



Feuilletages Homogènes et billards polygonaux

Ferran Valdez

► To cite this version:

Ferran Valdez. Feuilletages Homogènes et billards polygonaux. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2007. Français. NNT: . tel-00159918

HAL Id: tel-00159918

<https://theses.hal.science/tel-00159918>

Submitted on 4 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N d'ordre : 3536

THÈSE
présentée
DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1
pour obtenir
le grade de **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE**
RENNES 1

Mention Mathématiques et Applications

par

JOSÉ FERRÁN VALDEZ LORENZO

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE

Feuilletages homogènes et billards polygonaux

Soutenue le 21 juin 2007 devant la Commission D'Examen

COMPOSITION DU JURY

M. Dominique CERVEAU
M. Pascal HUBERT
M. Emmanuel PAUL
M. Robert ROUSSARIE
M. Serge TROUBETZKOY
M. Anton ZORICH

Directeur
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	3
1. Présentation générale	3
2. Généralités	4
2.1. À propos du billard	4
2.2. Feuilletages holomorphes homogènes	6
2.3. Dictionnaire	8
2.4. L'application orthique	13
Chapitre 1. Billards polygonaux, feuilletages homogènes	15
1. Surfaces de translation et billards polygonaux	15
1.1. Surfaces de translation engendrées par un polygone	15
1.2. Billards polygonaux	19
1.3. Les ensembles invariants du billard	20
1.4. Les surfaces de translation $S(P)$ et $\Sigma(P, \theta)$	21
2. Feuilletages homogènes sur $\mathbb{C}^2$	31
2.1. Topologie des feuilles	33
2.2. Feuilletages associés à $\mathcal{F}_{a,\lambda}$	43
Chapitre 2. Un dictionnaire	63
1. Feuilletages homogènes et billards polygonaux : un dictionnaire	63
1.1. Les transformations de SCHWARZ-CHRISTOFFEL	63
1.2. Résultats principaux	66
1.3. Variation du paramètre directionnel θ	75
2. Applications du dictionnaire	78
2.1. Traduction des résultats de la théorie des billards polygonaux	78
2.2. Dichotomie topologique, surfaces de VEECH arithmétiques et champs de GHYS-REBELO	89
2.3. Feuilletages dans $\mathbb{RP}(3)$ et billards polygonaux	95
Chapitre 3. La transformation orthique	103
1. Généralités	103
1.1. Domaine de définition	103

1.2.	L'application orthique en coordonnées locales, propriétés	106
1.3.	L'application orthique : orbites périodiques dans les triangles isocèles	111
	Bibliographie	115

Remerciements

Je veux commencer par adresser mes remerciements à Dominique CERVEAU. Ces trois derniers années, il a dirigé mes recherches. Cette thèse est un reflet de l'art de faire des mathématiques qu'il m'a transmis et de sa grande générosité. Je le remercie aussi pour son support depuis que je suis arrivé en France.

Emmanuel PAUL et Pascal HUBERT ont accepté la tâche de rapporter cette thèse et je les en suis reconnaissant. Je les remercie pour l'intérêt manifesté, le temps et remarques. Je tiens à remercier ce dernier pour son accueil lors de mes visites au CIRM, Luminy et Chateau-Gombert à Marseille.

Je tiens à adresser mes remerciements à Robert ROUSSARIE, Serge TROUBETZKOY et Anton ZORICH pour avoir accepté de faire partie du jury. Leur présence est un honneur pour moi.

Plusieurs résultats dans cette thèse ont leur origine dans des discussions avec Frank LORAY, Serge TROUBETZKOY et Adolfo GUILLOT à l'IRMAR, Luminy et l'IMATE-Cuernavaca respectivement. Merci pour m'avoir écouté et avoir pris le temps de réfléchir à mes questions. Je remercie Jean-François MATTEI et Erwan LANNEAU pour m'avoir permis d'exposer mes travaux à Toulouse et Marseille. De même, je remercie Jose SEADE, Omegar CALVO-ANDRADE, Laura ORTIZ et Ernesto ROSALES pour leur support et pour m'avoir permis d'exposer mes travaux lors de mon tour-séjour à la fin de l'année dernière au IMATE-Cuernavaca, CIMAT-Guanajuato et IMATE-Mexico.

Pour les idées mathématiques que nous avons échangées pendant nos discussions je remercie, Corentin BOISSY, Delphine BOUCHER, Serge CANTAT, Antoine DUCROS, Bertrand DEROIN, Viktor KLEPTSIN, Erwan LANNEAU, Rodolphe RICHARD... J'ai bénéficié de l'ambiance convivial et actif de l'équipe de géométrie analytique et de l'IRMAR en général. Merci à tous ses membres. Je tiens à remercier Max BAUER pour sa tolérance et à Julie DESERTI pour son aide. Merci à Pasquale BRÉGER, Karine FALC'HON, Claude BOSCHET, Danielle LANNEAU et Marie-Annick PAULMIER pour m'éviter tout sorte de problèmes pendant ces années !

Pour m'encourager toujours à continuer merci à Natalia, Antoine, Gwen, Juliana, Ewa, Emiliano, Jérôme et Karlatone...*fortis imaginatio generat casum*. En fin, merci à Marion, pour le matériel onirique.

Introduction

1. Présentation générale

Dans cette thèse nous construisons un dictionnaire entre deux types d'objets et nous l'utilisons pour prouver de nouveaux résultats. Nous parlerons deux langages : celui des billards *polygonaux*, et celui des feuilletages holomorphes du plan complexe invariants par homothéties, *i.e.*, les *feuilletages homogènes*.

L'étude du jeu de billard sur un polygone dans une direction fixée se ramène à l'étude d'un feuilletage par des géodésiques d'une surface plate «engendrée» par le polygone. *Grosso modo*, le dictionnaire qu'on présente montre que cette surface plate est biholomorphe à la courbe intégrale «générique» d'un champ de vecteurs holomorphe et homogène X de $\mathbb{C}^2$. Ce champ de vecteurs est déterminé, à multiplication scalaire près, par les angles et la longueur des côtés du polygone et définit avec ses courbes intégrales un feuilletage homogène. Le biholomorphisme entre la surface plate et une courbe intégrale de X envoie tout feuilletage géodésique de la première sur les courbes intégrales d'un champ réel de la forme $Re(e^{i\theta} X)$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Les feuilletages holomorphes et réels constituant un des langages du dictionnaire définissent de façon naturelle des feuilletages singuliers de codimension réelle un et deux de l'espace projectif $\mathbb{RP}(3)$. Nous obtenons ainsi une version *projective* du dictionnaire. Nous verrons que comprendre la dynamique des trajectoires d'un billard polygonal revient à comprendre la «dynamique» des feuilles d'un feuilletage réel de $\mathbb{RP}(3)$ de codimension deux.

Cette thèse se compose de trois chapitres. Dans les deux premiers nous introduisons les langages, nous construisons le dictionnaire et nous montrons son utilité en présentant des résultats nouveaux autant pour les billards polygonaux que pour les feuilletages homogènes. Le dernier chapitre, indépendant du reste

du texte, traite de l'étude de l'application qui associe à chaque triangle son *triangle orthique*, c'est à-dire, le triangle dont les sommets sont les pieds des hauteurs. En particulier, nous exhibons une méthode géométrique pour construire des orbites périodiques sur un triangle isocèles aigu dont la longueur combinatoire est 5.

2. Généralités

2.1. À propos du billard.

Vraisemblablement, le billard que l'on connaît aujourd'hui provient d'un jeu médiéval pratiqué sur le sol et à l'extérieur, consistant à manipuler une certaine quantité de billes en bois à l'aide de bâtons recourbés à leur extrémité. Ce divertissement antique est à l'origine du cricket, du golf et du billard. En gros, le billard naît lorsque on décide de le représenter sur une table pour pouvoir le pratiquer à l'intérieur.

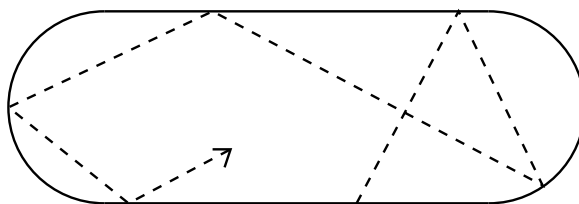
En France, et probablement dans le monde entier, la première table connue a été fabriquée en 1469 par le Maître ébéniste-menuisier HENRI DE VIGNE sur commande du roi LOUIS XI. Le jeu est à l'origine réservé à la noblesse. Il a fallu attendre le XVII^e siècle pour le voir entrer dans les mœurs : dans un édit de 1634 LOUIS XIII, roi qui avait proclamé la fin de la Régence sur une table de billard au Louvre, interdit à tout noble l'accès aux *academies* de billard réputées de «réceptacles de rodomonts, de fanfarons, de spadassins et raffinés d'honneur, de passevolans ou militaires sans paye, de coupeurs de bourse ou tireurs de laine». À l'époque on distingue le billard de *salon*, pratiqué par des «hommes d'honneur» et attaché à la noblesse jusqu'à la Révolution, du billard *académique*.

C'est le billard académique qui évoluera vers le jeu de billard que l'on connaît à l'époque actuelle. Le premier changement important dans le jeu arrive au début du XIX^e siècle grâce à l'ingéniosité de FRANÇOIS MINGAUD, ancien capitaine d'infanterie au service de France et de l'Empereur. MINGAUD consacrait le temps pendant son séjour carcéral au jeu des billes et il l'améliora en collant à l'extrémité en bois de la queue de billard une rondelle en cuir. Ce petit détail permet au joueur de mieux contrôler la direction de la trajectoire de la bille et son moment angulaire initial. On obtient ainsi des «coups extraordinaires et surprenants», mêmes qui ont permis à MINGAUD de battre les «professeurs» de billard de la capitale et

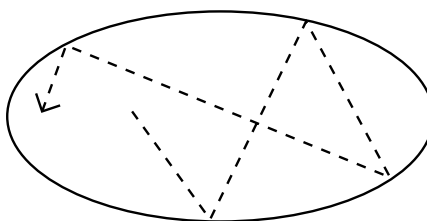
de se faire une réputation de *maître du jeu*. L'ensemble des techniques par lui développées font partie d'un traité sur le billard intitulé *Noble Jeu de Billard. Coups Extraordinaires et Surprenants* (1831).

La cinématique et les mouvements composés derrière les illustres coups de MINGAUD ont intéressé le mathématicien GASPARD-GUSTAVE CORIOLIS, célèbre à cause de la loi qui porte son nom. Le fruit de sa curiosité est *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* (1835), le premier traité scientifique sur le jeu de billard. Dans son texte, CORIOLIS concentre son attention plutôt sur les effets de frottement de la bille avec la table que sur la sensibilité de la trajectoire à la direction de la queue.

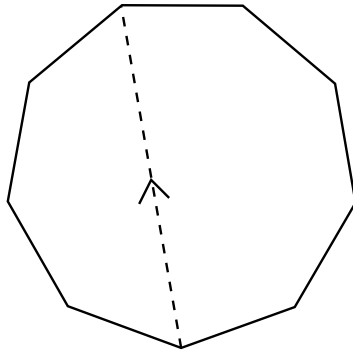
Le modèle mathématique dans lequel s'inscrivent les billards qu'on aborde dans cette thèse néglige complètement l'interaction des billes avec la surface de la table ainsi que leur moment angulaire. Plus précisément, nous appellerons *billard mathématique*, ou simplement billard, le système dynamique qui résulte du mouvement *sans friction* d'un point à vitesse constante dans un domaine du plan dont le bord est lisse par morceaux. Lorsque la trajectoire de la bille rencontre le bord de la table nous avons deux possibilités : soit elle le fait dans un coin, soit elle le fait dans un point où le bord est lisse. Dans le premier cas, à l'instar du *billard anglais*, on imagine l'existence d'une poche infinitésimale et on convient que la trajectoire de la bille s'arrête. Dans le deuxième, on suppose que la collision est élastique et que la bille se reflète en suivant la loi optique de DÉSCARTES *angle d'incidence égal à angle de réflexion*.



Billard dans un stade,



dans un ellipse,



dans un enneagone.

Il ne faut pas concevoir les billards comme une théorie mathématique en soi mais plutôt comme une *cour de récréation* (ANATOLE KATOK *dixit* [25]) inscrite dans le jardin des systèmes dynamiques où les mathématiciens s’amusent en essayant et affûtant diverses méthodes et approches.

Nous nous amuserons avec les billards dont la table a une forme polygonale. Grâce à une construction classique, on peut ramener l’étude de la dynamique des trajectoires d’un billiard sur un polygone P à l’étude du flot géodésique d’une surface plate «engendrée» par le polygone. Nous la désignons par $S(P)$. D’après sa construction, cette surface est de translation, *i.e.*, les changements de coordonnées l’atlas définissant sa structure sont des translations du plan $\mathbb{C}$.

Dans cette thèse $S(P)$ est une surface lisse, typiquement «engendrée» par le polygone P privé de l’ensemble de ses sommets.

Historiquement, il s’agit de l’approche la plus effective pour résoudre des questions naturelles comme l’existence de trajectoires fermées ou denses dans la table. Cependant, même pour un triangle obtus général, ces questions restent ouvertes. Des progrès récents à cet égard ont été achevés par R. E. SCHWARTZ.

2.2. Feuilletages holomorphes homogènes.

Intuitivement, un feuilletage non singulier d’une variété analytique est une partition compatible avec la structure de la variété dont les classes d’équivalence, appelées *feuilles*, sont toutes des sous-variétés (réelles ou complexes) de même dimension disposées localement comme les feuilles d’un livre. On peut faire remonter la notion du feuilletage au XIX^{ème} siècle. Son origine se trouve dans l’étude

des solutions des équations différentielles analytiques en tant que surfaces de Riemann non paramétrées [15]. GEORGES REEB fut le premier à donner une définition précise [40]. L'approche des feuilletages homogènes utilisée dans ce texte est basée sur les travaux de DOMINIQUE CERVEAU et JEAN-FRANÇOIS MATTEI sur les formes intégrables holomorphes singulières [8].

Cette thèse s'inscrit dans le contexte des feuilletages holomorphes homogènes à singularité isolée et cône tangent réduit. Si le degré du cône tangent est $\nu + 1$, un tel feuilletage laisse invariantes $\nu + 1$ droites passant par la singularité. Nous nous concentrons à étudier le cas *quadratique*, c'est-à-dire, $\nu = 2$. Dans ce cas nous pouvons supposer, quitte à faire agir une transformation linéaire, que les trois droites invariantes passant par la singularité sont de pentes 0, 1 et ∞ . Suivant [8], les feuilletages homogènes considérées sont définis par des 1-formes holomorphes du type

$$(1) \quad \frac{\omega}{z_1 z_2 (z_2 - z_1)} = \lambda_1 \frac{dz_1}{z_1} + \lambda_2 \frac{dz_2}{z_2} + \lambda_3 \frac{d(z_2 - z_1)}{z_2 - z_1}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}^*, \forall j.$$

Par commodité, nous supposons de même que le paramètre $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfait $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Nous désignons par $\mathcal{F}_\lambda$ le feuilletage défini par une telle forme. Le feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ possède, à difféomorphisme près, trois types de feuilles : le point singulier, une droite pointée et une feuille «générique». En effet, toute homothétie de $\mathbb{C}^2$ échange difféomorphiquement les feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$. Cela ne veut pas dire que le feuilletage soit simple : pour des paramètres génériques, toute feuille générique est dense dans le plan complexe [9].

Soit X_λ le champ de vecteurs holomorphe satisfaisant l'équation $i_{X_\lambda} dz_1 \wedge dz_2 = \omega$. Ici, $i_{X_\lambda} dz_1 \wedge dz_2$ désigne la dérivée intérieure du champ X par rapport à la forme de volume $dz_1 \wedge dz_2$. À tout feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ on peut associer naturellement une famille à un paramètre de feuilletages réels de $\mathbb{C}^2$: il s'agit des feuilletages formés par les courbes intégrales des champs de vecteurs réels $Re(e^{i\theta} X_\lambda)$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nous désignons ces feuilletages réels par $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$ ou simplement $\mathcal{F}_\theta$. La restriction de $\mathcal{F}_\theta$ à une courbe intégrale de X_λ est un feuilletage. À notre connaissance ces feuilletages n'ont pas été étudiés et les questions suivantes restent ouvertes :

QUESTION 1. Existence d'orbites périodiques. [6]

Existe-t-il, pour λ fixé, une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$ possède une feuille compacte non triviale ?

QUESTION 2. Transitivité topologique. (*ibid*)

Existe-t-il, pour λ fixé, une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$ possède une feuille dense dans $\mathbb{C}^2$ ou dans une feuille générique de $\mathcal{F}_\lambda$?

Comme on le verra plus loin, la première question est liée au problème d'existence de trajectoires fermées dans le billard sur un polygone et la deuxième à la transitivité topologique du «flot» du billard dans l'espace de phases.

2.3. Dictionnaire.

Le dictionnaire que nous présentons trouve son origine dans l'étude des feuilletages réels $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$. Une première approche consiste à *rectifier le champ* $Re(e^{i\theta} X_\lambda)$ *restreint à une feuille générique de $\mathcal{F}_\lambda$ dans un ouvert de la feuille aussi grand que possible*. Cette idée naturelle est cruciale. Pour cela on éclate l'espace $\mathbb{C}^2$ à l'origine. Le feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ définit naturellement un feuilletage holomorphe $\widetilde{\mathcal{F}}_\lambda$ d'espace éclaté. Notons $t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la variable du diviseur exceptionnel. Toute feuille «générique» de $\widetilde{\mathcal{F}}_\lambda$ (provenant d'une feuille générique de $\mathcal{F}_\lambda$) est paramétrisée localement par la variable t . Un calcul montre que la locale rectification d'un champ $Re(e^{i\theta} X_\lambda)$ est réalisée par une branche de :

$$(2) \quad t \rightsquigarrow \int_0^t \xi^{\lambda_j-1} (\xi - 1)^{\lambda_i-1} d\xi$$

où $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Quand $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi$ et $\lambda_3\pi$ sont les angles d'un triangle, (2) est une transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL. Ces transformations sont des représentations conformes d'un demi-plan dans $\mathbb{C}$ sur l'intérieur d'un triangle. Nous nous appuyons sur ce fait pour prouver notre résultat principal :

THÉORÈME. Soit P le triangle d'angles $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi$ et $\lambda_3\pi$. Alors pour toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathcal{L}$ feuille générique de $\mathcal{F}_\lambda$ fixées, le biholomorphisme qui rectifie localement feuilletage réel $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}|_{\mathcal{L}}$ s'étend à la feuille $\mathcal{L}$. Il est à valeurs dans la surface plate engendrée par le triangle P et conjugué $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}|_{\mathcal{L}}$ à un feuilletage formé par des géodésiques «parallèles» à une même direction.

Etant donné que $S(P)$ est une surface de translation, elle est à holonomie triviale et cela nous permet de parler sans ambiguïtés de géodésiques «parallèles» à une même direction. Nous prouvons aussi le réciproque de ce théorème : tout feuilletage «géodésique» de la surface plate engendré par le triangle P est conjugué à $\mathcal{F}_{\theta}|_{\mathcal{L}}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, pour une certaine feuille générique $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}_\lambda$, λ point réel de $\sum_{\lambda_j} = 1$.

Soient $\rho \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Désignons par $\rho e^{i\theta}\mathcal{L}$ l'image de l'homothétie $(z_1, z_1) \rightsquigarrow \rho e^{i\theta}(z_1, z_2)$ restreinte à une feuille $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}_\lambda$. Nous prouvons de même :

THÉOREME. *Supposons que la feuille $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}_\lambda$ munie du feuilletage réel $\mathcal{F}_{\lambda, \theta|_{\mathcal{L}}}$ est conjuguée à la surface plate engendrée par le triangle P munie du feuilletage formé par les géodésiques «parallèles» à la direction $\theta'_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$, la feuille générique $\rho e^{i\theta'}\mathcal{L}$ munie du feuilletage réel $\mathcal{F}_{\lambda, \theta|_{\rho e^{i\theta'}\mathcal{L}}}$ est conjuguée à la surface plate engendrée par le triangle P munie d'un feuilletage formé par des géodésiques «parallèles» à la direction $\theta'_0 + \theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Les deux résultats précédents entraînent que, pour toute feuille $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_\lambda$ fixée, l'ensemble

$$(3) \quad M(\mathcal{L}) := \{e^{i\theta}\mathcal{L} \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

muni du feuilletage $\mathcal{F}_{\theta=0}$ «représente» le fibré tangent unitaire de la surface $S(P)$ muni du feuilletage réel défini par le «flot» géodésique. Puisque le fibré tangent unitaire de $S(P)$ est un produit, toute surface invariante par le flot géodésique s'identifie naturellement à la surface de translation $S(P)$ feuilletée par l'ensemble de géodésiques parallèles à une direction fixée. Chacune de ces surfaces invariantes feuilletées est conjuguée à une feuille dans $M(\mathcal{L})$ munie du feuilletage réel $\mathcal{F}_{\theta=0|_{\mathcal{L}}}$ et *vice versa*. En gros, le fibré tangent unitaire de la surface de translation $S(P)$ joue le rôle d'espace de phases du jeu du billard sur le polygone P . Ainsi, nous pouvons penser à l'ensemble $M(\mathcal{L})$ comme étant une version «immergée» de cet espace de phases dans $\mathbb{C}^2$. Indépendamment de la feuille $\mathcal{L}$, l'ensemble $M(\mathcal{L})$ est une variété Levi-plate singulière de dimension réelle 3.

2.3.1. Applications.

Une conséquence immédiate des résultats précédents est que la feuille générique de $\mathcal{F}_\lambda$ est difféomorphe à la surface plate «engendrée» par le triangle. En utilisant des arguments classiques de la théorie des revêtements, nous déterminons le type topologique des feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$ lorsque λ_1 , λ_2 et λ_3 sont des nombres complexes formant un ensemble *non-résonnant*, notion précisée plus loin. Cela nous permettra de spécifier le type topologique de la surface de translation «engendrée» par un polygone dont les angles sont des multiples irrationnels de π *non-résonnants*. Plus précisément, nous montrerons que cette surface est homéomorphe à un plan auquel on a ajouté un infini dénombrable d'anses. Cette surface non compacte est connue sous le nom de *monstre du Loch Ness* [14].

On peut se servir du dictionnaire pour «traduire» chaque résultat que l'on

connaît pour les billards en termes de feuilletages. Grâce aux outils propres à la théorie des feuilletages (monodromie explicite, existence d’une intégrale première globale *et caetera*) nous pouvons faire mieux qu’une traduction directe. Par exemple nous prouvons le :

THÉORÈME. (Densité d’orbites périodiques)

Supposons que $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi$ et $\lambda_3\pi$ sont les angles d’un triangle et que $\lambda_j \in \mathbb{Q}$, $j = 1, 2, 3$. Soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé. Alors l’ensemble des feuilles compactes de $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$ est dense dans $\mathbb{C}^2$.

Ce théorème donne une réponse à la question 1 dans le cadre des paramètres λ rationnels. Remarquons également que les feuilles compactes des feuilletages $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$, qu’on appellera dorénavant orbites périodiques, ne sont jamais isolées. Nous prouvons un résultat analogue lorsque les paramètres $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi$ et $\lambda_3\pi$ correspondent aux angles d’un triangle rectangle *général*. Ce type d’énoncés s’appuie sur les travaux de BOSHERNITZAN, GALPERIN, KRÜGER et TROUBETZKOY concernant la distribution des points dans l’espace de phases du billard définissant une trajectoire périodique [3], [48].

En ce qui concerne la distribution des feuilles du feuilletage réel $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$ nous prouvons, entre autres :

THÉORÈME.

Supposons que $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi$ et $\lambda_3\pi$ sont les angles d’un triangle et que $\lambda_j \in \mathbb{Q}$, $j = 1, 2, 3$. Soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé. Alors l’ensemble de feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$ dans lesquelles $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}|_{\mathcal{L}}$ ne présente pas de feuille dense est de mesure de LEBESGUE nulle.

En fait, nous prouvons si λ est un point rationnel alors, le complément dans $\mathbb{C}^2$ de l’ensemble où le feuilletage $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$ restreint à une feuille de $\mathcal{F}_\lambda$ est *minimal* (toute feuille est dense) est de mesure de LEBESGUE nulle. Nous répondons ainsi à une partie de la question 2 : il existe des feuilletages réels $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$ possédant des feuilles denses dans les feuilles génériques de $\mathcal{F}_\lambda$. Rappelons nous que quand le paramètre λ est réel, les feuilles de $\mathcal{F}_\lambda$ ne sont pas denses dans le plan complexe. Par exemple, dans le cas rationnel, nous voyons qu’elles sont d’adhérence algébrique dans $\mathbb{CP}(2)$.

Passage à $\mathbb{RP}(3)$. Le feuilletage $\mathcal{F}_\lambda$ définit naturellement un feuilletage $\mathcal{G}_\lambda$ de $\mathbb{RP}(3)$ *via* la projection naturelle $\Pi_{\mathbb{RP}(3)} : \mathbb{R}^4 \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{RP}(3)$. Le feuilletage $\mathcal{G}_\lambda$ possède, à difféomorphisme près, deux type des feuilles : une feuille «générique»

(projection de la feuille générique de $\mathcal{F}_\lambda$) et trois «cercles» ($\mathbb{RP}(1)$) provenant des droites dans $\mathcal{F}_\lambda$ passant par la singularité. Ils forment le lieu singulier de $\mathcal{G}_\lambda$. Nous désignons leur réunion par $Sing(\mathcal{G}_\lambda)$.

Lorsque la représentation d'holonomie de $\mathcal{F}_\lambda$ ne contient pas l'involution $z \rightsquigarrow -z$, ce qui est le cas générique, la restriction de la projection $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}$ à une feuille générique de $\mathcal{F}_\lambda$ est un difféomorphisme. Cela marche de même pour les feuilletages réels $\mathcal{F}_{\lambda,\theta}$. Nous désignons par $\mathcal{G}_{\lambda,\theta}$ la projection de ces feuilletages réels. Le lieu singulier de ces feuilletages réels est formé par trois points singuliers, chacun contenu dans un des «cercles» formant $Sing(\mathcal{G}_\lambda)$. L'appartenance de $z \rightsquigarrow -z$ au groupe d'holonomie de $\mathcal{F}_\lambda$ dépend exclusivement du paramètre λ . Quand tel est le cas nous dirons que λ est *fortement résonnant*.

Lorsque le paramètre λ est non fortement résonnant, la restriction de la projection $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}$ à la 3-variété réelle $M(\mathcal{L})$ conjugue le feuilletage réel $\mathcal{F}_{\lambda,\theta=0}$ au feuilletage réel $\mathcal{G}_{\lambda,\theta=0}$ restreint à $\mathbb{RP}(3) \setminus Sing(\mathcal{G}_\lambda)$. Nous menons une étude géométrique dans un voisinage de chaque cercle singulier formant $Sing(\mathcal{G}_\lambda)$ et de chaque point singulier de $\mathcal{G}_{\lambda,\theta=0}$ lorsque le paramètre λ est réel. Si p_j désigne un de ces points, nous prouvons que le germe de feuilletage défini par $\mathcal{G}_{\lambda,\theta=0}$ en p_j est conjugué au feuilletage *linéaire* défini dans un voisinage de l'origine par les courbes intégrales du champ de vecteurs réel :

$$(4) \quad \lambda_j x \partial / \partial x - y \partial / \partial y - z \partial / \partial z$$

Pour examiner $Sing(\mathcal{G}_\lambda)$, nous éclatons $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$ dans chacun des «cercles» formant cet ensemble. Nous désignons par $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$ la variété obtenue. Chacun des diviseurs exceptionnels dans cette variété est un tore $\mathbb{RP}(1) \times \mathbb{RP}(1)$. Les feuilletages $\mathcal{G}_\lambda$ et $\mathcal{G}_{\lambda,\theta}$ définissent naturellement des feuilletages $\widetilde{\mathcal{G}}_\lambda$ et $\widetilde{\mathcal{G}}_{\lambda,\theta}$ sur cette variété éclatée. La topologie des feuilles de $\widetilde{\mathcal{G}}_\lambda$ ne coïncide pas avec celle des feuilles de $\mathcal{G}_\lambda$ mais $\mathcal{G}_{\lambda,\theta}$ est isomorphe à $\widetilde{\mathcal{G}}_{\lambda,\theta}$ en dehors des diviseurs exceptionnels. Nous montrons que la trace du feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}_\lambda$ sur chaque tore $\mathbb{RP}(1) \times \mathbb{RP}(1)$ est un feuilletage en droites.

L'étude géométrique décrit dans les paragraphes précédents nous permet de préciser le dictionnaire dans sa *version projective*. Plus précisément, nous montrons que les feuilles de $\mathcal{G}_{\lambda,\theta}$ ayant comme «extrémité» un point singulier p_j correspondent à des trajectoires du billard aboutissant dans un sommet de P . Cela nous permet de prouver que, indépendamment de la direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, chaque feuilletage réel $\mathcal{G}_{\lambda,\theta}$ présente une infinité dénombrable de feuilles «joignant» des

points singuliers. Nous verrons que le feuilletage en droites sur les tores qui résultent d'éclater les cercles formant $Sing(\mathcal{G}_\lambda)$ «représente» et «gouverne» la dynamique du billard sur le triangle dans un voisinage de chaque sommet. De même, nous prouverons que le billard est «totalement intégrable» au voisinage de chaque sommet de P .

Nous arrivons à des résultats du type :

THÉORÈME. *Soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé. Alors il existe un sous ensemble du type G_δ dense de $\sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1$, $\lambda_j > 0$, pour tout $j = 1, 2, 3$ formé par des paramètres λ pour lesquels presque tout point de $\mathbb{RP}(3)$, au sens LEBESGUE, est contenu dans une feuille de $\mathcal{G}_{\lambda,\theta}$ dense dans $\mathbb{RP}(3)$.*

Le discours concernant le dictionnaire et ses applications admet une extension au cas des polygones ayant plus de trois côtes. Cette extension requiert des hypothèses et considérations techniques que nous aborderons dans cette thèse mais que nous omettons dans cette introduction.

Par ailleurs, nous allons nous servir de la machinerie utilisée dans la construction du dictionnaire pour établir un lien entre les surfaces engendrées par les triangles d'angles

$$(5) \quad \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\},$$

les «triangles» d'angles

$$(6) \quad \left\{ \frac{\pi}{n+1}, -\frac{\pi}{n+1}, 1 \right\}, \quad n > 0$$

et les courbes intégrales des champs de vecteurs holomorphes définis par les formes normales dites de GHYS-REBELO, que nous définirons plus tard. Ce type de champs de vecteurs sont *semicomplets* et à singularité isolée ; leur premier jet en la singularité est nilpotent, éventuellement nul. Dans le cas des triangles non-dégénérés (5) les surfaces plates engendrées sont dites de VEECH *arithmétiques* [19]. Le comportement des géodésiques satisfait une dichotomie, dite de VEECH, analogue à celle que satisfont les feuilles d'un feuilletage en droites parallèles sur un tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (densité ou périodicité). Par contre, nous verrons que les géodésiques dans une surface plate «engendrée» par un triangle dégénéré (6) ne sont jamais ni fermées ni denses.

2.4. L'application orthique.

Considérons le jeu de billard sur un triangle aigu P . Le triangle inscrit dont les sommets sont les pieds des hauteurs décrit la trace d'une trajectoire fermée d'une bille qui rebondit trois fois avant de revenir sur son point de départ. On appelle usuellement cette trajectoire *l'orbite périodique* de FAGNANO en hommage à GIULIO C. FAGNANO (1682-1766), italien, comte de Fagnani et marquis de Toschi. Le triangle est appelé habituellement triangle *orthique*.

Dans le dernier chapitre de cette thèse nous étudions l'application qui associe à chaque triangle son triangle orthique. Nous appelons cette application, *l'application orthique*. Le domaine naturel de cette application est *l'espace de triangles*. Cette espace admet une interprétation en termes d'un feuilletage «exceptionnel» de $\mathbb{CP}(3)$ et en conséquence la dynamique induite par la transformation orthique peut induire une dynamique dans l'espace de feuilles de ce feuilletage.

Nous montrons que cette application possède une «conjuguée» dont la dynamique est facile à décrire. Nous verrons que l'application orthique sert à engendrer des orbites périodiques de longueur combinatoire 5 dans les triangles isocèles aigus.

CHAPITRE 1

Billards polygonaux, feuilletages homogènes

1. Surfaces de translation et billards polygonaux

La compréhension de la dynamique du jeu de billard sur un polygone a connu un développement sans précédents lorsqu'on l'a étudiée sur la surface de translation «engendrée» par ce polygone. Dans les paragraphes qui suivent nous visons à expliciter le procédé qui permet d'engendrer une surface de translation à partir d'un polygone ainsi que les généralités sur les billards polygonaux.

Il existe plusieurs façons de définir une surface de translation. Pour ce qui nous intéresse nous considérons la définition suivant : une surface de translation est la donnée d'un couple $(S, \mathcal{ATL})$ où S est une surface réelle topologique et $\mathcal{ATL}$ est un atlas dont les changements de coordonnées sont des translations.

Les surfaces de translation apparaissent naturellement dans plusieurs contextes : l'étude des modules des surfaces de Riemann, des feuilletages mesurés et des billards mathématiques, entre autres.

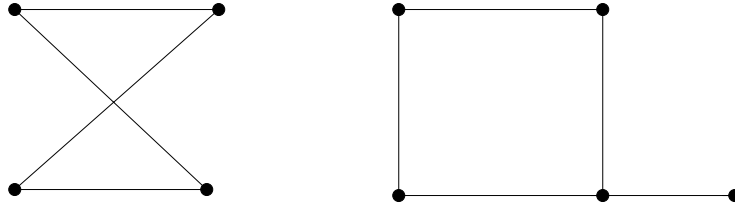
1.1. Surfaces de translation engendrées par un polygone.

Soit P un polygone dans le plan réel. Nous notons Q l'ensemble de ses sommets, $Arr(P)$ l'ensemble de ses arêtes et $Int(P)$ son intérieur. Nous appelons *côtés prolongés de P* les droites qui portent ses côtés. Le nombre de sommets d'un polygone est appelé *ordre* du polygone.

Remarque technique. Nous considérons que les sous ensembles Q , $Arr(P)$ et $Int(P)$ du polygone P sont disjoints. Le long de ce texte nous allons considérer des polygones «non-dégénérés», c'est-à-dire, tels que

- (1) Les points dans Q sont en position générale ;
- (2) Les ensembles $Int(P)$ et $P \setminus Arr(P)$ sont connexes.

Les figures suivantes illustrent le type de cas dégénérés que nous souhaitons éviter.



Polygones dégénérés.

DÉFINITION 1. Soit P un polygone. Nous dirons qu'un sommet de P est rationnel si l'angle en ce sommet tracé à l'intérieur du polygone est un multiple rationnel de π . Un polygone dont tous les sommets sont rationnels est appelé polygone rationnel.

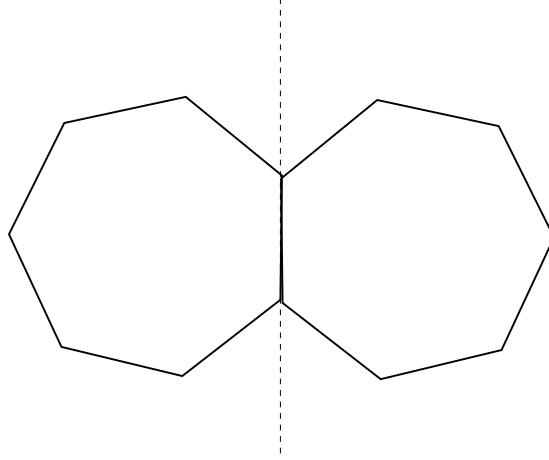
Les réflexions du plan par rapport à chaque côté prolongé d'un polygone P donné engendrent un sous-groupe d'isométries du plan que nous notons $\mathcal{H}(P)$. Avec la donnée $\{P, \mathcal{H}(P)\}$ nous engendrons une surface de translation comme suit.

Pour chaque élément $\sigma \in \mathcal{H}(P)$ nous définissons $P_\sigma := \sigma|_P P$ comme l'image de l'isométrie σ restreinte au polygone P . Nous obtenons ainsi une famille de polygones $\mathcal{P} := \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{H}(P)} P_\sigma$ sur laquelle agit $\mathcal{H}(P)$ de façon cohérente : l'image d'un sommet est un sommet, celle d'un côté un côté.

On définit sur les points des polygones de la famille $\mathcal{P}$ la relation d'équivalence $\sim$:

- (1) Tout point de P_σ s'identifie à lui même, pour tout $\sigma \in \mathcal{H}(P)$,
- (2) Si $x \in P_\sigma$ et T est une translation telle que $T\sigma \in \mathcal{H}(P)$ alors nous identifions x à Tx ,

- (3) Si $P_{\sigma'} = P_{\sigma_j \sigma}$ où σ_j est une réflexion du plan par rapport à un des côtés prolongés de P_σ alors nous recollons ces deux polygones le long de leur côté commun.



Identification le long d'un côté commun.

Exemple : Si P est un carré, on obtient un pavage du plan et, en appliquant la règle de collage (1)-(3) à la famille $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}/\sim$ est un tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

En général, en tant que surface de translation, le quotient $\mathcal{P}/\sim$ n'est pas une surface lisse. En effet, même dans le cas rationnel, il suffit qu'un des angles de P ne soit pas de la forme $\frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, pour que $\mathcal{P}/\sim$ ne soit pas lisse. Par exemple, dans le cas d'ordre 3

$$(7) \quad \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right\}$$

sont les seuls triangles pour lesquels $\mathcal{P}/\sim$ est lisse.

Si on enlève les sommets de chaque polygone dans la famille $\mathcal{P}$, alors le quotient par rapport à $\sim$ correspondant est une surface de translation [57]. Notons $\Pi_P : \mathcal{P} \longrightarrow P_e$, e l'élément neutre de $\mathcal{H}(P)$, la projection qui associe à chaque point d'un polygone P_σ son image *via* σ^{-1} et définissons

$$(8) \quad \text{Somm}(\mathcal{P}) = \Pi_P^{-1}(Q).$$

DÉFINITION 2. Soit P un polygone. Nous appelons surface de translation engendrée par le polygone P le quotient

$$(9) \quad (\mathcal{P} \setminus \text{Somm}(\mathcal{P})) / \sim$$

Nous notons cette surface de translation $S(P)$.

Autrement dit, dans cette thèse, la surface de translation $S(P)$ est engendrée par un polygone auquel on a enlevé les sommets.

Les surfaces de translation héritent de toutes les structures du plan invariantes par translation. En particulier toute surface de translation engendrée par un polygone euclidien admet une métrique plate : il suffit de relever celle du plan *via* la projection Π_P . Nous noterons une telle métrique plate $|dz|$. Par ailleurs, la mesure de LEBESGUE sur le plan réel se relève en une mesure, finie dans le cas d'un polygone rationnel, sur $S(P)$. Nous la noterons μ .

1.1.1. Compactification locale de la surface $S(P)$.

Par définition la surface de translation $S(P)$ n'est pas compacte mais nous pouvons la compactifier localement «en ajoutant» les sommets rationnels du polygone P .

DÉFINITION 3. Soit P un polygone et $Q' \subseteq Q$ le complémentaire de l'ensemble des sommets rationnels dans Q . Soit $\text{Somm}'(\mathcal{P}) := \Pi_P^{-1}(Q')$. Nous appelons surface de translation engendrée par le polygone P à singularités coniques le quotient :

$$(10) \quad (\mathcal{P} \setminus \text{Somm}'(\mathcal{P})) / \sim$$

et nous la notons $\overline{S(P)}$.

Pour tout petit voisinage V d'un sommet rationnel q ajouté il existe un voisinage de l'origine $(W, 0)$ et un revêtement ramifié d'ordre fini $\pi_q : (V, q) \rightarrow (W, 0)$ tel que les sections locales en dehors de 0 sont des cartes de l'atlas de $S(P)$. La 1-forme holomorphe dz sur $\mathbb{C}$ définit une 1-forme holomorphe globale sans zéros sur la surface de translation $S(P)$ que nous notons ω_{dz} . Nous remarquons que sur $S(P)$ les primitives $z(p) = \int_{p_0}^p \omega_{dz}$ fournissent la structure de surface de translation de $S(P)$. La forme ω_{dz} s'étend de façon unique à la compactification $\overline{S(P)}$. Au voisinage de chaque sommet q ajouté elle s'écrit $z^k dz$ où $k+1$ est l'ordre du revêtement π_q [57].

Dans le cas où P est un polygone rationnel, $\overline{S(P)}$ est bien connue : il s'agit en effet d'une surface plate à singularités coniques relativement à la métrique plate, compacte, et de genre fini [*ibid*].

Nota Bene. La construction de la surface de translation $S(P)$ que nous avons présentée n'utilise pas le fait que le polygone est un sous-ensemble borné du plan réel. En effet, elle reste valide lorsqu'on considère des domaines plus généraux.

Par exemple des ouverts simplement connexes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont le bord est une courbe de Jordan lisse et rectifiable par morceaux.

1.1.2. Le feuilletage géodésique de $S(P)$.

Notons $\mathbb{T}_1(S) = \mathbb{T}_1(S(P))$ le fibré tangent unitaire de $S(P)$; vu que les changements de coordonnées de $S(P)$ sont des translations ce fibré est trivial. Soit

$$(11) \quad \text{dir} : S(P) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

la projection de ce fibré sur la composante $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dans le fibré tangent unitaire $\mathbb{T}_1(S)$ la section $\text{dir}^{-1}(\theta)$ est invariante par le flot géodésique et lorsqu'on identifie $\text{dir}^{-1}(\theta)$ avec la surface de translation $S(P)$ on obtient un feuilletage par courbes réelles de $S(P)$ que nous appelons *feuilletage géodésique de $S(P)$ défini par θ* et que nous notons $\mathcal{D}_\theta$. Bien sûr, dans le cas rationnel, ce feuilletage s'étend de façon naturelle en un feuilletage singulier de $\overline{S(P)}$ dont les singularités correspondent aux sommets rationnels ajoutés. Nous notons ce feuilletage singulier $\overline{\mathcal{D}_\theta}$.

1.2. Billards polygonaux.

Soit P un polygone, borné ou non, fixé. Nous appelons *billard sur P* le système dynamique associé au déplacement d'un point dans P à vitesse constante et soumis à la loi de réflexion de DESCARTES *l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence* lorsqu'il rencontre le bord du polygone ∂P . La trajectoire d'un tel point est appelée *trajectoire du billard*; on appelle communément le point décrivant cette trajectoire *boule du billard*. La réflexion d'une trajectoire n'est pas bien définie dans les sommets du polygone. Nous conviendrons donc qu'un point du billard se déplace, dans le passé et dans le futur, jusqu'au moment où il rencontre un sommet de P .

DÉFINITION 4. *Les trajectoires du billard rencontrant un sommet sont appelées trajectoires singulières. Une trajectoire singulière liant deux sommets de P (pas nécessairement distincts) est appelée diagonale généralisée.*

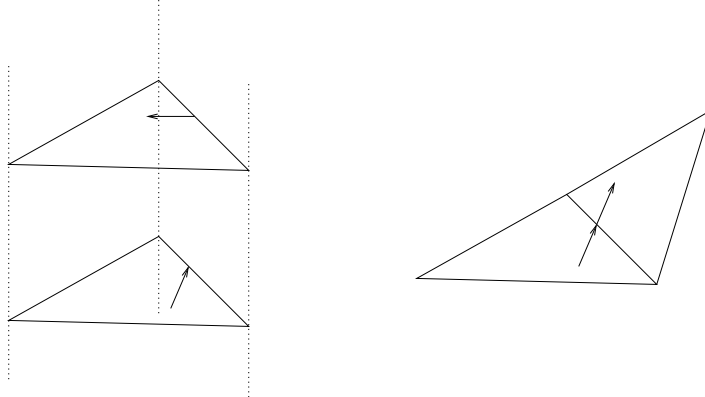
Remarque. Le temps d'intégration d'une diagonale généralisée du billard est borné et celui d'une trajectoire singulière qui n'est pas une diagonale généralisée est semi-borné. Toute trajectoire non singulière a $\mathbb{R}$ comme intervalle maximal d'intégration.

Vu que la vitesse de déplacement d'un point est constante nous pouvons supposer que le point se déplace à vitesse unitaire. Alors l'espace des phases du billard sur le polygone est $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Cet espace des phases admet une décomposition en ensembles invariants par la dynamique du billard.

1.3. Les ensembles invariants du billard.

Dans cette section nous construisons une décomposition de l'espace des phases $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ en ensembles invariants par la dynamique du billard sur P .

Considérons une condition initiale dans $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et supposons que la trajectoire du point en question rencontre *transversalement* le bord du polygone en dehors des sommets ; alors, du point de vue dynamique, nous remarquons qu'il est équivalent (i) de suivre la trajectoire du point dans P après réflexion ou bien (ii) son prolongement dans le symétrique de P par rapport au côté où le rebondissement a lieu.



La loi de Descartes vue comme identification dans ∂P .

Considérons maintenant les parties linéaires des réflexions du plan par rapport aux côtés prolongés du polygone P . Notons $D\mathcal{H} = D\mathcal{H}(P)$ le sous-groupe de $O(2)$, le groupe d'isométries de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, engendré par ces parties linéaires et $\mathcal{O}_{D\mathcal{H}}(\theta)$ la $D\mathcal{H}$ -orbite d'une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ nous définissons

$$(12) \quad \mathcal{P}_\theta := \{(p, \theta') \in P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mid \theta' \in \mathcal{O}_{D\mathcal{H}}(\theta)\}.$$

Par définition toute trajectoire du billard ayant comme condition initiale un point dans $\mathcal{P}_\theta$ est complètement contenue dans $\mathcal{P}_\theta$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_\theta$ est invariante par la dynamique du billard. Définissons sur les points de $\mathcal{P}_\theta$ la relation d'équivalence suivante (héritée de la précédente $\sim$) :

- (1) Tout point de $\mathcal{P}_\theta$ s'identifie à lui même.
- (2) Soit x un point du bord de P et $d\sigma$ la partie linéaire de la réflexion par rapport au côté du polygone contenant x . Alors $(x, \theta) \sim (x, \theta')$ si, et seulement si, $\theta' = d\sigma\theta$.

Cette relation d'équivalence nous permet de construire des surfaces invariantes par la dynamique du billard, à l'instar du procédé de construction de la surface de translation $S(P)$ à partir du polygone P . En effet, si $\Pi_{\mathcal{P}_\theta}$ désigne la restriction de la projection $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni (x, \theta) \rightsquigarrow x$ à $\mathcal{P}_\theta$, le quotient $(\mathcal{P}_\theta \setminus \Pi_{\mathcal{P}_\theta}^{-1}(Q))/\sim$ admet une structure de surface de translation compatible avec celle de l'intérieur du polygone [20].

DÉFINITION 5. *Nous appelons surface invariante du billard définie par la direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le quotient*

$$(13) \quad (\mathcal{P}_\theta \setminus \Pi_{\mathcal{P}_\theta}^{-1}(Q))/\sim .$$

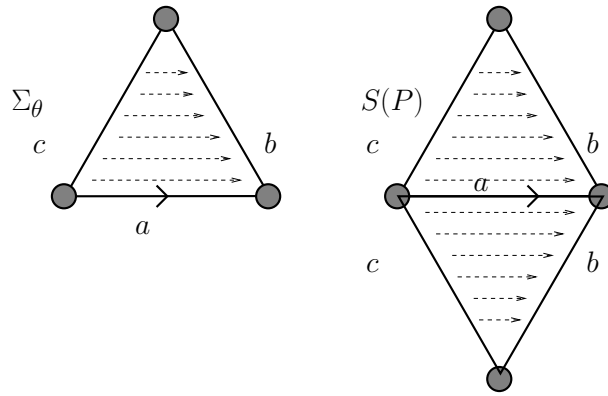
Nous la notons $\Sigma_\theta = \Sigma(P, \theta)$.

Les trajectoires du billard sur P définissent un «flot» sur l'espace de phases $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qu'on appelle normalement «le flot du billard». Il ne s'agit pas d'un vrai flot vu qu'il y a des trajectoires rencontrant des sommets. On le note g_t . Pour toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathcal{P}_\theta$ est invariant par le flot g_t . La restriction de g_t à $\mathcal{P}_\theta$ définit un feuilletage réel sur la surface invariante Σ_θ que nous notons B_θ . Comme on l'a fait dans le cas de la surface de translation P , nous pouvons compactifier localement la surface Σ_θ en ajoutant les sommets rationnels de P à $\mathcal{P}_\theta$. Nous notons cette compactification locale $\overline{\Sigma}_\theta$; bien sûr le feuilletage B_θ s'étend en un feuilletage singulier de $\overline{\Sigma}_\theta$ que nous notons $\overline{B}_\theta$.

1.4. Les surfaces de translation $S(P)$ et $\Sigma(P, \theta)$.

Dans cette section nous rappelons que la surface invariante du billard Σ_θ et la surface $S(P)$ représentent, pour des directions $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ génériques, le même objet.

Remarquons que, modulo l'identification par translations faite sur les éléments de $\mathcal{P}$, les procédés de construction de $S(P)$ et $\Sigma(P, \theta)$ définis précédemment sont identiques. Cependant, lorsque nous jouons au billard sur un polygone P dans une direction θ parallèle à un côté nous constatons que la relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\mathcal{P}_\theta$ n'identifie les points de ce côté qu'à eux-mêmes. Par contre, lorsque nous construisons la surface de translation $S(P)$ ce phénomène n'arrive jamais.

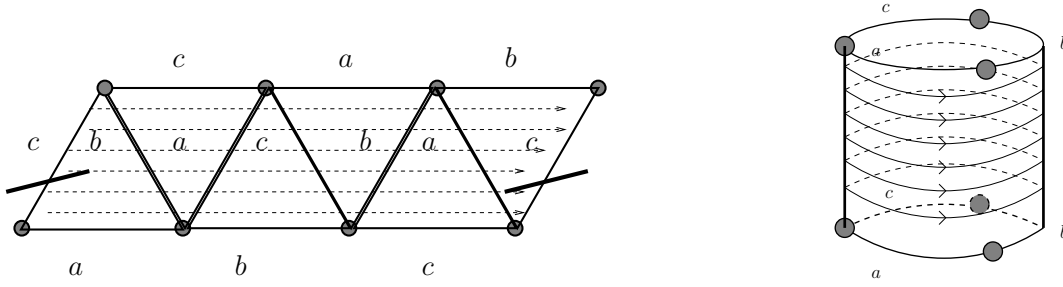


Les surfaces Σ_θ et $S(P)$.

DÉFINITION 6. Une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est dite régulière si, et seulement si, le stabilisateur de θ par rapport à $D\mathcal{H}(P) \subset \text{Isom}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ est trivial. Dans les autres cas θ est appelée singulière. Nous notons $\text{Reg}_P \subseteq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des directions régulières associées à un polygone.

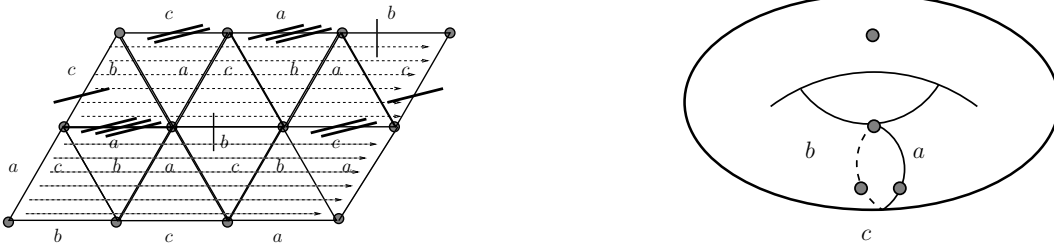
Autrement dit, l'ensemble des directions singulières est formé par les $D\mathcal{H}$ -orbites dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ des directions parallèles aux côtés du polygone P . Par exemple, si P est rationnel, l'ensemble formé par les directions singulières est fini. Dans le reste des cas, il est dénombrable.

Exemple. Si P est un triangle équilatéral et θ est parallèle à un des côtés alors, comme montre la figure suivante, l'intérieur de Σ_θ est homéomorphe à un cylindre $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]0, 1[)$ et $\overline{\Sigma_\theta}$ est un cylindre fermé.



La surface de translation Σ_θ lorsque θ est non singulière.

D'un autre côté les surfaces de translation $S(P)$ et sa compactification $\overline{S(P)}$ sont homéomorphes à un tore privé de trois points et à un tore respectivement.



La surface de translation Σ_θ lorsque θ est non singulière.

D'après les remarques précédentes nous obtenons :

PROPOSITION 1. Soit P un polygone et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ une direction fixés. Alors il existe un plongement analytique réel

$$(14) \quad \text{int}(\Sigma_\theta) \hookrightarrow S(P),$$

où $\text{int}(\Sigma_\theta)$ désigne l'intérieur de la surface Σ_θ , qui envoie le feuilletage B_θ sur la restriction du feuilletage $\mathcal{D}_\theta$ à l'image de (14). Si la direction θ est régulière, la flèche (14) conjugue analytiquement les surfaces feuilletées $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ et $(\Sigma_\theta, B_\theta)$, c'est-à-dire qu'elle définit un isomorphisme réel analytique de surfaces envoyant les feuilles de $(\Sigma_\theta, B_\theta)$ sur celles de $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$.

Remarque. En général le plongement (14) s'étend analytiquement à une flèche $\Sigma_\theta \rightarrow S(P)$. On remarque dans les figures précédentes que la façon de plonger $\text{int}(\Sigma_\theta)$ dans la surface de translation $S(P)$ n'est pas nécessairement unique.

Dorénavant nous noterons

$$(15) \quad imm_\theta := \Sigma_\theta \hookrightarrow S(P)$$

le plongement déterminé par :

- (1) $imm_\theta(p, \theta) = p \in P_e$, où $e \in \mathcal{H}(P)$ est l'élément neutre ;
- (2) L'image de $imm_\theta(p, \theta)$ restreint à un polygone dans la famille $\mathcal{P}_\theta$ est un polygone dans la famille $\mathcal{P}$; et
- (3) imm_θ envoie le feuilletage B_θ sur la restriction de $\mathcal{D}_\theta$ à son image.

On établit ainsi un lien fondamental entre les billards polygonaux et les surfaces de translation engendrées par un polygone.

1.4.1. Quelques résultats sur les billards polygonaux.

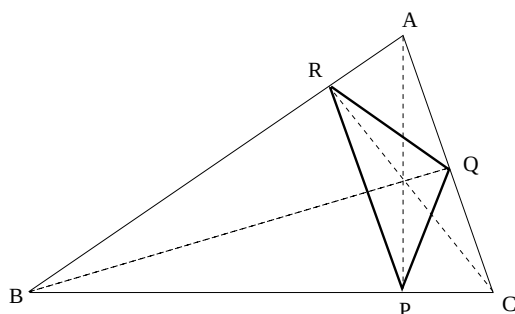
En dépit du fait que la théorie des billards mathématiques ait connu un grand développement dans les dernières années, les questions les plus naturelles concernant la dynamique d'une boule de billard sur une table polygonale restent ouvertes.

Existence de trajectoires périodiques. Toute trajectoire fermée du billard est appelée *trajectoire périodique*. Cette situation correspond aux feuilles compactes des surfaces invariantes du billard. Nous associons à chaque trajectoire périodique un entier positif appelé *longueur combinatoire* qui correspond au nombre de côtés visités par la boule de billard avant de retourner au point de départ. La solution au problème de G. C. FAGNANO (1682-1766) fournit une trajectoire périodique dans les triangles aigus :

PROBLÈME 1. (G.C. FAGNANO, 1775). *Trouver dans un triangle aigu donné le triangle inscrit de longueur minimale.*

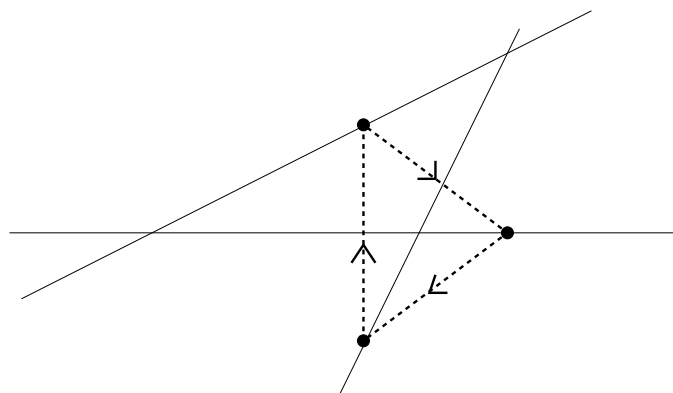
Ce problème a été résolu par G. C. FAGNANO l'année même de sa formulation en utilisant le calcul infinitésimal. Dans un triangle aigu ABC le triangle inscrit de longueur minimale est le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs.

On appelle aussi ce triangle *triangle orthique*. Un exercice montre que le triangle orthique est une trajectoire du billard :



Le triangle orthique PQR d'un triangle aigu ABC .

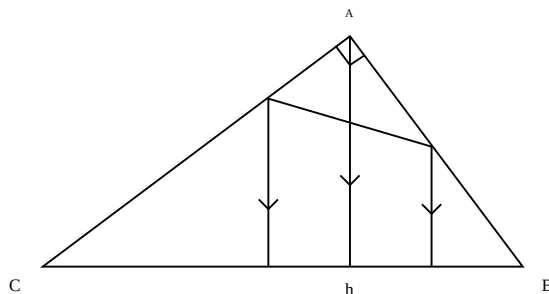
Les trajectoires périodiques du billard ne sont jamais isolées : si une condition initiale (p, θ) dans l'espace des phases donne lieu à une trajectoire périodique, alors il existe un segment de droite contenu dans $P \times \{\theta\}$ passant par (p, θ) et pour lequel tout point appartient à une trajectoire périodique [49]. Ce segment est perpendiculaire à la direction θ et son bord est formé par des diagonales généralisées. Les trajectoires voisines de la trajectoire de FAGNANO sont de longueur combinatoire 6. Dans le cas d'un triangle obtus, le triangle orthique n'est pas inscrit dans le triangle initial et *a fortiori* ne représente pas une trajectoire périodique :



Le triangle orthique d'un triangle obtus.

En fait, l'existence d'une trajectoire périodique pour un triangle obtus arbitraire reste une question ouverte. Par ailleurs, le triangle orthique dégénère en une diagonale généralisée lorsque le triangle aigu devient un triangle rectangle : il s'agit

de la hauteur depuis le sommet de l'angle droit. Tout triangle rectangle a au moins une trajectoire périodique non singulière. La figure suivante, due à R.E. SCHWARTZ, en montre la construction la plus simple :



La diagonale généralisée Ah et la construction de R.E. SCHWARTZ.

La trajectoire périodique de la figure précédente est de longueur combinatoire 6. Malgré ces exemples, la question concernant l'existence, pour un polygone arbitraire, d'une direction θ définissant une trajectoire périodique reste en suspens depuis le début de la théorie. On peut affirmer sans crainte que ce problème est fortement non trivial. Cependant :

- i: En se plaçant dans le contexte des différentielles quadratiques, H. MASUR a prouvé que dans un polygone rationnel P , l'ensemble des directions pour lesquelles le billard a une trajectoire périodique est dense dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ [31]. Ce résultat a été amélioré par BOSHERNITZAN, GALPERIN, KRÜGER et TROUBETZKOY : l'ensemble des points $(p, \theta) \in P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ définissant une trajectoire périodique est dense dans l'espace des phases [3].
- ii: En dehors du cas rationnel, on connaît peu de choses sur l'existence et la distribution des trajectoires périodiques pour un polygone arbitraire, même dans le cas des triangles. Cependant, si P est un triangle rectangle, il existe un sous-ensemble $B \subset P$, au plus dénombrable, tel que, pour tout point $p \in P \setminus B$, l'ensemble des directions :
$$\{\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mid (p, \theta) \text{ définit une trajectoire périodique}\}$$
est dense dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ [48].

En 1992, G. GALPERIN, A. STEPIN ET Y. VOROBETS ont montré l'existence d'un sous-ensemble de l'espace des triangles obtus de mesure de LEBESGUE strictement positive (mais pas totale) dont chaque élément

possède au moins une trajectoire périodique [53]. Nous renvoyons à [42]-[44] pour les résultats les plus récents à propos de l'existence de trajectoires périodiques dans des triangles obtus.

1.4.2. Les surfaces de VEECH, dynamique des trajectoires non périodiques.

Soit P un triangle équilatéral. La famille $\mathcal{P}$ forme alors un pavage du plan et la surface de translation $\overline{S(P)}$ est un tore plat. Dans ce cas, toute géodésique de $\mathcal{D}_\theta$ est soit homéomorphe au cercle, soit uniformément distribuée par rapport à la mesure de $S(P)$ provenant de la mesure de LEBESGUE du plan réel. Cette dichotomie dans la dynamique s'étend aux surfaces compactes de translation dites de VEECH [50],[51].

Soit (S, ω) une surface de RIEMANN compacte de genre g munie d'une 1-forme holomorphe $\omega \in \Gamma(S; \Omega)$. Lorsqu'on fixe un point de base $p_0 \in S$, en dehors des zéros de ω , les primitives $z(p) = \int_{p_0}^p \omega$ définissent un atlas $\mathcal{ATL}$ pour S dont les fonctions de transition sont des translations. L'application qui associe à chaque $(U_i, z_i) \in \mathcal{ATL}$ et $M \in SL(2, \mathbb{R})$ la carte (U_i, Mz_i) définit une action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur l'espace des modules des surfaces de translation de genre g . Notons $SL(S, \omega)$ le stabilisateur de (S, ω) sous cette action.

DÉFINITION 7. On appelle groupe de VEECH de la surface (S, ω) l'image de ce stabilisateur dans $PSL(2, \mathbb{R})$ et on le note $PSL(S, \omega)$.

La surface (S, ω) est appelée *surface de VEECH* si son groupe de VEECH est un réseau. Le groupe de VEECH d'une surface de translation est discret et, dès qu'il est non trivial, jamais cocompact; en fait il est génériquement trivial. Dans [50], VEECH montre le lien entre ce groupe et la dynamique des géodésiques de S :

THÉORÈME 1 (VEECH). Soit P un polygone tel que $PSL(S, \omega)$ est un réseau. Soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ une direction et $z \in P$. Alors la trajectoire du billard passant par z dans la direction θ est (a) soit périodique, (b) soit fini dans un sommet de P ou soit (c) se distribue uniformément dans la surface de translation $S(P)$ par rapport à la mesure provenant de la mesure LEBESGUE du plan $\mathbb{R}^2$. Pour θ fixé, une des deux alternatives (a) et (c) n'arrive jamais.

Dans les deux cas, les géodésiques qui ne sont ni fermées ni uniformément distribuées sont celles ayant comme extrémités des zéros de la forme holomorphe ω . Comme pour le billard, on appelle communément ces géodésiques *diagonales généralisées*. Cette dichotomie dans la dynamique des géodésiques de la surface est aussi dite de VEECH. Les surfaces de VEECH de genre 2 et celles réalisant

la surface de translation d'un triangle aigu ont été caractérisées dans [4], [34] et [26], [39] respectivement. On dispose de critères pour déterminer si une surface de translation est de VEECH, mais leur caractérisation dans le cas général reste un problème ouvert. On ignore même l'existence d'un algorithme pour trouver le groupe de VEECH d'une surface de translation arbitraire.

Les triangles de VEECH. Les polygones P pour lesquels la surface de translation $S(P)$ est de VEECH sont appelés polygones de VEECH. Concernant les triangles [30] :

(1) *Triangles aigus.* Les triangles aigus de VEECH sont

- Le triangle équilatéral ;
- Les triangles isocèles $(\frac{\pi}{n}, \frac{(n-1)\pi}{2n}, \frac{(n-1)\pi}{2n})$, $n \geq 3$;
- Les trois triangles scalènes «exceptionnels» $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12})$, $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12})$ et $(\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9})$.

(2) *Triangles rectangles.* Un triangle rectangle est de VEECH si, et seulement si, son plus petit angle est de la forme $\frac{\pi}{n}$ pour $n \geq 4$.

(3) *Triangles obtus.* Dans [54] C.C. WARD prouve qu'un triangle d'angles

$$(16) \quad (\frac{\pi}{m}, \frac{p\pi}{m}, \frac{q\pi}{m}), \quad \text{où } p < q, 4p \leq m,$$

est un triangle de VEECH si, et seulement si, $p=1$. On sait que

$$(17) \quad (\frac{\pi}{2n+2}, \frac{\pi}{2n+2}, \frac{n\pi}{n+1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}, \frac{(2n-3)\pi}{2n}) \text{ et } (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}),$$

sont des triangles de VEECH. Aucun autre exemple n'est connu, mais on ignore si la liste précédente est complète.

DÉFINITION 8. Un feuilletage $\mathcal{F}$ d'un espace topologique Z est dit topologiquement transitif s'il possède une feuille dense dans Z . Nous dirons que $\mathcal{F}$ est minimal si toute feuille est dense dans Z .

Pour chaque sous-ensemble $Z' \subset Z$ nous définissons $Sat_{\mathcal{F}}(Z')$, le saturé de Z' par rapport au feuilletage $\mathcal{F}$, comme la réunion des feuilles de $\mathcal{F}$ coupant Z' . Soit μ une mesure de probabilité sur Z . Nous dirons que $\mathcal{F}$ est μ -ergodique si tout sous-ensemble $Z' \subset Z$ invariant, i.e. tel que

$$(18) \quad Sat_{\mathcal{F}}(Z') = Z',$$

est de mesure nulle ou totale.

Soit g_t , $t \in \mathbb{R}$, un flot réel sur Z . Nous dirons que g_t est uniquement ergodique s'il existe une unique mesure de probabilité invariante par g_t .

Clairement on a

unicité ergodique $\Rightarrow$ ergodicité

$\Rightarrow$ minimalité $\Rightarrow$ transitivité topologique .

Notons g_t^θ la restriction du «flot du billard» sur P à la surface invariante Σ_θ . En se plaçant dans le contexte des différentielles quadratiques, S. KERCKHOFF, H. MASUR et J. SMILLIE ont prouvé :

THÉOREME 2. [27] *Soit P un polygone rationnel. Alors, pour presque toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, le flot g_t^θ est uniquement ergodique.*

Dans cet énoncé le «presque toute» est par rapport à la mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et l'unique mesure de probabilité invariante par le «flot» g_t^θ est celle provenant de la mesure de LEBESGUE sur le polygone P en tant que sous-ensemble du plan réel.

Par ailleurs, nous savons que la dimension de Hausdorff de l'ensemble des directions θ du cercle pour lesquelles $\mathcal{D}_\theta$ est minimale mais pas uniquement ergodique est bornée par $\frac{1}{2}$ [32].

D'après des techniques introduites par A.B. KATOK, on a

COROLLAIRE 1. [27] *Il existe un ensemble G_δ dense dans l'espace de polygones à n côtés pour lesquels le «flot du billard», g_t , est ergodique.*

Ici, l'ergodicité est par rapport à la mesure naturelle sur le produit (espace des phases) $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nous renvoyons à [17], [27] et [25] pour une discussion plus détaillée sur le sujet.

En dehors du cas rationnel, on connaît peu de polygones explicites pour lesquels le flot géodésique sur la surface de translation correspondante est ergodique ou minimal. Par exemple, dans [52], YA. VOROBETS donne des vitesses explicites d'approximation des angles d'un polygone P par des angles rationnels pour que le flot géodésique g_t^θ de $S(P)$ soit ergodique.

La littérature concernant les billards mathématiques est aussi vaste que le domaine lui-même. Nous renvoyons le lecteur avide d'une exposition plus exhaustive sur le sujet à [46], [33] ou [25].

2. Feuilletages homogènes sur $\mathbb{C}^2$

Par définition, un feuilletage homogène sur $\mathbb{C}^2$ est un feuilletage $\mathcal{F}$ holomorphe invariant sous l'action du groupe des homothéties complexes

$$(19) \quad (z_1, z_2) \rightsquigarrow \lambda(z_1, z_2), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Dans toute la suite on suppose que $\mathcal{F}$ est à singularité isolée ; il est donc donné par une forme de PFAFF ω

$$(20) \quad \omega = A_1 dz_1 + A_2 dz_2,$$

où les A_i sont des polynômes homogènes de même degré ν tels que $\text{pgcd}(A_1, A_2) = 1$. Le champ d'EULER, ou champ radial complexe, est le champ $R_{\mathbb{C}}$

$$(21) \quad R_{\mathbb{C}} = z_1 \partial / \partial z_1 + z_2 \partial / \partial z_2.$$

Les trajectoires de $R_{\mathbb{C}}$ sont les droites complexes passant par l'origine 0 privées de 0 ; il définit la fibration de HOPF. Le produit intérieur de ω par $R_{\mathbb{C}}$ est un polynôme $P_{\nu+1}$ de degré $\nu + 1$. Pour ce qui nous intéresse, nous supposons que ν est supérieur ou égal à deux, de sorte que $P_{\nu+1}$ est non identiquement nul, et nous lui imposerons d'être réduit, ce qui est le cas générique. On écrira alors

$$(22) \quad P_{\nu+1} = z_1 z_2 (z_2 - z_1) \prod_{i=4}^{\nu+1} (z_2 - a_i z_1), \quad a_i \in \mathbb{C}^*,$$

ce qui est loisible quitte à faire agir une transformation linéaire. On appelle $P_{\nu+1} = 0$ le cône tangent du feuilletage $\mathcal{F}$. Comme on peut le lire dans [8], la 1-forme rationnelle $\frac{\omega}{P_{\nu+1}}$ est fermée et s'écrit

$$(23) \quad \frac{\omega}{P_{\nu+1}} = \lambda_1 \frac{dz_1}{z_1} + \lambda_2 \frac{dz_2}{z_2} + \lambda_3 \frac{d(z_2 - z_1)}{z_2 - z_1} + \sum_{j=4}^{\nu+1} \lambda_j \frac{d(z_2 - a_j z_1)}{z_2 - a_j z_1},$$

où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1})$ est un point de l'hyperplan affine

$$(24) \quad A := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1}) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_j = 1, \lambda_j \neq 0 \forall j\}.$$

Nous noterons $A_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des points réels de A . L'écriture (23) est une conséquence immédiate de la décomposition en éléments simples des fractions

rationnelles en une variable. La présentation (23) indique que le feuilletage $\mathcal{F}$, que nous noterons aussi $\mathcal{F}_{a,\lambda}$, possède l'intégrale première (en général multivaluée)

$$(25) \quad F_{a,\lambda} = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} (z_2 - z_1)^{\lambda_3} \prod_{i=4}^{\nu+1} (z_2 - a_i z_1)^{\lambda_i}.$$

Comme le fait E. PAUL dans [37], on peut voir $F_{a,\lambda}$ comme fonction uniforme sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{P_{\nu+1} = 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*/(\sim_\lambda)$ où $\sim_\lambda$ est la relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ définie par l'action de $\mathbb{Z}^{\nu+1}$:

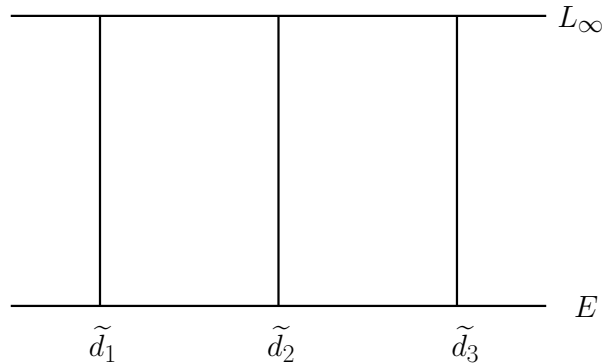
$$\mathbb{Z}^{\nu+1} \times \mathbb{C} \ni ((n_1, \dots, n_{\nu+1}), z) \rightsquigarrow e^{2\pi i \sum n_j \lambda_j} z.$$

E. PAUL démontre que les fibres $F_{a,\lambda}^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{C}^*/\sim$ sont connexes. Parfois de façon abusive nous écrivons $F_{a,\lambda}^{-1}(c)$ avec $c \in \mathbb{C}^*$.

Il nous sera utile de considérer le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ sur l'espace projectif éclaté en l'origine de la carte affine $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2)\}$; nous le noterons $\widetilde{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$. Cet espace, que nous notons $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$, est bien connu : il s'agit de la première surface de HIRZEBRUCH. Soit $\text{ÉCL} : \widetilde{\mathbb{CP}(2)} \rightarrow \mathbb{CP}(2)$ l'application d'éclatement, $E = \text{ÉCL}^{-1}(0)$ le diviseur exceptionnel et L_∞ la droite «à l'infini» dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$. On introduit les droites d_i de $\mathbb{C}^2$ définies par

$$d_1 = \{z_1 = 0\}, d_2 = \{z_2 = 0\}, \dots, d_{\nu+1} = \{z_2 - a_{\nu+1} z_1 = 0\}.$$

On constate que les droites d_i sont invariantes par $\mathcal{F}_{a,\lambda}$; bien sûr ces droites vues dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$, notées $\widetilde{d}_i$, sont disjointes et invariantes par le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$ éclaté strict de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. De même les droites E et L_∞ sont invariantes et les singularités de $\widetilde{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$ sont précisément les intersections des $\widetilde{d}_i$ avec E et L_∞ .



L'ensemble $E \cup D \cup L_\infty$ dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$.

L'application ÉCL fait de $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ un espace fibré sur la droite projective complexe $E \simeq \mathbb{CP}(1)$. On désigne par

$$(26) \quad \Pi : \widetilde{\mathbb{CP}(2)} \longrightarrow E$$

la projection canonique. On note D l'union des droites $\tilde{d}_i$, et a_i l'intersection de chaque $\tilde{d}_i$ avec le diviseur exceptionnel E .

On constate que la restriction de $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ à $\widetilde{\mathbb{CP}(2)} \setminus D$ est transverse à la fibration Π , de sorte que l'on peut parler de l'holonomie de $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ relative à cette fibration [5]. L'homogénéité de notre feuilletage fait que les difféomorphismes d'holonomie sont des applications «linéaires» de la fibre générique de Π ; plus précisément soit $\tilde{d}$ une fibre de Π , munie de la coordonnée affine z s'annulant en $E \cap \tilde{d}$. Soient

$$(27) \quad \gamma_i : [0, 1] \longrightarrow E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\}$$

des lacets d'indice δ_i^j par rapport à a_j . Alors, suivant [5], l'holonomie h_{γ_j} du lacet γ_j , $h_{\gamma_j} : \tilde{d} \longrightarrow \tilde{d}$ est définie dans la coordonnée z par

$$h_{\gamma_j}(z) = e^{2i\pi\lambda_j} z.$$

Le groupe d'holonomie $G_{a,\lambda}$ du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est le groupe engendré par les h_{γ_j}

$$(28) \quad G_{a,\lambda} = \{z \rightsquigarrow e^{2i\pi(n_1\lambda_1 + \dots + n_{\nu+1}\lambda_{\nu+1})} z, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Bien sûr, $G_{a,\lambda}$ est l'image de la représentation d'holonomie

$$(29) \quad \begin{array}{ccc} h : \Pi_1(E \setminus D, E \cap \tilde{d}) & \longrightarrow & Diff(\tilde{d}) \\ \gamma & \rightsquigarrow & h_\gamma \end{array}$$

obtenue de la façon suivante. Soient $z \in \tilde{d}$ et γ un lacet dans $\Pi_1(E \setminus D, E \cap \tilde{d})$; si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{a,\lambda,z}$ est la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ passant par le point z , $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E \setminus D$ se relève *via* Π en un chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{L}$ d'extrémités $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = h_\gamma(z)$. Ce qui suit est bien classique : l'intersection de $\mathcal{L}$ avec $\tilde{d}$ est précisément l'orbite de z sous l'action de $G_{a,\lambda}$. On note cette orbite $\mathcal{O}_{G_{a,\lambda}}(z)$.

2.1. Topologie des feuilles.

L'homogénéité du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ entraîne qu'en dehors de l'ensemble $D \cup E \cup L_\infty$ toutes les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ sont analytiquement isomorphes, plus précisément échangées par des «homothéties» (homothéties de $\mathbb{C}^2$ que l'on relève à $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$). Cette remarque nous permet de parler de *la feuille générique* $\mathcal{L}$ du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ (respectivement de $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$).

Dans cette section on envisage d'étudier deux aspects topologiques de la feuille générique du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$:

- i: Son adhérence en tant que sous-espace de $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$;
- ii: Son type topologique en tant que revêtement de la droite projective $E \simeq \mathbb{CP}(1)$ privée d'un nombre fini de points.

2.1.1. Adhèrence de la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$.

Ici, le langage est celui de [9]. Pour des paramètres λ génériques, les orbites $\mathcal{O}_G(z)$ de l'holonomie sont denses dans la transversale $\tilde{d}$ au feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$, ce qui conduit à la densité de la feuille $\mathcal{L}$ dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$. Nous aurons à nous préoccuper plus loin du cas où les λ_i sont des nombres réels positifs.

Lorsque tous les $\lambda_i = \frac{p_i}{q}$, $\text{pgcd}(p_1, \dots, p_{\nu+1}, q)=1$ sont des rationnels positifs, $G_{a,\lambda}$ est un groupe fini et les feuilles $\mathcal{L} \subseteq \widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ ont pour adhérence des courbes algébriques

$$(30) \quad \overline{\mathcal{L}} = \text{ÉCL}^{-1} \{ z_1^{p_1} z_2^{p_2} (z_2 - z_1)^{p_3} \prod_{i=4}^{\nu+1} (z_2 - a_i z_1)^{p_i} = \text{cste} \}.$$

Supposons que tous les λ_j sont réels et que l'un d'eux, disons λ_1 , soit irrationnel. Alors l'adhérence de l'orbite $\mathcal{O}_{G_{a,\lambda}(z)}$ est un cercle, ce qui permet de prouver :

$$(31) \quad \overline{\mathcal{L}} = \text{ÉCL}^{-1} \{ |z_1|^{\lambda_1} |z_2|^{\lambda_2} |z_2 - z_1|^{\lambda_3} \cdots \prod_{i=4}^{\nu+1} |z_2 - a_i z_1|^{\lambda_i} = \text{cste} \}.$$

En un point générique, (31) est une variété réelle Levi-plate de dimension 3.

2.1.2. Type topologique de la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.

La restriction de la projection canonique (26) à une feuille générique $\mathcal{L} \in \widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$

$$(32) \quad \Pi : \mathcal{L} \longrightarrow E \setminus D$$

est une application de revêtement dont le groupe de monodromie est isomorphe au groupe d'holonomie du feuilletage $G_{a,\lambda}$. En effet, plaçons-nous dans la carte $z_2 = tz_1$ de $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$; alors la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ correspondant au niveau de l'intégrale première $F_{a,\lambda}^{-1}(k)$, est «paramétrée», en coordonnées locales, par l'application multivaluée

$$(33) \quad t \rightsquigarrow (t, kt^{-\lambda_2}(t-1)^{-\lambda_3}\Pi_{i=4}^{\nu+1}(t-a_i)^{-\lambda_i}), \quad k \in \mathbb{C}^* / \sim_\lambda,$$

«inverse» de la projection (32); en particulier ce revêtement est abélien. La topologie usuelle de la sphère de RIEMANN $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq E$ induit *via* (32) une topologie sur la feuille générique que nous appellerons *topologie de surface abstraite* de $\mathcal{L}$. Cette topologie coïncide avec la topologie induite par $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ seulement dans le cas algébrique, c'est-à-dire lorsque λ est un point rationnel de A .

Cela dit, nous concluons que déterminer le type topologique de la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ en tant que surface abstraite est équivalent à expliciter les types topologiques des revêtements abéliens de la sphère de RIEMANN privée d'un nombre fini de points. Etant donné que le groupe du revêtement (32) est isomorphe à l'image de la représentation d'holonomie (29), le type topologique de la feuille générique $\mathcal{L}$ est complètement déterminé par les relations entières parmi les exposants λ_i . Notons Rés_λ le sous- $\mathbb{Z}$ -module de $\mathbb{Z}^{\nu+1}$ défini par

$$(34) \quad \text{Rés}_\lambda := \{n = (n_1, \dots, n_{\nu+1}) \in \mathbb{Z}^{\nu+1} \mid \langle n, \lambda \rangle = \sum n_i \lambda_i = 0\}.$$

On l'appelle dorénavant *module de résonance* de λ .

DÉFINITION 9. *On dira que $\lambda \in A$ est non résonnant si $\text{Rés}_\lambda = \{0\}$; dans le cas contraire nous dirons que λ est résonnant.*

Tout point $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1})$ rationnel est résonnant. Dans le cas $\nu = 2$ tout point (x_0, y_0) non rationnel d'une droite

$$y = \frac{p}{q}x, \quad (p; q) = 1$$

définit un point résonnant non rationnel dans A

$$\lambda_1 = x_0, \quad \lambda_2 = y_0, \quad \lambda_3 = 1 - (x_0 + y_0).$$

LEMME 1. *Soit $\lambda \in A$ non résonnant. Alors le groupe du revêtement (32) est isomorphe à $\mathbb{Z}^\nu$. En particulier, le groupe fondamental de la feuille générique de $\mathcal{F}$ est isomorphe au groupe dérivé $[F_\nu, F_\nu]$ où F_ν désigne le groupe libre à ν générateurs.*

Etant donné que tout groupe abélien libre de rang inférieur à ν se plonge dans $\mathbb{Z}^\nu$, le revêtement abélien de la sphère privée de $\nu + 1$ points de groupe $\mathbb{Z}^\nu$ est dit *maximal*.

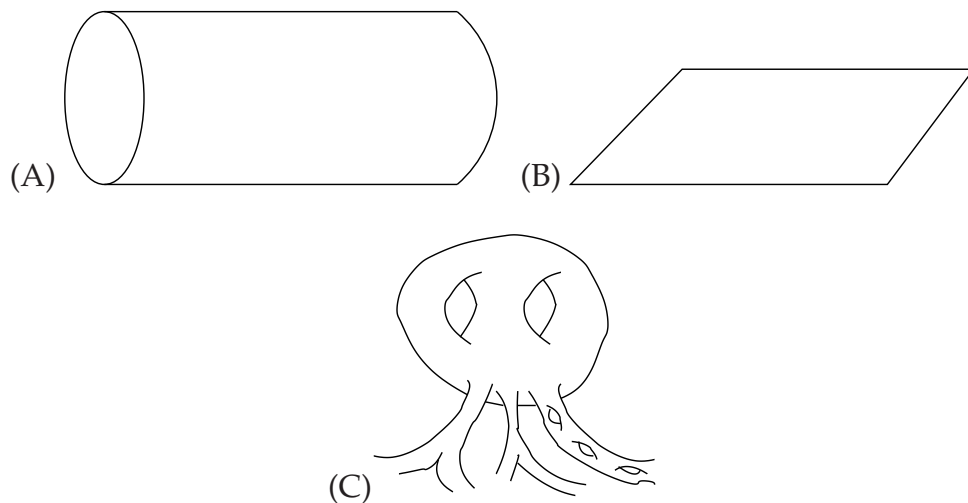
Le but des paragraphes suivants est de montrer que le type topologique du revêtement maximal abélien de la sphère correspond à celui de la surface orientable non compacte de genre infini appelée *monstre du Loch Ness*.

2.1.3. Petit interlude sur la théorie des bouts.

D'après [41], toute surface orientable S , compacte ou non, est déterminée à homéomorphisme près par les invariants suivants :

- (1) Le genre $g(S) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- (2) L'espace des bouts $\mathcal{B}(S)$;
- (3) L'ensemble $\mathcal{B}'(S) \subseteq \mathcal{B}(S)$ formé des *bouts planaires*, i.e., des bouts qui ne portent pas de genre.

Ces invariants sont appelés communément de KERÉKJÀRTÓ-RICHARDS. Dans la figure ci-dessous (A) le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ a deux bouts, (B) le plan a un seul bout et (C) une surface a plusieurs bouts dont un porte du genre.



DÉFINITION 10. [14] Un bout d'une surface S est une application β qui associe à chaque compact $K \subseteq S$ une composante connexe non compacte de $S \setminus K$ et qui satisfait pour toute paire de compacts

$$(35) \quad K_1 \subseteq K_2 \subseteq S \text{ implique } \beta(K_1) \supseteq \beta(K_2).$$

Nous notons $\mathcal{B}(S)$ l'ensemble des bouts de la surface S .

Soit S une surface, $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts dont la réunion est S et β_1, β_2 deux bouts de S . La formule

$$\delta(\beta_1, \beta_2) = \exp(-\sup\{i \mid \beta_1(K_i) = \beta_2(K_i)\})$$

définit une distance ultramétrique sur l'ensemble des bouts de S [14]. Nous appelons $(\mathcal{B}(S), \delta)$ l'espace des bouts de la surface S ; il s'agit d'un espace compact totalement discontinu.

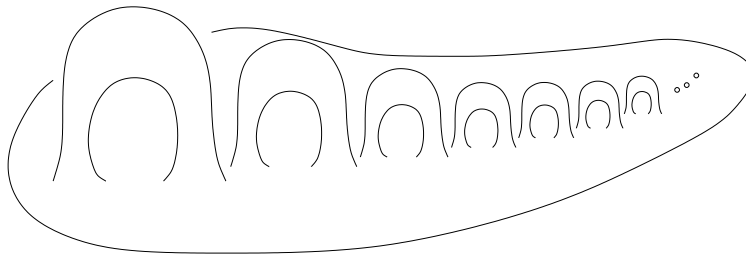
Une surface orientable à bord S est appelée *planaire* si toute surface $S' \subseteq S$ compacte est de genre zéro. On note $\mathcal{B}'(S) \subset \mathcal{B}(S)$ le sous-espace topologique formé par les bouts *planaires*, c'est-à-dire ne portant pas de genre. Le type topologique de la paire d'espaces topologiques emboîtés $\mathcal{B}'(S) \subseteq \mathcal{B}(S)$ détermine à homéomorphisme près la surface orientable S . Nous renvoyons à [41] pour une description plus détaillée de la théorie des bouts.

DÉFINITION 11. Nous appelons toute surface S ayant comme invariants

$$(36) \quad (g(S), \mathcal{B}(S), \mathcal{B}'(S)) = (\infty, \{*\}, \emptyset)$$

monstre du Loch Ness.

Cette nomenclature vient du fait que le plan réel auquel on a attaché une infinité d'anses est un monstre du Loch Ness.

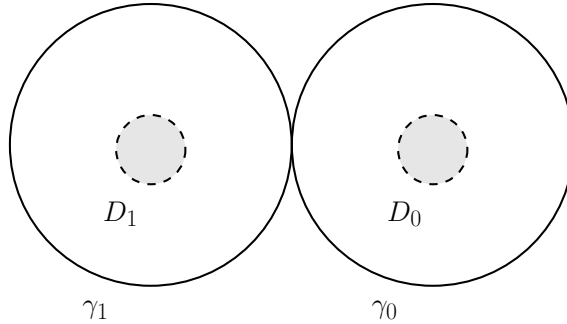


Le monstre du Loch Ness.

THÉORÈME 3. *Soit $\lambda \in A$ non résonnant. Alors la feuille générique du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ munie de sa topologie de surface abstraite est homéomorphe à un monstre du Loch Ness.*

DÉMONSTRATION. La preuve de ce théorème se réduit au calcul des invariants de KERÉKJÁRTÓ-RICHARDS du revêtement $\Pi^{-1}(E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\})$ (32) dans le cas des paramètres λ non résonnants. Nous allons nous restreindre au cas des feuilletages de degré 2, ce qui revient à supposer que la base du revêtement Π est la sphère privée de trois points. La validité des arguments présentés ici demeure lorsque le degré du feuilletage augmente.

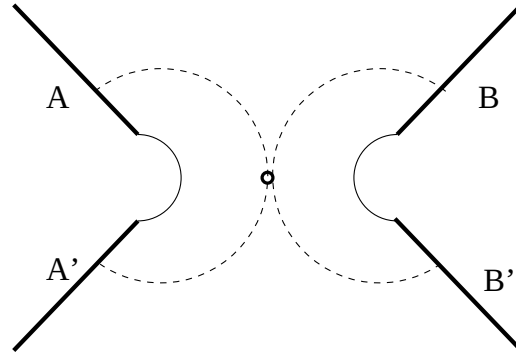
(1.1) $g(\mathcal{L}_z) = \infty$. Notons $E' \subset E \setminus \{t = \infty\}$ le domaine du plan obtenu en enlevant deux petits disques fermés D_0 et D_1 autour des points 0 et 1 respectivement.



Le domaine E' .

Le calcul du genre de la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ se ramène à celui de $\mathcal{L}' = \Pi|_{\mathcal{L}}^{-1}(E')$.

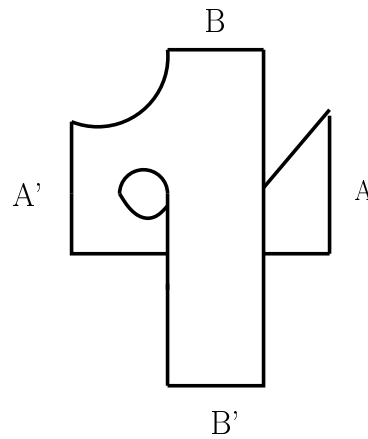
Soient γ_0, γ_1 deux générateurs du groupe fondamental de E' ayant comme point de base $0 < * < 1$ et Ω la figure obtenue en coupant la base du revêtement E' le long des segments réels $] - \infty, 0[$ et $]1, +\infty[$; bien évidemment l'intérieur de Ω est homeomorphe à un disque. Notons A, A' et B, B' les parties du bord de Ω «provenant» des segments $] - \infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ respectivement

Le domaine Ω .

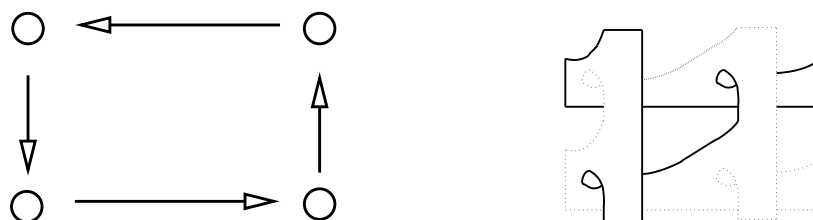
L'espace topologique $\mathcal{L}' = \Pi_{|\mathcal{L}}^{-1}(E')$ est obtenu à partir d'une collection dénombrable de copies de Ω en identifiant les parties du bord A, A', B et B' selon la monodromie du revêtement $\Pi_{|\mathcal{L}} : \mathcal{L}' \longrightarrow E'$. Notons $\Omega_m \subseteq \mathcal{L}$ le relevé de Ω à la feuille générique à partir d'un point dans la fibre $\Pi^{-1}(*)$ le long d'un mot $m \in \Pi_1(E', *)$.

LEMME 2. *Le sous-ensemble $\Omega_{[\gamma_0, \gamma_1] \gamma_0^{-1} \gamma_1 \gamma_0}$ est homéomorphe à un tore troué $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \setminus \{*\}$.*

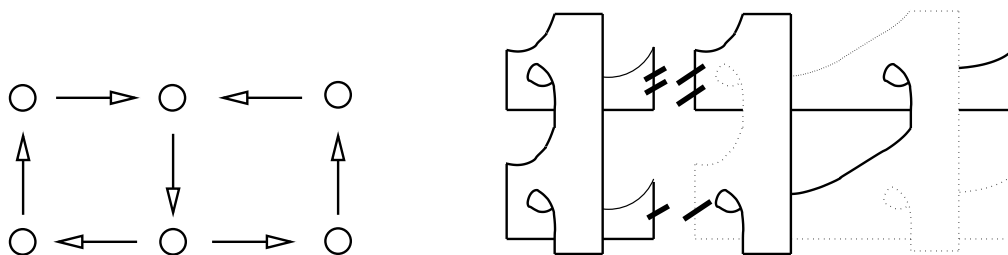
DÉMONSTRATION. Pour ce qui nous intéresse, il est utile de penser à l'action de la monodromie du revêtement $\Pi_{|\mathcal{L}'} : \mathcal{L}' \longrightarrow E'$ comme étant l'action par translation du groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sur le réseau des points entiers du plan. Ceci dit, considérons la figure représentant le domaine Ω



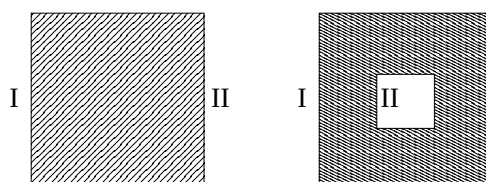
Le relevé de Ω le long d'un commutateur est homéomorphe à un anneau. Observons la figure :



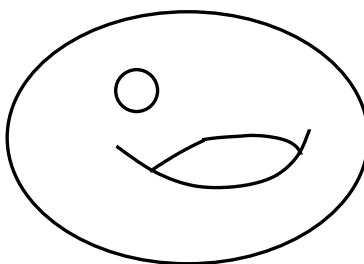
Ensuite nous voyons que quand on relève Ω le long du mot $m_0 := \gamma_0 \gamma_1 \gamma_0^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_0^{-1} \gamma_1 \gamma_0$:



la figure obtenue est homéomorphe à celle qu'on obtient en collant un disque avec un anneau comme suit :



Il est clair que cette figure est homéomorphe à un tore troué :



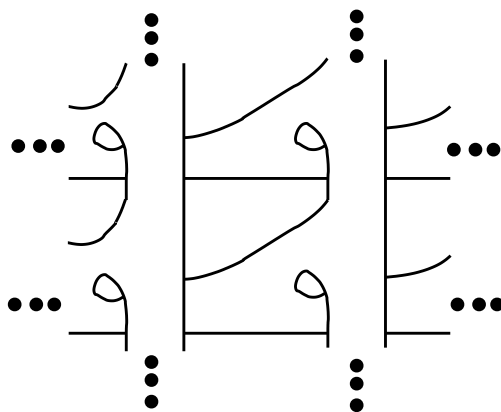


Vu que λ est non résonnant, le groupe du revêtement est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et nous pouvons "translater" le tore troué $\Omega_{[\gamma_1^{-1}, \gamma_0] \gamma_0^{-1} \gamma_1 \gamma_0}$ pour créer une infinité d'anses dans la feuille $\mathcal{L}$. Plus précisément, si $1 \ll k$

$$\{\Omega_{(\gamma_0 \gamma_1 \gamma_0^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_0^{-1} \gamma_1 \gamma_0) \gamma_0^{nk}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

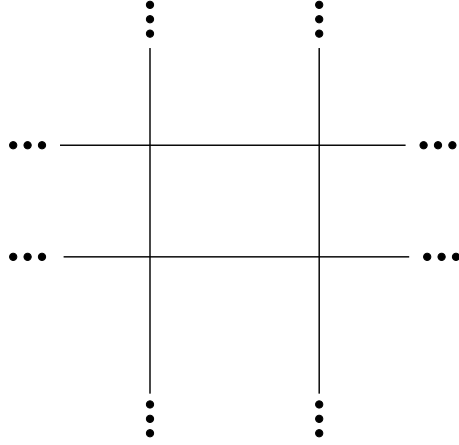
est une famille infinie d'anses (tores troués) disjointes contenue dans la feuille $\mathcal{L}$. Cela nous permet de conclure que *la feuille $\mathcal{L}$ est de genre infini* quand $\lambda \in A$ est non résonnant.

(1.2) *La feuille $\mathcal{L}$ a un seul bout.* D'après la discussion précédente, il est clair que la feuille générique de $\mathcal{F}$ est homéomorphe à la surface non compacte donnée par la figure suivante



La feuille générique de $\mathcal{F}$

Cette figure se contracte sur la «grille» qu'on voit à continuation :



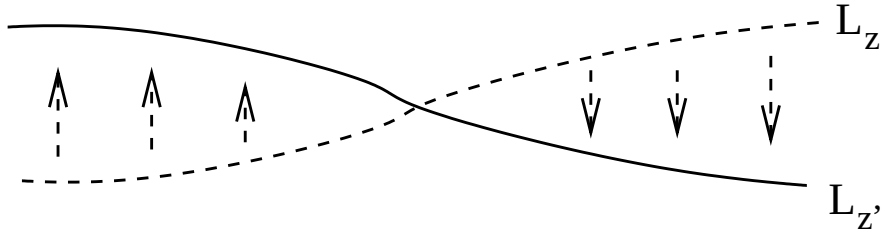
Nous voyons immédiatement que la feuille $\mathcal{L}$ n'a qu'un seul bout; en effet il existe des compacts $K \in \mathcal{L}$ aussi grands que l'on veut tels que $\mathcal{L} \setminus K$ est connexe.

□

On finit cette section en remarquant que pour des paramètres λ, λ' , bien que différents les feuilletages correspondants ne soient pas conjugués analytiquement (même topologiquement) on a le

THÉORÈME 4. *Soient λ et λ' dans A tels que les noyaux des représentations d'holonomie des feuilletages $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ et $\mathcal{F}_{a,\lambda'}$ coïncident. Alors les feuilles génériques $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ et $\mathcal{L}' \in \mathcal{F}_{a,\lambda'}$ sont biholomorphes.*

DÉMONSTRATION. On définit le biholomorphisme géométriquement. La projection Π (32) induit un difféomorphisme local de $\mathcal{L}_{a,\lambda;z}$ sur $\mathcal{L}_{a,\lambda';z}$ au voisinage du point z :



Le biholomorphisme défini localement par Π .

Ce difféomorphisme s'étend de façon uniforme à toute la feuille car les deux représentations de monodromie (29) ont le même noyau.

□

COROLLAIRE 2. *Soient λ et λ' non résonnants. Alors les feuilles génériques $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ et $\mathcal{L}' \in \mathcal{F}_{a,\lambda'}$ sont biholomorphes.*

2.2. Feuilletages associés à $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.

Il y a plusieurs feuilletages réels naturels associés à $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Le but de cette section est de décrire et mener une étude «géométrique» de ces feuilletages associés. Plus loin, on verra que pour certains paramètres réels a et λ , les feuilletages réels décrits ci-dessous «représentent» la dynamique du billard sur un polygone.

Notons $X = X_{a,\lambda}$ le champ de vecteurs holomorphe homogène de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$(37) \quad i_X dz_1 \wedge dz_2 = \omega,$$

où $\omega = \omega_{a,\lambda}$ est la 1-forme holomorphe qui définit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Les trajectoires de X sont les feuilles du feuilletage associé à ω . Puisque X est holomorphe on peut écrire

$$X = X_1 + iX_2,$$

où X_1 est la partie réelle de X et X_2 sa partie imaginaire. Les champs X_1 et X_2 sont des champs homogènes analytiques réels sur l'espace $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ et les conditions de Cauchy-Riemann font que X_1 et X_2 commutent. Désignons par $\varphi_T(m)$ le flot local complexe associé au champ X ; il satisfait l'équation différentielle

$$(38) \quad \frac{\partial \varphi_T(m)}{\partial T} = X(\varphi_T(m)).$$

Pour $\theta \in \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, les applications $t \mapsto \varphi_{te^{i\theta}}(m)$ définissent un flot local réel sur $\mathbb{C}^2$. En fait, il s'agit du flot du champ réel X_θ défini par :

$$(39) \quad X_\theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta} X).$$

Le champ X_θ produit un feuilletage réel de dimension 1 sur $\mathbb{C}^2$ ainsi que sur $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$. Nous notons ces feuilletages $\mathcal{F}_\theta = \mathcal{F}_{a,\lambda,\theta}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_\theta$ respectivement. Nous notons que pour toute feuille $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ (respectivement $\mathcal{L} \in \widetilde{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$) et toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la restriction $\mathcal{F}_{\theta|_{\mathcal{L}}}$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{F}}_{\theta|_{\mathcal{L}}}$) est un feuilletage de $\mathcal{L}$.

2.2.1. La projection du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ sur $\mathbb{RP}(3)$.

Dans les prochains paragraphes nous décrivons le feuilletage réel singulier de codimension 1 dans $\mathbb{RP}(3)$ qui résulte de projeter le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ de $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$.

Notons par $R_{\mathbb{R}}$ le champ radial réel (partie réelle du champ radial complexe

$R_{\mathbb{C}}$) et posons $z_j = x_j + iy_j, j=1,2$. Nous définissons $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{a,\lambda}$ comme le feuilletage de l'espace projectif $\mathbb{RP}(3)$ induit par la 1-forme intégrable réelle homogène de degré trois

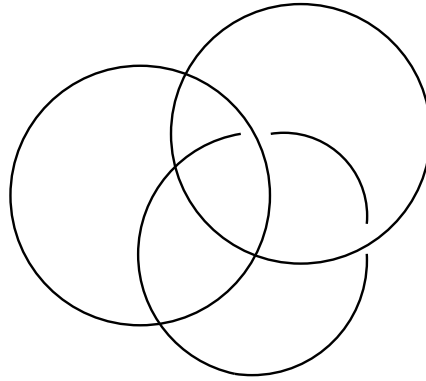
$$(40) \quad \omega_{\mathbb{R}} = i_{R_{\mathbb{R}}} i_{X_1} i_{X_2} dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2.$$

Les feuilles de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ sont les images par la projection canonique

$$(41) \quad \Pi_{\mathbb{RP}(3)} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}(3)$$

des cônes réels sur les feuilles de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. L'image inverse d'une feuille de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ via la projection $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}$ est une variété réelle de dimension 3 immergée dont le fibré tangent en chaque point est engendré par le triplet de champs de vecteurs $(X_1, X_2, R_{\mathbb{R}})$.

Décrivons le lieu singulier du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$. Etant donné que les champs de vecteurs X_1, X_2 sont linéairement indépendants en dehors de l'origine de $\mathbb{C}^2$, l'image inverse du lieu singulier de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ via $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}$ est donnée par les points de l'espace affine où $X_{\mathbb{R}}$ est contenu dans le plan réel engendré par les champs X_1 et X_2 . Cet ensemble est précisément le cône tangent $\{P_{\nu+1} \equiv 0\}$. Vu que le cône tangent est formé par $\nu + 1$ plans réels, correspondant au droites complexes d_j (cf. §1, 2), on conclut que $Sing \mathcal{G}$ est la réunion de $\nu + 1$ droites projectives ($\mathbb{RP}(1)$) que nous notons $\mathcal{C}_j$. Nous remarquons que l'intersection du cône tangent du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ avec la sphère $\mathbb{S}^3$ est un entrelac formé par $\nu + 1$ cercles immergés définissant par paires un entrelac de HOPF, cet entrelac se projetant sur le lieu singulier de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$.



Entrelac $Sing \mathcal{G}_{a,\lambda}$ vu dans $\mathbb{S}^3$ lorsque $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est quadratique.

DÉFINITION 12. Un point $\lambda \in \mathbb{C}^{\nu+1}$ est dit *fortement résonnant* si le groupe d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ (cf. §1, 2) contient une homothétie de la forme $z \rightsquigarrow -\rho z$, pour un certain $\rho > 0$.

Notons que le point $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1}) \in A$ est fortement résonnant si, et seulement si, il existe une solution entière non triviale à l'équation

$$(42) \quad \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{\nu+1} n_j \lambda_j\right) = \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$$

Tout point *réel* $\lambda \in A$ fortement résonnant est résonnant. Par ailleurs, la réciproque est fautive : si le degré du feuilletage est $\nu = 2$ alors $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{7}{15})$ est un point résonnant qui n'est pas fortement résonnant. Pour qu'un point rationnel $(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_{\nu+1}}{q_{\nu+1}}) \in A$ soit fortement résonnant il est nécessaire que $\operatorname{ppcm}(q_1, \dots, q_{\nu+1})$ soit pair.

La proposition suivante montre que les paramètres non fortement résonnants caractérisent les feuilletages $\mathcal{F}_{a,\lambda}$, $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ ayant des feuilles génériques isomorphes.

PROPOSITION 2. Soit $\lambda \in A$ un point non fortement résonnant. Alors toute feuille non singulière de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ est difféomorphe à la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ une feuille générique. Si $\lambda \in A$ n'est pas fortement résonnant, alors toute droite réelle passant par l'origine de $\mathbb{C}^2$ et en dehors du cône tangent intersecte la feuille générique en exactement un point.

Nous en déduisons que la restriction de la projection canonique $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}$ à toute feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ est un difféomorphisme. □

Désormais, nous parlerons aussi de la feuille «générique» du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$.

PROPOSITION 3. Supposons qu'il existe $j \in \{1, \dots, \nu+1\}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda_j)$ est irrationnel. Alors toute feuille non singulière de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1})$ est dense dans l'espace projectif $\mathbb{RP}(3)$.

DÉMONSTRATION. Soit $d \in \mathbb{C}^2$ une droite complexe en dehors de $d_1 \cup \dots \cup d_{\nu+1}$. Soit $s \in \mathbb{RP}(1)$ une droite réelle passant par l'origine de $\mathbb{C}^2$ et contenue dans d . Le difféomorphisme d'holonomie $z \rightsquigarrow e^{2\pi i \lambda_j} z$ agit sur les droites réelles de d comme $s \rightsquigarrow e^{2\pi i \operatorname{Re}(\lambda_j)} s$. Alors dès que $\operatorname{Re}(\lambda_j)$ est irrationnel, l'orbite de s sous l'action de l'holonomie de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est dense dans $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}(d)$. Ceci entraîne la densité des feuilles génériques de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ dans $\mathbb{RP}(3)$. □

Remarques.

- (1) On peut aussi établir le résultat ci-dessus en remarquant, comme nous le ferons plus loin, qu'en dehors des cercles singuliers $\mathcal{C}_j$, le feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ est transverse à la fibration en cercles de $\mathbb{RP}(3)$ induite par la fibration de HOPF. En particulier le groupe d'holonomie de ce feuilletage est engendré par les rotations de $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{RP}(1)$ d'angle $e^{2\pi i \operatorname{Re}(\lambda_j)}$, $j = 1, \dots, \nu + 1$, ce qui est une autre façon de prouver la proposition précédente.
- (2) Lorsque $\lambda \in A$ est un point réel fortement résonnant, la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est un revêtement d'ordre 2 de la feuille générique de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$.

2.2.2. *Étude du feuilletage $\mathcal{G}$ le long d'une feuille singulière $\mathcal{C}_j$ pour des paramètres λ_j réels.*

Nous supposons le long de cette section que $\lambda \in A_{\mathbb{R}}$. On rappelle le phénomène de KUPKA-REEB [28].

THÉOREME 5 (I. KUPKA, 1964). *Soit Ω une 1-forme différentielle intégrable définie au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) telle que $\Omega(0) = 0$ et $d\Omega(0) \neq 0$. Alors il existe un difféomorphisme $\varphi \in \operatorname{Diff}(\mathbb{R}^n, 0)$ (respectivement $\operatorname{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$) tel que*

$$\varphi^* \Omega = A_1(x_1, x_2) dx_1 + A_2(x_1, x_2) dx_2;$$

autrement dit, la forme Ω dépend seulement de deux coordonnées.

Dans ce qui suit, nous précisons le phénomène de KUPKA-REEB au voisinage de chaque droite singulière $\mathcal{C}_j$.

Dans les coordonnées homogènes de $\mathbb{RP}(3)$ et en dehors du cône tangent $\{P_{\nu+1} = 0\}$, l'application analytique multivaluée à valeurs dans le cercle

$$(43) \quad J = F_{a,\lambda} / \sqrt{F_{a,\lambda}}$$

est une intégrale première du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$. En particulier ce feuilletage est défini par la 1-forme différentielle $\omega_J := \frac{dJ}{J}$. Un calcul simple montre que la forme

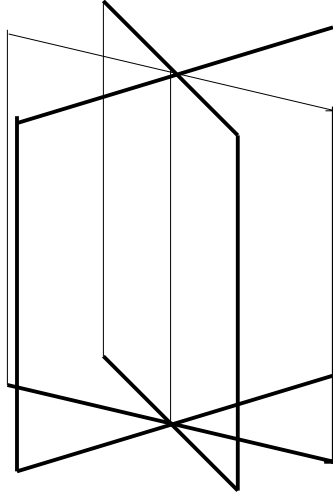
ω_J s'écrit

$$\begin{aligned}
 \omega_J &= \lambda_1 \frac{(x_1 dy_1 - y_1 dx_1)}{|z_1|^2} \\
 &+ \lambda_2 \frac{(x_2 dy_2 - y_2 dx_2)}{|z_2|^2} \\
 &\vdots \\
 &+ \lambda_{\nu+1} \frac{(\overline{z_2 - a_{\nu+1} z_1}) d(z_2 - a_{\nu+1} z_1) - (z_2 - a_{\nu+1} z_1) d(\overline{z_2 - a_{\nu+1} z_1})}{|z_2 - a_{\nu+1} z_1|^2}.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

On note que ω_J est fermée à pôles le long des cercles $\mathcal{C}_j$. Pour étudier le feuilletage, par exemple le long de $\mathcal{C}_1$, nous travaillons dans la carte $y_2 = 1$ où $\mathcal{C}_1$ a pour équation $x_1 = y_1 = 0$. D'un point de vue local et à multiplication par une unité près, en un voisinage d'un point $[0 : 0 : \underline{x}_2 : 1]$ de la droite singulière $\mathcal{C}_1$, la forme ω_J s'écrit

$$(45) \quad x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + |z_1|^2 \eta,$$

où η est une 1-forme analytique réelle. Une application directe du théorème de linéarisation de Poincaré entraîne qu'à conjugaison près, la forme $\omega_J|_{\underline{x}_2, y_2=1}$ possède une intégrale première locale du type $\frac{y_1}{x_1}$. On constate le phénomène de KUPKA : le feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ est donné en coordonnées locales au voisinage de chaque point d'une feuille singulière $\mathcal{C}_j$ par un *livre ouvert*.



Un livre ouvert.

2.2.3. La désingularisation du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$.

Pour comprendre la géométrie globale de ce livre le long de $\mathcal{C}_j$ il nous sera utile d'éclater $\mathbb{RP}(3)$ le long de chaque feuille singulière. De même que dans la section précédente, nous supposons $\lambda \in A_{\mathbb{R}}$.

Remarquons que $\mathcal{C}_j$ est l'image d'une immersion $\mathbb{RP}(1) \hookrightarrow \mathbb{RP}(3)$ provenant d'une immersion linéaire $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Nous en déduisons la *trivialité* du fibré normal de $\mathcal{C}_j$ et cela entraîne que le diviseur exceptionnel de l'éclaté de l'espace projectif $\text{ÉCL}_{\mathcal{C}_j} : \widetilde{\mathbb{RP}(3)}_i \longrightarrow \mathbb{RP}(3)$ le long de $\mathcal{C}_j$ est homéomorphe à un tore $\mathbb{RP}(1) \times \mathbb{RP}(1)$ que nous notons $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$. Soit

$$(46) \quad \text{ÉCL}_{\mathcal{C}} : \widetilde{\mathbb{RP}(3)} \longrightarrow \mathbb{RP}(3)$$

la variété algébrique obtenue en éclatant l'espace projectif le long de chaque droite singulière $\mathcal{C}_j$. Le feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ induit un feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}_{a,\lambda}$ sur $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$ donné par la 1-forme fermée sans singularités $\text{ÉCL}_{\mathcal{C}}^* \omega_J$.

Remarque. À isomorphisme analytique près, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}_{a,\lambda}$ possède une seule feuille et le type topologique de cette feuille ne correspond pas tout à fait à celui de la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ car, en désingularisant, on ajoute à la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ sa «trace» sur le diviseur exceptionnel. En effet, ce procédé de désingularisation modifie la topologie de la base du fibré $\mathbb{RP}(1) \longrightarrow \mathbb{RP}(3) \longrightarrow \mathbb{S}^2$. Plus précisément nous obtenons

$$(47) \quad \mathbb{RP}(1) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{RP}(3)} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{S}^2}$$

où $\widetilde{\mathbb{S}^2}$ est la surface obtenue en éclatant la sphère $\mathbb{S}^2$ en $\nu + 1$ points. La surface $\widetilde{\mathbb{S}^2}$ est compacte, non orientable et de caractéristique d'Euler-Poincaré $1 - \nu$. Par ailleurs, chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{G}}$ est un revêtement de la surface $\widetilde{\mathbb{S}^2}$ dont le groupe est isomorphe au groupe de monodromie du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$.

Par exemple, dans le cas $\nu = 2$, la surface $\widetilde{\mathbb{S}^2}$ est la somme connexe de trois plans projectifs ; c'est une bouteille de Klein à laquelle on a ajouté une anse. Son groupe fondamental est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ où $*$ et $\times$ désignent respectivement les produits libre et cartésien respectivement.

PROPOSITION 4. *La restriction du feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}$ au tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ est un feuilletage en droites.*

DÉMONSTRATION. En coordonnées homogènes l'application multivaluée

$$(48) \quad \begin{aligned} \underline{J}(x_1, y_1, x_2, y_2) &:= \lambda_1 \arctan \frac{y_1}{x_1} + \lambda_2 \arctan \frac{y_2}{x_2} + \lambda_3 \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &+ \sum_{j=4}^{\nu+1} \lambda_j \arctan \frac{\operatorname{Re}(z_2 - a_j z_1)}{\operatorname{Im}(z_2 - a_j z_1)} \end{aligned}$$

est une intégrale première du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$. Effectivement, $d\underline{J} = \omega_J$ définit $\mathcal{G}_{a,\lambda}$. Sans perte de généralité, nous nous plaçons au voisinage du tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_1)$. Le relevé de l'intégrale première à $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$ s'écrit dans les cartes $y_1 = tx_1, x_2 = 1$

$$(49) \quad \begin{aligned} &\lambda_1 \arctan(t) + \lambda_2 \arctan\left(\frac{1}{x_2}\right) + \lambda_3 \arctan\left(\frac{1 - tx_1}{x_2 - x_1}\right) \\ &+ \sum_{j=4}^{\nu+1} \lambda_j \arctan\left(\frac{1 - x_1(\operatorname{Im}(a_j) - \operatorname{Re}(a_j)t)}{x_2 - x_1(\operatorname{Re}(a_j) + \operatorname{Im}(a_j)t)}\right). \end{aligned}$$

La trace d'une feuille du feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}_{a,\lambda}}$ sur le diviseur exceptionnel $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_2)$ est donnée par :

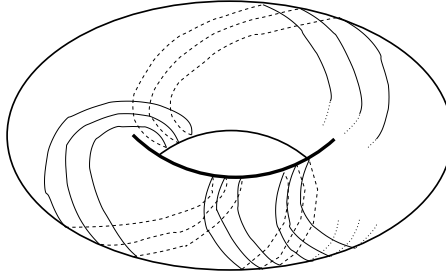
$$(50) \quad \lambda_1 \arctan(t) + \left(\sum_{j \geq 2} \lambda_j\right) \arctan\left(\frac{1}{x_2}\right) = k, \quad k \in \mathbb{R}^*.$$

Les variables :

$$(51) \quad \theta_1 = \arctan(t), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{1}{x_2}\right),$$

paramètrent le tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_1)$. □

Remarque. Vu que $\sum \lambda_j = 1$, la pente des droites définissant le feuilletage sur $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ est $\frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i = \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j}$; cette pente ne dépend donc que de l'exposant λ_j .



Le feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ restreint au tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ est un feuilletage en droites.

2.2.4. Feuilletages réels $\mathcal{F}_{a,\lambda,\theta}$ dans $\mathbb{RP}(3)$.

À l'instar de ce qu'on a fait dans la section 2.2.1 de ce chapitre, nous décrivons dans les prochains paragraphes le feuilletage réel singulier qui résulte de projeter le feuilletage $\mathcal{F}_\theta$ à $\mathbb{RP}(3)$.

L'homogénéité du feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ passe au champ réel X_θ (39) qui définit le feuilletage réel $\mathcal{F}_{a,\lambda,\theta}$. Cela entraîne que le champ de directions induit par X_θ sur l'espace affine $\mathbb{R}^4$ se projette *via* $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}$ en un champ de directions sur $\mathbb{RP}(3)$ dont les courbes intégrales forment un feuilletage réel que nous notons $\mathcal{G}_{a,\lambda,\theta}$, ou tout simplement $\mathcal{G}_\theta$. Nous remarquons que :

- i: Pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ les cercles singuliers $\mathcal{C}_j$, $j = 1, \dots, \nu + 1$ sont invariants par le feuilletage $\mathcal{G}_\theta$;
- ii: Toute feuille (de dimension 2 réelle) de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ est feuilletée par des feuilles (de dimension 1 réelle) de $\mathcal{G}_\theta$.

Dans le cas des paramètres $\lambda \in A$ non fortement résonnants, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ générique, nous avons que $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\theta|\mathcal{L}})$ est conjuguée à son image *via* la projection canonique $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}$. Nous nous occuperons plus loin du cas des paramètres fortement résonnants.

Dans les paragraphes qui suivent, nous décrivons les feuilletages $\mathcal{G}_\theta$ lorsque le paramètre λ est réel et $\nu = 2$.

Le feuilletage $\mathcal{F}_\theta$ de $\mathbb{R}^4$ est réalisé par les courbes intégrales du champ de vecteurs $X_\theta = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ où

$$\begin{aligned}
 2X_1 = & [\lambda_2(x_1^2 - y_1^2) - (\lambda_2 + \lambda_3)(x_1x_2 - y_1y_2)]\partial/\partial x_1 + \\
 & [2\lambda_2x_1y_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)(x_1y_2 + x_2y_1)]\partial/\partial y_1 + \\
 (52) \quad & [\lambda_1(x_2^2 - y_2^2) - (\lambda_1 + \lambda_3)(x_1x_2 - y_1y_2)]\partial/\partial x_2 + \\
 & [2\lambda_1x_2y_2 - (\lambda_1 + \lambda_3)(x_1y_2 + x_2y_1)]\partial/\partial y_2
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 2X_2 = & [2\lambda_2 x_1 y_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)(x_1 y_2 + x_2 y_1)] \partial / \partial x_1 + \\
 & [(\lambda_2 + \lambda_3)(x_1 x_2 - y_1 y_2) - \lambda_2(x_1^2 - y_1^2)] \partial / \partial y_1 + \\
 (53) \quad & [2\lambda_1 x_2 y_2 - (\lambda_1 + \lambda_3)(x_1 y_2 + x_2 y_1)] \partial / \partial x_2 + \\
 & [(\lambda_1 + \lambda_3)(x_1 x_2 - y_1 y_2) - \lambda_1(x_2^2 - y_2^2)] \partial / \partial y_2.
 \end{aligned}$$

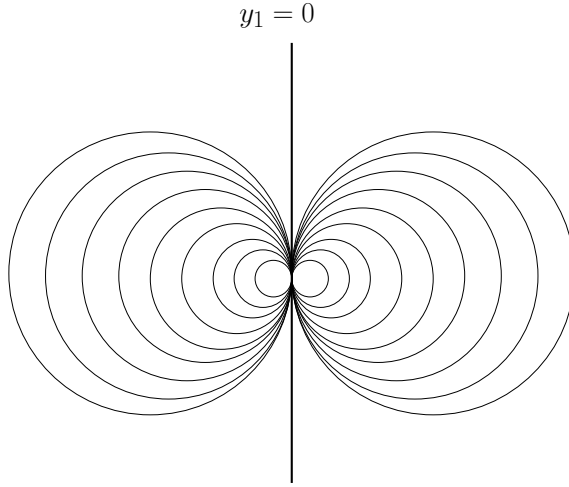
Vu que les X_θ sont obtenus à partir de $X_1 = X_{\theta=0}$ *via* une homothétie

$$(z_1, z_2) \rightsquigarrow e^{i\theta}(z_1, z_2),$$

on restreint notre attention au champ réel X_1 . Remarquons d'abord que sur chacune des trois droites (complexes) invariantes d_i formant le cône tangent

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid P_3(z_1, z_2) = z_1 z_2 (z_2 - z_1) = 0\}, \quad z_j = x_j + i y_j\}$$

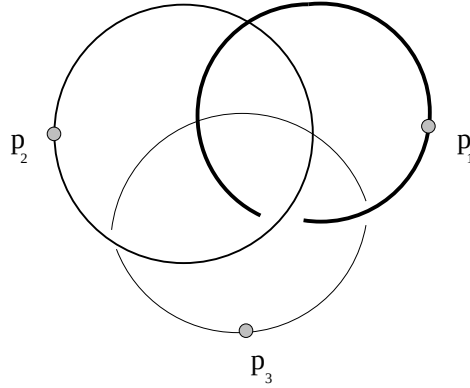
le champ X_1 est conjugué au champ défini par la partie réelle de $z^2 \partial / \partial z$.



$\mathcal{F}_{a,\lambda,\theta=0}$ sur une droite invariante d_1 .

Nous en déduisons que le lieu singulier de $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}_{\theta=0}$ est formé par trois points distincts p_i , $1 \leq i \leq 3$, correspondant à la projection des trois droites réelles invariantes passant par l'origine de $X_1|_{P_3=0}$. Plus précisément, en coordonnées homogènes $[x_1 : y_1 : x_2 : y_2]$:

$$(54) \quad p_1 = [0 : 0 : 1 : 0] \quad p_2 = [1 : 0 : 0 : 0] \quad p_3 = [1 : 0 : 1 : 0].$$



Le lieu singulier de $\mathcal{G}_\theta$ lorsque $\lambda \in A_{\mathbb{R}}$ et $\nu = 2$.

Remarque. Toute «homothétie» de $\mathbb{RP}(3)$ induite par une homothétie de $\mathbb{C}^2$ de la forme $(z_1, z_2) \rightsquigarrow k(z_1, z_2)$ laisse invariant chaque cercle singulier $\mathcal{C}_j$. Cependant, si $\text{Im}(k) \neq 0$, les points singuliers p_j et kp_j de $\mathcal{G}_0$ et $\mathcal{G}_{\theta=\arg(k)}$ ne coïncident pas.

2.2.5. *Description des feuilletages $\mathcal{G}_\theta$ au voisinage de $\mathcal{C}_j$ et autour d'un point singulier p_j .*

Nous supposons dans les paragraphes suivants que le paramètre λ appartient à $A_{\mathbb{R}}$. Nous allons étudier de façon précise le feuilletage réel $\mathcal{G}_\theta$ au voisinage des $\mathcal{C}_j$.

Pour des raisons pratiques nous nous plaçons dans le cas $\nu = 2$ et étudions $\mathcal{G}_0$ au voisinage de $\mathcal{C}_2$. Nous allons construire deux intégrales premières les plus simples possibles de $\mathcal{G}_0$.

On remarque que $F = F_{a,\lambda}$ est intégrale holomorphe multivaluée de $X_1 = \text{Re}(X)$. Si $F = F_1 + iF_2$ alors F_1 et F_2 sont des intégrales premières analytiques réelles multivaluées de X_1 . Notons que pour $s \in \mathbb{R}^*$

$$(55) \quad \frac{F_1}{F_2}(sz_1, sz_2) = \frac{F_1}{F_2}(z_1, z_2).$$

En particulier $\frac{F_1}{F_2}$ induit une application f_1 multivaluée définie sur un voisinage de la droite singulière $\mathcal{C}_1$ privé de $\mathcal{C}_1$; f_1 est une intégrale première de $\mathcal{G}_0$. Nous allons construire une seconde intégrale première en étudiant plus précisément

$\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ au voisinage du point singulier $z_1 = 0, t = 0$. Dans ce cas, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ sur $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ est donné, dans la carte $z_2 = tz_1$, par les courbes intégrales du champ de vecteurs holomorphe

$$(56) \quad z_1(\lambda_2 z_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)tz_1 \partial/\partial z_1 + t(t-1) \partial/\partial t).$$

Au voisinage de la droite complexe $\{t = 0\}$ ce champ est conjugué à

$$(57) \quad \tilde{Y} := z_1(\lambda_2 z_1 \partial/\partial z_1 + t \partial/\partial t)$$

par l'application

$$(58) \quad H := (z_1, t) \rightsquigarrow (z_1 \varphi(t), \psi(t)),$$

où φ et ψ sont holomorphes au voisinage de l'origine et satisfont $\varphi(0) = 1, \psi(0) = 0$. En effet, lorsqu'on pose les équations correspondant à la conjugaison entre les champs (56) et (57), on arrive au système

$$(59) \quad \varphi' - \frac{\lambda_2}{t(t-1)}\varphi^2 + \frac{\lambda_2 - (\lambda_2 + \lambda_3)t}{t(t-1)}\varphi = 0 \dots (I)$$

$$\psi' t(t-1) - \varphi \psi = 0 \dots (II)$$

La solution de (I) avec condition initial $\varphi(0) = 1$ est

$$(60) \quad \varphi(t) := \frac{-(t-1)^{\lambda_3-1}}{(-1)^{\lambda_3} {}_2F_1(\lambda_2, 1-\lambda_3; \lambda_2+1; t)} + 1/Z(t)$$

où :

– ${}_2F_1(\lambda_2, 1-\lambda_3; \lambda_2+1; t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2)_n (1-\lambda_3)_n}{(\lambda_2+1)_n} \frac{t^n}{n!}$ est la fonction hypergéométrique ;

– $Z(t)$ est une solution de l'équation linéaire.

$$(61) \quad Z' + \left(\frac{(\lambda_2 + \lambda_3)t - \lambda_2}{t(t-1)} - \frac{2\lambda_2(t-1)^{-\lambda_3}}{(-1)^{\lambda_3} {}_2F_1(\lambda_2, 1-\lambda_3; \lambda_2+1; t)} \right) Z = \frac{-\lambda_2}{t(t-1)}$$

satisfaisant $\lim_{t \rightarrow 0} Z(t) = \infty$. Etant donné que ${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$, nous constatons

$$(62) \quad \begin{aligned} \psi(t) &= C \exp\left(\int^t \frac{\varphi(\xi)}{\xi(\xi-1)} d\xi\right), \quad C \in \mathbb{C}^* \\ &\approx C \exp\left(\int^t \frac{d\xi}{\xi}\right) \\ &\approx Ct \end{aligned}$$

Posons $z_1 = x_1 + iy_1$, $t = t_1 + it_2$, alors la partie réelle du champ (57) $\tilde{Y}$ a

$$(63) \quad \tilde{f}_2(x_1, y_1, t_1, t_2) = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}$$

comme intégrale première. Nous remarquons que (63) est homogène de degré 1 en les variables x_1, y_1 . Par suite

$$(64) \quad f_2 := (z_1, t) \rightsquigarrow \frac{\tilde{f}_2 \circ H}{F_1}(z_1, t)$$

est une intégrale première du feuilletage holomorphe $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ au voisinage de $t = 0$. L'application $F_1(z_1, t) = \operatorname{Re}(z_1 t^{\lambda_2} (t - 1)^{\lambda_3})$ est homogène de degré 1 en les variables x_1, y_1 . Alors (64) descend sur un voisinage de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathbb{RP}(3)$. Vu que (63) ne dépend pas des variables t_1 et t_2 , nous obtenons l'indépendance entre f_1 et f_2 .

Nous avons démontré, peu ou prou, le résultat suivant :

THÉOREME 6. *Les feuilletages réels $\mathcal{G}_\theta$ sont complètement intégrables au voisinage des cercles singuliers $\mathcal{C}_j$.*

Pour $\nu > 2$, la preuve de ce résultat est analogue mais techniquement pénible.

Dans les paragraphes qui suivent, nous menons une description du feuilletage $\mathcal{G}_0$ au voisinage d'un point singulier p_j . Sans perte de généralité, nous supposons $\nu = 2$ et nous nous plaçons dans un voisinage du point singulier $p_2 \in \mathcal{C}_2$.

D'après la preuve du théorème 6, il existe un voisinage de la droite complexe $t = 0$ où le champ holomorphe

$$(65) \quad z_1(\lambda_2 z_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)t z_1) \partial/\partial z_1 + t(t - 1) \partial/\partial t$$

est analytiquement conjugué à

$$(66) \quad \tilde{Y} = z_1(\lambda_2 z_1 \partial/\partial z_1 + t \partial/\partial t).$$

Le champ (66) est le tiré en arrière *via* ÉCL : $\widetilde{\mathbb{CP}(2)} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ du champ

$$(67) \quad Y = \lambda_2 z_1^2 \partial/\partial z_1 + (1 + \lambda_2) z_1 z_2 \partial/\partial z_2.$$

Écrivons

$$(68) \quad \operatorname{Re}(Y) = A_1 \partial/\partial x_1 + B_1 \partial/\partial y_1 + A_2 \partial/\partial x_2 + B_2 \partial/\partial y_2,$$

où $z_j = x_j + iy_j$. Les courbes intégrales de (68) définissent un feuilletage réel qui se projette sur $\mathbb{RP}(3)$. Notons-le $\mathcal{G}'_0$. Dans la carte $x_1 = 1$ le feuilletage $\mathcal{G}'_0$ est donné

par les courbes intégrales de

$$\begin{aligned}
 (69) \quad Re(Y) - A_1 R_{\mathbb{R}} = & \lambda_2(y_1 + y_1^3) \partial/\partial y_1 \\
 & -x_2 + y_1((1 - \lambda_2)y_2 + \lambda_2 y_1 x_2) \partial/\partial x_2 \\
 & -y_2 + y_1((\lambda_2 - 1)x_2 + \lambda_2 y_2 y_1) \partial/\partial y_2.
 \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, au voisinage du cercle $x_2 = y_2 = 0$, $\mathcal{G}'_0$ est conjugué à $\mathcal{G}_0$. En effet, l'application (58) descend sur un voisinage de $\mathcal{C}_2$ dans $\mathbb{RP}(3)$. Nous remarquons dans (69) la variété invariante $\{y_1 = 0\}$ sur laquelle le champ est radial.

Nous concluons que dans un voisinage de chaque point singulier $p_j, j = \{1, 2, 3\}$, le feuilletage $\mathcal{G}_0$ est conjugué au feuilletage défini par les courbes intégrales d'un champ de vecteurs

$$\begin{aligned}
 (70) \quad & \lambda_j y_i + \cdots \partial/\partial y_i + \\
 & -x_j + \cdots \partial/\partial x_j + \\
 & -y_j + \cdots \partial/\partial y_j,
 \end{aligned}$$

ayant une sous-variété réelle invariante de dimension 2 dans laquelle $\mathcal{G}_0$ est conjugué à un feuilletage radial. Dans le cas général $\nu > 2$, une étude locale du feuilletage $\mathcal{G}_0$ analogue est plausible. Cependant, pour ce qui nous intéresse, nous nous contenterons de décrire le cas quadratique.

Exemple : le cas de $\lambda \in A \cap (\mathbb{R}^+)^3$. Nous décrivons l'ensemble des feuilles du feuilletage réel $\mathcal{G}_\theta$ ayant comme «extrémité» un point singulier p_j . Nous nous plaçons dans le cas d'un feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ associé à un feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ quadratique et nous supposons $\theta = 0$.

DÉFINITION 13. Soit l une feuille non compacte d'un feuilletage réel d'une variété (réelle ou complexe) M et $p \in M$ un point fixé. Nous dirons que le point p est une extrémité de la feuille l si, et seulement si, il existe une paramétrisation (injective) de l

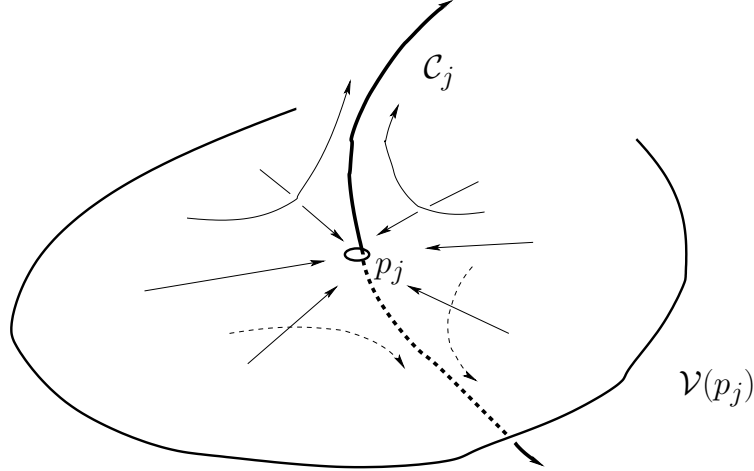
$$(71) \quad \gamma :]0, \infty[\longrightarrow M$$

pour laquelle $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = p$. Nous dirons que l'extrémité p d'une feuille l est analytique si l'adhérence locale de la feuille l est.

Soit $\mathcal{U}_j$ un voisinage suffisamment petit dans $\mathbb{RP}(3)$ du point singulier p_j . Considérons une feuille $l \in \mathcal{G}_0$ intersectant $\mathcal{U}_j$. Grâce au modèle local (70), nous pouvons affirmer que la feuille l satisfait la dichotomie suivante :

- i: Soit il existe une paramétrisation $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{U}_j$ de l telle que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = p_j$. Dans ce cas, p_j est une extrémité analytique de l ;
- ii: Soit pour toute paramétrisation $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{U}_j$ de l , il existe $0 < M < \infty$ tel que $\gamma(M) \in \mathbb{RP}(3) \setminus \mathcal{U}_j$.

Autrement dit, pour toute feuille «rentrant» dans un voisinage suffisamment petit du point singulier p_j soit (i) elle aboutit dans la singularité p_j de façon analytique, soit (ii) elle «s'échappe» du voisinage en un temps fini. Nous observons dans (70) que, dans un voisinage suffisamment petit de chaque singularité p_j , l'ensemble des feuilles de $\mathcal{G}_0 \setminus \text{Sing}(\mathcal{G}_\lambda)$ ayant comme extrémité p_j est une sous-variété invariante de dimension réelle 2. Nous notons $\mathcal{V}(p_j)$ les saturés dans $\mathbb{RP}(3)$ de ces variétés invariantes par rapport au feuilletage réel $\mathcal{G}_0$.



$\mathcal{F}_{a,\lambda,\theta=0}$ sur une droite invariante d_1 .

Définissons

$$(72) \quad \mathcal{V} := \bigcup_{j=1}^{\nu+1} \mathcal{V}(p_j) \quad \mathcal{W}_{i,j} := \mathcal{V}(p_i) \cap \mathcal{V}(p_j)$$

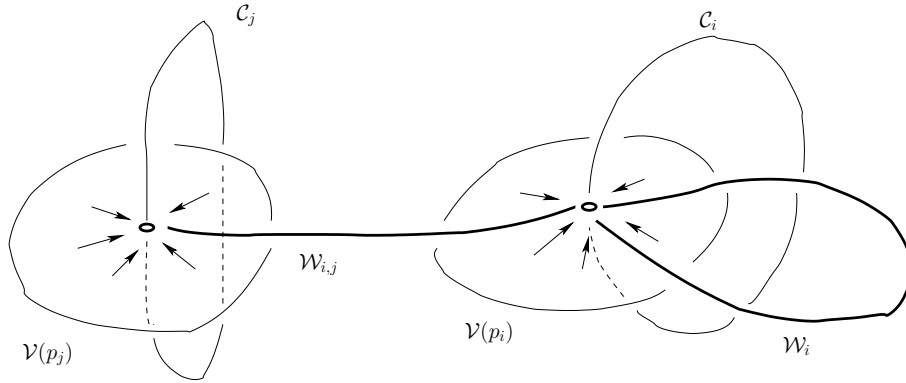
et

$$(73) \quad \mathcal{W}_j$$

comme la réunion des feuilles l dans $\mathcal{G}_0 \setminus \text{Sing}(\mathcal{G}_\lambda)$ telles que pour toute paramétrisation injective de l

$$(74) \quad \gamma :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{RP}(3),$$

les limites $\lim_{s \rightarrow -\infty} \gamma(s)$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s)$ existent et coïncident sur la singularité p_j .



Les ensembles invariants $\mathcal{V}(p_j)$, $\mathcal{W}_{i,j}$ et $\mathcal{W}_i$.

Nous décrirons plus loin les ensembles définis ci-dessus en termes de billard sur un triangle.

DÉFINITION 14. Soient p_i, p_j deux points singuliers d'un feuilletage réel d'une variété réelle ou complexe. Nous appelons :

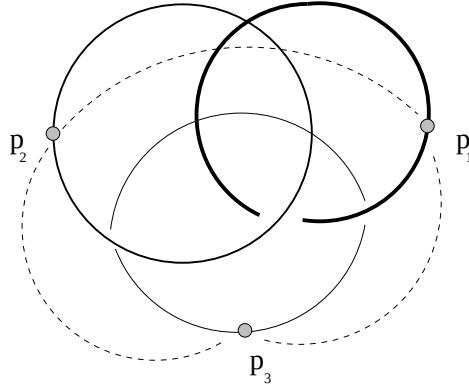
- Feuille homocline toute feuille du feuilletage réel ayant comme extrémités $p_i = p_j$.
- Feuille hétérocline toute feuille du feuilletage réel ayant comme extrémités $p_i \neq p_j$.

Dans $\mathcal{G}_0$, en dehors des feuilles $\mathcal{C}_j \setminus \{p_j\}$, toute feuille ayant une extrémité est contenue dans $\mathcal{V}$. D'un autre côté, $\mathcal{W}_{i,j}$ est l'ensemble des feuilles hétéroclines de $\mathcal{G}_0$ joignant les points singuliers p_i, p_j . Trivialement $\mathcal{C}_j \setminus \{p_j\} \subset \mathcal{W}_j$.

Un calcul direct montre que la droite projective

$$(75) \quad \Pi_{\mathbb{RP}(3)}(\{y_1 = y_2 = 0\})$$

est invariante par le feuilletage $\mathcal{G}_0$. Il est clair que (75) est une droite projective passant par les singularités p_1, p_2, p_3 du feuilletage $\mathcal{G}_0$ et que, lorsqu'on la prive de ces trois points, l'ensemble résultant est formé par trois feuilles hétéroclines, chacune contenue dans $\mathcal{W}_{i,j}$, pour tout $i \neq j$.



Le cercle invariant $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}(\{y_1 = y_2 = 0\})$ joignant les singularités p_1, p_2, p_3 .

2.2.6. Le feuilletage $\mathcal{G}_\theta$ dans l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$.

Le feuilletage réel $\mathcal{G}_\theta$ induit un feuilletage réel singulier de la surface algébrique $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$ que nous notons $\widetilde{\mathcal{G}}_\theta$ (cf. §1, 2.2.3). Dans cette section nous menons une description de ces feuilletages que nous allons reprendre plus loin en termes de billards sur un polygone.

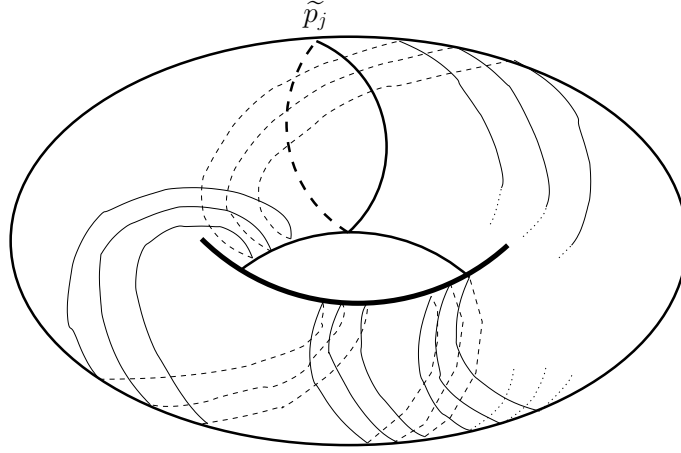
Bien évidemment $\widetilde{\mathcal{G}}_\theta$ est isomorphe à $\mathcal{G}_\theta$ en dehors de l'ensemble $\bigcup_{j=1}^{\nu+1} \mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$; pour chaque $j \in \{1, \dots, \nu+1\}$ nous définissons

$$(76) \quad \tilde{p}_j := \text{ÉCL}_C^{-1}(p_j),$$

où p_j est une des $\nu+1$ singularités du feuilletage $\mathcal{G}_\theta$. Remarquons que chaque $\tilde{p}_j$ est un cercle contenu dans $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ et le lieu singulier du feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}_\theta$ est formé par la réunion des cercles $\tilde{p}_j$, $j = 0, \dots, \nu+1$. Sur chaque tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$, les feuilles non singulières de $\widetilde{\mathcal{G}}_\theta$ sont données par les composantes connexes de

$$\mathcal{L} \cap (\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j) \setminus \tilde{p}_j), \quad \mathcal{L} \in \widetilde{\mathcal{G}}_{a,\lambda},$$

c'est-à-dire données par la trace d'une feuille du feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}_{a,\lambda}$ sur le diviseur $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ privée des points singuliers dans le cercle $\widetilde{p}_j$. Ainsi, bien qu'il soit singulier le long de $\widetilde{p}_j$, en restriction au tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$, le feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}_\theta$ est sans singularités (singularités apparentes) et ses feuilles sont des droites sur ce tore.



Le cercle des singularités apparentes $\widetilde{p}_j$ dans le tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$.

Décrivons le comportement du feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}_0$ dans un voisinage suffisamment petit du tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ lorsque le paramètre λ_j est un réel positif et le degré du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est $\nu = 2$.

Soit $\mathcal{U}_j$ un voisinage suffisamment petit de $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ et notons $\mathcal{U}'_j := \mathcal{U}_j \setminus \mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$. Nous affirmons que toute feuille l de $\widetilde{\mathcal{G}}_0$ passant par un point de $\mathcal{U}'_j$ satisfait la dichotomie :

- i: Soit la feuille l a comme extrémité un point dans le cercle singulier $\widetilde{p}_j$;
- ii: Soit la feuille l «s'échappe» du voisinage $\mathcal{U}'_j$ en un temps fini.

On remarque l'analogie avec le comportement des feuilles de $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ dans un voisinage de la singularité p_j .

Effectivement, le cas (i) correspond aux feuilles de $\widetilde{\mathcal{G}}_0$ intersectant

$$(77) \quad \widetilde{\mathcal{V}(p_j)} := \text{ÉCL}_C^{-1}(\mathcal{V}(p_j) \setminus p_j),$$

l'image de la variété stable $\mathcal{V}(p_j) \setminus p_j$ dans $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$.

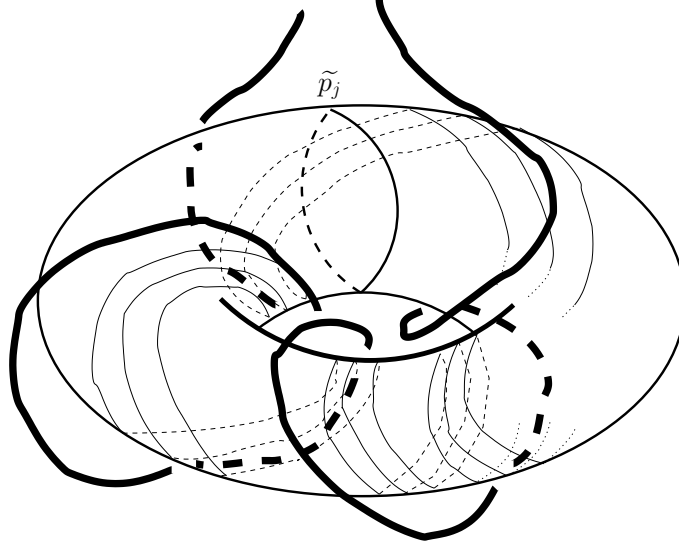
Pour (ii), considérons $\xi \in l \cap (\mathcal{U}'_j \setminus \widetilde{\mathcal{V}(p_j)})$ et $\gamma : [0, \infty[\rightarrow l$ une paramétrisation telle que $\gamma(0) = \xi$. Soit $p \in \mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j) \setminus \tilde{p}_j$ un point proche de ξ . Notons $l_p \in \widetilde{\mathcal{G}_{a,\lambda}}$ la feuille passant par p . Vu que sur le tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ le feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ est un feuilletage en droites nous avons

$$(78) \quad \gamma_p : [0, N] \longrightarrow \mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j), \quad 0 < N < \infty,$$

une paramétrisation telle que $\gamma_p([0, N]) \subset l_p$, $\gamma_p(0) = p$ et $\gamma_p(N)$ est, dans une carte affine, proche du cercle singulier $\tilde{p}_j$. D'après l'analyticité (réelle) des équations définissant le feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}_{a,\lambda}}$, et quitte à reparamétriser les courbes γ et γ_p , nous pouvons supposer que les points $\gamma(s)$ et $\gamma_p(s)$ sont, pour la distance dans une carte, assez proches.

Nous en déduisons qu'il existe un réel positif $0 < M < \infty$ tel que $\gamma_p(M)$ est dans un voisinage de $\tilde{p}_j$.  tant donné que $\widetilde{\mathcal{G}_0}$ est isomorphe à $\mathcal{G}_0$ dans un voisinage de $\tilde{p}_j$ privé de $\tilde{p}_j$, nous pouvons conclure, en utilisant le modèle local fourni par (70), qu'il existe un réel positif $0 < M_0 < \infty$ tel que le point $\gamma(M_0)$ n'appartient pas au voisinage $\mathcal{U}_j$.

Remarque. Le fait que la restriction au tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ soit un feuilletage en droites entraîne que toute feuille de $\widetilde{\mathcal{G}_0}$ dans un voisinage d'un tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ privé de $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ et en dehors de $\widetilde{\mathcal{V}(p_j)}$, «tourne» autour du tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$ avant de s'échapper du voisinage en question. Le nombre de «tours» ne dépend que de l'exposant $\lambda_j > 0$. Nous précisons notre langage avec la figure :



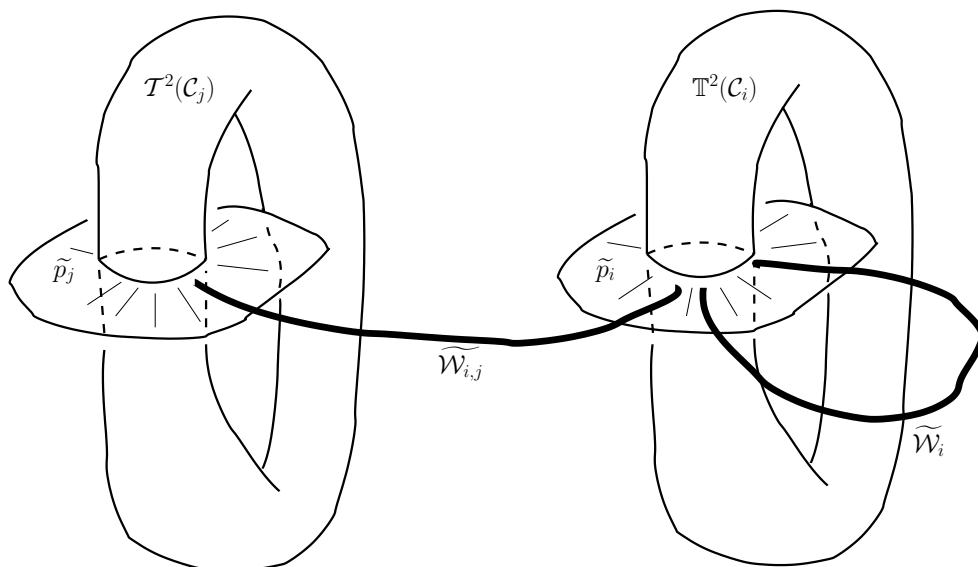
La feuille de $\tilde{\mathcal{G}}_0$ voisine au tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$
«tourne» comme une feuille d'un feuilletage en droites.

Nous allons reprendre plus loin le comportement des feuilles de $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ dans un voisinage des tores $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$, tout du moins dans le cas $\nu = 2$, en termes de billard sur un triangle.

Pour terminer cette section décrivons, les images des ensembles $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}_{i,j}$ et $\mathcal{W}_j$ dans $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$, lorsque le paramètre λ est contenu dans $(\mathbb{R}^+)^3$, $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est quadratique et θ est null (cf. §1, 2.2.5). Ceci dit, notons

$$(79) \quad \widetilde{\mathcal{W}_{i,j}} := \text{ÉCL}_C^{-1}(\mathcal{W}_{i,j}), \quad \widetilde{\mathcal{W}_j} := \text{ÉCL}_C^{-1}(\mathcal{W}_j), \quad \widetilde{\mathcal{V}} := \text{ÉCL}_C^{-1}(\mathcal{V}).$$

Toute feuille de $\tilde{\mathcal{G}}_0$ ayant une extrémité est contenue dans $\widetilde{\mathcal{V}}$. Par ailleurs $\widetilde{\mathcal{W}_{i,j}}$ est l'ensemble des feuilles hétéroclines de $\tilde{\mathcal{G}}_0$ joignant deux points $p \neq q$ contenus dans deux cercles singuliers $\tilde{p}_i$ et $\tilde{p}_j$ disjoints. Nous remarquons que lorsqu'on éclate le point singulier p_j , on peut bien détruire le caractère homocline d'une feuille de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{W}_j$. Ainsi, l'image *via* ÉCL_C^{-1} dans $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$ d'un feuille dans $\mathcal{W}_j$ peut avoir deux extrémités distinctes dans le cercle singulier $\tilde{p}_j$.



La feuille de $\tilde{\mathcal{G}}_0$ voisine du tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$
«tourne» à l'instar du feuilletage en droites.

CHAPITRE 2

Un dictionnaire

1. Feuilletages homogènes et billards polygonaux : un dictionnaire

Ayant pour but l'étude des feuilletages réels introduits dans les sections précédentes, nous construisons dans ce chapitre un dictionnaire *surfaces de translation-feuilletages homogènes* à l'aide des transformations de SCHWARZ-CHRISTOFFEL. Dans les sections suivantes, on se sert de ce dictionnaire pour établir de nouveaux résultats. Le long de ce chapitre nous supposons que le paramètre λ est réel.

1.1. Les transformations de SCHWARZ-CHRISTOFFEL.

Ce type de transformation fut introduit indépendamment par ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL et HERMANN AMANDUS SCHWARZ en 1867 et 1869 respectivement, dans le contexte de la représentation conforme du demi-plan sur l'intérieur d'un polygone. On les trouve, entre autres, dans la théorie du potentiel, les surfaces minimales, la dynamique des fluides, l'étude des mouvements browniens réfléchis. Pour une étude plus approfondie sur ce type de transformations nous renvoyons à [11].

DÉFINITION 15. *Toute transformation envoyant l'intérieur d'un demi-plan dans $\mathbb{C}$ de façon bijective et conforme sur l'intérieur d'un polygone est appelée transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL.*

Les transformations de SCHWARZ-CHRISTOFFEL admettent des représentations intégrales.

THÉORÈME 7. [11] *Soit $P \subset \mathbb{C}^2$ un polygone à $\nu+1$ côtés ayant $\mu_j\pi$ comme angle intérieur au sommet w_j où $j \in \{1, \dots, \nu+1\}$, $0 < \mu_j < 2$. Soit*

$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ une transformation envoyant le demi-plan supérieur $H^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ dans l'intérieur de P et le point $z = \infty$ sur le sommet $w_{\nu+1}$. Alors

$$(80) \quad f(z) = c + C \int^z \prod_{j=1}^{\nu} (\xi - a_j)^{\mu_j - 1} d\xi,$$

où $c, C \in \mathbb{C}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $f(a_j) = w_j$ et $\sum_{j=1}^{\nu+1} \mu_j = \nu - 1$.

En général l'intégrand dans (80) est multivalué, donc $f(z)$ est définie dès qu'on se fixe une branche. Par convention nous appelons les paramètres μ_j et a_j dans (80) les *exposants* et les *présommets* de la TSC. Le point initial de l'intégrale n'est pas spécifié vu que son choix affecte seulement la valeur de la constante c . Quitte à faire agir un élément dans $PSL(2, \mathbb{C})$, nous pouvons supposer que l'ensemble des présommets contient toujours le triplet $\{0, 1, \infty\}$.

La longueur des «côtés de l'image» d'une transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL est déterminée par la position des présommets dans la droite réelle [11]. Le problème de déterminer, pour un polygone P donné à priori, les points a_j dans la droite réelle tels que l'image de (80) soit P est le *problème des paramètres* de SCHWARZ-CHRISTOFFEL. En général il n'existe pas de solution explicite et on doit se contenter d'approximations numériques.

1.1.1. La figure d'un feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ à paramètres réels.

Grâce aux transformations de SCHWARZ-CHRISTOFFEL, nous pouvons associer une figure géométrique à tout feuilletage holomorphe homogène à singularité isolée et cône tangent réduit dont les paramètres $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ et $a = (a_1, \dots, a_\nu)$ sont réels (cf. §1, 2). Nous rappelons que

$$(81) \quad F_{a,\lambda} = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} (z_2 - z_1)^{\lambda_3} \prod_{j=4}^{\nu+1} (z_2 - a_j z_1)^{\lambda_j}$$

est une intégrale première pour le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Nous avons auparavant choisi la normalisation $\sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_j = 1$, qui est commode, par exemple, pour éclater ou pour des calculs d'holonomie. Cette normalisation n'est pas plus canonique qu'une autre puisque, pour tout $\epsilon \in \mathbb{C}^*$, $F_{a,\lambda}^\epsilon$ est intégrale première du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Pour des raisons qui vont apparaître plus loin nous supposons dorénavant

que

$$(82) \quad \sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_j = \nu - 1.$$

Notons que cette normalisation est identique à la précédente si, et seulement si, $\nu = 2$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, \nu + 1\}$, nous définissons

$$(83) \quad \Lambda_j := \{\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1}\} \setminus \lambda_j.$$

et P_k comme adhérence de l'image du demi-plan supérieur H^+ via

$$(84) \quad f_k(z) = \int^z \prod_{\lambda_j \in \Lambda_k} (\xi - a_j)^{\lambda_j - 1} d\xi.$$

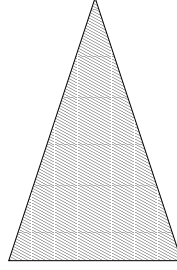
Pour chaque $k = 1, \dots, \nu + 1$, P_k est un polygone, possiblement dégénéré, à $\nu + 1$ côtés dont les angles intérieurs sont $\lambda_1 \pi, \dots, \lambda_{\nu+1} \pi$. Etant donné que les paramètres a_j , $j = 1, \dots, \nu + 1$ sont fixées, tout paire de polygones P_i, P_j sont semblables [11]. Nous pouvons ainsi parler de *la figure associée au feuilletage* $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.

DÉFINITION 16. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage de degré ν dont les paramètres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu+1}\}$ et $\{a_1, \dots, a_{\nu+1}\}$ de l'intégrale première (81) sont réels. Nous dirons qu'un tel feuilletage est *polygonal* si, et seulement si, la figure associée à $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est un polygone non-dégénéré.

Lorsque le degré du feuilletage est 2 ou 3 une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ soit polygonal est $0 < \lambda_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, \nu + 1\}$, la condition (82) étant vérifiée [11]. À partir du degré $\nu = 4$, le fait d'être polygonal dépend de la position des racines du cône tangent du feuilletage dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Clairement, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le feuilletage $\mathcal{F}$ soit polygonal revient à résoudre le problème des paramètres de SCHWARZ-CHRISTOFFEL.

Exemples. Les feuilletages $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ à paramètres (I) $\{\lambda_1, \lambda_1, 1 - 2\lambda_1\}$, $0 < \lambda_1 < \frac{1}{2}$, (II) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$ ont pour figures associées :

(I) Un triangle isocèle



(II) Une bande semibornée



Soit $m > 0$ fixé. Le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ à paramètres $\lambda_j = \frac{1}{2}$, $\forall j$ et $a_1 = -1/\sqrt{m}$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1/\sqrt{m}$ a comme figure associé un rectangle dont le rapport longueur sur largeur dépend du paramètre m .

1.2. Résultats principaux. Dans cette section nous prouvons les résultats formant la base du dictionnaire *surfaces de translation engendrées par un polygone-feuilletages homogènes polygonaux*. Notre résultat principal est formulé dans le cadre des triangles. Suite, nous détaillons le passage au cas d'un polygone ayant plus de 3 côtés.

THÉOREME 8. Soit P le triangle d'angles $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_3\pi$ et $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ la surface de translation engendrée par P munie du feuilletage géodésique $\mathcal{D}_\theta$, défini par une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixée. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ le feuilletage de $\mathbb{C}^2$ donné par la 1-forme holomorphe

$$(85) \quad \frac{\omega(z_1, z_2)}{z_1 z_2 (z_2 - z_1)} = \lambda_1 \frac{dz_1}{z_1} + \lambda_2 \frac{dz_2}{z_2} + \lambda_3 \frac{d(z_2 - z_1)}{z_2 - z_1},$$

et $\mathcal{F}_0$ le feuilletage réel de $\mathbb{C}^2$ formé par les courbes intégrales du champ $Re(X)$, où X est le champ de vecteurs dans $\mathbb{C}^2$ satisfaisant

$\omega = i_X dz_1 \wedge dz_2$. Alors il existe une feuille $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ telle que la surface abstraite $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$.

DÉMONSTRATION. Nous rappelons que toute feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dans l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ est revêtement du diviseur exceptionnel privé de trois points $E \setminus \{0, 1, \infty\}$ (cf. §1, 2). Le groupe de ce revêtement est isomorphe à $G_{a,\lambda}$, le groupe d'holonomie de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Prouvons d'abord que la feuille générique $\mathcal{L}$ en tant que surface abstraite et la surface de translation $S(P)$ sont biholomorphes.

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que la transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL

$$(86) \quad f(t) = \int^t \xi^{\lambda_2-1} (\xi - 1)^{\lambda_3-1} d\xi$$

envoie bijectivement le demi-plan supérieur $H^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ sur l'intérieur du triangle P . Notons

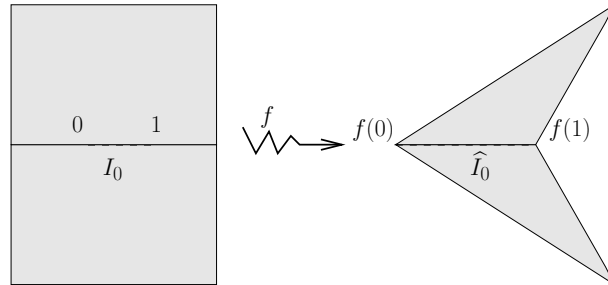
$$(87) \quad I_0 =]0, 1[, \quad I_1 =]1, \infty[, \quad I_\infty =]\infty, 0[$$

les trois composantes connexes ouvertes du bord de H^+ privé des points $\{0, 1, \infty\}$ et $\widehat{I}_j, j \in \{0, 1, \infty\}$ leurs images *via* f . Bien évidemment, pour tout j , $\widehat{I}_j$ est un côté de P privé des sommets.

Le principe de réflexion de SCHWARZ [1] entraîne que le prolongement de f à

$$(88) \quad H^+ \cup H^- \cup I_j$$

où $H^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$, a comme image, lorsqu'on se restreint à H^- , l'intérieur du polygone qui résulte d'une réflexion de P par rapport à la droite qui passe par le côté $\widehat{I}_j$.



Le principe de la réflexion de SCHWARZ.

Choisissons un point m_0 dans la feuille $\mathcal{L}$ tel que $\Pi(m_0) = t_0 \in H^+$. Le germe d'application

$$(89) \quad f \circ \Pi_{m_0} : (\mathcal{L}, m_0) \longrightarrow P \subset \mathbb{C}$$

se prolonge analytiquement le long de tout chemin dans $\mathcal{L}$. En suivant simultanément le prolongement analytique de $f \circ \Pi$ et la construction de $S(P)$ on constate que l'on définit une application

$$(90) \quad \tilde{f} : \mathcal{L} \longrightarrow S(P)$$

qui est un biholomorphisme. En effet, soient γ_j des lacets simples d'indice δ_i^j par rapport à a_i , $i = 1, 2, 3$, racines du cône tangent de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Ils engendrent le groupe fondamental $\Pi_1(E \setminus \{0, 1, \infty\}, t_0)$. Grâce au principe de réflexion de SCHWARZ on constate que, d'un côté, l'holonomie du lacet γ_j par rapport au feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est donnée par l'application $z \rightsquigarrow e^{2\pi i \lambda_j} z$ et, de l'autre, le prolongement analytique de f le long de γ_j est une application de la forme

$$(91) \quad t \rightsquigarrow e^{2\pi i \lambda_j} f(t) + c,$$

où c est une constante $c \in \mathbb{C}$. Ceci dit, nous voyons que le principe de réflexion de SCHWARZ et la transformation (86) induisent un morphisme de groupes

$$(92) \quad TSC : \Pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, t_0) \longrightarrow \mathcal{H}(P)$$

envoyant le générateur γ_j sur la rotation d'angle $2\pi \lambda_j$ par rapport au sommet $f(a_j)$. Ce morphisme satisfait

- L'image du noyau de la représentation d'holonomie (29) du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est le sous-groupe de translations de $\mathcal{H}(P)$.
- L'image inverse de toute translation dans $\mathcal{H}(P)$ *via* TSC est dans le noyau de la représentation d'holonomie (29) du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.

Vérifions que le biholomorphisme $\tilde{f}$ conjugue le feuilletage $\mathcal{F}_{0|\mathcal{L}}$ à un feuilletage géodésique de la surface de translation $S(P)$. Notons $\tilde{X}$ le relevé du champ de vecteurs holomorphe X à l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$. Soit

$$(93) \quad \widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}} \ni \mathcal{L} := \text{ÉCL}^{-1}(F_{a,\lambda}^{-1}(1))$$

la feuille du feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ donnée par le niveau 1 de l'intégrale première $F_{a,\lambda}$. Dans les coordonnées $z_2 = tz_1$ la projection du champ $\tilde{X}$ restreint à $\mathcal{L}$ sur le diviseur exceptionnel $\text{écl}^{-1}(0)$ est donnée par les branches de

$$(94) \quad D\Pi\tilde{X}(t) = t^{1-\lambda_2}(t-1)^{1-\lambda_3}\partial/\partial t.$$

Dans les domaines simplement connexes $H^+ \cup H^- \cup I_j$ les branches de (94) sont de la forme

$$(95) \quad e^{2\pi i(n\lambda_2+m\lambda_1)} h(t) \partial/\partial t, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

où $t \rightsquigarrow h(t)$ est une branche fixée de $t \rightsquigarrow t^{1-\lambda_2}(t-1)^{1-\lambda_3}$. Vu que

$$(96) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int^t \xi^{\lambda_2-1} (\xi-1)^{\lambda_3-1} d\xi \right) \\ &= t^{\lambda_2-1} (t-1)^{\lambda_3-1}, \end{aligned}$$

la transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL (86) envoie toute branche du champ de vecteurs $t^{1-\lambda_2}(t-1)^{1-\lambda_3} \partial/\partial t$ sur un champ de vecteurs constant. En effet, les différentes branches de l'intégrant de (86), dans les domaines $H^+ \cup H^- \cup I_j$, sont de la forme

$$(97) \quad \frac{e^{2\pi i(p\lambda_2+q\lambda_1)}}{h(t)}, \quad p, q \in \mathbb{Z},$$

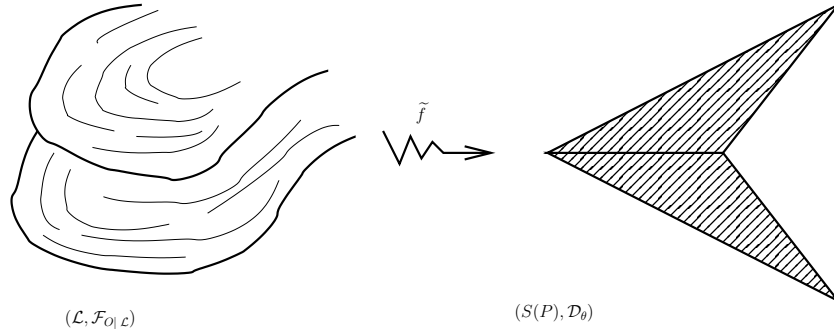
Ainsi, sur chaque $H^+ \cup H^- \cup I_j$ nous avons

$$(98) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f(t)}{\partial t} D\Pi\tilde{X}(t) &= (t^{\lambda_2-1}(t-1)^{\lambda_3-1})(t^{1-\lambda_2}(t-1)^{1-\lambda_3}) \partial/\partial z \\ &= \frac{e^{2\pi i(n\lambda_2+m\lambda_1)} h(t)}{e^{2\pi i(p\lambda_2+q\lambda_1)} h(t)} \partial/\partial z \\ &= C \partial/\partial z \end{aligned}$$

où $C = e^{2\pi i n' \lambda_1 + m' \lambda_2}$ est une constante qui dépend des branches de détermination de $f(t)$ et $D\Pi\tilde{X}$ choisies. En particulier, pour tout choix de branche $\hat{f}$ dans $H^+ \cup H^- \cup I_j$ de $f(t)$, l'application

$$(99) \quad \Pi|_{\mathcal{L}} \circ \hat{f} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$$

envoie la restriction du feuilletage réel $\mathcal{F}_{0|\mathcal{L}}$ à un feuillet du revêtement $\Pi|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \longrightarrow E \setminus \{0, 1, \infty\}$ sur une famille de segments de droite réelle parallèles et contenus dans l'intérieur de la figure $\hat{f}(H^+ \cup H^- \cup I_j)$.



L'isomorphisme $\tilde{f}$ conjugue $\mathcal{F}_0|_{\mathcal{L}}$ à un feuilletage géodésique de la surface de translation $S(P)$.

D'après (91), le biholomorphisme $\tilde{f} : \mathcal{L} \longrightarrow S(P)$ construit à partir de la branche $\hat{f}$ envoie $\mathcal{F}_0|_{\mathcal{L}}$ sur un feuilletage géodésique de la surface de translation $S(P)$. Quitte à multiplier $\hat{f}(t)$ par une constante de la forme $e^{i\theta'}$, $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, quitte à changer convenablement de feuille générique, nous pouvons supposer que tel feuilletage géodésique est précisément $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$.

□

Remarques.

- (1) Vu que le feuilletage réel $\mathcal{F}_\theta$ de $\mathbb{C}^2$ est défini par les courbes intégrales de $\operatorname{Re}(e^{i\theta} X)$, il suffit de faire agir des homothéties de $\mathbb{C}^2$ de la forme $(z_1, z_2) \rightsquigarrow e^{i\theta}(z_1, z_2)$ pour que le théorème 8 reste valide lorsqu'on change $\mathcal{F}_0$ en $\mathcal{F}_\theta$.
- (2) Tel qu'on l'a construit, l'image inverse du biholomorphisme $\tilde{f}$ est contenue dans l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$. Par des raisons de simplicité, nous noterons également $\tilde{f}$ le biholomorphisme $\tilde{f} \circ \text{ÉCL}^{-1}$, dont l'image est dans $\mathbb{C}^2$, et nous les distinguerons par le contexte. Autant $\tilde{f}^{-1}$ que $\text{ÉCL} \circ \tilde{f}^{-1}$ définissent des immersions de la surface de translation feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ et $\mathbb{C}^2$ respectivement. Nous mènerons ultérieurement une description de l'image de chacune de ces immersions.
- (3) Comme on a vu dans §1, 1.1.1, on peut compactifier localement la surface de translation $S(P)$ en une surface plate à singularités coniques $\overline{S(P)}$ «en

ajoutant» les sommets rationnels du polygone P . De manière analogue, on peut compactifier localement la feuille générique $\mathcal{L}$ «en ajoutant» le point dans la droite à l'infini $\tilde{d}_j \cap L_\infty$ lorsque l'exposant λ_j est rationnel.

Réciproquement au théorème 8 nous avons l'énoncé suivant :

COROLLAIRE 3. *Si $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est un feuilletage polygonal dont la figure associée est un triangle P , alors pour toute feuille $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ générique fixée il existe une direction $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ dans le fibré tangent unitaire de la surface de translation $S(P)$ telle que le feuilletage réel $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjugué à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$.*

COROLLAIRE 4. (cf.théo. 3 §1, 2.1) *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont la figure associée est un triangle P . Alors la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ (en tant que surface abstraite) est biholomorphe à la surface de translation $S(P)$ engendrée par P .*

En particulier, lorsque le point $\lambda \in A$ est non résonnant, la surface de translation engendrée par le triangle P est homéomorphe au monstre du Loch Ness.

Nous notons que le théorème 8 n'est pas valide pour le cas d'un polygone général. En effet, lorsqu'on considère un rectangle P , i.e. $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, la surface de translation $S(P)$ est de genre 1 et, d'un autre côté, la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est d'adhérence une surface de genre 3. En effet, la courbe de degré 4

$$(100) \quad z_1 z_2 (z_2 - z_1)(z_2 + z_1) = z_0^4$$

est lisse dans $\mathbb{CP}(2)$.

Lorsqu'on reprend la preuve du théorème 8 dans le cas général d'un polygone P d'angles

$$(101) \quad \{\lambda_1 \pi, \dots, \lambda_{\nu+1} \pi\}, \quad \nu > 3,$$

le problème constaté avec (100) résulte du fait que, si l'on veut que la transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL

$$(102) \quad f(t) := \int \prod_{j \neq 1} (\xi - a_j)^{\lambda_j - 1} d\xi$$

ait comme image le polygone P , le paramètre λ doit satisfaire $\sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_j = \nu - 1$.

Analysons les conséquences de cette normalisation plus en détail. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu+1}$ des lacets simples d'indice δ_i^j par rapport à chaque racine a_i , $i \in \{1, \dots, \nu + 1\}$, du cône tangent du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$; ils engendrent $\Pi_1(E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\})$, le groupe fondamental du diviseur exceptionnel dans $\mathbb{CP}(2)$

privé des a'_i s. Il est clair que ce groupe est isomorphe à F_ν , le groupe libre à ν générateurs.

Pour chaque mot $m \in \Pi_1(E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\})$ nous définissons $n_j(m) \in \mathbb{Z}$ comme la somme des exposants sur la lettre γ_j qui apparaissent dans m . Ceci dit, soit $\varphi_\lambda : \Pi_1(E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\}) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ le morphisme de groupes défini par

$$(103) \quad \varphi_\lambda : m \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{\nu+1} n_j(m) \lambda_j.$$

Suivant la preuve du théorème 8, nous voyons que le biholomorphisme $\tilde{f} : \mathcal{L} \longrightarrow S(P)$ qui conjugue $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ à la surface de translation $(S(P), P)$ existe si et seulement si pour tout mot $m \in \Pi_1(E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\})$ tel que $\mathcal{TSC}(m)$ (92) soit une translation dans $\mathcal{H}(P)$ le mot m appartient au noyau de la représentation d'holonomie (29) du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ (cf. §1 2).

Cette condition est équivalente à demander que pour tout mot $m \in \Pi_1(E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\})$ tel que $\varphi(m) \in \mathbb{Z}$ on ait $\varphi(m) \in (\nu - 1)\mathbb{Z}$. Ceci dit, nous définissons

DÉFINITION 17. *Nous dirons qu'un polygone P d'angles $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_{\nu+1}\pi$ est raisonnable si et seulement si tout nombre entier de la forme*

$$n_1\lambda_1 + \dots + n_{\nu+1}\lambda_{\nu+1},$$

où $n_j \in \mathbb{Z}, \forall j$, est dans $(\nu - 1)\mathbb{Z}$.

Les rectangles $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_4 = \frac{1}{2}$, ne sont pas raisonnables. En effet, si $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2k$ avec k entier impair alors l'entier $n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3 + n_4\lambda_4$ n'appartient pas à $2\mathbb{Z}$. Bien évidemment, selon cette définition tout triangle est un polygone raisonnable.

Le théorème 8 se généralise de la façon suivante :

THÉORÈME 9. *Soit P un polygone raisonnable et $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est semblable à P . Alors*

- i:** *Pour toute direction fixée $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ il existe une feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ telle que la surface abstraite $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$.*
- ii:** *Pour toute feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ il existe une direction $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_{\theta'})$.*

Suivant le théorème 3 cf. §1, 2, nous obtenons :

COROLLAIRE 5. *Soit P un polygone raisonnable et $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est semblable à P . Alors si le point*

$$(104) \quad \left(\frac{\lambda_1}{\nu-1}, \dots, \frac{\lambda_{\nu+1}}{\nu-1} \right)$$

n'est pas résonant la surface de translation engendrée par le polygone P est homéomorphe au monstre de Loch Ness (cf. déf. 9 §1, 2.1).

DÉFINITION 18. *Soit H_λ l'image dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ via l'application $z \rightsquigarrow e^{\frac{2\pi i}{\nu-1}} z$ du groupe $\varphi_\lambda(\varphi_\lambda^{-1}(\mathbb{Z}))$.*

Il est clair que H_λ est un sous-groupe du groupe des $\nu-1$ racines de l'unité dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nous rappelons que tout feuilletage du type $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est invariant par les homothéties de $\mathbb{C}^2$. En particulier, le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ induit un feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$ sur la surface (singulière)

$$(105) \quad \mathbb{C}_\lambda^2 := \mathbb{C}^2 / H_\lambda,$$

où le quotient est défini par rapport à l'action de H_λ en tant que sous-groupe du groupe d'homothéties de $\mathbb{C}^2$

$$(106) \quad \mathbb{C}^2 \times H_\lambda \ni (z, k) \rightsquigarrow kId_{\mathbb{C}^2}(z).$$

Notons $\Pi_\lambda : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}_\lambda^2$ la projection naturelle définie par (105). La surface $\mathbb{C}_\lambda^2$ est réglée (fibration en droites complexes) et à singularité isolée ; le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$ est transverse à cette fibration en dehors de la projection des séparatrices $\Pi_\lambda(d_j)$ (cf. §1, 2).

Remarque. Toute feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ définit un revêtement

$$(107) \quad \Pi_\lambda|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \longrightarrow \Pi_\lambda(\mathcal{L})$$

fini dont le groupe est isomorphe à H_λ . Nous dirons que la feuille

$$(108) \quad \widehat{\mathcal{F}}_{a,\lambda} \ni \widehat{\mathcal{L}} := \Pi_\lambda(\mathcal{L})$$

est générique si $\mathcal{L}$ l'est.

En outre, le champ de vecteurs holomorphe homogène X de degré ν définissant le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est invariant lui aussi par les homothéties de $\mathbb{C}^2$ de la forme $kId_{\mathbb{C}^2}$ avec $k^{\nu-1} = 1$. Cela entraîne que les feuilletages réels $\mathcal{F}_\theta$ définissent des feuilletages réels $\widehat{\mathcal{F}}_\theta$ sur le quotient $\mathbb{C}_\lambda^2$ et sur toute feuille générique $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$. En résumé, nous avons prouvé le suivant :

THÉOREME 10. Soit P un polygone non raisonnable et $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est semblable à P . Alors :

i: Pour toute direction fixée $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ il existe une feuille générique $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ telle que la surface abstraite $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{F}_{0|\widehat{\mathcal{L}}}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$.

ii: Pour toute feuille générique $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ il existe une direction $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{F}_{0|\widehat{\mathcal{L}}}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_{\theta'})$.

1.2.1. Connexion avec les billards polygonaux.

Nous rappelons que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, la surface invariante du billard Σ_θ sur un polygone P définie par θ , s'immerge dans la surface de translation feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ de sorte que $(\Sigma_\theta, B_\theta)$ soit conjuguée à son image (proposition 1 cf. §1, 1.2).

DÉFINITION 19. Nous dirons qu'une feuille générique $\mathcal{L}$ du feuilletage holomorphe polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ (ou bien $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$) munie du feuilletage réel $\mathcal{F}_{\theta'|\mathcal{L}}$, $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, représente le jeu de billard sur le polygone P dans la direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ si, et seulement si, la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ est conjuguée à la surface feuilletée $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\theta'|\mathcal{L}})$ (ou bien à $(\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{F}_{\theta'|\widehat{\mathcal{L}}}})$).

Avec cette nouvelle nomenclature

COROLLAIRE 6. Soit P un polygone raisonnable et $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est semblable à P . Alors, pour toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, il existe une feuille $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ qui représente le jeu de billard sur le polygone P dans la direction θ .

Évidemment il y a une version analogue de ce corollaire dans le cas non raisonnable lorsqu'on se place dans le quotient $\mathbb{C}_\lambda^2$.

1.3. Variation du paramètre directionnel θ .

Considérons le feuilletage $\mathcal{F}_0$ de $\mathbb{C}^2$. Grâce aux théorèmes de la section précédente nous savons que la restriction de ce feuilletage réel à une feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est analytiquement conjuguée une surface de translation feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$. Dans cette section nous analysons la variation du paramètre $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ lorsque on change de feuille générique dans $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.

NOTATION 1. Soit $\mathcal{L}$ une feuille d'un feuilletage de $\mathbb{C}^2$, $\rho \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nous notons $\rho e^{i\theta} \mathcal{L}$ l'image de l'homothétie $(z_1, z_2) \rightsquigarrow \rho e^{i\theta}(z_1, z_2)$ restreinte à la feuille $\mathcal{L}$.

PROPOSITION 5. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage dont le polygone associé est semblable à un triangle et $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ générique. Supposons que $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ pour une certaine direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $\rho \in \mathbb{R}^*$ et $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la feuille, $(\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}})$ est analytiquement conjuguée à $(S(P), \mathcal{D}_{\theta+\theta'})$.

DÉMONSTRATION. D'après la section 2.2.5 du chapitre précédent, dans le cas quadratique $\nu = 2$ le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ de $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ est donné, dans la carte $z_2 = tz_1$, par les courbes intégrales du champ de vecteurs holomorphe

$$(109) \quad X_{a,\lambda} = z_1(\lambda_2 z_1 - (\lambda_2 + \lambda_3)tz_1 \partial/\partial z_1 + t(t-1) \partial/\partial t).$$

Considérons la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ donnée, en coordonnées $z_2 = tz_1$, par l'équation $\widetilde{z_1 t^{\lambda_2}(t-1)^{\lambda_3} = 1}$. On la note $\mathcal{L}$. La projection au diviseur exceptionnel de $\mathbb{CP}(2)$ de la restriction $X_{a,\lambda}$ à cette feuille est donnée par les branches de $t^{1-\lambda_2}(t-1)^{1-\lambda_3} \partial/\partial t$. Un calcul immédiat montre que la projection au diviseur exceptionnel de $\mathbb{CP}(2)$ de la restriction de $X_{a,\lambda}$ à $\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}$ est donnée par les branches de $\rho e^{i\theta'} t^{1-\lambda_2}(t-1)^{1-\lambda_3} \partial/\partial t$. Suivant les résultats de la section 1.2 de ce chapitre, nous supposons que $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ est analytiquement conjugué à la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ via le relevé $\tilde{f} : \mathcal{L} \rightarrow S(P)$ de la transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL donnée en coordonnées $z_2 = tz_1$ par la formule

$$f(t) := t \rightsquigarrow \int_*^t \xi^{\lambda_2-1} (\xi-1)^{\lambda_3-1} d\xi.$$

Alors, un calcul direct montre que le relevé $\tilde{f} : \rho e^{i\theta'} \mathcal{L} \rightarrow S(P)$ conjugue $(\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}})$ à $(S(P), \mathcal{D}_{\theta+\theta'})$. □

PROPOSITION 6. Soit P un polygone raisonnable à $\nu + 1$ côtés, $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est semblable à P et $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ générique. Supposons

que $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ pour une certaine direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $\rho \in \mathbb{R}^*$ et $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la feuille, $(\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}})$ est analytiquement conjuguée à $(S(P), \mathcal{D}_{\theta+(\nu-1)\theta'})$.

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue à celle de la proposition précédente. Il suffit de remarquer que la projection au diviseur exceptionnel de $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ de la restriction du champ $X_{a,\lambda}$ à $\rho e^{i\theta'} \mathcal{L}$ est donnée par les branches de $\rho^{\nu-1} e^{i(\nu-1)\theta'} t^{1-\lambda_2} (t-1)^{1-\lambda_3} \partial/\partial t$. Cela se déduit du fait que le discours impose la normalisation $\sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_j = \nu - 1$. □

Remarques. D'après la proposition précédente :

- (1) Supposons qu'une feuille générique $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ d'un feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ ayant comme figure associée un polygone raisonnable soit analytiquement conjuguée à la surface de translation feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$, alors toute feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ de la forme $(\rho \mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\rho \mathcal{L}})$, avec $\rho \in \mathbb{R}^*$, l'est aussi.
- (2) Soit P un polygone raisonnable d'angles $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_{\nu+1}\pi$ et $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est semblable à P . Alors, le jeu de billard sur le polygone P dans une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est représenté par $\nu - 1$ feuilles génériques de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ contenues dans la 3-variété réelle

$$(110) \quad M_1 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |F_{a,\lambda}(z_1, z_2)| = 1\}.$$

1.3.1. Variation du paramètre directionnel et automorphismes de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.

Dans cette section nous établissons un parallélisme entre les automorphismes du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ provenant de l'holonomie et certains automorphismes de la surface de translation $S(P)$ provenant du groupe d'isométries $\mathcal{H}(P)$ (cf. §1, 1.1). Précisons d'abord un peu notre vocabulaire.

DÉFINITION 20. Considérons un feuilletage du type $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ de degré ν . Nous appelons groupe d'automorphismes de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ provenant de l'holonomie le sous-groupe du groupe d'homothéties du plan complexe formé par les applications

$$(111) \quad (z_1, z_2) \rightsquigarrow k(z_1, z_2),$$

où le nombre complexe k appartient à $\{e^{\frac{2\pi}{\nu-1}i \sum_{j=1}^{\nu+1} n_j \lambda_j}\}, (n_1, \dots, n_{\nu+1}) \in \mathbb{Z}^{\nu+1}$.

Bien évidemment dans cette définition nous avons supposé la normalisation $\sum_{j=1}^{\nu+1} \lambda_j = \nu - 1$. Toute homothétie de $\mathbb{C}^2$ appartenant au groupe d'automorphismes de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ provenant de l'holonomie laisse invariant le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$, feuille par feuille. Toute homothétie de la forme $(z_1, z_2) \rightsquigarrow k(z_1, z_2)$, où $k^{\nu-1} = 1$, laisse invariant le champ holomorphe $X_{a,\lambda}$ définissant le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. On appelle le group de ces homothéties laissant invariant $X_{a,\lambda}$, groupe d'automorphismes du champ $X_{a,\lambda}$. Nous remarquons alors que le polygone P associé au feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est raisonnable si et seulement si l'intersection du groupe d'automorphismes de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ provenant de l'holonomie avec le groupe d'automorphismes du champ $X_{a,\lambda}$ est trivial.

Tout automorphisme de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ provenant de l'holonomie induit un automorphisme de la surface de translation $S(P)$. De même, l'action d'une isométrie de $\mathcal{H}(P)$ sur la famille de polygones $\mathcal{P}$ définit un automorphisme de la surface de translation engendrée par P . En effet, pour tout $g \in \mathcal{H}(P)$ nous avons $S(P) = S(gP)$. Suivant la preuve du théorème 8, nous constatons que tout automorphisme de la surface de translation $S(P)$ induit par un automorphisme de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ provenant de l'holonomie correspond à l'action d'un élément dans le groupe d'isométries $\mathcal{H}(P)$ préservant l'orientation. Nous remarquons que l'image dans $D\mathcal{H}(P)$ des éléments de $\mathcal{H}(P)$ préservant l'orientation est justement $D_0\mathcal{H}(P) := D\mathcal{H}(P) \cap SO(2)$. Le sous-groupe $D_0\mathcal{H}(P)$ est engendré par les rotations d'angles $2\pi\lambda_j$.

Par contre, le réciproque n'est pas vrai. Les automorphismes de $S(P)$ induits par une des réflexions engendrant $\mathcal{H}(P)$ ne peuvent pas être induits par un automorphisme de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ provenant de l'holonomie, car ces derniers préservent l'orientation.

2. Applications du dictionnaire

Les résultats établis dans la section précédente montrent l'existence d'un dictionnaire qui nous permet d'étudier la dynamique du billard sur un polygone à l'aide des feuilletages réels $\mathcal{F}_\theta$ de $\mathbb{C}^2$ (ou de $\mathbb{C}_\lambda^2$) et *vice versa*. Dans cette section, nous montrons des applications explicites de ce dictionnaire.

2.1. Traduction des résultats de la théorie des billards polygonaux.

Dans §1, 1.4.1 nous avons présenté une liste des résultats propres à la théorie des billards polygonaux. La «traduction» des résultats de cette théorie permet de démontrer de nouveaux théorèmes concernant les feuilletages réels $\mathcal{F}_\theta$ associés aux feuilletages holomorphes polygonaux $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ de $\mathbb{C}^2$. Sauf si on indique le contraire, tout le long de cette section nous nous plaçons dans le cadre des feuilletages polygonaux ayant comme figure associée un polygone raisonnable.

2.1.1. Orbites périodiques.

Toute feuille d'un feuilletage réel de dimension 1 homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$ est appelée *orbite périodique*. Le relevé d'une trajectoire périodique du billard sur un polygone P à la surface de translation $S(P)$ est une géodésique fermée et la projection d'une géodésique fermée de $S(P)$ à P est une trajectoire périodique. Toute trajectoire périodique du billard sur un polygone a une *longueur combinatoire* qui correspond au nombre de côtés visités par la boule avant de revenir à son point de départ.

DÉFINITION 21. Soit l une géodesique fermée dans la surface de translation $S(P)$ engendrée par un polygone P . Nous appelons longueur combinatoire de l le cardinal de l'intersection

$$(112) \quad l \cap \Pi_P^{-1}(\text{Arr}(P)),$$

où $\text{Arr}(P) \subset P$ est l'ensemble formé par la réunion des arêtes de P .

DÉFINITION 22. Soit $\Pi_{\mathbb{CP}(1)} : \mathbb{C}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{CP}(1)$ la projection canonique. Nous définissons

$$(113) \quad \Sigma_{\mathbb{R}} := \Pi_{\mathbb{CP}(1)}^{-1} \{[1 : t] \in \mathbb{CP}(1) \mid t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}.$$

Remarques.

- (1) L'hypersurface réelle $\Sigma_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$ est la quadrique formée par la réunion de toutes les droites complexes dans $\mathbb{C}^2$ passant par l'origine dont la pente est dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Elle est donnée en coordonnées réelles par l'équation $x_2 y_1 = x_1 y_2$.
- (2) Soit P un polygone raisonnable et supposons que la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ soit analytiquement conjuguée à la feuille $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ via le biholomorphisme $\tilde{f}$ (cf. §2, 1.2 théo. 8), alors

$$(114) \quad \tilde{f}(\mathcal{L} \cap \Sigma_{\mathbb{R}}) = \Pi_P^{-1}(\text{Arr}(P)).$$

Autrement dit, l'intersection d'une feuille générique avec l'hypersurface $\Sigma_{\mathbb{R}}$ correspond aux points de la surface de translation $S(P)$ correspondant aux arêtes de P .

- (3) En termes de billard sur le polygone P , un point de réflexion d'une trajectoire avec une arête de P correspond à un point dans l'hypersurface $\Sigma_{\mathbb{R}}$.

Notons $\widetilde{\Sigma_{\mathbb{R}}}$ la projection de la quadrique $\Sigma_{\mathbb{R}}$ sur le diviseur exceptionnel E dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$. Alors $\widetilde{\Sigma_{\mathbb{R}}} \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\}$ a $\nu + 1$ composantes connexes, chacune homéomorphe à un interval ouvert. Nous les notons $I_j, j \in \{1, \dots, \nu + 1\}$.

PROPOSITION 7. *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal et $l \subset E \setminus \{a_1, \dots, a_{\nu+1}\}$ la projection sur diviseur exceptionnel dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ d'une feuille du feuilletage réel $\mathcal{F}_0$ n'appartenant pas au cône tangent de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Soit $p \in l$ et,*

$$(115) \quad \gamma : [0, \infty[\longrightarrow E$$

une paramétrisation lisse de l telle que $\gamma(0) = p$. Alors,

- (1) *Il existe $s_j \in]0, \infty[$ tel que $\gamma(s_j) \in I_j$ pour un certain $1 \leq j \leq \nu + 1$;*
- (2) *Si γ est tangente à I_j à l'instant s_j alors $\gamma([0, \infty[) \subseteq I_j$;*
- (3) *Si γ est transversale à I_j et $s_j < s_k$ note le prochain instant où γ rencontre $\widetilde{\Sigma_{\mathbb{R}}}$, alors, nécessairement $\gamma(s_k) \in \widetilde{\Sigma_{\mathbb{R}}} \setminus I_j$.*

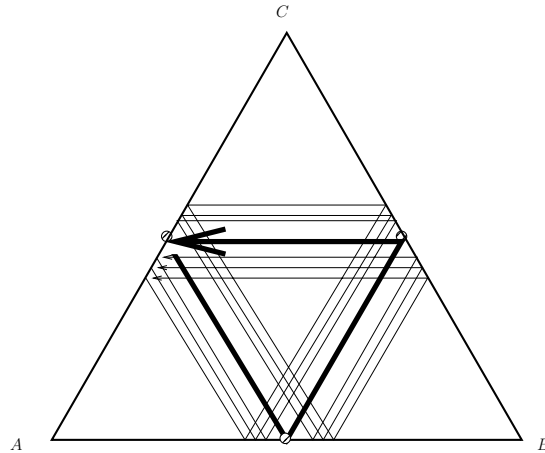
DÉMONSTRATION. Soit P le polygone associé au feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. D'après le dictionnaire établi dans §2, 1.2, et les remarques précédentes, nous pouvons penser à γ comme une paramétrisation d'une trajectoire du billard sur le polygone P . Par suite, (1) découle du fait que toute trajectoire du billard sur P rencontre une arête de P , (2) est naturel car toute trajectoire du billard sur P tangente à une arête de P est contenue dans cette arête et (3) est la traduction du fait qu'une trajectoire du billard ne rebondit pas consécutivement sur la même arête de P .

□

DÉFINITION 23. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ polygonal et $l \in \mathcal{F}_\theta$ périodique. Nous appelons longueur combinatoire de l le cardinal de l'intersection $l \cap \Sigma_{\mathbb{R}}$.

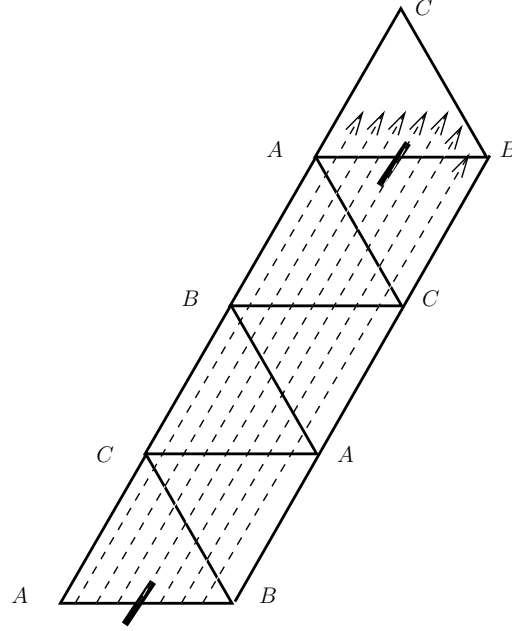
D'après les paragraphes précédents, on en déduit que si $l \in (\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ est périodique et P est raisonnable, alors les longueurs combinatoires de l et de la géodesique fermée $\tilde{f}(l) \subset S(P)$ coïncident.

Toute trajectoire périodique du billard sur un polygone P de longueur combinatoire *paire* est contenue dans une famille maximale (un cylindre) à un paramètre de trajectoires périodiques ayant la même période, et toute trajectoire périodique du billard de longueur combinatoire *impaire* se déforme en une famille à un paramètre de trajectoires périodiques dont la longueur combinatoire est le double [46]. La trajectoire périodique de FAGNANO, de longueur combinatoire 3, illustre ce fait :



Les trajectoires parallèles à la trajectoire périodique de FAGNANO.

Par ailleurs, le relevé à la surface de translation $S(P)$ de la famille à 1 paramètre de trajectoires du billard parallèles à la trajectoire de Fagnano est un cylindre feuilleté par des géodésiques fermées ayant toutes longueur combinatoire 6



Cylindre de géodésiques fermées dans $S(P)$ défini par la trajectoire de Fagnano.

Nous appellerons dorénavant le relevé de la trajectoire de Fagnano dans un triangle aigu P à la surface de translation $S(P)$ l'*orbite périodique* de Fagnano. Nous constatons ainsi une discordance entre la longueur combinatoire de la trajectoire (du billard) de Fagnano et l'orbite (géodésique) périodique de Fagnano. Décrivons en quoi consiste cette discordance dans le contexte des feuilletages polygonaux ayant comme figure associée le triangle aigu P .

Soit $l \subseteq P$ le sous ensemble de points du triangle aigu P formant la trajectoire de Fagnano et

$$(116) \quad \gamma : [0, 1] \longrightarrow l$$

une paramétrisation linéaire par morceaux qui «parcourt» l deux fois : on la suppose en bijection avec l dans $[0, \frac{1}{2}[$ et telle que $\gamma(2s) = \gamma(s)$ pour tout $s \in [0, \frac{1}{2}]$. Considérons le relevé $\tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow S(P)$ à $S(P)$ défini par la

condition

$$(117) \quad \Pi_P \circ \tilde{\gamma}(s) = \gamma(s), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Alors on a 6 points $\{\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_5\} \subset [0, 1]$ tels que

$$(118) \quad \tilde{\gamma}([0, 1]) \cap \Pi_P^{-1}(Arr(P)) = \bigcup_{j=0}^5 \tilde{\gamma}(\tilde{s}_j)$$

Supposons que la surface de translation $S(P)$ munie du feuilletage géodésique dans la direction de l'orbite périodique de Fagnano est analytiquement conjuguée *via* un biholomorphisme (cf. §2 théo. 8) $\tilde{f} : \mathcal{L} \rightarrow S(P)$ à une feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$, nous définissons

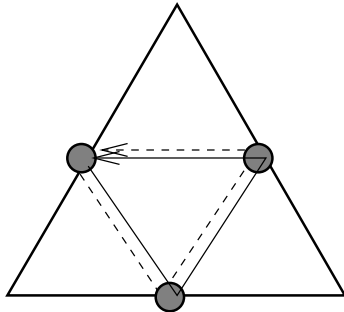
$$(119) \quad \hat{\gamma} := \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}.$$

Remarques.

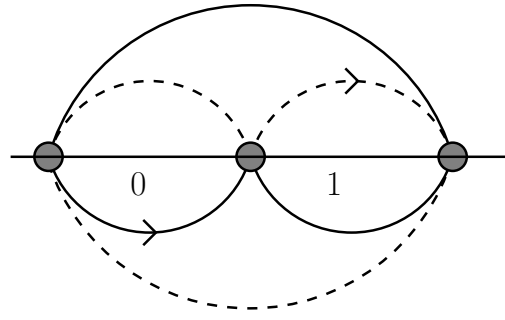
i: L'intersection $\hat{\gamma}([0, 1]) \cap \Sigma_{\mathbb{R}} = \bigcup_{j=0}^5 \hat{\gamma}(\tilde{s}_j)$ est de cardinal 6 ; par ailleurs, si on note $\widetilde{\hat{\gamma}([0, 1])}$ l'image de la courbe $\text{ÉCL}^{-1} \circ \hat{\gamma}$ dans l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$, alors l'intersection

$$(120) \quad \Pi(\widetilde{\hat{\gamma}([0, 1])}) \cap \Pi(\text{ÉCL}^{-1}(\Sigma_{\mathbb{R}})),$$

est de cardinal 3 et le type d'homotopie de la projection de $\Pi(\widetilde{\hat{\gamma}([0, 1])})$ à $E \setminus \{0, 1, \infty\}$ est celui du commutateur $[\gamma_1, \gamma_2]$. Ici Π note la projection de la variété éclatée $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ sur le diviseur exceptionnel et γ_1, γ_2 deux générateurs du groupe fondamental de $E \setminus \{0, 1, \infty\}$.



$\gamma([0, 1]) \subset P$



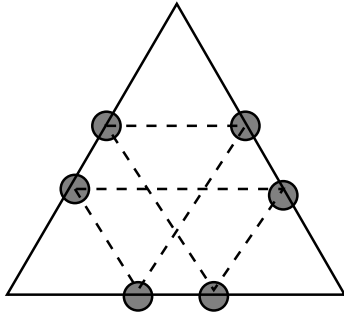
$\Pi(\widetilde{\hat{\gamma}([0, 1])}) \subset E$

ii: Si $\varphi : [0, 1] \rightarrow P$ est une paramétrisation linéaire par morceaux d'une trajectoire périodique de billard dans le triangle aigu P parallèle à la trajectoire de Fagnano et si on définit $\hat{\varphi} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}$ de la même façon

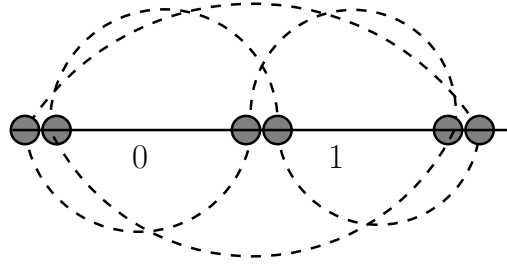
qu'on a défini $\widehat{\gamma}$, alors le type d'homotopie de la projection de $\Pi(\widehat{\varphi}([0, 1]))$ à $E \setminus \{0, 1, \infty\}$ est celui du commutateur $[\gamma_1, \gamma_2]$ (cf. §2 preuve théo. 8) mais l'intersection

$$(121) \quad \Pi(\widehat{\varphi}([0, 1])) \cap \Pi(\text{ÉCL}^{-1}(\Sigma_{\mathbb{R}}))$$

est de cardinal 6 :



$$\varphi([0, 1]) \subset P$$



$$\Pi(\widehat{\varphi}([0, 1])) \subset E$$

On sait [46] que toute orbite périodique dans une surface de translation $S(P)$ est contenue dans un cylindre feuilleté par des géodesiques fermées ayant toutes la même longueur combinatoire. Grâce au théorème 8 cf. §2, 1.2 nous savons alors que les feuilletages $\mathcal{F}_\theta$ provenant d'un feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ et restreints à une feuille générique n'ont pas d'orbites périodiques isolées. Ce dernier fait, n'est pas propre aux feuilletages $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ polygonaux.

THÉOREME 11. *Lorsqu'on se restreint à une feuille générique d'un feuilletage holomorphe homogène à singularité isolée et à cône tangent réduit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ les orbites périodiques de tout feuilletage réel $\mathcal{F}_\theta$ sont non-isolées.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du fait que le feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ soit défini par un champ de vecteurs homogène $X = X_1 + iX_2$ pour lequel $[X_1, X_2] = 0$, où $[,]$ désigne le crochet de Lie de deux champs de vecteurs dans $\mathbb{C}^2$.

□

Une application directe du dictionnaire établi dans la section précédente entraîne que tout énoncé impliquant l'existence d'une trajectoire périodique du billard sur un polygone P , ou bien d'une géodésique fermée dans la surface de translation $S(P)$, se traduit en un énoncé impliquant l'existence d'une orbite périodique d'un feuilletage réel $\mathcal{F}_\theta$ provenant d'un feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dont la figure associée est semblable à P . Par exemple le

THÉOREME 12. [31] *Pour tout polygone P rationnel il existe un ensemble dense de directions pour lesquelles on a une trajectoire périodique.*

se traduit directement en

COROLLAIRE 7. *Pour tout feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dont la figure associée est un polygone rationnel, il existe un ensemble dense de directions $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ pour lesquelles $\mathcal{F}_\theta$ a une orbite périodique.*

Nous notons que, vis à vis des remarques faites dans la section §2, 1.3, nous pouvons améliorer ce corollaire.

COROLLAIRE 8. *Pour tout feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dont la figure associée est un polygone rationnel, l'ensemble formé par la réunion des feuilles génériques $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ telles que $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\theta|_{\mathcal{L}}})$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, a une orbite périodique est dense dans $\mathbb{C}^2$.*

En effet, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\theta = 0$. Suivant la proposition 6, si le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ a comme figure associé un polygone rationnel, alors le sous-ensemble formé par toutes les feuilles génériques de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dans $M_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |F_{a,\lambda}(z_1, z_2)| = 1\}$ ayant une orbite périodique est dense dans M_1 . Alors, vu que toute feuille générique $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|_{\mathcal{L}}})$ est, en tant que surface feuilletée, analytiquement conjuguée à $(\rho\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|_{\rho\mathcal{L}}})$, $\forall \rho \in \mathbb{R}^*$, nous obtenons la densité dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$.

En dehors du cas rationnel ($\lambda \in \mathbb{Q}^{\nu+1}$) on connaît peu de choses sur l'existence d'orbites périodiques d'un feuilletage $\mathcal{F}_\theta$ provenant d'un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. L'existence de la trajectoire de Fagnano entraîne l'existence d'une orbite périodique pour tout feuilletage $\mathcal{F}_\theta$ provenant d'un feuilletage holomorphe polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ de degré 2 dont la figure associée est un triangle aigu. Nous pouvons assurer également l'existence d'une orbite périodique pour tout feuilletage $\mathcal{F}_\theta$ provenant d'un feuilletage holomorphe polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ de degré 2 dont la figure associée est un triangle rectangle ou bien un triangle obtus dont l'angle obtus n'excède pas 100 degrés (cf. §1, 1.4.1).

Pour le théorème suivant nous rappelons que, par définition, l'espace (topologique) de phases du jeu de billard sur un polygone $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, muni de la topologie produit.

THÉOREME 13. *Supposons que l'ensemble des points dans l'espace des phases du jeu de billard sur un triangle P définissant une trajectoire périodique soit dense. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ polygonal dont la figure associée est semblable à P , alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, l'ensemble des orbites périodiques du feuilletage réel $\mathcal{F}_\theta$ est dense dans $\mathbb{C}^2$.*

DÉMONSTRATION. Comme d'habitude, le triangle est supposée d'angles $\lambda_j\pi$, $j = 1, 2, 3$ et le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ définit par la 1-forme ω (85). Sans perte de généralité nous nous plaçons dans le cas $\theta = 0$. Alors il suffit de prouver que les orbites périodiques du feuilletage $\mathcal{F}_0$ sont denses dans l'espace M_1 . Nous remarquons que $M_1 = \{e^{i\theta} F_{a,\lambda}^{-1}(1)\}_{\theta \in [0, 2\pi]}$. Soit $\widetilde{M}_1 := \text{ÉCL}^{-1}(M_1)$ l'image de M_1 dans l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}}(2)$. On définit, dans les coordonnées $z_2 = tz_1$:

$$(122) \quad M_1^+ = \{(t, z_1) \in \widetilde{M}_1 \mid \text{Im}(t) > 0\}.$$

Analoguement, $\text{Im}(t < 0)$ définit M_1^- . L'intersection des feuilles du feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_{a,\lambda}$ induit un feuilletage réel de codimension 1 $\mathcal{F}_{1,+}$ sur M_1^+ . De même, $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ induit un feuilletage réel de codimension 2 $\mathcal{F}_{0,+}$. Par définition, la restriction de $\mathcal{F}_{0,+}$ à chaque feuille de $\mathcal{F}_{1,+}$ est un feuilletage réel.

Posons $f(t) = \int^t \xi^{\lambda_2-1} (\xi - 1)^{\lambda_3-1}$. Pour toute $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{1,+}$, la restriction de $f \circ \Pi$ à $\mathcal{L}$ conjugue $\mathcal{F}_{0,+}$ à l'intérieur du triangle P , qu'on note $\text{int}(P)$, muni d'un feuilletage formé par des segments de droites parallèles à une certaine direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On envoie ainsi la feuille $\mathcal{L}$ dans $\text{int}(P) \times \{\theta\} \subseteq \text{int}(P) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Cette correspondance définit un difféomorphisme entre M_1^+ et l'intérieur de l'espace de phases du billard sur le triangle P . On note ce difféomorphisme $f_1 : M_1^+ \rightarrow \text{int}(P) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Cette bijection conjugue le feuilletage réel $\widetilde{\mathcal{F}}_{0,+}$ au feuilletage en droites défini par les trajectoires du «flot» du billard.

Soit (p, θ_0) définissant une trajectoire fermée du «flot» du billard et l_q la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ passant par le point $q = f_1^{-1}(p, \theta_0)$. Alors l_q est une orbite périodique. En effet, soit $\mathcal{L}_q$ la feuille de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ passant par q . Cette feuille munie du feuilletage réel $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ est analytiquement conjuguée à $(S(P), \mathcal{D}_{\theta_0})$. Alors nous avons une immersion $i_1 : P \times \{\theta_0\} \hookrightarrow S(P)$. Par ailleurs $i_2 : P \times \{\theta_0\} \hookrightarrow \Sigma_{\theta_0}$, où Σ_{θ_0} note la surface invariante du billard définie par la direction θ_0 . Soit $i_3 : \Sigma_{\theta_0} \hookrightarrow S(P)$ telle que $i_1 = i_2$. Alors, l'image de l_q dans $S(P)$ correspond à l'image via i_3 de la trajectoire du flot du billard passant par (p, θ_0) . Si ce dernière est périodique, alors l_q l'est aussi.

Cela prouve que la densité d'orbites périodiques dans M_1^+ . Nous procédons de façon analogue pour M_1^- .

□

THÉORÈME 14. [3] *L'ensemble des points dans l'espace des phases du jeu de billard sur un polygone rationnel définissant une trajectoire périodique est dense.*

THÉORÈME 15. [48] *L'ensemble des points dans l'espace des phases du jeu de billard sur un triangle rectangle définissant une trajectoire périodique est dense.*

entraînent

COROLLAIRE 9. *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ polygonal dont la figure associée est semblable à un triangle rationnel ; alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, l'ensemble des orbites périodiques du feuilletage réel $\mathcal{F}_\theta$ est dense dans $\mathbb{C}^2$.*

COROLLAIRE 10. *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ polygonal dont la figure associée est semblable à un triangle rectangle ; alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé, l'ensemble des orbites périodiques du feuilletage réel $\mathcal{F}_\theta$ est dense dans $\mathbb{C}^2$.*

Nous rappelons que pour des polygones raisonnables, le théorème 8 cf. §2 établit, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'existence d'une immersion de la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ dans le plan $\mathbb{C}^2$. Dans les paragraphes qui suivent nous menons une description de l'image de l'immersion dans l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ lorsqu'on se restreint à un cylindre «maximal» dans $S(P)$ feuilleté par des géodésiques périodiques.

DÉFINITION 24. *Soit $l \subset S(P)$ une orbite périodique d'une surface de translation engendrée par un polygone. Nous appelons cylindre maximal défini par l le cylindre fermée (homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$) maximal, par rapport à $\subseteq$, contenant l . Nous le notons $Cyl(l)$.*

PROPOSITION 8. *Soit P un polygone raisonnable et supposons que la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ soit (1) analytiquement conjuguée via $\tilde{f}$ (cf. théo. 8 §2, 1.2) à un feuille générique $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{0|\mathcal{L}})$ d'un feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ et (2) présente une orbite périodique l dans la direction θ . Alors, l'image, via $\tilde{f}^{-1}$, du cylindre maximal défini par l adhère, dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$, à la droite à l'infini L_∞ .*

DÉMONSTRATION. Tout cylindre maximal $Cyl(l)$ est contenu proprement dans $S(P)$ et son bord est formé par des géodésiques provenant des trajectoires du billard qui ont une extrémité dans un sommet du polygone P .

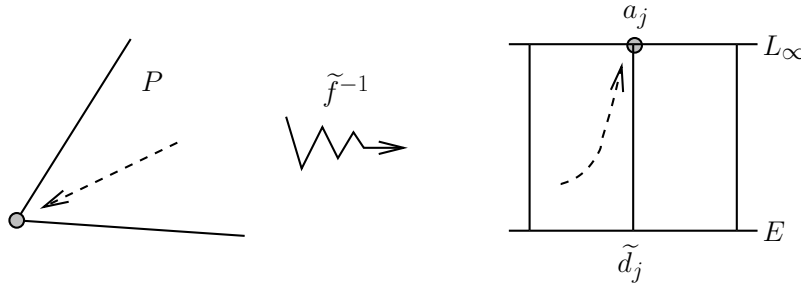
La transformation de SCHWARZ-CHRISTOFFEL avec laquelle on construit la conjugaison $\tilde{f}$ (cf. §2, 1.2, théo. 8) envoie tout voisinage suffisamment petit $U \subset P$ dans un voisinage suffisamment petit $\tilde{U}_j$ d'un point a_j dans le diviseur exceptionnel $E \subset \widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ (cf. §1, 2).

Vu que $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est polygonal on a $\lambda_j > 0 \forall j$. Dans ce cas le relevé d'une courbe

simple

$$(123) \quad \gamma : [0, 1] \longrightarrow \tilde{U}_j$$

ayant comme limite a_j quand $t \rightarrow 1$ à une feuille générique $\mathcal{L} \in \widetilde{\mathcal{F}_{a,\lambda}}$ via l'intégrale première $F_{a,\lambda}$ est une courbe simple dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ ayant comme limite quand $t \rightarrow 1$ le point de la droite à l'infini $L_\infty \cap \tilde{d}_j$, où $\tilde{d}_j \subseteq \widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ est l'image via ÉCL^{-1} d'une des $\nu + 1$ droites invariantes du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ passant par l'origine dans $\mathbb{C}^2$. $\square$



Bifurcation de la trajectoire de Fagnano. Dans §1, 1.4.1 nous avons vu que le triangle orthique d'un triangle P dégénère, lorsqu'on déforme P en un triangle rectangle, en une trajectoire singulière du billard, une hauteur pour être précis. Ceci dit considérons un feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ ayant comme polygone associé un triangle aigu P_0 ; suivant la preuve de la proposition précédente nous voyons que si $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ est une courbe lisse telle que (i) $\gamma(0) = \lambda$, (ii) $\mathcal{F}_{a,\gamma(s)}$ a comme figure associée un triangle aigu et (iii) $\mathcal{F}_{a,\gamma(1)}$ a comme figure associée un triangle rectangle, alors le cylindre maximal de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ défini par la trajectoire de Fagnano dans P_0 se déforme, lorsque $s \rightarrow 1$, en une feuille de, disons, $\mathcal{F}_{a,\gamma(1),0}$, adhérent dans $\mathbb{CP}(2)$ à un même point dans la droite à l'infini L_∞ .

2.1.2. Feuilletages minimaux, transitivité topologique.

Dans cette section nous abordons la question sur la minimalité et la transitivité topologique des feuilletages $\mathcal{F}_\theta$ et nous donnons quelques résultats en «tra-
duisant» ce qu'on connaît chez les billards polygonaux.

Voici un corollaire direct du théorème 2 [27], (cf. §1, 1.4.1) :

COROLLAIRE 11. *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est rationnel et raisonnable. Alors, au sens de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, pour*

presque toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ il existe une feuille $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ telle que le feuilletage $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\theta|\mathcal{L}})$ est minimal.

Ce résultat admet un analogue dans le contexte des polygones non raisonnables. Par ailleurs, vis à vis des remarques faites lorsque nous analysions la variation du paramètre θ dans la section 1.3 de ce chapitre, le corollaire précédent entraîne :

COROLLAIRE 12. *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal dont le polygone associé est rationnel, raisonnable, et soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé. Alors le sous ensemble de $\mathbb{C}^2$*

$$(124) \quad \{ \mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda} \mid \text{le feuilletage réel } (\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\theta|\mathcal{L}}) \text{ n'est pas minimal} \}$$

est de mesure de Lebesgue nulle.

Pour les suivantes applications du dictionnaire nous avons besoin du

LEMME 3. *Soit P un polygone raisonnable et supposons que le flot du billard sur l'espace de phases $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ présente une trajectoire dense. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ feuilletage polygonal dont la figure associée est P . Alors la restriction du feuilletage réel $\mathcal{F}_0$ à $M_1 = \{e^{i\theta} F_{a,\lambda}^{-1}(1)\}_{\theta \in [0, 2\pi]}$ présente une feuille dense.*

DÉMONSTRATION. Soit (p, θ) dans l'intérieur de $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ déterminant une trajectoire dense du flot du billard. Soit $g^t(p, \theta) : \mathbb{R} \longrightarrow P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ une paramétrisation pour cette trajectoire satisfaisant $g^0(p, \theta) = (p, \theta)$. Cette paramétrisation induit une indexation naturelle sur l'ensemble de directions dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ visitées par la trajectoire. Soient $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ces directions.

Remarque Si la trajectoire paramétrée par $g^t(p, \theta)$ est dense alors les ensembles $\{\theta_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\theta_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont denses dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Considérons maintenant l'homéomorphisme $f_1 : M_1^+ \longrightarrow \text{int}(P) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ défini dans la preuve du théorème 13. Soit l la feuille de $\mathcal{F}_0$ passant par $f_1^{-1}(p, \theta)$. La feuille l évite un petit ouvert U dans $\widetilde{M}_1$ si et seulement si soit $\{\theta_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\{\theta_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Vu que cela n'arrive pas, elle est dense dans $\widetilde{M}_1$ et par conséquent dans M_1 . $\square$

Autrement dit, une feuille de $\mathcal{F}_0$ dans M_1 «correspondant» à une trajectoire du flot du billard dense dans l'espace de phases doit être dense car si elle évite un ouvert de M_1 la trajectoire du billard qui le «correspond» évite un ouvert de $P \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On en déduit le suivant théorème mentionné dans l'introduction de cette thèse :

THÉOREME 16. *Soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixé. Alors il existe un sous ensemble du type G_δ dense de $\sum_{j=1}^3 \lambda_j = 1$, $\lambda_j > 0$, pour tout $j = 1, 2, 3$ formé par des paramètres λ pour lesquels presque tout point de $\mathbb{RP}(3)$, au sens LEBESGUE, est contenu dans une feuille de $\mathcal{G}_{\lambda,\theta}$ dense dans $\mathbb{RP}(3)$.*

En effet, il s'agit du cas des triangles, toujours raisonnables. L'ensemble G_δ dense correspond aux triangles pour lesquels le flot du billard est ergodique dans l'espace de phases [27]. Lorsque le paramètre λ est non fortement résonant ce théorème est immédiat. Dans les cas des paramètres fortement résonants il reste vrai puisque la restriction de $\Pi_{\mathbb{RP}(3)} : M_1 \longrightarrow \Pi_{\mathbb{RP}(3)}(M_1)$ est un revêtement d'ordre deux.

Sommaire. Grâce aux résultats sur la dynamique des trajectoires du billard sur un polygone nous avons montré

- L'existence de feuilletages réels $\mathcal{F}_\theta$ de $\mathbb{C}^2$ associés à un feuilletage du type $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ présentant orbites périodiques et feuilles denses dans les feuilles de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$.
- L'existence de feuilletages réels $\mathcal{G}_\theta$ de $\mathbb{RP}(3)$ «minimaux» en dehors d'un sous-ensemble de mesure de LEBESGUE nulle.

En dehors de ces cas peu est connu sur les propriétés topologiques des feuilletages réels $\mathcal{F}_\theta$ et $\mathcal{G}_\theta$. Par exemple on ignore l'existence de feuilletages présentant orbites périodiques et orbites denses dans $\mathbb{C}^2$ (ou $\mathbb{RP}(3)$). Par ailleurs, la question sur la transitivité topologique (existence d'une orbite dense) des feuilletages $\mathcal{F}_\theta$ dans une feuille générique d'un $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ arbitraire, ou bien dans $\mathbb{C}^2$, reste ouverte.

2.2. Dichotomie topologique, surfaces de VEECH arithmétiques et champs de GHYS-REBELO.

Dans cette section nous montrons entre les surfaces de translation engendrées par les triangles d'angles

$$(125) \quad \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\},$$

les «triangles» d'angles

$$(126) \quad \left\{ \frac{\pi}{n+1}, -\frac{\pi}{n+1}, 1 \right\}, \quad n > 0$$

et les courbes intégrales des champs de vecteurs holomorphes définis par les formes normales dites de GHYS-REBELO, que nous définissons plus loin.

Dans la section 1.4.2 du chapitre 1 nous avons introduit la notion de surface de VEECH. L'aspect principal de ce type de surface de translation est le comportement de son flot géodésique : pour une direction, soit (1) toute géodésique en dehors de celles joignant 2 zéros de la 1-forme ω est fermée et donc la surface (S, ω) admet une décomposition en cylindres constitués d'orbites périodiques, soit (2) toute géodésique se distribue uniformément par rapport à la mesure (de Lebesgue) de la surface. On dit communément que les géodésiques de la surface de translation satisfont la *dichotomie de VEECH*.

Il existe deux types de surfaces de VEECH, celles qui sont *arithmétiques* et celles qui ne le sont pas.

DÉFINITION 25. [19] *Une surface de translation de VEECH (S, ω) est dite arithmétique si, et seulement si, son groupe de VEECH $SL(S, \omega)$ et $SL(2, \mathbb{Z})$ sont commensurables.*

Une condition équivalente à celle de la définition précédente est que la surface (S, ω) soit un revêtement ramifié d'un tore $T_\tau := (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}, dz)$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dont la projection respecte la structure de translation de (S, ω) et envoie les points de ramification sur des points de torsion de T_τ . Par exemple, les surfaces de translation engendrées par les triangles d'angles :

$$(127) \quad \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}, \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

sont arithmétiques.

DÉFINITION 26. [56] *On dit qu'une surface de translation (S, ω) satisfait la dichotomie topologique si, pour toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, soit (1) toute géodésique en dehors de celles joignant des zéros de la 1-forme ω est fermée et la surface (S, ω) admet une décomposition en cylindres constitués d'orbites fermées, soit (2) toute géodésique est dense dans la surface S , c'est-à-dire que le flot géodésique dans la direction θ est minimal.*

Cette définition se traduit au niveau des feuilletages par la :

DÉFINITION 27. Soit $\mathcal{F}_X$ un feuilletage de $\mathbb{C}^2$ défini par un champ de vecteurs holomorphe X et $\mathcal{F}_{X,\theta}$ le feuilletage réel de $\mathbb{C}^2$ défini par les courbes intégrales de $\operatorname{Re}(e^{i\theta}X)$. Nous dirons qu'une feuille $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_X$ satisfait la dichotomie topologique si, pour toute direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

1: Soit toutes les feuilles réelles de $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{X,\theta}|_{\mathcal{L}})$, en dehors de celles ayant ses «extrémités» dans un point singulier de X , sont périodiques. Dans ce cas la feuille $\mathcal{L}$ admet une décomposition en cylindres invariants par $\mathcal{F}_\theta$;

2: Soit le feuilletage réel $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_{X,\theta}|_{\mathcal{L}})$ est minimal.

Tout feuilletage polygonal dont le polygone associé est un triangle engendrant une surface de translation de VEECH satisfait la dichotomie topologique.

THÉORÈME 17. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage holomorphe homogène quadratique à singularités isolées et cône tangent réduit tel que le paramètre $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ soit de l'une des formes

$$(128) \quad \begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{n}, \frac{n-1}{2n}, \frac{n-1}{2n} \right\}, \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12} \right\}, \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12} \right\}, \left\{ \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9} \right\}, n \geq 3, \\ & \left\{ \frac{1}{2n}, \frac{1}{n}, \frac{(2n-3)}{2n} \right\}, \left\{ \frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+2}, \frac{n}{n+1} \right\}, \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12} \right\}, n \in \mathbb{N}, \\ & \left\{ \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{q}{m} \right\} \text{ avec } 1 < q, 4 \leq m, \\ & \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, \frac{n-2}{2n} \right\}, n \geq 4. \end{aligned}$$

Alors toute feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ satisfait la dichotomie topologique.

Ce résultat correspond à la liste de tous les triangles connus qui engendrent une surface de VEECH. Le lemme suivant entraîne que, quand le feuilletage polygonal $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ a un polygone associé P tel que la surface de translation $S(P)$ est de VEECH, les feuilletages réels $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_\theta|_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ et $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, sont génériquement minimaux.

PROPOSITION 9. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ fixée, alors le sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ formé par la réunion des feuilles de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ contenant une orbite périodique de $\mathcal{F}_\theta$ est de mesure nulle.

En effet, l'ensemble des directions dans le fibré tangent unitaire d'une surface de translation, compacte ou non, pour lesquelles le flot géodésique a une orbite périodique est au plus dénombrable [46].

Nous remarquons qu'il existe des feuilletages holomorphes polygonaux satisfaisant la dichotomie topologique mais pour lesquels la surface de translation associée n'est pas une surface de VEECH. En effet, d'après les travaux de P. HUBERT et T. SCHMIDT [23], la surface de translation engendrée par le triangle d'angles $(\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5})$ n'est pas une surface de VEECH, mais ses géodésiques satisfont la dichotomie. Il n'existe pas de caractérisation de toutes les surfaces de Veech, cependant,

THÉORÈME 18. [35],[4]. *Une surface de translation de genre 2 est de VEECH si, et seulement si, ses géodésiques satisfont la dichotomie de VEECH.*

Dans le cas où λ est rationnel la formule de RIEMANN-HURWITZ permet de calculer le genre des feuilles.

PROPOSITION 10. *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage holomorphe de $\mathbb{C}^2$ dont le paramètre*

$$(129) \quad \lambda = \left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_3}{q_3} \right) \in \mathbb{Q}^3$$

satisfait $(p_j, q_j) = 1$ et représente les angles d'un triangle. Soit $N = \text{ppcm}(q_1, \dots, q_3)$ et $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ générique. Alors le genre arithmétique de $\overline{\mathcal{L}}$ est donné par la formule

$$(130) \quad g(\mathcal{L}) = 1 + \frac{N}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^3 \frac{1}{q_j} \right)$$

DÉMONSTRATION. Dans les coordonnées homogènes (z_1, z_2) de $\mathbb{C}^2$, la feuille générique de $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est donné par l'équation

$$(131) \quad z_1^{\frac{p_1}{q_1}} z_2^{\frac{p_2}{q_2}} (z_2 - z_1)^{\frac{p_3}{q_3}} = k, \quad k \in \mathbb{C}.$$

Lorsqu'on se place dans les coordonnées $z_2 = tz_1$ de l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ l'équation (131) définit un revêtement ramifié à N feuillets du diviseur exceptionnel E . Une application directe de la formule de RIEMANN-HURWITZ donne (130). $\square$

Remarque. La formule (130) coïncide avec celle qui donne le genre de la surface de translation engendrée par le triangle d'angles $\{\frac{p_1}{q_1}\pi, \dots, \frac{p_3}{q_3}\pi\}$ [46]. C'est une façon facile de la retrouver. Nous constatons que l'exemple de Hubert-Schmidt est une surface de genre 2.

2.2.1. Surfaces de VEECH arithmétiques et champs semi-complets.

Soit Y un germe de champ de vecteurs holomorphe de $\mathbb{C}^2$ à singularité isolée en 0. Dans [13] GHYS et REBELLO introduisent la notion de champ semi-complet.

Un germe de champ holomorphe Y à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est semi-complet dans un ouvert U relativement compact s'il existe une application holomorphe, appelée *flot semi-global associé au champ*,

$$(132) \quad \Phi_{\mathcal{X}} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{C} \times U \longrightarrow U, \quad \tilde{U} \text{ ouvert},$$

telle que

- (1) $\frac{\partial}{\partial T} \Phi_{\mathcal{X}}(T, x)|_{T=0} = \mathcal{X}(x)$ pour tout x de $\tilde{U}$.
- (2) $\Phi_{\mathcal{X}}(T_2 + T_1, x) = \Phi(T_2, \Phi(T_1, x))$ dès que chaque membre de cette équation est défini.
- (3) Pour toute suite $\{(T_i, x)\}$ dans $\tilde{U}$ qui converge vers un point $(T, x) \in \partial \tilde{U}$ on a $\Phi_{\mathcal{X}}(T_i, x) \longrightarrow \Phi_{\mathcal{X}}(T, x) \in \partial \tilde{U}$.

Supposons que le premier jet de Y en la singularité soit nilpotent, éventuellement nul. Alors, d'après [13], au voisinage de l'origine, le germe de feuilletage défini par Y , que nous notons $\mathcal{F}_Y$, est holomorphiquement conjugué à l'un des feuilletages définis par les champs suivants

- (1) $X_{1,1,1} := z_1(z_1 - 2z_2)\partial/\partial z_1 + z_2(z_2 - 2z_1)\partial/\partial z_2,$
- (2) $X_{1,1,2} := z_1(z_1 - 3z_2)\partial/\partial z_1 + z_2(z_2 - 3z_1)\partial/\partial z_2,$
- (3) $X_{1,2,3} := z_1(2z_1 - 5z_2)\partial/\partial z_1 + z_2(z_2 - 4z_1)\partial/\partial z_2,$
- (4) $X_{n+1,1,-1} := z_1^2\partial/\partial z_1 - z_2(nz_1 - (n+1)z_2)\partial/\partial z_2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$
- (5) $Y_{1,1,2} := (2z_2 - z_1^2)\partial/\partial z_1 + 2z_1z_2\partial/\partial z_2,$
- (6) $Y_{1,2,3} := (3z_2 - z_1^2)\partial/\partial z_1 + 4z_1z_2\partial/\partial z_2,$
- (7) $Z_{1,2,3} := 2z_2\partial/\partial z_1 - 3z_1^2\partial/\partial z_2.$

DÉFINITION 28. *Nous appelons les champs de cette liste formes normales de GHYS-REBELO des champs semicomplets à singularités isolées et premier jet nilpotent.*

Bien évidemment les 4 premiers champs correspondent au cas d'un premier jet nilpotent *trivial* et les 3 derniers au cas nilpotent *non-trivial*. Nous remarquons

que les applications multivaluées

$$\begin{aligned}
 (1) \ F_{X_{1,1,1}}(z_1, z_2) &= z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} (z_1 - z_2)^{\frac{1}{3}}, \quad (2) \ F_{X_{1,1,2}}(z_1, z_2) = z_1^{\frac{1}{4}} z_2^{\frac{1}{4}} (z_1 - z_2)^{\frac{1}{2}}, \\
 (3) \ F_{X_{1,2,3}}(z_1, z_2) &= z_1^{\frac{1}{6}} z_2^{\frac{1}{3}} (z_1 - z_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4) \ F_{X_{n+1,1,-1}}(z_1, z_2) = \frac{z_1^{n+1} z_2}{z_2 - z_1}, \\
 (133) \quad (5) \ F_{Y_{1,1,2}}(z_1, z_2) &= z_2(z_2 - z_1^2), \quad (6) \ F_{Y_{1,2,3}}(z_1, z_2) = z_2(z_2 - z_1^2)^2, \\
 (7) \ F_{Z_{1,2,3}}(z_1, z_2) &= z_1^3 + z_2^2
 \end{aligned}$$

sont des intégrales premières pour les feuilletages holomorphes définis par les formes normales de GHYS-REBELO (1)-(7) respectivement.

Remarque. On voit facilement que (1), (2) et (3) définissent des feuilletages de type $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dont la feuille est d'adhérence une courbe elliptique dans $\mathbb{CP}(2)$. Notons $\mathcal{F}_{Y,\theta}$ le feuilletage réel de l'espace affine défini par les courbes intégrales du champ de vecteurs analytique réel $Re(e^{i\theta}Y)$, $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Une application directe du dictionnaire établi précédemment (cf. §2) montre que tout feuilletage réel

$$(134) \quad (1) \ \mathcal{F}_{X_{1,1,1},\theta} \quad (2) \ \mathcal{F}_{X_{1,1,2},\theta} \quad (3) \ \mathcal{F}_{X_{1,2,3},\theta},$$

$\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, restreint à une feuille générique des feuilletages holomorphes définis par (1), (2) et (3) est analytiquement conjugué à un feuilletage géodésique des surfaces de translation de VEECH arithmétiques engendrées par les triangles d'angles $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$, $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ et $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\}$ respectivement.

Suivant la proposition 2.3 et la remarque 2.4 dans [13], nous déduisons que tout feuilletage réel

$$(135) \quad (5) \ \mathcal{F}_{Y_{1,1,2},\theta} \quad (6) \ \mathcal{F}_{Y_{1,2,3},\theta} \quad (7) \ \mathcal{F}_{Z_{1,2,3},\theta}.$$

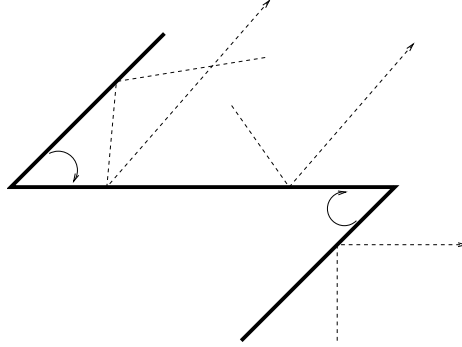
$\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, restreint à une feuille générique des feuilletages holomorphes définis par (5), (6) et (7) est analytiquement conjugué à un feuilletage géodésique des surfaces de translation de VEECH arithmétiques engendrées par les triangles d'angles $\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$, $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\}$ et $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\}$ respectivement.

Par ailleurs, en utilisant l'intégrale première (4), nous voyons que le champ dans l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ défini par le champ de l'espace affine $X_{n+1,1,-1}$ est rectifié localement par un relevé (cf. preuve, théorème 8) de la transformation de

SCHWARZ-CHRISTOFFEL

$$(136) \quad t \rightsquigarrow \int_*^t \xi^{\frac{1}{n+1}-1} (\xi - 1)^{\frac{1}{n+1}-1} d\xi.$$

Cela entraîne que la feuille générique du feuilletage $\mathcal{F}_{X_{n+1,1,-1}}$ est biholomorphe à la surface de translation engendrée par le triangle dégénéré d'angles $\{\frac{\pi}{n+1}, -\frac{\pi}{n+1}, 1\}$.



Trajectoires du billard sur le triangle
d'angles $\{\frac{\pi}{n+1}, -\frac{\pi}{n+1}, 1\}$.

Indépendamment de la direction choisie, toute trajectoire non singulière du billard dans un tel triangle part à l'infini. Nous en déduisons que, à l'inverse des cas précédents, les feuilles de $\mathcal{F}_{X_{n+1,1,-1}}$ ne satisfont pas la dichotomie topologique.

2.3. Feuilletages dans $\mathbb{RP}(3)$ et billards polygonaux.

Dans ce chapitre nous donnons une interprétation des feuilletages réels des espaces projectifs $\mathbb{RP}(3)$ et $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$ associés au feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ en termes du billard sur un polygone (cf. §1, 2.2.4).

2.3.1. Le dictionnaire dans $\mathbb{RP}(3)$.

Nous rappelons que quand le paramètre λ est non fortement résonnant les feuilles génériques des feuilletages $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ et $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ sont isomorphes. De plus, la surface feuilletée $(\mathcal{L}, \mathcal{F}_\theta|_{\mathcal{L}})$ est conjuguée par la projection canonique $\Pi_{\mathbb{RP}(3)} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{RP}(3)$ à son image $(\Pi_{\mathbb{RP}(3)}(\mathcal{L}), \mathcal{G}_\theta|_{\Pi_{\mathbb{RP}(3)}(\mathcal{L})})$. Ceci dit, comme conséquence du théorème 9 (cf. §2), nous avons le suivant :

COROLLAIRE 13. *Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal tel que le polygone associé soit raisonnable et λ soit non fortement résonnant. Alors,*

i: Pour toute direction fixée $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ il existe une feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{G}_{a,\lambda}$ telle que la surface abstraite $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$.

ii: Pour toute feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{G}_{a,\lambda}$ il existe une direction $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface feuilletée $(S(P), \mathcal{D}_{\theta'})$.

Quitte à faire agir une «homothétie» de $\mathbb{RP}(3)$ (induite par une homothétie de $\mathbb{C}^2$) le résultat précédent reste valide lorsqu'on change $\mathcal{G}_0$ en $\mathcal{G}_\theta$. Nous formulons dans le prochain énoncé, en termes du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$, le principe de variation du paramètre directionnel θ établi dans §1, 1.3.

NOTATION 2. Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{G}_{a,\lambda}$ et $k \in \mathbb{C}^*$. Nous notons $k\mathcal{L} \in \mathcal{G}_{a,\lambda}$ l'image de la projection sur $\mathbb{RP}(3)$ de l'homothétie de $\mathbb{C}^2$

$$(z_1, z_2) \rightsquigarrow k(z_1, z_2),$$

restreinte à la feuille $\mathcal{L}$.

COROLLAIRE 14. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal de degré ν tel que le polygone associé P soit raisonnable et λ soit non fortement résonnant. Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{G}_{a,\lambda}$ générique et supposons que la feuille $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{0|\mathcal{L}})$ est analytiquement conjuguée à la surface de translation $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ pour une certaine direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la feuille $(e^{i\theta'}\mathcal{L}, \mathcal{G}_{0|e^{i\theta'}\mathcal{L}})$ est analytiquement conjuguée à $(S(P), \mathcal{D}_{\theta+(\nu-1)\theta'})$

Remarque. Quitte à faire le quotient de $\mathbb{RP}(3)$ par un groupe fini «d'homothéties», les corollaires 13 et 14 restent vrais pour les feuilletages polygonaux $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ dont le polygone associé est non admissible mais dont le paramètre λ reste non fortement résonnant. Effectivement, considérons le sous-groupe «d'homothéties» de $\mathbb{RP}(3)$ induit par le sous-groupe d'homothéties de $\mathbb{C}^2$

$$(137) \quad (z_1, z_2) \rightsquigarrow k(z_1, z_2),$$

où k est une racine de l'unité dans H_λ . Notons $\mathbb{RP}(3)_\lambda := \mathbb{RP}(3)/H_\lambda$ le quotient de l'espace projectif par l'action naturelle de ce sous-groupe d'homothéties ; il s'agit d'une surface lisse, compacte et réglée (fibration en droites projectives réelles). Nous rappelons que le feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ est invariant par «homothéties» de $\mathbb{RP}(3)$. En particulier, $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ induit un feuilletage $\widehat{\mathcal{G}_{a,\lambda}}$ sur $\mathbb{RP}(3)_\lambda$ qui est transverse à la fibration de cette surface réglée en dehors de la projection des cercles singuliers $\mathcal{C}_j$, $j = 1, \dots, \nu + 1$. C'est dans le cadre des feuilletages $\widehat{\mathcal{G}_{a,\lambda}}$ (et λ non fortement résonnant) que les corollaires 13 et 14 restent vrais.

Cas $\lambda \in A_{\mathbb{R}}$ fortement résonnant et $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ polygonal quadratique. Dans les paragraphes ci-dessous nous donnons un sens au dictionnaire établi dans §2 lorsque le paramètre λ est réel fortement résonnant et le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est polygonal et de degré $\nu = 2$. Nos arguments servent de base pour l'analyse du cas général, que nous ne traiterons pas, $\nu > 2$ et λ fortement résonnant.

Considérons un feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ de degré $\nu = 2$ polygonal dont la figure associé est un triangle P et supposons que le paramètre λ est fortement résonnant. Nous rappelons que dans ce cas le groupe d'holonomie du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ contient l'homothétie $z \rightsquigarrow -z$ et la feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$ est un revêtement double de sa projection sur $\mathbb{RP}(3)$ (cf. §1, 2).

En termes de la surface de translation engendrée par le triangle P (d'angles $\{\lambda_j \pi\}_{j=1}^3$) la résonnance forte du paramètre λ entraîne que le groupe d'isométries $\mathcal{H}(P)$ (cf. §1, 1.1) contient des éléments de la forme

$$(138) \quad z \rightsquigarrow -z + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

DÉFINITION 29. Nous appelons les isométries du plan $z \rightsquigarrow -z + c$, $c \in \mathbb{C}$, demi-translations.

Si dans la construction de la surface de translation $S(P)$ à partir du polygone P on identifie les polygones dans la famille $\mathcal{P}$ qui diffèrent par une translation ou une demi-translation, on obtient une surface réelle dont les changements de coordonnées sont des translations ou demi-translations [29]. On note une telle surface $S_{1/2}(P)$ et on l'appelle la surface de demi-translation engendrée par le polygone P . Clairement, on peut parler du feuilletage géodésique de $S_{1/2}(P)$ défini par la direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; nous le notons également $\mathcal{D}_\theta$.

Nous remarquons que le produit dans $Isom_+(\mathbb{R}^2)$ de deux demi-translations est une translation. Le carré d'une demi-translation est $Id_{\mathbb{R}^2}$. Cela entraîne que $S(P)$ est un revêtement double de $S_{1/2}(P)$. En changeant ce qu'il faut changer dans la preuve du théorème 8 cf. §2 nous avons le suivant :

COROLLAIRE 15. Soit $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ un feuilletage polygonal de degré 2 dont le paramètre λ est fortement résonnant. Soit P le triangle associé à $\mathcal{F}_{a,\lambda}$. Alors,

- i: Pour toute direction fixée $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ il existe une feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{G}_{a,\lambda}$ telle que la surface abstraite $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface de demi-translation $(S_{1/2}(P), \mathcal{D}_\theta)$;

ii: Pour toute feuille générique $\mathcal{L} \in \mathcal{G}_{a,\lambda}$ il existe une direction $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ telle que $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{0|\mathcal{L}})$ soit analytiquement conjuguée à la surface de demi-translation $(S_{1/2}(P), \mathcal{D}_{\theta'})$.

2.3.2. Trajectoires singulières du billard dans $\mathbb{RP}(3)$.

Dans cette section nous analysons le comportement des feuilles de $\mathcal{G}_\theta$ et $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ correspondant à une trajectoire singulière du billard. Nous supposons tout au long de cette section que le feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$, auquel nous associons $\mathcal{G}_\theta$ et $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$, est (polygona)l quadratique.

Nous reprenons le langage et les notations des section §2.2.1 et §2.2.4 du chapitre 1. Tout au long de cette section le paramètre λ est supposé réel et non fortement résonnant.

DÉFINITION 30. Nous dirons qu'une feuille générique $\mathcal{L}$ du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ munie du feuilletage réel $\mathcal{G}_{\theta'|\mathcal{L}}$, $\theta' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, représente le jeu de billard sur le polygone P dans la direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ si, et seulement si, la surface $(S(P), \mathcal{D}_\theta)$ est conjuguée à la surface feuilletée $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\theta'|\mathcal{L}})$.

DÉFINITION 31. Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\theta'|\mathcal{L}})$ générique représentant le jeu de billard sur le polygone P dans une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\tilde{f} : \mathcal{L} \rightarrow S(P)$ le biholomorphisme qui conjugue $\mathcal{G}_{\theta'|\mathcal{L}}$ au feuilletage géodésique $\mathcal{D}_\theta$ de $S(P)$. Nous dirons qu'une feuille réelle $l \in (\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\theta'|\mathcal{L}})$ représente la trajectoire du billard $l' \subseteq P$ si, et seulement si, la projection de $\tilde{f}(l)$ au polygone via $\Pi_P : S(P) \rightarrow P$ est l' .

Nous remarquons que, si une feuille générique $\mathcal{L}$ du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ munie de la restriction du feuilletage $\mathcal{G}_0$ représente le jeu du billard dans une direction $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, alors toute trajectoire du billard dans le polygone associée à $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ est représenté par une feuille dans $\mathcal{G}_0$.

LEMME 4. Toute feuille du feuilletage réel $\mathcal{G}_\theta$ représentant une trajectoire singulière du billard est contenue dans $\mathcal{V}$ (cf. §1, (72) §2.2.5).

DÉMONSTRATION. Nous nous plaçons dans le cas $\theta = 0$. Vu que le paramètre λ est non fortement résonnant, nous pouvons supposer que la feuille $l \in \mathcal{G}_0$

représentant une trajectoire singulière du billard est contenue dans une feuille $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_{a,\lambda}$. Dans la preuve de la proposition 8 nous avons constaté que ce type de feuilles ont comme extrémité, dans $\widetilde{\mathbb{CP}(2)}$, un point de la droite à l'infini de la forme $L_\infty \cap \widetilde{d}_j$ où d_j est une des droites invariantes du feuilletage $\mathcal{F}_{a,\lambda}$ passant par l'origine de $\mathbb{C}^2$ (cf. §2, 2.1.1).

Soit $\gamma : [0, +\infty[\longrightarrow \widetilde{\mathbb{CP}(2)}$ une paramétrisation de l pour laquelle $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = L_\infty \cap \widetilde{d}_j$ et :

$$(139) \quad \tilde{\gamma} : [0, +\infty[\longrightarrow \widetilde{\mathbb{RP}(3)}$$

la paramétrisation de l en tant que feuille de $\widetilde{\mathcal{G}}_0$ induite par γ . Alors il existe, pour tout voisinage suffisamment petit $\mathcal{U}$ du tore $\mathbb{T}^2(\mathcal{C}_j)$, un instant $0 < M = M(\mathcal{U}) < \infty$ tel que $\tilde{\gamma}(s) \in \mathcal{U}$ pour tout $s > M$. On déduit de §1, 2.2.6 que l , en tant que feuille de $\widetilde{\mathcal{G}}_0$, a comme extrémité un point du le cercle singulier $\widetilde{p}_j$ et, ainsi, en tant que feuille du feuilletage $\mathcal{G}_0$ la feuille l a comme extrémité le point singulier p_j . □

Cette proposition entraîne les faits suivants :

COROLLAIRE 16. *Toute feuille du feuilletage $\mathcal{G}_\theta$ représentant une diagonale généralisée du billard joignant deux sommets distincts est contenue dans $\mathcal{W}_{i,j}$ (cf. (72) §1, 2.2.5), pour une certaine paire $i \neq j$.*

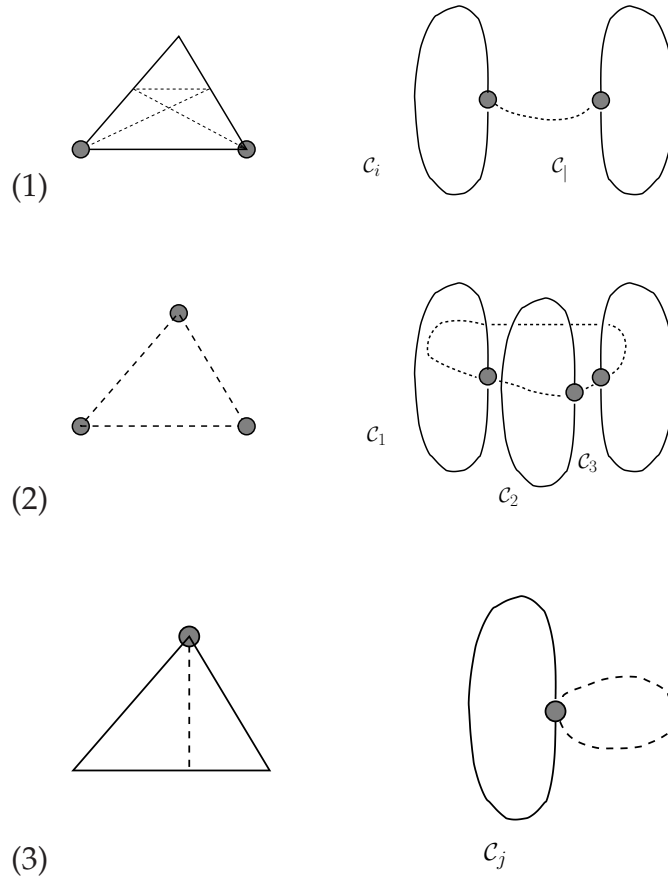
COROLLAIRE 17. *Toute feuille du feuilletage $\mathcal{G}_\theta$ représentant une diagonale généralisée du billard joignant un sommet à lui-même est contenue dans $\mathcal{W}_j$ (cf. (73) §1 2.2.5) pour un certain j .*

Autrement dit, les diagonales généralisées du billard polygonal donnent lieu à des feuilles homoclines et hétéroclines (cf. déf. 14, §1, 2.2.5) du feuilletage $\mathcal{G}_\theta$. Par exemple,

- (1) Une diagonale contenue dans le bord du cylindre maximal défini par la trajectoire du FAGNANO est représenté par une feuille hétérocline de $\mathcal{G}_\theta$;
- (2) Le cercle invariant $\Pi_{\mathbb{RP}(3)}(\{y_1 = y_2 = 0\})$ privé des points singuliers p_1, p_2 et p_3 représente les trajectoires du billard contenues dans les côtés du

triangle ;

- (3) Toute hauteur dans un triangle contenu dans l'intérieur du triangle est représenté par une feuille homocline de $\mathcal{G}_\theta$.



L'ensemble des diagonales généralisées d'un billiard sur un polygone arbitraire aboutissant sur un sommet fixé est dénombrable [33]. La discussion précédente entraîne trivialement le théorème suivant :

THÉORÈME 19. *Pour tout paire $i \neq j$ dans $\{1, 2, 3\}$ l'ensemble*

$$(140) \quad \mathcal{W}_{i,j} \setminus \{p_i, p_j\},$$

(cf. (72) §1, 2.2.5), *admet un ensemble dénombrable de composantes connexes.*

En particulier, les variétés stables locales $\mathcal{V}(p_j)$ du feuilletage $\mathcal{G}_\theta$ ne se recollent pas en une variété invariante globale.

Vu que le feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ est isomorphe à $\mathcal{G}_\theta$ en dehors des tores $\mathbb{T}^2(C_j)$ le discours précédent s'étend naturellement à l'espace éclaté $\widetilde{\mathbb{RP}(3)}$.

DÉFINITION 32. *Nous dirons qu'une feuille réelle $l \in \tilde{\mathcal{G}}_\theta$ représente la trajectoire du billard $l' \in (\Sigma_\theta, B_\theta)$ si, et seulement si, $\text{ÉCL}_C(l) \in \mathcal{G}_\theta$ le fait.*

Nous avons trivialement les suivants :

COROLLAIRE 18. *Toute feuille du feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ représentant une trajectoire singulière du billard est contenue dans $\tilde{\mathcal{V}}$ (cf. (79) §1, 2.2.6).*

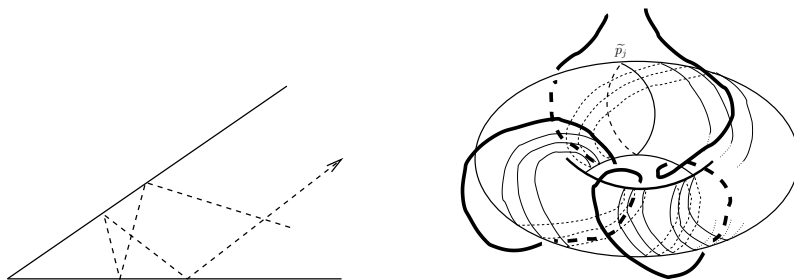
COROLLAIRE 19. *Toute feuille du feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ représentant une diagonale généralisée du billard joignant deux sommets distincts est contenue dans $\widetilde{\mathcal{W}}_{i,j}$ (cf. (79) §1, 2.2.6), pour une certaine paire $i \neq j$.*

COROLLAIRE 20. *Toute feuille du feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ représentant une diagonale généralisée du billard joignant un sommet à lui-même est contenue dans $\widetilde{\mathcal{W}}_j$ (cf. (79) §1, 2.2.6) pour un certain j .*

Remarque. Il existe un parallélisme entre le comportement du feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ dans un voisinage d'un tore $\mathbb{T}^2(C_j)$ et celui des trajectoires du billard au voisinage d'un sommet. En effet, nous rappelons que, dans un voisinage suffisamment petit de $\mathbb{T}^2(C_j)$ (privé de $\mathbb{T}^2(C_j)$), toute feuille de $\tilde{\mathcal{G}}_\theta$ a une extrémité dans le cercle singulier $\tilde{p}_j$ ou bien «s'échappe» du voisinage en question en un temps fini (cf. §1, 2.2.6). Vu que la restriction du feuilletage $\mathcal{G}_{a,\lambda}$ au tore $\mathbb{T}^2(C_j)$ est un feuilletage en droites, chacune des feuilles «s'échappant» d'un voisinage suffisamment petit de $\mathbb{T}^2(C_j)$ «tourne autour» de ce tore en faisant un nombre de «tours» qui est borné par une quantité qui dépend uniquement de l'exposant λ_j . D'un autre côté, toute trajectoire du billard dans un voisinage d'un sommet du polygone ou bien rencontre ce sommet, ou bien, après un nombre fini de réflexions sur les côtes définissant le sommet, «s'échappe» du voisinage en question. Le nombre de réflexions est borné par une quantité qui dépend uniquement de l'exposant λ_j [46].

Peu ou prou, le nombre de réflexions que fait la trajectoire du billard avant de «s'échapper» d'un voisinage du sommet correspond au nombre de tours que fait la feuille de $\mathcal{G}_\theta$ représentant la trajectoire du billard avant de «s'échapper» d'un voisinage du tore $\mathbb{T}^2(C_j)$. Essayons de clarifier ces explications grâce au moyen de

la figure :



Près d'un sommet, la trajectoire du billard réfléchit pendant que la feuille de $\widetilde{G}_0$ «tourne».

CHAPITRE 3

La transformation orthique

1. Généralités

Dans cette section nous étudions la transformation qui associe à chaque triangle son *triangle orthique*, c'est-à-dire le triangle dont les sommets correspondent aux pieds des hauteurs. Nous appelons cette transformation de l'espace des triangles la *transformation orthique*.

1.1. Domaine de définition.

L'espace de modules des triangles est le domaine naturel de la transformation orthique et il peut être décrit de plusieurs façons différentes.

Considérons le triplet ordonné $\hat{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ et notons $\Delta(z_1, z_2, z_3) \subset \mathbb{C}$ le triangle de sommets $\{z_1, z_2, z_3\}$.

DÉFINITION 33. Nous dirons que $\Delta(z_1, z_2, z_3)$ est non dégénéré si, et seulement si, les points z_1, z_2, z_3 sont en position générale dans le plan $\mathbb{C}$. Dans les autres cas, le triangle est dit dégénéré. Un triangle dégénéré ayant ses trois sommets distincts est dit plat ; tout triangle dégénéré non plat est dit singulier. Deux triangles sont dits semblables si, et seulement si, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. Pour tout point $\hat{z} = (z_1, z_2, z_3)$ nous notons

$$(141) \quad \text{Sem}(\hat{z}) := \{\hat{z}' \in \mathbb{C}^3 \mid \Delta(\hat{z}) \text{ est semblable à } \Delta(\hat{z}')\}$$

l'ensemble des triangles semblables à $\Delta(\hat{z})$.

La relation d'équivalence $\hat{z} \sim \hat{z}'$ si, et seulement si, $\Delta(\hat{z})$ est semblable à $\Delta(\hat{z}')$ induit une partition de $\mathbb{C}^3$. Décrivons les classes d'équivalence

Considérons l'action sur $\mathbb{C}^3$ du groupe affine de la droite complexe

$$(142) \quad Aff(\mathbb{C}) = \{z \rightsquigarrow az + b \mid a \neq 0\},$$

définie par

$$(143) \quad \varphi(az + b, (z_1, z_2, z_3)) := (az_1 + b, az_2 + b, az_3 + b),$$

et celle du groupe symétrique S_3 engendrée par les permutations

$$(144) \quad (z_1, z_2, z_3) \rightsquigarrow (z_1, z_3, z_2), \quad (z_1, z_2, z_3) \rightsquigarrow (z_2, z_1, z_3),$$

que nous noterons φ_{S_3} . Nous notons $Aff(\mathbb{C})(\hat{z})$ et $S_3(\hat{z})$ l'orbite d'un point sous l'action φ et φ_{S_3} respectivement. La classe d'équivalence $Sem(\hat{z})$ est formée par la réunion de $Aff(\mathbb{C})(\hat{z})$, de $S_3(\hat{z})$ et de leurs images *via* l'involution antiholomorphe

$$(145) \quad (z_1, z_2, z_3) \rightsquigarrow (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3})$$

1.1.1. Connexion avec le feuilletage «exceptionnel» de $\mathbb{CP}(3)$.

Si on fait abstraction de l'ordre des sommets, se donner un triangle revient à se donner un polynôme $P(X)$ de degré trois à coefficients complexes dont les racines sont justement les sommets du triangle. Dans une carte affine

$$(146) \quad P(X) := X^3 + w_1 X^2 + w_2 X + w_3$$

Considérons l'action du groupe $Aff(\mathbb{C})$ sur l'espace de polynômes de degré trois à coefficients complexes

$$(147) \quad \hat{\varphi}(P(X), az + b) \rightsquigarrow P((az + b)^{-1})$$

Remarque. Si les racines du polynôme $P(X)$ sont $\{z_j\}_{j=1}^3$, alors les racines de $\hat{\varphi}(P(X), az + b)$ sont $az_j + b$.

PROPOSITION 11. *Les orbites de l'action $\hat{\varphi}$ définissent un feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ de l'espace (affine) des coefficients $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$. Le lieu singulier de ce feuilletage est la cubique gauche*

$$(148) \quad \mathbb{C} \ni t \rightsquigarrow (3t, 3t^2, t^3)$$

et $\mathcal{F}$ a comme intégrale première

$$(149) \quad F(w_1, w_2, w_3) = \frac{(54w_3 - 18w_1w_2 + 4w_1^3)^2}{(972w_2 - 124w_1^2)^3}$$

DÉMONSTRATION. En considérant les transformations dans $Aff(\mathbb{C})$

$$(150) \quad z \rightsquigarrow e^t z, \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$(151) \quad z \rightsquigarrow z + k, \quad k \in \mathbb{C},$$

nous constatons que l'action $\hat{\varphi}$ est engendrée par les champs de vecteurs holomorphes

$$(152) \quad w_1 \partial / \partial w_1 + 2w_2 \partial / \partial w_2 + 3w_3 \partial / \partial w_3$$

et

$$(153) \quad 3\partial / \partial w_1 + 2w_2 \partial / \partial w_2 + 3w_3 \partial / \partial w_3.$$

Alors, l'homothétie

$$(154) \quad w'_1 = w_1/3, \quad w'_2 = w_2/6, \quad w'_3 = w_3/6$$

envoie (152) et (153) sur les champs

$$(155) \quad X := w'_1 \partial / \partial w'_1 + 2w'_2 \partial / \partial w'_2 + 3w'_3 \partial / \partial w'_3$$

et

$$(156) \quad Y := \partial / \partial w'_1 + w'_2 \partial / \partial w'_2 + w'_3 \partial / \partial w'_3$$

respectivement. Les champs de vecteurs (155) et (156) définissent un feuilletage $\mathcal{F}'$ singulier de l'espace affine $\mathbb{C}^3$ étudié dans [7]. Le lieu singulier de ce feuilletage est la cubique gauche

$$(157) \quad \mathbb{C} \ni t \rightsquigarrow (t, t^2/2, t^3/3)$$

et

$$(158) \quad F'(w_1, w_2, w_3) = \frac{(w_3 - w_1w_2 + \frac{w_1^3}{3})^2}{(w_2 - \frac{w_1^2}{2})^3}$$

est une intégrale première pour $\mathcal{F}'$. On obtient F en composant F' par une homothétie *ad hoc*.

□

Remarque. Suivant [7], nous notons $\overline{\mathcal{F}'}$ l'extension du feuilletage $\mathcal{F}'$ à $\mathbb{CP}(3)$. L'espace des feuilletages de degré 2 de $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$, a six composantes irréductibles dont une, appelée exceptionnelle, est formée des feuilletages de la forme $\Phi^*(\overline{\mathcal{F}'})$ où

$$\Phi : \mathbb{CP}(n) \longrightarrow \mathbb{CP}(3)$$

est une projection linéaire.

Nous notons également $\overline{\mathcal{F}}$ l'extension du feuilletage $\mathcal{F}$ à $\mathbb{CP}(3)$. Pour établir la connexion entre l'espace de modules des triangles et le feuilletage «exceptionnel» $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathbb{CP}(3)$ nous associons à chaque point $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ le polynôme dont les racines sont justement z_1 , z_2 et z_3 . Nous dirons que ce polynôme est «l'image» du point $\hat{z} \in \mathbb{C}^3$ dans l'espace de polynômes de degré 3. D'après la discussion précédente, l'image des points de la classe d'équivalence $Sem(\hat{z})$ dans l'espace de polynômes est formée par l'orbite sous l'action (147) de

$$(159) \quad P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$$

et

$$(160) \quad Q(X) = (X - \overline{z_1})(X - \overline{z_2})(X - \overline{z_3})$$

En particulier, $\mathcal{F}$ est invariant par la conjugaison antiholomorphe. Ceci dit, nous constatons que

- Si $\Delta(\hat{z})$ est un triangle non dégénéré, l'image des points de $Sem(\hat{z})$ est formé par deux feuilles distinctes de $\overline{\mathcal{F}}$.
- Si $\Delta(\hat{z})$ est un triangle dégénéré, l'image des points de $Sem(\hat{z})$ dans l'espace de polynômes est formé par une seule feuille de $\overline{\mathcal{F}}$. Effectivement, quitte à faire agir un élément de $Aff(\mathbb{C})$, nous pouvons supposer que les racines de $P(X)$ sont réelles. Dans ce cas les orbites de (159) et (160) coïncident. En particulier, nous remarquons que les points de $Sem((0, 0, 0))$ ont comme image la cubique gauche $t \rightsquigarrow (3t, 3t^2, t^3)$.

1.2. L'application orthique en coordonnées locales, propriétés.

Pour ce qui nous intéresse, nous allons travailler avec des triangles ayant comme sommets les points

$$(161) \quad \{0, 1, z\}, \quad z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Ce triplet représente le choix de normalisation d'un côté du triangle compris entre deux sommets z_i et z_j , $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$(162) \quad z_i = 0, \quad z_j = 1, \quad z = \frac{z_k - z_i}{z_j - z_i}.$$

Nous appellerons désormais (161) une *carte de l'espace des triangles* et nous notons $\Delta(z)$ le triangle de sommets $\{0, 1, z\}$. Considérons les transformations du plan $\mathbb{C}$

$$(163) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &:= z \rightsquigarrow \bar{z}, & \sigma_2 &:= z \rightsquigarrow 1 - z \\ \sigma_3 &:= z \rightsquigarrow \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

Alors la «trace» de l'ensemble $Sem(0, 1, z)$ dans la carte de l'espace de triangles (161) est l'ensemble de triplets

$$(164) \quad \{0, 1, \sigma(z)\},$$

où σ appartient au groupe de transformations du plan engendré par σ_1 , σ_2 et σ_3 . En effet, l'ensemble des triangles $\Delta(z')$ semblables au triangle $\Delta(z)$ est formé par :

- Les triangles obtenus à partir de $\Delta(z)$ en faisant une réflexion du plan par rapport aux droites passant par les paires de points $\{0, 1\}$ et $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + i\}$. Ce sont les triangles $\Delta(\sigma(z))$ où σ est un mot en σ_1 et σ_2 ;
- Les triangles qu'on obtient en changeant le choix du côté normalisé dans (162), cela correspond, disons, aux transformations σ_3 et $\sigma_3 \circ \sigma_2$. Ce sont les triangles $\Delta(\sigma_3(z))$ et, disons, $\Delta(\sigma_3 \circ \sigma_2(z))$

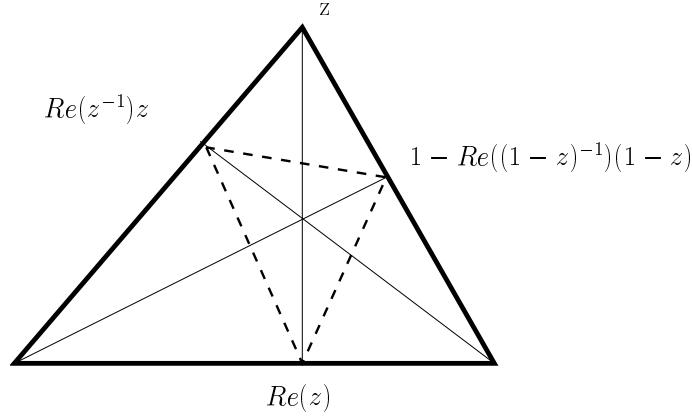
Remarque. En termes de polynômes, notre choix de carte (161) pour l'espace de triangles correspond aux choix de la transversale $w_1 = z$, $w_2 = -(z + 1)$, $w_3 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, dans la carte affine de l'espace de polynômes de degré trois (146). D'après la proposition (11), l'intersection d'une feuille de $\mathcal{F}$ avec cette transversale est donné par les racines d'un polynôme de degré six

$$(165) \quad (18z(z + 1) - 4(z + 1)^3)^2 = k(972z + 124(z + 1)^2)^3$$

où $k \in \mathbb{C}$. Nous concluons que, pour un triangle $\Delta(z)$ «générique», la «trace» de $Sem(0, 1, z)$ dans la carte de l'espace de triangles (161) est formé par douze points.

Un calcul montre que le triangle orthique de $\Delta(z)$ a comme sommets

$$(166) \quad \{1 - Re((1 - z)^{-1})(1 - z), Re(z^{-1})z, Re(z)\},$$



que l'on normalise naturellement en

$$(167) \quad \left\{0, 1, \frac{Re(z) - 1 + Re((1-z)^{-1})(1-z)}{Re(z^{-1})z - 1 + Re((1-z)^{-1})(1-z)}\right\}.$$

DÉFINITION 34. Nous appelons transformation orthique la transformation analytique réelle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie par la formule

$$(168) \quad T := z \rightsquigarrow \frac{Re(z) - 1 + Re((1-z)^{-1})(1-z)}{Re(z^{-1})z - 1 + Re((1-z)^{-1})(1-z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Bien évidemment la transformation orthique n'est pas bien définie en les points $\{0, 1, \infty\}$. On remarque qu'en coordonnées réelles $z = x + iy$

$$(169) \quad T(x, y) = \frac{(x-1)}{x(x-1) + y^2} (x^2 - y^2, -2xy(x-1))$$

PROPOSITION 12. La transformation orthique (168) commute avec tout élément du groupe engendré par les applications σ_1 , σ_2 et σ_3 (163). En particulier, elle laisse invariante la «trace» de $Sem(\hat{z})$ dans la carte $\{0, 1, z\}$. L'ensemble des points fixes de la transformation orthique est

$$(170) \quad \{\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\} \cup \left\{\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\right\},$$

c'est-à-dire l'ensemble formé par les triangles plats et le triangle équilatéral. Si $DT(x, y)$ désigne la dérivée de T au point (x, y) alors

$$(171) \quad D\sigma(x, y=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

et

$$(172) \quad D\sigma(x = \frac{1}{2}, y = \sqrt{\frac{3}{4}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant la formule (169), on prouve directement que la transformation T commute avec chaque σ_j pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. L'invariance de la trace de $Sem(\hat{z})$ découle du fait que les triangles orthiques de deux triangles semblables sont semblables.

Évidemment, $T(x, y = 0) = (x, 0)$. Dorénavant, nous notons

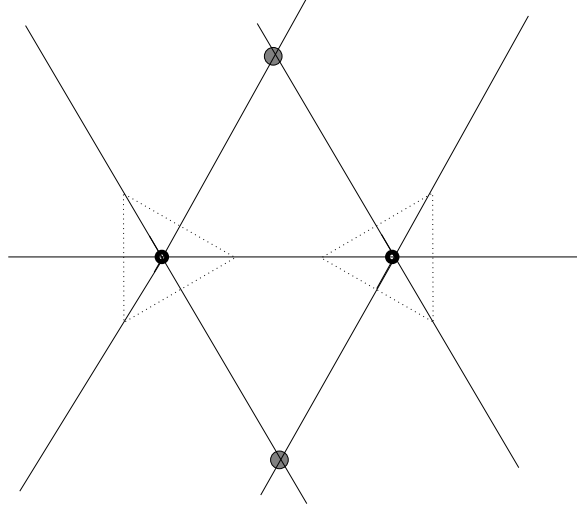
$$(173) \quad d_{p,t}$$

la droite réelle dans le plan $\mathbb{C}$ de pente $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ passant par le point p . Par exemple, $d_{0,t}$ est donnée par l'équation $y = tx$. Tout point dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est déterminé par l'intersection d'une unique paire de droites $\{d_{0,t}, d_{1,s}\}$ et, dans les coordonnées $(t, s) \in \mathbb{R} \setminus \infty \times \mathbb{R} \setminus \infty$, la transformation orthique est donnée par la formule

$$(174) \quad T(t, s) = (T_1(t), T_1(s)) := \left(\frac{-2t}{1-t^2}, \frac{-2s}{1-s^2} \right).$$

Trivialement $T(s, t) = (s, t)$ si, et seulement si, $s, t \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\}$. Les intersections des droites $\{d_{0,\sqrt{3}}, d_{0,-\sqrt{3}}, d'_{1,\sqrt{3}}, d'_{1,-\sqrt{3}}\}$ en dehors des points $\{0, 1, \infty\}$ sont justement les points $\{\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\}$.

□



Le triangle équilatéral est un point fixe de l'application orthique.

Suivant la formule (169), nous voyons que la transformation T envoie toute droite $d_{0,t}$, $t \neq \infty$ sur la droite passant par l'origine et de pente $\frac{-2t}{1-t^2}$ et qu'elle écrase la droite $d_{0,\infty}$ sur le point 1. Cet écrasement correspond aux faits que les points $z \in d_{0,\infty}$ définissent des triangles $\Delta(z)$ rectangles et que le triangle orthique d'un

triangle rectangle est un triangle singulier à deux sommets. La commutation avec les applications σ_1, σ_2 et σ_3 entraîne que T écrase également la droite $d_{1,\infty}$ sur l'origine et le cercle de rayon et centre $\frac{1}{2}$ sur le point à l'infini.

PROPOSITION 13. *Dans les coordonnées (t, s) , la transformation orthique est semi-conjuguée à la multiplication par -2 sur le cercle unité.*

DÉMONSTRATION. Vu que $\tan(2\theta) = \frac{2\theta}{1-\tan^2(\theta)}$ le diagramme

$$(175) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \ni \theta & \longrightarrow & -2\theta \\ e^{i\theta} \downarrow & & \downarrow e^{i\theta} \\ \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni u & \longrightarrow & u^{-2} \\ -i\frac{u^2-1}{u^2+1} \downarrow & & \downarrow -i\frac{u^2-1}{u^2+1} \\ \mathbb{R} \ni t & \xrightarrow{T} & \frac{-2t}{1-t^2} \end{array}$$

commute. Nous parlons d'une «semi-conjugaison» vu que $u \rightsquigarrow -i\frac{u^2-1}{u^2+1}$ définit un revêtement ramifié d'ordre 2 de la droite réelle.

□

La proposition précédente nous permet de calculer les points périodiques de T^k , la k -ième itérée de la transformation orthique, sans calculer les racines des polynômes dans $\mathbb{R}[x, y]$ associés à l'équation $T^k(x, y) = (x, y)$.

COROLLAIRE 21. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors les points $z \in \mathbb{C}$ k -périodiques de la transformation orthique sont les points dans les intersections*

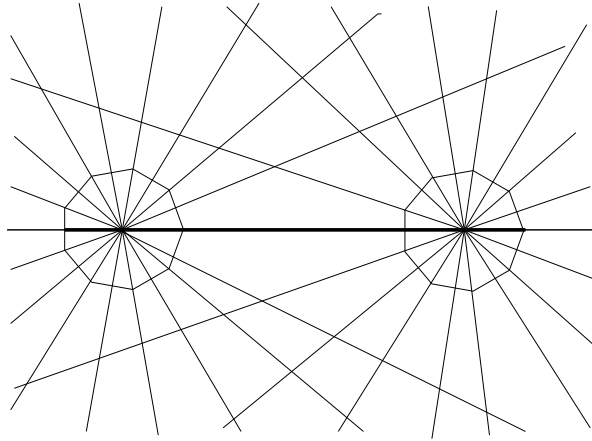
$$(176) \quad \bigcup \{d_{0,t} \cap d_{1,s}\} \setminus \{0, 1\}$$

où :

$$(177) \quad t, s \in \left\{ -i\frac{u_j^2-1}{u_j^2+1} \mid u_j \text{ solution de } u^{(-2)^k-1} = 1 \right\}.$$

Par exemple, lorsque $k = 1$, le point u_j est une des trois racines de l'unité. Cela entraîne $t, s \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\}$, comme on l'avait remarqué précédemment. D'après le corollaire 21 et (177) nous avons trivialement

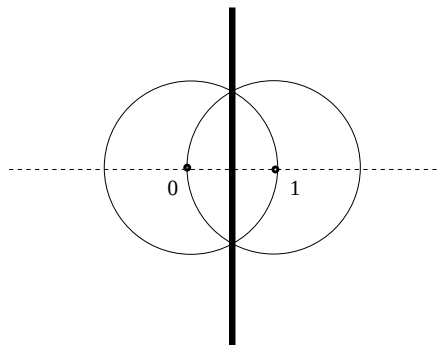
COROLLAIRE 22. *En dehors des triangles rationnels, (angles multiples rationnels de π), la transformation orthique n'a pas de points k -périodiques.*



Calcul géométrique des points 3-périodiques
de la transformation orthique.

1.3. L'application orthique : orbites périodiques dans les triangles isocèles.

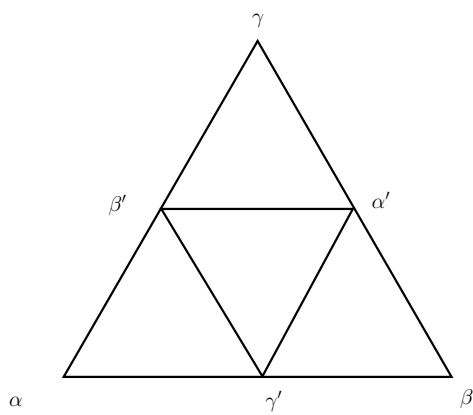
Dans la carte de l'espace des triangles (161) l'ensemble des points $\{0, 1, z\}$ représentant un triangle isocèle est donné par l'union de la droite réelle $d_{\frac{1}{2}, \infty}$ et des cercles de rayon 1 et de centres $\{0, 1\}$. Bien évidemment, l'ensemble des triangles isocèles est invariant par la transformation orthique T et les applications $\{\sigma_j\}_{j=1}^3$ (163).



Les triangles isocèles.

LEMME 5. Soit $1 < t < \infty$. Alors la paire de droites $\{d_{\frac{1}{2}, T_1^2(t)}, d_{\frac{1}{2}, -T_1^2(t)}\}$ passant par le point $1/2 \in \mathbb{C}$ détermine une orbite périodique de longueur combinatoire 5.

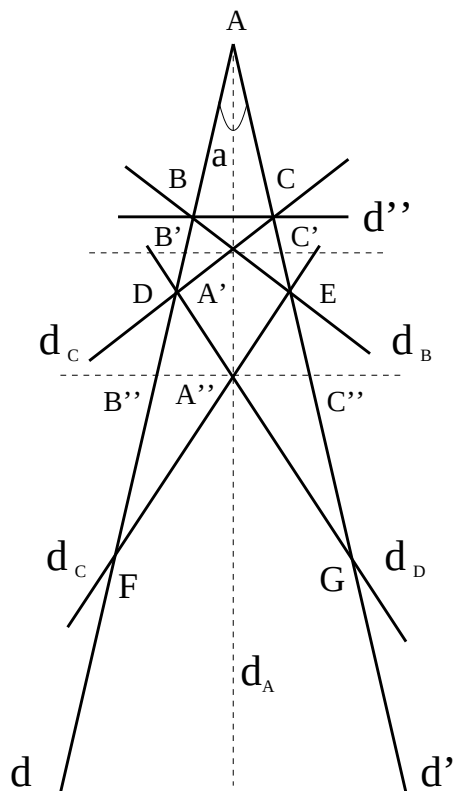
DÉMONSTRATION. Nous présentons une démonstration géométrique élémentaire. Considérons le triangle aigu d'angles α, β, γ dans la figure suivante :



et soient α', β', γ' les angles de son triangle orthique. Un calcul élémentaire montre :

$$(178) \quad \alpha' = \beta + \gamma - \alpha, \quad \beta' = \alpha + \gamma - \beta, \quad \gamma' = \alpha + \beta - \gamma$$

Considérons maintenant la figure :



Soient d, d' deux droites distinctes non perpendiculaires dans le plan passant par un point A . Soit $0 < a < \pi/2$ l'angle aigu défini par ces deux droites. Soit d_A la bissectrice de l'angle a et considérons d'' une droite perpendiculaire à d_A qui ne rencontre pas le point A . L'intersection de cette droite avec d et d' détermine deux points que nous notons B et C respectivement. Par construction $\angle CBA = \angle BCA$.

La trajectoire du billard dans le secteur angulaire de l'angle a défini par le segment BC détermine deux droites d_B et d_C passant par B et C . Le point $A' := d_B \cap d_C$ est sur la médiatrice d_A ; soient B' et C' les points d'intersection de la droite parallèle à d'' passant par le point A' avec les droites d et d' respectivement. Par construction $\triangle BCA'$ est le triangle orthique du triangle $\triangle B'C'A$.

Supposons que $\triangle B'C'A$ n'est pas semblable à son triangle orthique $\triangle BCA'$. Alors, en dehors des points B et C , les droites d_B et d_C intersectent d' et d en deux points E et D respectivement. La trajectoire du billard dans le secteur angulaire de l'angle a passant par les droites d_B et d_C détermine aux points de réflexion D et E deux droites d_D et d_C . Ces droites s'intersectent dans un point A'' appartenant à la bissectrice d_A .

Soient B'' et C'' les points d'intersection de la droite parallèle à d'' passant par A'' avec les droites d et d' respectivement. Un calcul direct montre que $\angle B'A'C' = \pi - 2a$ et que $\angle DA''E = |4a - \pi| < \pi$. Cela entraîne que Le triangle $\triangle A''DE$ est semblable au triangle orthique du triangle $\triangle BCA'$. Par construction, la ligne polygonale de sommets $CBEA''DC$ est une trajectoire périodique du billard sur le triangle $\triangle B''C''A$ de longueur combinatoire 5.

□

Remarque. Dans la figure précédente, la trajectoire du billard définie par la droite BC est perpendiculaire au segment AA' du triangle rectangle $B'A'A$. D'après

THÉORÈME 20. [46],[10] *Dans un triangle rectangle presque toute trajectoire (dans le sens de la mesure de Lebesgue) arrivant perpendiculairement à un des plus petits côtés est périodique.*

la trajectoire périodique de longueur combinatoire 5 engendrée par la transformation orthique n'est pas, dans un sens strict, nouvelle.

Bibliographie

- [1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [2] V. I. Arnol'd. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, volume 250 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988. Translated from the Russian by Joseph Szűcs [József M. Szűcs].
- [3] M. Boshernitzan, G. Galperin, T. Krüger, and S. Troubetzkoy. Periodic billiard orbits are dense in rational polygons. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(9) :3523–3535, 1998.
- [4] Kariane Calta. Veech surfaces and complete periodicity in genus two. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(4) :871–908 (electronic), 2004.
- [5] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman.
- [6] D. Cerveau. Communication personnelle.
- [7] D. Cerveau and A. Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$. *Ann. of Math. (2)*, 143(3) :577–612, 1996.
- [8] D. Cerveau and J.-F. Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982. With an English summary.
- [9] Dominique Cerveau. Densité des feuilles de certaines équations de Pfaff à 2 variables. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 33(1) :185–194, 1983.
- [10] Barry Cipra, Robert M. Hanson, and Amy Kolan. Periodic trajectories in right-triangle billiards. *Phys. Rev. E* (3), 52(2) :2066–2071, 1995.
- [11] Tobin A. Driscoll and Lloyd N. Trefethen. *Schwarz-Christoffel mapping*, volume 8 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [12] Alex Eskin, Howard Masur, and Martin Schmoll. Billiards in rectangles with barriers. *Duke Math. J.*, 118(3) :427–463, 2003.
- [13] E. Ghys and J.-C. Rebelo. Singularités des flots holomorphes. II. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(4) :1117–1174, 1997.
- [14] Étienne Ghys. Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math. (2)*, 141(2) :387–422, 1995.
- [15] Étienne Ghys. Les systèmes dynamiques holomorphes. In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages 1–10. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [16] D. M. Grobman. Topological and asymptotic equivalence of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 140 :746–747, 1961.

- [17] E. Gutkin and A. Katok. Weakly mixing billiards. In *Holomorphic dynamics (Mexico, 1986)*, volume 1345 of *Lecture Notes in Math.*, pages 163–176. Springer, Berlin, 1988.
- [18] Eugene Gutkin, Pascal Hubert, and Thomas A. Schmidt. Affine diffeomorphisms of translation surfaces : periodic points, Fuchsian groups, and arithmeticity. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(6) :847–866 (2004), 2003.
- [19] Eugene Gutkin and Chris Judge. Affine mappings of translation surfaces : geometry and arithmetic. *Duke Math. J.*, 103(2) :191–213, 2000.
- [20] Eugene Gutkin and Serge Troubetzkoy. Directional flows and strong recurrence for polygonal billiards. In *International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995)*, volume 362 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 21–45. Longman, Harlow, 1996.
- [21] Philip Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 :610–620, 1960.
- [22] Fred Holt. Periodic reflecting paths in right triangles. *Geom. Dedicata*, 46(1) :73–90, 1993.
- [23] Pascal Hubert and Thomas A. Schmidt. Infinitely generated Veech groups. *Duke Math. J.*, 123(1) :49–69, 2004.
- [24] B. Weiss J. Smillie. Isolation theorems for quadratic differentials and lattice surfaces, in preparation. <http://www.math.bgu.ac.il/barakw/papers/>.
- [25] A. B. Katok. Billiard table as a playground for a mathematician. In *Surveys in modern mathematics*, volume 321 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 216–242. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [26] Richard Kenyon and John Smillie. Billiards on rational-angled triangles. *Comment. Math. Helv.*, 75(1) :65–108, 2000.
- [27] Steven Kerckhoff, Howard Masur, and John Smillie. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *Ann. of Math. (2)*, 124(2) :293–311, 1986.
- [28] Ivan Kupka. The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 :1431–1432, 1964.
- [29] Samuel Lelièvre. Surfaces de veech arithmétiques en genre deux : disques de teichmüller, groupes de veech et constantes de siegel-veech. *Thèse, Université de Rennes 1*, 2004.
- [30] Samuel Lelièvre. Veech surfaces associated with rational billiards. <http://fr.arxiv.org/abs/math.GT/0205249>.
- [31] Howard Masur. Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards. *Duke Math. J.*, 53(2) :307–314, 1986.
- [32] Howard Masur. Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential. *Duke Math. J.*, 66(3) :387–442, 1992.
- [33] Howard Masur and Serge Tabachnikov. Rational billiards and flat structures. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 1015–1089. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [34] Curtis T. McMullen. Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(4) :857–885 (electronic), 2003.
- [35] Curtis T. McMullen. Teichmüller curves in genus two : discriminant and spin. *Math. Ann.*, 333(1) :87–130, 2005.
- [36] Curtis T. McMullen. Teichmüller curves in genus two : the decagon and beyond. *J. Reine Angew. Math.*, 582 :173–199, 2005.

- [37] E. Paul. Étude topologique des formes logarithmiques fermées. *Invent. Math.*, 95(2) :395–420, 1989.
- [38] Yakov Pesin, Michael Brin, and Boris Hasselblatt. Anatole Katok. In *Modern dynamical systems and applications*, pages xi–xiv. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [39] Jan-Christoph Puchta. On triangular billiards. *Comment. Math. Helv.*, 76(3) :501–505, 2001.
- [40] Georges Reeb. Variétés feuilletées, feuilles voisines. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 224 :1613–1614, 1947.
- [41] Ian Richards. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 106 :259–269, 1963.
- [42] Richard Evan Schwartz. Obtuse triangular billiards i : Near the (2,3,6) triangle journal of experimental mathematics (2005/6) to appear preprint (2005). [http : //www.math.brown.edu/ res/papers.html](http://www.math.brown.edu/res/papers.html).
- [43] Richard Evan Schwartz. Obtuse triangular billiards ii : 100 degrees worth of periodic trajectories preprint (2005). [http : //www.math.brown.edu/ res/papers.html](http://www.math.brown.edu/res/papers.html).
- [44] Richard Evan Schwartz. Obtuse triangular billiards ii : Near the degenerate (2,2,infinity) triangle preprint (2005). [http : //www.math.brown.edu/ res/papers.html](http://www.math.brown.edu/res/papers.html).
- [45] Shlomo Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of euclidean n -space. II. *Amer. J. Math.*, 80 :623–631, 1958.
- [46] Serge Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [47] William P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2) :417–431, 1988.
- [48] S. Troubetzkoy. Periodic billiard orbits in right triangles 2. ,preprint, [http : //hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00005014](http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00005014).
- [49] Serge Troubetzkoy. Periodic billiard orbits in right triangles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(1) :29–46, 2005.
- [50] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3) :553–583, 1989.
- [51] W. A. Veech. Erratum : “Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards”. *Invent. Math.*, 103(2) :447, 1991.
- [52] Ya. B. Vorobets. Ergodicity of billiards in polygons. *Mat. Sb.*, 188(3) :65–112, 1997.
- [53] Ya. B. Vorobets, G. A. Gal’perin, and A. M. Stëpin. Periodic billiard trajectories in polygons : generation mechanisms. *Uspekhi Mat. Nauk*, 47(3(285)) :9–74, 207, 1992.
- [54] Clayton C. Ward. Calculation of Fuchsian groups associated to billiards in a rational triangle. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(4) :1019–1042, 1998.
- [55] Wikipedia. Riemann - hurwitz formula. [http : //en.wikipedia.org/wiki/Riemann - Hurwitz_formula](http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann-Hurwitz_formula).
- [56] H. Masur Y. Cheung, P. Hubert. Topological dichotomy and strict ergodicity for translation surfaces. [http : //www.math.uic.edu/ masur/papers.html](http://www.math.uic.edu/masur/papers.html).
- [57] Jean-Christophe Yoccoz. Echanges d’intervalles, cours collège de france janvier-mars 2005. [http : //www.college - de - france.fr/site/equdif/p999000715275.htm](http://www.college-de-france.fr/site/equdif/p999000715275.htm).
- [58] A. N. Zemljakov and A. B. Katok. Topological transitivity of billiards in polygons. *Mat. Zametki*, 18(2) :291–300, 1975.