

Contribution aux systèmes tolérants aux défauts : Synthèsed'une méthode de reconfiguration et/ou de restructurationintégrant la fiabilité des composants

Fateh Guenab

▶ **To cite this version:**

Fateh Guenab. Contribution aux systèmes tolérants aux défauts : Synthèsed'une méthode de reconfiguration et/ou de restructurationintégrant la fiabilité des composants. Automatique / Robotique. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2007. Français. NNT : . tel-00164822

HAL Id: tel-00164822
https://theses.hal.science/tel-00164822

Submitted on 23 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Faculté des Sciences et Techniques
UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique
Ecole Doctorale IAEM Lorraine

THÈSE

présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1
(Spécialité Automatique)

par

Fateh GUENAB

Contribution aux systèmes tolérants aux défauts : Synthèse d'une méthode de reconfiguration et/ou de restructuration intégrant la fiabilité des composants

Soutenue publiquement le 20 février 2007

Membres du jury

Président du jury :	
Hassan NOURA	Professeur à l'Université Aix-Marseille, Marseille
Rapporteurs :	
Houcine CHAFOUK	Professeur associé HDR à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Génie Électrique, Rouen
Gérard L. GISSINGER	Professeur à l'Université de Haute Alsace, Mulhouse
Examinateurs :	
Benoit IUNG	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy
Didier THEILLIOL	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy
Philippe WEBER	Maître de conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy

Centre de Recherche en Automatique de Nancy CRAN – CNRS UMR 7039
Boulevard des Aiguillettes 54506 Vandoeuvre-Les-Nancy
Tél. +33(0)3 83 68 44 19 - Fax +33(0)3 83 68 44 37

Table des matières

Liste des figures **5**

Liste des tableaux **8**

Introduction générale **11**

1 Contexte et problématique de l'étude **13**
1.1 Systèmes tolérants aux défauts 14
1.1.1 Problème standard de commande 14
1.1.2 Problème de commande en présence de défauts 16
1.1.3 Les systèmes tolérants aux défauts 16
1.1.4 Structure des systèmes tolérants aux défauts 19
1.2 Fiabilité des systèmes 22
1.2.1 Fiabilité et taux de défaillance d'un composant élémentaire 22
1.2.2 MTTF 26
1.2.3 Fiabilité des systèmes 26
1.3 Commande tolérante aux défauts et fiabilité 29
1.3.1 Évaluation de la fiabilité du système en intégrant la fiabilité du bloc diagnostic 29
1.3.2 Intégration de la fiabilité du bloc diagnostic lors de la conception des lois de commande 30
1.3.3 Les processus Markoviens 32
1.3.4 L'approche Multimodèle 33
1.3.5 La fiabilité du système au sein des systèmes tolérants aux défauts 34
1.4 Conclusion 38

2 Méthode de reconfiguration sous contrainte de performances statiques **41**
2.1 Problématique 41
2.2 Analyse de la fiabilité 45
2.2.1 Estimation du taux de défaillance des composants 45
2.2.2 Calcul de la fiabilité 47
2.3 Évaluation du coût financier 49
2.4 Évaluation des performances statiques 49
2.5 La méthode développée 51
2.5.1 Problème d'optimisation 51
2.5.2 Différentes étapes de résolution 53

2.6 Exemple académique . . . 57
2.6.1 Description du système . . . 57
2.6.2 Objectifs du système . . . 58
2.6.3 Structures de reconfiguration . . . 59
2.6.4 Résultats et commentaires . . . 59
2.7 Conclusion . . . 68

3 Méthode de reconfiguration sous contrainte de performances des régulateurs 69
3.1 Méthode de la Pseudo-inverse (PIM) . . . 70
3.1.1 Présentation de la méthode PIM . . . 70
3.1.2 Limitations de la méthode PIM . . . 71
3.1.3 Extention de la méthode PIM . . . 72
3.1.4 Contribution à la synthèse de la méthode PIM modifiée . . . 74
3.2 Méthode d'évaluation des performances des régulateurs . . . 81
3.2.1 Introduction . . . 81
3.2.2 Indices de performances . . . 83
3.2.3 Sélection de la structure optimale . . . 85
3.3 Exemple académique . . . 86
3.3.1 Description du système . . . 86
3.3.2 Objectifs du système . . . 88
3.3.3 Résultats et commentaires . . . 88
3.4 Conclusion . . . 93

4 Intégration des méthodes et application 95
4.1 Intégration des méthodes . . . 95
4.2 Description et modélisation du système . . . 96
4.2.1 Description du système . . . 96
4.2.2 Modélisation du système . . . 97
4.2.3 Linéarisation du système . . . 99
4.2.4 Représentation d'état continue du système . . . 100
4.2.5 Décomposition du système . . . 101
4.3 Synthèse des régulateurs . . . 104
4.3.1 Représentation multimodèle . . . 104
4.3.2 Synthèse de la loi de commande . . . 108
4.4 Indice de performances des régulateurs . . . 112
4.5 Définition des structures . . . 113
4.6 Indice de performances statiques . . . 116
4.7 Calcul de la fiabilité et du coût . . . 117
4.8 Simulations . . . 119
4.9 Conclusion . . . 130

Conclusion générale 131

Annexes 133

A Fiabilité des systèmes 133

B Algorithme d'optimisation **137**

C Application : valeurs numériques **139**

Bibliographie **145**

Table des figures

1.1 Montage d'une régulation de niveau simple 15
1.2 Types des systèmes tolérants aux défauts 17
1.3 Structure du système tolérant aux défauts actif à base de banc de régulateurs 18
1.4 Structure générale des systèmes tolérants aux défauts 20
1.5 Exemple de densité de probabilité 23
1.6 Exemple de fonction de répartition 24
1.7 Taux de défaillance en fonction du temps 25
1.8 Courbe $R(t) = e^{-\lambda t}$ 26
1.9 Système à structure simple 27
1.10 Système à structure complexe 27
1.11 Système avec n composants en séries 28
1.12 Système avec n composants en parallèles 28
1.13 Évaluation des performances de la commande en fonction de S et θ 31
1.14 Exemple du réseau de capteurs 37

2.1 Architecture générale d'une structure hierarchique 42
2.2 Taux de défaillance $\lambda^0(t)$, $\lambda^1(t)$ et $\lambda^2(t)$ 46
2.3 Fiabilités $R^0(t)$, $R^1(t)$ et $R^2(t)$ 47
2.4 Fiabilité avant et après apparition du défaut 48
2.5 Présentation générale de la problématique 55
2.6 Les états du système en fonction du temps 55
2.7 L'algorithme des calculs 56
2.8 Décomposition physique du système 58
2.9 Diagramme de fiabilité du système 58
2.10 Évolution dynamique des variables de commande et de sortie dans le cas nominal 60
2.11 Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système défaillant 61
2.12 Indice de performance statique $J^3_{statique}$ en fonction des références r^3_1 et r^3_2 de la structure $\mathcal{S}^3$. 62
2.13 Évolution de la fiabilité en fonction des références r^3_1 et r^3_2 de la structure $\mathcal{S}^3$ 63
2.14 Évolution du coût C^3_g en fonction des références r^3_1 et r^3_2 de la structure $\mathcal{S}^3$ 63
2.15 Ensemble des solutions admissibles suivant la structure $\mathcal{S}^3$ 64
2.16 Espace réalisable r^3_1 et r^3_2 imposé par la contrainte $J_{statique} \leq J_{min}$ de la structure $\mathcal{S}^3$ 64
2.17 Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système reconfiguré 66
2.18 Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système reconfiguré 67

3.1 Espace réalisable des performances nominales $\mathcal{M}$ et des performances degradées $\mathcal{M}^d$ 76
3.2 La sortie et la référence d'un système simple 80
3.3 L'architecture du système sous une structure $\mathcal{S}^m$ 82

3.4 Indice de performances 84
3.5 Décomposition physique du système 87
3.6 Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système nominal 89
3.7 Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système défaillant ($\beta = 30\%$) 90
3.8 Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système reconfiguré ($\beta = 30\%$) 92

4.1 Schématisation du système 97
4.2 La décomposition physique du système (boucle ouverte) 101
4.3 La structure hiérarchique du système 103
4.4 Diagramme de fiabilité du système 103
4.5 Diagramme de fiabilité du système 104
4.6 Fonctions d'activation en fonction de la température 106
4.7 Fonctions d'activation en fonction du niveau du liquide 106
4.8 Fonctions d'activation en fonction de la température et du niveau du liquide 107
4.9 Le sous système s_1 en boucle fermée 109
4.10 Structure $\mathcal{S}^1$ du système 115
4.11 Structure $\mathcal{S}^2$ du système 115
4.12 Structure $\mathcal{S}^3$ du système 116
4.13 Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 dans le cas nominal 120
4.14 Les objectifs globaux h_3 et t_3 121
4.15 Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 dans le cas défaillant $\beta^f = 40\%$ 122
4.16 Les objectifs globaux h_3 et t_3 dans le cas défaillant $\beta^f = 40\%$ 122
4.17 Les objectifs globaux h_3 et t_3 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 40\%$) 123
4.18 Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 40\%$) 125
4.19 Les sorties du système dans le cas d'un défaut de $\beta^f = 70\%$ 126
4.20 Les commandes p_1 et p_2 du système dans le cas d'un défaut de $\beta^f = 70\%$ 126
4.21 Les objectifs globaux h_3 et t_3 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 70\%$) 127
4.22 Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 70\%$) 129

A.1 Système avec n composants en séries 133
A.2 Système avec n composants en parallèles 134

Liste des tableaux

2.1 Performances locales et globales du système suivant $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta = 20\%$) 65
2.2 Performances locales et globales du système suivant $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta = 35\%$) 67

3.1 Indice de performances du système selon les trois structures $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ 92

4.1 Domaines de validité et point de fonctionnement des modèles locaux de la cuve 1 105
4.2 Écarts entre les valeurs propres nominales et celles de chaque modèle locale de la cuve 1 . . . 113
4.3 Performances globales et locales du système selon $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta^f = 40\%$) 124
4.4 Performances globales et locales du système selon $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta^f = 70\%$) 128

C.1 Les matrices A, B et C des modèles locaux de la cuve 1 140
C.2 Les matrices A, B et C des modèles locaux de la cuve 2 141
C.3 Les gains des régulateurs locaux $K_{1_{i,j}}^{nom}$ et $G_{1_{i,j}}^{nom}$ de la cuve 1 dans le cas nominal 142
C.4 Les gains des régulateurs locaux $K_{2_{i,j}}^{nom}$ et $G_{2_{i,j}}^{nom}$ de la cuve 2 dans le cas nominal 143
C.5 Les régulateurs locaux $K_{1_{i,j}}$ et $G_{1_{i,j}}$ de la cuve 1 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 40\%$) 144

Introduction générale

Depuis les trois dernières décennies, les systèmes industriels sont devenus de plus en plus complexes utilisant des nouvelles technologies permettant d'accroître la qualité des produits et des services ainsi que la productivité des systèmes. En revanche ces évolutions ont rendu les systèmes plus vulnérables aux défauts, poussant les chercheurs à concevoir des systèmes possédant une certaine tolérance aux défauts dans le but d'améliorer la productivité.

Dans le but d'assurer la fiabilité des systèmes et la sécurité des humains, le problème de contrôle des systèmes en présence de défauts a été largement traité par plusieurs auteurs. La majeure partie des recherches a été consacrée au problème de la détection et la localisation de défauts (en anglais, Fault Detection and Diagonsis FDD) de manière à déterminer l'état de fonctionnement du système (Normal ou Défaillant). Plusieurs approches et méthodes sont utilisées pour résoudre ce problème, à titre d'exemple nous pouvons citer [Isermann, 1984] , [Frank, 1990], [Patton et al., 1995], [Isermann, 1997], [Comtet-Varga et Staroswiecki, 1998] et [Chen et Patton, 1999].

Sous l'hypothèse d'un bloc de diagnostic fournissant les informations liées à la détection et à la localisation du défaut, il est possible soit de compenser l'effet du défaut (accommodation) soit de modifier les lois de commande de manière à amener le système dans un état le plus proche possible de celui dans lequel il se trouvait en fonctionnement normal (appelée communément reconfiguration ou restructuration). Ces procédures à mettre en œuvre lors de l'occurrence du défaut ont été developpées sous forme de plusieurs stratégies définies sous l'expression des systèmes tolérants aux défauts (en anglais, Fault Tolerant Control Systems FTCS).

L'étude consacrée aux systèmes tolérants aux défauts remonte au début des années 80, sous des terminologies variées telles que les systèmes reconfigurables, restructurables, auto-réparés (selfreparing). De nombreux travaux de recherche concernant le développement de méthodes de FTC ont été réalisés. [Patton, 1997] et [Zhang et Jiang, 2003a] ont proposé des synthèses bibliographiques intéressantes. [Staroswiecki et Gehin, 2001] et [Blanke et al., 2001] présentent les principes de différentes stratégies de FTC. Les livres de [Blanke et al., 2003] et [Mahmoud et al., 2003] constituent des ouvrages de références généralistes pour le premier et spécifiques pour le second.

L'étude des systèmes tolérants aux défauts a ouvert plusieurs axes de recherche tels que l'analyse de la reconfigurabilité du système [Frei et al., 1999], [Gehin et Staroswiecki, 1999], [Wu et Salomon, 2000], [Staroswiecki, 2002], la redondance matérielle et analytique [Zhao et Jiang, 1998], [Jiang et Zhao, 2000], [Hoblos et Aitouche, 2000] et l'analyse de la fiabilité [Blanke, 1996], [Wu, 2001a], [Wu, 2001b], [Wu et al., 2002] et [Staroswiecki et al., 2004].

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire concernent la synthèse de méthode de reconfiguration / restructuration permettant de maintenir les performances proches de celles désirées, non seulement en l'absence de défauts mais également en présence de composants défectueux en tenant compte de la sûreté de fonctionnement du système au travers de la fiabilité. La fiabilité est-elle un objectif à prendre en considération uniquement lors de la conception du système ? Peut-elle être un critère de choix entre les différentes approches et méthodes des systèmes FTC ? Comment analyser, mesurer et quantifier la fiabilité ? Dans notre travail, avant d'exposer des réponses à ces questions, nous présentons dans le premier chapitre, d'une part, un bref historique sur les systèmes tolérants aux défauts, les types de systèmes tolérants aux défauts ainsi que quelques méthodes et approches, et d'autre part, les différents paramètres caractérisant la fiabilité. Une synthèse bibliographique de principaux travaux combinant la commande tolérante aux défauts et la sûreté de fonctionnement est également exposée.

Le deuxième chapitre est consacré au développement d'une stratégie de reconfiguration qui permet d'amener le système dans un état de fonctionnement en redéfinissant des nouvelles performances statiques locales de chaque sous système afin de garder les performances statiques globales du système, en intégrant des informations issues non seulement de la fiabilité mais également les coûts des sous systèmes. L'objectif est ainsi de déterminer une solution optimale pour la stratégie de reconfiguration. La solution se décline en terme de structure optimale mais également en terme de régime de fonctionnement pour la structure choisie. La structure optimale garantit les objectifs globaux exigés avec la fiabilité la plus élevée sous une contrainte de coût acceptable ou avec le moindre coût en respectant les limites de fiabilité nécessaires. Un exemple académique est ensuite donné pour illustrer ce principe.

Dans le troisième chapitre, les performances dynamiques, en termes de valeurs propres, sont introduites dans la stratégie. Une version modifiée de la méthode de synthèse de régulateur en présence de défauts multiplicatifs est développée. Le choix optimal de la reconfiguration s'effectue dans un contexte multi-critères en intégrant les performances des régulateurs en terme d'objectifs statiques et dynamiques calculés sur les sous systèmes activés sans tenir compte des performances statiques globales, de la fiabilité et du coût.

Le quatrième chapitre est dédié à l'intégration des méthodes proposées dans les deux précédents dans le but de développer une stratégie de commande tolérante aux défauts tenant compte à la fois des aspects fiabilistes, financiers et des performances dynamiques et statiques. Un processus hydraulique et thermique des trois cuves est considéré pour illustrer les performances de la stratégie développée dans un contexte non linéaire représenté sous forme de multimodèle.

Enfin, le dernier chapitre sera consacré aux conclusions et perspectives. Nous analyserons l'apport de la méthode proposée et en particulier l'intérêt d'intégrer les notions de fiabilité dans les futurs systèmes tolérants aux défauts.

Chapitre 1

Contexte et problématique de l'étude

Les systèmes de commande conventionnels sont généralement conçus sans tenir compte de la possibilité d'occurrence de défauts. Dans le but de surmonter cette contrainte, les systèmes complexes modernes utilisent des régulateurs sophistiqués développés avec la capacité de s'accommoder aux défauts et ainsi d'être tolérant aux défauts, afin d'assurer à la fois des performances désirées et la sûreté de fonctionnement de ce dernier.

Le système de commande tolérant aux défauts a pour but de maintenir des performances proches de celles désirées tout en préservant la stabilité, non seulement en l'absence de défauts (dérives) mais également en présence de composants défectueux (pannes). Si les performances initiales ne peuvent plus être garanties, un système de commande tolérant aux défauts doit assurer au moins des performances dégradées acceptables ou arrêter le système.

Ce chapitre présente dans un premier temps les systèmes tolérants aux défauts ainsi que des rappels sur la fiabilité, suivi d'une synthèse bibliographique des différents travaux abordant les notions de la fiabilité dans le but d'accroître les performances des méthodes de FTC.

1.1 Systèmes tolérants aux défauts

Dans cette partie nous allons présenter les principaux types de systèmes tolérants aux défauts ainsi que les définitions des principaux termes employés et quelques approches et méthodes existantes dans ce domaine.

Afin de donner des définitions claires, le problème standard de commande est expliqué en premier lieu et servira de base aux définitions suivantes.

1.1.1 Problème standard de commande

Comme indiqué par [Staroswiecki et Gehin, 2001], un problème standard de commande est défini par $< \gamma_g, \mathcal{S}, \theta, \mathcal{U} >$ avec :

- γ_g Objectifs globaux du système ;
- $\mathcal{S}$ Structure du système ;
- θ Vecteur des paramètres du système ;
- $\mathcal{U}$ Ensemble des lois de commande.

La résolution de ce problème consiste à trouver une loi de commande $u \in \mathcal{U}$ afin d'assurer les objectifs globaux γ_g du système sous les contraintes de structure $\mathcal{S}$ et les paramètres θ.

✓ Les objectifs γ_g définissent les performances attendues du système, ils peuvent être classés en trois points principaux assurant :
– La stabilité du système ;
– Un comportement dynamique bien défini ;
– Une erreur statique nulle.

✓ L'ensemble de lois de commande $\mathcal{U}$ définit les algorithmes utilisés, généralement en boucle fermée, pour commander le système. Dans nos travaux, ceci est formalisé par l'application suivante :
(référence r, sortie y) $\rightarrow$ entrée u.

✓ La structure $\mathcal{S}$ définit l'ensemble des composants utilisés par le système et leur interconnexion. Elle regroupe l'ensemble des équations algébriques et différentielles qui représente le comportement des composants du système.

✓ Les paramètres θ sont les différents paramètres du système, par exemple la section d'une cuve, la viscosité du liquide, le facteur de frottement d'un ressort.

En l'absence de défaut, nous supposons que les objectifs globaux nominaux, notés γ_g^n , sont atteignables à l'aide d'une loi de commande nominale $u_n \in \mathcal{U}$ établie selon une structure nominale $\mathcal{S}_n$ et des paramètres θ_n résolvant ainsi le problème de commande $< \gamma_g^n, \mathcal{S}_n, \theta_n, \mathcal{U} >$.

Exemple
Pour illustrer ce concept, prenons l'exemple suivant, une simple régulation de niveau dans une

cuve de section A à l'aide d'un régulateur proportionnel-intégral (PI).

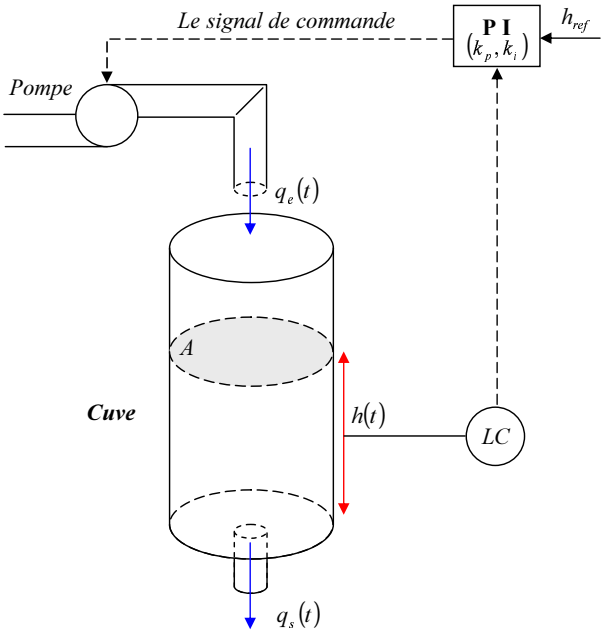


FIG. 1.1 – Montage d'une régulation de niveau simple

✓ L'objectif γ_g est de régler le niveau $h(t)$ autour d'une référence h_{ref}.

✓ La structure $\mathcal{S}$ est donnée par les équations du système,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{A}(q_e(t) - f(x(t))) \\ h(t) = x(t) + \varepsilon(t) \end{cases}$$

La variable d'état $x(t)$ représente le niveau dans la cuve, la sortie $h(t)$ est la mesure du niveau $x(t)$ à laquelle s'ajoutent des erreurs de mesure $\varepsilon(t)$. L'entrée $q_e(t)$ est le débit délivré par la pompe. Enfin la fonction non-linéaire $q_s(t) = f(x(t))$ est égale à $\alpha\sqrt{x(t)}$ en supposant un écoulement laminaire.

✓ Les paramètres θ sont la surface A et le coefficient α.

✓ La loi de commande $q_e(t)$ (sortie de l'actionneur) appartient à l'ensemble de lois de commande $\mathcal{U}$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}: \quad & H_{ref} \times H \to \mathbb{R} \\ & (h_{ref}, h(t)) \to q_e(t) = k_p(h_{ref} - h(t)) + k_i \int_0^t (h_{ref} - h(\tau))d\tau \\ & q_e(t) \in [0, q_{max}] \end{aligned}$$

Avec H_{ref} l'ensemble des références, H l'ensemble de mesures. k_p et k_i sont les coefficients à trouver en tant que solution du problème de commande, afin d'assurer les objectifs γ_g sous les contraintes de structure $\mathcal{S}$ et les paramètres θ.

1.1.2 Problème de commande en présence de défauts

Un système tolérant aux défauts est conçu afin d'améliorer les performances du système en présence de défauts. Un défaut est un évènement qui agit sur le système et qui peut changer les propriétés du système. Un défaut peut modifier la structure $\mathcal{S}_n$ et/ou les paramètres θ_n voire l'ensemble de commande $\mathcal{U}$, ce qui signifie que les objectifs globaux γ_g^n peuvent être ou non réalisés sous cette nouvelle structure et/ou ces nouveaux paramètres.

✓ Défaut modifiant la structure et/ou les paramètres.

Un défaut peut affecter les actionneurs, les capteurs ou le système donc il peut modifier la structure nominale $\mathcal{S}_n$ et/ou les pamarètres θ_n. La nouvelle structure et les nouveaux paramètres avec défauts sont alors notés respectivement $\mathcal{S}_f$ et θ_f.

Dans ce cas une nouvelle formulation du problème de commande $< \gamma_g^n, \mathcal{S}_f, \theta_f, \mathcal{U} >$ est proposée dont la solution permet d'assurer des objectifs γ_g^n.

✓ Défaut modifiant l'ensemble de lois de commande $\mathcal{U}$.

Un défaut peut affecter la loi de commande (régulateur, algorithme de calcul,...) donc il modifie l'ensemble des lois de commande admissibles $\mathcal{U}$ en un ensemble restreint $\mathcal{U}_f$. De plus un défaut système peut lui aussi modifier l'ensemble $\mathcal{U}$. Pour illustrer ce dernier point, revenons à l'exemple précédent de la régulation de niveau à l'aide d'un correcteur proportionnel-intégral. Supposons qu'il y a un défaut d'actionneur (la pompe) représenté par une perte d'efficacité dans la pompe, de ce fait même si la pompe est utilisée à 100% elle ne pourra fournir que $q'_{max} < q_{max}$ ce qui implique qu'un sous-ensemble de $\mathcal{U}$ ne sera plus réalisable. Le nouvel ensemble de lois de commande admissibles est noté $\mathcal{U}_f$.
La solution au problème de présence de défauts consiste à mettre en place des systèmes tolérants aux défauts.

1.1.3 Les systèmes tolérants aux défauts

Un système tolérant aux défauts permet de maintenir des objectifs proches de ceux désirés non seulement en l'absence de défauts mais également en présence de composants défectueux. Il est très important de préciser que les objectifs à atteindre durant ces deux modes de fonctionnement sont différents. Dans le mode nominal, des objectifs de qualité sont à assurer, en revanche en présence de défauts, des objectifs dégradés peuvent être acceptés [Zhang et al., 2005].

Les systèmes tolérants aux défauts sont généralement classés en deux grandes approches comme illustrées à la figure (1.2) : l'approche passive (Passive Fault-Tolerant Control Systems PFTCS) et l'approche active (Active Fault-Tolerant Control Systems AFTCS) [Patton, 1997].

1.1.3.1 Méthodes passives

Dans l'approche passive, la loi de commande est conçue pour être robuste à un ensemble prédéfini de défauts et elle ne sera pas changée lors de l'occurrence de défaut. Elle est basée sur l'idée que les défauts représentent des perturbations sur le système et exploite les techniques

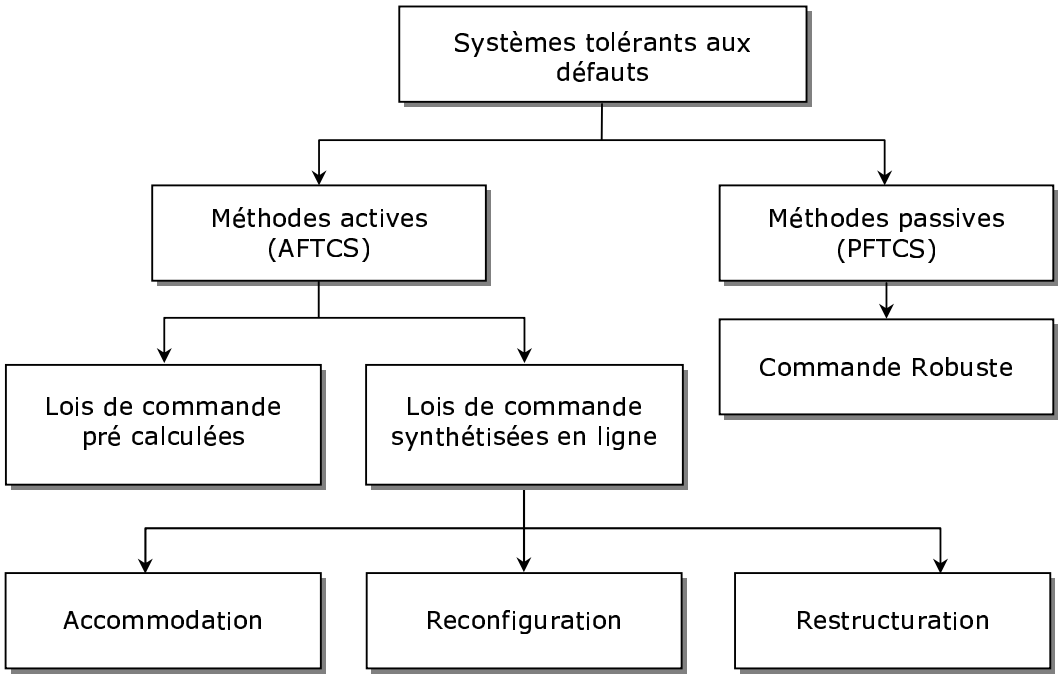


FIG. 1.2 – Types des systèmes tolérants aux défauts

de la commande robuste à ces perturbations.

Dans ce cas, le problème de commande est donné sous la forme $< \gamma_g^n, \mathcal{S}_f, \theta_f, \mathcal{U}_f >$ avec $f \in \mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ représente l'ensemble de défauts considérés.
Dans le contexte des systèmes tolérants aux défauts passifs, le problème de commande $< \gamma_g^n, \mathcal{S}_f, \theta_f, \mathcal{U}_f >$ avec $f \in \mathcal{F}$ et le problème de commande $< \gamma_g^n, \mathcal{S}_n, \theta_n, \mathcal{U}_n >$ ont une solution commune.

Ce type d'approche ne requiert pas la présence d'un module de diagnostic (Fault Detection and Diagnostic FDD) pour détecter la présence des défauts ainsi qu'un bloc de reconfiguration de la structure et/ou des paramètres du système.

1.1.3.2 Méthodes actives

Les systèmes tolérants "actifs" réagissent d'une manière "active" lorsque le défaut apparaît selon deux approches distinctes : la sélection d'une loi de commande pré-calculée ou la synthèse d'une nouvelle loi de commande en ligne. Les deux approches requièrent la présence d'un bloc diagnostic pour founir des informations concernant l'état du système.

a) Lois de commande pré-calculée
Cette première approche est basée sur l'idée qu'il existe un banc de régulateurs pré-calculés pour chaque mode de fonctionnement. Un régulateur pour le mode de fonctionnement nominal et un régulateur pour chaque mode défaillant. La séléction du régulateur associé au mode de fonctionnement actif (présent) est effectuée par le coordinateur, qui est constitué d'un ensemble d'estimateurs permettant la reconstruction des sorties du système pour chaque mode de fonctionnement. Après avoir évalué les performances de chaque mode, le régulateur concerné est

selectionné comme illustré à la figure 1.3. Cette approche était le sujet de plusieurs travaux notamment [Moerder et al., 1989], [Maybeck et Stevens, 1991] et [Zhang et Jiang, 2001].

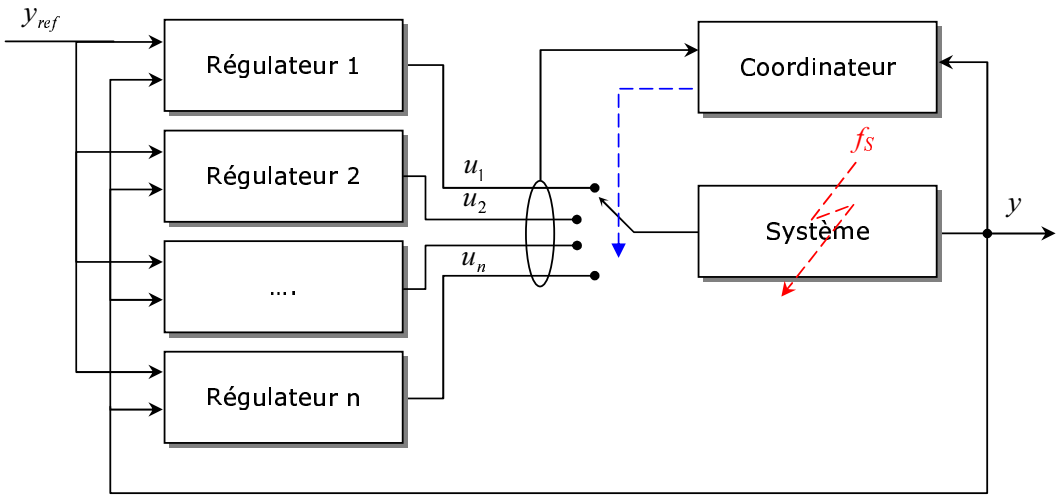


FIG. 1.3 – Structure du système tolérant aux défauts actif à base de banc de régulateurs

Cette approche ne semble pas raisonnable dans le cas d'un nombre important de défauts car il faut également un nombre important de régulateurs à synthétiser, de ce fait, nous nous intéressons à la seconde approche fondée sur la synthèse d'une nouvelle loi de commande en ligne.

b) Lois de commande synthétisée en ligne

Suivant le défaut, en fonction de sa sévérité et les informations qui peuvent être fournies par le bloc diagnostic, trois cas peuvent être considérés : l'accommodation, la reconfiguration ou la restructuration du système. Des définitions fondamentales de ces aspects ont été proposées par [Patton, 1997], [Staroswiecki et Gehin, 2001] et [Theilliol, 2003]. Nous reprenons les définitions suivantes qui serviront de référence pour notre travail.

b.1) Accommodation

L'accommodation permet de résoudre le problème de commande $< \gamma_g^n, \hat{\mathcal{S}}_f, \hat{\theta}_f, \mathcal{U} >$ où $\hat{\mathcal{S}}_f$ et $\hat{\theta}_f$ sont les estimations de la structure et des paramètres du système avec défauts respectivement, fournies par le bloc diagnostic. Dans ce cas nous supposons que le bloc diagnostic est capable de détecter, de localiser et d'estimer l'amplitude des défauts.

Par hypothèse, uniquement des défauts de faibles amplitudes sont pris en compte par l'accommodation. Pour s'affranchir de la présence du défaut, la nouvelle loi de commande est générée soit par l'adaptation en ligne des paramètres du régulateur soit par la compensation d'une commande supplémentaire. Dans ce cas, la structure de la loi de commande n'est pas changée.

b.2) Reconfiguration

La reconfiguration de loi de commande est utilisée dans le cas où les parties défaillantes (actionneurs, capteurs ou régulateurs) ne peuvent pas être accommodées.

Notons $\mathcal{S}_f = \mathcal{S}_n^{'} \cup \mathcal{S}_f^{'}$ la structure du système en présence de défaut incluant $\mathcal{S}_f^{'}$ la structure associée aux parties défaillantes et $\mathcal{S}_n^{'}$ la structure associée aux parties du système qui n'ont

pas été affectées par le défaut.

Après l'occurrence du défaut, par hypothèse, le bloc diagnostic a détecté le défaut et l'a localisé dans un sous-système (actionneurs et/ou capteurs) de $\mathcal{S}_f^{'}$ et il a déconnecté la partie $\mathcal{S}_f^{'}$, donc la nouvelle structure est $\mathcal{S}_n^{'}$.

Dans la même logique, nous supposons que les paramètres sont donnés par $\theta_f = \theta_n^{'} \cup \theta_f^{'}$ et l'ensemble de lois de commande admissibles est donné par $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_n^{'} \cup \mathcal{U}_f^{'}$.

Une nouvelle formulation du problème de commande est alors proposée sous la forme $< \gamma_g^n, \mathcal{S}_f^{'}, \theta_f^{'}, \mathcal{U}_f^{'} >$.

b.3) Restructuration
Quand il n'existe pas de solution au problème de commande en utilisant l'accommodation et la reconfiguration, ceci signifie que les objectifs ne sont plus atteignables en présence de défaut. La seule possibilité est alors de dégrader les objectifs en γ_g^d et d'essayer de trouver une solution au nouveau problème de commande [Theilliol, 2003]. Cette stratégie est appelée reconfiguration des objectifs ou supervision dans [Staroswiecki et Gehin, 2001] et [Hoblos et al., 2001].

La restructuration consiste à trouver une solution au problème $< \Gamma_g, \mathbb{S}, \Theta, \mathcal{U} >$, où :
Γ_g : ensemble des objectifs possibles,
$\mathbb{S}$: ensemble des structures possibles,
Θ : ensemble des paramètres associés à $\mathbb{S}$,
$\mathcal{U}$: ensemble des lois de commande admissibles.

D'une autre manière, trouver $u \in \mathcal{U}$ permettant d'assurer des objectifs dégradés $\gamma_g^d \in \Gamma_g$ sous une structure $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ pour des paramètres $\theta \in \Theta$.

1.1.4 Structure des systèmes tolérants aux défauts

En général, un système tolérant aux défauts est constitué de quatre blocs essentiels : 1) un bloc diagnostic, 2) un bloc reconfiguration 3) un régulateur reconfigurable et 4) un bloc de gestion des références [Zhang et Jiang, 2003a].

La fonction principale du bloc diagnostic est de détecter le défaut et d'estimer le défaut ainsi que les variables d'état du système en ligne. Une fois que le défaut est apparu le bloc diagnostic active le mécanisme de reconfiguration et fournit en ligne les informations concernant le défaut et l'état du système. En se basant sur ces informations le bloc reconfiguration s'occupe de la déconnexion des parties défaillantes (sous-systèmes f_S, actionneurs f_A et capteurs f_C), la synthèse de la nouvelle loi de commande (régulateur reconfigurable) et l'ajustement des références afin d'assurer les objectifs en poursuite de consgine. Notons que peu de chercheurs ont integré le bloc de gestion des références dans leurs travaux tel que le propose les articles [Zhang et al., 2005] et [Zhang et Jiang, 2003b].

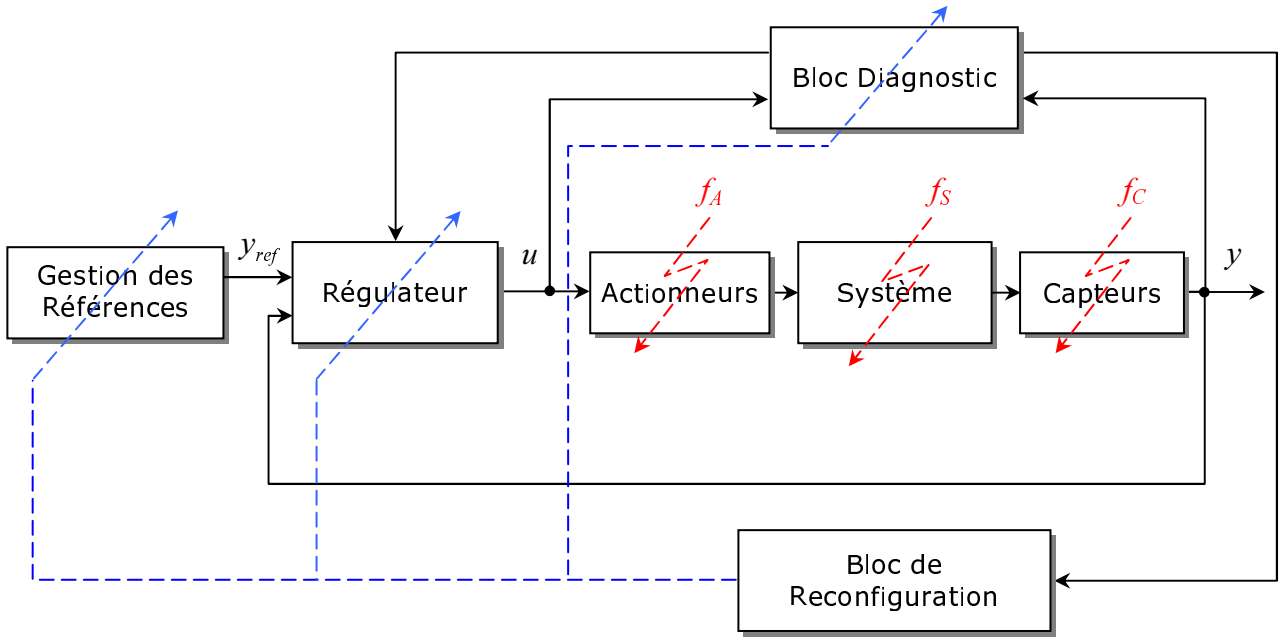


FIG. 1.4 – Structure générale des systèmes tolérants aux défauts

Pour synthétiser le régulateur, plusieurs méthodes existent, nous citons ici les plus utilisées, à titre d'exemple :

• La méthode LQR (Linear Quadratic Method) présentée par [Huang et Stengel, 1990], [Sauter et al., 2002] est très connue dans la théorie du contrôle. Elle utilise le principe de la théorie de la commande optimale (The optimal control for the linear-quadratic regulator) qui réside dans la minimisation du critère afin de trouver un gain du retour d'état.

Dans le cas nominal, le système est décrit par une représentation d'état de la forme $(A,\ B,\ C)$ et commandé par une loi de commande par retour d'état $u(t) = -Kx(t)$ afin d'obtenir des performances spécifiques.

En utilisant la théorie de la commande optimale, en construisant le Hamiltonien, la solution de ce problème est donnée par

$$u(t) = -R^{-1}B^T Kx(t)$$

où K est la solution de l'équation de Riccatti,

$$Q + A^T K + KA - KBR^{-1}B^T K = 0$$

Le système en boucle fermée est alors donné par :

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T K)x(t)$$

Dans le cas défaillant, nous supposons que l'occurrence de défaut système, actionneur et/ou capteur transforme (A, B, C) en (A^f, B^f, C^f) et la nouvelle présentation du système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^f x(t) + B^f u(t) \\ y(t) = C^f x(t) \end{cases}$$

Le problème consiste à chercher un nouveau gain K^f solution de l'équation

$$Q + {A^f}^T K^f + K^f A^f - K^f B^f R^{-1} {B^f}^T K^f = 0$$

• La méthode de la pseudo-inverse, en anglais Pseudo-Inverse Method (PIM), a été traitée par plusieurs chercheurs [Gao et Antsaklis, 1990], [Gao et Antsaklis, 1991], [Ostroff, 1985], [Palmubo et al., 1992]. Elle a été présentée par [Huang et Stengel, 1990] sous le nom "approximate model matching". Cette méthode consiste à déterminer un nouveau gain de retour d'état de telle sorte que la dynamique du système défaillant soit approximativement égale à celle du système nominal en minimisant un critère donné. L'inconvénient majeur de la méthode classique [Huang et Stengel, 1990], [Ostroff, 1985] réside sur le fait que trouver une solution minimisant le critère n'assure pas forcément la stabilité du système bouclé. Des extentions de la méthode ont été proposées [Gao et Antsaklis, 1991] et [Staroswiecki, 2005]. Ces extentions utilisent une optimisation sous contrainte pour garantir la stabilité du système en boucle fermée. Nous aurons l'occasion de découvrir cette méthode dans le chapitre 3.

• L'approche par placement de structure propre en commande sous contraintes (Eigenstructure Assignment EA) a été proposée par plusieurs chercheurs, à titre d'exemple [Jiang, 1994], [Konstantopoulos et Antsaklis, 1996]. Dans cette approche, on s'interesse à placer une structure propre en terme de valeurs propres et vecteurs propres via la loi de commande pour assurer des performances désirées du système en boucle fermée.

À partir des travaux existants concernant la synthèse des lois de commande tolérantes aux défauts, nous pouvons constater que dans la majeure partie de ces travaux, les chercheurs proposent des méthodes de synthèse des lois de commande prenant en compte uniquement des objectifs à court terme, plus particulièrement la stabilité sans tenir compte des objectifs à long terme, comme par exemple : garantir la fiabilité maximum du système sur la durée de la mission, minimiser l'énergie globale consommée, minimiser le coût financier, améliorer la qualité de production,... Malgré l'importance a priori de ces objectifs en aucun cas, nous pouvons favoriser un objectif de long durée en terme de qualité, fiabilité, coût,...sans garantir la stabilité du système, en revanche dans le cas où nous pouvons assurer la stabilité du système, pourquoi ne pas étendre ces méthodes en tenant compte des objectifs de long terme ?

Certains chercheurs ont introduit comme objectif la minimisation de l'énergie consommée des actionneurs dans leur analyse. En terme d'énergie consommée à minimiser et en se basant sur la théorie de la commande optimale, [Staroswiecki, 2002] a proposé une stratégie permettant de vérifier hors-ligne si le système est tolérant à un certain ensemble de défauts actionneurs. Cette stratégie permet d'évaluer la reconfigurabilité du système pour une classe définie de défauts. Dans cette analyse, non seulement la stabilité a été prise en compte mais l'auteur a également introduit un objectif supplémentaire au sens d'une limite d'énergie à respecter (l'énergie des actionneurs à long terme entre 0 et ∞) pour atteindre un objectif de commande (ramener l'état du système d'un point donné dans l'espace d'état vers l'origine). Dans le même contexte (la reconfigurabilité), la notion de "smallest second-order mode" introduite la première fois par [Moore, 1981], a été proposée par [Wu et Salomon, 2000] pour évaluer la capacité du système à restaurer ses performances en présence de défauts en utilisant l'une des méthodes de synthèse de commande tolérante aux défauts. Les "second-order mode" sont les racines des valeurs propres du produit du Gramien de commandabilité et le Gramien d'observabilité. La relation entre l'énergie et les gramiens est que si les valeurs singulières du Gramien de commandabilité

sont larges alors l'énergie de commandabilité est faible, de la même manière si les valeurs singulières du Gramien d'observabilité sont considérables alors l'énergie d'observabilité sera faible. Par conséquent l'énergie a été prise en tant qu'objectif pour indiquer si le système est tolérant ou non aux défauts.

Récemment, [Patton et al., 2006] ont proposé une étude des systèmes en réseaux dans le but d'intégrer les techniques du diagnostic et des systèmes tolérants aux défauts. Ils proposent d'établir un lien entre les performances du réseau en terme de " qualité de service " (QoS) et les systèmes FTC. La QoS désigne généralement la capacité à fournir un service conforme à des exigences en terme de temps de réponse et de bande passante. Dans le contexte des réseaux informatiques, la QoS désigne l'aptitude à pouvoir garantir un niveau acceptable de perte de paquets pour un usage donné. Dans le monde de la commande, le concept de QoS existait d'une manière implicite, à titre d'exemple le niveau des performances a été mesuré en utilisant la fonction de coût. Les auteurs proposent d'étendre le concept de la QoS aux systèmes de commande, ceci permettant d'intégrer la fiabilité, la robustesse...etc

En conséquence nous pouvons introduire un objectif de long terme tel que l'analyse de la fiabilité, la disponibilité, la maintenabilité, le coût,...etc dans la conception des lois de commande des systèmes du moment que les objectifs de commande (stabilité) sont pris en compte.

Plusieurs travaux ont été developpés concernant les systèmes tolérants aux défauts exploitant des informations issues de la fiabilité et des coûts financiers, mais avant de présenter ces travaux, il est essentiel d'introduire en amont, les principaux concepts et éléments permettant d'estimer la fiabilité d'un système.

1.2 Fiabilité des systèmes

Dans cette partie nous allons exposer les principales définitions utilisées dans les analyses de la fiabilité des systèmes ainsi que les indicateurs et les paramètres utilisés dans ce domaine.

1.2.1 Fiabilité et taux de défaillance d'un composant élémentaire

D'après la norme AFNOR (Association française de normalisation) X NF, 06-501, la fiabilité est l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise ou à satisfaire les besoins des utilisateurs, dans des conditions données, pendant une durée donnée [AFNOR, 1977].

La fiabilité $R(t)$ d'un composant élémentaire à l'instant t est généralement mesurée par la probabilité qu'il n'y ait pas de défaillance sur l'intervalle de temps $[t_0, t]$ sous des conditions de fonctionnement données, sachant que le système est en bon fonctionnement à l'instant t_0.

D'autres fonctions peuvent être déterminées à partir de $R(t)$ par exemple $Q(t) = 1 - R(t)$: la fonction complémentaire de la fiabilité définie par la probabilité qu'un composant soit défaillant entre t_0 et t [Pagès et Gondran, 1980].

Par ailleurs, le taux de défaillance $\lambda(t)$ permet d'estimer la probabilité conditionelle qu'une défaillance se produise sur le composant élémentaire pendant un temps δt à l'instant t, en sachant

que le composant n'a pas eu de défaillance sur $[t_0, t]$ [Cox, 1962][Villemeur, 1988].

Puisque nous allons utiliser ces grandeurs dans les calculs de la suite du travail, nous exposons ces concepts d'une manière plus détaillée.

Soit T une variable aléatoire mesurant la durée de fonctionnement du composant avant défaillance (ou également la durée de vie pour les composants non réparables).

Sachant qu'une variable aléatoire est définie par sa fonction de répartition et par sa densité de probabilité.

- $F(t) = P[T \leq t]$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire T. Elle possède les propriétés suivantes :

$\lim_{t \to 0} F(t) = 0$ et $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$.
$F(t)$ est non décroissante. $0 \leq F(t) \leq 1$.

- $f(t)$ est la densité de probabilité de T (ou fonction de distibution) :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du.$$

$f(t)dt$ est la probabilité pour que T soit compris entre t et $t + \delta t$.
Les figures (1.5) et (1.6) illustrent des exemples de fonctions de répartition et la densité de probabilité. $F(t_1)$ est la surface délimitée par la courbe $f(t)$ et la droite qui coupe l'axe de t à l'instant t_1, pour cette raison la fonction de répartition est appelée également la probabilité cumulée.

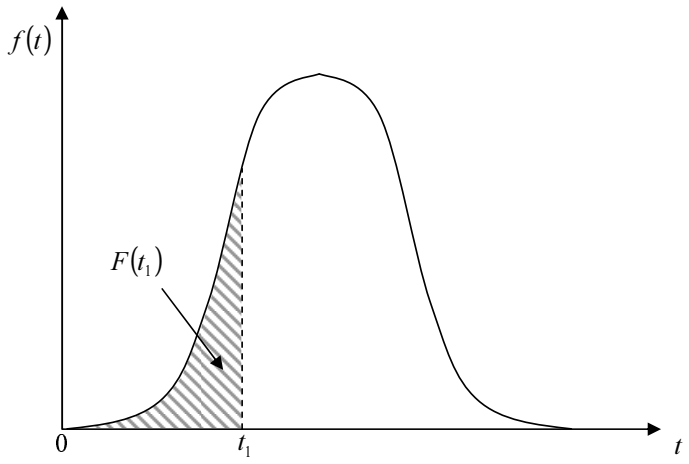


FIG. 1.5 – Exemple de densité de probabilité

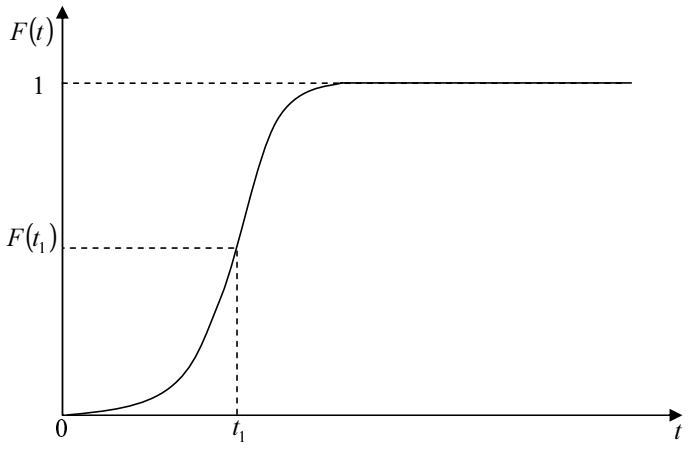


FIG. 1.6 – Exemple de fonction de répartition

Rappelons que par définition :

$R(t) = P[T > t]$ et $Q(t) = 1 - R(t) = F(t)$,

par conséquence, la fonction complémentaire de la fiabilité (défiabilité) $Q(t)$ est la fonction de répartition de T et $R(0) = 1$, $R(\infty) = 0$.

D'après la définition précédente, nous pouvons écrire le taux de défaillance $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} P[t < T \leq t + \delta t \,|\, T > t]$$

Nous pouvons l'écrire également :

$$\lambda(t)dt = P[t < T \leq t + dt \,|\, T > t]$$

D'après le théorème des probabilités conditionnelles, l'équation devient :

$$\lambda(t)dt = \frac{P[t < T \leq t + dt \cap T > t]}{P[T > t]}$$

Sachant que $T > t$ est inclu dans l'événement $t < T \leq t + \delta t$ donc $P[t < T \leq t + dt \cap T > t] = P[t < T \leq t + dt] = f(t)dt = -\frac{dR(t)}{dt}dt$. Notons que $R(t) = P[T > t]$.

Nous pouvons en déduire, une relation entre le taux de défaillance et la fiabilité :

$$\lambda(t) = -\frac{dR(t)/dt}{R(t)} \qquad | \qquad t_0 = 0$$

En intégrant les deux membres de 0 à t, sachant que $R(0) = 1$:

$$R(t) = exp\Big\{ - \int_0^t \lambda(t).dt \Big\}$$

Comme l'indique la courbe en baignoire de la figure (1.7), le taux de défaillance est dépendant du temps sur toute la durée de vie du composant élémentaire. Durant la période de jeunesse, les

pannes nombreuses du début diminuent avec le temps contrairement à la période de vieillissement où le nombre de pannes s'accroît sans cesse. La période la plus importante est la période de vie utile durant laquelle le nombre de pannes est le plus faible. Pour simplifier les calculs, il est communément admis pendant la période de vie utile que le taux de défaillance soit approximé par une constante appelée λ.

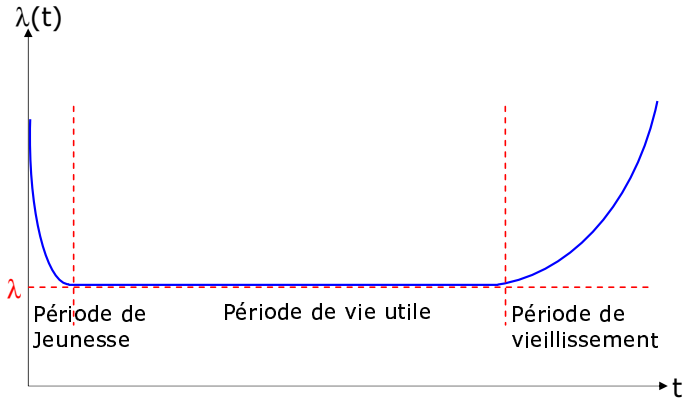


FIG. 1.7 – Taux de défaillance en fonction du temps

Sinon, le problème posé est de modéliser ces grandeurs par des lois de probabilité connues. En effet, il existe plusieurs lois, à titre d'exemple la loi exponentielle, la loi normale, la loi log-normale, la loi de Weibull et la loi Gamma.

Sous l'hypothèse que la distribution des durées de vie est représentée par une loi exponentielle, la fiabilité peut être exprimée comme suit :

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

La figure (1.8) présente la courbe $R(t)$ en fonction du temps t avec λ constant.

Notons que la loi exponentielle représente correctement la fonction de distribution lorsque :

- Les défaillances sont indépendantes.
- Le taux de défaillance est constant.

Elle est caractérisée par les relations suivantes :
$\lambda(t) = \lambda = \text{constant}$

$R(t) = e^{-\lambda.t}$

$F(t) = Q(t) = 1 - e^{-\lambda.t}$

$f(t) = \lambda e^{-\lambda.t}$

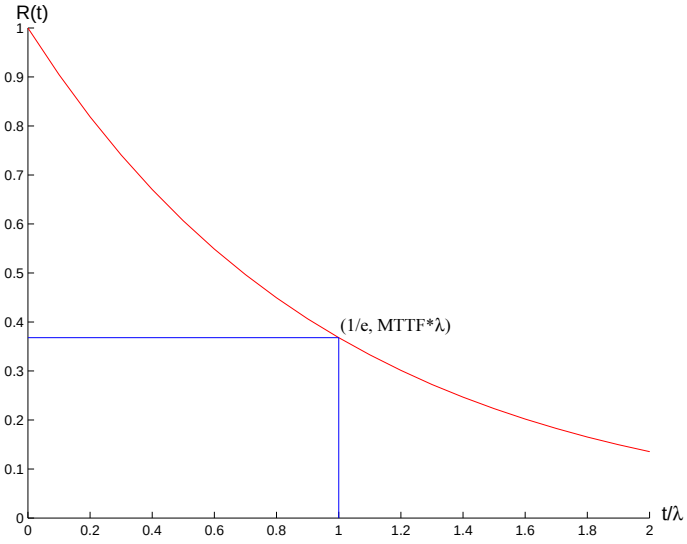


FIG. 1.8 – Courbe $R(t) = e^{-\lambda t}$

Nous avons choisi la loi exponentielle de part sa simplicité d'utilisation car elle ne fait pas intervenir trop de paramètres, mais les autres lois peuvent être utilisées si les paramètres de ces lois sont disponibles.

1.2.2 MTTF

Un autre indicateur de fiabilité est le MTTF (de l'anglais, Mean Time To Failure) qui représente une estimation du temps moyen de fonctionnement avant la première défaillance, ce temps a un rôle important en fiabilité, il est souvent pris comme un indicateur permettant la comparaison des fiabilités des systèmes fournis par un constructeur. Il est défini par :

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt$$

Le MTTF est calculé par la surface délimitée par $R(t)$.
Dans le cas d'une distribution exponentielle, lorsque le taux de défaillance est constant, le temps moyen de fonctionnement MTTF est égal à $\frac{1}{\lambda}$ et il correspond à une probabilité de fonctionnement de $\frac{1}{e} \simeq 0.367$. Le composant a donc environ 36.7% de chances pour fonctionner correctement au bout du temps MTTF.

Précédemment, nous avons présenté des paramètres caractérisant la fiabilité d'un composant élémentaire, dans ce qui suit, nous allons étudier la fiabilité des systèmes qui contiennent plusieurs composants.

1.2.3 Fiabilité des systèmes

Dans le cas des systèmes multicomposants la défaillance du système dépend de la défaillance d'un certain nombre de composants suivant la structure du système. Pour calculer la fiabilité d'un système, son taux de défaillance et son MTTF à partir des propriétés de ses composants

(fiabilité, taux de défaillance et MTTF), il faut définir la structure de propagation des défaillances dans le système.

En fiabilité, deux structures possibles sont à distinguer structure élémentaire et structure complexe. Une structure élémentaire contient des composants indépendants en série ou en parallèle ou toutes combinaisons possibles de ces deux cas. Un système pouvant être décomposé en plusieurs modules à structure élémentaire est considéré comme système simple ou compliqué si sa taille est très importante. À l'inverse nous parlons de systèmes complexes quand le système n'est pas constitué de structure élementaire et si les composants ne sont pas indépendants.

L'exemple suivant illustre le diagramme de fiabilité d'un système à structure élémentaire (Fig. 1.9) et le diagramme de fiabilité d'un système à structure complexe (Fig. 1.10) (dans ce cas la fonction de structure ne peut pas être factorisée).

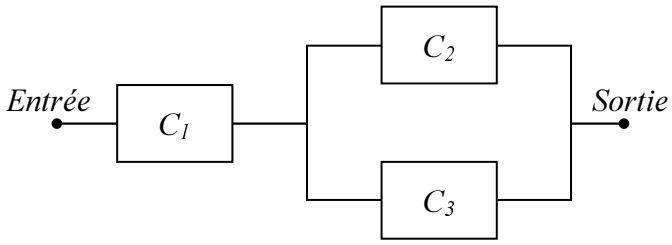


FIG. 1.9 – Système à structure simple

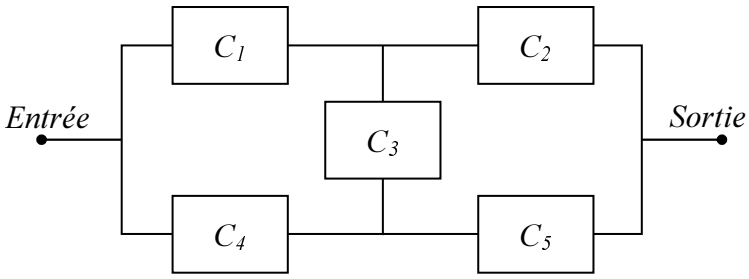


FIG. 1.10 – Système à structure complexe

Nous ne présentons dans la suite de ce paragraphe que les structures élémentaires série et parallèle, pour les structures complexes, nous renvoyons le lecteur à [Pagès et Gondran, 1980] pour plus de détails.

De plus nous faisons l'hypothèse que les systèmes auxquels les chapitres 2, 3 et 4 font référence sont des systèmes compliqués et non complexes d'un point de vue fiabilité.

Pour exprimer la fiabilité du système, dans ce qui suit notée $R_{sys}(t)$, en fonction des fiabilités de ses composants $R_i(t)$, nous disposons de plusieurs méthodes telles que les chaînes de Markov, les arbres de défaillances...etc Dans notre travail, nous utiliserons les diagrammes de fiabilité.

Nous présentons le cas des composants en série et le cas des composants en parallèle, (*cf. Annexe A* pour les détails).

Composants en série
Soit un système S constitué de n composants C_i en série, $i = 1 \dots n$.

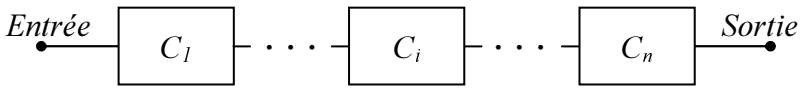


FIG. 1.11 – Système avec n composants en séries

La fiabilité du système est :

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

avec $R_i(t)$ la fiabilité du composant C_i.

Composants en parallèle
Soit un système S constitué de n composants C_i en parallèle,

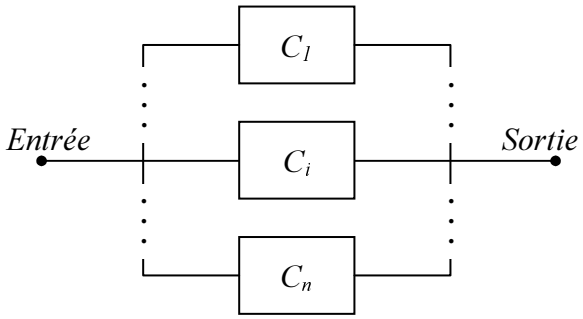


FIG. 1.12 – Système avec n composants en parallèles

La fiabilité du système est :

$$R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i(t))$$

avec $R_i(t)$ la fiabilité du composant C_i.
Dans cette partie nous avons exposé les paramètres et indicateurs permettant de caractériser la fiabilité d'un système. Nous avons rappelé la différence entre une structure élémentaire ou simple et une structure complexe. L'évalution de la fiabilité d'un système à partir de fiabilités de ses composants interconnectés en série et en parallèle est décrite à partir d'une méthode de diagramme de fiabilité.

Dans la partie suivante, nous allons présenter les différents travaux existants consacrés à la prise en compte de la fiabilité pour renforcer l'efficacité des systèmes tolérants aux défauts.

1.3 Commande tolérante aux défauts et fiabilité

Comme nous l'avons mentionné précédemment plusieurs travaux ont été developpés concernant les systèmes tolérants aux défauts exploitant la fiabilité dans le but d'améliorer leurs perfomances.

Dans ces travaux, l'analyse de la fiabilité a été abordée sous plusieurs formes et avec différents objectifs, nous pouvons classer ces travaux en cinq grandes parties :

- Évaluation de la fiabilité du système en intégrant la fiabilité du bloc diagnostic et la fiabilité des sous systèmes.
- Intégration de la fiabilité du bloc diagnostic lors de la conception des lois de commande.
- Systèmes tolérants aux défauts exploitant les processus Markoviens.
- Systèmes tolérants aux défauts fondés sur l'approche Multimodèle.
- La fiabilité du système au sein des systèmes tolérants aux défauts.

1.3.1 Évaluation de la fiabilité du système en intégrant la fiabilité du bloc diagnostic

Le bloc diagnostic joue un rôle essentiel dans les systèmes tolérants aux défauts en permettant d'évaluer les résidus et de décider du caractère significatif ou non des défaillances. Par conséquent pour évaluer la sûreté de fonctionnement du système on peut se poser les questions suivantes : jusqú'à quel point le bloc diagnostic est capable de détecter tous les défauts et ne donne pas des fausses alarmes et dans quelle mesure le bloc diagnostic lui même ne peut pas être affecté par des défauts ? Plusieurs chercheurs ont introduit la notion de la fiabilité du bloc diagnostic dans l'évaluation de la fiabilité du système complet. La fiabilité du bloc diagnostic est caluclée à partir des taux similaires aux taux de défaillance, présenté précédemment, qui indiquent les fausses alarmes et non-détection des défauts.

Dans [Wu, 2001a] cet indicateur est nommé taux de recouvrement "Coverage" représentant la probabilité conditionnelle que le système se remette dans l'état de fonctionnement adéquat si un défaut est apparu ou si un sous système est défaillant, il concerne les erreurs de commutation (erreurs de décision) sur la configuration adéquate. Le taux de recouvrement peut être calculé expérimentalement en comptant la fréquence de succès de la reconfiguration pour un défaut donné. Dans ce travail, les chaînes de Markov ont été utilisées pour évaluer la fiabilité du système complet.

[Bonivento et al., 2003] ont aussi proposé une analyse de la fiabilité du système en tenant compte de la fiabilité du bloc diagnostic. Le système est considéré comme un ensemble de n sous système S_i qui peuvent être affectés par f_i défauts et un ensemble de r sous-bloc diagnostic D_j qui peuvent être affectés par deux types de défauts : les fausses alarmes et les non-détections des défauts. La fiabilité du sous système S_i est calculée à base du taux d'occurence du défaut f_i et la fiabilité du sous-bloc diagnostic D_j est calculée à base des taux des fausses alarmes et taux des non-détection des défauts. Une cellule élémentaire est définie comme le sous système S_i et le sous-bloc diagnostic D_j qui permet de détecter le défaut f_i. Chaque cellule a une fiabilité calculée à partir des fiabilités de S_i et D_i suivant leur interconnexions fonctionnelles, la

propagation de défaut entre les cellules a été prise en compte dans ce calcul. Enfin, la fiabilité du système complet représenté par l'interconnexion de toutes cellules élémentaires en série, est évalualée comme le produit des fiabilités des cellules élémentaires.

Notons que dans ce travail, le système est décomposé physiquement en n sous systèmes, et le même travail est étendu récemment [Bonivento et al., 2006] comprenant la décomposition fonctionnelle du système.

En conclusion, ces travaux représentent une évaluation classique de la fiabilité du système complet en tenant compte de la fiabilité du bloc diagnostic et la fiabilité des sous systèmes sans tenir compte des objectifs de la commande. La fiabilité dans ce cas n'est pas un objectif à atteindre et n'a pas d'influence sur la conception de la commande tolérante aux défauts. De plus cette évaluation est faite hors ligne. L'originalité de ces travaux réside dans l'évaluation de la fiabilité du bloc diagnostic à partir des taux qui indiquent les erreurs de décision du bloc diagnostic telles que : les fausses alarmes, non-détection des défauts,... et les erreurs de commutation sur la configuration souhaitée ou sur le régluateur adéquat.

1.3.2 Intégration de la fiabilité du bloc diagnostic lors de la conception des lois de commande

À partir des résultats des travaux cités dans le paragraphe précédent, nous pouvons dire que l'évaluation classique de la fiabilité du système sans prendre en considération les objectifs de la commande, n'améliore pas les performances des systèmes FTC mais permet de les évaluer. Pour rendre ces analyses efficaces, il faut introduire une relation entre la fiabilité et la conception des lois de commande.

Les travaux [Wu, 2001b], [Wu et Patton, 2003] et [Wu, 2004] ont fait un lien entre le recouvrement introduit dans [Wu, 2001a] et les lois de commande. Le système est considéré composé de deux niveaux : - Un niveau haut vu comme un processus stochastique modélisé par les chaînes de Markov sert à déterminer les états de fonctionnement (nominal et défaillants) du système dépendants des sous systèmes qui ont deux états de fonctionnement : normal ou en panne. Parmis ces états il y a des états absorbants. - Un niveau bas en tant que système dynamique continu où le problème conventionnel de commande est traité. En d'autres termes pour chaque état (niveau haut) une loi de commande appropriée est synthétisée hors ligne au niveau bas.

Précédemment, nous avons présenté le problème de commande décrit par $< \gamma, \mathcal{S}, \Theta, \mathcal{U} >$ (paragraphe 1.1.1) et nous avons vu que le défaut affecte les paramètres θ et la structure $\mathcal{S}$ du système. Dans ces travaux [Wu, 2001b], [Wu et Patton, 2003] et [Wu, 2004], les états de fonctionnement sont caractérisés par les paires (S, θ). Chaque loi de commande pré-calculée $u \in \mathcal{U}$ et suivant les différents états de fonctionnement (S, θ) un indice de performance $J_u(S, \theta) = \frac{1}{\mu_{u(S,\theta)}}$ est calculé, avec $\mu_{u(S,\theta)}$ les valeurs singulières structurées du système en boucle fermée. La figure (1.13) présente, à titre d'exemple, l'évolution des indices de performances $J_{u_1}(S, \theta)$ et $J_{u_2}(S, \theta)$ de deux lois de commande u_1 et u_2 en fonction de (S, θ). J_{min} représente le seuil des performances acceptables, donc les objectifs ne sont pas atteignables avec une loi de commande u possèdant des performances $J_u(S, \theta) < J_{min}$. Notons par $\Omega = \{S \in \mathcal{S}, \theta \in \Theta \quad | \, J_{u_i}(S, \theta) \geqslant J_{min}\}$ l'ensemble des états de fonctionnement où les objectifs sont atteignables, appelés états non-absorbants.

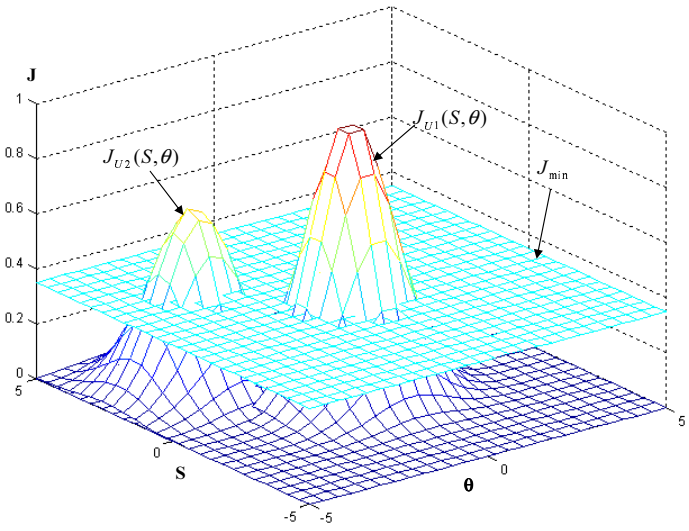


FIG. 1.13 – Évaluation des performances de la commande en fonction de S et θ

Pour sélectionneur la loi de commande appropriée (adéquate) à l'état de fonctionnement en cours, il faut connaître la valeur de la paire (S, θ), en revanche ces valeurs ne sont pas disponibles en temps réel, donc il faut des estimations de la structure $\hat{S}$ et des paramètres $\hat{\theta}$ or ces estimations sont incertaines, la description des incertitudes à l'instant t est décrite par la densité de probabilité d'avoir des estimations $(\hat{\theta}, \hat{S})$ proches des valeurs exactes (θ, S) à l'instant t, notée $f(\hat{\theta}, \hat{S}, t)$. La fonction $f(\hat{\theta}, \hat{S}, t)$ permet d'évaluer les performances d'algorithme diagnostic.

Le recouvrement est alors défini comme suit :

$$C_{u_i} = \int_{\Omega} f(\hat{\theta}, \hat{S}, t)$$

Il définit la probabilité que les estimations $\hat{\theta}$ et $\hat{S}$ fournies à l'instant t soient dans Ω. (Ω est l'ensemble des états de fonctionnement où les objectifs sont atteignables $(J_{u_i}(S, \theta) \geqslant J_{min})$). En d'autres termes c'est la probabilité que le bloc de reconfiguration a séléctionné la loi de commande adéquate assurant $(J_{u_i}(S, \theta) \geqslant J_{min})$ sachant les estimations $\hat{\theta}$ et $\hat{S}$ à l'instant t.

La loi de commande optimale possède un taux de recouvrement maximum, elle est choisie comme suit :

$$u^* = arg \quad \max_{u_i}(C_{u_i}) \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots$$

Dans ces travaux, un lien entre la fiabilité du bloc diagonstic en terme des incertitudes des estimations des défauts a été intégré dans la stratégie de reconfiguration afin de minimiser les erreurs de la sélection de la loi de commande appropriée au mode de fonctionnement en cours. Les modes de fonctionnement et les lois de commande sont définis hors ligne, en revanche la sélection de la loi de commande pré-calculée est en ligne.

1.3.3 Les processus Markoviens

En partant du fait que les défauts sont de nature aléatoire et apparaissent à des instants de temps aléatoires et que la majorité des algorithmes de diagnostic sont basés sur des essais statistiques séquentiels analysant les données disponibles au temps courant sans tenir compte des essais précédents, les systèmes FTC peuvent être modélisés par des équations différentielles stochastiques. Plus particulièrement, ils sont décrits par des commutations brusques d'un système linéaire (Jump Linear System JLS) qui représentent une large classe des systèmes hybrides dont les cœfficients varient aléatoirement avec des caractéristiques Markoviennes. Ces sauts des cœfficients des équations différentielles stochastiques sont définies par des états représentant les différents modes de fonctionnement du système (nominal et défaillant). Ces modes de fonctionnement sont supposés être parfaitement connus, ce qui revient à considérer que les défauts sont détectés correctement. En revanche comme nous l'avons mentionné précedemment les algorithmes de diagnostic ne sont pas parfaits, pour cette raison les décisions du bloc diagnostic sont également décrites par un processus Markovien. Ce type de systèmes FTC porte le nom de systèmes tolérants aux défauts avec paramètres Markoviens, en anglais Fault tolerant control systems with Markovian parameters (FTCSMP). Les systèmes FTCSMP ont été étudiés par plusieurs chercheurs, à titre d'exemple [Srichander et Walker, 1993], [Mahmoud et al., 1999], [Mahmoud et al., 2003]. Récemment [Li et Zhao, 2006] ont proposé une méthode permettant d'évaluer la fiabilité des systèmes tolérants aux défauts en exploitant la modélisation par les chaînes de Markov.

Dans [Walker, 1997] la fiabilité est considérée comme performance à prendre en considération lors de la conception des systèmes FTC. Dans ce travail, les processus semi-Markovien ont été utilisés pour mesurer ou quantifier cette performance en définissant un modèle stochastique représentant l'occurrence des défauts, les décisions du bloc FDI et les transitions entre ces états. Ce travail a donné un modèle complet de toutes les combinaisons entre les défauts possibles et leurs détections sans tenir compte de relation dynamique et les performances au sens de commande.

La représentation des systèmes FTC par les processus de Markov repose sur l'idée que l'occurrence des défauts actionneur et les décisions du bloc FDI peuvent être modélisés par des processus stochastiques Markoviens $\eta(t)$ et $\Psi(t)$ respectivement. Les processus $\eta(t)$ et $\Psi(t)$ ont des propriétés Markoviennes et prennent leurs valeurs dans des espaces d'états finis $\{1, 2, \ldots, s\}$ et $\{1, 2, \ldots, r\}$ respectivement dont l'évolution future est indépendante du passé sachant l'état présent. L'intérêt des processus de Markov est que l'on peut obtenir une description complète de l'état stationnaire quand il existe.

Donc un système linéaire en boucle fermée peut être décrit par la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(\eta(t))u(x(t), \Psi(t), t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(x(t), \Psi(t), t) = -K(\Psi(t))x(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

Notons que la matrice B dépend du processus des défauts actionneurs $\eta(t)$ et la commande $u(x(t), \Psi(t), t)$ et le gain $K(\Psi(t))$ dépend du processus des décisions du bloc FDI $\Psi(t)$. Aussi la description (1.1) peut être étendue en introduisant d'autres processus représentant les défauts

du système et les défauts capteurs.

Les travaux existants dans ce domaine traitent plus particulièrement de la stabilité globale des FTCSMP car la stabilité locale de chaque état n'implique pas la stabilité globale du modèle complet. [Srichander et Walker, 1993] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité des FTCSMP prennant en compte uniquement les défauts actionneurs, ce travail a été étendu par [Mahmoud et al., 1999] en tenant compte également les défauts du système. [Mahmoud et al., 2000] ont traité la stabilité des FTCSMP avec bruit sur les états, sur les commandes et bruit blanc additif gaussien.

La plupart de ces travaux étudient la stabilité stochastique des systèmes tolérants aux défauts représentés par des chaînes de Markov. Ils n'ont pas comme objectif l'amélioration du fonctionnement du bloc FDI, ni sa fiabilité, mais plutôt permet d'étudier l'effet de ses erreurs telles que les fausses alarmes, la non-détection des défauts,... de plus elle permet d'évaluer la fiabilité du système dans chaque mode de fonctionnement.
En revanche, le nombre de défauts à considérer est supposé fini et les modes de défaillance doivent être connus conduisant à une synthèse des lois de commande se faisant hors ligne.

1.3.4 L'approche Multimodèle

[Zhang et Jiang, 2001] ont proposé une méthode de diagnostic et de reconfiguration basée sur l'approche multimodèle où le système a été representé par un ensemble de N modèles : un modèle pour le mode de fonctionnement nominal et $(N-1)$ modèles pour les modes défaillants. Ces modèles représentent les états possibles du système résultant de l'occurrence de défauts (on peut inclure dans l'analyse : le type de défauts, le nombre de défauts et l'amplitude de défauts pour représenter toutes les situations possibles). L'objectif de cette méthode consiste à estimer les états du système et ainsi à déterminer le mode de fonctionnement du système pour ensuite sélectionner la loi de commande appropriée parmi l'ensemble des lois de commandes pré-calculées.

L'ensemble de modèles possibles du système, notés $m(k)$, a été représenté par un processus Markovien où la probabilité de transition du modèle i au modèle j à l'instant k est définie par :

$$\pi_{ij}(k) = P\{m(k) = j \quad | \quad m(k-1) = i\} \quad i, j = 1, \ldots, N$$

$$\text{avec} \qquad \sum_{j \in N} \pi_{ij}(k) = 1 \quad i = 1, \ldots, N$$

La probabilité pour que le système soit dans le i^{eme} mode de fonctionnement à l'instant k, en d'autre terme le modèle i soit actif, est notée $\mu_i(k)$. Les probabilités des états $\mu_i(k+1)$ à l'instant $k+1$ sont calculées à partir de la matrice des probabilités de transition Π et les probabilités $\mu_i(k)$ à l'instant k, avec $i = 1, \ldots, N$.

Les probabilités $\mu_i(k+1)$ permettent de fournir des indications sur le mode actif à l'instant k, le mode nominal est actif quand toutes les probabilités $\mu_i(k+1)$ sont inferieures à un seuil μ_T, dans le cas où des probabilités sont supérieures à μ_T, le mode défaillant actif possède la probabilité maximale.

$$\mu_j(k+1) = \underset{i}{max}\,(\mu_i(k+1)) \begin{cases} > \mu_T & \text{mode défaillant } j \text{ est actif} \\ \leq \mu_T & \text{mode nominal} \end{cases}$$

D'autre part pour déterminer le mode de fonctionnement actif, un indice de performance a été introduit, il dépend des estimations des états de tous les modèles à l'instant $k+1$:

$$J_i(k+1) = f(\|y(k+1) - C_i(k+1)\hat{x}_i(k+1)\|_2)$$

Où $y(k+1)$ est le vecteur des mesures à l'instant $k+1$, $\hat{x}_i(k+1)$ est l'estimation du vecteur d'état du modèle i à l'instant $k+1$ et $C_i(k+1)$ la matrice des mesures du modèle i.
Le modèle actif est défini par j minimisant le critère J

$$j = \arg\min_i J_i(k)$$

Suivant les deux analyses précédentes, en combinant les probabilités avec les estimations des états et les décisions du bloc diagnostic, l'activation de la reconfiguration est établie comme suit :

$$u(k) \Rightarrow \begin{cases} \mu_j(k+1) = \underset{i}{max}\mu_i(k+1) > \mu_T \quad \text{et} \quad j = \arg\min_i J_i(k) & \text{mode défaillant } j \text{ est actif} \\ \mu_j(k+1) = \underset{i}{max}\mu_i(k+1) \leq \mu_T & \text{pas de reconfiguration} \end{cases}$$

Concernant les régulateurs exploités dans cette approche, la méthode LQR a été utilisée pour synthétiser la loi de commande nominale, notée $u_1(k)$ et les lois de commande des modes défaillants $u_i(k)$ ont été synthétisées par la méthode de placement de structure propre (EA).
La loi de commande du modèle complet est donnée soit par la loi de commande du mode défaillant possédant la probabilité maximale si cette dernière est superieure à μ_T ou par la somme des lois de commande, chacune pondérée par la probabilité du mode correspondant si elles sont inférieures à μ_T. Elle est décrite comme suit :

$$u(k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} u_i(k).\mu_i(k) & \text{si} \quad \mu_i(k) \leq \mu_T \\ \\ u_j(k) \qquad \text{avec} \quad j = \arg\max_i \mu_i(k) & \text{si} \quad \mu_i(k) > \mu_T \end{cases}$$

1.3.5 La fiabilité du système au sein des systèmes tolérants aux défauts

Une autre analyse de la fiabilité a été proposée par [Wu et al., 2002] où la fiabilité a été utilisée comme objectif à maximiser afin de sélectionner la structure optimale en terme de reconfiguration. Le même esprit est présenté dans [Staroswiecki et al., 2004] où la fiabilité a été utilisée comme objectif à maximiser en assurant des objectifs du système en terme d'observabilité. En s'inspirant du travail de [Staroswiecki et al., 2004] et [Staroswiecki, 2000], les auteurs de [Figueras et al., 2006] ont proposé une méthode de synthèse d'un module diagnostic basée sur l'analyse de la fiabilité dans le but d'assurer des objectifs en terme de détectabilité des défauts dans le système. La méthode consiste à choisir une structure de capteurs parmi l'ensemble des structures existants ayant une fiabilité maximale et permettant de détecter et d'isoler les prochains défauts.

Dans [Wu et al., 2002] le système est considéré composé de n sous systèmes interconnectés en série, chacun assure un objectif local et l'ensemble permet d'assurer un objectif global. Chaque sous système contient plusieurs composants. Chaque sous système possède une fiabilité $R_i(t)$ et un coût financier $C_i(R_i(t))$ avec $i = 1 \dots n$. Ces deux derniers paramètres peuvent avoir plusieurs valeurs suivant le nombre de composants utilisés par les sous systèmes. Selon le nombre de composants suceptibles d'être utilisés dans les sous systèmes, plusieurs configurations peuvent être définies. L'objectif est de sélectionner la configuration optimale possèdant une fiabilité maximum respectant une contrainte de coût.

Sachant que les sous systèmes sont considérés interconnectés en série, la fiabilité du système complet sous la configuration j est donc donnée par :

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_{i,j}(t)$$

$R_{i,j}(t)$ est la fiabilité du sous système i utilisé suivant la configuration j dépendante du nombre des composants du sous système i.

Sachant qu'il existe K états absorbants, la fiabilité du sous système i de la configuration j est donnée par

$$R_{i,j}(t) = 1 - \sum_{k=1}^{K} p_k^{(i,j)}$$

où $p_k^{(i,j)}$ est la probabilité que le sous système i reste dans l'état absorbant k.

Le coût de chaque sous système i utilisé suivant la configuration j dépend du coût initial des composants $A^{(i,j)}$ et le coût de défaillance $F_k^{(i,j)}$ associé à un état absorbant k. Un état absorbant est un état où si un défaut affecte un composant du sous système i, la configuration j tombe en panne (nécessitant l'arrêt du système).

$$C_{i,j}(t) = A^{(i,j)} + \sum_{k=1}^{K} F_k^{(i,j)}.p_k^{(i,j)}(t).$$

Le coût de la j^{eme} configuration est donné par :

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} C_{i,j}(t)$$

La configuration optimale est celle ayant une fiabilité maximum $R(T_d)$ pour une durée de fonctionnement T_d et respecte une limite de coût financier C^*.

Nous pouvons constater que la sélection de la configuration optimale est effectuée en ligne, en revanche les objectifs de la commande n'ont pas été pris en considération. Dans ce travail, le nombre et les fonctions locales des sous systèmes sont fixes et les fonctions locales sont supposées atteignables quelque soit le nombre de composants utilisés par le sous système et même après l'occurrence du défaut (ce qui implique la déconnexion du composant défaillant).

Dans le même esprit, [Staroswiecki et al., 2004] a proposé une méthode de reconfiguration des capteurs basée sur la redandonce matérielle et la fiabilité. La stratégie consiste à chercher parmi l'ensemble des capteurs existants I, un ensemble de capteurs optimal J^* qui permet d'estimer les variables d'état z avec un degré de redondance, une fiabilité R et un temps moyen de non-observabilité $MTTNO$ spécifié. Un outil graphique a été utilisé pour représenter structurellement l'ensemble de capteurs, le choix de capteurs optimaux est effectué en terme de chemin le plus court.

Soit le système décrit par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t)) \\ z(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

où $x \in R^n$ le vecteur d'état, $u \in R^m$ le vecteur de commande, $y \in R^p$ vecteur des sorties mesurées et $z \in R^q$ le vecteur des états à estimer à partir des relations fonctionnelles.

L'ensemble de capteurs du système est noté I. 2^I est le nombre de tous les sous-ensembles de l'ensemble I.

Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble de capteurs, la relation suivante peut être alors introduite :

$$P(z/J) = \begin{cases} 1 & \text{si z est observable utilisant J} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Donc deux grands ensembles peuvent être définies :

$$2^{I+} = \{J \subseteq I \quad \text{tel que} \quad P(z/J) = 1\}$$

$$2^{I-} = \{J \subseteq I \quad \text{tel que} \quad P(z/J) = 0\}$$

Admettons qu'à l'instant $t = t_0$ le système possède l'ensemble entier I de ses capteurs en fonctionnement nominal, à l'instant $t = t_f$ un défaut capteur apparaît et le i^{eme} capteur est tombé en panne, l'ensemble de capteurs du système défaillant est alors restreint, noté I_d. Il est nécessaire de savoir si l'ensemble z est encore observable utilisant I_d soit de connaître toutes les possibilités où les états z qui sont encore observables quand les défauts capteurs apparaîssent.

En fait, quelque soit l'ensemble de capteurs disponibles à l'instant $t_0 < t_f$ noté $I(t_0) \subseteq I$, pour des raisons de simplifications la notation I est conservée, l'ensemble de capteurs après l'occurrence de défaut, noté $I(t_f) \subseteq I$ est inclu dans $I(t_0)$. Donc l'ensemble de tous les états possibles est déterminé par 2^I. Pour illustrer cette notion, prenons l'exemple suivant :

Supposons que le système possède trois capteurs $I = \{a, b, c\}$, huit sous-ensembles sont possibles $2^I = \{I = \{a, b, c\}, 2 = \{a, b\}, 3 = \{a, c\}, 4 = \{b, c\}, 5 = \{a\}, 6 = \{b\}, 7 = \{c\}, 8 = \varnothing\}$ quelque soit l'état initial $\subseteq 2^I$ quand un capteur est tombé en panne la transition d'un état à l'autre n'est en réalité que le taux de défaillance du capteur en question. Un graphe peut être utilisé pour représenter tous ces états, appelés dans ce qui suit noeuds, et le passage d'un noeud à un autre, en régroupant les noeuds du même cardinal dans le même niveau. Considérons que les

noeuds sont de couleur grise quand l'observabilité de l'ensemble z est assurée et blanche ailleurs.

La figure (1.14) représente le graphe de l'exemple précédent.

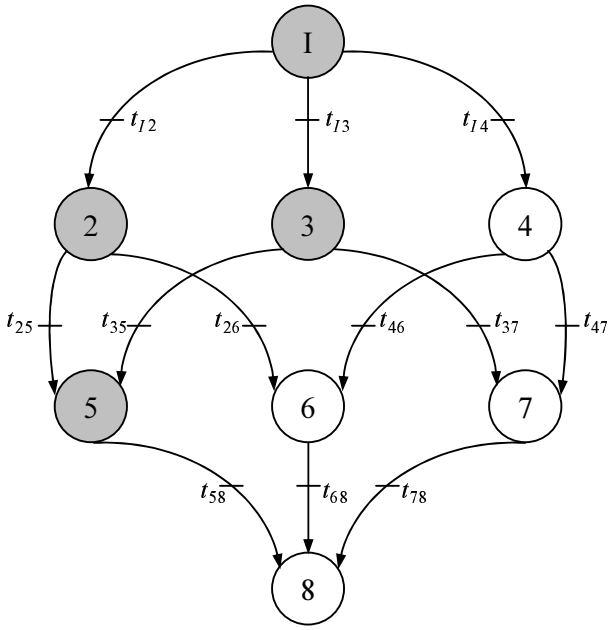


FIG. 1.14 – Exemple du réseau de capteurs

On en deduit les définitions suivantes :

- Un ensemble minimal de capteur (Minimal Sensor Set (MSS)) est un noeud gris dont tous les successeurs sont blancs. C'est un ensemble où si un capteur tombe en panne, l'observabilité n'est plus assurée. L'ensemble {5} dans la figure (1.14).
- Un ensemble redondant de capteur (Redundant sensor subset (RSS)) est un noeud gris dont au moins un successeur est gris. Les ensembles {1, 2, 3}.

Considérons $J \subseteq I$ la situation actuelle de capteurs du système, deux degrés de redondance peuvent être définis :
- Le degré de redondance faible (Weak Redundancy Degree), noté $WRD(z, J)$, est la longueur du chemin le plus long entre le noeud indiquant J et un successeur gris. L'observabilité de z n'est plus assurée quand un nombre de capteurs superieur à $WRD(z, J)$ tombent en panne
- Le degrée de redondance fort (Strong Redundancy Degree), noté $SRD(z, J)$, est la longueur du chemin le plus court entre le noeud indiquant J et un successeur blanc moins un, il indique le nombre maximum de capteurs pouvant tomber en panne, où l'observabilité de z est assurée.

Le problème peut être formulé comme suit, soit $t = t_0 = 0$ l'instant où le système est mis en fonctionnement. $J(t)$ indique le sous-ensemble de capteurs disponibles à l'instant t. soit $J(t_0) = J_0$. La longueur du chemin entre J_0 et $J(t)$ est le nombre de capteurs qui tombent en panne durant le temps $[t_0, t]$. Trouver l'ensemble optimal J^* de capteurs possédant des degrées de redondance SRD^*, WRD^* et ayant pour une durée de fonctionnement T une fiabilité $\geqslant R^*$ et un temps moyen de non-observabilité $\geqslant MTTNO^*$. La tolérance aux défaut de l'observabi-

lité de z peut être évaluée par :

- $R(z/J_0, t)$ la fiabilité de l'observabilité à l'instant t, c'est la probabilité pour que l'ensemble z soit observable à l'instant t, sachant qu'il était observable à $t = t_0$ utilisant J_0.

- Le temps moyen du non-observabilité $MTTNO$.

Pour calculer la fiabilité $R(z/J_0, t)$:
Soit $K \subseteq J_0$ un sous-ensemble quelconque de capteurs. La probabilité que z soit observable à l'instant t, utilisant K, est :

$$R(z/K, t) = P(z/K).R(K, t)$$

où $R(K, t)$ est la probabilité qu'aucun capteur de K ait une défaillance à l'instant t. Supposons que tous les capteurs de K sont indépendant, donc

$$R(K, t) = \prod_{k \in K} R_k(t) \prod_{k \notin K} (1 - R_k(t))$$

Avec $R_k(t) = e^{-\lambda_k t}$ la fiabilité du k^{eme} capteur possédant un taux de défaillance constant λ_k.
La fibilité de l'ensemble J_0 contenant tous les sous-ensembles K possibles est alors donnée par

$$R(z/J_0, t) = \sum_{K \subseteq J_0} P(z/K).R(K, t)$$

et le temps moyen du non-observabilité est

$$MTTNO(z/J_0) = \int_0^\infty R(z/J_0, t)dt$$

En conclusion, cette stratégie consiste à chercher la meilleure configuration de capteurs, notée J^*, permettant d'observer z possédant une fiabilité $R(z/J_0, T) \geqslant R^*$ pour une durée de fonctionnement T et un temps moyen de non-observabilité $MTTNO(z/J_0) \geqslant MTTNO^*$ en respectant des degrés de redondance. L'analyse a été effectuée hors ligne, sans tenir compte des conditions de fonctionnement degradées de capteurs considérés soit en fonctionnement normal ou en panne. L'analyse de l'observabilité est structurelle et donc la qualité de l'estimation n'a pas été prise en compte.

1.4 Conclusion

Afin de mettre en exergue l'intérêt de nos travaux, dans ce chapitre, nous avons exposé les différents travaux de recherche effectués dans le domaine des systèmes tolérants aux défauts exploitant l'analyse de la fiabilité. Dans un premier temps, nous avons donné une présentation des systèmes tolérants aux défauts, leurs objectifs, leurs structures ainsi que les types des systèmes tolérants aux défauts. Dans un second temps, nous avons rappelé les concepts de la fiabilité. Ensuite, nous avons fait une synthèse bibliographie des travaux de recherche intégrant l'analyse de la fiabilité dans les systèmes tolérants aux défauts.

Nous avons constaté que la plupart des méthodes de synthèse des lois de commande pour les systèmes tolérants aux défauts ne prennent en compte que des objectifs à court terme, en particulier la stabilité. Peu de chercheurs traitent les objectifs de long terme tels que la fiabilité, l'énergie consommée,...

Certains chercheurs ont introduit la fiabilité dans leurs analyses, mais dans la plupart des cas ces recherches debouchent simplement sur une analyse de la fiabilité du système augmenté du bloc diagnostic et de commande. Cependant aucune des méthodes présentées ne permet de définir la fiabilité en tant qu'objectif à assurer. De même la fiabilité n'a pas été prise en compte pour la synthèse des régulateurs. Peu de travaux intègre la notion de coût financier des composants et le coût d'indisponibilité du système.

En se basant sur les éléments précédents, nous désirons développer des stratégies de commande des systèmes permettant d'assurer à la fois la stabilité du système et de garantir également une fiabilité minimale désirée et une limite du coût financier durant un temps de mission prédéfini dans le but, par exemple, de :

- Éviter et limiter des problèmes écologiques ayant un impact sur la population et l'environnement, comme par exemple les rejets de polluants dans l'atmosphère.

- Assurer une qualité supérieure de la production.

- Améliorer l'économie de l'entreprise, étant donné que la plupart des objectifs des systèmes sont des services ou des produits commerciaux qui doivent respecter une limite des coûts financiers.

L'une des hypothèses du travail consiste à supposer que le bloc diagnostic fonctionne parfaitement et que le défaut est détecté et estimé sans ambiguïté. En conséquence, après l'occurrence du défaut, le modèle mathématique du système défaillant est supposé parfaitement connu.

Sachant que les systèmes industriels sont devenus complexes et de grande taille, cette complexité a imposé leur décomposition en sous systèmes de tailles reduites, nous considérons que les systèmes étudiés dans notre travail sont des systèmes composés de plusieurs sous systèmes interconnectés possédant chacun son objectif propre, l'ensemble de ces objectifs pouvant être regroupés pour assurer un objectif global (chaîne de production, centrale nucléaire,...). Un niveau supérieur, appelé coordinateur, prend en compte l'objectif global et les intéractions entre les sous systèmes pour définir des objectifs locaux appropriés à chaque sous système. Également, l'occurrence de défaut dans un sous système n'implique pas forcément l'arrêt du système complet, on peut isoler le sous sytème défaillant donc il est demandé de connaître les intéractions entre les sous systèmes pour pouvoir déterminer l'effet de l'isolement sur l'objetif global et la faibilité. Cette décomposition est également justifiée par le fait de calculer la fiabilité d'un système nécessite la prise en compte des fiabilité de ses sous systèmes.

Chapitre 2

Méthode de reconfiguration sous contrainte de performances statiques

Faisant suite à la synthèse bibliographique précédemment développée, nous consacrons ce chapitre en développant une méthode de renconfiguration / restructuration basée sur l'analyse de la fiabilité et le coût des composants mais aussi les coûts dus à l'arrêt de fonctionnement du système en cours fonctionnement. À l'issue de la détection et l'isolation du défaut et sous l'hypothèse qu'il existe plusieurs structures de fonctionnement du système, après l'occurrence du défaut, permettant d'assurer les performances initiales du système ou des performances dégradées, la méthode proposée a pour objectif de déterminer une structure optimale parmi l'ensemble des structures ayant une fiabilité maximale et un coût minimal.

La problématique est présentée en début du chapitre, suivie d'une analyse permettant de calculer la fiabilité du système selon les conditions de fonctionnement dépendantes directement de l'amplitude du défaut et de la structure du système. Nous présenterons ensuite le calcul du coût de chaque structure, le calcul d'un indice de performances statiques et une méthode d'optimisation. Finalement, nous exposons la méthode de reconfiguration développée. Notre contribution porte essentiellement sur l'intégration de la fiabilité et du coût pour assurer les performances statiques du système. Un exemple académique est donné à la fin du chapitre permettant de valider les résultats énoncés.

2.1 Problématique

Une large classe de systèmes industriels peut être décrite par des structures hierarchiques, appelées également systèmes multi-niveaux. Les systèmes considérés dans notre travail sont des systèmes composés de deux niveaux : local et global (Figure 2.1). L'extension à des systèmes multiniveaux ne représente pas de difficulté.
Au niveau local, plusieurs sous systèmes sont généralement interconnectés possédant chacun leur objectif local propre $\gamma_{l,i}$ avec $i = 1 \dots n$, l'ensemble de ces objectifs locaux pouvant être regroupés pour assurer un objectif global γ_g. Le niveau supérieur, appelé coordinateur, prend en compte l'objectif global et les intéractions entre les sous systèmes pour définir des objectifs locaux appropriés à chaque sous système afin d'assurer l'objectif global.

Dans le présent travail, l'objectif local $\gamma_{l,i}$ est défini par l'objectif statique donné en terme de référence r_i et les gains K_i et G_i des régulateurs locaux que nous aborderons dans la suite de la thèse. L'objectif local est défini par $\gamma_{l,i} \equiv (r_i,\, K_i,\, G_i)$. L'objectif global γ_g est défini en terme de référence globale $\gamma_{g,ref}$. Notons que $\gamma_{g,ref}$ représente une ou plusieurs références globales.

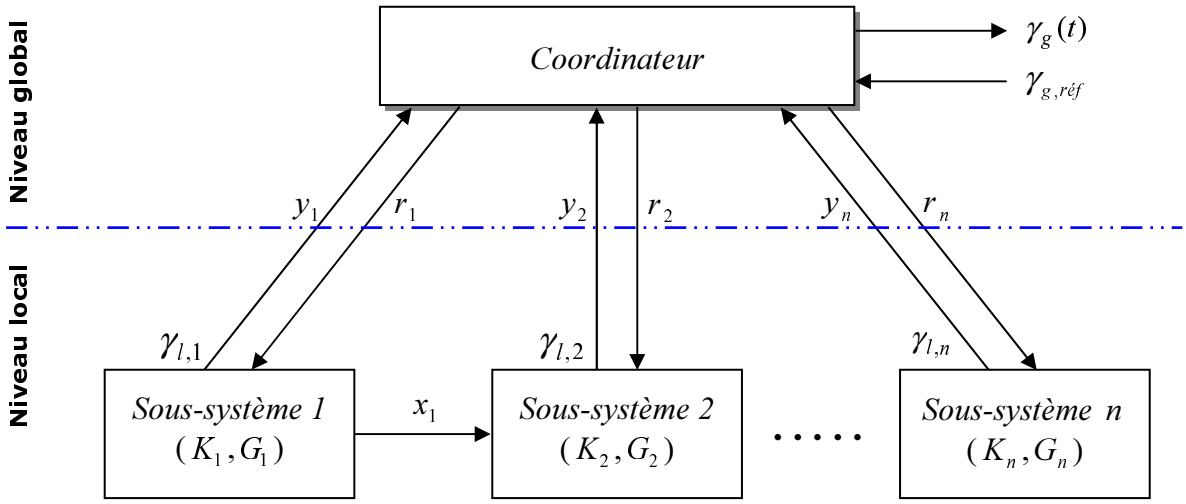


FIG. 2.1 – Architecture générale d'une structure hierarchique

Soit un système non linéaire représenté par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \\ \gamma_g(t) &= h(y(t)) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f(x,u)$ et $g(x,u)$ sont les fonctions d'évolution d'état et de sortie. La fonction $h(y)$ représente l'évolution des objectifs globaux γ_g en fonction des sorties y. Sachant que y est l'ensemble des sorties y_i des sous systèmes.

Supposons que ce modèle non linéaire soit représenté par un système linéaire autour d'un point de fonctionnement donné.
La représentation d'état du modèle linéaire est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ \gamma_g(t) &= h(y(t)) \end{cases} \tag{2.2}$$

Le système (2.2) est composé de n sous systèmes s_i, $i = 1 \ldots n$, chacun est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \nu_i(t, x_j(t)) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

x_i est le vecteur d'état, u_i est le vecteur de commandes, et r_i le vecteur de références du i^{eme} sous système.

$\nu_i(t, x_j(t)) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} A_{ij}x_j(t)$ représente les interconnections entre le i^{eme} sous système et les autres sous systèmes $j = 1 \dots n$ avec $j \neq i$. $\nu_i(t, x_j(t))$ est appelée la i^{eme} fonction d'interconnection.

Nous considérons que les sous systèmes sont indépendants, au sens dynamique, dans ce cas la matrice A est supposée diagonale et toutes les fonctions d'interconnections sont nulles. Dans le cas où A est constituée de blocs diagonaux A_i, les sous systèmes sont alors décrits par

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \end{cases} \tag{2.4}$$

Chaque sous système s_i possède son propre régulateur utilisant une loi de commande donnée sous la forme suivante :

$$u_i(t) = -K_i x_i(t) + G_i r_i(t) \tag{2.5}$$

Les gains K_i et G_i sont synthétisés de telle sorte que le sous système en boucle fermée suit le modèle suivant :

$$\dot{x}_i(t) = M_i x_i(t) + N_i r_i(t) \tag{2.6}$$

avec

$$\begin{cases} A_i - B_i K_i &= M_i \\ B_i G_i &= N_i \end{cases} \tag{2.7}$$

Problème de commande
Le coordinateur se charge de résoudre le problème standard de commande (PSC) $< \gamma_{g,ref}, \mathcal{S}, \theta, \mathcal{U} >$ qui consiste à déterminer

– L'ensemble des objectifs locaux en terme de références r_i afin d'assurer les objetcifs globaux statiques $\gamma_{g,ref}$.

– L'ensemble des gains K_i et G_i afin d'assurer des performances dynamiques en terme de modèle (Eq. (2.6) et (2.7)).

Le PSC peut être réecrit sous la forme suivante :

✓ Au niveau global, $< \gamma_{g,ref}, \mathcal{S}, \theta, H(r_i) >$ consiste à déterminer les valeurs des références locales r_i pour une fonction $h \in H$ dépendante de la structure $\mathcal{S}$ afin d'assurer les références globaux $\gamma_{g,ref}$.

✓ Au niveau local, le PSC regroupe l'ensemble des sous-problèmes locaux $< \mathcal{O}_i, \int_i, \theta_i, \mathcal{U}_i >$. où pour chaque sous système i, $< \mathcal{O}_i, \int_i, \theta_i, \mathcal{U}_i >$ est défini par :

$$\begin{array}{rrcll} \mathcal{O}_i : & \dot{x}_i(t) &= M_i x_i(t) + N_i r_i(t) & \text{Objectif local à assurer} \\ \int_i : & \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t) & \text{Contrainte en terme de structure} \\ \mathcal{U}_i : & u_i(t) &= -K_i x_i(t) + G_i r_i(t) & \text{Ensemble de lois de commande admissibles} \end{array}$$

La solution de ces sous-problèmes consiste à trouver l'ensemble des gains K_i et G_i pour que (Eq. (2.7)) soit vérifiée pour chaque sous système i.

Cas nominal
En l'absence de défauts, le système possède une structure nominale $\mathcal{S}^{nom}$, c'est le cas où le système utilise tous ses sous systèmes et l'ensemble de leurs équations d'états décrites par (Eq. (2.4)).

La solution nominale du problème de commande $< \gamma_{g,ref}^{nom}, \mathcal{S}^{nom}, \theta^{nom}, \mathcal{U} >$ est donnée par :

✓ La loi de commande nominale représentée par les lois de commande nominales locales définies par l'ensemble des gains nominaux K_i^{nom} et G_i^{nom} (Eq. (2.5)) calculés à partir des équations (2.4), (2.5) et (2.6) afin d'assurer les objectifs locaux (2.6).

✓ Les objectifs locaux nominaux en terme de références r_i^{nom} qui sont définis afin d'assurer les objectifs globaux nominaux statiques $\gamma_{g,ref}^{nom}$.

Cas avec défaut
L'occurrence de défaut peut modifier la structure locale du sous système (2.4) et par conséquent la structure du système complet (2.2). Le sous système défaillant est alors décrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i^f x_i(t) + B_i^f u_i(t) \\ y_i(t) &= C_i^f x_i(t) \end{cases} \tag{2.8}$$

où A_i^f, B_i^f et C_i^f sont les matrices du i^{eme} sous système en présence de défaut.

Notons que la stratégie présentée dans ce travail reste également valable pour les défauts système et les défauts capteurs, mais seuls les défauts actionneurs sont considérés ici. Supposons que le défaut est détecté et estimé au niveau du j^{eme} actionneur. Ce défaut peut être modélisé de la manière suivante :

$$u_{ij}^f = (1 - \beta_{ij}^f) u_{ij} \tag{2.9}$$

où u_{ij} représente la j^{eme} composante du vecteur de commande du i^{eme} sous système.

avec

$$\begin{cases} \beta_{ij}^f = 0 & \text{cas sans défaut} \\ \beta_{ij}^f = 1 & \text{perte totale d'actionneur} \\ \beta_{ij}^f \in]0,1[& \text{perte d'efficacité de} \quad \beta_{ij}^f \% \end{cases} \tag{2.10}$$

La matrice B_i^f est décrite comme suit $B_i^f = diag([1 - \beta_{ij}^f]) B_i$.

Dans le cadre de notre travail, nous considérons que la reconfiguration du système peut être effectuée suivant plusieurs possibilités :

- Remplacer le sous système défaillant par un nouveau sous système (redondance matérielle).

- Utiliser le sous système défaillant en mode dégradé et assurer le manque de sa fonction par d'autres sous systèmes (redondance fonctionnelle).

- Déconnecter le sous système défaillant et continuer la mission avec les sous systèmes restants.

En conséquence, les objectifs locaux de chaque sous système doivent être redéfinis afin d'assurer les objectifs globaux, dans le cas où ces derniers ne sont pas atteignables, des objectifs globaux dégradés peuvent être acceptés. Nous supposons que plusieurs structures peuvent existées, résultants de l'occurrence de défaut et des possiblités de reconfiguration mentionnées précédemment.

Sous l'hypothèse qu'il existe M structures possibles $\mathcal{S}^m$ $(m = 1 \dots M)$ et que chaque structure $\mathcal{S}^m$ contient n_m sous systèmes permettant d'assurer des objectifs globaux γ_g^m, la question du choix de la meilleure structure (optimale) $\mathcal{S}^{opt}$ repose sur la définition des paramètres et informations à partir desquelles un critère doit être calculé.

Nous proposons d'effectuer le choix de la meilleure structure en se basant sur l'analyse de la fiabilité et du coût financier des composants. Avant d'exposer une solution, nous présentons successivement le calcul de la fiabilité et du coût financier des structures, le calcul d'un indice de performances statiques puis le calcul du critère du choix de la structure optimale.

2.2 Analyse de la fiabilité

2.2.1 Estimation du taux de défaillance des composants

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'analyse de la fiabilité des composants (sous systèmes) repose sur des données permettant de déduire le nombre de défaillances probables pendant une unité de temps (le taux de défaillance λ), sous des conditions de fonctionnement normales, dans la zone utile, λ est considéré constant. Généralement, lorsqu'un paramètre interne ou externe d'un composant varie cela entraîne des modifications du taux de défaillance.

Ces modifications sont dues à plusieurs causes :
– La technologie
  Au niveau technologique, il y a des paramètres qui agissent sur le taux de défaillance, la taille du composant, le diamètre du fil des bobines du moteur de la pompe, ou le boîtier qui protège le composant... ont un impact sur λ.
– Les contraintes d'environnement
  sont des paramètres externes du composant, par exemple la température, la pression, l'humidité, la poussière...
– Les conditions de fonctionnement
  sont les contraintes internes du composants, liées au mode d'utilisation du composant (fonctionnement) : La puissance de fonctionnement de la pompe, la tension, la charge du moteur...

Dans plusieurs cas, le taux de défaillance est calculé pour différentes contraintes d'environnement, et pour différents niveaux de charges (puissance, tension,...). Dans le cadre de nos

travaux, nous nous intéressons en particulier aux conditions de fonctionnement. Ces conditions représentent les modes de fonctionnement des composants, s'ils fonctionnent en continu ou non, et les niveaux des charges appliquées car elles peuvent changer d'une structure à l'autre.

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier l'impact des conditions de fonctionnement sur le taux de défaillance, nous cherchons à donner une relation analytique entre le mode d'utilisation du composant, en terme de charges appliquées, et le taux de défaillance.

Il existe plusieurs formules pour définir le taux de défaillance en fonction des conditions de fonctionnement [Martorell et al., 1999] et [Finkelstein, 1999]. Nous utiliserons le modèle proportionnel de Cox, introduit par D.R. Cox. (PH : Proportional Hazards Model) [Cox, 1972] [Cox et Oakes, 1984] et [Martorell et al., 1999].
Ce modèle suppose que le taux de défaillance est le produit d'un taux de défaillance de base (ou nominal) $\lambda_0(t)$ et une fonction $g(x)$ positive, qui interprète l'effet des paramètres de fonctionnement (température, puissance, tension, ...)

$$\lambda(t, x) = \lambda^0(t).g(x)$$

où
λ^0 : taux de défaillance nominal (sous des conditions de fonctionnement nominales) ;
x : image de la charge directement dépendante de la commande u ;
$g(x)$: fonction qui modélise l'effet des charges (stresses).

Pour illustration, la figure (2.2) représente le taux de défaillance de base (nominal) $\lambda^0(t)$ sous des conditions de fonctionnement nominaux (x_0) et les taux de défaillance $\lambda^1(t)$ et $\lambda^2(t)$ correspondants aux deux charges de valeurs différentes x_1 et x_2 avec $x_1 < x_0 < x_2$.

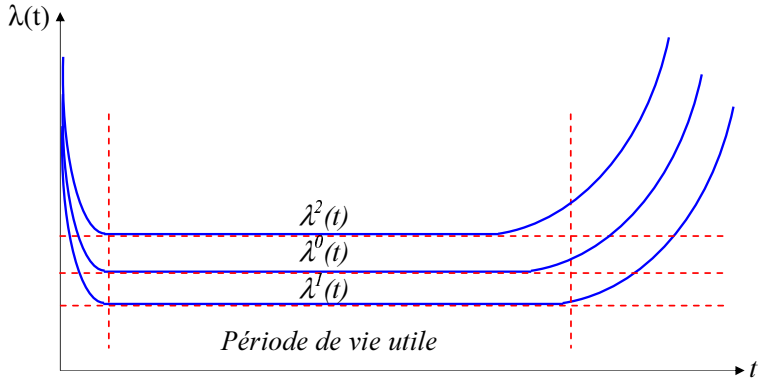


FIG. 2.2 – Taux de défaillance $\lambda^0(t)$, $\lambda^1(t)$ et $\lambda^2(t)$

Plusieurs définitions pour la fonction $g(x)$ peuvent être considérées, la forme exponentielle a été retenue pour cette étude du fait de sa simplicité : soit $g(x) = e^{x.\alpha}$, avec α constant. Notons que le taux de défaillance est considéré constant durant la période utile de la vie d'une structure $\mathcal{S}^m$, mais il dépend des conditions de fonctionnement de la structure. Le taux de défaillance du sous système i utilisé par la structure $\mathcal{S}^m$ est défini comme suit :

$$\lambda_i^m(x_i^m) = \lambda_i^0.e^{x_i^m.\alpha_i} \tag{2.11}$$

où la charge x_i^m est considérée constante durant la durée d'utilisation de la structure m.

La charge x_i^m appliquée au sous système i correspond à la commande u_i^m ou une image de la commande au régime statique, pour éclairer ce point, prenons l'exemple de la tension (en volts) appliquée sur une pompe pour délivrer un débit d'eau en m^3/s ; la charge x_i^m est la tension en volts, en revanche dans le modèle analytique du système la commande u_i^m peut être le débit m^3/s ou son équivalent en volts.
Dans le cas général, on considère la relation suivante :

$$x_i^m = \eta_i^m(u_i^m(\infty)) \tag{2.12}$$

Avec η_i^m fonction permettant de définir la relation entre la charge et la commande en régime statique $u_i^m(\infty)$.

Le taux de défaillance donné par (2.13) est écrit comme suit :

$$\lambda_i^m(u_i^m) = \lambda_i^0.e^{\eta_i^m(u_i^m(\infty)).\alpha_i} \tag{2.13}$$

2.2.2 Calcul de la fiabilité

Avant de présenter les formules de la fiabilité du système en fonction des fiabilités des sous systèmes calculées à base des taux de défaillance suivant les conditions de fonctionnement de la structure $\mathcal{S}^m$, nous présentons le principe du calcul.

La figure (2.3) illustre la fiabilité pour trois modes de fonctionnement : la fiabilité nominale $R^0(t)$ et les courbes de la fiabilité $R^1(t)$ et $R^2(t)$ calculées à partir des taux de défaillance pour les deux conditions de fonctionnement (x_1 et x_2). Les fiabilités sont définies classiquement sous la forme exponentielle.

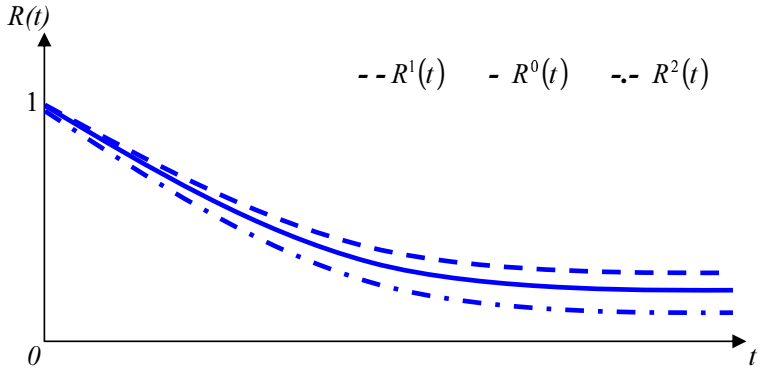


FIG. 2.3 – Fiabilités $R^0(t)$, $R^1(t)$ et $R^2(t)$

Supposons que le défaut apparaît à $t = t_f$, les conditions de fonctionnement étaient nominales durant l'intervalle [0 , t_f] sous l'hypothèse que la nouvelle structure est définie par le mode de fonctionnement correspond à la valeur de charge $x = x_1$ à partir de $t = t_f$ comme l'illustre la figure (2.4).

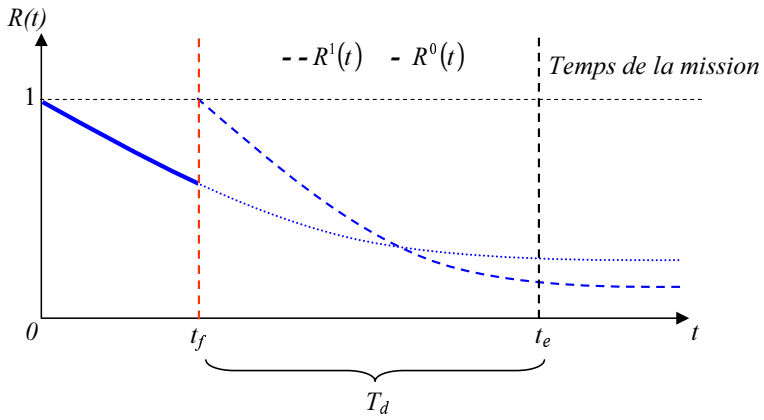


FIG. 2.4 – Fiabilité avant et après apparition du défaut

La fiabilité entre $t = t_f$ et ∞ est donnée par la formule suivante :

$$R(t) = e^{-\lambda^1(x_1).(t-t_f)} \tag{2.14}$$

Et la fiabilité du système à la fin de sa mission (après une période de fonctionnement T_d) est définie comme suit :

$$R(t_e) = R(t_f + T_d) = e^{-\lambda^1(x_1).(t_e-t_f)} \tag{2.15}$$

À partir du taux de défaillance calculé dans (2.13), nous pouvons calculer la fiabilité $R_i^m(t_e, u_i^m)$ du sous système i utilisé par la structure $\mathcal{S}^m$ (conditions de fonctionnement définies par u_i^m) pour une période de temps donnée, notée T_d. La période T_d se définit comme le temps de fonctionnement désiré avant la réparation des sous systèmes défaillants (qui étaient la cause de la modification de la structure nominale) ou avant l'arrêt total du système. Dans la figure (2.4), c'est la période entre l'apparition du défaut t_f et le temps de la mission du système t_e.

$R_i^m(t_e, u_i^m)$ est la fiabilité du sous système i utilisé par la structure $\mathcal{S}^m$ pour une période de temps donnée T_d (entre $[\ t_f \quad , \quad t_f + T_d\ ]$), donnée par :

$$R_i^m(t_e, u_i^m) = e^{-\lambda_i^m(u_i^m).(t_e-t_f)} \tag{2.16}$$

La fiabilité du système sous la structure $\mathcal{S}^m$ est calculée à partir de la fiabilité de ses n_m sous systèmes et dépend directement de leurs connexions (série, parallèle...). Sous l'hypothèse de l'indépendance causale des défaillances de chaque sous système, si le système est composé de n_m sous systèmes en série ; la fiabilité du système $R_g^m(t_e)$ est donnée par (*cf.* Annexe A) :

$$R_g^m(t_e, u_i^m) = \prod_{i=1}^{n_m} R_i^m(t_e, u_i^m) \tag{2.17}$$

Pour des sous systèmes en parallèle, la fiabilité du système $R_g^m(t_e)$ est donnée par :

$$R_g^m(t_e, u_i^m) = 1 - \prod_{i=1}^{n_m} (1 - R_i^m(t_e, u_i^m)) \tag{2.18}$$

Et dans le cas mixte (série/parallèle), la fiabilité du système est calculée à partir des formules fondamentales (2.17) et (2.18).

2.3 Évaluation du coût financier

De même que la fiabilité des sous systèmes est calculée pour une période spécifique, un coût peut également être associé à chaque sous système. La difficulté réside dans l'évaluation des coûts de chaque sous système en fonction de sa fiabilité. Plusieurs formes de relation coût-fiabilité sont proposées comme par exemple dans [Mettas, 2000] et [Wu et al., 2002]. Nous suggérons d'utiliser une fonction similaire à celle proposée par [Wu et al., 2002]. Ainsi le coût moyen unitaire du $i^{ième}$ sous système utilisé par la structure $\mathcal{S}^m$ sur l'intervalle $[0, \infty[$ est défini par :

$$C_i^m(R_i^m(t)) = \frac{c_i + P}{\int_0^\infty R_i^m(t)dt} \tag{2.19}$$

où
c_i : le coût initial d'acquisition du $i^{ième}$ sous système.
P : coût moyen d'indisponibilité pour cause de défaillance dû à la dégradation des performances du système.
$\int_0^\infty R_i^m(t)dt$: temps moyen de fonctionnement du $i^{ième}$ sous système avant la première défaillance (MTTF).

Dans notre cas, nous proposons la forumle du coût sur le temps de fonctionnement T_d. À $t = t_e$, il y a donc une probabilité $(1 - R_i^m(t_e, u_i^m))$ que le composant soit en panne. Il coûte alors la somme $(c_i + P)$. Ce coût est reparti sur le temps moyen de fonctionnement sachant que la mission est réalisée durant l'intervalle $[t_f,\ t_f + T_d[$. Ainsi le coût moyen (2.19) sur l'intervalle $[t_f,\ t_f + T_d[$ devient :

$$C_i^m(R_i^m(t_e, u_i^m)) = \frac{(c_i + P)(1 - R_i^m(t_e, u_i^m))}{\int_{t_f}^{t_e} R_i^m(t, u_i^m)dt} \tag{2.20}$$

L'originalité de $C_i^m(R_i^m(t_e, u_i^m))$ est que ce coût est calculé pour une période de fonctionnement désirée T_d. À l'issue du calcul du coût de tous les sous systèmes, nous pouvons en déduire, le coût global du système selon la formule :

$$C_g^m = \sum_{i=1}^{n_m} C_i^m(R_i^m(t_e, u_i^m)) \tag{2.21}$$

2.4 Évaluation des performances statiques

Sachant que le rôle du système FTC est de réduire ou limiter la différence entre la dynamique et la réponse statique du système nominal et le système reconfiguré. Un indicateur de performances doit être défini pour choisir la meilleure structure du système reconfiguré.

Comme nous l'avons indiqué à la section (2.1), chaque structure m peut contenir n_m sous-systèmes, chacun est modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i^m(t) &= A_i^m x_i^m(t) + B_i^m u_i^m(t) \\ y_i^m(t) &= C_i^m x_i^m(t) \\ u_i^m(t) &= -K_i^m x_i^m(t) + G_i^m r_i^m(t) \end{cases} \tag{2.22}$$

Et l'objectif global dépend des sorties des n_m sous-systèmes comme suit :

$$\gamma_g^m(t) = h^m(y_i^m(t)) \tag{2.23}$$

Avec $\{y_i^m(t) \mid i = 1 \dots n_m\}$ l'ensemble des sorties des sous-systèmes utilisés par le système sous la structure m.

En régime statique, la valeur finale de l'objectif global, notée γ_g^m dans la suite, est :

$$\gamma_g^m(\infty) = \gamma_g^m = h^m(y_i^m(\infty)) \tag{2.24}$$

où $y_i^m(\infty)$ sont les valeurs finales des sorties des sous-systèmes, elles sont calculées par le théorème des valeurs finales des sous-systèmes en boucle fermée.

$$y_i^m(\infty) = \lim_{s \to 0} s\, y_i^m(s) = \lim_{s \to 0} T_i^m(s).r_i^m \tag{2.25}$$

Avec $T_i^m(s)$ la fonction de transfert du sous-système i en boucle fermée :

$$T_i^m(s) = C_i^m(Is - (A_i^m - B_i^m K_i^m))^{-1} B_i^m G_i^m \tag{2.26}$$

À partir des relations (2.24), (2.25) et (2.26), nous pouvons déduire une relation entre γ_g^m et les références locales r_i^m des sous-systèmes :

$$\gamma_g^m = h^m([C_i^m(-A_i^m + B_i^m K_i^m)^{-1} B_i^m G_i^m].r_i^m) \tag{2.27}$$

Pour des raisons de simplification d'écriture, on note cette fonction dans la suite $\bar{h}^m$ telle que :

$$\gamma_g^m = \bar{h}^m(r_i^m) \tag{2.28}$$

L'indicateur normalisé est proposé pour fournir une évaluation des performances statiques de la structure m :

$$J_{statique}^m = \left| \frac{\gamma_g^{nom} - \gamma_g^m}{\gamma_g^{nom}} \right| \tag{2.29}$$

où γ_g^{nom} est l'objectif global du système nominal (le système sous sa structure nominale $\mathcal{S}^{nom}$) et γ_g^m représente l'objectif global du système reconfiguré sous la structure m.

Dans ce paragraphe, un indice de performances statiques a été proposé. Dans le suivant, nous allons proposer une formalisation du problème d'optimisation en se basant sur les éléments définis dans les sections précédentes.

2.5 La méthode développée

2.5.1 Problème d'optimisation

Le problème considéré dans nos travaux de recherche consiste à résoudre un problème d'optimisation sous contrainte d'inégalité. Notons que dans la plupart des cas la solution optimale trouvée n'est pas unique, donc il existe un ensemble de solutions minimisant le critère. Généralement, le problème peut être écrit sous cette forme :

$$\left|\begin{array}{lll} \text{trouver} & x & \text{variables} \\ \text{minimisant} & f(x) & \text{fonction à optimiser} \\ \text{avec} & g(x) \leq 0 & q \text{ contraintes} \\ \text{et} & x \in \mathbb{R}^l, \quad g(x) \in \mathbb{R}^q & \end{array}\right.$$

Où $\mathbb{R}^l$ est l'*espace de recherche* représentant l'ensemble des valeurs pouvant être prises par les variables $x = (x_1, x_2 \dots x_l)$. L'ensemble des q contraintes ($g = (g_1, g_2 \dots g_q)^T$) permet de définir l'*espace réalisable* $\mathcal{X}$. Le problème consiste à trouver $x_{opt} \in \mathcal{X}$ permettant de minimiser f.

Dans notre travail, nous déterminons la structure optimale en deux étapes : la première étape consiste à déterminer les références optimales r_i^m au sein d'une stucture $\mathcal{S}^m$ permettant de minimiser l'indice de performance $J^m_{statique}$ sous contraintes d'une fiabilité minimale et d'un coût maximale, soit $R_g^m(t_e) \geq R_g^*$ et $C_g^m \leq C_g^*$ avec R_g^* et C_g^* correspondent à des seuils à ne pas dépasser. La deuxième étape permet la sélection de la structure optimale $\mathcal{S}^{opt}$ parmi toutes les structures.

Concernant la première étape, le problème s'écrit comme suit :

$$\left|\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \mathfrak{h}^m(r_i^m) = J^m_{statique}(r_i^m) \\ \text{avec} & \mathfrak{g}_1^m(r_i^m) = R_g^* - R_g^m(t_e) \leq 0 \\ \text{et} & \mathfrak{g}_2^m(r_i^m) = C_g^m - C_g^* \leq 0 \end{array}\right. \tag{2.30}$$

Où :
$\mathfrak{h}^m(r_i^m)$ est la fonction à minimiser.
$\mathfrak{g}_1^m(r_i^m)$ la première fonction représentant la contrainte de la fiabilité.
$\mathfrak{g}_2^m(r_i^m)$ la deuxième fonction représentant la contrainte du coût.
L'espace de recherche est défini par les bornes inférieure et supérieure des références notées $r^m_{i,min}$ et $r^m_{i,max}$ respectivement.

Pour vérifier si les objectifs assurés par la résolution de ce problème sont acceptables ou pas, on vérifie si $J^m_{statique,opt} - J_{min} \leq 0$ où $J^m_{statique,opt}$ est la valeur d'indice de performance correspondant à la solution $r^m_{i,opt}$ et J_{min} est un seuil fixe imposé par l'opérateur. Nous pouvons rajouter au problème précédemment définis la contrainte $\mathfrak{g}_3^m(r_i^m) = J^m_{statique} - J_{min} \leq 0$.

Dans le cas où il n'existe pas de solutions, on peut dégrader l'une des performances désirées, soit on impose une nouvelle contrainte de la fiabilité inférieur à R_g^* ou un coût supérieur à C_g^* ou encore les performances statiques sont dégradées en changeant la valeur de J_{min}.

Dans la deuxième étape, la structure optimale $\mathcal{S}^{opt}$ est déterminée de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{lll} \mathcal{S}^{opt} & = & \underset{\mathcal{S}^m}{arg \quad min} \quad J^m_{statique,opt} \\ \text{avec} & & m = 1 \dots M \end{array} \right. \tag{2.31}$$

Pour résoudre ce problème, dans la suite, nous allons déterminer la fonction à minimiser $\mathfrak{h}^m(r_i^m)$ et les deux fonctions de contraintes , $\mathfrak{g}_1^m(r_i^m)$ et $\mathfrak{g}_2^m(r_i^m)$. En d'autres termes, nous allons exprimer l'indice de performance $J^m_{statique}$, la fiabilité et le coût en fonction des références r_i^m.

La fonction à minimiser :

En remplaçant l'équation (2.28) dans l'équation (2.29), on peut écrire la relation entre l'indicateur de performances statiques et les références locaux r_i^m :

$$J^m_{statique} \quad = \quad \left| \frac{\gamma_g^{nom} - \bar{h}^m(r_i^m)}{\gamma_g^{nom}} \right| \quad = \quad \left| 1 - \frac{\bar{h}^m(r_i^m)}{\gamma_g^{nom}} \right| \quad = \quad \mathfrak{h}^m(\gamma_g^{nom}, r_i^m) \tag{2.32}$$

Notons que γ_g^{nom} intervient dans la fonction $\mathfrak{h}^m$ comme paramètre constant, fixé par l'opérateur. Puisqu'il n'est pas une variable à optimiser et pour des raisons de simplification d'écriture, on peut l'enlever de l'écriture mais en réalité il intervient implicitement dans les calculs. La relation précédente (2.32) devient :

$$J^m_{statique} \quad = \quad \mathfrak{h}^m(r_i^m) \tag{2.33}$$

La première contrainte :

Pour trouver une relation entre la fiabilité du système $R_g^m(t_e, u_i^m)$ sous la structure $\mathcal{S}^m$ et les références r_i^m on utilise les équations précédentes de la manière suivante :

- À partir des formules (2.17) et (2.18) on écrit la relation :

$$R_g^m(t_e, u_i^m) \quad = \quad \nabla^m(R_i^m(t_e, u_i^m)) \tag{2.34}$$

La fonction ∇^m est utilisée pour exprimer la fiabilité du système complet en fonction des fiabilités de ses sous-systèmes, elle est donnée par l'équation (2.17) ou par l'équation (2.18) ou par une combinaison de ces deux équations suivant l'interconnexion des sous-systèmes (série, parallèle ou mixte).

- À partir des équations données par (2.22) en appliquant le théorème des valeurs finales, on peut définir la fonction $F^m(r_i^m)$ comme suit :

$$u_i^m \quad = \quad u_i^m(\infty) \quad = \quad F^m(r_i^m) \quad = \quad (-A_i^m + B_i^m K_i^m)^{-1} B_i^m G_i^m r_i^m + B_i^m G_i^m r_i^m \tag{2.35}$$

- Remplaçant l'équation (2.35) dans l'équation (2.34), on peut déduire une relation entre la fiabilité du système sous la structure $\mathcal{S}^m$ et les références r_i^m de l'ensemble de ses n_m sous-systèmes :

$$R_g^m(t_e, u_i^m) \quad = \quad \nabla^m(R_i^m(t_e, F^m(r_i^m))) \tag{2.36}$$

Finalement la première contrainte est donnée par :

$$\mathfrak{g}_1^m(r_i^m) = R_g^* - \nabla^m(R_i^m(t_e, F^m(r_i^m))) \tag{2.37}$$

La deuxième contrainte :

- Remplaçant l'équation (2.35) dans l'équation (2.20), on obtient :

$$C_i^m(R_i^m(t_e, u_i^m)) = \frac{(c_i + P)(1 - R_i^m(t_e, F^m(r_i^m)))}{\int_{t_f}^{t_e} R_i^m(t, F^m(r_i^m))dt} \tag{2.38}$$

Par conséquent, le coût du système complet donné par l'équation (2.21) devient :

$$C_g^m = \sum_{i=1}^{n_m} \frac{(c_i + P)(1 - R_i^m(t_e, F^m(r_i^m)))}{\int_{t_f}^{t_e} R_i^m(t, F^m(r_i^m))dt} \tag{2.39}$$

Cette équation montre que le coût C_g^m est une fonction des coûts c_i, P, des fiabilités $R_i^m(t_e, u_i^m)$ dépendante des références r_i^m et de la période entre t_f et t_e. On la note $\triangle^m$:

$$C_g^m = \triangle^m(c_i, P, r_i^m, t_f, t_e) \tag{2.40}$$

On en déduit la fonction de la deuxième contrainte, donnée par :

$$\mathfrak{g}_2^m(r_i^m) = \triangle^m(c_i, P, r_i^m, t_f, t_e) - C_g^* \tag{2.41}$$

Possédant la fonction à minimiser et les différentes contraintes, il suffit de résoudre le problème en utilisant l'un des algorithmes classiques de l'optimisation. Dans notre travail, nous avons utilisé la fonction *fmincon* (*cf. Annexe B*) de la boîte à outils *Optimization Toolbox* du logiciel MATLAB de *mathworks*.

2.5.2 Différentes étapes de résolution

Dans les sections précédentes, nous avons présenté les méthodes de calcul de différents éléments utiles dans la méthode de reconfiguration développée. Dans ce paragraphe, nous présentons les différents étapes de calcul de la méthode de reconfiguration développée et le fonctionnement du système du mode nominal jusqu'à l'établissement de la structure optimale.

Les figures (2.5) et (2.6) illustrent les différentes étapes de fonctionnement du système du cas nominal jusqù'à l'établissement de la structure optimale : Partant d'un état nominal, l'occurrence d'un défaut modifie la structure après la stratégie reste à définir la structure optimale pour atteindre les performances nominales désirées. Les différentes étapes de calculs sont données par la figure (2.7).

A) Le système a une structure nominale $\mathcal{S}^{nom}$ composée de tous ses "n" sous systèmes entre $t_0 = 0$ et t_θ. Des objectifs globaux nominaux γ_g^{nom} sont assurés à partir des objectifs locaux nominaux des sous systèmes donnés en terme de références locales r_i^{nom}, les valeurs de références imposent des conditions de fonctionnement nominales (les commandes $u_i^{nom}(\infty)$ au régime statique) pour chaque sous système, à partir desquelles des taux de défaillances nominaux λ_i^{nom} et des fiabilités nominales $R_i^{nom}(t)$ sont définis. Chaque sous système i a un coût financier c_i. La fiabilité $R_g^{nom}(t)$ du système complet peut être évaluée à partir des fiabilités des "n" sous systèmes $R_i^{nom}(t)$ suivant leurs connexions fonctionnelles et le coût du système complet C_g^{nom} qui est la somme des coûts c_i.

B) À l'instant t_θ le défaut apparaît réellement dans le système. En réalité, à ce moment, la nouvelle structure est $\mathcal{S}^f$, en revanche il faut un temps pour détecter le défaut, c'est entre t_θ et t_f que le bloc diagnostic fait l'acquisition des données et l'évaluation des résidus, à t_f une décision indiquant la présence de défaut est envoyée au bloc de reconfiguration. Dans notre travail, nous considérons que le bloc diagnostic a détecté et estimé le défaut sans ambiguïté et ces informations sont disponibles à l'instant t_f.

C) En présence de défauts, nous supposons qu'il existe M structures $\mathcal{S}^m$ définies hors ligne, avec $m = 1 \dots M$. Suivant chacune des structures le système utilise n_m sous systèmes. Les sous systèmes qui peuvent être sélectionnés pour être utilisés par les structures sont définis hors ligne ainsi que leurs connexions (au sens physique et fiabiliste). Pour chaque structure $\mathcal{S}^m$, nous cherchons à définir en ligne les références r_i^m de ses n_m sous systèmes afin de maintenir des objectifs globaux $\gamma_g^m \approx \gamma_g^{nom}$ sous des contraintes $R_g^m(t_e) \geq R_g^*$ et $C_g^m \leq C_g^*$.

D) La recherche des références optimales, les calculs des taux de défaillance, des fiabilités et des coûts, l'évaluation des indices de performances et le choix de la sturcture optimale s'effectuent entre t_f et t_r. t_r est l'instant de mise en œuvre de la structure optimale. Notons que t_c est l'instant critique de la reconfiguration, toutes les opérations précédentes doivent être finies avant ce temps car après t_c le système ne peut plus être reconfiguré. Dans notre travail, nous considérons que le temps des calculs est faible $t_r \leq t_c$.

Un indice de performanes statiques $J_{statique}^m$ est défini au paragraphe (2.4) permettant d'évaluer la distance entre γ_g^m et γ_g^{nom}. Les objectifs γ_g^m assurés par $\mathcal{S}^m$ sont acceptables si $J_{statique}^m \leq J_{min}$ avec J_{min} un seuil imposé par l'opérateur.

Concernant les contraintes, deux autres cas sont possibles : - Soit la fiabilite R_g^* est choisie comme contrainte et de ce fait l'objectif est de trouver les références r_i^m permettant de minimiser $J_{statique}^m$, d'avoir une fiabilite $R_g^m(t_e) \geq R_g^*$ et un cout C_g^m minimal. - Soit le cout C_g^* est choisi comme contrainte, l'objectif est de minimiser $J_{statique}^m$ et d'avoir $C_g^m \leq C_g^*$ et une fiabilite maximale.

E) Après avoir calculé les références optimales, les taux de défaillance, les fiabilités, les coûts et les indices de performances pour toutes les structures, la structure optimale est celle possédant une fiabilité maximale et un coût minimal ainsi qu'un indice de performances statiques minimal.

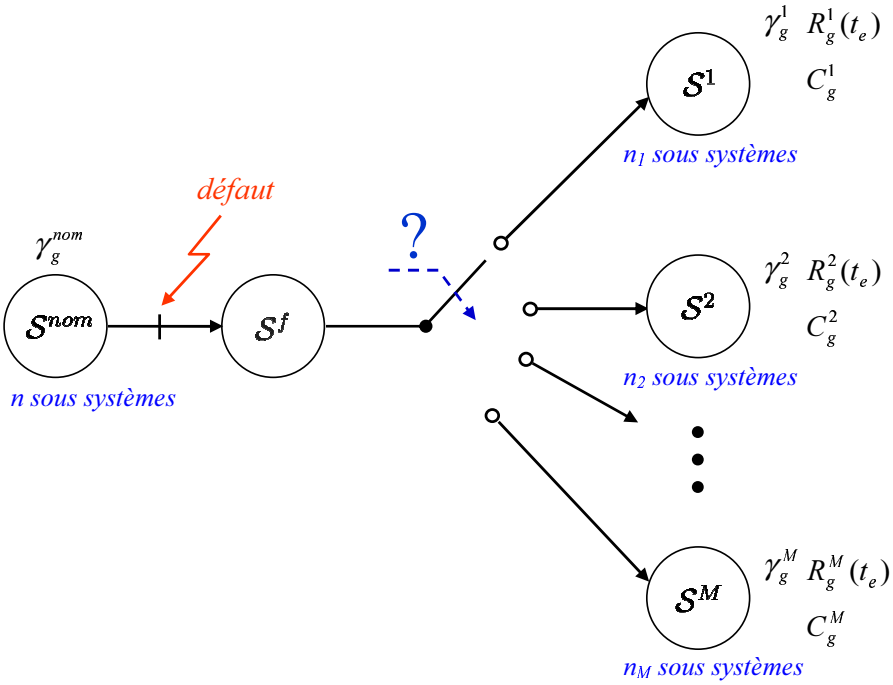


FIG. 2.5 – Présentation générale de la problématique

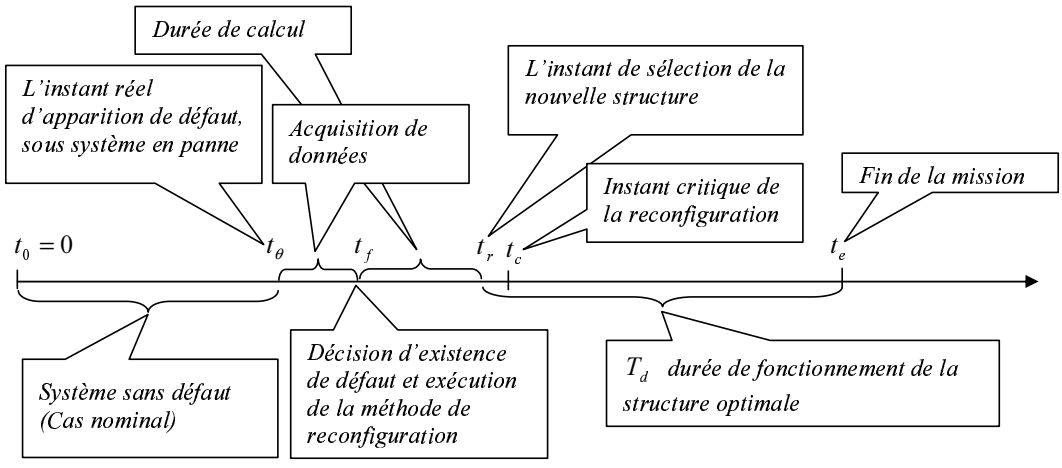


FIG. 2.6 – Les états du système en fonction du temps

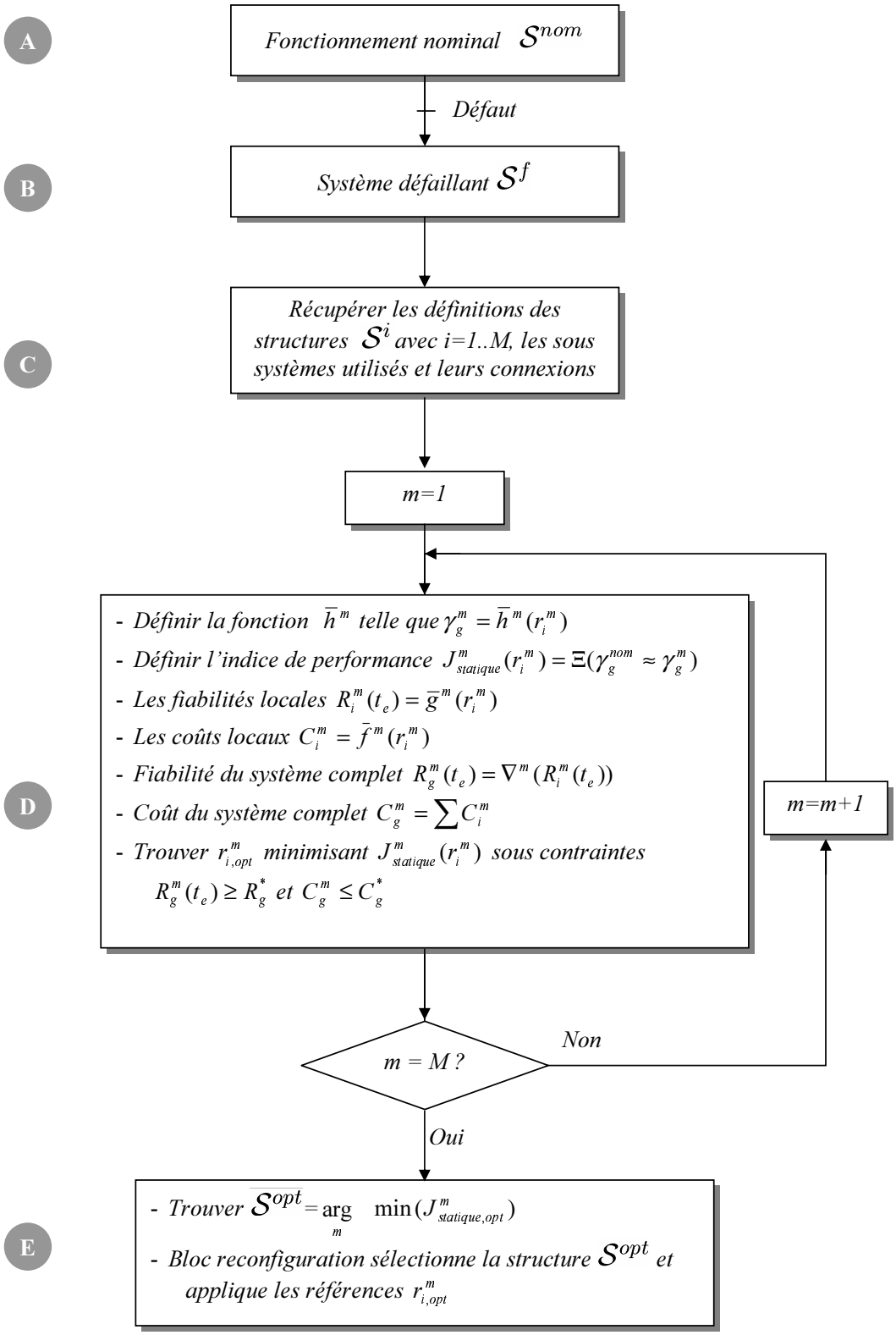


FIG. 2.7 – L'algorithme des calculs

2.6 Exemple académique

Nous avons donné une présentation générale du problème et de la solution, en exposant les différentes étapes de calculs, afin de valider ces résultats, nous proposons l'exemple académique suivant.

2.6.1 Description du système

Nous considérons le système LTI décrit par la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Avec,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} -1 & 0.3 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & -0.9 & -0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.05 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0.52 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.34 & -0.66 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0.2226 & -1.3197 & -0.3975 & -3.79 & 2.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0.166 & 0.05 & 0.78 & -0.30 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{cc} 0.9 & 0 \\ 1.12 & 0 \\ -0.8 & 0 \\ \hline 0 & -0.48 \\ 0 & -0.32 \\ 0 & 0.12 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} -0.0693 & 0.4158 & -0.0693 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.83 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.59 \end{array}\right)$$

Et

$$\gamma_g(t) = y_1(t) + y_3(t)$$

Le système est décomposé en trois sous-systèmes. La figure (2.8) illustre la décomposition physique du système. Au sens de la fiabilité, les sous-systèmes sont interconnectés fonctionnellement comme illustré par la figure (2.9).
Suivant la décomposition fonctionnelle illustrée par la figure (2.9), la fiabilité du système dans le cas nominal utilisant les trois sous-systèmes est donnée par :

$$R_g^{nom}(t) = 1 - (1 - R_1^{nom}(t))(1 - R_2^{nom}(t)R_3^{nom}(t))$$

$$\begin{array}{lll} R_1^{nom}(t) = e^{-\lambda_1^{nom}(u1).t} & & \lambda_1^{nom}(u1) = \lambda_1^0 e^{0.2u1} \\ R_2^{nom}(t) = e^{-\lambda_2^{nom}(u2).t} & \text{avec} & \lambda_2^{nom}(u2) = \lambda_2^0 e^{0.35u2} \\ R_3^{nom}(t) = e^{-\lambda_3^{nom}(y2).t} & & \lambda_3^{nom}(y2) = \lambda_3^0 e^{0.143y2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} & \\ \text{et} & \\ & \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_1^0 = 7.247 * 10^{-6} \\ \lambda_2^0 = 5.675 * 10^{-5} \\ \lambda_3^0 = 9.106 * 10^{-5} \end{array}$$

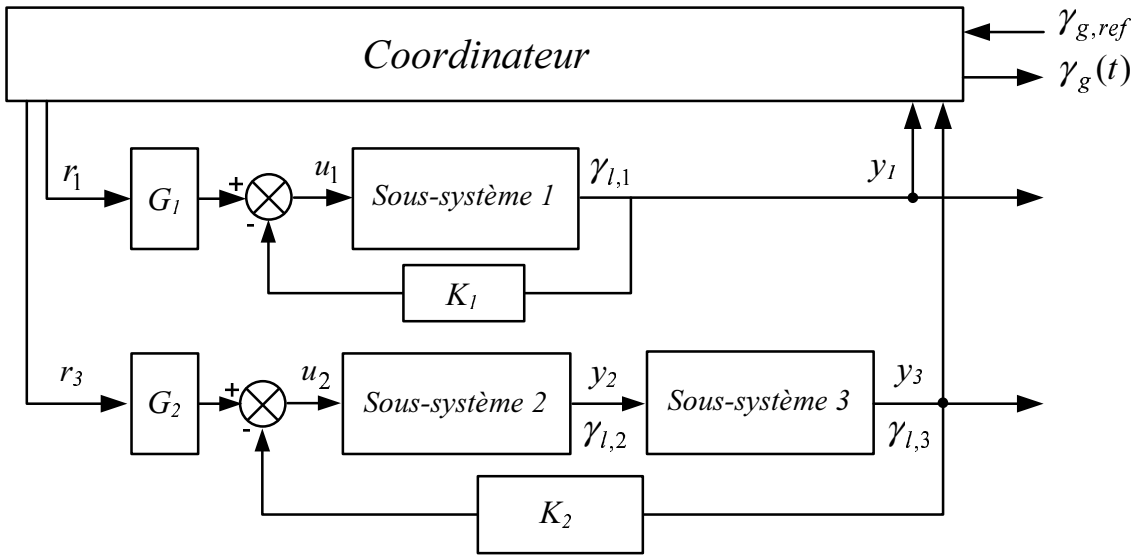


FIG. 2.8 – Décomposition physique du système

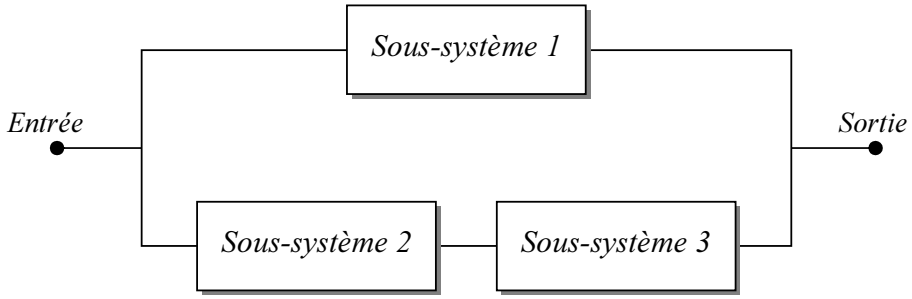


FIG. 2.9 – Diagramme de fiabilité du système

Les coût d'acquisition des sous systèmes sont respectivement : $c_1 = 150$ euros, $c_2 = 90$ euros et $c_3 = 70$ euros. Le coût d'indisponibilité du système est $P = 200$ euros quelque soit le sous système défaillant.
Les contraintes de la fiabilité et de coût sont : $R_g^* = 0.77$ et $C_g^* = 0.072$ euros/heure, donc pour une durée de fonctionnement de $T_d = 10000$ heures, le coût du système ne doit pas dépasser un coût maximum de 720 euros.

2.6.2 Objectifs du système

Les objectifs du système résident dans les deux points suivants :
✓ Définir les références r_1 et r_3 pour assurer $\gamma_g(t)$ égale à $\gamma_{g,ref}$ en régime statique.

✓ Définir les gains K_1, G_1, K_2 et G_2 pour que le sous-système 1 en boucle fermée suive le modèle (2.42) et l'ensemble sous-système 2 et 3 en boucle fermée suive le modèle (2.43).

Le modèle du premier sous-système est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = M_1 x_1(t) + N_1 r_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases} \tag{2.42}$$

Le modèle du sous-système 2 et sous-système 3 est :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = M_2 x(t) + N_2 r_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases} \tag{2.43}$$

Avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1.9040 & 0.3604 & 1.9175 \\ -1.8250 & -0.8249 & -0.3804 \\ -0.0964 & 0.1463 & 0.0289 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_1 = \begin{pmatrix} -0.3707 \\ -0.4614 \\ 0.3295 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -0.0654 & 2.1900 & 1.0250 & 9.5125 & -3.9278 \\ 0.4297 & 1.9467 & 0.7166 & 6.3417 & -2.6185 \\ -0.2461 & -0.8750 & -0.8912 & -2.3781 & 0.9819 \\ -0.2226 & -1.3197 & -0.3975 & -3.7900 & 2.0500 \\ 0.0280 & 0.1660 & 0.0500 & 0.7800 & -0.3000 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} -0.7404 \\ -0.4936 \\ 0.1851 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6.3 Structures de reconfiguration

Pour illustrer la méthode, le défaut simulé consiste en une perte d'efficacité de la commande u_2 de $\beta^f = 20\%$, soit $u_2^f = 0.8u_2$.

Trois structures de reconfiguration sont définies. Dans la première, le système utilise uniquement le sous-système 1, les sous-systèmes 2 et 3 ne sont pas utilisés. L'objectif global dépend uniquement du premier objectif local $\gamma_g = y_1$. Au sein de la seconde structure, uniquement les sous-systèmes 2 et 3 sont utilisés, dans ce cas l'objectif global est $\gamma_g = y_3$. Dans la troisième structure, le système est exploité dans son intégralité avec tous les objectifs locaux envisageables soit dans notre exemple les références locales telles que :

$$\begin{cases} r_1 = \sigma_1 r_{1,max} \quad \text{avec} \quad \sigma_1 \in \left[\frac{r_{1,min}}{r_{1,max}}, 1\right] \\ r_3 = \sigma_2 r_{3,max} \quad \text{avec} \quad \sigma_2 \in \left[\frac{r_{3,min}}{r_{3,max}}, 1\right] \end{cases}$$

Les bornes des références sont données par $r_{1,min} = r_{3,min} = 0.5$ et $r_{1,max} = r_{3,max} = 12$.

2.6.4 Résultats et commentaires

Plusieurs scénarios sont considérés pour illustrer la méthode développée :
- Le cas nominal.
- Le système sans reconfiguration avec un défaut de perte d'efficacité de la commande u_2 à l'instant $t_f = 80s$.
- Le système reconfiguré, la nouvelle structure est appliquée à $t_r = 82s$, avec un retard à la détection de 2 s.

2.6.4.1 Cas nominal

Supposons que l'objectif global souhaité est $\gamma_{g,ref}^{nom} = 12$, pour illustration nous supposons que les objectifs locaux (y_1, y_3) prennent plusieurs valeurs $(5, 7)$ durant l'intervalle [$0s$, $40s$] et

$(3, 9)$ dans [$40s$, $140s$] comme présenté dans la figure (2.10), les changements des références sont de type Echelon.

Les lois de commande nominales sont sythétisées par placement de pôles et les valeurs des gains sont données par : $K_1 = [\ 1.0045 \quad -0.0671 \quad -0.4639\ ]$, $G_1 = [\ 0.4119\ ]$ pour le sous-système 1 et $K_2 = [\ -0.0321 \quad 4.4583 \quad 1.9270 \quad 19.8177 \quad -8.1829\ ]$, $G_2 = [\ 1.5426\ ]$ pour le sous-système 2 et 3.

Les régulateurs vérifient les égalités $A_1 - B_1K_1 = M_1$, $B_1G_1 = N_1$, $A_2 - B_2K_2 = M_2$ et $B_2G_2 = N_2$. Notons que les valeurs propres sont (-0.5, -0.8, -0.6, -0.2, -1) pour le sous système N° 2 et (-1.1, -0.9, -0.7) pour le sous système N° 1.

Les variations de consigne de y_1 et y_3 permettent d'illustrer l'efficacité des lois de commande correctement calculées afin à la fois de permettre aux sorties des sous systèmes de rejoindre les objectifs loxaux mais également d'assurer des performances désirées au niveau global.

Le changement des valeurs de consignes à l'instant $t = 40\,s$ conduit à des changements au niveau des commandes u_1 et u_2 et une faible dérive au niveau de l'objectif global γ_g dépendant de la dynamique des sous systèmes.

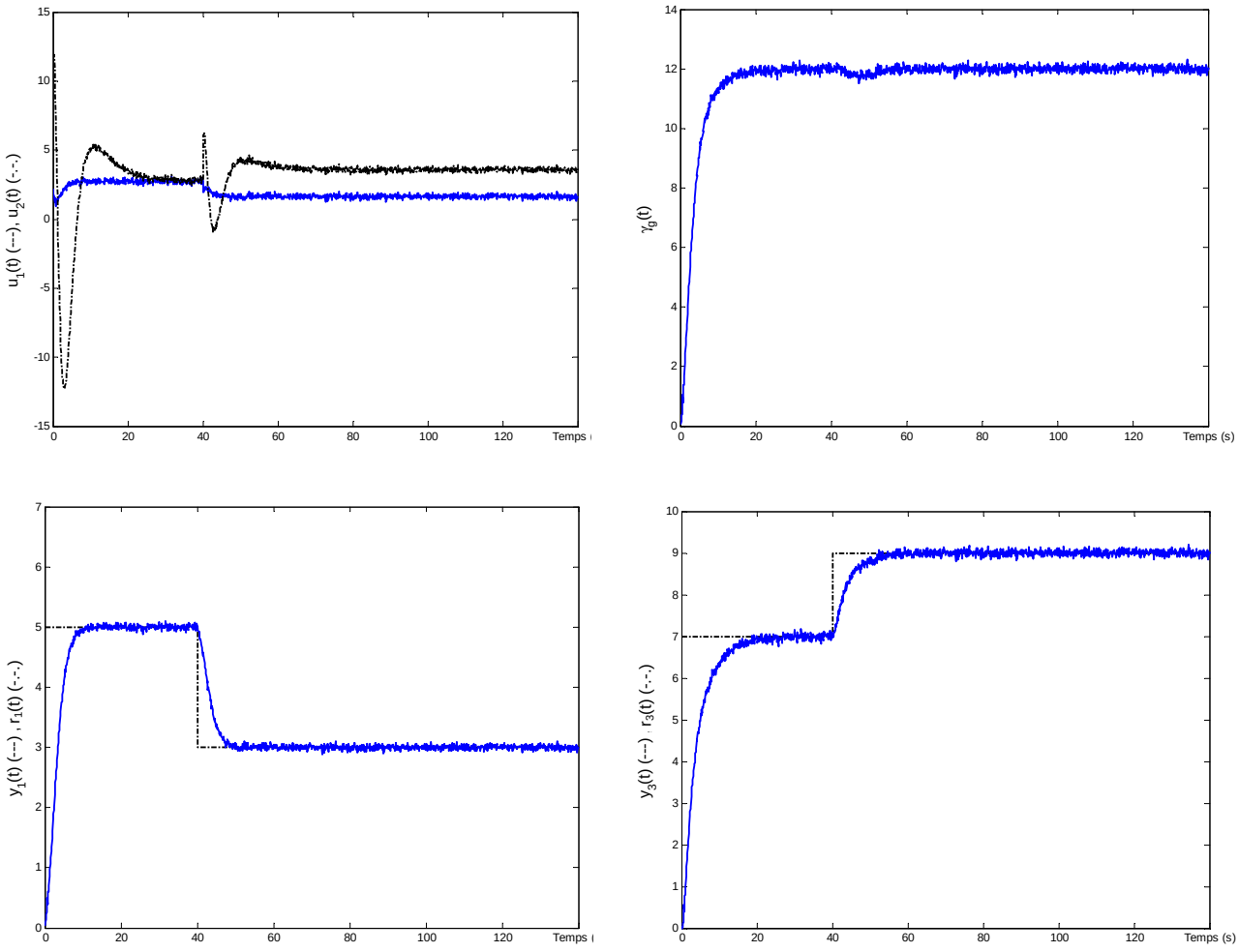


FIG. 2.10 – Évolution dynamique des variables de commande et de sortie dans le cas nominal

2.6.4.2 Cas du système défaillant et sans reconfiguration

Un défaut de perte d'efficacité de l'actionneur de $\beta^f = 20\%$ est apparu à l'instant $t_f = 80s$, signifie que la nouvelle matrice $B_2^f = 0.8B_2 = [\ -0.3840;\ \ -0.2560;\ \ 0.0960;\ \ 0;\ \ 0\ ]^T$.

Nous pouvons voir dans la figure (2.11) une perte dans l'objectif statique local du sous système N° 2, la sortie y_3 n'est plus égale à la référence $r_3 = 9$ à partir de l'instant d'occurence de défaut $t_f = 80s$ et par conséquent l'objectif global statique n'est pas assuré $\gamma_g = 11.45 < 12$.

Concernant l'objectif dynamique, qui n'est pas le sujet de la démonstration dans ce chapitre, n'est plus assuré. Nous remarquons que les nouvelles valeurs propres $(-2.2766, -0.1516 + 0.4213i, -0.1516 - 0.4213i, -0.1470, -0.6092)$. Les équations $A_2 - B_2K_2 = M_2$ et $B_2G_2 = N_2$ ne sont plus vérifiées, cependant, le système est encore stable.

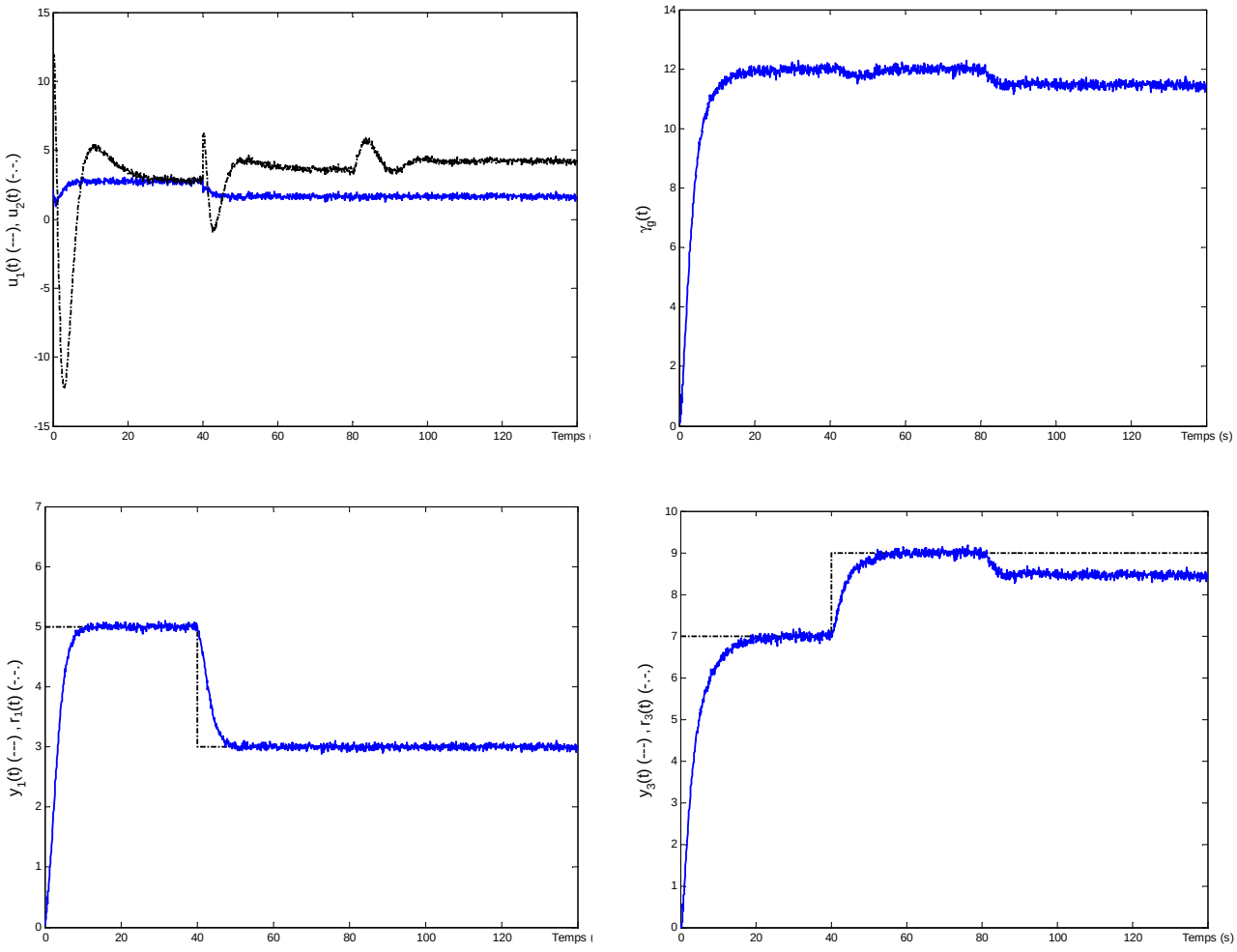


FIG. 2.11 – Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système défaillant

2.6.4.3 Cas du système reconfiguré

Nous avons fixé une contrainte de fiabilité $R_g^* = 0.77$ et de coût $C_g^* = 0.072$ euros/heure. La contrainte $J_{min} = 0.02$ signifie que tous les objectifs globaux $\gamma^m = \gamma_{g,ref}^{nom} \pm 2\% \gamma_{g,ref}^{nom}$ sont acceptables.

a) Scénario 1

Le défaut considéré est une perte d'efficacité de la commande u_2 de $\beta^f = 20\%$ à l'instant $t_f = 80s$ comme pour le paragraphe précédent.

Les figures (2.12), (2.13) et (2.14) représentent l'évaluation d'indice de perofmance, de la fiabilité et du coût en fonction des références r_1^3 et r_2^3 de la structure $\mathcal{S}^3$. La superposition de l'ensemble des contraintes de la fiabilité, du coût et des performances statiques permet de déterminer l'ensemble des solutions admissibles ou l'espace réalisable (r_1^3 , r_2^3) comme l'illustre la figure (2.15).

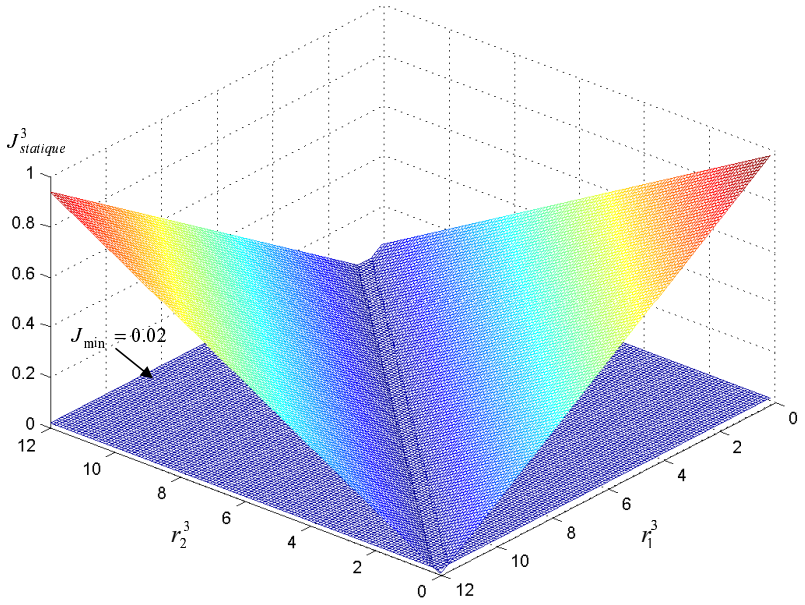


FIG. 2.12 – Indice de performance statique $J^3_{statique}$ en fonction des références r_1^3 et r_2^3 de la structure $\mathcal{S}^3$

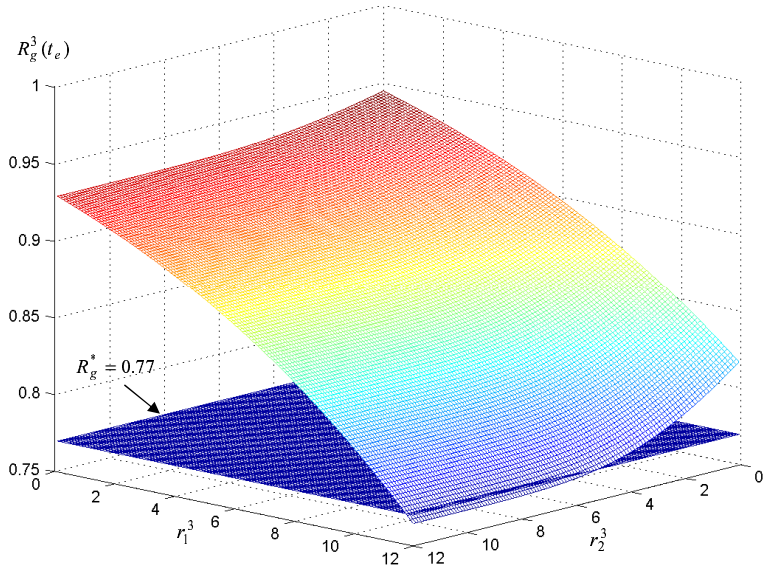


FIG. 2.13 – Évolution de la fiabilité en fonction des références r_1^3 et r_2^3 de la structure $\mathcal{S}^3$

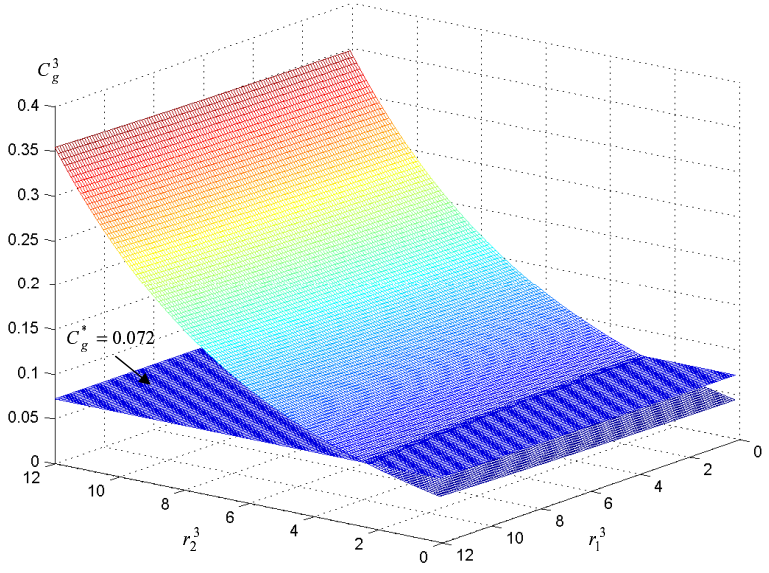


FIG. 2.14 – Évolution du coût C_g^3 en fonction des références r_1^3 et r_2^3 de la structure $\mathcal{S}^3$

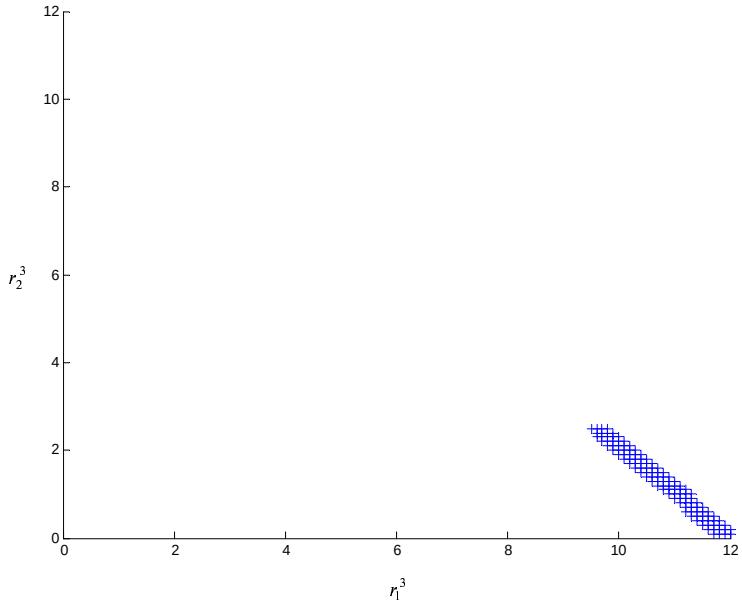


FIG. 2.15 – Ensemble des solutions admissibles suivant la structure $\mathcal{S}^3$

Pour montrer l'impact de l'amplitude du défaut sur l'ensemble des solutions admissibles défini par le critère J sans tenir compte des contraintes de la fiabilité et du coût, nous avons tracé cet ensemble dans le cas nominal et le cas du système défaillant pour deux valeurs de défaut $\beta^f = 20\%$ et $\beta^f = 35\%$ (la figure 2.16). Nous remarquons que l'espace réalisable change en fonction du défaut, plus le défaut est grand plus l'espace réalisable est restreint.

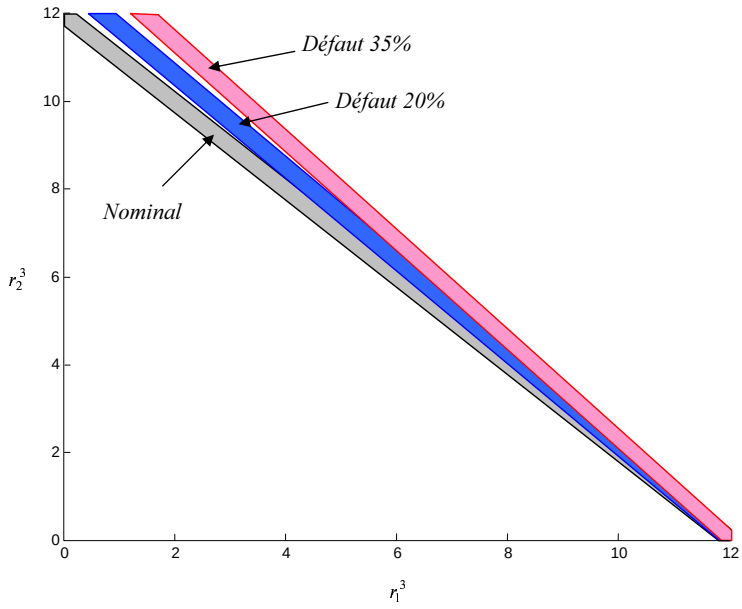


FIG. 2.16 – Espace réalisable r_1^3 et r_2^3 imposé par la contrainte $J_{statique} \leq J_{min}$ de la structure $\mathcal{S}^3$

Le tableau (2.1) indique les références optimales des trois structures $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$, les objectifs globaux γ_g^1, γ_g^2 et γ_g^3, les valeurs des indices de performances, les fiabilités et les coûts pour une durée de fonctionnement désirée $T_d = 10000$ heures.

Nous constatons que les structures $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^3$ respectent les contraintes R_g^* et C_g^*, en revanche les performances statiques ne peuvent être assurées par la structure $\mathcal{S}^1$. La structure $\mathcal{S}^2$ ne peut assurer que la contrainte de coût. Par conséquent, l'algorithme développé sélectionne la structure $\mathcal{S}^3$ optimale. La structure $\mathcal{S}^3$ est alors activée avec les références optimales indiquées au tableau à l'instant $t_r = 82$ sec comme l'illustre la figure (2.17).

	$\mathcal{S}^1$	$\mathcal{S}^2$	$\mathcal{S}^3$
$r_{1,opt}$	11.7537	–	9.5991
$r_{2,opt}$	–	1.4871	2.5555
$R_1(T_d)$	0.77	–	0.8133
$R_2(T_d)$	–	0.4850	0.4225
$R_3(T_d)$	–	0.3013	0.2316
C_1	0.0091	–	0.0072
C_2	–	0.0210	0.0250
C_3	–	0.0324	0.0395
$\gamma_{g,opt}$	11.7537	0.9286	12
$J_{statique,opt}$	0.0205	0.8836	$3.9614 * 10^{-8}$
$R_g(T_d)$	0.77	0.1461	0.8316
C_g	0.0091	0.0534	0.0717

TAB. 2.1 – Performances locales et globales du système suivant $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta = 20\%$)

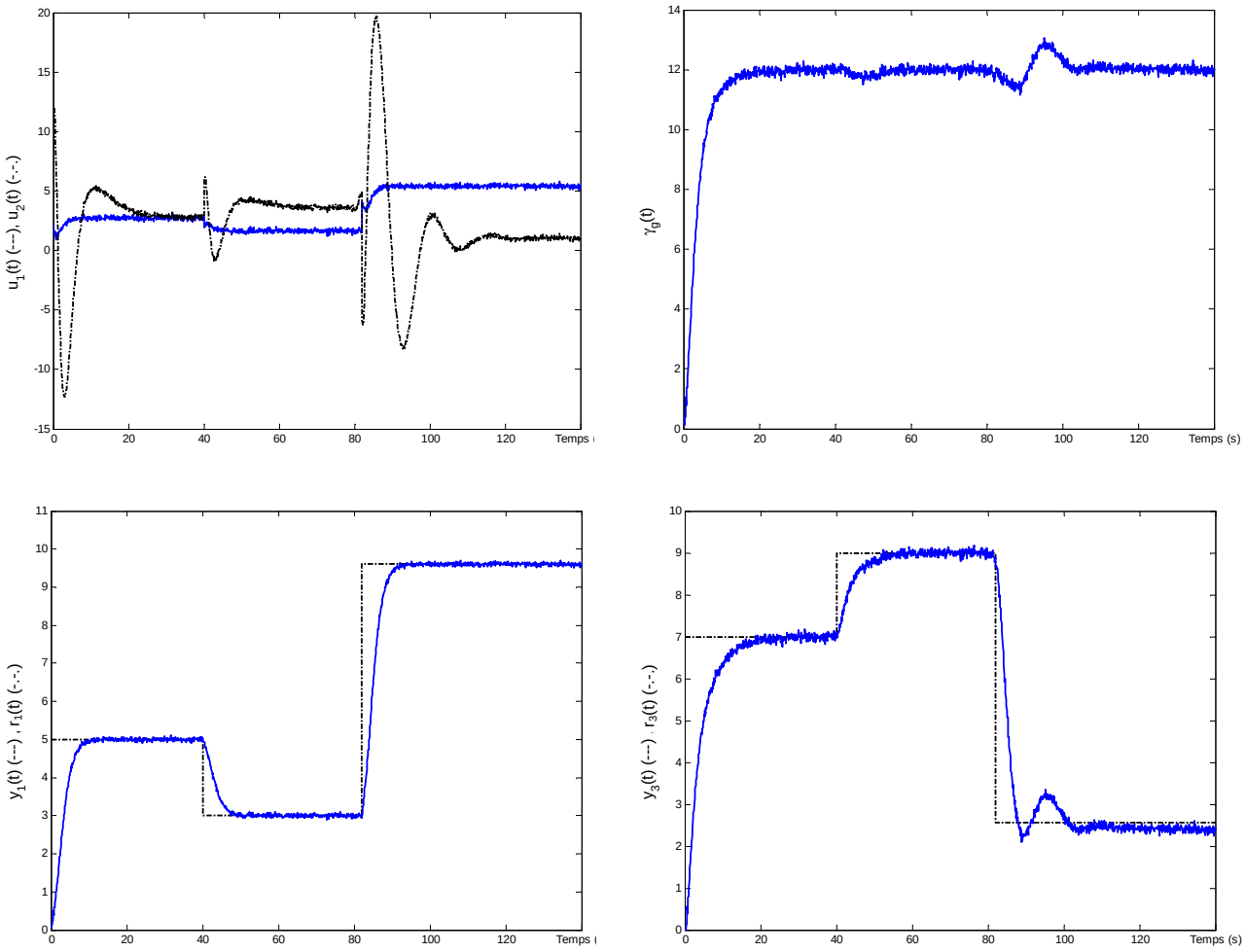


FIG. 2.17 – Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système reconfiguré

b) Scénario 2

Dans ce deuxième test, le défaut considéré est la perte d'efficacité de la commande u_2 de $\beta^f = 35\%$ à l'instant $t_f = 80s$.

Nous avons choisi une contrainte de fiabilité fixée à $R_g^* = 0.75$, de coût $C_g^* = 0.072\, euros/heure$ et $J_{min} = 0.02$. Nous avons obtenu les résultats indiqués dans le tableau (2.2). Nous remarquons que les performances statiques sont améliorées pour la structure $\mathcal{S}^1$ quand nous avons diminué la valeur de R_g^*. Les valeurs des références changent également pour les trois structures. Suivant les contraintes imposées, les structures $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^3$ sont acceptables, en revanche, la premiere structure assure un coût meilleur que la structure $\mathcal{S}^3$. $\mathcal{S}^1$ est alors sélectionnée pour continuer la mission. Les courbes sont données par la figure (2.18), où il est tout à fait visible de voir la référence sur y_3 égale à zéro conformément à la structure $\mathcal{S}^1$.

	$\mathcal{S}^1$	$\mathcal{S}^2$	$\mathcal{S}^3$
$r_{1,opt}$	12	–	9.9911
$r_{2,opt}$	–	6.9848	2.2876
$R_1(T_d)$	0.7645	–	0.8060
$R_2(T_d)$	–	0.4313	0.4180
$R_3(T_d)$	–	0.2701	0.2583
C_1	0.0094	–	0.0075
C_2	–	0.0244	0.0253
C_3	–	0.0353	0.0365
$\gamma_{g,opt}$	12	6.558	12.02
$J_{statique,opt}$	0	0.8468	$8.5977 * 10^{-8}$
$R_g(T_d)$	0.7645	0.1165	0.8270
C_g	0.0094	0.0597	0.0694

TAB. 2.2 – Performances locales et globales du système suivant $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta = 35\%$)

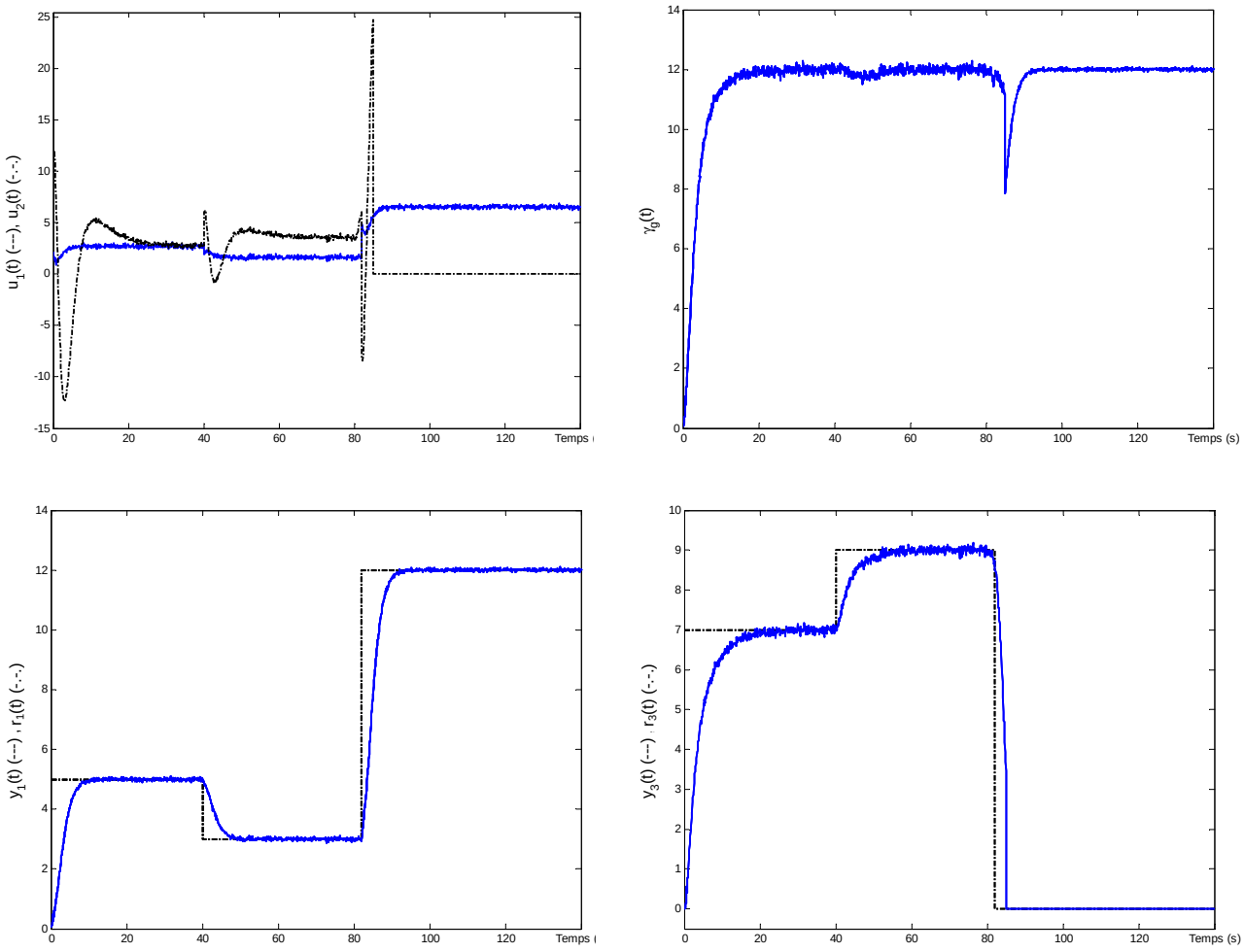


FIG. 2.18 – Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système reconfiguré

2.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la problématique associée à la tâche de reconfiguration des systèmes tolérants aux défauts, plus particulièrement, le choix de la meilleure structure du système après l'occurrence du défaut. Nous avons supposé qu'il existe plusieurs structures possibles du système en présence d'un défaut au niveau des actionneurs, et nous avons donné une solution à la question du choix de la meilleure structure en se fondant sur la fiabilité ainsi que le coût des composants et le coût d'indisponibilité du système sans omettre de redéfinir les objectifs locaux en terme de références.

Les difficultés résident dans l'obtention d'une relation entre les conditions de fonctionnement et la fiabilité, étant donné que le modèle de Cox n'est qu'un modèle analytique théorique, il ne permet pas d'avoir des résultats précis. Pour avoir des formules exactes pour exprimer la fiabilité en fonction des conditions de fonctionnement, le cas le plus concret est de faire des essais statistiques réels sur le système, en revanche ces essais sont coûteux. Nous avons proposé également une relation analytique fiabilité/coût mais nous donnons la même remarque précédente pour cette relation.

L'inconvénient de la méthode est que les structures sont définies hors ligne, en revanche la détermination des objectifs locaux en terme de référence de chaque sous système, le calcul de la fiabilité et du coût ainsi que l'évaluation des performances et la sélection de la structure optimale sont effectuées en ligne.

S'assurer des performances statiques dans le choix de la structure constitue un critère important dans le cadre du développement d'une méthode de reconfiguration, il est toutefois essentiel de garantir la stabilité et en conséquence les performances dynamiques également. Nous abordons et présentons dans le chapitre suivant une méthode permettant de tenir compte et de synthétiser également des régulateurs renconfigurables.

Chapitre 3

Méthode de reconfiguration sous contrainte de performances des régulateurs

Dans le chapitre précédent nous avons indiqué dans la présentation du problème que les systèmes étudiés dans ce travail sont des systèmes hiérarchiques composés de deux niveaux, et par conséquent, nous avons divisé le problème de la commande du système en deux niveaux : Le niveau global consiste à déterminer les objectifs locaux en terme de références locales optimales afin d'assurer les objectifs globaux statiques et le niveau local regroupe tous les sous problèmes locaux permettant de déterminer les lois de commande de chaque sous système pour assurer des objectifs dynamiques.

Nous avons proposé une méthode permettant de résoudre le problème uniquement au niveau global pour assurer les objectifs statiques sans tenir compte des objectifs dynamiques. La méthode proposée repose sur la détermination d'une structure optimale parmi l'ensemble des structures possibles en se fondant sur une estimation en ligne de la fiabilité et des coûts des composants (fiabilité maximale / coût minimal) sans omettre de redéfinir les nouveaux objectifs locaux de la structure optimale en terme de valeurs de références.

Dans ce chapitre nous allons intégrer les objectifs dynamiques dans notre analyse en résolvant les sous problèmes du niveau local. En d'autre terme, pour toutes les structures, les lois de commande optimales de chaque sous système utilisé par la structure sont définies en l'abscence de défauts.

Parmi l'ensemble des méthodes existantes, nous proposons non pas de générer une nouvelle méthode mais sur la base d'une méthode existante de l'adapter et de la modifier afin de nous permettre d'intégrer cette dernière dans le cadre de notre stratégie de reconfiguration. Ainsi, nous allons présenter la méthode Pseudo-inverse utilisée pour la synthèse des lois de commande. L'utilisation de la méthode PIM modifiée dans le contexte de notre travail et le calcul des indices de performances dynamiques pour chaque structure à partir des lois de commande sont présentés. Pour illustrer la méthode développée, un exemple académique est donné à la fin du chapitre.

3.1 Méthode de la Pseudo-inverse (PIM)

3.1.1 Présentation de la méthode PIM

La méthode de la pseudo-inverse, en anglais Pseudo-Inverse Method (PIM), a été traitée par plusieurs chercheurs [Ostroff, 1985], [Gao et Antsaklis, 1990], [Gao et Antsaklis, 1991], [Palmubo et al., 1992]. Elle a été présentée par [Huang et Stengel, 1990] sous le nom "approximate model matching".

La méthode PIM est utilisée dans le cas des systèmes linéaires. Cette méthode consiste à déterminer un nouveau gain de retour d'état de telle sorte que la dynamique du système défaillant soit approximativement égale à celle du système nominal en minimisant un critère donné.

Considérons le système linéaire nominal décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

où (A, B, C) sont les matrices du système dans le cas nominal.

Le système est commandé par une loi de commande par retour d'état $u(t) = -Kx(t)$ afin d'obtenir des performances désirées en boucle fermée. Le système bouclé est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

Supposons que l'occurrence d'un défaut conduit à des changements du système décrit par la nouvelle forme d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^f x(t) + B^f u(t) \\ y(t) = C^f x(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

où (A^f, B^f, C^f) sont les matrices du système dans le cas défaillant.

Sous l'hypothèse que le système défaillant soit encore commandable, le problème consiste à trouver le nouveau gain K^f permettant de maintenir les performances du système défaillant proches de celles désirées, conduisant à définir une nouvelle loi de commande :

$$u^f(t) = -K^f x(t) \tag{3.4}$$

afin que

$$A - BK = A^f - B^f K^f \tag{3.5}$$

La solution est donnée par

$$K^f = B^{f+}(A^f - (A - BK)) \tag{3.6}$$

Où B^{f+} est la matrice pseudo-inverse de B^f c'est pour cette raison que cette méthode est baptisée PIM.

Quand B^f n'est pas de rank plein, les matrices $A^f - B^f K^f$ et $A - BK$ ne peuvent pas être égales, une solution approximative est alors calculée, en minimisant

$$J = \|(A^f - B^f K^f) - (A - BK)\|_F^2 \tag{3.7}$$

où $\|.\|_F$ est la norme Frobenius.

Cette solution est basée sur le théorème de Bauer-Fike.

Théorème de Bauer-Fike
Soit $(A - BK)$ une matrice de dimension $(n \times n)$ non-defective, en d'autres termes elle possède n vecteurs propres indépendants, elle est donc diagonalisable. Soit P la matrice des vecteurs propres de $(A - BK)$ et $P^{-1}(A - BK)P = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice $(A-BK)$. Les valeurs propres z de $\big(A^f - B^f K^f = A - BK + \delta(A - BK)\big)$ sont dans l'union des disques D_i donnés par :

$$D_i \;=\; \{z : \quad |z - \lambda_i| \leq \|P\|_q \|P^{-1}\|_q \|\delta(A - BK)\|_q\}$$

Où $\|.\|_q$ est la norme q de la matrice. La notation $\delta(A - BK)$ représente des petites variations autour de la matrice $(A - BK)$.

Une valeur propre z de $(A^f - B^f K^f)$ satisfait :

$$|z - \lambda_i| \leq \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2 \|\delta(A - BK)\|_2$$

Sachant que

$$\|\delta(A - BK)\|_2 \leq \|\delta(A - BK)\|_F$$

Soit

$$|z - \lambda_i| \leq \|P\|_2 \|P^{-1}\|_2 \|\delta(A - BK)\|_F$$

Ainsi pour minimiser l'écart entre les valeurs propres du système nominal et le système reconfiguré, il faut minimiser $\|\delta(A - BK)\|_F = \|(A^f - B^f K^f) - (A - BK)\|_F$ puisque la matrice P est constante et dépend uniquement du système nominal. L'avantage de la méthode PIM réside dans sa simplicité dans le calcul et l'implementation, en revanche elle a des limitations et inconvénients, nous les citons dans le paragraphe suivant.

3.1.2 Limitations de la méthode PIM

L'inconvénient majeur de la méthode classique [Ostroff, 1985, Huang et Stengel, 1990] réside dans le fait que trouver une solution K^f qui minimise J n'assure pas forcément la stabilité du système $A^f - B^f K^f$. La notion de "proximité" n'est pas précisément définie et le fait de trouver une solution minimisant le critère J, en d'autres termes, un système reconfiguré plus proche du

modèle nominal n'assure pas qu'il ait le même comportement dynamique.

La seconde limitation majeure est qu'il est nécessaire de connaître le modèle mathématique du système défaillant A^f, B^f, C^f pour calculer le nouveau gain K^f.

Des extentions de la méthode ont été proposées par [Gao et Antsaklis, 1991] et récemment par [Staroswiecki, 2005], ces extentions utilisent une optimisation sous contrainte pour garantir la stabilité de $A^f - B^f K^f$.

3.1.3 Extention de la méthode PIM

Afin de remedier à ces inconvénients, [Gao et Antsaklis, 1991] ont proposé la méthode PIM modifiée $MPIM$. Elle est basée sur la méthode PIM classique en intégrant une méthode d'analyse de la stabilité du système avec des incertitudes dans ses paramètres. Plusieurs approches ont été proposées pour définir les limites (bornes) des incertitudes pour lesquelles le système reste stable. Parmi ces méthodes, nous nous attachons à présenter plus précisement la méthode de Zhou [Zhou et Khargonekar, 1987] définie par :

Définition
Soit un système décrit par sa représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = (A + E)x \tag{3.8}$$

La matrice A est supposée stable et la matrice des perturbations peut s'écrire de la manière suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{m} k_i E_i$$

où E_i sont des matrices constantes et k_i des paramètres incertains supposés variés autour de zéro.

Soit P la solution de l'équation de Lyaponov suivante :

$$PA + A^T P + 2I = 0$$

et P_i et P_e sont définies comme suit :

$$\begin{cases} P_i = (E_i^T P + P E_i)/2 & i = 1, 2, \dots m \\ P_e = [P_1 P_2 ... P_m] \end{cases}$$

Le système donnée par (3.8) est stable si :
- $\sum_{i=1}^{m} k_i^2 < 1/\sigma_{max}^2(P_e)$

  ou
- $\sum_{i=1}^{m} |k_i| \sigma_{max}(P_i) < 1$

  ou

– $|k_j| < 1/\sigma_{max}\left(\sum_{i=1}^{m}|P_i|\right) \qquad j = 1, 2 \ldots m$

Avec $\sigma_{max}(.)$ la valeur singulière maximale et $|P_i|$ une matrice conçue en prenant les valeurs absolues des éléments de la matrice P_i.

En appliquant cette définition sur le système

$$\dot{x}(t) = (A^f - K^f B^f)x \tag{3.9}$$

Sous l'hypothèse que A^f soit stable, le système (3.9) est stable si la condition suivante est vérifiée.

$$|K^f(i,j)| < 1/\sigma_{max}\left(\sum_{i=1}^{m}|P_i|\right) \qquad i = 1, 2 \ldots m \quad et \quad j = 1, 2 \ldots n \tag{3.10}$$

La nouvelle formulation de la méthode PIM est donc donnée comme suit :
Déterminer K^f minimisant J avec les contraintes données par (3.10).

Nous pouvons constater que la solution proposée par [Gao et Antsaklis, 1991] permet d'assurer uniquement la stabilité du système après l'occurrence du défaut et sans maintenir les performances dynamiques du système nominal.

Une autre solution a été proposée par [Staroswiecki, 2005], pour remedier au problème de stabilité et au problème de définition de la notion "performances du système reconfiguré très proche de celles du système nominal". De manière classique, on cherche à trouver une loi de commande $u(t) = -K^f x(t) + G^f e(t)$ tel que le système (3.11) en boucle fermée soit égal au modèle (3.12) en minimisant J_1 et J_2.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^f x(t) + B^f u(t) \\ y(t) = C^f x(t) \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\dot{x}(t) = M^* x(t) + N^* e(t) \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} J_1 = \|A^f - B^f K^f - M^*\|_F^2 \\ J_2 = \|B^f G^f - N^*\|_F^2 \end{cases} \tag{3.13}$$

Supposant que deux ensembles de matrices $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ peuvent être définies, tels que : $\forall\,(M, N) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, le modèle définis par $\dot{x}(t) = Mx(t) + Ne(t)$ possède un comportement dynamique acceptable (ensemble de modèles admissibles), où la stabilité du système est incluse.

Le nouvelle formulation de la méthode PIM consiste à déterminer (K^f, G^f), pour une certaine paire $(M, N) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, de façon que :

$$\begin{cases} A^f - B^f K^f = M \\ B^f G^f = N \end{cases} \tag{3.14}$$

Ainsi pour une paire $(M, N) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ les gains (K^f, G^f) sont définis classiquement par

$$\begin{cases} K^f &= B^{f+}(A^f - M) \\ G^f &= B^{f+}N \end{cases} \tag{3.15}$$

Les deux ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont définis hors ligne. Les calculs effectués en ligne consistent à déterminer (K^f, G^f) et la paire de matrices $(M, N) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ pour laquelle (3.14) soit vérifiée. Une conséquence est que l'ensemble de défauts accommodables sont définis. Cette formulation a été présentée dans [Staroswiecki, 2005], en revanche, il n'y a pas une méthode permettant de déterminer la paire $(M, N) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ pour laquelle (3.14) soit vérifiée.

3.1.4 Contribution à la synthèse de la méthode PIM modifiée

Sur la base des travaux précédemment présentés [Gao et Antsaklis, 1991] et [Staroswiecki, 2005], dans le cadre de ce travail, nous proposons des modifications de la méthode PIM.

En fonctionnement nominal, le système en boucle fermée (3.16) utilisant une loi de commande nominale $u(t) = -K^{nom}x(t) + G^{nom}r(t)$ suit corretement le modèle nominal décrit par (3.17).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A - BK^{nom})x(t) + BG^{nom}r(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\dot{x}(t) = M^{nom}x(t) + N^{nom}r(t) \tag{3.17}$$

En d'autres termes, les équations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} A - BK^{nom} &= M^{nom} \\ BG^{nom} &= N^{nom} \end{cases} \tag{3.18}$$

Nous supposons qu'il existe deux ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ permettant de définir un certain ensemble de performances acceptables dans lequel la stabilité du système est inclue. Nous proposons une méthode pour définir $\mathcal{M}$ au paragraphe suivant (3.1.4.1).

Àprès l'apparition du défaut, le système défaillant devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A^f - B^f K^{nom})x(t) + B^f G^{nom}r(t) \\ y(t) &= C^f x(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

Nous considérons que les matrices A^f et B^f sont connues à partir des matrices A et B quand le sous système défaillant est enlevé. Dans le cas où le sous système défaillant n'est pas déconnecté, les matrices A^f et B^f doivent être estimées.

Le défaut apparu est moins sévère et ne nécessite pas une reconfiguration si la loi de commande nominale assure encore des performances acceptables définis par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, c'est à dire que sous l'hypothèse de la synthèse de régulateur robuste, la reconfiguration n'est pas obligatoire si les équations suivantes restent vérifiées

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A^f - B^f K^{nom} & = & M \in \mathcal{M} \\ B^f G^{nom} & = & N \in \mathcal{N} \end{array} \right. \tag{3.20}$$

Dans le cas où les équations (3.20) ne sont pas vérifiées, une nouvelle loi de commande - $u^f(t) = -K^f x(t) + G^f r(t)$ est obligatoire afin d'assurer les performances initialement définies par $\mathcal{M}$ ou au moins des performances degradées. Donc nous cherchons (K^f, G^f) en minimisant $J_1 = \|A^f - B^f K^f - M^{nom}\|_F^2$ et $J_2 = \|B^f G^f - N^{nom}\|_F^2$ avec les contraintes $A^f - B^f K^f \in \mathcal{M}$ et $B^f G^f \in \mathcal{N}$.

En premier lieu, nous écrivons les contraintes sous forme d'un ensemble de contraintes d'égalité et d'inégalité linéaires ou non-linéaires, en d'autres termes, les deux ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sous formes $\mathfrak{g}_1(M) \leq 0$ et $\mathfrak{g}_2(N) \leq 0$. Notons que $\mathfrak{g}_1(M)$ (respectivement $\mathfrak{g}_2(N)$) est une fonction ou un ensemble des fonctions linéaires ou non linéaires continues dépend des élements de la matrice M (respectivement N).

Par conséquent, $A^f - B^f K^f \in \mathcal{M}$ signifie que $\mathfrak{g}_1(A^f - B^f K^f) \leq 0$ et $B^f G^f \in \mathcal{N}$ signifie que $\mathfrak{g}_2(B^f G^f) \leq 0$.

Le problème classique devient un problème de minimisation sous contrainte avec des algorithmes et outils adaptés pour le résoudre. Soit à résoudre :

$$\left| \begin{array}{l} K^f_{opt} = \underset{K^f}{arg} \quad min \|A^f - B^f K^f - M^{nom}\|_F^2 \\ \text{avec} \quad \mathfrak{g}_1(A^f - B^f K^f) \leq 0 \end{array} \right. \quad et \quad \left| \begin{array}{l} G^f_{opt} = \underset{G^f}{arg} \quad min \|B^f G^f - N^{nom}\|_F^2 \\ \text{avec} \quad \mathfrak{g}_2(B^f G^f) \leq 0 \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Dans le cas où le problème (3.21) n'a pas de solution, nous considérons que des objectifs dégradés peuvent être acceptés. Ces performances degradées sont représentés par l'ensemble des modèles dégradés $\mathcal{M}^d$ supposés définis de la même manière que $\mathcal{M}$. Les fonctions des contraintes sont à remplacer par $\mathfrak{g}_1^d$ et $\mathfrak{g}_2^d$ associées à l'ensemble $\mathcal{M}^d$ et $\mathcal{N}^d$.

La figure (3.1) illustre $\mathcal{M}$ l'espace réalisable des performances nominales délimité par les contraintes $\mathfrak{g}_1$ et l'espace des performances dégradés $\mathcal{M}^d$ dans un cas simple à deux dimensions où les éléments des matrices varient dans $\mathbb{R}^2$. Pour simplifier l'explication nous n'exposons que l'ensemble $\mathcal{M}$, de la même manière l'ensemble $\mathcal{N}$ est analysé.

Le système est initialement en fonctionnement nominal (M^{nom}) et suit correctement le modèle nominal décrit par $\dot{x}(t) = M^{nom} x(t)$, le régulateur K^{nom} est synthétisé de façon que $A - BK^{nom} = M^{nom}$, à l'occurrence du défaut, le système passe en état défaillant décrit par la matrice $A^f - B^f K^f = M^f$, nous essayons de résoudre le problème (3.21), en trouvant K^f_{opt} qui minimise J_1 (solution très proche de M^{nom}) sous condition que $A^f - B^f K^f_{opt}$ soit dans l'espace $\mathcal{M}$ ou au moins dans $\mathcal{M}^d$ dans le cas où il n'y a pas de solution dans $\mathcal{M}$.

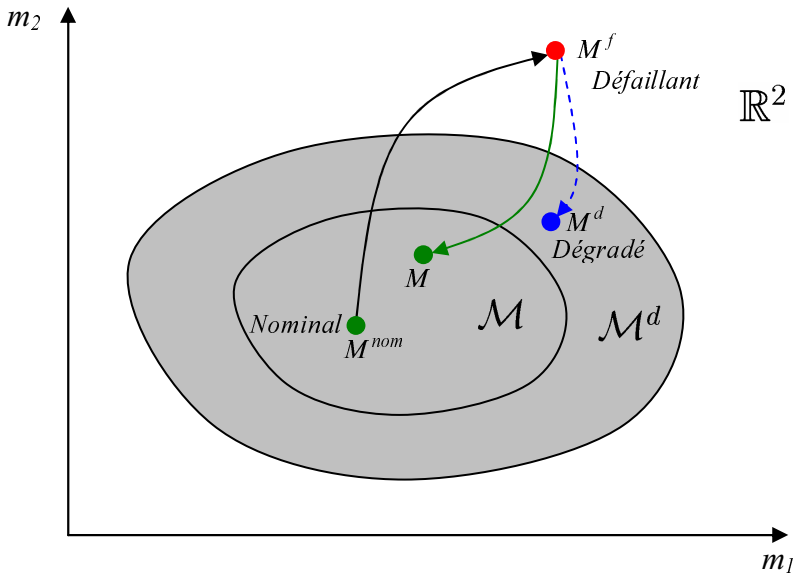


FIG. 3.1 – Espace réalisable des performances nominales $\mathcal{M}$ et des performances degradées $\mathcal{M}^d$

La difficulté réside dans la définition des ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ pour représenter des performances bien définies. Dans le cadre de notre travail nous proposons une méthode détermination de l'ensemble $\mathcal{M}$ à partir du modèle nominal définis par M^{nom} par le biais des valeurs propres de chaque matrice $M \in \mathcal{M}$ dans un intervalle définis. Et une méthode pour déterminer l'ensemble $\mathcal{N}$ à partir de la matrice N^{nom} du modèle nominal permettant d'obtenir la sortie du système dans un intervalle autour de la référence.

3.1.4.1 Détermination de l'ensemble $\mathcal{M}$

Dans le cas général, nous cherchons à déterminer un ensemble de matrices $\mathcal{M}$ possèdant un comportement dynamique admissible à partir d'une matrice M^{nom}, cet ensemble $\mathcal{M}$ est décrit sous forme d'un ensemble de contraintes.

Soit M^{nom} une matrice carrée de dimension $[n \times n]$ ayant des valeurs propres λ_i avec $i = 1 \dots n$. Dans ce travail, nous déterminons $\mathcal{M}$ comme étant l'ensemble des matrices M qui ont des valeurs propres $z_i = \lambda_i \pm \sigma\%\lambda_i$:

$$\mathcal{M} = \Big\{ M : [n \times n] \quad \text{tel que} \quad z_i = \lambda_i \pm \sigma\%\lambda_i \Big\} \tag{3.22}$$

En posant $z_i \in \left[\frac{100-\sigma}{100}\lambda_i,\ \frac{100+\sigma}{100}\lambda_i \right]$, l'équation (3.22) prend la forme suivante :

$$\mathcal{M} = \left\{ M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad | \quad z_i = \tau\lambda_i \quad \text{avec} \quad \tau \in \left[\frac{100-\sigma}{100}, \frac{100+\sigma}{100} \right] \right\} \tag{3.23}$$

Nous cherchons à écrire les contraintes en fonction des éléments m_{ij} de la matrice M, les valeurs propres λ_i de la matrice nominale M^{nom} et la valeur σ.

Rappelons que pour toute matrice carrée A $[n \times n]$, les valeurs propres de M sont les racines de $\Delta(A) = 0$ avec $\Delta(A) = det(\lambda I - A)$.

$\Delta(A)$ est le polynôme caractéristique de A, il peut être écrit sous plusieurs formes :

$$\Delta(A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^1 + \alpha_n \tag{3.24}$$

ou

$$\Delta(A) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n) \tag{3.25}$$

Avec λ_i les valeurs propres de A ou également les racines de $\Delta(A)$.

Supposons que M^{nom} est donnée et le polynôme caractéristique de la matrice M^{nom} s'écrit :

$$\Delta(M^{nom}) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^1 + \alpha_n \tag{3.26}$$

A) Toute matrice $M \in \mathcal{M}$ a un polynôme caractéristique :

$$\Delta(M) = (\lambda - z_1)(\lambda - z_2) \ldots (\lambda - z_n) \tag{3.27}$$

En remplaçant z_i par $\tau\lambda_i$, le polynôme devient :

$$\Delta(M) = (\lambda - \tau\lambda_1)(\lambda - \tau\lambda_2) \ldots (\lambda - \tau\lambda_n) \tag{3.28}$$

On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta(M) = \lambda^n + \widetilde{\alpha}_1\lambda^{n-1} + \cdots + \widetilde{\alpha}_{n-1}\lambda^1 + \widetilde{\alpha}_n \tag{3.29}$$

Pour exprimer les cœfficients en fonction des racines du polynôme, nous utilisons la formule de **Vieta** [Waerden, 1967]. Soit un polynôme $P(x)$ donné par :

$$P(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 \tag{3.30}$$

Le polynôme $P(x)$ peut être écrit sous la forme suivante :

$$P(x) \;=\; a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \tag{3.31}$$

Où x_i avec $i = 1 \ldots n$ sont les racines du polynôme $P(x)$.

La relation entre les cœfficients a_i et les racines x_i est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
\sum_{\substack{i,j \\ i<j}}^{n} x_i x_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k \\ i_1<i_2<\cdots<i_k}}^{n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}
\end{aligned}$$

En posant $a_n = 1$ et en remplaçant x_i par $\tau\lambda_i$, le déterminant (3.29) devient :

$$\Delta(M^{nom}) = \lambda^n + \tau\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \tau^2\alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \tau^{n-1}\alpha_1\lambda^1 + \tau^n\alpha_0 \tag{3.32}$$

B) D'autre part soit $M \in \mathcal{M}$,

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta(M) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda^1 + a_n \tag{3.33}$$

Pour calculer les cœfficients a_i du polynôme caractéristique, nous utilisons la méthode de **Leverrier-Faddeev-Souriau** [Hou, 1998] :

$$\begin{cases} M_1 = M, & a_1 = -tr(M_1), & \Gamma_1 = M_1 + a_1 I \\ M_2 = M\Gamma_1, & a_2 = -\frac{1}{2}tr(M_2), & \Gamma_2 = M_2 + a_2 I \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ M_n = M\Gamma_{n-1}, & a_n = -\frac{1}{n}tr(M_n), & \Gamma_n = M_n + a_n I \end{cases} \tag{3.34}$$

Avec I la matrice d'indentité (unitaire) de dimension $[n]$ et $tr(.) = \sum diag(.)$ la trace de la matrice.

Par identification des cœfficients du polynôme caractéristique du point **A)** et **B)**, nous obtenons :

$$\begin{cases} -tr(M_1) = \tau\alpha_{n-1} \\ -\frac{1}{2}tr(M_2) = \tau^2\alpha_{n-2} \\ \quad\vdots \\ -\frac{1}{n}tr(M_n) = \tau^n\alpha_0 \end{cases} \tag{3.35}$$

Sachant que $\tau \in \left[\frac{100-\sigma}{100}, \frac{100+\sigma}{100}\right]$ ou $\tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max}$ avec $\tau_{min} = \frac{100-\sigma}{100}$ et $\tau_{max} = \frac{100+\sigma}{100}$
Nous obtenons finalement l'ensemble de contraintes suivantes :

$$\begin{cases} -tr(M_1) - \tau_{max}\alpha_{n-1} \leq 0 \\ \tau_{min}\alpha_{n-1} + tr(M_1) \leq 0 \\ -\frac{1}{2}tr(M_2) - \tau_{max}^2\alpha_{n-2} \leq 0 \\ \tau_{min}^2\alpha_{n-2} + \frac{1}{2}tr(M_2) \leq 0 \\ \quad\vdots \\ -\frac{1}{n}tr(M_n) - \tau_{max}^n\alpha_0 \leq 0 \\ \tau_{min}^n\alpha_0 + \frac{1}{n}tr(M_n) \leq 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Avec M_i les matrices définies par (3.34) et α_i les cœfficients du polynôme caractéristique de la matrice M^{nom}.

3.1.4.2 Détermination de l'ensemble $\mathcal{N}$

Rappelons la représentation du système en boucle fermée et son modèle souhaité :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A - BK^{nom})x(t) + BG^{nom}r(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.37}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = M^{nom}x(t) + N^{nom}r(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.38}$$

Pour déterminer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices N permettant d'assurer des performances acceptables en poursuite, nous proposons la méthode suivante.

Suivant le modèle nominal, le gain statique du système est donné par

$$\Omega = C(-M^{nom})^{-1}N^{nom} \tag{3.39}$$

Les valeurs des sorties y au régime statique sont égales à Ω multiplié par les références r.

$$y = \Omega r \tag{3.40}$$

Généralement le gain statique est unitaire afin d'assurer la poursuite des références, donc Ω est la matrice unitaire.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Dans ce cas les sorties sont égales aux références :

$$y = r \tag{3.42}$$

Nous définissons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices N permettant d'avoir les sorties $y \in [1 - \sigma\%,\, 1 + \sigma\%]\, r$. Pour illustration, prenons l'exemple d'un système mono sortie, la référence et la sortie sont représentées par la figure (3.2). Nous considérons que tout modèle ayant une matrice notée N^{adm} permettant d'avoir la sortie y dans la zone hachée est un modèle admissible.

Ceci signifie que :

$$y = r \pm \left(\frac{\sigma}{100}\right) r \tag{3.43}$$

Nous pouvons écrire l'équation précédente sous cette forme :

$$y = \Omega\Sigma r \tag{3.44}$$

où

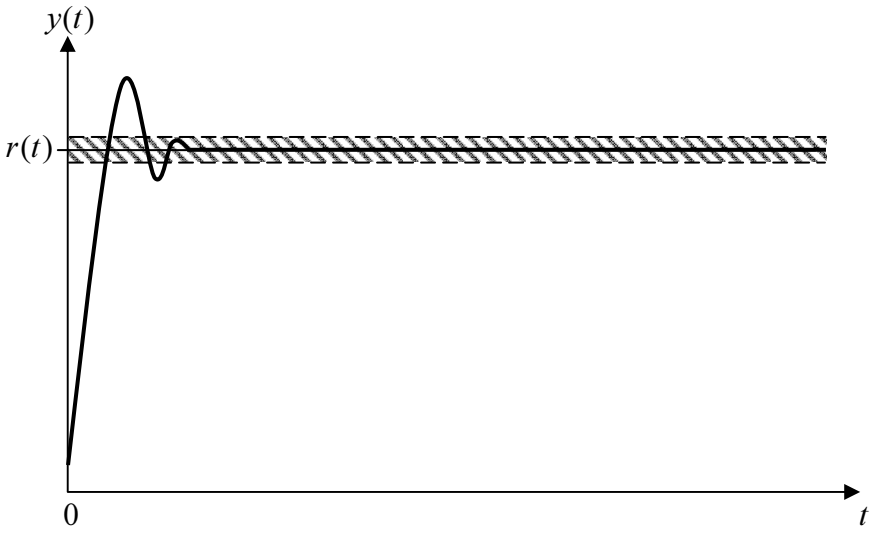


FIG. 3.2 – La sortie et la référence d'un système simple

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \bar{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\sigma_m} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

avec

$$\bar{\sigma_i} \in \left[\frac{100 - \sigma_i}{100}, \frac{100 + \sigma_i}{100} \right] \tag{3.46}$$

Les gains statiques admissibles Ω^{adm} sont donnés par :

$$\Omega^{adm} = \Omega.\Sigma \tag{3.47}$$

L'équation (3.47) peut être réécris comme suit :

$$C(-M^{nom})^{-1}N^{adm} = C(-M^{nom})^{-1}N^{nom}\Sigma \tag{3.48}$$

et simplifié sous la forme suivante :

$$N^{adm} = N^{nom}\Sigma \tag{3.49}$$

Toute matrice $N \in \mathcal{N}$ s'écrit sous la forme N^{adm} de l'équation (3.49).

$$\mathcal{N} = \left\{ N^{adm} \quad \text{tel que } N^{adm} = N^{nom}\Sigma \right\} \tag{3.50}$$

En posant

$$N^{adm} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1m} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & n_{n2} & \dots & n_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N^{nom} = \begin{bmatrix} n^*_{11} & n^*_{12} & \dots & n^*_{1m} \\ n^*_{21} & n^*_{22} & \dots & n^*_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^*_{n1} & n^*_{n2} & \dots & n^*_{nm} \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

Donc,

$$N^{adm} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1m} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & n_{n2} & \dots & n_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^*_{11}\bar{\sigma}_1 & n^*_{12}\bar{\sigma}_2 & \dots & n^*_{1m}\bar{\sigma}_m \\ n^*_{21}\bar{\sigma}_1 & n^*_{22}\bar{\sigma}_2 & \dots & n^*_{2m}\bar{\sigma}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^*_{n1}\bar{\sigma}_1 & n^*_{n2}\bar{\sigma}_2 & \dots & n^*_{nm}\bar{\sigma}_m \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Nous remarquons que chaque colonne i de N^{adm} est la colonne de N^{nom} pondéré par $\bar{\sigma}_i$, donc si un seul élément de la colonne est fixé, il imposer le vecteur de tous les autres éléments de la même colonne.

Prenons dans chaque colonne de N^{nom} un élément quelconque différent de zéro, soit n^*_c le vecteur regroupant ces éléments $n^*_c = [n^*_{k_1 1}, n^*_{k_2 2}, \dots n^*_{k_m m}]$.

Nous définissons les bornes supérieures et inférieures des éléments comme suit :

$$\begin{array}{l} n_{k_j j,min} = min(n^*_{k_j j}\bar{\sigma}_{j,min}, n^*_{k_j j}\bar{\sigma}_{j,max}) \\ n_{k_j j,max} = max(n^*_{k_j j}\bar{\sigma}_{j,min}, n^*_{k_j j}\bar{\sigma}_{j,max}) \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{j,min} = \frac{100-\sigma_i}{100} \\ \bar{\sigma}_{j,max} = \frac{100+\sigma_i}{100} \end{array} \quad \forall\, j = 1 \dots m \tag{3.53}$$

Donc,

$$\begin{cases} \forall\, i = 1 \dots n, j = 1 \dots m \\ n_{k_j j} - n_{k_j j,max} \leq 0 \\ -n_{k_j j} + n_{k_j j,min} \leq 0 \\ n_{ij} - n^*_{ij}\frac{n_{k_j j}}{n^*_{k_j j}} = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

L'ensemble $\mathcal{N}$ peut être donnée sous cette forme :

$$\mathcal{N} = \left\{ N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1m} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & n_{n2} & \dots & n_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{l} n_{k_j j} - n_{k_j j,max} \leq 0 \\ -n_{k_j j} + n_{k_j j,min} \leq 0 \\ n_{ij} - n^*_{ij}\frac{n_{k_j j}}{n^*_{k_j j}} = 0 \end{array} \right\} \tag{3.55}$$

Nous avons présenté les modifications de la méthode PIM ainsi que les méthodes permettant de déterminer les ensembles des modèles admissibles définis par les ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Dans les sections suivantes, nous allons présenter l'intégration de la méthode PIM avec les améliorations précédentes dans la méthode de reconfiguration.

3.2 Méthode d'évaluation des performances des régulateurs

3.2.1 Introduction

Pour rappel soit l'architecture d'une structure $\mathcal{S}^m$ (figure 3.3), elle contient n_m sous systèmes, chacun est modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i^m(t) &= A_i^m x_i^m(t) + B_i^m u_i^m(t) \\ y_i^m(t) &= C_i^m x_i^m(t) \\ u_i^m(t) &= -K_i^m x_i^m(t) + G_i^m r_i^m(t) \end{cases} \tag{3.56}$$

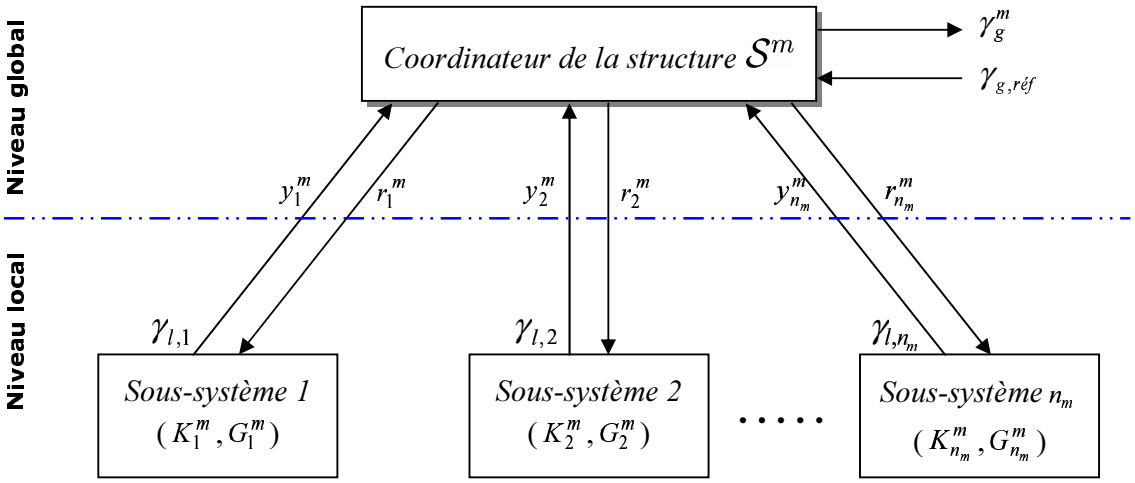


FIG. 3.3 – L'architecture du système sous une structure $\mathcal{S}^m$

Au niveau local d'une structure $\mathcal{S}^m$, considérons les sous-problèmes locaux donnés par $< \mathcal{O}_i^m, \int_i^m, \theta_i^m, \mathcal{U}_i^m >$. Où pour chaque sous-système i utilisé par la stucture $\mathcal{S}^m$, le problème donné par $< \mathcal{O}_i^m, \int_i^m, \theta_i^m, \mathcal{U}_i^m >$ est défini comme suit :

$$\begin{array}{rrcll} \mathcal{O}_i^m : & \dot{x}_i^m(t) &=& M_i^{nom} x_i^m(t) + N_i^{nom} r_i^m(t) & \text{Objectif local à assurer} \\ \int_i^m : & \dot{x}_i^m(t) &=& A_i^m x_i^m(t) + B_i^m u_i^m(t) & \text{Contrainte en terme de structure} \\ \mathcal{U}_i^m : & u_i^m(t) &=& -K_i^m x_i^m(t) + G_i^m r_i^m(t) & \text{Ensemble de lois de commande admissibles} \end{array}$$

En intégrant les modifications de la méthode PIM du paragraphe (3.1.4) permettant d'assurer la stabilité du système, les sous problèmes $< \mathcal{O}_i^m, \int_i^m, \theta_i^m, \mathcal{U}_i^m >$ deviennent :

$$\left| \begin{array}{rrcl} \mathcal{O}_i^m : & \dot{x}_i^m(t) &=& M_i^{nom} x_i^m(t) + N_i^{nom} r_i^m(t) \\ \int_i^m : & \dot{x}_i^m(t) &=& A_i^m x_i^m(t) + B_i^m u_i^m(t) \\ \mathcal{U}_i^m : & u_i^m(t) &=& -K_i^m x_i^m(t) + G_i^m r_i^m(t) \end{array} \right. \quad \text{avec les contraintes} \quad \begin{array}{rcl} A_i^m - B_i^m K_i^m &\in& \mathcal{M}_i \\ B_i^m G_i^m &\in& \mathcal{N}_i \end{array}$$

Où les ensembles $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{N}_i$ représentent l'ensemble des modèles ayant des performances dynamiques acceptables pour chaque sous système i. Ils sont donnés sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_i &=& \{M \quad | \quad \mathfrak{g}_{1,i}(M) \leq 0\} \\ \mathcal{N}_i &=& \{N \quad | \quad \mathfrak{g}_{2,i}(N) \leq 0\} \end{array}$$

Rappelons que $\mathfrak{g}_{1,i}(M)$ (respectivement $\mathfrak{g}_{2,i}(N)$) est une fonction ou un ensemble des fonctions linéaires ou non linéaires continues dépendent des élements de la matrice M (respectivement N). Elles permettent d'écrire les ensembles $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{N}_i$ sous forme d'un ensemble de contraintes.

Après avoir défini les sous problèmes locaux, leurs solutions permettent de synthétiser les régulateurs (K_i^m, G_i^m) de chaque sous système, les solutions sont données par :

$$\left| \begin{array}{ll} K_{i,opt}^m = \underset{K_i^m}{arg} & min \|A_i^m - B_i^m K_i^m - M_i^{nom}\|_F^2 \\ \text{avec} & \mathfrak{g}_{1,i}(A_i^m - B_i^m K_i^m) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$et \tag{3.57}$$

$$\left| \begin{array}{ll} G_{i,opt}^m = \underset{G_i^m}{arg} & min \|B_i^m G_i^m - N^{nom}\|_F^2 \\ \text{avec} & \mathfrak{g}_{2,i}(B_i^m G_i^m) \leq 0 \end{array} \right.$$

Les sous systèmes en boucle fermée utilisant les régulateurs ($K_{i,opt}^m$, $G_{i,opt}^m$) sont donnés par la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_i^m(t) & = & (A_i^m - B_i^m K_{i,opt}^m) x_i^m(t) + B_i^m G_{i,opt}^m r_i^m(t) \\ y_i^m(t) & = & C_i^m x_i^m(t) \end{array} \right. \tag{3.58}$$

Admettons que chaque sous système i possède τ_j^m valeurs propres avec $j = 1 \ldots k_i$. Elle sont calculées à partir de la représentation (3.58).

Soit au sein de chaque structure, pour chaque sous système des performances des régulateurs proches des performances nominales. Afin de déterminer la structure optimale, nous proposons de définir dans le paragraphe suivant un indice de performance dynamiques et de poursuite pour chaque structure $\mathcal{S}^m$.

3.2.2 Indices de performances

3.2.2.1 Performances dynamiques

Sachant que l'objectif principal est de réduire ou limiter la différence entre la dynamique du système nominal et le système reconfiguré. Pour des raisons de simplicité, nous supposons que l'image de la dynamique du système est comprise dans les valeurs propres. Nous cherchons à avoir des valeurs propres du système reconfiguré très proche de celles du système nominal. Soit l'écart normalisée entre les valeurs propres du $i^{\text{ième}}$ sous système donnée par :

$$\varepsilon_i^m(j) = \left| \frac{\tau_j^{nom} - \tau_j^m}{\tau_j^{nom}} \right| \qquad j = 1 \ldots k_i \tag{3.59}$$

où chaque sous système i possède k_i valeurs propres τ_j^{nom} avec $j = 1 \ldots k_i$ dans le cas nominal et τ_j^m dans le cas du système sous la structure m qui sont calculées en ligne en utilisant les relations (3.58) à base des régulateurs synthétisés en ligne à partir des équations (3.57).

L'écart maximale est donnée par

$$\varepsilon_{i,max}^m = \underset{j}{max}(\varepsilon_i^m(j)) \qquad j = 1 \ldots k_i \tag{3.60}$$

À partir des équations (3.59) et (3.60), et sachant que chaque structure $\mathcal{S}^m$ est composée de n_m sous systèmes, nous calculons les écarts maximales $\varepsilon_{i,max}^m$ (3.60) pour tous les sous systèmes i

avec $i = 1 \dots n_m$. Un indice permettant d'évaluer les performances dynamiques d'une structure $\mathcal{S}^m$ avec $m = 1 \dots M$ est défini par rapport au plus grand écart $\varepsilon^m_{i,max}$, il est donné par :

$$J^m_{dyn} = max(\varepsilon^m_{i,max}) \qquad i = 1 \dots n_m \tag{3.61}$$

L'indice J^m_{dyn} peut être écrit sous la forme suivante :

$$J^m_{dyn} = \max_i \left(\max_j \left(\left| \frac{\tau^{nom}_j - \tau^m_j}{\tau^{nom}_j} \right| \right) \right) \qquad i = 1 \dots n_m \qquad j = 1 \dots k_i \tag{3.62}$$

Nous présentons la figure (3.4) afin d'expliquer l'existence des formules précédentes. Les colonnes représentent les structures possibles $\mathcal{S}^m$ avec $m = 1 \dots M$ et les lignes indiquent tous les sous systèmes s_i avec $i = 1 \dots n$. La case contenant X signfie que le sous système correspondant n'est pas utilisé par la structure.

Chaque sous système s_i possède k_i valeurs propres quand il est utilisé par la structure m, notées τ^m_j avec $j = 1 \dots k_i$ et $m = 1 \dots M$. Les écarts entre ces dernieres et les valeurs propres nominales, notées $\varepsilon^m_i(j)$, sont calculées suivant l'équation (3.59). Un écart maximal $\varepsilon^m_{i,max}$ est définis par $\max_j(\varepsilon^m_i(j))$ (l'équation (3.60)).

Au sein de la même colonne, $\max_i[\max_j(\varepsilon^m_i(j))]$ est la valeur maximale des écarts maximales. Elle représente l'indice de performances dynamiques de la structure de la colonne en question. Cet indice est calculé par l'équation (3.61) ou également (3.62). L'objectif est de choisir le plus petit de ces écarts maximaux lors de la sélection de la configuration $\mathcal{S}^{opt}$.

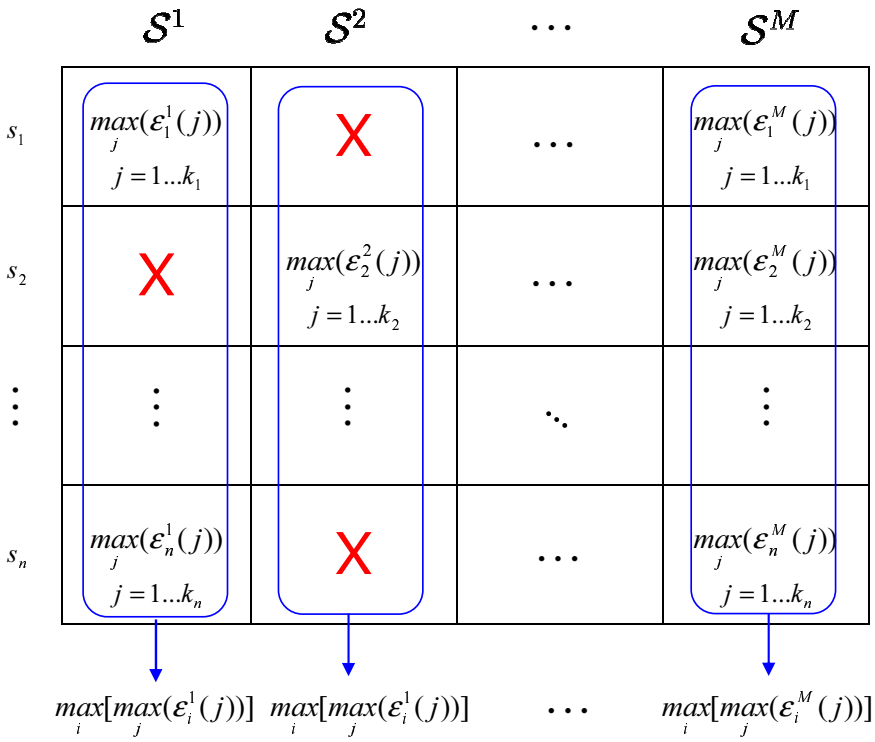


FIG. 3.4 – Indice de performances

3.2.2.2 Performances en poursuite

Dans le même esprit, nous pouvons déterminer un indice de performances statiques locales pour chaque sous système. Cet indice permet de quantifier l'écart entre y_i^m l'objectif local du $i^{\text{ième}}$ sous système utilisé sous la structure $\mathcal{S}^m$ et sa référence r_i^m.

Soit l'écart normalisée :

$$\varepsilon_{stat,\,i}^m = \left| \frac{r_i^m - y_i^m}{r_i^m} \right| \tag{3.63}$$

Rappelons que le régulateur est donné par l'équation (3.57) et le sous système en boucle fermée est décrit par l'équation (3.58). En se basant sur ces équations, en régime statique, la sortie y_i^m en fonction de la référence r_i^m est donnée par :

$$y_i^m = C_i^m(-(A_i^m - B_i^m K_{i,opt}^m))^{-1} B_i^m G_{i,opt}^m r_i^m \tag{3.64}$$

En rempaçant y_i^m dans l'équation (3.63), on obtient :

$$\varepsilon_{stat,\,i}^m = \left| 1 - C_i^m(-(A_i^m - B_i^m K_{i,opt}^m))^{-1} B_i^m G_{i,opt}^m \right| \tag{3.65}$$

L'écart $\varepsilon_{local,i}^m$ est calculée pour chaque sous système i de la structure $\mathcal{S}^m$, la plus grande écart est utilisée pour évaluer les performances statiques locales de la structure :

$$J_{stat,local}^m = \underset{i}{max}\,(\varepsilon_{stat,\,i}^m) \qquad i = 1 \ldots n_m \tag{3.66}$$

3.2.3 Sélection de la structure optimale

Pour chaque structure $\mathcal{S}^m$, une fois que les régulateurs optimaux ($K_{opt,i}^m$, $G_{opt,i}^m$) et les références locales optimales $r_{i,opt}^m$ de chaque sous système i sont définis, les indices de performances dynamiques J_{dyn}^m et les indices de performances statiques locales $J_{stat,local}^m$ sont définis. Dans la deuxième étape, la structure optimale $\mathcal{S}^{opt}$ est déterminée de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{lcl} \mathcal{S}^{opt} & = & \underset{\mathcal{S}^m}{arg} \quad min\,(\mathcal{J}_{régulateur}^m) \\ \text{avec} & & m = 1 \ldots M \end{array} \right. \tag{3.67}$$

Où $\mathcal{J}_{régulateur}^m$ est la combinaison des indices dynamique et statique. Un facteur de pondération ω est utilisé, il permet de favoriser l'une à l'autre des performances.

$$\mathcal{J}_{régulateur}^m = \omega J_{stat,local}^m + (1-\omega) J_{dyn}^m \qquad \text{avec} \quad \omega \in [0,\,1] \tag{3.68}$$

Avec ω et $(1-\omega)$ sont les poids des indices de performances statiques locales et de performances dynamiques respectivement.

Dès que la solution optimale est fixée, la nouvelle structure $\mathcal{S}^{opt}$, les nouvelles références locales r_i^m et les nouvelles lois de commande $u_i^m(t) = K_{i,opt}^m x^m(t) + G_{i,opt}^m r_{i,opt}^m(t)$ appropriées à la structure choisie sont mises en oeuvre afin d'assurer les objectifs globaux.

3.3 Exemple académique

Afin d'illustrer la méthode développée dans ce chapitre, nous utilisons l'exemple académique défini dans le chapitre précédent.

3.3.1 Description du système

Rappelons que le système est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Avec,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} -1 & 0.3 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & -0.9 & -0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0.05 & 0.05 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.44 & 0.52 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.34 & -0.66 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0.2226 & -1.3197 & -0.3975 & -3.79 & 2.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0.028 & 0.166 & 0.05 & 0.78 & -0.30 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{cc} 0.9 & 0 \\ 1.12 & 0 \\ -0.8 & 0 \\ \hline 0 & -0.48 \\ 0 & -0.32 \\ 0 & 0.12 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} -0.0693 & 0.4158 & -0.0693 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.14 & 0.83 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.59 \end{array}\right)$$

Et $$\gamma_g(t) = y_1(t) + y_3(t)$$

Le système est schématisé par la figure (3.5).
Le sous système 1 est décrit par la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases}$$

Avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0.3 & 1.5 \\ -0.7 & -0.9 & -0.9 \\ -0.9 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.12 \\ -0.8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_1 = \begin{pmatrix} -0.0693 & 0.4158 & -0.0693 \end{pmatrix}$$

Le sous système 2 et 3 est décrit par la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t) \\ y_3(t) = C_2 x_2(t) \end{cases}$$

Et la sortie du sous système 2 est mesurable, elle est donnée par :

$$y_2(t) = [\,0.14 \quad 0.83 \quad 0.25 \quad 0 \quad 0\,]\, x_2(t)$$

Avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.05 & 0.05 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0.44 & 0.52 & 0.10 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.34 & -0.66 & 0 & 0 \\ -0.2226 & -1.3197 & -0.3975 & -3.79 & 2.05 \\ 0.028 & 0.166 & 0.05 & 0.78 & -0.30 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -0.48 \\ -0.32 \\ 0.12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.75 & 0.59 \end{pmatrix}$$

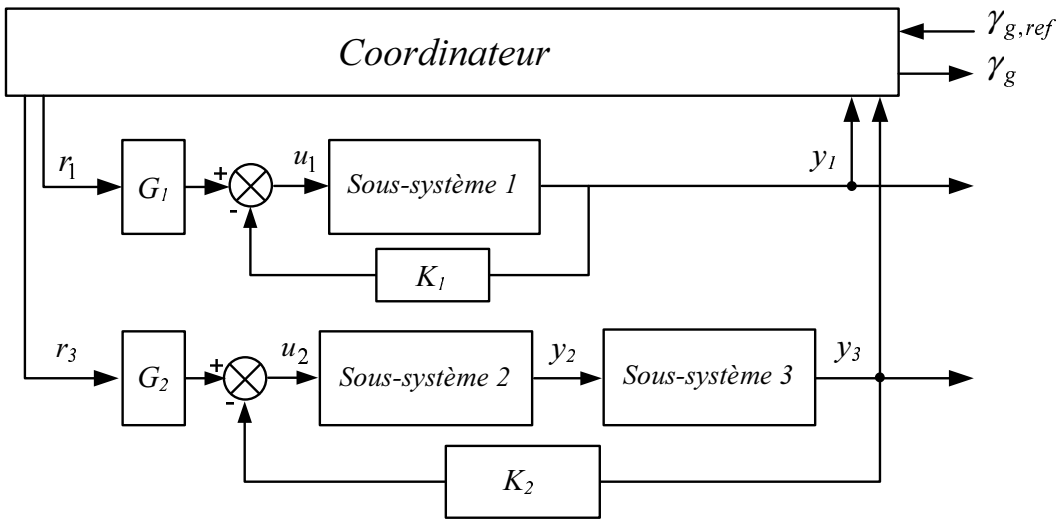


FIG. 3.5 – Décomposition physique du système

L'objectif global est la somme des sorties des sous systèmes 1 et 3. Au niveau local, le sous système 1 possède une loi de commande $u_1 = -K_1 x_1(t) + G_1 r_1(t)$ et l'ensemble de sous systèmes 2 et 3 possède une loi de commande $u_2 = -K_2 x_2(t) + G_2 r_3(t)$ permettant aux sous systèmes en boucle fermée de suivre des modèles nominaux définies par l'opérateur.

Les modèles nominaux du sous système 1 et de l'ensemble des sous système 2 et sous système 3 en boucle fermée sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = M_1 x_1(t) + N_1 r_1(t) \\ y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases} \tag{3.69}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = M_2 x(t) + N_2 r_2(t) \\ y_2(t) = C_2 x_2(t) \end{cases} \tag{3.70}$$

avec

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1.9040 & 0.3604 & 1.9175 \\ -1.8250 & -0.8249 & -0.3804 \\ -0.0964 & 0.1463 & 0.0289 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_1 = \begin{pmatrix} -0.3707 \\ -0.4614 \\ 0.3295 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -0.0654 & 2.1900 & 1.0250 & 9.5125 & -3.9278 \\ 0.4297 & 1.9467 & 0.7166 & 6.3417 & -2.6185 \\ -0.2461 & -0.8750 & -0.8912 & -2.3781 & 0.9819 \\ -0.2226 & -1.3197 & -0.3975 & -3.7900 & 2.0500 \\ 0.0280 & 0.1660 & 0.0500 & 0.7800 & -0.3000 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} -0.7404 \\ -0.4936 \\ 0.1851 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

À partir des matrices M_1, M_2 nous définissons $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ les ensembles des matrices ayant des valeurs propres $z_{i,1} = Vp_{i,1} \pm 10\,\%$ et $z_{i,2} = Vp_{i,2} \pm 10\,\%$, avec $Vp_1 = (\ -1.1,\ \ -0.9,\ \ -0.7\ )$ les valeurs propres de M_1 et $Vp_2 = (\ -0.5,\ \ -0.8,\ \ -0.6,\ \ -0.2,\ \ -1\ )$ les valeurs propres de M_2. Les ensembles $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont définies de sorte que les références $r_i = r_i \pm 10\,\%$ avec $i = 1, 2$.
Les ensembles sont déterminés en utilisant les méthodes proposées dans les paragraphes (3.1.4.1) et (3.1.4.2).

3.3.2 Objectifs du système

Les objectifs du système sont donnés par les deux points suivants :
✓ Au niveau global : Définir les références r_1 et r_3 permettant de maintenir l'objectif global $\gamma_g(t)$ égale à $\gamma_{g,ref}$ au régime statique.

✓ Au niveau local : Définir les lois de commande locales K_1, G_1, K_2 et G_2 permettant d'assurer que le sous-système N° 1 en boucle fermée suive le modèle (3.69) et le sous-système N° 2 (l'ensemble de sous système 2 et 3) en boucle fermée suive le modèle (3.70).

3.3.3 Résultats et commentaires

Plusieurs scénarios sont considérés pour illustrer la méthode développée :
• Le système nominal.
• Le système défaillant :
◦ Défaut de perte d'efficacité de $\beta = 30\%$ de la commande u_2 à l'instant $t_f = 80s$.
• Reconfiguration du système défaillant à l'instant $t_r = 82s$ (en supposant un retard à la détection de 2 s).

3.3.3.1 Système nominal

Au niveau global, afin d'assurer l'objectif global $\gamma_{g,ref}^{nom} = 12$ nous supposons que les références locales (r_1, r_3) prennent plusieurs valeurs $(5, 7)$ durant l'intervalle $[\ 0s\ \ ,\ \ 40s\ ]$ et $(3, 9)$ dans $[\ 40s\ \ ,\ \ 140s\ ]$ comme présenté dans la figure (3.6), nous remarquons que les sorties y_1, y_3 des sous systèmes N° 1 et N° 2 suivent correctement les variations des références.

Ces variations de consignes permettent d'illustrer l'efficacité des lois de commande synthétisées au niveau local et de montrer que l'objectif global peut être assuré sous différentes valeurs de

références locales.

Au niveau local, nous avons utilisé la méthode PIM pour concevoir les lois de commande nominales, les régulateurs nominaux vérifient les égalités :

$$\begin{cases} A_1 - B_1 K_1^{nom} &= M_1 \\ B_1 G_1^{nom} &= N_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 - B_2 K_2^{nom} &= M_2 \\ B_2 G_2^{nom} &= N_2 \end{cases}$$

Les valeurs des régulateurs nominaux sont données par :
$K_1^{nom} = [\ 1.0045 \quad -0.0671 \quad -0.4639\ ]$ et $G_1^{nom} = [\ 0.4119\ ]$.

$K_2^{nom} = [\ -0.0321 \quad 4.4583 \quad 1.9270 \quad 19.8177 \quad -8.1829\ ]$ et $G_2^{nom} = [\ 1.5426\ ]$.

Les valeurs propres du systèmes en boucle fermée égales aux valeurs propres des modèles (3.69) et (3.70). Elles ont les valeurs suivantes $Vp_2 = (\ -0.5, \quad -0.8, \quad -0.6, \quad -0.2, \quad -1\ )$ et $Vp_1 = (\ -1.1, \quad -0.9, \quad -0.7\ )$.

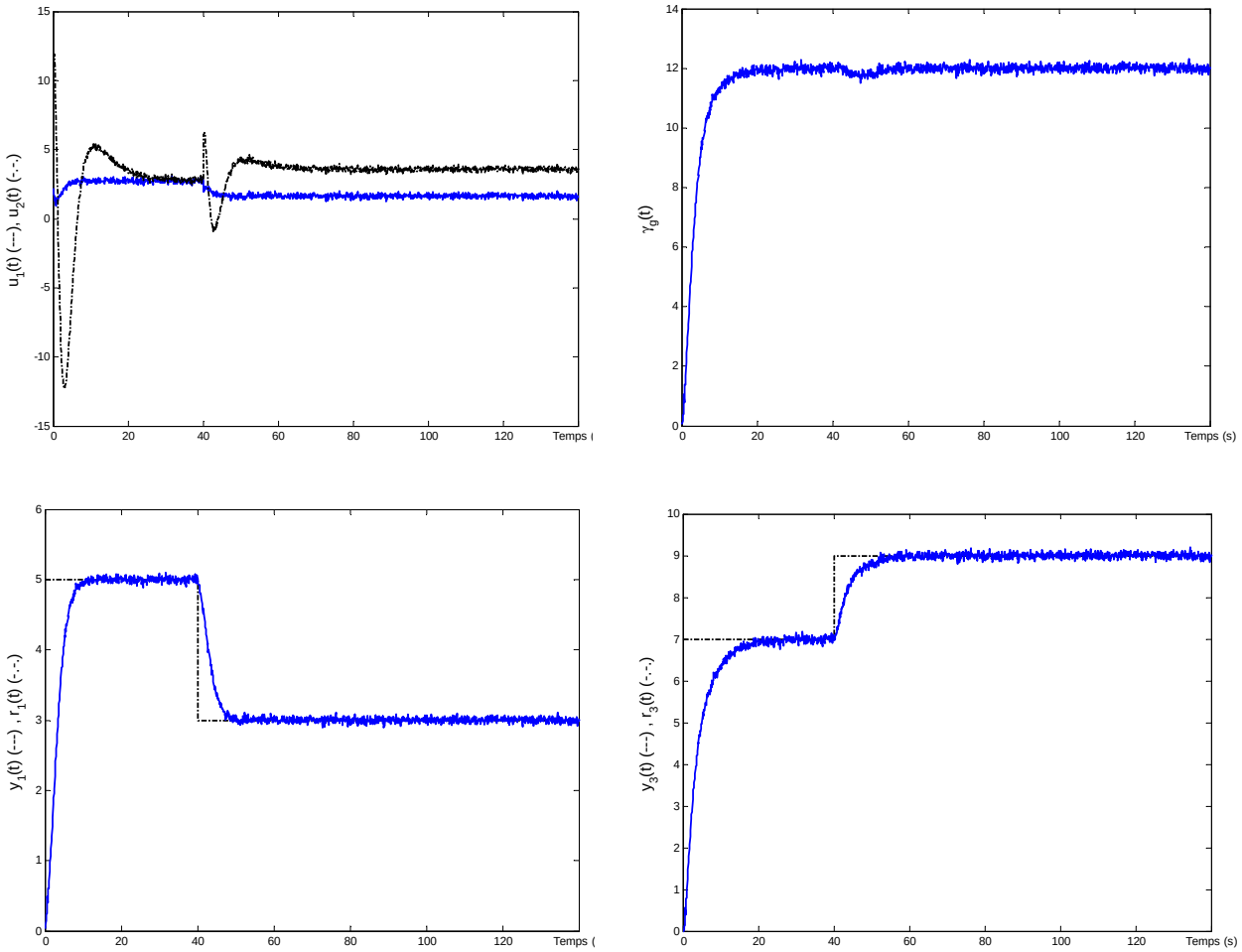


FIG. 3.6 – Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système nominal

3.3.3.2 Scénarios de défauts

• **Scénario 1 : Défaut correspond à** $\beta = 30\%$

1.a) Système défaillant

Le défaut considéré est un défaut actionneur apparu sur le sous système N° 2 qui conduit à des changements au niveau de la matrice B_2, elle prend la nouvelle valeur $B_2^f = (1-\beta).B_2$, soit :

$$B_2^f = \begin{pmatrix} -0.3360 & -0.2240 & 0.0840 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Nous constatons que $A_2 - B_2^f K_2^{nom} \neq M_2$ et $B_2^f G_2^{nom} \neq N_2$ et par conséquent le sous système N° 2 en boucle fermée ne suit plus le modèle définit par (3.70). Donc les performances dynamiques du sous système N° 2 ne sont plus assurées et les nouvelles valeurs propres sont données par $(-2.5967, \quad -0.0564 + 0.4136i, \quad -0.0564 - 0.4136i, \quad -0.1354, \quad -0.6091)$.

La sortie y_3 ne suit pas la consigne, sa valeur finale est égale à 8.119 ce qui conduit à une perte au niveau de l'objectif global $\gamma_g = 11.12 \neq \gamma_g^{nom} = 12$, comme illustré par la figure (3.7).

En revanche, le sous système N° 1 n'est pas défaillant et il continue sa fonction correctement assurant ses performances dynamiques et statiques nominales.

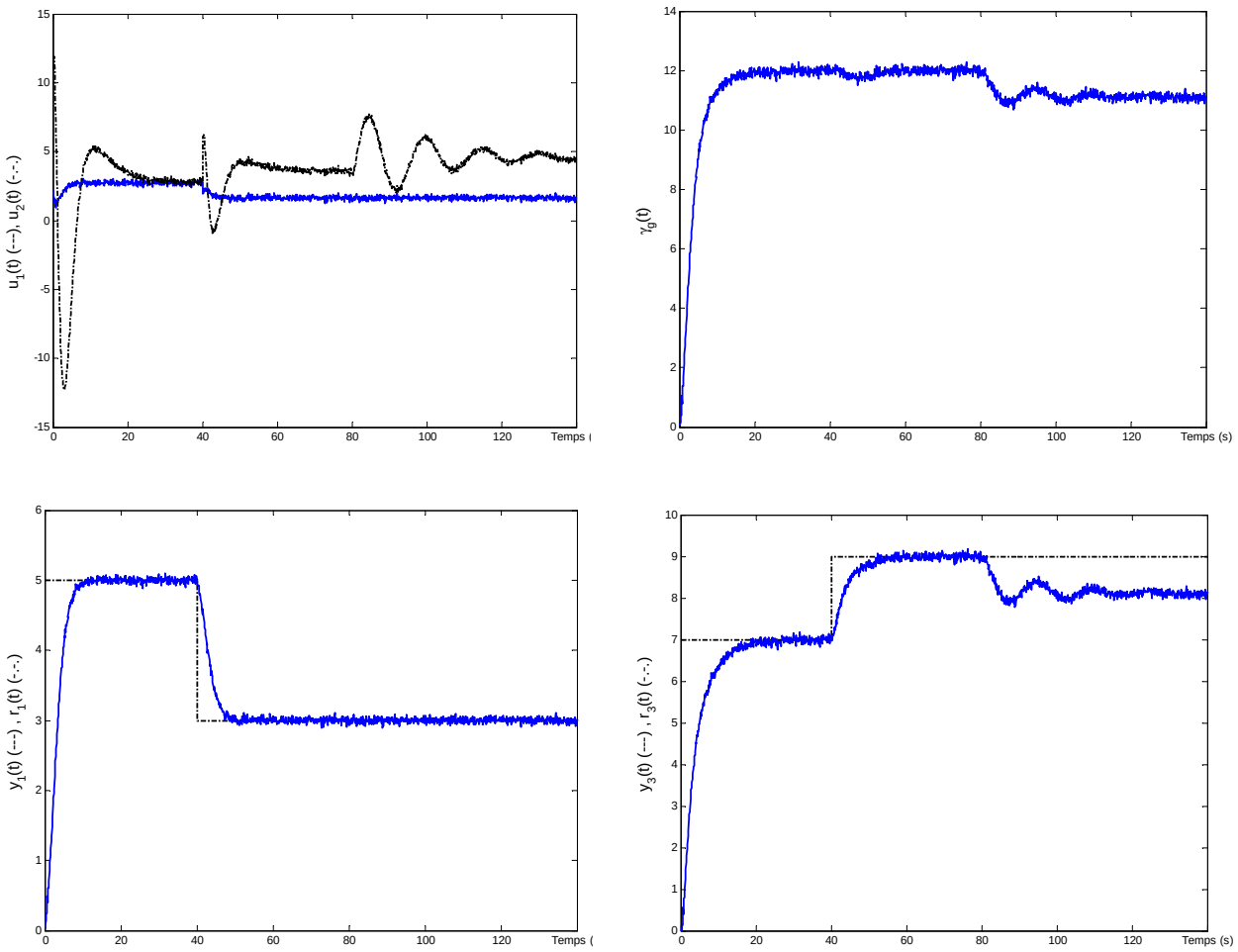


FIG. 3.7 – Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système défaillant ($\beta = 30\%$)

1.b) Système reconfiguré
Nous appliquons la méthode de reconfiguration développée dans le cas du système défaillant précédent dans le but de déterminer une nouvelle structure du système permettant d'assurer les performances en terme de modèles (3.69) et (3.70). C'est l'ensemble des performances dynamiques définies suivant les valeurs propres de la matrice M et des performances en poursuite de référence calculées suivant la matrice N.

Au niveau local, nous utilisons la méthode PIM avec nos modifications, c'est à dire, nous cherchons à calculer les nouveaux gains (K_2, G_2) de telle façon que $A_2 - B_2^f K_2 \in \mathcal{M}_2$ et $B_2^f G_2 \in \mathcal{N}_2$.

La loi de commande du sous système N° 1 est conservée. Par conséquent l'écart entre les valeurs propres nominales et les nouvelles valeurs propres du sous système N° 1 est nulle $\varepsilon_1^m = 0$ (équation (3.59)) pour toute les structures utilisant ce sous système. L'écart entre sa référence et sa sortie est également nulle, $\varepsilon_{stat,1}^m = 0$ (équation (3.63)).

La loi de commande du sous système N° 2 définie par (K_2, G_2) est calculée à partir des relations (3.21), et prennent les nouvelles valeurs :
$K_2 = [\ -0.0460 \quad 6.3695 \quad 2.7531 \quad 28.3112 \quad -11.6897\ ]$ et $G_2 = [\ 2.2050\ ]$.

Par conséquent les nouvelles valeurs propres du sous système N° 2 sont données par $Vp_2 = (\ -0.4946,\ -0.8019,\ -0.6041,\ -0.2007,\ -0.9987\ )$. Nous constatons que ces nouvelles valeurs propres sont à $\pm 10\%$ les valeurs nominales.

Les écarts normalisées entre ces valeurs propres et celles du système nominal, définies par (3.59) sont $\varepsilon_2^m = (\ 0.0013 \quad 0.0024 \quad 0.0068 \quad 0.0107 \quad 0.0036\ )$. L'écart maximale (3.60) est égale à $\varepsilon_{2,max}^m = 0.0107$.

Les valeurs des gains K_2 et G_2 permettent d'avoir un indice de performances statiques locales (équation (3.63)) du sous système 2 nul.

Comme indiqué au tableau (3.1) les indices de performances dynamiques J_{dyn} sont calculés à partir des valeurs $\varepsilon_{1,max}^m$ et $\varepsilon_{2,max}^m$ en utilisant l'équation (3.61), pour les trois structures définies dans l'exemple du chapitre précédent.

À partir des valeurs J_{dyn} et $J_{stat,local}$ l'indice des performances $\mathcal{J}_{regulateur}$ de chaque structure est calculé suivant la relation (3.68). Nous choisissons $\omega = 0.5$ pour fusionner les deux critères.

La structure $\mathcal{S}^1$ est alors sélectionnée selon les indices $\mathcal{J}_{regulateur}$ d'après l'équation (3.67).

Comme illustré à la figure (3.8), les nouvelles références sont validées sont égales à $r_1 = 12$ et $r_3 = 0$, également les nouvelles lois de commande. Nous remarquons également que la validation de la structure et les valeurs de références à l'instant $t_r = 82s$ provoque des variations sur l'objectif global γ_g qui prend la valeur de 12 par la suite.

	$\mathcal{S}^1$	$\mathcal{S}^2$	$\mathcal{S}^3$
J_{dyn}	0	0.0107	0.0107
$J_{stat,local}$	0	$7.1054 * 10^{-15}$	$7.1054 * 10^{-15}$
$\mathcal{J}_{regulateur}$	0	0.0054	0.0054

TAB. 3.1 – Indice de performances du système selon les trois structures $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$

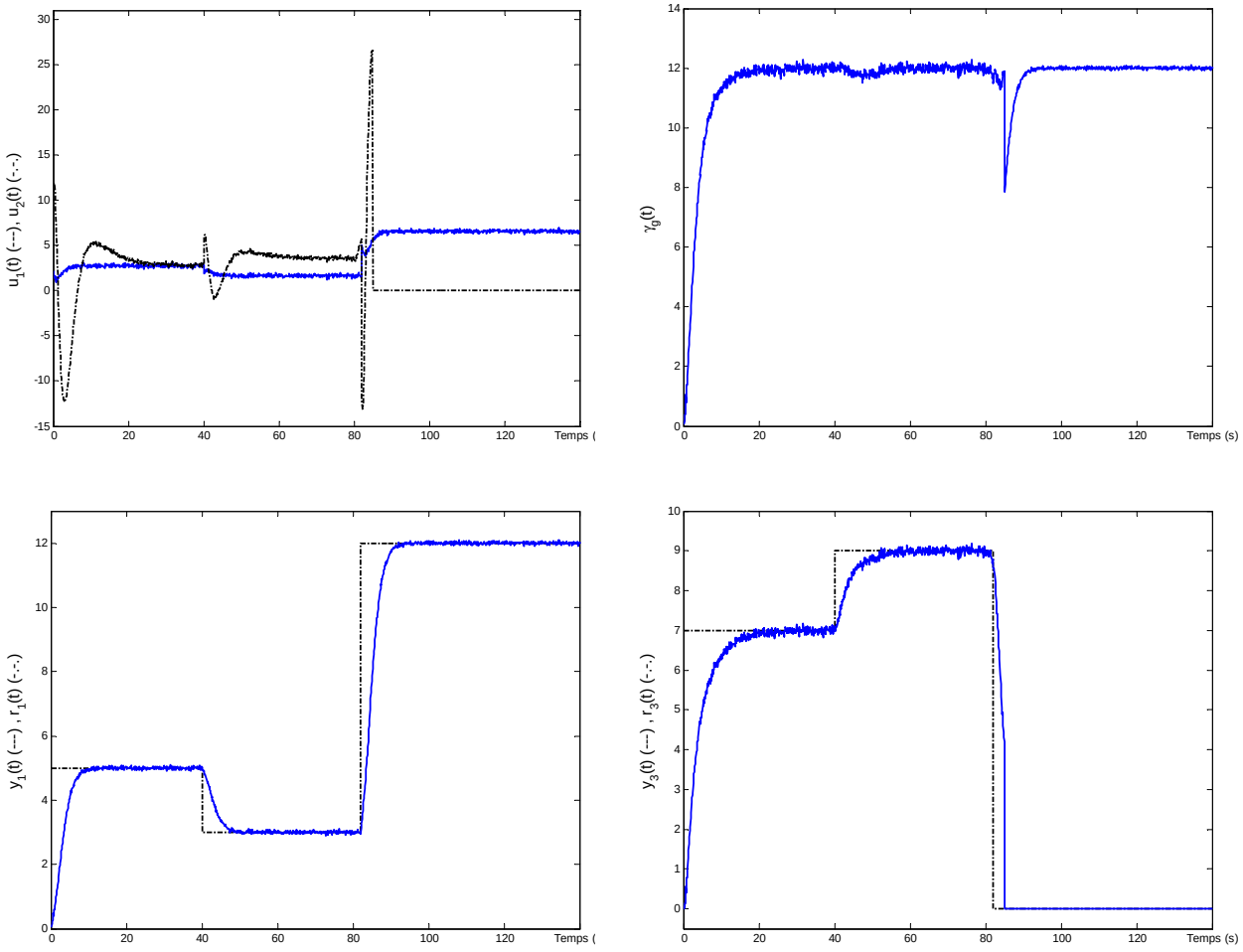


FIG. 3.8 – Évolution dynamique des variables de commande et de sortie du système reconfiguré ($\beta = 30\%$)

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents travaux concernant la méthode Pseudo Inverse (PIM) très répandue dans le domaine des systèmes tolérants aux défauts, également ses inconvénients en particulier lié au problème la stabilité. En se fondant sur ses travaux, nous avons proposé une solution permettant d'assurer non seulement la stabilité du système mais également des performances dynamiques définies. L'ensemble de performances admissibles du système est représenté sous forme d'un ensemble de contraintes d'égalité et d'inégalité, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Des ensembles des performances dégradées $\mathcal{M}_d$ et $\mathcal{N}_d$ peuvent être également définis permettant ainsi à la méthode de reconfiguration de sélectionner une structure ayant des performances avec un certain seuil de tolérance sur la dégradation des performances.

Notre contribution à la synthèse de la méthode PIM modifiée a permis d'apporter des solutions aux inconvénients des méthodes proposées par [Gao et Antsaklis, 1991] et [Staroswiecki, 2005]. Les lois de commande sont synthétisées en minimisant un critère donné sous contraintes tel que le système en boucle fermée appartienne à l'ensemble des modèles ayant des performances admissibles.

Dans une démarche similaire au chapitre 2, des indices de performances constituent des paramètres d'un critère permettant de déterminer la structure optimale en présence de défauts actionneurs.

Enfin, la méthode de reconfiguration développée est illustrée à l'aide d'un exemple académique. Des résultats et commentaires sont également données. Les résultats sont cohérents avec les caractéristiques structurelles du système choisi pour cette application.

Nous proposons dans le chapitre suivante de faire la fusion de ces méthodes pour intégrer à la fois des critères de fiabilité et de dynamique dans la structure optimale de reconfiguration.

Chapitre 4

Intégration des méthodes et application

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté deux méthodes de reconfiguration. Dans ce chapitre, nous allons intégrer les deux méthodes en une seule stratégie dans le but de pouvoir choisir la meilleure structure en se basant sur la fiabilité, le coût des composants et des arrêts au cours de production, les performances statiques globales et les performances des régulateurs du niveau local.

L'ensemble des méthodes développées dans les chapitres précédents sont appliquées à un processus hydraulique et thermique constitué de trois cuves. Le processus pilote est défini dans le cadre du projet européen IFATIS [Leger et al., 2003]. Nous illustrons l'ensemble de nos résultats à l'aide d'un simulateur du système.

4.1 Intégration des méthodes

Rappelons les méthodes de reconfiguration développées dans les chapitres précédents :

A) La première présentée dans le chapitre 2 concerne le niveau global du système, le problème considéré est noté $< \gamma_{g,ref}, \mathcal{S}, \theta, H(r_i) >$. La méthode de reconfiguration s'effectue en deux étapes :

- La première étape (2.30) permet de déterminer pour chaque structure $\mathcal{S}^m$ l'ensemble des objectifs locaux optimaux donnés en terme de valeurs des références des sous systèmes r_i sous contraintes de la fiabilité (2.37) et du coût (2.41).

- La seconde étape (2.31) permet de sélectionner la structure optimale en se basant sur les indices de performances statiques des structures $J_{statique}$ (2.32). Ces indices permettent d'évaluer les objectifs statiques globaux γ_g. Une fois que la structure est choisie, elle est implantée avec les nouvelles références de chaque sous système.

B) La seconde méthode traite le niveau local du système $< \mathcal{O}_i, \int_i, \theta_i, \mathcal{U}_i >$, plus précisement, la synthèse des lois de commande de ses sous systèmes (3.57).
Le régulateur est synthétisé afin d'assurer des performances dynamiques données en terme de valeurs propres (paragraphe 3.1.4.1) et des performances en poursuite des références locales

des sous systèmes (paragraphe 3.1.4.2). Un indice de performances des régulateurs $\mathcal{J}_{régulateur}$ (3.68) est calculé à partir des indices de performances dynamiques J_{dyn} (3.62) et des indices de performances de poursuite $J_{stat,local}$ (3.66). Chaque structure contient un ensemble de sous systèmes chacun possède son propre régulateur, ceci signifie que pour chaque structure, un indice de performances $\mathcal{J}_{régulateur}$ (3.68) peut être calculé. Le choix de la meilleure structure parmi l'ensemble des structures s'effectue sur la base de cet indice (3.67).

L'intégration des deux méthodes ne concerne que la seconde étape de chaque méthode, c'est à dire la phase du calcul des indices de performances et la sélection de la structure optimale.

Nous conservons les deux premières étapes du calcul de chacune des méthodes permettant de :

- Déterminer les références locales optimales $r^m_{i,opt}$ des sous systèmes de chaque structure $\mathcal{S}^m$ (2.30) permettant d'assurer des meilleures objectifs statiques globaux (2.28) sous contrainte de la fiabilité R^* (2.37) et du coût C^* (2.41).

- Calculer l'indice des performances statiques globales $J^m_{statique}$ (2.32) permettant d'évaluer les performances globales γ^m de chaque structure $\mathcal{S}^m$.

- Calculer les gains des régulateurs optimaux ($K^m_{opt,i}$, $G^m_{opt,i}$) (3.57).

- Calculer les indices des performances des régulateurs $\mathcal{J}^m_{régulateur}$ (3.68) dépendant des indices des performances dynamiques et de poursuite J^m_{dyn} (3.62) et $J^m_{stat,local}$ (3.66).

Nous définissons un indice de performances regroupant les deux indices de performances statiques globales $\mathcal{J}^m_{statique}$ et des régulateurs locales $\mathcal{J}^m_{régulateur}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{J}^m = \rho \mathcal{J}^m_{statique} + (1-\rho)\mathcal{J}^m_{régulateur} \tag{4.1}$$

Les indices $\mathcal{J}^m_{statique}$ et $\mathcal{J}^m_{régulateur}$ sont pondérés par les poids ρ et $(1-\rho)$ respectivement, ceci dans le but de favoriser l'une à l'autre des performances.

Finalement, le choix de la meilleure structure $\mathcal{S}^{opt}$ est déterminée de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{lll} \mathcal{S}^{opt} & = & \underset{\mathcal{S}^m}{arg} \quad min\,(\mathcal{J}^m) \\ \text{avec} & & m = 1 \ldots M \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Après avoir intégrer les deux méthodes en une seule, nous allons illustrer et valider les résultats trouvés sur le processus hydraulique et thermique suivant.

4.2 Description et modélisation du système

4.2.1 Description du système

Le système est représenté par la figure (4.1). L'objectif global est de conserver un volume de fluide constant à une température désirée au sein d'une cuve. Le système considéré est composé de trois cuves cylindriques de section identique S. Deux cuves sont utilisées pour chauffer les

liquides issus de deux pompes. Les températures des liquides sont ajustées par des résistances électriques. Les sections des tuyaux sont identiques $S_1 = S_2$ dont les cœfficients de viscosité sont $\mu_1 = \mu_2$. La cuve 3 sert à mélanger les liquides. Le système est composé de quatre actionneurs et six capteurs. Les signaux de commande sont p_1, p_2 les puissances délivrées par les deux résistances et q_1, q_2 les débits fournis par les deux pompes. Les mesures sont les températures (t_1, t_2, t_3) et les niveaux de liquide (h_1, h_2, h_3) dans chaque cuve.

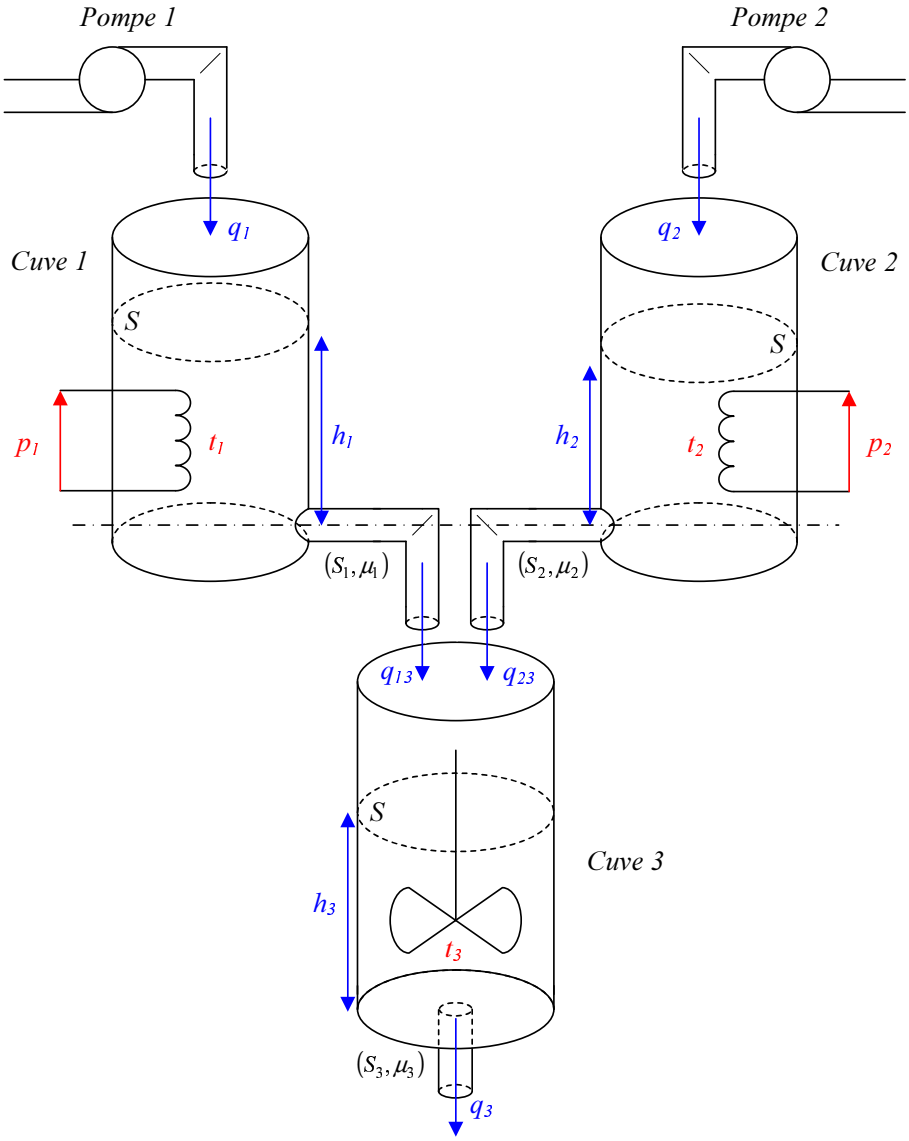


FIG. 4.1 – Schématisation du système

4.2.2 Modélisation du système

Pour obtenir le modèle mathématique du système, on effectue le bilan volumique et le bilan calorimétique.

✓ En écrivant les équations de la conservation du volume du liquide, nous obtenons

$$\begin{cases} S\frac{dh_1}{dt} &= q_1(t) - q_{13}(t) \\ S\frac{dh_2}{dt} &= q_2(t) - q_{23}(t) \\ S\frac{dh_3}{dt} &= q_{13}(t) + q_{23}(t) - q_3(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_{13}(t) &= \mu_1\, S_1\, \sqrt{2gh_1(t)} \\ q_{23}(t) &= \mu_2\, S_2\, \sqrt{2gh_2(t)} \\ q_3(t) &= \mu_3\, S_3\, \sqrt{2gh_3(t)} \end{cases} \tag{4.3}$$

Nous définissons les cœfficients α_i tels que $\alpha_i = \mu_i S_i \sqrt{2g}$ avec $i = 1 \ldots 3$.

Nous obtenons trois équations différentielles non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{h_1}(t) &= \frac{1}{S}\left(q_1(t) - \alpha_1\sqrt{h_1(t)}\right) \\ \dot{h_2}(t) &= \frac{1}{S}\left(q_2(t) - \alpha_2\sqrt{h_2(t)}\right) \\ \dot{h_3}(t) &= \frac{1}{S}\left(\alpha_1\sqrt{h_1(t)} + \alpha_2\sqrt{h_2(t)} - \alpha_3\sqrt{h_3(t)}\right) \end{cases} \tag{4.4}$$

✓ Sachant que l'énergie calorifique apportée par chaque résistance chauffante est utilisée d'une part pour élever la température du fluide qui entre de la valeur $t_{entrée}$ à la valeur t_{sortie} et d'autre part pour modifier la température contenue dans la cuve 1 et 2.

- Les énergies électriques apportées au système :

$$\begin{cases} \frac{dw_{elec_1}}{dt} &= p_1 \\ \frac{dw_{elec_2}}{dt} &= p_2 \\ \frac{dw_{elec_3}}{dt} &= 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

- Les énergies consommées pour élever la température du fluide qui entre de la valeur $t_{entrée}$ à la valeur t_{sortie} :

$$\begin{cases} \frac{dw_{2_1}}{dt} &= \mu\, c\, q_1\, (t_1 - t_{1_i}) \\ \frac{dw_{2_2}}{dt} &= \mu\, c\, q_2\, (t_2 - t_{2_i}) \\ \frac{dw_{2_3}}{dt} &= \mu\, c\, q_{13}\, (t_3 - t_1) + \mu\, c\, q_{23}\, (t_3 - t_2) \end{cases} \tag{4.6}$$

Avec c la chaleur spécifique du fluide et μ sa masse volumique. t_{1_i} et t_{2_i} sont les températures initiales d'entrée des liquides.

- Les énergies consommées pour modifier la température des liquides à l'intérieur des cuves :

$$\begin{cases} dw_{3_1} &= \mu\, c\, S\, h_1\, dt_1 \\ dw_{3_2} &= \mu\, c\, S\, h_2\, dt_2 \\ dw_{3_3} &= \mu\, c\, S\, h_3\, dt_3 \end{cases} \tag{4.7}$$

À partir de la relation $dw_{elec} = dw_2 + dw_3$, on obtient :

$$\begin{cases} p_1\,dt &= \mu\,c\,q_1\,(t_1 - t_{1_i})\,dt + \mu\,c\,S\,h_1\,dt_1 \\ p_2\,dt &= \mu\,c\,q_2\,(t_2 - t_{2_i})\,dt + \mu\,c\,S\,h_2\,dt_2 \\ 0 &= (\mu\,c\,q_{13}\,(t_3 - t_1) + \mu\,c\,q_{23}(t_3 - t_2))\,dt + \mu\,c\,S\,h_3\,dt_3 \end{cases} \tag{4.8}$$

Nous obtenons trois équations différentielles non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{t_1}(t) &= \frac{1}{S\,h_1(t)}\left(\frac{p_1(t)}{\mu\,c} - (t_1 - t_{1_i})\,q_1(t)\right) \\ \dot{t_2}(t) &= \frac{1}{S\,h_2(t)}\left(\frac{p_2(t)}{\mu\,c} - (t_2 - t_{2_i})\,q_2(t)\right) \\ \dot{t_3}(t) &= \frac{-1}{S\,h_3(t)}\left(q_{13}(t)\,[t_3(t) - t_1(t)] + q_{23}(t)\,[t_3(t) - t_2(t)]\right) \end{cases} \tag{4.9}$$

4.2.3 Linéarisation du système

Pour obtenir le multimodèle, il faut d'abord linéariser le système au tour d'un point de fonctionnement $(h_{1_0}, h_{2_0}, h_{3_0}, t_{1_0}, t_{2_0}, t_{3_0}, q_{1_0}, q_{2_0}, p_{1_0}, p_{2_0})$ ensuite nous allons choisir les valeurs de points de fonctionnement et définir les fonctions d'activation.

$$\begin{array}{llll} h_1 = h_{1_0} + \delta h_1 & & t_1 = t_{1_0} + \delta t_1 \\ h_2 = h_{2_0} + \delta h_2 & & t_2 = t_{2_0} + \delta t_2 \\ h_3 = h_{3_0} + \delta h_3 & & t_3 = t_{3_0} + \delta t_3 \\ q_1 = q_{1_0} + \delta q_1 & & p_1 = p_{1_0} + \delta p_1 \\ q_2 = q_{2_0} + \delta q_2 & & p_2 = p_{2_0} + \delta p_2 \end{array}$$

Nous utilisons le développement de Taylor du premier ordre des équations (4.4) et (4.9). Rappelons que la linéarisation d'un système $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ au tour d'un point de fonctionnement $(x_0,\, u_0)$ est donnée par :

$$\dot{x}(t) \approx f(x_0, u_0) + \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (x(t) - x_0) + \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} (u(t) - u_0) \tag{4.10}$$

- En effectuant la linéarisation des équations (4.4), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{h_1}(t) &= \frac{-\alpha_1}{2\,S\,\sqrt{h_{1_0}}}\,h_1(t) + \frac{1}{S}q_1(t) \\ \dot{h_2}(t) &= \frac{-\alpha_2}{2\,S\,\sqrt{h_{2_0}}}\,h_2(t) + \frac{1}{S}q_2(t) \\ \dot{h_3}(t) &= \frac{\alpha_1}{2\,S\,\sqrt{h_{1_0}}}\,h_1(t) + \frac{\alpha_2}{2\,S\,\sqrt{h_{2_0}}}\,h_2(t) - \frac{\alpha_3}{2\,S\,\sqrt{h_{3_0}}}\,h_3(t) \end{cases} \tag{4.11}$$

Pour un point de fonctionnement donné $(h_{1_0},\, q_{1_0})$, les équations (4.4) au régime statique nous permet de calculer la valeur des cœfficients α_1, α_2 et α_3.

$$\alpha_1 = \frac{q_{1_0}}{\sqrt{h_{1_0}}}, \quad \alpha_2 = \frac{q_{2_0}}{\sqrt{h_{2_0}}}, \quad \alpha_3 = \frac{q_{1_0} + q_{2_0}}{\sqrt{h_{3_0}}} \tag{4.12}$$

- En effectuant la linéarisation des équations (4.9), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{t_1}(t) & = & -\frac{q_{1_0}}{Sh_{1_0}}t_1(t) + \frac{q_{1_0}(t_{1_0}-t_{1_i})}{Sh_{1_0}p_{1_0}}p_1(t) - \frac{(t_{1_0}-t_{1_i})}{Sh_{1_0}}q_1(t) \\ \dot{t_2}(t) & = & -\frac{q_{2_0}}{Sh_{2_0}}t_2(t) + \frac{q_{2_0}(t_{2_0}-t_{2_i})}{Sh_{2_0}p_{2_0}}p_2(t) - \frac{(t_{2_0}-t_{2_i})}{Sh_{2_0}}q_2(t) \\ \dot{t_3}(t) & = & \frac{q_{1_0}}{Sh_{3_0}}t_1(t) + \frac{q_{2_0}}{Sh_{3_0}}t_2(t) - \frac{q_{1_0}+q_{2_0}}{Sh_{3_0}}t_3(t) \\ & & -\frac{q_{1_0}(t_{3_0}-t_{1_0})}{2h_{1_0}h_{3_0}}h_1(t) - \frac{q_{2_0}(t_{3_0}-t_{2_0})}{2h_{2_0}h_{3_0}}h_2(t) \end{array}\right. \tag{4.13}$$

4.2.4 Représentation d'état continue du système

Nous allons représenter le système donné par l'ensemble des équations (4.11) et (4.13) sous la forme d'état suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}(t) & = & AX(t) + BU(t) \\ Y(t) & = & CX(t) + DU(t) \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Mettons $X(t) = [\ h_1 \quad t_1 \quad h_2 \quad t_2 \quad h_3 \quad t_3\ ]^T$, $U(t) = [\ q_1 \quad p_1 \quad q_2 \quad p_2\ ]^T$ et $Y(t) = X(t)$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha_1}{2\,S\,\sqrt{h_{1_0}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{q_{1_0}}{Sh_{1_0}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\alpha_2}{2\,S\,\sqrt{h_{2_0}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{q_{2_0}}{Sh_{2_0}} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{2\,S\,\sqrt{h_{1_0}}} & 0 & \frac{\alpha_2}{2\,S\,\sqrt{h_{2_0}}} & 0 & \frac{-\alpha_3}{2\,S\,\sqrt{h_{3_0}}} & 0 \\ -\frac{q_{1_0}(t_{3_0}-t_{1_0})}{2h_{1_0}h_{3_0}} & \frac{q_{1_0}}{Sh_{3_0}} & -\frac{q_{2_0}(t_{3_0}-t_{2_0})}{2h_{2_0}h_{3_0}} & \frac{q_{2_0}}{Sh_{3_0}} & 0 & -\frac{q_{1_0}+q_{2_0}}{Sh_{3_0}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(t_{1_0}-t_{1_i})}{Sh_{1_0}} & \frac{q_{1_0}(t_{1_0}-t_{1_i})}{Sh_{1_0}p_{1_0}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(t_{2_0}-t_{2_i})}{Sh_{2_0}} & \frac{q_{2_0}(t_{2_0}-t_{2_i})}{Sh_{2_0}p_{2_0}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice C est la matrice d'identité de dimensions $[6 \times 6]$ et la matrice de couplage direct D est la matrice nulle de dimensions $[6 \times 4]$.

4.2.5 Décomposition du système

4.2.5.1 Décomposition physique

Le système est composé de trois sous-systèmes : s_1 : cuve 1, s_2 : cuve 2 et s_3 : cuve 3. La figure (4.2) illustre la décomposition physique du système.

Les variables d'états, commandes et sorties des trois sous-systèmes sont donnés par :

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = [h_1, t_1]^T \\ u_1 = [q_1, p_1]^T \\ y_1 = [h_1, t_1]^T \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} x_2 = [h_2, t_2]^T \\ u_2 = [q_2, p_2]^T \\ y_2 = [h_2, t_2]^T \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} x_3 = [h_3, t_3]^T \\ u_3 = [0]^T \\ y_3 = [h_3, t_3]^T \end{array}\right|$$

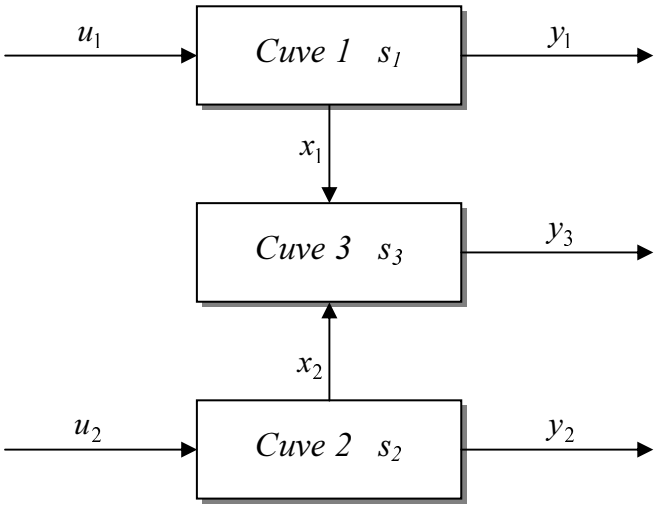


FIG. 4.2 – La décomposition physique du système (boucle ouverte)

La représentation d'état des trois sous-systèmes est donnée par :

$$s_1 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{t}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha_1}{2\,S\,\sqrt{h_{1_0}}} & 0 \\ 0 & -\frac{q_{1_0}}{S h_{1_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ -\frac{(t_{1_0} - t_{1_i})}{S h_{1_0}} & \frac{q_{1_0}(t_{1_0} - t_{1_i})}{S h_{1_0} p_{1_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.15}$$

$$s_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{h}_2 \\ \dot{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha_2}{2\,S\,\sqrt{h_{2_0}}} & 0 \\ 0 & -\frac{q_{2_0}}{S h_{2_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ t_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & 0 \\ -\frac{(t_{2_0} - t_{2_i})}{S h_{2_0}} & \frac{q_{2_0}(t_{2_0} - t_{2_i})}{S h_{2_0} p_{2_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.16}$$

$$s_3 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{h}_3 \\ \dot{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha_3}{2\,S\,\sqrt{h_{3_0}}} & 0 \\ 0 & -\frac{q_{1_0} + q_{2_0}}{S h_{3_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_3 \\ t_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{2\,S\,\sqrt{h_{1_0}}} & 0 \\ -\frac{q_{1_0}(t_{3_0} - t_{1_0})}{2 h_{1_0} h_{3_0}} & \frac{q_{1_0}}{S h_{3_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ t_1 \end{bmatrix} \\ \qquad + \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2}{2\,S\,\sqrt{h_{2_0}}} & 0 \\ -\frac{q_{2_0}(t_{3_0} - t_{2_0})}{2 h_{2_0} h_{3_0}} & \frac{q_{2_0}}{S h_{3_0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h_3 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_3 \\ t_3 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.17}$$

Les objectifs globaux du système sont (h_3, t_3) et les objectifs locaux sont (h_1, t_1) et (h_2, t_2). La figure (4.3) illustre la structure hiérarchique nominale du système. À partir des valeurs de références globales ($h_{3,ref}$, $t_{3,ref}$), le coordinateur permet de définir les valeurs des références ($h_{1,ref}$, $t_{1,ref}$) et ($h_{2,ref}$, $t_{2,ref}$) des deux sous systèmes locaux s_1 et s_2 dans le but d'assurer les objectifs globaux (h_3, t_3).

Mathématiquement, le sous système s_3 permet d'évaluer les objectifs globaux (h_3, t_3) à partir des objectifs locaux (h_1, t_1) et (h_2, t_2) en utilisant les équations (4.17), donc il peut être supprimé de la structure hiérarchique et remplacé par ses équations mathématiques dans l'étage coordinateur. Ce qui signifie que les équations (4.17) représentent les fonctions $h(y(t))$ dans l'équation (2.1).

Notons que (K_1, G_1) et (K_2, G_2) sont les gains des lois de commande utilisées par les deux sous systèmes s_1 et s_2, nous les présenterons au paragraphe (4.3.2).

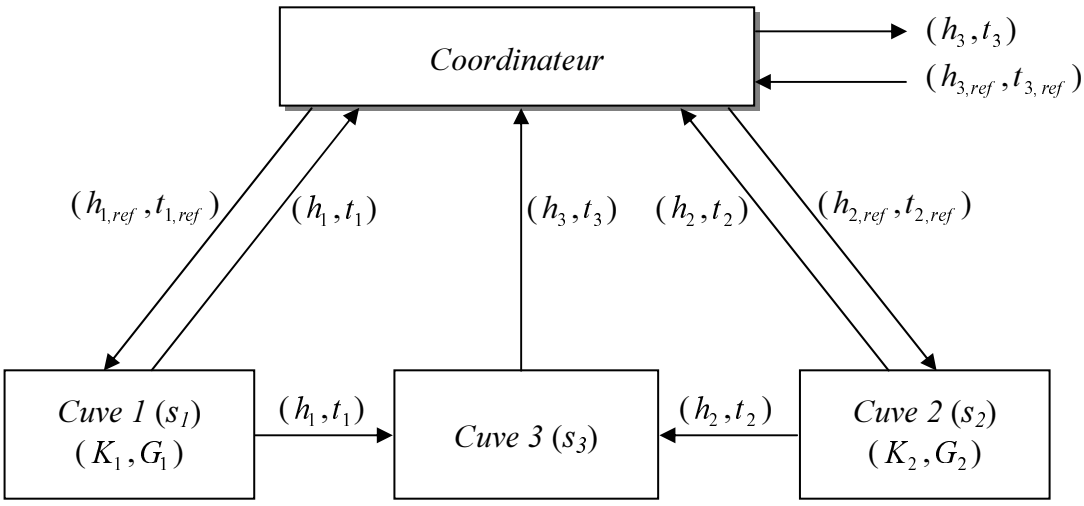


FIG. 4.3 – La structure hiérarchique du système

4.2.5.2 Décomposition fonctionnelle

Les deux cuves s_1 et s_2 sont fonctionnellement en parallèle, c'est le cas où les objectifs globaux ($h_{3_{max}}$, $t_{3_{max}}$) sont atteignables en utilisant soit la cuve 1 **ou** la cuve 2. La figure (4.4) représente la décomposition fonctionnelle du système (diagramme de fiabilité).

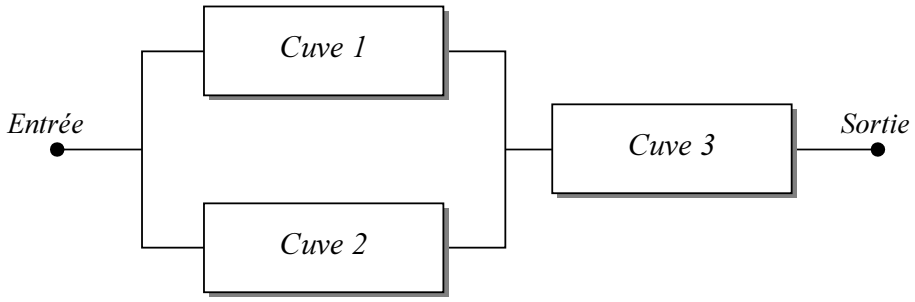


FIG. 4.4 – Diagramme de fiabilité du système

La cuve 1 (respectivement cuve 2) contient des composants actifs : une pompe 1 et une résistance de chauffe 1 (respectivement une pompe 2 et une résistance de chauffe 2) et des composants passifs : cuve, tuyaux dont la durée de vie est très grande par rapport aux composants actifs. Ce qui signifie que le taux de défaillance des composants passifs est très faible donc leur fiabilité est approximée à 1.
Concernant la cuve 3, elle ne contient que des composants passifs donc sa fiabilité est approximée à 1.

Notons qu'il est possible d'introduire les composants passifs dans cette méthode et ils seront traités de la même manière que les actifs.

La représentation fonctionnelle devient comme l'illustre la figure (4.5).

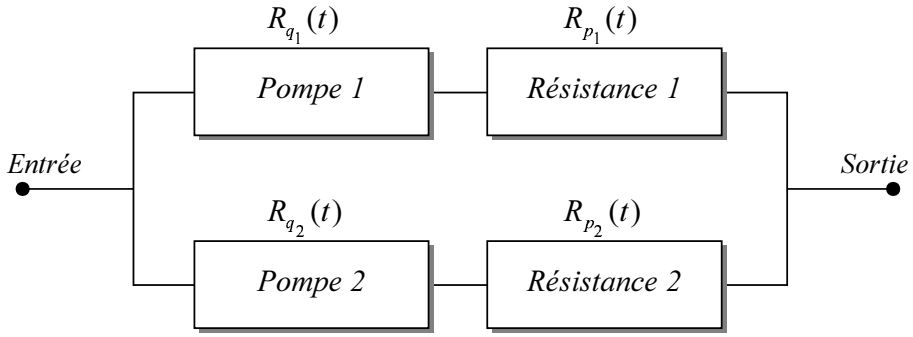


FIG. 4.5 – Diagramme de fiabilité du système

Avec
$R_{q_1}(t)$ la fiabilité de la pompe 1.
$R_{p_1}(t)$ la fiabilité de la résistance 1.
$R_{q_2}(t)$ la fiabilité de la pompe 2.
$R_{p_2}(t)$ la fiabilité de la résistance 2.
La fiabilité du système complet dépend de sa structure, elle sera présentée dans la suite du chapitre.

4.3 Synthèse des régulateurs

Dans cette section, nous allons présenter la méthode utilisée pour synthétiser les lois de commande. Notons que les valeurs numériques des différents paramètres du système sont données en annexe (*cf Annexe C*).

4.3.1 Représentation multimodèle

Sachant que le système réel est non linéaire, donc sa représentation par un modèle linéaire simple n'est valable que dans un domaine limité. Afin d'obtenir une représentation du comportement du système dans un large domaine nous proposons de le représenter par la combinaison d'un nombre fini de modèles simples linéaires, appellés modèles locaux. Chaque modèle est valable au voisinage d'un point de fonctionnement donné. Une fonction d'activation est une fonction permettant d'indiquer la validité du modèle local sur un domaine donné. Sa valeur dépend du vecteur d'états et de commande du système, elle vaut 1 (ou elle est très voisine de 1) sur le domaine de validité du point de fonctionnement et tend rapidement vers zéro en dehors de ce domaine. Une fonction gaussienne peut être choisie pour cet effet. Dans le cas le plus simple, la représentation globale du système est donnée par la somme des modèles locaux pondérés par leurs fonctions d'activations. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [Adam Medina, 2004] et [Rodrigues, 2005].

Les sous systèmes s_1 et s_2 sont symétriques donc nous présentons uniquement la méthode d'obtention de la représentation multimodèle du sous système s_1. La représentation du sous système s_2 s'effectue de la même manière.

Le domaine de fonctionnement souhaité de la température et du niveau du liquide dans la cuve 1 est défini par les intervalles $t_1 \in [15, 40]$ et $h_1 \in [0, 1]$. Chacun des intervalles est divisé en quatre domaines de validité. Les points de fonctionnement de la température sont $t_{1_0} = [\,18.125, 24.375, 30.625, 36.875\,]$ et du niveau du liquide sont $h_{1_0} = [\,0.125, 0.375, 0.625, 0.875\,]$, par conséquent seize modèles locaux, notés $\sum_{1_{(i,j)}}$, avec seize points de fonctionnement sont considérés pour représenter le sous système s_1. Un modèle $\sum_{1_{(i,j)}}$ est obtenu en remplaçant les valeurs de tous les points de fonctionnement correspondants à $t_{1_0}(i)$ et $h_{1_0}(j)$ dans l'équation (4.15).

Le tableau (4.1) montre les domaines de validité des modèles locaux et leurs points de fonctionnement.

$h_1(m)$ \ t_1 (°C)	15 – 21.25	21.25 – 27.5	27.5 – 33.75	33.75 – 40
0 – 0.25	$t_{1_0} = 18.125$ $h_{1_0} = 0.125$	$t_{1_0} = 24.375$ $h_{1_0} = 0.125$	$t_{1_0} = 30.625$ $h_{1_0} = 0.125$	$t_{1_0} = 36.875$ $h_{1_0} = 0.125$
0.25 – 0.50	$t_{1_0} = 18.125$ $h_{1_0} = 0.375$	$t_{1_0} = 24.375$ $h_{1_0} = 0.375$	$t_{1_0} = 30.625$ $h_{1_0} = 0.375$	$t_{1_0} = 36.875$ $h_{1_0} = 0.375$
0.50 – 0.75	$t_{1_0} = 18.125$ $h_{1_0} = 0.625$	$t_{1_0} = 24.375$ $h_{1_0} = 0.625$	$t_{1_0} = 30.625$ $h_{1_0} = 0.625$	$t_{1_0} = 36.875$ $h_{1_0} = 0.625$
0.75 – 1	$t_{1_0} = 18.125$ $h_{1_0} = 0.875$	$t_{1_0} = 24.375$ $h_{1_0} = 0.875$	$t_{1_0} = 30.625$ $h_{1_0} = 0.875$	$t_{1_0} = 36.875$ $h_{1_0} = 0.875$

TAB. 4.1 – Domaines de validité et point de fonctionnement des modèles locaux de la cuve 1

Les fonctions d'activation $\mu_{i,j}(h_1(t), t_1(t))$ sont proposées pour assembler les modèles locaux, avec $i = 1 \ldots 4$ et $j = 1 \ldots 4$.

La fonction $\mu_{i,j}(h_1(t), t_1(t))$ est donnée classiquement par le produit des fonctions gaussiennes : $\mu_i(t_1(t))$ qui dépend de la température $t_1(t)$ et $\mu_j(h_1(t))$ qui dépend du niveau $h_1(t)$.

Les fonctions d'activation des modèles locaux en fonction de la température $t_1(t)$ sont :

$$\mu_i(t_1(t)) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t_1 - t_{1_0}(i)}{7}\right)^2} \tag{4.18}$$

Chaque fonction d'activation vaut 1 au tour du point de fonctionnement valide et tend vers zéro ailleurs comme l'illustre la figure (4.6).

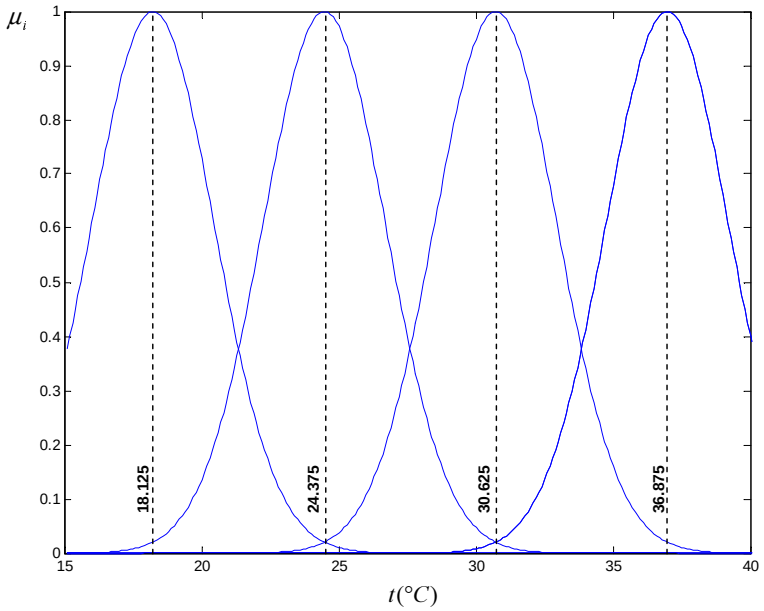


FIG. 4.6 – Fonctions d'activation en fonction de la température

Les fonctions d'activation des modèles locaux en fonction du niveau du liquide $h_1(t)$ sont données par :

$$\mu_j(h_1(t)) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_1 - h_{1_0}(j)}{0.0632}\right)^2} \tag{4.19}$$

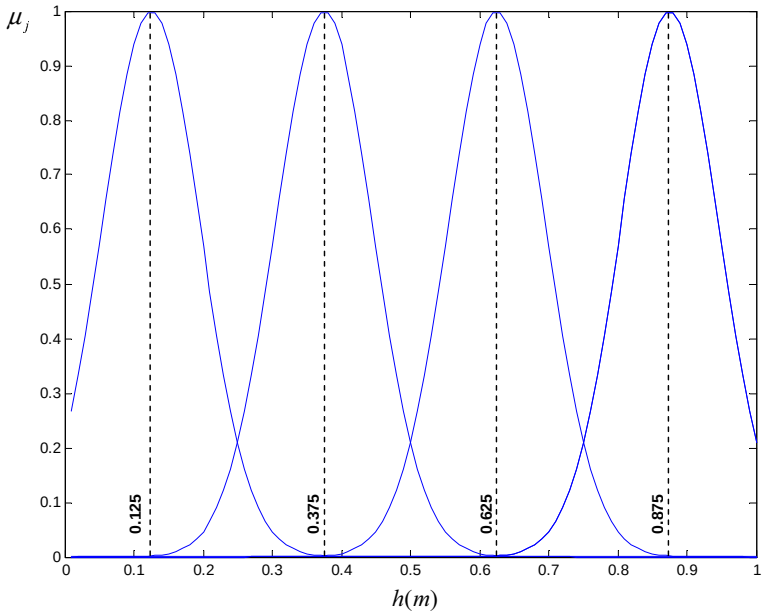


FIG. 4.7 – Fonctions d'activation en fonction du niveau du liquide

En combinant les fonctions d'activation (4.18) et (4.19), nous obtenons $\mu_{i,j}(h_1(t), t_1(t))$. Elles sont définies par :

$$\mu_{i,j}(h_1(t), t_1(t)) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t_1 - t_{1_0}(i)}{7}\right)^2} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_1 - h_{1_0}(j)}{0.0632}\right)^2} \tag{4.20}$$

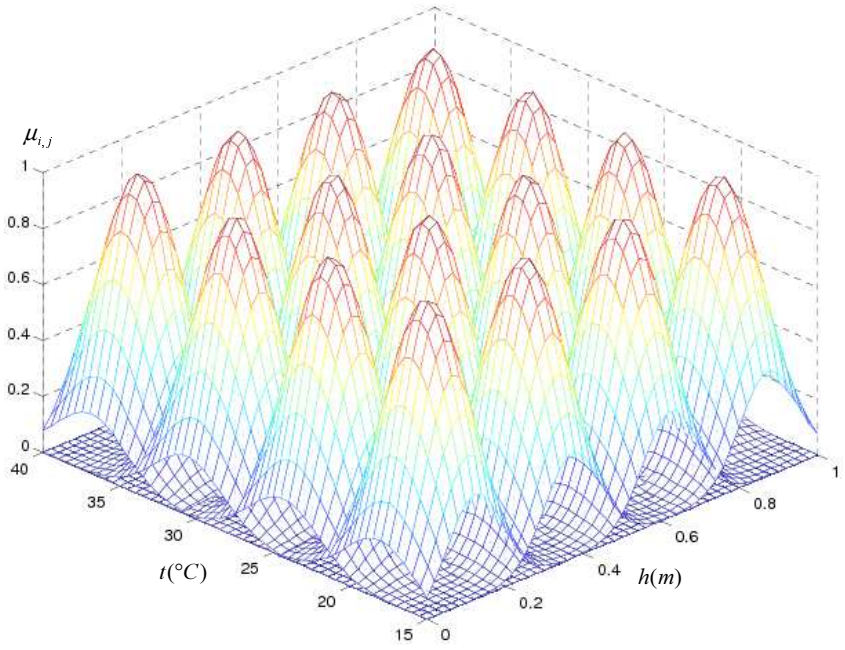


FIG. 4.8 – Fonctions d'activation en fonction de la température et du niveau du liquide

La représentation multimodèle du sous système s_1 s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t))(A_{1_{(i,j)}} x_1(t) + B_{1_{(i,j)}} u_1(t)) \\ y_1(t) &= \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t))(C_{1_{(i,j)}} x_1(t)) \\ \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t)) &= \dfrac{\mu_{i,j}(h_1(t), t_1(t))}{\sum_{i,j}^{4} \mu_{i,j}(h_1(t), t_1(t))} \end{cases} \tag{4.21}$$

Avec $x_1(t) = [h_1(t), t_1(t)]^T$, $u_1(t) = [q_1(t), p_1(t)]^T$ et $y_1(t) = [h_1(t), t_1(t)]^T$

$A_{1_{(i,j)}}$ $B_{1_{(i,j)}}$ et $C_{1_{(i,j)}}$ sont les matrices du modèle local $\sum_{1_{(i,j)}}$ du sous système s_1. Elles sont données par :

$$A_{1_{(i,j)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\alpha_1}{2\,S\sqrt{h_{1_0}(i)}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{q_{1_0}(i)}{S h_{1_0}(i)} \end{bmatrix}, \quad B_{1_{(i,j)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S} & 0 \\ -\dfrac{(t_{1_0}(j) - t_{1_i})}{S h_{1_0}(i)} & \dfrac{q_{1_0}(i)(t_{1_0}(j) - t_{1_i})}{S h_{1_0}(i) p_{1_0}(i,j)} \end{bmatrix}$$

Et $C_{1_{(i,j)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les points de fonctionnement $q_{1_0}(i)$ et $p_{1_0}(i,j)$ sont déterminées à base des valeurs $h_{1_0}(i)$, $t_{1_0}(j)$ et les équations non-linéaires (4.4) et (4.9).

Les valeurs numériques des matrices des modèles locaux de la cuve 1 et la cuve 2 sont données par les tableaux (C.1) et (C.2) (*cf Annexe C*).

4.3.2 Synthèse de la loi de commande

4.3.2.1 Cas du système nominal

Nous disposons d'une représentation multimodèle du sous système s_1 (et du sous système s_2) décrite par (4.21) dont les matrices sont données dans les tableaux (C.1) et (C.2). Nous cherchons à déterminer des lois de commande $u_1(t) = K_1x_1(t)+G_1r_1(t)$ et $u_2(t) = K_2x_2(t)+G_2r_2(t)$ permettant d'assurer des performances désirées des sous systèmes s_1 et s_2 en boucle fermée.

$r_1(t) = [h_{1,ref}(t), t_{1,ref}(t)]$ (respectivement $r_2(t) = [h_{2,ref}(t), t_{2,ref}(t)]$) sont les références du sous système s_1 (respectivement s_2) .

K_1 (respectivement K_2) permet d'imposer au sous système s_1 (respectivement s_2) en boucle fermée les pôles p_1 et p_2.

G_1 (respectivement G_2) permet de satisfaire les contraintes en poursuite de références.

D'une façon général, nous cherchons une loi de commande u_1 (respectivement u_2) permettant de réunir, de la même manière que le multimodèle, l'ensemble des lois de commande linéaires locales $u_{1_{(i,j)}}(t)$ (respectivement $u_{2_{(i,j)}}(t)$). Pour chacun des modèles linéaires locaux, nous réalisons la synthèse d'une loi de commande par retour d'état $u_{1_{(i,j)}}(t) = -K_{1_{(i,j)}}x_1(t)+G_{1_{(i,j)}}r_1(t)$ (respectivement $u_{2_{(i,j)}}(t) = -K_{2_{(i,j)}}x_2(t) + G_{2_{(i,j)}}r_2(t)$. L'expréssion de la loi de commande globale du sous système s_1 et s_2 s'écrivent alors :

$$u_1(t) = \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t))u_{1_{(i,j)}}(t)$$

$$u_2(t) = \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_2(t), t_2(t))u_{2_{(i,j)}}(t)$$

D'une autre manière :

$$u_1(t) = -\sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t))K_{1_{(i,j)}}x_1(t) + \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t))G_{1_{(i,j)}}r_1(t)$$

$$u_2(t) = -\sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_2(t), t_2(t))K_{2_{(i,j)}}x_2(t) + \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_2(t), t_2(t))G_{2_{(i,j)}}r_2(t)$$

Les fonctions $\omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t))$ sont les mêmes que celles du multimodèle (4.21). Et $\omega_{i,j}(h_2(t), t_2(t))$ sont également les mêmes fonctions mais elles dépendent de variables d'états $h_2(t)$ et $t_2(t)$ du

sous système s_2.

Dans le but d'avoir une erreur statique nulle, nous introduisons une action intégrale entre la mesure et la référence, comme l'illustre la figure (4.9).

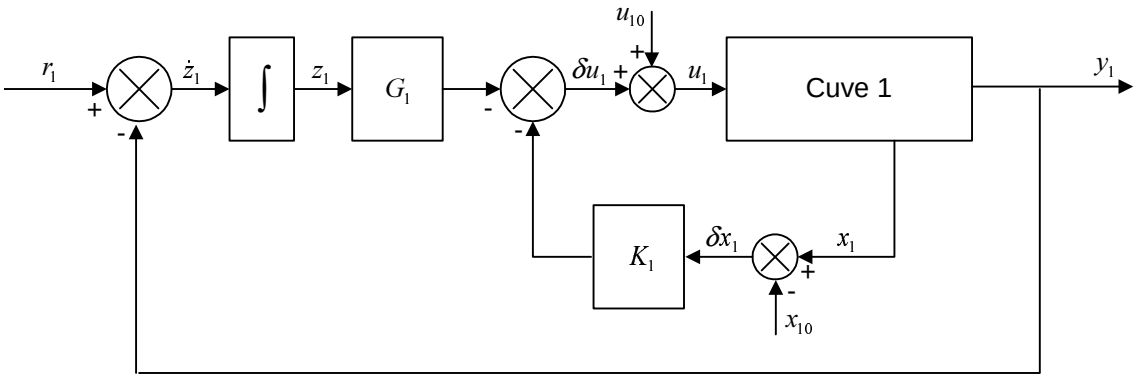


FIG. 4.9 – Le sous système s_1 en boucle fermée

Posons $\dot{z}_1(t) = r_1(t) - y_1(t)$. Pour chaque modèle local, le sous système en boucle ouverte peut se mettre sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} & 0_2 \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1_{(i,j)}} \\ 0_2 \end{bmatrix} u_{1_{(i,j)}} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} r_1(t) \\ \\ y_1(t) = \begin{bmatrix} C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.22}$$

Avec 0_2 est la matrice nulle de dimension 2 et I_2 est la matrice d'identité de dimension 2.

Soit $x_1^{aug}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & z_1(t) \end{bmatrix}^T$,
$A_{1_{(i,j)}}^{aug} = \begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} & 0_2 \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix}$, $B_{1_{(i,j)}}^{aug} = \begin{bmatrix} B_{1_{(i,j)}} \\ 0_2 \end{bmatrix}$, $C_{1_{(i,j)}}^{aug} = \begin{bmatrix} C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix}$ et $I^{aug} = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$

Il s'agit donc de déterminer une nouvelle loi de commande du sous système augmenté pour chaque modèle local. Elle s'écrit :

$$u_{1_{(i,j)}}(t) = -\begin{bmatrix} K_{1_{(i,j)}} & G_{1_{(i,j)}} \end{bmatrix} x_1^{aug}(t) \tag{4.23}$$

En utilisant cette loi de commande, le sous système en boucle fermée peut être écrit de la façon suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} - B_{1_{(i,j)}} K_{1_{(i,j)}} & -B_{1_{(i,j)}} G_{1_{(i,j)}} \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} r_1(t) \\ \\ y_1(t) = \begin{bmatrix} C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.24}$$

Soit $A^{BF,aug}_{1_{(i,j)}}$ la matrice d'état du sous système augmenté en boucle fermée,

$$A^{BF,aug}_{1_{(i,j)}} = \begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} - B_{1_{(i,j)}} K_{1_{(i,j)}} & -B_{1_{(i,j)}} G_{1_{(i,j)}} \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Notons que l'équation (4.23) représente la relation entre les variations de la commande δu_1 et les variations δx_1.

En remplaçant $\delta x_1(t)$ par $x_1(t) - x_{1_0}(i,j)$ et $\delta u_{1_{(i,j)}}(t)$ par $u_{1_{(i,j)}}(t) - u_{1_0}(i,j)$, la loi de commande d'un modèle local devient :

$$u_{1_{(i,j)}}(t) = u_{1_0}(i,j) - K_{1_{(i,j)}}(x_1(t) - x_{1_0}(i,j)) - G_{1_{(i,j)}} z_1(t)$$

Avec $u_{1_0}(i,j) = [q_{1_0}(i),\, p_{1_0}(i,j)]^T$ et $x_{1_0}(i,j) = [h_{1_0}(i),\, t_{1_0}(j)]^T$.

L'expréssion de la loi de commande globale s'écrit :

$$u_1(t) = \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t)) u_{1_{(i,j)}}(t)$$

La synthèse de la loi de commande $u_2(t)$ du sous système s_2 est effectuée de la même manière que $u_1(t)$.

La synthèse de la loi de commande consiste à déterminer les gains $K_{1_{(i,j)}}$ et $G_{1_{(i,j)}}$ permettant d'imposer les pôles p_1 et p_2 et deux pôles supplémentaires p_3 et p_4 pour l'intégral choisis de telle sorte qu'ils n'affectent pas la dynamique du sous système principal non augmenté. Généralement $p_3 = 0$ et $p_4 = 0$ ou des valeurs très proches de zéro.

Dans le cas nominal, les gains des régulateurs nominaux sont notés $K^{nom}_{1_{(i,j)}}$ et $G^{nom}_{1_{(i,j)}}$.

Pour application numérique, nous souhaitons avoir des pôles $p_1 = -0.0015$, $p_2 = -0.0088$, $p_3 = -0.0001$ et $p_4 = -0.0001$.

Les tableaux (C.3) et (C.4) (*cf Annexe C*) donnent les valeurs des régulateurs locaux $K^{nom}_{1_{(i,j)}}$, $G^{nom}_{1_{(i,j)}}$ de la cuve 1 et $K^{nom}_{2_{(i,j)}}$, $G^{nom}_{2_{(i,j)}}$ de la cuve 2.

4.3.2.2 Cas du système défaillant

En se basant sur la représentation d'état du sous système (4.24) et les valeurs des régulateurs nominaux donnés par les tableaux (C.3) et (C.4) du paragraphe précédent, nous pouvons définir un modèle nominal du sous système s_1 en boucle fermée pour chacun des modèles locaux, défini comme suit :

$$\dot{x}_1^{aug}(t) = M_{1_{(i,j)}}^{nom} x_1^{aug}(t) + I^{aug} r_1(t) \tag{4.26}$$

Avec

$$M_{1_{(i,j)}}^{nom} = \begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} - B_{1_{(i,j)}} K_{1_{(i,j)}}^{nom} & -B_{1_{(i,j)}} G_{1_{(i,j)}}^{nom} \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix}$$

Un ensemble de modèles admissibles, noté $\mathcal{M}_1$, peut être défini de telle façon que $\forall M \in \mathcal{M}_1$, M^{aug} ait des pôles à $\pm 10\%$ des valeurs des pôles nominaux ($p_1 = -0.0015$, $p_2 = -0.0088$, $p_3 = -0.0001$ et $p_4 = -0.0001$).

Soit M une matrice qui s'écrit sous la forme suivante,

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} \\ -c_{1,1} & -c_{1,2} & 0 & 0 \\ -c_{2,1} & -c_{2,2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,1}$ et $c_{2,2}$ sont les éléments de la matrice $C_{1_{(i,j)}}$. L'ensemble $\mathcal{M}_1$ peut être représenté par un ensemble de contraintes d'inégalité de la façon suivante

$$\mathcal{M}_1 = \{\mathfrak{g}_1(M) \leq 0\}$$

En appliquant la méthode de la section (3.1.4.1), l'ensemble $\mathcal{M}_1$ peut être définie comme suit :

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ M \;\middle|\; \begin{array}{rcl} (-m_{1,1} - m_{2,2}) - 0.0116 & \leq & 0 \\ -(-m_{1,1} - m_{2,2}) + 0.0095 & \leq & 0 \\ (c_{2,1}m_{1,4} - m_{2,1}m_{1,2} + m_{1,1}m_{2,2} + c_{1,1}m_{1,3} + c_{1,2}m_{2,3} + c_{2,2}m_{2,4}) - (1.84767e-5) & \leq & 0 \\ -(c_{2,1}m_{1,4} - m_{2,1}m_{1,2} + m_{1,1}m_{2,2} + c_{1,1}m_{1,3} + c_{1,2}m_{2,3} + c_{2,2}m_{2,4}) + (1.23687e-5) & \leq & 0 \\ (c_{1,1}c_{2,2}m_{1,3}m_{2,4} - c_{1,1}c_{2,2}m_{1,4}m_{2,3} + c_{2,1}c_{1,2}m_{1,4}m_{2,3} - c_{2,1}c_{1,2}m_{1,3}m_{2,4}) - (1.932612e-013) & \leq & 0 \\ -(c_{1,1}c_{2,2}m_{1,3}m_{2,4} - c_{1,1}c_{2,2}m_{1,4}m_{2,3} + c_{2,1}c_{1,2}m_{1,4}m_{2,3} - c_{2,1}c_{1,2}m_{1,3}m_{2,4}) + (8.66052e-014) & \leq & 0 \\ (-c_{1,1}m_{1,3}m_{2,2} - m_{1,1}c_{2,2}m_{2,4} - c_{2,1}m_{1,4}m_{2,2} + c_{2,1}m_{1,2}m_{2,4} + m_{2,1}c_{1,2}m_{1,3} + m_{2,1}c_{2,2}m_{1,4} & & \\ \quad + c_{1,1}m_{1,2}m_{2,3} - m_{1,1}c_{1,2}m_{2,3}) - (3.650933e-009) & \leq & 0 \\ -(-c_{1,1}m_{1,3}m_{2,2} - m_{1,1}c_{2,2}m_{2,4} - c_{2,1}m_{1,4}m_{2,2} + c_{2,1}m_{1,2}m_{2,4} + m_{2,1}c_{1,2}m_{1,3} + m_{2,1}c_{2,2}m_{1,4} & & \\ \quad + c_{1,1}m_{1,2}m_{2,3} - m_{1,1}c_{1,2}m_{2,3}) + (1.999647e-009) & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

L'occurrence du défaut conduit à des changements dans les matrices $A_{1_{(i,j)}}$, $B_{1_{(i,j)}}$ ou $C_{1_{(i,j)}}$ suivant la nature du défaut, s'il affecte le système, les actionneurs ou les capteurs. Dans cet exemple, les défauts considérés sont des défauts actionneurs, ils affectent les matrices $B_{1_{i,j}}$ prennant des nouvelles valeurs $B_{1_{i,j}}^f$. Ce qui implique que le sous système s_1 en boucle fermée n'est plus égale à son modèle nominal donné par (4.26).

$$\begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} - B_{1_{(i,j)}}^f K_{1_{(i,j)}} & -B_{1_{(i,j)}}^f G_{1_{(i,j)}} \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \neq M_{1_{(i,j)}}^{nom}$$

Nous utilisons la méthode Pseudo-inverse avec les modifications du chapitre 3 pour calculer les nouveaux gains optimaux $K_{1_{(i,j)}}^{opt}$ et $G_{1_{(i,j)}}^{opt}$ de chacun des modèles locaux $\sum_{1_{(i,j)}}$ du sous système s_1. D'une autre manière résoudre le problème suivant pour chacun des modèles locaux $\sum_{1_{(i,j)}}$:

$$\left| \begin{array}{rcl} [K^{opt}_{1_{(i,j)}}, G^{opt}_{1_{(i,j)}}] & = & arg \quad min \left\| \begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} - B^f_{1_{(i,j)}} K_{1_{(i,j)}} & -B^f_{1_{(i,j)}} G_{1_{(i,j)}} \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} - M^{nom}_{1_{(i,j)}} \right\|^2_F \\ \text{avec} \qquad \mathfrak{g}_1(A^{BF,aug}_{1_{(i,j)}}) \leq 0 \end{array} \right. \tag{4.27}$$

Notons que si le défaut est apparu dans le sous système s_2 (cuve 2), les régulateurs $K^{opt}_{2_{(i,j)}}$ et $G^{opt}_{2_{(i,j)}}$ sont définis de la même manière précédente, à base de l'équation suivante :

$$\left| \begin{array}{rcl} [K^{opt}_{2_{(i,j)}}, G^{opt}_{2_{(i,j)}}] & = & arg \quad min \left\| \begin{bmatrix} A_{2_{(i,j)}} - B^f_{2_{(i,j)}} K_{2_{(i,j)}} & -B^f_{2_{(i,j)}} G_{2_{(i,j)}} \\ -C_{2_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} - M^{nom}_{2_{(i,j)}} \right\|^2_F \\ \text{avec} \qquad \mathfrak{g}_2(A^{BF,aug}_{2_{(i,j)}}) \leq 0 \end{array} \right. \tag{4.28}$$

Rappelons que les lois de commande $u^{opt}_{1_{(i,j)}}(t)$ des modèles locaux $\sum_{(i,j)}$ sont définies à base de $[K^{opt}_{1_{(i,j)}}, G^{opt}_{1_{(i,j)}}]$ de la manière suivante :

$$u^{opt}_{1_{(i,j)}}(t) = u_{1_0}(i,j) - K^{opt}_{1_{(i,j)}}(x_1(t) - x_{1_0}(i,j)) - G^{opt}_{1_{(i,j)}} z_1(t)$$

Avec $u_{1_0}(i,j) = [q_{1_0}(i),\, p_{1_0}(i,j)]^T$ et $x_{1_0}(i,j) = [h_{1_0}(i),\, t_{1_0}(j)]^T$.

Et la loi de commande globale $u_1(t)^{opt}$ est définie comme suit :

$$u_1(t)^{opt} = \sum_{i,j}^{4} \omega_{i,j}(h_1(t), t_1(t)) u_{1_{(i,j)}}(t)$$

4.4 Indice de performances des régulateurs

Pour chaque modèle local $\sum_{1_{(i,j)}}$ du sous système s_1, une loi de commande optimale est défini par $[K^{opt}_{1_{(i,j)}}, G^{opt}_{1_{(i,j)}}]$ résultant de la minimisation du critère (4.27). Où i est l'indice de la température et j est l'indice du niveau.
Le sous système en boucle fermée est décrit par :

$$\begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} - B^f_{1_{(i,j)}} K^{opt}_{1_{(i,j)}} & -B^f_{1_{(i,j)}} G^{opt}_{1_{(i,j)}} \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Le modèle local $\sum_{1_{(i,j)}}$ du sous système s_1 en boucle fermée possède quatre valeurs propres notées $\tau_{1_{(i,j)}}(k)$ avec $k = 1 \ldots 4$.

Sachant que les valeurs propres du modèle nominal $M^{nom}_{1_{(i,j)}}$ sont p_1, p_2, p_3 et p_4, nous pouvons déterminer des écarts normalisés entre p_k et $\tau_{1_{(i,j)}}(k)$ avec $k = 1 \ldots 4$ pour chaque modèle local $\sum_{1_{(i,j)}}$ comme l'indique le tableau (4.2). Ils sont calculés comme suit :

$$\varepsilon_{1_{(i,j)}}(k) = \left| \frac{p_k - \tau_{1_{(i,j)}}(k)}{p_k} \right| \quad k = 1 \ldots 4 \tag{4.30}$$

$h_1(m)$ \ t_1 (°C)	15	21.25	27.5	33.75	40
0	$\varepsilon_{1(1,1)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(2,1)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(3,1)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(4,1)}(k)$ $k=1...4$	
0.25	$\varepsilon_{1(1,2)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(2,2)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(3,2)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(4,2)}(k)$ $k=1...4$	
0.50	$\varepsilon_{1(1,3)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(2,3)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(3,3)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(4,3)}(k)$ $k=1...4$	
0.75	$\varepsilon_{1(1,4)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(2,4)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(3,4)}(k)$ $k=1...4$	$\varepsilon_{1(4,4)}(k)$ $k=1...4$	
1					

TAB. 4.2 – Écarts entre les valeurs propres nominales et celles de chaque modèle locale de la cuve 1

L'indice de performance des régulateurs du sous système s_1 est donné par :

$$J_{1,dyn} = \underset{i,j}{max}\left(\underset{k}{max}\left(\left|\varepsilon_{1_{(i,j)}}(k)\right|\right)\right) \qquad i = 1\ldots4, \quad j = 1\ldots4, \quad k = 1\ldots4 \tag{4.31}$$

De la même manière, l'indice de performance des régulateurs du sous système s_2 peut être calculé, soit :

$$J_{2,dyn} = \underset{i,j}{max}\left(\underset{k}{max}\left(\left|\varepsilon_{2_{(i,j)}}(k)\right|\right)\right) \qquad i = 1\ldots4, \quad j = 1\ldots4, \quad k = 1\ldots4 \tag{4.32}$$

Notons que l'action intégrale introduite entre la mesure et la référence a permis d'une part d'avoir un système augmenté et modèle augmenté intégrant la matrice N dans la matrice M et d'autre part une erreur statique nulle si les commandes ne sont pas saturées. Par conséquent les indices de performances en poursuite locales $J^m_{stat,local}$ sont nuls et n'ont pas pris en considération dans la suite.

4.5 Définition des structures

Afin d'illustrer la méthode, nous considérons que le défaut simulé, noté f par la suite, consiste en une perte de puissance de $\beta^f\%$ de la résistance de chauffe de la cuve 1.

Une structure nominale et trois structures en présence de défaut sont définies hors ligne.

Structure nominale

En l'absence de défauts, la structure nominale du système exploite tous les sous-systèmes (c'est-à-dire les trois cuves), soit :

Sous système s_1 représenté par la cuve 1 ayant des objectifs locaux statiques à atteindre h_1 et t_1 en suivant les références $r_1(t) = [h_{1,ref}(t), t_{1,ref}(t)]$.

Sous système s_2 est la cuve 2, ses objectifs locaux sont h_2 et t_2. Ils doivent poursuivre les valeurs de références $r_2(t) = [h_{2,ref}(t), t_{2,ref}(t)]$.

Le dernier sous système s_3 sert à mélanger les liquides issues des deux cuves dans le but de conserver un volume de fluide constant $h_{3,ref}$ à une température désirée $t_{3,ref}$.

Dans ce cas, le coordinateur se charge de générer les valeurs de références $[h_{1,ref}(t), t_{1,ref}(t)]$ et $[h_{2,ref}(t), t_{2,ref}(t)]$ permettant aux objectifs globaux $[h_3(t), t_3(t)]$ d'atteindre leurs valeurs de références $[h_{3,ref}(t), t_{3,ref}(t)]$ en se basant sur les relations différentielles et algébriques données par l'ensemble d'équations (4.4) et (4.9). Les équations (4.4) et (4.9) au régime statique donnent :

$$\begin{cases} h_3 &= \left(\dfrac{\alpha_1\sqrt{h_1} + \alpha_2\sqrt{h_2}}{\alpha_3}\right)^2 \\ t_3 &= \dfrac{\alpha_1 t_1\sqrt{h_1} + \alpha_2 t_2\sqrt{h_2}}{\alpha_3\sqrt{h_3}} \end{cases} \tag{4.33}$$

Le coordinateur définit également toutes les lois de commande au niveau local de chaque sous système. En d'autres termes le coordinateur calcule les gains de chacun des modèles locaux $K^{nom}_{1_{(i,j)}}$, $G^{nom}_{1_{(i,j)}}$ pour la cuve 1 et $K^{nom}_{2_{(i,j)}}$, $G^{nom}_{2_{(i,j)}}$ pour la cuve 2 dans le but d'assurer les performances des régulateurs en terme de modèles nominal donné par $M^{nom}_{1_{(i,j)}}$ et $M^{nom}_{2_{(i,j)}}$.

En présence d'un défaut détecté et localisé sur la résistance de la cuve 1, trois structures de reconfiguration sont définies :

Structure $\mathcal{S}^1$

La structure $\mathcal{S}^1$ est donnée par la figure (4.10). Le système utilise uniquement les cuves 2 et 3. La cuve 1 n'est pas exploitée.
Dans ce cas, les objectifs globaux $[h_3(t), t_3(t)]$ dépendent uniquement des objectifs locaux $[h_2(t), t_2(t)]$ en utilisant les équations initiales du système (4.4) et (4.9) sans tenir compte de $[h_1(t), t_1(t)]$. Soit :

$$\begin{cases} h_3 &= \left(\dfrac{\alpha_2\sqrt{h_2}}{\alpha_3}\right)^2 \\ t_3 &= \dfrac{\alpha_2 t_2\sqrt{h_2}}{\alpha_3\sqrt{h_3}} \end{cases} \tag{4.34}$$

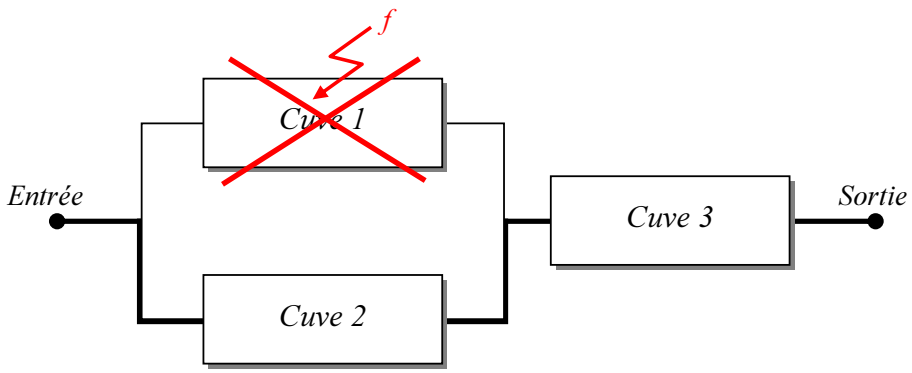


FIG. 4.10 – Structure $\mathcal{S}^1$ du système

Structure $\mathcal{S}^2$

La résistance de la cuve 1 est exploitée au maximum de sa capacité restante $p_1 = (1-\beta^f) \,.\, p_{1,max}$. Les équations du système au régime statique deviennent :

$$\begin{cases} h_3 &= \left(\dfrac{\alpha_1\sqrt{h_1} + \alpha_2\sqrt{h_2}}{\alpha_3}\right)^2 \\ t_3 &= \dfrac{\alpha_1 t_1((1-\beta^f) \,.\, p_{1,max})\sqrt{h_1} + \alpha_2 t_2\sqrt{h_2}}{\alpha_3\sqrt{h_3}} \end{cases} \tag{4.35}$$

Avec $t_1((1-\beta^f) \,.\, p_{1,max})$ est la valeur de la température t_1 correspondante à la valeur de la puissance $p_1 = \beta^f \,.\, p_{1,max}$. t_1 est constante, donc le coordinateur se charge de modifier les trois grandeurs restantes h_1, h_2 et t_2 pour atteindre les objectifs globaux.

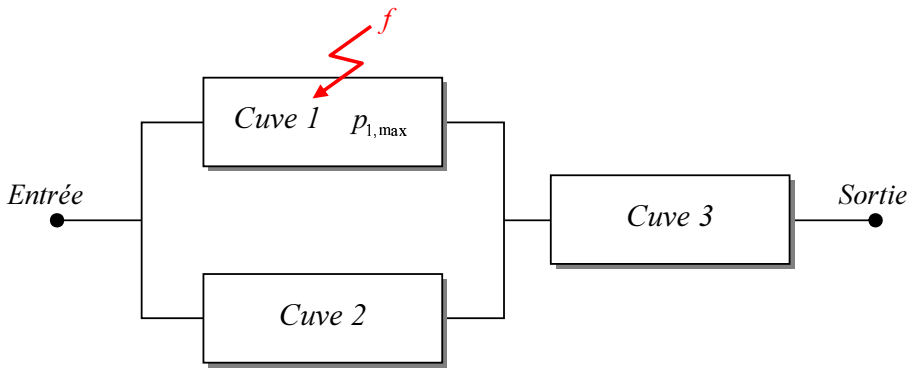


FIG. 4.11 – Structure $\mathcal{S}^2$ du système

Structure $\mathcal{S}^3$

Sous cette structure, le système utilise la totalité de ses sous systèmes s_1, s_2 et s_3 avec toutes les combinaisons possibles des objectifs locaux en terme de références locales $[h_{1,ref}(t), t_{1,ref}(t)]$

et $[h_{2,ref}(t), t_{2,ref}(t)]$. Les références sont données par :

$$\begin{cases} h_{1,ref} = \sigma_1 h_{1,max} & \text{avec} \quad \sigma_1 \in \left[\frac{h_{1,min}}{h_{1,max}}, 1\right] \\ t_{1,ref} = \sigma_2 t_{1,max} & \text{avec} \quad \sigma_2 \in \left[\frac{t_{1,min}}{t_{1,max}}, 1\right] \\ h_{2,ref} = \sigma_3 h_{2,max} & \text{avec} \quad \sigma_3 \in \left[\frac{h_{2,min}}{h_{2,max}}, 1\right] \\ t_{2,ref} = \sigma_4 t_{2,max} & \text{avec} \quad \sigma_4 \in \left[\frac{t_{2,min}}{t_{2,max}}, 1\right] \end{cases}$$

Concernant les équations du système, elles restent les mêmes que pour le cas nominal, avec des changements au niveau des matrices $B_{1_{(i,j)}}$ de chacun des modèles locaux du sous système défaillant. Les nouvelles matrices $B^f_{1_{(i,j)}}$ dépendent de l'amplitude du défaut correspondant à $\beta^f\%$.

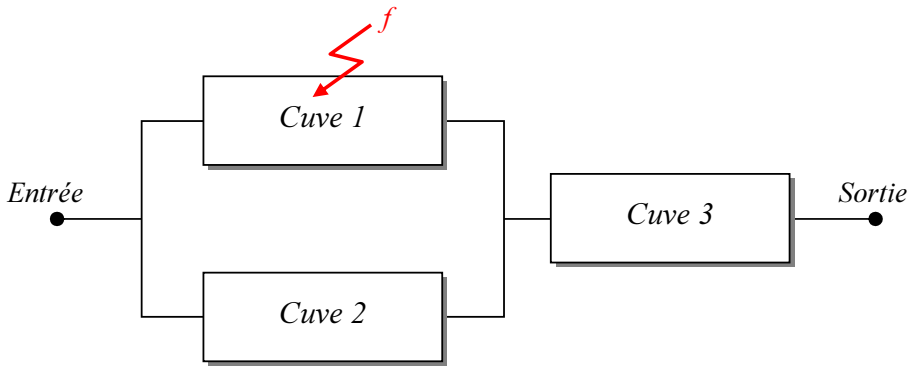


FIG. 4.12 – Structure $\mathcal{S}^3$ du système

4.6 Indice de performances statiques

Dans les trois cas, l'indice de performances statiques de chaque structure $\mathcal{S}^m$ est calculé suivant la formule (2.29) permettant l'évaluation des performances, soit :

$$J^m_{statique} = \left|\frac{h_3^{nom} - h_3^m}{h_3^{nom}}\right| + \left|\frac{t_3^{nom} - t_3^m}{t_3^{nom}}\right| \text{ avec } \quad m = 1 \ldots 3 \tag{4.36}$$

Où h_3^{nom} et t_3^{nom} sont les objectifs globaux du système dans le cas nominal, ils devraient être égaux à $h_{3,ref}$ et $t_{3,ref}$ respectivement. Sachant que h_3^m et t_3^m sont les objectifs du système, ils sont calculés à base des objectifs locaux h_1^m, t_1^m, h_2^m et t_2^m suivant les équations de la structure $\mathcal{S}^m$.

Notons que les deux écarts normalisés dans l'équation (4.36) peuvent être pondérées chacune par un poids permettant de favoriser l'un des objectifs globaux h_3 et t_3 par rapport à l'autre.

4.7 Calcul de la fiabilité et du coût

Structure nominale

Suivant la décomposition fonctionnnelle présentée par la figure 4.5, la fiabilité du système dans le cas nominal

$$R_g^{nom}(t) = (1 - (1 - R_{q_1}^{nom}(t)R_{p_1}^{nom}(t))(1 - R_{q_2}^{nom}(t)R_{p_2}^{nom}(t))) \tag{4.37}$$

$$\begin{array}{l} R_{q_1}^{nom}(t) = e^{-\lambda_{q_1}^{nom}(q_1).t} \\ R_{p_1}^{nom}(t) = e^{-\lambda_{p_1}^{nom}(p_1).t} \\ R_{q_2}^{nom}(t) = e^{-\lambda_{q_2}^{nom}(q_2).t} \\ R_{p_2}^{nom}(t) = e^{-\lambda_{p_2}^{nom}(p_2).t} \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \lambda_{q_1}^{nom}(q_1) = \lambda_{0,q_1} e^{(\beta_1.q_1^{nom})} \\ \lambda_{p_1}^{nom}(p_1) = \lambda_{0,p_1} e^{(\beta_2.p_1^{nom})} \\ \lambda_{q_2}^{nom}(q_2) = \lambda_{0,q_2} e^{(\beta_3.q_2^{nom})} \\ \lambda_{p_2}^{nom}(p_2) = \lambda_{0,p_2} e^{(\beta_4.p_2^{nom})} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \lambda_{0,q_1} = 3.77 * 10^{-6} \\ \lambda_{0,p_1} = 5.77 * 10^{-6} \\ \lambda_{0,q_2} = 3.21 * 10^{-6} \\ \lambda_{0,p_2} = 4.25 * 10^{-6} \end{array}$$

$$\beta_1 = 10,211.10^4, \quad \beta_2 = 5.10^{-3}, \quad \beta_3 = 10,548.10^4 \quad \text{et} \quad \beta_4 = 8.10^{-3}$$

p_1^{nom}, q_1^{nom}, p_2^{nom} et q_2^{nom} sont les valeurs finales des commandes représentant les charges appliquées sur les actionneurs (pompes et résistances) dans le cas nominal.
Le coût du système dans le cas nominal est la somme des coûts de tous les composants,

$$C_{q_1}^{nom} = \frac{(c_{i,\,q_1} + P)(1 - R_{q_1}^{nom}(\infty))}{\int_0^\infty R_{q_1}^{nom}(t)dt} \tag{4.38}$$

$$C_{p_1}^{nom} = \frac{(c_{i,\,p_1} + P)(1 - R_{p_1}^{nom}(\infty))}{\int_0^\infty R_{p_1}^{nom}(t)dt} \tag{4.39}$$

$$C_{q_2}^{nom} = \frac{(c_{i,\,q_2} + P)(1 - R_{q_2}^{nom}(\infty))}{\int_0^\infty R_{q_2}^{nom}(t)dt} \tag{4.40}$$

$$C_{p_2}^{nom} = \frac{(c_{i,\,p_2} + P)(1 - R_{p_2}^{nom}(\infty))}{\int_0^\infty R_{p_2}^{nom}(t)dt} \tag{4.41}$$

$$C_g^{nom} = C_{q_1}^{nom} + C_{p_1}^{nom} + C_{q_2}^{nom} + C_{p_2}^{nom} \tag{4.42}$$

Avec les coûts d'acquisition des composants suivants :
$c_{i,\,q_1} = 900$ euros, $c_{i,\,p_1} = 440$ euros, $c_{i,\,q_2} = 820$ euros et $c_{i,\,p_2} = 700$ euros.
et le coût d'indisponibilité est $P = 1000$ euros.

Structure $\mathcal{S}^1$

Rappelons que la cuve 1 n'est pas exploitée par le système suivant cette structure, par conséquent la fiabilité du système dépend uniquement de la fiabilité de la cuve 2. Pour une durée de fonctionnement désirée T_d, la fiabilité du système est :

$$R_g^1(T_d) = R_{q_2}^1(T_d)R_{p_2}^1(T_d))) \tag{4.43}$$

Avec

$$\begin{array}{ll} R^1_{q_2}(t) = e^{-\lambda^1_{q2}(q_2).t} & \\ R^1_{p_2}(t) = e^{-\lambda^1_{p_2}(p_2).t} & \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \lambda^1_{q_2}(q_2) = \lambda_{0,q_2} e^{(\beta_3.q^1_2)} \\ \lambda^1_{p_2}(p_2) = \lambda_{0,p_2} e^{(\beta_4.p^1_2)} \end{array} \tag{4.44}$$

q^1_2 et p^1_2 représentent les valeurs finales des commandes direcetement liées aux charges appliquées sur les actionneurs (pompes et résistances) de la cuve 2. $q^1_2(\infty)$ et $p^1_2(\infty)$ dépendent directement des valeurs des objectifs locaux h^1_2 et t^1_2 de la cuve 2 permettant d'assurer des objectifs globaux h^1_3 et t^1_3.

De la même manière, le coût du système ne dépend que du coût de la cuve 2 :

$$C^1_{q_2} = \frac{(c_{i,\,q_2} + P)(1 - R^1_{q_2}(T_d))}{\int_0^{T_d} R^1_{q_2}(t)dt} \tag{4.45}$$

$$C^1_{p_2} = \frac{(c_{i,\,p_2} + P)(1 - R^1_{p_2}(T_d))}{\int_0^{T_d} R^1_{p_2}(t)dt} \tag{4.46}$$

$$C^1_g = C^1_{q_2} + C^1_{p_2} \tag{4.47}$$

Structure $\mathcal{S}^2$

Contrairement à la structure $\mathcal{S}^1$, la formule de la fiabilité du système dans ce cas reste la même que celle de la stucture nominale. En revanche les valeurs des commandes dépendent des nouvelles conditions de fonctionnement de la structure, sachant que p_1 est fixée à $\beta^f \,.\, p_{1,max}$.

$$R^2_g(T_d) = (1 - (1 - R^2_{q_1}(T_d)R^2_{p_1}(T_d))(1 - R^2_{q_2}(T_d)R^2_{p_2}(T_d))) \tag{4.48}$$

$$\begin{array}{ll} R^2_{q_1}(t) = e^{-\lambda^2_{q_1}(q_1).t} & \\ R^2_{p_1}(t) = e^{-\lambda^2_{p_1}(p_1).t} & \\ R^2_{q_2}(t) = e^{-\lambda^2_{q_2}(q_2).t} & \\ R^2_{p_2}(t) = e^{-\lambda^2_{p_2}(p_2).t} & \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \lambda^2_{q_1}(q_1) = \lambda_{0,q_1} e^{(\beta_1.q^2_1)} \\ \lambda^2_{p_1}(p_1) = \lambda_{0,p_1} e^{(\beta_2\,.\,\beta^f\,.\,p_{1,max})} \\ \lambda^2_{q_2}(q_2) = \lambda_{0,q_2} e^{(\beta_3.q^2_2)} \\ \lambda^2_{p_2}(p_2) = \lambda_{0,p_2} e^{(\beta_4.p^2_2)} \end{array} \tag{4.49}$$

Concernant le coût du système, il est donné par la somme des coûts de tous les composants utilisés par les deux cuves 1 et 2 donnés par :

$$C^2_{q_1} = \frac{(c_{i,\,q_1} + P)(1 - R^2_{q_1}(T_d))}{\int_0^{T_d} R^2_{q_1}(t)dt} \tag{4.50}$$

$$C^2_{p_1} = \frac{(c_{i,\,p_1} + P)(1 - R^2_{p_1}(T_d))}{\int_0^{T_d} R^2_{p_1}(t)dt} \tag{4.51}$$

$$C^2_{q_2} = \frac{(c_{i,\,q_2} + P)(1 - R^2_{q_2}(T_d))}{\int_0^{T_d} R^2_{q_2}(t)dt} \tag{4.52}$$

$$C^2_{p_2} = \frac{(c_{i,\,p_2} + P)(1 - R^2_{p_2}(T_d))}{\int_0^{T_d} R^2_{p_2}(t)dt} \tag{4.53}$$

$$C^2_g = C^2_{q_1} + C^2_{p_1} + C^2_{q_2} + C^2_{p_2} \tag{4.54}$$

Structure $\mathcal{S}^3$

La formule de la fiabilité du système suivant cette dernière structure, est la même du cas nominal avec des valeurs de commandes différentes. Ces dernières dépendent directement des valeurs de références données par toutes les combinaisons possibles présentées précédemment par les équations (4.5). Ce qui implique que la valeur de la fiabilité et du coût finanicer ne sont pas uniques dans ce cas.

$$R_g^3(T_d) = (1 - (1 - R_{q_1}^3(T_d)R_{p_1}^3(T_d))(1 - R_{q_2}^3(T_d)R_{p_2}^3(T_d))) \tag{4.55}$$

$$\begin{array}{ll} R_{q_1}^3(t) = e^{-\lambda_{q_1}^3(q_1).t} & \lambda_{q_1}^3(q_1) = \lambda_{0,q_1} e^{(\beta_1.q_1^3)} \\ R_{p_1}^3(t) = e^{-\lambda_{p_1}^3(p_1).t} \quad \text{avec} & \lambda_{p_1}^3(p_1) = \lambda_{0,p_1} e^{(\beta_2.p_1^3)} \\ R_{q_2}^3(t) = e^{-\lambda_{q_2}^3(q_2).t} & \lambda_{q_2}^3(q_2) = \lambda_{0,q_2} e^{(\beta_3.q_2^3)} \\ R_{p_2}^3(t) = e^{-\lambda_{p_2}^3(p_2).t} & \lambda_{p_2}^3(p_2) = \lambda_{0,p_2} e^{(\beta_4.p_2^3)} \end{array} \tag{4.56}$$

$$C_{q_1}^3 = \frac{(c_{i,\,q_1} + P)(1 - R_{q_1}^3(T_d))}{\int_0^{T_d} R_{q_1}^3(t)dt} \tag{4.57}$$

$$C_{p_1}^3 = \frac{(c_{i,\,p_1} + P)(1 - R_{p_1}^3(T_d))}{\int_0^{T_d} R_{p_1}^3(t)dt} \tag{4.58}$$

$$C_{q_2}^3 = \frac{(c_{i,\,q_2} + P)(1 - R_{q_2}^3(T_d))}{\int_0^{T_d} R_{q_2}^3(t)dt} \tag{4.59}$$

$$C_{p_2}^3 = \frac{(c_{i,\,p_2} + P)(1 - R_{p_2}^3(T_d))}{\int_0^{T_d} R_{p_2}^3(t)dt} \tag{4.60}$$

$$C_g^3 = C_{q_1}^3 + C_{p_1}^3 + C_{q_2}^3 + C_{p_2}^3 \tag{4.61}$$

Dans la section suivante, nous illustrons les différents résultats théoriques à l'aide de simulations.

4.8 Simulations

Dans tous les scénarios simulés, les objectifs globaux souhaités en terme de références sont fixés à $h_{3,ref} = 0.2\,m$ et $t_{3,ref} = 21\,^{\circ}C$.

L'instant d'apparition du défaut est $t_f = 3500s$ et l'instant de la renconfiguration est $t_r = 3510s$, en supposant un retard à la détection de 10s.

La limite de fiabilité désirée est $R^* = 0.60$ et la contrainte du coût unitaire est fixée à $C^* = 0.10\,\text{euro/h}$.

Cas du système nominal

Pour illustrer les performances de l'approche multimodèle proposée, nous supposons que les objectifs locaux $(h_{1,ref},\ t_{1,ref})$ et $(h_{2,ref},\ t_{2,ref})$ prennent plusieurs valeurs $(0.2\,m,\ 21\,^{\circ}C)$, $(0.2\,m,\ 21\,^{\circ}C)$ entre $t_0 = 0s$ et $t = 2000s$ et $(0.25\,m,\ 22.5\,^{\circ}C)$, $(0.1555\,m,\ 19.1\,^{\circ}C)$ durant l'intervalle $[2000s\,, 5000s]$ et $(0.15\,m\,20\,^{\circ}C)$, $(0.257\,m,\ 21.75\,^{\circ}C)$ de $t = 5000s$ jusqu'à $t = 7000s$.

La figure (4.13) fait apparaître l'ensemble des signaux de commandes q_1, p_1, q_2 et p_2 et de mesures h_1, h_2, t_1 et t_2 des sous systèmes locaux (cuve 1 et cuve 2) tandis que la figure (4.14) représente les objectifs globaux du système h_3 et t_3. Les changements des valeurs de références $h_{1,ref}$, $t_{1,ref}$, $h_{2,ref}$ et $t_{2,ref}$) aux instants $t = 2000s$ et $t = 5000s$ conduisent à des changements aux niveaux des commandes q_1, p_1, q_2 et p_2. Nous remarquons qu'il y a des dérives au niveau de h_3 et t_3 aux instants $t = 2000s$ et $t = 5000s$ due aux changements des valeurs de références.

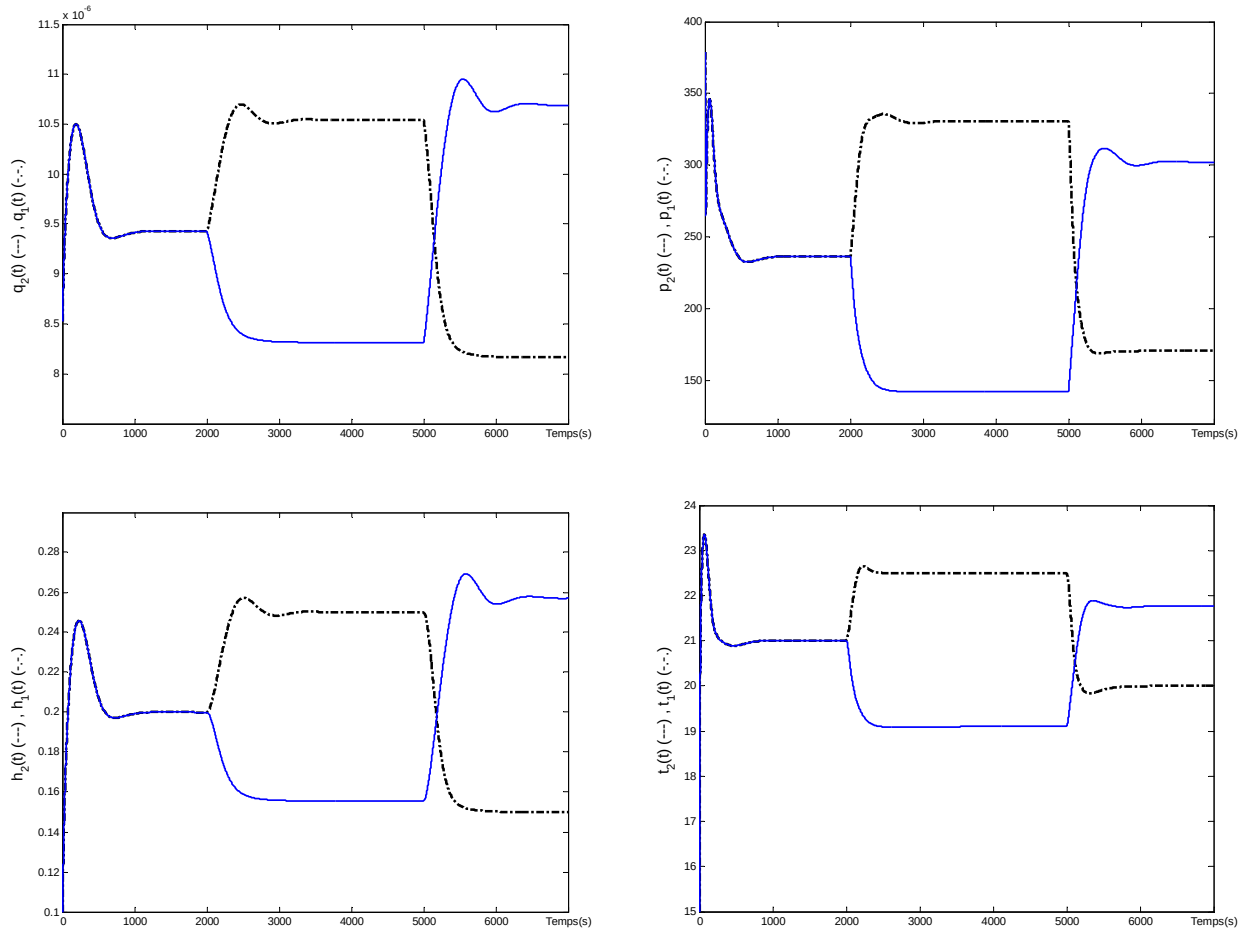


FIG. 4.13 – Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 dans le cas nominal

Les changements des références permettent d'illustrer l'efficacité des lois de commande synthétisées pour les modèles locaux $\sum_{i,j}$ définis dans la section "multimodèle" (4.3.1). Notons que durant cette simulation plusieurs modèles locaux sont activés suivant les valeurs des sorties.

Nous pouvons vérifier que les régulateurs nominaux donnés par les tableaux (C.3) et (C.4) (*Cf Annexe C*) permettent d'asservir les sorties $h_1(t)$, $t_1(t)$, $h_2(t)$ et $t_2(t)$ aux références $h_{1,ref}$, $t_{1,ref}$,

$h_{2,ref}$ et $t_{2,ref}$ durant tous les intervalles. Les objectifs globaux, h_3 et t_3 rejoignant les valeurs de références $h_{3,ref} = 0.2\,m$ et $t_{3,ref} = 21\,^{\circ}C$ comme illustré à la figure (4.14).

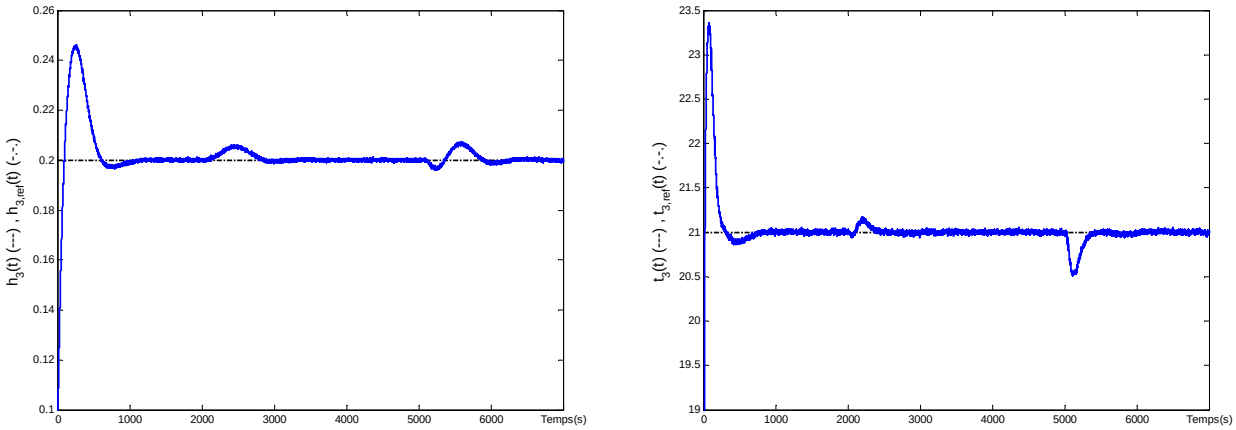


FIG. 4.14 – Les objectifs globaux h_3 et t_3

Notons que l'ensemble de défauts actionneurs considérés lors des simulations suivantes sont de types biais et ont des amplitudes de $\beta^f = 40\%$ et $\beta^f = 70\%$ de la commande p_1 de la cuve 1. Ils apparaîssent à l'instant $t_f = 3500s$. La période de fonctionnement désirée après l'apparition du défaut est fixée à $T_d = 10000h$.

Cas du système défaillant $\beta^f = 40\%$

Nous montrons sur la figure (4.15) l'effet du défaut actionneur de la puissance p_1 sur le niveau et la température du liquide dans la cuve 1 de part la régulation. Le défaut agit directement sur la température t_1, mais il n'influence pas le niveau h_1. La figure (4.16) illustre l'effet du défaut sur les objectifs globaux, puisqu'ils dépendent directement de l'ensemble des objectifs locaux.

Nous remarquons qu'après un certain temps la température du liquide rejoint la référence, cela est du à l'action intégrale mise entre la mesure et la référence, mais le défaut existe (Fig. (4.15)).

L'effet du défaut peut être remarqué également au niveau des valeurs propres du système, les valeurs propres de chacun des modèles locaux de la cuve 1 sont données par $\begin{bmatrix} -0.005773 & -0.0011186 & -0.00015243 & -0.0001341 \end{bmatrix}$. Rappelons que les valeurs propres du sous système nominal sont $\begin{bmatrix} -0.0088 & -0.0015 & -0.0001 & -0.0001 \end{bmatrix}$. Nous pouvons constater qu'il y a des écarts entre les valeurs propres du cas nominal et celles du cas défaillant, ce qui influent la dynamique du système.

Finalement, les modèles locaux du sous système s_1 en boucle fermée ne suivent plus les modèles nominaux $M^{nom}_{1_{(i,j)}}$, nous pouvons vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{bmatrix} A_{1_{(i,j)}} - B^f_{1_{(i,j)}} K_{1_{(i,j)}} & -B^f_{1_{(i,j)}} G_{1_{(i,j)}} \\ -C_{1_{(i,j)}} & 0_2 \end{bmatrix} \neq M^{nom}_{1_{(i,j)}}$$

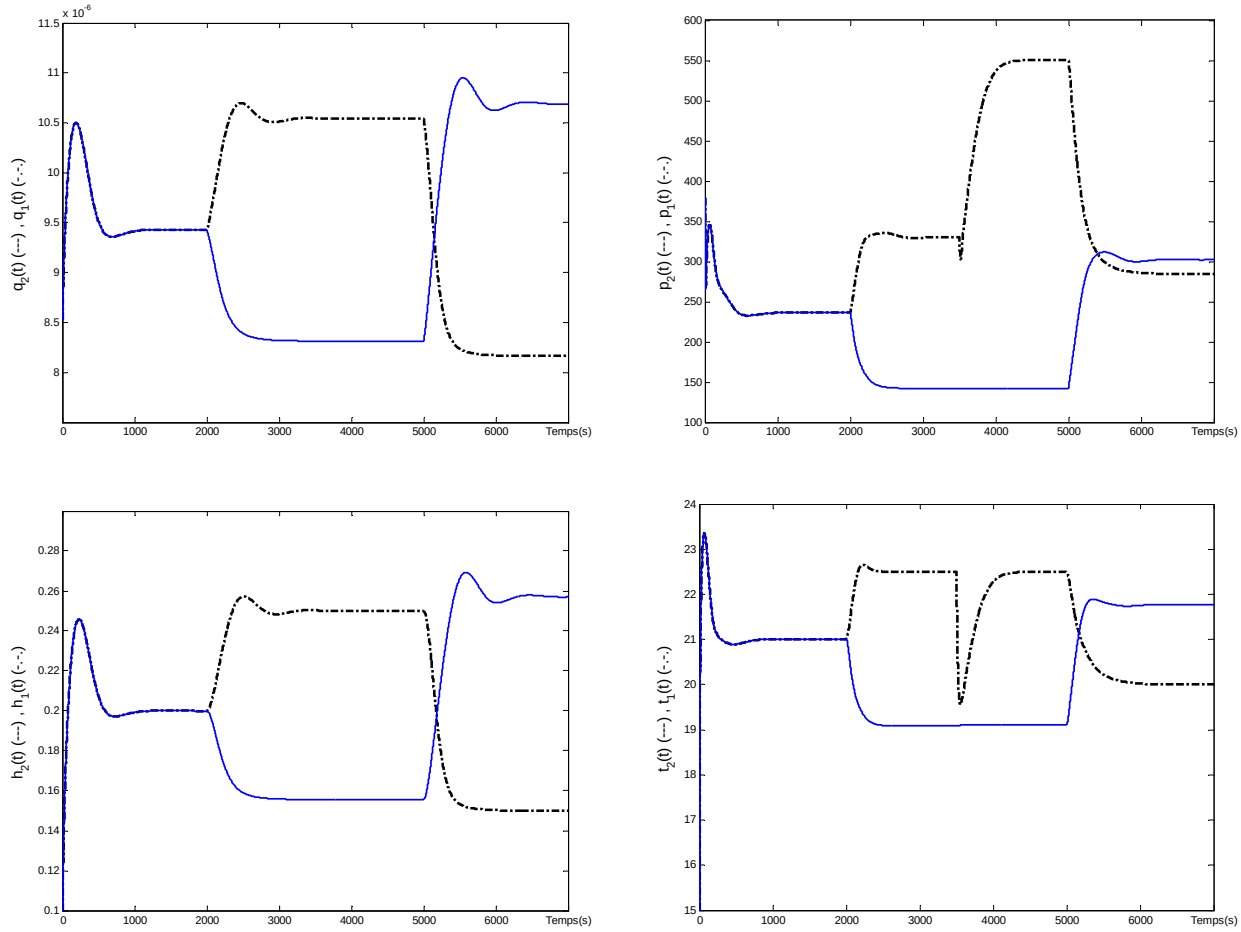


FIG. 4.15 – Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 dans le cas défaillant $\beta^f = 40\%$

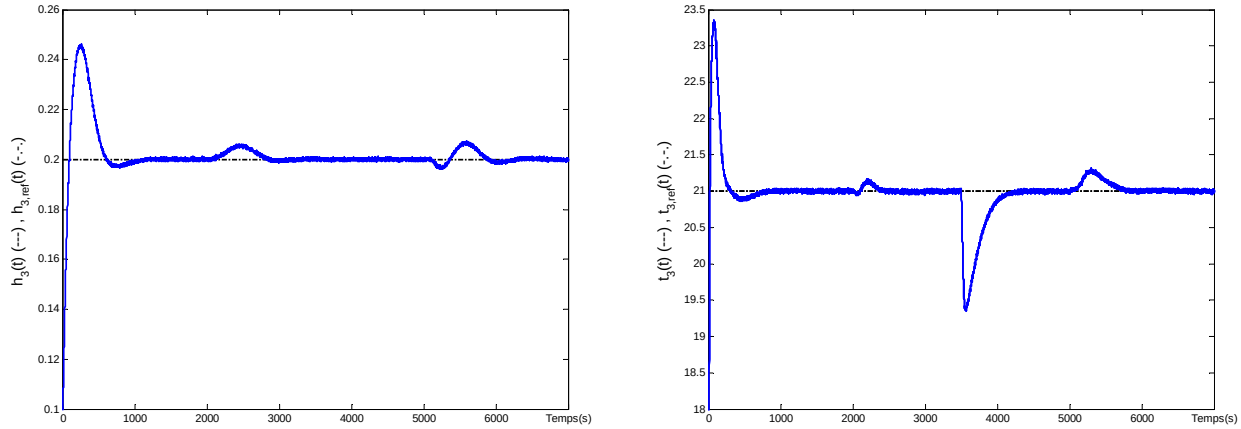


FIG. 4.16 – Les objectifs globaux h_3 et t_3 dans le cas défaillant $\beta^f = 40\%$

Cas du système reconfiguré $\beta^f = 40\%$

Le tableau (4.3) présente les valeurs des objectifs locaux h_1, t_1, h_2 et t_2 ainsi que les objectifs globaux h_3 et t_3 du système utilisant les trois structures $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$. Les fiabilités, les coûts des sous systèmes et du système complet et l'indice de performances statiques globales ainsique l'indice des performances des régulateurs sont également présentés dans le tableau.

L'indice $\mathcal{J}^m$ est la somme de $\mathcal{J}_{statique}$ et $\mathcal{J}_{regulateur}$ chacun pondéré par un poids ρ définis par l'équation (4.1). Dans cet exemple les poids sont égaux et $\rho = 0.5$.

Nous remarquons que les structures $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^3$ respectent les contraintes de fiabilité $R^* = 0.60$ et de coût $C^* = 0.10\,\text{euro/h}$, en revanche la contrainte C^* n'est pas respectée par la structure $\mathcal{S}^2$. La structure $\mathcal{S}^3$ est sélectionnée optimale car son indice de performances $\mathcal{J}^3$ est supérieur que $\mathcal{J}^1$ l'indice de la structure $\mathcal{S}^1$.

La structure $\mathcal{S}^3$ est validée à l'instant $t_r = 3510s$, les nouvelles lois de commande de tous les modèles locaux $\sum_{1_{(i,j)}}$ sont appliquées, elles sont représentées par les gains $K_{1_{i,j}}$ et $G_{1_{i,j}}$ donnés par le tableau (C.5) (*cf Annexe C*). Notons que ces lois de commande permettent d'assurer des valeurs propres de $\pm\,10\%$ des valeurs propres nominales.

La figure (4.18) fait apparaître les commandes q_1, q_2 et p_1, p_2 correpondant aux valeurs d'objectifs locaux h_1, h_2 et t_1, t_2 qui changent des valeurs nominales aux valeurs indiquées par le tableau (4.3). Les sorties h_1, h_2 et t_1, t_2 suivent respectivement les références $0.1932\,m$, $0.2068\,m$ et $19.4647\,^\circ C$, $22.4729\,^\circ C$ conformément aux valeurs de la structure $\mathcal{S}^3$ indiquées au tableau (4.3).

Ces nouvelles valeurs d'objectifs locaux permettent d'atteindre les objectifs globaux comme l'illustre la figure (4.17). Une dérive au niveau de h_3 peut être remarquée lors de la validation de la nouvelle structure due au changement des valeurs de références h_1 et h_2 dépendant de la dynamique des deux cuves 1 et 2. Pour la même raison, une dérive existe au niveau de la température t_3 mais de manière moins significative qu'en l'absence du système reconfiguré.

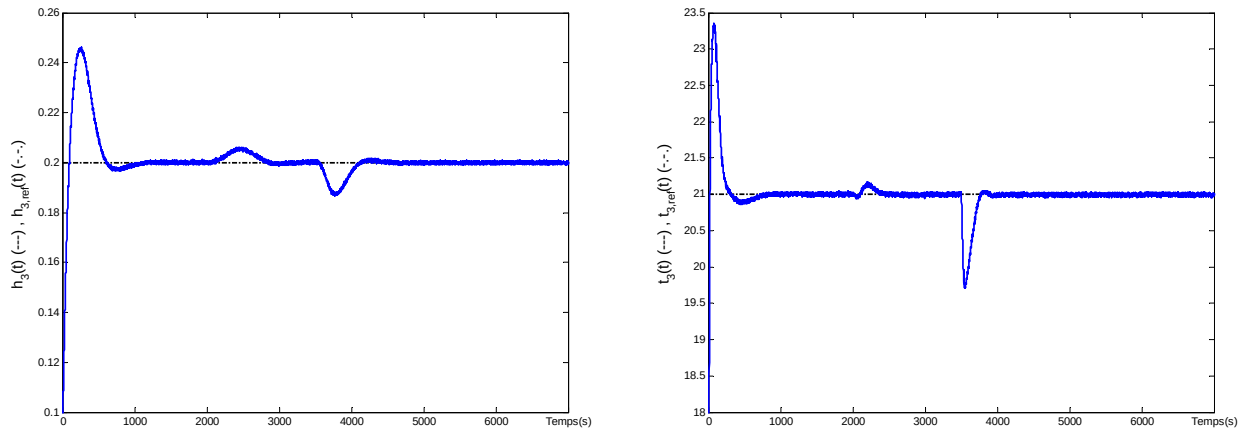


FIG. 4.17 – Les objectifs globaux h_3 et t_3 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 40\%$)

	$\mathcal{S}^1$	$\mathcal{S}^2$	$\mathcal{S}^3$
h_1	—	0.0990	0.1932
t_1	—	25.818	19.4647
h_2	0.8	0.3361	0.2068
t_2	20.978	18.241	22.4729
R_{q_1}	—	0.92	0.9074
R_{p_1}	—	0.49	0.7836
R_{q_2}	0.76	0.89	0.9155
R_{p_2}	0.79	0.95	0.8367
C_{q_1}	—	0.0141	0.0185
C_{p_1}	—	0.1012	0.0351
C_{q_2}	0.0427	0.0212	0.0161
C_{p_2}	0.0472	0.0080	0.0303
h_3	0.2	0.2	0.2
t_3	20.978	20.907	21
$\mathcal{J}_{statique}$	0.001	0.0044	$5.6296 * 10^{-4}$
$\mathcal{J}_{régulateur}$	0	$8.5321 * 10^{-5}$	$8.5321 * 10^{-5}$
$\mathcal{J}^m$	$5.0 * 10^{-4}$	$2.2426 * 10^{-3}$	$3.2414 * 10^{-4}$
C_g	0.0899	0.1445	0.0999
$R_g(T_d)$	0.60	0.9185	0.9324

TAB. 4.3 – Performances globales et locales du système selon $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta^f = 40\%$)

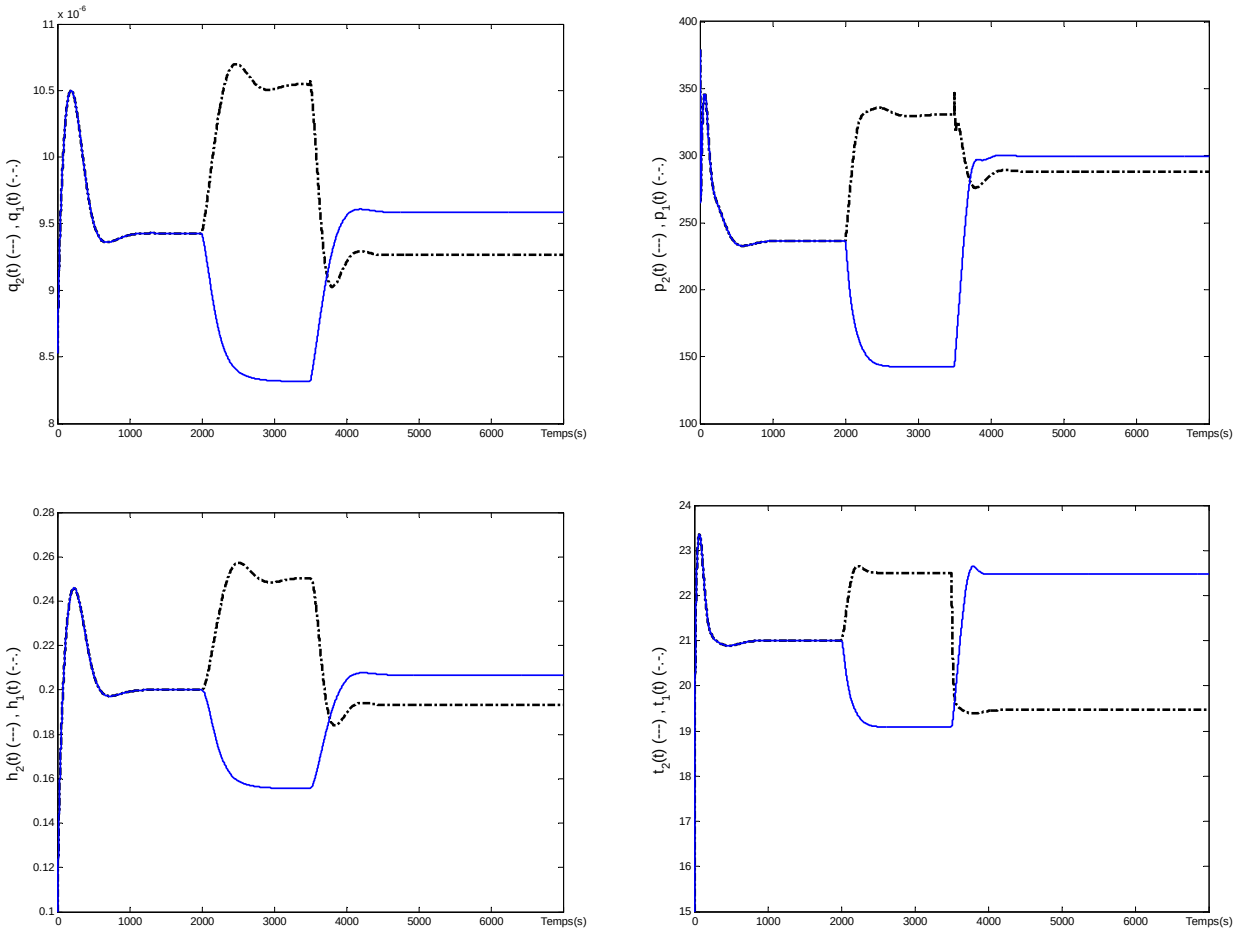


FIG. 4.18 – Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 40\%$)

Cas du système défaillant $\beta^f = 70\%$

Les signaux de commande de débits et de mesures des niveaux h_1, h_2 et h_3 sont identiques à ceux du cas défaillant précédent (4.8), car le défaut affecte les températures et non pas le niveau.

À la figure (4.20), nous remarquons qu'après l'occurrence du défaut à l'instant $t_f = 3500\,s$, la température t_1 diminue de sa valeur nominale $22.50\,^{\circ}C$ jusqu'à une nouvelle valeur $17.80\,^{\circ}C$. La présence de l'intégrale compense l'écart entre la référence et la température t_1 permettant d'avoir une nouvelle valeur de $t_1 = 19.43\,^{\circ}C$ sans pouvoir rejoindre la référence nominale. Ceci est du à la saturation de la puissance p_1. Ensuite une augmentation de la temprérature t_1 est observée malgré une puissance p_1 constante, ceci est due à la diminution de la référence du niveau $h_{1,ref}$.

Ces changements sur les objectifs locaux ont un impact sur l'objectif global t_3 comme illustré à la figure (4.19). Dès l'instant d'apparition du défaut $t_f = 3500\,s$, la température t_3 ne rejoint plus la référence $t_{3,ref} = 21^{\circ}C$ jusqu'à $t = 5000\,s$ l'instant de changement de la référence du niveau h_1 permettant d'augmenter la température t_1. Ce qui est justifié par le fait que le défaut $\beta^f = 70\%$ est plus sévère que le défaut du cas précédent (4.8) correspondant $\beta^f = 40\%$.

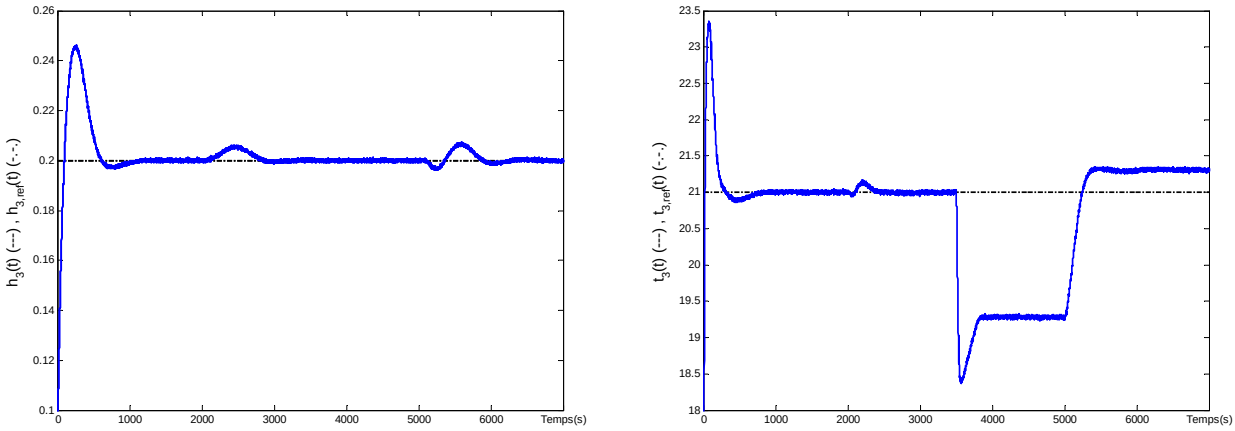


FIG. 4.19 – Les sorties du système dans le cas d'un défaut de $\beta^f = 70\%$

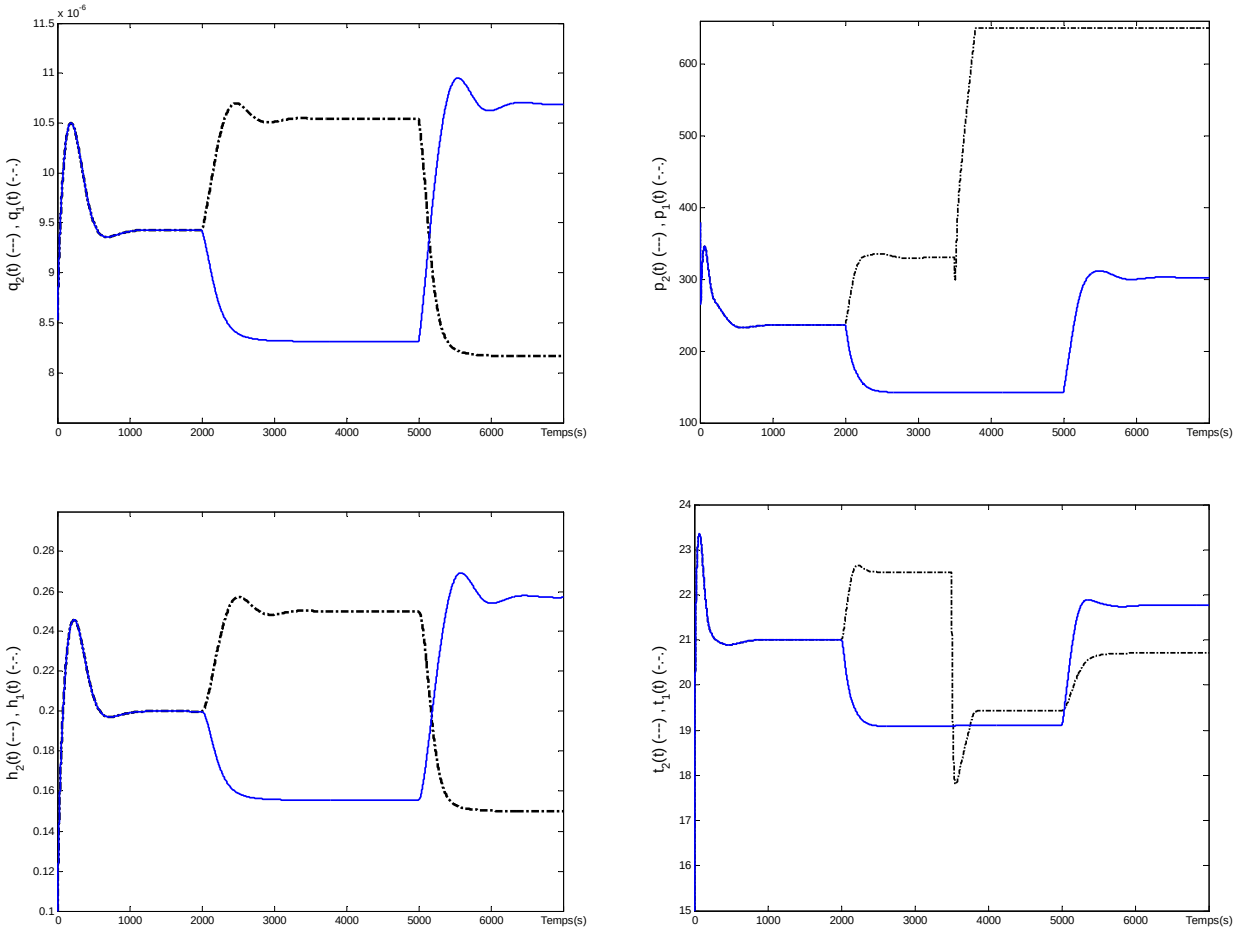


FIG. 4.20 – Les commandes p_1 et p_2 du système dans le cas d'un défaut de $\beta^f = 70\%$

Cas du système reconfiguré $\beta^f = 70\%$

Le tableau (4.21) montre les valeurs des objectifs locaux et globaux du système ainsi que les fiabilités et les coûts et les indices de performances pour toutes les structures après l'occurrence du défaut.

Nous constatons que les valeurs de la structure $\mathcal{S}^1$ (2^{eme} colonne) sont les mêmes valeurs que pour le cas reconfiguré précédent correspondant au défaut $\beta^f = 40\%$ car la structure $\mathcal{S}^1$ n'utilise pas le sous système défaillant (cuve 1).

Nous remarquons également que la température t_1 diminue par rapport à sa valeur dans le cas précédent (défaut $\beta^f = 40\%$), car le défaut actuel $\beta^f = 70\%$ est plus sévère donc il y a une tendance à exploiter moins la résistance de chauffe 1 afin d'augmenter la fiabilité du système.

Suivant les contraintes R^* et C^* et les indices de performances $\mathcal{J}^m$ la structure $\mathcal{S}^1$ possèdant $\mathcal{J}^1$ minimum, est sélectionnée. Ce qui conduit à la deconnexion de la cuve 1. Les objectifs locaux de la cuve 2 sont appliqués, correspondant à $t_2 = 20.978$ et $h_2 = 0.8$ comme l'illustre la figure (4.22). La deconnexion de la cuve 1 est effectuée par la mise à zéro immédiate des valeurs p_1 et q_1 et la fermeture de la connexion entre la cuve 1 et la cuve 3. Ce qui justifie la baisse du niveau h_3 jusqu'à $0.05\,m$ égale à $\left(\frac{\alpha_2\sqrt{h_2}}{\alpha_3}\right)^2$ et l'augmentation de t_3 prennant par la suite les valeurs de références désirées comme illustré à la figure (4.21). Ces variations de références permettent d'illustrer l'efficacité des lois de commandes q_2 et p_2 en diminuant les écarts entre les références et les mesures. Les sorties h_2 et t_2 rejoignent les valeurs de références ainsi que les objectifs globaux h_3 et t_3.

Notons que les gains des lois de commande de la cuve 2 prennent les mêmes valeurs que pour le cas nominal, étant donné le défaut n'influence que la cuve déconnectée (cuve 1).

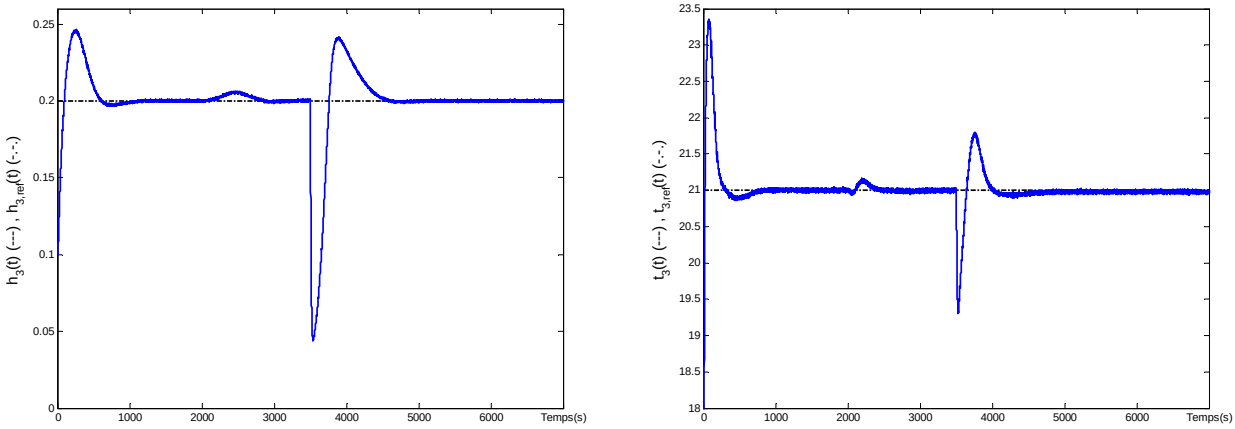


FIG. 4.21 – Les objectifs globaux h_3 et t_3 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 70\%$)

	$\mathcal{S}^1$	$\mathcal{S}^2$	$\mathcal{S}^3$
h_1	—	0.20	0.1683
t_1	—	19.9481	17.2711
h_2	0.8	0.20	0.2174
t_2	20.978	22.023	22.6701
R_{q_1}	—	0.9060	0.9129
R_{p_1}	—	0.2258	0.7972
R_{q_2}	0.76	0.9169	0.9135
R_{p_2}	0.79	0.8607	0.8210
C_{q_1}	—	0.0188	0.0173
C_{p_1}	—	0.2143	0.0326
C_{q_2}	0.0427	0.0158	0.0165
C_{p_2}	0.0472	0.0255	0.0335
h_3	0.2	0.2	0.1920
t_3	20.978	20.974	20.1431
$\mathcal{J}_{statique}$	0.001	0.0012	0.0806
$\mathcal{J}_{régulateur}$	0	$9.1665 * 10^{-5}$	$9.1665 * 10^{-5}$
$\mathcal{J}^m$	$5.0 * 10^{-4}$	$1.0583 * 10^{-3}$	$4.0345 * 10^{-2}$
C_g	0.0899	0.2743	0.1000
$R_g(T_d)$	0.60	0.8323	0.9319

TAB. 4.4 – Performances globales et locales du système selon $\mathcal{S}^1$, $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^3$ (cas défaut $\beta^f = 70\%$)

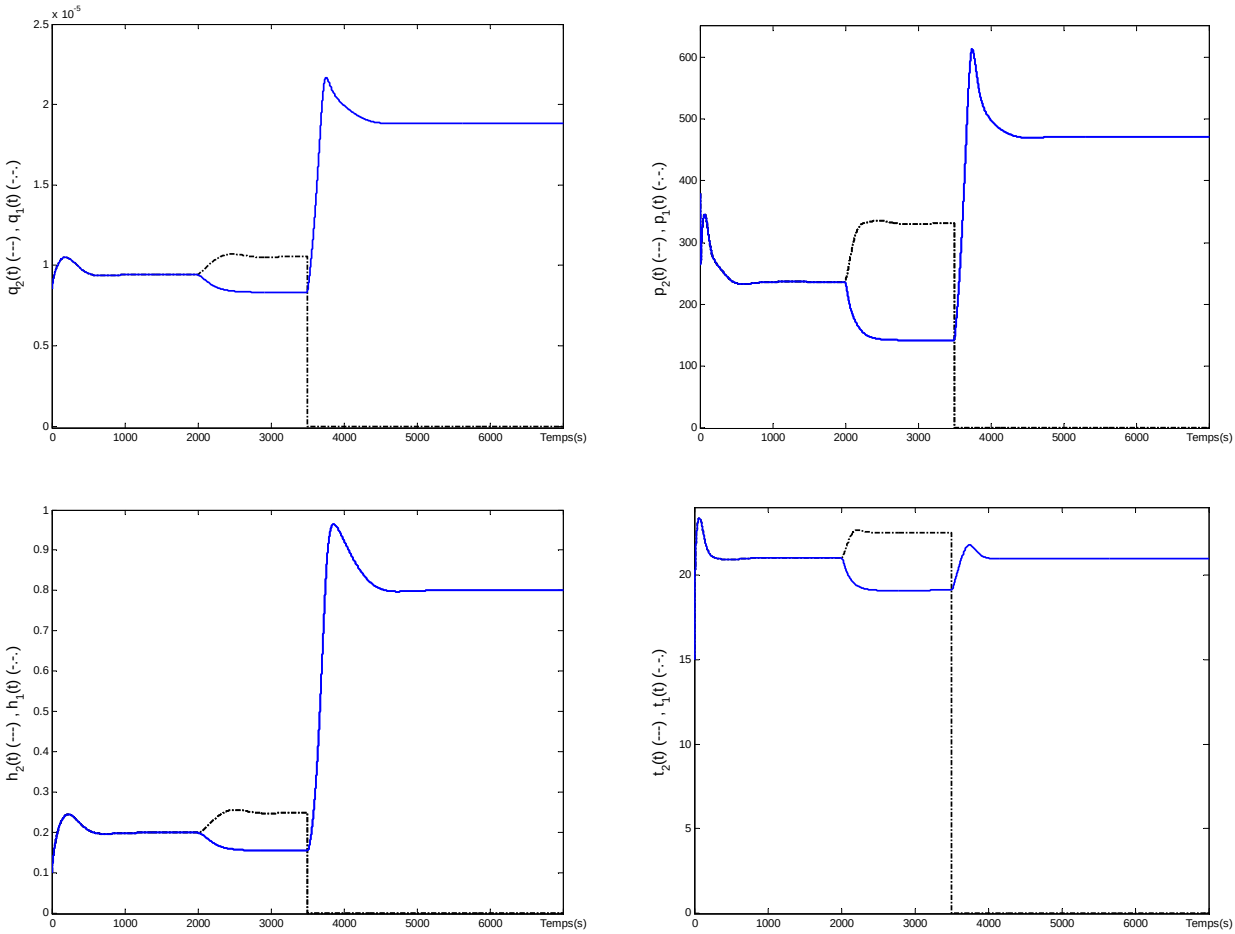


FIG. 4.22 – Commandes et sorties de la cuve 1 et 2 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 70\%$)

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons intégré les deux méthodes développées dans les chapitres précédents en une seule stratégie. Permettant de regrouper la fiabilité, le coût, les performances statiques globales et les peformances des régulateurs locales. Puis nous avons appliqué les différentes méthodes développées dans les chapitres précédents sur un cas concret. Le processus hydraulique et thermique étudié a été décomposé physiquement en deux niveaux :
- Le niveau local représenté par les deux cuves ayant quatre objectifs locaux à atteindre donnés en terme des références de niveau h_1, h_2 et de température t_1, t_2.
- Le niveau global permettant de définir les références locales dans le but d'atteindre les objectifs globaux h_3, t_3 en se basant sur les équations différentielles et algébriques, à la fois entre les cuves 1 et 2 du niveau local et avec la cuve 3.

Le diagramme de fiabilité a été utilisé pour obtenir la décomposition fonctionnelle permettant de fournir les formules utilisées pour calculer la fiabilité et le coût du système complet à partir des fiabilités et des coûts des sous systèmes pour une période de temps de mission spécifiée et prenant en compte les conditions de fonctionnement. Notons que les composants passifs ne sont pas introduits dans l'analyse de la fiabilité. Ce choix se justifie par l'hypothèse que nous avons posé pour simplifier le problème. Cependant, il est possible d'introduire les composants passifs dans ce travail et ils seront traités de la même manière que les composants actifs.

Après l'occurrence du défaut, pour chaque structure $\mathcal{S}^m$ définies hors ligne, le coordinateur se charge de :

- Définir en ligne les nouvelles valeur de références des sous systèmes du niveau local en se basant sur les relations entre les objectifs globaux et les objectifs locaux, permettant de minimiser l'erreur statique entre les objectifs globaux nominaux et ceux de la structure $\mathcal{S}^m$. La minimisation s'effectue sous des contraintes de fiabilité et de coût financier, ces derniers changent de valeurs suivant les conditions de fonctionnement des sous systèmes. Les conditions de fonctionnement sont une image des références des sous systèmes.

- Synthétiser en ligne les lois de commande des sous systèmes au niveau local, en utilisant la méthode PIM avec les modifications du chapitre 3 et calculer un indice de performances des régulateurs en terme d'écarts entre les valeurs propres du cas nominal et défaillant.

- Sélectionner la meilleure structure dont l'indice de performances statiques et l'indice des régulateurs sont faibles et une fiabilité maximale et un coût minimal.

- La mise en œuvre de la nouvelle structure en appliquant les références et les lois de commande appropriées à la structure choisie optimale.

Les résultats obtenus en simulations permettent de montrer l'éfficacité des méthodes proposées.

Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse porte sur les systèmes tolérants aux défauts, plus précisément la synthèse d'une méthode de reconfiguration et/ou de restructuration intégrant la fiabilité des composants. A l'issue de la détection et l'isolation d'un défaut dans le système, la tâche de reconfiguration permet d'amener le système dans un état de fonctionnement permettant d'assurer des performances globales proches de celles désirées tout en préservant la stabilité.

Dans ce travail, le système est supposé composé de deux niveaux : un niveau global et un niveau local.
- au niveau local, plusieurs sous-systèmes sont interconnectés possédant chacun leur objectif local, l'ensemble des objectifs locaux pouvant être regroupés pour assurer les performances globales.
- au niveau global, un coordinateur assure des objectifs globaux en prenant en compte la structure du système en terme d'interactions entre les sous systèmes.

Après l'apparition du défaut, sous l'hypothèse qu'il existe plusieurs structures de fonctionnement résultant de la déconnexion ou le remplacement des sous systèmes défaillants, chaque structure impose des nouvelles conditions de fonctionnement et par conséquent une nouvelle valeur de la fiabilité et du coût des composants. Parmi les structures de fonctionnement, une structure optimale doit être choisie. Dans un contexte multicritères, ce travail de recherche propose de déterminer la structure optimale en intégrant les performances statiques et dynamiques du système, une estimation en ligne de la fiabilité et le coût des composants.

Dans un premier temps, les systèmes tolérants aux défauts (FTC), leurs objectifs, les différents types des systèmes FTC et leurs structures sont présentés. Nous avons exposé également une brève présentation des concepts de la fiabilité des systèmes et une synthèse des travaux existants intégrant l'analyse de la fiabilité dans la conception des systèmes tolérants aux défauts. Ce qui permet de positionner le travail de thèse consacré aux systèmes tolérants aux défauts et de préciser dans ce contexte la problématique inhérente à l'intégration de l'analyse de la fiabilité et du coût financier avec la synthèse des lois de commande reconfigurées au sein des méthodes de reconfiguration.

Dans le second chapitre, une méthode de reconfiguration est proposée traitant uniquement les performances statiques conduisant à considérer la fiabilité et le coût des composants. La détermination de la structure optimale parmi l'ensemble des structures connues a priori se fonde sur une estimation en ligne de la fiabilité et des coûts des composants. Dès que la structure optimale est fixée, la nouvelle structure et les valeurs des performances locales en terme de références des sous systèmes sont mises en œuvre afin d'assurer les performances globales statiques. Un

exemple académique est considéré permettant d'illustrer et de valider la méthode développée.

Une seconde méthode de reconfiguration utilisant les performances des régulateurs au niveau local est développée. La méthode pseudo inverse est utilisée pour la synthèse des régulateurs de chaque sous système. Des modifications sont proposées permettant d'améliorer les performances de la méthode pseudo inverse dans le but d'assurer non seulement la stabilité du système mais également d'atteindre des objectifs dynamiques définis a priori. Un indice de performances dynamiques associé à chaque structure est ensuite calculé et intégré dans le critère de choix de la structure optimale. Pour illustrer cette nouvelle méthode, un second exemple académique est présenté.

Les deux méthodes développées précédemment sont intégrées afin de définir une stratégie tolérante aux défauts. Elle est appliquée sur un système hydraulique et thermique à trois cuves exploité comme une plate forme de simulation test dans le cadre du projet Européen IFATIS. Les simulations effectuées mettent en relief les résultats obtenus et l'apport des méthodes développées sur un système représenté sous forme d'un multimodèle.

Il est à noter qu'une partie de ces travaux a été publiée dans [Guenab et al., 2004], [Guenab et al., 2005] et [Guenab et al., 2006]. Dans la premiere publication, le choix de la structure n'était basé que sur le taux de défaillance des composants dépendant des conditions de fonctionnement. Dans [Guenab et al., 2005] à partir des taux de défaillance, les fiabilités des sous systèmes sont calculées pour une durée de mission désirée. Le critère de choix de la structure optimale dépend des fiabilités et des coûts en prennant en compte uniquement les objectifs statiques. La méthode a été étendue dans [Guenab et al., 2006] où les performances dynamiques ont été pris en compte.

En tant que perspectives, il serait intéressant de pouvoir déterminer les structures en ligne en se basant sur les informations concernant les interconnexions entre les sous systèmes. Ceci peut être probablement réalisé en exploitant l'analyse structurelle des systèmes et des outils graphiques puissants, nous renvoyons le lecteur à [Dion et al., 2003] et [Guenab, 2003].

D'un point de vue application, cette méthode devrait être implantée dans le cadre d'un système avec plusieurs niveaux. La transposition à des systèmes multi niveaux ne devrait pas poser de problème.

Nous avons supposé que le bloc diagnostic fonctionne correctement et que le défaut est détecté et estimé parfaitement, nous n'avons pas traité les problèmes de commutation d'une structure à autre, ce qui n'est pas le sujet de nos travaux de recherche. Nous avons supposé que le système défaillant $(A^f,\ B^f\, C^f)$ est parfaitement modélisé, pour répondre à une problématique plus réaliste il serait intéressant d'étudier des méthodes qui permettent de lever cette hypothèse. Nous avons supposé également que le module diagnostic fonctionne correctement dans le cas où les sous systèmes défaillants sont déconnectés, or le module diagnostic est généralement conçu à base du système nominal et nécessite des signaux qui peuvent être issus des sous systèmes déconnectés, ceci signifie que le bloc de diagnostic pouvant ne plus être opérationnel après la reconfiguration, cette hypothèse constitue une piste à explorer. Dans le même esprit, nous souhaiterions intégrer la fiabilité du bloc diagnostic dans la stratégie développée.

Annexe A

Fiabilité des systèmes

Composants en série

Soit un système S contient n composants C_i en série, $i = 1 \dots n$.

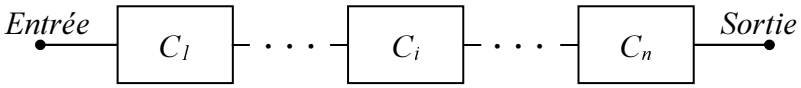


FIG. A.1 – Système avec n composants en séries

La présence d'une défaillance sur <u>*au moins*</u> l'un des composants produit une défaillance du système.

$$R_{sys}(t) = R_1(t) \quad \cap \quad R_2(t) \quad \cap ...R_n(t) \qquad R_i(t) : \text{la fiabilité du } i^{\text{ème}} \text{ composant}$$

Si les composants sont indépendants alors :

$$R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{A.1}$$

Pour calculer le taux de défaillance du système complet, nous avons :

$$R_i(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_i(t)dt\right\} \qquad i^{\text{ème}}composant \quad i = 1 \dots n \tag{A.2}$$

$$R_{sys}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Lambda_{sys}(t)dt\right\} \qquad \text{pour le système complet} \tag{A.3}$$

Donc,

$$R_{sys}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_1(t)dt\right\}.\exp\left\{-\int_0^t \lambda_2(t)dt\right\}\dots\exp\left\{-\int_0^t \lambda_n(t)dt\right\} \tag{A.4}$$

$$R_{sys}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)dt\right\} \tag{A.5}$$

$$\Rightarrow \qquad \Lambda_{sys}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \tag{A.6}$$

Durant la durée de vie utile, le taux de défaillance de chaque composant peut être considéré constant, dans la cas de composants en série uniquement, le taux de défaillance du système est aussi constant.
Par conséquent, le temps moyen de fonctionnement avant la première défaillance du système complet est :

$$MTTF_{sys} = \frac{1}{\Lambda_{sys}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{A.7}$$

Composants en parallèle

Soit un système constitué de n composants en parallèle,

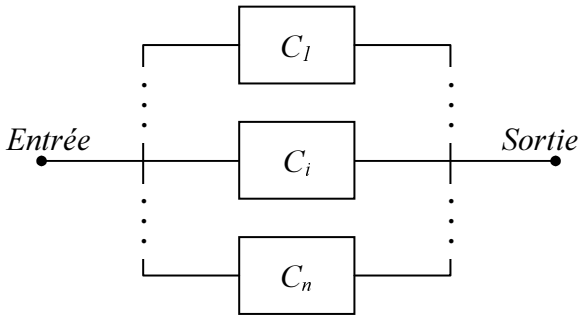


FIG. A.2 – Système avec n composants en parallèles

La présence d'une défaillance sur *tous* les composants produit une défaillance du système.
La fiabilité du système est :

$$R_{sys}(t) = R_1(t) \quad \cup \quad R_2(t) \quad \cup ...R_n(t) \qquad R_i(t) : \text{la fiabilité du } i^{\text{ème}} \text{ composant} \tag{A.8}$$

$$\overline{R_{sys}(t)} = \overline{R_1(t) \quad \cup \quad R_2(t) \quad \cup ...R_n(t)} \tag{A.9}$$

$$\begin{array}{c} Q_{sys}(t) = Q_1(t) \quad \cap \quad Q_2(t) \quad \cap ...Q_n(t) \\ 1 - R_{sys}(t) = (1 - R_1(t)) \quad \cap \quad (1 - R_2(t)) \quad \cap ...(1 - R_n(t)) \end{array} \tag{A.10}$$

$$R_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)) \tag{A.11}$$

Pour calculer le taux de défaillance d'un système parallèle et son MTTF, nous proposons les simplifications suivantes : $n = 2$:

$$\begin{array}{r} R_{sys}(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) \\ = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t).R_2(t) \end{array} \tag{A.12}$$

$$R_{sys}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_1(t)dt\right\} + \exp\left\{-\int_0^t \lambda_2(t)dt\right\} - \exp\left\{-\int_0^t \lambda_1(t)dt\right\}.\exp\left\{-\int_0^t \lambda_2(t)dt\right\} \tag{A.13}$$

Dans le cas des λ_i constants :

$$MTTF_{sys} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{A.14}$$

Par contre, le taux de défaillance du système Λ_{sys} dépend du temps dans ce cas, malgré les taux de défaillances des composants constants :

$$\text{Par définition} \qquad \Lambda_{sys}(t) = \frac{-\frac{dR_{sys}}{dt}(t)}{R_{sys}(t)} \tag{A.15}$$

Avec

$$\frac{dR_{sys}}{dt}(t) = -\lambda_1 \exp\{-\lambda_1.t\} - \lambda_2 \exp\{-\lambda_2.t\} + (\lambda_1 + \lambda_2) \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2).t\} \tag{A.16}$$

$$\Rightarrow \Lambda_{sys}(t) = \frac{\lambda_1 \exp\{-\lambda_1.t\} + \lambda_2 \exp\{-\lambda_2.t\} - (\lambda_1 + \lambda_2) \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2).t\}}{\exp\{-\lambda_1.t\} + \exp\{-\lambda_2.t\} - \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2).t\}} \tag{A.17}$$

Annexe B

Algorithme d'optimisation

fmincon

La fonction *fmincon* permet de trouver le minimum d'une fonction multivariables avec contraintes non-linéaires.

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{min} & f(x) \\ & c(x) \quad \leq \quad 0 \\ & c_{eq}(x) \quad = \quad 0 \\ & A.x \quad \leq \quad b \\ & A_{eq}.x \quad = \quad b_{eq} \\ & l_b \leq 0 \leq u_b \end{array}$$

Avec

$f(x)$:	La fonction à minimiser (*fonction objectif*).
x :	Vecteur des variables.
l_b :	Vecteur des limites inférieures de x.
u_b :	Vecteur des limites supérieures de x.
$c(x)$:	Fonction des contraintes d'inégalité non linéaires.
$c_{eq}(x)$:	Fonction des contraintes d'égalité non linéaires.
A :	Matrice des contraintes d'inégalité linéaires.
A_{eq} :	Matrice des contraintes d'égalité linéaires.

Les fonctions $f(x)$, $c(x)$ et $c_{eq}(x)$ peuvent être des fonctions linéaires ou non linéaires.

Syntaxe générale

$$[x,\ fval,\ exitflag,\ output,\ lambda,\ grad,\ hessian\,] = fmincon(fun,\ x_0,\ A,\ b,\ A_{eq},\ b_{eq},\ l_b,\ u_b,\ nonlcon,\ options,\ p_1,\ p_2,\ \ldots)$$

Commence à partir de x_0 pour trouver le minimum x de la fonction décrite par fun avec les contraintes linéaires d'inégalités $A.x \leq b$ et les contraintes linéaires d'égalités $A.x = b$, à condition que les solutions sont entre l_b les limites inférieures et u_b les limites supérieures. Les

contraintes d'inégalité non linéaires $c(x)$ et les contraintes d'égalité non linéaires $c_{eq}(x)$ sont définies dans la fonction *nonlcon*. $fval$ est la valeur de la fonction objectif à la solution x.

Dans le cas où les fonctions fun et *nonlcon* sont dépendantes des paramètres externes, ces derniers sont passés à travers p_1, p_2, ...

options : détermine des paramètres avancés de l'algorithme d'optimisation utilisé. Pour une description détaillée de ces paramètres, nous renvoyons le lecteur à la documentation de la boîte à outils "Optimization Toolbox" du logiciel $MATLAB^{TM}$ de *mathworks*.

Les paramètres de sorties sont :
- *exitflag* : décrit l'état de sortie,

> 0	La fonction a convergé à la solution trouvée x.
0	Le nombre maximum des itérations a été excédé.
< 0	la fonction n'a pas convergé à la solution.

- *lambda* : les multiplicateurs de Lagrange.

- *output* : contient des informations concernant l'optimisation : le nombre d'itérations, l'algorithme utilisé,...

- *grad* et *hessian* retournent le gradient et le Hessien de la fonction $f(x)$ à la solution x.

Remarques

- La fonction objectif et les fonctions de contraintes doivent être des fonction continues.

Annexe C

Application : valeurs numériques

Les valeurs numériques adoptés sont :

S	0.0154	m^2
c	4180	$J.Kg^{-1}{}^{\circ}C^{-1}$
μ	1000	$J.Kg^{-3}$
α_1	$2.1082 * 10^{-5}$	
α_2	$2.1082 * 10^{-5}$	
α_3	$4.2164 * 10^{-5}$	
t_{i_1}	15	$^{\circ}C$
t_{i_2}	15	$^{\circ}C$
$t_{1,min}$	15	$^{\circ}C$
$t_{2,min}$	18	$^{\circ}C$

$t_{1,max}$	40	$^{\circ}C$
$t_{2,max}$	40	$^{\circ}C$
$h_{1,min}$	0	m
$h_{2,min}$	0	m
$h_{1,max}$	1	m
$h_{2,max}$	1	m
$p_{1,max}$	650	$Watt$
$p_{2,max}$	650	$Watt$
$q_{1,max}$	0.0003	m^3/s
$q_{2,max}$	0.0003	m^3/s

Les matrices A, B, C des modèles locaux et les gains des lois de commandes des modèles locaux sont donnés par les tableaux suivants.

Modèle local	$A_{1_{(i,j)}}$	$B_{1_{(i,j)}}$	$C_{1_{(i,j)}}$
$\sum_{1_{(1,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1623.3766 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -4870.1299 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -8116.8831 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -11363.6364 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -541.1255 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1623.3766 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -2705.6277 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -3787.8788 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -324.6753 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -974.026 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1623.3766 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -2272.7273 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -231.9109 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -695.7328 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1159.5547 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1623.3766 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

TAB. C.1 – Les matrices A, B et C des modèles locaux de la cuve 1

Modèle local	$A_{2_{(i,j)}}$	$B_{2_{(i,j)}}$	$C_{2_{(i,j)}}$
$\sum_{2_{(1,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -64.9351 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -3311.6883 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -6558.4416 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,1)}}$	$\begin{bmatrix} -0.001936 & 0 \\ 0 & -0.003872 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -9805.1948 & 0.00012428 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(1,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -21.645 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1103.8961 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -2186.1472 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,2)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0011177 & 0 \\ 0 & -0.0022355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -3268.3983 & 4.1426e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(1,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -12.987 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -662.3377 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1311.6883 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,3)}}$	$\begin{bmatrix} -0.0008658 & 0 \\ 0 & -0.0017316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1961.039 & 2.4856e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(1,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -9.2764 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -473.0983 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -936.9202 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,4)}}$	$\begin{bmatrix} -0.00073174 & 0 \\ 0 & -0.0014635 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 64.9351 & 0 \\ -1400.7421 & 1.7754e-005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

TAB. C.2 – Les matrices A, B et C des modèles locaux de la cuve 2

Modèle local	$K^{nom}_{1_{(i,j)}}$	$G^{nom}_{1_{(i,j)}}$
$\sum_{1_{(1,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & -1.3129e-020 \\ -67.5885 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 2.1713e-024 \\ -0.030174 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & -3.5999e-021 \\ -202.7655 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 5.9454e-025 \\ -0.090523 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & -1.2705e-020 \\ -337.9425 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 2.223e-024 \\ -0.15087 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & -6.8821e-022 \\ -473.1195 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.1632e-025 \\ -0.21122 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & -1.6941e-021 \\ 97.0118 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 4.1359e-025 \\ -0.030174 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & -1.1858e-020 \\ 291.0354 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.6544e-024 \\ -0.090523 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & -1.9482e-020 \\ 485.059 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 2.5332e-024 \\ -0.15087 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & 1.4823e-021 \\ 679.0826 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -2.068e-025 \\ -0.21122 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & -1.6941e-020 \\ 147.6933 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 2.068e-024 \\ -0.030174 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & -8.4703e-021 \\ 443.08 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.034e-024 \\ -0.090523 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & -1.1858e-020 \\ 738.4667 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.551e-024 \\ -0.15087 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & -3.8116e-021 \\ 1033.8533 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 4.1359e-025 \\ -0.21122 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & 2.0329e-020 \\ 174.6623 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -2.4815e-024 \\ -0.030174 & -0.049566 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & -1.8635e-020 \\ 523.9869 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 2.068e-024 \\ -0.090523 & -0.049566 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & 1.1011e-020 \\ 873.3115 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -1.3442e-024 \\ -0.15087 & -0.049566 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & -1.5247e-020 \\ 1222.6361 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.7578e-024 \\ -0.21122 & -0.049566 \end{bmatrix}$

TAB. C.3 – Les gains des régulateurs locaux $K^{nom}_{1_{i,j}}$ et $G^{nom}_{1_{i,j}}$ de la cuve 1 dans le cas nominal

Modèle local	$K^{nom}_{2_{(i,j)}}$	$G^{nom}_{2_{(i,j)}}$
$\sum_{2_{(1,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & 6.7763e-021 \\ -2.7035 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -8.2718e-025 \\ -0.001207 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & 1.0164e-020 \\ -137.8806 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -1.7578e-024 \\ -0.061556 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & -5.8234e-021 \\ -273.0576 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.0081e-024 \\ -0.1219 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,1)}}$	$\begin{bmatrix} -5.1742e-006 & -1.747e-020 \\ -408.2346 & 40.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 3.0502e-024 \\ -0.18225 & -0.0070809 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(1,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & 6.7763e-021 \\ 3.8805 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 0 \\ -0.001207 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & -5.0822e-021 \\ 197.9041 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 8.2718e-025 \\ -0.061556 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & -2.9223e-020 \\ 391.9277 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 3.8257e-024 \\ -0.1219 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,2)}}$	$\begin{bmatrix} 7.4267e-006 & 9.7409e-021 \\ 585.9513 & 160.878 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -1.2408e-024 \\ -0.18225 & -0.021243 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(1,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & -1.0164e-020 \\ 5.9077 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.2408e-024 \\ -0.001207 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & 8.4703e-021 \\ 301.2944 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -1.034e-024 \\ -0.061556 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & -9.3174e-021 \\ 596.6811 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 1.1374e-024 \\ -0.1219 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.1307e-005 & 2.5411e-021 \\ 892.0677 & 288.4026 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -3.1019e-025 \\ -0.18225 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(1,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & 0 \\ 6.9865 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 0 \\ -0.001207 & -0.049566 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(2,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & 2.7105e-020 \\ 356.3111 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -3.3087e-024 \\ -0.061556 & -0.049566 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(3,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & 0 \\ 705.6357 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & 0 \\ -0.1219 & -0.049566 \end{bmatrix}$
$\sum_{2_{(4,4)}}$	$\begin{bmatrix} 1.3371e-005 & 1.6941e-021 \\ 1054.9603 & 418.8662 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.31e-009 & -2.068e-025 \\ -0.18225 & -0.049566 \end{bmatrix}$

TAB. C.4 – Les gains des régulateurs locaux $K^{nom}_{2_{i,j}}$ et $G^{nom}_{2_{i,j}}$ de la cuve 2 dans le cas nominal

Modèle local	$K_{1_{(i,j)}}$	$G_{1_{(i,j)}}$
$\sum_{1_{(1,1)}}$	$\begin{bmatrix} -8.6237e-006 & -5.3733e-012 \\ -112.6475 & 67.4299 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.85e-009 & -1.0172e-014 \\ -0.050291 & -0.011802 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,1)}}$	$\begin{bmatrix} -8.6238e-006 & -8.2159e-013 \\ -337.9425 & 67.4299 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8499e-009 & 7.2253e-015 \\ -0.15087 & -0.011802 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,1)}}$	$\begin{bmatrix} -8.6238e-006 & -4.9335e-013 \\ -563.2376 & 67.4299 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8499e-009 & 4.3386e-015 \\ -0.25145 & -0.011802 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,1)}}$	$\begin{bmatrix} -8.6238e-006 & 7.6685e-013 \\ -788.5326 & 67.4299 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8497e-009 & 9.6499e-015 \\ -0.35203 & -0.011802 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,2)}}$	$\begin{bmatrix} 1.2378e-005 & -8.4538e-012 \\ 161.6863 & 268.13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8499e-009 & 7.1702e-014 \\ -0.050291 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,2)}}$	$\begin{bmatrix} 1.2378e-005 & 2.0479e-012 \\ 485.059 & 268.13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8496e-009 & 9.6556e-014 \\ -0.15087 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,2)}}$	$\begin{bmatrix} 1.2378e-005 & 2.3333e-012 \\ 808.4317 & 268.13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8496e-009 & 4.8314e-014 \\ -0.25145 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,2)}}$	$\begin{bmatrix} 1.2378e-005 & 7.072e-014 \\ 1131.8043 & 268.13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8495e-009 & 4.8555e-014 \\ -0.35203 & -0.035405 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.8844e-005 & 4.8908e-011 \\ 246.1556 & 480.671 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8503e-009 & -3.9452e-013 \\ -0.050291 & -0.059008 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.8844e-005 & 5.5186e-012 \\ 738.4667 & 480.671 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8511e-009 & -4.2825e-013 \\ -0.15087 & -0.059008 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.8844e-005 & -2.8658e-012 \\ 1230.7778 & 480.671 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8509e-009 & -2.0394e-013 \\ -0.25145 & -0.059008 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,3)}}$	$\begin{bmatrix} 1.8845e-005 & 6.5052e-012 \\ 1723.0889 & 480.671 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8513e-009 & -2.2093e-013 \\ -0.35203 & -0.059008 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(1,4)}}$	$\begin{bmatrix} 2.2286e-005 & 1.5414e-010 \\ 291.1038 & 698.1104 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8507e-009 & -1.1555e-012 \\ -0.050291 & -0.082611 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(2,4)}}$	$\begin{bmatrix} 2.2285e-005 & 3.2373e-011 \\ 873.3115 & 698.1104 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8506e-009 & -3.5298e-013 \\ -0.15087 & -0.082611 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(3,4)}}$	$\begin{bmatrix} 2.2286e-005 & 1.5344e-011 \\ 1455.5192 & 698.1104 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8514e-009 & -4.5396e-013 \\ -0.25145 & -0.082611 \end{bmatrix}$
$\sum_{1_{(4,4)}}$	$\begin{bmatrix} 2.2285e-005 & -2.8302e-012 \\ 2037.7268 & 698.1104 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8509e-009 & -2.0425e-013 \\ -0.35203 & -0.082611 \end{bmatrix}$

TAB. C.5 – Les régulateurs locaux $K_{1_{i,j}}$ et $G_{1_{i,j}}$ de la cuve 1 du système reconfiguré (cas défaut $\beta^f = 40\%$)

Bibliographie

[Adam Medina, 2004] Adam Medina, M. (14 octobre 2004). de défauts des systèmes à représentation multi-modèles linéaires invariants dans le temps. *Doctorat de l'Université Henri Poincaré - Nancy 1,*.

[AFNOR, 1977] AFNOR, N. (Novembre 1977). Statistique et qualité , introduction à la fiabilité. *X NF, 06-501.*

[Blanke, 1996] Blanke, M. (1996). Consistent design of dependable control systems. *Control Eng Practice. Vol .4. N°9*, pages 1305–1312.

[Blanke et al., 2003] Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J., et Staroswiecki, M. (2003). *Diagnosis et Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag.

[Blanke et al., 2001] Blanke, M., Staroswiecki, M., et Wu, N. (2001). Concepts et methods in fault-tolerant control. *American Control Conference, Arlington, USA*, pages 2606–2620.

[Bonivento et al., 2003] Bonivento, C., Marconi, L., Paoli, A., et Rossi, C. (2003). A framework for reliability analysis of complex diagnostic systems. *IFAC Safeprocess, Washington DC, USA*.

[Bonivento et al., 2006] Bonivento, C., Capiluppi, M., Marconi, L., Paoli, A., et Rossi, C. (2006). Reliability evaluation for fault diagnosis in complex systems. *6th IFAC Symposium Safeprocess, Beijing, PR China*.

[Chen et Patton, 1999] Chen, J. et Patton, R. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MS.

[Comtet-Varga et Staroswiecki, 1998] Comtet-Varga, G. et Staroswiecki, M. (1998). Analytic redundancy relations for fault detection et isolation in algebric dynamic systems. *Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille : Technical report*.

[Cox, 1962] Cox, D. (1962). Renewal theory. *Methuen et Co, London*.

[Cox, 1972] Cox, D. (1972). Regression models et life tables. *J R Stat Soc B1972 ;34 :187-220.*

[Cox et Oakes, 1984] Cox, D. et Oakes, D. (1984). *Analysis of survival data*. Chapman et Hall.

[Dion et al., 2003] Dion, J.M., Commault, C. et van der Woude, J. (2003). Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica, Vol 39 N° 7*, pages 1125-1144.

[Figueras et al., 2006] Figueras, J., Puig, V. et Quevedo, J. (2006). Multiple fault diagnosis system design using reliability analysis : Application to Barcelona rain-gauge network. *6th IFAC Symposium Safeprocess, Beijing, PR China*.

[Finkelstein, 1999] Finkelstein, M. S. (1999). A note on some aging properties of the accelerated life model. *Reliability Engineering et System Safety, Volume 71, Issue 1*, pages 109-112.

[Frank, 1990] Frank, P. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based reduncancy - a survey. *Automatica*, 26(3) :459-474.

[Frei et al., 1999] Frei, C., Kraus, F., et Blanke, M. (1999). Recoverability viewed as a system property. *European Control Conference, Karlsruhe, Germany*.

[Gao et Antsaklis, 1990] Gao, Z. et Antsaklis, P. (1990). Pseudo-inverse methods for reconfigurable control with guaranteed stability. *IFAC, 11th World Congress*, pages 293–298.

[Gao et Antsaklis, 1991] Gao, Z. et Antsaklis, P. (1991). Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems. *International Journal of Control,Vol.53, N°. 3*, pages 717–729.

[Gehin et Staroswiecki, 1999] Gehin, A. et Staroswiecki, M. (1999). A formal approach to reconfigurability analysis application to the three tank benchmark. *Proceedings of European Control Conference. Karlsrühe, Allemagne*.

[Guenab, 2003] Guenab, F. (2003). Application des systèmes structurés à l'étude du diagnostic : Localisation de capteurs. *Rapport de DEA Laboratoire d'Automatique de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble*.

[Guenab et al., 2004] Guenab, F. and Join, C. and Ponsart, J., Sauter, D., Theilliol, D. et Weber, P. (2004). A reliability approach to reconfiguration strategy : application to the IFATIS benchmark problem. *2nd IFAC Symposium on System Structure and Control. Oaxaca, Mexico*.

[Guenab et al., 2005] Guenab, F., Theilliol, D., Weber, P., Ponsart, J., et Sauter, D. (2005). Fault tolerant control method based on cost and reliability analysis. *16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic*.

[Guenab et al., 2006] Guenab, F., Theilliol, D., Weber, P., Zhang, Y., et Sauter, D. (2006). Fault tolerant control system design : A reconfiguration strategy based on reliability analysis

under dynamic behavior constraints. *6th IFAC Symposium Safeprocess, Beijing, PR China*.

[Hoblos et Aitouche, 2000] Hoblos, G. Staroswiecki, M. et Aitouche, A. (2000). Fault tolerant actuator selection using redundancy degrees. *Proc. of Control'2000 (CDRom), Cambridge UK*.

[Hoblos et al., 2001] Hoblos, G. Staroswiecki, M. et Aitouche, A. (2001). Sur la tolérance aux fautes de capteurs et d'actionneurs. *JESA, N° 3*, pages 331–352.

[Hou, 1998] Hou, S.-H. (1998). A simple proof of the leverrier-faddeev characteristic polynomial algorithm. *SIAM Review, Vol. 40, No. 3*, pages 706–709.

[Huang et Stengel, 1990] Huang, C. Y. et Stengel, R. (1990). Restructuable control using proportional-integral implicit model following. *Journal of Guidance, Control et Dynamics, Vol.13, N°.2*, pages 303–309.

[Isermann, 1984] Isermann, R. (1984). Process fault detection based on modelling et estimation methods - a survey. *Automatica*, 20(4) :387–404.

[Isermann, 1997] Isermann, R. (1997). Supervision, fault detection et fault diagnosis methods - an introduction. *Control Eng. Practice*, 5(5) :639–652.

[Jiang, 1994] Jiang, J. (1994). Design of reconfigurable control systems using eigenstructure assignment. *International Journal of Control, Vol. 59, No. 2*, pages 395–410.

[Jiang et Zhao, 2000] Jiang, J. et Zhao, Q. (2000). Design of reliable control systems possessing actuator redundancy. *AIAA Journal of Guidance, Control et Dynamics, Vol. 23, No. 4*, pages 709–718.

[Konstantopoulos et Antsaklis, 1996] Konstantopoulos, K. et Antsaklis, P. (1996). An eigenstructure assignment approach to control reconfiguration. *Proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium on Control et Automation, Chania, Crete, Greece*, pages 328–333.

[Leger et al., 2003] Leger, S., Hamelin, F., et Sauter, D. (2003). Fault detection et isolation dynamic systems using principal component analysis-application to a heating system benchmark. *Safeprocess'03 IFAC Symposium, Washington, USA*, pages 543–547.

[Li et Zhao, 2006] Li, H et Zhao, Q. (2003). Reliability evaluation of fault tolerant control systems with semi-markov FDI model. *6th IFAC Symposium Safeprocess, Beijing, PR China*.

[Mahmoud et al., 1999] Mahmoud, M. M., Jiang, J., et Zhang, Y. M. (1999). Analysis of the stochastic stability for fault tolerant control systems. *Proceeding of the* 38^{th} *IEEE conf. on Decision et Control, AZ, USA*.

[Mahmoud et al., 2000] Mahmoud, M. M., Jiang, J., et Zhang, Y. M. (2000). Stochastic stability for fault tolerant control systems in the presence of noise. *Proc. of the Americain Conf. on Control, IL, USA*.

[Mahmoud et al., 2003] Mahmoud, M. M., Jiang, J., et Zhang, Y. M. (2003). *Active Fault Tolerant Control Systems : Stochastic Analysis and Synthesis*. Springer-Verlag.

[Martorell et al., 1999] Martorell, S., Sanchez, A., et Serradell, V. (1999). Age-dependent reliability model considering effects of maintenance et working conditions. *Reliability Engineering et System Safety, Volume 64, Issue 1*, pages 19–31.

[Maybeck et Stevens, 1991] Maybeck, P. et Stevens, R. (1991). Reconfigurable flight control via multiple model adaptive control method. *IEEE Trans. on Aerospace et Electronic Systems vol. 27, N°2*, pages 470–479.

[Mettas, 2000] Mettas, A. (2000). Reliability allocation et optimization for complex systems. *Reliability et Maintainability Symposium*, pages 216–221.

[Moerder et al., 1989] Moerder, D., Halyo, N., Broussard, J., et Caglayan, A. (1989). Application of precomputed control laws in a reconfigurable aircraft flight control system. *Journal of Guidance, Control, et Dynamics, vol.12, N°.3*, pages 325–333.

[Moore, 1981] Moore, B. (1981). Principal component analysis in linear systems : controllability, observability, et model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26*, pages 17–32.

[Ostroff, 1985] Ostroff, A. (1985). Techniques for accommodating control effector failures on a mildly statically unstable airplane. *American Control Conference. Boston, IEEE,*, pages 906–913.

[Pagès et Gondran, 1980] Pagès, A. et Gondran, M. (1980). Fiabilité des systèmes. *Eyrolles*.

[Palmubo et al., 1992] Palmubo, F., Biswas, K., et Butz, P. (1992). Recovery of close-to-nominal pre-fault performance using the pseudo-inverse/eigenstructure assignment method. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2123–2124.

[Patton, 1997] Patton, R. (1997). Fault-tolerant control : the 1997 situation. *Proceedings of Safeprocess'97, (Hull - England), IFAC*, pages 1033–1055.

[Patton et al., 1995] Patton, R.J., Chen, J., et Nielsen, S. B. (1995). Model-based methods for fault diagnosis : Some guidlines. *Trans. of the institute of Measurement et Control, Vol. 17, N°2*, pages 73–81.

[Patton et al., 2006] Patton, R.J., Kambhampati, A., Casavola, A. et Franzè, G. (2006). Fault-tolerance as a key requirement for the control of modern systems. *6th IFAC Symposium Safeprocess, Beijing, PR China*.

[Rodrigues, 2005] Rodrigues, M. (6 décembre 2005). Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires. *Doctorat de l'Université Henri Poincaré - Nancy 1,*.

[Sauter et al., 2002] Sauter, D., Hamelin, F., Noura, H., et Theilliol, D. (2002). Fault tolerant control in dynamic systems. *15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain*.

[Srichander et Walker, 1993] Srichander, R. et Walker, B. (1993). Stochastic stability analysis for continuous-time fault tolerant control systems. *Int. Journal of Control, Vol.57, N°2*.

[Staroswiecki, 2000] Staroswiecki, M. (2000). A structural framework for the design of FDI system in large scale industrial plants. *Dans "Issues of Fault tolerant diagnosis for dynamic system". Patton, R.J., Frank, P.M., Clarck, R.N. Springer-Verlag*.

[Staroswiecki, 2002] Staroswiecki, M. (2002). On reconfigurability with respect to actuator failures. *IFAC Safeprocess Barcelona*.

[Staroswiecki, 2005] Staroswiecki, M. (2005). Fault tolerant control : the pseudo-inverse method revisited. *Proc. 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic*.

[Staroswiecki et Gehin, 2001] Staroswiecki, M. et Gehin, A. (2001). From control to supervision. *IFAC Safeprocess 2000, Vol N° 1, Budapest - Hongrie*, pages 312–323.

[Staroswiecki et al., 2004] Staroswiecki, M., Hoblos, G., et Aitouche, A. (2004). Sensor network design for fault tolerant estimation. *International journal of adaptive control et signal processing*.

[Theilliol, 2003] Theilliol, D. (2003). Contribution à l'étude et au développement des systèmes tolérants aux défauts : diagnostic et accommodation à base de modèles linéaires et au-delà. *Habilitation à Diriger des Recherches, Université Henri Poincaré - Nancy 1*.

[Villemeur, 1988] Villemeur, A. (1988). Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels. *Eyrolles*.

[Waerden, 1967] Waerden, B. V. D. (1967). Algebra, 1. *Springer*.

[Walker, 1997] Walker, B. (1997). Fault tolerant control system reliability et performance prediction using semi-markov models. *Proceedings of Safeprocess'97, (Hull - England), IFAC*.

[Wu et Salomon, 2000] Wu, N.Eva.and Zhou, K. et Salomon, G. (Novembre 2000). Control reconfigurability of linear time-invariant systems. *Automatica, Vol.36, N°11*, pages 1767–1771.

[Wu, 2001a] Wu, N. (2001a). Reliability of fault tolerant control systems : Part I. *IEEE Conference on Decision et Control*.

[Wu, 2001b] Wu, N. (2001b). Reliability of fault tolerant control systems : Part II. *IEEE Conference on Decision et Control*.

[Wu, 2004] Wu, N. (Avril 2004). Coverage in fault tolerant control. *Automatica, Vol.40, issus 4*, pages 537–548.

[Wu et Patton, 2003] Wu, N. et Patton, R. (2003). Reliability et supervisory control. *IFAC Safeprocess, Washington DC, USA*, pages 139–144.

[Wu et al., 2002] Wu, N., Wang, X., Smapath, M., et Kott, G. (2002). An operational approach to buget-constrainted reliability allocation. 15^{th} *IFAC World Congress, Barcelona, Spain*, pages 199–204.

[Zhang et Jiang, 2001] Zhang, Y. et Jiang, J. (2001). Integrated active fault tolerant control using IMM approach. *IEEE Trans. on Aerospace et Electronic Systems vol. 37, N°4*, pages 1221–1235.

[Zhang et Jiang, 2003a] Zhang, Y. et Jiang, J. (2003a). Bibliographical review on reconfigurable fault tolerant control systems. *Proceedings of Safeprocess'03, Washington, USA, IFAC*, pages 1033–1055.

[Zhang et Jiang, 2003b] Zhang, Y. et Jiang, J. (2003b). Fault tolerant control system design with explicit consideration of performance degradation. *IEEE Transactions on Aerospace et Electronic Systems*.

[Zhang et al., 2005] Zhang, Y., Jiang, J., Yang, Z., et Akbar Hussain, D. M. (2005). Managing performance degradation in fault tolerant control systems. *Proc. 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic*.

[Zhao et Jiang, 1998] Zhao, Q. et Jiang, J. (1998). Reliable state feedback control system design against actuator failures. *Automatica, Vol. 34, No. 10*, pages 1267–1272.

[Zhou et Khargonekar, 1987] Zhou, K. et Khargonekar, P. (1987). Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control, 32*, pages 621–623.

Résumé
Le travail présenté dans ce mémoire de thèse porte sur les systèmes tolérants aux défauts, plus précisément la synthèse d'une méthode de reconfiguration et/ou de restructuration intégrant la fiabilité des composants. La tâche de reconfiguration permet d'amener le système dans un état de fonctionnement permettant d'assurer des performances désirées tout en préservant la stabilité. Sous l'hypothèse qu'il existe plusieurs structures de fonctionnement résultant de la déconnexion des sous systèmes défaillants, chaque structure impose des nouvelles conditions de fonctionnement et par conséquent une nouvelle valeur de la fiabilité et du coût. Parmi ces structures, une structure optimale doit être choisie. Dans un contexte multicritères, ce travail propose de déterminer la structure optimale en intégrant les performances du système, la fiabilité et le coût.

– La première méthode proposée traite uniquement les performances statiques conduisant à considérer la fiabilité et le coût des composants. La détermination de la structure optimale se fonde sur une estimation en ligne de la fiabilité et des coûts des composants.
– Une seconde méthode utilisant les performances des régulateurs est ensuite développée. La méthode pseudo inverse PIM est utilisée pour synthétiser les régulateurs. Des modifications de la méthode PIM sont proposées afin d'assurer la stabilité du système et d'atteindre des objectifs dynamiques définis. Un indice de performances dynamiques est intégré dans le critère de choix de la structure optimale.
– Les deux méthodes développées sont intégrées afin de définir une stratégie tolérante aux défauts. Elle est appliquée sur un système hydraulique et thermique à 3 cuves.

Mots clés : Systèmes Tolérants aux Défauts, Reconfiguration, Restructuration, Fiabilité des Systèmes, Coût de Fonctionnement, Méthode Pseudo-Inverse (PIM).

Abstract
The work presented in this document deals to fault tolerant control systems, more precisely the synthesis of a method of reconfiguration and/or restructuration using the reliability of the components. The reconfiguration strategy is a usual way to recover the nominal performances and preserve stability conditions. Under assumptions that there exist several structures (working mode) resulting from the disconnection of faulty subsystems, each structure imposes new operating conditions and consequently a new value of reliability and cost. The reconfiguration strategy proposed in this document tries to find from all possible structures the optimal structure that has the "best" control performance with the highest reliability and lowest cost.

– The first proposed method treats only the static performances resulting in considering the reliability and the cost of the components. The determination of the optimal structure is based on an online estimate of the reliability and costs of the components.
– A second method using the performances of the controllers is then developed. The Pseudo inverse method PIM is used for designing the controllers. Modifications of method PIM are proposed in order to ensure the stability of the system and to achieve defined dynamic performances. An index of dynamic performances is integrated in the selection criterion of the optimal structure.
– The two developed methods are integrated in order to define a fault tolerant strategy. It is applied to a hydraulic and thermal system of 3 tanks.

Keywords : Fault Tolerant Control Systems, Reconfiguration, Restructuration, Systems Reliability, Cost, Pseudo-Inverse Method (PIM).