Contributions à l'analyse harmonique réelle et complexe et à ses applications

Philippe Jaming

Rapport scientifique présenté par

Philippe Jaming

à l'Université d'Orléans
pour obtenir
l'habilitation à diriger des recherches

Contributions à l'analyse harmonique réelle et complexe et à ses applications

Soutenue à l'Université d'Orléans le 2 juillet 2007 en présence de :

M. Jean-Philippe Anker	Professeur, Université d'Orléans
M. Pascal Auscher	Professeur, Université Paris Sud
M. Laurent Baratchart	DR, Inria Sophia Antipolis (Président du jury)
Mme Aline Bonami	Professeur Émérite, Université d'Orléans
M. Michael Cowling	Professeur, University of New South Wales

Après avis des raporteurs :

M. Michael Cowling	Professeur, University of New South Wales
M. Jean Esterle	Professeur, Université de Bordeux I
M. Joseph Rosenblatt	Professeur, University of Illinois

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Michael Cowling, Jean Esterle et Joseph Rosenblatt d'avoir accepté le rôle de rapporteurs de cette habilitation et pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail. Je remercie également Jean-Philippe Anker, Pascal Auscher et Aline Bonami pour leur présence dans ce jury au titre d'examinateurs. Enfin, c'est un honneur pour moi que Laurent Baratchart ait accepté de présider ce jury.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers Myriam Deschamps et Hervé Queffelec qui ont dirigé mon mémoire de DEA et m'ont mis en contact avec Aline Bonami et William Moran.

Aline Bonami m'a accueilli à Orléans et a dirigé ma thèse. Malgré tous les encouragements et le soutien qu'elle m'avait apportés alors, ce sont les trois articles que nous avons coécrits depuis qui furent pour moi l'expérience la plus enrichissante.

William Moran m'a évité de connaître la froideur des casernes en m'accueillant comme VSNE à Adelaïde. Je lui doit surtout de m'être interressé aux problèmes de reconstruction de phase. Merci également à Claire Anantharaman-Delaroche pour l'aide qu'elle m'a apportée à mon retour d'Australie.

Parmi les personnes qui ont contribué à ma formation, je suis tout particulièrement reconnaissant envers Sandrine Grellier. Sa contribution à mon travail va bien au-delà de l'aide (déjà inestimable) qu'elle m'a apportée en fin de thèse et de l'article que nous avons écrit ensemble. Son soutien continu est sans doute pour beaucoup dans l'aboutissement de la plupart des articles que j'ai écrits.

Je voudrais également exprimer ma gratitude envers mes collègues du département mathématique et du MAPMO qui m'ont supporté (en tous les sens du terme) depuis 15 ans. Mes remerciements vont plus particulièrement à Anne et Christelle pour leur dévouement, à Jean-Louis qui a accepté de partager un bureau à forte entropie pendant 10 ans (et à Bartek et Patrick qui lui ont succédé) et à Yves qui m'a conseillé au début de ma carrière d'enseignant. Je n'oublie pas non plus Bruno Demange qui a subi patiemment mon apprentissage de directeur de thèse.

Une de mes grandes satisfactions est d'avoir pu collaborer avec d'autres chercheurs en Europe et ailleurs, particulièrement grâce au réseau HARP. Je tiens tout particulièrement à remercier J. Bruna à Barcelone, W. Moran à Adelaïde, D. Buracevski, E. Damek J. Dziubanski et A. Hulanicki à Wroclaw, M. Roginskaya et P. Sjögren à Göteborg, S. Pérez-Esteva à Cuernavaca, M. Kolountzakis à Héraclion, L. Grafakos et A. Iosevich à Columbia, Missouri, M. Matolci et S. Revez à Budapest, S. Madan, R. Ramat, S. Ray à Kampur ainsi que leurs collègues pour avoir fait de mes divers séjours un enrichissement tant scientifique qu'humain.

Je tiens enfin à remercier mes amis et ma famille pour leurs encouragements permanents. Mes remerciements vont tout particulièrement à Anne-Gael pour la patience et le soutien sans limite dont elle fait preuve quotidiennement.

Avant-Propos

Ce mémoire est composé de trois parties essentiellement indépendantes, dont le principal point commun est le recours à des techniques d'analyse harmonique et d'analyse complexe.

La première partie est centrée sur l'étude des *fonctions harmoniques* sur divers domaines. En particulier, nous nous sommes intéressés aux problèmes classiques du comportement au bord de ces fonctions ainsi qu'à la caractérisation à la Fefferman-Stein de certains espaces fonctionnels qu'elles définissent.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié des *principes d'incertitude* qui donnent des limitations à la concentration simultanée d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Ces principes admettent de multiples formes mathématiques dont les plus célèbres sont dues à Heisenberg-Pauli-Weil et à Hardy. Nos travaux ont consisté soit à donner des formes plus précises de ces principes, soit à les étendre à des outils de l'analyse temps-fréquence tel que la transformée de Fourier à fenêtre, soit à en donner des versions nouvelles.

La dernière partie de nos travaux concerne les problèmes de *reconstruction de phase* pour lesquels on cherche à reconstruire le mieux possible une fonction à partir de son seul module et d'informations *a priori.* Bien que très courantes dans de nombreux domaines des sciences appliquées tels que la cristallographie, la mécanique quantique, le traitement du signal..., ces questions ont été plutôt ignorées par la communauté mathématique pour qui elles constituent pourtant un défi intéressant. C'est le cas notamment du *problème d'ambiguïté radar* issu de la théorie du traitement du signal auquel nous nous sommes plus particulièrement intéressés.

Pour conclure cet avant-propos, mentionnons que ces parties, bien qu'essentiellement indépendantes, ont une unité qui dépasse le simple recours à des outils communs. En effet, dans tous les cas que nous traitons ici, les fonctions ont une “structure” et sont déterminées par une “information partielle”.

Par exemple, dans la première partie, on étudie des fonctions harmoniques (informations structurelles) sur un domaine. Celles-ci sont entièrement déterminées par une valeur au bord (information partielle). Il s'agit alors de comprendre d'une part comment cette valeur au bord détermine la valeur de la fonction à l'intérieur du domaine — ce qui conduit à l'étude des intégrales de Poisson— et d'autre part, en quel sens la valeur au bord s'obtient comme limite de la fonction.

Dans le problème de reconstruction de phase, on dispose à nouveau d'une information partielle — le module $|f|$ de la fonction inconnue f — et d'une information structurelle — f peut par exemple être la transformée de Fourier d'une fonction à support compact. On cherche alors à savoir si ces deux informations suffisent à déterminer et éventuellement à reconstruire f. Ce dernier point n'est envisagé ici que sous son aspect théorique, l'aspect algorithmique restant à développer.

Dans l'étude des principes d'incertitude, la problématique est légèrement différente puisqu'il s'agit plutôt de comprendre dans quelle mesure une information partielle sur f suffit à déterminer f. Par exemple, si on demande à f et à sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ d'être extrêmement concentrées alors f ne peut être qu'une gaussienne. Ceci est par exemple le cas lorsque la concentration est mesurée à l'aide de la dispersion (principe d'incertitude de Heisenberg), ou par une décroissance rapide (théorème de Hardy). Le théorème de Benedicks implique des restictions encore plus fortes en termes de petitesse du support puisqu'il stipule que *si une fonction f est nulle en-dehors d'un ensemble de mesure positive et si la même chose est vraie pour sa transformée de Fourier, alors f est nulle partout.* Une version plus quantitative est due à Amrein et Berthier qui ont montré que, si f et g sont proches endehors d'un ensemble de mesure positive et si la même chose est vraie pour leurs transformées de Fourier, alors f et g sont proches partout.

Liste de publications

Les publications marquées $*$ ne sont pas détaillées dans ce mémoire. Celles mentionnées † portent sur des thématiques quelque peu différentes de celles abordées ici.

[Jam1] † Ph. Jaming, Inversibilité restreinte, problème d'extension de Kadison-Singer et applications à l'analyse harmonique (d'après J. Bourgain et L. Tzafriri). Cours : analyse fonctionnelle et harmonique (1992–1993), sous la direction de M. Deschamps, *Publications Mathématiques d'Orsay*, **94-24** (1994), 71–154.

[Jam2] $*$ Ph. Jaming, Trois Problèmes d'Analyse Harmonique. *Thèse de l'Université d'Orléans*, sous la direction de A. Bonami & C. Anantharaman-Delaroche (1998).

[Jam3] Ph. Jaming, Principe d'incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de Wigner. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **237** (1998), 249–254.

[Jam4] Ph. Jaming, Phase retrieval techniques for radar ambiguity problems. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, **5** (1999), 309–329.

[Jam5] $*$ Ph. Jaming, Harmonic functions on the real hyperbolic ball I : boundary values and atomic decompositions of Hardy spaces. *Colloquium Mathematicum*, **80** (1999), 63–82.

[JamW] † Ph. Jaming & W. Moran, Tensor Products and p-induction of Representations on Banach Spaces. *Collectanea Mathematica*, **51** (2000), 83–109.

[DJam] † C. Domenichino & Ph. Jaming, Estimations du noyau de Green, propriété de valeur moyenne et géométrie des boules hyperboliques. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique* , **332** (2001), 1053–1058.

[Jam6] Ph. Jaming, Harmonic functions on classical rank one balls. *Bollettino della Unione Matematica Italiana 4-B*, **8** (2001), 685–702.

[GJamP] G. Garrigós, Ph. Jaming & J.-B. Poly, Zéros de fonctions holomorphes et contre-exemples en théorie des radars. *Actes des Rencontres d'Analyse Complexe (Poitiers-Futuroscope, 1999)*, 81–104, Atlantique, Poitiers, 2002.

[JamR] $*$ Ph. Jaming & M. Roginskaya, Boundary behaviour of $\mathcal{M}$-harmonic functions and non-isotropic Hausdorff measure. *Monatshefte für Mathematik*, **134** (2002), 217–226.

[BDJam] A. Bonami, B. Demange & Ph. Jaming, Hermite functions and uncertainty principles for the Fourier and the windowed Fourier transforms. *Revista Matemática Iberoamericana*, **19** (2003), 23–55.

[JamK] Ph. Jaming & M. Kolountzakis, Reconstruction of functions from their triple correlations. *New York Journal of Mathematics*, **9** (2003), 149–164.

[GJam] $*$ S. Grellier & Ph. Jaming, Harmonic functions on the real hyperbolic ball II : Hardy and Lipschitz spaces. *Mathematische Nachrichten*, **268** (2004), 50–73.

[BBDHJam] A. Bonami, D. Buraczewski, E. Damek, A. Hulanicki & Ph. Jaming, Maximum boundary regularity of bounded Hua-harmonic functions on tube domains. *Journal of Geometric Analysis*, **14** (2004), 457–486.

[Jam7] Ph. Jaming, Uncertainty principles for orthonormal bases. *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, École Polytechnique*, (2006) Exposé XV.

[JamP] Ph. Jaming & A. Powell, Uncertainty principles for orthonormal bases. *Journal of Functional Analysis*, **243** (2007), 611–630.

[BGJam] A. Bonami, G. Garrigós & Ph. Jaming, Discrete radar ambiguity problems. À paraître dans *Applied and Computational Harmonic Analysis*, (2007), disponible sur `arXiv :math.CA/0509031`.

[Jam8] Ph. Jaming The phase retrieval problem for cyclotomic crystals. *Topics on the Interface between Harmonic Analysis and Number Theory*, T. Erdelyi, B. Saffari, G. Tenenbaum (Eds). *Prépublication* (2007).

[Jam9] Ph. Jaming Nazarov's uncertainty principle in higher dimension. À paraître dans *Journal of Approximation Theory*, (2007), disponible sur `arXiv :math.CA/0612367`.

[DDJamPE] E. Damek, J. Dziubanski, Ph. Jaming & S. Pérez-Esteva, Distributions that are convolvable with generalized Poisson kernels of solvable extensions of homogeneous Lie groups. *Prépublication*, (2006), disponible sur `arXiv :math.CA/0612368`.

[CJamM] † W. Czaja, Ph. Jaming & M. Matolcsi An efficient algorithm for positive realizations *Prépublication*, (2006), disponible sur `arXiv :math.CA/0612568`.

[IJam] † A. Iosevich & Ph. Jaming, Fourier basis for planar convex sets and distance sets that are a shift of the integers. *Prépublication*, (2006).

Comportement au bord de fonctions harmoniques

Avant-Propos

L'une des propriétés fondamentales des fonctions harmoniques est le fait que la connaissance de leur valeur au bord d'un domaine suffit à les connaître à l'intérieur de celui-ci. Ceci n'est vrai, bien sûr, que sous certaines conditions restrictives. Cette propriété fait l'objet de très nombreux travaux en théorie du potentiel, en analyse harmonique, en analyse des équations aux dérivées partielles et, plus généralement, dans toutes les applications qui l'utilisent de façon centrale. En analyse harmonique elle est, par exemple, le point de départ de la théorie des espaces de Hardy.

Nous allons étudier les fonctions harmoniques pour certains laplaciens généralisés lorsque les domaines ont de fortes symétries qui se traduisent par l'invariance sous l'action d'un groupe de Lie non compact. Par exemple, nous allons nous intéresser aux boules hyperboliques réelles, complexes ou quaternioniques munies de l'opérateur de Laplace-Beltrami qui sont laissés invariants respectivement par $SO(n,1)$, $SU(n,1)$ et $Sp(n,1)$, ou encore au domaine de Siegel qui est laissé invariant par le groupe de Heisenberg. Décrivons rapidement les principales thématiques que nous avons abordées.

Nos premiers travaux sur ce sujet ont porté sur l'étude des espaces fonctionnels associés aux fonctions harmoniques sur la boule hyperbolique réelle. Ils faisaient suite à leurs homologues dans le cadre de la boule hyperbolique complexe, et plus particulièrement aux travaux de A. Bonami, J. Bruna et S. Grellier [BBG]. Nous avons ainsi établi la caractérisation de Fefferman-Stein [GJam] et la décomposition atomique [Jam5] des espaces de Hardy et de Hardy-Sobolev de fonctions harmoniques hyperboliques. L'intérêt de ces espaces provient du fait que nombre d'opérateurs d'analyse classique tels que les transformées de Riesz ne sont pas bornés sur L^p lorsque $p \leq 1$. Les espaces H^p, $p \leq 1$ sont alors des substituts sur lesquels ces propriétés de bornitude sont en général vraies, grâce notamment à des propriétés d'annulation supplémentaires. Ces travaux étant directement issus de la thèse [Jam2], nous ne les détaillerons pas d'avantage ici.

Un point remarquable des fonctions harmoniques qui appartiennent aux espaces de Hardy est qu'elles ont une valeur au bord au sens des distributions et peuvent donc être reconstruites à partir de cette distribution à l'aide d'une intégration de Poisson. Au cours des travaux mentionnés plus haut, nous avons alors été amenés à caractériser les fonctions harmoniques sur les boules hyperboliques qui ont une distribution au bord. Ainsi, dans [Jam5], nous avons montré que ces fonctions étaient précisément celles qui avaient une croissance polynomiale en la distance au bord, en raison principalement de la compacité du bord de la boule hyperbolique. Cela nous a naturellement amené à nous demander ce qui se passait dans le cas des domaines dont le bord n'est pas compact. Cette question a été résolue récemment dans le cas du demi-espace $\mathbb{R}^{n+1}_+$ euclidien et nous avons étendu ces résultats au cas des extensions résolubles des groupes de Lie homogènes dans [DDJamPE].

Nous conclurons cette partie par une famille de résultats assez surprenants. Plaçons nous d'abord dans le cadre euclidien $\mathbb{R}^{n+1}_+$ ou la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, si une fonction harmonique a une valeur au bord au sens des distributions, alors toutes ses dérivées normales ont également une valeur au bord au sens des distributions. Par contre, A. Bonami, J. Bruna et S. Grellier [BBG] ont montré que les fonctions $\mathcal{M}$-harmoniques sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ (*i.e.* harmoniques pour l'opérateur de Laplace-Beltrami de la boule hyperbolique complexe), seules les $n-1$ premières dérivées normales ont automatiquement une distribution au bord. De plus, pour que la n-ième dérivée normale ait une distribution au bord, il faut (et il suffit) que la fonction soit pluriharmonique (donc qu'elle soit aussi harmonique euclidienne). Nous avons étendu ce résultat au cas de toutes les boules hyperboliques classiques dans [Jam6] puis à celui des fonctions harmoniques généralisées sur les extensions de rang 1 du groupe de Heisenberg (et plus généralement pour les domaines de Siegel de type tube) dans [BBDHJam].

Travaux concernés

Distributions au bord de fonctions harmoniques

[Jam5] $*$ Ph. Jaming, Harmonic functions on the real hyperbolic ball I : boundary values and atomic decompositions of Hardy spaces. *Colloquium Mathematicum*, **80** (1999), 63–82.

[JamR] $*$ Ph. Jaming & M. Roginskaya, Boundary behaviour of $\mathcal{M}$-harmonic functions and non-isotropic Hausdorff measure. *Monatshefte für Mathematik*, **134** (2002), 217–226.

[GJam] $*$ S. Grellier & Ph. Jaming, Harmonic functions on the real hyperbolic ball II : Hardy and Lipschitz spaces. *Mathematische Nachrichten*, **268** (2004), 50–73.

[DDJamPE] E. Damek, J. Dziubanski, Ph. Jaming & S. Pérez-Esteva, Distributions that are convolvable with generalized Poisson kernels of solvable extensions of homogeneous Lie groups. *Prépublication*, (2006).

Caractérisation des fonctions pluriharmoniques

Un premier résultat sur la caractérisation des fonctions pluriharmoniques dans le cas de la boule hyperbolique réelle se trouve dans [Jam5]. Nos autres travaux concernant cette thématique sont :

[Jam6] Ph. Jaming, Harmonic functions on classical rank one balls. *Bollettino della Unione Matematica Italiana 4-B*, **8** (2001), 685-702.

[BBDHJam] A. Bonami, D. Buraczewski, E. Damek, A. Hulanicki & Ph. Jaming, Maximum boundary regularity of bounded Hua-harmonic functions on tube domains. *Journal of Geometric Analysis*, **14** (2004), 457-486.

$*$ Travaux non détaillés dans ce mémoire.

Distribution au bord des fonctions harmoniques

1. Introduction

Pour motiver les résultats de cette section, rappelons quelques points clés de la théorie des fonctions harmoniques développée du milieu des années 70 au début des années 80. Soit $X = G/K$ un espace symétrique riemanien de bord $B = K/M$ et soit $D(X)$ l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur X. Une des questions fondamentales d'analyse harmonique est de décrire l'ensemble des vecteurs propres communs des opérateurs de $D(X)$. Nous renvoyons à l'introduction de [BM] pour l'historique de cette question avant 1975. Une des principales préocupations était alors la conjecture de Helgason [He1] qui postulait que ces fonctions étaient toutes des intégrales de Poisson de fonctionnelles analytiques (encore appelées hyperfonctions) sur B. Après des travaux préliminaire de Helgason [He2], Hashizume, Minemura et Okamoto [Min, HMO], cette conjecture a finalement été résolue affirmativement par Kashiwara, Kowata, Minemura, Okamoto, Ōshima et Tanaka [KKMOOT].

Dans de nombreuses applications, on sait toutefois que la valeur au bord est une distribution. Ceci se produit par exemple pour les fonctions qui appartiennent à un espace H^p. Il s'agit alors de caractériser les fonctions propres communes de $D(X)$ dont la valeur au bord est une distribution. Dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple, cette caractérisation a été obtenue en rang 1 par Lewis [Le] et pour un rang quelconque par Ōshima et Sekiguchi [OS] en se basant sur la connaissance de la solution de la conjecture de Helgason de [KKMOOT] et à l'aide d'outils de techniques micro-locales avancées développés dans [SKK, KO]. Une autre démonstration de cette caractérisation, basée sur des techniques de décomposition asymptotique et faisant suite à des travaux de Wallach [Wall], a été donnée par van den Ban et Schlichtkrull [BM]. Dans ce cas, les fonctions harmoniques dont la valeur au bord est une distribution sont celles qui ont une croissance modérée au bord.

Notons que dans le cas de la boule unité $\mathbb{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$, ces faits sont assez faciles à établir. Par exemple, si u est l'intégrale de Poisson d'une distribution f sur la sphère, la compacité de celle-ci implique que f est d'ordre fini et la croissance de u, $u(x) = O\big((1-|x|)^{-A}\big)$, $A > 0$ résulte directement des estimations du noyau de Poisson et de ses dérivées. Inversement, si u est harmonique sur $\mathbb{B}_n$ est telle que $u(x) = O\big((1-|x|)^{-A}\big)$ alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$, la fonction

$$F(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$$

a une croissance polynomiale et vérifie une équation différentielle de la forme

$$F''(r) + \frac{h(r)}{1-r}F'(r) = O\big((1-r)^{-\alpha}\big)$$

et on montre aisément que F a en fait une limite quand $r \to 1$, c'est-à-dire que u a une distribution au bord. Le même raisonnement est d'ailleurs valable dans le cas des boules hyperboliques (voir [Jam5] pour le cas réel). On remarque en particulier que dans ces cas, toute distribution sur $\mathbb{S}^{n-1}$ peut être prolongée en une fonction sur $\mathbb{B}_n$ à l'aide d'une intégration de Poisson.

La question que nous nous posons ici est de savoir quelles distributions sur le bord B peuvent se prolonger par intégration de Poisson à X et quel sens donner à cette intégration. On perçoit alors une difficulté dans le cas de $\mathbb{R}^{n+1}_+$. En effet, le noyau de Poisson n'étant pas dans la classe de Schwartz, on ne peut définir l'intégrale de Poisson d'une distribution tempérée quelconque. Ce problème est abordé dans le livre de Stein [St, page 89] qui considère les distributions bornées f, c'est-à-dire les distributions f telles que $f * \varphi$ est bornée quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il montre alors que non seulement l'intégrale de Poisson de f est bien définie au sens des distributions, mais aussi que c'est une fonction régulière.

Cette classe de distributions, qui est bien adaptée à l'étude des espaces de Hardy qu'elle contient, peut être élargie : il est clair que si $f \in L^1_{loc}$ est tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

alors l'intégrale de Poisson de f est bien définie. En fait, en procédant par intégration par parties, on peut faire porter cette condition sur les dérivées de f. On voit ainsi naturellement apparaître l'espace $\mathcal{D}'_{L^1}$ des distributions qui s'écrivent sous la forme $f = \sum_{finie} \partial^\alpha f_\alpha$ avec $f_\alpha \in L^1$. Ces distributions sont dites *intégrables* car on peut sans difficulté définir

$$\langle f, 1\rangle = \langle f_0, 1\rangle = \int f_0.$$

Elles permettent de définir une convolution qui correspond à la définition usuelle de la convolution lorsque celle-ci a un sens (convolution de fonctions de L^1 ou de distributions à support compact) de la façon suivante : *si $F, G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on dira que F et G sont $\mathcal{S}'$-convolables si, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}$. Dans ce cas, on définit*

$$\langle F * G, \varphi\rangle = \big\langle (\varphi * \check{G})F, 1\big\rangle. \tag{1.1}$$

Alvarez, Guzmán-Partida et Pérez-Esteva [AGPPE] ont alors montré que l'espace des distributions qui sont $\mathcal{S}'$-convolables avec le noyau de Poisson était exactement l'espace des distributions telles que $(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}} f \in \mathcal{D}'_{L^1}$. De plus, la $\mathcal{S}'$-convolée de f et du noyau de Poisson a les propriétés auxquelles on s'attend : elle est bien harmonique et vérifie un théorème de Fatou. Enfin, les fonctions harmoniques obtenues de cette façon sont exactement celles qui vérifient une condition de croissance modérée.

2. Cas du groupe de Heisenberg

Nous nous sommes intéressés au même problème sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ (ou ses généralisations naturelles, c'est-à-dire tous les groupes homogènes). Nous prenons ici les notations standard des deux derniers chapitres du livre de Stein [St]. Plus précisément, $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(x, y, t)(x', y', t') = \big(x + x', y + y', t + t' + 2(xy' - x'y)\big).$$

On fait alors agir $\mathbb{R}^*_+$ par dilatations non homogènes $a.(x, y, t) = (ax, ay, a^2 t)$ et on définit la norme homogène par $|(x, y, t)|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |t|$. Enfin, on définit les champs de vecteur invariants à gauche

$$\mathcal{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{Y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i\frac{\partial}{\partial t},\ i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Le noyau de Poisson considéré est maintenant relatif à un sous-laplacien invariant $\sum \mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2$ et est bien connu.

Plus généralement, nous nous intéressons à des noyaux qui ont de bonnes propriétés de décroissance, similaires à celles du noyau précédent. Pour $\Gamma \geq 1$, nous dirons que $\mathbb{P}$ a la propriété $(\mathcal{R}_\Gamma)$ s'il existe $C > 0$ tel que

(i) pour tout $x \in \mathbb{H}^n$,

$$\frac{1}{C}(1 + |x|)^{-Q-\Gamma} \leq \mathbb{P}(x) \leq C(1 + |x|)^{-Q-\Gamma}.$$

(ii) Pour tout opérateur différentiel de la forme $\mathcal{X}^\alpha = \mathcal{T}^j \prod_{i=1}^k \mathcal{X}_i \prod_{i=1}^l \mathcal{Y}_i$ avec $j + k/2 + l/2 = \alpha$ et tout $x \in \mathbb{H}^n$,

$$|\mathcal{X}^\alpha \mathbb{P}(x)| \leq C(1 + |x|)^{-Q-\Gamma-\alpha}.$$

(iii) Si on note $\mathbb{P}_a(x) = a^Q P(a.x)$, où $a.x$ désigne la dilatation non homogène sur $\mathbb{H}^n$, alors pour tout k et tout $x \in \mathbb{H}^n$,

$$|(a\partial_a)^k \mathbb{P}_a(x)| \leq Ca^{-k}a^{-Q}(1 + |ax|)^{-Q-\Gamma}.$$

Nous cherchons alors à savoir à quelles conditions sur une distribution f, il est possible de définir $\mathbb{P}_a * f$ où $*$ désigne maintenant la convolution sur le groupe de Heisenberg.

Pour cela, nous avons d'abord considéré les espaces $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$ qui sont définis comme dans le cas euclidien, à ceci près que les dérivées sont maintenant des dérivées invariantes :

$$\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n) = \left\{ f = \sum_{finie} \mathcal{X}^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in L^1(\mathbb{H}^n) \right\}$$

où $\mathcal{X}^\alpha$ désigne un opérateur de la forme $\mathcal{X}^\alpha = \mathcal{T}^j \prod_{i=1}^k \mathcal{X}_i \prod_{i=1}^l \mathcal{Y}_i$ avec $j + k/2 + l/2 = \alpha$. Nous dirons à nouveau que F est $\mathcal{S}'$-convolable avec G si, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(\varphi * \check{G})F \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$ et nous définirons alors $F * G$ par la formule (1.1). Notons toutefois que, contrairement au cas euclidien, cette convolution n'est pas *commutative*. Il n'est même pas clair que G soit $\mathcal{S}'$-convolable avec F lorsque F est $\mathcal{S}'$-convolable avec G.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de [DDJamPE] :

Théorème (Damek *et al* [DDJamPE, Theorem 4.1]**).**
Une distribution $T \in \mathcal{S}'$ est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}_a$ pour $a > 0$ si et seulement si $T \in (1 + |x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}}\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$.

De plus $T * \mathbb{P}_a$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (a, x) qui converge vers T dans $\mathcal{S}'$ quand $a \to 0$.

Esquisse de démonstration. Pour montrer que $T \in (1 + |x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}}\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$ est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}_a$, il suffit de montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$, $(1+|x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}}(\varphi * \check{\mathbb{P}}_a)$ est bornée ainsi que toutes ses dérivées, ce qui résulte d'une inégalité de Petree et d'un simple calcul.

Pour la réciproque, prenons $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^n)$ valant 1 sur la boule de centre 0 et de rayon 1 et à support dans la boule de rayon 2. D'une part, comme T est $\mathcal{S}'$-convolable avec $\mathbb{P}_a$, on a $(\varphi * \check{\mathbb{P}}_a)T \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n)$. D'autre part, on montre sans peine que $\varphi * \check{\mathbb{P}}_a$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont bornées et que $\varphi * \check{\mathbb{P}}_a \geq C(1+|x|^2)^{-\frac{Q+\Gamma}{2}}$. Il suffit alors d'écrire

$$T = (1+|x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}} \varphi * \check{\mathbb{P}}_a} (\varphi * \check{\mathbb{P}}_a) T \in (1+|x|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}} \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{H}^n).$$

On peut alors montrer que $T * \mathbb{P}_a$ est une fonction de la forme

$$\sum_{\alpha,\beta} \Lambda_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{H}^n} f_\alpha(y) X^{\alpha-\beta} (1+|y|^2)^{\frac{Q+\Gamma}{2}} X_y^\beta \big(\check{\mathbb{P}}_a(x^{-1}y)\big)\, \mathrm{d}y$$

qui est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en (x, a). $\square$

De plus, en réécrivant la formule précédente de manière à éliminer l'inversion $\check{\mathbb{P}}_a$, on peut montrer que $T * \mathbb{P}_a$ est harmonique si $\mathbb{P}_a$ l'est ([DDJamPE, Corollary 4.3]). Ensuite, pour a fixé, on montre que, pour tout $\mathcal{X}^\alpha$, $\mathcal{X}^\alpha(T * \mathbb{P}_a) \in L^1\big((1+|x|)^{-Q-\Gamma}\, \mathrm{d}x\big)$. Enfin ([DDJamPE, Theorem 4.1]) $T * \mathbb{P}_a$ converge dans $(1+|x|^2)^{-\frac{Q+\Gamma}{2}} \mathcal{D}'_{L^1}$ vers T quand $a \to 0$.

Caractérisation de la pluriharmonicité

1. Introduction

Pour les domaines riemanniens symétriques $\mathcal{D} = G/K$, il est naturel d'étudier les fonctions qui sont harmoniques pour l'opérateur de Laplace-Beltrami du domaine. Par exemple, si on considère la boule unité de $\mathbb{C}^n$ comme la boule complexe de rang 1 *i.e.* l'espace homogène $SU(n,1)/SU(n)$, alors la notion d'harmonicité naturelle est celle des fonctions $\mathcal{M}$-harmoniques, c'est-à-dire des fonctions qui sont harmoniques pour le laplacien invariant par les transformation de Möbius. Plus généralement, on étudie les fonctions harmoniques pour des familles d'opérateurs G-invariants. Par exemple, sur les domaines de Siegel, on considère les fonctions qui sont harmoniques pour le système de Hua. Parmi ces fonctions harmoniques, on trouve en général les fonctions pluriharmoniques dont les propriétés sont très proches de celles des fonctions harmoniques (euclidiennes) à une variable. Il est alors naturel de se demander si ces propriétés restent valables pour toutes les fonctions harmoniques considérées.

Nous nous sommes intéressés à la caractérisation des fonctions pluriharmoniques parmi les fonctions harmoniques invariantes à l'aide de leur comportement au bord. La remarque initiale est la suivante : si u est une fonction harmonique euclidienne sur la boule unité de $\mathbb{C}^n$ qui a une valeur au bord au sens des distributions alors il en va de même pour toutes ses dérivées. Qu'en est-il si u est $\mathcal{M}$-harmonique ? Notons d'abord que, d'après un théorème de Frostman (voir [Ru, Theorem 4.4.9]) si u est à la fois harmonique euclidienne et $\mathcal{M}$-harmonique, alors u est pluriharmonique. La question que nous nous posons est donc de savoir si une fonction $\mathcal{M}$-harmonique peut avoir un comportement de fonction harmonique euclidienne sans pour autant être pluriharmonique. La réponse (négative) à cette question a été apportée par Bonami, Bruna et Grellier dans [BBG] puis généralisée au cas des boules de rang 1 dans [Jam6]. Enfin, avec des méthodes proches dans l'esprit mais techniquement assez différentes, ces travaux ont alors été étendus aux domaines de type tube pour les fonctions Hua-harmoniques dans [BBDHJam]. Ces derniers travaux prolongeaient ceux de Damek, Hulanicki, Müller et Peloso [DHMP] qui ont construit une famille minimale d'opérateurs invariants sur les domaines de Siegel de type tube permettant de caractériser les fonctions pluriharmoniques parmi les fonctions de H^2 (*i.e.* les fonctions harmoniques ayant une valeur au bord dans L^2).

2. Cas des boules hyperboliques

Dans cette section, nous allons montrer que, parmi les fonctions harmoniques invariantes sur les boules hyperboliques réelles, complexes ou quaternioniques ayant une distribution au bord, les fonctions “pluriharmoniques” se caractérisent par le fait que leurs dérivées normales à un certain ordre ont également une distribution au bord. Ces résultats ont été démontrés dans le cas complexe dans [BBG], dans le cas réel dans [Jam5] et de façon unifiée pour toutes les boules hyperboliques dans [Jam6].

Commençons par introduire quelques notations. Soit $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (les quaternions) et soit $x \mapsto \overline{x}$ ($x \in \mathbb{F}$) l'involution canonique sur $\mathbb{F}$. Soit enfin $|x|^2 = x\overline{x}$ et $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Pour $n \geq 1$ un entier, considérons la forme quadratique

$$Q(x) = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2$$

sur $\mathbb{F}^{n+1}$. Soit G la composante connexe de l'identité du groupe des transformations $\mathbb{F}$-linéaires sur $\mathbb{F}^{n+1}$ qui préservent Q et qui sont de déterminant 1 quand $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $G = SO_0(n,1)$, pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $G = SU(n,1)$ et pour $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, $G = Sp(n,1)$. Soit $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa de G et soit M le centralisateur de A dans K.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{F}^n$, soit $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$ et $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. La boule unité $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{F}^n \ : \ \|x\|^2 < 1\}$ et son bord $\mathbb{S}^{nd-1}$ s'identifient respectivement à G/K et à K/M.

Plus précisément, G/K s'identifie naturellement à l'hyperboloïde $Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = -1$ par $gK \mapsto g(0, \ldots, 0, 1) = (\sinh t.\xi, \cosh t)$ pour un certain $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{S}^{nd-1}$. Ce point est alors identifié à $(\tanh t)\xi \in \mathbb{B}_n$. Il est alors facile de voir que G agit transitivement sur $\mathbb{B}_n$ et sur $\mathbb{S}^{nd-1}$ par :

$$g.(x_1, \ldots, x_n) = (y_1 y_{n+1}^{-1}, \ldots, y_n y_{n+1}^{-1})$$

où $(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = g(x_1, \ldots, x_n, 1)$.

Soit maintenant γ la racine positive simple de (G, A), et soit $m_1 = d(n-1)$, $m_2 = d-1$ les multiplicités de γ et de 2γ. Soit $\rho = \frac{m_1}{2} + m_2$, de sorte que $\rho = \frac{n-1}{2}, n, 2n+1$ selon que $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

L'operateur de Laplace-Beltrami de $\mathbb{B}_n$ est donné par

$$D_{\mathbb{F}} = \frac{1-r^2}{4r^2}\left[(1-r^2)N^2 + \big(m_1 + m_2 - 1 + (m_2-1)r^2\big)N\right] + \frac{1-r^2}{r^2}\Delta_1 + \frac{(1-r^2)^2}{4r^2}\Delta_2$$

où $r = \|x\|$, $N = r\dfrac{\partial}{\partial r}$ et Δ_1, Δ_2 sont des opérateurs de dérivation tangentiels qui ont pour vecteurs propres les harmoniques sphériques.

Nous dirons enfin qu'une fonction u sur $\mathbb{B}_n$ a une valeur au bord au sens des distributions si, pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{nd-1})$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{S}^{nd-1}} u(r\zeta)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$$

existe et a une limite quand $r \to 1$.

Théorème (Jaming [Jam6, Theorem 2.1]**).**
Soit u une fonction $D_{\mathbb{F}}$-harmonique qui a une valeur au bord au sens des distributions et soit k un entier. Alors

— *si $k < \rho$, $N^k u$ a une valeur au bord au sens des distributions,*

— *si $k = \rho$, pour tout $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^{nd-1})$,*

$$\int_{\mathbb{S}^{nd-1}} u(r\zeta)\Phi(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta) = O\left(\log\frac{1}{1-r}\right).$$

Remarque.
Dans [Jam5], un résultat similaire a été démontré avec une identification différente de la boule hyperbolique et de $SO(n,1)/SO(n)$. Comme l'opérateur N n'est pas invariant par $SO(n,1)$,

l'indice critique dépend de l'identification considérée. Ainsi, dans [Jam5], l'indice critique ρ du théorème précédent est remplacé par 2ρ. Néanmoins, le résultat ci-dessus s'en déduit par un calcul simple, voir[Jam6].

Esquisse de démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur k. On commence par voir que si u est $D_{\mathbb{F}}$-harmonique et si u, ..., $N^{k-1}u$ ont une valeur au bord au sens des distributions alors, du fait de la $D_{\mathbb{F}}$-harmonicité de u,

$$(1-r^2)N^{k+1}u + (m_1+m_2-1+(m_2-2k+1)r^2)N^k u$$

a également une valeur au bord au sens des distributions. Ainsi la fonction ψ_k défnie par $\psi_k(r) := \int_{\mathbb{S}^{nd-1}} N^k u(r\zeta)\Phi(\zeta)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$(1-r^2)r\psi_k'(r) + (m_1+m_2-1+(m_2-2k+1)r^2)\psi_k(r) = g_k(r)$$

où g_k est une fonction qui a une limite quand $r \to 1$. On résout cette équation :

$$\psi_k(r) = \frac{(1+r)^{\rho-k}}{r^{m_1+m_2-1}}(1-r)^{\rho-k}\int_0^r \frac{g_k(s)s^{m_1+m_2-2}}{(1+s)^{\rho+1-k}}(1-s)^{-(\rho-k)+1}\,\mathrm{d}s$$

et le théorème résulte des propriétés usuelles des intégrales impropres. □

La question se pose alors de savoir si $N^\rho u$ peut avoir une distribution au bord.

Notons d'abord que si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et si n est pair, alors $\rho = \frac{n-1}{2}$ n'est pas un entier et la question n'a pas vraiment de sens. En fait, on peut montrer que $\Delta^{n/2}u = 0$. Le comportement de u est donc plutôt celui d'une fonction harmonique euclidienne. En particulier :

Proposition (Jaming [Jam5, Theorem 3.12]**,** [Jam6, Corollary 2.4]**).**
Dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et n pair, si u est $D_{\mathbb{F}}$ harmonique et a une valeur au bord au sens des distributions, alors toutes ses dérivées ont une valeur au bord au sens des distributions.

Les autres cas sont radicalement différents puisqu'on a :

Théorème (Jaming [Jam6, Propositions 2.2, 2.5 et Theorem 4.3]**).**
Soit u une fonction $D_{\mathbb{F}}$-harmonique avec une valeur au bord au sens des distributions et telle que $N^\rho u$ ait également une valeur au bord au sens des distributions.

— *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et n est impair, alors u est également euclidienne harmonique ce qui implique que u est constante.*

— *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alors u est également euclidienne harmonique ce qui implique que u est pluriharmonique.*

— *si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, alors $u = u_1 + u_2$ avec $\Delta u_1 = 0$ et $\Delta^2 u_2 = 0$ mais, si $u_2 \neq 0$, alors u_2 n'est pas harmonique euclidienne.*

Esquisse de démonstration. Celle-ci est basée sur la décomposition de u en harmoniques sphériques qui, dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, est donnée par

$$u(r\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} {}_2F_1\left(k, 1-\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}, r^2\right)u_k(r\zeta). \tag{2.2}$$

Le facteur ${}_2F_1(k, 1-\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}, r^2)$ est une fonction hypergéométrique de Gauss et c'est ce facteur qui différencie les fonctions $D_{\mathbb{R}}$-harmoniques des fonctions harmoniques euclidiennes.

Notons que dans le cas où n est pair, ce facteur est un polynôme et la proposition précédente s'en déduit immédiatement.

Le fait que $N^\rho u$ a une valeur au bord au sens des distributions implique qu'une dérivée d'ordre suffisamment élevé de ${}_2F_1(k, 1-\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}, r^2)$ a une limite quand $r \to 1$. En utilisant les propriétés des fonctions hypergéométriques, on constate que ceci n'est possible que pour $k = 0$. Ainsi, la somme (2.2) se réduit au premier terme et u est constante.

Les autres cas sont similaires. Seuls les paramètres des fonctions hypergéométriques qui apparaissent dans la décomposition en harmoniques sphériques sont différents. □

3. Cas du groupe de Heisenberg

Reprenons les notations de [St] et de la section 2 sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^n$. Introduisons les opérations de dérivation complexe sur $\mathbb{H}^n$

$$\overline{\mathcal{Z}}_j = \frac{1}{2}(\mathcal{X}_j + \mathcal{Y}_j) \quad , \quad \mathcal{Z}_j = \frac{1}{2}(\mathcal{X}_j - i\mathcal{Y}_j).$$

Nous considérons maintenant le produit semi-direct de $\mathbb{H}^n$ avec $\mathbb{R}_*^+$, $\mathfrak{S} = \mathbb{H}^n\mathbb{R}_*^+$ où l'action de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{H}^n$ est donnée par $a[\zeta, t] = [a^{1/2}\zeta, at]$. La multiplication de $\mathfrak{S}$ est donc donnée par

$$[\zeta, t, a][\eta, s, b] = \big[[\zeta, t][a^{1/2}\eta, as], ab\big].$$

Les champs de vecteurs invariants à gauche sur $\mathbb{H}^n$ se prolongent à des champs de vecteurs invariants à gauche sur $\mathfrak{S}$ de la façon suivante :

$$X_j = a^{1/2}\mathcal{X}_j,\ Y_j = a^{1/2}\mathcal{Y}_j,\ T = a\mathcal{T},\ a\partial_a,\ Z_j = a^{1/2}\mathcal{Z}_j \text{ et } \overline{Z}_j = a^{1/2}\overline{\mathcal{Z}}_j.$$

Introduisons enfin $Z_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} - i\partial_a)$ et $\overline{Z}_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} - i\partial_a)$ de sorte que aZ_{n+1} et $a\overline{Z}_{n+1}$ soient invariants à gauche.

On peut identifier $\mathfrak{S}$ et le demi-plan supérieur de Siegel

$$\mathcal{U}^n = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1}\ :\ \operatorname{Im} z_{n+1} > \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right\}.$$

Avec cette identification, on définit naturellement les notions de fonctions holomorphes, antiholomorphes et pluriharmoniques sur $\mathfrak{S}$. Plus précisément :

— F est holomorphe si $\overline{Z}_jF = 0$ pour $j = 1, \dots, n+1$,

— F est antiholomorphe si $Z_jF = 0$ pour $j = 1, \dots, n+1$,

— F est pluriharmonique si $Z_k\overline{Z}_jF = 0$ pour $1 \leq j \neq k \leq n+1$, $Z_{n+1}\overline{Z}_{n+1}F = 0$ et $(Z_k\overline{Z}_k + 2i\overline{Z}_{n+1})F = 0$ pour $k = 1, \dots, n$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ nous introduisons alors les opérateurs

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{Z}_j\overline{\mathcal{Z}}_j + \overline{\mathcal{Z}}_j\mathcal{Z}_j) + i\alpha\mathcal{T} = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(\mathcal{X}_j^2 + \mathcal{Y}_j^2) + i\alpha\mathcal{T}$$

qui jouent un rôle fondamental en analyse complexe. Plus précisément, si on note $\Box_b$ le laplacien au bord de $\mathcal{U}^n \simeq \mathfrak{S}$, alors la restriction de $\Box_b$ aux q-formes est donnée par $\mathcal{L}_\alpha$ avec $\alpha = n - 2q$, voir [St, Chapitre XIII 1 et 2]. Nous noterons simplement $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Enfin nous considérons les opérateurs L_α qui apparaissent naturellement dans le système de Hua sur les domaines de Siegel de type tube :

$$L_\alpha = -\alpha a(\mathcal{L} + n\partial_a) + a^2(\partial_a^2 + \mathcal{T}^2).$$

On dira qu'une fonction F est L_α-harmonique si $L_\alpha F = 0$. On notera P_a^α le noyau de Poisson associé à L_α, *i.e.* l'unique fonction P^α sur $\mathbb{H}^n$ telle que F est L_α-harmonique bornée si et seulement si il existe une fonction f sur $\mathbb{H}^n$ bornée telle que

$$F(\omega, a) = f * P_a^\alpha(\omega) := \int_{\mathbb{H}^n} f(w) P_a^\alpha(w^{-1}\omega)\, \mathrm{d}w.$$

La fonction f est alors la *valeur au bord de* F au sens des distributions : pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^n)$,

$$\int F(\omega, a)\varphi(\omega)\, \mathrm{d}\omega \to \int f(\omega)\varphi(\omega)\, \mathrm{d}\omega$$

quand $a \to 0$.

Le premier théorème que nous avons démontré est le suivant :

Théorème (Bonami *et al* [BBDHJam, Theorem 2.1]**).**
Soit F une fonction L_α-harmonique bornée et soit f sa valeur au bord. Alors

(i) *F est holomorphe si et seulement si $\mathcal{L}_n f = 0$.*

(ii) *F est anti-holomorphe si et seulement si $\mathcal{L}_{-n} f = 0$.*

(iii) *F est pluriharmonique si et seulement si $\mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_n f = (\mathcal{L}^2 + n^2\mathcal{T}^2)f = 0$.*

Ce théorème était connu avec des conditions plus fortes sur F (par exemple [Lav, Gr1, Gr2]). Il n'en reste pas moins que notre résultat nécessite une condition sur F puisque $F(\omega, a) = a^{n\alpha+1}$ est L_α-harmonique, non pluriharmonique et sa valeur au bord est 0. On peut toutefois se demander s'il existe des croissances intermédiaires pour lesquelles le théorème est encore vrai.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème (Bonami *et al* [BBDHJam, Theorem 2.7]**).**
Soit $\alpha > 0$ et k le plus petit entier plus grand que $n\alpha$. Soit F une fonction L_α-harmonique bornée. Supposons que pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$ et tout $0 \le p \le k+1$,

$$\sup_{a \le 1} \left| \int_{\mathbb{H}^n} \partial_a^p F(w, a)\varphi(w)\, dw \right| < \infty$$

alors F est pluriharmonique.

Esquisse de démonstration. Celle-ci comprend plusieurs étapes :

1. On montre le résultat pour les fonctions qui ne dépendent pas de la variable centrale t. Une telle fonction est alors Λ_α-harmonique sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^+$ où

$$\Lambda_\alpha = \alpha a(\Delta - n\partial_a) + a^2\partial_a^2$$

et Δ est le laplacien euclidien de $\mathbb{C}^n$. La transformée de Fourier sur $\mathbb{C}^n$ du noyau de Poisson Q_a^α associé est de la forme $z(\alpha|\xi|^2 a)$ où z est une fonction de Legendre ([BBDHJam, Lemma 2.3]). On montre, en suivant le principe de démonstration de la section précédente et en utilisant les propriétés des fonctions de Legendre qu'une fonction Λ-harmonique qui a $k+1$

dérivées avec des valeurs au bord est nécessairement constante ([BBDHJam, Proposition 2.4]).

2. On détermine la transformée de Fourier au sens du groupe de Heisenberg du noyau de Poisson. Celle-ci est reliée aux fonctions hypergéométriques confluentes et aux fonctions de Hermite ([BBDHJam, Lemma 2.5]).

3. On montre qu'une fonction F qui vérifie les hypothèses du théorème a une valeur au bord qui est orthogonale à une large classe de fonctions ([BBDHJam, Proposition 2.6]). On utilise pour cela les propriétés des fonctions hypergéométriques confluentes.

4. On se ramène au cas où la valeur au bord est régulière. On conclut alors en montrant que la fonction L_α-harmonique G dont la valeur au bord est $g = (\mathcal{L}^2 + n^2\mathcal{T}^2)f$ est t-indépendante et vérifie encore les hypothèses de régularité du théorème. Ainsi G est constante et cette constante ne peut être que 0. Par suite $(\mathcal{L}^2 + n^2\mathcal{T}^2)f = 0$ et le premier théorème donne la conclusion voulue. $\square$

Notons que le théorème est optimal :

Théorème (Bonami *et al* [BBDHJam, Theorem 2.8]**).**
Soit $\alpha > 0$ et k le plus petit entier plus grand que $n\alpha$. Soit F une fonction L_α-harmonique avec une valeur au bord au sens des distributions. Alors, pour tout $p \leq k$, $\partial_a^p F$ a une valeur au bord au sens des distributions.

La démonstration de ce théorème est similaire au cas des boules hyperboliques.

Enfin, un résultat similaire est valide sur tous les domaines de Siegel de type tube :

Théorème (Bonami *et al* [BBDHJam, Theorem 3.3]**).**
Soit $\mathcal{D}$ un domaine irréductible symétrique de type tube. Il existe k (dépendant du rang et de la dimension), tel que si F est Hua-harmonique et a toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k qui sont bornées, alors F est pluriharmonique.

Ce théorème se démontre à l'aide du précédent et d'une récurrence sur le rang du domaine.

Perspectives

1. Limites pondérées d'intégrales de Poisson

Les travaux menés dans [JamR] sur les limites pondérées de fonctions harmoniques sur la boule unité complexe n'ont pas encore atteint leur pleine généralité. Ils devraient s'étendre sans trop de difficultés à toutes les boules hyperboliques et même aux fonctions propres du laplacien. Il est possible qu'ils s'étendent également au cadre des groupes de Lie homogènes avec des noyaux de type $(\mathcal{R}_\Gamma)$. Cette question pourrait constituer le point de départ d'un travail de thèse pour un étudiant qui, de surcroît, verrait là l'occasion d'apprendre les bases de la théorie des fonctions harmoniques sur les groupes homogènes.

2. Caractérisation des intégrales de Poisson de distributions

Un théorème de P. Sjögren [Sj] et son extension par J. Alvarez, M. Guzmán-Partida et S. Pérez-Esteva [AGPPE] permettent de caractériser entièrement les fonctions harmoniques euclidiennes qui sont des $\mathcal{S}'$-convolées de distributions avec le noyau de Poisson euclidien. Nous avons obtenu des résultats intermédiaires dans le cas des groupes de Lie homogènes, mais une caractérisation complète nous échappe encore, même en supposant des propriétés d'harmonicité explicites. Elle nécessiterait sans doute de développer des outils de théorie du potentiel.

3. Décomposition asymptotique et pluriharmonicité

Nous avons montré que si F est L_α-harmonique bornée avec une valeur au bord f alors F est pluriharmonique si et seulement si $\mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_n f = 0$. Une condition de croissance est nécessaire puisque $F(w,a) = a^{n\alpha+1}$ n'est pas pluriharmonique. Il est vraisemblable que la croissance dans cet exemple soit optimale, *i.e.* que le théorème reste vrai pour les fonctions dont la croissance en a soit plus lente que $a^{n\alpha+1}$. Pour obtenir un tel résultat, un autre schéma de démonstration est nécessaire, probablement fondé sur le recours à une décomposition asymptotique. Une fois celle-ci obtenue, le deuxième théorème de [BBDHJam] doit lui aussi s'étendre à l'aide d'une décomposition asymptotique. Des calculs préliminaires nous ont montré qu'on doit pouvoir pondérer la condition de croissance des dérivées de ce théorème :

$$\sup_{a\leq 1} a^q \left| \int_{\mathbb{H}_n} \partial_a^p F(w,a)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \right| < \infty$$

et, pour q bien choisi, on obtiendrait un nouvel indice optimal $k' > k$ qui caractérise une nouvelle classe de fonctions dont l'identification précise nous échappe encore.

Applications de l'analyse de Fourier

Avant-Propos

Un fait commun en sciences est qu'il n'est jamais possible de mesurer exactement une quantité qu'on veut étudier. On cherche alors à reconstruire l'information perdue à partir de connaissances *a priori* sur la grandeur considérée.

L'exemple le plus célèbre est sans doute le théorème d'échantillonnage. On mesure un échantillon $\{s(kT),\ k \in \mathbb{Z}\}$ d'un signal s et on veut reconstruire s (ou du moins une bonne approximation de s) à partir de cet échantillon. Grâce au théorème fondamental de Shannon, ceci peut être fait *explicitement* si s est supposé à spectre compact, *i.e.* si sa transformée de Fourier est à support compact $[-\Omega, \Omega]$, à condition que T soit assez petit, $2\Omega T \leq 1$:

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \operatorname{sinc} \pi(x - kT).$$

Évidemment, ceci est une situation idéale et dans le monde réel on ne peut pas mesurer tout l'échantillon. De plus, un signal n'est jamais parfaitement à spectre compact. Il est toutefois raisonnable de supposer que l'énergie de sa transformée de Fourier est essentiellement concentrée dans un intervalle fini. On se demande alors à quel point la formule d'échantillonnage approxime f si des échantillons manquent, s'ils sont mesurés avec du bruit et/ou si le signal n'est pas à spectre parfaitement compact.

Un point clé ici est que le signal s doit être bien concentré de sorte que la partie non-mesurée de l'échantillon $s(kT)$, $|k| \geq k_0$, ait le moins d'influence possible. Mais, en même temps, il faut que la transformée de Fourier de f soit bien concentrée pour que la formule d'échantillonnage donne une bonne approximation de f. Il se trouve qu'il y a de fortes limitations à cette concentration *temps-fréquence*, appelées *principes d'incertitudes*. Un des points de notre recherche a été de trouver de bonnes formulations mathématiques de ces principes. Celles-ci peuvent être des conditions de décroissance rapide (principes de type Hardy), de contrôle des moyennes et dispersions (principes de type Heisenberg) ou de petitesse du support (conditions de type Amrein-Berthier-Benedicks).

Le principe d'incertitude joue aussi un rôle dans la théorie des signaux radars. En effet, un radar émet un signal s en direction d'une cible et mesure une quantité $A(s)$ appelée *fonction d'ambiguïté radar* qui est définie par

$$A(s)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} s\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{s\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{2i\pi yt}\, \mathrm{d}t.$$

Ainsi $A(s)$ est une transformation de s qui mélange convolution (variable x) et transformation de Fourier (variable y). Physiquement, x est relié au temps de parcours du signal du radar à la cible puis au temps de retour du signal réfléchi par la cible au radar, donc x est essentiellement la distance radar-cible, alors que y provient de l'effet Dopler et est relié à la vitesse de la cible (voir [Jam4] pour les détails). Notons aussi que $A(s)$ est la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^2$ de la transformée de Wigner de s. La précision de la mesure du radar dépend de la concentration de la fonction d'ambiguïté près de l'origine. Un des aspects de notre travail consiste à montrer que, comme pour le couple $(s, \widehat{s})$, il y a de fortes limitations à la concentration de $A(s)$.

Notons que $A(s)$ est une forme quadratique en s et que la forme bilinéaire qui lui est associée est, à des variations mineures près, un outil commun du traitement du signal appelé *transformée de Fourier à fenêtre*, et est défini par

$$\mathcal{F}_w s(x, \xi) = \mathcal{F}[s(\cdot)w(\cdot - x)](\xi).$$

Heuristiquement, on regarde s à travers une fenêtre w qu'on fait glisser (variable x) de sorte que $\mathcal{F}_w s(x, \xi)$ mesure le contenu fréquentiel de ce qu'on voit ainsi (dans la variable ξ). On espère alors améliorer la concentration temps-fréquence, *i.e.* la concentration en (x, ξ) en demandant à w d'être bien concentré en temps et à s d'être bien concentré en fréquence ou *vice-versa*. La motivation initiale de nos travaux sur le principe d'incertitude consiste à trouver des limitations à cette concentration. Nous avons en particulier obtenu une technique de transfert des principes d'incertitude de la transformée de Fourier à sa version à fenêtre. La plupart de ces résultats ont été obtenus avec A. Bonami et B. Demange à l'aide de méthodes d'analyse complexe et d'analyse harmonique réelle. Ces travaux ont ensuite été largement généralisés par B. Demange dans sa thèse.

Finalement, nous présentons des généralisations de principes d'incertitude de H. Shapiro. Dans un manuscrit non publié, il a remarqué que les éléments d'une base orthonormée ne pouvaient pas être uniformément bien localisés dans le plan temps-fréquence. Par exemple, il a démontré à l'aide d'un critère de compacité qu'il n'existe pas de suite orthonormale infinie dont tous les éléments ainsi que leurs transformées de Fourier ont des moyennes et des dispersions majorées par une quantité fixe. Avec A. Powell nous avons, à l'aide de méthodes combinatoires (et d'un peu de théorie spectrale) donné des bornes sur le nombre d'éléments d'une suite orthonormée bien localisée en temps-fréquence.

Une autre famille de problèmes qui apparaît dans de nombreux domaines (optique, cristallographie, mécanique quantique,...) est celui de la reconstruction d'un signal s à partir de son module $|s|$. En fait, à cause du bruit, de la transmission dans de la matière désordonnée, de la faiblesse de l'appareillage de mesure,... il est courant que la phase du signal soit perdue lors d'une mesure.

À nouveau, on suppose qu'on dispose d'information *a priori* sur s, typiquement que s est un signal à spectre compact (ou dans certains cas que s est une distribution à spectre compact). D'après le théorème de Paley-Wiener, s est une fonction entière et sa phase n'est donc pas arbitraire. La théorie des fonctions holomorphes joue ici un rôle fondamental et permet de décrire entièrement les solutions en dimension 1. L'ensemble des solutions est encore assez grand et la question d'effectuer d'autres mesures et/ou de modifier le processus de mesure se pose alors, dans le but d'obtenir l'unicité de la solution. C'est par exemple le cas du problème de Pauli en mécanique quantique où on cherche à déterminer une fonction d'onde f d'une particule à partir de la densité de probabilité de sa position $|f|^2$ et de la densité de probabilité de son moment $|\widehat{f}|^2$. Un autre exemple est le problème de la triple-corrélation que nous avons étudié avec M. Kolountzakis.

Une question similaire se pose en théorie des radars où l'on demande si $|A(s)|$ détermine s à quelques transformations élémentaires près. Ce problème a été abordé en plusieurs étapes. Dans la première, nous avons abordé le problème des signaux à support compact et imposé des restrictions supplémentaires pour lesquelles l'analyse complexe ne joue plus de rôle. Puis, dans des travaux en commun avec A. Bonami, G. Garrigós et J.-B. Poly, en discrétisant le problème et en utilisant des outils d'analyse complexe, d'algèbre et de combinatoire, nous montrons que génériquement les solutions du problème sont triviales mais qu'il y a néanmoins de larges classes de contre-exemples.

Travaux concernés

Principes d'incertitude

[Jam3] Ph. Jaming, Principe d'incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de Wigner. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, **237** (1998), 249–254.

[BDJam] A. Bonami, B. Demange & Ph. Jaming, Hermite functions and uncertainty principles for the Fourier and the windowed Fourier transforms. *Revista Matemática Iberoamericana*, **19** (2003), 23–55.

[Jam7] Ph. Jaming, Uncertainty principles for orthonormal bases. *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, École Polytechnique*, exposé XV (2006).

[JamP] Ph. Jaming & A. Powell, Uncertainty principles for orthonormal bases. *Journal of Functional Analysis*, **243** (2007), 611–630.

[Jam9] Ph. Jaming, Nazarov's uncertainty principle in higher dimension. *Prépublication*, (2006).

Certains de ces travaux, particulièrement [BDJam], ont été poursuivis dans la thèse de Bruno Demange (co-encadré avec A. Bonami) et sont à l'origine des publications suivantes :

[De1] B. Demange, *Principes d'incertitude associés à des formes quadratiques non dégénérées.* Thèse de l'Université d'Orléans, 2004.

[De2] B. Demange, *Inégalités d'incertitude associées à des fonctions homogènes.* Comptes Rendus Mathématique de l'Acadmie des sciences Paris **340** (2005) 709–714.

[De3] B. Demange, *Uncertainty principles for the ambiguity function.* Journal of the London Mathematical Society (2) **72** (2005) 717–730.

[BoDe] A. Bonami & B. Demange, *A survey on the uncertainty principle for quadratic forms.* Collectanea Mathematica (2006) Vol. Extra, 1–36.

[De4] B. Demange, *Uncertainty principles associated to quadratic forms.* Prépublication (2006).

Reconstruction de phase

En plus de [Jam3] déjà mentionné pour les principes d'incertitude, les travaux suivants portent sur le problème de reconstruction de phase.

[Jam4] Ph. Jaming, Phase retrieval techniques for radar ambiguity problems. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, **5** (1999), 309–329.

[GJamP] G. Garrigós, Ph. Jaming & J.-B. Poly, Zéros de fonctions holomorphes et contre-exemples en théorie des radars. *Actes des Rencontres d'Analyse Complexe (Poitiers-Futuroscope, 1999)*, 81–104, Atlantique, Poitiers, 2002.

[JamK] Ph. Jaming & M. Kolountzakis, Reconstruction of functions from their triple correlations. *New York Journal of Mathematics*, **9** (2003), 149–164.

[BGJam] A. Bonami, G. Garrigós & Ph. Jaming, Discrete radar ambiguity problems. À paraître dans *Applied and Computational Harmonic Analysis*, (2007).

[Jam8] Ph. Jaming, The phase retrieval problem for cyclotomic crystals. Soumis à *Topics on the Interface between Harmonic Analysis and Number Theory, T. Erdelyi, B. Saffari, G. Tenenbaum (Eds).*

Principes d'incertitude

1. Principe d'incertitude de Heisenberg

Dans cette première partie, nous commençons par énoncer les principes d'incertitude dans lesquels la concentration est mesurée à l'aide de la dispersion. Cette première forme du principe d'incertitude, due à Heisenberg-Pauli-Weil, montre qu'il existe une borne inférieure à la concentration temps-fréquence et que cette borne est atteinte par les gaussiennes. Nous présenterons ici une forme un peu généralisée due à De Bruijn qui montre que les fonctions de Hermite sont des optimaux successifs du principe d'incertitude. Nous terminons par la réponse à une question formulée par H. Shapiro en montrant que parmi toutes les bases orthonormales, les fonctions de Hermite sont celles dont les dispersions croissent le plus lentement.

1.1. **Principe d'incertitude de Heisenberg.**

Introduisons rapidement quelques notations. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ nous définissons la transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

et étendons cete définition à tout $L^2(\mathbb{R})$ de façon usuelle. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, soit

— $\mu(f) = \dfrac{1}{\|f\|_2^2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} t|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ la *moyenne*, lorsqu'elle existe, de la mesure $|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

— $\Delta^2(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |t-\mu(f)|^2|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ sa *variance* et $\Delta(f) = \sqrt{\Delta^2(f)}$ sa *dispersion.*

Les fonctions de Hermite sont définies par

$$h_k(t) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{k!}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k e^{\pi t^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^k e^{-2\pi t^2}.$$

Rappelons qu'elles forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de fonctions propres de la transformée de Fourier et de l'opérateur de Hermite

$$Hf(t) = \left(-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + t^2\right) f(t).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le premier principe d'incertitude :

Principe d'incertitude de Heisenberg-Pauli-Weil.
Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\Delta(f)\Delta(\widehat{f}) \geq \frac{1}{4\pi}\|f\|_2^2$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si il existe $C \in \mathbb{C}$, $\omega, a, \alpha \in \mathbb{R}$, tels que

$$f(t) = ce^{2i\pi\omega t}e^{-\pi\alpha|t-a|^2} \quad p.p.$$

Notons que Heisenberg n'a donné qu'une interprétation physique profonde de ce phénomène mais n'en a pas fourni de formulation mathématique précise. Cette omission a été réparée peu après par Kennard [Ke] et par Weil (qui attribue le résultat à Pauli) [We, Appendix 1].

La démonstration utilisant la théorie spectrale de l'opérateur de Hermite que nous présentons ici est classique et se trouve par exemple dans de Bruijn [dBr1].

Démonstration. En remplaçant éventuellement f par $f(t) = e^{2i\pi\omega t} f(t-a)$, on peut supposer que $\mu(f) = \mu(\widehat{f}) = 0$. De plus, il suffit de démontrer que

$$\Delta(f)^2 + \Delta(\widehat{f})^2 \geq \frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2$$

avec égalité si et seulement si $f = c\,h_0$. Il suffit alors d'appliquer cette inégalité à $f_\lambda(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} f\left(\dfrac{t}{\lambda}\right)$ et de minimiser le membre de gauche en λ pour obtenir le théorème sous la forme énoncée.

Mais alors, en utilisant les liens entre dispersion, opérateur de Hermite et fonctions de Hermite, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) &= \langle Hf, f\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k+1}{2\pi} |\langle f, h_k\rangle|^2 \\ &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\times 0+1}{2\pi} |\langle f, h_k\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi}\|f\|^2. \end{aligned}$$

De plus, il n'y a égalité que si $\langle f, h_k\rangle = 0$ pour tout $k \neq 0$, c'est-à-dire si $f = ch_0$. □

Cette démonstration nous donne en fait un peu plus. En effet, si f est orthogonal à $h_0, \ldots, h_{n-1}$, alors

$$\Delta^2(f) + \Delta^2(\widehat{f}) \geq \frac{2n+1}{2\pi}\|f\|^2$$

avec égalité si et seulement si $f = ch_n$. Ceci montre que les éléments de la base de Hermite sont des optima successifs du principe d'incertitude.

Il existe de nombreuses généralisations du principe de Heisenberg, consistant en particulier à changer les exposants du poids $|t - \mu(f)|$ et à considérer des normes L^p au lieu de normes L^2, voir [CP] et [Fa] et dans de nombreux contextes, voir par exemple [CRS].

Enfin, précisons que la transformée de Fourier à fenêtre vérifie elle aussi un principe d'incertitude de type Heisenberg. Il existe de nombreuses versions de ce fait dans la littérature (par exemple [dBr2, Coh, Fl, Jan1, Wx, Wi]). Le plus précis est le suivant :

Théorème (Bonami-Demange-Jaming [BDJam, Theorem 5.1]**).**
Pour $f, w \in L^2(\mathbb{R})$, on a l'inégalité suivante :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |x|^2 |\mathcal{F}_w f(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \iint_{\mathbb{R}^2} |y|^2 |\mathcal{F}_w f(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^4 \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^4}{4\pi^2}. \tag{1.3}$$

De plus (1.3) *est une égalité, avec f et w non nulles si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(t) = e^{2i\pi\beta t} e^{-\alpha|t-\gamma|^2/2} \quad \text{et} \quad w(t) = e^{2i\pi\beta t} e^{-\alpha|t-\gamma|^2/2}.$$

La démonstration est basée sur la démonstration classique du principe d'incertitude de Heisenberg. Notons en particulier qu'il ne peut y avoir égalité que si $w = f$. Une forme plus forte a été obtenue dans la thèse de Bruno Demange :

Théorème (Demange [De1, Théorème 5.2.2]**).**
Il existe une constante $C>0$ telle que, pour tous $f,w\in L^2(\mathbb{R})$, on a l'inégalité suivante :
$$\iint_{\mathbb{R}^2}|\langle x,y\rangle|^2|\mathcal{F}_w f(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geq C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$
Toutefois la constante optimale C n'est pas connue et on manque d'informations sur les minimiseurs (dont B. Demange démontre l'existence) lorsque $w\neq f$.

1.2. **Une version quantitative du théorème de Shapiro.**

Dans une note non publiée, H. Shapiro [Sho1] étudiait les propriétés des suites (a_k), (b_k), (c_k), (d_k) pour lesquelles il existe une base orthonormée (e_k) de $L^2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $k\geq 0$,
$$\mu(e_k)=a_k,\ \mu(\widehat{e_k})=b_k,\ \Delta(e_k)=c_k,\ \Delta(\widehat{e_k})=d_k.$$
En utilisant un argument de compacité, il a montré que les quatre suites ne pouvaient pas toutes être bornées. Ces résultats ont ensuite été améliorés par A. Powell [Po] qui a montré qu'il n'existe pas de base orthonormale pour laquelle les trois suites $\mu(e_k)$, $\Delta(e_k)$, $\Delta(\widehat{e_k})$ sont bornées. Par contre, en modifiant une construction de Bourgain [Bo] il a construit une base orthonormale telle que $\mu(e_k)$, $\mu(\widehat{e_k})$, $\Delta(e_k)$ étaient toutes bornées.

Cette question était motivée par le développement de l'analyse de Gabor et de la théorie des ondelettes. Rappelons que

(1) une *base de Gabor* est une base $\{g_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $g_{k,l}(x)=e^{2i\pi kx}g(x-l)$. Ainsi $\mu(g_{k,l})\to\infty$ quand $l\to\infty$ et $\mu(\widehat{g_{k,l}})\to\infty$ quand $k\to\infty$. De plus, le théorème de Balian [Bal] et Low [Lo] affirme que si $(g_{k,l})_{k,l}$ est une base orthonormée, alors $\Delta(g)\Delta(\widehat{g})=+\infty$. Ce résultat est optimal. En effet, si on remplace la dispersion par la mesure de concentration $\Delta_{2-\varepsilon}(\varphi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|x-\mu(\varphi)|^{2-\varepsilon}|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x$, alors on peut construire une base de Gabor telle que $\Delta_{2-\varepsilon}(g)\Delta_{2-\varepsilon}(\widehat{g})<+\infty$, voir [CzPo] et les références de cet article.

(2) une *base d'ondelettes* est une base $\{g_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $g_{k,l}(x)=2^{k/2}g(2^kx-l)$. À nouveau $\mu(g_{k,l})\to\infty$ quand $l\to\infty$, $\Delta(g_{k,l})\to\infty$ quand $k\to-\infty$ et $\Delta(\widehat{g_{k,l}})\to\infty$ quand $k\to+\infty$.

En utilisant la théorie spectrale de l'opérateur de Hermite et en appliquant la technique de Rayleigh-Ritz, nous avons démontré une version quantitative optimale du théorème de Shapiro montrant que les fonctions de Hermite formaient la base la mieux concentrée en temps-fréquence.

Théorème (Jaming-Powell [JamP, Theorem 2.3]**).**
Soit $\{e_k\}_{k\geq 0}$ une suite orthonormale dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $n\geq 0$,
$$\sum_{k=0}^n\left(\Delta^2(e_k)+\Delta^2(\widehat{e_k})+|\mu(e_k)|^2+|\mu(\widehat{e_k})|^2\right)\geq\frac{(n+1)^2}{2\pi}.$$
De plus, s'il y a égalité pour tout $n\leq n_0$, alors pour $k=0,\dots,n_0$, $e_k=c_kh_k$ avec $|c_k|=1$.

En particulier, il y a au plus $8\pi C^2$ éléments de la suite pour lesquels $\Delta(e_k)$, $\Delta(\widehat{e_k})$, $|\mu(e_k)|$, $|\mu(\widehat{e_k})|$ sont tous $\leq C$.

Une autre façon de considérer qu'une fonction est concentrée consiste à demander que son support soit petit. Il est par exemple bien connu que si une fonction est à support compact, sa transformée de Fourier est une fonction entière, dont le support est donc $\mathbb{R}^d$. Cela conduit à introduire les notions suivantes :

Definition.
Soient S,Σ deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$. On dit que

— (S,Σ) *est une* paire annihilante *si,*

$$\mathrm{supp}\, f \subset S \quad \text{and} \quad \mathrm{supp}\, \widehat{f} \subset \Sigma$$

implique que $f=0$.

— (S,Σ) *est une* paire fortement annihilante *s'il existe une constante $C=C(S,\Sigma)$ telle que pour toute fonction $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus S)} + \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus\Sigma)}\big). \tag{2.4}$$

Il est facile de voir qu'une paire (S,Σ) est fortement annihilante si et seulement s'il existe un constante $D=D(S,\Sigma)$ telle que pour toute fonction $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ à spectre dans Σ,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq D\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\setminus S)}.$$

Nous venons donc de montrer qu'une paire d'ensembles compacts est faiblement annihilante. Un simple argument d'analyse fonctionnelle permet de montrer qu'une telle paire est également fortement annihilante (voir [BoDe]). Ceci est un cas particulier d'un théorème de Paneah [Pa1] (voir aussi [Pa2, Pa3]) et de Logvinenko-Sereda [LS] qui ont introduit la notion suivante :

Definition.
*Soit $\gamma>0$, un ensemble E est γ-*épais *à l'échelle $a>1$ si, pour tout $x\in\mathbb{R}$,*

$$|E\cap[x-a,x+a]| \geq 2\gamma a.$$

*On dira plus simplement que E est épais s'il existe $\gamma>0$ et $a>1$ tels que E soit γ-*épais *à l'échelle a.*

On peut montrer facilement (voir [HJ]) que les éléments d'une paire fortement annihilante sont des complémentaires d'ensembles épais. D'après le théorème de Paneah-Logvinenko-Sereda, si un ensemble Σ est compact, alors la réciproque est également vraie. De plus, ces auteurs ont donné des estimations de la constante $C(S,\Sigma)$ qui ont été ultérieurement améliorées par Kovrizhkin :

Théorème (Kovrizhkin [Ko]**).**
Il existe une constante C telle que, pour toute fonction $f\in L^2(\mathbb{R})$ à spectre dans $[-1,1]$ et pour tout ensemble E γ-épais à une échelle $a>1$, on a

$$\|f\|_2^2 \leq \left(\frac{C}{\gamma}\right)^{Ca}\int_E |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Notons que Havin et Jöricke [HJ] ont donné une interprétation en termes d'intégrales de Poisson de la condition d'épaisseur de S et avaient proposé une démonstration alternative du théorème de Logvinenko-Sereda.

On se demande alors ce qui se passe dans le cas où S et Σ sont des ensembles de mesure finie. Le théorème de Benedicks (que nous énonçons ici sous une forme un peu plus générale) répond à cette question :

Théorème (Benedicks [Be]**).**
Soient S, Σ deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$. On suppose que, pour presque tout $x \in (0,1)^d$, l'ensemble $(x+\mathbb{Z}^d)\cap S$ est fini et, pour presque tout $\xi \in (0,1)^d$, l'ensemble $(\xi+\mathbb{Z}^d)\cap\Sigma$ est fini. Alors la paire (S,Σ) est annihilante.

Démonstration. L'outil essentiel est la formule sommatoire de Poisson, qui implique que

$$e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} f(x+j)e^{2i\pi\langle j,\xi\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}(\xi+k)e^{2i\pi\langle k,x\rangle}. \tag{2.5}$$

Supposons d'abord qu'il existe $E \subset [0,1]^d$ de mesure positive tel que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $(x+\mathbb{Z}^d)\cap S$ est vide. Alors le membre de gauche de (2.5) s'annule sur E. Puisque le membre de droite est un polynôme trigonométrique dans la variable x, pour presque tout ξ, il est identiquement nul. En particulier

$$\|f\|_2^2 = \int_{(0,1)^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|\widehat{f}(\xi+k)|^2\,\mathrm{d}\xi = 0$$

et on conclut immédiatement dans ce cas.

Démontrons maintenant le cas général. Il est facile de trouver un ensemble $E \subset (0,1)^d$ de mesure positive et un entier $N > 0$ tel que $(x+N\mathbb{Z}^d)\cap S$ soit vide. Nous utiliserons le cas particulier précédent après un changement d'échelle. Nous sommes amenés à montrer que, pour presque tout $\xi \in (0,N^{-1})^d$, l'ensemble $(\xi+N^{-1}\mathbb{Z}^d)\cap\Sigma$ est fini, ce qu'on fait en l'écrivant comme une réunion finie d'ensembles $(\xi_j+\mathbb{Z}^d)\cap\Sigma$ où $\xi_j = \xi + \frac{j}{N}$, $j = \{0,\ldots,N\}^d$. □

Dans le cas où (S,Σ) sont des ensembles de mesure finie, on peut montrer qu'ils sont également fortement annihilants. Ceci a été démontré directement par Amrein-Berthier [AB] mais peut s'obtenir plus simplement à partir du fait qu'ils sont annihilants et d'un argument d'analyse fonctionnelle (voir [BoDe]). La question se pose alors de savoir comment la constante $C(S,\Sigma)$ dépend de S et Σ. En prenant $S=\Sigma=B(0,R)$ une boule centrée en 0 et f une gaussienne, on voit que la constante optimale est de la forme $C(S,\Sigma) = ce^{\pi(|S||\Sigma|)^{1/d}}$. Cette question est encore ouverte en toute généralité. Mais, en dimension 1, Nazarov a démontré que $C(S,\Sigma) \leq ce^{c|S||\Sigma|}$, ce qui donne la croissance optimale à la constante c près. Nous avons généralisé ce résultat à la dimension supérieure, mais nous n'obtenons une bonne constante que si la géométrie de S ou de Σ est suffisamment proche de celle d'une boule :

Théorème (Nazarov, $d=1$ [Na]**, Jaming** [Jam9]**).**
Il existe une constante $C = C(d)$ telle que, si S, Σ sont deux ensembles de mesure finie dans $\mathbb{R}^d$, alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2\,dx \leq Ce^{C\min\left(|S||\Sigma|,\,|S|^{1/d}\,\omega(\Sigma),\,\omega(S)\,|\Sigma|^{1/d}\right)}\left(\int_{\mathbb{R}^d\setminus S}|f(x)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\Sigma}|\widehat{f}(x)|^2\,dx\right)$$

où $\omega(S)$ désigne la largeur moyenne de S.

Ce théorème se démontre en modifiant l'argument de Benedicks de la façon suivante : tout d'abord, il suffit d'établir le théorème pour les fonctions à spectre dans Σ. On choisit un réseau de façon aléatoire (en choisissant de façon aléatoire une dilatation et une rotation du réseau standard $\mathbb{Z}^d$) et on écrit la formule de Poisson pour ce réseau. Le choix du réseau se fera de façon à contrôler le nombre de ses points qui sont dans Σ, ce qui permet de contrôler le degré du polynôme trigonométrique intervenant dans la démonstration du théorème de Benedicks. En même temps, on contrôle ce polynôme sur une partie E de $(0,1)^d$. Il résulte alors d'un théorème de Turán (généralisé par Nazarov puis Fontes-Merz [FM]) qu'on contrôle le polynôme partout. Les détails se trouvent dans [Jam9].

La démonstration que nous avons esquissée ici ne permet malheureusement pas de donner la constante que nous supposons optimale, à savoir $C(S,\Sigma)=ce^{\pi(|S||\Sigma|)^{1/d}}$. En examinant la démonstration attentivement, on se rend compte que ceci provient de l'estimation de Turán que nous utilisons, bien que celle-ci soit optimale. On s'aperçoit alors que le principe de la démonstration de Nazarov dépend assez fortement de la géométrie des ensembles S et Σ (plus précisément de la géométrie de l'un des deux ensembles) et que, si ces deux ensembles sont très dispersés, on ne peut obtenir d'estimation meilleure que $C(S,\Sigma)=ce^{\pi(|S||\Sigma|)}$ avec cette approche.

Une autre direction que nous avons empruntée consiste à comprendre l'influence du réarrangement décroissant sur la concentration de la transformée de Fourier. Dans le cas des séries de Fourier, des résultats ont été obtenus par Montgomery [Mon] dans le cadre L^2, montrant que la part de l'énergie d'une série de Fourier contenue dans un ensemble de mesure positive Σ est contrôlée par l'énergie de la série de Fourier obtenue en réarrangeant les coefficients de façon décroissante dans un intervalle de même mesure que Σ. Dans le cas L^1, des résultats partiels ont été obtenus par Donoho et Stark [DS] qui utilisent les propriétés des fonctions "prolates sphéroïdales" que nous reverrons plus loin. Nous cherchons maintenant à étendre ces deux familles de résultats, ce qui contribuerait peut-être à apporter une nouvelle compréhension du théorème de Nazarov.

Signalons que Shubin, Vakilian, Wolff [SVW] et Demange [De2] ont montré que si q et q' sont deux formes quadratiques non-dégénérées, alors $\{x\in\mathbb{R}^d\ :\ |q(x)|\leq C\}$ et $\{x\in\mathbb{R}^d\ :\ |q'(x)|\leq C\}$ forment une paire annihilantes lorsque le paramètre C est assez petit.

Enfin, nous avons montré dans [Jam3, Théorème 1.1] que la transformée de Fourier à fenêtre non nulle d'une fonction non nulle avait un support de mesure infinie. Ce résultat a été montré simultanément par Janssen [Jan2] et Wilczok [Wi] et répondait à une question de Mustard (voir [FoSi]). B. Demange a ensuite modifié l'argument de [Jam3] dans [De3] pour construire des ensembles fortement annihilants pour la transformée de Fourier à fenêtre à partir de nombreuses paires fortement annihilantes. Par exemple, à partir de l'extension en dimension 2 du théorème de Nazarov, la méthode de [De3] donne immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire.
Soient $f,w\in L^2(\mathbb{R})$ et $S\subset\mathbb{R}^2$ un ensemble de mesure finie. Alors

$$\|f\|_2^2\|w\|_2^2\leq Ce^{C\min\left(|S|^2,|S|^{1/2}\,\omega(S)\right)}\int_{\mathbb{R}^2\setminus S}|\mathcal{F}_wf(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. Conditions de décroissance rapide

Nous allons maintenant mesurer la concentration en demandant à une fonction qu'elle décroisse rapidement à l'infini. Ainsi, une fonction très concentrée est typiquement la gaussienne $e^{-\pi a x^2}$ pour laquelle le paramètre a mesure la concentration.

3.1. **Principe d'incertitude de Hardy.**

Théorème (Hardy [Ha]**).**
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soient $a, b > 0$. Supposons que

(1) *pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq C(1+|x|)^N e^{-\pi a|x|^2}$,*
(2) *pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N e^{-\pi b|\xi|^2}$.*

Si $ab > 1$, alors $f = 0$ et si $ab = 1$, alors $f(x) = P(x)e^{-\pi a|x|^2}$, où P un polynôme de degré au plus N.

Ce théorème a été généralisé à plusieurs reprises et on peut considérer que sa forme optimale est la suivante :

Théorème (Demange [De1]**).**
Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Supposons que $e^{\pi|x|^2} f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $e^{\pi|\xi|^2}\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ alors $f = P(x)e^{-\langle Ax,x\rangle}$, où A est une matrice $d \times d$ définie positive et P est un polynôme.

Esquisse de démonstration pour $d = 1$. La clé consiste à utiliser la transformée de Bargmann introduite dans [Bar1, Bar2], qui transforme un distribution tempérée f en une fonction entière d'ordre 2 via

$$F(z) = \mathcal{B}(f)(z) := e^{\frac{\pi}{2}z^2}\left\langle f(x), e^{-\pi(x-z)^2}\right\rangle.$$

Notons que $F(-iz) = \mathcal{B}(f)(-iz) = \mathcal{B}(\widehat{f})(z)$. En utilisant le fait qu'une distribution tempérée a un ordre fini, nous obtenons à partir de $e^{\pi|x|^2} f \in \mathcal{S}'$ qu'il existe C, N tels que

$$|F(z)| \leq C(1+|z|)^N e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}\, z|^2}$$

alors que de $e^{\pi|\xi|^2}\widehat{f} \in \mathcal{S}'$ nous déduisons que

$$|F(z)| \leq C(1+|z|)^N e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Re}\, z|^2}.$$

Mais alors, le principe de Phragmèn-Lindelöf implique que $|F(z)| \leq C(1+|z|)^N$ qui, avec le théorème de Liouville, entraîne que F est un polynôme. En inversant la transformée de Bargmann, on montre que f est de la forme voulue. □

La nouveauté dans la démonstration de B. Demange consiste à rendre explicite le rôle de la transformée de Bargmann, ce qui a permis de fortement simplifier l'argument de régularisation de [BDJam] dans lequel nous avons démontré le résultat suivant :

Corollaire (Bonami-Jaming-Demange [BDJam, Theorem 1.1]**).**
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et supposons que

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x)||\widehat{f}(\xi)|e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi}{(1+|x|+|\xi|)^N} < +\infty. \tag{3.6}$$

Alors $f = Pe^{-\langle Ax,x\rangle}$, où A est une matrice définie positive et P un polynôme de degré $< \frac{N-d}{2}$.

Dans le cas $d = 1$ et $N = 0$, on trouve ce théorème dans les oeuvres complètes de Beurling mais la démonstration en avait été perdue. Hörmander [Hö] en donna une démonstration (toujours avec $d = 1$ et $N = 0$) utilisant un argument de régularisation assez compliqué. Cet argument a été simplifié dans [BDJam] permettant ainsi d'obtenir le résultat ci-dessus. B. Demange a ensuite remarqué que nous utilisions la transformée de Bargmann de façon implicite et qu'on pouvait remplacer la condition sur $f(x)\widehat{f}(\xi)$ dans (3.6) par une condition similaire sur $F(x,y)$:

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |F(x,y)|e^{2\pi|\langle x,y\rangle|}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+|x|+|y|)^N} < +\infty$$

et sur sa transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^{2d}$ de F

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |\widehat{F}(x,y)|e^{2\pi|\langle x,y\rangle|}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+|x|+|y|)^N} < +\infty.$$

Ces travaux se trouvent à l'origine de sa thèse [De1], dans laquelle il donne de nombreuses extensions des résultats précédents. En particulier, on peut obtenir des principes d'incertitude lorsqu'on remplace la forme quadratique $\langle x,y\rangle$ sur $\mathbb{R}^{2d}$ par certaines autres formes quadratiques (dont la forme de Lorentz, la parité de la dimension ne jouant plus de rôle).

Enfin, notons que $|\langle x,y\rangle| \le \dfrac{1}{p}|x|^p + \dfrac{1}{q}|x|^q$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On peut donc déduire du corollaire précédent une version du théorème de Hardy avec des poids non gaussiens, mais ceci ne fournit pas le résultat optimal de Morgan [Mor]. Des conditions similaires avaient également été obtenues par Gelf'and et Shilov [GS1, GS2] dans leurs recherches des plus larges classes de distributions pour lesquelles on peut définir la transformée de Fourier.

Dans [BDJam] nous avons établi une version du théorème de Morgan avec des conditions intégrales. Le résultat est le suivant :

Théorème (Bonami-Jaming-Demange [BDJam, Theorem 1.4]**).**
Soit $1 < p < 2$, et q l'exposant conjugué. Supposons que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|e^{2\pi\frac{a^p}{p}|x|^p}\,\mathrm{d}x < +\infty \quad \text{etd} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(y)|e^{2\pi\frac{b^q}{q}|y|^q}\,\mathrm{d}y < +\infty$$

avec a, b des constantes positives. Alors $f = 0$ si $ab > \left|\cos(\frac{p\pi}{2})\right|^{\frac{1}{p}}$.
Si $ab < \left|\cos(\frac{p\pi}{2})\right|^{\frac{1}{p}}$, il existe un ensemble dense de fonctions qui vérifient ces conditions.

Par ailleurs, B. Demange a également obtenu une caractérisation complète du cas sous-critique $ab < 1$ dans le cas du théorème de Hardy. Dans ce cas, il a d'abord montré que si une distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifiant la condition sous-critique du théorème de Hardy $e^{a\pi x^2}f \in \mathcal{S}'$ et $e^{a\pi\xi^2}\widehat{f} \in \mathcal{S}'$, alors f est une fonction qui vérifie la condition ponctuelle

$$|f(x) \le C(1+|x|)^N e^{-a\pi x^2} \quad \text{et} \quad |\widehat{f}(\xi) \le C(1+|\xi|)^N e^{-b\pi\xi^2}. \tag{3.7}$$

On voit aisément que toutes les fonctions de Hermite satisfont (3.7). Inversément, B. Demange [De4] a alors montré que les fonctions qui satisfont (3.7) sont des "moyennes" de fonctions de Hermite. À nouveau le point clé consiste, à l'aide de la transformée de Bargmann, à reformuler le problème de caractérisation des fonctions f vérifiant les conditions de décroissance (3.7) en un problème de caractérisation de fonctions holomorphes ayant une croissance bien contrôlée. En dimension supérieure, ce problème reste partiellement ouvert.

Rappelons enfin que notre motivation première était de transférer les principes d'incertitude de la transformée de Fourier à la transformée de Fourier à fenêtre. Le résultat correspondant est le suivant :

Théorème (Demange [De1, De3]**).**
Soient $s, w \in L^2(\mathbb{R}^d)$ non nulles. Si

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|\mathcal{F}_w(s)(x,\xi)|^2}{(1+|x|+|\xi|)^N} e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi < +\infty\,, \tag{3.8}$$

alors il existe $a, b \in \mathbb{R}^d$ tels que s et w soient toutes deux de la forme $P(x)e^{2i\pi\langle b,x\rangle}e^{-\pi\|x-a\|^2}$ avec P un polynôme.

Ceci améliore le résultat de [BDJam, Theorem6.1] où nous avions seulement $e^{\pi(|x|^2+|y|^2)}$ à la place de $e^{2\pi|\langle x,\xi\rangle|}$ dans (3.8).

3.2. **Théorème du parapluie.**

Nous allons maintenant montrer que les éléments d'une suite orthonormale de fonctions dans L^2 et leurs transformées de Fourier ne peuvent pas être uniformément majorés par des fonctions fixes de L^2. Le point de départ est une réinterprétation du théorème de Hardy : l'ensemble des fonctions qui sont bornées par $(1+|x|)^N e^{-\pi|x|^2}$ ainsi que leurs transformées de Fourier est un espace de dimension $N+1$.

Théorème (Jaming-Powell [JamP, Theorem 3.7]**).**
Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. Alors il existe $N = N(\varphi,\psi)$ tel que, si $(e_k)_{k\in I} \subset L^2(\mathbb{R})$ est une famille orthonormale telle que pour tout $k \in I$, $|e_k| \le \varphi$ et $|\widehat{e_k}| \le \psi$, alors $\#I \le N$.

Ce théorème généralise un résultat de H. Shapiro [Sho1] qui montrait, à l'aide d'un argument de compacité, qu'une telle suite était finie sans donner d'estimation du nombre de termes.

Démonstration. Soient $M = \max(\|\varphi\|, \|\psi\|)$, et $0 < \varepsilon < \frac{1}{50M}$. Définissons

$$C_\varphi(\varepsilon) = \inf\left\{T \in \mathbb{R} \,:\, \int_{|t|>T} |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \varepsilon^2\|\varphi\|_2^2\right\}$$

et $C_\psi(\varepsilon)$ de façon similaire. Alors, pour $T > \max\bigl(C_\varphi(\varepsilon), C_\psi(\varepsilon)\bigr)$, et pour tout $k \in I$,

$$\int_{|t|>T} |e_k(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \varepsilon^2\|\varphi\|_2^2 \quad , \quad \int_{|\xi|>T} |\widehat{e_k}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \le \varepsilon^2\|\psi\|_2^2.$$

L'ensemble des fonctions qui vérifient de telles inégalités (à T et $\varepsilon > 0$ fixés) a été amplement étudié par Landau, Pollak and Slepian [LP1, LP2, SP, S1], voir aussi [S2]. En particulier, ils ont montré que la famille des “fonctions d'onde prolates sphéroïdales” $(\psi_k)_{k\ge 0}$ (une famille de fonctions propres de l'équation des ondes en coordonnées “prolates sphéroïdales”) approxime bien toutes les fonctions qui vérifient

$$\int_{|t|>T} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \varepsilon^2\|\varphi\|_2^2 \quad , \quad \int_{|\xi|>T} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \le \varepsilon^2\|\psi\|_2^2. \tag{3.9}$$

Plus précisément :

Théorème (Landau-Pollak [LP2])
Soit $d = \lfloor 4T^2 \rfloor + 1$*. Alors, pour toute fonction* $f \in L^2$ *qui vérifie* (3.9),

$$\|f - \mathbb{P}_d f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 49\varepsilon^2 \|f\|_2^2,$$

où $\mathbb{P}_d$ *est la projection orthogonale sur l'espace engendré par* $\psi_0, \ldots, \psi_{d-1}$.

Soit donc $\eta = 7M\varepsilon$, on a alors,

$$\text{pour } k \in I, \quad \|e_k - \mathbb{P}_d e_k\| \leq \eta.$$

En écrivant $\mathbb{P}_d e_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} a_{n,k}\psi_k$ *i.e.* $a_n := (a_{n,k}) \in \mathbb{C}^d$, on obtient

$$1 - \eta \leq \|a_n\| = \|\mathbb{P}_d e_n\| \leq 1$$

et

$$\begin{aligned}
\langle a_n, a_m \rangle &= \langle \mathbb{P}_d e_n, \mathbb{P}_d e_m \rangle \\
&= \langle \mathbb{P}_d e_n - e_n + e_n, \mathbb{P}_d e_m - e_m + e_m \rangle \\
&= \langle \mathbb{P}_d e_n - e_n, \mathbb{P}_d e_m - e_m \rangle + \langle e_n, \mathbb{P}_d e_m - e_m \rangle + \langle \mathbb{P}_d e_n - e_n, e_m \rangle \\
&= \langle \mathbb{P}_d e_n - e_n, \mathbb{P}_d e_m - e_m \rangle + \langle e_n - \mathbb{P}_d e_n, \mathbb{P}_d e_m - e_m \rangle + \langle \mathbb{P}_d e_n - e_n, e_m - \mathbb{P}_d e_m \rangle \\
&= \langle \mathbb{P}_d e_n - e_n, e_m - \mathbb{P}_d e_m \rangle
\end{aligned}$$

donc $|\langle a_n, a_m \rangle| \leq \eta^2$. Ainsi les $b_n = \dfrac{a_n}{|a_n|}$ sont des vecteurs de la sphère unité de $\mathbb{C}^d$ tels que les produits scalaires deux à deux vérifient $|\langle b_n, b_m \rangle| \leq \frac{\eta^2}{1-\eta^2}$. Un tel système de vecteurs est appelé un *code sphérique* dans $\mathbb{C}^d$ et il est bien connu qu'il est nécessairement fini. $\square$

Un commentaire s'impose sur le théorème de Landau-Pollak. Celui-ci est intimement lié au théorème d'échantillonnage de Shannon. Supposons en effet que $f \in L^2(\mathbb{R})$ soit à spectre dans $[-T, T]$. Alors f peut être reconstruit à partir d'un échantillon à l'aide de la formule

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2T}\right) \operatorname{sinc} \pi \left(x - \frac{k}{2T}\right).$$

Si f est essentiellement concentrée dans $[-T, T]$ alors seuls les $4T^2$ valeurs $f\left(\frac{k}{2T}\right)$ pour k tel que $\frac{k}{2T} \in [-T, T]$ ont réellement une influence sur la reconstruction de f. Ainsi, l'espace des fonctions “concentrées” dans $[-T, T]$ et à spectre dans $[-T, T]$ doit être de “dimension” essentiellement $4T^2$. Le théorème de Landau-Pollak donne une formulation mathématique précise à ce fait heuristique, mais cela se voit dans la base des $\{\psi_k\}_{k=0,\ldots,d-1}$ et non dans la base $\{\operatorname{sinc} \pi \left(x - \frac{k}{2T}\right)\}_{k=-d/2,\ldots,d/2}$.

Revenons aux codes sphériques pour lesquels il existe de nombreuses bornes. Par exemple, en identifiant $\mathbb{C}^d$ et $\mathbb{R}^{2d}$, on obtient que, si $|\langle b_n, b_m \rangle_{\mathbb{C}^d}| \leq \alpha$, alors $\langle b_n, b_m \rangle_{\mathbb{R}^{2d}} \in [-\alpha, \alpha]$ i.e. (b_n) est un $[-\alpha, \alpha]$-*code sphérique* dans $\mathbb{R}^{2d}$. Appelons $N^{2d}(\alpha)$ le nombre maximal d'éléments d'un $[-\alpha, \alpha]$-code sphérique dans $\mathbb{R}^{2d}$. Les majorations suivantes sont bien connues :

— si $\alpha < \frac{1}{2d}$, alors $N^{2d}(\alpha) = 2d$ puisque le code est alors linéairement indépendant (majoration triviale).

— $N^{2d}(\alpha) \leq \left(\frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)^{2d}$, ce qu'on peut obtenir à l'aide d'un argument de comptage de volume.

— si $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2d}}$, alors la méthode de programmation linéaire de Delsarte-Goethals-Siedel [DGS] donne $N^{2d}(\alpha) \leq 2\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha^2 d}d$.

Ainsi, si φ et ψ sont explicitement connues, on peut optimiser le choix de ε et de T dans la démonstration précédente et obtenir des bornes explicites sur $\#I$. Mentionnons les deux cas suivants :

— Soient $\varphi = \psi = Ce^{-\pi a x^2}$ alors

$$\#I \leq 2 + \frac{2}{\pi a}\max\left(1 + \ln\frac{C}{a^{5/2}}, \pi + \frac{1}{2}\ln\frac{C^2}{2a}\right).$$

De plus, seule la majoration triviale est utilisée. Ce résultat, bien que valable dans le cas $a > 1$, est sans intérêt puisque le théorème de Hardy donne une meilleure majoration.

— Soient $\varphi = \psi = \frac{C}{(1+|x|)^p}$, $p > 1/2$, la majoration de comptage de volume donne

$$\#I \leq N \leq 3^{8\left(\frac{20C}{\sqrt{2p-1}}\right)^{\frac{4}{2p-1}}}.$$

De plus,

$$\#I \leq \begin{cases} 4\left(\frac{800C^2}{2p-1}\right)^{\frac{2}{2p-3}} & \text{si } p > 3/2 \\ 32\,(20C)^{\frac{2}{2p-3}} & \text{si } 1 < p \leq 3/2 \end{cases}$$

où on utilise la majoration triviale pour la première et la majoration de Delsarte *et al* pour la seconde. On ne peut espérer démontrer un résultat similaire pour $p < 1/2$ puisque A. De Roton, B. Saffari, H. Shapiro & G. Tennenbaum [dRSST] ont construit des bases orthonormales qui satisfont ces conditions de décroissance pour $p = 1/2$.

4. Perspectives de recherche

Nos travaux actuels nous conduisent à établir des liens entre principes d'incertitude et comportement de solutions d'équations aux dérivées partielles. Citons les quelques directions qui nous semblent les plus prometteuses :

— Notons tout d'abord que le principe d'incertitude de Hardy caractérise le noyau de la chaleur. De nombreux chercheurs (citons Cowling, Sarkar, Sitaram, Sundari, Thangavelu, Trimèche et leurs coauteurs [ACdBS, CSS, CPS, RaS, ST, SaSe, Th1, Th2, BT, KT]) cherchent à caractériser le noyau de la chaleur sur des groupes de Lie et de leurs espaces homogènes par des propriétés de concentration optimale. Toutefois, les résultats actuels ne sont que rarement satisfaisants. Une des difficultés provient du recours à l'analyse complexe qui peut ne plus être valable dans le contexte plus général des groupes de Lie et de leurs espaces homogènes. Une démonstration du principe d'incertitude de Hardy à l'aide d'outils d'analyse des équations aux dérivées partielles et d'analyse réelle constituerait sans doute une étape importante vers la résolution de ce problème.

— Un autre point de vue sur les principes d'incertitude a été proposé par les travaux de Escauriaza, Kenig, Ponce et Vega [EKPV, EKV] sur l'unique continuation des solutions d'équations de la chaleur et de Shrödinger semi-linéaires. Ces auteurs ont notamment démontré que les solutions d'équations aux dérivées partielles de ce type satisfont des principes d'incertitude "faibles", c'est-à-dire que les seules solutions qui ont des propriétés fortes de concentration sont nulles. Une question (sans doute ambitieuse) se pose alors de savoir si les solutions vérifient des principes d'incertitude forts, c'est-à-dire des versions quantitatives des résultats de [EKPV, EKV]. Nous cherchons donc des résultats de la forme suivante : *si deux solutions sont proches sur un ensemble suffisamment large à deux temps distincts, alors elles sont proches partout, pour tous les temps intermédiaires* ; ou *si deux solutions sont très proches à l'infini à deux temps distincts, alors elles sont proches partout pour tous les temps intermédiaires*. Notons que dans [Jam7], nous avons reformulé sous cette forme les théorèmes de Hardy et de Nazarov pour les solutions des équations de la chaleur et de Shrödinger libres. Notons enfin que Chanillo [Ch] a adopté un point de vue similaire en généralisant certains principes d'incertitude au cadre des groupes de Lie en les exprimant en termes de propriétés de solutions de l'équation de Shrödinger ou de la chaleur. Un objectif sans doute plus accessible consisterait à comprendre les méthodes de [EKPV, EKV] afin de les étendre au cadre de certains groupes de Lie tel que le groupe de Heisenberg.

Problèmes de reconstruction de phase

1. Introduction

Rappelons que lorsqu'on souhaite mesurer une quantité physique, il est courant que, du fait du bruit, de la faible qualité des instruments de mesure, de la transmission du signal dans de la matière faiblement ordonnée, voire d'une impossibilité physique... la phase de la quantité qu'on souhaite mesurer soit perdue. En termes mathématiques, on souhaite connaître une grandeur $\varphi(t)$ à partir de la seule donnée de $|\varphi(t)|$, $t \in \mathbb{R}$. Posé ainsi, le problème a évidemment beaucoup trop de solutions. Aussi essaie-t-on d'utiliser l'information dont on dispose *a priori* sur φ pour en diminuer l'indétermination. Nous renvoyons à [BN, Hu, Mil] pour la description de nombreux problèmes de ce type et des techniques de base utilisées pour les résoudre.

Une situation typique est celle où $\varphi = \widehat{f}$ avec $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à support compact, ou $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution à support compact. Par exemple, en cristallographie, f est une combinaison linéaire de masses de Dirac. Nous allons dans un premier temps restreindre notre attention au problème en dimension 1 et à des signaux d'énergie finie et de durée finie, *i.e.* $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact. Le problème est le suivant :

Problème 1.
Étant donné $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, trouver tous les $g \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact tels que $|\widehat{f}(\xi)| = |\widehat{g}(\xi)|$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Ce problème a pour solutions triviales $g(t) = cf(t-\alpha)$ et $g(t) = cf(-t-\alpha)$ où $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| = 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Toutefois, il existe bien plus de solutions, que nous allons maintenant décrire. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, à support dans $[-\sigma, \sigma]$, alors $\widehat{f}$ est une fonction entière de type exponentiel σ. D'après le théorème de factorisation de Hadamard, on peut écrire

$$\widehat{f}(z) = z^k e^{az+b} \prod \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et les z_k sont les zéros de $\widehat{f}$ dans $\mathbb{C}$. De plus, ces zéros caractérisent presque $\widehat{f}$, de sorte que si on connaissait $|\widehat{f}(\xi)|$ pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ on connaîtrait entièrement f.

Pour circonvenir à cette difficulté, écrivons $|\widehat{f}(z)|^2 = |\widehat{g}(z)|^2$ sous la forme

$$\widehat{f}(z)\overline{\widehat{f}(\bar{z})} = \widehat{g}(z)\overline{\widehat{g}(\bar{z})}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

qui est une égalité de fonctions holomorphes et est donc vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il en résulte que tout zéro de $\widehat{g}$ est soit un zéro de $\widehat{f}$ soit le conjugué d'un zéro de $\widehat{f}$. Pour chaque k, on fait alors le choix de $\zeta_k \in \{z_k, \bar{z}_k\}$ et on forme le produit de Hadamard à partir de la suite de zéros ainsi obtenus. Grâce à un théorème de Titschmarch, on sait que ce produit de Hadamard a de bonnes propriétés de convergence, en particulier, on obtient ainsi une fonction entière de type exponentiel. Le théorème de Paley-Wiener implique alors que la fonction ainsi obtenue est la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact. En conclusion (Walther [Walt]), toute fonction de la forme

$$\widehat{g}(z) = z^k e^{a'z+b'} \prod \left(1 - \frac{z}{\zeta_k}\right) e^{z/\zeta_k}$$

avec $a' = a + i\alpha$, $b' = b + i\beta$ et pour chaque k, soit $\zeta_k = z_k$ soit $\zeta_k = \overline{z_k}$, est une solution du Problème 1 et *vice versa*. Le choix de ζ_k est appelé *zéro-flipping* dans la littérature.

Notons que les solutions triviales sont obtenues à partir des paramètres α, β et en choisissant $\zeta_k = z_k$ quelque soit k et alors $g = e^{i\beta} f(t - \alpha)$, soit en choisissant $\zeta_k = \overline{z_k}$ quelque soit k et alors $g = e^{i\beta} f(-t - \alpha)$.

Perspectives de recherche.

— La situation est plus compliquée en dimension supérieure puisqu'on ne dispose plus d'un théorème de factorisation convenable. De plus, $\widehat{f}$ peut être irréductible mais il n'existe pas de critère maniable pour en décider ([BN, Ste]). Le seul cas connu est celui des fonctions radiales où Lawton [Law] (voir [Hu]) a démontré que la sitution est essentiellement similaire au cas de la dimension 1. Toutefois sa démonstration utilise des outils très évolués d'analyse complexe qui laissent peu d'espoir de généralisation à des cas un peu moins symétriques. Avec S. Madan, R. Ramat et S.K. Ray, nous essayons de trouver une nouvelle démonstration qui s'adapte au cas des fonctions K-finies, *i.e.* des fonctions qui sont des polynômes trigonométriques dans la variable angulaire. Toutefois, nous disposons déjà d'exemples qui montrent qu'une caractérisation complète est hors de portée.

— On peut également poser le problème 1 en remplaçant l'hypothèse $f, g \in L^2$ à support compact par f combinaison linéaire de masses de Dirac, $f = \sum a_i \delta_{x_i}$ et g de la même forme. On retrouve alors le problème de la phase en cristallographie, les x_i étant les positions des atomes dans un cristal et les a_i le nombre d'électrons dans l'atome situé en x_i. La quantité $|\widehat{f}|^2$, et donc l'autocorrélation $f * \check{f}$ de f, est alors mesurée lors d'une expérience de diffraction. On cherche alors à reconstruire f à partir de cette quantité. Ce problème a été introduit par Patterson [Pat1, Pat2] dans les années 1930 et 1940 et est mentionné dans de nombreux ouvrages de cristallographie. Mathématiquement, si $a_i = 1$ pour tout i on cherche à reconstruire les positions x_i à partir de la donnée de toutes les distances $|x_i - x_j|$ (avec multiplicité), à réflexion et translation près. Nous renvoyons à [LSS] pour une présentation de l'état actuel des connaissances.

Dans le cas particulier où les positions des atomes sont restreintes à un réseau (cristaux dits *cyclotomiques*) le problème se résume à trouver une suite de N éléments à partir du module de sa transformée de Fourier discrète. Ce problème a été entièrement résolu par J. Rosenblatt [Ro], mais la solution est difficile à utiliser dans la pratique et ne permet pas de répondre à certaines questions. Mentionnons par exemple les deux problèmes suivants qui restent ouverts :

Question 1 ([RS1, Conjecture 2]).
La proportion de cristaux (cyclotomiques ou non) à k éléments qui ne sont pas déterminés à réflexion et translation près par leur autocorélation tend-elle vers 0 avec k ?

Question 2.
Quel est le nombre maximal de cristaux (cyclotomiques ou non) de k atomes (qui ne sont pas des translations et/ou des réflexions les uns des autres) qui ont même autocorélation ?

Cette question est implicite dans [Ro] et a été en partie étudiée dans [LSS].

2. Seconde Mesure

Dans la pratique, le nombre de solutions est encore trop grand et on essaie de réduire celui-ci par exemple à l'aide d'une seconde mesure. Voici quelques possibilités :

— Si $|\widehat{g}(\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|$ et $|\widehat{g}(\xi) - \widehat{g}(\xi - b)| = |\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi - b)|$ pour b assez petit, alors g est une solution triviale (Mc Donald [Md]).

— Fixons une fonction $h \in L^2_c(\mathbb{R})$, $h \neq 0$, alors il y a au plus deux solutions à $|\widehat{g}(\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|$ et $|\widehat{g}(\xi) - \widehat{h}(\xi)| = |\widehat{f}(\xi) - \widehat{h}(\xi)|$. Si de plus $|\mathrm{Re}\,\widehat{h}| \leq \nu |\mathrm{Im}\,\widehat{h}|$ avec $0 \leq \nu < 1$ alors la solution est unique (*Voir* Klibanov *et al.* [KST, Proposition 6.5]). Ce résultat peut servir de fondement à la méthode de l'atome lourd en cristallographie. Notons toutefois que son équivalent dans le cas discret est faux (voir [Jam8]).

— W. Pauli [Pa] a posé le problème suivant : *une particule uni-dimensionnelle est-elle entièrement déterminée par sa position et son moment*. Mathématiquement, cela revient à demander si $|\widehat{g}(\xi)| = |\widehat{f}(\xi)|$ et $|g| = |f|$ implique $g = cf$.

Des contre-exemples qui sont encore des solutions triviales du problème de la phase 1 sont connus de longue date, par exemple [CH, Vo, As]. La famille suivante, obtenue indépendemment dans Ismagilov [Is] et [Jam4, Theorem 2.5], montre toutefois que la situation est bien plus complexe. En effet, on peut construire des familles de taille arbitraire de solutions du problème de Pauli qui sont deux à deux non triviales pour le problème 1 : soit $H \in L^2(\mathbb{R})$ à support dans $[0, 1/2]$, et soit α_k une suite finie de réels, $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$. Écrivons $\prod(1 - i\alpha_k\varepsilon_k \sin 3^k t) = \sum a_k^\varepsilon e^{ikt}$. Alors les fonctions $f^\varepsilon = \sum a_k^\varepsilon H(t - k)$ ont toutes même module et il en va de même pour leurs transformées de Fourier. Cet exemple est à la base de certains résultats des deux prochaines sections.

Perspectives de recherche.

— Les résultats précédents nous conduisent à poser les questions suivantes :

Question 3.
Existe-t-il deux opérateurs T_i : $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, ayant un sens physique, tels que $|T_1 f|$ et $|T_2 f|$ déterminent f à une multiplication par une constante de module 1 près ?

Nos travaux actuels nous conduisent à penser qu'un bon choix de fenêtres w_1, w_2 permet de déterminer f à partir de $|\mathcal{F}_{w_1} f(0, \xi)|$ et de $|\mathcal{F}_{w_2} f(0, \xi)|$ et que pour w bien choisi, $|\mathcal{F}_w f(x, \xi)|$ détermine f. Les résultats sont liés à l'utilisation de la transformée de Fourier fractionnaire dont le module peut être mesuré dans une expérience de diffraction.

Question 4 (Reichenbach [Re]**).**
Existe-t-il un opérateur unitaire U : $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, ayant un sens physique, tels que $|f|$, $|\widehat{f}|$ et $|Uf|$ déterminent f à une multiplication par une constante de module 1 près ?

— Le nombre de rotations (ou nombre d'homotopie) d'une fonction $f\,:\,\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ régulière, peut être définie par

$$\rho(f)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_f}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

où Γ_f est le graphe de f. Comme on a supposé que f prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres complexes de module 1, on obtient

$$\rho(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f'(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n|\widehat{f}(n)|^2,$$

avec la formule de Parseval. On en déduit immédiatement que si f et g sont deux fonctions dans $W^{1/2,2}$ ayant mêmes coefficients de Fourier $|\widehat{f}(n)|=|\widehat{g}(n)|$ alors elles ont même nombre de rotations $\rho(f)=\rho(g)$.

Il est bien connu qu'on peut définir le nombre de rotations de f lorsque f n'est que continue. La question qui se pose alors (voir Brezis [Bre]) est de savoir si la condition $|\widehat{f}(n)|=|\widehat{g}(n)|$ implique toujours $\rho(f)=\rho(g)$.

Bourgain et Kozma [BK] ont récemment démontré que ce n'est pas le cas si f et g sont continues alors que Brezis [Bre] avait étendu un résultat de Kahane [Kah] pour montrer que la réponse est affirmative dans $W^{1/3,3}$. La régularité optimale est inconnue. Notons que Bourgain et Kozma ne pensent pas obtenir de régularité dans leurs contre-exemples et n'en font donc aucune étude. Par ailleurs, Brezis conjecture que la régularité $W^{1/p,p}$ suffit pour n'importe quel $p>1$ (et pas seulement pour $1<p\leq 3$). L'une des raisons de penser qu'un peu de régularité suffit est que Bourgain, Brezis et Mironescu [BBM] ont démontré une estimation de la forme $\rho(f)\leq C_p\|f\|_{W^{1/p,p}}$.

Notons enfin que f et g sont des partenaires de Pauli discrets. S'il semble difficile d'améliorer les résultats de [BK] et [Bre], il est probable que la compréhension de ces articles permette de progresser sur le problème de Pauli.

3. La triple-corrélation

Dans cette section, nous nous restreignons à des fonctions positives.

Notons que $|\widehat{f}(\xi)|^2=|\widehat{f*\check{f}}|$ où $\check{f}(t)=f(-t)$. Le problème 1 équivaut donc à demander si

$$\int_{\mathbb{R}^d}g(t)g(t-x)\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^d}f(t)f(t-x)\,\mathrm{d}t\quad\text{pour presque tout } x\in\mathbb{R}^d$$

implique $g(t)=cf(\pm t-a)$. Comme on suppose ici que f et g sont positives, $c=1$.

Un cas particulier de ce problème apparaît en géométrie des convexes. Si E est convexe compact alors $\chi_E*\tilde{\chi}_E(x)=|E\cap(E-x)|$ est appelé le *covariograme* de E. G. Matheron [Ma] s'est demandé si deux ensembles convexes compacts E et F qui ont même covariogramme sont des translatés, *i.e.* $F=E-a$ ou des symétriques-translatés, *i.e.* $F=-E-a$. La réponse est affirmative pour les polygônes [Na, Bi] et les convexes à bord $\mathcal{C}^{2+\varepsilon}$-lisses [BSV] du plan. En dimension au moins 4, la réponse est négative puisqu'il suffit de noter que $E=E_1\otimes E_2$ et $F=E_1\otimes(-E_2)$ ont même covariogramme. On peut également consulter le livre de Garder [Ga] pour de nombreux autres problèmes du même type.

Le problème qui nous intéresse est légèrement différent. Dans certains cas, il est possible de mesurer la "triple-corrélation" de f :

$$N_f(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d} f(t)f(t-x)f(t-y)\,\mathrm{d}t$$

et on demande alors si celle-ci détermine f à une translation près. On trouve ce problème en traitement du signal et analyse de texture [AK, CW, Rot] et de façon indépendante en combinatoire [RS1, RS2] où f est plutôt la fonction caractéristique d'un ensemble.

Il se trouve qui si nous restreignons notre attention aux fonctions à support compact, alors la triple-corrélation détermine f à une translation près. En prenant la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^{2d}$ de N_f, on voit que $N_g=N_f$ équivaut à

$$\widehat{g}(\xi)\widehat{g}(\eta)\overline{\widehat{g}(\eta+\xi)}=\widehat{f}(\xi)\widehat{f}(\eta)\overline{\widehat{f}(\eta+\xi)}\quad\text{pour tout } \xi,\eta\in\mathbb{R}. \tag{3.10}$$

En prenant $\xi=\eta=0$ dans (3.10) on obtient $\widehat{g}(0)=\widehat{f}(0)$. Puis $\xi=-\eta$ donne $|\widehat{g}|=|\widehat{f}|$. On peut donc écrire $\widehat{g}(\xi)=e^{-2\pi i\varphi(\xi)}\widehat{f}(\xi)$. On remet cela dans (3.10) pour obtenir

$$\varphi(\xi+\eta)=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)\quad\text{pour tout } \xi,\eta\in\operatorname{supp}\widehat{f}\text{ tels que }\xi+\eta\in\operatorname{supp}\widehat{f}.$$

Finalement, comme f est à support compact, $\widehat{f}$ est entière et son support est donc $\mathbb{R}^d$. Par suite φ est de la forme $\varphi(\xi)=\langle a,\xi\rangle$ d'où il résulte que $g(t)=f(t-a)$. Nous venons de démontrer la proposition suivante (qui est un peu plus générale dans [JamK]) :

Proposition (Jaming-Kolountzakis [JamK, Theorem 2.2]**, Rautenbach-Triesch** [RT]**).**
Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ positive à support compact. Alors seules les translatées de f sont positives et ont même triple-corrélation que f.

Si le spectre de f est lacunaire, la situation est plus compliquée. Par exemple si le spectre est $[-4,-3]\cup[-1,1]\cup[3,4]$, on peut prendre $\varphi(\xi)=\omega\xi-a_1$ sur $[-4,-3]$, $\varphi(\xi)=\omega\xi$ sur $[-1,1]$ et $\varphi(\xi)=\omega\xi+a_1$ sur $[-4,-3]$. La solution générale est la suivante :

Lemme 3.1. (Jaming-Kolountzakis [JamK, Lemma 2.1]**).**
Soient $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ positives telles que $N_f=N_g$. Écrivons $\operatorname{supp}\widehat{f}=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} I_j$ la décomposition de $\operatorname{supp}\widehat{f}$ en intervalles ouverts disjoints numérotés de sorte que $0\in I_0$, $I_{-j}=-I_j$. Il existe alors $\omega\in\mathbb{R}$ et une suite de réels θ_j qui vérifient $\theta_0=0$ et $\theta_{-j}=-\theta_j$ tels que, si $x\in I_j$,

$$\varphi(x)=\omega x+\theta_j.$$

De plus, s'il existe x,y tels que $x\in I_j$, $y\in I_k$, $x+y\in I_l$ alors

$$\theta_j+\theta_k=\theta_l. \tag{3.11}$$

En particulier, si le support de $\widehat{f}$ est très lacunaire, on peut démontrer comme pour le problème de Pauli qu'il y a beaucoup de solutions :

Proposition (Jaming-Kolountzakis [JamK, Proposition 2.5]**).**
Il existe une fonction $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour laquelle il existe une famille non dénombrable de fonctions qui ne sont pas des translatées les unes des autres et qui ont toutes même triple-corrélation.

En combinatoire, l'attention était restreinte à des fonctions f et g qui sont des fonctions caractéristiques d'ensembles de mesure finie. Il n'est pas évident que de telles fonctions puissent avoir un spectre lacunaire. Toutefois, Kargaev et Volberg [Kar, KV] ont construit des ensembles de la forme $\bigcup[k-\lambda_k, k+\lambda_k]$ ayant un trou dans le spectre. Notons que ce trou n'est pas assez gros pour que ces ensembles ne soient pas déterminés par leur triple-corrélation :

Proposition (Jaming-Kolountzakis [JamK, Proposition 2.7 and Theorem 2.9]**).**
Si E est un ensemble de mesure finie et si $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est tel que $N_g = N_{\chi_E}$ alors il existe un ensemble F tel que $g = \chi_F$.
De plus, si E est de la forme $E = \bigcup[k-\lambda_k, k+\lambda_k]$ avec $0 < \lambda_k < 1/2$ et $(\lambda_k) \in \ell^1$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $F = E - a$.

Dans [JamK] nous avons également considéré des analogues discrets. Nous avons en particulier complété les résultats antérieurs de [GM]. Une solution complète a ensuite été donnée lors du stage post-doctoral de T. Keleti à Heraclion, voir [KK].

Perspective de recherche.

— L'utilisation de la transformée de Fourier pour démontrer que des ensembles convexes compacts à l'aide de leur triple-corrélation paraît un peu saugrenue. Un argument plus géométrique serait souhaitable, ce qui permettrait sans doute d'obtenir des résultats lorsqu'on ne dispose plus que d'une information partielle sur la triple-corrélation. Par exemple, on peut se poser la question suivante :

Question 5.
Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe compact. Trouver un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^{2d}$ aussi petit que possible tel que, si $\mathcal{D}$ est un ensemble convexe compact tel que $N_{\chi_\mathcal{D}}(x,y) = N_{\chi_\mathcal{C}}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, alors $\mathcal{D}$ est un translaté de $\mathcal{C}$.

Peut-on choisir Ω indépendant de $\mathcal{C}$?

La réponse à cette question viendrait compléter des résultats de Averkov et Bianchi sur le problème du covariogramme [AvBi].

— On peut définir un analogue de la triple corrélation sur des groupes non abéliens et la question de la reconstruction d'un ensemble à partir de celle-ci se pose alors. À notre connaissance, les seuls travaux entrepris dans cette direction sont ceux de Rosenblatt, Strook et Taylor [RoST, RoT] pour les groupes compacts, et plus particulièrement pour le groupe des rotations. Dans les autres cas, rien ne semble connu et le recours à l'analyse de Fourier est bien plus difficile.

4. Le problème d'ambiguïté radar

4.1. Le problème continu.

Nous considérons finalement le problème suivant dont l'origine se trouve dans la théorie des signaux radars. Rappelons que la fonction d'ambiguïté radar a été définie pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ par

$$A(u)(x,y) = \int_{\mathbb{R}} u\left(t - \frac{x}{2}\right) \overline{u\left(t + \frac{x}{2}\right)} e^{-2i\pi ty}\, \mathrm{d}t$$

où x permet de mesurer la distance de la cible à l'antenne et y la vitesse de la cible. Une introduction à la physique du problème se trouve dans [Jam4]. Dans la pratique, la phase de $A(u)$ ne peut être mesurée. On pose donc la question suivante :

Problème 2.
Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ fixé, trouver tous les $v \in L^2(\mathbb{R})$ tels que

$$|A(v)(x,y)| = |A(u)(x,y)| \quad \textit{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

On dira que v est un partenaire d'ambiguïté *de u.*

Les solutions triviales du problème sont $v(t) = ce^{i\omega t}u(\pm t - a)$ avec $|c| = 1$, $\omega, a \in \mathbb{R}$.

Dans un premier temps, nous restreignons notre attention aux fonctions à support compact. Commençons dans cette section par les résultats de [Jam4]. Le premier lemme est un simple résultat technique qui utilise le fait que $A(u)$ mélange convolution et transformée de Fourier.

Lemme (Jaming [Jam4, Lemma 3.3]**).**
Si u est à support compact, alors tout partenaire d'ambiguïté v de u est aussi à support compact. De plus, quitte à translater u et v, on peut supposer que u et v sont tous deux supportés dans $[-\alpha, \alpha]$ mais dans aucun intervalle plus petit.

Comme $A(u)(x, .)$ est, pour x fixé, une transformée de Fourier d'une fonction à support compact, on doit donc résoudre une famille de problèmes de reconstruction de phase, paramétrée par x. À première vue, le problème est donc résolu puisqu'il suffit de choisir pour chaque x des zéros à remplacer par leur complexes conjugués. Toutefois, plusieurs restrictions s'imposent :

(1) la fonction d'ambiguïté est continue, la conjugaison des zéros (*zéro-flipping*) doit donc se faire de façon continue,

(2) toutes les fonctions de L^2 ne sont pas des fonctions d'ambiguïté, il faut donc s'assurer de conjuguer les zéros de façon à retrouver une fonction d'ambiguïté.

En fait, il n'est même pas évident *a priori* qu'on puisse conjuguer une partie des zéros. Nous montrerons dans la prochaine section que cela est possible, mais nous nous concentrons pour l'instant sur ce qui se passe quand on ne conjugue pas de zéro. En d'autres termes, nous étudions le problème suivant :

Problème 3.
Fixons $u \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact. Déterminer l'ensemble des partenaires d'ambiguïté $v \in L^2(\mathbb{R})$ (à support compact) de u tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(v)(x,\cdot)$ et $A(u)(x,\cdot)$ ont même zéros complexes. On dit alors que v est un partenaire restreint *de u.*

Le problème d'origine se restreint évidemment à celui-ci si $A(u)$ n'a que des zéros réels, par exemple si $u(t) = \chi_{[-1,1]}$.

La solution du problème de la phase montre alors qu'il existe deux fonctions à valeurs réelles φ, ψ telles que

$$A(v)(x,y) = e^{i\varphi(x)+iy\psi(x)}A(u)(x,y).$$

Par continuité de $A(u)$ et $A(v)$, on peut supposer que φ, ψ sont continues.

Comme ψ change l'ordre de la fonction entière $A(v)(x,\cdot)$ (qui est donné par la taille du support de v qui est la même que celle du support de u), on obtient $\psi=0$. On conclut alors en rendant rigoureux l'argument heuristique suivant :

$$\mathcal{F}\left[v\left(\cdot-\frac{x}{2}\right)\overline{v\left(\cdot+\frac{x}{2}\right)}\right]=e^{i\varphi(x)}\mathcal{F}\left[u\left(\cdot-\frac{x}{2}\right)\overline{u\left(\cdot+\frac{x}{2}\right)}\right]=\mathcal{F}\left[e^{i\varphi(x)}u\left(\cdot-\frac{x}{2}\right)\overline{u\left(\cdot+\frac{x}{2}\right)}\right]$$

donc

$$v\left(t-\frac{x}{2}\right)\overline{v\left(t+\frac{x}{2}\right)}=e^{i\varphi(x)}u\left(t-\frac{x}{2}\right)\overline{u\left(t+\frac{x}{2}\right)}$$

ou, avec un changement de variables

$$v(t)\overline{v(s)}=e^{i\varphi(t-s)}u(t)\overline{u(s)}. \tag{4.12}$$

En prenant $t=s=0$ on obtient $\varphi(0)=0$ et $|v(0)|=|u(0)|$. Quitte à remplacer v par une solution triviale, on peut donc supposer que $v(0)=u(0)$ (en supposant que 0 est dans le support de u).

En prenant alors $s=0$ on obtient $v(t)=e^{i\varphi(t)}u(t)$ qui, remis dans (4.12), donne

$$\varphi(t-s)=\varphi(t)-\varphi(s)$$

pour s,t dans le support de u. On se trouve donc dans une situation similaire à celle de la section précédente. Le résultat général est le suivant :

Théorème (Jaming [Jam4, Theorem 3.8]**).**
Tous les partenaires restreints de u sont de la forme

$$v(t)=ce^{i\varphi(t-a-t_0)}e^{i\omega t}u(t-a)$$

avec $|c|=1$, $a,\omega\in\mathbb{R}$, t_0 un point de Lebesgue de u qui est dans le support de u et φ une fonction localement constante qui vérifie

$$\varphi(t_2-t_1)+\varphi(t_1-t_0)=\varphi(t_2-t_0)$$

pour tous t_0,t_1,t_2 points de Lebesgue de u qui sont dans le support de u.

Pour obtenir une compréhension approfondie du problème d'ambiguïté nous alons maintenant restreindre la classe de fonctions pour lesquelles nous considérons le problème. Ceci permet de réduire le problème continu à un problème discret.

4.2. Signaux de type "trains d'ondes".

En traitement du signal radar, il est courant d'utiliser des signaux de type *train d'ondes*, c'est-à-dire des signaux de la forme $u(t)=\sum a_jH(t-j)$ avec H à support dans $[0,1/2]$. Il est alors facile de montrer que, pour $y\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$ et $k-\frac{1}{2}\leq x\leq k+\frac{1}{2}$,

$$A(u)(x,y)=\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_j\overline{a_{j-k}}e^{2i\pi jy}\right)A(H)(x-k,y). \tag{4.13}$$

Nous avons donc proposé le *problème d'ambiguïté radar discret* dans [GJamP] :

Problème 4.
Étant donné $a=\{a_j\}\in\ell^2(\mathbb{Z})$, trouver toutes les suites $b\in\ell^2(\mathbb{Z})$ telles que, pour tous $k\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{R}$,

$$|\mathcal{A}(a)(k,y)|=|\mathcal{A}(b)(k,y)|,\quad \textit{où}\quad \mathcal{A}(a)(k,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_j\overline{a_{j-k}}e^{2i\pi jy}.$$

Nous dirons alors que a et b sont des *partenaires d'ambiguïté (discrets)* et nous dirons que ce sont des *partenaires triviaux* s'il existe $\beta,\omega\in\mathbb{R}$ et $\ell\in\mathbb{Z}$ tels que

$$b_j=e^{i\beta+ij\omega}a_{j-\ell},\quad \text{ou}\quad b_j=e^{i\beta+ij\omega}a_{-j-\ell}.$$

Si b est un partenaire de a qui n'est pas trivial, nous dirons que a et b sont des *partenaires étranges.*

On montre facilement en utilisant que $\mathcal{A}(a)$ et $\mathcal{A}(b)$ ont même support que si a est une suite finie de longueur N alors b aussi. En d'autres termes, si a est supportée dans $\{0,\dots,N\}$ avec $a_0a_N\neq0$, ce que nous noterons $a\in\mathcal{S}(N)$, alors $b\in\mathcal{S}(N)$ (après avoir éventuellement remplacé b par un partenaire trivial).

En utilisant une méthode introduite par Bueckner [Bu] pour le cas continu, on peut reformuler ceci comme un problème combinatoire sur des matrices : soit

$$d_{j,k}=\begin{cases}a_{\frac{j+k}{2}}a_{\frac{j-k}{2}} & \text{si } j,k \text{ sont de même parité}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases},$$

et soit $K_a=[d_{j,k}]_{-N\leq j,k\leq N}$. Nous appellerons K_a la *matrice d'ambiguïté* associée à a. On montre alors :

Proposition (Garrigós-Jaming-Poly [GJamP, Lemme 3.2]**).**
Deux suites $a,b\in\mathcal{S}(N)$ sont des partenaires d'ambiguïté si et seulement si

$$K_a^*K_a=K_b^*K_b.$$

En d'autres termes, si on note V_i (resp. W_i) la i-ième colonne de K_a (resp. K_b) alors ceci équivaut à

$$(i,j)\qquad\qquad \langle V_i,V_j\rangle=\langle W_i,W_j\rangle.$$

Exemple : Si $a\in\mathcal{S}(5)$, alors K_a est donné par

$$\begin{bmatrix}
 & & & & & a_0^2 & & & & & \\
 & & & & a_1.a_0 & 0 & a_1.a_0 & & & & \\
 & & & a_2.a_0 & 0 & a_1^2 & 0 & a_2.a_0 & & & \\
 & & a_3.a_0 & 0 & a_1.a_2 & 0 & a_1.a_2 & 0 & a_3.a_0 & & \\
 & a_4.a_0 & 0 & a_1.a_3 & 0 & a_2^2 & 0 & a_1.a_3 & 0 & a_4.a_0 & \\
a_5.a_0 & 0 & a_1.a_4 & 0 & a_2.a_3 & 0 & a_2.a_3 & 0 & a_1.a_4 & 0 & a_5.a_0\\
 & a_1.a_5 & 0 & a_2.a_4 & 0 & a_3^2 & 0 & a_2.a_4 & 0 & a_1.a_5 & \\
 & & a_2.a_5 & 0 & a_3.a_4 & 0 & a_3.a_4 & 0 & a_2.a_5 & & \\
 & & & a_3.a_5 & 0 & a_4^2 & 0 & a_3.a_5 & & & \\
 & & & & a_4.a_5 & 0 & a_4.a_5 & & & & \\
 & & & & & a_5^2 & & & & &
\end{bmatrix}.$$

À l'aide de cette propriété, nous avons démontré le résultat suivant dans [GJamP] :

Théorème (Garrigós-Jaming-Poly [GJamP, Theorème 6.1]**).**
Lorsque $N \geq 3$, presque-toutes et quasi-toutes les suites de $\mathcal{S}(N)$ n'ont pas de partenaire étrange.

En fait, on peut montrer que l'ensemble des suites ayant des partenaires étrange est une variété semi-algébrique (non-vide) de dimension réelle au plus $2N+1$. Esquissons maintenant la construction de suites ayant des partenaires étranges. Rappelons que le *produit de Kronecker* de deux matrices $A = [a_{i,j}]_{-N \leq i,j \leq N}$ et B est la matrice donnée par blocs

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \dots & a_{n,n}B \end{bmatrix}.$$

Ce produit a les propriétés suivantes :
— $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$,
— $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$.
Le point clé est alors le lemme suivant [GJamP, BGJam] :

Lemme (Garrigós-Jaming-Poly [GJamP, Lemme 6.6]**).**
Soient $a = (a_0, \dots, a_N)$ et $b = (b_0, \dots, b_M)$ deux suites finies auxquelles on associe les polynômes $P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$, $Q(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^k$. Soit $c = (c_0, \dots, c_K)$ la suite des coefficients de $P(z)Q(z^{2N+1}) = \sum_{k=0}^{K} c_k z^k$, où $K = M(2N+1)+N$. Alors $K_c = K_a \otimes K_b$.

Nous noterons la suite c définie dans ce lemme par $c = a \otimes b$. Rappelons que nous notons $a \simeq b$ si a et b sont des partenaires d'ambiguïté. En utilisant les propriétés élémentaires du produit de Kronecker, on a alors

Proposition (Garrigós-Jaming-Poly [GJamP, Proposition 6.7]**).**
Soient a, b, c, d quatre suites finies. Si a (resp. b) est un partenaire de c (resp. d) alors $a \otimes b$ et $c \otimes d$ sont des partenaires.

Il est alors facile de construire des partenaires étranges dès que $N \geq 4$.
Exemple : Soit $a = (1,2)$, $b = (1,2)$ et $c = (2,1)$, alors $a \otimes b \simeq c \otimes b$. Mais

$$a \otimes b = (1,2,0,2,4) \quad \text{alors que} \quad c \otimes b = (2,4,0,1,2)$$

donc $a \otimes b$ et $c \otimes b$ sont des partenaires étranges. De plus, en remplaçant $b = (1,2)$ par $(1,0,\dots,0,2)$, cet exemple donne des partenaires étranges de longueur arbitraire.

On peut alors montrer à l'aide de cet exemple que les partenaires étranges ne sont pas si rares :

Proposition (Bonami-Garrigós-Jaming [BGJam]**).**
L'ensemble des fonctions qui ont des partenaires étranges est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Enfin, dans certains cas, les solutions du problème discret fournissent *toutes* les solutions du problème continu pour les trains d'onde.

Théorème (Bonami-Garrigós-Jaming [BGJam]**).**
Soit $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$ *et* $u(t) = \sum_{j=0}^{N} a_j \chi_{[j,j+\eta]}(t)$ *où* $a = (a_0, a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. *Alors (modulo une transformation triviale) tout partenaire* $v(t) \in L^2(\mathbb{R})$ *de* u *est de la forme* $v = \sum_{j=0}^{N} b_j \chi_{[j,j+\eta]}$, *où* $b = (b_0, b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ *est un partenaire de* a.

4.3. **Signaux de Hermite.**

Une seconde discrétisation consiste à restreindre le problème aux fonctions de Hermite. Ce problème (ou plutôt sont équivalent bilinéaire) a été étudié dans [Bu, dBu1, dBu2]. Nous demandons donc :

Problème 5.
Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$ *de la forme* $u(t) = P(t)e^{-\pi t^2}$ *avec* P *un polynôme. Trouver les partenaires d'ambiguïté* v *de* u.

Il y a plusieurs motivations à cela. D'abord, comme dans le cas discret, on peut associer un opérateur d'ambiguïté K_u à u et celui-ci est de Hilbert-Schmidt. Bueckner [Bu] a montré que K_u est de rang fini si et seulement si u est une fonction de Hermite. Par ailleurs, la classe des fonctions de Hermite est stable par transformation triviale. De plus, on peut montrer que v est aussi une fonction de Hermite (ce qui est en fait une forme du principe d'incertitude de Hardy pour $A(u)$, *voir* [BDJam]) :

Proposition (Bonami-Garrigós-Jaming [BGJam]**).**
Soit $u(t) = P(t)e^{-\pi t^2}$, *où* $P(t)$ *est un polynôme. Alors, quitte à remplacer* v *par un partenaire trivial,* $v(t) = Q(t)e^{-\pi t^2}$, *où* $Q(t)$ *est un polynôme avec* $\deg P = \deg Q$.

Soit $H_j = (-1)^j e^{\pi t^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n e^{-2\pi t^2}$ la base de Hermite (non-normalisée) et écrivons u et v dans cette base, $u = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j H_j$ et $v = \sum_{j=0}^{n} \beta_j H_j$. Soient alors $\mathcal{P} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$, $\mathcal{Q} = \sum_{j=0}^{n} \beta_j t^j$, et écrivons pour $x, y \in \mathbb{R}$, $Z = x + iy$, $\bar{Z} = x - iy$. On montre alors que

$$A(u)(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-j}}{j!} \mathcal{P}^{(j)}(Z) \overline{\mathcal{P}^{(j)}(-Z)} e^{|Z|^2/4}.$$

En développant ensuite $|A(u)|^2$, le problème d'ambiguïté revient à déterminer β tel que

$$\sum_{0 \leq j,k \leq n} \frac{2^{-j-k}}{j!k!} \mathcal{P}^{(k)}(-Z)\mathcal{P}^{(j)}(Z) \overline{\mathcal{P}^{(j)}(-Z)\mathcal{P}^{(k)}(Z)}$$
$$= \sum_{0 \leq j,k \leq n} \frac{2^{-j-k}}{j!k!} \mathcal{Q}^{(k)}(-Z)\mathcal{Q}^{(j)}(Z) \overline{\mathcal{Q}^{(j)}(-Z)\mathcal{Q}^{(k)}(Z)}.$$

En développant ce polynôme en Z et $\bar{Z}$ et en comparant les termes de plus haut degré, on obtient $|\beta_n| = |\alpha_n|$. En remplaçant v par un partenaire trivial, on suppose alors que $\beta_n = \alpha_n$.

En développant davantage, on obtient ensuite

$$\mathcal{P}(Z)\mathcal{P}(-Z) = \mathcal{Q}(Z)\mathcal{Q}(-Z)$$

donc les zéros de $\mathcal{Q}$ sont obtenus à partir de ceux de $\mathcal{P}$ par une symétrie, de sorte qu'on peut factoriser $\mathcal{P}(Z) = A(Z)B(Z)C(Z)$ et $\mathcal{Q}(Z) = A(Z)B(-Z)C(Z)$ où $C(Z)$ est de la forme $Z^k \prod(Z^2 - \lambda_j^2)$. Notre but est de montrer que ni A ni B ne sont paires ou impaires.

Pour un polynôme P, écrivons $\tilde{P}(Z) = P(Z)P'(-Z) + P(-Z)P'(Z)$. On voit aisément que $\tilde{P} = 0$ si et seulement si P est soit pair soit impair.

En développant davantage, on obtient enfin

$$\mathcal{P}'(Z)\mathcal{P}'(-Z) + \frac{2}{n}\overline{\alpha_{n-1}}\tilde{\mathcal{P}}(Z) = \mathcal{Q}'(Z)\mathcal{Q}'(-Z) + \frac{2}{n}\overline{\beta_{n-1}}\tilde{\mathcal{Q}}(Z).$$

On reformule alors cette condition en termes de A et de B et on constate que les équations qu'on obtient n'ont de façon générique pas de solution. On a alors démontré le résultat suivant [BGJam] :

Théorème (Bonami-Garrigós-Jaming [BGJam]**).**
Pour presque-tout et quasi-tout polynôme P, $u(t) = P(t)e^{-t^2/2}$ n'a que des partenaires triviaux.

Ici, pour un degré n fixé, presque-tout se réfère à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^{n+1}$, l'espace des coefficients de P (dans n'importe quelle base) et quasi-tout se réfère à la théorie de Baire. Il est raisonnable de penser que ce théorème est valide pour *tout* polynôme. Mais, pour espérer le démontrer, il faudrait pousser les développements plus loin, et les calculs deviennent alors inextricables.

Il est intéressant de noter qu'un cas particulier pour lequel il n'y a que des solutions triviales est celui où le second coefficient de P est 0, *i.e.* $\alpha_{n-1} = 0$. Ainsi, en approchant une fonction $f \in L^2$ par une fonction de Hermite $P_0 e^{-\pi t^2/2}$ avec P_0 de degré $n-2$, et on approche alors f par $(P_0 + \varepsilon H_n)e^{-\pi t^2/2}$ qui n'a que des partenaires triviaux. En d'autres termes, les fonctions qui n'ont que des partenaires triviaux sont denses (de même que celles qui en ont !) :

Corollaire (Bonami-Garrigós-Jaming [BGJam]**).**
L'ensemble des fonctions qui n'ont que des partenaires triviaux est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Perspective de recherche.

Les signaux radar que nous avons considérés ici vérifient une hypothèse restricitive et sont dits *à bandes étroite*. Cette hypothèse n'est pas valable pour certains types de radars tels que les sonar qui sont dits *à large bande*. Dans ce cas, le radar mesure le module de

$$W(u)(a,\tau) = \sqrt{a}\int_{\mathbb{R}} u(t)\overline{u\big(a(t-\tau)\big)}\,\mathrm{d}t.$$

Le problème de savoir si $|W(u)|$ détermine u à quelques transformations élémentaires prêt se pose donc. En particulier, une discrétisation du problème pourrait à nouveau apporter des informations intéressantes sur l'ensemble des solutions, comme l'indiquent les premiers résultats de [Jam4].

Références

[AK] R. L. Adler & A. G. Konheim *A note on translation invariants.* Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962) 425–428.

[AGPPE] J. Alvarez, M. Guzmán-Partida & S. Pérez-Esteva *Harmonic Extensions of Distributions.* Prépublication (2005).

[AB] W. O. Amrein & A. M. Berthier *On support properties of L^p-functions and their Fourier transforms.* J. Functional Analysis **24** (1977) 258–267.

[As] M. S. Ashbaugh *An example showing the nonuniqueness of a wavefunction given its position and momentum distributions.* Inverse Problems **2** (1986) L47–L49.

[ACdBS] F. Astengo, M. G. Cowling, B. Di Blasio & M. Sundari *Hardy's uncertainty principle on certain Lie groups.* J. London Math. Soc. (2) **62** (2000) 461–472.

[AvBi] G. Averkov & G. Bianchi *Retrieving convex bodies from their restricted covariograms.* Prépublication (2007) disponible sur `arXiv :math.MG/0702892`.

[Be] M. Benedicks *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure.* J. Math. Anal. Appl. **106** (1985) 180–183.

[Bal] R. Balian *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre **292** (1981) 1357–1362.

[BM] E. P. van den Ban & H. Schlichtkrull *Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on Riemannian symmetric spaces.* J. Reine Angew. Math. **380** (1987) 108–165.

[BN] R. Barakat & G. Newsam *Necessary conditions for a unique solution to two dimensional phase recovery.* J. Math. Phys. **25** (1984) 3190–3193.

[Bar1] V. Bargmann *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform.* Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961) 187–214.

[Bar2] V. Bargmann *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform II. A family of related function spaces. Application to distribution theory.* Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967) 1–101.

[BM] R. H. T. Bates & D. Mnyama *The status of practical Fourier phase retrieval.* Advances in Electronics and Electron Physics **67** (1986) 1–64.

[Bi] G. Bianchi *Determining convex polygons from their covariograms.* Adv. in Appl. Probab. **34** (2002) 261–266.

[BSV] G. Bianchi, F. Segala & A. Volčiç *The solution for the covariogram problem for plane $\mathcal{C}^2_+$ convex bodies.* J. Differential Geom. **60** (2002) 177–198.

[BBG] A. Bonami, J. Bruna & S. Grellier *On Hardy, BMO and Lipschitz spaces of invariant harmonic functions in the unit ball.* Proc. London Math. Soc. **77** (1998) 665–696.

[BBDHJam] A. Bonami, D. Buraczewski, E. Damek, A. Hulanicki & Ph. Jaming *Maximum boundary regularity of bounded Hua-harmonic functions on tube domains.* J. Geom. Anal. **14** (2004) 457–486.

[BoDe] A. Bonami & B. Demange *A survey on the uncertainty principle for quadratic forms.* Collect. Math. (2006) Vol. Extra, 1–36.

[BDJam] A. Bonami, B. Demange & Ph. Jaming *Hermite functions and uncertainty principles for the Fourier and the windowed Fourier transforms.* Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003) 23–55.

[BGJam] A. Bonami, G. Garrigós & Ph. Jaming *Discrete radar ambiguity problems.* À paraître dans *Applied and Computational Harmonic Analysis*, (2007) disponible sur `arXiv :math.CA/0509031`.

[BT] L. Bouattour & K. Trimèche *Beurling-Hörmander's theorem for the Chébli-Trimèche transform.* Glob. J. Pure Appl. Math. **1** (2005) 342–357.

[Bo] J. Bourgain *A remark on the uncertainty principle for Hilbertian basis.* J. Functional Analysis **79** (1988) 136–143.

[BBM] J. Bourgain, H. Brezis & P. Mironescu *Lifting, degree, and distributional Jacobian revisited.* Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005) 529–551.

[BK] J. Bourgain & G. Kozma *One can not hear the winding number.* Prépublication (2006) disponible sur `arXiv :math.CA/0612192`.

[Bre] H. Brezis *New questions related to the topological degree.* The unity of Mathematics, 137–154, Progr. Math. **244**, Birkhauser, Boston 2006.

[Bu] H. F. Bueckner *Signals having the same ambiguity functions.* Technical Report 67-C-456, General Electric, Research and Development Center, Schnectady, N.Y., 1967.

[Ch] S. Chanillo *Uniqueness of Solutions to Schrödinger Equations on Complex Semi-Simple Lie Group.* Prépublication (2006) disponible sur `arXiv :math.RT/0609112`.

[CW] D. Chazan & B. Weiss *Higher order autocorrelation functions as translation invariants.* Information and Control **16** (1970) 378–383.

[CRS] P. Ciatti, F. Ricci & M. Sundari *Uncertainty inequalities on Lie groups of polynomial growth.* Prépublication 2005.

[Coh] L. Cohen *Time-frequency distributions - a review.* Proc. IEEE **77** (1989) 941–981.

[CH] J. V. Corbett & C. A. Hurst *Are wave functions uniquely determined by their position and momentum distributions ?* J. Austral. Math. Soc B **20** (1978) 182–201.

[CP] M. G. Cowling & J. F. Price *Generalizations of Heisenberg's inequality.* In *Harmonic Analysis* (eds. G. Mauceri, F. Ricci and G. Weiss), LNM **992** pp 443-449, Springer, Berlin, 1983.

[CPS] M. G. Cowling, J. F. Price & A. Sitaram *A qualitative uncertainty principle for semisimple Lie groups.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **45** (1988) 127–132.

[CSS] M. G. Cowling, A. Sitaram & M. Sundari *Hardy's uncertainty principle on semisimple groups.* Pacific J. Math. **192** (2000) 293–296.

[CzPo] W. Czaja & A.M. Powell, *Recent developments in the Balian–Low theorem.* In *Harmonic Analysis and Applications* (ed. C. Heil), pp 79–100, Birkäuser, Boston, MA, 2006.

[DHMP] E. Damek, A. Hulanicki, D. Müller & M. Peloso *Pluriharmonic H^2 functions on symmetric irreducible Siegel domains.* Geom. Funct. Anal. **10** (2000) 1090–1117.

[DDJamPE] E. Damek, J. Dziubanski, Ph. Jaming & S. Pérez-Esteva, *Distributions that are convolvable with generalized Poisson kernels of solvable extensions of homogeneous Lie groups.* Prépublication (2006) disponible sur `arXiv :math.CA/0612368`.

[dBr1] N. G. de Bruijn *Uncertainty principles in Fourier analysis.* In *Inequalities*, (ed O. Shisha) pp 55–71, Academic Press, 1967.

[dBr2] N. G. de Bruijn *A theory of generalized functions with applications to Wigner distribution and Weyl correspondence.* Nieuw Arch. Wisk. (3) **21** (1973) 205–280.

[dBu1] R. de Buda *Signals that can be calculated from their ambiguity function.* IEEE Trans. Information Theory **IT16** (1970) 195–202.

[dBu2] R. de Buda *Signals that can be calculated from their ambiguity function.* Unpublished notes.

[DGS] P. Delsarte, J. M. Goethals & J. J. Seidel *Spherical codes and designs.* Geometrica Dedicata **6** (1977) 363–388.

[De1] B. Demange *Principes d'incertitude associés à des formes quadratiques non dégénérées.* Thèse de l'Université d'Orléans, 2004.

[De2] B. Demange *Inégalités d'incertitude associées à des fonctions homogènes.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005) 709–714.

[De3] B. Demange *Uncertainty principles for the ambiguity function.* J. London Math. Soc. (2) **72** (2005) 717–730.

[De4] B. Demange, *Uncertainty principles associated to quadratic forms.* Prépublication (2006).

[dRSST] A. De Roton, B. Saffari, H. Shapiro & G. Tennenbaum, en préparation.

[DS] D. L. Donoho & P. B. Stark *A note on rearrangements, spectral concentration, and the zero-order prolate spheroidal wavefunction.* IEEE Trans. Inform. Theory **39** (1993), 257–260.

[EKV] L. Escauriaza, C. E. Kenig & L. Vega *Decay at infinity of caloric functions within characteristic hyperplane.* Math. Res. Lett. **13** (2006) 441–453.

[EKPV] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce & L. Vega *On unique continuation for Schrödinger equation.* Comm. Partial Differential Equations **31** (2006) 1811–1823.

[Fa] W.G. Faris *Inequalities and uncertainty principles.* J. Math. Phys. **19** (1978) 461–466.

[Fl] P. Flandrin *Separability, positivity, and minimum uncertainty in time-frequency energy distributions.* J. Math. Phys. **39** (1998) 4016–4040.

[FoSi] G. B. Folland & A. Sitaram *The uncertainty principle — a mathematical survey.* J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997) 207–238.

[FM] N. Fontes-Merz *A multidimensional version of Turán's lemma.* Jour. Approx. Theory **140** (2006) 27–30.

[Ga] R.J. Gardner *Geometric tomography.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. **58**, Cambridge University press, Cambridge, 1995.

[GJamP] G. Garrigós, Ph. Jaming & J.-B. Poly *Zéros de fonctions holomorphes et contre-exemples en théorie des radars.* In *Actes des rencontres d'analyse complexe*, pp 81-104, Atlantique, Poitiers, 2000.

[GS1] I. M Gel'fand & G. E. Shilov *Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem.* Uspekhi Mat. Nauk. **8** (1953), 3–54.

[GS2] I. M Gel'fand & G. E. Shilov *Generalized functions, 2.* Moscow, 1958 (Russian). English translation, Academic press, 1968.

[Gr1] C. R. Graham *The Dirichlet problem for the Bergman Laplacian. I.* Comm. Partial Differential Equations **8** (1983) 433–476.

[Gr2] C. R. Graham *The Dirichlet problem for the Bergman Laplacian. II.* Comm. Partial Differential Equations **8** (1983) 563–641.

[GM] F. A. Grünbaum and C. C. Moore *The use of higher-order invariants in the determination of generalized Patterson cyclotomic sets.* Acta Cryst. Sect. A **51** (1995) 310–323.

[Ha] G. H. Hardy *A theorem concerning Fourier transforms.* J. London Math. Soc. **8** (1933) 227–231.

[HMO] M. Hashizume, K. Minemura & K. Okamoto *Harmonic functions on hermitian hyperbolic spaces.* Hiroshima Math. J. **3** (1973) 81–108.

[HJ] V. Havin & B. Jöricke *The uncertainty principle in harmonic analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Hei] W. Heisenberg *Uber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.* Zeit. Physik **43** (1927) 172–198.

[He1] S. Helgason *A duality for symmetric spaces with applications to representation theory.* Advances in Math. **5** (1970) 1–154.

[He2] S. Helgason *Eigenspaces of the Laplacian ; integral representations and irreducibility.* J. Functional Analysis **17** (1974) 328–353.

[Hö] L. Hörmander *A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs.* Ark. Mat. **29** (1991) 237–240.

[Hu] N. E. Hurt *Phase Retrieval and Zero Crossing (Mathematical Methods in Image Reconstruction).* Math. and Its Appl. Kluwer Academic Publisher, 1989.

[Is] R. S. Ismagilov *On the Pauli problem*, Funktional. Anal. i Prilozhen. **30** (1996) 82–84 ; *translation in* Funct. Anal. Appl. **30** (1996) 138–140.

[Jam3] Ph. Jaming *Principe d'incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de Wigner.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998) 249–254.

[Jam4] Ph. Jaming *Phase retrieval techniques for radar ambiguity problems.* J. Fourier Anal. Appl. **5** (1999) 309–329.

[Jam5] Ph. Jaming, *Harmonic Functions on the Real Hyperbolic Ball I : Boundary Values and Atomic Decompositions of Hardy Spaces.* Colloq. Math. **80** (1999) 63–82.

[Jam6] Ph. Jaming, *Harmonic functions on classical rank one balls.* Boll. Unione Mat. Ital. 4-B **8** (2001) 685–702.

[Jam8] Ph. Jaming *The phase retrieval problem for cyclotomic crystals.* In *Topics on the Interface between Harmonic Analysis and Number Theory*, (eds, T. Erdelyi, B. Saffari, G. Tenenbaum), *soumis.*

[Jam9] Ph. Jaming *Nazarov's uncertainty principle in higher dimension.* À paraître dans *Journal of Approximation Theory*, (2007), disponible sur `arXiv :math.CA/0612367`.

[JamK] Ph. Jaming & M. N. Kolountzakis *Reconstruction of functions from their triple correlation.* New York J. Math. **9** (2003) 149–164.

[JamP] Ph. Jaming & A. Powell *Uncertainty principles for orthonormal bases.* J. Functional Analysis **243** (2007) 611–630.

[JamR] Ph. Jaming & M. Roginskaya, *Boundary behaviour of $\mathcal{M}$-harmonic functions and non-isotropic Hausdorff measure.* Monatsh. Math. **134** (2002) 217–226.

[Jan1] A. E. J. M. Janssen *Optimality property of the gaussian window spectrogram.* IEEE Trans. Inform. Theory **39** (1991) 202–204.

[Jan2] A. J. E. M. Janssen *Proof of a conjecture on the supports of Wigner distributions.* J. Fourier Anal. Appl. **4** (1998) 723–726.

[Kah] J.-P. Kahane *Sur l'équation fonctionnelle* $\int_{\mathbb{T}}\big(\psi(t+s)-\psi(t)\big)^3\,ds=\sin t$. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **341** (2005) 141–145.

[KT] L. Kamoun & K. Trimèche *An analogue of Beurling-Hörmander's theorem associated with partial differential operators.* Mediterr. J. Math. **2** (2005) 243–258.

[Kar] P. P. Kargaev *The Fourier Transform of the characteristic function of a set that is vanishing on the interval.* (Russian), Mat. Sb. (N.S.) **117(159)** (1982) 397–411, 432.

[KV] P. P. Kargaev & A. L. Volberg *Three results concerning the support of functions and their Fourier Transforms.* Indiana Univ. Math. J. **41** (1992) 1143–1164.

[KKMOOT] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Ōshima & M. Tanaka *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space.* Ann. of Math. (2) **107** (1978) 1–39.

[KO] M. Kashiwara & T. Ōshima *Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems.* Ann. Math. (2) **106** (1977) 145–200.

[KK] T. Keleti & M. N. Kolountzakis *On the determination of sets by their triple correlation in finite cyclic groups.* Online J. Anal. Comb. **1** (2006) Art 4.

[Ke] E. H. Kennard *Zur Quantenmachanik eifecher Bewegungs typen.* Zeit. Physik **44** (1927) 326–352.

[KST] M. V. Klibanov, P. E. Sacks & A. V. Tikhonravov *The phase retrieval problem.* Inverse problems **11** (1995) 1–28.

[Ko] O. Kovrijkine *Some results related to the Logvinenko-Sereda theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001) 3037–3047.

[LP1] H. J. Landau & H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. II.* Bell System Tech. J. **40** (1961) 65–84.

[LP2] H. J. Landau & H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. III. The dimension of the space of essentially time- and band-limited signals.* Bell System Tech. J. **41** (1962) 1295–1336.

[Lav] G. Laville *Fonctions pluriharmoniques et solution foundamentale d'un opérateur du quatrième ordre.* Bull. de Sc. Mathematiques **101** (1977) 305–317.

[Law] W. Lawton *Uniqueness results for the phase-retrieval problem for radial functions.* J. Opt. Soc. Am. **71** (1981), 1519–1522.

[LSS] P. Lemke, S. S. Skiena & W. D. Smith *Reconstructing sets for interpoint distances.* Discrete and Computational Geometry, 507–631 Algorithms Combin., **25**, Springer, New York 2003.

[Le] J. B. Lewis *Eigenfunctions on symmetric spaces with distribution-valued boundary forms.* J. Funct. Anal. **29** (1978) 287–307.

[LS] V. N. Logvinenko & Ju. F. Sereda, *Equivalent norms in spaces of entire functions of exponential type. (Russian)* Teor. FunkciĭFunkcional. Anal. i Priložen. Vyp. **20** (1974) 102–111, 175.

[Lo] F. Low *Complete sets of wave packets.* In *A Passion for Physics—Essays in Honor of Geoffrey Chew*, (ed. C. DeTar *et al.*), pp. 17–22, World Scientific, Singapore, 1985.

[Ma] G. Matheron, *Random sets and integral geometry.* John Wiley and sons, 1975.

[Md] J. N. McDonald *Phase retrieval and magnitude retrieval of entire functions.* J. Fourier Anal. Appl. **10** (2004) 259–267.

[Mil] R. P. Millane *Phase retrieval in crystallography and optics.* J. Opt. Soc. Am. A. **7** (1990) 394–411.

[Min] K. Minemura *Harmonic functions on real hyperbolic spaces.* Hiroshima Math. J. **3** (1973) 121–151.

[Mon] H. L. Montgomery *A note on rearrangements of Fourier coefficients.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **26** (1976) 29–34.

[Mor] G. W. Morgan *A note on Fourier transforms.* J. London Math. Soc. **9** (1934) 187–192.

[Na] W. Nagel *Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons.* J. Appl. Probab. **30** (1993) 730–736.

[Na] F. L. Nazarov *Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. (Russian)* Algebra i Analiz **5** (1993) 3–66 ; *translation in* St. Petersburg Math. J. **5** (1994) 663–717.

[OS] T. Ōshima & J. Sekiguchi *Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space.* Invent. Math. **57** (1980) 1–81.

[Pa1] B. Paneah *On certain problems of harmonic analysis.* Soviet Math. Dokl. **3** (1962) 239–242.

[Pa2] B. Paneah *Support-dependent weighted norm estimates for Fourier transforms.* J. Math. Anal. Appl. **189** (1995) 552–574.

[Pa3] B. Paneah *Support-dependent weighted norm estimates for Fourier transforms. II.* Duke Math. J. **92** (1998) 335–353.

[Pat1] A. L. Patterson *A direct method for the determination of the components of interatomic distances in crystals* Zeitschr. Kryst. **90** (1935) 517–545.

[Pat2] A. L. Patterson *Ambiguities in the X-ray analysis of crystal structures* Physics Review **65** (1944) 195–201.

[Pa] W. Pauli *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*. Handbuch der Physik, V :17, 1932.

[Po] A. M. Powell *Time-frequency mean and variance sequences of orthonormal bases.* J. Fourier Anal. Appl. **11** (2005) 375–387.

[RS1] A. J. Radcliffe & A. D. Scott *Reconstructing subsets of* $\mathbb{Z}_n$. J. Combin. Theory Ser. A **83** (1998) 169–187.

[RS2] A. J. Radcliffe & A. D. Scott *Reconstructing subsets of reals*. Electron. J. Combin. **6** (1999), no. 1, Research Paper 20, 7 pp. (electronic).

[RaS] S. K. Ray & R. P. Sarkar *Cowling-Price theorem and characterization of heat kernel on symmetric spaces.* Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **114** (2004) 159–180.

[RT] D. Rautenbach & E. Triesch *A note on the reconstruction of sets of finite measure*. Acta Math. Hungar. **100** (2003) 241–250.

[Re] H. Reichenbach *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*. University of California Press, Berkeley, 1944.

[Ro] J. Rosenblatt *Phase retrieval*. Comm. Math. Phys. **95** (1984) 317–343.

[RoS] J. Rosenblatt & P. Seymour *The structure of homometric sets.* SIAM J. Algebraic Discrete Methods **3** (1982) 343–350.

[RoST] J. Rosenblatt, D. Stroock & M. Taylor *Group actions and singular martingales.* Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003) 293–305.

[RoT] J. Rosenblatt & M. Taylor *Group actions and singular martingales II The recognition problem.* Canad. J. Math. **56** (2004) 431–448.

[Rot] J. Rothman *Autocorrelation functions as translation invariants in* L^1 *and* L^2. J. Fourier Anal. Appl. **2** (1996) 217–225.

[Ru] W. Rudin *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer, 1980.

[SaSe] R. P Sarkar & J. Sengupta *Beurling theorem and characterization of heat kernel for Riemannian symmetric spaces of noncompact type.* Prépublication (2005) disponibles sur `arXiv :math.FA/0502514v1`.

[ST] R. P. Sarkar & S. Thangavelu *On theorems of Beurling and Hardy for the Euclidean motion group.* Tohoku Math. J. (2) **57** (2005) 335–351.

[SKK] M. Sato & T. Kawai & M. Kashiwara *Microfunctions and pseudo-differential equations.* in *Hyperfunctions and pseudo-differential equations* (Proc. Conf., Katata, 1971 ; dedicated to the memory of Andr Martineau), pp. 265–529. Lecture Notes in Math., **287**, Springer, Berlin, 1973.

[Sho1] H. S. Shapiro *Uncertainty principles for basis in* $L^2(\mathbb{R})$. unpublished manuscript (1991).

[SVW] C. Shubin, R. Vakilian & T. Wolff *Some harmonic analysis questions suggested by Anderson-Bernoulli models*. Geom. Funct. Anal. **8** (1998) 932–964.

[Sj] P. Sjögren *Weak* L^1 *characterizations of Poisson integrals, Green potentials, and* H^p *spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **233** (1977) 179–196.

[SP] D. Slepian & H. O. Pollak *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. I.* Bell System Tech. J. **40** (1961) 43–63.

[S1] D. Slepian *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainity. IV. Extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal functions.* Bell System Tech. J. **43** (1964) 3009–3057.

[S2] D. Slepian *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling.* SIAM Rev. **25** (1983) 379–393.

[Ste] I. S. Stefanescu *On the phase retrieval problem in two dimensions.* J. Math. Phys, **26** (1985) 2141–2160.

[St] E. M. Stein *Harmonic Analysis.* Princeton University Press, 1993.

[Th1] S. Thangavelu *An introduction to the uncertainty principle. Hardy's theorem on Lie groups.* Progress in Mathematics, **217** Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[Th2] S. Thangavelu *Revisiting Hardy's theorem for the Heisenberg group.* Math. Z. **242** (2002) 761–779.

[Vo] A. Vogt *Position and momentum distributions do not determine the quantum mechanical state.* In *Mathematical Foundations of Quantum Theory* (ed A.R. Marlow), pp 365–372, Academic Press, 1978.

[Wall] N. Wallach *Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups.* Springer Lecture Notes, **1024** (1983) 287–369.

[Walt] A. Walther *The question of phase retrieval in optics.* Opt. Acta, **10** (1963) 41–49.

[We] H. Weyl *Gruppentheorie und Quantenmechanik.* S. Hirzel, Leipzig. Revised english edition : *Groups and quantum mechanics*, Dover 1950.

[Wx] C. H. Wilcox *The synthesis problem for radar ambiguity functions.* MRC Tech. Summary Report **157** (1960), republished in *Radar and Sonar part I* (eds. R. Blahut, W. Miller and C. Wilcox), I.M.A. vol in Math. and its Appl. **32**, 229–260, Springer, New York, 1991.

[Wi] E. Wilczok *New uncertainty principles for the continuous Gabor transform and the continuous wavelet transform.* Doc. Math. **5** (2000) 201–226.