\sigma_j a(-\lambda_j^\sigma) \frac{\sinh(2\lambda_j - i\zeta)}{\sinh(2\lambda_j)} \right. \\ &\quad \left. \times \sinh(\lambda_j^\sigma - \xi_+ - i\zeta/2) \right] \prod_{1 \leq r < s \leq N} \frac{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma - i\zeta)}{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma)}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} H_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}^{\mathcal{B}_+}(\lambda_1, \dots, \lambda_N; \xi_+) &= (-1)^{MN} \prod_{j=1}^N \left[\sigma_j d(-\lambda_j^\sigma) \frac{\sinh(2\lambda_j - i\zeta)}{\sinh(2\lambda_j)} \right. \\ &\quad \left. \times \sinh(\lambda_j^\sigma + \xi_+ + i\zeta/2) \right] \prod_{1 \leq r < s \leq N} \frac{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma + i\zeta)}{\sinh(\bar{\lambda}_{rs}^\sigma)}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

Pour simplifier les formules ici et dans la suite il est pratique d'utiliser les notations suivantes :

$$\lambda_{jk} = \lambda_j - \lambda_k, \quad \bar{\lambda}_{jk} = \lambda_j + \lambda_k, \quad \lambda_j^\sigma = \sigma_j \lambda_j. \quad (6.43)$$

La preuve détaillée de cette représentation est donnée en détail dans l'article XII.

Nous utilisons cette proposition pour calculer l'action des opérateurs locaux sur les états de Bethe, mais il faut noter qu'elle permet également de démontrer que les états $|\psi_+(\{\lambda\})\rangle$ et $|\psi_-(\{\lambda\})\rangle$ sont proportionnels si $\{\lambda\}$ est une solution des équations de Bethe.

6.2.2 Problème inverse, forme alternative

La solution du problème inverse donnée dans le chapitre 3

$$E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} = \prod_{k=1}^{j-1} [A(\xi_k) + D(\xi_k)] T_{\epsilon'_j, \epsilon_j}(\xi_j) \prod_{k=1}^j [A(\xi_k) + D(\xi_k)]^{-1}, \quad (6.44)$$

où $\epsilon_j, \epsilon'_j = \pm$, est très pratique pour l'utilisation dans le cas périodique car les produits des matrices de transfert à gauche et à droite agissent sur les états de Bethe et donc l'action de ces opérateur est très simple. Ce n'est plus le cas si nous écrivons les états $|\psi_+(\{\lambda\})\rangle$ et $|\psi_-(\{\lambda\})\rangle$ en termes des opérateurs $B(\lambda)$. Ainsi nous cherchons d'abord à réécrire cette solution sous une autre forme utilisable de façon plus générale.

Nous étudions l'action des produits des opérateurs locaux $E_1^{\epsilon_1 \epsilon'_1} \dots E_m^{\epsilon_m \epsilon'_m}$. En utilisant (6.44) on peut écrire un tel produit en termes des éléments de la matrice $T(\lambda)$,

$$E_1^{\epsilon_1 \epsilon'_1} \dots E_m^{\epsilon_m \epsilon'_m} = T_{\epsilon'_1, \epsilon_1}(\xi_1) \dots T_{\epsilon'_m, \epsilon_m}(\xi_m) \prod_{k=1}^j [A(\xi_k) + D(\xi_k)]^{-1}.$$

En utilisant la symétrie de croisement (6.7) il est possible de voir que $[(A + D)(\xi_i)]^{-1} = [a(\xi_i) d(\xi_i + i\zeta)]^{-1} (A + D)(\xi_i + i\zeta)$

$$\begin{aligned} E_1^{\epsilon_1 \epsilon'_1} \dots E_m^{\epsilon_m \epsilon'_m} &= \prod_{i=1}^m [a(\xi_i) d(\xi_i + i\zeta)]^{-1} \\ &\quad \times T_{\epsilon'_1, \epsilon_1}(\xi_1) \dots T_{\epsilon'_m, \epsilon_m}(\xi_m) \prod_{k=1}^m [A(\xi_k + i\zeta) + D(\xi_k + i\zeta)]. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Le produit des matrices de transfert peut être représenté comme une somme de 2^m termes et normalement il faut calculer l'action de chacun de ces termes sur un état. $|\psi_{\pm}(\{\lambda\})\rangle$. Il est remarquable que tous les termes sauf un donnent une contribution nulle et le seul terme non trivial donne une nouvelle forme de la solution du problème inverse.

Proposition 6.2.

$$\begin{aligned} E_1^{\epsilon_1 \epsilon'_1} \dots E_m^{\epsilon_m \epsilon'_m} &= \prod_{i=1}^m [a(\xi_i) d(\xi_i + i\zeta)]^{-1} \\ &\quad \times T_{\epsilon'_1, \epsilon_1}(\xi_1) \dots T_{\epsilon'_m, \epsilon_m}(\xi_m) T_{-\epsilon'_m, -\epsilon'_m}(\xi_m + i\zeta) \dots T_{-\epsilon'_1, -\epsilon'_1}(\xi_1 + i\zeta). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Cette proposition est démontrée dans l'article XII. Nous rappelons que dans ce mémoire nous avons choisi dès le début les notations suivantes pour les indices des matrices 2×2 : $\epsilon_j = \pm$.

Cette représentation permet de calculer l'action d'un produit des opérateurs locaux sur un état $B(\lambda_1) \dots B(\lambda_N)|0\rangle$ pour n'importe quelle valeur des paramètres λ_j . Cela permet d'utiliser la représentation (6.37) pour les états de bord et de calculer l'action des opérateurs locaux sur un état de Bethe pour une chaîne de spin ouverte.

6.2.3 Action des opérateurs locaux

Les résultats obtenus dans cette section permettent finalement d'effectuer l'action des opérateurs locaux sur un état de bord $|\psi_+(\{\lambda\})\rangle$ (il est plus pratique d'utiliser les états $|\psi_+(\{\lambda\})\rangle$ pour calculer l'action d'un produit d'opérateurs locaux qui commence par $E_1^{\epsilon_1 \epsilon'_1}$, tandis que pour les opérateurs proches du site M il faut utiliser l'état $|\psi_-(\{\lambda\})\rangle$). Il suffit d'utiliser les relations RTT et la représentation (6.37)

Nous considérons (comme pour le cas périodique) les ensembles suivants

$$\begin{aligned}\beta_+ &= \{j : 1 \leq j \leq m, \epsilon_j = 1\}, & \text{card}(\beta_+) &= s', \\ \beta_- &= \{j : 1 \leq j \leq m, \epsilon'_j = 2\}, & \text{card}(\beta_-) &= s,\end{aligned}$$

qui correspondent à nouveaux aux sommes de type A et de type D . Nous considérons ici uniquement les produits d'opérateurs qui conservent la composante z du spin total (donc avec une valeur moyenne non-nulle), cela signifie que $s + s' = m$. Comme dans le cas périodique nous pouvons introduire les indices $i_p \in \{1, \dots, m\}$ tels que

$$\beta_- = \{i_p\}_{p \in \{1, \dots, s\}}, \quad \text{avec } i_k < i_h \text{ pour } 0 < k < h \leq s, \quad (6.47)$$

$$\beta_+ = \{i_p\}_{p \in \{s+1, \dots, m\}}, \quad \text{avec } i_k > i_h \text{ pour } s < k < h \leq m. \quad (6.48)$$

Maintenant pour l'action d'un produit d'opérateurs locaux sur un état de bord nous obtenons :

$$\prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} \prod_{k=1}^N \mathcal{B}_+(\lambda_k) |0\rangle = \sum_{\beta_m} \mathcal{F}_{\beta_m}^+(\{\lambda\}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \notin \beta_m}}^{N+m} \mathcal{B}_+(\lambda_k) |0\rangle, \quad (6.49)$$

où $\lambda_{N+j} := \xi_{m+1-j}$ pour $j \in \{1, \dots, m\}$. Les sommes sont calculées sur tous les ensembles $\beta_m = \{b_1, \dots, b_m\}$ avec les restrictions suivantes :

$$\begin{cases} b_p \in \{1, \dots, N\} \setminus \{b_1, \dots, b_{p-1}\} & \text{pour } 0 < p \leq s, \\ b_p \in \{1, \dots, N + m + 1 - i_p\} \setminus \{b_1, \dots, b_{p-1}\} & \text{pour } s < p \leq m. \end{cases} \quad (6.50)$$

Les coefficients $\mathcal{F}_{\beta_m}^+$ sont

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\beta_m}^+(\{\lambda\}) &= \sum_{\sigma_{\alpha_+} = \pm} \prod_{j=1}^m \frac{a(\lambda_{b_j}^\sigma)}{a(\xi_j)} \frac{H_{\sigma_{\alpha_+}}^{\mathcal{B}_+}(\{\lambda_{\alpha_+}\})}{H_1^{\mathcal{B}_+}(\{\xi_{\gamma_+}\})} \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{\sinh \lambda_{b_i b_j}^\sigma}{\sinh(\lambda_{b_i b_j}^\sigma - i\zeta)} \\ &\times \prod_{i \in \alpha_-} \prod_{\epsilon = \pm} \left\{ \prod_{j \in \alpha_+} \frac{\sinh(\lambda_j^\sigma + \epsilon \lambda_i + i\zeta)}{\sinh(\lambda_j^\sigma + \epsilon \lambda_i)} \prod_{j \in \gamma_+} \frac{\sinh(\xi_j + \epsilon \lambda_i)}{\sinh(\xi_j + \epsilon \lambda_i + i\zeta)} \right\} \\ &\times \prod_{i \in \alpha_+} \left\{ \prod_{j \in \gamma_+} \frac{\sinh(\xi_j - \lambda_i^\sigma)}{\sinh(\xi_j - \lambda_i^\sigma + i\zeta)} \frac{\prod_{j \in \alpha_+} \sinh(\lambda_{j i}^\sigma - i\zeta)}{\prod_{j \in \alpha_+ - \{i\}} \sinh(\lambda_{j i}^\sigma)} \right\} \\ &\times \prod_{p=1}^s \frac{\prod_{k=i_p+1}^m \sinh(\lambda_{b_p}^\sigma - \xi_k - i\zeta)}{\prod_{k=i_p}^m \sinh(\lambda_{b_p}^\sigma - \xi_k)} \prod_{p=s+1}^m \frac{\prod_{k=i_p+1}^m \sinh(\xi_k - \lambda_{b_p}^\sigma - i\zeta)}{\prod_{\substack{k=i_p \\ k \neq N+m+1-b_p}}^m \sinh(\xi_k - \lambda_{b_p}^\sigma)}. \quad (6.51)\end{aligned}$$

Les sommes ici sont sur $\sigma_j \in \{+, -\}$ pour $j \in \alpha_+$. Nous utilisons les notations $\lambda_i^\sigma := \sigma_i \lambda_i$ pour $i \in \beta_m$, et $\sigma_i = 1$ $i > N$. Nous utilisons également les ensembles suivants,

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \beta_m \cap \{1, \dots, N\}, & \alpha_- &= \{1, \dots, N\} \setminus \alpha_+, \\ \gamma_- &= \{N + m + 1 - j\}_{j \in \beta_m \cap \{N+1, \dots, N+m\}}, & \gamma_+ &= \{1, \dots, m\} \setminus \gamma_-. \end{aligned}$$

La fonction $H_\sigma^{\mathcal{B}^+}(\{\lambda\})$ est définie par (6.42). Cette représentation signifie qu'il ne reste qu'à calculer les produits scalaires pour obtenir des résultats pour les blocs élémentaires.

6.3 Produits scalaires

Le calcul des produits scalaires se fait d'une façon très similaire au cas périodique. Nous suivons ici les mêmes étapes : il faut d'abord calculer la fonction de partition, cela permet de calculer le produit scalaire entre un état de Bethe $|\psi_\pm(\{\lambda\})\rangle$ et un état $\langle\psi_\pm(\{\mu\})|$ où les paramètres μ sont des nombres complexes arbitraires. Ce résultat permet d'obtenir une formule de Gaudin pour les normes des états de Bethe de bord.

6.3.1 Fonction de partition

Comme dans le cas périodique (3.7) nous considérons ici la fonction suivante

$$Z_M^\pm(\{\lambda\}, \{\xi\}; \xi_\pm) = \langle 0' | \mathcal{B}_\pm(\lambda_M) \dots \mathcal{B}_\pm(\lambda_1) | 0 \rangle, \quad (6.52)$$

où $\langle 0' |$ est le deuxième état ferromagnétique avec tous les spins dirigés vers le bas. Pour simplifier les notations nous considérons ici uniquement la fonction Z_M^+ car ce sont les états $|\psi_+(\{\lambda\})\rangle$ que nous utilisons pour le calcul des fonctions de corrélation. Plus de détails sur les différents types des fonctions de partition pour le cas d'une chaîne ouverte sont donné dans l'article XII.

La méthode de calcul de cette fonction de partition est basée sur le même principe que pour le cas périodique [69, 104]. On détermine les mêmes propriétés que dans le cas périodique (symétrie, normalisation, polynomialité, relations de récurrence) qui déterminent de façon unique la fonction $Z_M^+(\{\lambda\}, \{\xi\}; \xi_\pm)$. Ainsi il suffit de proposer une fonction qui satisfait à ces propriétés (normalement il faut la deviner, mais la méthode fondée sur la base F permet de le faire d'une façon plus ou moins systématique).

Une telle fonction pour le cas ouvert a été proposée par Tsuchiya [165]. Comme dans le cas périodique la fonction de partition peut être écrite sous forme de déterminant,

$$\begin{aligned} Z_M^+(\{\lambda\}, \{\xi_k\}; \xi_+) &= (i \sin \zeta)^M \prod_{\beta=1}^M [a(\lambda_\beta) a(-\lambda_\beta)] \\ &\times \frac{\prod_{\beta=1}^M \prod_{k=1}^M [\sinh(\lambda_\beta - \xi_k) \sinh(\lambda_\beta + \xi_k)]}{\prod_{\beta < \gamma} [\sinh \lambda_{\beta\gamma} \sinh \bar{\lambda}_{\beta\gamma}] \prod_{r < s} [\sinh \xi_{sr} \sinh(\bar{\xi}_{sr} + i\zeta)]} \det \mathcal{N}^+(\lambda_\alpha, \xi_k; \xi_+), \quad (6.53) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{N}_{\alpha k}^+ = \frac{\sinh(2\lambda_\alpha - i\zeta) \sinh(\xi_+ + \xi_k + i\zeta/2)}{\sinh(\lambda_\alpha - \xi_k - i\zeta) \sinh(\lambda_\alpha + \xi_k + i\zeta) \sinh(\lambda_\alpha - \xi_k) \sinh(\lambda_\alpha + \xi_k)}. \quad (6.54)$$

Une preuve alternative de ce résultat à partir de la représentation des opérateurs $\mathcal{B}_+(\lambda)$ dans la base F est présentée dans l'appendice de l'article XII.

6.3.2 Produits scalaires

Ici nous calculons les produits scalaires,

$$\mathcal{S}_N^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\{\lambda\}; \{\mu\}) = \langle \psi_{\varepsilon_1}(\{\lambda\}) | \psi_{\varepsilon_2}(\{\mu\}) \rangle, \quad (6.55)$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm$. Il est important de remarquer que pour appliquer la technique de la base- F [126] similaire à celle utilisée dans [98], il est nécessaire de considérer les produits scalaires des états de types différents, c'est à dire soit $\langle \psi_-(\{\lambda\}) | \psi_+(\{\mu\}) \rangle$, soit $\langle \psi_+(\{\lambda\}) | \psi_-(\{\mu\}) \rangle$. Cela ne pose pas de problème car on peut toujours utiliser la proportionnalité entre les états de Bethe $|\psi_-(\{\lambda\})\rangle$ et $|\psi_+(\{\lambda\})\rangle$.

Nous considérons une solution des équations de Bethe (6.25) $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, et un ensemble de nombres complexes arbitraires $\{\mu_1, \dots, \mu_N\}$. Nous obtenons pour les produits scalaires les représentations suivantes

$$\mathcal{S}_N^{-,+}(\{\lambda\}; \{\mu\}) = (-1)^{MN} \prod_{a=1}^N [d(\lambda_a) d(-\lambda_a)] \frac{\det_N \mathcal{T}(\{\lambda\}, \{\mu\})}{\det_N \mathcal{V}(\{\lambda\}, \{\mu\})}, \quad (6.56)$$

$$\mathcal{S}_N^{+,-}(\{\mu\}; \{\lambda\}) = (-1)^{MN} \prod_{a=1}^N [a(\lambda_a) a(-\lambda_a)] \frac{\det_N \mathcal{T}(\{\lambda\}, \{\mu\})}{\det_N \mathcal{V}(\{\lambda\}, \{\mu\})}, \quad (6.57)$$

où les matrices \mathcal{T} et \mathcal{V} sont

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}(\{\lambda\}, \{\mu\}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} \tau(\mu_\beta, \{\lambda\}) \quad (6.58)$$

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta}(\{\lambda\}, \{\mu\}) = \frac{\sinh(2\lambda_\alpha) \sinh(2\mu_\beta + i\zeta)}{\sinh(2\lambda_\alpha + i\zeta) \sinh(\mu_\beta - \lambda_\alpha) \sinh(\mu_\beta + \lambda_\alpha)}. \quad (6.59)$$

Ici (comme dans le cas périodique) $\tau(\mu_\beta, \{\lambda\})$ est la valeur propre (6.29) de la matrice de transfert $\mathcal{T}(\mu)$ pour l'état de Bethe $|\psi(\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\})\rangle$.

La démonstration de ce résultat est donnée dans l'article XII. Il est facile d'en dériver tous les possibles produits scalaires $\mathcal{S}_N^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\{\lambda\}; \{\mu\})$. Un résultat similaire pour le modèle XXX a été démontré dans [168].

Dans la limite $\mu_j \rightarrow \lambda_j$ nous obtenons une formule pour les normes des états de

Bethe

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_N^{-,+}(\{\lambda\}; \{\lambda\}) &= (-i \sin \zeta)^M \frac{\prod_{a=1}^N [d(\lambda_a) d(-\lambda_a) y_a(-\lambda_a; \{\lambda\})]}{\prod_{a \neq b}^N [\sinh \lambda_{ab} \sinh \bar{\lambda}_{ab}]} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^N \frac{\sinh(2\lambda_j + i\zeta) \sinh(2\lambda_j - i\zeta)}{\sinh^2(2\lambda_j)} \det_N \Phi'_{jk}(\{\lambda\}). \end{aligned} \quad (6.60)$$

La matrice de Gaudin Φ' est définie comme d'habitude comme une dérivée logarithmique de la partie gauche des équations de Bethe.

$$\Phi'_{jk}(\{\lambda\}) = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \log \frac{y_k(-\lambda_k; \{\lambda\})}{y_k(\lambda_k; \{\lambda\})}, \quad (6.61)$$

où $y_j(x; \{\lambda\})$ est définie par (6.27).

Nous avons donc tous les ingrédients nécessaires pour calculer les blocs élémentaires. Il reste à assembler les résultats des trois dernières sections et calculer la limite thermodynamique pour les sommes et les déterminants.

6.4 Blocs élémentaires

Nous considérons maintenant la limite thermodynamique $M \rightarrow \infty$, donc une chaîne demi-infinie. Comme d'habitude nous ne considérons que la chaîne dans le régime de masse nulle et le cas de champ magnétique au bord non-négatif $h_- \geq 0$. Dans ce cas la solution des équations de Bethe correspondant à l'état fondamental ne contient que des paramètres λ_j réels et positifs. Ainsi comme dans le cas périodique nous pouvons remplacer les sommes par des intégrales

$$\frac{1}{M} \sum_{b=1}^N \sum_{\sigma_b=\pm} \sigma_b f(\lambda_b^\sigma) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\lambda_j \rho(\lambda) \sum_{\sigma=\pm} \sigma f(\lambda^\sigma) = \int_{-\infty}^\infty d\lambda f(\lambda) \rho(\lambda).$$

Il faut remarquer également que les sommes (6.50) contiennent les termes $b_j > N$ qui peuvent être également représentés comme des intégrales de contour grâce à l'identité

$$2i\pi \operatorname{Res} \rho(\lambda - \xi - i\zeta/2) \Big|_{\lambda=\xi} = 2. \quad (6.62)$$

Maintenant il faut mettre ensemble le résultat pour l'action des opérateurs locaux sur un état de bord (6.49) et les résultats pour les produits scalaires (6.56, 6.60) et procéder

comme dans le cas périodique. Pour les blocs élémentaires nous obtenons les représentations suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} \rangle &= \frac{\prod_{a=1}^m \cosh\left(\frac{\pi \xi_a}{\zeta}\right) \prod_{k < l} \left[\sinh\left(\frac{\pi \xi_{kl}}{\zeta}\right) \sinh\left(\frac{\pi \bar{\xi}_{kl}}{\zeta}\right) \right]}{\prod_{i < j} \sinh(\xi_{ij}) \prod_{i \leq j} \sinh(\bar{\xi}_{ij} + i\zeta)} \int_{\Gamma_D} \prod_{j=1}^s \left(i \frac{d\lambda_j}{\zeta} \right) \\
&\times \int_{\Gamma_A} \prod_{j=s+1}^m \left(\frac{d\lambda_j}{i\zeta} \right) \prod_{a=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\sinh(\lambda_a + \xi_k + i\zeta)}{\sinh \frac{\pi}{\zeta} (\lambda_a - \xi_k) \sinh \frac{\pi}{\zeta} (\lambda_a + \xi_k)} \\
&\times \prod_{k < l} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\zeta} \lambda_{lk}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{\zeta} \bar{\lambda}_{lk}\right)}{\sinh(\lambda_{kl} - i\zeta) \sinh(\bar{\lambda}_{kl} + i\zeta)} \prod_{k=1}^m \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\zeta} \lambda_k\right) \sinh(\xi_k + i\frac{\zeta}{2} + \xi_-)}{\sinh(\lambda_k + i\frac{\zeta}{2} + \xi_-)} \\
&\times \prod_{p=1}^s \left\{ \prod_{k=1}^{i_p-1} \sinh(\lambda_p - \xi_k) \prod_{k=i_p+1}^m \sinh(\lambda_p - \xi_k - i\zeta) \right\} \\
&\times \prod_{p=s+1}^m \left\{ \prod_{k=1}^{i_p-1} \sinh(\lambda_p - \xi_k) \prod_{k=i_p+1}^m \sinh(\lambda_p - \xi_k + i\zeta) \right\}, \tag{6.63}
\end{aligned}$$

où le contour Γ_D est l'axe réel (donc le même que dans le cas périodique) et le contour Γ_A est une ligne horizontale $] -\infty - i\alpha, \infty - i\alpha$ avec $\zeta/2 < \alpha < \zeta/2 - \xi_-$ (nous considérons uniquement le cas $\tilde{\xi} \leq 0$).

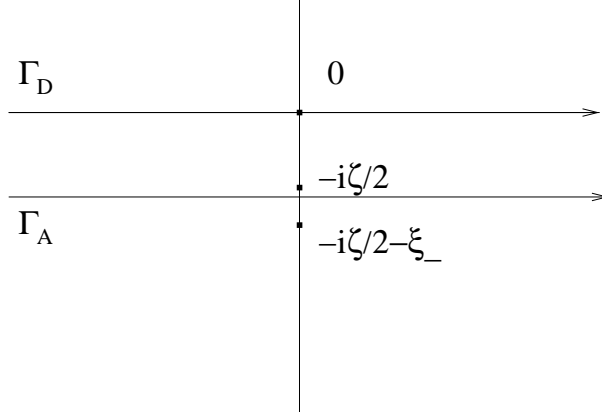


FIG. 6.1 – Contours Γ_A et Γ_D

Nous supposons comme d'habitude que tous les paramètres d'inhomogénéité sont suffisamment proche du point physique $-i\zeta/2$, en général le contour Γ_D doit passer au dessus de tous les points ξ_j et le contour Γ_A au dessous de ces points. Donc si le champ magnétique au bord est assez faible $0 \leq h_- < 1 + \Delta$ on peut choisir les mêmes contours que dans le cas périodique (Fig. 3.2). Si $h_- > 1 + \Delta$ le contour Γ_A est un peu différent car

en déformant les contours pour les intégrales de type A il ne faut pas traverser le pôle de l'expression sous les intégrales au point $\lambda = -i\zeta/2 - \xi_-$.

Dans la limite homogène $\xi_j = -i\zeta/2$, le résultat s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\langle \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} \rangle &= (-1)^{m-s} \sinh^m \xi_- \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^{m(m+1)} \int_{\Gamma_D} \prod_{j=1}^s \frac{d\lambda_j}{2\zeta} \cdot \int_{\Gamma_A} \prod_{j=s+1}^m \frac{d\lambda_j}{2\zeta} \\
&\times \prod_{k<l} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\zeta} \lambda_{kl}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{\zeta} \bar{\lambda}_{kl}\right)}{\sinh(\lambda_{kl} - i\zeta) \sinh(\bar{\lambda}_{kl} + i\zeta)} \prod_{k=1}^m \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\zeta} \lambda_k\right)}{\sinh(\lambda_k + i\frac{\zeta}{2} + \xi_-)} \\
&\times \prod_{p=1}^s \frac{\sinh^{m+i_p-1}\left(\lambda_p + i\frac{\zeta}{2}\right) \sinh^{m-i_p}\left(\lambda_p - i\frac{\zeta}{2}\right)}{\cosh^{2m}\left(\frac{\pi}{\zeta} \lambda_p\right)} \\
&\times \prod_{p=s+1}^m \frac{\sinh^{m+i_p-1}\left(\lambda_p + i\frac{\zeta}{2}\right) \sinh^{m-i_p}\left(\lambda_p + i\frac{3\zeta}{2}\right)}{\cosh^{2m}\left(\frac{\pi}{\zeta} \lambda_p\right)}. \tag{6.64}
\end{aligned}$$

Ce résultat est très similaire à celui obtenu pour le cas périodique. L'analyse de ces quantités pose les mêmes difficultés que l'analyse du résultat (3.17). Notons que ici comme dans le cas périodique pour calculer les fonctions de corrélation physique il faut calculer les sommes de plusieurs blocs élémentaires, L'exemple le plus simple d'une fonction de corrélation non-triviale pour le cas ouvert est l'aimantation $\langle \sigma_m^z \rangle$, pour la calculer il faut additionner 2^m blocs.

Il est possible d'étudier les fonctions de corrélation pour une chaîne ouverte de la même façon que dans le cas périodique pour

- obtenir le terme dominant pour le comportement asymptotique de la probabilité de formation du vide,
- calculer la probabilité de formation du vide pour les points le plus simples ($\Delta = 0$ et $\Delta = \frac{1}{2}$),
- utiliser les deux méthodes de resommation pour les fonctions de corrélation physiques et premièrement pour l'aimantation $\langle \sigma_m^z \rangle$.
- calculer les fonctions de corrélation physiques dans le point de fermions libres $\Delta = 0$.

Tous ces résultats très récents sortent du cadre de ce mémoire. Comme dans le cas périodique l'analyse asymptotique des fonctions de corrélation est un problème très important et encore ouvert. Il est également très important de généraliser les résultats pour les fonctions de corrélation dans le cas de termes aux bords non-diagonaux (qui corespondent aux solutions générales de l'équation de réflexion de S. Ghoshal et A. Zamolodchikov [54]), car cela donne une ouverture vers les systèmes hors d'équilibre.

Chapitre 7

Conclusion et Perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire d'habilitation une méthode de calcul des fonctions de corrélation pour les chaînes de spin. Nous avons montré que l'utilisation de l'ansatz Bethe algébrique permet d'obtenir des résultats explicites pour plusieurs types de modèles : chaînes XXX et XXZ de spin $\frac{1}{2}$ dans un champ magnétique extérieur constant, avec les conditions aux bords périodiques, quasi-périodiques et ouvertes (avec des champs magnétiques aux bords), ainsi que pour les chaînes XXX à spins plus élevés. Nous avons considéré également quelques possibilités d'obtenir des représentations simples pour les fonctions à deux points et nous avons établi un lien entre ces représentations et les sommes des facteurs de forme. Ce lien est généralisé pour les fonctions de corrélation dynamiques.

Les résultats pour les fonctions de corrélation sont obtenus toujours sous forme d'intégrales multiples d'une forme très particulière, avec un nombre d'intégrales proportionnel à la distance. Il est toujours possible de distinguer deux parties dans les expressions sous les intégrales : la partie algébrique et le déterminant des densités. Cette structure est observée pour toutes les conditions aux bords et pour tous les spins, elle ouvre des possibilités pour étudier les fonctions à deux points et généraliser les résultats pour tous les régimes.

Aux points spéciaux (points de fermions libres, $\Delta = \frac{1}{2}$) il est parfois possible de calculer ces intégrales et d'obtenir des résultats très intéressants (comme la proportionnalité au nombre de matrices de signes alternés obtenue pour la probabilité de formation du vide à $\Delta = \frac{1}{2}$).

Une autre particularité de notre méthode est le fait qu'elle permet de considérer une chaîne finie et d'obtenir des représentations pour les fonctions de corrélation en termes des solutions des équations de Bethe.

La question la plus importante concernant les fonction de corrélation des chaînes de spin que nous ne traitons pas dans ce mémoire est l'analyse asymptotique des fonctions à deux points. La difficulté d'analyser la limite où le nombre d'intégrales tend vers l'infini est l'obstacle principal pour obtenir l'asymptotique. Il existe plusieurs méthodes pour traiter ce problème et nous espérons calculer les termes dominants à partir des intégrales multiples dans une perspective proche.

Plusieurs autres questions restent ouvertes et nous ne citons ici que quelques unes qui nous intéressent le plus (bien sûr après les asymptotiques). Premièrement il s'agit de l'analyse de la chaîne XXZ finie pour les points spéciaux comme $\Delta = \frac{1}{2}$. Nous pensons

que les méthodes algébriques fondées sur la solution du problème inverse peuvent élucider certaines conjectures formulée pour ce point.

Deuxièmement il est intéressant d'étudier les généralisations de notre méthode pour les chaînes de spin avec des conditions aux bords non-diagonales. Les chaînes de spin avec de telles conditions aux bords constituent un exemple important de systèmes dynamiques hors d'équilibre.

La troisième direction qui est étroitement liée à la question centrale de l'analyse asymptotique est le calcul des facteurs de forme. Nous avons montré qu'il existe un lien direct entre les sommes des facteurs de forme et les intégrales multiples. En même temps l'analyse numérique montre que les états très proches de l'état fondamental contribuent au calcul des fonctions de corrélation. Ainsi nous espérons que l'étude analytique des facteurs de forme pour les premiers états excités permettra d'étudier les fonction de corrélation dynamiques et les facteurs de structure. Cela peut donner une possibilité de comparer les résultats analytiques pour les chaînes de spin avec les données expérimentales.

Les généralisations de la méthode présentée dans ce mémoire d'habilitation pour les autres modèles intégrables est aussi un problème ouvert important. Il faut souligner que tout les résultats obtenus par cette méthode à ce jour ne concernent que les chaînes de spin $SU(2)$. La généralisation de cette technique pour les autres groupes donnera une possibilité d'étudier les fonctions de corrélation pour des modèles très importants en physique de la matière condensée (comme le modèle de Hubbard et le modèle $t-J$). L'étude des fonctions de corrélation pour le cas des groupes non compacts peut contribuer à élucider les liens entre les chaînes de spin et la théorie des cordes, les théories de jauge et la physique des particules.

Appendice

Les articles originaux :

- **Article I** : N. Kitanine, J.M. Maillet, V. Terras, *Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field*, Nuclear Physics B **567** [FS] (2000) 554, math-ph/9907019.
- **Article II** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *Large distance asymptotic behavior of the emptiness formation probability of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain*, J. Phys. **A35** (2002) L753, hep-th/0210019.
- **Article III** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *Emptiness formation probability of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain at $\Delta=1/2$* , J.Phys. **A35** (2002) L385, hep-th/0201134.
- **Article IV** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *Spin-Spin correlation functions of the XXZ-1/2 Heisenberg chain in a magnetic field*, Nuclear Physics B **641** (2002) 487, hep-th/0201045.
- **Article V** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *On the spin-spin correlation functions of the XXZ spin- $\frac{1}{2}$ infinite chain* J. Phys. A **38** (2005), 7441, hep-th/0407223.
- **Article VI** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *Correlation functions of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain at the free fermion point from their multiple integral representations* , Nuclear Physics B **642** (2002) 433, hep-th/0203169.
- **Article VII** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *Exact results for the σ_z two-point function of the XXZ chain at $\Delta = 1/2$* . J. Stat. Mech., (2005) L09002, hep-th/0506114.
- **Article VIII** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *Master equation for spin-spin correlation functions of the XXZ chain*, Nuclear Physics B **712** (2005) 600, hep-th/0406190.
- **Article IX** : N. Kitanine, J.M. Maillet, N.A. Slavnov, V. Terras, *Dynamical correlation functions of the XXZ spin-1/2 chain*. Nuclear Physics **B 729** (2005), 558, hep-th/0407108.

- **Article X** : A. Caradoc , O. Foda , N. Kitanine, *Higher spin vertex models with domain wall boundary conditions*. J. Stat. Mech., (2006), P03012, math-ph/0601061.
- **Article XI** : N.Kitanine, *Correlation functions of the XXX Heisenberg higher spin chains.*, J. Phys. A. **34** (2001), 8151, math-ph/0104016.
- **Article XII** : N Kitanine, K Kozlowski, J M Maillet, G. Niccoli, N A Slavnov and V Terras, *Correlation functions of the open XXZ chain I*. arXiv :0707.1995.

Bibliographie

- [1] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. Nonlinear-evolution equations of physical significance. *Phys. Rev. Lett.*, 31(2) :125–127, Jul 1973.
- [2] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. The inverse scattering transform-fourier analysis for nonlinear problems. *Studies Appl. Math.*, 53 :249–315, 1974.
- [3] I. Affleck. Exact correlation amplitude for the $S = \frac{1}{2}$ Heisenberg antiferromagnetic chain. *J. Phys. A*, 31(20) :4573–4581, 1998.
- [4] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter, and G. R. W. Quispel. Surface exponents of the quantum XXZ , Ashkin-Teller and Potts models. *J. Phys. A*, 20 :6397–6409, 1987.
- [5] O. Babelon, H. J. de Vega, and C.-M. Viallet. Analysis of the Bethe ansatz equations of the XXZ model. *Nuclear Phys. B*, 220(1, FS 8) :13–34, 1983.
- [6] H. M. Babujian. Exact solution of the isotropic Heisenberg chain with arbitrary spins : thermodynamics of the model. *Nuclear Phys. B*, 215(3) :317–336, 1983.
- [7] E. Barnes. The theory of the G-function. *Quart. J. Math.*, 31 :264–314, 1899.
- [8] E. Barouch and B. M. McCoy. Statistical mechanics of the XY model. ii. spin-correlation functions. *Phys. Rev. A*, 3(2) :786–804, Feb 1971.
- [9] V. Barzykin and I. Affleck. Finite-size scaling for the spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg antiferromagnetic chain. *J. Phys. A*, 32(6) :867–874, 1999.
- [10] R. Baxter. Partition function of the eight-vertex lattice model. *Ann. Phys.*, 70 :193–228, 1972.
- [11] R. J. Baxter. Spontaneous staggered polarization of the F-model. *J. Stat. Phys.*, 9(2) :145–182, 1973.
- [12] R. J. Baxter. Corner transfer matrices of the eight vertex model I. *J. Stat. Phys.*, 15 :485–503, 1976.
- [13] R. J. Baxter. Corner transfer matrices of the eight vertex model II. *J. Stat. Phys.*, 17 :1–14, 1977.
- [14] R. J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, London - New York, 1982.
- [15] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241 :333–380, 1984.

- [16] D. Bernard. Hidden Yangians in 2D massive current algebras. *Comm. Math. Phys.*, 137(1) :191–208, 1991.
- [17] D. Bernard. An introduction to Yangian symmetries. *Int. J. Mod. Phys.*, B7 :3517–3530, 1993.
- [18] H. Bethe. Zur Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkete. *Zeitschrift für Physik*, 71 :205–226, 1931.
- [19] N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, and N. Y. Reshetikhin. Finite-size effects and infrared asymptotics of the correlation functions in two dimensions. *J. Phys. A*, 20(15) :5361–5369, 1987.
- [20] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. A recursion formula for the correlation functions of an inhomogeneous XXX model. *Algebra i Analiz*, 17(1) :115–159, 2005.
- [21] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Traces on the Sklyanin algebra and correlation functions of the eight-vertex model. *J. Phys. A*, 38(35) :7629–7659, 2005.
- [22] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Algebraic representation of correlation functions in integrable spin chains. *Ann. Henri Poincaré*, 7(7-8) :1395–1428, 2006.
- [23] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Density matrix of a finite sub-chain of the Heisenberg anti-ferromagnet. *Lett. Math. Phys.*, 75(3) :201–208, 2006.
- [24] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Reduced qKZ equation and correlation functions of the XXZ model. *Comm. Math. Phys.*, 261(1) :245–276, 2006.
- [25] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, and Y. Takeyama. Fermionic basis for space of operators in the XXZ model. hep-th/0702086, 2007.
- [26] H. Boos, V. Korepin, and F. Smirnov. New formulae for solutions of quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations on level-4. *J. Phys. A*, 37(2) :323–335, 2004. Special issue on recent advances in the theory of quantum integrable systems.
- [27] H. E. Boos and V. E. Korepin. Quantum spin chains and Riemann zeta function with odd arguments. *J. Phys. A*, 34(26) :5311–5316, 2001.
- [28] H. E. Boos, V. E. Korepin, Y. Nishiyama, and M. Shiroishi. Quantum correlations and number theory. *J. Phys. A*, 35(20) :4443–4451, 2002.
- [29] H. E. Boos, V. E. Korepin, and F. A. Smirnov. Emptiness formation probability and quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation. *Nuclear Phys. B*, 658(3) :417–439, 2003.
- [30] A. H. Bougourzi and R. A. Weston. N-point correlation functions of the spin-1 XXZ model. *Nuclear Phys. B*, 417 :439–462, 1994.
- [31] D. M. Bressoud. *Proofs and confirmations*. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999. The story of the alternating sign matrix conjecture.

- [32] A. Caradoc, O. Foda, and N. Kitanine. Higher spin vertex models with domain wall boundary conditions. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2006(3) :P03012, 18 pp. (electronic), 2006.
- [33] J. S. Caux, R. Hagemans, and J. M. Maillet. Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains : the gapless anisotropic regime. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, page P09003, 2005.
- [34] J. S. Caux and J. M. Maillet. Computation of dynamical correlation functions of Heisenberg chains in a field. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :077201, 2005.
- [35] I. V. Cherednik. Factorizing particles on a half-line and root systems. *Theor. Math. Phys.*, 61 :977–983, 1984.
- [36] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti. Correlators in the Heisenberg XX0 chain as Fredholm determinants. *Phys. Lett. A*, 169 :237–247, 1992.
- [37] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti. Temperature correlation functions in the XX0 Heisenberg chain. *Teor. Mat. Fiz.*, 94 :19–38, 1993.
- [38] D. Creamer, H. Thacker, and D. Wilkinson. Some exact results for the two-point function of an integrable quantum field theory. *Phys. Rev. D*, 23 :3081–3084, 1981.
- [39] V. G. D. d. Quantum groups. In *Proceedings of the the International Congress of Mathematicians, Berkeley, USA, 1986*, pages 798–820. AMS, 1987.
- [40] H. de Vega, H. Eichenherr, and J. Maillet. Classical and quantum algebras of non-local charges in σ models. *Commun. Math. Phys.*, 92 :507–524, 1984.
- [41] H. de Vega, H. Eichenherr, and J. Maillet. Yang-baxter algebras of monodromy matrices in integrable quantum field theories. *Nuclear Phys. B*, 240 FS[12] :377–399, 1984.
- [42] H. J. de Vega. Integrable vertex models and extended conformal invariance. *J. Phys. A*, 21(22) :L1089–L1095, 1988.
- [43] P. Di Francesco and P. Zinn-Justin. Around the Razumov-Stroganov conjecture : proof of a multi-parameter sum rule. *Electron. J. Combin.*, 12 :Research Paper 6, 27 pp. (electronic), 2005.
- [44] P. Di Francesco and P. Zinn-Justin. The quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation, generalized Razumov-Stroganov sum rules and extended Joseph polynomials. *J. Phys. A*, 38(48) :L815–L822, 2005.
- [45] L. Faddeev and L. Takhtajan. *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. Springer Verlag, berlin, 1987.
- [46] L. D. Faddeev. Integrable models in $(1 + 1)$ -dimensional quantum field theory. In J. B. Zuber and R. Stora, editors, *Les Houches 1982, Recent advances in field theory and statistical mechanics*, pages 561–608. Elsevier Science Publ., 1984.
- [47] L. D. Faddeev, E. K. Sklyanin, and L. A. Takhtajan. Quantum inverse problem method I. *Theor. Math. Phys.*, 40 :688–706, 1979.

- [48] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan. What is the spin of a spin wave? *Phys. Lett. A*, 85(6-7) :375–377, 1981.
- [49] I. B. Frenkel and N. Y. Reshetikhin. Quantum affine algebras and holonomic difference equations. *Commun. Math. Phys.*, 146 :1–60, 1992.
- [50] D. Friedan, E. Martinec, and S. Shenker. Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nuclear Phys. B*, 271 :93–165, 1986.
- [51] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the korteweg-devries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19(19) :1095–1097, Nov 1967.
- [52] M. Gaudin. *La fonction d'onde de Bethe*. Masson, 1983.
- [53] M. Gaudin, B. M. McCoy, and T. T. Wu. Normalization sum for the bethe's hypothesis wave functions of the heisenberg-ising chain. *Phys. Rev. D*, 23(2) :417–419, Jan 1981.
- [54] S. Ghoshal and A. Zamolodchikov. Boundary S -matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory. *Int. J. Mod. Phys. A*, 9 :3841–3885, 1994.
- [55] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel. Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature. *J. Phys. A*, 37(31) :7625–7651, 2004.
- [56] F. Göhmann, A. Klümper, and A. Seel. Integral representation of the density matrix of the XXZ chain at finite temperatures. *J. Phys. A*, 38(9) :1833–1841, 2005.
- [57] W. Heisenberg. Zur Theorie der Ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 49 :619–636, 1928.
- [58] L. Hulthén. Über das austauschproblem eines kristalles. *Arkiv Mat. Astron. Fysik*, 26A :1–106, 1938.
- [59] E. Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31 :253–258, 1925.
- [60] A. Its, A. Izergin, and V. Korepin. Correlation radius for one-dimensional impenetrable bosons. *Phys. Lett. A*, 141 :121–124, 1989.
- [61] A. Its, A. Izergin, and V. Korepin. Long-distance asymptotics of temperature correlators of the impenetrable Bose gas. *Commun. Math. Phys.*, 130 :471–488, 1990.
- [62] A. Its, A. Izergin, and V. Korepin. Temperature correlators of the impenetrable Bose gas as an integrable system. *Commun. Math. Phys.*, 129 :205–222, 1990.
- [63] A. Its, A. Izergin, and V. Korepin. Space correlations on the one-dimensional impenetrable Bose gas at finite temperature. *Physica D.*, 53 :181, 1991.
- [64] A. Its, A. Izergin, V. Korepin, and N. Slavnov. Differential equations for quantum correlation functions. *Int. J. Mod. Phys. B*, 4 :1003–1037, 1990.
- [65] A. Its, A. Izergin, V. Korepin, and N. Slavnov. Temperature correlations of quantum spins. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :1704–1706, 1993.

- [66] A. Its, A. Izergin, V. Korepin, and G. Varguzin. Large time and distance asymptotics of field correlation functions of impenetrable bosons at finite temperature. *Physica, D* 54 :351–395, 1992.
- [67] A. Its and N. Slavnov. On the Riemann-Hilbert approach to the asymptotic analysis of the correlation functions of the quantum nonlinear Schrödinger equation. Non-free fermionic case. preprint MI-98-76, math-ph/9811009, 1998.
- [68] C. Itzykson, H. Saleur, and J. Zuber. *Conformal invariance and applications to statistical mechanics*. World Scientific, Singapore, 1988.
- [69] A. G. Izergin. Partition function of the six-vertex model in a finite volume. *Sov. Phys. Dokl.*, 32 :878–879, 1987.
- [70] A. G. Izergin, N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras. Spontaneous magnetization of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain. *Nuclear Phys. B*, 554 :679–696, 1999.
- [71] A. G. Izergin and V. E. Korepin. The quantum inverse scattering method approach to correlation functions. *Commun. Math. Phys.*, 94 :67–92, 1984.
- [72] A. G. Izergin and V. E. Korepin. Correlation functions for the Heisenberg XXZ antiferromagnet. *Commun. Math. Phys.*, 99 :271–302, 1985.
- [73] A. G. Izergin, V. E. Korepin, and N. Y. Reshetikhin. Conformal dimensions in Bethe ansatz solvable models. *J. Phys. A*, 22(13) :2615–2620, 1989.
- [74] M. Jimbo. A q -difference analogue of $\mathcal{U}(g)$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 10 :63–69, 1985.
- [75] M. Jimbo. A q -analogue of $\mathcal{U}(gl(n+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11 :247–252, 1986.
- [76] M. Jimbo, R. Kedem, T. Kojima, H. Konno, and T. Miwa. XXZ chain with a boundary. *Nuclear Phys. B*, 441(3) :437–470, 1995.
- [77] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, and A. Nakayashiki. Correlation functions of the XXZ model for $\Delta < -1$. *Phys. Lett.*, A168 :256–263, 1992.
- [78] M. Jimbo and T. Miwa. *Algebraic analysis of solvable lattice models*. AMS, 1995.
- [79] M. Jimbo and T. Miwa. Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime. *Journ. Phys. A*, 29 :2923–2958, 1996.
- [80] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mōri, and M. Sato. Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent. *Phys. D*, 1(1) :80–158, 1980.
- [81] J. D. Johnson, S. Krinsky, and B. M. McCoy. Vertical-arrow correlation length in the eight-vertex model and the low-lying excitations of the $X - Y - Z$ hamiltonian. *Phys. Rev. A*, 8(5) :2526–2547, Nov 1973.
- [82] M. Karowski. Xiii. exact S-matrices and form factors in $1 + 1$ dimensional field theoretic models with soliton behaviour. *Phys. Rep.*, 49 :229–237, Jan. 1979.
- [83] M. Karowski and P. Weisz. Exact form factors in $(1 + 1)$ -dimensional field theoretic models with soliton behaviour. *Nucl. Phys. B*, 139 :455–476, 1978.
- [84] B. Kaufman. Crystal statistics. ii. partition function evaluated by spinor analysis. *Phys. Rev.*, 76(8) :1232–1243, Oct 1949.

- [85] A. N. Kirillov and N. Y. Reshetikhin. Exact solution of the XXZ Heisenberg model of spin S . *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 145(Voprosy Kvant. Teor. Polya i Statist. Fiz. 5) :109–133, 191, 195, 1985.
- [86] A. N. Kirillov and N. Y. Reshetikhin. Exact solution of the integrable XXZ Heisenberg model with arbitrary spin. I. The ground state and the excitation spectrum. *J. Phys. A*, 20(6) :1565–1585, 1987.
- [87] A. N. Kirillov and N. Y. Reshetikhin. Exact solution of the integrable XXZ Heisenberg model with arbitrary spin. II. Thermodynamics of the system. *J. Phys. A*, 20(6) :1587–1597, 1987.
- [88] N. Kitanine. Correlation functions of the higher spin XXX chains. *J. Phys. A*, 34(39) :8151–8169, 2001.
- [89] N. Kitanine, K. Kozłowski, J. M. Maillet, G. Niccoli, N. A. Slavnov, and V. Terras. On correlation functions of the open XXZ chain. LPENSL-TH-??/07, hep-th/0704???, 2007.
- [90] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, and V. Terras. Large distance asymptotic behavior of the emptiness formation probability of the XXZ spin-1/2 heisenberg chain. *J. Phys. A*, 35 :L753, 2002.
- [91] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, and V. Terras. Spin-spin correlation functions of the XXZ -1/2 heisenberg chain in a magnetic field. *Nuclear Phys.*, B 641 :487–518, 2002.
- [92] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Correlation functions of the XXZ spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg chain at the free fermion point from their multiple integral representations. *Nuclear Phys. B*, 642(3) :433–455, 2002.
- [93] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Emptiness formation probability of the XXZ spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg chain at $\Delta = \frac{1}{2}$. *J. Phys. A*, 35(27) :L385–L388, 2002.
- [94] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Dynamical correlation functions of the XXZ spin-1/2 chain. *Nuclear Phys. B*, 729(3) :558–580, 2005.
- [95] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Exact results for the σ^z two-point function of the XXZ chain at $\Delta = 1/2$. *Journ. Stat. Mech. : Theory Exp.*, 2005(09) :L09002, 2005.
- [96] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. Master equation for spin-spin correlation functions of the XXZ chain. *Nuclear Phys. B*, 712(3) :600–622, 2005.
- [97] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, and V. Terras. On the spin-spin correlation functions of the XXZ spin- $\frac{1}{2}$ infinite chain. *J. Phys. A*, 38(34) :7441–7460, 2005.
- [98] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras. Form factors of the XXZ Heisenberg spin-1/2 finite chain. *Nucl. Phys.*, B 554 [FS] :647–678, 1999.
- [99] N. Kitanine, J. M. Maillet, and V. Terras. Correlation functions of the XXZ heisenberg spin-1/2 chain in a magnetic field. *Nucl. Phys.*, B 567 [FS] :554–582, 2000.

- [100] T. Kojima, V. E. Korepin, and N. A. Slavnov. Completely integrable equation for the quantum correlation function of nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.*, 189(3) :709–728, 1997.
- [101] T. Kojima, V. E. Korepin, and N. A. Slavnov. Determinant representation for dynamical correlation functions of the quantum nonlinear Schrödinger equation. *Commun. Math. Phys.*, 188 :657–689, 1997.
- [102] V. Korepin, A. Izergin, F. Essler, and D. Uglov. Correlation function of the spin-1/2 XXX antiferromagnet. *Phys. Lett. A*, 190 :182–184, 1994.
- [103] V. Korepin, S. Lukyanov, Y. Nishiyama, and M. Shiroishi. Asymptotic behavior of the emptiness formation probability in the critical phase of XXZ spin chain. *Phys. Lett. A*, 312 :21–26, 2003.
- [104] V. E. Korepin. Calculation of norms of Bethe wave functions. *Commun. Math. Phys.*, 86 :391–418, 1982.
- [105] V. E. Korepin. Dual field formulation of quantum integrable models. *Commun. Math. Phys.*, 113 :177–190, 1987.
- [106] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin. *Quantum inverse scattering method and correlation functions*. Cambridge University Press, 1993.
- [107] H. A. Kramers and G. H. Wannier. Statistics of the two-dimensional ferromagnet. part ii. *Phys. Rev.*, 60(3) :263–276, Aug 1941.
- [108] P. Kulish. Quantum difference nonlinear Schrödinger equation. *Lett. Math. Phys.*, 5 :191–197, 1981.
- [109] P. Kulish and N. Reshetikhin. Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representations. *Journal of Mathematical Sciences*, 23 :2435–2441, 1983.
- [110] P. P. Kulish, N. Y. Reshetikhin, and E. K. Sklyanin. Yang-Baxter equations and representation theory. I. *Lett. Math. Phys.*, 5(5) :393–403, 1981.
- [111] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin. Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet. *Phys. Lett. A*, 70(5-6) :461–463, 1979.
- [112] G. Kuperberg. Another proof of the alternating sign matrix conjecture. *Internat. Math. Res. Notices*, 1996 :139–150, 1996.
- [113] G. Kuperberg. Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof. *Ann. of Math. (2)*, 156(3) :835–866, 2002.
- [114] P. Lax. Integrals of nonlinear evolution equations and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 :467–490, 1968.
- [115] A. LeClair and F. Smirnov. Infinite quantum group symmetry of fields in massive 2d quantum field theory. *Int. J. Mod. Phys. A*, 7 :2997–3022, 1992.
- [116] A. Lenard. Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons. *J. Math. Phys.*, 5 :930–943, 1964.
- [117] A. Lenard. One-dimensional impenetrable bosons in thermal equilibrium. *J. Math. Phys.*, 7 :1268–1272, 1966.

- [118] E. Lieb. Residual entropy of square ice. *Phys. Rev.*, 162 :162–172, 1967.
- [119] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis. Two soluble models of an antiferromagnetic chain. *Ann. Phys.*, 16 :407–466, 1961.
- [120] E. Lieb and F. Wu. Absence of Mott transition in an exact solution of the short range one band model in one dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 20 :1445–1448, 1968.
- [121] E. H. Lieb. Exact analysis of an interacting Bose gas. ii. The excitation spectrum. *Phys. Rev.*, 130(4) :1616–1624, May 1963.
- [122] E. H. Lieb and W. Liniger. Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state. *Phys. Rev.*, 130(4) :1605–1616, May 1963.
- [123] S. Lukyanov. Correlation amplitude for the XXZ spin chain in the disordered regime. *Phys. Rev. B*, 59(17) :11163–11164, May 1999.
- [124] S. Lukyanov and V. Terras. Long-distance asymptotics of spin-spin correlation functions for the XXZ spin chain. *Nuclear Phys. B*, 654 :323–356, 2003.
- [125] M. Lüscher. Quantum non-local charges and absence of particle production in the two-dimensional non-linear σ -model. *Nuclear Phys. B*, 135 :1–19, 1978.
- [126] J. M. Maillet and J. Sanchez de Santos. Drinfel'd twists and algebraic Bethe ansatz. In *L. D. Faddeev's Seminar on Mathematical Physics*, volume 201 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 137–178. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [127] J. M. Maillet and V. Terras. On the quantum inverse scattering problem. *Nuclear Phys. B*, 575 :627–644, 2000.
- [128] B. McCoy. Spin correlation functions of the XY model. *Phys. Rev.*, 173 :531–541, 1968.
- [129] B. McCoy, E. Barouch, and D. Abraham. Statistical mechanics of the XY model. time-dependent spin correlation functions. *Phys. Rev. A*, 4 :2331–2341, 1971.
- [130] B. McCoy and T. Wu. *The Two-Dimensional Ising Model*. Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1973.
- [131] W. H. Mills, D. P. Robbins, and H. Rumsey, Jr. Alternating sign matrices and descending plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 34(3) :340–359, 1983.
- [132] S. Mitra, B. Nienhuis, J. de Gier, and M. T. Batchelor. Exact expressions for correlations in the ground state of the dense $o(1)$ loop model. *J. Stat. Mech. : Theory Exp.*, 2004(09) :P09010, 2004.
- [133] G. F. Newell and E. W. Montroll. On the theory of the ising model of ferromagnetism. *Rev. Mod. Phys.*, 25(2) :353–389, Apr 1953.
- [134] L. Onsager. A two dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65 :117–149, 1944.
- [135] R. Orbach. Linear antiferromagnetic chain with anisotropic coupling. *Phys. Rev.*, 112 :309–316, 1958.
- [136] V. Pasquier. Incompressible representations of the birman-wenzl-murakami algebra. *Annales Henri Poincare*, 7 :603–619, 2006.

- [137] P. A. Pearce, V. Rittenberg, and J. de Gier. Critical $q=1$ Potts model and Temperley-Lieb stochastic processes. *cond-mat/0108051*, 2001.
- [138] P. A. Pearce, V. Rittenberg, J. de Gier, and B. Nienhuis. Temperley-Lieb stochastic processes. *J. Phys. A*, 35(45) :L661–L668, 2002.
- [139] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov. Spin chains and combinatorics. *J. Phys. A*, 34 :3185–3190, 2001.
- [140] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov. Spin chains and combinatorics : twisted boundary conditions. *J. Phys. A*, 34(26) :5335–5340, 2001.
- [141] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov. Combinatorial nature of the ground-state vector of the $O(1)$ loop model. *Teoret. Mat. Fiz.*, 138(3) :395–400, 2004.
- [142] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov. The $O(1)$ loop model with various boundary conditions and symmetry classes of alternating-sign matrices. *Teoret. Mat. Fiz.*, 142(2) :284–292, 2005.
- [143] K. Sakai. Dynamical correlation functions of the XXZ model at finite temperature. *cond-mat/0703319*, 2007.
- [144] J. Sato, M. Shiroishi, and M. Takahashi. Correlation functions of the spin-1/2 antiferromagnetic Heisenberg chain : exact calculation via the generating function. *Nuclear Phys. B*, 729(3) :441–466, 2005.
- [145] M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo. Holonomic quantum fields. III,IV. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 15 :577–629, 871–972, 1979.
- [146] M. Sato, T. Miwa, and M. Jimbo. Holonomic quantum fields. V. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 16 :531–584, 1980.
- [147] M. Shiroishi, M. Takahashi, and Y. Nishiyama. Emptiness formation probability for the one-dimensional isotropic XY model. *J. Phys. Soc. Japan*, 70 :3535–3543, 2001.
- [148] E. Sklyanin. On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation. Preprint LOMI E3-79, 1979.
- [149] E. Sklyanin. Boundary conditions for integrable quantum systems. *J. Phys. A*, 21 :2375–2389, 1988.
- [150] S. Skorik and A. Kapustin. Surface excitations and surface energy of the antiferromagnetic XXZ chain by the bethe ansatz approach. *J. Phys. A*, 29 :1629–1638, 1996.
- [151] S. Skorik and H. Saleur. Boundary bound states and boundary bootstrap in the sine-gordon model with dirichlet boundary conditions. *J. Phys. A*, 28 :6605–6622, 1995.
- [152] N. A. Slavnov. Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe ansatz. *Theor. Math. Phys.*, 79 :502–508, 1989.
- [153] F. A. Smirnov. The quantum Gel'fand-Levitan-Marchenko equations and form factors in the sine-Gordon model. *J. Phys. A*, 17(16) :L873–L878, 1984.

- [154] F. A. Smirnov. Quantum Gelfand-Levitan-Marchenko equations for the sine-Gordon model. *Teoret. Mat. Fiz.*, 60(3) :356–371, 1984.
- [155] F. A. Smirnov. Reductions of the sine-Gordon model as a perturbation of minimal models of conformal field theory. *Nuclear Phys. B*, 337 :156–180, June 1990.
- [156] B. Sutherland. Exact solution of a two-dimensional model for hydrogen-bonded crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 19(3) :103–104, Jul 1967.
- [157] M. Takahashi. Half-filled Hubbard model at low temperature. *J. Phys. C*, 10(8) :1289–7301, 1977.
- [158] L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev. The quantum method of the inverse problem and the heisenberg XYZ model. *Uspekyi Mat. Nauk*, 34 :13–63, 1979.
- [159] L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev. Essentially nonlinear one-dimensional model of classical field theory. *Theor. Math. Phys.*, 21 :1046–1057, Nov. 1974.
- [160] L. A. Takhtadzhyan and L. D. Faddeev. The spectrum and scattering of excitations in the one-dimensional isotropic Heisenberg model. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 109 :134–178, 181–182, 184, 1981. Differential geometry, Lie groups and mechanics, IV.
- [161] L. A. Takhtajan. Integration of the continuous heisenberg spin chain through the inverse scattering method. *Phys. Lett. A*, 64 :235–237, Dec. 1977.
- [162] L. A. Takhtajan. The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins. *Phys. Lett. A*, 87(9) :479–482, 1981/82.
- [163] V. Tarasov and A. Varchenko. Asymptotic solutions to the quantized Kniznik-Zamolodchikov equation and Bethe vectors. *Amer. Math. Society Transl., Ser. 2*, 174 :235–273, 1996.
- [164] V. Terras. Drinfel'd twists and functional Bethe ansatz. *Lett. Math. Phys.*, 48(3) :263–276, 1999.
- [165] O. Tsuchiya. Determinant formula for the six-vertex model with reflecting end. *J. Math. Phys.*, 39(11) :5946–5951, 1998.
- [166] L. R. Walker. Antiferromagnetic linear chain. *Phys. Rev.*, 116 :1089–1090, 1959.
- [167] Y.-S. Wang. The reconstruction of local quantum operators for the boundary XXZ spin- $\frac{1}{2}$ Heisenberg chain. *J. Phys. A*, 33(22) :4009–4014, 2000.
- [168] Y.-S. Wang. The scalar products and the norm of Bethe eigenstates for the boundary XXX Heisenberg spin-1/2 finite chain. *Nuclear Phys. B*, 622(3) :633–649, 2002.
- [169] F. Woynarovich. On the $s^z=0$ excited states of an anisotropic heisenberg chain. *J. Phys. A*, 15(9) :2985–2996, 1982.
- [170] T. T. Wu. Theory of toeplitz determinants and the spin correlations of the two-dimensional ising model. i. *Phys. Rev.*, 149(1) :380–401, Sep 1966.
- [171] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, and E. Barouch. Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model : Exact theory in the scaling region. *Phys. Rev.*, B13 :316–374, 1976.

- [172] C. Yang and C. Yang. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in finite system. *Phys. Rev.*, 150(1) :321–327, 1966.
- [173] C. N. Yang. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 19 :1312–1315, 1967.
- [174] C. N. Yang and C. P. Yang. One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II. Properties of the ground state energy per lattice site for an infinite system. *Phys. Rev.*, 150(1) :327–339, 1966.
- [175] V. E. Zakharov and L. D. Faddeev. The Korteweg-de Vries equation is a fully integrable Hamiltonian system. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 5(4) :18–27, 1971.
- [176] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media (differential equation solution for plane self focusing and one dimensional self modulation of waves interacting in nonlinear media). *Soviet Physics-JETP*, 34 :62–69, Jan. 1972.
- [177] V. E. Zakharov, L. A. Takhtadzhyan, and L. D. Faddeev. Complete description of solutions of the "sine-Gordon" equation. *Soviet Physics Doklady*, 19 :822–+, June 1975.
- [178] A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev. A model factorized S -matrix and an integrable spin-1 Heisenberg chain. *Soviet J. Nuclear Phys.*, 32 :581–590, 1980.
- [179] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov. Factorized S -matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. *Ann. Phys.*, 120 :253–291, 1979.
- [180] D. Zeilberger. Proof of the alternating sign matrix conjecture. *Electron. J. Combin.*, 3(2) :Research Paper 13, approx. 84 pp. (electronic), 1996. The Foata Festschrift.