

Principe des méthodes de Runge et Kutta à pas liés

Yvon Siret

▶ **To cite this version:**

Yvon Siret. Principe des méthodes de Runge et Kutta à pas liés. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1962. Français. NNT : . tel-00165104

HAL Id: tel-00165104
https://theses.hal.science/tel-00165104

Submitted on 24 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de
l'Université de GRENOBLE

pour obtenir

le titre de Docteur de Spécialité
"Mathématiques Appliquées"

par

Yvon SIRET
Licencié ès-Sciences

PRINCIPE DES METHODES DE RUNGE ET KUTTA A PAS LIES

Thèse soutenue le Juin 1962 devant la Commission d'Examen :

MM. KUNTZMANN
HACQUES
GASTINEL

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

Doyens honoraires :

M. FORTRAT P.
M. MORET L., Membre de l'Institut

Doyen :

M. WEIL L.

Professeurs :

MM. NEEL L. , Membre de l'Institut - Physique expérimentale
MOREL L. - Géologie et minéralogie
WOLFERS F. - Physique
DORIER A. - Zoologie
HEILMANN R. - Chimie organique
KRAVTCHENKO J. - Mécanique rationnelle
PARDE M. - Potamologie
BENOIT J. - Radioélectricité
CHENE M. - Chimie papetière
NOBECOURT P. - Micrographie papetière
BESSON J. - Chimie
WEIL L. - Thermodynamique
FELICI N. - Electrostatique
KUNTZMANN J. - Mathématiques appliquées
BARBIER R. - Géologie appliquée
SANTON L. - Mécanique des fluides
CHABAUTY C. - Calcul différentiel et intégral
OZENDA P. - Botanique
FALLOT M. - Physique industrielle
GOLVANI O. - Mathématiques
MOUSSA A. - Chimie nucléaire et radioactivité
TRAYNARD P. - Chimie générale
CRAYA A. - Hydrodynamique
SOUTIF M. - Physique générale
REEB G. - Statistiques mathématiques
REULOS R. - Théorie des champs
AYANT Y. - Physique approfondie
GALLISSOT F. - Mathématiques pures
Mlle LUTZ E. - Mathématiques générales
MM. BLAMBERT M. - Mathématiques
BOUCHEZ R. - Physique nucléaire
LLIBOUTRY L. - Géophysique
MICHEL R. - Géologie et minéralogie
BONNIER E. - Electrochimie

Professeurs sans chaire :

MM. SILBER R. - Mécanique des fluides
DESSAUX G. - Physiologie animale
MOUSSIEGT J. - Electronique
PILLET E. - Electrotechnique
BARBIER J.C. - Physique
BUYLE-BODIN M. - Electronique
PAUTHENET R. - Electrotechnique
Mme KOFLER L. - Botanique

Maîtres de Conférences :

MM. VAILLANT F. - Zoologie et hydrobiologie
DREYFUS B. - Thermodynamique
Mlle NAIM L. - Mathématiques
MM. PERRET R. - Servomécanisme
ARNAUD P. - Chimie
Mme BARBIER M.J. - Electrochimie
MM. BRISSONNEAU P. - Physique
COHEN J. - Physique
DEBELMAS J. - Géologie et minéralogie
Mme SOUTIF J. - Physique
MM. VAUQUOIS B. - Mathématiques appliquées
DEPASSEL R. - Mécanique des fluides
GERBER R. - Mathématiques
ROBERT A. - Chimie papetière
ANGLES d'AURIAC - Mécanique des fluides
BIAREZ - Mécanique physique
COUMES A. - Electronique
DODU J. - Mécanique des fluides
DUCROS P. - Minéralogie et cristallographie
GIDON P. - Géologie et minéralogie
GLENAT R. - Chimie
HACQUES G. - Calcul numérique
LANCIA R. - Physique automatique
PEBAY-PEROULA - Physique
GASTINEL - Chargé d'enseignement - Mathématiques appliquées
LACAZE A. - Chargé d'enseignement - Thermodynamique.

= =
=

SOMMAIRE

	pp.
CHAPITRE I - Etablissement des conditions des Méthodes de Runge et Kutta à pas liés	1
A) Obtention des dérivées successives	2
B) Développement de la solution approchée	2
CHAPITRE II - Etablissement de formules pour les systèmes mis sous forme canonique	9
1) Préliminaire	9
2) Etablissement des systèmes d'équations	12
a) Calcul des $Q_{q\ q-1,m}$ et $A_{qq-1,m}$	13
b) Calcul des coefficients Q_{qm}, A_{qm}, A_{qq-1}	14
CHAPITRE III - Applications	16
I) Préliminaire	16
II) Etude générale du cas r=0, s=2, ℓ_{qq} , p = 1	17
III) Etude des Méthodes RKL s=2, ℓ =r qq à 2 Horners	34
CHAPITRE IV - Etude comparée des Méthodes d'ordre 5	47
CONCLUSION	71
BIBLIOGRAPHIE	72

= =
=

AVANT - PROPOS

Le travail qui suit a été effectué au Laboratoire de Mathématiques appliquées de l'Université de Grenoble.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de ce Laboratoire, pour m'avoir confié un sujet d'étude dans un domaine où il est particulièrement compétent et m'avoir éclairé de ses conseils, ce qui m'a permis de dégager quelques-uns des traits essentiels d'une méthode générale.

Le sujet est loin d'être épuisé et le champ d'investigation reste grand. Je serais heureux si, en retour, j'ai pu lui apporter l'aide qu'il cherchait en me confiant une idée à approfondir.

Je remercie également Messieurs HACQUES et GASTINEL d'avoir bien voulu faire partie du Jury qui examinera ces pages.

o o
o

INTRODUCTION

Les méthodes d'intégration des équations différentielles peuvent se diviser, comme on le sait, en deux grandes classes :

. les Méthodes à pas séparés du type R. K.
. les Méthodes à pas liés du type Adams.

Or, les principes ne s'excluent pas mutuellement.

Il existe déjà dans la littérature, une foule de formules qui appliquent le principe de RUNGE et KUTTA à des méthodes à pas liés. Une étude récente, faite par NUGEYRE (5) a donné des résultats intéressant s pour les équations du type $x'' = X(x, t)$.

L'idée vient alors, toute naturelle, de faire entrer ces formules dans le cadre d'une théorie un peu plus générale.

Dans (2), on trouve déjà d'ailleurs des formules générales pour un système mis sous forme canoniques, l'algorithme étant le suivant :

$$x_{i,\alpha} = \sum_{m=0}^{m=\ell} Q_{\alpha,m}\, x_{i-m} + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} X_\beta$$

qui généralise, comme on le voit, l'algorithme de RUNGE et KUTTA, appliqué aux systèmes canoniques par l'introduction de la récurrence linéaire :

$$\sum_{m=0}^{m=\ell} Q_{\alpha,m}\, x_{i-m}$$

Pour un système mis sous forme équilibrée, on sait que l'expression générale de la formule de RUNGE et KUTTA est :

$$x_{\alpha}^{(p-k)} = x_{o}^{(p-k)} + \frac{\theta_{\alpha} h}{1!} x_{o}^{(p-k+1)} + \ldots + \frac{\theta_{\alpha}^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} x_{o}^{p-1} + \frac{h^{k}}{k!} \sum_{\beta=o}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} X_{\beta}$$

L'expression générale des formules R.K. à pas liés sera :

$$x_{\alpha}^{(p-k)} = \sum_{m=o}^{m=\ell} Q_{\alpha,m}^{(p-k)} x_{i-m}^{(p-k)} + \frac{h^{k}}{k!} \sum_{\beta=o}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} X_{\beta}$$

Quand bien même l'utilisation pratique de telles formules se restreindrait aux systèmes d'ordre peu élevé, nous allons donner le tableau le plus général des équations que doivent satisfaire les coefficients : $Q_{\alpha,m}^{(p-k)}$ et $K_{\alpha\beta}$.

= =
=

- CHAPITRE I -

ETABLISSEMENT DES CONDITIONS DES METHODES DE RUNGE ET KUTTA A PAS LIES

Soit le système d'équations différentielles, muni de ses conditions initiales :

$$\begin{cases} x^{(p)} = X(x, x', \ldots, x^{p-1}) \\ x_o, x'_o, \ldots, x_o^{p-1} \end{cases}$$

L'expression générale des formules de Runge et Kutta à pas lié est :

$$x_{i,\alpha}^{(p-k)} = \sum_{m=o}^{m=\ell} Q_{\alpha,m}^{(p-k)} \; x_{i-m}^{(p-k)} + \frac{h^k}{k!} \sum_{\beta=o}^{\beta=q-1} K_{\alpha\beta} \; X_\beta$$

$\forall k$, $1 \leq k \leq p$ et $\forall \alpha$, $1 \leq \alpha \leq q$.

Suivant une méthode, devenue maintenant classique, pour obtenir les conditions que doivent vérifier les coefficients $Q_{\alpha,m}$ et $K_{\alpha\beta}$, il nous faut :

1) Evaluer les dérivées successives de x

2) développer, suivant les puissances croissantes de h, la solution approchée

3) identifier ce dernier développement avec le développement en série de Taylor.

A) OBTENTION DES DERIVEES SUCCESSIVES

Nous rappelons simplement ici des résultats connus et dont la démonstration peut être trouvée aux références (2) et (3) :

$$x^{(p+1)} = C_1$$

$$x^{(p+2)} = C_2 + J_1 C_1$$

$$x^{(p+3)} = C_3 + 3\,K_1 C_1 + J_2 C_1 + J_1 C_2 + J_1^2 C_1$$

$$x^{(p+4)} = C_4 + J_3 C_1 + 4\,K_2 C_1 + 3\,R + J_2 C_2 + J_2 J_1 C_1 + 4\,K_1 C_2 + 4\,K_1 J_1 C_1 + J_1 C_3 + J_1 J_2 C_1 + 3\,J_1 K_1 C_1 + J_1^3 C_1 + J_1^2 C_2 + 6\,L_1 C_1$$

B) DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION APPROCHEE

Nous imposons tout d'abord à l'expression générale de $x_{i,\alpha}^{(p-k)}$ d'être valable jusqu'à l'ordre k. Pour ce, il suffit de la développer en série de Taylor et d'identifier ce développement à celui de $x_{i,\alpha}^{(p-k)}(t_i + \theta\alpha h)$.

Ecrivons :

$$x_{i,\alpha}^{(p-k)} = \sum_{m=o}^{\ell} Q_{\alpha,m}^{(p-k)}\, x_{i-m}^{(p-k)} + \frac{h^k}{k!} \sum_{\beta=o}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} X_o + \frac{h^k}{k!} \sum_{o}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta}(X_\beta - X_o)$$

avec $X_o = x^{(p)}(o)$.

L'identification donne les relations suivantes :

$$\sum_{m=o}^{\ell} Q_{\alpha,m}^{(p-k)} = 1$$

$$-\sum_{o}^{\ell} m\, Q_{\alpha,m}^{(p-k)} = \theta_\alpha$$

$$(-1)^\lambda \sum_{o}^{\ell} m^\lambda\, Q_{\alpha,m}^{(p-k)} = \theta_\alpha^\lambda \qquad 0 \leqslant \lambda < k$$

$$(-1)^k \sum_{o}^{\ell} m^k\, Q_{\alpha,m}^{(p-k)} + \sum_{\beta=o}^{\alpha-1} K_{\alpha\beta} = \theta_\alpha^k$$

avec $1 \leqslant \alpha \leqslant q$ et $\theta_q = 1$.

Compte tenu de ces conditions, nous pouvons écrire :

$$x_{i,q}^{(p-k)} = \text{(début de la série de Taylor)} + \frac{h^k}{k!} \sum_{\alpha=0}^{q-1} K_{q,\alpha} (X_\alpha - X_o)$$

$$+ (-1)^{h+1} \frac{h^{h+1}}{(k+1)!} \sum_{o}^{\ell} m^{h+1} Q_{q,m}^{(p-h)} C_1$$

$$+ (-1)^{h+2} \frac{h^{h+2}}{(k+2)!} \sum_{o}^{\ell} m^{h+2} Q_{q,m}^{(p-h)} \left[C_2 + J_1 C_1 \right]$$

$$+ (-1)^{h+3} \frac{h^{h+3}}{(k+3)!} \sum_{o}^{\ell} m^{h+3} Q_{q,m}^{(p-h)} \left[C_3 + J_1 C_2 + J_1^2 C_2 + 3 K_1 C_1 + J_2 C_1 \right]$$

$$+ (-1)^{h+4} \frac{h^{h+4}}{(k+4)!} \sum_{o}^{\ell} m^{h+4} Q_{q,m}^{(p-h)} \left[C_4 + J_3 C_1 + 4 K_2 C_1 + 3 R + J_2 C_2 \right.$$
$$+ J_2 J_1 C_1 + 4 K_1 C_2 + 4 K_1 J_1 C_1$$
$$+ J_1 C_3 + J_1 J_2 C_1 + 3 J_1 K_1 C_1$$
$$\left. + J_1^3 C_1 + J_1^2 C_2 + 6 L_1 C_1 + 3 R \right]$$

Nous nous arrêterons à cet ordre.

Développement de $(X_\alpha - X_i)$

Il est nécessaire maintenant de développer $(X_\alpha - X_i)$ jusqu'en h^4.

$$X_\alpha - X_o = \theta_\alpha h C_1 + \frac{\theta_\alpha^2 h^2}{2!} C_2 + \frac{\theta_\alpha^3 h^3}{3!} C_3 + \frac{\theta_\alpha^4 h^4}{4!} C_4$$

$$+ \left[J_1 + \theta_\alpha h K_1 + \frac{\theta_\alpha^2 h^2}{2!} L_1 \right] \cdot \left[\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\alpha,m}^{(p-1)} C_1 - \frac{h^3}{3!} \Sigma m^3 Q_{\alpha,m}^{p-1} (C_2 + J_1 C_1) \right.$$
$$+ \frac{h^4}{4!} \Sigma m^4 Q_{\alpha,m}^{p-1} (C_3 + J_1 C_2 + J_1^2 C_2 + 3 K_1 C_1 + J_1 C_2)$$
$$\left. + h \sum_{o}^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} (X_\beta - X_i) \right]$$

$$+ \left[J_2 + \theta_\alpha h K_2 \right] \cdot \left[\frac{-h^3}{3!} \Sigma m^3 Q_{\alpha,m}^{p-2} C_1 + \frac{h^4}{4!} \Sigma m^4 Q_{\alpha,m}^{p-2} (C_2 + J_1 C_1) \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{2!} \sum_{o}^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} (X_\beta - X_i) \right]$$

$$+ \left[J_3 \right] \cdot \left[\frac{h^4}{4!} \Sigma m^4 Q_{\alpha,m}^{p-3} C_1 + \frac{h^3}{3!} \sum_{o}^{\alpha-1} C_{\alpha\beta} (X_\beta - X_i) \right]$$

$$+ \left[R_{vv} \right] \cdot \left[\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\alpha,m}^{p-1} C_1 + h \Sigma A_{\alpha\beta} (X_\beta - X_i) \right]$$
$$\cdot \left[\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\beta m} + h \Sigma A_{\beta\gamma} (X_\gamma - X_i) \right.$$

A l'intérieur de cette expression, il faut à nouveau développer jusqu'à un ordre convenable les facteurs $(X_\beta - X_i)$. On obtient finalement l'expression suivante :

$$X_\alpha - X_o = \theta_\alpha h C_1 + \frac{\theta_\alpha^2 h^2 C_2}{2!} + \frac{\theta_\alpha^3 h^3 C_3}{3!} + \frac{\theta_\alpha^4 h^4}{4!} C_4$$

$$+ \left[J_1 + \theta_\alpha h K_1 + \frac{\theta_\alpha^2 h^2}{2!} L_1 \right] \cdot \left[\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\alpha,m}^{p-1} C_1 - \frac{h^3}{3!} \Sigma m^3 Q_{\alpha,m}^{p-1} (C_2 + J_1 C_1) \right.$$

$$+ \frac{h^4}{4!} \Sigma m^4 Q_{\alpha,m}^{p-1} (C_3 + 3K_1 C_1 + J_2 C_1 + J_1 C_2 + J_1^2 C_1) + h \left(\sum_o^{\alpha-1} A_{\alpha\beta} \left(h \theta_\beta C_I \right. \right.$$

$$+ \frac{\theta_\beta^2 h^2}{2!} C_2 + \frac{\theta_\beta^3 h^3}{3!} C_3 + (J_1 + \theta_\beta h 6 K_1) \left(\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\beta,m}^{p-1} C_1 - \frac{h^3}{3!} \Sigma Q_{\beta,m}^{p-1} (C_2 + J_1 + C_1) \right.$$

$$+ h \sum_o^{\beta-1} A_{\beta\gamma} \left(\theta_\gamma h C_1 + \frac{\theta_\gamma^2 h^2}{2!} C_2 + J_1 \left(\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\gamma,m}^{p-1} C_1 + \frac{h^2}{2!} \Sigma A_{\gamma\delta} \theta_\delta C_1 \right) \right.$$

$$\left. \left. \left. + J_2 \left(\frac{-h^3}{3!} \Sigma m^3 Q_{\beta,m}^{p-2} C_1 + \frac{h^2}{2!} \Sigma B_{\beta\delta} h \theta_\gamma C_1 \right) \right) \right) \right]$$

$$+ \left[J_2 + \theta_\alpha h K_2 \right] \cdot \left[\frac{-h^3}{3!} \Sigma m^3 Q_{\alpha,m}^{p-2} C_1 + \frac{h^4}{4!} \Sigma m^4 Q_{\alpha,m}^{p-2} (C_2 + J_1 C_1) \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{2!} \sum_o^{\alpha-1} B_{\alpha\beta} \left(h \theta_\beta C_1 + \frac{\theta_\beta^2 h^2}{2!} C_2 + J_1 \left(\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\beta,m}^{p-1} C_1 + h \sum_o^{\beta-1} A_{\beta\delta} h \theta_\gamma C_1 \right) \right) \right]$$

$$+ \left[J_3 \right] \cdot \left[\frac{h^4}{4!} \Sigma m^4 Q_{\alpha,m}^{p-3} C_1 + \frac{h^3}{3!} \sum_o^{\alpha-1} C_{\alpha\beta} h \theta_\beta C_1 \right.$$

$$\left. + \left[R_{uu} \right] \cdot \left[\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\alpha,m}^{p-1} C_1 + h^2 \Sigma A_{\alpha\beta} \theta_\beta C_1 \right] \left[\frac{h^2}{2!} \Sigma m^2 Q_{\beta,m}^{p-1} C_1 + h^2 \Sigma A_{\beta\delta} \theta_\gamma C_1 \right] \right]$$

Il nous suffit d'effectuer les calculs et de reporter ce développement de $(X_\alpha - X_i)$ dans celui de $x_{i,q}^{(p-h)}$. On voit apparaître alors les groupements de termes qui constituent les dérivées de x. L'identification avec la série de Taylor donne le tableau général suivant :

		Taylor	R.K.L.
$\frac{h^{k+1}}{k!}$	C_1	$\frac{1}{(k+1)}$	$K_{q\alpha}\theta_\alpha + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} m^{k+1} Q^{(p-k)}_{q,m}$
$\frac{h^{k+2}}{k!}$	C_2	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$K_{q\alpha}\frac{\theta^2_\alpha}{2!} + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} m^{k+2} Q^{(p-k)}_{q,m}$
	J_1C_1	$\frac{1}{(k+1)(k+2)}$	$K_{q\alpha}\frac{m^2}{2!} Q^{(p-1)}_{\alpha,m} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\theta_\beta + \frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} m^{k+2} Q^{(p-k)}_{q,m}$
$\frac{h^{k+3}}{k!}$	C_3	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$K_{q\alpha}\frac{\theta^3_\alpha}{3!} + \frac{(-1)^{k+3)}}{(k+1)(k+2)(k+3)} m^{k+3} Q^{(p-k)}_{q,m}$
	J_1C_2	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$K_{q\alpha}\frac{(-m^3)}{3!} Q^{(p-1)}_{\alpha,m} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\frac{\theta^2_\alpha}{2!} + \frac{(-1)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} m^{k+3} Q^{(p-k)}_{q,m}$
	$J_1^2C_2$	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$K_{q\alpha}\frac{(-m^3)}{3!} Q^{(p-1)}_{\alpha,m} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\frac{m^2}{2!} Q^{p-1}_{\beta,m} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}A_{\beta\delta}\theta_\delta + \frac{(-1)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} m^{k+3} Q^{(p-k)}_{q,m}$
	K_1C_1	$\frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$K_{q\alpha}\theta_\alpha\frac{m^2}{2!} Q^{(p-1)}_{\alpha,m} + K_{q\alpha}\theta_\alpha A_{\alpha\beta}\theta_\beta + \frac{3(-1)^{k+3}m^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} Q^{(p-k)}_{q,m}$
	J_2C_1	$\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$	$K_{q\alpha}\frac{(-m^3)}{3!} Q^{(p-2)}_{\alpha,m} + \frac{1}{2}K_{q\alpha}B_{\alpha\beta}\theta_\beta + \frac{(-1)^{k+3}m^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} Q^{(p-k)}_{q,m}$

.../...

$$\frac{h^{k+4}}{k!}\ C_4 \qquad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\frac{\theta_\alpha^4}{4!} + \frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ Q_{q,m}^{(p-k)}$$

$$J_1C_3 \qquad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\frac{m^4}{4!}Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\frac{\theta_\beta^3}{3!} + \frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ Q_{q,m}^{(p-k)}$$

$$J_1K_1C_1 \qquad \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\frac{3m^4}{4!}\ Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\theta_\beta\frac{m^2}{2!}Q_{\beta,m}^{p-1} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\theta_\beta A_{\beta\gamma}\theta_\gamma + 3\cdot\frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}Q_{q,m}^{p-k}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$J_1J_2C_1 \qquad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\frac{m^4}{4!}\ Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\frac{(-m^3)}{3!}\ Q_{\beta,m}^{(p-2)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{2}B_{\beta\gamma}\theta_\gamma + \frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}Q_{q,m}^{p-k}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$J_1^2C_2 \qquad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\frac{m^4}{4!}\ Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}\frac{(-m^3)}{3!}\ Q_{\beta,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}\frac{\theta_\gamma^2}{2!} + \frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}Q_{q,m}^{p-k}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$J_1^3C_1 \qquad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\frac{m^4}{4!}Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\frac{(-m^3)}{3!}Q_{\beta,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}\frac{m^2}{2!}Q_{\gamma,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}A_{\gamma\delta}\theta_\delta + \frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}Q_{q,m}^{p-k}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$K_1C_2 \qquad \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\theta_\alpha\frac{(-m^3)}{3!}\ Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}\theta_\alpha A_{\alpha\beta}\frac{\theta_\beta^2}{2!} + 4\cdot\frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}Q_{q,m}^{p-k}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$K_1J_1C_1 \qquad \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\theta_\alpha\frac{(-m^3)}{3!}\ Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}\theta_\alpha A_{\alpha\beta}\frac{m^2}{2!}Q_{\beta,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}\theta_\alpha A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}\theta_\gamma + 4\cdot\frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}Q_{q,m}^{(p-k)}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$L_1C_1 \qquad \frac{6}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\ K_{q\alpha}\frac{\theta_\alpha^2}{2!}\ \frac{m^2}{2!}Q_{\alpha,m}^{(p-1)} + K_{q\alpha}\frac{\theta_\alpha^2}{2!}A_{\alpha\beta}\theta_\beta + 6\cdot\frac{(-1)^{k+4}m^{k+4}Q_{q,n}^{(p-k)}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$J_2C_2 \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \; K_{q\alpha'} \frac{m^4}{4!} Q^{(p-2)}_{\alpha',m} + \frac{1}{2} K_{q\alpha'} B_{\alpha'\beta} \frac{\theta^2_\beta}{2!} + \frac{(-1)^{k+4} m^{k+4} Q^{(p-k)}_{q,m}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$J_2J_1C_2 \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \; K_{q\alpha} \frac{m^4}{4!} Q^{(p-2)}_{\alpha',m} + K_{q\alpha'} \cdot \frac{1}{2} B_{\alpha'\beta} \frac{m^2}{2!} Q^{(p-1)}_{\beta,m} + \frac{1}{2} K_{q\alpha'} B_{\alpha'\beta} A_{\beta\delta} \theta_\delta + \frac{(-1)^{k+1} m^{k+4} Q^{(p-k)}_{q,m}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$J_3C_1 \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \; K_{q\alpha'} \frac{m^4}{4!} Q^{p-3}_{\alpha',m} + \frac{1}{3!} K_{q\alpha} C_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{(-1)^{k+4} m^{k+4} Q^{(p-k)}_{q,m}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$K_2C_1 \quad \frac{4}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \; K_{q\alpha'} \theta_\alpha \frac{(-m^3)}{3!} Q^{(p-2)}_{\alpha',m} + \frac{1}{2!} K_{q\alpha} \theta_\alpha B_{\alpha'\beta} \theta_\beta + 4 \cdot \frac{(-1)^{k+4} m^{k+4} Q^{(p-k)}_{q,m}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$R \quad \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \; \frac{1}{2} K_{q\alpha} \left(A_{\alpha\beta} \theta_\beta + \frac{m^2}{2!} Q^{(p-1)}_{\alpha',m}\right)^2 + 3 \cdot \frac{(-1)^{k+4} m^{k+4} Q^{(p-k)}_{q,m}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

NOTA : Pour alléger un peu l'écriture ; nous avons supprimé les signes Σ.

Une formule telle que : $A_{\alpha\beta} \theta_\beta$ doit être comprise comme : $\sum_{\beta=1}^{\alpha'-1} A_{\alpha\beta} \theta_\beta$

et : $\frac{m^4}{4!} Q_{\alpha',m}$ comme : $\sum_{m=0}^{M_2} m^4 Q_{\alpha,m}$

NOTE SUR LA STABILITE

La formule qui donne la valeur de $x_{i+1}^{(p-h)}$ est :

$$x_{i+1}^{(p-h)} = Q_{q,m}^{(p-h)} \; x_{i-m}^{(p-h)} + h K_{q\alpha} X_{\alpha}$$

Pour que la stabilité à pas nul soit assurée, il faut et il suffit que la récurrence linéaire $\sum_{o}^{\ell} Q_{q,m}^{(p-h)} \; x_{i-m}^{(p-h)}$ soit stable.

Cette stabilité est liée aux racines du polynome caractéristique :

$$r^{\ell+1} - Q_{qo} \, r^{\ell} - Q_{q,1} \, r^{\ell-1} - \ldots - Q_{q,\ell} = 0$$

Comme $\sum Q_{q,m} = 1$, $r = 1$ est racine de ce polynome . Si nous divisons par $(r-1)$ nous obtenons :

$$r^{\ell} + (Q_{q1} + Q_{q,2} + \ldots Q_{q\ell}) \, r^{\ell-1} + (Q_{q,2} + Q_{q,3} + \ldots Q_{q\ell}) r^{\ell-2} + .. Q_{q\ell} = 0$$

La stabilité est assurée, si les racines de ce dernier polynome sont en module inférieures à 1.

En fait, nous ne ferons pas, par la suite une étude générale de la stabilité. Nous nous contenterons de vérifier dans des cas particuliers, que la récurrence linéaire est stable.

Le problème se complique d'ailleurs, dans les cas où plusieurs X_{α} sont les dérivées calculées en des points $t_i - m\,h$; cas particuliers importants comme nous allons le voir par la suite.

- CHAPITRE II -

ETABLISSEMENT DE FORMULES POUR LES SYSTEMES MIS SOUS FORME CANONIQUE

I - PRELIMINAIRE

Nous allons donner un exemple de formules dont les coefficients obéissent à des équations tirées du tableau précédent. Soit $\ell = 1$, $q = 3$. L'algorithme est alors le suivant :

$$x_{i1} = Q_{10}\, x_i + Q_{11}\, x_{i-1} + h\, A_{10}\, X_i$$

$$x_{i2} = Q_{20}\, x_i + Q_{21}\, x_{i-1} + h\,(A_{20}\, X_o + A_{21}\, X_1)$$

$$x_{i3} = Q_{30}\, x_i + Q_{31}\, x_{i-1} + h\,(A_{30}\, X_o + A_{31}\, X_1 + A_{32}\, X_2)$$

Le jeu d'équation qui donne les coefficients est :

$$\begin{cases} Q_{10} + Q_{11} = 1 \\ -Q_{11} + A_{10} = \theta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_{20} + Q_{21} = 1 \\ -Q_{21} + A_{20} + A_{21} = \theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{30} + Q_{31} = 1 \\ -Q_{31} + A_{30} + A_{31} + A_{32} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{31}\,\theta_1 + A_{32}\,\theta_2 + \frac{1}{2!}\,Q_{31} = \frac{1}{2!} \\ A_{31}\,\frac{\theta_1^2}{2!} + A_{32}\,\frac{\theta_2^2}{2!} - \frac{1}{3!}\,Q_{31} = \frac{1}{3!} \\ A_{31}\,\frac{\theta_1^3}{3!} + A_{32}\,\frac{\theta_2^3}{3!} + \frac{1}{4!}\,Q_{31} = \frac{1}{4!} \end{cases} \quad (1), (2), (3)$$

$$A_{31}\,\frac{Q_{11}}{2!} + A_{32}\,\frac{Q_{21}}{2!} + A_{32}\,A_{21}\,\theta_1 - \frac{1}{3!}\,Q_{31} = \frac{1}{3!} \quad (4)$$

$$-A_{31}\,\frac{Q_{11}}{3!} - A_{32}\,\frac{Q_{21}}{3!} + A_{32}\,A_{21}\,\frac{Q_{11}}{2!} + \frac{1}{4!}\,Q_{31} = \frac{1}{4!} \quad (5)$$

(6) $$-A_{31}\frac{Q_{11}}{3!}-A_{32}\frac{Q_{21}}{3!}+A_{32}A_{21}\frac{\theta_1^2}{2!}+\frac{1}{4!}Q_{31}=\frac{1}{4!}$$

(7) $$A_{31}\theta_1\frac{Q_{11}}{2!}+A_{32}\theta_2\frac{Q_{21}}{2!}+A_{32}A_{21}\theta_1\theta_2+\frac{3}{4!}Q_{31}=\frac{3}{4!}$$

On remarque des simplifications :

de (5) et (6), on tire, si A_{32} et $A_{21} \neq 0$ $\qquad Q_{11}=\theta_1^2$

(2) et (4) donnent alors : $\qquad \frac{Q_{21}}{2!}+A_{21}\theta_1=\frac{\theta_2^2}{2!}$

(3) et (5) $\Rightarrow$ $$\frac{-Q_{21}}{3!}+A_{21}\frac{\theta_1^2}{2!}=\frac{\theta_3^2}{3!}-\frac{A_{31}}{3!A_{32}}(\theta_1^3-Q_{11})$$

Le système devient alors :

$$Q_{11}=\theta_1^2$$

(1) $$A_{31}\theta_1+A_{32}\theta_2+\frac{1}{2!}Q_{31}=\frac{1}{2!}$$

(2) $$A_{31}\frac{\theta_1^2}{2!}+A_{32}\frac{\theta_2^2}{2!}-\frac{1}{3!}Q_{31}=\frac{1}{3!}$$

(3) $$A_{31}\frac{\theta_1^3}{3!}+A_{32}\frac{\theta_2^3}{3!}+\frac{1}{4!}Q_{31}=\frac{1}{4!}$$

(4') $$A_{21}\theta_1+\frac{1}{2!}Q_{21}=\frac{\theta_2^2}{2!}$$

(5') $$A_{21}\frac{\theta_1^2}{2!}-\frac{Q_{21}}{3!}=\frac{\theta_2^3}{3!}-\frac{A_{31}}{3!A_{32}}(\theta_1^3-\theta_1^2)$$

Les solutions sont les suivantes :

$$A_{31}=\frac{2(2\theta_2^2-1)}{\theta_1(\theta_2-\theta_1)(3+4(\theta_1+\theta_2)+6\theta_1\theta_2)}$$

$$A_{32}=\frac{-2(2\theta_1^2-1)}{\theta_2(\theta_2-\theta_1)(3+4(\theta_1+\theta_2)+6\theta_1\theta_2)}$$

$$Q_{31}=\frac{3-4(\theta_1+\theta_2)+6\theta_1\theta_2}{3+4(\theta_1+\theta_2)+6\theta_1\theta_2}$$

$$Q_{30} = 1 - Q_{31} \qquad ; \qquad A_{30} = 1 + Q_{31} - A_{31} - A_{32}$$

$$A_{21} = \frac{-\theta_2 \left[1 + (\theta_1 + \theta_2) + 2\,\theta_1\theta_2 \right] (\theta_2 - \theta_1)}{\theta_1 \,(3\,\theta_1 + 2)\,(2\,\theta_1^2 - 1)}$$

$$Q_{21} = \theta_2^2 + \frac{2\,\theta_2 \left[1 + (\theta_1 + \theta_2) + 2\,\theta_1\theta_2 \right] (\theta_2 - \theta_1)}{(3\,\theta_1 + 2)\,(2\,\theta_1^2 - 1)}$$

$$Q_{30} = 1 - Q_{21}$$

$$A_{20} = \theta_2 + Q_{21} - A_{21}$$

Groupons les résultats :

Q :

	0	1
1	$1 - \theta_1^2$	θ_1^2
2	$1 - Q_{21}$	$\theta_2^2 - 2\,A_{21}\,\theta_1$
3	$1 - Q_{31}$	$\dfrac{3 - 4\,(\theta_1 + \theta_2) + 6\,\theta_1\theta_2}{3 + 4\,(\theta_1 + \theta_2) + 6\,\theta_1\theta_2}$

A :

	0	1	2
1	$\theta_1 + \theta_1^2$		
2	$\theta_2 - A_{21} + Q_{21}$	$\dfrac{-\theta_2(\theta_2 - \theta_1)\left[1 + (\theta_1 + \theta_2) + 2\,\theta_1\theta_2\right]}{\theta_1(3\,\theta_1 + 2)\,(2\,\theta_1^2 - 1)}$	
3	$1 + Q_{31} - A_{31} - A_{32}$	$\dfrac{2\,(2\,\theta_2^2 - 1)}{\theta_1(\theta_2 - \theta_1)\left[3 + 4(\theta_1 + \theta_2) + 6\,\theta_1\theta_2\right]}$	$\dfrac{2\,(2\,\theta_1^2 - 1)}{\theta_2(\theta_2 - \theta_1)\,3 + 4\,(\theta_1 + \theta_2) + 6\,\theta_1\theta_2}$

On remarque une simplification si l'on fait :

$\theta_1 = -1$ En effet, on a alors :

$$Q_{11} = 1 \qquad ; \qquad Q_{10} = 0 \qquad ; \qquad A_{10} = 0$$

et l'équation (5') se réduit à :

$$A_{21}\,\frac{\theta_1^2}{2!} - \frac{Q_{21}}{3!} = \frac{\theta_2^3}{3!}$$

Les systèmes à résoudre sont indépendants et se forment de la même façon. Cette constatation semble être de portée générale, c'est-à-dire que l'on peut vérifier, à l'aide du tableau que, pour des méthodes allant jusqu'à l'ordre 5 et dans lesquelles on fait : $\theta_1 = -1$; $\theta_2 = -2$ ... ; $\theta_{q-1} = \theta$, l'on a :

$$\forall \alpha, 1 \leq \alpha < q-1 \quad \begin{cases} Q_{\alpha m} = \delta_{\alpha m} \\ A_{\alpha m} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 & \alpha \neq m \\ 1 & \alpha = m \end{cases}$$

et pour $\alpha = q-1$ et q, les systèmes qui donnent les coefficients pour le point intermédiaire et le point x_{i+1} sont bien indépendants et se forment suivant une loi générale très simple que l'on peut intuitivement écrire au vu des résultats précédents et que nous allons établir rigoureusement maintenant.

II - ETABLISSEMENT DES SYSTEMES D'EQUATIONS

Nous allons nous intéresser au cas $p = 1$ c'est-à-dire aux systèmes mis sous forme canonique (et plus particulièrement pour les essais numériques aux équations différentielles simples $x' = X(x, t)$.

Le tableau général que nous avons établi plus haut ne nous permet pas de dépasser l'ordre 5. Or, il se trouve que certains cas de méthodes RK à pas liés sont susceptibles d'être étudiées directement en ce sens que les conditions à satisfaire peuvent être écrites sans passer par l'intermédiaire du tableau général. Un exemple est fourni par la méthode d'Adams qui entre comme cas particulier avec $\ell = 0$; $\theta_1 = -1$; $\theta_{q-1} = -\ell$; $\theta_q = 1$ et qui s'étudie d'une façon générale sans passer par l'intermédiaire d'un tableau.

Nous allons donner des résultats généraux relatifs à des méthodes qui n'utilisent systématiquement qu'un point intermédiaire entre t_i et t_{i+1}. Ce sont des méthodes RKL de rang q dans lesquelles :

$$\theta_1 = -1 \; ; \; \theta_2 = -2 \; ; \; \theta_{q-2} = -r \; ; \; \theta_{q-1} = \theta \; (\theta \in]0,1[) \; .$$

(Les démonstrations qui suivent sont valables aussi bien pour un système que pour une équation simple).

L'algorithme est alors le suivant :

$r \leqslant \ell$

$$(1) \qquad x_{i1} = \sum_{m=0}^{\ell} Q_{q-1,m}\, x_{i-m} + h \sum_{0}^{r} A_{q-1,m}\, X_{i-m}$$

$$(2) \qquad x_{i+1} = \sum_{m=0}^{\ell} Q_{q,m}\, x_{i-m} + h\left[\sum_{0}^{r} A_{q,m}\, X_{i-m} + A_{q,q-1}\, X_1\right]$$

avec : $X_{i-m} = X(x_{i-m}, t_i - m h)$; $X_1 = X(x_{i1}, t + \theta h)$

On trouve les conditions à satisfaire en développant (1) et (2) en série de Taylor et en identifiant respectivement avec les développements de $x(t + \theta h)$ et $x(t + h)$. On pourra faire coïncider les développements jusqu'à un ordre tel que le système d'équations obtenu ait une solution unique.

Pour déterminer $x_{i,1}$, nous avons besoin de $(\ell + r + 2)$ coefficients et $(\ell + r + 3)$ pour x_{i+1}.

a) Calcul des $Q_{q-1,m}$ et $A_{q-1,m}$

On a : $$x_{i1} = \sum_{0}^{\ell} Q_{q-1,m}\, x_{i-m} + h \sum_{0}^{r} A_{q-1,m}\, X_{i-m}$$

Le terme général du développement en série de Taylor de cette formule est :

$$(-1)^{\lambda} \sum_{0}^{\ell} \frac{m^{\lambda}}{\lambda!} Q_{q-1,m} + (-1)^{\lambda-1} \sum_{0}^{r} \frac{m^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} A_{q-1,m}$$

Ce terme doit être identifié à : $\frac{\theta^{\lambda}}{\lambda!}$. D'où le système d'équations :

-I-

$$(-1)^{\lambda} \sum_{0}^{\ell} \frac{m^{\lambda}}{\lambda!} Q_{q-1,m} + (-1)^{\lambda-1} \sum_{0}^{r} \frac{m^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} A_{q-1,m} = \frac{\theta^{\lambda}}{\lambda!}$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \ell + r + 1$$

ou, sous forme plus explicite :

$$\sum_{0}^{\ell} Q_{q-1,m} = 1$$

$$-\sum_{0}^{\ell} m\, Q_{q-1,m} + \sum_{0}^{r} A_{q-1,m} = \theta$$

$$\sum_{0}^{\ell} \frac{m^2}{2!} Q_{q-1,m} - \sum_{0}^{r} m\, A_{q-1,m} = \frac{\theta^2}{2!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(-1)^{\ell+r+1} \sum_{0}^{\ell} \frac{m^{\ell+r+1}}{(\ell+r+1)!} Q_{q-1,m} + (-1)^{\ell+r} \sum_{0}^{r} \frac{m^{\ell+r}}{(\ell+r)!} A_{q-1,m} = \frac{\theta^{\ell+r+1}}{(\ell+r+1)!}$$

Les deux premières équations servent en fait à calculer $Q_{q-1,o}$ et $A_{q-1,o}$ qui n'apparaissent pas dans le système restant.

b) Calcul des coefficients $Q_{q,m}$, $A_{q,m}$, $A_{q,q-1}$

Nous devons développer : $x_{i+1} = \sum_{0}^{\ell} Q_{q,m} x_{i-m} + h\left[\sum_{0}^{r} A_{q,m} X_m + A_{qq-1} X_1\right]$ jusqu'au terme en $h^{\ell+r+2}$.

La quantité entre crochets doit être développée jusqu'au terme en $h^{\ell+r+1}$.

X_1 peut être confondu avec $X(x_{t+\theta h}, t + \theta h)$ jusqu'à cet ordre. En effet :

$$X_1 = X(x_{i1}, t + \theta h)$$

$$X(x_{i1}, t + \theta h) = X(x_{t+\theta h}, t + \theta h) + \frac{\partial X}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Mais les Δx_i sont des infiniment petits d'ordre $h^{\ell+r+2}$. On peut donc développer x_{i+1} en série jusqu'au terme en $h^{\ell+r+2}$, en remplaçant X_1 par $X(x_{t+\theta h}, t + \theta h)$.

Le terme général du développement de x_{i+1} est :

$$(-1)^{\lambda} \sum_{0}^{\ell} \frac{m^{\lambda}}{\lambda!} Q_{q,m} + (-1)^{\lambda-1} \sum_{0}^{r} \frac{m^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} A_{q,m} + A_{q,q-1} \frac{\theta^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

D'où le système :

$$(-1)^{\lambda} \sum_{0}^{\ell} \frac{m^{\lambda}}{\lambda!} Q_{q,m} + (-1)^{\lambda-1} \sum_{0}^{r} \frac{m^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} A_{q,m} + A_{qq-1} \frac{\theta^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = \frac{1}{\lambda!}$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \ell + r + 2$$

Donnons dès à présent un résultat qui nous servira par la suite. Rajoutons au système II une $(\ell + r + 3)^{ème}$ équation. On obtient un système II' qui aura une solution unique, si son déterminant complet est nul :

Ce déterminant complet, qui est un polynome en θ, admet toujours une racine $\theta_o \in]0,1[$.

La $\lambda^{ème}$ ligne du système II' s'écrit :

$$(-1)^\lambda \sum_0^\ell m^\lambda Q_{q,m} + (-1)^{\lambda-1} \sum_0^r \lambda . m^{\lambda-1} A_{q,m} + A_{qq-1} \lambda \theta^{\lambda-1} = 1$$

$$2 \leqslant \lambda \leqslant \ell + r + 3$$

ou, si l'on veut :

$$(-1)^\lambda \sum_0^\ell m^\lambda Q_{q,m} + (-1)^{\lambda-1} \sum_0^r \lambda . m^{\lambda-1} A_{q,m} + A_{qq-1} d\left[\theta^\lambda\right] = 1$$

Considérons le système III :

$$(-1)^\lambda \sum_0^\ell m^\lambda Q_{q,m} + (-1)^{\lambda-1} \sum_0^r \lambda . m^{\lambda-1} A_{q,m} + A_{qq-1} \theta^\lambda = 1 \quad ; \quad 2 \leqslant \lambda \leqslant \ell + r + 3$$

Son déterminant complet est un polynome qui est une primitive par rapport à θ du déterminant complet de II'.

Or, le déterminant complet de III a comme racines évidentes :

. 1

. 0, -1, -2, ... , -r comme racines doubles

. -(r+1) ... - comme autres racines simples,

ce qui fait $\ell + r + 3$ racines.

Ce déterminant s'annule en $\theta = 0$ et $\theta = 1$ donc sa dérivée s'annule entre 0 et 1. La racine de la dérivée $\theta_o \in]0,1[$ est d'ailleurs unique puisque nous avons dénombré toutes les $(\ell + r + 3)$ racines.

Mais précisément la dérivée du déterminant complet de III est le déterminant complet de II.

Grâce à ceci, nous pouvons espérer atteindre l'ordre $\ell + r + 3$ mais non le dépasser, puisqu'il faudrait que x_{11} soit exact à l'ordre $\ell + r + 3$ or, ceci est impossible.

- CHAPITRE III -

APPLICATIONS

I - PRELIMINAIRES

Rappelons les paramètres qui interviennent dans l'algorithme précédent : ℓ = nombre de x_{i-m} utilisés

r = nombre de X_{i-m}

s = nombre de X_α utilisés (c'est-à-dire : 2 : X_0 et X_α)

et l'on a : $q = r + s$. Par la suite, quand nous noterons une méthode $RKL_{q,\ell}$, il faut entendre : $RKL_{r+s,\ell}$.

Nous allons donner maintenant des résultats relatifs à des méthodes particulières :

(1) $r = 0$, ℓ quelconque, c'est à dire $q = 2$

(2) $r = \ell$; $(q = \ell + 2)$ c'est-à-dire les méthodes qui, pour un ordre donné demandent le minimum de points antérieurs ou, si l'on veut, qui font intervenir tous les points antérieurs :

. dans la récurrence linéaire

. dans le coefficient de h .

- Le premier cas se prête bien à une analyse systématique et l'on peut donner l'expression générale des coefficients par une étude globale.

- Quant au second ensemble de méthodes, il se prête moins aisément à une telle étude. Aussi prendrons-nous les cas un à un.

II - ETUDE GENERALE DU CAS r = 0 , s = 2 , ℓ quelconque , p = 1

L'algorithme est le suivant :

$$x_{i1} = \sum_{0}^{\ell} Q_{1m}\, x_{i-m} + h\, A_{10}\, X_o$$

$$x_{i+1} = \sum_{0}^{\ell} Q_{2m}\, x_{i-m} + h \left[A_{21}\, X_1 + A_{20}\, X_o \right]$$

En appliquant les résultats généraux que nous avons établis précédemment, les équations qui permettent de déterminer les coefficients sont les suivantes :

$$\sum_{0}^{\ell} Q_{1m} = 1 \qquad - \sum_{0}^{\ell} m\, Q_{1m} + A_{10} = \theta$$

$$\sum_{0}^{\ell} Q_{2m} = 1 \qquad - \sum_{0}^{\ell} m\, Q_{2m} + A_{21} + A_{20} = 1$$

(I)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{\ell^2}{2!} \\ \frac{-1}{3!} & \frac{-2^3}{3!} & \cdots & \frac{-\ell^3}{3!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & \cdots & & \frac{(-1)^{\ell+1}\,\ell^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ \vdots \\ Q_{1\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta^2}{2!} \\ \frac{\theta^3}{3!} \\ \vdots \\ \frac{\theta^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \end{bmatrix}$$

(II)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{2^2}{2!} & \cdots & \frac{\ell^2}{2!} & \theta \\ \frac{-1}{3!} & \cdots & & \frac{-\ell^3}{3!} & \frac{\theta^2}{2!} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{\ell+2}}{(\ell+2)!} & \cdots & & \frac{(-1)^{\ell+1}\,\ell^{\ell+2}}{(\ell+2)!} & \frac{\theta^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \\ \vdots \\ Q_{2\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{3!} \\ \vdots \\ \frac{1}{(\ell+2)!} \end{bmatrix}$$

En fait, si l'on veut une méthode puissante, on risque d'être assez rapidement arrêté par le coût au démarrage mais dans la mesure où l'on accepte ce coût, il peut être intéressant de dégager les caractéristiques générales des méthodes $RKL_{2,\ell}$.

Nous allons résoudre le système I qui peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & \ell^2 \\ -1 & -2^3 & -3^3 & \cdots & -\ell^3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{\ell+1} & \cdots & \cdots & (-1)^{\ell+1} & \ell^{\ell+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ \vdots \\ Q_{1\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^2 \\ \theta^3 \\ \vdots \\ \theta^{\ell+1} \end{bmatrix}$$

Avant d'expliciter les Q_{1i} en fonction de θ, un certain nombre de remarques s'imposent :

1) Le déterminant de la matrice carrée du premier membre est, à une constante (non nulle) près, un déterminant de Van der Marde. Il est donc non nul. La Matrice peut donc s'inverser et chaque Q_{1i} s'exprimera sous forme de combinaison linéaire des monomes en θ du second membre. Ce seront des polynomes en θ dont les termes de plus haut degré seront au plus en $\theta^{\ell+1}$ et les termes de plus bas degré au moins en θ^2.

2) Si l'on fait $\theta = 0$, la seule solution possible est : $\| Q_{1i} \| = 0$

Si l'on fait successivement $\theta = -k \quad 0 < k \leqslant \ell$, il est évident, d'après la forme même de la matrice que :

$$Q_{1k} = 1 \qquad Q_{1i} = 0$$
$$\theta = -k \qquad i \neq k$$

3) Si l'on dérive par rapport à θ, on a :

$$\| A \| \cdot \| Q'_{1i} \| = \begin{bmatrix} 2\theta \\ 3\theta^2 \\ \vdots \\ (\ell+1)\ \theta^{\ell} \end{bmatrix}$$

et $\theta = 0 \implies Q'_{1i} = 0$

Les polynomes $Q_{1i}(\theta)$ admettent donc l'origine comme racine double.

Résolution

On peut montrer, par des combinaisons de lignes que le système (I) se triangularise et s'inverse de façon à donner, si l'on prend soin de choisir comme nouvelles inconnues : $(-1)^{i+1}\ i\,!\ Q_{1i}$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ -2\,!\ Q_{12} \\ \vdots \\ (-1)^{i+1}\,i\,!\ Q_{1i} \\ \vdots \\ (-1)^{\ell+1}\,\ell\,!\ Q_{1\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{(\ell-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(\ell-2)!} \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \\ P_i \\ \\ P_\ell \end{bmatrix}$$

Les P_i étant des polynomes admettant l'origine comme racine double et les entiers $-1, -2 \ldots (-i+1)$ comme racines simples, donc de degré $(i+1)$ avec le coefficient du terme de plus haut degré valant 1.

$$P_1 = \theta^2 \qquad = \theta^2$$
$$P_2 = \theta \,.\, \theta(\theta+1) \qquad = \theta^3 + \theta^2$$
$$P_3 = \theta \,.\, \theta(\theta+1)(\theta+2) \qquad = \theta^4 + 3\theta^3 + 2\theta^2$$

Si l'on a besoin de leurs coefficients, on voit aisément que :

$$P_{i+1} = P_i\,(\theta + i)$$

c'est-à-dire : $P_{i+1} = \theta\, P_i + i \,.\, P_i$

(Le coefficient du terme de degré k de P_{i+1} est égal au coefficient du terme de degré $(k-1)$ de P_i, augmenté de i fois le coefficient du terme de degré k de P_i).

Relation avec les Polynomes de Lagrange

On a : $P_i = \theta \,.\, \theta(\theta+1) \ldots\ldots (\theta+i-1)$

Le polynome de Lagrange qui a les mêmes zéros que P_i et qui vaut 1 pour $\theta = -i$, s'écrit : $\mathcal{L}^i_i = \dfrac{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+i-1)}{(-1)^i\ i\,!}$

On a donc : $$P_i = (-1)^i \cdot \theta \cdot i! \; \mathcal{L}_i^i(\theta)$$

En particulier : $$Q_{1\ell} = \frac{-\theta}{\ell} \mathcal{L}_\ell^\ell(\theta)$$

Chaque Q_{1i} est une combinaison linéaire des P_i :

$$Q_{1i} = \frac{(-1)^{i+1}}{i \, , \, i!} \left[P_i + P_{i+1} + \frac{P_{i+2}}{2!} + \dots \frac{P_\ell}{(\ell - i)!} \right]$$

et par conséquent des $\mathcal{L}_i^i(\theta)$:

$$Q_{1i} = \frac{-\theta}{i} \left[\Sigma_i \; a_i \; \mathcal{L}_i^i(\theta) \right]$$ (le terme entre crochets est un polynome)

En vertu d'une remarque faite plus haut :

$$Q_{1i}(\theta_i) = 1 \; ; \; Q_{1i}(\theta_k) = 0$$

Q_{1i} est le produit par $-\frac{\theta}{i}$ d'un polynome qui vaut :

$$\begin{cases} 0 \text{ pour } \theta = 0, -1 \dots - (i-1) \, , -(i+1), \dots -\ell \\ 1 \text{ pour } \theta = -i \end{cases}$$

Ce polynome est le polynome de Lagrange correspondant :

$$\boxed{Q_{1i}(\theta) = \frac{-\theta}{i} \mathcal{L}_i^\ell(\theta)}$$

En appelant $\mathcal{L}_i^\ell(\theta)$ le polynome de Lagrange s'annulant pour $\theta = 0, \dots -(i-1) \, , -(i+1) \dots -\ell$ et valant 1 pour $\theta = -i$.

Résolution du système II

Après multiplication de chaque ligne i par $i!$, ce système devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & \ell^2 & 2\theta \\ -1 & -2^3 & -3^3 & \dots & \ell^3 & 3\theta^2 \\ \vdots & & & & & \\ (-1)^{\ell+1} & (-1)^{\ell+1} 2^{\ell+1} & \dots & & (-1)^{\ell+1} \ell^{\ell+1} & (\ell+1)\theta^\ell \\ (-1)^{\ell+2} & \dots & & & (-1)^{\ell+2} \ell^{\ell+2} & (\ell+2)\theta^{\ell+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \\ \vdots \\ Q_{2\ell} \\ A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On peut appliquer le même processus de triangularisation que pour le système (I) et l'on peut montrer que l'on a :

$$\left\| (-1)^{i+1}\ i.i!\ Q_{2i} \right\| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(\ell-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(\ell-2)!} \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - A_{21} \cdot P_1^* \\ 2! - A_{21} \cdot P_2^* \\ \vdots \\ \ell! - A_{21} \cdot P_\ell^* \end{bmatrix}$$

avec $A_{21} = \dfrac{(\ell+1)!}{P^*_{\ell+1}}$

Les P_i^* étant des polynomes engendrés à partir des monomes $(i+1)\ \theta^i$ de la même manière (c'est-à-dire combinaison linéaire de lignes) que les P_i étaient obtenus à partir des θ^{i+1}. Comme $(i+1)\ \theta^i = \dfrac{d}{d\theta}(\theta^{i+1})$ et que les opérations de dérivation et de combinaison linéaire sont commutatives, il en résulte que : $P_i^* = \dfrac{d}{d\theta}\left[P_i\right]$

Chaque Q_{2i} se décompose en un terme constant et un terme fonction de θ.

1) Terme constant - Nous allons montrer que le terme constant relatif à Q_{2i} est : $\dfrac{(-1)^{i+1}}{i}\ C_{\ell+1}^{\ell-i}$

Considérons le vecteur :

$$\left\| (-1)^{i+1}\ i!\ V_i \right\| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{(\ell-1)!} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \ell! \end{bmatrix}$$

pour $\ell = 2$, l'assertion est évidente :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -2\ 2!\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = 3 = C_3^1$$

$$V_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{C_3^0}{2}$$

a) supposons que la $i^{ème}$ composante du vecteur V_i s'écrive : $\dfrac{(-1)^{i+1}}{i}\ C_{\ell+1}^{\ell-i}$

Quelle est la $i^{ème}$ composante du nouveau vecteur obtenu en augmentant de 1 l'ordre de la matrice.

$$i \neq (\ell+1) \; : \quad \left\| (-1)^{i+1}\, i.i!\, V_i \right\| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(\ell-1)!} & \frac{1}{\ell!} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & \frac{1}{(\ell+1-i)!} \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ i! \\ (\ell+1)! \end{bmatrix}$$

On peut toujours écrire :

$$(-1)^{i+1}\, i.V_i^* = C_{\ell+1}^{\ell-1} + \frac{(\ell+1)!}{(\ell+1-i)!\; i!}$$

mais : $$\frac{(\ell+1)!}{(\ell+1-i)!\; i!} = C_{\ell+1}^{\ell+1-i}$$

et comme : $$C_{\ell+1}^{\ell-1} + C_{\ell+1}^{\ell+1-i} = C_{\ell+2}^{\ell+1-i}$$

alors : $$V_i^* = \frac{(-1)^{i+1}}{i}\, C_{\ell+2}^{\ell+1-i} \qquad \text{pour} \quad i \neq \ell+1$$

b) La composante supplémentaire qui apparaît est :

$$V_\ell^* = \frac{(-1)^{\ell+2}}{\ell+1} = \frac{(-1)^{\ell+2}\, C_{\ell+2}^{0}}{\ell+1}$$

La formule est donc bien générale.

2) Terme de Q_{2i} dépendant de θ

$$Q_{2i}^* = -A_{21} \cdot \frac{(-1)^{i+1}}{i \,.\, i!} \left[P_i^* + P_{i+1}^* + \cdots \frac{P_\ell^*}{(\ell-1)!} \right]$$

$$= -A_{21} \cdot \frac{(-1)^{i+1}}{i \,.\, i!} \frac{d}{d\theta} \left[P_i + P_{i+1} + \cdots \frac{P_\ell}{(\ell-1)!} \right]$$

c'est-à-dire :

$$Q_{2i}^* = -A_{21} \cdot Q_{1i}'$$

qu'on peut écrire également : $$Q_{2i}^* = A_{21} \cdot \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\theta}{i}\, \mathcal{L}_i^\ell(\theta) \right]$$

Finalement :

$$Q_{2i} = \frac{1}{i} \left[(-1)^{i+1}\, C_{\ell+1}^{\ell-1} + A_{21} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\theta\, \mathcal{L}_i^\ell(\theta) \right) \right]$$

$$A_{21} = \frac{(\ell+1)!}{P_{\ell+1}^*}$$

Choix de θ

Les formules que nous avons établies laissent libre le choix de θ. En fait, l'utilisqtion de ces formules reste soumise à une condition de stabilité. Pour les petites valeurs de ℓ, il est relativement facile de trouver sur l'intervalle $[0,1]$, la plage de variation de θ qui assure la stabilité. Cette recherche se complique vite pour ℓ élevé.

1) Une méthode qui donne de bons résultats expérimentaux consiste à choisir la valeur de θ, si elle existe, qui annule $Q_{2\ell}$. On gagne ainsi une multiplication et une addition dans le calcul de x_{i+1}.

2) On peut aussi prendre la méthode suivante : pour une méthode $RKL_{2,\ell}$ qui utilise ℓ points avant x_i, θ sera choisi de façon à annuler le terme $Q_{2,\ell+1}$ de la méthode $RKL_{2,\ell+1}$, qui utiliserait $(\ell+1)$ points avant x_i ; il est aisé de voir que cela revient à faire vérifier aux coefficients Q_{2i} et A_{2i} le système correspondant à l'ordre suivant. On diminue ainsi le coefficient de la partie principale de l'erreur.

Nous noterons θ^*, la valeur θ correspondant à un tel choix. Quelle que soit la méthode employée pour choisir θ, on a le résultat suivant :

> pour tout ℓ, l'équation $Q_{2\ell} = 0$ admet toujours une racine unique : $\theta_0 \in]0,1[$.

Ceci n'est qu'une conséquence immédiate de la proposition que nous avons démontrée en fin de chapitre II.

En effet, dire que l'on annule le terme $Q_{2\ell}$, du système

$$(1) \qquad (-1)^{\lambda} \sum_{0}^{\ell} m^{\lambda} Q_{2,m} + A_{21}\, \lambda\, \theta^{\lambda-1} = 1 \qquad 2 \leqslant \lambda \leqslant \ell + r + 2$$

revient à dire que l'on annule le déterminant complet du système :

$$(2) \qquad (-1)^{\lambda} \sum_{0}^{\ell-1} m^{\lambda} Q_{2m} + A_{21}\, \lambda\, \theta^{\lambda-1} = 1 \qquad 2 \leqslant \lambda \leqslant \ell + r + 2$$

Il resterait à démontrer qu'un tel choix de θ, soit $Q_{2\ell} = 0$ soit $Q_{2,\ell+1} = 0$, assure la stabilité de la récurrence linéaire :

$$x^*_{i+1} = \sum_{\theta}^{\ell} Q_{2m}\, x_{i-m}$$

Nous le vérifierons dans les cas simples.

Avant de montrer quelques exemples, voici les premiers polynomes P_i et P_i^* :

$P_1 = \theta^2$

$P_2 = \theta^3 + \theta^2$

$P_3 = \theta^4 + 3\,\theta^3 + 2\,\theta^2$

$P_4 = \theta^5 + 6\,\theta^4 + 11\,\theta^3 + 6\,\theta^2$

$P_5 = \theta^6 + 10\,\theta^5 + 35\,\theta^4 + 50\,\theta^3 + 24\,\theta^2$

$P_6 = \theta^7 + 15\,\theta^6 + 85\,\theta^5 + 225\,\theta^4 + 274\,\theta^3 + 120\,\theta^2$

$P_7 = \theta^8 + 21\,\theta^7 + 175\,\theta^6 + 735\,\theta^5 + 1624\,\theta^4 + 1764\,\theta^3 + 720\,\theta^2$

$P_1^* = 2\,\theta$

$P_2^* = 3\,\theta^2 + 2\,\theta$

$P_3^* = 4\,\theta^3 + 9\,\theta^2 + 4\,\theta$

$P_4^* = 5\,\theta^4 + 24\,\theta^3 + 33\,\theta^2 + 12\,\theta$

$P_5^* = 6\,\theta^5 + 50\,\theta^4 + 140\,\theta^3 + 150\,\theta^2 + 48\,\theta$

$P_6^* = 7\,\theta^6 + 90\,\theta^5 + 425\,\theta^4 + 900\,\theta^3 + 822\,\theta^2 + 240\,\theta$

$P_7^* = 8\,\theta^7 + 147\,\theta^6 + 1050\,\theta^5 + 3675\,\theta^4 + 6496\,\theta^3 + 5292\,\theta^2 + 1440\,\theta$

Etude de cas particuliers

1) $\ell = 0$, $q = 2$: c'est la méthode de RK simple. C'est un cas limite des méthodes $RKL_{2,\ell}$

$$Q_{10} = 1 \quad ; \quad A_{10} = \theta$$

$$A_{21} = \frac{1}{P_1^*} = \frac{1}{2\,\theta} \quad ; \quad Q_{20} = 1$$

$$A_{20} = 1 - \frac{1}{2\,\theta}$$

Choix de θ^* : $P_2^* - 2 P_1^* = 0$ c'est-à-dire :

$$3\theta^2 + 2\theta - 4\theta = 0 \Rightarrow \theta^* = \frac{2}{3}$$

On retrouve ainsi le résultat de la formule de Heun, dite formule optimum.

2) $\ell = 1$; $q = 2$

$$Q_{11} = \theta^2$$

$$A_{21} = \frac{2}{P_2^*} = \frac{2}{3\theta^2 + 2\theta}$$

$$Q_{21} = (-1)^2 C_2^0 - \frac{2 \cdot 2\theta}{3\theta^2 + 2\theta} = \frac{3\theta - 2}{3\theta + 2}$$

D'où le tableau :

	0	1
1	$1 - \theta^2$	θ^2
2	$\frac{4}{3\theta + 2}$	$\frac{3\theta - 2}{3\theta + 2}$

Q

	0	1
1	$\theta + \theta^2$	
2	$\frac{2.[3\theta^2 - 1]}{\theta(3\theta + 2)}$	$\frac{2}{\theta(3\theta + 2)}$

A

La stabilité est assurée si $\left|\frac{3\theta - 2}{3\theta + 2}\right| < 1$ c'est-à-dire assurée si $\theta > 0$.

Choix de θ

a) on peut choisir $\theta = \frac{2}{3}$ $(Q_{21} = 0)$

b) θ^* : $P_3^* - 3 P_2^* = 0$ $(4\theta^3 + 9\theta^2 + 4\theta) - (9\theta^2 + 6\theta) = 0$

$$4\theta^3 - 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) $\ell = 2$; $q = 2$ (méthode en h^4). Donnons directement les coefficients :

	0	1	2
1	$1 - \frac{\theta^2(3\theta+7)}{4}$	$\theta^2(\theta+2)$	$\frac{-\theta^2(\theta+1)}{4}$
2	$\frac{-3(2\theta^2 - 5)}{4\theta^2+9\theta+4}$	$\frac{12\theta^2+9\theta-12}{4\theta^2+9\theta+4}$	$\frac{-2\theta^2+1}{4\theta^2+9\theta+4}$

Q

	0	1
1	$\frac{\theta}{2}(\theta^2+3\theta+2)$	
2	$\frac{6(2\theta^3+3\theta^2-\theta-1)}{\theta(4\theta^2+9\theta+4)}$	$\frac{6}{\theta(4\theta^2+9\theta+4)}$

A

Resultats numériques $\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(Q_{22} = 0)$

$y' = -2ty$ $y(o) = 1$ $h = 0,1$

t	y calculé	y exact	erreur
- 1,7	0,055 573 734	0,055 576 212 6	2.10^{-6}
- 1,6	0,077 300 5039	0,077 304 740 5	4.10^{-6}
- 1,5	0,105 393 804	0,105 399 225	5.10^{-6}
- 1,4	0,140 853 262	0,140 858 421	5.10^{-6}

4) $\ell = 3$; $q = 2$ (Méthode en h^5). Les coefficients sont les suivants:

$$Q_{13} = \frac{1}{3.3!} P_3$$

$$Q_{12} = \frac{-1}{2.2!} \left[P_2 + P_3 \right]$$

$$Q_{11} = P_1 + P_2 + \frac{P_3}{2!}$$

$$A_{21} = \frac{4!}{P_4^*}$$

$$Q_{32} = \frac{1}{3} \left[1 - A_{21} \frac{P_3^*}{3!} \right]$$

$$Q_{22} = -\frac{1}{2} \left[4 - A_{21} (P_2^* + P_3^*) \right]$$

$$Q_{21} = 6 - A_{21} (P_1^* + P_2^* + \frac{P_3^*}{2!})$$

Choix de θ

a) $Q_{23} = 0 \Rightarrow \theta = 0,728\ 901\ 980$

Le tableau des coefficients est alors :

Q

	0	1	2	3
1	-0,986 145 740	2,703 193 170	-0,856 307 224	0,139 259 254
2	-0,931 172 452	0,073 762 089 6	-0,004 934 541 85	0 $(3,7.10^{-10})$

A

	0	1
1	2,137 259 004	
2	0,414 988 143	0,648 904 863

b) θ^* $P_5^* - 5 P_4^* = 0 \Rightarrow 6\theta^4 + 25\theta^3 + 20\theta^2 - 15\theta - 12 = 0$

$\theta \simeq 0,743\ 320\ 632$ d'où le tableau suivant :

Q

	0	1	2	3
1	-1,082 361 701	2,836 978 059	-0,901 418 946	0,146 802 587
2	0,885 871 170	0,130 070 447	-0,017 508 897	0,001 567 280

A

	0	1
1	2,217 868 560	
2	0,476 968 324	0,622 786 170

On vérifie que les formules sont stables.

Exemple : $y' = -2ty^2$ $\quad h = 0,1$

$y(o) = 1$

t	y ex.	θ^*	erreur	$Q_{23} = 0$	erreur
-1,6	0,280 898 876	0,280 898 866	10.10^{-10}	0,280 898 866	10.10^{-10}
-1,5	0,307 692 308	0,307 692 313	-5.10^{-10}	0,307 692 315	-7.10^{-10}
-1,4	0,337 837 837	0,337 837 903	-66.10^{-10}	0,337 837 909	-72.10^{-10}
-1,3	0,371 747 212	0,371 747 421	-209.10^{-10}	0,371 747 436	-224.10^{-10}
-1,2	0,409 836 065	0,409 836 567	-502.10^{-10}	0,409 836 594	-529.10^{-10}
-1,1	0,452 488 688	0,452 489 720	$1 .10^{-6}$	0,452 489 767	$1 . 10^{-6}$
0	1	1,000 015 46	15.10^{-6}	1,000 015 320	15.10^{-6}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	0,200 000 000	0,200 001 588	$1,6.10^{-6}$	0,200 001 657	$1,7.10^{-6}$

Nous donnerons plus loin d'autres résultats numériques obtenus par la méthode $RKL_{2,3}$.

5) $\ell = 4$; $q = 2$. C'est une méthode d'ordre 6. Les coefficients sont :

$$Q_{14} = \frac{-1}{4.4!} \quad P_4$$

$$Q_{13} = \frac{1}{3.3!} \left[P_3' + P_4 \right]$$

$$Q_{12} = \frac{-1}{2.2!} \left[P_2 + P_3 + \frac{P_4}{2!} \right]$$

$$Q_{11} = P_1 + P_2 + \frac{P_3}{2!} + \frac{P_4}{3!}$$

$$Q_{10} = 1 - \sum_{1}^{\ell} Q_{1i} \quad ; \quad A_{10} = \theta + Q_{11} + 2\,Q_{12} + \ldots 4\,Q_{14}$$

$$A_{21} = \frac{5!}{P_5^*}$$

$$Q_{24} = \frac{-1}{4}\left[1 - A_{21}\,\frac{P_4^*}{4!}\right]$$

$$Q_{23} = \frac{1}{3}\left[5 - \frac{A_{21}}{3!}\,(P_3^* + P_4^*)\right]$$

$$Q_{22} = \frac{-1}{2}\left[10 - \frac{A_{21}}{2!}\,(P_2^* + P_3^* + \frac{P_4^*}{2!})\right]$$

$$Q_{21} = 10 - A_{21}\,(P_1^* + P_2^* + \frac{P_3^*}{2!} + \frac{P_4^*}{3!})$$

$$Q_{20} = 1 - \sum Q_{21}$$

$$A_{20} = 1 - A_{21} + Q_{21} + 2\,Q_{22} + \ldots + 4\,Q_{24}$$

Explicitons en fonction de θ :

$$Q_{11} = \frac{\theta^2}{6}\,(\theta^3 + 9\,\theta^2 + 26\,\theta + 24)$$

$$Q_{12} = \frac{-\theta^2}{8}\,(\theta^3 + 8\,\theta^2 + 19\,\theta + 12)$$

$$Q_{13} = \frac{\theta^2}{18}\,(\theta^3 + 7\,\theta^2 + 14\,\theta + 8)$$

$$Q_{14} = \frac{-\theta^2}{96}\,(\theta^3 + 6\,\theta^2 + 11\,\theta + 6)$$

$$Q_{10} = 1 - \sum Q_{1i} \quad ; \quad A_{10} = \theta + Q_{11} + \ldots + 4\,Q_{14}$$

$$A_{21} = \frac{120}{\theta\,\Delta} \quad \text{avec} \quad \Delta = 6\,\theta^4 + 50\,\theta^3 + 140\,\theta^2 + 150\,\theta + 48$$

$$Q_{21} = \frac{10}{\Delta}\,(6\,\theta^4 + 40\,\theta^3 + 68\,\theta^2 - 6\,\theta - 48)$$

$$Q_{22} = \frac{5}{\Delta}\,(-6\,\theta^4 - 35\,\theta^3 - 44\,\theta^2 + 21\,\theta + 24)$$

$$Q_{23} = \frac{10}{3\Delta}\,(3\,\theta^4 + 15\,\theta^3 + 14\,\theta^2 - 9\,\theta - 8)$$

$$Q_{24} = \frac{1}{4\Delta}\,(-6\,\theta^4 - 25\,\theta^3 - 20\,\theta^2 + 15\,\theta + 12)$$

$$Q_{20} = 1 - \sum_{1}^{\ell} Q_{2i}$$

$$A_{10} = 1 - A_{21} + Q_{21} + \ldots + 4\,Q_{24}$$

Choix de θ - Nous avons fait les essais numériques avec θ^* $\left(P_6^* - 6\,P_5^* = 0\right)$ c'est-à-dire : $7\,\theta^5 + 54\,\theta^4 + 125\,\theta^3 + 60\,\theta^2 - 78\,\theta - 48 = 0$

$$\theta \simeq 0{,}753\ 875\ 992$$

Premier exemple $y' = -2ty$ $\quad (y = e^{-x^2/1})$

en partant de $t = -0,2$

	sol. exacte		sol. calculée	erreur.10^{-7}
- 0,1	0,990 049 834		0,990 049 873	- 0,39
0	1		1,000 000 04	-0,4
0,1	0,990 049 834		0,990 049 805	+0,29
0,2	0,960 789 439		0,960 789 243	+1,96
0,3	0,913 931 185		0,913 930 751	+4,34
0,4	0,852 143 789		0,852 143 101	+6,88
0,5	0,778 800 783		0,778 799 910	+ 8,73
0,6	0,697 676 326		0,697 675 420	+9,06
0,7	0,612 626 394		0,612 625 667	+6,27
0,8	0,527 292 424		0,527 292 102	+3,22
0,9	0,444 858 066		0,444 858 330	-2,64
1	0,367 879 441		0,367 880 382	-9,41
1,1	0,298 197 279		0,298 198 868	-15,89
1,2	0,236 927 759		0,236 929 844	-20,85
1,3	0,184 519 524		0,184 521 865	-23,41
1,4	0,140 858 421		0,140 860 724	-23,03
1,5	0,105 399 225	10^{-1}	0,010 540 120 4	-1,98
1,6	0,773 047 405	10^{-1}	0,077 306 169	-14,28
1,7	0,555 762 126	10^{-1}	0,055 576 955 4	-7,43
1,8	0,039 163 895 1		0,039 163 923 6	-0,39
1,9	0,027 051 846 9		0,027 051 231 5	+6,15
2	0,018 315 638 9		0,018 314 524 5	+11

Second exemple

$y' = y$ $\quad y(o) = 1$ $\quad h = 0,1$

t	$y = e^x$	y calculé	erreur.10^{-8}
0,5	1,648 721 271	1,648 721 26	1,1
0,6	1,822 118 800	1,822 118 78	2
0,7	2,013 752 707	2,013 752 66	5
0,8	2,225 540 928	2,225 540 87	6
0,9	2,459 603 111	2,459 603 02	9
1	2,718 281 828	2,718 281 71	12
1,1	3,004 166 024	3,004 165 87	15
1,2	3,320 116 923	3,320 116 75	17
1,3	3,669 296 668	3,669 296 46	21
1,4	4,055 199 967	4,055 199 72	25
1,5	4,481 689 070	4,481 688 77	30
1,6	4,953 032 424	4,953 032 07	35
1,7	5,473 947 392	5,473 946 98	41
1,8	6,049 647 464	6,049 647 00	46
1,9	6,685 894 442	6,685 893 90	54
2	7,389 056 099	7,389 055 47	63

Troisième exemple $q = 2$ $\ell = 4$

e^x $h = 0,12$

		sol. calculée	sol. exacte	erreur. 10^{-9}
6	5	18221187851	1,822 118 800	20
72	5	2 544331651	2,054 433 211	51
84	5	23163668951	2,316 366 978	88
96	5	26116963351	2,611 696 473	143
1 8	51	29446793751	2,944 679 551	181
12	51	332 1166751	3,320 116 923	253

e^{-x} $h = 0,1$

5	5	6 653 6635	0,606 530 660	-3
6	5	5488116415	0,548 811 636	-5
7	5	4965853115	0,496 585 304	-7
8	5	4493289735	0,449 328 964	-9
9	5	4 656967 5	0,406 569 660	-10
1	51	3678794525	0,367 879 441	-11
11	51	332871 955	0,332 871 084	-11
12	51	3 11942235	0,301 194 212	-11

e^{-x} $h = 0,12$

6	5	5488116475	0,548 811 636	-11
72	5	4867522765	0,486 752 256	-20
84	5	43171 5495	0,431 710 523	-26
96	5	3828929165	0,382 892 886	-30
1 8	51	33959556 5	0,339 595 526	-34
12	51	3 11942485	0,301 194 212	-36

6) $\ell = 6$; $q = 2$

$$Q_{16} = \frac{-1}{6.6!} P_6$$

$$Q_{15} = \frac{1}{5.5!} \left[P_5 + P_6 \right]$$

$$Q_{14} = \frac{-1}{4.4!} \left[P_4 + P_5 + \frac{P_6}{2!} \right]$$

$$Q_{13} = \frac{1}{3.3!} \left[P_3 + P_4 + \frac{P_5}{2!} + \frac{P_6}{3!} \right]$$

$$Q_{12} = \frac{-1}{2.2!} \left[P_2 + P_3 + \frac{P_4}{2!} + \frac{P_5}{3!} + \frac{P_6}{4!} \right]$$

$$Q_{11} = P_1 + P_2 + \frac{P_3}{2!} + \frac{P_4}{3!} + \frac{P_5}{4!} + \frac{P_6}{5!}$$

$$Q_{10} = 1 - \sum_{1}^{\ell} Q_{1i}$$

$$A_{10} = \theta + Q_{11} + \dots + 6\,Q_{16}$$

$$A_{21} = \frac{7!}{P_7^*}$$

$$Q_{26} = -\frac{1}{6}\left[1 - A_{21}\,\frac{P_6^*}{6!}\right]$$

$$Q_{25} = \frac{1}{5}\left[7 - \frac{A_{21}}{5!}\,(P_5^* + P_6^*)\right]$$

$$Q_{24} = -\frac{1}{4}\left[21 - \frac{A_{21}}{4!}\,(P_4^* + P_5^* + \frac{P_6^*}{2!})\right]$$

$$Q_{23} = \frac{1}{3}\left[35 - \frac{A_{21}}{3!}\,(P_3^* + P_4^* + \frac{P_5^*}{2!} + \frac{P_6^*}{3!})\right]$$

$$Q_{22} = -\frac{1}{2}\left[35\,\frac{A_{21}}{2!}\,(P_2^* + P_3^* + \frac{P_4^*}{2!} + \frac{P_5^*}{3!} + \frac{P_6^*}{4!})\right]$$

$$Q_{21} = 21 - A_{21}\,(P_1^* + P_2^* + \frac{P_3^*}{2!} + \frac{P_4^*}{3!} + \frac{P_5^*}{4!} + \frac{P_6^*}{5!})$$

$$Q_{20} = 1 - \sum_1^{\ell} Q_{2i}$$

$$A_{20} = 1 - A_{21} + Q_{21} + \dots + 6\,Q_{26}$$

Choix de θ $\quad \theta^*$ est tel que $\quad P_8^* - 8\,P_7^* = 0$ $\quad$ c'est-à-dire :

$$9\,\theta^7 + 16\,\theta^6 + 1078\,\theta^5 + 3360\,\theta^4 - 4445\,\theta^3 + 560\,\theta^2 - 3132\,\theta - 1140 = 0$$

$$\theta \simeq 0{,}746\ 079\ 880$$

Les calculs des coefficients sont entachés d'une certaine erreur et l'erreur machine se fait sentir. Il faut s'attendre à ce que les résultats soient légèrement moins bons que cette méthode en h^8 ne le laisse supposer.

	0	1	2	3	4	5	6
1	-3,799 755 247	8,778 853 306	-6,977 482 355	4,546 554 033	-2,018 584 219	0,533 531 710	-0,063 117 228 4
2	1,231 453 021	-0,528 371 126	0,539 040 800	-0,369 542 773	0,166 266 940	-0,044 051 161 8	0,005 204 299 166

Q

	0	1
1	3,424 248 881	
2	0,279 288 656	0,637 831 245 7

A

Application : $y' = -2ty$ $\quad h = 0,1 \quad$ $(y = e^{-x^2})$

t	sol. ex.	sol. appr.	erreur.10^{-9}
- 1,3	0,184 519 524	0,184 519 504	+ 20
- 1,2	0,236 927 759	0,236 927 720	+ 39
- 1,1	0,298 197 279	0,298 197 215	+ 64
- 1	0,367 879 441	0,367 879 356	+ 85
- 0,9	0,444 858 066	0,444 857 957	+ 109
- 0,8	0,527 292 424	0,527 292 298	+ 126
- 0,7	0,612 626 394	0,612 626 249	+ 145
- 0,6	0,697 676 326	0,697 676 159	+ 167
- 0,5	0,778 800 783	0,778 800 588	+ 195
- 0,4	0,852 143 789	0,852 143 561	+ 228
- 0,3	0,913 931 185	0,913 930 920	+ 265
- 0,2	0,960 789 439	0,960 789 140	+ 299
- 0,1	0,990 049 834	0,990 049 517	+ 317
0	1	0,999 999 696	+ 304
0,1	0,990 049 834	0,990 049 572	+ 262
0,2	0,960 789 439	0,960 789 249	+ 190
0,3	0,913 931 185	0,913 931 103	+ 82
0,4	0,852 143 789	0,852 143 823	- 34
0,5	0,778 800 783	0,778 800 915	- 132
2	0,018 315 038 9	0,018 316 173 7	-1134,8

Deuxième exemple :

$$y' = -2ty^2 \qquad \left(y = \frac{1}{t^2 + 1}\right)$$

t	sol. ex.	sol. calculée	erreur.10^{-9}
- 1,3	0,371 747 212	0,371 747 211	+ 1
- 1,2	0,409 836 065	0,409 836 067	- 2
- 1,1	0,452 488 688	0,452 488 692	- 4
- 1	0,500	0,500 000 006	- 6
- 0,9	0,552 486 188	0,552 486 194	- 6
- 0,8	0,609 756 097	0,609 756 093	+ 4
- 0,7	0,671 140 940	0,671 140 912	+ 28
- 0,6	0,735 294 117	0,735 294 045	+ 72
- 0,5	0,800 000 000	0,799 999 873	+ 127
- 0,4	0,862 068 965	0,862 068 804	+ 161
- 0,3	0,917 431 193	0,917 431 038	+ 155
- 0,2	0,961 538 461	0,961 538 256	+ 205
- 0,1	0,990 099 010	0,990 098 443	+ 567
0	1	0,999 998 688	+1312

../..

0,1	0,990 099 010	0,990 097 163	+1847
0,2	0,961 538 461	0,961 537 470	+ 991
0,3	0,917 431 193	0,917 432 871	-1677
0,4	0,862 068 965	0,862 073 473	-4508
0,5	0,800 000 000	0,800 005 026	-5026
0,6	0,735 294 117	0,735 296 809	-2692
0,7	0,671 140 940	0,671 140 324	+ 616
0,8	0,609 756 097	0,609 753 303	+2794
0,9	0,552 486 189	0,552 482 942	+3247
1	0,500 000 000	0,499 997 446	+2554
1,1	0,452 488 688	0,452 487 186	+1502
1,2	0,409 836 065	0,409 835 450	+ 615
1,3	0,371 747 212	0,371 747 112	+ 100
1,4	0,337 837 837	0,337 837 944	- 107
1,5	0,307 692 308	0,307 692 457	- 149
1,6	0,280 898 876	0,280 899 001	- 125
1,7	0,257 069 409	0,257 069 488	- 79
1,8	0,235 849 056	0,235 849 096	- 40
1,9	0,216 919 740	0,216 919 754	- 14
2	0,200 000 000	0,200 000 000	0

CONCLUSION

Les résultats numériques concordent en général avec ce qu'on peut attendre théoriquement. Ce sont des méthodes qui posent des problèmes de démarrage mais qui semblent pouvoir rivaliser avec les formules d'Adams de même rang :

1) par les calculs réduits : 2 calculs de la dérivée $X(x, t)$ par pas

2) par leur facilité de mise en oeuvre.

Une étude générale de la stabilité reste à faire mais cette étude semble complexe vu qu'il faut étudier les racines d'un polynome dont les coefficients sont des fractions rationnelles d'un paramètre. Il semble bien cependant que les choix de θ que nous avons faits ($Q_{2,\ell} = 0$ ou $Q_{2,\ell+1} = 0$) assurent la stabilité de la récurrence linéaire. C'est du moins ce que montre un calcul a posteriori.

3 - ETUDE DES METHODES RKL avec s = 2 ; ℓ = r qq A 2 HORNER

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{cases} x_{il} = \sum_{o}^{\ell} Q_{q-1,m}\, x_{i-m} + h \sum_{o}^{\ell} A_{q-1,m}\, X_{i-m} \\ x_{i+1} = \sum_{o}^{\ell} Q_{q,m}\, x_{i-m} + h \left[\sum_{o}^{\ell} A_{q,m}\, X_{i-m} + A_{qq-1}\, X_{1} \right] \end{cases}$$

Les systèmes qui permettent de déterminer les inconnues ont été donnés dans le chapitre II. Comme nous l'avons déjà dit, nous allons étudier ces méthodes une à une :

$\ell = 0$ q = 2 (ordre 2)
$\ell = 1$ q = 3 (ordre 4)
$\ell = 2$ q = 4 (ordre 6)
$\ell = 3$ q = 5 (ordre 8)

1) $\ell = 0$; q = 2 - C'est un cas particulier, commun d'ailleurs avec les méthodes $RKL_{2,\ell}$; nous ne nous y arrêtons pas.

2) $\ell = 1$; q = 3 - Les équations à satisfaire sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{20} + Q_{21} &= 1 \\ -Q_{21} + A_{20} + A_{21} &= \theta \\ Q_{21} - 2A_{21} &= \theta^2 \\ -Q_{21} + 3A_{21} &= \theta^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Q_{30} + Q_{31} &= 1 \\ -Q_{31} + A_{30} + A_{31} + A_{32} &= 1 \\ Q_{31} - 2A_{31} + 2A_{32}\,\theta &= 1 \\ -Q_{31} + 3A_{31} + 3A_{32}\,\theta^2 &= 1 \\ Q_{31} - 4A_{31} + 4A_{32}\,\theta^3 &= 1 \end{aligned}$$

(Il suffit de faire, en fait, $\theta_1 = -1$ dans les formules que nous avons données au début du chapitre II.)

Q

	0	1
2	$(1-\theta^2)(3+2\theta)$	$\theta^2(3+2\theta)$
3	$\frac{8(1+\theta)}{1+2\theta}$	$\frac{10\theta-7}{1+2\theta}$

A

	0	1	2
2	$\theta+\theta^2(2+\theta)$	$\theta^2(1+\theta)$	
3	$\frac{2\theta^2-2\theta-2}{\theta(1+2\theta)}$	$\frac{4\theta^2-2}{(1+\theta)(1+2\theta)}$	$\frac{2}{\theta(1+\theta)(1+2\theta)}$

Stabilité : La récurrence linéaire sera stable si : $|Q_{31}| < 1$

c'est-à-dire : $\left|\frac{10\theta - 7}{1 + 2\theta}\right| < 1 \Rightarrow 0,5 < \theta < 1$

Choix de θ

a) On peut choisir θ tel que $Q_{31} = 0$ c'est-à-dire $\theta = 0,7$. On obtient :

	0	1
2	-1,156	2,156
3	1	0

	0	1	
2	2,023	0,833	2
3	0,309 523 810	-0,009 803 921 56	0,700 280 112

b) Nous pouvons chercher à déterminer θ de telle sorte que les coefficients $Q_{q,m}$ et A_{qm} satisfassent une équation de plus, à savoir :

$$-\frac{Q_{31}}{5!} + \frac{A_{31}}{4!} + \frac{A_{32}}{4!}\theta^4 = \frac{1}{5!}$$

Le déterminant complet du système doit être nul. Mais on a vu précisément qu'il existait toujours une racine θ ($\theta \in]0,1[$) telle que cette condition soit satisfaite.

Le calcul donne $\theta_o^* = \frac{1 + \sqrt{41}}{10} \simeq 0,740\,312\,423$

et cette valeur convient puisque $0,5 < \theta_o^* < 1$

	0	1
2	-1,455 662 37	2,455 662 37
3	0,837 490 852	0,162 509 148

Q

	0	1	
2	2,242 174 840	0,953 799 943	2
3	0,492 189 403	0,044 532 583 5	0,625 78/ 161

A

Nous rassemblons des résultats donnés par ces deux choix de θ :

$$y' = -2ty$$

t	$y=e^{-x^2}$	$Q_{31}=0$	erreur $.10^{-6}$	θ^*	erreur $.10^{-6}$
-1,8	0,039 163 895 1	0,039 161 945	1,95	0,039 161 822	2
-1,7	0,055 576 212 6	0,055 572 824 6	3,4	0,055 572 838 6	3,4
-1,6	0,077 304 740 5	0,077 299 663 5	5,07	0,077 299 520 1	5,22
-1,5	0,105 399 225	0,105 392 906	6,32	0,105 392 696	6,53
-1,4	0,140 858 421	0,140 851 490	6,9	0,140 851	7,4
-1,3	0,184 519 524	0,184 512 986	6,5	0,184 512 132	7,4
-1,2	0,236 927 759	0,236 922 828	4,9	0,236 921 417	6,3
-1,1	0,298 197 279	0,298 195 251	2,03	0,298 193 131	4,15
-1	0,367 879 441	0,367 881 482	-2,04	0,367 878 504	0,937
-0,9	0,444 858 066	0,444 865 008	-6,9	0,444 861 080	-3
-0,8	0,527 292 424	0,527 304 595	-12,2	0,527 299 696	-7,3
-0,7	0,612 626 394	0,612 643 541	-17,15	0,612 637 738	-11,3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	1,000 025 64	-25	1,000 019 07	-19

3) $\ell = 2$; $q = 4$ - C'est une méthode d'ordre 6. Les coefficients satisfont à :

$$\sum Q_{3m} = 1 \quad ; \quad \sum Q_{4m} = 1$$

$$-\sum m Q_{3m} + \sum A_{3m} = \theta \; ; \quad -\sum m Q_{4m} + \sum A_{4m} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^2 & -2 & -2 \cdot 2 \\ -1 & -2^3 & 3 & 3 \cdot 2^2 \\ 1 & 2^4 & -4 & -4 \cdot 2^3 \\ -1 & -2^5 & 5 & 5 \cdot 2^4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{31} \\ Q_{32} \\ A_{31} \\ A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \\ \theta^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^2 & -2 & -2 \cdot 2 & 2\theta \\ -1 & -2^3 & 3 & 3 \cdot 2^2 & 3\theta^2 \\ 1 & 2^4 & -4 & -4 \cdot 2^3 & 4\theta^3 \\ -1 & -2^5 & 5 & 5 \cdot 2^4 & 5\theta^4 \\ 1 & 2^6 & -6 & -6 \cdot 2^5 & 6\theta^5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{41} \\ Q_{42} \\ A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La résolution formelle des deux systèmes donne :

$$Q_{31} = \theta^2 (\theta + 2)^2$$

$$Q_{32} = \frac{\theta^2}{4} (\theta + 1)^2 (3\theta + 7)$$

$$A_{31} = \theta^2 (\theta + 1) (\theta + 2)^2$$

$$A_{32} = \frac{\theta^2}{4} (\theta + 1)^2 (\theta + 2)$$

$$Q_{41} = \frac{27 (\theta^2 + 2\theta - 2)}{3\theta^2 + 6\theta + 2}$$

$$Q_{42} = \frac{60\theta^2 - 15\theta - 23}{2 (3\theta^2 + 6\theta + 2)}$$

$$A_{41} = \frac{18 (3\theta^3 + 4\theta^2 - 2\theta - 2)}{(\theta+1) (3\theta^2 + 6\theta + 2)}$$

$$A_{42} = \frac{3 (6\theta^3 + 9\theta^2 - 5\theta - 4)}{2 (\theta + 2) (3\theta^2 + 6\theta + 2)}$$

$$A_{43} = \frac{18}{\theta (\theta+1) (\theta+2) (3\theta^2 + 6\theta + 2)}$$

Choix de θ

a) $Q_{42} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{15 + \sqrt{5745}}{120} \simeq 0,756\,631\,485$

La stabilité de la récurrence linéaire sera assurée si $|Q_{41}| < 1$ puisque le polynome caractéristique devient :

$$r (r + Q_{41}) (r - 1) = 0$$

Les tableaux des coefficients sont alors :

Q	0	1	2
3	-7,444 343 168	4,350 370 475	4,093 972 693
4	0,719 596 816	0,280 403 184	0

A	0	1	2	
3	4,435 505 961	7,641 997 748	1,217 443 637	3
4	0,592 972 323	0,094 556 31125	-0,002 092 108 415	0,594 966 658

b) Valeur de θ qui annule le déterminant complet du système obtenu en rajoutant l'équation : $-Q_{41} - 2^7 Q_{42} + 7A_{41} + 7.2^6 A_{42} + 7\theta^6 A_{43} = 1$

On trouve : $\theta \simeq 0,774\,317\,838$

D'où les valeurs :

	0	1	2
3	-8,014 194 140	4,614 779 524	4,399 414 616
4	0,445 662 829	0,473 852 752	0,080 484 419 3

	0	1	2	3
3	4,690 666 312	8,188 085 628	1,309 174 654	
4	0,764 536 896	0,291 208 560	0,019 851 955 7	0,559 224 173

La récurrence est stable car l'équation : $r^2 + (Q_{41}+Q_{42})\, r + Q_{42} = 0$

a ses racines inférieures à 1 en module .

Premier exemple : $q = 4$ $\ell = 2$ $y' = -2\, t\, y^2$ θ^* $h = 0,1$

			erreur. 10^{-8}
016	51	28 8988785	- 0,2
015	51	3 76923125	- 0,4
014	51	33783785 5	- 1,3
013	51	3717472365	- 2,6
012	51	4 98361125	- 4,7
011	51	4524887685	- 8,0
01	51	5 1295	- 12,9
09	5	5524863795	- 19
08	5	6 97563615	- 26
07	5	6711412585	- 32
06	5	7352944485	- 33
05	5	8 2585	- 25
04	5	862 69 665	- 10
03	5	9174311 75	+ 8,6
02	5	9615382745	+ 38,7
01	5	99 988395	+ 17,1
		9999998345	+ 83
1	5	99 986215	+ 39
2	5	9615375985	+ 86
3	5	9174298875	+ 130
4	5	862 676 85	+ 136
5	5	7999991245	+ 88
6	5	7352941265	- 90
7	5	6711419835	- 104
8	5	6 97581 65	- 201
9	5	5524889685	- 278
1	51	5 33255	- 330

../..

11	51	4524923465	- 366
12	51	4 98398855	- 382
13	51	371751 595	- 385
14	51	3378416115	- 377
15	51	3 76959335	- 363
16	51	28 9 23 15	- 443
17	51	257 725965	- 319
18	51	2358519855	- 293
19	51	2169224 5	- 266
2	51	2 23935	- 239

Deuxième exemple : $q = 4$; $\ell = 2$ $Q_{42} = 0$ $y' = -2 t y^2$ $h = 0,1$

			erreur . 10^{-7}
016	51	28 89888 5	- 0,04
015	51	3 76923145	- 0,06
014	51	3378378545	- 0,17
013	51	3717472425	- 0,30
012	51	4 98361215	- 0,56
011	51	4524887825	- 0,94
01	51	5 15 5	- 1,50
09	5	5524864 85	- 2,20
08	5	6 97564 5	- 3,03
07	5	6711413 25	- 3,62
06	5	7352944975	- 3,80
05	5	8 2925	- 2,92
04	5	862 69 785	- 1,13
03	5	917431 885	+ 1,05
02	5	9615382375	+ 2,24
01	5	99 988275	+ 1,83
		9999998795	+ 1,21
1	5	99 987 5	+ 3,10
2	5	9615376 95	+ 8,50
3	5	9174296815	+ 15,1
4	5	862 67 785	+ 18,9
5	5	7999982645	+ 17,4
6	5	735293 535	+ 10,6
7	5	67114 9 5	+ 0,4
8	5	6 97572725	+ 11,8
9	5	5524886695	+ 0,19
1	51	5 38565	- 38,6
11	51	452494 115	- 53,2
12	51	4 98429865	- 69,2
13	51	37175589 5	- 86,8
14	51	3378484435	- 106
15	51	3 77 49885	- 127

.../...

16	51	28 9137315	- 149
17	51	257 864635	- 171
18	51	2358682415	- 192
19	51	21694 8835	- 211,4
2	51	2 228355	- 228

Troisième exemple $y' = -2\,t\,y$ $y(o) = 1$ $(y = e^{-x^2})$

$q = 4$ $\ell = 2$

t		θ^*	erreur	$Q_{42}=0$	erreur
011	51	2981972495	$+ 3 .10^{-8}$	2981972475	$+ 3,2.10^{-8}$
01	51	36787937 5	+ 7,1	3678793625	+ 7,9
09	5	4448579255	+ 14,1	4448579125	+ 15,4
08	5	5272922 55	+ 22	52729218 5	+ 24
07	5	612626 855	+ 30,9	612626 5 5	+ 34,4
06	5	6976759325	+ 39,4	6976758855	+ 44
05	5	7788 3155	+ 46,8	7788 2615	+ 52
04	5	8521432655	+ 52	8521432 55	+ 58
03	5	91393 6275	+ 55,8	91393 5645	+ 62
02	5	96 7888625	+ 57,7	96 7888 5	+ 63,9
01	5	99 492475	+ 58,7	99 4919 5	+ 64,9
		9999994 45	+ 59,6	9999993515	+ 64,9
1	5	99 492245	+ 61	99 491725	+ 66
2	5	96 7888 65	+ 63	96 7887515	+ 68,8
3	5	91393 5265	+ 65,9	91393 4595	+ 72,6
4	5	85214311 5	+ 67,9	852143 245	+ 76,5
5	5	7788 1115	+ 67,2	7787999965	+ 78,7
6	5	6976757 35	+ 62,3	6976755575	+ 76,9
7	5	61262588 5	+ 51	6126257 55	+ 68,9
8	5	527292 885	+ 33,6	5272919 5	+ 52
9	5	4448579885	+ 7,8	4448578145	+ 25
1	51	3678797 25	- 36	3678795935	- 15
11	51	2981979645	- 68,5	298198 115	- 73,2
12	51	2369289745	$- 12,2.10^{-7}$	2369293355	$- 15,8.10^{-7}$
13	51	1845214235	- 19	1845223995	- 28,8
14	51	14 86127 5	- 28,5	14 86346 5	- 50,4
15	51	1 54 353 5	- 43,1	1 54 82 5	- 89,8
16	51	77311514 49	- 67,7	77321481 49	- 167,4
17	51	55587557949	- 113	556 9396349	- 332
18	51	39184348449	- 204	39234129 49	- 702
19	51	27 91619649	- 398	2721 435949	- 1586
2	51	18398796649	- 832	18696514849	- 3809

Quatrième exemple : $RKL_{4,2}$ $y' = y$ $(y = e^x)$

t		$Q_{42} = 0$	erreur. 10^{-8}	θ^*	erreur. 10^{-8}
4	5	14918246951	1	14918246851	2
5	5	16487212551	2	16487212551	2
6	5	18221187751	3	18221187751	3
7	5	2 137526651	5	2 137526651	5
8	5	222554 8851	5	222554 8851	5
9	5	24596 3 451	7	24596 3 551	6
1	51	27182817451	9	27182817551	8
11	51	3 41659251	10	3 41659251	10
12	51	332 1168 51	12	332 1168 51	12
13	51	36692965151	16	36692965151	16
14	51	4 551997951	18	4 551997951	18
15	51	44816888651	81	44816888651	81
16	51	4953 321951	23	4953 321851	24
17	51	54739471151	28	54739471151	28
18	51	6 496471551	31	6 496471351	33
19	51	6685894 751	37	6685894 751	37
2	51	7389 556851	42	7389 556751	43

Cinquième exemple $q = 4$ $\ell = 2$ $y' = y - \frac{2t}{y}$ $(y = \sqrt{1 + 2t})$

t		$Q_{42} = 0$	erreur. 10^{-8}	θ^*	erreur. 10^{-8}
7	5	15491933551	- 1	15491933451	0
8	5	16124515651	- 1	16124515551	0
9	5	167332 651	- 1	167332 551	0
1	51	1732 5 8251	- 1	1732 5 8 51	1
11	51	17888543951		17888543651	
12	51	18439 89 51	- 1	18439 88851	1
13	51	18973666 51		18973665551	
14	51	19493588751		19493588551	
15	51	2 51		19999999351	7
16	51	2 4939 1451	1	2 4939 1 51	5
17	51	2 976176851		2 976176 51	
18	51	2144761 451		214476 9751	
19	51	219 89 2 51		219 89 1 51	
2	51	2236 679551	3	2236 678151	17

4) $q = 5$; $\ell = 3$ - C'est une méthode d'ordre 8 - Les équations à résoudre sont les suivantes : $\sum Q_{4m} = 1$ $\sum Q_{5m} = 1$

$-\sum m\, Q_{4m} + \sum A_{4m} = \theta$ $-\sum m\, Q_{5m} + \sum A_{5m} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & -2 & -2.2 & -2.3 \\ -1 & -2^3 & -3^3 & 3 & 3.2^2 & 3.3^2 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & -4 & -4.2^3 & -4.3^3 \\ -1 & -2^5 & -3^5 & 5 & 5.2^4 & 5.3^4 \\ 1 & 2^6 & 3^6 & -6 & -6.2^5 & -6.3^5 \\ -1 & -2^7 & -3^7 & 7 & 7.2^6 & 7.3^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{41} \\ Q_{42} \\ Q_{43} \\ A_{41} \\ A_{42} \\ A_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^2 \\ \theta^3 \\ \theta^4 \\ \theta^5 \\ \theta^6 \\ \theta^7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 & -2 & -2.2 & -2.3 & 2\theta \\ -1 & -2^3 & -3^3 & 3 & 3.2^2 & 3.3^2 & 3\theta^2 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & -4 & -4.2^3 & -4.3^3 & 4\theta^3 \\ -1 & -2^5 & -3^5 & 5 & 5.2^4 & 5.3^4 & 5\theta^4 \\ 1 & 2^6 & 3^6 & -6 & -6.2^5 & -6.3^5 & 6\theta^5 \\ -1 & -2^7 & -3^7 & 7 & 7.2^6 & 7.3^6 & 7\theta^6 \\ 1 & 2^8 & 3^8 & -8 & -8.2^7 & -8.3^7 & 8\theta^7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_{51} \\ Q_{52} \\ Q_{53} \\ A_{51} \\ A_{52} \\ A_{53} \\ A_{54} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La résolution formelle de ces deux systèmes donne :

$$Q_{41} = \frac{-\theta^3}{4}(\theta+2)^2(\theta+3)^2$$

$$Q_{42} = \frac{\theta^2}{4}(\theta+1)^2(\theta+3)^3$$

$$Q_{43} = \frac{\theta^2}{108}(\theta+1)^2(\theta+2)^2(11\theta+36)$$

$$A_{41} = \frac{\theta^2}{4}(\theta+1)(\theta+2)^2(\theta+3)^2$$

$$A_{42} = \frac{\theta^2}{4}(\theta+1)^2(\theta+2)(\theta+3)^2$$

$$A_{43} = \frac{\theta^2}{36}(\theta+1)^2(\theta+2)^2(\theta+3)$$

$$Q_{51} = \frac{-36(2\theta^3+2\theta^2-7\theta-3)}{2\theta^3+9\theta^2+11\theta+3}$$

Posons : $\Delta = 2\theta^3 + 9\theta^2 + 11\theta +$

$$Q_{52} = \frac{4}{\Delta}\,(32\,\theta^3 + 81\,\theta^2 - 40\,\theta - 33)$$

$$Q_{53} = \frac{1}{3\Delta}\,(94\,\theta^3 + 115\,\theta^2 - 83\,\theta - 51)$$

$$A_{51} = \frac{36}{(\theta+1)\,\Delta}\,(4\,\theta^4 + 15\,\theta^3 + 9\,\theta^2 - 10\,\theta - 6)$$

$$A_{52} = \frac{3}{(\theta+2)\,\Delta}\,(32\,\theta^4 + 124\,\theta^3 + 80\,\theta^2 - 92\,\theta - 48)$$

$$A_{53} = \frac{4}{(\theta+3)\,\Delta}\,(2\,\theta^4 + 8\,\theta^3 + 5\,\theta^2 - 6\,\theta - 3)$$

$$A_{54} = \frac{144}{(\theta+1)\,(\theta+2)\,(\theta+3)\,\Delta}$$

Nous avons choisi la valeur de θ qui annulait Q_{53} :

$$\theta \simeq 0,784\,328\,225$$

D'où le tableau des coefficients :

		0	1	2	3	
Q	4	-18,419 092 051	-13,392 202 07	26,536 984 93	6,274 309 191	
	5	0,216 675 769	0,585 726 688	0,197 597 543	0	
		0	1	2	3	
A	4	7,701 297 593	30,466 944 07	19,524 636 95	1,596 144 972	4
	5	0,889 320 809	0,494 601 829	0,059 127 274 63	-0,000 774 213 239	0,538 646 074

Remarque :

On a pu noter, déjà pour les formules $RKL_{4,2}$ mais surtout ici, que les coefficients utilisés pour calculer le point intermédiaire avaient une valeur élevée. Il est à craindre que la moindre erreur ne se propage très rapidement et que le point intermédiaire ne soit plus calculé à l'ordre voulu[7].

Les expériences de calcul montrent que les premiers points calculés sont en général bons mais que, par la suite, de fortes instabilités se font sentir.

Premier exemple $y' = -2\,t\,y$ $Q_{53} = 0$

t	y calculé	$y = e^{-x^2}$	erreur.10^{-9}
011 51	2981972935	298197279	- 14
01 51	3678794345	367879441	+ 7
09 5	444858 915	444858066	- 25
08 5	5272924465	527292424	- 22
07 5	6126263685	612626394	+ 26
06 5	6976764 65	697676326	- 80
05 5	7788 7745	778800783	+ 9
04 5	8521437685	852143789	+ 21
03 5	91393127 5	913931185	- 85
02 5	96 7894115	960789439	+ 28
01 5	99 498525	990049834	- 18
	1 51	1	0
1 5	99 498475	990049834	- 13
2 5	96 7894575	960789439	- 18
3 5	9139312225	913931185	- 37
4 5	85214385 5	852143789	- 61
5 5	7788 8955	778800783	- 112
6 5	6976765285	697676326	- 202
7 5	6126267945	612626394	- 400
8 5	5272932765	527292424	} instabilité
9 5	44486 1 15	444858066	
1 51	3678848 85	367879441	
11 51	2982129455	298197279	
12 51	2369777365		
13 51	18469258 5		
14 51	1415 4 775		
15 51	1 79812 25		
16 51	88322174 49		
17 51	1 55531815		
18 51	2793877225		
19 51	124714 5651		
2 51	65497 82251	0,0183156389	

Deuxième exemple $y' = -2\,t\,y^2$

t	y calculé	$\frac{1}{1+t^2}$	erreur . 10^{-9}
016 51	28 8988745	280898876	- 2
015 51	3 76923 75	307692308	- 8
014 51	3378378395	337837837	+ 2
013 51	3717471985	371747212	+ 14
012 51	4 9836 915	409836065	+ 26
011 51	4524886565	452488688	+ 32
01 51	4999999965	5	+ 4

../..

09	5	5524862795	552486188	- 91
08	5	6 97558885	609756097	- 209
07	5	6711411675		
06	5	7352941 95	735294117	- 8
05	5	7999994265	8	+ 574
04	5	862 699725	862068965	- 1007
03	5	91743 4485	917431193	+ 745
02	5	9615381915	961538461	+ 270
01	5	99 996645	990099010	- 654
		9999997275	1	+ 273
1	5	99 995655		
2	5	9615382755		
3	5	9174319685		
4	5	862 69 6 5		
5	5	8 16725	800000000	
6	6	7352959085		
7	5	6711477585		
8	5	6 977115 5		
9	5	552531 25		
1	51	5 12 2 5	500000000	
11	51	4528268795		
12	51	41 7565115		
13	51	3742 1 125		
14	51	34392753 5		
15	51	32 5318995		
16	51	29882579 5		
17	51	2716111425		
18	51	2583 718 5		
19	51	23865 5 25		
2	51	215 264345	200000000	

instabilité

Troisième exemple $q = 5$; $\ell = 3$ $Q_{53} = 0$ $y = y'$ $y(o) = 1$

t		y calculé	$y = e^x$	erreur. 10^{-8}
4	5	14918246851	1491824698	2
5	5	16487212751	1648721271	0
6	5	18221187951	1822118800	1
7	5	2 137526851	2013752707	3
8	5	222554 9351	2225540928	0
9	5	24596 3 851	2459603111	3
1	51	27182817851	2718281828	5
11	51	3 4166 351	3004166024	- 1
12	51	332 1168551	33201169227	7
13	51	36692965251	36692966676	5
14	51	4 551999551	40551999668	2
15	51	44816889251	44816890703	15
16	51	4953 323651	49530324243	6
17	51	54739473751	54739473917	2
18	51	6 496472551	60496474644	21
19	51	66858944451	66858944422	- 2
2	51	7389 56 451	73890560989	5,9

Quatrième exemple $y' = y - 2t/y$ $y(o) = 1$

t		y calculé	$y = \sqrt{1 + 2t}$	erreur.10^{-8}
7	5	15491933 51		
8	5	16124515551	1612451551	. 0
9	5	167332 351		
1	51	1732 5 6851	173205081	13
11	51	17888544951		
12	51	18439 86651	184390889	23
13	51	18973664351		
14	51	19493593 51		
15	51	19999988251	2	118
16	51	2 4939 9 51	204939090	0
17	51	2 97618 551		
18	51	21447571351		
19	51	219 8967 51		
2	51	2236 616651	223606798	632

Conclusion

Il ne semble pas qu'il y ait intérêt à gagner des ordres élevés en continuant dans cette direction, vu les instabilités qui se présentent :

Les méthodes d'ordre 6 paraissent être intéressantes. En tout cas, elles peuvent entrer en compétition avec les méthodes d'Adams de même rang. En particulier, les calculs des valeurs des dérivées $X(x, t)$ sont moins nombreux.

Pour les méthodes d'ordre 8, les coefficients doivent être calculés avec grande précision, et il faut penser qu'elles ne peuvent être appliquées que dans le cadre d'un calcul en machine avec double précision.

L'étude de la stabilité se complique du fait de l'introduction dans le le calcul de x_{i+1} du groupement $h \sum_{o}^{\ell} A_{qm} X_{i-m}$. Il peut alors se présenter des instabilités qu'on rencontre parfois dans les formules d'Adams.

- Chapitre IV -

ETUDE COMPAREE DES METHODES D'ORDRE 5

Nous n'avons étudié jusqu'ici que des méthodes qui ne demandaient que deux Horners par pas.

. soit que ce coût était intrinsèque $q = 2$

. soit qu'il était dû à une économie :

$$\theta_\alpha \in \{-1, -2 \dots -\ell\} \quad ; \quad \theta_{q-1} = \theta$$
$$\alpha \in \{q-1, q\} \qquad \theta \in]0,1[$$

Nous allons maintenant rencontrer des méthodes qui utilisent trois Horners par pas, c'est-à-dire que nous aurons à notre disposition deux valeurs θ et θ' appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

L'étude qui va suivre nous y conduira tout naturellement.

METHODES D'ORDRE 5

Il existe quatre méthodes d'ordre 5 :

1) $q = 2$ $\ell = 3$ $\begin{cases} \ell = 3 \\ r = 0 \\ s = 2 \end{cases}$

2) $q = 3$ $\ell = 2$ $\begin{cases} \ell = 2 \\ r = 1 \\ s = 2 \end{cases}$

2') $q = 3$ $\ell = 2$ $\begin{cases} \ell = 2 \\ r = 0 \\ s = 3 \end{cases}$

3) $q = 4$ $\ell = 1$ $\begin{cases} \ell = 1 \\ r = 1 \\ s = 3 \end{cases}$

Nous allons établir les valeurs des coefficients respectifs de ces méthodes et nous regrouperons les résultats numériques des expériences de calcul, ce qui nous permettra de comparer.

a) $q = 2$, $\ell = 3$ - Cette méthode a déjà été étudiée plus haut.

b) $q = 3$, $\ell = 2$ - On a :

$$x_{i1} = Q_{10} x_i + Q_{11} x_{i-1} + Q_{12} x_{i-2} + h\ A_{10} X_o$$

$$x_{i2} = Q_{20} x_i + Q_{21} x_{i-1} + Q_{22} x_{i-2} + h\ (A_{20} X_o + A_{21} X_1)$$

$$x_{i+1} = Q_{30} x_i + Q_{31} x_{i-1} + Q_{32} x_{i-2} + h\ (A_{30} X_o + A_{31} X_1 + A_{32} X_2)$$

En utilisant le tableau général, les équations à satisfaire sont les suivantes:

$$Q_{10} + Q_{11} + Q_{12} = 1$$

$$- Q_{11} - 2 Q_{12} = \theta_1 - A_{10}$$

$$Q_{20} + Q_{21} + Q_{22} = 1$$

$$- Q_{21} - 2 Q_{22} = \theta_2 - A_{20} - A_{21}$$

$$Q_{30} + Q_{31} + Q_{32} = 1$$

$$- Q_{31} - 2 Q_{32} = 1 - A_{30} - A_{31} - A_{32}$$

1) $$A_{31}\ \theta_1 + A_{32}\ \theta_2 + \frac{1}{2} Q_{31} + \frac{4}{2!} Q_{32} = \frac{1}{2!}$$

2) $$A_{31}\ \frac{\theta_1^2}{2!} + A_{32}\ \frac{\theta_2^2}{2!} - \frac{1}{3!} Q_{31} - \frac{8}{3!} Q_{32} = \frac{1}{3!}$$

3) $$A_{31}\ \frac{\theta_1^3}{3!} + A_{32}\ \frac{\theta_2^3}{3!} + \frac{1}{4!} Q_{31} + \frac{16}{4!} Q_{32} = \frac{1}{4!}$$

4) $$A_{31}\ \frac{\theta_1^4}{4!} + A_{32}\ \frac{\theta_2^4}{4!} - \frac{1}{5!} Q_{31} - \frac{32}{5!} Q_{32} = \frac{1}{5!}$$

5) $A_{31}\left[\frac{Q_{11}}{2}+2Q_{12}\right]+A_{32}\left[\frac{Q_{21}}{2}+2Q_{22}\right]+A_{32}A_{21}\theta_1-\frac{1}{6}Q_{31}-\frac{8}{6}Q_{32}=\frac{1}{6}$

6) $A_{31}\left[\frac{-Q_{11}}{6}-\frac{8Q_{12}}{6}\right]+A_{32}\left[\frac{-Q_{21}}{6}-\frac{8Q_{22}}{6}\right]+A_{32}A_{21}\frac{\theta_1^2}{2}+\frac{1}{24}Q_{31}+\frac{16}{24}Q_{32}=\frac{1}{24}$

7) $A_{31}\left[\frac{-Q_{11}}{6}-\frac{8Q_{12}}{6}\right]+A_{32}\left[\frac{-Q_{21}}{6}-\frac{8Q_{22}}{6}\right]+A_{32}A_{21}\left[\frac{Q_{11}}{2}+2Q_{12}\right]+\frac{1}{24}Q_{31}+\frac{16}{24}Q_{32}=\frac{1}{24}$

8) $A_{31}\theta_1\left[\frac{Q_{11}}{2}+2Q_{12}\right]+A_{32}\theta_2\left[\frac{Q_{21}}{2}+2Q_{22}\right]+A_{32}A_{21}\theta_1\theta_2+\frac{3}{24}Q_{31}+\frac{3.16}{24}Q_{32}=\frac{3}{24}$

9) $A_{31}\left[\frac{Q_{11}}{24}+\frac{16Q_{12}}{24}\right]+A_{32}\left[\frac{Q_{21}}{24}+\frac{16Q_{22}}{24}\right]+A_{32}A_{21}\frac{\theta_1^3}{6}-\frac{1}{120}Q_{31}-\frac{32}{120}Q_{32}=\frac{1}{120}$

10) $A_{31}\left[\frac{Q_{11}}{24}+\frac{16Q_{12}}{24}\right]+A_{32}\left[\frac{Q_{21}}{24}+\frac{16Q_{22}}{24}\right]+\frac{1}{3}A_{32}A_{21}\theta_1\left[\frac{Q_{11}}{2}+2Q_{12}\right]-\frac{1}{120}Q_{31}-\frac{32}{120}Q_{32}=\frac{1}{120}$

11) $A_{31}\left[\frac{Q_{11}}{24}+\frac{16Q_{12}}{24}\right]+A_{32}\left[\frac{Q_{21}}{24}+\frac{16Q_{22}}{24}\right]+A_{32}A_{21}\left[\frac{-Q_{11}}{6}-\frac{8Q_{12}}{6}\right]-\frac{1}{120}Q_{31}-\frac{32}{120}Q_{32}=\frac{1}{120}$

12) $\equiv$ 11)

13) $A_{31}\theta_1\left[\frac{-Q_{11}}{6}-\frac{8Q_{12}}{6}\right]+A_{32}\theta_2\left[\frac{-Q_{21}}{6}-\frac{8Q_{21}}{6}\right]+A_{32}\theta_2A_{21}\frac{\theta_1^2}{2}-\frac{4}{120}Q_{31}-\frac{4.32Q_{32}}{120}=\frac{4}{120}$

14) $A_{31}\theta_1\left[\frac{-Q_{11}}{6}-\frac{8Q_{12}}{6}\right]+A_{32}\theta_2\left[\frac{-Q_{21}}{6}-\frac{8Q_{21}}{6}\right]+A_{32}\theta_2A_{21}\left[\frac{Q_{11}}{2}+2Q_{12}\right]-\frac{4.32Q_{32}}{120}-\frac{4.Q_{31}}{120}=\frac{4}{120}$

15) $A_{31}\frac{\theta_1^2}{2}\left[\frac{Q_{11}}{2}+2Q_{12}\right]+A_{32}\frac{\theta_2^2}{2}\left[\frac{Q_{21}}{2}+2Q_{22}\right]+A_{32}\frac{\theta_2^2}{2}A_{21}\theta_1-\frac{6}{120}Q_{31}-\frac{6.32Q_{32}}{120}=\frac{6}{120}$

16) $\frac{1}{2}A_{32}\left[A_{21}\theta_1+\frac{Q_{21}}{2}+2Q_{22}\right]^2+\frac{1}{2}A_{31}\left(\frac{Q_{11}}{2}\right)^2-\frac{3}{120}Q_{31}-\frac{3.32Q_{32}}{120}=\frac{3}{120}$

Des simplifications évidentes s'imposent :

De 6) et 7), on tire :

$$\frac{Q_{11}}{2}+2Q_{12}=\frac{\theta_1^2}{2} \qquad (1')$$

9) et 10) sont les mêmes en vertu de (1').

De 9) et 11), on tire :

$$\frac{-Q_{11}}{6} - \frac{8\,Q_{12}}{6} = \frac{\theta_1^3}{3!}$$

5) et 2) $\Rightarrow$

$$\frac{Q_{21}}{2} + 2\,Q_{22} + A_{21}\,\theta_1 = \frac{\theta_2^2}{2}$$

6) et 3) $\Rightarrow$

$$\frac{-Q_{21}}{3!} - \frac{8Q_{12}}{3!} + A_{21}\,\frac{\theta_1^2}{2} = \frac{\theta_2^3}{3!}$$

Toutes les équations sauf 9) deviennent identiques à des équations déjà écrites. En fin de compte, les différents coefficients satisfont à :

I

$$\begin{cases} \dfrac{Q_{31}}{2!} + \dfrac{4\,Q_{32}}{2!} + A_{31}\,\theta_1 + A_{32}\,\theta_2 = \dfrac{1}{2!} \\ \dfrac{-Q_{31}}{3!} - \dfrac{8\,Q_{32}}{3!} + A_{31}\,\dfrac{\theta_1^2}{2!} + A_{32}\,\dfrac{\theta_2^2}{2!} = \dfrac{1}{3!} \\ \dfrac{Q_{31}}{4!} + \dfrac{16}{4!}Q_{32} + A_{31}\,\dfrac{\theta_1^3}{3!} + A_{32}\,\dfrac{\theta_2^3}{3!} = \dfrac{1}{4!} \\ \dfrac{-Q_{31}}{5!} - \dfrac{32\,Q_{32}}{5!} + A_{31}\,\dfrac{\theta_1^4}{4!} + A_{32}\,\dfrac{\theta_2^4}{4!} = \dfrac{1}{5!} \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} \dfrac{Q_{11}}{2!} + \dfrac{4\,Q_{12}}{2!} = \dfrac{\theta_1^2}{2!} \\ \dfrac{-Q_{11}}{3!} - \dfrac{8\,Q_{12}}{3!} = \dfrac{\theta_1^3}{3!} \end{cases}$$

III

$$\begin{cases} \dfrac{Q_{21}}{2!} + \dfrac{4\,Q_{22}}{2!} + A_{21}\,\theta_1 = \dfrac{\theta_2^2}{2!} \\ \dfrac{-Q_{21}}{3!} - \dfrac{8\,Q_{22}}{3!} + A_{21}\,\dfrac{\theta_1^2}{2!} = \dfrac{\theta_2^3}{3!} \end{cases}$$

9) $\Rightarrow$

$$\frac{Q_{21}}{4!} + \frac{16\,Q_{22}}{4!} + A_{21}\,\frac{\theta_1^3}{3!} = \frac{\theta_2^4}{4!} + \frac{A_{31}}{A_{32}}\left[\frac{Q_{11}}{4!} + \frac{16\,Q_{12}}{4!} - \frac{\theta_1^4}{4!}\right]$$

Nous pouvons résoudre ce système dans deux cas particuliers

1) $\frac{Q_{11}}{4!} + \frac{16\,Q_{12}}{4!} - \frac{\theta_1^4}{4!} = 0$

On retombe sur une méthode à deux Horners car le système II devient :

$$\frac{Q_{11}}{2!} + \frac{4\,Q_{12}}{2!} = \frac{\theta_1^2}{2!}$$

$$\frac{-Q_{11}}{3!} - \frac{8\,Q_{12}}{3!} = \frac{\theta_1^3}{3!}$$

$$\frac{Q_{11}}{4!} + \frac{16\,Q_{12}}{4!} = \frac{\theta_1^4}{4!}$$

Pour qu'il admette une solution unique, il faut que le déterminant complet soit nul $\theta_1 = -1$ ou $\theta_1 = -2$

alors : si $\theta_1 = -1$ $Q_{11} = 1$ $Q_{12} = 0$

si $\theta_1 = -2$ $Q_{11} = 0$ $Q_{12} = 1$

Nous ne nous y arrêtons pas.

2) Imposons-nous $A_{31} = 0$; Alors, par (1), θ_2 est déterminé :

$$\theta_2 = 0{,}728\,901\,980$$

Les autres coefficients sont alors :

$$\begin{cases} Q_{11} = \theta_1^2 (2 + \theta_1) \\ Q_{12} = \dfrac{-\theta_1^2}{4} (1 + \theta_1) \\ Q_{10} = 1 - \dfrac{\theta_1^2}{4} (3\theta_1 + 7) \\ A_{10} = \dfrac{\theta_1}{2} (\theta_1 + 1)(\theta_1 + 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{21} = \dfrac{\theta_2^2 (\theta_2 + 2) \left[4\theta_1^2 + 3\theta_1 (2 - \theta_2) - 4\theta_2 \right]}{4\theta_1^2 + 9\theta_1 + 4} \\ Q_{22} = \dfrac{-\theta_2^2 (\theta_2 + 1) \left[4\theta_1^2 + 3\theta_1 (1 - \theta_2) - 2\theta_2 \right]}{4 (4\theta_1^2 + 9\theta_1 + 4)} \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_{21} &= \frac{\theta_2^2 (\theta_2 + 2)\ (\theta_2 + 1)}{\theta_1 (4\theta_1^2 + 9\theta_1 + 4)} \\
Q_{20} &= 1 - Q_{21} - Q_{22} \\
A_{20} &= \theta_2 - A_{21} + Q_{21} + 2Q_{22}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
Q_{30} &= \frac{-3(2\theta_2^2 - 5)}{4\theta_2^2 + 9\theta_2 + 4} \\
Q_{31} &= \frac{12\theta_2^2 + 9\theta - 12}{4\theta_2^2 + 9\theta_2 + 4} \\
Q_{32} &= \frac{1 - 2\theta_2^2}{4\theta_2^2 + 9\theta_2 + 4} \\
A_{31} &= 0 \\
A_{32} &= \frac{6}{\theta_2 (4\theta_2^2 + 9\theta_2 + 4)} \\
A_{30} &= \frac{6(2\theta_2^3 + 3\theta_2^2 - \theta_2 - 1)}{\theta_2 (4\theta_2^2 + 9\theta_2 + 4)}
\end{aligned}
\right.
$$

Du fait que nous avons imposé $A_{31} = 0$, les $Q_{q,m}$ et $A_{q\alpha}$ ne dépendent pas de θ_1.

Nous pouvons choisir θ_1 de façon à annuler un coefficient pour le Horner précédent. Par exemple Q_{22} :

$$4\theta_1^2 + 3\theta_1 (1 - \theta_2) - 2\theta_2 = 0$$

Avec $\theta_2 = 0{,}728\ 901\ 980$, on trouve :

$$\theta_1 = 0{,}510\ 536\ 007$$

D'où le tableau numérique :

	0	1	2
1	0,444 065 460	0,654 363 715	-0,098 429 175 05
2	0,988 896 855	0,011 103 145 3	0
3	0,931 172 460	0,073 762 089	-0,004 934 542

	0	1	2
1	0,968 041 372		
2	0,230 545 514	0,509 459 611	
3	0,414 988 147	0	0,648 904 807

Nous donnons ci-après le tableau correspondant au cas : $A_{31} = 0$ avec $\theta_1 = -1$. Les Q_{3m} et $A_{3\alpha}$ ne changent pas.

	0	1	2
1	0	1	0
2	-3,353 553 03	3,956 526 98	0,397 026 055
3	0,931 172 460	0,073 762 089	-0,004 934 542

	0	1	2
1	0	1	
2	2,972 814 51	2,506 666 55	2
3	0,414 988 147	0	0,648 904 807

On a gagné un Horner, mais les coefficients servant à calculer le point intermédiaire, sont devenus plus importants.

On remarquera que les coefficients qui interviennent dans le calcul de x_{i+1} sont exactement les mêmes que ceux de la méthode $RKL_{2,2}$. Il fallait s'y attendre puisque l'on s'est imposé $A_{31} = 0$ (La valeur θ^* de la méthode $RKL_{2,2}$ est d'ailleurs telle que $Q_{23} = 0$, c'est-à-dire justement $\theta = 0,728\ 901\ 980$).

3) $q = 4, \quad \ell = 1$

$$x_{i1} = Q_{10}\, x_i + Q_{11}\, x_{i-1} + h\, A_{10}\, X_o$$

$$x_{i2} = Q_{20}\, x_i + Q_{21}\, x_{i-1} + h\,(A_{20}\, X_o + A_{21}\, X_1)$$

$$x_{i3} = Q_{30}\, x_i + Q_{31}\, x_{i-1} + h\,(A_{30}\, X_o + A_{31}\, X_1 + A_{32}\, X_2)$$

$$x_{i+1} = Q_{40}\, x_i + Q_{41}\, x_{i-1} + h\,(A_{40} X_o + A_{41} X_1 + A_{42} X_2 + A_{43} X_3)$$

1) $\dfrac{Q_{41}}{2!} + A_{41}\,\theta_1 + A_{42}\,\theta_2 + A_{43}\,\theta_3 = \dfrac{1}{2!}$

2) $\dfrac{-Q_{41}}{3!} + A_{41}\,\dfrac{\theta_1^2}{2!} + A_{42}\,\dfrac{\theta_2^2}{2!} + A_{43}\,\dfrac{\theta_3^2}{2!} = \dfrac{1}{3!}$

3) $\dfrac{Q_{41}}{4!} + A_{41}\,\dfrac{\theta_1^3}{3!} + A_{42}\,\dfrac{\theta_2^3}{3!} + A_{43}\,\dfrac{\theta_3^3}{3!} = \dfrac{1}{4!}$

4) $\dfrac{-Q_{41}}{5!} + A_{41}\,\dfrac{\theta_1^4}{4!} + A_{42}\,\dfrac{\theta_2^4}{4!} + A_{43}\,\dfrac{\theta_3^4}{4!} = \dfrac{1}{5!}$

5) $A_{41}\,\dfrac{Q_{11}}{2!} + A_{42}\,\dfrac{Q_{21}}{2!} + A_{43}\,\dfrac{Q_{31}}{2!} + A_{43}A_{32}\theta_2 + A_{43}A_{31}\theta_1 + A_{42}A_{21}\theta_1 - \dfrac{Q_{41}}{3!} = \dfrac{1}{3!}$

6) $A_{41}\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{42}\left(\dfrac{-Q_{21}}{3!}\right) + A_{43}\left(\dfrac{-Q_{31}}{3!}\right) + A_{43}A_{32}\,\dfrac{\theta_2^2}{2!} + A_{43}A_{31}\,\dfrac{\theta_1^2}{2!} + A_{42}\,\dfrac{A_{21}}{2!}\,\theta_1^2 + \dfrac{Q_{41}}{4!} = \dfrac{1}{4!}$

7) $A_{41}\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{42}\left(\dfrac{-Q_{21}}{3!}\right) + A_{43}\left(\dfrac{-Q_{31}}{3!}\right) + A_{43}A_{32}\,\dfrac{Q_{21}}{2!} + A_{43}A_{31}\,\dfrac{Q_{11}}{2!} + A_{42}A_{21}\,\dfrac{Q_{11}}{2!} + A_{43}A_{32}A_{21}\theta_1 + \dfrac{Q_{41}}{4!} = \dfrac{1}{4!}$

8) $A_{41}\theta_1\,\dfrac{Q_{11}}{3!} + A_{42}\theta_2\,\dfrac{Q_{21}}{3!} + A_{43}\theta_3\,\dfrac{Q_{31}}{3!} + \dfrac{1}{3}A_{43}\theta_3 A_{32}\theta_2 + \dfrac{1}{3}A_{43}\theta_3 A_{31}\theta_1 + \dfrac{1}{3}A_{42}\theta_2 A_{21}\theta_1 + \dfrac{Q_{41}}{4!} = \dfrac{1}{4!}$

9) $A_{41}\,\dfrac{Q_{11}}{4!} + A_{42}\,\dfrac{Q_{21}}{4!} + A_{43}\,\dfrac{Q_{31}}{4!} + A_{43}A_{32}\,\dfrac{\theta_2^3}{3!} + A_{43}A_{31}\,\dfrac{\theta_1^3}{3!} + A_{42}\,\dfrac{A_{21}\,\theta_1^3}{3!} - \dfrac{Q_{41}}{5!} = \dfrac{1}{5!}$

10) $A_{41}\,\dfrac{Q_{11}}{4!} + A_{42}\,\dfrac{Q_{21}}{4!} + A_{43}\,\dfrac{Q_{31}}{4!} + A_{43}A_{32}\theta_2\,\dfrac{Q_{21}}{3!} + A_{43}A_{31}\theta_1\,\dfrac{Q_{11}}{3!} + A_{42}A_{21}\theta_1\,\dfrac{Q_{11}}{3!} + \dfrac{1}{3}A_{43}A_{32}\theta_2 A_{21}\theta_1 - \dfrac{Q_{41}}{5!} = \dfrac{1}{5!}$

11) $A_{41}\,\dfrac{Q_{11}}{4!} + A_{42}\,\dfrac{Q_{21}}{4!} + A_{43}\,\dfrac{Q_{31}}{4!} + A_{43}A_{32}\left(\dfrac{-Q_{21}}{3!}\right) + A_{43}A_{31}\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{42}A_{21}\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{43}A_{32}A_{21}\,\dfrac{\theta_1^2}{2!}\,\dfrac{Q_{41}}{5!} = \dfrac{1}{5!}$

12) $A_{41}\,\dfrac{Q_{11}}{4!} + A_{42}\,\dfrac{Q_{21}}{4!} + A_{43}\,\dfrac{Q_{31}}{4!} + A_{43}A_{32}\left(\dfrac{-Q_{21}}{3!}\right) + A_{43}A_{31}\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{42}A_{21}\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{43}A_{32}A_{21}\,\dfrac{Q_{11}}{2!} - \dfrac{Q_{41}}{5!} = \dfrac{1}{5!}$

13) $A_{41}\theta_1\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{42}\theta_2\left(\dfrac{-Q_{21}}{3!}\right) + A_{43}\theta_3\left(\dfrac{-Q_{31}}{3!}\right) + A_{43}\theta_3 A_{32}\,\dfrac{\theta_2^2}{2!} + A_{43}\theta_3 A_{31}\,\dfrac{\theta_1^2}{2!} + A_{42}\theta_2 A_{21}\,\dfrac{\theta_1^2}{2!} - \dfrac{Q_{41}\cdot 4}{5!} = \dfrac{4}{5!}$

14) $A_{41}\theta_1\left(\dfrac{-Q_{11}}{3!}\right) + A_{42}\theta_2\left(\dfrac{-Q_{21}}{3!}\right) + A_{43}\theta_3\left(\dfrac{-Q_{31}}{3!}\right) + A_{43}\theta_3 A_{32}\,\dfrac{Q_{21}}{2!} + A_{43}\theta_3 A_{31}\,\dfrac{Q_{11}}{2!} + A_{42}\theta_2 A_{21}\,\dfrac{Q_{11}}{2!} \ldots$

$$+ A_{32}A_{43}\theta A_{21}\theta_1 - \frac{Q_{41}\cdot 4}{5} = \frac{4}{5!}$$

$$15)\ \frac{A_{41}\theta_1^2}{6}\frac{Q_{11}}{2}+\frac{A_{42}}{6}\frac{\theta_2^2}{2}\frac{Q_{21}}{2}+\frac{A_{43}}{6}\frac{\theta_3^2}{2}\frac{Q_{31}}{2}+\frac{A_{43}}{6}\frac{\theta_3^2}{2}A_{32}\theta_2+\frac{A_{43}}{6}\frac{\theta_3^2}{2}A_{31}\theta_1$$
$$+\frac{A_{42}}{6}\frac{\theta_2^2}{2}A_{21}\theta_1-\frac{Q_{41}}{5!}=\frac{1}{5!}$$

$$16)\ \frac{1}{3!}\left[A_{43}\left(A_{32}\theta_2+A_{31}\theta_1+\frac{Q_{31}}{2}\right)^2+A_{42}\left(A_{21}\theta_1+\frac{Q_{21}}{2}\right)^2+A_{41}\left(\frac{Q_{11}}{2}\right)^2\right]$$
$$-\frac{Q_{41}}{5!}=\frac{1}{5!}$$

Comme dans le cas précédent, des simplifications apparaissent:

11) et 12) $\Rightarrow$ $\quad Q_{11}=\theta_1^2$

6) et 7) $\Rightarrow$ $\quad \frac{Q_{21}}{2!}+A_{21}\theta_1=\frac{\theta_2^2}{2!}$

9) et 10) sont alors identiques.

Puis :

5) et 2) $\Rightarrow$ $\quad \frac{Q_{31}}{2!}+A_{32}\theta_2+A_{31}\theta_1=\frac{\theta_3^2}{2!}$

13) et 14) sont alors identiques.

Nous pouvons nous imposer des identifications. A savoir :

(6) $\equiv$ (2) ce qui entraîne : $\quad -Q_{11}=\theta_1^3 \Rightarrow \theta_1=-1$

$$-\frac{Q_{21}}{3!}+A_{21}\frac{\theta_1^2}{2!}=\frac{\theta_2^2}{3!}$$

$$-\frac{Q_{31}}{3!}+A_{32}\frac{\theta_2^2}{2!}+A_{31}\frac{\theta_1^2}{2!}=\frac{\theta_3^3}{3!}$$

Nombre d'équations deviennent alors identiques et les systèmes à résoudre sont finalement les suivants :

$$\begin{cases} Q_{41}-2A_{41}+2A_{42}\ \theta_2+2A_{43}\theta_3=1 \\ -Q_{41}+3A_{41}+3A_{42}\theta_2^2+3A_{43}\theta_3^2=1 \\ Q_{41}-4A_{41}+4A_{42}\theta_2^3+4A_{43}\theta_3^3=1 \\ -Q_{41}+5A_{41}+5A_{42}\theta_2^4+5A_{43}\theta_3^4=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{31} - 2A_{31} + 2A_{32}\theta_2 = \theta_3^2 \\ -Q_{31} + 3A_{31} + 3A_{32}\theta_2^2 = \theta_3^3 \\ Q_{31} - 4A_{31} + 4A_{32}\theta_2^3 = \theta_3^4 + \dfrac{A_{42}}{4A_{43}}(Q_{21} - 4A_{21} - \theta_2^4) \end{cases} \qquad A_{43} \neq 0$$

$$\begin{cases} Q_{21} - 2A_{21} = \theta_2^2 \\ -C_{21} + 3A_{21} = \theta_2^3 \end{cases}$$

On peut chercher à résoudre ces systèmes, dans des cas particuliers :

1) $Q_{21} - 4A_{21} - \theta_2^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = -1$

On tombe sur une dégénérescence $\theta_1 = \theta_2 = -1$

2) $A_{42} = 0$ - C'est le cas que nous avons adopté pour les essais numériques.

Si l'on s'impose $A_{42} = 0$, on trouve alors : $\theta_3 = 0{,}740\,312\,423$

et le système qui donne les Q_{4m} et $A_{4\alpha}$ devient :

$$Q_{41} - 2A_{41} + 2A_{43}\theta_3 = 1$$

$$-Q_{41} + 3A_{41} + 3A_{43}\theta_3^2 = 1$$

$$Q_{41} - 4A_{41} + 4A_{43}\theta_3^3 = 1$$

On constate que c'est le même système que dans la méthode $RKL_{3,1}$ $(\theta_1 = -1)$ que nous avons étudiée précédemment avec d'ailleurs la valeur de θ que nous avons appelée θ^*

$$Q_{41} = \frac{10\theta_3 - 7}{1 + 2\theta_3} \qquad A_{41} = \frac{2(2\theta_3^2 - 1)}{(1+\theta_3)(1+2\theta_3)}$$

$$A_{42} = 0 \qquad A_{43} = \frac{2}{\theta_3(1+\theta_3)(1+2\theta_3)}$$

Tout se passe comme si le point intermédiaire $(t + \theta_2 h)$ ne servait pas pour calculer le point final x_{i+1}. En fait, ce point intermédiaire sert à calculer le point $(t + \theta_3 h)$ de façon plus précise, ce qui est normal puisque la méthode $RKL_{4,1}$ est d'ordre 5 tandis que $RKL_{3,1}$ n'est que d'ordre 4.

Le second système à résoudre est :

$$Q_{31} - 2A_{31} + 2A_{32}\theta_2 = \theta_3^2$$

$$-Q_{31} + 3A_{31} + 3A_{32}\theta_2^2 = \theta_3^2$$

$$Q_{31} - 4A_{31} + 4A_{32}\theta_2^3 = \theta_3^3$$

$$Q_{31} = \theta_3^2 \left[\frac{1 + (1+\theta_3)\left[4\theta_2^2 + 3\theta_2(1-\theta_3)\right] - 1 - 3\theta_3}{2\theta_2^2 + 3\theta_2 + 1} \right]$$

$$A_{31} = \frac{\theta_3^2 (1+\theta_3)\left[4\theta_2^2 + 3\theta_2(1-\theta_3) - 2\theta_3\right]}{2\left[2\theta_2^2 + 3\theta_2 + 1\right]}$$

$$A_{32} = \frac{\theta_3^2 (1+\theta_3)^2}{2\theta_2(2\theta_2^2 + 3\theta_2 + 1)}$$

Choix de θ_2 : Nous avons choisi θ_2 tel que A_{31} soit nul.

$4\theta_2^2 + 3\theta_2(1-\theta_3) - 2\theta_3 = 0$ $\qquad$ $\theta_2 = 0{,}518\,766\,190$

Enfin : $Q_{21} - 2A_{21} = \theta_2^2$

$-Q_{21} + 3A_{21} = \theta_2^3$ $\Rightarrow$ $A_{21} = \theta_2^2(1+\theta_2)$, $Q_{21} = \theta_2^2(2\theta_2 + 3)$

D'où le tableau numérique :

	0	1
1	0	1
2	-0,086 574 092 2	1,086 574 09
3	0,988 337 895	0,011 662 105 3
4	0,837 490 852	0,162 509 148

	0	1	2	3
1	0	1		
2	1,196 612 42	0,408 727 866		
3	0,234 978 250	0	0,516 996 278	
4	0,492 189 403	0,044 532 583 5	0	0,625 787 161

Nous donnons ci-après des résultats numériques obtenus par ces méthodes d'ordre 5, relatifs aux équations :

$y' = -2ty$	$y(o) = 1$	$y = e^{-x^2}$
$y' = -2ty^2$	"	$y = \frac{1}{1+t^2}$
$y' = y$	"	$y = e^x$
$y' = y - \frac{2t}{y}$	"	$y = \sqrt{1+2t}$

Les essais ont été effectués avec les pas $h = 0,1$ et $h = 0,2$

Il semble bien que la méthode $q = 4$ $\ell = 1$ $(\theta_1 = -1)$ donne en général de bons résultats.

$y' = -2ty \qquad y = e^{-x^2}$

t	(h = 0,1)	q=2 ℓ=3 Q_{23}=0	erreur $.10^{-6}$	q=2 ℓ=3 θ^{*}	erreur $.10^{-6}$
011	51	0,298 198 041	-1,566	0,298 198 371	-1,59
01	51	0,367 882 139	-2,698	0,367 882 145	-2,7
09	5	0,444 861 946	-3,86	0,444 861 993	-3,9
08	5	0,527 297 017	-4,597	0,527 297 085	-4,56
07	5	0,612 631 294	-4,9	0,612 631 422	-5,02
06	5	0,697 681 056	-4,73	0,697 681 245	-4,91
05	5	0,778 804 998	-4,215	0,778 805 258	-4,47
04	5	0,852 147 310	-3,521	0,852 147 634	-3,84
03	5	0,913 934 044	-2,859	0,913 934 415	-3,23
02	5	0,960 791 633	-2,394	0,960 792 224	-2,76
01	5	0,990 052 039	-2,205	0,990 052 419	-2,6
		1,000 002 25	-2,2	1,000 002 58	-2,6
1	5	0,990 052 211	-2,4	0,990 052 465	-2,6
2	5	0,960 791 784	-2,3	0,960 791 955	-2,5
3	5	0,913 933 113	-1,9	0,913 933 209	-2,0
4	5	0,852 144 762	-1	0,852 144 807	-1,0
5	5	0,778 800 254	0,5	0,778 800 283	0,5
6	5	0,697 673 890	2,4	0,697 673 931	2,4
7	5	0,612 621 969	4,4	0,612 622 079	4,3
8	5	0,527 283 369	6,2	0,527 286 402	6,0
9	5	0,444 850 810	7,3	0,444 851 096	7,0
1	51	0,367 871 984	7,5	0,367 872 341	7,1
11	51	0,298 190 621	6,7	0,298 191 018	6,3
12	51	0,236 922 820	4,9	0,236 923 209	4,5
13	51	0,184 516 979	2,5	0,184 517 312	2,2
14	51	0,140 853 584	-0,2	0,140 858 818	-0,4
15	51	0,105 402 018	-2,7	0,105 402 122	-2,8
16	51	0,077 309 734 0	-5,0	0,077 309 697 0	-5,0
17	51	0,055 582 723 3	-6,5	0,055 582 553 3	-6,3
18	51	0,039 171 [illegible]	-7,2	0,039 170 841 0	-6,9
19	51	0,027 059 000 0	-7,2	0,027 058 645 3	-6,8
2	51	0,018 327 654 6	-6,4	0,018 321 666 3	-6,0

$h = 0,1$

$q=3$ $\ell=2$ $\theta_1=\theta_2$	erreur $.10^{-7}$	$q=3$ $\ell=2$ $\theta_1=-1$ $\theta_2=0$	erreur $.10^{-7}$	$q=4$ $\ell=1$ $\theta_1=-1$	erreur $.10^{-7}$
0,298 197 622	-3,43	0,298 197 978	-5,99	0,298 197 502	-2,2
0,367 880 131	-7,40	0,367 880 401	-7,61	0,367 879 899	-4,4
0,444 859 241	-11,75	0,444 859 380	-13,14	0,444 858 778	-7,1
0,527 294 028	-16,04	0,527 293 838	-14,14	0,527 293 382	-9,6
0,612 628 391	-19,97	0,612 627 757	-13,63	0,612 627 573	-11,8
0,697 678 662	-23,26	0,697 677 449	-11,23	0,697 677 694	-13,7
0,778 803 399	-26,16	0,778 801 551	-6,68	0,778 802 305	-15,2
0,852 146 636	-28,47	0,852 144 163	-3,74	0,852 145 439	-16,5
0,913 934 229	-30,44	0,913 931 216	-0,31	0,913 932 945	-17,6
0,960 792 655	-32,16	0,960 789 247	0,19	0,960 791 295	-18,6
0,990 053 193	-33,59	0,990 049 569	2,65	0,990 051 771	-19,3
1,000 003 46	-34	0,999 999 788	2,12	1,000 001 99	-20
0,990 053 332	-33	0,990 049 723	1,11	0,990 051 841	-19
0,960 792 889	-34	0,960 789 370	0,69	0,960 791 410	-20
0,913 934 486	-33	0,913 930 978	2,07	0,913 933 062	-19
0,852 146 845	-31	0,852 143 179	6,10	0,852 145 517	-16
0,778 803 126	-26	0,778 799 472	13,11	0,778 802 328	-15
0,697 678 735	-24	0,697 674 061	22,65	0,697 677 679	-14
0,612 628 499	-21	0,612 626 036	33,58	0,612 627 577	-12
0,527 294 303	-19	0,527 288 003	44,21	0,527 293 485	-11
0,444 859 825	-18	0,444 852 803	52,63	0,444 859 065	-10
0,367 881 185	-17	0,367 873 733	57,08	0,367 880 435	-10
0,298 199 088	-18	0,298 191 659	56,20	0,298 198 307	-10
0,236 929 662	-19	0,236 922 826	49,33	0,236 928 833	-11
0,184 521 500	-20	0,184 515 878	36,46	0,184 520 625	-11
0,140 860 398	-20	0,140 856 609	18,12	0,140 859 504	-11
0,105 401 098	-19	0,105 399 717	-5	0,105 400 231	-10
0,077 306 3960	-17	0,077 307 9420	-32,01	0,077 305 6100	-9
0,055 577 5520	-13	0,055 582 5203	-63,03	0,055 576 8954	-7
0,039 164 8524	-10	0,039 173 8122	-99,17	0,039 164 3619	-5
0,027 052 3988	-6	0,027 066 1748	-43,27	0,027 052 0926	-2
0,018 315 8051	-2	0,018 335 7926	-1,53	0,018 315 6810	-0,42

t (h = 0,2)	erreur	q= 2 ℓ = 3 θ^*	erreur $.10^{-6}$	q=3 ℓ = 2 θ_1	θ_2	erreur $.10^{-6}$
06	5	0,697 678 166	-2	0,697 684 058		-8
04	5	0,852 102 119	42	0,852 153 678		-10
02	5	0,960 707 224	82	0,960 800 468		-11
		0,999 909 231		1,000 014 51		
2	5	0,960 721 067	68	0,960 807 141		-18
4	5	0,852 077 169	42	0,852 158 468		-15
6	5	0,697 536 284	140	0,697 682 075		-6
8	5	0,527 007 687	284	0,527 293 389		-1
1	51	0,367 457 127	422	0,367 890 384		-11
12	51	0,236 477 996	450	0,236 961 909		-34
14	51	0,140 545 648	313	0,140 914 064		-56
16	51	0,077 264 9990	40	0,077 364 3160		-60
18	51	0,039 451 0585	-287	0,039 206 3815		-42
2	51	0,018 910 5936	-595	0,018 330 2701		-15

q=3 = 2 θ_1 = -1	θ_2	erreur $.10^{-6}$	q=4 = 1 θ_1 = -1	erreur $.10^{-6}$
0,697 665 136		11	0,697 680 772	-4
0,852 106 058		38	0,852 148 727	-9
0,960 731 543		58	0,960 794 969	-6
0,999 940 132			1,000 007 81	
0,960 741 614		48	0,960 799 031	-10
0,852 097 379		38	0,852 151 230	-7
0,697 592 076		84	0,697 678 819	-2
0,527 116 496		176	0,527 293 621	-1
0,367 556 938		322	0,367 888 050	-23
0,236 386 236		542	0,236 949 461	-22
0,139 922 579		936	0,140 889 421	-31
0,075 441 3400		1863	0,077 333 9160	-29
0,034 664 5621		4499	0,039 181 1372	-17
0,052 984 0050			0,018 318 2245	-3

EXACT

0	1
0,1	0,990 049 834
0,2	0,960 789 439
0,3	0,913 931 185
0,4	0,852 143 789
0,5	0,778 800 783
0,6	0,697 676 326
0,7	0,612 626 394
0,8	0,527 292 424
0,9	0,444 858 066
1	0,367 879 441
1,1	0,298 197 279
1,2	0,236 927 759
1,3	0,184 519 524
1,4	0,140 858 421
1,5	0,105 399 225
1,6	0,077 304 7405
1,7	0,055 576 2126
1,8	0,039 163 8951
1,9	0,027 051 8469
2	0,018 315 6389

$$y' = -2ty^2 \qquad y = \frac{1}{1+t^2}$$

t (h = 0,1)		q=2 ℓ=3 Q_{23}=0	erreur .10^{-6}	q=2 ℓ=3 θ^*	erreur .10^{-6}
016	51	0,280 898 866	0,01	0,280 898 866	0,01
015	51	0,307 692 315	0,006	0,307 692 313	0,005
014	51	0,337 837 909	0,07	0,337 837 903	-0,07
013	51	0,371 747 436	-0,2	0,371 747 421	-0,2
012	51	0,409 836 594	-0,5	0,409 836 567	-0,5
011	51	0,452 489 767	-1	0,452 489 720	-1
01	51	0,500 002 003	-2	0,500 001 924	-2
09	5	0,552 489 635	-3	0,552 489 512	-3
08	5	0,609 761 633	-6	0,609 761 454	-5
07	5	0,671 149 221	-8	0,671 148 983	-8
06	5	0,735 305 577	-11	0,735 305 290	-11
05	5	0,800 014 496	-14	0,800 014 201	-14
04	5	0,862 085 527	-17	0,862 085 297	-16
03	5	0,917 448 206	-17	0,917 448 130	-17
02	5	0,961 554 549	-16	0,961 554 672	-16
01	5	0,990 114 106	-15	0,990 114 348	-15
	5	1,000 015 320	-15	1,000 015 460	-15
1	5	0,990 115 273	-16	0,990 115 058	-16
2	5	0,961 553 860	-15	0,961 553 216	-15
3	5	0,917 441 778	-11	0,917 440 911	-10
4	5	0,862 071 537	-3	0,862 070 838	-2
5	5	0,799 994 620	5	0,799 994 297	6
6	5	0,735 283 944	10	0,735 284 244	10
7	5	0,671 130 060	11	0,671 130 696	10
8	5	0,609 747 514	9	0,609 748 232	8
9	5	0,552 481 128	5	0,552 481 740	4
1	51	0,499 998 303	2	0,499 998 730	1
11	51	0,452 489 521	-1	0,452 489 761	-1
12	51	0,409 838 477	-2	0,409 838 571	-2
13	51	0,371 750 408	-3	0,371 750 404	-3
14	51	0,337 841 265	-3	0,337 841 204	-3
15	51	0,307 695 627	-3	0,307 695 539	-3
16	51	0,280 901 911	-3	0,280 901 814	-3
17	51	0,257 072 087	-3	0,257 071 990	-3
18	51	0,235 851 367	-2	0,235 851 277	-2
19	51	0,216 921 704	-2	0,216 921 625	-2
2	51	0,200 001 657	-2	0,200 001 588	-2

q=3 $\ell = 2$ θ_1	θ_2	erreur $.10^{-6}$	q=3 $\ell = 2$ $\theta_1 = -1$	erreur $.10^{-6}$	q=4 $\ell = 1$	erreur $.10^{-6}$
0,280 898 862		0,014	0,280 898 876	0	0,280 898 867	0,009
0,307 692 278		0,03	0,307 692 323	-0,015	0,307 692 288	0,02
0,337 837 794		0,04	0,337 837 892	-0,05	0,337 837 810	0,03
0,371 747 160		0,05	0,371 747 347	-0,13	0,371 747 180	0,03
0,409 836 022		0,043	0,409 836 355	-0,3	0,409 836 040	0,025
0,452 488 685		0,003	0,452 489 242	-0,5	0,452 488 690	-0,002
0,500 000 091		-0,09	0,500 000 987	-1	0,500 000 064	-0,064
0,552 486 454		-0,2	0,552 487 827	-2	0,552 486 365	-0,2
0,609 756 646		-1	0,609 758 644	-3	0,609 756 454	-0,6
0,671 141 887		-1	0,671 144 627	-4	0,671 141 545	-0,6
0,735 295 551		-1	0,735 299 033	-5	0,735 295 018	-0,9
0,800 001 927		-2	0,800 005 947	-6	0,800 001 189	-1,2
0,862 071 279		-2	0,862 075 397	-6	0,862 070 367	-1,4
0,917 433 719		-3	0,917 437 376	-6	0,917 432 702	-1,5
0,961 541 097		-3	0,961 543 933	-5	0,961 540 032	-1,7
0,990 101 833		-3	0,990 104 003	-6	0,990 100 709	-1,7
1,000 003 170		-3	1,000 005 250	-5	1,000 001 920	-1,9
0,990 102 516		-4	0,990 104 835	-6	0,990 101 112	-2
0,961 541 949		-3	0,961 543 892	-5	0,961 540 509	-2
0,917 434 221		-3	0,917 434 258	-3	0,917 432 936	-2
0,862 071 352		-2	0,862 067 960	1	0,862 070 336	-1
0,800 001 902		-2	0,799 994 587	5	0,800 001 117	-1
0,735 295 837		-2	0,735 285 439	9	0,735 295 154	-1
0,671 142 701		-2	0,671 130 918	10	0,671 142 002	-1
0,609 757 960		-2	0,609 746 594	10	0,609 757 207	-1
0,552 488 119		-2	0,552 478 477	-8	0,552 487 335	-1
0,500 001 897		-2	0,499 994 644	5	0,500 001 074	-1
0,452 490 464		-2	0,452 485 669	3	0,452 489 675	-1
0,409 837 665		-2	0,409 835 016	1	0,409 836 941	-1
0,371 748 609		-1	0,371 747 620	-0,4	0,371 747 967	-0,75
0,337 839 033		-1	0,337 839 194	-1	0,337 838 478	-0,64
0,307 693 315		-1	0,307 694 186	-1,9	0,307 692 842	-0,53
0,280 899 718		-0,8	0,280 900 959	-2	0,280 899 320	-0,44
0,257 070 108		-0,7	0,257 071 485	-2	0,257 069 774	-0,36
0,235 849 636		-0,5	0,235 851 002	-2	0,235 849 358	-0,3
0,216 920 221		-0,5	0,216 921 492	-2	0,216 919 987	-0,3
0,200 000 399		-0,4	0,200 001 540	-2	0,200 000 204	-0,2

t (h = 0,2)		q=2 ℓ = 3 θ^*	erreur $.10^{-6}$	q = 3 ℓ = 2 θ_1	θ_2	erreur $.10^{-6}$
012	51	0,409 841 821	-6	0,409 835 074		0,09
01	51	0,500 027 496	-2	0,500 002 451		-2
08	5	0,609 843 120	-87	0,609 767 962		-12
06	5	0,735 497 562	-203	0,735 325 856		-32
04	5	0,862 410 734	-342	0,862 122 676		-54
02	5	0,961 929 455	-391	0,961 598 159		-60
		1,000 396 600	-397	1,000 067 660		-68
2	5	0,962 060 843	-522	0,961 621 335		-83
4	5	0,862 453 670	-385	0,862 116 415		-47
6	5	0,735 064 735	229	0,725 310 778		-17
8	5	0,609 368 608	686	0,609 487 903		-32
1	51	0,499 405 850	594	0,500 048 083		-48
12	51	0,409 589 226	247	0,409 883 597		-48
14	51	0,337 833 582	4	0,337 875 871		-38
16	51	0,280 971 513	-73	0,280 926 362		-27
18	51	0,235 920 450	-71	0,235 868 043		-19
2	51	0,200 055 084	-55	0,200 012 947		-13

q=3 ℓ = 2 θ_1 = -1	erreur $.10^{-6}$	q = 4 ℓ = 1	erreur $.10^{-6}$
0,409 840 523	-4	0,409 836 187	-0,1
0,500 016 627	-17	0,500 002 269	-2
0,609 303 796	-48	0,609 765 363	-9
0,735 393 448	-99	0,735 317 157	-23
0,862 212 442	-143	0,862 105 911	-37
0,961 668 819	-130	0,961 578 673	-40
1,000 125 000	-125	1,000 048 120	-48
0,961 726 755	-183	0,961 595 108	-57
0,862 175 180	-106	0,862 099 375	-30
0,735 100 977	-193	0,735 311 330	-17
0,609 209 553	547	0,609 783 775	-27
0,499 111 892	888	0,500 031 882	-32
0,408 574 900	1261	0,409 863 604	-28
0,336 126 017	1712	0,337 858 506	-21
0,278 650 144	2249	0,280 913 315	-14
0,233 006 656	2842	0,235 858 877	-10
0,196 564 150	3436	0,200 006 655	-7

$y' = Y \qquad y = e^x$

t (h = 0,1)		q=2, $\ell = 3$ $Q_{23} = 0$	erreur.10^{-8}	q=2, $\ell = 3$ θ^*	erreur.10^{-8}
4	5	1,49 182 461	9	1,49 182 463	7
5	5	1,64 872 111	16	1,64 872 113	14
6	5	1,82 211 854	26	1,82 211 857	23
7	5	2,01 375 233	38	2,01 375 236	35
8	5	2,22 554 042	51	2,22 554 045	48
9	5	2,45 960 243	68	2,45 960 247	64
1	51	2,71 828 097	36	2,71 828 101	82
11	51	3,00 416 495	107	3,00 416 500	102
12	51	3,32 011 560	132	3,32 011 566	126
13	51	3,66 929 505	1521	3,66 929 512	155
14	51	4,05 519 802	194	4,05 519 810	187
15	51	448 168 675	192	448 168 682	285
16	51	4,95 302 967	275	4,95 302 975	267
17	51	5,47 394 413	326	5,47 394 421	318
18	51	6,04964 361	385	6,04 964 373	373
19	51	6,68 588 9921	452	6,68 589 006	438
2	51	7,38 905 082	528	7,38 905 097	513

q = 3 θ_1	$\ell = 2$ θ_2	erreur.10^{-8}	q=3 $\ell = 2$ $\theta_1 = -1$	erreur.10^{-8}	q=4 $\ell = 1$ $\theta_1 = -1$	erreur.10^{-8}
1,49 182 466	4		1,49 182 465	5	1,49 182 468	2
1,64 872 120	7		1,64 872 119	8,	1,64 872 123	4
1,82 211 869	11		1,82 211 868	18	1,82 211 872	8
2,01 375 255	16		2,01 375 253	18	1,02 375 259	12
2,22 554 072	21		2,22 554 070	23	2,22 554 078	15
2,45 960 284	27		2,45 960 281	30	2,45 960 291	20
2,71 828 149	34		2,71 828 145	38	2,71 828 157	26
3,00 416 561	41		3,00 416 556	46	3,00 416 570	32
3,32 011 642	50		3,32 011 634	58	3,32 011 653	39
3,66 929 607	60		3,66 929 595	72	3,66 929 619	48
4,05 519 925	71		4,05 519 910	87	4,05 519 940	57
448 168 822	145		448 168 804	163	448 168 840	127
4,95 303 142	100		4,95 303 120	122	4,95 303 163	79
5,47 394 621	118		5,47 394 596	143	5,47 394 646	93
6,04 964 608	137		6,04 964 578	168	6,04 964 638	108
6,68 589 284	160		6,68 589 248	196	6,68 589 319	125
7,38 905 425	185		7,38 905 382	228	7,38 905 465	145

t (h = 0,2)		q=2 ℓ=3 Q_{23} = 0	erreur.10^{-8}	q=2 ℓ=3 θ^{*}	erreur.10^{-8}
8	5	2,22 554 069	24	2,22 553 586	507
1	51	2,71 828 152	31	2,71 827 107	76
12	51	3,32 011 631	61	3,32 009 722	1970
14	51	4,05 519 907	90	4,05 516 844	3153
16	51	4,95 303 108	134	4,95 298 450	4792
18	51	6,04 964 554	192	6,04 957 760	6986
2	51	7,38 905 339	271	7,38 895 684	9926

q=2 ℓ=3 θ_1 θ_2	erreur .10^{-8}	q = 3 ℓ=2 θ_1 = -1	erreur .10^{-8}	q=4 ℓ=1 θ_1 = -1	erreur .10^{-8}
2,22 553 936	157	2,22 553 838	255	2,22 553 992	101
2,71 827 811	372	2,71 827 704	479	2,71 827 952	231
3,32 011 016	673	3,32 010 832	860	3,32 011 277	415
4,05 518 901	1096	4,05 518 645	1352	4,05 519 327	670
4,95 301 575	1667	4,95 301 206	2036	4,95 302 226	1016
6,04 962 308	2438	6,04 961 797	2949	6,04 963 264	1482
7,38 902 140	3470	7,38 901 441	4169	7,38 903 504	2106

$$y' = y - \frac{2t}{y} \qquad y = \sqrt{1 + 2t}$$

t (h = 0,1)		q=2 ℓ= 3 $Q_{23} = 0$	erreur .10^{-8}	q=2 ℓ=3 θ^*	erreur .10^{-8}
7	5	1,549 192 97	37	1,549 192 95	39
8	5	1,612 450 96	59	1,612 450 96	59
9	5	1,673 319 21	84	1,673 319 17	88
1	51	1,732 049 73	108	1,732 049 69	112
11	51	1,788 853 03		1,788 852 97	
12	51	1,843 907 23	166	1,843 907 16	173
13	51	1,897 364 57		1,897 364 49	
14	51	1,949 356 42		1,949 356 32	
15	51	1,999 997 05	295	1,999 996 94	306
16	51	2,049 386 61	354	2,049 386 47	368
17	51	2,097 613 44		2,097 613 28	
18	51	2,144 755 96		2,144 755 77	
19	51	2,190 884 12		2,190 883 88	
2	51	2,236 060 65	733	2,236 060 36	762

q=3 ℓ= 2 θ_1 θ_2	erreur .10^{-8}	q = 3 ℓ= 2 $\theta_1 = -1$	erreur .10^{-8}	q = 4 ℓ= 1 $\theta_1 = -1$	erreur .10^{-8}
1,549 193 38	- 4	1,549 193 20	14	1,549 193 36	- 2
1,612 451 63	- 8	1,612 451 36	19	1,612 451 57	- 2
1,673 320 17	-12	1,673 319 78	27	1,673 320 07	- 2
1,732 050 97	-16	1,732 050 47	34	1,732 050 83	- 2
1,788 854 60		1,788 853 96		1,788 854 40	
1,843 909 16	-27	1,843 908 39	50	1,843 908 90	- 1
1,897 366 93		1,897 365 99		1,897 366 60	
1,949 359 28		1,949 358 14		1,949 358 87	
2,000 000 49	-49	1,999 999 12	88	1,999 999 99	1
2,049 390 75	-60	2,049 389 10	105	2,049 390 13	2
2,097 618 41		2,097 616 44		2,097 617 66	
2,144 761 92		2,144 759 57		2,144 761 01	
2,190 891 27		2,190 888 45		2,190 890 15	
2,236 069 22	-124	2,236 065 85	213	2,236 067 87	11

t (h = 0,2)		q=2 ℓ = 3 θ^*	erreur $.10^{-8}$	q=3 ℓ = 2 θ_1 θ_2	erreur $.10^{-8}$
8	5	1,612 410 46	41	1,612 455 11	-356
1	51	1,731 994 57	56	1,732 057 39	-658
12	51	1,843 816 30	93	1,843 919 15	-1026
14	51	1,949 231 09		1,949 374 00	
16	51	2,049 203 27	87	2,049 412 06	-2191
18	51	2,144 496 35		2,144 792 59	
2	51	2,235 686 68	381	2,236 113 32	-4534

q=3 ℓ = 2 θ_1 = -1	erreur $.10^{-8}$	q = 4 ℓ = 1 θ_1 = -1	erreur $.10^{-8}$
1,612 439 82	12	1,612 453 36	-18
1,732 039 09	12	1,732 054 00	- 3
1,843 886 63	22	1,843 913 85	- 5
1,949 330 74		1,949 366 16	
2,049 346 86	43	2,049 400 69	-11
2,144 701 56		2,144 776 22	
2,235 980 72	87	2,236 089 78	-23

t	$y = \sqrt{1 + 2t}$
0	1
0,1	1,095 445 115
0,2	1,183 215 957
0,3	1,264 911 064
0,4	1,341 640 790
0,5	1,414 213 562
0,6	1,483 239 697
0,7	1,549 193 340
0,8	1,612 451 550
0,9	1,673 320 050
1	1,732 050 81
1,2	1,843 908 890
1,5	2,000 000 000
1,6	2,049 390 150
2	2,236 067 98

RECAPITULATIF

Nous pouvons regrouper les différentes méthodes sur un tableau :

. en ordonnée figurent le nombre de points antérieurs ℓ

. en abscisse, le paramètre $q\ (r+s)$

q / ℓ	2	3	4	5
0	X			
1	X	X	X	
2	X	X	X	
3	X			X
4	X			

. la première ligne correspond aux Méthodes RK pur

. la première colonne aux méthodes $RKL_{2,\ell}$

. la diagonale principale aux méthodes $RKL_{\ell+2,\ell}$ traitées dans un cas particulier (2 Horners)

. la diagonale $(q+\ell) = 5$, aux Méthodes d'ordre 5.

CONCLUSION

Les quelques résultats obtenus nous montrent que ces méthodes peuvent être employées avec succès. Néanmoins, il reste à poursuivre, semble-t-il, dans plusieurs directions :

1) apporter des précisions relatives à la stabilité, de façon à voir si les formules puissantes peuvent être stables et donc intéressantes, malgré leur coût en points antérieurs.

2) poursuivre l'investigation des vraies méthodes à pas liés employant le principe de RUNGE et KUTTA et dont le cas ($\ell = 1$, $r = 1$, $s = 0$) ne donne qu'une petite idée. Malheureusement, cela implique de compléter le tableau général des conditions. Et les équations deviennent compliquées à résoudre.

3) généraliser l'application de la méthode aux systèmes d'ordre $p > 1$. Entre autres, essayer d'appliquer les Algorithmes que nous avons étudiés en détail ($r = 0$, $s = 2$, ℓ qq et $r = \ell$, $s = 0$) aux équations du second ordre $x'' = X(x, t)$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) BARD - CESCHINO - KUNTZMAN - LAURENT
Formules de base de la Méthode de Runge Kutta - Chiffre 1961

(2) KUNTZMAN J.
Problèmes différentiels de conditions Initiales
(en cours d'édition chez Dunod)
(Un chapitre est consacré à la stabilité avec références bibliographiques)

(3) LAURENT P.J. (°)
Méthode du type RK pour des systèmes différentiels de forme particulière
Thèse Grenoble - 1960

(4) BARD (°)
Essai de généralisation de formule du type RK faisant intervenir la dérivée suivante
Thèse - Juin 1961

(5) NUGEYRE
Procédé mixte d'Intégration des systèmes différentiels de la forme $x'' = X(x, t)$ - Chiffre Juin 1961 - n° 2.

(6) VALIRON
Equations fonctionnelles et Application

(7) MILNE W.E.
Numerical solution of differential equations
(Wiley and Son (N.Y. 1953)

(°) - Les références (3) et (4) contiennent une bibliographie précise sur la méthode R.K.